Matematikçi Gibi Düşünmek

Lisans Matematiği İçin Bir Kılavuz

KEVIN HOUSTON

Çevirenler

MEHMET TERZİLER · TAHSİN ÖNER

PALME YAYINCILIK

Matematikçi Gibi Düşünmek

Matematik lisans eğitiminize avantajlı bir başlangıç mı arıyorsunuz? Belki eğitiminize çoktan başladınız ve daha önce sevmediğiniz alanın sizi sersemlettiğini duyumsadınız? Telaşa kapılmayın. Bu kılavuz gerçek matematiksel düşünmeye geçişinizi kolaylaştıracaktır.

Bu kitabı baştan sona çalışarak; tanımların, teoremlerin, kanıtların, problem çözmenin anlamını açmanıza yardım eden bir teknikler deposunu geliştirecek ve matematiği etkili biçimde yazacaksınız. Tüm önemli kanıt yöntemleri – dolaysız yöntem, durumlar, tümevarım, çelişki ve karşıt ters – betimlenmiştir. Baştan sona somut örnekler kullanılmıştır ve bölenler, Euclid Algoritması, modüler aritmetik, denklik bağıntıları ve fonksiyonların bire-birliği, örtenliği gibi birçok dersin ortak konuları hakkında çok bol beceriye sahip olacaksınız.

Kitabın materyali yıllardan beri gerçek öğrenciler tarafından test edilmiştir, o halde gerekli olan her şey içerilmiştir. Gelişmenizi sınamada size yardımcı olan 300 den fazla alıştırmayla, kısa zamanda bir matematikçi gibi nasıl düşünüldüğünü öğreneceksiniz.

Matematik lisans eğitimine başlamak için zorunlu olan bu kitap; mühendislik ya da fizik çalışıyorsanız ve lisans matematiği konularına girme ihtiyacı duyuyorsanız ya da bilgisayar bilimleri, felsefe ya da dilbilimi gibi lojik gerektiren bir konu alıyorsanız ayrıca yardımcı olabilir.

Matematikçi Gibi Düşünmek

Lisans Matematiği İçin Bir Kılavuz

KEVIN HOUSTON
Leeds Üniversitesi

Prof. Dr. MEHMET TERZİLER
İzmir Yaşar Üniversitesi
Matematik Bölümü

Doç. Dr. TAHSİN ÖNER
Ege Üniversitesi
Matematik Bölümü

PALME YAYINCILIK
Ankara, 2015

PALME YAYINLARI: 529

Matematikçi Gibi Düşünmek

Çevirenler: Prof. Dr. Mehmet TERZİLER Doç. Dr. Tahsin ÖNER

Palme Yayıncılık © 2015

Yayın Koordinatörü: H. İbrahim Somyürek

Yayına Hazırlama: PALME Dizgi, Tasarım ve Grafik Birimi / Nurcan Karabulut

Yayıncı Sertifika No: 14142

Baskı: Ankamat Matbaacılık

Basımevi Sertifika No: 13256

ISBN: 78-605-5829-58-2

Kitabın Özgün Adı	: How to Think Like a Mathematician
Yazarı	: Kevin Houston
Yayıncı Firma	: Cambridge University Press The Edinburgh Building, Cambridge CB2 8RU, UK
	© K. Houston 2009
	This publication is in copyright. Subject to statutory exception and to the provisions of relevant collective licensing agreements, no reproduction of any part may take place without the written permission of Cambridge University Press.
Orijinal ISBN	: 978-0-521-71978-0 paperback

Bu kitabın Türkiye'deki her türlü yayın hakkı Palme Yayıncılık Ltd. Şti.'ne aittir, tüm hakları saklıdır. Kitabın tamamı ya da bir kısmı 5846 sayılı yasanın hükümlerine göre, kitabı yayınlayan firmanın önceden izni olmadan elektronik, mekanik, fotokopi ya da herhangi bir kayıt sistemiyle çoğaltılamaz, yayınlanamaz, depolanamaz.

PALME

YAYIN, DAĞITIM, PAZARLAMA, İÇ VE DIŞ TİCARET LTD. ŞTİ.

Merkez: A. Adnan Saygun Caddesi, No.: 10/A, Sıhhiye/ANKARA

Tel.: (312) 433 37 57 Faks: (312) 433 52 72

www.palmeyayinevi.com e-mail: bilgi@palmeyayinevi.com

Ankara Şubesi :Olgunlar Sokak, No.: 4/5, Bakanlıklar/ANKARA **Tel.:** (312) 417 95 28 **Faks:** (312) 419 69 64

İzmir Şubesi :Kazım Dirlik Mahallesi, Ankara Caddesi, No.: 259/C, Bornova/İZMİR **Tel.:** (232) 343 10 77 **Faks:** (232) 343 10 78

Anne ve Babama – Her şey için teşekkürler

İçindekiler

	Önsöz		*Sayfa* iv
I	**Matematikçiler için çalışma becerileri**		1
	1	Kümeler ve fonksiyonlar	3
	2	Matematiği okuma	14
	3	Matematiği yazma I	21
	4	Matematiği yazma II	35
	5	Problemler nasıl çözülür	41
II	**Mantıksal nasıl düşünülür**		51
	6	Açıklamada bulunmak	53
	7	Gerektirmeler	63
	8	Gerektirmelerle ilgili ince noktalar	69
	9	Ters ve denklikler	75
	10	Niceleyiciler – Her ve Bazı	80
	11	Niceleyicilerin karmaşıklığı ve değillemesi	84
	12	Örnekler ve karşıt örnekler	90
	13	Lojiğin özeti	96
III	**Tanımlar, teoremler ve kanıtlar**		97
	14	Tanımlar, teoremler ve kanıtlar	99
	15	Bir tanım nasıl okunur	103
	16	Bir teorem nasıl okunur	109
	17	Kanıt	116
	18	Bir kanıt nasıl okunur	119
	19	Pisagor Teoremi'nin bir çalışması	126
IV	**Kanıt teknikleri**		137
	20	Kanıt teknikleri I: Dolaysız yöntem	139
	21	Bazı yaygın hatalar	149
	22	Kanıt teknikleri II: Durumlu kanıt	155
	23	Kanıt teknikleri III: Çelişki	161
	24	Kanıt teknikleri IV: Tümevarım	166

	25	Daha gelişmiş tümevarım teknikleri	175
	26	Kanıt teknikleri V: Karşıt ters yöntemi	180
V	**Tüm iyi matematikçilerin gereksinim duyduğu matematik**		185
	27	Bölenler	187
	28	Euclid Algoritması	196
	29	Modüler aritmetik	208
	30	Bire-bir, örten, birebir örten ve bir parça sonsuzluk	218
	31	Denklik bağıntıları	230
VI	**Kapanış uyarıları**		241
	32	Tümünü bir araya getirmek	243
	33	Genelleştirme ve özelleştirme	248
	34	Doğru anlamak	252
	35	En büyük sır	255
	Ekler		257
	A	Yunan alfabesi	257
	B	Yaygın kullanılan semboller ve notasyonlar	258
	C	Nasıl kanıtlamalı ki …	260
	İndeks		263

Önsöz

Soru: Kaç ay 28 gün çeker?
Matematikçinin yanıtı: Tümü.

Matematiğin gücü

Matematik sahip olduğumuz en güçlü araçtır. O yaşamımızı denetler. İnsanı aya göndermek için ondan yararlanabiliriz. Bir şeker hastasının ne kadar insülin alması gerektiğini hesaplamak için onu kullanırız.

Ama buna karşın... Matematiği kullanan ya da sevenler tuhaf ya da akıllı fakat dağınık[1] kişiler olarak düşünülür. Ve hala, matematik birçokları tarafından işe yaramaz olarak değerlendirilir – eskiden beri okullu çocuklar 'Bir gün bunu kullanabilecek miyim' diye sızlanmışlardır.

Bir kimse niçin matematikçi olmak ister? Daha önce de değinildiği gibi, matematik çok güçlü bir araçtır. Matematik kullanan işlere çoğu kez iyi para ödenir ve insanlar bundan etkilenme eğilimindedir. Matematikçi olmayanlar, bir matematikçi ile karşılaştıklarında, çok sayıda tepki gösterirler, en yaygın olanı 'Okulda matematikten nefret ederdim. Hiç iyi değildim' ve bir başka genel tepki 'Gerçekten zeki olmalısınız' dır.

Kavram

Bu kitabın amacı bir matematikçinin gerçekten nasıl düşündüğünün sırlarını açığa çıkartmaktır. Matematik meslek yaşantım boyunca 'Keşke biri bana daha önce söyleseydi' diye düşündüğüm durumlar oldu. Bu, bu öğütlerin bir koleksiyonudur. Sanırım, o böyle bir koleksiyondan da öte bir şeydir. Salt bir teknikler koleksiyonu değil (onları da sunacağım) bir duruş sergilemek istiyorum – bir düşünme yolu ve çalışan matematik yapmak.

Eğer acemi iseniz, o zaman yüksek-düzeyde matematik çalışmak sizin için yeni olan çalışma becerilerini gerektirebilir. Başarı için gerekli olan genel çalışma becerilerini tartışmayacağım – zamanın kullanımı, not tutma, sınav tekniği v.b., bu bilgileri başka yerde aramalısınız.

Sizin bir matematikçi gibi düşünebilmenizi istiyorum ve bu yüzden bir matematikçi gibi özgün düşünme becerilerinin nasıl kazanıldığına yardımcı olan ve size pratik

[1] Akıllı ama dağınık için en beğendiğiniz terimi ekleyiniz.

öğütlerle dolu bir kitap sunmayı amaçlıyorum. Bazı konular ustalık ister, diğerleri size söylendiğinde apaçık gelebilir. Örneğin, bir denklemin geçerli olduğunu göstermeye çalışırken, en karmaşık yanı ele almalısınız ve diğer yanı elde edinceye dek indirgemelisiniz (sayfa 143). Bir öğüt yüksek düzeyli matematiksel düşünme içerebilir ve yeni başlayan biri için aşırı karmaşık olacaktır – o halde öğüdü hemen kavrayamazsanız, üzülmeyin.

Bu kitap nasıl kullanılır

Farklı bir düşünceye ya da düşünceler bütününe değinilirken her bir kısmın farklı bir tarzı vardır. Kitap birçok bilgi içermektedir ve, çoğu matematik kitabı gibi, bunu da bir oturuşta roman okur gibi okuyamazsınız.

Bazı dostça öğütler

Ve şimdi daha önce işitmiş olabileceğiniz, ama yinelemeye değer, bazı dostça öğütler vereceğim.

- *Siz bilirsiniz* – Davranışlarınız muhtemelen çalışmalarınızdaki başarının en büyük belirleyicisi olacaktır. Eski atasözünün üzerinde düşünelim: Öğretmen kapıyı açabilir ama içeri kendiniz girmelisiniz.
- *Faal olun* – Kitabı okuyun. Alıştırmalar setini çözün.
- *Kendi başınıza düşünün* – Daima iyi bir öğüt.
- *Her şeyi sorgulayın* – Size sunulan tüm sonuçlardan kuşkulanın. İnandığınızdan emin oluncaya dek onları kabul etmeyin.
- *Gözleyin* – Sherlock Holmes'un gücü çıkarımlardan değil, gözlemlerinden kaynaklanmıştır.
- *Yanılmaya hazırlıklı olun* – Matematik yaparken size sıklıkla hatalı olduğunuz söylenecektir. Umutsuzluğa kapılmayın; matematik zordur, ama ödüller büyüktür. Bunu kendinizi teşvik etmek için kullanın.
- *Ezberlemeyin – anlamaya çalışın* – Doğru anladığınızı anımsamak kolaydır.
- *Önsezinizi geliştirin* – Ama ona tam olarak güvenmeyin.
- *İşbirliğinde bulunun* – Matematiği anlamak için, mümkünse, başkalarıyla çalışın. Bu bir yarışma değildir. Onların yaptıklarını aynen kopyalamayın.
- *İyi düşünün* – Geriye dönüp ne anlamış olduğunuzu görün. Daha iyisini nasıl yapabileceğinizi kendinize sorun.

Öğretmenlere ve okurlara – değerli zamanınızın bir anı

Geçenlerde meslektaşlarımdan biri; bir öğrencinin A gerektirir B biçimli bir önermeyi kanıtlaması istendiğinde, kanıt yöntemlerinin genelde tümüyle yetersiz olduğundan dert yanıyordu. Şakayla karışık dedi ki, öğrenci A yı varsayıyor, onunla biraz çalışıyor, B nin doğru olduğunu kullanıyor ve böylece A nın doğruluğunu sonuçlandırıyor. Çoğu öğrenci nasıl oluyor da kanıtların belkemiğini oluşturan mantıksal akıl yürütmelerin inşasında bu kadar zorlanıyor?

Keşke buna bir yanıt bulabilseydim. Bu kitap bir yanıt için çaba harcamaktadır. O bir bildirge değildir. Öğretim yılları boyunca düşünceler, öğrencilerimin matematiksel düşünmelerini geliştirmek için denenmiş ve sınanmıştır. Onları kavrama yolunda iyi teknikler kazandırmış olduğumu umuyorum.

Bu kitaptan yararlanmak istiyorsanız, öğrencilerin tek bir derste bu kitaptaki her bir öğüte kanmadıklarını düşünsem bile, en beğendiğiniz ya da öğrencilerinizin zorlandığını bildiğiniz parçaları ya da bazı teknikleri seçmenizi öneriyorum. Öğretmenliğin bir amacı öğrencilere esin kaynağı olmaktır. Matematik heyecan verici olmalı. Öğrenciler bu heyecanı duyarlarsa öğrenmek için harekete geçerler ve yukarıda anılan atasözündeki gibi kendiliğinden içeri gireceklerdir. Keşfetmek için onları özgür bırakmayı, dağlara tırmanmak için onlara aletler sağlamayı ve başka matematiksel alanlar keşfedilebilmesi için pusulalarını vermeyi amaçlıyorum. Bildiğiniz üzere, bunun yerine getirilmesi zordur ve genelde sorun zaman darlığı, kaynaklar, üniversite ya da meslektaş desteğinin eksikliği değildir. Problem, hataları olmamakla birlikte, öğrencilerin kendileridir. Ne yazık ki onlar sorgulama nitelikli eğitilmemektedir; aldıkları eğitim yanıt vermeye dayalıdır. Bizden soru sormamızı beklerler ve onlarda yanıt verirler, çünkü onlar bu şekilde eğitilirler. Bu kitap sormak gereği duydukları soruları onlara vermeyi ve böylece artık bana bağlı kalmamalarını amaçlamaktadır.

Teşekkür etmek istiyorum...

Bu kitabın oluşumu epey uzun sürdü, bu nedenle beni ya da içerik seçimini etkileyen teşekkür edilecek çok kişi vardır. Aynı isimli kitapçıkta yer alan konuların bazıları Leeds Üniversitesinin tüm birinci sınıf matematik öğrencilerine verilmiş; çoğu öğrenci ve çalışma arkadaşlarım yıllardır düşüncelerini belirtmişlerdir. Kitapçık web de yer almış ve bütün dünyadan insanlar talep edilmeyen yorumlar göndermişlerdir. Ahmed Ali, John Bibby, Garth Dales, Tobias Gläßer, Chris Robson, Sergey Klokov, Katy Miles, Mike Robinson ve Rachael Smith'e; (isimlerini unuttuğum) fırtınalı kuram ve denemelerime ilk katlanan Leeds Üniversitesi ve Warwick Üniversitesi öğrencilerine teşekkürlerimi sunuyorum. İlk taslağı okudukları için David Franco, Margit Messmer, Alan Slomson ve Maria Veretennikova'ya çok teşekkür ederim. Çok verimli tartışmalarımın olduğu Margit ve Alan'a özel teşekkürler. Bu kitabın yayınlanmasında adı bilinmeyen bir hakeme ve görev alan Cambridge Üniversitesi Yayınevi çalışanlarına ve özellikle Peter Thompson'a teşekkürler.

Son olarak, bu kitabı yazarken bana destek olan ve yaşamıma neşe katan harika eşim Carol'a teşekkür etmek istiyorum.

Çevirenlerin Önsözü

Çok iddialı ve türünde tek olduğunu düşündüğümüz böyle bir kitabı dilimize çevirmiş olmaktan büyük bir mutluluk duyduğumuzu (ve aynı zamanda yazarın bazı noktalarda gerçekte neyi amaçladığını sezmek ve kavramakta epey zorlandığımızı) söylemek isteriz. Yazar, her ne kadar 'felsefe yapmaktan' kaçındığını sık sık dile getirse de, matematik ile felsefenin iç içe olduğu olgusu bu söyleminin bile nükte içerdiğini gösterir. O nedenle kitabı eleştirel bir bakış açısıyla incelemek daha da yararlı kılacaktır.

Yazar her an verdiği öğütler, yol göstermeler ve uyarılarla öğrencilerin matematikçi gibi düşünebilmeleri için büyük çaba harcamaktadır ve buna gerçekten saygı duyulmalıdır. Ancak 'önerilen komutları yerine getirmekle matematik yapılabilir mi?' sorusu, başka bir tartışmayı beraberinde getirir. Başka bir deyişle; matematik çok *ince* bir sanata benzediğinden, 'yeteneği' olmayanlara verilecek öğütlerin 'yaratıcılık' kazandırması düşünülemez.

Her şeye karşın elinizdeki kitap; başta öğretmenler ve öğrenciler olmak üzere, matematiği meslek edinmiş ya da matematiğe ilgi duyan herkesin okuması gereken muhteşem bir eserdir. Matematik 'çalışmak' ile matematik 'yapmak' farklı şeylerdir: İlki kavramları öğrenmeye — belki de düz ezbere — dayanırken, ikincisi kavramları anlama, sorgulama, örnekleme ve aralarındaki ilişkileri kurmaya yöneliktir. Yazar da bir kavrama örnekler — karşıt, uç, aşikar — bulmanın matematik yapmak için vazgeçilmez adımlardan ilki olduğunu anlatmaktadır. Gerçekten örnek türlerini ortaya atabilmek, bir teoremin doğruluk ya da yanlışlığının somut olarak görülmesi için çok değerli bir meziyettir.

Kitabın bize göre en can alıcı özelliği, çoğumuzun ayırdın da olmadığı ve aslında tam olarak bilmediği — hiçbir kitapta bu denli ayrıntılı bulamayacağımız — şu kavramların en ince noktalarına kadar işlenmiş olmasıdır:

- Tanım nedir, nasıl okunmalıdır.
- Teorem nedir, nasıl okunmalıdır.
- Kanıt nedir, nasıl okunmalıdır.
- Kanıt nasıl oluşturulur ve yazılır.

Örneğin, Pisagor Teoremi gibi, herkesin 'bildiğini' sandığı teoremi yazarın ele alışı gerçekten ilginç ve öğreticidir. Ayrıca, genelleme ve özelleştirme kavramları da gerçek anlamlarıyla üzerine basa basa anlatılmıştır.

Kitabı, hiçbir yorum katmadan, kelimesi kelimesine çevirmek için özen gösterdik. Bu titizlik bazı durumlarda sıkıntılara yol açsa da belirsizlikleri ortadan kaldırmayı başardık. Burada yardımlarını esirgemeyen Prof. Dr. E. Rennan Pekünlü'ye içten teşekkür ederiz.

Bu eserin daha önce PALME Yayınları arasında yer alan 'Kanıt Nasıl Yapılır' adlı kitapla birbirini ideal bir biçimde tamamladıklarını ancak önce elinizdeki kitabın incelenmesi gerektiğini anımsatmak isteriz.

Son olarak kitabın basım ve yayına hazır olmasında gösterdiği titizlik ve işbirliği için PALME Yayınevi'ne teşekkürlerimizi sunar, yapıcı eleştirilere açık olduğumuzu saygıyla bildiririz.

Eylül 2009
Bornova - İzmir

Prof. Dr. Mehmet TERZİLER
İzmir Yaşar Üniversitesi
Matematik Bölümü

Doç. Dr. Tahsin ÖNER
Ege Üniversitesi
Matematik Bölümü

Matematikçiler için çalışma becerileri

1. BÖLÜM

Kümeler ve fonksiyonlar

Çoğu fizikçi katılmasada, her şey bir yerden başlar.
Terry Pratchett, *Hogfather*, 1996

Bir matematikçi gibi düşünmek, üzerinde düşünülecek bir matematik gerektirir. Bu kitapta gerekli önbilgi sayısını, bilginizdeki boşlukları kavramanıza bir engel koymaması için, düşük tutmak istiyorum. Oynayacak bir matematiğe sahip olduğumuza göre, bu bölüm kümeler ve fonksiyonlarla başlıyor. Bunlar en temel matematiksel nesnelerdir, ama amaçlarımız için yeterince soyutlamaya sahiptirler.

Bir küme bir nesneler topluluğudur ve bir fonksiyon bir kümenin elemanlarının bir diğerinin elemanlarıyla birleşimidir. Yüksek-düzeyden matematiğin hemen hemen tümü kümeler ve aralarındaki fonksiyonlar üzerinedir. Örneğin, kalkülüs, gerçel sayılar kümesinden gerçel sayılar kümesine türevlenebilir özellikli fonksiyonların çalışmasıdır. Aslında kümeleri ve fonksiyonları matematiğin yapı taşları olarak görebiliriz.

Bu bölümü okurken ve çalışırken, *nasıl* çalıştığınızı düşünün. Her sözcüğü okuyor musunuz? Hangi alıştırmaları yapıyorsunuz? Gerçekten alıştırma yapıyor musunuz? Bunu bir sonraki matematiği okuma bölümünde daha çok tartışacağız.

Kümeler

Küme matematikte temel nesnedir. Matematikçiler bir küme ele alırlar ve onunla harika şeyler yaparlar.

Tanım 1.1

*Bir **küme** iyi-tanımlı bir nesneler topluluğudur.*[1]
*Kümedeki nesnelere kümenin **elemanları** ya da **öğeleri** denir.*

Alışıla geldiği üzere, özel bir kümeyi küme ayraçları arasına elemanlarının bir listesini yaparak tanımlıyoruz. (Listenin sırasını önemsemiyoruz.)

[1] Kümenin gerçek matematiksel tanımı çok daha karmaşıktır; kümeler kuramı üzerine herhangi bir ders kitabına bakın. Bu tanım sezgiseldir ve bize fazla sorun yaratmayacaktır. Kuşkusuz, bilgiç biri iyi-tanımlının ne anlama geldiğini sorabilirdi.

Eğer x, X kümesinin bir elemanı ise o zaman $x \in X$ yazıyoruz. Bunu 'x, X in bir elemanıdır (ya da öğesidir)' ya da 'x, X dedir[2]' okuyoruz. Eğer x bir elemanı değilse o zaman $x \notin X$ yazıyoruz.

Örnekler 1.2

(i) 1, 2, 3, 4 ve 5 sayılarını içeren küme $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ yazılır. 3 sayısı kümenin bir elemanıdır, yani $3 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dir, ama $6 \notin \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dir. Elemanlarının sırası önemsiz olduğundan kümeyi $\{3, 2, 5, 4, 1\}$ gibi yazabileceğimizi kaydedelim.

(ii) {köpek, kedi, fare} kümesi üç elemanlı bir kümedir: köpek, kedi, fare.

(iii) $\{1, 5, 12, \{\text{köpek, kedi}\}, \{5, 72\}\}$ kümesi 1, 5, 12 sayılarını ve {köpek, kedi}, $\{5, 72\}$ kümelerini içeren kümedir. Kümelerin eleman olarak kümeler içerebildiğini gözden kaçırmayalım. Şimdiden bunun ayırdın da olmak, daha sonraki karışıklıkları önleyebilir.

$\{5\}$ ve 5 in aynı olmadığını görmek yaşamsal önem taşır. Yani, bir küme olmakla bir kümenin elemanı olmak arasındaki farkı anlamalıyız. Kafa karışıklığı muhtemeldir, çünkü son örnekte $\{5, 72\}$ başlı başına bir kümedir ancak bir kümenin elemanı olarak da düşünülebilir, yani $\{5, 72\} \in \{1, 5, 12, \{\text{köpek, kedi}\}, \{5, 72\}\}$ dir.

Kümelerden yararlanarak oluşturulan bir başka küme örneği verelim.

Örnekler 1.3

$X = \{1, 2, \text{köpek}, \{3, 4\}, \text{fare}\}$ kümesinin beş elemanı vardır. Dört elemanı 1, 2, köpek, fare ve diğer elemanı $\{3, 4\}$ kümesidir. $1 \in X$ ve $\{3, 4\} \in X$ yazabiliriz. $3 \notin X$ ve $4 \notin X$ olduğunu, yani 3 ve 4 sayılarının X in elemanları olmadığını kaydetmek son derece önemlidir.

Bazı ilginç sayı kümeleri

Kümelerimizde olabilecek farklı türden sayıları gözden geçirelim.

Doğal sayılar

Doğal sayıların kümesi $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ dir ve $\mathbb{N}$ ile gösterilir. Noktalar sonsuza dek devam edebileceğimiz anlamına gelir ve 've saire' olarak okunabilir.

Bazı matematikçiler, özellikle lojikçiler, 0 ı doğal sayıların içine katmayı severler. Diğerleri doğal sayıların sayma sayıları olduğunu ve (bir bilgisayar programcısı değilseniz) sıfırdan başlayarak saymadığınızı söylerler. Üstelik yakınlarda icat edilmemiş bir sayı ne anlama gelir?

Öte yandan $0 \in \mathbb{N}$ alırsak, bazı teoremlerin ifadesi daha iyi olur. Tartışma; şimdi tanımlayacağımız negatif olmayan tamsayılarla ya da pozitif tamsayılarla çalıştığımızı belirterek, tatlıya bağlanabilir.

[2] Kuşkusuz, x i X den ayırt etmek için 'küçük x büyük X in bir elemanıdır' diye yüksek sesle okuruz.

Tamsayılar

Tamsayıların kümesi $\{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ dir ve $\mathbb{Z}$ ile gösterilir. $\mathbb{Z}$ sembolü, Almanca sayı anlamına gelen Zahlen sözcüğünden ileri gelir. Bu kümeden, sıklıkla $\mathbb{Z}^+$ ile gösterilen, $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ negatif olmayan tamsayıları tanımlamak kolaydır. Tüm doğal sayıların tamsayılar olduğunu kaydedelim.

Rasyonel sayılar

Rasyonel sayıların kümesi $\mathbb{Q}$ ile gösterilir ve tüm kesirli sayılardan oluşur, yani p ve q tamsayılar ve $q \neq 0$ olmak üzere x, p / q biçiminde yazılabiliyorsa $x \in \mathbb{Q}$ dir. Örneğin, $1 / 2$, $6 / 1$ ve $80 / 5$ gibi. Temsilin tek olmadığına dikkat edelim, çünkü örneğin, $80 / 5 = 16 / 1$ dir. Ayrıca $x \in \mathbb{Z}$, $x / 1$ gibi yazılabildiği için tüm tamsayıların rasyonel sayılar olduğunu unutmayalım.

Gerçel sayılar

$\mathbb{R}$ ile gösterilen **gerçel sayıları** katı bir biçimde tanımlamak zordur. Şimdilik bu sayıları, (sonsuz uzunluklu temsiller dahil) ondalık temsil verilebilen herhangi bir sayı ya da sonsuz uzunluklu bir sayı doğrusu üzerinde bir nokta gibi temsil edilen bir sayı olarak kabul edelim.

Gerçel sayılar tüm rasyonel sayıları (dolayısıyla tamsayıları ve doğal sayıları) içerir. Ayrıca hiçbiri rasyonel sayı olmayan π ve e gerçel sayılardır[3]. 23. Bölümde göreceğimiz üzere, $\sqrt{2}$ sayısı rasyonel değildir.

Rasyonel olamayan gerçel sayılara **irrasyonel sayılar** denir.

Karmaşık sayılar

-1 in karekökünün var olduğunu iddia ederek ilerleyebiliriz ve $\mathbb{C}$ ile gösterilen **karmaşık sayıları** tanıtabiliriz. Bu, matematikçinin alet çantasına koyduğu en güçlü desteklerden biridir, çünkü karmaşık sayılar kuramsal ve uygulamalı matematikte kullanılabilmektedir. Bununla birlikte bu kitapta onlardan yararlanmayacağız.

Kümeler üzerine ayrıntılar

Boş küme

Matematikte en temel küme, belkide en tuhaf, hiç elemansız kümedir!

[3] Bu savların kanıtı bu kitabın konusu dışındadır. π için Ian Stewart, Galois Theory, 2nd edition, Chapman and Hall, 1989, p. 62 ye ve e için Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd edition, McGraw-Hill 1976, p. 65 e başvurun.

Tanım 1.4

Hiç elemansız kümeye ***boş küme*** *denir ve* $\emptyset$ *ile gösterilir.*

Bu küme tanımlanması gerçekten tuhaf bir nesne gibi görülebilir. Kümenin hiç elemanı olmadığına göre ne işe yarayabilir? Bu kümenin bize sayma konusunda düşünceler oluşturmamızda yardım etmesi oldukça şaşırtıcıdır. Burada tam olarak açıklama yapacak zamanımız yoktur, ama bu küme matematiğin temelleri için vazgeçilmezdir. İlginizi çekiyorsa, kümeler kuramı ya da lojik üzerine yüksek düzeyde bir kitaba başvurabilirsiniz.

Örnek 1.5

$\{\emptyset\}$ kümesi boş kümeyi içeren bir kümedir. Bu küme bir elemanlıdır. $\emptyset \in \{\emptyset\}$ yazabildiğimiz ancak, boş kümenin tanımı gereği hiç elemanı olmadığı için, $\emptyset \notin \emptyset$ *yazamadığımızı* gözden kaçırmayalım.

Tanım 1.6

Elemanları aynı olan iki küme ***eşittir****. X kümesi Y kümesine eşitse o zaman* $X = Y$ *yazıyoruz. Değilse,* $X \neq Y$ *yazıyoruz.*

Örnekler 1.7

(i) $\{5, 7, 15\}$ ve $\{7, 15, 5\}$ kümeleri eşittir, yani $\{5, 7, 15\} = \{7, 15, 5\}$ dir.
(ii) $\{1, 2, 3\}$ ve $\{2, 3\}$ kümeleri eşit değildir, yani $\{1, 2, 3\} \neq \{2, 3\}$ dir.
(iii) $\{2, 3\}$ ve $\{\{2\}, 3\}$ kümeleri eşit değildir.
(iv) $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{N}$ kümeleri eşit değildir.

Yukarıda kullanıldığı gibi, $=$ ya da $\in$ gibi bir sembolün üzerinden bir çizgi çekerek $\neq$ ve $\notin$ karşıtını alabildiğimizi unutmayalım.

Tanım 1.8

X kümesinin sonlu sayıda elemanı varsa o zaman X ***sonlu*** *bir* ***kümedir*** *diyoruz. X sonlu ise eleman sayısına X in* ***kardinalitesi*** *denir ve* $|X|$ *ile gösterilir.*

X in sonsuz sayıda elemanı varsa o zaman X in kardinalitesini tanımlamak zorlaşır. Nedenini 30. Bölümde göreceğiz. Esas nedeni sonsuzluğun farklı büyüklüklerinin olmasıdır! Şimdilik sonsuz kümeler için kardinalitenin tanımsız olduğunu söylemekle yetineceğiz.

Örnekler 1.9

(i) $\{\emptyset, 3, 4, \text{kedi}\}$ kümesinin kardinalitesi 4 dür.
(ii) $\{\emptyset, 3, \{4, \text{kedi}\}\}$ kümesinin kardinalitesi 3 tür.

Alıştırmalar 1.10

Aşağıdaki kümelerin kardinalitesi nedir?

(i) $\{1, 2, 5, 4, 6\}$
(ii) $\{\pi, 6, \{\pi, 5, 8, 10\}\}$
(iii) $\{\pi, 6, \{\pi, 5, 8, 10\}, \{\text{köpek, kedi, } \{5\}\}\}$
(iv) $\emptyset$
(v) $\mathbb{N}$
(vi) $\{\text{köpek}, \emptyset\}$
(vii) $\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
(viii) $\{\emptyset, \{20, \pi, \{\emptyset\}\}, 14\}$

Şimdi çok önemli bir diğer tanımı, bir alt küme olmanın tanımını verelim.

Tanım 1.11

X in bir küme olduğunu varsayalım. Y nin her elemanı X in bir elemanı ise Y kümesi X in bir ***alt kümesidir****. $Y \subseteq X$ yazıyoruz.*

Bu, $x \in Y$ ise o zaman $x \in X$ demekle aynıdır.

Örnekler 1.12

(i) $Y = \{1, \{3, 4\}, \text{fare}\}$ kümesi $X = \{1, 2, \text{köpek}, \{3, 4\}, \text{fare}\}$ nin bir alt kümesidir.
(ii) Çift sayıların kümesi $\mathbb{N}$ nin bir altkümesidir.
(iii) $\{1, 2, 3\}$ kümesi $\{2, 3, 4\}$ ya da $\{2, 3\}$ ün bir alt kümesi değildir.
(iv) Herhangi bir X kümesi için $X \subseteq X$ dir.
(v) Herhangi bir X kümesi için $\varnothing \subseteq X$ dir.

Uyarı 1.13

Bir kümenin *elemanı* olmakla bir kümenin *alt kümesi* olmanın arasındaki farkı görmeniz son derece önemlidir. Öğrenciler bunları sık sık karıştırırlar. $x \in X$ ise o zaman $\{x\} \subseteq X$ dir. Küme ayraçlarına dikkat edin. Genellikle ve genelde vurgulamak isterim; $x \in X$ ise o zaman $\{x\} \notin X$ dir, ancak aşağıdaki özel örneğin gösterdiği gibi, bazen $\{x\} \in X$ olur.

Örnek 1.14

$X = \{x, \{x\}\}$ kümesini göz önünde bulunduralım. O zaman $x \in X$ ve $\{x\} \subseteq X$ dir (sonuncusu $x \in X$ yüzündendir), ama $\{x\} \in X$ de vardır.

O nedenle '$a \in A$ ise o zaman $a \subseteq A$ yazmak hatalı olur' gibi yalın bir kural ifade *edemeyiz* ve tersine.

Bu son örneğin aklınızı biraz karıştırdığını hissediyorsanız o zaman geri dönün ve anlayıncaya kadar biraz daha düşünün. Bu kesinlik türü ve sezgiye karşı ve de yalın kuralları kullanmamıza engel olan kötü örnekler yüksek-düzey matematiğinin önemli bir yönüdür.

Tanım 1.15

Y, X e eşit değilse, X in bir Y altkümesine X in bir ***öz alt kümesi*** *denir. Bunu $Y \subset X$ ile gösteriyoruz. Bazıları bunun için $\subsetneq$ kullanır.*

Örnekler 1.16

(i) $\{1, 2, 5\}$, $\{-6, 0, 1, 2, 3, 5\}$ in bir öz alt kümesidir.
(ii) Herhangi bir X kümesi için X alt kümesi X in bir öz alt kümesi değildir.
(iii) Herhangi bir $X \neq \varnothing$ kümesi için boş küme $\varnothing$, X in bir öz alt kümesidir. $X = \varnothing$ ise boş kümenin X in bir öz alt kümesi olmadığına dikkat ediniz.
(iv) Sayılar için $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ vardır.

'... nin bir alt kümesi değildir' için $\nsubseteq$ ve '... nin bir öz alt kümesi değildir' için $\not\subset$ sembollerini kullanabildiğimizi kaydedelim.

Şimdi notasyonun nereden geldiğine bir göz atalım. Sonlu bir küme için

$X \subseteq Y$ ise, o zaman $|X| \leq |Y|$

ve

$$X \subset Y \text{ ise, o zaman } |X| < |Y|$$

önermelerinin doğru olduğu açıktır. O halde sadece sembol olarak değil kavram olarak da $\subseteq$, $\leq$ ye ve $\subset$, $<$ ye benzerdir.

Burada önemli bir uyarı yapmamız gerekiyor: her matematikçi $\subseteq$ ile $\subset$ arasında ayrım yapmaz; bazıları sadece $\subset$ yi kullanır ve '... nın alt kümesi' anlamında düşünür. Bununla birlikte $\subseteq$ nın kullanımının çok daha iyi olduğu kanısındayım, çünkü alt küme ile öz alt kümeyi ayırt etmemize izin verir. Aksi halde yukarıdaki iki önermenin neye benzeyebileceğini düşünün. O kadar açık olmayabilirler ve biri doğru olmayabilirdi. Ya da ne demek istediğini anlamak için; matematikçiler $\leq$ yerine hep $<$ yi kullanmış olsalardı neler olabileceğini iyi düşünün.

Kümelerin Tanımlanması

Kümeleri farklı bir notasyon kullanarak tanımlayabiliriz: $\{x \mid x, P \text{ özelliğini sağlar}\}$. '|' sembolü 'öyle ki' gibi okunur. Bazen iki nokta üst üste ':', '|' yerine kullanılır.

Örnekler 1. 17

(i) $\{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ ve } x < 5\}$ kümesi $\{1, 2, 3, 4\}$ e eşittir. Kümeyi 'x öyle ki x, $\mathbb{N}$ dedir ve x, 5 den büyüktür' okuruz.

(ii) $\{x \mid 5 \leq x \leq 10\}$ kümesi 5 ile 10 arasındaki sayıların kümesidir. Burada uzlaşmaya uyarak x in bir gerçel sayı olduğunu varsayıyoruz. Bu kötü bir uzlaşmadır, çünkü yazarken özensiz olunmasına yol açabilir; o nedenle | işaretinden önce x üzerinde, bir sonraki örnekteki gibi, bazı kısıtlamalar koyarak bu durumdan kaçınmak için çaba göstermeliyiz.

(iii) $\{x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq x \leq 10\}$ kümesi 10 dahil, 5 den 10 a kadar doğal sayıların kümesidir. Yani, $\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ kümesidir.

(iv) $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ kümesi için $[a, b]$ notasyonu ve $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ kümesi için (a, b) yaygın kullanılır.
(a, b) nin a ve b sayılarının ikilisi anlamına da geldiğini gözden kaçırmayalım.

Kümeleri şu şekilde de betimleyebiliriz: $\{x^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$, $\{1, 4, 9, 16, \ldots\}$ sayılarının kümesidir. Kümeleri betimlemenin birçok yolu vardır; neyin amaçlandığı genelde belli olacağından, bu olanakların tümünün ayrıntılılarına girmeyeceğiz.

Kümeler üzerine işlemler

Matematikte bir nesnenin, örneğin bir kümenin, sık sık tanımını yaparız ve sonra eskilerden yenilerini ortaya çıkarmanın yollarını ararız; örneğin, kümelerin alt kümelerini alırız. Şimdilik eskisinden yenisini oluşturmanın iki yolunu veriyoruz: Kümelerin birleşimi ve arakesiti.

Tanım 1.18

X ve Y nin iki küme olduğunu varsayalım. X ve Y nin $X \cup Y$ ile gösterilen ***birleşimi*** *X de ya da Y de ya da her ikisindeki elemanlardan oluşan kümedir. Kümeyi $X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ ya da } x \in Y\}$ gibi tanımlayabiliriz.*

Örnekler 1.19

(i) $\{1, 2, 3, 4\}$ ve $\{2, 4, 6, 8\}$ in birleşimi $\{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ dir.
(ii) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$ ve $\{x \in \mathbb{Z} \mid x < 8\}$ in birleşimi $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5$ ya da $x = 6$ ya da $x = 7\}$ dir.

Alıştırmalar 1.20

(i) $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $Y = \{-1, 1, 3, 5, 7\}$ olsun. $X \cup Y$ yi bulun.
(ii) $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}$ nedir?

Tanım 1.21

X ve Y nin iki küme olduğunu varsayalım. X ve Y nin $X \cap Y$ ile gösterilen ***arakesiti*** *X de ve Y de olan elemanlardan oluşan kümedir. Kümeyi $X \cap Y = \{x \mid x \in X$ ve $x \in Y\}$ gibi tanımlayabiliriz.*

Örnekler 1.22

(i) $\{1, 2, 3, 4\}$ ve $\{2, 4, 6, 8\}$ in arakesiti $\{2, 4\}$ dür.
(ii) $\{-1, -2, -3, -4, -5\}$ ve $\mathbb{N}$ nin arakesiti $\varnothing$ dir.

Alıştırmalar 1.23

(i) Aşağıdakiler için $X \cap Y$ yi bulun:
  (a) $X = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 6\}$ ve $Y = \{x \in \mathbb{Z} \mid -\pi \leq x \leq 7\}$,
  (b) $X = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ve $Y = \{1, 3, 5, 7, 9\}$,
  (c) $X = \mathbb{Q}$ ve $Y = \{0, 1, \pi, 5\}$.
(ii) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \cap \varnothing$ ve $\mathbb{Z} \cap \mathbb{R}$ yi bulun.

İleriki bölümlerde kanıt örnekleri vermek için, sözgelimi $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ gibi önermelerin doğru olduğunu göstermek için, bu tanımları kullanacağız.

Alıştırma 1.24

$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 7\}$ ve $\{x \in \mathbb{N} \mid x > 5\}$ in birleşimi ve arakesitini bulun.

Tanım 1.25

X ve Y nin $X \setminus Y$ ile gösterilen ***farkı*** *X de olan ama Y de olmayan elemanların kümesidir. Yani, X in elemanlarını alıyoruz ve X in Y ye ait elemanlarını dışarıda bırakıyoruz. Y nin X in bir alt kümesi olmasını talep etmiyoruz. Eğer Y, X in bir alt kümesi olarak tanımlanmış ise o zaman $X \setminus Y$ ye Y nin X deki* ***tümleyeni*** *diyoruz ve bunu Y^c ile gösteriyoruz.*

Örnekler 1.26

(i) $X = \{1, 2, 3,$ köpek, kedi$\}$ ve $X = \{3,$ kedi, fare$\}$ olsun. O zaman $X \setminus Y = \{1, 2,$ köpek$\}$ dır.
(ii) $X = \mathbb{R}$ ve $Y = \mathbb{Z}$ olsun. O zaman

$$X \setminus Y = \ldots \cup (-3, -2) \cup (-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup \ldots$$

dır.

Kümelerin çarpımları

Matematikçilerin eskilerden yeni nesneler ürettiklerine bir başka örnektir.

Tanım 1.27

X ve Y iki küme olsun. X ve Y nin $X \times Y$ ile gösterilen ***çarpımı***, *$x \in X$ ve $y \in Y$ olmak üzere olası tüm (x, y) ikililerinin kümesidir, yani*

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ ve } y \in Y\}$$

kümesidir. Burada (x, y) nin bir ikili gösterdiğini ve Örnek 1. 17 (iv) ile hiçbir ilgisi olmadığını kaydedelim.

Örnekler 1.28

(i) $X = \{0, 1\}$ ve $Y = \{1, 2, 3\}$ olsun. O zaman $X \times Y$ nin altı elemanı vardır:

$$X \times Y = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}.$$

(ii) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesi $\mathbb{R}^2$ ile gösterilir. $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ ile gösterilir. Çünkü elemanları gerçel sayıların üçlüleri ile yani x, y ve z gerçel sayılar olmak üzere (x, y, z) biçiminde verilebilir.

$X \times Y$ nin X in ya da Y nin bir alt kümesi olmadığına dikkat edelim.

Dönüşümler ve fonksiyonlar

Kümeleri tanımladık. Şimdi kümelerin elemanlarını başka kümelerin elemanlarıyla ilişkilendirmek için bir tanım yapacağız.

Tanım 1.29

X ve Y nin küme olduklarını varsayalım. X den Y ye bir ***fonksiyon*** *ya da* ***dönüşüm*** *kümelerin elamanları arasındaki bir bağdır. Daha açık olarak, X in her elemanı için Y nin bir tek elemanı vardır.*

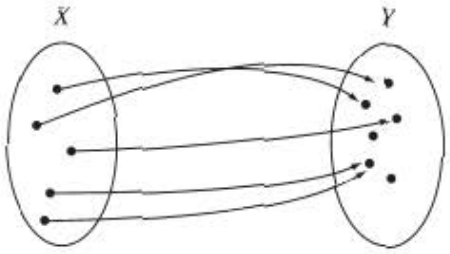
f, X den Y ye bir fonksiyon ise o zaman $f : X \to Y$ yazıyoruz ve x e bağlanan Y deki tek elemanı $f(x)$ ile gösteriyoruz. Bu elemana x ***in f altındaki değeri*** *ya da f nin bir* ***değeri*** *denir. X kümesine f nin* ***kaynağı*** *(ya da* ***tanım kümesi****) ve Y ye f nin* ***hedefi*** *(ya da* ***değer kümesi****) denir.*

Bir fonksiyonu betimlemek için genelde her x için $f(x)$ i tanımlayan bir formül kullanırız ve f den bir kümenin elemanlarına ya da bir kümeye uygulandığından söz ederiz.

Şematik bir betimleme Şekil 1.1 de gösterilmiştir. X in her elemanının Y deki bir elemana karşılık gelmek zorunda olduğunu fakat tersinin gerekmediğine ve de X in iki farklı elemanının Y deki bir aynı elemana uygulanabildiğine dikkat edelim.

Örnekler 1.30

(i) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, her $x \in \mathbb{Z}$ için $f(x) = x^2$ ile tanımlansın. Bu durumda x in f altındaki değeri x in karesidir. Hedefte f nin değerleri olmayan elemanların var olduğunu gözden kaçırmayalım. Örneğin, -1 bir değer değildir, çünkü $x^2 = -1$ şeklinde hiçbir x tamsayısı yoktur.



Şekil 1.1 X den Y ye bir fonksiyon

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 0$ ile verilsin. f nin tek değeri 0 dır.

(iii) Bir kümenin kardinalitesi sonlu kümelerin kümesi üzerinde bir fonksiyondur. Yani, $|\,| :$ Sonlu Kümeler $\to \{0\} \cup \mathbb{N}$ dir. Küme boş küme olabileceği için, değer kümesinde 0 ın gerekli olduğunu kaydedelim.

(iv) X üzerindeki **birim dönüşüm**, her $x \in X$ için $\mathrm{id}(x) = x$ ile verilen $\mathrm{id} : X \to X$ dönüşümüdür.

Bir formüle sahip olmak, bir sonraki örneğin gösterdiği gibi, ille de bir fonksiyon tanımlamaz.

Örnek 1.31

$f(x) = 1 / (x - 1)$ formülü, $x = 1$ de tanımlı olmadığından, $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye bir fonksiyon tanımlamaz.

Bu örneği, kaynağı 1 elemansız $\mathbb{R}$ ye kısıtlayarak kurtarabiliriz. Yani, $X = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1 \}$ tanımlayalım; o zaman $f(x) = 1 / (x - 1)$ ile tanımlı $f : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyondur.

Polinomlar, fonksiyon örneklerinin iyi bir kaynağını sağlar.

Örnek 1.32

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 2x + 3$ ile verilsin. Bir kez daha kaydedelim ki, hedef $\mathbb{R}$ nin tamamı olmakla birlikte her elemanı f nin bir değeri değildir. Örneğin, $f(x) = -2$ olacak şekilde hiçbir x yoktur. Bu, $x^2 + 2x + 3 = -2$ yi çözmeye çalışarak doğruluğunu kontrol edebildiğiniz bir şeydir.

(ii) Çok daha genel olarak, bir polinomdan bazı $a_0, \ldots, a_n$ gerçel sayıları ve bir x gerçel değişkeni için

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

tanımlayarak bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlayabiliriz.

(iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nin türevlenebilir, örneğin bir polinom, olduğunu varsayalım. O zaman f' ile gösterilen türev bir fonksiyondur.

Alıştırmalar 1. 33

(i) $f(x) = x / (x^2 - 5x + 3)$ in bir fonksiyon olmasını sağlayan en geniş tanım kümesini bulun..

(ii) $f(x) = (x^3 + 2) / (x^2 + x + 2)$ in bir fonksiyon olmasını sağlayan en geniş tanım kümesini bulun.

(iii) Grafiği $(-1, 5)$ ve $(3, -2)$ noktalarından geçen bir polinom örneği oluşturun.

Alıştırmalar

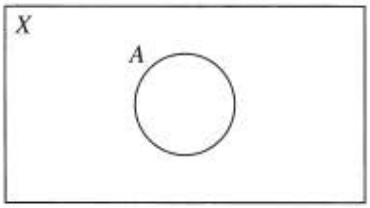
Alıştırmalar 1. 34

(i) $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \le x \le 10\}$ ve $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{2, 3, 5, 7\}$ alt kümeleri olsun. $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \times B$, $X \times X$, A^c ve B^c yi bulun.

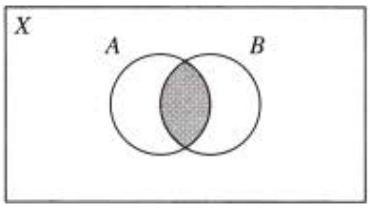
(ii) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 9x + 14 = 0\}$ ve $\{y \in \mathbb{Z} \mid 3 \le y < 10\}$ nin birleşim ve arakesitini bulun.

(iii) A, B ve C nin X in alt kümeleri olduğunu varsayalım. Aşağıdakileri dikkatle incelemek için bu kümelerin örneklerinden yararlanın:
(a) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ ile $A \cap (B \cup C)$,
(b) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ ile $A \cup (B \cap C)$,
(c) $(A \cup B)^c$ ile $A^c \cap B^c$,
(d) $(A \cup B)^c$ ile $A^c \cup B^c$,
(e) $(A \cap B)^c$ ile $A^c \cup B^c$,
(f) $(A \cap B)^c$ ile $A^c \cup B^c$.
Dikkatinizi bir şeyler çekiyor mu?

(iv) Bir **Venn diagramı** kümeleri temsil etmenin yararlı bir yoludur. A, X in bir alt kümesi ise o zaman düzlemde aşağıdakini çizebiliriz:



Aslında A nın tam biçimi önemsizdir ama çoğu zaman bir çember kullanıyoruz. B bir diğer alt küme ise o zaman diagramda B yi de çizebiliriz. Aşağıda $A \cap B$ nin arakesitini taradık.



(a) A ve B nin hiç arakesiti olmadığı durum için bir Venn diagramı çizin.
(b) Venn diagramları çizin ve $A \cup B$, A^c ve $(A \cap B)^c$ kümelerini tarayın.
(c) A, B ve C kümelerini temsil etmek için (kesişen) üç çember çizin ve $A \cap B \cap C$ arakesiti tarayın.
(d) (iii) sorusunu kullanarak Venn diagramlarını çizin ve ilgili kümeleri tarayın.

(v) Bu bölümün okunuşuna nasıl yaklaştığınızı irdeleyin.
(a) Bu bölümdeki konuya daha önceden rastlamadıysanız her şeyi anlamak için çaba gösterdiniz mi?
(b) Daha önce konuyla karşılaştıysanız, hiç hata yapmadığımın doğru olduğunu kontrol ettiniz mi?

Özet

- Bir küme iyi-tanımlı bir nesneler topluluğudur.
- Boş kümenin hiç elemanı yoktur.
- Sonlu bir kümenin kardinalitesi kümenin eleman sayısıdır.
- Y nin her elemanı X de ise Y kümesi X in bir alt kümesidir.
- X in bir Y alt kümesi X e eşit değilse bir öz alt kümesidir.
- X ve Y nin birleşimi X de ya da Y deki elemanların topluluğudur.
- X ve Y nin arakesiti X de ve Y deki elemanların topluluğudur.
- X ve Y nin çarpımı, $x \in X$ ve $y \in Y$ olmak üzere tüm (x, y) ikililerinin kümesidir.
- Bir fonksiyon bir kümenin elemanlarını bir diğerine atar.

2. BÖLÜM

Matematiği okuma

Okuduğunuz her şeye inanmayın.
Anon

Mutlaka okuyabiliyorsunuzdur ve çalışma becerileri dersinin bir parçası olarak akademik amaçlar için okuma becerileri konusunda eğitilmiş olabilirsiniz. Ne yazık ki nasıl çalışıldığı konusunda matematik, sınıflarda ya da kitaplarda eksikliği duyulan bazı özel inceliklere sahiptir. Örneğin, çok konu öğrenmek için hızlı okuma değerli bir araç olarak salık verilir. Matematikte, buna karşın, bu iyi bir yöntem değildir. Matematik nadiren abartılı yazılır; gereksiz sıfatlar azdır, her sözcük ve sembol önemlidir, eksiklikleri konuyu anlaşılmaz ya da yanlış kılabilir.

Okumayı sindirilebilir parçalara ayırmak için düzenli bir yöntem içeren buradaki ipuçları ve uyarılar katı bir komutlar listesi değil, pratik önerilerdir. Ana noktalar aşağıdadır:

- Okuma alışkanlıklarınızda esnek olmalısınız – bir konunun birçok farklı ele alınışını okuyun.
- Okuma dinamik bir süreç olmalıdır – elde bir kalem ve kağıtla çalışan, metne hakim ve yazarın ileri sürdüğünün doğruluğunun farkında olan eylemsiz değil, enerjik bir okur olmalısınız.

Son nokta, matematiksel düşünme; tarih ve sosyoloji gibi diğer birçok konuda düşünmenin ayrıldığı yerdir. İlerledikçe ayrıntıları mutlaka izlemelisiniz – doğruluğunu kontrol edin. Tarihte (bir zaman makinenizin olmadığını varsayarak) Sezar'ın Britanya'yı M.Ö. 55 yılında işgal ettiğinin doğruluğunu kontrol edemezsiniz, siz sadece onu başkalarının iddiasına göre kontrol edebilirsiniz. Matematikte doğruyu gerçekten saptayabilirsiniz ve saptamalısınız.

Aşağıdakiler sadece kitaplara değil, okuma ders notları ve web sayfalarına yöneliktir, ama daha yalın bir sunum yapmak için sadece kitapları kast edeceğim. Bir tanımı, teoremi[1] ya da kanıtı okuma gibi özel durumlar üzerine uyarılar ileriki bölümlerde verilmiştir.

[1] Bir teorem doğru olan bir matematiksel ifadedir. Teoremler büyük ayrıntılarıyla III. Kısımda ele alınacaktır.

Temel okuma önerileri

Bir amaç için okuyun

Okumanın başlıca amacı öğrenmektir, ama bir konuya genel bakışı pekiştirmeyi, açıklık getirmeyi ya da anlamayı amaçlayabiliriz.

Okumadan önce metinden neyi öğrenmek istediğinize karar verin. Amaç, özel bir tanımı öğrenmek ya da çarpımları integre etmek gibi belirli türden bir problemin nasıl çözüleceği olabilir. Neden ne olursa olsun, her şeyin açıklık kazanacağı gibi belirsiz bir beklentiyle okumaya başlamamanız önemlidir.

Bu kitabın önceki bölümünü nasıl okudunuz? Amacınız neydi? Daha önce bildiklerinizi görmek için sayfaları karıştırdınız mı? Her şeyi anladığınızdan emin oluncaya dek ayrıntılarıyla okumak istediniz mi? Bu soruları yanıtlamak, genelde, okurken gerçekten ne yapmanız gerektiği hakkında bir anlayış kazandırır.

Uygun düzeyde bir kitap seçin

Bazı kitaplar iyi yazılmamıştır ve bazıları da öğrenme tarzınıza uygun değildir. Bir kitap seçerken bağlantılı iki noktayı aklınızda tutun. Her kitap bir okur kitlesi ve bir amaç için yazılır. Okuru olmayabilirsiniz ve kitabın amacı; acemi birine öğretmek ya da uzmanlara yönelik bir kaynak olarak kullanılmak olabilir ancak isteğinize karşılık vermeyebilir.

Öte yandan, ileri düzeyde kitapları geri çevirmeyin çünkü bir kitabın ilk bölümleri genelde bir konunun yararlı özetini içerir.

Kalem kağıt kullanarak okuyun

Faal olun – kalem kağıt kullanarak okuyun.

Kalem kağıt kullanmanın birinci nedeni okuduğunuzdan not tutmanız gerektiği – özellikle, ne söylediği değil, ne anlama geldiğini – ve aklınızdan geçen düşünceleri kaydetmek içindir. Yeterince anlamadan aşırı tekrarlamalarda bulunabileceğinizden, ilk okuduğunuzda not tutmayın.

İkinci neden daha önemlidir. Örneklere uygulayarak teoremler ve formüller[2] keşfedebilirsiniz, grafik benzeri diagramlar çizebilirsiniz – hatta kendinizin oluşturacağı – alıştırmalar çözebilirsiniz. Bu bir matematikçi gibi düşünmenin önemli bir yüzüdür. Fizikçiler ve kimyacılar laboratuar deneyleri yaparlar, matematikçilerin deneyleri bu keşiflerdir.

Kağıt kalem yardımıyla okuma boyalı kalem kullanımını dışlar. Bu kalemleri kullanırken genel eğilim her şeyi işaretlemek olur, bu bakımdan konuyu özetleyinceye dek bekleyin.

[2] Formülün Latince çoğulu 'formulae' yerine çok daha doğal olan İngilizce çoğulu 'formulas' kullanacağım.

Roman okur gibi okumayın

Matematiği bir roman okur gibi okumayın. Ön kapaktan arka kapağa kadar ya da sunulan sırada okumak zorunda değilsiniz. Kitabı gözden geçirmek, durumunuza uygun olanı almak ve sayfadan sayfaya geçmek tamamen kabul edilebiliridir. Bu belki şaşırtıcı bir öğüttür, çünkü matematik genel düşüncelerin üst üste inşa edildiği doğrusal bir alan olarak düşünülür. Ama, bana inanın, ne doğrusal biçimde oluşturulur ne de o şekilde öğretilir.

Buna bir de şu olguyu ekleyin: konunun öncüleri tarafından ortaya atılan yöntemler gözden geçirilmiş ve herkesin anlayabilmesi için sunum iyileştirilmiştir; kitap boyunca geriye doğru ve ileriye doğru atlama gereğinin olacağını da görebilirsiniz.

Ayrıca, bir oturuşta her ayrıntıyı anlayacağınız kesin değildir. Gerçek anlamı açıklık kazanmayan bir parçayı defalarca okumak durumunda kalabilirsiniz.

Düzenli bir yöntem

Uzun parçaların üstesinden düzenli bir şekilde gelmek için şimdi beş-noktalı bir yöntemi özetliyoruz:

(i) Sayfaları karıştırın ve önemli olanı belirleyin.
(ii) Sorular sorun.
(iii) Baştan sona dikkatli okuyun. Önce önermeler yazabilirsiniz ve isterseniz daha sonra kanıtlarını yapabilirsiniz.
(iv) Faal olun. Bu, metnin doğru olduğunun kontrol edilmesini ve alıştırmaların yapılmasını kapsamalıdır.
(v) İyi düşünün.

Numaralanmış olsa da, bu aşırı basit okuma düzenine verilen sırada körü körüne bağlı kalmak zorunda değilsiniz. Esnek olabilirsiniz ve duruma göre kesimden kesime atlayabilirsiniz.

Göz gezdirin

Önce bir genel bakışa sahip olmak için kitabın tamamına kısaca göz atın. Çalışma becerileri kitapları genelde öğrencilere, bölümlerin başını ve sonunu – esas sonuçları görmeleri amacıyla – okumalarını öğütler. Bu matematik kitaplarında her zaman geçerli değildir, çünkü kitabın savunduğu fikirler genelde bu biçimde özetlenmez ama denemeye değer.

1. Bölümde öyle yaptınız mı? Eğer yapmak zorunda kalsaydım, esas konuların kümeler, sayılar, kümeler üzerinde birleşim ve kesişim gibi işlemler, fonksiyonlar ve polinomlar olduğunu söylerdim.

Önemli olanı saptayınız

Daha dikkatli ama çok ayrıntılı olamayan bir okumada önemli noktaları saptayın. Tekrar tekrar kullanılan varsayımlar, tanımlar, teoremler ve örnekler arayın, çünkü bunlar kuramı aydınlatmanın anahtarı olacaktır. Eğer aynı tanım defalarca önermelerde geçiyorsa, önemli demektir – bu nedenle onu öğrenin!

1. Bölümde, örneğin, boş küme kavramı önemli gibi görünür, aynen $\in$ ve $\subseteq$ arasında, özellikle anlam farklılıklarının ayırt edilmesinin gerekliliğinde olduğu gibi.

Hesaplama konuya girmenin etkili bir yolu olduğu için hesaplamanıza olanak sağlayan teoremler ya da formüller arayın. Ara verin ve son tümceyi yeniden okuyun – onun bana verilmiş en yararlı öğütlerden biri olduğunu düşünüyorum. Genelde, anlamakta açmaza düştüğümde hesaplamaya yönelik bir kuram açmaza açıklık kazandırır. Hesaplamamıza neyin izin verdiğinin farkında olmak böylece çok önemlidir.

1. Bölümde hesaplamayla ilgili en aşikar kavram bir kümenin kardinalitesi idi. Bununla birlikte onu kapsayan hiçbir teorem yoktu. Yine de bunu ileride yararlı olacak bir şeymiş gibi kaydedin, çünkü kardinalite hesaplamanın olabilirliğine yol açar. Ve aslında kardinalite hesabını 5. Bölümde inceliyoruz.

Çok daha genel bir örnek, kalkülüsteki çarpım kuralı ve zincir kuralı v.s. dir. Bunlar (çalışması zor olan) türev kavramını kullanmaksızın bir fonksiyonun türevini hesaplamamıza olanak verirler.

Sorular sorun

Bu aşamada konu hakkında, 'Kuram neden bu özel tanım ya da teorem üzerinde dönmektedir?' gibi bazı sorular sormak işe yarar. Konunun sözü bir noktaya getirmesini ve bizim oraya nasıl gittiğimizi sağlayan önemli sonuç nedir? Sorularınızla konudan ne istediğinizin ayrıntılı bir listesini yapabilirsiniz.

Son bölümde metnin ana noktası, daha sonra örnek olarak kullanacağımız materyalin temelini atmaktı.

Dikkatli okuma

Artık dikkatli okuma girişiminde bulunmanın zamanıdır. Bu düzenli olmalı ve düşünme, alıştırma yapma ve problem çözmeyle birleştirilmelidir.

Okuma, sözcükleri okumaktan başka bir şeydir; ne anlama geldiklerini düşünmelisiniz. Özellikle, her sözcük ve sembolün anlamını bildiğinizden emin olun; bilmiyorsanız ya da unuttuysanız, o zaman geriye bakın ve öğrenmeye çabalayın.

Örneğin, bir küme olmakla bir kümenin elemanı olmak arasındaki farkın gerçekten kavrandığını sağlamlaştırmak için özenli okumaya gerek vardır.

Düzenli aralıklarla gözden geçirmek için ara verin

Bir defada aşırı okumaya çaba göstermeyin. Düzenli aralıklarla gözden geçirmek için ara verin ve konuyu düşünün. Büyük düşünmeyi sürdürün, nereye gidiyoruz ve bizi oraya özel bir sonuç nasıl götürebilir?

Önce önermeleri – sonra kanıtları okuyun

Çoğu matematik kitabı başlangıç okumasında kanıtların göz ardı edilmesi için yazılır. Bu, kanıtların önemsiz olduğu anlamına gelmez; onlar matematiğin merkezindedir, ama –her zaman değil– genelde daha sonra okunabilirler. Bir noktada kanıtla uğraşmak *zorundasınız*.

Önceki bölümde hiç kanıt yoktu. Meraklanmayın, kitapta ilerledikçe birçok kanıt yapacağız.

Metnin doğru olduğunu kontrol edin

Metnin doğruluğunu kontrol etme gereği kalem ve kağıda ihtiyaç duymamızın nedenidir. İki neden vardır: İlki, yazar tarafından bırakılan boşlukları doldurmak içindir. Sık sık 'Kolay bir hesaplamayla' ya da 'Ayrıntılar okura bırakılmıştır' gibi tümceciklerle karşılaşırız. Bu durumda hesaplamayı yapın ya da ayrıntıları verin. Bu gerçekten kuramı anlamanıza olanak sağlar.

Örneğin, 1. Bölümün 7. sayfasında 'Açıktır ki... $X \subseteq Y$ ise o zaman $|X| \leq |Y|$ dir' demiştim. Bunun gerçekten 'aşikar' olduğunu görmek için doğruluk kontrolü yaptınız mı? Aynı şekilde, hem $\{x\} \in X$ ve hem $\{x\} \subseteq X$ olabildiği olgusundaki gibi sezgi-dışı olgular üzerinde yoğunlaştınız mı?

İkinci neden teoremlerin, formüllerin v.s. nasıl uygulandıklarını görmektir. Eğer metin Teorem 3.5 i ya da Y denklemini kullanın diyorsa, o zaman Teorem 3.5 in uygulanabildiğini ya da bu durumda Y denklemine neler olduğunu kontrol edin. Formülleri gerçekleyin v.b. Kuşkucu olun – yazarın söylediklerine hemen inanmayın.

Alıştırmaları ve problemleri yapın

Çağdaş matematik kitaplarının çoğunda alıştırmalar ve problemler vardır. Bunları yapmanın önemini fazla önemsememek zordur. Matematik bir etkinliktir. Kendinizi matematik çalışan değil, matematik *yapan* olarak düşünün.

Kendinizi matematik adalesi olan biri gibi düşleyin. Adalenin gelişmesi için idmana ihtiyaç vardır. Hareketsiz okuma ağırlıkla antrenman yapan birine bakmaya benzer; bu durumda kaslarınızı geliştiremezsiniz – idman yapmalısınız.

Bundan başka, bir şeyler okumuş olmanız onu gerçekten anladığınız anlamına gelmez. Alıştırmaları ve problemleri yanıtlamak, yanlış anlamalarınızı ve yanlış anlaşılmaları ortaya çıkarır. Düzenli olarak öğrencilerden bir konuyu anlayabildiklerini, sadece alıştırmaları yapamadıklarını ya da materyali uygulamadıklarını duyuyorum. Esas olarak kuralım şudur: Alıştırmaları yapamıyorsam, o zaman konuyu anlamamışımdır.

İyi düşünün

Bir şeyi tam olarak anlayabilmek için onunla daha önce bildiğimizi bağlantılandırmalıyız. O şey başka bir şeyin benzeri midir? Örneğin, $\subseteq$ notasyonunun kardinal aracılığıyla $\leq$ ile karşılaştırıldığında nasıl anlam kazandığını kaydedelim. Arakesit ve birleşimin neye benzeyebileceğini düşünebiliyor musunuz?

Sorulacak başka bir soru 'Bu bize neden söz ediyor ya da bir başka çalışmanın yapmadığını yapmamıza izin veren nedir?' dir. Örneğin, boş küme saymamıza yardım eder (açıklanmamış ama 1. Bölümde ima edilmiş bir şey). Fonksiyon kümeleri kümelere bağlamamıza olanak sağlar. Kardinalite kümelerin göreceli büyüklükleri hakkında konuşmamıza izin verir. O nedenle bir konuyla karşılaştığınızda 'Ne yapmama izin verir' diye sorun.

Bundan sonra ne yapmalı

Tekrar tekrar okumayın – ilerleyin

Anlamanın, zor bir paragrafın aşırı derecede tekrar tekrar okunmasıyla, kazanıldığı mümkün gözükmemektedir. Bir daha okuyorsanız, büyük bir olasılıkla, bu sizin faal olmadığınızın bir işaretidir – öyleyse alıştırma yapın, bazı sorular sorun v.s.

O da sonuç vermiyorsa, bir diğer kitaba başvurmak gibi, farklı bir yaklaşım aramanın tam sırasıdır. Eninde sonunda vazgeçebilir ve bir sonraki parçaya geçebilir; her zaman geri dönebilirsiniz.

İlerledikçe konuları anlamakta zorluklarla karşılaşabilirsiniz ama bu, önemli bir şeyin ortaya çıkartılmasıyla zor olanı aydınlatabilir de.

Ayrıca matematik beyin tarafından zamanla "emilen" bir konudur; fikirler süzgeçten geçtikten sonra büyümek ve gelişmek için zamana gerek duyarlar.

Tekrar okuyun

Tekrar okuyun önerisi tuhaf gelebilir, çünkü önceki öğütlerden biri tekrar tekrar okumamaktı. Buradaki fark şudur: çok daha sonra geri dönülmeli ve tekrar okunmalıdır; örneğin, konuyu anlamış olduğunuzu hissettiğiniz durumundaki gibi. Bu çoğu zaman kaçırılan ince noktaları açığa çıkarır ya da konuya çok açık bir genel bakış kazandırır.

Bir özet yazın

Okumayı sonlandırdıktan sonra konu apaçık gibi gelebilir ama daha ileriki bir tarihte bu doğru olacak mı? Kendi sözcüklerinizle bir özet yapmanın tam zamanıdır.

Alıştırmalar

Alıştırmalar 2.1

(i) 1. Bölüme yeniden dönün ve onu okumak ve anlamak için nasıl çabaladığınızı irdeleyin.

(ii) Bazı matematik makalelerini içeren, örneğin *Scientific American, Nature* ya da *New Scientist* gibi bir dergi ya da bilimsel magazin bulun.

Bir makale okuyun. Makalenin amacı nedir ve okur kitlesi kimdir? Matematik nasıl kullanılmıştır? Bir tümceyle, amacı nedir? Üç temel noktayı verin.

(iii) Benzer düzeyde ve matematik yeteneğinizin dahilinde üç kitap bulun. Kısaca kitapları gözden geçirin ve hangisinin yakın olduğunu saptayın ve nedenlerinizi açıklayın.

(iv) Aynı konuyla uğraşan üç kitap bulun. Üç kitapta bir matematiksel nesne, diyelim küme, bulun. Farklı kitaplardaki tanımlar farklı mıdır? En iyi tanım hangisidir? Ya da daha doğrusu, en beğendiğiniz tanım hangisidir?

Kavramı örneklerle açıklamak için herhangi bir diagram kullanılmış mıdır? Diagramlar nasıl bir anlayış sağlarlar? Diagramlar nasıl yanıltırlar?

Özet

- Bir amaçla okuyun.
- Etkili okuyun. Elinizde kalem kağıt bulunsun.
- Sıra halinde okumayabilirsiniz ancak düzenli okuyun.
- Sorular sorun.
- Tanımları, teoremleri ve örnekleri önce okuyun. Kanıtlar sonra gelebilir.
- Formülleri v.s. uygulayarak konunun doğruluğunu kontrol edin.
- Alıştırmaları ve problemleri yapın.
- Takıldıysanız, ilerleyin.
- Bir özet yazın.
- İyi düşünün – ne öğrendiniz?

3. BÖLÜM

Matematiği yazma I

Bilimsel dergilerde yayınlanmak üzere; ayrıntının tümünü vermeksizin,niteliği üzerine fazla düşünmeden ya da çalışmaya ilişkin ilk yanlış düşüncemizi betimlemeden v.b. hemen hemen tamamlanmış çalışmaları yazma alışkanlığımız vardır.

Richard Feynman, Nobel Konferansı, 1966

Bir okutman olarak en zorlu baş görevim, istekli öğrencileri yetenekli matematikçilere dönüştürürken doğru biçimde matematik yazmaları için onları zorlamaktır (evet, zorlamak). Sundukları ilk yoklamaları hiç tümcesiz ya da noktalamasız anlaşılmaz sembol yığınlarına benzemektedir. 'Doğru yanıtı verdim. Onu arka sayfada – altı çizilmiş olarak – görebilirsiniz', 'Tümceler yazmanın amacı nedir?' diye soruyorlar. Bu duyguları paylaşabilirim ama matematikte doğru yanıta kesin bir biçimde ulaşmalıyız ve yöntemimizin kesin olduğunu başkalarına gösterebilmeliyiz.

Bir öğrenci çalışmasındaki anlamsız bir ifadeye işaret ettiğimde, ortak bir tepki şudur: 'Ama siz eğitmensiniz, ne demek istediğimi bilirsiniz'. Bu görüşe de sıcak bakıyorum ama o zaman iki sorum var.

(i) Eğer eğitmen neyin amaçlandığını anlamak için kendi zekasını kullanmak durumunda kalırsa, o zaman öğrenci kendi zekasından değil[1], eğitmenin zekası sayesinde iyi not alır.

(ii) İkinci husus öğrenciler için belki daha önemlidir. Semboller karmaşasını ve yarı olgun kötü ifade edilmiş düşünceleri ayıklamak gerilime neden olur ve her eğitmenin canını sıkar – yüksek not elde etmek için iyi bir reçete değildir.

Öğrencilerim okulda iyi çalışırlar ama onlara göre önemsiz ayrıntılar gibi gözüken şeylerden not kaybedince hüsrana uğrarlar. Bununla birlikte, yıl sonuna doğru iyi yazmanın elde ettikleri sonuçları iyileştirdiğini genelde kabul ederler. Ayrıca herhangi bir konuda iyi yazmak yararlı bir sahip olma becerisidir.

[1] Dürüst olmak gerekirse, öğrenciler bunu umursamazlar!

İyi yazmak yararınızadır

İyi yazmak

Yazmak için birçok neden vardır – daha sonra kullanmak için not tutmuş olabilirsiniz ya da bir düşünceyi bir başkasına aktarmak isteyebilirsiniz. Neden ne olursa olsun, etkin bir çalışma üretmek için pratik gereklidir.

Anlaşılmak istiyorsanız iyi yazmak elbette önemlidir ama bir de ikramiyesi vardır: iletilecek konuyu sizin için aydınlatır ve böylece anlamanıza katkıda bulunur. Aslında, bir düşünceyi yazarak açıklayamıyorsam o zaman onu anlamadığımdan eminimdir. İyi yazmak bir matematikçi gibi düşünmenize yardımcı olan nedenlerden biridir.

Genel olarak bir başka kişiye açıklamak için yazarız, o nedenle bu kişi aklımızdadır. İki noktanın anımsanması gerekir:

- Okuyana karşı insaflı olun. Onların işlerini zorlaştırmayın – özellikle, çalışmanıza not verenin.
- İletişimin sorumluluğu size düşüyor. Eğer düzeyinizdeki biri onu anlayamıyorsa o zaman sorun yazmanızdan kaynaklanıyordur!

Yazmanızı nasıl iyileştirmeniz gerektiği üzerine bir düşünceler toplamı aşağıda veriliyor. Sunulan düşünceler yıllar boyunca çalışılmış ve sınanmış olup, salt kuramsal değildirler. Onlar bıktırıcı ve bilgiççe gibi gelebilir ama izlerseniz aydınlatıcı açıklamalar ortaya çıkaracak ve dolayısıyla değerlendirmelerde daha iyi not alacaksınız.

Bir problemin yanıtını bulmakla onu sunmak arasında aşırı bir farkın olduğu kaydedilmelidir. Kurallar, en son temize çekilmiş ürüne uygulanır. Bir problemi çözmeye ya da bir alıştırmayı yapmaya çalışırken bu kuralların tümünü bozmak uygun olabilir. Önemli olan, çözümü birinin okumasına yönelik yazarken bu kurallara uyulmasıdır.

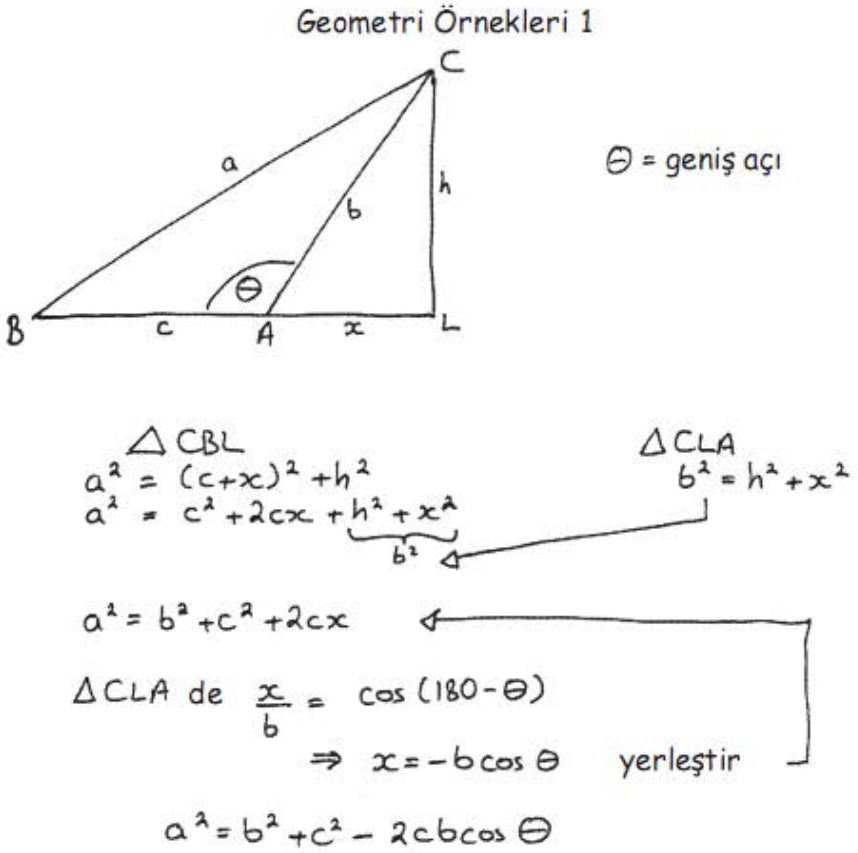
Bir örnek

Bir geometri dersinde kosinüs kuralını ifade etmiştim.

> **Kosinüs Kuralı:** Bir üçgenin kenarlarının a, b, c ve a kenarının karşısındaki açının θ ya eşit olduğunu varsayalım. O zaman
>
> $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$$
>
> dır.

Eğer buna daha önce rastlamadıysanız, o zaman 18. sayfada betimlendiği gibi 'Metnin doğruluğunu kontrol etmek' için bu iyi bir fırsattır. Bazı şekiller çizmeye ve bazı örnekler vermeye çalışın. Böyle bir önermeyi dikkatle incelemek için daha fazla teknik 16. Bölümde bulunacaktır.

Kosinüs kuralı; $\theta = \pi / 2$ aldığımızda Pisagor Teoreminin bir genelleştirilmesi gibi görülebilen yararlı bir sonuçtur. (Metnin doğruluğunu kontrol edin!) Geometri dersinde bu formülü θ nın bir dar açı olduğu durumda kanıtlamış, geniş açı durumunu alıştırma olarak bırakmıştım. Şekil 3.1, aldığım bir çözümü göstermektedir. İlerledikçe bundan söz edeceğiz. Bir alıştırma olarak ona bir göz atın ve olabildiğince çok hatayı görmeye çalışın. Bu kanıt anlamlı mıdır? Kolay okunabiliyor mu? Daha önemlisi, doğru mu?



Şekil 3.1 Kosinüs Kuralının öğrenci kanıtı

Temel Kurallar

En önemli kural şudur: yalın, doğru noktalamalı tümceler yazın. Buna biraz daha fazla ayrıntı yükleyelim.

Tümcelerle yazın

Tümcelerle yazın. Tümcelerle yazın. Ve bir kez daha evinizde buna çaba gösterin: Tümcelerle yazın.

Bu öğüt diğerlerinden önce gelir ve çalışmanızın sunma şeklini gerçekten değiştirebilir.

Toy matematikçinin en yaygın hatalı kanıtlarından biri şudur: matematik aşırı derecede sembolik bir dil olduğundan, bir problemi yanıtlamak için sadece bir semboller listesi sağlamamız yeterlidir. Bu yanlıştır; semboller belirli kavramlar için ancak bir stenodur ve anlamlı olması için tümcelerle birleştirilmelidir.

Bir denklemler takımının çözümünü bulduran bir alıştırmaya öğrencinin verdiği yanıtı değerlendirelim:

'0 = 1, ∴ hiçbir çözüm yok, boş küme (∅).'

Öğrencinin ne demek istediği açıktır: 'Denklemler hiçbir çözümü olmayan '0 = 1' denklemine indirgendiğinden, çözüm kümesi boştur.' – Hiçbir çözümünün olmadığı

– bu çok önemli olguya kuşkusuz yer verilmiştir. Öğrenci boş kümenin ∅ ile gösterildiğini bildiğini de göstermiştir. Bununla birlikte, bu sembolün dahil edilmesi gereksizdir; o hiçbir amaca hizmet etmez.

Ama yazmış olduğu bir tümce değildir – o bir semboller imdizisidir ve içinde hiçbir anlam barındırmaz.

Yanıt çok daha iyi şöyle ifade edilebilirdi:

> '0 = 1 denklemi bulunduğundan denklemler sistemi tutarsızdır ve dolayısıyla hiçbir çözüm mevcut değildir.'

'Yani, çözüm kümesi boştur' u ekleyebilirdik ama gerekli değildir. Bu yanıtta kavrayış net bir biçimde gösterilmiştir ve böylece daha fazla not verilecektir.

Paragraf ve noktalama kullanımı gibi yazma İngilizcesinin tüm diğer bilinen kuralları uygulanır. Dilbilgisi kuralları harfiyen önemlidir: her tümcenin bir fiili olmalı, özneler fiillerle uyuşmalı ve v.b.

Kosinüs formülünün kanıtının Şekil 3.1 deki örneğine bir göz atalım. Öğrencinin diagramında yer alan aşağıdaki ilk iki satırı inceleyelim.

$\triangle CBL$ $\qquad\qquad$ $\triangle CLA$

$a^2 = (c+x)^2 + h^2 \qquad\qquad b^2 = h^2 + x^2$

Standart biçimde soldan sağa okursam

$\Delta CBL\ \Delta CLA\ a^2 = (c + x)^2 + h^2\ b^2 = h^2 + x^2$

yi okurum. Şimdi bu ne demek istiyor? Neyin amaçlandığı açıktır. Ama neyin amaçlandığını niçin anlamaya çalışmalıyız? Neyin amaçlanmış olduğunu baştan söylemek daha iyi olurdu.

ΔCBL üçgeninde $a^2 = (c + x)^2 + h^2$ ve ΔCLA üçgeninde $b^2 = h^2 + x^2$ vardır.

Bu artık gerçek bir tümcedir. Öte yandan, 'üçgen' sözcüğünü kullanarak Δ notasyonunu nasıl açıkladığım gözden kaçmasın.

Şimdi $\Longrightarrow$ işaretinden sonraki sözcüklere bakalım:

$\frac{x}{b} = \cos(180 - \theta)$

$\Rightarrow x = -b\cos\theta$ yerleştir

Bu, öğrencinin neyi amaçladığını – ama iyi yazılmamış – anlayabildiğimiz yere mükemmel bir örnektir.

… $x = -b\cos\theta$. Bunu … ye yerleştir

biçimi çok daha açıktır.

Noktalama kullanın

Noktalamanın amacı tümceyi açık kılmaktır. Noktalama standart uygulamayla uyumlu kullanılmalıdır. Özellikle, tüm tümceler bir büyük harfle başlar ve bir nokta ile sonlanır.

Nokta, tümce matematiksel bir ifade ile sonlansa bile, korunur. Örneğin,

'$x = y^4 + 2y^2$ olsun. O zaman x pozitiftir.'

olsun dan sonra bir noktaya gerek duyar çünkü – bir büyük harfle başladığından – ikinci kısmının yeni bir tümce olduğu açıktır. Bu eşit ifadelerin bir listesi için de doğrudur:

$$x = y^2 + 2y$$
$$= y(y + 2)$$

Bu bir nokta ile sona ermelidir. Bazı yazarların bu noktalama kuralına katılmadığını kaydedelim. Onlar[2] yanılıyorlar.

Matematiksel ifadeler noktalamalı olmalıdır. Örneğin,

'$a \in \mathbb{R}$ $b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x = 4a + 3b$ olsun.',
'$a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $x = 4a + 3b$ olsun.'

gibi virgüller içermelidir.

Aşağıdaki örnekte üç virgül ve en sonda noktanın olduğunu gözden kaçırmayın.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \text{ için,} \\ 0, & x < 0 \text{ için.} \end{cases}$$

olsun.

Kosinüs formülünün kanıtı örneğine bakalım. Görebildiğiniz üzere, hiçbir noktalama yoktur! Her halde bir tümce 'ΔCLA da …' olarak başlıyor, ama bir nokta ile devam etmiyor, o halde kim bilir?

Yalınlığı koruyun

Matematik çok öz biçimde yazılır. Bunu başarmak için kısa sözcükler ve tümceler kullanın. Kısa tümcelerin okunması kolaydır. Belirsizlikleri yok etmek için olumsuzluklarla dolu karmaşık tümcelerden kaçının.

Okunması zor olan şu örneği göz önünde bulunduralım:

> 'f ve g fonksiyonları, sırasıyla, x in karesine ve x in karesinin negatifine uygulaması ile verilen pozitif olmayan tamsayıların kümesi üzerinde tanımlı fonksiyona eşit olarak tanımlıdır.'

Bu

'$\mathbb{Z}^{\leq 0} = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$ pozitif olmayan tamsayıların kümesi olsun. $f : \mathbb{Z}^{\leq 0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ile ve $g : \mathbb{Z}^{\leq 0} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -x^2$ ile verilsin.'

gibi daha iyi olurdu. Dönüşümlerin tanım kümelerinin tanımını ayrı bir tümceyle ayırdı-

[2] Bir takım insan bunun tartışmalı bir önerme olduğunu düşünür. 'Tutarlı olduğunuz sürece, bunun ne önemi vardır?' İyi de, bu düşünceyi her tümceye uygulayabilir ve tüm noktalardan kurtulabilirdik! Çoğunluğun görüşü tümcelerin bir nokta ile sonlandığı yönündedir – onu koruyun.

ğımızı kaydedelim. Ayrıca kümeyi sözcüklerle tanımladık ve farklı bir biçimde yazarak açıklık kazandırdık. f ve g nin tanımları 'sırasıyla' nın kullanımı sayesinde ilk tümcede birlikte harmanlanırken ikinci tümcede ayrılmışlar ve semboller kullanılarak tanımlanmıştır. Bazen sembollerin kullanımı daha anlaşılır, bazen değildir; 28. sayfaya bakın.

Kendinizi açıkça ifade edin

Yazmanın amacı iletişimdir – bir başkasına bir düşünce aktardığınız varsayılır. Ne yazık ki – ve bu konuda birçok deneyimim oldu – hatalı ya da amaçsız bir düşünceyi iletmek kolaydır. Bunun olmasını engellemek için aşağıdaki öğüt sunuluyor.

Ne yaptığınızı açıklayın – okuru bilgilendirin

Okurlar medyum değildir. Ne yaptığınızı açıklamanız çok önemlidir. Bunun için radyoda yorum yaptığınızı düşleyin. Daha önce söylendiği gibi, sembollerin, formüllerin ya da bağlantısız ifadelerin bir listesini yazmak yeterli değildir. İyi bir açıklama, kavrayışın bir göstergesi olarak, not almada yardım edecektir.

Ne yazmak üzere olduğunuzu söyleyerek bir düşünceyi ileri sürebilirsiniz, örneğin

'Şimdi X in sonlu bir küme olduğunu gösteriyoruz',
'Kanıtlayacağız ki …'

gibi. Benzer şekilde

'Bu X in sonlu bir küme olduğunun kanıtını sonuçlandırır', ya da
'Kanıtladık …'

ile sonlandırabilirsiniz. Açık, belirgin iddialarda bulunun. 'Olası olmalıdır' gibi ifadelerden kaçının; ya olasıdır ya da değildir, o nedenle 'olasıdır' a sahip çıkın. Olumlu olun.

Her son ayrıntıyı açıklamanın sınırlarına gitmekten kaçının. Uygulamada ve yazılı bir çalışmanıza yöneltilmiş eleştiri sonucunda konuyu yeniden düşünüp düzeltmeniz gerekebilir.

Şekil 3.1 deki örneğin sonuna bir bakarsak, aşağıdakini görürüz:

$$\Rightarrow \quad x = -b\cos\theta \qquad \text{yerleştir} \; \lrcorner$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb\cos\theta$$

Bu sonlandırma

'… $x = -b\cos\theta$. Bunu yukarıdakine yerleştirerek $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$ sonucunu çıkarırız.'

gibi daha iyi olurdu.

Bu kesinlikle çok daha iyidir, çünkü kapalı biçimde kanıtlamamız gerekenin kanıtlanmış olduğunun iddiasını barındırır. Aksi halde, kanıtın yapılmış olduğunu not verene yutturmak için en sonunda kosinüs formülünü yazdığımıza benzeyebilir. Ayrıca, son tümcede 'sonucunu çıkarmak' sözcüğünü kullanmak sonucun nereden gelmiş olduğunu açıklar.

