GÜNDÜZ
Basım Yayım Dağıtım
Ticaret ve San. Ltd. Şti.

Geometrinin Gizli Dünyası
Curious and Interesting Geometry
David Wells
© 1998 Onk Ajans / İstanbul-Türkiye
Birinci Baskı: Eylül 1998
Türkçe Yayın Hakları Gündüz Basım Yayım
Dağıtım Ticaret ve San. Ltd. Şti.'ne Aittir.
ISBN 975-8304-03-8

Türkçesi:
Doç. Dr. Selçuk Alsan
Kapak Düzenleme
Ender Öndeş
Baskı-Cilt
Umut Matbaası



SARMAL YAYINEVİ
Çatalçeşme Sk. Meriçli Apt. 52/3 Cağaloğlu - İstanbul
Tel: (0 212) 513 94 23 - 513 95 21 Fax: (0 212) 522 45 78

David Wells

Ω

GEOMETRİNİN GİZLİ DÜNYASI

Türkçesi
Doç. Dr. Selçuk Alsan

REFERANSLAR

BOLD B. *Famous Problems of Geometry and How to Solve Them,* Dover, New York, 1964.

COXETER H.S.M. *Introduction to Geometry,* Wiley, New York, 1961.

COXETER H.S.M. *Twelve Geometric Essays,* Southern Illinois University Press, 1968.

CUNDY H.M. and ROLLETT A.P. *Mathematical Models,* Tarquin Publications, 1987.

DAVIS C., GRUNBAUM B. and SCHERK F.A., *The Geometric Vein,* Springer, New York, 1981.

EVES H. *A Survey of Geometry,* vols 1 & 2, Allyn and Bacon, Boston, 1963-5.

FRANCIS G.K. *A Topological Picture Book,* Spriger, New York, 1987.

GRUNBAUM B. and SHEPHERD G.C., *Tilings and Patterns,* W.H. Freeman, San Francisco, 1987.

HEATH T.L. *The Works of Archimedes,* Dover, New York, n.d.

HILBERT D. and COHN-VOSSEN S., *Geometry and the Imagination,* Chelsea Publishing Company, New York, 1952.

HILDEBRANDT S. and TROMBA A., *Mathematics and Optimal Form,* Scientific American Library, W.H. Freeman, New York, 1985.

HUNTLEY H.E. *The Divine Proportion,* Dover, New York, 1970.

IVINS W.M. *Art and Geometry,* Dover, New York, 1964.

LINDGREN H. *Recreational Problems in Geometric Dissections and How to Solve Them,* Dover, New York, 1972.

LOCKWOOD E.H. *A Book of Curves,* Cambridge University Press, 1967.

MANDELBROT B. *The Fractal Geometry of Nature,* W.H. Freeman, San Francisco, 1982.

OGILVY C.S. *Excursions in Geometry,* Oxford University Press, New York, 1969.

PEDOE D. *Geometry and the Liberal Arts,* Penguin, 1976.

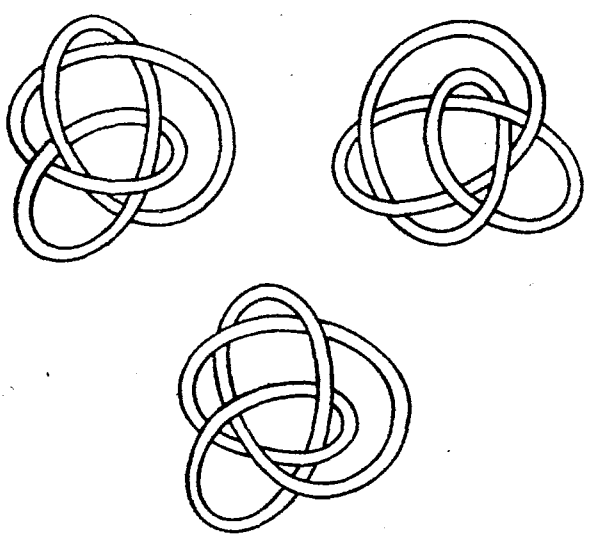
STEINHAUS H. *Mathematical Snapshots,* Oxford University Press, New York, 1969.

WENNİNGER M. *Polyhedron Models,* Cambridge University Press, 1971.

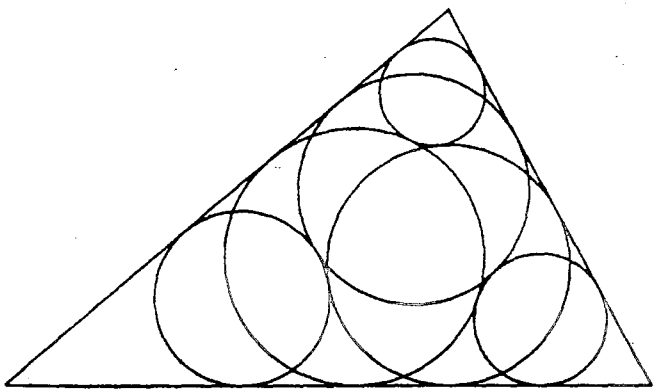
WEYL H. *Symmetry,* Princeton University Press, 1962.

A

Alterne etmeyen düğümler Sekizden az çaprazı olan asal bir düğüm alterne etmelidir. Bu şu demektir; ipin yolunu izlerseniz ip kendini bir üstten, bir alttan çaprazlar. (Çaprazları sayarken şuna dikkat ediniz; bir ip parçasını iki yandan bastırıp bir kıvrım yaptıktan sonra ters çevirirseniz, bunu çapraz olarak sayamazsınız.) En küçük alterne etmeyen düğümler aşağıda görülen 8 çaprazlı 3 düğümdür.

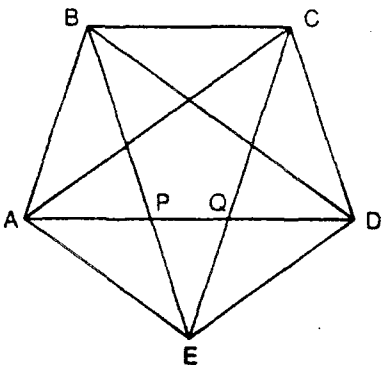


Altı daire teoremi Bir üçgen alınız ve üçgenin iki kenarına da teğet bir daire çiziniz. Sonra bir başka daire çiziniz, öyle ki ilk daireye ve bir başka kenar çiftine teğet olsun. Bu kurala uyarak devam ediniz ve her keresinde yeni bir daireyi öncekilere ekleyiniz. Altıncı daire ilk daireye teğet olarak devri tamamlar.



Referans: C.J.A. Evelyn, G.B. Money-Coutts and J.R. Tyrell, The Seven Circles Theorem and Other New Theorems, Stacey International, London, 1974.

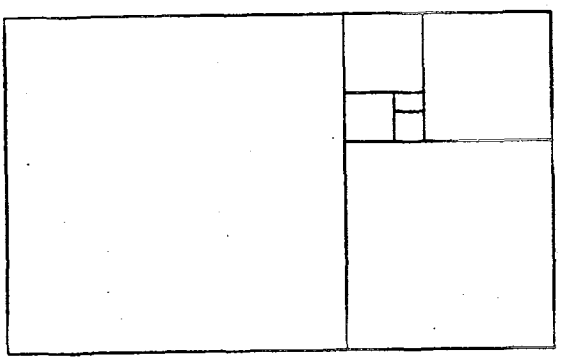
Altın oran, altın bölme veya kutsal oran Düzgün bir beşgen içine yıldız biçimi bir beşgen çizilirse, altın oran doğal olarak belirir. Dodekahedron (12 yüzlü) ve ikozahedron'da da (20 yüzlü) aynı oran belirir; Euclid adı geçen bu polihedron'ları (çokyüzlü) bir çizgiyi kendi deyişiyle "aşırı ve ortalama oran"da bölerek oluşturmuştur.



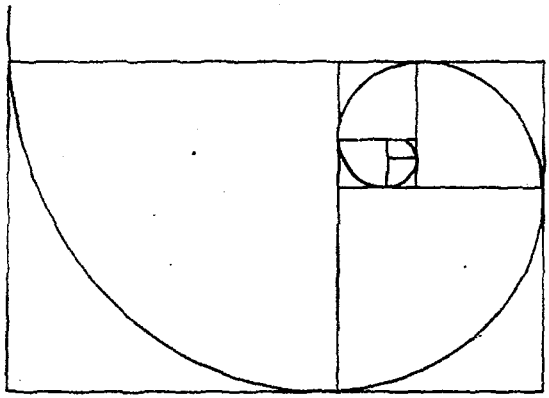
AQ/QD, AP/PQ ve AD/BC, $(1+\sqrt{5})$'e eşittir; bu 1.618'e yakın bir sayıdır. Altın oran ekseri Grek harfi $\varnothing$ (fi) [veya bazen τ (tau)] ile gösterilir.

Bu oranın özelliği şöyle ifade edilebilmesidir: $\varnothing = 1/(\varnothing-1)$ veya $\varnothing^2 = \varnothing + 1$.

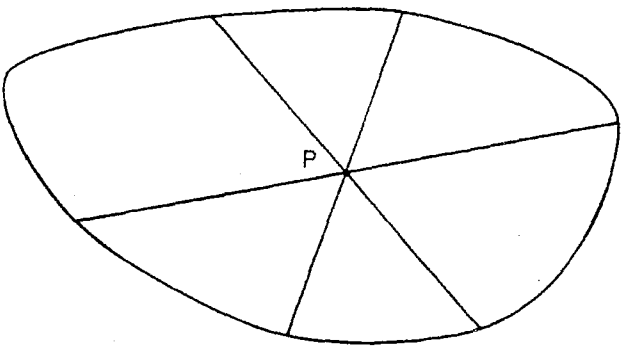
Bu "altın dikdörtgen" bu nedenle bir kare ile kenarları yine altın oran olan bir dikdörtgene bölünebilir. Bu bölme şekilde de görüldüğü gibi sonsuza kadar devam edebilir.



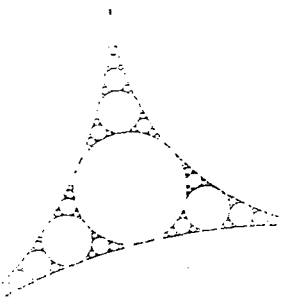
Bu köşelere dayanarak bir "*eşit açılı spiral*" (*logaritmik spiral*) çizilebilir. Birbirini izleyen daire çeyrekleri bu spiral'e hayli yakın bir spiral oluşturur. Gerçek spiral, dikdörtgenin kenarlarına değmez. [Altın oran bir AB doğru parçasının içindeki bir P noktasınca, "aşırı ve ortalama oran"da bölünmesidir; öyle ki AB/AP = AP/PB olur. AP/PB = 1/2 $(1+\sqrt{5})$dir. Bu sayı, $x^2-x-1 = 0$ denkleminin köküdür. Altın dikdörtgen kenarlarının oranı 1/2 $(1+\sqrt{5})$ olan dikdörtgendir. Ardışık Fibonacci sayılarının oranı, altın oranı verir. Ç.N.]



60°'lık kirişler Herhangi kapalı konveks bir eğri verildiğinde, öyle bir P noktası bulunabilir ki P'den geçen üç kiriş aralarında 60° açı yapar ve P bu kirişlerin orta noktası olur.



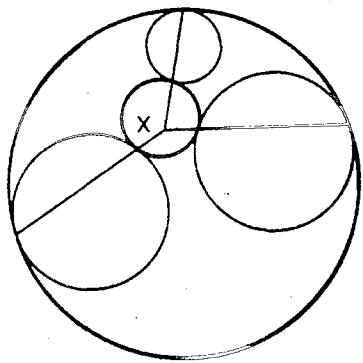
Apollon contası Üç daire birbirine teğet olduğu zaman, kenarları eğri bir üçgen oluşur. Bu üçgenin içine yine üç kenara teğet bir daire çizilebilir ve bu defa kenarları eğri üç üçgen oluşur. Bu çizim böylece



sonsuza kadar tekrarlanabilir. Şekilde bu üçgen içinde Apollon contasının oluşmasının ilk birkaç safhasını görüyorsunuz.

Dairelerden hiçbirinin içinde olmayan noktalar, sıfır alanlı bir küme oluşturur; bu, bir doğrudan fazla, bir yüzeyden azdır. Böylece fraktal boyutu, tam bilinmemekle birlikte 1 ve 2 arasında yatar; yaklaşık 1.3'tür.

Apollonius problemi A, B ve C gibi rastgele üç daire verilmiş olsun. Öyle bir D dairesi çizin ki hem A, hem B ve hem de C dairesine teğet olsun. Bu problemi ilk defa Pergalı Apollonius ortaya attı ve çözdü. En genel durumda 8 farklı çözüm vardır: 1) D dairesi, kendi içindeki A, B ve C dairelerine teğettir. 2) D dairesi, kendi dışındaki A, B ve C dairelerine teğettir. 3) D dairesi kendi içindeki A ve kendi dışındaki B ve C dairelerine teğettir. 4) D dairesi kendi içindeki B ve kendi dışındaki A ve C dairelerine teğettir. 5) D dairesi kendi içindeki C ve kendi dışındaki A ve B dairelerine teğettir. 6) D dairesi kendi içindeki A ve B ve kendi dışındaki C dairesine teğettir. 7) D dairesi kendi içindeki B ve C ve kendi dışındaki A dairesine teğettir. 8) D dairesi kendi içindeki A ve C ve kendi dışındaki B dairesine teğettir.



(Üç boyutlu benzer bir problem olarak bir kürenin verilmiş dört kürenin herbirine değmesi 2x2x2x2=16 şekilde mümkündür).

Bu şekilde bir dış ve bir iç dairenin her biri A, B ve C gibi üç daireye teğettir. A, B ve C dairelerinden herbirinin, dış ve iç daire ile teğet oldukları noktaları birleştirip 3 doğru elde edelim; bu doğrular bir x noktasında kesişir. Açıkça bellidir ki hem iç, hem dış daireye teğet her dairenin üstündeki iki teğet noktasını birleştiren doğru x'den geçer.

Her biri diğer üçüne teğet dört daireden oluşan bir küme düşünelim [Örneğin her biri diğer ikisine teğet üç dairenin ortasında kalan eğri kenarlı üçgen içine, her üç daireye de teğet olan bir dördüncü daire koyalım veya birbirine teğet üç daire etrafına bu üç daireyi içine alan, üçüne de teğet dördüncü bir daire çizelim (Ç.N.)]; şimdi kesinlikle şunu söyleyebiliriz; bu 4 dairenin birbirine teğet olduğu 6 noktadan yine birbirine teğet bir başka dört daire kümesi geçer.

Her biri diğer ikisine teğet 3 daire olsun ve bunların çaplarını bildiğimizi varsayalım. Bu üç dairenin üçüne birden teğet olacak dairelerin çapı nasıl hesaplanır?

Bunun için kullanılan en basit formülde yarı çaplar değil, yarı çapların tersi ("eğrilik", curvature) kullanılır.

Fransız matematikçi ve filozofu Descartes, her biri diğer üçüne teğet dört daire için şu formülü verdi:

$2(a^2+b^2+c^2+d^2) = (a+b+c+d)^2$

Burada $a=1/r_1$, $b=1/r_2$, $c=1/r_3$ ve $d=1/r_4$'dür. (r=yarı çap).

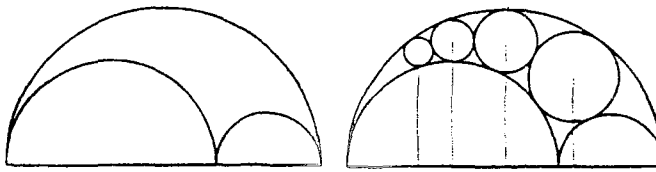
Sekiz olası daire için tek bir formül oluşunun nedeni şudur: bir dairenin eğriliği, o daireye içten değen bir başka daire varsa, negatif kabul edilir.

Bu formül 1842'de tekrar keşfedildi ve 1936'da Sir Frederick Soddy (Soddy heksletini bulan kişi) tarafından bir kez daha bulundu (Bkz. Soddy'nin heksleti). Bu buluş Soddy'yi o kadar mutlu etmişti ki

Nature dergisine bir şiir yazdı. Bu şiirin bir parçasını veriyoruz (hafifçe dilimize uyarlandı Ç.N.)

Dört çılgın âşık birbirini buldu.
Dört daire vardı bir zamanlar,
Yanan dudaklar birbirine değdi,
Euclid'in hayretten dili tutuldu,
En küçüğü en eğriydi,
Eğrilik yarı çapın tersi,
Parmak hesabı istemez, mersi,
Doğruların yarı çapı sonsuz
Ve eğriliği sıfır,
İç bükey eğrilikler eksi,
Dört eğriliğin karelerinin toplamı
Dört eğriliğin toplamının karesine
Eşittir biliyorum ama
Bunu nasıl yazayım kafama?

arbelos Şekildeki gibi aynı doğru üzerine çizilmiş üç yarım daire tarafından sınırlanmış alana Arşimed tarafından arbelos adı verilmişti (arbelos, Grekçede kunduracı bıçağı demekti). Arşimed her üç yarım daireye teğet olan dairenin yarı çapını hesapladı.

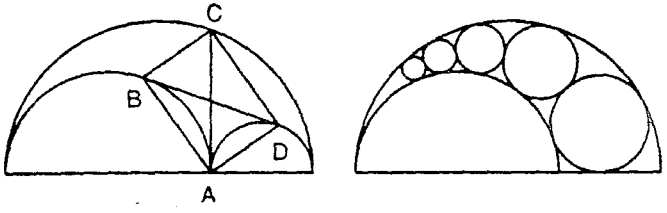


Beş yüz yıl sonra Pappus, eskiden bulunmuş bir sonucu açıkladı; arbelos içine sağdan sola birbirine teğet daireler çizilirse, n. dairenin merkezinin taban doğrusundan olan uzaklığı, kendi çapının n katıdır.

(Şöyle de diyebiliriz: arbelos içine teğet çizilen daire merkezlerinin taban çizgisinden uzaklığı x=n. D_n'dir. D_n=n. dairenin çapı. Ç.N.)

Dairelerin merkezleri, büyük ekseni taban doğrusu olan bir elipsin üzerinde bulunur; dairelerin birbirlerine teğet olduğu noktaların geometrik yeri ise, bir dairedir.

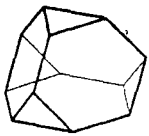
Arşimed, arbelos'un alanının AC'yi çap kabul eden dairenin alanına eşit olduğunu kanıtladı. İki küçük yarım dairenin ortak teğeti BD çizilirse ABCD dikdörtgeni elde edilir.



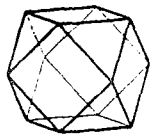
Arşimed şunu da kanıtladı: AC'nin sağında AC'ye, en büyük yarım daireye (içten) ve en küçük yarım daireye (dıştan) teğet çizilen daireyle AC'nin solunda AC'ye, en büyük yarım daireye (içten) ve ortanca yarım daireye (dıştan) teğet çizilen daire eşittir.

Sağdaki şekilde yarım dairelerden biri konulmamıştır. Şimdi n. dairenin merkezinin taban doğrusundan uzaklığı, yarı çapının 2n-1 katıdır. Arbelos şekillerinin çoğu, Steiner daireler zincirinin özel hâlleridir (Bkz. Steiner daireler zinciri).

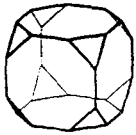
Arşimed çokyüzlüleri Pappus'a göre Arşimed 13 yarı düzgün çokyüzlü (polihedron) inceledi. Bunların hepsinin düzgün çokgen yüzleri vardı; bu çokgen yüzler, en az iki değişik düzgün çokgen içeriyordu; köşeler ise özdeşti.



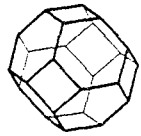
Kesik dörtyüzlü



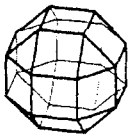
Küp-sekizyüzlü



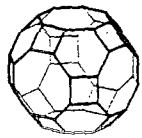
Kesik küp



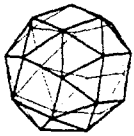
Kesik sekizyüzlü



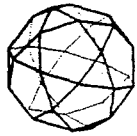
Küçük rombi-küp-sekizyüzlü



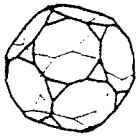
Büyük rombi-küp-sekizyüzlü



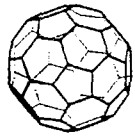
Kalkık küp



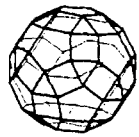
İkosidodekahedron (bileşik 20 ve 12 yüzlü)



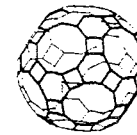
Kesik onikiyüzlü



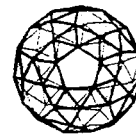
Kesik yirmiyüzlü



Küçük rombikosidodekahedron (bileşik rombi-20 ve 12 yüzlü)



Büyük rombikosidodekahedron (bileşik rombi-20 ve 12 yüzlü)



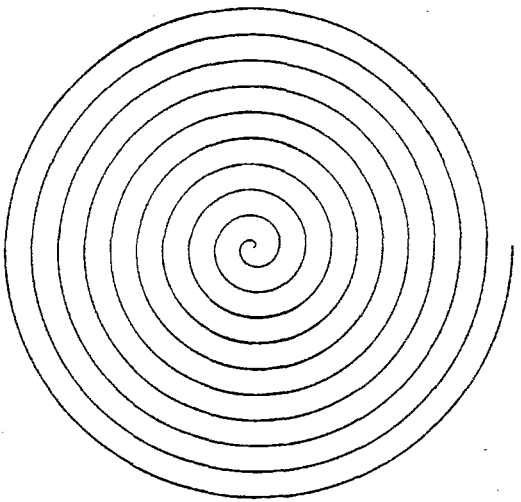
Kalkık onikiyüzlü

Bu şekillerin on bir tanesi düzgün çokyüzlülerden köşe veya kenar keserek elde edilmiştir (kesilen köşe veya kenar yeni bir yüz oluşturur.) Bu şekillerden dokuz tanesi, düzgün çokyüzlülerden köşe veya köşe ve kenar keserek yapılmıştır. Örneğin küp sekizyüzlü, kesik kübün daha fazla yontulmasıyla oluşturulur; öyle ki köşelerdeki üçgenler kenarların ortasında birleşir. Diğerleri ilk dokuz şekilden ikisinin köşe ve/veya kenarlarını keserek elde edilmiştir.

Kalkık küp ve kalkık onikiyüzlü şöyle elde edilir; bir küp veya onkiyüzlünün yüzleri dışa doğru itilir; her yüz biraz döndürülür ve oluşan boşluklar eşkenar üçgenlerle doldurulur. Her yüz sola veya sağa döndürülebileceğinden, her birinden birbirinin ayna hayali olan iki şekil oluşur.

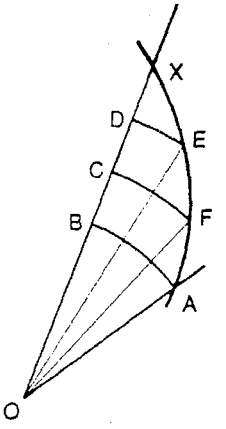
Arşimed spirali Arşimed'in *Spiraller Üzerine* adlı kitabında anlattığı bu eğriyi birlikte tanıyalım. Bir saat düşünelim; bu saatin yelkovanı üzerinde bir sinek sabit bir hızla yürüsün; bu sırada da yelkovan sabit bir hızla dönsün. Sineğin saat kadranı üzerindeki izdüşümle-

rinin geometrik yeri bir Arşimed spiralidir. Bunu matematik diliyle şöyle söyleriz: Sabit bir hızla dönen bir doğru üzerinde belli bir noktadan sabit bir hızla uzaklaşan bir noktanın geometrik yeri bir Arşimed spiralidir.

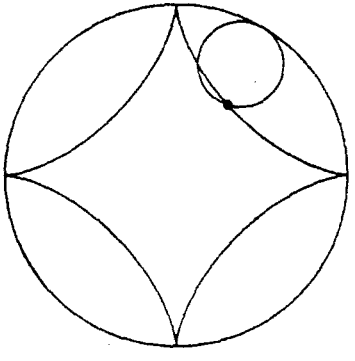


Belli nokta doğrunun başlangıcı, yani orijin (O) ise spiralin polar denklemi $r = a\theta$'dır. Eğer $a>0$ ise spiral orijin etrafında saatin tersi yönde döner; $a<0$ ise rotasyon saatin dönme yönündedir.

Arşimed spirali herhangi bir açıyı üçe bölmek için kullanılabilir. Daha doğrusu Arşimed spirali herhangi bir açıyı istendiği kadar eşit parçaya ayırmak için kullanılabilir. Şekilde XOA açısının eşit 3 parçaya bölünüşü görülüyor. XEFA Arşimed spiralinin bir parçasıdır. OB=OA alın ve BX'i 3'e bölerek C ve D'yi bulun. Pergelin sivri ucunu O'ya koyarak spirali E ve F'de kesecek yayları çizin. OE ve OF, XOA açısını üçe böler.

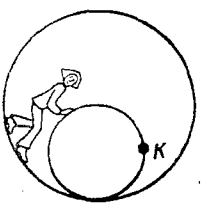


Astroid (yıldız eğrisi) **veya dört köşe noktalı hiposikloid** (iç çevrim eğrisi) Astroid, çapı kendi çapının 4 katı olan sabit bir dairenin içinde, ona teğet kalarak dönen bir daire üzerindeki sabit bir noktanın geometrik yeridir; ayrıca Daniel Bernouilli'nin gösterdiği üzere, çapı içinde yuvarlandığı sabit dairenin çapının 3/4'ü olan bir daire üzerinde bulunan bir noktanın da geometrik yeridir.

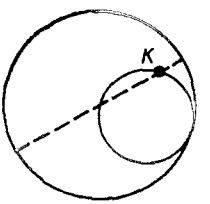


Gariptir ki astroid'in görünen dört köşe noktasına ek olarak iki sanal köşe noktası daha vardır (köşe noktası veya cuspis, bir eğri üzerinde eğrinin iki yayının karşılaştığı ve teğetlerinin çakıştığı noktadır. Astroid'in şekilde kuzey, güney, doğu ve batı noktalarında birer köşe noktası olduğu görülüyor. Ç.N.)

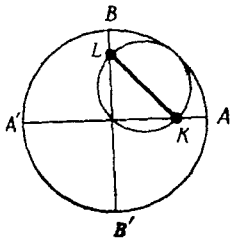
Eğer bir daire, çapı kendi çapının iki katı olan bir daire içinde ona teğet kalarak yuvarlanıyorsa, dönen dairenin bir çapının zarfı bir astroid'dir. [zarf (anvelop) bir eğriler veya yüzeyler takımının her bir öğesine teğet olan eğri veya yüzeye denir. Ortak merkezli biri büyük, biri küçük iki daire çizerek bir halka (annulus) oluşturalım. Aynı zamanda hem büyük daireye içten, hem de küçük daireye dıştan teğet olan daireler çizerek halkayı dolduralım, bir dingilin ucundaki bilyalar gibi. Halka bu küçük dairelerin zarfıdır. Ç.N.] Çapı kendi çapının iki katı olan bir dairenin içinde ona teğet kalarak dönen bir dairenin bir çapının uçları, dönme sırasında daima sabit dairenin birbirine dik iki çapı üzerinde bulunur (bunu anlamak için Kopernik teoremini bilmek gerekir. Bir daire, çapı kendi çapının iki katı olan sabit bir daire içinde ona teğet kalarak yuvarlanırken, dönen dairenin üzerindeki sabit bir K noktasının geometrik yeri, sabit dairenin belli bir çapıdır



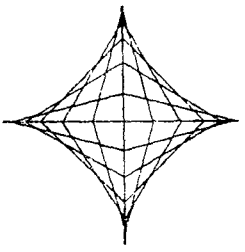
Şekil Ek 1



Şekil Ek 2



Şekil Ek 3



Şekil Ek 4

(Ek 1, 2, 3, 4 orijinal metinde yoktur, çevirmen tarafından eklenmiştir)

Dönen daire içinde sabit bir LK çapı düşünelim. Daire dönerken Kopernik teoremi gereği L noktası BB´, K noktası ise AA´ çapı boyunca kayacaktır. Söylemek istediğimiz de buydu: Dönen dairenin belli bir çapının uçları, daima sabit dairenin birbirine dik iki çapı üzerinde bulunur. Ç.N.). Şimdi buna dayanarak astroid için yeni bir tanım verebiliriz.

Astroid, uçları daima birbirine dik iki doğru üzerinde bulunacak şekilde kayan bir doğru parçasının zarfıdır.

(KL üzerindeki noktaların hareket sırasında örttüğü alan veya KL doğru parçasının olası bütün pozisyonlarının birleştirilmesi bir astroid oluşturur. Şekle bkz. Ç.N.)

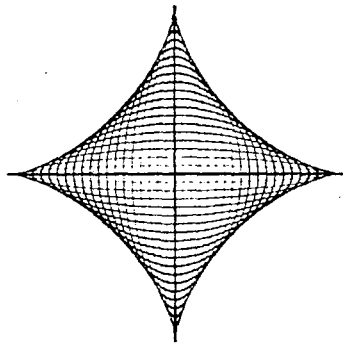
Sabit dairenin yarı çapı a ise astroid denklemi şöyle olur:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

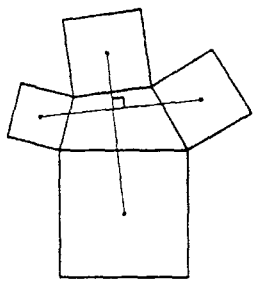
Bu formül 1715'te Leibniz'in mektuplarında bulunmuştur.

Astroid'in alanı, köşelerinden geçen daire alanının 3/8'i ve içine çizilen daire alanının 1.5 katıdır.

Aşağıdaki şekilde görüldüğü üzere astroid, eksenleri astroid'in yatay ve dikey eksenleriyle çakışan ve büyük ve küçük eksenlerinin toplamı sabit olan elipslerin de zarfıdır.

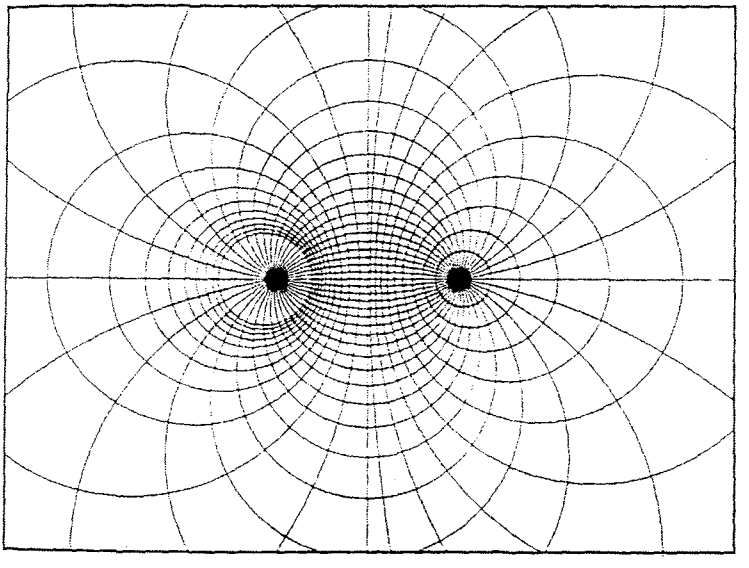


Aubel teoremi Rastgele bir dörtgen çizin. Konveks (dış bükey) olması gerekmez; hatta kenarlarından birinin sıfır olması bile sonucu değiştirmez. Kenarların her biri üzerinde dışarı doğru birer kare çizin. Karşılıklı karelerin merkezlerini birleştiren doğru parçaları eşit ve birbirine diktir.



Eğer kareler içeri doğru çizilirse bu sonuç değişmez; yine karşılıklı karelerin merkezlerini birleştiren doğrular birbirine dik ve eşit uzunluktadır. Ayrıca karelerin içeri veya dışarı doğru çizilmesiyle oluşan "haç"ların arasında yalnızca iki orta nokta vardır ve bu iki orta noktayı birleştiren doğru parçasının orta noktası, orijinal dörtgenin dört köşesinin ağırlık merkezidir.

Aynı eksenli (coaxial) daireler Şekilde aynı eksenli dairelerden iki küme görülüyor. Kümelerden biri iki sabit noktadan geçen bütün dairelerden ibaret. Diğer kümenin her dairesi, ilk kümenin her dairesine dik; yani 1. ve 2. kümenin daireleri birbirlerini 90° açıyla kesiyor.

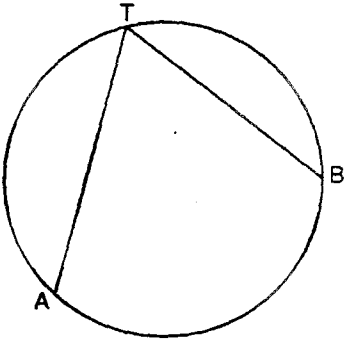


Kümelerden birinin daireleri birbirleriyle asla kesişmez (solda ve sağda içiçe birbirlerini kesmeyen daireler); limit durumları, en küçük iki dairenin içindeki iki nokta ile ortadaki vertikal simetri çizgisidir (bu sonuncu sonsuz çaplı bir daire olarak düşünülebilir.)

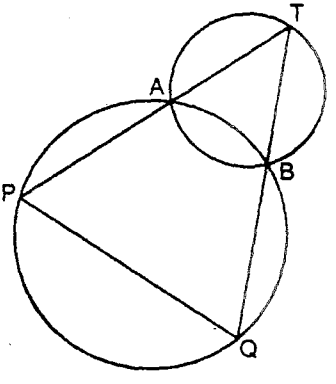
Diğer kümedeki (iki sabit noktadan geçen daireler) her daire, 1. kümenin (konsantrik daireler takımı) iki limit noktasından geçer ve yatay simetri eksenini (iki kara noktayı birleştiren çizgi) özel bir durum olarak içerir. Bu kümenin iki sanal limit noktası vardır.

Şekil şöyle oluşturuldu: Eş merkezli (konsantrik) daireler kümesi alındı (yarıçap düzenli olarak artmak üzere) ve merkezlerinden geçen (eşit açılarla konulmuş) bir doğrular takımıyla inversiyon (evirtim) yapıldı. [Bir noktanın bir daireye göre inversiyonu (evirtimi): Bir dairenin bir yarıçapı üzerinde (daire içinde) A ve bu yarıçapın uzantısı üzerinde (daire dışında) bir B noktası olsun. Dairenin merkezine O diyelim. $AO \times BO = r^2$ ise (r dairenin yarıçapı) A ve B noktaları birbirlerinin invers'idir (evirtiğidir). Dairenin merkezi inversiyon merkezidir. Bütün noktaları, verilmiş bir eğrinin üzerindeki noktaların inversi olan bir eğriye, o eğrinin inversi denir. İnversiyon bazen "daireye göre simetri" adını da alır. İnversiyon merkezinin inversi yoktur. İnversiyon merkezinden geçen bir doğrunun inversi kendisidir. İnversiyon merkezinden geçmeyen bir doğrunun inversi, inversiyon merkezinden geçen bir dairedir. İnversiyon merkezinden geçen bir dairenin inversi, inversiyon merkezinden geçmeyen bir doğrudur. İnversiyon merkezinden geçmeyen bir dairenin inversi, inversiyon merkezinden geçmeyen bir dairedir. Ç.N.] Şekilde inversiyon dairesinin merkezi, sol limit noktası ve yarıçapı, iki merkez arası uzaklıktır. Birbirleriyle kesişmeyen dairelerden herbiri, konsantrik dairelerden birinin inversidir. Merkezi inversiyon dairesinin dışına düşen daireler soldaki daireleri verirler; bunların arasındaki mesafe sağdakilere göre daha küçüktür. Diğer kümedeki birbirleriyle kesişen dairelerden herbiri doğrulardan birinin inversidir.

Aynı yayı gören açılar Bir çember üzerinde A ve B gibi iki sabit nokta alın. T, AB büyük yayı üzerinde değişken bir nokta olsun. T'nin AB büyük yayı üzerinde yer değiştirmesine rağmen, ATB açısının büyüklüğü değişmez. Eğer küçük AB yayı üzerinde değişken bir S noktası alırsak, ASB açısı 180°–ATB olacaktır.

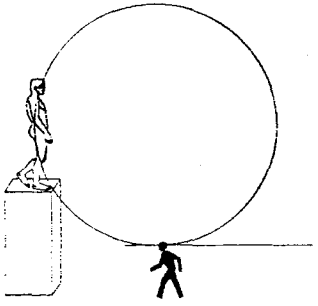


Eğer AB çapsa hem ATB, hem ASB açısı 90° olur. Thales'in M.Ö. 600 yılında bulduğu ve Babil'lilerin M.Ö. 2000'de bildikleri gibi çapı gören açı dikaçıdır veya bir yarım dairenin çevre açılarının hepsi 90°'dir.



Eğer iki daire A ve B'de kesişirse ve T dairelerden birinin çevresi üzerinde yer değiştirirse, diğer daire içindeki PQ kirişinin uzunluğu sabittir.

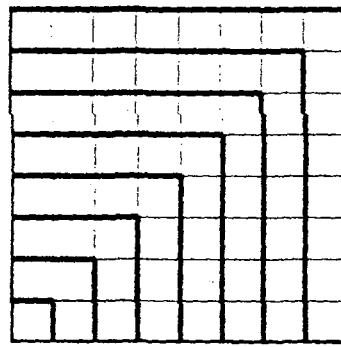
Regiomontanus şu soruyu sordu: Şekildeki gibi bir heykel, hangi mesafeden en büyük görülür? Eğer seyirci heykele çok yakınsa, heykel perspektif nedeniyle çok kısalacak, seyirci uzaksa heykel küçülecektir. Ancak heykelden geçen dairenin seyircinin gözünden de geçmesi halinde seyirci heykeli maksimum açıyla görür; bu ise heykelin en büyük olarak görülmesi demektir.



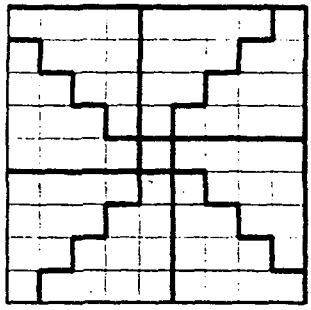
Bu problem o zamandan bu yana bir çok şekillerde ortaya çıkmıştır; en son şekli rugbi (Amerikan futbolu) ile ilgili bir problemdir. Bu futbolun çok kişiye yabancı kurallarını işin içine karıştırmadan, problem geometrik olarak şöyle sorulabilir: Kale direkleri arasında olmamak şartıyla, avut çizgisine (bir kalenin sol ve sağ direğini birleştiren doğru) bir dik çiziliyor. Bu dik üzerinde hangi nokta kaleyi en büyük açıyla görür? (Yanıt yukarıdaki gibidir; avut çizgisine dik olan doğruya teğet olan ve kale direklerinden geçen daireyi çizelim. Teğetin değme noktası kaleyi en büyük açıyla görür; top bu noktadan kaleye atılmalıdır, çünkü bu durumda topun kaleye girme şansı maksimumdur; heykel kaledir ve avut çizgisine dik doğru, seyircinin gözünden geçen yatay doğrudur. (Ç.N.)

B

Bakarak ispat Birçok basit aritmetiksel gerçek, uygun bir şekle bakarak ispat edilebilir.



İlk n tek sayının toplamı n^2 yapar. Her L biçimi şekil tek sayıda kare içerir.

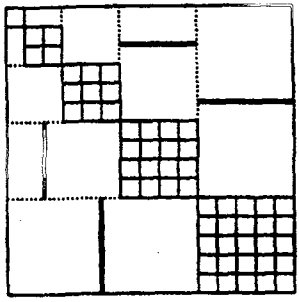


T_n, n. üçgen sayı olsun (üçgen sayılar 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36,... şeklinde gider. 1=0+1, 3=1+2, 6=1+2+3, 10=1+2+3+4, vb); $8T_n+1=(2n+1)^2$'dir. Her üçgen sayı bir merdivenle temsil edilmiştir; çünkü n. üçgen sayı 1+2+3+4+.....+n'dir. Şekilde $8T_n+1 = (2n+1)^2$ olduğu açıkça görülüyor. Burada n=4 ve $T_4 = 10 = 1+2+3+4$'dür.

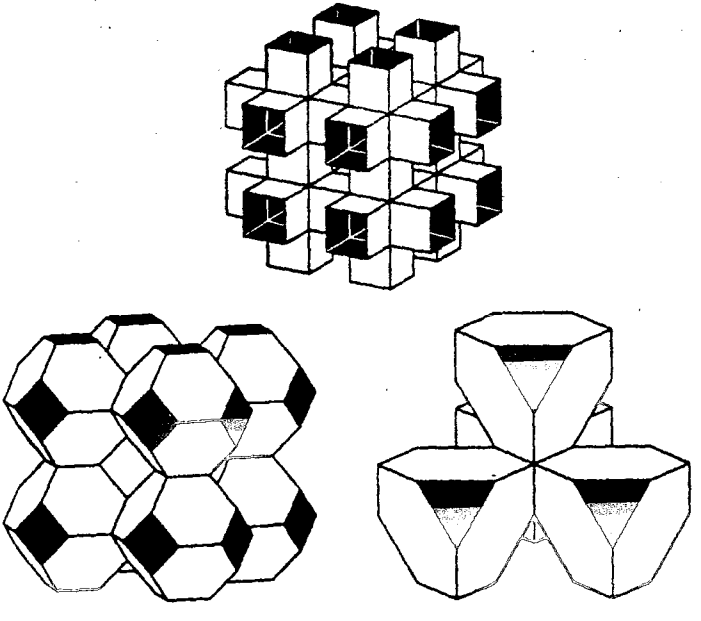
$8T_4+1 = (8.10)+1 = 81 = [(2.4)+1)]^2$. n. üçgen sayı Tn = 1+2+3+... +n'dir.

Bir sonraki şekilde iki tane 2x2 kare, üç tane 3x3 kare... vardır; böylece bir düzlem üzerinde tam sayı küplerinin toplamı şu formülle verilir:

$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3... = (1+2+3+4+5+...)^2$.



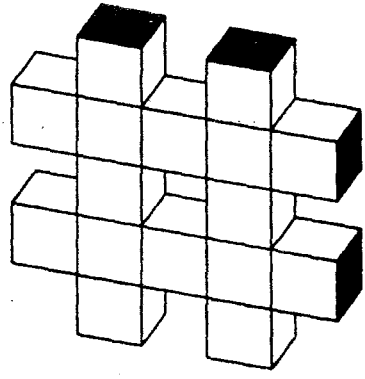
Bal petekleri 1926'da Petrie ve Coxeter 'düzgün sonsuzyüzlüler' denilen geometrik şekilleri buldular; bunların düzgün yüzleri ve köşeleri vardı; boşluk dolduruyorlardı. Birinci resimde her köşe etrafında 6 kare, ikincisinde her köşe etrafında 4 altıgen ve üçüncüsünde her köşe etrafında 6 altıgen görüyoruz. Bunlar o kadar düzgündür ki Coxeter düzgün sonsuzyüzlüler olarak kabul edilmelerini istemektedir. Eğer üç düzgün düzlemsel mozaik de dahil edilirse, ki sonsuzyüzlü olarak düşünülebilir, Coxeter'in yorumu düzenli çokyüzlülerin sayısını 15'e çıkarır.



İlk iki şekil birbirlerinin dualidir (eşlek); şöyle ki birinin köşeleri, diğerinin yüzlerinin orta noktasıdır. Üçüncü şekil bir dört yüzlü gibi kendi kendisinin dualidir.

Her köşe etrafında 6 kare içeren şekil (1. şekil) şöyle de düşünülebilir: Şekil özdeş küplerden yapılmış, her düzlem satranç tahtası gibi boyanmış ve sonra siyah kareler yerinde bırakılıp beyaz kareler çıkartılıp atılmıştır. Bu şekil, uzayı iki eşleşik (kongrüent, çakışabilir) yarıma ayırmakla kalmamaktadır; bu şekil eğilip bükülebilir ve eğer katı olmayan yüzlerden yapılırsa, bastırılarak düzlem şekline getirilebilir.

Bu sayfadaki şekil bütün köşeleri eşleşik (kongrüent, çakışabilir) olan bir çok yüzlüdür; her köşede 5 kare yüz karşılaşır. Bu şekil kare süngerle düzlem kare mozaik arasında bir şekildir ve gerçek bir süngere, bir friz bir mozaiğe benzediği kadar benzer.



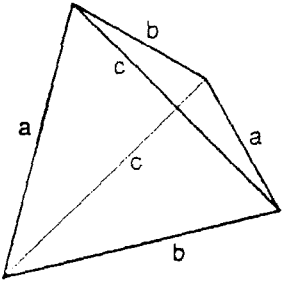
1967'de J.R. Gott buna benzer tekrarlayan yapıları, hafifçe farklı fakat daha ayrıntılı olarak yayımladı. Onun şekilleri Petrie'nin ve Coxeter'in şekillerini, az önceki şekli ve ayrıca 3 yeni şekli içeriyordu.

Bu 3 yeni şeklin biri her köşe etrafında 8 üçgen, diğeri 10 üçgen-

ve üçüncüsü 5 beşgen içeriyordu.

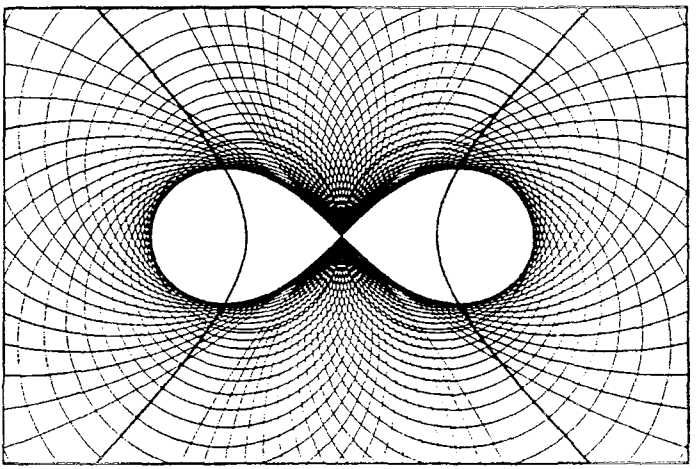
Referans: J.R. Gott, 'Pseudopolyhedrons', American Mathematical Monthly, May 1967.

Bang teoremi Bir dörtyüzlünün (tetrahedron) yüzlerinin hepsinin aynı çevreye sahip olmaları, ancak bu yüzlerin çakışabilen üçgenler olmasıyla mümkündür. Yine aynı derece doğrudur ki bir dörtyüzlünün bütün yüzlerinin alanları aynıysa, bu yüzler çakışan üçgenlerdir.



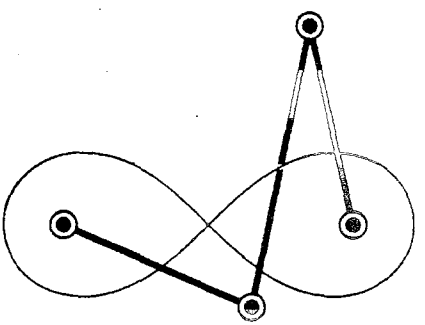
Bernouilli lemniskatı (kurdele eğrisi) Jacob Bernouilli tarafından 1694'te bulunmuştur. *Lemniscus* Latince kurdele demektir.

Lemniskatı bir zarf olarak çizmek için, dikdörtgensel bir hiperbol ile işe başlayalım. Merkezleri hiperbol üzerinde olan ve hiperbolün merkezinden geçen daireleri çizin. Bu dairelerin zarfı bir lemniskatdır (lemniskat bu dairelerin hepsine teğettir).



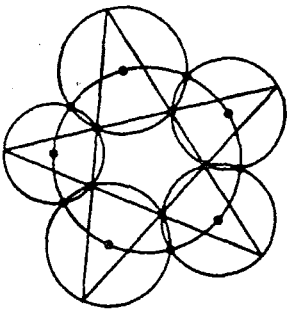
Lemniskat, hiperbolün kendi merkezine göre alınmış inversiyonudur. k gibi sabit bir sayı seçin; dikdörtgensel hiperbolün merkezi O'dan geçen bir doğru çizin; bu doğru hiperbolü X noktasında kessin. OX. OY = k^2 olacak şekilde bir Y noktası bulun. Y'lerin geometrik yeri lemniskat'dır.

Bu eğrinin polar denklemi şudur: $r^2 = a^2 \cos 2\theta$. Bernouilli lemniskatı *Cassini ovallerinin* özel bir şeklidir.



Lemniskat çok basit bir düzenekle çizilebilir. İki sabit nokta arasındaki uzaklık, orta çubuğun uzunluğu kadardır; diğer iki çubuğun uzunluğu, orta çubuk uzunluğunun $\sqrt{2}$ katıdır. Orta çubuğun orta noktasının geometrik yeri lemniskatdır. (Lemniskat yan yatmış 8 veya sonsuz işareti gibidir.)

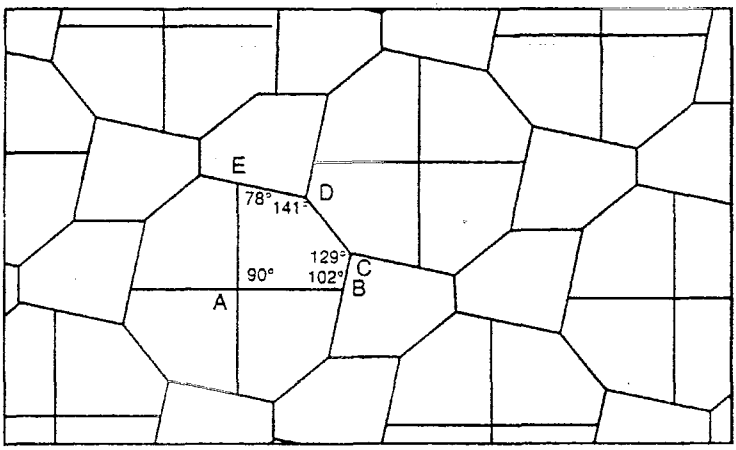
Beş daire teoremi Sabit bir daire alalım. Merkezleri bu dairenin çevresi üzerinde olan 5 daire çizelim; öyle ki bu dairelerden her biri komşusu olan daireleri sabit dairenin çevresi üzerinde kessin. Şimdi bu 5 dairenin ikinci kesişme noktalarını birleştirirsek, yıldız biçimi (iç bükey) bir beşgen elde ederiz. Bu yıldızın köşelerinden her biri bu 5 daireden birinin üzerindedir.



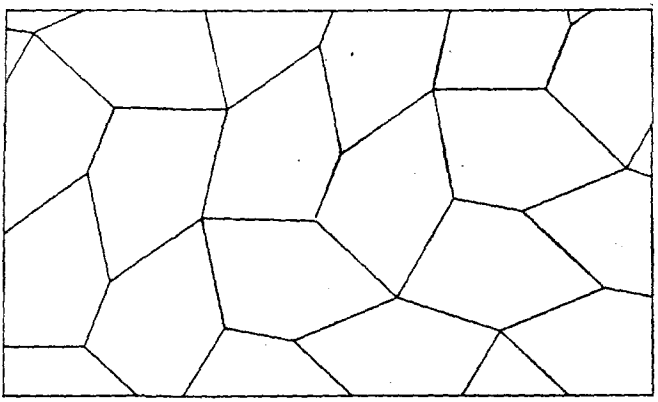
Beşgen mozaikler Düzgün bir beşgen, mozaik yapamaz. Düzgün olmayan beşgenler *Kahire mozaiği*nde olduğu gibi mozaik yapabilir.

Düzgün olmayan (irregüler) beşgenlerle kaç türlü mozaik yapılabilir?

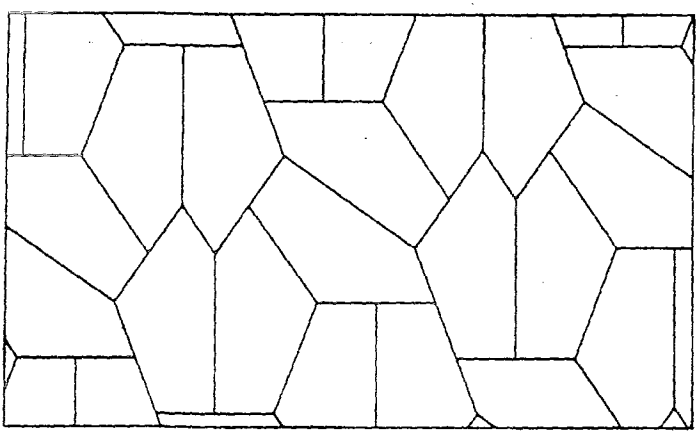
K. Reinhardt 1918'de beş farklı tipte mozaik buldu. Richard Kershner 1967'de daha önce farkedilmeyen üç tip mozaik daha buldu ve listesinin tamamlandığına inandı. Fakat 1975'te Richard E. James III aşağıdaki resimde görülen güzel mozaikleri buldu. Bu mozaikte A=90°, C+D=270°, 2D+E=2C+B=360° ve AE=AB=BC+DE.



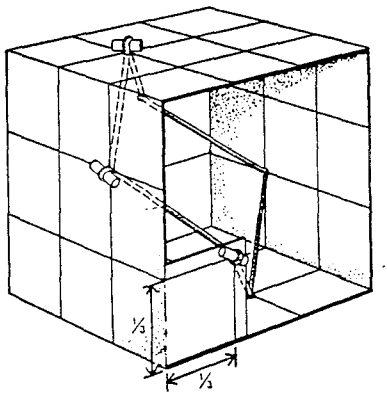
Martin Gardner'e göre, bundan sonra 1976'da lise matematiği ötesinde matematik eğitimi görmemiş San Diegolu bir ev kadını olan Marjorie Rice, aşağıda görülen 10. tip beşgen mozaiği buldu. Bundan sonra üç tip daha bulundu.



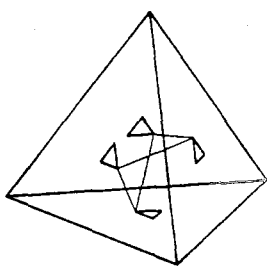
1985'de Rolf Stin tarafından 14. tip beşgen mozaik bulundu. Listenin tamam olup olmadığı henüz bilinmiyor.



Bilardo topu yolu (düzgün bir dörtyüzlü veya bir küp içinde). Bir bilardo topu bir küpün içinde sürekli zıplayarak tam bir devir yaptıktan sonra başladığı noktaya dönebilir mi?



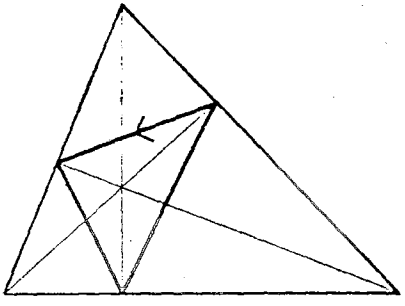
Evet, dönebilir. Bu yol Hugo Steinhaus tarafından keşfedildi. Bu yolun bütün parçaları birbirine eşittir ve her zıplama noktası, bu kare yüz üzerindeki 3x3'lük bir satranç tahtasının küçük karelerinin köşelerinden birinde bulunur. Kimyacılar bu yola "iskemle biçimi altıgen" adını vermiştir. Bu yolun küpün herhangi bir yüzeyine dik izdüşümü bir dikdörtgen, küpün köşegenlerinden biri boyunca izdüşümü ise, düzgün bir altıgendir.



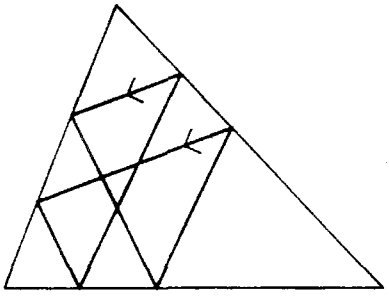
John Conway düzgün bir dörtyüzlü içinde de benzer bir yol çizilebileceğini gösterdi. Dörtyüzlünün yüzlerinde çizilmiş küçük üçgenlerin kenarları, dörtyüzlünün kenarlarının 1/10'u kadardır. Böyle üç yol vardır, küçük üçgenin her köşesi için bir yol.

(Referans: Martin Gardner, Sixth Book of Mathematical games from Scientific American, W.H. Freeman, San Francisco, 1971)

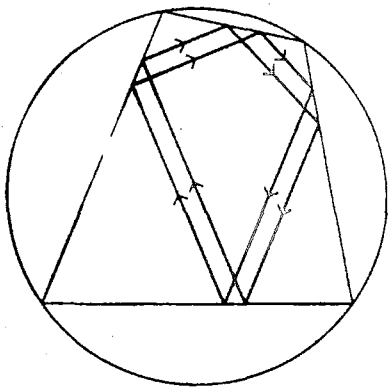
Bilardo topu yolu (çokgen içinde) Dar açılı bir üçgenin kenarlarına çarpıp yansıyan bir bilardo topu, başladığı noktaya dönen (kapalı) bir yol çizebilir mi? Böyle tek bir yol vardır: Yükseklik ayaklarını birleştiren üçgen (pedal üçgen); bu yol aynı zamanda üçgenin üç kenarını birleştiren en kısa yoldur.



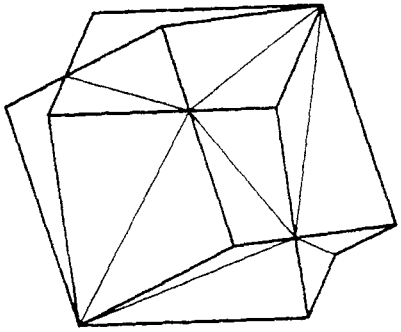
Eğer top, başlangıç noktasına dönmeden birden fazla yol çizecekse ve bunu tekrarlayacaksa, sonsuz yol olasıdır; fakat bu yolların parçaları pedal üçgenin kenarlarına paraleldir.



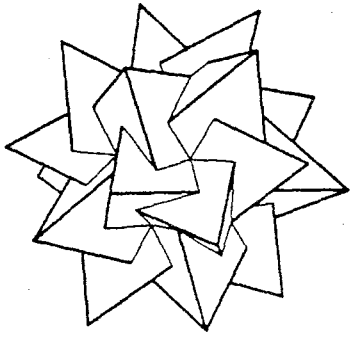
Bir dörtgen içinde bilardo topunun kendi üstüne kapanan bir yol oluşturması, ancak dörtgenin bir daire içine çizilmiş olması ve dairenin merkezinin dörtgen içinde bulunması halinde olasıdır.



Bileşik çokyüzlü Düzgün bir 12 yüzlünün (dodekahedron) 8 köşesi, 5 farklı şekilde bir kübün köşeleri olabilir. Şekilde bu küplerden ikisinin 12 yüzlünün köşelerine konuluşu görülüyor. Bu küplerin hepsi (beşi) dodekahedron köşelerine konulursa, "12 yüzlü içinde 5 küp" adlı bileşik çokyüzlü elde edilmiş bulunur.

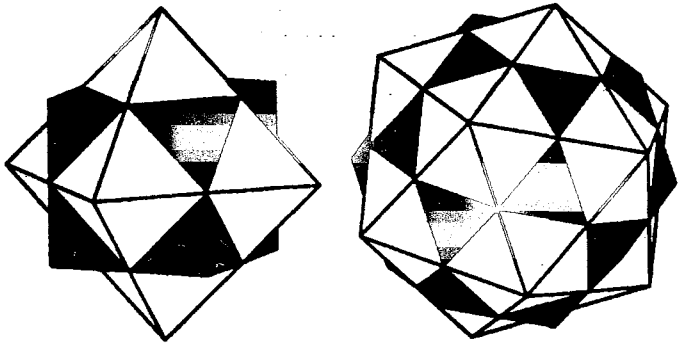


Benzer olarak 12 yüzlü (dodekahedron) içinde 5 düzgün dörtyüzlü tetrahedron) bulunur ve bileşik simetrik bir çokyüzlü oluşturur; bu okyüzlünün bir sola, bir de sağa bakan iki şekli vardır. Beş dörtyüzünün yirmi yüzü, bileşik şeklin içinde görünmez olarak, bir yirmi-



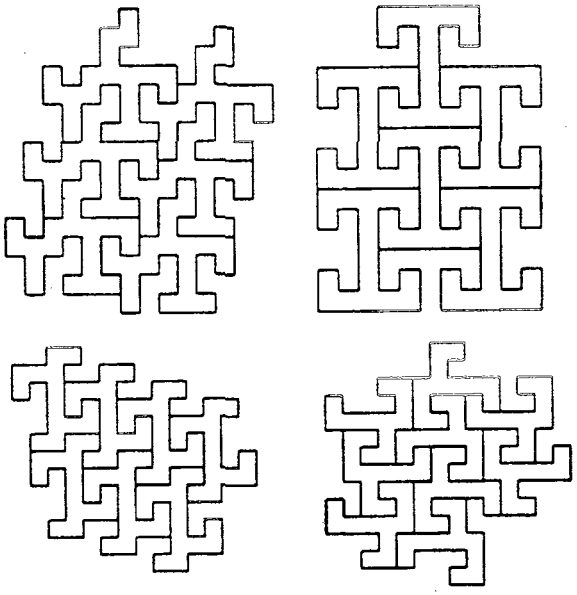
yüzlünün yüzlerini oluştururlar; bu yirmiyüzlünün köşeleri dörtyüzlünün 5 kenarının birleştiği çukurcuklardır.

Birbirinin duali (dual için bkz. Brianchon teoremi) iki çokyüzlü, bileşik simetrik bir çokyüzlü oluşturabilir; bu durumda ikisinin de aynı kenar sayısına ve simetriye sahip olması gerekir. Böylece küp ve sekizyüzlü (sol) ve 12 yüzlü ve 20 yüzlü (sağ) bileşik çokyüzlü oluşturabilir. 12 yüzlü ve 20 yüzlü birleştirilip çıkıntı yapan piramidler kaldırılırsa *icosi dodekahedron* elde edilir. Her ikisini de içeren polihedron (çokyüzlü) *rombik triakontahedron*'dur (rombik 30 yüzlü veya eşkenar dörtgen 30 yüzlü).



Birbirine kenetlenen poliomino'lar Bir poliomino, özdeş kareleri kenarlarından birbirine ekleyerek yapılır.

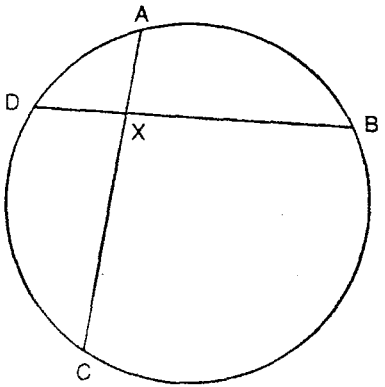
Duplikatları birbirine kenetlenerek bir mozaik oluşturan bir poliomino ne kadar küçük olabilir? Soru müphemdir; çünkü kenetlenmenin ikişer ikişer mi olacağı veya bütün parçalar yerine konulunca mı olacağı belirtilmemiştir.



Bu çözümleri Bob Newman bulmuştur. Birinci şekilde tek tek kenetlenme vardır. İkinci şekil iyi bilinen bir modeldir; üçüncü şekil ancak parçaların hepsi yerindeyse kenetlenir; ayrıca simetriktir. Dördüncü şekilde parçaların yarısı ters çevrilmiştir; fakat poliomino başına yalnızca 12 birim kare kullanır.

Referans: David Wells, Recreations in Logic, Dover, New York, 1979.

Bir dairenin kesişen kirişleri: Çok ilginç bir şekil ne kadar basit olabiliyor. Bu şekilde bir dairenin iki kirişinin kesişmesi görülüyor ve AX.XC = BX.XD.



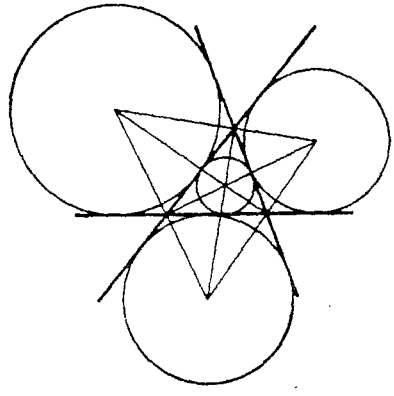
X dairenin dışındaysa ve X'den daireye çizilen teğetlerden biri ona T'de değerse: $AX.XC = BX.XD = XT^2$'dir.

AB yayı + DC yayı / BC yayı + DA yayı = AxB açısı / CxD açısı

Ayrıca kirişler birbirine dikse, Arşimed kuralı kanıtlanır:

AB yayı + CD yayı = BC yayı + DA yayı

Bir üçgenin iç merkezi (insentr) ve dış merkezi (ekssentr veya dışözek) Bir üçgenin üç kenarına içten teğet olan tek bir daire vardır; üç daire de bir kenara dıştan ve iki kenara içten teğettir. Bu dairelerin merkezleri, üçgenin üç iç ve üç dış açısının açı ortaylarının kesişme noktalarıdır. Bu merkezler şekilde görüldüğü gibi yükseklikleriyle beraber daha büyük bir üçgen oluşturur.



Bu dairelerin yarıçapları r,. r_a, r_b ve r_c ise:

$1/r = 1/r_a + 1/r_b + 1/r_c$ dir

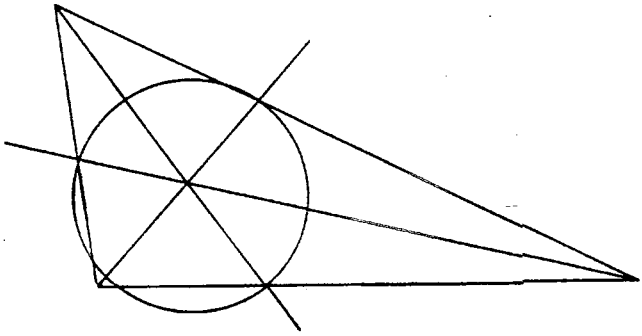
Ayrıca üçgenin çevrel dairesinin yarıçapı R ie, $r_a+r_b+r_c-r = 4R$ ve çgenin alanı $\sqrt{r_a.r_b.r_c.r}$ dir

(Ne kadar zarif formüller! Ç.N.)

Üçgenin köşelerini, iç dairenin kenarlara değme noktalarına birştiren doğrular Gergonne noktasında kesişir. Üçgenin köşelerini ş dairelerin kenarlara içten değdiği noktalara birleştiren doğrular e Nagel noktasında kesişir.

Şeklin bu 4 daireden herhangi birine göre inversiyonu (evirtim) yalırsa, bu daire ve üçgenin kenarları 4 eşit daire olur. [Bir noktanın daireye göre inversiyonu: O merkezli bir dairenin bir yarıçapı üzede bir A noktası alalım. Bu yarıçap veya bu yarıçapın uzantısı üzede $AO.BO = r^2$ olacak şekilde bir B noktası alalım. -r yarıçap uzunu- A ve B noktaları birbirlerinin evirtiğidir ve O noktası "inversin merkezi"dir. Ç.N. (Bkz. İnversiyon)]

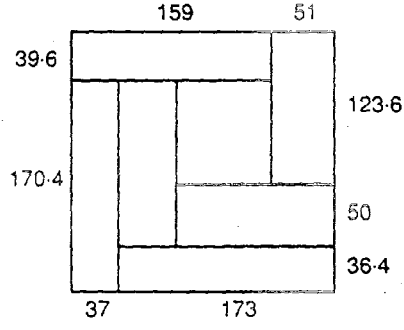
Üçgenin iç açılarının açı ortaylarının, karşı kenarları kestikleri 3 noktadan bir başka daire geçer. Bu daire içinde üçgen kenarlarının oluşturduğu kirişlerden ikisinin toplamı üçüncüyü verir.



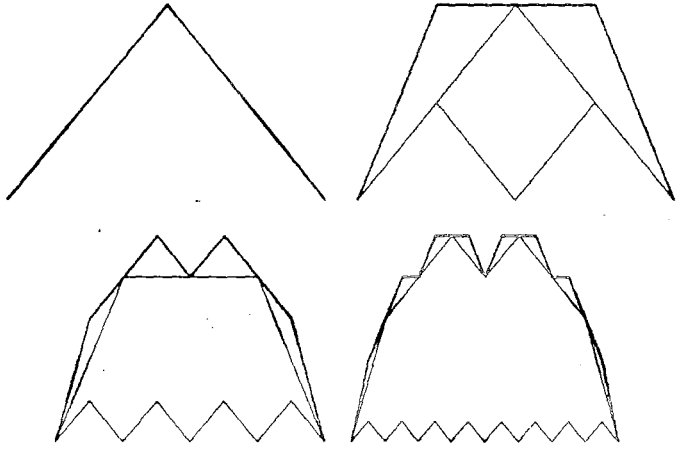
Blanche disseksiyonu (Blanche usulü parçalara ayırma) Bir dikdörtgeni farklı büyüklükte karelere ayırmak, iyi bilinen zor bir problemdir. Bunun tersi, yani bir karenin farklı büyüklükte dikdörtgenlere ayrılması kolaydır; fakat ya bu dikdörtgenlerin biçimlerinin farklı, alanlarının eşit olmasını şart koşarsak ne olur acaba?

Aşağıda bunun en basit çözümü verilmiştir; söylenen koşullara uyan 7 dikdörtgen çizilmiştir.

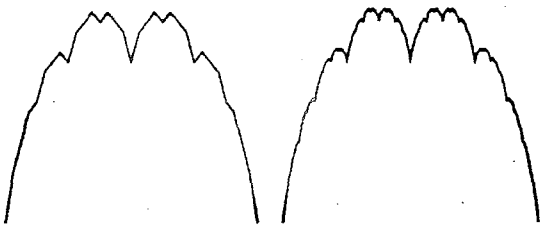
(Referans: Blanche Descartes, Division of square into rectangles, Eureka, No: 34, 1971).



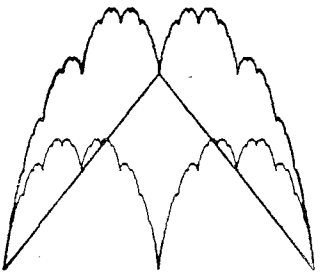
"Blanc-manger" eğrisi (Fransızca blanc-manger = badem, süt ve şekerle yapılan jöle veya beyaz et jölesi). Bir seri zikzak eğri alın; öyle ki herbirinin yüksekliği bir öncekinin yüksekliğinin yarısı kadar ve zikzak sayısı bir öncekinin iki katı olsun. Bu serilere sonsuza kadar devam edin ve sonra hepsini toplayın. Sonuç blanc-manger eğrisidir; bu eğri süreklidir, fakat hiçbir noktada teğeti yoktur. Bu eğrinin çiziminde ilk 4 safha aşağıda gösterilmiştir. Birincisi hariç her şekilde, en dıştaki koyu siyah çizgi, bir önceki şekille yeni zikzakın toplamıdır.



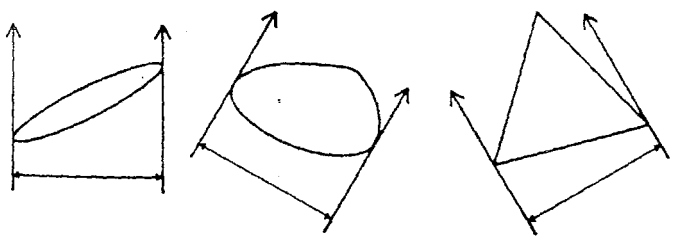
5. safhada blanc-manger daha belirginleşmiştir; 18. safhadan sonra eğri, hemen hemen sonsuz safhadan sonra alacağı şekli almıştır:



Aşağıdaki şekil blanc-manger eğrisinin bir diğer özelliğini gösteriyor. İki blanc-manger üstüne 45°'lik bir zikzak çizin ve bu üçünü toplayın; sonuç tek ve daha büyük bir blanc-manger eğrisidir.

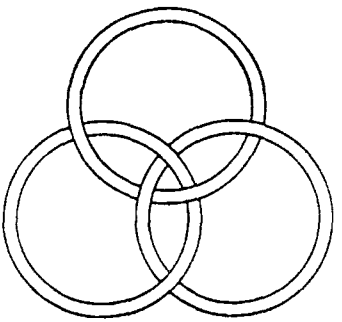


Blashke teoremi Kapalı konveks (dışbükey) bir eğrinin verilen bir yöndeki genişliği, bu yöne dik ve herbiri eğriye teğet (veya eğriyi içeren) birbirine en yakın iki paralel çizgi arasındaki mesafedir. Aşağıda üç kapalı konveks eğrinin verilen yönlerdeki genişliği görülüyor (yönü belirten, iki ucu da oklu çizgilerdir).

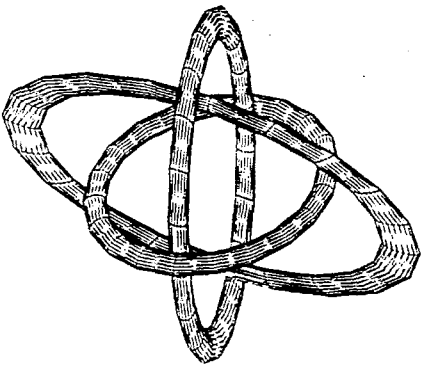


Blashke şunu kanıtladı: Minimum genişliği en az 1 birim olan herhangi bir kapalı konveks eğri, çapı 2/3 birim olan bir daireyi içine alabilir. Yüksekliği 1 birim olan bir eşkenar üçgen, en çok bu çapta bir daire içerebilir; 2/3 sınırı buradan gelmektedir.

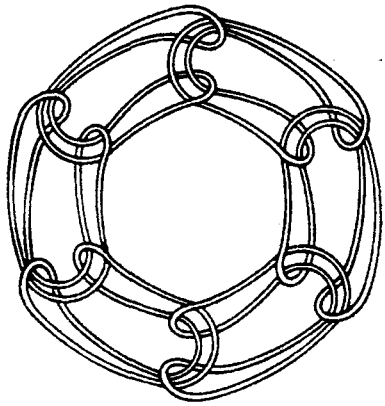
Borromean halkaları İtalyan Borromean ailesinin arması birbirinden ayrılamayan üç halkadan ibaretti; ilginç olan nokta şuydu: Halkalar ikişer ikişer alındığında, halkalardan hiçbiri diğerinin içine geçmemişti. Aynı desen ABD'de Ballantine Bira Şirketi ve Alman Krupp silah fabrikaları tarafından kullanılmıştır.



Kendi başına sola dönük ve sağa dönük şekilleri yoktur; ikisi de birbirine dönüştürülebilir. Buna dayanılarak aşağıda bu halkaların üç boyutlu şekli çizilmiştir; burada üç simetri düzlemi vardır.

