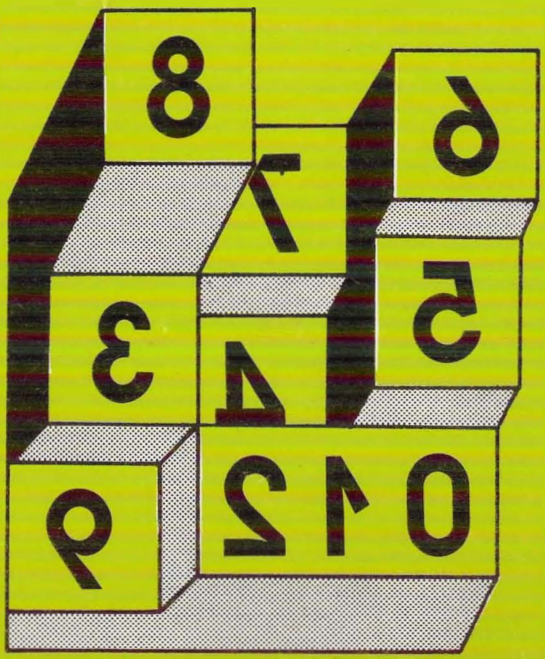
ALİ NESİN'İN ÖNSÖZÜYLE 3.BASIM

kim korkar matematikten

nazif tepedelenlioğlu



BİLİM VE SANAT

KİM KORKAR MATEMATİKTEN

NAZİF TEPEDELENLİOĞLU



BİLİM VE SANAT

BİLSAN A.Ş.
BİLİM VE SANAT KİTAPLARI
Bilim dizisi: 1
Birinci basım: Kasım 1983
İkinci basım: Mayıs 1984
Üçüncü basım: Kasım 1987

Dizgi: Tempo, Ankara, Baskı: Engin Ofset/İstanbul
BİLSAN, Asmalıçeşme Sokak 14/2, Binbirdirek/İstanbul

3.BASIM İÇİN ÖNSÖZ

Matematik soyut bir bilim olduğundan toplum matematiği dolaylı olarak kullanılır.Bu yüzden matematikçi hiçbir zaman zengin olamaz.

Matematikçi üne de kavuşamaz. Matematiğe Nobel ödülü bile konmamıştır. Yüzyılın teoremini bile kanıtlasa ancak sınırlı bir çevrede tanınır.

O zaman neden bir insan matematikçi olmak isteyebilir? Sevgiden... Tutkudan... Matematiğin çok büyük çekici gücü vardır. Ona tutulan kişinin gözü başka birşey göremez... Hemen hemen hiçbir şey... Matematikçi mutludur. Sevdiğiyle birliktedir her an. Sevgili, her sevilen gibi, gizlerle doludur. Bu gizler anlaşılır anlaşılmaz yeni gizler doğururlar. Oysa matematik kendini saklamaz. "Anla beni" der sanki, herşeyimle ortadayım, beni doğurduğun gibiyim. Hiç değişmedim. Beni anlayamıyorsan, suç bende değil sende. İyi bak. Ara, araştır. Senden hiçbir şeyimi gizlemiyorum."

Ancak bu sevgi, karşı-cinslerin sevgisine pek benzemez. İnsanlar, sevdiği kişileri kıskanırlar, kendilerine saklarlar. Oysa matematikçi, matematiği paylaşmak ister. Bu gereksinimin nedenini bilmiyorum. Belki de matematikçiyle sanatçı burada buluşurlar: nasıl bir ressam resimlerinin görülmesini, beğenilmesini isterse, bir matematikçi de sanatını anlatmak, bildiklerini, kanıtladıklarını göstermek ister. Herhalde verdiği emeğin değerinin anlaşılmasını ister. Bu ise çok zor bir uğraştır. Matematiğin derinliklerine büyük çabalarla yıllar süren çalışmalardan sonra inilir. Bu derinliklerden özü çıkarıp anlaşılır bir dile sokup, okura sunmak kolay değildir. Nazif Tepedelenlioğlu bunu çok iyi başarmış. Bir çırpıda okuyacağınız bu kitapta derin matematik ve yalın bir dil bulacaksınız.

Matematik ne tümüyle eğlencelidir, ne de tümüyle sıkıcı...

Matematik her ikisidir de. Sorulan soru ve alınan yanıt eğlenceli olabilir (eğer yanıt biliniyorsa elbet). Ama sorudan yanıta kadar olan süreç sıkıcı olabilir. Çok çalışma gerektirebilir, çoğu zaman matematikçinin yıllarını alır, hatta birkaç matematikçinin yaşamını kapsayabilir. Tüm yaşamını tek bir soruya adamanın ne demek olduğunu düşünün... Bu süreci okurlara tanıtmamak onları aldatmak olurdu. Kitapta sorular bulacaksınız. Dilerim bu soruları yanıtlamaya çalışırsınız. İşte o zaman matematikçilerin dünyasını anlarsınız ve siz de matematikçi olursunuz. Çünkü genel anlamda matematikçi matematiği bilen değil, soyut sorulara yanıt ararsan ve sıkılsa aramaktan inatla vazgeçmeyen kişidir.

Bu kitabın her bölümünü bitirdiğinizde kendinizi daha zeki duyumsayacaksınız. En azından ben öyle duyumsadım. Çok zor gibi gelebilecek soruların çok kolay yanıtları olduğunu göreceksiniz. Daha önce varlığını bilmediğiniz bir dünyaya gireceksiniz. Öğrencilerime söylerim her ders yılı başında,

— Ders yılı bittiğinde kendinizi yeni bir insan olarak görmüyorsanız başaramamışım demektir.

Bir hoca birgün,

— Sınıfta uyuyan görürseniz beni uyandırın, demiş öğrencilerine.

Bizler bu kitabın okurları, hiç uyumayacağız. Belli ki kitabın yazarı kitabı severek yazmış.

Notre Dame, 14 Eylül 1987
Ali Nesin

ÖNSÖZ

1981 - 1982 yıllarında Bilim ve Sanat'ta matematiğin çeşitli konularını içeren yazılar yazdım. Bu yazılar şu amaçlara yönelikti: Matematiğin tarihini, kaynaklandığı konuları, sorunlarını anlatmak ve bunların insanoğlunun tarih boyunca karşı karşıya bulunduğu varolma, gelişme, doğayı tanıma ve onu biçimlendirme sorunu ile iç içe olduğunu sergilemeye çalışmak. Böylece Bilim ve Sanat okurlarına, "Matematiğin sorunları sizin sorununuzdur; onlarla ilgilenin, onlara sahip çıkın" demek. Yazılar bu amaçları nedeniyle yabancı dillerde yüzlercesine rastladığımız, bazan ülkemizde de kötü örneklerini gördüğümüz, matematik cambazlığı, eğlencelik, bilmece cenneti türünden popüler matematik yazılarından farklı nitelikler, öğeler taşıdı.

Burada benim beklemediğim birşey oldu, yazılar yaygın ilgi uyandırdı. Bu nedenle Bilim ve Sanat'ın yöneticilerinin de teşviki ve desteği ile bunları bir kitap halinde toplamaya karar verdim.

Yazılar kitapta, dergideki çıkış sıralarına göre sıralanıyorlar. Dergi yazısından kitapta bir bölüm şekline dönüştürmenin gerektirdiği zorunlu

bazı redaksiyon değişiklikleri dışında yazılar biçim ve içerik özelliklerini de koruyorlar.

Dergide, hem yer darlığı nedeniyle, hem de okuyucuyu sıkmamak kaygısıyla bazı matematiksel ayrıntıları, örneğin uzunca kanıtları atlamış, bunları ya okuyucuya bırakmış ya da dileyen okuyucuya postayla göndereceğime söz vermiştim (Nitekim bu sözümü tuttum da). Sonra, yazılar yayınlanırken okuyuculardan uyarıcı, düzeltici, aydınlatıcı birçok mektup aldım. İşte bu iki nedenle, her bölümün sonuna "Ekler" adı altında bir yer açtım ve burada uzun ve ayrıntılı olabilecek, her okuyucunun ilgisini çekmeyecek bazı kanıtları, açıklamaları verdim. Ayrıca okuyuculardan gelen kimi mektuplardan da burada söz ettim.

Kitabın arkasına bir "Bilim Adamları Kılavuzu" ekledim. Bu kılavuzun amacı kitapta anlatılmaya çalışılan kimi konuları biraz daha açmak. Kitapta adı geçen ve konuyla ilgili önemli kişileri biraz daha yakından tanıtmak. Eğer bir bilim adamı kitabın içinde zaten yeterince tanıtılıyorsa ya da herhangi bir bölümde işlenen konunun daha iyi anlaşılmasına bir katkısı olmayacaksa kılavuzda yer almıyor. Buna karşın, örneğin birinci bölümde yalnızca bir dipnotta geçen Riemann, Bolyai, Lobaçevski ve Hilbert kılavuzda ayrıntılı bir biçimde anlatılıyorlar. Çünkü bu kişiler o bölümde adı geçen Öklid'i daha iyi tanımamıza yol açacak kişilerdir. Bu nedenle, bu kılavuzu kitaptan bağımsız bir eklenti olarak görmemek gerek.

Son olarak kitabın hazırlanması sırasında tarihler, yer ve kişi adları konusunda özgürce yararlandığım üç kaynağı burada belirtmek isterim. Bunlar D.E. Smith'in "History of Mathematics" (Dover, 1958), I. Asimov'un "Biographical Encyclopedia of Science and Technology" (Pan Books, 1975) adlı kitapları ile Encyclopaedia Britannica'dır. Diğer kaynaklar kitabın sonunda bölümlere göre "Kaynaklar" başlığı altında verilmiştir.

Nazif TEPEDELENLİOĞLU
Haziran 1983

KİM KORKAR MATEMATİKTEN?

Sanırım bozuk eğitim düzenimizden, özellikle orta öğretimimizden olacak, çoğumuz matematikten çekiniriz. Matematik bir zamanlar ortaokulda, lisede sınıf geçmek için ezberlemek zorunda kaldığımız bir takım formüller, denklemler kargaşasıdır bizim için. Matematik, matematikçilerin, fizikçilerin, mühendislerin —yani o öteki kişilerin— işidir de, biz daha çok edebiyattan, hukuktan, iktisattan, resimden, müzikten anlarız.

Matematik bir takım formüller ve simgeler yığını mıdır gerçekten? Elbette hayır. Böyle düşünmek ormanı ağaçlarla hayvanların karışımından oluşmuş bir bulamaç gibi görmeye benzer. Matematik nesnel gerçeklikten, insanoğlunun gene nesnel gerçekliği daha iyi kavramak, onu biçimlendirmek için soyutladığı bazı kavramlar ve bu kavramlar arasındaki ilişkilerle uğraşır. Bu uğraşı sırasında da yöntem olarak mantığı kullanır. Formüller, simgeler birer araç ya da matematiğin dilidir yalnızca.

Bu nedenle matematik sanatta, edebiyatta, hukukta, kısaca yaşamda kullandığımız yöntemlerin soyut bir sistematiğidir.

Leibniz'e göre müzik gizli bir aritmetik alıştırmasıdır. Ama müziğe kendini veren kişi sayılarla oynadığının bilincinde değildir. Buna klavsen ya da piyano çalan bir kişinin "logaritma" çaldığını da ekleyebilirdi.

İki notayı bir arada duymak, iki frekansı ya da iki sayıyı ve bu iki sayı arasındaki oranı algılamaktan başka birşey değildir. Demek ki armoni sorunu iki sayının oranını seçme sorununa eşdeğerdir.

Matematikte bir teoremin kanıtlanması için izlenen yöntemle, mahkemede suçun ya da suçsuzluğun kanıtlanması için savcının ya da avukatın izlediği (ya da izlemesi gereken) yöntem aynıdır.

Başarılı dedektif tipleri, Holmes'lar, Poirot'lar Maigret'ler ya da Columbo'lar matematiğin yöntemleriyle tanışık mugalata ve demagojiden uzak kişilerdir.

Resim sanatı aritmetiği (oran - orantıyı) ve geometriyi (perspektifi) ne kadar doğal bir biçimde içinde barındırır.

MATEMATİK GÜZELDİR

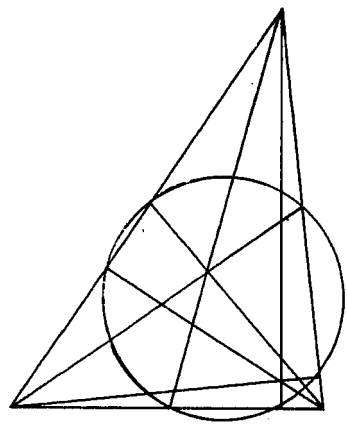
Eski Yunanlıların, matematiği bilimden çok, bir sanat olarak görmeleri, gerçeği çok mu çarpıtır? Çarpıtsa bile bunda işe yararlık, kesinlik ve gerçeğin bir araya geldiği herşeyde güzelliğin de bulunmasının rolü yok mudur?

Düzensizlik beklediğimiz bir durumda, birden düzen keşfedivermek insanı heyecanlandırmaz mı? Şu kareye bakınız. Kutulara rasgele yerleştirilmiş sessiz ve anlamsız gibi duran bu 16 sayı, gizlerini bulduğunuz zaman birden bütünleşivermiyorlar mı?

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Albrecht Dürer'in "Melencolia" adlı gravüründe, duvarda asılı durur bu kare. Alt sıradaki 1514 sayıları da gravürün yapıldığı tarihi simgeler.

Bir doğru üzerinde olmayan 3 nokta alalım. Bu 3 noktayı birleştirirsek bir üçgen elde ederiz. Şimdi her köşeden karşısındaki kenara birer dikme inelim. Bu dikmelere yükseklik diyoruz. Bir düzlemde iki doğru —eğer paralel değillerse— bir noktada kesişirler. Şu halde iki yüksekliğin bir noktada kesişmesi beklenir. Ama burada olağanüstü bir durum olur: Üçüncü yükseklik de aynı noktadan geçer. Yani bir üçgenin üç yüksekliği bir noktada kesişirler. Aynı özellik, üçgenin kenarortayları (köşeleri karşı kenarların orta noktalarına birleştiren doğru parçaları) ile açıortayları (üçgenin iç açılarını iki eşit parçaya bölen doğrular) için de geçerlidir.



Buraya kadar size üçgenle ilgili pek yeni birşey söylemediysem, okumaya devam edin:

Bir doğru üzerinde olmayan 3 nokta bir çember belirler. Şu halde üçgenimizin kenarlarının orta noktalarından bir çember geçirebiliriz. Şimdi üçgenin dördüncü bir noktasının da bu çember üstünde olması büyük bir rastlantı olurdu doğrusu. Ama bir nokta değil 3 nokta daha, yüksekliklerin ayakları da aynı çemberin üstüne düşer. Bitmedi. Yüksekliklerin kesişim noktasını köşelere bağlayan doğru parçalarının orta noktaları da aynı çemberin üstündedir. İşte size Euler'in 9 nokta çemberi. Üstelik Euler kördü. Euler bu çember üzerinde üçgenin daha 22 özel noktasının bulunduğunu bilseydi ne sevinirdi kimbilir.

Üçgen denen elmasın güzellikleri bu yazının boyutlarını çok aşar. Bu nedenle biz şimdi geometrinin elmas'ını bırakıp aritmetiğin —ya da sayılar kuramının— yakutlarına çevirelim dikkatimizi.

1,2,3, ... sayılarına "doğal sayılar" diyoruz. Bu sayılar içinde kendinden ve 1 den başka hiçbir sayıya bölünmeyen sayılara da, yakutlar —hayır— "asal sayılar" diyoruz. Örneğin 2,3,5,7,11,13,17 sayıları gibi. Dokuz sayısı asal değildir, çünkü 9, 3 e bölünür. Görüldüğü gibi 2 dışında hiçbir çift sayı (2 ye bölündüğü için) asal değildir.

Her doğal sayı yalnızca tek bir şekilde asal çarpanlarla ifade edilebilir. Örneğin $30 = 2 \times 3 \times 5$. Otuz sayısı başka asal çarpanlarla ifade edilemez. Öyleyse sayıyı verdiğiniz zaman asal çarpanları, asal çarpanları verdiğiniz zaman sayıyı belirlemiş olursunuz. Bu nedenle asal sayılar doğal sayıların yapıtaşları - yakutlarıdır.

Acaba kaç tane asal sayı vardır? Yani asal sayıların sayısı sonlu mudur? Bu problemi ilk ele alıp çözen geometrinin dedesi[1] Öklid'dir: Asal sayıların sayısı sonsuzdur. Yani verilen her asal sayıdan daha büyük başka bir asal sayı bulunabilir.

Bu teoremin kanıtlanmasında kullanılan yöntem, matematiğin bir başka güzelliğini yansıtması bakımından dikkati çeker. Yöntem, olmayana ergi (reductio ad absurdum) adıyla bilinir. Teoreminizdeki hükmü kanıtlamak için "peki" dersiniz, "hükmün doğru olmadığını varsayalım" ve bu varsayımın sizi çelişkiye götürdüğünü gösterirsiniz.

Şimdi asal sayıların sayısının sonlu olduğunu varsayalım. Öyleyse en büyük asal sayı diye bir sayı olması gerekir. Bu sayıya N diyelim. Şimdi en küçük asal sayı 2 den başlayarak N ye kadar bütün asal sayıları çarpalım ve çarpıma 1 ekleyelim: $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times N + 1$ (Örneğin $N = 13$ olsaydı bu işlem sonucu 30031 sayısını elde edecektik). Bu sayı N dahil N ye kadar hiçbir asal sayıya bölünmez. Kalan hep 1 olur çünkü. Şu halde ya bu sayı N den büyük bir asal sayıya bölünüyordur ya da kendisi asaldır (yukarıdaki örnekte 30031 asal değildir ama iki asal çarpanın ikisi de 13 ten büyüktür: $30031 = 59 \times 509$). Öyleyse her iki durumda da N en büyük asal sayı olamaz. Demek ki, verilen her asal sayıdan daha büyük başka bir asal sayı vardır.

1 Dedesi diyorum, çünkü kendisi geçen yüzyılın ikinci yarısında Riemann, Bolyai, Lobaçevski ve Hilbert tarafından geometri ailesinin reisliğinden sürüldü.

Şimdi asal sayıların sayısının sonsuz olduğunu kanıtladığımıza göre, asal sayıların tümünü gösteren bir tablo yapamayacağımız ortaya çıkıyor. Peki acaba $a = f(n)$ şeklinde öyle bir formül bulabilir miyiz ki n sayısı 1,2,3,4, ... şeklinde doğal sayılar içinden geçerken, a da asal sayılara teker teker —hiçbirini atlamadan— eşit olsun?[2] Yanıt hayır. Günümüze kadar böyle bir formül bulunamadı. 1640 yılında Fermat n nin bütün değerleri için asal sayıları veren bir formül ortaya attı:

$$2^{2^n} + 1$$

Bu formül $n = 1$ için 5; $n = 2$ için 17; $n = 3$ için 257 ve $n = 4$ için 65537 sayılarını verir. Gerçekten de bu sayıların tümü asaldır. Ancak bu formülün açıklanmasından yaklaşık 100 yıl sonra Euler (gene mi Euler?) bu formülün $n = 5$ için verdiği 4.294.967.297 sayısının asal olmayıp 641 ile 6.700.417 sayılarının çarpımı olduğunu gösterdi. Bugün $n > 5$ için formülün verdiği sayılar içinde asal sayı olup olmadığı bilinmiyor.

FERMAT'NIN SON TEOREMİ

Söz tamsayılardan ve Fermat'dan açılmışken, Fermat'nın son teoreminden söz etmemek olmaz.

Eski Mısır'da, işini seven her marangoz, kenarlarının uzunluğu 3:4:5 olan her üçgenin bir dik üçgen olduğunu biliyordu.

Daha sonraları bizde "eşek davası" olarak öğretilen Pisagor teoremi de aynı şeyi söylüyordu zaten: $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Üçüncü yüzyılda İskenderiyeli Diyofantus, 3, 4 ve 5 in bu özelliği sağlayan tek tamsayı üçlüsü olmadığını, bu şekilde sonsuz sayıda tamsayı üçlüsü bulunabileceğini gösterdi: $5^2 + 12^2 = 13^2$; $15^2 + 8^2 = 17^2$; $7^2 + 24^2 = 25^2$ vb. Bu tür tamsayı üçlülerine "Pisagor üçlüleri", bu şekilde her üç kenarı da tamsayı olan dik üçgenlere de "Pisagor üçgenleri" deniyor. Şu halde dik kenarlarının uzunluğu tamsayılar x ve y, hipotenüsünün uzunluğu da tamsayı z olan bir Pisagor üçgeni $x^2 + y^2 = z^2$ bağıntısını sağlar.

Peki acaba kare alacağımıza küp alsak, $x^3 + y^3 = z^3$ denklemine tam-

2 Örneğin $a = 2n$ formülünden n doğal sayılar içinden geçerken a nın da çift sayılar, $a = 2n + 1$ formülünde ise tek sayılar içinden geçtiğini hatırlatmak isterim.

sayı çözümler bulabilir miyiz? Ya da herhangi bir tamsayı n için $x^n + y^n = z^n$ denklemini sağlayan tamsayılar var mıdır? Fermat 1637'de Diyofantus'un Arithmetica adlı kitabının yeni çıkan Fransızca çevirisini okurken, Pisagor üçgenlerinin anlatıldığı sayfanın yanındaki boşluğa $n > 2$ için yanıtın "hayır" olduğunu yazdı ve devam etti: "**Cujus rei demonstrationem, mirabilem sane, detexi; hanc marginis exiguitas non caperet.**" "Bu önermenin harikulade bir kanıtını buldum, ancak bu sayfa kenarında bunu yazacak yer yok."

Ölümünden sonra bu kitap Fermat'nın kitaplığında bulundu, ama önermenin kanıtına rastlanmadı. Bu 300 yıl önceydi. O zamandan beri dünyanın en iyi matematikçileri teoremi yeniden kanıtlamaya çalıştılar, çalışıyorlar. 300 yılda epey yol alındı. Bugün n nin 269 dan küçük değerleri için $x^n + y^n = z^n$ nin tamsayı çözümü olmadığı biliniyor. Ama genel bir n için hâlâ bir kanıt bulunamadı.

MATEMATİK EĞLENDİRİR

Matematik ciddi bir bilim dalıdır, ama bu, matematiğin asık yüzlü olduğu anlamına gelmez. Matematiğin birçok dalından; cebirden, geometriden, sayılar kuramından, çizge kuramından, olasılık kuramından ya da topolojiden, bilmeceler; hoşça vakit geçirtici, düşündürücü problemler yaratmak mümkündür.

Aşağıya, seveceğinizi umduğum birkaç problem alıyorum.

Somunu bölmek: Öyle bir kural bulun ki, iki kişi aralarında bir somun ekmeği eşit olarak bölebilsinler ve bu işlemi yaptıktan sonra ikisi de bu bölme işleminin en adil biçimde yapıldığına inansın.

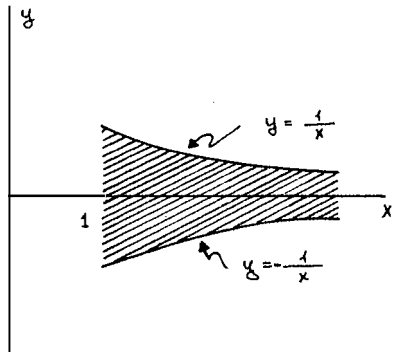
Kural şöyle: Kişilerden biri somunu ikiye keser, öbürü de kesilen parçalardan istediğini seçer.

Peki kişilerin sayısı 2'den çoksa kuralımızı genelleştirebilir miyiz?

Dikkat edilirse buradaki ana nokta bölmenin mutlak olarak eşit yapılması değil, bölme işlemine herkesin eşit oranda katılıp, eşit sorumluluk taşıması ve dolayısıyla sonradan yakınmamasıdır.

Sayıları toplamak: Şimdi bakın, söyleyin eşinize ya da arkadaşınıza, alt alta herhangi iki sayı yazsın. Bunun altına da bu iki sayının toplamını yazsın. Dördüncü sayı olarak dizideki 2. sayı ile 3. sayının toplamını yazsın ve böylece her sayı kendisinden önce gelen iki sayının toplamı olacak şekil-

de, ilk yazdığı iki sayı dahil, 10 sayılık bir dizi oluştursun. Bu işi tamamlayınca sizi çağırsın. Siz de gidin bu 10 sayının toplamını bir çırpıda yazıverin. Toplam, dizideki 7. sayının 11 katıdır çünkü (neden?).



Açıkgöz boyacı: Şekilde $y = 1/x$ ile $y = -1/x$ hiperbolleri görülüyor. Bu iki hiperbol arasında kalan ve $x = 1$ noktasının sağına düşen alanı boyamak için çağrılan boyacı ustası alanın sonsuz olduğunu farkedince düşünür. Bakar ki bu şekli x ekseni etrafında döndürüncü meydana gelecek zurnaya benzer cismin hacmi sonlu (3,14 e eşit). "Şu halde" der, "ben önce hacmi oluştururum. Hacmin içini boyayla doldururum, sonra da boya kuruyunca hacmi ortadan ikiye keserim. Bu şekilde sonsuz alanı sonlu miktarda boyayla boyamış olurum." Nerde yanılıyor boyacı?

Kulağı kesik satranç tahtası: Bir satranç tahtasının ana köşegenlerinden birinin iki ucundaki köşelerdeki iki kareyi kesip atalım. Geriye kalan 62 kare, her biri iki kareyi örtecek şekilde 31 domino taşı ile kapatılabilir mi?

Yanıt: Kapatılamaz (neden?).

EKLER

$x^2 + y^2 = z^2$ bağıntısını sağlayan tamsayıların aralarında asal olma koşulunu (yani ortak çarpanları olmama koşulunu) aramazsak, bir Pisagor üçlüsünden, üçlüyü genişleterek başka üçlüler kolayca türetilebilir. Örneğin $3^2 + 4^2 = 5^2$ bağıntısını 4 ile genişleterek $6^2 + 8^2 = 10^2$; 9 ile genişlete-

rek $9^2 + 12^2 = 15^2$; 16 ile genişleterek $12^2 + 16^2 = 20^2$ vb. bağıntıları türetilebilir. Diyofantus problemini ilginç yapan, sonsuz sayıda aralarında asal Pisagor üçlülerinin varlığıdır. Bu tür Pisagor üçlülerine "ilkel üçlü" deniyor.

Bütün ilkel üçlüleri türetmenin bir yolu x, y ve z yi

$$x = p^2 - q^2$$
$$y = 2pq$$
$$z = p^2 + q^2$$

olacak şekilde seçmektir. Yukarıdaki ifadelerde, p ve q aralarında asal, biri tekse öbürü çift seçilen ve $p > q$ koşulunu sağlayan tamsayılardır. x, y ve z yukardaki gibi seçilirse $x^2 + y^2 = z^2$ bağıntısının sağlanacağı kolayca gösterilebilir. p ve q aralarında asal değilse ve örneğin $k > 1$ gibi bir ortak çarpanları varsa, k sayısı x, y ve z nin de çarpanı olacağından, x, y, z üçlüsü ilkel olmayacaktır. p ve q sayılarının ikisi de çift seçilirse, p ve q aralarında asal olmaz; ikisi de tek seçilirse bu kez hem x hem de z çift olur; y de daima çift olduğuna göre, x, y, z üçlüsü gene ilkel olmaz. $p > q$ koşulu ise $x > 0$ için gereklidir.

Aşağıdaki tablo birkaç ilkel üçlüyü göstermektedir. Okuyucu bu tabloyu dilediğince genişletebilir:

p	q	x	y	z
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25

İlkel üçlülerin bazı ilginç özelliklerini, kanıtlarını okuyucuya bırakarak aşağıda sıralıyorum:

1. Ya x ya da y 3'e bölünür.
2. Ya x ya da y 4'e bölünür.
3. Ya x ya y ya da z 5'e bölünür.
4. Ya x ya y ya x + y ya da x − y 7'ye bölünür.

YANITLAR

Somunu bölmek: Somunu N kişiye bölme kuralı şöyle: Birinci kişi somunun 1/N'ini keser ortaya koyar. Bundan sonra, ikinci kişi ortaya konan parçanın gerçekten somunun 1/N'i olup olmadığını irdeler. Eğer parçanın olması gerekenden büyük kesilmiş olduğu kanısına varırsa, parçayı kendince 1/N'e indirir ve artan parçayı büyük somuna ekler. Yok eğer parçanın somunun 1/N'i (ya da daha küçük) olduğu kanısındaysa parçaya dokunmaz. Daha sonraki kişiler de sırayla bu parça üzerinde aynı işlemi yaparlar. Parça ona en son dokunanın olur. Bundan sonra geriye kalan N — 1 kişi somunun geri kalan bölümü üzerinde aynı işlemi tekrarlarlar. Ancak, korkarım, bütün bu işlemlerden sonra somun bir kırıntı yığını haline dönüşecektir. Onun için belki en iyisi bu işlemi ekmek somunu yerine bir kova suyla yapmalı.

Açıkgöz Boyacı: Bir alanı boyamak demek o alana düzgün kalınlıkta boya sürmek demektir. Oysa zurnaya benzer hacmin çapı gittikçe daraldığı için boya kalınlığı giderek azalıyor demektir. Ne kadar ince olursa olsun verilen bir boya kalınlığı için öyle bir x bulunabilir ki o x değerinin sağındaki zurnanın çapı (dolayısıyla boya kalınlığı) istenen kalınlıktan daha küçük yapılabilir. Oysa o x değerinin sağındaki alan hâlâ sonsuzdur.

Kulağı kesik satranç tahtası: Kesilen karelerin ikisi de aynı renkte olacağı için geri kalan 62 karenin 30'u —örneğin— siyah, 32'si beyaz olacaktır. Oysa, bir domino taşı komşu iki kareyi kapattığı için ve komşu kareler zıt renkli oldukları için domino taşlarıyla ancak eşit sayıda siyah ve beyaz kare kapatılabilir.

MATEMATİK NASIL MATEMATİK OLDU?

İki Macar soylusu matematik yarışması yapmaya karar verirler. Yarışma kurallarına göre taraflar sırayla birer sayı söyleyecekler ve en yüksek sayıyı söyleyen yarışmayı kazanmış sayılacaktır. "Peki" der soylulardan biri, "sen başla". Öteki soylu uzunca bir beyinsel çalışmadan sonra ürününü ortaya koyar: "Üç!". Sıra birinci soyludadır. Onbeş dakika kadar kendisinden ses çıkmaz. Ama yüz ifadesinden, bütün benliği ile düşünmekte olduğu bellidir. Nihayet acı gerçeği teslim etmek zorunda kalır: "Sen kazandın".

Şimdi çoğu okuyucunun bana kızdığını görür gibiyim: "Soylu moylu, bir insan bu kadar da ebleh olamaz". Neden? Çünkü aşağı yukarı 5000 yıldır insanoğlu (soylular dahil) üçten yukarı saymasını biliyor.

