Öklid'in Elemanları

Türkçesi ve Notlar: Ali Sinan Sertöz



Öklid'in Elemanları

Türkçesi ve notlar: Ali Sinan Sertöz

6 Mart 2018 sürümü

Bu sürümde neler var:
13 kitabın tamamının tanım ve önermeleri Türkçeleştirildi
Kanıtların Türkçeleştirilmesi sürüyor
I. Kitap: Tamamlandı
II. Kitap: Tamamlandı
III. Kitap Tamamlandı
IV. Kitap Tamamlandı
V. Kitap Tamamlandı
VI. Kitap Tamamlandı
VII. Kitap Tamamlandı
VIII. Kitap Tamamlandı
IX. Kitap Tamamlandı
X. Kitap Tamamlandı
Kullanılan şekiller Richard Fitzpatrick'e aittir. Şekillerin kullanılmasına izin verdiği için kendisine teşekkür ederim.

sertoz@bilkent.edu.tr

http://sertoz.bilkent.edu.tr/elemanlar.htm

Kitaplar ve önermeler arasında hızlı geçiş yapabilmek için pdf göstericinizin yer imi özelliğini etkinleştirebilirsiniz.

Öklid'in Elemanları içerik tablosu

Kitap	*I*	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*	*VII*	*VIII*	*IX*	*X*	*XI*	*XII*	*XIII*	*Toplamlar*
Tanımlar	23	2	11	7	18	4	22	-	-	16	28	-	-	131
Önermeler	48	14	37	16	25	33	39	27	36	115	39	18	18	465
Belitler	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5
Ortak Kavramlar	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5

İÇİNDEKİLER

Öklid'i Okurken v
1. Elemanlar nedir v
2. Kaynak metin v
3. Elemanların içeriği vi
4. Öklid'in anlatım biçimi vi
5. Bundan dolayı vs … vii
6. Çeviri hakkında viii
7. İyi Okumalar! ix
8. Sadece Öklid etmiş Güzeli temaşa xi

Kitap I 1
1. Tanımlar 1
2. Belitler 2
3. Ortak Kavramlar 3
4. Önermeler 3

Kitap II 49
1. Tanımlar 49
2. Önermeler 49

Kitap III 69
1. Tanımlar 69
2. Önermeler 70

Kitap IV 113
1. Tanımlar 113
2. Önermeler 114

Kitap V 135
1. Tanımlar 135
2. Önermeler 138

Kitap VI 165
1. Tanımlar 165
2. Önermeler 165

Kitap VII 207
1. Tanımlar 207
2. Önermeler 209

Kitap VIII 247
1. Önermeler 247

Kitap IX 279
1. Önermeler 279

Kitap X 313
1. Tanımlar I 313
2. Önermeler 314
3. Tanımlar II 374
4. Önermeler 375
5. Tanımlar III 431
6. Önermeler 431

Kitap XI 491
1. Tanımlar 491
2. Önermeler 493

Kitap XII 509
1. Önermeler 509

Kitap XIII 517
1. Önermeler 517

Öklid'i Okurken

1. Elemanlar nedir

Elemanlar MÖ 300 yıllarında yazıldığı düşünülen bir geometri, oranlar ve sayılar kuramı kitabıdır. Kitabın önemi içerdiği geometri bilgilerinden daha çok bu bilgileri sistematik bir yapı içinde sunmasındadır.

Her yeni bilgi sadece daha önce kanıtlanmış bilgiler kullanılarak ve belli bir akıl yürütme düzeni içinde kanıtlanır.

İlk kanıtların dayanacağı daha önce yapılmış kanıtlar olmadığı için kitabın başında geometriye özgü beş belit, ve akıl yürütmeye yarayacak beş ortak kavram sıralanır. Ve kitaptaki tüm önermeler sıkı bir mantık zinciri içinde hep daha önceki sonuçlara dayanarak, ve bu belitler ve ortak kavramlar kullanılarak geliştirilir.

Kitabın bu belitsel yaklaşımı doğu ve batı uygarlıklarını eşit düzeyde ve derinden etkilemiştir. Kitabın etkisi öyle güçlü olmuştur ki yazılmasının üzerinden iki bin yıldan fazla bir zaman geçmesine rağmen herhangi bir konuda yazılacak her kitap Elemanlar'ın yöntemiyle yazılmaya çalışılmaktadır.

2. Kaynak metin

Öklid Elemanlarını mutlaka papirüsler üzerine yazmıştı. Bu papirüsler yüz yıllarca elle çoğaltıldı. Her çoğaltmada bazı hataların metne girdiğini tahmin etmek zor değil.

Yüzlerce yıl papirüslerde çoğaltılarak nesilden nesile aktarılan bu metin kitap formatının bulunmasıyla kitap formatında ve yine elle yazılıp çoğaltılmaya devam etti.

Çoğu zaman da metni çoğaltan matematikçi kendince ve iyi niyetle düzeltmeler, ekleme ve çıkartmalar yaptı.

Dokuzuncu yüzyılda yazılmış ve Vatikan kütüphanesinde bulunan bir elyazması orijinaline en yakın ve bugüne kalan en eski elyazması olarak kabul edilir. Bugün yapılan Elemanlar çevirilerinde bu, Öklid'den yaklaşık bin iki yüz yıl sonra yazılmış elyazması esas alınır. Daha eskisi bulunana kadar bu elyazmasındaki hata, ekleme ve çıkarmaları yok sayıp, Öklid'in asıl metninin bu olduğunu kabul ediyoruz.

3. Elemanların içeriği

Elemanlar XIII kitaptan oluşur ve her kitabın konusu farklıdır.

I. Düzlem geometrinin temelleri: doğrular

II. Geometriye ilişkin hesapların temelleri

III. Düzlem geometrinin temelleri: çemberler

IV. Çemberlerin içine ve dışına çizilen şekiller

V. Oranlar

VI. Benzer şekiller

VII. Temel sayılar kuramı

VIII. Sürekli oranlar

IX. Sayılar kuramının uygulamaları

X. Eşölçeksiz nicelikler

XI. Uzay geometrisi

XII. Uzay geometrisinde oranlar

XIII. Platonik cisimler

4. Öklid'in anlatım biçimi

Her önerme tamamen sözeldir; herhangi bir şekle ya da simgeye bağlı değildir. İlk okumada önermenin ne dediğini anlamak zor olabilir ama bir süre sonra Öklid'in anlatım biçimine alışınca her önerme ilk okunuşta anlaşılır.

Kanıt başladığında hemen bir şekil üzerinde önermenin içeriği açıklanır. Önermenin hangi koşulları benimsediği şekil üzerinde açıkça belirtilir.

Kanıtlanması istenilen iddiaya sıra gelince Öklid “Diyorum ki" diye başlayan bir cümle ile yine şekil üzerinde neyin kanıtlanması gerektiğini anlatır.

Doğruların ve düzlem şekillerinin herhangi bir ölçme biriminden bağımsız mutlak bir büyüklükleri vardır. O yüzde Öklid “uzunluk" ve “alan" kelimelerini kullanmamayı tercih eder.

Kenarları AB ve CD doğrularından oluşan bir dikdörtgenin alanıyla kenarı EF olan bir karenin alanının toplamı kenarları GH ve KL olan karelerin alanlarının toplamına eşitse, o zaman Öklid “AB, CD tarafından içerilen dikdörtgen EF üzerindeki kareyle birlikte GH, KL üzerindeki karelere eşittir" der.

Mantık akışının rahat takip edilmesi ve varılacak sonuçların ikna ediciliğinin üzerinde bir şüphe belirmesin diye Öklid kanıtın her aşamasında her ayrıntıyı yeri geldikçe tekrarlamaktan kaçınmaz. Bir süre sonra sıkılıp bu tekrarları azalttığında, ya da metni kopyalayan kişi sıkılıp kestirmeden sonuca ulaştığında içinizde bir eksiklik hissedersiniz.

Bazen değil günlük hayatta, geometrinin soyut derinliklerinde bile işe yaramayacağını düşündüğünüz tuhaf bağıntılar kanıtlar. Sayfalar sonra, hatta birkaç kitap sonra son derece karışık görünen bir kanıtın en can alıcı yerinde o tuhaf sonuca atıfta bulunup kanıtı birden bire çözüme ulaştırdığında kitabın nasıl bir özenle hazırlandığına bir kez daha şahit olursunuz.

5. Bundan dolayı vs ...

Öklid ispatı şekil üzerinde sonuca ulaştırdıktan sonra “Bundan dolayı" diye başlayan bir cümle ile önermenin tüm metnini yeniden aktararak sonucun aslında şekle bağlı değil, mutlak bir geometri sonucu olduğunu hatırlatır. Ama kitabı bin yıllardır yeniden yazanlar üşendiği, ve günümüz çevirmenleri de bu tembelliği adetten saydığı için, biraz da yerden tasarruf etmek bahanesiyle, Öklid'in yaptığı gibi kanıt sonunda önerme tekrarlanmaz ama Öklid'in bu tekrarlamayı yaptığını hatırlatmak için

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

denir. Buradaki QED harfleri kanıt sonunu işaret etmek için binlerce yıldır kullanılan, ve “Quod Erat Demonstrandum" sözlerinin baş harfleridir.

Bazı önermeler bir çizim problemiyle ilgilidir. Belli şartlar altında bazı çizimlerin mümkün olduğunu iddia eder. Öklid bu önermeleri “falanca şekli çizmek" olarak kaleme almıştır. Günümüz diline çevirirsek “falanca şekli çizmenin bir yolu vardır" dememiz gerekir. Osmanlıda bu çeşit çizim problemleri “falanca şekli çizmenin yoludur" diye dillendirilirken son dönemde biz “falanca şekli çizmenin yolu" demeyi seçiyoruz.

Bu çeşit çizim önermelerinin kanıt kısmı bitince Öklid

Tam olarak yapılması istenen de buydu. QEF

der. Buradaki QEF harfleri de çizim sonlarını belirten “Quod Erat Faciendum" kelimelerinin baş harfleridir.

Öklid'in özgün metninde olmadığı ama binlerce yıldır elle kopyalayanların dayanamayıp kanıt içine soktuktuğunu düşündüğümüz bazı atıflar vardır. Bunlar Öklid'in o sırada kullandığı bilgiyi hangi kitabın kaçıncı önermesinde kanıtladığını hatırlatan işaretlerdir.

Örneğin [III.14], III. Kitabın 14. önermesi demektir. Diğer atıfları okuyucu kendsi çözebilir.

> *[Bir de bu şekilde yazılmış kısa notlar vardır. Onlar metinde olmayan, benim açıklamalarım. Bazen Öklid'in bir geometri ifadesini Öklid'den bin yıl sonra icat edilen cebir diliyle yeniden yazıyorum. Buradan Öklid'in aklından bunların geçtiği anlaşılmamalı; bunlar çoğu zaman iki bin yıl öteden yapılan yorumlar olarak algılanmalı.]*

6. Çeviri hakkında

Çeviride kullanılan kaynaklar (başvuru sıklığı sırasına göre):

- Heath, Euclid The thirteen books of the Elements, Dover edition, Cilt I, II, III, 1956
- Fitzpatrick, Euclid's Elements of Geometry, http://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Euclid.html

- Joyce, Euclid's Elements, https://mathcs.clarku.edu/ djoyce/java/elements/
- Öztürk ve Pierce, Öklid'in Öğelerinin 13 Kitabından Birinci Kitap, http://math.msgsu.edu.tr/ dpierce/Dersler/Oklid/
- Tosun, Hüseyin Rıfkı Tamani ve Elementler Çevirisi, Atatürk Kültür Merkezi Yayınları, 2010 (Öklid'in Elemanlarının 1-6, 11 ve 12. kitaplardan yapılan Bonnycastle (1789) çevirisinden Osmanlıcaya aktarılmıştır)
- Henrion, Les quinze livres des elements geometriques d'euclide, Isaac Dedin, Paris, 1632
- Peyrard, Les elemens de geometrie D'euclide, F. Louis, Paris, 1804.

Bu çeviride kullanılan şekiller Richard Fitzpatrick'in çevirisindeki şekillerdir ve onun izniyle kullanılmıştır.

7. İyi Okumalar!

Kütüphanede rastgele bir matematik kitabını elinize alsanız ve açıp okumaya başlasanız ne anlarsınız? Ben hemen söyleyeyim: hiçbir şey anlamazsınız. Çünkü bir matematik kitabı öyle okunmaz.

Bir matematik kitabını okumak için sakin, sessiz bir yere çekilmeniz ve yanınıza birkaç kalem ve bolca boş kağıt almanız gerekir. Sonra bir okuyup, on düşünüp, yirmi yazmanız gerekir. Tekrar, tekrar. Bir ara, yazarın bir sonraki sayfalarda ne söylemesi gerektiği konusunda bazı beklentilerinizin oluştuğunu hissetmeye başlarsınız. Ve yazar gerçekten sizin beklediğiniz şeyleri söylemeye başladığında bedeninizi bir sıcaklığın sardığını farkedersiniz; işte matematik virüsünü kaptığınız an o andır.

Geometri virüsünü kapmanız umuduyla iyi okumalar!

8. Sadece Öklid etmiş Güzeli temaşa

SADECE ÖKLİD ETMİŞ SADE GÜZELİ TEMAŞA
Edna St. Vincent Millay (1922)

Sadece Öklid etmiş sade Güzeli temaşa.
Bırakın güzelden dem vuran herkes sussun
Ve yere uzanıp yatsın yüzü koyun ve dursun
Düşünsünler ne halt ettiklerini, hiçbir şeye haşa
Baktıkları sürece, hayret, değişen suretler silsilesinden başka
Hiçbir yere niye meyletmezler; bırakın bu kazlar lâklâk etsin,
tıslasın dursun ki yiğitler kasvetli esaretten kurtulsun,
kurtulsun da karışsın münevver aheng-I havaya.

Ey gözü kör eden saat, Ey o mukaddes, gün ki ne dehşetli,
Önce onun rüyetini ışıttığında, teşrih edilmiş fecirden çıkan şua!
Sadece Öklid etmiş Güzeli temaşa.
Ancak bir kereliğine duyanlar olacak Talihli,
Üstelik çok uzaklardan, çıkan o sesi,
Güzel'in muazzam çarığı konduğunda taşa.

Türkçeleştiren: Yusuf Eradam (2017)

Kitap I

1. Tanımlar

1 **Nokta**, büyüklüğü olmayandır.

2 **Çizgi**, eni olmayan uzunluktur.

3 Bir çizginin uçları noktalardır.

4 **Doğru**, üzerindeki noktalara göre eşit olarak yatan çizgidir.

5 **Yüzey**, yalnızca uzunluğu ve eni olandır.

6 Bir yüzeyin uçları çizgilerdir .

7 **Düzlem**, üzerindeki doğrulara göre eşit olarak yatan yüzeydir.

8 **Düzlem açısı**, aynı doğru üzerinde olmayan ve birbirine dokunan çizgilerin birbirine göre eğimidir.

9 Ve açıyı oluşturan çizgiler doğru ise açıya **düzkenar** denir.

10 Bir doğruya çizilen bir başka doğru iki komşu açıyı eşit kılıyorsa her iki açıya da **dik** denir ve bu düz çizgi, üzerine çizildiği düz çizgiye diktir denir.

11 Dik açıdan büyük olan açıya **geniş açı** denir.

12 Dik açıdan küçük olan açıya **dar açı** denir.

13 Herhangi bir şeyin ucuna **sınır** denir.

14 Bir sınır veya sınırlar arasında kalana **şekil** denir.

15 İçindeki bir noktadan, üzerindeki her noktaya çizilen doğruların birbirine eşit olduğu düzlem şekline **çember** denir.

16 Ve o noktaya da **çemberin merkezi** denir.

17 Çemberin merkezinden geçen ve her iki yönde de çemberin çevresi tarafından sınırlanan doğruya **çemberin çapı** denir, ve bu çeşit her doğru çemberi ikiye böler.

18 Çap ve onun kestiği çevre arasında kalan şekle **yarıçember** denir. Ve yarıçemberin merkezi çemberin merkeziyle aynıdır.

19 Doğrular tarafından sınırlanan şekillere **düzkenarlı şekiller** denir. Üç doğruyla sınırlananlara **üç kenarlı**, dört doğruyla sınırlananlara **dört kenarlı**, ve çok doğruyla sınırlananlara **çok kenarlı** denir.

20 Üçkenarlı şekillerden üç kenarı da birbirine eşit olanına **eşkenar üçgen**, yalnız iki kenarı eşit olanına **ikizkenar üçgen** ve tüm kenarları farklı olana **çeşitkenar üçgen** denir.

21 Ayrıca, üçkenarlı şekillerin bir dik açısı olanına **dik üçgen**, geniş açısı olanına **geniş açılı üçgen**, ve üç açısı da dar olanına **dar açılı üçgen** denir.

22 Dört kenarlılara gelince, kenarları birbirine eşit ve dik açılı olanına **kare**, dik açılı ama kenarları birbirine eşit olmayanına **dikdörtgen**, kenarları birbirine eşit ama dik açılı olmayanına **eşkenar dörtgen**, karşılıklı kenarları ve açıları eşit olan ama eşkenar ve dik açılı olmayanına **paralelkenar** denir. Ve bunların dışında kalan dört kenarlılara da **yamuk** densin.

23 **Paralel** doğrular aynı düzlemde olan ve iki yöne de istenildiği kadar uzatıldığında birbirlerini kesmeyen doğrulardır.

2. Belitler

Aşağıdakiler kabul edilsin:

1 Herhangi bir noktadan başka herhangi bir noktaya bir doğru çizilebilir.

2 Bir doğru istenildiği kadar yine bir doğru olacak şekilde uzatılabilir.

3 Herhangi bir merkez ve bir uzunluk verildiğinde bir çember çizilebilir.

4 Bütün dik açılar birbirine eşittir.

5 Eğer bir doğru, iki doğruyu kestiğinde bu doğrunun aynı tarafındaki iç açılar iki dik açıdan küçükse, bu iki doğru o yönde uzatıldıklarında kesişir.

3. Ortak Kavramlar

1 Aynı şeye eşit olan şeyler birbirlerine de eşittirler.

2 Eğer eşit olan şeylere eşit şeyler eklenirse bütünler eşittir.

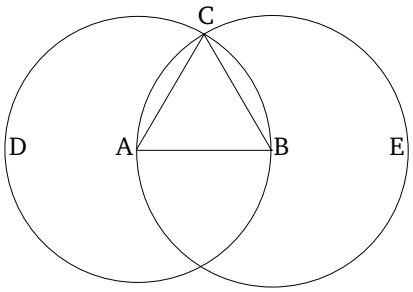
3 Eğer eşit şeylerden eşit şeyler çıkarılırsa kalanlar da eşittir.

4 Birbiriyle örtüşen şeyler birbirine eşittir.

5 Bütün, parçalarından büyüktür.

4. Önermeler

1. Önerme:
Verilen bir doğru parçası üzerine eşkenar bir üçgen çizmenin yolu.



Verilen doğru parçası AB olsun.

Böylece AB doğru parçası üzerine eşkenar bir üçgen çizilmesi istenmektedir.

A merkezi ve AB uzaklığıyla BCD çemberi çizilsin; **[Bel. 3]**

yine, B merkezi ve AB uzunluğuyla ACE çemberi çizilsin; **[Bel. 3]**

ve çemberlerin birbirini kestiği C noktasından A, B noktalarına CA, CB doğruları çizilsin. **[Bel. 1]**

A noktası CDB çemberinin merkezi olduğu için AC eşittir AB olur. **[Tan. 15]**

Yine, B noktası CAE çemberinin merkezi olduğu için BC eşittir BA olur. **[Tan. 15]**

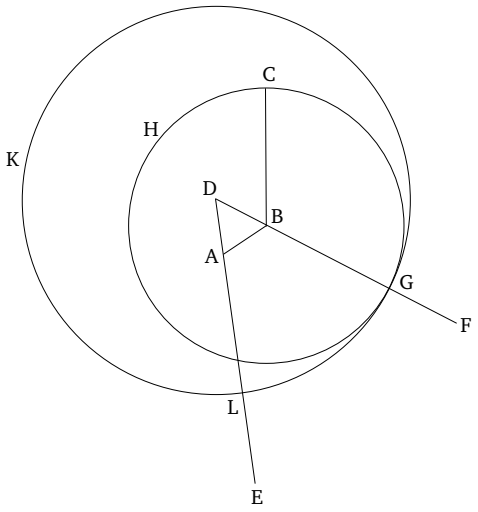
Ama CA'nın da AB'ye eşit olduğu kanıtlanmıştı; böylece CA ve CB doğrularının her biri AB'ye eşittir. Ve aynı şeye eşit olan şeyler birbirine de eşittir; **[Ort. 1]**

böylece CA CB'ye de eşittir. Bundan dolayı üç doğru CA, AB, BC birbirine eşittir.

Böylece ABC üçgeni eşkenardır ve verilen AB doğru parçası üzerine çizilmiştir.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. QEF

2. Önerme:
Verilen bir noktadan başlamak üzere, verilen bir doğruya eşit bir doğru parçası çizmenin yolu.



A verilen nokta ve BC verilen doğru olsun.

Böylece A noktasına, verilen BC doğrusuna eşit bir doğru yerleştirilmesi isteniyor.

A noktasından B noktasına AB doğrusu çizilsin; **[Bel. 1]**

ve onun üzerine DAB eşkenar üçgeni çizilsin. **[I.1]**

DA, DB doğruları boyunca AE, BF doğruları uzatılsın; **[Bel. 2]**

B merkezi ve BC uzaklığıyla CGH çemberi çizilsin; **[Bel.3]**

ve yine, D merkezi ve DG uzaklığıyla GKL çemberi çizilsin. **[Bel. 3]**

Sonra, CGH çemberinin merkezi B olduğu için, BC eşittir BG olur. Yine, GKL çemberinin merkezi D olduğu için DL eşittir DG olur. Ve bunlardan DA DB'ye eşittir; bu nedenle kalan AL, kalan BG'ye eşittir. **[Ort. 3]**

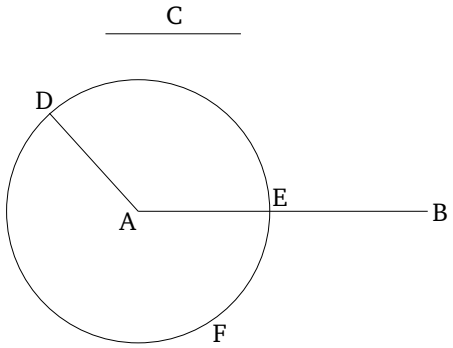
Ama BC'nin BG'ye eşit olduğu da kanıtlanmıştı; bu yüzden AL, BC doğrularının her biri BG'ye eşittir. Ve eşit şeylere eşit olan şeyler birbirine de eşittir; **[Ort. 1]**

bundan dolayı AL eşittir BC olur.

Böylece verilen A noktasında verilen BC doğrusuna eşit AL doğrusu çizilmiştir.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. QEF

3. Önerme:
Farklı uzunlukta iki doğru verildiğinde uzun olandan kısa olana eşit bir doğru çıkarmanın yolu.



Verilen farklı doğrular AB, C olsun, ve büyük olan AB olsun.

Böylece büyük olan AB den küçük olan C ye eşit bir doğru kesip çıkarılması isteniyor.

A noktasına C doğrusuna eşit AD doğrusu yerleştirilsin. **[I.2]**

A merkezi ve AD uzaklığıyla DEF çemberi çizilsin. **[Bel. 3]**

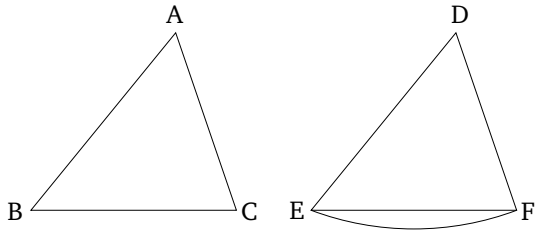
A noktası DEF çemberinin merkezi olduğu için AE eşittir AD olur. **[Tan. 15]**

Ama C de AD'ye eşittir. Bu yüzden AE, C doğrularının her biri AD'ye eşittir. Bu yüzden AE eşittir C olur. **[Ort. 1]**

Böylece, AB ve C doğruları verildiğinde, büyük olan AB'den küçük olan C'ye eşit AE kesilip çıkarılmıştır.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. QEF

4. Önerme:
Eğer iki üçgenin karşılıklı iki kenarları ve bu eşit kenarlar arasındaki açıları birbirlerine eşitse, üçüncü kenarları da birbirine eşit olur; üçgenler bu durumda eşittir ve kalan açılar da birbirine eşittir, yani eşit kenarların karşılarındaki açılar birbirlerine eşit olur.



Karşılıklı kenarları AB, AC sırasıyla DE, DF'ye eşit olan üçgenler ABC, DEF olsun, yani AB DE'ye ve AC DF'ye, ve BAC açısı EDF açısına eşit olsun.

Diyorum ki taban BC de taban EF'ye eşit olur, ABC üçgeni DEF üçgenine eşit olur, ve diğer açılar da karşılıklı olarak eşittir, yani eşit kenarları gören açılar olarak ABC açısı DEF açısına, ve ACB açısı DFE açısına eşittir.

Çünkü, ABC üçgeni DEF üçgeni üzerine yerleştirildiğinde, ve A noktası D noktasına kondurulduğunda, ve AB doğrusu da DE'nin üzerine konduğunda, AB DE'ye eşit olduğundan B noktası E ile çakışır.

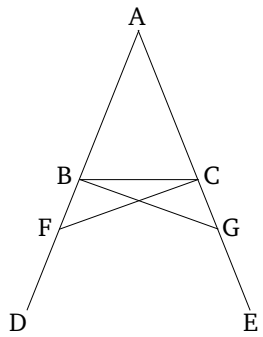
AB DE ile çakıştığında AC doğrusu da DF ile çakışır çünkü BAC açısı EDF açısına eşittir.

AC DF'ye eşit olduğundan C noktası da F noktasıyla çakışacaktır. Ama B de E ile çakışmıştı. Bundan dolayı BC tabanı EF tabanıyla çakışacaktır. Çünkü eğer B E ile ve C F ile çakıştığında BC tabanı EF tabanıyla çakışmazsa, iki doğru bir alanı çevrelemiş olacaklar ki bu olamaz. Dolayısıyla BC EF'le çakışacak ve ona eşit olacaktır. **[Ort. 4]**

Böylece ABC üçgeninin tamamı DEF üçgeniyle çakışacak ve ona eşit olacaktır. Ve kalan açılar da çakışacak ve birbirine eşit olacaktır; ABC açısı DEF açısına ve ACB açısı DFE açısına.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED[1]

5. Önerme:
İkizkenar üçgenlerde taban açıları birbirine eşittir, ve eğer eşit olan kenarlar uzatılırsa tabanın altında kalan açılar da birbirine eşit olacaktır.



AB kenarı AC kenarına eşit olan bir ABC ikizkenar üçgeni olsun; AB ve AC doğrultusunda uzatılan doğrular BD, CE olsun. **[Bel. 2]**

Diyorum ki ABC açısı ACB açısına, ve CBD açısı BCE açısına eşittir.

BD üzerinde rastgele bir F noktası alınsın. Daha büyük olan AE'den, daha kısa olan AF'ye eşit AG çıkarılmış olsun. **[I.3]**

Ve FC, GB doğruları çizilsin. **[Bel. 1]**

O zaman, AF AG'ye ve AB AC'ye eşit olduğundan, FA, FC kenarları sırasıyla GA, AB kenarlarına eşit olur, ve FAG ortak açısını içerirler.

Bu nedenle FC tabanı GB tabanına, AFC üçgeni AGB üçgenine eşit olur, ve kalan açılar da karşılıklı olarak eşit olacaktır; yani eşit kenarların içerdiği açılar olarak ACF açısı ABG açısına, AFC açısı AGB açısına eşit olacaktır. **[I.4]**

Ve AF AG'ye eşit olduğundan ve bunların içinde AB AC'ye eşit olduğundan, kalan BF kalan CG'ye eşittir. Ama FC'nin GB'ye eşit olduğu

[1] Öklid bir kanıtın sonunda "Bundan dolayı" diye başlayan bir cümle kurarak önermeyi yeniden dillendirir, ve kanıt bu şekilde bitmiş olur. Çevirilerde genel uygulama bu bitiş cümlesini "v.s." ile hatırlatıp, yazmadan geçmektir.

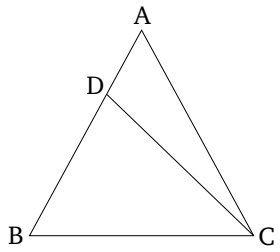
da kanıtlanmıştı. Bundan dolayı BF, FC kenarları sırasıyla CG, GB kenarlarına eşittir, ve BFC açısı CGB açısına eşittir ve bu arada BC tabanı ortaktır. Böylece BFC üçgeni de CGB üçgenine eşittir ve kalan açılar da karşılıklı eşit olacaktır; yani eşit kenarların gördüğü açılar.

Bu nedenle FBC açısı GCB açısına eşittir, BCF açısı CGB açısına eşittir.

Benzer şekilde, ABG'nın açısının BCF açısına eşit olduğu kanıtlandığından, ve bunların içindeki CBG açısı BCF açısına eşit olduğundan, kalan açılar olarak ABC açısı ACB açısına eşittir, ve bunlar da ABC üçgeninin tabanındadır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

6. Önerme:
Eğer bir üçgende iki açı birbirine eşitse, bu eşit açıları gören kenarlar da birbirine eşittir.



ABC açısı ACB açısına eşit olan bir ABC üçgeni olsun.

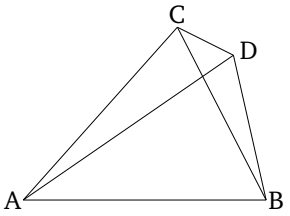
Diyorum ki AB kenarı da AC kenarına eşittir.

Çünkü, AB AC'ye eşit değilse, biri diğerinden büyük olacaktır. Büyük olan AB olsun, ve büyük olan AB'den küçük olan AC'ye eşit DB çıkarılsın. DC doğrusu çizilsin. O zaman, DB AC'ye eşit olduğundan ve BC ortak olduğundan, DB, BC kenarları sırasıyla AC, CB kenarlarına eşittir ve DBC açısı ACB açısına eşittir. Bu yüzden DC tabanı AB tabanına eşittir, ve küçük olan DBC üçgeni büyük olan ACB üçgenine eşit olacaktır ki bu saçmadır.

Bu yüzden AB AC'den farklı olamaz, ona eşittir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

7. Önerme:
Bir doğru parçasının iki ucundan aynı tarafa doğru iki doğru çizildiğinde bir noktada kesişiyorlarsa, bu doğruların çıktığı noktalardan çıkan, onlara eşit olun ve onların uzatıldığı tarafa uzatılıp da başka bir noktada kesişen başka iki doğru yoktur.



Çünkü eğer olsaydı, AB doğrusunun iki ucundan çizilmiş ve C noktasında birleşen iki doğru AC CB verildiğinde, aynı AB doğrusu üzerinde aynı tarafa çizilmiş ve başka bir D noktasında birleşen iki başka doğru AD, DB verilsin, ve bunlar ilk doğrulara eşit olsunlar, öyle ki her biri kendisiyle aynı uca sahip doğruya eşit olsun, yani CA kendisiyle aynı A ucuna sahip DA'ya, ve CB kendisiyle aynı B ucuna sahip DB'ye eşit olsun. CD birleştirilsin.

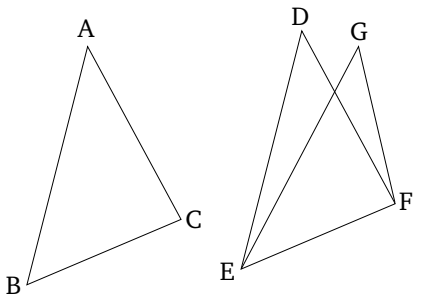
O zaman, AC AD'ye eşit olduğu için ACD açısı ADC açısına eşit olur. **[I.5]**

Öyleyse ADC açısı DCB açısından büyüktür. Bu durumda CDB açısı DCB açısından çok daha büyüktür.

Öte yandan, CB DB'ye eşit olduğundan, CDB açısı da DCB açısına eşittir. Ama onun çok daha büyük olduğu kanıtlanmıştı. Bu olamaz.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

8. Önerme:
Eğer iki üçgenin karşılıklı iki kenarları birbirlerine eşitse ve üstelik tabanları da birbirine eşitse, o zaman bu üçgenlerin eşit kenarlar arasında kalan açıları da eşittir.



Verilen ABC ve DEF üçgenlerinde karşılıklı kenarlar AB, AC sırasıyla DE, DF kenarlarına eşit olsun, yani AB ile DE, ve AC ile DF eşit olsun. Ayrıca bu üçgenlerin tabanları BC ile EF birbirine eşit olsun.

Diyorum ki BAC açısı da EDF açısına eşit olur.

Çünkü eğer ABC üçgeni DEF üçgeni üzerine yerleştirilirse, ve B noktası E noktasına ve BC doğrusu da EF doğrusuna yerleştirilirse, BC eşittir EF olduğundan C noktası F ile çakışır.

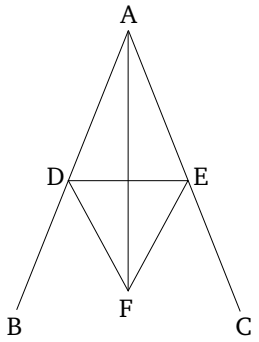
BC ile EF çakıştığından BA, AC de ED, DF ile çakışacaktır; çünkü eğer BC tabanı EF tabanıyla çakışır ve BA, AC kenarları ED, DF kenarlarıyla çakışmaz ama EG, GF olarak yanlarına düşerse, o zaman aynı doğrunun uçlarından çizilmiş ve bir noktada birleşmiş iki doğru verildiğinde o doğrunun uçlarından ve aynı tarafa doğru çizilmiş başka noktada birleşen ve ilk doğrulara sırasıyla eşit, yani her biri aynı ucu paylaştığı doğruya eşit, iki doğru çizilmiş olur.

Ama böyle doğrular çizilemez. **[I.7]**

O zaman BC tabanı EF tabanının üzerine yerleştirildiğinde BA, AC kenarlarının ED, DF kenarlarıyla çakışmaması mümkün değildir. Öyleyse çakışacaklar, ve BAC açısı da EDF açısıyla çakışacak ve ona eşit olacaktır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

9. Önerme:
Bir düzkenarlı bir açıyı ikiye bölmenin yolu.



Verilen düzkenarlı açı BAC olsun.

Bu açının ikiye bölünmesi isteniyor.

AB üzerinde rastgele bir D noktası seçilmiş olsun. AC üzerinde AD'ye eşit AE ayrılmış olsun. **[I.3]**

DE birleştirilsin ve DE üzerinde DEF eşkenar üçgeni çizilsin. AF birleştirilsin.

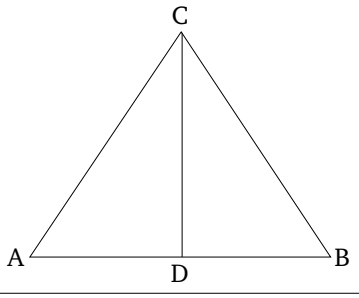
Diyorum ki BAC açısı AF doğrusu tarafından ikiye bölünmüştür.

Çünkü, AD AE'ye eşit olduğundan ve AF ortak olduğundan, DA, AF kenarları sırasıyla EA, AF kenarlarına eşittir, ve taban DF taban EF'ye eşittir. Bu durumda DAF açısı EAF açısına eşit olur. **[I.8]**

Böylece verilen düzkenarlı açı BAC, AF doğrusu tarafından ikiye bölünmüştür.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. QEF

10. Önerme:
Verilen bir sonlu doğruyu ikiye bölmenin yolu.



Verilen sonlu doğru AB olsun.

Bu sonlu AB doğrusunun ikiye bölünmesi isteniyor.

Bu doğrunun üzerine ABC eşkenar üçgeni çizilsin, **[I.1]**

ve ACB açısı CD doğrusuyla ikiye bölünsün. **[I.9]**

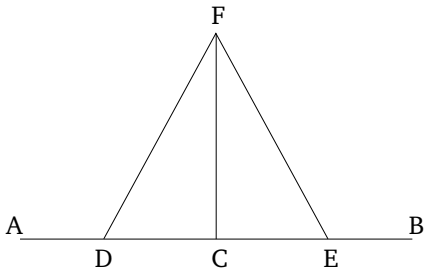
Diyorum ki AB doğrusu D noktasında ikiye bölünmüştür.

Çünkü, AC eşittir CB, ve CD ortak olduğundan, AC, CD kenarları sırasıyla BC, CD kenarlarına eşittir. Ve ACD açısı BCD açısına eşittir. Bu durumda taban AD taban BD'ye eşit olur. **[I.4]**

Böylece verilen sonlu doğru AB, D noktasından ikiye bölünmüş olur.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. QEF

11. Önerme:
Bir doğruya üzerinde verilen bir noktadan dik bir doğru çizmenin yolu.



AB verilen doğru ve C onun üzerinde verilen nokta olsun.

Böylece C noktasından AB doğrusuyla dik açı yapacak bir doğru çizilmesi isteniyor.

AC üzerinde rastgele bir D noktası alınsın. CD'ye eşit olacak şekilde CE çizilsin. **[I.3]**

DE üzrine eşkenar FDE üçgeni çizilsin. **[I.1]**

Ve FC birleştirilsin.

Diyorum ki FC doğrusu AB doğrusuna C noktasında diktir.

Çünkü, DC eşittir CE, ve CF ortak olduğu için, DC, CF kenarları sırasıyla EC, CF kenarlarına eşittir. Ve taban DF taban FE'ye eşittir. Bu yüzden DCF açısı ECF açısına eşittir. **[I.8]**

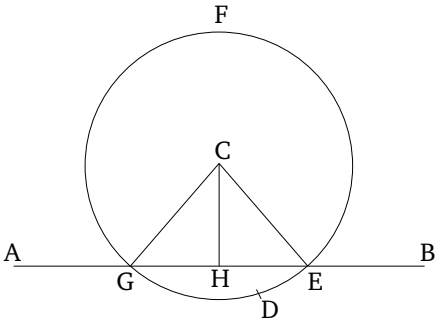
Ve bunlar komşu açılardır. Ama ne zaman bir doğruya çizilen bir doğru iki komşu açıyı birbirine eşit kılıyorsa, bu açıların her biri dik açıdır. **[Tan. 10]**

Bu nedenle DCF, FCE açılarının her biri diktir.

Böylece CF doğrusu AB doğrusuna C noktasında dik olacak şekilde çizilmiştir.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. QEF

12. Önerme:
Bir sonsuz doğruya üzerinde olmayan bir noktadan dik bir doğru çizmenin yolu.



AB verilen sonsuz doğru olsun ve C de onun üzerinde olmayan bir nokta olsun.

O zaman verilen sonsuz AB doğrusuna üzerinde olmayan C noktasından bir dik doğru çizilmesi isteniyor.

AB doğrusunun öbür tarafında rastgele bir D noktası alınsın ve C merkezi ve DC uzaklığıyla EFG çemberi çizilsin. **[Bel. 3]**

EG doğrusu H'de ikiye bölünsün ve CG, CH, CE doğruları çizilsin. **[Bel. 1]**

Diyorum ki CH doğrusu AB sonsuz doğrusuna üzerinde olmayan C noktasından dik olarak çizilmiştir.

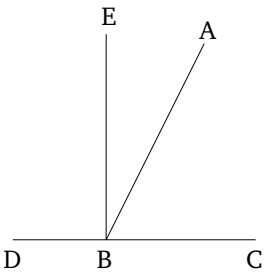
Çünkü, GH eşittir HE olduğu ve HC ortak olduğu için, GH, HC kenarları sırasıyla EH, HC kenarlarına eşittir, ve CG tabanı CE tabanına eşittir. Bundan dolayı CHG açısı EHC açısına eşittir. **[I.8]**

Ve bunlar komşu açılardır. Ama ne zaman bir doğruya çizilen bir doğru iki komşu açıyı birbirine eşit kılıyorsa, bu açıların her biri

dik açıdır, ve diğerinin üzerine çizilen doğruya diğerine diktir denir. **[Tan. 10]**

Böylece verilen sonsuz AB doğrusuna üzerinde olmayan C noktasından CH dik olarak çizilmiştir. Tam olarak yapılması istenen de buydu. QEF

13. Önerme:
Bir doğruya çizilen başka bir doğru eğer açı oluşturuyorsa ya iki dik açı oluşturur ya da iki dik açıya eşit açılar oluşturur.



AB doğrusu CD doğrusuyla CBA, ABD açılarını yapsın.

Diyorum ki CBA, ABD açıları ya iki dik açıdır ya da iki dik açıya eşittir.

Şimdi, eğer CBA açısı ABD açısına eşitse, bunlar dik açıdır. **[Tan. 10]**

Ama değilse, B noktasından CD'ye BE dikmesi çizilsin. **[I.11]**

Bu yüzden CBE, EBD açıları iki dik açıdır. O zaman, CBE açısı CBA, ABE açılarına eşit olduğu için, EBD açısı ikisine de eklensin. Bundan dolayı CBE, EBD açıları CBA, ABE, EBD açılarına eşittir. **[Ort. 2]**

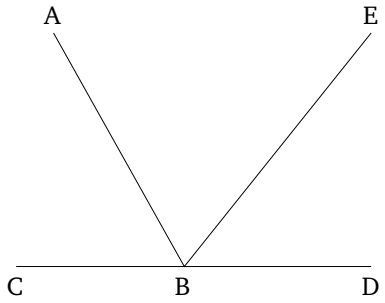
Aynı şekilde, DBA açısı DBE, EBA açılarına eşit olduğundan, ABC açısı her ikisine de eklensin. Bundan dolayı DBA, ABC açıları DBE, EBA, ABC açılarına eşittir. **[Ort. 2]**

Ama CBE, EBD açılarının da aynı üç açıya eşit olduğu kanıtlanmıştı. Eşit şeylere eşit olan şeyler birbirine de eşittir. **[Ort. 1]**

Bu nedenle CBE, EBD açıları DBA, ABC açılarına da eşittir. Ama CBE, EBD açıları iki dik açıdır. Öyleyse DBA, ABC açıları da iki dik açıya eşittir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

14. Önerme:
Eğer bir doğru parçasının üzerindeki bir noktadan, bu doğru parçasının aynı tarafında olmayacak şekilde çizilen iki doğrunun bu doğru parçasıyla oluşturdukları açılar iki dik açı ediyorsa, bu iki doğru aynı doğru üzerindedir.



AB doğrusunun üzerindeki B noktasından bu doğrunun aynı tarafında olmayacak şekilde çizilen BC ve BD doğrularının bu doğruyla yaptıkları komşu açılar ABC, ABD iki dik açıya eşit olsun.

Diyorum ki BD ve CB aynı doğru üzerindedir.

Çünkü, eğer BD, BC ile aynı doğru üzerinde değile, CB ile aynı doğrultuda BE doğrusu çizilsin. O zaman AB doğrusu CBE doğrusu üzerine çizilmiş olduğundan ABC, ABD açıları iki dik açıya eşittir. **[I.13]**

Ama ABC, ABD açıları da iki dik açıya eşittir. Bu nedenle CBA, ABE açıları CBA, ABD açılarına eşittir. **[Bel. 4 ve Ort. 1]**

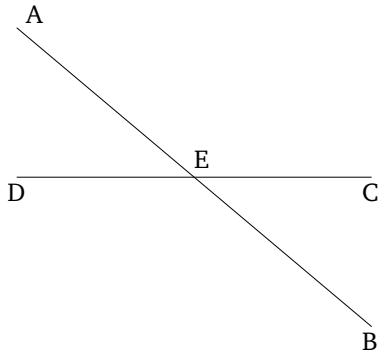
Her birinden CBA açısı çıkarılsın. O zaman kalan ABE açısı kalan ABD açısına eşit olur, **[Ort. 3]**

ki küçük olan büyük olana eşit oldu. Bu olamaz. Öyleyse BE, CB ile aynı doğru üzerinde değildir. Benzer şekilde kanıtlayabiliriz ki BD'den başka hiç bir doğru da BD ile aynı doğru üzerinde değildir.

Öyleyse CB, BD ile aynı doğru üzerindedir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

15. Önerme:
Kesişen iki doğrunun oluşturduğu ters köşe açıları eşittir.



AB ve CD doğruları E noktasında kesişsin.

Diyorum ki AEC açısı DEB açısına, ve CEB açısı AED açısına eşittir.

Çünkü, AE doğrusu CD doğrusuna, CEA, AED açılarını oluşturacak şekilde çizildiğinden, CEA, AED açılarını iki dik açıya eşittir. **[I.13]**

Aynı şekilde, DE doğrusu AB doğrusuna, AED, DEB açılarını oluşturacak şekilde çizildiğinden, AED, DEB açıları iki dik açıya eşittir. **[I.13]**

Ama CEA, AED açılarının da iki dik açıya eşit olduğu kanıtlanmıştı. Bu nedenle CEA, AED açıları AED, DEB açılarına eşittir. **[Bel. 4 ve Ort. 1]**

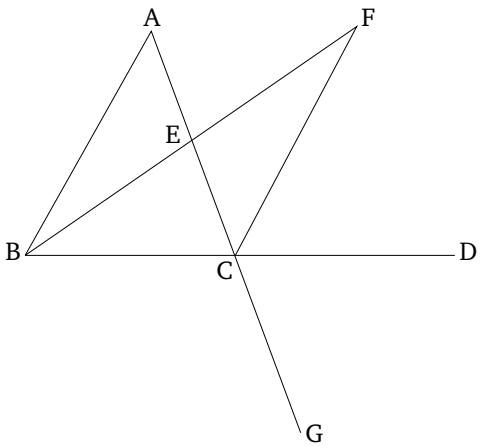
Her birinden AED açısı çıkarılsın. O zaman kalan CEA açısı kalan BED açısına eşit olur. **[Ort. 3]**

Benzer şekilde CEB, DEA açılarının da eşit olduğu gösterilebilir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

Doğal Sonuç: Buradan açıkça görülür ki, eğer iki doğru birbirini keserse, kesişme noktasındaki açıları dört dik açıya eşit kılarlar.

16. Önerme:
Bir üçgenin bir kenarı uzatıldığında oluşan dış açı karşı iç açıların ikisinden de büyüktür.



ABC üçgeninde bir BC kenarı D'ye kadar uzatılmış olsun.

Diyorum ki dış açı ACD karşı iç açılar CBA, BAC'nin her birinden büyüktür.

AC, E noktasından ikiye bölünsün, **[I.10]**

ve BE birleştirilip bir doğru boyunca F'ye kadar uzatılsın. EF doğrusu BE'ye eşit kılınsın, **[I.3]**

FC birleştirilsin, **[Bel. 1]**

AC doğrusu G'ye kadar uzatılsın. **[Bel. 2]**

O zaman, AE eşittir EC, ve BE eşittir EF olduğundan, AE, EB kenarları sırasıyla CE, EF kenarlarına eşittir, ve karşı açılar oldukları için AEB açısıyla FEC açısı eşittir. **[I.15]**

Bu nedenle taban AB taban FC'ye eşittir, ve ABE üçgeni CFE üçgenine eşittir, diğer açılar da sırasıyla diğer açılara eşittir, yani eşit kenarların gördüğü açılar. **[I.4]**

Dolayısıyla BAE açısı ECF açısına eşittir. Ama ECD açısı ECF açısından büyüktür. **[Ort. 5]**

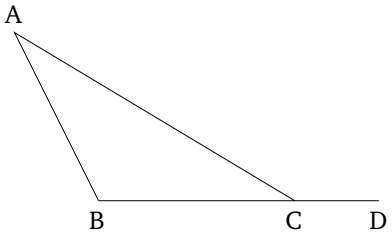
Bu nedenle ACD açısı BAE açısından büyüktür.

Benzer şekilde, eğer BC ikiye bölünürse, BCG açısının, yani ACD açısının **[I.15]**

ABC açısından büyük olduğu gösterilebilir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

17. Önerme:
Bir üçgenin herhangi iki iç açısı iki dik açıdan küçüktür.



ABC bir üçgen olsun.

Diyorum ki ABC üçgeninin rastgele alınan iki iç açısı iki dik açıdan küçüktür.

Çünkü, BC doğrusu D'ye uzatılsın. **[Bel. 2]**

O zaman, ACD açısı ABC üçgeninin bir dış açısı olduğundan, karşı iç açı ABC'den büyüktür. **[I.16]**

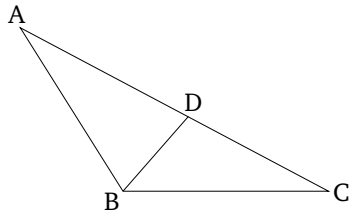
Her ikisine de ACB açısı eklensin. Bu durumda ACD, ACB açıları ABC, BCA açılarından büyük olur. Ama ACD, ACB açıları iki dik açıya eşittir. **[I.13]**

Bu nedenle ABC, BCA açıları iki dik açıdan küçüktür.

Benzer şekilde BAC, ACB açılarının, ve aynı nedenle CAB, ABC açılarının, iki dik açıdan küçük olduklarını kanıtlayabiliriz

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

18. Önerme:
Bir üçgende daha büyük kenar daha büyük açıyı görür.



ABC üçgeninde AC kenarı AB kenarından büyük olsun.

Diyorum ki ABC açısı da BCA açısından büyük olur.

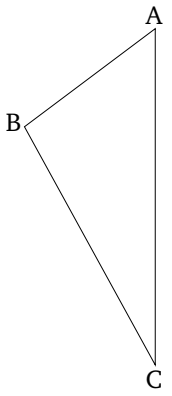
Çünkü, AC kenarı AB'den büyük olduğundan, AD'yi AB'ye eşit alınsın, **[I.3]**

ve BD birleştirilsin. O zaman, ADB açısı BCD üçgeninin bir dış açısı olduğundan, karşı iç açı DCB'den büyüktür. **[I.16]**

Ama AB kenarı AD kenarına eşit olduğundan, ADB açısı ABD açısına eşittir. Bu nedenle ABD açısı ACB açısından da büyüktür. Öyleyse ABC açısı ACB açısından daha da büyüktür.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

19. Önerme:
Bir üçgende daha büyük açı daha büyük kenarı görür.



ABC üçgeninde ABC açısı BCA açısından büyük olsun.

Diyorum ki AC kenarı da AB kenarından büyüktür.

Çünkü, eğer öyle değilse, AC ya AB'ye eşit ya da küçük olur.

Şimdi, AC, AB'ye eşit değil; öyle olsaydı ABC açısı da ACB açısına eşit olurdu, **[I.5]**

ama değil; demek ki AC, AB'ye eşit değil.

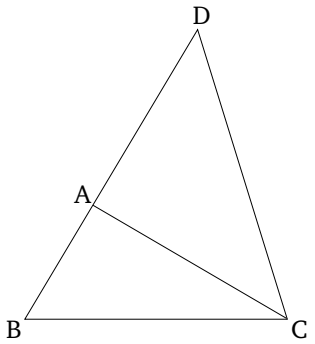
AC, AB'den küçük de değil; öyle olsaydı ABC açısı ACB açısından küçük olurdu, **[I.18]**

ama değil; demek ki AC, AB'den küçük değil. Ve eşit olmadığı da kanıtlanmıştı.

Öyleyse AC, AB'den büyüktür.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

20. Önerme:
Bir üçgende herhangi iki kenar birlikte diğer kenardan büyüktür.



ABC üçgeni verilmiş olsun.

Diyorum ki ABC üçgeninde herhangi iki kenar birlikte diğer kenardan büyüktür, yani

BA, AC birlikte BC'den büyük,
AB, BC birlikte AC'den büyük,
BC, CA birliktei AB'den büyük

olur.

Çünkü, BA doğrusu D noktasına uzatılsın, DA eşittir CA olsun, ve DC birleştirilsin.

O zaman, DA eşittir AC olduğundan, ADC açısı ACD açısına eşittir; **[I.5]**

bu yüzden BCD açısı ADC açısından büyüktür. **[Ort. 5]**

Ve DCB üçgeninde BCD açısı BDC açısından büyük olduğundan, ve daha büyük açı daha büyük kenarı gördüğünden, **[I.19]**

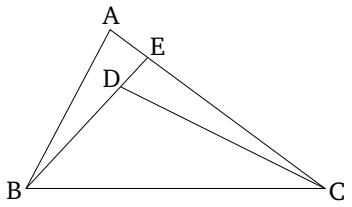
DB, BC'den büyüktür. Ama DA eşittir AC; öyleyse BA, AC birlikte BC'den büyüktür.

Benzer şekilde AB, BC'nin birlikte CA'dan, ve BC, CA'nın birlikte AB'den büyük olduğunu kanıtlayabiliriz.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

21. Önerme:

Bir üçgenin herhangi bir kenarının uçlarından üçgenin içinde birleşecek şekilde iki doğru çizilirse bu doğrular üçgenin diğer iki kenarından küçük olacak ama daha büyük bir açı içereceklerdir.



ABC üçgeninin bir BC kenarının uçları olan B ve C noktalarından üçgenin içinde kesişecek şekilde BD ve CD doğruları çizilmiş olsun.

Diyorum ki BD, CD üçgenin diğer iki kenarı olan BA, AC'den küçüktür, ama içerdikleri BDC açısı BAC açısından büyüktür.

Çünkü, E'ye kadar BD çizilsin. Sonra, bir üçgende iki kenar diğer kenardan büyük olduğundan, **[I.20]**

ABE üçgenindeki iki kenar AB, AE birlikte BE'den büyüktür. İki tarafa EC eklensin; o zaman AB, AE kenarları BE, EC'den büyük olur.

Benzer şekilde, CED üçgeninde CE, ED kenarları CD'den büyüktür. İki tarafa DB eklensin; o zaman CE, ED kenarları CD, DB'den büyük olur.

Ama CE, EB'nin CD, DB'den büyük olduğu kanıtlanmıştı; o nedenle BA, AC kenarları BD, DC'den daha da büyük olur.

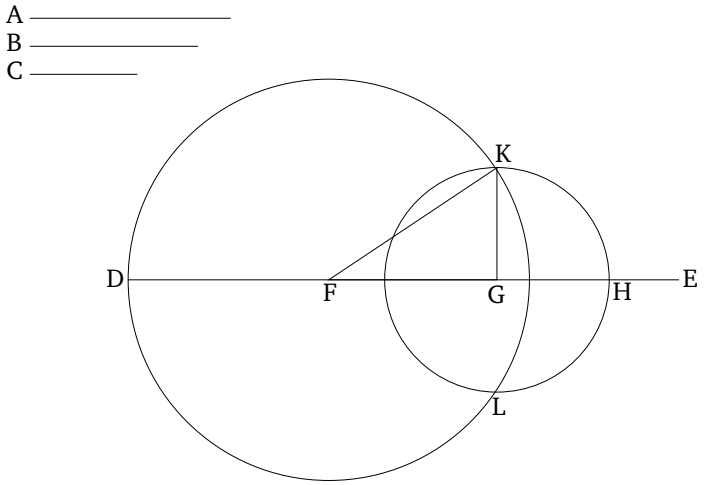
Öte yandan, bir üçgende bir dış açı karşı iç açıdan büyük olduğundan, **[I.16]**

CDE üçgeninde BDC açısı CED açısından büyüktür. Aynı nedenden dolayı, bundan başka , ABE üçgeninde de CEB dış açısı BAC açısından büyüktür.

Ama BDC açısının CEB açısından büyük olduğu kanıtlanmıştı.; demek ki BDC açısı BAC açısından daha da büyüktür.

Bundan dolayı vs …
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

22. Önerme:
Kenarları, verilen üç doğru parçasına eşit olan bir üçgen çizmenin yolu: bu durumda bu üç doğru parçasının herhangi iki tanesinin diğerinden büyük olması gerekir. **[I.20]**



Verilen üç doğru A, B, C olsun, ve herhangi iki tanesi diğerinden büyük olsun, yani

A, B birlikte C'den,
A, C birlikte B'den,
B, C birlikte A'dan,

büyük olsun.

Böylece A, B ve C'ye eşit üç doğruyla bir üçgen çizilmesi isteniyor.

D noktasında biten ama E doğrultusunda sonsuz uzayan DE doğrusu olsun, ve A'ya eşit DF, B'ye eşit FG, ve C'ye eşit GH çizilsin. **[I.3]**

F merkezi ve FD uzunluğuyla DKL çemberi çizilsin; benzer şekilde G merkezi ve GH uzunluğuyla KLH çemberi çizilsin; ve KF, KG birleştirilsin.

Diyorum ki KFG üçgeni A, B, C doğrularına eşit doğrularla çizilmiştir.

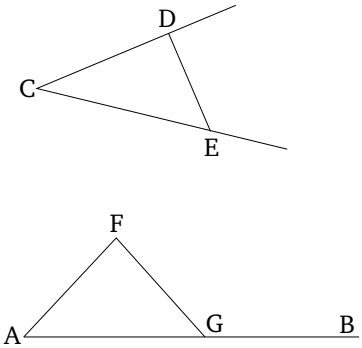
Çünkü, F noktası DKL çemberinin merkezi olduğundan, FD eşittir FK olur. Ama FD eşittir A; bu nedenle KF de A'ya eşittir.

Benzer şekilde, G noktası LKH çemberinin merkezi olduğundan, GH eşittir GK olur. Ama GH eşittir C; bu nedenle KG de C'ye eşit olur.

Ve FG de B'ye eşittir; bu nedenle verilen üç doğru A, B, C'ye eşit olan KF, FG, GK doğrularıyla KFG üçgeni çizilmiştir.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. QEF

23. Önerme:
Bir doğru üzerinde ve üzerindeki bir noktadan verilen bir düzkenar açıya eşit bir düzkenar açı çizmenin yolu.



Verilen doğru AB olsun, üzerindeki nokta A ve verilen düzkenar açı da DCE olsun.

Böylece verilen AB doğrusunun üzerindeki A noktasında verilen DCE düzkenar açıya eşit bir düzkenar açı çizilmesi isteniyor.

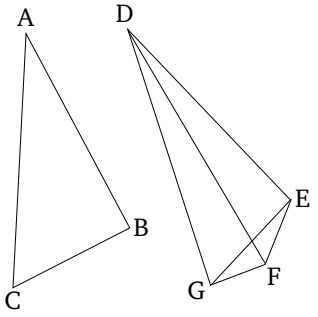
CD, CE doğruları üzerinde D, E noktaları rastgele seçilsin; DE birleştirilsin, CD, DE, CE doğrularına eşit üç doğru kullanılarak AFG üçgeni, CD eşittir AF, CE eşittir AG ve DE eşittir FG olacak şekilde çizilsin. **[I.22]**

O zaman, DC, CE kenarları sırasıyla FA, AG kenarlarına eşit olduğundan, ve DE tabanı da FG tabanına eşit olduğundan, DCE açısı FAG açısına eşit olur. **[I.8]**

Böylece verilen AB doğrusuna üzerinde verilen A noktasından verilen DCE düzkenar açıya eşit FAG düzkenar açısı çizildi.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. QEF

24. Önerme:
Karşılıklı ikişer kenarları eşit olan üçgenlerden bu eşit kenarlar arasındaki açısı diğerininkinden büyük olan üçgenin tabanı da diğerinin tabanından büyüktür.



AB ve AC kenarları sırasıyla DE ve DF kenarlarına eşit olan ABC ve DEF üçgenleri verilmiş olsun, yani AB kenarı DE'ye, ve AC kenarı DF'ye eşit olsun, ve A köşesindeki açı D köşesindeki açıdan büyük olsun.

Diyorum ki BC tabanı da EF tabanından büyüktür.

Çünkü, BAC açısı EDF açısından büyük olduğundan, DE doğrusuna üzerindeki D noktasında, BAC açısına eşit EDG açısı çizilsin; **[I.23]**

DG kenarı AC ya da DF doğrularından birine eşit yapılsın, ve EG, FG birleştirilsin.

O zaman, AB eşittir DE, ve AC eşittir DG olduğundan, BA AC kenarları sırasıyla ED, DG kenarlarına eşittir; ve BAC açısı EDG açısına eşittir. Bu nedenle BC tabanı EG tabanına eşittir. **[I.4]**

Öte yandan, DF eşittir DG olduğundan, DGF açısı da DFG açısına eşittir. **[I.5]**

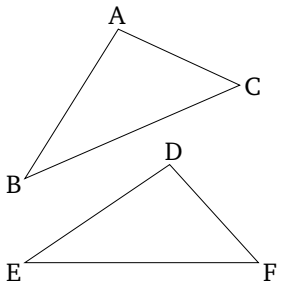
bu nedenle DFG açısı EGF açısından büyüktür. Demek ki EFG açısı EGF açısından daha da büyüktür.

Ve, EFG üçgeninde EFG açısı EGF açısından büyük olduğundan, ve daha büyük açı daha büyük kenarı gördüğünden, **[I.19]**

EG kenarı EF kenarından büyüktür. Ama EG eşittir BC. Öyleyse BC de EF'den büyüktür.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

25. Önerme:
Eğer iki üçgenin karşılıklı ikişer kenarları eşit ama birinin tabanı diğerinkinden büyükse, eşit kenarlar arasında kalan açısı da diğerinkinden büyük olacaktır.



AB ve AC kenarları sırasıyla DE ve DF kenarlarına eşit olan ABC ve DEF üçgenleri verilmiş olsun, yani AB kenarı DE'ye, ve AC kenarı DF'ye eşit olsun, ve BC tabanı EF tabanından büyük olsun.

Diyorum ki BAC açısı da EDF açısından büyüktür.

Çünkü öyle olmasaydı ya eşit olur ya da küçük.

Şimdi BAC açısı EDF açısına eşit değildir; öyle olsaydı BC tabanı EF tabanına eşit olurdu, **[I.4]**

ama değil; demek ki BAC açısı EDF açısına eşit değil.

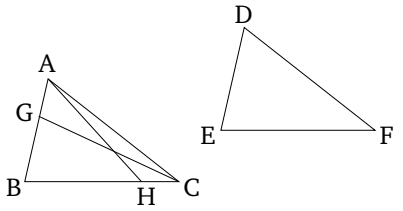
Benzer şekilde BAC açısı EDF açısından küçük olamaz; çünkü o zaman BC tabanı EF tabanından küçük olurdu, **[I.24]**

ama değil; demek ki BAC açısı EDF açısından küçük değil.

Ama eşit olmadığı da kanıtlanmıştı. Öyleyse BAC açısı EDF açısından büyüktür.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

26. Önerme:
Karşılıklı ikişer açıları aynı olan üçgenlerde eğer bu açılar arasında kalan kenarlar eşitse, ya da bu eşit açılardan birini gören kenar diğer üçgendeki eşit açılardan birini gören kenara eşitse, bu üçgenlerde diğer kenarlar da eşit olur ve birinin kalan açısı öbürünün kalan açısına eşit olur..



ABC ve BCA açıları sırasıyla DEF ve EFD açılarına eşit olan ABC ve DEF üçgenleri verilmiş olsun, yani ABC açısı DEF açısına, ve BCA açısı EFD açısına eşit olsun; ve üçgenlerin birer kenarları karşılıklı eşit olsun, önce eşit açıları birleştiren kenarlar, yani BC kenarı EF kenarına eşit olsun.

Diyorum ki üçgenlerin diğer kenarları da birbirine sırasıyla eşit our, yani AB kenarı DE kenarına, ve AC kenarı DF kenarına eşit olur, ve BAC açısı EDF açısına eşit olur.

Çünkü eğer AB ile DE eşit değilse, biri büyüktür.

Büyük olan AB olsun, ve BG, DE'ye eşit kılınsın, GC birleştirilsin.

O zaman, BG, DE'ye ve BC, EF'ye eşit olduğundan, GB, BC kenarları sırasıyla DE, EF kenarlarına eşitir; ve GBC açısı DEF açısına eşittir; bu nedenle GC tabanı DF tabanına, ve GBC üçgeni DEF üçgenine eşittir. Bu durumda kalan açılar da birbirine eşit eşit olacaktır, yani eşit kenarları gören açılar. **[I.4]**

Öyleyse GCB açısı DFE açısına eşittir, ama DFE açısının BCA açısına eşit olduğu varsayılmıştı; öyleyse BCG açısı BCA açısına eşittir, küçük olan büyük olana: bu olamaz.

Bu durumda AB, DE'den farklı olamaz, öyleyse ona eşittir.

Ama BC de EF'ye eşittir; öyleyse AB, BC kenarları sırasıyla DE, EF kenarlarına eşittir, ve ABC açısı DEF açısına eşittir; öyleyse AC tabanı DF tabanına eşittir, ve kalan BAC açısı kalan EDF açısına eşittir. **[I.4]**

Benzer şekilde, eşit açıları gören karşılıklı iki kenar eşit olsun, örneğin AB kenarı DE kenarına eşit olsun.

Diyorum ki diğer kenarlar da birbirine eşit olur, yani AC kenarı DF kenarına, ve BC kenarı EF kenarına eşit olur, ve dahası kalan diğer açı BAC diğer kalan açı EDF açısına eşittir.

Çünkü eğer BC ile EF eşit değilse, biri büyüktür.

Mümkünse büyük olan BC olsun, ve BH, EF'ye eşit kılınsın, AH birleştirilsin.

O zaman, BH, EF'ye ve AB, DE'ye eşit olduğundan, AB, BH kenarları sırasıyla DE, EF kenarlarına eşittir, ve aralarındaki açılar eşittir; öyleyse AH tabanı DF tabanına eşittir ve ABH üçgeni DEF üçgenine eşittir, ve kalan açılar kalan açılara eşit olacaktır, yani eşit kenarları gören açılar eşit olacaktır. **[I.4]**

Öyleyse BHA açısı EFD açısına eşittir.

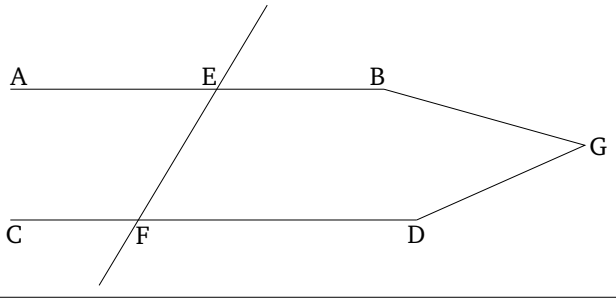
Ama EFD açısı BCA açısına eşittir; bu durumda AHC üçgeninde, BHA dış açısı BCA karşı iç açıya eşittir ki bu olamaz. **[I.16]**

Bu durumda BC, EF'den farklı olamaz, öyleyse ona eşittir.

Ama AB aynı zamanda DE'ye de eşittir; öyleyse AB, BC kenarları sırasıyla DE, EF kenarlarına eşittir, ve aralarındaki açılar eşittir. Öyleyse AC tabanı DF tabanına eşittir ve ABC üçgeni DEF üçgenine eşittir, ve kalan BAC açısı kalan EDF açısına eşittir. **[I.4]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

27. Önerme:
Eğer bir doğru, iki doğruyu kestiğinde oluşan ters iç açılar eşitse, o iki doğru paraleldir.



EF doğrusu AB ve CD doğrularını AEF ve EFD açılarını eşit kılacak şekilde kessin.

Diyorum ki AB doğrusu CD doğrusuna paraleldir.

Çünkü değilse, AB, CD doğruları B, D ya da A, C yönünde uzatıldıklarında kesişeceklerdir.

B, D yönünde uzatılmış ve G noktasında kesişmiş olsunlar.

O zamanGEF üçgeninde AEF dış açısı EFG karşı iç açısına eşit olur ki bu olamaz. **[I.16]**

Bu nedenle AB, CD doğruları B, D yönünde uzatıldığında kesişmezler.

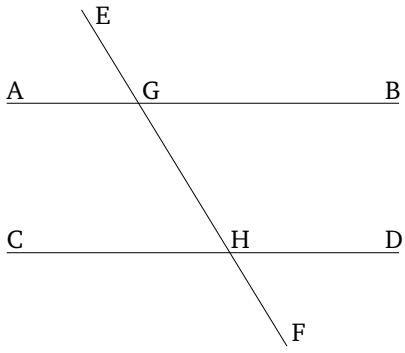
Benzer şekilde A, C yönünde uzatıldıklarında da kesişmedikleri kanıtlanabilir.