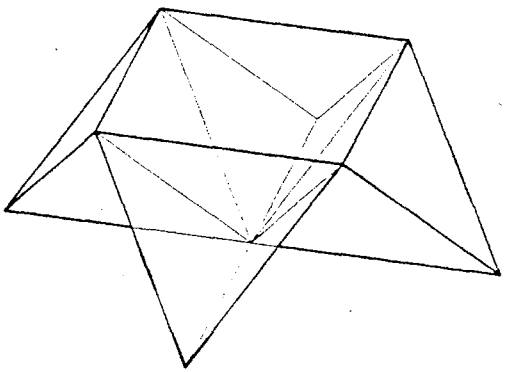


Aynı şekilde istenen sayıda halka birbirine zincirlenebilir.

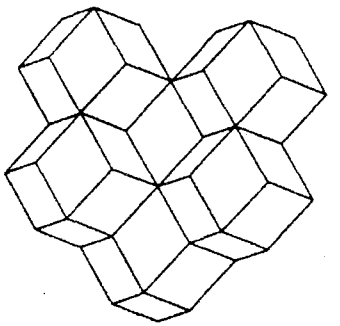


Boşluk doldurucu çokyüzlüler Küpler tabii ki uzayı doldurabilir. Diğer düzenli katı cisimlerden yalnız düzenli 8 yüzlü ile düzenli 4 yüzlünün birleştirilmesi uzayı doldurabilir; şöyle ki 6 sekizyüzlü ve 8 dörtyüzlü bir nokta etrafında uzayı öyle doldurabilir ki bu dolduruş sonsuza kadar uzatılabilir. Bunu görmek için, bir kare oluşturacak şekilde 4 küp alın. Herbirinin içine alterne eden köşeleri birleştirecek şekilde düzgün bir 4 yüzlü koyun; böylece alt köşeleri ortak olan 4 dörtyüzlüden yapılmış bir halka elde edersiniz.

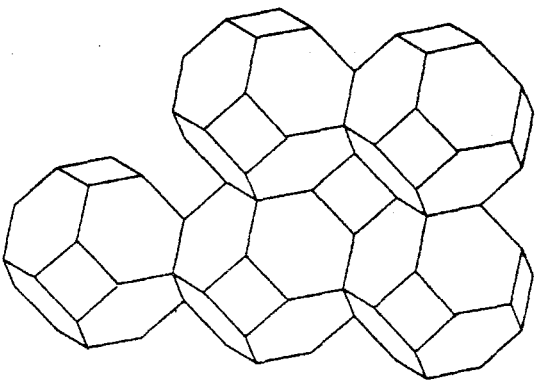
Bu şeklin ortasındaki boşluk düzgün bir 8 yüzlünün yarısıdır. Şimdi aynı işlemleri büyük bir küp yapacak şekilde üst üste konulmuş 8 küple tekrarlarsanız, ortadaki boşluk tam bir düzgün 8 yüzlü olur. Bu operasyonu her seferinde 8 küple tekrarlarsanız uzayı doldurucu 4 ve 8 yüzlüler elde edersiniz. (Uzay doldurucu demek, bu operasyonlar tekrar edildikçe sonsuza kadar bütün uzayın bu şekillerle doldurulabileceği demektir. Ç.N.)



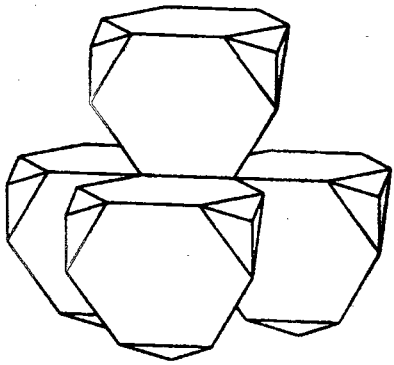
Eğer küreler, her iki katmandan biri özdeş olacak şekilde, sıkışık bir halde tabaka haline konulur ve sonra sıkıştırılırsa, uzay doldurucu eşkenar dörtgensel 12 yüzlü (rombik dodekahedron) elde edilir.



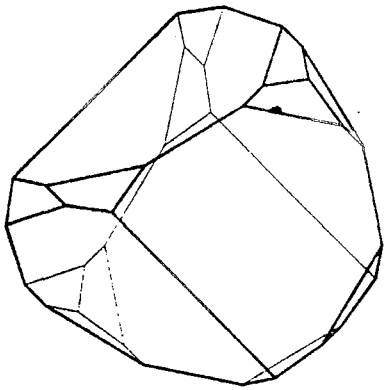
Kesik sekizyüzlü de (köşeleri kesilmiş sekizyüzlü) uzay doldurucudur. (Kesik sekizyüzlünün hacmi, kesik sekizyüzlünün kare yüzeyleri birbirini kesene kadar uzatılınca elde edilen küpün hacminin yarısı kadardır.) Bir sonraki şekil, kare yüz kare yüze karşı getirilerek birleştirilen kesik sekizyüzlüleri göstermektedir. Aynı yatay düzlemde daha fazla sıralar oluşturarak ve sonra üst ve alt düzlemleri benzer kesik sekiz yüzlülerle doldurarak kesik sekizyüzlülerden oluşmuş bir ağ (şebeke) elde ederiz; bunların arasındaki boşluklar da düzenli kesik sekizyüzlü şeklindedir.



Daha az belirgin olan, kesik (köşeleri kesilmiş) dörtyüzlülerle uzay doldurmaktır. 1914'te Föppl dörtyüzlüler ve kesik dörtyüzlülerin, birlikte kullanılmaları halinde uzay doldurulabileceğini buldu. Her 4 yüzlünün merkezi köşelere birleştirilerek 4 alçak ve özdeş üçgen piramit elde edilir; bunlar sonra kesik 4 yüzlüye yapıştırılır.

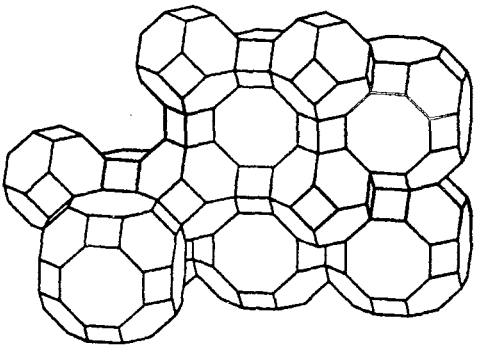


Bunlar, en azından düzenli dörtyüzlü simetrisine malik, yegane uzay doldurucu katılardır. Eğer simetri şartı kaldırılırsa , konveks uzay doldurucu bir katı cismin çok sayıda, örneğin 38 adet yüzü olabilir. P. Engel 1980'de böyle katı cisimler buldu. Aşağıdaki şekil 18 yüzlüdür ve 3 katlı rotasyonel simetri ekseni vardır.

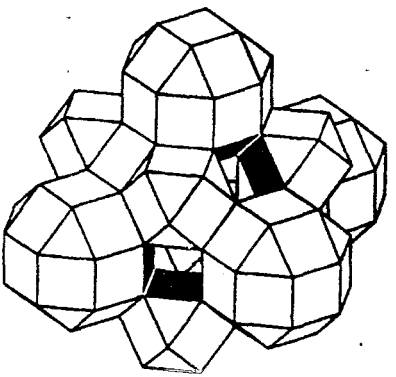


İki veya daha fazla tipten çokyüzlülerle uzayı doldurmak için birçok başka olasılık vardır. Kesik küp ve kesik 8 yüzlü kombinasyonu, daha önce sözü edilen kesik dörtyüzlü ve dörtyüzlü kombinasyonu gibi uzayı doldurabilir.

Aşağıda kesik 8 yüzlü, kesik küp-sekizyüzlü ve küpler 1:1:3 oranında birleştirilerek uzay doldurulmasının yolu açılmıştır.

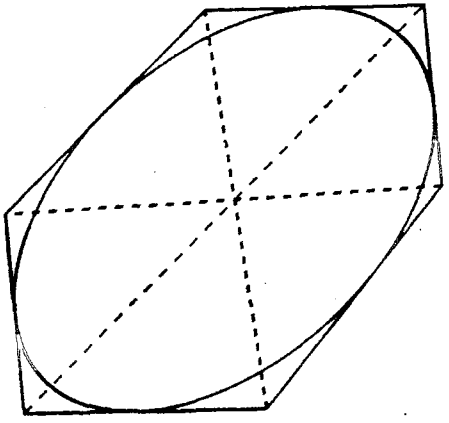


Uzay doldurma sırasında bazı çokyüzlüler kullanılmazsa, üç boyutlu bir labirent yaratılabilir. Aşağıda kesik küp-sekizyüzlü, kesik sekizyüzlü ve küplerle uzay doldurma görülüyor; küpler yerine konmayınca üç boyutlu bir labirent oluşmuştur:

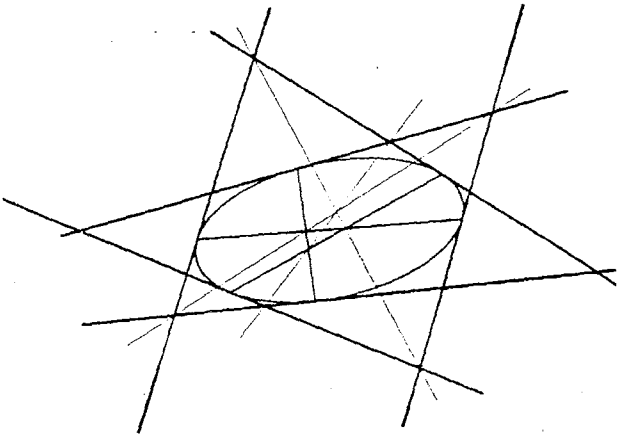


Referans: P. Pearce. Structure in Nature as a Strategy for Design, MIT Press, Cambridge, MA, 1978.

Brianchon teoremi Bir konik (parabol, hiperbol veya elips) etrafında bir teğetler altıgeni çizilirse, altıgenin büyük köşegenleri bir noktada kesişir.



Brianchon altıgenin kenarları ne uzunlukta ve nasıl alınırsa alınsın, bu teoremin doğru olduğunu gösterdi. Bir diğer ilginç özellik şudur: Teğetlerin koniğe değme noktaları karşılıklı olarak birleştirilirse, bu üç doğru parçasının ikişer ikişer kesişme noktaları (ki şeklin tam ortasındaki siyah minik üçgenin köşelerine karşılıktır), altıgenin gri renkli büyük köşegenleri üzerinde bulunur.

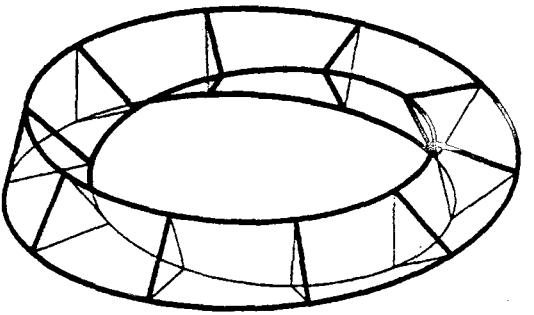


Brianchon, bu teoremi 1810'da yayımladı. Brianchon teoremi çok daha önce bulunmuş Pascal teoreminin eşleğidir (dual) (dual için bkz. Desarguez şekli ve polihedron dualleri); bu nedenle Pascal teoreminden elde edilebilir; bunun için doğru ve noktalar birbirleriyle yer değiştirmelidir:

BRIANCHON TEOREMİ: Bir koniğin "**etrafına**" bir altıgen çizilirse, yani altıgenin her "**kenarı**" koniğe teğetse, karşılıklı "**köşeleri**" birleştiren "**doğrular**" bir "**nokta**"da kesişir.

PASCAL TEOREMİ: Bir koniğin "**içine**" bir altıgen çizilirse, yani altıgenin her "**köşesi**" konik üzerindeyse, karşılıklı "**kenar**"ların kesişme "**nokta**"ları aynı "**doğru**" üzerinde bulunur.

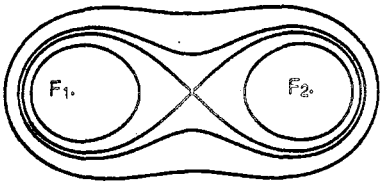
Burulmuş üçgen prizma Bu şekil, bir üçgen prizmayı ekseni etrafında burarak ve sonra uçları bir araya getirerek oluşturulur. İki yüzü ve bir kenarı vardır ve bir spiralin başladığı noktaya dönmeden önce 3 kere etrafında tur attığı bir torusa eşdeğerdir.



Londra'da South Bank'de bir heykeltraş toprağa yarı gömülü ve bazı parçaları eksik olan bir burulmuş üçgen prizma yaptı. Çocuklar onun üstünde oynamayı çok severler.

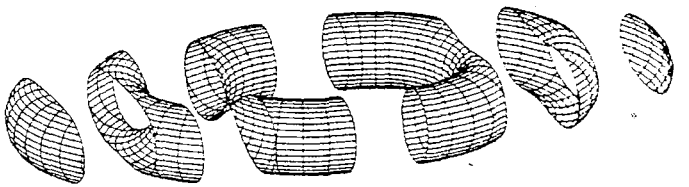
C

Cassini ovali Bir nokta, F_1 ve F_2 gibi iki sabit noktaya olan uzaklıklarının çarpımı sabit kalacak şekilde hareket ederse, bir Cassini ovali çizer. Giovanni Domenico Cassini 1680'de Güneş'in ve Dünya'nın rölatif hareketlerini incelerken bu oval'i bulmuştur. (Bu eğriye, her zaman oval olmamasına rağmen oval denmektedir. Asıl oval eğrisinde bükülme noktaları (eğriliğin yön değiştirdiği nokta) ve boğum noktaları (düğüm, nod) yoktur. Oval'in bir doğruyla en fazla iki ortak noktası olabilir. Ç.N.)



Bernouilli lemniskat'ı (kurdele eğrisi), Cassini Ovali'nin özel bir halidir; lemniskat'da sabit çarpım, iki sabit nokta arasındaki uzaklığın karesine eşittir (Bkz. Bernouilli lemniskatı).

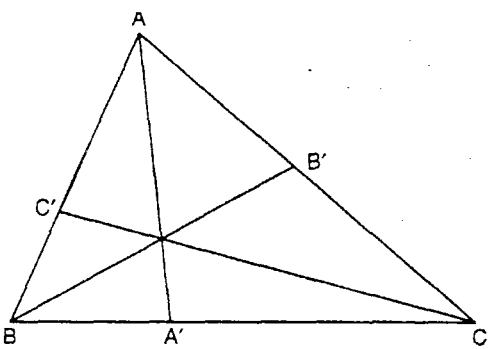
Cassini Oval'leri, dairesel bir torus'un (simit şekli), eksenine parelel bir düzlemle enine kesilmesinden oluşurlar. Torus kesitlerini ilk inceleyen Grek matematikçisi Perseus oldu; bunlara Perseus'un spirik kesitleri denir (Grekler nedense torus'a *spira* derlerdi.)



Ceva teoremi Giovanni Ceva bir geometrici ve mühendisti; aynı zamanda ekonomi üzerinde yazan ilk matematikçi olmuştur. Ceva 1678'de kendi adıyla anılan bir teoremi içeren bir kitap yayımladı; teoremini ağırlık merkezlerini dikkate alarak kanıtlamıştı.

Eğer $BA'/A'C \cdot CB'/B'A \cdot AC'/C'B = 1$

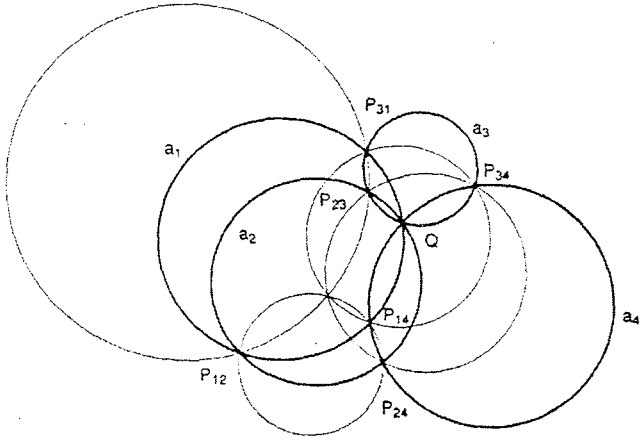
ise, AA', ve BB' ve CC' doğruları bir noktada kesişir. Bunun karşıtı da doğrudur: Üç doğru bir noktada kesişiyorsa yukarıdaki denklem geçerlidir. Ceva olaya şöyle baktı: A', B' ve C' ABC üçgeninin köşelerine konulmuş ağırlıkların kenarlar üstündeki ağırlık merkezleridir; kesişme noktası ise her üç köşedeki ağırlığın ağırlık merkezidir.



Ceva teoremi kenar sayısı tek (3, 5, 7....) olan her basit poligona uyar. Örneğin bir beşgende eğer A, B, C, D ve E köşelerinden geçen doğrular, karşılarındaki kenarları A', B', C', D' ve E' noktalarında keserlerse:

AC´/C´E . EB´/B´D . DA´/A´C . CE´/E´B . BD´/D´A = 1 olur.

Clifford teoremi Clifford herbiri bir öncekine dayanan bir seri teorem buldu.



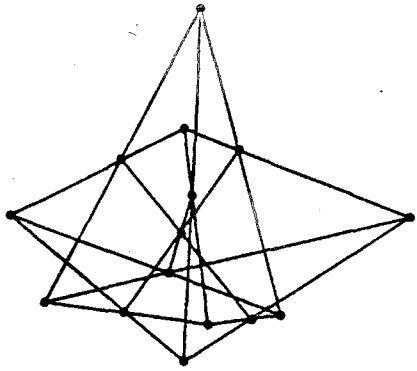
Clifford'un birinci teoremi: a_1, a_2, a_3 ve a_4, Q noktasından geçen dört daire olsun. a_1 ve a_2 P_{12}'de karşılaşsın vb. a_{123} dairesi, P_{12}, P_{23} ve P_{31}'den geçsin. Bu durumda dört daire, yani a_{123}, a_{124}, a_{134} ve a_{234} tek bir P_{1234} noktasından geçer.

Clifford'un ikinci teoremi: a_5, Q'den geçen 5. daire olsun. Bu durumda beş nokta (P_{1234}, P_{1235}, P_{1245}, P_{1345} ve P_{2345}) a_{12345} dairesi üzerinde bulunur.

Clifford'un üçüncü teoremi: Altı daire (a_{12345}, a_{12356}, ... , a_{23456}) P_{123456} noktasından geçer.

Bu teorem serisi sonsuza kadar devam eder.

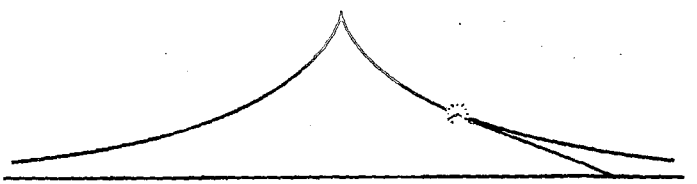
Cremona-Richmond şekli Fano düzlemi, Desargues şekli ve on-bir-üç (11_3) şekli gibi en basit şekillerin herbirinde en az üç nokta ve üç doğrudan oluşmuş 1 üçgen vardır. Herhangi bir şeklin bazı üçgenler içermesi kadar doğal bir şey olamaz. Cremona-Richmond bir 15_3 şeklidir; bu şekil 15 doğru, 15 nokta, her noktadan geçen 3 doğru ve her doğru üzerinde üç nokta içerir.



Fakat tek bir üçgen bile içermez.

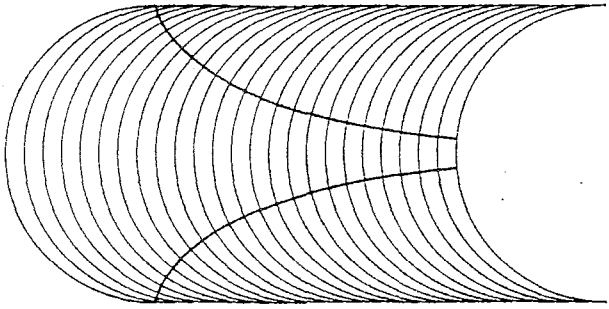
Ç

Çekme eğrisi (traktris) Bir cep saatini, bir masa üzerine zinciri ıasa kenarına ancak erişecek şekilde koyun ve zinciri kenar doğrulısunda çekin. Saat bir traktris, daha doğrusu bir traktris'in yarısını çi-er. *Masanın kenarı eğrinin asemptotudur. Traktris, asemptotu etrafın-*a çevrilirse bir *yalancı küre (psödosfer)* yüzeyi oluşur.



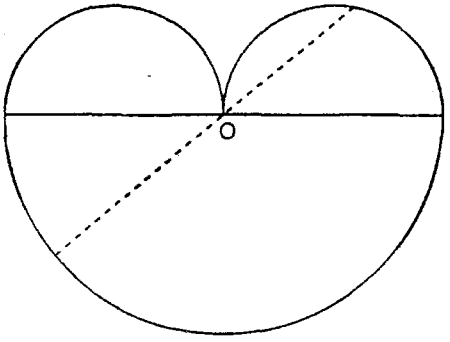
Traktris zincir eğrisinin involütüdür. (Bkz. katenaryüs) Bir zincir isinin yarısının etrafına köşeye varana kadar bir iplik sarın; sonra ği gergin tutarak sardığınız yerden çözün. İpliğin ucu bir traktris r. Traktrisin uzunluğu sonsuz olmasına rağmen, traktris ile asemparasındaki alan sonludur: $1/2\ \pi\ a^2$. Burada a, eğrinin köşesinin nptotdan uzaklığıdır.

Merkezleri aynı doğru üzerinde olan özdeş çemberlerden oluşsonsuz bir küme düşünün. Hepsini dik açıyla kesen eğri (mer-er doğrusu hariç) bir traktristir.



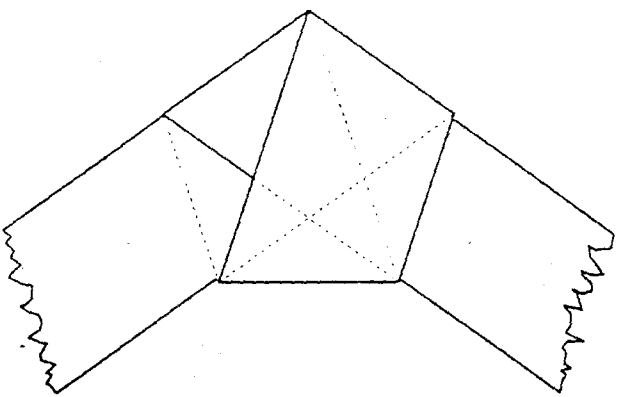
[Traktrisin bütün teğetleri aynı uzunluktadır. a uzunluğunda bir doğru parçasının bir ucu x ekseni üzerinde kayarken diğer ucu traktris çizer. a doğru parçasının bir ucu bir eğri üzerinde kayarken diğer ucu bir gezinge (trajektuar) çizer. Ç.N.]

Çevreyi ikiye bölen kirişler Bir dairenin her çapı veya bir karenin (veya daha genel olarak bir paralelkenarın) merkezinden geçen her doğru, çevre uzunluğunu, iki eşit yarıma böler. Fakat bir eğri çok simetrik olmadan da bu özelliği olan bir noktaya sahip olabilir.

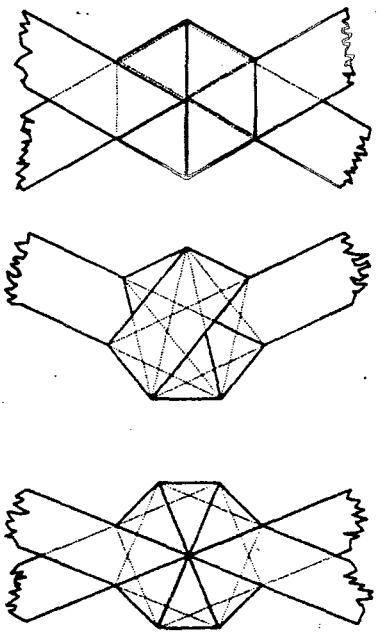


Şekilde iki eşit yarım daire ile bir diğer yarım daire görülüyor. O noktasından geçen her doğru şeklin çevresini ikiye böler.

Çokgen düğümler Bir kâğıt şeridine bir düğüm atın, sonra düğümü sıkıştırırken elinizle yassıltın, düzgün bir beşgen belirecektir.

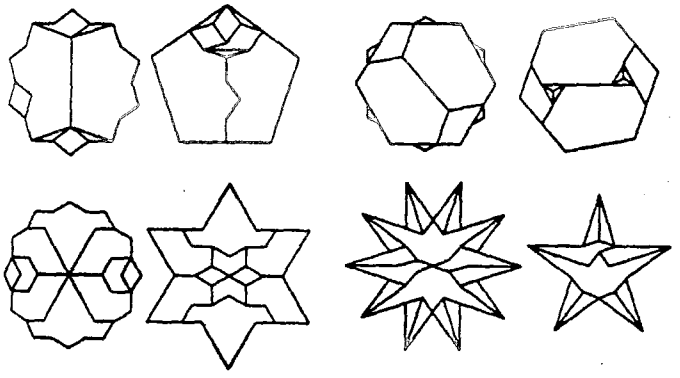


Kâğıt şeritlerinin düğümlerinden altıgen, yedigen ve daha geniş çokgenler oluşturulabilir; düzgün bir çokgenin köşegenlerini düşünerek bunu daha iyi anlayabilirsiniz.



Referans: H. M. Cundy ve A. P. Rollett, Mathematical Models, Oxford Üniv. Press, Oxford, 1961

Çokgenlere yıldızlar, yıldızlara yıldızlar Harry Lindgren ve Greg Frederickson bazı olağanüstü ve güzel disseksiyonların (şekil parçalayıp birleştirme) yaratıcısıdırlar. Bir sonraki şekil onların dört başarısını gösteriyor (sonuncu iki özdeş yıldıza parçalanır):

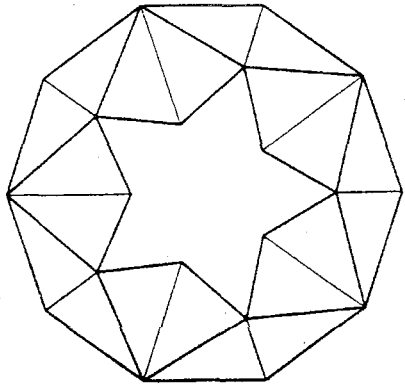


Bilmececi için disseksiyonun en önemli özelliği, parçaların azlığıdır. Matematikçi için her çokgenin doğal geometrisinden yararlanılması önemlidir. Bu disseksiyonlar bu iki özelliğe ek olarak simetri ve sürpriz içerirler.

Referans: H. Lindgren, *Recreational Problems in Geometric Dissections and How to Solve them*, revised and enlarged by G. Frederickson, Dover, New York, 1972.

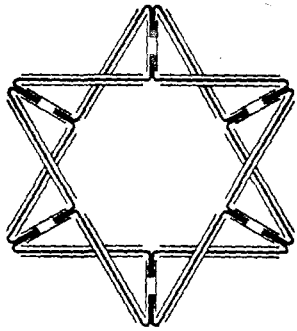
Çokyüzlülerden oluşmuş halkalar Düzgün dörtyüzlünün karşılıklı kenarları birbirine diktir. Bunun sonucu olarak, menteşeli yapılsalar mekanikdeki "üniversal kavrama" (veya üniversal eklem) görevini yapabilirler (üniversal eklem, bir eksendeki rotasyon hareketini o eksenle aynı doğrultuda olmayan bir başka eksene nakleden düzenektir. Düzlemleri birbirine dik iki U biçimi demirle bunları birbirine bağlayan bir demir haçtan oluşur. Otomobillerin arka dingilinde bulu-

nur. Ç.N.) İçeride yeteri kadar boşluk bırakacak sayıda dörtyüzlü varsa, bunlardan serbestçe dönen bir halka oluşturulabilir. Düzgün bir dörtyüzlü için 8 birim gereklidir.

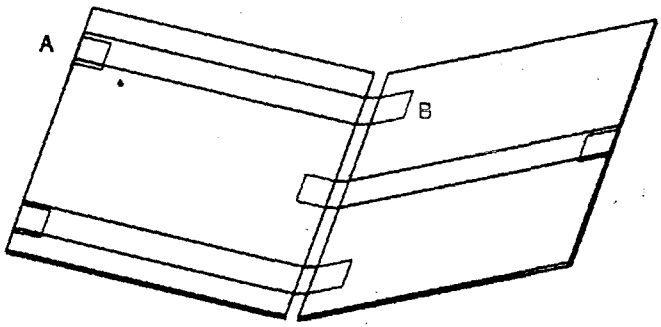


Dörtyüzlüler daha uzun ve daha inceyse, 6 tanesi bile rotasyon yapar. Kamışlar ve pipo temizleyicileri kullanılarak kabaca bir model yapılabilir. 9 cm uzunlukta 12 kamış alıp herbirinin içine pipo temizleyici tel sokun ve telin dışarı taşan uçlarını kamışlara ve birbirlerine dik olarak bükün (bu iş, sola bakar veya sağa bakar şekilde yapılabilir; herbirinden 6 adet yapın.) Herbiri 6.5 cm. uzunlukta altı kamış daha alın; bunları eklem olarak kullanacaksınız.

Şekilde kamışların birbirine nasıl bağlandığı görülüyor. (Kısa kamışlar şeklin düzlemine paralel değildir.) İki uzun ve iki kısa kamış dörtyüzlünün 6 kenarından 4'ünü oluşturur.

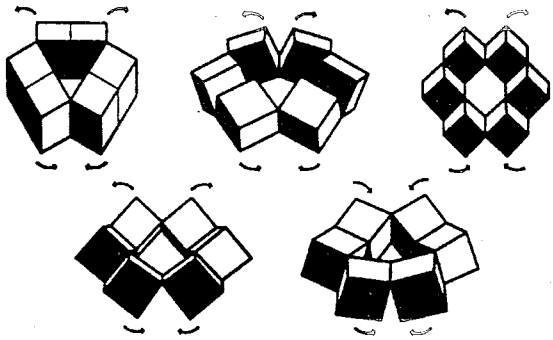


Aşırı bükülebilen farklı bir eklem "para cüzdanı menteşesi" ile yapılabilir. Bu eklem ünlü cüzdan hokkabazlığında kullanılır; böyle bir cüzdanda kâğıt bir para, cüzdan kayışlarının bir altında, bir üstünde görülür.



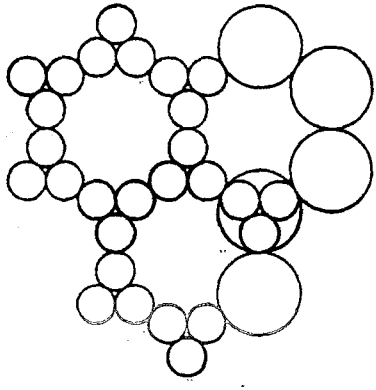
A'dan B'ye giden kayış, sol kartın arkasına A'da ve sağ kartın arkasına B'de yapıştırılır. Diğer kayışlar benzer yolla yapıştırılır.

Bu tip menteşelerle birbirine bağlanmış 6 küp sürekli olarak döndürülebilir.



Referans: David Wells, 'Puzzle page', Games and Puzzles, September 1975.

Daireleri oynamaz şekilde paketlemek Bir daire etrafına, kendisiyle aynı çapta 6 daireyi teğet olarak çizin ve ortadaki daireyi çıkartın. 6 daireden oluşmuş kapalı bir zincir elde ettiniz. Aynı şekilde elde edilmiş 6 dairelik zincirleri, bir ağ örecek şekilde birbiriyle birleştirin (Şekle bkz.) Şimdi her daire içine, birbirine ve dış daireye teğet üç küçük daire çizin. Şekilde her daire yerine bir küçük daire üçlüsü konuluşu görülüyor.

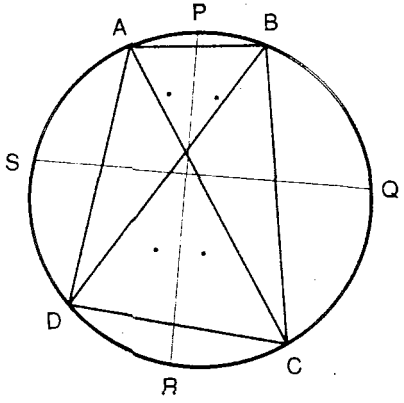


Oluşan şekil katıdır; şöyle ki her küçük daire, üç komşu daire ta-

rafından desteklenmektedir. Küçük daireler düzlemin $(7\sqrt{3}-12)\ \pi = 0.393$'ünü kaplar. Daireleri katı (biçimi sabit) bir cisim oluşturacak şekilde daha fazla sıkıştırmak muhtemelen mümkün değildir.

Referans: H. Meschowski, Unsolved and Unsolvable Problems in Geometry, Oliver-Boyd, Londra, 1966.

Dairesel dörtgen Bir daire içine çizilmiş (4 köşesi de dairenin çevresi üzerinde olan) bir dörtgene "dairesel dörtgen" denir. Eğer ABCD bir daire içine çizilmiş dörtgense, $A+C = B+D=180°$.



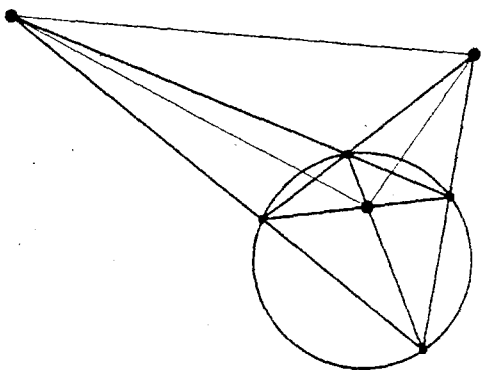
Sırasıyla dörtgenin herbir köşesini yok sayın; böylece 4 üçgen elde edersiniz: BCD, ACD, ABD ve ABC. Şekildeki noktalar bu 4 üçgenin iç dairelerinin merkezleridir. Bunlar bir dikdörtgen oluşturur.

Eğer P, Q, R ve S noktaları AB, BC, CD ve DA yaylarının orta noktalarıysa, dikdörtgenin kenarları PR ve QS'e paraleldir ve PR ve QS dikdörtgenin merkezinde kesişir.

Eğer buna 4 üçgenin dışözekleri (üçgenin iki dış açısının açı or-

taylarının kesişme noktası = excenter) eklenirse, az önce tanımladığı-mız dikdörtgen yapan 4 nokta (4 iç daire merkezi, incenter) ile bu yeni 4 nokta 16 nokta içeren 4x4'lük bir ağ oluştururlar.

Bu 4 üçgenin ağırlık merkezleri (kenar ortayların kesişme noktası) orijinal dörtgene benzer bir dörtgen oluşturur. Bu 4 üçgenin 9 nokta çemberlerinin (Euler çemberleri) merkezleri de orijinal dörtgene benzer bir dörtgen oluşturur (9 nokta dairesi: bir üçgenin kenarlarının orta noktalarından, yükseklik ayaklarından ve tepeleri yüksekliklerin kesişme noktasına birleştiren doğruların orta noktalarından geçen çember. Ç.N.). Ayrıca Bkz. Dokuz nokta dairesi. Dört ortosentr (yüksekliklerin kesişme noktası) orijinal dörtgenle eşleşik (kongrüent veya orijinal dörtgenle çakıştırılabilen) bir dörtgen oluşturur.



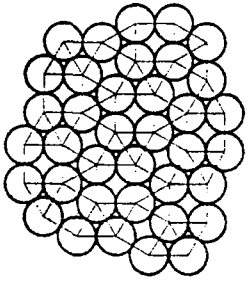
Bir daire üzerinde 4 nokta alın ve 6 doğruyla onları birleştirin. Köşegenlerin kesişme noktasıyla dörtgenin karşılıklı kenarlarının kesişme noktalarını birleştirerek köşegensel (diagonal) üçgeni elde edin (şekilde ince çizgilerle gösterilmiş olan). Bu üçgenin her köşesi, ötekine göre karşı kenarın kutbudur [*Bir koniğin kutbu (pol) ve kutup doğrusu (polar)*: Bir nokta (pol) ve bu noktadan geçen bir doğrunun (kutup doğrusunun), koniği kestiği iki noktaya göre, bu noktanın harmonik eşle-

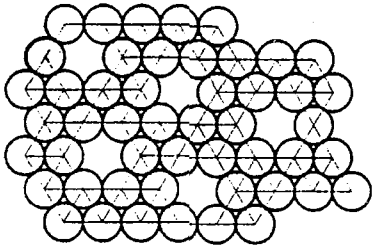
niklerinin geometrik yeri olan doğru (polar). Konik dışında bir nokta (pol) ve bu noktadan koniğe çizilen teğetlerin değme noktalarını birleştiren doğru (polar). Konik içindeki bir P noktasının (pol) polarını bulmak: P'den geçen iki doğru koniği Ave B ile C ve D'de kessin. A ve B noktalarından koniğe çizilen teğetler X, C ve D'den çizilen teğetler Y'de kesişsin. XY doğrusu P'nin polarıdır, Ç.N.]

Dairesel dörtgenin dört köşesinden çizilen teğetler, ikişer ikişer köşegensel üçgenin kenarları üzerinde kesişir.

[*Harmonik eşlenik*: Bir ABCD komple dörtgeninde AB ile DC, X'de; AD ile BC, Y'de ve AC ile BD (köşegenler) Z'de kesişmiş olsunlar. YZ, AB'yi H'da kessin. H noktası , X noktasının A ve B'ye göre 4. harmoniğidir. A ve B ile C ve D harmonik eşlenik çiftlerdir. Aynı doğru üzerinde A, B, C ve D noktaları olsun. AC.DB / AD.CB=-1 ise A ve B, C ve D'nin, C ve D de A ve B'nin harmonik eşleniğidir. Ç.N.] (Bkz. Harmonik oran) (Bkz. Kutup ve polar).

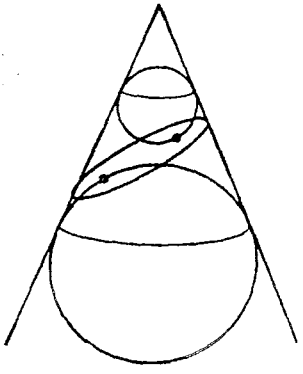
Dairesel mozaikler Mozaikler genellikle bir düzlemi aralarında hiç boşluk bırakmadan doldururlar; fakat mozaik kavramı dairelerden oluşmuş mozaikleri de kapsamaktadır. Dairesel mozaikler tabii her yerde delikler içerirler.





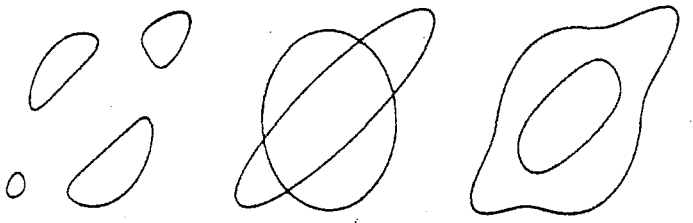
Dairesel olmayan yarı düzgün (semi-regüler) mozaiklerin hepsi, köşeleri merkez kabul eden eşit büyüklükte daireler çizerek bir daire şebekesine dönüştürülebilir. Sol şekilde eşkenar üçgen ve karelerden yapılmış bir mozaiğin dairesel mozaiğe dönüştürülmesini görüyorsunuz. Sağ şekildeyse düzgün altıgen ve eşkenar üçgenlerden oluşmuş bir mozaik dairesel mozaiğe dönüştürülmüş. (Bu sonuncu mozaik sola bakan ve sağa bakan olarak iki farklı şekilde yapılabilir.)

Dandelin küreleri Elips, bir koniyle eğik bir düzlemin kesitidir. Bu düzlemle koninin tepesi arasına, düzleme teğet bir küre konulabilir; düzlemin öteki yüzüne teğet ve koni duvarlarına değen ikinci bir küre de koymak olasıdır.



Dandelin Liège Üniversite'sinde mekanik profesörüydü; iki kürenin düzleme elipsin odak noktalarında teğet olduğunu kanıtladı. Elipsin direktrislerinin, kürelerin koniye değdikleri dairelerin (enlemlerin) düzlemiyle eğik düzlemin kesişme doğruları olduğunu gösterdi.

Dejenere kuvartikler İki konik (elips, hiperbol veya parabol) birlikte alındığında, 4. dereceden bir eğri olan kuvartik olarak düşünülebilir. (Örneğin $2x^4-x^3+3x^2-x-1=0$) Kübik (3. dereceden eğri, örneğin $x^3+x^2-x+1=0$) ve düz bir çizgi birlikte alınırsa da böyledir.

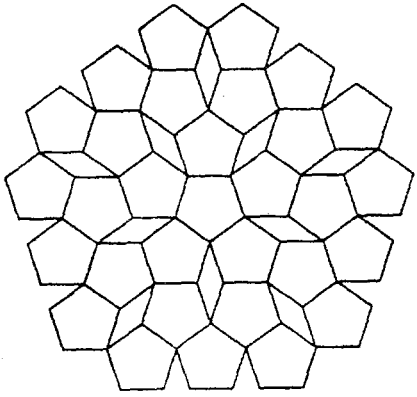


Kuvartik denklemi $E_1=0$ ve $E_2=0$ denklemleriyle beraber iki elips alarak $E_1 E_2 = 0$ denklemini oluşturmakla elde edilir (E_1 ve E_2 koniklerin denklemleri). Şimdi kuvartik denklemindeki terimlerin kat sayıları hafifçe değiştirilerek iki elipse çok yakın bir kuvartik elde edilir. Katsayıların nasıl değiştirildiğine bakılarak iki olasılık vardır: "dört fasulye" (en solda) veya yalnız iki ayrı bölümü olan bir eğri.

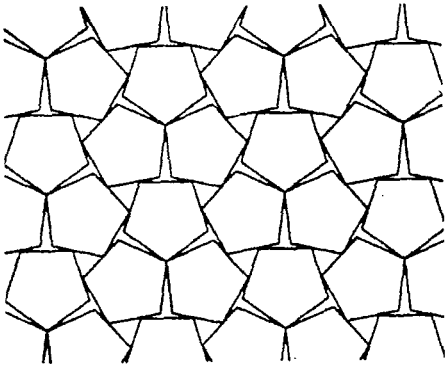
Her kuvartiğin 28 çift teğeti (çift teğet = bir eğriye iki ayrı noktada değen teğet) vardır; bunların çoğu sanaldır. Eğer katsayılar uygun seçilirse, 4 fasulyenin her birinin 1 çift teğeti ve 6 çift fasulyenin her birinin 4 çift teğeti olduğu ve bu 28 çift teğetin hepsinin gerçek olduğu görülür.

Delikli fayans döşemeler Fayans döşemede tek tip bir fayans kaçınılmaz bir şekilde boşluklar bırakırsa, bu oluşturulan desenin bir özelliği olarak kabul edilebilir (tabii ki istenirse bunlar yeni fayans biçimleri olarak da düşünülebilir.)

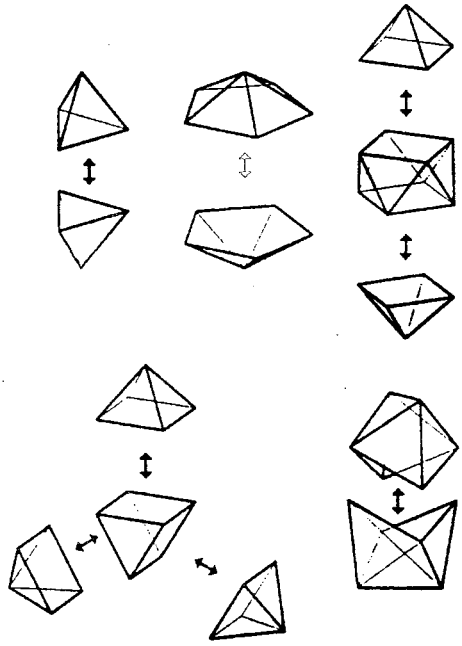
Bu fayans döşeme, bir çok Rönesans sanatçıları gibi, fayans döşeme desenleri yaratmayı seven ressam Albrecht Dürer'indir.



Bu şekilde ise her beşgenin 6 diğer beşgene değdiği bir fayans döşeme deseni görüyoruz.



Deltahedra Martyn Cundy bütün yüzleri eşkenar üçgen olan konveks çokyüzlülere deltahedron adını verdi. Platonik katı cisimlerin üçü deltahedron'dur: tetrahedron (4 yüzlü), octahedron (8 yüzlü) ve ikozahedron (20 yüzlü). 8 konveks deltahedron vardır; yukarıda sayılan platonik katılar ve aşağıda küçük parçalardan montajı yapılan diğer beşi.



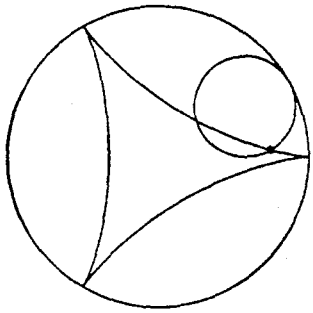
Eğer katı cisim konveks (dışbükey) olmayacaksa, sonsuz olasılık vardır. En azından düzgün bir dört yüzlü (tetrahedron) herhangi bir yüze eklenirse yeni bir deltahedron oluşur (bu tanıma göre bu şekil

kendi kendisiyle kesişebilir.)

Sonsuz sayıda oktahedronlar üst üste eklenirse sonsuz sayıda deltahedron oluşur. Bir oktahedron bir üçgen antiprizma olarak düşünülebilir: İki eşkenar üçgen yüz birbirine bakar; herbirinin tepesi ötekinin kenarı üzerindedir ve aralarındaki boşluk 2x3 = 6 eşkenar üçgenle doldurulmuştur.

Kenar sayıları eşit olan herhangi iki poligon (çokgen) bir antiprizmanın karşıt yüzleri olabilir ve bunlardan sonsuz tanesi üst üste yığılırsa yalnız üçgenlerden yapılmış silindir benzeri bir yüzey oluşur.

Deltoid veya üç köşe noktalı hiposikloid (iç çevrim eğrisi): Deltoid'i ilk inceleyen 1745 yılında Euler oldu. Bir çember sabit bir çember içinde yuvarlanıyor. Eğer yuvarlanan çemberin yarıçapı, sabit çemberin yarıçapının 1/3'ü veya 2/3'ü ise, yuvarlanan çember üzerindeki bir noktanın geometrik yeri bir deltoid'dir.



Birim yarıçaplı bir çember içinde, ona teğet kalarak dönen, 2/3 birim yarıçaplı bir dairenin bir çapının zarfı bir deltoiddir. (Zarf: Bir eğ-

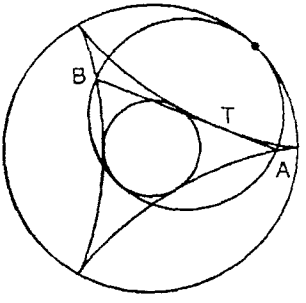
ri veya yüzey takımının her elemanına teğet olan bir eğri veya yüzey, o eğri veya yüzey takımının "zarf"ı adını alır. Örneğin dairesel halka, iki çember arasına dizilmiş çok sayıda küçük dairenin zarfıdır. Ç.N.).

Zarfın bir diğer oluşturulma şekli şöyledir; bir dairenin çevresi üzerine saat yönünde numaralandırılmış noktalar koyun; sonra aynı dairenin çevresinde aynı noktadan başlayarak, fakat saatin tersi yönde ve çift aralıklı numaralandırma yapın. Birbirine karşılık olan noktaları birleştirin; zarf bir deltoid'dir. (deltoid, bütün bu doğrulara teğettir).

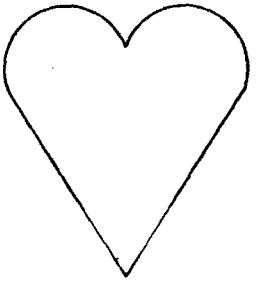
Üçüncü bir yol herhangi bir üçgen alıp onun bütün Simson çizgilerini çizmektir. Bunların zarfı da deltoid'dir. [Simson çizgisi veya simson: Bunu anlamak için önce bir noktanın belli bir üçgene göre pedal üçgenini anlamak gerekir. Bir P noktasından bir ABC üçgeninin her bir kenarına bir dik indirelim. Bu diklerin ayakları - dikin kenarı kestiği nokta- x, y ve z olsun. xyz üçgeni, P noktasına göre ABC üçgeninin pedal üçgenidir. (Pedal üçgenin ikinci bir anlamı köşeleri, yükseklik ayakları olan üçgendir.)

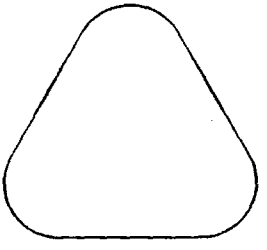
Simson çizgisi: Bir ABC üçgeninin çevrel çemberi üzerinde bir P noktası alalım. P'den kenarlara dik indirelim. Bu diklerin ayak noktaları olan x, y ve z aynı doğru üzerinde olsun. Bu durumda xyz üçgeni (pedal üçgen) xyz doğrusu haline gelmiştir. İşte bu xyz doğrusuna Simson doğrusu denir. Ç.N. (Bkz. Simson doğrusu)]

Deltoid'e T noktasında çizilen teğet, deltoidi A ve B'de kessin. AB uzunluğu sabittir ve deltoid'in üç kenarına da içten teğet (küçük) dairenin çapının 2 katıdır; AB'nin orta noktası deltoid'in iç dairesinin çevresi üzerinde bulunur. A ve B noktalarından deltoid'e çizilen teğetler birbirine diktir ve deltoid'in iç dairesi üzerinde AB'nin orta noktasından geçen çapın diğer ucunda kesişir. Deltoid'e A, T ve B noktalarında çizilen teğetlerin normalleri (bu üç noktanın herbirinde kendi teğetine çizilen dik) en dıştaki büyük daire ile dönen dairenin birbirine teğet olduğu noktadan geçer. (Deltoiddeki bu ahenge hayran olmamak elde mi? Tabii burada aslında deltoidi yaratan beyne hayran oluyor insan. Ç.N.)



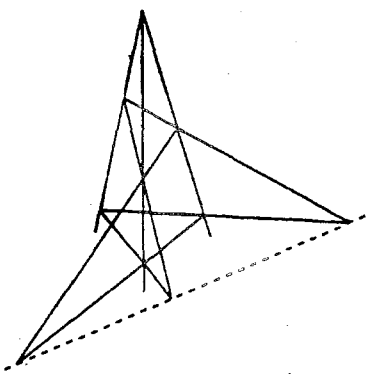
Dengeli olarak yüzen cisimler Stanislav Ulam şu soruyu sordu; küre, yoğunluğu tekbiçim (üniform) olan katı cisimler arasında her pozisyonda yüzen tek katı cisim midir? İki boyutlu basit bir problem için bu sorunun yanıtı "hayır"dır. Yoğunluğu 0.5 olan ve kesiti aşağıdaki şekillerden biri olan bir silindir de ne yön verilirse verilsin rotasyon yapmadan yüzer.



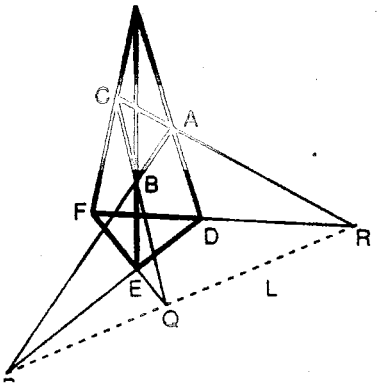


Referans: R.D. Mauldin (ed.) The Scottish Book, Birkhaüser, 1981, Boston.

Desargues şekli Perspektif halinde iki üçgen alınız (ABC ve EDF); yani bu iki üçgenin birbirine karşılık olan tepelerini birleştiren doğrular bir noktadan geçsin. Bu durumda birbirine karşılık olan kenarların kesiştiği 3 nokta (P, Q, R) aynı doğru üzerindedir.



Desargues teoremi (yukarıdaki ifadeye verilen isim) bu şekli 3 boyutlu olarak düşünerek kolayca ispatlanabilir. ABC ve DEF düzlemleri L doğrusu, ABC ve ABED düzlemleri AB doğrusu ve DEF ve ABED düzlemleri DE doğrusu üzerinde kesişir. Bu nedenle bu 3 doğru da P'de kesişir; çünkü P noktası her üç düzlem ve L doğrusu üzerinde bulunur. Benzer olarak AC ve DF, L doğrusu üzerindeki R noktasında, CB ve FE, Q noktasında kesişirler. R ve Q noktaları da, P gibi, L doğrusu üzerindedir. Üç boyutlu şeklin düzlem üzerinde izdüşümü alınınca L doğru olarak kalır.

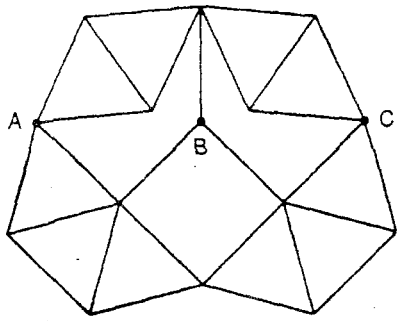


Açıklamada noktalı çizginin oynadığı özel rol nedeniyle şekil asimetrik görülür. Fakat bu bir yanılsamadır. Şekildeki herhangi bir nokta özel tepe (perspektif noktası X'e karşılık) olarak alınabilir; bu durumda şekilde tam üç tane harflendirilmiş kesişme noktası olacak ve bu noktalar şekildeki doğrulardan hiçbiri üstünde olmayacaktır; bu 3 kesişme noktası, PQR'a karşılık olan bir doğru üstünde bulunacaktır.

Desargues teoreminin tersi de doğrudur; iki üçgenin birbirine karşılık olan kenarlarının kesişme noktaları bir doğru üzerindeyse, birbirine karşılık olan tepeleri birleştiren doğrular aynı noktada kesişir.

Şu da var ki bu teoremin tersi aynı zamanda onun dual'idir (eşlek). Orijinal teoremden onun dualini elde etmek için "nokta" yerine "doğru", "iki noktadan geçen doğru" yerine "iki doğrunun kesiştiği nokta" koyulur.

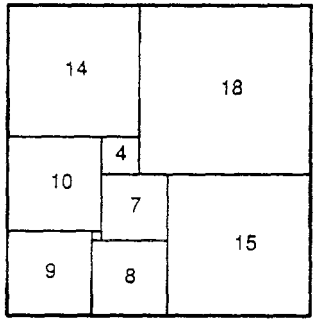
Destekli kare Elimizde köşelerinden menteşeli dört eşit çubuktan oluşmuş bir kare var. Kareyi hiç oynamaz (katı) hale getirmek için, herbiri kare kenarı uzunluğunda ve yine uçlarından menteşeli kaç çubuk gereklidir? (Tabii yeni konulan çubuklar da karenin bulunduğu düzlemde olacak).



Bu, *Scientific American*'daki Martin Gardner köşesinde okurların bulduğu minimum çözümdür. A, B ve C noktaları aynı doğru üzerindedir.

(Referans: Sixth Book of Mathematical Games from Scientific American, W.H. Freeman, San Francisco, 1971).

Dikdörtgenlerin karelere ayrılması 1925'te Z. Moron ilk defa bir dikdörtgeni eşit olmayan karelere ayırdı. Bu problem ona S. Ruziewicz tarafından sorulmuştu; aynı problem *İskoç Kitabı*nda Problem 59 olarak geçer.

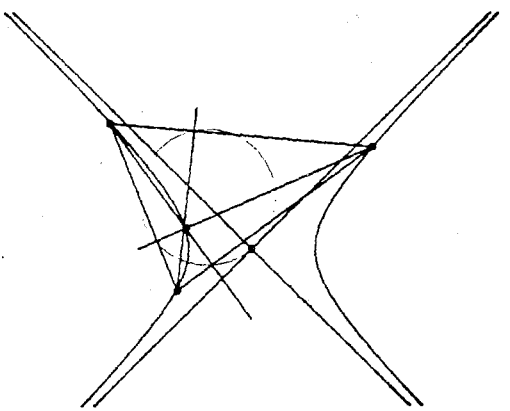


İlginç bir rastlantıdır ki karelere ayrılmış ilk diktörtgen 32x33 birim kenarlı olarak yayımlandı; yani karenin kareleştirilmesine çok yakındı. Karelere bölünmüş karelere erişmek çok daha güçtür.

Referans: R.D. Mauldin (ed.), The Scottish Book, Birkhäuser, Boston, 1981.

Dikdörtgensel hiperbol Asemptotları birbirine dik hiperbollere *dikdörtgensel* hiperbol denir.

Bir üçgenin üç köşesi dikdörtgensel bir hiperbol üzerindeyse, üçgenin ortosentrı da (yüksekliklerin kesişme noktası) aynı eğri üzerindedir. Bunu şöyle de söyleyebiliriz: Eğer dört nokta ortosentrik ise, bu dört noktadan geçen bir dikdörtgensel hiperboller ailesi vardır. Bu dikdörtgensel hiperbollerin merkezlerinin geometrik yeri, üçgenin dokuz nokta dairesidir. (Bkz. Dokuz nokta dairesi.) (Burada matematiğin büyüleyici güzelliği çok açıkça görülüyor. Ç.N)

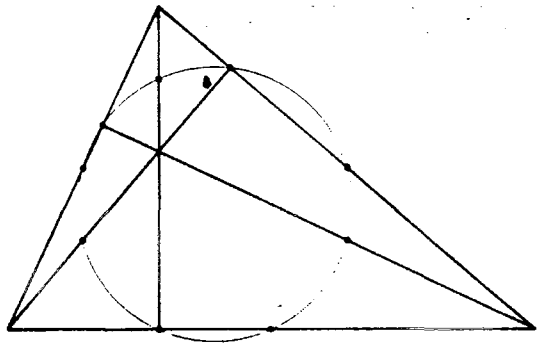


Eğer dört nokta ortosentrik değilse, bu noktalardan geçen tek bir dikdörtgensel hiperbol vardır ve bunun merkezi, her keresinde bu 4

noktadan üçünü alarak oluşturulan 4 üçgene ait 4 dokuz nokta dairesinin kesişme noktasıdır. Dikdörtgensel hiperbolün merkezi inversiyon (dönüşüm) merkezi olarak alınırsa, bu eğrinin inversi lemniskat (kurdele) eğrisidir. (Bkz. Bernoulli Lemniskatı) (Bkz. İnversiyon)

Dokuz nokta dairesi Herhangi bir üçgende kenarların orta noktaları, yükseklik ayakları ve köşeleri ortosentra (yüksekliklerin kesişme noktası) birleştiren çizgilerin orta noktaları aynı daire üzerinde bulunur. Bu problemi Brianchon ve Poncelet 1821'de yayımladı; fakat 1804'te Benjamin Bevan adında adı sanı duyulmamış bir İngiliz de hemen hemen eşdeğer bir problem ortaya atmıştı.

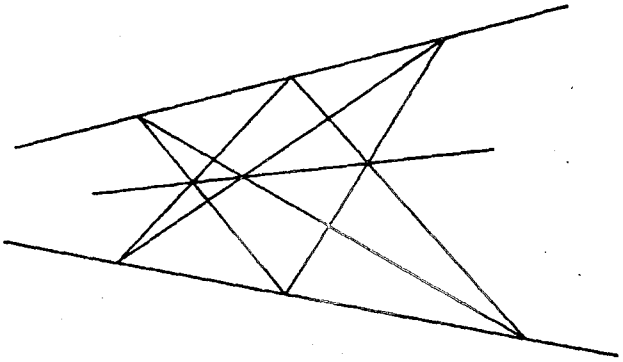
Dokuz nokta dairesi, üçgenin çevrel çemberinin yarısı kadardır. Dokuz nokta dairesinin merkezi, sirkumsentr (çevrel çemberin merkezi) ile ortosentr (yüksekliklerin kesişme noktası) arasında tam ortadadır.



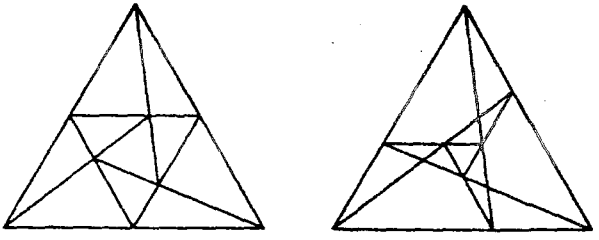
Dokuz nokta dairesi aslında 9'dan fazla nokta içerir:

Bkz. Feuerbach teoremi.

Dokuz-üç konfigürasyonu Başlıca 3 adet dokuz-üç (9_3) konfigürasyonu olabilir. Bu şu demektir: 9 nokta ve 9 doğru, her noktadan 3 doğru geçecek ve her doğru üzerinde 3 nokta olacak şekilde 3 türlü düzenlenebilir.

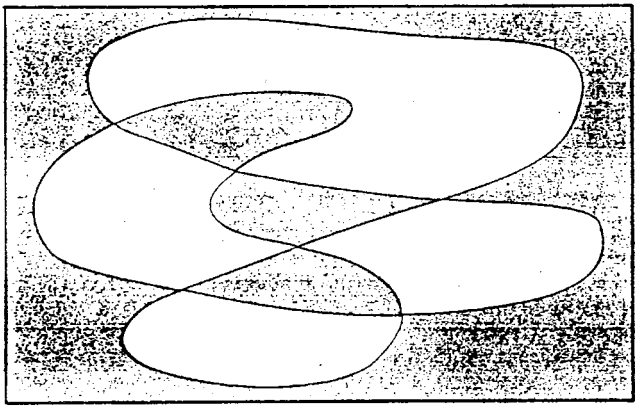


Bu konfigürasyonlardan ikincisi bir üçgenin içine çizilmiş bir üçgen olarak düşünülebilir; bu son üçgen de bir üçüncü üçgen içine çizilmiştir; bu üçüncü üçgen de ilk üçgen içine çizilmiş durumdadır. Bunlardan birincisi aynı zamanda *Pappus teoremi* içindir (Bkz. Pappus teoremi).

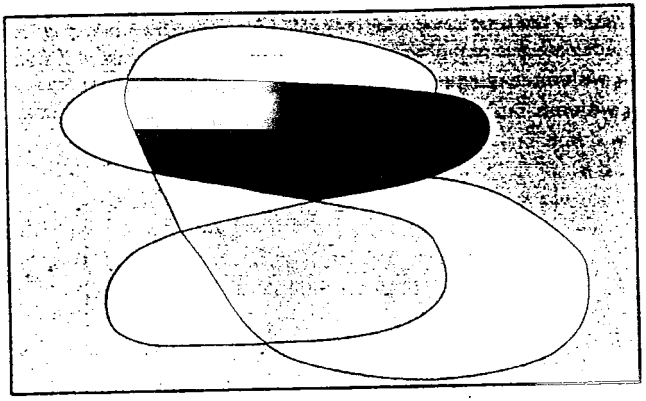


Dört renk teoremi Herhangi bir düzlem haritanın boyanması, aynı sınırı paylaşan iki ülke farklı renklerde olmak koşuluyla, en fazla 4 renk gerektirir.

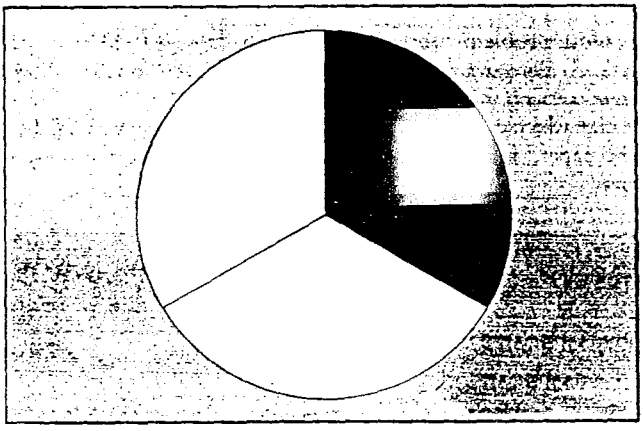
Kalemi kâğıttan kaldırmadan sürekli bir çizgi çizerek başlanan noktaya dönülen bir harita yalnız iki renk gerektirir.



Eğer başlanan noktaya dönülmezse 3 renk gerektirir:



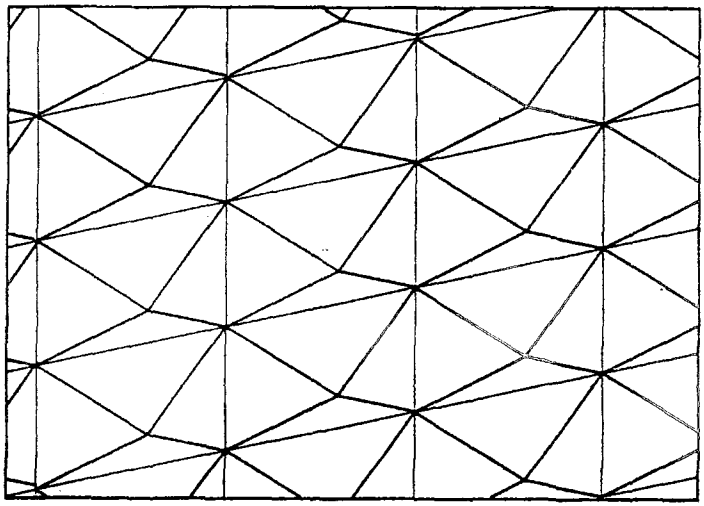
Aşağıdaki harita 4 farklı renk gerektiren en basit haritadır:



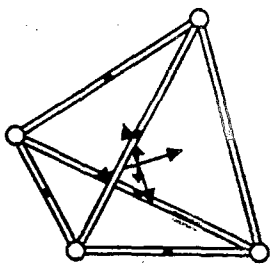
Harita boyamak için 4 rengin yeterli olduğunun ispatı, uzun ve dönemeçli bir yol izlemiştir. Kempe 1879'da bütün matematik tarihinde en yanlış ispat denilebilecek yanlış bir ispat bulmuş, bu yanlış ancak 1890'da Heawood tarafından düzeltilmiştir.

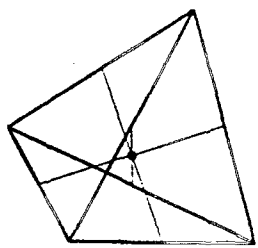
Haritada dört renk problemi ancak 1976'da bilgisayarda yüzlerce harita örneği incelenerek Haken ve Appel tarafından kanıtlanmıştır. Bu ispat matematikçilerce genellikle kabul edilmiş olmakla birlikte bu biraz istemeye istemeye olmuştur; çünkü ispatı çizgi-çizgi incelemek olanağı yoktur.

Dörtgen mozaik Herhangi bir dörtgen, kendi kendini çaprazlamadıkça, mozaik yapabilir. Aşağıda bir paralelkenar ağı görüyorsunuz. Her paralelkenar içinde dört üçgen var. Her üçgen diğerlerinden farklı; fakat aynı biçimde olan üçgenlerin kenarları paralel. İki üçgen taban tabana verip tekrarlayan dörtgenler yapıyor.



Dörtyüzlü Bir dörtyüzlünün köşelerine eşit ağırlıklar konulursa, ağırlık merkezi şöyle bulunur: Dört köşe ikişer ikişer alınarak her çift için kenarın orta noktası bulunur. Karşıt kenarların ortalarını birleştiren doğrular bir noktadan geçer; burası dörtyüzlünün ağırlık merkezidir.





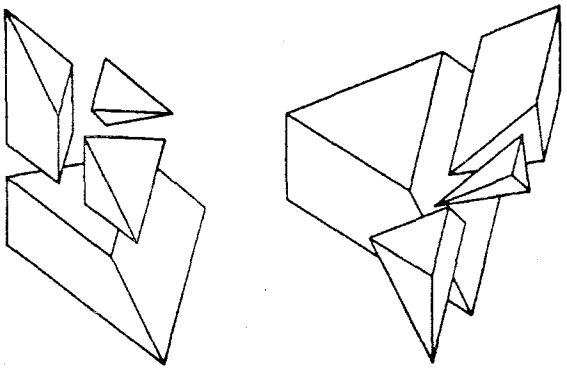
Karşıt kenarlar üç türlü seçilebildiğinden, karşıt kenarların ortasını birleştiren üç doğru oluşmuştur. Ayrıca ikinci şekilde görüldüğü üzere, dörtyüzlünün bir düzlem üzerinde izdüşümü alınırsa bu durum şu teoremi verir: Bir dörtgenin karşılıklı kenarlarının ve köşegenlerinin orta noktalarını birleştiren üç doğru bir noktada kesişir.

Bir dörtyüzlünün 4 yüzüne, biri içten ve yedisi dıştan olmak üzere 8 küre değebilir. Düzenli dörtyüzlüde dıştaki 7 küreden 3'ünün merkezleri sonsuzdadır (yani bunlar düzlem halini almıştır.)

Bir dörtyüzlünün yükseklikleri aynı noktada kesişmez. Eğer karşıt kenarlar birbirine dikse, yükseklikler birbirini keser. Eğer bir yükseklik çifti birbirini keserse, diğer yükseklik çifti de birbirini keser.

Eğer üç yükseklik aynı noktadan geçerse, dördüncü yükseklik de aynı noktadan geçer, Jacop Steiner bunu 1827'de zarifçe şöyle tanımlamıştır: Bir doğru bir dörtyüzlünün yüksekliklerinden üçünü keserse dördüncüyü de keser.

Dörtyüzlü disseksiyonları İki boyutlu ortamda, yani düzlem üzerinde, bir üçgen kolaylıkla eşit alanlı bir diğer üçgene dönüştürülebilir; örneğin her iki üçgen aynı kareye eşitlenebilir. Aslında genel olarak iki düzlem çokgen, ancak ve ancak alanları eşitse, birbirine dönüştürülebilir. Fakat aynı hacimde iki dörtyüzlü birbirine dönüştürülemez. Üç boyutlu ortamda eşit hacimli iki çokyüzlü birbirlerine dönüştürülemez. David Hilbert 1900 yılında Paris'teki Enternasyonel Matematikçiler Kongresine sunduğu ünlü "Yirmi üç çözümsüz problem" arasına bunu da katmıştı. (Bir Euclid uzayında *tek* sayılı boyutlarda zorluk doğar.)



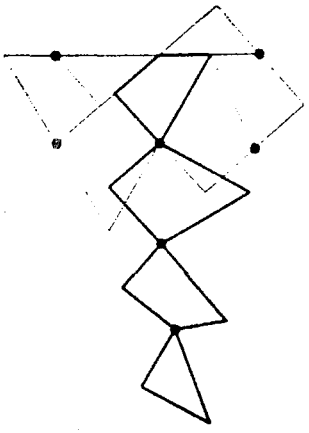
Bir dörtyüzlünün üçgen prizmaya dönüştürülmesinin yollarından biri 1896'da M.J.M. Hill tarafından yayımlanmıştır. Prizma tabanının saklı arka kenarı, sağ yatay ve sol dikey kenara diktir. Bu kenarların herbiri aynı uzunluktadır. Birinci kesi yatay olup yukarı doğru üçte bir mesafedendir; ikinci kesi dikey olup sol kenarla birinci kesinin yarattığı kenar arasındaki mesafeyi ortalar.

Bir kere ikinci şekildeki prizma oluşturulunca, bu önce bir dikdörtgenler prizmasına ve sonra bir küpe dönüştürülebilir.

Referans: V.C. Boltanyanskii, Hilbert's Third Problem, Wiley, New York, 1978.

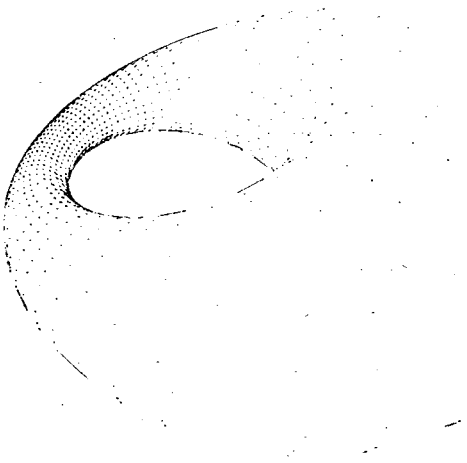
Dudeney'in kare olabilen menteşeli eşkenar üçgeni Henry Ernest Dudeney, bilmecelerinin bir çoğunda bütünü parçalara ayırma (disseksiyon) ve tekrar birleştirme sorunlarını ele almıştır. Bu bilmece onun baş yapıtıdır. Menteşelenmiş parçalar bir yönde (sağda) birleştirilirse kare, diğer yönde (solda) birleştirilirse eşkenar üçgen ya-

par. Menteşelerden ikisi üçgenin kenarlarından ikisini ikiye böler (şekilde üçgenin iki kenarının ortasındaki noktalar); üçüncü menteşe (şekilde üçgenin yatay kenarı üzerindeki nokta) üçgenin 3. kenarını 0.982:2 : 1.018 oranında böler.



Dudeney bu bilmecenin tahtadan güzel bir modelini yaptı ve 1905'te bunu Kraliyet Bilim Derneği (Royal Society) önünde göstermeye çağrıldı. Bir bilmece ustası için alışılmadık, fakat yerinde bir şeref.

Dupin siklidi 3 sabit küreye (içten veya dıştan) teğet kürelerin zarfı bir Dupin siklididir (yani Dupin siklidi bu kürelerin hepsine teğettir).



(Bir yüzey takımının zarfı: Takım elemanlarının herbirinin yüzeyine teğet olan yüzeye verilen isimdir. Ç.N.)

Bütün teğet kürelerin merkezleri aynı konik (elips, parabol veya hiperbol) üzerinde bulunur; bu nedenle Dupin siklidi şöyle de tanımlanabilir: Dupin siklidi, merkezleri belli bir konik üzerinde olan ve belli bir küreye teğet olan kürelerin zarfıdır.

Üçüncü bir tanım şudur: Dupin siklidi, merkezleri belli bir küre üzerinde olan ve belli bir küreyi dikine kesen kürelerin zarfıdır.

Torus (simit yüzeyi) Dupin siklidinin özel bir halidir ve hayrettir ki her Dupin siklidi bir torusun inversidir [inversiyon (evirtim): O sabit bir nokta ve C bir eğri olmak üzere, M noktası C üzerinde gezdiğinde OM. OM´= k eşitliğini sağlayan bir M´ noktasının geometrik yeri. k 0.