Bugün insanoğlu yalnızca sayı saymasını bilmiyor. Geometri, cebir biliyor. Sonsuz küçüklerle uğraşıyor ve türev alıyor, tümlev alıyor. Türevsel denklem çözüyor. Olasılık kuramıyla, çizge kuramıyla, topolojiyle uğraşıyor.

Matematik dediğimiz bu uçsuz bucaksız bilgi denizini nasıl yarattı insanoğlu? Bir görüşe göre içinde bulunduğu toplumun "üstünde" yaşayan

matematikçileri eliyle. Buna göre, matematikçiler etkinliklerini içinde yaşadıkları toplumdan bağımsız olarak sürdürürler. Ama doğal olarak, ortaya konan ürün teknolojiyi etkilediği için matematik toplumsal değişmede etkili olur. Matematikçiler bu etkinlikleri süresince kendilerine hoş gelen ya da uygun gördükleri kavramları, soyut varlıkları —biraz da keyfi bir biçimde— yaratırlar ve bundan sonra herşey mekanik bir mantıksal kıyas yöntemiyle, önermeler zinciri halinde büyür, gelişir. Matematikçinin somut gerçeklikten bu uzaklığı, doğal ki onun ortaya işe yarar bir ürün koymasına engel değildir. Hatta çoğu kez bu ürün çok çeşitli uygulama alanları bulur. Böylece matematikçi içinde yaşadığı toplumu etkiler, ama matematik salt matematikçinin ürünüdür. Böylece döner, dolaşır, toplumun gelişmesindeki itici gücün toplumdaki deha sahibi bilge kişiler olduğu sonucuna varırız.

Bu görüş gerçekliğin üstünkörü bir biçimde yorumlanmasından kaynaklanır. Matematikçiyi toplumdan soyutlayıp fildişi kuleye hapseder ve matematiksel gelişmenin matematikçinin iradesiyle kendiliğinden olduğunu varsayar. Oysa matematikçi ile içinde yaşadığı toplum ayrılmaz bir bütün oluşturur. Bu bütünlüğü gördüğümüz zaman ancak, nasıl olup da toplumun teknolojik gereksinmelerini karşılayabilmek için matematiğin yavaş yavaş, ama emin adımlarla bugünkü durumuna geldiğini anlayabiliriz.

Matematik, yaşamın nesnel koşulları, onun varlığını gerektirince dünyaya geldi. İlk matematikçi belki de sürüsündeki hayvanları saymaya çabalayan bir çobandı.

Tarımla uğraşan toplumların en ilkeli bile mevsimlerle ilgili sayısal bilgiye gereksinme duyar. Bu ise takvim yapma ile ilgili sorunların çözümünü gerektirir. İlkel toplumların hemen hepsinin takvim tutma, dolayısıyla astronomiyle ilgilendiklerini biliyoruz.

Fenikeliler gibi tüccar - gemici toplumların ekonomilerinin bir muhasebe sistemine, mirası bölüşme kurallarına, denizcilik sanatına kısacası, aritmetik, geometri, astronomiye olan gereksinmeleri tartışma götürmez. Bu gelişme ticarete dayanan her uygarlıkta yer alır. Babil'de ve eski Mısır'da aritmetik ve geometrinin, Hindistan'da da cebirin başlaması işte bu gelişme sonucudur. Eski Mısır'da Nil taşkınlarından sonra toprak sınırlarının yeniden saptanması sorunu da geometrinin Mısır'a özgü itici öğelerinden biriydi.

Toplumsal yaşamın gerektirdiği matematiksel gelişme belli bir düzeye eriştikten sonra matematik artık yalnızca uzmanların anladığı bir meta hali-

ne geldi. Toplumun egemenlerinin bir araya getirdiği ve beslediği bu uzmanlar toplumda bir kast oluşturdular. "Gizli şeyleri"[3] elinde tutan bu insanlar tekellerindeki bu bilgi birikimi dolayısıyla toplumda büyük bir güç kazandılar.

Şimdi burada "gizli şeyleri" ellerinde tutan bu insanları yazımın başında sözünü ettiğim "toplumun üstünde yaşayan matematikçi" kavramı ile karıştırmamak gerek. Tam tersine bu kişiler "gizli şeyleri" ile toplumun gereksinme duyduğu işlevleri yerine getirdikleri için güçlüydüler. Örneğin, Mısır'da zamanı kâhinler ölçerdi. Zaman gündüzleri güneşi, geceleri de yıldızları gözleyerek ölçülürdü. Nil taşkınlarının ne zaman olacağını da belirlerdi kâhinler. Gene "gizli şeylerin" içinde dairenin, çokgenlerin alanlarının, basit bazı cisimlerin hacimlerinin nasıl bulunacağı da vardı. Örneğin üstü kesik bir piramitin hacmini bulabiliyordu Mısırlı kâhinler (burada firavun mezarlarının köşe taşlarının kesik piramit şeklinde olduğuna dikkati çekmek isterim).

Ancak gene de, matematiğin bu yalnızca uzmanlarca bilinir olma niteliği, sayı ve şekil konusunda belli bir gizemcilik de yaratmadı değil. Özellikle Pisagorcu gizemciliğin Yunan bilim ve felsefesi üzerindeki etkisi dikkati çeker.

Yunan toplumu üretimde kölelerin kullanıldığı, bu nedenle de üretimi artırmak için teknolojik gelişmeye pek gereksinme duymayan bir toplumdu. Bu durum toplumun egemenlerinin somut gerçeklikten uzaklaşmalarına yol açmıştı. Bu toplumsal yapı Yunan matematiğine gerçekten özgün bir nitelik kazandırmıştı: Uygulamayı hor görmek. Yunanlıya göre bir ürün uygulanabiliyorsa matematik olamazdı. Olsa olsa zanaat olabilirdi. Bunun sonucu Yunanlı nesnel gerçeklikten kaçar, onu yadsır oldu.

Yunan toplumunun bu yapısı Yunanlıların soyutlama ve akıl yürütmede gösterdikleri ilerlemenin nesnel tabanını oluşturur. Aynı zamanda bu yapının, Yunanlıların salt akıl yürütmekle gerçeğe ulaşılabileceğine olan inançlarını doğurduğunu söylemek de yanlış olmaz. Bu nedenle Yunan toplumu matematiğe modern anlamda kanıtlama tekniğini kazandıran ilk toplumdur. Matematiği ilerletmek için yalnızca akıl yürütmeye dayanan Yunanlılar, ge-

3 "Gizli şeyler" deyimi M.Ö. 1650 yılında Ahmes adlı bir kâtip tarafından eski Mısır'da yazılan ve Mısır matematiğinin gelişmişlik düzeyi ile ilgili önemli bilgiler taşıyan bir papirusta geçer. Bu papirus 1858'de İskoç antikacı Alexander Henry Rhind tarafından Mısır'dan kaçırılarak batıya getirildiği için "Rhind papirusu" diye bilinir.

liştirdikleri kanıtlama yöntemiyle, matematiğin daha sonraki dönemlerdeki gelişmesinde birincil etken olmuşlardır.

Yunanlı geometricilerin bu yolla elde ettikleri eşsiz başarı Yunanlıların nesnel gerçeklikten büsbütün uzaklaşmalarına yol açar. Örneğin, Pisagorculara göre, gerçek, güzellik ve iyi bir bütün halinde "sonluda" ve "duranda" aranmalıdır. Bu eğilim Yunanlı geometricilerin akıl yürütmelerindeki durağanlığı ve hareketsizliği açıklar. Örneğin Zeno, çok yaygın bilinen örnekte, bir noktadan atılan bir okun, izlediği her noktada duruyor olması gerektiğinden, hiçbir zaman hedefe ulaşamayacağını savunur; yani hareketi yadsır. Hatta Öklid bile çemberi, bir noktadan eşit uzaklıkta hareket eden noktanın çizdiği eğri (yer eğrisi) olarak tanımlamaz da, hareket kavramını gerektirmeyen başka bir tanım verir. Çember, Yunanlıya göre, düşünsel bir varlık olarak hep vardır çünkü.

Yunan geometrisinin bu diyalektik-dışı karakteri, tamsayıyı yücelten, irrasyonel sayılardan kaçan, "sonsuz" kavramını dışlayan Pisagorcu fikirlerle birlikte bugünkü matematiğin temeli olan matematiksel analizin ve cebirin gelişmesini önledi. Çünkü analiz ve cebirin gelişmesi için pratik bir sayı sistemi gerekiyordu ve Yunanlıların geometrisi böyle bir sistemin gelişmesinin önünü tıkamıştı.

Öte yandan Hindistan'da tüccar bir toplum görüyoruz. Bu toplumsal yapının sonucu Hindular ticaret için gerekli aritmetiği ve toprak ölçmek için gerekli geometriyi geliştirmişlerdi. Hindular matematiğe Yunanlılardan çok farklı bir biçimde yaklaşıyorlardı: Matematik onlar için yaşamı kolaylaştıran bir araçtan başka birşey değildi. Bu nedenle Hindular matematiğin "teorik" yanı üzerinde pek durmadılar; kanıtlarla öyle uzun boylu uğraşmadılar. Sayılara ne taptılar ne de sayılardan korktular: İrrasyonel sayı herhangi bir sayı idi onlar için.

Ticaret kullanışlı bir sayı sistemi gerektiriyordu; bugün bildiğimiz sayı sistemini geliştirdiler, sıfır kavramını icadettiler. Dolayısıyla analiz ve cebiri geliştirdiler. Bu kavramlar daha sonra Araplar aracılığıyla batıya tanıtıldı ve özellikle 13. yüzyıl İtalyasında büyük ilgi gördü. Buradan Avrupa'ya yayıldı.

Bu kısa yazıda toplum yapısının matematiği nasıl biçimlendirdiğini anlatmaya çalıştım. Göstermeye çalıştım ki, matematik bir toplumun üretim ilişkilerinin işlevidir. Matematiğin gelişmesinin özellikleri toplumun gelişmesinin özellikleriyle belirlenir.

EKLER

Bu yazı ilk kez, Türkiye'de insanların satırlardan çok satır aralarını okumaya düşkün oldukları bir zamanda yayınlandı. Bu nedenle olsa gerek, yazının en çok ilgi çeken bölümü baştaki Macar soyluları ile ilgili fıkra oldu. Çok kişi bana bu fıkrayla ne anlatmak istediğimi sordu. Oysa ben bu fıkrayı yazıya ilginç bir başlangıç olsun diye almıştım. Başka hiçbir amacım yoktu.

Satır aralarında buzağı arama merakı bugün de sürdüğüne göre, Macar soyluları ile ilgili bir başka fıkra daha aktarayım isterseniz: Bir grup Macar soylusu Alp dağlarında yürüyüş yaparken yollarını kaybetmişler. Bunlardan biri —söylendiğine göre— bir harita çıkarmış ve haritayı uzun bir süre "tetkik" etmiş sonra "muzafferane" bir tavırla: "Nerede olduğumuzu buldum arkadaşlar!" demiş. Ötekiler de heyecanla: "Neredeyiz?" diye sormuşlar. "Şu ilerdeki büyük dağı görüyor musunuz? İşte tam onun tepesindeyiz."

PİSAGOR'UN KARABASANI: İRRASYONEL SAYILAR

Geometrinin kaynağı, kuşkusuz, uzunluk, yüzey ve hacim ölçüsü problemleridir.

Verilen bir doğru parçasının uzunluğunu ölçmek demek, o doğru parçası içinde standart bir uzunluktan kaç tane olduğunu saptamak demektir. Bir doğru parçasını kendi içinde tam kere bulunan diğer bir doğru parçasıyla ölçmek kolaydır. Örneğin, 3 m'lik uzunluk demek, o uzunlukta standart olarak kabul ettiğimiz 1 m'lik doğru parçasından 3 tane var demektir. Peki, eğer ölçülecek uzunlukta standart doğru parçası tam kere bulunmuyorsa ne yaparız? O zaman standart uzunluğumuzun belli bir kesrinin —örneğin yarısının— ölçülecek uzunlukta tam kere olup olmadığına bakarız. Örneğin standart uzunluğun yarısı, ölçülecek uzunlukta 3 kere varsa, iki uzunluğun birbirine oranı 3/2'dir. Standart uzunluğun, ölçülecek uzunlukta tam kere bulunan kesrine ortak ölçü diyeceğiz. Yani yukardaki örnekte ortak ölçüden standart uzunlukta 2 tane, ölçülecek uzunlukta 3 tane vardır.

Şimdi şu soruyu soralım: Farklı uzunlukta iki doğru parçası verildiğinde her zaman öyle bir ortak ölçü bulabilir miyiz ki, bu ölçü her iki doğru parçasının da uzunluğunda tam kere bulunsun? Başka bir deyişle, iki uzunluk verildiğinde bu iki uzunluğun birbirine oranını m/n şeklinde, iki tamsayının oranı olarak her zaman yazabilir miyiz?

İlk bakışta bu sorunun yanıtı olumluymuş gibi gelebilir. Nitekim "evrenin başlangıcı ve özü tamsayıdır", "evrende herşey bir ahenge, bir ölçüye, bir sayıya bağlıdır" inancı içinde Pisagorcular da böyle düşündüler ilk başta.

Oysa aşağıda da göstereceğimiz gibi, örneğin bir karenin kenarının uzunluğu ile köşegeninin uzunluğunun ortak ölçüsü yoktur. Yani karenin köşegeninin, kenarına oranı iki tamsayının oranı olarak yazılamaz.

Bunu ilk kim buldu dersiniz? Pisagorun kendisi!

Bu buluş, Pisagorcuları tam bir paniğe sevketti. Öyle ya bütün nicelikler ya tamsayılar ya da bunların birbirine oranı (rasyonel sayılar = akla yakın sayılar) ile ifade edilebilirken, şimdi öyle nicelikler ortaya çıkıyordu ki, Pisagorcu felsefe bunu açıklayamıyordu. Pisagorcular bunu aralarında bir sır olarak saklamak için yemin ettiler. Evrenin yüce mimarının bir kusurunu bulmuşlardı çünkü. m/n gibi iki tamsayının oranı şeklinde yazılamayan bu sayılara "Alogon = ifade edilemez" adını verdiler. Bugün de bunlara irrasyonel sayılar = akıl dışı sayılar, diyoruz. Yani hâlâ pek içimize sindirememişiz bunların varlığını.

Şimdi Pisagor'un irrasyonel sayıların varlığını —kendisine rağmen— nasıl bulunduğunu görelim. Kenar uzunluğu a olan bir kare alalım. Bu karenin köşegeninin uzunluğu d olsun. Pisagor teoremini kullanarak köşegenin uzunluğunun karesini kenar uzunluğu cinsinden,

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \qquad (1)$$

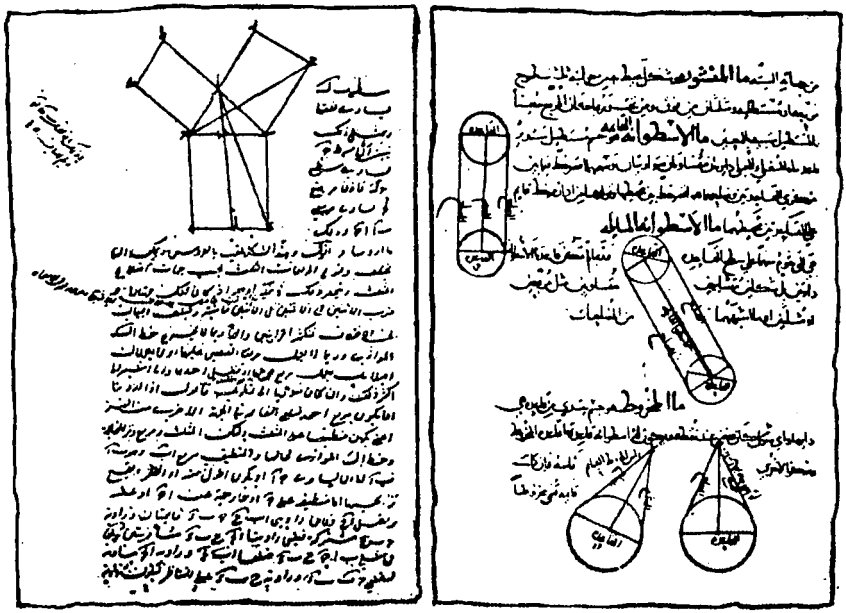
olarak yazabiliriz. Şu halde $(d/a)^2 = 2$'dir. Şimdi göstereceğiz ki, d ve a sayılarının ikisi birden tamsayı olamaz. Kanıtlamamızda olmayana ergi yöntemini kullanacağız. Bir an için hem d nin, hem de a nın tamsayı olduğunu varsayalım. Burada d ve a nın aralarında asal olduğunu (ortak çarpanları olmadığını) varsayabiliriz. Çünkü başlangıçta d ile a nın ortak çarpanları olsa bile, d/a kesrini sadeleştirerek ortak çarpanları götürtebiliriz. d ile a aralarında asal olduklarına göre ikisi birden çift sayı olamazlar (neden?). (1) denkleminde d^2, 2 kere a^2 olduğuna göre d^2 çifttir. Şu halde d de çifttir (neden?). Öyleyse q bir tamsayı olmak üzere $d = 2q$ yazabiliriz. Bu ifadeyi (1)'de yerine koyarsak $a^2 = 2q^2$ buluruz. Şu halde a nın da çift olması gerekir! Bizi bu çelişkiye götüren varsayım d/a nın iki tamsayının oranı olduğu (yani d/a nın rasyonel olduğu) varsayımıydı. Öyleyse d/a, yani 2'nin karekökü, irrasyonel bir sayıdır.

Bilim Zincirinde Bir Halka: ORTAÇAĞ ARAPLARI

Geçen bölümde Yunan matematiğinin durağan yapısına karşın, tüccar bir toplum olan Hinduların geliştirdiği matematiğin "kullanışlı" yanının ağır bastığından söz ederek, bu matematiğin daha sonra Araplar aracılığı ile batıya tanıtıldığını belirtmiştim.

Araplar yalnızca Hint matematiğinin değil, Eski Yunan bilim ve felsefesinin de Hıristiyan dünyasına tanıtılmasında rol oynamışlardır. Bilim tarihini bir bayrak yarışına benzetirsek, Araplar bu yarışta bayrağı, Hindulardan ve Yunanlılardan teslim alıp, yaklaşık 400 yıl taşımış ve sonra batıya teslim etmişlerdir.

Sekizinci yüzyılın başlarında, yani İslâm dininin doğuşundan yaklaşık 100 yıl sonra, Araplar doğuda Hazar Denizi ve İran'dan, batıda İspanya'ya kadar, doğu ve güneydoğu Anadolu, Arap yarımadası ve tüm kuzey Afrika'yı kaplayan geniş bir alanı ellerinde tutuyorlardı. Hindular gibi, Araplar da ticaretin ağır bastığı bir ekonomik yapı içindeydiler. Araplar, karada olsun, denizde olsun Baltık denizinden Seylan'a, Çin'e kadar her yere gidiyor, mal getirip, mal götürüyorlardı.



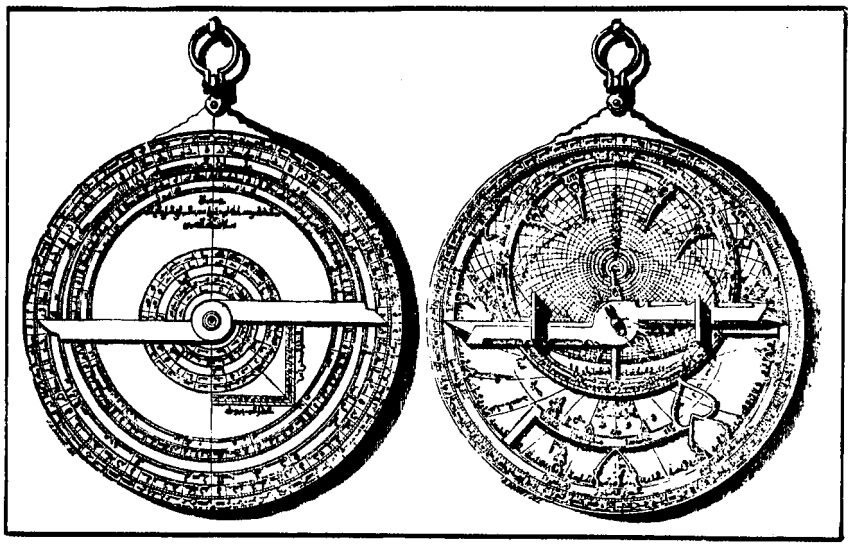
Solda Tabit Bin Karra'nın Öklid çevirisinden, sağda el-Beyruni'nin astronomi ile ilgili bir kitabından sayfalar.

İşte Harun Reşid'in oğlu Memun, Bağdat'ta 813 yılında Abbasi halifesi olduğunda, Arap dünyasının görüntüsü böyleydi. Böylesine bir toplumun matematiğe, astronomiye ve coğrafyaya olan gereksinmesi tartışma götürmez. Araplar bu gereksinmeyi karşılamak için eski Yunan kaynaklarına yöneldiler. Bu yönelişin en somut örneği Memun'un Bağdat'ta kurduğu Beyt el Hikme (bilim evi) adlı çeviri akademisidir. Akademinin başına Huneyn Bin İshak getirilmiştir. Kendisi Nesturi mezhebinden bir Hıristiyan olan Bin İshak'ın emrinde birçok Hıristiyan, Müslüman ve Yahudi çevirmen çalışıyordu. Bu çevirmenler, felsefeden matematiğe, tıptan botaniğe kadar Yunan bilgi hazinesinin belli başlı bütün eserlerini Arapçaya çevirdiler.

Doğal olarak, Araplar yalnızca çeviri yapmakla yetinmediler. Yunan ve Hindu kaynaklarını yorumlayıp biçimlendirerek, kendi bilim dizgelerini de oluşturdular.

Örneğin cebir Arapların elinde bu devirde gelişti. Harzemli Muham-

med Bin Musa'nın (780 - 850) bu devirde Bağdat'ta iki kitap yazdığını görüyoruz: Birinci kitabın adı "ilm el-Cebr ve el-Mukabele" [(terimlerin) yerini değiştirme ve (terimleri) yoketme bilimi]. Bu kitapla "cebir" ya da batılıların deyimiyle "algebra" sözcüğü doğmuş oluyor. Kitap, birinci ve ikinci



Ortaçağda kullanılan usturlab'ın önden ve arkadan görünüşü.

derece denklemlerin çözümleri, basit geometri kuralları ve paranın belirli oranlarda bölüştürülmesini öğreten miras problemlerini içeriyor. İkinci kitap ise Hindu-Arap sayıları (yani bildiğimiz onlu sayma düzeni) üzerine. Bu kitabın Arapça aslı kayıp. Latince çevirisinin başlığı şöyle: "Algoritmi de Numero İndorum" (Harzemli'nin Hint Sayıları ile Hesaplama Sanatı). Bu kitapla da, demek ki, Harzemli'nin adından "algoritma" sözcüğü doğmuş oluyor. Memun'un Suriye'de özel bir gözlemevi de yaptırdığı biliniyor. Zamanla, burada Arap astronomları dünya üzerinde 1 derecelik yayın uzunluğunu hesabettiler. Böylece enlem ve boylam kavramları ortaya çıktı. Harzemli'nin Hint kaynaklarına dayanarak astronomi cetvelleri de derlediği biliniyor. Ancak, Arap astronomisine en büyük katkıyı yapan kişi el-Beyruni'dir (973 - 1048). Çok geniş kültürü olan Beyruni, Türkçe, Farsça, Sanskritçe. İbranice, Süryanice ve Arapça biliyordu. Astronomi, Matematik,

Fizik ve Tıp alanında çalışan Beyruni bir süre Hindistan'da yaşadı ve Hint bilim ve kültürünü inceledi. Daha sonra Gazne'ye yerleşen ve orada ölen Beyruni birçok kitap yazdı. Enlem ve boylamların hassas bir biçimde saptanması için yöntem geliştiren, dünyanın kendi etrafında döndüğünü —Galile'den 600 yıl önce— ilk öne süren odur. Beyruni'nin, ayrıca 18 kıymetli taşın ve mineralin özgül ağırlığını da hassas olarak saptadığını biliyoruz.

Ortaçağ Araplarının bilim dünyasına katkılarını ayrıntıları ile incelemek bu kısa yazının boyutlarını çok aşar. Ancak, gene de fizik ve matematikte eriştikleri düzeyden söz etmemek olmaz.



Arap astronomları (1513'te yayınlanan bir Venedik kitabından).

Bu kişilerin fizikte ve mekanikte ne kadar ileri olduklarını anlamak için zamanın modası olan "hiyal" (harika düzenler) konusuna bir göz atmak yeterlidir.

Hiyal, özellikle suyu itici güç olarak kullanan "kendi kendine" hareket eden mekanik oyuncaklar, saatlerdir.

Araplar bu oyuncakları ve saatleri yalnızca yapmakla kalmamışlar, bunları anlatan kitaplar da yazmışlardır. Örneğin bunlardan birinde Rıdvan, babası Muhammed Bin Ali'nin 13. yüzyılın başlarında yaptığı bir su saatini anlatır. Saat Şam'ın kapılarından birine yerleştirilmişti ve gerçek bir harika olarak nitelendiriliyordu.

Öteki eserler arasında el-Cezari'nin, Kitab el-Hiyal'i ile Benu Musa'nın (Musaoğulları), Kitab el-Hiyal'i[4] sayılabilir.

Ortaçağ Arap fiziği yalnızca hiyal'le uğraşmadı doğal ki, bu yazıyı çağın en büyük fizikçilerinden birinden, el-Hassan Bin el-Haytâm'dan söz ederek bitirmek istiyorum. Haytam 965'te Basra'da doğdu, 1038'de Kahire'de öldü. Optik konusunda uzman olan Haytam "Kitab el-Manazir" (Optik Kitabı) adlı yapıtı ile ünlüdür. 1270 yılında "Opticae Thesaurus Alhazeni" adıyla Latinceye çevrilen bu kitap, batıdaki bilimsel düşünceyi en az 600 yıl etkiledi. Etkiledi çünkü, kitap o zamana kadar batının bilmediği gözün yapısı, görsel yanılmalar, serap olayı, perspektif, atmosferde ışığın kırılması, kuyruklu yıldızlar ve belki de en önemlisi, kendi icadı olan fotoğraf makinasının atası karanlık kutudan söz ediyordu.

Bin Haytam'ın en önemli katkısı gözün nasıl gördüğünü doğru olarak açıklamasıdır. Haytam'a kadar geçerli olan, Öklid ve Batlamyos'un ortaya attıkları ve görme olayının gözün görülecek nesneye yolladığı ışınlarla gerçekleştiğini öne süren kuramdı. Haytam bu kuramı reddederek, olayın bunun tam tersi olduğunu ve gözün, nesnenin yolladığı ışınları algılayarak gördüğünü ortaya attı.

İlginçtir, Bin Haytam bütün bu katkılarını aklı başında olduğunun bilinmesinin tehlikeli olmadığı zamanlar yapabiliyordu.

Göze girip rahat yaşamayı amaçlamış olsa gerek, Bin Haytam, eğer kendisine destek sağlanırsa, Nil taşkınlarını denetleyebilecek bir makina yapabileceğini iddia etmişti. Beklediği de oldu. Mısır Fatımi halifesi el-Hakim kendisine destek sağladı. Ancak beklemediği birşey daha oldu: Halife makinanın derhal yapılmasını istiyordu. Yoksa, kendisini işkenceyle öldürtecekti. El-Hakim'in şaka yapmadığını anlayan Haytam çareyi deli taklidi yapmakta buldu ve Hakim 1021 yılında ölünceye kadar bu oyunu sürdürdü.

MATEMATİK EĞLENDİRİR

Dünya yuvarlaktır: Yerküre üzerinde öyle bir nokta bulun ki, bir gez-

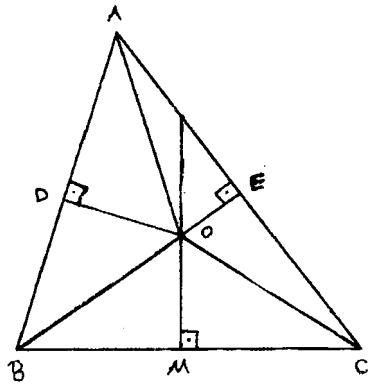
4 Bu ikincisi ile ilgili olarak Doç.Dr. Atilla Bir'in "**Benu Musa'nın Otomatik Kontrol Düzenleri**" adlı yazısını salık veririm. Yazıda anlatılan düzenlerden biri şöyle sunuluyor: "Hamamlarda ya da sebillerde kullanılabilen bir düzen. Kaptan çekilen su bir yaratık tarafından tekrar doldurulmaktadır. İstenirse kap yerine havuz, su yerine şarap kullanılabilir".

gin bu noktadan başlayarak 1000 km güneye gitsin, vardığı noktadan 1000 km doğuya gitsin, gene vardığı noktadan 1000 km kuzeye gitsin ve geriye başlangıç noktasına gelsin.

Yanıt: Kuzey kutbu.

Şimdi siz, istenen özelliği sağlayan başka bir nokta bulun.

Dünyayı kavramak: Dünyamızın ekvatordaki çevresinin 40.000 km olduğunu hep biliyoruz. Şu halde tam 40.000 km uzunluğunda bir ipi ekvatorun etrafına dolarsak ip dünyamızı sıkı sıkıya saracaktır. Bu ipi, çepeçevre, yerden 1 m yüksekten geçecek şekilde gevşetebilmek için ne kadar uzatmak gerekir acaba?



Her üçgen ikizkenar mıdır? Şekildeki ABC üçgeninin A açısının ortayı ile BC kenarının orta dikmesinin kesiştiği noktaya O diyelim. O dan AB ve AC kenarlarına OD ve OE dikmelerini inelim. Ayrıca O yu B ve C köşelerine birleştirelim. Şimdi $|AB| = |AC|$ olduğunu ispat edeceğiz!

(a) ADO üçgeni AEO üçgenine eştir (AO kenarı ortak, D ve E açıları dik, A köşesindeki açılar eş). Şu halde $|AD| = |AE|$ ve $|OD| = |OE|$.

(b) OBD üçgeni de OCE üçgenine eştir (O noktası BC nin orta dikmesi üzerinde olduğundan $|OB| = |OC|$, $|OD| = |OE|$ olduğu daha önce gösterilmişti, D ve E açıları da dik). Öyleyse $|DB| = |EC|$.

Demek ki $|AD| + |DB| = |AE| + |EC|$ yani $|AB| = |AC|$! Yanlış nerede?