Ama hangi yönde uzatılırsa uzatılsın kesişmeyeb doğrular paraleldir; **[Tan. 23]**

öyleyse AB doğrusu CD doğrusuna paraleldir.

Bundan dolayı vs …
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

28. Önerme:
Eğer bir doğru, iki doğruyu kestiğinde biriyle yaptığı dış açı diğeriyle aynı tarafta yaptığı karşı iç açıya eşitse, ya da aynı taraftaki iç açılar iki dik açıya eşitse, o iki doğru paraleldir.



EF doğrusu AB ve CD doğrularını kestiğinde EGB dış açısıyla GHD iç açıları eşit olsun, ya da aynı taraftaki BGH ve GHD açıları iki dik açıya eşit olsun.

Diyorum ki AB doğrusu CD doğrusuna paraleldir.

Çünkü EGB açısı GHD açısına eşit olduğundan, ve bu arada EGB açısı AGH açısına eşit olduğundan, **[I.15]**

AGH açısı GHD açısına eşittir, ve bunlar ters iç açılardır. Öyleyse AB doğrusu CD doğrusuna paraleldir. **[I.27]**

Yine, BGH, GHD açıları iki dik açıya eşit olduğundan, ve AGH, BGH açıları da iki dik açıya eşit olduğundan, **[I.13]**

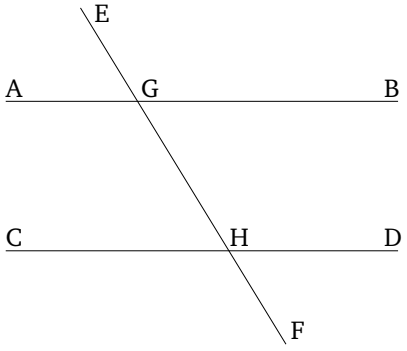
AGH, BGH açıları BGH, GHD açılarına eşittir.

BGH açısı her iki taraftan da çıkarılsın; bu durumda kalan AGH açısı kalan GHD açısına eşittir, ve bunlar da ters iç açılardır.

Öyleyse AB doğrusu CD doğrusuna paraleldir. **[I.27]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

29. Önerme:
Eğer iki doğru paralelse bunları kesen bir doğrunun oluşturduğu ters iç açılar eşittir, dış açı karşı iç açıya eşittir, ve aynı taraftaki iç açılar iki dik açıya eşittir.



AB, CD paralel doğrularını EF doğrusu kessin.

Diyorum ki ters iç açılar AGH ve GHD eşittir, dış açı EGB ve karşı iç açı GHD eşittir, ve aynı taraftaki iç açılar yani BGH, GHD, iki dik açıya eşittir.

Çünkü, eğer AGH açısı GHD açısından farklıysa, bunlardan biri büyüktür.

AGH açısı büyük olsun.

Her ikisine de BGH açısı eklensin. Bu durumda AGH, BGH açıları BGH, GHD açılarından büyük olur.

Ama AGH, GHD açıları iki dik açıya eşittir. **[I.13]**

öyleyse BGH, GHD açıları iki dik açıdan küçüktür.

Ama iki dik açıdan küçük açılar yönünde uzatılan doğrular kesişir; **[Bel. 5]**

demek ki AB, BC uzatıldıklarında kesişecekler; ama bunlar kesişmez çünkü paraleldirler.

Bu yüzden AGH açısı GHD açısından farklı değildir, öyleyse eşittir.

Yine, AGH açısı EGB açısına eşittir; **[I.15]**

öyleyse EGB açısı da GHD açısına eşittir. **[Ort. 1]**

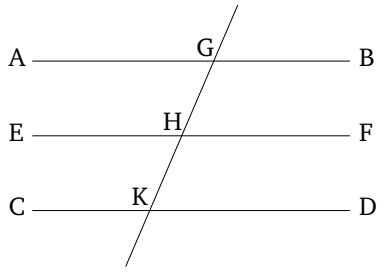
BGH açısı her ikisine de eklensin. bu durumda EGB, BGH açıları BGH, GHD açılarına eşit olur. **[Ort. 2]**

Ama EGB, BGH açıları iki dik açıya eşittir. **[I.13]**

Bu durumda BGH, GHD açıları da iki dik açıya eşittir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

30. Önerme:
Aynı doğruya paralel olan doğrular birbirlerine de paraleldir.



AB ve CD doğrularının her biri EF doğrusuna paralel olsun.

Diyorum ki AB doğrusu CD doğrusuna da paraleldir.

Çünkü, GK doğrusu bunları kessin; o zaman GK doğrusu paralel AB, EF doğrularını kestiği için AGK açısı GHF açısına eşittir. **[I.29]**

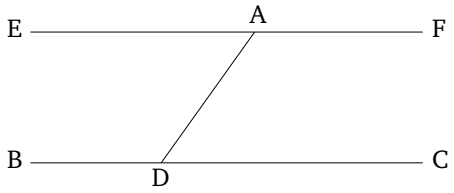
Yine, GK doğrusu EF, CD paralel doğrularını kestiği için GHF açısı GKD açısına eşittir. **[I.29]**

Ama AGK açısının da GHF açısına eşit olduğu kanıtlanmıştı; bu durumda AGK açısı GKD açısına da eşittir, **[Ort. 1]**

ve bunlar ters iç açılardır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

31. Önerme:
Verilen bir noktadan verilen bir doğruya paralel bir doğru çizmenin yolu.



Verilen nokta A ve verilen doğru BC olsun.

Böylece A noktasından BC doğrusuna paralel bir doğru çizilmesi istenmekte.

BC üzerinde rastgele bir D noktası alınsın, ve AD birleştirilsin. DA doğrusuna A noktasında ADC açısına eşit DAE açısı çizilsin, **[I.23]**

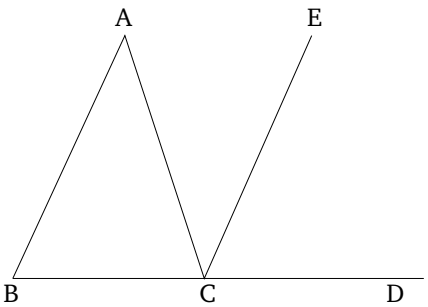
ve EA doğrultusunda AF doğrusu çizilsin.

O zaman, BC, EF doğrularını kesen AD doğrusu EAD, ADC ters iç açılarını eşit yaptığından, EAF doğrusu BC'ye paraleldir. **[I.27]**

Böylece verilen A noktasından verilen BC doğrusuna paralel EAF doğrusu çizilmiş oldu.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. QEF

32. Önerme:
Bir üçgende kenarlardan biri uzatılırsa, dış açı karşı iki iç açısının toplamına eşittir, ve üçgenin iç açıları iki dik açıya eşittir.



ABC bir üçgen olsun, ve kenarlardan biri, BC, D noktasına kadar uzatılmış olsun.

Diyorum ki dış açı ACD, iki karşı iç açı CAB, ABC'ye eşittir, ve üç iç açı ABC, BCA, CAB iki dik açıya eşittir.

Çünkü, C noktasından AB'ye paralel CE çizilsin; **[I.31]**

o zaman, AB, CE'ye paralel olduğundan ve AC bunları kestiğinden, ters iç açılar BAC, ACE birbirine eşittir. **[I.29]**

Benzer şekilde, AB, CE'ye paralel olduğundan ve BD doğrusu bunları kestiğinden, dış açı ECD karşı iç açı ABC'ye eşittir. **[I.29]**

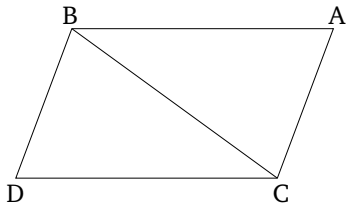
Ama ACE açısının da BAC açısına eşit olduğu kanıtlanmıştı; öyleyse ACD açısının tamamı iki karşı iç açı BAC, ABC'ye eşittir.

Her iki tarafa ACB açısı eklensin.; o durumda ACD, ACB açıları ABC, BCA, CAB açılarına eşittir. Ama ACD, ACB açıları iki dik açıya eşittir. **[I.13]**

Bu nedenle ABC, BCA, CAB açıları iki dik açıya eşittie.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

33. Önerme:
Eşit ve paralel doğruları aynı yönlerde birleştiren doğrular da eşit ve paraleldir.



AB ve CD doğruları eşit ve paralel olsun, ve AC*ve*BD doğruları bunların aynı taraftaki uçlarını birleştiren doğrular olsun.

Diyorum ki AC, BD eşit ve paraleldir.

BC birleştirilsin. O zaman, AB, BC'ye paralel olduğundan, ve BC bunları kestiğinden, ters iç açılar ABC, BCD birbirine eşittir. **[I.29]**

Ve, AB, CD'ye eşit olduğundan ve BC ortak olduğundan, AB, BC kenarları sırasıyla DC, CB kenarlarına, ve ABC açısı BCD açısına eşittir; bu durumda AC tabanı BD tabanına eşittir, ve ABC üçgeni

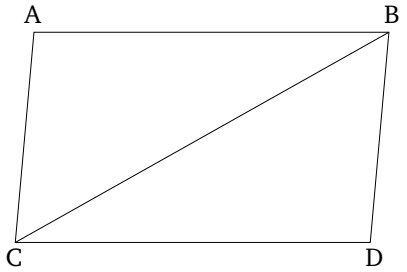
DCB üçgenine eşittir, ve kalan açılar da sırasıyla kalan açılara eşit olacaktır, yani eşit kenarların gördüğü açılar. **[I.4]**

Öyleyse ACB açısı CBD açısına eşittir.

Ama AC, BD doğrularını kesen BC doğrusu ters iç açıları eşit yaptığından, AC doğrusu BD doğrsuna paraleldir. Ve eşit oldukları da kanıtlanmıştı.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

34. Önerme:
Bir paralelkenarda karşılıklı kenarlar ve açılar eşittir, ve paralelkenarın köşegeni alanını ikiye böler.



ABCD bir paralekenar ve BC onun bir köşegeni olsun.

Diyorum ki ABCD paralelkenarın karşılıklı kenarları ve açıları eşittir, ve BC köşegeni paralelkenarıı ikiye böler.

Çünkü, AB, CD'ye paralel olduğundan ve BC onları kestiğinden, ters iç açılar ABC, BCD birbirine eşittir. **[I.29]**

Benzer şekilde, AC, BD'ye paralel olduğundan ve BD onları kestiğinden, ters iç açılar ACB, CBD birbirine eşittir. **[I.29]**

Bu durumda ABC, DCB üçgenlerinde ABC, BCA açıları sırasıyla DCB, CBD açılarına eşittir, ve bir kenar bir kenara eşittir, yani eşit açıları birleştiren ve ortak olan BC; öyleyse kalan kenarlar da sırasıyla kalan kenarlara eşit olacaktır, ve kalan açı da kalan açıya eşit olacaktır. **[I.26]**

Bu yüzden AB eşittir CD, ve AC eşittir BD olur ve hatta BAC açısı CDB açısına eşit olur.

Ve ABC açısı BCD açısına, ve CBD açısı ACB açısına eşit olduğundan, ABD açısı ACD açısına eşit olur. **[Ort. 2]**

Ve BAC açısının da CDB açısına eşit olduğu kanıtlanmıştı.

Öyleyse paralelkenarlarda karşı kenarlar ve karşı açılar eşittir.

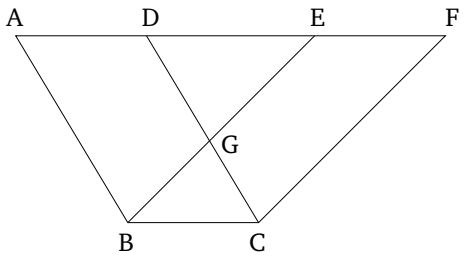
Sonra diyorum ki köşegen alanı ikiye böler.

Çünkü AB, CD'ye eşit, ve BC ortak olduğundan, AB, BC kenarları sırasıyla DC, CB kenarlarına eşittir, ABC açısı BCD açısına eşittir, öyleyse AC tabanı DB tabanına eşittir, ve ABC üçgeni DCB üçgenine eşittir. **[I.4]**

Bu nedenle BC köşegeni ACDB paralelkenarını ikiye böler.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

35. Önerme:
Aynı taban üzerinde ve aynı paraleller arasında olan paralelkenarlar birbirine eşittir.



ABCD, EFGH, aynı BC tabanı üzerinde ve aynı AH, BG paralelleri arasında olan paralelkenarlar olsun.

Diyorum ki ABCD, EBCF paralelkenarına eşittir.

Çünkü, ABCD paralelkenar olduğu için AD eşittir BC. **[I.34]**

Aynı nedenle EF eşittir BC, böylece AD eşittir EF olur; **[Ort. 1]**

bu durumda AE'nin tümü DF'nin tümüne eşit olur. **[Ort. 2]**

Ama AB de DC'ye eşittir; bu durumda EA, AB kenarları sırasıyla FD, DC kenarlarına eşittir, ve FDC dış açısı EAB karşı iç açısına eşittir; **[I.29]**

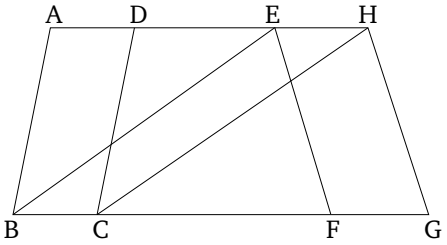
Öyleyse EB tabanı FC tabanına eşittir, ve EAB üçgeni FDC üçgenine eşittir. **[I.4]**

Her ikisinden DGE çıkarılsın; o zaman kalan ABGD yamuğu kalan EGCF yamuğuna eşittir. **[Ort. 3]**

Her ikisine de GBC üçgeni eklensin; o zaman ABCD paralelkenarın tümü EBCF paralelkenarın tümüne eşit olur. **[Ort. 2]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

36. Önerme:
Eşit tabanlar üzerinde ve aynı paraleller arasında olan paralelkenarlar birbirine eşittir.



ABCD, EFGH, eşit BC, FG tabanları üzerinde ve aynı AH, BG paralelleri arasında olan paralelkenarlar olsun.

Diyorum ki ABCD paralelkenarı EBCF'ye eşittir.

Çünkü BE, CH birleştirilsin. Sonra FG, EH'ye eşitken BC, FG'ye eşit olduğundan, BC de EH'ye eşittir. **[Ort. 1]**

Ama bunlar paraleldir de. Ve EB, HC onları birleştirir; ama eşit ve paralel doğruları aynı yönlerde birleştiren doğrular da eşit ve paraleldir. **[I.33]**

Öyleyse EBCH paralelkenardır. **[I.34]**

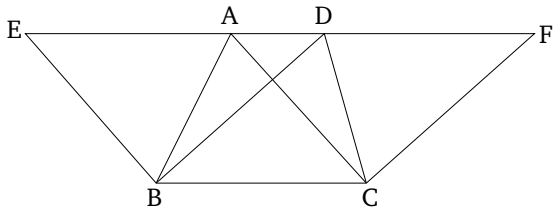
Ve aynı BC tabanı üzerinde ve aynı BC, AH paralelleri arasında olduğundan ABCD'ye eşittir. **[I.35]**

Aynı nedenle EFGH de aynı EBCH'ye eşittir. **[I.35]**

Bu nedenle ABCD paralelkenarı EFGH'ye eşittir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

37. Önerme:
Aynı taban üzerinde ve aynı paraleller arasında olan üçgenler birbirine eşittir.



ABC, DBC, aynı BC tabanı üzerinde ve aynı AD, BC paralelleri arasında olan üçgenler olsun.

Diyorum ki ABC üçgeni DBC üçgenine eşittir.

AD her iki yönde E, F'ye uzatılsın; B'den CA'ya paralel BE çizilsin, **[I.31]**

ve C'den BD'ye paralel CF çizilsin. **[I.31]**

O zaman EBCA, DBCF şekillerinin herbiri paralelkenardır ve eşittirler, çünkü aynı BC tabanı üzerinde ve aynı BC, EF paralelleri arasındalar. **[I.35]**

Ayrıca ABC üçgeni EBCA paralelkenarın yarısıdr çünkü AB köşegeni paralelkenarı ikiye böler. **[I.34]**

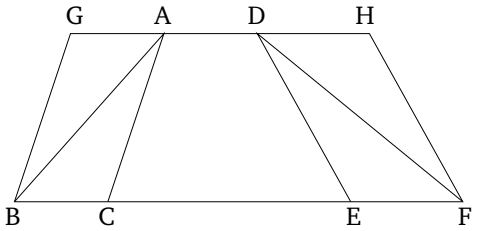
Ve DBC üçgeni DBCF paralelkenarın yarısıdr çünkü DC köşegeni paralelkenarı ikiye böler. **[I.34]**

Ama eşit şeylerin yarıları birbirine eşittir.

Bu yüzden ABC üçgeni DBC üçgenine eşittir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

38. Önerme:
Eşit tabanlar üzerinde ve aynı paraleller arasında olan üçgenler birbirine eşittir.



ABC, DEF, eşit BC, EF tabanları üzerinde ve aynı BF, AD paralelleri arasında olan üçgenler olsun.

Diyorum ki ABC üçgeni DEF üçgenine eşittir.

Çünkü AD her iki yönde G, H'ye uzatılsın; B'den CA'ya paralel BG çizilsin, **[I.31]**

ve F'den DE'ye paralel FH çizilsin.

O zaman GBCA, DEFH şekillerinin her biri paralelkenardır; ve GBCA, DEFH'ye eşittir çünkü eşit BC, EF tabanları üzerinde ve aynı BF, GH paralelleri arasındalar. **[I.36]**

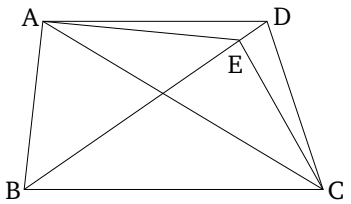
Ayrıca ABC üçgeni GBCA paralelkenarın yarısıdır çünkü AB köşegeni paralelkenarı ikiye böler. **[I.34]**

Ve FED üçgeni DEFH paralelkenarın yarısıdır çünkü DF köşegeni paralelkenarı ikiye böler. **[I.34]**

Ama eşit şeylerin yarıları birbirine eşittir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

39. Önerme:
Aynı tabanın üzerinde ve aynı tarafında olan eşit üçgenler aynı paralellerin arasındadır.



ABC, DBC aynı BC tabanı üzerinde ve onun aynı tarafında olan iki eşit üçgen olsun.

Ve AD birleştirilsin; diyorum ki AD, BC'ye paraleldir.

Çünkü değilse, A noktasından BC'ye paralel AE çizilsin, **[I.31]**

ve EC birleştirilsin. Bu durumda ABC üçgeni EBC üçgenine eşittir, çünkü aynı BC tabanı üzerinde ve aynı paraleller arasında. **[I.37]**

Ama ABC, DBC'ye eşittir; bu durumda DBC de EBC'ye eşittir, **[Ort. 1]**

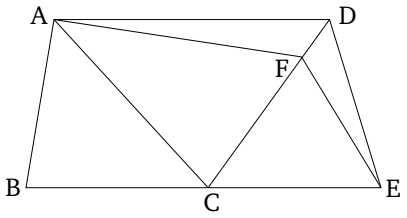
yani büyük olan küçük olana eşit ki bu olamaz. Bu yüzden AE, BC'ye paralel değildir.

Benzer şeklide kanıtlayabiliriz ki AD dışında hiç bir doğru BC'ye paralel olamaz.

Öyleyse AD, BC'ye paraleldir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

40. Önerme:
Eşit tabanların üzerinde ve aynı tarafında olan eşit üçgenler aynı paralellerin arasındadır.



ABC, CDE eşit BC, CE tabanları üzerinde ve aynı tarafında olan iki eşit üçgen olsun.

Diyorum ki bunlar aynı paralellerin de arasında kalır.

Çünkü AD birleştirilsin; diyorum ki AD, BE'ye paraleldir.

Çünkü değilse A noktasından BE'ye paralel AF çizilsin, **[I.31]**

ve FE birleştirilsin.

Bu durumda ABC üçgeni FCE üçgenine eşittir, çünkü eşit BC, CE tabanları üzerinde ve aynı BE, AF paralelleri arasındalar. **[I.38]**

Ama ABC üçgeni DCE üçgenine eşit; o zaman DCE üçgeni de FCE üçgenine eşit, **[Ort. 1]**

yani büyük olan küçük olana eşit ki bu olamaz.

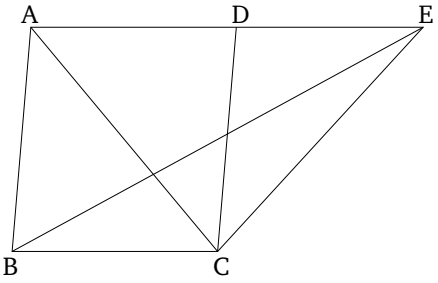
Bu yüzden AF, BE'ye paralel değildir.

Benzer şeklide kanıtlayabiliriz ki AD dışında hiç bir doğru BE'ye paralel olamaz.

Öyleyse AD, BE'ye paraleldir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

41. Önerme:
Eğer bir paralelkenar bir üçgenle aynı tabana sahipse ve üçgenle aynı paraleller arasındaysa paralelkenar üçgenin iki katıdır.



ABCD paralelkenarı EBC üçgeniyle aynı BC tabanına sahip olsun ve aynı BC, AE doğruları arasında olsun.

Diyorum ki ABCD paralelkenarı BEC üçgeninin iki katıdır.

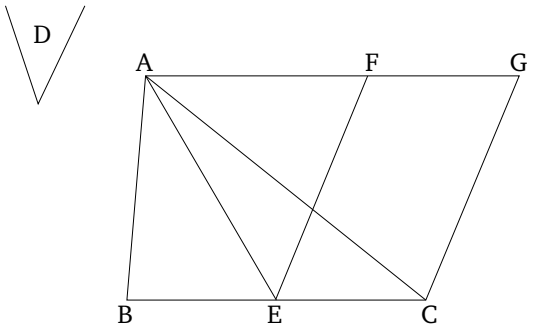
Çünkü AC birleştirilsin; o zaman ABC üçgeni EBC üçgenine eşittir çünkü aynı BC tabanı üzerinde ve aynı BC, AE paralelleri arasındalar. **[I.37]**

Ama ABCD paralelkenarı ABC üçgeninin iki katıdır çünkü AC köşegeni paralelkenarı ikiye böler; **[I.34]**

demek ki ABCD paralelkenarı EBC üçgeninin iki katıdır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

42. Önerme:
Düzkenar bir açının içine verilen bir üçgene eşit bir paralelkenar çizmenin yolu.



Verilen üçgen ABC, ve verilan düzkenar açı D olsun; böylece düzkenar D açısı içine ABC üçgenine eşit bir paralelkenar çizilmesi isteniyor.

BC, E'de ikiye bölünsün ve AE birleştirilsin; EC doğrusu üzerinde E noktasında D açısına eşit CEF açısı çizilsin; **[I.23]**

A'dan EC'ye paralel AG çizilsin, **[I.31]**

ve C'den EF'ye paralel CG çizilsin.

Bu durumda FECG bir paralelkenardır.

Ve BE, EC'ye eşit olduğu için ABE üçgeni de AEC üçgenine eşititir, çünkü eşit BE, EC tabanları üzerinde ve aynı BC, AG paralelleri arasındalar; **[I.38]**

Bu durumda ABC üçgeni AEC üçgeninin iki katıdır.

Ama FECG paralelkenarı da AEC üçgeninin iki katıdır, çünkü onunla aynı tabana sahiptir ve aynı paraleller arasındadır.; **[I.41]**

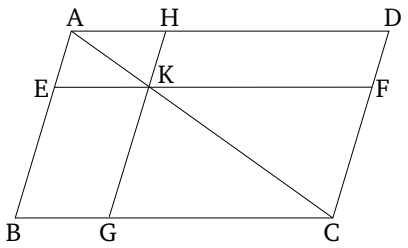
bu durumda FECG paralelkenarı ABC üçgenine eşittir.

Ve D açısına eşit olan CEF açısına sahiptir.

Öyleyse, D açısına eşit olan CEF açısı içine ABC üçgenine eşit FECG paralelkenarı çizilmiştir.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. QEF

43. Önerme:
Herhangi bir paralelkenarda köşegen üzerindeki paralelkenarların tümleyenleri birbirine eşittir.



ABCD bir paralelkenar ve AC onun köşegeni olsun; ve AC etrafında EH, FG paralelkenarları alınsın, ve BK, KD onların tümleyenleri olsun.

Diyorum ki BK tümleyeni KD tümleyenine eşittir.

Çünkü ABCD bir paralelkenar ve AC onun köşegeni olduğundan ABC üçgeni ACD üçgenine eşittir. **[I.34]**

Benzer şekilde, EH bir paralelkenar ve AK onun köşegemi olduğundan AEK üçgeni AHK üçgenine eşittir.

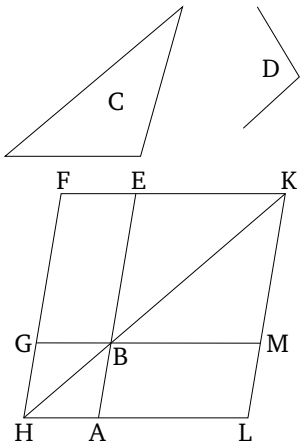
Aynı nedenden dolayı KFC üçgeni KGC üçgenine eşittir.

Şimdi, AEK üçgeni AHK üçgenine, ve KFC, KGC'ye eşit olduğundan, AEK üçgeniyle KGC üçgeni birlikte AHK üçgeniyle KFC üçgenine eşittir. **[Ort. 2]**

Ve tüm üçgen ABC de tüm üçgen ADC'ye eşittir; öyleyse kalan tümleyen BK kalan tümleyen KD'ye eşittir. **[Ort. 3]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

44. Önerme:
Verilen bir doğru üzerine, verilen bir düzkenar açı içine, verilen bir üçgene eşit bir paralelkenar uygulamanın yolu.



Verilen doğru AB, verilen üçgen C, ve verilen düzkenar açı D olsun; böylece verilen AB doğrusu üzerine, D açısına eşit bir açı içine, verilen C üçgenine eşit bir paralelkenar uygulanması isteniyor.

D açısına eşit EBG açısı içine verilen C üçgenine eşit BEFG paralelkenarı çizilsin; **[I.42]**

öyle ki BE, AB ile aynı doğru üzerinde olsun. H'ye doğru FG, ve A'dan AH, BG ya da EF'ye paralel olacak şekilde çizilsin. **[I.31]**

HB birleştirilsin.

HF doğrusu AH, EF paralellerini kestiği için AHF, HFE açıları iki dik açıya eşittir. **[29]**

Öyleyse BHG, GFE açıları iki dik açıdan küçüktür; ve iki dik açıdan küçük açılardan uzatılan doğrular kesişir; **[Bel. 5]**

o yüzden HB, FE uzatıldığında kesişeceklerdir.

Uzatılsınlar ve K'de kesişsinler; K'den, KL doğrusu EA'ya ya da FH'ye paralel çizilsin, **[I.31]**

ve HA, GB doğruları L, M noktalarına uzatılsın.

O zaman HLKF bir paralelkenardır, HK köşegenidir; ve AG, ME paralelkenarlar ve LB, BF onların HK etrafındaki tümleyenleridir. Bu durumda LB, BF'ye eşittir. **[I.43]**

Ama BF, C üçgenine eşittir. O yüzden LB de C üçgenine eşittir. **[Ort. I]**

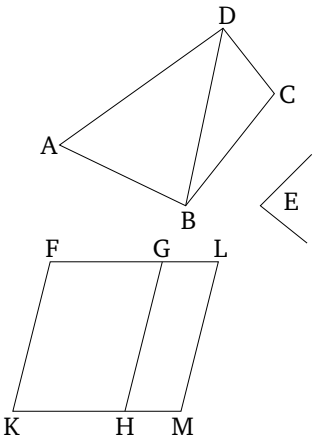
Ve GBE üçgeni ABM üçgenine eşit olduğundan, **[I.15]**

ve bu arada GBE açısı D açısına eşit olduğundan, ABM açısı da D açısına eşittir.

Böylece verilen C üçgenine eşit LB paralelkenarı AB doğrusu üzerine, ve D açısına eşit ABM açısı içine uygulanmıştır.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. QEF

45. Önerme:
Bir düzkenar açı içine verilen bir düzkenar şekle eşit bir paralelkenar çizmenin yolu.



Verilen düzkenar şekil ABCD olsun ve verilen düzkenar açı E olsun; böylece E açısı içine ABCD düzkenar şekline eşit bir paralelkenar çizilmesi istenmektedir.

DB birleştirilsin, ve E açısına eşit HKF açısı içine ABD üçgenine eşit DB paralelkenarı çizilsin. **[I.42]**

GH doğrusu üzerine, E'ye eşit GHM açısı içine, DBC üçgenine eşit GM paralelkenarı uyguulansın. **[I.44]**

O zaman, E açısı HKF, GHM açılarının herbirine eşit olduğundan, HKF açısı da GHM açısına eşittir. **[Ort. 1]**

İkisine de KHG açısı eklensin; bu durumda FKH, KHG açıları KHG, GHM açılarına eşittir. Ama KHG, GHM açıları iki dik açıya eşittir; **[I.29]**

öyleyse KHG, GHM açıları da iki dik açıya eşittir.

Böylece GH doğrusunun üzerindeki H noktasında, onun aynı tarafında olmayan iki doğru KH, HM komşu iki açıyı iki dik açıya eşit kılar; bu durumda KH, HM ile aynı doğru üzerindedir. **[I.14]**

Ve HG doğrusu paralel KM, FG doğrularını kestiğinden, ters iç açılar MHG, HGL birbirine eşittir. **[I.29]**

İkisine de HGL açısı eklensin; o zaman MHG, HGL açıları HGF, HGL açılarına eşittir. **[Ort. 2]**

Ama MHG, HGL açıları iki dik açıya eşittir; **[I.29]**

bu durumda HGF, HGL açıları da iki dik açıya eşittir. **[Ort. 1]**

O zaman FG, GL ile aynı doğru üzerindedir. **[I.34]**

Ve FK, HG'ye, ve HG, ML'ye eşit ve paralel olduğundan, KF de ML'ye eşit ve paraleldir; **[Ort. 1, Öne. I.30]**

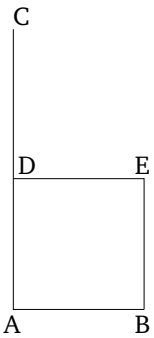
ve KM, FL onları uçlarından birleştirir; dolayısıyla KM ile FL de eşit ve paraleldirler. **[I.33]**

Bu durumda KFLM paralelkenardır. Ve ABD üçgeni FH paralelkenarına, ve DBC üçgeni GM'ye eşit olduğundan, bütün düzkenar şekil ABCD, KFLM paralekenarın tamamına eşittir.

Böylece KFLM paralelkenarı verien E açısına eşit FKM açısı içine, verilen ABCD çokkenar şekle eşit olacak şekilde çizilmiştir.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. QEF

46. Önerme:
Bir doğru parçası üzerine bir kare çizmenin yolu.



Verilen doğru parçası AB olsun; böylece AB üzerine bir kare çizilmesi istenmektedir.

AB doğrusuna üzerindeki A noktasından AC doğrusu dik açı yapacak şekilde çizilsin, **[I.11]**

ve AD, AB'ye eşit kılınsın; D noktasından AB'ye paralel DE çizilsin, ve B noktasından AD'ye paralel BE çizilsin. **[I.31]**

Bu durumda ADEB paralelkenardır; öyleyse AB eşittir DE, ve AD eşittir BE olur. **[I.34]**

Ama AB eşittir AD; öyleyse dört doğru BA, AD, DE, EB birbirine eşittir; bu durmda ADEB paralelkenarı eşkenardır.

Ardından diyorum ki hem de dik açılıdır.

Çünkü AD doğrusu AB, DE paralellerini kestiğinden BAD, ADE açıları iki dik açıya eşittir. **[I.29]**

Ama BAD açısı diktir; öyleyse ADE açısı da diktir.

Ve bir paralelkenarda karşı kenarlar ve açılar birbirine eşittir; **[34]**

o yüzden ABE, BED karşı açılarının herbiri de diktir.

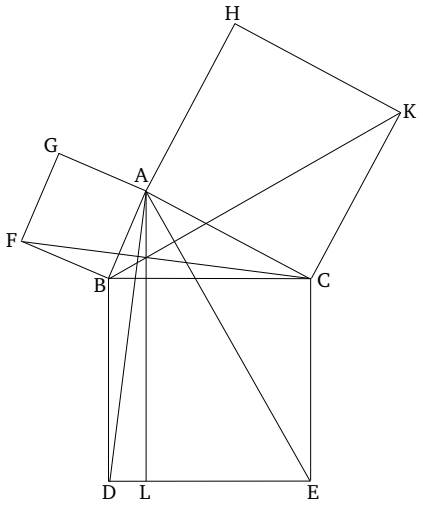
Bu durumda ADEB dik açılıdır.

Eşkenar olduğu da kanıtlanmıştı.

Böylece bu bir karedir; ve AB doğrusu üzerine çizilmiştir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

47. Önerme:
Dik açılı üçgenlerde dik açıyı gören kenar üzerindeki kare, dik açıyı içeren kenarlar üzerindeki karelere eşittir.



ABC üçgeni, BAC açısı dik olan bir üçgen olsun.

Diyorum ki BC zerindeki kare, BA, AC üzerindeki karelere eşittir.

Çünkü, BC üzerine BDEC karesi, ve BA, AC üzerine GB, HC kareleri çizilsin; **[I.46]**

A'dan BD ya da CE'ye paralel AL çizilsin, ve AD, FC birleştirilsin.

O zaman, BAC, BAG açılarının her biri dik olduğundan, AC, AG doğruları BA doğrusuna A noktasında, bu doğrunun aynı tarafında olmayacak şekilde çizilmiştir ve oluşturdukları komşu açıları iki dik açıya eşit kılarlar; bu durumda CA, AG ile aynı doğru üzerindedir. **[I.14]**

Aynı nedenden dolayı BA da AH ile aynı doğru üzerindedir.

Ve, her ikisi de dik olduğu için, DBC açısı FBA açısına eşit olduğundan, ABC açısı ikisine de eklensin; o zaman DBA açısı FBC açısına eşit olur. **[Ort. 2]**

Ve DB kenarı BC kenarına, ve FB, BA'ya eşit olduğundan, AB, BD kenarları sırasıyla FB, BC kenarlarına eşittir; ve ABD açısı FBC açısına eşittir; bu durumda AD tabanı FC tabanına eşit olur, ve ABD üçgeni FBC üçgenine eşit olur. **[I.4]**

Şimdi, BL paralelkenarı ABD üçgeninin iki katıdır, çünkü aynı BD tabanına sahipler ve aynı BD, AL paralelleri arasındalar. **[I.41]**

Ve GB karesi FBC üçgeninin iki katıdır, çünkü yine, aynı FB tabanına sahipler ve aynı FB, GC paralelleri arasındalar. **[I.41]**

Ama aynı şeylerin iki katları da birbirine eşittir.

Bundan dolayı BL paralelkenarı GB karesine eşittir.

Benzer şekilde, eğer AE, BK birleştirilirse, CL paralelkenarının da HC karesine eşit olduğu kanıtlanabilir;

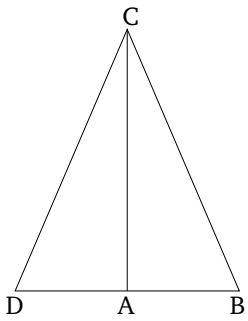
Öyleyse BDEC karesinin tamamı GB, HC karelerine eşittir. **[Ort. 2]**

Ve BDEC karesi BC üzerine, ve GB, HC kareleri BA, AC üzerine çizilmiştir.

Böylece BC üzerindeki kare BA, AC üzerindeki karelere eşittir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

48. Önerme:
Eğer bir üçgende bir kenar üzerindeki kare diğer iki kenarın üzerindeki karelere eşitse, diğer iki kenar arasındaki açı diktir.



ABC üçgeninde BC üzerindeki karen BA, AC üzerindeki karelere eşit olsun.

Diyorum ki BAC açısı diktir.

Çünkü, AC doğrusuna A noktasında AD dik açıyla çizilsin, AD, BA'ya eşit kılınsın, ve DC birleştirilsin. DA eşittir AB olduğundan, DA üzerindeki kare AB üzerindeki kareye de eşittir.

Her ikisine AC üzerindeki kare eklensin; bu durumda DA, AC üzerindeki kareler BA, AC üzerindeki kareler eşittir.

Ama DAC açısı dik olduğundan DC üzerindeki kare DA, AC üzerindeki karelere eşittir; **[I.47]**

ve BC üzerindeki kare BA, AC üzerindeki karelere eşittir, çünkü bu varsayıldı; bu durumda DC üzerindeki kare BC üzerindeki kareye eşittir, dolayısıyla DC kenarı da BC'ye eşittir.

Ve DA, AB'ye eşit olduğundan, ve AC ortak olduğundan, DA, AC kenarları sırasıyla BA, AC kenarlarına eşittir, ve DC tabanı BC tabanına eşittir; bu durumda DAC açısı BAC açısına eşittir. **[I.8]**

Amam DAC açısı diktir. Öyleyse BAC açısı da diktir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

Kitap II

1. Tanımlar

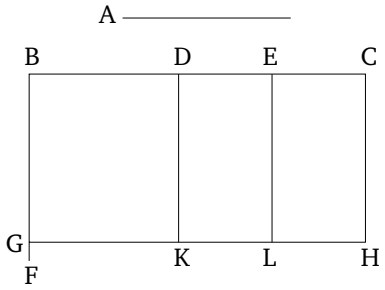
1 Dik açılı bir paralelkenar için bu dik açıyı oluşturan iki kenarın **içerdiği** dikdörtgen denir.

2 Bir paralelkenarın köşegeni üzerindeki her hangi bir paralelkenar ve tümleyenine birlikte **kadran**denir.

2. Önermeler

1. Önerme:
İki doğru verildiyse, ve doğrulardan biri rastgele sayıda parçalara kesilirse, bu iki doğrunun içerdiği dikdörtgen, kesilmemiş doğruyla her bir parçanın içerdiği dikdörtgenlere eşittir.

$[\, ab_1 + \cdots + ab_n = a(b_1 + \cdots + b_n). \,]$



Verilen doğrular A ve BC olsun, ve BC doğrusu rastgele D, E noktalarında kesilmiş olsun.

Diyorum ki A ve BC'nin içerdiği dikdörtgen, A ve BD'nin içerdiği dikdörtgenle A ve DE'nin içerdiği dikdörtgene eşittir.

Çünkü B noktasında BC'ye dik açılı BF çizilsin; **[I.11]**

BG, A'ya eşit kılınsın; **[I.3]**

G noktasından BC'ye paralel GH çizilsin, **[I.31]**

ve D, E, C'den BG'ye paralel DK, EL, CH çizilsin.

O zaman BH eşittir BK, DL, EH olur.

Şimdi BH dikdörtgeni A, BC dikdörtgenidir, çünkü GB, BC tarafından içerilir ve BG, A'ya eşittir;

BK dikdörtgeni A, BD dikdörtgenidir, çünkü GB, BD tarafından içerilir ve BG, A'ya eşittir;

ve DL dikdörtgeni A, BD dikdörtgenidir, çünkü DK, yani BG, A'ya eşittir. **[I.34]**

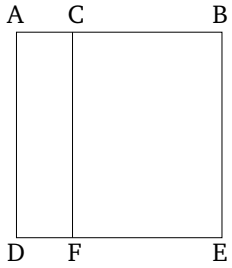
Benzer şekilde EH de A, EC dikdörtgenidir.

Öyleyse A, BC dikdörtgeni A, BD dikdörtgeni, A, DE dikdörtgeni ve A, EC dikdörtgenine eşittir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

2. Önerme:
Bir doğru rastgele kesildiğinde, bütünün parçaların ikisiyle içerdiği dikdörtgenler, bütünün üzerindeki kareye eşittir.

$[\ a(a+b) + b(a+b) = (a+b)^2.\ ]$



AB doğrusu rastgele bir C noktasında kesilsin.

Diyorum ki AB, BC tarafından içerilen dikdörtgen ile BA, BC tarafından içerilen dikdörtgen birlikte AB üzerindeki kareye eşittir.

Çünkü, AB üzerinde ADEB karesi çizilsin, **[I.46]**

ve C'den AD ya da BE'ye paralel CF çizilsin. **[I.31]**

O zaman AE eşittir AF, CE olur.

Şimdi AE dikdörtgeni AF üzerindeki karedir; AF dikdörtgeni BA, AC tarafından içerilen dikdörtgendir, çünkü DA, AC tarafından içerilir, ve AD eşittir AB;

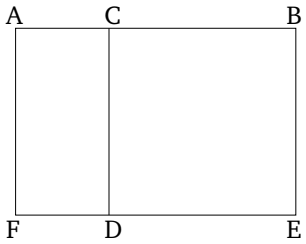
ve CE dikdörtgeni AB, BC dikdörtgenidir, çünkü BE eşittir AB.

Öyleyse BA, AC dikdörtgeni, AB, BC dikdörtgeniyle birlikte AB üzerindeki kareye eşittir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

3. Önerme:
Bir doğru rastgele ikiye kesilirse, bu parçalardan biriyle bütünün içerdiği dikdörtgen, o parçanın üzerindeki kareyle o parçanın diğer parçayla içerdiği dikdörtgene eşittir.

[$a(a+b) = a^2 + ab$. *]*



AB doğrusu rastgele bir C noktasında kesilsin.

Diyorum ki AB, BC'nin içerdiği dikdörtgen, AC, CB'nin içerdiği dikdörtgen ile BC üzerindeki kareye eşittir.

Çünkü CB üzerind CDEB karesi çizilsin; **[I.46]**

ED doğrusu F'ye kadar uzatılsın, ve A'dan CD ya da BE'ye paralel AF çizilsin. **[I.31]**

O zaman AE eşittir AD, CE olur.

Şimdi, AE dikdörtgeni AB, BC tarafından içerilen dikdörtgendir, çünkü AB, BE tarafından içerilir , ve BE eşittir BC;

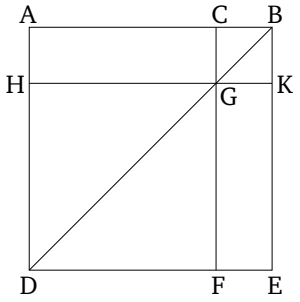
AD dikdörtgeni AC, CB dikdörtgenidir, çünkü DC eşittir BC; ve DB dikdörtgeni CB üzerindeki karedir.

Öyleyse AB, BC tarafından içerilen dikdörtgen, AC, CB tarafından içerilen dikdörtgenle BC üzerindeki kareye eşittir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

4. Önerme:
Bir doğru parçası rastgele ikiye kesilirse, bütünün üzerindeki kare, parçaların üzerlerindeki karelerle bu parçaların içerdiği dikdörtgenin iki katınıa eşittir.

[$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. *]*



AB doğrusu rastgele bir C noktasında kesilsin.

Diyorum ki AB üzerindeki kare, AC ve CB üzerindeki karelerle AC ile CB'nin içerdiği dikdörtgenin iki katına eşittir.

Çünkü, AB üzerine ADEB karesi çizilsin, **[I.46]**

BD birleştirilsin; C noktasından AD ya da EB'ye paralel CF çiailsin, ve G noktasından AB ya da DE'ye paralel Hk çizilsin. **[I.46]**

O zaman, CF, AD'ye paralel olduğu ve BD onları kestiği için, CGB dış açısı ADB ters iç açısına eşittir. **[Örn. I.29]**

Ama ADB açısı ABD açısına eşittir, çünkü BA kenarı AD kenarına eşittir; **[I.5]**

bu durumda CGB açısı GBC açısına da eşittir, böylece BC kenarı CG kenarına eşit olur. **[I.6]**

Ama CB, GK'ye, ve CG, KB'ye eşittir; **[I.34]**

bu nedenle GK, KB'ye de eşittir; bu durumda CGKB eşkenardır.

Bundan sonra diyorum ki, bu aynı zamanda dik açılıdır.

Çünkü, CG, BK'ye paraleldir, ve KBC, GCB açıları iki dik açıya eşittir. **[I.29]**

Ama KBC açısı diktir; bu durumda BCG açısı da diktir, böylece CGK, GKB karşı açıları da diktir. **[I.34]**

Öyleyse CGKB dik açılıdır; eşkenar olduğu da kanıtlanmıştı; demek ki bir karedir, ve CB üzerine çizilmiştir.

Aynı nedenden dolayı HF de bir karedir, ve HG, yani AC üzerine çizilmiştir. **[I.34]**

Bu durumda HF, KC kareleri AC, CB üzerine çizilmiş karelerdir.

Şimdi, AG, GE'ye eşit olduğundan, ve AG dikdörtgeni AC, CB dikdörtgeni olduğundan, çünkü GC, CB'ye eşittir, GE dikdörtgeni de AC, CB dikdörtgenine eşittir.

Öyleyse AG, CB dikdörtgenleri AC, CB tarafından içerilen dikdörtgenin iki katına eşittir.

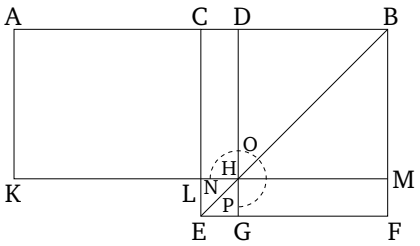
Ama, HF, CK, AG, GE dikdörtgenleri, AB üzerindeki kare olan ADEB'nin tamamına eşittir.

Öyleyse AB üzerindeki kare, AC, CB üzerindeki karelerle AC, CB tarafından içerilen dikdörtgenin iki katına eşittir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

5. Önerme:
Bir doğru eşit ve eşit olmayan iki parçaya kesilse, eşit olmayan parçaların içerdiği dikdörtgen ile kesen noktalar arasındaki doğrunun üzerindeki kare, yarımın üzerindeki kareye eşittir.

[$a + a = (a + b) + (a - b)$ *ise* $(a + b)(a - b) + b^2 = a^2$ *olur.]*



AB doğrusu C noktasında iki eşit parçaya, D noktasında da eşit olmayan iki parçaya kesilmiş olsun.

Diyorum ki AD, BD'nin içerdiği dikdörtgen ile CD üzerindeki kare birlikte CB üzerindeki kareye eşittir.

Çünkü, CB üzerine CEFB karesi çizilsin, **[I.46]**

BE birleştirilsin; D'den CE ya da BF'ye paralel DG çizilsin, H'den AB ya da EF'ye paralel KM çizilsin, ve A'dan CL ya da BM'ye paralel AK çizilsin. **[I.31]**

O zaman, CH tümleyeni HF tümleyenine eşit olduğundan, **[I.43]**

bunlara DM eklensin; bu durumda CM eşittir DF olur.

Ama AC, CB'ye eşit olduğundan CM eşittir AL olur; **[I.36]**

öyleyse AL, DF'ye de eşittir.

Bunlara CH eklensin; bu durumda AH'nin tamamı NOP kadranına eşit olur.

Ama DH, DB'ye eşit olduğundan AH dikdörtgeni AD, DB dikdörtgenidir, bu yüzden NOP kadranı da AD, DB dikdörtgenine eşittir.

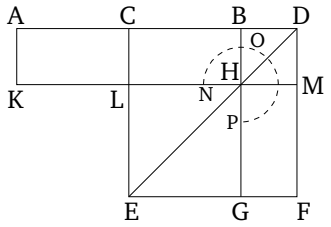
Bunlara CD üzerindeki kareye eşit olan LG eklensin; bu durumda NOP kadranı ve LG, AD, DB tarafından içerilen dikdörtgen ile CD üzerindeki kareye eşittir.

Ama NOP kadranı ve LG, CB üzerindeki CEFB karesinin tümüne eşittir; öyleyse AD, DB tarafından içerilen dikdörtgen ile CD üzerindeki kare, CB üzerindeki kareye eşittir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

6. Önerme:
Bir doğru ikiye bölünmüş ve bir ucuna aynı doğrultuda başka bir doğru eklenmişse, eklenen doğru ve bütünün, eklenen parçayla içerdiği dikdörtgen ile ilk doğrunun yarısı üzerindeki kare, bu yarımın eklenen parçayla oluşturduğu doğru üzerindeki kareye eşittir.

[$(a + a + b)b + a^2 = (a + b)^2$. *]*



AB doğrusu C noktasında ikiye bölünsün, ve onunla aynı doğru üzerinde BD eklensin.

Diyorum ki AD, BD tarafından içerilen dikdörtgenle CB üzerindeki kare, CD üzerindeki kareye eşittir.

Çünkü, CD üzerine CEFD karesi çizilsin, **[I.46]**

DE birleştirilsin; B'den EC ya da DF'ye paralel BG çizilsin, H'den AB ya da EF'ye paralel KM çizilsin, ayrıca A'dan CL ya da DM'ye paralel AK çizilsin. **[I.31]**

O zaman, AC, CB'ye eşit olduğundan, AL, CH'ye de eşit olur. **[I.36]**

Ama CH eşittir HF. **[I.43]**

O yüzden AL, HF'ye de eşittir.

Bunlara CM eklensin; bu durumda AM'nin tamamı NOP kadranına eşittir. Ama DM, DB'ye eşit olduğundan, AM dikdörtgeni AD, DB dikdörtgenidir; demek ki NOP kadranı AD, DB dikdörtgenine de eşittir.

Bunlara BC üzerindeki kareye eşit olan LG eklensin; bu durumda AD, DB tarafından içerilen dikdörtgen ile CB üzerindeki kare, NOP kadranı ve LG'ye eşittir.

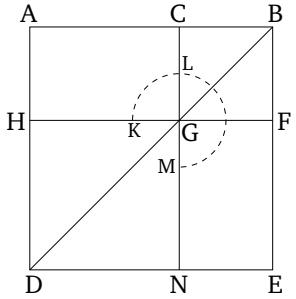
Ama NOP kadranı ve LG, CD üzerindeki CEFD karesine eşittir;

Öyleyse AD, DB tarafından içerilen dikdörtgen ile CB üzerindeki kare birlikte CD üzerindeki kareye eşittir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

7. Önerme:
Bir doğru rastgele ikiye kesildiğinde, doğru üzerindeki kareyle bu parçalardan biri üzerindeki kare, bu parçayla bütünün içerdiği dikdörtgenin iki katıyla diğer parça üzerindeki kareye eşittir.

[$(a+b)^2 + a^2 = 2a(a+b) + b^2$. *]*



AB doğrusu rastgele bir C noktasında kesilsin.

Diyorum ki AB, BC üzerindeki kareler, AB, BC tarafından içerilen dikdörtgenin iki katıyla CA üzerindeki kareye eşittir.

Çünkü, AB üzerine ADEB karesi çizilsin; **[I.46]**

ve şekil çizilsin.

O zaman, AG, GE'ye eşit olduğundan, **[I.43]**

bunlara CF eklensin; bu durumda AF eşittir CE olur.

Öyleyse AF, CE birlikte AF'nin iki katı olur.

Ama AF, CE birlikte KLM kadranı ve CF karesidir; bu durumda KLM kadranı ve CF karesi, AF'nin iki katı olur.

Ama, AB, BC dikdörtgeni de AF'nin iki katıdır, çünkü BF eşittir BC; bu durumda KLM kadranı ve CF karesi birlikte AB, BC dikdörtgeninin iki katına eşittir.

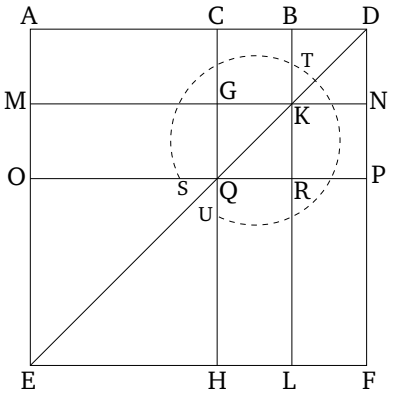
Bunlara AC üzerindeki kare olanDG eklensin; bu durumda KLM kadranı ve BG, GD kareleri, ADEB'nin tamamı ve CF'ye eşittir ki bunlar AB, BC üzerine çizilen karelerdir.

Öyleyse AB, BC kareleri, AB, BC tarafından içerilen dikdörtgenin iki katı ile AC üzerindeki kareye eşittir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

8. Önerme:
Bir doğru rastgele ikiye kesilirse, bütünle bu parçalardan birinin içerdiği dikdörtgenin dört katıyla kalan parça üzerindeki kare, bütüne ilk parçanın aynı doğru üzerinde eklenmesiyle oluşan doğru üzerindeki kareye eşittir.

[$4(a+b)b+b^2=(a+b+a)^2$*.]*



AB doğrusu rastgele bir C noktasında kesilsin.

Diyorum ki AB, BC dikdörtgeninin dört katı ile AC üzerindeki kare, AB, BC sanki bir doğru üzerindeymiş gibi üzerlerine çizilen kareye eşittir.

Çünkü BD uzatılsın ve BD, CB'ye eşit kılınsın; AD üzerine AEFD karesi çizilsin, ve şeklin tamamı çizilsin.

O zaman, CB, GK'ye, ve BD, KN'ye eşitken CB eşittir BD olduğundan, GK de KN'ye eşittir. Aynı nedenden dolayı QR de RP'ye eşittir.

Ve BC, BD'ye, ve GK, KN'ye eşit olduğundan, CK eşittir KD, ve GR eşittir RN olur. **[I.36]**

Ama CP paralelkenarın tümleyenleri oldukları için CK eşittir RN olur; **[I.43]**

bu durumda KD eşittir GR olur; böylece dört alan DK, CK, GR, RN birbirine eşit olur. Öyleyse dördü CK'nın dört katıdır.

Yine benzer şekilde, CG, GQ'ya, ve QR, RP'ye eşit olduğundan AG eşittir MQ, ve QL eşittir RP olur. **[I.36]**

Ama ML paralelkenarın tümleyenleri oldukları için MQ eşittir QL olur; **[I.43]**

bu durumda AG de RF'ye eşit olur; böylece dördü AG'nin dört katıdır.

Ama dört alan CK, KD, GR, RN'nin CK'nin dört katı olduğu kanıtlanmıştı; böylece STU kadranını içeren sekiz alan AK'nin dört katıdır.

Şimdi, AK dikdörtgeni AB, BD dikdörtgeni olduğundan, çünkü BK eşittir BD, AB, BD dikdörtgeninin dört katı AK'nin dört katıdır.

Ama STU kadranının da AK'nin dört katı olduğu kanıtlanmıştı; bu durumda AB, BD dikdörtgeninin dört katı STU kadranına eşittir.

Bunlara AC üzerindeki kareye eşit OH eklensin; bu durumda AB, BD dikdörtgeninin dört katı AC üzerindeki kareyle birlikte STU kadranı ve OH'ye eşittir.

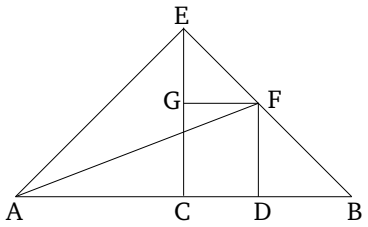
Ama STU kadranı ve OH, AD üzerine çizilmiş AEFD karesinin tamamına eşittir; bu durumda AB, BD dikdörtgeninin dört katı AC üzerindeki kareyle birlikte AD üzerindeki kareye eşit olur.

Ama BD eşittir BC; öyleyse AB, BD tarafından içerilen dikdörtgenin dört katı AC üzerindeki kareyle birlikte AD üzerindeki kareye eşittir, yani AB, BC sanki bir doğru üzerindeymiş gibi üzerlerine çizilen kareye.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

9. Önerme:
Bir doğru eşit ve eşit olmayan iki parçaya kesilse, eşit olmayan parçalar üzerindeki kareler, yarımın üzerindeki kareyle kesen noktalar arasındaki doğrunun üzerindeki karenin iki katına eşittir

[$a+a=(a+b)+(a-b)$ *ise* $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$ *olur.]*



AB doğrusu C noktasında iki eşit parçaya, D noktasında da eşit olmayan iki parçaya kesilmiş olsun.

Diyorum ki AD, DB üzerindeki kareler, AC, CD üzerindeki karelerin iki katıdır.

Çünkü, AB'ye C'den dik açıyla CE çizilsin ve AC'ye ya da CB'ye eşit kılınsın; EA, EB birleştirilsin, D'den EC'ye paralel DF çizilsin, F'den AB'ye paralel FG çizilsin, ve AF birleştirilsin.

O zaman, AC eşittir CE olduğundan, EAC açısı da AEC açısına eşit olur.Ve C'deki açı dik olduğundan kalan EAC, AEC açıları iki dik açıya eşittir. **[I.32]**

Ve eşittirler; o yüzden CEA, CAE açılarının her biri yarım dik açıya eşittir.

Aynı nedenden dolayı CEB, EBC açılarının her biri de yarım dik açıya eşittir; bu durumda AEB açısı dik açı olur.

Ve GEF açısı yarım dik açı olduğundan, ve EGF açısı, karşı iç açı ECB'ye eşit olması nedeniyle, **[I.29]**

dik olduğundan, kalan EFG açısı da yarım dik açıdır; **[I.32]**

bu durumda GEF açısı EFG açısına eşittir, böylece EG eşittir GF olur. **[I.6]**

Yine, B'deki açı yarım dik açı olduğundan, ve FDB açısı, karşı iç açı ECB'ye eşit olması nedeniyle, **[I.29]**

dik olduğundan, kalan BFD açısı yarım dik açıdır; **[I.32]**

bu durumda B'deki açı DFB açısına eşittir, böylece FD kenarı da DB kenarına eşit olur. **[I.6]**

Şimdi, AC, CE'ye eşit olduğundan, AC üzerindeki kare de CE üzerindeki kareye eşittir; bu durumda AC, CE üzerindeki kareler AC üzerindeki karenin iki katıdır.

Ama EA karesi, ACE açısı dik olduğundan AC, CE üzerindeki karelere eşittir; **[I.47]**

bu durumda EA karesi AC karesinin iki katıdır.

Yine, EG eşittir GF olduğundan, EG üzerindeki kare GF üzerindeki kareye eşittir; bu durumda EG, GF üzerindeki kareler GF üzerindeki karenin iki katıdır.

Ama EF üzerindeki kare EG, GF üzerindeki karelere eşittir; bu durumda EF üzerindeki kare GF üzerindeki karenin iki katıdır.

Ama GF eşittir CD; **[I.34]**

bu durumda EF üzerindeki kare CD üzerindeki karenin iki katıdır.

Ama EA üzerindeki kare de AC üzerindeki karenin iki katıdır; öyleyse AE, EF üzerindeki kareler AC, CD üzerindeki karelerin iki katıdır.

Ve AF üzerindeki kare, AEF açısı dik olduğu için AE, EF üzerindeki karelere eşittir; **[I.47]**

bu durumda AF üzerindeki kare AC, CD üzerindeki karelerin iki katıdır.

Ama AD, DF üzerindeki kareler, Ddekiaçıdikolduğuiçin AF üzerindeki kareye eşittir; **[I.47]**

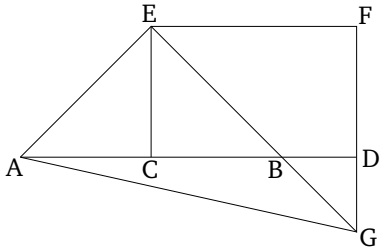
bu durumda AD, DF üzerindeki kareler AC, CD üzerindeki karelerin iki katı olur.

Ve DF eşittir DB; öyleyse AD, DBN üzerindeki kareler AC, CD üzerindeki karelerin iki katıdır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

10. Önerme:
Bir doğru ikiye bölünse, ve ona aynı doğru üzerinde bir doğru eklense, eklenen doğruyla bütünün üzerindeki kare ve eklenen doğru üzerindeki kare birlikte yarımın üzerindeki kare ve, yarım ve eklenen doğru, sanki bir doğru üzerindeymiş gibi, üzerlerine çizilen karenin, iki katıdırlar

[$(a + a + b)^2 + b^2 = 2(a^2 + (a + b)^2)$. *]*



Bir AB doğrusu C'de ikiye bölünsün, ona aynı doğru üzerinde bir BD doğrusu eklensin.

Diyorum ki AD, DB üzerindeki kareler AC, CD üzerindeki karelerin iki katıdır.

Çünkü, AB'ye C'den dik açıyla CE çizilsin **[I.11]**

ve AC'ye ya da CB'ye eşit kılınsın; **[I.3]**

EA, EB birleştirilsin; E'den AD'ye paralel EF çizilsin, ve D'den CE'ye FD çizilsin **[I.31]**

O zaman, EF doğrusu EC, FD paralel doğrularını kestiği için, CEF, EFD açıları iki dik açıya eşittir; **[I.29]**

demek ki FEB, EFD açıları iki dik açıdan küçüktür.

Ama iki dik açıdan küçük açılardan uzatılan doğrular kesişir; **[Bel. 5]**

bu durumda EB, FD doğruları B, D yönünde uzatıldığında kesişeceklerdir.

Uzatıldıklarında G noktasında kesişsinler, AG birleştirilsin.

O zaman, AC eşittir CE olduğundan, EAC açısı da AEC açısına eşittir; **[I.5]**

ve C'deki açı diktir; bu durumda EAC, AEC açılarının her biri yarım dik açıdır; **[I.32]**

Aynı nedenden dolayı CEB, EBC açılarının her biri yarım dik açıdır; bu durumda AEB açısı diktir.

Ve EBC açısı yarım dik açı olduğu için, DBG açısı da yarım dik açıdır. **[I.15]**

Ama BDG açısıda diktir, çünkü ters iç açı DCE'ye eşittir; **[I.29]**

bu durumda kalan DGB açısı da yarım dik açıdır; **[I.32]**

öyleyse DGB açısı DBG açısına eşitir, ve BD kenarı da GD kenarına eşittir. **[I.6]**

Yine, EGF açısı yarım dik açı olduğundan, ve F'deki açı C'deki karşı açıya eşit olması nedeniyle dik olduğunda, **[I.34]**

kalan FEG açısı da yarım dik açıdır, **[I.32]**

böylece GF kenarı da EF kenarına eşittir. **[I.6]**

Şimdi, EC üzerindeki kare CA üzerindeki kareye eşit olduğundan, EC, CA üzerindeki kareler CA üzerindeki karenin iki katıdır.

Ama EA üzerindeki kare EC, CA üzerindeki karelere eşittir; **[I.47]**

bu durumda EA üzerindeki kare AC üzerindeki karenin iki katıdır. **[Ort. 1]**

Yine, FG eşittir EF olduğundan, FG üzerindeki kare FE üzerindeki kareye eşittir; bu durumda GF, FE üzerindeki kareler EF üzerindeki karenin iki katıdır.

Ama EG üzerindeki kare GF, FE üzerindeki karelere eşittir; **[I.47]**

bu durumda EG üzerindeki kare EF üzerindeki karenin iki katıdır.

Ve EF eşittir CD; **[I.34]**

öyleyse EG üzerindeki kare CD üzerindeki karenin iki katıdır.

Ama EA üzerindeki karenin de AC üzerindeki karenin iki katı olduğu kanıtlanmıştı; bu durumda AE, EG üzerindeki kareler AC, CD üzerindeki karelerin iki katıdır.

Ve AG üzerindeki kare AE, EG üzerindeki karelere eşittir; **[I.47]**

bu durumda AG üzerindeki kare AC, CD üzerindeki karelerin iki katıdır.

Ama AD, DG üzerindeki kareler AG üzerindeki kareye eşittir; **[I.47]**

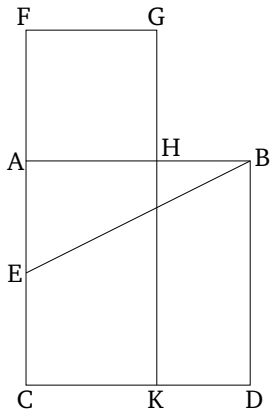
bu durumda AD, DG üzerindeki kareler AC, CD üzerindeki karelerin iki katıdır.

Ve DG eşittir DB; öyleyse AD, DB üzerindeki kareler AC, CD üzerindeki karelerin iki katıdır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

11. Önerme:
Verilen bir doğruyu, bir parçasıyla bütününün içerdiği dikdörtgen, diğer parça üzerindeki kareye eşit olacak şekilde kesmenin yolu.

[Bütünü $a+b$ *şeklinde kestiğimizi kabul edersek,* $(a+b)b = a^2$ *olsun istiyoruz. Buradan* $\frac{a}{b} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$*, yani altın oran bulunur.]*



Verilen doğru AB olsun; AB öyle kesilsin isteniyor ki bütün ve bir parça tarafından içerilen dikdörtgen diğer parça üzerindeki kareye eşit olsun.

AB üzerine ABDC karesi çizilsin; **[I.46]**

AC doğrusu E'de ikiye bölünsün, ve BE birleştirilsin; CA doğrusu F'ye kadar uzatılsın ve EF, BE'ye eşit kılınsın; AF üzerine FH karesi çizilsin, ve GH doğrusu K'ye kadar uzatılsın.

Diyorum ki AB doğrusu H noktasında, AB, BH tarafından içerilen dikdörtgen AH üzerindeki kareye eşit olacak şekilde kesilmiştir.

Çünkü, AC doğrusu E'de ikiye bölündüğünden, ve bu doğruya FA eklendiğinden, CA, FA tarafından içerilen dikdörtgen AE üzerindeki kareyle birlikte EF üzerindeki kareye eşittir. **[II.6]**

Ama EF eşittir EB; öyleyse CA, FA tarafından içerilen dikdörtgen AE üzerindeki kareyle birlikte EB üzerindeki kareye eşittir.

Ama, A'daki açı dik olduğundan BA, AE üzerindeki kareler EB üzerindeki kareye eşittir; **[I.47]**

bu durumda CF, FA dikdörtgeni AE üzerindeki kareyle birlikte BA, AE üzerindeki karelere eşittir.

Bunlardan AE üzerindeki kare çıkarılsın; bu durumda kalan CF, FA dikdörtgeni AB üzerindeki kareye eşittir.

Şimdi, AF eşittir FG olduğundan, CF, FA dikdörtgeni FK'dir; ve AB üzerindeki kare AD'ye eşittir; bu durumda FK eşittir AD olur.

Bunlardan AK çıkarılsın; bu durumda kalan FH, kalan HD'ye eşittir.

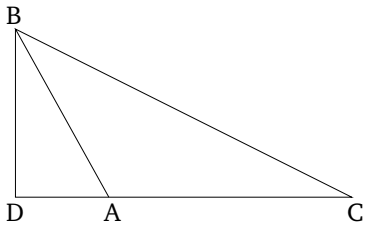
Ve AB eşittir BD olduğundan, HD dikdörtgeni AB, BH dikdörtgenidir; ve FH de AH üzerindeki karedir; bu durumda AB, BH tarafından içerilen dikdörtgen HA üzerindeki kareye eşittir.

Öyleyse verilen AB doğrusu H noktasında öyle kesilmiştir ki AB, BH dikdörtgeni HA üzerindeki kareye eşittir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

12. Önerme:
Geniş açılı bir üçgende geniş açıyı gören kenar üzerindeki kare, diğer kenarlar üzerindeki karelerin toplamından bu kenarlardan biriyle o kenarı diğer köşeden gelen dikmeyle birleşinceye kadar uzatan doğrunun içerdiği dikdörtgenin iki katı kadar büyüktür.

[Geniş açı θ *ise,* $c^2 = a^2 + b^2 + 2a(b\cos(\pi - \theta)) = b^2 + c^2 - 2ab\cos\theta$ *olur.]*



Bir ABC geniş açılı üçgeninde BAC açısı geniş açı olsun, B'den CA'nın uzantısına BD dikmesi çizilsin.