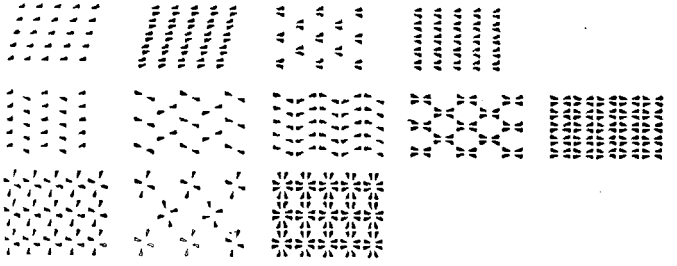
Bir noktanın bir daireye göre inversi: Aynı yarıçap üzerinde bulunan iki noktanın merkeze uzaklıklarının çarpımının yarıçapın karesi-

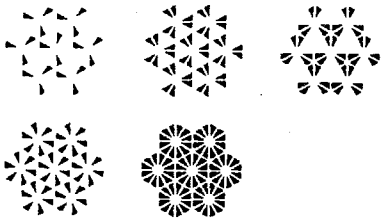
ne eşit olması halinde bu iki nokta birbirinin inversidir ve dairenin merkezi inversiyon merkezidir. Bu noktalardan biri verilirse, onun inversi bulunabilir. Bütün noktaları bir eğrinin bütün noktalarının inversi olan bir eğriye, o eğrinin inversi denir. Bir çemberin merkezinden geçen bir çemberin inversi bir doğru, merkezinden geçmeyen çemberlerin inversleri yine dairedir. Bir eğrinin denklemi $f(x,y) = 0$ ise, bu fonksiyonun bir çembere göre inversi şudur:

$$f(k^2x / x^2+y^2 , k^2y / x^2+y^2) = 0;$$

Burada her x'li ve her y'li terim $k^2 / (x^2+y^2)$ ile çarpılmıştır. Bir noktanın bir küreye göre inversi: Aynı yarıçap üzerinde bulunan iki noktanın küre merkezine olan uzaklıklarının çarpımı küre yarıçapının karesine eşitse o iki nokta birbirinin inversidir. Sabit bir küreye göre her kürenin inversi yine bir küredir; yalnız sabit kürenin merkezinden geçen bir kürenin inversi bir düzlemdir. Bir torusun inversi bir Dupin siklididir. Ç.N.)

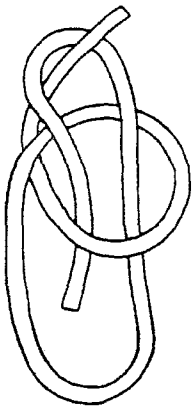
Duvar kâğıdı desenleri Duvar kâğıdı deseni iki farklı doğrultuda düzenli aralarla tekrarlar. Duvar kâğıdı simetrisi, kullanılan ağın (şebekenin) simetrisine ve tekrarlayıcı motifin aynı simetriye sahip olup olmayışına bağlıdır. Aşağıdaki sıralarda görüldüğü üzere ağ beş şekilde olabilir:



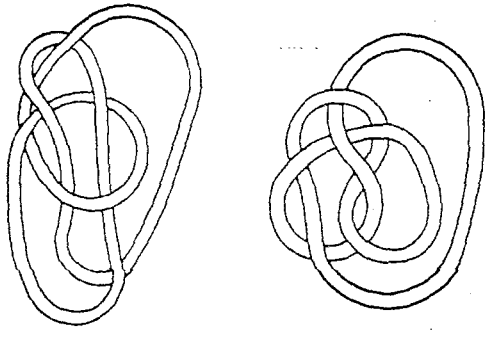


Olası simetriler kombine edilerek 17 çeşit duvar kâğıdı deseni oluşturulabilir; bunların hepsi İspanya'daki Elhamra sarayı fayanslarında ve diğer Mağribi mimarisinde bulunmuştur.

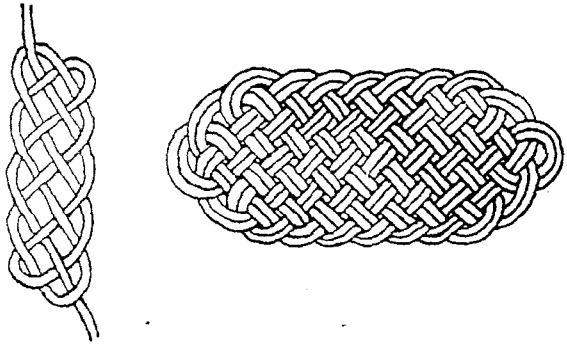
Düğümler Düğümlerin geçmişi zaman sisleri arasında kaybolmuştur. İnsanlık büyük olasılıkla düğümleri sayılardan önce bulmuştu; fakat matematikçiler düğümlerin önemini son 100 yılda anlayıp onları incelediler.



Bu barço bağıdır; birkaç yıl önce arkeologlar tarafından Finlandiya'da bir balıkçı ağında bulunmuş ve polen analiziyle M.Ö. 7000 yıllarına ait olduğu saptanmıştır. Uçları bitiştirin. Nereden başlarsanız başlayın, sonuç aynıdır; bir yüzeyi eğip uçlarını bitiştirmiş olursunuz. Düğümler matematik bakımından eşdeğerdir.

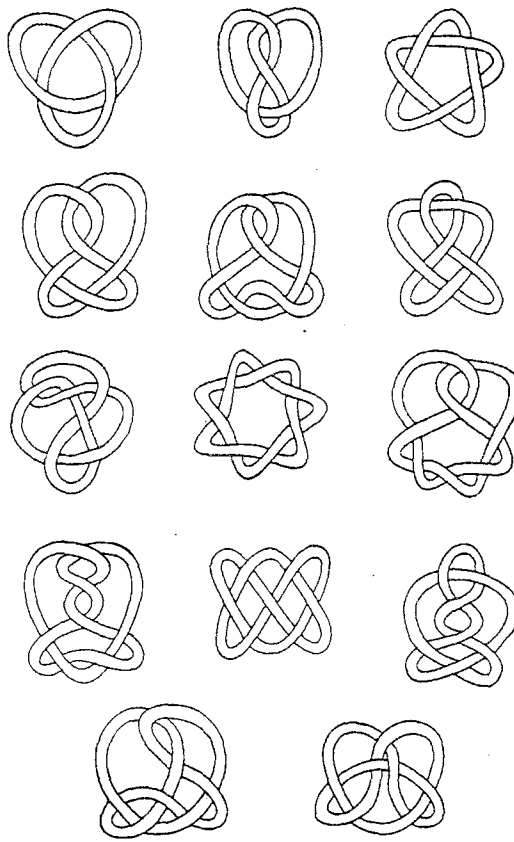


Geleneksel düğümlerin yüzlerce şekli ve kullanışı vardır; kullanış çok pratik olabildiği gibi karmaşık ve süse yönelik olabilir. Solda denizcilerin "salvo" düğümü, sağda ise 'okyanus örgüsü' düğümü var; her ikisi de Kelt'lerin kayış işi desenlerini hatırlatıyor.



Düğümler, peşpeşe Matematikçiler düğümlerin pratik yararıyla (ki sürtünme, bağlama kolaylığı vb. ile ilgilidir) ilgilenmezler; onlar düğümleri, uçları birleştirildiği için çözülmeyen eğriler olarak görürler. Bir eğri ancak üç boyutlu bir uzayda düğümlenebilir. Dört boyutlu uzayda bir eğri düğümlenemez, fakat bir yüzey düğümlenebilir.

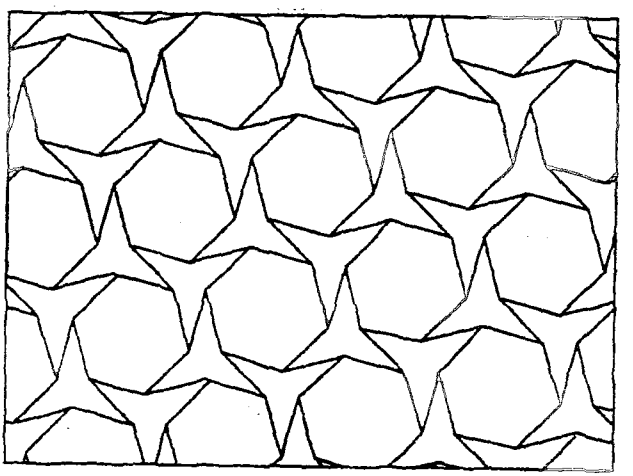
Düğümleri sınıflandırmanın doğal bir yolu, onları yaptıkları çaprazların sayısına göre ayırmaktır. *Asal düğümler* 7 veya daha az çapraz yaparlar. 'Asal'dan kasıt düğümün, bir ip üzerinde peşpeşe bağlanan iki düğüm olarak düşünülemeyeceğidir.



Herhangi bir düğüme, ipin bir bölümü çimdiklenerek ve bu bölüm sola veya sağa doğru ters çevrilerek, yeni bir çapraz katılabilir. Çaprazlar sayılırken bu gibi çaprazlar düzeltilir ve sayılmaz.

Çapraz sayısı arttıkça, oluşturulabilecek düğüm çeşitlerinin sayısı da artar. 3 veya 4 (olası en küçük çapraz sayısı) çaprazla bir çeşit, 5 çaprazla iki, 6 çaprazla üç, 7 çaprazla yedi, 8 çaprazla yirmibir, 9 çaprazla kırkdokuz ve 10 çaprazla yüz altmışbeş türlü düğüm oluşturulabilir. Sola bakan ve sağa bakan düğümler aynı sayılmazsa, düğüm çeşidi bu sayıların iki katıdır.

Düzgün altıgenler ve yıldızlar Mozaik oluşturabilen çokgenler hafifçe birbirlerinden ayrılırlarsa çokgen + yıldız mozaikleri oluşturulabilir.

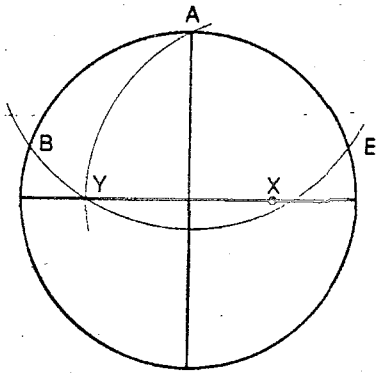


Buna *menteşeli mozaik* de denilebilir. Yıldızın altıgene ait olmayan her kenarı, iki altıgeni bir arada tutan iki ucu menteşeli bir köprüdür. Altıgenler birbirinden ayrıldıkça, yıldız şişer; bir an büyük eşkenar bir üçgeni andırır ve nihayet orijinal altıgenler gibi bir altıgen olur.

Düzgün beşgen Euclid düzenli bir beşgenin nasıl çizileceğini gösterdi; *Elemanlar* kitabının son cildinde anlattığı üzere, bu çizim olmasaydı düzgün onikiyüzlüyü yapamazdık.

Başta Leonardo da Vinci ve Dürer olmak üzere birçok kişi, mimar ve tasarımcıların kullanması için yaklaşık çizimler tasarladılar. Bir sonraki şekil bunun basit ve mükemmel bir örneğidir.

Bir daire ve birbirine dik iki çap çizip bir yarıçapı X'de iki eşit parçaya bölün. XA'ya eşit XY'yi işaretle; A merkezli ve AY yarıçaplı yayı çizerek daireyi B ve E'de kestir. A, B ve E düzgün bir beşgenin üç köşesidir.



Düzgün dört boyutlu politoplar Bunlar üç boyutta düzenli çokyüzlülerin dört boyutlu uzaydaki analoglarıdır. Sayıları onaltıdır: Altısı konveks (dış bükey) ve onu yıldız biçimi.

Aşağıdaki tablo bu politopların köşe, kenar, iki boyutlu yüz ve üç boyutlu hücrelerinin sayısını verir:

	Köşeler	Kenarlar	Yüzler	Hücreler
Pentatop	**5**	10	10	5
16 hücreli	**8**	24	32	16
Hiperküp	**16**	32	24	8
24 hücreli	**24**	96	96	24
600 hücreli	**120**	720	1200	600
120 hücreli	**600**	1200	720	120

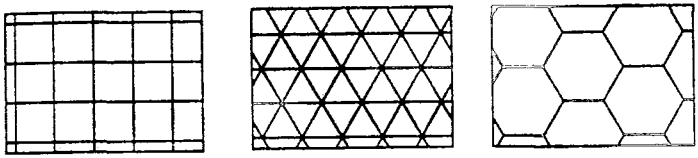
Pentatop ve 24 hücreli kendi kendilerinin dualidir. 16 hücreli, hiperküpün dualidir; 600 hücreli ve 120 hücreli birbirlerinin dualidir.

Bütün düzenli politoplar için Euler ilişkisine benzer şu ilişki geçerlidir:

köşe sayısı + yüz sayısı = kenar sayısı + hücre sayısı

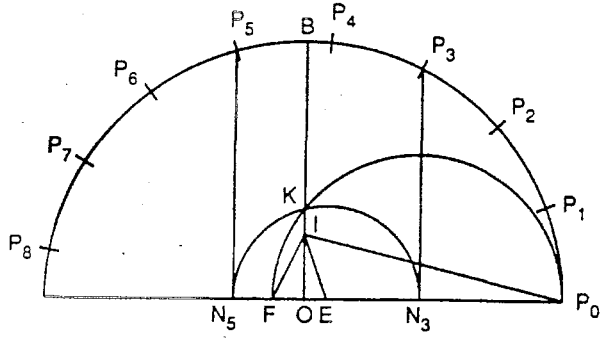
Beş ve daha fazla boyutlu uzaylarda yalnızca 3 düzgün konveks politop vardır.

Düzgün mozaikler Kepler düzgün mozaikleri ilk düşünen kişiydi; onları düzgün çokyüzlülerin benzerleri (analogları) olarak görüyordu. Kareler, altıgenler ve eşkenar üçgenler kullanılarak üç türlü düzgün mozaik yapılabilir.



Düzgün onyedigen Gauss 18 yaşındayken şunu kanıtladı: Düzenli bir n-genin cetvel ve pergelle çizilebilmesi için n'in asal bir Fermat sayısı olması veya farklı asal Fermat sayılarının çarpımı olması gerekir. (Bunu *Disquisitiones Artithmeticae* kitabında yayınladı, 1801).

n. Fermat sayısı $2^{2^n} + 1$'dir; burada n sıfır veya pozitif tamsayıdır. Üçüncü Fermat sayısı 17 olduğundan, teorik olarak cetvel ve pergelle düzgün bir onyedigen çizmek olasıdır. Bunun en basit yöntemi H.W. Richmond tarafından bulunmuş ve Rouse-Ball tarafından şöyle uygulanmıştır:

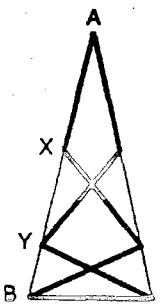


OB üzerinde I'yı bulun, öyle ki OI = 1/4 OB olsun. $İP_0$'ı birleştirin ve OP_0 üzerinde öyle E ve F noktaları bulun ki OİE açısı = 1/4 OİPo ve FİE açısı= 1/4 π olsun. FP_0 çaplı daire OB'yi K'da ve E merkezli ve EK yarıçaplı daire OP_0'ı N_3'te (O ve P_0 arasında) ve N_5 te kessin.

OB'ye paralel N_3P_3 ve N_5P_5 çizgileri, orijinal daireyi P_3 te ve P_5 te kessin. P_0, P_3 ve P_5 düzgün bir onyedigenin O'ıncı, 3'üncü ve 5'inci köşeleridir. Bu üç köşeye dayanarak kalan köşeler kolayca bulunabilir.

Referans: W.W. Rouse ve H.M. Coxeter, Mathematical Recreations and Essays. 12th edn., University of Toronto Press, Toronto, 1974.

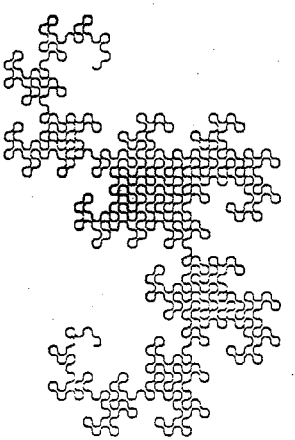
Düzgün yedigen Yalnız cetvel ve pergel kullanılarak düzgün bir yedigen çizilemez. Fakat 7 kürdan kullanılarak π/7 derecelik bir açı yapılabilir, bundan da düzgün yedigen kolayca elde edilir. Kürdanlar A, X, Y ve B aynı doğru üzerinde olacak şekilde düzenlenir; sağ kenar da benzer şekilde oluşturulursa A açısı π/7'dir.



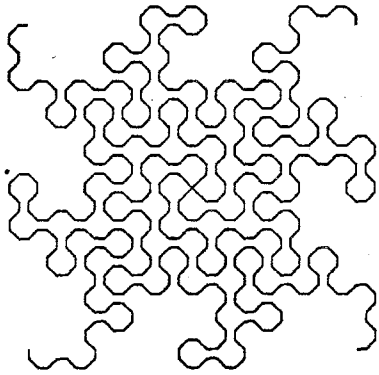
Referans: C. Johnson, A construction for a regular heptagon, Mathematical Gazette, No: 407, 1975.

E

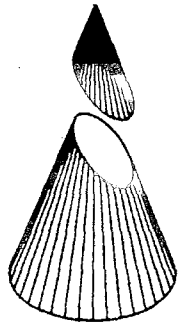
Ejderha (dragon) eğrisi Uzun bir kâğıt şeriti, sağ yanı sol yanı üstüne gelecek şekilde katlayın ve sonra dikaçı yapacak şekilde açın. Buna kenarından bakınca 1. dereceden bir ejderha görülür. Şimdi şeridi kapatın ve yeniden 1. kıvrımla aynı doğrultuda katlayın. Sonra her kıvrım dikaçı yapacak şekilde bunu da açın. Bu operasyonu tekrar edin. Yine kenardan bakıldığında bunlar 2. ve 3. derece ejderhalardır. Aşağıda 10. dereceden bir ejderha eğrisi görülüyor.



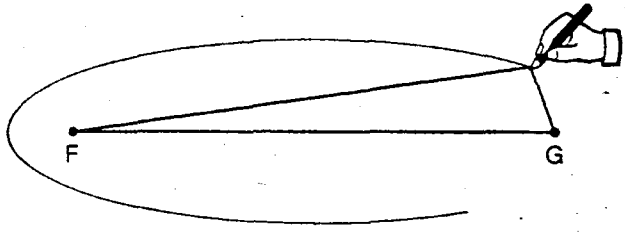
4 ejderha eğrisi, bir nokta etrafında birbirine uyar. Aşağıdaki şekilde 6. dereceden dört ejderha eğrisi birleştirilmiş. Her eğride açılar, eğrinin kendi kendini kesmemesi için hafifçe ayarlanmıştır; böylece eğrileri ayrı ayrı görebilirsiniz. Bu fraktal bir eğridir.



Elips Elips bir düzlemin bir koniyi kesmesiyle oluşur. Eğer koni tepenin iki yanında yer alan cinsten çift koniyse, elips düzlemi koninin bir yarısını keser. Parabol, koninin yüzeyindeki tepeden geçen bir doğruya paralel bir düzlemle koninin kesit çizgisidir. Hiperbol koninin her iki yarısını kesen bir düzlemle koninin kesitidir.



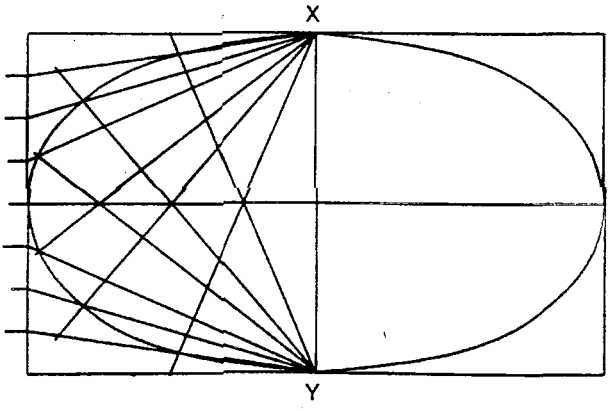
Elips iki sabit noktaya (örneğin raptiye, çivi vb.) (F ve G) bağlanmış bir ipi kalemle gererek çizilebilir. İp gergin tutularak kalem hareket ettirilirse bir elips çizilir. F ve G elipsin odak noktalarıdır.



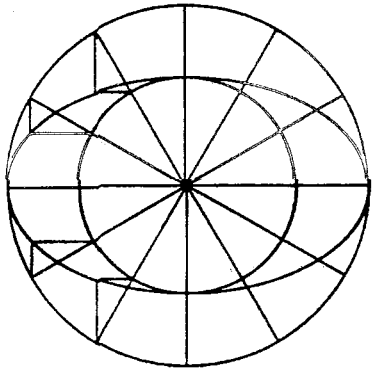
Elipsin her odak için bir tane olmak üzere iki direktrisi (doğrultman) vardır. Elips odak denilen sabit bir noktadan uzaklığının direktris denilen sabit bir doğruya uzaklığına oranının sabit ve 1'den küçük olduğu noktaların geometrik yeridir. (Elips aynı zamanda odak denilen 2 sabit noktaya olan uzaklıklarının toplamı sabit olan noktaların geometrik yeridir. Ç.N.)

İki sabit nokta kullanmak yerine, ip bir diğer elipsin etrafına sarılırsa, ipin ucundaki kalem yine, bir elips çizer; bu elipsin odak noktaları orijinal elipsinkilerin aynısıdır.

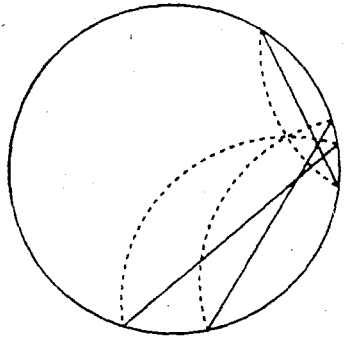
Bir dikdörtgen içine bir elips çizmek için dikdörtgeni kenarların ortasından geçen birbirine dik iki doğruyla 4'e bölün. Küçük dikdörtgenlerden birini alın. Küçük dikdörtgenin kısa ve uzun kenarını çift sayıda (şekilde 4) parçaya ayırın. Bu noktalar x ve y ile birleştirildiğinde doğruların kesişme noktaları elipsin dörtte birini oluşturacaktır. Diğer 3 küçük dikdörtgende benzer operasyonlar yapılarak elips tamamlanır.



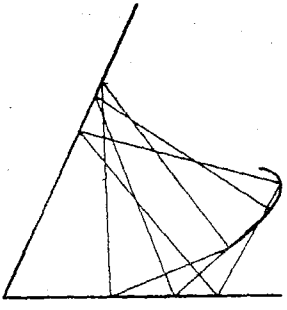
Elips ezilmiş bir daire olarak düşünülebilir. Aşağıdaki şekilde dış dairenin yüksekliği 0.6 kat azaltılarak veya iç daire yatay olarak gerilerek elips oluşturulması görülüyor.



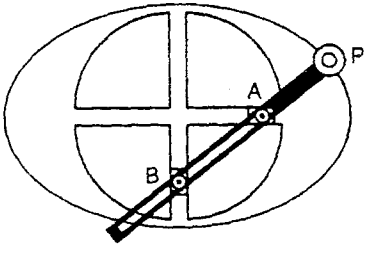
Bir elipsi kâğıt katlayarak elde edebilirsiniz. Bir daire çizin ve içinde bir noktayı işaretleyin. Kâğıdı öyle katlayın ki dairenin çevresi noktadan geçsin. Farklı kıvrımlar yaratmak üzere bu operasyonu tekrarlayın. Kıvrımlar bir elipsi zarflayacaktır.



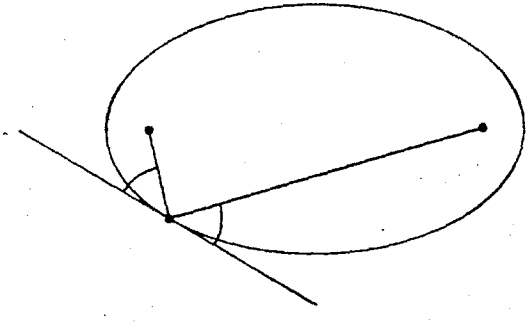
Aşağıdaki elips çizim yolu, Leonardo da Vinci tarafından bulundu. Bir ABC üçgenini kesip çıkartın. Bir kâğıda iki eksen (doğru) çizin (dik olma şartı yok). Üçgeni öyle hareket ettirin ki köşelerden biri bir, diğeri diğer doğru üzerinde kaysın. Üçüncü köşenin geometri yeri bir elipsdir.



Elips çizmenin özel bir yolu duvara dayanmış bir merdivenin kaymasıdır. Merdiven üst ucu duvara, alt ucu döşemeye dayalı iken kaymaya başlarsa, merdiven üzerindeki sabit bir nokta, örneğin merdivende duran birinin ayağı, bir elips parçası çizecektir. Bu yöntem elipsografların (kollu pergel, elips çizmek için yapılmış ticari cihazlar) temelini oluşturur. Bir çubuğun iki noktası iki yarık içinde kayarken çubuğun ucu elips çizer.



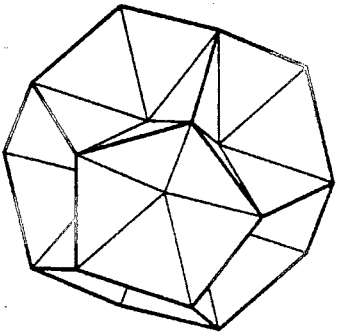
Elipse çizilen bir teğet, değme noktasını odaklara birleştiren çizgilerle eşit açılar yapar.



Bu mekanik olarak şöyle de düşünülebilir: Küçük bir ağırlık iki çiviye bağlanmış bir ip üzerinde kaymaktadır. Ağırlığın çizdiği yol tarif üzere bir elipsdir. En alt noktada teğet yatay olacaktır ve ağırlık ip üzerinde düzgün kayarsa, iplerin yatayla yaptıkları açılar eşit olacaktır; çünkü ağırlık hareket etmiyorsa eşit gerginlikler gereklidir. Teğet, değme noktasını odak noktalarına birleştiren doğrularla eşit açılar yapar.

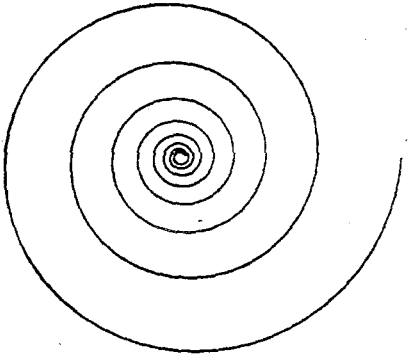
Elli dokuz ikozahedra (elli dokuz yirmi yüzlü) Tetrahedron (4 yüzlü) ve küp, yıldız biçimine konulamaz; çünkü yüzleri uzatılırsa birbirini tekrar kesmez. Oktahedron (8 yüzlü) tek bir yıldızlaşma yapar: *stella octangula* (8 açılı yıldız). (Bkz. Stella octangula) Dodekahedron (12 yüzlü) üç tip yıldız yapar; küçük onikiyüzlü yıldız, büyük onikiyüzlü yıldız ve büyük onikiyüzlü.

Buna karşı ikozahedron'un (20 yüzlü) en az 59 yıldız biçimi vardır; bunlar M. Bruckner, A.H. Wheeler ve H.S.M. Coxeter tarafından sayılmıştır. Bir odun blokundan düz kesilerle bir ikozahedron kesilip çıkartıldığında 1+20+30+60+20+60+120+12+30+60+60 parça oluşur. Bunlar yerine simetrik olarak 32 *refleksibl polihedron* (simetri düzlemleri olan polihedronlar) ve sola dönük ve sağa dönük olarak çift çift gelen 27 katı parça konulabilir. Bunlar arasında orijinal ikozahedron, büyük ikozahedron ve 5 oktahedron (8 yüzlü) ile 10 tetrahedron'un (4 yüzlü) bileşik şekilleri vardır. Şekil deltahedron'dan ibaret üçüncü yıldızlaşmayı gösteriyor.



Referans: H.S.M. Coxeter, The Fifty-nine Icosahedra, Springer-Verlag, Berlin, 1938.

Eşit açılı veya logaritmik spiral 1638'te Descartes tarafından bulundu. Bu spiral orijinden (O'dan) geçen herhangi bir yarıçapı hep aynı açıyla keser. Bu açıya α dersek, spiral'in polar denklemi $r = a \exp(\theta \cot \alpha)$ olur.

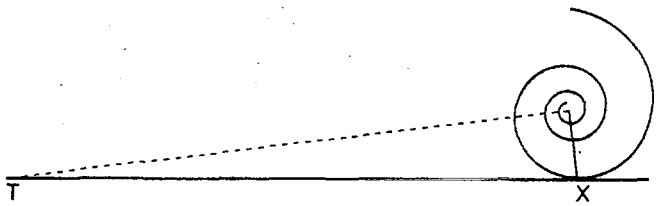


Bu eğri Jacob Bernouilli tarafından incelendi. Bernouilli bu eğrinin kendini biçim değiştirerek tekrarlamasından o kadar etkilendi ki bu eğrinin mezar taşı üzerine çizilmesini ve yanına *Eadem mutata resurgo* (Ben özü aynı, ama değişmiş olarak dirileceğim) yazılmasını istedi.

Logaritmik spiral'in evolütü ve orijine göre inversi yine eşit açılı bir spiraldir. Orijine bir ışık kaynağı konulursa, yansıma ve kırılma yoluyla kostikleri de özdeş eşit açılı spiraller olur.

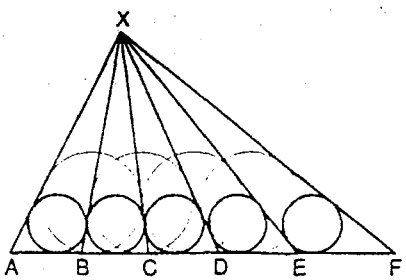
Bu eğri kendine benzer; şöyle ki eğrinin bir bölümü büyütülür veya küçültülürse, aynı eğrinin bir başka bölgesiyle özdeş bir eğri elde edilir.

Spiral düz bir çizgi boyunca yuvarlanırsa, spiralin merkezinin (kutup) gittiği yol bir diğer düz çizgidir. Kutbun başlangıç noktası T'dir; TOX dik açıdır; eğrinin kutuptan X noktasına kadar olan uzunluğu XT'ye eşittir.



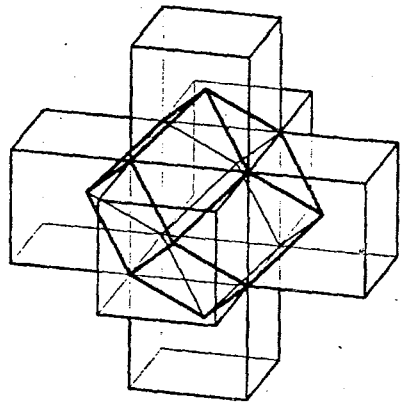
Eşit açılı spiral doğada tekrar tekrar görülür. Örneğin Nautilus denen deniz hayvanının kabuğundaki girdap biçimi çizgiler, eşit açılı (logaritmik) spiraldir. Fakat ayçiçeğinin çiçeklerindeki spiraller ancak yaklaşık olarak eşit açılı spirallerdir, bunlara *Fermat spiralleri* demek daha uygundur.

Eşit iç daireler teoremi X'den geçen doğrular öyle seçilmiştir ki XAB, XBC, XCD... üçgenlerinin iç dairelerinin yarıçapları eşittir. Bu nedenle XAC, XBD... üçgenlerinin iç daireleri de eşittir.



Benzer olarak XAD, XBE üçgenlerinin ve XAE ve XBF üçgenlerinin iç daireleri de eşittir.

Eşkenar dörtgensel onikiyüzlü (rombik dodekahedron) Bir küpün her yüzüne bir küp oturtarak 7 küpten oluşmuş üç boyutlu bir haç yapın. Dış küplerin merkezlerini ortadaki küpün köşelerine birleştirin. Bir eşkenar dörtgensel 12 yüzlü elde edersiniz. Bu şeklin her yüzü bir eşkenar dörtgendir; kısa köşegenleri orijinal küpün kenarları ve uzun köşegenleri düzgün bir 8 yüzlünün kenarlarıdır. Bu şekil doğada lâl taşı veya grena kristallerinde vb. görülür.

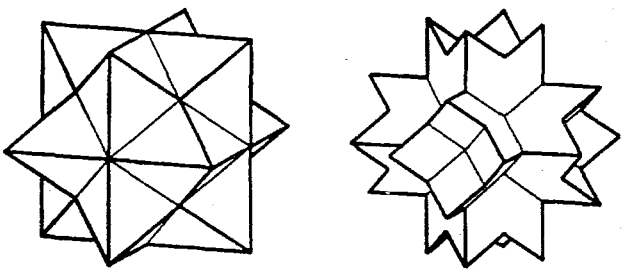


Oluşturulması için kullanılan metotdan anlaşıldığı üzere, bu şekil boşluk doldurucudur. Her küpün merkezini 6 yüzün herbirine birleştiren menteşeli 6 kare piramit hayal edelim; bu model hem tam bir küp, hem de ortasında bir küp bulunan bir eşkenar dörtgensel 12 yüzlü yapacak şekilde bükülebilir.

Her köşede 3 veya 4 yüz birleşir. Bir köşede birleşen üç yüzü çı-

kartarak ve çevreleyen 6 yüzü bir altıgensel prizmanın yüzlerini oluşturacak şekilde uzatırsak arıların bal peteklerinde görülen üç boyutlu şekli (hücreyi) elde etmiş oluruz.

Eşkenar dörtgensel 12 yüzlünün yüzleri birbirlerini kesecek şekilde uzatılırsa, yüzlerin nasıl uzatıldığına bağlı olarak birbirinden farklı üç yıldız elde edilir. 1. ve 3. yıldızlar şekilde görülüyor.

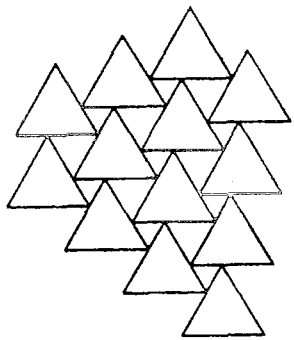


Birinci yıldızın köşeleri bir küp-sekizyüzlünün (kübo-oktahedron) köşeleridir. Birinci yıldız aynı zamanda, herbiri düzgün bir 8 yüzlüyü ana eksenlerinden biri boyunca sıkıştırarak elde edilen, 3 düzgün olmayan (irregüler) sekizyüzlünün içiçe geçmesiyle oluşmuştur.

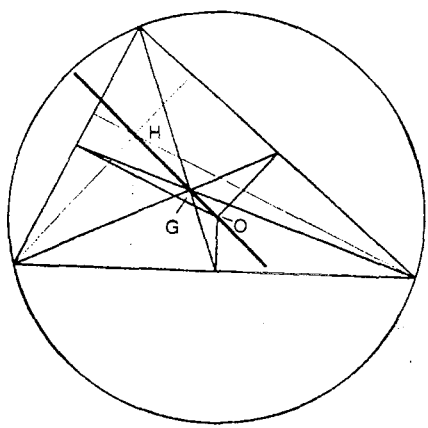
Üçüncü yıldızı dikkatle incelersek şunu görürüz: Eşkenar dörtgensel 12 yüzlü aynı zamanda her çift bir köşegensel düzlemi paylaşacak şekilde birbirini kesen 3 kare piramidin de bir parçasıdır. Üçüncü yıldızın köşeleri aynı zamanda bir kesik 8 yüzlünün de köşeleridir.

Eşkenar üçgen fayanslar Düzenli moziklerden biri de özdeş eşkenar üçgenlerden oluşandır. Bu mozaikte üçgenler şeritler oluşturduğundan, daha az düzenli üçgenlerden oluşmuş düzlemde sonsuz sayıda mozaik vardır.

Üçgenlerin büyüklüğü değişik olabilirse, daha birçok olasılık vardır. Aşağıdaki şekil, 3 farklı büyüklükte eşkenar üçgen içeren bir mozaiktir.

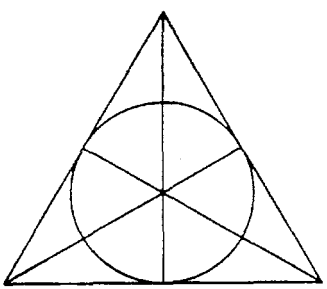


Euler çizgisi Herhangi bir üçgende çevrel çemberin merkezi O (sirkumsentr), ortosentr H (yüksekliklerin kesişme noktası) ve kenar ortayların kesişme noktası G aynı doğru üzerinde bulunur. Ayrıca GH=2OG'dir. Leonhard Euler bu ünlü teoremi 1765'te yayımladı.



F

Fano düzlemi Her sonlu projeksiyon (izdüşüm) düzlemi noktalar ve çizgiler içerir; şöyle ki her noktadan aynı sayıda çizgi geçer ve her doğru aynı sayıda nokta içerir.



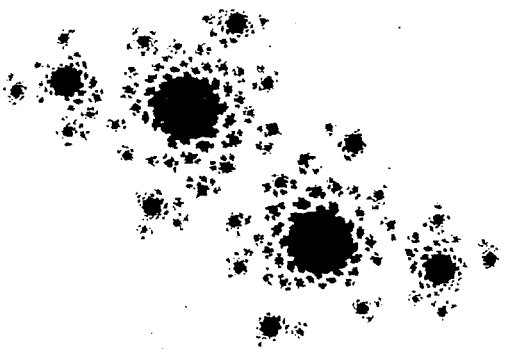
Şekil en küçük sonlu projeksiyon düzlemi olan Fano düzlemini göstermektedir. Fano düzleminde 7 nokta ve 7 çizgi vardır. Her çizginin üstünde 3 nokta vardır ve her noktadan 3 çizgi geçer; bu husus şu formülle ifade edilir: 7_3. Fano düzlemi, geometrik bakımdan düz çizgiler çizilerek, bütün sonlu projeksiyon düzlemlerinin çizilemeyeceğini gösteren bir örnektir. Fano düzleminde bütün çizgiler düz olup yalnız 7. çizgi bir dairedir.

Sonlu bir projeksiyon düzlemindeki nokta sayısı $1+p^n+p^{2n}$'dir, burada p, asal bir sayıdır. Her çizgi üzerinde $1+p^n$ nokta vardır ve her noktadan $1+p^n$ çizgi geçer. Fano düzlemi için p=2 ve n=1'dir.

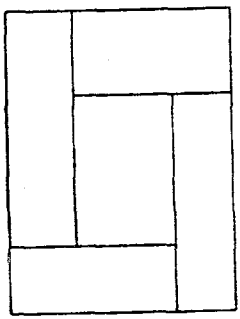
Fano düzlemi 7_3 ile ifade edilen tek çizimdir. Yine tek çizim olan 8_3 de Fano düzlemi gibidir; bunda da biri hariç bütün çizgiler doğrudur. Üç türlü 9_3, on türlü 10_3, otuz bir türlü 11_3 ve ikiyüz yirmi sekiz türlü 12_3 şekli bulunmaktadır.

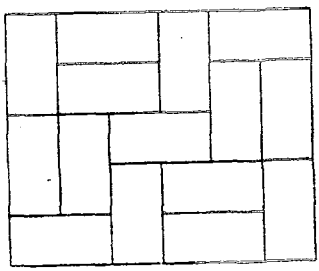
Fatou tozu Mandelbrot kümesi (veya eş değer bir başka küme) dışından seçilen bir nokta bir Julia kümesi yarattığında, Julia kümesi izole noktalar halinde parçalanır; bunlara bulanın adına izafeten Fatou tozu denir. Pierre Fatou, Gaston Julia ile beraber çalışıyordu.

Eğer nokta Mandelbrot kümesine nisbeten yakınsa, Fatou tozu yoğundur ve Mandelbrot kümesine yakın noktalarda Julia kümesine benzer. Nokta Mandelbrot kümesinden uzaklaştıkça, toz daha incelir. (Bkz. Mandelbrot kümesi; bkz. Julia kümesi)

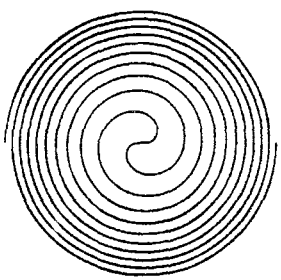


"Fault"suz dikdörtgenler Bir dikdörtgeni birçok daha küçük dikdörtgene ayıran, bir kenardan öteki kenara uzanan çizgilere "fault" denir. Fault içermeyen dikdörtgen parçalamalara "faultsuz" denmektedir. Bir dikdörtgeni 3, 4 veya 6 parçaya bölebilmek için fault şarttır; bu bölünmeler faultsuz yapılamaz. Şekilde solda bir dikdörtgenin faultsuz 5 dikdörtgene, 5x6'lık bir diktörtgenin yine faultsuz 15 adet 2x1'lik dikdörtgene ayrıldığı görülüyor.

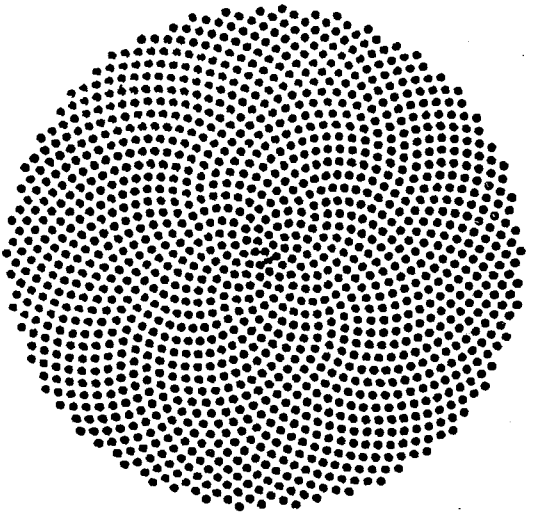




Fermat spirali veya parabolik spiral Bu spirale 1636'da onu ilk defa inceleyen Pierre de Fermat'nın adı verilmiştir. Polar denklemi $r^2=a^2\theta$'dır; bu denklem parabol denklemi olan $y^2=ax$'e yüzeysel olarak benzediği için bu spirale parabolik spiral de denilmektedir.

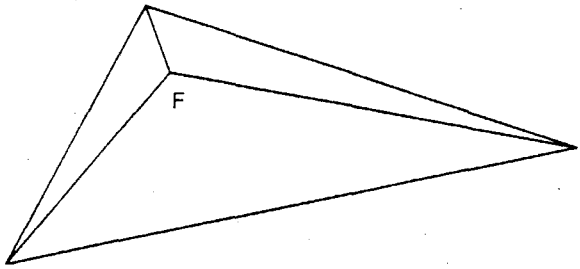


Robert Dixon, Fermat spiralinin bitki büyümesi için nasıl doğru modeller oluşturduğuna değinmiştir; örneğin papatya çiçeğinin sarı ortasındaki spiraller eşit açılı (logaritmik) spiraller olmayıp Fermat spiralleridir. Fermat spirallerinin özelliği şudur; her halka eşit alan artışlarına karşılıktır; aşağıdaki papatyada da durum budur.



Referans: R. DIXON, 'The mathematics and computer graphics of spirals in plants', Leonardo, Vol. 16, No: 2, 1983. R. Dixon, Mathographics, Basill Blackwell, Oxford 1987.

Fermat noktası Fermat, Torricelli'ye şu soruyu sormuştu: Bir üçgende öyle bir nokta bul ki bu noktanın üçgenin köşelerinden olan uzaklıklarının toplamı minimum olsun. Bu problemin pratik önemi vardır; örneğin bir üçgenin köşelerinde bulunan 3 köyü birbirine birleştirecek en kısa yol hangisidir?



Eğer üçgenin bütün açıları 120°'den küçükse aranan nokta öyle bir noktadır ki bu noktayı köşelere birleştiren doğrular arasında 120° açı vardır; bu noktaya Fermat noktası (F) denir. Eğer bir köşedeki açı en az 120° ise, Fermat noktası bu köşe ile çakışır.

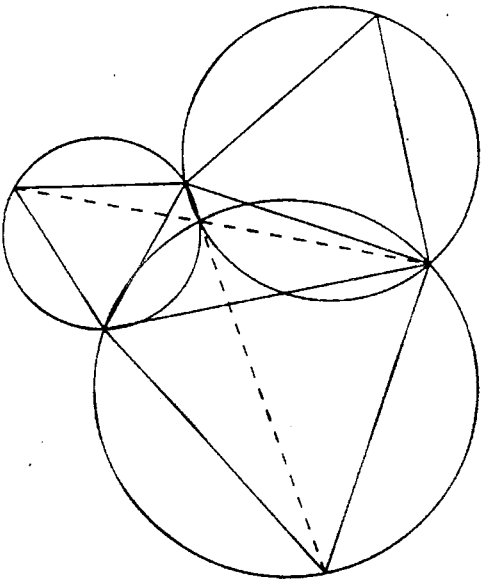
Fermat noktası deneyle bulunabilir. Bir üçgenin köşelerindeki deliklerden aşağı üçgen düzlemine dik ipler sarkıtarak iplerin alt ucuna eşit ağırlıklar bağlayın; sonra iplerin üst uçlarını bir araya getirerek düğümleyin; düğüm, ağırlıkların çekmesiyle Fermat noktasına kayacaktır.

Fermat noktasını şöyle de bulabilirsiniz. Üçgenin her kenarı üstüne bir eşkenar üçgen çizin. Sonra eşkenar üçgenlerin serbest köşelerini, ilk üçgenin karşı köşeleriyle birleştirin; bu üç doğru Fermat noktasında kesişir. Fermat noktası aynı zamanda çizdiğiniz eşkenar üçgenlerin çevrel çemberlerinin kesişme noktasıdır (şekle bkz.). Eşkenar üçgenlerin tepelerini orijinal üçgenin karşı köşelerine birleştiren doğrular (şekilde noktalı), birbirine ve üçgenin içindeki en kısa yol şebekesine (Fermat noktasından orijinal üçgenin köşelerine olan uzaklıkların toplamına) eşittir.

Napoleon teoreminin bir varyantında olduğu gibi eşkenar üçgenler dışa doğru değil de içe doğru çizilirse, eşkenar üçgenin serbest tepelerini orijinal üçgenin (ABC) karşı köşelerine birleştiren doğrular yi-

ne bir noktada kesişir: P. Bu P noktasının şöyle bir özelliği vardır: Eğer C açısı 60°'den küçükse ve hem A, hem B açısı 60°'den büyükse PA+PB-PC bu noktada minimumdur. Eğer bu şartlar yoksa, minimum A'da veya B'de sağlanır.

Eğer bir üçgenin kenarları a, b ve c uzunluğunda ve Fermat noktasının köşelerden uzaklığı x, y ve z ise, kenarı x+y+z olan bir eşkenar üçgenin içinde köşelerden uzaklıkları a, b ve c olan bir nokta vardır.

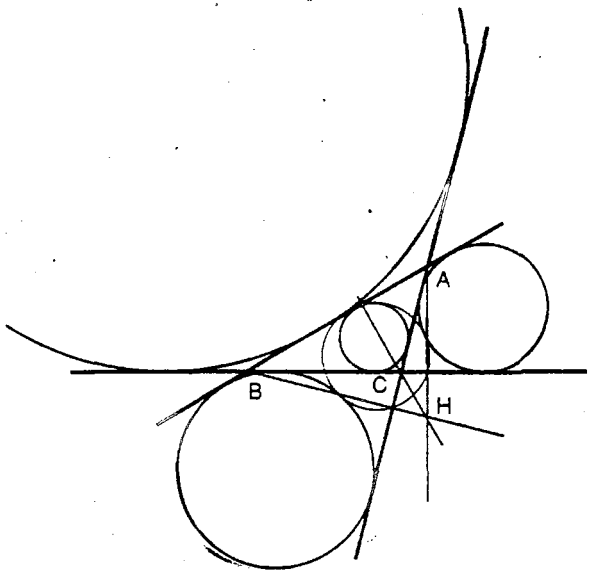


Referans: DAVID NELSON, Napoleon revisited, Mathematical Gazette, No: 404, 1974.

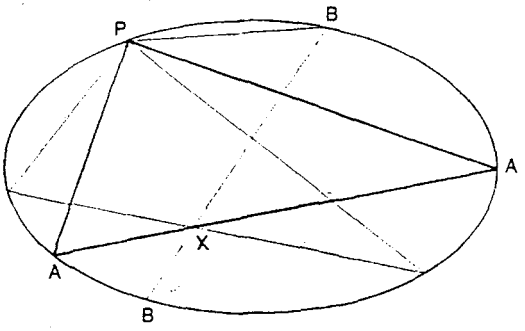
Feuerbach teoremi Feuerbach yarıçapları ve merkezler arasındaki uzaklıkları hesaplayarak şunu kanıtladı: Dokuz nokta çemberi üçgenin iç çemberine (incircle) ve 3 dış çemberinden (excircle) herbirine teğettir. Böylece dokuz nokta dairesine 4 önemli nokta daha eklenmiş olur. (Bkz. Dokuz nokta dairesi.)

ABC üçgeninin 9 nokta dairesi, aynı zamanda AHB, BHC ve CHA üçgenlerinin de 9 nokta dairesidir ve bu nedenle bu üç üçgenin herbirinin iç ve dış çemberlerine teğettir. Bu husus, var olan 13 noktaya 3x4=12 nokta daha katar; toplam 25 noktadır. Dahası da var...

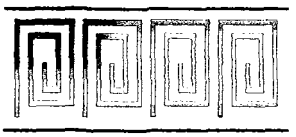
Eğer 9 nokta dairesinin diğer 4 daireye teğet olduğu noktalardan biri T ise ve A, B ve C kenarların orta noktalarıysa, TA, TB ve TC uzunluklarından biri, diğer ikisinin toplamına eşittir.

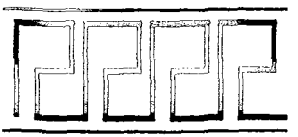


Frégier teoremi Bir konik üzerinde rastgele bir P noktası seçip bu noktayı bir dik açının köşesi yapın ve dik açıyı P etrafında döndürün. Bu durumda dik üçgenlerin hipotenüsleri (AA, BB, ...) sabit bir X noktasında kesişecektir. Bu X noktası P noktasında koniğe çizilen teğete dik bir doğru (yani normal) üzerinde bulunur.



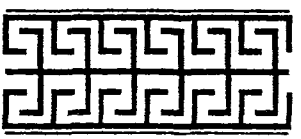
Friz örnekleri Friz sonsuza kadar *(ad infinitum)* tekrarlayan bir motiftir. Eğer frizin bütününün rotasyonel veya aynasal simetrisi varsa, onu oluşturan motiflerin de benzer simetrileri vardır.

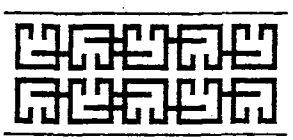


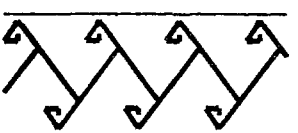


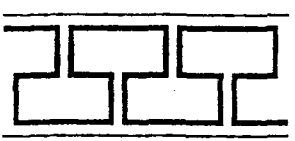
Motif hiç simetrisiz, yatay veya dikey bir doğruya veya her ikisine göre simetrik veya yarım-dönüş simetrik olabilir. Motifler bir frizde ardarda sıralandığında kayma yansımaları, yani motifin friz boyunca kayarken dönmesi, iki çeşit simetri daha oluşturur ve simetri sayısı 7'ye çıkar.





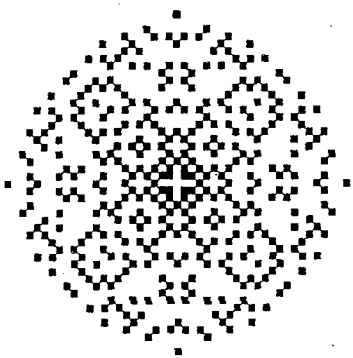






G

Gauss asal sayıları Eğer p ve q tamsayı iseler $p + iq$ ($i = \sqrt{-1}$ olmak üzere) Gauss tamsayılarıdır. Gauss tamsayıları ya asaldır (yani Gauss tamsayılarından ibaret çarpanlara ayrılamaz) veya Gauss tamsayılarından ibaret çarpanlara ayrılabilir.



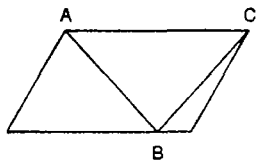
Şekilde $\sqrt{(p^2+q^2)} < 500$ şeklindeki Gauss asal sayıları Argand diyagramı üzerinde görülüyor. [Argand diyagramı: Kompleks sayıları göstermek için birbirine dik iki eksenden oluşan sistem. Eksenlerden biri üzerinde gerçek, diğeri üzerinde sanal sayılar gösterilir. Ç.N.]

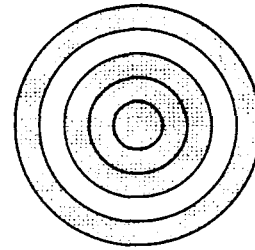
Referans: R.K. Guy, Unsolved Problems in Number Theory, Springer-Verlag, New York 1981.

Geometrik yanılsamalar Bir şekil çizdiğinizde onu daima göründüğü gibi değerlendirmemek gerekir. Geometrik olarak doğru şekiller farklı bir şey gösterebilirler ve doğru gözükenler aslında yanlış olabilir.

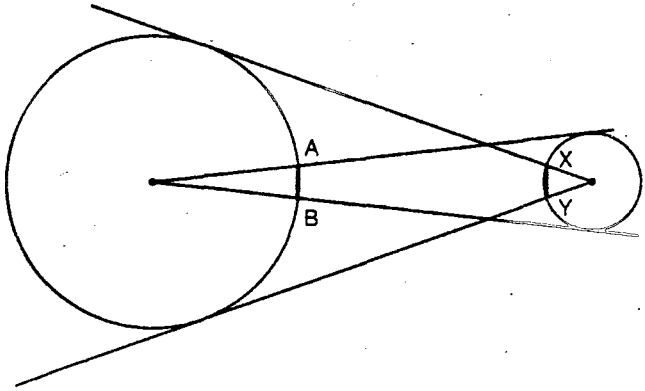
Birinci şekilde AB, BC'den daha uzun gibi gözüküyorsa da aslında her ikisi aynı uzunluktadır.

İkinci şekilde gölgeli iki alan aslında eşittir; ama merkezî disk, çevredeki halkadan daha geniş gözükür. Bunların eşit olduğu kolayca kanıtlanabilir. Daireler yarı çapları 1 birim artacak şekilde dizilmiştir. Merkezi disk alanı $\pi.3^2$ ve çevredeki halka alanı $\pi.5^2 - \pi. 4^2 = \pi 3^2$'dir.



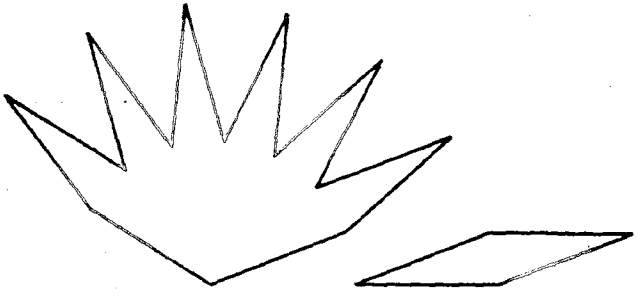


Göz küreleri teoremi İki dairenin merkezinden birbirine teğetler çizilmiş. AB ve XY çizgileri eşit uzunluktadır.

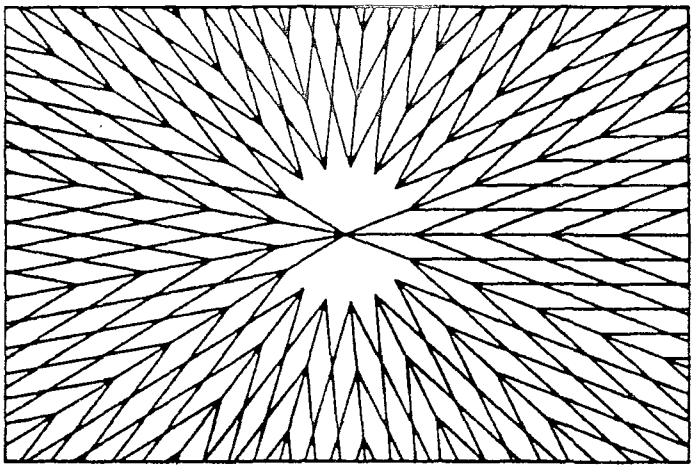


H

Harborth fayansları Harborth şu soruyu yanıtladı: "Bir düzlemi tam n şekilde döşemek için kullanılabilecek fayans kümeleri (set) var mıdır?"



Şekilde bir rombus (eşkenar dörtgen) şeklinde ve bir de 6 rombus'un yapıştırılmasından oluşmuş bir şekilde iki tip fayans var. Böylece her biri 17 rombus'tan oluşmuş içiçe yıldız şekilleri görülüyor (şekilde bir çember üzerine dizilmiş gibi duran sivri uçların - rombus köşesi- sayısı 17'dir. Ç.N.) Döşemeyi bu fayanslarla döşemek için tam 4 yöntem vardır.



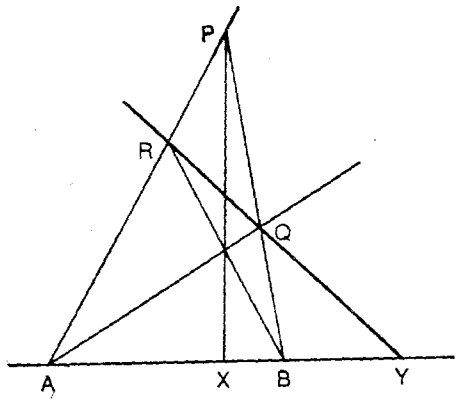
Şekilde bu yöntemlerden biri görülüyor (en ortaya bakınız: 6 rombuslu iki parça arasına 3 ve 2 rombus konulmuş; 6+6+3+2=17. Ç.N.) Diğer iki yöntemde iki karmaşık fayans yan yana konulur; aralarında 1 ve 4 rombus bulunur. Dördüncü yöntemde karmaşık fayanstan yalnız bir tane kullanılır.

Bir düzlemi, n türlü döşeyecek iki türlü fayans yapabilmek için 6n-7 rombusu bir nokta etrafında, karmaşık fayansı yapabilmek için 2n-2 rombusu bir nokta etrafında birleştirin (burada n=4 dür; yani bir düzlemi iki tip fayansla 4 türlü döşemek istiyoruz; bunun için 6n-7 = (6.4)-7=17 rombusu birleştirmeliyiz. Karmaşık fayans için 2n-2= (2.4)-2=6 rombusu birleştirmemiz gerekir Ç.N.)

Referans: H.Harborth, Prescribed numbers of tiles and tilings, Mathematical Gazette, No: 4/8, 1977.

Harmonik oran (uyumlu oran): A ve B gibi rastgele iki nokta alın; bunları birleştiren doğru üzerinde A ve B arasında bir X noktası bulunsun. A ve B'den geçen rastgele iki doğru alın; bunlar P'de kesiş-

sin. PX'i çizin. PX üzerinde kesişecek şekilde AQ ve BR'yi alın. QR, AB'yi Y'de kessin. Y'nin yeri A, B ve X'in seçilmesine bağlı olup P, Q ve R'a bağımlı değildir.



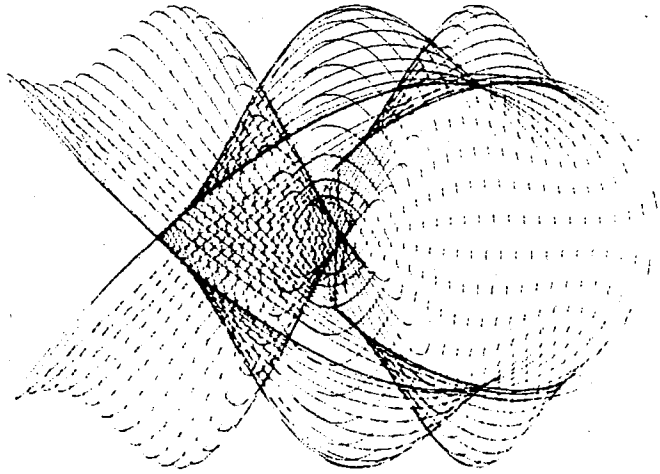
A, B, X ve Y'nin çapraz oranları şöyledir:

AY.XB / YB.AX = -1 veya AY/YB = - AX/XB .

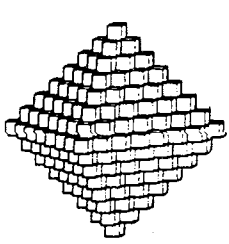
Eksi işaretinin nedeni YB'nin diğer yönlerin karşıtı olmasıdır. X ve Y'ye, A ve B'ye göre uyumlu eşlenik (harmonik konjügat) denir; bunun karşıtı da doğrudur: A ve B noktaları, X ve Y noktalarına göre harmonik konjügat'dır. (Harmonik oranın kısa tanımı: Çapraz oranı -1 olan dört doğrudaş noktanın oluşturduğu oran. Ç.N.)

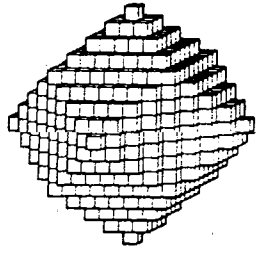
Harmonograf Bu Kraliçe Victoria dönemine ait eski eğlence, her birkaç yılda bir, bir firma tarafından canlandırılmaktadır. En basit şeklinde iki sarkaç vardır: Sarkaçlardan birine kalem, diğerine kâğıdın tutturulduğu bir tahta bağlanmıştır. İki hareketin üst üste bi-

nişi karmaşık bir hareket oluşturur, bu hareketin etkisi sürtünme nedeniyle giderek zayıflar. Bu nedenle her harekette çizilen yol, bir önceki harekette çizilen yoldan biraz uzaktır ve bütün hareketler sonunda bir noktaya indirgenir.



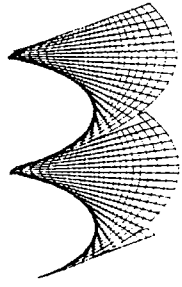
Haüy usulü polihedronlar (çokyüzlüler) Başrahip René-Just Haüy 1784'de "Birçok kristalize maddeye uygulanmış kristal yapı teorisi üzerine bir deneme" adlı yazısını yayımladı. Bu yazıda Haüy bazı kristallerin temel bir birimin düzenli tekrarıyla oluştuğu varsayımını ileri sürüyordu. Şekilde Haüy'un küçük küp biçimi yapı taşlarından nasıl dahiyane bir şekilde oktahedron (8 yüzlü) ve dodekahedron (12 yüzlü) yaptığı görülüyor.

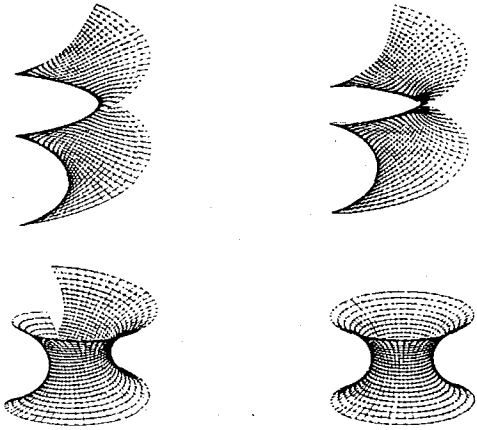




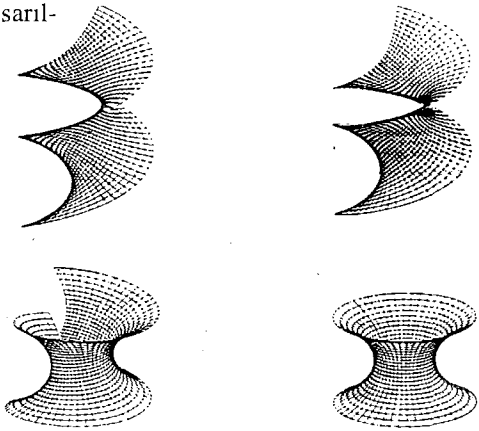
Euclid Elemanlar kitabının XIII. cildinde, düzenli bir dodekahedron (12 yüzlü) yapmak için küple pentagonal dodekahedron (beşgensel 12 yüzlü) arasında aynı ilişkiyi kullanmıştı.

Helikoid Bir doğru bir eksen etrafında ona dik olarak vida hareketleri yaparsa, bir helikoid oluşturur.



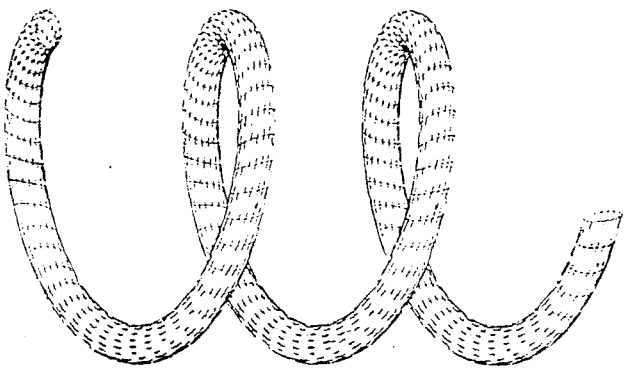


Bu minimal bir yüzeydir. Helikoid ile katenoid arasında (Bkz. katenoid) olağanüstü bir ilişki vardır. Helikoid, bir kâğıdın bir silindir etrafına sarılması gibi, katenoid etrafına sarılır. Helikoid'in ekseni, katenoid'in en küçük enine kesitinin dairesi etrafına sarılır. İkinci şekil helikoid'in bir parçasının nasıl katenoid etrafına sarıldığını gösteriyor.



Heliks (helezon, helis) Öyle bir daire düşünün ki merkezi, daire düzlemine dik bir doğru üzerinde durmadan hareket etsin. Bu daire etrafında durmadan dönen noktanın yolu bir heliks'dir. Bir diğer deyişle, heliks belli bir yönde vida hareketidir.

Rotasyonun yönüne göre heliks sola veya sağa dönük olabilir. Şekilde ekseni heliks çizen uzun bir silindir görülüyor.

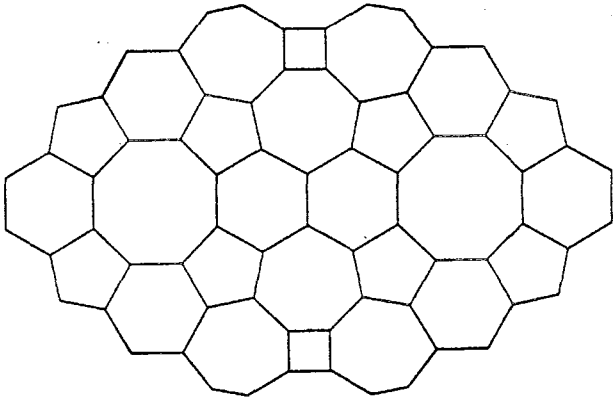


Heliks, dairesel bir silindirin yanal yüzeyine sarılarak yükselen bir eğri olarak da düşünülebilir; bu durumda heliks, silindirin üreteçlerini (silindirin yanal yüzeyi üzerinde, silindir eksenine paralel doğrular; jeneratör) her zaman aynı kalan (sabit) bir açıyla keser.

Heliks'lere günlük hayatta sık rastlanır; çünkü heliksin yararlı bir özelliği vardır: Döndürülerek ve ekseni boyunca ileri geri hareket ettirilerek kendine dönüştürülebilir. Böylece cıvata dişleri, silindirik vidalar, sonsuz dişliler ve dar bir alanda yukarı çıkma olanağı sağlayan helezon biçimi merdivenler heliks şeklindedir. Bu şekillerin eğri kenarları heliks ve eğri yüzeyleri helikoid veya silindir parçası şeklindedir. [Heliks ile spirali karıştırmamak gerekir; ikisi benzer, fakat tamamen farklı geometrik şekillerdir; spirali bir silindir etrafına saramaz-

sınız. Silindirik heliksin parametrik denklemleri şunlardır: x = a cos t, y = a sin t, z = ht. a= silindirin yarıçapı, t= eğrinin y uzunluğuyla orantılı açı, h= sabit. Heliksin, silindir üreteçine parelel bir düzlem üzerinde izdüşümü bir sinüzoiddir. Konikal bir heliksin, eksene dik bir düzlem üzerindeki izdüşümü logaritmik spiraldir. Ç.N.]

Hemen hemen düzgün çokgenlerden mozaik Düzgün dörtgen, beşgen, altıgen, yedigen ve sekizgenleri karıştırarak bir mozaik yapmak imkansızdır. Aşağıdaki şekil bir İslâm deseninden alınmıştır ve bunun tam olarak olmasa da, *hemen hemen* mümkün olduğunu göstermektedir. Böyle bir mozaik yapabilmek için düzgün çokgenlerin açılarında hafif değişiklikler yapmak gerekir; bu nedenle burada görülen beşgen ve yedigenler tam düzenli değildir.



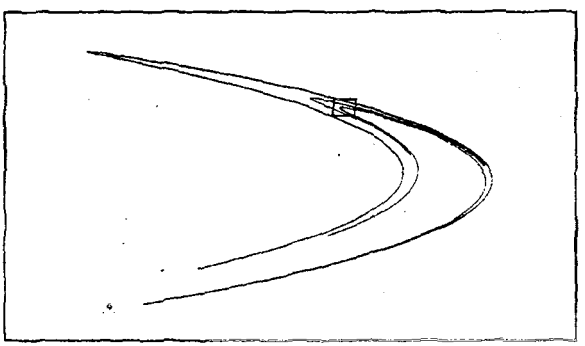
Hénon atraktörü İlk defa Fransız matematikçisi Michel Hénon tarafından, HP-65 tipi programlanabilir bir hesap makinesi kullanılarak bulunmuştur. Bu ünlü haritalama yöntemi, Güneş'in etrafında yörünge çizen asteroid'ler gibi, hiç enerji kaybetmeyen bir çok dinamik sistemin davranışını temsil eder.

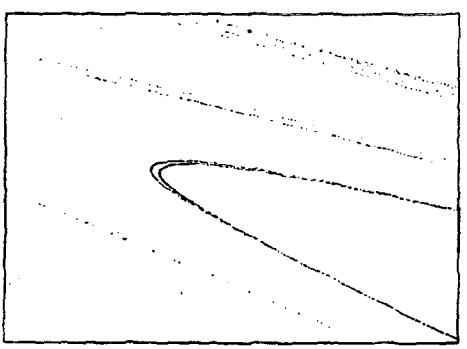
Şöyle bir dönüşümle (transformasyon) tanımlanır:

$x \rightarrow y+1-ax^2$, $y \rightarrow bx$

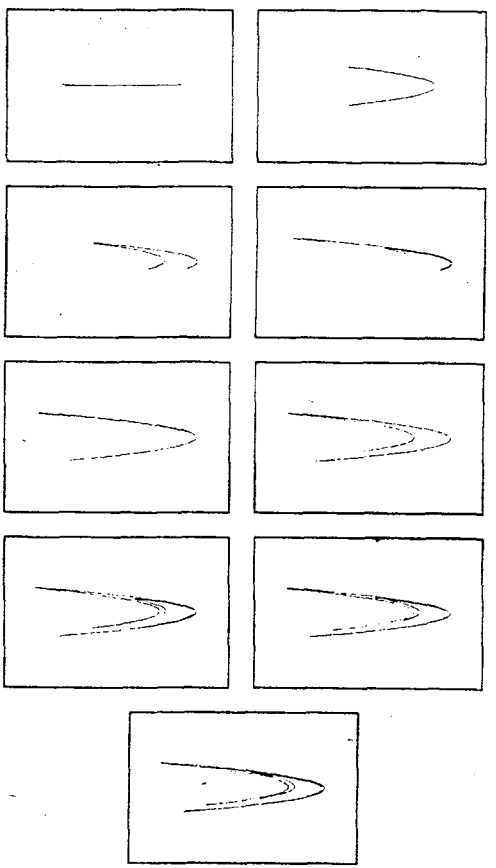
Başlangıç noktasının (x, y) orijinden çok uzak olmaması koşuluyla, yukarıdaki dönüşümün birkaç kere uygulanmasından sonra, nokta bu atraktör içine girecektir. Her tekrarla nokta bir eğriden ötekine veya aynı eğrinin bir başka bölgesine *kaotik* (önceden belirlenemeyen) bir tarzda atlar.

İkinci şekilde olduğu gibi harita bilgisayar ekranında büyütülürse, her eğrinin daha ince çizgilerden, bu ince çizgilerin de daha ince çizgilerden oluştuğu görülür.

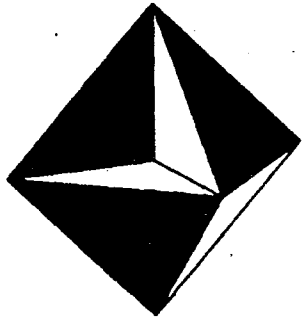




Bu harita Hénon atraktörünün Hénon'un orijinal değerleri olan a=1,4 ve b=0.3 ile çizilmiş şeklidir. En solda ve üstte gösterilen düz çizginin bütün noktaları Hénon yöntemiyle dönüştürülürse, çizgi gerilerek ve katlanarak, bir sıvı diğeriyle karışır gibi, Hénon atraktörüne çok benzer bir şekil alır.



Heptahedron (7 yüzlü) Bu 4 üçgen ve 3 dörtgenden yapılmış *tek taraflı* bir yüzeydir; topolojik olarak Steiner'in Roma yüzeyine eşdeğerdir; yani sürekli deforme edilerek Roma yüzeyi haline getirilebilir; böyle çok daha kolay oluşturulur.

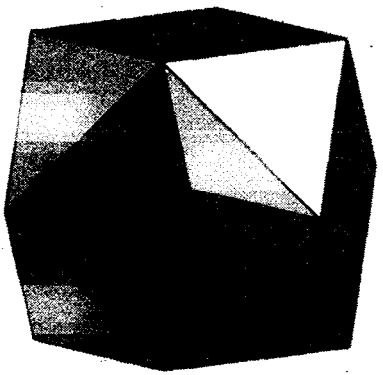


Düzgün bir model için, düzgün bir oktahedron (8 yüzlü) ile işe başlayın ve her iki yüzden birini çıkartın. Kalan 4 üçgen yalnız köşelerinden temas eder. Şimdi orijinal 8 yüzlünün merkezinden ve kenarlarından geçen kesitlerle oluşan üç kareyi ilave edin. Oluşan polihedron (çokyüzlü), sınırı olmayan, kapalı bir yüzeydir; bu yüzey tek taraflıdır (bir düzlemin normalde iki yüzü vardır; fakat topoloji'de Möbius bandı, Klein şişesi vb. gibi tek yüzlü yüzeyler vardır. Bir kâğıt şeritin iki ucunu, uçlardan birini 180° burarak yapıştırın; bir Möbius bandı elde edersiniz. Normal bir bant üzerinde yürüyen bir böcek asla kâğıdın bir yüzeyinden diğer yüzeyine geçemez; bunu yapması için kenar aşması lâzımdır; oysa Möbius bandında yürüyen bir böcek, bandın kenarını aşmadan diğer tarafa geçer; çünkü tek yüzey ve tek kenar vardır.