YANITLAR

Dünya yuvarlaktır: Yerküre üzerinde belli bir noktadan güneye (kuzeye) yürümek, o noktadan geçen meridyen dairesi üzerinde güney (kuzey) kutbuna doğru yürümek; doğuya (batıya) yürümek ise, o noktadan geçen paralel dairesi üzerinde güneşin doğduğu (battığı) yöne doğru yürümek demektir. Şimdi güney kutbu yakınında çevresi 1000 km olan paralel dairesini alalım (bu dairenin 88 derece 34 dakika 3 saniye güney enlemi olduğu kolayca hesaplanabilir). Bu daire üzerindeki herhangi bir A noktasından 1000 km kuzeye çıkalım. Varacağımız nokta sorunun yanıtıdır. Gerçekten bu noktadan 1000 km güneye yürüyen gezgin A noktasına ulaşacaktır. A noktasından da 1000 km doğuya yürüdüğünde paralel dairesinin tümü üzerinde yürümüş olacağından gene A noktasına gelecektir. Buradan da 1000 km kuzeye yürüyerek geziye başladığı noktaya ulaşacaktır.

Biraz düşününce yukardaki çözümün tek çözüm olmadığı, n bir doğal sayı olmak üzere, güney kutbu yakınında çevresi 1000/n km olan tüm paralel dairelerinin 1000 km kuzeyindeki noktaların istenen özelliği sağladığı kolayca bulunabilir.

Dünyayı kavramak: Dairenin çevresi yarıçapının 2π katı olduğuna göre, yarıçaptaki 1 m'lik artış —yarıçap ne olursa olsun— çevrede 2π metrelik bir artışa yol açacaktır. Şu halde yanıt 2π metredir. İpin çepeçevre 1 m bollaşması için uzunluğunun yalnızca 6,28 m kadar artırılmasının yeterli olacağı insanı şaşırtmıyor mu?

Her üçgen ikizkenar mıdır? Elbette hayır. İkizkenar olmayan hiçbir üçgende tepeye ait açıortay ile taban orta dikmesi üçgenin içinde kesişmez. Dolayısıyla ADO, AEO ve OBC üçgenlerinin ABC üçgenine göre konumları şekildeki gibi değildir. Bu nedenle sorudaki kanıtlama(!), yanlış bir şekil aracılığı ile yapılmış bir aldatmacadan başka birşey değildir.

Not: Bu bölümdeki üç şekli Rom Landau'nun "**The Arab Heritage and Western Civilization**" adlı kitabından aldığımı belirtmek isterim.

LEONARDO FIBONACCI

Pisa'lı Leonardo ya da Leonardo Fibonacci Rönesans öncesi Avrupasının en önde gelen matematikçisidir. Fibonacci için, matematiği Araplardan alıp, Avrupa'ya aktaran kişi denebilir.

Leonardo'nun yaşamı hakkında matematik yazıları dışında pek az şey biliniyor. İlk ve en iyi bilinen kitabı Liber Abaci'nin[5] yazıldığı 1202 tarihine bakılırsa, 1170 dolayında doğmuş olabileceği sanılıyor. Bu yönde pek kanıt olmamakla birlikte İtalya'nın Pisa kentinde doğmuş olması olası. Leonardo henüz çocuk yaştayken, Pisalı bir tüccar olan babası Guglielmo, Pisalı tüccarların yaşadığı Bugia adlı Kuzey Afrika limanına Konsül olarak atanır (bu limanın şimdiki adı Bejaiya'dır ve Cezayir'dedir). Babası burada oğluna hesap öğretmesi için bir Arap hoca tutar. Leonardo daha sonra Liber Abaci'

5 **Liber Abaci,** "çörkü (= abaküs) kitabı" anlamına geliyor. Bilindiği gibi Arap rakamlarının Avrupa'ya girmesinden önce, Avrupa'da Roma rakamları kullanılıyordu. Bu rakamlarla dört işlem yapmak, hemen hemen olanaksız olduğu için hesap çörkülerle yapılırdı. Bu nedenle de **abacus** sözcüğü adeta hesap sözcüğü ile özdeşleşmişti. Avrupa' ya yepyeni bir hesap yöntemi getiren ve bir bakıma çörküyü ortadan kaldıran bu kitaba bu adın verilmesi ilginçtir.

de hocasından "Dokuz Hint rakamının sanatını" öğrenirken duyduğu mutluluğu anlatacaktır.

Fibonacci'nin Liber Abaci'sinin yayınlandığı yıllarda, Hindu - Arap sayıları, Avrupa'da Harzemli Muhammed Bin Musa'nın[6] eserlerinin çevirilerini okuyabilmiş birkaç "aydın" dışında bilinmiyordu. Leonardo kitabında bu rakamları anlatmaya şöyle başlar: "Dokuz Hint rakamı 9 8 7 6 5 4 3 2 1 dir. Bu dokuz rakama 0 işaretinin de eklenmesiyle, aşağıda anlatılacağı gibi herhangi bir sayı yazılabilir." Kitabın ilk 7 bölümü bildiğimiz 10'lu sayı düzenini ve bu sayılarla dört işlemi anlatır. Daha sonra bu düzen, kâr hadleri, takas, para değiştirme, ağırlık ve hacim ölçülerinin birbirine çevrilmesi, ortaklar arasında bölüşme ve faiz gibi pratik ticaret problemlerine uygulanır.

Liber Abaci 13. yüzyıl Avrupasında büyük ilgi görür, çok sayıda kopya edilir ve Kilisenin yasaklamasına karşın Arap sayıları İtalyan tüccarlar arasında yayılır. Kitap Kutsal Roma İmparatoru 2. Frederick'in dikkatini çeker. Frederick bilime düşkün bir imparatordur[7]. Bilim adamlarını korur. Bu nedenle kendisine Stupor Mundi (Dünya Harikası) denilmektedir. 1220 yılında Fibonacci huzura çağrılır. Frederick'in bilim adamlarından biri tarafından sınava çekilir. Sonunda Fibonacci göze girer. Yıllarca hem imparatorla hem de imparatorun dostlarıyla yazışır. 1225 yılında yazdığı liber Quadratorum'u (Kare Sayıların Kitabı) imparatora ithaf eder. İkinci dereceden "Diyofantus denklemleri"ne[8] ayrılan bu kitap Fibonacci'nin başyapıtıdır. Her ne kadar Liber Abaci'ye oranla çok daha dar bir çevrenin ilgisini çekerse de kitap sayılar kuramına büyük katkı getirir.

1228'de Fibonacci Liber Abaci'yi yeniden gözden geçirir ve kitabın bu ikinci yazılımını İmparatorun başbilimcisi Michael Scott'a ithaf eder. Bu tarihten 1240 yılına kadar Fibonacci hakkında hiçbir şey bilinmiyor. 1240'da Pisa kenti kendisine kente yaptığı hizmetlerden dolayı 20 Pisa lirası "yıllık" bağlar. Bundan sonra matematikçimiz ne kadar yaşadı, o da bilinmiyor.

Yukarda da değindiğim gibi Leonardo Fibonacci Arap matematiğini,

6 Harzemli ile ilgili kısa bilgi için "Ortaçağ Arapları" bölümüne bakınız.

7 Adının "Kutsal Roma İmparatoru" olmasına bakmayın siz, Frederick Kilisey'le arası bozuk bir dinsizdi.

8 Diyofantus denklemleri: Çözümleri tamsayı olan bir ya da daha çok bilinmeyen ihtiva eden denklemler. Örneğin $x^2 + y^2 = z^2$ denklemi x, y, z tamsayı olmak koşuluyla, ikinci dereceden bir Diyofontus denklemidir.

kullanışlı Hindu-Arap sayılarını batıya tanıtmakla çok büyük bir katkıda bulundu. Ancak ilginçtir, çağımız matematikçileri Fibonacci'nin adını, daha çok, Liber Abaci'de yer alan bir problemde ortaya çıkan bir sayı dizisi nedeniyle bilirler. Dolayısıyla Fibonacci'yi anlatan bir yazıda Fibonacci sayılarından ya da "Fibonacci dizisi"nden söz etmemek olmaz. Bu nedenle biz de bu bölümün geri kalan kesimini bu diziye ayıracağız.

FİBONACCİ DİZİSİ

Liber Abaci'de yer alan problemin metni aşağı yukarı şöyle: "Adamın biri, dört bir yanı duvarla çevrili bir yere bir çift tavşan koymuş. Her çift tavşanın bir ay içinde yeni bir çift tavşan peydahladığı, her yeni çiftin de 'büluğa' ermesi için bir ay gerektiği ve tavşanların ölmediği varsayılırsa, bir yıl sonunda dört duvarın arasında kaç çift tavşan olur?"

Knuth dostumuza göre[9] Fibonacci bu problemi kitabına biyoloji biliminde bir uygulama olsun diye ya da nüfus patlaması sorununa bir çözüm getirsin diye koymamış (ben de aynı kanıdayım). Toplama alıştırması olarak düşünmüş bunu, besbelli. Her neyse, biraz düşününce tavşan çiftlerinin aylara göre şöyle çoğalacağı ortaya çıkıyor: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... Yani her ay sonundaki tavşan çifti sayısı o aydan hemen önceki iki aydaki sayıların toplamına eşit. Örneğin, 9. ay sonunda

$$13 + 21 = 34 \qquad (1)$$

tavşan çifti oluşacak. Bu kuralı biraz cebir kullanarak şöyle yazabiliriz:

$$u_n + u_{n+1} = u_{n+2} \qquad (2)$$

Yukardaki denklemde u_n, n'inci ay sonundaki tavşan çifti sayısını gösteriyor. Görüldüğü gibi (1) denklemi (2) denkleminin $n = 7$ için özel hali, ayrıca $u_1 = u_2 = 1$ alıyoruz.

Bu diziye "Fibonacci dizisi" adı veriliyor. Dizide yer alan sayıların sağladığı o kadar çok özellik var ki, bugün biri çıkıp da, "Fibonacci dizisi şu şu özelliği de sağlar" dediği zaman, "Ne olmuş yani?" yanıtını alıyor genellik-

9 D.E.Knuth, "Fundamental Algorithms" 1. Cilt Addison Wesley, 1975.

le. Fibonacci dizisi hakkında o kadar çok şey söylenebiliyor ki, "Fibonacci Quarterly" adlı üç aylık bir dergi bile çıkabiliyor yıllardır.

Şimdi bu dizinin sağladığı özelliklerden bazılarını görelim[10]

1. İlk n terimin toplamı n + 2 nci terimden 1 eksiktir:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_{n+2} - 1 \tag{3}$$

Örneğin n = 6 için

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 = 21 - 1$$

2. n inci sayının karesi ile (n − 1) inci sayının karesinin toplamı (2n − 1) inci terime eşittir.

$$u_{n-1}^2 + u_n^2 = u_{2n-1} \tag{4}$$

Örneğin n = 5 için,

$$3^2 + 5^2 = 34$$

3. n inci terimle (n + 1) inci terimi çarpıp bundan (n − 1) inci terimle (n − 2) inci terimin çarpımını çıkarırsak (2n − 1) inci terimi buluruz.

$$u_n u_{n+1} - u_{n-1} u_{n-2} = u_{2n-1} \tag{5}$$

Örneğin n = 5 için,

$$(5)(8) - (3)(2) = 34$$

4. (n + 1) inci terimin karesinden (n + 2) inci terimle n inci terimin çarpımını çıkarırsak; n çiftse +1, n tekse −1 buluruz:

$$u_{n+1}^2 - u_{n+2} u_n = (-1)^n \tag{6}$$

10 Özellikleri kanıtlarını vermeden sıralıyorum. İlgi duyan okurlar kanıtları bölümün sonundaki Ekler bölümünde bulabilirler.

Örneğin n = 6 için,

$13^2 - (21)(8) = +1$

ALTIN KESİM

Diziyle ilgili "keşiflerimizi" Fibonacci dizisinin ardışık iki sayısını birbirine bölerek oluşturacağımız bir listeyle sürdürelim:

n	u_{n+1}/u_n	n	u_{n+1}/u_n
1	1/1 = 1,0000	7	21/13 = 1,6154
2	2/1 = 2,0000	8	34/21 = 1,6190
3	3/2 = 1,5000	9	55/34 = 1,6176
4	5/3 = 1,6667	10	89/55 = 1,6182
5	8/5 = 1,6000	11	144/89 = 1,6180
6	13/8 = 1,6250	12	233/144 = 1,6181

Görüldüğü gibi n arttıkça u_{n+1}/u_n 1,618 dolayında bir sayıya yakınsıyor. Bu sayının tam kaç olduğunu bulmak için (6) denkleminde her iki tarafı $u_n u_{n+1}$ e bölelim. Böylece,

$$u_{n+1}/u_n - u_{n+2}/u_{n+1} = \frac{(-1)^n}{u_n u_{n+1}} \qquad (7)$$

elde ederiz. n büyüdükçe (7) denkleminin sağ tarafı sıfıra yaklaştığı için, büyük n ler için (7) ifadesi

$$u_{n+1}/u_n \cong u_{n+2}/u_{n+1} \qquad (8)$$

şekline girer. Öte yandan (2) denklemini, her iki tarafını u_{n+1} e bölerek

$$u_n/u_{n+1} + 1 = u_{n+2}/u_{n+1} \qquad (9)$$

biçiminde yazabiliriz. Madem ki u_{n+1}/u_n n büyüdükçe sabit bir sayıya gidiyor, bu sabit sayıya φ dersek[11], (9) denklemini yeterince büyük n ler için

$$1/\varphi + 1 = \varphi$$

ya da

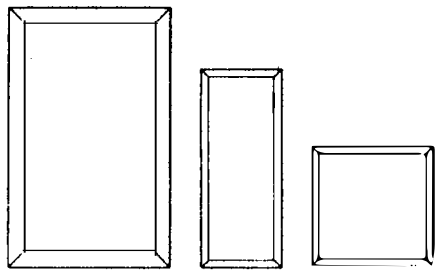
$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

şeklinde yazabiliriz. (5) denklemini çözersek

$$\varphi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1{,}61803... \qquad (10)$$

buluruz. Demek ki Fibonacci dizisinde ardışık iki sayının birbirine oranı $\varphi = 1{,}61803...$ sayısına gidiyor.

Bu sayı (ya da bu oran) Fibonacci'den en az 16 yüzyıl önce Yunanlılarca biliniyordu ve "altın kesim" diye adlandırılıyordu. Yunanlılara göre göze en hoş gelen orandı bu. Şekilde üç dikdörtgen görüyorsunuz. Bunların içinden resminizi çerçeveletmek için hangisini seçerdiniz? Soldakini "çok kare" ortadakini "çok ince" bulmaz mıydınız? Buna karşın sağdakinin yüksekliğinin genişliğine oranı ne kadar "uyumlu" değil mi? Evet, yanılmadınız; sağdaki çerçevenin boyunun enine oranı φ ye eşit.



Altın kesimin bu estetik özelliği eski Yunan'ın mimarlarını, ressamlarını, heykeltraşlarını baştan sona etkiledi. Günümüze ulaşan hemen hiçbir büyük yapı, tapınak ya da anıt yoktur ki, kapıları, pencereleri ya da duvarlarının boylarının enlerine oranı φ olmasın.

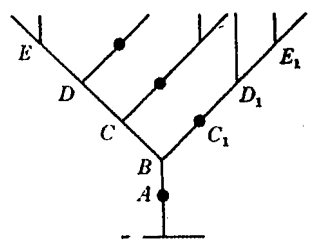
11 φ (fi) Yunan alfabesinin 21. harfi. Büyük Yunan heykeltraşı Fidyas'ın (M.Ö. 490 - 430) adı bu harfle başladığı için genellikle bu sabite φ adı veriliyor. Fidyas, Partenon tapınağının mermer heykellerini yapan sanatçı. Şimdi "φ sayısının sanatla ne ilgisi var" diyorsanız okumaya devam edin.

Daha sonraki yıllarda da Leonardo da Vinci'nin Christopher Wren'in[12] ve daha birçok mimar, ressam ve heykeltraşın, yapıtlarında altın kesim kullandıkları biliniyor.

Şimdi haklı olarak tavşanların çoğalmasını modellediğimiz dizide ortaya çıkan φ nin nasıl olup da "altın" sıfatını hak edecek denli uyumlu bir oran oluşturduğu, bu oranın neden —en azından bazılarının— gözüne hoş geldiği sorulabilir.

Kanımca bunun nedeni doğada gözlediğimiz birçok büyüme ve çoğalma sürecinin Fibonacci'nin tavşanlarınınkine benzer oluşu ve bu nedenle bu süreçlerin oluşturduğu birçok sayı, oran ve büyüklüğün φ ye yakın değerler almasıdır. İnsanoğlu, sanırım, φ sayısını, farkına varmadan doğadan algılaya algılaya, onu beğeni dizgesinin bir parçası yapmış.

Örneğin bir ağacın dal salması ve büyümesi de aynen Fibonacci tavşanlarının üremesine benzetilebilir. Her dal, çıkışından 1 yıl sonra ve ondan sonra her yıl yeni bir dal çıkarır: Şekilde ana dal ABCDE; B, C, D, E dallarını çıkarmış. B den başlayan dal $BC_1D_1E_1$ dalıdır ve o da ilk dalını D_1 noktasında çıkarmış, vb... 5. yılın sonunda (D düzeyinin hemen üstü) ağacın 5 dalı var ($u_5 = 5$), 6. yılın sonunda (E düzeyinin hemen üstü) ağacın 8 dalı var ($u_6 = 8$).



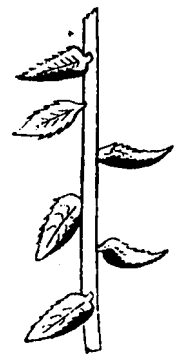
Fibonacci sayılarına, yaprakların dalda yerleşim biçimi olayında da (phyllotaxis) rastlıyoruz. Yanda bir kiraz sürgünü görüyorsunuz. Yapraklar aşağıdan yukarı doğru dalın etrafında dönerek çıkıyorlar. Her beş yaprakta bir (yani 1. yaprakla 6. yaprak) tam aynı yöne bakıyorlar. Şimdi, bu yaprakların diplerinden, aşağıdan yukarı doğru hiç yaprak atlamadan bir iplik geçirirsek iplik bir sarmaşık gibi ağaç dalını saracak (bir sarmal oluşturacak)

12 Christopher Wren (1632 - 1723) ünlü İngiliz mimar, astronom ve matematikçisi.

ve 1. yaprakla 6. yaprak arasında dalın etrafında 2 tur yapacaktır. Yaprakların yerleşim biçimini

$$f = \frac{\text{ipliğin tur sayısı}}{\text{bir dönemdeki yaprak sayısı}}$$

oranıyla gösterirsek, kiraz ağacı için bu oran görülüyor ki 2/5'tir. Oran meşede de aynıdır. Bazı durumlarda örneğin karaağaçta, yapraklar, ipliğin her yarım dönüşüne bir yaprak düşecek şekilde karşılıklı çıkar. Yani f = 1/2 dir. Bu oran kayında 1/3, armutta 3/8, söğütte 5/13 tür.

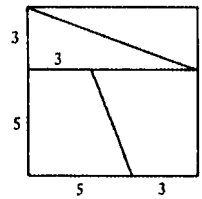


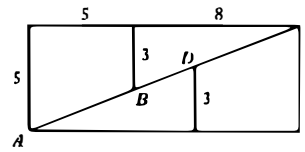
Görüldüğü gibi f oranının payındaki ve paydasındaki sayılar Fibonacci dizisinden birer atlayarak alınmış sayılardır. Yaprakların dönerek çıkmasını yaprakların birbirini örtmemesi, dolayısıyla güneşten eşit oranda yararlanılması biçiminde yorumlayabiliriz belki, ama neden ille Fibonacci dizisindeki sayılara uyarak dönüyorlar? Ben bilmiyorum. Öğrenemedim de.

MATEMATİK EĞLENDİRİR

Aşağıda yaygın olarak bilinen, ama Fibonacci dizisiyle yakın ilişkisi dolayısıyla bu bölümde yer vermekten kendimi alamadığım bir paradoks sunuyorum.

Parçalı satranç tahtası: Aşağıdaki sekize sekiz satranç tahtasını gösterildiği biçimde 4 parçaya ayıralım ve bu parçaları yeniden düzenleyip beşe





onüçlük bir dikdörtgen oluşturalım. Satranç tahtasının alanı (8)(8) = 64 idi. Yeni dikdörtgenin alanı ise (5)(13) = 65 tir. 1 birim karelik alanı nereden kazandık?

Bu paradoksun (6) denklemiyle yakın ilişkisi olduğunu belirtmeliyim.

Konuya ilişkin bir soru daha: Bu paradoksun yaratılabilmesi için karenin sekize sekiz olması şart mıdır? Değilse başka hangi büyüklükteki karelerle de bu soru sorulabilir?

EKLER

Yukarda Fibonacci dizisinin (3), (4), (5) ve (6) eşitlikleri ile verilen özellikleri sağladığını söylemiştik. Şimdi bu iddiamızı kanıtlayacağız. Kanıtlama yöntemimiz "matematiksel tümevarım" adı verilen yöntem olacak. Önce yöntemi kısaca tanıtalım: P(n), n doğal sayısına bağlı bir önerme olsun. Örneğin "n bir doğal sayı olmak üzere 2n şeklinde ifade edilebilen bütün sayılar çifttir" önermesi n ye bağlı bir önermedir. Gene örneğin "n bir doğal sayı olmak üzere 24/n şeklinde ifade edilebilen sayı tamsayıdır" önermesi de n ye bağlı bir önermedir. Bu tür n ye bağlı önermeler kimi kez bütün n değerleri için doğru ya da yanlış olabildikleri gibi kimi kez de bazı n değerleri için doğru, öteki n değerleri için de yanlış olabilirler. Birinci önerme bütün n değerleri için doğrudur. Önermede "çifttir" yüklemini, "tektir" yüklemiyle değiştirirsek, önerme bütün n değerleri için yanlış olur. Öte yandan ikinci önerme yalnızca n nin 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 değerleri için doğru, öteki n değerleri için yanlıştır.

Şimdi yineleyelim: P(n), n doğal sayısına bağlı bir önerme olsun. P(n) nin bütün n değerleri için doğru olduğunu göstermek isteyelim. Bunu kanıtlamanın güçlü bir yolu "matematiksel tümevarım" adı verilen yöntemdir:

1. P(1) in doğru olduğunu kanıtla.
2. Herhangi bir n için P(1), P(2), ..., P(n) önermelerinin doğru olduğunu varsayarak P(n + 1) önermesinin doğru olduğunu kanıtla.

Bu şekilde bütün n ler için P(n) nin doğru olduğunu göstermiş oluruz. Çünkü kanıtlama genel bir n için yapıldığı için, P(1) doğru olduğuna göre P(2) de doğrudur. Şu halde P(3) de doğrudur. Öyleyse P(4) de doğrudur vb...

Şimdi (3) eşitliği ile verilen özelliği kanıtlayalım:

P(n): "Fibonacci dizisinde ilk n terimin toplamı (n + 2) nci terimden 1 eksiktir" önermesidir.

P(1) önermesinin, "Fibonacci dizisinde ilk terim, üçüncü terimden 1 eksiktir" şekline girdiğine dikkat edelim.

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = 2, \quad u_4 = 3$$

olduğuna göre, gerçekten $u_1 = u_3 - 1$ dir. Böylece P(1) in doğru olduğunu gösterdik. Şimdi herhangi bir $n \geqslant 1$ için P(1), P(2), ..., P(n) in doğru olduğunu varsayalım:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_3 - 1 \\ u_1 + u_2 &= u_4 - 1 \\ u_1 + u_2 + \ldots + u_n &= u_{n+2} - 1 \end{aligned} \tag{11}$$

Bu varsayımdan kalkarak P(n + 1) in, yani,

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} = u_{n+3} - 1 \tag{12}$$

eşitliğinin doğru olduğunu göstereceğiz.

Bu özel durumda (11) deki eşitliklerin yalnızca sonuncusunu kullanmak yeterli. Bu eşitliğin her iki tarafına u_{n+1} i eklersek

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} = u_{n+1} + u_{n+2} - 1 \tag{13}$$

buluruz. Fakat (2) eşitliğinden

$$u_{n+1} + u_{n+2} = u_{n+3}$$

olduğu kolayca görülür. Şu halde (12) doğrudur.

Şimdi matematiksel tümevarım yöntemiyle (6) eşitliğini kanıtlayalım:

$n = 1$ için (6) eşitliği

$$u_2^2 - u_3 u_1 = -1 \tag{14}$$

şekline girer. $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_3 = 2$ olduğu hatırlanırsa, (14) ün doğru olduğu anlaşılır. Şu halde P(1) doğrudur. Şimdi herhangi bir n için P(1), P(2), ..., P(n) nin doğru olduğunu varsayalım ve P(n + 1) in doğru olduğunu gösterelim. P(n) nin doğru olduğu varsayıldığına göre

$$u_{n+1}^2 - u_{n+2} u_n = (-1)^n \tag{6}$$

yazabiliriz. (2) eşitliğinden

$$u_{n+1} + u_{n+2} = u_{n+3} \tag{15}$$

$$u_n + u_{n+1} = u_{n+2} \tag{16}$$

elde edilebileceğine göre

$$u_{n+2} = u_{n+3} - u_{n+1} \tag{17}$$

$$u_n = u_{n+2} - u_{n+1} \tag{18}$$

bulunur. Bunları (6) da yerine koyarsak

$$u_{n+1}^2 - (u_{n+3} - u_{n+1})(u_{n+2} - u_{n+1}) = (-1)^n \tag{19}$$

buluruz. Sadeleştirirsek

$$u_{n+3} u_{n+1} + u_{n+1} u_{n+2} - u_{n+3} u_{n+2} = (-1)^n \tag{20}$$

elde ederiz. (20) de (15) i kullanırsak

$$u_{n+3} u_{n+1} + u_{n+1} u_{n+2} - (u_{n+1} + u_{n+2}) u_{n+2} = (-1)^n \tag{21}$$

ya da

$$u_{n+3} u_{n+1} - u_{n+2}^2 = (-1)^n \tag{22}$$

bulunur. Şimdi (22) eşitliğinin her iki tarafı -1 ile çarpılırsa

$$u_{n+2}^2 - u_{n+3}\,u_{n+1} = (-1)^{n+1}$$

elde edilir. Bu da P(n + 1) den başka birşey değildir.

Şimdi sıra (4) eşitliğini kanıtlamaya geldi. Ancak biz burada (4) eşitliği yerine ondan çok daha genel

$$u_{n+m-1} = u_m u_n + u_{m-1}\,u_{n-1} \tag{23}$$

eşitliğini kanıtlayacağız. Görüldüğü gibi (4), (23) ün m = n için özel halidir.

(23) ü kanıtlamak için (2) eşitliğini yazalım:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$
$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$$

Şu halde

$$u_{n+2} = 2u_n + u_{n-1} \tag{24}$$

yazabiliriz.

Öte yandan

$$u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1}$$

olduğuna göre (24) ü kullanarak

$$u_{n+3} = 3u_n + 2u_{n-1} \tag{25}$$

yazabiliriz. Şimdi u_n nin katsayısı 3 ün u_4, u_{n-1} ın katsayısı 2 nin de u_3 olduğunu hatırlarsak acaba (25) i genelleştirip

$$u_{n+m-1} = u_m u_n + u_{m-1}\,u_{n-1} \tag{26}$$

yazabilir miyiz? (25) in m = 4 için (26) nın özel hali olduğu dikkatli okuyucunun gözünden kaçmayacaktır. (25), matematiksel tümevarım için gerekli

tabanı oluşturmaktadır. Şimdi (26) nın doğru olduğunu varsayıp (26) nın $m + 1$ için de doğru olduğunu göstermemiz gerekiyor. (2) den

$$u_{n+m} = u_{n+m-1} + u_{n+m-2}$$

yazılabilir. Burada (26) yı kullanalım:

$$u_{n+m} = u_m u_n + u_{m-1} u_{n-1} + u_{m-1} u_n + u_{m-2} u_{n-1}$$

ya da

$$u_{n+m} = (u_m + u_{m-1}) u_n + (u_{m-1} + u_{m-2}) u_{n-2}$$

şu halde

$$u_{n+m} = u_{m+1} u_n + u_m u_{n-2} \tag{27}$$

(27) eşitliği (26) da m yerine $m + 1$ konduğu zaman elde edilen eşitliktir. Göstermemiz gereken de buydu.

Yukarda da değindiğimiz gibi (26) yı kanıtlamakla (4) ü de kanıtlamış olduk.

Şimdi son olarak (5) i gösterelim. Bu amaçla (2) yi yeniden yazalım:

$$u_{n-1} + u_{n-2} = u_n$$

Burada her iki tarafı u_{n-1} le çarpalım:

$$u_{n-1} (u_{n-1} + u_{n-2}) = u_{n-1} u_n \tag{28}$$

(28) de sağ tarafta

$$u_{n-1} = u_{n+1} - u_n$$

koyalım ve (28) i yeniden düzenleyelim:

$$u_n^2 u_{n-1}^2 = u_n u_{n+1} - u_{n-1} u_{n-2} \tag{29}$$

(29) un sol tarafının u_{2n-1} olduğunu göstermiştik. Şu halde böylece (5) i de göstermiş olduk.

YANITLAR

Parçalı satranç tahtası: A, B, D ve C noktaları, alanı 1 birim kare olan ince bir paralelkenarın köşeleridir. Eğer bu noktalar şekilde gösterildiği gibi bir doğru üstünde olsalardı, dikdörtgenin üst yarısındaki iki dik üçgen benzer olacaklarından $5/13 = 3/8$ yazabilmek gerekirdi ki bu ise $39 = 40$ demek olurdu!

Dolayısıyla parçalar yeniden düzenlenip dikdörtgen oluşturulduğunda, ortada 1 birim kare alanında paralelkenar biçiminde bir yarık kalır ki "kazanılan" alan budur.

Karenin kenar uzunluğunu Fibonacci dizisinin $(n + 1)$ inci sayısı $(n \geqslant 2)$ olacak şekilde seçersek bu soruyu başka sayılarla da sorabiliriz. Bu durumda dikdörtgenin kısa kenarının uzunluğu dizinin n inci sayısı, uzun kenarının uzunluğu da $(n + 2)$ nci sayısı olacaktır.

Son olarak belirtelim ki kareden dikdörtgene geçtiğimizde 1 birim karelik alanı n çiftse "kazanırız"; n nin tek olduğu durumlarda parçalar ortada boşluk oluşturacak yerde üst üste binerler. Bu durumda 1 birim karelik alanı "yitiririz".