İddialarınızı açıklayın

Sadece bir iddia oluşturmaktan çok, nereden geldiğini söyleyin. Yani,

'olarak, çünkü mademki, nedeniyle, gereği, den, kullanarak, vardır', v.b.

leri içeren tümceler kullanın. Örneğin,

'Teorem 4 (i) yi kullanarak, çözüm kümesinin boş olduğunu görüyoruz'

açık bir şekilde

'Çözüm kümesi boş değildir'

e tercih edilir ve

'$x^3 > 0$ çünkü x pozitiftir'

çıplak

'$x^3 > 0$'

den daha iyidir, çünkü genel bir $x \in \mathbb{R}$ için $x^3 > 0$ değildir. Mesele şudur: x in pozitif olduğu unutulmuşsa okur, önerme 'açıkça yanlış' tırı düşünme yanılgısına sürüklenebilir. Bu tür yararlı yorumları dahil etmek zarar vermez.

Bir başka örnek bir kuralın ne zaman kullanılmış olduğunu söylemektir:

'Zincir kuralından, $f'(x) = 2x \cos(x^2)$.'

Bu şekilde kavramış olduğunuzu göstermiş olursunuz.

Şekil 3.1 deki kosinüs formülünün öğrenci kanıtındaki ilk birkaç satırına geri dönersek,

$\triangle CBL$
$a^2 = (c+x)^2 + h^2$

$\triangle CLA$
$b^2 = h^2 + x^2$

yerine

'ΔCBL üçgeninde $a^2 = (c + x)^2 + h^2$ ve ΔCLA üçgeninde $b^2 = h^2 + x^2$ vardır.'

ı söylemenin daha iyi olduğunu önceden görmüştük. Ama bir sonraki

$$a^2 = c^2 + 2cx + h^2 + x^2$$

satıra ne demeli? Bu diagramdan mı sonuçlandırılmıştır? İlk iki eşitlik $a^2 = (c + x)^2 + h^2$ ve $b^2 = h^2 + x^2$ idi. Bu durumda satır diagramdan değil de ayracın açılımıyla ilk denklemden sonuçlandırılmıştır. O halde bunu söylemeliydik.

Ayraçları açarak $a^2 = c^2 + 2cx + h^2 + x^2$ elde ederiz.

Bir sonraki

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$$

satırına baktığımızda onu bu şekilde ifade etmenin gerekli olmadığını göreceğiz. Bu, $b^2 = h^2 + x^2$ ikinci denklemin ilkinin açılan versiyonuna, $a^2 = c^2 + 2cx + h^2 + x^2$, yazılmasından elde edilir. Öyle diyelim.

> 'ΔCBL üçgeninde $a^2 = (c + x)^2 + h^2$ ve ΔCLA da $b^2 = h^2 + x^2$ dır. İlk denklemi açarak ve ikincisinden b^2 yi oraya yazarsak, $a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$ elde ederiz.'

Ayraçların açılımını ihmal ettiğimizi kaydedin. İsterseniz açabilirsiniz, ancak hesaplama o kadar aşikardır ki mürekkep tüketmeye değmez. Bize inanmayan okur, doğruluğunu kontrol edebilir. .

Ne demek istediğinizi söyleyin

Ne yazarsanız yazın, ne demek istediğinizi söylemek önemlidir – ve zordur. Bu işte dil bilgisinin kesin kullanımı yardımcı olabilir.

Birinci kural, eğitmenin genel durumundan ne anladığınızdan sonuç çıkartmak zorunda kalmasıdır. Hiçbir şey belirsiz olmamalıdır.

Gerçek matematikçi bilgiçtir ve matematiğin tam olmasını ister. Kesinlik yoksa matematik bir hiçtir. Onsuz bir kavramı bir diğeri üstüne inşa edemeyiz. Düşüncelerden biri farklı kişilerin farklı yorumlarında belirsizleşiyorsa ya da yoruma açıksa, o zaman hatalar içeri sızabilir ve çabalamak boşunadır. O halde kesin olun!

Bir örnek olarak, 'bazı' ve 'her' niceleyicilerini kullanın. Belirsiz olan

> '$f(x) = 5$'

demek yerine – okur sorabilir 'Bir x için mi? En az bir x için mi? Her x için mi?' – duruma bağlı olarak

> 'Bazı $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = 5$' ya da 'her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = 5$'

diyelim.

Bu alanda kesinliğin önemini açıklamak için niceleyiciler üzerine 10.Bölümde daha fazlası söylenecektir.

Sembolleri kullanmak

Şimdi sembollerle ilgili uyarılara geliyoruz. Matematiğin aşırı sembolik oluşundan kaçış yoktur ama bir sürü matematik sembolü kullanmak da bir argümanı matematiksel yapmaz.

Sözcükler mi semboller mi?

Semboller stenograflardır. Örneğin, karmaşık sayılar kuramında Euler'in ünlü bir teoremi

$$e^{2\pi\sqrt{-1}} = 1$$

sembollerle özlü ifade edilir.[3] Sözcüklerle yazılmış denk ifade daha az etkileyicidir:

> 'Bir çemberin çapı ile bölünen çevresinin iki katının eksi birinin kareköküyle çarpımının üsteli bire eşittir.'

Bununla birlikte, genel bir pratik kural sözcüklerin kullanılmasıdır. Örneğin, ∴ sembolünden ziyade 'o halde' yi kullanın. Çok az kitap onu kullanır. Benzer şekilde

> 'x bir rasyonel sayıdır $\Longrightarrow x^2$ gerçeldir',
> 'x bir rasyonel sayıdır, x^2 nin gerçel olduğunu gerektirir'

olarak yazılabilir. Bazı tümcelerde sembollerle sözcükleri birleştirmekten kaçınmak iyi olur. Örneğin,

> 'Yanıt = 1',
> 'Yanıt 1 e eşittir'

olarak yazılmalıdır. Aksi halde, doğru okunan ama gözümüzün (hatalı) 40 = 5 ifadesine takıldığı

> '40 ından yaşlı insanların sayısı = 5'

benzeri tümceler yazarız.

Sıfat kullanan küçük sayılar, örneğin

> 'iki küme'

gibi, harflerle yazılmalıdır.

> 'Lemma 3' ve '... ortalaması 23 eşittir'

de olduğu gibi, isim ya da sayı olarak kullanıldığında, rakamla yazılmalıdır.

Bir başka örnek:

> 'Köklerin biri 3 tür.'

Bir istisna 1 sayısıdır ve geleneksel olarak her iki şekilde de yazılabilir.

Benzer sembollerin karışıklığa neden olabildiğine dikkat edin: $\in$ ile ε arasındaki farklılığı iyi görün. İlki genellikle bir kümenin elemanı olmayı gösterir ve sonuncusu Yunan harfi epsilondur, ama başka yazarlar onları başka türlü de kullanırlar.

Daha önce değinildiği gibi, ilk birkaç satırı yeniden yazmış ve ΔCBL standart notasyonu benimsemiştik:

> 'ΔCBL üçgeninde $a^2 = (c + x)^2 + h^2$ ve ΔCLA da $b^2 = h^2 + x^2$ dır.'

[3] Bu çok önemli bir teoremdir – e, π ve -1 in kare kökü sayılarını ve iki önemli doğal sayıyı: 1 ve çift olan tek asal sayı 2 yi aralarında ilişkilendirir. Matematikçilerin bir oylamasında (Mathematical Intelligencer, Vol. 12 no. 3, 1990, pp. 37-41) bu teorem matematikte en güzel teorem seçilmiştir.

Eşittir eşittir demektir

Eşittir işareti = matematikte en sık rastlananlardan biridir ve çocukların en erken öğrendiklerindendir. Buna karşın ya da belki bu yüzden, hala çok kötü kullanılmaktadır.

Başa dönelim ve eşittir işaretini kullanırken her iki yandaki iki nesnenin *tamamen aynı* olduğunu ileri sürdüğümüzü not edelim – hemen hemen aynı olmak yetmez, yakın olmak yetmez, zayıf ışık altında ve uzaktan benzer olmak yetmez! Sayılar için bu eşitlik düşüncesi ikinci tür olmalıdır. Ama başka nesneler için de geçerlidir. O nedenle anımsayın:

Eşittir eşittir demektir.

Buna karşın, işaretin bir yanında bir fonksiyon varsa diğer yanında da bir fonksiyon olmak zorundadır. Bir yanda bir küme varsa o zaman diğer yanda bir küme olmalıdır.

Sayıların asal çarpanlarına ayrılması üzerine bir sorunun yanıtında öğrencilerimden biri

Çarpanlar: 6 = 2 ve 3

yazmış. Bunun kötü bir tümce olduğu ve '6 = 2' nin göze hoş gelmediği gözlemlerini bir yana bırakırsak, ifade edilen düşünce yanlıştır. 6 nın 2 ve 3 ün *çarpımına eşit olduğu* doğrudur ve böylece çarpanları 2 ve 3 tür, ama o '2 ve 3' e *eşit* değildir. Daha iyi bir yanıt şudur:

6 nın asal çarpanları 2 ve 3 tür.

Benzer şekilde, 'x^3 ün türevini bulun' alıştırmasını ele alalım; yanıtı

$$x^3 = 3x^2$$

değildir. Bu, matematiksel bir ifade değil, aslında bir denklemdir ama o öğrencinin savlamak istediği değildir. Doğru yazmanın bir yolu

$$\frac{d}{dx}\left(x^3\right) = 3x^2$$

dir.

Çok yaygın bir hata; eşitliklerin bir satırı bir sonrakine bağlayan halkanın zincirleri – sanki işlemin bir sonraki parçası imiş – gibi kullanılmasıdır. Sonuçları sergilemenin doğru yolu aşağıda veriliyor.

Eşittir işaretli sonuçların sergilenmesi

Bir ifade kısa ise çalışmayı satır boyunca yazarak gösteriniz. $(x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3) = x^2 + 6x + 9$ örneğindeki gibi.

Daha uzun bir hesaplama için sayfayı

$$\begin{aligned}(x + 3)^2 + x^2 &= (x + 3)(x + 3) + x^2 \\ &= x^2 + 6x + 9 + x^2 \\ &= 2x^2 + 6x + 9\end{aligned}$$

gibi, kullanmak gelenektir.[4]

[4] Ne yazık ki bu, noktalama kuralımızı bozmaktadır, ancak her şeye rağmen pratik ve geleneksel olmasından dolayı bunu yapıyoruz.

Bazen özel bir sonucun nereden geldiğini belirtmek durumunda kalırız. Aşağıda olduğu gibi düşünce akışını kesmekten kaçının:

$$= x^2 + 5y$$
$$\text{teorem 6 dan} = x^2 + 25 \ldots$$

Özel bir adımın neden doğru olduğunun ayrıntıları dahil edilmesi gerekiyorsa, o zaman aşağıdakini yerine getirin. Tartışma için Teorem 4.6 dan $y = 3$ olduğunu varsayalım. O zaman

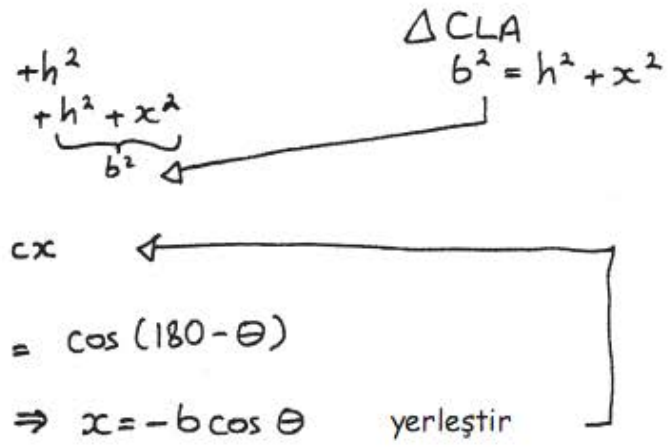
$$x^2 + 4x + y = x^2 + 4x + 3, \text{ Teorem 4.6 dan,}$$
$$= (x + 1)(x + 3) \ldots$$

yazarız. İlk satırdaki sembolik ifadeden sonraki ve teoremin anılmasından sonraki noktalamaya dikkat edin. İyi okunmasa da kağıt üzerinde açıktır.

Her yerde oklar çizmeyin

Bir sonuç daha önceki birini gerekli kılıyorsa, onu işaret eden uzun bir ok çizmek çekici olabilir. Bunu estetik nedenlerden dolayı yapmayın. Onun yerine istenilen sonuca göndermede bulunmak için bir isim, sayı ya da sembol verin.

Şekil 3.1 deki örneğimiz okları kullanmaktadır.



Bunu

> 'Birinci denklemi açıp ikincideki b^2 yi oraya yerleştirirsek $a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$ $(*)$ elde ederiz.
>
> ⋮
>
> $\ldots \Longrightarrow x = -b\cos\theta$. Bunu $(*)$ da yerine yazarsak $a^2 = b^2 + c^2 - 2cb\cos\theta$ sonucunu çıkartırız.'

biçimine dönüştürebiliriz.

Alıştırma 3.1

Kosinüs Kuralının kanıtını verilen öğütlere uyacak biçimde yeniden yazın.

Sonlandırma

Son okuma

Çalışmanızı daima son bir kez okuyun. Yani, hataları bulmak için baştan sonuna kadar okuyun. Bunlar hatalı karakter kullanımından ileri gelen (dizgi hataları olarak da bilinen) basım hataları, örneğin, kedi yerine medi gibi ya da heceleme hataları, örneğin, paralel yerine parralel gibi ya da dilbilgisi hataları, örneğin, 'Bir inek sürüsü tarlada*dırlar*' gibi ya da hatta matematiksel hatalar olabilir.

Çalışmanızı yavaş yavaş okuyun. Atlamalarınıza engel olduğu için yüksek sesle okumak birçok hatanın yakalanmasına yardımcı olabilir. Çalışmanızı bir başkasının okumasını sağlayın, çünkü orada gerçekte olması gerekenden çok düşündüğünüzün orada olduğunu okuyacaksınız. Eğer gözden geçiren hataları yakalayamıyorsa o zaman onu suçlamayın. Son sorumluluk her zaman yazara aittir!

Yararlı bir son okuma yöntemi son kez okumanın her seferinde bir yönü üzerinde yoğunlaşmaktır. Yani, baştan sona önce doğruluk için okuyun, yani doğru mudur? Sonra hecelemeyi, basım hatalarını, bütün ayraçlar kapatılmış mı? v.s. inceleyin. Ondan sonra da konunun sırasının düzgün ve okuduğunuz gibi akıcı olduğunu kontrol edin.

Derin düşünme

Derin düşünme, yazma işleminin önemli bir parçasıdır. Bir süre için çalışmanızı bir yana bırakın ve sonra ona yeni bir gözle bakın. Elbette süresi sınırlı bir iş için bu mümkün olmayabilir ama planlanmış bir iş için yapılabilir.

Yeniden okunduğunda 'Neleri atabilirim?' (sözcüklerden tasarruf etme amacı için) ne 'Neleri ekleyebilirim? (fazla örnek açıklık kazandırabilir) diye sorun. İlk durumda gereksiz sözcük ve tümceleri silin. Ayrıca 'Tüm semboller açıklanmış mıdır ve gerekli midir' diye sorun. Neyi amaçladığımı bu ifade eder mi ve yalın mıdır? Bu sadece bir semboller yığını mıdır? Ve elbette çok daha önemlisi 'Tümcelerle yazdım mı?'

Alıştırmalar

Alıştırma 3.2

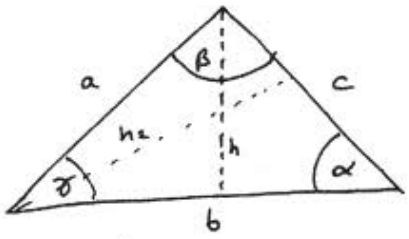
(i) **Sinüs Kuralı:** Kenarları a, b ve c uzunluklu ve bu kenarların karşılarındaki açılar sırasıyla α, β ve γ olan bir üçgenimiz olduğunu varsayalım. O zaman

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$

dir.

Bir sınavda 'Sinüs Kuralını ifade edin ve kanıtlayın' sorusuna bir öğrenci aşağıdaki yanıtı vermiştir:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$



$\sin\alpha = h/c \quad h = \sin\alpha c$

$\sin\gamma = h/a \quad h = \sin\alpha a$

ve

$\sin\beta = \frac{h_2}{a} \quad \sin\alpha = \frac{h_2}{b}$

$c\sin\alpha = a\sin\alpha$

$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c}$

$a\sin\beta = h_2 \quad b\sin\alpha = h_2$

$a\sin\beta = b\sin\alpha$

$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c}$

Şekil 3.2 Sinüs Kuralının öğrenci kanıtı

Bu yanıtı doğru ve kolay anlaşılır biçimde yeniden yazın.

(ii) Maksimum ve minimumları ve de eğri çizmesini biliyorsanız '$f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x$ fonksiyonunun maksimum ve minimum değerlerini bulun ve grafiğini çizin.' sorusuna aşağıda verilen yanıtı yeniden yazabilirsiniz.

$f = 2x^3 - 12x^2 + 18x$

$= 6x^2 - 24x + 18 \Rightarrow \quad x = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 - 4\times 18\times 6}}{2\times 6}$

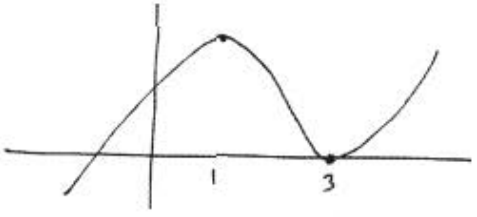
$\frac{24 \pm \sqrt{144}}{12}$

2 ± 1

$1, 3.$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x - 24 \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 12\times 1 - 24 = -12 < 0 \quad max$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 12\times 3 - 24 = 12 > 0 \quad min$



$y = 2 - 12 + 18 = 8$

$y = 2\times 27 - 12\times 9 + 18\times 3$

$= 0.$

Şekil 3.3 $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x$ in maksimum ve minimum değerlerini bulan bir öğrencinin yanıtı

(iii) Bazı eski matematik alıştırmalarınızı bulun ve çözümleri çok berrak olacak biçimde yeniden yazın. Arkadaşlarınızdan da örnekler sağlayabilirsiniz.

Özet

- Yalın, noktalamalı tümceler yazın.
- Yalınlığı koruyun.
- Ne yaptığınızı açıklayın.
- Savlarınızı açıklayın.
- Ne demek istediğinizi söyleyin.
- Genellikle, sembollerden çok sözcükleri kullanın.
- Eşittiri doğru olarak kullanın – eşittir eşittir demektir.
- Her yerde oklar çizmeyin – denklemleri tanımak için semboller ya da sayılar kullanın.
- Son bir kez okuyun.
- Derin düşünün.

4. BÖLÜM

Matematiği yazma II

Hem okuyarak hem de yazarak öğrenin.
Lord Acton, *Çağdaş Tarih üzerine dersler*, 1906

Bir önceki bölümde matematik yazmanın temel ilkeleriyle ilgilenmiştik. Burada çok daha kesin olacağız ve matematiğin sunumunu iyileştirmek için özel yöntem örneklerini vereceğiz.

Kendinizi açıkça ifade etme

'Eğer' kullanıyorsanız, o zaman 'o zaman' kullanın

'Eğer' sözcüğünü kullanıyorsanız, o zaman 'o zaman' sözcüğünü de kullanın. ('O zaman' sözcüğünden önce bir virgülle desteklemek gelenekseldir, ama bu göz ardı edilmiş gibidir.) Yani,

'x tek ise, o zaman x^2 tektir.'
'x tek ise, x^2 tektir.'

e yeğlenir. Önermeler 'o zaman' a gerek kalmaksızın 'eğer' içerecek şekilde yazılabilir:

'x tek ise x^2 tektir.'

Ama, genelde, kullanılmadığında bir karışıklık doğabileceğinden 'o zaman'ı kullanın. Örneğin,

'Eğer $a > 0$, $b > 0$, $a + b > 0$'

in anlamı nedir?

'Eğer $a > 0$ ise, o zaman $b > 0$ ve $a + b > 0$ dır.'

anlamına gelebilir. Çünkü belki a pozitiftir ve böylece b nin pozitif olmasını, örneğin $b = 5a$ gibi, zorlayabilir. Başka bir seçenek olarak

'Eğer $a > 0$ ve $b > 0$ ise, o zaman $a + b > 0$ dır.'

demek isteyebilir ki bu her zaman doğrudur. 'O zaman' ın atlanmış olması belirsizliğe sürükleyebilir. Çoğu zaman 'o zaman' sız bir önermenin anlamını okur sonuçlandırabilir ama onu korumak daha güvenilirdir. Okur anlamı başka ipuçlarından sonuçlandırmak durumunda değildir. İletişim sorumluluğunun yazara ait olduğunu anımsayın.

Her şey bir 'formül' değildir: şeyleri doğru isimleri ile adlandırın

Matematikte formüllere aşırı özen gösterilir ve konuya yeni başlayanların çoğu bir semboller topluluğuna bir formül ya da bir denklem adını verir. Genelde böyle bir topluluk bir **ifade** ya da bir **terim** dir; örneğin, $3x^2 - 7x$ bir ifadedir.

Bir **denklem**, iki ifadenin eşit olduğunu söylemeyi kapsar, örneğin, $3x^2 - 7x = 4x$ gibi. $x \leq 5$ gibi bir **eşitsizlik** bir denklem değildir, çünkü bir *denklem* bir *eşitlik* olmalıdır.

Bir **formül** bir bağıntı ya da kuralı ifade eder. Bir şeyi başka bir ifadeden hesaplayan bir yöntem verildiğinde, formül çok sık kullanılır; örneğin, $ax^2 + bx + c = 0$ ı çalışmak için $D = \sqrt{b^2 - 4ac}$ ye bakarız. Bu D için formüldür (bazen diskriminant olarak bilinir).

O halde, bir nesnenin doğru isimle çağrılmasını sağlayın. Kavramları ayırt etmek için de dikkatli olunmalıdır; örneğin, bir küme olmakla bir kümenin elemanı olmak arasındaki gibi.

Bir başka örnek, bir fonksiyon ile bir noktadaki değerinin ayırt edilmesidir; yani, f ile $f(x)$ arasındaki ayrım. İlki f diye adlandırdığımız bir fonksiyonu temsil ederken $f(x)$, f fonksiyonunun x deki *değeridir* (10. sayfaya bakın). Kesin konuşmak gerekirse, $f(x)$ e fonksiyon dememelisiniz ama bu ayrım daha iyi bilmesi gereken (ben de dahil) matematikçiler tarafından sıklıkla önemsenmez.

Özet olarak, yukarıdakine göre $f(x) = 3x^2$ özel bir f fonksiyonunun değerini veren bir denklem (ya da ifade ya da bir formül) dir.

'O' dan kaçının

Neden söz ettiğiniz hakkında açık olun. 'O' sözcüğü İngiliz dilinde çok yararlı bir sözcüktür, çünkü o şeyin ne olduğunu söylemeksizin o şeyden söz etmemize olanak sağlar. Ne yazık ki 'o' belirsiz olabilir. Matematik yazarken sözcük, neden söz ettiğimizi gerçekten bilmediğimizi gizlemenin bir yolu olarak kullanılabilir. Çoğunlukla bu kendini aldatmaktır – onu bilerek değil de bilinçaltında yaparız.

'O' sözcüğünü kullandığınıza karar veriyorsanız, o zaman onun yerine uygun sözcüğü ya da deyimi yerleştirin. Tümce hala anlamlı mıdır? Değilse, onu değiştirin.

Ondalık yaklaştırmalar

Kuramsal matematikte sayıların ondalık yaklaştırmalarını kullanma eğiliminde değilizdir ama onlar uygulamalı matematikte ya da istatistikte çok yaygındır. Bu, onların kuramsal matematikte hiç kullanılmadığı anlamına gelmez. Şekil çiziyorsanız, o zaman ondalık yaklaştırmalar kullanmaya izin verilir: örneğin, bir kuadratiğin eksenleri kestiği yerleri bulmada olduğu gibi.

O halde kuramsal matematikte en son yanıt sin 7 ise, o zaman 0.656986598 demektense öyle bırakın. Yaklaştırmalar kullanmanız gerekiyorsa, o zaman $\simeq$ ya da $\approx$ sembollerini kullanın. Böylece $\pi \approx 3.14$ ve $\sqrt{2} \simeq 1.41$ in her ikisi de kabul edilebilirdir. $\pi = 3.14$ yazma düşüncesi gerçekte yanlıştır – Anımsayalım, sayfa 30 da eşittir eşittir demekti.

$\sin(\pi / 6)$ gibi ifadeler için 1/2 ya da 0.5 kullanın. Bir yaklaştırma olmadığı için 0.5 in kullanımının uygun olduğunu kaydedelim – biz ondalıklara değil, yaklaştırmalara karşıyız.

Sözcükler mi semboller mi?

Tümcelere bir sembolle başlamayın

Tümceleri bir sembolle başlatmayın. Böylece bir sonraki tümce kullanılmamalıdır.

'f, $\mathbb{R}$ tanım bölgeli bir fonksiyondur.'*

Bu, her tümcenin bir büyük harfle başladığı kuralını bozmanın önüne geçer ama aynı şey sembol bir büyük harf olsa bile uygulanır; örneğin, 'X sonlu bir kümedir' kötüdür.

'Varsayalım ki x, X in bir elemanıdır. x, Y de değildir.'

benzeri bir tümcemiz olabilirdi.

Matematikte nokta bir çarpım sembolü olarak da kullanıldığından bu tümcenin ortası X kere x olarak okunabilirdi.

Sorundan kaçınmak için sembolün temsil ettiği nesnenin betimlenmesinden yararlanın. Sözgelimi, önceki doğru olmayan tümceleri

'Fonksiyon f nin tanım kümesi $\mathbb{R}$ dir.'

'Küme X sonludur.'

ve

'Varsayalım ki x, X in bir elemanıdır ve x, Y de değildir.'

gibi yeniden yazabiliriz. Bir diğer yaklaşım, tümceleri başlatmak için

'Biz $g(x) = 2x^4 - 5x - 3$ e sahibiz.'

benzeri deyimler kullanmaktır.

Gerektirme sembolünün laneti

Acemi matematikçi tarafından kötü ve aşırı kullanılan bir sembol gerektirme sembolüdür: $\Longrightarrow$. Her şeyden önce bu 'gerektirir' ya da 'gerektirir ki' olarak okunmalıdır ve bir eşittir işareti olarak kullanılmamalıdır; o halde $5 - 3 \Rightarrow 2$ yazmayın.

Daha sonraki bölümlerde göreceğimiz üzere (ve şimdiden onu ifade etmenin hiçbir sakıncası yoktur), doğru kullanımı

'önerme $\Longrightarrow$ önerme.'

dir.

* Bu kuralın dilimizde genellikle geçerli olmadığını anımsatalım (ç.n.).

Örneğin,

'x tektir $\Longrightarrow$ x^2 tektir.'

Önceden olduğu gibi, hiçbir tümce bir eşittir işareti ile başlamaz, hiçbir tümce 'gerektirir ki' ile başlamaz, o halde $\Longrightarrow$ ile asla başlamaz. Eğer bir gerektirme ile başlama gereği duyuyorsanız, o zaman 'Bu gerektir ki …' yazmak daha iyi olabilir. Aynı şekilde, çoğu öğrenci 'Bir sonra 'yapacağımız budur.' benzeri bir şeyi, bir satırı bir sonraki ile bağlantılandırma yöntemi olarak kullanır.

Onu nerede kullanmak gerektiğinden emin değilseniz, o zaman, genelde yardımcı olacağından, $\Longrightarrow$ sembollü tümcede onun yerine 'gerektirir' ya da 'gerektirir ki' alındığını yüksek sesle söyleyin.

Benzer sorunlar $\Longleftrightarrow$ çift koşullu sembolüyle yaşanır; 9. Bölümde göreceğiz. Bu, iki önermenin denk olduğunu iddia etmek için kullanılır. Kesin konuşmak gerekirse, onu uzun bir eşittir işaretlerinin listesi yazarken dahil etmemiz gerekir. Bunun bir örneği 21. Bölümde verilecektir.

$\Longrightarrow$ ya da $\Longleftrightarrow$ nin nasıl kullanılması gerektiğinden emin değilseniz, o zaman 7. ve 9. Bölümlere başvurun.

Ortak sembolleri ve notasyonları kullanın

Bazı sembollere ortak belirli bir anlam verilmiştir. Bunun en önemli örneği; çapı ile bölünen bir çemberin çevresini temsil eden π dir. Bu oranı π den başka bir şeyle göstermek sıra dışı olurdu, ama teknik açıdan bir argümanı 'Çapı ile bölünen bir çemberin çevresi α olsun.' gibi başlatmak doğrudur.

Bunun yanında π başka şeyleri de ifade edebilir; örneğin, çoğu zaman bir projeksiyon –izdüşüm– dönüşümü için kullanılır (çünkü π, p yi temsil eder ve p, projeksiyonun ilk harfidir). Cebirsel topolojide bir uzayın temel grubu için de kullanılabilir.

ε gibi diğer semboller genellikle küçük bir pozitif sayıyı, n bir doğal sayıyı, ve v.b. gösterirler. Bu uzlaşmaları bilin ve onları çalışmanızın okunuşunu kolaylaştırmak için kullanın. Bir örnekler listesi için Ek B ye bakın.

Sembollerinizi ve notasyonunuzu tanımlayın

Gördüğümüz üzere belirli nesneler için, örneğin f nin düzenli olarak bir fonksiyonu gösterdiği gibi, bir sürü sembol kullanıla gelmektedir ve kümeler için X ve Y gibi büyük harfler, bu kümelerin elemanlarını göstermek için x gibi küçük harfler kullandığım dikkatinizi çekmiş olabilir.

Bu uzlaşmalara karşın, tamamen belirli anlamlı olması için notasyonunuzu tanımlamalısınız, çünkü bir okur sizinkinden farklı bir notasyon kullanabilir. Böylece, hiçbir açıklama yapmadan sadece X kullanmak yerine 'X bir küme olsun.' yazarız. Bunun bir başka örneği, Alıştırma 3.2 de görülebilir; orada öğrenci a, b, c, α, β, γ harflerinin tanımlanmadığı Sinüs Kuralının bir ifadesini vermiştir. O soruya verdiğiniz *yanıta* harflerin bir tanımını eklediniz mi?

Bazı notasyonların tanıtılmasına gerek yoktur; genel durumdan çoğu matematikçi π nin neyi temsil ettiğini anlayacaktır ve Σ nın toplamayla ve $\int$ nin integrasyonla ve v.b. ilgili olduğunu bilecektir.

İlerlemelerin kat edilmesi

Bağlantılı tümcecikler kullanın

Yazarken bir diğer yaygın sorun, bir argümandaki varsayımların ve çıkarımların açık bir biçimde ayırt edilmemesidir. Bundan kaçınmak için, bir açıklama getirerek, varsayımlar ve çıkarımların yapıldığını göstermek için

'buradan, olarak, o nedenle, mademki ve o halde'

gibi bağlantılı sözcük ve tümcecikler kullanmalısınız. Bir matematik kitabına baktıysanız mademki, buradan ve o nedenle nin bol bol kullanımını göreceksiniz. Bir örnek olarak, sayıları bölerken ayraçların sırasının önemli olduğunun açıklamasını değerlendirelim.

'(8 / 2) / 4 = 1, 8 / (2 / 4) = 16.'

yazmak yetmez.

'(8 / 2) / 4 = 1 dir ama 8 / (2 / 4) = 16 dır.'

demeliyiz. 'Ama' nın hesaplar arasında bir farkın olduğu önemli düşüncesine dikkat çektiğini unutmayınız. 'Ve' sözcüğünü kullanmak önermeyi yanlış yapmazdı ama dikkat çekilmeyebilirdi.

Eşanlamlı sözcükler kullanın

Sözcüklerin yinelenmesi okuyanın canını sıkabilir. Eşanlamlı sözcüklerin kullanılması konunun daha ilginç olmasına yardım eder.

Çıkarım için bazı eşanlamlı sözcükler

'buradan, o halde, sonucudur, bir sonuç olarak, bundan dolayı, bu nedenle, böylelikle, ona göre, o zaman'

dır.

Çoğu eşanlamlı sözcüklerin kullanımlarında ince farlılıklar olabilir; 'buradan' nın yerini her zaman 'o zaman' alamayabilir.

Açıklamalar için eşanlamlı sözcükler

'zira, çünkü, mademki, sayesinde, gereği, yüzünden'

dir.

'Varsayalım' içeren bir tümce kuruluşu yerine 'olsun' içereni kullanabiliriz. Örneğin,

'Varsayalım ki X bir kümedir.'*

yerine

'X bir küme olsun.'

gibi.

'Varsayalım ki', yani 'varsayalım' dan sonra 'ki' dediğimize dikkat edin.

* Bu tümcenin Türkçe 'X in bir küme olduğunu varsayalım.' olarak ifade edildiğini biliyoruz (ç.n.).

Alıştırmalar

Alıştırma 4.1

(i) Bir önceki bölümün alıştırmalarındaki matematiği yeniden yazarak iyileştirebilir misiniz?

(ii) Şimdi, çok daha genel olarak, alıştırmalara önceden verdiğiniz yanıtlardan bazılarını bulun ve bu bölümün önderliğinde onları yeniden yazın.

Özet

- ►
- ► Eğeri kullanıyorsanız, o zaman o zamanı kullanın.
- ► Her şey bir formül değildir. Şeyleri doğru isimleriyle adlandırın.
- ► 'O' sözcüğünü kullanmayın.
- ► Kuramsal matematikte ondalık yaklaştırmalardan kaçının.
- ► Tümcelere bir sembolle başlamayın.°
- ► $\Longrightarrow$ gerektirme sembolünü doğru kullanın.
- ► Ortak sembolleri ve notasyonu kullanın ve onları önce tanımlayın.
- ► Bağlantılı tümcecik ve eşanlamlı sözcükleri kullanın.

° Bu öğüt Türkçe yazmalarda geçerli değildir (ç.n.).

5. BÖLÜM

Problemler nasıl çözülür

Sorun çözümü görememelerinde değil,
problemi görememelerinde yatar.
G. K. Chesterton, *Peder Brown Skandalı*, 'Toplu İğnenin Ucu'

Matematik problemlerini çözmek zordur ve tüm problemleri çözen sihirli hiçbir formül yoktur. Öyle olsaydı, herkes çözebilirdi ve işverenler problem çözen matematikçileri çalıştırmak için o kadar hevesli olmazlardı. Yine de bu bölümde problemlerin nasıl çözüldüğü üzerine en az bazı düşünceler vermeye çalışacağız.

Her şeyden önce bir alıştırma ile bir problem arasındaki farkı ayırt edelim. Bir alıştırma alışılagelen bir yöntemle – örneğin ikinci dereceden denklemin köklerini bulmak gibi – çözülebilen bir şeydir. Bir problem daha çok düşünce isteyen bir şeydir; örneğin, yanıtı bulmak için bir takım düşünceleri tasarlamanız ve yeni bir kombinasyonla alıştırmalarda öğrenilen rutin yöntemleri – uygulamanız gerekebilir. Bununla birlikte, bu kitapta 'alıştırmalar ve problemler' ifadesini yazmaktan kurtulmak için problemleri alıştırmaların içine gruplayacağız. Ancak, gerçekte bir ayrım olduğunu bilmekte yarar vardır.

Çoğu düşük düzeyli matematik bir soruya yanıt vermek için doğru teknik ya da formülü seçmeyi ve uygulamayı gerektirir. Bu bazı yüksek-düzeyli matematik için de doğru olduğu halde, görevimiz önermelerin doğruluğunu gerçeklemektir, örneğin 'Sonsuz sayıda asal sayı vardır.'* Bu tip problemler için gerekli teknikler, doğru alıştırma tekniğini uygulama yollarından farklıdır.

Problem çözme üzerine pek çok kitap yazılmıştır. Bunlardan bir ya da ikisini okumaya değebilir ama problemlerin nasıl çözüldüğünü öğrenmenin en iyi yolu problem çözmektir. Tecrübe önemlidir. Bunu söylememize rağmen, problem çözerken uygulayabileceğiniz yararlı uyarılar vardır. Bu bölümde problem çözmek için Polya'nın dörtnokta planını sunacağım ve matematikte nasıl uygulandığı üzerine bazı öğütlerde bulunacağım. Önce planı ve teknikleri bilinçle uygulamalısınız ve sonra zamanla yavaş yavaş onları bilinçaltınıza yerleştirmelisiniz.

Örnek problemler

Problem çözmeyi tartışmak için çözülecek problemlerin olması gerekir. İşte üç örnek.

(i) Kendisi de dahil n ye kadar tüm sayıları çarparak bir n doğal sayısının **faktöriyelini** tanımlayabiliriz. Faktöriyel n yi $n!$ ile gösteriyoruz ve 'n faktöriyel' olarak okuyoruz. Örneğin, $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ dir.

* 'There is an infinite number of prime numbers' önermesinin 'There are infinitely many prime numbers' olarak ifade edilmesi daha doğru olur, çünkü sonsuz bir sayı değildir (ç.n.).

Problem: 100! in sonunda kaç tane sıfır vardır?

(ii) 6. sayfadaki sonlu bir kümenin kardinalitesi tanımını anımsayalım. Kardinalite, kümedeki eleman sayısından ibarettir.

Problem: X ve Y nin iki sonlu küme olduğunu varsayalım. $|X|, |Y|, |X \cup Y|$ ve $|X \cap Y|$ leri aralarında ilişkilendiren bir formül bulun.

(iii) Her $n = 1, 2, 3, \ldots$ için $x^2 + y^2 = z^n$ denkleminin pozitif tamsayı çözümlere sahip olduğunu gösterin.

Alıştırma 5. 1

Aşağıdakileri okumadan önce bu problemleri çözmeye çalışın. Problemlere nasıl yaklaştığınızı ve hangi teknikleri kullandığınızı düşünün. Bu aşamada bir yanıt bulmanızı beklemiyorum; problemler sizi düşünmeye sevk etmek ve nasıl düşünüldüğü üzerine düşündürmek için konulmuştur.

Problem (i) klasik bir problemdir. O niçin matematiksel kurama gereksinim duyduğumuzu gösterir. 100! i elle hesaplamayı *deneyebilirdiniz* ama aniden çok zorlaşırdı. Bir kuram geliştirerek sadece yanıtı bulmakla kalmayız, aynı zamanda 1000! in, 10000! in ya da hatta 99! veya 97! in sonundaki sıfır sayısını hesaplamak için akıl yürütmemizi de genelleştirebilirdik!

Polya'nın dört-adım planı

Problem-çözme üzerine klasik kitap, G. Polya'nın *Çözüm Nasıl Yapılır* kitabıdır. Sırf matematiksel değil, her türden problemi çözmek için aşağıdaki dört-adım planını verir:

(i) Problemi anlayın.
(ii) Bir plan tasarlayın.
(iii) Planı yerine getirin.
(iv) Geriye bakın.

İlk bakışta bu aşikar bir plan gibi gelebilir – (ii) ve (iii) şıkları 'problemi çözün' gibi kuşkulu görünebilir – ancak bu yeterli kavrayışı sağlamaz. Aşağıda ipuçları bu planın başlıkları altında gruplandırılmıştır. Bu yol göstermeler problem çözmeye sihirli bir formül sağlamak için değil, yardımcı olmayı amaçladıkları içindir. Hiçbir sihirli formül yoktur. İpuçlarının sırayla yerine getirilmesi gerekmez; aralarında geri ileri atlamalar olabilir.

Problemi anlama

Önce problemi anlamamız ve dikkatle incelememiz gerekir. Deneme ve araştırma sayesinde özel bir önermenin doğruluğuna kendinizi inandırın.

Problemdeki tüm sözcük ve sembolleri anlayın

Bir probleme takılan öğrencilerle tartışırken karşılaştığım ortak bir sorun, tüm sözcük ve sembolleri anımsamamış olmalarıdır. Onlara belirli bir sözcüğün ne anlama geldiğini sorduğumda, kararsız kalırlar. Yukarıdaki (ii) problemini ele alalım; eğer kardinalitenin

ne anlama geldiğini ya da $|\ |$ sembollerinin ne olduğunu bilmezseniz, o zaman soruyu yanıtlamanız beklenemez.

Bir dereceye kadar, öğrencilerin bu basit hatası daha önceki matematik bilgilerinden kaynaklanır. Yüksek-düzeyli matematik düşük-düzeyli matematiğe göre kavramları çok daha iyi anlamayı kapsar. Düşük-düzeyli matematik, doğası gereği, iyi-tanımlı bir yöntemin izlenebildiği – zincir kuralı ile bir türevin bulunması gibi – problemlerle ilgilidir. Bu problemlerde öğrenciler, çalışılmış bir örneği kalıp olarak kullanarak çok ileri gidebilirler ve gerçekte türev tanımını anlamalarına bile gerek olmayabilir.

Yüksek-düzey durumunda bir çözümün anahtarının, özel bir tanımın koşullarını kullanmak olduğunu anlamak gerekir. Eğer tanımın o koşulu sağlandığını bilmiyorsanız, problemi çözmeniz olası görünmemektedir. O nedenle tüm gerekli tanımları *bildiğinizden* ve *anladığınızdan* emin olun.

Öngörüde bulunma – sezginizi kullanın

Öngörüde bulunmak yararlıdır. Ya da daha ziyade, bilgiye dayalı öngörüler iyidir – yabanıl ve asılsız öngörüler yararlı değildir.

Bir problemi çözmek için bilgiye dayalı bir öngörüde bulunarak sezgilerinizi geliştirebilirsiniz. Bu, gerekli yöntem hakkında ya da içinde bir çözümün olduğu değerler alanı üzerine sadece bir tahmindir, ama denemeye değer.

Alıştırma 5.2

Yukarıdaki üç problemin her biri için bilgiye dayalı bir öngörü nedir?

Varsayım ve sonuç hakkında ne biliyorsunuz?

Bir problem iki parçaya bölünebilir: **varsayım** ve **sonuç**. Varsayım, problemde bize verilendir, yani bildiğimizdir: örneğin, x, y ve z, $x^2+y^2=z^n$ denklemini sağlar; ya da A ve B kümeleri sonsuzdur. Varsayım, sıklıkla bir takım şıklar içerdiğinden bazen problemin varsayımlarından söz ederiz. Varsayım, **kabul** (ya da kabuller) olarak da bilinir.

Sonuç, bilmek istediğimiz ya da ortaya koymak istediğimizdir. Örneğin, tamsayılar olan x, y ve z yi bulabilmek ya da A, B, $A \cup B$ ve $A \cap B$ nin kardinalitesini ilişkilendiren bir formül bulabilmemiz gibi.

Problemleri çözmek için iyi bir strateji, teoremin varsayımı ve sonucu hakkında ne bildiğinizi kaydetmektir. Yani neyi biliyorsunuz ve neyi bilmek istiyorsunuz. Düşüncelerin tetiklenmesine bu yardım edebilir.

Geriye doğru ve ileriye doğru çalışın

Çözüm bulurken varsayımlarla başlayıp sonuca giderek çalışmamalısınız. Sonuçtan başlayarak onun neyi gerektirdiğini düşünmeye çabalamalısınız. Bu şekilde varsayımlara doğru çalışılabilir. Bir kere çözüm açıklık kazandığında, onu sonuca giden varsayımlarla yeniden yazın. Örneğin, 100! in sonunda tam x tane sıfır varsa, bu ne anlama gelir? Bu, y bir sıfırla bitmemek koşuluyla, $100! = y \times 10^x$ demek ister. O halde 100! den

10 çarpanlarını çıkarmalıyız. Hemen 100! e bakın ve tanımdan 10 nun çarpanlarının nasıl ortaya çıkacağını görün. Bu şekilde davranarak, yani geriye doğru ve ileriye doğru giderek 'ortada buluşan' bir akıl yürütme üretebiliriz.

Yalnız bu yöntem, kanıtlanacak olanı kabul ettiğimizden dolayı tehlikelidir. Bu sorun 21. Bölümde daha ayrıntılı ele alınacaktır.

Başlangıç ve özel durumlarla çalışın

Birçok problemin indisli biçimi olacaktır. Örneğin, problem (iii) de indis n dir. İndis herhangi bir doğal sayı olabilir ve olası her n için x, y ve z tamsayılarını bulmamız gerekir.

Bu indisli problemlerde problemi başlangıç durumları için, örneğin, $n = 1$, 2 ve 3 için, çözmeye çaba göstermelisiniz. Bu size ille de genel yanıtı vermeyebilecektir, ama problemin kavranışına ve bir 'kanı' edinmeye olanak sağlayacaktır.

Problem (iii) de $n = 1$ ise $x^2 + y^2 = z$ ye çözümler bulmamız gerektiğini görüyoruz. Bu kolaydır; keyfi x ve y tamsayıları alalım, o zaman $x^2 + y^2$ de bir tamsayıdır; bunu z ye eşit alalım. Örneğin, $x = 3$ ve $y = 5$ olsun; o zaman $x^2 + y^2 = 3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34$ bulunur. Böylece $(x, y, z) = (3, 5, 34)$ olası bir çözümdür. Sorunun, çözümlerin tüm n ler için var olduğunu gösterin, dediğini anımsatalım; özel bir n için *tüm* olası çözümleri bulmak durumunda değiliz.

$n = 2$ için $x^2 + y^2 = z^2$ yi çözmemiz gerekiyor. Bu birçok çözümü olan, örneğin, $3^2 + 4^2 = 5^2$ gibi, ünlü Pisagor denklemidir.

$n = 3$ için $x^2 + y^2 = z^3$ ü çözmeliyiz. Bu denklemle oynayın ve bir çözüm elde etmek için $n = 2$ durumundan yararlanabiliyor musunuz, görün. Bunu size bir yanıt verecektir diye önermiyorum, kendim de aynı şeyi deneyeceğimden dolayı, öneriyorum; yani, bir durumdaki yanıtı bir diğer durumun yanıtını bulmak için kullanın. Farklı bir yaklaşım yöntemi düşünebilir misiniz?

Somut bir durumla çalışın

Yukarıdaki görüşe tamamen benzer bir biçimde, soyut bir problem için somut bir duruma bakın. Kümelerle ilgili bir problemde özel bir küme alalım. Böylece problem (ii) için $X = \{a, b, c, d\}$ ve $Y = \{b, d, e, f, g\}$ olmak üzere, bir küme ele alalım. Bu durumda $|X| = 4$, $|Y| = 5$ olduğunu görüyoruz. Ayrıca $|X \cup Y| = |\{a, b, c, d, e, f, g\}| = 7$ ve $|X \cap Y| = |\{b, d\}| = 2$ buluyoruz. Dolayısıyla 5, 4, 2 ve 7 yi aralarında bağlayan bir formüle gereksinim duyuyoruz. Örneği anlamadıysanız, bazı başka örneklerle oynayın. X ve Y yi bir ya da iki elemanla değişikliğe uğratın ve kardinatelerinin nasıl değiştiğini görün.

Genel bir teoremi kanıtlarken, onun bir ya da iki özel durum için geçerli olduğunu göstermenin yine de yeterli olmadığına dikkat edin. İleriki bölümlerde bu konudan daha çok söz edilecektir. Özel durumların incelenmesi problemi kavramayı ve açmayı amaçlar.

Bir şekil çizin

İnsan usu resimlerle çalışırken daha sağlıklıdır. Resimler, bir problem üzerine sezgi geliştirmek ve sonra bir çözüm önerisinde bulunmak için mükemmeldir. Aslında, geometri ya da fizik problemlerinde bir diagram çoğu zaman vazgeçilmezdir.

Problem (ii) için Venn diagramı çizmek çok aydınlatıcıdır.

Benzer bir problem düşünün

Daha önce ifade edildiği gibi, problem çözmede başarılı olmanın yolu problemler çözmektir. Benzer problemler sıklıkla benzer çözümlere sahiptirler, dolaysıyla daha önce çözdüğünüz benzer varsayımlı ya da sonuçlu problemler üzerinde düşünün ve aynı yöntemin çalışıp çalışmadığını görün.

Problem (iii) durumunda, $n = 2$ için sonsuz çoklukta çözüm üretmenin bir yolu vardır; bu çözümlere *Pisagor üçlüleri* denir. Pisagor üçlülerini bulma yönteminin probleminizin çözümüne uyarlanabilirliğini görmek için bunları yakından araştırmaya değer. (Yine, bunun olacağını söylemiyorum, sadece düşünmeye değeceğini söylüyorum!)

Denk bir problem bulun

Problemi yeniden açık bir şekilde ifade etmekte yarar olabilir. Söz gelimi, problemin iki fonksiyonun eşitliğinin gösterilmesi olduğunu varsayalım. Bu farklarının sıfır olduğunu göstermeye denktir. Bunu aşağıdaki gibi çok daha açık söyleyebiliriz. f ve g nin tek gerçel değişkenli fonksiyonlar olduğunu varsayalım. Yeni bir h fonksiyonunu

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

ile tanımlayalım. O zaman

'Her x için $f(x) = g(x)$', 'Her x için $h(x) = 0$'

a denktir. Bir fonksiyon sıfır fonksiyonudur sonuçlu teoremler arayın – belki yukarıdaki size yanıtı sağlayacaktır.

Daha kolay bir problem çözün

Bu özel bir durumla çalışmaya benzer. Daha kolay bir problem çözme deneyimi, genel olanı çözmek için yol gösterebilir.

Örneğin, problem (i) de 100! yerine 10! ile çalışmak daha kolay olabilir. Ne olduğunu görmek için deneyin. Bazı düşünceler önerebilir. Problem (iii) de, z tek ya da çift ise ne olacağını değerlendirin.

Sembollerle ya da sözcüklerle yeniden yazın

Matematik sözcükler ve sembollerle betimlenebilir. Çoğu kez ikisi arasında değiş tokuş etmek yararlıdır. Buna iyi bir Örnek 24.8 de bulunabilir. 16. Bölümde sözcüklere karşı semboller görüşüne yeniden döneceğiz.

Bir plan tasarlamak

Bir kez problem anlaşıldığında, onu çözmek için bir plan yapın.

Problemi parçalara ayırın

İlk yaklaşımlardan biri problemi parçalara ayırmaktır; her bir parçanın kolay bir problem, tercihen sade bir alıştırma, olması beklenir. O nedenle problemi mümkün olduğu kadar doğal durumlara bölün.

Örneğin, bir fonksiyonu türevlerken fonksiyonun $x^2\cos(x)$ gibi sade bir çarpım olduğu örneklerini nadiren görürüz. $x^3\cos(x^2+5)+e^{\cos(2x)}$ gibi çok daha karmaşık örnekler görürüz ve çarpım kuralı, zincir kuralı v.s. gibi bir takım farklı kurallar kullanmak zorunda kalırız. O nedenle problemi bu kurallara göre farklı parçalara indirgeyin.

Şimdi problem (iii) ü ele alalım; bu problem doğal sayılar içermektedir. Doğal sayıların kümesi çift sayılar ve tek sayılar olarak ikiye bölünebilir. Çift sayılar durumuna, yani bazı m doğal sayısı için $n = 2m$ durumuna bakalım. (n tek durumuna baksaydık, o zaman bir m için $n = 2m + 1$ alırdık.)

Denklem

$$x^2 + y^2 = z^{2m} = (z^m)^2$$

ye dönüşür. Böylece ($w = z^m$ olmak üzere) $x^2 + y^2 = w^2$ biçimli bir şeye sahip oluruz. Bu $n = 2$ durumuna benzemektedir. Belki bize yardım etmesi için o durumda elde ettiğimiz sonucu kullanabiliriz.

Daha sonra A ve B kümelerinin eşit olduklarını göstermek için ayrı ayrı $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ yı göstermenin iyi bir strateji olduğunu göreceğiz. Bir kümenin bir diğerinin içinde olduğunu göstermek kolay bir iştir.

Burada altı çizilmesi gereken mesele şudur: Eğer problemin tamamını yanıtlayamıyorsak, o zaman belki bir kısmını yanıtlayabiliriz. Kısmi bir yanıt bulma sıklıkla başarı duygusu, dolayısıyla problemin üstesinden gelme cesareti verir.

Doğru düzeyi bulun

Matematik problemlerinde çalışılabilen düzeyler vardır. Bazı problemler bir teoremin uygulamasıyla, diğerleri bir tanımın uygulamasıyla çözülebilir. Bunun bol örneğini IV. ve V. Kısımlarda göreceğiz.

Şeylere isimler verin

Bir nesneye bir isim vermek onun kullanılmasına yardım eder ve bir problemin matematik diline çevrilmesine olanak sağlar. (Doğal olarak bu, sözcüklerin sembollerle değiştirilmesinden sonuçlanacaktır.) Böyle bir dil oluştuğunda, problemi çözmeyi umabilirsiniz.

Örneğin, problemin bir su tankının saatte 10 m^3 miktarda boşaltıldığı bilgisini içerdiğini varsayalım. Bu durumda suyun hacminin V harfi (Volume den dolayı) ile isimlendiriyoruz ve sonra hacim değişim miktarını $dV/dt = -10$ olarak yazıyoruz (hacim azaldığı için, negatiftir.)

Düzenli olarak bir yöntem seçin

Genel yöntemleri bilmek ve onları düzenli ve *bilinçli* olarak uygulamak işe yarar. Bir fonksiyonu integre ederken kısmi integrasyon ve değiştirim gibi yöntemler mevcuttur. Doğru yöntemi bekleyen soruya uzun uzun bakmaktansa, sistemli davranın ve 'Bunu kısmi integrasyonla çözebilir miyim? Kısımlar ne olabilir?' diye sorun. Eğer o yöntem çalışmıyorsa, 'Onu değiştirim ile çözebilir miyim? Hangi tür değiştirimler çalışabilir?' v.s. diye sorun.

Aynısı bir önermeyi kanıtlarken de doğrudur. IV. Kısımda göreceğimiz üzere, matematikçinin elinde bir çok kanıt yöntemleri vardır; örneğin, doğrudan, çelişki, karşıt ters, tümevarım ve tüketici yöntemleri. Bununla birlikte, en aşikar olduğundan – doğrudan varsayımlardan sonuçlara gidilebilir – doğrudan yöntem genelde aceminin seçtiği bir yöntemdir. Bilerek sırasıyla diğer yöntemleri denemek ve yanıtı verdiğini görmek verimli olabilir. Daha sonra bu yöntemlerden çok söz edilecektir.

Planı yerine getirmek

Bir kez plan yapıldıktan sonra yerine getirilmelidir. Şimdiye kadar bir sonucun niçin doğru olduğu hakkında iyi bir görüşe sahip olmalısınız, sonra sizi neyin ikna ettiğini iyice anlamalı ve onu irdelemelisiniz.

Her bir adımın doğruluğunu kontrol edin – sezgi kullanmayın

Her bir adımı özenle inceleyin ve doğruluğunu sağlayın. Bir akıl yürütme, en zayıf halkası kuvvetli olduğu sürece bir akıl yürütmedir. Bir tek ufak adımın yanlış olması onun tamamını yanlış yapar. Tam burada sezgi kullanmaktan kaçınılmalıdır. Bir şeyin doğru olduğunu düşünüyorsanız, o zaman lojiğin küçük adımlarını kullanarak onu, kararlı bir şekilde, kanıtlayın. Bunun nasıl yapıldığını II. ve IV. Kısımlarda göreceğiz.

Geriye bakmak

Bir çözüm üretmiş olsanız bile, problem-çözme planı tamamlanmamıştır. Her zamanki gibi ne yapmış olduğunuz üzerine iyice düşünmelisiniz. En sonunda, problem çözmeden ne öğrenmiş oldunuz?

Yanıtın doğruluğunu kontrol edin

Bir yanıtı doğrulamak önemlidir. Önce, yanıt anlamlı mıdır? – doğru düzenlenmiş midir? Arabanızın saatte bir milyon mil gittiğini ya da Güneş'in Dünya'dan 299 km uzakta olduğunu hesaplamış iseniz, o zaman yanıtınızın doğru olduğu kuşkuludur.

Başka bir sürü test mevcuttur. Örneğin, bir üçgenin iç açıları toplamı 180° olmalıdır. Bir diğer basit test, *parite* düşüncesini kapsar. Bunu fiilen görmek iyi bir tanım vermekten daha kolaydır. $51^2 = 34^2 + 46^2$ denklemi yanlıştır. Hiç hesapsız bunu görmek kolaydır: sol taraf tektir ve sağ taraf çifttir. Parite budur!

Denklemleri çözerken bir çözümün bulunması zor olabilir ama gerçekten bir çözüm olduğunu kontrol etmek için onu denklemlere yerleştirmek yeterlidir. Örneğin, $x = -3$ ün $2x^2 - x - 10 = 0$ denkleminin bir çözümü olduğunu hesapladığımızı varsayalım. Bunun doğruluğunu kolayca kontrol edebiliriz. x i sol tarafa yerleştirin ve sıfır sonuçlanıp sonuçlanmadığını görün:

$$2x^2 - x - 10 = 2(-3)^2 - (-3) - 10 = 2(9) + 3 - 10 = 18 + 3 - 10 = 11 \neq 0.$$

O halde hesabımız hatalıdır, $x = -3$ bir çözüm değildir. Benzer kontrolleri diferansiyel denklemlerin çözümleri için yapabiliriz.

Aynı şey F yi elde etmek için bir f fonksiyonunu integre ediyorsak, o zaman F nin diferansiyeli f yi vermek zorundadır. Bu integrallerin yalın bir kontrolünü sağlar. Denemeye değer.

Bu tür kontrolün ilginç bir yan ürünü, farkında olmasak da, sezgimizi güçlendirmesidir.

Başka bir çözüm bulun

Bir çözüm bulunmuş olsa da daha iyisi olabilir; o nedenle problemi farklı bir yolla çözmeye çalışın. Bunu yapmak daha iyi bir çözüm üretebilir ya da eldeki çözümün bir kusurunu ortaya çıkarabilir.

Varsa, model çözümlerle sizinkileri karşılaştırın.

İyi düşünün

İyi düşünme problem çözmede gerçekten meyvesini verir. Problemin neyi çözdüğünü düşünün ve sorular sorun. Çözüm diğerlerine ne kadar benzerdir? Ne kadar farklıdır? Kullanılan bir teorem ya da teknik oldu mu ve kullanılmaya devam ediliyor mu? Beklenmedik durumları düşünün ve onları bir kenara koyarak sonraki problemleri ele almaya hazırlıklı olun.

Çözümün nasıl iyileştirileceğini düşünün. Sorun: Neler birleştirilebilir? Neler sadeleştirilebilir?

En sonunda, yanıtınızın hatalı olduğunu göstermeye çalışın. Bu tuhaf bir öneri gibi gelebilir ancak yanıtınızın doğru olduğuna sizi ikna edebilir ve gizli hataları bulmada yardımcı olabilir.

Alıştırmalar

Alıştırma 5.3

(i) $0 < a \leq b$ için $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ olduğunu gösterin

(ii) Tüm a, b ve c pozitif tamsayıları için

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

olduğunu gösterin.

(iii) $f(x) = 1 / (1 - x)$ olsun. f^r fonksiyonunu

$$f^r(x) = \underbrace{f(f(f(\ldots f}_{r \text{ kez}}(f(x)))))$$

olarak tanımlayalım. $f^{653}(56)$ yı bulun.

(iv) Aşağıdakileri gösterin:

(a) $\sqrt[7]{7!} > \sqrt[8]{8!}$, ve

(b) $\sqrt{100001} - \sqrt{100000} < \dfrac{1}{2\sqrt{100000}}$.

Her iki durum için ipucu: (farklı yöntemler aracılığı ile) kareköklerden kurtulmaya çalışın.

(v) Üç arkadaşın 25 $ a yemek yediğini varsayalım. Faturayı hatalı olarak 27$ okurlar ve her birisi garsona 10 $ verir ve garsondan 3 $ geri vermesini isterler, yani almaları gerekenden 2 $ daha azını isterler. Garson kasaya 25 $ koyar ve her birine 1 $ vererek artan 2 $ ı gizlice cebine atar.

Daha sonra garson bazı hesaplamalar yapar. Arkadaşların her biri (10 – 1) $ = 9 $ ödemiş, bu toplam 27 $ yapar, garson toplam 29 $ vererek 2 $ ı saklamıştır. Fazladan 1 $ a ne oldu?

(vi) A şişesinde bir litre süt ve B şişesinde bir litre kahve vardır. B den bir kaşık dolusu kahve A ya boşaltılıyor ve içerik iyice karıştırılıyor. A daki sıvı, B bir litre sıvı içeresiye kadar, B ye boşaltılıyor. A daki kahve parçası B de süt parçasından daha mı çoktur ya da öteki türlü müdür?

Özet

- Polya'nın dört-nokta planını kullanın.
- Problemdeki tüm sözcükleri anlayın.
- Öngörüde bulunun.
- Varsayım ve sonuç hakkında ne bildiğinizi not edin.
- Geriye doğru ve ileriye doğru çalışın.
- Başlangıç, özel ve somut durumlarla çalışın.
- Bir şekil çizin.
- Benzer bir problem düşünün.
- Denk bir problem bulun.
- Daha kolay bir problem çözün.
- Sembollerle ya da sözcüklerle tekrar yazın.
- Problemi parçalara ayırın.
- Doğru düzeyi bulun.
- Şeylere isim verin.
- Düzenli olarak bir yöntem seçin.
- Her bir adımın doğruluğunu kontrol edin.
- Yanıtın doğruluğunu kontrol edin.
- Bir başka çözüm bulun.
- İyi düşünün.

Mantıksal nasıl düşünülür

6. BÖLÜM

Açıklamada bulunmak

Kişilerle iletişim kurarken mantıklı olmayabileceklerini unutmayalım. Onlar coşkulu, önyargılı, gurur ve kibirle güdülenmiş yaratıklardır..
Dale Carnegie, *Dost nasıl edinilir ve insanlar nasıl etkilenir,* 1936.

Ne zaman insanlara matematikçi olduğumu söylesem, konuyu hemen matematik lojiğin nasıl bir şey olduğuna getirirler. Bazen, işleri çok zorlaştırdığı için, lojiği konunun olumsuz yönü olarak değerlendirirler. Nede olsa, lojikle haklı olmak zorundasınız ama yaşamın başka alanlarında düşünceler daha önemlidir. Ve onu delille desteklemeseniz bile - bir görüşe sahip olmak kolaydır.

Zor olduğu ününe karşın lojik, özünde, çok kolaydır. Az sayıda basit kurallar vardır. Bunları sadece uygulamalısınız ve başarıyla sonlandırmak için karmaşık ifadeleri bu kurallarla sadeleştirmeniz yeterlidir.

Bundan sonraki birkaç bölümde; derin bilmeceler ve paradokslar ya da yüklemler, bileşik önermeler ve v.b. teknik konulardan çok matematikçilerin günlük çalışmalarında kullandıkları lojik üzerine yoğunlaşacağız. Bununla birlikte, günlük çalışmalarında matematikçiler tarafından çok az kullanılan fakat acemiler için çok büyük açıklık sağlayan doğruluk çizelgelerini açıklayacağım.

Matematik, matematiksel önermelerin doğru ya da yanlış olduğunu kanıtlama işidir. O halde önce önermelere bir göz atalım.

Önermeler

Bir matematiksel önermeden neyin kastedildiğini kesin biçimde tanımlamak şaşırtıcı şekilde zordur – bu noktada bazı derin felsefi çalışmalara girebilirdik. Ancak çok pratik olmayı arzuluyorum – size bir matematikçinin günlük temelde kullandığı araçları vermek istiyorum – o nedenle aşağıdaki tanımı kullanıyoruz.

Tanım 6. 1

*Bir **önerme** ya doğru ya da yanlış olan – ama ikisi birden değil – bir tümcedir.*

Amaçlarımız için bu tanım yeterli olacaktır. Bazı örnekler:

(i) '2 + 2 = 4.' Bu doğrudur.
(ii) 'Bütün kediler gridir.' Yanlış bir önerme, çünkü bazı kediler siyahtır.
(iii) 'Sonsuz çoklukta asal vardır.' Doğru, 23. Bölümde kanıtlanacaktır.
(iv) '0 = 1.' Bir önerme olarak mükemmel – yanlış olduğu gösterilmiştir.
(v) '4 den büyük her tamsayı iki asal sayının toplamıdır.' (Anımsayalım, bir **asal sayı** sadece kendisi ve 1 tarafından kalansız bölünebilen 1 den büyük bir doğal sayıdır.) Buna **Goldbach Sanısı** denir. Kimse onun doğru olup olmadığını bilmemektedir ama yine de bir önermedir, çünkü ya doğrudur ya da yanlıştır.
(vi) '$x^2 = 2$ varsayalım. O zaman x bir rasyonel sayı değildir.' Bu 23. Bölümde kanıtlanacaktır.

Aşağıdaki iki tümcenin gösterdiği gibi, her tümce bir önerme olmayabilir.

(i) 'Pencereyi açın!'
(ii) 'x bir tek sayıdır.'

İlki bir emirdir ve bir önerme olmadığı açıktır.

'x bir tek sayıdır.'

tümcesi x e bağlıdır ve o nedenle fazladan bilgi olmaksızın doğru ya da yanlışlığına karar veremeyiz. Eğer x, 3 is o zaman tümce doğrudur. Ama $x = 50$ ise o zaman tümce yanlıştır. x ile ilgili daha çok şey bilmemiz gerekir. x e bağlı bir koşul olduğundan buna bir **koşullu önerme** diyoruz.

Teknik açıdan koşullu bir önerme yukarıda verdiğimiz tanıma göre bir önerme değildir. Yine de yalınlık yararına, onları önermeler olarak anacağız. (x ile ilgili gerek duyulan fazladan bilgiyi bize sağlayabilen birinin olduğunu ileri sürmeniz yeterlidir!)

Önerme olan fakat doğru ya da yanlışlığını asla saptayamadığımız birçok tümcenin olduğundan haberiniz olsun. Örneğin,

'Geçen yıl tam 20 kalıp peynir yedim.'

Bu bir önermedir, çünkü tümce ya doğru ya da yanlıştır, ama (bir zaman makinesinin yardımı olmaksızın) saptayabilmemiz hiçbir şekilde mümkün değildir.

Tanımın önemli bir kısmı önermelerin ya doğru ya da yanlış olduğudur – ara yol yoktur. Teknik dilde bu **ortanın dışlanması yasası** olarak bilinir. Yani, doğru ile yanlışın ortasına düşen bir şey düşüncesinin olabilirliği dışlanmıştır.

Önemli bir örnek

Önerme olmayan anlaşılması zor bir tümce örneği

'Bu önerme yanlıştır.'

dır. Bir önermeye benzemektedir ve hatta olduğu bile iddia edilir. Doğru mudur ya da yanlış mıdır?

Önce, tümcenin doğru olduğunu varsayalım. O zaman tümce, tümcenin yanlış olduğunu söyler. Bu, doğru olduğu varsayımımızla çelişir. O halde tümce doğru olamaz.

Şimdi tümcenin yanlış olduğunu varsayalım. O zaman önermenin yanlış tümcesi doğrudur. Başka bir deyişle, tümcenin söylediği doğrudur. Ama bu, yanlış olduğu varsayımıyla çelişir.

Böylece görüyoruz ki, ne kabul edersek edelim, varsayımla çelişen bir şey elde ediyoruz. Mademki tümcenin doğru mu ya da yanlış mı olduğuna tam karar veremiyoruz, öyleyse o bir önerme değildir. (Sorun, tümcenin kendisine göndermede bulunmasından kaynaklanır. Bu tür tümcelerin başına tuhaf şeyler gelebilir! Ayrıntılı bir inceleme için bir lojik kitabına başvurun.)

Biraz daha fazla matematiksel duyguya sahip olmak amacıyla önermeleri göstermek için harfler kullanıyoruz. Böylece 'A önermesi' ve v.b. den söz ediyoruz.

Alıştırma 6.2

Aşağıdakilerden hangileri önermedir? Açıklayın.

(i) Aristo Yunandı.
(ii) Aristo ünlüydü.
(iii) $\sqrt{2}$ sayısı rasyoneldir.
(iv) Bir tamsayının karekökü bir rasyonel sayıdır.
(v) $3x^2 + 20x - 5 = 0$ dır.
(vi) x bir tamsayı olsun. O zaman $\sqrt{x}$ rasyoneldir.
(vii) $\sin(x) = x$ olacak şekilde bir x sayısı vardır.
(viii) Sonsuz çoklukta doğal sayı vardır.
(ix) Sonsuz çoklukta rasyonel sayı vardır.

Matematik-dışı örnekler kullanma

Lojik bir soyutlamadır, o nedenle kavranması zor olabilir. Onu kolaylaştırmak için sık sık matematik-dışı önermeler ya da günlük durumlardan önermeler kullanıyorum. Örneğin, Wiston Churchill (İkinci Dünya Savaşının büyük bir kısmı süresince Britanya Başbakanı) in Blenheim Sarayı, İngiltere'de doğduğu olgusuyla başlayalım. Buradan,

'Wiston Churchill İngiliz'dir.'[1]

temel gerçeğini kabul edeceğiz.

'Başkan George Washinton Birleşik Devletlerin ilk Başkanı idi.'

de verilmiş olabilir. Daha sonra göreceğimiz üzere, bunları lojiğin ince noktalarını aydınlatmada yardımcı olmaları için kullanabiliriz.

İnce noktadan söz etmişken, bilgiçlik gücümüzü sınamak için günlük dilden alınan aşağıdaki alıştırmayı çalışın.

[1] Doğduğumuz ülkenin uyruğumuzu belirlemediği ileri sürülebilir. Şeyleri yalın tutalım ve bu tür argümanlardan kaçınalım.



Şekil 6.1 Bir masa üzerinde tam üç madeni para

Alıştırma 6. 3

Bir masa üzerinde üç madeni para olduğunu düşünün; onları sayıyorsunuz ve Şekil 6.1 deki gibi tam üç tane olduğunu görüyorsunuz.

Önermelerden hangileri doğrudur?

(a) Masa üzerinde dört madeni para vardır.
(b) Masa üzerinde iki madeni para vardır.
(c) Masa üzerinde üç madeni para vardır.
(d) Masa üzerinde bir madeni para vardır.

Düşünmeye değer mi? İlki dışında hepsi doğrudur. (a) önermesinin yanlış, (c) önermesinin doğru olduğu bellidir. (b) ve (d) önermeleri sorun yaratabilirler. (b) önermesini değerlendirelim. Sayım sonunda masa üzerinde üç madeni para olduğunu biliyoruz. Orada ikisine ve bir diğerine sahip olmalıyız. Ama ikisine sahip olduğumuz kesindir. Benzer akıl yürütme (d) önermesinin de doğru olduğunu gösterir.

Sorun şudur: 'Masa üzerinde iki madeni para vardır' önermesi doğrudur ama günlük kullanımla çeliştiği için yanıltıcıdır. 'Masa üzerinde kaç tane madeni para vardır' diye sorsaydınız ve ben de 'iki' deseydim, o zaman sanırım herkes sizi yanıltmış olduğum üzerine hemfikir olurdu. Bundan kaçınmak için 'Masa üzerinde tam üç madeni para vardır' gibi deyimler kullanıyoruz. Matematiğin bilgiçlik istediğinin farkında olmalısınız. Önermeleri nasıl okuduğunuza çok özen gösterin.

Değilleme

Tanım 6. 4

Bir A önermesinin ***değillemesi*** *A doğru iken yanlış olan önermedir.*

Örneğin,

'Winston Churchill İngiliz'dir'

in değillemesi

'Winston Churchill İngiliz değildir'

olur. '*x* tektir' in değillemesi '*x* tek değildir' olur. (Bu '*x* çifttir' olarak yeniden ifade edilebilir.)

A önermesinin değillemesi 'değil(*A*)' olarak yazılır. O halde 'değil(*x* tektir)' yukarıdaki gibi '*x* tek değildir' olur. Lojik üzerine teknik kitaplar değil(*A*) yerine sıklıkla $\neg A$ yı kullanır.

Uyarılar!

'Tüm kediler gridir' in değillemesinin 'Tüm kediler gri değildir' olduğuna dikkat ediniz. Değillemenin tanımından değil(A) nın A doğru iken yanlış olduğunu anımsatalım. 'Tüm kediler gridir' önermesinin yanlış olması için gri olmayan, örneğin, beyaz *bir* kedinin olması yeterlidir. O halde 'Gri olmayan bir kedi vardır' ın doğru olmasını istiyoruz. Bu tür örnekler üzerine 10. Bölümde daha fazla söylenecektir.

'değil(değil(A))' önermesi A önermesi ile aynıdır. Yani, bir çift olumsuzluk bir olumlu meydana getirir. Bazı dillerde bir çift olumsuzluk bir önerme belirtmek için kullanılır ve bir olumlu oluşturmaz. İngiliz konuşma dilinde bu bazen öyledir, 'Hiç eğitime gereksinim duymuyoruz' da olduğu gibi. 'Konuşmacı' hiç eğitime gerek yoktur demek istiyor ama aslında bir eğitimin zorunlu olduğunu söylüyor.

Doğruluk çizelgeleri

Lojik öğrenirken doğruluk çizelgeleri son derece önemlidir. Matematikçiler günlük çalışmalarında pek kullanmazlar ama yeni başlayanlar için açıklık sağlayabilirler. Düşünce, bir önermenin doğruluğu ya da aksi için tüm olabilirlikleri bir çizelgede özetlemektir.

'değil(A)' için doğruluk çizelgesi özellikle yalındır:

A	değil(A)
T	F
F	T

Burada T* doğru ve F* yanlış anlamına gelir. Bilgi satırlar boyunca okunur. Böylece ikinci satırda A önermesi Doğru (T ile verilen) ise, o zaman değil(A) nın Yanlış (F ile verilen) olduğunu görüyoruz. Üçüncü satırda A yanlıştırın, değil(A) doğrudur anlamına geldiğini görebiliyoruz.

İlk sütunu girdi ve ikinci sütunu çıktı olarak kabul edebiliriz. Eğer F girersek bir T yi elde ederiz.

Örnek 6. 5

değil(değil(A)) için doğruluk çizelgesini görelim.

A	değil(A)	değil(değil(A))
T	F	
F	T	

A	değil(A)	değil(değil(A))
T	F	T
F	T	F

Sol yandaki çizelgeyi çizerek başlarız. Sonra sağdakini oluşturmak için doldururuz. Bunu karşılıklı satırlara geçerek yerine getiririz. 'değil(A)' yanlış olduğunda 'değil' in doğruluk çizelgesinden 'değil(değil(A))' nın doğru olduğunu biliyoruz. O halde ikinci satırın sonunda bir T gireriz. Üçüncü satır için benzer şekilde bir F doldururuz.

Birinci ve üçüncü sütunlar aynı olduğu için 'A' ve 'değil(değil(A))' önermelerinin denk olduğu, yani özünde aynı önermeler olduğu, sonucunu çıkartırız.

* T yerine D ve F yerine Y yazmayı uygun görmüyoruz (ç.n.).

'Ve' ve 'ya da'

'Ve' ve 'ya da' sözcüklerini kullanarak önermeler oluşturabiliriz. Önermeleri bağladıkları için onlara **bağlaçlar**[2] denir.

'Ve' kullanan önermeler

'Ve' bağlacı en kolayıdır çünkü genel doğal dil kullanımına karşılık gelir, o halde önce onu ele alalım.

'Köpeğim siyahtır ve Paul'un köpeği beyazdır'

önermesini göz önünde bulunduralım. Benim köpeğim siyah *ve* Paul'un köpeğinin beyaz olması durumunda bu doğru bir önermedir. O halde beyaz bir köpeğim varsa, o zaman Paul'un köpeğinin ne renkte olduğunun hiç önemi yoktur, önerme yanlıştır. Benzer şekilde, Paul'un kahverengi bir köpeği varsa ve köpeğim siyah ise, o zaman önerme yanlıştır.

'Ve' nin bir doğruluk çizelgesini oluşturmak için köpeklerin rengi için iki girdi – A ve B – olduğunu kaydedelim ('değil' için bir tek girdi: A vardı). Her bir girdi bağımsız olarak doğru ya da yanlış olabildiğinden *dört* olabilirliğimiz vardır: Her ikisi yanlış, A yanlış ve B doğru, A doğru ve B yanlış ve en sonunda her ikisi doğru. A ve B önermelerini kullanan 've' için doğruluk çizelgesi aşağıdadır:

A	B	A ve B
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Görebildiğiniz gibi, A ya da B nin sadece biri yanlış ise, o zaman 'A ve B' önermesi yanlıştır. Her ikisinin doğru olmasına gereksinim duyuyoruz.

Burada ilk iki sütun girdiler ve son sütun çıktıdır. Ayıca, eğer üç girdi olsaydı, o zaman girdilerin doğru ya da yanlış olmaları için faklı $2^3 = 8$ olabilirlik olurdu.

Uyarı 6.6

Lojikçiler 've' yi göstermek için $\wedge$ kullanırlar, yani A ve B önermesi $A \wedge B$ olarak yazılır.

Şimdi karmaşık ifadeleri incelemek için doğruluk çizelgelerini kullanabiliriz. Örneğin, 'A ve değil(B)' ne zaman doğrudur? A, B ve değil(B) bileşenlerini alabilir ve onlarla istediğimiz önermeyi kurabiliriz.

A	B	değil(B)	A ve değil(B)
F	F	T	F
F	T	F	F
T	F	T	T
T	T	F	F

[2] Lojikçiler daha ileri giderler ve 've' ve 'ya da' ya, sırasıyla, 'evetleme' ve 'veyalama' gibi süslü isimler verirler.

3. sütunu, değil(B) yi, 'değil' doğruluk çizelgesini kullanarak oluşturduğumuzu kaydedin. Sonra 'A' ve 'değil(B)' ye, yani, 1. ve 3. sütunlara, uygulanan 've' için doğruluk çizelgesini kullanarak son sütunu koruyun.

'Ya da' kullanan önermeler

'Ve' nin aksine 'ya da' nın kullanımı genel doğal dildeki kullanımından biraz farklıdır. Örneğin,

'David ya da Paul mağazaya gidiyor'

önermesi, genelde – ikisinin değil – sadece birinin mağazaya gideceğini söylemek ister. Bu tür 'ya da' ya **dışlayıcı ya da** denir. Düşünce, bir kısmın doğruluğu diğerinin doğru olmasını dışlamaktır.

Matematikte yukarıdaki önerme en az birinin – belki de ikisinin – gideceği anlamına gelir. Buna **içleyici ya da** denir.

Günlük dilde dışlayıcı ya da ve içleyici ya da genelde ayırt edilmez: genel durumdan öngörüde bulunulmalıdır. Matematikte ya da nın içleyici biçimini kullanırız; yani, yukarıdaki örnekte en az birinin mağazaya gittiğini biliriz.

'm ya da n den birinin tek olduğunu varsayalım' tümcesini değerlendirelim. Bir matematikçi için bu; biri tektir, diğeri değildir anlamına gelmez! Onlardan biri tektir ve diğeri – hangisi olduğunu önemsemez – çift ya da tek olabilir, demek ister. Bu doğal dildeki kullanımına benzemez, o nedenle dikkatli olun.

Akıl karıştırıcı olsa bile 'ya da' yı dışlayıcı bir tümcede kullanabiliriz. Örneğin,

'x bir doğal sayı olsun. O zaman x çifttir ya da x tektir.'

durumunda 'ya da' gerçekten dışlayıcıdır, çünkü tek olma ya da çift olma özelliği dışlayıcıdır, yani bir sayı aynı zamanda her ikisi olamaz.

Şimdi köpek örneğinde kullanılan bağlacı değerlendirelim.

'Köpeğim siyahtır ya da Paul'un köpeği beyazdır.'

Bu önerme, köpeğim siyah ise, doğru olacaktır. Paul'un köpeği beyaz ise, doğru olacaktır. Ve benim köpeğim siyah ve Paul'unki beyaz ise, doğru olacaktır. Bu önerme, köpeğim siyah değil *ve* Paul'un ki beyaz değilse, yanlış olacaktır.

'ya da' yı anlamada doğruluk çizelgesi yardımcı olabilir:

A	B	A ya da B
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

Çizelgeden 'A ya da B' nin yanlış olduğunu ancak hem A hem B yanlış iken görüyoruz.

Uyarı 6.7

Lojikçiler 'ya da' yı göstermek için $\vee$ kullanırlar. Yani, 'A veya B' önermesi $A \vee B$ olarak yazılır.

Önermelerin denklikleri

Önermeleri karmaşıklaştırmayı başardıktan sonra, matematiksel açıdan aynı olmanın ne anlama geldiğini tanımlayabiliriz.

Tanım 6.8

Girdilerin ve çıktıların oluşturduğu doğruluk çizelgeleri aynı olan iki önerme ***denk önermelerdir.***

Örnek 6.9

(i) A önermesi ve değil(değil(A)) önermesi için doğruluk çizelgesi

A	A
T	T
F	F

ve

A	değil(değil(A))
T	T
F	F

gibi özetlenebilir. Buna göre A ve değil(değil(A)) denk önermelerdir.

(ii) 'A ya da B' ve 'A ve B' önermeleri denk değildir. Doğruluk çizelgeleri farklıdır.

'Ve' ve 'ya da' nın değillemesi

'Ve' ve 'ya da'nın değillemeleri net bir simetriye sahiptir.

'değil(A ve B)' 'değil A ya da değil B'ye denktir,
'değil(A ya da B)' 'değil A ve değil B'ye denktir.

İlkini görmek için,

'Carl uzun boyludur ve Carl koyu saçlıdır'

önermesinin değillemesini değerlendirelim. 'Carl uzun boyludur', 'Carl koyu saçlıdır' önermelerinden en az birinin yanlış olması gerektiğini görebiliyoruz; o nedenle 'Carl uzun boylu değildir', 'Carl koyu saçlı değildir' önermelerinden en az birinin doğru olduğunu anlıyoruz. Başka bir deyişle, 'Carl uzun boylu değildir ya da Carl koyu saçlı değildir' doğrudur. (Bunun her ikisinin doğru olduğu durumu kapsadığını anımsayınız!)

Benzer akıl yürütmeyi 'ya da' nın değillemesi örneğine uygulayabiliriz. Bunu göstermek için kendi örneğinizi ortaya atın.

Daha genel olarak, doğruluk çizelgelerini kullanarak 'değil(A ve B)' nin 'değil(A)' ya da 'değil(B)' ye denk olduğunu gösterebiliriz.

A	B	A ve B	değil(A)	değil(B)	(değil(A)) ya da (değil(B))	değil(A ve B)
F	F	F	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	T	F
T	T	T	F	F	F	F

Son iki sütun 'değil(A ve B)' ve 'değil(A)' ya da 'değil(B)' yi verir. Sütunları aynı olduğu için önermelerin denk olduğunu sonuçlandırabiliriz.

Alıştırma 6.10

'değil(A ya da B)' nin '(değil A) ve (değil B)' ye denk olduğunu göstermek için bir doğruluk çizelgesi oluşturun.

Alıştırmalar

Alıştırma 6.11

(i) Aşağıdakilerden hangisi önermedir? Önerme olanlar doğru mudur?
(a) Yaşam tatlıdır.
(b) 2 bir asal mıdır?
(c) 2 nin bir asal olduğunu kanıtlayın.
(d) Birleşik Devletlerin 1789 daki Başkanı bir erkekdi.
(e) Birleşik Devletlerin 2009 daki Başkanı bir bayan olacaktır.

(ii) Aşağıdakiler için doğruluk çizelgeleri kurun:
(a) değil(A ve B),
(b) değil(A ya da B),
(c) (değil A) ya da (değil B),
(d) A ya da (değil B),
(e) (değil B) ya da B,
(f) (değil B) ve B.

(iii) Aşağıdakileri değilleyin:
(a) A doğrudur ya da B yanlıştır.
(b) A yanlıştır ve B doğrudur.
(c) A doğrudur ya da B doğrudur.
(d) A doğrudur ve B doğrudur.

(iv) Çok girdili doğruluk çizelgelerini oluşturmak kolaydır. Aşağıdakiler için doğruluk çizelgeleri oluşturun.
(a) A ve (B ya da C),
(b) (A ve B) ya da C,
(c) (değil(A ya da B)) ve C.

(v) Bir **totoloji**, tüm çıktıları Doğru doğruluk çizelgeli bir önermedir. Bir **çelişki**, tüm çıktıları Yanlış doğruluk çizelgeli bir önermedir.
(a) 'A ya da değil A' nın bir totoloji olduğunu gösterin.
(b) 'Ve' bağlacını kullanarak bir totoloji ortaya atın.
(c) 'Kazananlar terk etmezler ve terk edenler kazanmazlar' deyimi bir totoloji midir?
(d) 'A ve değil A' nın bir çelikli olduğunu gösterin.
Çelişki IV. Kısımda çok yararlı olacaktır.

Özet

- Bir önerme ya doğru ya da yanlış olan – ikisi birden olmayan – bir tümcedir.
- Ortanın dışlanma yasası: önermeler doğrudur ya da yanlıştır; arada hiçbir şey yoktur.

- A önermesinin değillemesi, A doğru iken, yanlış olan önermedir.
- Önermeler 'ya da' ve 've' bağlaçlarını kullanarak oluşturulabilir.
- Aynı doğruluk çizelgeli iki önerme denktir.
- 'değil(A ve B)' '(değil A) ya da (değil B)' ye denktir.
- 'değil(A ya da B)' '(değil A) ve (değil B)' ye denktir.

7. BÖLÜM

Gerektirmeler*

Matematik: P gerektirir Q biçimli önermelerden oluşur, ama
P doğru mudur diye asla sormazsınız.
Bertrand Russell

Russell'ın yukarıdaki sözü son derece serttir. Modern matematik gerçekten P önermesi Q önermesini gerektirir biçimli önermelerden oluşur. Yani, 'P önermesi doğru ise, o zaman Q önermesi de doğrudur' a sahibiz. Genelde, bununla birlikte, bu yapı saklıdır ve temelde matematiği daha kapsamlı kılmak için, onu her zaman o şekilde yazmışsak, okuması zorlaşabilir.

Russell'ın deyişinin ikinci kısmı da doğrudur ama biraz daha incedir. 'Ay peynirden yapılmıştır gerektirir Ay lezzetli bir yemektir' önermesinin doğru olduğu iddia edilir, çünkü Ay peynir olsaydı o zaman lezzetli olurdu. Mesele önermenin anlamlı ve doğru olmasıdır ancak Ayın gerçekten peynirden yapılmadığının ya da lezzetli bir yemek olup olmadığı üzerine söylenecek hiçbir şey yoktur. Dediği: *eğer* peynirli ise, o zaman lezzetlidir. İlerledikçe bu örneği akılda tutmaya değecektir.

Russel'ın P ve Q sembolleri yerine önermelerimizi göstermek için genel olarak A ve B kullanacağız.

'Eğer ... , o zaman ...' önermeleri

Çoğu matematiksel önerme

'Eğer A önermesi doğru ise, o zaman B önermesi doğrudur.'

biçimlidir. Biçimlerini gizleyebilirler ama parçalara ayırdığınızda aradığınızı bulacaksınız. Önermenin bu tipine bir **gerektirme** denir. A gerektirir B diyoruz ve bazen $A \Longrightarrow B$ yazıyoruz. Bu sembolün doğru kullanışı ile ilgili olarak 37. sayfaya başvurun.

Örnek 7.1

(i) Eğer adım Winston Churchill ise, o zaman İngiliz'imdir.
(ii) Eğer İngiliz isem, o zaman adım Winston Churchill'dir.
(iii) Eğer Başkan George Washington isem, o zaman Amerika Birleşik Devletleri'nin ilk Başkanıyımdır.
(iv) Eğer $a < b$ ise, o zaman $a^2 < b^2$ dir.

* Gerektirmelere (implications) bazen **koşullular** (conditionals) da denir (ç.n.).

(v) Eğer $a < c$ ise, o zaman $a < b$ dir.
(vi) Eğer x çift ise, o zaman x^2 çifttir.