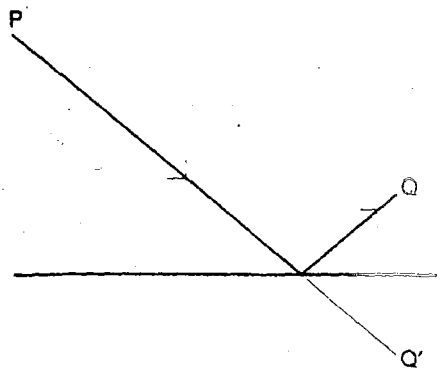
Möbius bandı için bkz. Düşünme Kulesi, Doç.Dr. Selçuk Alsan, Sarmal Yayınları, 2. baskı, 1996, sayfa 42. Ç.N.)

Düzgün heptahedron yarıdüzgün (Arşimet tipi) bir polihedron (çokyüzlü) olarak sınıflandırılabilir, çünkü bütün yüzleri düzgün ve bütün köşeleri özdeştir. Fakat standart Arşimed tipi katılardan farklı olarak dışbükey (konveks) değildir, çünkü kendi kendini üç kürenin çaprazladığı çizgiler boyunca keser; hatta merkezde bir üçlü noktası vardır.

Aynı şekilde bir çok diğer Arşimed polihedron'u oluşturulabilir. Bu modelin kare ve merkezden geçen altıgen biçimi yüzleri vardır; bu bir kübo-oktahedron'dur (küp-sekizyüzlü).

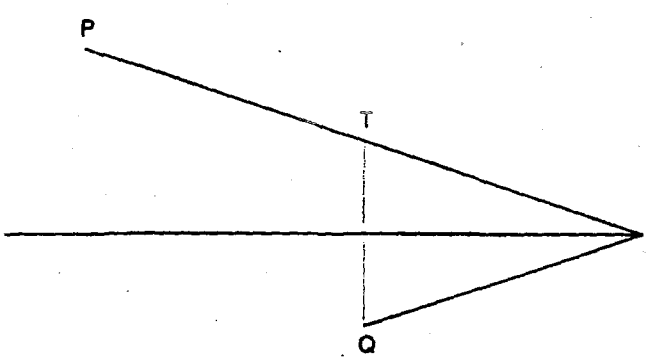


Heron problemi İskenderiyeli Heron, *Catoptrica* adlı kitabında ışığın en kısa yoldan gittiğini (mesafe olarak) ve ışığın yansıma yüzeyine geliş ve yansıma açılarının eşit olduğunu düşünmüştü.

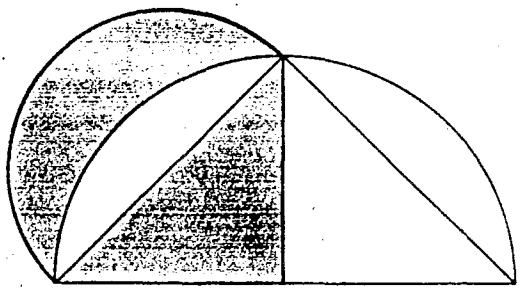


Bu problemi bugün de kullanılan bir yöntemle ispatladı. Aynada Q noktasının aynaya göre simetriği olan Q´ noktasını alınız. En kısa yol olan PQ, en kısa mesafe olan PQ´ doğru parçasına eşittir. Q ve Q´ simetrik olduğundan ışının geliş ve yansıyış açıları eşittir.

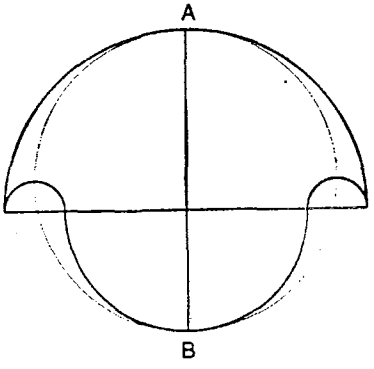
Işının yansıması prensibi şu problemin çözümünde de kullanılır: P ve Q, bir doğrunun karşıt taraflarındayken öyle bir T noktası bulunuz ki PT-TQ maksimum olsun. Doğruya göre Q noktasının simetriği olarak T alınır ve PT çizilir.



Hilâller Aristo, Chios'lu Hippocrates'in (hekim olan değil) mükemmel bir geometrici, fakat her günkü hayatta bir aptal olduğunu yazar. Hippocrates, teoremleri mantığa uygun bir sıraya koyan ilk matematikçiydi; Euclid, Elemanlar kitabında onun yaptığını yapmıştır.

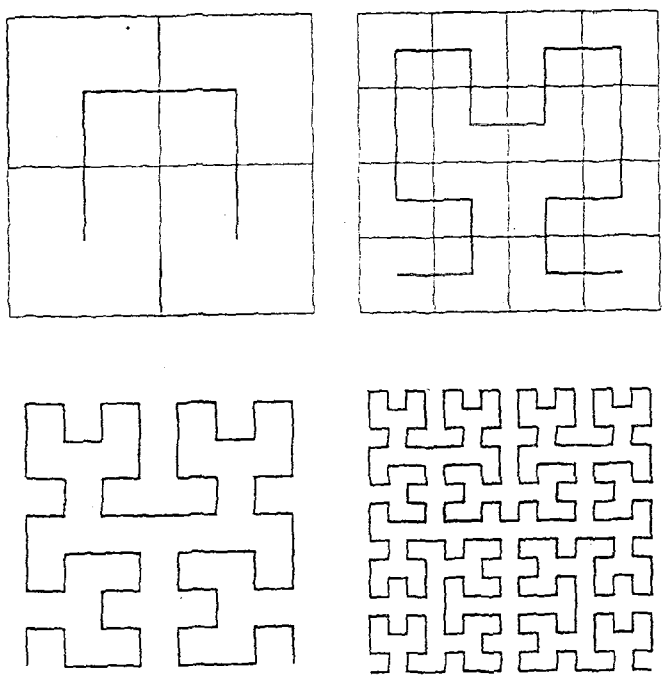


Hippocrates yukarıdaki şekli çizdi; bir yarım daire içine bir yarım kare yerleştirilmiş. Yarım karenin bir kenarına bir diğer yarım daire çizilmiş; Hippocrates taralı hilâlle taralı üçgenin alanlarının eşit olduğunu kanıtladı. (Eğri sınırı olan bir bölgeyle düz çizgilerle oluşmuş bir bölgenin eşitliğinin kanıtlanması, daireyi kareleştirme probleminin çözülebileceğini düşündürdü).

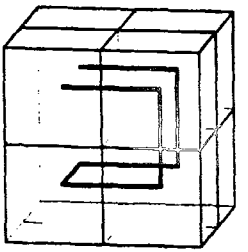


Arşimed, Önsavlar Kitabı (Book of Lemmas) adlı yapıtında bu şeklin yarım dairelerden oluştuğunu kanıtladı; bu şekle *salinon* (tuz mahzeni) adını verdi; şeklin alanı AB çaplı dairenin alanına eşittir.

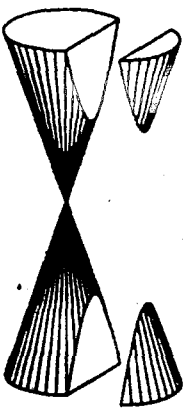
Hilbert'in boşluk doldurucu eğrisi Şekiller Hilbert eğrisinin ilk dört yaklaşık şeklini gösteriyor. İlk ikisi, eğrinin yolunu çizmek için kullanılan karelerin şeklini göstermektedir. Her safhada bir kare dörde bölünmekte ve eğri, karelerin merkezinden geçirilmektedir. Böylece her yeni safhada söz konusu eğri daha küçük ölçekte tekrarlanır. Limit durum Hilbert eğrisidir; karenin her noktasından geçen bir eğri.



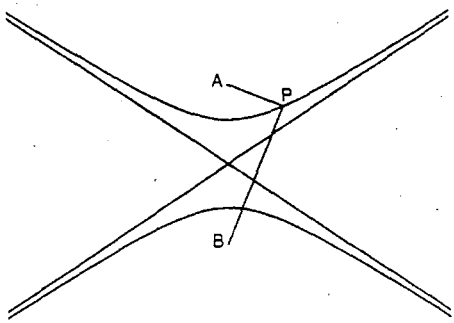
Daha karmaşık bir şekilde, bir küpün her noktasından geçen bir eğri yaratılabilir. İlk safha şudur:



Hiperbol Hiperbol bir çift koninin her iki yarımının bir düzlemle kesişmesinden oluşur.



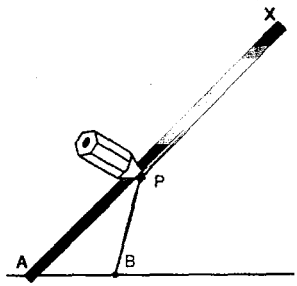
Hiperbolün iki gerçek asemptotu vardır; bunlar birbirini kesen iki doğrudur; hiperbol bu doğrulara giderek yaklaşır; onlara ancak sonsuzda değer. (Elipsin iki sanal asemptotu vardır.)



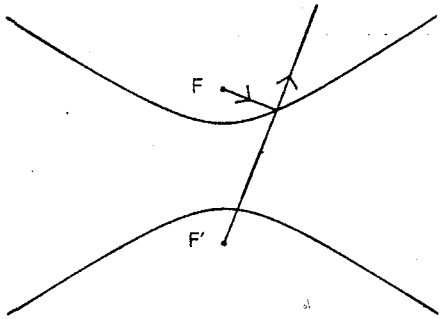
Elips gibi hiperbolün de iki odağı vardır. Hiperbolün üstündeki herhangi bir P noktası için |PA-PB| sabittir. (A ve B odak noktaları).

Elips ve parabol gibi, hiperbol de odak-doğrultman özelliğiyle tanımlanabilir. Bir noktayı odak, bir doğruyu da doğrultman olarak seçin. Hiperbolün iki kolundan herbiri, odaktan uzaklığı doğrultmana uzaklığından daha büyük olan bir noktanın gittiği yol olarak düşünülebilir. [Bu orana dışözeklik -eccentricity- denir; hiperbolde dışözeklik > 1'dir; parabolde = 1 ve elipsde < 1'dir. Ç.N.]

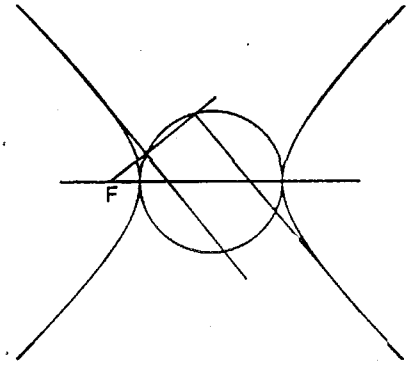
Bir hiperbol elipsinkine benzer, fakat daha karmaşık bir yöntemle çizilebilir. AX, A etrafında dönen bir çubuk olsun. A bir odak noktasıdır. Bir ipin bir ucunu çubuğun ucuna, diğerini B odağına bağlayıp; sonra ipi bir kalemle (P) çubuğa yaslayıp gerin. Çubuk A etrafında döndükçe P hiperbolün bir kolunu çizer.



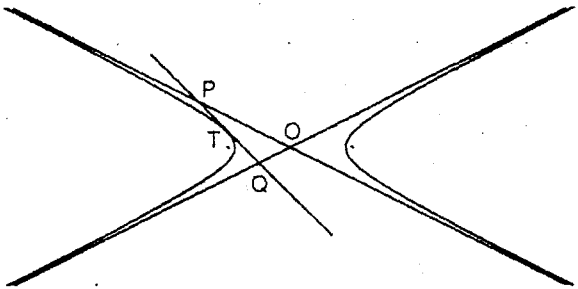
Hiperbolik bir aynaya bir odağından geçerek gelen bir ışın, öteki odağından geliyormuş gibi yansır.



Hiperbol bir zarf olarak da çizilebilir. İşte bir metod: Bir daire çizin ve daire dışında bir F noktasını odak olarak seçin. F'den geçen çap, hiperbolün ekseni olacaktır. F'den daireyi iki noktada kesecek herhangi bir doğru geçirin ve kesişme noktalarından bu doğruya iki dik çizin. Çizdiğiniz dikler hiperbolün teğetleridir; bir dik bir kolun, öteki dik de diğer kolun teğetidir. F'den çıkan farklı doğrular alınarak hiperbolün şekli belirlenir.



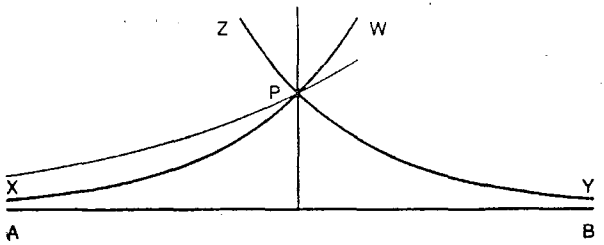
Hiperbolün sayısız diğer özellikleri vardır. Örneğin Apollonius'un gösterdiği gibi, hiperbole T'de çizilen teğet, asemptot'ları P ve Q'de keserse ve asemptotların kesişme noktası O ise, OP.OQ sabittir ve PT=TQ'dur.



Hiperbolik geometri Euclid Elemanlar kitabında şöyle yazıyordu:

> İki doğruyu kesen bir doğru, aynı tarafta iki dik açıdan daha küçük iç açılar yaparsa, bu iki doğru uzatıldığında iki dik açıdan daha küçük açıların bulunduğu tarafta birbirini keser.

Bu Euclid'in ünlü Beşinci Postülasıdır; fakat ne kendisi, ne ondan sonra gelenler bunu ispat edebilmiştir. Bolyai ve Lobaçevski birbirlerinden bağımsız olarak şöyle düşündüler: Bu postülat ispat edilemezdi, o halde onu reddetmek mümkündü. Bu iki matematikçinin herbirinin düşüncesi şuydu: *Limit ışınlar* diye adlandıracağımız WPX ve ZPY çizgileri bir P noktasından geçsin ve AB ile kesişmesin; buna karşı tabii ki XPY açısı içinde P'den geçen bütün doğrular AB'yi keser.



Buna karşı XPZ açısı içinde P'den geçen çizgilerin hiçbiri AB'yi kesmeyecektir. Onlar bu sonuncu çizgilerin AB'ye paralel olduğunu kabul ettiler; böylece P noktasından AB'ye sonsuz sayıda paralel çizgi çizilebilirdi.

Klein bu geometriye 1871'de "hiperbolik geometri" adını verdi. Hiperbolik geometride bir üçgenin iç açıları toplamı iki dik açının toplamından (180°'den) küçüktür. Üçgen küçükse iç açıları toplamı hemen hemen 180°'dir.

Bir üçgen açılarıyla tanımlanır; hiperbolik geometride benzer üçgenler yoktur; çünkü bu geometride açıları aynı olan iki üçgen eşleşikdir (kongrüent veya çakışabilir.) Bir üçgenin alanı K ($\pi - \alpha + \beta + \Upsilon$)dır; burada K bir değişmez, α, β veΥ ise üçgenin açılarıdır. ($\pi - \alpha + \beta$)'ya "üçgenin defekt'i" denir. Çokgenlerin de kendi defektleri vardır; iki çokgen ancak defektleri aynıysa karşılıklı olarak parçalanabilir (disseke edilebilir).

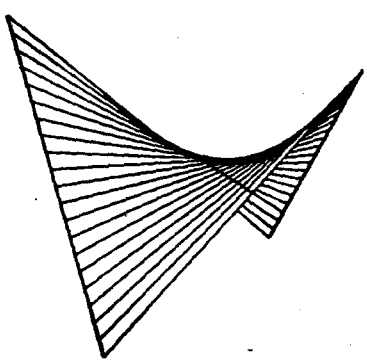
Bir üçgenin üç açısı da sıfır olabilir; bu durumda bütün kenarları sonsuz uzunlukta limit ışınlarıdır ve defekti maksimumdur; 180°. Buna karşı alanı sonlu bir sayıdır. [Coxeter'in anlattığına göre Lewis Carroll (Alice Harikalar Diyarında kitabını yazan matematikçi. Ç.N.) bu sonuçları kabul edememiş ve Euclid'e uymayan (non-Euclidean) geometriyi saçma bulmuştur].

Bir dairenin çevresi yarıçapıyla orantılı değildir, yarıçaptan çok daha hızlı büyür, kabaca üstel olarak diyebiliriz. Fakat yarıçap küçük-

se yarıçapla orantılıdır.

Limit durumda, hiperbolik geometri sabiti sonsuza gider ve hiperbolik uzay düzleşir ve Euclid'e uyar. Bu nedenle denilebilir ki Euclid geometrisi, hiperbolik geometrinin özel bir şeklidir. Lobaçevski bunu anlamış ve yeni geometriye "pangeometri" adını vermişti (pan = bütün).

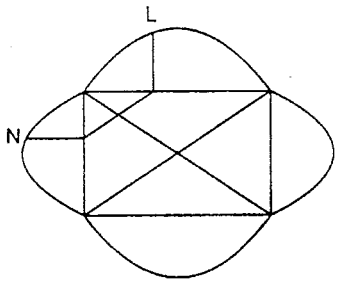
Hiperbolik paraboloid Bu 4. dereceden (x^4 içeren) eğer biçimi yüzeyin birbirine dik iki doğrultudaki kesit yüzeyleri parabol ve bu doğrultulara dik üçüncü doğrultudaki kesit yüzeyi hiperboldür. Bütün bu hiperbollerin asemptotları, bütün parabollerin ortak ekseninden geçen iki düzlem oluşturur. Bu şeklin yüzeyi hiperbolün ekseni etrafında dönmesiyle oluşan hiperboloidler gibi, iki düz çizgi kümesi içerir; bunlara onun üreteçleri (jeneratör) denir.



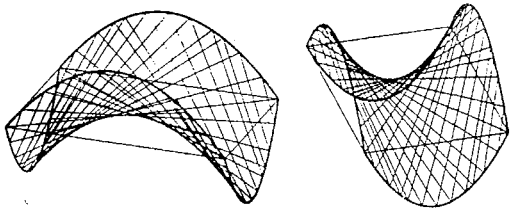
Üç boyutlu uzayda çarpık (köşeleri aynı düzlemde olmayan Ç.N.) bir dörtgen, model olarak kullanılabilir. Bu dörtgenin karşılıklı kenarlarının ortalarını birleştiren iki doğru kesişir. Eğer kenarlar dörde bölünürse, birbirine karşılık olan dörtte bir noktalarını birleştiren doğru çiftleri hem birbirleriyle, hem de kenarların ortalarını birleştiren doğ-

rularla kesişir. Bu operasyona devam ederek, hiperbolik paraboloid yüzeyi oluşturulabilir; her doğru bir üreteçtir. (Üreteç: sürekli dönerek bir yüzeyi oluşturan doğru. Ç.N.)

Şekilde çarpık dörtgen, bir küme üreteçle ve ikinci küme üreteçlerinin bir doğrusuyla (eğer noktasında olanla) birlikte görülüyor. [Eğer noktası: Bir yüzey üzerinde, bir düzlem kesitte maksimum, bir diğer düzlem kesitte minimum olan nokta. Ç.N.]



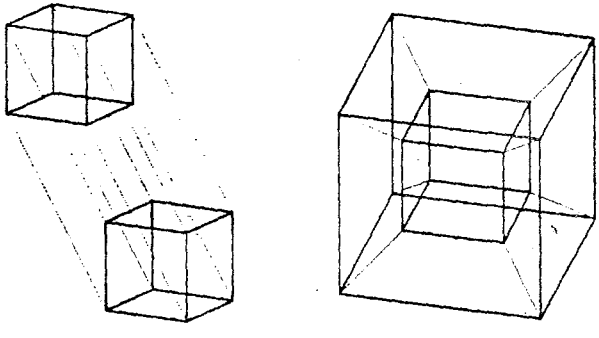
Bir model yaratmanın bir diğer yolu McCrea tarafından tarif edildi. (yukarıdaki şekle bakınız) Önce bir dikdörtgen ve sonra bunun her kenarına eşit yükseklikte paraboller çizin. Bir köşegeni istediğiniz kadar eşit parçaya bölün ve böylece parabollerin L ve N gibi ayrılma (division) noktalarını bulun. Karşılıklı iki kenarı (parabolü) yukarı, iki kenarı (parabolü) de aşağı bükün ve ikinci şekilde görüldüğü gibi noktaları birleştirin. Bu model parabollerin rolünü daha açık göstermektedir. İki doğru kümesi daha önce olduğu gibi üreteçlerdir.



Matematik bakımından önemli, fakat pratik olmayan üçüncü bir yaklaşım vardır: Üç çarpık doğru alın [çarpık doğrular (skew lines) uzayda birbirini kesmeyen ve birbirine paralel olmayan doğrulardır. Ç.N.] Üçü de aynı düzleme paralel olsun. Bu doğrulardan biri üzerinde herhangi bir noktadan geçmek üzere diğer iki doğruyu kesen tek bir doğru vardır; bu tek doğruya k dersek, bütün k'lardan oluşan küme, hiperbolik paraboloidin üreteç kümelerinden biri olacaktır. Bu kümenin bütün doğrularını çaprazlayan doğrular kümesi, ki üç orijinal doğruyu da içerecektir, ikinci üreteçler kümesidir.

Referans: W.H. McCrea. Analytic Geometry of Three Dimensions. Oliver and Boyd, Edinburgh, 1947.

hiperküp (aşırı küp) veya tesserakt Hiperküp, üç boyutlu küpün dört boyutlu analogudur. Üç boyutlu küp nasıl karenin duplikasyonu, duplikatların ayrılıp tekabül eden kenarların birleştirilmesi yoluyla elde edilebiliyorsa, hiperküp de duplike üç boyutlu küpleri ayırarak elde edilir.

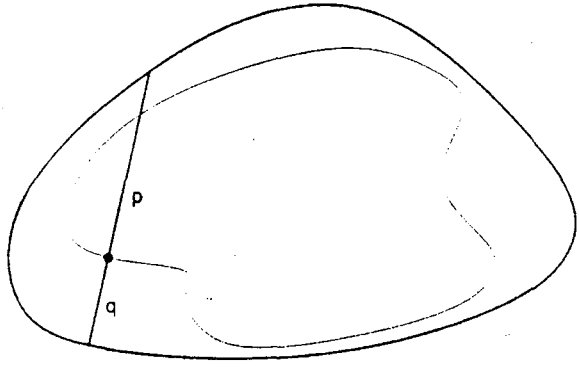


Solda iki eşleşik (kongrüent, çakışabilir) küp projeksiyon halinde, tekabül eden kenarlar birleştirilmiş olarak görülmektedir. Sağda

bir küp diğerinin içindedir; dış kübün her yüzü, iç kübün buna karşılık olan yüzü ve bunları birleştiren dört çizgi, hiperküpün kübik yüzlerinden birini oluşturur. İki orijinal kübü de sayarsak bu 8 kübik yüz veya *hücre* demektir. Hiperküpün 24 düzlem yüzü, 32 kenarı ve 16 köşesi vardır.

Hiperküpün sekiz ana köşegeni vardır, bunlar karşıt köşeleri birleştirir. Bunlar herbiri 4 elemanlı iki kümeye ayrılır; her kümenin köşegenleri karşılıklı diktir. Hiperküpün duali 16 hücredir.

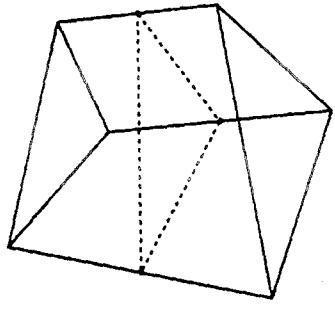
Holditch teoremi Kapalı, girinti çıkıntısız, konveks (dışbükey) bir eğri alın ve sabit uzunlukta bir kirişi onun çevresi üzerinde kaydırın. Kiriş üzerinde, kirişi p ve q gibi iki uzunluğa ayıran bir nokta seçin. Kiriş hareket ettikçe bu nokta yeni bir eğri çizecektir. Bu durumda, bazı basit şartların yerine getirilmesi koşuluyla, iki eğri arasındaki alan πpq olacaktır. (Ne kadar zarif, ne kadar inanılmaz bir sonuç! Ç.N.)



Referans: William Bender, Holditch Curve Tracer, Mathematics Magazine, March 1981.

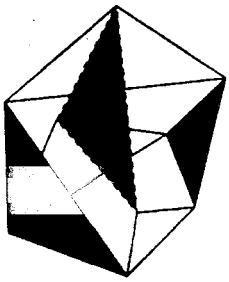
İ

İki çokgenin ortalaması İki benzer (üç açısı da eşit) üçgen çizin; herhangi bir durumda olabilirler; yalnız oriyantasyonları benzer olmalıdır. (Üçgenlerden biri ters dönmemelidir.)



Bu iki üçgenin ortalamasını elde etmek için, birbirine karşılık olan köşeler birleştirilerek birleştirici doğru parçalarının orta noktaları alınır; oluşan yeni üçgen, ilk ikisi ile benzerdir. Çokgenler için de aynı kurallar geçerlidir. Ayrıca hemen belirtelim ki köşeleri birleştiren doğruların orta noktasını almak yerine, hepsini aynı oranda (örneğin 1/3 oranında) bölen noktalar da alınabilir; sonuç değişmez.

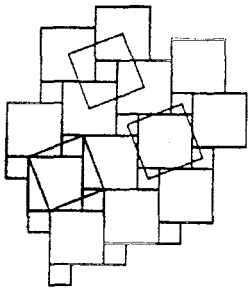
Aşağıda bu teoremin özel bir durumunu görüyoruz:



Aynı oriyantasyonda iki benzer üçgen alalım (en üst ve en alt beyaz üçgenler). Bunların birbirine karşılık olan köşelerini birleştiren doğrular üzerinde, hepsi birbirine benzer, üç üçgen daha çizelim (siyah üçgenler). Siyah üçgenlerin serbest köşelerini birleştirmekle elde edilen üçgen, ilk iki üçgene benzerdir. Genelleştirilmiş Napolyon şekli bu teoremin özel bir halidir.

Şimdiye kadar defalarca ileri sürülmüş bir diğer özel durum şudur. ABCD ve XYZD karelerinin D köşeleri ortaksa, AX ve CZ'yi birleştiren çizgilerin orta noktalarıyla karelerin merkezleri bir diğer kare oluşturur.

İki kareli mozaik Bu basit mozaiği yapmak için farklı büyüklükte herhangi iki kare kullanılabilir. Bu mozaikte her sıra ve sütunda büyük kareler, aynı miktar kaydırılarak, özdeş küçük kare delikler bırakmış gibidir.

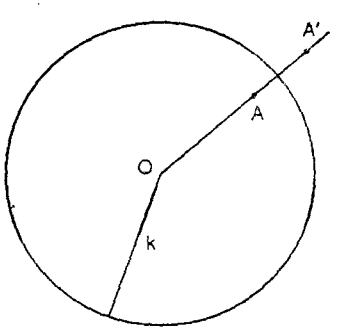


Yunan haçı mozaiğinde olduğu gibi, karşılıklı noktalardan uygun seçilmiş herhangi dördünü birleştirerek iki orijinal kare, daha büyük bir kareye disseke edilebilir. İki kareyi bir kare haline getirmede rol oynayan başlıca disseksiyonlarda en belirgin seçimler şunlardır: karşılıklı noktalar, örneğin büyük veya küçük karelerin merkezleri veya karelerin köşeleri.

Bütün bu disseksiyonlar Pisagor teoremini mükemmelen kanıtlar.

İnversiyon (evirtim) İnversiyon, düzlem üzerinde bulunan iki boyutlu bir şekli, "inversiyon dairesi" denilen özel bir daire yardımıyla yine iki boyutlu bir şekle dönüştürmektir. İnversiyon dairesinin merkezine "inversiyon merkezi" denir. (Üç boyutlu cisimler de bir inversiyon küresi kullanılarak yine üç boyutlu bir cisme transforme edilebilir.)

İnversiyon dairesinin yarıçapı k ise, A noktasının evirtiği, OA üzerinde öyle bir A' noktasıdır ki OA. OA'=k^2 olur.



İnversiyon dairesinin kendisi, bu daireye dik olan daireler ve inversiyon dairesinin merkezinden geçen doğrular, inversiyon işlemi sırasında kendilerini verirler, yani invariantdırlar (değişmez). Ayrıca açılar aynı kalır ve inversiyon dairesinin merkezinden geçmeyen doğrular ve daireler, daire haline evirtilir.

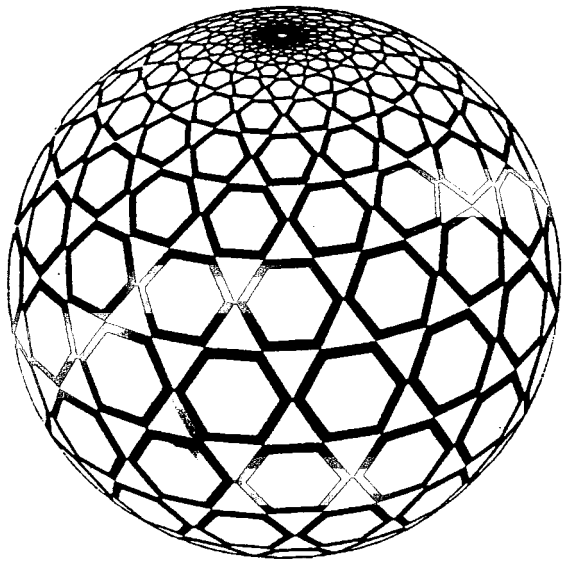
Bu transformasyon işlemi, bir teoremi çözümü daha kolay veya bi-

linen bir teoreme dönüştürerek ispatlamak için kullanılabilir. Örneğin Steiner'in "daireler zinciri" problemi, inversiyonla çözülebilir; inversiyon sonucu daireler zinciri içiçe (konsantrik) iki daire haline gelir ve sonuç açıkça belli olur. (Bkz. Steiner daireler zinciri.)

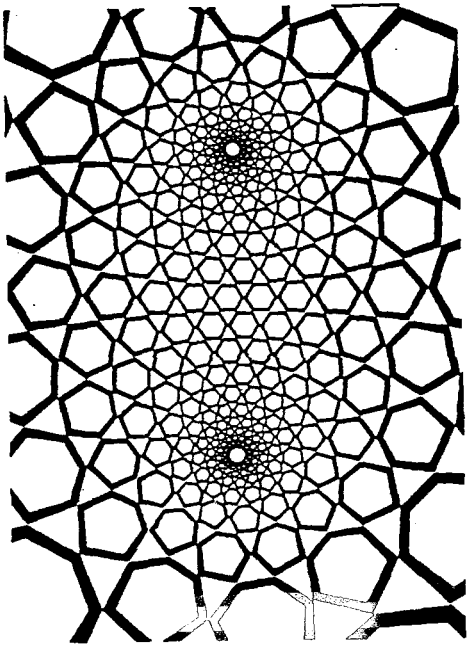
Soddy'nin heksleti de evirtilebilir. (Bkz. Soddy heksleti). Steiner inversiyonu biliyordu; fakat bu sırrını açıklamadı ve meslektaşlarını, görünüşte çok zor ve şaşırtıcı, bir seri teoremi ispatlayarak şaşırttı!

Peaucellier'in hücresi bir eğriyi evirtmek için kullanılabilir. (Bkz. Peaucellier hücresi). İyi bilinen eğrilerin bir çoğu birbirinin evirtiğidir. Örneğin parabol, odak noktası inversiyon merkezi olarak alınıp evirtilirse kardioid (kalp biçimi eğri) olur. Parabol, tepesi inversiyon merkezi olarak alınıp evirtilirse Diocles'in sissoid eğrisi (sarmaşık eğrisi) elde edilir.

Bundan sonraki iki şekil küresel inversiyonla ilgilidir. Aşağıdaki küre üzerindeki altıgen ve üçgenler Kuzey ve Güney kutuplarına yaklaştıkça sıklaşır ve küçülür.

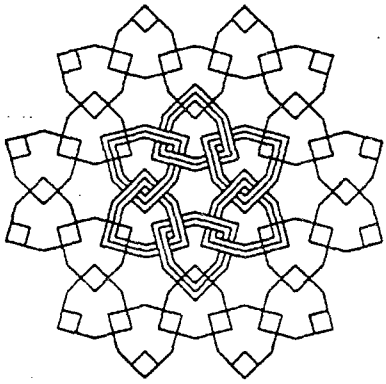


Aşağıdaki şekil küre üzerinde küresel mozaiğin evirtilmesi sonucu oluşmuştur.

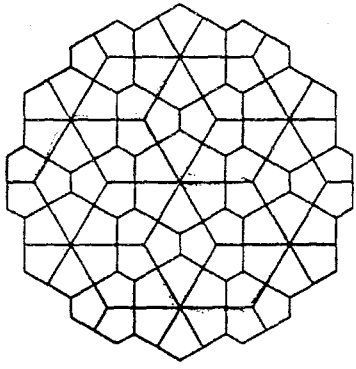


Referans: R. Dixon, Mathographics, Basil Blackwell, Oxford, 1987.

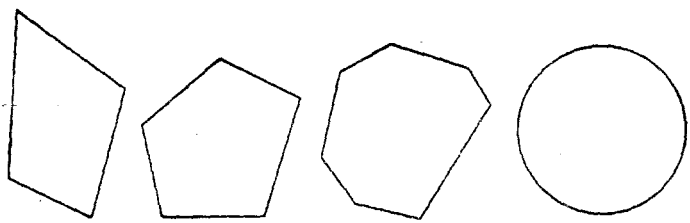
İslâm mozaikleri İslâm mozaikçileri her çeşit mozaiği büyük bir ustalıkla oluşturmakla ün yapmışlardır. Örneğin yalnız İspanya'daki Elhamra sarayında bile, olası 17 *duvar kâğıdı süs desenleri*nin hepsi bulunmuştur. Bu desenlerin birçoğu içiçe geçmeler içerir (Bkz. Duvar kâğıdı desenleri.)



Bütün bu karmaşık desenlere birçok şekilde 'bakılabilir.' Aşağıdaki desen şu tanımların hepsine uyar: Herbiri iki dörtgene ve iki beşgene ayrılmış rombuslar (eşkenar dörtgen veya baklava şekli); kenarların ortasını birleştiren üç doğru ile düzgün altıgenler ve köşeleri budanmış eşkenar üçgenler; dört küçük altıgene ve köşeleri budanmış yedi eşkenar üçgene ayrılmış büyük bir altıgen, vb.



İzoperimetri problemi İzoperimetri ('eşit çevre') teoremi, aynı çevreye sahip düzlem şekiller arasında alanı en büyük olanın daire olduğunu söyler.



Bu teorem çok eskidir. Arşimed'den bir süre sonra Zenodorus, bir dairenin alanının aynı çevreye sahip bir çokgenin alanından daha büyük olduğunu kanıtladı. Pappus da petek yapan arıların nasıl ekonomik davrandıklarını şu ünlü yazısıyla açıklamıştır:

> "Her ne kadar Tanrı en mükemmel aklı ve matematiği insana bahsetmişse de hayvanlara da bir miktar usa vurma vermiştir. İnsana akıl verirken her şeyi aklın ışığında yapmalarını istemişti; hayvanlara ise hayatlarını devam ettirebilmeye yetecek kadar akıl verdi... Böylece arılar peteklerini geometrik bir düşünceyle yaparlar. Şekiller birbirine bitişik olmalı ve ortak kenar içermelidir... Bir nokta etrafındaki boşluk 3 şekille doldurulabilir; üçgen, kare ve altıgen. Arı aklı şöyle çalıştı: Açıları en büyük şekil olan altıgen, hem daha çok bal alır, hem de daha az malzeme harcanarak yapılır. Biz insanlarsa arılardan daha akıllı olduğumuzdan şöyle düşündük. *Eşit çevreye sahip eşit kenarlı ve eşit açılı şekiller arasında, açı sayısı daha fazla olan daima daha büyüktür ve hepsinin en büyüğü de çevresi onlarınki kadar olan bir dairedir.* (Mathematical Collection, Book V)."

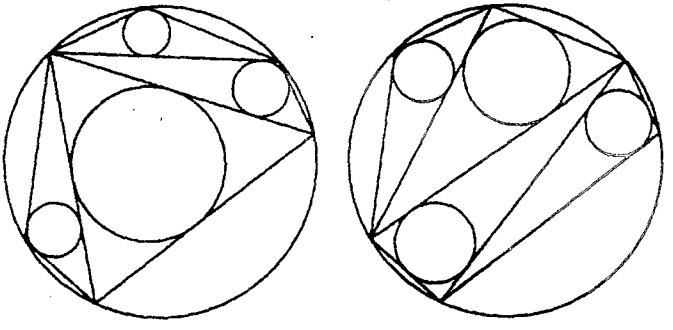
Steiner nihayet 1841'de izoperimetri problemini birçok şekilde ispat etti. Buna benzer bir problem, Romalı şair Virjil'in Aeneid adlı

eserinde geçmiştir; katil kardeşinden kaçan Kraliçe Dido, K. Afrika kıyılarına çıkınca kendi ve yakınları için Kral Jarbas'dan toprak satın almak istedi. Kral ona bir öküzün derisiyle çevrelenebilecek kadar toprak verebileceğini bildirdi. Virjil'e göre Dido bunu kabul etti ve bir öküzün derisini çok uzun ve çok ince bir bant oluşturacak şekilde kestirdi ve düz kıyı çizgisi ile yarım daire şeklinde gerdirdiği bu bant arasında kalan alanı satın aldı.

Referans: Ivor Thoms (çeviren), Greek Mathematical Works, Vol. 2, Heinemann, Londra, 1980.

J

Japon teoremi Johnson bu Japon teoreminin 1800'de bir tapınak duvarına Tanrıların ve bulanın şanı için yazıldığını bildirmiştir.

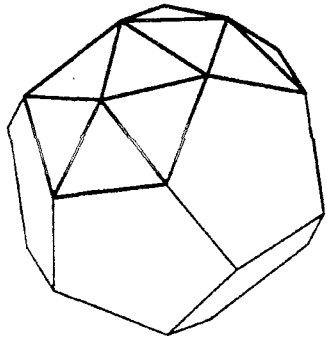


Bir daire içine dışbükey (konveks) bir çokgen çizin ve onu üçgenlere ayırın. Her üçgenin içine iç dairesini (incircle) çizin. Bu dairelerin yarıçaplarının toplamı, çokgeni üçgenlere nasıl ayırırsanız ayırın, hep aynıdır. 1. şekildeki yarıçapların toplamı, ikinci şekildeki yarıçapların toplamına eşittir. (Ne kadar güzel! Matematiksel bir şiir âdeta... Ç.N.)

Referans: R.A. Johnson, Advanced Euclidean Geometry, Dover, New York, 1960.

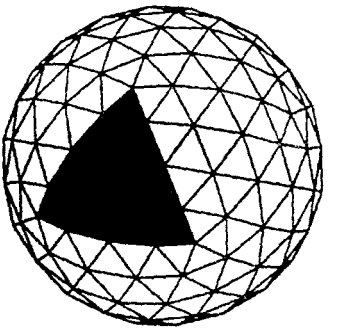
Jeodezik kubbe Jeodezik kubbe mühendis-mimar Buckminster Fuller tarafından bulundu. Bu tip kubbelerin zemin üstüne tamamlanmış yapılar şeklinde oturtulabilmek gibi bir üstünlüğü vardır. Ayrıca istendiği kadar büyük yapılabilirler; büyüklüklerine getirilecek sınırlandırmalar fazla değildir.

İşte basit bir örnek. Düzgün bir dodekahedron (12 yüzlü) ve onu çevreleyen küreyi (sirkumsfer) alın. Her yüzün merkezini küre yüzeyine yükseltin ve onu yüzün köşelerine beş eşit yeni kenarla birleştirin.



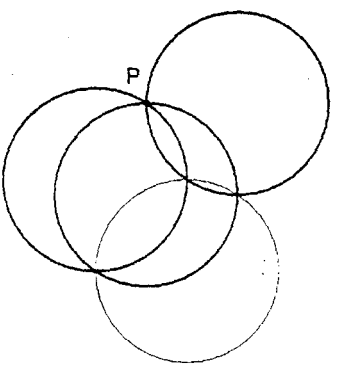
Elde ettiğiniz polihedron'un (çokyüzlü) 60 ikizkenar üçgen yüzü vardır; bunların kenarlarının oranı 1:1:1.115'dir.

Köşeleri yüzün yükseltilmiş merkezine birleştirmek yerine, yüz daha fazla sayıda üçgen parçalara ayrılabilir ve sonra bu üçgenlerin köşeleri sirkumsfer'e yükseltilir. Aşağıdaki şekilde ikozahedron'un (20 yüzlü) her yüzü 16 daha küçük ve hemen hemen eşkenar üçgenden oluşmuştur.

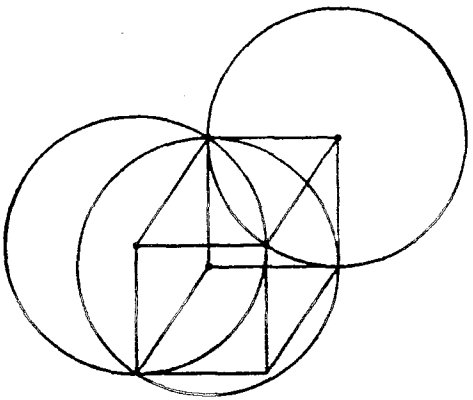


Johnson teoremi Bu çok basit teorem 1916'da Roger Johnson tarafından bulundu. Bu da gösteriyor ki Thales'in 'yarım daire içindeki açı dikaçıdır'ı buluşundan 2000 yıl sonra bile, geometrinin zenginliği içinde saklanmış gerçekler, keşfedilmeyi beklemektedir.

Eğer birbiriyle özdeş üç daire ortak bir P noktasından geçerse, diğer üç kesişme noktası aynı büyüklükte bir 4. daire üzerinde bulunur.



Bu teoremin ispatı da kendisi gibi basittir. Aşağıdaki şekilde görülen yarıçapları çizin.



Bu yarıçaplar bir küp iskeleti oluşturur, çünkü dairelerin yarıçapları eşittir. Küpün eksik kenarlarını ekleyin; saklı köşe 4. dairenin merkezidir.

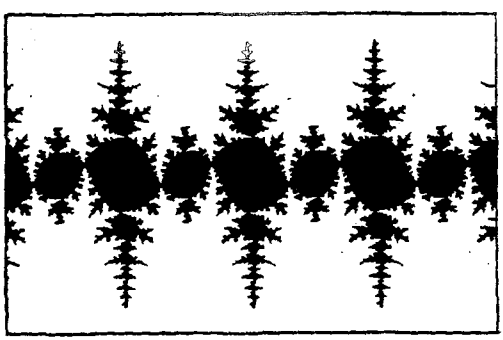
Julia kümesi Herhangi bir kompleks sayı alın, örneğin sayınız z = p + iq olsun; p ve q, kompleks düzlemde bir nokta belirler. Kompleks sabite k diyelim. z^2+k'yı hesaplayın ve sonucu yeni z'niz olarak alın. Sonra bu yeni z için z^2+k'yı hesaplayın. Bulduğunuz bu 3. değeri yeni z olarak kabul edin... Bu operasyon sonsuza kadar tekrarlanabilir. Orijinal z ile başlayarak z'nin aldığı değerler bir graf olarak gösterilebilir. Bu grafa ne olacak dersiniz? Üç olasılık vardır: Graf giderek orijinden uzaklaşarak sonsuzda kaybolur; graf giderek sabit bir noktaya yaklaşır ya da "garip çekici" (strange attractor) denen bir bölge etrafında zıplayıp durur. Belli bir noktanın garip çekicisine "Julia kümesi" (Julia set) denir.



Eğer orijinal nokta Mandelbrot kümesinin içindeyse, bu noktanın Julia kümesi fraktal bir eğri olacaktır. Orijinal nokta Mandelbrot kümesinin dışındaysa bir noktalar kümesi oluşacaktır; buna "Fatou tozu" *denir.* (Bkz. Koch'un kar tanesi eğrisi). (Bkz. Ejderha eğrisi). (Bkz. Fatou tozu). (Bkz. Mandelbrot kümesi).

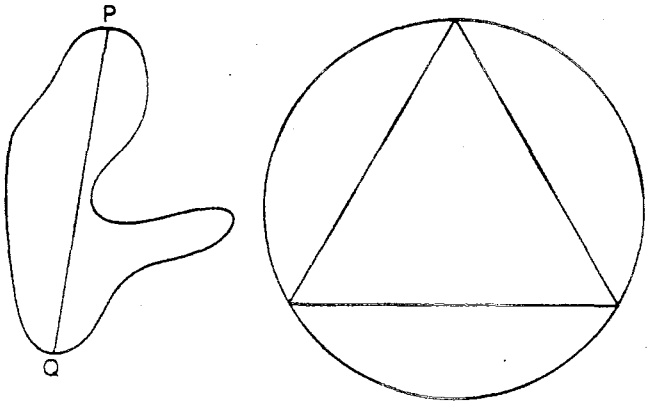
$z \rightarrow z^2+k$ bu tip davranışı belirleyen en basit operasyondur.

Daha karmaşık süreçlerin Julia kümeleri vardır. Aşağıda $z \rightarrow \lambda \cos z+k$'nın Julia kümesi görülüyor:



Referans: Michel Mendes-France, Neverthless, Mathematical Intelligencer, Vol. 10, No: 4, 1988.

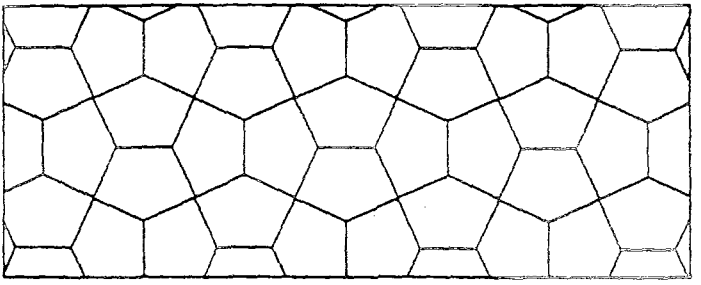
Jung teoremi Bir şeklin birbirinden en uzak iki noktası arasına çap denir. Jung teoremi şunu der: Çapı 1 birim veya 1 birimden küçük olan bir şekil, çapı $2/\sqrt{3}$ birim olan bir daireyle tamamen örtülebilir.



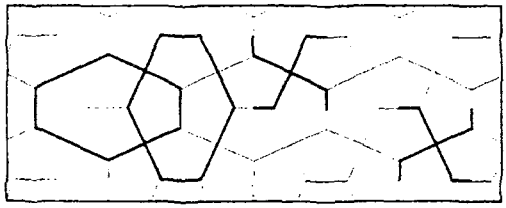
Soldaki şeklin çapı PQ'dür. Sağdaki eşkenar üçgenin kenarı 1 birimse, bu üçgeni ancak çapı tam $2/\sqrt{3}$ birim olan bir daire örtebilir; $2/\sqrt{3}$ birimden daha küçük dairelerin üçgeni örtemeyeceği bellidir.

K

Kahire mozaiği Böyle isimlendirilmesinin nedeni Kahire sokaklarında sık görülmesidir; İslâm süs sanatında da görülür.



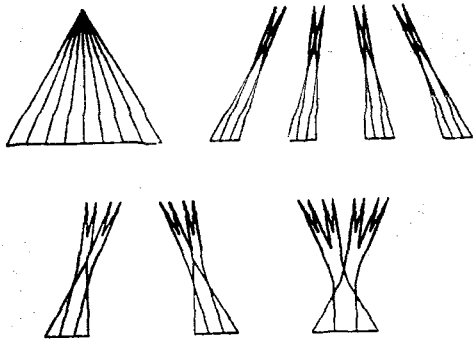
Kahire mozaiği çeşitli şekillerde görülür; örneğin karelerden oluşmuş bir kafesin köşeleri etrafında rotasyon yapan ve uçları kısa segmentlerle birleştirilmiş parçalardan veya dik olarak birbiri içine geçmiş uzatılmış altıgenlerden oluşabilir. Bu son cümleden, Kahire mozaiğinin, içiçe geçen altıgenlerin biçimine bağlı olarak çok farklı şekillerde olabileceği anlaşılır.



Kahire mozaiğinde her fayansın ortası komşu fayansın ortasına birleştirilerek kareler ve eşkenar üçgenlerden oluşmuş eşlek (dual) yarı düzgün bir mozaik elde edilebilir.

Kakeya kümeleri ve Perron ağaçları Kakeya 1917'de şu soruyu sordu: Bir birim uzunlukta bir doğru parçasının tersine dönmesi, yani tam bir rotasyon yapması için gerekli olan en küçük konveks bölge nedir? Böyle bir bölgeye Kakeya kümesi (Kakeya set) denmektedir. Kakeya cevabın birim yükseklikte bir eşkenar üçgen olması gerektiğini düşündü.

Bunda yanılmamıştı. Peki ama bölge konveks değilse ne olacak? Bunun cevabının deltoid olduğu ileri sürüldü; bu durumda birim doğru, sürekli olarak öyle çevrilebilir ki daima deltoid'e değer ve iki ucu da eğri üstünde bulunur. Fakat bu tahmin doğru çıkmadı. Böyle en küçük bir bölgenin alanını istediğimiz kadar küçültebiliriz!

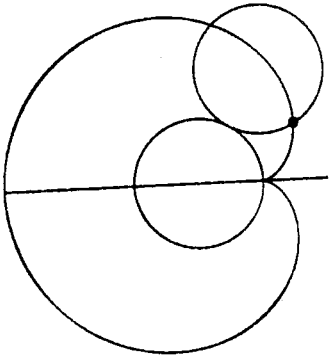


Söz konusu olan şey, bir eşkenar üçgenin tabanını sürekli olarak ikiye bölmektir. Bu durumda bitişik üçgenler birbirine doğru kayar ve biraz içiçe geçer. Bu operasyona üçgen çiftleriyle devam edilir, üçgenler hafifçe birbirine doğru kaydırılır.

Sonuç Perron ağacıdır. Eğer üçgenin tabanı yeterince sık bölünürse, oluşan Perron ağacının alanı istendiği kadar küçültülebilir. Birçok Perron ağacı birbirine uydurularak birim segmentin tam bir rotasyon yapabileceği bir boşluk yaratılabilir.

Referans: K.J. Falconer, The Geometry of Fractal Sets, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

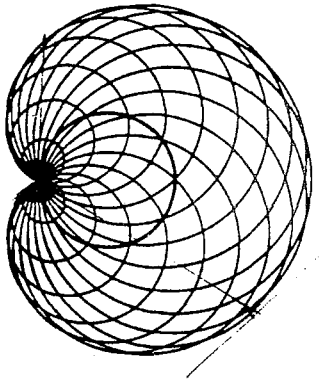
Kardioid (yürek eğrisi) veya tek köşe noktalı (tek cuspisli) episikloid (dış çevrim eğrisi): Kardioid (ki "kalp biçiminde eğri" anlamına gelir), astroid gibi benzer eğrilerle beraber, ilk defa astronom Ole Romer tarafından 1674'te incelendi; Romer'in amacı dişli çark dişi için en uygun biçimi bulmaktı. Daha önceleri Yunanlılar gezegenlerin hareketini "çemberler üzerinde hareket eden çemberler" olarak tanımlamışlardı.



Bir çember kendi büyüklüğünde bir diğer çemberin etrafında, ona daima teğet kalarak dönerse, dönen çemberin üzerindeki herhangi bir sabit nokta kardioid çizer. Bir diğer tanımı şudur: Bir çember, çapı kendi çapının yarısı kadar olan sabit bir çember etrafında, onu içine alarak ve ona daima teğet kalarak dönerse, dönen çemberin üstündeki sabit bir nokta bir kardioid çizer.

Kardioid'in polar denklemi $r=2a(1\pm\cos\theta)$dır. (a = jeneratör çemberin yarıçapı). Kardioid'in uzunluğu 16a, alanı $6\pi a^2$'dir

Kardioid, aynı zamanda merkezleri sabit bir dairenin çevresi üzerinde olan ve hepsi sabit dairenin belli bir noktasından geçen çemberlerin zarfıdır (Zarf = bir eğriler takımının veya yüzeyler takımının her bir öğesine teğet olan eğri ya da yüzey. Ç.N.)

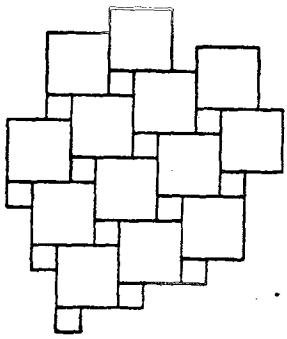


Kardioid'e birbirine paralel rastgele üç teğet çizin ve bu teğetlerin kardioid'e değme noktalarını kardioid'in tek köşe noktasıyla birleştirin (köşe noktası kardioid'in içeri doğru girinti yaptığı noktadır.) Elde ettiğiniz üç yarıçap birbirleriyle 120° açı yapar ve köşe noktası teğet değme noktalarının *Fermat noktası*dır. (Fermat noktası: Bir üçgenin

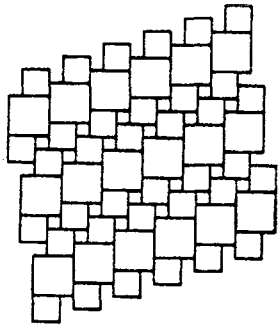
içinde köşelere olan uzaklıklarının toplamı minimum olan nokta. Üçgenin açılarından hiçbiri 120°'den büyük olmamak koşuluyla, çözüm köşelerden bu noktaya gelen doğruların birbirleriyle 120° açı yapmalarıdır. Üçgenin Fermat noktası şöyle bulunur: Üçgenin kenarları üzerinde eşkenar üçgenler oluşturulur ve bunların herbirinin çevrel çemberi çizilir. Bu üç dairenin kesişme noktası Fermat noktasıdır (Bkz. Fermat noktası). (Daha geniş bilgi için Bkz. Matematiğin Gizli Dünyası, David Wells, çev. Selçuk Alsan, Sarmal Yayınları, 1997, sayfa 400. Ç.N.) Üç paralel teğetin kardioid'e değdiği noktaların ağırlık merkezi, daima sabit dairenin merkezidir.

Herhangi bir doğru kardioid'i dört noktada kesecektir; bunlardan ikisi sanal olabilir. Köşe noktasından bu kesişme noktalarına olan uzaklıkların toplamı sabittir. Köşe noktasından geçen bir doğru kardioid'i iki noktada kestiğinden, köşe noktasından geçen kirişlerin uzunluğu sabit olup 4a'ya eşittir. Bu kirişlerin orta noktalarının geometrik yeri bir çemberdir. Köşe noktasından geçen bir kirişin uçlarından kardioid'e çizilen teğetler birbirine diktir.

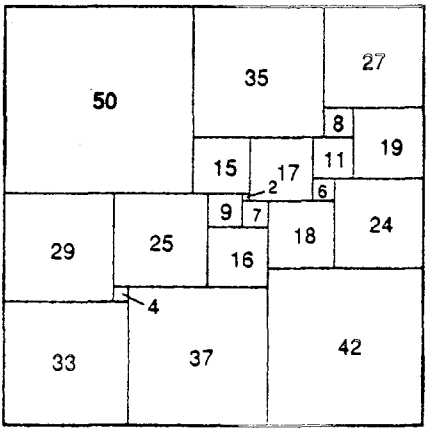
Karelerden mozaik Karelerden oluşmuş standart bir ağ (şebeke) alın ve kareleri her iki yönde kenarlarına paralel olarak kaydırın. Bu kareler arasındaki aralıklar, istediğiniz büyüklükte kareler haline getirilebilir. Sonuç iki farklı büyüklükteki karelerden oluşmuş bir mozaiktir.



Birçok değişik büyüklükteki karelerden de mozaikler yapılabilir. Aşağıdaki şekilde üç farklı kare görülüyor:

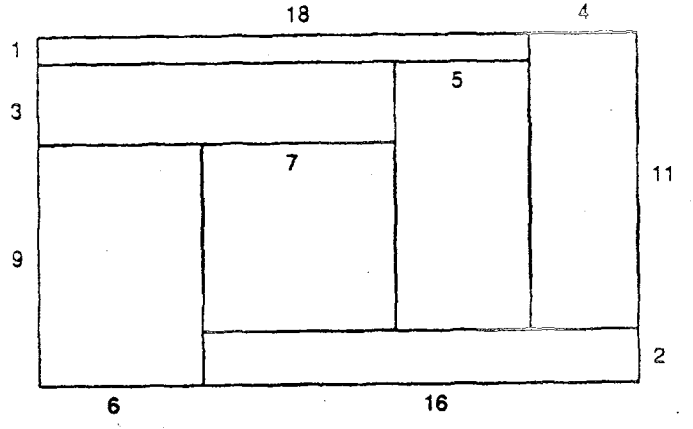


Karelere bölünmüş kareler Bir zamanlar Rus matematikçisi Lusin, bir kareyi eşit olmayan karelere bölmenin olanaksız olduğunu söylemişti. 1939'da Roland Sprague bir karenin eşit olmayan karelere bölünebileceğini gösterdi. Bunun için 55 kare kullandı. 1978'de A.J.W. Duijvestijn 21 kareden oluşan bir kare oluşturdu. Bu mükemmel bir karedir; çünkü bütün kareler farklıdır; bu basit bir karedir; çünkü bu karelerin hiçbir alt kümesi bir dikdörtgen oluşturmaz.



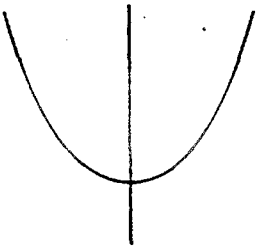
Referans: R.D. Mauldin (ed.). The Scottish Book, Birkhäuser, Boston, 1981.

Karşılaştırılamaz dikdörtgenler Kenarları paralel olan iki dikdörtgen birbirlerinin içine giremiyorsa bunlara karşılaştırılamaz dikdörtgenler denir. Bu dikdörtgenlerden birisinin hem daha uzun hem de daha dar olduğu anlamına gelir.



Bir dikdörtgen içine en az kaç karşılaştırılamaz dikdörtgen konulabilir? En az 7, en çok 8 konulabilir. Bu 13x22 boyutlarındaki dikdörtgen, karşılaştırılamaz dikdörtgenlerle döşenebilen ve kenarları tam sayı olan dikdörtgenlerin alan veya çevrece en küçük olanıdır.

Katenaryus (zincir eğrisi) Huygens 1691'de düzgün bir şekilde sarkan bir zincirin oluşturduğu eğriye katenaryus (zincir eğrisi) adını verdi. Galile ise iki ucu sabitken sarkan bir ipin bir parabol çizdiğini düşünmüştü. Bu affedilebilir bir hatadır; çünkü parabol ve katenaryus tepe (verteks) hizasında birbirine çok yakındır.



Katenaryusun denklemi $y = a \cosh (x/a)$'dır.

[$u=x/a$ dersek $y=\cosh u= 1/2 (e^{u}+e^{-u})$ olur.

Cosh, hiperbolik cosinüs diye okunur. Burada hiperbolik fonksiyonlardan kısaca sözedeceğiz. Hiperbolik fonksiyonlar, u, x'in bir fonksiyonu olmak üzere, e^{u} ve e^{-u} içeren fonksiyonlardır. Nasıl sin u ve cos u, R = 1 olan $x^2 + y^2 = 1$ dairesinde bir (x, y) noktası olarak belirlenebiliyorsa,

$\cosh u= 1/2 (e^{u}+e^{-u})$ ve $\sinh u=1/2 (e^{u}-e^{-u})$

$x^2 - y^2 = 1$ hiperbolünün bir (x, y) noktası olarak gösterilebilir.

$x^2 - y^2 = 1$ hiperbol denkleminde x yerine cosh u ve y yerine sinh u konulursa (bunun için cosh ve sinh'nin yukarıdaki e içeren formülleri alınır) denklemin doğrulandığı görülür.

$x= \cosh u= 1/2 (e^{u}+e^{-u})$

$y= \sinh u= 1/2 (e^{u}-e^{-u})$

yazıp u'yu $-\infty$'dan $+\infty$'a değiştirirsek, P(x,y) noktası $x^2-y^2 = 1$ hiperbolünün sağ kolunu çizer. $\sinh u + \cosh u = e^{u}$ ve $\cosh u - \sinh u= e^{-u}$ olduğu yukarıdaki formüllerden hemen görülür.

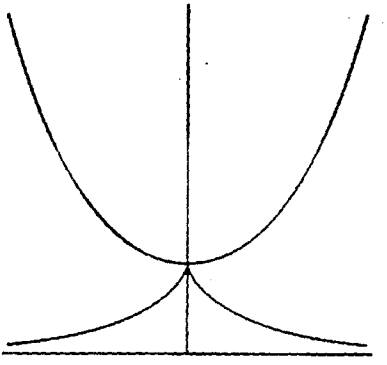
Ayrıca $\cosh^2 u-\sinh^2 u = 1$ olduğu da açıkça bellidir.

Taylor serisiyle açılırsa sinh u = u + $u^3/3!$ + $u^5/5!$+... ve

cosh u = 1 + $u^2/2!$ + $u^4/4!$ + ... 'dır.

tanh u = sinh u/cosh u= e^u-e^{-u} / e^u+e^{-u}'dur. Coth u bunu tersidir. Sech u= 1/cosh u=2/e^u+e^{-u} ve csch u= 1/sinh= 2/e^u-e^{-u} Ç.N.]

Katenaryus, bir doğru üzerinde yuvarlanan bir parabolün odak noktasının geometrik yeridir. Katenaryusun involütü (düreci) traktrisdir (çekme eğrisi). (traktrisin evolütü - eğeci - ise katenaryusdur Ç.N.) Traktrisin asemptotuna, katenaryusun direktrisi (doğrultman) denir. [İnvolüt bir eğrinin teğetlerine dik olan eğridir. İnvolüte düreç, evolvent, developant veya involutus da denir. Evolüt (eğeç, develope) bir eğrinin, eğrilik merkezlerinin geometrik yeridir. Traktris: 1693'te Claude Perrault'ca bulundu ve Leibniz'ce formüle edildi. Traktris katenaryusa çizilen bütün teğetlerle 90° açı yapan bir eğridir. Katenaryus üzerindeki bir C noktasından katenaryusa teğet çizilsin. Bu teğetin traktrisi kestiği M noktasından CM'ye dik çizelim. Bu dik, doğrultmanı P'de keser. C'den doğrultmana indirilen dik de P'den geçer. MP = a olup sabittir. M'lerin geometrik yeri traktrisdir. Ç.N.] Ayrıca Bkz. *traktris*.



[Sabit bir eğrinin üzerinde yuvarlanan bir eğrinin belli bir noktasının geometrik yerine **rulet** denir. Örneğin bir çember bir doğru üzerinde yuvarlanırsa, çemberin üzerindeki sabit bir nokta bir **sikloid** çizer (bu durumda rulet bir sikloid'dir.) Bir daire bir diğer daire etrafında yuvarlanırsa **sikloidal eğri** çizer. Bir hiperbol, parabol veya elips bir doğru üzerinde yuvarlanırsa **Sturm eğrileri,** bir elipsin üstünde yuvarlanan bir elips bir **epi-elips** çizer. Düz bir çizgiyi herhangi bir eğrinin evolütü etrafında yuvarlamakla o eğrinin kendisi elde edilir.

Bir eğrinin **involütü**nün (düreç veya developant) bir çok tanımı vardır: 1) Bir eğriye sarılmış olan bir iplik üzerindeki sabit bir noktanın, iplik gerilerek eğriden çözülürken ki geometrik yeri. 2) Bir eğriye çizilmiş olan bir teğet, kaymadan eğri etrafında dönerken, teğet üzerindeki sabit bir noktanın geometrik yeri. 3) Belli bir eğrinin teğetlerine **dik olan** eğri. Aynı eğrinin herhangi iki involütü paraleldir. Verilen bir C eğrisinin involütü öyle bir eğridir ki involütün evolütü bu C eğrisidir.

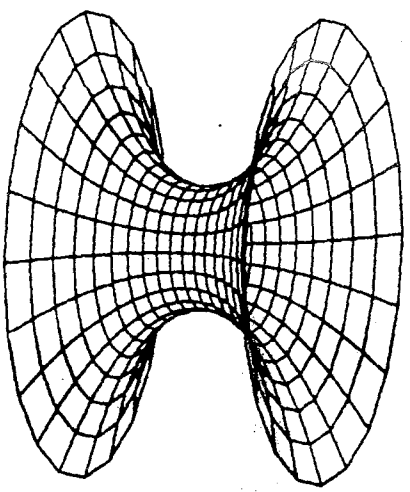
Bir eğrinin **evolütü** (eğeç, develope) o eğrinin eğrilik merkezlerinin geometrik yeridir. İnvolüte çizilen dikler (normaller), evolüte teğet olurlar; yani evolüt, involütün normallerinin zarfıdır. Bir eğrinin **eğriliği** (curvature, courbure): C eğrisi üzerindeki P noktası için, P'deki teğet ile hareketli bir P' noktasındaki teğet arasındaki açı $\Delta\theta$ ve PP' yayının uzunluğu ΔS olmak üzere lim $\Delta S \to 0$ $\Delta\theta/\Delta S$ sayısıdır. **Eğrilik çemberi:** Bir eğriye konkav yanında teğet olan ve teğet noktasında eğriyle aynı eğriliğe sahip olan bir çembere eğrilik çemberi, bu çemberin merkezine **eğrilik merkezi** ve yarıçapına **eğrilik yarıçapı** denir. **Eğrilik (curvature)** eğriye çizilen teğetin eğiminin (x ekseni ile teğetin yaptığı açının tanjantı) eğri boyunca gidilen yaya oranla mutlak değişim hızıdır.

Değeri: $K = |d^2y/dx^2| / [1+(dy/dx)^2]^{3/2}$ (bunun tersi yani 1/K, eğrinin yarıçapıdır). d^2y/dx^2, y'nin x'e göre2. türevi, dy/dx 1. türevidir.

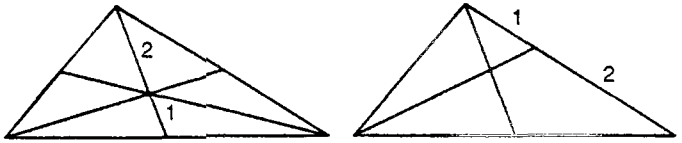
Teğetin, ekseniyle yaptığı açı θ ve eğrinin yay uzunluğu S ise eğrilik (K) şuna eşittir:

$K = d\theta / ds$; $\tan \theta = dy/dx$ ve $ds = \pm \sqrt{dx^2 / dy^2}$ Ç.N.]

Katenoid (zincir yüzeyi) Katenaryusun doğrultmanı etrafında çevrilmesiyle elde edilen yüzeydir. Bu minimal bir yüzeydir. Aynı eksene sahip iki boş halka arasında oluşan sabun köpüğü filminin oluşturduğu şekil bir katenoiddir. Bu, eksen etrafında dönmekle oluşan tek minimal yüzeydir.



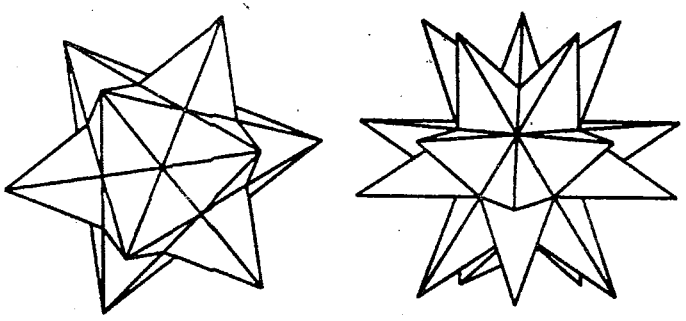
Kenar ortayların kesişmesi Kenar ortay bir üçgenin tepesini karşı kenarın ortasına birleştirir. Kenar ortaylar bir noktada kesişir. Kesişme noktası her kenar ortayı 2:1 oranında böler. İlginçtir ki bir kenar ortayın ortasını bir köşeyle birleştiren doğru, karşı kenarı 2:1 oranında böler.



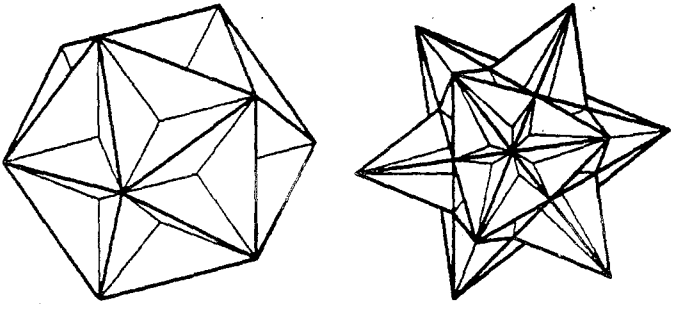
Kenar ortayların kesişme noktası, üçgenin köşelerine konmuş 3 eşit ağırlığın ağırlık merkezidir; bu nokta aynı zamanda üçgenin de ağırlık merkezidir (bütün üçgen her noktası aynı kalınlıkta bir tabaka olarak düşünülürse).

Kepler-Poinsot çokyüzlüleri: Pacioli, *De Divina Proportione* (Kutsal Oran) adlı kitabında 'yükseltilmiş' bir onikiyüzlü ve yirmiyüzlü göstermiştir (Bkz. Altın oran, altın bölme ve kutsal oran). Bu kitaba Leonardo da Vinci'nin de resimler çizdiğine inanılmaktadır. Pacioli, onikiyüzlünün yüzlerini alçak beşgen piramitler olarak yükseltti; yirmiyüzlünün yüzlerineyse düzgün dörtyüzlüler ekledi.

Kepler'in *Harmonice Mundi* (1619) adlı kitabındaki resimlerden ikisi yeni çokyüzlülere aitti; bunlar düzgün olmakla birlikte dışbükey (konveks) değildi. (Bu kitap gezegen hareketlerinin 3. yasasını içermesiyle tanınmıştır). Bu çokyüzlülerin yüzleri, birbirini kesen yıldız beşgenlerdir. Solda küçük onikiyüzlü yıldız, sağda büyük yirmiyüzlü yıldız görülmektedir.



Bu şekiller 1819'da Poinsot tarafından yeniden keşfedildi; Poinsot ayrıca konveks olmayan düzgün iki katı cisim daha buldu; büyük onikiyüzlü (sol) ve büyük yirmiyüzlü (sağ).



Bütün bu katı cisimler iki boyutlu yıldız çokgenlerin üç boyutlu analoglarıdır. Büyük onikiyüzlü ve küçük onikiyüzlü yıldız bazı matematikçilerin canını sıkmıştır, çünkü bunlar Euler formülüne (köşe sayısı+yüz sayısı = kenar sayısı + 2) uymamaktadır. Herbirinin 12 yüzü, 12 köşesi ve 30 kenarı vardır.

Kesişen silindirler Taban yarıçapları (d) birbirine eşit üç dairesel silindir, birbirlerini dik açılarla keserlerse, kesişme bölgesinde 12 yüzlü bir katı cisim oluşur; bu 12 yüzlünün yüzleri bombedir ve hacmi

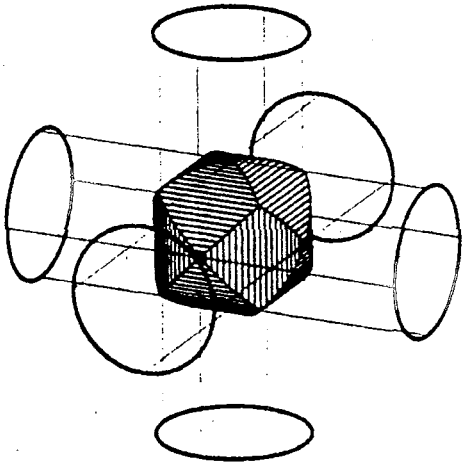
$(2 - \sqrt{2})\, d^3$ dür

Üç yüzün birleştiği köşeleri birleştiren bütün üreteçlere teğet düzlemler çizilirse, bir rombik dodekahedron (eşkenar dörtgensel onikiyüzlü) elde edilir.

Yalnız iki silindir birbirlerini dik açılarla keserlerse daha basit bir şekil oluşur. Arşimed ve Çin matematikçisi Tsu Çung Çih bu şeklin

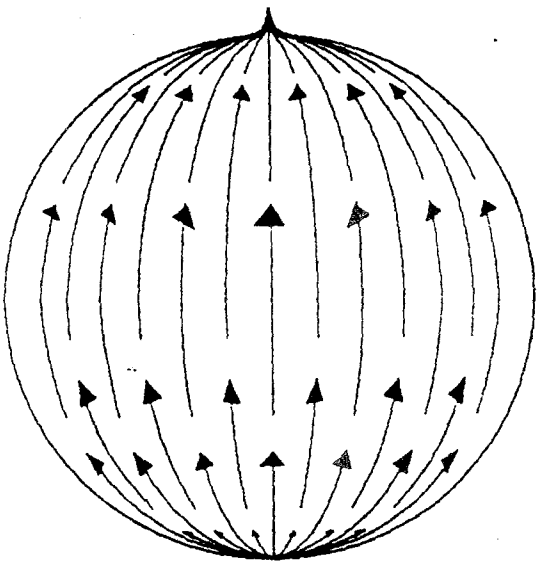
hacmini entegralsiz bulmuşlardı: 2/3 d^3.

Eksenleri düzgün dört yüzlü simetrisine sahip 4 silindir de birbirlerini simetrik olarak kesebilir. Kesişme bölgesinde 24 yüzlü bir katı cisim oluşur; bu cisim, içine küp yerleştirilmiş sekiz yüzlüye analogdur; hacmi 2/3 (3+2/3 - 4/2) d^3'dür.



Referans: M.Moore, Symmetrical intersections of right circular cylinders, Mathematical Gazette, No: 405, 1974.

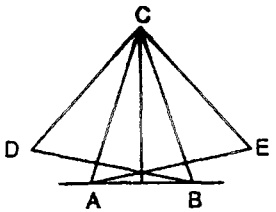
Kıllı top teoremi Bu, sabit nokta teoremine bir örnektir. Tüylerle kaplı bir tenis topu yerine kıllı (saçlı) bir tenis topunu taradığınızı düşünün. Saçların yön değiştirip top yüzeyine yatmasını istersiniz; fakat bunu yapamazsınız.



Şekilde başarıya yakın bir durum görülüyor. "Güney kutbundan" "kuzey kutbuna" boylamlar boyunca yukarı doğru fırçaladınız. Bütün yüzey, iki nokta hariç, düzgün bir şekilde tarandı; noktaların birinde bir delik, diğerinde bir püskül belirdi.

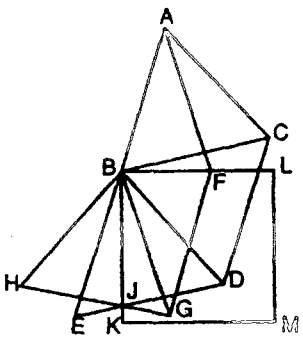
Dünya bir top gibi olduğundan ve rüzgâr her noktada belli bir yön aldığından, hava Dünya'nın üzerinde taranmış gibidir; bu nedenle Dünya'da daima bir yerde siklon vardır.