Pİ'NİN ÖYKÜSÜ

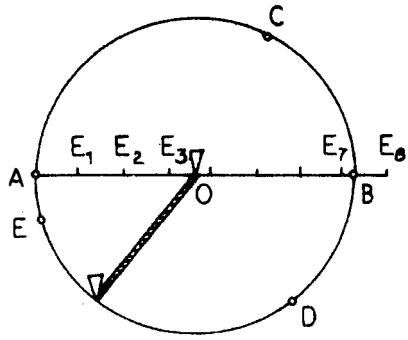
İnsanoğlu "daire" dediğimiz kendine özgü düzgün yuvarlak şeklin farkına tekerleğin icadından çok önce varmıştı. Bu şekli diğer insanların, hayvanların göz bebeklerinde, gölyüzünde güneşte, ayda görüyordu. Etrafındaki bitkilerden, çiçeklerden de daire ya da daireye yakın şekiller algılıyordu. Derken birgün elindeki çomakla kuma bir daire çizdi. Sonra düşündü: Bazı daireler küçüktü, bazıları ise büyük. Dairenin bir ucundan öteki ucuna uzaklığı ne kadar büyürse çevresi de o kadar büyüyordu. Sonra gene düşündü. Cilalı taş devri insanı artık soyutlamasını yapmıştı: Dairenin çevresinin uzunluğu çapının uzunluğu ile orantılıydı. Yani çap 2 kat büyüyünce çevre de 2 kat, çap 3 kat büyüyünce çevre de 3 kat büyüyordu. Çapı 4 kat küçültünce çevre de 4 kat küçülüyordu. Başka bir deyişle çevrenin çapa oranı daireden daireye değişmiyor sabit kalıyordu.

13 π (pi) Yunan alfabesinin 16. harfi. İsviçreli büyük matematikçi Leonhard Euler'in de 1737 yılında yayınladığı bir kitabında benimseyip kullanmasıyla dairenin çevresinin çapına oranı artık hemen herkesçe bu harfle gösteriliyor.

Demek ki, bu sabit orana π dersek[13] çağdaş matematik diliyle;

$$\pi = \text{çevre/çap} = \text{sabit}$$

yazılabiliyordu.



Bu oranın sabitliğine karar kıldıktan sonra şimdi soru bu sabitin değerinin saptanmasıydı. Babil'de ve eski Mısır'da MÖ 2000 dolayında sırasıyla $\pi = 3\ 1/8$ ve $\pi = (16/9)^2$ değerleri kullanılıyordu.

Bu insanlar bu değerleri nasıl bulmuşlardı? Kesin birşey söylemek olanaksız ama bir tahmin yürütebiliriz: π sayısının değerini bulmak için en kolay yol bir daire alıp bunun çevresi ile çapını ölçmek ve ikisini birbirine bölmektir. Biz de öyle yapalım. Nil nehrinin kıyısında büyücek bir ıslak kumsal alanının ortasına bir yere bir kazık çakalım. Kazığa bir ip bağlayalım. İpin öbür ucuna sivri uçlu bir sopa tutturalım ve ipi gergin tutarak kuma bir daire çizelim.

Şimdi kazığı ve ipi çıkarıp atalım (kazığın deliği O yu bozmayalım). Başka bir ip bulalım. Bu ipi çember üzerinde alınan herhangi bir A noktasından dairenin bir ucundan öteki ucuna doğru O dan geçecek şekilde uzatalım. İpin A ya ve dairenin öteki ucu B ye karşı gelen noktalarını —bir kömür parçasıyla— işaretleyelim. İpin üzerindeki AB uzunluğu dairenin çapıdır ve bizim ölçü birimimizdir. A noktasını çemberimizin A noktasına çakıştırarak ipi, çemberin üzerine yayalım. Öteki kömür işaretine çember üzerinde karşı gelen noktaya C diyelim. İpi şimdi C ye taşıyalım. Kömür işaretinin altındaki noktaya D diyelim ve benzer şekilde E noktasını da bulalım. Çember üze-

rinde 3 çap boyu gittik ve E noktasına vardık. Çevre üzerinde gidecek "azıcık" daha uzunluğumuz kaldı. Şu halde çevrenin çapa oranı yani π nin değeri "üç küsur"dur. Küsuru atarsak $\pi = 3$ yazabiliriz.

Nitekim, Kutsal Kitap'ta, Eski Ahit'te I. Krallar Bap 7, Ayet 23'te ya da II. Tarihler, Bap 4, Ayet 2'de şu satırları okuyoruz:

"Ve dökme denizi bir kenardan o bir kenara on arşın olarak değirmi biçimde yaptı, ve yüksekliği beş arşındı; ve otuz arşınlık bir ip onun çevresini sarardı."

Görüldüğü gibi dökme deniz değirmi (yani daire biçiminde). Bir kenardan öbür kenara (yani çapı) 10 arşın geliyor. Çevresi de 30 arşın. Şu halde π nin Kutsal Kitaba göre değeri $30/10 = 3$. Kutsal Kitabın "Krallar Kitabı" bölümü yaklaşık MÖ 550'de eski Yahudiler tarafından derlenmişti. O tarihte π sayısı çok daha hassas bir biçimde biliniyordu, ama herhalde Yahudi derleyiciler bunu bilmiyordu. Burdan da din adamları ile matematikçilerin bu tarihlerde artık eskiden olduğu gibi aynı kişiler olmadığı sonucuna varabiliriz.

Biz Kutsal Kitabı bir kenara bırakıp Nil kıyısındaki dairemize dönelim ve "küsuratımız" EA nın uzunluğunu çapın bir kesiri olarak ölçelim: Önce EA uzunluğunu bir ip üzerine işaretleyelim. Bu uzunluğu ipi gererek AB çapının üzerine taşıyalım ve AE_1, E_1E_2, vb. EA ya eşit olacak şekilde çapı bölmeleyelim. Göreceğiz ki B noktası E_7 ile E_8 in arasına düşecektir. Şu halde EA uzunluğu çapın 1/7 si ile 1/8 i arasındadır.

Yani $3\frac{1}{8} < \pi < 3\frac{1}{7}$

Kumda çizilen daireyle, iplerle, kömürden işaretlerle bundan daha iyi yapamayacağımız bir gerçek. Ama gene de $\pi = 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$ yaklaşık değeri birçok uygulamada yeterince hassas sayılabilir. En azından benim ortaokulda, lisede okuduğum yıllarda matematik ya da fizik yazılısında "pi'yi yirmi iki bölü yedi alabilir miyiz hocam?" diye sormak modaydı. Hocalar da bu modaya uyarlar ve problemde dairenin çapını ya 7 ya da 7 nin katı bir sayı olarak verirlerdi ki çarpma kolay olsun.

Şimdi bir de π nin aşağıdaki değerine bakalım:

$\pi = 3.14159$	26535	89793	23846	26433	83279
50288	41971	69399	37510	58209	74944
59230	78164	06286	20899	86280	34825
34211	70679	82148	08651	32823	06647
09384	46095	50582	23172	53594	08128
48111	74502	84102	70193	85211	05559
64462	29489	54930	38196	44288	10975
66593	34461	28475	64823	37867	83165
27120	19091	45648	56692	34603	48610
45432	66482	13393	60726	02491	41273
72458	70066	06315	58817	48815	20920
96282	92540	91715	36436	78925	90360
01133	05305	48820	46652	13841	46951
94151	16094	33057	27036	57595	91953
09218	61173	81932	61179	31051	18548
07446	23799	62749	56735	18857	52724
89122	79381	83011	94912	98336	73362
44065	66430	86021	39501	60924	48077
23094	36285	53096	62027	55693	97986
95022	24749	96206	07497	03041	23668
86199	51100	89202	38377	02131	41694
11902	98858	25446	81639	79990	46597
00081	70029	63123	77381	34208	41307
91451	18398	05709	85...		

π sayısı burada 707 basamağa kadar veriliyor. 1874 yılında İngiliz matematikçisi W.Shanks tarafından yayınlanmış. Onaltı basamağın, yarıçapı yerküre ile güneş arasındaki ortalama uzaklığa eşit bir dairenin çevresini bir kıl kalınlığı kadar hata ile hesaplamaya yeterli olduğu; güneşin yerine bilinen en uzak nebula, kıl kalınlığı yerine de fizikçilerce bilinen en küçük taneciğin büyüklüğü konduğunda gerekli basamak sayısının yalnızca 40 olduğu düşünülürse, π yi 707 basamağa kadar hesaplamanın düpedüz işgüzarlık olduğu anlaşılır.

Ama her alanda olduğu gibi işgüzarlık alanında da sınır tanımayan insanoğlu 707 basamakla da yetinmeyerek ilk bilgisayarın icadından sonra π sayısını 1947'de 2035 basamağa kadar hesapladı. π nin basamaklarının fethini aşağıdaki kronoloji cetvelinden izleyebilirsiniz.

·Pİ'NİN KRONOLOJİSİ

MÖ **20. yy** Babilliler $\pi = 3\ 1/8$ değerini kullanıyorlar.

MÖ **20. yy** Mısırlılar $\pi = (16/9)^2 = 3{,}1605$ değerini kullanıyorlar.

MÖ 12. yy	Çinliler $\pi = 3$ değerini kullanıyorlar.
MÖ 550	Kutsal Kitapta I. Krallar 7:23 $\pi = 3$ anlamına geliyor.
MÖ 434	Anaksagoras daireyi kare yapmaya girişiyor.
MÖ 3. yy	Arşimet $3\ 10/71 < \pi < 3\ 1/7$ olduğunu buluyor. Bundan başka $\pi \cong 211875/67441$ kesrini de buluyor.
2. yy	Batlamyos $\pi = 377/120 = 3{,}14166 \ldots$ değerini kullanıyor.
3. yy	Çung Hing $\pi = \sqrt{10} = 3{,}16$, Vang Fau $\pi = 142/45 = 3{,}155$, Liu Hui $\pi = 471/150 = 3{,}14$ değerlerini kullanıyorlar.
5. yy	Zu Çung-Çi $3{,}1415926 < \pi < 3.1415927$ olduğunu buluyor.
6. yy	Hintli Aryabhatta $\pi = 62832/2000 = 3{,}1416$ değerini, Brahmagupta ise $\pi = \sqrt{10}$ değerini kullanıyor.
1220	Fibonacci $\pi = 3{,}141818$ değerini kullanıyor.
1436	Semerkantlı El Kaşi π yi 14 basamağa kadar hesaplıyor.
1573	Valentinus Otho $\pi \cong 355/113 = 3{,}1415929$ olduğunu buluyor.
1593	Hollandalı Adriaen van Rooman π yi 15 basamağa kadar hesaplıyor.
1596	Hollandalı Ludolph Van Ceulen π yi 35 basamağa kadar hesaplıyor (bu nedenle Almanya'da π Ludolph sayısı diye de bilinir).
1705	Abraham Sharp π yi 72 basamağa kadar hesaplıyor.
1706	John Machin π yi 100 basamağa kadar hesaplıyor.
1719	Fransız De Lagny π yi 127 basamağa kadar hesaplıyor.
1737	Leonhard Euler'in benimsemesiyle π adı evrensellik kazanıyor.
1761	İsviçreli Johann Heinrich Lambert π nin irrasyonelliğini kanıtlıyor.
1775	Euler π nin aşkın olabileceğine işaret ediyor.
1794	Fransız Adrien - Marie Legendre π nin ve π^2 nin irrasyonelliğini kanıtlıyor. Aynı zamanda π nin aşkın olabileceğini belirtiyor.
1794	Vega π yi 140 basamağa kadar hesaplıyor.
1844	Avusturyalı Schulz von Stranssnigtzky π yi 200 basamağa kadar hesaplıyor.

1855	Richter π yi 500 basamağa kadar hesaplıyor.
1874	İngiliz W.Shanks π yi 707 basamağa kadar hesaplıyor.
1882	Alman Ferdinand Lindemann π nin aşkın bir sayı olduğunu kanıtlıyor.
1947	İlk bilgisayar ENIAC π yi 2035 basamağa kadar hesaplıyor.
1981	Bilim ve Sanat'ın 6. sayısında π nin öyküsü yayınlanıyor.

Pİ'NİN İRRASYONELLİĞİ

Nasıl bir sayı π sayısı? Örneğin m ve n birer tamsayı olmak uzere m/n biçiminde yazılabilir mi? Yani π rasyonel midir? Başlangıçta insanlar bu yönde umutluydular. π nin bu kadar çok basamağının hesaplanmasının nedenlerinden biri de buydu herhalde. Bekliyorlardı ki bir yerden sonra basamaklar önceki değerlerini tekrar etsin, yani π devirli bir ondalık sayı halinde yazılabilsin.[14] Bu olmadı. Sonunda 1761'de İsviçreli matematikçi Lambert π nin irrasyonel olduğunu, yani dairenin çevresi ile çapının bir ortak ölçüsü olmadığını kanıtladı.

Pİ'NİN AŞKINLIĞI

π sayısının gittikçe daha fazla basamağını hesaplama tutkusunun yanısıra matematikçilerin rüyalarına giren başka bir π problemi de, daireyi kare yapma problemiydi. Önce problemi tanımlayalım:

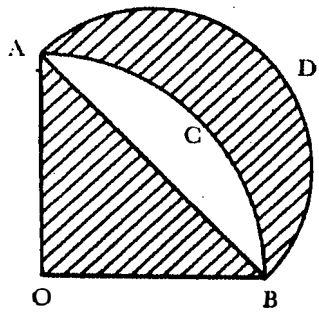
Sonlu sayıda işlem yaparak, yalnızca pergel ile cetvel kullanarak[15] alanı verilen bir dairenin alanına eşit kare çizmek.

Bu uğraşıya kendilerini kaptıranların atası Anaksagoras'tır (MÖ 500 - 428). Bir ara Atina'da zındıklıkla suçlanıp hapse atılan Anaksagoras burada can sıkıntısından, daireyi kare yapmanın yollarını aramaya başlar. Kendisinin çözüm sandığı bazı yaklaşık sonuçlar da elde eder. Daha sonra Kiyoslu (Sakızlı) Hippokrates[16] (MÖ 5. yy'ın ikinci yarısı), şekilde taralı AÇBD ala-

14 Bu durumda π nin rasyonel olması gerektiği gösterilebilir.

15 Burada cetvel sözcüğü yalnızca doğru çizmeye yarayan taksimatsız, düz kenarlı tahta anlamına alınmalıdır.

16 Bu kişi, doktorların piri Koslu (İstanköylü) Hippokrates'le karıştırılmamalıdır.



nının AOB üçgeninin alanına eşit olduğunu gösterir. Şekildeki ACB yayı merkezi O, yarıçapı OA olan yaydır. ADB yayı ise çapı AB, merkezi de AB nin orta noktası olan yaydır.

Bu ve buna benzer başka örnekler gösterir ki, belli eğrilerle sınırlanmış bazı bölgelerin alanlarına eşit alanda kareler çizilebilir.[17]

- Şu halde verilen bir dairenin de alanına eşit alanda bir kare neden çizilmesin?

Matematik tarihi bu uğraşa kendini adayan matematikçilerin ve amatörlerin adlarıyla doludur. Hepsinin de uğraşı düş kırıklığı ile sonuçlanır. Bunların içinde en büyük düş kırıklığı Sieur Mathulon adlı birinin olsa gerektir. Çünkü bu kişi 18. yüzyılda daireyi kare yaptığını ilan etmiş ve yönteminin yanlışlığını bulana 1000 ecu[18] ödeyeceğini söylemişti. 1000 'ecu'yü mahkeme huzurunda yanlışını bulana ödedi de. Bundan sonra kare yapıcılar daha ihtiyatlı oldular.

18. yüzyılın sonundan başlayarak dairenin kare yapılmasının olanaksız olduğu fikri matematikçilere egemen olur. Bu kuşku o kadar büyür ki 1775' te Paris Bilimler Akademisi devr-i daim makinesi projeleri, açıyı pergel ve cetvel kullanarak üçe bölme yöntemlerinin yanısıra daireyi kare yapma yöntemlerini de artık incelememe kararı alır. 1775'te Euler, 1794'te Legendre, π nin belki de cebirsel bir sayı olmadığına dolayısıyla aşkın bir sayı olması gerektiğine ilişkin inançlarını belirtirler.

Şimdi bu konuyu biraz açalım. m ve n tamsayı olmak üzere m/n biçi-

17 Üçgeni çizdikten sonra üçgenden kareye kolayca geçilebilir.

18 Ecu (ekü): 5 Franklık gümüş Fransız parası.

minde yazılamayan sayılara irrasyonel dendiğini biliyoruz. Katsayıları tamsayılar olmak üzere

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n = 0$$

biçiminde yazılabilen denklemlere de cebirsel denklem diyoruz. Eğer bir sayı bir cebirsel denklemin kökü ise o sayıya "cebirsel sayı" diyoruz. Örneğin bütün rasyonel sayılar cebirseldir (m/n rasyonel sayısı $nx - m = 0$ denkleminin köküdür).

İrrasyonel sayıların bazıları da cebirseldir: Örneğin $\sqrt{2}$ sayısı $x^2 - 2 = 0$ denkleminin köküdür. Peki cebirsel olmayan irrasyonel sayılar var mıdır? Evet. Böyle sayıların varlığını 1840'da Fransız matematikçisi Joseph Liouville kanıtladı. Böyle cebirsel olmayan sayılara "aşkın"[19] deniyor.

Bunları anlatmamın nedeni şu: Kanıtlanması bizi bu kitabın amacından çok uzaklara götürecek bir teorem gereğince, eğer π sayısı cebirsel bir sayı değilse, daire kare yapılamaz.

İşte bu nedenle Euler ile Legendre π nin cebirsel bir sayı olmadığına olan inançlarını belirtiyorlar. Ama inançla matematik yapılmaz. Kanıtlamak gerek. Kanıtlamak için de matematiksel avadanlık gerek. Bu avadanlığın gelişmesi ve π nin aşkın olduğunun kanıtlanması için daha yaklaşık 100 yıl beklendi. Sonunda 1882 yılında Alman matematikçisi Lindemann π nin aşkın olduğunu kanıtladı da, böylece MÖ 434'te başlayan serüven son buldu. Son buldu ama hâlâ da daireyi kare yaptığını iddia eden amatör gözbağcılara rastlanıyor.

Pİ'NİN RESMİ DEĞERİ

π nin öyküsünü, geçen yüzyılın sonunda Amerika Birleşik Devletleri'nin Indiana Eyaleti'nde geçen bir olaydan söz ederek bitirelim. Olay "özel teşebbüs" hırsı ile bilgisizliğin bir arada, hem kişileri hem de kurumları bazen nasıl gülünç duruma düşürebileceğini göstermesi bakımından ibret vericidir.

19 Aşkın sözcüğüne Frenkler trancendental diyorlar.

Olay Edwin Goodwin adlı bir tıp doktorunun π için yeni bir —yanlış— değer bulması, başka bazı yanlış hususlardan hareketle daireyi kare yapması ve bunları bir yasa önerisi haline getirip eyalet temsilciler meclisi üyesi Taylor Record'a vermesi ile başlar. Yasa önerisi 18 Ocak 1897'de Record tarafından eyalet temsilciler meclisine sunulur.

Önerinin giriş bölümünde şöyle denilmektedir: "**Yeni bir matematiksel gerçeği tanıtmak ve eğitime katkıda bulunmak amacıyla sunulan ve 1897 yılında yasama organınca kabul edilmek ve benimsenmek koşuluyla içeriğinden yalnızca Indiana Eyaleti'nin hiçbir telif ücreti ödemeden yararlanabileceği bir yasa** tasarısı."

Üç bölümden oluşan tasarı, baştan sona, insanın tüylerini diken diken edecek, hem temel geometri kurallarıyla hem de birbiriyle çelişen önermelerle doludur. Biz burada yalnızca 2. bölümden alıntı yapalım: "... ayrıca 90° lik **kiriş uzunluğunun yay uzunluğuna oranı 7/8 dir. Öte yandan karenin köşegeninin kenarına oranı 10/7 dir ki, bu şu önemli dördüncü gerçeği ortaya koymaktadır: Dairenin çapının çevresine oranı 5/4 ün 4 e oranıdır...**"

Böylece aynı paragraf içinde hem $\pi = \frac{16\sqrt{2}}{7} = 3{,}2324...$ hem de $\pi = 16/5 = 3{,}20$ olduğu söylenmekte, bununla da yetinilmeyip, ta Pisagor' dan beri bilinen karenin köşegeninin kenarına oranının irrasyonel olduğu gerçeği de yadsınmaktadır.[20]

Tasarı —nedense— önce Bataklık Arazi Komisyonuna havale edilir, buradan da "aidiyeti cihetiyle" Eğitim Komisyonuna gönderilir. Komisyonun olumlu görüşü ile birlikte 5 Şubat 1897'de tekrar genel kurula gelen tasarı burada 67 oya karşılık 0 oyla kabul edilir!

Şimdi sıra Senatodadır. Tasarı Senatoda —neden bilinmez— Alkollü İçkilerle Mücadele Komisyonuna havale edilir ve komisyonun olumlu görüşüyle geri gelir. Artık tasarının yasalaşması(!) için hiçbir engel kalmamış gibidir, ama büyük bir rastlantı Senatoyu büyük bir yanılgıdan, π yi de resmi bir değere kavuşmaktan alıkoyar. Tasarı komisyon dönüşü Senato genel kurulunda okunduğu sırada Purdue Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerinden Profesör Waldo da üniversiteyle ilgili iş takibi dolayısıyla Senatodadır. Genel kurulda tartışılmakta olanları duyunca kulaklarına inanamaz.

20 Bu sonuncu ile ilgili ayrıntılı bilgi için "Matematik Nasıl Matematik Oldu?" bölümüne bakınız.

Doğu Indiana'dan eski bir öğretmen senatör şöyle demektedir: "Sorun çok basit. Eğer π sayısı için yeni ve doğru bir değer belirleyen bu tasarıyı yasalaştırırsak, tasarının sahibi buluşunun eyaletimizde parasız kullanımına, okul kitaplarında yayınlanmasına izin verecektir. Buna karşılık öteki eyaletler kendisine telif ücreti ödemek durumundadır."

Profesör Waldo hemen kolları sıvayıp yoğun bir kulis faaliyetine girişir ve bunun sonucu 12 Şubat 1897'de Senato tasarı üzerindeki görüşmeleri belirsiz bir tarihe erteler. Bundan sonra da bu konu bir daha gündeme gelmez.

EKLER

Bu yazıyı yazdıktan birkaç ay sonra Shanks'ın 1874'te yayınladığı π değerindeki son 180 basamağın yanlış olduğunu öğrendim. Bu gerçek 1947'de π ENIAC bilgisayarı ile 2 bin küsur basamağa kadar hesaplandığı zaman ortaya çıkıyor ve vahim bir tarihsel hata da bu şekilde düzeltilmiş oluyor. Ancak ne yazık ki bu son 180 basamağın doğrusu bende yok. Bu nedenle okuyucu ya 527 doğru basamakla yetinecek ya da düzeltme işini kendisi yapacak!

SEKİZ PROBLEM

1. SUYU BÖLMEK I

Bir testideki 8 litre su biri 5 litrelik biri de 3 litrelik iki şişe kullanılarak 4 er litrelik iki eşit bölüme nasıl ayrılabilir?

2. SUYU BÖLMEK II



Şekilde görülen camdan yamru yumru vazonun içi su doludur. Vazonun ağzı bir kapakla kapatılabilmektedir. Yalnızca işaret koymak için bir kalem kullanarak vazonun içindeki su miktarını varıya indirebilir misiniz?

3. AVCININ DERDİ

Tüfeği ile trene binmek isteyen bir avcının tüfeğini yanına almasına izin verilmeyince, o da tüfeğini trenin bagaj vagonuna bırakmaya karar verir. Ancak bu kez de tüfeğin boyu bir sorun yaratır. Çünkü bagaja kabul edilecek eşyanın en büyük boyutunun en çok 1 m olması gerekmektedir; oysa tüfeğin boyu 1,7 m dir. Sonunda avcı bu sorunu alteder. Nasıl bir çözüm bulur avcı? (Hayır, rüşvet vermez.)

4. ERLER

200 er her birinde 20 kişi olan 10 sıra halinde dizilsin; yani 10 sırası ve 20 kolu olan bir "tertip" oluştursun. Şimdi her sıranın en uzun boylu erini seçelim ve bu (uzun) 10 er arasından da en kısa boylu olanını ayıralım. Bu kişiye "uzunların kısası" diyelim. Şimdi erler tertipteki yerlerine dönsün. Biz bu kez her kolun en kısa boylu erini seçelim ve bu (kısa) 20 er arasından da en uzun boylu olanı ayıralım. Bu kişiye de "kısaların uzunu" diyelim. Hangisi daha uzundur? "Uzunların kısası" mı yoksa "kısaların uzunu" mu?

5. 20 TENCERE

Dış görünüşleri ve büyüklükleri aynı olan 20 tencereden bazıları alüminyumdan, bazıları ise daha ağır bir metal olan duralüminyumdan yapılmıştır. Kefeli terazide en fazla 11 tartı yaparak alüminyumdan yapılmış olan tencere sayısını nasıl bulabiliriz?

6. YOKSUL GEZGİN

7 halkalı altın bir zincirinden başka hiçbir varlığı olmayan bir gezgin hergün için zincirinden bir halka ödemek koşuluyla bir hana kabul edilir. Gezgin oda ücretini günlük ödeyecek, ancak borcundan fazla zincir parçası verdiği takdirde ödemesinin "üstünü" daha önce ödediği halkalar cinsinden alabilecektir. Bu durumda gezgin zinciri en az kaç parçaya bölmek zorundadır ve her bir zincir parçasında kaç halka bırakmalıdır?

7. MEKTUPLA SATRANÇ

Birbirinden uzakta oturan kişiler hamlelerini birbirine mektupla yol-

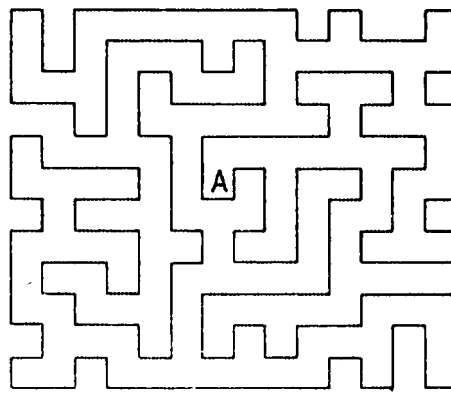
layarak satranç oynayabilirler. Bu oldukça sık başvurulan bir karşılaşma şeklidir. Hatta bu şekilde satranççılar aralarında turnuva bile düzenleyebilirler. Turnuvada bir karşılaşmada rakibinizi yenerseniz 1 puan, berabere kalırsanız 1/2 puan kazanırsınız.

İşte böyle turnuvalardan birine katılan uluslararası usta Zeki Hin'in iki maçı daha kalmıştır. Eğer bu iki maç sonunda en az 1 puan elde ederse turnuvanın birincisi olacaktır. Ancak Zeki Hin bu son iki maçında iki büyük usta ile karşılaşmak durumundadır. Bu nedenle ihtiyacı olan bu 1 puanı elde edebilmesi oldukça zor görünmektedir.

"İsmiyle müsemma" olan ustamız karşılaşmalardan birinde beyaz diğerinde ise siyah taşlarla oynayacağını bilmektedir. Zeki Bey sonunda kendisine bu iki maçtan mutlaka 1 puan kazandıracak yöntemi bulur. Zeki Hin nasıl oynar bu zor iki maçı?

8. İÇERDE Mİ, DIŞARDA MI?

Aşağıdaki labirent tek bir kapalı çizgiden oluşmaktadır.



1. A noktasına hiçbir çizginin üstünden geçmeden dışardan ulaşılabilir mi?

2. Labirentin sol ve sağ yanları 2 şer cm eninde birer kağıt şeritle kapatılsa, labirent içinde herhangi bir noktaya hiçbir çizginin üstünden geçmeden dışardan ulaşılıp ulaşılamayacağı sorusu yanıtlanabilir mi?

YANITLAR

1 Aşağıdaki çizelge çözüm için izlenebilecek yollardan birini göstermektedir.

		Her boşaltma işleminden sonra kaplardaki su miktarı							
Kap	İlk Durum	1	2	3	4	5	6	7	8
Testi	8	5	5	2	2	7	7	4	4
5 lt. şişe	0	0	3	3	5	0	1	1	4
3 lt. şişe	0	3	0	3	1	1	0	3	0

2 Önce vazonun yarısını göz kararı ile boşaltır, vazo içindeki su düzeyini bir işaretle belirleriz. Sonra vazonun ağzını kapatır, vazoyu başaşağı getiririz. Eğer vazo gerçekten yarıya kadar suyla doluysa bu işlemden sonra işaretimiz gene su düzeyinin hizasında olacaktır. Çünkü eğer vazo yarıya kadar doluysa, vazo içindeki suyla dolu hacimle boş hacim birbirine eşit olacağından, işaretin altındaki hacimle üstündeki hacim aynı olacaktır. Eğer vazo içindeki su yarıdan az ise, vazo başaşağı edildiği zaman işaret su düzeyinden daha yüksekte, yarıdan çok ise daha alçakta olacaktır. Bu durumda vazoya ya su ekleyerek ya da vazodan su atarak su düzeyini değiştirir, yeni düzeyi işaretler ve yukardaki yöntemi, su düzeyi ile işaret bir hizada kalıncaya dek yineleriz.

3 Avcı bir ayrıtı 1 m olan bir küp yaptırır ve tüfeğini büyük köşegen boyunca küpün içine yerleştirir (bir ayrıtı 1 m olan küpün büyük köşegeni $\sqrt{3} \cong 1{,}73$ m dir).

4 Eğer kısaların uzunu (KU) ile uzunların kısasa (UK) aynı sırada iseler UK, KU dan daha uzundur. Çünkü UK tanım gereği o sıranın en uzunudur. Eğer KU ile UK aynı kolda iseler, gene UK, KU dan daha uzundur çünkü tanım gereği KU o kolun en kısa kişisidir. Şimdi KU ile UK aynı sırada ya da aynı kolda olmasın. UK ile aynı sırada ve KU ile aynı kolda olan ere M diyelim. M, KU dan uzun, UK dan kısadır (neden?). Şu halde gene UK, KU dan uzundur.

5 Birinci tartıda terazinin kefelerine birer tencere konur. Bu tartının iki sonucu olabilir:

1. Kefelerden biri ağır basar. Bu durumda tencerelerden biri alüminyum, öbürü duralüminyumdur. Şimdi bu iki tencereyi kefelerden birine koyarız. Geri kalan tencereleri de ikişer ikişer bu iki tencereyle tartarız. Her tartı sonunda bu tartılan tencerelerin kefesi ağır basıyorsa tencerelerin ikisi de duralüminyumdan, hafif kalıyorsa ikisi de alüminyumdan, yok eğer ki kefe dengede ise tencerelerden biri alüminyumdan, diğeri duralüminyumdan yapılmıştır. Böylece 10 tartıda alüminyum tencere sayısını buluruz.

2. Kefeler dengede kalır. Bu durumda ya iki tencere de alüminyumdan ya da her ikisi de duralüminyumdan yapılmıştır. Gene bu iki tencereyi terazinin kefelerinden birine koyar, geri kalan tencereleri ikişer ikişer bu iki test tenceresi ile tartmaya başlarız. Şimdi bu 9 çift tencereden ilk "k" çiftin test tencereleri ile aynı ağırlıkta olduğunu ve $(k + 1)$ inci çiftin farklı ağırlıkta olduğunu varsayalım. Hatta açıklamamızı kolaylaştırsın diye $(k + 1)$ inci çiftin test çiftinden daha ağır olduğunu varsayalım. Daha hafif olma durumu da benzer şekilde ele alınabilir.