(i) ve (iii) önermeleri doğrudur. (ii) önermesi doğru değildir – Winston Churchill olmayan bir İngiliz'i seçelim. (iv) ve (v) tümceleri a, b ve c üzerinde koşulludur (o nedenle sözcüğün kesin anlamıyla gerçekten önerme değildirler). (vi) önermesi, büyük olasılıkla biliyorsunuzdur, doğrudur. Onu ileride kanıtlayacağız.

Gerektirme önermeleri gizli biçimli olabilirler. Örneğin,

'İki çift sayının toplamı çifttir'

önermesini göz önünde bulunduralım. Bu yeniden

'Eğer x ve y çift sayılar ise, o zaman $x + y$ bir çift sayıdır'

gibi yazılabilir. Benzer şekilde

'İkiden büyük tüm asal sayılar tektir'

önermesi,

'Eğer p bir asal sayı ve $p > 2$ ise, o zaman p tektir'

olarak yeniden yazılabilir.

Varsayım, kabul ve sonuç

Bir $A \Longrightarrow B$ gerektirmesinde iki kısım vardır:

- A önermesine **varsayım** ya da **kabul** denir ve
- B önermesine **sonuç** denir.

Böylece 'Eğer varsayım doğru ise, o zaman sonuç doğrudur' diyoruz.

Bazen A önermesi bir takım tümcelerden oluşacaktır, o zaman bunlara varsayımlar, kabuller olarak göndermede bulunacağız ve koşullar da diyeceğiz.

Yukarıdaki örnekte 'adım George Washington' ve '$a < b$' kabule örnektir. (v) de '$a < b$' önermesinin bir sonuç da olduğuna dikkat edin.

Bazen varsayım ve sonuçları ayırt etmek zor olabilir,

'x in pozitif bir doğal sayı olduğunu varsayalım. Eğer x tek ise, o zaman x^2 tektir.'

Burada varsayımlar nelerdir? Onlar 'x tek olan bir pozitif doğal sayıdır'.

Bunu yazmanın bir diğer yolu

'x bir pozitif tek sayıdır $\Longrightarrow x^2$ tektir.'

Görebildiğiniz gibi, aynı şeyi yazmanın bir çok yolu vardır.

Alıştırmalar 7.2

(i) Aşağıdakilerde varsayımları ve sonuçları tanıyın.
(a) Eğer $x^2 > 5$ ise, o zaman $x^3 + 12x + 4 < 3$ dır.
(b) $x^2 + 1 > 3$ dır, eğer $x < \sqrt{2}$ ise.

(c) T dik açılı bir üçgen olsun. Eğer c hipotenüs ise, o zaman a ve b diğer iki kenarın uzunlukları olmak üzere, $c^2 = a^2 + b^2$ dir. (Buraya dikkat edin! Kabul 'c hipotenüstür' *değildir*.)

(d) T bir üçgen olsun. T yi a, b, c kenarlı ve a nın karşısındaki açının θ ya eşit olduğu bir üçgen varsayalım. O zaman $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$ dır.

A, B yi gerektirdiğinde A ve B nin doğruluk değeri

Bölümün girişindeki Russell'ın deyişinin arkasında yatan düşünceye tekrar dönelim ve girişteki örneği ele alalım: 'Ay peynirden yapılmıştır gerektirir Ay lezzetli bir yemektir.' Varsayım, Ay peynirden yapılmıştır ve sonuç, Ay lezzetli bir yemektir, olur. Bu önermelerin hiç birinin doğru olmadığında anlaşabiliriz ama *gerektirmenin* doğru olduğundan da hem fikir olabiliriz.

Bu bizi gerektirme hakkında kavranması gereken en temel olguya yöneltir:

'$A \Longrightarrow B$, A ya da B nin doğruluğu hakkında ya da onun dışında *hiçbir şey* söylemez!

Bunu kavramanın ne kadar yaşamsal olduğunu ne kadar vurgulasam azdır.

$A \Longrightarrow B$ nin doğru olduğunu varsayarsak, üç olasılık vardır:

(i) A doğrudur ve B doğrudur.
(ii) A yanlıştır ve B yanlıştır.
(iii) A yanlıştır ve B doğrudur.

A doğrudur ve B yanlıştır olamaz, çünkü $A \Longrightarrow B$, eğer A doğru ise o zaman B doğrudur'u ifade eder.

Yukarıdaki ilk olasılık gerçekleşir: Eğer adım Winston Churchill ise, o zaman İngiliz'imdir.

İkinci durum da gerçekleşebilir. A, $1 = 2$ ve B, $5 = 6$ olsun. O zaman $A \Longrightarrow B$ nin doğru olduğunu görebiliriz, çünkü eğer $1 = 2$ doğru ise ve her iki yana 4 eklersek, $1 + 4 = 2 + 4$, yani $5 = 6$ olduğunu görürüz. O halde bu olasılık olabilir.

Üçüncü olasılık sezgiye ters gibidir. Yeni başlayanların çoğu yanlış önermelerin doğru önermeleri asla gerektirmeyeceğine inanır, oysa bu doğru değildir ve çok yaygın bir yanlış düşünce olduğundan ayrı bir kesimin konusunu oluşturacaktır.

Yanlış önermeler doğru önermeleri gerektirebilir

Daha önce '$A \Longrightarrow B$' nin A nın ya da B nin doğruluğu üzerine hiçbir şey söylemediğini kaydetmiştik. Bununla birlikte, yanlış önermelerin doğru önermeleri gerektirdiği açıkça not etmeye değerdir. Örneğin, $-1 = 1$ varsayalım; doğru olmadığı açıktır, ama biz matematikçiyiz ve istediğimizi varsayabiliriz. Her iki tarafın karesini alırsak doğru olan $1 = 1$ i elde ederiz. Böylece

'$-1 = 1 \Longrightarrow 1 = 1$'

doğrudur! $-1 = 1$ in yanlış olmasının önemi yoktur.

Aslında, sadece bir tek yanlış önermeyi kullanarak her şeyi kanıtlayabiliriz! Bu durumu lojik kitaplarına bırakacağız.

$A \Longrightarrow B$ nin doğruluk çizelgesi

Gerektirmenin doğruluk çizelgesi neye benzemelidir? Aşağıdakine:

A	B	$A \Longrightarrow B$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

Son iki satır açık olmalı. (Bir matematikçi gibi düşünün! Metnin doğruluğunu kontrol edin!) Diğer ikisinin anlaşılması daha zordur. Bir bakıma onlar doğruluk çizelgesinin bir *tanımıdır*. Öte yandan, anlamlıda olabilirler çünkü eğer A yanlış ise, o zaman B nin her şey olmasına izin veriliyor, o halde A yanlış iken $A \Longrightarrow B$ de diyebiliriz.

Alıştırma 7.3

$A \Longrightarrow B$ ve 'değil (A) ya da B' için doğruluk çizelgelerinin aynı olduğunu gösterin.

'Eğer ... , o zaman ...' nın değillemesi

Mademki $A \Longrightarrow B$ bir önermedir, öyleyse değillemesinin ne olduğunu sorabiliriz. Açık yanıt: A, B yi gerektirmez demek olur. Bu ne anlama gelir? Ve doğru mantıksal önerme nedir? Bunun anlamı A nın doğru ve aynı zamanda B nin yanlış olduğudur. Bu 'A ve değil (B)" dir.

Alıştırma 7.3 ü kullanarak bunun doğruluğunu kontrol edebiliriz. Orada '$A \Longrightarrow B$' nin 'değil (A) ya da B' ile aynı olduğu gösterilir. 6. Bölümden 'P ve Q' nun değillemesinin 'değil (P) ya da değil (Q)' olduğunu anımsatalım. Böylece '$A \Longrightarrow B$' nin değillemesi 'değil (A) ya da B' nin değillemesidir. Bu 'A ve değil (B)' olarak sadeleşen 'değil (değil (A)) ve değil (B)' dir.

Alıştırma 7. 4

Önceki akıl yürütmeyi doğruluk çizelgeleri kullanarak ifade edin.

Uyarı 7. 5

Bir gerektirmenin değillemesinin bir başka gerektirme olmadığına dikkat edin.

A gerektirir B yi yazmanın farklı yolları

'B eğer A ise', '$A \Longrightarrow B$' ile aynıdır

'Eğer adım Winston Churchill ise, o zaman İngiliz'imdir' in 'İngiliz'imdir eğer adım Winston Churchill ise' gibi yeniden yazılabildiği açıktır. Bunu daha genel yapabiliriz. 'Eğer A ise, o zaman B'

'B eğer A ise'

olarak yeniden yazılabilir. Ara sıra öğrencilerin kafası karışır, çünkü '$A \Longrightarrow B$' ve 'Eğer A ise, o zaman B' deki gibi B nin sağda (ya da sonda) olduğunu düşünmeye alışmışlardır. O halde varsayımların solda ve sonuçların sağda olduğunu düşünme alışkanlığınız

varsa sıkıntı çekeceksiniz. 9. Bölümde önermelerin denkliğini incelerken yazmanın bu biçimi çok önem kazanacaktır.

'A ancak eğer B ise', '$A \Longrightarrow B$' ile aynıdır

'$A \Longrightarrow B$' yi yazmanın bir sonraki biçimi pek açık değildir. 'Eğer adım Winston Churchill ise, o zaman İngiliz'imdir' in yerini 'Adım Winston Churchill'dir ancak eğer İngiliz isem' alır. Çünkü eğer İngiliz değil isem, o zaman Winston Churchill olmam olanaksızdır.

O halde, daha genel olarak, '$A \Longrightarrow B$' yazmanın bir diğer yolu

'A ancak eğer B ise'

dır. Bunun '$A \Longrightarrow B$' ye denk olarak kabul edilmesi zorlaşır; o nedenle yavaş yavaş açıklayalım.

'A ancak eğer B ise' önermesi, A doğrudur ancak eğer B doğru ise yi söyler. Bu, A doğrudur gerektirir B doğrudur ile nasıl aynı olur?

'$A \Longrightarrow B$' nin doğru olduğunu varsayalım. Şimdi ayrıca A nın doğru fakat B nin yanlış olduğunu varsayalım, o zaman '$A \Longrightarrow B$' doğru değildir anlamına gelir. Buradan A doğru olabilir ancak eğer B doğru ise. Benzer şekilde, A doğrudur ancak eğer B doğru ise varsayalım. O zaman A doğru ise, B nin doğru olması gerekir, o halde $A \Longrightarrow B$ dir.

Alıştırma 7.6

Doğruluk çizelgeleri kullanarak yukarıdakileri açıklayın, özellikle bir doğruluk çizelgesi kullanarak '$A \Longrightarrow B$' nin 'A ancak eğer B ise' ile aynı olduğunu gösterin.

Alıştırmalar

Alıştırmalar 7.7

(i) A nın doğru ve B nin yanlış olduğunu varsayalım. Aşağıdakilerden hangileri doğrudur?

(a) $A \Longrightarrow B$, (b) $B \Longrightarrow A$, (c) değil $B \Longrightarrow A$,
(d) $A \Longrightarrow A$, (e) A ya da değil B, (f) değil $A \Longrightarrow A$,
(g) değil (A ya da B).

(ii) Aşağıdakileri değilleyin:

(a) 100 üzerinden 70 alırsan, o zaman dersi başarmış olacaksın.
(b) Eğer yağmur yağarsa, o zaman evde oturacağım.
(c) Eğer $x^2 + 2x + 1 = 0$ ise, o zaman $x = -1$ dir.
(d) $x^2 + x - 2 = 0$ gerektirir $x = 1$ ya da $x = -2$.
(İpucu: Bir 'Eğer ... ise o zaman ...' nın değillemesi bir diğer 'Eğer ... , ise o zaman ...' değildir.)

(iii) 'Ancak eğer' i kullanarak aşağıdakileri önerme olarak yazın:

(a) Eğer $x = -2$ ise, o zaman $x^2 = 4$ dir.
(b) Eğer x ve y tek ise, o zaman xy tektir.
(c) $x^2 + x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 1$ ya da $x = -2$.
(d) $x^2 + x - 2 = 0 \Longleftarrow x = 1$.

(iv) (a) $(A \Longrightarrow B) \Longrightarrow$ değil A,
(b) A ya da ($B \Longrightarrow$ değil A)
için doğruluk çizelgeleri kurun.

(v) (a) $A \Longrightarrow (A$ ya da $B)$,
(b) $[(A$ ve $B) \Longrightarrow C] \Longrightarrow$ [değil $C \Longrightarrow$ (değil A ya da değil $B)$]
lerin totoloji olduğunu göstermek için doğruluk çizelgeleri kurun.

Özet

- '$A \Longrightarrow B$' önermesinde A önermesine varsayım ya da kabul ve B önermesine sonuç denir.
- '$A \Longrightarrow B$' önermesi 'Eğer A ise, o zaman B' gibi yazılabilir.
- 'A gerektirir B'; eğer A doğru ise, o zaman B doğrudur anlamına gelir. Başka bir şey değil. Eğer A yanlış ise, o zaman B doğru olabilir ya da yanlış olabilir.
- $A \Longrightarrow B$ nin değillemesi, 'değil (A) ya da B' ile aynıdır.
- 'A ancak eğer B ise', '$A \Longrightarrow B$' ile aynıdır.
- 'B eğer A ise', '$A \Longrightarrow B$' ile aynıdır.

8. BÖLÜM

Gerektirmelerle ilgili ince noktalar

O, Politikacının Mantığından rahatsızlık duymaktadır.
Bir şey yapılmalıdır, bu bir şeydir, o halde yapılmalıdır. .
Antony Jay ve Jonathan Lynn,
Halkın Gücü, Yes'in serüveni, *Başbakan*.

İngiliz dili belirsizliklerle doludur. Yukarıdaki nükteli deyiş bunu istismar etmekte ve işini yapmaktadır, çünkü 'bir şey' sözcüğünün bu tümcede iki farklı anlamı vardır. Matematik diliyle bu belirsizlikleri ortadan kaldırmayı amaçlıyoruz. Bu bölümde önce eğer / o zaman yapısının kullanımı ile günlük kullanışında rastlanabilen özel bir probleme göz atacağız. Bu örneğin bizi nasıl evrik ve karşıt ters olarak adlandırılan önermelere götürdüğünü göreceğiz. Günlük örneklerin kullanımı çok aydınlatıcı olmakla birlikte bu, dikkatli olmamız gerektiğini gösterir, çünkü İngiliz dili bize oyun oynayabilir.

Evrik: yaygın bir hata

İnsanların lojikte başlangıçta yaptıkları en yaygın hata, genç yaşta öğrendiğimiz günlük kullanımından ortaya çıkar. Örneğin, bir yetişkin bir çocuğa

'Eğer odanı temiz tutmazsan, o zaman dondurma yiyemeyeceksin'

der. Sezgimiz, çocuk ve ebeveyn gibi, bunu bir sözleşme olarak yorumlamak eğilimindedir: eğer çocuk odasını temiz tutarsa, o zaman dondurma yiyecektir. Başka bir deyişle,

'Eğer odanı temiz tutarsan, o zaman dondurma yiyeceksin.'

Ancak başlangıç önermesi onu söylemez. O sadece çocuk odasını temiz *tutmaz* ise ne olacağını söyler. Temiz tutarsa ne olacağı hakkında hiçbir söylemez! Yine de eminim ki eğer çocuk odasını temiz tutmuş olsaydı ve dondurmaya hak *kazanmasaydı* çoğumuz mağdur hissettiğinde haklı olduğunu kabul ederdik.

Bir başla örnek 'Eğer yağmur yağarsa, o zaman gitmeyeceğim' dir. Günlük konuşmada bunun kapalı olarak, eğer yağmur *yağmazsa gideceğim* demek istediğini biliyoruz. Bununla birlikte, kesin konuşmak gerekirse, yağmur yağarsa ne olacağı hakkında sadece bir önerme vardır; eğer yağmur yoksa o bize ne yapacağımla ilgili hiçbir şey söylemez.

Konunun esası eğer / o zaman tümcelerinin ne anlama geldiği hakkında belirli düşüncelerle büyümüş olmamızda yatar. Önceki örnekteki sorunu

'Eğer adım Winston Churchill ise, o zaman İngiliz'imdir'

örneğini ele alarak açıklayalım. Bu önerme doğrudur çünkü daha önce Winston Churchill'in İngiliz olduğunu göstermiştik. Şimdi önermeyi

'Eğer adım Winston Churchill değilse, o zaman İngiliz değilim'

e dönüştürmek için bazı değillemeler ekleyelim. Bu kesinlikle doğru değildir, çünkü Winston Churchill olmayan İngiliz birini bulmak mümkündür.

Bunu matematik diline soyutlayarak, aşağıdaki tanımı yapıyoruz.

Tanım 8.1

'Eğer A ise, o zaman B' gerektirmesinin evriği

'Eğer değil(A) ise, o zaman değil(B)'

dir.

Örnek 8.2

Yukarıdaki oda/dondurma örneğinde 'odanı temiz tutmuyorsun' a A ve 'dondurma yemeyeceksin' e B diyelim; o zaman 'değil(A)' 'odanı temiz tutuyorsun' ve 'değil(A)' 'dondurma yiyeceksin' olur. 'Eğer odanı temiz tutmazsan, o zaman dondurma yemeyeceksin' nin evrik önermesi böylece 'Eğer odanı temiz tutarsan, o zaman dondurma yiyeceksin' olur.

Yukarıdaki Churchill/İngiliz örneği, 'Eğer A ise, o zaman B' doğru ise, o zaman 'Eğer değil(A) ise, o zaman değil(B)' yanlış olabileceğini gösterir; o halde lojik kurallarına göre konuşursak, oda ile ilgili başlangıç önermesinin doğruluğu ve evriğinin tamamen farklı olduğunu görebiliriz. (Bununla birlikte, çocuğun deneyimine göre onlar denktirler.)

Gerek duyulan ayırım şudur:

'$A \Longrightarrow B$', 'değil(A) $\Longrightarrow$ değil(B)' ye denk değildir.

Churchill/İngiliz örneği, bir gerektirme evriği yanlış olduğu halde doğru olabileceğinden, bu ayrımı anımsatmak için uygundur.

Bir gerektirme ve evriğinin doğru *olabildiği* bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 8.3

'x çifttir gerektirir x^2 çifttir'*

önermesini göz önünde bulunduralım. Bu doğru bir önermedir. Öyle olduğunu göstermek istersiniz! Evrik önerme

* Bu önermeyi düzgün dille 'x in çift olması x^2 nin çift olmasını gerektirir' gibi yazabilirdik, ama biçimi korumayı yeğliyoruz (ç.n.).

'x çift değildir gerektirir x^2 çift değildir'

olur. Başka bir deyişle,

'x tektir gerektirir x^2 tektir'

olur. Bu da doğrudur! Böylece bu örnekte hem 'Eğer A ise, o zaman B' hem 'Eğer değil(A) ise o zaman değil(B)' doğrudur.

Bu örnek ve Churchill örneğini değerlendirerek

Genelde, '$A \Longrightarrow B$' nin doğruluğu evriği 'değil(A) $\Longrightarrow$ değil(B)' nin doğruluğu hakkında bir şey söylemez.

olduğunu görüyoruz.

Tehlikeli örnekler

Yalın oda / dondurma örneği zararsızdır. Verdiği hasar azdır. Bu özensiz lojiğin gerçek yaşamda nasıl kullanıldığını ve bizi başkalarıyla nasıl potansiyel patlayıcı durumlara sürüklediğini görelim.

'Eğer matematikçi iseniz, o zaman akıllısınızdır'

önermesini ele alalım ve doğru olduğunu varsayalım.

Bunun matematikçi olmayanların zekası ile ilgili bir şey söylemediğini kaydedelim. Bir kişi coğrafyacı, tarihçi ya da telefon mühendisi olabilir, ancak bu önerme size onlar hakkında hiçbir şey söylemez. Ama insanlar matematikçi olmayanlara hakaret ettiği düşüncesiyle kırılabilirler: 'Hey, ben bir telefon mühendisiyim! Aptal olduğumu mu söylüyorsunuz?'

Bunun ne kadar tartışmalı olabileceğini görmek için, 'matematikçi' kullanmaktansa, 'Eğer erkek iseniz, o zaman akıllısınızdır' dediğimi ve bu önermenin doğruluğunu iddia ettiğimi düşünelim. Çok kişi, lojiğin hatalı olmasından değil – etrafımızda bir yığın akıllı olmayan erkek var – ama cinsiyet ayrımından şikayet ederek ve bir sürü zeki kadının olduğunu ileri sürerek buna karşı çıkarlar. Kuşkusuz, insanlar bu tür önermeleri bu biçim altında nadiren kullanırlar; genelde süslü bir tarza büründürürler.

Gerekli ve yeterli

Lojik kavramları sıklıkla gerekli ve yeterli koşullara göre de ifade edilir. 'Gerekli' ve 'yeterli' terimlerinin standart günlük kullanışa uyması bir şanstır.

Gerekli koşullar

Bir gerekli koşul, bir şeyin doğru olması için gerek duyulan bir koşuldur.

Tanım 8.4

*Bir **gerekli** koşul, bir sonucun doğru olması için geçerli olması gereken bir koşuldur. Sonucun doğru olduğunu garanti etmez.*

Başka bir deyişle, 'A, B için gereklidir', 'B doğrudur ancak eğer A doğru ise' anlamına gelir. Bu son ifadenin $B \Longrightarrow A$ ile aynı olduğunu biliyoruz.

Örnekler 8.5

(i) Bir kumaş parçası olmak bir eldiven olmak için gereklidir.
(ii) $x \leq 0$, $x = -2$ için gereklidir.
(iii) Bir üçgenin eşkenar (tüm açılar eşit) olması için ikizkenar (iki açı eşit) olması gereklidir.

Yeterli koşullar

Bir yeterli koşul, bir önermenin doğruluğunu garanti etmek için yeterli olan bir koşuldur.

Tanım 8. 6

*Bir **yeterli** koşul, sonucun doğru olduğunu garanti eden bir koşuldur. Koşul sağlanmasa bile sonuç doğru olabilir.*

Başka bir deyişle, 'A, B için yeterlidir', 'B doğrudur eğer A doğru ise' anlamına gelir. Bu $A \Longrightarrow B$ ile aynıdır.

Örnekler 8.7

(i) Bir eldiven olmak kumaş parçası olmak için yeterlidir. Bir eldiven olmanın kumaş parçası olması için gerekli olmadığına dikkat edin.
(ii) $x = -2$, $x \leq 0$ için yeterlidir.
(iii) Bir üçgenin ikizkenar olması için bir eşkenar üçgen olması yeterlidir. Üçgenin eşkenar olması için ikizkenar olması gerekmez.

Karşıt ters

Günlük dilde bizi doğru kabul etmeye sürüklese de, $A \Longrightarrow B$ nin değil$(A) \Longrightarrow$ değil(B) ye denk olmadığını gördük. Daha kötüsü, dil bizi doğru olan bir sonuca hazırlamaz.

Tanım 8. 8

*'$A \Longrightarrow B$' önermesinin **karşıt tersi***

'değil$(B) \Longrightarrow$ değil(A)'

dır.

Bunun $A \Longrightarrow B$ ye denk olduğu şaşırtıcıdır! Yani, $A \Longrightarrow B$ yerine değil$(B) \Longrightarrow$ değil(A) alabiliriz.

Bazı örnekler görelim.

Örnek 8. 9

(i) 'Eğer adım Winston Churchill ise, o zaman İngiliz'imdir' in karşıt tersi 'Eğer İngiliz değilsem, o zaman adım Winston Churchill değildir' dır.

(ii) 'Amerikalı değilim gerektirir bir Texan'lı değilim' in karşıt tersi 'Eğer bir Texan'lı isem, o zaman Amerikalıyım' dır.

(iii) Adım Jane gerektirir ben bir kadınımın karşıt tersi 'Bir kadın değil isem, o zaman adım Jane değildir' dir.

(iv) '$x^2 - 4x - 5 = 0 \Longrightarrow x \geq -2$' nin karşıt tersi '$x < -2 \Longrightarrow x^2 - 4x - 5 \neq 0$' dır.

Alıştırma 8.10

Aşağıdakiler için karşıt ters önermeleri bulun:

(i) Eğer $x = 2$ ise, o zaman $\sqrt{x}$ irrasyoneldir.

(ii) Eğer x asal ise, o zaman $x = 2$ dir ya da x tektir.

(iii) Eğer S bir kare ise, o zaman S bir dikdörtgendir.

(iv) Çember bir elipstir.

Alıştırma 8.11

değil$(B) \Longrightarrow$ değil(A) için bir doğruluk çizelgesi kurun ve $A \Longrightarrow B$ nin çizelgesi ile aynı olduğunu gösterin.

Uyarı 8.12

Bir önceki alıştırma bir önerme ile karşıt tersinin denk olduğunu gösterir.

Alıştırmalar

Alıştırmalar 8.13

(i) Aşağıdakileri 'Eğer ... ise, o zaman ...' önermeleri olarak yazın.

(a) Peter'in şampiyonayı kazanması için Brezilya'da kazanması bir yeter koşuldur.

(b) Stuart'ın şampiyonayı kazanması için Peter'i yenmesi bir gerekli koşuldur.

(c) Düzenli çalışma dersi geçmek için yeterlidir.

(d) Düzenli çalışma dersi geçmek için gerekli değildir.

(e) Amerika Birleşik Devletleri Başkanı olmak için Amerika Birleşik Devletleri'nde doğmak gereklidir.

(f) Hindistan Başkanı olmak için Hindistan'da doğmak gerekli değildir.

(ii) A, '$x^2 - 2x - 3 > 0$' ve B, '$x > 3$'olsun. Aşağıdakilerden hangileri doğrudur ve hangileri yanlıştır?

(a) $A \Longrightarrow B$, (b) $B \Longrightarrow A$,

(c) A, B için gereklidir, (d) B, A için gereklidir,

(e) A, B için yeterlidir, (f) B, A için yeterlidir,

(g) değil$(B) \Longrightarrow$ değil(A), (h) değil$(A) \Longrightarrow$ değil(B).

(iii) Aşağıdaki önermelerin hangileri denktir?

(a) Eğer takımım son oyunu yitirdiyse, o zaman onlar şampiyonayı yitirmiş olmalıdır.

(b) Eğer takımım son oyunu yitirdiyse, o zaman takımınız şampiyonayı kazanmıştır.

(c) Eğer takımım son oyunu yitirdiyse, o zaman onlar şampiyonayı kazanmıştır.
(d) Eğer takımım şampiyonayı kazandıysa, o zaman onlar son oyunu kazanmıştır.
(e) Eğer takımım son oyunu kazandıysa, o zaman onlar şampiyonayı kazanmıştır.
(f) Eğer takımım şampiyonayı yitirdiyse, o zaman onlar son oyunu yitirmiş olmalıdır.

(iv) $A \Longrightarrow (B \Longrightarrow C)$ nin karşıt tersi nedir?

(v) Şimdi kavrama üzerine P.C. Wason'un ilettiği ilginç bir deneye geliyoruz. (Birçoğu bunu hatalı bulur.) Öğrencilere bir oyun kartının bir yüzünde bir sesli harf ve öbür yüzünde bir rakam olduğu söyleniyordu. Öğrencilere kartlar gösterilmeliydi:



Yapılacak iş, 'Eğer kartın bir yüzünde bir sesli harf varsa, o zaman öbür yüzünde bir çift sayı vardır' kuralının doğru olup olmadığına karar vermekti. Öğrenciler kuralın doğruluğunu karara bağlamak için sadece çevrilmesi gereken kartı çeviriyorlardı.

Yukarıdaki örnekte hangi kartları çevirir, hangilerini çevirmezdiniz? Yanıtlarınızı doğrulayın.

Özet

- '$A \Longrightarrow B$' nin evriği 'değil(A) $\Longrightarrow$ değil(B)' dir.
- '$A \Longrightarrow B$' doğru 'değil(A) $\Longrightarrow$ değil(B)' nin doğru olduğu anlamına **gelmez**.
- 'A, B için gereklidir', '$B \Longrightarrow A$' ya denktir.
- 'A, B için yeterlidir', '$A \Longrightarrow B$' ye denktir.
- '$A \Longrightarrow B$' nin karşıt tersi 'değil(B) $\Longrightarrow$ değil(A)' dir.
- Bir gerektirme ve karşıt tersi denktir.

9. BÖLÜM

Ters ve denklik

Ama bazı dehaların alay etmiş olması alay edenlerin tümünün deha olmasını gerektirmez. Columbus ile alay ettiler, Wright kardeşlerle alay ettiler. Ama Soytarı Bozo ile de alay ettiler.
Carl Sagan, *Broca'nın Beyni*, 1979

$A \Longrightarrow B$ biçimli önermeler matematiğin esasıdır. Bir $A \Longrightarrow B$ biçimli gerektirmenin (değil(A) $\Longrightarrow$ değil(B)) evriğini ve (değil(B) $\Longrightarrow$ değil(A)) karşıt tersini alabildiğimizi gördük. Bu bölümde bir diğer gerektirmeye: $B \Longrightarrow A$ bakacağız; buna $A \Longrightarrow B$ nin tersi denir. Bir önermenin ve tersinin aynı olmadığını göreceğiz. Biri doğru olabilir ve diğeri yanlış, ikisi doğru olabilir ya da ikisi yanlış olabilir.

Eğer $A \Longrightarrow B$ ve $B \Longrightarrow A$ ikisi de doğru ise, o zaman A ve B önermelerinin denk olduğunu söyleriz. Matematikçiler denk önermeleri, özellikle A ve B nin açık bir bağlantısı yokmuş gibi ise, gerçekten severler.

Ters

Tanım 9.1

'$A \Longrightarrow B$' önermesinin tersi '$B \Longrightarrow A$' dır.

'Eğer adım Winston Churchill ise, o zaman İngiliz'imdir'

in tersi

'Eğer İngiliz isem, o zaman adım Winston Churchill'dir'

olur. Bu yalın örnek, özel bir önerme doğru olsa bile, tersinin doğru olmayabileceğini göstermektedir. Doğru olabilir ya da olmayabilir. Bir şey söylemeden önce araştırma gereklidir.

Alıştırma 9.2

Aşağıdakilerin her birinin tersini bulun:

(i) Eğer kedim siyah ise, o zaman tüm kediler gridir.
(ii) Eğer x çift ise, o zaman x^2 çifttit.
(iii) Eğer bir Korsikalı isem, o zaman adım Napoleon'dur.

İyi bir matematikçi, A gerektirir B tipli bir önerme ile karşılaştığında, 'Tersi doğru mudur?' sorusunu soracaktır. Bu soruyu içselleştirin ve matematik yaparken alet çantanızın bir parçası olmasını sağlayın. Tersin doğru olup olmadığı o kadar önemli değildir, önemli olan alıştırmanın matematik yeteneğini arttırmasıdır.

Birinci sınıf öğrencileri için derslerimin birinde, ders esnasında bu soruyu soran ilk öğrencime bir ödül sözü veriyorum. Ödülü kazanmak için soruyu, tersin ilginç olduğu ama bariz doğru olmadığı ya da apaçık yanlış olmadığı noktada sormak durumundadırlar. Onlara soruyu meslektaşlarımın diğer derslerinde de sormalarına izin veriyorum, çünkü öğrencilerimin bilgilerini derslerimin dışında da kullanımlarını istiyorum.

Alıştırma 9.3

Tersin evriği için bir diğer isim nedir?

Mantıksal denklik

İki önermenin aynı olduğundan, yani denk olduğundan söz etmiştik. Örneğin, değil(değil(A)), A ile aynıdır ya da değil(B) $\Longrightarrow$ değil(A), $A \Longrightarrow B$ ile aynıdır ve bunu göstermek için doğruluk çizelgelerini kullandık. Şimdi bu denklik kavramını daha ayrıntılı inceleyeceğiz.

Örnek 9.4

'Ben Başkan George Washington'um' ve 'Amerika Birleşik Devletleri'nin ilk başkanıyım' önermelerini ele alalım.

Biliyoruz ki 'Eğer Başkan George Washington isem, o zaman Amerika Birleşik Devletleri'nin ilk başkanıyım' doğrudur. Tersi 'Eğer Amerika Birleşik Devletleri'nin ilk başkanı isem, o zaman ben Başkan George Washington'umdur' da doğrudur.

Bunun nedeni George Washington olmak ve Birleşik Devletlerin ilk başkanı olmak aynı şeydir; onlar denktir. Bu kavramı matematiksel terminolojiye dahil edelim.

Tanım 9. 5

Eğer $A \Longrightarrow B$ ve $B \Longrightarrow A$ ikisi de doğru ise, o zaman A ve B ***mantıksal denk önermeler*** *diyoruz ve $A \Longleftrightarrow B$ yazıyoruz. $\Longleftrightarrow$ işareti 'eğer ve ancak eğer' olarak okunur ve önermeye* ***çift koşullu önerme*** *denir.*

'Eğer ve ancak eğer' kullanma nedeni '$A \Longrightarrow B$' nin 'A ancak eğer B ise' ve '$B \Longrightarrow A$' nın 'A eğer B ise' olarak yazılabilmesindendir. İki gerektirmeyi birleştirerek 'eğer ve ancak eğer' elde ederiz. Bununla birlikte öğrencilerin hangi gerektirmenin 'eğer' ve hangisinin 'ancak eğer' olduğu konusunda kafaları epey karışıktır. Onları ayırt eden uygulamalar yapın.

Bazıları 'eğer ve ancak eğer' in bir kısaltması olarak 'eve'*kullanır. (Ancak bu bana daima bir dizgi hatası gibi gelir!)

Örnek 9.6

Aşağıdaki önermeyi göz önünde bulunduralım:

'$x^2 + 2x - 3 = 0 \Longleftrightarrow x = 1$ ya da $x = -3$.'

Önermenin 'ancak eğer' (yani $\Longrightarrow$) parçası $x^2 + 2x - 3 = 0 \Longrightarrow x = 1$ ya da $x = -3$ dir. Bu doğrudur. Bunu görmek için denklemi yeğlediğiniz yöntem aracılığıyla çözün. Burada ikinci dereceliyi çarpanlarına ayırmak kolaydır: $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$, o halde $x^2 + 2x - 3 = 0$, $x = 1$ ya da $x = -3$ ü gerektirir.

Önermenin 'eğer' (yani $\Longleftarrow$) kısmı $x = 1$ ya da $x = -3 \Longrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$ dır. Bu da doğrudur. Doğruluğunu kontrol etmek kolaydır:

$$1^2 + 2.1 - 3 = 1 + 2 - 3 = 0,$$
$$(-3)^2 + 2(-3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0.$$

Böylece iki önerme, '$x^2 + 2x - 3 = 0$' ve '$x = 1$ ya da $x = -3$' denktir.

Örnek 9.7

Şimdi

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Longleftrightarrow x = -3$$

önermesinin başına ne geldiğini inceleyelim. Bir önceki örnekten bu önermenin yanlış olduğunu biliyoruz. (Çünkü '$x^2 + 2x - 3 = 0$', '$x = 1$ ya da $x = -3$' e denktir ve bu son önermenin $x = -3$ e denk olmadığı açıktır.)

Kabul, yanlıştır ama hangi 'yön' yanlışa gidiyor? $\Longleftarrow$ mu yoksa $\Longrightarrow$ kısmı mı yanlıştır? Yani, 'eğer' mi yoksa 'ancak eğer' mi?

Yanlış yön, $\Longrightarrow$ yönü yani 'ancak eğer' olmak zorundadır, çünkü $x^2 + 2x - 3 = 0$ ın salt $x = -3$ den başka çözümleri vardır.

Bir ayrıntı

Denklemlerin çözümleri ile ilgili bir soru yöneltildiğinde, diyelim: $x = 4$ ün $3x^2 - 14x + 8 = 0$ ın bir çözümü olduğunu gösterin, çoğu öğrenci denklemi bir yöntemle *çözecektir* ve oradan çözüm olarak $x = 4$ ve $x = 2/3$ bulacaktır. Ama bundan daha kolayı vardır. Bir şeyin bir çözüm olduğunu göstermek için o şeyi denkleme yerleştirmek: $3x^2 - 14x + 8 = 3(4)^2 - 14(4) + 8 = 48 - 56 + 8 = 0$.

Bir başka örnek

Bir sonraki örnekte bir 'eğer ve ancak eğer' önermesi göreceğiz ve doğru olduğunu göstereceğiz.

* 'if' in dilimizde 'eve' şeklinde kullanımı yoktur (ç.n.).

Örnek 9.8

n tamsayısı çifttir eğer ve ancak eğer $n + 1$ tektir.

Bu önermenin doğru olduğunu gösterebiliriz. Önce, n nin çift olduğunu ancak eğer $n + 1$ tek ise göstereceğiz. n nin çift olduğunu varsayalım. O zaman bazı $m \in \mathbb{Z}$ için $n = 2m$ olur. Böylece $n + 1 = 2m + 1$ dir ki tanımdan, tektir. O halde $n + 1$ tektir.

Şimdi n nin çift olduğunu $n + 1$ tek ise göstereceğiz. $n + 1$ in tek olduğunu, yani bazı $m \in \mathbb{Z}$ için $n + 1 = 2m + 1$, varsayalım. O zaman sadeleştirmeyle, $n = 2m$ olur. O halde n çifttir.

Bu örneğin düşüncesi, doğru olduğu gösterilmesi gereken iki önermenin olduğunu göstermektedir. Bir önerme 'eğer' i içermekte ve diğeri 'ancak eğer' i içermektedir. Konular ilerledikçe bundan daha fazla söz edilecektir.

Alıştırmalar

Alıştırmalar 9. 9

(i) Aşağıdaki önermelerin her birinin tersini yazın.
- (a) Eğer $x > 5$ ise, o zaman x kırmızıdır.
- (b) Bir tamsayı çift ya da tek olabilir ama ikisi olamaz.
- (c) Dondurma yemek tüm gün mutlu olmam için gereklidir.
- (d) Dondurma yemek tüm gün mutlu olmam için yeterlidir.
- (e) Şeyleri anlamak için tartışmaları gerekli değildir.
- (f) Durun, yoksa vuracağım!

(ii) Aşağıdaki dört önermenin hangileri denktir?
- (a) Eğer A ve B nin ikisi de doğru ise, o zaman X kırmızıdır.
- (b) Eğer A ve B nin ikisi de kırmızı değilse, o zaman X doğrudur.
- (c) Eğer X yanlış ise, o zaman A ve B nin ikisi de kırmızı değildir.
- (d) Eğer A veya B kırmızı değilse, o zaman X doğrudur.

Eğer A kırmızı ve B beyaz ise, o zaman (a) da X doğru mudur? Yanlış mıdır? (d) için ne olur?

(iii) (a) $A \Longleftrightarrow B$ ve
- (b) 'A gerektirir B' nin tersi için bir doğruluk çizelgesi kurun.

(iv) Aşağıdaki önermelerin her birinin tersini yazın. Önerme ve tersini bir çift koşullu önermeye dönüştürmek için birleştirin. (Önermelerin doğru olmayabileceğine dikkat edin!)
- (a) Eğer $ab = 0$ ise, o zaman $a = 0$ veya $b = 0$ dır.
- (b) Eğer $2x^2 - 7x + 6 = 0$ ise, o zaman $x = 2$ dir.
- (c) İki tek sayının çarpımı tektir.
- (d) Bir tek sayının bir çift sayı ile toplamı tektir.
- (e) A, B ve C nin küme olduğunu varsayalım. Bu durumda $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ dir.
- (f) f nin x değişkenli bir polinom olduğunu varsayalım. Eğer $f(a) = 0$ ise, o zaman $x - a$, f nin bir çarpanıdır.

Özet

- A ve B önermelerini kullanarak değil ve $\Longrightarrow$ yi dört yolla birleştirebiliriz:
  (i) $A \Longrightarrow B$,
  (ii) $B \Longrightarrow A$, tersi
  (iii) değil $A \Longrightarrow$ değil B, evriği
  (iv) değil $B \Longrightarrow$ değil A, karşıt tersi.
- Eğer $A \Longrightarrow B$ doğru ise, o zaman karşıt tersi doğrudur.
- Eğer $A \Longrightarrow B$ doğru ise, o zaman tersi ve evriği doğru olabilir ya da yanlış olabilir.
- Eğer $A \Longrightarrow B$ ve $B \Longrightarrow A$ ise, o zaman A ve B denktir deriz ve $A \Longleftrightarrow B$ yazarız.
- 'eve', 'eğer ve ancak eğer' in bir kısaltmasıdır.

10. BÖLÜM

Niceleyiciler – Her ve Bazı

Herkesi ara sıra aldatabilirsiniz ve bazılarını her zaman,
ancak herkesi her zaman aldatamazsınız.
Abraham Lincoln

6. Bölümde, Açıklamada bulunmak, 'x bir tek sayıdır' benzeri bir tümceye koşullu önerme demiştik. Doğru olup olmadığı x e bağlı idi. Bu bölümde koşullu önermelerden ziyade önermeler elde etmemiz için x i nicelemenin iki temel yolunu betimleyeceğiz.

Bu yolları aşağıdaki gibi sadeleştirebiliriz. '$x^2 = 2$' tümcesi x üzerinde koşulludur. Bu tür tümceleri x in bazı betimlemeleriyle birleştirerek önermeler elde edebiliriz. Örneğin, 'Her $x \in \mathbb{Z}$ için, $x^2 = 2$' ya da 'Bir $x \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki $x^2 = 2$' gibi. Sonuncunun doğru ve ilkinin yanlış olduğunu kaydedin.

Ne kadar x vardırın bir betimlemesini verdiğimiz için bir değer atamadan söz etmekteyiz, bu betimlemelere **niceleyiciler** diyoruz. İlgilendiğimiz niceleyiciler için isimler evrensel niceleyici ve varlıksal niceleyicidir.

Her – evrensel niceleyici

Tanım 10.1

*'Her' sözcüğü **evrensel niceleyicidir**. $\forall$ ile gösterilir. (Bu alt üst edilmiş A dır. A yı 'All' daki A dan anımsayın.)*

Bunu uygulamada görelim.

Örnek 10.2

(i) 'Her $x \in \mathbb{R}$ için, $x^2 \geq 0$ dır.' Bu, bir gerçel sayının karesinin pozitif olduğunu söyler.

(ii) 'S, $\mathbb{R}$ nin bir alt kümesi ve U bir gerçel sayı olsun. 'Her $s \in S \subseteq \mathbb{R}$ için, $s \leq U$ dır.' Bu, bir S kümesinin her elemanının U sayısından küçük ya da ona eşit olduğunu söyler.

(iii) O tek sayıların kümesi olsun. 'Her $x \in O$ için, $x^2 + 1$ tektir.' Bu, x tek için $x^2 + 1$ in de tek olduğunu söyler. (Sırası gelmişken, bu yanlıştır.)

(iv) 'Her x ve y rasyonel sayıları için, xy çarpımı ve $x + y$ toplamı rasyoneldir.'

$x^2 \geq 0$ gibi bir $P(x)$ tümcesi için $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x)$ biçimli, yani $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x^2 \geq 0)$ gibi, bir önerme yazabiliriz. Burada nicelenecek bir tümce olduğunu açıklığa kavuşturmak için $x^2 \geq 0$ yi ayraç içine aldığımızı not edin. Eğer tümcenin nicelenecek iki değişkeni varsa, o zaman o tümce için $P(x, y)$ notasyonunu kullanabiliriz. Örnek (iv) ü sembollerle aşağıdaki gibi yeniden yazabiliriz:

$$\forall x \in \mathbb{Q}\ \forall y \in \mathbb{Q}\ (xy \in \mathbb{Q} \text{ ve } x + y \in \mathbb{Q})$$

ya da

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}\ (xy \in \mathbb{Q} \text{ ve } x + y \in \mathbb{Q}).$$

Gerektirmeli önermelerimiz olabilir: 'Tüm x gerçel sayıları için, eğer $x \geq 3$ ise, o zaman $x^2 \geq 9$ dır.' Bunu '$\forall x \in \mathbb{R}$, $(x \geq 3 \Longrightarrow x^2 \geq 9)$' gibi yeniden yazabiliriz.

Yararlı öneri 10.3

Sözcüklerle yazılmış önermeleri sembollerle yazılmış önermelere, ve tersine, çevirmek iyi bir düşüncedir.

'Tüm' yazmanın başka biçimleri de vardır, 'her', 'hepsi için, 'her biri için' kullanabiliriz. Örneğin, 'Her $x \in \mathbb{R}$ için, $x \geq 0$' gibi.

Doğal dildeki* 'tümü için' in bir eşanlamlısı 'herhangi biri için' dir. Maalesef, doğal dildeki kullanımı belirsizdir ve o nedenle matematikçiler ondan kaçınırlar.

Aşağıdaki alıştırmayı göz önünde bulunduralım: '$x^2 \geq 0$ olduğunu herhangi bir $x \in \mathbb{Z}$ için gösterin.' Bu, 'Tüm $x \in \mathbb{Z}$ için, $x^2 \geq 0$ dır' ı göstermek için bir komut olarak yorumlanabilir. Bunun yanında 'Bir tek tamsayı seçin ve $x^2 \geq 0$ olduğunu gösterin' diyerek de yorumlanabilir. Gösterilmesi kolaydır! $x = 3$ alın, o zaman $x^2 = 9 \geq 0$ olur. Bu iki yorumun aynı olmadığı aşikardır ama yine de 'herhangi bir' sözcüğünün kullanımına yatkın tepkilerdir.

Vardır – varlıksal niceleyiciler

Tanım 10. 4

'Vardır' sözcüğü ***varlıksal niceleyicidir.*** *$\exists$ ile gösterilir. (Bu bir ters E dir. E yi 'Exists' deki E den anımsayın.)*

Örnek 10.5

(i) '$x^2 = 4$ olacak şekilde $x \in \mathbb{Z}$ vardır.' $x = 2$, $x^2 = 4$ ü sağladığı için bu doğrudur. $x = -2$ nin de denklemi sağladığını not edin. Böylece, bir x vardır demek böyle bir tek x in olduğu anlamına gelmez.

(ii) '$x^2 = 5$ olacak şekilde $x \in \mathbb{Z}$ vardır.' Bu doğru değildir.

(iii) '$\exists x \in \mathbb{Z}\ (x^2 - 4x + 3 = 0)$.' Yine doğrudur, bunu görmek için denklemi çözün.

Sonuncunun benzer örneklerini okuduğumuzda, niceleyici ile etiketlediği önerme arasına bir 'olacak şekilde' sıkıştırıyoruz. Böylece (iii) ü $x^2 - 4x + 3 = 0$ olacak şekilde bir x tamsayısı vardır' okuruz.

* English language için doğal dil kullandık (ç.n.).

Niceleyicilerin birleştirilmesi

İki niceleyici birleştirilebilir.

Örnek 10. 6

'Her $x \in \mathbb{Z}$ için $y > x$ olacak şekilde $y \in \mathbb{Z}$ vardır.' Bu sembollerle '$\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z}\ (y > x)$' gibi yazılabilir. Bu, her bir tamsayı için daha büyük birini bulabiliriz demek ister. Herhangi bir x tamsayısı verildiğinde, ondan daha büyük bir y tamsayısı bulabilirim. Örneğin, eğer bana $x = 15$ verirseniz, o zaman $y = 16$, ya da 20 veya 5000003 alabilirim.

Niceleyicileri tanımlarda da birleştirebiliriz.

Örnek 10. 7

S, $\mathbb{R}$ gerçel sayılarının bir alt kümesi olsun. Her $s \in S$ için $s \leq U$ olacak şekilde U mevcut ise S nin bir **üst sınırı** vardır deriz. Bunu 'eğer $\exists U\ \forall s \in S\ (s \leq U)$ ise, o zaman S nin bir **üst sınırı** vardır' gibi yazabiliriz.

Bu sadece bir S kümesinin her elemanının U sayısından küçük ya da ona eşit olduğunu söyler. Örneğin, eğer $S = \{-10, 4, 13, 17\}$ ise, o zaman $U = 20$ bir üst sınırdır ve $U = 17$ de öyledir, ama $U = 6$ değildir. $\mathbb{N}$ kümesinin hiçbir üst sınırı yoktur.

Uyarı 10.8

Önermeleri okumada yardım etmesi için önermeden önce ilgili olduğu niceleyiciyi yerleştiriyoruz. Böylece, '$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{Z}\ (y > x)$' gerçekte '$\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x)$' dir, burada $P(x)$ $\exists y \in \mathbb{Z}\ (y > x)$ tümcesidir.

Niceleyiciyi önce yazmak doğal dil kullanımında standart değildir, sadece sembolik notasyon $\forall$ ve $\exists$ kullanıldığı zaman geçerlidir. Bundan başka çoğu matematikçi sözcüklerle yazarken 'tümü için' i sona koyarlar (ya da, daha kötüsü, tamamen unuturlar). Örneğin, '$x^2 \geq 0$, her $x \in \mathbb{R}$ için' gibi.

Dikkat! Niceleyicilerin sırası önemlidir

Niceleyicilerin sırası bir önermenin anlamı için vazgeçilmez derecede önemlidir. Önceki örneği ele alalım, 'Her $x \in \mathbb{Z}$ için $y > x$ olacak şekilde $y \in \mathbb{Z}$ vardır.'; bunun doğru olduğuna karar vermiştik, çünkü bana verdiğiniz her x tamsayısı için daha büyük bir tamsayı bulabilirim. Önerme sembollerle $\forall x \in \mathbb{Z}\ \exists y \in \mathbb{Z}\ (y > x)$ gibi yazılabilir.

Şimdi niceleyicilerin yerini değiştirirsek, $\exists y \in \mathbb{Z}\ \forall x \in \mathbb{Z}\ (y > x)$ elde ederiz. Bunu 'öyle bir y tamsayısı vardır ki tüm x tamsayıları için $y > x$ olsun.' önermesi olarak okuruz. Bu yanlıştır. Eğer bana bir x tamsayısı verirseniz o zaman x inizden daha büyük bir y tamsayısı bulabildiğimi söyler. Bu doğru olamaz, çünkü eğer $y + 1$ ile gelseydiniz, o zaman benim y sayımdan daha büyük olurdu.

Eğer bu inceliği anlamadıysanız, o zaman anlayıncaya dek tekrar okumanızı öneririm – ileride bu sizi bir çok sorundan koruyacaktır!

Örnek 10.9

Yukarıdaki üst sınır tanımını anımsayalım. Koşul '$\exists U\ \forall s \in S\ (s \leq U)$ ise, o zaman S nin bir **üst sınırı** vardır' idi. Eğer $\exists$ ve $\forall$ nin yerini değiştirirsek, o zaman koşul $\forall s \in S\ \exists U\ (s \leq U)$ ya dönüşür. Bu koşul her zaman sağlanır. s ne seçilirse seçilsin, $U = s + 1$ alalım, o zaman $s \leq U$ olur.

Önemli ve işe yarar bir husus şudur: $\forall x\ \exists y\ P(x, y)$ de y, x e bağlıdır.

Uyarı 10.10

$\forall$ ve $\forall$ yi aralarında değiştirmek ya da $\exists$ ve $\exists$ yi aralarında değiştirmek bir önermenin anlamını değiştirmez. Böylece, $\forall x\ \forall y$ yerine $\forall y\ \forall x$ ve $\exists x\ \exists y$ yerine $\exists y\ \exists x$ kullanabiliriz.

Alıştırmalar

Alıştırmalar 10. 11

(i) Aşağıdakileri $\forall$ ve $\exists$ kullanarak yazın.
- (a) Tüm x tamsayıları için, x tektir ya da çifttir.
- (b) İki asal sayı vardır öyle ki toplamları asal olsun.
- (c) $\sqrt{2}$ den büyük bir rasyonel sayı vardır.
- (d) Eğer x bir gerçel sayı ise, o zaman x^2, x den büyüktür.
- (e) Her $n \in \mathbb{N}$ için $p > n$ olacak şekilde bir p asalı vardır.

(ii) Aşağıdakilerin doğru ya da yanlış olduğunu saptayın. Yanıtlarınızı açıklayın.
- (a) $\forall x\ \exists y\ (x^2 = y)$, burada x ve y, $\mathbb{R}$ ye aittir.
- (b) $\forall y\ \exists x\ (x^2 = y)$, burada x ve y, $\mathbb{R}$ ye aittir.
- (c) $\forall x\ \exists y\ (x^2 = y)$, burada x ve y tamsayılardır.
- (d) $\forall y\ \exists x\ (x^2 = y)$, burada x ve y tamsayılardır.
- (e) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ (x + y = 0)$.
- (f) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ (x + y = 1)$.
- (g) $\forall x\ P(x) \Longrightarrow \exists x\ P(x)$.
- (h) $\exists x\ P(x) \Longrightarrow \forall x\ P(x)$.
- (i) $\exists n \in \mathbb{N}$ öyle ki $n^2 \leq n$.

Özet

- 'Tümü için', $\forall$ ile gösterilen, evrensel bir niceleyicidir.
- 'Vardır', $\exists$ ile gösterilen, varlıksal bir niceleyicidir.
- Niceleyiciler birleştirilebilir ama sıra önemlidir.

11. BÖLÜM

Niceleyicilerin karmaşıklığı ve değillemesi

Her şey düşündüğünüzden daha basittir
ve aynı zamanda düşlediğinizden çok daha karmaşıktır.
Johann Wolfgang von Goethe

Bir önermenin ne kadar niceleyicisi varsa anlaşılması o denli karmaşık ve zordur. Bu bölümde niceleyicilerle karmaşık önermelerin nasıl yapılabileceğini göreceğiz ve bu karmaşıklığı görmek için bir yöntem vereceğiz.

Ayrıca niceleyiciler kapsayan önermelerin nasıl değillendiğini göreceğiz. Şans eseri, en karmaşık önermeler için bile bu gerçekte tamamen kolaydır.

Niceleyicilerin karmaşıklığı

Bir matematiksel önermede bulunan niceleyicilerin sayısı önermenin karmaşıklığı üzerine kaba bir ölçü verir. Üç ya da daha çok niceleyici içeren önermelerin anlaşılması zor olabilir. İşte bu temel nedenden dolayıdır ki, bir sürü niceleyici kapsadıklarından, analizdeki limit, yakınsaklık, süreklilik ve diferansiyellenebilirlik için kesin tanımların anlaşılması zordur.

Aslında karmaşıklığa neden olan, $\forall$ ve $\exists$ nin sıra değiştirmesidir. Örneğin, $\forall x\, \forall y\, \exists z\, P(x, y, z)$ genelde $\forall x\, \exists y\, \forall z\, P(x, y, z)$ den daha basit olacaktır. Bununla birlikte, $\forall x\, \forall y$ yerine $\forall x, y$ alabildiğimiz için niceleyicilerin sayısını saymak, karmaşıklığın iyi bir ölçüsünü verir.

Bazı örnekler görelim.

Tek niceleyici

Örnek 11.1

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$.

(ii) Eğer her $s \in S \subseteq \mathbb{R}$ için, $s \leq U$ ise U sayısı $S \subseteq \mathbb{R}$ için bir üst sınırdır.

(iii) $5x - \cos(4x) = 0$ denklemine bir çözüm vardır.

İki niceleyici

Örnekler 11.2

(i) $\forall x\, \exists y$ öyle ki $y > x$.

(ii) $\exists y$ öyle ki $\forall x (y > x)$.

(iii) '$S \subseteq \mathbb{R}$ için bir üst sınır vardır.' Burada üst sınır tanımından gelen bir niceleyici göstermediğimizi kaydedin. Tümcenin dediği

$$\exists U \in \mathbb{R} \text{ öyle ki } \forall s \in S, s \leq U$$

dır.

(iv) '$P(x)$ in doğru olduğu bir tek x vardır.' Bu, $P(x)$ i sağlayan bir x in var olduğunu ve dahası, eğer $P(y)$ doğru olacak şekilde y varsa, o zaman y nin x e eşit olduğunu ifade eder. Bunu

$$\exists x\, (P(x) \text{ ve } \forall y\, (P(y) \Longrightarrow y = x))$$

gibi yazabiliriz.

Üç ve dört niceleyici

Örnek 11.3

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ sonsuz bir sayı dizisi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1$ öyle ki $\forall n \geq N, -\varepsilon < a_n - l < \varepsilon$ ise l ye **dizisinin limiti** diyoruz.

Bu çok tatsız bir tanımdır. Bu kitapta özellikle onu kullanmak hiç ilgimi çekmiyor; ben üç niceleyicili önermelerin de olabildiğini yalın bir şekilde gösteriyorum. Şimdi bir dizi verildiğinde, o dizi için l nin var olduğunu sorabilir ve dört niceleyicili bir önerme yazabiliriz.

Örnek 11.4

$a_1, a_2, a_3, \ldots$ sonsuz bir sayı dizisi olsun.

$$\exists l \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0\ \exists N \geq 1 \text{ öyle ki } \forall n \geq N, -\varepsilon < a_n - l < \varepsilon$$

önermesi dizinin bir limitinin olduğunu söyler.

Bu son iki örneğin ne anlama geldiğini anlamak için kendinizi üzmeyin; üç niceleyicili önermelerin bile insan beyni tarafından kavranabildiğinin zor olduğunu gözlemekle yetinin. Bu karmaşıklığı görmenin bir yolunu bulmalıyız.

Karmaşıklığı görmenin sırrı

Çok niceleyicili önermeler hakkında düşünürken, bana göre çalışan bir yöntemi verelim.

Niceleyiciyi iki farklı *süreç* olarak düşünmeyi severim. Birinde elime rasgele bir x veriliyor, diğerinde özel bir x bulmam gerekiyor.

'Tümü için' ile başlayan önermeler

'Tümü için' içeren önermeler, $P(x)$ bir tümce olmak üzere – genelde bir koşul - $\forall x, P(x)$ biçimlidir. Burada birinin bana bir x *verdiğini* düşünüyorum ve $P(x)$ in doğru olduğunu

göstermek durumundayım. Ama kişi bana kesinlikle *herhangi* bir x de verebilirdi, o nedenle gösterdiğim bununla çalışmalıdır. Örneğin, $\forall x \in \mathbb{R}\ (x^2 \geq 0)$ de, bana verilen herhangi bir x için $x^2 \geq 0$ olduğunu göstermeliyim.

Örnek 11.5

Bir önceki örnekte, 'Her $x \in \mathbb{Z}$ için $y > x$ olacak şekilde $y \in \mathbb{Z}$ vardır' sürecin uygulandığını görebiliriz. Burada biri bana bir x verirse $y > x$ olacak şekilde bir y bulmak zorundayım. Verilen x i alabilir ve daha büyük bir tamsayı elde etmek için 1 ekleyebilirim, yani $y = x + 1$ alırım.

Bu örnekte bulduğum y nin verilen x e bağlı olduğu dikkatinizden kaçmasın. Bu çok yaygındır.

'Vardır' ile başlayan önermeler

'Vardır' içeren önermeler için, yani $\exists x, P(x)$, amacım $P(x)$ koşulunu sağlayan bir x *bulmaktır.* Örneğin, $\exists x\ (x^2 + 2x - 3 = 0)$ ı göstermek için bir çözüm bulmam gerekmektedir. Gerçekten, genelde, bir çözümü tanımlamak zor olabilir ve **amacım** bunun öyle olduğunu anlatmaktır. Ne olduğu hakkında hiçbir fikrim olmasa bile, bir denemede bulunarak bir çözümün var olduğunu gösterebileceğim.

Örneğin, eğer $b^2 - 4ac \geq 0$ ise, o zaman $ax^2 + bx + c = 0$ için gerçel çözümlerin olduğu iyi bilinir. Bu bilgiyi yukarıdaki '$\exists x\ (x^2 + 2x - 3 = 0)$' örneğine $b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16$ demek için uygulayabilirdim. 16, 0 dan büyük olduğundan, bir çözüm vardır. Hala ne olduğunu bilmiyorum.

Örnek 11.6

Şimdi, yanlış olduğunu bildiğimiz, '$\exists y \in \mathbb{Z}$ öyle ki $\forall \in \mathbb{Z}, y > x$' önermesini ele alalım. Önerme $\exists y$ ile başlıyor, o halde tüm x ler için $y > x$ olduğu koşulunu sağlayan bir y bulmalıyım. O zaman acilen bir y ye ihtiyacım var. Biri bana $y + 1$ ya da $y + 1000$ e eşit bir x verirse ne olur? O zaman $y > x$ olmaz, öyleyse önerme yanlıştır.

Bu iki örnek arasındaki farka dikkat edin. İlkinde bana veriliyor ve sonra bulmam gerekiyor. İkincisinde bulmam gerekiyor ve sonra bana veriliyor.

Örnek 11.7

Bir S kümesinin bir üst sınırı olduğunu göstermem gerekiyorsa, yani $\exists U \in \mathbb{R}$ öyle ki $\forall s \in S, s \leq U$, o zaman biri S den bana bir s verirse o zaman $s \leq U$ olması için bir U bulmam gerekiyor.

Özetle, 'her' li önermelerle kontrolüm dışında birinin elime bir şey verdiğini düşünürüm ve 'vardır' için ilk adımı atmam ve olası x ler arasında bir şey bulmam gerekir.

İki niceleyicili önermelerde bu, iki-oyunculu oyun gibi oynanabilir. Örneğin, '$\forall x \exists y\ P(x, y)$' de birinin bana bir x verdiğini ve kazanmak için $P(x, y)$ yi doğrulayan bir y bulmam gerektiğini düşünürüm.

Daha karmaşık ifadeler

Üç niceleyici kullanan daha karmaşık bir örneğe bakalım.

Örnek 11. 8

Örnek 11. 8 de, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1$ öyle ki $\forall n \geq N\ (-\varepsilon < a_n - l < \varepsilon)$ doğru ise $l, a_1, a_2, a_3, \ldots$ dizisinin limitidir.

Bunu aşağıdaki gibi okuyabiliriz. Eğer biri bana bir ε getirirse, o zaman başka biri bana N den büyük bir n getirdiğinde $-\varepsilon < a_n - l < \varepsilon$ koşulunu sağlaması için bir N doğal sayısı bulmam gerekir. Doğru, bu epey karmakarışıktır ama nasıl çalışacağımıza yol gösterir, yani kimin ne yapması gerektiğini biliyoruz. Bir N bulmalıyım ve baştan biri bana bir ε verdiğinden, büyük olasılıkla N, ε a bağlı olmak zorundadır.

Niceleyicileri süreçler olarak görmenin bu yöntemi problem çözerken çok yararlıdır.

Örnek 11.9

Problem: Doğal sayıların her ikilisi için ikisinden de büyük bir doğal sayı olduğunu gösterin.

Çözüm: Doğru olduğu açıktır. Önermeyi yeniden $\forall x, y \in \mathbb{N}\ \exists z \in \mathbb{N}\ (z > x$ ve $z > y)$ gibi yazabiliriz. Buradan biri bana bir x ve y getirse, bir z bulmak zorunda olduğum açıktır. Galiba 'z, x ve y cinsinden bir şeye eşit olsun' diyen bir kanıta gereksinim olacak. Eğer $z = x + y$ alırsam, o zaman z nin x den daha büyük (çünkü bir doğal sayı olan y, 1 den büyüktür) ve z nin y den daha büyük olduğunu görmek çok uzun sürmez.

Yinelemekle yetinelim: biri x ve y ile geliyor, z yi bulmakla yükümlüyüm.

Gösterişli çözüm: $z = x + y$ olsun. O zaman, y pozitif olduğu için, $z > x$ ve x pozitif olduğu için $z > y$ dir.

Niceleyicilerin değillemesi

Niceleyicili önermelerin değillemesi çok kolaydır.

'Tüm kediler gridir' önermemiz olsun. Değillemesi 'Tüm kediler gri değildir' değildir. Bunun anlamlı olduğunu kaydedelim; o hiç gri kedinin olmadığı anlamına gelir. Daha kötüsü, 'Tüm kediler gridir' önermesine günlük tepkidir; ne demek istediğimi anlamak için, birinin 'Hayır, tüm kediler gri *değildir*' dediğini düşünün.

Bununla birlikte, buna mantıksal olarak bakalım. Eğer 'Tüm kediler gridir' yanlış ise, o zaman önerme gri olmayan bir kedinin olduğunu söylemek ister. O halde bir 'tümü için' in değillemesi bir 'vardır'.

Daha genel olarak, $\forall x, P(x)$ önermesinin doğru olduğunu varsayalım. Bunun değillemesi, her x için $P(x)$ in geçerli olmamasıdır. O halde $P(x)$ in yanlış olması için yani değil $P(x)$ in doğru olması için en az bir x olmalıdır. Başka bir deyişle, $\exists x$(değil $P(x)$) önermesine sahip oluruz.

'Vardır' için bu akıl yürütme ve benzeri akıl yürütme sayesinde

$$\text{değil } (\forall x, P(x)) \Longleftrightarrow \exists x(\text{değil } P(x)),$$
$$\text{değil } (\exists x, P(x)) \Longleftrightarrow \forall x(\text{değil } P(x))$$

olduğunu gösterebiliriz. Yani, bir önermeyi değillemek için $\forall$ yi $\exists$ ye (ve $\exists$ yi $\forall$ ye) değiştiririz ve niceleyiciden sonraki tümceyi değilleriz.

Örnekler 11.10

(i) 'Her $x \in \mathbb{Z}$ için, $x^2 \neq 4$' ün değillemesi '$x^2 = 4$ olacak şekilde bir x tamsayısı vardır' dır. Son önermenin doğru olduğuna dikkat çekelim. Ayrıca bu özellikli birden fazla tam sayı olduğunu kaydedelim.

(ii) 'Akıllı olmayan bir matematikçi vardır' ın değillemesi 'Tüm matematikçiler akıllıdır' dır.

(iii) 'değil $(\forall x\ \exists y\ P(x, y))$', '$\exists y\ P(x, y)$' bir önerme kabul edildiğinde, $\exists x$ değil $(\exists y\ P(x, y))$' yazılabilir. Kuralları bir daha uygulayarak '$\exists x\ \forall y$ değil $P(x, y)$' elde ederiz.

Yukarıdaki örnekteki gibi tartışarak ve katlı niceleyiciler soldan sağa yazıldığından, aşağıdakini sonuçlandırabiliriz.

Niceleyicili önermelerinin değillemeleri
$1 \leq i \leq n$ için Q_i $\forall$ ya da $\exists$ olmak üzere, $Q_1 x_1\ Q_2 x_2 \ldots\ Q_n x_n\ \mathrm{P}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ biçimli bir önermeyi değillemek için aşağıdakileri gerçekleştiririz:

(i) Her $\forall$ yi $\exists$ ye ve her $\exists$ yi $\forall$ ye değiştiririz.
(ii) P yerine değilini alırız.

Bu 24.Bölümün tekniklerini kullanarak kesin biçimle gösterilebilir. Sembollerle değil de sözcüklerle verilen önermeler için, iyi okunmasını sağlamak amacıyla, dilimize biraz çeki düzen vermemiz gerekir.

Örnekler 11.11

Problem: Hiçbir en küçük pozitif gerçel sayının olmadığını gösterin.
Çözüm: Bu bir önermenin değillemesine benziyor, çünkü 'hiç' sözcüğünü içeriyor. Eğer $\mathbb{R}^+$yı pozitif gerçel sayıları göstermek için kullanırsak, o zaman önerme gerçekten 'değil $(\exists x \in \mathbb{R}^+\ \forall y \in \mathbb{R}^+ (x \leq y))$' dir. $\mathbb{R}^+$ya göndermeyi kaldırır ve yukarıdaki işlemi kullanırsak bunu $\forall x\ \exists y$ (değil $(x \leq y)$) gibi yeniden yazabiliriz. Bu ise $\forall x\ \exists y\ (x > y)$ ile aynıdır.

Bu son önerme; biri bana bir x verirse, o zaman x den küçük bir y bulmam gerektiğini söyler (y tabi ki pozitiftir). Bu kolaydır: y yi x in yarısı (ya da üçte biri veya dörtte biri ...) alırsam, o zaman x den küçük pozitif sayı elde ederim.
Gösterişli çözüm: Bir en küçük pozitif gerçel sayı olduğunun önermesi $\exists x\ \forall y\ (x \leq y)$ dir, o halde değil $(\exists x\ \forall y\ (x \leq y))$ yi göstermek istiyoruz. Bu $\forall x\ \exists y\ (x > y)$ gibi yeniden yazılabilir. Bunun doğru olduğunu göstermek için x verildiğinde $y = x / 2$ alırsak, o zaman $0 < y < x$ olur.

Alıştırmalar

Alıştırmalar 11.12

(i) $\forall$ ve $\exists$ sembolik notasyonlarını kullanarak aşağıdakileri yeniden yazın.
  (a) $a \neq 0$ olmak üzere, a ve b gerçel sayılar ise, o zaman $ax + b = 0$ ın bir çözümü vardır.
  (b) $a \neq 0$ olmak üzere, a ve b gerçel sayılar ise, o zaman $ax + b = 0$ ın bir tek çözümü vardır.

(ii) Aşağıdakileri değilleyin.
(a) Gri bir kedi vardır.
(b) Tüm kedilerin bir sahibi vardır.
(c) Tüm sahiplerin bir gri kedisi vardır.
(d) Her yangın söndürücü kırmızıdır ve her cankurtaran beyazdır.

(iii) Aşağıdakileri değilleyin.
(a) Sınıftaki öğrencilerin bazıları bugün burada değildir.
(b) $x, y, z \in \mathbb{N}$ olsun. Her x için $x = y + z$ olacak şekilde y vardır.
(c) $P(x)$ doğru olacak şekilde tek x vardır.
(d) Tüm matematik öğrencileri çalışkandır.
(e) Sınıftaki ancak bir kısım öğrenci bugün buradadır.
(f) $\sqrt{x}$ sayısı rasyoneldir eğer x bir tamsayı ise.

(iv) Aşağıdakileri sadeleştirin.
(a) değil $(\forall x\, \exists y\, (P(x, y) \implies Q(x, y))$.
(b) değil $(\exists x, y\, \forall z$ değil $(\forall u\, \exists v\, P(u, v, x, y, z)))$.
(c) değil ($x \in \mathbb{R}$ ve $y \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki her $z \in \mathbb{Q}$ için $x \geq z$ ve $z \geq y$ olsun).
(d) değil ($x \in \mathbb{R}$ ve $y \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki $x \geq y$ ya da her $z \in \mathbb{Q}$ için $x \geq z$ ve $z \geq y$ olsun).

(v) Aşağıdakileri gösterin.
(a) $\exists N \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n \geq \mathbb{N}, \dfrac{1}{n} < \dfrac{25}{37}$.
(b) $\exists N \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n \geq \mathbb{N}, \dfrac{5n^2+2}{n^2} - 5 < \dfrac{1}{1000}$.
(c) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n \geq \mathbb{N}, \dfrac{1}{n} < \varepsilon$.
(d) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n \geq \mathbb{N}, \dfrac{5n^2+2}{n^2} - 5 < \varepsilon$.

Özet

- Niceleyici sayısı bir önermenin karmaşıklığının kaba bir ölçüsüdür.
- $\forall x\, P(x)$ i göstermek için, birinin size bir x verdiğini ve $P(x)$ i göstermeniz gerektiğini düşünün.
- $\exists x\, P(x)$ i göstermek için, $P(x)$ i sağlayan (herhangi bir) x bulmanız gerekir.
- Bir nicelenmiş P tümcesini değillemek için, her $\forall$ yi $\exists$ ye ve her $\exists$ yi $\forall$ ye değiştirin ve P yerine değilini alın.

12. BÖLÜM

Örnekler ve karşıt örnekler

Bazı olgular kanıtlardan ziyade örneklerle daha açık görülebilirler.
Leonard Euler

Eğer yanılmışsam, bir yanlış zaten yeterli olacaktır.
Nazilerin Einstein'a karşı 100 yazar' kitabının varlığını duyunca, Einstein'ın yanıtı.

Şimdi bir matematikçi gibi düşünmenin en büyük sırlarından biri ile ilgileneceğiz. Şu ana kadar bu kitapta mantıksal düşünmek için önemli araçların birçoğunu sağladık: önermeler, gerektirmeler, niceleyiciler. Diğer kitaplar bunları verirler. Ama en önemli araçlardan biri olarak değerlendirdiğimi, onlar ufak ayrıntı ile işlerler. Çoğu matematikçinin katılacağından emin olduğum için, bir matematikçi gibi düşünmek temeldir. Ama bu konuyu ders kitaplarında gerçek önemi ile verilmiş olarak bulamazsınız.

O halde bu önemli aracın sırrı nedir? Kolay! Örnekler. Euler[1]'in deyişi bir matematikçi gibi düşünmek için belirleyicidir. Önce hatalı bir kavrayışı ortadan kaldıralım. Düşük düzeyli matematik çoğu zaman şu şekilde öğretilir: 'Türev için çarpım kuralı nasıl çalışır, işte bazı örnekler, örneklere benzer bazı alıştırmalar yapın.' Bu maymun gördüğünü yapar yaklaşımıdır. Öğrencilere, yapılan örneklere benzer problemler verilir ve formatı kopya etmeleri istenir. (Bu düşük-düzeyli matematik için gerçekten iyi çalışır.) Bu örnek tipine genelde bir **çalışılmış örnek** denir. Benim ilgilendiğim bu değildir.

Yüksek-düzeyli matematik için problemler daha zordur (çok karmaşık fonksiyonların türevlenmesi anlamında olmasa bile). Problemler düşünmenizi isteyen ve görmediğiniz durumlara ne öğrendiğinizi uygulamanız için ortaya konulmuş şeylerdir. Bu zordur!

Onu nasıl kolaylaştırırsınız? Önce, 'İhtiyacım olan biraz daha fazla çalışılmış örnektir' düşüncesini kafanızdan atın. Olası her soru için eğitmenlerin ya da kitapların veya bütün web sitelerinin çalışılmış örnekler sağlaması olanaksızdır.[2]

[1] 'Oyler' okunur.

[2] Üstelik, öğrencilerime de söylemeyi sevdiğim için, bir işiniz olduğunda ve patronunuzun size bir problem çözmenizi söylediğinde, herhalde onlara 'Acaba bana birilerinin daha önce çözdüğü benzer problemlerin bazı örneklerini verebilir misiniz?' demezsiniz. Bu başarılı bir kariyerden kaçınmanın iyi bir yoludur'

Çalışılmış örneklere yer vardır ancak onlar gerçek kavramayı üretmezler. O zaman ne üretirler? Örnekler *yaratma* yeteneği.

Bu bölümde, bir örnekle neyin amaçlandığına bakacağız, niçin büyük bir sır oluşturduklarını açıklayacağız, onları önermeler üzerinde 'sınayarak' mantıksal düşünmeye nasıl zorladıklarını ve nasıl yaratıldıklarını gözden geçireceğiz. İnceleyeceğimiz önemli bir örnekler sınıfı karşıt örnekler olarak bilinen örneklerdir. Bunlar bir önermenin yanlış olduğunu göstermek için yaralanacağımız örneklerdir.

Örnekler

Çalışılmış örneklerin tersine çevrilmesi

Önce çalışılmış örnekleri ele alalım. Kalkülüs çalışmasındaki fonksiyonların maksimum ve minimumlarının genel sunumunu göz önünde bulunduralım. Önce bir fonksiyonun nasıl türevlendiğini tanımlarız. Sonra (dönüm noktaları olarak da bilinen) tekil noktaları türevin sıfır olduğu noktalar olarak tanımlanır. Daha sonra üç tip tekil noktanın olduğu bize söylenir: maksimumlar, minimumlar ve büküm. Fonksiyonların ikinci türevinin tipi belirlediği gösterilir. Bundan sonra örnekler sergilenir: işte bir fonksiyon, işte şurada tekil noktaları vardır, bu tekil noktanın tipidir. Süreç kolaydır, f yi türevleyin, $f'(x) = 0$ ı çözün, $f''(x)$ i elde etmek için türevleyin ve tipi bulmak için $f''(x)$ in işaretini kullanın.

Bu çalışılmış örnekleri kullanmanın standart yöntemidir. Eğer bu yöntemi öğrenirseniz, o zaman bir fonksiyon verildiğinde maksimum ve minimumları bulabilirsiniz. Ama ya onu tersine çevirirsem ve $x = 2$ de maksimumlu ve $x = -6$ da minimumlu x değişkenli bir fonksiyon bulmanızı istersem ne olurdu? Bu en önemli anlama testidir. Epey zordur. Ama onu yapmaya çaba gösterirken çok matematik öğrenebilirsiniz.

O halde esas yetenek örnekler ortaya çıkarabilmektir. Genelde öğrencilere bir yol gösterilir ve bu yöntemi kullanarak belirli sorulara yanıt vermeleri söylenir. Gerçek matematiksel düşünme o işlemin tersi için örnekler üretmeye dayanır.

Bunun büyük bir sır olduğuna ilişkin bir takım nedenler vardır. Bir nedeni; çok çalışmak zorunda kaldıkları için öğretmenler 'bir örnek yaratın' türünden sorular düzenlemeyi sevmezler. Bu tür problemleri açıkça belirtmek zordur. Çünkü doğruluğu özenle kontrol edilmelidir. Standart bir probleme öğrencilerin verdiği yanıtı incelemek çok kolaydır. Ayrıca, standart çözümler kolayca taklit edilebildiği için öğrenciler standart problemleri severler. İyi örnekler ortaya atmak gerçekten zordur! Ve öğrencilerin cesaretini kırabilir; öğretmenler bu tür problemleri düzenlemeyişlerinin bir başka nedeni olarak bunu gösterirler.

Bu düşünceyi aşağıdaki gibi özetleyebiliriz:

> Kendi örneklerinizi oluşturun: Bir probleme yanıt bulan bir yol verilmiş ise, onu ters çevirin ve 'Hangi problem bu yanıtı verir' diye sorun.

Örneğin, kalkülüste bir fonksiyon verildiğinde nerede maksimum ve minimumları olduğunu belirlememizin istenebileceğini görmüştük. Bunu ters çevirerek, maksimum ve minimumları önceden belirlenmiş bir fonksiyon örneği arayabiliriz. Örnek olarak, yukarıda verilen $x = 2$ de maksimum ve $= -6$ da mimimum olan x değişkenli bir f fonksiyonu oluşturma örneğine bakabilirsiniz.

Nesnelere örnekler

Kendi örneklerinizi oluşturmak matematiği öğrenmenin mükemmel bir yoludur ama örneklerin başka kullanımları vardır. Onlar

(i) önermeleri test etmek, yani mantıksal düşündüğümüzü test etmekte,
(ii) tanımları ve önermeleri anımsamakta,
(iii) açıklamalarda

yararlıdır.

Size bir fikir vermek için, bir önerme verildiğinde onu örnekler kullanarak iyice inceleyebilirsiniz. Yalın fakat yararlı örneklerden söz ediyorum; $\mathbb{Z}$ sonsuz bir kümedir ya da $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$ bir fonksiyon örneğidir gibi. Biri bir kümeden söz ediyorsa, o zaman tamsayıları bir örnek olarak kullanabilirim. Boş kümeyi de iyi bir örnek olarak kullanabilirim. Bir önermeyi ele alırken akılda bir örnek tutmak aydınlatıcıdır, anlamaya yardımcı olur. Bunu gelecek bölümlerde çok göreceğiz ve bir sonraki kesimde önermelerin doğru olmadığını göstermek için örneklerin kullanılabildiğini ele alacağız.

Örnekler önermeleri anımsamada çok güçlü bir destek olabilir. Bir doğruluğun özel bir örneğini anımsamak çok kolaydır ve doğruluk 'inşa etmek' için kullanılır. Örnek olmayanlar da çok yararlıdır. Analizi ilk öğrendiğimde, sürekli bir fonksiyonun tanımını anımsamanın iyi bir örneğinini sürekli olamayan bir fonksiyon bularak anlamıştım. Bu fonksiyon, sürekli fonksiyon tanımında gerek duyulanla tamamen aynı idi.

Örnekler kullanmanın yukarıdaki üçüncü nedeni matematiği açıklamak için kolaylık sağlamasından kaynaklanır; aslında iyi bir örnekle hemen hemen her konuyu açıklamak içindir. Böylece, bir şeyin açıklanması istendiğinde, açıklamaya iyi bir örnek vermeyi alışkanlık haline getirin. Bu dinleyiciyi (özellikle, öğretmenleri) etkiler. Bir örneği anlamak, bir soyut önermeyi ya da tanımı anlamaktan çok daha kolaydır.

O halde özetlersek:

İyi örnekler biriktirin.

İyi bir örneği neyin oluşturduğu ileride tartışılacaktır. Şimdilik örneklerin önemli olduğunu söylemekle yetiniyorum.

Karşıt örnekler

Bir karşıt örnek, özel bir örnek türüdür.

Tanım 12.1

Bir önermenin yanlış olduğunu gösteren bir örneğe ***karşıt örnek*** *denir.*

Sözcüğün 'karşıt' kısmı reddetme ya da çürütme anlamında, bir önermenin doğruluğuna karşı çıktığımız olgusundan esinlenilmiştir.

Örnek 12.2

(i) 'Tüm asal sayılar tektir' önermesini ele alalım. 2 sayısı bu önerme için bir karşıt örnektir.
(ii) 'Eğer adım Churchill ise, o zaman İngiliz'imdir' önermesi 'A gerektirir B, değil (A) gerektirir değil (B)' ye bir karşıt örnek olarak kullanılmıştır.

(iii) 'p ve q gerçel sayılar olsun. Eğer $p / q \in \mathbb{Q}$ ise, o zaman $p \in \mathbb{Q}$ ve $q \in \mathbb{Q}$ dır' önermesini göz önünde bulunduralım. Bu tamamen akla yatkın gibidir. Ancak, $p = \pi / 3$ ve $q = \pi / 2$ olsun; $p / q = 2 / 3$ olduğunu görüyoruz. Böylece p ve $q, p / q \in \mathbb{Q}$ olacak şekilde gerçel sayılardır ama hem p hem q, $\mathbb{Q}$ ye ait değildir.
Böylece $p = \pi / 3$ ve $q = \pi / 2$ önermeye bir karşıt örnek oluşturur.

Uyarı 12.3

'Eğer … ise, o zaman …' biçimli bir önermenin doğru olduğu, doğru varsayımlı ve doğru sonuçlu özel bir önerme alarak gösterilemez. Bununla birlikte, önermenin doğru olmadığı bir örnek dahi bulabilirsek, o zaman önerme bir teorem değildir.

O halde, bir önermenin hatalı olduğunu göstermek için sadece bir karşıt örneğe gereksinim duyarsınız. Bir ve sadece biri yeterlidir.

Alıştırma 12.4

'Bir gerçel sayının karesi pozitiftir'e bir karşıt örnek bulun.

Örnekler ve karşıt örnekler nasıl oluşturulur

Bir matematikçinin iç diyoloğunun çoğunluğu örnekler ve karşıt örnekler üzerinedir, ama onlar genelde kitaplarda ve derslerde ihmal edilir. Daha önce söylediğim gibi örnek ve karşıt örnekler oluşturmak aslında çok zordur, oysa gerçek bir matematikçinin parlama şansının olduğu yer orasıdır.

Böylece size bir örnek verildiğinde ilk tepkinizin bir başka örnek bulmak olması gerekir. Ama sadece bu yetmez. Kuşkusuz bir zihniyet edinmeye çalışmalısınız. Bundan sonra biri size bir önerme verirse, o zaman tepkiniz ona güvenmemek olmalı ve önermenin yanlış olduğunu gösteren bir örnek bulmak için çabalamalısınız. Önerme doğru olsa bile, bu yöntemin verdiği zihinsel deneme yararlıdır. Aynı zamanda önerme hakkında bir kanının gelişmesinde yardımcı olur. Gerçek yaşamda sürekli böyle davranırsanız dostlarınızı yitirebilirsiniz – söylediklerinde sürekli hatalar bulursanız, insanların keyfini kaçırabilirsiniz!

Bir önerme verildiğinde, bir karşıt örnek bulmaya çalışın.

Örnek 12.5

Bir gazetede yer alan bir haberde, lojik yüzünden zamanda yolcuğun olanaksız olduğu söyleniyordu: Eğer zamanda yolculuk olabilseydi, o zaman gelecekten bir sürü insanla karşılaşılırdı.

Bunu okurken niçin doğru olmadığı üzerine bir çok neden bulmaya çalıştım. Siz de aşağıdakini okumadan önce çaba harcayın.

Hatalı olabildiğine ilişkin bazı gözlemlerim oldu. Belki zamanda yolculuk bizim zamanda sadece ileriye doğru gitmemize izin veriyor (şu andakinden daha fazla!). Belki de zamanda yolculuk edenlerin bizimle iletişime geçmelerine izin verilmiyor. Belki zamanda yolculuğun bir hızı vardır, bir yıldan fazla geriye yolculuk yapamazsınız ve zamanda yolculuk hala epey yıl uzaktadır (ve zamanda yolculuk makineleri taşınamayabilir).

Matematik durumunda bu örnekler nasıl üretilebilir? Bir çıkış yolu; kafanızda hemen kullanılmaya hazır, örneğin boş küme ya da $\mathbb{Z}$ gibi, iyi bir örnekler stoku bulundurmaktır. Diğer çare pratiktir. Yani, örnek oluşturmakta ne kadar çok alışkanlığınız varsa onları ortaya atmakta o kadar iyi ve hızlısınızdır. Problem-çözmek için kesin başaran bir yöntem olmadığından örnek oluşturmanın hiçbir sihirli formülü yoktur. Genelde kitapların örnekler ve karşıt örneklerden kaçınmalarının nedenlerinden biri, bu sihirli formülün yokluğunun onların kullanımını öğretmeyi zorlaştırdığındandır.

İlk denemeler genelde iyi olmadığından başlangıçta örnekler ve karşıt örnekler oluşturmak boşa çıkabilir. Yetenek matematikte mükemmellik için anahtar rolde olduğundan, azimle devam etmek önemlidir.

Alıştırmalar

Alıştırmalar 12.6

(i) Aşağıdakilere örnekler bulun:
- (a) Sonlu sayıda x için $f(x) = 0$ olacak şekilde sabit olamayan bir $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu.
- (b) Sonsuz çoklukta x için $f(x) = 0$ olacak şekilde sabit olamayan bir $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu.
- (c) $f'(x)$ her zaman pozitif olacak şekilde polinom olmayan bir $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu.
- (d) $f'(x)$, $x < 0$ için negatif ve $x \geq 0$ için pozitif olacak şekilde polinom olmayan bir $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu.
- (e) f, $x = -2$ de bir maksimum ve $x = 7$ de bir mimimuma sahip olacak şekilde bir $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu.

(ii) Aşağıdakilerin doğru olup olmadığını belirleyin. Yanlış önermeler için bir karşıt örnek bulun ve doğru olanların doğruluğunu gösterin.
- (a) Her $x < -1$ için, $x^3 < 0$.
- (b) Her $x > 1000$ için, $x^3 > 0$.
- (c) Her $x \leq 1$ için, $x^3 \leq 0$.

(iii) Aşağıdakilere karşıt örnekler bulun.
- (a) $(1 - x) / x, x \in \mathbb{Z}$ için, bir tamsayı değildir,
- (b) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$,
- (c) $\forall x, y \in \mathbb{R}^+ (\sqrt{x + y} = \sqrt{x} + \sqrt{y})$,
- (d) $\forall x, y \in \mathbb{R} (\sqrt{x + y} = \sqrt{x} + \sqrt{y})$,
- (e) Her $n \in \mathbb{N}$ için $x < y + (1 / n)$ ise, o zaman $x < y$ dir,
- (f) Eğer $a < b$ ve $c < d$ ise, o zaman $ac < bd$ dir,
- (g) Eğer $n \in \mathbb{N}$ ise, o zaman $n^2 + n + 41$ bir asal sayıdır.

(iv) $f'(c) = 0, f$ nin c de bir maksimum ya da bir minimumunun olduğunu gerektirir' e bir karşıt örnek bulun.

(v) Daha önce çözdüğünüz örnekler bulun ve nasıl 'ters çevrildiklerini' kararlaştırın. Sonra ters çevirmeden doğan bazı örnekler oluşturun.

Özet

- Kendi örneklerinizi oluşturun.
- Örnekler biriktirin.
- Bir karşıt örnek, bir önermenin yanlış olduğunu gösteren örnektir.
- Bir önermenin yanlış olduğunu göstermek için sadece bir karşıt örneğe gereksinim duyulur.
- Her zaman bir önermenin yanlış olduğunu göstermeye çaba harcayın.