Kibrit çöpüyle çizimler Daha çok bir satranç problemcisi olarak anılan T.R. Dawson şu buluşu yaptı: bir cetvel ve pergelle belirlenebilen her nokta birbirinin aynı kibrit çöpleriyle oluşturulabilir; bir diğer deyişle özdeş, hareketli ve düz doğru parçaları bu işler için yeterlidir.



Şekilde Dawson'un AB çizgisini ikiye bölmek için kullandığı 7 kibrit görülüyor. Bunlar ACB ve DCE açılarını ve 120°'den az herhangi bir açıyı ikiye bölmeye de yarar (tam 60° olanlar hariç).

Bir kare şöyle oluşturulur: ABC, BCD ve BDE eşkenar üçgenlerini oluşturun. Sonra BAC açısı içinde herhangi bir AF doğrusu alın, G ve H'yı belirleyin. F noktası ve GH ile ED'nin kesişme noktası olan J. BKLM karesinin iki kenarını belirler.

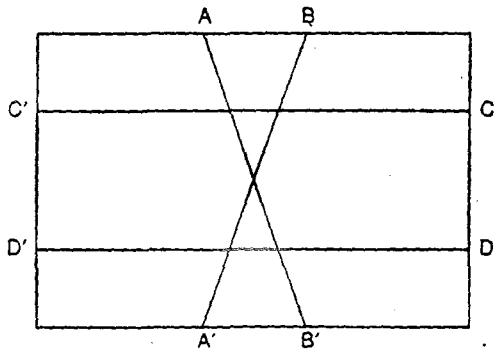


Referans: T.R. Dawson, "'Match-stick' geometry", Mathematical Gazette, No: 254, 1939.

Klein şişesi: Bir silindir alın. Silindirin bir ucunu tutup silindiri uzunlamasına bükün ve tuttuğunuz ucu silindirin duvarından içeri sokun. Şimdi silindirin içinde duran bu ucu, silindirin el sürmediğiniz ucu hizasına çekip iki ucu yapıştırın. Bir Klein şişesi yapmış oldunuz. Bu şişeyi Felix Klein bulmuştu.

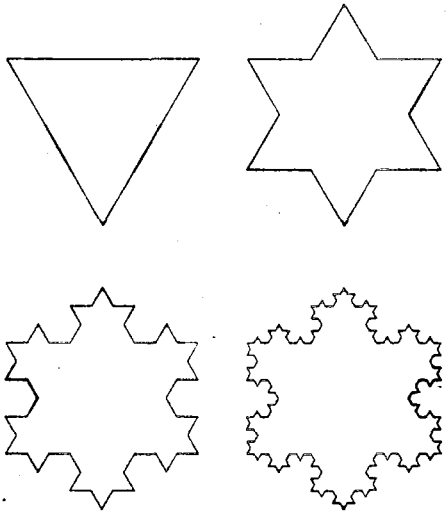


Klein şişesi bir dikdörtgen olarak düşünülebilir, öyle ki dikdörtgenin bir çift karşılıklı kenarı burma yapmadan (CD, C'D'ye), diğer çift karşılıklı kenarıysa burularak (AB, B'A'ye) birleştirilmiştir.



(Klein şişesi topoloji bakımından önemlidir. Klein şişesi tek yüzeylidir; iç ve dış diye iki yüzü yoktur. Bu nedenle Klein şişesi içine su koyamazsınız, hepsi yere dökülür. Buna benzer Mobiüs şeridinde de tek yüz ve tek kenar vardır; Möbiüs şeridinin yüzeyinde yürüyen bir böcek, kenarı aşmadan başladığı noktaya döner. Möbius şeridi yapmak için uzun bir kâğıt şeridin uçlarını 180° burarak (AB, B'A'ye) birleştirin Ç.N.)(Bkz. Möbius şeridi.)

Koch'un kar tanesi eğrisi Bir eşkenar üçgen alın ve her kenarın orta üçte birini çıkartın; ortada kalan boşluk üzerine, kenarları çıkardığınız doğru parçası kadar olan yeni (ve tabansız) bir eşkenar üçgen çizin. Bu operasyonu tekrarlayınız; her keresinde eşkenar üçgen kenarlarının orta 1/3'ünü çıkartıp kalan boşluğa aynı şekilde yeni (ve tabansız) bir eşkenar üçgen çizin. Aşağıda bu "kar tanesi eğrisi"nin ilk 4 safhası görülmektedir. Tekrarlama işlemi sonsuz olduğunda bu eğrinin limit şekli elde edilir, buna 'Koch eğrisi' denmektedir.

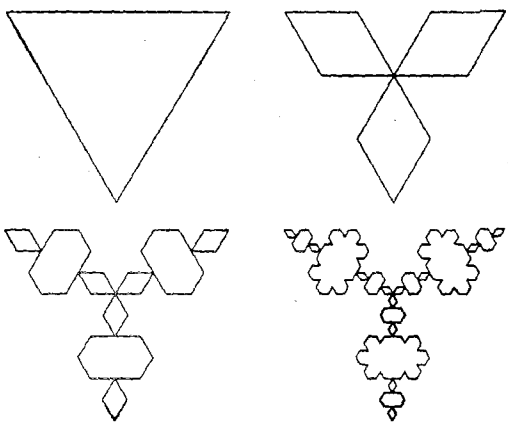


Koch eğrisinin uzunluğu sonsuzdur; fakat çevrelediği alan orijinal üçgenin yalnızca 8/5 katıdır. Bu bir fraktal eğridir, log 4/log 3 (yaklaşık 1.2618) fraktal boyutlara sahiptir (fakat Koch 1904'te bu eğriyi yayımladığında fraktal kavramı henüz gelişmemişti.)

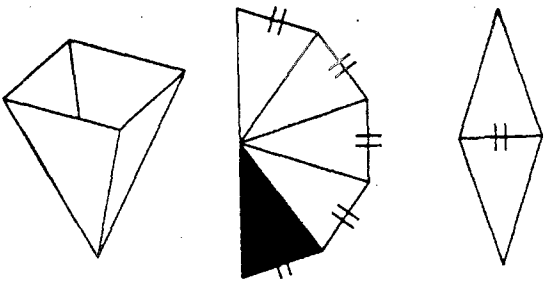
Anti kar tanesi eğrisi şöyle çizilir: Üçgen kenarının orta üçte biri çıkartılıp atılır; üçgenin içine doğru kenarları çıkartılıp atılan doğru parçasına eşit bir eşkenar üçgen oluşturulur. Bu operasyon sonsuz kere tekrarlanırsa uzunluğu sonsuz, çevrelediği alansa orijinal üçgenin 2/5'i olan anti-kar tanesi eğrisi oluşur.

Orijinal üçgenin merkezini köşelere birleştiren doğrular üzerinde bu eğriye ait sonsuz çift nokta vardır.

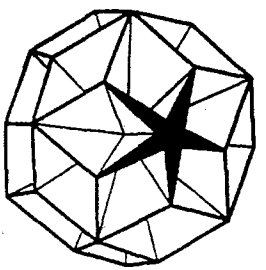
(Fraktal bir eğri elde etmek için herhangi bir düzgün poligon'un (çokgen) her kenarının yerine 'jeneratör' denilen belli biçimde bir çizgi konulur ve bu operasyon sonsuza dek tekrarlanır. Böylece aynı şekil gitgide küçülerek sonsuza dek tekrarlar. Fraktal geometri, Peano eğrisi - birim karenin her noktasından geçen sürekli eğri -, Hausdorff boyutu, Cantor kümesi (ternary set) vb. ile ilgilidir. Fraktal eğrileri ilk bulan İtalyan matematikçisi Guisseppe Peano'dur (1858-1932). Mandelbrot bu eğrileri doğadaki Brown hareketlerini ve galaksi dağılımını incelemede kullandı. Ç.N.)



Kollapsoidler Jean Pedersen, bir başka şey üzerinde deney yaparken konveks olmayan ve balon gibi söndürülebilen (kollapsibl) çok yüzlüler buldu.



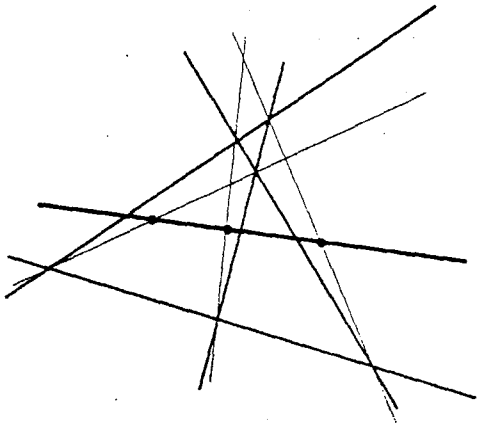
Bir 20 yüzlünün (ikosahedron) (veya bir 12 yüzlünün - dodekahedron - sonuç farketmez) her kenarı yerine tabansız bir piramid konulduğunu hayal edin. Kaybolan kenarın yerini piramidin köşegenlerinden biri almıştır. Her tabansız piramid yukarıdaki şekilde ortada görülen ağa sahiptir ve yukarıda sağda görülen yöntemle 30 tanesi birbirine tutturulmuştur. Bunun sonucu aşağıdaki polar kollapsoid ortaya çıkar.



Referans: Jean Pedersen, Collapsoids, Math Gazette, No: 408, 1975.

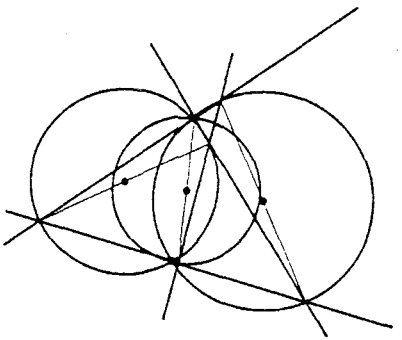
Komple dörtgen Herhangi 4 doğru, 6 noktada kesişerek bir komple dörtgen (kuadrilateral) oluşturur. Komple dörtgenin "normal" dörtgenden farklı olarak üç köşegeni vardır. Bu köşegenlerin orta noktaları aynı doğru üzerindedir. (Bir dörtgenin karşılıklı kenarlarını uzatarak dörtgen dışında kesiştirirseniz 4 doğru 6 noktada kesişmiş olur. Durum iki dar açıyı veya iki V harfini kesiştirmeye benzer: bir dörtgen oluşur; dörtgenin 4 köşesine ek olarak iki dar açının veya 2 V harfinin 2 köşesi de vardır; hepsi 6 köşe yapar. Şekilde köşegenlerin (açık renk) orta noktaları gösterildiğinden 3 köşegene ait 6 köşeyi görebilirsiniz. Söz konusu olan dört doğru, koyu renkle çizilmiştir. Ayrıca köşegenlerin ortasını içeren üç noktalı bir doğru vardır. Komple dörtgen konkavdır. Ç.N.)

Newton şunu gösterdi: Bir komple dörtgen içine bir konik çizilirse, koniğin merkezi, köşegenlerin ortasını birleştiren doğru üzerindedir.

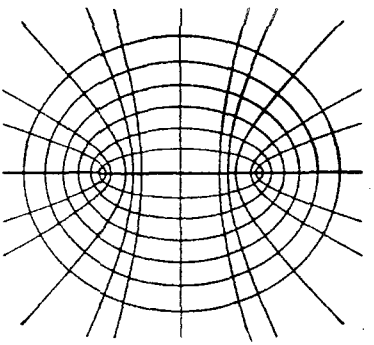


Dört doğru 4 üçgen oluşturur; bu üçgenlerin ortosentrları (yüksekliklerin kesişme noktası), köşegenlerin orta noktalarını içeren doğruya dik bir doğru üzerinde bulunur. Üçgenlerin çevrel çemberleri bir noktada kesişir.

Plücker şunu kanıtladı: Sözkonusu 3 köşegeni çap kabul eden 3 daire iki noktada kesişir. Bu iki nokta, 4 üçgenin ortosentrlarını birleştiren doğru üzerinde bulunur.

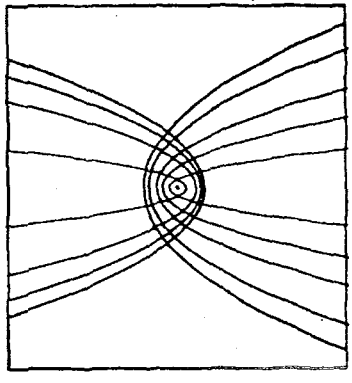


Konfokal konikler İki nokta verildiğinde bu iki noktayı odak kabul eden sonsuz sayıda elips ve hiperbol vardır.

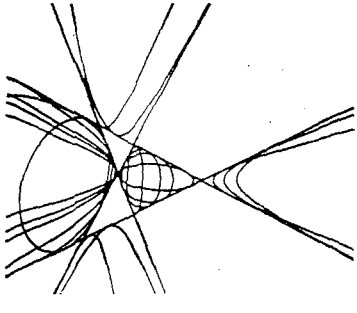


Hiçbir elips bir diğer elipsi kesmez; hiçbir hiperbol de bir diğer hiperbolü kesmez. Fakt her elips her hiperbolü keser ve keserken dik açıyla keser.

Bir nokta ve o noktadan geçen doğru verilirse, noktayı odak ve doğruyu eksen alacak paraboller iki sonsuz küme oluşturur. Bir kümenin her parabolü diğer kümenin her parabolüne diktir.



Konik kalemleri 5 noktadan geçen veya 5 doğruya teğet olan tek bir konik vardır. 4 doğruya teğet sonsuz sayıda konik vardır.



Dört doğrunun düzlemde belirlediği 11 bölgeden yalnız beşi, dört doğrunun herbirine değen bir konik içerir. Paraboller yalnız sol bölgede belirir, burada elipsler ve hiperbolün parçaları da bulunur. Kapalı tek dörtgen bölge yalnız elipsler içerir.

Kostik (bir dairenin kostiği) Kostikler optiğin bir branşı olarak 1682'de Tschirnhausen tarafından incelendi.

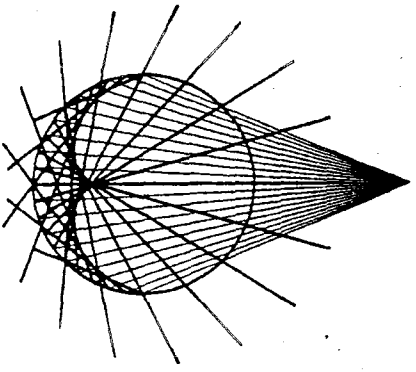
Belli bir eğri ve belli bir ışık kaynağı verilmiş olsun. Işık kaynağından gelerek eğriden yansıyan veya eğride kırılan ışınlar, kostik denen yeni bir eğriye zarf (bürüm, anvelop) oluştururlar (zarf: bir eğriler takımının her bir öğesine teğet olan eğri. Ç.N.)

Dairenin yansıma kostiği, kabaca çay dolu bir fincanın içine düşen bir ampul ışığının sıvı yüzeyinden yansımasıyla gösterilebilir.

Yansımayla oluşan kostik, genellikle bir **limasondur**; buna Pascal helezonu, salyangoz (limason) eğrisi veya Pascal'ın limasonu da denir (Bkz. Pascal salyangoz eğrisi).

[Pascal limasonu: a yarıçaplı bir dairenin çevresi üzerinde bir O noktası alıp buna **kutup** diyelim. Elimizde bir L uzunluğu olsun. O'dan başlayan bir doğru daireyi P'de kessin. Doğru üzerinde PM1 = PM2 = L olacak şekilde M1 ve M2 noktaları alalım. M1 ve M2'lerin geometrik yerine Pascal limasonu denir. Bu eğriyi ünlü Fransız matematikçisi Blaise Pascal'ın babası Etienne Pascal bulmuştur. Eğriye bu adı Pascal'ın arkadaşı Roberval vermiştir. Eğrinin denklemi şudur: $(x^2+y^2-ax)^2 = L^2(x^2+y^2)$. Limason çeşitli şekiller alabilir: 1) L: $a < 1$ ise O noktasında temas eden içiçe iki ovalimsi kapalı eğri oluşur (ilmik eğrisi). 2) L: $a = 1$ ise kalp biçimi eğri (kardioid) oluşur. 3) $1 <$ L: $a < 2$ ise O'ya yakın hafif bir girinti gösteren ovalimsi kapalı bir eğri oluşur. 4) L: $a = 2$ ise oval'e yakın, girintisiz bir eğri oluşur. Ç.N.]

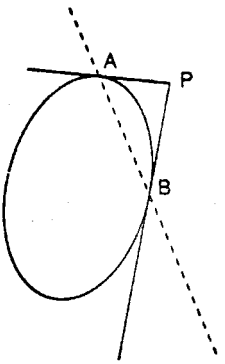
Işık kaynağı için 3 özel hal vardır: Işık kaynağı sonsuzdaysa kostik bir nefroid'dir (böbrek biçimi eğri); ışık kaynağı daire üzerinde ise kostik bir kardioid'dir (kalp biçimi eğri); ışık kaynağı dairenin merkezindeyse kostik dairenin merkezidir.



Yukarıdaki resimde ışık kaynağı, daire dışında iken (en sağda) daire çevresinden yansımalarla oluşan bir daire kostiği görülüyor. Yansımalarla oluşan kostikler evolüt (develope, eğeç) olarak da düşünülebilir. Resimdeki eğri, kutbu ışık kaynağı olan bir limason'un evolütüdür.

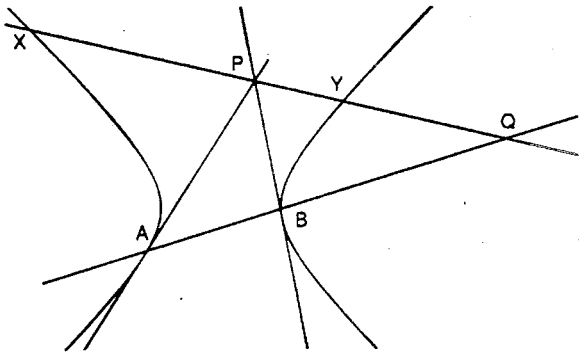
[Kostik belli bir eğride yansıyan veya kırılan ışınların zarfıdır. Yansıyan ışınların kostiğine katakostik, kırılan ışınların kostiğine diyakostik denir. Örneğin bir yarım daireden yansıyan paralel ışınların katakostiği bir episikloid parçasıdır. Daha yoğun bir ortamda bulunan bir A noktasından çıkan ve düz bir çizgi boyunca kırılan ışınların diyakostiği bir astroid parçasıdır; A´ köşe noktasının (cusp) doğruya uzaklığı, A'nın doğruya uzaklığının 1/n katıdır (n kırma indisi). Ç.N.]

Kutup (pol) ve polar Eğer bir koniğe A ve B'de teğet olan doğrular P'de kesişirse, P'ye koniğe göre AB çizgisinin kutbu, AB doğrusunun da P noktasının poları denir.

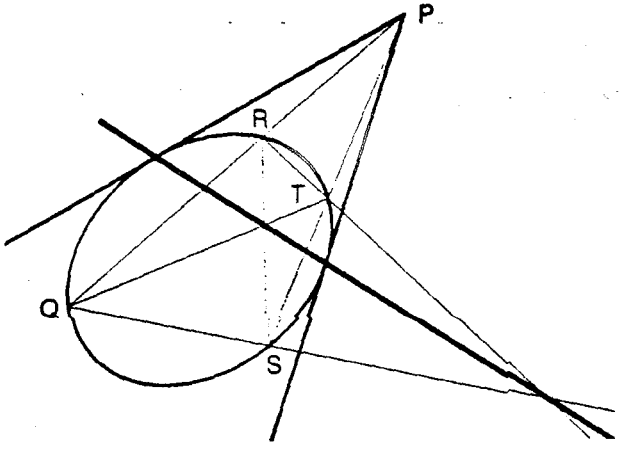


Kutup ve polar, eğri üzerindeki bir noktayla bu noktadan eğriye teğet çizilmesi fikrinin genelleştirilmesidir. Her noktanın genel cebirsel bir eğriye göre bir poları ve her doğrunun bir kutbu vardır. Nokta eğrinin üzerindeyse kutup bu noktadaki teğettir.

Kutup ve polarların birçok özelliğinden üçünü vereceğiz: P'den geçen bir doğru, koniği (burada hiperbol) X ve Y'de, ve AB polar çizgisini Q de keser. Bu durumda X ve Y ile P ve Q *harmonik eşleniklerdir* (Bkz. Harmonik oran). Bunun anlamı şudur: X ve Y noktaları PQ doğru parçasını içten ve dıştan aynı oranda böler. P ve Q noktaları da XY'yi aynı oranda böler.

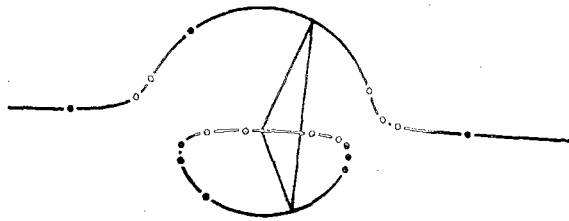


P kutbundan geçen iki doğru, koniği (burada elips) Q ve R ile S ve T noktalarında keser. QT ve SR doğruları ve QS ve RT doğruları polar üzerinde kesişir.



Eğer X'in poları Y'den geçerse, Y'nin poları da X'den geçer. Bu husus konik içindeki bir noktanın polarını bulmaya yarar.

Kübik ve üçgen (Kübik = Üçüncü dereceden eğri; yani en yüksek üs olarak x^3 içeren ifade). 19. yüzyılın ikinci yarısında ve 20. yüzyılın başlarında matematikçiler "Üçgenin Modern Geometri"si denen şeye büyük ilgi duymaya başladılar. Üçgende bulanın adıyla anılan birçok yeni özellik bulundu: Brocard noktaları, Gergonne noktası, Nagel noktası, Lemoine noktası, Tucker dairesi, Neuberg dairesi, Fuhrmann daireleri, Kiepert hiperbolü vb.



Şekilde onların gayretlerinin önemli bir sonucu görülüyor. Kübik bir eğri ve onun tek asemptotu. Bu eğri sıradan bir üçgenin en az 37 önemli noktasından geçmektedir; bu noktalardan 21'i şekilde gösterilmiştir. Kübiğin üzerinde bulunan noktalardan bazıları şunlardır: Üçgenin köşeleri, köşelerin karşıt kenara göre ayna hayalleri, üçgenin her kenarı üzerinde içe ve dışa doğru çizilen eşkenar üçgenlerin 6 köşesi, ortosentr (yüksekliklerin kesişme noktası), üçgenin iç ve dış (çevrel) çemberlerinin merkezi ve 1 kenara içten ve 2 kenara dıştan teğet dairelerin merkezleri.

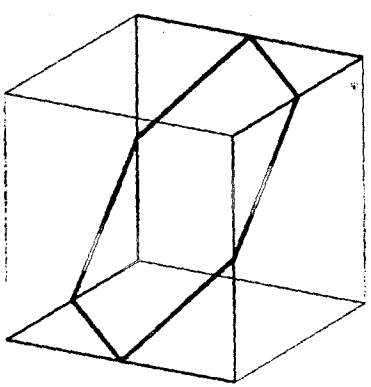
Bu son 4 noktadan kübiğe çizilen teğetlerin hepsi, asemptota paraleldir. Kübiğin diğer özellikleri arasında şu sayılabilir; herhangi bir köşeden geçen bir doğrunun kübiği kestiği iki nokta, diğer iki köşeden geçen bir çemberin üstünde bulunur.

Küp Platonik veya düzgün katı cisimlerin en iyi bilineni küptür. Küpün 6 yüzü, 8 köşesi ve 12 kenarı vardır. (Katı cisimler için Euler formülü gereğince daima yüz sayısı + köşe sayısı = kenar sayısı + 2. Ç.N.) Küpün 13 simetri ekseni vardır; 3'ü karşılıklı yüzlerin merkezlerini birleştiren, 4'ü karşılıklı köşeleri birleştiren ve 6'sı karşılıklı kenarların ortalarını birleştiren doğrular. Küp aynı zamanda bir zono-

hedron'dur. (Zonohedron: Sonlu sayıda bir çok segmentin toplamı olarak ifade edilebilen çok yüzlü. Zonohedron'un kendisinin ve bütün yüzlerinin simetri merkezleri vardır. Her zonohedron yeterince yüksek boyutlu bir kübün projeksiyonudur-izdüşümüdür. Ç.N.) Ayrıca Bkz. zonohedron.

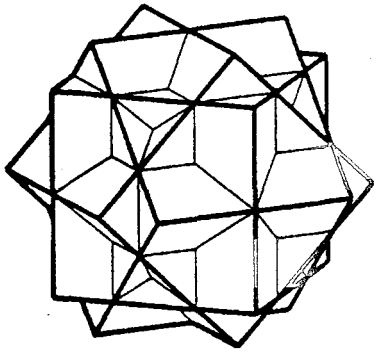
Her küp, komşusu küpün tam yüzüne karşılık gelince, özdeş küpler boşluğu en doğal şekilde doldururlar. Şunu da belirtmeliyiz ki küpler boşluğu sonsuz şekilde doldurabilir. Küp tabakaları birbirleri üzerinden kaymakla kalmaz; her tabakadaki küpler sonsuz şekilde dizilebilir. Boşluk doldurabilecek katı cisimlerin hiçbirinde bu esneklik yoktur.

Bir küp alıp karşıt köşeler arasındaki kenarları yok ediniz. Kalan kenarların orta noktaları düzlemsel düzgün bir altıgenin köşeleridir. Bir boşluk doğal bir şekilde küplerle doldurulmuş olsun. Bir küpte düzenli bir altıgen yaratan düzlem, bir küp yığınını kestiğinde, düzenli altıgen ve eşkenar üçgenlerden yaratılmış yarı düzgün bir mozaik oluşturacaktır. Düzgün bir altıgen oluşturmak için bir küpü ikiye bölmenin dört yolu vardır. Bu 4 altıgenin altışar kenarı, bir küp-sekiz yüzlünün (kübo-oktahedron) 24 kenarıdır.



Küpün eşleği (dual) düzenli bir 8 yüzlüdür (oktahedron); Bu 8 yüzlüyü elde etmek için, küpün her yüzünün merkezi, küpün diğer yüzlerinin merkezleriyle birleştirilir.

Aşağıdaki resimde görülen birbirlerinin yüzlerini çaprazlayarak içiçe geçmiş 3 küptür. Her küp çifti, birbirine karşıt yüzlerden geçen bir simetri ekseni içerir.



Küpün duplikasyonu (Delian problemi veya Delos problemi): M.Ö. 430 yılında Atina'da bir veba salgını olmuştu. Atinalılar Delos şehrinde Tanrı Apollo'nun falcısına danıştılar. Falcı, küp biçimindeki mihrabı iki kat büyütmelerini söyledi. Atinalılar derhal her kenarı, iki kat uzattılar; fakat vebadan ölümler daha da arttı (tabii küpün hacmi 2 değil 8 kat artmıştı).

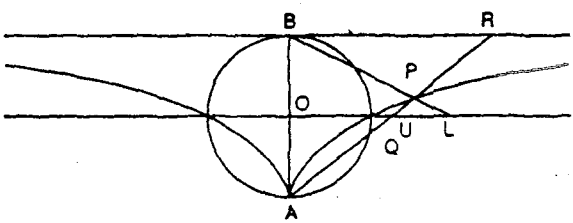
O zamandan beri $\sqrt[3]{2}$ uzunluğunu oluşturabilmek problemine Delos problemi denir. Gerçi yine o çağlarda Hintliler de mihrapları için bu gibi problemler düşünüyorlardı.

Hemen anlaşıldı ki problem aslında iki uzunluk arasında iki "orta orantılı" (mean proportional) bulmaktan ibaretti. Bir diğer deyişle a ve b verildiğinde x ve y gibi öyle iki orta orantılı bulalım ki $x/a = y/x$

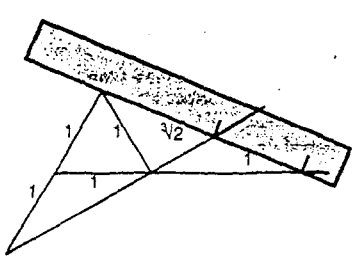
= b/y olsun. O zaman $(x/a)^3 = b/a$ olur.

Ne yazık ki Grekler yalnız cetvel ve pergel kullanarak bu çözümü bulamadılar. Buldukları birçok çözüm usa vurmaya veya kendi buldukları özel eğrilere dayanıyordu (bu eğriler de cetvel ve pergelle çizilemiyordu). Bu eğrilerden biri Nicomedes'in konkoidi (kavkı eğrisi), diğeri Diocles'in sissoididir (sarmaşık eğrisi).

Genel olarak bir sissoid herhangi iki eğri ve sabit bir noktayla oluşturulabilir. Diocles'in sissoidi bir daire sissoidi (merkez O) ve daireye B'de teğet bir doğrudur. OB'den geçen çapın diğer ucu A'dır. A'dan geçen bir doğru daireyi Q'da, teğeti R'de kessin. Bu doğru üzerinde AP=QR alalım. P'nin geometrik yeri sissold eğrisidir. Eğer dairenin yarıçapı 1 birimse $OU^3 = OL$'dir.

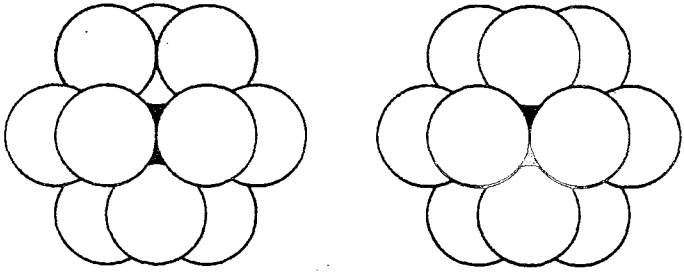


Delos probleminin basit bir çözümü şudur; bir cetvelin üzerinde birbirinden 1 birim uzak iki nokta işaretlenir. Şekil üzerinde diğer birimler gösterilmiştir. Cetvel elle eşkenar üçgenin tepesinden geçecek şekilde ayarlanır, öyle ki cetvelin üzerindeki 1 birim sağdaki iki doğru arasında kalır. Eşkenar üçgenin tepesi ile sol birim çizgisi arasındaki mesafe $\sqrt[3]{2}$ birimdir.

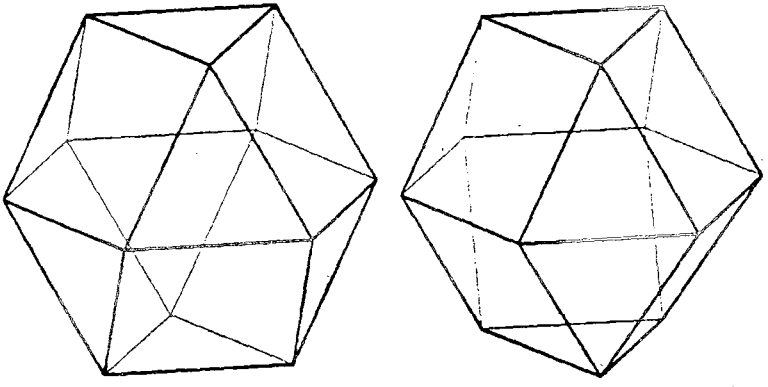


Referans: E.H. Lockwood, A Book of Curves, Cambridge University Press, Cambridge, 1961; H. Dorrie, One Hundret Great Problems of Elementary Mathematics, Dover, New York, 1963.

Küre paketleme Düz bir yüzey üzerinde özdeş kürelerden bir tabaka oluşturun ve sonra bunun üzerine bir diğer küre tabakası örtün; öyle ki her yeni küre, alterne ederek birinci tabakadaki her iki çukurdan birine otursun. Bu yolla benzer tabakalar eklemeye devam edin. Sonuç özdeş kürelerin en yoğun biçimde paketlenebilmesidir; küreler sınırladıkları boşluğun $\pi/3\sqrt{2}$'sini, yani 0.7403'ünü kaplar.



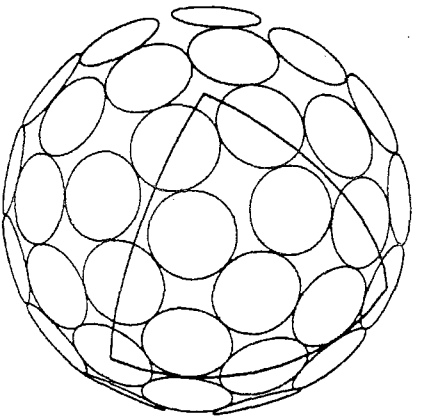
Üçüncü küre tabakasını oluştururken bir tercih olanağımız vardır. Küreler öyle çukurlara konabilir ki ya birinci tabakadaki kürelerin tam üstündedirler, ya da birinci tabakada bulunan ve ikinci tabakanın örtmediği çukurların üstündedirler.



Her durumda ikinci tabakadaki bir küre, 12 diğer küreye değer. İlk metod en simetrik olanıdır, 12 çevreleyici kürenin merkezleri bir küp-sekizyüzlü oluşturur. İkinci metotda küp-sekizyüzlü, ekvator hizasında kesilmiş ve bir yarıya rotasyon yaptırılarak ikinci çokyüzlü elde edilmiştir.

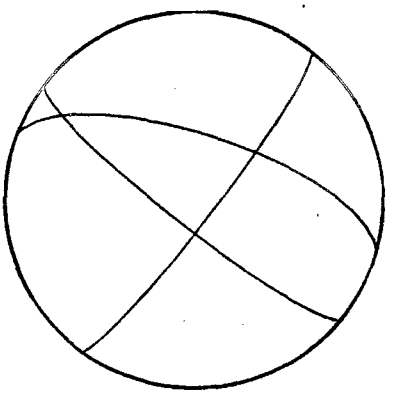
Her yeni küre tabakası iki şekilde oluşturulabileceğinden, uzayı eş yoğunlukta dağılmış kürelerle doldurmanın sonsuz olasılığı vardır.

Kürenin üzerinde daireler Bir kürenin yüzeyini kaplayabilmek için N özdeş daire ne kadar büyük olmalıdır? N'in belli değerleri için, örneğin N düzgün bir çokyüzlünün yüz sayısı ise, çözüm basit ve tamamen simetrikdir. Örneğin bir sekiz yüzlünün 8 yüzüne karşılık olarak, herbiri küre yüzeyinin sekizde biri üzerinde ve herbiri diğer üçüne teğet, 8 özdeş daire çizilebilir.



N'in diğer değerleri için, dairelerin dizilişi daha asimetrikdir ve çözüm çok daha zordur. Şekilde 64 daire için çözüm görülüyor. Küresel üçgen kutbun yerini gösteriyor (etrafını 4 daire çeviriyor); ekvator, kutba karşıt taraftadır.

Küresel geometri Euclid'in olmayan geometrinin bir şeklidir; burada eğrilik sabit ve pozitiftir.

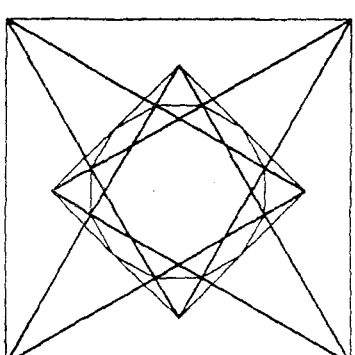


Düz çizgiler büyük çemberlerdir. Herhangi iki doğru 2 noktada kesişir; paralel çizgiler yoktur. Mesafeler, büyük çember yayı boyunca iki nokta arasında ölçülen uzaklıktır ve iki doğru arasındaki açı, bunlara karşılık olan büyük çemberler arasındaki açıdır. *Hiperbolik geometride* olduğu gibi, bir üçgen açılarıyla tanımlanır ve benzer üçgenler yoktur.

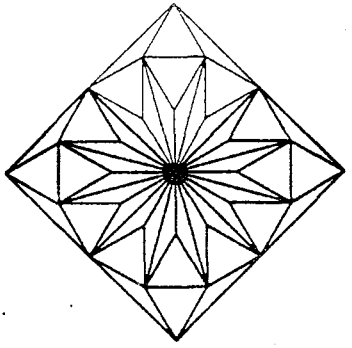
Üçgenin açılarının toplamı iki dik açıdan daha büyüktür ve açıların toplamıyla π arasındaki fark, alanın ölçüsüdür (hiperbolik geometride olduğu gibi). Şekilde sentral küresel üçgenin açıları $\pi/2$, $2\pi/5$ ve $\pi/6$ ise üçgenin alanı $R^2(\pi/2+2\pi/5+\pi/6-\pi) = \pi R^{2/15}$'dir.

Gariptir ki eski Yunanlılara kadar geri giden küresel trigonometrideki çok eski sonuçlar, şimdi Euclid'in olmayan geometrinin doğru formülleridir!

Kürschak fayansı Bir kare alın ve karenin kenarlarını taban alacak şekilde içe doğru eşkenar üçgenler çizin. Üçgenlerin serbest köşelerinin oluşturduğu karenin kenarlarının orta noktalarını bulun. Bu noktalar ve üçgenlerin kenarlarının kesişme noktaları düzgün bir onikigenin köşeleridir. Serbest köşelerin yaptığı kare ve onun içindeki onikigen Kurschak fayansını oluşturur (ikinci şekil).



Bu fayans Kürschak teoremini ispatlamada kullanılabilir: Birim yarıçaplı bir daire içine çizilen düzenli bir onikigenin alanı 3'dür. (Birim kare içine çizilen diğer çokgenlerden yalnız karenin alanı rasyoneldir). Aşağıdaki şekil 16 eşkenar ve açıları 15°, 15° ve 150° olan 32 ikiz kenar üçgen içerir; karenin kuzey çeyreğinde 4 eşkenar ve 8 ikizkenar üçgen vardır. Bunların toplam alanı, onikigen ile kare arasında kalan alana eşittir.



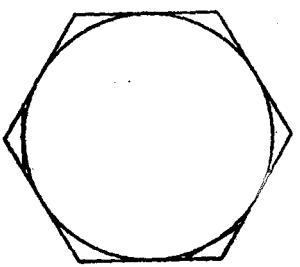
Düzgün onikigenin alanı 3'dür; bu, π'ye yakın bir sayıdır. Düzgün bir altıgenin çevresi de böyledir. I.J. Schoenberg şunu kanıtladı: Düzgün bir n-gen'in çevresi π'ye yakınsa, düzgün bir 2n-gen'in alanı da π'ye yakındır.

Referans: G.L. Alexenderson ve K. Seydel. Kurschak's tile, Mathematical Gazette, No: 421, 1978

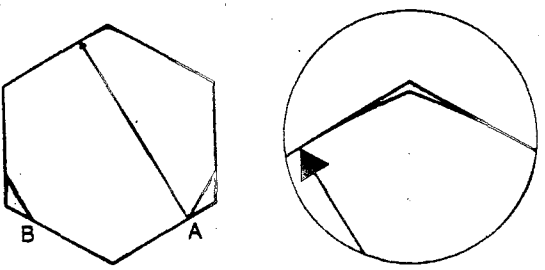
L

Lebesgue'in minimal problemi Çapı 1'den büyük olmayan herhangi bir noktalar kümesi düşünelim; bunu örtebilecek en küçük şeklin biçimi nasıl olmalıdır?

Kenarı $1/\sqrt{3}$ olan düzgün bir altıgen bu örtme işini yapabilir gözükmektedir; fakat 1920'de J.Pal kanıtladı ki tabanları iç daireye teğet iki taralı üçgeni keserek bu altıgeni küçültünce de aynı şey yapılabilmektedir. Bu iki üçgenin kaldırıldığı altıgene *"Pal'in evrensel örtüsü"* denir.

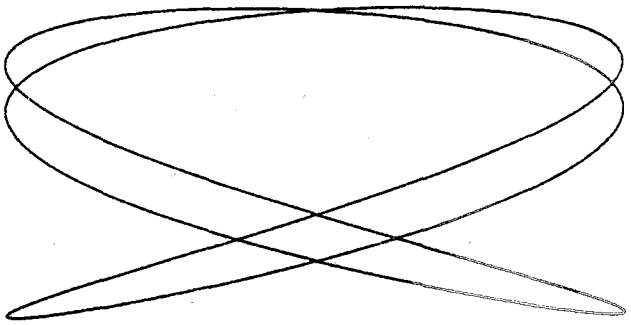


Daha sonra Roland Sprague bir küçük parça daha çıkartılabileceğini gösterdi. A merkez olmak üzere, karşı kenara değecek bir yay çizin; bu yay B merkezli benzer yayla altıgenin vertikal simetri ekseni üzerinde kesişir.



Referans: C. Stanley Ogilvy. Tomorrow's Math, 2nd ed., Oxford University Press, New York, 1972.

Lissajous şekilleri veya Bowditch eğrileri Bunlardan ilk kez 1815'te Nathaniel Bowditch ve sonra 1857'te Jules Antoine Lissajous sözetti.

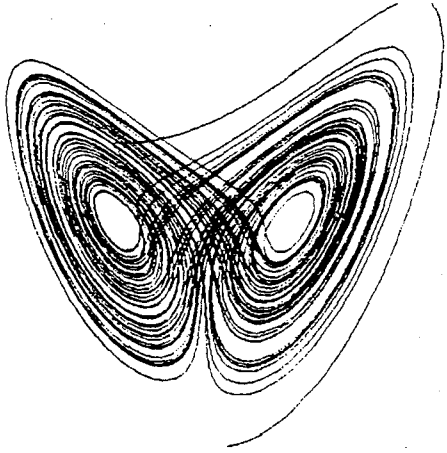


Lissajous şekli, birbirine dik iki yönde iki harmonik hareketin kombinasyonudur. Eğer periyodlar eşitse, eğri bir elipsdir. Bir periyod diğerinin iki katıysa eğri kuvartik'dir (4. dereceden). Bernouilli lemniskatı bu tip eğrilerin özel bir şeklidir.

Bu eğrilerin denklemleri şu şekildedir:

$x = a \sin (pt + q)$, $y = b \sin t$.

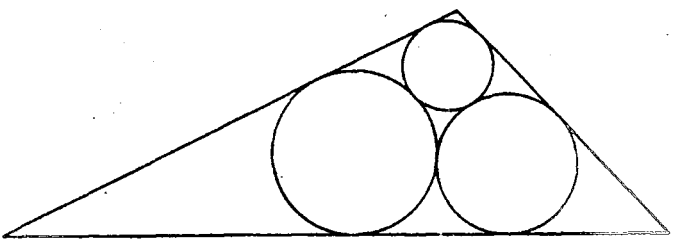
Lorenz atraktörü Massachussets Teknoloji Enstitüsü meteorolojistlerinden Edward Lorenz'ce bulunmuştur. Bu, alttan ısıtılan bir sıvı tabakasındaki harekettir; atmosferdeki bir hava tabakası da aynı şekilde davranmaktadır.



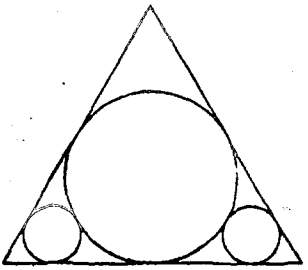
Şekil üç boyutlu uzayda bir noktanın çizdiği yolu göstermektedir. Sıfır zamanında sıfır noktasından başlar, bir ilmek etrafında defalarca döner, sonra diğer ilmek etrafında döner; sonra tekrar ilk ilmeğe döner vb. Bir ilmekten ötekine ne zaman geçeceği belirlenemez.

M

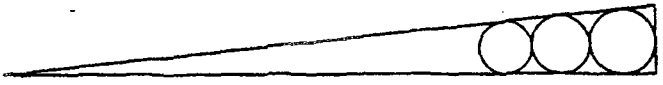
Malfatti Problemi 1803'de Malfatti şu soruyu sordu; mermer bir prizmadan toplam hacimce en geniş üç silindirik sütun nasıl çıkartılır? Matematikçiler derhal şunu buldu: Çözüm birbirine ve üçgen prizmanın üçgen kesitinin bütün kenarlarına teğet üç daire bulunmasıyla mümkündür. Bu problem birçok matematikçi tarafından çözüldü.



Sonra 1930'da şu gösterildi; bir eşkenar üçgende eğer kolonlardan biri iç daire (incircle) ve diğerleri ona teğet iki daha küçük daire olarak seçilirse, toplam daire alanında sağlanan artış çok az (üçgen alanının % 1'i) olsa bile, daha az mermer israf edilmektedir.



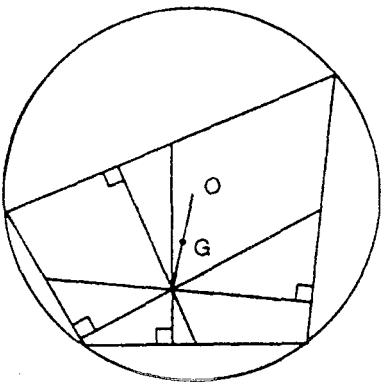
Otuzbeş yıl sonra (matematikçiler bazen çok yavaştır) Howard Eves ince uzun üçgenlerde şu çözümün en iyi olduğunu bildirdi:



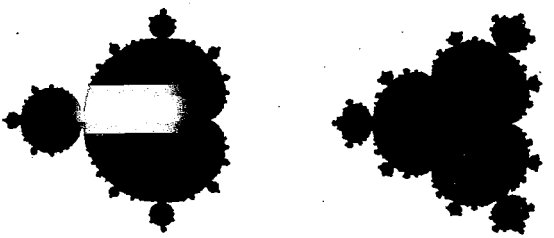
Nihayet 1967'de Michael Goldberg, bulunan ilk çözümün en iyi çözüm olmadığını kanıtladı; dairelerin alternatif dizilişlerinin birinde alan maksimum olmaktadır.

Referans: C. Stanley Ogilvy, Excursions in Geometry, Oxford University Press, New York, 1969.

Maltitüdler Bir dörtgenin kenarlarının orta noktalarından karşı kenara indirilen dikmelere maltitüd denir. Dörtgen bir daire içine çizilmişse, maltitüdler bir noktada kesişir ve kesişme noktası, daire merkezi O'nun, dört noktanın ağırlık merkezi G'ye göre simetriğidir.



Mandelbrot kümesi En basit Julia kümesini tanımlayan $z \rightarrow z^2+k$, aynı zamanda Mandelbrot kümesini tanımlar. (Bkz. Julia kümesi). Mandelbrot kümesi 1980'de, bir zamanlar Gaston Julia'nın öğrencisi olan Benoit Mandelbrot tarafından bulunmuştur. Her farklı sabit k kompleksi için, orijin ya sonsuza ya da sabit bir noktaya yönelecektir, ya da bir Julia kümesi içinde zıplayacaktır. z'nin sonsuza gitmediği bütün k değerleri Mandelbrot kümesini oluşturur. Farklı fonksiyonlar için benzer kümeler vardır. Şekilde solda Mandelbrot kümesi, sağda ise buna benzer z^4+k fonksiyonunun kümesi görülüyor.



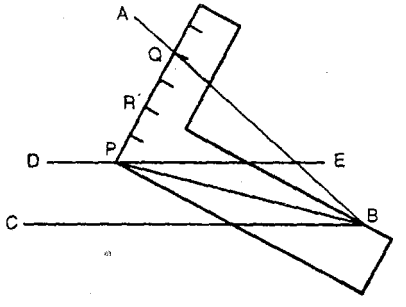
Görüldüğü gibi Mandelbrot kümesinin temel şekli bir kardioid'dir (kalp biçimi eğri.) Bu kardioid'e solda büyük, üstte ve altta küçük birer daire eklenmiştir. Kardioid ve bu küçük dairelerin üstünde daha küçük daireler vardır. Jonathan Swift'in dizelerinde olduğu gibi:

Doğa bilimciler bakarlar ki bir pire,
Bu pirenin üstünde daha küçük pireler,
Onların da üstünde daha küçükler
Isıra ısıra *sonsuza* gider.

Mandelbrot kümesinin sınırı bir fraktaldir. Fraktallerde belli bir motif (desen) tekrar eder. (Bu durum matryoşka [anacık] denen ünlü Rus tahta bebeklerini andırmaktadır. Her bebeğin içinden kendinden daha küçük, fakat kendisinin aynı bir bebek çıkar. Bebek sayısı sonsuza giderse, fraktal eğriye veya Mandelbrot kümesine benzer bir durum oluşur. Ç.N.) z'nin sonsuza gidiş hızı bilgisayar ekranında bir renk veya grinin tonu olarak belirtilebilir. İmge 170 defa büyütülünce, kümenin simetri ekseni boyunca, dairesel ek bölgenin solundaki bir noktada böyle bir etki görülebilir.

k'nın farklı değerleri için, (O, O) noktasının yolu yerine diğer bir noktanın yolunu izleseydik sonuç ne olurdu? Sonuç Mandelbrot kümesinin deforme bir şekli olurdu.

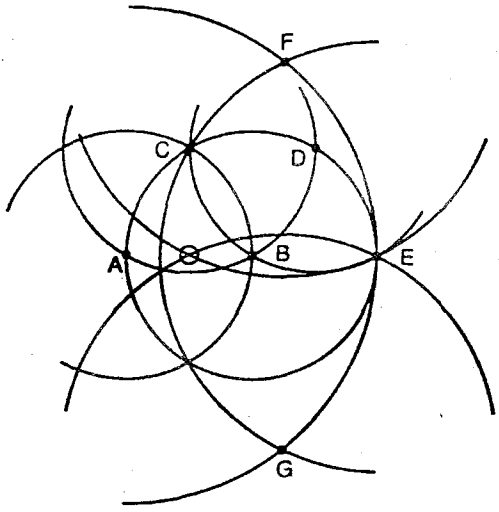
Marangoz cetveliyle açıyı üçe bölme Yalnız cetvel ve pergelle çözülemeyen üç klâsik Grek probleminden biri bir açıyı üçe bölmektir. Bu marangoz cetveli ile başarılabilir.



Üçe bölünecek açı ABC'dir. Önce marangoz cetvelinin geniş kolunu kullanarak BC'ye paralel DE'yi çizin. Sonra marangoz cetvelini öyle koyunuz ki bir kenarı B'den geçsin ve dış köşesi DE üzerinde bulunsun. Böylece PQ'nün uzunluğu geniş kolun genişliğinin iki katı olur. PQ'nün ortası R'yi işaretleyin. BP ve BR, ABC açısını üçe böler.

Referans: H.T. Scudder, How to trisect an angle with a carpenter's square. Amer Math Monthly, Mayıs 1928.

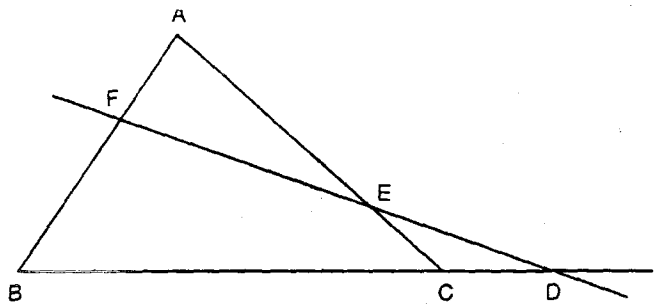
Mascheroni çizimleri Mohr ve Mascheroni şu şaşırtıcı buluşu yaptı; cetvel ve pergelle yapılan her çizim, yalnız pergelle de yapılabilir. Önceden merkeziyle beraber sabit bir daire, merkezi belli bir yay (çok küçük de olabilir), ya da merkezi belirsiz, kesişen iki sabit daire çizilmek şartıyla, bu çizimleri yapmaya yalnız cetvel de yeter.



Örneğin AB'nin orta noktasını bulmak için, önce AB yarıçaplı ve A ve B merkezli daireleri çizin. Sıra şimdi C merkezli ve AC yarıçaplı ve D merkezli ve DB yarıçaplı daireleri çizmeye gelmiştir. Bundan sonra A merkezli ve AE yarıçaplı ve E merkezli ve EC yarıçaplı daireleri çizin. Şimdi F ve G merkezli ve E'den geçen daireler AB'nin orta noktasında kesişir.

Referans: H. Steinhaus, Mathematical Snapshots, 3rd ed., Oxford University Press, 1969.

Menelaus teoremi İskenderiyeli Menelaus, Küresel Trigonometri adlı yapıtında bu teoremi ispat etti.



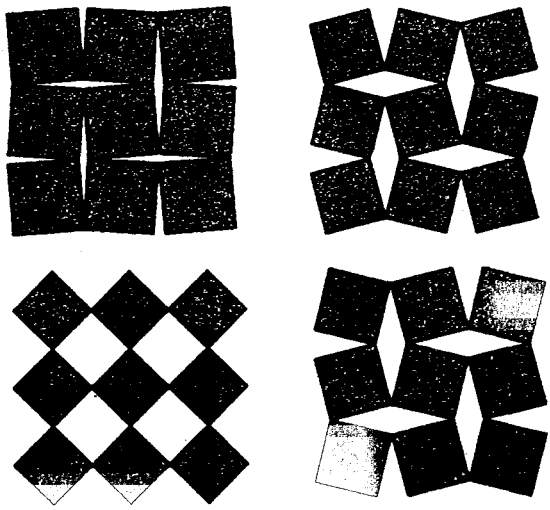
ABC herhangi bir üçgen olsun ve DEF doğrusu bu üçgenin üç kenarını da kessin; bu durumda:

BD/DC . CE/EA . AF/FB = -1'dir.

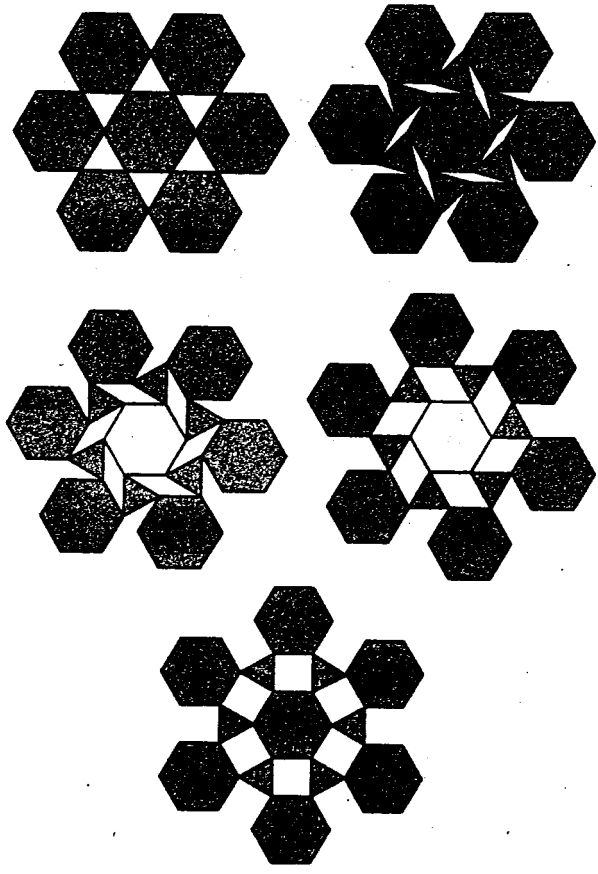
Sonuç negatiftir; çünkü DEF kenarlardan birini dıştan kesmektedir. Şekilde D, BC'yi dıştan kesmiştir ve DC, C'den geriye doğru ölçülmüştür; bu nedenle negatif sayılmıştır. Bunun tersi teorem de doğrudur.

Menelaus teoremi herhangi bir çokgene genellenebilir.

Menteşeli mozaikler Bazı mozaikler, şekilde gösterildiği gibi köşelerinden menteşelenmiş katı parçalardan yapılmış olabilirler; bu katı parçalar arasında boşluklar bulunur. Bu mozaikler açılabilir (veya kapanabilir). Şekilde karelerden ve kareler arası rombus (eşkenar dörtgen) biçimi boşluklardan oluşmuş bir mozaik görülmektedir. Sol alt şekilde mozaik tamamen kapanmış, sağ alt şekilde tamaman açılmıştır; üstteki iki şekil bu iki durum arasındadır. Mozaik iyice açılırsa rombus biçimi boşluklar, taban tabana vermiş iki eşkenar üçgen şeklini alır.

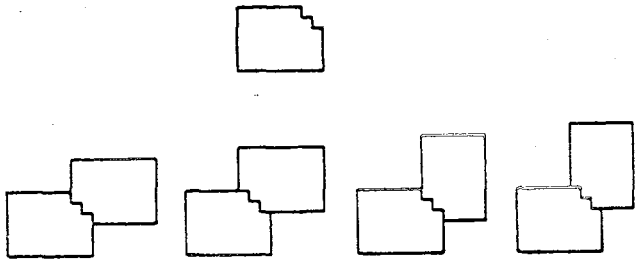


Altıgenler ve üçgenler de benzer şekilde menteşelenebilir. Mozaik açılırsa altıgen, kare ve üçgenler arası boşluklar önce rombus, sonra kare şeklini alır. Eşkenar üçgenler rotasyonlarına devam ederse, her üçgen 180° döndükten sonra üçgen ve altıgenlerden oluşmuş bir mozaiğin kapalı şekli oluşur.

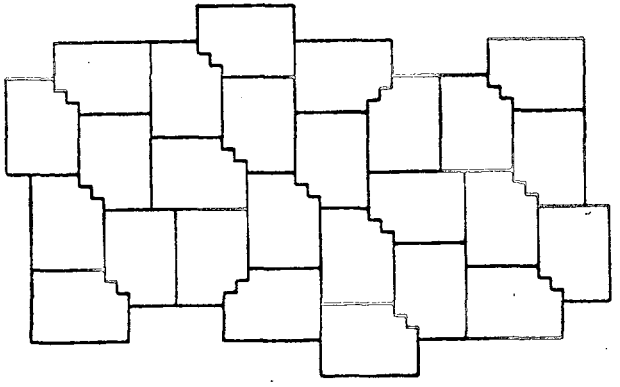


Referans, David Wells, Hidden Connections, Double Meanings, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

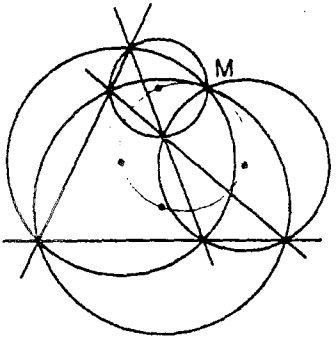
Merdivenvari fayanslar Bir köşesi merdiven şekline getirilmiş fayanslar bir düzlemi döşeyebilir; bunun için önce iki dikdörtgenin zigzag köşeleri kenetlenir. Bu kenetlenme dört şekilde yapılabilir.



Bu çifte dikdörtgenlerle bir düzlemi döşemenin birçok yolu vardır. Gördüğünüz bunlardan biridir. (Aynı yöntemle bir köşesi 45° açıyla kesilmiş dikdörtgenler kullanılarak da bir düzlem döşenebilir.)



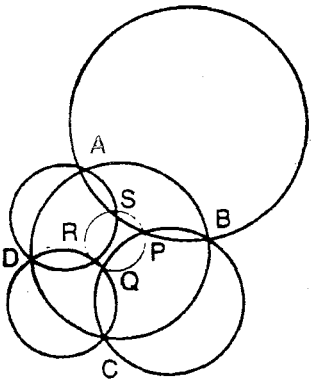
Miquel noktası Dört genel doğru, dört üçgen oluşturur; bunların çevrel daireleri aynı noktada (M) kesişir (Miquel noktası). Bu nokta, her dört doğruyu da değen parabolün (böyle tek bir parabol vardır) odak noktasıdır. Çevrel dairelerin merkezleri de Miquel noktasından geçen bir daire üzerinde bulunur.



Eğer 5 doğru ile işe başlarsak ne olur? Bunları dörder dörder alırsak 5 Miquel noktası oluşur. Bu 5 noktanın, hepsi *Miquel dairesi* denen daire üzerinde bulunur. Ayrıca her 4 doğru kümesi, bir çevrel daire yaratır ve bu 5 dairenin hepsi aynı noktadan geçer.

İşe 6 doğruyla başlanırsa, her beşli grup bir Miquel dairesi yaratır ve doğal olarak bütün bu Miquel daireleri ortak bir noktadan geçer vb.

Miquel teoremi Bir daire çizin ve onun çevresi üstünde 4 nokta belirleyin: A, B, C ve D. A ve B'den, B ve C'den, C ve D'den ve D ve A'dan geçen daireleri çizin. Bu yeni dairelerin dört kesişme noktası da bir başka daire üzerinde bulunur.



Bu şekil simetriktir. İşe ABCD dairesiyle başladık, fakat diğer dairelerin herhangi biriyle başlayabilirdik. Noktaları şöyle dizersek bu simetri daha iyi belli olur:

A B C D

S P Q R

Üst sıradan iki harfi 6 şekilde seçebiliriz: AB, AC, AD, BC, BD, CD. Bunlara ikinci sırada altlarındaki harfleri eklersek elde ettiğimiz 4 nokta aynı daire üzerinde olur:

ABSP, BCPQ, CDQR ve DASR.

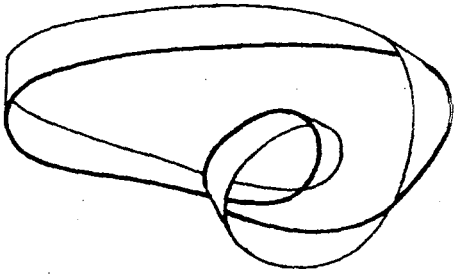
Möbius şeridi İnce uzun bir dikdörtgen şeklinde bir kâğıt şerit kesin ve şeridin dar uçlarından birini 180° burarak uçları yapıştırın. (Uzun kenarları da yapıştırabilirdiniz; fakat bu daha zor olurdu). Bir Möbius şeridi yapmış oldunuz. Bu 1865'te August Möbius tarafından tanımlanmış olan Möbius şeridir.

Bu şeridin tek bir kenarı ve tek bir yüzü vardır. Sola bakan ve sağa bakan olmak üzere iki şekli vardır; bunlar ancak dört boyutluyken birbirine dönüştürülebilir.

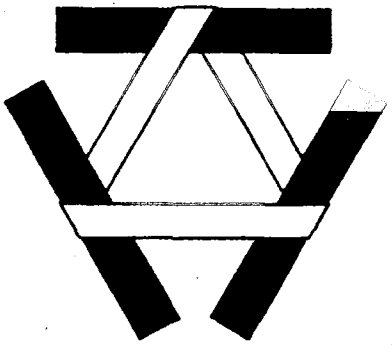
Yüzey üzerinde herhangi bir noktadan başlayın ve kenarı aşmadan uzun bir çizgi çizin. Yolunuzun yarısında başladığınız noktadan geçecek, fakat kâğıdın öteki tarafında olacaksınız; bir tur daha yaptıktan sonra, başladığınız yüze ve noktaya döneceksiniz.

Goodrich Otomobil Tekerleği Firması bir ucu yarı (180°) döndürülmüş (Möbius tipi) bir fabrika kayışının patentini almıştır; böyle bir kayış tek yüzlü olduğundan, her iki yüz de aynı miktar aşınacaktır.

Bir Möbius şeridini, kenarlarına paralel düz bir çizgi boyunca, uzunlamasına kesersek iki değil tek bir halka elde ederiz. Bu halka *dört* yarım dönüş yapmış olacaktır; adeta uzun dikdörtgenin uçlarına birleştirilmeden önce iki tam dönme yaptırılmıştır. Kenarlar şimdi iki ayrı eğridir; bunlar birbirine halkalanmışsa da düğümlenmemiştir.



Silindir biçiminde bir kâğıt şerit iki cetvel arasında gerilebilirken Möbius şeridi üç cetvel arasında gerilebilir.

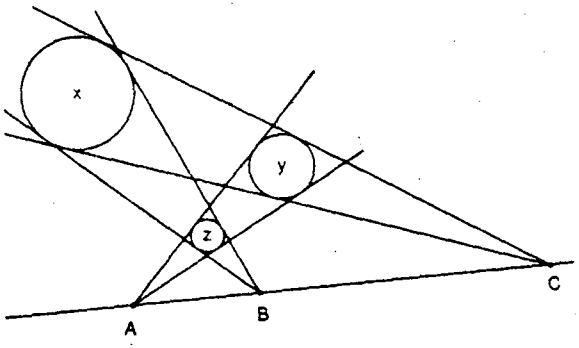


Monge teoremi x, y ve z gibi üç daire ikişer ikişer (x ve y, x ve z, y ve z) alınıp dış ortak teğetler çizilirse, teğetlerin A, B ve C kesişme noktaları aynı doğru üzerindedir. İç teğetlerin kesişme noktaları da dahil edilirse (y-z, z-x ve x-y daire çiftlerine karşılık olan iç teğetlere L, M ve N diyelim) AMN, BNL ve CLM de düz çizgilerdir.

L.A. Graham bu problemi ilk defa mühendis John Edson Sweet'in bulduğunu anlatır:

> 'Bir an sustu ve sonra şöyle dedi: "Evet, bu açıkça belli." Arkadaşı şaşırdı ve bir açıklama istedi. Prof. Sweet şöyle cevap verdi: "Bir düzlem üzerinde üç daire yerine üç top düşün. Teğet çizmek yerine her top çiftinin etrafında bir koni olduğunu hayal et. Üç koninin de tepeleri bu düzlem üzerinde olacaktır. Topların üzerine bir düzlem daha koy. Bu düzlem üç koniye de teğet olacak ve konilerin tepelerini içerecektir. Demek ki üç koninin de tepeleri hem alt, hem üst düzlem üzerinde olacaktır; bu ise koni tepelerinin iki düzlemin kesiştiği doğru üzerinde olmaları demektir."

Bu problemi ilk kez d'Alembert ortaya attı; problemi Monge, Sweet gibi çözdü.

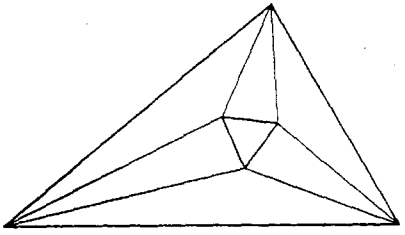


Bu problemin üç boyutlu analogu şöyledir: 4 küreyi ikişer ikişer sarmalayan konilerin tepeleri aynı düzlem üzerinde bulunur. Koniler öyle seçilir ki kürelerle koni tepeleri aynı tarafta olur.

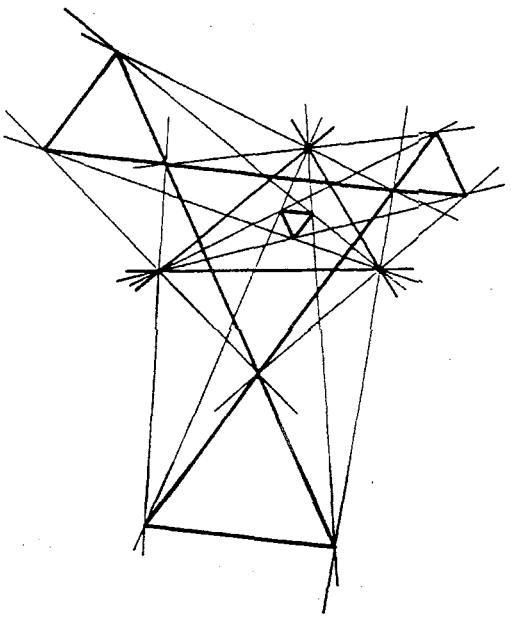
Referans: I.A. Graham. Ingenious Problems and Methods, Dover, N.Y., 1959.

Morley üçgeni Frank Morley 1899'da kardioid'leri incelerken çok olağanüstü bir problemle karşılaştı. Kalem ve kâğıtla işi olan herkes buna daha önce rastlamış olabilir.

Herhangi bir üçgen alıp açılarını üç eşit parçaya bölün. Bu doğruların kesiştiği üç nokta bir eşkenar üçgen oluşturur.



İlginçtir ki üçgenin dış açıları da üç eşit parçaya bölünürse, şekilde görüldüğü üzere üç eşkenar üçgen daha oluşur.

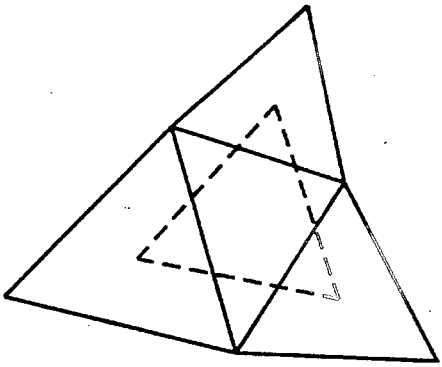


Morley üçgeni deltoid ile aynı yönlenmeyi gösterir; deltoid, üçgenin bütün Simson çizgilerinin zarfıdır.

N

Napoleon teoremi Söylendiğine göre bu teoremi Napoleon Bonaparte bulmuştur. Napoleon biraz matematikten anlardı; bu nedenle bu doğru olabilir.

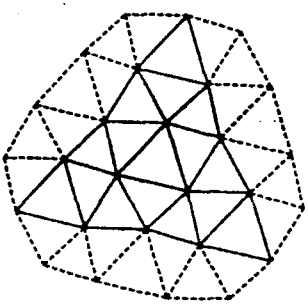
Herhangi bir üçgen alın; üçgenin her kenarı üzerine dışa doğru bir eşkenar üçgen çizin. Eşkenar üçgenlerin merkezlerini birleştirin, ortaya yeni bir eşkenar üçgen çıkar.



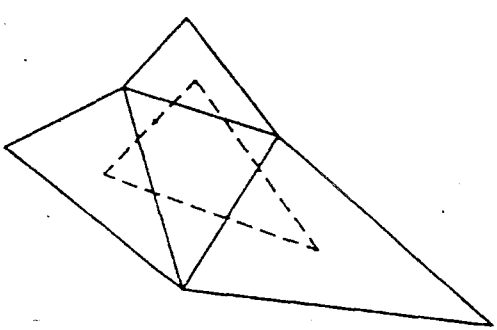
Eşkenar üçgenler içe doğru da çizilebilir; bu durumda da bu üçgenlerin merkezleri bir diğer eşkenar üçgen oluşturur. Bu eşkenar üçgenin merkezi, dışa doğru eşkenar üçgen çizimiyle oluşan eşkenar üçgen merkezinin aynıdır; iç ve dış eşkenar üçgenlerin alanlarını farkı, orijinal üçgenin alanına eşittir. Diğer taraftan bir eşkenar üçgenin kenarları üzerine biri içeri ve ikisi dışarı doğru eşkenar üçgenler çi-

zersek, bunların merkezleri, açıları 30°, 30° ve 120° olan bir üçgen oluşturur.

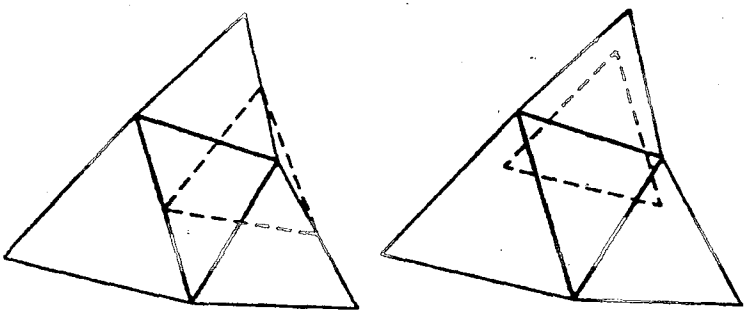
Teorem, şekli altılı simetrisi olan bir mozaik içine gömmekle kanıtlanabilir.



Dış üçgenlerin eşkenar üçgen olma zorunluluğu yoktur. Şekilde görüldüğü üzere birbirlerine benzemeleri ve hafif bir rotasyon dışında, orijinal üçgene göre konumlarını değiştirmemeleri gerekir. Bu durumda genel teorem şunu söyler: Herbiri bir üçgenden alınan karşılıklı noktalar, aynı biçimde bir başka üçgen oluşturur.



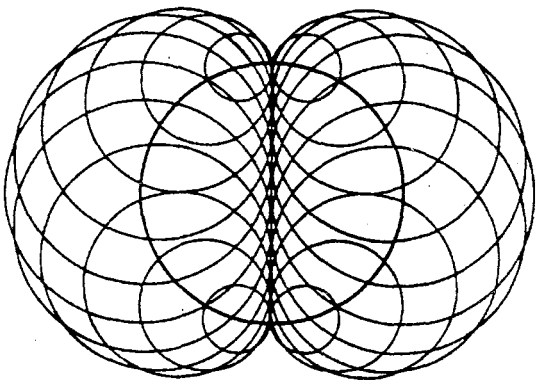
Orijinal şekle geri gidersek onun birçok eşkenar üçgen daha içerdiği görülebilir.



Bir üçgenin kenarları üzerinde oluşturulan eşkenar üçgenler, *Fermat noktası* ile ilgilidir. (Bkz. Fermat noktası).

Genel konveks (dışbükey) bir dörtgenin kenarları üzerinde, alterne ederek bir içeri bir dışarı çizilen eşkenar üçgenlerin köşeleri bir paralelkenar oluşturur.

Nefroid Bu eğri böbreği andırdığı için bu ismi almıştır. Nefroid, yarıçapı 2a olan sabit bir daire dışında, ona teğet kalarak dönen a yarıçaplı bir dairenin üstündeki bir noktanın geometrik yeridir. Bir diğer tanımı şudur: Nefroid, 2a yarıçapında sabit bir dairenin dışında, ona teğet kalarak dönen 3a yarıçapında bir dairenin çevresi üzerindeki bir noktanın geometrik yeridir (sabit daire büyük dairenin içinde).



Nefroidi bir zarf olarak çizmek için, temel olacak bir daire çizin; bu dairenin çapını da çizin. Merkezleri temel dairenin çevresi üzerinde olan ve çizilen çapa teğet daireleri çizdiğiniz zaman, bu daireler bir nefroidin zarfını oluşturur.

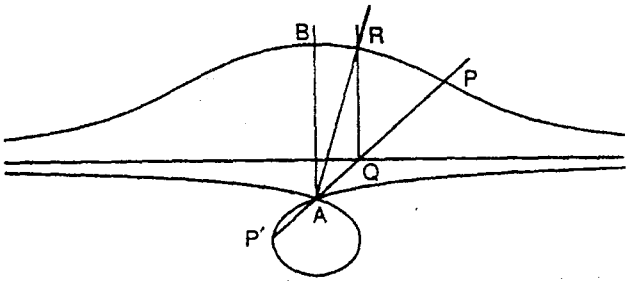
Nefroidin bir başka tanımı da şudur: Çapları eşit iki daireden biri, sabit olan diğerinin etrafında, ona teğet kalarak dolanırken, dolanan dairenin çapının zarfı bir nefroiddir.

Bir nefroidin evolütü, aynı merkezli, fakat yarı yarıya küçülmüş ve 180° dönmüş olan bir başka nefroiddir.

Nicomedes'in konkoidi (kavkı eğrisi) Herhangi bir eğri, eğrinin üstünde olmayan bir A noktası ve sabit bir k mesafesi alın. A'dan geçen bir doğru, eğriyi Q'da kessin. Doğru üzerinde P´Q = QP = k olacak şekilde P ve P´ noktaları belirleyin. Bu durumda P ve P' nün geometrik yerleri, eğrinin A'ya göre konkoididir.