Diyorum ki BC üzerindeki kare, BA, AC üzerindeki karelerden CA, AD tarafından içerilen dikdörtgenin iki katı kadar büyüktür.

Çünkü CD doğrusu A noktasında rastgele kesildiği için DC üzerindeki kare, CA, AD üzerindeki kareler ve CA, AD tarafından içerilen dikdörtgenin iki katına eşittir. **[II.4]**

Bunlara DB üzerindeki kare eklensin; bu durumda CD, DB üzerindeki kareler CA, AD, DB üzerindeki kareler ve CA, AD dikdörtgeninin iki katına eşittir.

Ama D'deki açı dik olduğundan, CB üzerindeki kare CD, DB üzerindeki karelere eşittir; **[I.47]**

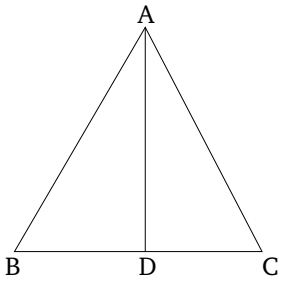
ve AB üzerindeki kare AD, DB üzerindeki karelere eşittir; **[I.47]**

bu durumda CB üzerindeki kare CA, AB zerindeki karelere ve CA, AD tarafından içerilen dikdörtgenin iki katına eşittir; böylece CB üzerindeki kare CA, AB üzerindeki karelerden CA, AD tarafından içerilen dikdörtgenin iki katı kadar büyüktür.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

13. Önerme:
Dar açılı üçgenlerde, dar açıyı gören kenar üzerindeki kare dar açıyı içine alan kenarlar üzerindeki karelerden dar açı etrafındaki kenarlardan biri, yani üzerine dikme indirileni, ve dikmenin içerde dar açıya doğru kestiği doğru tarafından içerilen dikdörtgenin iki katı kadar küçüktür.

[Dar açı θ *ise,* $c^2 = a^2 + b^2 - 2a(b\cos\theta) = b^2 + c^2 - 2ab\cos\theta$ *olur.]*



Bir ABC dar açılı bir üçgeninde B açısı dar olsun, ve A'dan BC'ye AD dik olarak çizilsin.

Diyorum ki AC üzeindeki kare CB, BA üzerindeki karelerden CB, BD tarafından içerilen dikdörtgenin iki katı kadar küçüktür.

Çünkü, CB doğrusu D'de rastgele kesildiğinden, CB, BD üzerindeki kareler CB, BD tarafından içerilen dikdörtgenin iki katı ve DC üzerindeki kareye eşittir. **[II.7]**

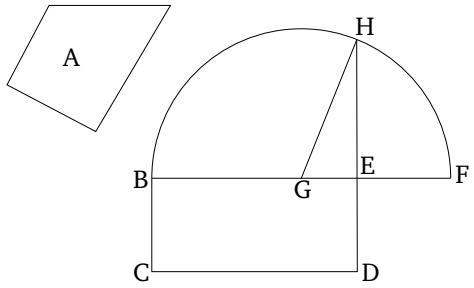
Bunlara DA üzerindeki kare eklensin; bu durumda CB, BD, DA üzerindeki kareler CB, BD tarafından içerilen dikdörtgenin iki katı ve AD, DC üzerindeki karelere eşittir.

Ama D'deki açı dik olduğundan, AB üzerindeki kare BD, DA üzerindeki karelere eşittir; **[I.47]**

ve AC üzerindeki kare AD, DC üzerindeki karelere eşittir; bu durumda CB, BA üzerindeki kareler AC üzerindeki kare ve CB, BD dikdörtgeninin iki katına eşittir, böylece AC üzerindeki kare tek başına CB, BA üzerindeki karelerden CB, BD tarafından içerilen dikdörtgenin ik katı kadar küçüktür.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

14. Önerme:
Verilen bir düzkenarlı şekle eşit bir kare çizmenin yolu.



Verilen düzkenarlı şekil A olsun; böylece verilen düzkenar şekil A'ya eşit bir kare çizilmesi isteniyor.

Düzkenarlı şekil A'ya eşit BD dikdörtgeni çizilsin. **[I.45]**

Eğer BE eşittir ED ise, o zaman yapılması istenen tamamlanmış olur çünkü A düzkenarlı şekle eşit BD karesi çizilmiştir.

Ama değilse, BE, ED doğrularından biri daha uzundur.

Uzun olan BE olsun ve F'ye uzatılsın; EF, ED'ye eşit kılınsın, ve BF doğrusu G'de ikiye bölünsün.

G merkezi ve GB, GF doğrularından birine eşit uzaklıkla BHF yarıçemberi çizilsin; DE doğrusu H'ye uzatılsın, ve GH birleştirilsin.

O zaman, BF doğrusu G'de eşit iki parçaya bölündüğü ve E'de eşit olmayan iki parçaya kesildiği için, BE, EF tarafından içerilen dikdörtgen EG üzerindeki kareyle birlikte GF üzerindeki kareye eşittir. **[II.5]**

Ama GF eşittir GH; bu durumda BE, EF dikdörtgeni GE üzerindeki kareyle birlikte GH üzerindeki kareye eşittir.

Ama HE, EG üzerindeki kareler GH üzerindeki kareye eşittir. **[I.47]**

Bunlardan GE üzerindeki kare çıkarılsın; bu durumda kalan BE, EF tarafından içerilen dikdörtgen EH üzerindeki kareye eşittir.

Ama EF eşittir ED olduğundan BE, EF tarafından içerilen dikdörtgen BD'dir; bu durumda BD paralelkenarı HE üzerindeki kareye eşittir.

Ama BD, düzkenarlı şekil A'ya eşittir.

Bu durumda düzkenarlı şekil A da EH üzerine çizilebilecek kareye eşit olur.

Öyleyse verilen düzkenarlı şekil A'ya eşit bir kare, yani EH üzerine, çizilmiştir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

Kitap III

1. Tanımlar

1 Çapları ya da yarıçapları eşit olan çemberlere **eşit çemberler** denir.

2 Bir çembere bir noktada değen ama ne kadar uzatılırsa uzatılsın çemberi başka bir noktada kesmeyen doğruya **çembere değen doğru** denir.

3 Birbiriyle buluşan ama başka noktada birbirini kesmeyen çemberlere **birbirine değen çemberler** denir.

[Son iki tanımda Öklid teğet *kelimesini kullanmaz, fakat ilerdeki önermelerde doğrudan "teğet" kelimesini kullanır.]*

4 Bir çember içinde iki doğruya merkezden çizilen dikmelerin uzunlukları eşitse bu doğrulara **merkezden eşit uzaklıkta** denir.

5 Ve merkezden kendisine çizilen dikmenin uzunluğu diğerininkinden daha büyük olan doğruya **merkezden daha uzakta** denir.

6 Çemberin bir çevresiyle bir doğru arasında kalan şekle **çember parçası** denir.

7 Bir doğru ile çemberin çevresi arasındaki açıya **çember parçasının açısı** denir.

8 Bir çember parçasının üzerindeki bir noktadan **çember parçasının tabanını** oluşturan doğrunun iki ucuna çizilen doğruların birleştikleri yerde içerdikleri açıya **çember parçasının içindeki açı** denir.

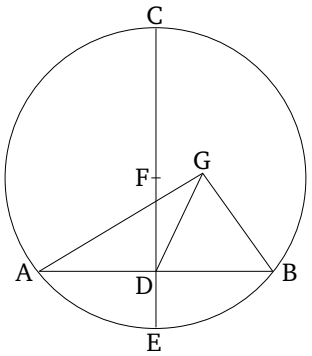
9 Ve bir açı içeren doğrular çemberin bir çevresini keserlerse, bu açı o **çevreyi görüyor** denir.

10 Bir çevre ile o çevrenin uçlarını çemberin merkezine birleştiren doğrular arasında kalan şekle **çember dilimi** denir.

11 Açıları eşit ya da içindeki açıları eşit olan çember parçalarına **benzer çember parçaları** denir.

2. Önermeler

1. Önerme:
Bir çemberin merkezini bulmanın yolu.



Verilen çember ABC olsun; böylece ABC çemberinin merkezinin bulunması isteniyor.

Bu çember üzeri kesen rastgele bir AB doğrusu çizilsin ve bu doğru D noktasında ikiye bölünsün; D noktasından AB doğrusuna DC dikmesi çizilsin ve E'ye kadar uzatılsın; CE doğrusu F'de ikiye bölünsün;

Diyorum ki ABC çemberinin merkezi F'dir.

Çünkü, merkezin o olmadığını varsayalım, ama mümkünse G merkez olsun, ve GA, GD, GB birleştirilsin.

O zaman, AD eşittir DB olduğundan, ve DG de ortak olduğundan AD, DG kenarları sırasıyla BD, DG kenarlarına eşittir; ve yarıçap olduklarından GA tabanı GB tabanına eşittir; bu durumda ADG açısı GDB açısına eşittir. **[I.8]**

Ama, ne zaman bir doğruya çizilen bir doğru komşu iki açıyı birbirine eşit yapıyorsa, bu açıların her biri diktir; **[Tan. I.10]**

bu durumda GDB açısı dik olur.

Ama FDB açısı da diktir; öyleyse FDB açısı GDB açısına eşit olur, yani büyük olan küçük olana, ki bu olamaz.

Bu yüzden G noktası ABC çemberinin merkezi değildir.

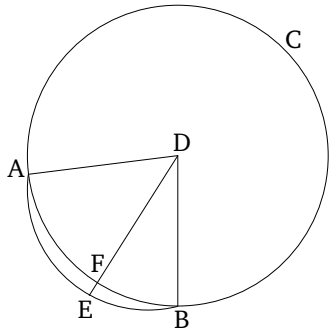
Benzer şekilde başka F'den başka hiçbir noktanın da merkez olamayacağını kanıtlayabiliriz.

Bu durumda F noktası ABC çemberinin merkezidir.

Doğal Sonuç: Buradan açıkça görülür ki eğer bir çemberde bir doğru bir diğer doğruyu iki eşit parçaya bölüyorsa ve ona dikse, çemberin merkezi bu dik kesen doğru üzerindedir.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. QEF

2. Önerme:
Bir çemberin üzerinde rastgele iki nokta alınırsa, bu noktaları birleştiren doğru çemberin içinde kalır.



ABC bir çember olsun ve çevresi üzerinde A, B gibi rastgele iki nokta alınsın.;

Diyorum ki A ile B'yi birleştiren doğru çemberin içine düşer.

Çünkü, varsayalım ki öyle olmasın, ama mümkünse ABC'nin dışına düşsün; ABC çemberinin merkezi bulunsun ve ona D densin; **[III.1]**

DA, DB birleştirilsin, ve DFE çizilsin.

O zaman, DA eşittir DB olduğundan, DAE açısı DBE açısına eşittir. **[I.5]**

Ve DAE üçgeninin AEB kenarı uzatıldığı için, DEB açısı DAE açısından büyüktür. **[I.16]**

Ama DAE açısı DBE açısına eşittir; bu durumda DEB açısı DBE açısından büyüktür.

Ve büyük açı büyük kenar tarafından görülür; **[I.19]**

öyleyse DB kenarı DE kenarından büyüktür.

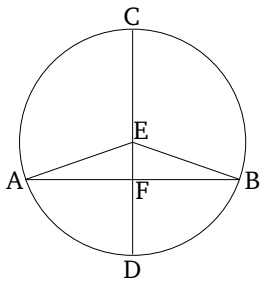
Ama DB, DF'ye eşittir. bu durumda DF DE'den büyük olur, yani küçük olan büyükten ki bu olamaz.

Benzer şekilde çember üzerine düşmeyeceğini de kanıtlayabiliriz.

Öyleyse içeri düşecektir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

3. Önerme:
Çemberin merkezinden geçen bir doğru eğer çemberin merkezinden geçmeyen bir doğruyu iki eşit parçaya bölerse aynı zamanda ona diktir, ve eğer dikse aynı zamanda onu iki eşit parçaya böler.



ABC bir çember olsun ve içinde merkezden geçen bir CD doğrusu merkezden geçmeyeyen bir AB doğrusunu F noktasında ikiye bölsün;

Diyorum ki aynı zamanda ona diktir.

Çünkü, ABC çemberinin merkezi alınsın ve E densin; EA, EB, birleştirilsin. O zaman AF eşittir FB, ve FE ortak olduğundan, iki kenar iki kenara eşittir; ve EA tabanı EB tabanına eşittir; bu durumda AFE açısı BFE açısına eşit olur. **[I.8]**

Ama, ne zaman bir doğruya çizilen bir doğru komşu iki açıyı birbirine eşit yapıyorsa, bu açıların her biri diktir; **[Tan. I.10]**

öyleyse AFE, BFE açılarının herbiri diktir.

Öyleyse merkezden geçen, ve merkezden geçmeyen AB'yi ikiye bölen CD doğrusu aynı zamanda ona diktir.

Yine, CD, AB'ye dik olsun;

Diyorum ki onu ikiye böler, yani AF eşittir FB olur.

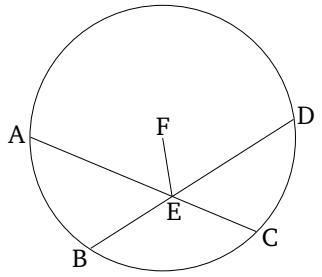
Çünkü, aynı çizimi kullanarak, EA eşittir EB olduğundan, EAF açısı EBF açısına eşit olur. **[I.5]**

Ama AFE dik açısı da BFE dik açısına eşittir, bu yüzden EAF, EBF üçgenlerinde iki açı iki açıya ve bir kenar bir kenara, yani ikisine ortak olan EF, eşittir; bu durumda kalan kenarları da eşit olacaktır; **[I.26]**

öyleyse AF eşittir FB.

Bundan dolayı vs …
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

4. Önerme:
Bir çemberde merkezden geçmeyen iki doğru birbirini kesiyorsa, bunlar birbirlerini iki eşit parçaya bölmezler.



ABCD bir çember olsun ve içinde merkezden geçmeyen iki doğru AC, BD birbirini E'de kessin.

Diyorum ki bunlar birbirini ikiye bölmez.

Çünkü, mümkünse birbirlerini ikiye bölsünler, öyle ki AE eşittir EC, ve BE eşittir ED olsun;

ABCD'nin merkezi bulunsun, **[III.1]**

ve ona F densin; FE birleştirilsin.

O zaman, merkezden geçen FE doğrusu merkezden geçmeyen AC doğrusunu ikiye böldüğünden ona diktir; **[III.3]**

bu durumda FEA açısı dik olur.

Yine, FE doğrusu BD doğrusunu ikiye böldüğü için ona diktir; **[III.3]**

bu durumda FEB açısı dik olur.

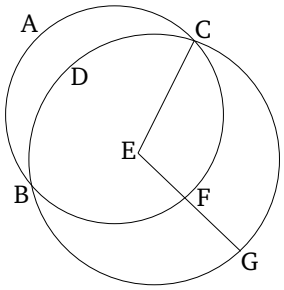
Ama FEA açısının da dik olduğu kanıtlanmıştı;

o zaman FEA açısı FEB açısına eşit olur, yani küçük olan büyük olana ki bu olamaz.

Öyleyse AC, BD birbirini ikiye bölmez.

Bundan dolayı vs …
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

5. Önerme:
Eğer iki çember kesişiyorsa merkezleri aynı olmaz.



ABC, CDG çemberleri birbirine B, C noktalarında kessin.

Diyorum ki merkezleri aynı olamaz.

Çünkü, mümkünse ortak merkez E olsun; EC birleştirilsin, rastgele EFG çizilsin.

O zmana, ABC çemberinin merkezi E olduğundan EC eşittir EF olur.
[Tan. I.15]

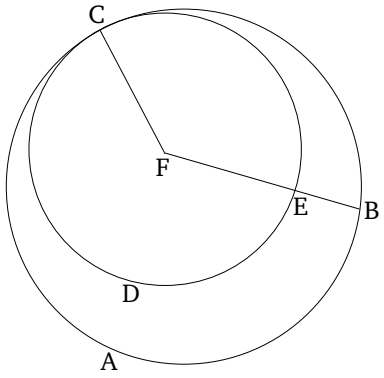
Yine, CDG çemberinin merkezi E olduğundan EC eşittir EG olur.

Ama EC'nin EF'ye de eşit olduğu kanıtlanmıştı; bu durumda EF, EG'ye eşit olur, yani küçük olan büyüğe ki bu olamaz.

Öyleyse E noktası ABC, CDG çemberlerinin merkezi değildir.

Bundan dolayı vs …
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

6. Önerme:
Eğer iki çember birbirine değiyorsa merkezleri aynı olmaz.



ABC, CDE çemberleri birbirine C noktasında değsin.

Diyorum ki merkezleri aynı olmayacaktır.

Çünkü, eğer mümkünse, bu ortak merkez F olsun; FC birleştirilsin, FEB soğrusu rastgele çizilsin.

O zaman F noktası ABC çemberinin merkezi olduğundan, FC eşittir FB.

Yine F noktası CDE çemberinin merkezi olduğundan, FC eşittir FE.

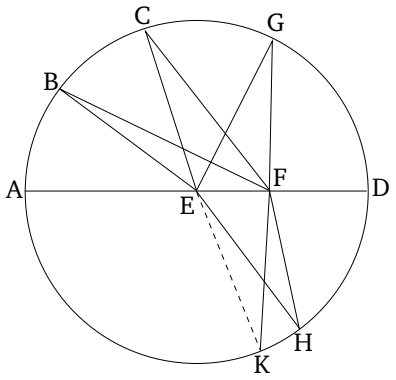
Ama FC'nin FB'ye eşit olduğu kanıtlanmıştı; bu durumda FE de FB'ye eşittir, yani küçük olan büyük olana ki bu olamaz.

Öyleyse F noktası ABC, CDE çemberlerinin merkezi değildir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

7. Önerme:

Bir çemberin çapı üzerinde merkezden farklı bir nokta alınır ve bu noktadan çemberin üzerindeki noktalara doğrular çizilirse, bunların en büyüğü merkezden geçendir, en küçüğü de aynı çapın kalan kısmıdır; diğerleri arasında merkezden geçen doğruya daha yakın olan daha uzak olanlardan büyüktür, ve bu alınan noktadan çemberin üzerine yalnızca iki tane aynı büyüklükte doğru çizilebilir ve bunlar da en kısa doğrunun iki tarafındadır.



ABCD bir çember, ve AD onun çapı olsun. AD üzerinde çemberin merkezi olmayan bir F noktası alınsın, çemberin merkezi E olsun, ve F'den ABCD çemberinin üzerine FB, FC, FG doğruları çizilsin;

Diyorum ki bunların en büyüğü FA, en küçüğü FD, diğerleri arasında ise FB, FC'den, ve FC, FG'den büyüktür.

Çünkü; BE, CE, GE birleştirilsin. O zaman bir üçgende iki kenar diğer kenardan büyük olduğundan, **[I.20]**

EB, EF kenarları BF kenarından büyüktür. Ama AE eşittir BE; bu durumda AF büyüktür BF olur.

Yine, BE eşittir CE olduğundan ve FE ortak olduğundan, BE, EF kenarları CE, EF kenarlarına eşittir. Ama BEF açısı CEF açısından büyüktür; bu durumda BF tabanı CF tabanından büyüktür. **[I.24]**

Aynı nedenden dolayı CF de FG'den büyüktür.

Yine, GF, FE kenarları EG kenarından büyük olduğundan, EG eşittir ED olduğundan, GF, FE kenarları ED kenarından büyüktür. Bunlardan EF çıkarılsın; bu durumda kalan GF, kalan FD'den büyüktür.

Ayrıca diyorum ki F'den ABCD çemberi üzerine, en kısa olan FD'nin her iki yanında birer tane olmak üzere yalnızca iki eşit doğru çizilebilir.

Çünkü; EF doğrusu üzerinde ve E noktasında GEF açısına eşit FEH açısı çizilsin, **[I.23]**

ve FH birleştirilsin.

O zaman, GE eşittir EH, ve EF ortak olduğundan, GE, EF kenarları HE, EF kenarlarına, ve GEF açısı HEF açısına eşit olur; bu durumda FG tabanı FH tabanına eşit olur. **[I.4]**

Tekrar diyorum ki F noktasından çemberin üzerine FG'ye eşit başka bir doğru çizilemez.

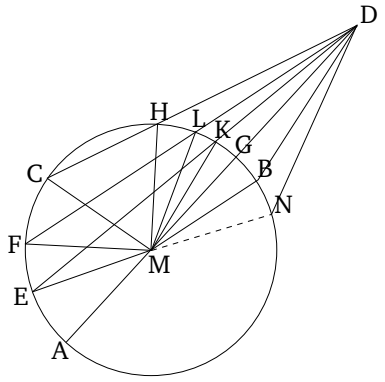
Çünkü, mümkünse FK böyle çizilmiş olsun. O zaman FK eşittir FG, ve FH eşittir FG olduğundan FK de FH'ye eşit olur, yani merkezden geçen doğruya daha yakın olan daha uzak olana eşit olur, ki bu olamaz.

Öyleyse F'den çemberin üzerine GF'ye eşit başka bir doğru çizilemez.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

8. Önerme:

Bir çemberin dışında bir nokta alınır ve bu noktadan çembere, bir tanesi merkezden geçen ve diğerleri rastgele olan doğrular çizilirse, çemberin içbükey kısmına çizilenler arasında merkezden geçen en büyüktür, ve diğerleri arasında bu merkezden geçen doğruya daha yakın olan daha uzak olanlardan büyüktür, ama çemberin dışbükey kısmına çizilen doğrulardan bu noktayla çapın ucu arasında kalan en küçüktür, diğerleri arasında bu en küçük olana yakın olan daha uzak olanlardan küçüktür, ve bu alınan noktadan çemberin üzerine yalnızca iki tane, onlar da en küçük olanın iki tarafında birer tane olmak üzere, aynı büyüklükte doğru çizilebilir.



ABC bir çember olsun ve ABC dışında bir D noktası alınsın; bu noktadan DA, DE, DF, DC doğruları çizilsin, DA merkezden geçsin;

Diyorum ki içbükey AEFC çevresine çizilen doğrulardan merkezden geçen DA doğrusu en büyüktür, oysa DE, DF'den, ve DF, DC'den büyüktür; ama dışbükey HLKG çevresine çizilen doğrulardan, AG çapıyla bu nokta arasındaki DG en küçüktür; ve DG'ye yakın olanlar daima daha uzak olanlardan küçüktür, yani DK, DL'den, ve DL, DH'den küçüktür.

Çünkü, ABC çemberinin merkezi bulunsun, **[III.1]**

ve M olsun; ME, MF, MC, MK, ML, MH birleştirilsin.

O zaman, AM eşittir EM olduğundan, bunlara MD eklensin; bu durumda AD eşittir EM, MD olur. Ama EM, MD büyüktür ED olduğundan, **[I.20]**

AD de ED'den büyük olur.

Yine, ME eşittir MF, ve MD ortak olduğundan, EM, MD eşittir FM, MD, ve EMD açısı büyüktür FMD açısı bulunur; bu durumda ED tabanı FD tabanından büyüktür. **[I.24]**

Benzer şekilde FD'nin CD'den büyük olduğunu kanıtlayabiliriz; böylece DA en büyük olur, ve DE, DF'den, ve DF, DC'den büyüktür.

Sonra, MK, KD büyüktür MD olduğundan, ve MG eşittir MK olduğundan, kalan KD, kalan GD'den büyüktür, yani GD küçüktür KD olur.

Ve MLD üçgeninin bir kenarı olan MD üzerinde, üçgenin içinde kesişen MK, KD doğruları çizilmiş olduğu için MK, KD küçüktür ML, LD olur; **[I.21]**

ve MK eşittir ML olduğundan, kalan DK, kalan DL'den küçüktür.

Benzer şekilde DL'nin de DH'den küçük olduğunu kanıtlayabiliriz; bu durumda DG en küçük, DK, DL'den, ve DL, DH'den küçük olur.

Ayrıca diyorum ki D noktasından çemberin üzerine yalnızca iki tane eşit doğru çizilebir, bunlar DG'nin birer tarafında olur.

MD doğrusu üstüne M noktasında KMD açısına eşit DMB açısı çizilsin, ve DB birleştirilsin.

O zaman, MK eşittir MB, ve MD ortak olduğundan, KM, MD kenarları sırasıyla BM, MD kenarlarına, ve KMD açısı BMD açısına eşittir; bu durumda DK tabanı DB tabanına eşit olur. **[I.4]**

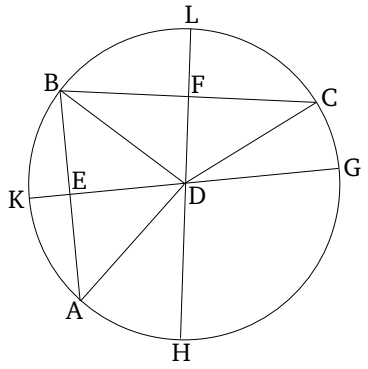
Diyorum ki D noktasından çemberin üzerine DK doğrusuna eşit başka bir doğru çizilemez.

Çünkü, eğer mümkünse böyle bir çizgi çizilsin, ve DN olsun. O zaman DK eşittir DN, ve bu arada DK eşittir DB olduğundan, DB, DN'ye eşit olur, yani DG'ye daha yakın olan daha uzak olana eşit olur ki bunun olamayacağı kanıtlandı.

Öyleyse D noktasından ABC çemberinin üzerine, her biri DG'nin birer tarafında olmak üzere, iki taneden fazla eşit büyüklükte doğru çizilemez.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

9. Önerme:
Bir çemberin içinde bir nokta alındığında bu noktadan çemberin üzerine aynı büyüklükte ikiden fazla doğru çizilebiliyorsa, bu nokta çemberin merkezidir.



ABC bir çember olsun ve içinde alınan bir D noktasından çemberin üzerine DA, DB, DC gibi ikiden fazla doğru çizilmiş olsun.

Diyorum ki D noktası ABC çemberinin merkezidir.

Çünkü; AB, BC birleştirilsinler ve E, F noktalarında ikiye bölünsünler, ve ED, FD birleştirilsin ve G, K, H, L noktalarına uzatılsın.

O zaman AE eşittir EB, ve ED ortak olduğundan, AE, ED kenarları BE, ED kenarlarına, ve DA tabanı DB tabanına eşit olur; bu durumda AED açısı BED açısına eşit olur. **[I.8]**

Öyleyse AED, BED açılarının herbiri diktir; **[Tan. I.10]**

bu durumda GK, AB'ye diktir ve onu ikiye böler.

Ve bir çember de eğer bir doğru bir başka doğruya dikse ve onu ikiye bölerse, çemberin merkezi kesen doğrunun üzerinde olduğundan, **[III.1, DS]**

çemberin merkezi GK üzerindedir.

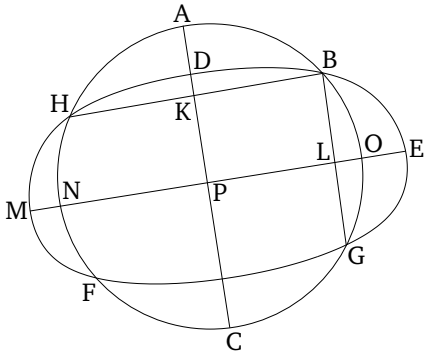
Aynı nedenden dolayı ABC çemberinin merkezi HL doğrusunun da üzerindedir.

Ve GK, HL doğrularının D'den başka ortak noktaları yoktur.

Öyleyse D noktası ABC çemberinin merkezidir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

10. Önerme:
Bir çember bir başka çemberi ikiden fazla noktada kesmez.



Çünkü, eğer mümkünse ABC çemberi DEF çemberini ikiden fazla noktada, yani B, G, F, H noktalarında kessin.

BH, BG birleştirilsin ve K, L noktalarında ikiye bölünsün, ve K, L noktalarından KC, LM doğruları BH ve BG'ye dik çizilsin ve A, E'ye uzatılsın.

O zaman ABC çemberinde AC doğrusu BH doğrusuna dik olduğu ve onu ikiye böldüğünden, ABC çemberinin merkezi AC üzerindedir. **[III.1,DS]**

Yine, ABC çemberinde NO doğrusu BG doğrusuna dik olduğu ve onu ikiye böldüğünden, ABC çemberinin merkezi NO üzerindedir.

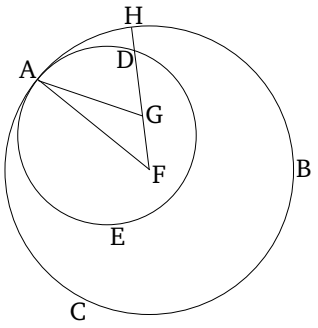
Ama merkezin AC üzerinde olduğu da kanıtlanmıştı, ve AC, NO doğruları P den başka bir noktada kesişmezler; bu durumda P noktası ABC çemberinin merkezidir.

Benzer şekilde, P'nin DEF çemberinin de merkezi olduğunu kanıtlayabiliriz.

Öyleyse birbirine kesen ABC, DEF çemberlerinin merkezi aynıdır, ama bu olamaz. **[III.5]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

11. Önerme:
Eğer iki çember birbirine içten değiyorsa, merkezlerini birleştiren doğru uzatıldığında çemberlerin değme noktasından geçer.



ABC, ADE çemberleri birbirine içerden A noktasında değsin, ve ABC çemberinin merkezi F , ve ADE çemberinin merkezi G alınsın;

Diyorum ki G ile G'yi birleştiren doğru uzatıldığında A'dan geçecektir.

Çünkü geçmediğini varsayalım, ve mümkünse FGH olarak uzatılsın, ve AF, AG birleştirilsin.

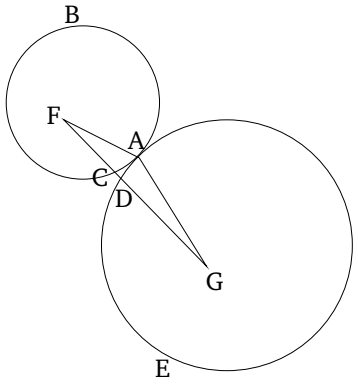
O zaman, AG, GF büyüktür FA, yani FH, olduğundan, bunlardan FG çıkarılsın; bu durumda kalan AG, kalan GH'den büyüktür.

Ama AG, GD'ye eşittir; bu durumda GD büyüktür GH olur; küçük olan büyük olandan büyük oldu ki bu olamaz.

Öyleyse F ile G'yi birleştiren doğru dışarıya çıkmayacak; bu durumda değme noktası A üzerine düşecektir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

12. Önerme:
Eğer iki çember birbirine dıştan değiyorsa, merkezlerini birleştiren doğru değme noktasından geçer.



ABC, ADE çemberleri birbirine dıştan A noktasında değsin, ve ABC çemberinin merkezi F , ve ADE çemberinin merkezi G alınsın;

Diyorum ki G ile G'yi birleştiren doğru değme noktası A'dan geçecektir.

Çünkü geçmediğini varsayalım, ve mümkünse FCDG olarak geçsin, AF, AG birleştirilsin.

O zaman, F noktası ABC çemberinin merkezi olduğundan FA eşittir FC.

Yine, G noktası ADE çemberinin merkezi olduğundan GA eşittir GD.

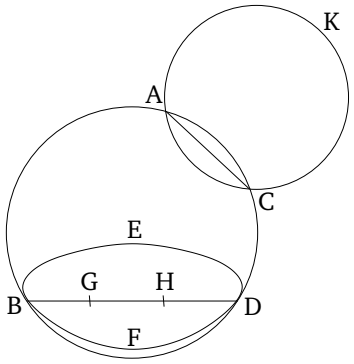
Ama FA'nın FC'ye eşit olduğu da kanıtlanmıştı; bu durumda FA, AG eşittir FC, AG olur, böylece FG'nin tamamı FA, AG'den büyük olur, ama aynı zamanda küçüktür de, **[I.20]**

ama bu olamaz.

Öyleyse F'yi G'ye birleştiren doğru değme noktası A'dan geçmemezlik edemeyecektir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

13. Önerme:
Bir çember bir diğer çembere, ister içten ister dıştan olsun, birden fazla noktada değmez.



Çünkü eğer mümkünse ABCD çemberi EBFD çemberine içerden birden fazla noktada, D ve B noktalarında değsin.

ABCD çemberinin merkezi G ve EBFD çemberinin merkezi G alınsın.

Bu durumda G ile H'yi birleştiren doğru B ve D'den geçecektir. **[III.11]**

Bu doğru BGHD olsun.

O zaman G noktası ABCD çemberinin merkezi olduğundan, BG eşittir GD; bu durumda BG büyüktür HD olur; öyleyse BH, HD'den daha da büyüktür.

Yine, H noktası EBFD çemberinin merkezi olduğundan, BH eşittir HD; ama çok daha büyük olduğu kanıtlanmıştı, demek ki bu olamaz.

Öyleyse bir çember bir başka çembere içerden birden fazla noktada değemez.

Dahası diyorum ki dışardan da birden fazla noktada değmez.

Çünkü eğer mümkünse ACK çemberi ABCD çemberine dışardan birden fazla noktada, A ve C noktalarında değsin, ve AC birleştirilsin.

O zaman ABCD, ACK çemberlerinin üzerinde rastgele A, C noktaları alındığından, bu noktaları birleştiren doğru her iki çemberin de içinde kalacaktır; **[III.2]**

ama $ABCD$ çemberinin içinde, ACK çemberinin dışında kaldı, **[Tan. III.2]**

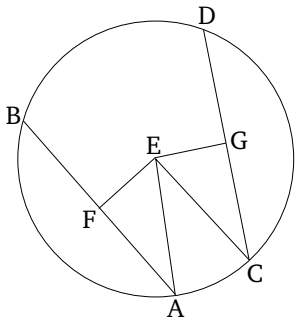
ki bu saçmadır.

Öyleyse bir çember bir başka çembere dışardan birden fazla noktada değemez.

Ve içerden de birden fazla noktada değmeyeceği kanıtlanmıştı.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

14. Önerme:
Bir çemberde, eşit doğrular merkezden eşit uzaklıktadır, ve merkezden eşit uzaklıkta olan doğrular eşittir.



$ABCD$ bir çember olsun ve AB, BC onun içinde eşit iki doğru olsun.

Diyorum ki AB, BC merkezden eşit uzaklıktadır.

Çünkü, $ABCD$ çemberinin merkezi alınsın, ve E olsun. **[III.1]**

E'den EF, EG doğruları AB, CD'ye dik çizilsin, ve AE, EC birleştirilsin.

O zaman, merkezden çizilen EF doğrusu merkezden geçmeyen AB doğrusunu dik açıyla kestiğinden, aynı zamanda onu ikiye böler. **[III.3]**

Bu durumda AF eşittir FB olur; öyleyse AB, AF'nin iki katıdır.

Aynı nedenden dolayı CD de CG'nin iki katıdır; ve AB, CD'ye eşittir; bu durumda AF eşittir CG olur.

Ve AE eşittir EC olduğundan AE üzerindeki kare EC üzerindeki kareye eşittir.

Ama F'deki açı dik olduğundan AF, EF üzerlerindeki kareler AE üzerindeki kareye eşittir; ve G'deki açı dik olduğundan EG, GC üzerlerindeki kareler EC üzerindeki kareye eşittir; **[I.47]**

bu durumda AF, EF üzerlerindeki kareler, CG, GE üzerlerindeki karelere eşittir ki bunlardan AF üzerindeki kare CG üzerindeki kareye eşittir çünkü AF eşittir CG; bu durumda kalan FE üzerindeki kare EG üzerindeki kareye eşittir, dolayısıyla EF eşittir EG.

Ama bir çemberde eğer merkezden üzerlerine çizilen doğrular eşitse bu doğrulara merkezden eşit uzaklıkta denir; **[Tan. III.4]**

bu durumda AB, BC merkezden eşit uzaklıktadır.

Bundan sonra, AB, CD doğruları merkezden eşit uzaklıkta olsun; yani EF, EG'ye eşit olsun.

Diyorum ki AB eşittir CD.

Çünkü aynı çizimlerle ve benzer şekilde AE'nin AF'nin iki katı, ve CD'nin de CG'nin iki katı olduğunu kanıtlayabiliriz.

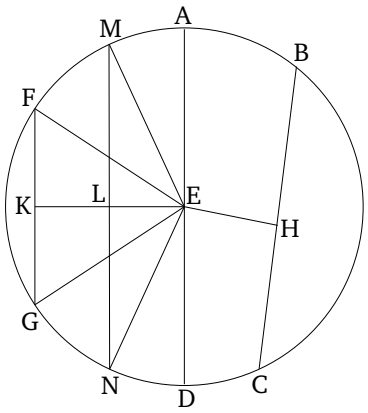
Ve AE eşittir CE olduğundan, AE üzerindeki kare CE üzerindeki kareye eşittir. Ama EF, FA üzerlerindeki kareler AE üzerindeki kareye, ve EG, GC üzerlerindeki kareler CE üzerindeki kareye eşittir. **[I.47]**

Bu durumda EF, FA üzerlerindeki kareler EG, GC üzerlerindeki karelere eşittir ki bunlardan EF üzerindeki kare EG üzerindeki kareye eşittir çünkü EF eşittir EG; bu durumda kalan AF üzerindeki kare CG üzerindeki kareye eşittir, dolayısıyla AF eşittir CG.

Ve AB, AF'nin, ve CD, CG'nin iki katıdır; öyleyse AB eşittir CD.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

15. Önerme:
Bir çemberin içindeki doğrular arasında en büyük olanı çaptır ve diğerleri arasında merkeze daha yakın olan daha uzak olandan büyüktür.



ABCD bir çember olsun, AD çapı ve E merkezi olsun; çap AD'ye BC daha yakın, FG daha uzak olsun;

Diyorum ki AD bunların en büyüğüdür, ve BC de FG'den büyüktür.

Çünkü, E merkezinden BC, FG'ye dik EH, EK çizilsin.

O zaman, BC merkeze daha yakın, ve FG daha uzak olduğundan, EK büyüktür EH olur. **[Tan. III.5]**

EL, EH'ye eşit çizilsin, L noktasından LM doğrusu EK'ye dik çizilsin ve N noktasına kadar uzatılsın. ME, EN, FE, EG birleştirilsin.

O zaman, EH eşittir EL olduğundan, BC eşittir MN olur. **[III.14]**

Yine, AE eşittir EM ve ED eşittir EN olduğundan, AD eşittir ME, EN olur.

Ama ME, EN büyüktür MN, **[I.20]**

ve MN eşittir BC; bu durumda AD büyüktür BC olur.

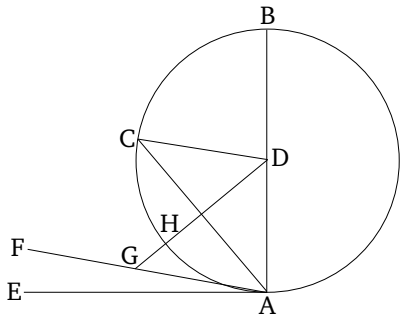
Ve ME, EN kenarları FE, EG kenarlarına eşit olduğundan, veMEN açısı FEG açısınadn büyük olduğundan, MN tabanı FG tabanından büyüktür. **[I.24]**

Ama MN'ninBC'ye eşit olduğu kanıylanmıştı.

Öyleyse AD çapı en büyük, ve BC büyüktür FG olur.

Bundan dolayı vs …
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

16. Önerme:
Bir çemberin çapına bu çapın ucundan çizilen bir dikme çemberin dışında kalır, ve bu çemberle bu dikme arasına başka bir doğru sokulamaz; ayrıca yarım çemberin açısı herhangi bir dar açıdan büyüktür, ve kalan açı da herhangi bir dar açıdan küçüktür.



["yarım çemberin açısı" derken çap ile çapın ucundaki çember çevresinin yaptığı açı düşünülüyor; yani şekildeki BAH *açısı. "kalan açı" ile de bu çevre ile dikme arasında kalan açı düşünülüyor; yani* HAE *açısı.]*

ABC bir çember olsun, merkezi D, ve çapı AB olsun.

Diyorum ki A noktasında AB'ye çizilen dik doğru çemberin dışında kalacaktır.

Çünkü, öyle olmadığını varsayalım, ve mümkünse çemberin içine CA olarak girsin, ve DC birleştirilsin.

DA eşittir DC olduğundan, DAC açısı da ACD açısına eşit olur. **[I.5]**

Ama DAC açısı diktir; bu durumda ACD açısı da dik olur: böylece ACD üçgeninde iki açı, DAC, ACD iki dik açıya eşittir: bu olamaz. **[I.17]**

Öyleyse A'dan BA'ya dik açıyla çizilen doğru çemberin içine düşmeyecektir.

Benzer şekilde çevrenin üzerine de düşmeyeceğini kanıtlayabiliriz; öyleyse dışarı düşecektir.

AE olarak çizilmiş olsun.

Bundan sonra diyorum ki AE doğrusuyla CHA çevresi arasına başka doğru sokulamaz.

Çünkü, eğer mümkünse bir başka doğru FA olarak araya sokulmuş olsun, ve D noktasından FA'ya DG dikmesi çizilsin.

O zaman, AGD açısı dik olduğundan, ve DAG açısı dik açıdan küçük olduğundan, AD büyüktür DG olur. **[I.19]**

Ama DH eşittir DH; bu durumda DH büyüktür DG olur, yani küçük olan büyük olandan büyük oldu ki bu olamaz.

Öyleyse çevre ile bu doğru arasına başka doğru sokulamaz.

Ayrıca diyorum ki BA doğrusuyla CHA çevresi arasında kalan açı her düzkenar dar açıdan büyüktür,

ve CHA çevresiyle AE doğrusu arasında kalan açı da her düzkenar dar açıdan küçüktür.

Çünkü, eğer BA doğrusuyla CHA çevresi arasındaki açıdan büyük bir düzkenar açı olsa, ve CHA çevresiyle AE doğrusu arasındaki açıdan daha küçük bir düzkenar açı olsa, o zaman CHA çevresiyle AE doğrusu arasına, doğrular arasında kalan, ve BA doğrusuyla CHA çevresinin içerdiğinden daha büyük bir açı yapan, ve yine doğrular arasında kalan ve CHA çevresiyle AE doğrusunun içerdiğinden daha küçük bir açı yapan bir doğru sokmak mümkün olacaktı.

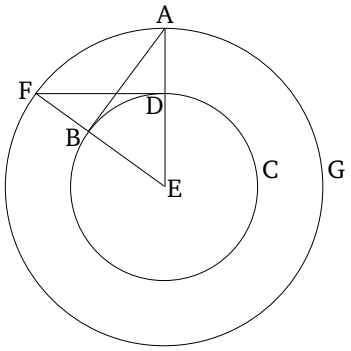
Ama böyle bir doğru sokulamaz;

Öyleyse BA doğrusuyla CHA çevresinin arasında kalandan daha büyük, ve CHA çevresiyle AE doğrusu arasında kalandan daha küçük ve doğrular arasında kalan bir dar açı olamaz.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

Doğal Sonuç: Buradan açıkça görülür ki bir çemberin çapına uçlarından dik olarak çizilen doğrular çembere değer.

17. Önerme:
Verilen bir noktadan verilen bir çembere değen bir doğru çizmenin yolu.



A noktası verilen nokta, BCD de verilen çember olsun; böylece A noktasından BCD çemberine değen bir doğru çizilmesi isteniyor.

Çemberin merkezi E alınsın, **[III.1]**

AE birleştirilsin, E merkezi ve AE uzaklığıyla AFG çemberi çizilsin; D'den EA'ya DF dik açıyla çizilsin, ve EF, AB birleştirilsin;

diyorum ki A noktasından BCD çemberine değen AB çizilmiştir.

Çünkü; E noktası BCD, AFG çemberlerinin merkezi olduğundan, EA eşittir EF, ve ED eşittir EB olur; öyleyse AE, EB kenarları FE, ED kenarlarına eşittir, ve ortak E açısını içerirler; bu durumda taban DF taban AB'ye eşittir, ve DEF üçgeni BEA üçgeni eşittir, ve kalan açılar da eşittir; **[I.4]**

öyleyse EDF açısı EBA açısına eşittir. Ama EDF açısı diktir; öyleyse EBA açısı da diktir.

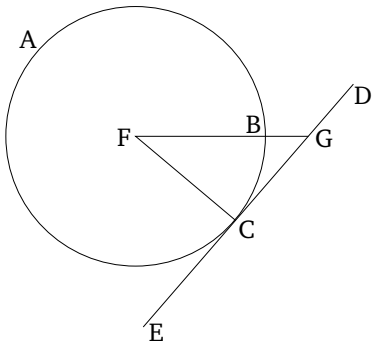
Şimdi, EB bir yarıçaptır; ve bir çemberin çapına ucundan dik açıyla çizilen doğru çembere değer; **[III.16, DS]**

bu durumda AB doğrusu BCD çemberine değer.

Öyleyse verilen A noktasından BCD çemberine değen AB doğrusu çizilmiştir.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. QEF

18. Önerme:
Eğer bir doğru bir çembere değiyorsa ve merkezden değme noktasına bir doğru çizilirse, bu doğru teğete dik olur.



DE doğrusu ABC çemberine C noktasında değsin, F noktası ABC çemberinin merkezi olsun, ve FC birleştirilsin.

Diyorum ki FC, DE'ye diktir.

Çünkü, değilse F'den DE'ye FG dikmesi çizilsin.

O zaman, FGC açısı dik olduğundan FCG açısı dardır; **[I.17]**

ve büyük açıyı büyük kenar görür; **[I.19]**

bu durumda F büyüktür FG olur.

Ama FC eşittir FB; öyleyse FB de FG'den büyüktür, yani küçük olan büyükten büyük olur ki bu olamaz.

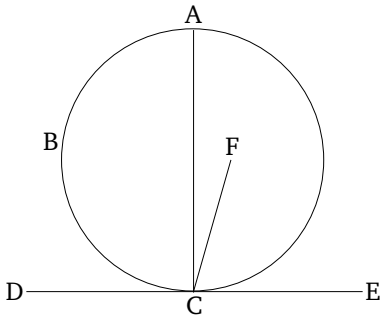
O yüzden FG, DE!ye dik değildir.

Benzer şekilde FC'den başka hiçbir doğrunun dik olmadığını kanıtlayabiliriz.

Öyleyse FC, DE'ye diktir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

19. Önerme:
Eğer bir doğru bir çembere değiyorsa ve değme noktasından bu teğete bir dik doğru çizilirse, çemberin merkezi bu çizilen doğrunun üzerinde olur.



Bir DE doğrusu ABC çemberine C noktasında değsin, ve C'den DE'ye CA doğrusu dik açıyla çizilsin;

Diyorum ki çemberin merkezi AC üzerindedir.

Çünkü, olmadığını varsayalım, ama mümkünse F noktası merkez olsun, CF birleştirilsin.

Bir DE doğrusu ABC çemberine değdiğinden ve FC de merkezden değme noktasına çizildiğinden, FC, DE'ye diktir; **[III.18]**

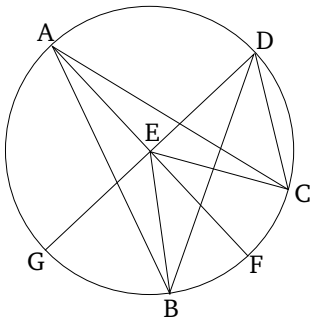
öyleyse FCE açısı diktir. Ama ACE açısı da diktir; öyleyse FCE açısı ACE açısına eşittir, yani küçük olan büyüğe eşitt olur ki bu olamaz.

Öyleyse F noktası ABC üçgeninin merkezi değildir.

Benzer şekilde AC üzerinde olmayan hiçbir noktanın merkez olamadığını kanıtlayabiliriz.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

20. Önerme:
Bir çemberde, çemberin merkezinde olan açı aynı çevreyi gören ama çemberin üzerinde olan açının iki katıdır.



ABC bir çember olsun, BEC merkezde bir açı olsun, ve BAC aynı çevreyi gören çember üzerinde bir açı olsun.

Diyorum ki BEC açısı BAC açısının iki katıdır.

Çünkü; AE birleştirilsin ve F'ye kadar uzatılsın.

O zaman, EA eşittir EB olduğundan, EAB açısı da EBA açısına eşittir; **[I.5]**

bu durumda EAB, EBA açıları EAB açısının iki katı olur.

Ama BEF açısı EAB, EBA açılarına eşittir; **[I.32]**

bu durumda BEF açısı da EAB açısının iki katıdır.

Aynı nedenle FEC açısı da EAC açısının iki katıdır.

Öyleyse BEC açısının tamamı BAC açısının tamamının iki katıdır.

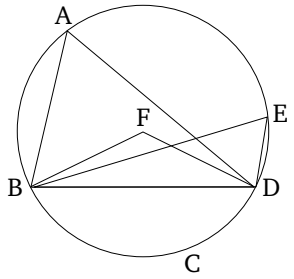
Yine, başka bir doğru çizilsin, ve başka bir BDC açısı olsu, DE birleştirilsin ve G'ye uzatılsın.

Benzer şekilde GEC açısının EDC açısının iki katı olduğunu kanıtlayabiliriz ki bunlardan GEB açısı EDB açısının iki katıdır;

Öyleyse kalan BEC açısı kalan BDC açısının iki katıdır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

21. Önerme:
Bir çemberde aynı çember parçasının içindeki açılar birbirine eşittir.



ABCD bir çember olsun, ve BAD, BED açıları aynı BAED çember parçasının içindeki açılar olsun.

Diyorum ki BAD, BED açıları birbirine eşittir.

Çünkü; ABCD çemberinin merkezi alınsın, ve F olsun; BF, BD birleştirilsin.

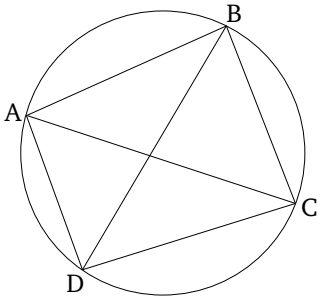
Şimdi, BFD açısı merkezde olduğundan, ve BAD açısı çember üzerinde olduğundan, ve aynı BCD çevresini taban olarak gördüklerinden, BFD açısı BED açısının iki katıdır. **[III.20]**

Aynı nedenden BFD açısı BED açısının da iki katıdır.

Öyleyse BAD açısı BED açısına eşittir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

22. Önerme:
Çemberlerin içine çizilen dörtgenlerin karşılıklı açıları iki dik açıya eşittir.



ABCD bir çember olsun, ABCD de içine çizilmiş bir dörtgen.

Diyorum ki karşılıklı açılar iki dik açıya eşittir.

AC, BD birleştirilsin.

O zman, her üçgende üç açı iki dik açıya eşit olduğundan, **[I.35]**

ABC üçgeninin üç açısı CAB, ABC, BCA iki dik açıya eşittir.

Ama CAB açısı BDC açısına eşittir, çünkü aynı BADC çember parçası içindeler; **[III.21]**

ve ACB açısı ADB açısına eşittir, çünkü aynı ADCB çember parçası içindeler. Öyleyse ADC açısının tamamı BAC, ACB açılarına eşittir.

Bunlara ABC açısı eklensin; bu durumda ABC, BAC, ACB açıları ABC, ADC açılarına eşit olur.

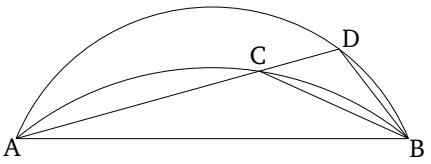
Ama ABC, BAC, ACB açıları iki dik açıya eşittir;

Öyleyse ABC, ADC açıları da iki dik açıya eşittir.

Benzer şekilde BAD, DCB açılarının da iki dik açıya eşit olduğunu kanıtlayabiliriz.

Bundan dolayı vs …
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

23. Önerme:
Bir doğrunun aynı tarafına birbirine eşit olmayan iki benzer çember parçası çizilemez.



Çünkü, eğer mümkünse AB doğru parçasının aynı tarafına benzer ama eşit olmayan ACB, ADB çember parçaları çizilsin.

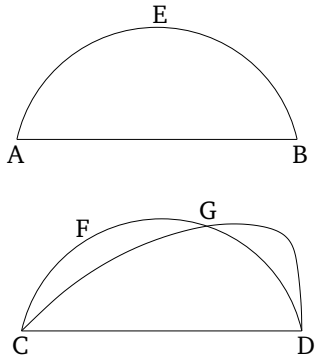
ACD çizilsin ve CB, DB birleştirilsin.

O zaman, ACB parçası ADB parçasına benzer olduğundan, ve benzer çember parçaları eşit açılar içerdiğinden, **[Tan. III.11]**

ACB açısı ADB açısına eşittir, yani dış açı iç açıya eşit olur ki bu olamaz.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

24. Önerme:
Birbirine eşit doğrular üzerine çizilen benzer çember parçaları birbirine eşittir.



AEB, CFD benzer çember parçaları eeşit AB, CD doğruları üzerine çizilmiş olsun.

Diyorum ki AEB parçası CFD parçasına eşittir.

Çünkü, eğer AEB parçası CFD üzerine uygulanırsa, ve eğer A noktası C noktasına ve AB doğrusu CD üzerine yerleştirilirse, AB eşittir CD olduğundan, B noktası da D noktasıyla çakışır.

AB doğrusu CD ile çakıştığından AEB parçası da CFD parçasıyla çakışacaktır;

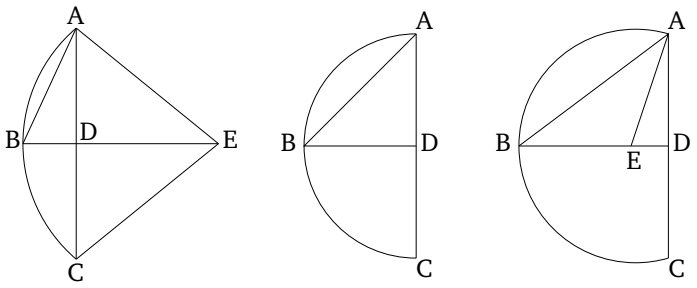
Çünkü, eğer AB doğrusu CD doğrusuyla çakışırken AEB parçası CFD ile çakışmazsa, ya içine düşecektir ya da dışına; ya da CGD gibi çarpık olacaktır, ve bir çember bir başka çemberi ikiden fazla noktada kesmiş olacaktır ki bu olamaz. **[III.10]**

Öyleyse eğer AB doğrusu CD'ye uygulanırsa, AEB parçası CFD parçasıyla çakışmamazlık yapmayacaktır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

["içine" ya da "dışına" düşmesi durumunun olmayacağının bir önceki önermeden hemen çıkacağının görülmesini Öklid okuyucuya bırakmıştır.]

25. Önerme:
Bir çember parçası verildiğinde, onun parçası olduğu çemberin tamamını çizmenin yolu.



Verilen çember parçası ABC olsun;

böylece ABC'nin parçası olduğu çemberin tamamının çizilmesi isteniyor.

AC doğrusu D noktasında iki bölünsün, D noktasından AC doğrusuna dik açıyla DB çizilsin, ve AB birleştirilsin.

O zaman ABD açısı BAD açısından ya büyüktür, ya küçüktür y da ona eşittir.

Önce büyük olsun; ve BA doğrusuna A noktasında ABD açısına eşit BAE açısı çizilsin; DB doğrusu E'ye kadar uzatılsın, ve EC birleştirilsin.

O zaman, ABE açısı BAE açısına eşit olduğundan, EB doğrusu da EA doğrusuna eşittir. **[I.6]**

Ve AD eşittir DC olduğundan, ve DE ortak olduğundan, AD, DE kenarları sırasıyla CD, DE kenarlarına eşittir; ve ADE açısı CDE açısına, ikisi de dik olduğundan, eşittir; bu durumda taban AE eşittir taban CE olur.

Ama AE'nin CE'ye eşit olduğu kanıtlanmişti; öyleyse BE eşittir CE olur; bu durumda üç doğru AE, EB, EC birbirine eşittir.

Böylece E merkezi ve AE, EB, EC uzunluklarından biriyle çizilen çember diğer noktalardan da geçecek ve tamamlanacaktır. **[III.9]**

Öyleyse bir çember parçası verildiğinde tüm çember çizilmiştir.

Ve açıkça görülür ki ABC parçası yarıçemberden küçüktür çünkü E merkezi onun dışında kalır.

Benzer şekilde, eğer ABD açısı BAD açısına eşit olsa bile, AD doğrusu BD, DC'nin her birine eşit olduğundan, üç doğru DA, DB, DV birbirine eşit olacaktır, D tamamlanmış çemberin merkez olacaktır, ve ABC açıkça yarıçember olacaktır.

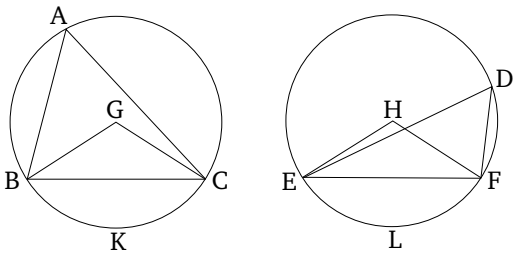
Ama eğer ABD açısı BAD açısından küçükse, ve BA doğrusu üzerine A noktasında ABD açısına eşit bir açı çizersek, merkez, ABC parçasının içinde DB üzerine düşecektir, ve ABC parçası açıkça yarıçemberden büyük olacaktır.

Öyleyse bir çember parçası verildiğinde, çemberin tamamı çizilmiştir.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. QEF

26. Önerme:

Eşit çemberlerde eşit açılar, ister merkezde ister çemberin üzerinde olsunlar, eşit çevreyi görürler.



ABC, DEF eşit çemberler olsunlar, ve içlerinde eşit açılar olsun, yani merkezlerde BGC, EHF açıları, ve çemberde BAC, EDF açıları;

Diyorum ki BKC çevresi ELF çevresine eşittir.

Çünkü; BC, EF birleştirilsin. Şimdi ABC, DEF çemberleri eşit olduğundan, yarıçapları eşittir. O zaman BG, GC doğruları EH, HF doğrularına eşittir; ve G'deki açı H'deki açıya eşittir; bu durumda BC tabanı EF tabanına eşittir. **[I.4]**

Ve A'daki açı D'deki açıya eşit olduğundan, BAC parçası EDF parçasına benzerdir; **[Tan. III.11]**

ve eşit doğrular üzerindedirler.

Amam eşit doğrular üzerinde olan benzer çember parçaları birbirine eşittir; **[III.24]**

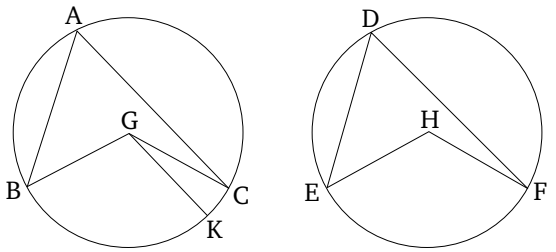
bu durumda BAC parçası EDF parçasına eşittir.

Ama ABC çemberinin tamamı da DEF çemberinin tamamına eşittir.

Öyleyse kalan BKC çevresi kalan ELF çevresine eşittir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

27. Önerme:
Eşit çemberlerde eşit çevreleri gören açılar, ister merkezde ister çemberin üzerinde olsunlar, eşittirler.



ABC, DEF eşit çemberlerinde, eşit BC, EF çevrelerinde, BGC, EHF açıları G, H merkezlerinde, ve BAC, EDF açıları çember üzerinde olsun.

Diyorum ki BGC açısı EHF açısına, ve BAC açısı EDF açısına eşittir.

Çünkü, eğer BGC açısı EHF açısından farklıysa, biri diğerinden büyüktür.

BGC açısı büyük olsun; BG doğrusu üzerinde ve G noktasında EHF açısına eşit BGK açısı çizilsin. **[I.23]**

Şimdi, merkezlerdeki eşit açılar eşit çevreleri görürler; **[III.26]**

öyleyse BK çevresi EF çevresine çevresine eşittir.

Amam EF, BC'ye eşittir; bu durumda BK eşittir BC olur, yani küçük büyüğe eşit olur ki bu olamaz.

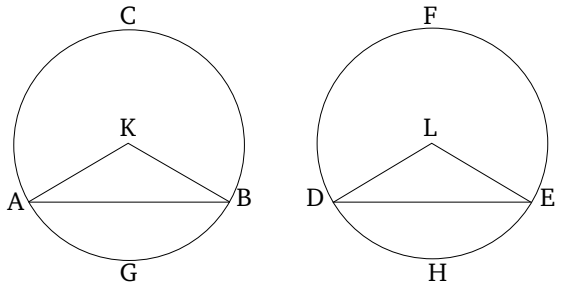
Öyleyse BGC açısı EHF açısından farklı olamaz; bu durumda ona eşittir.

Ve A'daki açı BGC açısının yarısıdır; ve D'deki açı EHF açısının yarısıdır; **[III.20]**

bu durumda A'daki açı da D'deki açıya eşittir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

28. Önerme:
Eşit çemberlerde eşit doğrular eşit çevreler keserler, büyük olan büyük olana, küçük olan küçük olana eşit olur.



ABC, DEF eşit çemberler olsun, ve içlerinde AB, DE eşit doğruları ACB, DFE büyük çevrelerini ve AGB, DHE küçük çevrelerini kessin.

Diyorum ki ACB büyük çevresi DFE büyük çevresine eşittir, ve küçük çevre AGB de DHE'ye eşittir.

Çünkü; çemberlerin K, L merkezleri alınsın, ve AK, KB, DL, LE birleştirilsin.

Şimdi, çemberler eşit olduğundan, yarıçaplar eşittir; öyleyse AK, KB kenarları DL, LE kenarlarına eşittir; ve ABtabanı DE tabanına eşittir; bu durumda AKB açısı DLE açısına eşit olur. **[I.8]**

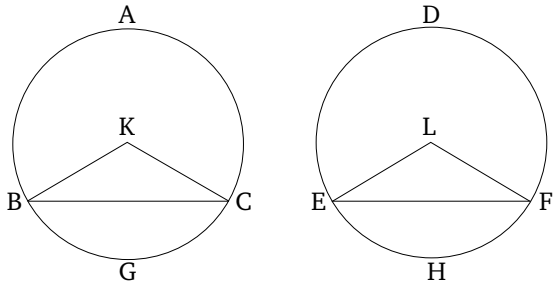
Ama merkezdeki eşit açılar eşit çevre görürler; öyleyse AGB çevresi DHE çevresine eşittir.

Ve ABC çemberinin tamamı DEF çemberinin tamamına eşittir.;

Öyşeyse kalan ACB çevresi de kalan DFE çevresine eşittir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

29. Önerme:
Eşit çemberlerde eşit çevreler eşit doğrular tarafından görülür.



ABC, DEF eşit çemberler olsun, ve içlerinde BGC, EHF eşit çevreleri kesilsin; BC, EF doğruları çizilsin.

Diyorum ki BC eşittir EF.

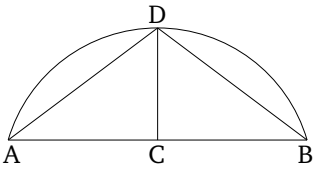
Çünkü, çemberlerin merkezleri alınsın, ve bunlar K, L olsun; BK, KC, EL, LF birleştirilsin.

Şimdi, BGC çevresi EHF çevresine eşit olduğundan, BKC açısı da ELF açısına eşittir. **[III.27]**

Ve ABC, DEF çemberleri eşit olduğundan yarıçapları eşittir; öyleyse BK, KC kenarları EL, LF kenarlarına eşittir, ve eşit açılar içerirler; bu durumda taban BC eşittir taban EF olur. **[I.4]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

30. Önerme:
Verilen bir çember çevresini iki eşit parçaya bölmenin yolu.



Verilen çember parçası ADB olsun; böylece ADB çevresinin ikiye bölünmesi isteniyor.

AB birleştirilsin ve C'de ikiye bölünsün; C noktasındanAB doğrusuna dik açıyla CD çizilsin, ve AD, DB birleştirilsin.

O zaman, AC eşittir CB, ve CD ortak olduğundan, AC, CD kenarları BC, CD kenarlarına eşittir, ve ACD açısı BCD açısına, her biri dik olduğundan, eşittir; bu durumda AD tabanı DB tabanına eşit olur. **[I.4]**

Ama eşit doğrular eşit çevreleri keserler, büyük olan büyük olana, küçük olan küçük olana eşit olur; **[III.28]**

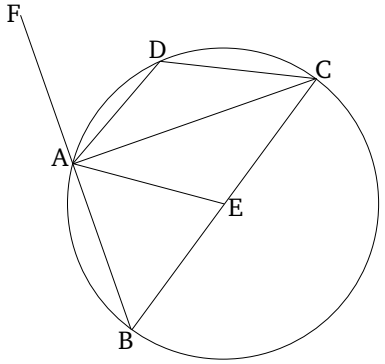
ve AD, DB çevrelerinin her biri yarıçemberden küçüktür; bu durumda AD çevresi DB çevresine eşittir.

Böylece verilen bir çevre D'de ikiye bölünmüş oldu.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. QEF

31. Önerme:

Bir çemberde yarı çember parçasının içindeki açı diktir, daha büyük parçanın içindeki açı dik açıdan küçüktür, daha küçük parçanın içindeki açı dik açıdan büyüktür; ve dahası daha büyük parçanın açısı dik açıdan büyük, daha küçük parçanın açısı dik açıdan küçüktür.



ABCD bir çember olsun, BC çapı, E merkezi olsun, ve BA, AC, AD, DC birleştirilsin;

Diyorum ki BAC yarıçemberi içindeki BAC açısı diktir, yarıçemberden büyük olan ABC parçası içindeki ABC açısı dik açıdan küçüktür, ve yarıçemberden küçük olan ADC parçası içindeki ADC açısı dik açıdan büyüktür.

AE birleştirilsin, ve BA doğrusu F'ye kadar uzatılsın.

O zaman, BE eşittir EA olduğundan, ABE açısı da BAE açısına eşittir. **[I.5]**

Yine, CE eşittir EA olduğundan, ACE açısı CAE açısına eşittir. **[I.5]**

Öyleyse BAC açısının tamamı ABC, ACB açılarına eşittir.

Ama FAC açısı ABC açısının dış açısı olduğundan o da ABC, ACB açılarına eşittir; **[I.32]**

öyleyse BAC açısı FAC açısına da eşittir; dolayısıyla diktir; **[Tan. I.10]**

bu durumda yarıçember BAC içindeki BAC açısının diktir.

Sonra, ABC üçgenindeki iki açı ABC, BAC iki dik açıdan küçük olduğundan, **[I.17]**

ve BAC açısı dik olduğundan, ABC açısı dik açıdan küçüktür; ve o da yarıçemberden büyük ABC parçasının içindeki açıdır.

Sonra, ABCD, çember içinde bir dörtgen olduğundan, ve çember içindeki dörtgenlerin karşı açıları iki dik açıya eşit olduğundan, **[III.22]**

ve ABC açısı da dik açıdan küçük olunca, kalan ADC açısı dik açıdan büyüktür; ve o da yarıçemberden küçük olan ADC parçasının içindeki açıdır.

Ayrıca diyorum ki daha büyük parçanın açısı, yani AC doğrusuyla ABC çevresinin içerdiği açı dik açıdan büyüktür; ve küçük çevrenin açısı, yani AC doğrusuyla ADC çevresinin içerdiği açı dik açıdan küçüktür.

Bu hemen görülür.

Çünkü, BA, AC doğrularının içerdiği açı dik olduğundan, ABC çevresi ve AC doğrusunun içerdiği açı dik açıdan büyüktür.

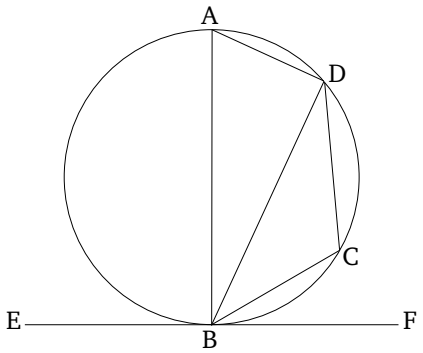
Yine, AC, AF doğrularının içerdiği açı dik olduğundan, CA doğrusuyla ADC çevresinin içerdiği açı dik açıdan küçüktür.