13. BÖLÜM

Lojiğin özeti

A önermesi B önermesini gerektiriri yazma yollarının bir özeti

- A gerektirir B.
- A doğrudur gerektirir B doğrudur.
- $A \Longrightarrow B$.
- Eğer A ise, o zaman B.
- Eğer A ise, B.
- B eğer A ise.
- A ancak eğer B ise.
- A, B için yeterlidir.
- B, A için gereklidir.
- Ya A yanlıştır ya da B doğrudur.

A önermesi B önermesine denktir yazmanın yolları

- A, B ye denktir.
- $A \Longleftrightarrow B$.
- A eğer ve ancak eğer B ise.
- A, B için gerekli ve yeterlidir.

Tanımlar, teoremler ve kanıtlar

14. BÖLÜM

Tanımlar, teoremler ve kanıtlar

Soyut düşüncenin en ileri biçimi matematiktir.
Plato

Şimdi matematikçilerin çalışmalarını nasıl düzenlediklerinin ve sunduklarının esasını ele alacağız. Herhangi bir yüksek düzeyli matematik kitabını iyice inceleyin (ya da 1. Bölüme bakın), matematiğin roman gibi düz yazının sürekli bir parçası biçiminde sunulmadığını anlayacaksınız. Onun yerine metin Teorem, Önerme, Lemma, Sonuç Teorem, Kanıt ve Sanı gibi küçük bilgi külçelerine ayrılır. Bunların tümünün özel anlamları vardır ve onlara nasıl yaklaşıldığını bundan sonraki bölümlerde göreceğiz.

Anlamlar

Yukarıdaki sözcüklerin anlamlarını şimdilik kısaca betimleyeceğiz.

- Tanım: Bir sözcüğün matematiksel anlamının bir açıklaması.
- Teorem: Çok önemli doğru bir önerme.
- Önerme: Az önemli ancak ilginç doğru bir ifade.
- Lemma: Diğer doğru önermeleri kanıtlarken kullanılan doğru bir önerme.
- Sonuç Teorem: Bir teorem ya da önermenin basit bir türetimi olan doğru bir önerme.
- Kanıt: Bir önermenin niçin doğru olduğunun açıklaması.
- Sanı: Doğru olduğuna inanılan ama kanıtı olmayan bir önerme.
- Aksiyom: Bir matematiksel durum üzerine temel varsayım.

Tanımlar

Bir sonraki bölümde tanımlar üzerine daha fazlası söylenecektir. Şimdilik yüksek matematikte – düşük düzeydekilerden daha çok – tanımlara dikkat edilmesi gerektiğini söyleyelim. Tanımlar bir nesneler sınıfını bir diğerinden ayırmamıza ya da bir çokları arasından bir özelliği seçmemize olanak sağlar.

Doğru Önermeler

Teorem, önerme, lemma ve sonuç teorem sözcükleri doğru olan önermeleri gösterirler.

Teoremler ve önermeler

En önemli matematiksel önermelere **teoremler** denir. Herhangi bir önemli sonuca teorem denilecektir. Daha az önemli olduğunu ama içinde yarar barındırdığını düşündüğümüz ifadeler için **önerme** kullanıyoruz. Teorem ve önerme arasındaki ayrıma örnekler vermek çok zordur, çünkü değişik yazarlar aynı önermeyi farklı kategorilere ayırırlar. Bir kere seçkin iki matematikçinin fark üzerine çocuklar gibi tartıştıklarını görmüştüm, ama buna sık rastlanmaz; çoğu, kesin bir ayrım yapmak için canını sıkmaz. Aslında bu kitapta teoremi her türden doğru bir önerme anlamında kullanacağız.

Örnekler 14.1

(i) Aşağıdaki doğrudur: Napoleon Korsikalı idi.

(ii) Her doğal sayı asalların bir çarpımı olarak yazılabilir. (Bu Teorem 25.5 de gösterilecektir.)

Lemmalar

Bir **lemma**, bir diğer önermeyi kanıtlama yolu üzerinde bir adım olan bir önermedir. Lemmalar önermelerden daha az önemli kabul edilir ama ayrım daha ziyade bulunaktır.

Kaydedilmesi gereken ilginç bir nokta lemmaların, kanıtı için kullanıldıkları önermeden çok daha yararlı olduklarının ortaya çıkmasıdır.

Sonuç Teoremler

Bir **sonuç teorem** bir teorem ya da bir önermeden türetilebilen yararlı bir önermedir.

Örnek 14.2

Napoleon Fransız idi. (Bu doğrudur, çünkü Korsika, Fransa'nın bir parçası idi ve Örnek 14.1 (i) de görmüş olduğumuz gibi Napoleon Korsikalı idi.)

Diğer terimler

Kanıtlar

Matematikçiler problemler çözer – kanıt, çözümlerimizin doğru olduğunun güvencesidir.

Bir **kanıt** bir önermenin niçin doğru olduğunun açıklamasıdır. Yüksek düzeyli matematiğin belirleyici özelliği kanıt üzerine vurgu olduğu için kanıtlar hakkında söylenecek çok şey vardır. Bir anlamda bu kitap kanıt üzerinedir.

Sanılar

Bir **sanı** doğru olduğuna inandığımız ama kanıtına sahip olmadığımız bir önermedir. Sanılar kolayca oluşturulabilirler. İyi sanıları oluşturmak zordur. İyi bir matematikçi sanıları oluşturur, sınar ve çalıştıkları sürece iyileştirir.

Aksiyomlar

Bir **aksiyom** bir matematiksel durum hakkında temel bir varsayımdır. Aksiyomlar kanıtlanmasına gerek duyulmayan olgular olarak değerlendirilebilir (bizi doğrudan konuya götürürler) ya da tanımlarda kullanılabilirler.

Geometri üzerine çalışmalarda Euclid beş aksiyomu kabul etmiştir – örneğin, iki nokta arasında bir doğru çizilebilir gibi – ve bu aksiyomlardan teoremler türetmiştir. Kaydedilmesi gereken, bu aksiyomların kanıtsız kullanılan tek olgular olmasıdır.

Aksiyomlar tanımlarda da kullanılır. Örneğin, bir **grup**, eleman ikililerinin bir üçüncü eleman oluşturması için 'çarpma' yöntemli bir kümedir. İkili işlem denilen bu çarpmanın bazı özellikleri sağlaması gerekir; bu özelliklere aksiyom denir. Aksiyomlar hakkında daha fazla konuşmak istemiyoruz.

Fermat'ın Son Teoremi

Yukarıdaki sözcükleri matematikçilerin nasıl özensiz kullandıklarını göstermek için Fermat'ın Son Teoremi örneğini göz önünde bulundurmak ilginçtir.

Fermat'ın Son Teoremi matematikçiler arasında ünlüdür ve öyküsü Simon Singh'ın *Fermat'ın Son Teoremi** kitabında anlatılmıştır. Önerme aşağıdadır.

Teorem 14.3 (Fermat'ın Son Teoremi)

$n > 2$ için $x^n + y^n = z^n$ denkleminin hiçbir tamsayı çözümü yoktur.

Bu belki de şaşırtıcıdır, çünkü $n = 2$ için, yani $x^2 + y^2 = z^2$, bir sürü çözüm vardır.

Fermat bu önermeyi 1630 lu yıllarda defterine yazmış ve sayfa kenarının çok uzun olan kanıtı içermesi için yetersiz olduğunu iddia etmiştir. Ne Fermat ne de bir başkası asla bir kanıt verememiştir ta ki 1990 lı yıllarda Andrew Wiles bunu başarıncaya dek. Ama, yaklaşık 350 yıl boyunca bir *sanı* olmasına karşın, önerme Fermat'ın Son *Teoremi* olarak bilindi. Wiles, çok daha önemli bir teoremi kanıtladıktan sonra sonucu türetti. Bu teorem – bir teorem olmasına karşın Taniyama-Shimura Sanısı olarak bilinir.

Böylece, bir sanı olan Fermat'ın Son Teoremi, aslında bir teorem olan Taniyama-Shimura Sanısının bir sonuç teoremidir!

Bu örneğin matematikçilerin bu terimleri kullanırken her zaman tutarlı olmadıklarını göstermesi umut vericidir.

* Bu kitap dilimize çevrilmiştir (ç.n.).

Alıştırmalar

Alıştırmalar 14.4

(i) Birkaç kitap bulun ve tanım, lemma, önerme, teorem ve sonuç teorem sayısı arasındaki dengeyi inceleyin.

(ii) Aynı ifadenin birinde önerme diğerinde teorem denildiği iki kitap bulun.

Özet

- Bir tanım bir sözcüğün anlamını açıklar.
- Teorem, önerme, lemma ve sonuç teoremler doğru önermelerdir.
- Bir kanıt bir önermenin niçin doğru olduğunun açıklamasıdır.
- Bir sanı doğru olduğuna inanılan ama hiçbir kanıtı bilinmeyen bir önermedir.
- Bir aksiyom bir matematiksel durum hakkında bir temel varsayımdır.

15. BÖLÜM

Bir tanım nasıl okunur

Geometride insanlar önce tanımlar diye adlandırdıkları sözcüklerin anlamlarını oturturlar.
Thomas Hobbes, *Leviathan*, 1651

Yüksek-düzeyli matematikte kesin tanımlar yaşamsaldır. Neden söz ettiğimiz üzerine hepimizin anlaşabilmesi için kesinliğe ihtiyaç vardır. Bununla birlikte, kişisel tercihlere göre, tanımlar matematikçiden matematikçiye değişebilir; o halde uyanık olmakta yarar vardır.

Matematiksel bir nesneye özel bir isim verme nedeni, çoğu kez zamanın sisleri içersinde kaybolur. İsimler doğal dilin sözcüklerinden alınır ama matematiksel anlamı konuşma dilindeki anlamından farklı olabilir ve tanım için hiçbir ipucu verilmeyebilir. Örneğin, cebirde ilgi duyulan esas nesneler gruplar, cisimler ve halkalardır! Nesnelere verilen isimler nükteli olabilir – açgözlüler gibi – ya da bir kişi adından türetilebilir – Gorenstein halkaları gibi. Son durumda kişinin halkayla herhangi bir işi olduğunun garantisi yoktur – Daniel Gorenstein, adını taşıdığı halde, bir Gorenstein halkasının tanımını bilmediğini ileri sürmüştür.

Bir tanım nedir?

Bir matematiksel tanım bir sözcüğün (ya da bir deyimin) anlamanı kesin bir biçimde verir. Sözcük (ya da deyim) genelde özelliklere göre tanımlanır. Önce ileride gereksinim duyacağımız bazı (daha ziyade kolay) örneklere göz atalım.

(i) Bir tamsayı, 2 ve bir diğer tamsayının çarpımı ise **çifttir**.
(ii) Bir tamsayı çift değilse **tektir**.
(iii) Sonlu sayıda elemanı olan bir X kümesine **sonlu küme** diyoruz.
(iv) Eğer 1 den büyük bir doğal sayı sadece 1 ve kendisine bölünüyorsa, o zaman ona bir **asal** denir.
(v) Bir p asal sayısına, $p-2$ asal ya da $p+2$ asal ise, bir **ikiz asal** denir.
(vi) Pozitif bir n doğal sayısı, bir x tamsayısı için $n = x^2$ ise, bir **kare sayıdır**.
(vii) Rakamları karesinin son rakamları olan bir doğal sayıya **karemsi** denir.
(viii) Bir ikiz asal ve karemsi asal sayıya **karemsi-ikizimsi** sayı denir.

Bu son iki sayı örnek olarak kullanılsın diye oluşturulmuş sayılardır, dolayısıyla onlarla başka kitaplarda karşılaşmayı beklemeyin.

Bir tanımın amacı

Bir tanımın temel amacı neden söz etmekte olduğumuzu herkesin bilmesidir. Örneğin, bazı matematikçilerin doğal sayıların kümesini 0 ı içecek şekilde, bazılarının da içermeyecek şekilde tanımladıklarını 1. Bölümde görmüştük. Bu akıl karıştırıcıdır, ama daha büyük bir sıkıntı, bir yazar tarafından kullanılan tanımın bir okurun bildiğinden farklı olduğunda, kendini gösterir. Yazar tanımı apaçık yaparak bundan kaçınabilir.

Doğal sayılar durumunda iki farklı kavrama aynı isim verilir. Aslında aynı kavram oldukları halde, iki farklı tanımın verildiği durum da olabilir.

Bir tanım vermenin esas matematiksel nedeni çalışmaya değer bazı ilginç nesnelere kimlik kazandırmaktır (bunun yanında bazı 'kötü' nesneleri dışlamak için tanım verebiliriz). Ayrıca, psikolojik olarak, ismi belli bir nesne ile çalışmak çok daha kolaydır.

Tanımlar bir problemin çözümü olarak kullanılabilir. Örneğin, i yi -1 in karekökü olarak tanımlarsak, o zaman karmaşık sayıları tanımlamaya başlayabiliriz. Karmaşık sayıları tanımlamak (çözümleri her zaman mevcut) kuadratik denklemlerin sağlam bir teorisine neden olur ve şaşırtıcı bir şekilde adi diferansiyel denklemler gibi problemleri çözmede yardımcı olur.

Matematik çalışırken tanımları tam olarak anımsayabilmeniz son derece önemlidir. Tüm uygun koşullara sahip olmalısınız ya da başka bir şey tanımlamalısınız. Öğrenciler arasında gördüğüm yaygın bir sorun, bir sözcüğün tanımını bilmedikleri için, bazı problemlerde ilerleyemeyişleridir. Bu, öğrencilerin matematiği 'kavramları- anlamak' tan çok bir 'işlemi-uygulama' olarak gördüklerine bir örnektir.

Matematiksel tanımların 'eğer ve ancak eğer' doğası

Tanımlar vermek matematikçilerin belirsiz oldukları bir alandır. 'Eğer' li bir tanımda amaçlanan 'eğer ve ancak eğer' dir. Bir tanımın 'ancak eğer' kısmı aşikar olarak değerlendirilir ve ihmal edilir. Örneğin, yukarıdaki 'eğer bazı x tamsayıları için $n = x^2$ ise, n pozitif tamsayısı bir karedir' tanımı bir 'eğer ve ancak eğer' önermesi gibi okunmalıdır:

> 'Bir pozitif n tamsayısı bir kare sayıdır *eğer ve ancak eğer* bazı x tamsayıları için $n = x^2$ dir.'

Başka bir deyişle, koşul doğru ise sayıya kare denir ama bundan öte ancak eğer koşulu da doğrudur. Koşulu sağlamayan hiçbir kare sayı yoktur.

Matematiksel tanımlar okunurken bu akılda tutulması gereken önemli bir konudur. Sadece burada bir 'eğer' 'eğer ve ancak eğer' olarak okunabilir. Bunu, örneğin teorem okurken, sakın yapmayın.

Bir tanım nasıl okunur

Gözleyin

Bir tanım verildiğinde verilmiş koşulların tam olarak gözlenmesi gerekir. Fazladan hiçbir şeyi okumanıza izin verilmediğini aklınızda tutun. Bir örnekte *tüm* koşulların doğru olması gerektiğini, sadece bazılarının doğru olmasının yetmediğini, kaydedelim.

Örneğin, önceki karemsi-ikizimsi tanımında asal bir ikiz sayı olmalı ve karemsi olmalıdır. O halde, eğer örneğin bir sayı asal ikiz fakat karemsi değilse, o zaman karemsi-ikizimsi değildir.

Neyi ele alıyoruz?

İlk iş, ne ile uğraştığımızı belirlemek olmalıdır. Uğraştığımız ek özellikli önceden iyi bildiğimiz bir şey midir? Örneğin, bir ikiz asal: $p - 2$ ya da $p + 2$ nin asal olduğu ek özellikli bir p asal sayısıdır.

Başka sorular sorabiliriz. Daha önce bilinen bir tanıma benzer midir ya da ondan faklı mıdır? Başka bir şeye benzer midir? Bildiğimiz bir tanım artı yeni bir koşul mudur? Örneğin, X kümesinin bir öz altkümesi X e eşit olmayan ek özellikli bir alt kümedir.

Bu tanımın hangi örnekleri mevcuttur?

Bir tanım verildiğinde böyle bir nesne mevcut mudur, diye sormalısınız. Herkesin bildiği gibi, mevcut olmayan bir nesnenin bir tanımının size verileceği kuşkuludur! Baştan kuşkucu davranarak kavramayı iyileştirmek önemlidir. Eğer gerçekten böyle nesneler mevcut ise, ne kadar yaygındırlar? Bu nesne tek midir? Sonlu sayıda var mıdır? Sonsuz çoklukta mıdır?

103. sayfanın başındaki örneklerimize dönersek, tek ve çift sayılarının mevcut olduğu açıktır. Sonsuz çoklukta sonlu kümenin olduğu aşikardır. O halde onlardan bol miktarda vardır ve örneklerini inşa etmek kolaydır. İkiz asallar için ne demeli? 5 ve 7 nin ikiz olduğu kesindir, 41 ve 43 de ikizdir. Ama bunlar tek ikiz asallar olabilir. Eğer 1000 den küçük asalların bir listesine bakarsanız, bu örneklerden başka olanları göreceksiniz. O zaman sorabilirsiniz: sonsuz çoklukta ikiz asal var mıdır? İlginçtir, kimse bilmemektedir!

Bir başka örnek için yukarıdaki karemsi sayıları anımsayalım. Rakamları karesinin son rakamları olan bir doğal sayıya *karemsi* denir.

Buna örnekler var mıdır? $5^2 = 25$ olup, 25, 5 ile sonlandığı için 5 bir karemsi sayıdır. Ama daha başkaları var mıdır? Deneme ile $76^2 = 5776$ olgusu 76 nın da karemsi olduğunu gösterir. 1 den 100 e kadar sayıları incelersek 1, 5, 6, 25 ve 76 nın hepsinin karemsi olduğunu buluruz. Böylece ilk yüz sayıdan sadece beşi bu özelliğe sahiptir. Bu özelliğin sayılarımız büyüdükçe seyrekleştiğini görmek kolaydır. Bu bize karemsi kavramı hakkında bazı fikirler vermektedir.

Standart örnekler bulun

Örnekler arasından özellikleri açıkça sergileyen ve daha önemlisi tanımı anımsamamıza yardım eden bazı standart örnekler seçmeliyiz. (Onları tanımlar olarak kullanırken çok

dikkatli olmalıyız, çünkü bazen örnekler yanıltabilir. Doğru olanı seçmeliyiz!)

Örneğin, asalları kapsayan yeni bir tanımla karşılaşıldığında çoğu zaman örnek olan 3, 5 ve 13 asal sayılarını kullanırım (2 sayısı biraz uçtur – bir sonraki öneri parçasını okuyun) çünkü bu sayılar hesap yapmak için yeterince küçüktürler. Eğer sonsuz kümelerle çalışırsam, o zaman sık sık tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}$ yi ele alırım.

Standart örnekler bulmanın nedenlerinden biri, bir sonraki bölümde göreceğimiz üzere, teoremleri incelemek ve kavrayışımızı derinleştirmek için onları uygulayabilir olmamızdır.

Aşikar örnekler bulun

Bir 'aşikar örnek' olma kavramı öznel bir kavramdır – genel duruma bağlıdır. Temel olarak, apaçık bir örnek olan bir nesne aşikardır. Çok çok basit örnekler arıyoruz. Aşikar örnekler bir tanım için bilinci geliştirmede yardımcı; teoremleri ve kanıtları incelerken değerli olabilirler.

0 ve 1 sayıları genelde aşikar kabul edilebilirler, o halde yukarıdaki tanımları ilk gördüğünüzde '0 tek midir ya da çift tamsayı mıdır' sorusu sorulabilir. (2 ve 0 ın çarpımı olduğu için, çifttir.) $n!$ nin tanımı için 0! ne olmalıdır, sorulabilir. (Bu alıştırmalarda incelenmiştir.)

Benzer şekilde '1 bir asal sayı mıdır?' sorusunu sorabiliriz. Gerçekte değildir – tanımımızda sayıların 1 den büyük olması gerekiyordu. Matematikçiler tanıma neden bu koşulu koyarlar? Pekala, 1 i bir asal olarak tanımlayabilirdik; 1 ve kendisi ile bölündüğü kesindir! Bunun nedeni asallarla ilgili çok önemli önermelerin, 1 asal ise yanlış önermelere dönüşmesidir. Aslında 1 in bir asal sayı olarak kabul edilmesinin iyi bir düşünce olmadığını gerçekler matematikçiklere öğretmiştir.

Boş küme $\varnothing$ bir aşikar kümedir – hiç elemanı olmayan bir kümeden daha aşikar bir küme elde edemezsiniz! '$\varnothing$ sonlu bir küme midir' sorusunu sorabiliriz. Boş kümenin hiçbir elemanı olmadığından, yani sıfır eleman, yanıt evettir. Sonlu kümeler için bir elemanlı bir küme de aşikar olan yararlı bir örnektir.

Örnek 1. 12 deki $X \subseteq X$ ve $\varnothing \subseteq X$ lerin alt kümelere aşikar örnekler olduğunu görüyoruz.

Gerçel sayılar ya da tamsayılar üzerinde fonksiyonlar için $f(x) = 0$ ya da herhangi başka bir sabit fonksiyon alabiliriz. Geometride doğrular, çemberler, hatta düzlemler aşikar örneklerdir.

Aşikar olmanın genel duruma bağlı olduğunu akılda tutmak önemlidir; bazı durumlarda, 0 ve 1 aşikar değildir. (İkili sayıları düşünün!)

Uç örnekler bulun

Bu önceki öğüte benzerdir. Yine genel duruma bağlıdır. Burada uçtan, tanım örneğinin tanımın sınırında olduğunu kast edeceğim. Bundan sonra aşikar nesnelerin bazen uç oldukları ileri sürülebilir. Ancak çoğu zaman daha güçlü bir şey, patolojik bir şey isterim. Örneğin, topolojide düzlemin tamamını dolduran eğrilere örnekler vardır. Bir eğrinin sadece bir-boyutlu bir nesneyi örtebildiğini sanırız, oysa durum öyle değildir. Bu olay bir uç örnektir.

Şimdilik bir tanımın sınırındaki örnekleri göz önünde bulunduralım. Böylece 1. Bölümde verilen X in bir alt kümesinin tanımında $\varnothing$ ve X i uç örnekler olarak değerlendirebiliriz, çünkü X in $\varnothing$ dan daha küçük bir alt kümesini ve de X den daha büyük bir alt kümesini elde edemeyiz.

Asallarla ilgili olarak, 2 bir asala uç örnektir: o ilk asaldır ve de tek çift asal olmak gibi ilginç özelliğe sahiptir.

Örnek olmayanlar bulun

Tanımın koşullarını *sağlamayan* bazı örnekleri bilmek iyi bir fikirdir; bunlara **örnekdışı** denir. Bunları (bir önermenin yanlış olduğunu gösteren) karşıt örneklerle karıştırmayın.

Gerçekte, örnek olmayanlar önermelere karşıt örnekler bulurken yararlıdır, ama kafanıza tanımı yerleştirmek için de kullanılabilirler. Sözgelimi, sürekli[1] fonksiyonların tanımını anımsarken bir özel örnek dışı, yani süreksiz bir fonksiyon, göz önünde bulundururum.

Sonlu küme olmayana bir örnek doğal sayılar kümesidir. Boş küme $\varnothing$ sonsuz bir küme olmayana bir örnektir ama daha ziyade uç bir örnektir, herhangi bir başka sonlu küme daha iyi olur.

Eskilerden yeni nesneler oluşturun

Bir tanım yapıldıktan sonra eskilerden yeni nesneler oluşturmak gelenektir. Örneğin, 1. Bölümde kümelerin alt kümelerini, arakesitlerini, birleşimlerini ve çarpımlarını alabildiğimizi görmüştük.

Bundan başka, eğer bir nesne özellikli bir küme ise 'özellik bir alt küme için, kesişim için v.s. geçerli midir?' sorusunu sorabiliriz. Örneğin, sonlu bir kümenin bir alt kümesi de sonlu mudur, gibi. Evet, sonludur. Bir grubun bir alt kümesi bir grup mudur? Hayır, çünkü ikili işlem alt küme üzerinde çalışmayabilir. Yani, alt kümenin x ve y elemanlarının çarpımı alt kümede olmayabilir. (İkili işlemlerin tam bir tanımı için bir sonraki alıştırmalara bakın.)

Alıştırmalar

Alıştırmalar 15.1

(i) Aşağıdakilerin örneklerini bulun.

(a) X bir küme olsun. X üzerinde bir **ikili işlemi** bir $* : X \times X \to X$ dönüşümü olarak tanımlayalım. Yani, $*$, X in iki elemanını alır ve bir üçüncüsünü üretir. x ve y elemanları için bu üçüncü elemanı $x * y$ olarak yazarız. Örneğin, $X = \mathbb{Z}$ ve $* = +$ olsun. O zaman $*$ tamsayılar üzerindeki toplamadır.

(b) Bir ikili işlem, her $x, y \in X$ için $x * y = y * x$ ise **değişmelidir**, denir.

(c) Bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $x < y$ ve $0 \le t \le 1$ için $f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y)$ gerçekleniyorsa **konvekstir**, denir.

[1] Sürekli fonksiyonların tanımı çok karmaşık olduğu için burada ayrıntılara girilmeyecektir – eğer yüksek matematik çalışıyorsanız, o zaman onunla karşılaşacaksınız ya da yakında göreceksiniz.

(d) x bir doğal sayı olsun. Yeni bir tamsayı elde etmek için rakamların karelerinin toplamını alın. Bu işlemi bir 1 üretesiye kadar yineleyin ya da sonsuz kez yineleyin. İşlem bir 1 ile sonlanırsa, x tamsayısına bir **mutlak sayı** denir.

(ii) a, b, c ve d sayıları için $\frac{a}{c}\times\frac{b}{d}=\frac{a\times b}{c\times d}$ olduğunu ve bu eşitliğin ne kadar yarar sağladığını hepimiz biliyoruz. Neden kesirlerin toplamını benzer bir şeyle tanımlayamayız? Yani, hesaplamayı kolaylaştırmak için niçin

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{c+d}$$

yi tanımlayamayız?

(iii) $n!$ ile gösterilen n nin faktöriyeli daha önce $n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times 2\times 1$ olarak tanımlanmıştı. Negatif olmayan tüm tamsayılar için $n!$ i ilk n sayının (tekrarsız) sıralama yolu sayısı olarak tanımlayalım.

İki tanımın $n\geq 1$ için çalıştığını ve yeni tanımla $0! = 1$ olduğunu gösterin. (Gamma fonksiyonu ile daha ileri giderek tanımı genelleştirebiliriz. Bunu araştırın.)

Özet

- Verilen koşullara iyi bakın.
- Ne ile uğraşıyorsunuz?
- Hangi örnekler mevcuttur?
- Standart örnekler bulun.
- Aşikar örnekler bulun.
- Uç örnekler bulun.
- Örnek olmayanları bulun.
- Eskilerden yeni nesneler oluşturun.

16. BÖLÜM

Bir teorem nasıl okunur

İlk kural, bir şeyi asla doğru kabul etmemektir ta ki tek bir kuşku olmaksızın doğru olduğunu bilinceye dek.
René Descartes, *Yöntemin Söylevi*, 1637

Teoremler ve kanıtlar matematiğin merkezindedir. Bu bölümde yeni bir teoremin nasıl ele alındığını açıklayacağım; kanıtların değerlendirilmesi daha sonra gelecektir.

Daha önce açıklandığı gibi öğrenciler genelde matematiği; bir çarpımı veya bir kuadratiği önce çözerek diferansiyel denklemi çözmek gibi, problemler setini çözmeye uygulanan işlemler olarak algılarlar. Yüksek-düzeyli matematik bunun ilerisine gider ve – yöntemler ya da algoritmalardan ziyade – önermeler önem kazanır.

Problemleri çözerken teoremlerin kullanımı açık değildir. Örneğin, teoremler bir algoritma sağlamayabilirler. Bu bölümde kullanacağımız (aşağıda verilen) üç teorem, bir algoritmanın nasıl uygulandığından çok, belirli matematiksel nesnelerin yapısı hakkında fazla bilgi verir.

Bunun bir sonucu olarak, öğrenciler bir şeylerin nasıl yapıldığını teoremlerin onlara söylediğini sanarlar ve dolayısıyla gerçekte teoremin ne söylediğini yakalayamazlar.

Bundan sonra, hatalı bir uzlaşma doğru bir önermeyi teorem olarak adlandırmamız olacaktır ve gerekli olmadıkça önemelere ve lemmalara göndermede bulunmayacağız.

Üç teorem

Teoremleri çalışabilmek için çalışılacak bazı teoremlere gereksinim vardır. Bu bölümde aşağıdaki üç teoremi kullanacağız.

Teorem 1: Eğer m ve n tek doğal sayılar ise, o zaman mn bir tek tamsayıdır.
Teorem 2: Sonsuz çoklukta asal sayı vardır.
Teorem 3: $\sqrt{2}$ sayısı irrasyoneldir, yani m ve n tamsayılar olmak üzere, m / n biçimli yazılamaz.

Bunlardan ilkinin doğru olduğundan hemen ikna olmuşsunuzdur ve kendi kanıtınızı vermek isteyebilirsiniz. İkinci ve üçüncüsü eski teoremlerdir (her ikisi iki bin yıllıktır) ve sezgiye dayalı değillerdir. (Her ikisi çelişki ile kanıtlanabilir; 23. Bölüme bakın.)

Teoremlerin analizi

Varsayımları ve sonuçları bulun

7. Bölümden bildiğimiz gibi gerektirmeler, teoremler genelde

'varsayımların bir koleksiyonu bir sonucu gerektirir'

biçimli yazılabilir. Yani 'Eğer … ise o zaman …' biçimlidir. Bir teoremle çalışırken ilk amacımız bu varsayımların ne olduğunu belirlemektir. Çoğu zaman tartışmaya gerek vardır ama varsayım ve sonuçların ne olduğu kafanızda iyice yer etmelidir.

İlk teorem için

'm ve n doğal ve tektir' varsayımlar

ve

'mn bir tek tamsayıdır' sonuçtur.

İkinci teoremi

'Eğer X asal sayıların kümesi ise, o zaman X sonsuzdur'

gibi yeniden ifade ederiz. Bu teoremin çirkin bir ifadesidir – başta gereksiz olan X i araya sokar – ama varsayımları ve sonuçları açık biçimde görebiliriz.

Üçüncü teoremi

'Eğer $x = 2$ ise, o zaman $\sqrt{2}$ irrasyoneldir'

ya da

'Eğer $x = \sqrt{2}$ ise, o zaman x irrasyoneldir'

olarak yeniden yazabiliriz.

Teorem, 2 sayısı ya da $\sqrt{2}$ hakkında bize bir şeyler söylüyor mu? Yanıt tartışmaya açıktır. Her iki durumda varsayım belirli bir sayı ile ilgilidir ve sonuç irrasyonellik üzerinedir.

Varsayımların ve sonuçların gücünü değerlendirin

Varsayımların ve sonuçların ne kadar güçlü olduğunu bilmek isteriz. En iyi teoremler zayıf varsayımlara ve kuvvetli sonuçlara sahiptir. Bir **kuvvetli sonuç** o nesneler hakkında çok kesin ve açık bir şeyler söyler.

Bir **kuvvetli varsayım** küçük bir nesneler kümesine göndermede bulunur. Her iki durumda kuvvetlinin tersi **zayıftır**.

Matematikçiler zayıf varsayımlar ve kuvvetli sonuçlar isterler; yani, nesnelerin çok geniş bir koleksiyonunu (zayıf varsayım) alırız ve onlar üzerine çok kesin bir şeyler söyleriz (kuvvetli sonuç).

Yukarıdaki Teorem 2 nin varsayımı kuvvetlidir; sadece asal sayıların kümesine göndermede bulunur. (Öte yandan sadece asal sayıları dikkate alırsanız, o zaman *tüm* asal sayılar üzerine bir şey söylediği için bu zayıf bir varsayımdır. Bir kez daha tartışmaya gerek vardır!)

Benzer şekilde Teorem 3 sadece 2 nin karekökünün özelliklerini tartışır, o halde çok güçlü bir varsayımı vardır. Öte yandan Teorem1 in daha zayıf (ya da daha genel) bir varsayımı vardır; bir sürü tek doğal sayıdan *herhangi birini* almamıza izin verilir.

Teorem 1 in varsayımlarını doğal sayı varsayımı yerine bir tamsayı varsayımı alarak daha zayıf kılabiliriz. Bu önermenin tamamını *kuvvetli bir önermeye* dönüştürür – iyi bir teorem için zayıf varsayımlar ve güçlü sonuçlar isteriz.

Varsayımları değiştirmek bir teoremin ne kadar iyi olduğunu ortaya çıkarır. Çoğu matematikçi bunu, bir teoremi ilk defa gördüklerinde, neredeyse bilinçaltı yaparlar.

Teorem 3 için asal sayıların karekökünü araştırarak varsayımı zayıflatabiliriz, örneğin

'Eğer p asal ise, o zaman $\sqrt{p}$ irrasyoneldir.'

Bu önerme doğrudur. (Kanıtı 23. Bölümde bir alıştırmadır.) Önerme, daha ileri giderek, doğal sayılar için zayıflatılabilir:

'Eğer n bir doğal sayı ise, o zaman $\sqrt{n}$ irrasyoneldir.'

Bu son önerme *yanlıştır*, çünkü her n için doğru değildir; örneğin $\sqrt{4}$ rasyoneldir (çünkü bir tamsayıdır).

Böylece eğer varsayımları aşırı zayıflatırsak yanlış önermeler elde edebiliriz. Matematiksel çalışmanın önemli bir bölümü varsayımları nereye kadar zayıflatabildiğimizi belirlemeye ayrılır. Örneğin, $\sqrt{n}$ nin irrasyonel olması için n üzerine en iyi varsayım nedir? Burada en iyiden kasıt: eğer varsayımımızı zayıflatırsak, o zaman $\sqrt{n}$ irrasyonel değildir.

Bir kuvvetli sonuç bize daha kesin bir şey söyler. Yukarıdaki teoremlerin tümü güçlü sonuçlara sahiptirler. O halde

'$x^2 + 2x + 1 = 0$ varsayalım. O zaman $x \geq -1000$ dir'

teoremini ele alalım. Bunun çok zayıf bir sonucu vardır; onun doğru olduğunu tahmin edebilirsiniz. (Doğru olan) en kuvvetli sonuç '$x = -1$' dir.

33. Bölümde varsayımların zayıflatılması üzerine daha fazlası söylenecektir.

Önceki teoremlerle karşılaştırın

Gözleme gücümüzü uygulayabiliriz. Eldeki teoremi öncekilerle karşılaştırın. Varsayımlar ve sonuçlar nasıl farklılık gösterirler? Daha çok mu kısıtlayıcı yoksa daha az mı? Yani, daha mı zayıftır yoksa daha mı kuvvetlidir?

Bu sizin teoremi gerçek yerine oturtmanıza ve teoremler arasındaki çeşitli bağları görmenize izin verir.

Ayrıntıyı gözleyin

Bir teoremde – zayıf sözcükler olsalar bile – hemen hemen her sözcüğün önemi vardır. Her sözcüğü dikkatli okuyun ve ne demek istediğini düşünün.

Örneğin, Teorem 1 deki varsayımların *doğal* sayılar üzerine ve sonucun *tamsayılar* hakkında olduğuna dikkat ettiniz mi?

Gözlemenin yararı, net olarak gözlenenleri anımsamanın çok daha kolay olmasıdır. Sonucu anımsamak yeterli değildir; varsayımlar eşit önemdedir. Böylece (iyi bilinen ve 126. sayfada verilen) Pisagor Teoremi'nin ifade edilmesi sorulsaydı, sadece '$c^2 = a^2 + b^2$' demek yeterli değildir. Önce a, b ve c nin bir üçgenin kenarları olduğunu ve de üçgenin aslında c hipotenüslü dik-açılı olduğunu açıklamalısınız.

Teoremin ne yaptığını ve nasıl kullanıldığını sınıflandırın

Gerçekte bir teorem bize ne söyler? Hesaplamamıza mı izin verir, sınıflandırır mı (yani bir şeyin ne olduğunu bize söyler mi)?

Örneğin, çarpımlarının tekliği üzerine Teorem 1, hesapların kontrolünde yararlı olabilir (örneğin, çarpım için bir bilgisayar programının doğru çalıştığını kontrol ederken kullanılabilir). Teorem 2 bize asalların kümesinin yapısı üzerine bir şeyler söyler. Eğer asalların kümesi sonlu olsaydı, o zaman tümünü bilgisayarla bulabilirdik ya da bu listeyi kullanarak asallar hakkında teoremler kanıtlayabilirdik. Ama sonsuz çoklukta oldukları için bu seçimler bize açık değildir.

$\sqrt{2}$ nin irrasyonel olduğu önermesi bir teorem 'sınıflandırılması' olarak görülebilir; $\sqrt{2}$ nin hangi tipten sayı olduğunu sınıflandırır.

Bir şekil çizin

Bazen yapılamasa da bir şekil çizmek her zaman iyi bir düşüncedir. Asal sayılar ya da irrasyonellik için çok yararlı olmayacaktır ama 'mn tektir' teoreminin doğru olduğunu gösterirken iyi çalışır. Deneyin!

Bazen şekillerin yanılmaya neden olabileceğini bilmelisiniz, o yüzden dikkatli olun.

Aşikar örneklere ve diğer uç durumlara uygulayın

Teoremi varsayımlardaki nesnelerin aşikar ve uç örneklerine uygulayın. Eğer özel bir sayı 0 ya da 1 ise acaba ne olur? Eğer $f(x) = 0$ ile tanımlı aşikar fonksiyonu alırsak, acaba ne olur? Ya boş kümeyi alırsak? Çembere ya da doğruya ne olur?

Bu örnekler anlamayı güçlendirir; teoremlerin uygulandığı yerlerin açık bir resmini çizer.

Bir uç örnek olarak '$y = x^2$ ve $z = y^2$, o halde $z \neq x^2$' önermesini göz önünde bulunduralım. Bu akla yatkın görünüyor, çünkü y ve y^2 genelde farklıdır, ama doğru değildir. $y = 1$ alalım. Bu, $x = 1$ olduğunda, gerçeklenir.

Tersi doğru mudur?

Herhangi bir gerektirme verildiğinde, tersini ele alalım. '$A \Longrightarrow B$' nin tersinin '$B \Longrightarrow A$' olduğunu ve eğer '$A \Longrightarrow B$' doğru ise, o zaman '$B \Longrightarrow A$' nın doğru ya da yanlış olabileceğini anımsatalım.

Tersini göz önünde bulundurmak, bizi varsayım ve sonucu değerlendirmeye zorlar ve bazen önemli bir şey söyler.

İlk teoremin tersi

'Eğer mn bir tek tamsayı ise, o zaman m ve n tek doğal sayılardır'

olur. Bu doğru *değildir*. Bunu görmek için *bir tek* karşıt örnek bulmamızın yeteceğini anımsatalım. $m = -1$ ve $n = 3$ alalım; o zaman $mn = -3$ tek bir tamsayıdır ama m bir doğal sayı değildir.

Okutmanlar ve yazarlar çok zaman en iyi olası sonucu verirler, o yüzden tersi büyük olasılıkla doğru değildir ve doğru olup olmadığını kontrol etmek yersizdir. Ama eğer tersi doğru değilse, o zaman bir karşıt örnek bulun. Bu problemi anlamanızı derinleştirir ve karşıt örnek bulmada alışkanlık sağlar ki, bu da problem-çözme süresince çok yararlıdır.

Sembollerle ya da sözcüklerle yeniden yazın

Sözcüklerle yazılı bir teoremi anlamanın en iyi yolu onu sembollerle yeniden yazmaktır ve tersi için de doğrudur. Böylece 'Eğer mn bir tek tamsayı ise, o zaman m ve n tek doğal sayılardır' ters önermemiz

$$\text{'}mn \in \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2j - 1, \text{ bazı } j \in \mathbb{Z} \text{ için}\}$$
$$\Longrightarrow m, n \in \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2j - 1, \text{ bazı } j \in \mathbb{N} \text{ için}\}\text{'}$$

olarak yazılır.

Bazen bir teorem çok açıktır ve anımsanması çok kolaydır ve bazen de – bu örnekte olduğu gibi – değildir.

Pisagor Teoremi'nin sonucu '$c^2 = a^2 + b^2$' olarak yazıldığında 'Hipotenüsün karesi diğer iki kenarın karelerinin toplamına eşittir' den çok daha açıktır.

Örnek-dışı olanlara ne olur?

Varsayımları sağlamayan örnekleri, yani örnek-dışı olanları göz önünde bulunduralım. Bunların bazıları için sonuç hala geçerli midir? Benzer şekilde, teoremin ifadesindeki varsayımlardan biri çıkarılırsa, ne olur? Kanıt çalışılırken bu sorulara daha rahat yanıt verilebilir.

Teorem 1 de, m ve n nin sadece birinin tek ve hiçbirinin tek olmadığı zaman ne olacağını değerlendirebiliriz. Bu durumlarda önermenin yanlış olduğunu görürüz. O halde bu iyi bir teoremdir; çift / tek varsayımlarını daha fazla zayıflatamayız ve doğru bir önerme yazamayız. Bununla birlikte varsayımları 'm ve n tek tamsayılardır' olacak şekilde zayıflatabilir ve hala doğru bir önerme ortaya atabiliriz. Çift / tek koşulunu kaldırarak onu daha fazla zayıflatamayacağımızı kaydedelim.

Genelleştirin

Eğer A önermesinden bir varsayımı silersek, o zaman daha zayıf önermeye A nın bir **genellemesi** deriz.

Örneğin, 'Eğer p bir asal sayı ise, o zaman $\sqrt{p}$ irrasyoneldir' önermesi '$\sqrt{2}$ irrasyoneldir' in bir genellemesidir. Her zaman önermeleri genelleştirmeye çaba harcamalısınız. Eğer genelleştirir ve genel önermeye bir karşıt örnek bulabilirseniz, o zaman varsayımın esas teorem için yaşamsal olduğunu anlarsınız.

Genelleme bir matematikçi gibi düşünmek için çok önemlidir ve 33. Bölümde işlenecektir.

Alıştırmalar

Alıştırmalar 16.1

(i) Aşağıdaki teoremleri dikkatle inceleyin.

(a) $m, n \in \mathbb{N}$ varsayalım. O zaman mn çifttir eğer ve ancak eğer m ve n çifttir.

(b) f nin konveks olduğunu varsayalım. O zaman

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

dir.

(c) Eğer A ve B sonlu kümeler ise, o zaman $|A \times B| = |A||B|$ dir.

(d) $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ olsun. Bir çember üzerindeki n farklı nokta için ardışık noktaları bir doğru ile bağlayın. Oluşan şeklin iç açılarının toplamı $(n-2) \times 180°$ dir.

(e) $n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq 7$ ise, o zaman

$$\frac{n}{n^2 - 8n + 12} \geq \frac{1}{n}$$

dir.

(f) A sonlu bir küme olsun. S, A nın tüm alt kümelerinin kümesi olsun. O zaman $|S| = 2^{|A|}$ dır. (S ye A nın **kuvvet kümesi** denir.)

(g) Eğer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyonlar ise, o zaman $h(x) = f(x) + g(x)$ ve $m(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ ile verilenlerin ikisi de konvekstir.

(h) A, B ve C kümeleri için

i. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,

ii. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$,

iii. $A \neq B$ dir eğer ve ancak eğer $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \neq \emptyset$ dir,

iv. $A \cup B \subseteq C$ dir eğer ve ancak eğer $A \subseteq C$ ve $B \subseteq C$ dir,

geçerlidir.

Bazı (ya da tüm) kümelerin boş olduğu uç durum(lar)da ne olur?

(ii) Aşağıdaki teoremi inceleyin:

Teorem 16.2

a, b, c ve d tümü sıfır olmayan gerçel sayılar olsun. $p, q \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

x ve y değişkenli bir denklemler ikilisi olsun. Bu denklemler sisteminin bir tek çözümü vardır eğer ve ancak eğer $ab - cd \neq 0$ *dır.*

Özet

- Varsayımları ve sonuçları bulun.
- Varsayımlar ve sonuçların gücünü değerlendirin.
- Önceki teoremlerle karşılaştırın.
- Ayrıntıyı gözlemleyin.
- Teoremin ne yaptığını ve nasıl kullanılabildiğini sınıflandırın.
- (Yararlı) bir şekil çizin.
- Teoremi basit örneklere uygulayın.
- Teoremi aşikar ve uç örneklere uygulayın.
- Tersi doğru mudur?
- Sembollerle ya da sözcüklerle yeniden yazın.
- Örnek-dışı olanlara ne olur?
- Genelleştirin.

17. BÖLÜM

Kanıt

Kulağa doğru gelen nedenlerle doğru nedenleri karıştırmayın.
Anon

Matematik inanılmazdır. Başkasının sözüne ya da düşüncesine güvenmek zorunda olmadığımız bir alanıdır. Gerçek, 'Çünkü öyle söylüyorum' diyen yüksek otorite tarafından ya da rüyasında gördüğünden dolayı, bahçesinin arkasında perilerin ona söylediğinden ya da eski gizemli bir gelenekten dolayı belirlenmez. Gerçek, bir matematiksel kanıtla belirlenir ve doğrulanır.

Bir kanıt nedir?

Bir kanıt bir önermenin niçin doğru olduğunun bir açıklamasıdır. Daha doğrusu, kanıt bir önermenin niçin doğru olduğunun *ikna edici* bir açıklamasıdır. İkna etmekten amaç, bir matematikçinin ikna edilmesidir. (Bunun ne demek istediği, içine girmeyeceğim felsefesel bir konudur; ilgilendiğim, daha çok pratik konulardır.)

Önermeler genelde, bazı yalın önermelerle başlayıp basit lojik adımları kullanarak, tanımları, aksiyomları ve önceden bilinen önermeleri – istenilen önerme sonuçlanıncaya dek – uygulayarak kanıtlanır.

Matematikçinin kanıt anlayışı günlük kullanışından farklıdır. Günlük kullanışında ya da örneğin mahkemede kanıt, doğru olması muhtemel bir şeyin delilidir. Matematikçi daha fazlasını ister. Bir önermenin kanıtlanmış olduğundan 100 % emin olmayı arzu ederiz. 'Hemen hemen kesin' olmayı sevmeyiz.

Bunların ışığında bir teoremin kanıtlanmış olduğundan nasıl emin olabilirsiniz? Milyonlar Pisagor Teoremi'nin bir kanıtını görmüş olabilir; doğru olduğundan emin olabiliriz. Daha yeni sonuçların kanıtları, bununla birlikte, hataları içerebilir. Kişisel deneyimimden biliyorum ki kitaplarda ve araştırma dergilerinde yer alan bazı kanıtlar, aslında hatalıdır.

Niçin önermeler kanıtlanmalıdır?

Başka konularda önermelerin çoğu tartışmaya açıktır ve onlardan birine inanmanız kişisel zevk ya da önyargılarınıza takılabilir. Kanıtların varlığı, bunun matematikte öyle

olmadığını ve onları kullanmanın bir esas nedeninin olduğunu ifade eder. Büyük yararı, bir önermenin doğruluğunu kanıtını çalışarak değerlendirebilirsiniz.

Önermeleri kanıtlayarak, bir önerme bir diğerinin üstünde olacak şekilde matematik inşa edebiliriz. Bu matematikçiye gerçek güç verir. Emin olmamıza ve ilerlememize olanak sağlar. Filozoflar, örneğin, eski Yunanlıların boğuştukları aynı sorularla hala uğraşırlar. Matematikte öyle değildir; o zamanlardan bu yana konumuz çok ilerlemiştir.

Bir diğer geçerli neden şudur: kendi kanıtlarınızı yazmak sizin yararınızadır, hatalarınızın ve zayıf noktalarınızın nerede olduğunu gözler önüne sermede yardımcı olur ve dolayısıyla neyi çalışmanız gerektiğini size bildirir.

Kanıtları okumak zordur

O halde kanıtlar bireyler olarak bizim için yararlıdır ve matematiğe sağlam bir temel sağlarlar; özellikle gerçek yaşamdaki sonuçlara uygulama sırası geldiğinde, yararlıdır. Ancak öğrenciler kanıtlara karşı inatla direnirler. Konunun bu olağanüstü yönüne yüzünü çeviren ve 'Niçin bir kanıtı okumalıyım?' ya da 'Şeyleri niçin kanıtlamalıyım? Size güveniyorum' sorusunu soran çok öğrenci gördüm. Esas sızlanma 'Kanıtlardan nefret ediyorum. Onları anlamıyorum ve yapamam' şeklindedir.

Bu düşünceleri anlayabilirim. Önermeleri kanıtlayan öğrencilerin çoğu yenidir. Daha önce not edildiği gibi, kanıt öncesi matematik yöntemseldir - kuadratikleri çözmenin yolu, bir çarpımın türevlenmesinin yolu – kanıtlar fazladan bir karışıklık gibidir. Bunun bir nedeni kanıtların, başlangıç çalışmalarının çoğunun atılarak, hazırlanmasıdır. Kanıt arayana kanıtı bulmada yardım eden o başlangıç çalışmasıdır.

Esas kanıtı sağlayan kişi yerinde oturarak baştan başlayıp sonuna kadar bir kerede onu yazmamıştır. Onun yerine, büyük bir olasılıkla ortadan başlamış, kör uçlara ilerlemiş, dairesel dönmüş, durmuş, bir daha başlamış ve genelde rasgele kanıta gitmiştir. Bu yapıldıktan sonra defalarca düzelterek, yanlışları ve ilk öngörüleri atarak kanıtı tam olarak yazmıştır.

Yine de bu buluş yoluna okur hemen ulaşamaz. Bir sonraki bölüm bu problemi ele almaya çabalar. (Eğer bir sonraki bölümün tek tümcelik bir özetini istiyorsanız, o zaman: kanıtı görmek için örneklerden yararlanın.)

Güvene dayanarak şeyleri kabul etmenizle ilgili soruya gelince. Başka birinin doğru dediği bir şeyi niçin kabul edemezsiniz? Tamam, istiyorsanız başkaları sizin yerinize düşünür, ama bu kitap kendinizin düşünmesi ile ilgilidir. Gerçekten bir matematikçi gibi düşünmek için kanıtı hemen kucaklamalısınız.

Kanıtların oluşturulması zordur – ama yine de umut kesilmez

Öğrencilerin kanıtlarından hoşlanmamalarının bir başka nedeni oluşturulmalarının zorluğundadır. Kanıtları ortaya çıkartmak için hiçbir yöntem, algoritma, yol haritası ya

da büyülü bir işlem yoktur. Kanıt bir sanata benzer. Her bir kanıt başarılı olan tek bir kavrayış ister gibidir. Her kanıt için bir görüş mümkün görünmemektir.

Yine de uygulayabileceğimiz bir çok strateji vardır. Hepimiz büyük sanatkar olmayabiliriz, ama perspektif ya da kompozisyon üzerine bilgilerimiz aracılığıyla çizimlerimizi geliştirebiliriz. Matematik de aynıdır. Kullanabildiğimiz teknikler vardır. Örneğin, bir denklemin tek bir çözümünün olduğunu göstermemiz gerektiğini varsayalım. Yapmamız gereken bir diğer çözümün olduğunu kabul etmek ve sonra farklarının sıfır olduğunu, yani eşit olduklarını, göstermektir. Varsayımların kullanıldığı başka basit örnekler bulunmalı ve modeller ve kanıtlardaki benzerlikleri aramalıdır.

Bu kitabın esas amacı size kanıtların nasıl yapıldığına dair düşünceler vermektir. Problem çözmedeki gibi bu da alışkanlık ister. Ne kadar çok kanıt okur ve çalışırsanız o kadar başarılı olursunuz.

Nereye gidiyoruz

Bir sonraki bölümde mümkün olduğunca çok şey öğrenebilmemiz için bir kanıtın nasıl eleştirildiğini göreceğiz. Sonra Pisagor Teoremi'ne ve kanıtına göz atarak III. Kısmı tamamlayacağız. IV. Kısımda aşağıdaki farklı kanıt yöntemlerini ayrıntılı inceleyeceğiz:

- Doğrudan (dolaysız),
- Durumlu kanıt,
- Çelişki,
- Matematiksel tümevarım,
- Karşıt Ters.

Alıştırmalar

Alıştırmalar 7.1

Daha önce gördüğünüz bazı kanıtları biriktirin.

Özellikle anlamadığınız kanıtlar bulun. Kanıtta neyi anlamadığınızı belirleyin. Anlaşılmaz olan başlangıç mıdır? Anlamamaya başladığınız nokta kanıtın esas gövdesi midir? Sonunda mıdır? Yani, kanıtın niçin bittiğini mi anlamıyorsunuz?

Özet

- ► Bir kanıt bir önermenin doğru olduğunun garantisidir.
- ► Bir kanıtın sunum şekli, ilk kez nasıl ortaya çıkarılışından genelde çok farklıdır.
- ► Kanıtların okunması ve oluşturulması çok zordur.
- ► Önermeleri yeniden kanıtlamak, kendi kanıtınızı ortaya atma becerilerinizi geliştirme olanağı sağlar.
- ► Gerçekten bir matematikçi gibi düşünmek için kanıtı sevmeniz gerekir.

18. BÖLÜM

Bir kanıt nasıl okunur

Nillus in verba.
Çevirisi: *Kimsenin sözüne inanmayın.*
Latin atasözü

İfade ettiğimiz gibi kanıt, matematiğin merkezindedir; kanıtsız matematik, gücünü yitirir. Bu kesimde bir kanıta nasıl yaklaşıldığını gösteriyoruz ve onu denetlenebilir, anlaşılabilir parçalara ayırıyoruz. Bir teoremin niçin doğru olduğu ile ilgili önemli ipuçları ve yararlı uyarılar kanıtının en son yazılan versiyonunda genelde yer almazlar. İnşa hatları silinir ve ne yazık ki, onları yeniden oluşturmak okura bağlıdır. Kanıtı, açmak zorunda kaldığınız sıkı bir bohça olarak düşünün.

Aşağıdaki öğütten tam anlamıyla yararlanmak için daha fazla deneye gereksinim duyabilirsiniz; büyük bir kısmı açık olabilir ama ileriki bir tarihte tekrar okunması yarar sağlayabilir.

Basit bir teorem ve kanıtı

Aşağıdaki teoremin anlaşılması kolaydır. Önceki bölümdeki Teorem 1 ile benzerlikleri vardır ama farklıdır. Daha sonra gelen kanıt bu bölümdeki başlıca örnek olacaktır.

Teorem 18.1

m ve n doğal sayılar olsun. mn çarpımı tektir eğer ve ancak eğer m ve n tektir.

Bu teorem akla yatkın görünüyor mu? Önceki bölümün Teorem 1 inden niçin farklıdır? O bölümün düşüncelerini bu yeni önermeye uygulayın.

Kanıt. m ve n nin tek olduğunu varsayalım. O zaman, tanımdan, bazı k ve j doğal sayıları için $m = 2k + 1$ ve $n = 2j + 1$ olur. O zaman $mn = 2(2kj + j + k) + 1$ dir. $2kj + j + k$, örneğin, r gibi bir doğal sayı olduğundan $mn = 2r + 1$ elde edilir. Yani, mn tektir.

Şimdi tersine bakalım. m ve n den birinin çift olduğunu varsayalım. Genellikten bir şey yitirmeksizin, m nin çift olduğunu kabul edebiliriz, o halde bazı k doğal sayısı için $m = 2k$ olur. $mn = 2kn$ elde ederiz, yani mn, 2 ile bölünebilirdir, dolayısıyla çifttir. Buradan mn tektir ancak eğer m ve n çift değilse sonuçlanır. Yani, mn tek, m ve n nin tek olmasını gerektirir. O halde mn nin tek olmasının tek yolu m ve n nin tek olmalarıdır. □

Kanıtın sonunun bir kare ile işaretlendiği gözünüzden kaçmasın. Kanıtın sona erdiğini işaretlemek matematikçi Paul Halmos tarafından icat edildiği için buna bazen Halmos mezar taşı denir.

Hala kanıtı anlamadıysanız, üzülmeyin, aşağıdaki düşünceleri uygulayınca ve eksik ayrıntıları yeniden inşa edince daha netleşecektir. Üstelik kanıt doğru değildir. Ölümcül olmayan bir hata içermektedir. Onu görebildiniz mi? (Ölümcül-olmayan sözcüğünden, hatanın düzeltilebildiği ve önermenin doğru kanıtlandığı anlaşılmalıdır.)

Bir kanıt nasıl okunur?

Aşağıdaki öğüdü okurken önceki teoreme ve kanıta nasıl uygulandığını düşünün.

Okuma tekniklerini uygulayın

Daha önce verilmiş olan okuma tekniklerini uygulayın: Bir genel bakış kazanmak için göz gezdirin, önemli olanı saptayın, sorular sorun v.s. Amaç kanıtın tamamının dayandığı parçayı bulmak olmalıdır.

Burada kanıt, hesaplamalardan türetimlere bağlı görünmektedir.

Onu parçalara ayırın

Kanıtı mantıksal bağımsız kesitlere bölün. Kanıtlar genelde akıcı uzun bir akıl yürütme değildir, incelenmesi gereken bir takım ayrı akıl yürütmelerdir, yani hesaplamalar, önermelerin doğrulanması v.s.

Yukarıdaki kanıtta bağımsız bir kesitin bir göstergesi, tersin ele alınmak üzere olduğunu bize bildiren ikinci paragrafın giriş tümcesidir.

Bunu görmenin bir başka yolu vardır. Teoremin ifadesi bir 'eğer ve ancak eğer' dir ve dolayısıyla daha kuvvetli bir olasılık vardır – ki burada durum öyledir. Kanıt ikiye parçalanabilir: 'eğer' kısmı ve 'ancak eğer' kısmı:

(i) 'm ve n doğal sayılar olsun. mn çarpımı tektir eğer m ve n tek ise. (Bu 'm ve n tektir $\Longrightarrow$ mn tektir' ile aynıdır.)

(ii) 'm ve n doğal sayılar olsun. mn çarpımı tektir ancak eğer m ve n tek ise. (Bu 'mn tektir $\Longrightarrow$ m ve n tektir' ile aynıdır.)

Kullanılan yöntemleri tanıyın

Matematikçi bir takım kanıt yöntemlerine sahiptir: hesaplama, doğrudan, tümevarım, karşıt ters, çelişki, durumlu kanıt, argümentlerin sayımı v.b.; bunlardan bazılarının IV. Kısım'da ayrıntılarına girilecektir. Hangilerinin kullanılmakta olduğunu saptayın – anlamlı bir kanıtın yöntemlerin bir kombinasyonu olduğu yaygındır. Önermenin 'm ve n tek gerektirir mn tek' kısmı hesaplamayla dolaysız kanıtlanır.

O halde ters işlem için ne demeli? Yani, 'Eğer mn tek ise, o zaman m ve n tektir'. Kuşkusuz, bu doğrudan bir yöntemle yapılamaz: mn nin tek olduğunu kabul ederek başlamayız ve m ve n nin tek olduğunu göstermek için bir dizi gerektirmeyi ele alamayız. Onun yerine, m ve n den birinin çift olduğu kabul edilir. Bu 'm ve n tektir' in değillemesidir. Böylelikle karşıt ters önerme kanıtlanmış olur ('değil (B) $\Longrightarrow$ değil (A)' nın '$A \Longrightarrow B$' ile aynı olduğunu anımsayalım; 8. Bölüm'e bakın). Bunun bize açık biçimde söylenmediğini kaydedin; onu gerçeklemeliyiz, 'Karşıt ters önermeyi kanıtlayacağız ...' gibi abartılı duyuru yapılmaz.

Daha genel durumda, yeni bir teoremi kanıtlamak için belki bir başka teorem kullanılır ya da bir tanımın kullanımına izin verilir v.s. Hangisinin kullanıldığını gözden kaçırmayın.

Varsayımların kullanıldığı yerleri bulun

Varsayımların nerede kullanıldığını belirleyin. Bir kez (ya da daha çok) kullanılacaklardır ya da gereksiz olabileceklerdir. (33. Bölüm'de gereksiz varsayımlar üzerine daha fazla gidilecektir.) Bu önceden kanıtlanmış teoremlerin kullanıldığı yerleri bulmayı kapsar. Bunların varsayımları da olacaktır; sağlandıklarından emin olun – faal olun! Anımsanması gereken ek bir konu şudur: eğer bir teorem farklı kanıtlarda defalarca kullanılıyorsa, o zaman önemli bir teorem olmalıdır ve kanıtlarımızda kullanılma olasılığı vardır, o halde onu iyi öğrenin.

Kanıtımızda m ve n doğal sayılarının tek olduğu varsayımı (önermenin 'eğer' kısmındaki) çok sayıda kullanılır. İlk paragrafta, tek sayılar bu biçimli olduğu için, $m = 2k + 1$ alınarak kullanılır v.s. 'Ancak eğer' için varsayımların ayırt edilmesi biraz zordur, çünkü bir önermenin değillemesini kabul ettik, o halde karşıt ters yöntemi uygulayabilirsiniz – o biraz gizlidir ama yine de kullanılır.

Kanıtı bir örneğe uygulayın

Bir kanıtı anlamanın çok etkili bir yöntemi, her bir adımı, varsayımları sağlayan bir özel ya da somut duruma uygulamaktır. Bu, kitap dışında bırakılmayacak kadar çok önemli bir bilgidir.

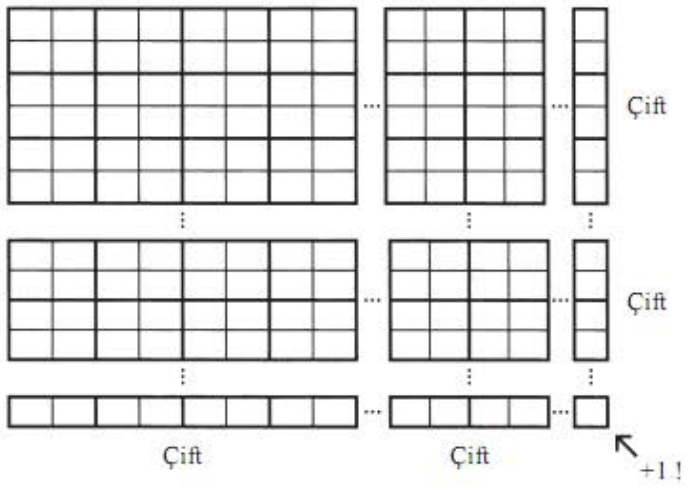
Yukarıdaki örnekte bu çok aşikardır, ancak bir deneyelim. $m = 3$ ve $n = 7$ varsayalım ve bu şekilleri kullanarak kanıtı yeniden yazalım. 'Ancak eğer' kısmının kanıtı için elbette m nin çift olduğunu varsaymalısınız, o yüzden ona 6 diyelim. n üzerinde teklik ya da çiftliği ile ilgili hiçbir varsayım yapılmamıştır, ikisini de deneyin. Yine bu bir faal olma sorunudur.

Bu yöntem özellikle sorunlu kanıtlar için iyi çalışabilir, ama maalesef her durumu aydınlatmaz.

Bir şekil çizin

Bir kanıt okumak bir problemi çözmeye benzer, o nedenle problemler nasıl çözülür, bir şekil çizme gibi 5. Bölümün tekniklerini uygulayın.

Önceki örnekte şekil, aşağıdakine benzemektedir.



Şekil 18.1 Teorem 18.1 in kanıtını açıklamak için bir şekil

Şekil sizi ikna etmeli. Tek kare dışında dikdörtgenlerin tümü çift sayıda kareye sahiptir. Buna göre tek sayıda kare vardır.

Burada bir uyarıda bulunalım. Şekillerle dikkatli davranmalısınız, aşırı derece yanıltıcı olabilirler. Bir çok matematikçi şeklin gücü yüzünden aldatılmışlardır.

Metnin doğruluğunu kontrol edin

Bir kez daha faal olun. Metnin doğru olduğunu kontrol edin. Kullanılan teoremlerin uygulandığını kontrol edin. Örneğimizde hiçbir teorem kullanılmamıştır ama eğer bir kanıt 'Teorem 6. 3 den' diyorsa, Teorem 6. 3 ün uygulanmasını sağlayın. Eğer bir kanıt 'bir hesaplama gösteriyor' diyorsa, o hesaplamayı yapın. Örneğimizde $mn = 2(2kj + j + k) + 1$ olduğu savı hemen açık değildir ve o nedenle tamamen ayrıntılı çalışmalısınız:

$$\begin{aligned} mn &= (2k + 1)(2j + 1) \\ &= 4kj + 2j + 2k + 1 \\ &= 2(2kj + j + k). \end{aligned}$$

Yukarıdaki örnek kanıtta, ikinci paragrafta 'genelliği yitirmeksizin' m nin çift olduğunun kabul edildiğini görüyoruz (tam bir tartışma için sayfa 250 ye bakın). Doğruluğunu kontrol edin. m nin çift olmadığını varsayalım. Bu n nin çift olduğu anlamına gelir, çünkü onlardan (an az) birinin çift olduğu varsayılmıştır. O halde m yi n ve n yi m olarak sayıları tekrar etiketleyin. Böylece genellikten hiçbir şey yitirilmez.

Hataları arayın – uç durumları çalışın

Matematikçiler insandır ve hata yaparlar. Faal biçimde bu hataları arayın. Her şeyden kuşku duyun ve metnin hatalı olduğunu göstermeye çalışın. Saklı varsayımları arayın ve kullanılan teoremlerin gerçekten uygulandığını kontrol edin.

Sıfır fonksiyon benzeri uç fonksiyonlar gibi uç durumlarla çalışın. Yukarıdaki m yi 1 e eşitlemeye çalışın, bu ilk doğal sayıdır, o halde bir anlamda uçtur. O zaman

$m = 2k + 1$, $1 = 2k + 1$ yani $k = 0$ ı verir. Aha! Kanıtta iddia edildiği gibi bu bir doğal sayı değildir, {1, 2, 3, 4, ...} e ait değildir. O halde kanıt hatalıdır! Bununla birlikte ölümcül bir kusur değildir ve 0 ı doğal sayıların tanımına dahil ederek ya da k, $\mathbb{N} \cup \{0\}$ dadır veya k bir tamsayıdır diyerek bu hatayı giderebilirsiniz. Her iki durumda teoremin ifadesi doğrudur, ilk kanıt, her ne kadar azda olsa, hatalı idi.

Ele alınması gereken iyi bir uç durum aşağıdakinin gösterdiği gibi bir sayının sıfır olduğu durumdur. Şu önermeyi göz önünde bulunduralım:

'Teorem' 18.1

a, b, c ve d nin doğal sayılar olduğunu varsayalım. Eğer ab = cd ve a = c ise, o zaman b = d dir.

Kanıt.

$ab = cd \iff ab = ad$, çünkü $a = c$ dir,
$\iff b = d$, sadeleştirme ile.

□

Bu ikna edici görülebilir. Problem $a = c = 0$ uç durumunu değerlendirdiğimizde ortaya çıkar. b ve d nin ne olduğunun önemi olmaksızın, $ab = cd$ den, $b = 4$ ve $c = 3$ alırsak $0 \times 4 = 0 \times 3$ elde ederiz, ama $4 \neq 3$dır. Bu bir önermenin doğruluğunun uç durumlar için kontrol edilmesinin ne kadar önemli olduğunu gösterir.

Yukarıdaki hatalı akıl yürütme kümelere de uygulanabilir: $A \times B = C \times D$ ve $A = C$ nin $B = D$ yi gerektirdiğini göstermek kolaydır. Burada sorunlardan kaçınmak için – bu durumda sıfır benzeri olan – A nın boş küme olmadığını varsaymamız gerekir.

Bir diğer uç durum bir varsayımdaki 'girdiler' den ikisinin eşit olduğu zamandır. Örneğin, 'Düzlemde x ve y verildiğinde onlardan geçen bir tek doğru vardır' gibi ifade edilen Euclid geometrisi aksiyomlarından birini gördüm. Bu akla yatkındır: kafamızda şekli canlandırabilirsiniz. Ama ya seçilen iki nokta aslında eşit ise ne olur? O zaman noktadan geçen sonsuz çoklukta doğru vardır. Aksiyomun doğru ifadesi 'Düzlemde *farklı* x ve y noktaları verildiğinde onlardan geçen bir tek doğru vardır' olmalıdır.

Bir örnek-dışına uygulayın

Örnek-dışı olanlara bir genellemenin nerede başarısız olduğunu kesin olarak belirleyin. Bu çok etkili bir öğrenme aracı olabilir.

Örneğin, $\sqrt{2}$ nin irrasyonel olduğunun kanıtı 23. Bölümde veriliyor. $\sqrt{4}$ ün irrasyonel olduğunu kanıtlamaya çalışırken o kanıtı kullanabilirdik. Bu ifade doğru değildir, ama sadece kanıtı kullanma çabası, kanıtın $\sqrt{2}$ için nasıl ve niçin çalıştığını gösterebilir.

İyi düşünme

Her zamanki gibi ileriye dönük düşünün. Kanıt, daha önce gördüğünüze benziyor mu? Bazı kanıt türleri tekrar tekrar geçer; bunun farkında olmak onları öğrenmenizi ve çalışmanızda kullanmanızı kolaylaştırır.

Bir kanıt nasıl bellekte tutulur

Bir kanıtı anımsamanın en kolay yolu, onu anlamaktan geçer. Bir şeyi ezberleyerek ya da düşünmeden öğrenmek anımsamanın zor yoludur – anlamaya çalışın. Öte yandan, örneğin bir sınavda hızınızı iyileştirmek için ezbere gerek de duyabilirsiniz.

Bir kanıtın nasıl inşa edildiğini bilin, her paragrafın kilit noktasını bilin. Bir hesaplama mı yapılacak? Esas varsayımın kullanıldığı yer orası mıdır? Notasyon kullanılmalı mı? Bunların anımsanması ve yapılması kolaydır. Ne tipten bir kanıttır? IV. Kısım'dan hangi teknikleri kullanır?

Birkaç tümceyle kanıtı özetlemeye çalışın ve – ne dediği değil – ne anlama geldiğini kaydetmeye çalışın. Böylece yukarıdaki için

> '$m = 2k + 1$, $n = 2j + 1$ kullanın, bir hesaplama çarpımın $2r + 1$ biçimli olduğunu verir.
>
> Tersi: Karşıt ters kullanın. Genellikten bir şeyin yitirilmediği argüman çift mn yi verir.'

olduğunu kaydedin.

'm nin çift olduğunu varsayalım' demediğime dikkatinizi çekerim. Bunun nedeni, eğer m ve n tektirin değillemesini kullanıyorsak, o zaman m ve n den biri kendiliğinden çift olur. Değillemeleri yazarken becerikli olmalısınız.

Alıştırmalar

Alıştırmalar 18.2

(i) Bu bölümün tekniklerini kullanarak Alıştırma 17.1 de biriktirilen kanıtları inceleyin. Kanıtlar daha netleşiyor mu? En azından biraz?

(ii) 16. Bölümün alıştırmalarından Teorem 16.2 nin aşağıdaki kanıtını inceleyin.

Kanıt. (1) ve (2) denklemlerini bilinen yolla etiketlersek, o zaman d (1) – b (2), $(ad - bc)x = pd - qb$ denklemini verir ve buradan $x = (pd - qb) / (ad - bc)$ elde ederiz. Benzer şekilde $y = (qa - pc) / (ad - bc)$ gösterilebilir. Bu sonuç belki tektir.

Tersi için, a, b, c ve d nin hepsi sıfır olmadığından, genellikten bir şey yitirmeksizin a nın sıfır olmadığını varsayabiliriz. Buradan her $y \in \mathbb{R}$ için $x = (p - by) / a$, (1) için bir çözümdür. Şimdi (1) in bu çözüme sahip olduğunu varsayarak ve $ad - bc = 0$ nedeniyle

$$cx + dy = q \iff cx + \frac{bc}{a}y = q \iff cax + bcy = aq$$
$$\iff c(ax + by) = aq \iff cp = aq$$

bulunur. O halde eğer $cp = aq$ ise, o zaman (1) için bir çözüm (2) için bir çözüm verir ve böylece sistemin sonsuz çoklukta çözümü olur.

Öte yandan, eğer $cp \neq aq$ ise, o zaman (1) için bir çözüm (2) için bir çözüm değildir ve böylece hiç çözüm yoktur. □

(iii) Yine 16. Bölüm alıştırmalarından şu önermeyi göz önünde bulunduralım: A ve B kümeleri için $A \neq B$ dir eğer ve ancak eğer $(A / B) \cup (B / A) \neq \varnothing$ dir.

Kanıt. $A = B$ varsayalım. O zaman

$$(A / B) \cup (B / A) = (A / A) \cup (A / A) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$$

olur.

Eğer $A \neq B$ ise, o zaman $x \in A$ ama $x \notin B$ olur ya da $x \in B$ ama $x \notin A$ olur. İlkinde $x \in A / B$ ye sahibiz, buradan $x \in (A / B) \cup (B / A)$ olur. O halde $(A / B) \cup (B / A) \neq \varnothing$ dir.

Benzer bir akıl yürütme ikinci olasılıktaki sonucu kanıtlar.

□

Kanıtı inceleyin (ve boş küme uç durumunu değerlendirmeyi unutmayın).

Özet

- Okuma tekniklerini uygulayın.
- Kanıtı parçalara bölün.
- Kullanılan yöntemleri belirleyin.
- Varsayımların kullanıldığı yeri bulun.
- Kanıtı bir örneğe uygulayın.
- Bir şekil çizin.
- Metnin doğruluğunu kontrol edin.
- Hataları arayın.
- Kanıtı bir örnek-dışı olana uygulayın.
- Anlayarak bellekte tutun.

19. BÖLÜM

Pisagor Teoremi'nin bir çalışması

Us ölümsüzdür, diğer her şey ölümlüdür.
Pisagor, *Diogenes Laertius, (Seçkin Filozofların Yaşamları)*

Pisagor teoremi belki de en iyi-bilinen matematik teoremidir. Matematikçi olmayanların bile teoremin üçgenler ve hipotenüs olarak bilinen bir şeyin karesini almakla ilgili olduğu üzerine belli belirsiz düşünceleri vardır.

'Bir teorem nasıl okunur' ve 'Bir kanıt nasıl okunur' üzerine önceki bölümlerdeki düşünceler çok önemli olduğundan, onları etkinleştirmek için bu teoreme uygulayacağız. O halde bu bölümde teoremi ve kanıtını derinlemesine irdeleyeceğiz, tersini ve de bir genellemesini göreceğiz.

Pisagor Teoremi'nin ifadesi

Gelişme aşamasında bir matematikçi olduğunuz için ifadenin ne olduğunu matematikçi olmayan birinden daha iyi bilirsiniz, ama yine de verelim.

Teorem 19.1

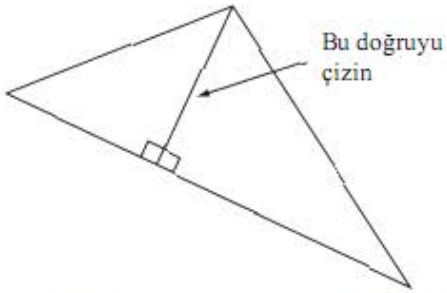
Bir dik açılı üçgenin hipotenüsünün karesi diğer kenarların karelerinin toplamına eşittir.

Alıştırma 19.2

Teoremi incelemek için 16. Bölümün düşüncelerini, Bir teorem nasıl okunuru, kullanın. Analizinizi aşağıda verilenle karşılaştırın.

Teoremin çalışılması

Şimdi teoremi, sanki ilk kez görüyormuş gibi, inceleyelim. Tüm sözcüklerin, örneğin bir hipotenüs nedir? gibi, ne anlama geldiğinin doğruluğunu kontrol etmek isteyebiliriz. Bu az çok açıktır, ama 16. Bölümdeki diğer tekniklere ne demeli? Şimdi onları uygulayacağız.



Şekil 19. 1 Her üçgen iki dik-açılı üçgene bölünür

Varsayımları ve sonuçları bulun

Pisagor Teoremi için verilen ifade '$A \Longrightarrow B$' ya da 'eğer … ise, o zaman …' biçiminde olmayan bir önermeye iyi bir örnektir. Örneğin,

> 'Eğer T a, b kenarlı ve c hipotenüslü bir dik-açılı üçgen ise, o zaman $c^2 = a^2 + b^2$' dir.

Bu biçim, varsayımların tüm dik-açılı üçgenlerle ilgili olduğuna açıklık kazandırır: 'T a, b kenarlı ve c hipotenüslü bir dik-açılı üçgendir' ve de sonuç '$c^2 = a^2 + b^2$' uzunluklarını ilişkilendiren bir denklemdir.

Varsayımların ve sonuçların gücünü değerlendirin

Varsayımları ve sonuçları değerlendirelim. Varsayım dik-açılı üçgenler üzerindedir. Kuşkusuz bunların birçok örneği vardır, ama *tüm* üçgenlerin ancak küçük bir alt kümesini oluştururlar. O halde bunun yeterince zayıf ancak o kadar da zayıf olmadığını söyleme eğiliminde olabiliriz. Ama bakın. Herhangi bir üçgen için dik-açılı iki üçgen oluşturabiliyoruz; Şekil 19. 1 e bakın. O halde ilk izlenimlere karşın, bu teorem bize tüm dik üçgenlerden söz edecektir. Bu da çok zayıf bir varsayım olduğu anlamına gelir. Bu işimize yarar. Bir teorem ne kadar çok örneğe uygulanırsa o kadar iyidir.

Sonuç çok somut ve kesin bir ifadedir. O bir denklemdir. Eğer sadece bir eşitsizliğimiz (örneğin, $c^2 \geq a^2 + b^2$) olsaydı, o zaman sonuç daha az etkileyici olurdu. Bu kuvvetli bir sonuçtur.

Ayrıca sonucun hesap yapmamıza izin verdiğini kaydedelim: bir dik-açılı üçgenin herhangi iki kenarının uzunlukları verildiğinde üçüncüsünü hesaplayabiliriz. Hesap edebilmiş olmak sonuç için her zaman çok yararlıdır.

Çok büyük sayıda nesnelerin özelliklerini hesaplamamıza olanak sağladığı için bu teorem önemli bir teoremdir. Aslında, mutlaka biliyorsunuzdur, bu teoremle kartezyen koordinatlarda uzaklıkları hesaplayabiliriz.

Önceki teoremlerle karşılaştırın

Bu geometrinin temellerinin çok basit bir teoremi olduğundan, onunla karşılaştıracak çok fazla teoreme sahip değiliz. Temellerin bir başka teoremi (dik-açılı olmayabilen) bir üçgende iç açıların toplamı 180 derece (ya da isterseniz 2π) dir. Bunun benzer bir

teorem olduğunu görebiliriz, çünkü iki açı verildiğinde üçüncüsünü hesaplayabiliriz. Uzunluklardan ziyade açılarla ilgili olduğu için, Pisagor Teoreminden farklıdır. Böylece ikisi birbirinin tamamlayıcılarıdır.

Uzunlukları ele alan bir teoremi ve açılarla çalışanı gördükten sonra her ikisini bağlayan bir teorem olup olmadığını sorabiliriz. Gerçekte vardır.

Alıştırma 19.3

Bir üçgende kenarlarla açıları ilişkilendiren bir teorem bulun.

Ayrıntıyı gözlemleyin

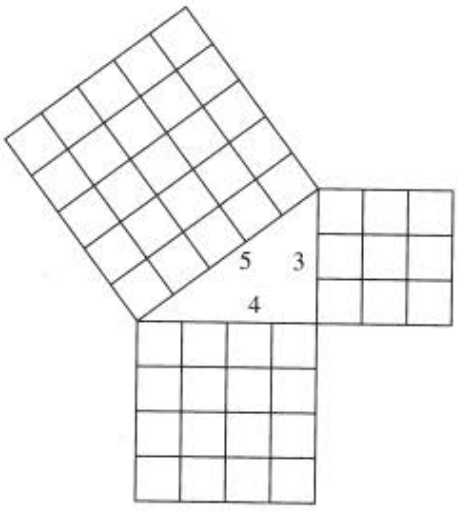
Az çok basit olduğu için Pisagor Teoremi'nde gözlenecek pek fazla ayrıntı yoktur. Belki de anımsanacak tek ayrıntı, üçgenin – örneğin ikizkenar değil – dik açılı olmasıdır. (Hatalı önermelere bazı berbat örnekler için bölümün sonundaki alıştırmalara bakın.)

Teoremin ne yaptığını ve nasıl kullanıldığını sınıflandırın

Teoremin ne yaptığını henüz yukarıda tartıştık: diğer iki kenarın uzunlukları verildiğinde bir üçgenin bir kenarını hesaplamamıza izin verir.

Bir şekil çizin

Bu bir geometrik teorem olduğundan – üçgenler üzerinedir – bir şekil çizmek için haklı nedeniniz vardır. Bu durumda bir sürü üçgen çizin ve uzunlukları ölçün. Uzunluklar soruyu sağlıyor mu? Sağlamalıdır, ama uzunlukları sadece yaklaşık olarak ölçebildiğimiz anımsanmalıdır. Klasik şekil, Şekil 19. 2 de verilen (3, 4, 5)-üçgenidir. Hatalı olarak bu, teoremin bir kanıtı gibi verilir. Oysa o bir kanıt değil, sadece bir örnektir.



Şekil 19. 2 Klasik (3, 4, 5)-üçgeni

Teoremi basit örneklere uygulayın

Şekiller çizerek şimdiden teoremi basit örneklere, (3, 4, 5)-üçgeni gibi, uyguladık.

Teoremi aşikar ve uç örneklere uygulayın

Varsayımlar dik-açılı üçgenlerle ilgilidir. Böyle nesnelerin aşikar ve uç örnekleri nelerdir? Aşikar örneklerin $a = 1$ ve $b = 1$, o halde $c = \sqrt{2}$, için olduğunu söyleyebilirim. Bu iki kenarı rasyonel ve bir kenarı irrasyonel uzunluklu bir üçgendir. Bunu 'Eğer bir üçgenin iki kenarı rasyonel ise, o zaman üçüncüsü de rasyoneldir' önermesine bir karşıt örnek olarak alabiliriz.

Bir diğer yararlı örnek $a = 1$ ve $b = 2$, o halde $c = \sqrt{5}$ dir. Bu bize, bir kenar diğerinin iki katı ise ne olduğunu söyler. Bir başka ilginç örnek $a = 1$, $b = \sqrt{2}$, o halde $c = \sqrt{3}$, dir. Bundan hoşlanırım, çünkü ilk üç 1, 2, 3 doğal sayıyı kapsar. $a = 1$, $b = \sqrt{3}$ ve $c = 2$ üçgeni, bir açısı $\pi / 6$ olduğu için, yararlıdır.

Şimdi sıra uç örneklerde. Bir uç dik-açılı üçgen nedir? Bir dik-açılı üçgenin çok özel durumu olduğu için, $a = b$ ye bir uç örnek gözüyle bakabiliriz. Bu durumda $c^2 = 2a^2$, dolayısıyla $c = \sqrt{2}a$ dır. Bu ise a rasyonel olduğunda c nin rasyonel olamayacağı anlamına gelir (çünkü bir rasyonel sayının bir irrasyonel sayı ile, burada $\sqrt{2}$, ile çarpımı irrasyoneldir.)

Deneyeceğimiz bir başka uç örnek bir kenarı, diğeri ile karşılaştırıldığında, çok büyük ya da çok küçük, almaktır. Eğer b nin sıfıra yaklaşmasına izin verirsek, b^2 gittikçe küçüleceğinden, o zaman c^2, a^2 ye doğru gitmelidir. Başka bir deyişle c, a ya yaklaşmalıdır. Bunu bir diagramda görebiliriz. a ya göre çok küçük b kenarlı bir üçgen çizin; a ve c nin neredeyse aynı olduklarını görebilirsiniz. Böylece cebir ve geometrinin umduğumuz gibi ilişkilendirildiğini göstermiş olduk.

b nin sıfıra eşit olması durumunda ortada bir üçgenin olmadığına dikkat edin.

Teoremi örnek-olmayanlara uygulayın

Teoreme örnek olmayanları değerlendirelim. Burada dik-açılı olmayan üçgenler örnekdışı üçgenlerdir. Bununla birlikte bu durumda hipotenüsü dahi nasıl tanımlarız? Hipotenüs, daima, dik açının karşısındaki kenar olarak tanımlanır. Özel bir kenarı belirlemenin hiçbir yolu yoktur, o halde $c^2 = a^2 + b^2$ nin dik kenarının ne olduğunu belirlemek olanaksızdır. c yi belirlemenin bir başka yöntemine gerek vardır. Belki en uzun kenarı alabiliriz. Bu akla yatkındır, çünkü $c^2 = a^2 + b^2$ olabilmesi için $c > a$ ve $b > 0$ olması şarttır. Bunu görmek için $b^2 > 0$ nin doğru olduğuna dikkat edelim, böylece $c^2 > a^2$, dolayısıyla $c > a$ olur. Benzer şekilde $c > b$ elde edilir.

Eğer birkaç örnek çizmeye çalışırsanız, o zaman ölçümdeki yaklaştırmaları hesaba katsanız bile büyük bir olasılıkla denklemin geçerli olmadığını göreceksiniz. Bu bizi '$c^2 = a^2 + b^2$ nin sağladığı dik-açılı olmayan *bir* üçgen var mıdır?' sorusunu sormaya götürür. Bununla, bir sonraki kesimde 'Tersi doğru mudur' sorusunu sorduğumuzda, çalışacağız.

Örnek-olmayanları Alıştırmalar 19.12 de de inceleyeceğiz.

Sembollerle ya da sözcüklerle tekrar yazın

'Eğer ... ise, o zaman ...' önermesini verdiğimizde teoremi mümkün olduğunca sembollerle yazdık. a, b ve c nin ne olduğunu ve de c nin dik-açılı üçgende hipotenüs olduğunu açıklamalıyız.

Pisagor Teoremi'nin kanıtı

Daha önce söylendiği gibi teoremi, bazı örnekler ya da (3, 4, 5)-üçgeni gibi mükemmel bazı özel örnekler için yaklaşık olarak göstermek yeterli değildir. Onun tüm üçgenler için geçerli olduğunu kanıtlamalıyız. Belki bir bilirkişi teoremin doğru olduğunu size söylemiştir ve bu sizin için yeterlidir. Ancak bu kitabın ana hedefi sizin kendi kendinize düşünmenizi cesaretlendirmek ve size önerilen bir akıl yürütmenin olduğunu kontrol etmektir.

Artık teoremin bir kanıtını göreceğiz. Abartmasız yüzlerce kanıt vardır[1]. En çok beğendiğim kanıt geometrikseldir.

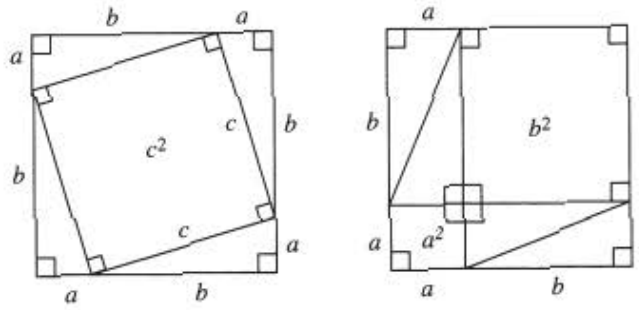
(Pisagor Teoremi'nin) Kanıtı. Kanıt, Şekil 19.3 deki iki kareyi kullanarak, gösterilebilir. İlk kareyi çizmek için a ve b kenarlı genel bir üçgen çizerek başlayın ve sonra bu kenarları, sırasıyla, b ve a uzunlukları kadar uzatın. O zaman Şekil 19.3 ün sol tarafındaki kareyi elde etmek için çizimi tamamlayabiliriz.

Şeklin sağ tarafına benzer bir başka kare çizebiliriz. Şekilden iki karenin eşit alana sahip olduğunu görebilir ve böylece

$$\begin{gathered}\text{Sol karenin alanı} = \text{Sağ karenin alanı}\\ c^2 + (4 \times (a,b)\text{-üçgeninin alanı}) = a^2 + b^2 + (4 \times (a, b)\text{-üçgeninin alanı})\\ c^2 = a^2 + b^2\end{gathered}$$

olduğunu sonuçlandırabiliriz.