Bunu çizmek için bir cetvelin iki ucuna iki kalem iliştirin; sabit noktaya (A) bir iğne batırın ve cetvelin merkezi sabit doğru boyunca

kayacak tarzda, cetveli iğneye göre hareket ettirin. Bu, doğrunun A noktasına göre konkoididir.

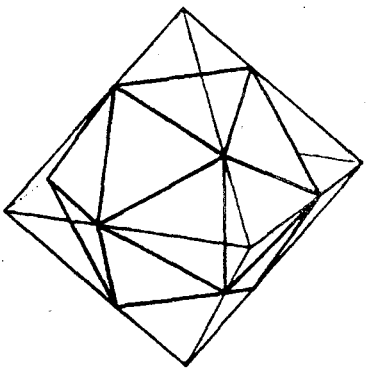


Bir eğrinin konkoidi, sabit nokta A'nın yerine göre değişecektir. Sabit noktanın yeri özel olarak seçilirse özellikle ilginç sonuçlar elde edilir. Örneğin dairenin, çevresi üzerindeki sabit bir noktaya göre konkoidi Pascal limasonudur.

Pappus'a göre Nicomedes, konkoidi ('midye kabuğu biçimli') küpün duplikasyonu ve bir açının üçe bölünmesi problemlerini çözebilmek için buldu. Açıyı şöyle üçe bölüyordu: AQ= 1/2 QP= 1/2 k. QR doğruya dik olsun. Bu durumda: RAB açısı= 1/3 PAB açısıdır.

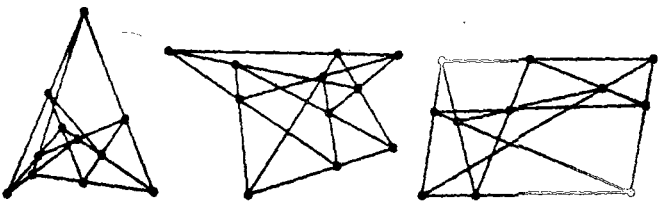


Oktahedron (sekizyüzlü) Eğer düzgün bir sekizyüzlünün kenarları altın oran [yani $1/(1+\sqrt{5})$ oranında bölünürse, yüzlerden herhangi birinin kenarlarındaki oran noktaları bir eşkenar üçgen oluşturur ve bu 12 bölme noktası düzgün bir 20 yüzlü (ikosahedron) yapar. (Bkz. Altın oran)



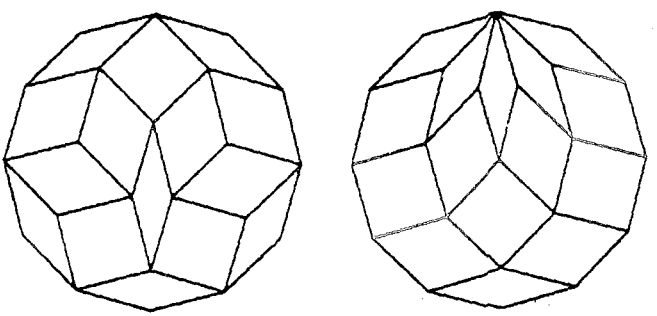
Kenarların altın oranla içten bölünmesi için iki ve dıştan bölünmesi için iki nokta vardır; böylece toplam 4 yirmiyüzlü oluşturulabilir. Dıştan bölme için, bir yüzün kenarlarının bölme noktalarını yirmiyüzlünün bir sonraki köşeleri oluşturur.

Onbir-üç şekli Birbirinden farklı 31 tane 11_3 şekli vardır. Her birinde 11 doğru ve 11 nokta bulunur. Her noktadan 3 doğru geçer ve her doğru üzerinde 3 nokta bulunur. İşte bunlardan üçü:

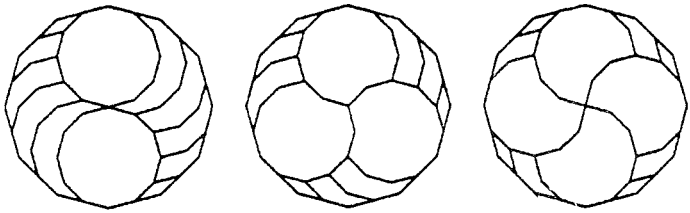


Referans: W.Page ve H.L. Dorwart, Numerical patterns and geometrical configurations, Mathematics Magazine, March 1984.

Onikigenin parçalara bölünmesi Aşağıda düzgün bir onikigeni eşkenar dörtgenlere bölmek için iki basit ve doğal yöntem görülüyor.

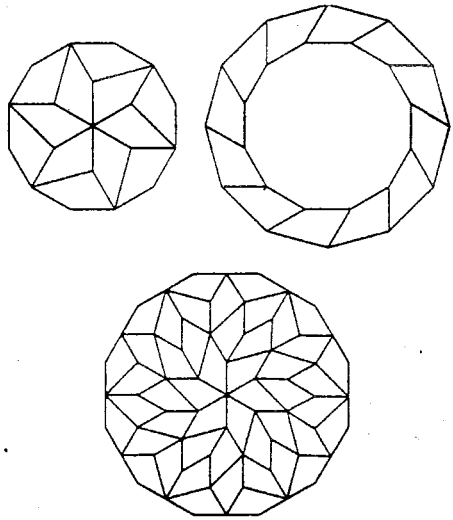


Her şekilde 3 çeşit eşkenar dörtgen (rombus) var. Bu çokgeni bu basit şekillere bölmek için bir çok yol varsa da her şeklin oranı aynıdır: 6 dar ve 6 orta genişlikte eşkenar dörtgen ve 3 kare.



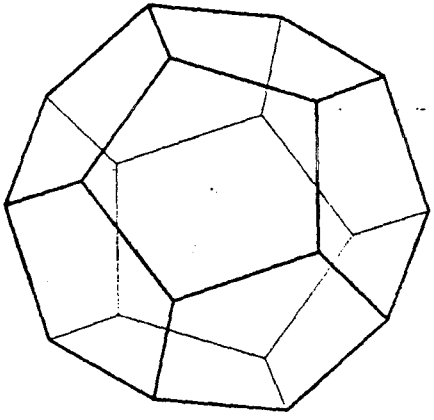
Bu biçimler aynı biçimin daha büyük kopyalarını elde etmek için kullanılabilir. Yukarıdaki şekillerin herbirinde 4 onikigenden 1 büyük onikigen yapılmıştır. Eşkenar dörtgenlerin birçoğu birbirine "*zon*" denilen şeritlerle bağlı kalır.

Aşağıdaki bölmelerdeyse tek bir şekil kullanılmıştır; bir yarım kareye eklenmiş eşkenar üçgen. Sağdaki küçük (iç) onikigenin kenarı orijinal (az önce gördüğümüz) onikigenin $\sqrt{2}$ katı, alanıysa iki katıdır. Büyük (dış) onikigenin kenarları orijinal onikigenin 2, alanıysa 4 katıdır. Küçük onikigen, yarım kare + eşkenar üçgenden oluşan yapı taşlarının eklenmesiyle büyütülebilir ve bütün bir alan böylece doldurulabilir.



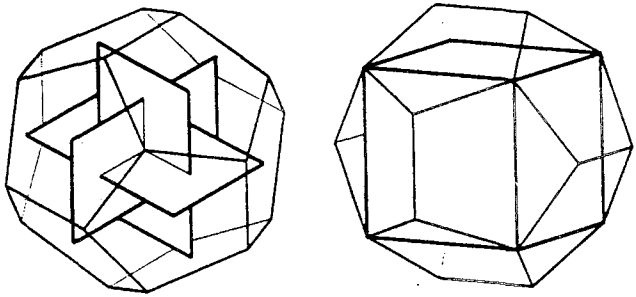
Onikiyüzlü (dodekahedron) Dodekahedron 12 yüzlüdür. *Düzgün dodekahedron*'un düzgün pentagon (beşgen) şeklinde, *rombik dodekahedron*'un eşkenar dörtgen (rombus) şeklinde 12 yüzü vardır.

Düzgün dodekahedronun 31 simetri ekseni bulunur; bunlardan 10'u üçlü olup karşıt tepe çiftlerinden, 6'sı beşli olup karşıt yüzlerin merkezinden ve 15'i ikili olup karşıt kenarların ortalarından geçer.



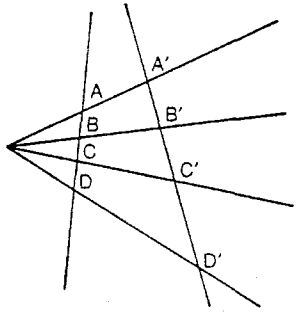
Düzgün ikozahedron (20 yüzlü) dodekahedronla aynı sayıda (31) imetri ekseni içerir; fakat bunların tanımlanmasında "köşeler" ve yüzler" birbirlerinin yerini alır.

Küple dodekahedron ilişkisi şöyledir: 12 yüzün orta noktaları merkezleri), birbirine dik (ve kenarları altın oran yapan) (Bkz. altın ran) üç dikdörtgenin köşelerini oluşturur (alt sol şekil); dodekahedon'un 8 köşesi bir küpün de köşeleridir (alt sağ şekil).



Şaşırtıcı bir gerçek de şudur: Düzgün bir dodekahedron ile düzgün bir ikozahedron aynı küre içine konulduğunda, dodekahedron daha geniş bir hacim kaplar. İkozahedron'un yüz sayısı daha fazladır (12'ye karşı 20), fakat dodekahedron'un yüzleri daireye daha yakındır.

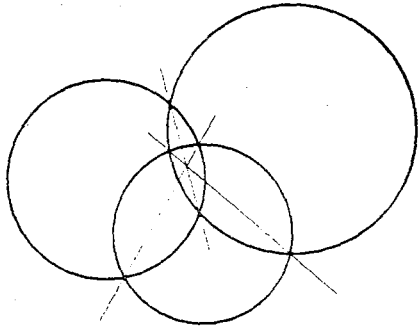
Oranların oranı (çapraz oran veya cross-ratio) Pappus, *Matematik Koleksiyonu* adlı kitabının 7. cildinde, bir noktadan çıkan 4 doğruyu diğer iki doğru kestiğinde, A, B, C, D ve A', B', C' ve D' oranlarının, yani çapraz oranların eşit olduğunu ispat etti.



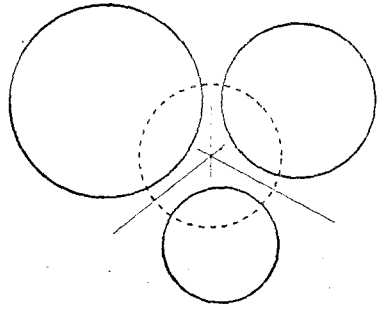
Sonra çapraz oran unutuldu; ta ki 1639'da Desargues, *Brouillon Project* adlı eserinde onu yeniden canlandırdı.

Çapraz oran AB/BC'nin AD/DC'ye bölünmesidir. Bir noktada kesişen 4 doğrunun çapraz oranı, onları çaprazlayan bir doğrunun yarattığı çapraz orandır.

Ortak kirişler Birbirini kesen 3 dairenin ortak kirişleri aynı noktada kesişir.

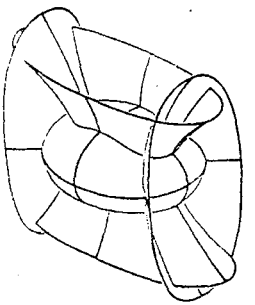


Daireler birbirlerini gerçek noktalarda kesmezlerse, ortak kirişler gerçek değildir; fakat yine de dairelerin 3 radikal ekseninin gerçek kesişme noktasında kesişirler. Bu nokta her üç daireyi dik kesen tek dairenin merkezidir.



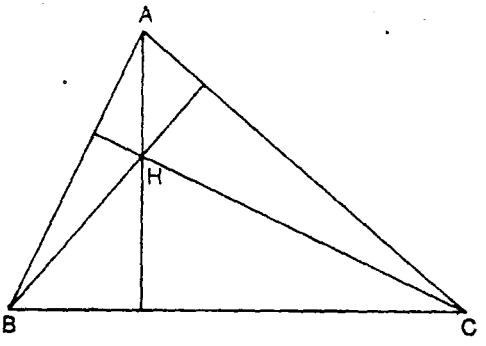
Ortogonal yüzeyler Bir düzlem üzerinde (iki boyutlu ortamda) öyle iki eğri kümesi alınabilir ki bir kümedeki her eğri diğer kümedekini dikine (ortogonal) keser. Üç boyutlu ortamda üç yüzey kümesi benzer özellikler gösterebilir. Herbiri farklı kümelerden olan herhangi iki yüzey birbirini bir eğri boyunca dikine keser.

Üç ortogonal yüzey kümesinin en basit örneği üç paralel düzlemler kümesidir, örneğin kübün yüzlerine paralel düzlemlerden oluşan üç küme buna bir örnektir.



Şekilde görülen konfokal (eş odaklı) koniklerin üç boyutlu analogu daha karmaşık bir örnektir. Bu şekil şu 3 kümenin herbirinden bir adet içermektedir; elipsoidler, tek yapraklı hiperboloidler, iki yapraklı hiperboloidler. Her eğri ailesinden bir yüzey, uzayda herhangi bir noktadan geçer. Böylece uzay eğri çizgili kutulara ayrılmıştır; bunların hepsinin tepe açıları dikaçıdır; bu bakımdan dikdörtgen kutulara benzerler, fakat yüzleri dikdörtgen olmadığı gibi düz bile değildir.

Ortosentrik noktalar Bir üçgenin yüksekliklerinin "üçgenin ortosentrı" denilen (H ile gösterilir) tek bir noktada kesiştiklerini ilk defa Proclus gösterdi. İlk defa Carnot'nun farkettiği gibi orijinal üçgenin üç köşesiyle ortosentr mükemmel bir simetri gösterir; bu dördünden herhangi biri diğer üçünün oluşturduğu üçgenin ortosentrıdır. Bu dördü bir ortosentrik noktalar kümesi oluşturur.



Bu dört ortosentrik noktanın oluşturduğu dört üçgen, aynı 9 nokta dairesine sahiptir; bu üçgenlerden herbirinin bir iç dairesi ve kenarların uzantılarına teğet üç dış dairesi (toplam 16 daire) 9 nokta dairesine teğettir. H noktasının BC doğru parçasına göre simetriği, ABC üçgeninin çevrel dairesi üzerindedir vb.; bu dört üçgenin çevrel çemberleri aynı yarıçaplıdır (ne kadar zarif ve beklenmedik bir simetri! Ç.N.)

Bu dört üçgenin çevrel çemberlerinin merkezleri, orijinal dört noktanın 9 nokta dairesine göre simetriğidir ve orijinal dört nokta üstüne çakıştırılabilir (kongrüent, eşleşik). bir şekil oluşturur. Bu dört üçgenin ağırlık merkezleri ortosentrik bir küme oluşturur; bu küme orijinal ortosentrik kümeye benzer, fakat onun üçte biridir.

Dwight Paine üçgenin en iyi bilinen özelliklerini dize haline getirmiştir; işte yükseklikle ilgili dizeler; gerisini de siz tanımlayabilirsiniz:

Gerçi üç yükseklik var
Diyordu kızım Rachel,
Bir nokta üçünün de üstünde yatar,
Bu ortosentr H'dır; ne güzel!

Referans: Dwight Paine, 'Triangle rhyme', Mathematics Magazine, September 1983.

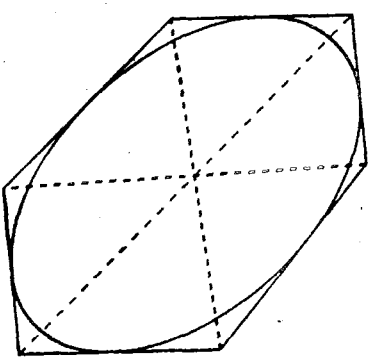
Ö

Örgüler En iyi bilinen örgü, uzun saçları örmede kullanılan tekrarlayıcı örgüdür. İki şekli vardır; sağa yönelik ve sola yönelik.

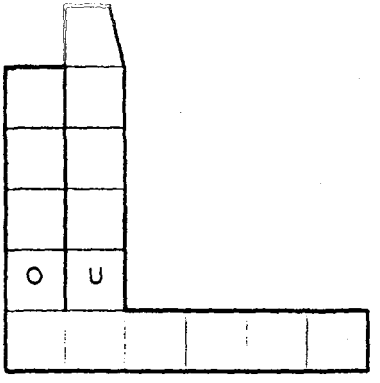




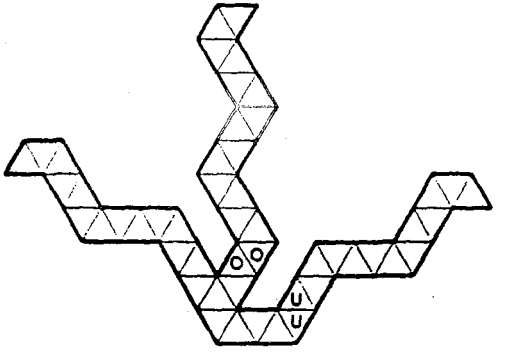
Örgünün bir noktasında durulup karşılıklı uçlar birleştirilirse, sonuç ya birbirine geçmiş üç halka veya tek bir düğümdür.



Örülmüş çokyüzlüler John Gorham'ın 1888'de yazdığı *Örülmüş Kristal Modeller* kitabından esinlenen A.R. Pargeter, Platonikler dahil birçok çok yüzlüyü örecek yöntemler geliştirdi. "Örmek" terimi burada uzun saçları örmekle aynı anlamda kullanılmaktadır.



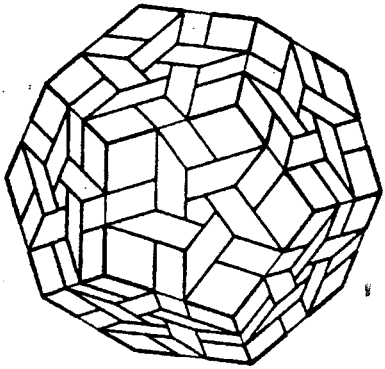
Koyu renk çizgiler kesiş hatlarıdır. Yukarıdaki birinci örnekte örme, küp oluşturur. Bunun için küpün dış yüzeyi yukarı doğru tutulmalı ve ilk hamle O karesini U üzerine koymak olmalıdır. Eksik kare şeklindeki kısım içe bükülerek küpü sağlamlaştırmak içindir.



İkinci örnek aynı koşullarda bir 20 yüzlü oluşturmak içindir. İçe bükülecek iki uç vardır, bunların herbiri bir üçgen çiftinden oluşur.

Referans: A.R. Pargeter, Plaited Polyhedra, Mathematical Gazette, No: 344, 1959.

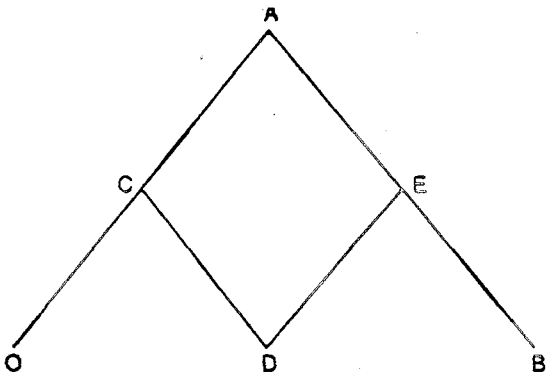
Örtülmüş çokyüzlüler Bir çokyüzlünün yüzeyini silindirik bantlarla birörnek ve simetrik olarak sarabilir miyiz? Jean Pedersen bunun mümkün olduğunu gösterdi. Onun modelleri Japonların Temari süs toplarına ve bazı geleneksel düğümlere benzer. Şekilde bir onikiyüzlünün yüzeyinin 6 bantla örtüldüğü görülüyor.



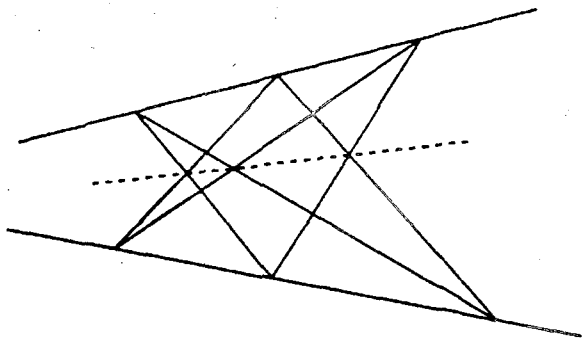
Referans: Jean Pedersen, 'Geometry: The unity of theory and practice', Mathematical Intelligencer, Vol. 5, No: 4, 1983.

P

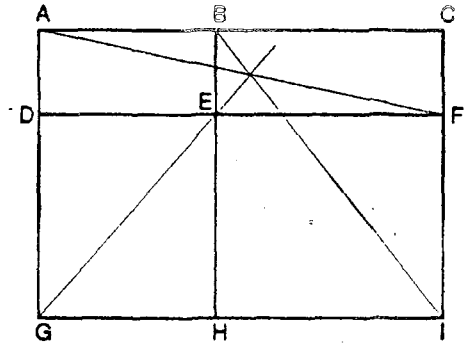
Pantograf Pantograf benzer üçgenlerden yararlanarak bir şekli büyülten veya küçülten bir cihazdır. Şekilde O noktası sabittir; AB ise, CD'ye ve OA, DE'ye paraleldir. Eğer D bir şeklin üstünde geziyorsa, B noktası bu şekli OB:OD oranında genişletilmiş olarak çizer.



Pappus teoremi Herhangi iki doğru alın; bunların herbiri üzerine şekildeki gibi üç nokta koyun. Noktaları karşılıklı birleştiren doğrular birbirlerini bir doğru üzerinde keser. Bu, Pascal teoreminin özel bir halidir; çünkü orijinal doğrular koniklerin özel halleri olarak düşünülebilir.



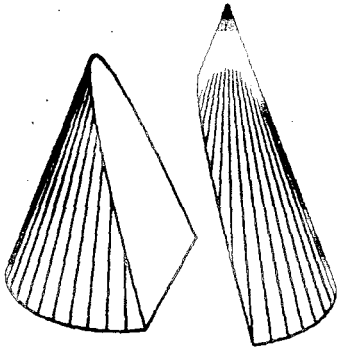
Bu teoremin yalnız noktaları, doğruları, kesişmeleri ve birleşmeleri olduğundan, bir duali (eşleği) olması kaçınılmazdır; bu dualde noktaların yerine doğrular ve doğruların yerini noktalar almıştır. Aşağıdaki şekil dual teoremin özel bir şeklidir: İki noktanın herbirinden üç doğru geçer; öyle ki sonsuzdaki iki noktada kesişen her biri üç paralel doğrudan ibaret iki küme oluşur. Şekilde görüldüğü üzere noktalar birleştirilirse üç doğru bir noktada kesişir.



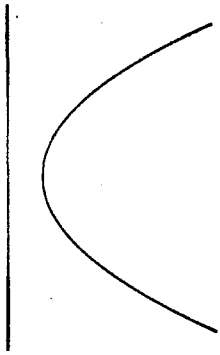
Bu şekilde bir dikdörtgen daha küçük dört dikdörtgene bölünmüştür. İnce çizgiler bir noktada kesişir. Ayrıca DB, GC ve HF doğruları da bir noktada kesişir. Bu da gösterir ki orijinal Pappus şeklinde her doğru üzerindeki noktalar farklı sıralarda ele alınabilir.

Pappus teoremi, üç boyutlu doğru ve noktalar hakkındaki şu teoremle eşdeğerdir: Uzayda birbiriyle kesişmeyen a, b ve c gibi üç doğru alalım. Üçüyle de kesişen sonsuz sayıda doğru vardır. Bu gibi doğrulardan üçünü seçip bunlara p, q ve r diyelim. O zaman eşdeğer teorem şunu söyler; eğer d doğrusu p, q ve r'ı kesen 4. doğruysa ve s doğrusu a, b ve c'yi kesen 4. doğruysa, s ve d kesişir.

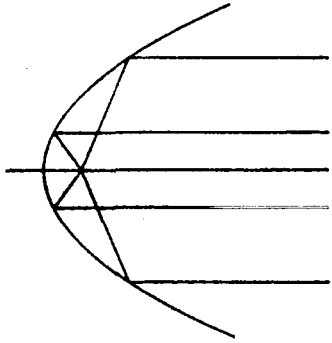
Parabol Eski Yunanlılar parabolü dik bir koninin, tepesinden geçen bir doğruya paralel olarak kesilmesiyle oluşan bir eğri olarak kabul ettiler. Gerçekte parabol, herhangi bir koninin, tepesinden geçen bir doğruya paralel bir düzlemle kesişmesinden oluşan eğridir.



Parabol aynı zamanda doğrultman (direktris) denilen bir doğru ile odak (fokus) denilen bir noktadan eşit uzaklıkta olan noktaların geometrik yeridir.



Parabolik aynalarda odaktan geçen bir ışın, aynanın eksenine paralel olarak yansır. Bu nedenle otomobil farlarında ve projektörlerde, ışık kaynağı parabolik aynaların odak noktasına konulur.

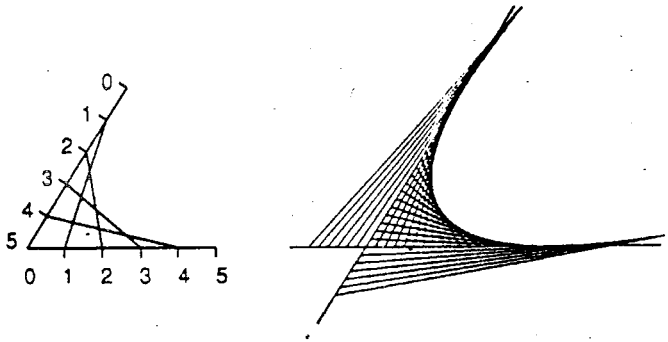


Yerçekiminin Dünya'nın merkezine doğru değil, doğrudan doğruya dikey doğrultuda etki yaptığını ve hava direncinin çok küçük olduğunu kabul edersek, bir merminin yolu bir paraboldür diyebiliriz. Eğer

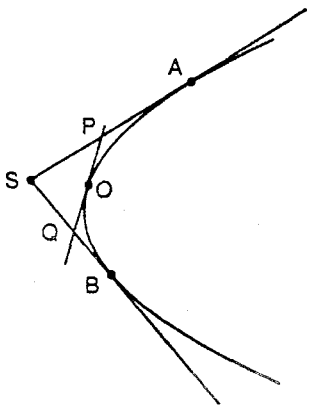
tek bir noktadan aynı çıkış hızıyla her yönde bir çok mermi atılırsa, bunların çizdiği yolun zarfı bir diğer parabol veya üç boyutlu ortamda dönel bir paraboloiddir (bir parabolün kendi ekseni etrafında dönmesiyle oluşan geometrik şekil).

Çukur bir kap içinde yavaşça dönen bir sıvının yüzeyi dönel bir paraboloiddir. Bu yüzeyin herhangi bir dikine kesiti paraboldür. Eğer kabloların ve desteklerin ağırlığı dikkate alınmazsa, bir asma köprünün birörnek yüklenmiş ana kabloları da parabol biçimindedir.

Parabol bir zarf olarak da oluşturulabilir. Örneğin şekildeki gibi iki doğruyu kesiştirin, kesişme noktasından itibaren eşit uzaklıkta noktalar alın ve bu noktalara karşıt yönlerde numara verin. Aynı sayıları birleştiren düz çizgiler bir parabolün zarfı olacaktır. İlk iki doğru parabolün teğetleridir. Parabolün kalan kısımlarını da çizmek için, orijinal doğruların kesişme noktasından eşit uzaklıkta başka noktalar alın; bu durum şeklin sağında görülüyor.



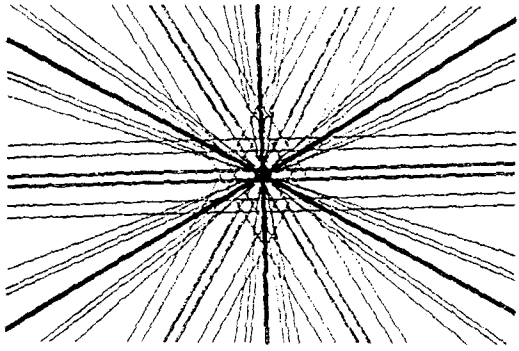
Bu çizim, parabolün basit ve zarif bir özelliği nedeniyle olasıdır. Şekilde görüldüğü üzere bir parabole üç teğet çizin; şimdi SP/PA = QO/OP = BQ/QS.



Bir noktadan bir parabole teğet çizmek için aynı yöntem kullanılır. P noktasını F odağına birleştirin ve çapı PF olan daireyi çizin. Eğer parabolün tepesindeki teğet, daireyi A ve B'de keserse, PA ve PB iki teğettir.

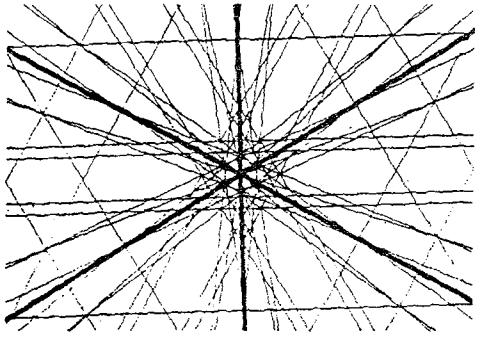
Bir gönye, hipotenüs daima odaktan geçecek ve dik köşe daima doğrultman üzerinde olacak şekilde hareket ettirilirse parabolik bir zarf oluşur.

Pascal konfigürasyonu Bir konik üzerinde 6 nokta, sıralı olarak bir altıgenin köşeleri olacak şekilde 60 türlü seçilebilir. Her seçim Pascal teoremine göre bir *Pascal doğrusu* oluşturur. Bu 60 doğru karmaşık bir yapı meydana getirir. Şekilde 6 nokta bir daire dışına çizilmiş düzgün bir altıgenin köşeleri olarak alınarak karmaşıklık azaltılmıştır. Bunun sonucu olarak dejenere doğrular belirir. Kalın üç doğrunun her biri 4 dejenere Pascal doğrusundan oluşmuştur. Diğer 6 doğru sonsuzdadır, böylece yalnız 45 doğru görülebilir.



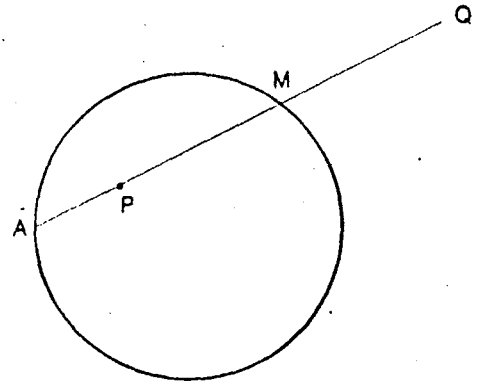
Bundan sonraki şekil, Pascal doğrularının kesişmesini göstermek üzere, birinci şeklin merkezinin büyütülmüş halidir. Bu doğrular üçer üçer 20 Steiner noktasından ve yine üçer üçer 60 Kirkman noktasından geçer. Her Steiner noktası 3 Kirkman noktasıyla beraber 20 Cayley doğrusundan biri üzerindedir. Steiner noktaları dörder dörder 15 Plücker doğrusu üzerinde bulunur; 20 Cayley doğrusu dörder dörder Salmon noktaları denilen 15 noktadan geçer.

60 Pascal doğrusuyla 60 Kirkman noktası, 20 Cayley doğrusuyla 20 Steiner noktası ve 15 Plücker doğrusuyla 15 Salmon noktası arasında simetrik bir ilişki vardır.



Pascal salyangoz eğrisi (Pascal limasonu) Bu eğrinin isim babası Blaise Pascal'ın babası Etienne Pascal'dır. Bu eğriyi daha önce Dürer çizmişti.

Değişmez uzunluktaki bir PQ doğru parçasını, gerekirse uzatarak, öyle hareket ettirin ki bu doğru, daire üzerindeki sabit bir noktadan (A) geçsin ve PQ'nün orta noktası da (M) daire üzerinde olsun. Bu bakımdan limason, bir dairenin kendi üzerinde bulunan bir noktaya göre konkoid'idir. (Bkz. Nicomedes'in konkoidi).

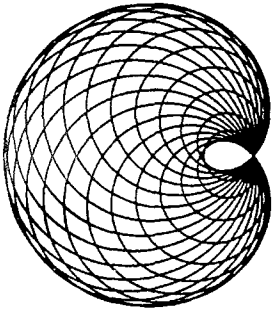


Söz konusu doğru parçasının uçları bir limason çizer; doğru parçasının uzunluğu daire çapının iki katıysa limason bir kardioid (kalp eğrisi) olur.

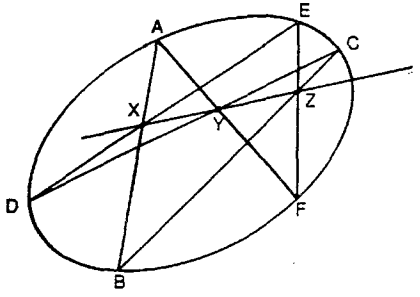
Pascal limasonu başka türlü de elde edilebilir: Kendisiyle aynı çapta bir tekerleğin etrafında, ona teğet kalarak dönen bir dairenin bir noktası da limason çizer. Bu yolla elde edilen limasonun, sikloid gibi üç şekli vardır: Nokta dairenin üzerindeyse kardioid (kalp eğrisi) oluşur; nokta dairenin içinde veya dışındaysa limason oluşur.

Limasonun polar denklemi $r=2a\cos\theta + k$'dır. a = dairenin yarıçapı ve 2k = doğru parçasının uzunluğu.

Limasonu bir zarf olarak çizmek için bir daire ve daire çevresi üzerinde olmayan sabit bir nokta alın. Merkezleri bu daire üzerinde bulunan ve sabit noktadan geçen daireleri çizin. Bu gibi bütün dairelerin zarfı bir limasondur. (Sabit nokta dairenin çevresi üzerindeyse zarf bir kardioiddir.)



Pascal teoremi Blaise Pascal ünlü teoremini 1640'ta 16 yaşındayken buldu ve onu *Essai pour les coniques* (konikler üzerine denemeler) adını verdiği bir broşür şeklinde yayımladı. Bu teorem şunu söyler: bir altıgen içine bir konik çizilirse, karşılıklı kenarların kesişme noktaları (ki 3 tanedir) aynı doğru üzerinde bulunur. Altıgenin köşeleri ABCDEF olarak gösterilirse, AB ve DE, X noktasında kesişen karşılıklı kenarlardır vb. XYZ doğrusu Pascal doğrusudur.

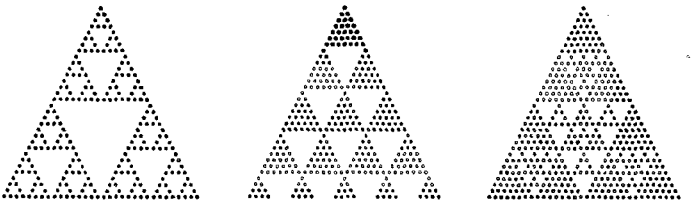


Şekilde elips içine çizilmiş zigzag (yıldız) biçimi bir altıgen görülüyor. [Bu konkav (içbükey) bir çokgendir. Konveks (dışbükey) bir çokgende çokgen, herhangi bir kenarını içeren bir doğrunun bir tarafında bulunur, yani kenarların hiçbiri çokgeni ikiye bölmez. Konveks bir poligonda her iç açı 180°'dir. Bir çokgen (poligon) konveks değilse konkav'dır. Konkav poligonlarda en az bir iç açı 180°'den büyüktür. Bir poligon'un konkav olabilmesi için, poligon'un içinden geçen bir doğrunun poligonu en az 4 noktada kesmesi gerekli ve yeterlidir. Konkav bir poligon (çokgen) yıldız veya zigzag biçimi olabilir. Ç.N.] Şeklimiz Pappus teoreminin şekline çok benzemektedir. Gerçekten de Pappus teoremi Pascal teoreminin özel bir şeklidir; Pappus'da konik, bir çift doğru şeklinde dejenere olmuştur. Eğer altıgen konveks olarak çizilirse, karşılıklı kenarların kesişme noktaları koniğin dışında bulunur.

Pascal üçgeni Pascal üçgenini altıgen bir kâğıt üzerine yazın (Ayrıntılar için bkz. *Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers*). Tek sayılar içeren altıgenlerin içini kurşun kalemle karartın. Soldaki desen belirir (bilgisayarda altıgen yerine nokta kullanılmıştır.)

2'nin dışındaki sayıların katlarını karartmak farklı desenler verir. Ortada ve sağda 7 ve 8'in katlarından oluşan desen görülmektedir.

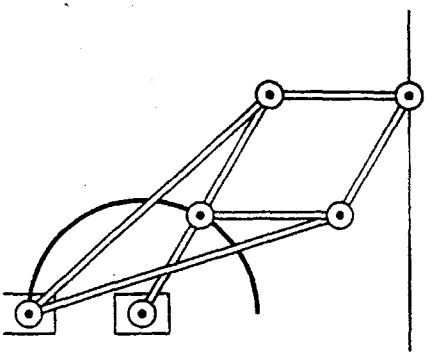
Tek ve çift rakamlardan oluşan bir Pascal üçgeni *hücresel bir otomat* olarak düşünülebilir. (Tek sayılar yerine 1, çift sayılar yerine 0 yazılır). Sonsuza kadar uzanan 0 ve 1'lerden oluşmuş bir hücre dizisinde, bir sonraki satır şöyle oluşturulur: Yan yana gelmiş iki 0 ve iki 1 altına 0 ve yan yana gelmiş (0 ile 1) ve (1 ile 0) altına 1 yazılır. İşe herhangi bir 0 ve 1 dizilişiyle başlanabilir. (Hücresel otomat ayrıntıları için bkz. Matematiğin Gizli Dünyası, David Wells, Sarmal Yayınları, 1997)



Kuralı değiştirmek kolaydır. Komşu 3 hücrede tek sayıda 1 varsa, ortadaki 1'in altına 1 yazılır; çift sayıda 1 varsa ortadaki 1'in altına 0 yazılır. [Yanyana 3 sayı alalım. Bu üç sayı içinde ya bir, ya iki, ya da üç tane 1 vardır. 1 veya 3 tane (tek sayıda 1) varsa, ortadaki 1'in altına 1 yazılır. 2 tane 1 (çift sayıda 1) varsa, ortadaki 1'in altına 0 yazılır. Ç.N.]

```
1 0 0 0 1 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 1 1
 1 0 0 1 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 0 0
  1 0 1 0 0 0 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0
   1 1 1 0 0 0 1 0 1 1 0 1 1 1 0
    0 0 1 0 0 1 1 1 0 1 1 0 0 1
     0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 1 0 1
      1 0 1 1 1 0 1 0 1 1 1 1
       1 1 0 0 1 1 1 1 0 0 0
        0 1 0 1 0 0 0 1 0 0
         1 1 1 1 0 0 1 1 0
          0 0 0 1 0 1 0 1
           0 0 1 1 1 1 1
            0 1 0 0 0 0
             1 1 0 0 0
              0 1 0 0
               1 1 0
                0 1
                 1
```

Peaucellier hücresi Peaucellier bir Fransız subayıydı; cetvel kullanmadan, bir bağlantılar sistemi yardımıyla düz bir çizgi çizebilmeyi ilk başarmış kişidir.

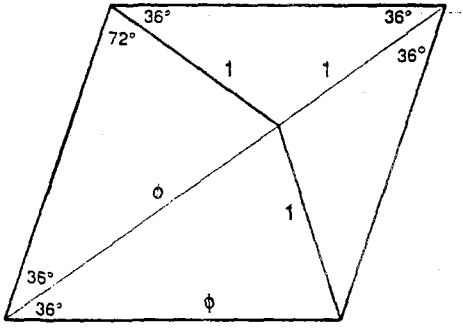


Büyük bir V harfinin köşesindeki çivi sabit noktadır. Peaucellier bağlantısı bu V'den ve bir rombus'dan (eşkenar dörtgen) ibarettir. Rombusun bir köşesi daire çizerse (ki sabit noktadan geçer) karşı uç onun inversi olarak bir doğru çizer. Bunu sağlamak için, şekilde görüldüğü gibi, dairenin merkeziyle rombusun köşesi arasına bir kol daha konulmuştur.

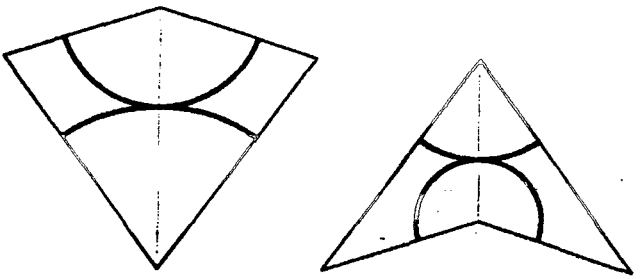
Eğer rombusun daire çizdirdiğimiz köşesi daire yerine bir başka eğri çizerse, karşı köşe bu eğrinin inversini çizer. Peaucellier hücresi herhangi bir eğrinin inversini çizmekte kullanılabilir.

1867'de yayımlanmış olan Peaucellier'nin buluşu, dairesel hareketi doğrusal harekete çevirmek için yapılmıştı; çünkü mekanikde bu dönüşüm sık sık gerekiyordu. Daha önce James Watt yaklaşık bir çözüm bulmuştu: Watt'ın paralel hareketi. "Düz bir çizgi nasıl çizilir; bağlantılar üzerine bir ders" (1877) adlı kitabın yazarı olan A.B. Kempe, kendisi de birçok bağlantının mucidi olarak, Peaucellier hücresinin baş mühendis Mister Prim tarafından yeni Parlamento evlerini havalandıran hava pompalarına nasıl uygulandığını anlatmış ve okurlarına burayı ziyaret etmelerini tavsiye etmiştir.

Penrose mozaikleri: Dünyaca ünlü bir kuvantum ve rölativite uzmanı olan Roger Penrose, aynı zamanda bir matematiksel eğlenceler amatörüdür. Babasıyla beraber Penrose merdivenini buldular; bu merdiven sonsuza gider. Penrose aşağıdaki iki mozaik parçasını buldu; John Conway yerinde olarak bunlara "oklar" ve "uçurtmalar" adını vermiştir.

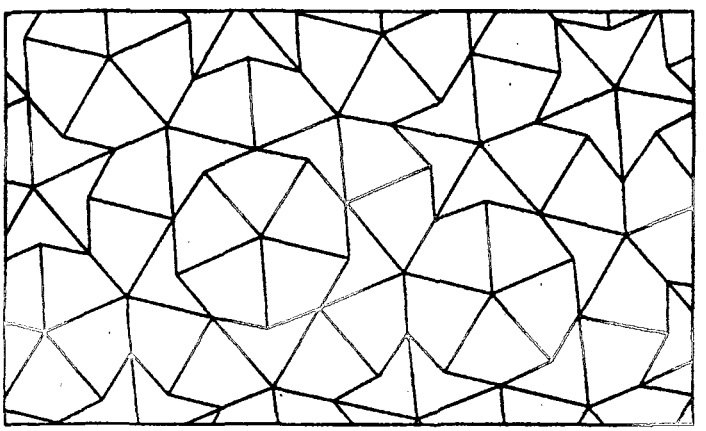


Bu iki şekil bir eşkenar dörtgenden (rombus) yapılır. Φ uzunluğu "altın oran"dır, yani 1/2 (1+√5) veya 1.618... (Bkz. Altın oran). Penrose mozaiği yapmak için köşelere yazı için H (head) ve tura için T (tail) harfleri konulur. Sonra mozaik parçaları, aynı harfli köşeler asla bitişik olmayacak şekilde birleştirilir. Bir diğer metod, kenarlarda küçük bir çentik yapmak veya kenarları hafifçe düzensiz yapmaktır ya da aşağıdaki şekilde görüldüğü üzere her mozaik parçası üzerine eğriler çizilebilir; öyle ki parçalar doğru bir şekilde birleştirildiğinde eğri devam eder.



Bu iki şekil, bir düzlemi periyodik (devirli) olmayan bir şekilde sonsuza kadar döşeyebilir. Bir diğer deyişle bu **periyodik** olmayan mozaiklerin birinden slayt yaparsanız, rotasyon yaptırmadan slaytı hareket ettiremezsiniz. Rotasyonla bütün çizgiler tekrar mozaiğe uyar.

Bazı Penrose mozaiklerinin rotasyonel simetrisi vardır; fakat çoğunun yoktur. Penrose mozaikleri oktan daha fazla sayıda uçurtma gerektirirler; oran yaklaşık Φ: 1'dir (altın oran). Mozaik sonsuza giderken bu oran tam değerini alır.

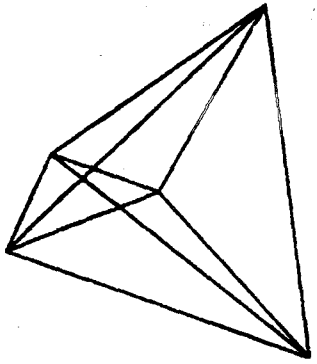


Eğer mozaik parçaları üzerine eğriler çizilir ve eğri kapanırsa, pentagonal (beşgensel) simetri oluşur; eğrinin içindeki alan da pentagonal simetri gösterir.

Bir desenin sonlu bir bölgesi belli bir mozaik parçasıyla yalnız bir türlü döşenebilir; bu nedenle bir bölgenin sınırlarının biçimi, onun mozaik yapısını ele verir.

Sonsuz Penrose mozaiğinde sonlu bir bölge, bir kere değil sonsuz kere belirir. Bunun önemli bir sonucu şudur: Penrose mozaiği üzerinde gezerken, o anda hangi mozaik parçası üstünde olduğunuzu anlayamazsınız! Ayrıca bu yeni Penrose dünyasının önceden tanıdığınız belli bir bölgesine ulaşmak isterseniz, bunu kesinlikle yapabilirsiniz; aradığınız bölge en fazla iki bölge çapı ötededir.

Pentatop veya simpleks Pentatop, üçgenin iki boyutlu ve dörtyüzlünün üç boyutlu ortamdaki şeklinin dört boyutlu ortamdaki karşılığıdır.



Pentatopun herbiri düzgün dörtyüzlü şeklinde, 5 adet üç boyutlu yüzü veya hücresi, 10 düzlem yüzü, 10 kenarı ve 5 köşesi vardır; pen-

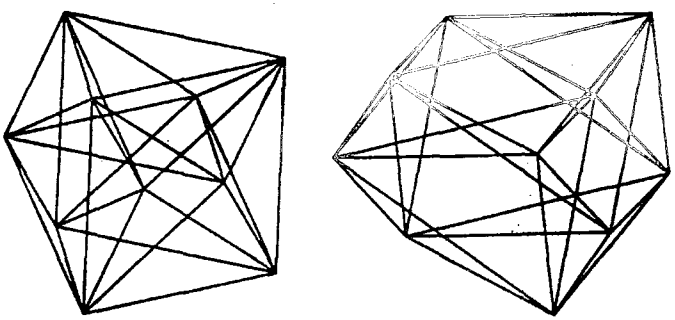
tatop kendi kendisinin dualidir.

Üç boyutlu ortamda bir pentatop ağı, düzgün dörtyüzlünün düzlemdeki ağına benzer olarak, her yüzüne bir düzgün dörtyüzlü yapışmış olan bir dörtyüzlüdür.

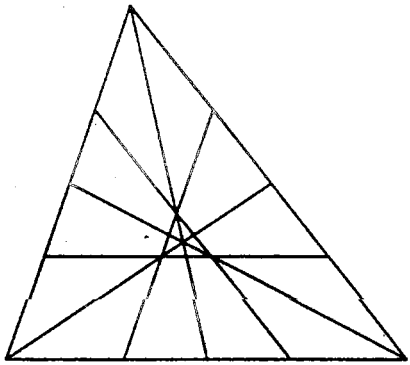
Eğer pentatop herbiri 5 düzlem yüzlü iki ilmeğin birleşmesi olarak düşünülürse, 5 yüzlü her ilmek bir *Möbius bandı*dır.

Düzgün bir dörtyüzlünün her köşesinin simetrik olarak kesilip atılması, her köşede yeni bir eşkenar üçgen oluşturur ve her yüzü altıgene dönüştürür. Eğer kesip atma kenarların ortasından yapılırsa, orijinal yüzler de eşkenar üçgen olur ve köşeleri kesilip atılmış şekil düzgün bir sekizyüzlü halini alır.

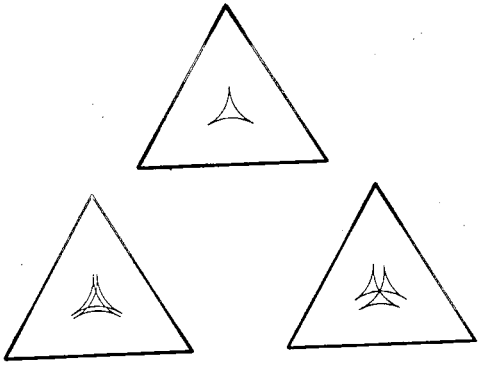
Bir pentatopun köşelerinin kesip atılması, orijinal köşelerin herbirinde yeni bir dörtyüzlü oluşturur ve üç boyutlu yüzleri dörtyüzlüden kesik dörtyüzlüye çevirir. Şekiller pentatopun kenarlarının ortasından budanmasını gösteriyor. Oluşan şekil 5 dörtyüzlü ve 5 sekizyüzlüden oluşmuştur.



Perimetre bisektörleri Bir üçgenin kenar ortayları onun alanını iki eşit yarıma böler. Bir kenara paralel ve diğer kenarı $(\sqrt{2}+1)/1$ oranında bölen doğrular da üçgenin alanını iki eşit yarıma böler. Bu 6 doğru 3 noktada kesişir:



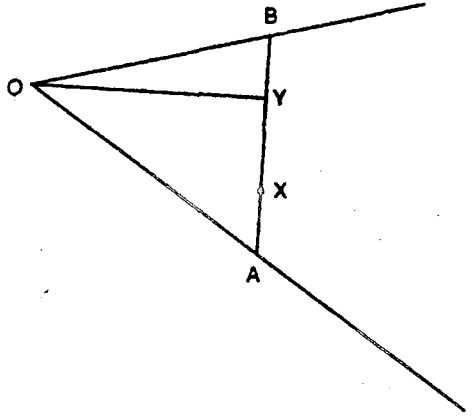
Bir üçgenin alanını eşit olarak ikiye bölen bütün doğrular üç hiperbolik yayı zarflar. Şeklimizde eşkenar üçgenler alınmıştır.



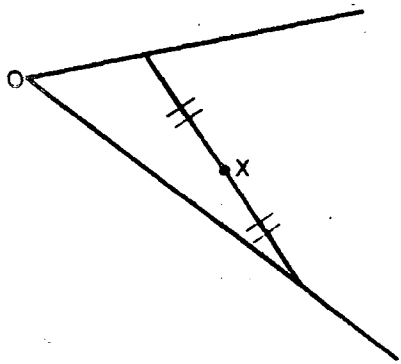
Üçgeni eşit olmayan iki parçaya ayıran doğrularda zarf daha karmaşıktır. Oran 1:1'den (en üst şekil) itibaren değiştikçe, sol alt şekilde görüldüğü üzere ilk önce ayrılır ve sonra, oran 5:4 olunca üç yay aynı noktada kesişir. Bundan sonra giderek büyüyen bir merkezi bölge belirir. Bu bölge sonunda üçgenin kendisi halini alır.

Referanslar: J.A. Dunn ve J.E. Petty, Halving the Triangle, Mathematical Gazette, No: 396, 1972 Derek Ball, Halving envelopes, Math Gazette, No: 429, 1980.

Philo doğrusu Bir açı yapan iki doğru ve açının içinde sabit bir X noktası verilmiş olsun. X'den geçen en kısa AB doğru parçasına Philo doğrusu denir. Bizanslı Philo hidrolik ve mekanik uzmanıydı ve küpün duplikasyonu problemi üzerinde çalışırken bu doğruyu bulmuştu. O'dan AB'ye çizilen dikme OY ise AX=YB'dir.



Çok daha basit bir problem şudur: Bir açı yapan iki doğru ve açının içinde sabit bir X noktası olsun. X'den geçen doğrulardan hangisi iki orijinal doğru ile birlikte en küçük alanı çevreler? Yanıt basittir; X'i orta noktası kabul eden doğru.



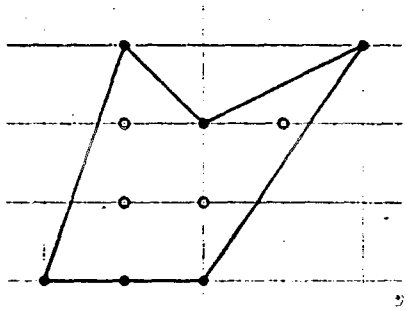
Pick teoremi 1899'da G. Pick köşeleri, bir kareli kâğıdın köşe noktalarında olan bir çokgenin alanını bulmak için basit bir yöntem geliştirdi. N çokgenin içindeki, B çokgenin kenarları üzerindeki köşe noktalarının sayısıysa:

Alan= N + 1/2 B - 1.

Bu şekilde N = 4 ve B = 6. Alan = 4 + (1/2x6) - 1 = 6.

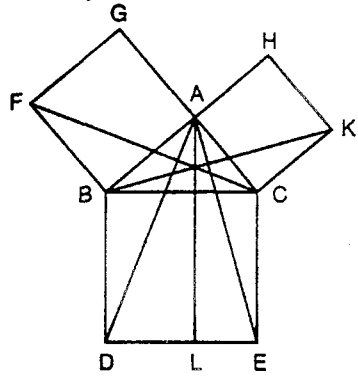
Pick teoremi Euler'in üç boyutlu şekiller ilişkisine karşılıktır:

Köşe sayısı + yüz sayısı = kenar sayısı + 2



Pisagor teoremi Bir diküçgende hipotenüsün karesi, kenarların kareleri toplamına eşittir. Bu bütün geometrik teoremlerin en ünlüsüdür; bu aynı zamanda şaka konusu yapılmış olan tek teoremdir; "Hipopotam üzerindeki karı, kenar (mahalle) karılarının topuna bedeldir (Hipotenüs üzerindeki kare, kenar karelerinin toplamına eşittir.)

Bu teorem, Euclid'in Elemanlar kitabının 1. cildinin 47. problemidir; fakat Euclid'in ispatının en basit ve en kolay ispat olduğu söylenemez. Bu teoreme bir zamanlar Gelin Teoremi de denmiştir, çünkü şekil Gelin Koltuğunu andırmaktadır (Türkçe'de ise şekil eşeğin uzun kulaklarına benzetildiğinden Eşek Teoremi diye de tanınır. Ç.N.)

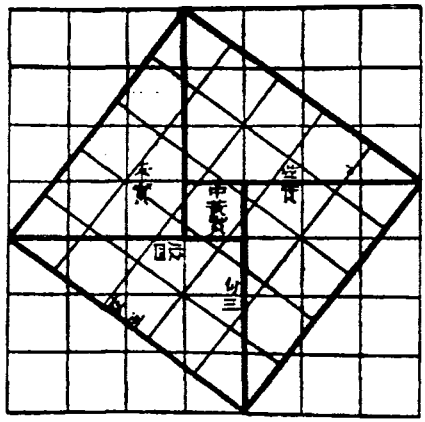


Euclid ABD ve FBC üçgenlerinin özdeş olduğunu kanıtladı; KCB ve ACE üçgenleri de özdeştir. Euclid devam ederek bir köşegeni BL olan dikdörtgenin BAFG karesine eşit olduğunu da ispatladı; benzer olarak bir köşegeni CL olan dikdörtgen CAHK karesine eşittir.

Euclid'in şekli başka özellikler de taşır, ama o bunları kullanmamıştır. Örneğin AE ve BK birbirine diktir, CF ve AD de birbirine diktir; ayrıca Heron'un ispatladığı gibi AL, CF ve BK bir noktada kesişir.

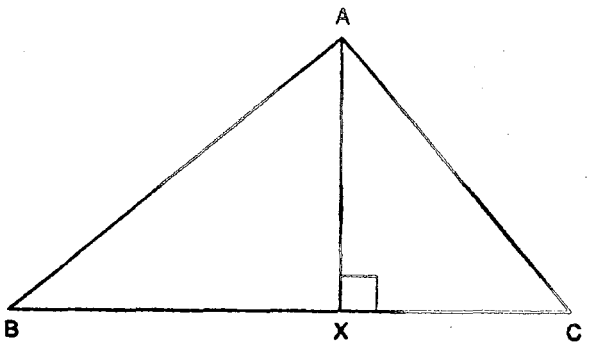
Pisagor teoremi Çin'de daha erken bir tarihte belirmişti. Bir sonraki şekil M.Ö. 500-200 tarihinde yazılmış Çu Pey Suan Çing (Güneş Saatinin Aritmetik Klâsiği ve Göğün Dairesel Yolları) adlı kitaptan alınmıştır.

Pisagor teoremi matematiğin herhangi bir teoreminden çok daha fazla ispat edilmiştir. 1940 yılında Elisha Scott Loomis, *Pythagorean Proposition* (Pisagor İspatları) kitabında, matematiğe duyduğu sevginin verdiği bir kuvvetle, 367 adet Pisagor ispatını bir araya toplamıştır; bunlar arasında ABD'nin 20. Başkanı James Garfield'inki de vardır; birçok çözüm de yazara mektup yazanlardan, özellikle gençlerden gelmiştir. Bu çözümler 4 ana başlıkta ve 30 alt başlıkta toplanmıştır, fakat yine de bütün ispatların kitaba alındığı söylenemez.

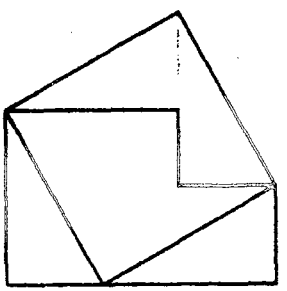


Bu en basit çözümlerden birisidir. Aşağıdaki şekilde ABX+ACX=ABC'dir; bu üç üçgen benzerdir ve sırasıyla AB, AC ve BC taban (hipotenüs) alınarak çizilmiştir. Fakat bu üçgenlerin alanları, aynı tabanlara sahip karelerin alanıyla sabit bir oran gösterir ve buradan teorem ispatlanır. (ABX dikküçgeni AB kenarlı kareyle, ACX dikküçgeni AC kenarlı kareyle ve ABC dikküçgeni BC kenarlı kareyle sa-

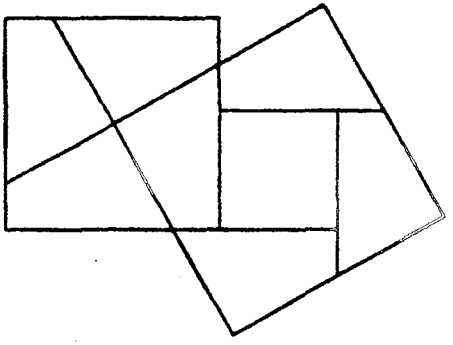
bit bir oran gösterir. ABX+ACX = ABC olduğuna göre $AB^2 + AC^2 = BC^2$ olmalıdır. Ç.N.)



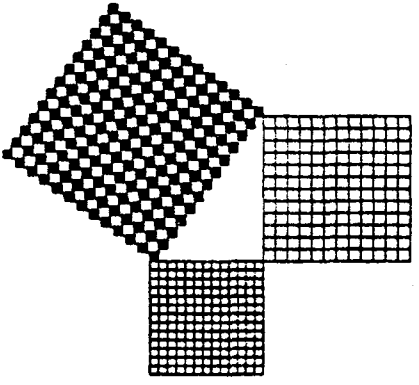
"İki kareli mozaik" (Bu başlığa bkz.) bir diğer ispat oluşturur. Gerçekte bu şekil sonsuz disseksiyonlar (parçalama) ve dolayısıyla sonsuz ispatlar oluşturur; çünkü çarpık duran kare bu çarpıklığı bozulmadan herhangi bir yere konulabilir. Birinci şekil 1873'te Perigal'in yaptığı disseksiyondur.



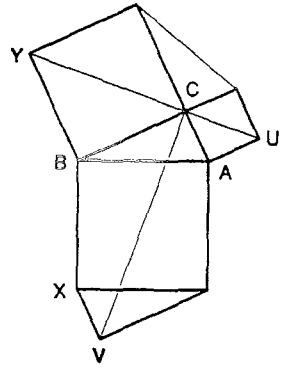
İkinci şekli 1917'de Henry Dudeney çizmiştir.



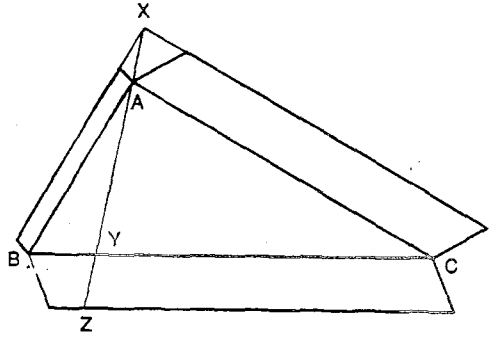
Son zamanlarda Paulus Gerdes dahiyane bir yöntemle süslü bir desen kullanarak teoremi ispat etmiştir.



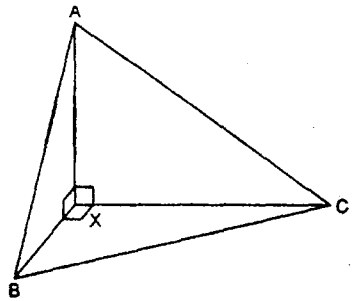
Bu güzel kanıtlama Leonardo da Vinci'ye aittir. En alta orijinal üçgenin bir kopyasını ekleyin. Şekil şimdi 4 özdeş dörtgenden oluşmuştur. Bunların alanlarının eşit olduğunu kanıtlamak için BA'nın B etrafında BA ile BX çakışana kadar saat yönünde döndürüldüğünü düşünün; BAUY ile BXVC çakışacaktır.



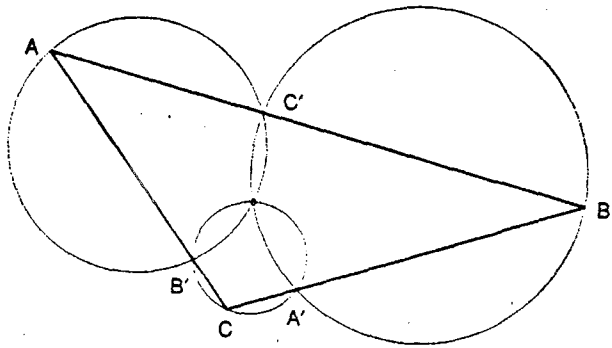
Pisagor teoremi birçok şekilde genellenebilir. Pappus üç kenarı da farklı uzunlukta bir üçgen alarak XA = YZ olacak şekilde bir XAYZ doğrusu aldı. Üçgenin kenarları üzerinde üç paralelkenar oluşturdu (açıları değişken, fakat taban ve yükseklikleri aynı) ve büyük paralelkenarın diğer ikisinin toplamına eşit olduğu sonucuna vardı.



Bir diğer genelleme 1783'te De Gua de Malves tarafından bulundu; gerçi bu husus Descartes'ca da biliniyordu. Dikdörtgen prizması biçimi bir kutunun bir köşesini keserek bir köşedeki bütün açıları dik olan bir dörtyüzlü oluşturun. Bu durumda ABC yüzünün karesi diğer üç yüzün kareleri toplamına eşittir.



Pivot (eksen) teoremi: Bir ABC üçgeninin kenarları üzerinde A', B' ve C' noktalarını alın. AB'C', BC'A' ve CA'B' daireleri bir noktada kesişir.



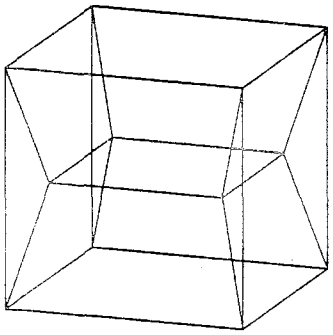
Bu, sonsuz sayıda çözüme (porizm) yol açar. Aynı noktadan geçen üç daire alın. Bu durumda her bir köşesi bu dairelerden birisi üzerinde

olan ve kenarları dairelerin diğer kesişme noktalarından geçen sonsuz sayıda üçgen vardır.

Pivot teoreminin üç boyutlu bir benzeri de vardır. Bir dört yüzlünün kenarları üzerinde 6 nokta alın. Şimdi 4 küremiz olsun. Bunlardan herbiri dört yüzlünün bir köşesinden ve bu köşede birleşen üç kenarın herbiri üzerindeki bir noktadan geçsin. Bu dört kürenin ortak bir noktası olacaktır.

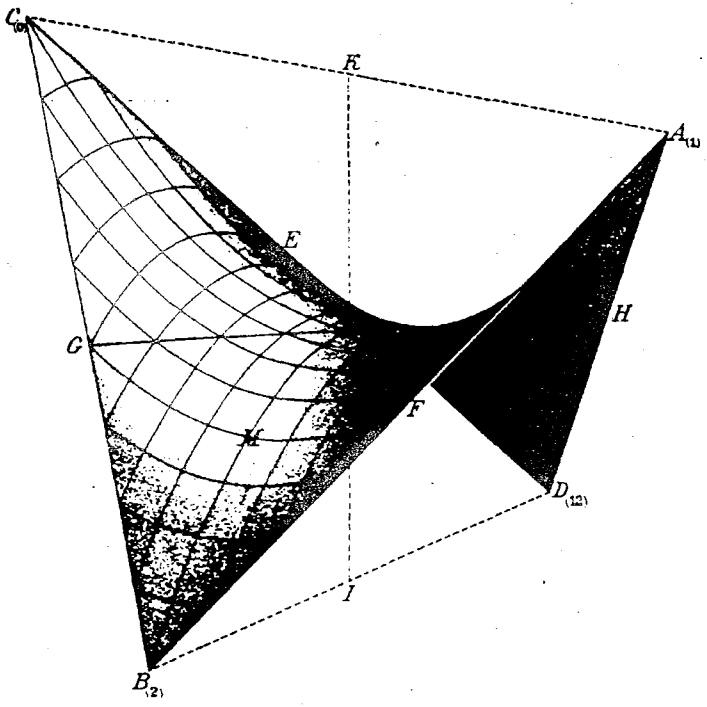
Plateau problemi Lagrange aşağıdaki problemi buldu: Kapalı bir eğriyle sınırlanmış ve bu sınırlar içinde süreksizlik göstermeyen bir yüzeyin minimal değerini bulunuz.

Bu probleme şimdi Plateau problemi de denmektedir; çünkü Belçikalı fizikçi J.A.F. Plateau bu tip bazı problemleri deneysel olarak çözmüştü. Bu problem çoğu kez variyasyonlar kalkülusunun son derece zor problemlerindendir. (Variyasyonlar kalkülusu - calculus of variations-: Entegrali alınacak ifade, en az bir bağımlı veya bağımsız değişkenin ve onların türevlerinin fonksiyonu ise, integralin maxima veya minima değerleri alması için bağımsız değişkenin ne olması gerektiğini araştırmaya 'variyasyonlar hesabı' denir Ç. N.) Jesse Douglas bu problemin genel bir çözümünün varlığını ispat ettiği için 1931'de matematikçilerin Nobel'i olarak bilinen Fields Medal ödülünü almıştır. Fakat sabun köpüğü filmleri kullanılarak birçok yaklaşık çözüm bulunabilir.



Bir küp iskeleti (küpün yalnız kenar ve köşelerini içeren tel vb şekil. Ç.N.) sabunlu suya daldırılırsa 13 yüzey oluşur. Her yüzey hemen hemen düzlemdir ve her üç düzlem 120 açıyla birbirlerine yaklaşırlar. (Bu bütün sabun köpüklerinin ortak özelliğidir. 4 kenar köşede karşılaşırlarsa, birbirleriyle 109° 28' 16"lik bir açı, -dört yüzlü açısı - yaparlar.

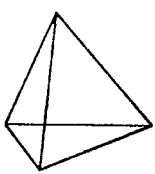
H.A. Schwartz Plateau problemini 1865'te çarpık (düzlemsel olmayan) bir dörtgenle çözdü. Çözümü ince telden yapılmış ve jelatinle kaplı üç modelle gösterdi.



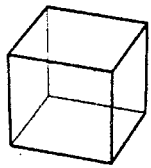
Platonik katılar: Bir çokyüzlü, bütün yüzleri tek tip düzgün bir çokgenden yapılmışsa ve köşeleri kongrüent (çakıştırılabilir) ise düzgündür. 5 tip düzgün çokyüzlü (polihedron) vardır; küp, düzgün dörtyüzlü (tetrahedron), düzgün sekizyüzlü (oktahedron), düzgün onikiyüzlü (dodekahedron) ve düzgün yirmiyüzlü (ikozahedron).

Düzgün çokyüzlülere "Platonik" demek adet olmuştur; Euclid'in Elemanlar kitabının son cildinde şöyle yazar. "Bu 13. ciltte beş çokyüzlüye Platonik adı verilmişse de bunları Plato bulmamıştır. Bu beş şekilden üçü, küp, piramid (dörtyüzlüyü kastediyor olmalıdır. Ç.N.) ve 12 yüzlü Pisagor'a, 8 yüzlü ve 20 yüzlü Teatetus'e aittir."

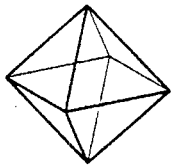
12 yüzlünün erkenden bulunmasına şaşmamak gerekir; çünkü demir pirit kristalleri sıklıkla 12 yüzlü şeklindedir ve G. İtalya'da bu kristallerin güzel örnekleri bulunur. İtalya'da yapay 12 yüzlü M.Ö. 500'den beri bulunmaktadır.



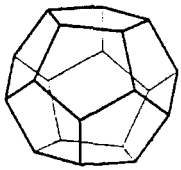
dörtyüzlü



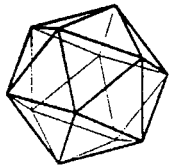
küp



sekizyüzlü



onikiyüzlü



yirmiyüzlü

Platonik katı cisimlerin hepsi Euler ilişkisine uyar:

köşe sayısı + yüz sayısı = kenar sayısı + 2.

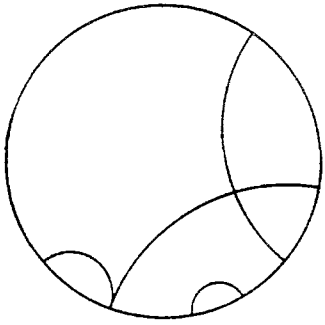
Bu ilişkiler tablodan görülebilir.

	Köşe	Kenar	Yüz
Dörtyüzlü	4	6	4
Küp	8	12	6
Sekizyüzlü	6	12	8
Onikiyüzlü	20	30	12
Yirmiyüzlü	12	30	20

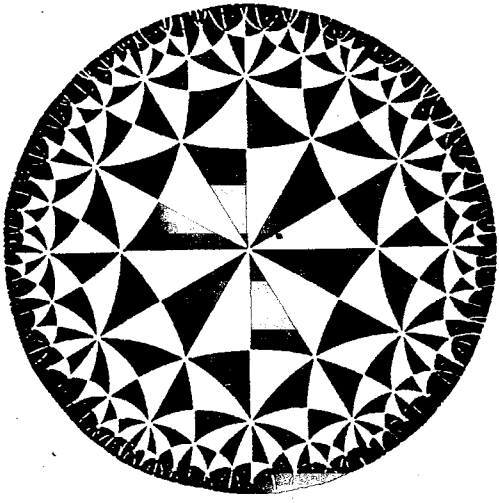
Poinkaré'nin hiperbolik geometri modeli Poincaré sabit bir dairenin içinin *hiperbolik geometri* için bir model oluşturabileceğini buldu. Bu modelde hiperbolik geometrideki bir doğru, sabit daire içinde bir dairenin yayıdır; uçları sabit daireye diktir. Bu doğrulara sabit dairenin çapları da dahildir.

Birbiriyle kesişmeyen yaylar, paralel doğrulara karşılıktır. Eğer yaylar sabit daire üzerinde kesişirse, bir çift sınırlayıcı ışın söz konusudur. Poincaré modeli açılara dokunmaz, böylece açılar doğrudan doğruya şekilden ölçülebilir. Birbirlerini dik açıyla kesen yaylar dik çizgilere (dikeylere) karşılıktır.

Fakat uzunluklar aynen korunmamıştır. Sınıra yaklaştıkça eşit uzunluklar giderek daha kısa yaylarca temsil edilir ve sınır (dairenin çevresi) merkezden sonsuz uzaklıkta gibi gözükür.



Bu şekilde hiperbolik düzlem sonsuz sayıda kongrüent (çakıştırılabilir) üçgenden yapılmış gibi gözükür. Bir diğer deyişle bütün bu üçgenler, çevreye yaklaştıkça küçülen sonsuz sayıda daha küçük üçgenler de dahil, aynı biçimde ve aynı büyüklüktedir.

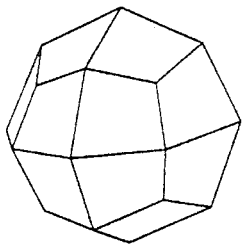


Polihedron dual'leri Herhangi bir Platon polihedronunun (çok yüzlü) duali, komşu yüzlerin merkezleri birleştirilerek elde edilir (dualliik veya eşleklik kavramı: Bir düzlemde *dual elemanlar* şunlardır: nokta = doğru. *Dual operasyonlar* şunlardır: Bir noktadan bir doğru geçirmek = bir doğru üzerinde bir nokta işaretlemek; bir noktadan n doğru geçirmek = bir doğru üzerinde n nokta işaretlemek; n doğrunun bir noktada kesişmesi = n noktadan bir doğru geçmesi. Her elemanın yerine onun dualini koyarak ve her operasyon yerine onun dualini kullanarak elde edilen şekillere *dual şekiller* denir. Örneğin 3 doğru bir noktadan geçerin dual şekli şudur: 3 nokta bir doğru üzerindedir. Birbirinin duali olan teoremlere *dual teoremler* denir; Pascal ve Brianchon teoremleri birbirinin dualidir. Ç.N.) Meydana gelen katı *dual*'de her tepe orijinal şeklin bir yüzüne, her yeni yüz orijinal bir köşeye karşılıktır ve kenarlar bire bir uyarlar.

Her Platon katısının duali yine bir Platon katısıdır. Örneğin düzgün bir tetrahedronun (4 yüzlü) duali kendisidir; küp ile oktahedron (8 yüzlü) ve dodekahedron (12 yüzlü) ile ikozahedron (20 yüzlü) birbirlerinin dualleridir.