Bundan dolayı vs …
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

*[Burada tanım gereği "*AC *doğrusuyla* ADC *çevresinin içerdiği açı", *ADC *açısıdır. Benzer şekilde "*CA *doğrusuyla* ADC *çevresinin içerdiği açı", *ABC *açısıdır.]*

32. Önerme:

Eğer bir doğru bir çembere değiyorsa, ve değme noktasından çemberin içine doğru çemberi kesecek şekilde bir doğru çizilirse, bu doğrunun teğetle yaptığı açılar diğer taraftaki çember parçasının içindeki açılara eşittir.



Bir EF doğrusu ABCD çemberine B noktasında değsin, ve B noktasından ABCD çemberine BD doğrusu çizilsin;

Diyorum ki BD'nin EF teğetiyle yaptığı açılar diğer taraftaki çember parçalarının içindeki açılara eşit olacaktır, yani FBD açısı BAD parçasının içine çizilen açıya, ve EBD parçası DCB parçasının içine çizlen açıya eşit olur.

Çünkü, B'den EF'ye dik açıyla BA çizilsin, BD parçası üzerinde rastgele bir C noktası alınsın, ve AD, DC, CB birleştirilsin.

O zaman, EF doğrusu ABCD çemberine B noktasında değdiğinden, ve BA doğrusu değme noktasında teğete dik açıyla çizildiğinden, ABCD çemberinin merkezi BA üzerindedir. **[III.19]**

Bu durumda BA doğrusu ABCD çemberinin çapı olur; öyleyse ADB açısı, yarıçember içinde bir açı olduğu için diktir. **[III.31]**

bu durumda BAD, ABD açıları bir dik açıya eşittir. **[I.32]**

Ama ABF açısı da diktir; bu durumda ABF açısı BAD, ABD açılarına eşittir.

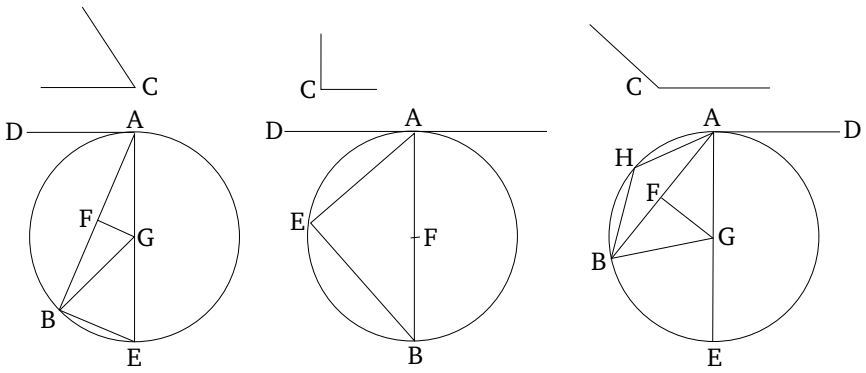
Bunlardan ABD açısı çıkartısın; öyleyse kalan DBF açısı diğer çember parçası içindeki BAD açısına eşit olur.

Sonra, ABCD, çember içine çizilmiş bir dötgen olduğundan karşılıklı açıları iki dik açıya eşittir. **[III.22]**

Ama DBF, DBE açıları da iki dik açıya eşittir; öyleyse DBF, DBE açıları BAD, BCD açılarına eşittir ki bunlardan BAD açısının DBF açısına eşit olduğu kanıtlanmıştı; bu durumda kalan DBE açısı diğer çember parçası DCB içindeki DCB açısına eşittir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

33. Önerme:
Verilen bir doğru üzerine iç açısı verilen bir düzkenar açıya eşit olan bir çember parçası çizmenin yolu.



AB doğrusu verilen doğru, ve C deki açı da verilen düzkenar açı olsun; böylece AB doğrusu üzerine iç açısı C açısına eşit bir çember parçası çizilmesi isteniyor.

C'deki açı dar, dik ya da geniş olabilir.

Önce dar olsun, şekilde olduğu gibi, AB üzerine A noktasında C açısına eşit BAD açısı çizilsin; bu durumda BAD açısı da dar olur.

DA'ya AE dikmesi çizilsin, AB doğrusu F'de ikiye bölünsün, AB'ye F'den FG dikmesi çizilsin, ve GB birleştirilsin.

O zaman, AF eşittir FB olduğundan, ve FG ortak olduğundan, AF, FG kenarları BF, FG kenarlarına eşittir, ve AFG açısı BFG açısına eşittir; bu durumda AG tabanı BG tabanına eşit olur. **[I.4]**

Öyleyse G merkezi ve GA uzaklığıyla çizilen çember B'den de geçer. Bu çember çizilsin ve ABE olsun; EB birleştirilsin.

Şimdi, AD doğrusu AE çapının ucu A'dan AE'ye dik çizildiğinden, AD doğrusu ABE çemberine değer. **[III.16, DS]**

Öyleyse, bir AD doğru parçası ABE çemberine değdiğinden, ve değme noktası A'dan bir AB doğrusu ABE çemberine çizildiğinden, DAB açısı diğer çember parçası içindeki AEB açısına eşit olur. **[III.32]**

Ama DAB açısı C'deki açıya eşittir; bu durumda C'deki açı AEB açısına da eşittir.

Öyleyse, verilen AB doğrusu üzerine, verilen C açısına eşit bir AEB iç açısı kabul eden AEB çember parçası çizilmiştir.

Sonra C'deki açı dik olsun; ve yine AB üzerine bir iç açısı C'deki dik açıya eşit olan bir çember parçası çizilmesi istensin.

İkinci şekilde olduğu gibi C'deki dik açıya eşit BAD açısı çizilsin; AB doğrusu F'de ikiye bölünsün, ve F merkezi ile FA ya da FB uzaklığıyla AEB çemberi çizilsin.

Öyleyse, A'daki açı dik olduğundan AD doğrusu ABE çemberine değer. **[III.16, DS]**

Ve BAD açısı AEB parçasının içindeki açıya eşittir çünkü bir yarıçember içindeki açı olması nedeniyle içerdeki açı da bir dik açıdır. **[III.31]**

Ama BAD açısı C'deki açıya da eşittir. Bu durumda AEB açısı da C'deki açıya eşit olur.

Öyleyse yine AB üzerine C'deki açıya eşit bir iç açı kabul eden AEB çember parçası çizilmiştir.

Sonra C'deki açı geniş olsun; ve üçüncü şekilde olduğu gibi AB doğrusuna A noktasında C'deki açıya eşit BAD açısı çizilsin;

AD'ye dik açıyla AE çizilsin, AB yine F'de ikiye bölünsün, AB'ye dik açıyla FG çizilsin, ve GB birleştirilsin.

O zaman, yine AF eşit FB, ve FG ortak olduğundan, AF, FG kenarları BF, FG kenarlarına, ve AFG açısı BFG açısına eşittir; bu durmda AG tabanı BG tabanına eşit olur. **[I.4]**

Öyleyse G merkezi ve GA uzaklığıyla çizilen çember B noktasından da geçecektir; geçsin ve AEB olsun.

Şimdi, AD doğrusu AE çapına ucundan dik çizildiğinden, AD doğrusu AEB çemberine değer. **[III.16, DS]**

Ve AB doğrusu değme noktası A'dan çizilmişti; bu durumda BAD açısı çemberin diğer AHB parçası içine çizilmiş açıya eşit olur. **[III.32]**

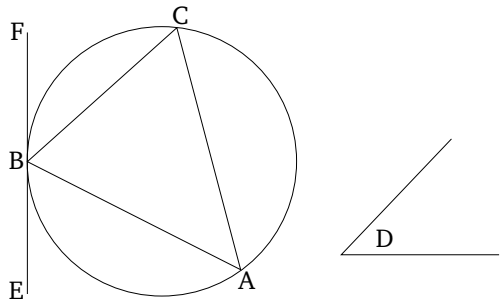
Ama BAD açısı C'deki açıya eşittir.

Böylece AHB parçası içindeki açı da C'deki açıya eşittir.

Öyleyse verilen AB doğrusu üzerinde C'deki açıya eşit bir iç açı kabul eden AHB çember parçası çizilmiştir.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. QEF

34. Önerme:
Verilen bir çemberden iç açısı verilen bir düzkenar açıya eşit olan bir parça kesmenin yolu.



ABC verilen çember ve D'deki açı da verilen düzkenar açı olsun; öyleyse ABC çemberinden verilen bir düzkenar açıya, D'deki açı, eşit bir iç açı kabul eden bir parça kesilmesi isteniyor.

ABC çemberine B noktasında değen EF çizilsin, ve FB doğrusu üzerine B noktasında D'deki açıya eşit FBC açısı çizilsin. **[I.23]**

O zaman, EF doğrusu ABC çemberine değdiğinden, ve BC doğrusu değme noktası B'den karşıya çizildiğinden, FBC açısı diğer taraftaki parça BAC içine çizilen açıya eşittir. **[III.32]**

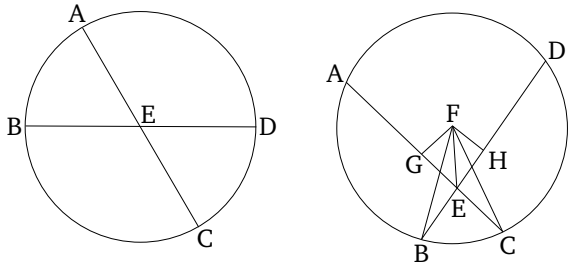
Ama FBC açısı D'deki açıya eşittir; bu durumda BAC parçası içindeki açı D'deki açıya eşit olur.

Öyleyse verilen ABC çemberinden verilen düzkenar açıya, D'deki açı, eşit bir açı kabul eden BAC parçası kesilmiştir.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. QEF

35. Önerme:

Bir çemberin içinde iki doğru kesişirse, birinin parçaları tarafından içerilen dikdörtgen diğerinin parçaları tarafından içerilen dikdörtgene eşittir.



ABCD çemberi içinde AC, BD doğruları birbirini E noktasında kessinler;

Diyorum ki AE, EC tarafından içerilen dikdörtgen DE, EB tarafından içerilen dikdörtgene eşittir.

Şimdi eğer AC, BD merkezden geçiyorsa, yani E noktası ABCD çemberinin merkeziyse, apaçıktır ki AE, EC, DE, EB eşit olduklarından, AE, EC tarafından içerilen dikdörtgen DE, EB tarafından içerilen dikdörtgene eşittir.

Sonra, AC, DB merkezden geçmesin; ABCD'nin merkezi alınsın, F olsun;

F'den AC, DB doğrularına FG, FH dikmeleri çizilsin, ve FB, FC, FE birleştirilsin.

O zaman, merkezden geçen GF doğrusu merkezden geçmeyen AC doğrusunu dik olarak kestiği için onu ikiye böler; **[III.3]**

bu durumda AG eşittir GC olur.

O zamn, AC doğrusu G'de eşit iki parçaya kesildiği, ve E'de eşit olmayan iki parçaya kesildiğinden, AE, EC tarafından içerilen dikdörtgen EG üzerindeki kareyle birlikte GC üzerindeki kareye eşittir; **[II.5]**

bunlara GF üzerindeki kare eklensin; bu durumda AE, EC dikdörtgeni GE, GF kareleriyle birlikte CG, GF karelerine eşittir.

Ama FE üzerindeki kare EG, GF üzerindeki karelere eşittir, ve FC üzerindeki kare CG, GF üzerindeki karelere eşittir; **[I.47]**

bu durumda AE, EC dikdörtgeni FE üzerindeki kareyle birlikte FC üzerindeki kareye eşittir.

Ve FC eşittir FB; öyleyse AE, EC dikdörtgeni EF üzerindeki kareyle birlikte FB üzerindeki kareye eşittir.

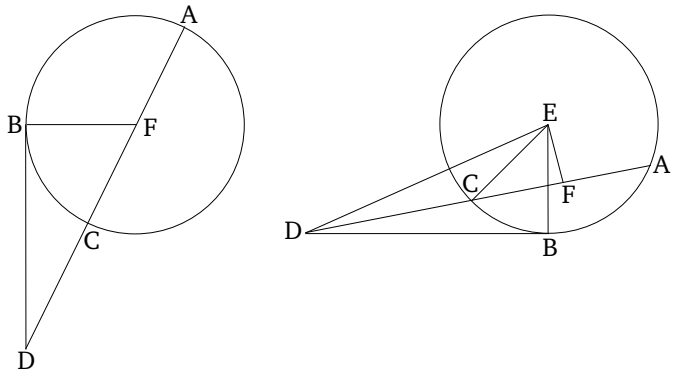
Aynı nedenle DE, EB dikdörtgeni FE üzerindeki kareyle birlikte FB üzerindeki kareye eşittir.

Ama AE, EC dikdörtgeninin FE üzerindeki kareyle birlikte FB üzerindeki kareye eşit olduğu kanıtlanmıştı; bu durumda AE, EC dikdörtgeni EF üzerindeki kareyle birlikte DE, EB dikdörtgeni ve FE üzerindeki kareye eşittir.

Bunlardan FE üzerindeki kare çıkarılsın; öyleyse kalan AE, EC tarafından içerilen dikdörtgen DE, EB tarafından içerilen dikdörtgene eşittir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

36. Önerme:
Eğer bir çemberin dışında bir nokta alınsa ve bu noktadan çembere, biri çemberi kesen diğeri çembere değen, iki doğru çizilse, çemberi kesen doğrunun tamamıyla o doğrunun çemberin dışbükey çevresiyle nokta arasında kalan kısmının içerdiği dikdörtgen teğet üzerindeki kareye eşittir.



ABC çemberinin dışında bir D noktası alınsın ve DCA, DB gibi iki doğru çembere çizilsin; DCA doğrusu çemberi kessin, ve BD değsin.

Diyorum ki AD, DC tarafından içerilen dikdörtgen DB üzerindeki kareye eşittir.

DCA ya merkezden geçer ya da merkezden geçmez.

Önce merkezden geçsin, F noktası ABC çemberinin merkezi olsun; FB birleştirilsin; bu durumda FBD açısı dik olur. **[III.18]**

Ve AC doğrusu F'de ikiye bölündüğünden ve FC eklendiğinden, AD, DC dikdörtgeni FC üzerindeki kareyle birlikte FD üzerindeki kareye eşittir. **[II.16]**

Ama FC eşittir FB; bu durumda AD, DC dikdörtgeni FB üzerindeki kareyle birlikte FD üzerindeki kareye eşittir.

Ve FB, BD üzerindeki kareler FD üzerindeki kareye eşittir; **[I.47]**

bu durumda AD, DC dikdörtgeni FB üzerindeki kareyle birlikte FB, BD üzerindeki karelere eşittir.

Bunlardan FB üzerindeki kare çıkarılsın; bu durumda kalan AD, DC dikdörtgeni DB teğeti üzerindeki kareye eşit olur.

Bu sefer, DCA doğrusu ABC çemberinin merkezinden geçmesin; E merkezi alınsın, E'den AC'ye EF dikmesi çizilsin; EB, EC, ED birleştirilsin.

O zaman EBD açısı dik olur. **[III.18]**

Ve, merkezden geçen EF doğrusu merkezden geçmeyen AC doğrusunu dik olarak kestiğinden, onu ikiye böler; **[III.3]**

bu durumda AF eşittir FC olur.

Şimdi, AC doğrusu F'de ikiye bölündüğü ve ona CD eklendiğinden, AD, DC tarafından içerilen dikdörtgen FC üzerindeki kareyle birlikte FD üzerindeki kareye eşittir. **[II.6]**

Bunlara FE üzerindeki kare eklensin; bu durumda AD, DC dikdörtgeni CF, FE üzerindeki karelerle birlikte FD, FE dikdörtgenlerine eşit olur.

Ama EFC açısı dik olduğundan EC üzerindeki kare CF, FE üzerindeki karelere eşittir; **[I.47]**

ve ED üzerindeki kare DF, FE üzerindeki karelere eşittir; bu durumda AD, DC dikdörtgeni EC üzerindeki kareyle birlikte ED üzerindeki kareye eşit olur.

Ve EC eşittir EB; bu durumda AD, DC dikdörtgeni EB üzerindeki kareyle birlikte ED üzerindeki kareye eşit olur.

Ama EBD açısı dik olduğundan EB, BD üzerindeki kareler ED üzerindeki kareye eşittir; **[I.47]**

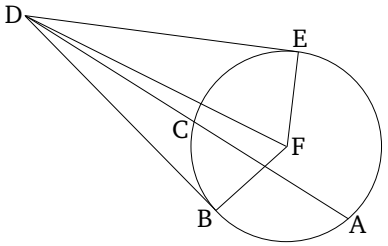
bu durumda AD, DC dikdörtgeni EB üzerindeki kareyle birlikte EB, BD üzerindeki karelere eşit olur.

Bunlardan EB üzerindeki kare çıkarılsın; bu durumda AD, DC dikdörtgeni DB üzerindeki kareye eşit olur.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

37. Önerme:

Eğer bir çemberin dışında bir nokta alınsa ve bu noktadan çembere, biri çemberi kesen diğeri çemberin üzerindeki bir noktaya düşen, iki doğru çizilse, ve dahası çemberi kesen doğrunun tamamıyla o doğrunun çemberin dışbükey çevresiyle nokta arasında kalan kısmının içerdiği dikdörtgen diğer doğru üzerindeki kareye eşitse, diğer doğru çembere değecektir.



ABC çemberi dışında bir D noktası alınsın, ve D'den DCA, DB doğruları ABC çemberine çizilsin; DCA çemberi kessin ve DB çemberin üzerinde bir noktaya düşsün; ve AD, DC dikdörtgeni DB üzerindeki kareye eşit olsun.

Diyorum ki DB doğrusu ABC çemberine değer.

Çünkü; ABC'ye değen DE çizilsin; ABC çemberinin merkezi alınsın ve F olsun; FE, FB, FD birleştirilsin.

Böylece FED açısı dik olur. **[III.18]**

Şimdi, DE doğrusu ABC çemberine değdiğinden, ve DCA kestiğinden, AD, DC dikdörtgeni DE üzerindeki kareye eşittir. **[III.36]**

Ama AD, DC dikdörtgeni DB üzerindeki kareye de eşitti; bu durumda DE üzerindeki kare DB üzerindeki kareye eşit olur; öyleyse DE eşittir DB.

Ama FE eşittir FB; bu durumda DE, EF kenarları DB, BF kenarlarına eşittir, ve FD bu üçgenlerin ortak tabanıdır; bu durumda DEF açısı DBF açısına eşit olur. **[I.8]**

Ama DEF açısı diktir; öyleyse DBF açısı da diktir.

Ve FB uzatıldığında çap olur; ve çapa ucunda dik açıyla çizilen doğru çembere değer; **[III.16, DS]**

öyleyse DB çembere değer.

Merkez AC üzerinde olsa bile aynı sonuç benzer şekilde kanıtlanabilir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

Kitap IV

1. Tanımlar

1 Karşılıklı olarak açıları bir diğer düzkenarlı şeklin kenarları üzerinde olan düzkenarlı şekle **düzkenarlı şekil içine çizilmiş** denir.

2 Benzer şekilde, karşılıklı olarak kenarları bir diğer şeklin açıları üzerinde olan şekle **şekil dışına çizilmiş** denir.

3 Her açısı bir çemberin çevresi üzerinde olan düzkenarlı şekle o **çemberin içine çizilmiş** denir.

4 Her kenarı bir çemberin çevresine değen düzkenarlı şekle o **çemberin dışına çizilmiş** denir.

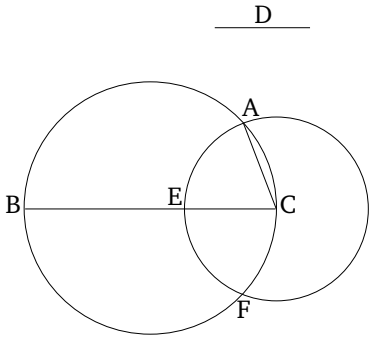
5 Benzer şekilde, çevresi bir şeklin her kenarına değen çembere **şekil içine çizilmiş** denir.

6 Çevresi bir şeklin her köşesinden geçen çembere **şekil dışına çizilmiş** denir.

7 Bir doğrunun uçları bir çember üzerindeyse o doğruya **çembere yerleştirildi** denir.

2. Önermeler

1. Önerme:
Verilen bir çembere çapından daha büyük olmayacak şekilde verilmiş bir doğru yerleştirmenin yolu.



ABC verilen çember olsun, ve D de çemberin çapından büyük olmayacak şekilde verilen doğru olsun; böylece ABC çemberi içine D doğrusuna eşit bir doğru yerleştirilmesi isteniyor.

ABC çemberinin bir BC çapı çizilsin.

O zaman, eğer BC, D'ye eşitse istenen yapılmış olacak; çünkü BC' ABC çemberine yerleştirilmiştir ve D'ye eşittir.

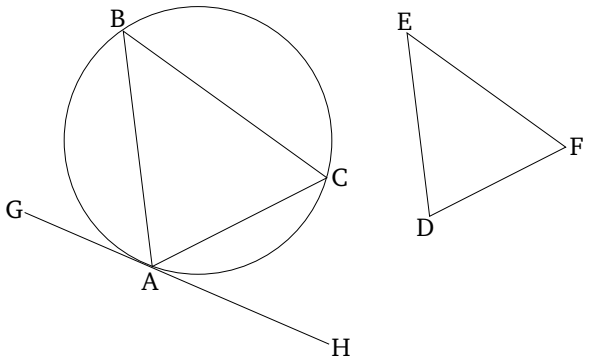
Ama eğer BC, D'den büyükse, CE, D'ye eşit yapılsın, ve C merkezi CE uzaklığıyla EAF çemberi çizilsin; CA birleştirilsin.

O zaman, C noktası EAF çemberi üzerinde olduğundan, CA eşittir CE.

Ama CE eşittir D; bu durumda D de CA'ya eşit olur.

Böylece verilen ABC çemberi içine D doğrusuna eşit CA doğrusu yerleştirilmiş oldu. QEF

2. Önerme:
Verilen bir çemberin içine verilen bir üçgenle eşaçılı bir üçgen çizmenin yolu.



ABC verilen çember, DEF de verilen üçgen olsun; böylece ABC çemberi içine DEF üçgeniyle eşaçılı bir üçgen çizilmesi isteniyor.

ABC çemberine A noktasında değen GH çizilsin; **[III.16, DS]**

AH doğrusu üzerine A noktasında DEF açısına eşit HAC açısı çizilsin, ve AG doğrusu üzerine A noktasında DFE açısına eşit GAB açısı çizilsin; **[I.23]**

BC birleştirilsin.

O zaman, AH doğrusu ABC çemberine değdiğinden, ve değme noktası A'dan çembere doğru AC doğrusu çizildiğinden, HAC açısı çemberin diğer tarafındaki parçasının içindeki ABC açısına eşittir. **[III.32]**

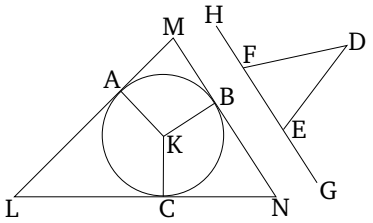
Ama HAC açısı DEF açısına eşittir; bu durumda ABC açısı da DEF açısına eşittir.

Aynı nedenden dolayı ACB açısı DEF açısına eşittir; bu durumda kalan BAC açısı kalan EDF açısına eşit olur. **[I.32]**

Böylece verilen çemberin içine verilen üçgenle eşaçılı bir üçgen çizilmiştir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

3. Önerme:
Verilen bir çemberin dışına verilen bir üçgenle eşaçılı bir üçgen çizmenin yolu.



ABC verilen çember, DEF de verilen üçgen olsun; böylece ABC çemberi dışına DEF üçgeniyle eşaçılı bir üçgen çizilmesi isteniyor.

EF her iki yönde G, H noktalarına kadar uzatılsın, ABC çemberinin merkeze K alınsın, **[III.1]**

ve KB doğrusu rastgele çizilsin; KB doğrusu üzerine ve K noktasında DEG açısına eşit BKA açısı, ve DFH açısına eşit BKC açısı çizilsin; **[I.23]**

ve A, B, C noktalarında ABC çemberine değen LAM, MBN, NCL doğruları çizilsin. **[III.16, DS]**

Şimdi, LM, MN, NL doğruları ABC çemberineA, B, C noktalarında değdiğinden, ve KA, KB, KC doğruları K merkezinden A, B, C'ye çizildiğinden, A, B, C'deki açılar diktir. **[III.18]**

Ve AMBK dörtgeninin dört açısı, AMBK'nin aslında iki üçgene ayrılabilmesinden dolayı, dört dik açıya eşittir, ve KAM, KBM açıları diktir, bu durumda kalan AKB, AMB açıları iki dik açıya eşittir.

Ama DEG, DEF açıları da iki dik açıya eşittir; **[I.13]**

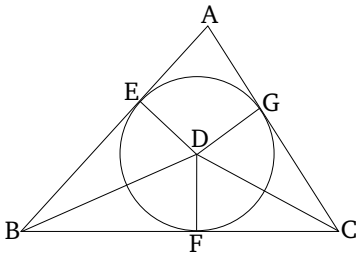
bu durumda AKB, AMB açıları DEG, DEF açılarına eşittir, ki bunlardan AKB, DEG'ye eşittir; öyleyse kalan AMB açısı kalan DEF açısına eşittir.

Benzer şekilde LMN açısının da DFE açısına eşit olduğu kanıtlanabilir; bu durumda kalan MLN açısı EDF açısına eşittir. **[I.32]**

Öyleyse LMN üçgeni DEF üçgeniyle eşaçılıdır, ve ABC üçgeni dışına çizilmiştir.

Böylece verilen bir çemberin dışına verilen bir üçgenle eiaçılı bir üçgen çizilmiştir. QEF

4. Önerme:
Verilen bir üçgenin içine bir çember çizmenin yolu.



ABC verilen üçgen olsun; böylece ABC üçgeni içine bir çember çizilmesi isteniyor.

ABC, ACB açıları BD, CD doğrularıyla ikiye bölünsün, **[I.9]**

ve bunlar birbiriyle D noktasında kesişsin; D noktasından AB, BC, CA doğrularına DE, DF, DG dik olarak çizilsin.

Şimdi, ABD açısı CBD açısına eşit olduğundan, ve BED dik açısı BFD dik açısına eşit olduğundan, EBD, FBD üçgenlerinin iki açıları iki açılarına eşit olduğundan ve bir kenar bir kenara eşit olduğundan, yani eşit açılardan birini gören ortak BD kenarı, kalan kenarları da kalan kenarlarına eşit olacaktır; **[I.26]**

bu durumda DE eşittir DF olur.

Aynı nedenle DG eşittir DF.

Öyleyse üç doğru DE, DF, DG birbirine eşittir; bu durumda D merkezi ve DE, DF, DG uzaklıklarından biriyle çizilen çember diğer noktalardan da geçecek, ve AB, BC, CA doğrularına değecektir, çünkü E, F, G'deki açılar diktir.

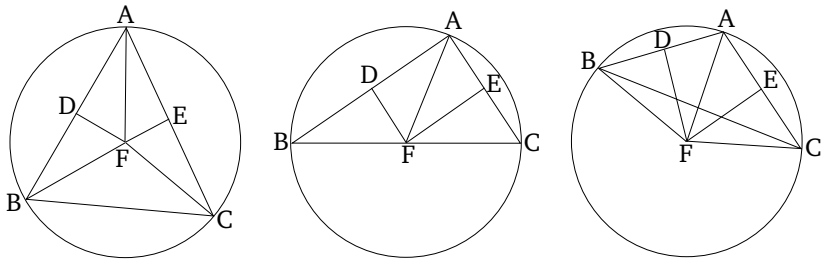
Çünkü eğer onları keserse, çapa ucundan dik olarak çizilen bir doğru çemberin içine düşecektir ki bunun saçma olduğu kanıtlanmıştı; **[III.16]**

bu durumda D merkezi ve DE, DF, DG uzaklıklarından biriyle çizilen çember AB, BC, CA doğrularını kesmeyecektir.; öyleyse onlara değecektir, ve ABC üçgeninin içine çizilen çember olacaktır. **[Tan. IV.5]**

FGE olarak çizilmiş olsun.

Öyleyse ABC üçgeni içine EFG çemberi çizilmiştir. QEF

5. Önerme:
Verilen bir üçgenin dışına bir çember çizmenin yolu.



ABC verilen üçgen olsun; böylece ABC üçgeni dışına bir çember çizilmesi isteniyor.

AB, AC doğruları D, E noktalarında ikiye bölünsünler, **[I.10]**

ve D, E noktalarından AB, AC doğrularına dik açıyla DF, EF doğruları çizilsin; o zaman bunlar ya ABC üçgeninin içinde, ya BC doğrusu üzerinde, ya da BC'nin dışında kesişecek.

Önce içerde F'de kesişsinler, ve FB, FC, FA birleştirilsin.

O zaman, AD eşittir DB olduğundan, ve DF ortak ve dik açılı olduğundan, AF tabanı FB tabanına eşit olur. **[I.4]**

Benzer şeklide CF eşittir AF olduğunu kanıtlayabiliriz; böylece FB doğrusu FC'ye de eşittir; bu durumda üç doğru FA, FB, FC birbirine eşittir.

Böylece F merkezi ve FA, FB, FC uzaklıklarından biriyle çizilen çember diğer noktalardan da geçecek ve çember ABC üçgeninin dışına çizilmiş olacaktır.

ABC olarak dışa çizilmiş olsun.

Sonra, DF, DE ikinci şekilde olduğu gibi, BC doğrusu üzerinde F'de kesişsin, ve AF birleştirilsin.

O zaman benzer şekilde ABC dışına çizilen çemberin merkezinin F olduğunu kanıtlayacağız.

Yine, DF, EF üçüncü şekilde olduğu gibi, ABC üçgeni dışında F'de kesişsin, ve AF, BF, CF birleştirilsin.

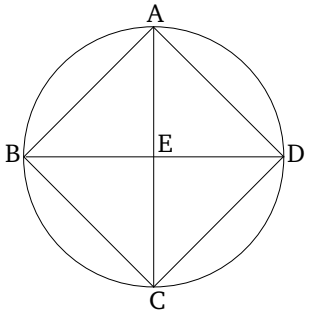
O zaman yine AD eşittir DB olduğundan, ve DF ortak ve dik açılı olduğundan, AF tabanı BF tabanına eşit olur. **[I.4]**

Benzer şeklide CF'nin AF'ye de eşit olduğunu kanıtlayabiliriz; böylece BF, FC'ye de eşit olur; bu durumda F merkezi ve FA, FB, FC uzaklıklarından biriyle çizilen çember kalan noktalardan da geçecek ve ABC üçgeninin dışına çizilmiş olacaktır.

Böylece verilen bir üçgenin dışına bir çember çizilmiştir. QEF

Şurası apaçıktır ki, çemberin merkezi üçgenin içine düşerse, BAC açısıyarıçemberden daha büyük birparçanın içinde olduğundan bir dik açıdan küçüktür; merkez BC doğrusu üzerine düştüğünde, BAC açısı bir yarıçember içinde olduğundan diktir; ve merkez üçgenin dışına düştüğünde, BAC açısı yarıçemberden daha küçük bir parçanın içinde olduğundan bir dik açıdan büyüktür.

6. Önerme:
Verilen bir çemberin içine bir kare çizmenin yolu.



ABCD verilen çember olsun; böylece ABCD çemberinin içine bir kare çizilmesi isteniyor.

ABCD çemberinin iki çapı AC, BD birbirine dik açıyla çizilsin, ve AB, BC, CD, DA birleştirilsin.

O zman, BE eşittir ED olduğundan, çünkü E merkezdir, ve EA ortak ve dik açılı olduğundan, AB tabanı AD tabanına eşittir. **[I.4]**

Aynı nedenden BC, CD doğrularının her biri AB, AD doğrularının her birine eşittir; bu durumda ABCD dörtgeni eşkenarlıdır.

Sonra diyorum ki dik açılıdır da.

Çünkü, BD doğrusu ABCD çemberinin çapı olduğundan, BAD yarıçemberdir; bu durumda BAD açısı dik olur. **[III.31]**

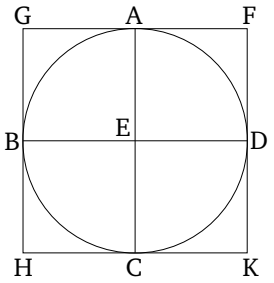
Aynı nedenden dolayı ABC, BCD, CDA açılarının her biri diktir; bu durumda ABCD dörtgeni dik açılıdır.

Ama eşkenarlı olduğu da kanıtlanmıştı; bu durumda kare olur; **[Tan. I.22]**

ve ABCD çemberinin içine çizilmiştir.

Böylece verilen çemberin içine ABCD kaersi çizilmiştir. QEF

7. Önerme:
Verilen bir çemberin dışına bir kare çizmenin yolu.



ABCD verilen çember olsun; böylece ABCD çemberinin dışına bir kare çizilmesi isteniyor.

ABCD çemberinin iki çapı AC, BD birbirine dik açıyla çizilsin, ve A, B, C, D noktalarından ABCD çemberine değen FG, GH, HK, KF çizilsin. **[III.16, DS]**

O zman, FG, ABCD çemberine değdiğinden, ve EA merkez E'den değme noktası A'ya çizildiğinden, A'daki açılar diktir. **[III.18]**

Aynı nedenden dolayı B, C, D'deki açılar da diktir.

Şimdi, AEB açısı dik olduğundan, ve EBG açısı da dik olduğundan, GH, AC'ye paraleldir. **[I.28]**

Aynı nedenden dolayı AC, FK'ye de paraleldir; öyleyse GH, FK'ye de paraleldir. **[I.32]**

Benzer şekilde GF, HK doğrularının her birinin BED'ye paralel olduğunu kanıtlayabiliriz.

Öyleyse GK, GC, AK, FB, BK paralelkenardır; bu durumda GF eşittir HK, ve GH eşittir FK olur. **[I.34]**

Ve AC eşittir BD olduğundan, ve BD doğrusu GF, HK doğrularının her birine eşit olurken, AC de GH, FK doğrularının her birine eşit olduğundan, **[I.34]**

FGHK dörtgeni eşkenarlıdır.

Sonra diyorum ki dik açılıdır da.

GBEA bir paralelkenar olduğundan ve AEB açısı dik olduğundan, AGB açısı da diktir. **[I.34]**

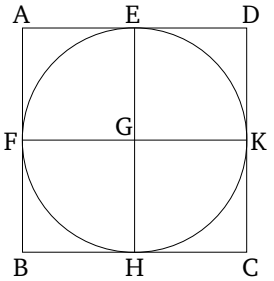
Benzer şekilde H, K, F'deki açıların da dik olduğunu kanıtlayabiliriz.

Bu durumda FGHK dik açılı olur.

Ama eşkenarlı olduğu da kanıtlanmıştı; bu durumda kare olur; ve ABCD çemberinin dışına çizilmiştir.

Öyleyse verilen bir çemberin dışına bir kare çizilmiştir. QEF

8. Önerme:
Verilen bir karenin içine bir çember çizmenin yolu.



ABCD verilen kare olsun; böylece ABCD karesinin içine bir çember çizilmesi isteniyor.

AD, AB doğruları sırasıyla E, F noktalarında ikiye bölünsün, **[I.10]**

E'den AB ya da CD'ye paralel EH çizilsin, ve F'den AD ya da BC'ye paralel FK çizilsi; **[I.31]**

bu durumda AK, KB, AH, HD, AG, GC, BG, GD şekillerinin her biri bir paralelkenardır, ve karşı kenarları besbelli eşittir. **[I.34]**

Şİmdi, AD eşittir AB olduğundan, ve AE, AD,nin yarısı, ve AF de AB'nin yarısı olduğundan, AE eşittir AF olur, böylece karşılarındaki kenarlar da eşit olur; bu durumda FG eşittir GE.

Benzer şekilde GH, GK doğrularının her biri FG, GE doğrularının her birine eşittir; bu durumda dört doğru GE, GF, GH, GK birbirine eşittir.

Öyleyse G merkezi ve GE, GF, GH, GK uzaklıklarından biriyle çizilen çember kalan noktalardan da geçecektir.

Ve AB, BC, CD, DA doğrularına değecektir, çünkü E, F, H, K'deki açılar diktir.

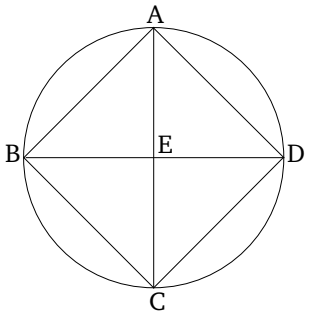
Çünkü eğer çember AB, BC, CD, DA doğrularını keserse, çemberin çapına ucundan çizilen doğru çemberin içine düşecektir ki bunun saçma olduğu kanıtlanmıştı; **[III.16]**

bu durumda G merkezi ve GE, GF, GH, GK uzaklıklarından biriyle çizilen çember AB, BC, CD, DA doğrularını kesmeyecektir.

Öyleyse onlara değecektir ve ABCD karesinin içine çizilmiş olacaktır.

Böylece verilen karenin içine bir çember çizilmiştir. QEF

9. Önerme:
Verilen bir karenin dışına bir çember çizmenin yolu.



ABCD verilen kare olsun; böylece ABCD karesinin dışına bir çember çizilmesi isteniyor.

AC, BC birleştirilsin ve birbirine E'de kessin.

O zaman, DA eşittir AB olduğundan, ve AC ortak olduğundan, DA, AC kenarları BA, AC kenarlarına eşit olur; ve DC tabanı BC tabanına eşittir; bu durumda DAC açısı BAC açısına eşit olur. **[I.8]**

Öyleyse DAC açısı AC tarafından ikiye bölünmüştür.

Benzer şekilde ABC, BCD, CDA açılarının her birinin AC, DB doğruları tarafından ikiye bölündüğünü kanıtlayabiliriz.

Şimdi, DAB açısı ABC açısına eşit olduğunda, ve EAB açısı DAB açısının yarısı olduğundan, ve EBA açısı ABC açısının yarısı olduğundan, EAB açısı EBA açısına da eşittir; böylece EA kenarı da EB kenarına eşit olur. **[I.6]**

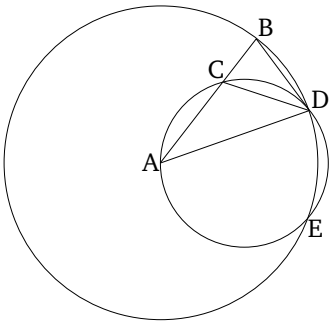
Benzer şekilde EA, EB doğrularının her birinin EC, ED doğrularının her birine eşit olduğunu kanıtlayabiliriz.

Bu durumda EA, EB, EC, ED doğruları birbirine eşittir.

Öyleyse E merkezi ve EA, EB, EC, ED uzaklıklarından biriyle çizilen çember kalan noktalardan geçecektir; ve ABCD çemberinin dışına çizilmiş olacaktır.

Böylece verilen karenin dışına bir çember çizilmiştir. QEF

10. Önerme:
Taban açılarının her biri kalan açısının iki katı olan bir ikizkenar üçgen çizmenin yolu.



Bir AB doğrusu çizilsin ve C noktasında öyle kesilsin ki AB, BC tarafından içerilen dikdörtgen CA üzerindeki kareye eşit olsun; **[II.11]**

A merkezi ve AB uzaklığıyla BDE çemberi çizilsin, ve BDE çemberinin içine BDE çemberinin çapından büyük olmayan AC doğrusuna eşit BD doğrusu yerleştirilsin. **[IV.1]**

AD, DC birleştirilsin, ve ACD üçgeni dışına ACD çemberi çizilsin. **[IV.5]**

O zaman, AB, BC dikdörtgeni AC üzerindeki kareye eşit olduğundan, ve AC eşittir BD olduğundan, AB, BC dikdörtgeni BD üzerindeki kareye eşittir.

Ve, ACD çemberi dışında bir B noktası alındığından, ve B'den ACD üzerine, biri onu kesen bir de üzerine düşen iki doğru BA, BD çizildiğinden, ve AB, BC dikdörtgeni BD üzerindeki kareye eşit olduğundan, BD doğrusu ACD çemberine değer. **[III.37]**

O zaman, BDC açısı DAC açısına eşit olduğundan, bunlara CDA açısı eklensin; bu durumda BDA açısının tamamı CDA, DAC açılarına eşittir.

Ama BCD dış açısı CDA, DAC açılarına eşittir; bu durumda BDA açısı BCD açısına eşit olur.

Ama AD kenarı AB kenarına eşit olduğundan BDA açısı CBD eşittir; **[I.5]**

böylece DBA açısı BCD açısına da eşit olur.

Bu durumda üç açı BDA, DBA, BCD birbirine eşit olur.

Ve DBC açısı BCD açısına eşit olduğundan BD kenarı da DC kenarına eşittir. **[I.6]**

Ama BD baştan CA'ya eşit alınmıştı; bu durumda CA eşittir CD olur, böylece CDA açısı da DAC açısına eşit olur; **[I.5]**

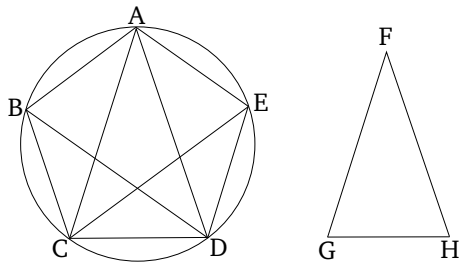
bu durumda CDA, DAC açıları DAC açısının iki katıdır.

Ama BCD açısı CDA, DAC açılarına eşittir; bu durumda BCD açısı CAD açısının da iki katıdır.

Ama BCD açısı BDA, DBA açılarının her birine eşittir; bu durumda BDA, DBA açılarının her biri de DAB açısının iki katıdır.

Böylece tabandaki açılarının her biri kalan açının iki katı olan ABD ikizkenar üçgeni çizilmiştir. QEF

11. Önerme:
Verilen bir çemberin içine eşkenarlı ve eşaçılı bir beşgen çizmenin yolu.



ABCDE verilen çember olsun; böylece ABCDE çemberi içine eşkenarlı ve eşaçılı bie beşgen çizilmesi isteniyor.

G, H'deki her bir açısı F'deki açısının iki katı olan FGH ikizkenar üçgen ile başlansın; **[IV.10]**

ABCDE çemberi içine FGH üçgeniyle eşaçılı ACD üçgeni çizilsin, öyle ki CAD açısı F'deki açıya, ve G, H'deki açılar sırasıyla ACD, CDA açılarına eşit olsun; **[IV.2]**

bu durumda ACD, CDA açılarının her biri de CAD açısının iki katı olur.

Şimdi ACD, CDA açıları sırasıyla CE, DB doğruları tarafından ikiye bölünsünler, **[I.9]**

ve AB, BC, DE, EA birleştirilsin.

O zaman, ACD, CDA açılarının her biri CAD açısının iki katı olduğundan, ve CE, DB doğruları tarafından ikiye bölündüklerinden, beş açı DAC, ACE, ECD, CDB, BDA birbirine eşittir.

Ama eşit açılar eşit çevreleri görürler; **[III.26]**

bu durumda beş çevre AB, BC, CD, DE, EA birbirine eşittir.

Ama eşit çevreler eşit doğrular tarafından görülürler; **[III.29]**

bu durumda beş doğru AB, BC, CD, DE, EA birbirine eşit olur; öyleyse ABCDE beşgeni eşkenarlıdır.

Sonra diyorum ki eşaçılıdır da.

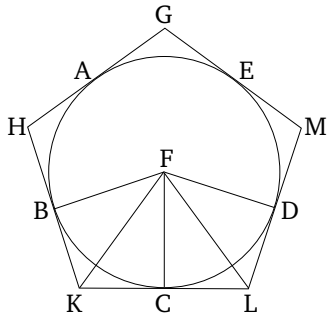
Çünkü, AB çevresi DE çevresine eşit olduğundan, bunlara BCD eklensin; bu durumda ABCD çevresinin tamamı EDCB çevresinin tamamına eşit olur.

Ve AED açısı ABCD çevresini görür, BAE açısı EDCB çevresini görür; bu durumda BAE açısı AED açısına eşit olur. **[III.27]**

Aynı nedenden dolayı ABC, BCD, CDE açılarının her biri BAE, AED açılarının her birine eşittir; öyleyse ABCDE beşgeni eşaçılıdır.

Amam eşkenarlı olduğu da kanıtlanmıştı; böylece verilen çemberin içine eşkenarlı ve eşaçılı bir beşgen çizilmiş oldu. QEF

12. Önerme:
Verilen bir çemberin dışına eşkenarlı ve eşaçılı bir beşgen çizmenin yolu.



ABCDE verilen çember olsun; böylece ABCDE çemberi dışına eşkenarlı ve eşaçılı bir beşgen çizilmesi isteniyor.

A, B, C, D, E noktaları içeri çizilmiş bir beşgenin köşeleri olarak tasarlansın öyle ki AB, BC, CD, DE, EA çevreleri eşit olsun; **[IV.11]**

A, B, C, D, E noktalarından çembere değen GH, HK, KL, LM, MG çizilsin; **[III.16, DS]**

ABCDE çemberinin F merkezi alınsın **[III.1]**

ve FB, FK, FC, FL, FD birleştirilsin.

O zaman, KL doğrusu ABCDE çemberine C'de değdiğinden, ve FC merkez F'den değme noktası C'ye çizildiğinden, FC doğrusu KL'ye diktir; **[III.18]**

bu durumda C'deki açıların her biri dik olur.

Aynı nedenden dolayı B, D'deki açılar diktir.

Ve, FCK açısı dik olduğundan, FK üzerindeki kare FC, CK üzerindeki karelere eşittir.

Aynı nedenden dolayı **[I.47]**

FK üzerindeki kare FB, BK üzerindeki karelere de eşittir; öyleyse FC, CK üzerindeki kareler FB, BK üzerindeki karelere eşittir, ki bunlardan FC üzerindeki kare FB üzerindeki kareye eşittir; bu durumda kalan CK üzerindeki kare BK üzerindeki kareye eşit olur.

Öyleyse BK eşittir CK.

Ve, FB eşittir FC olduğundan, ve FK ortak olduğundan, BF, FK kenarları CF, FK kenarlarına eşit ve BK tabanı CK tabanına eşittir; bu durumda BFK açısı KFC açısına eşit olur **[I.8]**

, ve BKF açısı FKC açısına.

Öyleyse BFC açısı KFC açısının, ve BKC açısı FKC açısının iki katıdır.

Aynı nedenden dolayı, CFD açısı da CFL açısının, ve DLC açısı FLC açısının iki katıdır.

Şimdi, BC çevresi CD'ye eşit olduğundan, BFC açısı da CFD açısına eşittir. **[III.27]**

Ve BFC açısı KFC açısının, ve DFC açısı LFC açısının iki katı olduğundan, KFC açısı da LFC açısına eşittir.

Ama FCK açısı da FCL açısına eşittir; öyleyse FKC, FLC üçgenlerinde iki açı iki açıya, ve bir kenar bir kenara, yani ortak olan FC, eşit olur; bu durumda kalan kenarları kalan kenarlarına ve kalan açı kalan açıya eşit olur; **[I.26]**

öyleyse KC doğrusu CL doğrusuna eşittir, ve FKC açısı FLC açısna eşittir.

Ve KC, CL'ye eşit olduğundan KL, KC'nin iki katıdır.

Aynı nedenden dolayı HK'nin de BK'nin iki katı olduğu kanıtlanabilir.

Ve BK eşittir KL; öyleyse HK eşittir KL olur.

Benzer şekilde HG, GM, ML doğrularının her birinin HK, KL doğrularının her birine eşit olduğu kanıtlanabilir; öyleyse GHKLM beşgeni eşkenarlıdır.

Sonra diyorum ki eşaçılıdır da.

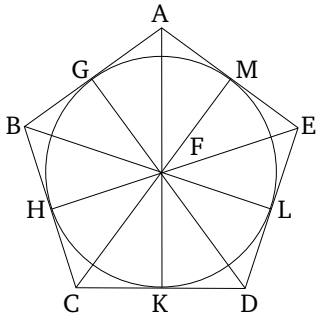
Çünkü FKC açısı FLC açısına eşit olduğundan, ve HKL açısının FKC açısının iki katı ve KLM açısının FLC açısının iki katı olduğu kanıtlandığından, HKL açısı da KLM açısına eşittir.

Benzer şekilde KHG, HGM, GML açılarının her birinin HKL, KLM açılarının her birine eşit olduğu kanıtlanabilir; bu durumda beş açı GHK, HKL, KLM, LMG, MGH birbirine eşittir.

Öyleyse GHKLM beşgeni eşaçılıdır.

Ve eşkenarlı olduğu da kanıtlanmıştı; ve ABCDE çemberi dışına çizilmiştir. QEF

13. Önerme:
Verilen eşkenarlı ve eşaçılı bir beşgenin içine bir çember çizmenin yolu.



ABCDE verilen eşkenarlı ve eşaçılı beşgen olsun; böylece ABCDE beşgeni içine bir çember çizilmesi isteniyor.

BCD, CDE açıları sırasıyla CF, DF doğruları tarafından ikiye bölünsün; ve CF, DF doğrularının kesiştiği F noktasından FB, FA, FE çizilsin.

O zaman, BC eşittir CD, ve CF ortak olduğundan, BC, CF kenarları DC, CF kenarlarına eşit, ve BCF açısı DCF açısına eşittir; bu durumda BF tabanı DF tabanına, ve BCF üçgeni DCF üçgenine, ve kalan açılar kalan açılara, yani eşit kenarları gören açılar, eşit olur. **[I.4]**

Öyleyse CBF açısı CDF açısına eşittir.

Ve, CDE açısı CDF açısının iki katı olduğundan, ve CDE açısı ABC açısına eşit olduğundan, ve bu arada CDF açısı CBF açısına eşit olduğundan, CBA açısı da CBF açısının iki katıdır; bu durumda ABF açısı FBC açısına eşit olur; öyleyse ABC açısı BF doğrusu tarafından ikiye bölünmüş olur.

Benzer şekilde BAE, AED açılarının sırasıyla FA, FE doğrularıyla ikiye bölündüğü kanıtlanabilir.

Şimdi AB, BC, CD, DE, EA doğrularına F noktasından FG, FH, FK, FL, FM dikmeleri çizilsin.

O zaman, HCF açısı KCF açısına eşit olduğundan, ve FHC dik açısı FKC dik açısına eşit olduğundan, FHC, FKC üçgenlerinde iki açı iki açıya ve bir kenar bir kanara, yani ortak olan ve eşit açılardan birini gören FC kenarı, eşittir; bu durumda kalan kenarlar da kalan kenarlara eşit olur. **[I.26]**

öyleyse FH dikmesi FK dikmesine eşittir.

Benzer şekilde FL, FM, FG doğrularının her biri FH, FK doğrularının her birine eşittir; bu durumda beş doğru FL, FM, FG, FH, FK birbirine eşittir.

Öyleyse F merkezi ve FL, FM, FG, FH, FK uzaklıklarından biriyle çizilen çember kalan noktalardan da geçecektir; ve AB, BC, CD, DE, EA doğrularına değecektir, çünkü G, H, K, L, M'deki açılar diktir.

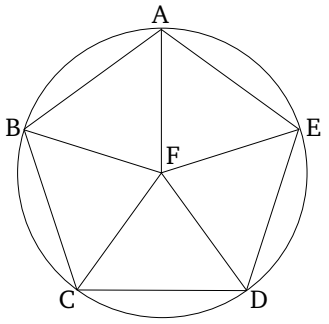
Çünkü, eğer onlara değmez ama keserse, çemberin çapının ucundan dik açıyla çizilen doğru çemberin içine düşecektir ki bunun saçma olduğu kanıtlanmıştı. **[III.16]**

Öyleyse F merkezi ve FG, FH, FK, FL, FM uzaklıklarından biriyle çizilen çember AB, BC, CD, DE, EA doğrularını kesmeyecektir; bu durumda onlara değecektir.

GHKLM olarak çizilmiş olsun;

Böylece verilen eşkenarlı ve eşaçılı beşgenin içine bir çember çizilmiş oldu. QEF

14. Önerme:
Verilen eşkenarlı ve eşaçılı bir beşgenin dışına bir çember çizmenin yolu.



ABCDE verilen eşkenarlı ve eşaçılı beşgen olsun; böylece ABCDE beşgeninin dışına bir çember çizilmesi isteniyor.

BCD, CDE açıları sırasıyla CF, DF doğrularıyla ikiye bölünsün, ve doğruların kesiştiği F noktasından B, A, E noktalarına FB, FA, FE doğruları çizilsin.

O zaman öncekinde olduğu biçimde CBA, BAE, AED açılarının sırasıyla FB, FA, FE doğrularıyla ikiye bölünmüş olduğu kanıtlanabilir;

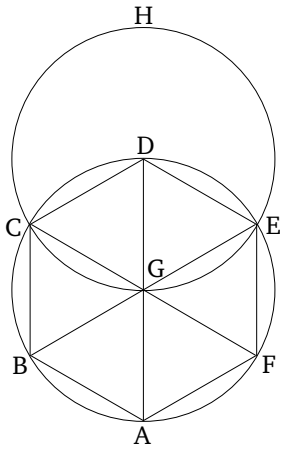
Şimdi, BCD açısı CDE açısına eşit olduğundan, ve FCD açısı BCD açısının, ve CDF açısı CDE açısının yarısı olduğundan, FCD açısı CDF açısına eşit olur; öyleyse FC kenarı FD kenarına eşittir. **[I.6]**

Benzer şekilde FB, FA, FE doğrularının her birinin FC, FD doğrularının her birine eşit olduğu kanıtlanabilir; bu durumda beş doğru FA, FB, FC, FD, FE birbirine eşittir.

Öyleyse F merkezi ve FA, FB, FC, FD, FE uzaklıklarından biriyle çizilen çember kalan noktalardan da geçecektir, ve dışa çizilmiş olacaktır.

Böylece verilen eşkenarlı ve eşaçılı bir beşgenin dışına bir çember çizilmiş oldu. QEF

15. Önerme:
Verilen bir çemberin içine eşkenarlı ve eşaçılı bir altıgen çizmenin yolu.



ABCDEF verilen çember olsun; böylece ABCDEF çemberi içine eşkenarlı ve eşaçılı bir altıgen çizilmesi isteniyor.

Çemberin AD çapı çizilsin; çemberin G merkezi alınsın, ve D merkezi ve DG uzaklığıyla EGCH çemberi çizilsin; EG, CG birleştirilsin ve B, F noktalarına kadar uzatılsın, ve AB, BC, CD, DE, EF, FA birleştirilsin.

Diyorum ki ABCDEF altıgeni eşkenarlı ve eşaçılıdır.

Çünkü, G noktası ABCDEF çemberinin merkezi olduğundan, GE eşittir GD olur.

Yine, D noktası GCH çemberinin merkezi olduğundan DE eşittir DG olur.

Ama GE'nin GD'ye eşit olduğu kanıtlanmıştı; bu durumda GE, ED'ye de eşittir; bu durumda EGD üçgeni aşkenardır; öyleyse üç açı EGD, GDE, DEG, ikizkenar üçgenlerde taban açıları birbirine eşit olduğundan, birbirine eşittir. **[I.5]**

Ve bir üçgenin üç açısı iki dik açıya eşittir; **[I.32]**

bu durumda EGD açısı iki dik açının üçte biridir.

Benzer şekilde DGC açısının da iki dik açının üçte biri olduğu kanıtlanabilir.

Ve EB üzerindeki CG doğrusu komşu EGC, CGB açılarını iki dik açıya eşit yaptığından, kalan CGB açısı da iki dik açının üçte biridir.

Öyleyse EGD, DGC, CGB açıları birbirine eşittir; öyleyse bunların ters açıları BGA, AGF, FGE eşittir. **[I.15]**

Öyleyse altı açı EGD, DGC, CGB, BGA, AGF, FGE birbirine eşittir.

Ama eşit açılar eşit çevreleri görürler; **[III.26]**

bu durumda altı çevre AB, BC, CD, DE, EF, FA birbirine eşittir.

Ve eşit çevreler eşit doğruların karşısında bulunur; **[III.29]**

bu durumda bu altı doğru birbirine eşittir; öyleyse ABCDEF altıgeni eşkenarlıdır.

Sonra diyorum ki eşaçılıdır sa.

Çünkü, FA çevresi ED çevresine eşit olduğundan, bunlara ABCD çevresi eklensin; bu durumda FABCD'nin tamamı EDCBA'nın tamamına eşittir; ve FED açısı FABCD çevresini görür, AFE açısı EDCBA çevresini görür; bu durumda AFE açısı DEF açısına eşit olur. **[III.27]**

Benzer şekilde ABCDEF altıgeninin diğer açılarının da ayrı ayrı AFE, FED açılarının her birine eşit olduğu kanıtlanabilir; öyleyse ABCDEF altıgeni eşaçılıdır.

Ama eşkenarlı olduğu da kanıtlanmıştı; ve ABCDEF çemberinin içine çizilmişti.

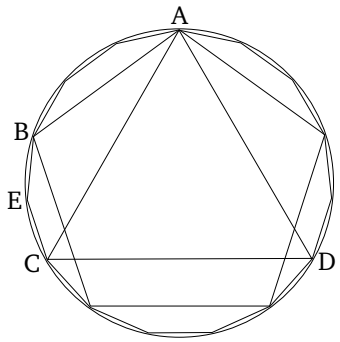
Böylece verilen bir çemberin içine eşkenarlı ve eşaçılı altıgen çizilmiş oldu. QEF

Doğal Sonuç: Buradan açıkça görülür ki bu altıgenin kenarı çemberin yarıçapına eşittir.

Ve beşgen durumunda olduğu gibi, çemberin üzerindeki bölüm noktalarından çembere teğetler çizersek çemberin dışına, beşgen durumunda açıklandığı gibi, eşkenarlı ve eşaçılı bir altıgen çizilmiş olur.

Ve yine beşgen durumundaki açıklamalardakine benzer yollarla bir beşgenin içine ve dışına altıgen çizebiliriz.

16. Önerme:
Verilen bir çemberin içine, hem eşkenar hem de eşaçılı olacak onbeş-açılı bir şekil çizmenin yolu.



ABCD verilen çember olsun; böylece ABCD çemberinin içine hem eşkenarlı hem de eşaçılı olacak şekilde bir onbeş-kenarlı şekil çizilmesi isteniyor.

ABCD çemberine, çember içine çizilen eşkenar üçgenin bir kenarı AC, ve çember içine çizilen eşkenar beşgenin bir kenarı AB çizilsin; ABCD çemberinde oluşacak onbeş eşit parçanın beşi, çemberin üçte biri olan ABC çevresinde olacak, ve üçü çemberin beşte biri olan AB çevresinde olacak; bu durumda kalan BC çevresinde eşit parçalardan ikisi bulunacak.

BC çevresi E'de ikiye bölünsün; **[III.30]**

bu durumda BE, EC çevrelerinden her biri ABCD çemberinin onbeşte biri olur.

Eğer BE, EC'yi birleştiri ve ABCD çemberine bunlara eşit doğruları bitişik olarak sığdırırsak, çemberin içine hem eşkenarlı hem de eşaçılı onbeş kenarlı bir şekil çizilmiş olur. QEF

Ve, beşgende olduğu gibi, eğer çemberdeki bölüm noktalarından çembere teğetler çizersek, çember dışına onbeş açılı hem eşkenarlı hem de eşaçılı bir şekil çizlmiş olacak.

Ayrıca, beşgen durumundaki kanıtlara benzer kanıtlarla, verilen onbeş kenarlı şeklin hem içine hem de dışına çember çizebiliriz. QEF

Kitap V

1. Tanımlar

*[Oranları söz konusu olan şeylerin her biri için **nicelik** terimini kullanacağız.*

"a niceliğinin b niceliğine oranı" anlamında $\frac{a}{b}$ gösterimini kullanacağız.

Yapılan açıklamalar, tanım ve önermelerdeki cümlelerin yalnızca okunmasına yardımcı olmayı amaçlamaktadır.]

1: Küçük nicelik büyük niceliği ölçüyorsa, küçük niceliğe büyük niceliğin **parçası** denir.

[Eğer $a > b$ olacak şekilde iki nicelik verildiğinde $a = mb$ şartını sağlayan bir m tamsayısı varsa b niceliği a niceliğinin parçasıdır.

Burada ve bundan sonra tüm nicelikler ve özellikle tam sayılar sıfırdan büyük olarak düşünülecek.]

2: Büyük nicelik küçük nicelik tarafından ölçülüyorsa, büyük niceliğe küçük niceliğin **katı** denir.

[Yukardaki gibi $a = mb$ ise, a niceliği b nin katıdır.]

3: Aynı türden niceliklerin büyüklükleri arasındaki ilişkiye **oran** denir.

4: Eğer iki nicelikten her birinin bir katı öbürünü geçebiliyorsa bu iki nicelik arasında bir **oran var** denir.

[Eğer $an > b$ ve $bm > a$ olacak şekilde m ve n tamsayıları varsa, a ve b arasında bir oran var denir.]

5: Nicelikler, eğer birinciyle üçüncünün herhangi eşit katları ikinciyle dördüncünün herhangi eşit katlarından sırasıyla aynı anda büyük, aynı anda eşit ya da aynı anda küçük olursa, **aynı orandadır** denir, yani birinci ikinciye ve üçüncü dördüncüye.

[a, b, c, d nicelikleri verildiğinde eğer her m, n tamsayıları için aşağıdaki üç durumdan mutlaka biri gerçekleşiyorsa
1) $ma > nb$ *ve* $mc > nd$,
2) $ma = nb$ *ve* $mc = nd$,
3) $ma < nb$ *ve* $mc < nd$;
bu durumda $a : b :: c : d$, *yani* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *deriz.]*

6: Aynı orandaki niceliklere **orantılı** denir.

7: Eşit katlar alındığında, birincinin katı ikincinin katını aştığında üçüncünün katı dördüncünün katını aşmıyorsa, birincinin ikinciye **oranı** için, üçüncünün dördüncüye oranından **daha büyüktür** denir.

[Eğer $ma > nb$ *olduğunda* $mc \leqslant nd$ *oluyorsa, o zaman* $\frac{a}{b} > \frac{n}{m} \geqslant \frac{c}{d}$ *olur. Dikkatli okuyucu farkedecektir ki eğer* $ma = nb$ *olduğunda* $mc < nd$ *oluyorsa, o zaman yine* $\frac{a}{b} = \frac{n}{m} > \frac{c}{d}$ *olur. Öklid bu sonucun önermelerden çıkarılmasını beklemiştir.]*

8: **Sürekli orantı** en az üç nicelik arasında olur.

[Eğer $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ *ise,* a, b, c *niceliklerine sürekli orantılı denir.*
Daha çok sayıdaki nicelik için, eğer $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \cdots = \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}}{a_n}$ *ise,* $a_1, \ldots, a_n$ *nicelikleri sürekli orantılıdır denir.*

Eğer $a_0, \ldots, a_n$ *nicelikleri sürekli orantılıysa ve* $a_0 = 1$, $a_1 = r$ *ise* $a_n = r^n$ *olur. Öklid'in sürekli orantılı nicelikleri geometrik dizi oluşturur.]*

9: Üç nicelik sürekli orantılıysa, birincinin üçüncüye oranı için birincinin ikinciye oranının **çift oranı** denir.

[$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ *ise* $\frac{a}{c} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ *olur. Oranlar çarpılmayan kavramlar olarak düşünüldüğü için söz konusu orana diğerinin karesi demek bu yaklaşımın ruhuna aykırıdır.]*

10: Ve dört nicelik sürekli orantılıysa, birincinin dördüncüye oranı için birincinin ikinciye oranının **üç kat oranı** denir. Daha çok sayıda nicelik sürekli orantılı olduğunda birincinin sonuncuya oranı için birincinin ikinciye oranının belli bir **çok kat oranı** olduğu söylenir.

[$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ *ise* $\frac{a}{d} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$ *olur.*
Ve eğer $a_1, \ldots, a_n$ *sürekli orantılıysa* $\frac{a_1}{a_n} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{n-1}$ *olur.]*

11: Öncüller öncüllere, ardıllar da ardıllara **karşılık gelen** nicelikler-dir.

[Bir niceliğin bir diğer niceliğe oranı düşünüldüğünde ilk niceliğe ***öncül****, ikinci niceliğe* ***ardıl*** *denir.*

$\frac{a}{b}$ *ve* $\frac{c}{d}$ *verildiğinde* a *ve* c*'ye öncül,* b *ve* d*'ye ardıl denir.* a *ve* c *öncülleri birbirine karşılık gelir,* b *ve* d *ardılları birbirine karşılık gelir.]*

12: Öncüllerin öncüllere, ardılların ardıllara oranına **değiştirilmiş oranı** denir.

[Eğer $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *ise* $\frac{a}{c}$ *ve* $\frac{b}{d}$ *oranları değiştirilmiş oranlar olarak tanımlanır. 16. önermede bu oranların eşit olduğu gösterilecek.]*

13: Ardılın öncüle oranına **ters oran** denir.

[$\frac{a}{b}$ *nin ters oranı* $\frac{b}{a}$ *dır.]*

14: Bir oranın **birleşik oranı** diye öncülle ardılının toplamının ardıla oranına denir.

[$\frac{a}{b}$ *nin birleşik oranı* $\frac{a+b}{b}$ *dir.]*

15: Bir oranın **ayrışık oranı** diye öncülün ardılı aşan niceliğinin ardıla oranına denir.

[$\frac{a}{b}$ *nin ayrışık oranı* $\frac{a-b}{b}$ *dir. Bu gibi durumlarda daima* $a-b > 0$ *olacağını düşünmemiz beklenir.]*

16: Bir oranın **çevrilmiş oranı** diye öncülün, öncülün ardılı aşan niceliğine oranına denir.

[$\frac{a}{b}$ *nin çevrilmiş oranı* $\frac{a}{a-b}$ *dir.]*

17: Verilen bir miktar niceliğin ikişer ikişer alınan oranları aynı sayıdaki başka niceliklerin ikişer ikişer alınan oranlarına sırasıyla eşit olduğu durumda eğer ilk gruptaki niceliklerin birinci niceliğinin sonuncu niceliğine oranı ikinci gruptaki niceliklerin ilk niceliğinin son niceliğine oranına eşitse, **eşit dış oran** oluştu denir. Bir başka deyişle, aradaki nicelikler atılarak uç nicelikler alınır.

[$a_1, \ldots, a_n$ ve aynı sayıda $b_1, \ldots, b_n$ nicelikleri verilmiş olsun ve $\frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{b_i}{b_{i+1}}$, $i = 1, \ldots, n-1$ şartı sağlansın. Bu durumda eğer $\frac{a_1}{a_n} = \frac{b_1}{b_n}$ ise, $a_1, \ldots, a_n$ ve $b_1, \ldots, b_n$ niceliklerine ***eşit dış oranlı*** *denir. Baştaki şartları taşıyan her iki nicelik topluluğunda eşit dış oranlar oluştuğu 22. önermede kanıtlanacak.]*

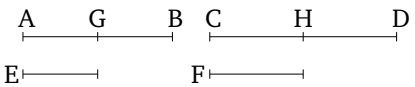
18: İki adet üçer nicelik verildiğinde birinci gruptaki öncülün ardıla oranı ikincideki bir öncülün ardıla oranına eşitse ve birincideki ardılın üçüncü niceliğe oranı ikinci gruptaki üçüncü niceliğin öncüle oranına eşitse **kaydırılmış orantı** oluştu denir.

[a, b, c ve d, e, f niceliklerinin kaydırılmış orantısından söz ederken a ve e öncül, b ve f ardıl olarak düşünülür; ve eğer $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$ ve $\frac{b}{c} = \frac{d}{e}$ eşitlikleri varsa, kaydırılmış orantı oluştu denir. Kaydırılmış orantı oluşturan a, b, c nicelikleriyle d, e, f niceliklerinin eşit dış oranlı olduğu 23. önermede kanıtlanacak.]