□



Şekil 19. 3 Pisagor Teoremi'nin kanıtı

[1] Elisha Loomis, *Pisagor Önermesi*, National Council of Teachers of Mathematics, 1968 de 360 dan fazla vardır.

Alıştırma 19.4

Kanıtı incelemek için 18. Bölümün düşüncelerini, Bir kanıt nasıl okunuru kullanın. İncelemenizi aşağıdaki verilenlerle karşılaştırın.

18. Bölümdeki her önermenin konuyla ilgisi olmayabilir. Kanıtı irdelemek için o öğütlerden bazılarını çalışalım.

Varsayımların kullanıldığı yerleri bulun

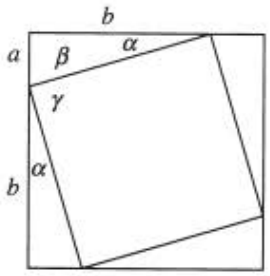
Üçgenin dik-açıkı olduğunu nerede kullandık? İlk kareyi oluştururken kullandık. Eğer a ve b kenarları bir dik açıyla kesişmeseydi, o zaman bir kare kuramazdık. Ve buradan da alanın karenin alanı ile aynı olduğunu sonuçlandıramazdık.

Metnin doğruluğunu kontrol edin

Metni denetlerseniz, bir olgunun kullanıldığı fakat açıkça ifade edilmemiş olduğunu görebilirsiniz. Şeklin solunda c^2 ile etiketlenen alan kuşkusuz kareye benzediğinden şekil çok inandırıcıdır. Ama onun bir kare olduğunu kanıtlamadığımıza dikkat edin. Bütün kenarların aynı uzunlukta olduğunu biliyoruz ama bu şeklin bir kare olduğu anlamına gelmez – bir eşkenar dörtgeni ya da uçurtmayı düşünün.

Onun gerçekten bir kare olduğunu nasıl biliriz? Tamam, iç açılardan birinin dik açı olduğunu göstermemiz gerekiyor; bunu başardıktan sonra aynı kanıt tümü için çakışacaktır. (Nedenini görebiliyor musunuz?) İç açıya γ diyelim.

Şekil 19.4 deki üçgenin α açısının küçük ve β açısının daha büyük olduğunu varsayalım. O zaman bir doğruya sahip olduğumuz için $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ olduğunu görebiliriz:



Şekil 19. 4

Ama bir üçgendeki açıların toplamı 180° ve üçgenimiz dik-açılı olduğundan, biliyoruz ki $\alpha + \beta + 90° = 180°$ dır. Bu iki denklemi kullanarak γnın, istenildiği gibi, 90° olduğu sonuçlandırılır.

Bu açıklamayı eklersek, o zaman akıl yürütme daha inandırıcı olacaktır. Şeklin şimdiden inandırıcı olduğu doğrudur, ama şekillerle çok dikkatli olmalıyız – yanıltabilirler.

Alıştırmalar 19.5

Şekil sizi başka nasıl aldatabilir?

Tersine ne dersiniz?

Teoremleri keşfetmek için şimdi önemli bir tekniği inceleyeceğiz: Tersi doğru mudur? Bunu yapmak önermeyi 'Eğer … ise, o zaman …' biçimli yazmada yardımcı olur:

> 'Eğer T a, b kenarlı ve c hipotenüslü bir dik-açılı üçgen ise, o zaman $c^2 = a^2 + b^2$ dir.'

Tersi

> 'Eğer $c^2 = a^2 + b^2$ ise, o zaman T a, b kenarlı ve c hipotenüslü bir dik-açılı üçgendir.'

olacaktır. Varsayımlarda a, b ve c nin ne olduğunu bilmediğimiz için bunun pek anlamı olmadığını not edin. Pisagor Teoremi'ni aşağıdaki gibi yeniden yazalım:

> T, c en uzun olmak üzere, a, b ve c kenarlı bir üçgen olsun. Eğer T dik-açılı bir üçgen ise, o zaman $c^2 = a^2 + b^2$ dir.

Artık tersi şuna dönüşür:

Teorem 19.6 (Pisagor Teoremi'nin Tersi)

T, c en uzun olmak üzere, a, b ve c kenarlı bir üçgen olsun. Eğer $c^2 = a^2 + b^2$ ise, o zaman T dik-açılı bir üçgendir.

Bu doğru mudur, değil midir? Doğrudur! Ama neden?

Kanıt. C, c uzunluklu kenarın karşısındaki açı olmak üzere T kenar uzunlukları a, b ve c olan bir üçgen olsun, o zaman Kosinüs Kuralı

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

yi ifade eder. Şimdi $c^2 = a^2 + b^2$ varsayalım, o zaman $2ab\cos C = 0$ olur. a ve b sıfır olmayacağından $\cos C = 0$ olmak zorundadır. Bu ise, n bir tamsayı olmak üzere, $C = 90° + 180°n$ yi gerektirir. Madem ki $0 < C < 180°$ dir, öyleyse $C = 90°$ dır, yani T bir dik-açılı üçgendir. □

Alıştırma 19.7

18. Bölümün yöntemlerini, Bir kanıt nasıl okunuru, yukarıdaki kanıta uygulayın.

Uyarı 19.8

Tersin kanıtı, Pisagor Teoremi'ni kullanan (22. sayfaya ve aşağıya bakın) Kosinüs Kuralını kullandı. Kosinüs Kuralının Pisagor Teoremi'nden daha genel olduğunu kaydedelim, çünkü Pisagor'u ondan türetebilirsiniz: Eğer bir dik açınız varsa, o zaman $C = 90°$ dır, dolayısıyla $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times 0 = a^2 + b^2$ bulunur.

Böylece daha genel bir önermenin kanıtında daha basit teorem kullanabildiğini görebiliriz.

Pisagor Teoremi ve tersi doğru olduğundan denk iki önermeye sahip oluruz (yani, Eğer $A \Longrightarrow B$ ve $B \Longrightarrow A$ ise, o zaman $A \Longleftrightarrow B$ dir. Bu aşağıdaki teoremi ifade edebildiğimiz anlamına gelir.

Teorem 19.9

c en uzun olmak üzere T a, b ve c kenar uzunluklu bir üçgen olsun. O zaman T bir dik-açılı üçgendir eğer ve ancak eğer $c^2 = a^2 + b^2$ dır.

Kanıt. Bunu, Pisagor'ın verdiğimiz kanıtını birleştirerek ve sonra biraz önce verdiğimiz ters argümanı kullanarak kanıtlayabiliriz. Kosinüs Kuralını her iki yönde kullanmadığımıza dikkat edin, çünkü Pisagor Teoremi Kosinüs Kuralı'nın kanıtında kullanılır! Onu ayırt ettiniz mi? □

Bir tersi anlamak üzere biraz daha bilgi

2.0, 2.1 ve 2.9 kenar uzunluklu bir üçgenimizin olduğunu varsayalım. $2.0^2 + 2.1^2 = 2.9^2$ dır. Üçgen, o halde, dik-açılıdır.

Alıştırma 19.10

Bunu sonuçlandırmak için Pisagor Teoremi'ni ya da tersini kullandık mı?

3.6, 7.7 ve 8.4 kenar uzunluklu bir üçgenimizin olduğunu varsayalım. Bu durumda, $3.6^2 + 7.7^2 = 72.25 \neq 70.56 = 8.4^2$. Böylece üçgen dik-açılı değildir.

Alıştırma 19.11

Bunu sonuçlandırmak için Pisagor Teoremi'ni ya da tersini kullandık mı?

Bunu yanıtlarken ortak bir yanılgı şöyle bir akıl yürütmedir: kenarlar $c^2 = a^2 + b^2$ denklemini sağlamaz, o halde bu Pisagor Teoremi'ni kullanamaz. Bu yüzden tersi kullanmalıdır. Bu doğru değildir.

Doğru akıl yürütme; Pisagor Teoremi, eğer bir dik-açılı üçgenimiz varsa, o zaman kenarları denklemi sağladığını söyler, dir. Böylece eğer denklem *sağlanmadıysa*, o zaman üçgenin dik-açılı olması mümkün değildir. Aslında Pisagor Teoremi'nin karşıt ters ifadesini, yani denk bir ifadeyi kullanıyoruz: Eğer $c^2 \neq a^2 + b^2$ ise, o zaman T dik açılı değildir.

Alıştırmalar

Alıştırmalar 19.12

(i) Pisagor Teoremi sıklıkla hatalı aktarılır. *Oz'un Sihirbazı* filminde Bostan korkuluğuna diploması verilir ve ne kadar zeki olduğunu göstermek için parmağını şakağına doğrultur ve 'Bir ikizkenar üçgende hipotenüsün karekökü diğer kenarların kareköklerinin toplamına eşittir' der.

Karekökleri ve ikizkenar üçgenleri bulaştırdığından bu kesinlikle Pisagor Teoremi değildir. Bununla birlikte Pisagor Teoremi olmaması önermenin yanlış olduğu anlamına gelmez! Bu önermeyi incelemek için yöntemlerimizi uygulayın. Doğru mudur? Değilse, o zaman bir karşıt örnek verin.

(ii) Teorem *Simpson*'larda, radyodaki uzun komedi programı, da yanlış aktarılır. *Springfield* (ya da üzülmemeyi ve yasal aşk oyununu nasıl öğrendim) bölümünde Homer buldukları gözlükleri takar ve Boston korkuluğu tarzı parmağını şakağına doğrultur ve 'Bir ikizkenar üçgenin herhangi iki kenarının kareköklerinin toplamı

kalan kenarın karekköküne eşittir' der. Bir başka oyuncu bağırır 'O dik-açılı bir üçgendir, aptal herif!'

Niçin *hem* Homer *hem* de oyuncu yanılıyorlar?

(iii) Düşük-düzeyli matematikte teoremlerin çoğu kanıtsız verilir. Bunun bulabildiğiniz kadar çok örneğini bulun. Başka kaynaklardan yararlanarak onların kanıtlarını bulmaya çalışın ve bu kanıtları 18. Bölümün yöntemleri ışığında, Bir kanıt nasıl okunur, inceleyin. Çalışmak isteyebileceğimiz bazı örnekler:
(a) Bir üçgende açıların toplamı 180° dir.
(b) Bir negatifi çıkarmak bir pozitif eklemeye denktir.
(c) π nin değeri 3.14159... dır.
(d) Sinüs ve kosinüsün tanımı üçgene bağlı değildir. (Benzer üçgenlerle ilgili bilgiye ihtiyacımız olacak.)
(e) Herhangi bir θ açısı için $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ dir.
(f) r yarıçaplı bir çemberin alanı πr^2 dir.

(iv) Aşağıda kenar uzunlukları verilen üçgenleri göz önünde bulunduralım. Hangilerinin dik-açılı olduğunu saptayın ve Pisagor Teoremi'ni mi yoksa tersini mi kullandığımızı ifade edin.
(a) 7, 24, 25
(b) 28, 45, 52
(c) 36.9, 80.0, 88.0
(d) 0.8, 1.4, 1.7.

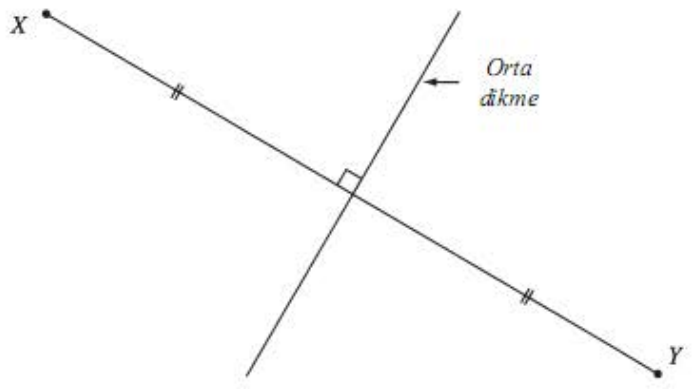
(v) Hipotenüsü irrasyonel uzunluklu ve diğer iki kenarı rasyonel uzunluklu bir dik-açılı üçgen oluşturun.

(vi) Hipotenüsü rasyonel uzunluklu fakat diğer iki kenarı irrasyonel uzunluklu bir dik-açılı üçgen oluşturun.

(vii) X ve Y düzlemde farklı noktalar olsun. Aralarına bir doğru çizin. Orta noktadan doğruya bir dik doğru çizin. Şekil 19.5 e bakın. Bu doğruya X ve Y nin **orta dikmesi** denir.

Orta dikme üzerindeki her p noktası için X in p ye uzaklığı ile Y nin p ye uzaklığının aynı olduğunu gösterin. p nin X ve Y ye **eşit uzunlukta** olduğunu söyleriz.

(viii) Önceki bölümlere ve alıştırmalara geri dönün ve teoremleri ve kanıtları tekrar inceleyin. Daha önce gözlemediğiniz olguları gözlediniz mi?



Şekil 19. 5 Orta Dikme

Özet

- Pisagor Teoremi: c en uzun olmak üzere T a, b ve c kenar uzunluklu bir üçgen olsun. Eğer T bir dik açılı üçgen ise, o zaman $c^2 = a^2 + b^2$ dir.
- Pisagor Teoremi'nin tersi: c en uzun olmak üzere T a, b ve c kenar uzunluklu bir üçgen olsun. Eğer $c^2 = a^2 + b^2$ ise, o zaman T bir dik açılı üçgendir.

IV. KISIM

Kanıt teknikleri

20. BÖLÜM

Kanıt teknikleri I: Dolaysız yöntem

Bazen basit yaklaşım en iyi yaklaşımdır.
Halk deyişi

Teoremleri kanıtlamak için ilk yöntemimiz en açık olanıdır ve dolaysız yöntem adını alır. Önermeler genelde 'Eğer A ise, o zaman B' biçimli daha küçük önermelere parçalanabilir. $A \Longrightarrow B$ yi doğrudan kanıtlamak için A gerektirir A_1, A_1 gerektirir A_2, A_2 gerektirir A_3 ve A_r gerektirir B yi elde edinceye kadar kanıtlarsınız. O zaman $A \Longrightarrow B$ yi kanıtlamış olursunuz. Her bir gerektirme bir anlamda açık olmalıdır, yani anlaşılması zor devasa atlamalarınız olmamalıdır!

Dolaysız yöntemin örnekleri

Teorem 18.1 in 'eğer' kısmının kanıtında, doğrudan yöntemin bir örneğini görmüştük. Bu durumda önermeyi kanıtlamak için basit bir hesaplamamız var. Bir başka örnek aşağıdakidir:

Teorem 20.1

m bir tamsayı olsun. Eğer m tek ise, o zaman m^2 tektir.

Kanıt. Eğer m tek ise, o zaman bazı r için $m = 2r + 1$ dir. O zaman

$$m^2 = (2r + 1)^2 = (2r + 1)(2r + 1) = 4r^2 + 2r + 2r + 1 = 4r^2 + 4r + 1$$
$$= 2(2r^2 + 2r) + 1$$

bulunur. Yani m^2 tektir. □

1. Bölümdeki kardinalite tanımını anımsayın ve 5. Bölümün 42. sayfasındaki Problem (ii) nin bir çözümü olan aşağıdaki teoremi gözden geçirin.

Teorem 20.2

A ve B sonlu kümeler olsun. O zaman $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ dir.

Buna 18. Bölümün yöntemlerini uygulayın. Aşikar örneklere, örneğin $A = \varnothing$, ne olur? $A = B$ gibi uç durumlara ne dersiniz? Örnek-dışı olanlara ne demeli – örneğin, küme-

lerden biri ya da ikisi sonsuz ise ne olur? Teorem niçin sonlu kümelere kısıtlanmıştır? Varsayımlar nelerdir ve ne kadar uygundurlar? (Çok uygun, çünkü sadece kümelerin sonlu olduğunu kabul ediyoruz.) Sonuç ne kadar yararlıdır? (Çok yararlı, çünkü hesap etmemize olanak sağlayan bir denklem veriyor. Hesaplama yolları daima yararlıdır!) Bir şekil çizebilir miyiz? Evet, çünkü bir Venn diagramı çizebiliriz.

Şimdi kanıta bakalım.

Kanıt. Eğer A daki tüm elemanları ve sonra B dekilerin hepsini sayabiliyorsak, o zaman A da olan elemanları ya da B dekileri sayabileceğiz ama hem A da hem B de olanları iki defa sayacağız. A ve B nin birleşiminde, her ikisinde olan elemanlar bir kez sayılırlar. Böylece $|A|+|B|-|A\cap B|$, A da ya da B de sadece bir kez geçen elemanları sayar. Buradan $|A\cup B|$ ye eşit olur. □

Daha çok adım içeren bir başka basit (kuşkusuz özel olarak pek yararı olmayan) örnek çalışalım ve onu nasıl kanıtlayabildiğimizin gerisinde yatan düşünceyi görelim.

Teorem 20.3

$p\in\mathbb{Q}$ ve $p^2\in\mathbb{Z}$ varsayalım. O zaman $p\in\mathbb{Z}$ dir.

Varsayımlarımız nelerdir? Biri $p\in\mathbb{Q}$ dir. Henüz rasyonel sayılar üzerine çok fazla teorem bilmediğimiz doğrudur, gerçekten tek bildiğimiz tanımdır, yani bazı $a, b\in\mathbb{Z}$ için $p = a/b$ olduğunu biliyoruz ve en düşük biçimli olduğunu varsayabiliriz.

Bir sonraki varsayım $p^2\in\mathbb{Z}$ dir. Bu $(a/b)^2\in\mathbb{Z}$, yani $a^2/b^2\in\mathbb{Z}$ demektir. Bu kesir de en düşük biçimlidir. Ama bu, ($a\in\mathbb{Z}$ için) $a^2\in\mathbb{Z}$ nedeniyle, ancak $b=\pm1$ ise olabilir. O halde $p = a/(\pm1) = \pm a\in\mathbb{Z}$ olduğunu görebiliriz.

Kanıtın gösterişli anlatımını yazalım:

Gösterişli çözüm:

Kanıt. a, b tamsayılar ve kesir en düşük biçimli olmak üzere, varsayımdan $p = a/b$ dir. O halde $p^2 = (a/b)^2 = a^2/b^2$ olur. $p^2\in\mathbb{Z}$ ve kesir en düşük biçimli olduğundan $b^2 = 1$ sonuçlanır. Böylece $b = \pm1$ dir ve $p = a/(\pm1) = \pm a\in\mathbb{Z}$ yi türetebiliriz. □

Bir rasyonel sayının tanımını, yani $p = a/b$ yi, kullandığımızı kaydedelim. Bu, bir önermenin bir kanıtını bulmaya çalışırken uygulanması gereken iyi bir düşüncedir.

Teorem 20.4

m ve n gerçel sayılar olsun. Eğer $n > m > 0$ ise, o zaman

$$\frac{m+1}{n+1} > \frac{m}{n}$$

dir.

Bunu kanıtlamanın bir yolu, sağ tarafı sol tarafa taşımak ve bir şeyin 0 dan daha büyük olduğunu kanıtlamaktır. Onun yerine, biz kanıtlanması gerekeni kabul edeceğiz ve oradan itibaren çalışacağız. Bu problem çözmenin pekala akla yatkın bir yöntemidir. Daha sonra göreceğimiz üzere, gösterişli anlatımdakini kullanmak yerinde olmaz.

$$\frac{m+1}{n+1} > \frac{m}{n}$$

$(m+1)n > m(n+1)$ (m ve n pozitiftir, o halde $>$ yön değiştirmez.)

$$mn + n > mn + m$$

$$n > m$$

dır. Mükemmel! $(m+1)/(n+1) > m/n$ nin $n > m$ yi gerektirdiğini gösterdik ve m, n nin yol boyunca pozitif olduğunu varsaydık. Kuşkusuz bu kanıtlanması gereken *değildi*, ama akıl yürütmenin terslenebileceği üzerine beklentimiz olabilir. Ve gerçekten öyledir:

Gösterişli çözüm:

Kanıt. Aşağıdakiler vardır:

$$n > m$$

$$\Longrightarrow \quad mn + n > mn + m$$

$$\Longrightarrow (m+1)n > m(n+1)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{m+1}{n+1} > \frac{m}{n}, \text{ çünkü } m \text{ ve } n \text{ pozitiftir.}$$

□

Kanıtımızın varsayımları kullandığını, yani $n > m$ hemen, $n > 0$ ve $m > 0$ sonda kullanıldı, kaydedelim. Ayrıca son kanıtta bulduğumuz kanıttan çok farklı olduğuna dikkat edin. Düzeltilmiş anlatımı göz önünde bulunduralım: ikinci satır $mn + n > mn + m$ dir. Eğer başlangıç incelemesini $n > m$ ile başlatsaydık, her iki tarafa mn eklemenin gidiş yolu olacağını görmüş olur muyduk? Pek açık değil!

Bir sonraki örnekte gene gösterilmesi gerekeni kabul etme tekniğini kullanıyoruz. Bunu sırf kanıt bulmak için varsaydığımızı görmek önemlidir; son kanıtı yazarken bu varsayımı kullanmıyoruz.

Teorem 20.5

İki negatif gerçel sayının çarpımı pozitiftir.

Bunun nasıl yapıldığını bilmediğimizi varsayalım. $0 \times a = 0$ ve $x(y+z) = xy + xz$ gibi olguları kullanmama izin veriliyor.

Eğer x ve y pozitif ise $(-x) \times (-y) > 0$ olmasını istiyoruz. Aşağıdakini göz önüne alabiliriz:

$$(-x) \times (-y) = (-1) \times x \times (-1) \times y = (-1) \times (-1) \times xy.$$

O halde $(-1) \times (-1)$ in pozitif olduğunu göstermemiz gerekiyor; çünkü bu akıl yürütme tersinirdir.

Cebirin basit yasalarından yararlanarak $(-1) \times (-1) = 1$ i gösterme durumuna getirdik. Bu denklemi yakından inceleyelim. Doğru olduğunu kabul etsek, ne olur? Bir şeyi araştırmak için doğru olduğunu varsaydığımızın altını bir kez daha çizmek isterim. Kanıtı yazmak istediğimizde onu doğru kabul etmemeliyiz.

Yapılması gereken tek şey her şeyi aynı yana yerleştirmektir:

$$(-1) \times (-1) = 1$$

$$(-1) \times (-1) - 1 = 0.$$

Şimdi terimleri, yani 1 leri, toplayabiliriz:

$$\begin{aligned}(-1)\times(-1) &= 1,\\ (-1)\times(-1) - 1 &= 0\\ (-1)\times(-1) + (-1) &= 0\\ (-1)((-1)+1) &= 0\\ (-1)\times 0 &= 0.\end{aligned}$$

Doğru olan bir şeye ulaştık. $(-1)\times(-1) = 1$ i kanıtlamış olduk mu? Tam olarak değil. Önermemizin doğru olduğunu kabul ettik ve doğru olan bir şey ürettik. Diğer yöne gitmemiz gerekir: Doğru olan bir şeyle başlayalım ve önermemize doğru çalışalım.

Ayrıca yapılacak iş, bu akıl yürütmenin tersini almaktır! $(-1)\times(-1) = 1$ olduğunu kanıtlamak için $(-1)\times 0 = 0$ dan yararlanabilirim.

Bunu gereği gibi yerine getirelim:

Gösterişli çözüm:

Kanıt. Aşağıdakiler vardır:

$$\begin{aligned}&&(-1)\times 0 &= 0\\ &\Longrightarrow &(-1)((-1)+1) &= 0\\ &\Longrightarrow &(-1)\times(-1)+(-1) &= 0\\ &\Longrightarrow &(-1)\times(-1)+(-1)+1 &= 1\\ &\Longrightarrow &(-1)\times(-1)+0 &= 1\\ &\Longrightarrow &(-1)\times(-1) &= 1.\end{aligned}$$

□

Alıştırmalar 20.6

(i) İki negatif sayının çarpımının pozitif olduğu $(-1)\times(-1) = 1$ in sonuç teoreminin bir gösterişli versiyonunu yazın. Yani, Teorem 20.5 in tam kanıtını verin.

(ii) Kanıtımızda cebirin hangi kurallarını kapalı olarak kullandık? Onlardan biri iki negatif sayının çarpımının pozitif olduğuna bel bağlar mı? Eğer öyle olsaydı, o zaman **döngüsel akıl yürütme** olarak bilinen şeye sahip olurduk. Bu, bir önermeyi doğru varsaydığımız ve daha sonra onu kanıtlamak için doğruluğunu kullandığımız yerdir. Örneğin, ' Başkanlık için ben iyi adayım, çünkü tüm diğer adaylardan daha iyiyim' bir döngüsel akıl yürütmedir. Bu aslında 'Ben en iyiyim çünkü ben en iyiyim' demektir.

Bir denklemin geçerli olduğu nasıl gösterilir

Bir denklemin geçerli olduğunu göstermenin birkaç yöntemi vardır. Benim için aşağıdaki en önemlisidir.

Bir denklemin geçerli olduğunu göstermek için denklemin en karmaşık yanını seçmek ve o ifadeyi diğer yana indirgemek için değiştirimler yapmak genelde en iyisidir.

Eğer bir denklemle başlıyorsanız ve onu yeniden düzenlemeye çalışıyorsanız, o zaman döngülere girme tehlikesine koşarsınız.

Örneğin, her $x \in \mathbb{R}$ ve $x \neq \frac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ için $\tan x + \cot x = 2\operatorname{cosec} 2x$ olduğunu kanıtlamak için aşağıdakileri gerçekliyoruz:

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}, \text{ tan ve cot tanımlarından,}$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x}$$

$$= \frac{1}{\cos x \sin x}, \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ kullanılıyor,}$$

$$= \frac{1}{(1/2)\sin 2x}, \text{ bir yarı açı formülü kullanılıyor,}$$

$$= 2\operatorname{cosec} 2x, \text{ cosec'ın tanımından.}$$

$x = y$ yi göstermenin başka seçenekleri de vardır:

(i) $x - y = 0 \iff x = y$,

(ii) $x \leq y$ ve $x \geq y \iff x = y$,

(iii) $x = z$ ve $z = y \iff x = y$.

Bunlardan ilkine yukarıdakine benzer bir şekilde yaklaşılmıştır. $x - y$ yi ele alırız ve onu 0 a indirgemeye çalışırız. İkincisi Teorem 27.20 nin kanıtında örneklendirilecektir. Üçüncüsü açıklama gerektirmeyecek derecede nettir; x ve y nin bir başka z nesnesine eşit olduğunu gösteririz. Bu, tekrarlı 0.99999… ondalığının 1 e eşit olduğunu göstermek için kullanılabilir. Her şeyden önce 1 = 3 / 3 olduğunu biliyoruz. Ayrıca 3 / 3 = 3 × (1 / 3) olduğunu da biliyoruz, ama 1 / 3 ün 0.33333… ondalık açılımına sahip olduğu iyi biliniyor; böylece 3 × (1 / 3) = 0.99999… dır. O halde, 1 = 3 / 3 ve 0.99999… = 3 / 3 olduğu için her iki eşitlik elde edilmiş olur. Bu sonuç çoğu kişi için az çok şaşırtıcıdır. Sezgisel olarak 1 ve 0.99999… farklı ondalık açılımlara sahip oldukları için farklı sayıları temsil etmeleri gerektiği duygusuna kapılırız.Bu böyle bir sezginin hatalı olduğunu gösterir.

Eğer ve ancak eğer kanıtları

'Bir kanıt nasıl okunur' daki Teorem 18.1 in ifadesi 'eğer ve ancak eğer' tipliydi. Bu teorem, kanıtı 'eğer' ve 'ancak eğer' parçalarına bölerek, kanıtlanmıştı. Bu, böyle önermeleri kanıtlamak için yaygın bir girişim yöntemidir. Aşağıdaki örnekte bunun uygulandığını ve de – bazen – bir yönde yapılan kanıtın diğer yönü verecek şekilde tersinir olduğunu göreceğiz.

Teorem 20.7

$a \neq 0$, b ve c gerçel sayılar olsun. O zaman

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

dır.

'Anca eğer' kısmı ($\Longrightarrow$ yönü); bir kuadratik denklemimiz varsa, o zaman $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ biçimli çözümleri olduğunu söyler. Ama x in o biçimli bir çözüm *olduğunu* söylemez – 'eğer' kısmı ($\Longleftarrow$ yönü) onu söyler.

O halde her biri yönü ayrı ayrı ele alarak problemi kanıtlamaya çalışalım. Bunların sonuncusu, $\Longleftarrow$, kolay kanıtlanır. Çoğu denklemdeki gibi, yanıtı biliyorsanız onu kolayca yerleştirebilirsiniz.

Alıştırma 20.8

'Eğer' kısmı için ($\Longleftarrow$ yönü) kanıtı ayrıntılı yazın.

Biz önermenin 'ancak eğer' kısmını, $\Longrightarrow$ yönünü, göz önünde bulunduralım. Önce a ile bölerek $x^2 + (b/a)x + (c/a) = 0$ ın çözümüne taşıyabiliriz. Böylece genellikten bir şey yitirmeksizin, $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ ı çözdüğümüzü kabul edebiliriz. Daha sonra $\alpha = b/a$ ve $\beta = c/a$ ları kullanarak a, b ve c değiştirimlerini tekrar yapabiliriz.

Bu biçimli bir kuadratiği çözmek için kareye tamamlayabiliriz. O halde aşağıdakiler vardır:

$$
\begin{aligned}
& x^2 + \alpha x + \beta = 0 \\
\Longrightarrow\ & \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta = 0 \\
\Longrightarrow\ & \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \beta \\
\Longrightarrow\ & x + \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \beta} \\
\Longrightarrow\ & x = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \beta} \\
\Longrightarrow\ & x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} \\
\Longrightarrow\ & x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{ac}{a^2}} \\
\Longrightarrow\ & x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.
\end{aligned}
$$

Artık mutlu olmalıyız, çünkü sonucu her iki yönde: $\Longrightarrow$ ve $\Longleftarrow$ kanıtladık. Kanıtı ayrıntılı bir şekilde iki parçalı olarak yazabiliriz.

Yine de iyi düşünelim. Kanıtımızı bir kez daha elden geçirmeliyiz. Aslında daha iyi bir yol vardır. Bir gerektirmeyi uzun bir gerektirmeler listesi kullanarak kanıtladık. 'Bütün gerektirmeler tersinir midir ve hala doğru mudurlar' sorusunu sormalıyız.

Yanıt evet! Doğruluğunu kendiniz kontrol edin. O halde yanıtımızda 'eğer' ve 'ancak eğer' kısımlarını ayrı ayrı yerine getirmek istemezsek, daha önceki $\Longleftarrow$ çabamızı atlayabilir ve sırf $\Longrightarrow$ kısmını yazar ve her $\Longrightarrow$ yi $\Longleftrightarrow$ ile değiştirebiliriz.

Öte yandan eğer kanıtı akılda tutmayı arzu ediyorsanız, her bir adımı anımsamak zor olacaktır. Onun yerine, kanıtın ana unsurlarının farkına varın:

(i) Baştan sona kadar $\Longleftrightarrow$ vardır.

(ii) x^2 nin katsayısı 1 olacak şekilde denklemi daha basit duruma indirgeriz, yani a ile böleriz.

(iii) Kareyi tamamlarız.
(iv) (ii) de gerçekleştirilen indirgemeyi tersine çevirmek için değiştirimler yapın.

İşte bu kadar. Geriye kalan, ifadeleri daha basit bir biçime indirgemeden ibarettir.

Bir kümenin bir diğerinin bir alt kümesi olduğunu kanıtlamak

Eğer bir kümenin bir diğerinin bir alt kümesi olduğunu kanıtlamamız gerekiyorsa, o zaman tanımı kullanabiliriz: $X \subseteq Y$ eğer (ve elbette, ancak eğer) $x \in X$, her x için $x \in Y$ yi gerektiriyorsa.

Teorem 20.9

A ve B kümeleri verilsin. O zaman $A \cap B \subseteq A \cup B$ *dir.*

Kanıt. $x \in A \cap B$ varsayalım. O zaman

$$\begin{aligned} & x \in A \cap B \\ \Longrightarrow\ & x \in A \text{ ve } x \in B, \cap \text{ nin tanımından,} \\ \Longrightarrow\ & x \in A, \text{ mantıksal ve nin tanımından,} \\ \Longrightarrow\ & x \in A \text{ ya da } x \in B, \text{ mantıksal ya da nın tanımından,} \\ \Longrightarrow\ & x \in A \cup B, \cup \text{ nin tanımından.} \end{aligned}$$

□

Önerilen alt kümenin genel bir elemanını aldığımızı ve nereye yönlendirdiğini gördüğümüzü kaydedelim.

Alıştırma 20.10

'Her A ve B kümeleri için $A \cap B \subset A \cup B$ dir' önermesine bir karşıt örnek verin.

İki kümenin eşit olduğunu kanıtlamak

Bir kümenin bir diğerinin bir alt kümesi olduğunun nasıl gösterildiğini gördük. Şimdi ise iki kümenin eşit olduğunun nasıl kanıtlandığını göreceğiz.

Bunu yerine getirmenin açık bir yolu, iki kümeyi bağlayan bir eşitlikler kümesine sahip olmaktır.

Örnek 20.11

A, B ve C kümeleri verilsin. O zaman

$$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

dir.

Kanıt. Aşağıdakiler vardır:

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= \{ x \mid x \in A \cap (B \cup C) \} \\ &= \{ x \mid x \in A \text{ ve } x \in B \cup C \} \\ &= \{ x \mid x \in A \text{ ve } (x \in B \text{ ya da } x \in C \} \\ &= \{ x \mid (x \in A \text{ ve } x \in B) \text{ ya da } (x \in A \text{ ve } x \in C) \} \\ &= \{ x \mid x \in A \cap B \text{ ya da } x \in A \cap C \} \\ &= \{ x \mid x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \} \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

□

Bir başka yöntem; x ve y sayıları için $x = y$ eğer ve ancak eğer $x \leq y$ ve $x \geq y$ önermesini gösterme düşüncesine benzeyen aşağıdaki önermeden yararlanılır.

Önerme 20.12

X ve Y kümeleri verilsin. O zaman, $X = Y$ eğer ve ancak eğer $X \subseteq Y$ ve $Y \subseteq X$ dir.

Kanıt. Eğer $X = Y$ ise, o zaman tanımdan X ve Y tam olarak aynı elemanlara sahiptirler. O halde $x \in X$ ise, o zaman $x \in Y$ dir. Ama bir alt küme tanımından bu $X \subseteq Y$ olduğunu söyler. Benzer şekilde, eğer $x \in Y$ ise o zaman $x \in X$, o halde $X \subseteq Y$ dir.

Şimdi tersi için $X \subseteq Y$ ve $Y \subseteq X$ varsayalım. Eğer $X \subseteq Y$ ise, o zaman X in her elemanı Y dedir. Eğer $Y \subseteq X$ ise, o zaman Y nin her elemanı X dedir. Bu X ve Y nin aynı elemanlara sahip olduğu anlamına gelir, o halde $X = Y$ dir. □

Alıştırma 20.13

18. Bölümü, Bir kanıt nasıl okunur, kullanarak kanıtı inceleyin. Kanıtı iyileştirebilir misiniz?

Böylece iki kümenin eşit olduğunu göstermenin kanıtını her birinin diğerinin bir alt kümesi olduğunu göstermeye indirgiyoruz. Bu çok güçlü bir düşüncedir ve düzenli olarak matematikte ortaya çıkar, bu yüzden onu alet çantanıza koyun.

Alıştırmalar

Alıştırmalar 20.14

(i) 18. Bölümün yöntemlerini, Bir kanıt nasıl okunur, aşağıdaki dolaysız kanıttaki hatayı bulmak için kullanın: Eğer n çift ise, o zaman $2^n - 1$ asal değildir.
'Kanıt':

$$\begin{aligned} n \text{ çifttir} &\Longrightarrow \text{bazı } k \in \mathbb{N} \text{ için } n = 2k \text{ dır.} \\ &\Longrightarrow 2^n - 1 = 2^{2k} - 1 = (2^k)^2 - 1 = (2^k - 1)(2^k + 1) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Böylece, $2^n - 1$ iki sayının çarpımı olarak yazılabilmektedir, o halde bir asal değildir.

(ii) İki ardışık tek sayının toplamının 4 ün bir katı olduğunu gösterin. Tersi nedir ve doğru mudur?

(iii) Son rakamı 5 e eşit tüm x tamsayıları için x in 5 in bir katı olduğunu kanıtlayın. Tersi doğru mudur?

(iv) $f: X \to Y$ iki X, Y kümesi arasında bir fonksiyon olsun. A ve B nin X in alt kümeleri olduğunu varsayalım. Aşağıdakileri gösterin:
(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
(b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.
$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ önermesine bir karşıt örnek verin ve bu eşitliğin bazen doğru olduğunu göstermek için bir örnek oluşturun.

(v) 1. Bölümdeki bir kümenin tümleyeni tanımını anımsayın. A ve B, X in alt kümeleri olsun. Aşağıdakileri kanıtlayın ya da çürütün.
(a) $(A^c)^c = A$.
(b) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
(c) $A \cap B = A \setminus (A \cap B^c)$.
(d) $(A \cup B) \setminus A = B \setminus A$.

(vi) Kanıtlayın:
(a) $A \cap (B \cup C) \subseteq B \cup (A \cap C)$,
(b) $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$,
(c) $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$. Kümeler aslında eşit midir?

(vii) x ve y nin $x < y$ şeklinde rasyonel sayılar olduğunu varsayalım. $x < z < y$ olacak şekilde $z \in \mathbb{Q}$ olduğunu kanıtlayın. Yani, her iki rasyonel sayı arasında bir başka rasyonel vardır.
11. Bölümden, Niceleyicilerin karmaşıklığı ve değillemesi, bir şeyin var olduğunu göstermek için bildiğimizden onu oluşturmaya çalıştığımızı anımsayalım; yani burada z yi x ve y den oluşturun.

(viii) X in A ve B alt kümeleri için aşağıdaki önermelerin denk olduğunu kanıtlayın.
(a) $A \subseteq B$,
(b) $A \cap B^c = \varnothing$,
(c) $A^c \cup B = X$.

(ix) Aşağıdaki önermelerin denk olduğunu kanıtlayın.
(a) $P(x)$ doğru olacak şekilde tek x vardır.
(b) $\exists x(P(x)$ ve $\forall y(P(y) \Longrightarrow y = x))$.
(c) Her y için $P(y)$ doğrudur eğer ve ancak eğer $y = x$ olması için x vardır.
(d) $\exists x P(x)$ ve $\forall y, z((P(y)$ ve $P(z)) \Longrightarrow y = z))$.

(x) $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ 1, 2, 3, …, n sayılarının bir sıraya konması olsun. (Örneğin, eğer $n = 6$ ise, 4, 3, 6, 1, 2, 5 elde edebiliriz.) Eğer n tek ise, o zaman $(x_1 - 1)(x_2 - 2)(x_3 - 3) \ldots (x_n - n)$ nin çift olduğunu kanıtlayın. (İpucu: Toplamları göz önünde bulundurun.)

(xi) x bir tamsayı olsun. x^4 tektir eğer ve ancak eğer x tektir, kanıtlayın. (İpucu: Bir yön tersi ve diğeri binom teoremini kullanır.)

Özet

- Dolaysız yöntemde, $A \Longrightarrow B$ yi göstermek için A yı varsayıyoruz ve B yi göstermeye çalışıyoruz.
- $x = y$ olduğunu aşağıdakilerden biri aracılığıyla kanıtlayabiliriz:

(i) En karmaşık yanlı ifadeyi seçin ve onu diğer yana taşıyın;
(ii) $x - y = 0$;
(iii) $x \leq y$ ve $x \geq y$;
(iv) $x = z$ ve $y = z$.

- $X \subseteq Y$ yi kanıtlamak için: $x \in X$ varsayın ve $x \in Y$ olduğunu göstermeye çalışın.
- İki X ve Y kümesinin eşit olduğunu kanıtlamak için:
  (i) bir dizi eşitlik kullanın, ya da
  (ii) $X \subseteq Y$ ve $Y \subseteq X$ i kanıtlayın.
- '$A \Longleftrightarrow B$' yi kanıtlamak için'$A \Longrightarrow B$' ve '$B \Longrightarrow A$' yi gösterin.
- Özetin özeti:
  (i) $x = y, x - y = 0$ a denktir.
  (ii) $x = y, x \leq y$ ve $x \geq y$ ye denktir.
  (iii) $X = Y, X \subseteq Y$ ve $Y \subseteq X$ e denktir.
  (iv) '$A \Longleftrightarrow B$, '$A \Longrightarrow B$' ve '$B \Longrightarrow A$' ye denktir.

21. BÖLÜM

Bazı yaygın hatalar

Hatasız insan olmaz. İşleri daha da karıştırmak için bilgisayarlardan yararlanın.
Anon

Doğrudan kanıt yöntemi en temel olanıdır ve diğer yöntemlerde kullanılacaktır. Buna karşın, içine kolayca düşülebilen birçok tuzak vardır. En yaygın olanlardan ikisi kanıtlanması gerekenin kabul edilmesi ve denkliğin yanlış kullanılmasıdır. Bunları bu bölümde inceleyeceğiz. Ve yaygın hataları kitabın tamamına dağıtmaktansa kullanışlı tek bir bölümde toplamak iyi olacaktır. Sıfırla niçin bölemediğimizin bir açıklaması da buna dahildir – bunun bir hata olduğunu biliyorsunuzdur ama nedeni verilmemiş olabilir. Bu hataların yapıldığını gördüm ve çoğu matematikçi gibi ben de yaptım.

Kanıtlanması gerekeni varsaymayın

Kanıtlarda belki de en yaygın hata kanıtlanması gerekeni kabul etmektir. P önermesini kanıtlanmamız gerektiğini varsayalım. Eğer onun doğru olduğunu kabul edersek, o zaman doğru olduğunu türetebilmemiz şaşırtıcı olmaz; $P \Longrightarrow P$ apaçık doğru gözüküyor. Aynı doğrultuda bir diğer hata P nin doğru kabul edilmesi ve bunun bir şeyin doğru olduğunu türetmek için kullanılması ve oradan da P nin doğru olduğunun sonuçlandırılmasıdır. Bu kuşkusuz yanlış bir akıl yürütmedir. ($P \Longrightarrow Q$ ve Q doğru, o halde P doğrudur, der.)

Bir örnek olarak, aşağıdaki önermeyi göz önünde bulunduralım:

'Eğer a ve b gerçel sayılar ise, o zaman $a^2 + b^2 \geq 2ab$ dir.'

Aldatıcı bir kanıt aşağıda verilmiştir:

'$a^2 + b^2 \geq 2ab \Longrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Longrightarrow (a-b)^2 \geq 0$

olur. Bir sayının karesi hiç negatif olmadığı için son eşitlik doğrudur, o halde $a^2 + b^2 \geq 2ab$ dir.'

Buradaki hata (kanıtlanacak önermedeki) sonucun kabul edilmesi (yani, $a^2+b^2 \geq 2ab$) doğru bildiğimiz bir şeye gidilmesidir. Bununla birlikte, sırf bilinen bir gerçeği gerektirdiği için bir önermenin doğru olduğunu sonuçlandıramayız.

65. sayfada tartışılan '$-1 = 1 \Longrightarrow 1 = 1$' doğru önermesini göz önünde bulunduralım. '$-1 = 1$' kısmı doğru olan '$1 = 1$' yi gerektiriyor ama '$1 = 1$' den '$-1 = 1$' i sonuçlandıramadığımız çok açıktır.

Gerçek kanıt akıl yürütmenin ters çevrilmesinden ibarettir; doğru bildiğimiz bir şey olan $(a-b)^2 \geq 0$ ile başlayalım ve yukarıdaki gerektirme işaretlerini ters çevirerek istediğimiz sonuca gidelim. Onu görmeye çalışın!

Bir kanıt bulurken kanıtlanması gerekeni varsaymak uygundur

Şimdi sıra, öğütün gerçekten karışık kısmına geldi. Önermeleri kanıtlarken kanıtlanacak olanı varsaymamanız gerektiğini biraz önce söyledim. Bununla birlikte problem çözmek söz konusu olduğunda, yani kanıt *bulmak* için sonucu kabul etmek uygundur. Önceki bölümde bunun örneklerini defalarca gördük.

Bu strateji çoğu zaman problemi çözecektir ve bizim bir kanıt bulmamıza olanak sağlayacaktır. Yukarıdaki örnekte, $a^2+b^2 \geq 2ab$ sonucunu kabul etmenin bizi, bildiğimiz bir şey olan, $(a-b)^2 \geq 0$ ye götürdüğünü görmüştük. Diğer durumlarda olmayabilir ama iyi ki burada gerektirme oklarını ters çevirebiliyor ve $(a-b)^2 \geq 0$ den $a^2+b^2 \geq 2ab$ ye gidebiliyoruz.

Böylece problemleri çözerken, bir araştırma aracı olarak – nereye götürdüğünü görmek için – kanıtlanması gerekeni varsaymak uygundur ama gösterişli versiyonlarını yazarken, değildir.

Karekök bir fonksiyondur, o halde bir tek sayı verir

Doğrusunu söylemek gerekirse, lojikte bu bir yanlış anlamda değildir ama çoğunlukla öğrenciler karekök işaretinin gerçekten ne anlama geldiğinden haberleri olmadığı için, lojikte bu işaret hatalara neden oluyor.

Bir sayının karekökünün biri pozitif ve biri negatif iki sayı verdiğinin öğretildiği pek yaygındır. Bu aslında doğru değildir. Eğer $\sqrt{\ }$ bir fonksiyon ise, o zaman bir fonksiyon tanımından, her bir girdi için sadece bir değer elde etmeliyiz. O halde $\sqrt{4} = 2$ dir ve $\sqrt{4} = \pm 2$ değildir. Bu nedenle $x^2 - 4 = 0$ ı çözmek için '$x = \sqrt{4}$ den $x = 2$ ya da $x = -2$ dir' değil, '$x = \pm\sqrt{4}$ ü elde etmek ve dolayısıyla $x = 2$ ya da $x = -2$ olması için yeniden düzenlemeliyiz.

Öte yandan eğer karekök bir fonksiyon değilse, o zaman nedir? Ve uygulama açısından eğer bir fonksiyon değilse, o zaman onun türevini nasıl alacağız? Ayrıca iki sayının sonuçlanması gerektiği düşüncesine bağlı kalırsak, o zaman önceki bölümde kuadratik denklemleri çözmek için $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ formülünde $\pm$ sembolünü niçin yazıyoruz? Mademki karekök fonksiyonunun iki değer verdiğini kararlaştırdık, öyleyse iki çözüm vereceğinden, $x = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ yazmak yeterli olacaktır. Özetlersek, a nın karekökünü daima $x^2 = a$ denkleminin pozitif çözümü olarak alın. (Ve $x^2 = a$ nın çözümlerinin $x = \pm\sqrt{a}$ olduğunu kaydedin.)

Kareköklerde bir diğer sorun

Karekökler birçok sorun yaratır. (Öncekinden dolayı) bu kısmen psikolojiktir ve kısmen de alıştırmalarda genelde, bir çözüme daha yakın olmak için, karekökleri kaldırırız. Yaygın bir hata aşağıdaki ile örneklendirilmiştir. Eğer $\sqrt{x^2+y^2} - 2x = 4$ verilmişse, o zaman $x^2 + y^2 + 4x^2 = 16$ elde etmek için her iki tarafın karesini alırız. Nedenini görmek için, öne sürülenin $a + b = c \Longrightarrow a^2 + b^2 = c^2$ gibi olduğudur. Buna rahatlıkla bir karşıt örnek verebiliriz.

Gerektirmeleri doğru kullanın

Denklemleri çözerken bir satırdan bir sonrakine ilkinin ikincisini gerektirdiğini gösteriyoruz. Bununla birlikte, ikincisinin ilkini gösterdiğinin doğruluğunu kontrol etmek önemlidir. İstediğimiz, tüm çözümleri bulmak için, daha fazlasını değil, denkliklerin bir dizisidir.

Aşağıdaki denklem ve çözümü bu noktaya açıklık getirmektedir:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x+3} = x+1\\
&x+3 = (x+1)^2, \text{ her iki yanın karesi alındı,}\\
&x+3 = x^2+2x+1\\
&0 = x^2+x-2\\
&0 = (x+1)(x-2).
\end{aligned}$$

O halde $x = 1$ ya da $x = -2$ çözümlerimizdir. Başlangıç denkleminde $x = 1$ yazmak doğru bir çözümümüzün olduğunu gösterir. Ama $x = -2$ değiştirimini yaparsak, $\sqrt{-2+3} = -2+1$, yani $\sqrt{1} = -1$ elde ederiz. Böylece $x = -2$ bir çözüm değildir (karekök işlemini doğru olarak kullanıyoruz!). Bir sorun ortaya çıkmaktadır, çünkü bir $f(x) = g(x)$ denklemimiz varsa, o zaman her iki yanın karesini almak ve çözmek, $-f(x) = g(x)$ ye çözümler de veriyor.

Gerektirme işaretlerini doğru kullanmanız çözüme açıklık kazandıracaktır:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x+3} = x+1\\
\Longrightarrow\ &x+3 = (x+1)^2, \text{ her iki yanın karesi alındı,}\\
\Longleftrightarrow\ &x+3 = x^2+2x+1\\
\Longleftrightarrow\ &0 = x^2+x-2\\
\Longleftrightarrow\ &0 = (x+1)(x-2).
\end{aligned}$$

İlk $\Longrightarrow$ ters çevrilemez (çünkü $a^2 = b^2$, $a = b$ yi değil ama $a = \pm b$ yi gerektirir) ve böylece sonunda çok fazla çözümümüz olabildiğini biliyoruz.

Bu ayrıca 'gerektirir ki' işaretini doğru biçimde kullanmanın ne kadar önemli olduğunu gösterir. Buna 37. sayfada değinilmişti.

Sıfır ile bölmeyin (ya da neden 1 / 0, ∞ değildir)

Bir sonraki yaygın hata da aslında lojikteki bir hata değildir. Bununla birlikte, bu hatayı neden yapmamanız gerektiğini göstermek için lojikten yararlanabiliriz.

Sıfır ile bölmememiz gerektiğini örneklendirmek için 1 = 2 nin bir kanıtını görmüş olabilirsiniz. Bu tür bir işlem kolaylıkla gözden kaçabilir, o nedenle uyanık olun. Bir görüş aşağıdaki gibidir. $a = b$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} ab &= b^2 \text{ dir, } a = b \text{ olduğundan,} \\ ab - b^2 &= a^2 - b^2 \text{ dir, her iki yandan } b^2 \text{ çıkarılıyor,} \\ b(a-b) &= (a+b)(a-b), \text{ çarpanlarına ayrılıyor,} \\ b &= a + b, \text{ her iki taraf } a - b \text{ ile bölünüyor,} \\ b &= 2b, \text{ çünkü } a = b \text{ dir,} \\ 1 &= 2 \text{ dir.} \end{aligned}$$

Sıfır ile bölme, $a - b$ ile bölerken ortaya çıkıyor. $a = b$ varsaydığımız için bu sıfır olmak zorundadır. Akıl yürütmenin yanlış olduğu yer orasıdır.

Bu 'Niçin sıfır ile bölemiyoruz' sorusunun önemini yüzümüze vuruyor. Farklı bir soruyu yanıtlayalım. 0 ile *bölebildiğimizi* varsayalım. O zaman 'Sıfır ile böldüğümüzde neyi elde ederiz?'. Örneğin, 1 / 0 nedir? Aşağıdaki gibi bir fikir yürütebiliriz:

> $1 / x$ e bakalım ve x gittikçe küçülsün. x küçüldükçe $1 / x$ in büyüdüğü görülebilir. O halde $1 / 0$ ı 'sonsuzluk' olarak *tanımlayabiliriz*.

Matematikçiler sonsuzluğu ∞ ile gösterirler, o yüzden $1 / 0 = \infty$ olduğunu ileri sürebiliriz. İlk bakışta bu hoş görünebilir. Buna rağmen, $2 / 0$ ın $2 \times (1 / 0) = 2 \times \infty = \infty$ olması gerektiğini görebiliriz – 2 kere sonsuzluğun sonsuzluk olduğu anlamlıdır, değil mi?

Sorun, $0 \times \frac{1}{0}$ mıdır: değerlendirmeye çalıştığımızda ortaya çıkar. Sıfır kere her şey sıfır olmalıdır, o halde

$$0 \times \frac{1}{0} = 0 \times \infty = 0$$

dır, çünkü eğer sıfır sayıda sonsuzluklar varsa, hiç sonsuzluğumuzun olmadığını söyleriz ve dolayısıyla yanıt sıfır olmak zorundadır.

Öte yandan, aritmetik kurallarından $a \times (b/a) = b$ sadeleştirmesini yapabiliriz, o yüzden

$$0 \times \frac{1}{0} = 1$$

olmalıdır. Böylelikle, bu iki sonucu birleştirerek

$$0 = 0 \times \frac{1}{0} = 1$$

elde deriz. Başka bir deyişle, sıfır ile bölmeye izin vererek apaçık bir eşitlik yazabiliyoruz, yani 0 = 1.

Konu şudur: eğer sıfır ile bölmeye izin verirsek, o zaman hem her x için $0 \times x = 0$ ve hem de her a, b için $a \times (b/a) = b$ ye sahip olamayız. Talihsiz, ancak doğru! O halde eğer $x / 0$ a bir değer verilirse – değer ∞ olsa bile – işimiz kördüğümle sonlanır.

Matematikçiler olarak istediğimiz kuralları seçebiliriz. Her seçim yararlı bir kurama neden olmaz. Gerçekten, $1 / 0$ ı ∞ olarak tanımlayan bir kuram kurabilirsiniz ama o zaman $a \times (b/a) = b$ gibi kullanışlı kuralları yitiririz.

Sonsuzluk durumunda, ona cebirsel kurallara bağlı bir sayı gibi değil, bir kavram olarak bakmalıyız. 30. Bölümde sonsuzluk üzerine daha fazlası söylenecektir.

$-x$ sayısı her zaman negatif değildir!

İşte ilginç bir psikolojik hata. x bir tamsayı olsun. Birkaç satır sonra kaç kişinin $-x$ negatiftir 'olgu' sunu kullanacağı hayret vericidir.

Bunun yanlış olduğunu görmek kolaydır. Herhangi bir negatif tamsayı alalım, örneğin -3, o zaman $-x = -(-3) = 3$ olur ki pozitiftir.

Sorun şudur: psikolojik olarak eksi işaretini görüyoruz ve beynimiz kendiliğinden sayının negatif olması gerektiğini kabul ediyor.[1]

O halde $-x < 0$ ille de doğru değildir!

Negatifler ve eşitsizlikler

Eşitsizlikleri çalışırken tanımsız sayıların tümünün pozitif olduğunun doğal psikolojik varsayımı, sorunlar yaratabilir.

Örneğin, eğer $1/x < 5$ ise, o zaman onu yeniden $1/5 < x$ şeklinde düzenlemek doğal gelebilir. Eşitliklerle uğraşırken genelde ifadeleri hiç düşünmeden bir yandan öbür yana atabiliyoruz. Eşitsizliklerde dikkatli olmalıyız. Öncekinde $x = -2$ alalım. O zaman $1/x = 1/(-2) < 5$ doğrudur, ama o zaman $1/5 < -2 = x$ değildir. Yapmış olduğumuz yeniden düzenleme hatalı oldu.

Hatanın ortaya çıkış nedeni her iki yanı x ile çarpma düşüncesinden kaynaklanır. Bir eşitsizlikte her iki yanı negatif bir sayı ile çarpmak eşitsizliği tersine çevirecektir.

Böylece yukarıda $1/x < 5$, $x > 0$ ise, o zaman $1/5 < x$ e ve $x < 0$ ise, o zaman $1/5 > x$ e dönüşür. Bu durumlarda bölme işlemi bir sonraki bölümde ele alınacaktır.

Alıştırmalar

Alıştırmalar 21.1

(i) Aşağıdaki akıl yürütmede hata nedir?
'$2 = 4 \Longrightarrow 2\pi = 4\pi \Longrightarrow \sin 2\pi = \sin 4\pi \Longrightarrow 0 = 0$ dır. O halde $2 = 4$ dır.'
Gerektirmelerden hangisi ters çevrilemez?

(ii) Her $n \in \mathbb{N}$ için $n^2 + 5n + 6$ sayısı asal değildir, teoremini göz önünde bulunduralım. Aşağıdaki 'kanıtlar' daki hatayı bulun:

(a) $n = 2$ için $n^2 + 5n + 6 = 2^2 + 10 + 6 = 20$ olur ki bu bir asal değildir. O halde teorem doğrudur.

(b) n nin bir doğal sayı, özellikle, $n > 0$, olduğunu varsayalım. Eğer $n^2 + 5n + 6$ asal değilse, o zaman $0 < p < n^2 + 5n + 6$ ve $0 < q < n^2 + 5n + 6$ şeklinde bazı p ve q doğal sayıları için $n^2 + 5n + 6 = pq$ olur. $n^2 + 5n + 6 = pq$ ve de p ve q 1 e ya da $n^2 + 5n + 6$ ye eşit olmadığından, o zaman $n^2 + 5n + 6$ asal değildir ki bu da gösterilmesi gereken idi.

[1] Çocuklara da genelde $-x$ i 'negatif x' olarak telaffuz etmeleri öğretilir.

(iii) İki rasyonel sayının toplamının rasyonel olduğunun aşağıdaki kanıtındaki hatayı bulun.

m ve n nin rasyonel sayılar olduğunu varsayalım, o zaman p, q, r, s (q ve r sıfır olmayan) tamsayılar olmak üzere $m = p/q$ ve $n = r/s$ yazabiliriz. Sonra

$$m+n=\frac{p}{q}+\frac{r}{s}$$

dir. İki kesirin toplamı bir kesir olduğu için $m + n$ bir kesir olmak zorundadır. O halde $m + n$ rasyoneldir.

(iv) Yukarıda $1/0 \iota \infty$ olarak tanımlayamadığımızın bir kanıtı verildi. Bununla birlikte, belki onu başka bir olgudan türetebiliriz!

$1/0 = \infty$ olduğundan hepimiz hem fikirizdir, çünkü $1/a$ yı incelersek, o zaman a, ∞ a giderken $1/a$ 0 a gider. Şimdi bir x için $1/0 = x$ varsayalım. O zaman $x = 1/(1/\infty)$ olur. Mademki her y için $1/(1/y) = y$ dir, öyleyse $x = \infty$ elde etmeliyiz. Yani $1/0 = \infty$ olmalıdır.

Bu akıl yürütmedeki *tüm* hataları bulun.

(v) İşte yapılan bir başka hata. Nedir 0?

Aşağıdaki, $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \left((y+1)x^2=\frac{1+y}{y^4}\right)$ önermesini kanıtlar.

$x=\frac{1}{y^2}$ olduğunu varsayalım, o zaman

$$(y+1)x^2=(y+1)\left(\frac{1}{y^2}\right)^2=\frac{y+1}{y^4}=\frac{1+y}{y^4}$$

dır.

(vi) Matematik lojikte yaygın hatalar için süslü isimler vardır. 'Varsayımı yadsımak' ve 'soru dilenmek'* deyimlerinin ne olduğunu anlamaya çalışın.

Özet

- Kanıtlanması gerekeni varsaymayın.
- Karekök bir fonksiyondur.
- a nın karekökü $x^2 = a$ denkleminin pozitif köküdür.
- $1 / 0, \infty$ değildir.
- $-x$ negatif değildir.
- Eşitsizlikler ve negatif sayılarla dikkatli olun.

* Soru dilenmek (Begging the question) matematik lojikte geleneksel olarak bir mantıksal hata türünü betimler: Kanıtlanması gereken önerme, açık ya da kapalı biçimde, öncüller arasında bir varsayım olarak yer alır (ç.n.).

22. BÖLÜM

Kanıt teknikleri II: Durumlu kanıt

Ustalık yavaş yavaş kazanılır.
Aesop, *Karga ve Su Testisi*

$x \leq y$ ve $y \leq x$ gösterilerek $x = y$ nin kanıtlanabildiğini önceden gördük. Başka bir deyişle, problemi iki duruma böldük. Matematikte bu çok yaygın bir yöntemdir. Bir problemi çoğu zaman parçalara bölebilir ve farklı yöntemler – hatta aynı – kullanarak her bir durumu tek başına ele alabiliriz.

Ünlü **Dört Renk Problemi** şudur: (Coğrafi türden) bir harita verildiğinde; iki sınır ülkenin rengi aynı olmamak koşuluyla haritayı boyamak için sadece dört renge gereksinim vardır.[1] Bunun kanıtı problemi, sonlu sayıdaki harita örneklerine kesme kuramının kullanılmasını gerektiriyordu. Bu örneklerden sadece yaklaşık bir tane olduğundan tümünün dört renkte boyanabildiğinin doğruluğunu kontrol etmek için bir bilgisayar kullanılmalıydı.

Durumlara örnekler

Örnek 22.1

Her $n \in \mathbb{Z}$ için $n^2 + 3n + 7$ sayısı tektir.

Bunu iki duruma bölebiliriz: (i) n çifttir ve (ii) n tektir.

Eğer n çift ise, o zaman çift tanımından bazı k tamsayısı için $n = 2k$ dır. Böylece

$$\begin{aligned} n^2 + 3n + 7 &= (2k)^2 + 3(2k) + 7 \\ &= 4k^2 + 6k + 7 \\ &= 2(2k^2 + 3k + 3) + 1. \end{aligned}$$

Buradan n çift olduğunda, $n^2 + 3n + 7$ tektir.

Şimdi diğer duruma bakalım. Eğer n tek ise, o zaman bir k tamsayısı için $n = 2k + 1$ dir. O halde

$$\begin{aligned} n^2 + 3n + 7 &= (2k + 1)^2 + 3(2k + 1) + 7 \\ &= 4k^2 + 10k + 11 \\ &= 2(2k^2 + 5k + 5) + 1 \end{aligned}$$

[1] Bu teoremin göz kamaştıran öyküsü Robin Wilson, *Dört Renk Yeterlidir: Harita Problemi Nasıl Çözüldü*, Penguin 2003 de yer alır.

bulunur. Bu da tektir. O halde n^2+3n+7 her n tamsayısı için tektir.

Uyarı 22.2

Görebildiğiniz gibi, bu **durumlar yöntemi** tüm olasılıkları tüketmeyi kapsar ve bu yüzden yöntem **tüketici** olarak da bilinir.

Örnek 22.3

Her $n \in \mathbb{N}$ için $n^3 - n$ nin 3 ün bir katı olduğunu gösterin. (Bunu göstermek için 24. Bölümde bir başka yöntem, tümevarım, göreceğiz.)

n sayısı bazı $k \in \mathbb{N}$ ve $r = 0$, 1 ve 2 için $n = 3k + r$ biçiminde yazılabilir. (Bu apaçıktır, ancak kesin olarak 28. Bölümde kanıtlanacaktır.) Yapacağımız şey $r = 0$, $r = 1$ ve $r = 2$ durumları için önermenin doğru olduğunu göstermektir.

1. Durum: $r = 0$. Bu durumda $n = 3k$ olur. O zaman

$$n^3 - n = (3k)^3 - (3k) = 27k^3 - 3k = 3(9k^3 - \mathrm{k})$$

dır. Buradan da n, 3 ün bir katıdır.

2. Durum: $r = 1$. Burada $n = 3k + 1$ dir, o halde

$$\begin{aligned} n^3 - n &= (27k^3 + 27k^2 + 9k + 1) - (3k + 1) \\ &= 27k^3 + 27k^2 + 6k = 3(9k^3 + 9k^2 + 2k). \end{aligned}$$

Böylece n, 3 ün bir katıdır.

3. Durum: $r = 2$. Burada $n = 3k + 2$ dir, o halde

$$\begin{aligned} n^3 - n &= (27k^3 + 54k^2 + 36k + 8) - (3k + 2) \\ &= 27k^3 + 54k^2 + 33k + 6 = 3(9k^3 + 18k^2 + 11k + 2). \end{aligned}$$

Yine n, 3 ün bir katıdır.

Alıştırma 22.4

$n^3 - n = (3k + r)^3 - (3k + r)$ genel terimini önce hesaplayarak ve sonra $r = 0$, 1, 2 yi kullanarak kanıtı daha verimli kılın.

Modül fonksiyonu

Durumlar tanımlarda da kullanılabilir. Matematikte önemli bir fonksiyon modül fonksiyonudur. Bu, durumlar kullanarak tanımlanabilir.

Tanım 22.5

Bir x gerçel sayısının $|x|$ ile gösterilen modülü

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \text{ için,} \\ -x & x < 0 \text{ için} \end{cases}$$

ile tanımlanır.

Burada iki duruma sahibiz; biri x, 0 dan büyük ya da ona eşit olduğunda ve diğeri x, 0 dan küçük olduğunda. Bir tane varsa, o zaman negatif işaretini kaldırırız. Tanım, $|x| = \sqrt{x^2}$ olarak da verilebilir. (Bir sayının karekökünün daima pozitif olduğunu unutmayın.)

Örnek 22.6

(i) $|3| = 3$,
(ii) $|-3| = 3$,
(iii) $|-5/2| = 5/2$,
(iv) $|\pi| = \pi$,
(v) $|0| = 0$.

Matematiğin birçok alanında son derece yararlı bir teoreme Üçgen Eşitsizliği denir.

Teorem 22.7 (Üçgen Eşitsizliği)

$x, y \in \mathbb{R}$ varsayalım. O zaman

$$|x+y| \leq |x|+|y|$$

dır.

Kanıt. Modül fonksiyonu durumlar kullanılarak tanımlandığı ve değişkenin işaretine bağımlı olduğu için, kanıttaki durumların, x ve y nin ikisi pozitif, negatif ya da farklı işaretli olmalarına bağlı kalması bir sürpriz olmamalıdır.

1. Durum: $x \geq 0$ ve $y \geq 0$ varsayalım. O zaman $x + y \geq 0$ dır, o halde

$$|x+y| = x+y = |x|+|y|$$

dir. Böylece, bu durumda önerme geçerlidir.

2. Durum: $x < 0$ ve $y < 0$ varsayalım (dolayısıyla $-x = |x|$ ve $-y = |y|$ olur. Metnin doğruluğunu kontrol edin!). O zaman $x + y < 0$ dır, o halde

$$|x+y| = -(x+y) = -x + (-y) = |x|+|y|$$

dir. Böylece, önerme geçerlidir.

3. Durum: x ve y den birinin pozitif, diğerinin negatif olduğunu varsayalım. Genellikten bir şey yitirmeksizin, $x \geq 0$ ve $y < 0$ varsayabiliriz. Bu bize değerlendirilecek iki alt durum verir:

Alt durum (a): $x + y \geq 0$ varsayalım. O zaman

$$\begin{aligned} |x+y| &= x+y \\ &\leq x+(-y) \quad y < 0 > -y \text{ nedeniyle} \\ &= |x|+|y| \end{aligned}$$

dir.

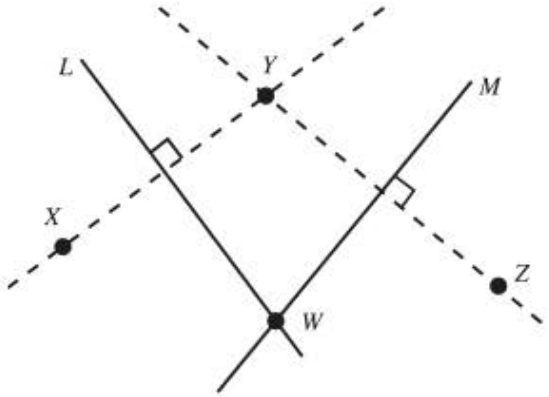
Alt durum (b): $x + y < 0$ varsayalım. O zaman $x \geq 0$ için $-x \leq x$ olduğundan

$$x+y| = -(x+y) = (-x)+(-y) \leq x+(-y) \leq |x|+|y|$$

elde ederiz.

□

Bunu Üçgen Eşitsizliği adlandırmanın nedeni, karmaşık sayılara genelleştirildiğinde daha iyi anlaşılır.



Şekil 22. 1 Bir doğru ya da çember üzerindeki üç nokta ile ilgili kanıt için şekil

Uç örneklerde durumların önemi

Durumlar yöntemi uç örnekleri ele aldığımızda önemlidir. Bunlar bizi uç durumlarla çalışmaya itecektir. Örneğin, geometride düzlemde rasgele üç nokta alırsak, o zaman onlar bir üçgenin tepelerini oluşturmayabilirler. Üçü de bir doğru üzerinde olabilir. Bu uç örnekleri dikkatle incelemeliyiz.

Aşağıdaki teorem (tam hakkıyla güzel bir teoremdir) ve kanıtı bunun örneği olacaktır.

Teorem 22.8

X, Y ve Z düzlemde noktalar olsun. O zaman hepsi bir doğru üzerindedir ya da bir çember üzerindedir.

Kanıt. L ile X ve Y arasındaki orta dikmeyi (134. sayfaya bakın) ve M ile Y ve Z arasındaki orta dikmeyi gösterelim. Eğer noktaların hepsi bir doğru üzerinde ise, o zaman teoremin sonucunu sağlar ve işimiz tamamdır. Eğer noktalar bir doğru üzerinde değilse, o zaman L ve M paralel değildir, o halde bir, örneğin W, noktada kesişmelidirler. Şekil 22. 1 e bakın.

W, orta dikme L üzerinde olduğu içim X ve Y den eşit uzaklıktadır (yani W nın X e olan uzaklığı, W nın Y ye olan uzaklığı ile aynıdır). Aynı şekilde Y ve Z ye de eşit uzaklıktadır. W den X e uzaklık Y ile Z ye olan uzaklıklarla aynı olduğundan, üç noktanın W merkezli ve W dan X e uzaklığının yarıçap olduğu bir çember üzerindedir. □

Alıştırmalar 22.9

16. ve 18. Bölümlerin yöntemlerini bu teoreme ve kanıta uygulayın.

Kanıtta görebildiğiniz gibi ele alınması gereken bir uç durum, üç noktanın bir doğru üzerinde yer almış olmalarıdır. Bununla birlikte, başka bir uç durum göz önüne alındığında kanıt başarısız olur. Seçilen üç noktanın tümü aynı nokta ise ne olur? – teoremin noktaların farklı olması gerektiğini söylemediğini kaydedin – ya da noktalardan ikisi aynı ise ne olur?

Eğer X ve Y aynı nokta ise, o zaman orta dikmeyi tanımlamak olanaksızdır. O zaman L yi tanımlayamazdık. Bu bir sorun olur mu? Teorem hatalı mıdır?

İyi ki kanıttaki hata hala ölümcül değildir ve teoremin ifadesini değiştirme gereği yoktur. Kanıtın ilk satırından sonra X, Y ve Z noktalarının etiketlendirilmeleri üzerine aşağıdakini eklemeliyiz.

'Eğer noktalar farklı değilse, o zaman onların ikisi ya da daha fazlası çakışır. Eğer üçü de çakışırsa, o zaman noktalar sonsuz çokluktaki doğru üzerindedir, çünkü noktadan geçen herhangi bir doğru yeterli olacaktır. İkisi çakışıyorsa, o zaman çakışan noktalardan ve üçüncüden geçen tek doğruyu alalım. Her durumda teoremin sonucu doğrudur ve artık noktaların farklı olduğunu varsayabiliriz.'

Aslında aşağıdakini söyleyebilirdik: 'Eğer noktalar farklı değilse, o zaman en az ikisi aynıdır. Buradan bu ve üçüncüsünden geçen bir doğru almak noktaların bir doğru üzerinde olduğunu gösterir. Şimdi de noktaların farklı olduğu duruma gelelim…'

Alıştırmalar

Alıştırmalar 22.10

(i) Herhangi bir tamsayının karesinin, bazı $k \in \mathbb{Z}$ için, $3k$ ve $3k+1$ biçimli olduğunu kanıtlayın.

(ii) Herhangi bir tamsayının kübünün, bazı $k \in \mathbb{Z}$ için, $9k$ ve $9k+1$ ya da $9k+8$ biçimli olduğunu kanıtlayın.

(iii) $x, y \in \mathbb{R}$ için modül fonksiyonu üzerine aşağıdakileri kanıtlayın.

(a) $-x \le |x|$ ve $x \le |x|$.

(b) $|x| \le y \iff (-x \le y \text{ ve } x \le x) \iff -y \le x \le y$.

(c) $|xy| = |x||y|$.

(d) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$ için.

(e) $\big||x| - |y|\big| \le |x-y|$.

(f) $|x| = \sqrt{x^2}$.

(iv) $A \cup B = (A \cap B) \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ yi gösterin.

(v) Üç a, b, c gerçel sayıları için $a = bc$ varsayalım. Eğer a, b ve c den ikisi sıfırdan farklı ise, o zaman üçüncünün de sıfırdan farklı olduğunu kanıtlayın.

(vi) Her $0 < \theta < \pi/2$ için

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

olduğunu kanıtlamak için Pisagor Teoremini kullanın. (Bir bakıma, $\sin\theta$ ve $\cos\theta$ yı bağlayan tek denklem olduğu için bu çok değerlidir.)

Her $\theta \in \mathbb{R}$ için bunu kanıtlamak için durumlar kullanın. ($\pi/2$ den daha büyük açılar için sin ve cos'u tanımlama durumunda kalacaksınız.)

(vii) **Maksimum fonksiyonunu,** $\max(x, y)$, $\frac{x+y+|x-y|}{2}$ ile verilmiş olarak tanımlayalım. Bunun iki x ve y sayılarının maksimumunu verdiğini gösterin.

(viii) **Minimum fonksiyonunu** için bir tanım oluşturun ve iki sayının minimumunu verdiğini gösterin.

(ix) İşte bir başka zor beyin işi. Onu yanıtlamak için yeterince bilgiye sahip olmasak da, önemlidir ve daha kötüsü bu hesaplama probleminde bir çocuğun saç rengi ne kadar yardımcı olabilir?

İki matematikçi arkadaş sokakta karşılaşırlar. İlki 'Üç oğlunun yaşları kaçtır? Bana hatırlatır mısın, yaşlarını unuttum' der. İkincisi 'Pekala, yaşlarının çarpımı 36 ve yaşlarının toplamı şuradaki evin pencerelerinin sayısına eşittir' der. İlki

bir an düşünür ve 'Anlayamadım' der. İkincisi 'Ha, sana en büyük oğlumun sarı saçlı olduğunu söylemeyi unuttum' diye yanıt verir. İlki 'O durumda, oğlanlarının yaşlarını bilirim' yanıtını verir.

Yaşları hesaplayabilir misiniz?

Özet

- Bazen bir problemi durumlara bölmek uygun olur.
- Bir problemdeki uç durumları ayrı ayrı inceleme durumunda kalabiliriz.
- Modül fonksiyonunun tanımı $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \text{ için,} \\ -x & x < 0 \text{ için} \end{cases}$ dır.
- $|x| = \sqrt{x^2}$.
- Üçgen Eşitsizliği: Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $|x+y| \leq |x| + |y|$ dir.

23. BÖLÜM

Kanıt teknikleri III: Çelişki

Kendimle çeliştiğimde rüyamda cezalandırılmak gibi
kaba bir yanlışa düşmeme izin verme.
Ralph Waldo Emerson, Günlük Girdisi, 8 Kasım 1838

Üçüncünün olmazlığı yasası*, bir önermenin doğru ya da yanlış olduğunu, arada hiçbir şeyin olmadığını ileri sürer. Bunu bir başka kanıt yöntemi olarak kullanabiliriz. Önermenin yanlış olduğunu kabul ederiz ve bunun mantıksal olarak, $1 = 0$ ya da Ay peynirden yapılmıştır gibi, yanlış olduğunu kesinlikle bildiğimiz bir önerme verdiğini göstermeye başlarız. Böylece varsayımımız yanlış olmak durumundadır, önerme yanlış *olamaz* – bu gülünç bir şeye neden olur – o halde önerme doğrudur.

Bu yönteme çelişkiyle kanıt denir. Bu isim önermenin yanlış kabul edilmesinin daha sonra bir başka olguyla çelişmesinden ileri gelir. Yöntem, saçmalığa indirgeme anlamına gelen **reductio ad absurdum** adıyla da bilinir.

Çelişkiyle kanıtlamaya basit örnekler

İlk örnek çelişkiyle kanıt düşüncesini tam anlamıyla size anlatmak içindir. Teorem 20. 1 de görmüş olduğumuz gibi önermeyi dolaysız bir yöntemle kanıtlamak daha kolaydır.

Örnek 23.1

n bir tek tam sayı olsun. O zaman n^2 bir tek tamsayıdır.

Kanıt. Tersini kabul edelim. Yani, n nin bir tek tamsayı olduğunu ama sonucun yanlış olduğunu yani n^2 yi bir çift tamsayı varsayalım.

n tek olduğundan bazı $k \in \mathbb{Z}$ için $n = 2k + 1$ yazılır. Böylece $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$, n^2 nin çift olmasıyla çelişir. O halde n^2 nin çift olması gerektiği varsayımımız hatalıdır, yani n^2 tek olmak zorundadır. □

Yukarıdaki önerme $A \Longrightarrow B$ biçimlidir. Genel olarak böyle bir önermenin yanlış olduğunu kabul edersek, o zaman $A \Longrightarrow B$ nin değillemesi olduğu için 'A ve değil(B)' yi kabul etmiş oluruz (66. sayfaya bakın). Çelişkiyi kullanmak için 'A ve değil(B)' nin yanlış bir şeye götürdüğünü göstermeliyiz.

İkinci örnek daha zor bir problemi çözer.

* *The law of the excluded middle*, 'ortanın dışlanması' olarak da çevrilebilir (ç.n.).

Örnek 23.2

$x^2 - y^2 = 1$ denklemini sağlayan hiçbir x ve y pozitif tamsayıları yoktur.

Kanıt. Tersini varsayalım, yani $x^2 - y^2 = 1$ denklemini sağlayan tamsayıların olduğunu kabul edelim. O zaman $(x + y)(x - y) = 1$ yazabiliriz. x ve y tamsayı oldukları için $x + y$ ve $x - y$ de birer tamsayıdır, o halde iki durum vardır:

1. Durum: $x + y = 1$ ve $x - y = 1$. Bu denklemler ikilisini çözerek $x = 1$ ve $y = 0$ elde edilir. Bu ise x ve y nin pozitif olmasıyla çelişir.

2. Durum: $x + y = -1$ ve $x - y = -1$. Bunları çözünce $x = -1$ ve $y = 0$ buluruz ve yine iki tamsayının pozitif olmalarıyla çelişiriz. □

Görebildiğiniz gibi önerme '$\nexists x, y \in \mathbb{N}\ (x^2 - y^2 = 1)$' idi. Sonucun yanlış olduğunu varsaydık; başka bir deyişle, değili '$\exists x, y \in \mathbb{N}\ (x^2 - y^2 = 1)$' doğrudur.

Örnek 23.3

Bir rasyonel ve bir irrasyonel sayının toplamı bir irrasyonel sayıdır.

Önermeyi açık bir gerektirme biçimiyle yazarsak problemi daha iyi görebiliriz. Başka bir deyişle, 'Eğer x rasyonel ve y irrasyonel ise, o zaman $x + y$ irrasyoneldir.' '$A \Longrightarrow B$' nin 'A ve değil (B)' değillemesine sahip olduğu gerçeğini kullanarak, x rasyoneldir ve y irrasyoneldir ve $x + y$ irrasyonel değildir ifadelerinin tümünün doğru olduğunu varsayıyoruz.

Kanıt. Tersini varsayalım: x rasyonel, y irrasyonel ve $x + y$ rasyonel olsun. x rasyonel olduğu için p ve q tamsayılar olmak üzere $x = p/q$ yazılabilir. Benzer şekilde r ve s tamsayıları için $x + y = r/s$ dir. Buna göre

$$\begin{aligned} & x + y = \frac{r}{s} \\ \Longrightarrow\ & \frac{p}{q} + y = \frac{r}{s} \\ \Longrightarrow\ & y = \frac{r}{s} - \frac{p}{q} \\ \Longrightarrow\ & y = \frac{rq - ps}{sq} \end{aligned}$$

olduğunu görürüz. Ama $\frac{rq - ps}{sq} \in \mathbb{Q}$, y nin irrasyonel olmasıyla çelişir. O halde önerme doğrudur. □

Alıştırma 23.4

'Bir rasyonel ve bir irrasyonel sayının çarpımı bir irrasyonel sayıdır' önermesini göz önünde bulunduralım. Bu önermeyi kanıtlayın ya da bir karşıt örnek verin. Eğer bir karşıt örnek verebiliyorsanız, doğru bir önerme elde etmek için önermede küçük değişiklikler yapabilir misiniz?

Örnek 23.5

$x^7 + 3x^3 + 5$ denkleminin hiçbir rasyonel kökü yoktur.

Tersini varsayalım: x bir kök ve rasyonel olsun. Böylece p ve q tamsayılar ve oran en yalın biçimde (yani, pay ve paydayı 1 den büyük aynı sayıyla bölemeyiz) olacak şekilde $x = p/q$ dir.

O zaman

$$\left(\frac{p}{q}\right)^7 + 3\left(\frac{p}{q}\right)^3 + 5 = 0$$
$$p^7 + 3p^3q^4 + 5q^7 = 0$$

yazabiliriz. p ve q nün tek ve çift olduğunda ne olacağını değerlendirebiliriz. Ele alınması gereken dört durum vardır:

1. Durum: Eğer p ve q nün ikisi de çift ise, o zaman p/q en yalın biçimde değildir. Bu nedenle bir çelişki elde ederiz.
2. Durum: Eğer p ve q nün ikisi de tek ise, o zaman $p^7 + 3p^3q^4 + 5q^7 = 0$ ın sol tarafı tek iken sağ tarafı çifttir. (Bunun doğru olduğunu 20. Bölümdeki bir alıştırmayı kullanarak gösterin.) Bu bir çelişkidir.
3. Durum: Eğer p çift ve q tek ise, o zaman yukarıdaki denklemin sol tarafı tek, sağ yanı çift olur. Bu yine bir çelişkidir.
4. Durum: Eğer p tek ve q çift ise, o zaman yine sol taraf tek ve sağ taraf çifttir. Çelişki.

O halde x rasyonel değildir.

2 nin karekökünün irrasyonel olması

Şimdi matematiğin klasik bir teoremini ve kanıtını göstermek için çelişkiyle kanıt kullanacağız: $\sqrt{2}$ bir irrasyonel sayıdır. Yani, $\sqrt{2}$ iki tamsayının oranı olarak yazılamaz.

Bu önermenin değili $\sqrt{2}$ rasyoneldir olur. Bunun kabulünün olanaksız bir önermeye neden olduğunu göstermeye çalışacağız.

Teorem 23.6

2 nin karekökü irrasyoneldir, yani m ve n tamsayılar olmak üzere m / n biçimli yazılamaz.

Kanıt. Tersini varsayalım: $\sqrt{2} = m/n$ olsun. Genellikten bir şey yitirmeksizin bu oranın en yalın biçimli olduğunu kabul edebiliriz. O zaman

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$
$$2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 \quad \text{her iki yanın karesi alındı,}$$
$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$
$$2n^2 = m^2$$

dır. Bu ise m^2 nin çift olmasını gerektirir. Bu durumda m için iki seçeneğimiz vardır: çift olabilir ya da tek olabilir. Eğer m tek ise, o zaman Teorem 23.1 den m^2 tek olur. (Anılan teoremin bunu sağladığının doğruluğunu geriye dönerek kontrol ettiniz mi?) O halde m

çifttir. Buradan bir k tamsayısı için $m = 2k$ yazılır. Şimdi $2n^2 = m^2$ denklemini kullanarak

$$\begin{aligned} 2n^2 &= (2k)^2 \\ &= 2^2k^2 \\ &= 4k^2 \\ n^2 &= 2k^2 \end{aligned}$$

elde ederiz. Önceki gibi düşünerek n nin de bir j tamsayısı için $n = 2j$ olması gerektiğini sonuçlandırırız. Bununla birlikte m/n oranının en düşük biçimli olduğunu varsaymıştık; durumun öyle olmadığı gösterilmiştir:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} = \frac{2k}{2j} = \frac{k}{j}.$$

Böylece $\sqrt{2}$ nin iki tamsayının bölümü olarak yazılamayacağını sonuçlandırırız. □

Alıştırmalar 23.7

(i) $\sqrt{3}$ ün irrasyonel olduğunu gösterin.
(ii) $\sqrt{5}$ ün irrasyonel olduğunu gösterin.
(iii) Kanıtı '$\sqrt{4}$ irrasyoneldir' *örnek-dışına* uygulayın. Neler oluyor? Bu durumda kanıt nerede 'hatalı' gelişir?
(iv) p bir asal sayı olmak üzere, yöntemi $\sqrt{p}$ ye genişletebilir misiniz?

Çelişkiyle kanıt nasıl belirlenir

Çelişkiyle kanıtları kendiliğinden belirlemeyiz ama önermeyi dolaysız olarak kanıtlayamazsak, ister istemez yönteme döneriz.

Örneğin, bir şeyin mevcut olmadığını kanıtlamak için var olduğunu kabul eder ve bir çelişki amaçlarız. Ve tersi de yapılabilir.

Mesele şudur: var olmayan bir şeyle işlem yapmak zordur. Bir şeyin var olduğunu kabul etmek, işlem uygulayabileceğimiz anlamına gelir. Örneğin, bir şeyin irrasyonel olduğunu göstermek için o şeyi rasyonel kabul etmek daha kolaydır, çünkü o zaman onu p ve q tamsayıları için p/q biçiminde yazabiliriz.

Bir çelişkiyle kanıt nasıl yapılır

(i) Önermenin yanlış olduğunu kabul ettiğinizi ifade edin. Görmüş geçirmiş matematikçiler kanıtın çelişkiyle yapılacağını anlarlar.
(ii) Değilleme kullanılarak yanlışlanan önermenin ne demek istediğini tam olarak yazın.
(iii) Bir çelişki buluncaya dek bunun neyi gerektirdiğini anlamaya çalışın.
(iv) Bir çelişkinin bulunduğunu bildirin.

Alıştırmalar

Alıştırmalar 23.8

(i) $x^5 - 2x^3 - 3 = 0$ denkleminin tüm çözümlerinin 2 den daha küçük olduğunu gösterin. (İpucu: 0 dan daha küçük kökler bulmak kolaydır, o yüzden farklı bir değişkene dönüştürün.)

(ii) Tüm x ve y tamsayıları için eğer xy tek ise, o zaman x ve y nin ikisinin de tek olduğunu kanıtlayın.

(iii) 0 ile 1 arasında sonsuz çoklukta rasyonel sayı olduğunu çelişkiyle kanıtlayın. (İpucu: Teorem 20. 4 ü göz önünde bulundurun.)

(iv) Mantıksal bağlamda P nin

P, (değil $P \Longrightarrow$ (Q ve değil Q)) ye denktir

olduğunu çelişkiyle kanıt kullanarak gösterin.

(v) $x^2 + x + 1 = y^2$ denkleminin hiçbir pozitif tamsayı çözümünün olmadığını kanıtlayın.

(vi) $\sqrt{2}$ den daha küçük en büyük rasyonel sayının olmadığını kanıtlayın.

(vii) $x < y$ şeklindeki tüm x, y rasyonel sayıları için $x < z < y$ olacak biçimde bir z irrasyonel sayısının olduğunu kanıtlayın.

(viii) Öncekini x, y irrasyonel ve z rasyonel durumunda kanıtlayın.

(ix) İki irrasyonel sayının toplamı rasyonel olacak bir örnek bulun. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ rasyonel midir, irrasyonel midir? Açıklayın.

(x) $\log_2 3$ ün irrasyonel olduğunu gösterin. (İpucu: Tanımdan $\log_2 3$, $2^x = 3$ olacak şekilde x sayısıdır.)

(xi) Kanıtlayın ya da çürütün: Eğer x irrasyonel ise, o zaman $\sqrt{x}$ irrasyoneldir.

(xii) $\sqrt[3]{2}$ irrasyonel midir, rasyonel midir? Her iki durumda önermenizi genelleştirebilir misiniz?