Bu durumda ilk çift ve ondan sonra gelen "k" çift alüminyumdan yapılmıştır. Böylece $(k + 2)$ tartıda $(k + 1)$ çift tencerenin alüminyum olduğunu bulduk. $(k + 3)$ üncü tartıda ağır gelen iki tencereden birini bir kefeye ötekini de öbür kefeye koyarız. Terazi dengede kalırsa iki tencere de duralüminyumdan, bir kefe ağır basarsa ağır basan kefedeki tencere duralüminyumdan, hafif kefedeki de alüminyumdan yapılmıştır. Böylece $(k + 3)$ üncü tartı sonunda biri alüminyumdan öteki de duralüminyumdan yapılmış bir tencere çifti oluşturabiliriz. Bu çifti şimdi terazinin bir kefesine koyarak geriye kalan tartılmamış $10 - (k + 2)$ çift tencere içindeki alüminyum tencere sayısını da 1. bölümdeki yöntemle $10 - (k + 2)$ tartıda buluruz. Şu halde yapmamız gereken toplam tartı sayısı $(k + 3) + [10 - (k + 2)] = 11$ dir.

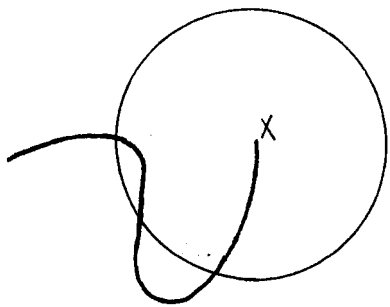
6 Zincir sırasıyla 1, 2 ve 4 halkası olan 3 parçaya bölünmelidir. Gezgin birinci günün ücretini tek halkayla öder. İkinci gün 2 halkalık parçayı verir, tek halkayı geri alır. Üçüncü gün tek halkayı tekrar hancıya verir. Dördüncü gün 4 halkalık parçayı verir ve 2 halkalık parçayla tek halkayı geri alır. Beşinci günün ücretini gene tek halkayla öder. Altıncı gün iki halkalık parçayı verir tek halkayı geri alır. Sonunda yedinci günün ücretini de o tek halkayla öder.

Eğer bu parçalama işlemi zincir halkaları kesilerek yapılacaksa yalnız 1 halkanın keşilmesiyle zincir yukardaki özelliği sağlayan üç parçaya ayrılabilir. Bu halka hangi halkadır?

7 Zeki Hin beyaz taşlarla oynayan rakibinin hamlelerini siyah taşlarla oynayan rakibine, bu ikincinin hamlelerini de geriye beyaz taşlarla oynayan rakibine postalar. Dolayısıyla gerçekte iki rakibinin birbiriyle karşılaşmasına aracılık eder. Sonunda rakiplerden biri ötekini yener ya da berabere kalırlar. Ancak her iki durumda da Zeki Hin komisyonculuk ücreti 1 puanı alır.

8 1. Evet. Sağ taraftaki açıklıktan girilerek A noktasına kolayca ulaşılabilir.

2. Evet. Çünkü tek bir kapalı çizgiden oluşan herhangi bir şekil topolojik bakımdan bir daireyle (ya da bir kareyle, bir elipsle) aynıdır. Soruyu yanıtlamak için verilen noktaya dışardan çizilecek herhangi bir çizginin labirenti oluşturan çizgiyi tek sayıda mı yoksa çift sayıda mı kestiğine bakılır. Sayı tekse dışardan o noktaya labirenti kesmeden ulaşılamaz. Sayı çiftse ulaşılabilir.



YILDIRIM GİBİ ÇARPMAK

Matematik tarihi binlerce büyük matematikçinin yanısıra dâhi hesaplayıcılar adını vereceğim hesap akrobatlarının adlarıyla da doludur. Bu kişiler olanaksız gibi görünen aritmetik işlemlerini çok kısa bir zamanda akıldan hesabetmekle ünlüydüler.

Akıldan hızlı hesap yapabilme yeteneği ile genel yetenek düzeyi arasındaki ilişki sanıldığı kadar yakın görünmüyor. Paranın üstünü hesabetmekten aciz büyük matematikçilerin yanısıra başka zihin etkinliklerinde hiç de dâhi sayamayacağımız dâhi hesaplayıcılar da var.

Dâhi hesaplayıcılar özellikle 19. yüzyılın başından itibaren Avrupa, İngiltere ve Amerika'da ortaya çıktılar. Çoğu bu mesleğe çocuk yaşta başladı. Bir çoğu yöntemlerini anlatan kitaplar yazdı, ama gene de önemli bir bölümü gizlerini açıklamadı. Hatta belki bu işi nasıl yaptıklarını kendileri de bilmiyorlardı.

Zerah Colburn, okuma yazma öğrenmeden önce çarpma tablosunu öğrendi. Sekiz yaşında İngiltere'de gösteri turnelerine çıkmaya başladı. Herhangi iki 4 basamaklı sayıyı anında çarpabilen Colburn'un 5 basamaklı sayı-

ları çarpabilmesi için biraz düşünmesi gerekiyordu. Bir gösteri sırasında kendisine çarpmak üzere 21.734 ile 543 sayıları verildiğinde çarpımı anında söylemişti: 11.801.562. Nasıl yaptığı sorulunca da 543 ün 3 ile 181 in çarpımı olduğunu, dolayısıyla büyük sayıyı önce 3 le sonra da 181 le çarptığını söylemişti!

Başka bir dâhi hesaplayıcı, aynı zamanda bir matematik profesörü olan Alexander Aitken'di. Aitken bir gün İskoç matematikçi Thomas O'Beirne ile birlikte mekanik hesap makinaları sergisine gider. Makinalardan birinin başında duran sergici-tezgahtar: "Şimdi 23.586 ile 71.283 ü çarpacağız" der demez Aitken: "ve tabii 1.681.280.838 bulacaksınız" diye cevap verir. O'Beirne: "sonuç doğru çıkınca orada bana da, sergi müdürüne de inme iniyordu" diyor.

Peki, dâhi hesaplayıcı gibi görünmek için ille gerçekten dâhi hesaplayıcı olmak gerekli mi? Hayır. Olanaksız gibi görünen bazı numaraları öğrenmek ve bu yeteneği ile arkadaşlarını hayrete düşürmek isteyen okuyucunun sarfetmesi gereken çaba gerçekten çok az. Örneğin işe aşağıdaki çarpma gösterisiyle başlayabilirsiniz. Arkadaşınıza size 3 rakamlı herhangi bir sayı vermesini söyleyin[21] 782 sayısının verildiğini varsayalım. Sayıyı karatahtaya ya da kâğıda yan yana iki kez yazın:

782 782

İkinci bir 3 rakamlı sayı isteyin. Bu sayıyı da soldaki sayının altına çarpan olarak yazın. Şimdi sağdaki sayıyı çarpmak için üçüncü bir sayıya gereksinmeniz var. Bu sayı soldaki sayının çarpanının 9 a tümleri olmalıdır. Yani karşılıklı olarak bu sayının basamakları ile soldaki çarpanın basamaklarının toplamı hep 9 etmelidir. Örneğin soldaki çarpan 423 ise sağdaki çarpan 576 olmalıdır:

782	782
423	576

Şüphesiz bunu arkadaşınız bilmemeli. Bunu sağlamak için arkadaşınız 423 ü verdikten sonra "Eh şimdi de ben bir sayı yazayım" deyip 576 yı yazabilirsiniz. Eğer gösteriyi bir gruba yapıyorsanız, doğru sayıyı önceden anlaştığı-

21 Gösterinin yapılabilmesi için sayının 3 rakamlı olması şart değil. Ancak 3 e sınırlamak karşınızdakinin sonucu kolayca kontrol etmesini sağlar.

nız bir gizli ortağa da söyletebilirsiniz. (Gösteri biraz Kadıköy vapurunda leke ilacı satmaya benzemeye başladı ya, neyse).

Şimdi her iki çarpmayı da akıldan yapacağınızı, sonuçları akıldan toplayacağınızı ve toplamı yazacağınızı açıklayın. İki çarpımın toplamını bir çırpıda şöyle bulun: Çarpılan sayıdan 1 çıkarın ve bu sayının sağına 9 a tümlerini iliştirin. Yukardaki örnekte 782 eksi 1 eşit 781. Bu sayının 9 a tümleri 218. Şu halde sonuç 781.218 dir.

İki çarpımın toplamının neden bu denli kolayca hesaplanabileceğini hemen gösterebiliriz:

$$\begin{aligned} 782 \times 423 + 782 \times 576 &= 782 \times 999 \\ &= 782 \times (1000 - 1) \\ &= 782.000 - 782 \\ &= 781.000 + 1000 - 782 \end{aligned}$$

Fakat $1000 - 782$ sayısı 781 in 9 a tümleridir. Böylece 781.218 elde ederiz

Bir başka "yıldırım gibi çarpma" gösterisi, çarpanlardan birinin hiç de öyle görünmediği halde çok özel bir sayı olmasından yararlanır. Bu sayılardan biri 143 tür. Gene, arkadaşınızdan 3 rakamlı bir sayı istedikten sonra, siz de sanki gelişigüzel bir sayı yazıyormuşcasına bu sayının altına sihirli sayı 143 ü yazın ve hemen ardından arkadaşınızın sayısıyla 143 ün çarpımını soldan sağa doğru yazmaya başlayın. Sonucu elde etmek için yapacağınız arkadaşınızın sayısını, yanına kendisinden bir tane daha iliştirilmiş 6 rakamlı bir sayı gibi düşünüp, bu sayıyı 7 ye bölmekten ibarettir. Örneğin arkadaşınızın verdiği sayı 384 ise sonucu şöyle hesabedersiniz: 38 de 7 5 kez var, 3 artar; 34 te 7 4 kez var, 6 artar; 63 te 7 9 kez var; 8 de 7 1 kez var, 1 artar ve nihayet 14 te 7 2 kez var; şu halde sonuç 54.912 dir. İşlemin sonuna geldiğiniz zaman kalan sıfır olmalıdır (Bölme tam çıkmalıdır). Olmazsa bir yerde yanlış yaptınız demektir.

İki tane 3 rakamlı sayıyı akıldan çarpmak o kadar şaşırtıcı olmayabilir. Peki iki tane 9 rakamlı sayıyı akıldan çarpmaya ne buyurulur?

Herhalde bu yeterince şaşırtıcı sayılabilir. Bu gösteride kullanacağınız sihirli sayı 142.857.143 tür. Arkadaşınızdan 9 rakamlı bir sayı vermesini söyleyin. Siz de verilen sayının altına masum(!) ve alelâde(!) görünüşlü sihirli sayıyı —sanki herhangi bir sayı yazıyormuş gibi— yazın. Sonra yukarıdaki 7 ye bölme yönteminin aynısını uygulayın; tabii bu kez, akıldan, arka-

daşınızın 9 rakamlı sayısının yanına kendisinden bir tane daha iliştirerek.

Göreceksiniz ki, 17 - 18 rakamdan oluşan çarpımı kesinlikle 1 dakikanın altında hesaplayabileceksiniz. Yalnız çarpım tablosunu iyi hatırlamayanlar "yedileri" tazeleseler iyi olur.

Martin Gardner'e[22] göre 142.857.143, matematik gösterisi ustalarınca[23] yaygın olarak biliniyordu. Bunların en ünlülerinden biri 1911 yılında 31 yaşında ölen Amerikalı Arthur Griffith'miş. Kendisini "Harikulâde Griffith" diye reklâm eden bu kişi 9 rakamlı iki sayıyı 30 saniyenin altında çarpabilmesi ile ünlüymüş. Martin Gardner diyor ki "Bunu okuduğum zaman işkillendim. Kütüphanede yaptığım araştırma Griffith'in 1904 yılında Indiana Üniversitesinde öğrencilerin ve hocaların önünde yaptığı bir gösteriyi anlatan bir görgü tanığının ifadesini ortaya çıkardı. İfadeye göre Griffith tahtaya 142.857.143 sayısını yazar ve hocalardan birinden bu sayının altına 9 rakamlı bir sayı yazmasını ister. Hoca sayıyı soldan sağa doğru yazmaya başlar başlamaz, Harikulâde Griffith de çarpımı soldan sağa yazmaya başlar. İfadeye göre bunu gören öğrenciler bir bağırışla ayağa fırlamışlar". Griffith 1901'de yöntemlerini açıklayan bir kitapçık yazmış. Ancak kitapta 142.857.143'ten hiç bahis yokmuş.

142.857.143'ün kerameti nereden ileri geliyor? Şuradan: Bu sayı 7 ile çarpılırsa 1.000.000.001 (bir milyar bir) elde edilir. Şu halde herhangi 9 basamaklı bir sayıyı 142.857.143 ile çarpmak için bu sayıyı önce bir milyar bir ile çarpıp sonra 7 ye bölebiliriz. 9 rakamlı bir sayıyı bir milyar bir ile çarpmak ise çok kolaydır: Sayının yanına kendisinden bir tane daha iliştiririz olur biter. Şu halde yukarda verilen kural ortaya çıktı: 9 rakamlı herhangi bir sayıyı 142.857.143 ile çarpmak için o sayının yanına kendisinden bir tane daha yazın (ya da yazılmış gibi düşünün) ve meydana gelen 18 rakamlı sayıyı 7 ye bölün.

KÖK ALMAK

Tanıdığım bir öğretim üyesi İngiltere'de öğrenimdeyken gördüğü bir

22 Martin Gardner, **Scientific American** adlı popüler bilim dergisinde 1957 yılından beri eğlenceli matematik yazıları yazar. Bu yazıda anlattığım gösterilerin hemen hepsi onun bu yazılarından birinden alınmadır.

23 Bu kişilere usta mı yoksa düzenbaz mı demeli bilemiyorum. Bu kişilerden bazıları eğlence olsun diye bu hileli yöntemleri de kullanan gerçek dâhi hesaplayıcılardı. Bazıları ise düpedüz düzenbaz.

gösteriyi anlatmıştı. Sahnede Hintli bir kadın gösteri ustası küp kök ve 5. mertebeden kök alıyormuş. Yani kendisine bir sayı veriyormuşsunuz, o da göz açıp kapayıncaya kadar size hangi sayı kendisiyle 3 kez, 5 kez çarpılırsa o verdiğiniz sayı çıkar, söylüyormuş. "Bunda ne zorluk var?" diyenlere soruyorum: 550.731.776 sayısının 5. mertebeden kökü kaçtır?

Arkadaşımın anlattığı bu hüner beni gerçekten çok etkilemişti. "Aşk olsun!" demiştim; ta ki işin püf noktasını buluncaya kadar. Bulunca da hayranlığım kızgınlığa dönüştü.[24]

1 ile 100 arasında bir tamsayının 5. kuvveti olmak koşuluyla size verilen sayının 5. mertebeden kökünü bulmak gerçekten çocuk oyuncağı. Ancak bunun için aşağıdaki cetveli ezberlemek gerekiyor.

Sayı	5. kuvvetin yaklaşık büyüklüğü	Sayı	5. kuvvetin yaklaşık büyüklüğü
10	100 bin	60	777 milyon
20	3 milyon	70	1,5 milyar
30	24 milyon	80	3 milyar
40	100 milyon	90	6 milyar
50	300 milyon	100	10 milyar

Bu işi çocuk oyuncağı yapan özellik şu: Bir tamsayının birler basamağındaki rakam ile o sayının 5. kuvvetinin birler basamağındaki rakam aynıdır! Şimdi diyelim ki biri size "beşyüzelli milyon yediyüzotuzbir bin yediyüzyetmişaltı" sayısını verdi. Sayı beşyüzelli milyonla başladığına göre bu sayının 5. mertebeden kökünün 50 ile 60 arasında, yani 50 küsur olduğunu ezberinizdeki cetvelden saptayın ve son basamağa kadar bekleyin (aradaki basamakları dinlemeseniz de olur). Son basamak 6 olduğuna göre aranan kök 56 dır.

5. mertebeden kök almak kadar olmasa bile küp kök almak da oldukça kolay.

Bunun için 1 den 10 a kadar sayıların küpünü ezberlemek gerekli:

24 Emin değilim ama sanırım bu usta meşhur dâhi hesaplayıcı Shakuntala Devi idi. Belki de kadıncağızın günahına giriyorum.

Sayı	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Küpü	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

Görüldüğü gibi 2, 3, 7 ve 8 in küpleri dışında küpün 1 ler basamağındaki rakam, küpü alınan sayının aynısı. 2, 3, 7 ve 8 durumunda ise bunların toplamı 10 ediyor.

Şimdi diyelim ki küp kökü alınacak sayı 314.432. Son 3 basamağı atın, 314 ü alın. 314; 216 ile 343 arasında olduğundan küp kökün 10 lar basamağı 6 dır (neden?). Küpün birler basamağında 2 olduğuna göre küp kökün birler basamağında 8 olması gerekir. Şu halde aranan küp kök 68 dir.

TAKVİM GÖSTERİSİ

Yaygın ilgi uyandıran gösterilerden biri de takvim gösterisidir. Yani size bir tarih söyleyecekler, siz de aklınızdan bu tarihin haftanın hangi gününe geldiğini bulacaksınız.

Ancak önce küçük bir ezber gerekli: Her ayın özel bir sayısı var onu bilmeden olmaz. Aşağıdaki cetvel bu sayıları veriyor:

Ocak	Şubat	Mart	Nisan	Mayıs	Haziran	Temmuz
1	4	4	0	2	5	0

Ağustos	Eylül	Ekim	Kasım	Aralık
3	6	1	4	6

Bu cetveli ezberlemenin bir kolay yolu 144, 025 ve 036 sayılarının 12, 5 ve 6 nın kareleri olduğunu 146 nın da 144 ten 2 fazla olduğunu hatırlamak (bu yolu ben kendim için oldukça yararlı buldum. Belki başka yöntemler de geliştirilebilir).

Şimdi verilen tarihin haftanın hangi gününe geldiğini bulmak için aşağıdaki yöntemi izleyeceğiz:

1. Yılın son iki basamağını alın. Bu sayıyı akıldan 12 ye bölün. Sayıda 12 nin kaç kez olduğunu belleğinizin bir kenarına not edin. Sayının 12 ye bölünmesinden kalanı bulun, bunu bir önceki sayıya ekleyin. Kalanda kaç 4 olduğunu bulun, bunu da bir önceki toplama katın. Elde ettiğiniz sayıdan

7 leri atın ve kalanı bulun. Yani elde ettiğiniz sayının 7 ye bölünmesinden kalanı bulun. Yılla ilgili olarak hatırlamanız gereken tek sayı bu son sayıdır. Şimdi bir örnek yapalım: 6 Ağustos 1945. 45 te 12 3 kez var 9 artar. 9 da 4 2 kez var şu halde 3 + 9 + 2 = 14. 14 ten 7 leri atarsak 0 kalır. Yılla ilgili hatırlamanız gereken sayı 0 dır.

2. Yukardaki maddede hesabettiğiniz sayıya ayın özel sayısını ekleyin. Örneğimizde Ağustosun özel sayısı 3 tür. Şu halde 0 + 3 = 3. Mümkünse bu sayıdan 7 leri atın. Örneğimizde 3 ün içinde atılacak 7 yok.

3. İkinci maddedeki sonuca ayın kaçı olduğunu gösteren sayıyı ekleyin. Mümkünse 7 leri atın. Elde edeceğiniz sayı Cumartesi 0, Pazar 1, Pazartesi 2 ve nihayet Cuma 6 olmak üzere haftanın gününü verecektir. Örneğimizde bu sayı 3 + 6 = 9; 7 yi atınca 2 olarak bulunur. Demek Hiroşima'ya atom bombası Pazartesi günü atılmış.

4. Eğer yıl artık yılsa, yani Şubatın 29 çektiği yılsa, ay da Ocak ya da Şubatsa yukarda hesabedilen günden bir gün geriye gidin.

Yukarda 1. maddede yaptığınız hesap size aynı zamanda o yılın artık yıl olup olmadığını da gösterecektir. Bir yılın artık yıl olması için 4 le bölünebilmesi gerekir. Bir sayının 4 le bölünebilmesi içinse son iki rakamının 4 le bölünebilmesi gerekir. Bu nedenle son iki rakamını 12 ye böldüğünüzde kalan olmazsa, ya da kalan 4 ün katıysa o yıl artık yıldır. (Ancak burada hemen hatırlamak gerekir ki çağımızda hemen bütün dünyanın kullandığı Miladi Gregor takvim dizgesinde sonu iki sıfırla biten yıllar 400 le bölünmedikçe artık yıl değildirler. Örneğin 1800 ve 1900 yılları artık yıl değildi. 2000 yılı artık yıl olacak).

Yukardaki örnekte 1945 artık yıl olmadığı için bir düzeltme yapmak gerekmez. 1945 artık yıl olsaydı bile ay Ocak ya da Şubat olmadığı için düzeltme gene gerekmezdi.

Yukarda anlatılan yöntem 20. yüzyıldaki tarihler için geçerlidir. Öteki yüzyıllar için ufak tefek düzeltmeler gerekir. 19. yüzyıldaki tarihler için 2 gün, 18. yüzyıl için 4 gün ileri gidin. 21. yüzyıl için 1 gün geri gidin.

Gösteri yapmak, hoşça vakit geçirmek gibi yararlarının yanısıra, yukardaki yöntem aylık takvimi aklınızda tutmanızı sağlar. Örneğin Ekim 1981 şu kuraldır: Ayın kaçı olduğunu gösteren sayıya 4 ekle, 7 leri at. Şu halde 29 Ekim Perşembe gününe geliyor. Gerçekten de 81'de 12 6 kez var 9 artar. 9 da 4 2 kez var öyleyse 1981 yılının sayısı 6 + 9 + 2 = 17; 7 leri

atınca 3 olarak bulunur. Eylül'ün özel sayısı 1 olduğuna göre, $3 + 1 = 4$ çıkar.

Ayın başında aylık duvar takviminin yaprağını nasıl yırtıp takvimi o ay için hazırlıyorsak, bu kez, ayın başında o ayın kuralını bulup ezberlersek artık bütün bir ay ayın kaçının hangi güne geldiğini anında söyleyebiliriz.

EKLER

Bu yazı yayınlandıktan sonra Sayın Hakan Uysal 5. mertebeden kök alma oyunu ile ilgili olarak yazdığı mektupta "biraz çalışma ile" şu kuralı bulduğunu belirtiyor: r bir pozitif tamsayı olmak üzere n sayısının birler basamağındaki rakamla n^{4r+1} in birler basamağındaki rakam aynıdır. Dolayısıyla 5. kuvvet için yapılan matematik oyunu 9. kuvvet hatta 13. kuvvet için de yapılabilir.

Bu kuralı kanıtlamak için önce şu teoremleri verelim:

t tamsayısının birler basamağındaki rakamı b(t) ile gösterelim. Örneğin, $b(423) = 3$.

Teorem 1 x ve y birer tamsayı olmak üzere $b(xy) = b[b(x)b(y)]$ dir.

Kanıt u ve v birer tamsayı olmak üzere

$$x = 10u + b(x)$$
$$y = 10v + b(y)$$

yazabileceğimize göre, taraf tarafa çarparak

$$xy = 100uv + 10ub(y) + 10vb(x) + b(x)b(y)$$

bulunur. Yukardaki ilk üç terim 10 a bölünebildiklerine göre xy nin ancak onlar ve daha yukarı basamaklarını belirleyebilirler. Şu halde xy nin birler basamağı b(x)b(y) sayısının birler basamağıdır:

$$b(xy) = b[b(x)b(y)]$$

Teorem 2 x ve k birer pozitif tamsayı olsun.

$$b(x^k) = b[b(x)^k]$$

dır.

Kanıt Teorem 1 de $y = x$ alınırsa $b(x^2) = b[b(x)^2]$ olduğu kolayca görülür. Şimdi iddiamızın, k dahil, k ya kadar bütün tamsayılar için doğru olduğunu varsayalım ve $k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim (matematiksel tümevarım[25]).

Şu halde

$$\begin{aligned} b(x^{k+1}) &= b(x^k \cdot x) = b[b(x^k)b(x)] \\ &= b[b(x)^k b(x)] \\ &= b[b(x)^{k+1}] \end{aligned}$$

Şimdi herhangi bir n için b(n) sayısı 0, 1, 2, .., 9 sayılarından biri olacağına göre $b(n^k) = b[b(n)^k]$ sayılarını aşağıdaki tablodan izleyelim:

b(n)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$b(n^2)$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
$b(n^3)$	0	1	8	7	4	5	6	3	8	9
$b(n^4)$	0	1	6	1	6	5	6	1	4	1
$b(n^5)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Görüldüğü gibi $b(n^5) = b(n)$, $b(n^6) = b(n^2)$ ya da genel olarak $b(n^k \cdot n^4) = b(n^k)$ dır. Şu halde $b(n^k \cdot n^{4r}) = b(n^k)$ bulunur. Öyleyse $k = 1$ için $b(n^{4r+1}) = b(n)$ yazabiliriz. Göstermek istediğimiz de buydu.

"Ebedi" ya da "Sürekli" takvim olgusu yeni bir olgu değildir. Bu tür bir takvimi bu kitabın bir sayfasına rahatlıkla sığabilecek büyüklükte bir tablo halinde oluşturabilir ve İsa'nın doğumundan örneğin 2400 yılına kadar herhangi bir tarihin rastladığı günü böyle bir tablodan anında bulabilirsiniz. Ya da bu tabloyu bir bilgisayarın belleğine yerleştirerek istediğiniz tarihin rastladığı günü bilgisayar çıktısı olarak alabilirsiniz.

Takvim gösterisini bir bilgisayar aracılığı ile yapacaksanız kullanaca-

25 Bu kanıtlama yöntemi ile ilgili ayrıntılı bilgi Leonardo Fibonacci bölümünün arkasındaki ekte verilmiştir.

ğınız yöntemlerden biri de Zeller'in denklik yöntemi adı verilen formül olabilir:

a, Mart 1, Nisan 2, Mayıs 3, ..., Aralık 10 olmak üzere, Ocak ve Şubat da bir önceki yılın 11. ve 12. ayı olarak sayılmak üzere ayı gösteren sayı; k, ayın kaçı olduğunu gösteren sayı olsun. C yüzyılı, D de yüzyıl içindeki yılı göstersin. Örneğin,

6 Ağustos 1945 için $a = 6$, $k = 6$, $C = 19$, $D = 45$

1 Ocak 1800 için $a = 11$, $k = 1$, $C = 17$, $D = 99$

Tarihin hangi güne geldiğini veren formül şöyle:

$$g = [2{,}6a - 0{,}2] + k + D + [D/4] + [C/4] - 2C$$

ifadesini hesaplayın. İfadede köşeli parantezler, parantez içindeki sayının tamsayı kısmını göstermektedir. Hesaplanan sayıdan 7 leri atın. Çıkan sayı Pazar 0, Pazartesi 1 ve nihayet Cumartesi 6 olmak üzere haftanın gününü verecektir.

Formülü 6 Ağustos 1945 e uygulayalım:

$$\begin{aligned} g &= [2{,}6 \times 6 - 0{,}2] + 6 + 45 + [45/4] + [19/4] - 2 \times 19 \\ &= [15{,}4] + 6 + 45 + [11{,}25] + [4{,}75] - 38 \\ &= 15 + 6 + 45 + 11 + 4 - 38 \\ &= 43 \end{aligned}$$

43 ten 7 leri atınca 1 kalır. Demek Hiroşimaya atom bombası Pazartesi günü atılmış.

Zeller'in denklik yöntemine dikkatimi çeken Sayın Güney Gönenç'e teşekkür ederim.

Zeller yönteminin zayıf yanı akıldan hesap yapmaya pek elverişli olmaması. Hesap için kağıt kalem ya da bilgisayar, hesap makinası gerektirmesi. Oysa yazıda verilen yöntem akıldan hesaplamaya, dolayısıyla gösteriye daha uygun.

ALGORİTMA

Bilgisayar adını verdiğimiz hızlı, dayanıklı, yorulmak - usanmak bilmez, ama alabildiğine de aptal emir kulu, 1950'li yıllardan başlayarak insanoğlunun yaşamına girdiğinden beri, insanoğlu bilim ve teknolojide karşılaştığı sorunların çözümünde güvenilir bir yardımcıya kavuşmuş oldu. Böylece, eskiden her "işi" kendisi yaparken, şimdi insanoğlu, zamanını daha çok bu hamarat ama zekâca gelişmemiş emir kuluna işlerin nasıl yapılacağını onun anlayacağı bir dille tarif etme yöntemlerini araştırmaya ayırmaya başladı.

İşte çok kaba bir tanımlamayla "bir işin nasıl yapılacağını tarif etme yöntemi" anlamına gelen "algoritma" sözcüğü de 1950'li yıllardan başlayarak daha sık kullanılır oldu. Biz de bu bölümde yerimizin elverdiği ölçüde algoritmanın ne olduğunu, nasıl yazıldığını incelemeye çalışacağız.

Algoritma sözcüğüyle ilk kez bu bölümde karşılaşan bir kimse "ah şu dizgi yanlışları yokmu, bak 400 yıllık logaritma sözcüğü ne hallere düşmüş!" diye kızabilir; ama bu kez dizgi yanlışı yok. Sözcük, Hindu-Arap rakamlarını kullanarak aritmetik hesap yapmak anlamına gelen "algorism" sözcüğünden geliyor. Ortaçağ Avrupasında algoristler algorism yöntemiyle, abacistler (çörkücüler) de abacusla (çörküyle) hesap yapıyorlardı. Algorism sözcüğü

ise ünlü Islam matematikçisi Harzemli Muhammed Bin Musa'nın adından türemiş. "Al Hvorizmi (= Harzemli)" sözcüğü zamanla değişerek alhorism ve sonra da algorism olmuş[26]. Daha sonra da anlam değiştirerek algorithm (algoritma) olmuş.

Algoritmayı yukarda, çok kaba olarak, "tarif etme yöntemi" olarak tanımladık. Ancak modern anlamda algoritmayı öteki "yöntem", "yordam", "tarifname"ya da "reçete"lerden ayıran bazı özellikler var. Bu özelliklere geçmeden önce bir örnek görelim. Bu örnek Öklid algoritması adıyla bilinen ve iki tamsayının en büyük ortak bölenini bulan algoritma:

> **Öklid algoritması:** Bu algoritma m ve n gibi sıfırdan büyük iki tamsayısının en büyük ortak bölenini bulur.
>
> 1. m yi ve n yi oku.
> 2. m yi ne ye böl. Kalana r de.
> 3. r = 0 ise dur. Yanıt n dir; değilse 4. adıma git.
> 4. m nin yerine n yi koy, n nin yerine de r yi koy.
> 5. 2. adıma git.