2. Önermeler

1. Önerme:
Bir miktar niceliğin her biri, sayıca aynı başka niceliklerin her birinin aynı katıysa, ilk niceliklerin hepsi ikinci niceliklerin hepsinin aynı katı olur.

[$a_1 = nb_1, \ldots, a_k = nb_k$ ise $(a_1 + \cdots + a_k) = n(b_1 + \cdots + b_k)$ olur.]



Herhangi sayıdaki AB, CD nicelikleri aynı sayıdaki E, F niceliklerinin sırasıyla aynı katı olsun.

Diyorum ki AB, E'nin hangi katıysa AB, CD de E, F'nin aynı katıdır.

Çünkü CD, F'nin kaç katıysa AB de E'nin aynı katı olduğundan, AB'nin içindeki E'ye eşit niceliklerin sayısı CD'nin içinde F'ye eşit olanlarla aynıdır.

AB, E'ye eşit AG, GB niceliklerine bölünsün, ve CD de F'ye eşit CH, HD olarak bölünsün;

o zaman AG, GB niceliklerinin sayısı CH, HD niceliklerinin sayısına eşit olacaktır.

Şimdi AG eşittir E, ve CH eşittir F olduğundan, AG eşittir E, ve AG, CH eşittir E, F olur.

Aynı nedendan dolayı GB eşittir E, ve GB, HD eşittir E, F olur;

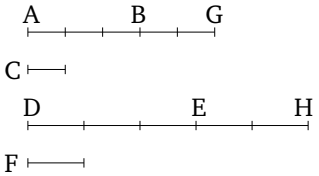
Öyleyse AB'de E ye eşit ne kadar nicelik varsa AB, CD'de E, F'ye eşit o kadar nicelik vardır.

Böylece AB, E'nin kaç katıysa AB, CD de E, F'nin aynı katı olacaktır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

2. Önerme:
Birinci nicelik ikinci niceliğin, üçüncü nicelik de dördüncü niceliğin aynı katı olduğunda eğer beşinci nicelik ikinci niceliğin, altıncı nicelik de dördüncü niceliğin aynı katı oluyorsa birinciyle beşinci niceliğin toplamı ikinci niceliğin, üçüncüyle altıncı niceliğin toplamı da dördüncü niceliğin aynı katı olur.

[$a_1 = ma_2$, $a_3 = ma_4$ *ve* $a_5 = na_2$, $a_6 = na_4$ *ise* $a_1 + a_5 = (m+n)a_2$ *ve* $a_3 + a_6 = (m+n)a_4$ *olur.]*



Birinci nicelik AB, ikinci nicelik C'nin kaç katıysa, üçüncü nicelik DE de dördüncü nicelik E'nin aynı katı olsun; ve beşinci BG, ikinci C'nin hangi katıysa altıncı EH de dördüncü F'nin aynı katı olsun.

Diyorum ki birinciyle beşincinin toplamı AG, ikinci C'nin kaç katıysa, üçüncüyle altıncının toplamı DH de dördüncü F'nin aynı katıdır.

Çünkü DE, F'nin kaç katıysa AB de C'nin aynı katı olduğundan, AB içinde C'ye eşit kaç tane nicelik varsa DE'nin içinde de F'ye eşit o kadar nicelik vardır.

Aynı nedenden dolayı BG'nin içinde kaç tane C'ye eşit nicelik varsa EH'nin içinde de o kadar F'ye eşit nicelik vardır; bu durumda AG'nin

tamamında kaç tane C'ye eşit parça varsa DH'nin tamamında da o kadar F'ye eşit parça vardır.

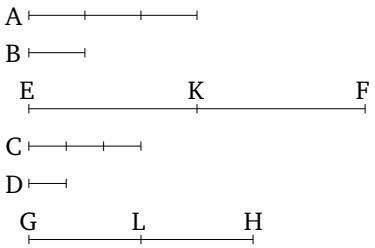
Öyleyse AG, C'nin kaç katıysa DH de F'nin o katıdır.

Böylece birinciyle beşincinin toplamı AG, ikinci C'nin kaç katıysa, üçüncüyle altıncının toplamı DH de F'nin o katıdır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

3. Önerme:
Birinci nicelik ikinci niceliğin, üçüncü nicelik de dördüncü niceliğin aynı katı olduğunda, birinci ve üçüncü niceliklerin aynı katı alınırsa bunlar sırasıyla ikinci ve dördüncü niceliklerin aynı katı olur.

[$a_1 = ma_2$ *ve* $a_3 = ma_4$ *ise* $na_1 = (nm)a_2$ *ve* $na_3 = (nm)a_4$ *olur.]*



Birinci nicelik A, ikinci nicelik B'nin kaç katıysa, üçüncü nicelik C, dördüncü nicelik D'nin aynı katı olsun, ve A, C'nin aynı katları olarak EF, GH alınsın.

Diyorum ki EF, B'nin kaç katıysa GH de C'nin aynı katıdır.

Çünkü, EF, A'nın kaç katıysa GH de C'nin aynı katı olduğundan, EF içinde A'ya eşit kaç nicelik varsa GH'nin içinde de C'ye eşit o kadar vardır.

EF niceliği A'ya eşit EK, KF niceliklerine bölünsün, ve GH de C'ye eşit GL, LH'ye bölünsün.

EK eşittir A, ve GL eşittir C, ve C, D'nin kaç katıysa A da B'nin aynı katı olduğundan, GL, D'nin kaç katıysa EK de B'nın aynı katıdır.

Aynı nedenden dolayı LH, D'nin kaç katıysa KF de B'nin aynı katıdır.

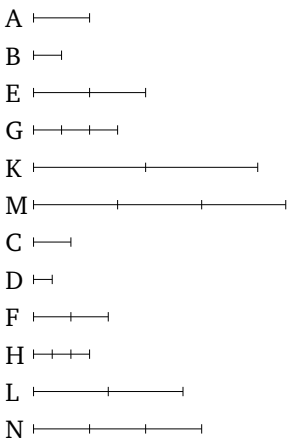
O zaman, birinci nicelik EK, ikinci nicelik B'nin kaç katıysa üçüncü nicelik GL, dördüncü nicelik D'nin aynı katı olduğundan, ve beşinci

nicelik KF ikinci nicelik B'nin kaç katıysa altıncı nicelik LH dördüncü nicelik D'nin aynı katı olduğundan, birinci ve beşincinin toplamı EF de ikinci B'nin kaç katıysa üçüncü ile altıncının toplamı GH de dördüncünün toplamı D'nin aynı katıdır. **[V.2]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

4. Önerme:
Birinci niceliğin ikinciye oranıyla üçüncünün dördüncüye oranı aynıysa, birinciyle üçüncünün herhangi bir katının ikinciyle dördüncünün herhangi bir katına oranı aynıdır.

$[\ \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4}$ *ise* $\frac{ma_1}{na_2} = \frac{ma_3}{na_4}$ *olur.* $]$



Birinci nicelik A'nın ikinci nicelik B'ye oranı, üçüncü nicelik C'nin dördüncü nicelik D'ye oranına eşit olsun; ve A, C'nin eşkatları E, F, ve B, D'nin rastgele eşkatları G, H alınsın.

Diyorum ki E'nin G'ye oranı, F'nin H'ye oranına eşittir.

E, F'nin eşkatları K, L alınsın, ve G, H'nin rastgele eşkatları M, N alınsın.

F, C'nin kaç katıysa, E de A'nın aynı katı olduğundan, ve E, F'nin eşkatları K, L alındığından, L, C'nin kaç katıysa K de A'nın aynı katı olur. **[V.3]**

Aynı nedenden dolayı N, D'nin kaç katıysa M de B'nin aynı katı olur.

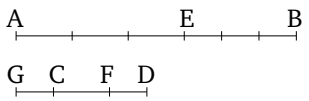
Ve A'nın B'ye oranı C'nin D'ye oranına eşit olduğundan, ve A, C'nin eşkatları M, N, ve B, D'nin başka rastgele eşkatları M, N alındığından, eğer K, L'den büyükse, L de N'den büyüktür, eşitse eşit, küçükse küçüktür. **[Tan. V.5]**

Ve K, L nicelikleri E, F'nin eşkatları, M, N de G, H'nin başka rastgele eşkatlardır; bu durumda E'nin G'ye oranı F'nin H'ye oranına eşit olur. **[Tan. V.5]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

5. Önerme:
Bir nicelik bir diğer niceliğin kaç katıysa, birinci nicelikten çıkarılan bir parça da ikinci nicelikten çıkarılan parçanın aynı katı oluyorsa, bu durumda birinci nicelikte kalan parça da ikinci nicelikte kalan parçanın aynı katıdır.

[$a_1 = ma_2$ *ve* $b_1 < a_1, b_2 < a_2$ *iken* $b_1 = mb_2$ *ise,* $a_1 - b_1 = m(a_2 - b_2)$ *olur.]*



Çıkarılan AE, çıkarılan CF'in kaç katıysa AB niceliği CD niceliğinin aynı katı olsun.

Diyorum ki AB'nin tamamı CD'nin tamamının kaç katıysa, kalan EB de kalan FD'nin aynı katıdır.

Çünkü, AE, CF'nin hangi katıysa, EB de CG'nin aynı katı alınsın.

O zaman, EB, GC'in hangi katıysa, AE de CF'nin aynı katı olduğundan, AB, GF'in hangi katıysa AE de CF'in aynı katı olur. **[V.1]**

Ama varsayıma göre AB, CD'nin hangi katıysa AE de CF'nin aynı katıdır. Öyleyse AB niceliği GF, CD niceliklerinin her birinin aynı katıdır; bu durumda GF eşittir CD olur.

Bunlardan CF çıkarılsın; bu durumda kalan GC, kalan FD'ye eşit olur.

Ve EB, GC'nin hangi katıysa AE de CF'in aynı katı olduğundan, ve GC eşittir DF olduğundan, EB, FD'nin hangi katıysa AE de CF'in aynı katı olur.

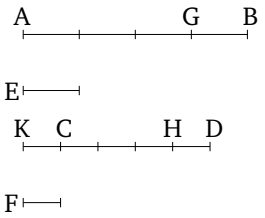
Ama varsayıma göre, AB, CD'nin hangi katıysa AE de CF'in aynı katıdır; bu durumda AB, CD'nin hangi katıysa EB de FD'nin aynı katı olur.

Öyleyse AB'nin tamamı CD'nin tamamının kaç katıysa, kalan EB de kalan FD'nin aynı katıdır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

6. Önerme:
İki nicelik diğer iki niceliğin eşit katlarıysa ve bunlardan o diğer iki niceliğin eşit katları çıkarılırsa kalanlar diğer iki niceliğe ya eşittir ya da onların eşit katıdır.

[Diğer nicelikler için $\mathfrak{a}$ *ve* $\mathfrak{b}$ *dersek verilen niceliklere de* $\mathfrak{ma}$ *ve* $\mathfrak{mb}$ *diyelim. Bu durumda* $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ *olacak şekilde iki tamsayı aldığımızda* $\mathfrak{ma} - \mathfrak{na} = (\mathfrak{m} - \mathfrak{n})\mathfrak{a}$ *ve* $\mathfrak{mb} - \mathfrak{nb} = (\mathfrak{m} - \mathfrak{n})\mathfrak{b}$ *olur. Eşitlik durumu* $\mathfrak{m} - \mathfrak{n} = 1$ *olduğunda geçerlidir.]*



AB, CD nicelikleri E, F niceliklerinin eşit katları olsun, ve onlardan çıkarılan AG, CH nicelikleri de aynı E, F niceliklerinin eşit katları olsun.

Diyorum ki kalan GB, HD nicelikleri ya E, F niceliklerine eşittir ya da onların eşit katlarıdır.

Çünkü, önce GB, E'ye eşit olsun; diyorum ki HD de F'ye eşit olur.

Çünkü, CK, F'ye eşit çizilsin; CH, F'nin hangi katıysa AG de E'nin aynı katı, ve GB eşittir E, ve KC eşittir F olduğundan, KH, F'nin hangi katıysa AB de E'nin aynı katı olur. **[V.2]**

Ama varsayıma göre CD, F'nin hangi katıysa AB de E'nin aynı katıdır; bu durumda CD, F'nin hangi katıysa KH de F'nin aynı katı olur.

KH, CD niceliklerinin her biri F'nin aynı katı olduğundan, KH eşittir CD olur.

Bunlardan CH çıkarılsın; bu durumda kalan KC kalan HD'ye eşit olur.

Ama F eşittir KC; bu durumda HD eşittir F olur.

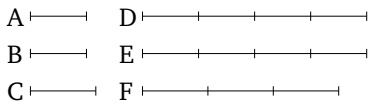
Bu yüzden, eğer GB eşittir E ise, HD de F'ye eşittir.

Benzer şekilde eğer GB, E'nin bir katı olsa bile, HD'nin de F'nin aynı katı olduğunu kanıtlayabiliriz.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

7. Önerme:
Eşit niceliklerin aynı niceliğe oranları eşittir. Ayrıca bir niceliğin eşit iki niceliğe oranları da eşittir.

[$a = b$ *ise* $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ *ve* $\frac{c}{a} = \frac{c}{b}$ *olur.]*



A, B eşit iki nicelik ve C rastgele başka bir nicelik olsun.

Diyorum ki, A, B'nin her birinin C'ye oranı aynıdır, ve C'nin A, B'nin her birine oranı aynıdır.

Çünkü, A, B'nin eşkatları D, E alınsın, ve C'nin rastgele bir katı F alınsın; o zaman, E, B'nin hangi katıysa D de A'nın aynı katı, ve A eşittir B olduğundan, D eşittir E olur. Ama F rastgele bir kattır.

Öyleyse, eğer D, F'den büyükse, E de F'den büyüktür, eşitse eşit, küçükse küçüktür.

Ve D, E nicelikleri A, B'nin eşkatları, F de C'nin rastgele bir katıdır; bu durumda A'nın C'ye oranı neyse B'nin C'ye oranı da aynıdır. **[Tan. V.5]**

Sonra diyorum ki C'nin de A, B niceliklerinin her birine oranı aynıdır.

Çünkü, aynı çizimi kullanarak D'nin E'ye eşit olduğunu kanıtlayabiliriz.

Ve F bir başka nicelik olsun. Öyleyse, eğer F, D'den büyükse, E'den de büyüktür, eşitse eşit, küçükse küçüktür.

Ve D, E nicelikleri A, B'nin rastgele katlarıyken F de C'nin katıdır; bu durumda C'nin A'ya oranıyla C'nin B'ye oranı aynıdır. **[Tan. V.5]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

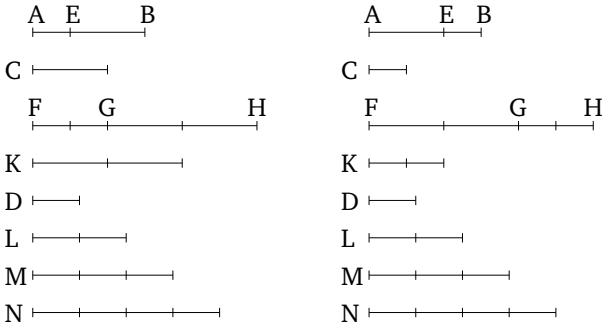
Doğal Sonuç:

Bundan açıkça görüldüğü gibi eşit oranlı niceliklerin ters oranları da eşittir.

[Bu sonuç, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *ise* $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ *olacağını söylüyor.]*

8. Önerme:
Eşit olmayan iki nicelikten büyüğünün bir niceliğe oranı küçük olanın o niceliğe oranından büyüktür; o niceliğin küçük niceliğe oranı büyüğe olan oranından büyüktür.

[$a > b$ *ise* $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ *ve* $\frac{c}{b} > \frac{c}{a}$ *olur.]*



AB, C eşit olmayan iki nicelik olsun, ve AB daha büyük olsun; D de rastgele başka bir nicelik olsun.

Diyorum ki AB'nin D'ye oranı C'nin D'ye oranından, ve D'nin C'ye oranı AB'ye oranından büyüktür.

Çünkü, AB, C'den büyük olduğundan, C'ye eşit BE alınsın;

o zaman AE, BE niceliklerinden küçük olanın katları alındığında bir ara D'den büyük olacaktır. **[Tan. V.4]**

Önce AE, EB'den küçük olsun;

AE'nin katları alınsın, ve D'yi geçen bir katı FG olsun;

sonra, FG, AE'nin hangi katıysa, GH de EB'nin aynı katı yapılsın, ve K de C'nin.

ve D'nin iki katı L alınsın, üç katı M, ta ki D'nin K'yi aşan ilk katına ulaşıncaya kadar; D'nin K'yi aşan ilk katı dört kat olsun ve N olsun.

O zaman K ilk kez N'den küçük olduğundan K, M'den küçük değildir.

Ve GH, EB'nin hangi katıysa FG de AE'nin aynı katı olduğundan, FH, AB'nin hangi katıysa FG de AE'nin aynı katı olur. **[V.1]**

Ama K, C'nin hangi katıysa FG de AE'nin aynı katıdır; bu durumda K, C'nin hangi katıysa FH de AB'nin aynı katı olur.

Öyleyse FH, K nicelikleri AB, C niceliklerinin aynı katlarıdır.

Yine, K, C'nin hangi katıysa GH, EB'nin, ve EB de C'nin aynı katı olduğundan GH eşittir C olur.

Ama K, M'den küçük değildir; öyleyse GH de M'den küçük değildir.

Ve FG, D'den büyüktür; bu durumda FH'nin tamamı D, M'nin toplamından büyüktür.

Ama N niceliği D'nin dört katıyken, M, D'nin üç katı ve M, D birlikte D'nin dört katı olduğundan, D, M birlikte N'ye eşittir.

Ama FH niceliği M, D'den büyüktür; öyleyse K niceliği N'den büyük olmazken FH, N'den büyük olur.

Ama N niceliği D'nin rastgele bir katıyken FH, K nicelikleri AB, C niceliklerinin aynı katlarıdır; bu durumda AB'nin D'ye oranı C'nin D'ye oranından büyüktür. **[Tan. V.7]**

Sonra diyorum ki, D'nin C'ye oranı da D'nin AB'ye oranından büyüktür.

Çünkü, aynı çizimle ve benzer yolla N niceliği FH'den büyük olmazken K'den büyük olduğunu kanıtlayabiliriz.

Ve FH, K nicelikleri AB, C'nin rastgele aynı katlarıyken N de D'nin bir katıdır; bu durumda D'nin C'ye oranı D'nin AB'ye oranından büyüktür. **[Tan. V.7]**

Yine, AE, EB'den büyük olsun.

O zaman, küçük olan EB'nin katları alındığında bir ara D'den büyük olacaktır; **[Tan. V.4]**

öyleyse katları alınsın, ve EB'nin D'den büyük bir katı GH olsun; ve GH, EB'nin hangi katıysa FG, AE'nin, ve K de C'nin aynı katı olsun.

O zaman benzer şekilde FH, K niceliklerinin AB, C'nin aynı katı olduğunu kanıtlayabiliriz; ve benzer şekilde N, D'nin bir katı ama FG'den büyük ilk katı olsun, öyle ki FG yine M'den küçük olmasın.

Ama GH büyüktür D; öyleyse FH'nin tamamı D, M'den, yani N'den büyüktür.

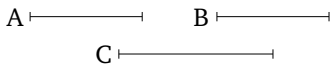
FG, N'den büyük olmadığından, ve K'ye eşit olan GH'den büyük olduğundan, K de N'den büyük değildir.

Ve aynı şekilde, yukardaki yolu izleyerek kanıtı tamamlarız.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

9. Önerme:
Aynı niceliğe oranları eşit olan nicelikler eşittir; aynı niceliğin kendilerine oranları eşit olan nicelikler eşittir.

$[\ \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ *veya* $\frac{c}{a} = \frac{c}{b}$ *ise* $a = b$ *olur.* $]$



Çünkü, A, B niceliklerinin her birinin C'ye oranı aynı olsun;

diyorum ki A eşittir B.

Çünkü, aksi takdirde A, B niceliklerinin her birinin C'ye oranı aynı olmazdı; **[V.8]**

ama aynı; demek ki A eşittir B.

Yine, C'nin A, B niceliklerinin her birine oranı aynı olsun;

diyorum ki A eşittir B.

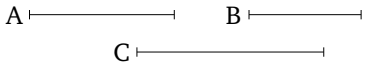
Çünkü, aksi takdirde C'nin A, B niceliklerinin her birine oranı aynı olmayacaktı; **[V.8]**

ama aynı; demek ki A eşittir B.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

10. Önerme:
İki niceliğin hangisinin aynı niceliğe oranı daha büyükse o nicelik diğerinden büyüktür; aynı niceliğin hangisine oranı daha büyükse o nicelik diğerinden küçüktür.

[$\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ *veya* $\frac{c}{b} > \frac{c}{a}$ *ise* $a > b$ *olur.]*



A'nın C'ye oranı B'nin C'ye oranından büyük olsun;

diyorum ki A, B'den büyüktür.

Çünkü değilse A, ya B'ye eşittir ya da ondan küçüktür.

Şimdi, A, B'ye eşit değildir; çünkü öyle olsaydı A, B niceliklerinin her birinin C'ye oranı aynı olurdu; **[V.7]**

ama değil;

öyleyse A, B'ye eşit değil.

Yine, A, B'den küçük de değildir; çünkü öyle olsaydı A'nın C'ye oranı B'nin C'ye oranından küçük olacaktı; **[V.8]**

ama değil;

öyleyse A, B'den küçük değil.

Ama eşit olmadığı da kanıtlanmıştı; bu durumda A, B'den büyüktür.

Yine, C'nin B'ye oranı C'nin A'ya oranından büyük olsun;

diyorum ki B, A'dan küçüktür.

Çünkü değilse ya eşittir ya da küçüktür.

Şimdi, B, A'ya eşit değildir; çünkü öyle olsaydı C'nin A, B niceliklerinin her birine oranı aynı olacaktı; **[V.7]**

ama değil.

öyleyse A, B'ye eşit değil.

Yine, B, A'den büyük de değildir; çünkü öyle olsaydı C'nın B'ye oranı C'nin A'ye oranından küçük olacaktı; **[V.8]**

ama değil;

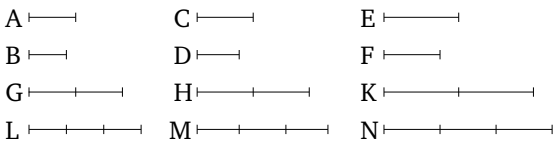
öyleyse B, A'den büyük değil.

Ama eşit olmadığı da kanıtlanmıştı; bu durumda B, A'den küçüktür.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

11. Önerme:
Aynı orana eşit olan oranlar birbirlerine de eşittir.

$[\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d}\ ve\ \frac{d}{e} = \frac{c}{d}\ ise\ \frac{a}{b} = \frac{e}{d}\ olur.\ ]$



A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşit olsun, ve C'nin D'ye oranı E'nin F'ye oranına eşit olsun.

Diyorum ki A'nın B'ye oranı E'nin F'ye oranına eşittir.

Çünkü, A, C, E'nin eşkatları G, H, K alınsın, ve B, D, F'nin başka rastgele eşkatları L, M, N alınsın;

o zaman A'nın B'ye oranı C'nin D'ye oranına eşit olduğundan, ve A, C niceliklerinin G, H eşkatları alındığından, ve B, D niceliklerinin rastgele eşkatları L, M alındığından, eğer G, L'den büyükse, H de M'den büyük olur, eğer eşitse eşit, küçükse küçük olur.

Yine, C'nin D'ye oranı, E'nin F'ye oranına eşit olduğundan, ve C, E niceliklerinin H, K eşkatları alındığından, ve D, F niceliklerinin rastgele eşkatları M, N alındığından, eğer H, M'den büyükse, K de N'den büyük olur, eğer eşitse eşit, küçükse küçük olur.

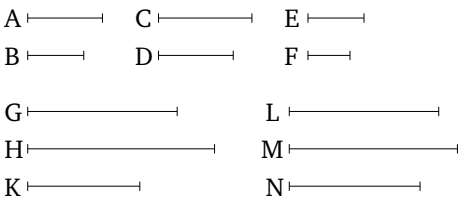
Ama gördük ki eğer H, M'den büyükse, G de L'den büyük olur, eğer eşitse eşit, küçükse küçük olur; ve buna ek olarak eğer G, L'den büyük olursa, K de N'den büyük olur, eğer eşitse eşit, küçükse küçük olur.

Ve G, K nicelikleri A, E'nin eşkatlarıdır, ve L N nicelikleri de B, F'nin başka rastgele katlarıdır; bu durumda A'nın B'ye oranı E'nin F'ye oranına eşit olur.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

12. Önerme:
Öncüllerin ardıllara oranlarının eşit olduğu nicelikler alındığında öncüllerin hepsinin ardılların hepsine oranı da aynı olur.

[$\frac{a_1}{b_1} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$ *ise* $\frac{a_1 + \cdots a_n}{b_1 + \cdots b_n} = \frac{a_1}{b_1}$ *olur.]*



Herhangi bir sayıda A, B, C, D, E, F nicelikleri alınsın, öyle ki A'nın B'ye oranı neyse C'nin D'ye, ve E'nin F'ye oranı aynı olsun.

Diyorum ki, A'nın B'ye oranı neyse A, C, E'nin B, D, F'ye oranı aynıdır.

Çünkü, A, C, E'nin eşkatları G, H, K alınsın, ve B, D, F'nin rastgele başka eşkatları alınsın.

O zaman, A'nın B'ye oranı neyse C'nin D'ye, ve E'nin F'ye oranı aynı olduğundan, ve A, C, E'nin eşkatları G, H, K alındığından, ve B, D, F'nin başka rastgele eşkatları L, M, N alındığından, eğer G, L'den büyükse, H de M'den büyüktür, ve K de N'den büyüktür, eğer eşitse eşit, küçükse küçüktür.

Buna ek olarak eğer G, L'den büyükse, G, H, K de L, M, N'den büyüktür, eğer eşitse eşit, küçükse küçüktür.

Şimdi, bir miktar niceliğin her biri, sayıca aynı başka niceliklerin her birinin aynı katı olduğunda, ilk niceliklerin hepsi ikinci niceliklerin hepsinin aynı katı olduğundan, **[V.1]**

G ve G, H, K nicelikleri A ve A, C, E'nin eşkatı olur.

Aynı nedenden dolayı L ve L, M, N nicelikleri B ve B, D, F'nin eşkatıdır;

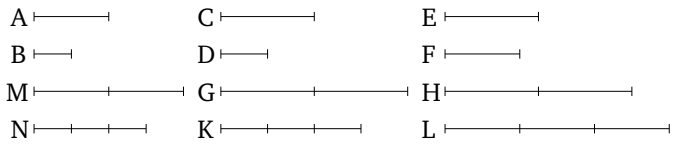
bu durumda A'nın B'ye oranı A, C, E'nin B, D, F'ye oranına eşittir. **[Tan. V.5]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

13. Önerme:

Eğer birinci niceliğin ikinci niceliğe oranı üçüncü niceliğin dördüncü niceliğe oranına eşitse, ve üçüncü niceliğin dördüncü niceliğe oranı beşinci niceliğin altıncı niceliğe oranından büyükse, birinci niceliğin ikinci niceliğe oranı da beşinci niceliğin altıncı niceliğe oranından büyüktür.

$$[\ \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4}\ ve\ \frac{a_3}{a_4} > \frac{a_5}{a_6}\ ise\ \frac{a_1}{a_2} > \frac{a_5}{a_6}\ olur.\ ]$$



Birinci nicelik A'nın ikinci nicelik B'ye oranı, üçüncü C'nin dördüncü D'ye oranına eşit olsun, ve üçüncü C'nin dördüncü D'ye oranı beşinci E'nin altıncı F'ye oranından büyük olsun.

Diyorum ki birinci A'nın ikinci B'ye oranı da beşinci E'nin altıncı F'ye oranından büyük olacaktır.

Çünkü C'nin katı D'nin katından büyük olurken E'nin katı F'nin katından büyük olmayacak şekilde C, E'nin eşkatları, ve D, F'nin raastgele başka katları olacaktır, **[Tan. V.7]**

bu katlar alınsın, ve C, E'nin eşkatları G, H olsun, ve D, F'nin rastgele başka eşkatları K, L olsun,

öyle ki G, K'dan büyük ama H, L'den büyük olmasın;

ve G, C'nin hangi katıysa M de A'nın aynı katı olsun, ve K, D'nin hangi katıysa N de B'nin aynı katı olsun.

Şimdi, A'nın B'ye oranı C'nin D'ye oranına eşit olduğundan, ve A, C'nin eşkatları olarak M, N alındığından, ve B, D'nin rastgele başka eşkatları olarak N, K alındığından, eğer M, N'den büyükse, G de K'den büyüktür, eğer eşitse eşit, küçükse küçüktür. **[Tan. V.5]**

Ama G, K'den büyüktür; bu durumda M de N'den büyük olur.

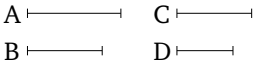
Ama H, L'den büyük değildir; ve M, H nicelikleri A, E£nin eşkatlarıdır, ve N, L de B, F'nin rastgele başka eşkatlarıdır;

bu durumda A'nın B'ye oranı E'nin F'ye oranından büyüktür. **[Tan. V.7]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

14. Önerme:
Birinci niceliğin ikinci niceliğe oranı üçüncü niceliğin dördüncü niceliğe oranına eşitse ve birinci nicelik üçüncü nicelikten büyükse, ikinci nicelik de dördüncü nicelikten büyük olur; eğer eşitse eşit, küçükse küçük olur.

[$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4}$ *iken* $a_1 > a_3$ *ise* $a_2 > a_4$ *olur. Aynı şekilde* $a_1 = a_3$ *ise* $a_2 = a_4$ *ve* $a_1 < a_3$ *ise* $a_2 < a_4$ *olur.]*



Birinci nicelik A'nın ikinci nicelik B'ye oranı üçüncü nicelik C'nin dördüncü nicelik D'ye oranına eşit olsun; ve A, C'den büyük olsun.

Diyorum ki B de D'den büyük olur.

Çünkü, A, C'den büyük olduğundan, ve B de rastgele başka bir nicelik olduğundan, A'nın B'ye oranı C'nin B'ye oranından büyük olur. **[V.8]**

Ama A'nın B'ye oranı C'nin D'ye oranına eşittir; bu durumda C'nin D'ye oranı da C'nin B'ye oranından büyük olur. **[V.13]**

Ama kendisine aynı şeyin oranı büyük olan küçüktür; **[V.10]**

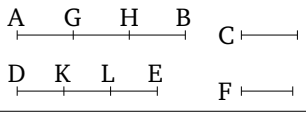
bu durumda D, B'den küçük olur; böylece B, D'den büyüktür.

Benzer şekilde, eğer A, C'ye eşitse B'nin de D'ye eşit olacağı, eğer A, C'den küçükse B'nin de D'den küçük olacağı kanıtlanabilir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

15. Önerme:
Parçaların oranıyla onların aynı katlarının aynı sırada alınan oranları eşittir.

[$A = ma$ *ve* $B = mb$ *ise* $\frac{a}{b} = \frac{A}{B}$ *olur.]*



AB, C'nin hangi katıysa DE de F'nin aynı katı olsun.

Diyorum ki, C'nin F'ye oranı AB'nin DE'ye oranına eşittir.

Çünkü, AB, C'nin hangi katıysa DE de F'nin aynı katı olduğundan, AB içinde C'ye eşit ne kadar nicelik varsa DE içinde de F'ye eşit o kadar nicelik vardır.

AB niceliği C niceliğine eşit AG, GH, HB niceliklerine bölünsün,

ve DE de F'ye eşit DK, KL, LE niceliklerine bölünsün;

o zaman, AG, GH, HB niceliklerinin miktarı DK, KL, LE niceliklerinin miktarına eşit olacaktır.

Ve, AG, GH, HB birbirine, ve DK, KL, LE birbirine eşit olduğundan, AG'nin GH'ye oranı, GH'nin KL'ye, ve HB'nin LE£ye oranına eşit olur. **[V.7]**

Öyleyse öncüllerden birinin ardıllardan birine oranı öncüllerin hepsinin ardılların hepsine oranına eşittir; **[V.12]**

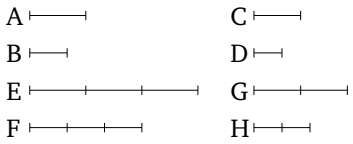
bu durmda AG'nin DK'ye oranı AB'nin DE'ye oranına eşit olur.

Ama AG eşittir C, ve DK eşittir F; öyleyse C'nin F'ye oranı AB'nin DE'ye oranına eşittir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

16. Önerme:
Orantılı dört niceliğin değiştirilmiş oranları aynıdır.

$[\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d}\ \textit{ise}\ \frac{a}{c} = \frac{b}{d}\ \textit{olur.}\ ]$



A, B, C, D orantılı dört nicelik olsun, yani A'nın B'ye oranı C'nin D'ye oranına eşit.

Diyorum ki değiştirilmiş oranları da eşit olacaktır, yani A'nın C'ye oranı B'nin D'ye oranına eşit olacak.

Çünkü, A, B'nin eşkatları E, F, ve C, D'nin rastgele başka eşkatları G, H alınsın.

O zaman, E, A'nın hangi katıysa F de B'in aynı katı olduğundan, ve parçalar katlarıyla aynı orana sahip olduklarından, **[V.15]**

A'nın B'ye oranı, E'nin F'ye oranına eşit olur.

Ama A'nın B'ye oranı C'nin D'ye oranına eşittir; bu durumda C'nin D'ye oranı E'nin F'ye oranına eşit olur. **[V.11]**

Yine, G, H nicelikleri C, D'nin eşkatları olduğundan, C'nin D'ye oranı, G'nin H'ye oranına eşit olur. **[V.15]**

Ama C'nin D'ye oranı E'nin F'ye oranına eşit olduğundan E'nin F'ye oranı da G'nin H'ye oranına eşit olur. **[V.11]**

Amam eğer dört nicelik orantılıysa ve birinci üçüncüden büyükse, ikinci de dördüncüden büyük olur, eğer eşitse eşit, küçükse küçük olur. **[V.14]**

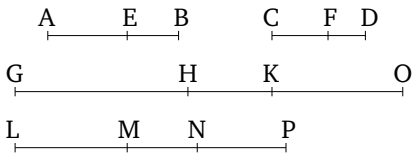
Öyleyse, eğer E, G'den büyükse, F de H'den büyüktür, eğer eşitse eşit, küçükse küçüktür.

Şimdi, E, F nicelikleri A, B'nin eşkatlarıdır, ve G, H de C, D'nin rastgele başka eşkatlarıdrı; bu durumda A'nın C'ye oranı B'nin D'ye oranına eşit olur. **[Tan. V.5]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

17. Önerme:
Birleşik olarak aynı oranda olan nicelikler ayrışınca da aynı oranda olurlar.

[$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ *ise* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *olur.]*



AB, BE, CD, DF birleşik oranları eşit nicelikler olsun, yani AB'nin BE'ye oranı CD'nin DF'ye oranına eşit olsun.

Diyorum ki bu niceliklerin ayrışık oranları da eşit olur, yani AE'nin EB'ye oranı, CF'nin DF'ye oranına eşit olur.

Çünkü, AE, EB, CF, FD niceliklerinin GH, HK, LM, MN eşkatları alınsın, ve EB, FD'nin rastgele başka eşkatları KO, NP alınsın.

O zaman, GH, AE'nin hangi katıysa HK de EB'nin aynı katı olduğundan, GK, AB'nin hangi katıysa GH de AE'nin aynı katı olur. [V.1]

Ama, GH, AE'nin hangi katıysa LM, CF'in aynı katıdır; bu durumda LM, CF'nin hangi katıysa GK de AB'nin aynı katı olur.

Yine, LM, CF'nin hangi katıysa MN de FD'nin aynı katı olduğundan, LN, CD'nin hangi katıysa LM de CF'nin aynı katı olur. [V.1]

Ama GK, AB'nin hangi katıysa LM de CF'nin aynı katıydı; öyleyse LN, CF'nin hangi katıysa GK de AB'nin aynı katıdır.

Bundan dolayı GK, LN nicelikleri AB, CD'nin eşkatlarıdır.

Yine, MN, FD'nin hangi katıysa HK de EB'nin aynı katı olduğundan, ve KO da EB'nin hangi katıysa NP de FD'nin aynı katı olduğundan, HO toplamı EB'nin hangi katıysa MP de FD'nin aynı katıdır. [V.2]

Ama, AB'nin BE'ye oranı CD'nin DF'ye oranına eşit olduğundan, ve AB, CD'nin eşkatları GK, LN, ve EB, FD'nin eşkatları HO, MP alındığından, eğer GK, HO'dan büyükse, LN de MP'den büyük olur, eğer eşitse eşit, ve küçükse küçük olur.

GK, HO'dan büyük olsun; bunlardan HK çıkarılırsa, GH de KO'dan büyük olur.

Ama gördük ki eğer GK, HO'dan büyükse, LN de MP'den büyük olur; bu durumda LN, MP'den büyük olur, ve eğer bunlardan MN çıkarılırsa, LM de NP'den büyük olur;

bu yüzden eğer GH, KO'dan büyükse, LM de NP'den büyük olur.

Benzer şekilde, eğer GH eşittir KO ise, LM eşittir NP olacağını, ve küçükse küçük olacağını kanıtlayabiliriz.

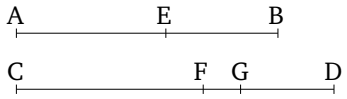
Ve, GH, LM nicelikleri AE, CF'nin eşkatları, KO, NP nicelikleri de EB, FD'nin rastgele başka eşkatlarıdır;

bu durumda AE'nin EB'ye oranı CF'nin FD'ye oranına eşit olur.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

18. Önerme:
Ayrışık olarak aynı oranda olan nicelikler birleşince de aynı oranda olurlar.

[$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ *ise* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *olur.]*



AE, EB, CF, FD ayrışık oranları eşit nicelikler olsun, yani AE'nin EB'ye oranı CF'nin FD'ye oranına eşit olsun.

Diyorum ki bu niceliklerin birleşik oranları da eşit olur, yani AB'nin BE'ye oranı, CD'nin FD'ye oranına eşit olur.

Çünkü, eğer CD'nin DF'ye oranı, AB'nin BE'ye oranına eşit değilse, o zaman AB'nin BD'ye oranı CD'nin DF'den daha küçük ya da daha büyük bir niceliğe oranına eşit olacaktır.

Önce, o orandaki nicelik daha küçük olsun ve DG olsun.

O zaman, AB'nin BE'ye oranı, CD'nin DG'ye oranına eşit olduğundan, bunlar birleşik oranları eşit nicelikler olarak, ayrışık oranları aynı nicelikler olacaktır. **[V.17]**

Öyleyse AE'nin EB'ye oranı, CG'nin GD'ye oranına eşit olur.

Ama varsayıma göre AE'nin EB'ye oranı, CF'nin FD'ye oranına eşittir.

Bu durumda CG'nin GD'ye oranı, CF'nin FD'ye oranına eşit olur. **[V.11]**

Ama birinci CG, üçüncü CF'den büyüktür; öyleyse ikinci GD de dördüncü FD'den büyüktür. **[V.14]**

Ama aynı zamanda küçüktür de: bu olamaz.

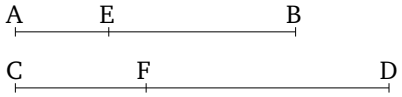
Öyleyse AB'nin BE'ye oranı CD'nin FD'den daha küçük bir niceliğe oranına eşit olamaz.

Benzer şekilde o oranda daha büyük bir nicelik de olamayacağını kanıtlayabiliriz; öyleyse o oranda FD'nin kendisi olur.

Bundan dolayı vs …
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

19. Önerme:
İki niceliğin oranı karşılıklı bazı parçalarının oranına eşitse bu parçaları çıkardıktan sonra kalan parçaların oranına da eşittir.

[$A > a$ *ve* $B > b$ *olduğunda* $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$ *ise* $\frac{A}{B} = \frac{A-a}{B-b}$ *olur.]*



AB'nin tamamının CD'nin tamamına oranı, AE parçasının CF parçasına oranına eşit olsun.

Diyorum ki kalan EB'nin kalan FD'ye oranı da, AB'nin tamamının CD'nin tamamına oranına eşit olacaktır.

Çünkü, AB'nin CD'ye oranı, AE'nin CF'ye oranına eşit olduğundan, değiştirilmiş oranlar olarak BA'nın AE'ye oranı, DC'nin CF'ye oranına eşittir. **[V.16]**

Birleşik oran olarak eşit alındığından ayrışık oran olarak da eşit olacaklardır; **[V.17]**

yani BE'nin EA'ya oranı DF'nin CF'ye oranına eşit olur, ve değiştirilmiş oranlar olarak BE'nin DF'ye oranı, EA'nın FC'ye oranına eşittir. **[V.16]**

Ama varsayıma göre AE'nin CF'ye oranı, AB'nin tamamının CD'nin tamamına oranına eşittir.

Öyleyse kalan EB'nin kalan FD'ye oranı da, AB'nin tamamının CD'nin tamamına oranına eşittir. **[V.11]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

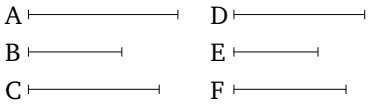
Doğal Sonuç:

Bundan açıkça görüldüğü gibi birleşik oranları eşit olan niceliklerin ayrışık oranları da eşittir.

20. Önerme:

Eğer üç nicelik varsa, ve aynı miktarda başka nicelikler varsa, öyle ki ikişer ikişer alınan oranları aynı olsun, ve eğer dış nicelikler olarak birinci üçüncüden büyükse, dördüncü de altıncıdan büyük olacaktır, eğer eşitse eşit, küçükse küçük olacaktır.

[$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_4}{a_5}$ *ve* $\frac{a_2}{a_3} = \frac{a_5}{a_6}$ *olduğu durumda* $a_1 > a_3$ *ise* $a_4 > a_6$ *olur;* $a_1 = a_3$ *ise* $a_4 = a_6$ *ve* $a_1 < a_3$ *ise* $a_4 < a_6$ *olur.]*



Üç A, B, C niceliği ve sayıca onlarla aynı miktarda D, E, F nicelikleri olsun, öyle ki ikişer ikişer alındığında aynı oranlarda olsunlar, yani

A'nın B'ye oranı, D'nin E'ye oranına, ve B'nin C'ye oranı E'nin F'ye oranına eşit olsun;

ve dış nicelikler olarak A, C'den büyük olsun.

Diyorum ki, D de F'den büyük olacaktır; eğer A, C'ye eşitse eşit, ve küçükse küçük olacaktır.

Çünkü, A, C'den büyük olduğundan, ve B de bir başka nicelik olduğundan, ve büyüğün bir niceliğe oranı küçüğün o niceliğe oranıondan büyük olduğundan, **[V.8]**

A'nın B'ye oranı, C'nin B'ye oranından büyüktür.

Ama A'nın B'ye oranı, D'nin E'ye oranına eşittir, ve ters oran olarak C'nin B'ye oranı, F'nin E'ye oranına eşittir;

bu durumda D'nin E'ye oranı da F'nin E'ye oranından büyüktür. **[V.13]**

Ama aynı niceliğe oranı olan niceliklerden dah büyük oranı olan daha büyüktür; **[V.10]**

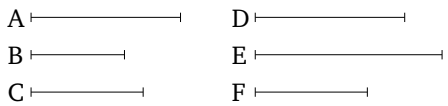
öyleyse D, F'den büyüktür.

Benzer şekilde, eğer A, C'ye eşitse D'nin de F'ye eşit olacağını, ve eğer küçükse küçük olacağını kanıtlayabiliriz.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

21. Önerme:
Eğer üç nicelik varsa, ve aynı miktarda başka nicelikler varsa, öyle ki ikişer ikişer alınan oranları aynı olsun, ve orantıları kaydırılmış olsun, dış nicelikler olarak birinci nicelik üçüncüden büyükse dördüncü nicelik de altıncıdan büyük olur; eşitse eşit, küçükse küçük olur.

[$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_5}{a_6}$ *ve* $\frac{a_2}{a_3} = \frac{a_4}{a_5}$ *olduğu durumda* $a_1 > a_3$ *ise* $a_4 > a_6$ *olur;* $a_1 = a_3$ *ise* $a_4 = a_6$ *ve* $a_1 < a_3$ *ise* $a_4 < a_6$ *olur.]*



Üç tane A, B, C niceliği ve sayıca onlara eşit D, E, F nicelikleri olsun, öyle ki ikişer ikişer alındıklarında aynı oranda olsunlar, ve oranları kaydırılmış olsun, yani

A'nın B'ye oranı E'nin F'ye oranına, ve B'nin C'ye oranı D'nin E'ye oranına eşit olsun,

ve dış nicelikler olarak A, C'den büyük olsun;

diyorum ki D'de F'den büyük olacaktır, eğer eşitse eşit, ve küçükse küçük olacaktır.

Çünkü, A, C'den büyük olduğundan ve B de bir başka nicelik olduğundan, A'nın B'ye oranı, C'nin B'ye oranından büyüktür. **[V.8]**

Ama A'nın B'ye oranı, E'nin F'ye oranına eşittir, C'nin B'ye oranı E'nin D'ye oranının tersidir.

Öyleyse E'nin F'ye oranı E'nin D'ye oranından büyüktür. **[V.13]**

Ama aynı niceliğin hangisine oranı büyükse o daha küçüktür; **[V.10]**

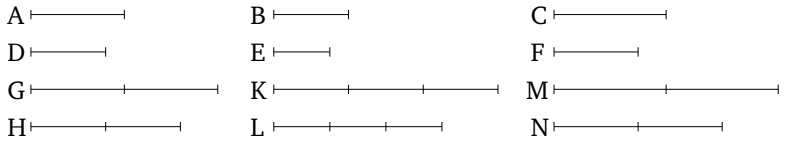
ö zaman F, D'den küçüktür; bu durumda D, F'den büyük olur.

Benzer şekilde, eğer A C'ye eşitse D'nin de F'ye eşit olacağı, ve eğer küçükse küçük olacağını kanıtlayabiliriz.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

22. Önerme:
Eğer bir miktar nicelik varsa, ve aynı miktarda başka nicelikler varsa, öyle ki ikişer ikişer alınan oranları aynı olsun, o zaman bunlar eşit dış oranlıdır.

[$a_1, \ldots, a_n$ *ve* $b_1, \ldots, b_n$ *nicelikleri verilmiş olsun ve* $\frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{b_i}{b_{i+1}}$, $i = 1, \ldots, n-1$ *ise* $\frac{a_1}{a_n} = \frac{b_1}{b_n}$ *olur.]*



Üç tane A, B, C niceliği ve sayıca onlara eşit D, E, F nicelikleri olsun, öyle ki ikişer ikişer alındıklarında aynı oranda olsunlar, yani

A'nın B'ye oranı D'nin E'ye oranına, ve B'nin C'ye oranı E'nin F'ye oranına eşit olsun,

diyorum ki bunlar eşit dış oranlı da olacaktır.

Çünkü, A, D'nin eşkatları G, H alınsın, ve B, E'nin rastgele başka eşkatları K, L alınsın.

O zaman, A'nın B'ye oranı D'nin E'ye oranına eşit oduğundan, ve A, D'nin eşkatları G, H, ve B, E'nin rastgele başka eşkatları K, L alındığından, G'nin K'ya oranı, H'nin L'ye oranına eşit olur. **[V.4]**

Aynı nedenden dolayı K'nin M'ye oranı, L'nin N'ye oranına eşittir.

Bu durumda, üç nicelik G, K, M, ve miktarca onlara eşit H, L, N nicelikleri olduğundan, öyle ki ikişer ikişer alınan oranları aynı olduğundan, dış nicelikler olarak eğer G, M'den büyükse, H de N'den büyüktür, eğer eşitse eşit, ve küçükse küçüktür. **[V.20]**

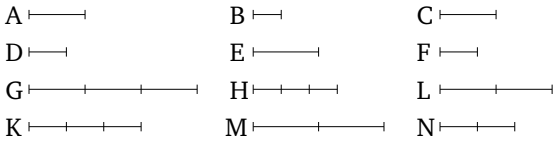
Ve G, H nicelikleri A, D'nin, ve M,N nicelikleri de C, F'nin rastgele başka eşkatlarıdır.

Öyleyse, A'nın C'ye oranı, D'nin F'ye oranına eşittir. **[Tan. V.5]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

23. Önerme:
Eğer üç nicelik varsa, ve aynı miktarda başka nicelikler varsa, öyle ki ikişer ikişer alınan oranları aynı olsun, ve orantıları kaydırılmış olsun, o zaman bunlar eşit dış oranlıdır.

[a, b, c *ve* d, e, f *nicelikleri verildiğinde* $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$ *ve* $\frac{b}{c} = \frac{d}{e}$ *eşitliklerini sağlanıyorlarsa* $\frac{a}{c} = \frac{d}{f}$ *olur.]*



Üç tane A, B, C niceliği ve sayıca onlara eşit D, E, F nicelikleri olsun, öyle ki ikişer ikişer alındıklarında aynı oranda olsunlar, ve oranları kaydırılmış olsun, yani

A'nın B'ye oranı E'nin F'ye oranına, ve B'nin C'ye oranı D'nin E'ye oranına eşit olsun;

diyorum ki, A'nın C'ye oranı D'nin F'ye oranına eşittir.

A, B, D'nin eşkatları G, H, K, ve C, E, F'nin rastgele başka eşkatları L, M, N alınsın.

O zaman, G, H nicelikleri A, B'nin eşkatları olduğundan, ve parçalar eşkatlarıyla aynı oranda olduğundan, **[V.15]**

A'nın B'ye oranı G'nin H'ye oranına eşittir.

Aynı nedenden dolayı, E'nin F'ye oranı, M'nin N'ye oranına eşittir.

Ve A'nın B'ye oranı, E'nin F'ye oranına eşittir; bu durumda G'nin H'ye oranı da M'nin N'ye oranına eşit olur. **[V.11]**

Sonra, B'nin C'ye oranı D'nin E'ye oranına eşit olduğundan, değiştirilmiş oran olarak, B'nin D'ye oranı, C'nin E'ye oranına eşit olur. **[V.16]**

Ve, H, K nicelikleri B, D'nin eşkatları olduğundan, ve parçalar eşkatlarıyla aynı oranda olduğundan, **[V.15]**

B'nin D'ye oranı H'nin K'ye oranına eşit olur.

Ama B'nin D'ye oranı, C'nin E'ye oranına eşittir; demek ki H'nin Kye oranı da C'nin E'ye oranına eşittir. **[V.11]**

Yine, L, M nicelikleri C, E'nin eşkatları olduğundan, C'nin E'ye oranı, L'nin m'ye oranına eşittir. **[V.15]**

Ama C'nin E'ye oranı, H'nin K'ye oranına eşittir; öyleyse H'nin K'ye oranı L'nin M'ye oranına eşit olur., **[V.11]**

ve değiştirilmiş oran olarak, H'nin L'ye oranı, K'nin M'ye oranına eşittir. **[V.16]**

Ama G'nin H'ye oranının M'nin N'ye oranına eşit olduğu da kanıtlanmıştı.

O zaman, üç tane G, H, L nicelikleri ve sayıca onlara eşit K, M, N nicelikleri alındığından öyle ki ikişer ikişer alındıklarında oranları aynı olduğundan, ve oranları kaydırılmış olduğundan,

dış nicelikler olarak, eğer G; L'den büyükse, K de N'den büyüktür, eğer eşitse eşit, ve küçükse küçüktür. **[V.21]**

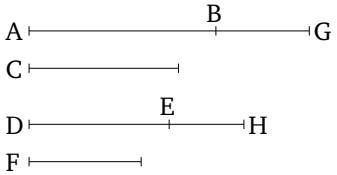
Ve, G, K nicelikleri A, D'nin eşkatları, ve L, N de C, F'nin eşkatlarıdır.

Öyleyse A'nın C'ye oranı, D'nin F'ye oranına eşittir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

24. Önerme:
Birinci niceliğin ikinciye oranı üçüncünün dördüncüye oranına eşitse ve aynı zamanda beşincinin ikinciye oranı altıncının dördüncüye oranına eşitse, birinciyle beşincinin toplamının ikinciye oranı üçüncüyle altıncının toplamının dördüncüye oranına eşittir.

$$[\ \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4}\ ve\ \frac{a_5}{a_2} = \frac{a_6}{a_4}\ ise\ \frac{a_1 + a_5}{a_2} = \frac{a_3 + a_6}{a_4}\ olur.\ ]$$



Birinci nicelik AB'nin ikinci nicelik C'ye oranı, üçüncü DE'nin dördüncü F'ye oranı aynı olsun; ve beşinci BG'nin ikinci C'ye oranı, altıncı EH'nin F'ye oranıyla aynı olsun.

Diyorum ki, birinci ve beşincinin toplamı AG'nin ikinci C'ye oranı, üçüncü ve altıncı DH'nin dördüncü F'ye oranıyla aynıdır.

Çünkü, BG'nin C'ye oranı, EH'nin F'ye oranına eşit olduğundan, değiştirilmiş oranlar olarak, C'nin BG'ye oranı, F'nin EHye oranına eşittir.

O zaman, AB'nin C'ye oranı, DE'nin F'ye oranına, ve C'nin BG'ye oranı, F'nin EH'ye oranına eşit olduğundan, eşit dış oranlı olarak, AB'nin BG'ye oranı, DE'nin EH'ye oranına eşittir. **[V.22]**

Ve ayrışık olarak aynı oranda olan nicelikler birleşince de aynı oranda olduğundan, **[V.18]**

AG'nin GB'ye oranı, DH'nin HE'ye oranına eşittir.

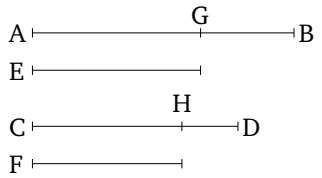
Ama aynı zamanda BG'nin C'ye oranı, EH'nin F'ye oranına eşittir;

bu durumda eşit dış oranlı olarak, AG'nin C'ye oranı DH'nin F'ye oranına eşittir. **[V.22]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

25. Önerme:
Orantılı dört nicelik arasında en büyükle en küçüğü diğer ikisinden büyüktür.

[Orantılı a, b, c, d *nicelikleri verildiğinde, yani* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *eşitliğ varsa ve* a *en büyükse, o zaman* d *en küçüktür ve* $a+d > b+c$ *olur.]*



Dört nicelik AB, CD, E, F orantılı olsun, yani AB'nin CD'ye oranı E'nin F'ye oranına eşit olsun, ve AB en büyükleri, F de en küçükleri olsun.

Diyorum ki, AB, F birlikte CD E'den büyüktür.

Çünkü, AG, E'ye eşit çizilsin, ve CH de F'ye eşit olsun.

AB'nin CD'ye oranı, E'nin F'ye oranına eşit olduğundan, ve E eşittir AG, ve F eşittir CH olduğundan, AB'nin CD'ye oranı, AG'nin CH'ye oranına eşittir.

Ve, AB'nin tamamının CD'nin tamamına oranı, çıkarılan parça AG'nin çıkarılan parça CH'ye oranına eşit olduğundan, kalan GB'nin kalan HD'ye oranı da AB'nin tamamının CD'nin tamamına oranına eşit olur. **[V.19]**

Ama AB, CD'den büyüktür; bu durumda GB de HD'den büyüktür.

Ve AG, E'ye, CH de F'ye eşit olduğundan, AG, F birlikte CH, E'ye eşittir.

Ve, GB, HD eşit olmadıklarından, GB daha büyüktür, eğer GB'ye AG, F eklenir ve HD'ye CH, E eklenirse, AB, F birlikte CD, E'den büyük olur.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

Kitap VI

1. Tanımlar

1 Karşılıklı açıları eşit ve bu eşit açıların etrafındaki kenarları orantılı olan düz kenarlı şekillere **benzer** denir.

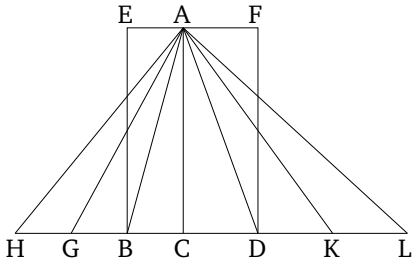
2 Bir doğrunun büyük parçasının küçük parçaya oranı tüm doğrunun büyük parçaya oranına eşitse bu doğru **uç ve orta oranda** bölünmüş denir.

[Bu orana bugün "altın oran" denmektedir.]

3 Bir şeklin **yüksekliği** tepesinden tabanına çizilen dik doğrudur.

2. Önermeler

1. Önerme:
Yükseklikleri aynı olan üçgenlerin ve paralelkenarların alanlarının oranları tabanlarının oranlarına eşittir.



ABC, ACD, üçgenlerinin ve EC, CF paralelkenarların yükseklikleri aynı olsun.

Diyorum ki, BC tabanının CD tabanına oranı, ABC üçgeninin ACD üçgenine oranına, ve EC paralelkenarının CF paralelkenarına oranına eşittir.

Çünkü, BD doğrusu iki yönde H, L noktalarına kadar uzatılsın, ve BG, GH doğruları BC tabanına eşit çizilsin, ve yine rastgele sayıda DK, KL doğruları CD tabanına eşit çizilsin;

AG, AH, AK, AL birleştirilsin.

O zaman, CB, BG, GH birbirine eşit olduğundan, ABC, AGB, AHG üçgenleri de birbirine eşittir. **[I.38]**

Öyleyse, HC tabanı BC tabanının hangi katıysa AHC üçgeni de ABC üçgeninin aynı katıdır.

Aynı nedenden dolayı, LC tabanı CD tabanının hangi katysa ALC üçgeni de ACD çgeninin aynı katıdır;

ve eğer HC tabanı CL tabanına eşitse, AHC üçgeni de ACL üçgenine eşittir, **[I.38]**

eğer HC tabanı CL tabanından büyükse, AHC üçgeni de ACL üçgeninden büyüktür, ve eğer küçükse küçüktür.

Böylece, dört nicelik olduğundan, iki taban BC, CD, ve iki üçgen ABC, ACD, taban BC ve üçgen ABC'nin eşkatları, yani HC tabanı ve AHC üçgeni, alındığından, ve CD tabanı ve ADC üçgeninin rastgele başka eşkatları, yani LC tabanı ve ALC üçgeni alındığından;

ve eğer HC tabanı CL tabanından büyükse, AHC üçgeninin ALC üçgeninden büyük olacağı, eğer eşitse eşit ve küçükse küçük olacağı kanıtlandığından,

BC tabanının CD tabanına oranı, ABC üçgeninin ACD üçgenine oranına eşittir. **[Tan. V.5]**

Sonra, EC paralelkenarı ABC üçgeninin iki katı olduğundan, **[I.41]**

ve FC paralelkenarı ACD çgeninin iki katı olduğundan, ve bu arada parçaların oranı eşkatlarının oranıyla aynı olduğundan, **[V.15]**

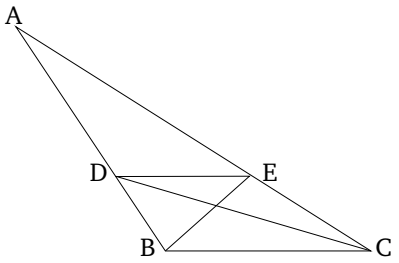
ABC üçgeninin ACD üçgenine oranı, EC paralelkenarının FC paraelkenarına oranına eşittir.

Ama BC tabanının CD tabanına oranının ABC üçgeninin ACD üçgenine oranına eşit olduğu kanıtlandığından, ve ABC üçgeninin ACD üçgenine oranı EC paralelkenarının CF paralelkenarına oranına eşit olduğundan,

BC tabanının CD tabanına oranı, EC paralelkenarının FC paralelkenarına oranına eşittir. **[V.11]**

Bundan dolayı vs …
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

2. Önerme:
Bir üçgende kenarlardan birine paralel bir doğru çizilirse bu doğru diğer iki kenarı orantılı kesecektir; ve eğer üçgenin kenarları orantılı kesilirse, bu kesim noktalarını birleştiren doğru üçgenin diğer kenarına paralel olacaktır.



ABC üçgeninin kenarlarından birine, BC kenarına DE paraleli çizilsin.

Diyorum ki BD'nin DA'ya oranı, CE'nin EA'ya oranıyla aynıdır.

Çünkü, BE, CD birleştirilsin.

Öyleyse BDE üçgeni CDE üçgenine eşittir, çünkü aynı DE tabanı üstünde ve aynı DE, BC paralelleri arasındalar. **[I.38]**

Ve ADE üçgeni de bir başka üçgendir; ama eşit niceliklerin aynı niceliğe oranları eşittir; **[V.7]**

öyleyse, BDE üçgeninin ADE üçgenine oranı, CDE üçgeninin ADE üçgenine oranına eşittir.

Ama BDE üçgeninin ADE üçgenine oranı BD'nin DA'ya oranına eşittir, çünkü yükseklikleri aynı olduğundan, E'den AB'ye çizilen dikme, birbirlrine oranları tabanlarının oranıyla aynıdır. **[VI.1]**

Aynı nedenden dolayı, CDE üçgeninin ADE üçgenine oranı, CE'nin EAya oranıyla aynıdır.

Öyleyse, BD'nin DA'ya oranı, CE'nin EA'ya oranıyla aynıdır. **[V.11]**

Yine, ABC üçgeninin AB, AC kenarları orantılı kesilsin, yani BD'nin DA'ya oranı, CE'nin EAya oranına eşit olsun; ve DE birleştirilsin.

Diyorum ki, DE doğrusu BC'ye paraleldir.

Çünkü, aynı çizimle, BD'nin DA'ya oranı, CE'nin EA'ya oranıyla aynı olduğundan, ama BD'nin DA'ya oranı, BDE üçgeninin ADE üçgenine oranıyla aynı, ve CE'nin EA'ya oranının da CDE üçgeninin ADE üçgenine oranıyla olduğundan, **[VI.1]**

BDE üçgeninin ADE üçgenine oranı, CDE üçgeninin ADE üçgenine oranına eşit olur. **[V.11]**

Bu durumda BDE, CDE üçgenlerinin her birinin ADE üçgenine oranı aynıdır.

Öyleyse BDE üçgeni CDE üçgenine eşittir; **[V.9]**

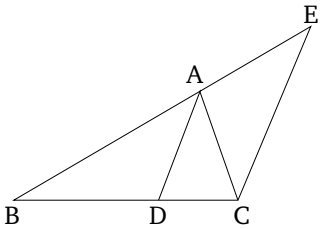
ve aynı taban üzerindedirler.

Ama aynı taban üzerindeki eşit üçgenler aynı paraleller arasındadırlar. **[I.39]**

Öyleyse DE doğrusu BC'ye paraleldir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

3. Önerme:
Bir üçgenin bir açısı ikiye bölünürse ve açıyı bölen doğru tabanı da keserse, tabanın parçalarının oranı diğer kenarların oranıyla aynı olacaktır; ve eğer tabanın parçalarının oranı diğer kenarların oranıyla aynıysa, üçgenin tepesini tabanın kesim noktasına birleştiren doğru üçgenin açısını ikiye bölecektir.



ABC bir üçgen olsun, ve AD doğrusu BAC açısını ikiye bölsün.

Diyorum ki, BD'nin CD'ye oranı, BA'nın AC'ye oranıyla aynıdır.

Çünkü, C noktasından DA'ye paralel CE çizilsin, ve BA onu E'de kesecek şekilde uzatılsın.

O zaman, AC doğrusu, AD, EC paralellerini kestiği için, ACE açısı CAD açısına eşittir. **[I.29]**

Ama CAD açısı varsayıma göre BAD açısına eşittir; öyleyse BAD açısı da ACE açısına eşittir.

Yine, BAE doğrusu, AD, EC paralellerini kestiği için, BAD dış açısı AEC iç açısına eşittir. **[I.29]**

Ama ACE açısının da BAD açısına eşit olduğu kanıtlanmıştı; bu durumda ACE açısı AEC açısına eşit olur, böylese AE kenarı da AC kenarına eşit olur. **[I.6]**

Ve AD doğrusu BCE üçgeninde EC kenarına paralel çizildiğinden, BD'nin DC'ye oranı, BA'nın AE'ye oranına eşittir. **[VI.2]**

Ama AE eşittir AC; öyleyse BD'nin DC'ye oranı, BA'nın AC'ye oranına eşittir.

Yine, BA'nın AC'ye oranı, BD'nin DC'ye oranıyla aynı olsun, ve AD birleştirilsin.

Diyorum ki, BAC açısı AD doğrusuyla ikiye bölünmüştür.

Çünkü, aynı çizimle, BD'nin DC'ye oranı, BA'nın AC'ye oranıyla aynı olduğundan, ve BCE üçgeninde AD'nin EC kenarına paralel çizilmesi nedeniyle BD'ninDC'ye oranı BA'nın AE'ye oranıyla aynı olduğundan, **[VI.2]**

BA'nın AC'ye oranı da BA'nın AE'ye oranına eşit olur. **[V.11]**

Öyleyse AC eşittir AE, **[V.9]**

ve bu yüzden AEC açısı ACE açısına eşittir. **[I.5]**

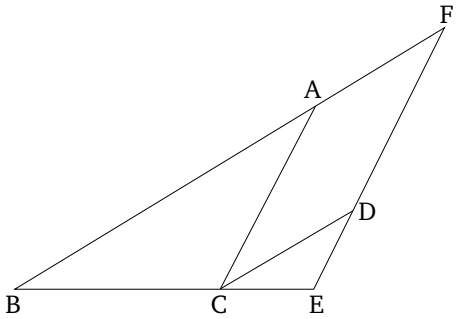
Ama AEC açısı BAD dışaçısına, ve ACE açısı CAD ters iç açısına eşittir. **[I.29]**

Bu durumda BAD açısı CAD açısına eşit olur.

Öyleyse BAC açısı AD doğrusu tarafından ikiye bölünmüştür.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

4. Önerme:
Eş açılı üçgenlerde eşit açıların etrafındaki kenarlar orantılıdır, ve bunlar eşit açıları gören kenarlardır.



ABC, DCE üçgenleri eşaçılı üçgenler olsun, öyle ki ABC açısı DCE açısına, BAC açısı CDE açısına, ve ayrıca ACB açısı CED açısına eşit olsun.

Diyorum ki, ABC, DCE üçgenlerinde eşit açılarınetrafındaki kenarlar orantılıdır, ve bunlar eşit açıları gören kenarlardır.

Çünkü, BC kenarı CE ile aynı doğru üzerine yerleştirilsin; ABC, ACB açıları iki dik açıdan küçük olduğundan, **[I.17]**

ve ACB açısı DEC açısına eşit olduğundan, ABC, DEC açıları iki dik açıdan küçüktür;

öyleyse BA, ED uzatıldıklarında kesişecektir. **[Bel. I.5]**

Uzatılıp F noktasında kesişsinler.

Şimdi DCE açısı ABC açısına eşit olduğundan, BF doğrusu CD'ye paraleldir. **[I.28]**

Yine, ACB açısı DEC açısına eşit olduğundan, AC doğrusu FE'ye paraleldir. **[I.28]**

Öyleyse FACD bir paralelkenardır; bu durumda FA eşittir DC, ve AC eşittir FD olur. **[I.34]**

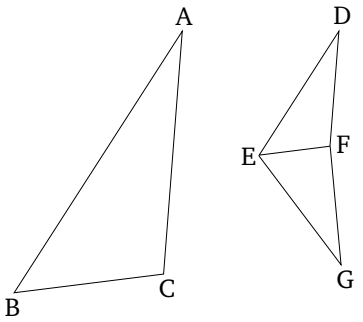
Ve AC doğrusu FBE üçgeninin FE kenarına paralel olduğundan, BA'nın AF'ye oranı BC'nin CE'ye oranına eşittir. **[VI.2]**

Ama AF eşittir CD; bu durumda BA'nın CD'ye oranı BC'nin CE'ye oranına eşit olur; ve değiştirilmiş oran olarak, AB'nin CD'ye oranı DC'nin CE'ye oranına eşit olur. **[V.16]**

O zaman, AB'nin BC'ye oranının DC'nin CE'ye oranına, ve BC'nin CA'ya oranının CE'nin ED'ye oranına eşit olduğu kanıtlanmış olduğundan, eşit dış oranlar olarak BA'nın AC'ye oranı CD'nin DE'ye oranına eşit olur. **[V.22]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

5. Önerme:
Karşılıklı kenarları orantılı olan üçgenler eşaçılıdır, ve karşılıklı kenarların gördüğü açılar eşittir.