(xiii) x ve y pozitif tamsayılar olsun. $\sqrt{x^2 + y^2} \neq x + y$ olduğunu gösterin.

Özet

- Çelişkiyle kanıtta, önermenin değilinin doğru olduğunu kabul ediyoruz ve oradan bir şeyin açıkça yanlış olduğunu türetiyoruz.
- 2 nin karekökü irrasyoneldir.
- 'Bir rasyonel ve bir irrasyonel sayının toplamı bir irrasyonel sayıdır' gibi önermeleri gerektirme biçiminde yazın.

24. BÖLÜM

Kanıt teknikleri IV: Tümevarım

Bir şey bir başkasına götürür.
Anon

Tümevarım matematikçilerin düzenli olarak kullandığı çok önemli bir tekniktir.[1] Başlangıçta kafa karıştırıcı olabilir çünkü kanıtlanması gerekeni kabul etmişiz gibi *görünür*. Bildiğimiz gibi, tümevarım asla teoremleri kanıtlamaz. Karar verildiğinde, kullanılması kolaydır ve onu uygulamak için sadece iki koşulun doğruluğunu kontrol etmemiz yeterlidir.

Tümevarım

'$n^5 - n$ her $n \in \mathbb{N}$ için çifttir'

gibi sonsuz çoklukta indisli önermelerimiz olduğunda uygulanır. Bunu kanıtlamak için yüzlerce, milyonlarca ya da hatta milyarlarca doğal sayı örnekleri yeterli değildir; onu *her n* için kullanmak durumundayız.

Tümevarımla önermeleri doğrudan kanıtlayamayız. Ne yaptığımız belki domino taşlarının ard arda düşmesine benzetilerek daha iyi betimlenir. Belki biliyorsunuzdur; dik duran dizili domino taşları devrildiğinde, ilkini ittiğinizde ikincisini, ikincisi üçüncüsünü v.s. devirir. Taşlar her biri diğerini devirecek şekilde düzenlenirse, o zaman hepsi devrilecektir.

Tümevarım işlemi 'eğer k. önerme doğru ise, o zaman $(k+1)$. önerme doğrudur' olduğunu kanıtlamaktır, yani bir önermenin doğruluğunun bir sonrakinin doğruluğunu gerektirmesidir. Bu domino taşının bir sonrakini düşürmesine benzerdir. O halde, eğer ilk önerme doğru ise (ilk taşı itin), o zaman tüm önermeler doğrudur (tüm taşlar yere serilmiştir).

Matematiksel tümevarım ilkesi

Düşünceyi açıklığa kavuşturmaya başlayalım. Her şeyden önce, Matematiksel Tümevarım İlkesi doğal sayılar tarafından indislenmiş bir önermeler dizisine gerek duyar. Aşağıdaki örneklerin gösterdiği gibi, bunlardan bir sürü vardır. Örneklerin matematiğin farklı alanlarından alındığına dikkat edin: bölünebilirlik, toplam alma, eşitsizlikler. Bu önermelerin tümü ileride tümevarım kullanılarak kanıtlanacaktır. Umarım, bu alanı size

[1] Deneysel bilimde, tartışmak üzere olduğumuzdan farklı bir tümevarım ilkesi vardır.

göstermek tümevarımın gücü hakkında bir fikir edinmenizi sağlayacaktır – o gerçekten matematikçinin alet çantasındaki önemli bir aracıdır.

Örnekler 24.1

(i) $6^n - 1$ ifadesi her $n \in \mathbb{N}$ için 5 ile bölünebilirdir. (a yı b ye böldüğümüzde hiç kalan yoksa a, b ile **bölünebilirdir** deriz. Yani bazı $q \in \mathbb{Z}$ için $a = bq$ dir. 27. Bölümde bu konuda daha fazlasını göreceğiz.)

(ii) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$ dir.

(iii) Her $n \in \mathbb{N}$ için $2^{n-1} \leq n!$ dir.

Bunları okuduktan sonra bir matematikçi gibi davrandınız mı ve en azından bu önermelerin akla yakın olduğunun doğruluğunu kontrol etmek için birkaç durum denemesi yaptınız mı?

Bazı durumları kontrol edelim. (i) için

$n = 1$:	$6^1 - 1 = 6 - 1 = 5.$	5 ile bölünebilir.
$n = 2$:	$6^2 - 1 = 36 - 1 = 35.$	5 ile bölünebilir.
$n = 3$:	$6^3 - 1 = 216 - 1 = 215.$	5 ile bölünebilir.
$n = 10$:	$6^{10} - 1 = 60466176 - 1 = 60466175.$	5 ile bölünebilir.

Dikkatinizi çekmiştir; ilk birkaç durumu sınadıktan sonra daha büyük bir duruma geçtim. Bu, önermenin sanki doğru olduğunun akla yatkınlığına işaret eder – henüz bir karşıt örnek bulamadık!

Alıştırma 24.2

Yukarıdaki diğer iki önermeyi kendinizi ikna etmek için küçük n ler alarak kontrol edin.

Bu tür doğruluk kontrolü anlamsız gelebilir – 'Birazdan önermelerin doğru olduğunu kanıtlamayacak mıyız?'. Kanıtlayacağız, ancak yapılan şey beyni önermeyle meşgul etmek ve orada neyin olduğunu görmenizi – neyin olduğunu düşünmenizi değil – sağlamaktır.

Özel bir n için önermeyi göstermek için $A(n)$ notasyonunu kullanacağız. (i) de, örneğin, $A(3)$ tam olarak '$6^3 - 1$ ifadesi 5 ile bölünebilir' dir.

Bayanlar ve Baylar, şimdi size görkemli teoremi veriyorum!

Teorem 24. 3 (Matematiksel Tümevarım İlkesi)

$n \in \mathbb{N}$ için $A(n)$ önermelerin sonsuz bir koleksiyonu olsun.

(i) *$A(1)$ doğrudur, ve*

(ii) *Her $k \in \mathbb{N}$ için $A(k) \Longrightarrow A(k+1)$*

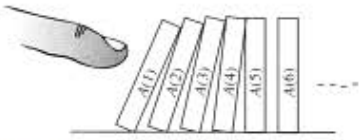
varsayalım. O zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $A(n)$ doğrudur.

Kanıt. Bir çelişki amaçlıyoruz. Sonucun yanlış olduğunu kabul edelim ve j, $A(j)$ yanlış olacak şekilde en küçük doğal sayı olsun. (i) varsayımından $j > 1$ dir. Şimdi, j olası en küçük sayı olduğu için $A(j-1)$ in doğru olması gerektiğini kaydedelim. Buradan (ii) varsayımına göre $A(j)$ nin doğru olduğunu elde ederiz. Bu bir çelişkidir. □

Bazı tanımlara gerek duyuyoruz. Bu tanımları yapmanın nedenleri daha sonra açıklığa kavuşacaktır.

- (i) koşulunun doğruluğunu kontrol etmeye **başlangıç adımı** denir.
- (ii) koşulunun doğruluğunu kontrol etmeye **tümevarım adımı** denir.
- (ii) de bir k için $A(k)$ nın doğru olduğunu kabul etmeye **tümevarım hipotezi** denir.

Düşünce, her bir önerme bir domino taşı gibi görüldüğünde, Şekil 24. 1 de temsil edilmiştir.



Şekil 24. 1 Domino taşlarını devirme

Tümevarım örnekleri

İlkeyi eylemde görelim. Bir sonraki örnek gerçek bir matematik klasiğidir: 'İlk n sayının toplamı nedir?'

Ünlü bir öyküye göre, büyük matematikçi Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855) okuldayken, öğretmeni 100 e kadar tüm sayıların toplamının hesaplanmasını sınıfa sorar – herhalde ders boyunca öğrencilerin soruyla meşgul olacağını ummaktadır. Sınıf arkadaşları alıştırmayı bilinen zahmetli yolla çözmeye çalışırken Gauss bir matematikçi gibi düşünür ve ilk 100 sayının toplamını hesaplamak için yalın bir yöntem üreterek köle gibi çalışmaktan kurtulur – böylece Gauss'a göre çok kolay olan ders, öğretmeninin yükselmesine engel olur.

Gauss yöntemi sadece 100 için değil, tüm sayılar için bir formül ortaya koymak için uygulanabilir. Bu formül yukarıdaki Örnekler 24. 1(ii) dekidir. Bu formülün doğruluğunu Gauss'un kanıt yöntemini kullanmaktansa tümevarımla kanıtlayacağız.[2]

Örnek 24.4

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$ olduğunu kanıtlayacağız.

Bu önerme n tarafından indislendiği için

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$$

önermesine $A(n)$ diyeceğiz. Amacımız, her bir n için $A(n)$ nin doğru olduğunu göstermektir.

(i) başlangıç koşulunun doğruluğunu kontrol edelim. Bu ilk domino taşını itmeye karşılık gelir. Bu kolaydır:

$n = 1$ ise, o zaman

$$\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{1} i = 1$$

[2] Gauss'un yöntemine göre, ikililerin toplamlarının sabit kalması için, sayıları ikişer ikişer gruplayabiliriz, yani 1 + 100, 2 + 99, 3 + 98 v.s. Formülün kalanı kolaydır: toplamı 101 olan 50 ikiliye sahibiz (yani 100 / 2). Genel durumda formül aynı düşünceyi kullanır.

ve

$$\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}\times 1\times(1+1)=1$$

dir.

Şimdi tümevarım adımına bakalım. $A(k)$ önermesi doğru ise, o zaman $A(k+1)$ önermesinin de doğru olduğunu göstermek istiyoruz. Bu k sayılı domino taşının $k+1$ sayılı domino taşını devirmesiyle aynıdır.

$A(k)$ nın keyfi bir k için doğru olduğunu kabul edelim. (Bu tek bir k dır; önemli olan keyfi olmasıdır. Bu özel k dışında başka bir n sayısı için hiçbir varsayımda bulunmuyoruz.) Yani,

$$\sum_{i=1}^{k} i=\frac{1}{2}k(k+1)$$

varsayıyoruz. Bunun $A(k+1)$ için ne gibi sonuçları olduğunu araştıracağız. Önce $A(k+1)$ in biçimini yazıyoruz:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i=\frac{1}{2}(k+1)\big((k+1)+1\big).$$

Bir matematikçi böyle bir eşitliği nasıl kanıtlardı? Tecrübe bize bir ifadenin en karmaşık yanını seçmemizi ve diğer yanı elde etmek için indirgememizi öğretmişti. Toplam içeren bir önermenin tümevarımla bir kanıtı için karmaşık yan genelde toplamlı olanıdır (herhalde daha fazla terime sahip olduğu için). Şimdi

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1} i &= \left(\sum_{i=1}^{k} i\right)+(k+1), \text{ toplam tanımından} \\
&= \left(\frac{1}{2}k(k+1)\right)+(k+1), \text{ tümevarım hipotezinden,} \\
&\qquad\qquad \text{yani } A(k) \text{ nın doğru olmasından,} \\
&= \left(\frac{1}{2}k+1\right)(k+1) \\
&= \frac{1}{2}(k+2)(k+1) \\
&= \frac{1}{2}(k+1)\big((k+1)+1\big)
\end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\sum_{i=1}^{k} i=\frac{1}{2}k(k+1)$$

doğru ise, yani $A(k)$ doğru ise, o zaman

$$\sum_{i=1}^{k+1} i=\frac{1}{2}(k+1)\big((k+1)+1\big)$$

nın doğru olduğunu gösterdik, yani $A(k+1)$ doğrudur. Başka bir deyişle, tüm domino taşları sıra halinde iken k. taş devrilirse o zaman $(k+1)$. taş devrilir.

Böylece Matematiksel Tümevarım İlkesinden önerme her $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur.

Uyarılar 24.5

(i) Yapıya dikkat edin. $A(k)$ nın keyfi bir k için doğru olduğunu kabul ediyoruz. Sonra $A(k+1)$ durumunu inceliyoruz ve $A(k)$ nın kullanılabilmesi için $A(k+1)$ i ayrı inceliyoruz. $A(k+1)$ durumunun da doğru olduğunu kabul *etmiyoruz* – bu acemilerin yaygın bir hatasıdır – $A(k)$ doğru iken $A(k+1)$ in doğru olduğunu gösteriyoruz.

(ii) Acemi matematikçiler için bir diğer sorun, kanıtlamaya çalıştığımızı kabul etmediğimiz ilkesini tümevarımın ihlal ettiği kanısıdır. Öğrenci iken ben de aynı duyguya kapılmıştım.

Bununla birlikte güvenli bir şekilde uygulanırsa, tümevarımdaki inceliği kavramak yaşamsaldır. Kanıtlamak istediğimiz önermenin *her* n için geçerli bir şey hakkında olduğu gözden kaçırılmamalıdır. (ii) koşulundaki varsayımımızda, önermenin k dediğimiz özel *bir* n için geçerli olduğunu kabul ediyoruz. Anlaştık, o özel n keyfidir, kesinlikle istediğiniz herhangi bir n dir, ama başka hiçbir varsayım yapılmadan hala bir tanedir.

Örnek 24.6

$5^n - 1$ ifadesi her $n \in \mathbb{N}$ için 5 ile bölünebilir.

Bunu önceki örneğe göre daha az açıklamalı vereceğiz – bu örnek daha çok bir kitaptaki ya da ödevdeki bir model çözüm olacaktır.

Başlangıç adımı: $5^n - 1 = 6^1 - 1 = 5$ olduğundan $n = 1$ için doğrudur.

Tümevarım adımı: Önermenin bir[3] $k \in \mathbb{N}$ için doğru olduğunu varsayalım; bu bir $m \in \mathbb{N}$ için $6^k - 1 = 5m$ demektir. O zaman

$$\begin{aligned} 6^{k+1} - 1 &= 6(6^k) - 1 \\ &= 6(5m + 1) - 1, \text{ tümevarım hipotezinden,} \\ &= 30m + 6 - 1 \\ &= 5(6m + 1) \end{aligned}$$

dır. Bu 5 ile bölünebilirdir ve dolayısıyla önerme $k+1$ için doğrudur. O halde Matematiksel Tümevarım İlkesinden önerme her $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur.

Şimdi üçüncü örneği verelim.

Örnek 24.7

Her $n \in \mathbb{N}$ için $2^{n-1} \leq n!$ olduğunu gösteriyoruz.

Başlangıç adımı: $n = 1$ için $2^{n-1} = 2^0 = 1$ ve $n! = 1! = 1$ dir.

Tümevarım adımı: Bir $k \in \mathbb{N}$ için önermenin doğru olduğunu, yani $2^{k-1} \leq k!$ olduğunu, varsayalım. O zaman $n = k + 1$ için

$$\begin{aligned} 2^{(k+1)-1} &= 2^k \\ &= 2(2^{k-1}) \\ &\leq 2(k!), \text{ tümevarım hipotezinden,} \\ &\leq (k+1)k!, \ 2 \leq k+1 \text{ olduğundan,} \\ &= (k+1)! \end{aligned}$$

[3] Not: Onun bir k – keyfi bir tek k – olduğunu, *her* k olmadığını, anımsatalım.

elde edilir. Bu, önermenin $n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterir. O halde Matematiksel Tümevarım İlkesinden önerme her $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur.

$n = k + 1$ için önermedeki eşitliğin bir yanını ele aldığımızı ve onunla oynadığımızı kaydedelim. Pekala, $A(k + 1)$ i kabul etmediğiniz sürece, diğer yanıyla da başlayabilirdiniz.

Şimdi gerçek matematiksel düşünmeyle beyinlerimizi çalıştırmamıza izin veren bir problem çalışalım.

Örnek 24.8

İlk n tek sayının toplamı için bir formül bulun.

Birbirine sarılmış iki problemimiz var. Önce bir yöntemle formülü bulmalıyız ve sonra her n için geçerli olduğunu kanıtlamalıyız (şaşırtıcı olmamalı, kanıt tümevarımla olacaktır).

İlk kısmı için problem çözme yöntemlerimize başvurabiliriz (5. Bölüme bakın). İyi bir girişim yöntemi problemi sembollerle yeniden yazmak olur. Sembollerle ilk n tek sayının toplamı $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$ dir. İyi matematikçiler olalım: ilk birkaç durumu deneyelim.

Bu sonuçlar aşağıdaki çizelgede toplanmıştır:

n	1	2	3	4	5
$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$	1	4	9	16	25

Modelin ne olduğunu görmek fazla zaman almaz: İlk n tek sayının toplamı n^2 dir. Güzel, bu gerçekten öylemidir? – bir sonraki modele uymayabilir. Yine de peşine düşmemiz gereken iyi bir sanıya sahibiz:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2, \text{ her } n \in \mathbb{N} \text{ için.}$$

Bu birkaç durumu incelerken öngörmüş olduğumuz güzel, yalın bir formüldür. Bu gerçekten bir matematikçi gibi düşünmektir. Formülün doğru olduğunu elbette göstermek zorundayız!

Başlangıç adımı yukarıdaki çizelge hesaplamalarında yerine getirilmiştir. Tümevarım adımını görelim. Önermenin bir k için doğru olduğunu, $\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2$, varsayalım.O zaman

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) &= \left(\sum_{i=1}^{k}(2i-1)\right) + (2(k+1)-1)\\ &= k^2 + (2k + 2 - 1), \text{ tümevarım hipotezinden,}\\ &= k^2 + 2k + 1\\ &= (k+1)^2\end{aligned}$$

bulunur. Böylece, eğer k. önerme doğru ise, o zaman $(k + 1)$. önerme de doğrudur. Buradan Matematiksel Tümevarım İlkesi gereği formülümüz doğru olur.

Bir kez daha, $k + 1$ durumu için toplamı k durumunun uygulanması amacıyla parçaladığımızı not edin.

Uyarı 24.9

Yukarıdakini yazarken bir matematikçi, formüle götüren birkaç başlangıç durumunun hesabına yapılan göndermelerin tümünü kaldırır. Onun yerine formülü ifade eder ve doğru olduğunu göstermeye geçer. Bu **izlerin örtülmesi** olarak bilinir.

Bir tümevarımla kanıt nasıl belirlenir

Tümevarımın kullanılabileceğini belirlemek için doğal sayılar kümesiyle indislenmiş bir önermeden kuşkulanmalısınız. Örneğin, 'Her doğal sayı için …' ya da '… her $n \in \mathbb{N}$ için' gibi.

Bazen önermeler biçim değiştirebilir. Örneğin,

'n tek bir doğal sayı olduğunda, $n^2 - 1$ in 8 ile bölünebildiğini gösterin'

alıştırmasını göz önünde bulunduralım. İlk bakışta, çift sayıların hiçbiri kullanılmadığından, bunun doğal sayılar tarafından indislenmediği sanılır. Bununla birlikte önerme doğal sayılar tarafından indislenmiştir, çünkü tek sayıların kümesi doğal sayıların kümesiyle bire–bir eşlenebilirdir. Yani, 1 *ilk* tek sayıdır, 3 *ikinci*, 5 *üçüncü* v.s. Önermeyi

'n bir doğal sayı olduğunda $(2n-1)^2 - 1$ in 8 ile bölünebildiğini gösterin'

gibi yeniden yazabiliriz.

Bir tümevarımlı kanıt nasıl yazılır

Bir kanıtı tümevarımla yazma yöntemi basittir:

(i) Tümevarımı kullandığınızı duyurun.

(ii) Başlangıç durumunu yapın.

(iii) Önermenin bir k için doğru olduğunu kabul ettiğinizi söyleyin. Daha sonra kullanmak için önermeyi ayrıntılı yazmak genelde yararlıdır.

(iv) Önermenin k için doğruluğunu önermenin $k+1$ için kanıtında kullanın. Sıklıkla bunun için verilen matematiksel ifade biri k durumunu kapsayan iki parçaya bölünür. Tümevarım hipotezini hangi noktada kullandığınızı mutlaka belirtin.

(v) Sonucu ifade edin: 'Matematiksel Tümevarım İlkesinden önerme doğrudur.' Böylece okur, kanıtın bittiğini bilir.

Alıştırmalar

Alıştırmalar 21.10

(i) Tümevarımla $\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$ olduğunu gösterin.

(ii) Her n doğal sayısı için $2n \le 2^n$ olduğunu gösterin.

(iii) Her n doğal sayısı için 3^{2n-1} in 8 ile bölünebildiğini kanıtlayın.

(iv) Her $n \in \mathbb{N}$ için 17 nin $3^{4n} + 4^{3n+2}$ yi böldüğünü kanıtlayın.

(v) Her n doğal sayısı ve $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ için $\sin nx \le n \sin x$ olduğunu kanıtlayın.

(vi) Binom Teoremini, yani

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} y^r, \text{ her } n \in \mathbb{N} \text{ için,}$$

olduğunu kanıtlayın. $\left(\text{Her } 0 \le r \le n \text{ için } \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ olduğunu anımsatalım.}\right)$

(vii) n bir tek doğal sayı olduğunda, $n^2 - 1$ in 8 ile bölünebildiğini gösterin.

(viii) Bir çarpımın tekrarlı türevi üzerine Leibniz Teoremini kanıtlayın: Eğer u ve v, x in fonksiyonları ise, o zaman aşağıdakini kanıtlayın:

Her $n \in \mathbb{N}$ için u_i ve v_j sırasıyla $\frac{d^i u}{dx^i}$ ve $\frac{d^j v}{dx^j}$ yi göstermek üzere,

$$\frac{d^n}{dx^n}(uv) = u_0 v_n + \binom{n}{1} u_1 v_{n-1} + \binom{n}{2} u_2 v_{n-2} + \cdots + \binom{n}{r} u_r v_{n-r} + \cdots + u_n v_0.$$

$\left(\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} = \binom{k+1}{r}\right.$ eşitliğini kullanmaya ihtiyacımız olacak, ama bu eşitliğin doğru olduğunu kanıtlamak çok zor olmasa gerek. $\Big)$

(ix) $\sum_{r=1}^{n} r^3 = \left(\sum_{r=1}^{n} r\right)^2$ olduğunu kanıtlayın.

(x) Her $1 \le r \le n-1$ için $\binom{n}{r} \Big/ n$ nin bir tamsayı olduğunu gösterin.

(xi) X, n elemanlı sonlu bir küme olsun. X in 2^n farklı alt kümesinin olduğunu gösterin.

(xii) Bu alıştırma, aslında, Alıştırma (iii) ün sonucu genelleştirir.

(a) Her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \neq 1$ doğal sayısı için $x^n - 1$ in $x - 1$ ile bölünebildiğini gösterin.

(b) $\frac{x^n - 1}{x - 1}$ için bir formül bulun ve her n için geçerli olduğunu göstermek için tümevarımı kullanın.

(xiii) '$A(n)$: $2^n < 2^{n-1}$ önermesini göz önünde bulunduralım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $A(n)$ nin *yanlış* olduğunu kanıtlayın. Tümevarım adımının, yani $A(k) \Longrightarrow A(k+1)$ in, geçerli olduğunu gösterin. Bu da bize, önermenin her n için geçerli olduğunu göstermek için, başlangıç durumunun doğru olması gerektiğini gösterir. Bu, 7. Bölümdeki 'Ay peynirden yapılmıştır gerektirir Ay lezzetli bir yemektir' e benzer. Yani, $A(n)$ ve $A(n+1)$ ikisi de yanlış olsa bile '$A(n) \Longrightarrow A(n+1)$' doğru olabilir.

(xiv) 11. Bölümdeki niceleyicilerin değillemesi üzerine verilen önermeyi kanıtlayın: Q_i $\forall$ ya da $\exists$, $1 \le i \le n$ olmak üzere $Q_1 x_1\, Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ biçimli bir önermeyi değillemek için aşağıdakileri yapın:

(a) Her $\forall$ yi $\exists$ ve her $\exists$ yi $\forall$ ye çevirmek.

(b) P yerine değilini almak.

(xv) $\sum_{i=1}^{n} |x_i| \ge \left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|$ olduğunu gösterin. (Bu genelleştirilmiş Üçgen Eşitsizliğidir.)

(xvi) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ negatif olmayan gerçel sayılar olsun.

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

olduğunu kanıtlayın.

Özet

- Matematiksel tümevarım ilkesi doğal sayılar tarafından indislenmiş önermeleri kanıtlamak için yararlıdır.
- Doğal sayılar tarafından indislenmiş önermeler gördüğünüzde tümevarımı uygulamayı düşünün.
- Tümevarım matematikte çok yararlıdır, örneğin toplamlarda, eşitsizliklerde, bölünebilirlikte, v.s.
- Önce $A(1)$ i kanıtlayın, sonra bir (keyfi ama belirli) k için $A(k) \Longrightarrow A(k+1)$ i gösterin.
- Anımsayın, *bir* k, *tüm* k lar değil.

25. BÖLÜM

Daha gelişmiş tümevarım teknikleri

Yalınlık gelişmişliğin en uç noktasıdır.
Leonardo da Vinci

Bu bölümde tümevarımın daha gelişmiş biçimlerini inceleyeceğiz. En çok ilgi duyacağımız üç varyantı vardır.

(i) Farklı bir başlangıç durumunu kullanıyoruz. $A(1)$ in doğru olduğunu göstermektense, örneğin, $A(7)$ ya da $A(15)$ in doğru olduğunu gösteriyoruz. Böylece $A(n)$, sırasıyla her $n \geq 7$ ya da her $n \geq 15$ için doğrudur.

(ii) Tümevarım adımını '$A(k-1)$ ve $A(k)$, $A(k+1)$ i gerektir' e dönüştürüyoruz. Bu bizden başlangıç durum olarak $A(1)$ ve $A(2)$ nin doğru olmasını sağlamamızı ister.

(iii) Tümevarım adımını 'Her $1 \leq j \leq k$ için $A(j)$ doğrudur, $A(k+1)$ doğruduru gerektirir' e dönüştürüyoruz. $A(1)$ başlangıç durumunu ya da (i) benzeri bir başka başlangıç durumunu kullanıyoruz.

Üçü de Matematiksel Tümevarım İlkesi olarak anılabilir; buna ek olarak son ikiliye **Kuvvetli Matematiksel Tümevarım İlkesi** denir.

İlk varyant

Başlangıç durumu için $n = 1$ ile başlayabiliriz. Örneğin, $A(n)$ önermeleri için ilk birkaç durum yanlış olabilir. Eğer

(i) Bazı $r \in \mathbb{N}$ için $A(r)$ nin doğru ve
(ii) Her $k \geq r$ için $A(k) \Longrightarrow A(k+1)$

olduğunu gösterebilirsek, o zaman $n \geq r$ için önerme tüm $A(n)$ ler için doğrudur. Ana değişikliğimizin gerçekten başlangıç adımı üzerinde yapıldığını gözlemleyin – tümevarım adımındaki değerler alanının değişikliği en düşüktür.

Örnek 25.1

Her $n \in \mathbb{N}$ için, $n \geq 7$ olmak üzere $n^2 \leq 2^{n-1}$ olduğunu kanıtlayın.

Bu ilginçtir, çünkü önerme $n = 1$ için doğru iken $n = 2, 3, 4, 5$ ya da 6 için değildir.

Başlangıç adımı: Burada başlangıç adımı $n = 7$ dir.

$$n^2 = 7^2 = 49 < 64 = 2^6 = 2^{n-1}$$

gerçeklenmiş olur.

Böylece önerme $n = 7$ için doğrudur.

Tümevarım adımı: Bir $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 7$ için önermenin doğru olduğunu, yani $k \geq 7$ için $k^2 \leq 2^{k-1}$ olduğunu, kabul edelim. O zaman

$$\begin{aligned}(k+1)^2 &= k^2 + 2k + 1\\ &\leq k^2 + 2k + k,\ k \geq 7 \text{ olduğundan,}\\ &= k^2 + 3k,\\ &\leq k^2 + k \times k,\ k \geq 7 \text{ olduğundan,}\\ &= 2k^2\\ &\leq 2 \times 2^{k-1}, \text{ tümevarım hipotezinden,}\\ &= 2^k\\ &\leq 2^{(k+1)-1}\end{aligned}$$

dır. O halde önerme $n = k + 1$ için doğrudur. Buradan, Matematiksel Tümevarım İlkesine göre, her $n \geq 7$ için doğru olur.

Yukarıdaki eşitlik ve eşitsizliklerin listesi apaçık değildir, kanıtın düzenleyicisi izlerini örtmüştür.

Alıştırmalar 25.2

(i) Bir matematikçi gibi düşünün: $n < 7$ için kanıt nerede aksıyor? k nın hangi değerleri için tümevarım adımı düşüncesi yanlıştır?

(ii) $n \geq 4$ için $2^n < n!$ olduğunu kanıtlayın. $n = 1$, 2 ve 3 durumlarının yanlış olduğunu gösterin. Aynen yukarıda olduğu gibi, kanıt nerede aksıyor ve k nın hangi değerleri için tümevarım adımı doğru değildir?

(iii) Bir çember üzerinde n farklı nokta seçin ve bir çokgen oluşturmaları için birbirine bağlayın. $n \geq 3$ için çokgenin iç açılarının toplamının $180(n-2)$ derece olduğunu gösterin.

İkinci varyant

Bir başka varyant, tümevarım adımını değiştirmek ve $k \geq 2$ için $A(k-1)$ ve $A(k)$ yı $A(k+1)$ in doğru olduğunu göstermek için kullanmaktır. Bunun için de başlangıç durumunu doğru $A(1)$ ve $A(2)$ ye çevirmemiz gerekiyor. (Nedenini görüyor musunuz?) O zaman $A(n)$ her $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur.

Örnek 25.3

$x_1 = 3$ ve $x_2 = 5$ olsun ve $n \geq 3$ için

$$x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2}$$

verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = 2^n + 1$ olduğunu gösterin.

Başlangıç adımı: $A(1)$ ve $A(2)$ doğrudur:

$$n = 1 \ : 2^n + 1 = 2^1 + 1 = 3 = x_1,$$
$$n = 2 \ : 2^n + 1 = 2^2 + 1 = 5 = x_2.$$

Tümevarım adımı: Önermenin, bir $k \geq 2$ için, x_{k-1} ve x_k için doğru olduğunu varsayalım. Yani

$$x_{k-1} = 2^{k-1} + 1 \text{ ve}$$
$$x_k = 2^k + 1$$

olsun. Şimdi $n = k + 1$ nin durumunu değerlendirelim.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 3x_{(k+1)-1} - 2x_{(k+1)-2}, \text{ tanımdan,} \\ &= 3x_k - 2x_{k-1}, \\ &= 2(2^k + 1) - 2(2^{k-1} + 1), \text{ tümevarım hipotezinden,} \\ &= 3 \times 2^k - 2^k + 1 \\ &= 2 \times 2^k + 1 \\ &= 2^{k+1} + 1 \end{aligned}$$

elde ederiz. O halde Kuvvetli Matematiksel Tümevarım İlkesinden önerme her $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur.

x_n nin tanımı bir **tümevarımlı tanım** olarak bilinir. Yani, $i < n$ olmak üzere x_n, x_i ye bağlı olacaktır.

Alıştırmalar 25.4

(i) $n \geq 3$ için $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ ve $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ olmak üzere $x_1, x_2, x_3, \ldots$ bir sayılar dizisi olsun. Tüm n doğal sayıları için $x_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$ olduğunu gösterin.

(ii) Bu tümevarım varyantında $A(1)$ e ek olarak neden $A(2)$ nin doğru olmasına ihtiyacımız vardır?

Üçüncü varyant

Üçüncü varyant (i) ile (ii) varyantındaki tümevarım adımının bir genellemesini birleştirir.

(i) Bir $r \in \mathbb{N}$ için $A(r)$ nin doğru,

(ii) Her $k \geq r$ için, $A(j)$ her $r \leq j \leq k$ için doğrudur gerektirir $A(k + 1)$ doğrudur

olduğunu göstermek durumundayız.

O zaman $n \geq r$ şeklindeki tüm $n \in \mathbb{N}$ ler için $A(n)$ nin doğru olduğunu sonuçlandırabiliriz. Böylece, örneğin, $r = 7$ ise o zaman tümevarım adımında $A(7)$, $A(8)$, $A(9)$, …, $A(k)$ ların $A(k + 1)$ in doğruluğunu gerektirmesi için doğru olduklarını kullanırız.

Aşağıdaki klasik teoremi kanıtlamak için bunu kullanabiliriz.

Örnek 25.5 (Aritmetiğin Temel Teoremi)

1 den büyük her doğal sayı asalların bir çarpımıdır. Yani farklı $p_1, \ldots, p_r$ *asalları ve* $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{N}$ *üsleri için*

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \ldots p_r^{a_r}$$

dir.

Kanıt. Teoremi kavramak, örnekler bulmak ve doğruluğundan ikna olmanız için önceki bölümlerin tekniklerini uygulamış olduğunuzu kabul edelim. Kanıta geçersek…

$A(n)$, 'n ya asaldır ya da asalların bir çarpımıdır' önermesi olsun.

Başlangıç adımı: 2 bir asal sayı olduğu için $A(2)$ doğrudur.

Tümevarım adımı: Bir k için $A(2)$, $A(3)$, …, $A(k)$ önermelerinin tümünün doğru olduğunu varsayalım. $A(k+1)$ in doğru olduğunu göstereceğiz. $k+1$ in ya asal ya da asal olmadığı açıktır. Asal ise o zaman $A(k+1)$ doğrudur. $k+1$ asal değilse, o zaman $1 < x < k+1$ ve $1 < y < k+1$ doğal sayılar olmak üzere $k+1 = xy$ yazılır. O halde, tümevarım hipotezinden $A(x)$ ve $A(y)$ doğrudur. Yani x ve y asalların çarpımıdır: $x = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \dots p_r^{a_r}$ ve $y = q_1^{b_1} q_2^{b_2} q_3^{b_3} \dots q_s^{b_s} \dots$

Buna göre $k+1 = xy$ asallarının bir çarpımıdır. Onların farklı oldukları kabul edilebilir, çünkü bazı i ve j için $p_i = q_j$ ise o zaman $a_i + b_j$ yi p_i nin üssü olarak alabiliriz ve q_j yi atabiliriz.

O halde $A(k+1)$ doğrudur. Matematiksel Tümevarım İlkesinden, önerme her $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur. □

Alıştırmalar 25.6

(i) Kanıtı anlamak için önceki bölümlerin tekniklerini kullanın. Her iddianın doğruluğunu kontrol edin ve önermeyi ve kanıtı sınamak için 0 ve 1 gibi uç örneklerden yararlanın. (Önermenin 0 ve 1 e uygulanmadığına dikkat edin, mesele şudur: olayları kavramak bu durumlar için önermenin *niçin* doğru olmadığını göstermektir.)

(ii) Bu asal çarpanlarına ayırmanın tek olduğunu kanıtlayın. Yani, p_i ler farklı ve $a_i \geq 1$ ve q_j ler farklı ve $b_j \geq 1$ olmak üzere $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3} \dots p_r^{a_r}$ ve $n = q_1^{b_1} q_2^{b_2} q_3^{b_3} \dots q_s^{b_s}$ ise, o zaman $r = s$ dir ve her bir i için $q_j = p_i$ olacak şekilde tek j vardır.

Alıştırmalar

Alıştırmalar 25. 7

(i) $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ ve $n \geq 3$ için $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ olsun. Sayıların bu dizisi **Fibonacci sayıları** olarak bilinir. Şaşırtıcı bir şekilde bu sayılara doğada çok düzenli olarak rastlanır.

(a) $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ ve x_7 yi yazın.

(b) Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

olduğunu gösterin.

(c) x_{3n} nin her $n \in \mathbb{N}$ için çift olduğunu gösterin.

(d) $x_1 + x_3 + x_5 + \dots + x_{2n-3} + x_{2n-1}$ toplamı ile ilgili tahminde bulunun ve bir teorem kanıtlayın.

(e) $x_2 + x_4 + x_6 + \dots + x_{2n-2} + x_{2n}$ toplamı ile ilgili tahminde bulunun ve bir teorem kanıtlayın.

(ii) $x_1 = 0, x_2 = 1$ ve $x_1 = 0, x_2 = 1$ ve $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2})$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n = \frac{2^{n-1} + (-1)^n}{3 \times 2^{n-2}}$$

olduğunu gösterin.

(iii) 12870 ve 17836 nın tek çarpanlarına ayrılışını bulun.

Özet

- Başlangıç adımı $A(1)$ olmak zorunda değildir. Eğer $A(r)$ doğru ve her $k \geq r$ için $A(k) \Longrightarrow A(k+1)$ doğru ise, o zaman $A(n)$, her $n \in \mathbb{N}$ için, doğrudur.
- Tümevarım adımı $A(k) \Longrightarrow A(k+1)$ olmak zorunda değildir.
  (i) $A(k-1)$ ve $A(k)$ gerektirir $A(k+1)$ ya da
  (ii) Her $j \leq k$ için $A(j)$ doğru gerektirir $A(k+1)$
  olabilir.
- Başlangıç adımı ve tümevarım adımındaki değişiklikleri birleştirebiliriz. Her $r \leq j \leq k$ için $A(r)$ doğru ve $A(j)$ doğru $A(k+1)$ i gerektiriyorsa, o zaman $n \geq r$ için $A(n)$ doğrudur.

Kanıt teknikleri V: Karşıt ters yöntemi

Eğer acı vermiyorsa, işe yaramıyor demektir.
Hükümet politikalarının ülkeye zarar verdiği söylendikten sonra Başbakan John Major'un yorumu.

Başlangıçta, karşıt ters yönteminin anlaşılması çok kafa karıştırıcıdır – bununla birlikte, bir öğrenci bana bir şeyi net bir şekilde yaptığı izlenimine kapılarak bu yöntemi kullanmayı sevdiğinden söz etmişti. Bu duygunun, yöntemin çok dolaysız olması gerektiğinden ileri geldiğini düşünüyorum. '$A \Longrightarrow B$' önermesinin 'değil $B \Longrightarrow$ değil A' ya denk olduğunu 8. Bölümde gördük. Karşıt ters yöntemi bu denkliğin kullanılmasından ibarettir. Dolaysızlık ve çok açık olma duygusu karşıt tersi kullanarak '$A \Longrightarrow B$' yi kanıtlamak için değil B ile başlamış (ve değil A nin doğru olduğunu göstermeye çalışmış) olmamızdandır.

Bu düşünce acemiler için yeterince kargaşaya neden olduğu için 8. Bölümü biraz gözden geçirerek başlayacağız ve o bölümdekinden farklı bir kanıt aracılığıyla bir önermenin ve karşıt tersinin denk olduklarını göstereceğiz. Daha sonra karşıt tersi uygulamada göreceğiz.

Karşıt tersin gözden geçirilmesi

Tanım 26.1

'$A \Longrightarrow B$' önermesinin **karşıt tersi**

'değil$(B) \Longrightarrow$ değil(A)'

dır.

Örnekler 26.2

(i) 'Benim adım Winston Churchill'dir gerektirir İngiliz'im' in karşıt tersi 'İngiliz değilsem gerektirir adım Winston Churchill değildir' dir.

(ii) 'Adım Jane ise, o zaman ben bir bayanımdır' ın karşıt tersi 'Bayan değilsem, o zaman adım Jane değildir' dir.

(iii) 'Eğer $x^2 - 9 = 0$ ise, o zaman $x = 2$ dir' in karşıt tersi 'Eğer $x \neq 2$ ise, o zaman $x^2 - 9 \neq 0$ dır' dir.

Karşıt ters evrik önerme – 'değil $A \Longrightarrow$ değil B' – ile karıştırılmamalıdır. Aşağıdaki örneğin gösterdiği gibi bu orijinal önermeye denk değildir.

Örnek 26.3

'$x = 2$, x in çift olmasını gerektirir' önermesi doğrudur. Evriği '$x \neq 2$, x in tek olmasını gerektirir' doğru değildir. Sözgelimi x, 6 olabilir.

Bir önerme ve karşıt tersi denktirler. Örneğin, (i) ve (ii) de her iki önerme ve karşıt tersinin doğru ve (iii) de önerme ve karşıt tersinin yanlış olduklarını görebilirsiniz. Kuşkusuz, bir şeyin birkaç örnek için geçerli olduğunu göstermek yeterli değildir. 8. Bölümde, genelde, denk olduklarını göstermek için doğruluk çizelgelerini kullandık.

Bununla birlikte, bu denkliğin gerçekten doğru olduğunu kavramak durumundasınız. Daha iyi bir kanıya sahip olmak için 'Adım Jane'dir gerektirir ben bir bayanımdır' örneğini alalım.

Bunun doğru olduğunu kabul edelim ve karşıt tersinin 'Bir bayan değilsem gerektirir adım Jane değildir' doğru olup olmadığını değerlendirelim.

Pekala, eğer bir bayan değilsem, o zaman adımın Jane olması kesinlikle olanaksızdır, çünkü Jane'nin bir bayan olduğunu biliyoruz. O halde karşıt tersi 'Eğer bir bayan değilsem, o zaman adım Jane değildir' doğrudur.

Daha genel olarak, '$A \Longrightarrow B$' nin doğru olduğunu varsayalım. O zaman karşıt tersi 'değil $B \Longrightarrow$ değil A' dır. Onun da doğru olduğunu görmek için değil B nin doğru olduğunu varsayalım. Bu durumda, A nın doğru olması olanaksızdır, çünkü öyle olsaydı o zaman ($A \Longrightarrow B$ nedeniyle) B doğru olurdu, o halde A yanlış olmak zorundadır, yani değil A doğrudur.

Böylece

$$\text{'}A \Longrightarrow B\text{'} \Longrightarrow \text{'değil } B \Longrightarrow \text{değil } A\text{'} \quad (*)$$

yi göstermiş olduk. Denkliği göstermek için tersin doğru olduğunu göstermeliyiz. Bunun için öncekine benzer bir akıl yürütme uygulayabilirsiniz, ama onun yerine akıllı bir hile kullanalım. C, değil A önermesini ve D, değil B önermesi olsun. O zaman eğer 'değil $B \Longrightarrow$ değil A' doğru ise, o zaman '$D \Longrightarrow C$' dir. O halde ($*$) dan 'değil $C \Longrightarrow$ değil D' yani değil(değil A) $\Longrightarrow$ değil(değil B) olduğunu biliyoruz. Ama bu '$A \Longrightarrow B$' dir.

Bunun tümünü özetleyelim ve bir kanıtta temiz olarak ayrıntılı yazalım.

Teorem 26.4

'$A \Longrightarrow B$' önermesi 'değil $B \Longrightarrow$ değil A' önermesine denktir.

Kanıt. Teorem denklik üzerine bir önerme olduğu için bu 'eğer' ($\Longleftarrow$) önermesine ve bir 'ancak eğer' $\Longrightarrow$) önermesine parçalayabildiğimiz 'eğer ve ancak eğer' tipten bir önermedir.

[$\Longrightarrow$] $A \Longrightarrow B$ varsayalım ama (bir çelişki için) değil $B \Longrightarrow$ değil A nın yanlış olduğunu kabul edelim. Bu kabul aslında değil B nin doğru ama değil A nın yanlış olduğunu söyler. Ama eğer değil A yanlış ise, o zaman A doğrudur ve $A \Longrightarrow B$ nedeniyle B nin doğru olduğunu elde ederiz, yani değil B yanlıştır. Bu bir çelişkidir.

[$\Longleftarrow$] değil $B \Longrightarrow$ değil A olsun. [$\Longrightarrow$] den bu, değil(değil A) $\Longrightarrow$ değil(değil B) yi gerektirir. Yani, $A \Longrightarrow B$ dir. □

C ve D yi hiç anmadığımızı kaydedelim.

$A \Longrightarrow B$ ye bakmanın bir diğer yolu, eğer A doğru ise, o zaman B nin yanlış olmasının olanaksızlığını söylemektir. Böylece, B yanlış ise, A doğru olamaz. O halde değil $B \Longrightarrow$ değil A ya sahipiz.

Karşıt tersi bulmak

Teorem 18. 1 in kanıtında karşıt tersi kullanan bir kanıt örneğini zaten görmüştük.

Örnek 26.5

'Eğer x^2 çift ise, o zaman x çifttir'

önermesini karşıt ters yöntemiyle kanıtlayacağız. Bu

'Eğer x çift değilse, o zaman x^2 çift değildir'

i kanıtlamaya denktir. Son ifade

'Eğer x tek ise, o zaman x^2 tektir'

anlamına gelir.

Bunu göstermek kolaydır: x tek ise, o zaman bir $k \in \mathbb{Z}$ için $x = 2k + 1$ dir. O zaman

$$x^2 = (2k + 1) = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2) + 1$$

de tektir.

'x tektir gerektirir x^2 tektir' i dolaysız gösterdik. O halde karşıt ters önerme 'x^2 çifttir gerektirir x çifttir' doğrudur.

Örnek 26.6

A, B, C ve $D, C \setminus D \subset A \cap B$ yi sağlayan kümeler ve $x \in C$ olsun. Eğer $x \notin A$ ise, o zaman $x \in D$ olduğunu kanıtlayalım.

Bunu kanıtlamak için doğrudan yöntemle çalışabilirdik. Onun yerine karşıt tersini göstereceğiz: Eğer $x \notin D$ ise, o zaman $x \in A$ dır.

O halde $x \notin D$ varsayalım. $x \in C$ varsayıldığı için $x \in C \setminus D$ olur. $C \setminus D \subset A \cap B$ olduğundan $x \in A \cap B$, yani $x \in A$ elde ederiz.

Bu örnekte gösterişli kanıt '$x \notin D$ varsayalım...' ile başlayan son satırla başlardı ve karşıt ters önermenin kanıtlanmış olduğundan hiç söz etmezdi. Okurun onu yerine getirmesi gerekir.

Çelişki ile karşıt tersi karıştırmayın

$A \Longrightarrow B$ için çelişkiyle kanıt ve karşıt ters kanıt gerçekten benzer görünürler ve ikisini karıştırdığınızda bağışlanabilirsiniz. Her ikisi de $A \Longrightarrow B$ biçimli önermeleri kanıtlar ve bunu yaparken her ikisi de değilleme kullanır. Fark biraz gizemlidir ve işleri güçleştirmek için karşıt ters ile kanıtın çakıştığını göstermek için çelişki ile kanıtı kullandık! Öyleyse, fark nedir? Yöntemler konusunda açık olalım:

Çelişki: A ve değil B nin doğru olduklarını kabul edin ve bir çelişkinin sonuçlandığını gösterin.

Karşıt ters: değil B yi kabul edin ve değil A yı gösterin.

Karşıt ters yöntemi, problemi dolaysız bir probleme dönüştürme üstünlüğüne sahiptir; amaç açıktır: değil(B) nin doğru olduğunu kabul ediyorsunuz ve değil(A) nın doğru olduğunu göstermek durumundasınız. Çelişki yönteminde çelişkinin ne olacağı açık olmayabilir: amacımız daha az nettir.

Alıştırmalar

Alıştırmalar 26.7

(i) x ve y doğal sayılar olsun. xy tektir gerektirir x ve y nin her ikisi tektir, olduğunu gösterin.

(ii) x ve y gerçel sayılar olsun. $x+y$ irrasyonel ise, o zaman x in irrasyonel ya da y nin irrasyonel olduğunu kanıtlayın.

(iii) Eğer $x^2 - 3x + 2 < 0$ ise, o zaman $1 < x < 2$ olduğunu gösterin.

(iv) Eğer x irrasyonel ise, o zaman $\sqrt{x}$ in irrasyonel olduğunu kanıtlayın.

(v) $a, b, c \in \mathbb{Q}$ için $ax^2 + bx + c = 0$ denklemini göz önünde bulunduralım. Kanıtlayın: Bir kök irrasyoneldir eğer ve ancak eğer diğeri irrasyoneldir.

(vi) Önermeyi kanıtlayın ya da bir karşıt örnek verin: Eğer x ve y irrasyonel ise o zaman x^y irrasyoneldir.

(vii) Bu bölümün başındaki Başkan John Major'un sözünü değerlendirelim. Acı vermiyorsa işe yaramıyor demektir. Bu, ülkeye zarar veren durgunlukla ilgili hükümet politikasına yapılan eleştirilere yanıt idi. Mantığındaki hata nedir?

Özet

- '$A \Longrightarrow B$' nin karşıt ters önermesi 'değil $B \Longrightarrow$ değil A' dır.
- Çelişki ile kanıtı karşıt ters kanıtla karıştırmayın.

Tüm iyi matematikçilerin gereksinim duyduğu matematik

27. BÖLÜM

Bölenler

Yöntemlerimi bilirsiniz. Onları uygulayın.
Sherlock Holmes
Arthur Conan Doyle'da *Baskervilles'in Tazısı*

Tamsayılar kümesi matematikte en yalın nesneler arasında yer alır. Bu sayıların, beklendiği gibi, sayılar kuramı adı verilen sağlam bir kuramı vardır. Bu bölümde bu kuramın küçük bir parçasını göz önünde bulunduracağız. Amacımız sık sık gereksinim duyacağınız matematiği size vermektir, ama daha önemlisi konuyu nasıl aydınlattıklarını görmek için önceki yöntemleri uygulayacağız.

Bölünebilirlik

Sayılar hangi temel özelliklere sahiptir? Onlarla ne yapabilirim? Tabi ki, toplayabilirim, çıkarabilirim, sonra çarpabilir ve bölebilirim, üs alabilirim v.s. Oynamaya başlamak için en iyi sayı kümesi, $\mathbb{Z}$ ile gösterilen, tamsayılardır. Herhangi iki tamsayıyı toplamak bir tamsayı üretir. Herhangi bir tamsayı bir diğerinden çıkarıldığından bir tamsayı elde edilir. Herhangi iki tamsayıyı çarpmak bir tamsayı üretir. Herhangi bir tamsayıyı bir başkası ile bölmek bir tamsayı üretir... bazen. Bu, tamsayıların bölümü ile ilgili ilginç bir özellik bulduğumuz anlamına gelir. Matematikçiler olarak, bu düşünceyi ayrı tutmak için bir tanım veriyoruz ve onu incelemeye başlıyoruz.

Tanım 27.1

$b = ka$ olacak şekilde bir k tamsayısı varsa, bir a tamsayısı bir b tamsayısını ***böler****. Bu durumda b, a tarafından* ***bölünebiliridir*** *deriz ve $a \mid b$ yazarız. Ayrıca a, b nin bir* ***bölenidir*** *deriz. Eğer a, b yi bölmüyorsa, o zaman $a \nmid b$ yazarız.*

Uyarılar 27.2

(i) Bu bilgiyle aslında daha önceden karşılaştık. Asallar kavramı doğal sayılarla bölünebilirliğe bağlıdır ve onu 24. Bölümdeki bazı tümevarım örneklerinde kullandık.

(ii) Her zamanki gibi tanımın 'eğer' sözcüğünü kullandığını ama aslında 'eğer ve ancak eğer' demek istediğini kaydedelim. O halde $b = ka$ olduğundan a, b yi böler deriz ve tersine a, b yi böler dediğimizde $b = ka$ olacak şekilde bir k nın olduğunu biliriz.

Tanımı analiz ettiğimize göre bir matematikçi gibi düşünelim: Hangi örnekler vardır? Ne gibi örnek-olmayanlar vardır?

Örnek 27.3

(i) $6 = 2 \times 3$ olduğu için $3 \mid 6$ ve aynı nedenden dolayı $2 \mid 6$ dır.

(ii) Aynı zamanda $-3 \mid 6$ dır, çünkü $6 = (-2) \times (-3)$ dir. Tanımda tamsayılara izin verildiğini kaydedin; bölenler ille de doğal sayılar değildir.

(iii) Herhangi bir çift sayı 2 ile bölünebiliridir. (Bu çiftin pratik tanımıdır!)

(iv) 146 552 442 374 356 965 490, 10 ile bölünebilirdir.

(v) Herhangi bir çift tamsayı için $3n$, 6 ile bölünebilirdir, çünkü $3n$, 2 ve 3 ile bölünebiliridir. Yani, n çift ise o zaman bir m için $n = 2m$ ve böylece $3n = 3\times 2m = 6m$ olur. n yi 6 ya böldüğümüzde bir tamsayı (yani m) elde ederiz, o halde n, 6 ya bölünebilirdir.

(vi) 5, 33 ile bölünmez.

Alıştırmalar 27. 4

(i) Kendi örneklerinizi ve karşıt örneklerinizi oluşturun.

(ii) n çift için $6 \mid 3n$ ile ilgili örneği kaç farklı yolla genelleştirebilirsiniz?

(iii) O örnekte hipotezi n yi teke dönüştürürsek ne olacağını değerlendirin. Ne diyebiliriz?

Şimdiden birçok soru ürettiğimizi kaydedin. Gerçek bir matematikçi böyle çalışır.

Bu kavramın uç örnekleri nelerdir? Kavram sayılar üzerine olduğu için 'aşikar' durumlara karıştırılan sayılar 0, 1 ve –1 dir. Küçük bir çaba her tamsayının 0 ı, 1 ve –1 in her şeyi böldüğünü gösterir. Bir uç örnek, bir sayının kendisini bölmesidir. (Bunu, isterseniz, aşikar bir örnek olarak kabul edebilirsiniz!)

a ya bölünen iki ya da daha fazla sayıyı topladığımızda ya da a ya bölünen iki sayının katlarını topladığımızda ne olur? Bir sonraki teorem bir yanıt veriyor.

Teorem 27.5

Eğer $a \mid b$ ve $a \mid c$ ise, o zaman her m, n tamsayıları için $a \mid (mb + nc)$ dir.

16. Bölümdeki, Bir teorem nasıl okunur, düşüncelerini uygulayalım. Her şeyden önce, önermenin geçerli olduğunu görmek için birkaç örnek çalışmalıyız ve niçin doğru olması gerektiği üzerine bir fikir edinmeliyiz. O halde $a = 3$ alalım; o zaman $b = 12$ ve $c = 21$ olabilir, çünkü hipotezler sağlanır. Varsayımları sağlayan kendi örneklerinizi çalışın! Teorem m ve n için *herhangi* tamsayıları seçebildiğimizi söyler. $m = 4$ ve $n = –6$ alacağım. Tamsayılarla çalışırken pozitif olanları seçmek çekici olabilir, bilerek bir negatif sayı alalım. Çoğu zaman negatif olanları seçmenin daha fazla anlayış kazandıracağını gördüm.

Böylece, $mb + nc = (4 \times 12) + (–6 \times 21) = 48 – 126 = –78$ olur. Bu a ya, yani 3 e bölünebilir mi? Tabii ki, çünkü $–78 \mid 3 = –26$ dır. Böylece, teoremin iddia ettiği gibi, $a \mid (mb + nc)$ dir.

Kuşkusuz bu, teoremi sadece özel bir örnek için kanıtlamaktadır – ve özel bir durum geneli kanıtlamaz! Hala genel kanıtı vermek durumundayız. Yine de denemelerimizi sürdürelim.

Bu teorem için aşikar durumlar nelerdir? Keyfi m ve n tamsayılarını almamıza izin veriliyor. Tamsayıların aşikar örnekleri 0, 1 ve –1 dir.

$m = 1$ ve $n = 0$ ı deneyelim. Buradan eğer $a \mid b$ ve $a \mid c$ ise, o zaman a nın $(1 \times b) + (0 \times c)$ yi böldüğünü görebiliriz. Ama bu son sayı b dir, o halde a, b yi böler. Tekrar özetlersek,

Eğer $a \mid b$ ve $a \mid c$ ise, o zaman $a \mid b$

yi gösterdik. Hım... bu çok iyi bir önerme değildir. Dediği 'X ve Y doğru ise, o zaman X doğrudur'. Alıştırmalarda bu olabilir!

Bir başka $m = n = 1$ aşikar örneği ile çalışalım. Bu

Eğer $a \mid b$ ve $a \mid c$ ise, o zaman $a \mid (b + c)$

yi verir. Bu *iyidir*. Bize ileride kullanabileceğimiz bir şey söyler. Yani a, b yi böler ve a, c yi bölerse o zaman toplamlarını da böler. Benzer şekilde

Eğer $a \mid b$ ve $a \mid c$ ise, o zaman $a \mid (b - c)$

yi elde etmek için $m = 1$ ve $n = -1$ alırız. Burada düşünce, araştırırken yararlı bir şey bulmuş olmaktır.

Alıştırma 27.6

Ne bulabildiğinizi görmek için 16. Bölümün diğer tekniklerini uygulamaya çalışın.

Şimdi teoremi kanıtlıyoruz. Başlangıçta bu, standart bir ders kitabının sunduğu kanıt gibi sunulmamıştır. Bir kanıtın nasıl hatalı ve kör uçlu oluşturulduğunu göstermek istiyorum. Sonra bu kitabın yaptığı gibi tümünün bir özetini yapacağım.

Bazı problem-çözme tekniklerini uygulayalım - 'Ne biliyoruz?' ve 'Ne demek ister / neyi gerektirir?' sorularını sorun.

Ne biliyoruz? $a \mid b$ ve $a \mid c$ yi biliyoruz. Bu ne anlama gelir? Ne anlama geldiğini bilmek için tanıma geri döneriz. (15. Bölümden, Bir tanım nasıl okunur, tanımı kesin olarak bilmenizin – belli belirsiz değil – yaşamsal olduğunu anımsayın.) Tanıma geri dönünce (gereksinim duyduysanız baktınız, değil mi?) $b = k_1 a$ ve $c = k_2 a$ olacak şekilde k_1 ve k_2 tamsayılarının olduğu anlamına geldiğini anlarız.

Bilmek istediğim nedir? Her m ve n tamsayıları için $a \mid (mb + nc)$ yi istiyorum. Bu ne anlam ifade ediyor? Demek istediği $mb + nc = k_3 a$ olacak şekilde bir k_3 ün varlığıdır. Tecrübem k_3 ün k_1 ve k_2 ye bağlı olması gerektiğini bana söyler, yani istediğim bildiğime bağlıdır. Biraz hesap yapalım!

$b = k_1 a$ ve $c = k_2 a$ olduğunu biliyoruz ve $mb + nc = k_3 a$ olmasını istiyoruz. Her zamanki gibi, denklemin karmaşık yanına bakarız ve indirgemeye çalışırız:

$$\begin{aligned} mb + nc &= m(k_1 a) + n(k_2 a), \text{ varsayımların doğrudan yerleştirilmesi,} \\ &= (mk_1 + nk_2)a, \text{ cebirden.} \end{aligned}$$

Bu her m ve n için $a \mid (mb + nc)$ ve aradığımız k_3 ün $k_3 = mk_1 + nk_2$ olduğunu gösterir.

Bütün işleri yaptık; bunu temiz yazalım. Kanıtların gösterişli versiyonlarını belirtmek için – bir değerlendirme de verilmesi gerekir – bir kutucuk kullanacağız:

Gösterişli çözüm:
Kanıt. Varsayımdan $b = k_1 a$ ve $c = k_2 a$ olacak şekilde k_1 ve k_2 tamsayıları vardır. Herhangi m ve n tamsayıları için

$$mb + nc = m(k_1 a) + n(k_2 a), \text{ varsayımdan,}$$
$$= (mk_1 + nk_2)a$$

vardır. Böylece $mb + nc$, a ya bölünebilir. □

Bu kanıtın inşasını sonlandırır.

Uyarı 27.7

Çıkarılması gereken dersler:

- k_3 tamsayısı gösterişli çözümde geçmemektedir. Gerekli değildir, gereksinim duyduğum $(mk_1 + nk_2)a$ nın a ya bölünebilir olmasıdır.
- Bir kanıtın aranmasında kullanılan sorgulayıcı yapıyı fark edin – Ne biliyorum? O ne anlama geliyor? Ne bilmek istiyorum? Bu ne demek istiyor?

Şimdi bu sonucun bir sonuç teoremine bakalım. 16. Bölümün incelenmesini yaptığınızda bu sonucu şimdiden keşfetmiş olabilirsiniz.

Sonuç Teorem 27.8

a ve b tamsayılar olsun. Eğer a, b yi bölerse, o zaman a, b^2 yi böler.

Kanıt. Teorem 27. 5 de $m = b$ ve $n =$ alın. □

Bu 'Tersi nedir?' diyebildiğimiz mükemmel bir örnektir. Tersi

'a ve b tamsayılar olsun. Eğer a, b^2 yi bölerse, o zaman a, b yi böler.'

dir. Bu akla yakın gibidir, ama yanlıştır! Örneğin, $a = 4$ ve $b = 6$ alalım. O zaman $b^2 = 6^2 = 36$ olup, 4 e bölünür ama 4, 6 yı bölmez.

İki tane daha basit sonuç ifade ediyoruz.

Teorem 27.9

a, b ve c tamsayılar olsun.

(i) *Eğer $a \mid b$ ve $b \mid c$ ise, o zaman $a \mid c$ dir.*

(ii) *Eğer $a \mid b$ ve $b \mid a$ ise, o zaman $a = b$ ya da $a = -b$ dir.*

En son gösterişli versiyonunu yazmadan önce her bir önermenin kanıtının nasıl bulunduğunu şimdi ayrıntılı açıklayacağız.

(i) Bunu nasıl yapacağız? Kullandığımız hile – o aslında tanımdır – bir sayıyı çarpanlarına göre yeniden yazmaktır. Bir kez daha deneyelim.

$a \mid b$ ve $b \mid c$, $b = k_1 a$ ve $c = k_2 a$ olacak şekilde k_1 ve k_2 tamsayılarının varlığını gerektirir. $c = k_1 k_2 a$ elde etmek için son denklemde b yi yerleştirebiliriz. O halde a, c yi böler.

Gösterişli çözüm:
Kanıt. Varsayımdan, $b = k_1 a$ ve $c = k_2 a$ olacak şekilde k_1 ve k_2 tamsayıları vardır. O halde $c = k_1 k_2 a$ olur ve a nın c yi böldüğünü sonuçlandırırız. □

Uyarı 27.10

Çıkarılması gereken ders: Önceki teoremdeki ile aynı hileye başvurduğumuzu kaydedin – tanımı uygulayın. Bu, bir kez daha, tanımları öğrenmenin ne kadar önemli olduğunu gösterir.

Şimdi (ii) nin kanıtını ele alalım. Varsayımlara ve gerektirmelerine bakalım. Yani, ne biliyoruz ve ne anlama geliyor?

Bildiğimiz $b = k_1 a$ ve $c = k_2 a$ dır. Böylece $b = k_1 k_2 a$ olur. Bu ise, $k_1 k_2 = 1$ i gerektirir. k_1 ve k_2 nin tamsayı olduklarını biliyoruz, o halde ya 1 ya da -1 olmak zorundadırlar. Böylece $a = \pm b$ ya da $b = \pm a$ dır. Bekleyin, bunlar aynı koşuldur! O halde $a = \pm b$ dir.

Alıştırma 27.11

Bir gösterişli çözüm yazın. Ya da kendi kanıtınızı verin.

Alıştırmalar 27.12

(i) Son teoremdeki ifadelerin tersleri doğru mudur? Doğru ise, bir kanıt verin, değilse o zaman bir karşıt örnek bulun.

(ii) Eğer $a \mid b$ ve $c \mid d$ ise, o zaman $ac \mid bd$ yi kanıtlayın.

(iii) Eğer $a \mid b$ ve $c \mid b$ ise, o zaman $ac \mid b$ olur mu? Olursa, kanıtını yapın. Değilse, bir karşıt örnek verin.

Şimdi bölmek istediğimiz sayının bir polinomla verildiğini varsayalım.

Örnek 27.13

Çift n için $n^2 + 2n + 8$, 4 e bölünebiliridir.

Bunu göstermek için, n nin çift olmasının ne anlama geldiğini göz önünde bulundurmalıyız: bir m tamsayısı için $n = 2m$. Sonra 4 ün bölmesini istediğimiz ifadeye dönersek,

$$n^2 + 2n + 8 = (2m)^2 + 2(2m) + 8 = 4m^2 + 4m + 8 = 4(m^2 + m + 2)$$

buluruz. Mademki $m^2 + m + 2$ bir sayıdır, öyleyse $n^2 + 2n + 8$ in 4 e bölünebildiğini sonuçlandırırız.

Alıştırma 27.14

Her $x \in \mathbb{Z}$ için $x^2 + 9x + 20$ nin 2 ye bölündüğünü gösterin.

Sonsuz çoklukta asal sayı vardır

Bir sonraki teorem matematiğin bir diğer klasiğidir. İlk bilinen kanıt Euclid'e aittir.

Teorem 27.15

Asal sayıların sayısı sonsuzdur.

Kanıt. Önermenin tersini kabul edelim: p_1 den p_n ye kadar sonlu sayıda asal vardır.

$p_1 p_2 \ldots p_n + 1$ sayısı p_1 den p_n ye tüm asallardan daha büyüktür, o halde varsayıma göre bir asal olamaz. Öte yandan bu sayıyı, herhangi bir j için p_j ile bölersek o zaman 1 kalanını elde ederiz. Şimdi bu sayının kendisinden küçük, örneğin b, asal olmayan bir sa-

yıya bölündüğünü varsayalım. Aritmetiğin Temel Teoreminden bir p_i için p_i, b yi böler ve böylece $p_i, p_1p_2\ldots p_n+1$ i böler, ama bunun doğru olamayacağını gördük. Bu ise $p_1p_2\ldots p_n + 1$ in sadece kendisi ve 1 tarafından bölünebildiği anlamına gelir. Yani asaldır.

O halde, sonlu sayıda asal sayı varsa, o zaman $p_1p_2\ldots p_n + 1$ in bir asal değildir ama bir asal olduğunu gösterdik. Bu apaçık bir çelişkidir.

Alıştırma 27.16

Önceki kanıtı inceleyin. Kaç kez çelişki kullandık?

En büyük ortak bölen

Tanım 27.17

Sıfırdan farklı iki a ve b tamsayısının ***en büyük ortak böleni*** *her iki sayıyı bölen en büyük pozitif tamsayıdır ve* ebob(a, b) *ile gösterilir.*

Bu bazen ***en büyük ortak çarpan*** (eboç) *ya da* ***en yüksek ortak çarpan*** (eyoç) *olarak bilinir.*

Örnek 27.18

(i) 20 nin pozitif bölenleri 1, 2, 4, 5, 10 ve 20 dir. 12 nin pozitif bölenleri 1, 2, 3, 4, 6 ve 12 dir. O halde en büyük ortak bölen 4 dür.

(ii) 65 ve 36 nın en büyük orta böleni 1 dir.

Alıştırma 27.19

Kendi örneklerinizi ve örnek-olmayanları oluşturun. Negatif sayılı olanlarla çalışın, örneğin ebob(50, –35) gibi.

En büyük ortak bölenin bazı özelliklerini verelim.

Teorem 27.19

Herhangi a ve b tamsayıları için aşağıdakiler vardır:

(i) $\text{ebob}(a, b) = \text{ebob}(b, a)$,

(ii) $\text{ebob}(a, b) \geq 1$,

(iii) $\text{ebob}(a,b) = \text{ebob}\left(|a|,|b|\right)$,

(iv) $\text{ebob}\left(\dfrac{a}{\text{ebob}(a,b)}, \dfrac{b}{\text{ebob}(a,b)}\right) = 1$,

(v) $\text{ebob}(a, b) = \text{ebob}(a + nb, b)$, her n tamsayısı için.

Kanıt. (i)Aşikardır. Tanımı kullanmanız yeterlidir.

(ii) ebob bir pozitif tamsayı olarak tanımlanır, o halde 1 den büyük ya da ona eşit olmalıdır.

(iii) Basit bir alıştırma.

(iv) ebob(a, b) ye bir isim verelim. ebob(a, b) = d olsun. O zaman bir en büyük ortak bölen bir bölen olduğu için bazı r ve s tamsayıları için $a = rd$ ve $b = sd$ yazılır. Buradan

$$\text{ebob}\left(\frac{a}{\text{ebob}(a,b)}, \frac{b}{\text{ebob}(a,b)}\right) = \text{ebob}\left(\frac{rd}{d}, \frac{sd}{d}\right) = \text{ebob(r,s)}$$

bulunur. Bu ebob ye de bir isim verelim. ebob(r, s) = d' olsun. O zaman bazı p ve q için $r = pd'$ ve $b = qd'$ $b = qd'$ dir. Böylece $a = pd'd$ ve $b = qd'd$ olduğunu biliyoruz. Bu sanki dd' nün a ve b nin bir böleni olduğu anlamına gelir. Eğer d', 1 den büyük ise, o zaman bu, d nin a ve b nin en büyük ortak böleni olmasıyla çelişir çünkü $d'd$, d den daha büyüktür.

(v) Bu a, b ve $a + nb$ toplamının en büyük ortak bölenlerinin bağlantılı olduğuyla ilgilidir, o halde özel olarak bölenleri üzerine bir şey söyler. O zaman kendi kendime soruyorum: bölenleri ve toplamları bağlantılandıran hangi teoremleri biliyorum? Geriye bakarsak Teorem 27. 5 in varsayımları ve sonuçlarının bir bölen ve toplamları kapsadığını fark ediyorum, o halde bu teoremi kullanacağım ve ne olacağını göreceğim.

ebob un tanımından ebob(a, b)$|a$ ve ebob(a, b)$|b$ olur. O halde Teorem 27. 5 uyarınca ebob(a, b), $a + nb$ yi böler. Buradan ebob(a, b), b ve $a + nb$ için bir ortak bölendir. Buna karşın en büyük olmayabilir, o halde ebob(a, b) ≤ ebob($a + nb$, b) elde ederiz.

Kanıtlamak istediğimiz bu değildir! Bir eşitlik istiyorduk. Bu bir sorun oluşturmaz, çünkü $x = y$, $x \leq y$ ve $x \geq y$ ile denktir. O halde ebob(a, b) ≥ ebob($a + nb$, b) yi göstermemiz yeterlidir. Öncekine benzer bir düşünceyi kullanabileceğimiz akla yatkındır. Kanıt neredeyse aynıdır:

ebob tanımından ebob($a + nb$, b)$|a + nb$ ve ebob($a + nb$, b)$|b$ vardır. O halde, ebob($a + nb$, b), $(a + nb) + (-n)b$ yi Teorem 27. 5 e göre böler. Buradan ebob($a + nb$, b), b ve a için bir ortak bölen olur. En büyük olmayabilir, o halde ebob($a + nb$, b) ≤ ebob(a, b) elde edilir.

Böylece, ebob(a, b) ≤ ebob($a + nb$, b) ve ebob($a + nb$, b) ≤ ebob(a, b) den ebob ($a + nb$, b) = ebob(a, b) bulunur. □

Alıştırmalar 27.21

(i) (iv) için, çelişki ile bir kanıt olarak, bir gösterişli kanıt yazın.

(ii) (v) in kanıtının bir gösterişli versiyonunu yazın. Her iki (neredeyse) aynı akıl yürütmeyi birleştirebilir misiniz?

(iii) Bu teorem ve kanıtından ne gibi dersler çıkarttınız?

Yaygın bir hata

Acemilerin yaptığı yaygın bir hata şudur: Eğer $n|ab$ ise, o zaman n, a ve b den birini bölmek zorundadır. Bu doğru değildir.

Örnek 27.22

$n = 6$, $a = 4$ ve $b = 9$ olsun. O zaman $n|ab$, $6|36$ olup, doğrudur. Ama $6 \nmid 4$ ve $6 \nmid 9$ dır.

Bu örnek önermeye bir karşıt örnektir ve eğer daha ayrıntılı bakarsak, ne olduğunu görebiliriz. $a = 4 = 2 \times 2$ ve $b = 9 = 3 \times 3$ den $ab = (2 \times 2 \times 3 \times 3) = 2 \times (2 \times 3) \times 3$ olur. Böylece bölen, b, kısmen a dan ve kısmen b den kaynaklanır.

İleride (Euclid Lemmasında, sayfa 203) yukarıdaki hatalı önermeye bir teorem ortaya atmak için fazladan bir ek koşul ilave edebildiğimizi göreceğiz. Şimdilik bu yanlış anlamadan haberi olmak en iyisidir.

Alıştırmalar

Alıştırmalar 27.23

(i) Aşağıdaki önermeleri göz önünde bulunduralım.
(a) n, 3 e bölünebilirdir,
(b) n, 9 a bölünebilirdir,
(c) n, 12 ye bölünebilirdir,
(d) $n = 24$,
(e) n^2, 3 e bölünebilirdir
(f) n çifttir ve 3 e bölünebilirdir.
Hangi koşullar n nin 6 ya bölünebilmesi için gereklidir? Hangileri yeterlidir? Hangileri gerekli ve yeterlidir?

(ii) Her bir x pozitif tamsayısı için $x^3 - x$ in 3 e ve $x^5 - x$ in 5 e bölünebildiğini gösterin. Bunu genelleştirebilir misiniz? $x^n - x$, n ye bölünebilir mi?

(iii) Her $x \in \mathbb{Z}$ için $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ nın 3 e bölünebildiğini gösterin.

(iv) $n \in \mathbb{N}$ için $n \geq 4$ asal değilse, o zaman $n \mid (n-1)!$ olduğunu gösterin.

(v) Her $a, b \in \mathbb{Z}$ için a ve b nin her ortak böleninin ebob(a, b) nin bir böleni olduğunu kanıtlayın.

(vi) Her $m, n \in \mathbb{Z}$ için ebob$(m+1, n+1) \mid mn - 1$ olduğunu kanıtlayın.

(vii) Yaygın bir hata (yukarıda verildi) 'eğer $n \mid ab$ ise, o zaman n, a ve b den birini bölmek zorundadır' idi. Bu doğru değildir. Eğer $a = b$ varsayımını eklersek hangi önermeyi elde ederiz ve doğru mudur? Üstelik, n yi asal kabul edersek, ne olur?

(viii) Her $m, n \in \mathbb{Z}$ için $m^2 \mid n^2 \Longrightarrow m \mid n$ yi kanıtlayın.

(ix) Aşağıdakileri kanıtlayın.
(a) Bir doğal sayı 2 ye bölünebilirdir eğer ve ancak eğer son rakamı 2 ye bölünebilirdir.
(b) Bir doğal sayı 4 e bölünebilirdir eğer ve ancak eğer son iki rakamının oluşturduğu sayı 4 e bölünebilirdir.
(c) Bir doğal sayı 8 e bölünebilirdir eğer ve ancak eğer son üç rakamının oluşturduğu sayı 8 e bölünebiliridir.
Bunu genelleştirebilir misiniz ve genellemenizi kanıtlayabilir misiniz?

(x) Her $m \in \mathbb{N}$ ve her $x, y \in \mathbb{Z}$ için $x - y$ nin $x^n - y^n$ yi böldüğünü kanıtlayın. Buradan
(a) $4 \times 11^n + 2 \times 5^n$ nin 6 ya her n için bölünebildiğini,
(b) $6 \times 9^n - 4^n$ nin 5 e her n için bölünebildiğini
gösterin.

(xi) $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere n. **Fermat sayısı** nı $F_n = 2^{2^n} + 1$ olarak tanımlayalım.
(a) $\prod_{k=0}^{n} F_k = F_{n+1} - 2$
olduğunu kanıtlayın.
(b) Buradan, her farklı F_j ve F_l Fermat sayıları ikilisi için ebob$(F_j, F_l) = 1$ olduğunu gösterin.

Özet

- $b = ka$ olacak şekilde bir k tamsayısı mevcutsa bir a tamsayısı b tamsayısını böler.
- b, a ya bölünebilir deriz ve $a \mid b$ yazarız.

- a ya b nin bir böleni deriz.
- Eğer $a \mid b$ ve $a \mid c$ ise, o zaman her m ve n tamsayıları için $a \mid (mb + na)$ dır.
- Sıfırdan farklı iki a ve b tamsayısının en büyük ortak böleni, a ve b yi bölen en büyük pozitif tamsayıdır ve ebob(a, b) ile gösterilir.
- $n \mid ab$, n nin a ve b den birini böldüğünü gerektir*mez*.

28. BÖLÜM

Euclid Algoritması

Bir algoritma inandırıcı olmalıdır.
Donald Knuth, *Bilgisayar Programlama Sanatı*, Cilt 1, 1999

Euclid Algoritması[1] çok güçlü bir araçtır. Onu üç probleme uygulayacağız:

- İki sayının en büyük ortak bölenini bulmak.
- $32x + 17y = 45$ benzeri, yani $ax + by = c$ biçimli, denklemlere *tamsayı* çözümler bulmak.
- $n \mid ab$ verildiğinde n nin a ya da b yi bölebilmesi için ek varsayımlar bulmak.

Kanıtların nasıl oluşturulduğunu ve en son biçiminde nasıl gösterişli duruma getirildiğini göstereceğiz. Umarım, bu bir kanıtın nasıl oluşturulduğu ile nasıl sunulduğu arasında büyük bir farkın olduğunu gösterecektir.

Bölüm Lemması

İki tamsayının ebob unu bulmanın açık yolu sayıları çarpanlarına ayırmak – bunu Aritmetiğin Temel Teoremi (Teorem 25. 5) yardımıyla yapabileceğimizi biliyoruz – ve hangi ortak asal çarpanlara sahip olduklarını bulmaktır. Bunları birlikte çarpmak ebob u verir. Örneğin, $440 = 2^3 \times 5 \times 11$ ve $1300 = 2^2 \times 5^2 \times 13$ dir. Ortak çarpanlar 2^2 ve 5 dir ve böylece ebob $2^2 \times 5 = 20$ olur.

Sorun, çarpanlara ayırmanın büyük sayılar için zor olduğudur[2]. Bu kaba kuvvet yöntemi yerine, çok daha kullanışlı bir yöntem vereceğiz. Önce bir lemma ile başlayalım.

Lemma 28.1 (Bölüm Algoritması)

x ve y sıfırdan farklı, $y > 0$, tamsayılar olsun. O zaman $0 \le r < y$ olmak üzere $x = qy + r$ olacak şekilde tek q ve r tamsayıları vardır.

Bu önermenin akla yatkın olduğuna kendinizi ikna etmelisiniz. Birkaç örnek çalışın. q ve r nin ne olabileceğini görmek kolaydır. x i y ye bölün, bir tamsayı olmayabilen bir

[1] Bir algoritma tam olarak özel bir işi tanımlamak için bir komutlar listesidir.
[2] Ve zor olduğunu söylemek istiyorum! İnternet güvenliği bu olguya bağlıdır.

sayı elde edeceksiniz. Tam kısmını alın ve ona q deyin. O zaman $r = x - qy$ yazın. Bu size doğru q ve r yi verir.

Neden sıfırdan farklı tamsayılara gereksinim duyarız? diye sormalısınız. Neden $y > 0$ olmalı? (Bunlar ileride yanıtlanacaktır.)

(Bölüm Lemmasının) Kanıtı. Matematiksel düşünme moduna girelim. Önermenin sonucu bazı sayıların tek olduğu ile ilgilidir. Böyle bir probleme yaklaşmanın standart yolu varlığı kanıtlamak ve daha sonra tekliği kanıtlamaktır. (Problemlerle uğraşırken bu düşünceyi düşünce alet çantanıza yerleştirin.) Ayrıca $(0 \leq r < y)$ özelliğinin geçerli olduğunu kanıtlamak durumundayız – bu belki varlıktan sonuçlandırılacaktır.

x i y ye bölüp r kalanını elde etmeye çalıştığımız açık olmalıdır. Bölme yapmanın ve tamsayılar yerine gerçel sayılarla çalışan korkunç matematikten kaçınmanın en kolay yolu çıkarma yapmaktır. Yani $x - y$, $x - 2y$, $x - 3y$ v.b. leri, negatif olmaksızın y nin çıkarılmasının mümkün olmadığı sayıyı elde edinceye dek, inceleriz: bu sayı r dir. O halde s bir tamsayı olmak üzere, $x - sy \geq 0$ biçimli en büyük tamsayıyı arıyorum. Bu elemana r diyelim ve q, $r = x - qy$ şeklinde yer alsın. O zaman q ve r aradığımız tamsayılardır, çünkü $r = x - qy$, $x = qy + r$ gibi yeniden düzenlenebilir.

$S = \{ x - qy \mid s \in \mathbb{Z} \text{ ve } x - sy \geq 0 \}$ kümesini göz önünde bulunduralım. Bu kümenin bir en küçük elemanı olduğunu göstermemiz gerekir. Pozitif tamsayıların boştan farklı bir kümesinin bir en küçük eleman içermesi gerektiği açıktır[3]. O halde yapmam gereken tek şey, bu kümenin boştan farklı olduğunu göstermektir – en küçük elemanı bulmak zorunda değilim; sadece var olmasına gereksinim duyuyorum!

Eğer $x \geq 0$ ise, o zaman, $x - (0 \times y) = x$ nedeniyle, $x \in S$ dir. Ya $x < 0$ ise? Bu durumda $x - sy \geq 0$ olması için s negatif olmak zorundadır. Güzel, $x < 0$ ise o zaman $x - xy = x(1 - y) \geq 0$ olur. O halde $x(1 - y) \in S$ dir.

Böylece S pozitif tamsayıların boştan farklı bir kümesidir ve bir en küçük elemanı olmalıdır. Ve, gördüğümüz gibi, bu bize r ve q yü verir.

Şimdi bu akıl yürütmenin tamamını matematiksel yolla yeniden yazacağız. Çözümümüzün gösterişli yanıttan tamamen farklı olduğunu kaydedin – örneğin, gösterişli versiyonu, neden gereksinim duyduğumuzu ya da nereden geldiğini hiç açıklamadan, S kümesini tanımlayarak başlatıyoruz. Birilerini q ve r nin var olduğuna ikna etmek için çaba gösterdiğimizden, sorun yoktur – kanıtı nasıl *bulduğumuzu* anlatmak için onları göstermeye çalışmıyoruz.

Gösterişli çözüm:
$S := \{x - sy \mid s \in \mathbb{Z} \text{ ve } x - sy \geq 0\}$ kümesini göz önünde bulunduralım. Eğer $x < 0$ ise, o zaman $x - xy = x(1 - y) \geq 0$ dir. O halde $x(1 - y) \in S$ olur. Eğer $x \geq 0$ ise, o zaman, $x - (0 \times y) = x \in S$ dir. O halde S boş olmayan bir pozitif tamsayılar kümesidir ve dolayısıyla bir en küçük elemanı vardır. Bu elemana r diyelim ve q, $r = x - qy$ şeklinde olsun. O zaman, $r = x - qy$, $x = qy + r$ olarak yeniden düzenlenebildiği için, q ve r aradığımız tamsayılardır.

Çıkartılan ders: Gösterişli kanıtın, orijinal çalışmamızın ortalarından başladığına dikkat edin. S kümesini tanımlayarak başlıyoruz. Bunu birilerinin bir kanıt bulmaya çalışırken

[3] Açık diyorum ama aslında bir şeyi saklıyorum – meslektaşlarımın onu açık nitelendirmelerini bana çok rahatsızlık veriyor. Onun **İyi-sıralama İlkesi**nden sonuçlandığını söylemezsem mektup, e-mail, ölüm tehdidi v.b. alabilirim. Bölümün sonundaki alıştırmalara bakın; şimdilik önemli değildir.

ilk adım olarak kullandığına inanmıyorum. O halde, çıkarılması gereken ders şudur: kanıt ve çalışma son derece farklıdır.

Bu varlık problemi sorunu idi. Ama $0 \le r < y$ olduğunu göstermemiz isteniyordu. r negatif olmayan tamsayıların S kümesine ait olduğu için ilk eşitsizlik bellidir. $r < y$ yi nasıl gösteririz? Bir matematikçinin yaptığını yaparız. İki sayıyı karşılaştırmak için birini diğerinden çıkarırız ve ne olacağını görürüz:

$$r - y = (x - qy) - y = x - (q + 1)y.$$

Şimdi $r - y$, S de olması için '$x - sy$' doğru biçimlidir ama r den daha küçüktür (nedenini görebiliyor musunuz?) ki bu da r nin S de en küçük olmasıyla çelişir. O halde $r - y$, S de olmanın diğer koşulunu (yani $x - sy \ge 0$) sağlamaz, dolayısıyla $r - y = x - (q + 1)y < 0$ olmak zorundadır. Böylece $r < y$ elde edilir.

Çıkarılan ders: $r < y$ yi göstermek için $r - y$ yi inceledik ve 0 dan küçük olduğunu gösterdik.

Bunun bir gösterişli versiyonunu verelim. Bu, son gösterişli yanıtın dolaysız bir sonucudur:

Gösterişli çözüm:
$r \in S$ ve S negatif olmayan tamsayıların bir kümesi olduğundan, $0 \le r$ dır. Ayrıca

$$r - y = (x - qy) - y = x - (q + 1)y$$

de vardır, o halde eğer $x - (q + 1)y \ge 0$ ise $r - y$, S ye ait olacaktır. Ama r, S nin en küçük elemanıdır, o halde $r - y$ en küçük olmalıdır. Buradan $r - y = x - (q + 1)y < 0$, yani $r < y$ elde edilir.

Tekliği göstermek için matematikçilerin yaptığını yaparız ve çelişki kullanırız. Sayıların *tek olmadığını* kabul ederiz ve bunun bir çelişkiye götürdüğünü gösteririz. Yani onların farklı olduklarını kabul ederiz ve sonra farklarının sıfır olduğunu, başka bir deyişle farklı olmadıklarını, gösteririz.

Onlar aynı anda farklı olamazlar ve farklı değil olamazlar!

O halde $x = q'y + r'$, $0 \le r' < y$ ye $q \ne q'$ ya da $r \ne r'$ leri sağlayan q' ve r' olduğunu varsayalım. (Bu son ifade (q, r) ve (q', r') ikililerinin farklı olduğu anlamına gelir.) Bu durumda

$$0 = (q - q')y + (r - r')$$

elde etmek için bilinen çıkarma işlemini yerine getireceğiz. Buradan $(q - q')y = r' - r$ olur. Eğer $q = q'$ ise, o zaman $r' = r$ olduğu aşikardır. Bu (q, r) ve (q', r') ikililerinin farklı olduklarıyla çelişir.

O halde $q \ne q'$ olmalıdır. $q' - q > 0$ durumunu değerlendirelim, çünkü bu durum bize $(q - q')y = r' - r$ de $(q - q')y$ nin pozitif olmasını sağlar. Bunun gidilecek doğru yol olduğundan emin değilim; sadece işleri daha da kolaylaştırır. Eğer $q - q' > 0$ ise, o zaman $q - q'$ en az 1 dir, böylece $y \le r' - r$ olur. Ama r ve r', y den küçük negatif olmayan tamsayılar oldukları için bu bir çelişkidir.

Bu $q > q'$ durumunu ele alır. Şimdi benzer bir akıl yürütmeyle $q < q'$ yani $q - q' < 0$ durumunu gerçekleyebiliriz, ama q ve q' ile ilgili hiçbir özel şeyin söylenmediğine dikkat edin. Genellikten yitirmeksizin, her zaman q nün q' den daha büyük olduğunu kabul edebilirim. Ama öyle değildi, o zaman q' yü q ve q yü q' olarak yeniden isimlendirelim.

Artık gösterişli versiyonu verebiliriz.

Gösterişli versiyon:
q ve r nin tek olmadığını varsayalım, o zaman $x = q'y + r'$, $0 \le r' < y$ ve $q \neq q'$ ya da $r \neq r'$ leri sağlayan q' ve r' mevcuttur. Eğer $q = q'$ ise, o zaman $r = x - qy = x - q'y = r$ olur. Buradan q ve q' nün farklı olduğunu kabul edebiliriz. Genelliği yitirmeksizin, $q > q'$ olduğunu varsayabiliriz. O zaman $x = qy + r$ ve $x = q'y + r'$, $(q - q')y = q' - r$ yi gerektirir. $q - q' > 0$ vardır ve $q - q'$ en az 1 olmalıdır, o halde $0 \le r' - r$ dir. Ama bu bir çelişkidir, çünkü r ve r', y den küçük negatif olmayan tamsayılardır.

Görebildiğiniz gibi tüm kısımları hallettik: varlık (sağlanması gereken koşul dahil) ve teklik. □

Bölüm lemmasının daha genel versiyonu

Bölüm lemmasının varsayımlarına bir kez daha bakalım. $y > 0$ olması gerekli midir? Bununla birlikte, eğer $y = -5$ ve $x = 21$ ise, o zaman q ve r tamsayılarını bulabilirdik: $21 = (-4) \times (-5) \times 1$. $y > 0$ olduğu varsayımını gerçekte kullandık mı? Evet, kullandık. Eğer y negatif olsaydı, o zaman pozitif s için $x - sy$ ifadesinde istenildiği gibi çıkarma değil, toplama yapardık.