Aynı basit operasyonlar Arşimed polihedronları (yarı düzgün polihedronlar) için geçerli değildir; çünkü bu durumda bir köşenin etrafındaki yüzlerin merkezleri aynı düzlem üzerinde değildir. Yapılacak şey yarı düzgün polihedronu bir küre içine koymak ve her tepeye teğet bir düzlem oluşturmaktır.

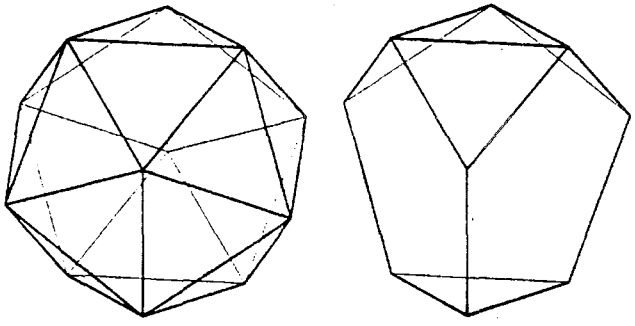
Yarı düzgün polihedronların dualleri yarı düzgün (semi-regular) polihedronlar değildir. Bunların yüzlerinin hepsi üst üste çakıştırılabilir ve köşelerin hepsi düzenlidir; fakat bütün yüzler özdeş olmak zorunda değildir.



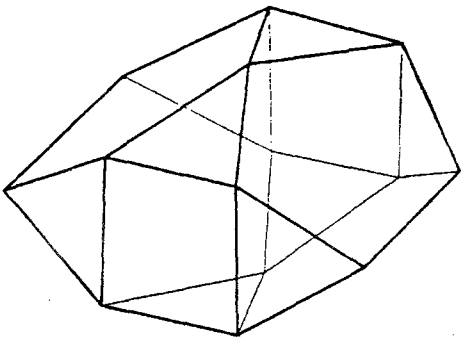
Bu şekil bir trapezoidal ikositetrahedron (yüzleri yamuk olan 24 yüzlü) olup küçük rombi-kübo-oktahedronun (yüzleri eşkenardörtgen-rombus-olan, küple 8 yüzlünün iç içe geçmesiyle oluşan şekil) dualidir. Rombik dodekahedron (yüzleri eşkenar dörtgen-rombus-olan 12 yüzlü) kübo-oktahedronun (küp ile 8 yüzlünün iç içe geçmesiyle oluşan şekil) dualidir. Rombik triakontahedron (yüzleri eşkenar dörtgen-rombus-olan 30 yüzlü), ki bir zonohedrondur (Bkz. zonohedron), ikosidodekahedronun (20 yüzlüyle 12 yüzlünün iç içe geçmiş ve piramid çıkıntıları kesilmiş şekli) dualidir. Rombik triakontahedron, eşkenar dörtgen (rombus) yüzleri olan tek Arşimet dualidir.

Polihedronlar, düzgün yüzlü Yüzleri düzgün poligon (çokgen) olan, fakat simetrisi çok az olan veya hiç olmayan birçok polihedron çizilebilir.

Düzgün bir ikozahedron'un (20 yüzlü) her köşesinin etrafında 5 üçgen vardır; bunlar sığ bir pentagonal (beşgensel) piramid oluşturur. Bu piramidlerden üçünü kesip atın ve yerlerine düzgün pentagonlar koyun; sonuç üç kere küçültülmüş bir ikozahedron'dur (20 yüzlü).



Aşağıdaki şeklin adı bilunabirotunda'dır (çift ay - çift yuvarlak).

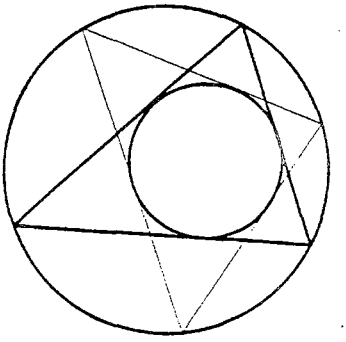


Viktor Zalgaller 1966'da şunu kanıtladı: Düzgün ve yarı düzgün polihedron'lardan (çok yüzlü), düzgün prizmalardan ve antiprizmalardan başka, düzgün yüzlü 92 konveks polihedron vardır. Zalgaller bunların herbirine isimler verdi: Jirofastigium, meta-çift azaltılmış rombikosidodekahedron, hebesfenomegakorona vb. Bu 92 polihedron'dan 28'i *basittir*; şöyle ki diğer 2 düzgün yüzlü polihedrona bölünemezler.

Poncelet porizmi (Poncelet'nin sonsuz sayıda çözümü) Şekildeki gibi iki konik, örneğin iki daire verilmiş olsun. Bu dairelerden dıştaki içine çizilen üçgen, içteki daireyi iç dairesi olarak kabul edebiliyorsa böyle sonsuz sayıda üçgen çizilebilir.

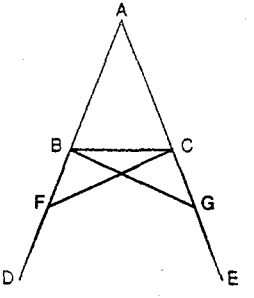
İki dairenin bunu yapabilmesi için gerekli şart $R^2-2Rr = d^2$ olmasıdır (R =büyük dairenin yarıçapı r = küçük dairenin yarıçapı, d = dairenin merkezleri arasındaki mesafe.) Bu formül bir üçgenin çevrel çemberiyle iç çemberinin yarıçapları ve bu iki dairenin merkezleri arasındaki uzaklığın ilişkisini verir. (Poncelet porizminin anlamı şu-

dur: İki daireden biri bir üçgenin çevrel çemberi, diğeri iç çemberi (incircle) ise, bu daireleri çevrel ve iç çember olarak kabul eden sonsuz sayıda üçgen vardır (porizm = sonsuz yanıtı olan problem).



Benzer olarak eğer bir dörtgen (veya n-gen) bir koniğin içine, bir diğerinin de dışına, her iki halde de kenarları koniğe teğet olarak çizilebiliyorsa, böyle sonsuz sayıda dörtgen (veya n-gen) vardır.

Pons asinorum İkiz kenar bir üçgende taban açıları eşittir ve ikiz kenarlar uzatılırsa tabanın altındaki açılar da eşittir. Şekil Euclid'in kendi şeklidir, Euclid'in ispat için kullandığı çizgiler aynen alınmıştır.

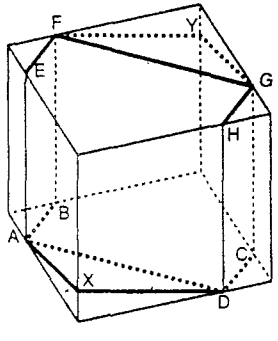


Bu, Euclid'in Elemanlar kitabının ilk cildinin 5. problemidir. Bunu k ispat edenin Thales olduğu sanılmaktadır. Pappus bu problemi öyle ispat etti: Üçgeni alıp ters çevirmek ve kendi üstüne yatırmak. ıu metod birkaç yıl önce teorem kanıtlayan bir bilgisayar programına yeniden bulundu.

Pons asinorum "ahmaklar köprüsü" demektir; muhtemelen payanalı köprüye benzediğinden bu ad verilmiştir. Belki de matematikde klı zayıf olanlar bu noktayı aşamadıkları için böyle denmiştir.

Prens Rupert'in küpü Verilen bir küpün içinde kesiti kare olarak çılabilecek en büyük delik nedir? Bu probleme Prens Rupert problemi denmektedir. Prens Rupert, İngiltere Kralı I. Charles'ın yeğeni ve ngiliz İç Savaşında Kraliyet Kuvvetleri'nin komutanı idi. Yeni olan Kraliyet Derneği'ne seçilmişti. Hâlâ Prens'in metali diye bilinen ir alaşım icat etti ve hızla soğutulmuş cam damlalarının özelliklerini nceledi. Son yıllarında Windsor Şatosu'nda yöneticiydi ve burada endine ait bir demir dökümhanesi ve laboratuvarı vardı.

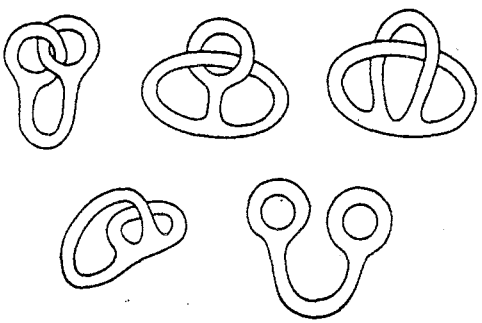
Bu problem, "bir küpün içinden geçirilebilecek en büyük küp hangisidir" sorusuna benzer. İlginçtir ki bir küpün içinden kendisinden hafifçe daha büyük bir küp geçirebilir. Orijinal küpün kenarı 1 ise kü-



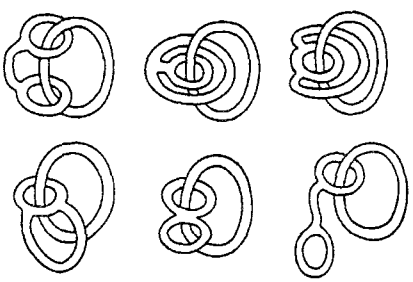
pün içinden geçebilecek en büyük küpün kenarı $3/4\sqrt{2}$ veya 1.060 660'tır.

Bu şekilde delik, küpün en üst yüzünü EFGH, alt yüzünü ise ABCD çizgileri boyunca ve diğer iki dikey kenarı X ve Y de keser.

Pretzel transformasyonları (dönüşümleri) Pretzel, düğüm biçiminde yapılan tuzlu çöreklerdir. Resimde üst soldaki cismin çok elastik bir materyalden yapıldığını hayal edelim. Böylece onu yırtmadan ve kesmeden istediğimiz kadar gerer veya sıkarız. İlk bakışta resim-



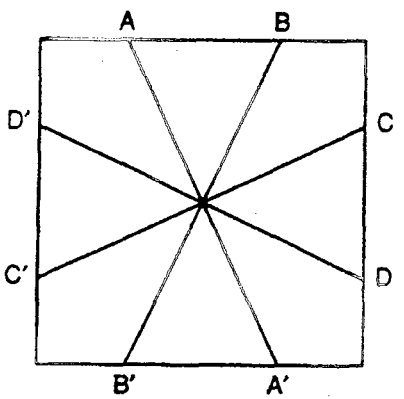
deki 1. objeyi son obje haline getirmek olanaksız gibidir; en azından bir halkayı kırmadan veya ötekinin içinden geçirmeden bu yapılamaz sanılır; fakat hiç de öyle olmadığı resimlerden görünüyor.



Bu adeta sihirli şeyin nasıl çalıştığını anlayanlar, 2. dönüşümü daha kolay anlayacaktır. Burada sol ilmeklerden biri, büyük ilmekten çıkıp özgürleşmiştir.

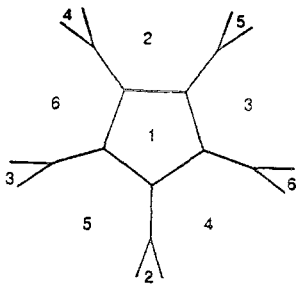
Projeksiyon (izdüşüm) düzlemi Projektif geometride bir doğrunun her iki ucu, sonsuzda tek bir noktada birleşir. Bir diğer deyişle doğru, kapalı bir eğri olarak düşünülebilir; öyle bir eğri ki içinde bulunduğu düzlemin karşıt yönünde gözden kaybolur; çünkü çizim sonludur. Bundan başka bütün paralel çizgiler, sonsuzda aynı noktadan geçer.

Bunun bir sonucu şudur: Sonsuza giden bir doğru, Euclid geometrisinde içinde bulunduğu düzlemi iki yarıma ayırır; fakat projeksiyon



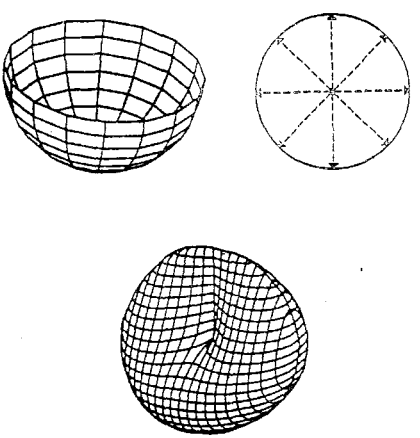
düzlemini ikiye ayırmaz, bu düzlem tek parça olarak kalır.

Projeksiyon düzlemi karşıt sınır noktaları belirlenmiş bir bölge olarak temsil edilebilir; örneğin bu karede A ve A', B ve B', C ve C' ve D ve D' aynı noktalardır.



Yukarıdaki şekilde bir projeksiyon düzlemindeki bir haritanın, aynı sınırı paylaşan iki ülke farklı renklerde olacaksa, 6 renk isteyebileceği görülüyor. Altı bölgeden herbiri diğer beşe komşudur.

Projeksiyon düzlemi kapalı bir düzlem olarak oluşturulabilir; bunun için yukarıdaki karenin iki tarafı da kullanılmalıdır. Fakat karşıt kenarların her iki çifti de 180° burularak birleştirilmelidir (*Möbius şeridi*nde ise yalnızca bir çift kenara 180° burma uygulanır.)



İlk önce kare gerilerek yarım küre haline getirilir. Sonra çapların karşıt uçları ikinci şekilde görüldüğü üzere, karedeki A ve A' vb. birleştirildiği gibi birleştirilir. Üç boyutlu uzayda bunu yapmak, oluşan yüzey kendi kendini kesmeden olanaksızdır. Oluşan yüzey alt tarafında küreye çok benzer, üstü ise, şekildeki gibidir.

Bu tek taraflı bir yüzeydir; bu durumda Euler ilişkisi şu şekli alır:

Köşe sayısı + yüz sayısı = kenar sayısı + 1.

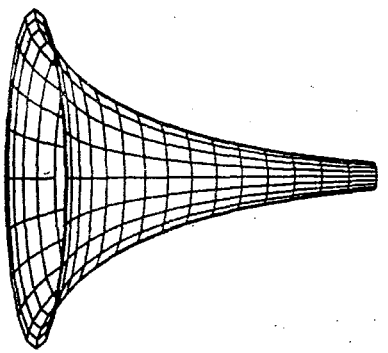
Yukarıdaki haritada bu görülebilir: 6 bölge (yüz), 10 köşe ve 15 kenar vardır; böylece formüle uyar.

Aynı biçimde cebirsel bir yüzey de vardır. Bunun denklemi:

$(px^2+qy^2)\,(x^2+y^2+z^2) = 2z\,(x^2+y^2)$.

Burada p ve q uygun sabitlerdir.

Psödosfer (yalancı küre) 1868 yılında İtalyan geometricisi Eugenio Beltrami, bir psödosfer yüzeyinin non-Euclidean (Euclid'in olmayan) hiperbolik uzayların ancak kısmen modeli olabileceğini anladı. (İstisnaî noktaları olmadan hiperbolik uzayın tamamının modeli olan

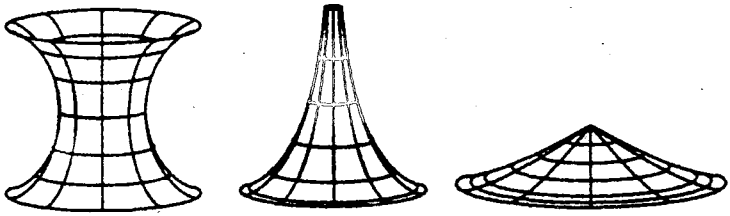


hiçbir yüzey yoktur.)

Psödosfer bir traktriksi (çekme eğrisi) ekseni etrafında döndürerek elde edilir (Bkz. Çekme eğrisi). Hiperbolik düz bir çizgi, psödosferin bir jeodezik çizgisidir (jeodezik çizgi: Bir yüzeyin iki noktası arasındaki en kısa çizgi. Ç.N.). Noktalar arası uzaklık, jeodezik çizgi boyunca ölçülen uzaklıktır.

Kongrüent (çakıştırılabilir) şekiller, uzunluk ve açıları aynı olduğu için, psödosfer üzerinde kaydırılarak çakıştırılabilir. Bizim açımızdan bakıldığında şekil bükülmüş gözükecektir, fakat deforme olmamıştır.

Psödosfer, eğriliği sürekli olarak negatif olan bir yüzeydir. Eğriliği negatif buna benzer yüzeyler, hiperbolik geometri modeli olabilir. Bir sonraki şekilde solda eğriliği sürekli olarak negatif ve üstte ve altta

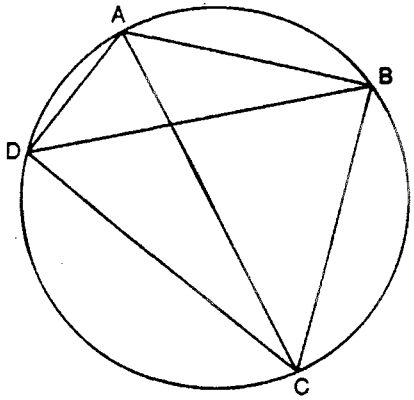


dairelerce kesilen bir yüzey görülüyor; ortada psödosfer var, yukarı doğru sonsuza gidebilir; sağda altta dairesel bir kenarı ve üstte köşesi olan bir yüzey var.

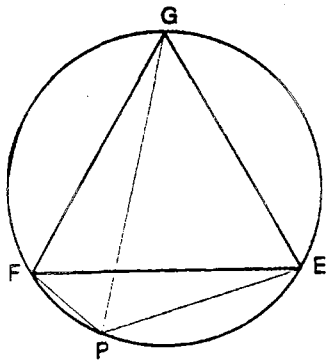
Sürekli pozitif eğriliği olan bir küreyle sürekli negatif eğriliği olan yüzeylerin trigonometrisi arasında basit, fakat hayret uyandırıcı bir ilişki vardır. Küresel trigonometri formüllerinde açıları aynı bırakın ve kenar uzunluklarını i ile, yani eksi 1'in karekköküyle çarpın.

Ptolemeus teoremi Eğer ABCD daire içine çizilmiş bir dörtgense:

AB. CD + BC. DA = AC. BD



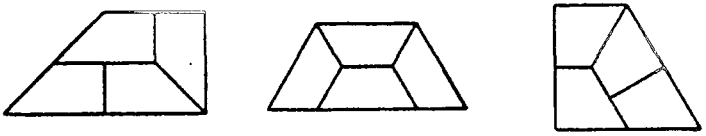
Dörtgenin köşelerinden üçü, EFG gibi bir eşkenar dörtgen oluşturursa özel bir durum sözkonusudur (bu, *Fermat noktalarını* ve Steiner ağacını bulmaya yarar.) (Bkz. Fermat noktası ve Steiner ağları). Bu durumda P, EF yayının herhangi bir noktası ise PG = PE + PF.



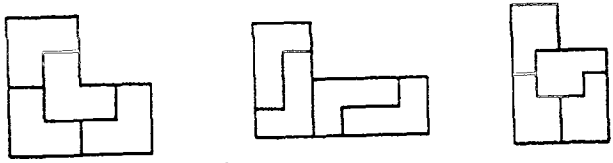
R

Reptil'ler Hangi şekiller, biçim bakımından kendilerinin tıpkısı olan daha küçük parçalara bölünebilir? Dik açılı ikizkenar üçgen ve kenarlarının oranı $1:\sqrt{2}$ olan her paralelkenar kendilerinin tıpkısı olan daha küçük iki parçaya bölünebilir.

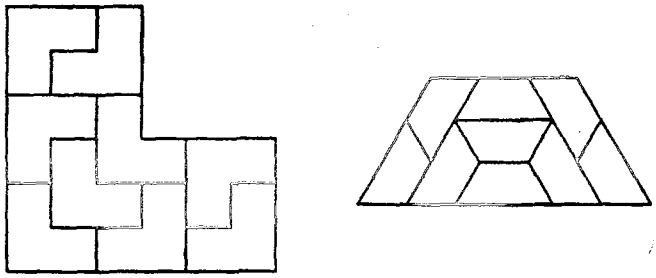
Şekildeki yamukların herbiri kendilerinin tıpkısı 4 parçaya bölümüştür.



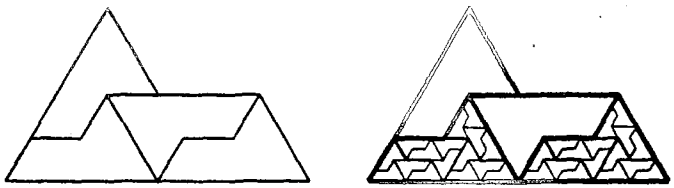
Bu L biçimleri de kendisiyle özdeş daha küçük 4 parçaya ayrılabilir:



Bu iki şekil de daha küçük kopyalarından oluşturulabilir.

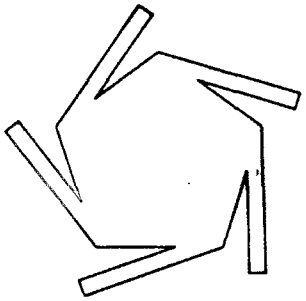


Her reptil tipi parçalama, giderek daha küçük parçalardan oluşacak şekilde tekrarlanabilir. Bunun tersi de mümkündür. Özdeş küçük parçalar birleştirilerek giderek daha büyük aynı biçimde parçalar oluşturulabilir. Aşağıda bir sfenksin daha küçük özdeş parçalara ayrılması görülüyor. Sfenks reptil özelliği olan tek beşgendir.



Referans: C. Dudley Langford, 'Uses of a geometric puzzle', Mathematical Gazette, No: 260, 1940.

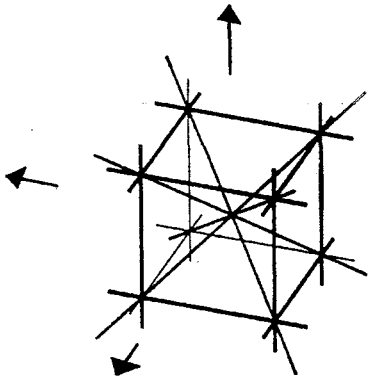
Resim galerisi teoremi 1973 Ağustos'unda bir matematik konferansında Vasek Chvatal, Victor Klee'den kendisine ilginç bir geometri problemi sormasını istedi. Klee şu soruyu sordu: Bir resim galerisinin bütün duvarlarının güvenliğini sağlamak için kaç bekçi gereklidir?



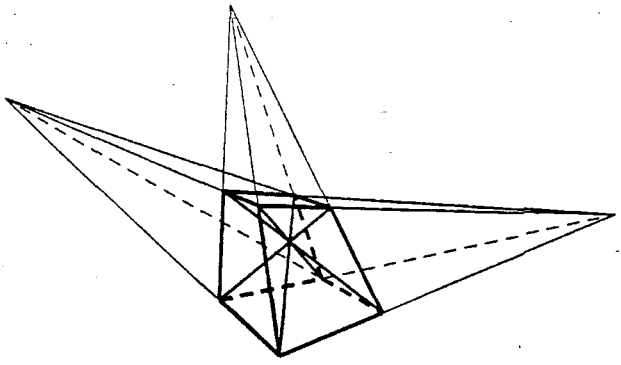
Eğer resim galerisi çokgen biçimindeyse ve herbirinden kol çıkan N köşesi varsa, N bekçi daima yeterlidir ve şekilde görüldüğü üzere bazen de gereklidir. Galerinin her kolu için bir bekçiye gereksinim vardır. Bu bekçilerin her biri merkezi bölgeyi de göz altında tutabilir.

Reye şekli Bir küpün 8 köşesini, küpün merkezini ve küpün paralel kenarlarının kesiştiği sonsuzda 3 noktayı (oklarla gösterilmiştir) alalım. Böylece 12 nokta elde ettik.

Küpün 6 yüzüne küpün karşıt kenarlarından geçen 6 düzlemi ekleyelim. Bu Reye şeklidir; Reye şeklinde, 12 düzlem ve 12 nokta vardır; bu şekilde her düzlemde 6 nokta vardır ve her noktadan 6 düzlem geçer.

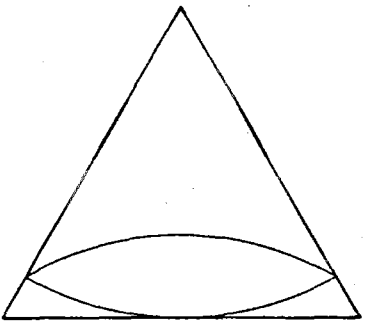


Normal bir küpten başlayarak bu şeklin oluşumunu hayal edebiliriz. Aşağıda Reye şeklinin "sonsuzda noktalar" içermeyen bir diğer şekli görülüyor.

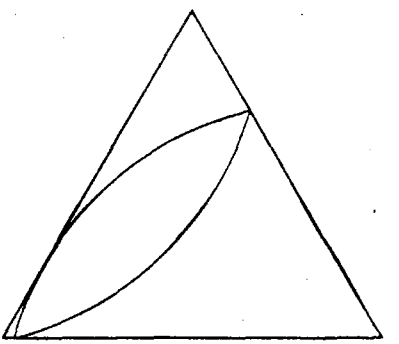


Bu şekil noktalar ve çizgilerden oluşmuştur; 16 doğru, 12 kenar, 4 küp köşegeni ve daha önceki 12 nokta. Her noktadan 4 doğru geçer ve her doğru üzerinde 3 nokta vardır.

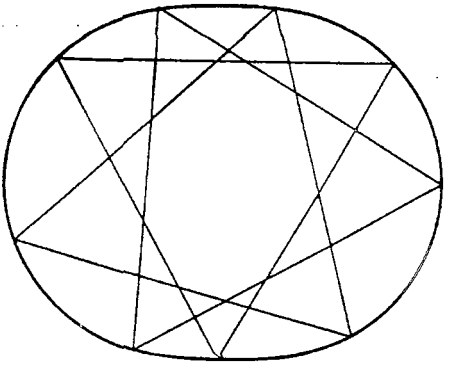
rotorlar Düzgün altıgen gibi rotasyonel simetrisi olan bir cisim, bir daire içinde daima kenarlara değerek dönebilir; fakat rotorun (dönen şeklin) veya onun dışındaki eğrinin simetrik olması gerekmez.



Bu şekilde, eşkenar üçgenin 3. dereceden rotasyonel simetrisi vardır. Rotorun iki taraflı simetrisi vardır; her kenar, merkezi üçgenin tepesi olan ve üçgenin karşı kenarına değen bir dairenin yayıdır (Rotorun uzunluğu üçgenin yüksekliğine eşittir.)



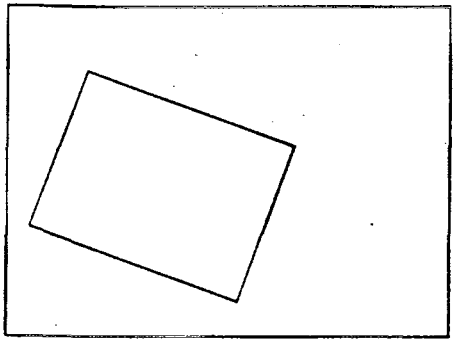
Bir silindirin tabanının daire olmak zorunluğu yoktur. Bir eşkenar üçgen bu silindir içinde rotosyon yapabilir:



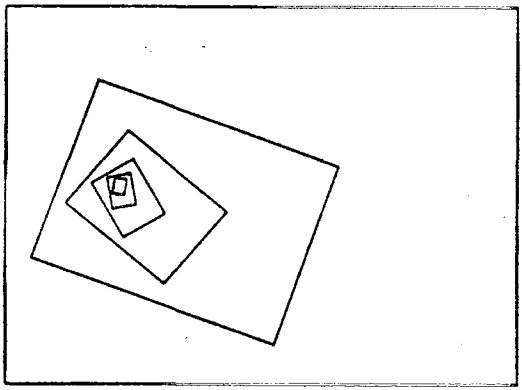
Referans: H. Steinhaus. Mathematical Snapshots. 3rd edn., Oxford University Press, Oxford, 1969.

S

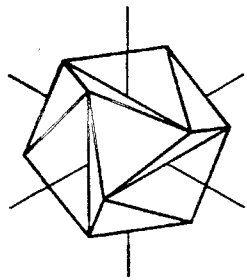
Sabit nokta teoremleri Şekilde basit bir sabit nokta teoremi görülüyor. İki harita birbirinin üzerine konulmuş. Özdeş bölgeler gösteriyorlar; fakat biri büyük, diğeri küçük. Küçük harita büyüğün küçültülmüş bir şekli olarak düşünülebilir. Sabit nokta teoremi şunu söyler: Küçük harita üzerinde öyle bir nokta vardır ki büyük haritadaki aynı noktanın tam üstündedir.



Bu nokta şöyle bulunabilir (böyle tek bir nokta vardır): Küçük haritanın büyük haritayla olan ilişkisi aynen tekrarlanarak üçüncü bir harita çizilir ve giderek daha küçük haritalar çizmeye devam edilir. Bu harita dizileri bir limit noktada sona erer; bu, aranılan noktadır.

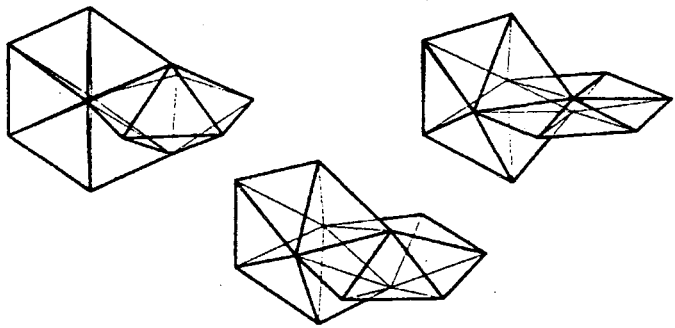


Sarsak çokyüzlüler Cauchy 1813'te katı yüzlerden yapılmış ve katı kenarlar boyunca menteşeli konveks bir çokyüzlünün katı olduğunu kanıtladı. Fakat çokyüzlü konveks değilse değişik olasılıklar vardır; katı olabilir, 'sallantılı' (çok küçük hareketler yapıcı) olabilir, iki veya daha fazla kararlı şekli olabilir veya tamamen hareketli, eklemlenmiş gibi olabilir.



Bir 20 yüzlünün komşu yüzlerini ele alalım. Bunların kenarları, çarpık (skew) bir dörtgen oluşturur (çarpık dörtgen, köşeleri aynı düzlem üzerinde olmayan dörtgendir Ç.N.); bunlar ortak kenarlı bir diğer üçgen çiftinin de kenarıdır.

Düzgün bir 20 yüzlü alın ve ortak bir kenara sahip 6 çift yüz yerine 6 çift eşkenar üçgen koyun. Sonuç Jessen'in *ortogonal 20 yüzlüsü*dür. Bu şekil sallantılıdır; çok küçük hareketler yapabilir; uzun kenarlar boyunca yüzleri zorlamadan açılarını hafifçe değiştirebilir.

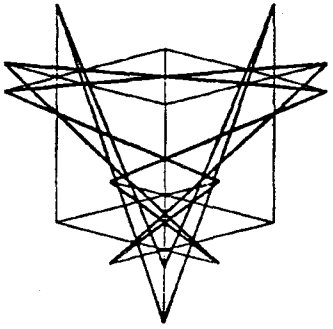


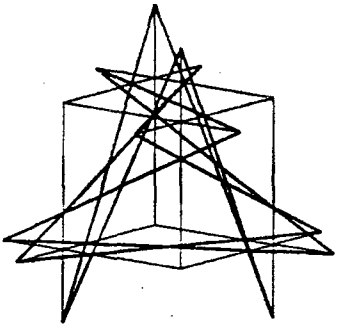
10 eşkenar üçgen alın ve 2 beşgen piramid yapın; bunlar yüzyüze bitişsin; ancak son iki çiftin arasında bir aralık bırakın. Bu iki tamamlanmamış piramidi alın ve dik açı yapacak şekilde birleştirin. Öyle ki biri sıkılıp kısaltılınca ve aralığı genişletince, diğeri daha irileşsin. Hesaplar gösterir ki bu çok yüzlü için böyle 3 kararlı durum vardır; bu şekil Michael Goldberg tarafından bulunmuştur.

Referans: Michael Goldberg, Unstable polyhedral structures, Mathematics Magazine, May 1978.

Schäfli'nin çift altısı *Reye şekli* gibi bu şekil de küpten türetilir. Alttaki resimde (çift altının iki adet yandan görünüş resmi) 30 nokta

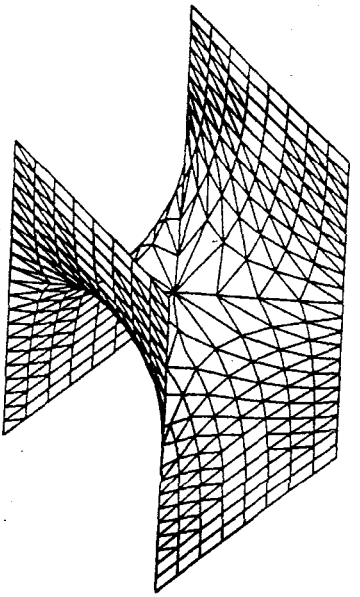
vardır; her noktadan 2 doğru geçer ve 12 doğrunun herbiri üzerinde 5 nokta bulunur. Küpün 6 yüzünden herbirinde 2 doğru vardır; doğrular renklendirilebilir; böylece her yeşil doğru bir kırmızı doğruyu keser; bunun tersi de doğrudur.



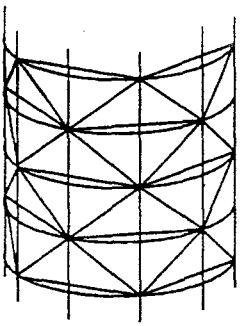


Schäfli şekli ünlü 'çift altı' teoremi ile ifade edilebilir. Bir doğru alıp buna 1 diyelim; bu doğruyla aynı düzlemde olmayan 5 doğru alalım; bunlara 2', 3', 4', 5', 6' diyelim. 2', 3', 4' ve 5' doğrusunu kesen tek doğru 6 olsun. Benzer olarak 2, 3, 4 ve 5 doğrularını tanımlayalım. Schafli teoremi şudur: 2, 3, 4, 5 ve 6 doğrularını kesen tek bir doğru vardır; 1'. Bu doğruların oluşturduğu şekil Schäfli'nin çift altısıdır.

Scherk yüzeyi Bu $e^z \cos y = \cos x$ gibi çok basit bir denklemi olan minimal bir yüzeydir. Bu yüzey yatay bir karenin köşelerinden geçen dört birbirine paralel dikin arasındadır. Şekildeki yüzey üstte ve dipte düzlemlerle kesilmiştir.



Schwarz çok yüzlüsü Sezgiyle kabul edebiliriz ki eğri bir yüzeyin alanını, onu birçok küçük üçgene ayırarak ve üçgen sayısı sonsuza, üçgen alanı sıfıra doğru giderken limit değer alarak ölçebiliriz.



Schwarz sezgilerin insanı nasıl yanıltabileceğini göstermek için bu örneği kullandı. Temel yüzey silindirdir. Bu yüzeyi, silindirin eksenine paralel, eşit aralıklı 2n dikey doğruyla bölelim. Yine bu yüzeyi, bu doğrulara dik, eşit aralıklı $2n^3$ daireyle bölelim. Şekilde görüldüğü üzere köşeleri birleştirelim; akordiyon biçimi bir yüzey elde ederiz. Şimdi n'i sonsuz yapalım; bu durumda üçgenler silindir yüzeyine giderek daha çok yaklaşacak yerde uzaklaşırlar ve toplam yüzey sonsuz olur.

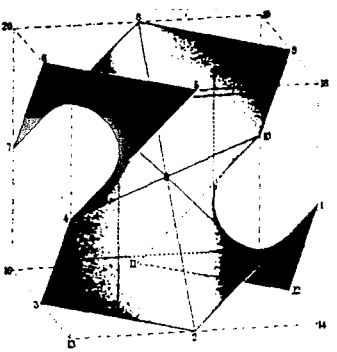
Referans: C. Stanley Ogilvy. Tomorrow's Math. 2nd edn. Oxford University Press, New York, 1972.

Schwarz'ın periyodik minimal yüzeyi Schwarz minimal yüzeylerin iki prensibini buldu ve bu sayede küçük birimlerden daha büyük yüzeyler oluşturabildi:

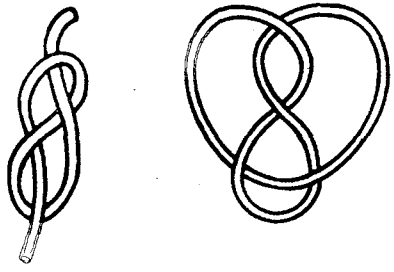
Bir minimal yüzeyin sınırlarının bir bölümü bir doğruysa, bu yüzeyin bu doğruya göre alınan ayna hayali, orijinal yüzeye eklendiğinde bir diğer minimal yüzey oluşturur.

Bir minimal yüzey bir düzlemi dik açıyla keserse, bu yüzeyin bu düzleme göre alınan ayna hayali, orijinal yüzeye eklendiğinde bir diğer minimal yüzey oluşur.

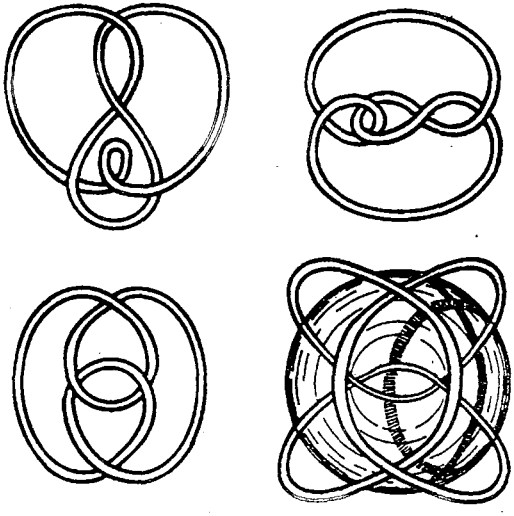
Schwarz'ın minimal yüzeyinin sınırı, küpün yüzlerindeki doğrulardır. Boşluğu bu küplerle doldurarak, sonsuz kere tekrarlayan bir minimal yüzey elde edilir.



Sekiz biçimli düğüm veya dörtlü düğüm: Bu en basit düğümlerin ikincisidir; sırasıyla bir alttan, bir üstten dört çaprazı vardır. Soldaki düğümün serbest iki ucunu birleştirirseniz sağdaki düğümü elde edersiniz.

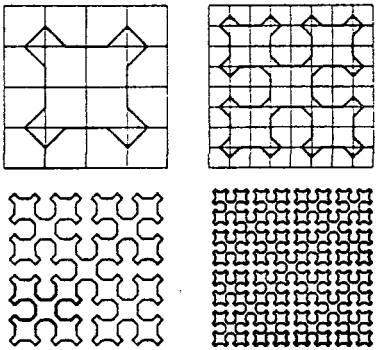


Bundan sonraki şekilde yalnız uzunlamasına simetriye sahip yukarıdaki düğümün nasıl hem uzunlamasına, hem enlemesine simetriye sahip üçüncü bir düğüm ve nihayet bir kürenin yüzeyinde nasıl simetrik bir yol haline getirildiğini görüyorsunuz.



Referans: G.K. Francis. A Topological Picture Book. Springer-Verlag, New York 1987.

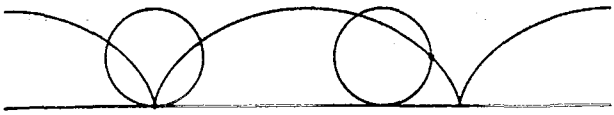
Sierpinski'nin karesel kar tanesi Bu, bir karenin her noktasından geçen bir eğri bulmak problemine Sierpinski'nin bulduğu yanıttır. Şekiller böyle bir eğrinin ilk dört şeklini göstermektedir. İlk iki şekil, eğrinin yolunu çizmede kullanılan temel kareleri vermektedir.



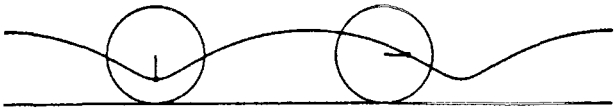
Her safhada, her kare 4 çeyreğe bölünmüş ve bunlar 1. safha gibi doldurulmuş, daha sonra önceden bağlı oldukları karelere 2. safha gibi bağlanmışlardır. Bu operasyonların limiti, bir karenin her noktasından geçen bir eğridir.

Sikloid (çevrim eğrisi) Sikloidden ilk söz eden Marin Mersenne oldu; fakat Mersenne, adeti olduğu üzere, bu problemi yalnız matematikçi arkadaşlarına ve mektuplaştığı kişilere iletti (yayımlamadı). Sikloid üzerinde ilk ciddi kitap 1644'te Galile'nin öğrencisi Evangelista Torricelli tarafından yazıldı. Pascal da bu eğri üzerinde çalıştı, hatta berbat bir diş ağrısını unutmak için bu konuyu incelediği söylenir.

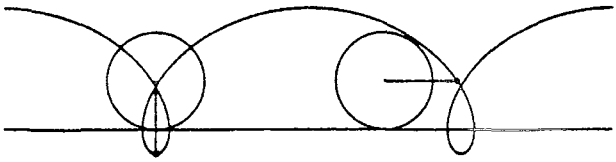
Bir tekerlek düz bir yüzey üzerinde dönerken, tekerleğin çevresi üzerindeki bir nokta sikloid çizer:



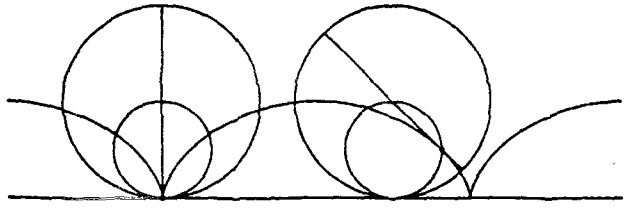
Tekerleğin içindeki noktalar "*kısaltılmış sikloid*" (curtate cycloid) çizer.



Bir tren tekerleği ray üzerinde dönerken, tekerleğin çevresi üzerindeki bir nokta "*uzatılmış sikloid*" (prolate cycloid) çizer, bu eğri ilmekler içerir.



Çapı orijinal dairenin iki katı olan ve onunla beraber dönen bir daire hayal edelim. Bu durumda büyük dairenin başlangıçta dikey olan çapı dönerek sikloide teğet olur. Sikloid bu çapın "zarf"ıdır (envelop) (zarf: Bir eğriler veya yüzeyler takımının her bir öğesine teğet olan eğri veya yüzey. Ç.N.)



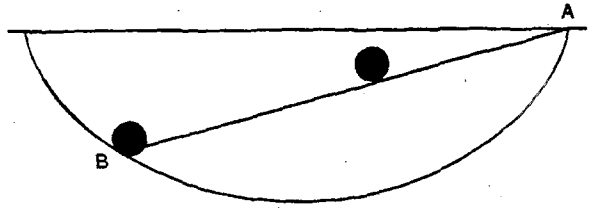
Galile haklı olarak sikloidin bir köprünün kemeri için en uygun eğri olduğunu düşündü.

Galile 1599'da sikloidin alanını bulmayı da denedi. Arşimed'in örneğini izleyerek sikloidin bir kemerini kesti; bunu tarttı ve sikloidi yaratan dairenin alanıyla kıyasladı. Bu yöntemle sikloidin alanının, onu yaratan dairenin alanının yaklaşık 3 katı olduğunu buldu, Roberval 1634'te sikloidin alanının, onu yaratan dairenin tam 3 katı olduğunu kanıtladı; yani $3\pi r^2$.

Mükemmel bir geometrici olan Christopher Wren 1658'te şunu kanıtladı: sikloidin bir kemerinin uzunluğu, onu yaratan dairenin içine çizilmiş karenin çevresi kadardır.

Bir sikloidin evolütü, orijinal sikloidden yarım dönüş geride kalmış, ona eşit bir sikloiddir. (evolüt için bkz. katenaryus).

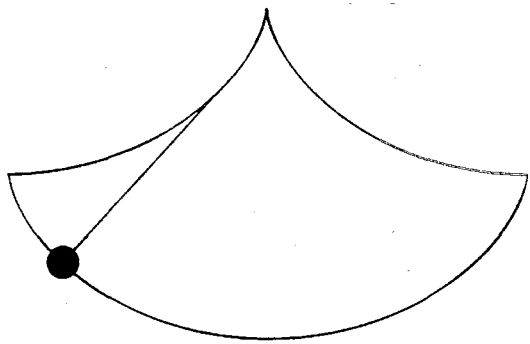
Sikloid aynı zamanda brakistokron probleminin de çözümüdür. Yer çekimiyle hareket eden bir partikülün A'dan B'ye en kısa zamanda gidebilmesi için gereken yolun şekline brakistokron denir.



Bu çözümün olağanüstü yanı şudur: Bitiş noktası başlangıç noktasından hafifçe aşağıda olursa, en hızlı yol (tersine çevrilmiş sikloid), partikülü bitiş noktasının biraz altına getirir, duraklar ve sonra yukarı çıkartır (Şekildeki bilye biraz yokuş yukarı gider).

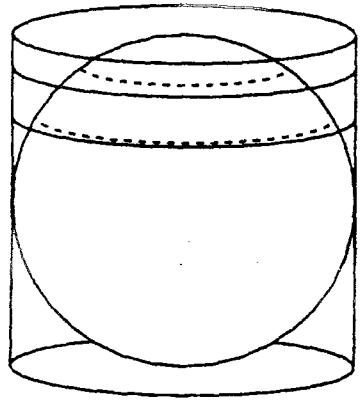
Ayrıca sikloid biçimi bir olukta aşağı yuvarlanan bir bilya, sikloidin ekseni dikey olmak şartıyla, sikloidin neresinden atılırsa atılsın, bitişe eşit zamanda varır; bir diğer deyişle brakistokron aynı zamanda bir totokrondur. (Totokron veya izokron: Bu öyle bir eğridir ki belli bir yükseklikten yer çekimi etkisiyle bu eğriyi izleyerek inen maddi bir noktanın inişi için geçen zaman, noktanın eğrinin hangi noktasından harekete başladığına bağlı değildir. Ç.N.).

Galile sarkacın periyodunun yalnız uzunluğuna bağlı olduğunu bulmuştu; fakat bu, yalnız küçük salınımlar için geçerlidir. Sarkacın salınımı; bir sikloide sarılacak biçimde gerçekleştirilirse bunun her türlü salınım için geçerli olduğu görülür.



Huggens buna dayanarak sarkaçlı saati mükemmelleştirmek istedi, fakat bu düşünce çözdüğünden fazla sorun yarattı ve çok geçmeden terkedildi.

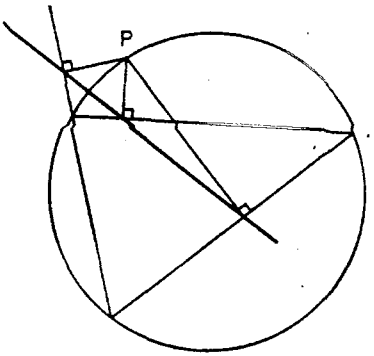
Silindir içinde küre Arşimed bir silindirin yanal yüzeyine ve alt ve üst tabanına teğet bir kürenin yüzeyinin, silindirin yanal yüzeyi kadar ve hacminin silindir hacminin 2/3'ü kadar olduğunu göstermiştir.



Daha genel olarak, eğer küre ve onu içeren silindir, silindir eksenine dik iki düzlemce kesilirse, silindirin ve kürenin iki düzlem arasında kalan yüzeyleri birbirine eşittir.

Arşimed bu şeklin mezartaşı üzerine oyulmasını istedi. Yıllar sonra, Çiçero, Arşimed'in mezarını aradı ve onun mezartaşında bu şekli oyulmuş olarak buldu.

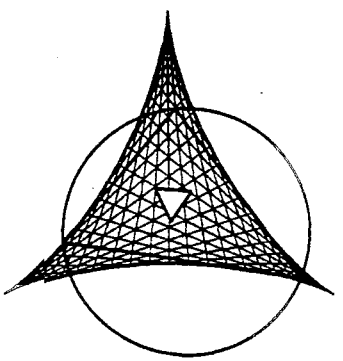
Simson doğrusu Herhangi bir üçgen alınız ve bunun çevrel dairesi üzerinde bir P noktası belirleyiniz. P noktasından üçgenin kenarlarına dikmeler indiriniz. Bu dikmelerin ayakları, P noktasının Simson doğrusu denilen bir doğru üzerinde bulunur. Robert Simson, Euclid'in Elemanlar kitabını yayımlayarak ün yapmıştır.



Çevrel daire üzerindeki herhangi bir nokta alıp üçgenin ortosentrına (yüksekliklerin kesişme noktası) birleştiriniz. Bu doğrunun orta noktası 9 nokta dairesi ve alınan noktanın Simson doğrusu üzerindedir. (Ne kadar zarif ve güzel! Ç.N.)

Çevrel daire üzerinde bir çapın iki ucuna ait noktaların Simson doğruları birbirine diktir ve 9 nokta dairesinin çevresi üzerinde kesişir.

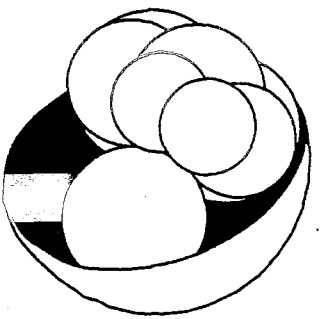
Bir üçgenin çevrel dairesi üzerindeki 3 noktanın Simson doğruları bir diğer benzer üçgen oluşturur.



Çevrel daire üzerindeki bütün noktaların Simson doğruları, bir *deltoidin* zarfını oluşturur. İlginçtir ki zarfın biçimi, üçgenin biçimine tabi değildir. Üçgenin her kenarı, kenarın ortasından olan uzaklığı, kenarın 9 nokta dairesini keserek oluşturduğu kirişe eşit olan bir noktada, deltoide teğettir. Deltoidin alanı çevrel dairenin alanının yarısıdır. Deltoidin iç çemberi, üçgenin 9 nokta dairesidir.

İlk çizdiğiniz üçgenin *Morley üçgeni*ni çiziniz; konumu deltoidin konumunun aynısı olacaktır. (Bkz. Morley üçgeni)

Soddy'nin heksleti Sir Frederick Soddy, radyoaktif elementlerin birbirine dönüşme 'zincir'ini veya serisini keşfeden kimyacıdır; Soddy buna ek olarak kürelerden oluşmuş şaşırtıcı bir zincir veya gerdanlık bulmuştur. Öyle küreler düşünün ki her küre iki merkezî küreye ve bu küre yığınını örten büyük küreye teğet olsun.



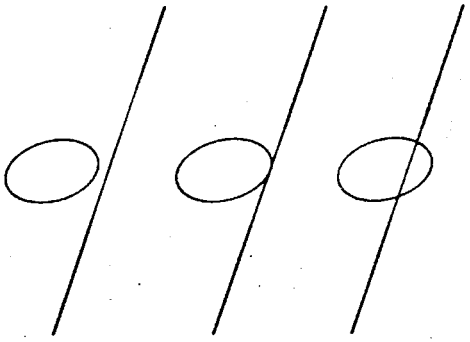
Böyle bir küreler gerdanlığı daima kapanır mı? Yani son küre ilk küreye teğet olur mu? Acaba buna, *dairelerin Steiner zincir*inin küresel analogu diyebilir miyiz? (Bkz. Steiner daireler zinciri.) Soddy buna evet yantını verdi; ilk küreyi nereye koyarsak koyalım, gerdanlık daima 6 küre içerir.

Ayrıca gerdanlığın 6 küresinin merkezleri ve birbirini izleyen 6 teğet noktası aynı düzlem üzerinde bulunur. Gerdanlığın her iki yanında 6 kürenin her birine değen iki düzlem vardır.

Steiner'in daireler zinciriyle benzerlik gerçekten çok fazladır. Soddy şekli, 7. bir küre etrafında dizilmiş ve iki paralel düzlem arasında sandviçlenmiş 6 kürenin inversiyonu (evirtim) ile elde edilir (Bkz. İnversiyon).

Sonsuzdaki doğru Geometride her doğrunun "sonsuzda bir noktası" olduğu ve bütün bu noktaların "sonsuzdaki doğru"yu oluşturduğu varsayılır. Bu, bir daire değil, bir düz çizgidir.

Sonsuzdaki doğru tabii ki çizilemez. Fakat aşağıdaki şekillerde gösterilebilir, bunlar ilk önce doğruya sonsuzda değmeyen elips, sonra doğruya sonsuzda değen parabol ve nihayet doğruyu kesen hiperboldür.



Bir benzetme ustası olan Kepler, konikleri birbirinin devamı olarak düşünen ilk matematikçiydi. Parabol bir ucu sonsuza gitmiş bir elips, hiperbol ise bir yönde sonsuza gidip kaybolan ve sonra karşıt

yönden gelen bir parabol olarak düşünülebilir.

Kepler aynı zamanda daha önce Pappus tarafından tanımlanan özel noktalara "odak" adını veren kişidir; çünkü elipsin bir odağından çıkan ışınlar öteki odakta toplanır.

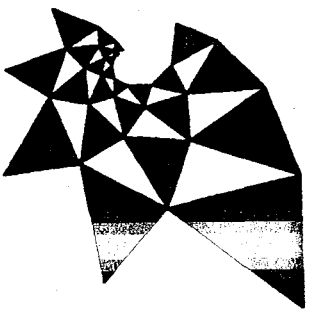
Gerçek bir daire, sonsuzdaki doğruya herhangi bir gerçek noktada değmez; fakat onu, *"sonsuzdaki sirküler noktalar"* denen bir çift sanal noktada keser. Bu noktalar bütün daireler için aynıdır.

Sonsuzdaki sanal sirküler (dairesel) noktalardan koniğe çizilen sanal teğetler bir dörtgen oluşturur. Bu dörtgenin köşeleri koniğin 4 odak noktasıdır. (Parabol için bu kural işlemez; çünkü parabol sonsuzda bu eğriye değer). Odaklardan ikisi gerçek, ikisi sanaldır.

Spiral benzerlik mozaiği Mozaik düşüncesini genişletmenin bir yolu, özdeş fakat farklı büyüklüklerde mozaik parçaları kullanmaktır.

Aşağıdaki mozaik iki farklı biçimdeki üçgenlerden oluşmaktadır. Komşu üçgenleri üç farklı şekilde çiftleştirirsek, benzer dörtgenlerden oluşmuş bir mozaik oluşur.

Bu mozaikte birbirine karşılık noktalardan oluşmuş herhangi bir küme, eşkenar bir spiral üzerinde bulunur ve bütün bu spirallerin kutupları veya sınırlama noktaları aynıdır. Mozaik bu sınırlama noktası etrafında sonsuz kere döner ve kendi kendiyle sonsuz kere üstüste gelir.

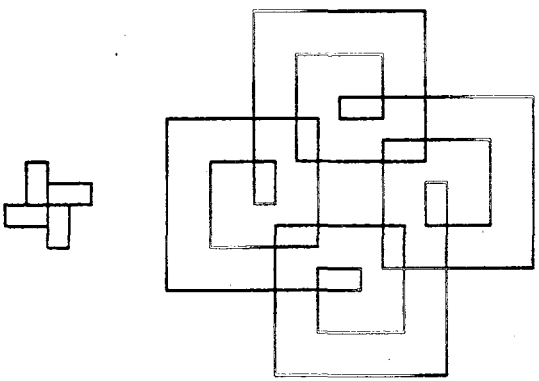


Herhangi bir mozaik böyle spiral bir biçim alabilir. Örneğin aynı tepeyi paylaşan üç beyaz ve üç siyah üçgene bakın. Bunlar bir altıgen oluşturur ve bütün mozaiğe bu altıgenlerden oluşmuş gözüyle bakılabilir.

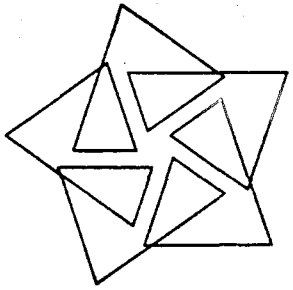
Spirolateraller Frank Olds basit emirlerden birçok model geliştirmek için basit kurallar buldu. Bir başlangıç noktası ve yönü seçin ve şu emirleri uygulayın:

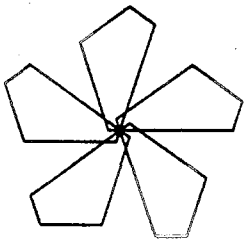
ÖNE 1
SOLA DÖN
ÖNE 2
SOLA DÖN
ÖNE 3
SOLA DÖN
TEKRAR

Bu şekil etrafında 4 kere döndükten sonra, soldaki şekilde görüldüğü gibi başladığınız noktaya gelirsiniz. Dönüşler 90°'liktir; bu şekil şöyle tanımlanabilir: (90°: 1, 2, 3). Eğer (90°: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) formülünü uygularsanız sağdaki şekli elde edersiniz; bu, ismin nereden geldiğini de gösterir.

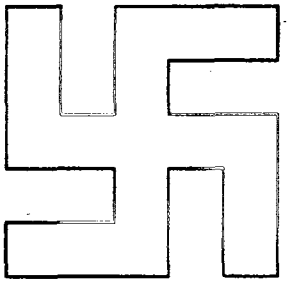


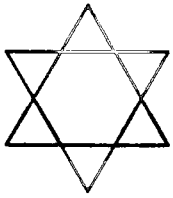
Mesafeler "geriye doğru" alınabilir (negatif sayılar olarak alınarak) ve dönüşler 90° olmak zorunda değildir. Alttaki şekiller şu formüllerin şekilleridir: (72°: 2, 3, 4, 5) ve (108°: 1, 2, 3, 4).





Spirolateraller, nümerolojistlerin sevdiği garip şekillere en yakın geometrik şekilleri verebilir. Aşağıdaki şekiller aynı sayıları, fakat farklı dönme açılarını içerir: (90°: 1, 2, 3, -1, -2,) ve (60°: 1, 2, 3, -1, -2).

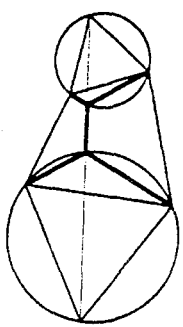


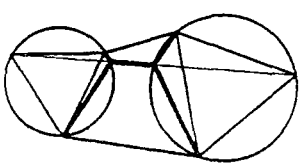


Referans: Martin Gardner, 'Fantastic patterns traced by programmed "worms", Scientific American, November 1973.

Steiner ağları Steiner, *Fermat noktası* problemini genişletti: 4 veya daha fazla nokta arasında, bunları birbirine birleştiren en kısa yol nedir?

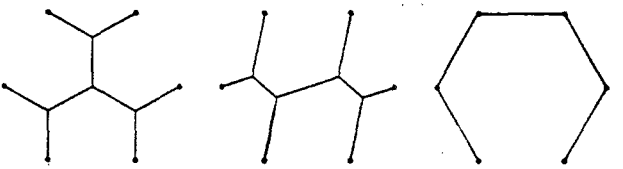
Dört nokta için çözüm şudur: Bu dört noktanın oluşturduğu dörtgenin karşıt kenarlarında birer eşkenar üçgen çizilir.



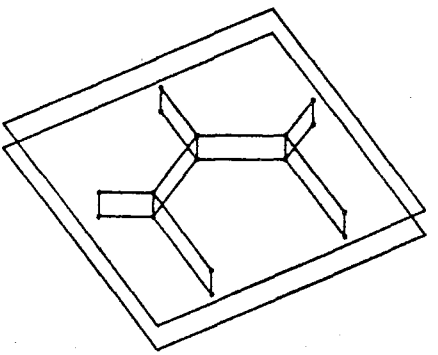


İki eşkenar üçgenin tepeleri birleştirilir (ince çizgi). Bu doğrunun iki eşkenar üçgenin çevrel çemberlerini kestiği iki nokta birbirleriyle ve dörtgenin köşeleriyle birleştirilirse (kalın siyah çizgiler) dört nokta arasında (dörtgenin 4 köşesi) en kısa yol bulunmuş olur. Kalın siyah çizgiler birbirleriyle 120°'lik açı yaparlar. (Bunların 120° olacağı şundan bellidir: Bir daire içine çizilmiş bir dörtgenin karşıt açılarının toplamı 180 'dir. Eşkenar üçgenin açıları 60° olduğuna göre, karşıt açı 120° olmak zorundadır.) (Eşkenar üçgenler, dörtgenin 4 kenarı üzerinde iki türlü çizilebileceğinden 2 çözüm vardır.) Bu iki çözüm de 4 nokta arasındaki minimum mesafeyi verir. Bunların dışındaki çö-

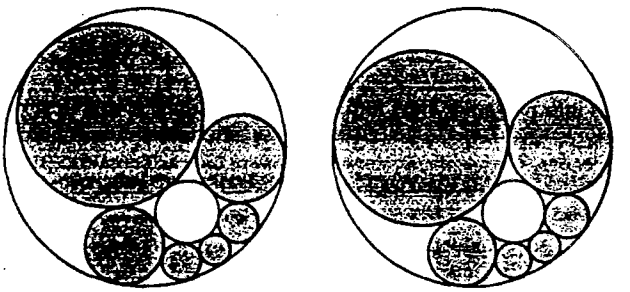
zümler yolu daha uzatır. Bu iki çözümden biri, diğer herhangi bir çözümden daha kısadır, bu mutlak minimumdur. Kenarları 1 birim olan düzgün bir altıgen alalım ve bunun 6 köşesi arasındaki en kısa mesafeyi arayalım. (İlk iki şekilde altıgenin kenarları çizilmemiştir.) Bunun için 3 çözüm görüyoruz. Toplam uzunluklar sırasıyla $3\sqrt{3}$, $2\sqrt{7}$ ve 5'tir. Ne gariptir ki en az ilginç olan çözüm en kısa yolu vermektedir.



Belli sayıda nokta arasında en kısa yol, deneysel olarak da bulunabilir. İki levhayı öyle düzenleyin ki bunlar başlangıç noktalarını temsil eden tahta çubuklarla birleştirilmiş olsun. Bu modeli bir sabun çözeltisine batırın, çubukları birbirine bağlayan bir sabun filmi oluşacaktır. Birkaç saniye sonra bu sabun filmi, yüzey gerilim etkisiyle, kısalacak ve çubuklar arasındaki en kısa yolu çizecektir.



Steiner daireler zinciri Bir dairenin içine bir başka daire çizin (beyaz daireler). Sonra bir daireler zinciri başlatın; öyle ki çizdiğiniz her daire ilk çizdiğiniz iki (beyaz) dairenin ikisine de ve zincirdeki bir önceki (gri) daireye teğet olsun. Genellikle zincir kendi üstüne kapanacaktır.



Steiner teoremi şunu söyler: Son (gri) daire ilk (gri) daireye değdiğinde zincir kapanıyorsa, (gri) daireyi nasıl çizerseniz çizin, zincir daima kapanacaktır.

Solda gösterilen birinci zincir (6 gri daire içeriyor) kapanmıştır. Aynı iki (beyaz) daire ile çizime başlarsak, sağdaki şekilde görüldüğü üzere, ilk (gri) dairenin yerini değiştirsek de aynı kuralları uygularsak zincir yine kapanacaktır. Zincirdeki 6 (gri) dairenin (daha çok da olabilirdi) merkezleri (zincir kapansa da kapanmasa da) bir elips üzerinde bulunur.

Zincir ilk turda kapanmayabilir; fakat birçok tur yaptıktan sonra mutlaka kapanacaktır. Teorem hâlâ geçerlidir; eğer bir zincir 3 tam tur yaptıktan sonra kapanırsa, herhangi bir zincir 3 tam turdan sonra kapanacaktır.

Başlangıçta belli iki (beyaz) daire çifti verildiğinde, ya bu ikisi arasına kapalı bir daireler zinciri uydurmak olanaksızdır (yani proble-

min çözümü yoktur); ya da sonsuz sayıda çözüm vardır. Bu nedenle bu bir porismdir (çözüm sayısı sonsuz).

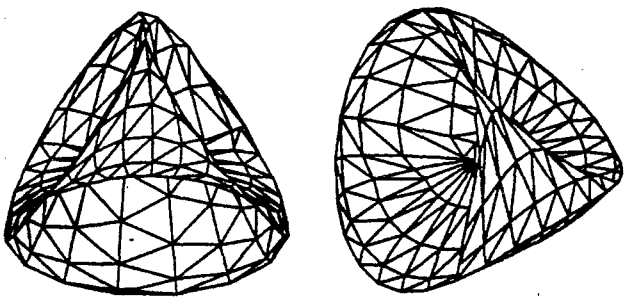
Steiner bu teoremi 1826'da kanıtladı. Fakat Japon matematikçisi Ajima Çokuyen bu şekli 1784'te incelemiş ve aynı sonuçlara varmıştı.

Bu şeklin başka özellikleri de vardır: Her (gri) dairenin başlangıçta çizilen iki (beyaz) daireye teğet olduğu iki noktayı birleştiren doğrular, aynı noktada kesişir.

Steiner'in Roma yüzeyi 19. yüzyıl matematikçileri bir yüzeyi cebirsel bir denklemle ifade edemezlerse mutsuz olurlardı. Steiner'in Roma yüzeyi çift taraflı bir yüzey olup şu denkleme aittir:

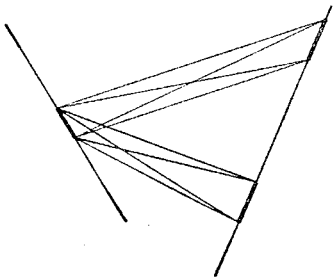
$$y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2+xyz = 0$$

Eksenler orijindeki merkezden 1/2 uzaklıkta iki doğrudur. Şekil 4 daireye değer; bu daireler $x\pm y\pm z=0$ gibi 4 düzlem üzerindedir. Biçimi heptahedron'un (7 yüzlü) aynı sayılabilir.

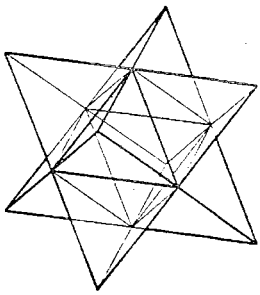


Steiner teoremi Aynı düzlemde olmayan iki doğru ve herbirinin üzerinde belli uzunlukta birer doğru parçası alalım. Doğru parçalarının uzunlukları aynı kalır; fakat kendi doğruları üzerinde kayabilirler.

Doğru parçalarının uçlarını birleştirmek bir dört yüzlü oluşturur. Bu dört yüzlünün hacmi sabittir; doğru parçaları kaydırılsa da hacim değişmez.



Stella octangula (sekiz açılı yıldız) Testereyle dikdörtgen prizması biçimi bir tahta parçasından küçük bir sekizyüzlü kesip çıkaralım. Sonuç 9 parçadır; sekizyüzlünün kendisi ve her yüzü için bir tane olmak üzere 8 küçük dörtyüzlü.

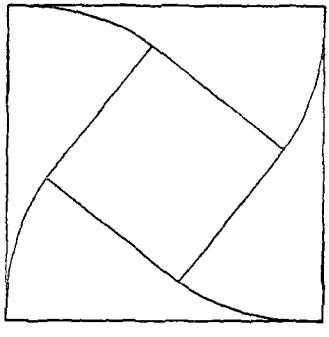


Eğer dört yüzlüler, sekizyüzlünün yüzleri üzerine konulursa sonuç, ilk defa Kepler tarafından bulunan sekiz açılı yıldızdır. Bu şekil sekiz yüzlünün yüzlerini uzatıp birbirleriyle kesiştirerek de elde edilebilir.

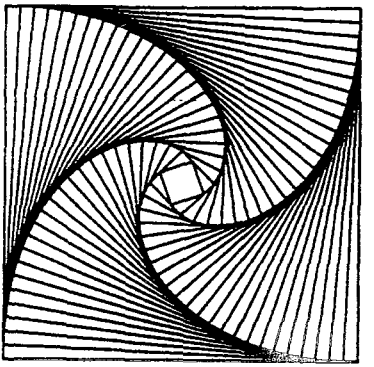
Stella octangula aynı zamanda iki dörtyüzlüden oluşmuştur; bu iki dörtyüzlü, bir küpün içinde, köşeleri dönüşümlü (alterne ederek) olarak seçerek oluşturulabilir.

T

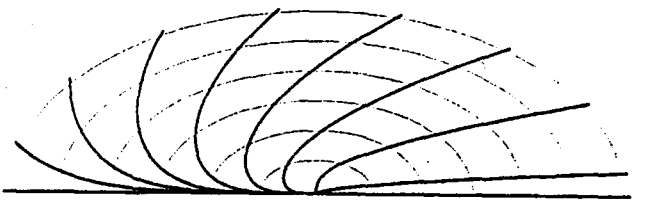
Takip eğrileri Bir karenin köşelerinden başlayarak dört köpeğin birbirlerinin kuyruklarını kovaladığını hayal edelim. Her köpeğin yolu *eşit açılı bir spiral* (logaritmik spiral) olacaktır. Herhangi bir düzgün çokgenin her köşesinden başlayarak birbirlerinin kuyruğunu kovalayan köpekler de eşit açılı spiral (logaritmik spiral) çizer.



Her çokgenin yalnız kenarlarını çizmek öyle derinlik hissi veren desenler oluşturmuştur ki bunlar 1960'ların daha çok matematiksel resim tablolarında kullanılmıştır (aşağıdaki resimdeki gibi).



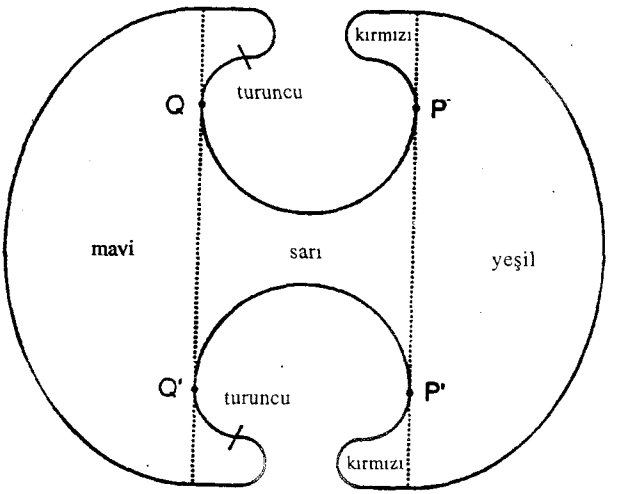
Düz bir çizgi boyunca sabit bir hızla hareket etmekte olan bir T noktası olsun. Buna hedef diyelim. Bir P noktası her zaman direkt olarak T'ye doğru hareket etsin (onu takip etsin). Eğer P en dış elips üzerinde herhangi bir noktadan başlar, T de dış elipsin bir odak noktasından başlarsa P, T'yi daima aynı noktada yakalar: Elipsin merkezi.



Biçimleri T ve P'nin nisbî hızlarına bağlı olan konsantrik (iç içe) elipslere *izokron* ve takip eğrilerine *izoklinal traje*'ler (yollar) denir.

Tekbiçim aydınlanabilir oda Konveks olmayan bir oda, içindeki herhangi bir noktadan tek bir ışık kaynağıyla aydınlatılamaz. Eğer duvarlar ayna kaplı olsaydı, ışık kaynağı nereye konulursa konulsun, odanın her yanı aydınlatılabilirdi.

Ne gariptir ki aşağıdaki biçimdeki bir "aynalar holü", içindeki herhangi bir noktadan tam aydınlatılamaz. Bu biçim bir elipse dayanmaktadır; elipsin bir odağına konulan bir ışık kaynağı öbür odağına yansır.

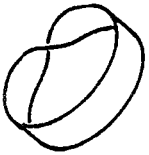


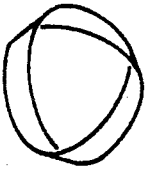
Elips uzun ekseni boyunca kesilmiş ve mavi ve yeşil yarımlara ayrılmıştır; odaklar P, Q, P' ve Q'dür. Duvarın diğer bölümleri, uzun eksene odaklarda değdikleri sürece daha çeşitli seçilebilir. Bir odağın "arkasındaki bir ışık diğerinin arkasında, bir odağın önündeki bir ışık diğerinin "önünde" belirecektir. Böylece bir 'kırmızı' köşedeki ışık, yalnız yeşil bir bölgeyi ve diğer kırmızı köşeyi aydınlatacaktır; yeşil veya sarı bölgeden bir ışık asla turuncu köşeye erişmez vb.

Tek taraflı yüzeyler Tek taraflı bir yüzeyin düğümlü veya düğümsüz tek bir kenarı olabilir. Eğer iki kenarlıysa değişik olasılıklar vardır: Herbiri düğümlü veya düğümsüz, kenarları zincirlenmiş veya zincirlenmemiştir. Bu kombinasyonlarla en az 8 yüzey vardır. İlk şekil Möbius şeridi (Bkz. Möbius şeridi).

A Tek taraflı tek kenarlı

a) Kenar basit bir kapalı eğri

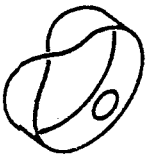




b) Kenar düğümlü

B Tek taraflı, iki kenarlı

c)Her iki kenar basit kapalı eğri, zincir oluşumu yok.





c)Her iki kenar basit kapalı eğri, zincir var

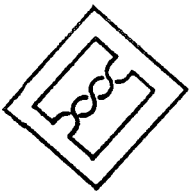
e)Her iki kenarı düğümlü, zincirsiz

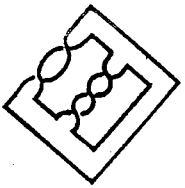




e)Her iki kenarı düğümlü, zincirli

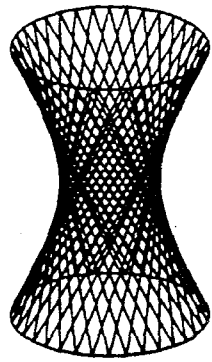
g) Bir kenar basit, diğeri zincirsiz ve düğümlü





g) Bir kenar basit, diğeri zincirli ve düğümlü

Tek yapraklı hiperboloid Bir kibrit çöpünden bir iğne geçirin ve iğnenin ucuna bir başka kibrit takın. Eğer kibritler paralelse, birinci kibrit uzun ekseni etrafında döndükçe, ikinci kibrit bir silindir yüzeyi çizer. Kibritler paralel değilse ve aynı düzlemde değilseler, ikinci kibrit tek yapraklı bir dönel hiperboloidi çizecektir. (Tek yapraklı bir dönel hiperboloidin yüzeyinin düz çizgiler içerdiğini ilk anlayan kişi Sir Christopher Wren olmuştu.) İkinci kibritin pozisyonları, bu kibrit rotasyon yaptıkça bir yüzey üreteçleri kümesi tanımlar. Bu kümedeki iki üreteç asla kesişmez ve üç üreteç asla aynı düzleme paralel olmaz.