ABC, DEF üçgenleri, karşılıklı kenarları orantılı üçgenler olsun, yani AB'nin BC'ye oranı, DE'nin EF'ye oranına, BC'nin CA'ya oranı, EF'nin FD'ye oranına, ve ayrıca BA'nın AC'ye oranı, ED'nin DF'ye oranına eşit olsun.

Diyorum ki, ABC üçgeni DEF üçgeniyle eşaçılıdır, ve karşılıklı kenarların gördüğü açıları eşit olacaktır, yani ABC açısı DEF açısına, BCA açısı EFD açısına, ve ayrıca BAC açısı EDF açısına eşit eşit olacaktır.

Çünkü, EF doğrusu üzerine E, F noktalarında ABC açısına eşit FEG açısı, ve ACB açısına eşit EFG açısı çizilsin; **[I.23]**

bu durumda A köşesindeki kalan açı, kaln G açısına eşit olur. **[I.32]**

Böylece ABC üçgeni GEF üçgeniyle eşaçılıdır.

Öyleyse ABC, GEF üçgenlerinde eşit açılar etrafındaki kenarlar orantılıdır, ve bunlar eşit açıları gören kenarlardır; **[VI.4]**

bu durumda AB'nin BC'ye oranı, GE'nin EF'ye oranına eşit olur.

Ama AC'nin BC'ye oranı, varsayım gereği DE'nin EF'ye oranına eşittir; bu durumda DE'nin EF'ye oranı, GE'nin EF'ye oranına eşit olur. **[V.11]**

Böylece DE, GE doğrularının her biri EF doğrusuyla aynı orandadır; bu nedenle DE eşittitir GE. **[V.9]**

Aynı nedenden dolayı DF eşittir GF.

O zaman, DE, EG'ye eşit, ve EF ortak olduğundan, iki kenar DE, EF, iki kenar GE, EF'ye eşit, ve DF tabanı FG tabanına eşit olduğundan, DEF açısı GEF açısına eşit olur, **[I.8]**

ve DEF üçgeni GEF üçgenine eşit olur, ve kalan açılar kalan açılara eşit olur, yani eşit kenarların gördüğü açılar. **[I.4]**

Öyleyse DFE açısı GFE açısına, ve EDF açısı EGF açısına eşittir.

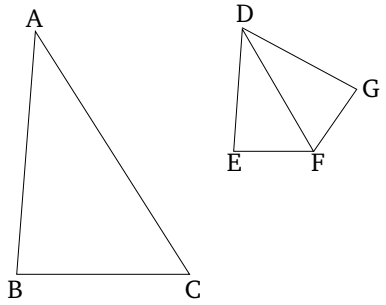
Ve FED açısı GEF açısına, ve GEF açısı ABC açısına eşit olduğundan, ABC açısı DEF açısına da eşittir.

Aynı nedenden dolayı 4ACBaçısıDFE4 açısına eşittir, ve ayrıca A'daki açı da D'deki açıya eşit olur;

öyleyse ABC üçgeni DEF üçgeniyle eşaçılıdır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

6. Önerme:
Eğer iki üçgenin birer açıları eşitse ve eşit açıların etrafındaki kenarlar orantılıysa, üçgenler eşaçılı olacaktır ve karşılıklı kenarların gördüğü açılar eşit olacaktır.



ABC, DEF üçgenlerinde BAC açısı EDF açısına eşit olsun, ve eşit açılar etrafındaki kenarlar orantılı olsun, öyle ki BA'nın AC'ye oranı, ED'nin DF'ye oranına eşit olsun.

Diyorum ki, ABC üçgeni DEF üçgeniyle eşaçılıdır, ve ABC açısı DEF açısına, ve ACB açısı DFE açısına eşit olacaktır.

Çünkü, DF doğrusu üzerine, ve D, F noktalarında BAC, EDF açılarından birine eşit FDG açısı, ve ACB açısına eşit DFG açısı çizilsin; **[I.23]**

bu durumda kalan B'deki açı G'de kalan diğer açıya eşittir. **[I.32]**

Öyleyse ABC üçgeni DGF üçgeniyle eşaçılıdır.

Bu durumda BA'nın AC'ye oranı, GD'nin DF'ye oranına eşit olur. **[VI.4]**

Ama, varsayımdan dolayı, BA'nın AC'ye oranı, ED'nin DF'ye oranına eşittir; öyleyse ED'nin DF'ye oranı, GD'nin DF'ye oranına eşittir. **[V.11]**

Öyleyse ED eşittir DG; **[V.9]**

ve DF ortaktır; bu durumda iki kenar ED, DF, iki kenar GD, DF'ye eşit, ve EDF açısı GDF açısına eşit olur; öyleyse EF tabanı GF tabanına, ve DEF üçgeni DGF üçgenine eşittir, ve kalan açılar da kalan açılara eşit olur, yani eşit kenarlar tarafından görülen açılar. **[I.4]**

Böylece DFG açısı DFE açısına, ve DGF açısı DEF açısına eşittir. Ama DFG açısı ACB açısına eşittir; bu durumda ACB açısı DFE açısına da eşittir.

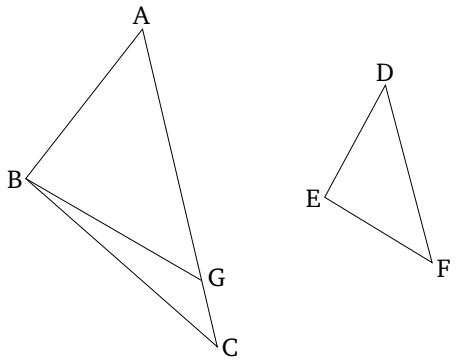
Ve varsayım gereği, BAC açısı EDF açısına eşittir; öyleyse kalan B'deki açı E'de kalan diğer açıya eşittir; **[I.32]**

Öyleyse ABC üçgeni DEF üçgeniyle eşaçılıdır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

7. Önerme:

Eğer iki üçgenin birer açıları eşitse, diğer açılar etrafındaki kenarlar orantılıysa, ve kalan açıların ikisi de ya bir dik açıdan küçük ya da ikisi de dik açıdan küçük değilse, üçgenler eşaçılı, ve orantılı kenarlar arasındaki açılar eşit olacaktır.



ABC, DEF üçgenlerinde BAC açısı EDF açısına eşit olsun, diğer ABC, DEF açıları etrafındaki kenarlar orantılı olsun, yani AB'nin BC'ye oranı, DE'nin EF'ye oranına eşit olsun, ve ilk olarak kalan C, F açılarının her biri dik açıdan küçük olsun.

Diyorum ki ABC üçgeni DEF üçgeniyle eşaçılıdır, ABC açısı DEF açısına eşit olacaktır, ve diğer açılar, yani C'deki ve F'deki açılar da eşit olacaktır.

Çünkü, eğer ABC açısı DEF açısına eşit değilse, biri daha büyüktür.

ABC daha büyük olsun; AB doğrusu üzerine ve B noktasında DEF açısına eşit ABG açısı çizilsin. **[I.23]**

O zaman, A açısı D açısına, ve ABG açısı da DEF açısına eşit olduğundan, kalan AGB açısı kalan DEF açısına eşit olur. **[I.32]**

Öyleyse ABGüçgeniDFE üçgeniyle eşaçılıdır.

Öyleyse AB'nin BGye oranı, DE'nin EFye oranına eşittir. **[VI.4]**

Ama DE'nin EF'ye oranı, varsayıma göre AB'nin BCye oranına eşittir; bu durumda AB doğrusu BC, BG doğrularının her birine aynı orandadır; **[V.11]**

öyleyse BC eşittir BG, **[V.9]**

bu yüzden C'deki açı BGC açısına eşittir. **[I.5]**

Ama varsayıma göre C'deki açı dik açıdan küçüktür; öyleyse BGC açısı da dik açıdan küçüktür; bu durumda komşu AGB açısı dik açıdan büyüktür. **[I.13]**

Ve F açısına eşit olduğu kanıtlanmıştı; demek ki F açısı da dik açıdan büyüktür.

Ama varsayıma göre F açısı dik açıdan küçüktür: bu olamaz.

Öyleyse ABC'deki açı DEF açısından farklı olamaz; demek ki ona eşittir.

Ama A'daki açı D'deki açıya eşittir; bu durumda, kalan C'deki açı F'de kalan açıya eşit olur. **[I.32]**

Öyleyse ABC üçgeni DEF üçgebiyle eşaçılıdır.

Şimdi de C, F açıları dik açıdan küçük olmasın.

Diyorum ki bu durumda da ABC üçgeni DEF üçgeniyle eşaçılı olur.

Çünkü, aynı çizimle, ve aynı yolla BC'nin BG'ye eşit olduğunu kanıtlayabiliriz; böylece C'deki açı BGC açısına eşit olur. **[I.5]**

Ama C'deki açı dik açıdan küçük değildir. O zaman BGC üçgeninde dik açıdan küçük olmayan iki açı vardır: bu olamaz. **[I.17]**

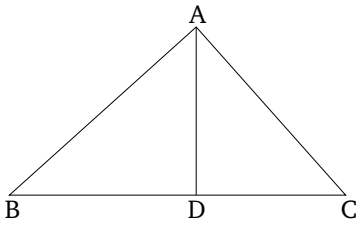
Öyleyse, bir kez daha, ABC açısı DEF açısından farklı olamaz; demek ki ona eşittir.

Ama A'daki açı D'deki açıya eşittir; bu durumda, kalan C'deki açı F'de kalan açıya eşit olur. **[I.32]**

Öyleyse ABC üçgeni DEF üçgebiyle eşaçılıdır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

8. Önerme:
Eğer bir dik üçgende, dik açıdan tabana bir dikme çizilirse, bu dikmenin iki kenarındaki üçgenler hem birbirine hem de tüm üçgene benzer olur.



ABC üçgeni BAC açısı dik olan bir diküçgen olsun, ve A'dan AD doğrusu BC'ye dik çizilsin.

Diyorum ki ABD, ADC üçgenlerinin her biri ABC üçgeninr ve birbirine de benzerdir.

Çünkü, her biri dik olduğu için BAC açısı ADB açısına eşit olduğundan, ve B'deki açı ABC ve ABD üçgenlerinde ortak olduğundan, kalan ACBaçısıdiğerkalanBAD açısına eşittir; **[I.32]**

öyleyse ACB üçgeni BAD üçgeniyle eşaçılıdır.

Öyleyse, ABC üçgeninde dik açıyı gören BC'nin, ABD üçgeninde dik açıyı gören BA'ya oranı, ABC üçgeninde C açısını gören AB'nin, ABD üçgeninde BAD açısını gören BD'ye oranına, ve iki üçgende ortak olan B açısını gören AC'nin AD'ye oranına eşittir. **[VI.4]**

Böylece ABC üçgeni ABD üçgeniyle hem eşaçılıdır, hem de eşit açıların etrafındaki kenarlar orantılıdır.

Öyleyse ABC üçgeni ABD üçgenine benzerdir. **[Tan. VI.1]**

Benzer şekilde, ABC üçgeninin ADC üçgenine benzer olduğunu kanıtlayabiliriz;

öyleyse ABD, ADCüçgenlerininherbiriABC üçgenine benzerdir.

Sonra diyorum ki, ABD+,ADC üçgenleri birbirine de benzerdir.

Çünkü, BDA dik açısı ADC dik açısına eşit olduğundan, ve üstelik BAD açısının diğer C'deki açıya eşit olduğu kanıtlanmış olduğundan, kalan B açısı kalan DAC açısına eşittir; **[I.32]**

bu durumda ABD üçgeni ADC üçgeniyle eşaçılı olur.

Öyleyse, ABD üçgeninde BAD açısını gören BD'nin, ADC üçgeninde BAD açısına eşit olan C açısını gören DA'ya oranı, ABD üçgeninde B açısını gören AD'nin, ADC üçgeninde B açısına eşit DAC açısını gören DC'ye oranına, ve dik açıları gören BA'nın AC'ye oranına eşittir; **[VI.4]**

öyleyse ABD üçgeni ADC üçgenine benzerdir. **[Tan. VI.1]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

Doğal Sonuç: Buradan açıkça görülür ki bir dik üçgende dik köşeden karşı kenara indirilen doğru karşı kenarda oluşan parçalar arasında orta orantılıdır.

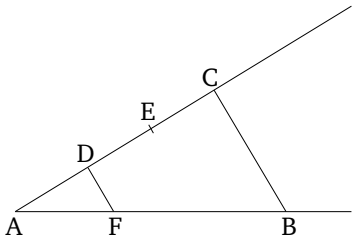
[Burada "orta orantı" terimi "geometrik ortalama" anlamında kullanılmıştır; önermenin şeklini kullanırsak

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC} \quad \textit{olur.}$$

]

9. Önerme:
Verilen bir doğrudan, önceden belirlenmiş bir parça kesmenin yolu.

[Buradaki "parça" terimi V. Kitap 1. tanımda anlatılmıştır: parça bütünü ölçer.]



Verilen doğru AB olsun; böylece AB'den önceden belirlenmiş bir parça kesmek isteniyor.

Önceden belirlenen parça üçte bir olsun.

AB ile bir açı yapan AC doğrusu çizilsin; AC üzerinde rastgele bir D noktası alınsın, ve AD'ye eşit DE, EC çizilsin. **[I.3]**

BC birleştirilsin, ve D'den ona paralel FD çizilsin. **[I.31]**

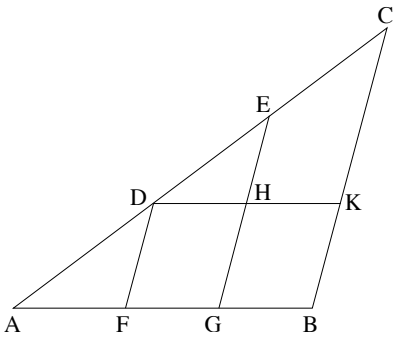
O zaman, ABC üçgeninde BC kenarına paralel FD çizilmiş olduğundan, CD'nin DA'ya oranı, BF'nin FA'ya oranına eşittir. **[VI.2]**

Ama CD, DA'nın iki katıdır; öyleyse BF de FA'nın iki katıdır; bu durumda BA, AF'nin üç katı olur.

Öyleyse verilen AB doğrusundan önceden belirlenen üçte bir parça AF kesilmiştir.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. QEF

10. Önerme:
Verilen kesilmemiş bir doğruyu belli oranlarda kesilmiş bir doğruyla aynı oranlarda kesmenin yolu.



Verilen doğru AB olsun, ve AC doğrusu D, E noktalarında kesilmiş olsu; doğrular bir açı yapacak şekilde yerleştirilmiş olsun; CB birleştirilsin, ve D, E noktalarından BC'ye paralel DF, EG çizilsin, ve D'den AB'ye paralel DHK çizilsin. **[I.31]**

Öyleyse FH, HB şekillerinin her biri bir paralelkenardır; bu durumda DH eşittir FG, ve HK eşittir GB olur. **[I.34]**

Şimdi, HE doğrusu DKC üçgeninin bir kenarı KC'ye paralel çizildiğinden, CE'nin ED'ye oranı, KH'nin HD'ye oranına eşittir. **[VI.2]**

Ama, KH eşittir BG, ve HD eşittir GF;

öyleyse CE'nin ED'ye oranı, BG'nin GF'ye oranına eşittir.

Yine, FD doğrusu AGE üçgeninin bir kenarı GE'ye paralel çizildiğinden, ED'nin DA'ya oranı, GF'nin FA'ya oranına eşittir. **[VI.2]**

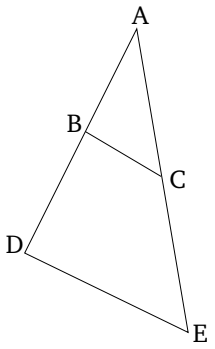
Ama CE'nin ED'ye oranının, BG'nin GF'ye oranına eşit olduğu kanıtlanmıştı; bu durumda CE'nin ED'ye oranı, BG'nin GF'ye oranına, ve ED'nin DA'ya oranı, GF'nin FA'ya oranına eşit olur.

Öyleyse verilen kesilmemiş doğru AB, verilen kesilmiş doğru AC'ye benzer şekilde kesilmiştir.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. QEF

11. Önerme:
İki doğru verildiğinde bir üçüncü orantılı bulmanın yolu.

[Yani: İki doğru verildiğinde, üçünün sürekli orantılı olmasını sağlayacak bir üçüncü doğru çizmenin yolu.]



BA, AC verilen iki doğru olsun, ve aralarında bier açı olacak şekilde yerleştirilmiş olsunlar; böylece BA, AC'ye üçüncü orantılı bulunması istenmekte.

Bunlar D, E noktalarına kadar uzatılsın, ve BD eşittir AC olsun; **[I.3]**

BC birleştirilsin, ve D'den ona paralel DE çizilsin. **[I.31]**

BC doğrusu ADE üçgeninin bir kenarı DE'ye paralel çizildiğinden, AB'nin BD'ye oranı, AC'nin CEye oranına eşittir. **[VI.2]**

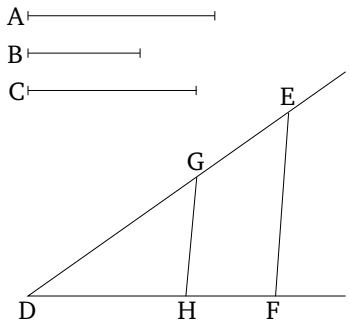
Ama BD eşittir AC;

bu durumda AB'nin AC'ye oranı, AC'nin CE'ye oranına eşit olur.

Öyleyse verilen iki AB, AC doğrusuna üçüncü orantılı CE bulunmuştur.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. QEF

12. Önerme:
Verilen üç doğruyla orantılı dördüncü doğruyu bulmanın yolu.



Verilen üç doğru A, B, C olsun; böylece A, B, C'ye orantılı dördüncü bulunması isteniyor.

Rastgele bir EDF açısını çevreleyen DE, DF doğruları çizilsin; DG eşittir A, GE eşittir B, ve ayrıca DH eşittir C olarak çizilsin; GH birleştirilsin, ve E'den ona paralel EF çizilsin. **[I.31]**

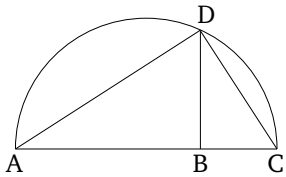
GH doğrusu, DEF üçgeninin kenarlarından biri EF'ye paralel çizildiğinden, DG'nin GE'ye oranı, DH'nin HF'ye oranına eşittir. **[VI.2]**

Ama DG eşittir A, GE eşittir B, ve DH eşittir C; bu durumda A'nın B'ye oranı, C'nin HF'ye oranına eşit olur.

Öyleyse verilen üç doğru A, B, C'ye orantılı dördüncü HF bulunmuş olsu.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. QEF

13. Önerme:
Verilen iki doğruya orta orantılı bulmanın yolu



AB, BC verilen iki doğru olsun; böylece AB, BC'ye orta orantılı bulunması isteniyor.

Bunlar bir doğru üzerine yerleştirilsin ve AC üzerine ACD yarıçemberi çizilsin;

B'den AC'ye dik açıyla BD çizilsin, ve AD, DC birleştirilsin.

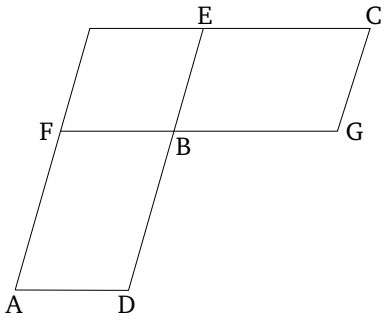
ADC açısı bir yarıçember içinde olduğundan diktir. **[III.31]**

Ve ADC diküçgeninde DB dik açıdan tabana dik açıyla çizildiğinden, tabanın parçaları AB, BC arasında DB orta orantılıdır. **[DS. VI.8]**

Öyleyse verilen iki AB, BC doğrularına orta orantılı DB bulunmuş oldu.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. QEF

14. Önerme:
Eşaçılı ve eşit paralelkenarlarda eşit açıları çevreleyen kenarlar karşılıklı ters orantılıdır; ve eşit açıları çevreleyen kenarları karşılıklı ters orantılı olan eşaçılı paralelkenarlar eşittir.



B'deki açıları eşit olan AB, BC paralelkenarları eşit olsun, ve DB, BE bir doğru üzerine yerleştirilsin; bu durumda FB, BG de bir doğru üzerinde olur. **[I.14]**

Diyorum ki AB, BC'de, eşit açıları çevreleyen kenarlar karşılıklı ters orantılıdır, yani DB'nin BE'ye oranı, GB'nin BF'ye oranına eşittir.

Çünkü, FE paralelkenarı tamamlansın; AB paralelkenarı BC paralelkenarına eşit olduğundan, ve FE de başka bir alan olduğundan, AB'nin FB'ye oranı, BC'nin FE'ye oranına eşittir. **[V.7]**

Ama AB'nin FE'ye oranı, DB'nin BE'ye oranıyla aynıdır, **[VI.1]**

ve BC'nin FE'ye oranı, GB'nin BF'ye oranıyla aynıdır. **[VI.1]**

Bu durumda DB'nin BE'ye oranı, GB'nin BF'ye oranına eşit olur. **[V.11]**

Öyleyse AB, BC paralelkenarlarında eşit açıları çevreleyen kenarlar karşılıklı ters orantılıdır.

Şimdi de GB'nin BF'ye oranı DB'nin BF'ye oranına eşit olsun;

diyorum ki AB paralelkenarı BC paralelkenarına eşittir.

Çünkü, DB'nin BE'ye oranı, GB'nin BE'ye oranına eşit olduğundan, ve bu arada DB'nin BE'ye oranı, AB paralelkenarının FE paralelkenara oranı olduğundan, **[VI.1]**

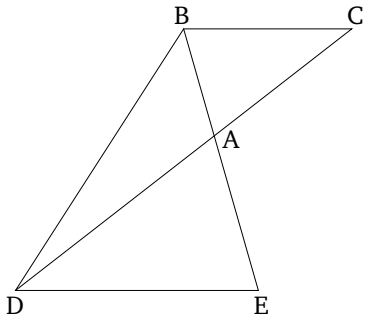
ve GB'nin BF'ye oranı, BC paralelkenarın FE paralelkenara oranı olduğundan, **[VI.1]**

AB'nin FE'ye oranı da BC'nin FE'ye oranına eşit olur. **[V.11]**

Öyleyse AB paralelkenarı BC paralelkenara eşittir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

15. Önerme:
Birer açıları eşit olan eşit üçgenlerde eşit açıları çevreleyen kenarlar karşılıklı ters orantılıdır; ve birer açıları eşit, ve eşit açıları çevreleyen kenarları karşılıklı ters orantılı olan üçgenler eşittir.



ABC, ADE, birer açıları, yani BAC açısı DAE açısına eşit olan, eşit üçgenler olsun;

diyorum ki ABC, ADE üçgenlerinde eşit açıları çevreleyen kenarlar karşılıklı ters orantılıdır, yani CA'nın AD'ye oranı, EA'nın AB'ye oranına eşittir.

Çünkü, öyle yerleştirilsinler ki CA ile AD aynı doğru üzerinde olsun; **[I.14]**

BD birleştirilsin. O zaman, ABC üçgeni, ADEüçgenine eşit olduğundan, ve BAD bir başka alan olduğundan, CAB üçgeninin BAD üçgenine oranı, EAD üçgeninin BAD üçgenine oranına eşittir. **[V.7]**

Ama CAB'nin BAD'ye oranı, CA'nın AD'ye oranıyla aynıdır, **[VI.1]**

ve EAD'nin BAD'ye oranı, EA'nın AB'ye oranıyla aynıdır. **[VI.1]**

Bu durumda CA'nın AD'ye oranı, EA'nın AB'ye oranına eşit olur. **[V.11]**

Öyleyse ABC, ADE üçgenlerinde eşit açıları çevreleyen kenarlar karşılıklı ters orantılıdır.

Şimdi de ABC, ADE üçgenlerinin kenarları karşılıklı ters orantılı olsun, yani EA'nın AB'ye oranı, AB'nin CA'ya oranına eşit olsun;

diyorum ki ABC üçgeni ADE üçgenine eşittir.

Çünkü, eğer BD yeniden birleştirilirse, CA'nın AD'ye oranı, EA'nın AB'ye oranına eşit olduğundan, ve bu arada CA'nın AD'ye oranı, ABC üçgeninin BAD üçgenine oranı olduğundan, ve EA'nın AB'ye oranı, EAD üçgeninin BAD üçgenine oranı olduğundan, **[VI.1]**

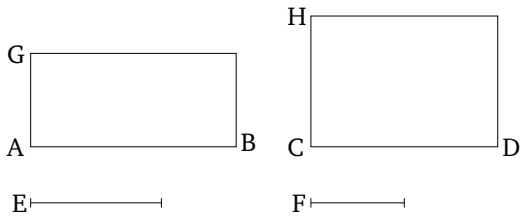
ABC üçgeninin BAD üçgenine oranı, EAD üçgeninin BAD üçgenine oranına eşit olur. **[V.11]**

Bu durumda ABC, EAD üçgenlerinin her birinin BAD üçgenine oranı aynı olur.

Öyleyse ABC üçgeni, EAD üçgenine eşittir.

Bundan dolayı vs …
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

16. Önerme:
Eğer dört doğru orantılıysa, uçtakilerin içerdiği dikdörtgenle ortadakilerin içerdiği dikdörtgen eşittir; ve eğer uçtakilerin içerdiği dikdörtgen ortadakilerin içerdiği dikdörtgene eşitse, bu dört doğru orantılıdır.



Dört doğru AB, BC, E, F orantılı olsun, yani AB'nin CD'ye oranı, E'nin F'ye oranına eşit olsun;

diyorum ki, AB, F'nin içerdiği dikdörtgen, CD, E'nin içerdiği dikdörtgene eşittir.

A, C noktalarından AB, CD doğrularına dik açıyla AG, CH çizilsin, ve AG, F'ye, CH, E'ye eşit yapılsın.

BG, DH paralelkenarları tamamlansın.

O zaman, AB'nin CD'ye oranı, E'nin F'ye oranına eşit olduğundan, ve bu arada E, CH'ye, ve F, AG'ye eşit olduğundan, AB'nin CD'ye oranı, CH'nin AG'ye oranına eşit olur.

Böylece BG, DH paralelkenarlarında, eşit açıları çevreleyen kenarlar karşılıklı ters orantılıdır.

Ama eşit açıları çevreleyen kenarların karşılıklı ters orantılı olduğu eşaçılı paralelkenarlar eşittir. **[VI.14]**

bu durumda BG paralelkenarı DH paralelkenarına eşittir.

Ve AG, F'ye eşit olduğundan, BG paralelkenarı AB, F dikdörtgenidir; ve E, CH'ye eşit olduğuğundan, DH paralelkenarı CD, E dikdörtgenidir;

öyleyse AB, F'nin içerdiği dikdörtgen, CD, E'nin içerdiği dikdörtgene eşittir.

Şimdi de AB, F'nin içerdiği dikdörtgen, CD, E'nin içerdiği dikdörtgene eşit olsun;

diyorum ki bu dört doğru orantılı olacaktır, yani AB'nin CD'ye oranı, E'nin F'ye oranına eşit olacaktır.

Çünkü, aynı çizimle, AB, F dikdörtgeni, CD, E dikdörtgenine eşit olduğundan, ve AG, F'ye eşit olduğu için AB, F dikdörtgeni BG paralelkenarı olduğundan, ve CH, E'ye eşit olduğu için CD, E dikdörtgeni DH paralelkenarı olduğundan, BG eşittir DH olur.

Ve bunlar eşaçılıdır.

Ama eşaçılı eşit paralelkenarlarda eşit açıları çevreleyen kenarlar karşılıklı ters orantılıdır. **[VI.14]**

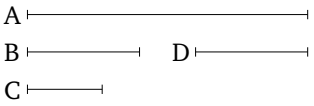
Bu durumda AB'nin CD'ye oranı, CH'nin AG'ye oranına eşit olur.

Ama CH, E'ye eşittir ve AG de F'ye;

öyleyse AB'nin CD'ye oranı, E'nin F'ye oranına eşittir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

17. Önerme:
Eğer üç doğru orantılıysa, uçtakilerin içerdiği dikdörtgen ortadakinin üzerindeki kareye eşittir; ve eğer uçtakilerin içerdiği dikdörtgen ortadaki üzerindeki kareye eşitse, bu üç doğru orantılıdır.



Üç doğru A, B, C orantılı olsun, yani A'nın B'ye oranı, B'nin C'ye oranına eşit olsun.

Diyorum ki, A, C'nin içerdiği dikdörtgen, B'nin üzerindeki kareye eşittir.

B'ye eşit D alınsın.

O zaman, A'nın B'ye oranı, B'nin C'ye oranına eşit olduğundan, ve B de D'ye eşit olduğundan, A'nın B'ye oranı, D'nin C'ye oranına eşittir.

Ama, eğer dört doğru orantılıysa, uçtakilerin içerdiği dikdörtgen, ortadakilerin içerdiği dikdörtgene eşittir. **[VI.16]**

Bu durumda A, C'nin içerdiği dikdörtgen, D, C'nin içerdiği dikdörtgene eşittir.

Ama B, D dikdörtgeni, B üzerindeki karedir, çünkü B eşittir D.

Öyleyse, A, C2nin içerdiği dikdörtgen, B üzerindeki kareye eşittir.

Şimdi de A, C'nin içerdiği dikdörtgen, B üzerindeki kareye eşit olsun.

Diyorum ki, A'nın B'ye oranı, B'nin C'ye oranına eşittir.

Çünkü, aynı çizimle, A, C dikdörtgeni, B üzerindeki kareye eşit olduğundan, ve bu arada D, B'ye eşit olduğu için B üzerindeki kare B, D dikdörtgeni olduğundan, A, C dikdörtgeni, B, D dikdörtgenine eşittir.

Ama, uçtakilerin içerdiği dikdörtgen, ortadakillerin içerdiği dikdörtgene eşitse, bu dört doğru orantılıdır. **[VI.16]**

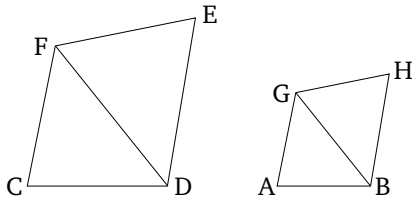
Bu durumda A'nın B'ye oranı, D'nin C'ye oranına eşit olur.

Ama B eşittir D;

öyleyse A'nın B'ye oranı, B'nin C'ye oranına eşittir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

18. Önerme:
Verilen bir doğru üzerine verilen bir düzkenar şekle benzer ve aynı biçimde yerleştirilmiş bir düzkenar şekil çizmenin yolu.



Verilen doğru AB, ve verilen düzkenar şekil CE olsun; böylece AB doğrusu üzerine, CE düzkenar şekline benzer ve aynı biçimde yerleştirilmiş bir düzkenar şekil çizilmesi isteniyor.

DF birleştirilsin, ve AB doğrusunun üzerine, ve üzerindeki A, B noktalarında, C'deki açıya eşit GAB açısı, ve CDF açısına eşit ABG açısı çizilsin. **[I.23]**

Bu durumda kalan CFD açısı AGB açısına eşit olur; **[I.32]**

öyleyse FCD üçgeni, GAB üçgeniyle eşaçılıdır. Bu durumda FD'nin GB'ye oranı, FC'nin GA'ya oranına, ve CD'nin AB'ye oranına eşit olur.

Yine, BG doğrusu üzerine, ve üzerindeki B, G noktalarında, DFEaçısına eşit BGH açısı, ve FDE açısına eşit GBH açısı çizilsin. **[I.23]**

Bu durumda E'de açı, H£de kalan açıya eşit olur; **[I.32]**

öyleyse FDE üçgeni GBH üçgeniyle eşaçılıdır. Bu durumda FD'nin GB'ye oranı, FE'nin GH'ye oranına, ve ED'nin HB'ye oranına eşit olur. **[VI.4]**

Ama FD'nin GB'ye oranının, FC'nin GA'ya oranına, ve CD'nin AB'ye oranına eşit olduğu kanıtlanmıştı;

bu durumda FC'nin AG'ye oranı, CD'nin AB'ye oranına, ve FE'nin GH'ye oranına, ve ayrıca ED'nin HB'ye oranına eşit olur.

Ve, CFD açısı AGB açısına, ve DFE açısı BGH açısına eşit olduğundan, CFEaçısınıntamamı,AGH açısının tamamına eşit olur.

Aynı nedenden dolayı CDE açısı ABH açısına eşittir.

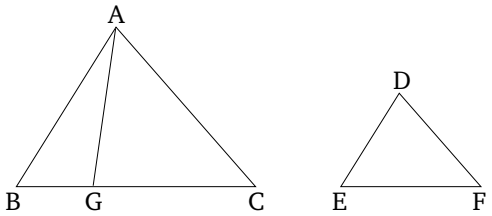
Ve C'deki açı A'daki açıya, ve E'deki açı da H'deki açıya eşittir.

Öyleyse AH şekli CE ile eşaçılıdır, ve eşit açıları çevreleyen kenarları orantılıdır; bu durumda AH düzkenar şekli, CE düzkenar şekliyle benzerdir. **[Tan. VI.1]**

Öyleyse verilen AB doğrusu üzerine, verilen CE düzkenar şekline benzer, ve aynı biçimde AH düzkenar şekli yerleştirilmiş oldu.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

19. Önerme:
Benzer üçgenlerin birbirine oranı karşılıklı kenarların oranının çift oranıdır.



ABC, DEF üçgenleri benzer üçgenler olsun, B'deki açı, E'deki açıya eşit olsun, öyle ki AB'nin BC'ye oranı DE'nin EF'ye oranına eşit olsun, yani BC kenarı EF'ye karşılık gelsin. **[Tan. V.11]**

Diyorum ki, ABC üçgeninin DEF üçgenine oranı, BC'nin EF'ye oranının çift oranıdır.

Çünkü, BC'nin EF'ye oranı, EF'nin BG'ye oranına eşit olacak şekilde BC, EF'ye üçüncü orantılı BG çizilsin, **[VI.11]**

ve AG birleştirilsin.

O zaman, AB'nin BC'ye oranı, DE'nin EF'ye oranına eşit olduğundan, değiştirilmiş oran olarak, AB'nin DE'ye oranı, BC'nin EF'ye oranına eşit olur. **[V.16]**

Ama BC'nin EF'ye oranı, EF'nin BG'ye oranına eşittir; bu durumda AB'nin DE'ye oranı, EF'nin BG'ye oranına eşittir. **[V.11]**

Öyleyse ABG, DEF üçgenlerinde, eşit açıları çevreleyen kenarlar karşılıklı ters orantılıdır.

Ama bir açısı bir açısına eşit olan, ve eşit açıları çevreleyen kenarları karşılıklı ters orantılı olan üçgenler eşittir. **[VI.15]**

bu durumda ABG üçgeniyle DEF üçgeni eşittir.

Şimdi, BC'nin EF'ye oranı, EF'nin BG'ye oranına eşit olduğundan, ve eğer üç doğru orantılıysa, birincinin üçüncüye oranı, birincinin ikinciye oranının çift oranı olduğundan, **[Tan. I.9]**

BC'nin BG'ye oranı, CB'nin EF'ye oranının çift oranıdır.

Ama CB'nin BG'ye oranı, ABC üçgeninin DEF üçgenine oranına eşittir, **[VI.1]**

öyleyse ABC üçgeninin ABG üçgenine oranı da BC'nin EF'ye oranının çift oranıdır.

Ama ABGüçgeniDEF üçgenine eşittir;

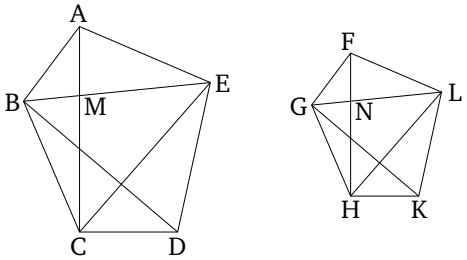
öyleyse ABC üçgeninin DEF üçgenine oranı, BC'nin EF'ye oranının çift oranıdır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

Doğal Sonuç: Buradan açıkça görülür ki, eğer üç doğru orantılıysa, birincinin üçüncüye oranı, birinci üzerine çizilen bir şeklin, ikinci üzerine aynı biçimde çizilen benzer şekle oranına eşittir.

20. Önerme:

Benzer çokgenler benzer üçgenlere ayrılır; bu üçgenlerin sayıları aynıdır ve oranları bütünlerin oranlarına eşittir, ve çokgenin çokgene oranı karşılık gelen kenarların oranının çift oranıdır.



ABCDE, FGHKL benzer çokgenler olsun, ve AB kenarı FG'ye karşılık gelsin.

Diyorum ki, ABCDE, FGHKL çokgenleri benzer üçgenlere ayrılır, ve bu üçgenlerin sayısı eşittir, ve üçgenlerin oranları bütünlerin oranına eşittir, ve ABCDE çokgeninin FGHKL çokgenine oranı, AB'nin FG'ye oranının çift oranıdır.

BE, EC, GL,LH birleştirilsin.

Şimdi, ABCDE çokgeni, FGHKL çokgenine benzer olduğundan, BAE açısı GFL açısına eşittir, ve BA'nın AE'ye oranı, GF'nin FL'ye oranına eşittir. **[Tan. VI.1]**

O zaman, ABE, FGL üçgenlerinin birer açıları eşit ve eşit açıları çevreleyen kenarlar orantılı olduğundan, ABE üçgeniyle FGL üçgeni eşaçılıdır; **[VI.6]**

bu aynı zamanda benzerdir de; **[VI.4, ve Tan. VI.1]**

bu durumda ABE açısı FGL açısına eşit olur.

Ama çokgenlerin benzerliğinden, ABC açısının tamamı FGH açısının tamamına eşittir; bu durumda kalan EBC açısı kalan LGH açısına eşit olur.

Ve ABE, FGL üçgenlerinin benzerliğinden, EB'nin BA'ya oranı, LG'nin GF'ye oranına, ve dahası, çokgenlerin benzerliğinden, AB'nin BC'ye oranı, FG'nin GH'ye oranına eşit olduğundan;

eşit dış oranlar olarak, EB'nin BC'ye oranı, LG'nin GH'ye oranına eşittir; **[V.22]**

yani eşit EBC, LGH açılarını çevreleyen kenarlar orantılıdır; bu durumda EBC üçgeni LGH üçgeniyle eşaçılıdır, **[VI.6]**

böylece EBC üçgeni LGH üçgeniyle benzerdir de. **[VI.4, ve Tan. VI.1]**

Aynı nedenden dolayı ECD üçgeni de LHK üçgeniyle benzerdir. Böylece benzer ABCDE, FGHKL çokgenleri eşit sayıda benzer üçgenlere bölünmüş oldu.

Diyorum ki bunların oranları, bütünlerin oranlarıyla aynıdır, öyle ki üçgenlerin orantısında ABE, EBC, ECD öncül, FGL, LGH, LHK ardıl olur, ve ABCDE çokgeninin FGHKL çokgenine oranı, karşılıklı kenarların oranının,yani AB'nin FG'ye oranının, çift oranıdır.

Çünkü, AC, FH birleştirilsin; o zaman, çokgenlerin benzerliğinden, ABC açısı FGH açısına eşit, ve AB'nin BC'ye oranı, FG'nin GH'ye oranına eşit olduğundan, ABC üçgeni FGH üçgeniyle aşaçılıdır; **[VI.6]**

bu durumda BAC açısı GFH açısına, ve BCA açısı GHF açısına eşit olur.

Ve BAM açısı GFN açısına, ve ABM açısı da FGN açısına eşit olduğundan, kalan AMB açısı kalan FNG açısına eşit olur; **[I.32]**

böylece ABM üçgeni, FGN üçgeniyle eşaçılıdır.

Benzer şekilde, BMC üçgeninin GNH üçgeniyle eşaçılı olduğunu kanıtlayabiliriz.

Bu durumda, AM'nin MB'ye oranı, FN'nin NG'ye oranına, ve BM'nin MC'ye oranı, GN'nin NH'ye oranına eşit olur; ayrıca bu yüzden, eşit dış oranlar olarak AM'nin MC'ye oranı, FN'nin NH'ye oranına eşit olur.

Ama, AM'nin MC'ye oranı, ABm üçgeninin MBC üçgenine oranına, ve AME üçgeninin EMC üçgenine oranına eşittir, çünkü bunların birbirine oranı tabanlarının oranına eşittir. **[VI.1]**

Öyleyse, öncüllerden birinin, ardıllardan birine oranı, öncüllerin tümünün, ardılların tümüne oranına eşit olduğundan, **[V.12]**

AMB üçgeninin BMC üçgenine oranı, ABE üçgeninin CBE üçgenine oranına eşit olur.

Ama, AMB'nin BMC'ye oranı, AM'nin MC'ye oranına eşittir; öyleyse AM'nin MC'ye oranı, ABE üçgeninin EBC üçgenine oranına eşittir.

Aynı nedenden dolayı, FN'nin NH'ye oranı, FGL üçgeninin GLH üçgenine oranına eşittir.

Ve AM'nin MC'ye oranı, FN'nin NH'ye oranına eşit olduğundan, ABE üçgeninin BEC üçgenine oranı, FGL üçgeninin GLH üçgenine oranına eşittir; ve değiştirilmiş oranlar olarak, ABE üçgeninin FGL üçgenine oranı, BEC üçgeninin GLH üçgenine oranına eşit olur.

Benzer şekilde, eğer BD, GK birleştirilirse, BEC üçgeninin LGH üçgenine oranının, ECD üçgeninin LHK üçgenine oranına eşit olduğunu kanıtlayabiliriz.

Ve, ABE üçgeninin FGL üçgenine oranı, EBC'nin LGH'ye oranına, ve ayrıca ECD'nin LHK'ye oranına eşit olduğundan,

ve öncüllerden birininin ardıllardan birine oranı, öncüllerin tümünün ardılların tümüne oranına eşit olduğundan, **[V.12]**

ABE üçgeninin FGL üçgenine oranı, ABCDE çokgeninin FGHKL çokgenine oranına eşittir.

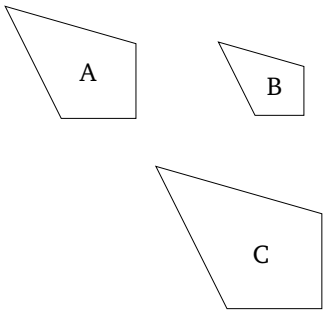
Ama ABE üçgeninin FGL üçgenine oranı, AB kenarının karşı gelen FG kenarına oranının çift oranıdır.; çünkü benzer üçgenlerin oranı karşılıklı kenarların oranının çift oranıdır. **[VI.19]**

Öyleyse ABCDE çokgeninin FGHKL çokgenine oranı, karşılıklı kenarlar AB'nin FL'ye oranının çift oranıdır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

Doğal Sonuç: Dörtgenlerin oranının karşılıklı kenarların oranlarının çift oranı olduğu da benzer şekilde gösterilebilir. Ve bu sonuç üçgenler için de gösterilmişti; öyleyse, genel olarak, benzer düzkenar şekillerin birbirine oranı karşılıklı kenarların oranlarının çift oranıdır.

21. Önerme:
Aynı düzkenar şekle benzer şekiller birbirlerine de benzerdir.



A, B düzkenar şekillerinin her biri C'ye benzer olsun.

Diyorum ki A ve B de benzerdir.

Çünkü, A, C'ye benzer olduğundan, onunla eşaçılıdır ve eşit açıları çevreleyen kenarlar orantılıdır. **[Tan. VI.1]**

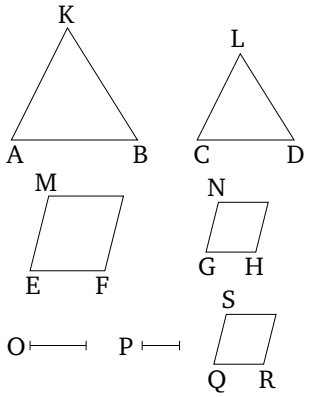
YYine, B, C'ye benzer olduğundan, onunla eşaçılıdır ve eşit açıları çevreleyen kenarlar orantılıdır.

Bu durumda, A, B şekillerinin her biri C ile eşaçılıdır, ve C ile eşit açıları çevreleyen kenarları orantılıdır;

öyleyse A ve B benzerdir.

Bundan dolayı vs …
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

22. Önerme:
Eğer dört doğru orantılıysa, üzerlerine aynı biçimde çizilen benzer düzkenar şekiller de orantılı olacaktır; ve eğer üzerlerine aynı biçimde çizilen benzer düzkenar şekiller orantılıysa, doğruların kendileri de orantılı olacaktır.



AB, CD, EF, GH doğruları orantılı olsun, yani AB'nin CD'ye oranı, EF'nin GH'ye oranına eşit olsun, ve AB, BC üzerine KAB, LCD benzer düzkenar şekilleri aynı biçimde çizilmiş olsun, ve EF, GH üzerine MF, NH benzer düzkenar şekilleri çizilmiş olsun.

Diyorum ki, KAB'nin LCD'ye oranı, MF'nin NH'ye oranına eşittir.

Çünkü, AB, CD'ye üçüncü orantıtılı O, ve EF, GH'ye üçüncü orantılı P alınsın. **[VI.11]**

O zaman, AB'nin CD'ye oranı, EF'nin GH'ye oranına, ve CD'nin O'ya oranı, GH'nin P'ye oranına eşit olduğundan, eşit dış oranlar olarak AB'nin O'ya oranı, EF'nin P'ye oranına eşit olur. **[V.22]**

Ama AB'nin O'ya oranı, KAB'nin LCD'ye oranına, ve EF'nin P'ye oranı, MF'nin NH'ye oranına eşittir; bu durumda KAB'nin LCD'ye oranı, MF'nin NH'ye oranına eşit olur. **[V.11]**

Şimdi de MF'nin NH'ye oranı, KAB'nin LCD'ye oranına eşit olsun.

Diyorum ki, AB'nin CD'ye oranı, EF'nin GH'ye oranına eşittir.

Çünkü, eğer EF'nin GH'ye oranı, AB'nin CD'ye oranına eşit değilse, EF'nin QR'ye oranı, AB'nin CD'ye oranına eşit olsun, **[VI.12]**

ve QR üzerine MF, NH'den herhangi birine benzer, ve aynı biçimde yerleştirilmiş, SR düzkenar şekli çizilsin. **[VI.18]**

O zaman, AB'nin CD'ye oranı, EF'nin QR'ye oranına eşit olduğundan, ve AB, CD üzerine benzer ve ayni biçimde yerleştirilmiş KAB, LCD şekilleri çizilmiş olduğundan, ve EF, QR üzerinde de benzer ve aynı biçimde yerleştirilmiş MF, SR bulunduğundan,

KAB'nin LCD'ye oranı, MF'nin SR'ye oranına eşittir.

Ama varsayıma göre de KAB'nin LCD'ye oranı, MF'nin NH'ye oranına eşittir;

bu durumda MF'nin SR'ye oranı, MF'nin NH'ye oranına eşit olur. **[V.11]**

Böylece MF'nin NH, SR şekillerinin herbirine oranı aynı olur; öyleyse NH eşittir SR. **[V.9]**

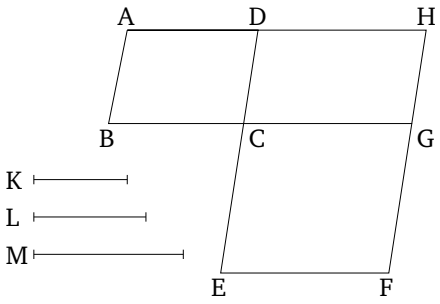
Ama bunlar benzer, ve aynı biçimde yerleştirilmişlerdi; öyleyse GH eşittir QR.

Ve, AB'nin CD'ye oranı, EF'nin QR'ye oranına eşit olduğundan, ve bu arada QR eşittir GH olduğundan,

AB'nin CD'ye oranı, EF'nin GH'ye oranına eşittir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

23. Önerme:
Eşaçılı paralelkenarların birbirine oranı kenarlarının oranlarının bileşik oranına eşittir.



AC, CF eşaçılı paralelkenarlar olsunlar, ve BCD açısı ECG açısına eşit olsun.

Diyorum ki, AC paralelkenarının CF paralelkenarına oranı, kenarlarının oranlarının bileşik oranına eşittir.

Çünkü, BC ile CG aynı doğru üzerinde olacak şekilde yerleştirilsinler; o zaman DC ile CE de aynı doğru üzerinde olur.

DG paralelkenarı tamamlansın; bir K doğrusu alınsın, ve BC'nin CG'ye oranının K'nin L'ye oranına, ve DC'nin CE'ye oranının L'nin M'ye oranına eşit olması sağlansın. **[VI.12]**

O zaman, K'nin L'ye, ve L'nin M'ye oranları kenarların oranlarıyla aynıdır, yani BC'nin CG'ye oranı, ve DC'nin CE'ye oranıyla.

Ama K'nin M'ye oranı, K'nin L'ye oranıyla L'nin M'ye oranının bileşik oranıdır;

yani K'nin M'ye oranı, kenarların oranlarının bileşik oranıdır.

Şimdi, BC'nin CG'ye oranı, AC paralelkenarının CH paralelkenarına oranına eşittir, **[VI.1]**

bu arada BC'nin CH'e oranı, K'nin L'ye oranına eşittir.

Öyleyse, K'nin L'ye oranı, AC'nin CH'ye oranına eşit olur. **[V.11]**

Yine, DC'nin CE'ye oranı, CH paralekenarının CF paralelkenarına oranına eşittir, **[VI.1]**

bu arada DC'nin CE'ye oranı, L'nin M'ye oranına eşittir.

Öyleyse, L'nin M'ye oranı, CH paralelkenarının CF paralelkenarına oranına eşit olur. **[V.11]**

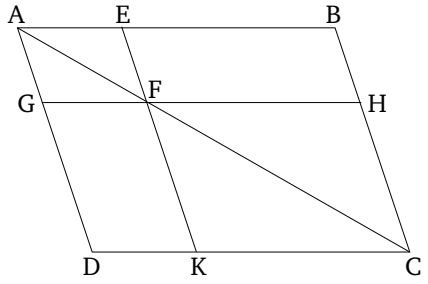
O zaman, K'nin L'ye oranının, AC paralelkenarının CH paralelkenarına oranına, ve L'nin M'ye oranının, CH paralelkenarının CF paralelkenarına oranına eşit olduğu kanıtlanmış olduğundan,

eşit dış oranlar olarak K'nin M'ye oranı, AC paralelkenarının CF paralekenarına oranına eşlittir.

Ama K'nin M'ye oranı, kenarların oranlarının bileşik oranıdır; bu durumda AC'nin CF'ye oranı da kenarların oranının bileşik oranı olur.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

24. Önerme:
Bir paralelkenarda köşegen etrafındaki paralelkenarlar hem birbirlerine hem de paralelkenarın tamamına benzerdir.



ABCD bir paralelkenar, ve AC köşegeni olsun; AC köşegeni etrafındaki paralelkenarlar EG, HK olsun.

Diyorum ki, EG, HK paralelkenarlarının her biri hem ABCD paralelkenarına hem de birbirine benzerdir.

Çünkü, EF doğrusu, ABC üçgeninin kenarlarından biri BC'ye paralel çizildiğinden, BE'nin EA'ya oranı, CF'nin FA'ya oranına eşittir. **[VI.2]**

Yine, FG doğrusu, ACD üçgeninin kenarların biri CD'ye paralel çizildiğinden, CF'nin FA'ya oranı, DG'nin GA'ya oranına eşittir. **[VI.2]**

Ama CF'nin FA'ya oranının BE'nin EA'ya oranına eşit olduğu kanıtlanmıştı; bu durumda BE'nin EA'ya oranı, DG'nin GA'ya oranına eşit olur, birleşik oran olarak, BA'nın AE'ye oranı DA'nın AG'ye oranına eşit olur, **[V.18]**

ve değiştirilmiş oran olarak BA'nın AD'ye oranı, EA'nın AG'ye oranına eşit olur. **[V.16]**

Böylece ABCD, EG paralelkenarlarında, ortak açı BAD'yi çevreleyen kenarlar orantılıdır.

Ve, GF, DC'ye paralel olduğundan, AFG açısı DCA açısına eşittir; ve ADC, AGF üçgenlerinde DAC açısı ortaktır; bu durumda ADC üçgeni AGF üçgeniyle eşaçılıdır.

Aynı nedenden dolayı, ACB üçgeni de AFE üçgeniyle eşaçılıdır, ve ABCD paralelkenarı EG paralelkenarıyla eşaçılıdır.

Bu durumda, AD'nin DC'ye oranı, AG'nin GF'ye oranına,
DC'nin CA'ye oranı, GF'nın FA'ya oranına,
AC'nin CB'ye oranı, AF'nin FE'ya oranına,
ve ayrıca CB'nin BA'ya oranı, FE'nin EA'ya oranına eşit olur.

Ve, DC'nin CA'ya oranının, GF'nin FA'ya oranına,
ve AC'nin CB'ye oranının, AF'nin FE'ye oranına eşit olduğu kanıtlanmış olduğundan,

eşit dış oranlar olarak C'nin CB'ye oranı, GF'nin FE'ye oranına eşittir. **[V.22]**

Böylece ABCD, EG paralelkenarlarında, eşit açıları çevreleyen çevreleyen kenarlar orantılıdır; öyleyse ABCD paralelkenarı, EG paralelkenarıyla benzerdir. **[Tan. VI.1]**

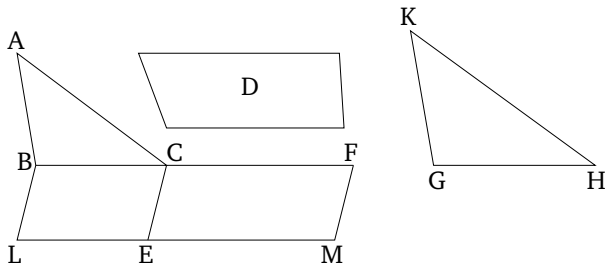
Aynı nedenden dolayı, ABCD paralelkenarı, KH paralelkenarına da benzerdir; bu durumda EG, HK paralelkenarlarının her biri ABCD paralekenarına benzerdir.

Ama aynı düzkenar şekle benzer olan şekiller birbirine de benzer; **[VI.21]**

öyleyse EG paralelkenarı, HK paralelkenarına benzerdir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

25. Önerme:
Verilen bir düzkenar şekle benzer ve verilen başka bir düzkenar şekle eşit tek bir şekil çizmenin yolu.



Çizilecek şeklin benzer olmak zorunda olduğu verilen düzkenar şekil ABC olsun, ve D de eşit olacağı şekil olsun.

BC üzerine ABC üçgenine eşit BE paralelkenarı çizilsin, **[I.44]**

ve CE üzerine, CBLaçısınaeşitFCE açısı içine, D'ye eşit CM paralelkenarı çizilsin. **[I.45]**

Bu durumda, BC, CF ile, ve LE, EM ile aynı doğru üzerinde olur.

Şimdi, BC, CF'nin orta orantılısı olarak GH alınsın, **[VI.13]**

ve ABC'ye benzer ve aynı biçimde yerleştirilmiş KGH çizilsin. **[VI.18]**

O zaman, BC'nin GH'ye oranı, GH'nin CF'ye oranına eşit olduğundan, ve eğer üç doğru orantılıysa, birincinin üçüncüye oranı, birinci üzerine çizilen şeklin üçüncü üzerine çizilen benzer ve aynı biçimde çizilmiş şekle oranına eşit olduğundan, **[DS. VI.19]**

BC'nin CF'ye oranı, ABC üçgeninin KGH üçgenine oranına eşittir.

Ama BC'nin CF'ye oranı, BE paralelkenarının EF paralelkenarına oranına eşittir. **[VI.1]**

Öyleyse ABC üçgeninin KGH üçgenine oranı da, BE paralelkenarının EF paralelkenarına oranına eşittir;

bu durumda değiştirilmiş oranlar olarak, ABCüçgeninin BE paralelkenarına oranı, KGH üçgeninin EF paralelkenarına oranına eşit olur. **[V.16]**

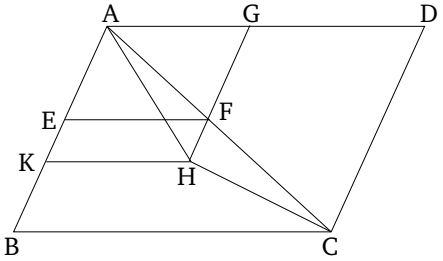
Ama ABC üçgeni BE paralelkenarına eşittir; bu durumda KGH de D'ye eşit olur.

Ve KGH ile ABC benzerdir.

Öyleyse verilen düzkenar ABC şekline benzer, ve aynı biçimde yerleştirilmiş, ve verilen diğer düzkenar şekil D'ye eşit KGH şekli çizilmiş oldu.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. QEF

26. Önerme:
Eğer bir paralelkenardan ona benzer, aynı biçimde yerleştirilmiş ve bir ortak açıya sahip bir paralelkenar çıkarılırsa, çıkarılan paralelkenar bütününkiyle aynı köşegen etrafındadır.



ABCD paralelkenarından, ona benzer, aynı biçimde yerleştirilmiş ve DAB ortak açısına sahip AF paralelkenarı çıkarılsın;

Diyorum ki ABCD ve AF aynı köşegen etrafındadır.

Çünkü, öyle olmadığını varsayalım, ve mümkünse köşegen AHC olsun, ve GF doğrusu H'ye kadar uzatılsın, H noktasından AD, BC doğrularından birine HK paraleli çizilsin. **[I.31]**

O zaman, ABCD ile KG aynı köşegen etrafında olduklarından, DA'nın AB'ye oranı, GA'nın AK'ye oranına eşittir. **[VI.24]**

Ama ABCD ile EG'nin benzerliklerinden dolayı, DA'nın AB'ye oranı, GA'nın AE'ye oranına da eşittir;

bu durumda GA'nın AB'ye oranı, GA'nın AE'ye oranına eşit olur. **[V.11]**

Öyleyse GA'nın AK, AE doğrularından her birine oranı aynıdır.

bu durumda AE eşittir AK olur, **[V.9]**

yani küçük olan büyük olana eşit: bu olamaz.

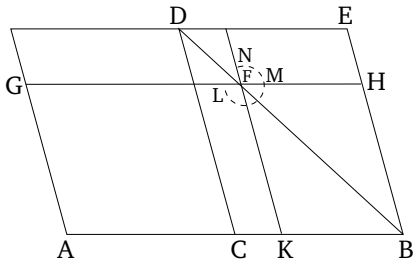
Bu yüzden ABCD paralelkenarı AF'ninkinden başka bir köşegen etrafında olamaz.

Öyleyse ABCD paralelkenarı AF paralelkenarıyla aynı köşegen etrafındadır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

27. Önerme:

Bir doğru üzerine çizilen, ve doğrunun yarısı üzerine çizilmiş bir paralelkenara benzer ve aynı biçimde çizilmiş paralelkenarlar kadar tümden eksik kalan bütün paralelkenarlar arasında en büyüğü, doğrunun yarısı üzerine çizilen ve eksik kaldığı paralelkenara benzer olan paralelkenardır.



AB bir doğru olsun ve C'de ikiye bölünmüş olsun; AB'nin yarısı üzerine, yani CB üzerine çizilmiş bir DB paralelkenarı kadar tümden eksik kalan AD paralelkenarı AB üzerine çizilsin.

Diyorum ki, AB üzerine çizilen, ve tümden DB'ye benzer ve aynı biçimde çizilmiş paralelkenarlar kadar eksik olan paralelkenarlar arasında en büyüğü AD'dir.

Çünkü, DB'ye benzer ve aynı şekilde çizilmiş FB paralelkenarı kadar tümden eksik olan AF paralelkenarı AB üzerine çizilsin.

Diyorum ki, AD, AF'den büyüktür.

Çünkü, DB paralelkenarı FB paralelkenarına benzer olduğu için, aynı köşegen etrafındalar. **[VI.26]**

Köşegenleri DB olsun ve çizilsin, ve şekil tamamlansın.

O zaman, CF, FE'ye eşit olduğundan, **[I.43]**

ve FB ortak olduğundan, CH'nin tamamı, KE'nin tamamına eşittir.

Ama AC eşittir CB olduğundan, CH eşittir CG. **[I.36]**

Bu durumda GC eşittir EK olur. Bunlara CF eklenasin;

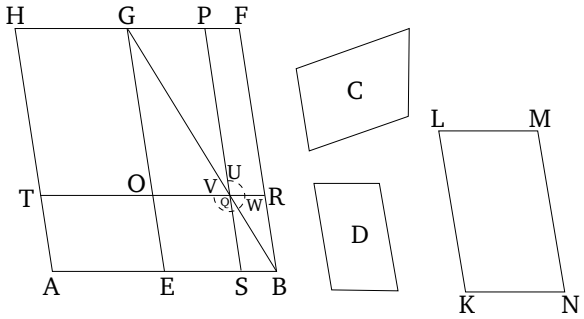
O zaman AF'nin tamamı LMN kadranına eşit olur;

Öyleyse $DB paralelkenarı, yani AD, AF$ paralelkenarından büyüktür.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

28. Önerme:

Bir doğru üzerine, verilen bir düzkenar şekle eşit, ve verilen bir paralelkenara benzer bir paralelkenar kadar tümden eksik, bir paralelkenar çizmenin yolu; böylece verilen düzkenar şekil, verilen paralelkenara benzer ve doğrunun yarısı üzerine çizilen paralelkenardan büyük olmamalıdır.



Verilen doğru AB olsun. C de, AB'nin yarısı üzerine ve fark şekline benzer çizilecek paralelkenardan büyük olmamak şartıyla, AB üzerine çizilecek paralelkenarın eşit olacağı düzkenar şekil olsun. D de fark paralelkenarının benzer olacağı paralelkenar olsun.

Böylece, AB üzerine, verilen C düzkenar şekle eşit, ve tümden D'ye benzer bir paralelkenar kadar eksik olan bir paralelkenar çizilmesi isteniyor.

AB doğrusu E'de ikiye bölünsün, ve EB üzerine D'ye benzer ve aynı biçimde yerleştirilmiş EBFG paralelkenarı çizilsin, **[VI.18]**

ve AG paralelkenarı tamamlansın.

Eğer AG, C'ye eşitse, istenen çizim yapılmış olacaktır; çünkü AB üzerine C'ye eşit, ve bütünden D'ye benzer GB paralelkenarı kadar eksik, AG paralelkenarı çizilmiş oldu.

Ama eşit değilse, HE, C'den büyük olsun.

Şimdi HE eşittir GB; öyleyse GB de C'den büyüktür.

D'ye benzer ve aynı biçimde yerleştirilmiş, ve GB'nin C'den fazlalığına eşit olan KLMN çizilsin. **[VI.25]**

Ama D ile GB benzerdir; öyleyse KM de GB'ye benzerdir. **[VI.21]**

O zaman, KL, GE'ye, ve LM, GF'ye karşılık gelsin.

Şimdi, GB paralelkenarı C, KM'ye eşit olduğundan, GB, KM'den büyüktür; bu durumda GE, KL'den, ve GF, LM'den büyük olur.

KL'ye eşit GO, ve LM'ye eşit GP çizilsin; ve OGPQ paralelkenarı tamamlansın; o zaman KM'ye eşittir.

Öyleyse GQ da GB'ye benzerdir; **[VI.21]**

bu durumda GQ ve GB aynı köşegen etrafındadır. **[VI.26]**

Köşegenleri GQB olsun ve şekil tamamlansın. O zaman, BG paralelkenarı C, KM'ye eşit olduğundan, ve içerde GQ eşittir KM olduğundan, kalan UWV kadranı, kalan C'ye eşittir.

Ve PR, OS'ye eşit olduğundan, bunlara QB eklensin; bu durumda PB eşittir OB olur.

Ama AE kenarı EB kenarına eşit olduğundan, OB eşittir EB; **[I.36]**

bu durumda TE de PB'ye eşittir.

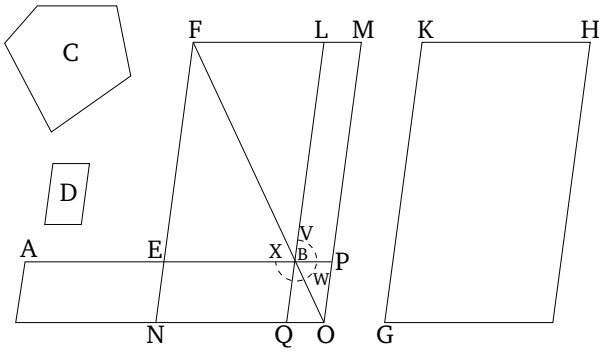
Bunlara OS eklensin; o zaman TS'nin tamamı, VWU kadranına eşit olur.

Ama VWU kadranının C'ye eşit olduğu kanıtlanmıştı; demek ki TS de C'ye eşittir.

Öyleyse verilen AB doğrusu üzerine, verilen C düzkenar şekle eşit, ve tümden D'ye benzer QB paralelkenarı kadar eksik olan TS paralelkenarı çizilmiş oldu.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. QEF

29. Önerme:
Bir doğrunun üzerine, taşan kısım verilen bir paralelkenara benzer olacak şekilde, verilen bir düzkenar şekle eşit paralelkenar çizmenin yolu.



Verilen doğru AB olsun, ve AB üzerine çizilecek paralelkenarın eşit olacağı düzkenar şekil C olsun, ve D de taşan kısmın benzer olması istenen paralelkenar olsun.

Böylece, AB üzerine, taşan kısmı D paralelkenarına benzer olan, C düzkenar şekline eşit bir paralelkenar çizilmesi isteniyor.

AB doğrusu E'de ikiye bölünsün; EB üzerine D'ye benzer ve aynı biçimde yerleştirilmiş BF paralelkenarı çizilsin;

ve BF, C toplamına eşit, D'ye benzer ve aynı biçimde yerleştirilmiş GH paralelkenarı çizilsin. **[VI.25]**

KH, FL'ye, ve KG, FE'ye karşılık gelsin

Şimdi, GH, FB'den büyük olduğundan, KH de FL'den, ve KG, FE'den büyüktür.

FL, FE uzatılsın, FLM, KH'ye, ve FEN, KG'ye eşit olsun, ve MN tamamlansın.

Bu durumda MN, D'ye hem eşit hem de benzer olur.

Ama GH, EL'ye benzerdir; öyleyse MN de EL'ye benzerdir. **[VI.21]**

Bu durumda EL ve MN aynı köşegen etrafındadır. **[VI.26]**

Köşegenleri FO çizilsin, ve şekil tamamlansın.

GH paralelkenarı EL,C'ye eşit olduğundan, ve bu arada GH eşittir MN olduğundan, MN de EL, C'ye eşit olur.

Bunlardan EL çıkarılsın; o zaman kalan *XWV* kadranı C'ye eşittir.

Şimdi, AE eşittir EB olduğundan, AN de NB'ye eşit olur, **[I.36]**

yani LP'ye. **[I.43]**

Bunlara EO eklensin; o zaman AO'nun tamamı *VWX* kadranına eşit olur.

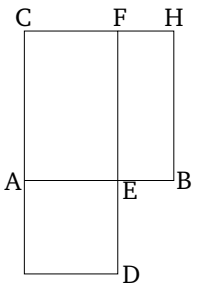
Ama *VWX* kadranı C'ye eşittir; bu durumda AO eşittir C olur.