O halde, $y > 0$ varsayımını silebilir miyiz? Kanıtta gerekli idi ama bu varsayımı kaldırmamıza izin veren belki alternatif bir kanıt vardır. Sonucu hafif değiştirmek koşuluyla yanıt evettir.

$y > 0$ varsayımı $0 \le r < y$ koşulunda gereklidir. Eğer örneğin $y = -5$ ise, o zaman $0 \le r < -5$ olmasını isteriz, ki bu asla gerçeklenemeyen bir koşuldur.

Onun yerine y nin modülünü alırız. O zaman $y = -5$ için koşul $0 \le r < |-5| = 5$ olur. Aslında bir teorem vardır:

Lemma 28.2 (daha genel bir Bölüm Lemması)

x ve y sıfırdan farklı tamsayılar olsun. O zaman $x = qy + r$ olacak şekilde tek q ve r tamsayıları vardır.

Kanıt. Teoremi $y > 0$ durumu için daha önce kanıtladık, o halde $y < 0$ durumunu kanıtlamalıyız. Genelde durumlar içeren kanıtlarla çalışırken kanıtı ufak değişiklikler yaparak tekrarlayabiliriz. Bu durumda bunu belki yapabiliriz ama S de en büyük elemana v.s. bakmak durumunda kalırız. Bununla birlikte bu durumda doğallardan tamsayılara genellemek için akıllı bir hile vardır. Üstelik bu hile başka durumlarda kullanılabilir. Şimdi onu harekete geçirelim.

Teoremin $y > 0$ için geçerli olduğunu biliyoruz, o halde eğer $y' = -y$ alırsak, o zaman y' bir negatifin negatifidir, dolayısıyla pozitif olmak zorundadır. Böylece Bölüm Lemmasını x ve y' ne uygulayabiliriz:

$x = q'y' + r'$ ve $0 \le r < y'$ olacak şekilde q' ve y' mevcuttur. Bu bize y nin ne olacağı hakkında neler söyler? y' yü $-y$ ile değiştirirsek,

$$x = q'(-y) + r',\ 0 \le r' < -y$$

buluruz. Bu ise $x = (-q')y + r',\ 0 \le r' < |y|$ anlamına gelir.

$q = q'$ ve $r = r'$ olsun. $x = qy + r$ ve $0 \le r < |y|$ olacak şekilde q ve r yi bulmuş olduk.

Bu, yeni versiyonu kanıtladığımız anlamına gelir mi? Hayır, çünkü önerme q ve r nin tekliğini aramaktadır. $y > 0$ durumunda tekliği kanıtladığımızda, $y > 0$ olduğunu kanıtladık mı? Eğer geriye döner ve kontrol ederseniz, o zaman kullanmadığımızı görebilirsiniz – o varlık kısmında kullanılmıştı. O halde, iki şeyden birini yapabiliriz. Kanıtın o kısmını yeniden yazabiliriz ya da 'Tekliğin kanıtı, Teorem 28.1 in kanıtındaki ile aynıdır' diyebiliriz.

Lemmanın genel versiyonunun gösterişli kanıtını ayrıntılı yazalım:

Gösterişli çözüm:
(Daha genel bir Bölüm Lemmasının) Kanıtı. $y' = -y$ olsun. O zaman Teorem 28.1 den $x = qy + r$ ve $0 \le r < y'$ olacak şekilde q ve r tamsayıları mevcuttur. Böylece $x = (-q)y + r$, $0 \le r < |y|$ olur. Tekliğin kanıtı Teorem 28.1 in kanıtındaki ile aynıdır.

Kanıtta q' ve y' notasyonlarını kullanmadığımızı, sadece q ve r yi kullandığımızı kaydedelim. Mesele şöyle: $x = (-q)y + r$ iken okurun $-q$ nün istediğimiz q olduğunu anlaması gerekir. Notasyon bazen akıl karıştırıcı olabilir. □

Çıkartılacak Dersler:

- Bölüm Lemmasının biri diğerinden daha genel iki farklı versiyonunu ifade ettik. Eğer farklı kitaplara bakarsanız, yazarların genelde onlardan sadece birini verdiğini göreceksiniz. Bunu matematikte görmek yeterince yaygındır. Bazı yazarlar bir sonuca tüm genelliği ile gerek duymazlar ve o nedenle daha basit bir önerme seçmeyi tercih ederler.
- Tamsayıları kapsayan problemler için önce pozitif tamsayıları ele almaya çalışalım. Sonra başarılabilir bir şeyi elde edebiliriz – örneğin, tümevarım kullanmayı başarabiliriz. Sonra pozitif durumu kullanma hilesini negatif duruma uygularız.

Euclid Algoritması

Euclid Algoritması Bölüm Lemmasının tam olarak tekrarlı kullanımıdır. Lemmada q ve r yi, $0 \le r < y$, ortaya çıkarmak için x ve y yi veriyoruz. Sonra y ve r yi lemmaya yerleştiriyoruz. Kalan sıfır oluncaya dek bunu sürdürüyoruz.

Teorem 28.3 (Euclid Algoritması)

x ve y tamsayılar olsun. O zaman $q_1, \ldots, q_k$ tamsayıları ve $r_1, \ldots, r_k$, $r_{k+1} = 0$ tamsayılarının azalan bir dizisi vardır öyle ki

$$x = q_1 y + r_1$$
$$y = q_2 r_1 + r_2$$

$$\begin{aligned} r_1 &= q_3 r_2 + r_3 \\ r_2 &= q_3 r_3 + r_4 \\ &\vdots \\ r_{k-2} &= q_{k-1} r_{k-1} + r_k \\ r_{k-1} &= q_k r_k + 0 \end{aligned}$$

olsun. Üstelik, ebob$(x, y) = r_k$ dır.

Burada bir azalan dizi $r_1 > r_2 > r_3 > \ldots > r_k > 0$ demektir.

Uyarı 28.4

Aslında önemli olan önermenin son kısmıdır, çünkü bize bazı yararlı sayıların, örneğin iki tamsayının ebob'u gibi, nasıl hesaplandığını söyler.

Kanıt. Bölüm Lemmasını defalarca uyguladığımız bellidir. Her bir aşamada $0 \leq r_i < r_{i-1}$ dir. (Nedenini görüyor musunuz?) Negatif olmayan tamsayıların azalan bir dizisine sahip olduğumuz için işlem bir noktada 0 kalanını üretecektir.

ebob$(x, y) = r_k$ olduğu ebob(x, y) = ebob(r, y) = ebob(y, r) – Teorem 27. 20 (i) ve (v) – ve ebob$(a, b) = a$ eğer $a \mid b$ ise – görülmesi kolaydır – den sonuçlanır. □

Artık algoritmanın bazı uygulamalarını vereceğiz. İlk uygulama bize algoritmayı harekette görmemize olanak sağlayacaktır.

ebob hesaplamak

Örnek 28.5

ebob(14441, 3563) u bulun.

Bölüm algoritmasının tekrarlı uygulaması aşağıdakileri üretir:

$$\begin{aligned} 14441 &= 4 \times 3563 + 189 \\ 3563 &= 18 \times 189 + 161 \\ 189 &= 1 \times 161 + 28 \\ 161 &= 5 \times 28 + 21 \\ 28 &= 1 \times 21 + 7 \\ 21 &= 3 \times 7 + 0. \end{aligned}$$

O halde ebob(14441, 3563) = 7 dir.

Yöntemin akla başvurmayan düz bir hesaplama olduğu dikkatinizi çekmiştir. Eğer ebob'u kaba kuvvetle bulmak isteseydik, 14441 ve 3563 ün – kolay bir iş olamayan – tüm çarpanlarını bulabilir ve en büyük ortak bölene ulaşmak için tüm ortak çarpanları çarpabilirdik. Deneyin ve yukarıdaki yöntemin daha kolay olduğunu görün.

Alıştırmalar 28. 6

(i) ebob(315, 462) u bulun.

(ii) ebob(546, 9100) u bulun.

(iii) Teorem 27.20 (v) i kullanmadan aşağıdakini kanıtlayın.
$x, y, q, r \in \mathbb{Z}$ ve y, x i bölmemek üzere $x = qy + r$ olsun. ebob(x, y) = ebob(y, r) olduğunu kanıtlayın. (Bu, bir problemi parçalara ayırarak nasıl çözüleceğine mükemmel bir örnektir. Önce, eğer d = ebob(x, y) ise o zaman d nin y ve r nin bir böleni olduğunu gösterin. Sonra d nin bu tür en büyük tamsayı olduğunu gösterin. Bu son kısım kendi başına çelişki ile kanıta mükemmel bir örnektir: başka bir büyük sayı olduğunu kabul edin ve devam edin.)

Algoritmayı ters çevirerek ilginç bir teorem elde ederiz.

Teorem 28.7

x ve y tamsayılar olsun. O zaman

$$kx + ly = \text{ebob}(x, y)$$

olacak şekilde k ve l tamsayıları vardır.

Kanıt. Alıştırma (ama kanıta kalkışmadan önce aşağıdaki örneği inceleyin). □

Örnek 28.8

$k, l \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, ebob(14441, 3563) u $14441k + 3563l$ biçiminde ifade edin.

Bu istenilen ifadeyi bulmak için Örnek 28.5 deki Euclid Algoritmasının çıktısını alalım ve geriye doğru çalışalım. O örnekte ebobo(14441, 3563) = 7 bulmuştuk. Oradaki hesaplamalarımızın önce en alt satırını kullanırız:

$$\begin{aligned}
7 &= 28 - 1 \times 21 \\
&= 28 - 1 \times (161 - 5 \times 28), \text{ 21 yerine algoritma çıktısının 4. satırdaki değeri,} \\
&= 6 \times 28 - 1 \times 161 \\
&= 6 \times (189 - 1 \times 161) - 1 \times 161, \text{ 28 in yerine 3. satırın kullanımı,} \\
&= 6 \times 189 - 7 \times 161 \\
&= 6 \times 189 - 7 \times (3563 - 18 \times 189), \text{ 161 yerine 2. satırın kullanımı,} \\
&= 132 \times 189 - 7 \times 3563 \\
&= 132 \times (14441 - 4 \times 3563) - 7 \times 3563, \text{ 189 yerine 1. satırın kullanımı,} \\
&= 132 \times 14441 - 535 \times 3563.
\end{aligned}$$

Böylece $k = 132$ ve $l = -535$ dir.

Eğer 'k ve l sayıları tek midir?' diye sorsaydınız, fazladan not alırdınız. Eğer olmadıklarını çözseydiniz, iki kat daha fazla not alırdınız.

$$7 = (132 + 3563) \times 14441 - (535 + 14441) \times 3563$$

olduğunu göstermek zor değildir. Sadece $ab - ba = 0$ hilesini kullandığımızı kaydedelim.

Genelde bu teklik yokluğu bir sorun değildir ve Diofant denklemleri ile ilgili kesimde kullanılacaktır.

Euclid Lemması

$n \mid ab$ ise n nin illede a ya da b nin birini bölmek zorunda olmadığını gördüğümüz Örnek 27.22 yi göz önünde bulunduralım. Fazladan bir hipotez ekleyerek böyle bir önerme elde edebiliriz. Sonuçta oluşan önermeye Euclid Lemması denir. *Lemmanın* bizim için bir *sonuç teorem* olduğuna dikkat edin: Euclid Lemması, Euclid Algoritmasının bir sonuç teoremidir.

Sonuç Teorem 28.9 (Euclid Lemması)

n, a ve b doğal sayılar olsun. Eğer $n \mid ab$ ve ebob$(n, a) = 1$ *ise, o zaman $n \mid b$ dir.*

Kanıt. Mademki ebob$(a, b) = 1$ dir, o zaman $kn + la = 1$ olacak şekilde k ve l tamsayıları vardır. Böylece $knb + lab = b$ olur. $n \mid knb$ açıktır. Ayrıca $n \mid ab$ idi, öyleyse $n \mid lab$ dir. O halde $n \mid knb + lab$, yani $n \mid b$ elde edilir. □

Bu lemma; n, ab yi böler fakat a yı bölmezse, n nin b yi bölmek zorunda olduğunu söyler.

Lemmada kullanılan iki sayının en büyük ortak bölenin 1 olduğu koşulu bir isim verilecek kadar çok önemlidir.

Tanım 28.10

En büyük ortak bölenleri 1 *olan iki tamsayıya* ***aralarında asal*** *denir.*

Alıştırma 28.11

Aralarında asal sayılar için kendi örneklerinizi ve örnek-dışı olanları arayın.

Euclid Lemmasından aşağıdakini türetebiliriz:

Teorem 28.12

Eğer p asal ve p, ab yi bölerse, o zaman p, a yı böler ya da p, b yi böler.

Alıştırma 28.13

Önceki teoremi kanıtlayın.

Bu teorem yardımıyla irrasyonellik üzerine bir sonucu kanıtlayabiliriz.

Sonuç Teorem 28.14

Eğer n bir kare sayı değilse, o zaman $\sqrt{n}$ irrasyoneldir.

Kanıt. Tersini varsayalım: r ve s tamsayılar olmak üzere, $\sqrt{n} = r / s$ olsun. r / s nin en düşük terimli, yani herhangi bir ortak çarpanı sadeleştirdikten sonra, ebob$(r, s) = 1$ olduğunu varsayabiliriz. n bir kare olmadığı için $s > 1$ dir. $r^2 = ns^2$ ye sahibiz. p, s nin asal olan herhangi bir böleni olsun. O zaman $p \mid r^2$ dir, o halde önceki teoremden $p \mid r$ olur. O halde p hem r hem s yi böler ki bu ebob$(r, s) = 1$ ile çelişir. □

Bölünebilirlik sonuçlarını kullanarak, görünüşte bölünebilirlikle ilgili olmayan bir şey kullandığımızı kaydedelim.

Diofant denklemleri

Bir sonraki uygulamamız iki değişkenli lineer denklemlerin tamsayı çözümlerini bulmakla ilgilidir. $m, n, c \in \mathbb{N}$ verildiğinde, $mx + ny = c$ biçimli denklemlere tamsayı çözümler arıyoruz. Fazladan $mx - ny = c$ nin de çözümlerini elde edeceğiz. (Nedenini görebilir misiniz?) Böyle denklemlere Diofant denklemleri adı verilir (İskenderiyeli Diofant'ın adına).

Teorem 28.15

i. *$\mathbb{N}$ deki her m, n için $mx + ny = c$ denkleminin x ve y tamsayı çözümleri vardır eğer ve ancak eğer* $\text{ebob}(m, n) = c$ *dir.*

ii. *$x = X$ ve $y = Y$, $mx + ny = c$ nin bir çözümü olsun. O zaman her $t \in \mathbb{Z}$ için*

$$x = X + \frac{n}{\text{ebob}(m,n)}t,\ y = Y - \frac{m}{\text{ebob}(m,n)}t$$

de bir çözümdür. Üstelik, tüm çözümler bu biçimlidir.

Kanıt. Düşünceleri ayrıntılı yazacağım, gösterişli çözümü siz bir alıştırma olarak yazabilirsiniz.

(i) Bu bir 'eğer ve ancak eğer' önermesi olduğu için 'eğer' ve 'ancak eğer' biçiminde parçalıyoruz. Bu soru boyunca $\text{ebob}(m, n)$ yi aşırı derecede yazacağımdan, kısalık açısından $d = \text{ebob}(m, n)$ beyanında bulunalım.

$mx + ny = c$ nin $mX + nY = c$ gibi bir çözümü olduğunu varsayalım. Göstermek istediğimiz nedir? d nin c yi böldüğünü göstermek istiyoruz. Ne biliyoruz? c yi m ve n (ve X ve Y) cinsinden biliyoruz. Tanımdan d nin m ve n nin bir böleni olduğunu biliyoruz. Teorem 27.5 uyarınca, m ve n nin bir lineer kombinasyonu da d ye bölünür. Böylece $c = mX + nY$ (bu lineer kombinasyon) olduğu için d, c yi böler.

Şimdi denklemimizin diğer yönüne gidelim. d, c yi bölsün. Ne biliyoruz? Özellikle, denklem ve en büyük ortak bölenler hakkında ne biliyoruz? Teorem 28.7 den $mx + ny = d$ yi çözebiliriz. Yani $mk + nl = d$ olacak şekilde k ve l yi bulabiliriz. (O teoremdeki notasyonla bu teoremdeki notasyonun uyuşmadığını kaydedin – k lar ve l ler aynı değildir. Zararı yok! Bizler matematikçiyiz ve bunun üstesinden gelebiliriz.) Ama $mx + ny = d$ çözmek istediğimiz denklem değildir; sağ tarafta d yi değil, c yi istiyoruz. Eğer d yi c / d ile çarparsak onu elde edebiliriz. Bir tarafa yaptığımızı diğer yana da yapmalıyız. O halde her iki tarafı d ye böler ve c ile çarparsak, o zaman

$$\frac{c(mk+nl)}{d} = c$$

elde ederiz. Böylece, eğer d, ck ve cl yi bölerse, o zaman $mx + ny = c$ ye tamsayı çözümler elde ederiz. Yani

$$m\frac{ck}{d} + n\frac{cl}{d} = c$$

de $\frac{ck}{d} \in \mathbb{Z}$ ve $\frac{ck}{d} \in \mathbb{Z}$ olmasını istiyoruz. Ama bu sorun değil, çünkü varsayımdan d nin c yi böldüğünü biliyoruz.

(ii) Önerilen çözümlerin (verilen $x = X$ ve $y = Y$ çözümü) gerçekten çözümler olduğunu göstermek, kendinizin de gösterebileceği gibi, sadece bir değiştirim sorunudur ($X + nt / \text{ebob}(m, n)$ ve $Y - mt / \text{ebob}(m, n)$ ye yerleştirmek). Önermenin esas kısmı 'üstelik' kısmıdır, yani tüm çözümlerin o biçime sahip olmasıdır.

Bunu ayrıntılı araştıralım. x için tüm çözümlerin $X+\frac{n}{d}t, t\in\mathbb{Z}$ biçimine sahip olduğunu varsayalım. Bu bize y için doğru biçimi sağlar mı? Sağlar; onu çalışın. İleride ve işlemi ayrıntılı yazarken yararlı olacaktır. O, bu aşamada yazılmamalıdır, en sonda yer almalıdır!

Ne biliyoruz? $mx + ny = c$ ve $mX + nY = c$ olduğunu biliyoruz. Ne istiyoruz? $x = X + \frac{n}{d}t$ v.s. istiyoruz. Bu c yi içermez ve c yi bildiğimiz iki denklemden açıkça eleyebiliriz. O zaman $x - X = \frac{n}{d}$ yi istediğimiz için işimize yarayan $m(x-X) + n(y-Y) = 0$ denklemini elde ederiz. $x - X = \frac{n}{d}$, d yi işin içine sokmamızı söyler, o halde denklemi d ye böleriz:

$$\frac{m(x-X)}{d}+\frac{n(y-Y)}{d}=0.$$

Ya da başka bir deyişle,

$$x-X=\frac{n}{d}\left(-\frac{d(y-Y)}{m}\right)$$

elde ederiz. Böylece, eğer m nin $d(y - Y)$ yi böldüğünü kanıtlayabilirsek, o zaman t tam sayımız $-\frac{d(y-Y)}{m}$ ye eşit olacaktır. Onu göstermek çok zor değildir, o yüzden çalışmanız için size bırakacağım. Eğer takılırsanız, ebob$(m, n) = 1$ olduğu durumu ele alın. □

Alıştırma 28.16

Bu kanıtın bir gösterişli versiyonunu yazın.

Teoremin (ii) şıkkının çözümler mevcut ise onlardan sonsuz çoklukta olduğunu söylediğine dikkatinizi çekerim.

Örnek 28.17

$51x + 21y = 18$ Diofant denkleminin tüm tamsayı çözümlerini bulun.

Önce 51 ve 21 in en büyük ortak bölenini buluruz:

$$51 = 2\times 21 + 9$$

$$21 = 2\times 9 + 3$$

$$9 = 3\times 3 + 0.$$

Böylece en büyük ortak bölen 3 tür. $3 \mid 18$ olduğu için çözümlerin var olduğunu biliyoruz. Bunları bulmak için algoritmayı ters çevirebiliriz:

$$3 = 21 - 2\times 9$$

$$= 21 - 2(51 - 2\times 21)$$

$$= 5\times 21 - 2\times 51$$

$30 = 30\times 21 - 12\times 51$, $18 / 3 = 6$ ile çarpıldıktan sonra.

O halde

$$x = -12 \text{ ve } y = 30,$$

$51x + 21y = 18$ in bir çözümüdür. Buradan ($X = -12$ ve $Y = 30$ alarak) çözümler

$$X + \frac{21}{3}t = -12 + 7t, Y - \frac{51}{3}t = 30 - 17t, t \in \mathbb{Z}$$

biçimlidir. Yani

$$x = -12 + 7t, y = 30 - 17t$$

$51x + 21y = 18$ denkleminin tamsayı çözümleridir.

Örnek 28.18

Bu çözümleri $51x - 21y = 18$ in çözümlerini bulmak için de kullanabiliriz. (Bu tam olarak + yerine – değişimli önceki denklemdir.) Denklemi $51x + 21(-y) = 18$ gibi yeniden yazabildiğimiz için önceki örnekten çözümlerin

$$x = -12 + 7t, -y = 30 - 17t,$$

yani

$$x = -12 + 7t, y = -30 + 17t$$

olmaları gerektiğini görebiliriz.

Alıştırmalar

Alıştırmalar 28.19

i. (a) ebob(14592, 6468), (b) ebob(–12870, 4914) leri bulun.

ii. $14592m + 6468n = 12$ olacak şekilde m ve n tamsayılarını bulun.

iii. $4914m + 12870n = 234$ olacak şekilde m ve n tamsayılarını bulun.

iv. Diofant denklemlerinin tüm tamsayı çözümlerini bulun:
(a) $215x + 264y = 18$,
(b) $315x + 264y = 24$,
(c) $7644x + 1386y = 84$,
(d) $1386x + 7644y = 126$.

v. **İyi-sıralama İlkesi** Bölüm Lemmasında kullanılmıştı. O doğal sayılar üzerine yaptığımız bir varsayımdır: doğal sayıların boştan farklı her kümesinin bir en küçük elemanı vardır.
(a) İlkeyi 'Eğer … ise, o zaman …' biçiminde yazın.
(b) Kümenin doğal sayılar olduğu varsayımı tamsayılar kümesine genelleştirilebilir mi? Genelleştirilebilirse, kanıt verin; aksi halde bir karşıt örnek verin. (Sırası gelmişken, ilke gerçel sayılar için doğru değildir: örneğin, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ olsun.)
(c) Matematiksel Tümevarım İlkesinin kanıtında bu ilkeyi nerede kullandık?

vi. Bölüm Lemmasını x tamsayısı üzerinde kuvvetli tümevarımı kullanarak kanıtlayın. (İpucu: değerlendirilecek iki durum vardır: $x < y$ ve $x \geq y$.)

vii. Euclid Lemması ve kanıtını göz önüne alalım.
(a) Kanıtta varsayımların nerede kullanıldıklarını belirleyin.
(b) Kanıtta hangi teorem kullanılmıştır?

(c) Euclid Lemmasında ebob$(x, y)=1$ olduğu varsayımını yok ettiğimizde ne olacağını inceleyin. Yani, $x, y \in \mathbb{N}$ leri $x, y \in \mathbb{Z}$ ye aktarın.

viii. a ve b aralarında asal olsun. ebob$(a+b, a-b) \leq 2$ olduğunu kanıtlayın. (İpucu: $g =$ ebob$(a+b, a-b)$ olsun. $g \mid 2a$ ve $g \mid 2b$ olduğunu gösterin ve ebob$(g, 2)$ üzerindeki durumları kullanın.)

ix. Bölüm Lemmasının daha genel versiyonunda q ve r nin tekliği niçin kendiliğinden q' ve r' den sonuçlanır?

x. p_1 ve p_2 iki sayı olsun. Bölüm Lemmasını kullanarak $i \geq 1$ için q_i yi ve $i \geq 3$ için p_i yi tanımlayalım. Yani $p_{i-2} = q_{i-2}\, p_{i-1} + p_i$ dir. $p_1 p_2 = \sum_{i=1} q_i p_{i+1}^2$ olduğunu kanıtlayın. Bu sonucu açıklamak için bir şekil çizin.[4]

xi. İki tamsayı a ve b nin ekok(a, b) ile gösterilen **en küçük ortak katı** negatif olmayan en küçük l tamsayısıdır öyle ki $na = mb = l$ olacak şekilde m ve n tamsayıları vardır. Aşağıdakileri kanıtlayın.

(a) a ve b nin herhangi bir ortak katı l nin bir katıdır.

(b) Herhangi bir r pozitif tamsayısı için ekok$(ra, rb) = r$ ekok(a, b) dir.

(c) ekok(a, b) ebob$(a, b) = |ab|$.

Özet

- Genel bölüm lemması: x ve y sıfırdan farklı tamsayılar olsun. O zaman $x = qy + r$, $0 \leq r < |y|$ olacak şekilde tek q ve r tamsayıları vardır.
- Euclid Algoritması ebob(x, y) yi hesaplamak için kullanılabilir.
- Euclid Lemması: n, a ve b doğal sayılar olsun. Eğer $n \mid ab$ ve ebob$(n, a) = 1$ ise, o zaman $n \mid b$ dir.
- En büyük ortak bölenleri 1 ise iki sayıya aralarında asal denir.
- m ve n, $\mathbb{N}$ de olmak üzere, $mx + ny = c$ denkleminin x ve y tamsayı çözümleri vardır eğer ve ancak eğer ebob$(m, n) \mid c$ dir.
- Üstelik, bir çözüm verildiğinde tüm çözümleri bulabilirsiniz.
- İki a ve b tamsayısının ekok(a, b) ile gösterilen en küçük ortak katı negatif olmayan en küçük l tamsayısıdır öyle ki $na = mb = l$ olacak şekilde m ve n tamsayıları vardır.

[4] Eğitmenler: Daha önce bunun bir şeklini hiç çizmediyseniz, çizin. Çok esin vericidir.

29. BÖLÜM

Modüler Aritmetik

Bu sevdiğim aritmetik türüdür.
Muhteşem Yediler'deki, Chico

Öğrenci iken özellikle modüler aritmetikten etkilenmiştim. Başlangıçta bana soyut bir çocuk oyuncağı gibi gelmişti. Sanki yararlı ya da anlamlı değildi. Şimdi tamamen değerini biliyorum, çünkü (internet güvenliğin kapsayan) kriptografi, veri depolama, barkot, (kitapların arka kapakları üzerinde) ISBN bilgileri ve hatta sihirbazlık numaraları gibi gerçek yaşamdaki uygulamalarını gördüm.

Modüler aritmetiğin düşüncesi çok basittir. Örneğin, n gibi bir doğal sayı verilsin. O zaman n ile bölümünden kalanları eşit ise iki tamsayıyı denk olarak değerlendiriyoruz. Örneğin, $n = 5$ alalım. O zaman 22 ve 57 aynıdır, çünkü – 5 ile bölündüklerinde 2 kalanı sonuçlandığından – aynı kalana sahiptirler.

Bu bölümde, sayılar kuramındaki bazı uygulamalarına geçmeden önce modüler aritmetiğin birkaç temel özelliklerini çalışacağız.

Modüler Aritmetik

Tanımlarla başlayalım.

Tanım 29.1

İki tamsayıyı, x ve y yi, bir n doğal sayısına böldüğümüzde aynı kalana sahiplerse, o zaman x ve y ***modulo*** *n* ***denktir*** *(ya da x eşittir y mod n ya da x eşittir y modulo n) deriz ve x* mod *$n = y$* mod *n ya da kısaca $x = y$* mod *n yazarız.*

Örnekler 29.2

(i) $15 = 0 \bmod 5$ çünkü $15 = 3 \times 5 + 0$.
(ii) $16 = 4 \bmod 12$ çünkü $16 = 1 \times 12 + 4$.
(iii) $-73 = 27 \bmod 10$ çünkü $-73 = (-8) \times 10 + 7$.

Belli ki, x i n ye böldüğümüzde r kalanını veriyorsa, o zaman $x = r \bmod n$ dir.Aslında x mod n istendiğinde genelde sadece r kalanını veririz. Bir hesaplayıcı kullanarak, bunun bulunması kolaydır.

Örnekler 29.3

261 mod 8 nedir? 261 / 8 = 32.625 buluruz. Böylece kalan $0.625 \times 8 = 5$ olur.

Yapmamız gerekenin, ondalık noktadan sonraki rakamları almak ve n ile çarpmak olduğunu kaydedin.

Alıştırmalar 29.4

Aşağıdakileri hesaplayın.

(i) 16 mod 5, (ii) 22 mod 4, (iii) –33 mod 22, (iv) 7 mod 7, (v) 545 mod 12.

Modüler aritmetiğin göze çarpan bir özelliği, teoremleri durumlar yöntemiyle genelde, bir sonraki teoremin gösterdiği gibi, kanıtlayabilir olmamızdır.

Teorem 29.5

Eğer n bir kare sayı ise, o zaman n mod 4, 0 *ya da* 1 *dir.*

Kanıt. Tanım gereği n bir kare ise, o zaman bir k tamsayısı için $n = k^2$ dir. mod 4 çalıştığımızdan, k mod 4 için 4 durum ele alacağız: 0, 1, 2 ve 3.

k mod 4 = 0 durumu: Burada bir m tamsayısı için $k = 4m$ dir. O zaman $n = k^2 = 16m^2 = 4(4m^2) = 0$ mod 4 olur.

k mod 4 = 1 durumu: Burada $k = 4m + 1$ dir. O zaman $n = k^2 = 16m^2 + 8m + 1 = 4(4m^2 + 2m) + 1 = 1$ mod 4 olur.

k mod 4 = 2 durumu: Burada $k = 4m + 2$ dir. O zaman $n = k^2 = 16m^2 + 16m + 4 = 4(4m^2 + 4m + 1) = 0$ mod 4 olur.

k mod 4 = 3 durumu: Burada $k = 4m + 3$ dir. O zaman $n = k^2 = 16m^2 + 24m + 9 = 4(4m^2 + 6m + 2) + 1 = 1$ mod 4 olur.

□

Bir sonraki teorem, iki sayı modulo n eşit olduğunda, farklı bir arama yolu sağlar.

Teorem 29.6

$x = y$ mod n *vardır eğer ve ancak eğer bazı* $k \in \mathbb{Z}$ *için* $x - y = kn$ *dir.*

Kanıt. $x = y$ mod n varsayalım. O zaman tanımdan bazı $k_1, k_2, r \in \mathbb{Z}$ için $x = k_1 n + r$ ve $y = k_2 n + r$ olur. Böylece $x - y = (k_1 n + r) - (k_2 n + r) = (k_1 - k_2)r$ elde edilir.

Şimdi tersini kanıtlayalım. Eğer y, n ye bölündüğünde r kalanına sahipse, o zaman bir $k_1 \in \mathbb{Z}$ için $y = k_1 n + r$ yazılır. O halde

$$\begin{aligned} & x - y = kn \text{ bir } k \in \mathbb{Z} \text{ için} \\ \iff \quad & x = y + kn \\ \iff \quad & x = k_1 n + r + kn \\ \iff \quad & x = (k_1 + k) + r \end{aligned}$$

dir. Böylece x, n ye bölündüğünde r kalanına sahip olur, o halde $x = y$ mod n dir. □

Alıştırmalar 29. 7

Daha önceki yöntemleri teorem ve kanıta uygulamalısınız. Özellikle aşağıdakileri yapmalısınız.

(i) Teoremin ifadesi için örnekler ve örnek-olmayanlar oluşturun.
(ii) Kanıtta nerelerde varsayımların yapıldığını belirleyin. (Tersinde varsayımı nerede kullandığımız açık olarak ifade edilmemiştir.)

Uyarı 29.8

Baz $k \in \mathbb{Z}$ için $x - y = kn$ ise, bazı matematikçiler x ve y sayılarını modulo n denk olarak tanımlarlar. Önceki teorem bu tanımla bizim tanımımızın denk olduklarını gösterir.

mod'un aritmetiği

Şimdi biraz mod'lu aritmetik yapmaya başlıyoruz. Bir kuram ortaya çıkarmak için kalanların toplamını, çıkarılmasını ve çarpımını tanımlamak kolaydır. Bölüm kavramını ele almak daha zor olduğu için onu göz ardı ediyoruz.

Teorem 29.9

$x = r \bmod n$ ve $x = s \bmod n$ olsun. O zaman

(i) $x + y = r + s \bmod n$,
(ii) $xy = rs \bmod n$

dir.

Kanıt. Varsayımdan bazı k ve l tamsayıları için $x = kn + r$ ve $y = ln + s$ yazılır. O zaman

$$x + y = kn + r + ln + s$$
$$\Longrightarrow (x + y) - (r + s) = (k + l)n$$

dir. O halde Teorem 29.6 dan (i) sonuçlanır.
Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} xy &= (kn + r)(ln + s) \\ &= kln^2 + kns + lnr + rs \\ xy - rs &= (kln + ks + lr)n \end{aligned}$$

bulunur, o halde (ii) de doğrudur. □

(i) de negatifleri kullanmakla, yani $x - y\ x + (-y)$ dir, çıkarmayı da ele alabiliriz.

Alıştırmalar 29.10

(i) Bu bir teorem ve kanıttır, o halde onu inceleyin. Örnekler- uç-örnekler v.s. bulun.
(ii) Eğer $x = y \bmod n$ ise, o zaman her $k \in \mathbb{Z}$ için $kx = ky \bmod n$ olduğunu kanıtlayın.

Zor hesaplamalar hızlı yanıtları elde etmek için bu teoremi kullanabiliriz.

Örnek 29.11

8^7 nin son rakamını bulun.

Burada bir sayının son rakamının 10 a bölümünden kalanı olduğuna dikkat çekelim. O halde mod 10 çalışmak durumundayız. $8^7 = 8^3 8^4$ olduğunu biliyoruz.

$8^2 = 64$ ve $64 = 4 \bmod 10$ dır. Böylece,

$$8^3 \bmod 10 = 8^2 8 \bmod 10 = (4 \times 8) \bmod 10 = 32 \bmod 10 = 2 \bmod 10$$

bulunur. Ayrıca,

$$8^4 \bmod 10 = (8^2)^2 \bmod 10 = 4^2 \bmod 10 = 16 \bmod 10 = 6 \bmod 10$$

dır. Böylece,

$$8^7 \bmod 10 = 8^3 8^4 \bmod 10 = (2 \times 6) \bmod 10 = 12 \bmod 10 = 2 \bmod 10$$

elde edilir. O halde 8^7 nin son rakamı 2 dir.

Alıştırma 29.12

17^{10} nin son rakamını bulun.

Fermat'ın Küçük Teoremi

Fermat'ın Küçük Teoremi[1] sayılar kuramında yararlı bir teoremdir. Önceki örnekler gibi, elle hesaplanması zor olan büyük sayıların araştırılmasına olanak sağlar. Örneğin, $2^{101} - 2$ nin 101 e bölünebildiğini göstermek için onu kullanabiliriz.

Bu kez kanıtın bir gösterişli versiyonunu göreceğiz ve açıklamalar kutucuklarda verilecektir.

Teorem 29.13 (Fermat'ın Küçük Teoremi)

p bir asal olsun. O zaman herhangi bir x tamsayısı için $x^p = x \bmod p$ dir.

Her zamanki uygulamalar şiddetle önerilir: birkaç örnek çalışın, teoremin ne dediğini mutlaka anlayın.

Kanıt. Önermeyi x üzerinde matematiksel tümevarımı kullanarak doğal sayılar için kanıtlayacağız. Genel durum alıştırma olarak bırakılıyor. p üzerine tümevarım yapamadığımızı kaydedin, çünkü $p + 1$, $p = 2$ için tek asaldır.

> Kanıtların kolay kısımları alıştırma olarak bırakılıyor. Onları mutlaka yapın.

Başlangıç durumu $x = 0$ dır.

$$0^p = 0 = 0 \bmod p$$

olduğu için önerme geçerlidir.

[1] Bu teorem daha önce anlatılmış olan Fermat'ın Son Teoreminden farklıdır.

Bir tümevarımın başlangıç kısmı genelde o derece kolaydır.

Böylece bazı $x \in \mathbb{N}$ için $x^p = x \bmod p$ varsayalım ve $x+1$ için ne olduğunu görelim. Binom Teoremi aracılığıyla $(x+1)^p$ yi açarız.

$$(x+1)^p = x^p + \binom{p}{1}x^{p-1} + \binom{p}{2}x^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p-1}x + 1.$$

Tümevarımı kullanmak için $(x+1)^p = x+1 \bmod p$ olmasını istiyoruz, o halde ne yapabildiğimizi görmek için denklemin karmaşık yanını aldık. Orada açmaktan başka bir şeyin olmadığı görünüyor ve onu yerine getirmek için Binom Teoremine gereksinim duyuyoruz.

Denklemin sağ yanına bakın. x^p olduğunu göreceksiniz. Tümevarım hipotezinden mod p yi aldığımızda $x^p = x \bmod p$ olduğunu biliyoruz. Sağ yanda 1 olduğunu da görüyoruz, o halde diğer bütün terimlerden kurtulmak durumundayız, yani mod p sıfır olduğunu göstermeliyiz.

Her bir adımın neden doğru olduğunu görmek için çalışmanız gerektiği aşağıdakileri yazıyoruz. Her bir adımda 'Niçin' diye sorun. Bazı boşlukları doldurmanız ya da daha önceki teoremleri kullanmanız gerekebilir.

Her iki tarafın mod p sini alarak

$$\begin{aligned}(x+1)^p \bmod p &= x^p + \binom{p}{1}x^{p-1} + \binom{p}{2}x^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p-1}x + 1 \bmod p \\ &= x + \binom{p}{1}x^{p-1} + \binom{p}{2}x^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p-1}x + 1 \bmod p \\ &= (x+1) + \left(\binom{p}{1}x^{p-1} + \binom{p}{2}x^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p-1}x\right) \bmod p \\ &= x+1 \bmod p\end{aligned}$$

elde ederiz. Son satır öncekinden sonuçlanır, çünkü Alıştırma 24.10 (x) den $1 \le r \le p-1$ için $\binom{p}{r} = 0 \bmod p$ dir.

O son ifade doğru mudur? Faal olun! Geriye gidin ve alıştırmanın onu bize gerçekten verdiğinin doğruluğunu kontrol edin.

O halde Matematiksel Tümevarım İlkesinden, önerme doğrudur. □

Alıştırma 29.14

Önermeyi sadece doğal sayılar için kanıtladık. Şimdi teoremi x bir tamsayı olduğunda kanıtlayın. Eğer $x < 0$ ise $-x$ in bir doğal sayı olduğu kurnazlığından yararlanın, o halde önerme $-x$ için geçerlidir.

Bazı matematikçiler aşağıdaki sonuç teoremi Fermat'ın Küçük Teoreminin ifadesi olarak kullanırlar.

Sonuç Teorem 29.15

p, tamsayı x i bölmeyen bir asal olsun. O zaman $x^{p-1} = 1 \bmod p$ dir.

Alıştırmalar 29.16

(i) Bu önerme önermemize denk değildir. O daha mı zayıftır, yoksa daha mı kuvvetlidir?

(ii) Bu sonuç teoremi kanıtlayın. Bir görüş olarak $p \mid x$ kullanma gereği duyacağınızı kaydedin.

Fermat'ın Küçük Teoreminin bir başka sonuç teoremi şudur: Bir p asalı için $x^p - x$, p ye bölünebilirdir. Bunu görmek kolaydır, çünkü $x^p \equiv 1 \bmod p$ ile $x^p - x \equiv 0 \bmod p$ denktirler ve bu, Teorem 29. 6 ya göre, p nin $x^p - x$ i böldüğünü gerektirir.

İşte birkaç örnek.

Örnekler 29.17

(i) $4^5 - 4 = 1020$, 5 e bölünebilirdir.

(ii) $2^7 - 2 = 126$, 7 ye bölünebilirdir.

(iii) $2^{100} - 1 = 1\ 267\ 650\ 600\ 228\ 229\ 401\ 496\ 703\ 205\ 375$, 101 e bölünebilirdir. Burada 2 nin 101 i bölmediğini görüyoruz ve böylece, Sonuç Teorem 29. 15 den, $2^{100} \equiv 1 \bmod 101$ dir; o halde $2^{100} - 1$, 101 e bölünebiliridir.

Fermat'ın Küçük Teoreminin uygulamaları

Şimdi Fermat'ın Küçük Teoreminin birkaç daha uygulamasını inceleyeceğiz.

Kalanları bulma

Örnek 29.18

3^{293} ün 27 ile bölümünden kalanı bulun.

Bunu yanıtlamak için, $293 = (3 \times 97) + 2$ olduğunu fark edelim. Şimdi

$$3^{293} = 3^{3\times 97+2} = 3^2 \times (3^3)^{97} = 9 \times 27^{97}$$

yazılır.

Fermat'ın Küçük Teoreminden $27^{97} \equiv 27 \bmod 97$ olduğunu biliyoruz. Buradan

$$\begin{aligned} 3^{239} \bmod 97 &= (9 \times 27^{97}) \bmod 97 \\ &= (9 \times 27) \bmod 97 \\ &= 243 \bmod 97 \\ &= 49 \bmod 97 \end{aligned}$$

elde edilir. Son indirgeme elle çözülmüştür. Onun 3^{293} ün hesabını yapmaktan çok daha kolay olduğunu kaydedelim. Böylece 3^{293} ün 97 ile bölümünden kalan 49 dır.

Bu arada 3^{293}, 625932688882434275223255726484171540770295819045895914364335574203790567798349687214449959559620216681529421310461792605457305591063995311 23 a eşittir.

Asallığın test edilmesi

Fermat'ın Küçük Teoremi sayılar üzerine şirin bir sonuç gibi görünebilir: 'x in bir asal kuvvetini alır ve modulo asal indirgerseniz, tekrar x e dönersiniz.' Ama başka ne işe yarar? Önermenin ikinci versiyonunu bir 'eğer ... ise, o zaman ...' açısından inceleyelim.

> Eğer p bir asal ise, o zaman $x^{p-1} = 1 \bmod p$ verilmişti.

Bir matematikçi gibi düşünürseniz, o zaman otomatik sisteminiz hemen harekete geçmeli ve 'Tersi doğru mudur?' diye sormalısınız (16. Bölüme, Bir teorem nasıl okunur, bakın). Yanıt, hayırdır ve bir karşıt örnek bulmayı size bırakacağım. Onun yerine karşıt ters önermeyi göz önünde bulunduralım:

> Eğer $x^{p-1} \neq 1 \bmod p$ ise, o zaman p bir asal değildir.

Bu önermenin doğru olduğunu biliyoruz, çünkü doğru bir önermenin karşıt tersidir. Ama ne kadar işimize yarar? Asalların önemli olduklarını ve bir sayının asal olup olmadığını doğrulamanın bir yoluna sahip olmanın mükemmel olacağını biliyoruz. Ve karşıt ters önermenin bize sağladığı da budur.

Örnek 29.19

39 un asal olmadığını gösterin.

$x = 2$ alalım. O zaman $2^{38} \neq 1 \bmod 39$ olduğunu göstermek istiyoruz.

2^{38} i hesaplamak için 38 i bir başka biçimde tekrar yazıyoruz ve o biçimi hesaplamak için kullanıyoruz. Örneğin, $38 = 32 + 6 = (2^5) + 6$ ya da $38 = 36 + 2 = 6^2 + 2$, $2^{38} \bmod n$ ne ederse etsin, hesaplaması kolaydır.

$$\begin{aligned} 2^{38} &= 2^{36+2} \bmod 39 \\ &= (2^6)^6 2^2 \bmod 39 \end{aligned}$$

vardır. $2^6 \bmod 39 = 64 \bmod 39 = 25 \bmod 39$ hesaplaması açıktır. $25^2 = 625 \bmod 39 = 1 \bmod 39$ olup, $25^6 = (25^2)^3 \bmod 39 = 1^3 \bmod 39 = 1 \bmod 39$ bulunur.

Bundan $2^{38} \bmod 39 = (2^6)^6 2^2 \bmod 39 = (1 \times 4) \bmod 39 = 4 \bmod 39 \neq 1 \bmod 39$ türetiriz.

Kuşkusuz bu 39 un asal olup olmadığını belirlemenin kötü bir yoludur. Bununla birlikte, kuramsal çerçevede yararlı olabilir ya da aşağıdaki alıştırmadaki gibi asal-dışı kuşkusu olan büyük sayılar için iyi olabilir.

Alıştırma 29.20

(i) 66013 ün asal olmadığını gösterin.

(ii) Eğer x^{p-1}, 1 modulo p ise, o zaman p nin asal olduğunu sonuçlandırabilir miyiz?

Bölünebilirlik testleri

Daha önceki örneklerde gördüğümüz gibi, sayıların bölünebilirliğini araştırmak için modüler aritmetiği kullanabiliriz. Şimdi bunun başka örneklerini inceleyeceğiz. Aşa-

ğıdaki iki örnekte, herhangi bir sayının onun kuvvetlerinin katlarının toplamı olarak yazılabildiği olgusunu kullanıyoruz. Örneğin,

$$374 = (3 \times 100) + (7 \times 10) + 4 = (3 \times 10^2) + (7 \times 10) + 4.$$

Örnek 29.21

En az iki rakamlı bir tamsayı 4 e bölünebilirdir eğer ve ancak eğer son iki rakamdan oluşan sayı 4 e bölünebilirdir.

Bir x tamsayısı için b, x in son iki rakamını veren sayı olmak üzere $x = 100a + b$ ye sahibiz. Örneğin, $x = 83756 = (837 \times 100) + 56$ dır. O zaman

$$\begin{aligned} x \bmod 4 &= 100a + b \bmod 4 \\ &= (4 \times 25)a + b \bmod 4 \\ &= 4 \times 25 \times a \bmod 4 + b \bmod 4 \\ &= b \bmod 4 \end{aligned}$$

olur. Böylece x, 4 e bölünebilirdir eğer ve ancak eğer b, yani son iki rakam tarafından oluşturulan sayı, 4 e bölünebilirdir.

Örnek 29.22

Bir tamsayı 9 a bölünebilirdir eğer ve ancak eğer rakamlarının toplamı 9 a bölünebilirdir.

x tamsayısını ondalık biçimde yazabiliriz: $x = \sum_{i=0}^{\infty} a_i 10^i$; burada $0 \le a_i \le 9$ ve a_i, x in i_0 rakamını temsil eder. O zaman

$$\begin{aligned} x \bmod 9 &= \sum_i a_i 10^i \bmod 9 \\ &= \sum_i a_i 1^i \bmod 9, \text{ çünkü } 10 = 1 \bmod 9 \\ &= \sum_i a_i \bmod 9 \end{aligned}$$

dır.

Hesap makineleri öncesi bu çarpım ve toplamların yanıtlarının doğruluğunu kontrol etmek için bir yöntem sağlamada kullanılırdı. 'Dokuzların atılması' üzerine aşağıdaki alıştırmalara bakın.

Alıştırmalar

Alıştırmalar 29.23

(i) Kanıtlayın: Bir tamsayı 6 ya bölünebilirdir eğer ve ancak eğer 2 ve 3 e bölünebilirdir.

(ii) Kanıtlayın: Bir tamsayı 5 e bölünebilirdir eğer ve ancak eğer son rakamı 0 ya da 5 dir.

(iii) Kanıtlayın: Bir tamsayı 3 e bölünebilirdir eğer ve ancak eğer rakamlarının toplamı 3 e bölünebilirdir.

(iv) Aşağıdakileri kanıtlayın.
  (a) Eğer çift konumdaki rakamların toplamı ile tek konumdaki rakamların toplamı arasındaki fark 0 ya da 11 in katları ise, o zaman sayı 11 in bir katıdır.
  (b) Eğer çift sayıda rakamı varsa 11 dışındaki hiçbir asal bir palindrome değildir.

(v) Önceki alıştırmada kullanılan varsayımları ve sonuçları belirleyin. Hipotezler gevşetilebilir mi? Gevşetebilirse önermeleri kanıtlayın; aksi halde karşıt örnekler verin.

(vi) Teorem 29. 5 in kanıtını $k = 4m + r$ alarak, $n^2 = (4m + r)^2$ yi hesaplayarak ve sonra durumları ele alarak sadeleştirin.

(vii) Her $x \in \mathbb{Z}$ için $x^2 + 5x = 0 \bmod 4 \iff x^3 - 3x = 0 \bmod 4$ olduğunu kanıtlayın.

(viii) Her $x \in \mathbb{Z}$ için $x^3 = x \bmod 6$ olduğunu kanıtlayın.

(ix) Hesap makinelerinden önce 'dokuzların atılması' yöntemi hesaplamaların doğruluğunu kontrol etmenin bir yöntemi olarak öğretilirdi. Düşünce şu idi: x ve y nin toplamı ya da çarpımının doğruluğunu kontrol edebilirdik. x in rakamlarını toplarız ve eğer 9 elde edersek, o zaman onu göz ardı edebiliriz, yani onu atarız. Örneğin, $x = 2465981$ için 9 u göz ardı ederiz ve $8 + 1 = 9$ olduğu için 8 ve 1 i göz ardı edebiliriz, benzer şekilde 4 ve 5 i atabiliriz, böylece 2465981 $2 + 6 = 8$ e indirgenir. Genel olarak, bu sonuçlanan tamsayıya $s(x)$ deriz. O halde $s(2465981) = 8$ olur.
  (a) Tüm x tamsayıları için $s(x)$ in x modulo 9 a eşit olduğunu kanıtlayın.
  (b) Oradan $x + y = s(x) + s(y) \bmod 9$ ve $xy = s(x)s(y) \bmod 9$ olduğunu kanıtlayın.
  (c) Hesaplamalarımızın doğruluğunu kontrol etmek için bunu kullanabiliriz. Eğer $x + y \neq s(x) + s(y) \bmod 9$ a sahipsek, o zaman bir hata yapmışızdır. $x + y = s(x) + s(y) \bmod 9$ olması hesabın doğru olduğu anlamına gelir mi?

(x) n_1 ve n_2 aralarında asal 1 den büyük tamsayılar olsun. Kanıtlayın: a ve b tamsayıları için $ax = b \bmod n_1$ ve $ax = b \bmod n_2$ denklemleri birlikte bir $x \in \mathbb{Z}$ çözümüne sahiptir eğer ve ancak eğer $ax = b \bmod n_1 n_2$ nin bir çözümü vardır.

(xi) (a) Eğer $x = y \bmod n$ ise, o zaman her $k \in \mathbb{N}$ için $x^k = y^k \bmod n$ olduğunu kanıtlayın.
  (b) Her $n \in \mathbb{N}$ için $3^{4n+1} + 2^{8n+3} = 1 \bmod 5$ olduğunu kanıtlayın.
  (c) Her $n \in \mathbb{N}$ için $5^{3n} + 2^{n+1} = 0 \bmod 3$ olduğunu kanıtlayın.
  (d) Her $n \in \mathbb{N}$ için $2^{3n} + 6 = 0 \bmod 7$ olduğunu kanıtlayın.
  (e) Her $n \in \mathbb{N}$ için $6^{2n} - 3 \times 6^n + 3 = 1 \bmod 5$ olduğunu kanıtlayın.

(xii) Aşağıdakileri kanıtlayın ya da çürütün.
  (a) Her x ve y tamsayıları ve n doğal sayıları için eğer $xy = 0 \bmod n$ ise, o zaman $x = 0 \bmod n$ ya da $y = 0 \bmod n$ dir.
  (b) $n > 3$ doğal sayıları ve x tamsayıları için eğer $x^2 = 4 \bmod n$ ise, o zaman $x = 2 \bmod n$ dir.
  (c) Bir n doğal sayısı vardır öyle ki her x tamsayısı için eğer $x^2 = 4 \bmod n$ ise, o zaman $x = 2 \bmod n$ dir.

(xiii) 3 den büyük her asalın 1 aşağı 1 yukarı 6 nın bir katı olduğunu kanıtlayın.

(xiv) Her x ve y tamsayıları ve p asalları için $(x + y)^p = x^p + y^p$ olduğunu kanıtlayın.,

Özet

► Bir n doğal sayısıyla böldüğümüzde x ve y aynı kalana sahiplerse $x = y \bmod n$ dir.

- $x = y \bmod n$ dir. Eğer ve ancak eğer bazı $k \in \mathbb{Z}$ için $x - y = kn$ dir.
- Eğer $x = y \bmod n$ ve $y = s \bmod n$ ise, o zaman
  (i) $x + y = r + s \bmod n$,
  (ii) $x - y = r - s \bmod n$,
  (iii) $xy = rs \bmod n$
  dir.
- Fermat'ın Küçük Teoremi: p bir asal olsun. O zaman her x tamsayısı için $x^p = x \bmod p$ dir.

30. BÖLÜM

Bire-bir, örten, bire-bir örten ve bir parça sonsuzluk

Dinleyin, sonsuzlukta ölçüm yoktur. Siz insanlar,
küçük ve sınırlı akla sahipsiniz.
Doktor Who ve Mandrogora'nın Maskesindeki Doktor

Kümelerin matematiğin yapı blokları olduğunu gördük ve kümeler arasındaki fonksiyonlarla ilgili olarak az şey söyledik. Şimdi fonksiyonlara çok daha yakından bakacağız. $f: X \to Y$ fonksiyonları için bire-bir, örten ve bire-bir örten* fonksiyonları tanımlıyoruz. Bu tanımlar kümeleri karşılaştırmamıza olanak sağlarlar ve 1-1 fonksiyonların durumunda bir kümenin diğerinin elemanlarının tam olarak yeniden isimlendirilmeleri olup olmadığını söylememize izin verirler.

Bundan başka 1-1 lik kavramını kullanarak sonsuz kümelerin iki *farklı* tipini tanımlayacağız; $\mathbb{N}$ gibi elemanlarını sayabildiklerimiz ve $\mathbb{R}$ gibi sayamadıklarımız. Böylece sonsuzluğun iki tipine sahip oluyoruz!

Bire-bir fonksiyonlar

Tanım 30.1

Her $x_1 \in X, x_2 \in X$ için $x_1 \neq x_2, f(x_1) \neq f(x_2)$ yi gerektiriyorsa bir $f: X \to Y$ fonksiyonuna ***injektif*** *ya da* ***bire-bir***[1] *denir.*

Tanım, eğer X in iki elemanını alırsam o zaman f altındaki değerlerinin aynı olduğunu söyler eğer ve ancak eğer elemanlar aynıdır. İstemediğimiz, örneğin, $f(3) = f(5)$ olmasıdır. Bir injektif fonksiyon ve bir injektif olmayan fonksiyon Şekil 39.1 de verilmiştir.

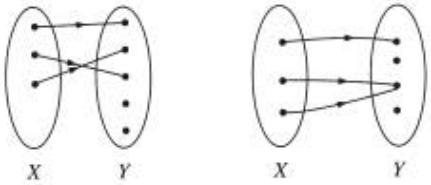
Uyarı 30.2

Pratikte, tanım yerine karşıt tersiyle çalışıyoruz:

Her $x_1 \in X, x_2 \in X$ için $f(x_1) = f(x_2), x_1 = x_2$ yi gerektiriyorsa bir . $f: X \to Y$ fonksiyonu injektiftir.

[1] Bire-bir ismi çok yanıltıcı olabilir, çünkü *herhangi* bir fonksiyon için X in bir elemanı Y nin bir elemanına gider. Meslektaşım Alan Slomson bire-bir fonksiyonlara ikiye-iki fonksiyonlar demenin daha iyi olacağını söyler, çünkü X in farklı iki elemanı Y nin farklı iki elemanına gitmek zorundadır.

* Bire-bir örten (bijective) fonksiyonu kısaca 1-1 fonksiyon olarak da yazacağız (ç.n.).



Şekil 30. 1 (i) İnjektif fonksiyon (ii) İnjektif olamayan fonksiyon

Bununla çalışmak kolaydır, çünkü $f(x_1) = f(x_2)$ varsayabilir ve neyi gösterdiğini doğrudan görmek için işlem yapabiliriz.

Örnek 30.3

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 5x - 3$ ile verilen fonksiyon injektiftir.
$f(x_1) = f(x_2)$ varsayalım; o zaman

$$\begin{aligned} & f(x_1) = f(x_2) \\ \Longrightarrow\ & 5x_1 - 3 = 5x_2 - 3 \\ \Longrightarrow\ & x_1 = x_2 \end{aligned}$$

olur. Böylece f injektiftir.

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ ile verilen fonksiyon injektif değildir.
(Bunu göstermek için tam olarak bir karşıt örnek yeterlidir.) $f(-1) = (-1)^2 = 1^2 = f(1)$ den bunun injektif olmadığını görürüz.

(iii) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ ile verilen fonksiyon injektif değildir. $f(x_1) = f(x_2)$ varsayalım, o zaman

$$\begin{aligned} & f(x_1) = f(x_2) \\ \Longrightarrow\ & x_1^2 = x_2^2 \\ \Longrightarrow\ & x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ \Longrightarrow\ & (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1 = x_2$ ya da $x_1 + x_2 = 0$ ı gerektirir. İlkinde f injektiftir. Sonuncusunda $x_1 = -x_2$ dir, ama $x_2 \in \mathbb{N}$ ise o zaman $x_1 \notin \mathbb{N}$ olur. Böylece sadece ilki geçerlidir.

Bu örneği öncekiyle karşılaştırmak dönüşüm için tanım kümesinin önemini gösterir. f yi tanımlayan formüle bakmakla yetinmemeliyiz.

(iv) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}, f(x) = x / (x - 1)$ verilsin. O zaman f injektifdir.
$f(x_1) = f(x_2)$ varsayalım, o zaman

$$\begin{aligned} & f(x_1) = f(x_2) \\ \Longrightarrow\ & \frac{x_1}{x_1 - 1} = \frac{x_2}{x_2 - 1} \\ \Longrightarrow\ & x_1(x_2 - 1) = x_2(x_1 - 1) \\ \Longrightarrow\ & x_1x_2 - x_1 = x_2x_1 - x_2 \\ \Longrightarrow\ & -x_1 = -x_2 \\ \Longrightarrow\ & x_1 = x_2 \end{aligned}$$

olur.

Bir fonksiyonun injektif olduğu nasıl gösterilir

Bir fonksiyonun injektif olduğunu göstermek kolaydır:

> $f(x_1) = f(x_2)$ varsayın. Sonra doğrudan gerektirmelerle $x_1 = x_2$ yi gösterin.

Örten fonksiyonlar

Tanım 30.4

Her $y \in Y$ için $f(x) = y$ olacak şekilde $x \in X$ varsa bir $f : X \to Y$ fonksiyonuna ***sürjektif*** *ya da* ***örten*** *denir.*

Bir örten fonksiyonun ve bir örten olmayan fonksiyonun taslak diagramı Şekil 30. 2 de verilmiştir.

Niceleyicilerden bildiğimiz üzere, biri bize Y den bir y verirse, o zaman $f(x) = y$ nin doğru olması için X de bir x bulmak zorundayız.

Örnekler 30.5

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$ ile verilen dönüşüm örtendir.

$y \in \mathbb{R}$ varsayalım. $f(x) = y$, yani $x^3 = y$ olmasını istiyoruz. Hemen $x = y^{1/3}$ alabiliriz. Bunu açık yazalım. $y \in \mathbb{R}$ varsayalım. O zaman $x = y^{1/3}$ olsun. $f(x) = f(y^{1/3}) = (y^{1/3})^3 = y$ elde ederiz. Böylece f örtendir.

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 5x - 3$ ile verilen fonksiyon örtendir.

Örtenlik tanımı bir varlıksal niceleyici içerdiğinden, her $y \in \mathbb{R}$ için $f(x) = y$ olması için bir x *bulmalıyız*. y nin verildiği bir denklemi çözmeye çalışacağız. O halde $5x - 3 = y$ olmasını sağlayan x i istiyoruz. Bu denklemi elbette x söz konusu olacak biçimde $x = (y + 3) / 5$ gibi yeniden düzenleyebiliriz. Bunu herkesin kullanımı için yazalım:

f fonksiyonu örtendir. $y \in \mathbb{R}$ varsayalım, o zaman $x = (y + 3) / 5$ olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{y+3}{5}\right) \\ &= 5\left(\frac{y+3}{5}\right) - 3 \\ &= y + 3 - 3 \\ &= y \end{aligned}$$

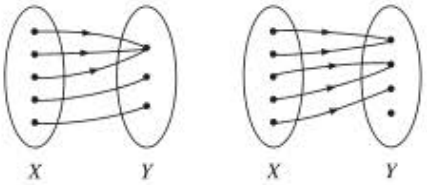
olur.

(iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ ile verilen dönüşüm örten değildir. $y = -1$ olsun, o zaman $f(x) = -1$ i sağlayan hiçbir x yoktur, çünkü bu $x^2 = -1$ olacak şekilde x in olmasını ister.

(iv) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ = \{z \in \mathbb{R} \mid z \geq 0\}, f(x) = x^2$ ile verilen dönüşüm örtendir.

Yine, $\{z \in \mathbb{R} \mid z \geq 0\}$ de y verildiğinde $x = y^2$ olacak şekilde x bulmalıyız. Ama y negatif olmadığı için $x = \sqrt{y}$ alabiliriz.

Bu örnek ve bir önceki örtenlikle çalışırken değer kümesinin örtenlik için ne kadar önemli olduğunu gösterir.



Şekil 30. 2 (i) Örten fonksiyon (ii) Örten olmayan fonksiyon

Bir fonksiyonun örten olduğu nasıl gösterilir

Bir fonksiyonun örten olduğunu göstermek kolaydır:

> y nin değer kümesinde olduğunu *varsayarız* ve sonra $f(x) = y$ olması için tanım kümesinde bir x in var olduğunu *gösteririz*. Bu denklemin çözümünü daha sonra yazılmış kanıtımızın başında kullanırız.

Uyarı 30.6

Bir fonksiyonun örten olduğunu 'kanıtlamak' için yapılan yaygın bir hata: $x \in X$ ise, o zaman $f(x) = y$ olacak şekilde bir $y \in Y$ olduğunu göstermektir. Yani X de bir eleman alırız ve Y de bir eleman buluruz. Bununla birlikte bu bir fonksiyon tanımıdır! Anımsayalım, örtenlik için Y den elemanlar almalıyız ve X de onlara uygulanan eleman bulmalıyız.

Fonksiyonların bileşkesi

Şimdi bir fonksiyonu bir başkasından sonra uyguladığımızda ne olduğunu araştıracağız.

Tanım 30.7

$f: X \to Y$ ve $g: Y \to Z$ fonksiyonları verilsin. O zaman f ve g nin $g \circ f$ ile gösterilen ***bileşkesi*** *X den Z ye $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ ile tanımlı dönüşümdür. Yani, önce f yi uyguluyoruz ve sonra g yi uyguluyoruz.*

Örnekler 30.8

(i) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 / x$ ile verilsin. $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ile verilsin. O zaman $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1 / x) = (1 / x)^2 = 1 / x^2$ olur.

(ii) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x + 1$ ile verilsin. $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x^2$ ile verilsin. O zaman $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ olur.

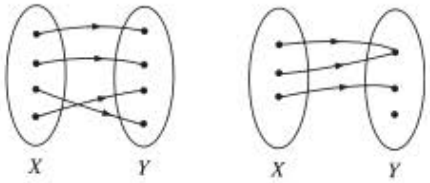
Uyarılar 30. 9

(i) Eğer $g \circ f$ tanımlı ise, $f \circ g$ tanımlıdır anlamına gelmez, çünkü f nin tanım kümesi g nin değer kümesinden farklı olabilir.

(ii) Eğer $g \circ f$ ve $f \circ g$ tanımlı ise, o zaman genel olarak $g \circ f \neq f \circ g$ dir.

Alıştırma 30.10

Önceki iki önermenin doğru olduğunu göstermek için örnekler verin.



Şekil 30. 3 (i) Bijektif fonksiyon (ii) Bijektif olmayan fonksiyon

Bire-bir örten fonksiyonlar

Bir nesne hakkında iki özellik, örneğin bire-bir ve örten, verildiğinde gerçek matematikçi, onları birleştirdiğimizde ne elde ettiğimizi sorar.

Tanım 30.11

Eğer f bire-bir ve örten ise $f: X \to Y$ fonksiyonuna **bijektif** (*ya da* ***bijeksiyon*** *ya da* ***1–1 eşleme***) *denir.*

Tanımı anlamanın anahtarı eşleme sözcüğünde yatar. Şöyle ki X ve Y nin elemanları tam olarak biri diğerine karşılık gelir.

Örnekler 30.12

(i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$ ile verilen dönüşüm bijektiftir. Önceki örneklerden hem bire-bir hem örten olduğunu biliyoruz.

(ii) Yine önceki örneklerden $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 5x - 3$ fonksiyonunun bire-bir ve örten olduğunu biliyoruz, o halde f bijektiftir.

(iii) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = x^2$ ile verilen dönüşüm injektiftir ama örten değildir (ve dolayısıyla bijektif değildir).

Alıştırmalar 30.13

(i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ dönüşümünün her $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, için bijektif olduğunu kanıtlayın.

(ii) Örten fakat bire-bir olmayan bir dönüşüm örneği verin.

Bir fonksiyonun bijektif olduğu nasıl gösterilir

Bir fonksiyonun bijektif olduğunu göstermek kolaydır:

Bire-bir ve örten olduğunu gösterin.

Ters fonksiyonlar

Bir $f: X \to Y$ bijektif fonksiyonunun ilginç bir özelliği tersi denilen Y den X e özel bir dönüşümün olmasıdır.

Tanım 30.14

Bir $f: X \to Y$ bijektif fonksiyonunun ***ters fonksiyonu*** *(ya da* ***ters dönüşümü****) $f^{-1}(y)$ X in $f(x) = y$ olacak şekilde tek x elemanı olarak verilen $f^{-1}: Y \to X$ dönüşümüdür.*

Bu tanımda örtenlik ve bire-birliği kullandığımızı kaydedin: bir $y \in Y$ elemanı için, dönüşüm örten olduğundan, $f(x) = y$ olacak şekilde bir x elemanının varlığını biliyoruz ve de bire-birlikten bu x in tek olduğunu biliyoruz.

Örnekler 30.15

(i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$ ile verilen örneği ele alalım. Ters fonksiyon $f^{-1}(y) = y^{1/3}$ dir.
(ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 5x - 3$ ün tersi $f^{-1}(y) = (y + 3)/5$ dir.

Bu iki örnekte görebildiğiniz gibi ters, x in $f(x) = y$ denkleminin konusu yapılarak elde edilir.

Alıştırmalar 30.16

(i) $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye dönüşümler olarak değerlendirildiğinde sin ve cos fonksiyonlarının injektif ve de örten olduklarını gösterin.
(ii) sin fonksiyonunu $[-\pi, \pi]$ tanım kümeli ve $[-1, 1]$ değer kümeli olarak kısıtlayalım. Yani, $\sin : [-\pi, \pi] \to [-1, 1]$. Bunun bir 1–1 eşleme olduğunu gösterin.
(iii) cos in bijektif olduğu bir tanım kümesi ve bir görüntü kümesi bulabilir misiniz?

Teorem 30.17

$f: X \to Y$ bijektif olsun.

(i) *$f^{-1} \circ f$, X üzerinde birim dönüşümdür, yani her $x \in X$ için $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ dir.*
(ii) *$f \circ f^{-1}$, Y üzerinde birim dönüşümdür, yani her $y \in Y$ için $(f \circ f^{-1})(y) = y$ dir.*

Alıştırma 30.18

Bu teoremi kanıtlayın.

Dikkat!

Matematikte notasyonlarla ilgili sorunlardan biri standart notasyonun bazen tutarsız oluşudur.

Trigonometrik notasyonla ilgili sorunlar

Mademki $[-\pi, \pi]$ kümesine kısıtlanan sin fonksiyonu $\sin : [-\pi, \pi] \to [-1, 1]$ bir bijektif fonksiyondur, o zaman bir tersi vardır. Uzlaşmamızı kullanarak f için tersi f^{-1} olduğundan, sin fonksiyonunun tersi $\sin^{-1}$ dir. Böylece x in ters değeri $\sin^{-1}(x)$ dir. (Bu arcsin olarak da bilinir.) Bununla birlikte, $(\sin(x))^2$ yi göstermek için $\sin^2(x)$ ve daha genel olarak $(\sin(x))^n$ yi göstermek için $\sin^n(x)$ kullanmak gelenektir. Eğer $n = -1$ ise o zaman

ne olur? Burada x in ters değerini gösteren $\sin^{-1}(x)$ e ve de $1 / \sin(x)$ ifadesine sahibiz. Dolayısıyla ikisini karıştırmaktan kaçınmak için böyle durumlarda dikkatli olmalıyız.

Öngörüntü kümesi ile ilgili sorunlar

Başka sorunlar kümelerle çalışırken notasyon olarak f^{-1} in kullanımında ortaya çıkar.

Tanım 30.19

$f: X \to Y$ bir fonksiyon ve S, Y nin bir alt kümesi olsun. O zaman S nin ***öngörüntüsü***

$$f^{-1}(S) = \{x \in X \mid f(x) = y \text{ ve } y \in S\}$$

ile tanımlı $f^{-1}(S)$ kümesidir.
Eğer S, Y nin tek bir elemanı ise, örneğin y, o zaman $f^{-1}(y)$ yazabiliriz.

$f^{-1}(S)$ nin bir küme olduğunu kaydedelim. O, X in bir alt kümesidir.

Örnek 30.20

(i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ ile verilen bir fonksiyon olsun.

(a) $S = \{5\}$ ise, o zaman $f^{-1}(S) = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$ dir.
(b) $S = \{-5\}$ ise, o zaman $f^{-1}(S) = \varnothing$ dir.
(c) $S = \{\varnothing\}$ ise, o zaman $f^{-1}(S) = \{\varnothing\}$ dir.
(d) $S = [1, 2]$ ise, o zaman $f^{-1}(S) = [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$ dir.
(e) $S = [0, 2]$ ise, o zaman $f^{-1}(S) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ dir.

(ii) $f, \sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ sinüs fonksiyonu olsun. O zaman $f^{-1}(0) = \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ dir.

Bir kümenin öngörüntüsünün tüm fonksiyonlar için tanımlandığını kaydedin; f nin bir bijeksiyon olması gerekmez.

f^{-1} bir fonksiyonu gösterebildiğinden ya da bir kümeyi göstermede kullanılabildiğinden, gene bir sorun vardır. Neyin istendiği, genelde, durumdan belli olacaktır. İyi bir gözlemci ve dikkatli olmanız gerekir.

Sonsuzluk tipleri – sayılabilir ve sayılamaz

1-1 eşlemeyi tanımladıktan sonra, sonsuzluğun farklı tiplerini artık tanımlayabiliriz. Temel düşünce sonsuzluğun farklı tiplerinin oluşudur: sayabildiğimiz sonsuzluklar ve sayamadığımız sonsuzluklar. Doğal sayılar (sayma sayıları) sayabildiğimiz sonsuz bir kümeye temel örnektir. Gerçel sayıların kümesi elemanlarını sayamadığımız için sonsuz bir kümeye örnektir.

Tanım 30.21

X kümesi ile $\mathbb{N}$ arasında bir bijeksiyon varsa, sonsuz bir X kümesinin ***sayılabilir çokluk-ta elemanı*** *vardır deriz. X e* ***sayılabilir*** *ya da* ***sayılabilir sonsuz*** *da deriz.*

Eğer X sayılabilir olmayan sonsuz bir küme ise, o zaman X ***sayılamazdır*** *ya da* ***sayılamaz sonsuzdur*** *deriz.*

Örnek 30.22

(i) Doğal sayılar açıkça sayılabilirdir, çünkü $id : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $id(n) = n$ ile verilen birim dönüşüm bir bijeksiyondur.

(ii) Çift sayıların kümesi sayılabilirdir. f: Çift $\to \mathbb{N}$, $f(x) = x / 2$ ile verilen dönüşüm bir 1-1 eşlemedir. Aynı şekilde tek sayıların kümesi sayılabilirdir. Kendiniz bijeksiyonu verebilirsiniz!

Çift sayıların kümesinin $\mathbb{N}$ nin bir öz alt kümesi olduğu ama onunla $\mathbb{N}$ arasında bir 1–1 eşleme bulabildiğimiz dikkatinizi çekmiştir. Bu tür tuhaf sezgi karşıtı davranış sonsuzlukla çalışırken çok yaygındır.

Alıştırmalar 30.23

(i) $\{1, 4, 16, 25, \ldots\}$ kare sayıların kümesinin sayılabilir olduğunu gösterin.

(ii) $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots, 1/n, \ldots\}$ kümesinin sayılabilir olduğunu gösterin.

Bir matematikçi gibi düşünmeye başlamalıyız ve sayılabilir başka kümeler ve başka sayılamayanlar bulmalıyız. Örneğin, $\mathbb{Z}$ sayılabilir mi? $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ nedeniyle ikisi arasında sezgimiz hiçbir 1–1 eşleme olmayabileceğini söyler gibidir. Şu (hatalı) argümanı işitmiştim: '$\mathbb{N}$ bir yönde sonsuz, yani pozitif iken $\mathbb{Z}$ iki yönde sonsuz, yani pozitif ve negatiftir, o halde eşit büyüklükte olamazlar.'

Aslında yapmamız gereken istenen 1–1 eşlemenin $\mathbb{Z}$ nin elemanlarını özel bir şekilde açıkça saymasıdır. Bu elemanları 0, 1, –1, 2, –2, 3, –3, 4, –4, … gibi listeliyoruz.

Alıştırmalar 30.24

(i) Bu saymayı veren 1–1 eşlemeyi açık bir şekilde bulun ve bir 1–1 eşleme olduğunu gösterin. (İpucu: n nin çift ya da tek olmasına bağlı olarak durumlu bir tanım kullanın.)

(ii) Kanıtlayın ya da çürütün: Eğer X sayılabilir ve $Y \subseteq X$ ise, o zaman Y sayılabilir sonsuzdur.

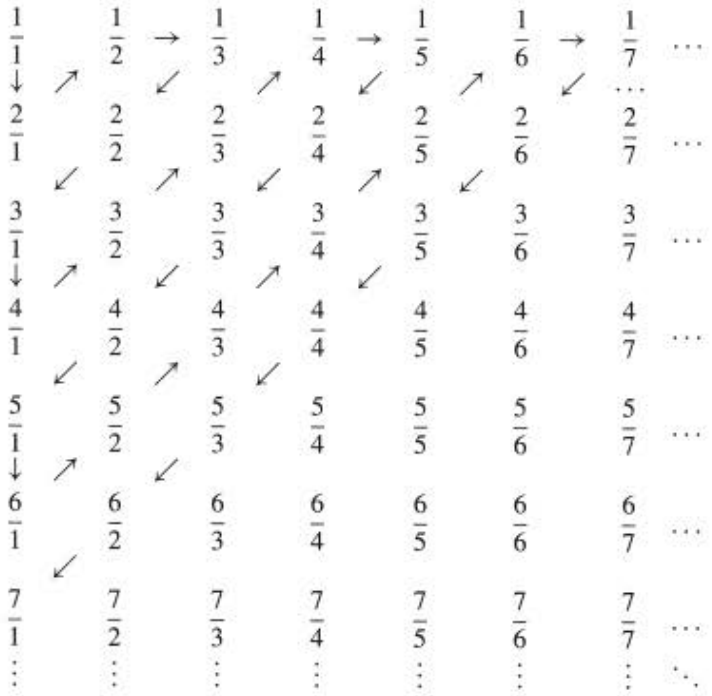
Rasyoneller sayılabilirdir

Pozitif rasyonel sayıların kümesi, $\mathbb{Q}$, nin sayılabilir olduğunu kanıtlamak biraz zordur. Başlangıçta, pozitif rasyonel sayıların sayılabilir olduğunu göstermek için kesirleri sıralamanın özel bir yolunu kullanma düşüncesinden yararlanacağız.

a / b nin tüm olasılıklarını Şekil 30. 4 deki gibi bir şebekede yazdığımızı düşünelim. Bu şekilde üzerinde tabi ki tüm rasyonel sayıların temsil edilmeleri gerekir. Bununla beraber, bazıları, örneğin 2 / 2, 1 / 1 ile aynıdır, iki kez temsil edilirler.

Düşünce tüm bu kesirlere bir sıra vermektir. Bu sıra oklarla betimlenir. 1 / 1 ile başlayalım, sonra 2 / 1 e inelim. Sonra üst satıra geri dönelim. Görebildiğiniz üzere, oklar bizim şebeke boyunca yılankavi hareket etmemize neden olur. Şebekedeki her sayıya uğramamız gerektiğini fark ediniz.

Şimdi bu ikililerle $\mathbb{N}$ arasında bir 1–1 eşlemeye sahip olduğumuz açıktır. Bazı kesirler aynı olsa da, yani yinelemeler olsa da, istediğimiz bu değildir. Ama sorun değildir. Ulaştığımızda tekrarı atalım. Bu bize doğal sayılarla pozitif rasyoneller arasında bir 1–1 eşleme verir. O halde her ikisi de sayılabilirdir. Onlar, aslında, aynı sonsuzluk büyüklüğündedir – her ne kadar doğal sayılardan daha çok pozitif rasyonel sayılar olduğu safça düşünülse bile.



Şekil 30. 4 Rasyonellerin bir şebekede sıralanması

Alıştırmalar 30.25

(i) Rasyonellerin kümesi, $\mathbb{Q}$, nin sayılabilir olduğunu kanıtlayın.

(ii) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nin sayılabilir olduğunu kanıtlayın.

Gerçeller sayılamazdır

Sayılamaz bir küme örneğine gereksinim duyuyoruz. İşleri kolaylaştırmak için 0 dan 1 e kadar olan gerçel sayıları alıyoruz. Bunun sonsuz olduğu açıktır, ama sayılabilir midir? Aslında, değildir.

Çelişkiyle bir kanıt yapıyoruz. $\mathbb{N}$ ile [0, 1] arasında bir 1–1 eşlemenin var olduğunu varsayalım. O zaman [0, 1] in elemanlarını listeleyebiliriz. Bunu x in $0.x_1x_2x_3x_4x_5\ldots$ olarak yazılabilmesi için ondalık açılımları kullanarak yapalım; burada x_i 0 dan 9 a kadar bir rakamdır.

[0, 1] in elemanlarını listelediğimizi varsayalım:

$$\begin{array}{llllllll}
0 & . & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \ \ldots \\
0 & . & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \ \ldots \\
0 & . & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \ \ldots \\
0 & . & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 \ \ldots \\
0 & . & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \ \ldots \\
0 & . & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 \ \ldots \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}$$

Şimdi [0, 1] den listede *olmayan* yeni bir rasyonel sayı oluşturalım. Ona x diyelim. x in ondalık noktasından sonraki ilk rakamı a_1 e ya da 9 a eşit *olmayan* herhangi bir rakam olsun. İkinci rakam b_2 ya da 9 a eşit *olmayan* herhangi bir şey olsun. Üçüncü rakam c_3 ya da 9 a eşit *olmayan* herhangi bir şey olsun. Ve saire. x in k. rakamını hep 9 dan başka herhangi bir şey ya da listenin k. elemanının k. rakamı alın.

x, $0.x_1x_2x_3x_4x_5\ldots$ biçimli olduğu için onun 0 ile 1 arasında olduğunu biliyoruz. O halde listede yer almalıdır. İlk rakamı a_1 den farklı olduğu için listenin ilk sayısı olamaz. İkinci rakamı b nin ikinci rakamına eşit olmadığı için listenin ikinci sayısı olamaz. Ve saire. k. rakamı listenin k. elemanının k. rakamından farklı olduğu için listenin k. elemanı olamaz. Böylece x in ondalık açılımı listede değildir. Üstelik 9 un tekrarlı bir ondalık olması durumunda, örneğin 0.24999999, 0.25000000 ve 0.99999 = 1 de olduğu gibi, x listedeki hiçbir şeye eşit değildir, çünkü x deki hiçbir rakam 9 a eşit değildir. Bu da [0, 1] in elemanlarını listeleyebildiğimizle çelişir.

Alıştırma 30.26

Önceki sonucu $\mathbb{R}$ nin sayılamaz olduğunu göstermek için kullanın.

Uyarılar 30.27

(i) [0, 1] in sayılamaz olduğu kanıtında, bir kümenin sayılamaz olduğunu kanıtlamak için sayılabilir olduğunu kabul etmek ve bir çelişki aramak iyi bir düşüncedir.

(ii) $\{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots, 1/n, \ldots\}$ sayılabilir kümesi sayılmaz [0, 1] kümesinin bir öz alt kümesidir; dolayısıyla bazı sonsuzlukların diğerlerinden daha büyük olduğunu söylemekle doğrulamış oluyoruz.

Alıştırmalar

Alıştırmalar 31.28

(i) Aşağıdaki fonksiyonların bire-bir, örten ya da bijektif olup olmadıklarını belirleyin. Bijektif olanların tersini açık olarak yazın.

(a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x + 1$.

(b) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = x^2 + x + 1$.

(c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$.

(d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1/x & x \neq 0 \text{ için} \\ 0 & x = 0 \text{ için.} \end{cases}$

(e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{3x-4}{x^2+5}$.

(f) $f: \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R} \setminus \{5\}$, $f(x) = \dfrac{5x}{x+2}$.

(g) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, f(x) = |x-3| + 3$.

(h) $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, f(x) = 2^x$.

(ii) Bir 1–1 eşleme olmayan yukarıdaki her bir $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dönüşümü için a ve b bulabilir misiniz ki her $x \in [a, b]$ için $f(x) = g(x)$ ile tanımlanan $f: [a, b] \to f([a, b])$ dönüşümü bir 1–1 eşleme olsun? Her bir g nin tersini belirleyin.

(iii) Tanımlı olduklarında aşağıdakiler için $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ ve $g \circ g$ bileşkelerini betimleyin.
(a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ için $f(x) = x^2$ ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ için $g(x) = x + 2$;
(b) $f: \mathbb{R} \to (0, 1)$ için $f(x) = 1 / (x^2 + 1)$ ve $g: (0, 1) \to (0, 1)$ için $g(x) = 1 - x$.

(iv) Aşağıdakilerin hangileri doğrudur? Doğru önermeler için bir kanıt ve yanlış olanlar için bir karşıt örnek verin.
(a) İki injektif fonksiyonun bileşkesi injektiftir.
(b) İki örten fonksiyonun bileşkesi örtendir.
(c) İki bijektif fonksiyonun bileşkesi bijektiftir.
(d) Bir injektif fonksiyonun ve bir örten fonksiyonun bileşkesi bijektiftir.

(v) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injektif olsunlar. Aşağıdakilere karşıt örnekler verin:
(a) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x)g(x)$ ile verilen fonksiyon injektiftir.
(b) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) + g(x)$ ile verilen fonksiyon injektiftir.
Örten fonksiyonlar için ne olur?

(vi) Teorem 30. 17 özünde 'f bijektif $\Longrightarrow$ belirli koşullar' idi, o halde tersinin doğru olup olmadığını sorabiliriz. Bu durumda, önce f^{-1} in ne olduğunu tanımlamadan koşulları yazamayız. Böylece bir 'eğer ve ancak eğer' önerme oluşturmanın olası bir yolu şudur:
'$f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. O zaman f bijektiftir eğer ve ancak eğer bir $g: Y \to X$ fonksiyonu vardır öyle ki
(a) $g \circ f$ X üzerinde birim dönüşümdür, yani her $x \in X$ için $(g \circ f)(x) = x$ dir ve
(b) $f \circ g$ Y üzerinde birim dönüşümdür, yani her $y \in Y$ için $(f \circ g)(y) = y$ dir
Bu durumda f için ters fonksiyon $g = f^{-1}$ dir?
Bu önermeyi kanıtlayın ya da çürütün.

(vii) $\log_e x: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ve $e^x: \mathbb{R} \to (0, \infty)$ fonksiyonlarını göz önüne alalım. Bunlar injektif, örten ya da bijektif midir?

(viii) A ve B sonsuz kümeler olsun. Aşağıdaki önermeleri kanıtlayın ya da bir karşıt örnek verin.
(a) A ve B ikisi de sayılabilir ise, o zaman $A \times B$ sayılabilirdir.
(b) A sayılabilir ve $B \subseteq A$ ise, o zaman B sayılabilirdir.
(c) A ve B sayılabilir ise, o zaman $A \cup B$ sayılabilirdir.
(d) A ve B sayılabilir ise, o zaman $A \cap B$ sayılabilirdir.
(e) $B \subseteq A$ ise, o zaman $A \setminus B$ sonludur.
(f) $B \subseteq A$ ise, o zaman $A \setminus B$ sonsuzdur.
(g) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ kümesi sayılamazdır. Yani, irrasyonel sayıların kümesi sayılamazdır.

Özet

- Bir $f: X \to Y$ fonksiyonu injektiftir eğer ve ancak eğer her $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ için $f(x_1) = f(x_2), x_1 = x_2$ yi gerektirir.
- f örtendir eğer her $x \in Y$ için $f(x) = y$ olacak şekilde $x \in X$ varsa.
- $f: X \to Y$ ve $g: Y \to Z$ nin bileşkesi $g \circ f$ ile gösterilen X den Z ye $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ ile tanımlı dönüşümdür.
- f injektif ve örten ise, o zaman f ye bijektif denir.

- f^{-1} in iki anlamı vardır! f nin ters fonksiyonudur ya da öngörüntü kümelerini tanımlamada kullanılır.
- X ile $\mathbb{N}$ arasında bir 1–1 eşleme varsa bir X sonsuz kümesi sayılabilirdir.
- Sayılabilir değilse bir X kümesi sayılamazdır.
- $\mathbb{N}$ ile $\mathbb{Q}$ sayılabilirdir.
- $[0,1]$ ve $\mathbb{R}$ sayılamazdır.

31. BÖLÜM

Denklik bağıntıları

Tüm hayvanlar eşittir, ancak bazı hayvanlar diğerlerinden daha eşittir.
George Orwell, *Hayvan Çiftliği,* 1946

Bu bölümde matematiğin nasıl soyut bir hal aldığını göreceğiz; yani, bir örnekte hoşumuza giden bir özelliği belirleyeceğiz ve sonra bu örneği içine alan ama daha geniş nesneler grubunu araştırmamıza izin veren genel bir tanım yapacağız. 29. Bölümde, Modüler Aritmetikte n ye bölündüğünde aynı kalana sahip iki sayının denk olduğu düşüncesini benimsemiştik. Şimdi denk olmanın ne anlama geldiği kavramını soyutlayacağız. Buna bir denklik bağıntısı diyeceğiz. Bir örnek olarak, bir iskambil kağıdı destesinde aynı dörtlüye ya da aynı değere sahip olan iki kağıda denktir, diyebiliriz.

Denklik bağıntısı kavramı, düşük-düzeyli matematikte geçmediği için anlaşılması zordur. Özel olarak çarpıcı bir konu denklik sınıfı kavramıdır. Bu tüm denk elemanları topladığımız yerdir ve ona tek bir nesne muamelesi yapılır. Örneğin, aynı dörtlüye sahip iki kartın denk olduğunu beyan edersek, o zaman Maça yedilisinin denklik sınıfı tüm maçalardan oluşur. Eğer denklik bağıntısını aynı değere sahip kartların denk oldukları şeklinde alırsak, o zaman Maça yedilisinin denklik sınıfı tüm yedilerdir: {Maça yedilisi, Kupa yedilisi, Sinek yedilisi, Karo yedilisi}.

Bu sınıfı uğraşılacak yeni bir nesne gibi ele almak, büyük bir olasılıkla, daha önce karşılaşılmayan bir şeydir ama kavradıktan sonra yeni ve heyecan verici grup kuramında ya da topolojide bölüm uzayları gibi matematiklere götürür.

Bağıntılar

Bir bağıntının sezgisel düşüncesi vermek kolaydır. Birçok örnek verebiliriz.

Örnek 31.1

(i) Eğer $x = y$ ise x sayısı y ile bağlantılıdır.
(ii) Eğer $x = y \bmod n$ ise x tamsayısı y tamsayısı ile bağlantılıdır.
(iii) Eğer $x \mid y$ ise x tamsayısı y tamsayısı ile bağlantılıdır.