Şimdi kendimizi bir bilgisayar yerine koyarak m = 24, n = 18 için algoritmamızı izleyelim. Birinci adımdaki okuma işlemini yaptığımıza göre ikinci adıma geçerek 24 ün 18 e bölünmesinden kalanı bulacağız. Kalan 6 dır. Şu halde r = 6. Üçüncü adımda "r = 0 ise" koşulu var. Bu koşul sağlanmadığına göre dördüncü adıma geçeceğiz ve m = 18, n = 6 yapacağız. Şimdi Beşinci adım uyarınca ikinci adıma geçeceğiz ve r = 0 bulacağız. Bu kez r = 0 olduğuna göre üçüncü adım uyarınca duracağız ve yanıtın 6 olduğunu açıklayacağız. Gerçekten de 24 ü ve 18 i ortak bölen sayılar içinde en büyüğü 6 dır.

Şimdi Öklid algoritmasını da gözönünde tutarak herhangi bir yöntemin algoritma olabilmesi için sağlaması gereken koşullara bakalım. Herşeyden önce algoritmanın sonlu sayıda kuraldan oluştuğunu gözleyelim. Bu ku-

26 "Algorism'in temeli olan onlu sayı düzeni ve sıfır kavramını batıya ilk tanıtan kitap, Harzemli'nin Latince'ye "**Numero Indorum**" adıyla çevrilen "**Kitab-ül Muhtasar fi Hesab-ül Hindi**" adlı kitabıdır. Onlu sayı düzeninin Araplardan İtalyanlar aracılığı ile Avrupa'ya geçişi ile ilgili ek bilgi için "Ortaçağ Arapları" ve Leonardo Fibonacci" bölümlerine bakınız. Ayrıca Güney Gönenç'in Elektrik Mühendisliği Dergisi'nin Temmuz - Ağustos 1978 sayısında yayınlanan "**Matematik Tarihine Kısa Bir Bakış**" adlı yazısını da salık veririm.

rallar dizisinin en küçük numaradan başlayarak birer birer izlenmesi gerekiyor.

Sonlu sayıda kuraldan oluşmak bir yöntemin algoritma olması için yeterli değil. Aşağıdaki reçel tarifi de sonlu sayıda kuraldan oluşuyor ama algoritmaların sağlaması gereken ilerde göreceğimiz bazı özelliklerden yoksun.[27]

> **Ayva Reçeli:** Bu tarif aşağıdaki malzemeyle size ayva reçeli yaptırır.
> Malzeme: 1 kg ayva, 5-6 su bardağı şeker, 1 çay kaşığı limon tuzu.
>
> 1. Ayvayı dilimleyip soy.
> 2. Ortasını çıkarıp istediğin biçimde doğra (portakal dilimi, kuşbaşı veya rende).
> 3. Ayvayı yumuşayıncaya kadar iki su bardağı su içinde iyice haşla (suyu süzme).
> 4. Şeker ve limon tuzunu ilave et.
> 5. Yavaş yavaş kaynat.
> 6. Kıvama geldiyse dur. Gelmediyse 5. adıma git.

Bir algoritma başka ne gibi özelliklere sahip olmalı? Bunları şöyle sıralayabiliriz:

1. Sonlu olma özelliği: Bir algoritma sonlu sayıda işlem yapıldıktan sonra sona ermeli. Burada sonlu sayıda kuraldan oluşmakla, sonlu sayıda işlem yapılmak birbiriyle karıştırılmamalı. Örneğin aşağıdaki kurallar dizisi sonlu sayıda kural içerdiği halde sonlu sayıda işlemden sonra sona ermez:

1. n yi 0 yap.
2. n yi 1 artır.
3. n nin değerini yaz.
4. n = 0 ise dur.
5. 2. adıma dön

Oysa Öklid algoritmasında 2. adımda hesaplanacak r değeri daima n den küçük olduğu için (neden?) ve bu r değeri sıfırdan farklı olduğu sürece 4.

27 Reçel tarifini Gönül Candaş'ın "**Bereketli Olsun**" adlı yemek kitabından aynen aldım. Ancak bir algoritma edası verebilmek için her kuralı ayrı bir madde başı yaptım, bir de fiil kiplerini değiştirdim.

adımda n nin yerine konacağı için n nin değeri sürekli küçülecek ve 2. adımdan sonlu sayıda geçişten sonra r = 0 bulunacak ve böylece 3. adım gereğince durulacaktır.

Bu özellik ayva reçeli için de geçerlidir. Belli bir —sonlu— zaman sonra reçel "kıvama" gelecek (ya da yanacak!) ve durulacaktır.

2. Kesin olma özelliği: Bir algoritmanın her adımı açık ve kesin bir biçimde tanımlanmış olmalıdır. Bu şekilde algoritmayı izlerken hiçbir yerde yoruma meydan verilmemelidir (unutmamalı ki algoritmayı okuyup izleyecek emir kulu, hamarat ama zekâca gelişmemiş bir yaratıktır). Şu halde algoritmanın hiçbir yerinde "n nin değerini biraz arttır.", "yumuşayıncaya kadar haşla", "yavaş yavaş kaynat", "kıvama geldiyse dur" türünden kurallar olamaz. "Biraz" nedir? n nin değerini 1 mi artıracağız, yoksa 2 mi? Ayvalar ne kadar yumuşayacak, ateş ne kadar yavaş olacak? Helé reçelin kıvama geldiğini nasıl anlayacağız?[28]

Öte yandan açıklık ve kesinliği sağlamak için algoritma mutlaka bilgisayarın anlayacağı bir dille yazılmalıdır. Örneğin yukardaki Öklid algoritması alabildiğince açık ve kesin bir dille yazıldığı halde (umarım böyledir) Türkçe bilmeyen bir kişi tarafından anlaşılmayacaktır. Ayrıca algoritmayı izleyecek bilgisayarın yeteneği algoritmada geçen komutları anlayacak düzeyde olmalıdır.

Örneğin bilgisayar bölme bilmiyorsa, Öklid algoritmasında 2. adımdaki "böl" komutu bilgisayarca anlaşılmayacaktır. Bölme bilmeyen, ama çıkarma bilen bir bilgisayar için Öklid algoritmasını şu şekilde yazmak gerekecektir:

Öklid algoritması (bölme bilmeyen bilgisayarlar için)

1. m yi ve n yi oku.
2. m den n yi çıkar. Farka r de.
3. r negatifse m nin yerine n yi, n nin yerine m yi koy. 2. adıma git; değilse 4. adıma git.
4. r < n ise 7. adıma git; değilse 5. adıma git.
5. r den n yi çıkar. Farkı r nin yerine koy.
6. 4. adıma git.
7. r = 0 ise dur. Yanıt n dir; değilse 8. adıma git.
8. m nin yerine n yi koy, n nin yerine de r yi koy.
9. 2. adıma git.

Bu ikinci Öklid algoritmasının kutu içine alınmış bölümünün yalnızca çıkarma işlemi kullanan bir bölme işlemi olduğu okuyucunun dikkatinden kaçmayacaktır.

Yukarda belirttiğim, insanla bilgisayarın birbirlerini açık ve kesin bir biçimde anlaması sorununun çözümü için adına "programlama dili" ya da "bilgisayar dili" denilen "resmi" diler tasarımlanmış bulunuyor. Her bilgisayarın kendi büyüklüğüne ve yetenek düzeyine göre, anladığı bir ya da birkaç "resmi" dili var. Algoritmaların bu dillerle yazılması gerekiyor.

3. Algoritmanın girdisi: Bazı algoritmaların bir ya da birkaç girdisi, yani algoritmayı izleyecek bilgisayarın istenileni yapabilmesi için işe başlamadan okumasıgereken nicelik ya da nicelikler söz konusu olabilir. Örneğin Öklid algoritmasında, 1. adımda bilgisayara m ve n sayılarını okuması komutu veriliyor. Şu halde Öklid algoritmasının 2 girdisi var.

Bu girdilerin belirli bir nicelik kümesinden seçilmesi gerekiyor. Örneğin gene Öklid algoritmasında m ve n nin pozitif tamsayılar olması gerekli. Aksi takdirde algoritma doğru çalışmayacak.

4. Algoritmanın çıktısı: Bir algoritmanın bir ya da birkaç çıktısı (ürünü) olacaktır. Öklid algoritmasında çıktı m ile n nin en büyük ortak böleni olan tamsayıdır.

Yukardaki bütün bu özelliklere ek olarak bir algoritmanın mümkün olduğu kadar geniş bir problem kümesine uygulanabilir olması istenir. Örneğin aşağıdaki algoritma yukarda sıraladığımız tüm özellikleri sağladığı halde çok özel bir problemi çözdüğü için tümüyle yararsızdır:

Denklem çözümü I: Bu algoritma $x + 2 = 5$ denklemini çözer.

1. 3 yaz.
2. Dur.

Bu algoritmanın biraz yararlı olabilmesi için çözebildiği problemlerin kümesini genişletmek gerekir. Şimdi öyle bir algoritma yazalım ki, sıfır ya da sıfırdan büyük olmak üzere herhangi bir a, b tamsayı çifti için $x + a = b$

28 Burada hem sayın Candaş'ın hakkını yememek hem de bu bölümü hiç olmazsa bir reçel tarifi edinmek amacıyla okuyan okuyucuların merakını tatmin etmek için belirteyim, bu konu reçel tarifinin hemen altında bir dipnotta şöyle açıklanıyor: Reçelden bir miktar bir tabağa koyacaksınız. Tabağı yavaşça bir sağa bir de sola eğeceksiniz. Eğer reçel tabağa sıvaşıp kalıyorsa kıvama gelmiş demektir.

denklemini sağlayan x değerini bulsun ve bu değeri yazsın. Böyle bir x değeri yoksa "yanıt yok" yazsın. Bu yenisi a = 2, b = 5 için yukardaki algoritmayı da bir özel hal olarak içereceği için çok daha esnek ve kullanışlı olacaktır.

Yazacağımız algoritmayı izleyecek bilgisayar çıkarma biliyorsa sorun çok kolaydır:

Denklem çözümü II: Bu algoritma x + a = b denklemini çözer.

1. a yı ve b yi oku.
2. b den a yı çıkar. Farka x de.
3. x in değerini yaz.
4. Dur.

Eğer bilgisayar çıkarma bilmiyor da yalnızca toplama biliyorsa aşağıdaki kurallar dizisini deneyebiliriz:

1. a yı ve b yi oku.
2. x e 0 değerini ver.
3. x le a yı topla. Toplama t de.
4. t = b ise dur. Yanıt x tir; değilse 5. adıma git.
5. x in değerini 1 arttır.
6. 3. adıma git.

Görüldüğü gibi yukardaki kurallar dizisini izleyen bilgisayar sırayla a, a + 1, a + 2,... sayılarını hesaplayacak ve bunları b ile karşılaştıracaktır. Eğer bu sayılardan biri b ye eşitse aranan x değeri odur.

Yukardaki kurallar dizisine inatla "kurallar dizisi" dediğim, ama algoritma demediğim okuyucunun dikkatini çekmiştir sanırım. Çünkü a ve b, denklemi sağlayan sıfır ya da sıfırdan büyük bir x değeri bulunamayacak şekilde verildiğinde (örneğin a = 4, b = 3), dizi bu durumu sezemeyecek ve 4, 5, 6, ... sayılarının 3 e eşit olup olmadığına bakmayı sürdürecek ve hiç durmayacaktır (dizi sonlu olma özelliğini sağlamamaktadır).

Eğer bilgisayar iki sayıyı karşılaştırıp bunlardan birinin diğerinden büyük olup olmadığını anlayabilme yeteneğine sahipse yukardaki diziyi kolayca algoritma haline getirebiliriz:

Denklem çözümü III: (çıkarma bilmeyen bilgisayarlar için)

1. a yı ve b yi oku.
2. x e 0 değerini ver.
3. x le a yı topla, toplama t de.
4. t > b ise dur, "yanıt yok" yaz; değilse 5. adıma git.
5. t = b ise dur. Yanıt x tir; değilse 6. adıma git.
6. x in değerini 1 arttır.
7. 3. adıma git.

Bilgisayar büyük - küçük karşılaştırması yapamıyorsa da bu diziyi algoritma haline getirebiliriz, ama bu biraz daha zor olur:

Denklem çözümü IV: (çıkarma bilmedikleri gibi büyük - küçük karşılaştırması da yapamayan bilgisayarlar için)

1. a yı ve b yi oku.
2. x e 0 değerini ver.
3. x le a yı topla, toplama t de.
4. t = b ise dur, yanıt x tir; değilse 5. adıma git.
5. x le b yi topla, toplama s de.
6. s = a ise dur. "yanıt yok" yaz; değilse 7. adıma git.
7. x in değerini 1 arttır.
8. 3. adıma dön.

Bu bölümü bitirirken, algoritma kavramının en önemli sorununun, kesinlik sorunu olduğunu bir daha vurgulamak isterim. Bilgisayarın hiçbir belirsizliğe yol açmadan bizi anlayabilmesi için bilgisayarın düzeyini (hangi işlemi yapıp hangi işlemi yapamacağını) ve dilini iyi bilmek ve algoritmayı ona göre yazmak gerekir. Denklem çözümü algoritmaları bunu yeterince gösteriyor sanırım.

Öte yandan yemek ustası bir ev hanımına çok açık seçik gelecek ve unutulmaz ayva reçelleri yememizi sağlayacak bir reçel tarifi aptal bilgisayarın hiç içinden çıkamayacağı kadar belirsiz ve karmaşık olabilir. Bu nedenle algoritma yorum unsurunu tümüyle ortadan kaldıran kesin olma özelliğine sahip olmalıdır.

Dilerim, ayva reçeli pişirebilen bilgisayarlarınız olsun.

EKLER

Öklid algoritmasının, nasıl olup da m ve n gibi iki tamsayının en büyük ortak bölenini verdiğini kolayca kanıtlayabiliriz. Aşağıdaki kanıtta geçen adım numaraları yukarda ilk verilen Öklid algoritmasındaki adım numaralarıdır

İkinci adımdan sonra $m = bn + r$ yazılabilir. Burada b bölüm, r de m nin n ye bölünmesinden kalandır ($m < n$ ise $b = 0$, $r \neq m$ olacaktır). Şimdi, eğer $r = 0$ ise m, n ye tam bölünüyor demektir ki, bu durumda en büyük ortak bölen gerçekten n dir. Eğer $r \neq 0$ ise, m nin ve n nin herhangi bir ortak böleni $r = m - bn$ yi de böler (neden?). Öte yandan hem n yi hem de r yi bölen bir sayı $m = bn - r$ yi de böler (neden?). Şu halde m ile n nin ortak bölenlerinin kümesi ile n ile r nin ortak bölenlerinin kümesi aynıdır; öyleyse en büyük ortak bölenler de aynıdır. Bu nedenle 4. adımdaki yer değiştirme, problemin yanıtını değiştirmez.

ARİTMETİK DİZİLER VE ÖTESİ

"Ünlü Alman matematikçisi Karl Friedrick Gauss 10 yaşında iken, öğretmeni öğrencileri oyalamak için, '1 den 100 e kadar sayıları yazarak toplayın' der. Başka bir deyişle, $1 + 2 + 3 + ... + 100 = ?$ toplamasını yapmalarını söyler.

Öğretmen soruyu okuyup bitirince Gauss, küçük yazı tahtasını masasının üzerine bırakarak, 'oldu öğretmenim' der ve yerine oturur.

Öğretmen bir saat sonra öğrencilerin buldukları sonuçları küçük yazı tahtalarından kontrol ederken hayretler içinde kalır. Bütün öğrencilerin yanıtları yanlış olduğu halde, Gauss'un yanıtı doğrudur. Gauss, hiç işlem yapmadan yazı tahtasına sorunun yanıtı olan 5050 sayısını yazmıştır."

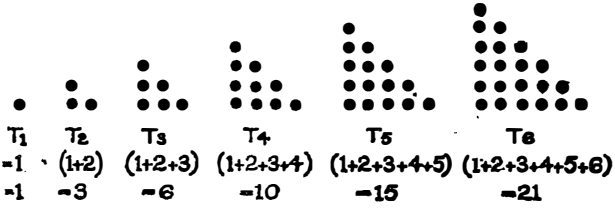
Yukardaki satırları, matematik dersleri ile ilgilendiğim, akrabalık derecesi bana çok yakın bir delikanlı adayının ders kitabından aldım.[29]

Yazarlar kitaplarına böyle bir öyküyle başlamakla birkaç ereği birden amaçlıyorlar. Herşeyden önce öyküyle başlamak kitabı ilginçleştiriyor; do-

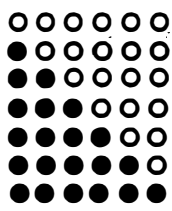
29 Osman Kırbaş, Hüseyin Başaran; **Matematik**, Ortaokul 1, MEB Yayını, 1979.

layısıyla okunmasını sağlıyor. Sonra ilk bakışta uzun bir hammaliye gibi görünen bir işi dâhiyane bir yöntemle bir çırpıda bitirerek öğretmenin oyununu boşa çıkartmak var; bu da öğrenciye çekici geliyor. Gauss birden öğretmene karşı öğrenciyle gizli bir ittifak kuruyor sanki; ittifak ne kelime, öğrenci Gauss'la özdeşleşiveriyor.

Yukardaki öykü iyi hoş da önemlice bir konuyu eksik bırakıyor. Dolayısıyla yanlış anlamaya yol açıyor. Öyküyü okuyan bir kişi 1 den 100 e kadar sayıların toplamının ilk kez Gauss tarafından kısa yoldan hesaplandığı kanısına kapılıyor. Yanlış anlaşılmasın, Gauss'un dehasını azımsamak değil amacım. Olay büyük bir olasılıkla öyküde anlatıldığı gibi olmuştur ve Gauss 1 den 100 e kadar sayıları kolayca toplamak için gerekli yöntemi hemen orada sınıfta bulmuştur; ama bu, bu yöntemin Gauss'tan önce bilinmediği anlamına gelmiyor doğal ki. Nitekim Gauss'tan yaklaşık 2300 yıl önce Pisagor ve müridleri üçgensel sayılar adını verdikleri sayı dizilerini biliyorlar ve bu sayılara gizemci anlamlar yüklüyorlardı. Üçgensel sayıların ilk 6 tanesi Şekil 1'de görülüyor. Şekilden, bu sayılara neden "üçgensel" adı verildiği açıkça görüleceği gibi, bunlardan n incisinin (yani T_n nin) 1 den n ye kadar sayıların toplamı olduğu da okuyucunun dikkatinden kaçmayacaktır.



Şekil 1 Üçgensel sayıların ilk altısı



Şekil 2

Şimdi T_6 nın üstüne bir T_6 daha koyalım (Şekil 2). Şu halde

$$2T_6 = 6(6 + 1) = 42$$

ya da

$$T_6 = 6/2(6 + 1) = 21$$

bulunur. Bu sonucu bir T_n üstüne başka bir T_n kapatarak hemen genelleştirebiliriz:

$$T_n = n/2(n + 1)$$

Öyleyse 1 den 100 e kadar sayıların toplamı:

$$T_{100} = 100/2(100 + 1) = 5050$$

dir. Herhalde Gauss çocuk da böyle düşünmüştü.

T_n 1 den n ye kadar sayıların toplamı idi. Demek ki, T_n toplamına $n + 1$ doğal sayısını eklersek T_{n+1} i buluruz:

$$T_{n+1} = T_n + (n + 1) \qquad (1)$$

Bu anlamda T_1, T_2, T_3, ..., T_n ,... dizisini 1, 2, 3, ..., n, ... doğal sayıları yaratır.

Eğer bir dizide ardışık iki sayı arasındaki fark sabit bir d sayısına eşitse bu diziye "Aritmetik dizi", d sayısına da dizinin ortak farkı denir. Şu halde doğal sayılar dizisi 1 den başlayan ve ortak farkı da d = 1 olan bir aritmetik dizidir.

Eğer d = 2 ise 1 den başlayan aritmetik dizi 1, 3, 5, ... tek sayılar dizisine, d = 3 ise 1, 4, 7, ... dizisine dönüşür. Eğer (1) kuralında $(n + 1)$ sayısı yerine başka bir aritmetik dizinin $(n + 1)$ inci elemanı a_{n+1} i (dizide $n + 1$ inci sırada gelen elemanı) koyarsak yani

$$C_{n+1} = C_n + a_{n+1} \qquad (2)$$

kuralına göre bir C_n $n = 1, 2, 3,...$ dizisi oluşturursak seçtiğimiz aritmetik dizi a_n $n = 1, 2, 3,...$ ye bağlı olarak değişik çokgensel sayı dizileri elde edebiliriz. Aşağıdaki tablo bu dizilerden bazılarını göstermektedir. Her dizinin üstünde o diziyi yaratan dizi de verilmiştir:

Üçgensel sayılar (d = 1)

1	2	3	4	5	6	7	...
1	3	6	10	15	21	28	...

Karesel sayılar (d = 2)

1	3	5	7	9	11	13	...
1	4	9	16	25	36	49	...

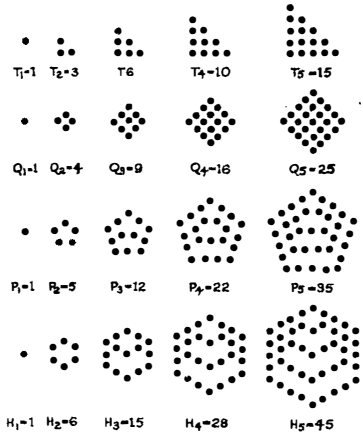
Beşgensel sayılar (d = 3)

1	4	7	10	13	16	29 ...
1	5	12	22	35	51	70 ...

Altıgensel sayılar (d = 4)

1	5	9	13	17	21	25 ...
1	6	15	28	45	66	91 ...

Bu şekilde sınırsız türde dizi oluşturabiliriz. Şekil 3 bu dizileri "şekilsel" olarak göstermektedir. Şekilden, örneğin neden beşgensel sayılara "beşgensel" adının verildiği açıkça görülmektedir.



Şekil 3 Çokgensel sayılar.

Okuyucu dilerse genel olarak bir s-gensel dizinin n inci terimi u_n yi veren aşağıdaki formülün geçerliğini sınayabilir:

$$u_n = n/2[2 + (s - 2)(n - 1)] \qquad (3)$$

Şimdi (3) ün bazı s değerleri için özel durumlarını araştıralım:

$s = 3$ için $u_n = n/2(n + 1)$ (üçgensel sayılar)

$s = 4$ için $u_n = n^2$ (karesel sayılar)

$s = 5$ için $u_n = n/2(3n - 1)$ (beşgensel sayılar)

$s = 6$ için $u_n = n(2n - 1)$ (altıgensel sayılar)

Örneğin altıgensel sayılarda beşinci sayı

$$u_5 = 5(10 - 1) = 45$$

olacaktır.

Ayrıca bekleneceği gibi (3) ifadesi $s = 2$ için $u_n = n$, yani doğal sayılar dizisini vermektedir.

DİZİNİN BOYUTU

Bir düzlem üzerine çizilebilen ve yalnızca eni ve boyu olan şekillere düzemsel şekil ya da 2 boyutlu şekil diyoruz. Örneğin üçgen ya da kare —ya da Şekil 3'teki çokgenlerden herhangi biri— bir 2 boyutlu şekil oluşturur. En ve boy boyutlarına bir de derinlik boyutu eklenirse 3 boyutlu bir şekil elde edilir. Benzer şekilde yalnızca boyu olan bir doğru çizgi 1 boyutlu, ne eni ve boyu ne de derinliği olan tek bir nokta da sıfır boyutlu bir şekildir. Yukarda da belirttiğim gibi (2) denkleminde a_n bir aritmetik dizi olduğu sürece C_n dizisi 2 boyutlu bir dizidir. a_n dizisini değiştirmekle yalnız 2 boyutlu çokgenin "gen" sayısını değiştirebiliriz.

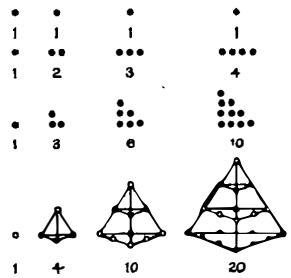
Oysa, (2) denkleminde a_n dizisini aritmetik dizilerin dışından seçmekle C_n dizisinin boyutunu da değiştirebiliriz.

Konuyu daha iyi açıklayabilmek için $a_n = 1$, $n = 1,2,3,...$ dizisini sıfır boyutlu dizi olarak tanımlayalım. Görüldüğü gibi bu dizi 1,1,1,... şeklindedir; n değiştikçe dizinin elemanları değişmez ve hep 1 değerini alır. Bu dizi aynı zamanda ortak farkı sıfır olan bir aritmetik dizi olarak da yorumlanabilir. Şimdi bu diziyi (2) denkleminde yaratan dizi a_n olarak kullanırsak 1,2,3,... doğal sayılar dizisini elde ederiz. Doğal sayılar dizisini 1 boyutlu dizi olarak tanımlayacağız. Daha önce de sözünü ettiğimiz gibi (2) denkleminde a_n yerine doğal sayılar dizisini kullandığımız zaman oluşacak dizi üçgensel sayılar dizisidir (buraya kadar yeni bir şey yok). Şimdi üçgensel sayı-

lar dizisini a_n dizisi olarak kullanalım[30]. Bu durumda dörtyüzlüsel sayılar dizisi diye tanımlayacağım 3 boyutlu bir sayı dizisi ortaya çıkar. Aşağıdaki Tablo bu olguyu göstermektedir.

Boyut	Dizi						
0	1	1	1	1	1	1	1 ...
1	1	2	3	4	5	6	7 ...
2	1	3	6	10	15	21	28 ...
3	1	4	10	20	35	56	84 ...

Tabloda ilk 7 elemanı verilen diziler Şekil 4'te "şekilsel olarak gösterilmiştir. Şekilden sabit diziye neden sıfır boyutlu, doğal sayılar dizisine de neden 1 boyutlu dediğim açıkça görülüyor. Üç boyutlu dizinin de bir düzgün dörtyüzlü piramidin (tetrahedronun) köşelerine konan noktalarla gösterilebildiğine dikkat edilmelidir. Bu nedenle bu diziye "dörtyüzlüsel" adını verdim.



Şekil 4
0,1,2 ve 3
boyutlu diziler

Üç boyut biz ölümlülerin algılayabileceği en büyük boyut sayısı, oysa yukardaki tabloda uyguladığımız kuralı uygulamaya devam etmememiz için de hiçbir neden yok:

Boyut	Dizi						
4	1	5	15	35	70	126	210 ...

30 Dikkat edilirse ardışık terimler arasındaki fark sabit olmadığı için üçgensel sayılar dizisi aritmetik bir dizi değildir.

Ancak şimdi bir sorunumuz var. Bu son diziyi 3 ya da daha az boyutlu bir şekille gösterebilmemize olanak yok. Bunun için 4 boyutlu bir şekil gerekiyor! Ancak böyle bir şekli benim 3 boyutlu beynim düşünemiyor bile...

Üçgensel sayıların n inci terimi için bir formül bulmuştuk:

$$T_n = n/2(n + 1) = n(n + 1)/1.2$$

Dörtyüzlüsel sayılar dizisinin de

$$C_n = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{1.2.3} \qquad (4)$$

kuralına uyduğu gösterilebilir. Sıfır ve 1 boyutlu sayı dizilerinin de sırasıyla n^0 ve n/1 formülleriyle verildiği düşünülecek olursa, genel olarak b boyutlu bir sayı dizisinin n inci teriminin

$$C_n = \frac{n(n + 1)(n + 2) \ldots (n + b - 1)}{1.2.3 \ldots b} \qquad (5)$$

formülüyle verildiği bulunabilir. Bu son formülün geçerliği matematiksel tümevarım yöntemiyle kolayca kanıtlanabilir.

1 den n ye kadar sayıların çarpımı n! (n faktöriyel) ile gösterilirse (örneğin 4! = 24, 5! = 120, 7! = 5040) (5) formülü

$$C_n = \frac{(n + b - 1)!}{(n - 1)!b!} \qquad (6)$$

ya da

$$\binom{r}{s} = \frac{r!}{(r - s)!s!} \qquad (7)$$

tanımlamasıyla

$$C_n = \binom{n + b - 1}{b} \qquad (8)$$

şeklinde yazılabilir. (8) ifadesinin b = 0,1,2,3 için yukardaki tablodaki

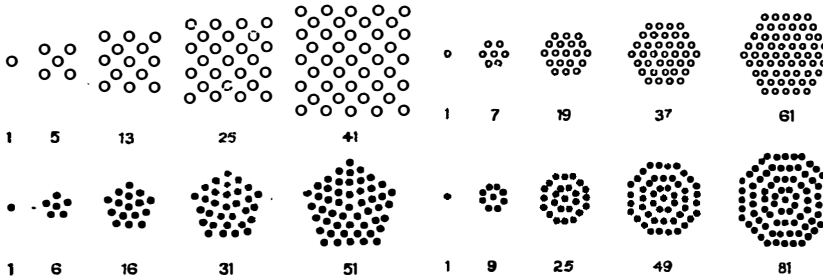
dizileri verdiği gözden kaçmamalıdır (0! = 1 olarak tanımlanır).

Bir ortaokul ders kitabından yola çıkarak nerelere geldik!

MATEMATİK EĞLENDİRİR

Düzlemsel Diziler: Şekil 5'te bazı düzlemsel dizilerin ilk 5 terimi gösterilmiştir. Bu şekildeki her dizi için, n inci terimi verecek bir ifade bulun.

Yol gösterme: Şekildeki dizilerin tümü düzlemsel oldukları için, bu dizileri yaratan diziler aritmetik dizilerdir. Dolayısıyla önce her dizi için o dizinin yaratan dizisini bulmak gerekir.



Şekil 5 Başka düzlemsel sayı dizileri

YANITLAR

Şekil 5'teki diziler

$$C_{n+1} = C_n + a_{n+1}$$

kuralına göre oluşturulmuştur. Her dizide $C_1 = 1$ dir. 1. dizide $a_n = 4(n-1)$, 2. dizide $a_n = 5(n-1)$, 3. dizide $a_n = 6(n-1)$, 4. dizide de $a_n = 8(n-1)$ dir. Görüldüğü gibi her dört durumda da a_n dizileri $a_1 = 0$ dan başlayan ve ortak farkları sırasıyla 4, 5, 6 ve 8 olan aritmetik dizilerdir.

SÖZDEBİLİME KATKI

Her bilim dalı gibi matematik de, tarihte şarlatanların elinde saptırılarak, şu ya da bu şekilde bir sömürü aracı durumuna getirilmiştir. Bu soytarılığın en önde gelen örneği belki de "nümeroloji" adı verilen sözdebilimdir. **Encyclopaedia Britannica** "nümeroloji" maddesinde şunları yazıyor: "Pisagorcuların herşeyin sayılara indirgenebileceği, dolayısıyla, herşeyin sayılarla ifade edilebileceği fikrinden kalkarak, kişinin karakterini yorumlamada ya da geleceğe ilişkin kehanette bulunmada sayıların kullanılması. Yunan ve İbrani alfabelerinde kullanılan yönteme benzer şekilde (bu alfabelerde her harf aynı zamanda bir sayıyı da gösterir) modern nümeroloji de kişinin adına ve doğum tarihine sayılar yakıştırır ve bunlara bakarak kişinin durumuna ve geleceğine ilişkin kehanetlerde bulunur."