Böylece, PQ, EL'ye benzer olduğundan, **[VI.24]**

verilen AB doğrusu üzerine, taşan kısmı, D'ye benzer QP paralelkenarı olan, ve verilen C düzkenar şekline eşit AO paralelkenarı çizilmiş oldu.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. QEF

30. Önerme:
Verilen bir doğruyu uç ve orta oranda kesmenin yolu.



Verilen sonlu doğru AB olsun; böylece AB'nin uç ve orta oranda kesilmesi isteniyor.

AB üzerine BC karesi çizilsin; AC üzerine, taşan kısmı BC'ye benzer AD şekli olan, BC'ye eşit CD paralelkenarı çizilsin. **[VI.29]**

Şimdi, BC bir karedir; bu durumda AD de karedir.

Ve, BC eşittir CD olduğundan, bunlardan CD çıkarılsın; bu durumda kalan BF, kalan AD'ye eşit olur.

Ama aynı zamanda onunla eşaçılıdır da; bu nedenle BF, AD'de eşit açıları çevreleyen kenarlar karşılıklı ters orantılıdır; **[VI.14]**

bu durumda FE'nin ED'ye oranı, AE'nin EB'ye oranına eşit olur.

Ama FE eşittir AB, ve ED eşittir AE.

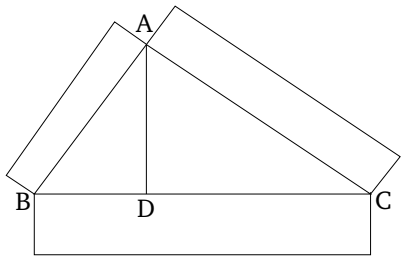
Bu durumda, BA'nın AE'ye oranı, AE'nin EB'ye oranına eşit olur.

Ve AB, AE'den büyüktür;

Öyleyse AB doğrusu, E'de uç ve orta oranda kesilmiştir, ve büyük parça AE'dir.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. QEF

31. Önerme:
Dik üçgenlerde dik açıyı gören kenar üzerine çizilen şekil, dik açıyı çevreleyen kenarlar üzerine çizilen benzer ve aynı biçimde yerleştirilmiş şekillere eşittir.



ABC bir dik üçgen olsun; dik açısı BAC olsun.

Diyorum ki, BC üzerindeki şekil, BA,AC üzerine benzer ve aynı biçimde yerleştirilmiş şekillere eşittir.

AD dik olarak çizilsin.

O zaman, ABC dik üçgeninde, AD doğrusu, A'daki dik açıdan , BC tabanına dik çizildiğinden, dikmeye komşu ABD, ADC üçgenleri birbirlerine ve bütün ABC üçgenine benzerdir. **[VI.8]**

Ve, ABC, ABD'ye benzer olduğundan, CB'nin BA'ya oranı, AB'nin BD'ye oranına eşittir. **[Tan. VI.1]**

Ve, üç doğru orantılı olduğundan, birincinin üçüncüye oranı, birinci üzerindeki şeklin, ikinci üzerine çizilen benzer ve aynı biçimde yerleştirilmiş şekle oranına eşittir. **[DS. VI.19]**

Öyleyse CB'nin BD'ye oranı, CB üzerindeki şeklin BA üzerine çizilen benzer ve aynı biçimde yerleştirilmiş eşkle oranına eşittir.

Aynı nedenden dolayı, BC'nin CD'ye oranı, BCdeki şeklin CA'daki şekle oranına eşittir;

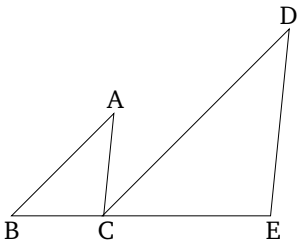
ayrıca BC'nin BD, DC'ye oranları, BC üzerindeki şeklin, BA, AC üzerlerine çizilmiş benzer ve aynı biçimde yerleştirilmiş şekillere oranlarına eşittir.

Ama BC eşittir BD, AC;

öyleyse BC üzerindeki şekil, BA, AC üzerlerine çizilmiş benzer ve aynı biçimde yerleştirilmiş şekillere eşittir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

32. Önerme:
Karşılıklı ikişeranda paralel olacak şekilde bir köşede bir araya getirilirlerse, kalan kenarları aynı doğru üzerinde olacaktır.



ABC, DCE üçgenlerinde, birinin iki kenarı BA, AC, diğerinin iki kenarı DC, DE ile orantılı olsun, yani AB'nin AC'ye oranı, DC'nin DE'ye oranına eşit olsun; ve, AB, DC'ye ve AC, DE'ye paralel olsun.

Diyorum ki, BC ile CE aynı doğru üzerindedir.

Çünkü, AB, DC'ye paralel olduğundan, ve AC doğrusu onları kestiğinden, ters iç açılar BAC, ACD birbirine eşittir. **[I.29]**

Aynı nedenden dolayı, CDE açısı da ACD açısına eşittir; böylece BACaçısıCDE açısına eşit olur.

Ve, ABC, DCE üçgenlerinde birinin bir açısı, A'daki açı, diğerinin bir açısına, D'deki açı, eşit olduğundan, ve eşit açıyı çevreleyen kenarlar orantılı olduğundan, yani BA'nin AC'ye oranı, CD'nin DE'ye oranına eşit olduğundan, ABC üçgeni DCE üçgeniyle eşaçılıdır; **[VI.6]**

öyleyse ABC açısı, DCE açısına eşittir.

Ama ACD açısının BAC açısına eşit olduğu kanıtlanmıştı;

bu durumda ACE açısının tamamı ABC, CBA açılarına eşittir.

Bunlara ACB açısı eklensin;

bu durumda ACE, ACB açıları BAC, ACB, CBA açılarına eşit olur.

Ama BAC, ABC, ACB açıları iki dik açıya eşittir; **[I.32]**

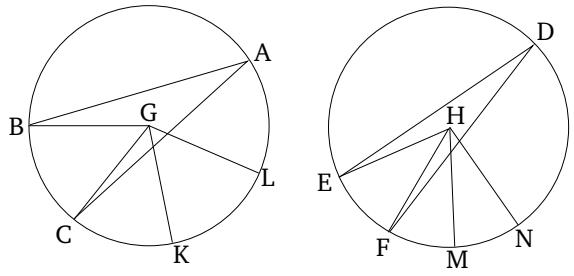
bu durumda ACE, ACB açıları da iki dik açıya eşit olur.

Bu nedenle, AC doğrusuyla C noktasında, onun aynı tarafında olmayan BC, CE doğruları komşu ACE, ACB açılarını iki dik açıya eşit yapar;

öyleyse BC ile CE aynı doğru üzerindedir. **[I.14]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

33. Önerme:
Eşit çemberlerde açılar, ister merkezde ister çevrede olsunlar, gördükleri çevreyle aynı orandadırlar.



ABC, DEF eşit çemberler olsun, ve BGC, EHF onların merkezleri G, H'de açılar olsun, ve BAC, EDF çevre üzerinde açılar olsun;

diyorum ki, BC*çevresinin*EF çevresine oranı, BGC açısının EHF açısına oranına, ve BAC*açısının*EDF açısına oranına eşittir.

Çünkü, herhangi bir sayıda ardışık CK, KL çevresi BC çevresine eşit çizilsin,

ve herhangi bir sayıda ardışık FM, MN çevresi EF çevresine eşit çizilsin;

ve GK, GL, HM, HN birleştirilsin.

O zaman, BC, CK, KL çevreleri birbirine eşit olduğundan, BGC, CGK, KGL açıları da birbirine eşit olur; **[III.27]**

öyleyse, BL çevresi BC çevresinin hangi katıysa, BGL açısı da BGC açısının aynı katı olur.

Aynı nedenden dolayı, NE çevresi EF'in hangi katıysa, NHE açısı da EHF açısının aynı katıdır.

O zaman, eğer BL çevresi EN çevresine eşitse, BGL açısı da EHN açısına eşittir; **[III.27]**

eğer BL çevresi EN çevresinden büyükse, BGL açısı da EH açısından büyüktür; eğer küçükse, küçüktür.

Dört nicelik, iki çevre BC, EF, ve iki açı BGC,EHF, olduğundan, BC çevresi ve BGC açısının eşkatları, yani BL çevresi ve BGL açılsı alındı,

ve EF çevresi ve EHF açısının eşkatları, yani EN çevresi ve EHN açısı alındı.

Ve, eğer BL çevresi EN çevresinden büyükse, BGL açısının da EHN açısından büyük olacağı, eğer eşitse eşit, ve küçükse küçük olacağı kanıtlandı.

Öyleyse, BC çevresinin EF'ye oranı, BGC açısının EHF açısına oranına eşittir. **[Tan. V.5]**

Ama, BGC açısının EHF açısına oranı, BAC açısının EDF açısına oranına eşittir, çünkü bunlar sırasıyla öbürlerinin iki katıdır.

Öyleyse BC çevresinin EF çevresine oranı, BGC açısının EHF açısına oranına, ve BAC açısının EDF açısına oranına eşittir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

Kitap VII

1. Tanımlar

1 **Birim**, var olan her şeyin özellikleriyle kıyaslandığında kendisine bir denilendir.

2 Birimlerden oluşan niceliğe **sayı** denir.

3 Kendinden büyük bir sayıyı ölçen sayı büyük sayının **parçasıdır**;

["Ölçmek" tam olarak bölmek demektir. Parça böldüğü sayıdan küçüktür; bir sayı kendi kendisinin parçası değildir.]

4 ama ölçmüyorsa **parçalarıdır**.

[Eğer $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ iken, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$'yi bölüyorsa, Öklid $\mathfrak{m}$ için 'parça", bölmüyorsa "parçalar" terimini kullanıyor. Tanımlarda ve önermelerde "parçalar" dendiğinde ne zaman pek çok parçadan söz edildiği, ya da ne zaman bir tek parçalardan söz edildiği konunun içeriğinden anlaşılıyor.]

5 Kendinden küçük sayı tarafından ölçülen sayı küçük sayının **katıdır**.

6 İki eşit parçaya bölünebilen sayı **çift sayıdır**.

7 İki eşit parçaya bölünemeyen, ya da çift bir sayıdan farkı bir olan sayı **tek sayıdır**.

8 **Çift kere çift sayı**, bir çift sayı tarafından çift bir sayı kadar ölçülen sayıdır.

[İki çift sayının çarpımı olan sayı.]

9 **Çift kere tek sayı**, bir çift sayı tarafından tek bir sayı kadar ölçülen sayıdır.

[Bir çift sayıyla tek sayının çarpımı olan sayı.]

10 **Tek kere tek sayı**, bir tek sayı tarafından tek bir sayı kadar ölçülen sayıdır.

[İki tek sayının çarpımı olan sayı.]

11 **Asal sayı**, yalnızca birim tarafından ölçülen sayıdır.

12 **Aralarında asal** sayılar, ortak ölçü olarak yalnızca birimle ölçülen sayılardır.

13 **Bileşik sayı**, bir sayı tarafından ölçülen sayıdır.

[Antik Yunan matematiğinde birim *bir sayı olarak düşünülmez.]*

14 **Aralarında bileşik** sayılar, ortak bir ölçü olarak bir sayıyla ölçülen sayılardır.

15 Bir sayının bir sayıyı **çarpması** demek, çarpılan sayının diğer sayının içindeki birim kadar kendi kendisiyle toplanması, ve böylece bir sayı oluşturulması demektir.

16 Ve iki sayı birbiriyle çarpılıp bir sayı elde edildiğinde o sayıya **düzlem**, ve onu elde etmek için çarpılan sayılara onun **kenarları** denir.

17 Ve üç sayı birbiriyle çarpılarak elde edilen sayıya **cisim**, ve onu elde etmek için çarpılan sayılara onun **kenarları** denir.

18 İki eşit sayının çarpılmasıyla elde edilen sayıya, ya da iki eşit sayı tarafından içerilen sayıya, **kare sayı** denir.

19 Üç eşit sayının çarpılmasıyla elde edilen sayıya, ya da üç eşit sayı tarfından içerilen sayıya, **küp** denir.

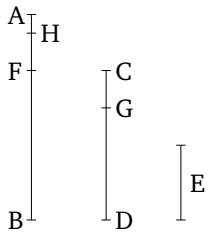
20 Birinci sayı ikincinin hangi katı, parçası, ya da parçalarıysa, üçüncü de dördüncüye göre aynıysa, bu dört sayı **orantılıdır**.

21 **Benzer düzlem** ve **cisim** sayıları, kenarları orantılı olanlardır.

22 **Mükemmel sayı**, parçalarının toplamına eşit olandır.

2. Önermeler

1. Önerme:
Eşit olmayan iki sayı alındığında, sürekli olarak sırasıyla küçük olan büyük olandan çıkarıldığında, eğer birim kalana kadar hiçbir kalan sayı bir öncekini ölçmüyorsa, ilk sayılar aralarında asal olacaktır.



Eşit olmayan AB, CD sayılarından küçük olan sürekli olarak büyük olandan çıkarıldığında, kalan sayı sonuna kadar, hiçbir zaman bir öncekini ölçmesin;

diyorum ki, AB, CD aralarında asaldır, yani yalnızca birim AB, CD'yi ölçer.

Çünkü, eğer AB, CD aralarında asal değilse, bir sayı onları ölçecektir.

Bir sayı onları ölçsün ve o sayı E olsun; CD, BF'i ölçsün ve kendinden küçük FA kalan olsun.

AF, DG'yi ölçsün ve kendinden küçük GC kalan olsun, ve GC, FH'yi ölçsün ve kalan HA birim olsun.

E, CD'yi ölçtüğünden, ve CD, BF'yi ölçtüğünden, E, BF'yi de ölçer.

Ama BA'yı da ölçer; bu durumda AF'yi de ölçecektir.

Ama AF, DG'yi ölçer; öyleyse E, DG'yi de ölçer.Ama DC'nin tamamını da ölçer; bu durumda kalan CG'yi de ölçecektir.

Ama CG, FH'yi ölçer; öyleyse E, FH'yi ölçer.

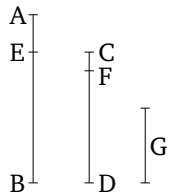
Ama FA'nın tamamını da ölçer; bu durumda kendisi sayı olmasına rağmen, kalanı yani birim olan AH'yi de ölçecektir: bu olamaz.

Öyleyse AB, CD'yi hiçbir sayı ölçemez; bu durumda AB, CD aralarında asaldır.

Bundan dolayı vs …
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

2. Önerme:
Aralarında asal olmayan iki sayı verildiğinde, bunların en büyük ortak ölçüsünü bulmanın yolu.

[En büyük ortak bölen aranıyor.]



AB, CD aralarında asal olmayan iki sayı olsun. Böylece AB, CD'nin en büyük ortak ölçüsünün bulunması isteniyor.

Şimdi, eğer CD, AB'yi ölçerse, kendisini de ölçtüğünden, AB, CD'nin ortak ölçüsü CD'dir.

Ve en büyük olduğu da açıkça bellidir, çünkü CD'den büyük hiçbir sayı CD'yi ölçmez.

Ama eğer CD, AB'yi ölçmezse, o zaman AB, CD sayılarının küçük olanı sürekli olarak büyük olandan çıkarıldığında, kendinden bir öncekini ölçen bir sayı kalacaktır.

Çünkü, bir birim kalamaz, yoksa AB, CD aralarında asal olurlardı **[VII.1]**

ki bu varsayıma aykırıdır.

Öyleyse, kendinden bir öncekini ölçen bir sayı kalacak.

Şİmdi, CD, BE'yi ölçsün ve kendinden küçük EA kalsın; EA, DF'yi ölçsün, kendinden küçük FC kalsın; ve CF, AE'yi ölçsün.

O zaman, CF, AE'yi ölçtüğünden, ve AE, DF'yi ölçtüğünden, CF, DF'yi de ölçer.

Ama kendisini de ölçer; bu durumda CD'nin tamamını da ölçer.

Ama CD, BE'yi ölçer; öyleyse CF, BE'yi de ölçer.

Ama EA'yı da ölçer; öyleyse BA'nın tamamını da ölçer.

Ama CD'yi de ölçer; öyleyse CF sayısı AB, CD'yi ölçer.

Bu durumda CF sayısı AB, CD'nin ortak ölçüsüdür.

Şimdi de diyorum ki en büyüktür de.

Çünkü, eğer CF sayısı AB, CD'nin en büyük ortak ölçüsü değilse, CF'den daha büyük bir sayı AB, CD sayılarını ölçecektir.

Böyle bir sayı onları ölçsün, ve bu G olsun.

Şimdi, G, CD'yi ölçtüğünden, ve bu arada CD, BE'yi ölçtüğünden, G, BE'yi de ölçer.

Ama BA'nın tamamını da ölçer; bu durumda kalan AE'yi de ölçecektir.

Ama AE, DF'yi ölçer; bu durumda G, DF'yi de ölçecektir.

Ama DC'nin tamamını da ölçer; öyleyse kalan CF'yi de ölçecektir, yani büyük olan küçük olanı ölçecektir: bu olamaz.

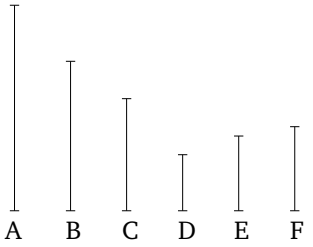
Bu nedenle CF'den büyük hiçbir sayı AB, CD'yi ölçmeyecektir.

Öyleyse CF sayısı AB, CD'nin en büyük ortak ölçüsüdür.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

Doğal Sonuç: Buradan açıkça görülür ki eğer bir sayı iki sayıyı ölçerse, onların en büyük ortak ölçüsünü de ölçer.

3. Önerme:
Aralarında asal olmayan üç sayı verildiğinde, bunların en büyük ortak ölçüsünü bulmanın yolu.



A, B, C aralarında asal olmayan üç sayı olsun; böylece A, B, C'nin en büyük ortak ölçüsünün bulunması isteniyor.

A, B'nin en büyük ortak ölçüsü D alınsın; **[VII.2]**

o zaman D, C'yi ya ölçer, ya da ölçmz.

Önce ölçsün.

Ama A, B'yi de ölçer; öyleyse D sayısı A, B, C2yi ölçer; bu durumda D sayısı A, B, C'nin ortak ölçüsüdür.

Diyorum ki en büyüktür de.

Çünkü, eğer D sayısı A, B, C'nin en büyük ortak ölçüsü değilse, D'den daha büyük bir sayı A, B, C'yi ölçecektir.

Böyle bir sayı onları ölçsün, ve bu E olsun.

E sayısı A, B, C'yi ölçtüğünden, A, B'yi de ölçecektir; o zaman A, B'nin en büyük ortak ölçüsünü de ölçecektir. **[DS. VII.2]**

Ama A, B'nin en büyük ortak ölçüsü D'dir; bu durumda E, D'yi ölçecektir, yani büyük olan küçük olanı: bu olamaz.

Öyleyse D'den daha büyük hiçbir sayı A, B, C'yi ölçemez.

Bu durumda D sayısı A, B, C'nin en büyük ortak ölçüsüdür.

Şimdi de, D, C'yi ölçmesin.

İlk olarak diyorum ki, C, D aralarında asal değildir.

Çünkü, A, B, C aralarında asal olmadığından, bir sayo onları ölçecektir.

Şimdi, A, B, C, yi ölçen sayı A, B'yi de ölçecektir, ve A, B'nin en büyük ortak ölçüsü D'yi ölçecektir. **[DS. VII.2]**

Ama C'yi de ölçer; öyleyse bir sayı D, C'yi ölçecektir; bu durumda D, C aralarında asal değildir.

O zaman onların en büyük ortak ölçüsü E alınsın. **[VII.2]**

O zaman, E, D'yi ölçtüğünden, ve D sayısı A, B'yi ölçtüğünden, E sayısı A, B'yi ölçer.

Ama C'yi de ölçer;

öyleyse E sayısı A, B, C'yi ölçer; bu durumda E sayısı A, B, C'nin ortak ölçüsüdür.

Şimdi diyorum ki en büyüktür de.

Çünkü, eğer A, B, C'nin en büyük ortak ölçüsü E değilse, E'den daha büyük bir sayı A, B, C'yi ölçecektir.

Böyle bir sayı onları ölçsün, ve bu F olsun.

Şimdi, F sayısı A, B, C'yi ölçtüğünden, A, B'yi de ölçer; öyleyse A, B'nin en büyük ortak ölçüsünü de ölçecektir. **[DS. VII.2]**

Ama A, B'nin en büyük ortak ölçüsü D'dir; bu durumda F, D'yi ölçer.

Ve C'yi de ölçer; öyleyse F sayısı D, C'yi ölçer; bu durumda D, C'nin en büyük ortak ölçüsünü de ölçecektir. **[DS. VII.2]**

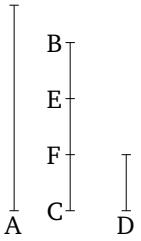
Ama D, C'nin en büyük ortak ölçüsü E'dir; bu durumda F, E'yi ölçer, yani büyük olan küçük olanı: bu olamaz.

Bu nedenle E'den büyük hiçbir sayı A, B, C sayılarını ölçmeyecektir.

Öyleyse A, B, C'nin en büyük ortak ölçüsü E'dir.

Bundan dolayı vs …
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

4. Önerme:
Her sayı, kendinden büyük başka bir sayının ya parçasıdır ya da parçalarıdır.



A, BC iki sayı olsun, ve BC de küçük olan.

Diyorum ki BC, A'nın ya parçasıdır, ya da parçalarıdır.

Çünkü, A, BC ya aralarında asaldır, ya da değil.

Önce, A, BC aralarında asal olsun.

O zaman, eğer BC içindeki birimlere ayrılırsa, BC'deki her bir birim A'nın bir parçası olacaktır; böylece BC, A'nın parçaları olur.

Şimdi de A, BC aralarında asal olmasın; o zaman BC, A'yı ya ölçer ya da ölçmez.

Şimdi eğer BC, A'yı ölçerse, BC, A'nın parçasıdır.

Ama eğer ölçmezse, A, BC'nin en büyük ortak ölçüsü D alınsın; **[VII.2]**

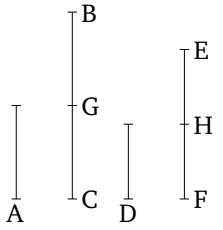
ve BC, D'ye eşit sayıda parçaya ayrılsın, bunlar BE, EF, FC olsun.

Şimdi, D, A'yı ölçtüğünden, D, A'nın parçasıdır. Ama D sayısı BE, EF, FC sayılarının her birine eşittir; bu durumda BE, EF, FC sayılarının her biri A'nın parçasıdır; böylece BC, A'nın parçası olur.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

5. Önerme:
Eğer bir sayı bir başka sayının parçasıysa ve başka bir sayı da daha başka bir sayının aynı parçasıysa, bu sayıların toplamı da diğer sayıların toplamının aynı parçası olacaktır.

$$[\ \mathfrak{a} = \frac{1}{\mathfrak{n}}\ \mathfrak{b},\ \textit{ve}\ \mathfrak{c} = \frac{1}{\mathfrak{n}}\ \mathfrak{d}\ \textit{olursa},\ \mathfrak{a} + \mathfrak{c} = \frac{1}{\mathfrak{n}}\ (\mathfrak{b} + \mathfrak{d})\ \textit{olur.}\ ]$$



A sayısı BC sayısının parçası olsun, ve bir başkası D de başka EF'nin aynı parçası olsun, yani A'nın BC'ye oranında.

Diyorum ki, A, D toplamı da BC, EF'nin aynı parçası olur, yani A'nın BC'ye oranında.

Çünkü, A, BC'nin hangi parçasıysa D de EF'nin aynı parçasıdır, bu yüzden BC içinde A'ya eşit kaç tane sayı varsa, EF'nin içinde de D'ye eşit o kadar sayı vardır.

BC sayısı A'ya eşit BG, GC sayılarına ayrılsın, ve EF de D'ye eşit EH, HF'ye ayrılsın;

o zaman BG, GC'nin adedi EH, HF'nin adedine eşit olacaktır.

Ve BG, A'ya, EH de D'ye eşit olduğundan, BG, EH de A, D'ye eşit olur.

Aynı nedenden dolayı GC, HF de A, D'ye eşittir.

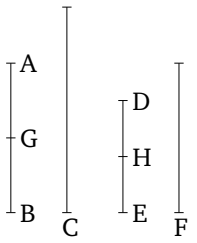
Böylece BC'nin içinde A'ya eşit kaç tane sayı varsa, BC, EF'nin içinde de A, D'ye eşit o kadar sayı vardır. Bu durumda BC, A'nın hangi katıysa, BC, EF de A, D'nin aynı katı olur.

Öyleyse BC'nin içinde A hangi parçaysa, BC, EF içinde A, D de aynı parçadır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

6. Önerme:
Eğer bir sayı bir başka sayının parçalarıysa ve başka bir sayı da daha başka bir sayının aynı parçalarıysa, bu sayıların toplamı da diğer sayıların toplamının aynı parçaları olacaktır.

$$[\ a = \frac{m}{n}\ b, \textit{ ve } c = \frac{m}{n}\ d \textit{ olursa, } a + c = \frac{m}{n}\ (b + d) \textit{ olur. }]$$



AB sayısı C sayısının parçaları olsun, ve bir başka DE de bir başka F'nin aynı parçaları olsun, yani AB'nin C'ye oranında.

Diyorum ki, AB, DE toplamı da C, F'nin aynı parçalarıdır, yani AB'nin C'ye oranında.

Çünkü, AB sayısı C'nin hangi parçalarıysa, DE de F'nin aynı parçaları olduğundan, AB'nin içinde C'nin kaç parçası varsa, DE'nin içinde de o kadar F'nin parçası vardır.

AB, her biri C'nin parçası olan AG, GB'ye ayrılsın, ve DE de her biri F'nin parçası olan DH, HE'ye ayrılsın.

Ve C'nin içinde AG hangi parçaysa, F'nin içinde DH aynı parça olduğundan, C'nin içinde AG hangi parçaysa, AG, DH toplamı da C, F toplamının aynı parçası olur. **[VII.5]**

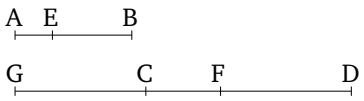
Aynı nedenden dolayı, C'nin içinde GB hangi parçaysa, GB, HE toplamı da C, F toplamının aynı parçası olur.

Öyleyse AB sayısı C'nin hangi parçalarıysa, AB, DE toplamı da C, F toplamının aynı parçalarıdır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

7. Önerme:
Eğer bir sayı bir sayının hangi parçasıysa, ondan çıkarılan sayı da öbüründen çıkarılan sayının aynı parçasıysa, kalan da kalanın aynı parçası olacaktır.

[$a = \frac{1}{n}\, b$, *ve* $c = \frac{1}{n}\, d$ *olursa,* $a - c = \frac{1}{n}\,(b - d)$ *olur.]*



AB sayısı CD sayısının hangi parçasıysa, çıkarılan AE de çıkarılan CF'nin aynı parçası olsun.

Diyorum ki, EB kalanı da FD kalanı içinde, bütün AB, bütün CD'nin hangi parçasıysa, aynı parçası olur.

Çünkü, AE, CF'nin hangi parçasıysa, EB de CG'nin aynı parçası olsun.

Şimdi, AE, CF'nin hangi parçasıysa, EB de CG'nin aynı parçası olduğundan, AE, CF'nin hangi parçasıysa, AB, CD'nin aynı parçasıdır. **[VII.5]**

Ama varsayıma göre, AE, CF'nin hangi parçasıysa, AB de CD'nin aynı parçasıdır; bu durumda AB, GF'nin hangi parçasıysa, CD'nin da aynı parçasıdır;

öyleyse GF eşittir CD.

Bunlardan CF çıkarılsın; bu durumda GC kalanı, FD kalanına eşit olur.

Şimdi, AE, CF'nin hangi parçasıysa, EB de GC'nin aynı parçası olduğundan, ve ayrıca GC eşittir FD olduğundan, AE, CF'nin hangi parçasıysa, EB de FD'nin aynı parçasıdır.

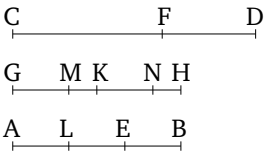
Ama AE, CF'nin hangi parçasıysa, AB de CD'nin aynı parçasıdır;

öyleyse EB kalanı FD kalanının, AB'nin tamamı CD'nin tamamının hangi parçasıysa, aynı parçasıdır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

8. Önerme:
Eğer bir sayı bir sayının hangi parçalarıysa, ondan çıkarılan sayı da öbüründen çıkarılan sayının aynı parçalarıysa, kalan da kalanın aynı parçaları olacaktır.

$[\ a = \frac{m}{n}\ b$, *ve* $c = \frac{m}{n}\ d$ *olursa,* $a - c = \frac{m}{n}\ (b - d)$ *olur.* $]$



AB sayısı CD sayısının hangi parçalarıysa, çıkarılan AE de çıkarılan CF'nin aynı parçaları olsun.

Diyorum ki, AB, CD'nin hangi parçalarıysa, EB kalanı da FD kalanının aynı parçalarıdır.

Çünkü, GH, AB'ye eşit çizilsin; bu durumda GH, CD'nin hangi parçalarıysa, AE de CF'nin aynı parçaları olur.

GH, her biri CD'nin parçası olan GK, KH'ye ayrılsın, ve AE de her biri CF'nin parçası olan AL, LE'ye ayrılsın; bu durumda GK, KH'nın adedi AL, LE'nin adedine eşittir.

Şimdi, CD'nin GK hangi parçasıysa, AL de CF'nin aynı parçası olduğundan, ve ayrıca CD, CF'den büyük olduğundan, GK de AL'den büyüktür.

GM, AL'ye eşit çizilsin.

Öyleyse, CD'nin GK hangi parçasıysa, GM de CF'in aynı parçasıdır; bu durumda MK kalanı FD kalanının hangi parçasıysa, GK'nin tamamı da CD'nin tamamının aynı parçası olur. **[VII.7]**

Yine, CD'nin KH hangi parçasıysa, EL de CF'nin aynı parçası olduğundan, ve ayrıca CD, CF'den büyük olduğundan, HK de EL'den büyüktür.

KN, EL'ye eşit çizilsin.

Öyleyse, CD'nin KH hangi parçasıysa, KN de CF'nin aynı parçasıdır; bu durumda NH kalanı FD kalanının hangi parçasıysa, KH'nin tamamı da CD'nin tamamının aynı parçasıdır. **[VII.7]**

Ama MK kalanı FD kalanının hangi parçasıysa, GK'nin tamamının CD'nin tamamının da aynı parçası olduğu kanıtlanmıştı;

öyleyse MK, NH toplamı DF'nin hangi parçalarıysaıysa, HG'nin tamamı da CD'nin tamamının aynı parçalarıdır.

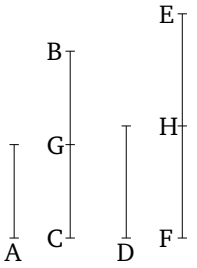
Ama MK, NH toplamı EB'ye eşittir, ve HG, BA'ya eşittir;

öyleyse AB'nin tamamı CD'nin tamamının hangi parçalarıysa EB kalanı da FD kalanının aynı parçalarıdır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

9. Önerme:
Bir sayı bir sayının parçasıysa, ve bir başka sayı da başka bir sayının aynı parçasıysa, yer değiştirerek, birinci sayı üçüncü sayının hangi parçası ya da parçalarıysa, ikinci sayı da dördüncü sayının aynı parçası ya da parçalarıdır.

[$a = \frac{1}{n}\, b$, *ve* $c = \frac{1}{n}\, d$ *olduğunda* $a = \frac{k}{\ell}\, c$ *olursa,* $b = \frac{k}{\ell}\, d$ *olur; burada* $k = 1$ *veya* $k > 1$ *olabilir.]*



A sayısı BC sayısının bir parçası olsun, ve bir başkası, D, başka bir EF'nin, BC'nin A hangi parçasıysa, aynı parçası olsun.

Diyorum ki, yer değiştirerek, D sayısının A sayısı hangi parçası ya da parçalarıysa, BC de EF'nin aynı parçası ya da parçalarıdır.

Çünkü, BC'nin A hangi parçasıysa, D de EF'nin aynı parçası olduğundan, BC'nin içinde A'ye eşit kaç sayı varsa, EF'nin içinde de D'ye eşit o kadar vardır.

BC, her biri A'ya eşit olan BG, GC'ye ayrılsın, ve EF de D'ye eşit EH, HF'ye ayrılsın.

Şİmdi, BG, GC sayıları birbirine eşit olduğundan, ve EH, HF sayıları da birbirine eşit olduğundan, ve ayrıca BG, GC'nin adedi EH, HF'nin adedine eşit olduğundan,

EH'nin BG hangi parçası ya da parçalarıysa, GC de HF'nin aynı parçası ya da parçalarıdır;

böylece, buna ek olarak, BG, EH'nin hangi parçası ya da parçalarıysa, BC toplamı da EF toplamının aynı parçası ya da parçalarıdır. **[VII,5, VII.6]**

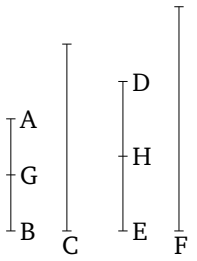
Ama BG eşittir A, ve EH eşittir D;

öyleyse, A, D'nin hangi parçası ya da parçalarıysa, BC de EF'nin aynı parçası ya da parçalarıdır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

10. Önerme:
Bir sayı bir sayının parçalarıysa, ve bir başka sayı da başka bir sayının aynı parçalarıysa, yer değiştirerek, birinci sayı üçüncü sayının hangi parçaları ya da parçasıysa, ikinci sayı da dördüncü sayının aynı parçaları ya da parçasıdır.

[$a = \frac{m}{n}\, b$, *ve* $c = \frac{m}{n}\, d$ *olduğunda* $a = \frac{k}{\ell}\, c$ *olursa,* $b = \frac{k}{\ell}\, d$ *olur; burada* $k = 1$ *veya* $k > 1$ *olabilir.]*



AB sayısı C sayısının parçaları olsun, ve başka bir DE de başka bir F'nin aynı parçaları olsun.

Diyorum ki, yer değiştirerek, AB, DE'nin hangi parçaları ya da parçasıysa, C de F'nin aynı parçaları ya da parçasıdır.

Çünkü, AB, C'nin hangi parçalarıysa, DE de F'nin aynı parçaları olduğundan, C'nin kaç parçası AB'nin içindeyse, F'nin de o kadar parçası DE'nin içindedir.

AB, her biri C'nin parçası olan AG, GB'ye ayrılsın, ve DE de her biri F'nin parçası olan DH, HE'ye ayrılsın;

böylece AG, GB'nin adedi DH, HE'nin adedine eşittir.

Şimdi, AG, C'nin hangi parçasıysa , DH de F'nin aynı parçası olduğundan, yer değiştirerek, AG, DH'nin hangi parçası ya da parçalarıysa, C de F'nin aynı parçası ya da parçalarıdır. **[VII.9]**

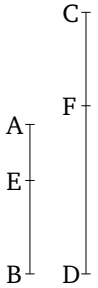
Aynı nedenden dolayı, GB, HE'nin hangi parçası ya da parçalarıysa, C de F'nin aynı parçası ya da parçalarıdır;

böylece, buna ek olarak, AB, DE'nin hangi parçaları ya da parçasıysa, C de F'nin aynı parçaları ya da parçasıdır. **[VII.5, VII.6]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

11. Önerme:
Bir sayının bir sayıya oranı, çıkarılan bir sayının çıkarılan bir sayıya oranıyla aynıysa, kalanların oranı da aynıdır.

[$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *olursa,* $\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}$ *olur.]*



AB'nin tamamının CD'nin tamamına oranı neyse, çıkarılan AE'nin çıkarılan CF'ye oranı aynı olsun.

Diyorum ki, EB kalanının FD kalanına oranı da AB'nin tamamının CD'nin tamamına oranıyla aynıdır.

AB'ninCD'ye oranı, AE'nin CF'ye oranıyla aynı olduğundan, AB, CD'nin hangi parçası ya da parçalarıysa, AE'de CF'nin aynı parçası ya da parçalarıdır; **[Tan. VII.20]**

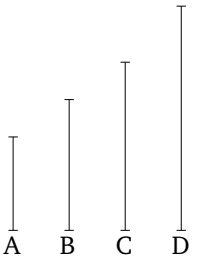
bu durumda AB, CD'nin hangi parçası ya da parçalarıysa, EB kalanı da FD kalanının aynı parçası ya da parçaları olur. **[VII.7, VII.8]**

Öyleyse, EB'nin FD'ye oranı, AB'nin CD'ye oranına eşittir. **[Tan. VII.20]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

12. Önerme:
Öncüllerin ardıllara oranlarının eşit olduğu sayılar alındığında öncüllerin hepsinin ardılların hepsine oranı da aynı olur.

[$\frac{a_1}{b_1} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$ *olursa,* $\frac{a_1 + \cdots + a_n}{b_1 + \cdots + b_n} = \frac{a_1}{b_1}$ *olur.]*



İstediğimiz miktarda aldığımız A, B, C, D sayıları orantılı olsun, yani A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşit olsun.

Diyorum ki, A'nın B'ye oranı neyse, A, C'nin B, D'ye oranı aynıdır.

Çünkü, A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranıyla aynı olduğundan, A, B'nin hangi parçası ya da parçalarıysa, C de D'nin aynı parçası ya da parçalarıdır. **[Tan. VII.20]**

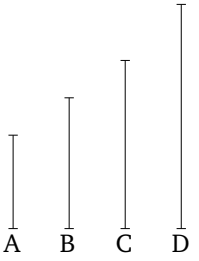
Bu durumda A, B'nin hangi parçası ya da parçalarıysa, A, C toplamı da B, D toplamının aynı parçası ya da parçaları olur. **[VII.5, VII.6]**

Öyleyse, A'nın B'ye oranı neyse, A, C'nin B, D'ye oranı da aynıdır. **[Tan. VII.20]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

13. Önerme:
Orantılı dört sayının değiştirilmiş oranları aynıdır.

[$a : b = c : d$ *ise* $a : c = b : d$ *olur.]*



A, B, C, D orantılı dört sayı olsun, yani A'nın B'ye oranı C'nin D'ye oranına eşit olsun.

Diyorum ki, bunların değiştirilmiş oranları da eşit olacaktır, yani A'nın C'ye oranı, B'nin D'ye oranına eşit olacak.

Çünkü, A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşit olduğundan, A, B'nin hangi parçası ya da parçalarıysa, C de D'nin aynı parçası ya da parçalarıdır. **[Tan. VII.20]**

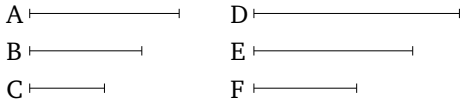
Bu durumda, yer değiştirerek, A, C'nin hangi parçası ya da parçalarıysa, B de D'nin aynı parçası ya da parçalarıdır. **[VII.10]**

Öyleyse, A'nın C'ye oranı, B'nin D'ye oranına eşittir. **[Tan. VII.20]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

14. Önerme:
Verilen bir miktar sayının ikişer ikişer alınan oranları aynı sayıda ki başka sayıların ikişer ikişer alınan oranlarına sırasıyla eşitse, bu sayılar eşit dış oranlı sayılardır.

$$[\ \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}, \cdots, \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{b_{n-1}}{b_n}\ \textit{ise}\ \frac{a_1}{a_n} = \frac{b_1}{b_n}\ \textit{olur.}\ ]$$



İstediğimiz miktarda seçtiğimiz A, B, C sayıları, eşit miktardaki D, E, F sayılarıyla ikişer ikişşer alındığında aynı oranda olsun,

yani, A'nın B'ye oranı, D'nin E'ye oranına, ve B'nin C'ye oranı, E'nin F'ye oranına eşit olsun.

Diyorum ki, eşit dış oranlar olarak, A'nın C'ye oranı, D'nin F'ye oranına eşittir.

Çünkü, A'nın B'ye oranı, D'nin E'ye oranına eşit olduğundan, değiştirilmiş oranlar olarak, A'nın D'ye oranı, B'nin E'ye oranına eşittir. **[VII.13]**

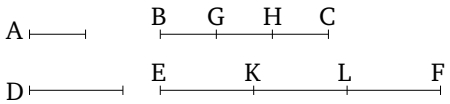
Yine, B'nin C'ye oranı, E'nin F'ye oranına eşit olduğundan, değiştirilmiş oranlar olarak, B'nin E'ye oranı, C'nin F'ye oranına eşittir. **[VII.13]**

Ama B'nin E'ye oranı, A'nın D'ye oranına eşittir; bu durumda, A'nın D'ye oranı da C'nin F'ye oranına eşit olur.

Öyleyse, değiştirilmiş oranlar olarak A'nın C'ye oranı, D'nin F'ye oranına eşittir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

15. Önerme:
Eğer bir birim bir sayıyı kaç defa ölçüyorsa, başka bir sayı da başka bir sayıyı o kadar ölçüyorsa, yer değiştirerek, birim üçüncü sayıyı, ikinci sayının dördüncü sayıyı ölçtüğü kadar ölçer.



A birimi bir BC sayısını ölçsün, ve bir diğer sayı D de başka bir EF sayısını aynı sayıda ölçsün.

Diyorum ki, yer değiştirerek, A birimi D sayısını kaç kere ölçüyorsa, BC de EF'yi o kadar ölçecektir.

Çünkü, A birimi BC sayısını, D'nin EF'yi ölçtüğü sayıda ölçtüğünden, BC içinde ne kadar birim varsa, EF içinde D'ye eşit o kadar sayı vardır.

BC, her biri birim olan BG, GH, HC'ye ayrılsın, ve EF de her biri D'ye eşit olan EK, KL, LF sayılarına ayrılsın.

Ve, BG, GH, HC birimleri birbirine eşit olduğundan, ve EK, KL, LF sayıları da birbirine eşit olduğundan, ve ayrıca BG, GH, HC'nin miktarı EK, KL, LF'nin miktarına eşit olduğundan,

BG biriminin EK sayısına oranı, GH biriminin KL sayısına oranına, ve HC biriminin LF sayısına oranına eşit olacaktır.

Öyleyse, öncüllerden birinin ardıllardan birine oranı, öncüllerin hepsinin ardılların hepsine oranına eşit olacaktır; **[VII.12]**

bu durumda BG biriminin EK sayısına oranı, BC'nin EF'ye oranına eşit olur.

Ama BG birimi A birimine eşittir, ve EK sayısı da D sayısına eşittir.

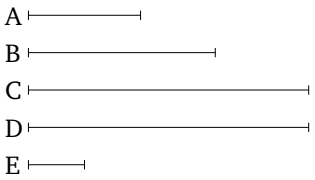
Bu durumda A biriminin D sayısına oranı, BC'nin EF'ye oranına eşittir.

Öyleyse, A birimi D sayısını kaç kere ölçüyorsa, BC de EF'yi o kadar ölçer.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

16. Önerme:
İki sayı birbirini çarparak bazı sayılar oluşturuyorsa, bu oluşan sayılar birbirine eşittir.

[Çarpma işleminin tanımı simetrik olmadığından $ab = ba$ *için böyle bir önermeye gerek var.]*



A, B iki sayı olsun, ve A, B'yi çarparak C'yi, ve B, A'yı çarparak D'yi oluştursun.

Diyorum ki, C eşittir D.

Çünkü, A, B'yi çarparak C'yi oluşturdğundan, B, C'yi A'daki birimler kadar ölçer.

Ama E birimi de A'yı içindeki birimler kadar ölçer; bu durumda E birimi A'yı, B'nin C'yi ölçtüğü sayıda ölçer.

Öyleyse, yer değiştirerek, E birimi B sayısını, A'nın C'yi ölçtüğü kadar ölçer. **[VII.15]**

Yine, B, A'yı çarparak D'yi oluşturduğundan, A, D'yi B'deki birimler kadar ölçer.

Ama E birimi de B'yı içindeki birimler kadar ölçer; bu durumda E birimi B'yi, A'nın D'yi ölçtüğü sayıda ölçer.

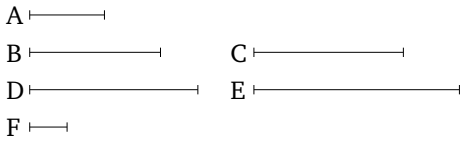
Ama E birimi B sayısını, A'nın C'yi ölçtüğü kadar ölçmüştü;

bu durumda A sayısı C, D'nin her birini aynı sayıda ölçer.

Öyleyse C eşittir D.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

17. Önerme:
Eğer bir sayı diğer iki diğer sayıyı çarparak bazı sayılar oluşturuyorsa, oluşan sayıların oranı çarpılan sayıların oranına eşittir.



A sayısı B, C sayılarını çarparak D, E'yi oluştursun.

Diyorum ki, B'nin C'ye oranı, D'nin E'ye ornanına eşitir.

Çünkü, A, B'yi çarparak D'yi oluşturduğundan, B, D'yi A'daki birimler kadar ölçer.

Ama F birimi de A'yı içindeki birimler kadar ölçer.

Öyleyse, F birimi A sayısını, B'nin D'yi ölçtüğü sayıda ölçer.

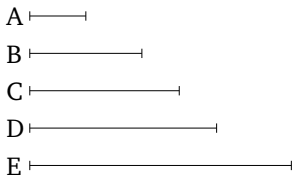
Bu durumda, F biriminin A'ya oranı, B'nin D'ye oranına eşittir. **[Tan. VII.20]**

Aynı nedenden dolayı, F biriminin A'ya oranı, C'nin E'ye oranına eşittir; bu durumda B'nin C'ye oranı, D'nin E'ye oranına eşit olur.

Öyleyse, değiştirilmiş oranlar olarak, B'nin C'ye oranı, D'nin E'ye oranına eşittir. **[VII.13]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

18. Önerme:
Eğer iki sayı, bir sayıyı çarparak bazı sayılar oluşturuyorsa, oluşan sayıların oranı çarpan sayıların oranına eşittir.



A, B sayıları bir C sayısını çarparak D, E'yi oluştursun.

Diyorum ki, A'nın B'ye oranı, D'nin E'ye oranına eşittir.

Çünkü, A, C'yi çarparak D'yi oluşturduğundan, C de A'yı çarparak D'yi oluşturmuş olur. **[VII.16]**

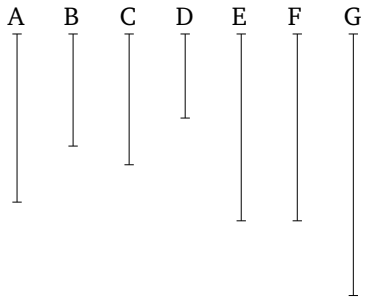
Aynı nedenden dolayı, C, B'yi de çarparak E'yi oluşturmuş olur.

Bu durumda, C sayısı A, B sayılarını çarparak D, E'yi oluşturmuş oldu.

Öyleyse A'nın B'ye oranı, D'nin E'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

19. Önerme:
Orantılı dört sayı verildiğinde, birinciyle dördüncünün çarpımı, ikinciyle üçüncünün çarpımına eşittir; dört sayı verildiğinde birinciyle dördüncünün çarpımı, ikinciyle üçüncünün çarpımına eşitse, bu dört sayı orantılıdır.



A, B, C, D, orantılı dört sayı olsun, yani A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranın eşit olsun;

A, D'yi çarparak E'yi, ve B, C'yi çarparak F'yi oluştursun.

Diyorum ki, E eşittir F.

Çünkü, A, C'yi çarparak G'yi oluştursun.

O zaman, A, C'yi çarparak G'yi, ve D'yi çarparak E'yi oluşturduğundan, A sayısı C, D'yi çarparak G, E'yi oluşturmuş oldu.

Bu durumda, C'nin D'ye oranı, G'nin E'ye oranına eşit olur. **[VII.17]**

Ama, C'nin D'ye oranı, A'nın B'ye oranına eşittir; öyleyse A'nın B'ye oranı, G'nin E'ye oranına da eşittir.

Yine, A, C'yi çarparak G'yi oluşturduğundan, ama ayrıca B de C'yi çarparak F'yi oluşturduğundan, A, B sayıları bir C sayısını çarparak G, F'yi oluşturmuş olur.

Öyleyse, A'nın B'ye oranı, G'nin F'ye oranına eşittir. **[VII.18]**

Ama ayrıca A'nın B'ye oranı, G'nin E'ye oranına eşittir; bu durumda G'nin E'ye oranı, G'nin F'ye oranına eşit olur.

Böylece, G sayısı, E, F sayılarının her birine aynı orandadır;

öyleyse E eşittir F. **[V.9]**

Şimdi, E eşittir F olsun.

Diyorum ki, A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranın eşit olur.

Çünkü, aynı kurguyla, E, F'ye eşit olduğundan, G'nin E'ye oranı, G'nin F'ye oranına eşittir. **[V.7]**

Ama G'nin E'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşittir, **[VII.17]**

ve G'nin F'ye oranı, A'nın B'ye oranına eşittir. **[VII.18]**

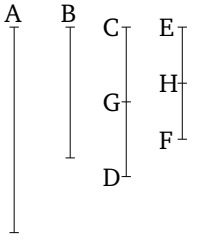
Öyleyse A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranın eşittir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

20. Önerme:

Aynı orandaki sayılardan en küçükleri, kendileriyle aynı oranda olan sayıları aynı sayıda ölçer, büyük olan büyük olanı, küçük olan küçük olanı.

[Eğer a *ve* b *sayıları verildiğinde* c *ve* d *sayıları* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *eşitliğini sağlıyor, ama* $e < c$ *ve* $f < d$ *şeklinde verilen hiç bir* e, f *çifti* $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$ *eşitliğini sağlamıyorsa, aynı* n *sayısı için* $a = cn$ *ve* $b = dn$ *olur.]*



A, B ile aynı orandaki en küçük sayılar CD, EF olsun.

Diyorum ki, CD, A'yı, EF'nin B'yi ölçtüğü sayıda ölçer.

Şimdi, CD, A'nın parçaları değildir. Çünkü, mümkünse, öyle olsun; o zaman CD, A'nın hangi parçalarıysa, EF de B'nin aynı parçalarıdır. **[VII.13, Tan. VII.20]**

Öyleyse, CD'nin içinde A'nın kaç parçası varsa, EF'nin içinde de B'nin o kadar prçası vardır.

CD, her biri A'nın parçası olan CG, GD'ye ayrılsın, ve EF de her biri B'nin parçası olan EH, HF'ye ayrılsın;

böylece CG, GD'nin miktarı EH, HF'nin miktarına eşit olur.

Şimdi, CG, GD sayıları birbirine eşit olduğundan, ve EH, HF sayıları da bir birine eşit olduğundan, ve ayrıca CG, GD'nin miktarı EH, HF'nin miktarına eşit olduğundan,

CG'nin EH'ye oranı, GD'nin HF'ye oranına eşittir.

Ayrıca, öncüllerden birinin ardıllardan birine oranı, öncüllerin hepsinin ardılların hepsine oranına eşit olacaktır. **[VII.12]**

Öyleyse, CG'nin EHye oranı, GD'nin HFye oranına eşittir.

Bu durumda CG, EH sayıları CD, EF ile aynı orandadır ama onlardan küçüktür: bu olamaz.

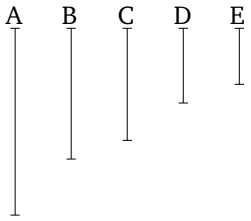
Öyleyse, CD, A'nın parçaları değildir; bu durumda parçası olur. **[VII.4]**

Ve CD, A'nın hangi parçasıysa, EF, B'nin aynı parçasıdır. **[VII.13, Tan. VII.20]**

Öyleyse, CD, A'yı, EF'nin B'yi ölçtüğü sayıda ölçer.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

21. Önerme:
Aralarında asal olan sayılar, onlarla aynı orandaki sayıların en küçükleridir.



A, B sayıları aralarında asal olsun.

Diyorum ki onlarla aynı orandaki sayılar arasında en küçükleri A, B'dir.

Çünkü değilse, A, B'den daha küçük ve A, B ile aynı oranda iki sayı olacaktır.

Bu sayılar C, D olsun.

O zaman, aynı orandaki sayılardan en küçükleri, kendileriyle aynı oranda olan sayıları aynı sayıda ölçtüğünden, büyük olan büyük olanı, küçük olan küçük olanı, yani öncül öncülü, ardıl ardılı, **[VII.20]**

C, A'yı, D'nin B'yi ölçtüğü sayıda ölçecektir.

Şimdi, C, A'yı kaç kez ölçüyorsa, E'nin içinde de o kadar birim olsun.

Bu durumda, D, B'yi E'deki birimler kadar ölçer.

Ve C, A'yı E'deki birimler kadar ölçtüğünden, E de A'yı C'deki birimler kadar ölçer. **[VII.16]**

Aynı nedenden dolayı, E, B'yi de D'deki birimler kadar ölçer. **[VII.16]**

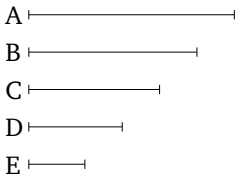
Öyleyse, E, aralarında asal olan A, B'yi ölçer: bu olamaz. **[Tan. VII.12]**

Bu durumda A, B'den daha küçük ve A, B ile aynı oranda başka sayılar olmayacaktır.

Öyleyse, A, B sayıları kendileriyle aynı orandaki sayılar arasında en küçükleridir.

Bundan dolayı vs …
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

22. Önerme:
Aynı orandaki sayıların en küçükleri aralarında asaldır.



A, B sayıları, kendileriyle aynı orandaki sayılar arasında en küçükleri olsun.

Diyorum ki, A, B aralarında asaldır.

Çünkü, eğer aralarında asal değilseler, bir sayı onları ölçer.

Bir sayı onları ölçsün, ve bu sayı C olsun.

Ve, C, A'yı kaç kez ölçüyorsa, D'nin içinde de o kadar birim olsun, ve C, B'yi kaç kez ölçüyorsa, E'nin içinde de o kadar birim olsun.

C, A'yı D'nin içindeki birimler kadar ölçtüğünden, C, D'yi çarparak A'yı oluşturur. **[Tan. VII.15]**

Aynı nedenden dolayı, C, E'yi çarparak B'yi oluşturur.

BöyleceC sayısı D, E sayılarını çarparak A, B sayılarını oluşturmuş oldu; öyleyse D'nin E'ye oranı, A'nın B'ye oranına eşittir; **[VII.7]**

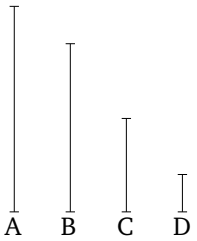
bu durumda D, E sayıları A, B ile aynı orandadır ve onlardan küçüktür: bu olamaz.

Bu nedenle hiç bir sayı A, B'yi ölçmeyecektir.

Öyleyse A, B aralarında asaldır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

23. Önerme:
Eğer iki sayı aralarında asalsa, birini ölçen sayı diğerine asal olacaktır.



A, B aralarında asal iki sayı olsun, ve bir C sayısı A'yı ölçsün.

Diyorum ki, C, B aralarında asaldır.

Çünkü, eğer C, B aralarında asal değilse, bir sayı onları ölçecektir.

Bir sayı onları ölçsün ve bu sayı D olsun.

D, C'yi ölçtüğünden, ve C, A'yı ölçtüğünden, D, A'yı da ölçer.

Ama B'yi de ölçer; bu durumda D, aralarında asal olan A, B'yi ölçer: bu olamaz. **[Tan. VII.12]**

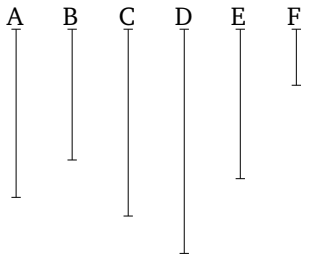
Bu nedenle hiç bir sayı A, B'yi ölçmeyecektir.

Öyleyse, A, B aralarında asaldır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

24. Önerme:

Aynı sayıya asal olan iki sayının çarpımı da o sayıya asal olacaktır.



A, B sayıları bir C sayısına asal olsun, ve A, B'yi çarparak D'yi oluştursun.

Diyorum ki, C, D aralarında asaldır.

Çünkü, eğer C, D aralarında asal değilse, bir sayı C, D'yi ölçecektir.

Bir sayı onları ölçsün, ve bu sayı E olsun.

Şimdi, C, A aralarında asal olduğundan, ve bir E sayısı C'yi ölçtüğünden, A, E aralarında asaldır. **[VII.23]**

O zaman, E, D'yi kaç kez ölçüyorsa, F'nin içinde o kadar birim olsun; bu durumda F de D'yi E'deki birimler kadar ölçer. **[VII.16]**

Öyleyse E, F'yi çarparak D'yi oluşturdu. **[Tan. VII.15]**

Ama A da B'yi çarparak D'yi oluşturmuştu; bu durumda E, F çarpımı A, B çarpımına eşit olur.

Ama, uçtakilerin çarpımı aradakilerin çarpımına eşitse, bu dört sayı orantılıdır; **[VII.19]**

bu durumda E'nin A'ya oranı, B'nin F'ye oranına eşit olur.

Ama A, E aralarında asaldır, ve aralarında asal olan sayılar aynı orandaki sayıların en küçükleridir, **[VII.21]**

ve aynı orana sahip sayıların en küçükleri, onlarla aynı oranda olanları büyüğün büyüğü ve küçüğün küçüğü ölçtüğü aynı sayıda ölçerler, yani öncülün öncülü, ardılın ardılı ölçtüğü sayıda; **[VII.20]**

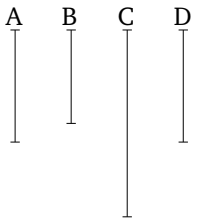
öyleyse E, B'yi ölçer. Ama C'yi de ölçer; öyleyse E sayısı aralarında asal olan B, C'yi ölçer: bu olamaz. **[Tan. VII.12]**

Bu nedenle hiç bir sayı C, D sayılarını ölçmeycektir.

Öyleyse C, D aralarında asaldır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

25. Önerme:
İki sayı aralarında asalsa, birisinin karesi diğerine asaldır.



A, B sayıları aralarında asal olsun, ve A, kendisini çarparak C'yi oluşturtsun.

Diyorum ki, B, C aralarında asaldır.

Çünkü, D, A'ya eşit alınsın.

A, B aralarında asal olduğundan, ve A, D'ye eşit olduğundan, D, B de aralarında asaldır.

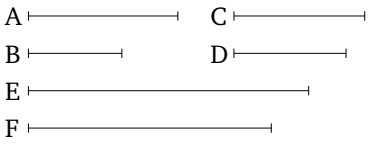
Öyleyse D, A sayılarının her biri B'ye asaldır; bu durumda D, A çarpımı da B'ye asal olacaktır. **[VII.24]**

Ama D, A çarpımı olan sayı C'dir.

Öyleyse C, B aralarında asaldır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

26. Önerme:
Eğer iki sayı iki sayıya asalsa, her ikisi de her birine, çarpımları da aralarında asal olacaktır.



A, B sayıları C, D sayılarına asal olsuni her ikisi de her birine, ve A, B'yi çarparak E'yi oluşturtsun, ve C, D'yi çarparak F'yi oluşturtsun.

Diyorum ki, E, F aralarında asaldır.

Çünkü, A, B sayılarının her biri C'ye asal olduğundan, A,B çarpımı da C'ye asaldır. **[VII.24]**

Ama A, B çarpımı E'dir; öyleyse E, C aralarında asaldır.

Aynı nedenden dolayı, E, D de aralarında asaldır.

Bu durumda C, D sayılarının her biri E'ye asaldır.

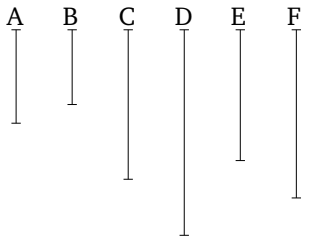
Öyleyse C, D çarpımı E'ye asaldır. **[VII.24]**

Ama C, D çarpımı F'dir.

Öyleyse E, F aralarında asaldır.

Bundan dolayı vs …
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

27. Önerme:
Eğer iki sayı aralarında asalsa, her biri kendi kendini çarparak yeni sayılar oluşturusa, bu çarpımlar aralarında asaldır; ve eğer baştaki sayılar bu çarpımları çarparak başka bazı sayılar oluşturursa, bu yeni sayılar da aralarında asaldır.



A, B aralarında asal iki sayı olsun, A kendisini çarparak C'yi oluştursun, ve C'yi çarparak D'yi oluştursun, ve B kendisini çarparak E'yi oluştursun, ve E'yi çarparak F'yi oluştursun.

Diyorum ki, hem C, E, hem de D, F aralarında asaldır.

Çünkü, A, B aralarında asal olduğundan, ve A kendisini çarparak C'yi oluşturmuş olduğundan, C, B aralarında asaldır. **[VII.25]**

O zaman, C, B aralarında asal olduğundan, ve B kendisini çarparak E'yi oluşturmuş olduğundan, C, E aralarında asaldır. **[VII.25]**

Yine, A, B aralarında asal olduğundan, ve B kendisini çarparak E'yi oluşturmuş olduğundan, A, E aralarında asaldır. **[VII.25]**

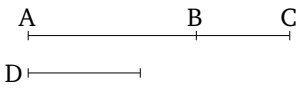
O zaman, A, C sayıları B, E sayılarına asal olduğundan, her ikisi de her birine, A, C çarpımı da B, E çarpımına eşittir. **[VII.26]**

Ve A, C çarpımı D, ve B, E çarpımı F'dir.

Öyleyse D, F aralarında asaldır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

28. Önerme:
İki sayı aralarında asalsa bunların toplamı da her birine asaldır; iki sayının toplamı bunlardan birine asalsa o iki sayı aralarında asaldır.



Aralarında asal olan iki sayı AB, BC toplansın.

Diyorum ki toplam AC sayısı AB, BC sayılarının her biriyle asaldır.

Çünkü, eğer CA, AB aralarında asal değilse, bir sayı CA, AB'yi ölçecektir.

Bir sayı onları ölçsün ve bu sayı D olsun.

O zaman, D sayısı CA, AB'yi ölçtüğünden, kalan BC'yi de ölçecektir.

Ama BA'yı da ölçer; bu durumda D, aralarında asal olan AB, BC'yi ölçer: bu olamaz. **[Tan. VII.12]**

Bu durumda, hiçbir sayı CA, AB'ti ölçmeyecektir; öyleyse CA, AB aralarında asaldır.

Aynı nedenden dolayı, AC, CB de aralarında asaldır.

Öyleyse CA sayısı, AB, BC sayılarının her birine asaldır.

Şimdi de CA, AB aralarında asal olsun.

Diyorum ki, AB, BC aralarında asaldır.

Çünkü, eğer AB, BC aralarında asal değilse, bir sayı AB, BC'yi ölçecektir.

Bir sayı onları ölçsün ve bu sayı D olsun.

Şimdi, D sayısı AB, BC sayılarının her birini ölçtüğünden, CA'nın tamamını da ölçecektir.

Ama AB'yi de ölçer; bu durumda D, aralarında asal olan CA, AB'yi ölçer: bu olamaz. **[Tan. VII.12]**

Bu nedenle hiçbir sayı AB, BC'yi ölçmeyecektir.

Öyleyse AB, BC aralarında asaldır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

29. Önerme:
Her asal sayı ölçmediği her sayıya asaldır.



A bir asal sayı olsun ve B'yi ölçmesin.

Diyorum ki, B, A aralarında asaldır.

Çünkü, eğer B, A aralarında asal değilse, bir sayı onları ölçecektir.

C onları ölçsün.

C, B'yi ölçtüğünden, ve A, B'yi ölçmediğinden, C ile A aynı değildir.

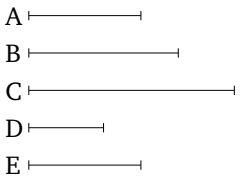
Şimdi, C sayısı B, A'yı böldüğünden, asal olan A'yı da, onunla aynı olmadığı halde, ölçer: bu olamaz.

Bu nedenle hiçbir sayı B, A'yı ölçmeyecektir.

Öyleyse A, B aralarında asaldır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

30. Önerme:
Eğer iki sayı birbirine çarparak bir sayı oluşturursa, ve bir asal sayı bu çarpımı ölçerse, baştaki sayılardan birini de ölçer.



A, B sayıları birbirini çarparak C'yi oluşturtursun, ve bir asal sayı D, C'yi ölçsün.

Diyorum ki, D sayısı A, B sayılarından birini ölçer.

Çünkü, A'yı ölçmesin. Şimdi D asal, o yüzden A, D aralarında asaldır. **[VII.29]**

Ve, D, C'yi kaç kez ölçüyorsa E'de de o kadar birim olsun.

D sayısı C'yi E'deki birimler kadar ölçtüğünden,D, E'yi çarparak C'yi oluşturmuştur. **[Tan. VII.15]**

Ayrıca, A, B'yi çarparak C'yi oluşturmuştu; bu durumda D, E çarpımı A, B çarpımına eşit olur.

Öyleyse, D'nin A'ya oranı, B'nin E'ye oranına eşittir. **[VII.19]**

Ama D, A aralrında asaldır, ve asallar aynı orandaki sayılar arasında en küçüktür,

ve en küçükler aynı orandaki sayıları, büyüklerin büyükleri ve küçüklerin küçükleri ölçtüğü sayıda, yani öncüllerin öncülleri, ardılların ardılları ölçtüğü sayıda ölçer; **[VII.20]**

bu durumda D sayısı B'yi ölçer.

Benzer şeklide, eğer D, B'yi ölçmezse A'yı ölçeceğini gösterebiliriz.

Öyleyse D sayısı A, B sayılarından birini ölçer.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

31. Önerme:
Her bileşik sayıyı bir asal ölçer.



A bileşik bir sayı olsun.

Diyorum ki A bir asal tarafından ölçülür.

Çünkü, A bileşik olduğundan, bir sayı onu ölçecektir.

Bir sayı onu ölçsün ve o sayı B olsun.

Şimdi, eğer B asalsa, istenen gerçekleşmiştir.

Ama bileşikse, bir bir sayı onu ölçecektir.

Bir sayı onu ölçsün ve o sayı C olsun.

O zaman, C, B'yi ölçtüğünden, ve B, A'yı ölçtüğünden, C, A'yı da ölçer.

Ve, eğer C asalsa, istenen gerçekleşmiştir.

Ama bileşikse, bir sayı onu ölçecektir.

Böylece, bu inceleme bu şekilde sürdürülürse, bir önceki sayıyı ölçen, ve dolayısıyla A'yı ölçen bir asal bulunacaktır.

Çünkü, eğer bulunmazsa, herbiri diğerinden küçük sonsuz tane asal sayı A'yı ölçecektir: sayılarda bu olamaz.

Bu nedenle, bir öncekini ve dolayısıyla A'yı ölçen bir asal sayı bulunacaktır.

Öyleyse her bileşik sayı bir asal tarafından ölçülür.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

32. Önerme:
Her sayı ya asaldır ya da bir asal tarafından ölçülür.



A bir sayı olsun.

Diyorum ki, A ya asaldır, ya da bir asal tarafından ölçülür.

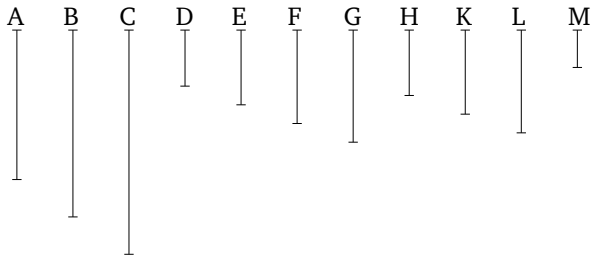
Şimdi, eğer A asalsa, istenen gerçekleşmiştir.

Ama bileşikse, bir asal onu ölçecektir. **[VII.31]**

Öyleyse her sayı ya asaldır, ya da bir asal tarafından ölçülür.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

33. Önerme:
İstediğimiz miktarda verilen sayılarla aynı oranda olan en küçük sayıları bulmanın yolu.



İstediğimiz miktarda seçtiğimiz sayılar A, B, C olsun;

böylece A, B, C ile aynı oranda olan sayılar arasında en küçüklerinin bulunması isteniyor.