(iv) Eğer A, B nin akrabası ise A kişisi B ile bağlantılıdır.
(v) Eğer $x < y$ ise x gerçel sayısı y gerçel sayısıyla bağlantılıdır.
(vi) Eğer $xy = 0$ ise x gerçel sayısı y gerçel sayısıyla bağlantılıdır.
(vii) Pazar günleri X den Y ye bir uçuş varsa X kenti Y kenti ile bağlantılıdır.

Tanımlayabildiğimiz birçok bağıntı vardır ama bir bağıntı kavramını matematiksel olarak nasıl tanımlarız? Tabi ki bir küme göz önüne alırız, örneğin tamsayıların, doğal sayıların, insanların ya da kentlerin bir kümesini ve onunla bir şey yaparız. Bu kümeye X diyelim. İki elemanını alırız, böylece gerçekte $X \times X$ ile çalışmış oluruz. Bunu bir bağıntının soyut tanımında görebiliriz.

Tanım 21.2

*X bir küme ve R, $X \times X$ çarpımının bir alt kümesi olsun. Eğer $(x, y) \in R$ ise x, R **bağıntısı** ile y ye bağlantılandırılmıştır deriz ve $x \sim y$ yazarız.*

Örnek 31.2

Kümemiz $X = \mathbb{Z}$ olsun ve $\sim$ bağıntısını 'eğer $x = y \bmod n$ ise x tamsayısı y tamsayısı ile bağlantılıdır' olarak alalım. O halde, örneğin $n = 5$ ise, o zaman $(2, 7) \in R$ ve $(101, 21) \in R$ dir ama $(3, 4) \notin R$ ve $(101, 20) \notin R$ olur.

Tanımda bağıntının R olduğu, $\sim$ olmadığına dikkat edin. Bununla birlikte, uygulamada R ye yapılan göndermeyi kaldırırız ve $\sim$ den X üzerine bir bağıntı olarak söz ederiz. Pratikte çoğu matematikçi bir bağıntıyı nadiren bir alt küme gibi düşünür!

Denklik bağıntıları

Matematikte çok önemli olan bir bağıntı tipine artık bakabiliriz.

Tanım 31.4

*Aşağıdaki üç koşul gerçeklendiğinde X üzerindeki bir $\sim$ bağıntısına bir **denklik bağıntısı** denir.*

(i) *Yansıma koşulu: her $x \in X$ için.*
(ii) *Simetri koşulu: her $x, y \in X$ için $x \sim y \Longrightarrow y \sim x$.*
(iii) *Geçişme koşulu: her $x, y, z \in X$ için $x \sim y$ ve $y \sim z \Longrightarrow x \sim z$.*

Böylece, bir bağıntı verildiğinde yapmamız gereken bu koşulların doğruluğunu kontrol etmektir. Niçin bunlar çalışılması uygun koşullardır? Yıllar boyunca matematikçiler bu üç koşulun yalın ve çok yaygın olduklarını ortaya çıkarmışlardır. Bundan başka, göreceğimiz üzere, onlar elemanları ayrık kümelere gruplamamıza olanak sağlamaktadırlar.

Örnek 31.5

n doğal sayısı için $\mathbb{Z}$ üzerinde $\sim$ bağıntısını

$$x \sim y \Longleftrightarrow x = y \bmod n$$

gibi tanımlayalım. Koşulların doğruluğunu kontrol edelim:

(i) Yansıma: $x \sim x \iff x = x \bmod n$. $x = x \bmod n$ her zaman doğru olduğu için $\sim$ nın yansımalı olduğunu görürüz.
(ii) Simetri: $x \sim y$, $x = y \bmod n$ yi gerektirir ve bunun da $y = x \bmod n$ yi gerektirdiğini biliyoruz; bu ise $y \sim x$ demek ister. O halde $\sim$ simetriktir.
(iii) Geçişme: $x \sim y$ ve $y \sim z$ varsayalım; o zaman $x = y \bmod n$ ve $y = z \bmod n$ olur. mod'un tanımından, yani tüm sayıların n ile bölümünden kalanı aynıdır, $z = z \bmod n$ ya da $x \sim z$ elde ederiz. Yani $\sim$ geçişkendir.

Koşulların üçü de sağlandı, o halde $\sim$ bir denklik bağıntısıdır.

Örnekler 31.6

(i) $x > x$ koşulu herhangi bir x için gerçeklenmediği için, o halde yansıyan olmadığı için, gerçel sayılar kümesi üzerinde $>$ bağıntısı bir denklik bağıntısı değildir.
(ii) Simetrik olmadığı için, örneğin $4 \geq 3$ iken $3 \geq 4$ olmaz, gerçel sayılar kümesi üzerinde $\geq$ bağıntısı bir denklik bağıntısı değildir.
(iii) 'A, B nin büyük babasıdır' bağıntısı geçişken değildir çünkü X, Y nin büyük babası ve Y, Z nin büyük babası ise, o zaman X, Z nin büyük babası olmak zorunda değildir.

Alıştırma 31.7

Aşağıdaki bağıntıların yansıyan, simetrik ya da geçişken olup olmadıklarını kararlaştırın. Hangilerinin denklik bağıntıları olduğunu bildirin.

(i) Eğer $x = y$ ise x gerçel sayısı y gerçel sayısıyla bağlantılıdır. (Bunun bir tanım olduğunu kaydedin, o halde kapalı olarak o bir 'eğer ve ancak eğer' dir, sadece bir 'eğer' değildir.)
(ii) Eğer $x < y$ ise x gerçel sayısı y gerçel sayısıyla bağlantılıdır.
(iii) Eğer $x \leq y$ ise x gerçel sayısı y gerçel sayısıyla bağlantılıdır.
(iv) Eğer $xy = 0$ ise x gerçel sayısı y gerçel sayısıyla bağlantılıdır.
(v) Eğer x, y nin bir akrabası ise $x \sim y$ dir.
(vi) Eğer $A \subset B$ ise A kümesi B ile bağlantılıdır.
(vii) Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $x - y$ bir tamsayı ise x, y ile bağlantılıdır.
(viii) $X = \mathbb{R}$ olsun. O zaman her $x, y \in \mathbb{R}$ için $|x - y| \leq 1$ ise $x \sim y$ dir.

Alıştırma 31.8

Her bir koşul yansıyan, simetri ve geçişme için bir koşulun geçerli ve diğer ikisinin geçerli olmadığı bir bağıntı örneği verin.

Sonra her bir koşul için koşulun geçersiz fakat diğer ikisinin geçerli olduğu bir bağıntı örneği verin.

Bir incelik

Yansıyan, simetri ve geçişme koşulları etrafında oynarsak, yansımalılığın sanki diğer ikisinden sonuçlandırılabildiği izlenimi doğar. Bunu görmek için bir bağıntı için simetri

ve geçişkenliğin geçerli olduğunu varsayalım. Eğer $x \sim y$ ise o zaman simetriden $y \sim x$ olur. Ama geçişkenlikten ($z = x$ kullanarak) $x \sim x$ yi türetebiliriz.

Böylece yansıma koşulu fazlalık gibidir. Ama değildir! Argümanın başlangıcına bir göz atalım. 'Eğer $x \sim y$ ...' diyor. Bu önemli bir eğer'dir! x in bir diğer farklı elemanla bağlantılı olduğunun hiçbir garantisi yoktur! (Ve buna kendisi de dahildir!) O halde akıl yürütme yanlıştır.

Önceki örnek simetri ve geçişken fakat yansıyan olmayan bir bağıntı istiyordu. Böyle bir bağıntı bu davranışa bir örnektir.

Denklik sınıfları

Denklik sınıfları kavramı matematikte çok önemlidir. O denk elemanları birlikte gruplandırmamıza izin verir; bunu bir sonraki kesimde göreceğiz.

Tanım 31.9

x in $\sim$ denklik bağıntısı altındaki $[x]$ ile gösterilen ***denklik sınıfı***

$$[x] = \{y \in X | y \sim x\}$$

kümesidir.

Örnekler 31.10

(i) Örnek 31. 5 de $\mathbb{Z}$ üzerinde bir denklik bağıntısı kurmak için modüler aritmetiği kullanabildiğimizi gördük. Denklik sınıfları şunlardır:

$$[0] = \{ \ldots, -3n, -2n, -n, 0, n, 2n, 3n, \ldots \}$$

$$[1] = \{ \ldots, -3n + 1, -2n + 1, -n + 1, 1, n + 1, 2n + 1, 3n + 1, \ldots \}$$

$$[2] = \{ \ldots, -3n + 2, -2n + 2, -n + 2, 2, n + 2, 2n + 2, 3n + 2, \ldots \}$$

$$[3] = \{ \ldots, -3n + 3, -2n + 3, -n + 3, 3, n + 3, 2n + 3, 3n + 3, \ldots \}$$

$$\vdots$$

$$[n-1] = \{ \ldots, -3 + (n-1), -2 + (n-1), -n + (n-1), n - 1, n + (n-1),$$
$$2n + (n-1), 3n + (n-1), \ldots \}$$
$$= \{ \ldots, -2n - 1, -n - 1, -1, n - 1, 2n - 1, 3n - 1, 4n - 1, \ldots \}$$

$$[n] = [0].$$

(ii) X iskambil kağıtlarının destesindeki kağıtların kümesi olsun. x ve y aynı dörtlüde ise $x \sim y$ olarak tanımlansın. O zaman dört farklı denklik sınıfı vardır: Maça, Kupa, Sinek ve Karolar.

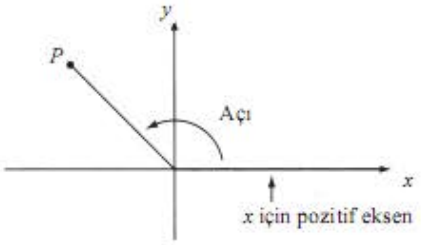
Yararlı uyarı 31.11

Bir denklik bağıntısı verildiğinde 'Denklik sınıflarının neye benzediklerini' sorun.

Alıştırma 31.12

$X = \mathbb{R}^2$ düzlem olsun. Aşağıdaki iki bağıntıyı göz önünde bulunduralım:

(i) Orijine uzaklıkları aynı ise $p_1 \in \mathbb{R}^2$ noktası, $p_2 \in \mathbb{R}^2$ noktası ile bağlantılıdır.



Şekil 31. 1 Bir nokta için açı

(ii) Bir p noktası için açısını; p den orijine çizilen doğru ile x ekseninin pozitif kısmı tarafından yapılan doğru arasındaki açı olarak tanımlıyoruz. Şekil 31. 1 e bakın. Açılar aynı ise $p_1 \in \mathbb{R}^2$ noktası $p_2 \in \mathbb{R}^2$ noktası ile bağlantılıdır.

Bunların denklik bağıntıları olduklarını gösterin. Denklik sınıfları nelerdir? Denklik sınıflarını temsil etmek için şekiller çizin.

Ayrışımlar

Şimdi denklik bağıntıları meselesini ele alacağız. Bu kesimde; bir denklik bağıntısının bir kümeyi, her bir kısmın farklı ve her bakımdan aynı elemanları içermesi için, böldüğünü göreceğiz. Örneğin, çiftçiler hayvanların tamamını aynı alana koymazlar. Alanı inekler bir kısımda, tavuklar bir kısımda, domuzlar bir diğerinde v.b. olacak şekilde bölerler. Bu yolla hayvanları idare etmek kolaylaşır. Bir kategori içinde, örneğin inekler farklı olacaktır: kendi isimleri ve şahsiyetleri olacaktır ama süt sağma zamanı geldiğinde her bakımdan aynıdırlar.

Bir denklik bağıntısının kullanımı bir kümeyi düzenlemenin çok güçlü bir yoludur. O bir kümeyi daha çok idare edilebilir parçalara böler. Tabi ki bir matematik probleminde doğru denklik bağıntısı seçilmelidir – örneğin, bir çiftçi hayvanlarını bacak sayısına göre ayırmaz.

X üzerindeki bir denklik bağıntısı için denklik sınıfları X i, denklik sınıflarının birleşiminin X olmasını için, böler. x ve y için denklik sınıfları ya ayrık ya da eşittir. O halde küme ayrık parçalara bölünür. Şekil 31.2 ye bakın.

Bunu matematiksel biçime sokalım.

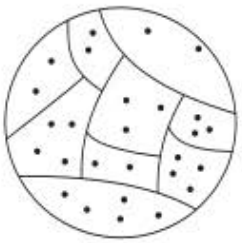
Teorem 31.13

$\sim$, X üzerinde tanımlı bir denklik bağıntısı olsun. O zaman

(i) $\bigcup_{x \in X} [x] = X$ *(denklemdeki notasyon her $x \in X$ için $[x]$ kümelerinin birleşiminin alındığını ifade eder.),*

(ii) $x \sim y$ *eğer ve ancak eğer* $[x] = [y]$,

(iii) $x \nsim y$ *eğer ve ancak eğer* $[x] \cap [y] = \varnothing$ *dır.*



Şekil 31. 2 Bir denklik bağıntısı için ayrışım

Kanıt. (i) $x \in X$ olsun. $x \sim x$ nedeniyle, $x \in [x]$, o halde $x \in \bigcup_{x \in X} [x]$ olur. Böylece $X \subseteq \bigcup_{x \in X} [x]$ bulunur. Ters kapsama, $\bigcup_{x \in X} [x] \subseteq X$, açıktır.

(i) $[\Longrightarrow]$ $x \sim y$ varsayalım. Eğer $z \in [x]$ ise, o zaman $z \sim x$ ve geçişkenlikten $z \sim y$ olur, böylece $z \in [y]$ elde edilir. Bu $[x] \subseteq [y]$ olduğunu gösterir. Ama eğer $x \sim y$ ise, o zaman simetriden $y \sim x$ dir; önceki benzer akıl yürütmeyle $[y] \subseteq [x]$ bulunur. O halde $[x] = [y]$ dir.

(ii) $[\Longleftarrow]$ $x \sim x$ olduğu için $x \in [x] = [y]$, o halde $x \sim y$ dir.

(iii) $[\Longrightarrow]$ $x \not\sim y$ olsun ve bir çelişki için $[x] \cap [y] \neq \varnothing$ varsayalım. $[x] \cap [y] \neq \varnothing$, $z \in [x]$ ve $z \in [y]$ şeklinde $z \in X$ olduğu anlamına gelir; başka bir deyişle, $z \sim x$ ve $z \sim y$ dir. Geçişkenlik özelliğinden $x \sim y$ olur. Bu bir çelişkidir

(iii) $[\Longleftarrow]$ $[x] \cap [y] = \varnothing$ olsun ve bir çelişki için $x \sim y$ varsayalım. $x \sim y$ nedeniyle $x \in [x]$ ve $x \in [y]$, dolayısıyla $x \in [x] \cap [y]$ olur. Bu bir çelişkidir. □

Uyarı 31.14

Teorem, $[x]$ ve $[y]$ kümelerinin boştan farklı ya da eşit ya da ayrık olduklarını gösterir.

Kanıtı, bu kez irdeleyerek gözden geçirelim.

Kanıt. *Önce kapsamlı varsayımımızın ~ nin bir denklik bağıntısı olduğunu, yani üç koşulu: yansıma, simetri ve geçişmeyi sağladığını kaydedelim. Kanıtı analiz ederken tüm bunların kullanıldığının doğruluğunu kontrol etmemiz gerekir. Doğru değillerse, o zaman varsayımı ~ nin örneğin yansıyan ve simetrik olmasına zayıflatabiliriz.*

(i) nin analizi:

$x \in X$ olsun.	*İki kümenin eşit olduğunu göstermeye çalışmak, o halde elemanlar düzeyinde olacaktır.*
$x \sim y$ nedeniyle,	*Yansıma özelliği kullanılmıştır! O halde varsayımın bir kısmı kullanılmıştır.*
$x \in [x]$ dir,	*Denklik sınıfının tanımı kullanılmıştır.*
o halde $x \in \bigcup_{x \in X} [x]$ olur. Böylece $X \subseteq \bigcup_{x \in X} [x]$ dir.	*Gerçekte A ve B kümelerinin eşit olduğunu göstermeye çalışıyoruz; o nedenle problem $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ gibi ikiye bölünmüştür; 20. Bölüme bakın. İlkini elemanlar düzeyinde çalışarak hemen gösterdik. İkincisinin gösterilmesi gerekir!*

Ters kapsama, $\bigcup_{x\in X}[x]\subseteq X$ açıktır.

Yazara göre bu aşikardır! Bir noktada doğruluğunu kontrol etmeniz gerekecek.

(ii) nin analizi:

$[\Longrightarrow]$

Bu bir 'eğer ve ancak eğer' dir, o halde iki parçaya bölünür, 'ancak eğer' önce gelir. Yani, $x\sim y\Longrightarrow [x]=[y]$. Varsayım $x\sim y$ dir; onun kullanıldığının doğruluğunu kontrol etmeniz gerekecek.

$x\sim y$ varsayalım.

Varsayımın kullanıldığına benziyor. Ama öyle değildir. Yazar sadece varsayımın kullanıldığını söylemektedir.

Eğer $z\in[x]$ ise, o zaman $z\sim x$ ve geçişme özelliği dolayısıyla $z\sim y$ dir,

Denklik sınıfının tanımı kullanılmıştır. Oh, tam burada $x\sim y$ varsayımını kullanıyoruz. Ve geçişme koşulunu da kullanıyoruz!

böylece $z\in[y]$ olur. Bu $[x]\subseteq[y]$ yi gösterir.

Denklik sınıf tanımı yine kullanılmıştır. Aha, '$A\subseteq B$ ve $B\subseteq A$, $A=B$ yi verir' hilesinin tekrar kullanımı. Bir kapsama elde edildi, diğerine ihtiyaç var!

Ama $x\sim y$ ise, o zaman simetriden $y\sim x$ olur ve öncekine benzer akıl yürütmeyle $[y]\subseteq[x]$ bulunur. O halde $[x]=[y]$ dir.

Simetri koşulu kullanılmıştır, böylece denklik bağıntısı için tüm koşullar kullanılmıştır. Bunun doğru olduğunu kontrol etmeniz gerekecek.
Sorun yok gibidir.
$x\sim y$ kabulünden istediğimiz sonuç elde edilmiştir.

(ii) $[\Longleftarrow]$

$x\sim x$ nedeniyle $x\in[x]=[y]$ olur,

Yine yansımalığı kullanıyor. İki düşünceyi birden kullanıyor. Bir denklik sınıfı tanımını, yani $x\in[x]$ olduğunu, kullanıyor ve sonra $\Longleftarrow$ önermesindeki kabülü, yani $[x]=[y]$, kullanıyor.

o halde $x\sim y$ dir.

$x\in[y]\Longrightarrow x\sim y$ yi kullanarak istediğimiz sonuç elde edilmiştir.

(iii) nin analizi:

(iii) $[\Longrightarrow]$

Yine (iii) *bir 'eğer ve ancak eğer' dir, o halde iki parçaya bölünür.*

$x\not\sim y$ olsun ve bir çelişki için $[x]\cap[y]\neq\varnothing$ varsayalım. $[x]\cap[y]\neq\varnothing$ den $z\in[x]$ ve $z\in[y]$ şeklinde $z\in X$ vardır,

Çelişkiyle kanıt kullanıyor, o halde 'ancak eğer' için sonucu yanlış kabul ediyor. Akla yatkındır, çünkü onu bir çelişki için kabul ediyoruz.

başka bir deyişle, $z \sim x$ ve $z \sim y$ dir. Geçişkenlik özelliğinden $x \sim y$ olur. Bu bir çelişkidir.	*Yine kullanılmıştır! Kabullerimizin biri* $x \not\sim y$ *idi.*
(iii) [$\Longleftarrow$] $[x] \cap [y] = \varnothing$ olsun ve bir çelişki için $x \sim y$ varsayalım. $x \sim y$ nedeniyle $x \in [x]$ ve $x \in [y]$ olur,	*Bir diğer çelişkiyle kanıt! Denklik bağıntısının tanımını kullanıyor.*
böylece $x \in [x] \cap [y]$ olur. Bu bir çelişkidir.	*Arakesitin boş olduğunu kabul etmiştik.*

□

Bu kanıt incelememiz, ~ nin bir denklik bağıntısı olduğu varsayımını kullandığımızı gösterir. O halde bu iyidir. Önermeyi zayıflatırsak, doğru olacağı anlamına gelmez. Bu düşünce 33. Bölümde tartışılacaktır. Mesele şudur: *kanıtımız* üç koşulu kullanmıştır. Bu kanıtı birilerinin koşullardan sadece birini ya da ikisini kullanarak yapmış olabileceğini nasıl bilebiliriz? Göstermemiz gereken şudur: üç koşuldan herhangi birini kaldırırsak, teoremin sonuçlarına karşıt örnekler vardır.

Alıştırma 31.15

Bu karşıt örnekleri bulun!

Teorem şöyleydi: Eğer bir denklik bağıntımız varsa, o zaman kümeyi parçalara bölmenin bir yöntemine sahibiz öyle ki kümenin tanımı bu parçalardan oluşsun ve bu parçalar ayrık olsun. Elbette bir matematikçi gibi düşünebilir ve tersinin doğru olup olmadığını sorabiliriz.

O halde soruyoruz: 'Eğer kümeyi bölmenin bir yoluna sahipsek, o zaman bir denklik bağıntısı elde edebilir miyiz?' Evet, elde edebiliriz. Önce kümeyi bölmekten neyi anladığımızı tanımlamamız gerekiyor.

Her şeyden önce, kümelerin sayılabilir bir koleksiyonu için, kümeleri göstermek için, $X_1, X_2, X_3, \ldots$ notasyonunu kullanabildiğimizi kaydedelim. Bununla birlikte, bir koleksiyon sayılamaz bir küme tarafından indislenebilir. $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $X_a = [-a, a]$ diyelim. $\mathbb{R}$ sayılamaz olduğu için bu kümeler koleksiyonu sayılamazdır. Her ikisi için ihtiyacı sağlamak amacıyla, $\lambda \in I$ ve I bir küme olmak üzere, bir koleksiyonu X_λ kümelerini alarak indisleyebiliriz. Örneğin, I, $\mathbb{N}$ ya da $\mathbb{R}$ ya da $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ olabilir.

Tanım 31.16

X bir küme olsun. Bir I kümesi için $\lambda \in I$ olmak üzere X_λ alt kümelerinin bir koleksiyonu olsun öyle ki

(i) $\bigcup_{\lambda \in X} X_\lambda = X$,

(ii) $X_\lambda = X_\mu$ *eğer ve ancak eğer* $\lambda = \mu$,

(iii) $X_\lambda \cap X_\mu = \varnothing$ *eğer ve ancak eğer* $\lambda \neq \mu$

sağlasın. Kümeler koleksiyonuna X in bir ***ayrışımı*** *denir.*

Örnek 31.17

Bir denklik bağıntısı için denklik sınıflarının kümesi bir ayrışımdır. Bu $X_x = [x]$ ve $I = X$ alınarak Teorem 31. 13 den elde edilir.

Şimdi Teorem 31.13 ün tersini elde edelim. Yani bir ayrışım verildiğinde, bir denklik bağıntısı tanımlayalım.

Alıştırma 31.18

X in $\{ X_\lambda \}_{\lambda \in I}$ tarafından ayrıştırıldığını varsayalım. ~ bağıntısını, $x \sim y$ eğer bir μ için $x \in X_\mu$, $y \in X_\mu$ yü gerektiriyorsa şeklinde tanımlayalım. Bunun bir denklik bağıntısı olduğunu kanıtlayın.

Göstermiş olduğumuz şudur: Bir küme üzerinde bir denklik bağıntısı koymak bir ayrışımın verilmesine – ve tersine – denktir. Denklik bağıntıları hakkında nasıl düşündüğüm işte budur. Kümeyi parçalara bölüyoruz – denklik sınıflarına – ve bu sınıflarla matematik yapıyoruz.

Denklik bağıntılarının bütün düşüncesi kümeyi ayrıştırabilmemiz ve sadece denklik sınıflarına yoğunlaşmamıza yöneliktir; elemanları tek bir pakete sarıp sarmalıyoruz.

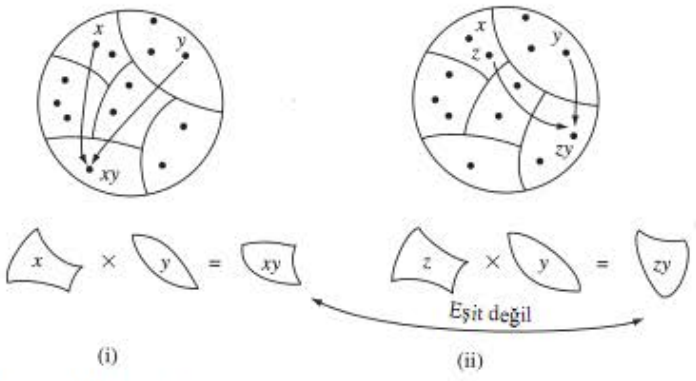
Modüler aritmetik

Örnek 31. 15 de $x \sim y \iff x = y \bmod n$ nin bir denklik bağıntısı olduğunu gördük ve Örnekler 31. 10 da denklik sınıflarının [0], [1], [2], …, [n – 1] olduklarını gördük. Denklik sınıflarının bu kümesi $\mathbb{Z}_n$ ile gösterilir.

Şimdi sınıflar üzerinde aşağıdaki gibi aritmetik tanımlayabiliriz:

$$[x] + [y] = [x + y],$$
$$[x] \,.\, [y] = [xy]$$

olsun. Yaptığımız tamsayılar kümesi üzerinde değil, denklik sınıflarının kümesi üzerinde aritmetik tanımlamaktır. [x] ve [y] denklik sınıflarını, çarpımı xy nin denklik sınıfı olarak tanımlayarak çarptığımızı söylüyoruz. Şekil 31.3 (i) ye bakın.



Şekil 31.3 Sınıfların çarpımı

Örnekler 31.19

(i) $\mathbb{Z}_7$ de $[3] \,.\, [5] = [3 \times 5] = [15] = [1]$ olur.
(ii) $\mathbb{Z}_8$ de $[6] + [7] = [6 + 7] = [13] = [5]$ olur.

Şimdi matematikte çok derin bir düşünceyi ele alacağız. *Sınıfları* çarpmak istiyoruz ama tanımımız sınıflara değil, X deki *elemanlara* bağlı idi. Örneğin, istediğimiz şudur: eğer $[x] = [z]$ ise, o zaman $[z] \,.\, [y] = [x] \,.\, [y]$ dir. Sonuçlanan sınıfın sınıftan aldığımız özel elemana bağlı olmasını istemiyoruz. Örneğin, mod 5 ile çalışırken [1] ya da [6] almışız, buna bağlı olmamalıdır. $x \sim y$ ama $xy \not\sim zy$ olduğu kesinlikle mümkündür, Şekil 31.3 (ii) ye bakın.

Teorem 31.20

Eğer $[x] = [u]$ *ve* $[y] = [v]$ *ise, o zaman* $[u] \cdot [v] = [x] \cdot [y]$ *dir.*

Kanıt. $x \sim u$ ve $y \sim v$ varsayalım. O zaman $xy \sim uv$ olduğunu göstermeliyiz.

Şimdi $x \sim u \iff$ bir $k_1 \in \mathbb{Z}$ için tanımdan $x = k_1 n + u$ ve benzer şekilde $y \sim v \iff$ bir $k_2 \in \mathbb{Z}$ için tanımdan $y = k_2 n + v$ dir. O zaman

$$\begin{aligned} xy &= (k_1 n + u)(k_2 n + v) \\ &= k_1 k_2 n^2 + k_1 n v + u k_2 n + uv \\ &= (k_1 k_2 n + k_1 v + k_2 u) n + uv \end{aligned}$$

dır. O halde $xy \sim uv$ elde edilir. □

Başka bir deyişle, çarpımın tanımı, sınıfların hangi elemanlarını kullandığımıza bağlı değildir.

Tanım 31.21

Bir denklik sınıfını temsil etmek için kullanılan bir elemana sınıfın bir ***temsilcisi*** *denir.*

Tanım 31.22

Sınıflar üzerinde sınıfların elemanlarını kullanarak tanımlanmış bir işleme sahip olduğumuzu varsayalım. Eğer tanım temsilcilere bağlı değilse işleme ***iyi-tanımlı*** *dır, deriz.*

Örnek 31.23

Önceki teoreme göre sınıfların çarpımı iyi-tanımlıdır.

Alıştırma 31.24

Sınıfların toplamını $[x] + [y] = [x + y]$ ile tanımlayalım. Bunun iyi-tanımlı olduğunu gösterin.

Alıştırmalar

Alıştırmalar 31.25

(i) X üzerindeki aşağıdaki bağıntıların için yansıyan, simetrik ya da geçişken olup olmadıklarını belirleyin. Denklik bağıntıları olup olmadıklarını söyleyin ve denklik bağıntıları ise denklik sınıflarını betimleyin.

(a) $X = \mathbb{Z}$ ve $x \sim y \iff x \sim y$ çift olsun.
(b) $X = \mathbb{Z}$ ve $x \sim y \iff x \sim y$ tek olsun.
(c) $X = \mathbb{R}$ ve $x \sim y \iff xy = 0$ olsun.
(d) $X = \mathbb{R}$ ve $x \sim y \iff xy \neq 0$ olsun.
(e) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ve $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1 = x_2$ olsun.
(f) $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ve $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1 y_1 = x_2 y_2$ olsun.
(g) $X = \mathbb{R}$ ve $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$ olsun.
(h) $X = \mathbb{Z}$ ve $x \sim y \iff 5 \mid (x + 3y)$ olsun.
(i) $X = \mathbb{Z}$ ve $x \sim y \iff \text{Int}(x) = \text{Int}(y)$ olsun, burada $\text{Int}(x)$, $\text{Int}(x) \leq x$ olacak şekilde en büyük tamsayıdır.
(j) $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ve $(a, b) \sim (c, d) \iff (a - c)(b - d) = 0$ olsun.
(k) $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ve $(a, b) \sim (c, d) \iff (a - d)(b - c) = 0$ olsun.

(ii) Aşağıdaki sınıflardan hangilerinin (a) $\mathbb{Z}_6$ ve (b) $\mathbb{Z}_9$ da eşit olduklarını belirleyin.
$[-114]$, $[-3]$, $[-1]$, $[0]$, $[1]$, $[3]$, $[6]$, $[8]$, $[9]$, $[12]$, $[15]$, $[17]$, $[27]$, $[45]$.

(iii) $m \in \mathbb{N}$ için bir $f: \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m$ fonksiyonunu $f([x]) = [x + x^2]$ ile tanımlayalım. f nin iyi- tanımlı olduğunu gösterin.

(iv) Aşağıdakilerin iyi-tanımlı olup olmadıklarını belirleyin:
(a) $f: \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_6, f([x]) = [2x]$.
(b) $f: \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_9, f([x]) = [x^2]$
(c) $f: \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_m, f([x]) = [ax + b]$, $a, b \in \mathbb{Z}_m$.

Özet

- Bir X kümesi üzerinde bir bağıntı $X \times X$ in bir R altkümesidir. Eğer $(x, y) \in R$ ise $x \in X$ elemanı $y \in X$ ye bağlantılıdır ve $x \sim y$ ile gösterilir.
- Bir denklik bağıntısı aşağıdakileri sağlayan bir bağıntıdır:
  (i) yansıyan, $x \sim x$,
  (ii) simetrik, $x \sim y \Longrightarrow y \sim x$,
  (iii) geçişken, $x \sim y$ ve $y \sim z \Longrightarrow x \sim z$.
- x in denklik sınıfı $[x] = \{ y \in X : y \sim x \}$ dir.
- Bir denklik bağıntısı bir kümeyi ayrık parçalara ayrıştırır: denklik sınıflarına.
- Sınıflar üzerinde temsilcileri kullanarak işlemler tanımlayabiliriz, ama işlemin iyi-tanımlı olduğunu kontrol etmek zorundayız.

Kapanış uyarıları

32. BÖLÜM

Tümünü bir araya getirmek

Yaşamda gözlediklerini düzenli ve gerçek olarak araştırma yeteneği dışında, hiçbir şey aklının sınırlarını geliştirme gücüne sahip değildir.
Marcus Aurelius, *Derin düşünmeler*

Bu kitabın önceki beş kısmında hazmedilecek çok şey vardır ve her bir kısım bir matematikçi gibi düşünmenin farklı bir yoluna yoğunlaşır. Tümünü bir araya getirmek ve uygulamak gerçekte zaman ve beceri ister. Bir matematikçi gibi düşünmek kolay değildir; her ne kadar bir çok teknik verilmiş olsa da izlenecek hiçbir kurallar takımı yoktur. Matematik yapmak bilimden ziyade bir sanattır.

O nedenle bu bölümde, önceki bölümlerden bazı ilginç konular seçeceğim ve yöntemleri nasıl birleştirebildiğimizi göreceğim.

Başlamış olmak

Bir matematik problemi için en büyük engel başlama işidir. Öğrencilerime haftalık alıştırmalar veririm ve bir öğrenci '*X* sorusuna takıldım' dediğinde genel tepkim 'Pekala, oraya kadar ne yaptın' olur. Sıklıkla yanıtı 'Hiçbir şey. Başlayamıyorum. Nereden başlayacağımı bile bilmiyorum' olur.

Yardımcı Çalışma türü kitapların çoğundaki öğüt önceki çalışılmış örnekleri aramak yönündedir. Bununla birlikte, öğrencilerimin bu hatırlatmaya ihtiyacı yoktur, çünkü benzer bir problem için notlarına bakmışlardır. Aslında bu çalışma kitabı öğüdü güçlüklerinin *nedeni* olabilir.

Çoğu zaman yüksek-düzeyli matematiğe başlayan öğrenciler, bir önermeyi basit bir sonuç olarak türetebildikleri örnek ya da teorem ararlar. Maalesef, matematiksel düşünme ona benzemez.

Bunu aklınızda tutarak, başlayabilmek için bazı tekniklere bakalım. (Sorudaki tüm sözcükleri anlamama gibi aşikar sorunları bir kenara bırakacağız!)

Örneklerle oynayın

Özel bir problem hakkında *hiçbir şey* söylememeniz nadiren olur. Problemle bağlantılı olarak yapabildiğimiz bazı çıkarımlar ya da örnekler olabilir. O nedenle, başlayabilmenin ilk tekniği örneklerle oynamaktır. Bu genelde bazı aydınlatmalar sağlar. Bir şekilde

sadece bazı örneklerle oynamak problemi daha iyi anlamamıza olanak verir. Bunun niçin çalıştığından pek emin değilim. Belki de, çözmeksizin soruyla içli dışlı olmanızı zorlamaktadır.

Teorem 20. 2 yi ele alalım: 'A ve B sonlu kümeler olsun. O zaman $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ dir' olduğunu anımsayabilirsiniz. Bu teoremin kanıtı daha önce verilmişti, ama verilmemiş olduğunu varsayalım. Çok hızlı bir şekilde bazı örneklerle oynamak, eşitliğin niçin geçerli olduğunu gösterir ve sonra kanıt yöntemi çabucak açıklık kazanır.

Eğer bir önerme sonsuz kümeler kapsıyorsa, o zaman $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{R}$ gibi özel küme örnekleri için ne olduğunu görün. Bu tür alıştırma yapmak beyninizin matematik kısmını harekete geçirir ve problem üzerine çalıştırır.

Parçalara bölün – küçük parçaları alın

Bazı öğrencilerin harekete geçmekte çektiği zorluk nedenlerinden biri şudur: 'büyük parça' yaklaşımını seçerler. Onlar soruyu yanıtlayacak tek bir algoritma / hesaplama / formül / teorem olduğu beklentisi içindedirler. Küçük parçaları ele almaları ve algoritmaların, hesaplamaların, formüllerin ve teoremlerin bir koleksiyonunu kullanmaları gerektiğini görmezler.

O halde yol gösterici bir ilke bir problemi daha küçük problemlere ayırmak olmalıdır. Örneğin, '$A \iff B$ yi kanıtlayın' verildiğinde, bu sonuca sahip bir teorem aramayın ya da B ye ulaşmak umuduyla $A \iff C$, $C \iff D$, v.s. biçimli bir liste oluşturmaya kalkışmayın. Onun yerine $A \Longrightarrow B$ yi ve sonra $B \Longrightarrow A$ yı kanıtlayın. Bunu birçok kez gördük. Teorem 29. 6 ve Teorem 31. 13 (iii) ün kanıtları bunun örnekleridir.

Aynısı A ve B kümeleri için $A = B$ yi gösterirken geçerlidir. Burada beklentimiz, $A = C = D = \cdots = Z = B$ eşitliklerinin bir zincirinin olmasıdır ki olabilir; Örnek 20.11 e bakın.

Parça-büyüklüklü yöntem $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ yı göstermektir. Bu Teorem 31. 13 (i) ve (ii) şıklarının kanıtlarında görülebilir. Ve $A \subseteq B$ olduğunu nasıl gösteririz? Elemanlar düzeyine ineriz, $x \in A$ alırız ve $x \in B$ olduğunu gösteririz; örneğin Teorem 20. 9 a bakın.

Bu gibi parçalara ayrılan bir problemin çözümü daha kolaydır, hatta problem sayısını katlamış gibi olsak bile! Bu yöntemin bir üstünlüğü bir kısmı kanıtlamanın sonlandırma duygusu yaratmasıdır, o nedenle buraya kadar ne yaptığınız sorulduğunda 'Pekala $A \Longrightarrow B$ yi kanıtlayabiliyorum, ama öbür yönü gösteremiyorum' diyebilirsiniz.

Problemi değiştirin

Başlayabilmenin üçüncü yöntemi problemi değiştirmektir. Yaptığımız özelleştirmek ve genelleştirmektir. Bu iki yöntem o kadar önemlidir ki kendilerine bir bölüm, 33. Bölüm, ayrılmıştır.

Şimdilik problem değiştirmenin iyi bir örneği 99. sayfadaki Bölüm Lemmasının genel versiyonudur. Kabulümüz y nin sıfırdan farklı bir tamsayı oluşu idi. Bununla birlikte, kanıtın büyük kısmı farklı bir önermenin kanıtlanması ile ilgiliydi: y nin bir *pozitif* tamsayı olduğu kanıt. Kanıtın bu kısmı yapıldıktan sonra ayrı ve daha kısa bir argüman

y nin negatif durumunu ele alıyordu. Bu yöntem defalarca kullanılabilir. Eğer önerme tamsayılar diyor ise doğal sayıları kullanmak daha kolay olabilir. Daha genel olarak, daha büyük bir nesneler sınıfına kısıtlama yapılabilir ve onları araştırabiliriz. Mesele şudur: soruyu değiştirmekle en azından bir şeyler yapabiliriz.

Daha yüksek bir düzeye ulaşmak

Başlayabilmiş olmak elbette çok önemlidir. Ama soruları yanıtlamanın ötesine nasıl gidebilirsiniz ve gerçekten bir matematikçi gibi düşünmeyi nasıl elde edebilirsiniz? Haydi bazı teknikler görelim.

Soruyu ters çevirin – kendi örneklerinizi oluşturun

Gerçek bir matematikçi kendi öz örneklerini ortaya atar.

Burada, daha önceki bölümlerde önerildiği gibi tanımların ve teoremlerin örneklerini bulmak demek istemiyorum. Ne demek istediğimin bir örneği kalkülüste verilir. Fonksiyonların maksimum ve minimumlarını bulmak kalkülüste bir temel araştırmadır: size bir fonksiyon verilir ve kritik noktaları bulmanız gerekir.

Şimdi örnekler ortaya çıkarmanın tekniği şudur: Soruyu ters çevirin. Maksimum ve minimumların belirli noktalarda olduğu size verilmiş olsun. Bu maksimum ve minimumlara sahip bir fonksiyon oluşturabilir misiniz?

Bunu yapmakla maksimum ve minimumlar üzerine çok şey öğreneceksiniz. Hemen bir fonksiyon öngörebilir ve onunla çalışabilirsiniz, bu açıktır. Ama bir üst-düzey kavrayış, önceden tanımlı bazı kısıtlamaları olan – örneğin, $x = 2$ de $f(x) = 5$ değerli bir maksimum ve $x = -2$, $x = 7$ de $f(-2) = 20$ ve $f(7) = -3$ değerli minimumlar – bir örnek oluşturarak kazanılmalıdır.

Bu soruyu ters çevirme yönteminin bir başka örneği için elemanter geometriden konikleri göz önünde bulunduralım. Standart soru şudur: 'İşte bir konik, merkezini, tepe noktalarını ve basıklığını hesaplayın' v.s. Soruyu ters çevirin. Merkezi, tepe noktalarını ve basıklığını kapsayan koşullar verildiğinde, bu özelliklere sahip bir konik oluşturun.

Sorun 'Ne olur eğer ...?'

İyi matematikçiler 'Ne olur eğer ...?' diye sormasını severler. Örneğin, o varsayımı silersem ne olur? Yukarıda bunun problemi çözmede yardımcı olabildiğini gördük. Ayrıca o bize bir konunun sınırlarını araştırmamıza izin verir. Tanımların ve teoremlerin olmaları gerektiği gibi olduklarını anlayabiliriz. Bir başka örnek, matematiksel nesneler genelde fazladan koşullara sahip kümelerdir. Çok basit bir düzeyde sonlu bir küme eleman sayısı sonlu olan biridir diyebiliriz ama gruplar gibi çok daha karışık örnekler vardır. (Bir grup, kümenin elemanlarını çarpan bir yönteme sahip bir kümedir. Çarpma belirli özellikleri sağlamak zorundadır.)

A ve B kümeleri için $A \times B$ çarpımını alabiliriz. Sorabiliriz: eğer A ve B nin belirli bir özelliği varsa, o zaman $A \times B$ nin de var mıdır? Örneğin, A ve B sonlu kümeler olsun. $A \times B$ sonlu mudur? Bu durumda, evet, sonludur. Eğer A ve B sonsuz ise, o zaman $A \times B$

sonsuz mudur? Eğer A ve B grup ise, o zaman $A \times B$ bir grup mudur? Ve saire.

Düşünce şudur: Yeni kavramlar ortaya çıkarmak için daima sorular sorun.

Düşünmenin önemi – web'e bakın

Doğrusal bir alan gibi görünmesine karşın – bir düşüncenin bir diğerinin üzerine kurulması – matematik düşünce ve konuların birbirine bağlanışının bir web'ini de içerir. Bir konuyu öğrendikten sonra düşüncenizde bu web'e yeni bir çalışmanın nasıl uygun düştüğü yer almalıdır. Bir konuyu hemen bitirmeyin ve 'şimdilik onu yaptım' deyin.

Ayrıca çalışmanın kapsamlı yapılmasını inceleyebilir ve onun farklı bir düzende verilip verilmeyeceğini sorabilirsiniz. Bu size farklı bir bakış açısı kazandırır ve anlamaya yardımcı olan yararlı bir araştırmadır. Aynı şekilde, farklı görüş açıları için farklı kitaplara bakın. Teoremler ve tanımlar farklı mıdır? Kanıtlar çok mu ya da daha az mı katıdır?

Alıştırmalar

Alıştırmalar 32.1

(i) F_n, n. Fibonacci sayısı olsun. Arkadaşım bana

$$F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_n = F_{n+2}$$

olduğunu söylüyor ama gerçekten doğru olup olmadığını hatırlamıyor.

Doğru mudur? Değilse, önermesini benzer bir önerme söyleyerek kurtarabilir misiniz? Her iki durumda, doğru olduğunu düşündüğünüz bir önermeyi kanıtlayın.

(ii) n pozitif bir tamsayı ve $d_k, d_{k-1}, \ldots, d_1, d_0$ rakamları olsun. Ayrıca $f, f(n) = d_k^3 + d_{k-1}^3 + \ldots + d_0^3$ ile tanımlı fonksiyon, yani n pozitif tamsayıyı rakamlarının kübünün toplamına uygulayan fonksiyon olsun. Bir başlangıç n verildiğinde, tamsayıların bir a_m dizisini üretmek için tekrarlı olarak n ye f uygulanabilir.

Eğer her $m \geq m_0$ için $a_m = a_{m_0}$ olacak şekilde m_0 varsa n ye bir **ölü-uç tamsayı** diyoruz. Eğer $n = 19$ ise, örneğin, o zaman

$$a_1 = 19,\ a_2 = 1^3 + 9^3 = 730,\ a_3 = 7^3 + 3^3 + 0^3 = 370,$$
$$a_4 = 3^3 + 7^3 + 0^3 = 370, \ldots$$

olur. O halde $n = 19$ bir ölü-uç tamsayıdır. Ölü-uç tamsayıların kümesini D ile gösterelim.

Bir f fonksiyonunun herhangi bir **sabit noktası** (yani n öyle ki $f(n) = n$) bir ölü-uç tamsayıdır. $\mathcal{F}$ sabit noktaların kümesini göstersin.

(a) $\mathcal{D}$ ve $\mathcal{F}$ kümelerini araştırın.

(b) Tüm pozitif tamsayılar ölü-uç tamsayılar mıdır?

(c) Değilse, olmayanlar tarafından doğurulan diziler hakkında bir şey söyleyebilir misiniz?

(d) $\mathcal{D}$ sınırlı mıdır? $\mathcal{F}$ sınırlı mıdır?

(e) $\mathcal{F}$ yi tam olarak belirleyebilir misiniz?

Bu ve bir sonraki alıştırma Leeds Üniversitesinin bir dersinden alınmıştır.

(iii) Bir yıl dışarıda kalan bir öğrenci bir takım hediyeler alıyor ve onları ülkesine göndermek istiyor. Mallar teker teker paketleniyor. Mucize kabilinden, $1 \leq a \leq b \leq c \leq n$ olmak üzere (a, b, c) tamsayılarının her bir takımı için a derinlikli, b genişlikli ve c uzunluklu tam anlamıyla bir paket olacak şekilde bir n tamsayısı vardır.

Daha büyük kolilerde sarılı paketler daha ucuza geliyor (ve matematiksel olarak da ilginçtir). Kırılmaları önlemek için kolilerde hiç boşluk olmamalıdır. Başka bir deyişle, $p \times q \times r$ boyutlu bir koli, içerdiği paketlerin hacimlerinin toplamına eşit olan pqr hacminde olacaktır. Kolilerin ne kadar büyüklükte olduğunu önemsiz varsayarak, öğrencinin kaç tane koliye ihtiyacı olacaktır?

(iv) Tarih verildiğinde, haftanın özel gününü hesaplamak için bir matematiksel yöntem ortaya atabilir misiniz? Örneğin, 20 Eylül 1968 ve 8 Aralık 1978 için yöntem Cuma'yı hesaplamalıdır. İpucu: mod düşünün.

Özet

- Başlayabilmek için:
  (i) Örneklerle oynayın.
  (ii) Parçalara ayırın. Küçük parçaları alın.
  (iii) Problemi değiştirin.
- Daha üst düzeye ulaşmak için:
  (i) Soruyu ters çevirin – kendi örneklerinizi oluşturun.
  (ii) Sorun 'Ne olur eğer …?'.
  (iii) İyi düşünün ve düşünceler web'ine bakın.

33. BÖLÜM

Genelleştirme ve özelleştirme

Tüm genelleştirmeler yanıltıcıdır.
Anon.

Kitap boyunca bir dereceye kadar genelleştirdik ve özelleştirdik. Onu tartışmak şu ana kadar ertelenmişti çünkü bu düşüncelere hakim olmadan önce örnekler görmeye ihtiyaç vardır.

Genelleştirme

Varsayımların zayıflatılması

Bir teorem verildiğinde 'Varsayımı zayıflatabilir miyim ve o zaman hala aynı sonucu elde edebilir miyim?' sorusunu sormalısınız. Matematiğin hedefi mümkün olduğunca az varsayımlar kullanmak ve mümkünse daha kuvvetli bir sonuç elde etmektir. Yani, çok fazlasını söylemek için mümkün olduğunca az kullanın.

Varsayımları zayıflatılan önermeye bir **genelleştirme** denir.

Çift sayılar üzerine şu basit teoremi göz önünde bulunduralım:

'Eğer x ve y çift doğal sayılar ise, o zaman $x+y$ çifttir.'

Varsayımı

'Eğer x ve y çift tamsayılar ise, o zaman $x+y$ çifttir.'

önermesine zayıflatabiliriz. Bu önerme doğrudur.

Varsayımı, sayıların çift olduğu koşulunu silerek, farklı bir yönde zayıflatabilirdik:

Eğer x ve y doğal sayılar ise, o zaman $x+y$ çifttir.'

Ancak bu önermenin yanlış olduğunu not edelim: örneğin, $x=2$ ve $y=3$ alalım. Böylece bir teoremde bir varsayımı zayıflatmak (bu durumda yitirmek) yanlış bir önermeye sürükleyebilir.

Daha önce bir varsayımı zayıflatmanın yeni bir teoreme neden olduğunun bir örneğini gördük. Bölüm Lemması (sayfa 196) başlangıçta bir y doğal sayısı için ifade edilmiş ve sonra Bölüm Lemmasının genel versiyonunu (sayfa 199) elde etmek için bir y tamsayısına zayıflatılmıştı.

Böylece eğer bir teorem x in bir doğal sayı olduğu varsayımına sahipse, o zaman x e genelleştirme bir tamsayıdır. Aslında, kanıt karmaşık olmayabilir. Önermeyi doğal sayılar için kanıtlıyoruz ve Bölüm Lemmasının genel versiyonuna uygulamış olduğumuz kurnazlığı kullanıyoruz: negatif x için $x' = -x$ alıyoruz. x' pozitif olduğundan, x' için kanıtlarken bu bilgiyi kullanıyoruz. (Ve $x = 0$ durumunu yerine getirmemiz gerektiğini anımsıyoruz!)

Sonucu değiştirmek

Bir P önermesinde bir varsayımı zayıflatır ve yanlış bir önerme elde edersek, o zaman sonucu da değiştirmek doğru bir Q önermesini verebilir. P önermesi bu Q önermesinden türetilebiliyorsa, o zaman Q ye de bir genelleştirme diyoruz.

Pisagor teoremi'nde gördük: T kenarları a, b uzunluklu ve c hipotenüslü bir dik-açılı olsun. O zaman $c^2 = a^2 + b^2$ dir.

Dik-açılı koşulunu silerek bunu zayıflatabiliriz. Bunu yapmakla bir hipotenüsü tanımlayamaz oluruz, o halde şu önermeyi üretiriz: T kenarları a, b ve c uzunluklu bir üçgen olsun. O zaman $c^2 = a^2 + b^2$ dir.

Neredeyse rasgele bir örneğin de göstereceği üzere, bu yanlıştır. Bununla birlikte, eğer sonucu değiştirirsek o zaman doğru bir önerme elde edebiliriz, Kosinüs Kuralı: T kenarları a, b ve c uzunluklu bir üçgen olsun. O zaman C, c uzunluklu kenarın karşısındaki açı olmak üzere $c^2 = a^2 + b^2 - 2bc\cos C$ dir.

Pisagor Teoremini Kosinüs Kuralından sonuçlandırabildiğimizi kaydedin. Varsayım olarak $C = 90°$ alıyoruz ve sonuç, Kosinüs Kuralının özel bir hali olur, yani $\cos 90° = 0$ dır, o halde $c^2 = a^2 + b^2$ bulunur.

O halde Kosinüs Kuralı Pisagor Teoremi'nin bir genelleştirilmesidir. Kaydedelim ki Kosinüs Kuralının varsayımları tüm üçgenlere göndermede bulunurken Pisagor Teoremi'nin varsayımları dik-açılı üçgenlere başvurur.

Yanlış olan genelleştirmeler ilginç olabilir

Genelleştirmeye kalkışmak ilginç matematiklere neden olabilir. $x^2 + y^2 = z^2$ nin birçok tamsayı çözümünün olduğunu biliyoruz. Ama eğer 2 yi çok daha genel bir n doğal sayısı ile değiştirirsek, neler olur?

'$n \geq 2$ için $x^n + y^n = z^n$ nin tamsayı çözümleri vardır' önermesini elde ederiz. Bu yanlıştır. Bu sadece bazı $n \geq 3$ ler vardır öyle ki $x^n + y^n = z^n$ nin hiç pozitif tamsayı çözümü yoktur değil, ama gerçekte *tüm* $n \geq 3$ için denklemin hiçbir pozitif tamsayı çözümü yoktur olgusudur. Bu son ifade 101. sayfada karşılılaştığımız Fermat'ın Son Teoremi'dir. Bu önermeyi kanıtlama çabası 350 yıl almış ve sayılar kuramında, cebirsel geometride v.s. inanılmaz ilerlemelere yol açmıştır.

Özelleştirme

Özelleştirme genelleştirmenin tersidir. Varsayımları daha kuvvetli duruma getiriyoruz. Örneğin, tamsayılarla ilgili bir önermemiz varsa, doğal sayılara kısıtlayabiliriz. Aynı şekilde Pisagor Teoremi Kosinüs Kuralının bir özelleştirmesidir.

Özelleştirmeyi önermeleri yanlış olmaktan kurtarmak için kullanabiliriz. 'Eğer $a < b$ ise, o zaman $a^2 < b^2$ dir' önermesi doğru değildir. (Örneğin, $a = -5$ ve $b = 2$ alalım.) $a > 0$ ve $b > 0$ koşullarını dahil ederek varsayımları kuvvetlendirebiliriz. Böylece '$a, b > 0$ olsun. Eğer $a < b$ ise o zaman $a^2 < b^2$ dir' e özelleştirebiliriz. Bu önerme doğrudur.

Özelleştirmenin esas uygulaması problem çözümlerindedir. Bir problemi özel bir durum için çözmek ve problem hakkında bir görüşe sahip olmak için bu durumu kullanmak daha kolay olabilir. Örneğin,en genel Bölüm Lemması aslında doğal sayılar durumuna özelleştirerek kanıtlanmıştır. Bu yapıldıktan sonra tamsayılar durumuna genelleştirebiliriz.

Genelliği yitirmeksizin

Bir takım kanıtlarda 'genelliği yitirmeksizin' deyimini kullandık. Bazı kitaplarda bu ara sıra wlog* olarak kısaltılmıştır.

Bu ifadeyi, yeni önermenin bir özelleştirme *görünümünde* olması için – ama aslında öyle değildir, aynı genellik düzeyi kalıcıdır – bir varsayım yaparken kullanırız. Örneğin, 'Her hangi iki farklı x ve y tamsayısı için, ...' şeklinde başlayan bir önermemiz olsaydı, o zaman genelliği yitirmeksizin $x < y$ olduğunu varsayabilirdik. Aksi halde yeniden etiketleme yapabilirdik.

Alıştırmalar

Alıştırmalar 33.1

(i) $\sqrt{n}$ nin irrasyonel olması için n üzerine yapılabilecek en iyi varsayım nedir? Yani '$\sqrt{n}$ irrasyoneldir eğer ve ancak eğer n ... biçimlidir' önermesini tamamlayın. Yanıtınızı doğrulayın.

(ii) Alıştırma 5. 3 (iv) deki $\sqrt[7]{7!} < \sqrt[8]{8!}$ i gösterme sorusunu ele alalım. Bunu nereye kadar genelleştirebilirsiniz? Aynı alıştırmanın (b) şıkkını genelleştirin.

(iii) 3×3 lük bir şebekede 1 den 9 a kadar sayıları aynı satır üzerindeki toplamının aynı sütunun toplamının ya da iki köşegenin birinin toplamının sabit olması için sıraya koyun. Her bir sayıyı sadece bir kez kullanabilirsiniz. Böyle bir kareye **sihirli kare** denir. Bir örnek olarak

4	9	2
3	5	7
8	1	6

karesini göz önünde bulunduralım. Her satır, sütun ve iki köşegenin toplamı 15 dir. Sihirli karelere başka örnekler bulabilir misiniz?

1 den 16 ya kadar sayıları kullanan bir 4×4 sihirli kare bulabilir misiniz? 1 den n^2 ye kadar sayıları kullanan $n \times n$ sihirli kareler için ne diyebilirsiniz?

Eğer 3×3 durumunu sayıların 1 den 9 a kadar sayılar yerine keyfi tamsayılara zayıflatırsak, ne olur? 3×3 durumu için tamsayı satırların v.s. toplamı herhangi bir verilmiş tamsayı sabiti olabilir mi? $n \times n$ durumu için ne demeli?

(iv) 16 karelik bir 4×4 şebeke alalım. Her bir satır ve sütunda çift sayıda çapraz olabilmesi için şebekeye altı çapraz yerleştirebileceğinizi gösterin.

* 'Genelliği yitirmeksizin' in bir kısaltmasıdır: Without lost of generality (ç.n.)

Buna bazen Süt Kafesli Sandığı Problemi adı verilir, çünkü orijinal problem süt şişelerinin bir süt kafesli sandığa yerleştirilmesine göre ifade edilmiştir.

Bu problemi, $n \geq 3$ için bir $n \times n$ şebekesine genelleştirebilir misiniz?

(v) $3^{122}5^{600}112^{450}$ nin son rakamını bulun. Sondan bir önceki rakam nedir? Üç sayının çarpımının son rakamı üzerine bir sonucu nereye kadar genelleştirebilirsiniz?

(vi) $a, b, c \in \mathbb{Q}$ için $ax^2 + bx + c = 0$ üzerine olan Alıştırma 26. 7 (v) i daha yüksek dereceli bir polinoma genelleştirin. Bir çözüm rasyoneldir eğer ve ancak eğer bir diğer çözüm rasyoneldir, önermesini kanıtlayabilir misiniz?

(vii) Pul basma işlemini verimli kılmak amacıyla Posta İdaresi a ve b pozitif tamsayılar olmak üzere sadece a pens ve b pens isimli iki posta pulu çıkarmaya karar veriyor. Bu önerinin (a ya da b 1 olmadığı sürece) bir kusuru vardır: her posta ücreti pullardan oluşturulamaz. Örneğin, $a = 5$ ve $b = 8$ ise, o zaman posta idaresi 13 pens ya da 16 pens ücret isteyebilir ama 17 pens isteyemez. a ve b nin özel bir seçimi yapıldığında bir sayıya, uygulanabilir bir posta ücreti ise, 'iyi', aksi halde 'kötü' diyelim. Yukarıdaki örnekte 13 ve 16 iyi iken 17 kötüdür.

- Kötü sayılar kümesinin a ve b nin seçimine nasıl bağlı olduğunu mümkün olduğunca açığa çıkarın.
- a ve b nin çok büyük olmayan, örneğin $a = 5$, $b = 8$, özel seçimlerini denemeye başlayın. Model görebiliyor musunuz?
- Denemede bulunurken düzenli olmak iyi bir fikirdir. a nın değerini belirli tutmaya, örneğin $a = 5$, çalışın ve sırasıyla $b = 2, 3, \ldots, 10$ durumlarının her birini değerlendirin. $a = 5$ varsayımımızda genel b için kötü sayılarla ilgili bir şeyi kanıtlayabilir misiniz? $a = 6$, b genel için ne diyebilirsiniz?
- a ve b nin genel durumu için ne kanıtlayabilirsiniz?
- Bir 'iyi' sayının açık bir matematiksel tanımını düşünebilir misiniz? Düşünebiliyorsanız, tanımın bir geometrik yorumunu verebilir misiniz?

Bu problem de Leeds Üniversitesi'nin bir dersinden alınmıştır.

Özet

- ► Eğer varsayımları zayıflatırsak, örneğin varsayımları silersek, o zaman bir genelleştirme elde ederiz.
- ► Eğer varsayımları kuvvetlendirirsek, o zaman bir özelleştirme elde ederiz.
- ► Genelliği yitirmeksizin, bir özelleştirme benzeri olanı – aslında genelliğin aynı düzeyi korunmuştur – yapmak anlamına gelir.

34. BÖLÜM

Doğru anlamak

Matematikte şeyleri anlamazsınız.
Sadece onları kullanmaya alışırsınız.
John von Neumann (1903-1957)

Matematikte bir şeyi gerçekten anladığınızı nasıl bilirsiniz? Bunu yanıtlamak çok zordur. Genelde anlama duygusuna sahip olunabilir ancak alıştırma ve problemleri çözmeye kalkışınca hemen hemen eksikliği açığa çıkar. Bu bölümde anlamayı gösteren yolları listeleyeceğiz.

Tanımları anlamak

Eğer bir tanımı anlıyorsanız

- onu kesin ifade edebilirsiniz,
- onu kendi sözcüklerinizle ifade edebilirsiniz,
- onun somut örneklerini – aşikar ve aşikar olmayanlar dahil – verebilirsiniz,
- tanımın örnek-olmayanlarını verebilirsiniz,
- onu farklı ve alışılmamış durumlarda tanımlayabilirsiniz,
- hangi teoremlerde kullanıldığını bilirsiniz,
- o teoremlerde niçin kullanıldığını bilirsiniz,
- bu özel tanımın niçin yapıldığını bilirsiniz,
- aynı sözcüğün diğer benzer tanımlarını bilirsiniz ve aralarındaki farkları görürsünüz.

Listedeki son parça ile karşılaşılır çünkü farklı matematikçiler farklı tanımlar kullanırlar ve bunun teoremler için önemli sonuçları vardır. Bir tanıma fazladan bir varsayım eklemekle çoğu teoremin kanıtlanması kolaylaşır.

Teoremleri anlamak

Eğer bir teoremi anlıyorsanız

- onu kesin ifade edebilirsiniz ve kendi öz sözcüklerinizle,
- kullanımına soyut örnekler verebilirsiniz,

- kanıtını anlarsınız,
- onu yeni ve alışılmamış durumlara uygulayabilirsiniz,
- varsayımları zayıflatmakla oluşan önermelere bir karşıt örnek verebilirsiniz,
- evriğini ve tersini bilirsiniz,
- ondan bazı sonuçlar (örneğin, sonuç teoremler) görebilirsiniz,
- onu tek bir tümceye sıkıştırabilirsiniz, örneğin uzaklığı hesaplamak için bu bana bir yöntem verir,
- kuramın neresine uyduğunu, kendi başına bir son mudur ya da daha önemli bir teoreme giden yolda kullanılmış mıdır, görürsünüz,
- daha küçük ya da daha büyük nesneler sınıfından söz edip etmediğini bilirsiniz.

Kanıtları anlamak

Eğer bir kanıtı anlıyorsanız

- onu kesin ifade edebilirsiniz ve kendi öz sözcüklerinizle,
- varsayımların nerede kullanıldığını bilirsiniz,
- yapıyı bilirsiniz, yani onun hangi parçalara ayrıldığını ve hangi tekniklerin (dolaysız, çelişki v.s.) kullanıldığını bilirsiniz,
- her bir adımı bir mucizeden ziyade yalın olarak görebilirsiniz,
- kanıtlardaki düşüncelerden, başka önermeleri kendiniz kanıtlarken yararlanabilirsiniz,
- her hangi bir boşluğu doldurabilirsiniz,
- kanıtın ne kadar kesin olduğunu bilirsiniz,
- onu özetleyebilirsiniz, yani ayrıntıları atmak ve esas noktaları korumak,
- varsayımlar silindiğinde nerede sorun çıktığını bilirsiniz.

Esaslı bir konuyu anlamak

Genelde matematik farklı konulu – örneğin kalkülüs, diferansiyel denklemler, kombinatorik, v.s. – gruplara bölünür.

Eğer bir konuyu anlıyorsanız

- onun bütünün nasıl uyuştuğunu görebilirsiniz,
- farklı bir kuram üretmek için tanımları ufak değişikliğe uğratabilirsiniz,
- onu bir tümceye sıkıştırabilirsiniz,
- kuramın önemli özelliklerini sergileyen somut bir örnek verebilirsiniz,
- bu konuyla diğerleri arasındaki bağlantıları, benzerlikleri ve farklılıkları görebilirsiniz,
- bir argümandaki sezgisel kavrayışla teknik ayrıntılar arasında rahatlıkla hareket edebilirsiniz,
- ana tanım ya da teoremin ne olduğunu bilirsiniz,
- kuramın çalışması için neyin en az gerekli olduğunu bilirsiniz,
- not almadan onu açıklayabilirsiniz,
- onu başka birine açıklayabilirsiniz.

Alıştırmalar

Alıştırmalar 34.1

(i) Kitapları, ders notlarını ve web'i gözden geçirin. Oradaki tanımları, teoremleri ve kanıtları ne kadar iyi bildiğinize karar verin. Yukarıdakini bir doğrulama listesi olarak kullanmaya çalışın.

(ii) Matematikte hangi konu kendinize en az güven duyduğunuz ya da en az anladığınız konudur? Ona yeniden dönün ve bu kitabın düşüncelerini uygulayın.

Özet

- Tanımlar: örnekleri ve örnek-olmayanları ve tanımın hangi teoremlerde kullanıldığını bilin.
- Teoremler: Uygulanabilir olduğu örnek ve örnek-olmayanları bilin, sahip olduğu sonuçları bilin.
- Kanıtlar: varsayımların nerede kullanıldığını bilin, özel bir kanıtın nasıl yapıldığını bilin.
- Esas konu: kilit örnekleri bilin.

35. BÖLÜM

En büyük sır

Yap ya da yapma. Çaba yok.
İmparatorluğun Gerilemesi'ndeki Yoda

Gurular... şaşırtıcı ve şeytanca olan motivasyon kurslarından servet elde ederler, ama bütün bunlar insanlık tarihi kadar eski ata sözlerine indirgenir: devam et. Bu yap ya da yapma anlamındadır.
Derren Brown, *Aklın Dalavereleri*, 2006

Bu kitapta bir matematikçi olarak tekrar tekrar kullandığım birçok farklı düşünce ve tekniği topladım. Yer kaygısından ve kitabın sindirilmesini zorlaştıracağından birkaç tekniği dahil etmedim. Parite ve serbestlik dereceleri gibi konular bir yanıtın doğruluğunu kontrol etmek için yararlıdır ve totoloji ve döngüsel argüman gibiler lojikte önemlidir ama onları ortaya çıkarmayı size bıraktım.[1]

Kendi kendine yardımcı olabilen kitaplar gibi, bir kerede öğrenilmesi gereken çok şey varsa, tekrar okumalar kaçınılmaz olabilir. O zaman bile bu tür kitaplardan genelde sadece bir ya da iki eğitici bilgi alıp götürebilir. Çok şeyin söylendiği ve çoğunun söylenmeden bırakıldığı durumda, her şeyi nasıl toparlayabilirim? Eğer bir matematikçi gibi gerçekten düşünmek istiyorsanız, ne yapmanız gerekir?

Tutkulu bir matematikçiye verebileceğim kilit pratikteki öğüt iki tümcede toplanır:

- Matematiği doğru yazın.
- Kendi örneklerinizi ortaya atın.

Bu teknikler şaşırtıcı biçimde etkilidir. İlki için nedenler 3. Bölümde tartışılmıştır. Esas olarak şöyle özetleyebilirim: eğer onu gerektiği gibi betimleyemiyorsanız, o zaman tam olarak onu anlama şansınız yoktur. Ve onu gerektiği gibi betimleyemiyorsanız, o zaman içine girmeyi ve anlamaya çalışmayı bilmelisiniz. Kavramanızdaki zayıflığa açıklık getirmede yardımcı olur.

Öğütün ikinci parçası da daha önceki bölümlerde ele alınmıştı. Bu belki bir matematikçi gibi düşünmenin gerçek sırrıdır – kendi problemlerinizi ve örneklerinizi oluşturmak. Doğru dürüst bir problem oluşturma çabası zordur. Bununla birlikte, soruyu ters çevirmek gibi, çok yalın teknikler kullanabilirsiniz. Bu problemleri arkadaşlarınızla bir-

[1] Sizin için her şeyi yapmış olmamı beklediniz mi?

likte oluşturuyorsanız (arkadaşları değil, problemleri) değiş tokuş edebilirsiniz ve hatta daha fazla beceri kazanabilirsiniz. Ayrıca kimin en zor – ancak üstesinden gelinebilen –problemi ortaya attığını görmek için bir yarışa girebilirsiniz.

Kendi örneklerinizi oluşturmak aslında yararlı, uç ve aşikar örneklerin bir birikimini gerektirir, o yüzden onlardan derlemek ve hemen kullanıma hazır hale getirmek durumundasınız. Bunu yerine getirmenin bir yolu şunu hayal etmek gibidir: gece yarısı biri sizi uyandırıp 'Çabuk olun, bu bir acil vakadır, bana X in bir örneğini verin' dese, siz ne derdiniz?

Elbette, iyi bir matematikçi olmak için en önemli tekniklerin ne olduğuna karar vermekte kendinizi özgür hissetmelisiniz: ister 'Bir denklemin en karmaşık yanını seçin ve indirgeyin' (sayfa 143) olsun, ister her zaman karşıt tersi çalışmak (26. Bölüm) olsun.

Verilmesi gereken son bir öğüt parçası daha vardır. Matematikçileri matematikçi olmayanlardan ayırt eden bir en büyük sır: *Duruş*. Matematiğin keşfedilmesi zaman alır. Bununla birlikte bu kitaptaki konular eninde sonunda zaman kaybını önler. Bildiğinizi ve bilmediğinizi, neyi çalışmanız gerektiğini v.s. belirler. Anlamanın çok önemli olduğu duruşuna sahipseniz – yüzeysel anlama değil, bir probleme ciddi bir girişimde bulunmaktan kaynaklanan anlama – ve size verilenlerden daha ilerisini daima görüyorsanız, o zaman gizemli bir şekilde size verilenleri anlayacaksınız.

Bu kitaptaki teknikleri kullanıp kullanmamak size kalmış bir şeydir. Onları kullanmayı seçebilirsiniz de göz ardı edebilirsiniz de. Bu bölümün başındaki deyişin söylediği gibi. Yapın ya da yapmayın. Seçim sizindir.

Mutlu matematiksel düşünmeler!

Özet

- ► Çalışmalarınızı ilerletin!

Yunan alfabesi

Telaffuz kılavuzunda i harfi big deki gibi söylenmelidir. y harfi my sözcüğündeki gibi söylenmelidir.

Ad	Büyük harf	Küçük harf	Söylenişi
Alpha	A	α	al-fa
Beta	B	β	bi-ta
Gamma	Γ	γ	gamma
Delta	Δ	δ	delta
Epsilon	E	ε	epsig-on / epsilon
Zeta	Z	ζ	zita
Eta	H	η	i-ta
Theta	Θ	θ	ti-ta
Iota	I	ι	ay-o-ta
Kapa	K	κ	kap-a
Lambda	Λ	λ	lam-da
Mu	M	μ	miyu
Nu	N	ν	niyu
Xi	Ξ	ξ	ksi
Omicron	O	o	omikron
Pi	Π	π	pay
Rho	P	ρ	ro
Sigma	Σ	σ	sig-ma
Tau	T	τ	tau
Upsilon	Υ	υ	up-siglon ya da up-silon
Phi	Φ	ϕ ya da φ	fay
Chi	X	χ	kay
Psi	Ψ	ψ	psay
Omega	Ω	ω	o-me-ga

Yaygın kullanılan semboller ve notasyonlar

e	doğal logaritmaların tabanı
i	-1 in kare kökü
∞	sonsuzluk
$\forall$	her
$\exists$	bazı
$\square$	kanıt sonu işareti
∇	nabla
$\aleph$	alef
$\varnothing$	boş küme
Σ	toplam
$\prod$	çarpım
$\in$	-nin bir elemanıdır / içindedir
$\subseteq$	-nin bir alt kümesidir
$\subset$	-nin bir alt kümesidir (ama eşit değildir)
$\cap$	arakesit
$\cup$	birleşim
$\Longrightarrow$	gerektirir ki (sıklıkla doğru kullanılmaz, 37. sayfaya bakın)
$\Longleftrightarrow$	-ye denk ('eğer ve ancak eğer' olarak da bilinir)
$'$	türev
$\mapsto$	-ye uygulanır
$\twoheadrightarrow$	örtenlik
$\hookrightarrow$	bire-birlik
$\propto$	-ye orantılı
$\equiv$	-ye denktir / kongrüent
$\approx$	yaklaşık olarak eşit
$\perp$	-ye dik
$\neg$	değilleme
$\sim$	tilda
$\hat{}$	şapka
$\therefore$	o halde
$\because$	çünkü

$\mathbb{N}$	doğal sayılar, {1, 2, 3, 4, …} kümesi olarak tanımlıdır (ama 4. sayfadaki dipnota bakın)
$\mathbb{Z}$	tamsayılar, {…, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, …} olarak tanımlıdır
$\mathbb{Q}$	rasyonel sayılar, $p, q \in \mathbb{Z}$ ve $q \neq 0$ olmak üzere p / q biçimli sayılar olarak tanımlıdır
$\mathbb{R}$	gerçel sayılar, … bir tanım için daha yaşlı oluncaya dek beklemeniz gerekecek!
$\mathbb{C}$	karmaşık sayılar, , $p, q \in \mathbb{R}$ ve $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere $a + ib$ biçimli sayılar
$\lvert x \rvert$	x in modülü
$\overline{x}$	x in karmaşık eşleniği
$[a, b]$	8. sayfaya bakın
(a, b)	8. sayfaya bakın
f^{-1}	f nin ters fonksiyonu ya da öngörüntü kümesi için kullanılır
s.t.	öyle ki
$\pm$	artı / eksi
$:=$	tanımlama

EK C

Nasıl kanıtlamalı ki...

Her önermeyi kanıtlayacak bir algoritma vermek olanaksızdır. Bununla birlikte, bazı durumlarda hemen izleyebildiğimiz stratejiler vardır. Bu ekte, çeşitli türden önermelerin nasıl kanıtlanacağının bir özetini veriyoruz. Kısalık lehine örneklerden kaçınılmıştır.

Bir önermenin bir diğerini gerektirdiği nasıl kanıtlanır

A nın B yi gerektirdiğini kanıtlamak için birkaç yöntem çalışın.

- Gerektirme işaretlerinin yönlü bir dizisi.
- Karşıt ters önermeyi kanıtlayın: B nin değillemesinin A nın değillemesini gerektirdiğini kanıtlayın.
- Çelişki: Önermenin yanlış olduğunu kabul edin ve bunun, $0 = 1$ gibi, bir anlamsız önermeye götürdüğünü kanıtlayın.

Daha bir çok yöntem vardır.

İki önermenin denk olduğu nasıl kanıtlanır

A nın B ye denk olduğunu kanıtlamak için problemi ikiye parçalayın: Ayrı ayrı

A nın B yi gerektirdiğini

ve

B nin A yı gerektirdiğini

kanıtlayın.

İki nesnenin aynı olduğu nasıl gösterilir

Farklarının aşikar olduğunu göstermek için bazı toplamsal ya da çarpımsal yapıyı kullanın. İki sayının, iki kümenin eşit olduğunu gösteren aşağıdaki önermelere bakın.

İki sayının eşit olduğu nasıl kanıtlanır

$a = b$ yi göstermek için:

- Ayrı ayrı $a \leq b$ ve $b \leq a$ olduğunu kanıtlayın, ya da
- $a - b = 0$ olduğunu kanıtlayın.

İki fonksiyonun eşit olduğu nasıl kanıtlanır

Her x için $f(x) = g(x)$ i göstermek için:

- Ayrı ayrı her x için $f(x) \leq g(x)$ i ve her x için $g(x) \leq f(x)$ i olduğunu kanıtlayın, ya da
- Her x için $f(x) - g(x) = 0$ ı kanıtlayın.

Bir kümenin bir başkası tarafından kapsandığı nasıl kanıtlanır

A ve B kümeleri verildiğinde $A \subseteq B$ yi kanıtlamak için:

- Küme betimlemeleri düzeyinde çalısın ve bir eşitlikler dizisinden yararlanın, ya da
- Elemanlar düzeyinde çalışın: Kanıtlayın: '$x \in A \Longrightarrow x \in B$'. '$x \in A$ olsun' ile başlayın ve oradan işlem yapmayı sürdürün.

İki kümenin eşit olduğu nasıl kanıtlanır

A ve B kümeleri için $A = B$ yi kanıtlamak için problemi ikiye parçalayın: $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ yı kanıtlayın.

Bir şeyin var olduğu nasıl kanıtlanır

Bir nesnenin, örneğin belirli bir sayının, fonksiyonun ya da istenilen özellikli bir kümenin, var olduğunu göstermek için:

- Onu doğrudan inşa edin, ya da
- Çelişkiyle kanıtı kullanın: nesnenin var olmadığını kabul edin.

Bir şeyin var olmadığı nasıl kanıtlanır

Önceki gibi, var olduğunu kabul edin ve çelişkiyle kanıtı kullanın.

Bir şeyin her $x \in X$ için geçerli olduğu nasıl kanıtlanır

Bu durumda genel bir öğüt vermek zordur. Bir sürü kanıt '$x \in X$ olsun ...' ile başlar. Yani sonradan kanıt süresince X in belirli kalan keyfi bir elemanını seçin.

Problemi durumlara bölemeye çalışın (bu tüketici yöntemi olarak da bilinir). *Tüm* durumları yerine gerektirmeniz gerektiğinden haberiniz olmalıdır; sadece tek bir özel durumu ele almak yetmez. Anımsayın – bir örnek geneli kanıtlamaz.

Niceleyicilerle kanıtlama

Önceki üç öğüt parçasına başvurulduğunda:

(i) Her x için, $P(x)$: Eğer biri size her hangi bir x veriyorsa, o zaman $P(x)$ in doğru olduğunu göstermelisiniz.

(ii) x vardır, $P(x)$: $P(x)$ in doğru olması için bir x bulmak zorundasınız.

Bir şeyin tek olduğu nasıl gösterilir

Bir başka farklı şeyin olduğunu varsayın ve sonra bu iki nesnenin, bir çelişki üreterek, aynı olduğunu gösterin. Bunun için, farklarının aşikar olduğunu göstermek gibi yukarıdaki önerilere bakın.

Bir kümenin sonsuz olduğu nasıl kanıtlanır

Bir kümenin sonsuz olduğunu göstermek için:

- $\mathbb{N}$ ya da $\mathbb{Q}$ gibi sonsuz bir küme ile bir bijeksiyon kurun, ya da
- Kümenin sonlu olduğunu kabul edin ve bir çelişki argümanı uygulayın. (Örneğin, sayıların sonlu bir kümesi bir en büyük elemana sahip olabilir. Bunun bir çelişki vermediğini gösterin.)

Doğal sayılarla indislenmiş bir şey nasıl kanıtlanır

Bir doğal sayıyla indisli bir iddiayı kanıtlamak için tümevarım kullanın.

Tamsayılarla indislenmiş bir şey nasıl kanıtlanır

Tamsayılarla indislenmiş bir $A(x)$ iddiasını kanıtlamak için, onu doğal sayılar için, örneğin, tümevarımla kanıtlayın. Sonra negatif x için, $-x$ pozitiftir, $A(x)$ in doğru olduğunu kanıtlamak için $A(-x)$ in doğruluğunu kanıtlayın.

Bir dönüşümün bire-bir olduğu nasıl kanıtlanır

$f: X \to Y$ nin bire-bir olduğunu göstermek için: $f(x_1) = f(x_2)$ varsayın ve $x_1 = x_2$ olduğunu göstermek için işlem yapın.

Bir dönüşümün örten olduğu nasıl kanıtlanır

$f: X \to Y$ nin örten olduğunu göstermek için: her $y \in Y$ için $f(x) = y$ olacak şekilde $x \in X$ olduğunu gösterin.

Bir dönüşümün bire-bir örten olduğu nasıl kanıtlanır

Bire-bir ve örten olduğunu kanıtlayın.

Dizin

$\Longrightarrow$ kötüye kullanma (abuse of), 37
$\sqrt{2}$, 109, 163

alt küme (subset), 7
  öz (proper), 7
aksiyom (axiom), 99
anlamak, kavramak (understanding)
  tanımları (definitions), 252
  kanıtları (proofs), 253
  teoremleri (theorems), 252
  konuları (topics), 253
aralarında asal (coprime), 203
aralarında asal (relatively prime), 203
arcsin (arcsin), 223
Aritmetiğin Temel Teoremi (Fundamental Theorem of Arithmetic), 177
asal sayı (prime number), 54, 103
  sonsuz çoklukta asal sayı (infinite number of), 191
  ikiz asal sayı (twin), 103
asallık testi (primality testing), 214
aşikar örnekler (trivial examples), 106

bağlaçlar (connectives), 58
bağıntı (relation), 231
bağlantılı (related), 231
bağlayıcı deyimler (connecting phrases), 39
başlangıç adımı (initial step), 168
Binom Teoremi (Binomial Theorem), 147
bire-bir (one-to-one), 218
bire-bir (1-1) eşleme (bijection), 222
bire-bir eşleme (one-to-one correspondence), 222
bire-bir fonksiyon (injective function), 218
bire-bir örten (bijective), 222
birim dönüşüm (identity map), 11
boş küme (empty set), 6
böler (divides), 187
Bölüm Lemması (Division Lemma), 196, 244
bölen (divisor), 187
bölünebilir (divisible), 167, 244
bölünebilirlik (divisibility), 187

çarpanlarına ayırma (factorization), 196
çift koşullu (biconditional), 76
çift tamsayı (even integer), 103
çift olumsuz (double negative), 57
çalışılmış örnekler (worked examples), 90
  sizin için kötüdür (are bad for you), 91
  ters çevirme (reversing), 91
çelişki (contradiction), 61

değer (value), 10
değer kümesi (codomain), 10
değilleme (negation), 56
  eğer … ise, o zaman … (if …, then …), 66
  niceleyiciler (quantifiers), 87
değişmeli (commutative), 107
denklem (equation), 36
denk önermeler (equivalent statements), 57, 60
denklik bağıntısı (equivalence relation),231
denklik sınıfı (equivalence class), 233
dışlayıcı ya da (exclusive or), 59
Diofant denklemleri (Diophantine equations), 204
diskriminant (discrimimant), 36
doğal sayılar (natural numbers), 4
doğruluk çizelgeleri (truth tables), 57
dokuzların atılması (casting out nines), 216
dolaysız, doğrudan kanıt yöntemleri (direct method of proof), 139
döngüsel argüman (circular argument), 142
dönüşüm (map), 10
Dört Renk Teoremi (Four Colour Theorem), 155
durumlar (cases), 156

ebob (gcd), 192
eğer …, o zaman (if …, then), 35, 63
en büyük ortak bölen (greatest common divisor), 192
en büyük ortak çarpan (greatest common factor), 192
en küçük ortak kat (least common multiple), 297
en yüksek ortak çarpan (highest common factor), 192
eş anlamlılar (synonyms), 39
eşit uzaklıkta (equidistant), 134
eşittir (equals)
  eşittirin sergilenmesi (displaying), 30
  eşittir eşittir demektir (means equals), 30
Euclid Lemması, (Euclid's Lemma), 203
Euclid Algoritması (Euclidean Algorithm), 203
eve (iff), 77
evetleme (conjunction), 58
evrensel niceleyici (universal quantifier), 80
evrik, (inverse), 70, 180

faktoryel (factorial), 41, 108
Fermat sayısı (Fermat number), 194
Fermat'ın Küçük Teoremi (Fermat's Little Theorem), 211
Fermat'ın Son Teoremi (Fermat's Last Theorem), 101, 249
Fibonacci sayıları (Fibonacci numbers), 178
FLT, Fermat'ın Küçük Teoremine bakın (FLT, *see* Fermat's Little Theorem), 213
fonksiyon (function), 10
  1-1 eşleme (bijection), 222
  bire-bir örtenlik (bijective), 222

değer kümesi (codomain), 10
tanım kümesi (domain), 10
ters fonksiyon (inverse), 223
1-1 eşleme (one-to-one correspondence), 222
polinom fonksiyonu (polynomial), 11
kaynak (source), 10
hedef (target), 10
değer (value), 10
fonksiyonun değeri (value of a function), 36
formül (formula), 36

Gamma fonksiyonu (Gamma function), 108
genelleştirme (generalization), 114, 248
genellikten yitirmeksizin (without loss of generality), 144, 250
örnek (example), 119, 124, 157, 163, 199
gerçel sayılar (real numbers), 5
gerekli koşul (necessary condition), 71
gerektirme (implication), 63
gerektirme sembolünün kötü kullanımı (abuse of, implication symbol), 37
Goldbach Sanısı (Goldbach Conjecture), 54
grup (group), 101, 245

hata, ölümcül olmayan (error, non-fatal), 120
hedef, değer kümesi (target), 10
her için (for all), 80
Homer Simpson (Homer Simpson), 133

içleyici ya da (inclusive or), 59
ifade, deyim (expression), 36
ikili işlem (binary operation), 101, 107
iki-oyunculu oyun (two-player game), 86
ikiz asal (twin prime), 103
indis (index), 44
irrasyonel sayılar (irrational numbers), 5
iyi (well), 22
İyi Sıralama İlkesi (Well-Ordering Principle), 197, 206
iyi-tanımlı (well-defined), 239
izlerinizi örtmek (covering your tracks), 172

kabul (assumption), 43, 64
kanıt (proof), 100
kanıtın tanımı (definition), 99
kanıtın son kez okunması (proof-reading), 32
kardinalite (cardinality), 6, 42
kare sayı (square number), 103
karemsi sayı (squarey number), 103
karmaşık sayılar (complex numbers), 5
karşıt ters (contrapositive), 72, 180
karşıt örnek (counterexample), 90, 92
kaynak (source), 10
Kosinüs Kuralı (Cosine Rule), 22, 65, 132, 249
koşullu önerme (conditional statement), 54
konveks (convex), 107
kuvvet kümesi (power set), 114
Kuvvetli Matematiksel Tümevarım İlkesi (Principle of Strong Mathematical Induction), 175
kuvvetli sonuç (strong conclusion), 110
kuvvetli varsayım (strong assumption), 110
küme (set), 3
kardinalitesi (cardinality), 6
tümleyeni (complement), 9
farkı (difference), 9
sonlu küme (infinite), 6
arakesiti (intersection), 9
kuvvet kümesi (power set), 114
çarpımı (product), 10
birleşimi (union), 8
kümelerin arakesiti (intersection of sets), 9
kümelerin birleşimi (union of sets), 8
kümelerin çarpımı (product of sets), 10
kümelerin eşitliği (equality of sets), 6
kümelerin farkı (difference of sets), 9
kümelerin tümleyeni (complement of sets), 9
kümenin elemanı (element of a set), 3
kümenin öğeleri (members of a set), 3

lemma (lemma), 100
tanımı (definition), 99

maksimum fonksiyonu (maximum function), 159
mantıksal denk önermeler (logically equivalent statements), 76
matematiksel önerme (mathematical statement), 53
Matematiksel Tümevarım İlkesi (Principle of Mathematical Induction), 167, 175
minimum fonksiyonu (minimum function), 159
mod (mod), 208
modulo (modulo), 208
modulo *n* denk (equivalent modulo *n*), 208
modül (modulus), 156
modüler aritmetik (modular arithmetic), 208
mutlu sayı (happy number), 108

negatif olmayan tam sayılar (non-negative integers), 5
niceleyici (quantifier)
varlıksal (existential), 81
her için (for all), 80
değillemesi (negation), 87
sırası önemlidir (order is important), 82
karmaşıklığı görmek (seeing through the complexity), 85
vardır (there exists), 81
evrensel (universal), 80
niceleyiciler (quantifiers), 80

okuma (reading)
düzenli okuma yöntemleri (systematic method), 16
kalem kağıtla okuma (with pen and paper), 15
ondalık yaklaşımlar (decimal approximation), 36
ya da (or)
tanımı (definition), 59
dışlayıcı (exclusive), 59
içleyici (inclusive), 59
orta dikme (perpendicular bisector), 134, 158
ortanın dışlanması (excluded middle), 54, 61
ortanın dışlanması yasası (law of the excluded middle), 54, 161
Oz'un Sihirbazı (Wizard of Oz), 133

ölümcül olmayan hata (non-fatal error), 120, 158
önerme (proposition) 100
önermenin tanımı (definition), 99
önerme (statement), 53
çift koşullu (biconditional), 76
koşullu (conditional), 54
çelişki (contradiction), 61
karşıt ters (contrapositive), 72, 180
ters (converse), 75
çift olumsuz (double negative), 57
denk (equivalent), 60
genelleştirme (generalization), 248
evrik (inverse), 70, 180