Nümeroloji tarihinin belki de en ilginç ve en olağanüstü olaylarından biri Wilhelm Fliess (1858 - 1928) adlı bir burun - boğaz uzmanının ortaya attığı kuramdır. Bu teoriye göre insanın (hatta belki de bütün canlıların) yaşamını düzenleyen iki temel çevrim vardır: Bunlardan biri 23 günlük, diğeri de 28 günlüktür. Bu iki sayının katları ile oynayarak; bazen toplayarak, bazen çıkararak Fliess bu sayılarla bir insanın yaşamı ile ilgili hemen her olayı açık-

ladığı iddiasındaydı. Fliess'in bu kuramı bu yüzyılın başından günümüze değin Avrupa'da ve Amerika'da önemli ölçüde ilgi uyandırdı, uyandırıyor.

Fliess'in nümerolojisinin uyandırdığı ilginin yaşayabilmesinde en önemli etken kuşkusuz Fliess'in psikanalizin ağababası Sigmund Freud'un 10 yıl süreyle yakın arkadaşı ve sırdaşı olmasıdır. Freud'un en üretken olduğu 1890 - 1900 döneminde (bu dönemin en önemli ürünü 1900 yılında yayınlanan "Düşlerin Yorumu" adlı yapıttır), Freud ile Fliess "eşcinsel" sözcüğünü çağrıştıracak garip bir ilişki içindeydiler. Bu ilişkinin belgeleri Freud'un Fliess'e yazdığı 284 mektuptur. Bu mektuplardan 168'i 1950'de Almanca, 1954'te de İngilizce olarak yayınlanmıştı. Haziran 1897'de yazdığı mektupta Freud şöyle demektedir:

"Aussee'de[31] eğreltiotları ve mantarlarla dolu bir koruluk biliyorum. Burada sen bana hayvanların evreninin ve çocukların evreninin gizlerini anlatacaksın. Söyleyeceklerini büyük bir merakla ağzım açık bekliyorum ve umuyorum ki, dünya bunları benden önce duymayacak ve gene umuyorum ki, bu kez kısacık bir makale yerine bize bir yıl içinde,28'li ve 23'lü dönemlerdeki organik gizleri açıklayan küçük bir kitap kazandıracaksın".

İkisi 1887'de Viyana'da ilk karşılaştıklarında Freud, 31 yaşında, adı daha pek duyulmamış, mutlu bir evliliği olan bir psikiyatr, Fliess ise Berlin'in en başarılı burun - boğaz cerrahlarından biri. 29 yaşında, bekâr, yakışıklı, kibirli... Aynı zamanda tıbbi ve bilimsel konularda da tam bir otorite. Eleştirilmeyi de sevmiyor. Hatta bu konuda son derece hoşgörüsüz.

Freud, övgü dolu bir mektupla yazışmayı başlatır. Fliess bir mektupla birlikte değerli bir armağanla yanıtlar mektubu. Freud daha sonra istek üzerine Fliess'e bir fotoğrafını yollar.

Yazışmalarda Freud daha isteklidir. O Fliess'ten daha sık yazar. Fliess yanıt vermekte geciktiği zaman da azap içindedir. Karısı 5. çocuğuna gebeyken Freud çocuğa Wilhelm adını vereceğini açıklar ama ne yazık ki (ya da bereket versin) hem 5. hem de 6. çocuklar kız olur.

Şimdi Fliess'in nümerolojisinin biraz ayrıntısına girelim. Dünya kamuoyu ilk kez 1897'de Fliess'in "Die Beziehungen zwischen Nase und weibliche Geschlechtsorganen in ihrer biologischen Bedeutungen dargestellt (biyolojik açıdan burun ile kadın cinsiyet organları arasındaki ilişki)" adlı

31 Orta Avusturya'da tuz madeni ve tuzlu su banyoları ile ünlü küçük bir tatil kasabası.

monografisini yayınlamasıyla konuyla tanışır. Fliess'e göre her insan aslında iki cinsiyetlidir. Yani her insanda hem eril bileşen hem de dişil bileşen bulunur. Normal erkeklerde eril bileşen, normal kadınlarda ise dişil bileşen daha etkilidir. Ancak bu bileşenlerin yeğinliği (şiddeti) sabit olmayıp eril bileşenin yeğinliği 23, dişil bileşenin yeğinliği ise 28 günlük bir dönemle salınmaktadır. Yani, örneğin dişil bileşenin yeğinliği sıfırdan başlayarak yükselmekte, 7. günde maksimumdan geçmekte, 14. günde yeniden sıfır olmakta, sonra daha da alçalarak 21. günde en eksi değerini almakta, sonra yeniden yükselerek 28. gün tekrar sıfır olmaktadır. Bu salınım daha sonraki günlerde yeniden bu evrelerden geçerek kendini yinelemektedir. Aynı şekilde eril bileşen de benzer bir salınım yapmakta, ancak bu salınımın dönemi 23 gün olmaktadır.

Her iki salınım da doğumda başlamakta, çocuğun cinsiyeti anadan çocuğa ilk geçen salınımla belirlenmektedir. Bu salınımlar yaşam boyunca sürmekte, kişinin ölümüne varıncaya kadar, fiziksel ve zihinsel yaşamın tüm yönlerini denetlemektedir. Ayrıca her iki salınım da burun mukozası ile yakından ilgilidir. Fliess burun dokusundaki tahrişat ile cinsel bozukluklar ve diğer nevrozlar arasında ilişki bulduğunu iddia ediyordu. Bu tür hastalıkları hastaların burunlarını muayene ederek teşhis ediyor ve bunları burundaki "cinsel" noktalara kokain tatbik ederek tedavi ediyordu[32].

Freud başlangıçta Flies'in bu teorisinin biyolojide bir atılım olduğu kanısındadır. Fliess'e kendisinin ve ailesindeki kişilerin yaşamlarından 23-28 günlük dönemlerle ilgili bilgiler yollar. 1898'de Fliess'in kitaplarından birini sert biçimde eleştiren ve bu eleştiriden geri dönmeyen bilimsel bir dergi ile olan ilişkilerini koparır.

Yıllarca Freud 51 yaşında öleceğini düşünür; çünkü 51, 23 ile 28 in toplamıdır ve Fliess bu yaşın en kritik yaş olduğunu kendisine söylemiştir. Rüyaların Yorumu'nda Freud şöyle yazıyor: "51 özellikle erkekler için tehlikeli bir yaş gibi görünüyor, bu yaşta ansızın ölüveren meslektaşlar biliyorum; hele bunların arasında biri varki uzun bir gecikmeden sonra ölümünden ancak birkaç gün önce profesörlüğe terfi etmişti..."

Freud'un Fliess'in salınım teorisine inanması ve onu desteklemesi uzun sürmeyecektir. Freud'un psikanaliz yöntemi geliştikçe bireyin davranışında

32 Burada hemen ekleyelim ki kokain o dönemin beyefendilerince yaygın ve uluorta kullanılan bir uyuşturucuydu. O dönemin (ve günümüzün) ünlü hafiyesi Sherlock Holmes da kokain düşkünüdür.

salınımlardan çok; kişinin çocukluğunun, ana - babasıyla ilişkilerinin vb. belirleyici etkisi ortaya çıkar. Bu da giderek Freud'un salınım teorisini daha az hararetle desteklemesine, kendi tedavi yöntemini geliştirmesine yol açar. Böylece Freud ile Fliess çatışmaya başlarlar ve Freud'un yarı şaka "kongreler" adını verdiği Roma, Viyana, Berlin gibi kentlerde iki doktor arasında fikir alış verişi sağlayan buluşmalara 1900'de son verilir. Son buluşma 1900 yazında gerçekleşir. Bu buluşmayla ilgili olarak Fliess daha sonra (1906'da) açıklamada bulunmuş ve Freud'un hiçbir neden yokken kendisine hakaret ettiğini öne sürmüştür: "Son toplantı 1900 yazında Achensee'deydi. Bu buluşmamızda Freud, bana karşı önce nedenini açıklayamadığım şiddet hareketlerinde bulundu. Neden şuydu: Freud'un hastaları ile ilgili gözlemleri üzerinde konuşurken ben dönemsel süreçlerin şüphe götürmez bir şekilde insan kafasında var olduğunu öne sürdüm (...) ve psikanaliz sonucu hastalarda ne ani düzelmelerin ne de ani kötüleşmelerin beklenemeyeceğini söyledim. Tartışmamızın geri kalan bölümünde Freud'un bana karşı belirgin bir düşmanlık gösterdiğini sezinledim (...) Bu toplantıdan sonra sessizce Freud ile olan ilişkimizi ve yazışmamızı sona erdirdim."

Fliess "dönem kuramı"nı açıklayan birçok kitap yazdı. Bunların arasında en önemlisi "Der Ablauf des Lebens: Grundlegung zur Exakten Biologie (Yaşamın Ritmi: Doğru Biyolojinin Temelleri)" adlı olanıdır. 1906'da Leipzig'de yayınlanan 600 sayfaya yakın kalınlıktaki bu kitap tam bir saçmalık şahaseridir. Fliess yaşamın temellerini şu formülün üstüne oturtur: $23x + 28y$; burada x ve y artı ya da eksi tamsayılardır. Hemen her sayfada Fliess bu formülü (x ve y değerlerini seçerek) doğal olaylara uydurmaya çalışır. Örneğin ay dünyanın etrafındaki bir dönüşünü 28 günde tamamlamaktadır; güneşteki lekelerin dönemi yaklaşık 23 yıldır vb...

Kitabın ekleri 365 in katları, 23 ün katları, 28 in katları; 23 ün, 28 in karelerinin katları, 644 ün katları ile doludur. Ayrıca eklerde 12167, 24334, 36501, 21952, 43904 gibi önemli (!) bazı sabitler de bulunmaktadır. Bunların öneminin (!) açıklanmasını okuyuculara bırakıyorum.

Tablolardan biri 1 den 28 e kadar sayıları 28 ve 23 ün uygun katlarının farkları olarak vermektedir. (Örneğin $13 = 21 \times 28 - 25 \times 23$).

Freud, birçok kez —özellikle Fliess'e yazdığı mektuplarda— matematikten hiç anlamadığını ifade etmişti. Fliess ise eh, biraz aritmetik biliyordu. Ama bu biraz aritmetik, Fliess'in 23 ile 28, aralarında asal oldukları için (yani ortak bölenleri olmadığı için), herhangi bir tamsayının x ve y yi uygun

seçmek koşuluyla $23x + 28y$ şeklinde yazılabileceğini anlamasına yetmemişti anlaşılan. Bu nedenle doğada rastlanan her tam sayıyı bu şekilde yazabilmek Fliess'e bu işte bir "keramet" olduğu izlenimini veriyordu herhalde.

Herhangi bir tamsayıyı $23x + 28y$ şeklinde nasıl yazabiliriz? Önce 1 sayısını bu şekilde ifade edelim: $x = 11$ ve $y = -9$ seçerek görüyoruz ki,

$$23 \times 11 + 28 \times (-9) = 1$$

Öyleyse

$$23 \times (11 \times 2) + 28 \times (-9 \times 2) = 2$$

$$23 \times (11 \times 3) + 28 \times (-9 \times 3) = 3$$

ya da herhangi bir N tamsayısı için

$$23 \times 11 \times N - 28 \times 9 \times N = N$$

Demokrasimiz neden her 10 yılda bir bakım gerektiriyor? Çünkü

$$23 \times 110 - 28 \times 90 = 10.$$

Ernest Jones (1897 - 1958) Freud'un en yakın çalışma arkadaşı ve en sadık destekleyicilerinden biriydi. Freud'un 3 ciltlik yaşam öyküsünü yazmıştır. Bu eserin bir yerinde Jones, Der Ablauf Des Lebens'le ilgili olarak Freud'la aralarında geçen konuşmayı şöyle anlatıyor[33] "...Freud'un Fliess'le tanışık olduklarını biliyordum, ama kuşkusuz bir zamanlar aralarındaki ilişkinin bu kadar yakın olduğunu bilmiyordum. Ona, iki apandisit krizi arasındaki zaman aralığının neden hep aynı olmadığını Fliess'in nasıl açıkladığını sordum. Freud bana şakacı gözlerle baktı ve 'bu Flies'i yıldırmazdı ki, O usta bir matematikçiydi.[34] 23 ile 28 i aralarındaki farkla çarparak sonuçları ekleyerek ya da çıkararak ya da hatta daha karmaşık bir aritmetikle istediği sayıya mutlaka varırdı' dedi."

Fliess'in ölümünden sonra Alman Hekimi J. Aelby 1928'de Fliess'in kuramını mahkum eden bir kitap yazar. Ancak artık Almanya'da "23 - 28 mezhebi" iyiden iyiye kendini kabul ettirmiştir. Hermann Swoboda bu mez-

33 Bu dönemde artık Freud'la Flies'in eski muhabbeti kalmamıştır.

34 Bu Freud'un fikri...

hebin en önemli kişisidir. Viyana Üniversitesi'nde psikolog olan Swoboda, zamanının büyük bir bölümünü bu kuram üzerinde araştırma yapmaya, kuramı savunan yazılar yazmaya ayırır. O da Fliess'ten aşağı kalmaz; 576 sayfalık Das Siebenjahr'ı (Yedinin Yılı) yazar. Kitapta önemli hastalıkların ortaya çıkışlarının, kalp sektelerinin, ölümlerin hep belirli günlere rastladığını kanıtlamak amacıyla yüzlerce aileden örnekler vardır. Swoboda, aynı zamanda "kritik" günleri hesabetmek için ilk hesap cetvelini icadeder. Çünkü böyle bir alete başvurmaksızın ya da ayrıntılı atlaslar, tablolar olmaksızın kritik günlerin hesabı uzun zaman almaktadır ve ustalık isteyen bir iştir.

İnanılmaz gibi görünecek ama 1960'larda dahi Batı Almanya ve İsviçre'de hâlâ Fliess'in müritleri bulunmaktaydı. Bazı İsviçre hastanelerinde ameliyat için uygun günler, böylesi doktorlarca saptanmaktaydı.

Modern Fliess'çiler yukarda sözünü ettiğimiz dişil ve eril dönemlere üçüncü bir dönem daha ekleyerek kurama katkıda bulundular. Üçüncü dönemin adı "zihinsel" dönem. Dönemin uzunluğu ise 33 gün.

Üç dönem, kişinin doğumu ile salınıma başlarlar ve şaşmaz bir düzenle yaşam boyu salınıp dururlar (daha bilimsel(!) olmak gerekirse ileri yaşlarda bu salınımların genlikleri azalır). Eril salınım insanın fiziksel güç, kendine güven, girişkenlik, dayanıklılık gibi "eril" yanlarını, dişil salınım ise duygusallık, önsezi, yaratıcılık, sevecenlik, güleryüzlülük gibi dişil yanlarını; yeni keşfedilen(!) zihinsel salınım ise zekâ, bellek gücü, dikkat, kavrayış gibi zihinsel yanları denetler. Modern Fliess'çilerin bütün bunlara verdiği ad ise "biyoritm". Ev mi taşıyacaksınız? İş aramaya mı çıkacaksınız? Belediye otobüsüne mi bineceksiniz? Eril salınımınızın genliğinin yüksek olduğu bir günü seçin. Ona evlenme mi teklif edeceksiniz? Evinize mobilya mı satın alacaksınız? Fotoroman mı okuyacaksınız? Bu kez dişil salınımınızın yükseklerde olduğu bir günü seçin. "Ben bütün bu saçmalıkları neden okuyorum?" diye düşünmeye mi başladınız? Şu halde sizi kutlamak gerek; bugün zihinsel salınımızın yüksek olduğu günlerden biri.

Şaka bir yana, bütün bunları ben neden yazıyorum? Çünkü duyduğuma göre ülkemizde de, önde gelen üniversitelerimizden birinde bir "biyoritm laboratuvarı" kurulacakmış ya da kuruluyormuş. Böyle bir bilimsel atılıma benim de katkım olsun istedim. Fena mı yaptım yani?

MATEMATİK EĞLENDİRİR

p ve q aralarında asal iki tamsayı olmak üzere herhangi bir tamsayı N nin $N = px + qy$ şeklinde yazılabileceğini gösterin. Burada x ve y pozitif ya da negatif tamsayılardır.

YANITLAR

Probleme yanıtı iki teorem halinde verelim:

Teorem 1 p ve q aralarında asal iki tamsayı olsun.
k, $Q = \{1, 2, ..., q-1\}$ kümesinden değer alan bir tamsayı olmak üzere

$$kp = \ell_k q + r_k \tag{1}$$

ifadesinde r_k da Q kümesinden değer alır ve $k \neq m$ ise $r_k \neq r_m$ dir (yani farklı iki k değeri için elde edilecek r_k lar da farklıdır).

Kanıt Önce r_k nın kp nin q ya bölümünden kalan, ℓ_k nın da bölüm olduğuna dikkat edelim. Bu nedenle $0 < r_k < q$ ve $0 \leq \ell_k < p$ eşitsizliklerinin doğruluğunu hemen görürüz. Kanıtımızda olmayana ergi yöntemini kullanacağız. Teoremin doğru olmadığını varsayalım. Bu durumda Q kümesinden k ve m gibi öyle farklı iki tamsayı bulabiliriz ki, bu değerler (1) de kullanıldığı zaman bulunacak r_k ve r_m kalanları birbirine eşit olur. Bu durumda

$$kp - \ell_k q = mp - \ell_m q$$

yazılabilir. Şu halde

$$(k-m)p = (\ell_k - \ell_m)q \tag{2}$$

olması gerekir. Hipotez gereği $|k-m| < q-1$ ve $|\ell_k - \ell_m| < p-1$ olduğuna göre (2) ifadesi p ile q nun pq çarpımından daha küçük bir ortak katı olduğu anlamına gelir. Bu ise p ile q nun aralarında asal olma varsayımına aykırıdır. Bizi bu çelişik sonuca götüren varsayım teoremin doğru olmadığı varsayımı idi. Şu halde teorem doğrudur; yani $k \neq m$ için $r_k \neq r_m$ dir. Şimdi k, Q kümesinden $q-1$ tane değişik değer aldığına göre ve her bir değişik k değeri için değişik bir r_k değeri elde edileceğine göre r_k nın da $q-1$

değişik değer alması gerekir. $r_k < q$ koşulu da hatırlanırsa k, Q kümesi içinde değişirken r_k nın da Q kümesi içindeki bütün değerleri (o sırayla olması şart değil) alması gerekir.

Teorem 2 p ve q aralarında asal iki tamsayı olsun.

$$px - qy = 1$$

yapacak şekilde x ve y gibi iki tamsayı daima bulunabilir.

Kanıt $r_k = 1$ yapacak bir k değerinin varlığı Teorem 1 de gösterilmişti. Bu k değeri x, bu k değeri için elde edilecek ℓ_k değeri de y olarak alınırsa teoremin doğruluğu görülür.

(3) ifadesini sağlayan x ve y nin varlığını gösterdiğimize göre bu ifadede her iki tarafı N ile çarparak, herhangi bir N için $px + qy = N$ verecek x ve y nin varlığını da kanıtlayabiliriz.

EKLER

1982 yılı başlarında Martin Gardner'in "Dr. Fliess'in Nümerolojisi" adlı yazısını okudum. Bu yazıda Gardner, Fliess'in dönemlerle ilgili kuramını, Freud'la olan ilişkisini anlattıktan sonra, Amerika Birleşik Devletleri'nde hâlâ daha buna inananların varlığından, biyoritm atlasları, cetvelleri düzenleyerek bu işten para kazanan düzenbazlardan söz eder, biraz da yakınır. Amerika'daki biyoritm tutkunlarının yaygınlığının bir başka kanıtı da günümüzde piyasada bulunan programlanabilir hesap makinalarının hemen tümünün yazılım paketi içinde bir de biyoritm programı olması.

Gerek Martin Gardner'in yazısından, gerekse genel olarak biyoritm olgusundan bir öğretim üyesi arkadaşıma söz açtığımda, arkadaşım bu konuda hiç de Amerika'dan geri olmadığımızı hatta İstanbul'daki gözde üniversitelerimizden birinde bir profesörün bir biyoritm laboratuvarı kurma girişiminde olduğunu söylemişti. Bunun üzerine ben de bu yazıyı yazmıştım. Laboratuvar kuruldu mu, bilmiyorum. Çünkü bu profesör tam o sırada —bu ve buna benzer başka bilimsel etkinlikleri nedeniyle olsa gerek— tüm üniversiteleri yönetem kuruluşa üye seçildi. Bu satırları yazdığım sırada da hâlâ orada üye.

BİLİM ADAMLARI KILAVUZU

ANAKSAGORAS
(Yaklaşık MÖ 500 — MÖ 428)

Yunan felsefecisi. MÖ 462 de yurdu olan Anadoludan Atinaya göçtü.

Anaksagoras tam anlamıyla bir akılcıydı. Ona göre yeryüzünü oluşturan süreç neyse, diğer gök cisimlerini oluşturan da oydu. Bu nedenle yeryüzü ile gökteki diğer cisimler aynı maddeden yapılmıştı. Yıldızlar ve gezegenler alev alev yanan kayalardan oluşuyordu. Güneş de yaklaşık Peleponez (Mora yarımadası) büyüklüğünde (21.000 km^2) akkor halde bir kayaydı.

Anaksagoras Atina'da 30 yıldan fazla hocalık yaptı. Ancak sonunda akılcılığını anlamayan ya da çekemeyen bağnaz resmi ideolojinin kurbanı oldu. Dinsizlikle suçlanarak tutuklandı ve mahkemeye verildi. Kendisi resmi ideolojiyle mahkemelik olan bilim adamlarından belki de ilkiydi. Ama hep biliyoruz, hiçbir zaman sonuncusu olmadı.

Arkadaşı ünlü devlet adamı Perikles'in üstün çabaları ve tanıklığı ile beraat etti, ama artık Atina'da kalmadı. Hellespont'a çekildi ve orada öldü.

JANOS BOLYAI
(1802 — 1860)

Macar matematikçisi. Gauss'un da yakın arkadaşı olan bir matematikçinin oğludur. Babası Farkas, Öklid'in paralellik aksiyomunu (Lobaçevski maddesine bakınız) kanıtlayabilmek için çok uğraşmış, ancak tabii başarısız olmuştu. Uğradığı düş kırıklığı içinde oğlunu bir mektupta şöyle uyarır: "Sana yalvarıyorum, şu paraleller sorununu kurcalama (...). Bu lânet olası ölü denizin bütün kayalıklarının yanından geçtim ve her seferinde kırık bir direk, yırtık bir yelkenle geri döndüm." Fakat Janos babasına kulak asmaz ve sonunda 1823'te başarıya ulaşır. Bolyai gerçeği bulmuştur: Paralellik aksiyomunu aynen almak, değiştirmek ya da yadsımakla değişik geometriler yaratmak olanaklıdır. Janos bu buluşunu babasının yazdığı bir kitapta 24 sayfalık bir ek olarak yayınlar. Baba Bolyai kitabın bir kopyasını 1832'de arkadaşı Carl Friedrich Gauss'a sunar. Gauss'tan gelen yanıt ilginçtir: "Bu yapıtı övme gücünü kendimde bulamıyorum (...). Onu övmek kendimi övmek gibi olacak. Çünkü yapıttaki herşey oğlunuzun izlediği yol, oğlunuzun ulaştığı sonuçlar, geçen 30 - 35 yıl boyunca zaman zaman zihnimi kurcalayan düşüncelerle hemen hemen çakışıyor."

Gauss bütün bunları daha önceden bulmuştur; ama konu o kadar köktenci bir biçimde geometriyi sarsmaktadır ki, bu buluşunu yayınlamak cesaretini kendinde bulamamıştır.

Bu mektubu alan Bolyai herşeyin Gauss tarafından zaten bilindiğini öğrenince tüm hevesini yitirir ve konuyla bir daha uğraşmaz.

Bolyai buluşunun kendisinden 3 yıl önce Lobaçevski tarafından da yayınlandığını öğrenseydi daha da büyük düş kırıklığına uğrardı herhalde.

DİYOFANTUS
(Yaklaşık 210 — Yaklaşık 290)

Yunan matematikçisi. Yaşamı hakkında fazla birşey bilinmiyor. Yunan matematiğine cebiri sokan kişi sayılır. Diyofantus, matematik problemlerinin çözümünde bugün cebirsel yöntem diye nitelendirebileceğimiz bir yöntem (ve buna bağlı bir simgeler dizgesi) geliştirdi.

Diyofantus'un yapıtları ortaçağ süresince Araplarca muhafaza edildi ve daha sonra 16. yüzyılda Latinceye çevrildi.

Diyofantus'un en iyi bilinen çalışmaları çözümleri tamsayı olması istenen cebirsel denklemler üzerinedir. Bugün bile bu tür denklemlere "Diyofantus denklemleri" adı verilmektedir.

ALBRECHT DÜRER
(1471 — 1528)

Alman ressamı, matematikçisi. Dürer gravür ve tahta baskı tekniğinin, gelmiş geçmiş en büyük ustalarından biridir. Dürer'in sanatla ilişkisi kendisini bilime itti. 1525'te pergel - cetvel kullanarak çizim yöntemleri üzerine bir kitap yazdı. Kitap perspektif sorunları ile ilgili ressamların kullanımı için hazırlanmıştı.

Dürer ayrıca insan vücudunun oranları üzerinde de eserler verdi.

LEONHARD EULER
(1707 — 1783)

İsviçreli matematikçi. Basel Üniversitesinden 16 yaşında mezun olduktan sonra Rus Çariçesi 1. Katerina'nın St. Petersburg'da kurduğu akademide çalışmaya başladı (1727). Burada güneşi gözleyerek zamanın hassas bir biçimde saptanması üzerinde çalışmalar yaptı. Bu çalışmaları sırasında güneşe çok uzun süreler bakması nedeniyle sağ gözünü kaybetti (1735). Euler 1741'de Berlin'e gitti ve 1766 yılına kadar Bilimler Akademisinde kaldı. 1766'da tekrar St. Petersburg'a dönen Euler yaşamının sonuna kadar burada kaldı. Euler 1766'da öteki gözünü de kaybetti.

Euler matematik tarihinin en üretken kişilerinden biridir. Matematiğin hemen her dalında araştırma ve yayın yaptı. Yaşamı boyunca 800'den fazla makale yayınladı.

Matematik bilimine uçsuz bucaksız katkılarının yanısıra (ya da belki bunun için) Euler aynı zamanda bugün de kullandığımız matematiksel simgelerin de isim babasıdır. Bunların arasında π (dairenin çevresinin çapına oranı), e (tabii logaritma tabanı), i (birim sanal sayı $\sqrt{-1}$) ve f(.) (fonksiyon, işlev) sayılabilir.

PIERRE DE FERMAT
(1601 — 1665)

Fransız matematikçisi. Hukuk okudu ve 1631'de Orleans Üniversitesini bitirdi. Daha sonra Toulouse kent meclisinde üyelik yaptı. 1638'de ağır ceza mahkemesine atandı. Fermat amatör bir matematikçiydi. Ancak gene de 17. yüzyılın ilk yarısının en önde gelen iki matematikçisinden biridir (öteki matematikçi René Descartes'tir).

Fermat, "Diyofantus denklemleri" üzerinde çalışarak modern sayılar kuramının temellerini attı. Onun geliştirdiği sayılar kuramı daha da ileriye gitmek için, bir yüzyıl sonra, Euler'i beklemek zorunda kalacaktır. Descartes'tan bağımsız olarak analitik geometriyi kurdu. Eğrilerin teğetlerini, maksimumlarını minimumlarını bulmak için yöntemler geliştirdi; böylece diferansiyel hesabın temellerini attı. Blaise Pascal'la yazışarak olasılık kuramını kurdu.

Fermat buluşlarını yayınlamayı savsaklayan, düzenli not tutmayan, kitapların kenarlarına acele notlar alan, buluşlarını arkadaşlarına alelade mektuplarla bildiren savruk bir kişiydi. Bu yüzden analitik geometrinin kurucusu olarak Descartes'i, diferansiyel hesabın başlatıcısı olarak da Newton'u biliyoruz bugün.

Ama farketmez. O bütün bunları kendi zevki için yapmıştı. O bir amatördü. Günümüzde de "amatörlerin prensi" olarak bilinir.

JOHANN KARL FRIEDRICH GAUSS
(1777 — 1855)

Alman matematikçisi Gauss gerçek bir dâhiydi. 1795'te Braunschweig dükü Ferdinand'ın desteğiyle Göttingen Üniversitesine girdi. 1799'da "cebirin temel teoremi" olarak bilinen ve "n inci dereceden bir cebirsel denklemin tam n tane kökü vardır" şeklinde ifade edilebilen teoremi kanıtlayarak doktora derecesini aldı.

Gauss matematiğin hemen her dalında ürün verdi. 1801'de aritmetiğin temel teoremini kanıtladı: Her doğal sayı asal sayıların çarpımı olarak bir ve yalnız bir şekilde gösterilebilir. Gauss, Fermat'nın başlattığı sayılar kuramında önemli çalışmalar yaptı.

Gauss aynı zamanda Öklid'in aksiyomlarını değiştirerek bir Öklid dışı geometri geliştirdi. Ancak bu buluşunu yayınlamaya cesaret edemedi. Bu nedenle bu konuda yayın yapan Lobaçevski ve Bolyai,Öklid dışı geometrilerin kurucusu olarak bilinirler.

Gauss yerin magnetik alanı üzerinde de çalışmalar yaptı. Bu çalışmalar için üniversitede bir gözlemevi kurdu ve yerin magnetik kutuplarının yerlerini saptadı.

1832'de magnetik olayların da ölçülmesini olanaklı kılan bir birimler sistemi geliştirdi. Bu nedenle magnetik akı birimine "gauss" adı verildi.

1833'te bir telgraf cihazı yaptı.

Gauss daha üniversitede öğrenciyken pergel - cetvel kullanarak bir düzgün onyedigenin nasıl çizileceğini bulmuştu. Ayrıca daha da ileri giderek pergel - cetvelle her çokgenin çizilemeyeceğini, yalnızca belirli çokgenlerin çizilebileceğini göstermişti (örneğin beşgen çizilebildiği halde yedigen çizilemez).

Bu nedenle bugün doğduğu kent Braunschweig'de Gauss'un 17 köşeli yıldız şeklinde bir kaide üzerinde yükselen bir heykeli bulunmaktadır.