Sezgisel olarak anlaşılabilir ki ikinci kibritin açısı, ön yerine arkayı gösterecek şekilde aynı derece değişirse, o da aynı yüzeyi çizer. Bu durumda onun pozisyonları bir ikinci üreteç kümesi yaratır; öyle ki bu kümedeki her doğru, birinci kümedeki her doğruyu keser (birinci kümede paralel olduğu doğru hariç.)

Böyle iki özdeş yüzey, yansı dişli konik çark düzeni (skew-bevel gear) olarak kullanılabilir; bu çark düzeni rotasyon hareketini, kesmediği ve paralel olmadığı bir eksene (aks) iletebilir. Yüzeyler öyle yapılmıştır ki bir yüzeydeki üreteç, ikinci yüzeydeki üreteçle hizaya ge-

lir ve yüzeyler birbirleri etrafında hem döner, hem de kayarlar.

Dönel hiperboloidin (hyperboloid of revolution) doğal olarak rotasyon eksenine dik kesitleri daireseldir. Tek yapraklı genel hiperboloidin enine kesitleri eliptiktir.

Böyle bir yüzey yapmak için pratik bir yöntem şudur: İki daire veya elips alın; öyle ki bunların eksenleri aynı veya paralel ve kendi yüzeyleri de birbirine paralel olsun. Her elipsi merkezde eşit açılar işaretleyerek eşit sayıda parçalara ayırın. Eğer elipsin üst yarısındaki her nokta, elipsin alt yarısında N adım ilerdeki bir nokta ile birleştirilirse, çizgiler tek yapraklı hiperboloid oluşturacaktır. İkinci üreteç kümesi, her keresinde N adım geri sayarak eklenebilir.

Eğer gerginlik isteyen iplikler yerine katı tellerden bir model yapılırsa, şaşırtıcı özellikler elde edilebilir. Elipsler birbirlerine göre dönme yapmaksızın birbirine yaklaştırılırsa ve böylece teller bir delikler kümesinden kayarsa, yüzey bir hiperboloid olarak kalır ve limit durumda bir elips ve elipsin teğetler zarfı (anvelop) olur (zarf veya anvelop: Bir eğriler veya yüzeyler takımının her bir öğesine teğet olan eğri ya da yüzey. Örneğin bir halka hem iç ve hem de dış dairesine teğet ve halka alanını kaplayan küçük dairelerin zarfıdır, Ç.N.) [Tek yapraklı hiperboloid, birbirine dik x, y ve z koordinat eksenlerine paralel kesitleri hiperbol veya elips olan geometrik bir yüzeydir. Formülü a, b, ve c sabit olmak üzere

$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$'dir.

xy düzlemine paralel kesitleri elips, diğer iki koordinat düzlemine (xz ve yz) paralel olan kesitleri hiperboldür. a=b olunca xy kesitleri daireseldir, buna tek parçalı dönel hiperboloid denir; bunun formülü

$x^2/a^2 - z^2/c^2 = 1$'dir;

Hiperbolü z ekseni etrafında döndürerek elde edilir.

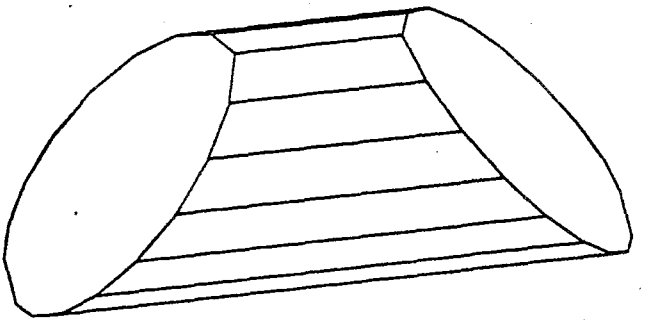
İki parçalı hiperboloidin iki parçası arasında sonlu bir mesafe var-

dır; koordinat eksenlerinden ikisine paralel olan kesit hiperbol, üçüncü eksene paralel olan kesit elipsdir. Bunun denklemi

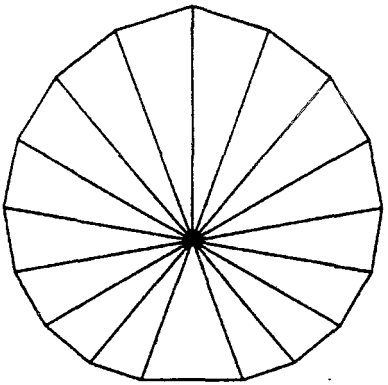
$x^2/a^2 - y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$'dir

b=c ise yz kesitleri daireseldir; bu, hiperbolü x ekseni etrafında döndürerek (revolüsyon) elde edilen "iki parçalı dönel hiperboloidin formülü $x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1$'dir Ç.N.]

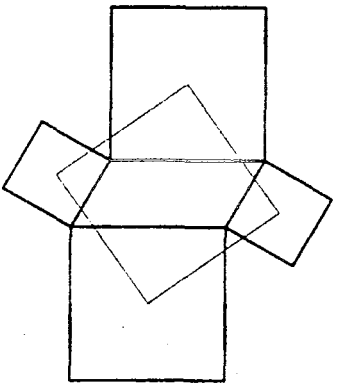
Tek yüz üstünde durabilen çokyüzlüler Yoğunluğu her noktada aynı olan bir maddeden yapılmış, yüzlerinden biri üzerinde durabilen ve diğer yüzlerinden biri üzerine konduğunda yuvarlanan veya devrilen bir çokyüzlü var mıdır? Richard Guy 17 kenarlı ve 19 yüzlü bir prizmanın bu özelliği taşıdığını gösterdi.



İkinci şekil prizmanın simetrisini gösteren bir enine kesittir.

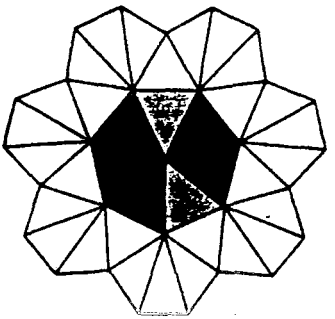


Thébault teoremi 1937 yılında elemanter ve pek de elemanter olmayan geometri konusunda isim yapmış Victor Thébault şu teoremi kanıtladı: Bir paralelkenarın kenarlarına birer kare çizilirse, bu karelerin merkezleri de bir kare oluşturur.



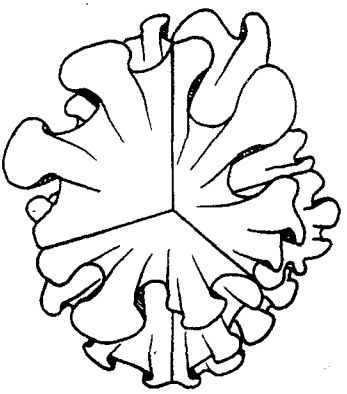
Thurston'un hiperbolik kâğıdı Bu model William Thurston tarafından basit bir uzayla hiperbolik geometri uzayını karşılaştırmak için geliştirilmiştir.

Eşkenar üçgenlerden oluşmuş bir yüzey yapalım. Bunun için her nokta etrafında 7 eşkenar üçgeni birleştirelim. Yüzey gevşek olacaktır. Her köşe etrafına 7 üçgen koyarak yüzeyi daha genişlettikçe daha gevşek bir yapı elde ederiz. (Şeklin kenarındaki üçgenlerin eşkenar olmayışı şundandır: Şeklin kenarlarına eşkenar üçgenler ekledikçe kenarlar havaya kalkar ve aşağı bastırılınca eşkenar üçgenler deforme olur. Ç.N.)

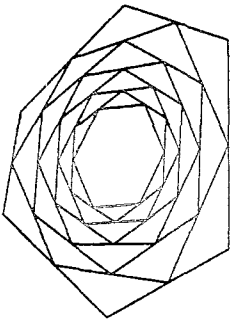


Burada bir nokta etrafında, Euclid uzayından daha çok hiperbolik uzay vardır. Elde ettiğimiz bu hiperbolik uzay, düzleştirince sıkışır ve kıvrımlar yapar. Bu, küre yüzeyinde olanın tersidir; küre yüzeyi düzleştirmek istenince gerilir veya yırtılır ve başlangıç noktanızdan uzaklaştığınız oranda kendi üstüne kapanır.

Aşağıdaki şekil hiperbolik uzayı temsil ediyor; birbirine dik 3 eksen ve bunlardan geçen birbirine dik 3 yüzey var. Bu düzlemler orijine yakınken bile tam düz değildirler; orijinden uzaklaştıkça (karanfil gibi) kıvrımlar yaparlar.



Türetilmiş çokgenler Kenar sayısı çift olan herhangi bir çokgen alıp kenarların orta noktalarını sırayla birleştirin. Yeni çokgende aynı şeyi tekrarlayın ve tekrara devam edin. Kenar sayısı aynı kalmakla birlikte giderek daha düzgün, karşılıklı kenarları paralel ve eşit uzunlukta çokgenler oluşur. Bütün bu çokgenlerin ağırlık merkezi aynı noktadır. Alterne eden çokgenlerin biçimleri birbirine çok benzer.

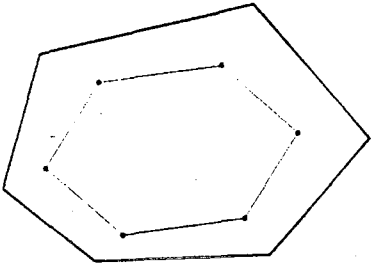


Eğer kenarları 1:1 oranında değil de başka bir oranda bölersek (örneğin 1:3, 3:4 vb.) aynı fenomen görülür; fakat alterne eden çokgenlerin biçimi birbirine çok benzemez.

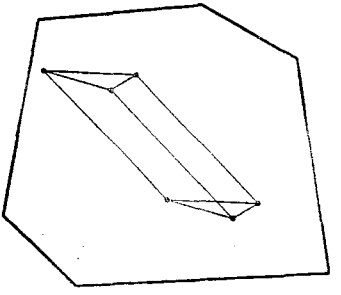
Orijinal çokgen düzlem olmayıp çarpıksa (skew) (köşeleri aynı

düzlem üzerinde olmayan çokgen), yukarıda tanımlanan operasyonlar sonucu, yine aynı özelliklere ve aynı ağırlık merkezine sahip düzlem bir çokgen elde edilir.

Herhangi bir altıgen alıp birbirine komşu her üç köşenin ağırlık merkezini bulun. Ağırlık merkezleri birleştirilince, karşılıklı kenarları paralel ve eşit bir altıgen oluşur.



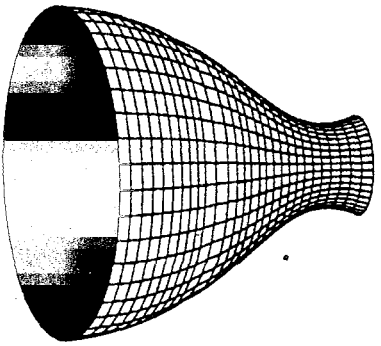
Diğer taraftan bir altıgenin birbirini izleyen üç köşesini alıp bu 3 köşenin ait olduğu paralelkenarın 4. köşesini işaretlerseniz altıgenin içinde bir prizmanın izdüşümünü elde edersiniz.



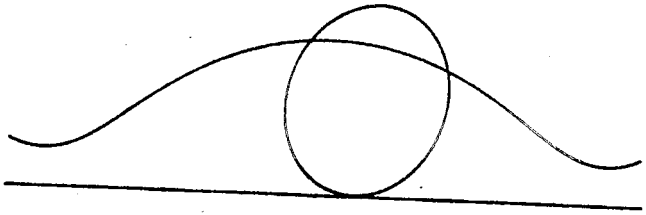
Referans: J.H. Cadwell, *Topics in Recreational Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1966.

U

Unduloidler Daire biçiminde iki halkayı, aynı eksene dik ve birbirine paralel olarak sabun çözeltisine batıralım. Halkalar boşken oluşan minimal yüzeye *katenoid* denir. Fakat halkalar yerine katı diskler kullanılırsa, film içindeki basınç dış basınca eşit olamayacağından, minimal yüzey unduloiddir.



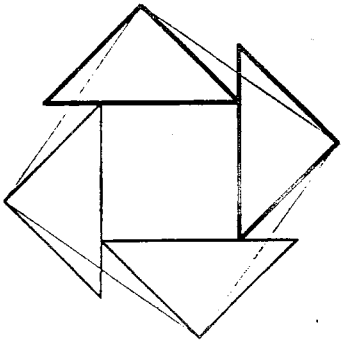
Bir unduloidin biçimi, daima bir doğru boyunca yuvarlanan bir koniğin (elips, hiperbol veya parabol) odak noktasının geometrik yerinin bir parçasını oluşturur.



Ü

Üç kareden bir kare yapmak Disseksiyonlar (bir geometrik şekli parçalara ayırıp yeniden birleştirmek) üzerine ilk kitap Muhammed Ebü'l Vefa tarafından yazıldı. Aşağıdaki şekilde birbirinin aynı 3 kare, tek bir büyük kare (ince çizgili) haline getirilmiştir.

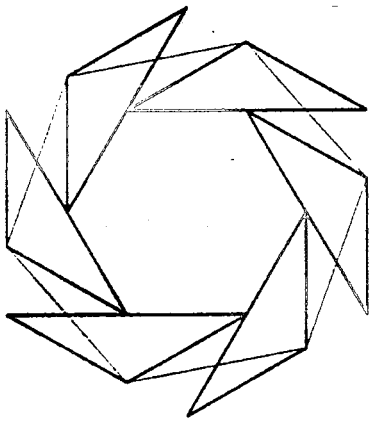
Dıştaki yarım kareler farklı büyüklükte olsa da aynı kural geçerlidir. Bunlar daha büyük bir karenin çeyrekleri olarak da düşünülebilirler; bu durumda, biri alanca diğerinin iki katı olan iki karenin, parçalanıp bütünleşerek tek bir kare yapması söz konusudur.



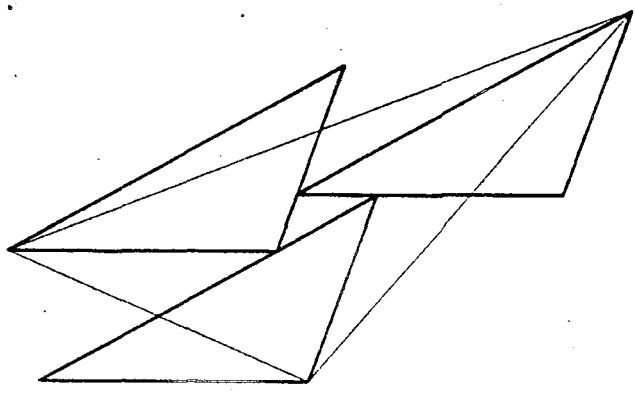
Bütün bu varyantlar iki farklı büyüklükte karelerden oluşmuş mozaikle ilgilidir. Böyle bir mozaiği alın (Bkz. Karelerden mozaik) ve

bunun içinde daha küçük karelerden birini ve ona komşu olan daha büyük 4 karenin çeyreklerini (1/4) işaretleyin.

Burada Ebü'l Vefa tem'asının iki varyasyonunu görüyorsunuz. İlkinde bir altıgen, daha küçük (ortada) bir diğer altıgen etrafında dizilmiş 6 adet ikiz kenar üçgen (tepe açıları 120°) haline konmuştur. Böylece farklı büyüklükte iki altıgeni, tek bir altıgen haline getirmenin yolu bulunmuştur (burada tepe açıları 120° olan 6 ikizkenar üçgen birleşerek düzenli bir altıgen yapabildiği için bu böyledir. 120° tepe açılı, üç ikizkenar üçgen, tepe tepeye verince önce bir eşkenar üçgen oluşturur; bu eşkenar üçgenin her kenarına 120° tepe açılı bir ikizkenar üçgen konulunca düzenli bir altıgen meydana gelir. Bu düzenli altıgene ortadaki küçük, düzenli altıgen eklenince dıştaki (ince çizgili) düzenli altıgen oluşur. Ç.N.)



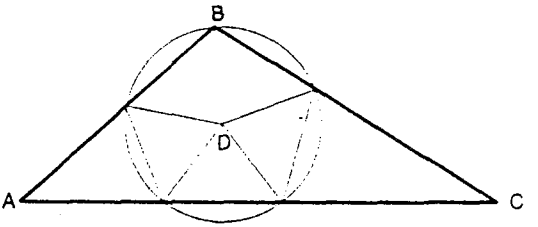
İkinci örnekte üç kongrüent (çakıştırılabilir, eşleşik) üçgen (kalın çizgili) ve bir onlara benzer üçgen (ortadaki küçük üçgen) parçalanıp birleşerek (disseke olarak) daha büyük bir benzer üçgen (ince çizgili) oluşturur.



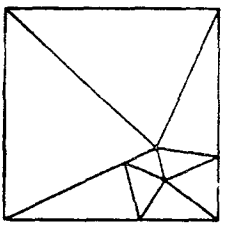
Bu tema üzerinde bir diğer varyasyon, bir Yunan haçını, her üçüncü köşeyi birleştirerek bir kareye çevirmektir. (Yunan haçı şöyle elde edilir: Bir karenin 4 kenarının herbiri üzerine kendi büyüklüğünde bir kare çizin; elde ettiğiniz artı işareti biçimindeki şekil bir Yunan haçıdır. Bunun dış köşelerine 1'den 8'e kadar numara verelim. Sırasıyla 1, 3, 5, 7 ve 1 birleştirilince bir kare elde edilir. Ç.N.)

Referans: David Wells, 'On gems and generalisations, Games and Puzzles, June 1975.

Üçgen disseksiyonu (Parçalanıp birleştirilmesi) Geniş açılı bir üçgen en az kaç dar açılı üçgene ayrılabilir? Üçgenin iç dairesinin merkezi olan D'yi bulun (açıortayların kesişme noktası) ve D merkezli ve DB yarıçaplı daireyi çizin. Şimdi şekilde görüldüğü üzere üçgenleri çizin. Geniş açılı bir üçgen en az 7 dar açılı üçgene bölünebilir.



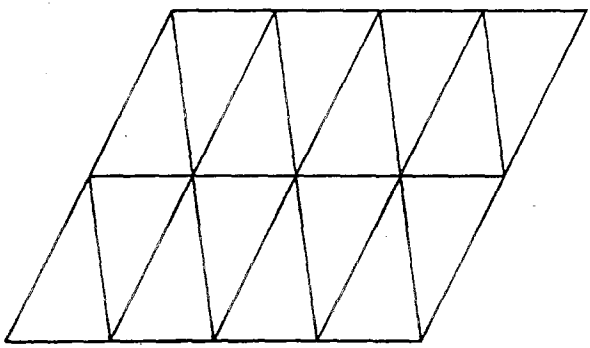
Bu çizimin yapılabilmesi ancak B>90°, B–A<90° ve B–C<90° ile mümkündür. Eğer bu koşullar yoksa, B'den AC'ye çizdiğiniz bir doğru ile ABC üçgeninden dar açılı bir üçgen ayırınız; geriye kalan geniş açılı üçgen, verilen koşullara uyarak 7 dar açılı üçgene bölünür; böylece toplam 8 adet dar açılı üçgen elde edilir.



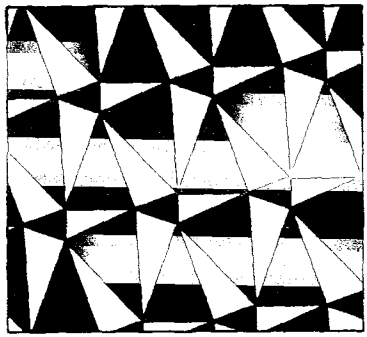
Bir kare şekilde görüldüğü gibi 9 dar açılı üçgene bölünebilir; açılardan bir çoğunun 90°'ye yakın olduğuna dikkat ediniz.

Referanslar: V.E.Hoggatt, Acute isosceles dissection of an obtuse triangle, Americn Mathematical Monthly, November 1961; Martin Gardner, Mathematical Games, Scientific American, June 1981.

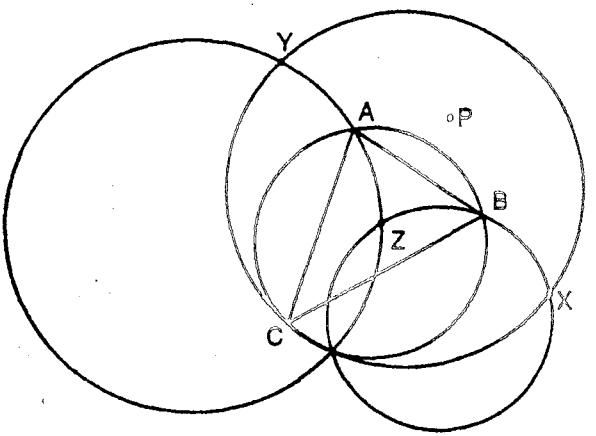
Üçgen mozaikler Herhangi bir üçgen, iki üçgenden paralelkenar oluşturarak mozaikleştirilebilir.



Üçgen çeşidine göre daha bir çok olasılık vardır; bunların çoğu araştırılmamıştır. Aşağıda üç değişik büyüklükte iki çeşit üçgenden yapılmış bir mozaik görülüyor.

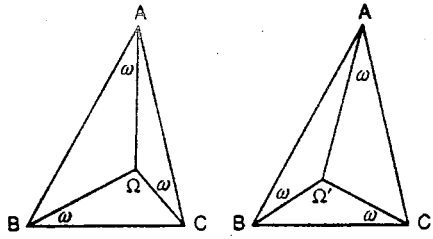


Üçgende yansımalar Bir ABC üçgeni çizin ve herhangi bir P noktası alın. P noktasının üçgenin kenarlarına göre X, Y ve Z simetriklerini bulun. Şimdi XYC, YZA, ZXB daireleri ve ABC'nin çevrel çemberi, aynı noktada kesişir.



Üçgenin Brocard noktaları Fransız subayı Henri Brocard tarafından 1875'te tanımlandı. Fakat bu noktalar aslında daha önce Jacobi ve 1816'da Crelle tarafından tarif edilmişti. Crelle şöyle yazıyordu: "Üçgen gibi bu kadar basit bir şeklin bu kadar tükenmez özellikler taşıması insanı hayretlere düşürüyor. Başka şekillerin henüz bilinmeyen özellikleri kalmış mıdır?" Ne kadar doğru! Üçgenler üzerine ciltler dolusu kitaplar yazılmıştır.

Herhangi bir üçgen için öyle bir ω açısı (Brocard açısı) bulunabilir ki (aşağıdaki şekilde görüldüğü üzere) üçgenin A, B ve C köşelerine, bir kenarı üçgenin kenarı olacak şekilde yerleştirilmiş bu açıların diğer kenarları Ω ve Ω^1 noktalarında kesişir.)

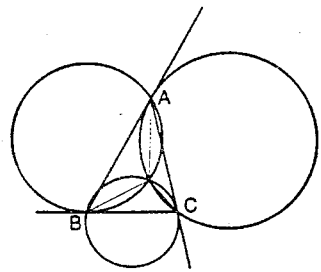


Brocard açısı, önemi basitliğinden anlaşılan şu formülle bulunur:

Kotanjant ω = kotanjant A + kotanjant B + kotanjant C. Brocard noktaları çizimle şöyle bulunur (aşağıdaki şekil): Bir ABC üçgeninde BA kenarını A'da, AC kenarını C'de ve CB kenarını B'de uzatalım. Sonra şu çemberleri çizelim: 1) A ve C noktalarından geçen ve BA doğrusuna A'da teğet çember. 2) B ve C'den geçen ve AC'ye C'de teğet çember. 3) A ve B noktalarından geçen ve CB'ye B'de teğet çember.

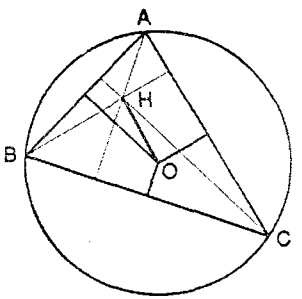
Bu üç çemberin kesişme noktası Brocard noktalarından birini verir. Diğer Brocard noktası şöyle bulunur:

Bir ABC üçgeninin AB kenarını B'de, BC kenarını C'de ve CA kenarını A'da uzatalım. Sonra şu çemberleri çizelim: 1) B ve C'den geçen ve AB'ye B'de teğet çember; 2) A ve C'den geçen ve BC'ye C'de teğet çember; 3) A ve B'den geçen ve CA'ya A'da teğet çember. Bu üç çemberin kesişme noktası da ikinci Brocard noktasını verir.

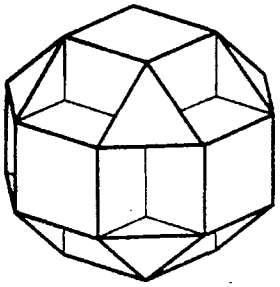


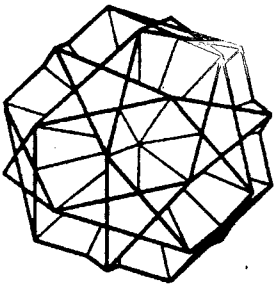
İşte iki "harika" özellik daha: CΩ´ ve BΩ,X noktasında; BΩ´ ve AΩ, Y noktasında, AΩ´ ve CΩ, Z noktasında kesişirse Ω, Ω´, X, Y ve Z aynı daire üzerinde olurlar. Bir üçgenin köşelerindeki köpekler birbirlerinin kuyruğunu kovalamak üzere aynı hızla birbirlerine doğru koşarlarsa, alınan yöne göre nihaî köpek dalaşı 1. veya 2. Brocard noktasında olur. Birbirine doğru koşan dört köpeğin akibeti için *"takip eğrileri"* başlığına bakınız.

Üçgenin çevrel çemberi Bir üçgenin köşelerinden geçen çevrel çemberin merkezi, üçgen kenarlarının orta dikmelerinin kesişme noktasıdır (üçgen kenarları kiriş olduğundan.) Üçgenin ortosentr'ı (yüksekliklerin kesişme merkezi) H ise OA, OB ve OC vektörlerinin toplamı, OH vektörüne eşittir.



Üniform (tekbiçim) çokyüzlü Bir çokyüzlü, bütün yüzleri düzenliyse (yüz, düzenli bir yıldız çokgen de olabilir) ve bütün köşeleri aynıysa tekbiçimdir. Platon ve Arşimed çokyüzlüleri, konveks tekbiçim çok yüzlülerdir. Aşağıda diğer ikisini görüyorsunuz; küçük kübikübo-oktahedron (küp-küp-sekizyüzlü) (sol) ve dodekahemikozahedron (on ikiyüzlü-yarım yirmiyüzlü) (sağ); bunlar konveks değildir ve yüzleri birbirini keser.





Küçük kübi-kübo-oktahedron, 12 kare yüzü çıkartılmış ve 6 düzenli sekizgen yüz eklenmiş rombi-kübo-oktahedrondur (eşkenar dörtgensel-küp-sekizyüzlü). Bu katının köşeleri, eşkenar dörtgenlerin köşeleri olan dış köşelerdir. Yüzlerin birbirini kestiği iç noktalar köşe sayılmaz.

Küçük dodeka-hemi-ikozahedron (onikiyüzlü-yarım yirmiyüzlü), hepsi şeklin merkezinden geçen, 10 düzenli altıgenle düzenli bir onikiyüzlünün yüzlerini oluşturan 12 yıldız beşgenden ibarettir. Burada da yüzlerin iç kesişmeleri köşe olarak sayılmaz.

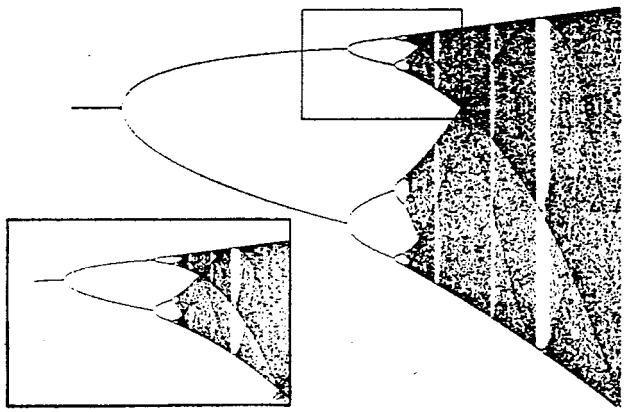
Coxeter, Longuet-Higgins ve Miller, 1954'te bildikleri tekbiçim çokyüzlüleri yayımladılar; Platon, Arşimed ve Kepler-Pointsot çok yüzlülerine ve prizma ve antiprizmalara ek olarak 53 yeni tekbiçim çokyüzlü tarif ediyorlardı. Bu listenin tamam olduğunu bildirdiler; fakat kanıtları yoktu.



Verhulst formülü Verhulst nüfus çalışmalarında bir öncüdür; 1838'de şu yasayı tanımladı: Malthus'un karamsar tahminlerinin aksine nüfus hiç durmadan artamaz; çünkü nüfusun artışını engelleyen faktörler, nüfusun kendisinden daha hızlı artar.

Verhulst formülü şöyledir: $x_n+1 = rx_n (1-x_n)$. Bu formülün değeri r'a bağlıdır. $r<2$ ise, sistem hızla kararlı bir hâl alır (yani ne büyür, ne küçülür). $2<r<2.5$ ise nüfus iki değer arasında gidip gelir; buna çözümün *çatallanması* denir.

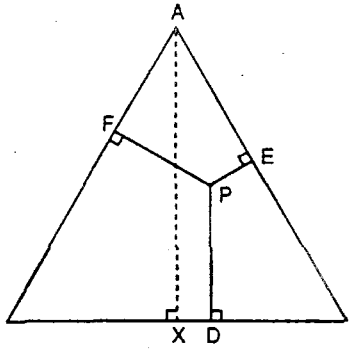
r, 2.5'un biraz üstüne çıkarsa çözüm yine çatallanır, sonra yine çatallanır; böylece 8 değer, sonra 16 değer vb. arasında gidip gelir. Bu çatallanmalar giderek birbirine yaklaşır; nihayet r yaklaşık 2.570 olunca çatallanma sayısı sonsuza erişir ve çözüm kaotik bir hal alır.



Kaos oluşunca, noktalar ritm veya sebep olmadan yüzeysel olarak sıçramaya başlar. Ya hiçbir devir (periyod) yoktur veya çok yüksek devirler vardır. Ne var ki bu kaotik davranış, belli bir yapıya sahiptir. Bölgenin içinde dikey bantlar vardır; daha önceki dış sınırlar onları çaprazlar. r=2.83 olunca Verhulst şekli minyatür halde yeniden belirir.

Sonlu bir aralıkta sonsuz çatallanmalar görülebilmesi için, birbirini izleyen çatallanmalar arasındaki mesafeler büyük bir hızla küçülmelidir. Böyle de olur; bu mesafeler arasındaki oran, bulanın adına izafeten Feigenbaum sayısı denen bir limite gider. Bu sayı yaklaşık 4.669 201 660 9'dur.

Viviani teoremi Bir eşkenar üçgende, herhangi bir P noktasının kenarlara olan uzaklıklarının toplamı, üçgenin, yüksekliğine eşittir.



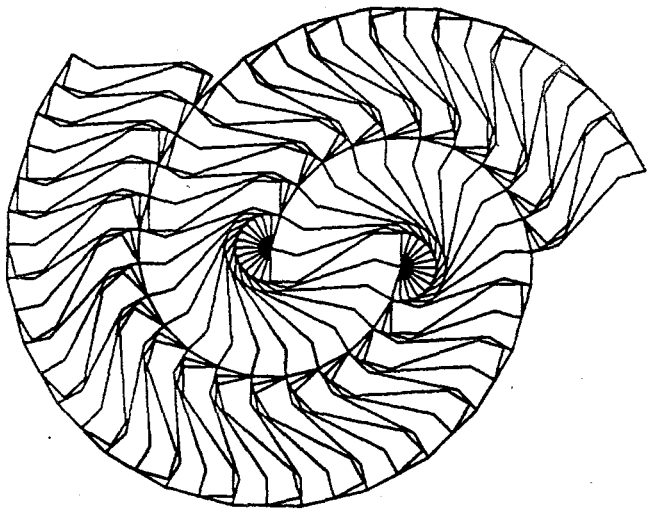
PD + PE + PF = AX

P noktası üçgenin dışında olsa bile bu teorem geçerlidir; şu koşulla ki üçgenin tamamen dışında kalmış 1 veya 2 dik, negatif olarak alınmalıdır.

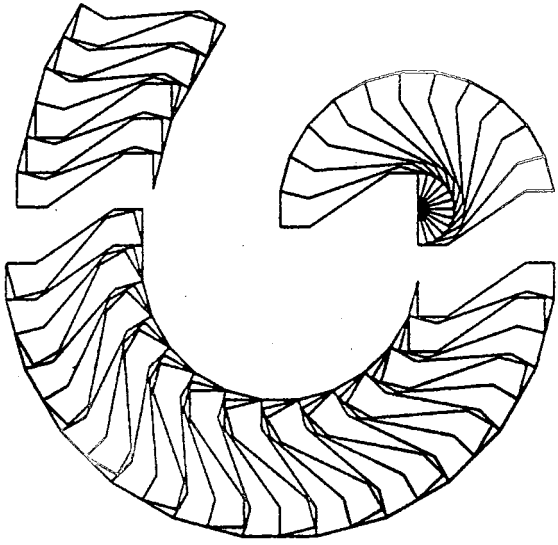
Voderberg fayansları Voderberg bu şaşırtıcı fayansı 1936'da buldu. İki fayans, bir değil iki fayansı sarar. İkinci şekilde dört fayans bir ongen yapar; bu ongenin karşılıklı kenarları eşit ve paraleldir.



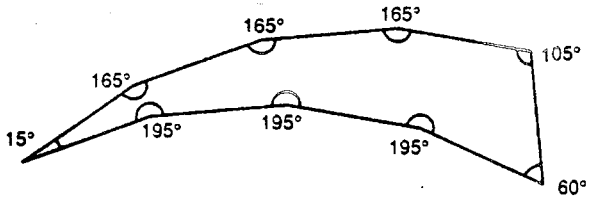
Kopyalar birbirlerine uydurularak yatay sonsuz bir bant oluşturulabilir ve bantlar duplike edilerek düzlem sonsuza kadar doldurulabilir. Bu fayans aynı zamanda iki 'merkez'li spiral mozaiğin de temelidir.



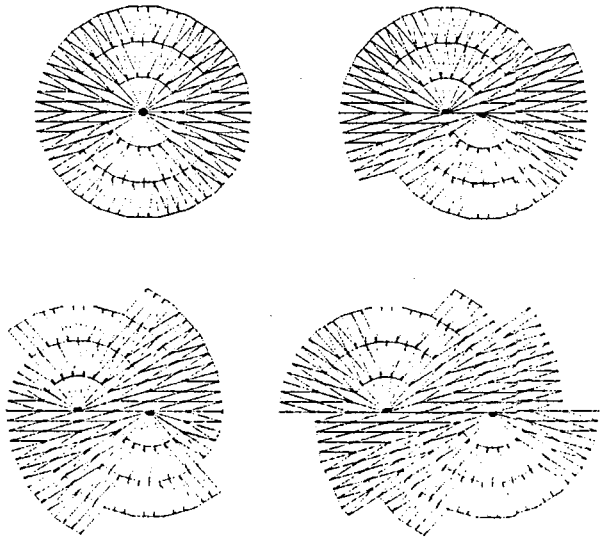
Bir sonraki şekilde spiralin kollarından birinin nasıl oluşturulduğu görülüyor. Birinci bölüm sağ 'merkez' etrafında yarım daire biçiminde dizilmiş 12 adet fayanstan yapılmıştır. İkinci bölüm 3x12=36 fayanstan oluşur; bunlar üçlü gruplar halinde dizilmiştir; 24'ü dışa, 12'si içe 'bakar.' Üçüncü bölüm, tam halinde, 5x12=60 fayanstan oluşmaktadır. Bunlar beşli gruplar halinde olup 36'sı dışa ve 24'ü içe bakar. Bu desen devam eder; her kol bir yarım daireyi kaplar ve 5, 7, 9, ... fayansın 12'lik gruplar halinde toplanmasından ibarettir.



Voderberg'in öncü çalışmalarından sonra, birçok benzer fayans bulundu. Örneğin Branko Grünbaum ve G.C. Shephard *versatil* (çok yönlü) denilen şu fayansı buldu; bu fayanslar 1, 2, 3 ve 6 merkezli spiraller yapabilir; ayrıca çeşitli fayans döşemeler oluşturabilir.



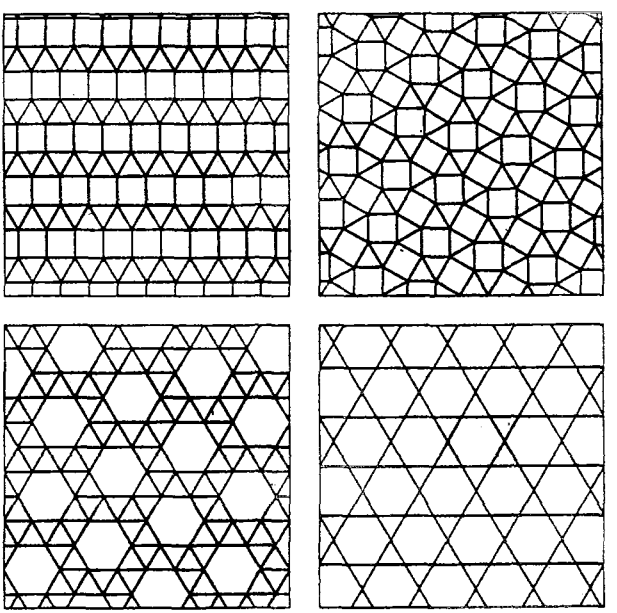
Bu şekiller, 10. dereceden rotasyonel simetriye sahip birinci şekle (sol üst) dayanarak nasıl spiral yapılabileceğini gösterir. Bu mozaik sonsuza kadar uzatılabilir.

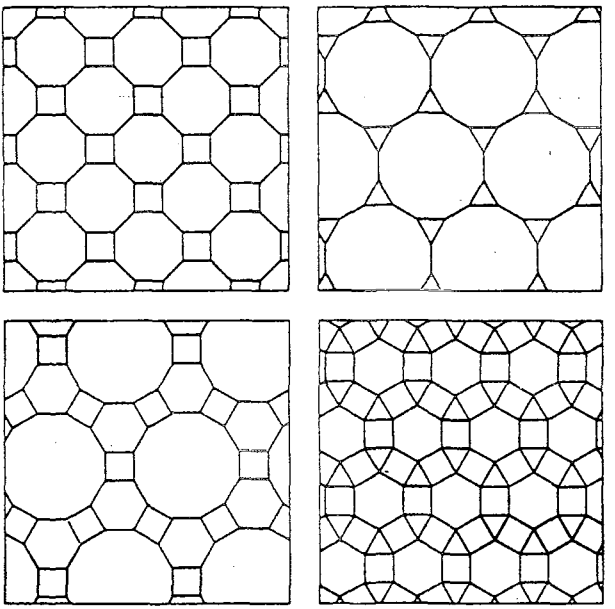


Bunun için birinci şekli herhangi bir çapla ikiye bölüp bir yarısını diğer yarı üzerinde, ikinci şekildeki spiral kol oluşana kadar kaydırın. Orijinal mozaiğin iki yarısını çap boyunca yeniden aynı mesafe kadar kaydırıp 2 spiral kol içeren üçüncü şekli elde edin. Benzer operasyonlar 3 spiral kol içeren dördüncü şekli oluşturur. Bu işlem sonsuza kadar devam edebilir.

γ

Yarı düzgün mozaikler Geometride 8 adet yarı düzgün veya *Arşimed tipi* mozaik vardır; bunların hepsi düzgün çokgenlerden yapılmıştır; her köşe etrafındaki mozaikleşme deseni aynıdır ve her köşe etrafında en az iki farklı şekil vardır. Düzgün altıgen ve eşkenar üçgenlerin birbirinin ayna hayali olan iki şekli vardır.



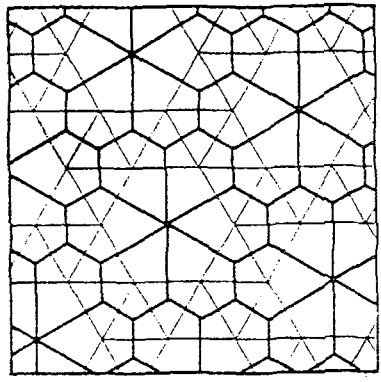


Her köşe etrafındaki mozaik deseni aynı olmak zorunda olmazsa, düzgün çokgenlerle sonsuz sayıda mozaik oluşturulabilir. Yarı düzgün bir mozaik yapmak için kolay bir yöntem mozaik parçalarını birbirinden biraz ayırmak ve oluşan aralığı daha düzgün çokgenlerle döşemektir; böylece düzgün mozaiklerden (en az) iki yarı düzenli mozaik oluşturulabilir.

Yarı-düzgün mozaiklerin dualleri Düzgün poligonlardan oluşan her mozaiğin bir duali vardır (Dual için bkz. Desargues şekli ve polihedron dualleri.) Mozaik dualini oluşturmak için her parçanın merkezi, dual parçanın tepesi olarak alınır ve komşu parçaların merkezleri birleştirilir.

Üç düzgün mozaikten düzgün altıgensel ve eşkenar üçgensel mozaikler birbirinin dualidir; kare mozaikse kendi kendisinin dualidir.

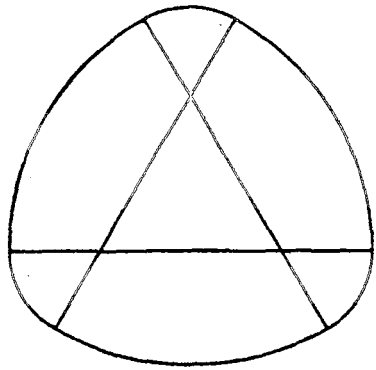
Yarı düzgün mozaiklerin hepsinin daha az düzgün birer duali vardır. Örneğin kare ve eşkenar üçgen mozaiklerinin duali *Kahire mozaiğidir* (Bkz. Kahire mozaiği).



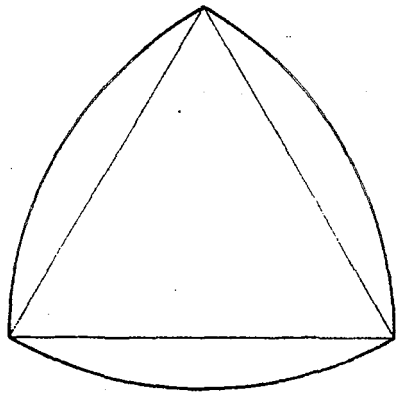
Şekilde ince çizgiler düzgün altıgen ve eşkenar üçgenden oluşma mozaiği, kalın çizgiler bunun dualini göstermektedir.

Yay kenarlı üçgenler Bir cisim, dairesel bir silindir üzerinde bir engele rastlamadan yuvarlanabilir; çünkü silindirin çapı sabittir. Fakat bir cisim, daire biçiminde olmadan da sabit çaplı olabilir.

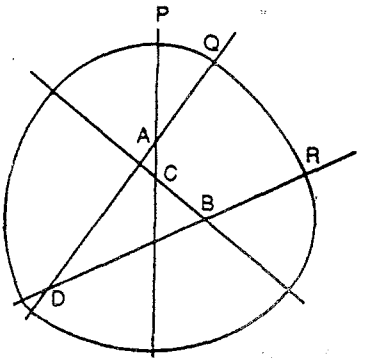
Bu gördüğünüz bir *Reuleaux üçgeni*dir; bir eşkenar üçgen ve üçgenin köşelerini ortalamış üç yay. Bu şeklin sabit çapı üçgenin kenarına eşittir.



Aynı üçgenden başlanarak 6 yay çizilirse bir diğer yay kenarlı üçgen elde edilir. Bunun çapı kullanılan iki yarıçapın toplamına eşittir.



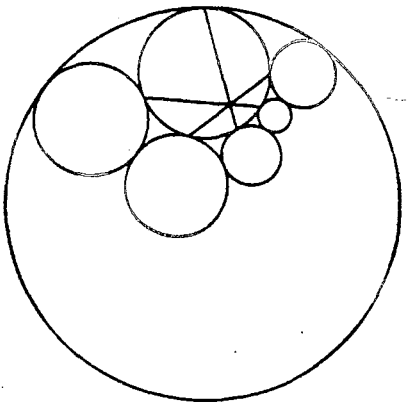
Bu şekle temel alınan şeklin, eşkenar üçgen bir yana, üçgen olması bile gerekmez; işe istenen sayıda çaprazlaşan doğrularla başlanabilir. Bu şekilde 4 doğru verilmiştir. Pergelin ucunu A'ya koyup PQ yayını, D'ye koyup QR yayını çizin. Sonra B'ye geçin ve bir sonraki yayı çizin ve bu şekilde A'ya dönene kadar devam edin. Tamamlanmış eğrinin çapı sabittir.



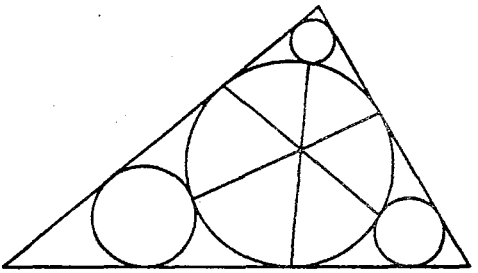
Çapı (d) sabit bütün eğrilerin çevresi, aynı çaplı daire gibi πd'dir.

Yedi daire teoremi Bir daire çizin (içinde çizgiler olan) ve bunun etrafına 6 daire dizin. Daireler herhangi bir büyüklükte olabilir; fakat her daire ilk çizdiğiniz daireye ve iki yanındaki dairelere teğet olmalıdır. Bu durumda karşılıklı değme noktalarını birleştiren doğrular aynı noktada kesişir.

Bu temel şeklin birçok varyantı vardır. Aşağıdaki resimde orijinal daire en üsttekidir (içinde çizgiler olan). Bu, 6 daireye teğettir, diğer 6 daireden her biri iki yanındaki dairelere ve orijinal daireye (toplam 3 daireye) teğettir.

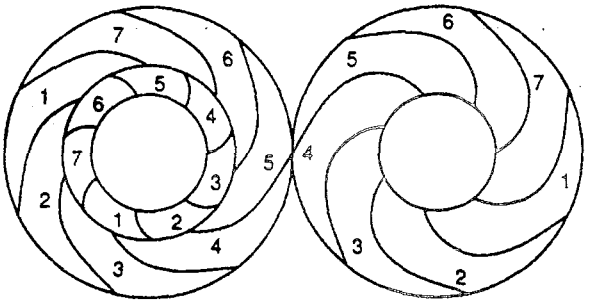


Bir diğer varyant şudur: İlk daire etrafına çizilen 6 daireden üçünün yarıçapları sonsuz yapılırsa, bu daireler bir doğru şeklini alır ve üç daire bir üçgene dönüşür. Teorem yine geçerlidir.

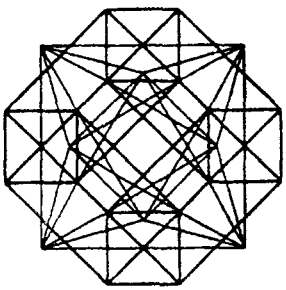


Referans: C.J.A. Evelyn, G.B. Money-Coutts and J.A. Tyrell, The Seven Circles Theorem and Other New Theorems, Stacey International, London, 1974.

Yedi renkli torus Bir düzlem üzerine çizilmiş bir haritayı boyamak birbirine komşu ülkeler aynı renkten olmamak üzere, en fazla dört renk gerektirir. Buna karşı bir torus (simit) üzerindeki bir haritayı boyamak 7 renk gerektirebilir. Böyle bir haritada her ülke 6 ülkenin herbiriyle komşudur; bu nedenle 7 renk gereklidir.



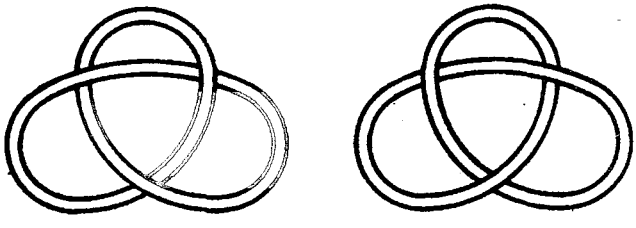
Yirmi dört hücreli Bu dört boyutlu politop kendi kendisinin duali olup 24 hücre, 24 köşe, 96 yüz ve 96 kenar içerir. 24 hücreden herbiri bir sekizyüzlüdür. Her sekizyüzlünün 8 üçgen yüzü vardır ve her yüz iki sekizyüzlü tarafından paylaşılır; bu nedenle 96 yüz vardır.



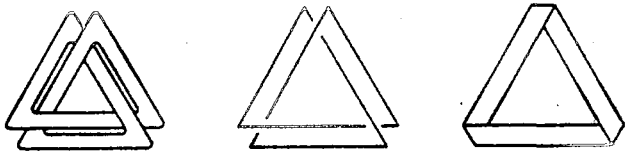
24 hücreli, 16 hücrelinin kesik şeklidir. Hiperküp gibi 4 boyutlu bir uzayı doldurmaya yarayabilir.

Eşkenar dörtgensel 12 yüzlü (rombik dodekahedron) 2 küpten yapılabilir; bunlardan biri, merkez köşelere birleştirilerek 6 piramide ayrılmıştır; sonra diğer küpün her yüzüne bir piramid yapıştırılır. Benzer olarak iki hiperküpten bir 24 hücreli yapılabilir; bunun için hiperküplerden biri, herbiri 8 kübik hücreden birini taban alan, 8 kübik piramide ayrılabilir.

Yonca düğümü Bu özel düğümlerin en basitidir; yalnız üç çaprazı vardır. Sola ve sağa bakan iki şekli vardır. Möbius'un 1827'de anladığı gibi, biri diğerine 4 boyutta rotasyon yaparak çevrilebilir.

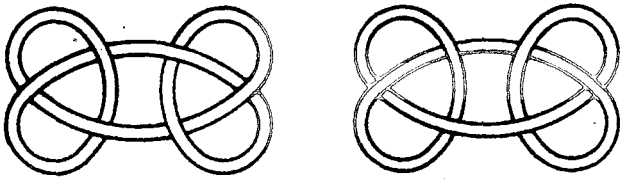


İkinci şekil bu düğümün üç katlı simetrisini ifade eder. Bu, sağda

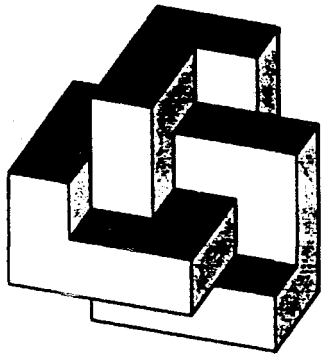


görülen sürekli kâğıt şeridinin kenarına eşdeğerdir.

Aynı yöne bakan iki yonca düğümü, "acemi denizci düğümü" yapar. Karşıt yöne bakan (birbirlerinin ayna hayali) iki yonca düğümü, gemicilikteki "camadan düğümü"dür.

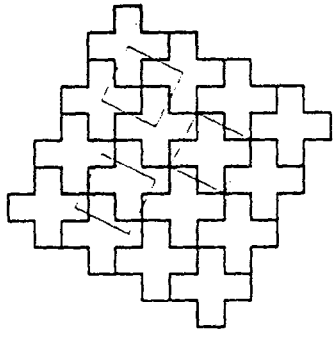


Aşağıda yüzyüze getirilmiş küplerle "bağlanan" en kısa yonca düğümü görülüyor; bu düğümlerin en kısasıdır.



Yunan haçı biçimi mozaik ve parçalama Yunan haçı (artı işareti biçimi haç) çok basit bir şekilde mozaikleşir. Yunan haçlarından oluşan bir mozaik, doğal olarak sonsuz sayıda disseksiyonla karelere

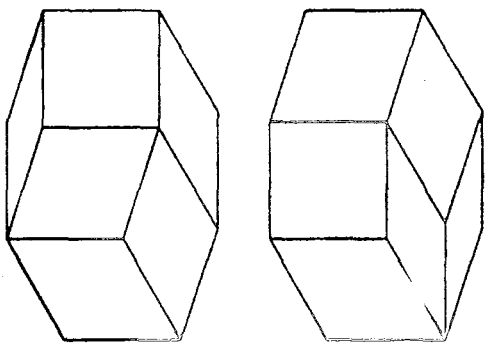
dönüştürülebilir. Yunan haçlarının birbirine karşılık olan noktalarını birleştirirseniz bir kare elde edersiniz.



Yunan haçının kareye bu kadar kolay dönüştürülmesi için gerekli şart haçın 5 birim kareden yapılmış oluşu ve 5'in iki kare toplamı oluşudur: $5 = 1^2+2^2$. Fakat bu koşul gerekli ise de yeterli değildir. Yunan haçı dışındaki diğer pentamino'lar (5 eşit kareyi tam kenar tam kenara uygulayarak elde edilen şekiller) bu koşula uyarlarsa da bunlardan yalnız bazıları mozaikleşebilir ve benzer disseksiyonlara yol açar.

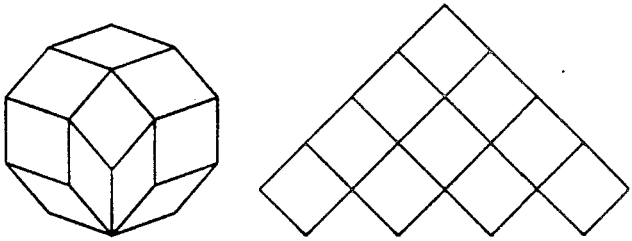
Z

Zonagonlar Çift kenar sayılı bir çokgenin bütün kenarları eşit ve karşılıklı kenarları paralelse ona zonagon denir. Bir zonagon eşkenar dörtgenlere (rombus) ayrılabilir. Kendisi de bir eşkenar dörtgen olan kare, böyle birden fazla disseksiyonu olmayan tek çokgendir. Altıgensel bir zonagon 2, sekizgensel bir zonagon 4 şekilde eşkenar dörtgenlere ayrılabilir vb.



Çift kenar sayılı düzgün çokgenler zonagondur. Tek kenar sayılı çokgenler, kenarların orta noktaları da köşe kabul edilir ve böylece kenar sayısı iki kata çıkartılırsa zonagon haline getirilebilir ve eşkenar dörtgenlere ayrılabilir.

Eşkenar dörtgenlere ayırma, disseksiyon problemlerini çözmek bakımından yararlıdır; şekilde bu husus görülüyor:



Elemanları eşit kenarlı olduğu için bu çokgenler menteşe ile birbirine tutturulabilir ve hatta kare mozaiklere dönüştürülebilir; bunun için ilk önce soldaki şeklin dibinde dört eşkenar dörtgenin birleştiği köşe kırılmalıdır.

Referans: Judita Coffman, 'Math club activities,' PLUS, No: 3. 1986.

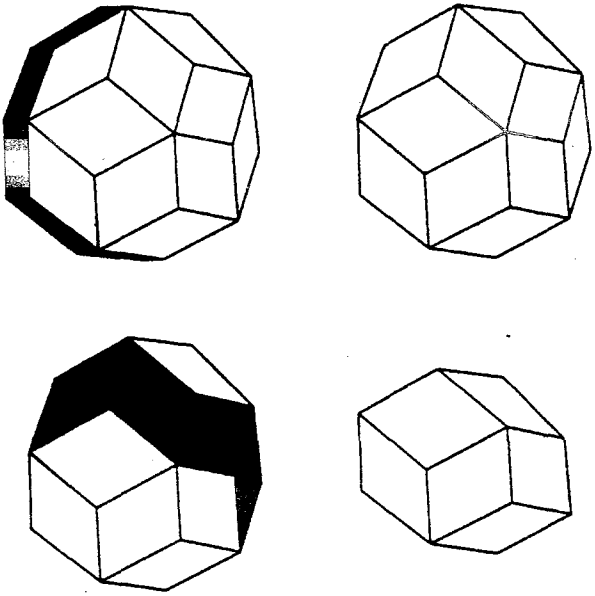
Zonahedron Zonahedron ilk defa kristalografi ile ilgili olarak E.S. Fedorov tarafından ortaya atıldı. Zonahedronun bütün kenarları aynı uzunluktadır ve bütün yüzleri eşkenar dörtgendir; kenarlar yalnızca belli n doğrultudadır. Zorunlu olarak n(n-1) yüzü vardır. (Yüzler eşkenar dörtgen değil, fakat hâlâ eşkenarsa ve karşılıklı kenarlar paralelse, oluşan şekil bir paralelhedrondur.)

En basit zonahedron eşkenar dörtgensel prizma veya rombohedrondur; bu şeklin kenarları yalnızca üç doğrultuda uzanır. Küp bu katı şeklin özel bir halidir. Genel eşkenar dörtgensel onikiyüzlünün ke-

narları 4 doğrultuda uzanır ve bu nedenle 4x3=12 yüz vardır. Eğer kenarlar bir küpün dört köşegeni doğrultusundaysa sonuç eşkenar dörtgensel onikiyüzlüdür (rombik dodekahedron).

Düzgün bir 20 yüzlünün (ikozahedron) 6 çapı, yirmiyüzlüsel oniki yüzlünün (ikozidodekahedron) duali olan, eşkenar dörtgensel 30 yüzlü (rombik triakontahedron) oluşturur. Bu şekilden tam bir eşkenar dörtgenler dizisi çıkartılırsa (bir diğer deyişle kenarları belli bir doğrultuda olan bütün eşkenar dörtgenler kaldırılırsa), 20 yüzlü bir eşkenar dörtgensel 20 yüzlü (rombik ikozahedron) kalır; bundan da eşkenar dörtgensel (rombik) bir dizi çıkartılırsa geriye eşkenar dörtgensel bir 12 yüzlü (rombik dodekahedron) kalır. (Bu, küp-sekiz-yüzlünün duali olan eşkenar dörtgensel 12 yüzlü değildir.)

Herhangi bir zonahedron, dikdörtgen prizmalarına, bu prizmalar da küplere ayrılabilir. Bu nedenle hacimleri aynı olan iki zonahedrondan biri diğerine dönüştürülebilir.



MATEMATİKÇİLERİN KRONOLOJİK LİSTESİ (Bu Kitapta Adı Geçenler)

Miletus'lu Thales	635–547 M.Ö.	Grek
Pisagor	580–480 M.Ö.	Grek
Chios'lu Hippocrates	440 M.Ö.	Grek
Plato	427–347 M.Ö.	Grek
Aristotle	384–322 M.Ö.	Grek
Euclid	295 M.Ö.	Grek
Philo	250 M.Ö.	Grek
Nicomedes	240 M.Ö.	Grek
Perseus	????? M.Ö.	Grek
Archimedes	287–212 M.Ö.	Grek
Diocles	180 M.Ö.	Grek
Perga'lı Apollonius	225–175 M.Ö.	Grek
İskenderiyeli Heron	62 M.S.	Grek
İskenderiyeli Menelaus	100	Grek
İskenderiyeli Ptolemeus	85–165	Grek
İskenderiyeli Pappus	300–350	Grek
Ebül Vefa	940–998	İranlı
Regiomontanus, Johannes	1436–1476	Alman
Pacioli, Luca	1445–1517	İtalyan
Leonardo da Vinci	1452–1519	İtalyan
Dürer, Albrecht	1471–1528	Alman
Galileo (Galileo Galilei)	1564–1642	İtalyan
Kepler, Johann	1571–1630	Alman
Mersenne, Marin	1588–1648	Fransız
Pascal, Étienne	1588–1651	Fransız
Desargues, Girard	1591–1661	Fransız
Descartes, René du Perron	1596–1650	Fransız
Fermat, Pierre de	1601–1665	Fransız
Roberval, Gilles Personne de	1602–1675	Fransız
Torricelli, Evangelista	1608–1647	İtalyan
Schooten, Frans van	1615–1660	Danimarkalı
Pascal, Blaise	1623–1662	İtalyan

Cassini, Giovanni Domenico	1625–1712	İtalyan
Huygens, Christian	1629–1695	Danimarkalı
Wren, Christopher	1632–1723	İngiliz
Mohr, Georg	1640–1697	Danimarkalı
Newton, Isaac	1642–1727	İngiliz
Leibniz, Gottfried Wilhelm	1646–1716	Alman
Ceva, Giovanni	1647/8–1734	İtalyan
Tschirnhausen, Ehrefried Walther von	1651–1708	Alman
Bernoulli, Jakob	1654–1705	İsviçreli
Simson, Robert	1687–1768	İskoçyalı
Bernoulli, Daniel	1700–1782	İsviçreli
Euler, Leonhard	1707–1783	İsviçreli
Malfatti, Gian Francesco	1731–1807	İtalyan
Lagrange, Joseph Louis	1736–1813	İtalyan
Watt, James	1736–1819	İskoçyalı
Haüy, René-Just	1743–1822	Fransız
Monge, Gaspard	1746–1818	Fransız
Mascheroni, Lorenzo	1750–1800	İtalyan
Carnot, Lazare Nicolas Marguerite	1753–1823	Fransız
Gergonne, Joseph Diez	1771–1859	Fransız
Bowditch, Nathaniel	1773–1838	Amerikan
Gauss, Carl Friedrich	1777–1855	Alman
Poinsot, Louis	1777–1859	Fransız
Crelle, August Leopold	1780–1855	Alman
Brianchon, Charles Julien	1783–1864	Fransız
Poncelet, Jean Victor	1788–1867	Fransız
Cauchy, Augustin Louis	1789–1857	Fransız
Möbius, August Ferdinand	1790–1868	Alman
Lobachevsky, Nikolai Ivanovich	1792–1856	Rus
Dandelin, Germinal Pierre	1794–1847	Belçikalı
Steiner, Jakob	1796–1863	İsviçreli
Feuerbach, Karl Wilhelm	1800–1834	Alman
Plücker, Julius	1801–1868	Alman
Plateau, Joseph Atoine Ferdinand	1801–1883	Belçikalı
Bolyai, János	1802–1860	Macar
Verhulst, Pierre-François	1804–1849	Belçikalı
Jacobi, Carl Gustav Jacob	1804–1851	Alman
Kirkman, Thomas Penyngton	1806–1895	İngiliz

Schläfli, Ludwig	1814–1895	İsviçreli
Salmon, George	1819–1904	İrlandalı
Cayley, Arthur	1821–1895	İngiliz
Lissajous, Jules Antoine	1822–1880	Fransız
Cremona, Antoio, L. G. Giuseppe	1830–1903	İtalyan
Beltrami, Eugenio	1835–1899	İtalyan
Reye, Theodor	1838–1919	Alman
Lemoine, Émile Michel Hyacinthe	1840–1912	Fransız
Neuberg, Joseph	1840–1926	Belçikalı
Schwarz, Hermann Amandus	1843–1921	Alman
Clifford, William Kingdom	1845–1879	İngiliz
Brocard, P. R. Jean-Baptiste Henri	1845–1922	Fransız
Dudeney, Henry Ernest	1847–1930	İngiliz
Klein, Christian Felix	1849–1925	Alman
Poincaré, Jules Henri	1854–1912	Fransız
Föppl, August	1854–1924	Alman
Morley, Frank	*1860–1937*	*Amerikan*
Hilbert, David	1862–1943	Alman
Kürschák, József	1864–1933	Macar
Koch, Helge von	1870–1924	İsviçreli
Fano, Gino	1871–1952	İtalyan
Lebesgue, Henri Léon	1875–1941	Fransız
Soddy, Frederick	1877–1956	İngiliz
Fatou, Pierre Joseph Louis	1878–1929	Fransız
Sommerville, Duncan, Mclaren Young	1879–1934	İskoçyalı
Sierpinski, Waclaw	1882–1969	Polonyalı
Thébault, Victor	1882–1960	Fransız
Blashke, Wilhelm Johann Eugen	1885–1962	Avusturyalı
Julia, Gaston	1893–1978	Fransız

İÇİNDEKİLER

Alterne etmeyen düğümler ... 7
Altı daire teoremi ... 8
Altın oran, altın bölme veya kutsal oran ... 8
Altmış derecelik kirişler ... 10
Apollon contası ... 11
Apollonius problemi ... 12
Arbelos ... 14
Arşimed çokyüzlüleri ... 15
Arşimed spirali ... 17
Açıyı üçe bölmek ... 18
Astroid ... 19
Aubel teoremi ... 22
Aynı eksenli daireler ... 23
Aynı yayı gören açılar ... 25
Bakarak ispat ... 27
Bal petekleri ... 29
Bang teoremi ... 31
Bernouilli lemniskatı ... 31
Beş daire teoremi ... 33
Beşgen mozaikler ... 33
Bilardo topu yolu ... 36
Bilardo topu yolu (çokgen içinde) ... 37
Bileşik çokyüzlü ... 39
Birbirine kenetlenen poliominolar ... 40
Bir dairenin kesişen kirişleri ... 41
Bir üçgenin iç merkezi (insentr) ve dış merkezi (ekssentr) ... 42
Blanche disseksiyonu ... 44
Blanc-manger eğrisi ... 45
Blashke teoremi ... 47
Borromean halkaları ... 47
Boşluk doldurucu çokyüzlüler ... 49
Brianchon teoremi ... 54
Burulmuş üçgen prizma ... 55
Cassini ovali ... 57

Ceva teoremi ... 58
Clifford teoremi ... 59
Cremona-Richmond şekli ... 60
Çekme eğrisi (traktris) ... 61
Çevreyi ikiye bölen kirişler ... 62
Çokgen düğümler ... 63
Çokgenlere yıldızlar, yıldızlara yıldızlar ... 64
Çokyüzlülerde oluşmuş halkalar ... 65
Daireleri oynamaz şekilde paketlemek ... 69
Dairesel dörtgen ... 70
Dairesel mozaikler ... 70
Dandelin küreleri ... 73
Dejenere kuvartikler ... 74
Delikli fayans döşemeler ... 74
Deltahedra ... 76
Deltoid veya üç köşe noktalı hiposikloid ... 77
Dengeli olarak yüzen cisimler ... 79
Desarques şekli ... 80
Destekli kare ... 81
Dikdörtgenlerin karelere ayrılması ... 82
Dikdörtgensel hiperbol ... 83
Dokuz nokta dairesi ... 84
Dokuz-üç konfigürasyonu ... 85
Dört renk teoremi ... 86
Dörtgen mozaik ... 87
Dörtyüzlü ... 88
Dörtyüzlü disseksiyonları ... 89
Dudeney'in kare olabilen menteşeli eşkenar üçgeni ... 90
Dupin siklidi ... 91
Duvar kâğıdı desenleri ... 93
Düğümler ... 94
Düğümler, peşpeşe ... 96
Düzgün altıgenler ve yıldızlar ... 97
Düzgün beşgen ... 98
Düzgün dört boyutlu politoplar ... 99
Düzgün mozaikler ... 99
Düzgün onyedigen ... 100
Düzgün yedigen ... 101

Ejderha (dragon) eğrisi 102
Elips 103
Elli dokuz ikozahedra 108
Eşit açılı veya logaritmik spiral 109
Eşit iç daireler teoremi 110
Eşkenar dörtgensel onikiyüzlü (rombik dodekahedron) 111
Eşkenar üçgen fayanslar 112
Euler çizgisi 113
Fano düzlemi 114
Fatou tozu 115
"Fault"suz dikdörtgenler 116
Fermat spirali veya parabolik spiral 116
Fermat noktası 117
Feuerbach teoremi 120
Fregier teoremi 121
Friz örnekleri 121
Gauss asal sayıları 123
Geometrik yanılsamalar 124
Harborth fayansları 125
Harmonik oran 126
Harmonograf 127
Haüy usulü polihedronlar 128
Helikoid 129
Heliks (helezon, helis) 131
Hemen hemen düzgün çokgenlerden mozaik 132
Hénon atraktörü 132
Heptahedron (yediyüzlü) 135
Heron problemi 136
Hilâller 138
Hilbert'in boşluk doldurucu eğrisi 139
Hiperbol 140
Hiperbolik geometri 143
Hiperbolik paraboloid 145
Hiperküp (aşırı küp) veya tesserakt 147
Holditch teoremi 148
İki çokgenin ortalaması 149
İki kareli mozaik 150
İnversiyon (evirtim) 151

İslâm mozaikleri ... 153
İzoperimetri problemi ... 155
Japon teoremi ... 157
Jeodezik kubbe ... 158
Johnson teoremi ... 159
Julia kümesi ... 160
Jung teoremi ... 162
Kahire mozaiği ... 163
Mozaik, Kahire ... 163
Kakeya kümeleri veya perron ağaçları ... 164
Kardioid (yürek eğrisi) ... 165
Karelerden mozaik ... 167
Karelere bölünmüş kareler ... 168
Karşılaştırılamaz dikdörtgenler ... 169
Katenaryus (zincir eğrisi) ... 169
Katenoid (zincir yüzeyi) ... 173
Kenar ortayların kesişmesi ... 173
Kepler-Poinsot çokyüzlüleri ... 174
Kesişen silindirler ... 176
Kıllı top teoremi ... 176
Kibrit çöpüyle çizimler ... 177
Klein şişesi ... 179
Koch'un kar tanesi eğrisi ... 180
Kollapsoidler ... 182
Komple dörtgen ... 183
Konfokal konikler ... 84
Konik kalemleri ... 185
Kostik (bir dairenin kostiği) ... 186
Kutup (pol) ve polar ... 187
Kübik ve üçgen ... 189
Küp ... 190
Küpün duplikasyonu ... 192
Küre paketleme ... 194
Kürenin üzerinde daireler ... 195
Küresel geometri ... 196
Kürschak fayansı ... 197
Lebesgue'in minimal problemi ... 199
Lissajous şekilleri veya Bowditch eğrileri ... 200

Lorenz atraktörü ... 201
Malfatti problemi ... 202
Maltitüdler ... 203
Mandelbrot kümesi ... 204
Marangoz cetveliyle açıyı üçe bölme ... 205
Mascheroni çizimleri ... 206
Menelaus teoremi ... 207
Menteşeli mozaikler ... 208
Merdivenvari fayanslar ... 210
Miguel noktası ... 211
Miguel teoremi ... 211
Möbius şeridi ... 212
Monge teoremi ... 214
Morley üçgeni ... 215
Napoleon teoremi ... 217
Nefroid ... 219
Nicomedes'in konkoidi ... 219
Oktahedron (sekizyüzlü) ... 222
Onbir-üç şekli ... 223
Onikigenin parçalara bölünmesi ... 223
Oniki yüzlü (dodekahedron) ... 225
Oranların oranı (çapraz oran) ... 226
Ortak kirişler ... 227
Ortogonal yüzeyler ... 228
Ortosentrik noktalar ... 228
Örgüler ... 230
Örülmüş çokyüzlüler ... 231
Örtülmüş çokyüzlüler ... 232
Pantograf ... 233
Pappus teoremi ... 233
Parabol ... 235
Pascal konfigürasyonu ... 238
Pascal doğrusu ... 238
Pascal salyangoz eğrisi (Pascal limasonu) ... 240
Pascal teoremi ... 241
Pascal üçgeni ... 242
Peaucellier hücresi ... 244
Penrose mozaikleri ... 245

Pentatop veya simpleks ... 247
Perimetri bisektörleri ... 249
Philo doğrusu ... 250
Pick teoremi ... 251
Pisagor teoremi ... 252
Pivot (eksen) teoremi ... 257
Plateau problemi ... 258
Platonik katılar ... 260
Poincaré'nin hiperbolik geometri modeli ... 261
Polihedron dualleri ... 263
Polihedronlar, düzgün yüzlü ... 264
Poncelet porizmi (Poncelet'in sonsuz sayıda çözümü) ... 265
Pons asinorum ... 266
Prens Rupert'in küpü ... 267
Pretzel transformasyonları ... 268
Projeksiyon (izdüşüm) düzlemi ... 269
Psödosfer (yalancı küre) ... 271
Ptolemeus teoremi ... 273
Reptiller ... 274
Resim galerisi teoremi ... 276
Reye şekli ... 276
Rotorlar ... 278
Sabit nokta teoremleri ... 280
Sarsak çokyüzlüler ... 281
Schäfli'nin çift altısı ... 282
Scherk yüzeyi ... 283
Schwarz çokyüzlüsü ... 284
Schwarz'ın periyodik minimal yüzeyi ... 285
Sekiz biçimli düğüm veya dörtlü düğüm ... 286
Sierpinski'nin karesel kar tanesi ... 287
Sikloid (çevrim eğrisi) ... 287
Silindir içinde küre ... 291
Simson doğrusu ... 291
Soddy'nin heksleti ... 293
Sonsuzdaki doğru ... 294
Spiral benzerlik mozaiği ... 295
Spirolateraller ... 296
Steiner ağları ... 298

Steiner daireler zinciri ... 300
Steiner Roma yüzeyi ... 301
Steiner teoremi ... 301
Stella octangula (sekiz açılı yıldız) ... 301
Takip eğrileri ... 303
Tekbiçim aydınlanabilir oda ... 305
Tek taraflı yüzeyler ... 306
Tek yapraklı hiperboloid ... 307
Tek yüz üstünde durabilen çokyüzlüler ... 309
Thébault teoremi ... 310
Thurston'un hiperbolik kâğıdı ... 311
Türetilmiş çokgenler ... 312
Unduloidler ... 314
Üç kareden bir kare yapmak ... 316
Üçgen disseksiyonu ... 318
Üçgen mozaikler ... 320
Üçgende yansımalar ... 321
Üçgende Brocard noktaları ... 321
Üçgenin çevrel çemberi ... 323
Üniform (tekbiçim) çokyüzlü ... 323
Verhulst formülü ... 325
Viviani teoremi ... 326
Voderberg fayansları ... 327
Yarı düzgün mozaikler ... 330
Yarı düzgün mozaiklerin dualleri ... 331
Yay kenarlı üçgenler ... 332
Yedi daire teoremi ... 334
Yedi renkli torus ... 336
Yirmi dört hücreli ... 336
Yonca düğümü ... 337
Yunan haçı biçimi mozaik ve parçalama ... 338
Zonagonlar ... 340
Zonahedron ... 341

Cassini ovali, kalkık küp, dört renk teoremi, Desarques şekli, Poncelet porizmi, Möbius şeridi, Fatou tozu, Euler çizgisi...

Şüphesiz bütün bunlar çoğumuz için hiçbir anlam ifade etmiyor.

David Wells, basit daireden karmaşık fraktala, Pitagoras'tan Penrose mozağine dek uzanan bu gizemli dünyanın kapılarını bize açıyor. Günlük yaşantımızda yüzlerce kez karşılaşıp ondan yararlandığımız halde iç düzeni konusunda pek az şey bildiğimiz geometrinin çarpıcı yanlarını okuyucuyu sıkmadan sergiliyor *Geometrinin Gizli Dünyası*, bu bakımdan *Wells*'in daha önce yayınladığımız kitabı *Matematiğin Gizli Dünyası* ile bir bütünlük oluşturuyor.

ISBN 975-8304-0

9 789758 3040