DAVID HILBERT
(1862 — 1943)

Alman matematikçisi. Geometriyi tutarlı bir aksiyomatik yapıya kavuşturan kişidir. 19. yüzyılın başlarına kadar geometri deyince akla Öklid'in kurduğu geometriden başka birşey gelmiyordu. Ancak 19. yüzyılda Bolyai, Lobaçevski ve Riemann Öklid'in paralellik aksiyomunu değiştirerek yeni Öklid dışı geometriler kurdular. Bu olgu Öklid geometrisinde nelerin aksiyom, nelerin varsayım ve nihayet nelerin bu aksiyom ve varsayımlardan hareket edilerek kanıtlanması gereken teoremler olduğuna ilişkin kuşkular yarattı. Buna ek olarak matematiksel bir yapının kurulmasında temel taşı olarak kullanılacak aksiyomların minimum sayısının ne olduğu, bu aksiyomların iç tutarlılığı (yani bunlardan hareket edilerek çıkarılacak sonuçların (teoremlerin) birbirleriyle çelişip çelişmeyeceği) gibi sorunlar doğdu.

İşte Hilbert bu sorunların çözümünde büyük katkıları olan bir kişidir. 1899'da yayınladığı "Geometrinin Temelleri" adlı kitapta matematikte aksiyomatik yaklaşımın kurucusudur.

Hilbert 1885'te Königsberg Üniversitesinde doktorasını tamamladı. 1895'te Göttingen'de matematik profesörlüğüne atandı ve 1930 yılında emekli oluncaya kadar bu görevde kaldı.

ADRIEN - MARIE LEGENDRE
(1752 — 1833)

Fransız matematikçisi. 1775 ile 1780 arasında Paris'te École Militaire' de, 1795'ten sonra da École Normale'de matematik profesörlüğü yaptı.

Legendre önceleri sferoidlerin (elipsleri eksenlerinden biri etrafında döndürerek oluşturulan hacimler) çekimleri üzerinde çalıştı. Bu çalışmasını 1783'te yayınladı. Bu çalışması ile bugün Legendre fonksiyonları diye bilinen fonksiyonları da bilim dünyasına tanıttı. Legendre, 1794'te yayınladığı **Geometrinin Öğeleri** adlı kitabıyla ün yaptı. Bu kitabında Legendre, Öklid'in Öğeler adlı kitabını yeniden düzenledi, teoremlerin kanıtlarını basitleştirdi ve böylece daha etkin bir ders kitabı oluşturdu. Legendre'in bu yapıtı o tarihten sonra Avrupa'da ve Amerika'da Öklid'in **Öğeler**'inin yerini aldı ve kendisinden sonra bu konuda yazılan tüm geometri kitaplarına örnek oldu.

Öğeler'de Legendre π nin irrasyonel bir sayı olduğunun çok basit bir kanıtını verir. Aynı zamanda π^2 nin de irrasyonelliğini ilk kez burada kanıtlar.

Gene bu kitapta Legendre π nin cebirsel bir sayı olmaması gerektiğine ilişkin kuşkularını belirtir.

FERDINAND LINDEMANN
(1852 — 1939)

Alman matematikçisi. 1882'de Hermite'in geliştirdiği yöntemleri kullanarak, π nin cebirsel bir sayı olmayıp, aşkın bir sayı olduğunu gösterdi. Bu şekilde, ta antik çağ matematikçilerinden beri üzerinde uğraşılagelen daireyi kare yapma probleminin olanaksızlığı kanıtlanmış oldu.

Lindemann aynı zamanda Fermat'nin son teoremiyle de uğraştı. Sonunda 1907'de teoremi kanıtladığını sanarak uzun bir makale yazdı. Fakat ne yazık ki kanıt Lindemann'ın nedense göremediği bariz bir hata ile başla-

dığı için bütün çalışma da, makale de boşa gitti.

Lindemann 1883'te Königsberg Üniversitesinde öğretim üyeliğine başladı ve daha sonra 1893'te Münih Üniversitesine geçti; buradan da 1929'da emekliye ayrıldı.

NİKOLAY İVANOVİÇ LOBAÇEVSKİ
(1793 — 1856)

Rus matematikçisi. 21 yaşında Kazan Üniversitesinde öğretim üyeliğine, 34 yaşında da aynı üniversitenin rektörlüğüne getirildi.

Rektör olarak üniversiteye büyük katkılarda bulundu. Öğretim üyelerini, oldukça kötü duruma düşmüş olan akademik düzeyi iyileştirmek için yeniden örgütledi. Kütüphaneyi zenginleştirdi, laboratuvarlar kurdu. 1830'da kolera salgınına, 1842'de de büyük bir yangın tehlikesine karşı üniversiteyi korudu.

Lobaçevski, bütün bu idari başarılarının yanı sıra matematik dalında önemli katkılarda bulunmaktan da geri durmadı. Lobaçevski'nin bu alandaki en önemli katkısı 2000 yıldır saltanatını koruyan Öklid geometrisinin dışında da geometriler varolabileceğini göstermesidir (bu konuda katkıda bulunan öteki matematikçiler Bolyai, Gauss ve Riemann'dır).

Öklid'in geometrisi beş aksiyom üzerinde kuruludur (Öklid maddesine bakınız). Bunlardan: ilk dördü "aksiyom" sözcüğünü hakedecek denli "apaçık" oldukları halde, beşincisi biraz zor inanılır niteliktedir. Yani sanki kanıtlanması gerekirmiş gibi gelir. Bu aksiyom kısaca paralellik aksiyomu adı verilen ve çoğumuzun hatırlayacağı, "bir doğruya dışında alınan bir noktadan bir ve yalnız bir paralel çizilebilir" aksiyomudur. Öklid bile bu aksiyomdan rahatsız olmuş olmalı ki, Kitap I'de kanıtladığı teoremlerden, bu aksiyomu gerektirmeyen ilk 28 ini öne alır; ve ancak bundan sonra diğer teoremler için beşinci aksiyomu kullanmaya başlar.

Paralellik aksiyomunun bu niteliğinden dolayı 1800'lerin başına kadar birçok matematikçi beşinci aksiyomun gerçekte bir aksiyom olmayıp, ilk dört aksiyom kullanılarak kanıtlanabilecek bir teorem olduğu sanısına kapılarak bu yönde yoğun çaba harcadı. Ancak bütün bu çabalar boşa çıktı. Beşinci aksiyom ilk dört aksiyomdan çıkarılamıyordu. Matematikçiler Öklid'e bir kez daha hayran oldular.

Lobaçevski olaya başka türlü yaklaştı: Belki de beşinci aksiyom tutarlı bir geometrinin kurulması için gerekli değildi. Belki beşinci aksiyomun değiştirilmesiyle ya da yadsınmasıyla, Öklid geometrisi olmayan, ama oluşturacağı tutarlı bütünlük açısından geometri olan başka geometriler yaratılabilirdi. Lobaçevski paralellik aksiyomunu şöyle değiştirdi: Bir doğruya dışında alınan bir noktadan en az iki paralel çizilebilir. Öklid'in diğer dört aksiyomunu da kullanarak bambaşka bir geometri geliştirdi ve bu fikirlerini 1829'da yayınladı.

Lobaçevski'nin geometrisinin geçerli olduğu iki boyutlu bir uzay, geniş uçlarından karşı karşıya getirilerek birbirine tutturulmuş, diğer uçları da giderek incelerek sonsuza dek uzanan bir çift zurnaya benzeyen bir şeklin yüzeyi olarak düşünülebilir.

Lobaçevski'nin, Bolyai'nin ve Riemann'ın kurdukları Öklid dışı geometrilere uzun süre işe yaramaz birer matematik garibesi olarak bakıldı. Ta ki, Einstein, içinde yaşadığımız üç boyutlu uzayın Öklid geometrisine değil, Riemann'ın oluşturduğu Öklid dışı geometriye uyduğunu gösterene kadar.

ÖKLİD
(MÖ 300 dolayları)

Yunan matematikçisi. Gelmiş geçmiş matematikçiler içinde adı geometriyle en çok özdeşleştirilen kişidir. Öklid geometri dünyasında kapladığı bu seçkin yerini kendisinin büyük bir matematikçi olmasından çok, geometrinin başlangıcından kendi zamanına kadar bilineni "Öğeler" adını verdiği kitaplarında toplamış olmasına borçludur. Öğeler, dilden dile çevrilmiş, yüzlerce kez kopya edilmiş, matbaanın icadından sonra da binlerce kez gözden geçirilmiş ve yeniden basılmıştır.

Öklid derlemesinin tutarlı bir bütün olmasını sağlamak için, kanıt gerektirmeyen apaçık gerçekler olarak beş aksiyom ortaya koyar ve diğer bütün önermeleri (teoremleri) bu aksiyomlardan çıkarır. Öklid'in beş aksiyomu şunlar:

1. İki noktadan bir ve yalnız bir doğru geçer.
2. Bir doğru parçası iki yöne de sınırsız bir şekilde uzatılabilir.
3. Merkezi ve üzerinde bir noktası verilen bir çember çizilebilir.
4. Bütün dik açılar eşittir.

5. Bir doğruya dışında alınan bir noktadan bir ve yalnız bir paralel çizilebilir.

Öğeler 13 kitaptan oluşmaktadır. Bunlar sırasıyla, I— Benzerlikler, paraleller, Pisagor teoremi; II— Cebirsel olarak şimdi bir örneğini $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ şeklinde yazabileceğimiz, ama o devirde geometrik olarak incelenen özdeşlikler, alanlar, altın kesim; III— Daireler; IV— Dairelerin içine ve dışına çizilen çokgenler; V— Oran - orantı kavramı; VI— Çokgenlerin benzerlikleri; VII ve IX— Aritmetik (eski sayılar teorisi); X— Ortak ölçüsü olmayan büyüklükler; XI ve XIII— Uzay geometrisidir.

Öklid geometrisi 19. yüzyılın başına kadar rakipsiz kaldı. Hatta 20. yüzyılın ortalarına kadar bile orta öğretimde geometri Öklid'in Öğeler'ine bağlı kalınarak okutuldu.

Öklid'in yaşamı konusunda hemen hiçbir şey bilinmiyor. Önceleri bir Yunan kenti olan Megara'da doğduğu sanıldıysa da, sonradan Megaralı Öklid'in Öğeler'in yazarı İskenderiyeli Öklid'den yüzyıl kadar önce yaşamış bir felsefeci olduğu ortaya çıktı.

Öğeler'in yazarı Yunanlı olabileceği gibi, zamanının Yunan kolonisi İskenderiye'ye öğrenim görmek, sonradan da hocalık yapmak için gelmiş bir Mısırlı da olabilir.

PİSAGOR
(Yaklaşık MÖ 580 — MÖ 500)

Yunan felsefecisi - Doğum yeri olan Samos (Sisam) Adasından MÖ 529'da Güney İtalya'ya, Crotona'ya göç etti. Güney İtalya bu devirde bir Yunan kolonisiydi ve buraya yerleşenlerce Magna Graecia (Büyük Yunanistan) adıyla anılıyordu. Crotona da bu yörenin zengin liman kentlerinden biriydi. Pisagor işte burada, biraz kişisel çekiciliği, biraz kendisinde varolduğunu iddia ettiği kehanet gücü ve biraz da etrafında yaratmayı başardığı gizemci havayla kentin zengin ve soylu delikanlılarından 300 kadarını bir çatı altında topladı ve bir gizli örgüt - okul ya da mezhep kurdu. Pisagor öğrencilerini (müritlerini) iki bölüme ayırıyordu: Dinleyiciler ve matematikçiler. Örgüte dinleyicilikle başlanıyor ve belirli bir deneme süresinden sonra başarılı olunursa matematikçiliğe geçiliyordu.

Pisagor'un öğretisi (pisagorculuk) evrende herşeyin bir sayıya (özellikle tamsayıya) bağlı olduğunu öne sürer. 5 rengin, 6 soğuğun, 7 sağlığın 8 aşkın nedenidir. Düzgün geometrik şekiller de önem taşır pisagorculukta. Örneğin Pisagor yeryüzünün düzgün altıyüzlüden (heksahedron), ateşin piramitten, havanın düzgün sekizyüzlüden (oktahedron), suyun yirmiyüzlüden (ikosahedron) yaratıldığına inanır.

Pisagorcuların sayılara ve şekillere verdikleri gizemci anlamlar bu kişilerin sayıları ve geometrik şekilleri yakından incelemesine de neden oldu doğal olarak. Bunlar arasında en önemlileri Pisagor teoremi ile irrasyonel sayının bulunmasıdır. (Bu konu ile ilgili olarak, "Matematik Nasıl Matematik Oldu" bölümüne bakınız).

Pisagor müzikle de uğraştı. Telin kısaltılmasıyla, çıkardığı sesin inceldiğini keşfetti. İki telden birinin uzunluğu diğerinin iki katıysa, kısa telin çıkardığı ses uzun telin çıkardığı sesin bir oktav üstündeydi. Eğer tellerin uzunluklarının oranı 3'ün 2'ye oranı gibiyse, iki telin çıkardığı sesler beşli aralıklı idi. Bu nedenle örneğin bağlamada parmağımızı tellerden birinin ortasına bastığımız zaman teli titreştirirsek çıkacak olan ses, tel boş titreşirken çıkacak sesin bir oktav üstünde olacaktır. Benzer şekilde eğer parmağımız teli uzunluk bakımından 2/3 oranında bölen noktadaysa telin boş durumuna oranla bir beşli aralık yukarda ses çıkacaktır.

Burada armoni açısından birlikte işitildikleri zaman kulağa hoş gelen iki sesin —oktav aralıklı sesler bir yana bırakılırsa— do - sol gibi beşli aralıklı olduklarını hatırlatalım. Bu nedenle olsa gerek geometride bir AB doğru parçasını "armonik" bölen C ve D noktaları,C noktası A ile B nin arasında, D de B nin sağında olmak üzere CB/CA = DB/DA olacak şekilde seçilen noktalar olarak tanımlanır. Şimdi eğer A ve D bir telin iki ucunu gösterirse C ve B noktaları da CB/CA = DB/DA = 1/2 olacak şekilde seçilirse C ve B noktaları sırasıyla boş tele oranla bir beşli ve bir oktav yukarda olan noktalardır.

Sayılarla müzik arasında bu ilişkiyi keşfedince Pisagor epey keyiflenmiş olsa gerektir.

Pisagor, sabah yıldızı (Phosphorus) ile akşam yıldızının (Hesperus) aynı yıldız olduğunu anlayan ilk Yunanlıdır. Kendisinden sonra bu yıldız uzun süre Afrodit adı ile anıldı. Bugün bunun Venüs gezegeni olduğunu biliyoruz.

Pisagor gerek dayandığı öğrenci kitlesi gerekse öğretisinin içerdiği temel öğeler bakımından soylulara yatkın bir felsefeciydi. Pisagor'un ölümünden 10 yıl kadar önce Güney İtalya'da demokratların egemenlik kurmasıyla pisagorculuk ve pisagorcular yaygın bir şekilde kovuşturmaya uğradı. Pisagorun kendisi de Crotona'dan sürüldü. Pisagorculuk da felsefecinin ölümünden sonra yalnızca yüzyıl kadar daha yaşadı ve tarih sahnesinden silindi gitti. Ancak Pisagor'un öğretisi ve fikirleri çağımıza kadar felsefe dünyasını etkiledi. Bir söylentiye göre felsefeci sözcüğünü türeten de odur.

GEORGE FRIEDRICH RIEMANN
(1826 — 1866)

Alman matematikçisi. 1851'de doktora tezi Göttingen'de kabul edildi. Kısa yaşamında matematiğin hemen her dalında çalıştı ve yayın yaptı.

Riemann'ın en önemli katkısı Lobaçevski ve Bolyai'nin buldukları Öklid dışı geometriden daha değişik bir geometri yaratmasıdır (1854).

Riemann geometrisi Öklid'in paralellik aksiyomu yerine şu aksiyomu kullanır: Bir doğruya dışında alınan bir noktadan hiçbir paralel çizilemez. Bu aksiyomla tutarlı olması için Riemann geometrisi Öklid'in "iki noktadan bir ve yalnız bir doğru geçer" aksiyomunu da yadsır. Bu geometride verilen iki noktadan sonsuz sayıda farklı doğru geçer.

Riemann geometrisinin geçerli olduğu tipik iki boyutlu uzay bir kürenin yüzeyidir. Küre yüzeyinde doğruyu iki nokta arasındaki en kısa yol olarak tanımlarsak, bu, o iki noktadan geçen büyük dairenin (yani merkezi kürenin merkeziyle çakışık olan dairenin) bir parçası olacaktır. Bu nedenle örneğin denizaşırı sefer yapan gemiler yolu uzatacak başka bir neden yoksa büyük daireleri izlerler.

Şimdi böyle bir küre yüzeyi üzerinde doğrular sonsuza dek uzayamaz: Büyük dairelerin çevresi sonludur. Doğrular birbirine paralel olamaz: Büyük daireler daima iki noktada kesişir ve nihayet iki noktadan sonsuz sayıda doğru geçer.

Böyle bir geometride üçgenlerin iç açılarının toplamı da 180° den büyük olur.

Riemann'dan 50 yıl sonra Einstein, içinde bulunduğumuz uzayın Ök-

lid'den çok Riemann geometrisine uyan üç boyutlu bir eğrik uzay olduğunu gösterdi.

ZENO

(Yaklaşık MÖ 450 — bilinmiyor)

Yunan felsefecisi. Elea felsefe okulunun başıdır. Eleacılar gerçeğe yalnızca akıl yürütmeyle ulaşılabileceğine, bu uğraşıda duyu organlarının hiçbir rolü olmaması gerektiğine inanıyorlardı.

Zeno algılandığı şekliyle hareketi yadsıyan, hareketin gerçekte hareket olmadığını kanıtlamaya çalışan dört paradoksu ile ünlüdür. Bunlar içinde en iyi bilineni Aşil ile kaplumbağa paradoksudur. Aşil'in kaplumbağadan 10 kez daha hızlı koşabildiğini varsayalım. Kaplumbağa yarışa 10 m önden başlasın. Bu durumda Aşil hiçbir zaman kaplumbağayı geçemez! Çünkü, Aşil'in aradaki 10 m farkı kapatacağı sürede kaplumbağa 1 m daha ileri gidecek; bu kez Aşil bu 1 m'lik farkı koşarken kaplumbağa bir 10 cm'lik daha yol alacaktır vb. Şimdi duyu organlarımız bize bu yarışta Aşil'in kaplumbağayı geçtiğini göstereceğine göre ve Aşil'in kaplumbağayı hiçbir zaman geçemeyeceğini akıl yürüterek kanıtladığımıza (!) göre duyu organlarımız bize yanlış bilgi veriyor olmalılar (!).

Zeno'nun paradokslarının tümü uzayın ve zamanın sonsuz bölünebilir olması varsayımından kaynaklandığı için, Demokritus gibi kimi felsefeciler sonsuz bölünebilirliği yadsıyarak (maddenin daha fazla bölünemeyen atomlardan oluştuğunu varsayarak) bu paradoksların içinden çıkmaya çalıştılar. Bu ilkel atomistler zamanlarında pek yandaş bulamadılar, ama 20 küsur yüzyıl sonra 18. yüzyılda Dalton gibi bilim adamları maddenin gerçekten "atom" adı verilen ve —o zaman— daha fazla bölünemeyeceği sanılan en küçük taneciklerden oluştuğunu ortaya koydular.

Öte yandan matematik alanında da konuya bambaşka bir açıdan yaklaşılarak 17. yüzyılda sonsuz bölünebilirlik doğru olsa bile sonsuz sayıda terimin toplamının ille sonsuz vermesi gerekmediği, toplamadaki terim sayısı artarken terimler uygun bir biçimde giderek küçülüyorlarsa sonunda toplamın sonlu bir sayıya yakınsayacağı bulundu.

Bugün Zeno tümden yenilmiş durumda. Ama 20 küsur yüzyıl süren bir tartışmayı başlattığı ve bir bakıma bugün bildiğimizi bulmamıza bizi zorladığı için tarihsel görevinden dolayı ona teşekkür borçluyuz.

KAYNAKLAR

KİM KORKAR MATEMATİKTEN?

1. Lionnais, F.L., (Editör) **Great Currents of Mathematical Thought,** Dover, 1971.
2. Gamow G., **One Two, Three ... Infinity,** Bantam Books, 1967.
3. Greenblatt, M.H., **Mathematical Entertainments,** Thomas Y.Crowell Company, 1965.

MATEMATİK NASIL MATEMATİK OLDU?

1. Chapelon, J., "Mathematics and Social Change", **Great Currents of Mathematical Thought,** Lionnais F.L., (Editör), Dover. 1971.
2. Rademacher, H., Toeplitz, O., **Sayılar ve Şekiller,** Türk Matematik Derneği Yayınları, Sayı 25, 1964.

ORTAÇAĞ ARAPLARI

1. Landau, R., **The Arab Heritage and Western Civilization.**
2. Bir, A., **Benu Musa'nın Otomatik Kontrol Düzenleri (IX. yüzyıl).**

LEONARDO FIBONACCI

1. Knuth, D.E., **Fundamental Algorithms,** 1. Cilt, Addison Wesley, 1975.
2. Meyer, J.S., **Fun With Mathematics,** The Worid Publishing Company 1962.

Π'NİN ÖYKÜSÜ

1. Beckmann, P., **A History of Pi,** The Golem Press, 1970.
2. Dubreil, P., "The History of Misterious Numbers", **Great Currents of Mathematical Thought,** Lionnais F.L., (Editör), Dover, 1971.
3. Cadwell, J.H., **Topics in Recreational Mathematics,** Cambridge University Press, 1966

SEKİZ PROBLEM

1. Shklarsky, D.O., Chentzov N.N., Yaglom, I.M., **The USSR Olympiad Problem Book,** Freeman and Company 1962.
2. Kraitchik, M., **Mathematical Recreations,** Dover 1953.
3. Longley-Cook, L.H., **New Math Puzzle Book,** Van Nostrand Reinhoid Company 1970.

YILDIRIM GİBİ ÇARPMAK

1. Gardner, M., **Mathematical Carnival,** Pelican Books, 1979.

ALGORİTMA

1. Korfhage, R.R., **Logic and Algorithms,** John Wiley, 1966.
2. Knuth, D.E., **Fundamental Algorithms,** Addison Wesley, 1973.

ARİTMETİK DİZİLER VE ÖTESİ

1. Hogben, L., **Mathematics for the Million,** Pan Books Ltd., 1967

SÖZDEBİLİME KATKI

1. Gardner, M., **Mathematical Carnival,** Pelican Books, 1979.
2. Freud, S., **The Origins of Psychoanalysis: Letters to Wilhelm Fliess; Drafts and Notes,** Basic Books, 1954.
3. Jones, E., **The Life and Work of Sigmund Freud,** Cilt 1, Basic Books, 1953.

DİZİN

A
Afrodit 105
Ahmes 20
Aitken, Alexander 62
Aksiyom 99
Akşam yıldızı 104
Algorism 71
Algoritma 71, 72, 77
Altıgensel sayı 82, 83
Altın kesim 35, 36, 103
Anaksagoras 49, 93
Aritmetiğin temel teoremi 98
Aritmetik dizi 79, 86
Armonik bölme 104
Arşimet 49
Aryabhatta 49
Asal sayı 12, 13, 100
Aşkın sayı 49, 51, 52, 101
Atina 95

B
Basel Üniversitesi 97
Batlamyos 28, 49
Benu Musa 28
Berlin Bilimler Akademisi 96
Beşgen 99
Beşgensel sayı 82
Beyt el Hikme 25
Biyoritm 94
Bolyai, Janos 8, 12, 96, 101, 105
Brahmagupta 49
Braunschweig 97, 98
Büyük daire 105

C
Cebirin temel teoremi 98
Cebirsel denklem 51, 97, 98
Cebirsel sayı 62
Colburn, Zerah 62
Corotona 103, 105
Çokgensel sayı 82
Çung Hing 49

D
Daireyi kare yapmak 50, 51, 52, 101
Dalton, John 106
De lagny 49
Demokritus 106
Descartes, René 98
Diyofantus 13, 14, 16, 96
Diyofantus denklemi 32, 96, 98
Dokuz nokta çemberi 11
Dürer, albrecht 11, 97

E
École Militaire 100
École Normal 100
Einstein, Albert 102, 105
El - Beyruni 26
El - Cezari 28
Elea 105, 106
Eleacılık 105
El - Hasan Bin el - Haytam 28
El - Kaşi 49
Euler, Leonhard 11, 13, 45, 49, 51, 52, 53, 97, 98

F
Fermat 13, 14, 98
Fermat'nın son teoremi 13, 98
Fibonacci, Leonardo 31, 32, 33, 34, 35, 49, 69, 72
Fibonacci dizisi 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 46
Fidyas 36
Fliess, Wilhelm 87, 88, 89, 90, 92, 92, 94
Frederick II 32, 33
Freud, Sigmund 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94

G
Galile 27
Gauss, Karl Friedrich 80, 96, 98, 99, 101
Göttingen Üniversitesi 98, 105
Griffith, Arthur 64

H
Harzemli Muhammed Bin Musa 26, 27, 32, 72
Hellespont 96
Hesperus 105
Hilbert, David 8, 12, 99
Hippokrates 50
Hiyal 28
Huneyn Bin İshak 26

İ
İkel üçlü 16

Irrasyonel sayı 21, 23, 49, 51, 53, 98, 105
İstanköy 50

K
Karesel sayı 34, 83
Katerina I, Rus Çariçesi 97
Kazan Üniversitesi 101
Kiyos 50
Knuth, Donald 33
Kök almak 64
Köngsberg Üniversitesi 101

L
Lambert, Heinrich Johann 49, 50
Legendre, Adrien - Marie 50, 52, 100
Leibniz, Gottfried Wilhelm 10
Leonardo da Vinci 37
Liber Abaci 32, 33
Lindemann, Ferdinand 50, 53, 100, 101, 102
Liouville, Joseph 52
Liber Quadratorum 33
Liu Hui 49
Lobaçevski, Nikolay İvanoviç 8, 96, 101, 102, 105

M
Machin, John 49
Magna Graecia 103
Matematiksel tümevarım 42, 69, 83
Megara 103
Memun 26
Mora Yarımadası 95
Münih Üniversitesi 101

N
Newton, Isaac 97
Nümeroloji 87, 88, 89, 91, 94

O
Oktav 104
Olmayana ergi 12, 23, 93
Onyedigen 99
Orleans Üniversitesi 97
Ortak fark 81, 83, 86
Ortak ölçü 50
Otho, Vaentinus 49

Ö
Öğeler 100, 102, 103
Öklid 8, 12, 21, 28, 96, 99, 101, 102, 103, 104
Öklid algoritması 72, 73, 74, 75, 76, 78
Öklid dışı geometri 99, 101, 103, 105
Öklid geometrisi 102, 103
Öklid'in beş aksiyomu 102, 103

P
Paralellik aksiyomu 96, 102, 103, 105
Pascal, Blaise 97
Peloponez 95
Perikles 95
Phosphorus 105
Phyllotaxis 37
Pi 45, 46, 47, 48, 49, 51, 52, 97, 100
Pisagor 23, 53, 80, 102, 103, 104, 105, 106
Pisagorculuk 7, 20, 22, 23, 87, 104
Pisagor üçgeni 14
Pisagor üçlüsü 14, 16
Pisagor teoremi 13, 104, 105

R
Rasyonel sayı 46
Rhind, Alexander Henry 20
Richter 46
Riemann, Georg Friedrich 8, 101, 102, 105
Riemann geometrisi 105

S
Sabah yıldızı 105
Samos Adası 103
Scott, Michael 32
Shanks, W. 48, 49, 54
Sharp, Abraham 49
Sisam Adası 104
Swoboda, Hermann 90

T
Takvim gösterisi 66

Ü
Üçgen 12, 30, 105
Üçgensel sayı 80, 81, 84, 85

V
Van Ceulen, Ludolph 49
Van Rooman, Adriaen 49
Vang Fau 49
Vega 49
Venüs 104

Y
Yedigen 99
23-28 günlük dönemler 87, 88, 89, 90

W
Wren, Christopher 37

Z
Zeller'in denklik yöntemi 70, 71
Zeno 21, 106
Zihinsel dönem 92
Zu Çung - Çi 49

İÇİNDEKİLER

7 ÖNSÖZ
9 KİM KORKAR MATEMATİKTEN?
10 Matematik Güzeldir
13 Fermat'ın Son Teoremi
14 Matematik Eğlendirir
15 Ekler
17 Yanıtlar
18 MATEMATİK NASIL MATEMATİK OLDU?
22 Ekler
22 Pisagorun Karabasanı: İrrasyonel Sayılar
24 Bilim Zincirinde Bir Halka: ORTAÇAĞ ARAPLARI
28 Matematik Eğlendirir
30 Yanıtlar
31 LEONARDO FIBONACCI
33 Fibonacci Dizisi
35 Altın Kesim
38 Matematik Eğlendirir
39 Ekler
44 Yanıtlar
45 Pİ'NİN ÖYKÜSÜ
48 Pi'nin Kronolojisi
50 Pi'nin İrrasyonelliği
50 Pi'nin Aşkınlığı
52 Pi'nin Resmi Değeri
54 Ekler
55 SEKİZ PROBLEM
55 Suyu Bölmek I
55 Suyu Bölmek II
56 Avcının Derdi
56 Erler
56 20 Tencere
56 Yoksul Gezgin
56 Mektupla Satranç
57 İçerde mi, Dışarda mı?
58 Yanıtlar

61 **YILDIRIM GİBİ ÇARPMAK**
64 Kök Almak
66 Takvim Gösterisi
68 Ekler
71 **ALGORİTMA**
78 Ekler
79 **ARİTMETİK.DİZİLER VE ÖTESİ**
83 Dizinin Boyutu
86 Matematik Eğlendirir
86 Yanıtlar
87 **SÖZDEBİLİME KATKI**
93 Matematik Eğlendirir
93 Yanıtlar
94 Ekler
95 **BİLİM ADAMLARI KILAVUZU**
107 **KAYNAKLAR**
108 **DİZİN**

"Matematiğin tarihini, kaynaklandığı konuları, sorunlarını anlatmak... Bunların insanoğlunun tarihi boyunca karşı karşıya bulunduğu varolma, gelişme, doğayı tanıma ve onu biçimlendirme sorunu ile iç içe olduğunu sergilemeye çalışmak... Böylece, okuyucuya 'Matematiğin sorunları sizin sorununuzdur; onlarla ilgilenin, onlara sahip çıkın' demek..."

Matematik bir zamanlar ortaokulda, lisede sınıf geçmek için ezberlemek zorunda kaldığımız birtakım formüller, denklemler kargaşasıdır bizim için. Gerçekten öyle midir? Elbette hayır! Çünkü matematik güzeldir. Matematik eğlendirir!

Hayatınız boyunca matematikten mi korktunuz? Öyleyse korkmadan bu kitabı okuyabilirsiniz.

1260 – V dahil)

BİLİM VE SANAT