A, B, C sayıları ya aralarında asaldır, ya da değil.

Şimdi, eğer A, B, C aralarında asalsa, kendileriyle aynı oranda olan sayılar arasında en küçük olanı onlardır. **[VII.21]**

Ama değilse, A, B, C'nin en büyük ortak ölçüsü D alınsın, **[VII.3]**

ve D sayısı sırasıyla A, B, C'yi kaç kez ölçüyorsa E, F, G sayılarında sırasıyla o kadar birim olsun.

Bu durumda E, F, G sayıları sırasıyla A, B, C sayılarının D'deki birimler kadar ölçer. **[VII.16]**

Öyleyse E, F, G sayıları A, B, C sayılarını D'deki aynı sayıda ölçer; bu durumda E, F, G sayıları A, B, C sayılarıyla aynı orandadır. **[Tan. VII.20]**

Şimdi diyorum ki bunlar bu orandaki en küçük sayılardır.

Çünkü, eğer E, F, G sayıları A, B, C ile aynı oranda olan sayıların en küçükleri değilse, A, B, C ile aynı oranda ve E, F, G'den daha küçük sayılar olacaktır.

Bu sayılar H, K, L olsun;

öyleyse K, L sayıları sırasıyla B, C sayılarını kaç kez ölçüyorsa, H de A'yı o kadar ölçer.

Şimdi, H, A'yı kaç kez ölçüyorsa M'de de o kadar birim olsun; bu durumda K, L sayıları da sırasıyla B, C sayılarını M'deki birimler kadar ölçer.

Ve, H, A'yı M'deki birimler kadar ölçtüğünden, M de A'yı H'deki birimler kadar ölçer. **[VII.16]**

Aynı nedenden dolayı, M sayısı B, C sayılarını sırasıyla K, L'deki birimler kadar ölçer; öyleyse M sayısı A, B, C'yi ölçer.

Şimdi, H, A'yı M'deki birimler kadar ölçtüğünden, H, M'yi çarparak A'yı oluşturmuştur. **[Tan. VII.15]**

Aynı nedenden dolayı, E de D'yi çarparak A'yı oluşturmuştur.

Öyleyse E, D çarpımı H, M çarpımına eşittir.

Bu durumda, E'nin H'ye oranı, M'nin D'ye oranına eşit olur. **[VII.19]**

Ama E, H'den büyüktür; öyleyse M de D'den büyüktür.

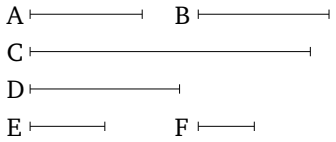
Ve A, B, C'yi ölçer: bu olamaz çünkü D sayısı A, B, C'nin en büyük ortak ölçüsüdür.

Bu nedenle A, B, C ile aynı oranda ve E, F, G'den daha küçük sayılar olamaz.

Öyleyse E, F, G sayıları A, B, C ile aynı orandaki sayılar arasında en küçükleridir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

34. Önerme:
Verilen iki sayının ölçtüğü en küçük sayıyı bulmanın yolu.



Verile iki sayı A, B olsun; böylece bunların ölçtüğü en küçük sayının bulunması isteniyor.

Şimdi, A, B sayıları ya aralarında asaldır, ya da değildir.

Önce A, B aralarında asal olsun, ve A, B'yi çarparak C'yi oluştursun; bu durumda B de A'yı çarparak C'yi oluşturmuş olur. **[VII.16]**

Öyleyse A, B sayıları C'yi ölçer.

Şimdi diyorumki, bu ölçtükleri en küçük sayıdır.

Çünkü, eğer değilse, A, B sayıları C'den daha küçük bir sayıyı ölçecekler.

D'yi ölçsünler.

O zaman, A, D'yi kaç kez ölçerse, E'nin içinde o kadar birim olsun, ve B, D'yi kaç kez ölçerse, F'nin içinde o kadar birim olsun;

bu durumda A, E'yi çarparak D'yi oluşturur, ve B, F'yi çarparak D'yi oluşturur; **[Tan. VII.15]**

bu durumda A, E çarpımı B, F çarpımına eşit olur.

Öyleyse, A'nın B'ye oranı, F'nin E'ye oranına eşittir. **[VII.19]**

Ama A, B aralarında asaldır, ve asallar aynı orandaki sayılar arasında en küçük olanlarıdır, **[VII.21]**

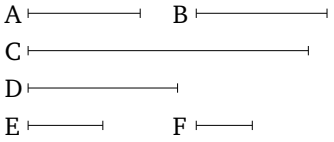
ve en küçükler, kendileriyle aynı orandaki sayıları aynı sayıda, büyüklerin büyükleri ve küçüklerin küçükleri ölçtüğü sayıda, ölçer; **[VII.20]**

öyleyse ardıl ardılı olarak, B, E'yi ölçer.

Ve, A sayısı B, E'yi çarparak C, D'yi oluşturduğundan, B'nin E'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Ama B, E'yi ölçer; öyleyse C de D'yi ölçer, büyük olan küçük olanı: bu olamaz.

Bu nedenle A, B sayıları C'den küçük hiçbir sayıyı ölçmez; öyleyse A, B'nin ölçtüğü en küçük sayı C'dir.



Şimdi de A, B aralarında asal olmasın,

ve A, B ile aynı oranda olan sayılar arasındaki en küçükleri E, F alınsın; **[VII.33]**

bu durumda A, E çarpımı B, F çarpımına eşit olur. **[VII.19]**

Ve, A, E'yi çarparak C'yi oluştursun; bu durumda B de F'yi çarparak C'yi oluşturmuş olur; öyleyse A, B sayıları C'yi ölçer.

Diyorum ki, bu onların ölçtüğü en küçük sayıdır.

Çünkü, eğer değilse, A, B sayıları C'den küçük başka bir sayıyı ölçecektir.

D'yi ölçsünler.

Ve, A, D'yi kaç kez ölçüyorsa, G'nin içinde de o kadar birim olsun,

ve B, D'yi kaç kez ölçüyorsa, H'nin içinde o kadar birim olsun.

Bu durumda, A, G'yi çarparak D'yi oluşturur, ve B, H'yi çarparak D'yi oluşturur.

Öyleyse A, G çarpımı B, H çarpımına eşittir; bu durumda A'nın B'ye oranı, F'nin E'ye oranına eşit olur. **[VII.19]**

Ama, A'nın B'ye oranı, F'nin E'ye oranına eşittir.

Öyleyse F'nin E'ye oranı, H'nin G'ye oranına eşittir.

Ama F, E en küçüklerdir,

ve en küçükler, kendileriyle aynı orandaki sayıları aynı sayıda, büyüklerin büyükleri ve küçüklerin küçükleri ölçtüğü sayıda, ölçer; **[VII.20]**

öyleyse E, G'yi ölçer.

Ve, A sayısı E, G'yi çarparak C, D'yi oluşturduğundan, E'nin G'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

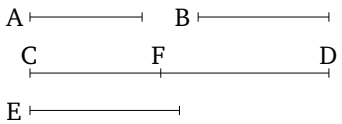
Ama E, G'yi ölçer; öyleyse C de D'yi ölçer, büyük olan küçük olanı: bu olamaz.

Bu nedenle A, B sayıları C'den küçük hiçbir sayıyı ölçmez.

Öyleyse C sayısı A, B'nin ölçtüğü en küçük sayıdır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

35. Önerme:
Eğer iki sayı bir sayıyı ölçüyorsa, o iki sayı tarafından ölçülen en küçük sayı da o sayıyı ölçer.



A, B sayıları bir CD sayısını ölçsün, ve E de onların ölçtüğü en küçük sayı olsun.

Diyorum ki E, CD'yi ölçer.

Çünkü, eğer E, CD'yi ölçmezse, E, DF'yi ölçerek kendinden küçük CF kalanını bıraksın.

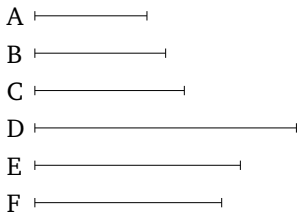
Şimdi, A, B sayıları E'yi ölçtüğünden, ve E, DF'yi ölçtüğünden, A, B sayıları DF'yi de ölçecektir.

Ama CD'nin tamamını da ölçerler; öyleyse E'den küçük olan DF kalanını da ölçerler: bu olamaz.

Öyleyse E sayısı CD'yi ölçmemezlik yapamaz.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

36. Önerme:
Üç sayı verildiğinde, ölçtükleri en küçük sayıyı bulmanın yolu.



Verilen üç sayı A, B, C olsun; böylece bunların ölçtüğü en küçük sayının bulunması isteniyor.

A, B'nin ölçtüğü en küçük sayı D alınsın. **[VII.34]**

Şimdi C, D'yi ya ölçer ya da ölçmez.

Önce ölçsün.

Ama A, B de D'yi ölçer; öyleyse A, B, C sayıları D'yi ölçer.

Şimdi diyorum ki, ölçtükleri en küçük sayı budur.

Çünkü, eğer değilse, A, B, C sayıları D'den küçük bir sayıyı ölçerler.

E'yi ölçsünler.

A, B, C sayıları E'yi ölçtüğünden, A, B de E'yi ölçer.

Bu durumda A, B'nin ölçtüğü en küçük sayı da E'yi ölçer, **[VII.35]**

Ama A, B'nin ölçtüğü en küçük sayı D'dir; bu durumda D, E'yi bölecektir, büyük olan küçük olanı: bu olamaz.

Bu nedenle A, B, C sayıları D'den küçük hiçbir sayıyı ölçmeyecektir.

Öyleyse A, B, C'nin ölçtüğü en küçük sayı D'dir.

Şimdi de C, D'yi ölçmesin,

ve C, D'nin ölçtüğü en küçük sayı E alınsın. **[VII.34]**

A, B sayıları D'yi ölçtüğünden, ve D, E'yi ölçtüğünden, A, B sayıları E'yi ölçer.

Ama C de E'yi ölçer; öyleyse A, B, C sayıları E'yi ölçer.

Diyorum ki ölçtükleri en küçük sayı da budur.

Çünkü, eğer değilse, A, B, C sayıları E'den küçük bir sayıyı ölçeceklerdir.

F'yi ölçsünler.

A, B, C sayıları F'yi ölçtüğünden, A, B de F'yi ölçer; öyleyse A, B'nin ölçtüğü en küçük sayı da F'yi ölçer. **[VII.35]**

Ama A, B'nin ölçtüğü en küçük sayı D'dir; bu durmda D, F'yi ölçer.

Ama C de F'yi ölçer; öyleyse D, C sayıları F'yi ölçer, böylece D, C'nin ölçtüğü en küçük sayı da F'yi ölçer.

Ama C, D'nin ölçtüğü en küçük sayı E'dir; bu durumda E, F'yi ölçer, büyük olan küçük olanı: bu olamaz.

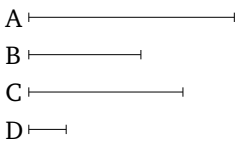
Bu nedenle A, B, C sayıları E'den küçük hüçbir sayıyı ölçemez.

Öyleyse A, B, C'nin ölçtüğü en küçük sayı E'dir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

37. Önerme:
Eğer bir sayı bir sayı tarafından ölçülürse, ölçülen sayının ölçen sayıyla aynı adı taşıyan bir parçası vardır.

[Eğer B *sayısı* A *sayısını ölçerse, A'nın aynı adlı parçası denen parça, "*A*'nın* B*'de biri" adındaki parçadır.]*



A sayısı B sayısı tarafından ölçülsün.

Diyorum ki A'nın B ile aynı adda bir parçası vatdır.

Çünkü, B'nin A'yı kaç kez ölçüyorsa, C'nin içinde o kadar birim olsun.

B, A'yı C'deki birimler kadar ölçtüğünden, ve D birimi de C'yi içindeki birimler kadar ölçtüğünden, D birimi C sayısını, B'nin A'yı ölçtüğü kadar ölçer.

Bu durumda, yer değiştirerek, D birimi B sayısını, C'nin A'yı ölçtüğü kadar ölçer; **[VII.15]**

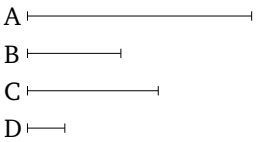
öyleyse D birimi B'nin hangi parçasıysa, C de A'nın aynı parçasıdır.

Ama D, B'nin kendisiyle aynı adlı parçasıdır; öyleyse C de A'nın B ile aynı adlı parçasıdır, böylece C, A'nın B ile aynı adlı parçasıdır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

38. Önerme:
Eğer bir sayının bir parçası varsa, o parçayla aynı addaki bir sayı tarafından ölçülür.

[A sayısının C'de bir oranında bir parçası varsa, A sayısı C tarafından ölçülür.]



A sayısının bir B parçası olsun, ve C de B parçasıyla aynı adda bir sayı olsun.

Diyorum ki, C, A'yı ölçer.

Çünkü, B, A'nın C ile aynı addaki bir parçası olduğundan, ve D birimi de C'nin aynı adlı parçası olduğundan, D birimi C sayısının hangi parçasıysa, B de A'nın aynı parçasıdır;

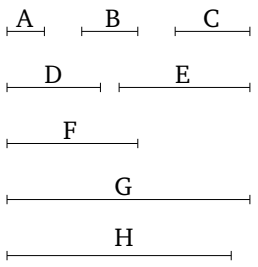
bu durumda D birimi C'yi, B'nin A'yı kaç kez ölçüyorsa, o kadar ölçer.

Bu nedenle, yer değiştirerek, D birimi B'yi, C, A'yı kaç kez ölçüyorsa, o kadar ölçer.

Öyleyse C, A'yı ölçer.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

39. Önerme:
Verilen parçalara sahip olan en küçük sayıyı bulmanın yolu.



Verilen parçalar A, B, C olsun; böylece A, B, C parçalarına sahip olan en küçük sayının bulunması isteniyor.

A, B, C parçalarıyla aynı adı taşıyan sayılar D, E, F olsun, ve D, E, F'nin ölçtüğü en küçük sayı G alınsın. **[VII.36]**

Bu durumda G'nin D, E, F ile aynı adda parçaları vardır. **[VII.37]**

Ama A, B, C de D, E, F ile aynı adlı parçalardır; öyleyse G'nin A, B, C parçalarına sahiptir.

Şimdi diyorum ki, bu parçalara sahip en küçük sayı odur.

Çünkü, eğer değilse, G'den küçük ve aynı parçalara sahip bir sayı vardır.

Bu sayı H olsun.

H'nin A, B, C parçaları olduğundan, H sayısı A, B, C parçalarıyla aynı adlı sayılar tarafından ölçülecektir. **[VII.38]**

Ama A, B, C parçalarıyla aynı adlı sayılar D, E, F'dir; öyleyse H sayısı D, E, F tarafından ölçülür.

Ama G'den küçüktür: bu olamaz.

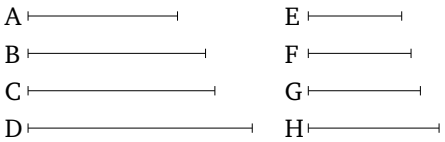
Öyleyse G'den küçük hiçbir sayı A, B, C parçalarına sahip değildir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

Kitap VIII

1. Önermeler

1. Önerme:
İstediğimiz miktarda alacağımız sürekli orantılı sayıların iki ucundakiler aralarında asalsa, bu sayılar kendileriyle aynı orandaki sayılar arasında en küçükleridir.



[Sürekli orantılı sayılar geometrik dizi oluşturur.]

İstediğimiz miktarda seçilen sürekli orantılı sayılar A, B, C, D olsun, ve uçtaki A, D aralarında asal olsun.

Diyorum ki, A, B, C, D sayıları kendileriyle aynı orandaki sayılar arasında en küçükleridir.

Çünkü, eğer değilse, E, F, G, H sayıları A, B, C, D'den küçük ve onlarla aynı oranda olsun.

Şimdi, A, B, C, D sayıları E, F, G, H ile aynı oranda olduğundan, ve A, B, C, D sayılarının miktarı, E, F, G, H sayılarının miktarıyla aynı olduğundan,

eşit dış oranlar olarak, A'nın D'ye oranı, E'nin H'ye oranına eşittir. **[VII.14]**

Ama A, D aralarında asaldır,

ve asal olanlar en küçüktür,

ve en küçükler aynı oranda olanları aynı oranda, büyüklerin bütyükleri ve küçüklerin küçükleri böldüğü, yani öncüllerin öncülleri, ardılların ardılları böldüğü oranda böler. **[VII.20]**

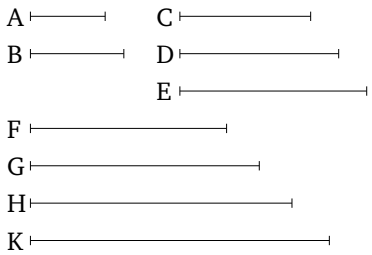
Bu durumda A, E'yi ölçer, büyük küçüğü: bu olamaz.

Bu nedenle A, B, C, D'den küçük olan E, F, G, H, onlarla aynı oranda olamaz.

Öyleyse A, B, C, D, kendileriyle aynı oranda olanlar arasında en küçükleridir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

2. Önerme:
Önceden belirlenen miktarda ve ortak oranı verilmiş en küçük terimli sürekli orantılı sayıları bulmanın yolu.



En küçük sayılarla verilen oran A'nın B'ye oranı olsun; böylece önceden belirlenen miktarda ve oranları A'nın B'ye oranına eşit olan sürekli orantılı sayılar bulunması isteniyor.

Önceden belirlenen miktar dört olsun;

A, kendisini çarparak C'yi oluştursun, ve B'yi çarparak D'yi oluştursun; ve B kendisini çarparak E'yi oluştursun;

ayrıca, A sayısı C, D, E'yi çarparak F, G, H'yi oluştursun, ve B de E'yi çarparak K'yi oluştursun.

Şimdi, A, C'yi çarparak C'yi oluşturduğundan, ve B'yi çarparak D'yi oluşturduğundan, A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Yine, A, B'yi çarparak D'yi oluşturduğundan, ve B kendisini çarparak E'yi oluşturduğundan, A, B sayıları B'yi çarparak, sırasıyla D, E sayılarını oluşturmuş olur.

Öyleyse A'nın B'ye oranı D'nin E'ye oranına eşittir. **[VII.18]**

Ama A'nın B'ye oranı, C'nin D2ye oranına eşittir; bu durumda C'nın D'ye oranı, D'nin E'ye oranına da eşit olur.

Ve, A sayısı C, D'yi çarparak F, G'yi oluşturduğundan, C'nin D'ye oranı, F'nin G'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Ama, C'nin D'ye oranı, A'nın B'ye oranına eşitti; öyleyse A'nın B'ye oranı, F'nin G'ye oranına da eşittir.

Yine, A sayısı D, E'yi çarparak G, H'yi oluşturduğundan, D'nin E'ye oranı, G'nin H'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Ama, D'nin E'yen oranı, A'nın B'ye oranına eşittir.

Öyleyse A'nın B'ye oranı, G'nin H'ye oranına eşittir.

Ve, A, B sayıları E'yi çarparak H, K'yi oluşturduğundan, A'nın B'ye oranı, H'nin K'ye oranına eşittir. **[VII.18]**

Ama A'nın B'ye oranı, F'nin G'ye oranına, ve G'nin H'ye oranına eşittir.

Öyleyse F'nin G'ye oranı, G'nin H'ye oranına, ve H'nin K'ye oranına eşittir; bu durumda C, D, E ve F, G, H, K sayıları A'nın Bye oranında orantılıdır.

Şimdi diyorum ki, bunlar bu özellikteki en küçük sayılardır.

Çünkü, A, B, kendileriyle aynı oranda olanlar arasında en küçükleri olduklarından, ve kendileriyle aynı oranda olanlar arasında en küçük olanlar aralarında asal olduğundan, **[VII.22]**

A, B aralarında asaldır.

Ve A, B sayıları kendilerini çarparak sırasıyla C, E sayılarını, ve C, E sayılarını çarparak sırasıyla F, K sayılarını oluşturmuşlardır; öyleyse C, E ve F, K sayıları sırasıyla aralarında asaldır; **[VII.27]**

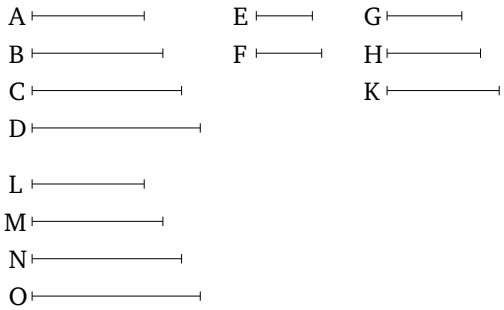
Ama, istediğimiz miktarda sürekli orantılı sayılar varsa ve uçtakiler aralarında asalsa, bu sayılar aynı orandakiler arasında en küçükleridir. **[VIII.1]**

Öyleyse C, D, E, ve F, G, H K sayıları A'nın B'ye oranına sahip olanlar arasında en küçükleridir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

Doğal Sonuç: Buradan açıkça görülür ki, en küçük terimli ve sürekli orantılı üç sayı verilirse uçtaki sayılar karedir, dört sayı verilirse küptür.

3. Önerme:
Sürekli orantılı istediğimiz miktarda sayı aldığımızda eğer bunlar aynı orandaki sayılar arasında en küçükleriyse, uçtaki sayılar aralarında asaldır.



İstediğimiz miktarda seçilen sürekli orantılı sayılar A, B, C, D kendileriyle aynı orandakiler arasında en küçükleri olsun.

Diyorum ki, uçtaki A, D aralarında asaldır.

Çünkü, A, B, C, D oranındaki en küçük sayılar, E, F alınsın, **[VII.33]**

ve aynı oranda sürekli orantılı en küçük G, H, K sayıları alınsın, **[VIII.2]**

ve miktarları A, B, C, D'nin miktarına ulaşıncaya kadar devam edilsin.

Bunlar alınmış olsun ve L, M, N, O olsunlar.

Şimdi, E, F aynı orandakiler arasında en küçükleri olduğundan, aralarında asaldır. **[VII.22]**

Ve, E, F sayıları kendilerini çarparak sırasıyla G, K'yi oluşturduğundan, ve G, K'yi çarparak sırasıyla L, O'yu oluşturduğundan, **[DS.VIII.2]**

G, K, ve L, O aralarında asaldır. **[VII.27]**

Ve, A, B, C, D, aynı orandakiler arasında en küçükleri olduğundan, ayrıca L, M, N, O sayıları A, B, C, D ile aynı oranda olanlar arasında en küçükleri olduğundan, ve A, B, C, D'nin miktarı L, M, N, O'nun miktarıyla aynı olduğundan,

A, B, C, D sayıları sırasıyla L, M, N, O sayılarına eşittir;

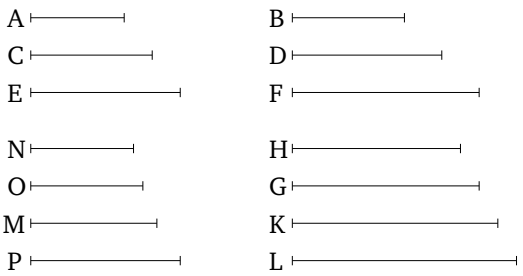
bu durumda A, L'ye eşittir, D de O'ya.

Öyleyse A, D aralarında asaldır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

4. Önerme:
En küçük terimleriyle ifade edilen bir miktar oran verilmiş olsun. Her birinin bir sonrakine oranı, verilen bu oranlar olan, sürekli orantılı en küçük sayıları bulmanın yolu.

[Öklid burada sürekli orantılı kavramını farklı kullanıyor. Ardışık oranların eşit olması yerine ardışık oranların önceden verilen oranlara eşit olmasını istiyor. Yani, $(a_i, b_i) = 1$ *olacak şekilde* $\frac{a_i}{b_i}, i = 1, \ldots, n$, *oranları verilmiş olsun.* $(c_1, \ldots, c_{n+1}) = 1$ *ve* $\frac{c_i}{c_{i+1}} = \frac{a_i}{b_i}, i = 1, \ldots n$, *olacak şekilde* $c_1, \ldots, c_{n+1}$ *sayılarının bulunması isteniyor.]*



En küçük sayılarla verilen oranlar A'nın B'ye, C'nin D'ye, ve E'nin F'ye oranları olsun.

Böylece, A'nın B'ye, C'nin D'ye, ve E'nin F'ye oranında olan en küçük sürekli orantılı sayıların bulunması isteniyor.

B, C tarafından ölçülen en küçük sayı G alınsın. **[VII.34]**

Ve, B, G'yi kaç kez ölçüyorsa, A da H'yi o kadar ölçsün,

ve C, G'yi kaç kez ölçüyorsa, D de K'yi o kadar ölçsün.

Şimdi, E, K'yi ya ölçüyordur, ya da ölçmüyordur.

Önce ölçsün.

Ve, E, K'yi kaç kez ölçüyorsa, F de L'yi o kadar ölçsün.

Şimdi, A, H'yi, B'nin G'yi ölçtüğü kadar ölçtüğünden, A'nın B'ye oranı H'nin G'ye oranına eşittir. **[Tan. VII, VII.13]**

Aynı nedenden dolayı, C'nin D'ye oranı, G'nin K'ye oranına eşittir, ve ayrıca E'nin F'ye oranı, K'nin L'ye oranına eşittir;

öyleyse H, G, K, L sayıları, A'nın B'ye oranında, C'nin D'ye oranında, ve E'nin F'ye oranında sürekli orantılıdır.

Şimdi de diyorum ki, bunlar bu özelliktekiler arasında en küçüklerdir.

Çünkü, eğer H, G, K, L sayıları, A'nın B'ye oranında, C'nin D'ye oranında, ve E'nin F'ye oranında sürekli orantılı olanların en küçükleri değilse, en küçükleri N, O, M, P olsun.

O zaman, A'nın B'ye oranı, N'nin O'ya oranına eşit olduğundan, ve bu arada A, B en küçük olduğundan,

ve en küçükler kendileriyle aynı oranda olanları aynı sayıda ölçtüğünden, büyük olan büyük olanı, küçük olan küçük olanı, yani öncül öncülü, ardıl ardılı,

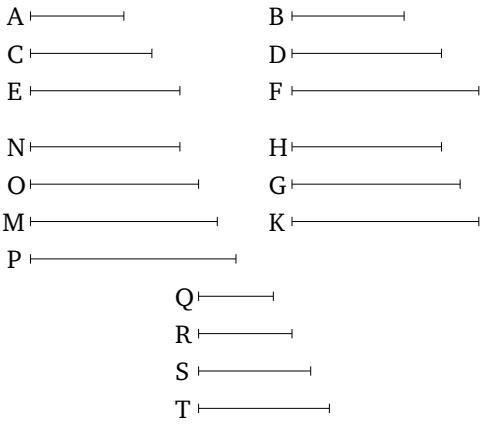
B, O'yu ölçer. **[VII.20]**

Aynı nedenden dolayı, C, Oyu ölçer; öyleyse B, C sayıları O'yu ölçer;

bu durumda B, C'nin ölçtüğü en küçük sayı da O'yu ölçecektir. **[VII.35]**

Ama B, C'nin ölçtüğü en küçük sayı G'dir; bu durumda G, Oyu ölçer, büyük olan küçük olanı: bu olamaz.

Öyleyse H, G, K, L sayılarından daha küçük, ve A'nın B'ye oranında, C'nin D'ye oranında, ve E'nin F'ye oranında sürekli orantılı olan başka sayılar yoktur.



Şimdi de E, K'yi ölçmesin.

E, K'nin ölçtüğü en küçük sayı M alınsın.

Ve, K, M'yi kaç kez ölçüyorsa, H, G sayıları da sırasıyla N, O'yu o kadar ölçsün,

E, M'yi kaç kez ölçüyorsa, F de P'yi o kadar ölçsün.

H, N'yi, G'nin O'yu ölçtüğü kadar ölçtüğünden, H'nin G'ye oranı, N'nin O2ya oranına eşittir. **[VII.13 ve Tan. VII.20]**

Ama H'nin G'ye oranı, A'nın B'ye oranına eşittir; bu durumda A'nın B'ye oranı, N'nin O'ya oranına eşit olur.

Aynı nedenden dolayı, C'nin D'ye oranı, O'nun M'ye oranına eşit olur.

Yine, E, M'yi, F'nin P'yi ölçtüğü sayıda ölçtüğünden, E'nin F'ye oranı, M'nin P'ye oranına eşittir. **[VII.13 ve Tan. VII.20]**

Öyleyse N, O, M, P sayıları, A'nın B'ye, C'nin D'ye, ve E'nin F'ye oranında sürekli orantılıdır.

Şimdi diyorum ki bunlar aynı zamanda A : B, C : D, E : F oranlarında en küçük olanlardır.

Çünkü, eğer değillerse, N, O, M, P'den daha küçük ve A : B, C : D, E : F oranlarında sürekli orantılı sayılar olacaktır.

Bunlar Q, R, S, T olsun.

Şimdi, Q'nun R'ye oranı, A'nın B'ye oranına eşit olduğundan, ve bu arada A, B en küçük olduğundan,

ve en küçükler kendileriyle aynı oranda olanları aynı sayıda ölçtüğünden, büyük olan büyük olanı, küçük olan küçük olanı, yani öncül öncülü, ardıl ardılı,

B, R'yi ölçer. **[VII.20]**

Aynı nedenden dolayı C, R'yi ölçer; öyleyse B, C sayıları R'yi ölçer.

bu durumda B, C'nin ölçtüğü en küçük sayı da R'yi ölçecektir. **[VII.35]**

Ama B, C'nin ölçtüğü en küçük sayı G'dir; bu durumda G, Ryi ölçer.

Ve G'nin R'ye oranı, K'nin S'ye oranına eşittir; **[VII.13]**

bu durumda K de S'yi ölçer.

Ama E de S'yi ölçer; bu durumda E, K sayıları S'yi ölçer.

Öyleyse E, K'nin ölçtüğü en küçük sayı da S'yi ölçer.

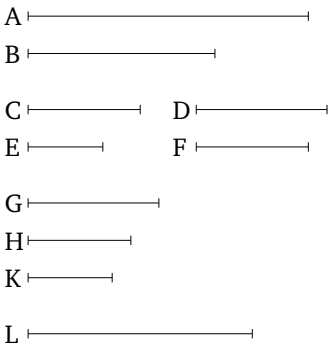
Ama E, K'nin ölçtüğü en küçük sayı M'dir; bu durumda M, S'yi ölçer, büyük olan küçük olanı: bu olamaz.

Öyleyse N, O, M, P sayılarından daha küçük, ve A'nın B'ye, C'nin D'ye, ve E'nin F'ye oranında sürekli orantılı olan başka sayılar yoktur.

Öyleyse N, O, M, P sayıları, A: B, C: D, E: F oranlarında sürekli orantılı en küçük sayılardır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

5. Önerme:
Düzlem sayıların birbirine oranı, kenarların oranlarının bileşik oranına eşittir.



A, B düzlem sayıları olsun, C, D sayıları A'nın, E, F sayıları da B'nin kenarları olsun.

Diyorum ki, A'nın B'ye oranı kenarların oranlarının bileşik oranıdır.

Çünkü, C'nin E'ye, ve D'nin F'ye oranları verildiğinden, C: E, D: F oranlarında sürekli orantılı olan en küçük G, H, K sayıları alınsın, yani C'nin E'ye oranı, G'nin H'ye oranına eşit, ve D'nin F'ye oranı, H'nin K'ye oranına eşit olsun. **[VIII.4]**

Ve, D sayısı E'yi çarparak L'yi oluştursun.

Şimdi, D sayısı C'yi çarparak A'yı oluşturduğundan, ve E'yi çarparak L'yi oluşturduğundan, C'nin E'ye oranı, A'nın L'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Ama, C'nin E'ye oranı, G'nin H'ye oranına eşittir; bu durumda G'nin H'ye oranı, A'nın L'ye oranına eşit olur.

Yine, E sayısı D'yi çarparak L'yi oluşturduğundan, ve ayrıca F'yi çarparak B'yi oluşturduğundan, D'nin F'ye oranı, L'nin B'ye oranına eşit olur. **[VII.17]**

Ama, D'nin F'ye oranı, H'nin K'ye oranına eşittir; bu durumda H'nin K'ye oranı, L'nin B'ye oranına eşit olur.

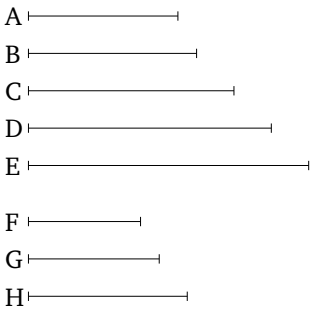
Ama G'nin H'ye oranının, A'nın L'ye oranına eşit olduğu kanıtlanmıştı;

öyleyse eşit dış oranlar olarak G'nin K'ye oranı, A'nın B'ye oranına eşittir; **[VII.14]**

Ama G'nin Kye oranı kenarların oranlarının bileşik oranıdır;

öyleyse A'nın B'ye oranı, kenarların oranlarının bileşik oranıdır. Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

6. Önerme:
Sürekli orantılı istediğimiz miktarda sayı aldığımızda eğer birincisi ikinciyi ölçmüyorsa, hiç biri diğerini ölçmeyecektir.



İstediğimiz miktarda aldığımız sürekli orantılı sayılar A, B, C, D, E olsun, ve A, B'yi ölçmesin.

Diyorum ki hiçbiri diğerini ölçmeyecektir.

Çünkü, eğer mümkünse, A, C'yi ölçsün.

Ve, A, B, C kaç taneyse, aynı sayıda ve A, B, C ile aynı oranda olan en küçük F, G, H sayılarını alalım. **[VII.33]**

Şimdi, F, G, H sayıları A, B, C ile aynı oranda olduklarından, ve A, B, C sayılarının miktarı F, G, H sayılarının miktarına eşit olduğundan, eşit dış oranlar olarak A'nın C'ye oranı, F'nin H'ye oranına eşittir. **[VII.14]**

Ve A'nınBye oranı, F'nin G'ye oranına eşit olduğundan, ve bu arada A, B'yi ölçmediğinden, F de G'yi ölçmez; **[Tan. VII.20]**

öyleyse F bir birim değildir, çünkü birim her sayıyı ölçer.

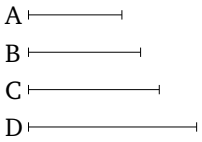
Şimdi, F, H aralarında asaldır. **[VIII.3]**

Ve F'nin H'ye oranı, A'nın C'ye oranına eşittir; öyleyse A da C'yi ölçmez.

Benzer şekilde hiçbirinin diğerini ölçmeyeceğini kanıtlayabiliriz.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

7. Önerme:
Sürekli orantılı istediğimiz miktarda sayı aldığımızda eğer birincisi sonuncuyu ölçüyorsa ikinciyi de ölçecektir.



İstediğimiz miktarda aldığımız sürekli orantılı sayılar A, B, C, D olsun, ve A, D'yi ölçsün.

Diyorum ki A, B'yi ölçer.

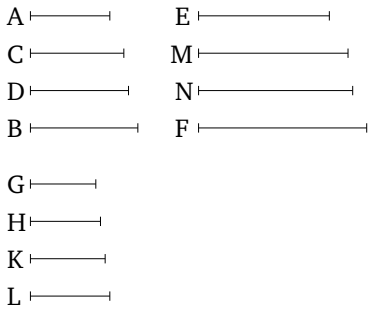
Çünkü, eğer A, B'yi ölçmezse, hiçbiri diğerini ölçmeyecektir. **[VIII.6]**

Ama A, D'yi ölçer. Öyleyse A, B'yi de ölçer.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

8. Önerme:

Eğer verilen iki sayı arasına onlarla sürekli orantılı bir dizi oluşturacak şekilde sayılar yerleştirmek mümkünse, bu ikisi arasına böyle kaç sayı yerleştirilebiliyorsa verilen o ilk iki sayıyla aynı oranda olan her iki sayı arasına da aynı sayıda ve onlarla sürekli orantılı dizi oluşturacak şekilde sayı yerleştirilebilir.



A, B sayıları arasına, onlarla sürekli orantılı olan C, D sayıları yerleştirilmiş olsun, ve E'nin F'ye oranının A'nın B'ye oranına eşit olması sağlansın.

Diyorum ki, A, B'nin arasına sürekli orantılı kaç sayı sığdıysa, E, F'nin arasına da aynı sayıda sürekli orantılı sayı sığacaktır.

Çünkü, A, B, C, D sayılarıyla aynı miktarda, ve A, B, C, D ile aynı oranda olan en küçük G, H, K, L sayıları alınsın; **[VII.33]**

bu durumda uçtakiler G, L aralarında asaldır. **[VIII.3]**

Şimdi, A, B, C, D sayıları G, H, K, L ile aynı oranda olduğundan, ve A, C, D, B sayılarının miktarı G, H, K, L sayılarının miktarıyla aynı olduğundan, eşit dış oranlar olarak A'nın B'ye oranı, G'nin L'ye oranına eşittir. **[VII.14]**

Ama A'nın B'ye oranı, E'nin F'ye oranına eşittir; bu durumda G'nin L'ye oranı, E'nin F'ye oranına eşit olur.

Ama G, L aralarında asaldır, ve asallar en küçüktür, **[VII.21]**

ve en küçükler aynı orandakileri aynı sayıda ölçerler, büyük olan büyük olanı, ve küçük olan küçük olanı, yani öncüller öncülleri, ardıllar ardılları. **[VII.20]**

Öyleyse G, E'yi, L'nin F'yi ölçtüğü kadar ölçer.

Bunun yanısıra, G, E'yi kaç kez ölçüyorsa, sırasıyla H, K'yi, ve M de N'yi o kadar ölçsün;

bu durumda G, H, K, L sayıları E, M, N, F'yi aynı sayıda ölçer.

Öyleyse G, H, K, L sayıları E, M, N, F ile aynı orandadır. **[Tan. VII.20]**

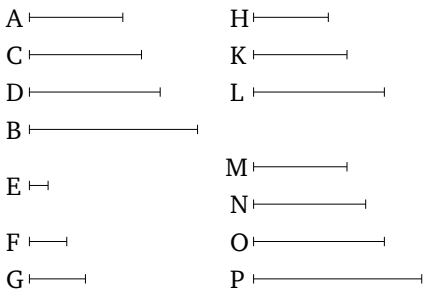
Ama G, H, K, L sayıları A, B, C, D ile aynı orandadır; bu durumda A, B, C, D sayıları E, M, N, F ile aynı oranda olur.

Ama A, B, C, D sayıları sürekli orantılıdır; öyleyse E, M, N, F de sürekli orantılıdır.

Öyleyse A, B'nin arasına sürekli orantılı kaç sayı sığdıysa, E, F'nin arasına da aynı sayıda sürekli orantılı sayı sığmıştır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

9. Önerme:
Aralarında asal olan iki sayı arasına onlarla sürekli orantılı bir dizi oluşturacak şekilde sayılar yerleştirilebiliyorsa, kaç tane böyle sayı yerleştirilebiliyorsa aynı miktarda sayı, aralarında asal olan o sayıların herbiriyle birim arasına da sürekli orantılı bir dizi oluşturacak şekilde yerleştirilebilir.



A, B aralarında asal olan iki sayı olsun ve aralarına C, D sayıları onlarlasürekli orantılı olacak şekilde yerleştirilsinler, ve bir E birimi seçilsin.

Diyorum ki, A, B arasına sürekli orantılı kaç sayı yerleştirilebiliyorsa, A, B'den herhangi biriyle birim arasına da sürekli orantılı aynı miktarda sayı yerleştirilebilir.

Çünkü, A, B, C, D oranında en küçük iki sayı F, G alınsın, **[VIII.2]**

aynı özellikte üç sayı H, K, L alınsın, **[VIII.2]**

ve bu şekilde, miktarları A, C, D, B'nin miktarına eşit olana kadar, aynı özellikte sayılar alınsın. **[VIII.2]**

Bunlar alınmış olsun ve M, N, O, P olsunlar.

Şimdi açıkça görülür ki F, kendisini çarparak H'yi, ve H'yi çarparak M'yi oluşturmuştur, ve aynı zamanda G, kendisini çarparak L'yi, ve L'yi çarparak P'yi oluşturmuştur. **[DS. VIII.2]**

Ve, M, N, O, P sayıları F, G ile aynı orandaki en küçük sayılar olduğundan,

ve A, C, D, B sayıları da F, G ile aynı orandaki en küçük sayılar olduğundan, **[VIII.1]**

ve bu arada M, N, O, P'nin miktarı A, C, D, B'nin miktarıyla aynı olduğundan,

M, N, O, P sayıları sırasıyla A, C, D, B sayılarına eşittir; bu durumda M, A'ya, ve P de B'ye eşit olur.

Şimdi, F, kendisini çarparak H'yi oluşturduğundan, F, H'yi F'nin içindeki birimler kadar ölçer.

Ama E birimi de F'yi içindeki birimler kadar ölçer; öyleyse E birimi F'yi, F'nin H'yi ölçtüğü sayıda ölçer.

O zaman, E biriminin F sayısına oranı, F'nin H'ye oranına eşittir. **[Tan. VII.20]**

Yine, F, H'yi çarparak M'yi oluşturduğundan, H, M'yi F'nin içindeki birimler kadar ölçer.

Ama E birimi F'yi içindeki birimler kadar ölçer; öyleyse E birimi F'yi H'nin M'yi ölçtüğü kadar ölçer.

O zaman, E biriminin F sayısına oranı, H'nin M'ye oranına eşittir.

Ama E biriminin F sayısına oranının F'nin H'ye oranına eşit olduğu da kanıtlanmıştı; bu durumda E biriminin F sayısına oranı, F'nin H'ye, ve H'nin M'ye oranına eşittir.

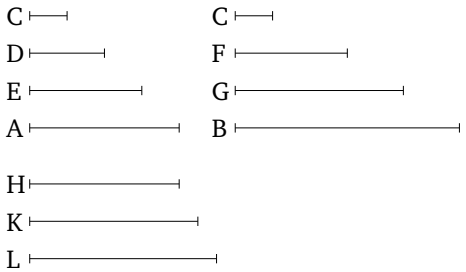
Ama M eşittir A; öyleyse E biriminin F sayısına oranı, F'nin H'ye, ve H'nin A'ya oranına eşittir.

Aynı nedenden dolayı, E biriminin G sayısına oranı, G'nin L'ye, ve L'nin B'ye oranına eşittir.

Öyleyse, A, B arasına sürekli orantılı kaç sayı sığdıysa, aynı miktarda sayı A, B'den herhangi biriyle birim E arasına sürekli orantılı olarak sığmış oldu.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

10. Önerme:
Verilen iki sayının her biriyle birim arasına ve onlarla sürekli orantılı olacak şekilde sayılar yerleştirilebiliyorsa, kaç tane böyle sayı yerleştirilebiliyorsa aynı miktarda sayı bu verilen iki sayı arasına ve onlarla sürekli orantılı olacak şekilde yerleştirilebilir.



A, B sayılarıyla C birimi arasına sürekli orantılı olarak D, E ve F, G sayıları yerleştirilsin.

Diyorum ki, A, B sayılarıyla C birimi arasına sürekli orantılı olarak kaç sayı yerleştirilmişse, o kadar sayı sürekli orantılı olarak A, B arasına yerleştirilir.

Çünkü, D, F'yi çarparak H'yi oluştursun, ve D, F sayıları H'yi çarparak sırasıyla K, L'yi oluştursun.

Şimdi, C biriminin D sayısına oranı, D'nin E'ye oranına eşit olduğundan, C birimi D sayısını D'nin E'yi ölçtüğü kadar ölçer. **[Tan. VII.20]**

Ama C birimi D sayısını D'nin içindeki birimler kadar ölçer; bu durumda D sayısı da E'yi D'deki birimler kadar ölçer.

Yine, C'nin D sayısına oranı, E'nin A'ya oranına eşit olduğundan, C birimi D sayısını E'nin A'yı ölçtüğü sayıda ölçer; bu durumda E, A'yı D'deki birimler kadar ölçer; öyleyse D, E'yi çarparak A'yı oluşturmuştur.

Aynı nedenden dolayı, F, kendisini çarparak G'yi, ve G'yi çarparak B'yi oluşturmuştur.

Ve D, kendisini çarparak E'yi ve F'yi çarparak H'yi oluşturmuş olduğundan, D'nin F'ye oranı, E'nin H'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Aynı nedenden dolayı, D'nin F'ye oranı, H'nin G'ye oranına eşittir. **[VII.18]**

Öyleyse E'nin H'ye oranı da H'nin G'ye oranına eşittir.

Yine, D sayısı, E, H sayılarını çarparak sırasıyla A, K'yi oluşturduğundan, E'nin H'ye oranı, A'nın K'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Ama E'nin H'ye oranı, D'nin F'ye oranına eşittir; öyleyse D'nin F'ye oranı, A'nın K'ye oranına eşittir.

Yine, D, F sayıları H'yi çarparak, sırasıyla K, L'yi oluşturduğundan, D'nin F'ye oranı, K'nin L'ye oranına eşittir. **[VII.18]**

Ama D'nin F'ye oranı, A'nın K'ye oranına eşittir; öyleyse A'nın K'ye oranı, K'nin L'ye oranına eşittir.

Ayrıca, F sayısı H, G sayılarını çarparak sırasıyla L, B'yi oluşturduğundan, H'nin G'ye oranı, L'nin B'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Ama H'nin G'ye oranı, D'nin F'ye oranına eşittir; öyleyse D'nin F'ye oranı, L'nin B'ye oranına eşittir.

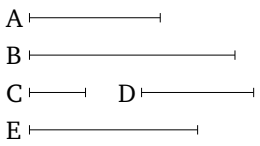
Ama D'nin F'ye oranının A'nın K'ye, ve K'nin L'ye oranına eşit olduğu da kanıtlanmıştı; bu durumda A'nın K'ye oranı, K'nin L'ye, ve L'nin B'ye oranına eşit olur.

Böylece A, K, L, B sürekli orantılı olur.

Öyleyse A, B sayılarının herbiriyle birim C arasına sürekli orantılı kaç tane sayı yerleştiriliyorsa, A, B sayıları rasaına da sürekli orantılı o kadar sayı yerleştirilir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

11. Önerme:
İki kare sayı arasında orta orantılı bir sayı vardır, ve karenin kareye oranı, kenarın kenara oranının çift oranıdır.



A, B sayıları kare sayılar olsun, A'nın kenarı C, B'nin kenarı D olsun.

Diyorum ki, A, B arasında orta orantılı bir sayı vardır, ve A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranının çift oranıdır.

Çünkü, C, Dyi çarparak E'yi oluşturtsun.

Şimdi, A bir kare ve C de kenarı olduğundan, C, kendisini çarparak A'yı oluşturmuştur.

Aynı nedenden dolayı, D, kendisini çarparak B'yi oluşturmuştur.

O zaman, C sayısı C, D sayılarını çarparak sırasıyla A, E'yi oluşturduğundan, C'nin D'ye oranı, A'nın E'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Aynı nedenden dolayı, C'nin D'ye oranı, E'nin B'ye oranına eşittir. **[VII.18]**

Bu durumda A'nın E'ye oranı, E'nin B'ye oranına eşit olur.

Öyleyse A, B arasında orta orantılı bir sayı vardır.

Şimdi de diyorum ki, A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranının çift oranıdır.

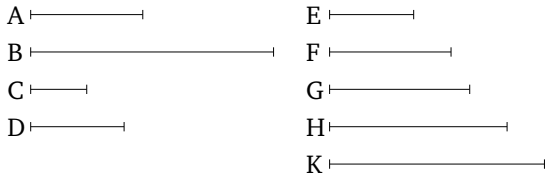
Çünkü, A, E, B sayıları orantılı üç sayı olduğundan, A'nın B'ye oranı, A'nın E'ye oranının çift oranıdır. **[Tan. V.9]**

Ama A'nın E'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşittir.

Öyleyse A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranının çift oranıdır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

12. Önerme:
İki küp sayı arasında orta orantılı iki sayı vardır, ve küpün küpe oranı kenarların oranının üç kat oranıdır.



A, B sayıları küp sayılar olsun, A'nın kenarı C, B'nin kenarı D olsun.

Diyorum ki, A, B arasında orta orantılı iki sayı vardır, ve A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranının üç kat oranıdır.

Çünkü, C, kendisini çarparak E'yi, ve D'yi çarparak F'yi oluşturtsun; D, kendisini çarparak G'yi, ve C, D sayıları F'yi çarparak sırasıyla H, K'yi oluşturtsun.

Şimdi, A bir küp, ve C onun kenarı olduğundan, ve C kendisini çarparak E'yi oluşturmuş olduğundan, C kendisini çarparak E'yi, ve E'yi çarparak A'yı oluşturmuştur.

Aynı nedenden dolayı, D kendisini çarparak G'yi, ve G'yi çarparak B'yi oluşturmuştur.

Ve, C sayısı C, D sayılarını çarparak sırasıyla E, F'yi oluşturduğundan, C'nin D'ye oranı, E'nin F'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Aynı nedenden dolayı, C'nin D'ye oranı, F'nin G'ye oranına eşittir. **[VII.18]**

Yine, C sayısı E, F sayılarını çarparak sırasıyla A, H'i oluşturmuş olduğundan, E'nin F'ye oranı, A'nın H'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Ama E'nin F'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşittir.

Öyleyse C'nin D'ye oranı, A'nın H'ye oranına da eşittir.

Yine, C, D sayıları F sayısını çarparak sırasıyla H, K'yi oluşturduğundan, C'nin D'ye oranı, H'nin K'ye oranına eşittir. **[VII.18]**

Yine, D sayısı F, G sayılarını çarparak sırasıyla K, B'yi oluşturduğundan, F'nin G'ye oranı, K'nin B'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Ama F'nin G'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşittir;

öyleyse C'nin D'ye oranı, A'nın H'ye, H'nin K'ye, ve K'nin B'ye oranına eşittir.

Böylece H, K sayıları A, B arasında orta orantılı iki sayıdır.

Şimdi de diyorum ki, A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranının üç kat oranıdır.

Çünkü, A, H, K, B sayıları orantılı dört sayı olduğundan, A'nın B'ye oranı, A'nın H'ye oranının üç kat oranıdır. **[Tan. V.10]**

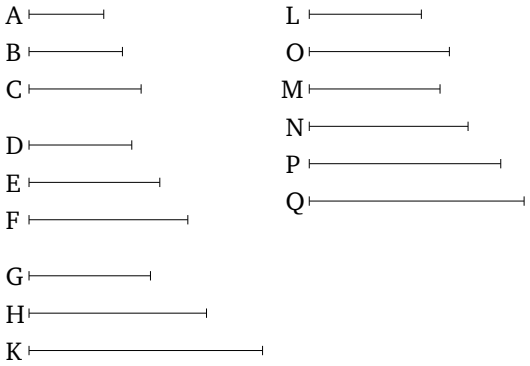
Ama A'nın H'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşittir;

öyleyse A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranının üç kat oranıdır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

13. Önerme:

Sürekli orantılı bir dizi oluşturan istediğimiz kadar sayı alır ve bunların her birini kendisiyle çarparak yeni bir dizi oluşturursak, yeni dizi de sürekli orantılıdır, ve bu yeni diziyi tekrar ilk dizideki sayılarla çarpıp yeni sayılar elde edersek bu dizi de sürekli orantılıdır; ve bu böyle devam eder.



İstediğimiz miktarda seçtiğimiz A, B, C sayıları sürekli orantılı olsun, yani A'nın B'ye oranı, B'nin C'ye oranına eşit olsun; A, B, C sayıları kendilerini çarparak D, E, F sayılarını, ve D, E, F sayılarını çarparak G, H, K sayılarını oluştursun.

Diyorum ki, D, E, F, ve G, H, K sürekli orantılıdırlar.

Çünkü, A sayısı B'yi çarparak L'yi oluştursun, ve A, B sayıları L'yi çarparak sırasıyla M, N'yi oluştursun.

Ve yine, B sayısı C'yi çarparak O'yu oluştursun, ve B, C sayıları O'yu çarparak sırasıyla P, Q'yu oluştursun.

O zaman, bir önceki kanıtta olduğu gibi, D, L, E'nin ve G, M, N, H'nin, A'nın B'ye oranınad, sürekli orantılı olduğunu,

ve ayrıca E, O, P'nin ve H, P, Q, K'nin, B'nin C!ye oranında, sürekli orantılı olduğunu kanıtlayabiliriz.

Şimdi, A'nın B'ye oranı, B'nin C'ye oranına eşittir; bu durumda D, L, E ile E, O, F aynı orandadır, ve ayrıca G, M, N, H ile H, P, Q, K de aynı orandadır.

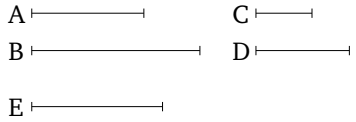
Ve D, L, E'nin miktarı E, O, F'nin miktarına, ve G, M, N, H'nin miktarı H, P, Q, K'nin miktarına eşittir;

bu durumda eşit dış oranlar olarak D'nin E'ye oranı, E'nin F'ye oranına,

ve G'nin H'ye oranı, H'nin K'ye oranına eşit olur. **[VII.14]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

14. Önerme:
Eğer bir kare sayı bir başka kare sayıyı ölçüyorsa, onun kenarı da diğerinin kenarını ölçer; ve eğer bir kenar diğer kenarı ölçüyorsa karesi de diğerinin karesini ölçer.



A, B sayıları kare sayılar olsun, C, D onların kenarları olsun, be A, B'yi ölçsün

diyorum ki, + de D'yi ölçer.

Çünkü, C, D'yi çarparak E'yi oluştursun; o zaman A, E, B sayıları, C'nin D'ye oranında, sürekli orantılı olur. **[VIII.11]**

Ve A, E, B sürekli orantılı olduğundan, ve A, B'yi ölçtüğünden, A, E'yi de ölçer. **[VIII.7]**

Ve, A'nın E'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşittir; öyleyse C, D'yi ölçer. **[Tan. VII.20]**

Yine, C, D'yi ölçsün;

diyorum ki, A da B'yi ölçer.

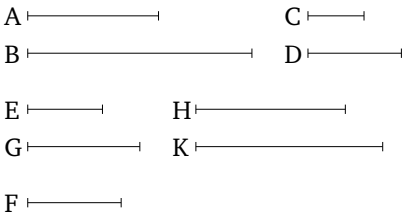
Çünkü, aynı kurguyla A, E, B sayılarının, C'nin D'ye oranında, sürekli orantılı olduğunu benzer yolla kanıtlayabiliriz.

Ve C'nin D'ye oranı, A'nın E'ye oranına eşit olduğundan, ve C, D'yi ölçtüğünden, A da E'yi ölçer. **[Tan. VII.20]**

Ve A, E, B sürekli orantılıdır; öyleyse A, B'yi de ölçer.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

15. Önerme:
Eğer bir küp sayı bir başka küp sayıyı ölçüyorsa kenarı da diğerinin kenarını ölçer, ve eğer bir kenar diğer kenarı ölçüyorsa küpü de diğerinin küpünü ölçer.



Çünkü, A küp sayısı, B küp sayısını bölsün, ve A'nın kenarı C, B'nin kenarı D olsun;

diyorum ki C, D'yi ölçer.

Çünkü, C kendisini çarparak E'yi oluştursun, ve D kendisini çarparak G'yi oluştursun; ayrıca C, D'yi çarparak F'yi, ve C, D sayıları F'yi çarparak sırasıyal H, K'yi oluştursun.

Şimdi açıkça görülüyor ki, E, F, G ve A, H, K, B sayıları, C'nin D'ye oranında, sürekli orantılıdır. **[VIII.11, VIII.12]**

Ve, A, H, K, B sürekli orantılı olduğundan, ve A, B'yi ölçtüğünden, H'yi de ölçer. **[VIII.7]**

Ve, A'nın H'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşittir; bu durumda C de D'yi ölçer. **[Tan. VII.20]**

Şimdi de C, D'yi ölçsün;

diyorum ki, A da B'yi ölçecektir.

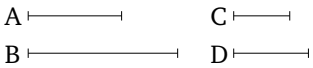
Çünkü, aynı kurguyla, A, H, K, B'nin, C'nin D'ye oranında, sürekli orantılı olduğunu benzer yolla kanıtlayabiliriz.

Ve, C, D'yi ölçtüğünden, ve C'nin D'ye oranı, A'nın H'ye oranına eşit olduğundan, A, H'yi ölçer, **[Tan. VII.20]**

böylece A, B'yi de ölçer.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

16. Önerme:
Eğer bir kare sayı bir başka kare sayıyı ölçmüyorsa, kenarı da diğerinin kenarını ölçmez, ve eğer bir kenar bir diğer kenarı ölçmüyorsa karesi de diğerinin karesini ölçmez.



A, B sayıları kare sayılar olsun, ve C, D onların kenarları olsun; ve A, B'yi ölçmesin;

diyorum ki, C de D'yi ölçmez.

Çünkü, eğer C, D'yi ölçerse, A da B'yi ölçecektir. **[VIII.14]**

Ama A, B'yi ölçmüyor; öyleyse C de D'yi ölçmez.

Şimdi de, C, D'yi ölçmesin;

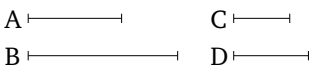
diyorum ki, A da B'yi ölçmeyecektir.

Çünkü, eğer A, B'yi ölçerse, C de D'yi ölçecektir. **[VIII.14]**

Ama C, D'yi ölçmüyor; öyleyse A da B'yi ölçmez.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

17. Önerme:
Eğer bir küp sayı bir başka küp sayıyı ölçmüyorsa, kenarı da diğerinin kenarını ölçmez, ve eğer bir kenar bir diğer kenarı ölçmüyorsa küpü de diğerinin küpünü ölçmez.



Çünkü, A küp sayısı, B küp sayısını ölçmesin, A'nın kenarı C, B'nin kenarı D olsun;

diyorum ki, C, D'yi ölçmeyecektir.

Çünkü, eğer C, D'yi ölçerse, A da B'yi ölçecektir. **[VIII.15]**

Ama A, B'yi ölçmüyor; öyleyse C de D'yi ölçmez.

Şimdi de C, D'yi ölçmesin;

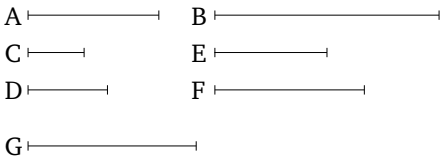
diyorum ki, A da B'yi ölçmeyecektir.

Çünkü, eğer A, B'yi ölçerse, C de D'yi ölçecektir. **[VIII.15]**

Ama C, D'yi ölçmüyor; öyleyse A da B'yi ölçmez.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

18. Önerme:
İki benzer düzlem sayısı arasına orta orantılı bir sayı yerleştirilebilir, ve bu düzlem sayıların oranı karşılıklı kenarların oranının çift oranıdır.



A, B, benzer iki düzlem sayısı olsun, ve A'nın kenarları C, D, ve B'nin kenarları E, F olsun.

Şimdi, benzer düzlem sayıları, kenarları orantılı olan sayılar olduğundan, **[Tan. VII.21]**

C'nin D'ye oranı, E'nin F'ye oranına eşittir.

Diyorum ki, o zaman A, B arasında orta orantılı bir sayı vardır, ve A'nın B'ye oranı, C'nin E'ye oranının, ya da D'nin F'ye oranının, yani karşılıklı kenarların oranlarının çift oranıdır.

Şimdi, C'nin D'ye oranı, E'nin F'ye oranına eşit olduğundan, yer değiştirerek, C'nin E'ye oranı, D'nin F'ye oranına eşittir. **[VII.13]**

Ve, A düzlem, ve C, D kenarları olduğundan, D, C'yi çarparak A'yı oluşturmuştur.

Aynı nedenden dolayı, E, F'yi çarparak B'yi oluşturmuştur.

Şimdi, D, E'yi çarparak G'yi oluştursun.

O zaman, D sayısı, C'yi çarparak A'yı, ve E'yi çarparak G'yi oluşturduğundan, C'nin E'ye oranı, A'nın G'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Ama, C'nin D'ye oranı, E'nin F'ye oranına eşittir; bu durumda D'nin F'ye oranı, A'nın G'ye oranına eşit olur.

Yine, E sayısı D'yi çarparak G'yi, ve F'yi çarparak B'yi oluştırduğundan, D'nin F'ye oranı, G'nin B'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Ama, D'nin F'ye oranının A'nın G'ye oranına eşit olduğu kanıtlanmıştı; bu durumda A'nın G!ye oranı, G'nin B'ye oranına eşit olur.

Böylece A, G, B sürekli orantılı olur.

Öyleyse A, B arasında orta orantılı bir sayı vardır.

Ayrıca diyorum ki, A'nın B'ye oranı, karşılıklı kenarların oranının, yani C'nin E'ye, ya da D'nin F'ye oranının çift oranıdır.

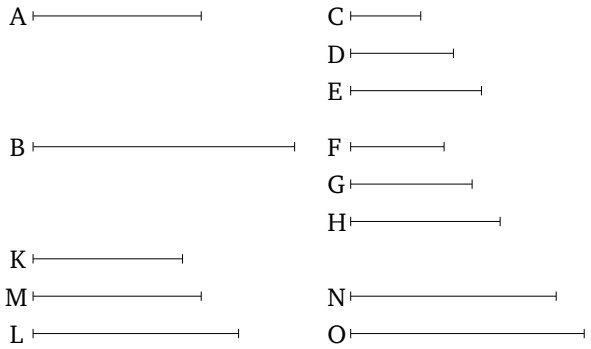
Çünkü, A, G, B sayıları sürekli orantılı olduğundan, A'nın B'ye oranı, G'ye oranının çift oranıdır. **[Tan. V.9]**

Ve, A'nın G'ye oranı, C'nin E'ye, ve D'nin F'ye oranına eşittir.

Öyleyse A'nın B'ye oranı, C'nin E'ye, ya da D'nin F'ye oranının çift oranıdır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

19. Önerme:
İki benzer cisim sayısı arasına orta ornatılı iki sayı yerleştirilebilir, ve bu cisim sayıların oranı karşılıklı kenarların oranının üç kat oranıdır.



A, B iki benzer cisim sayısı olsun, A'nın kenarları C, D, E, ve B'nin kenarları F, G, H olsun.

Şimdi, benzer cisim sayıları, kenarları orantılı olan sayılar olduğundan, **[Tan. VII.21]**

C'nin D'ye oranı, F'nin G'ye oranına, ve D'nin E'ye oranı, G'nin H'ye oranına eşittir.

Diyorum ki, A, B arasına orta orantılı iki sayı yerleştirilebilir, ve A'nın B'ye oranı, C'nin F'ye oranının, ya da D'nin G'ye oranının, ya da E'nin H'ye oranının üç kat oranıdır.

Çünkü, C, D'yi çarparak K'yi oluşturtsun, ve F, G'yi çarparak L'yi oluşturtsun.

Şimdi, C, D ile F, G aynı oranda olduğundan, ve K sayısı C, D çarpımına, ve L sayısı F, G çarpımına eşit olduğundan, K, L sayıları benzer düzlem sayılarıdır; **[Tan. VII.21]**

öyleyse K, L arasına orta orantılı bir sayı yerleştirilebilir. **[VIII.18]**

Bu sayı M olsun.

Bu durumda, bir önceki önermede kanıtlandığı gibi, M sayısı D, F'nin çarpımıdır. **[VIII.18]**

Şimdi, D, C'yi çarparak K'yi, ve F'yi çarparak M'yi oluşturduğundan, C'nin F'ye oranı, K'nin M'ye oranına eşit olur. **[VII.17]**

Ama, K'nin M'ye oranı, M'nin L'ye oranına eşittir.

Öyleyse K, M, L sayıları, C'nin F'ye oranında, sürekli orantılıdır.

Ve, C'nin D'ye oranı, F'nin G'ye oranına eşit olduğundan, yer değiştirerek, C'nin F'ye oranı, D'nin G'ye oranına eşittir. **[VII.13]**

Aynı nedenden dolayı, D'nin G'ye oranı, E'nin H'ye oranına eşittir.

Öyleyse, K, M, L sayıları, C'nin F'ye oranında, D'nin G'ye oranında, ve hem de E'nin H'ye oranında, sürekli orantılıdır.

Şimdi de E, H sayıları M'yi çarparak sırasıyla N, O'yu oluştursun.

Şimdi, A bir cisim sayı, ve C, D, E onun kenarları olduğundan, E sayısı C, D çarpımını çarparak A'yı oluşturmuştur.

Ama C, D çarpımı K'dir; öyleyse E, K'yi çarparak A'yı oluşturmuştur.

Aynı nedenden dolayı, H, L'yi çarparak B'yi oluşturmuştur.

Şimdi, E, K'yi çarparak A'yı, ve ayrıca M'yi çarparak N'yi oluşturduğundan, K'nin M'ye oranı, A'nın N'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Ama, K'nin M'ye oranı, C'nin F'ye oranına, D'nin G'ye oranına, ve hem de E'nin H'ye oranına eşittir; bu durumda C'nin F'ye, D'nin G'ye, ve hem de E'nin H'ye oranı, A'nın N'ye oranına eşit olur.

Yine, E, H sayıları M'yi çarparak sırasıyla N, O'yu oluştuduğundan, E'nin H'ye oranı, N'nin O'ya oranına eşittir. **[VII.18]**

Ama, E'nin H'ye oranı, C'nin F'ye, ve D'nin G'ye oranına eşittir;

bu durumda C'nin F'ye, D'nin G'ye, ve E'nin H'ye oranı, A'nın N'ye, ve N'nin O'ya oranına eşit olur.

Yine, H, M'yi çarparak O'yu, ve ayrıca L'yi çarparak B'yi oluşturduğundan, M'nin L'ye oranı, O'nun B'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Ama, M'nin L'ye oranı, C'nin F'ye, D'nin G'ye, ve E'nin H'ye oranına eşittir.

Bu durumda C'nin F'ye, D'nin G'ye, ve E'nin H'ye oranı, yalnızca O'nun B'ye oranına değil, aynı zamanda A'nın N'ye ve N'nin O'ya oranına da eşit olur.

Öyleyse A, N, O, B sayıları, kenarların yukarda belirtilen oranlarında, sürekli orantılıdır.

Diyorum ki, A'nın B'ye oranı da karşılıklı kenarların oranlarının, yani C'nin F'ye oranının, ya da D'nin G'ye oranının, ya da E'nin H'ye oranının, üç kat oranına eşittir.

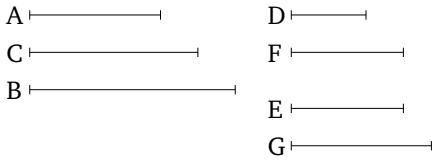
Çünkü, A, N, O, B sayıları sürekli orantılı olduğundan, A'nın B'ye oranı, A'nın N'ye oranının üç kat oranıdır. **[Tan. V.10]**

Ama, A'nın N'ye oranının C'nin F'ye, D'nin G'ye, ve hem de E'nin H'ye oranına eşit olduğu kanıtlanmıştı.

Öyleyse A'nın B'ye oranı, karşılıklı kenarların oranlarının, yani C'nin F'ye, D'nin G'ye, ve hem de E'nin H'ye oranın üç kat oranıdır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

20. Önerme:
Eğer iki sayı arasında orta orantılı bir sayı varsa, o iki sayı benzer düzlem sayılarıdır.



A, B sayıları arasında orta orantılı bir C sayısı olsun;

diyorum ki, A, B benzer düzlem sayılarıdır.

A, C ile aynı orandaki en küçük D, E sayıları alınsın; **[VII.33]**

bu durumda D, A'yı, E'nin C'yi ölçtüğü sayıda ölçer. **[VII.20]**

Şimdi, D, A'yı kaç kez ölçüyorsa, F'nin içinde o kadar birim olsun; bu durumda F, D'yi çarparak A'yı oluşturur, böylece A bir düzlem sayısı, ve D, F kenarları olur.

Yine, C, B ile aynı orandaki en küçük sayılar D, E olduğundan, D, C'yi, E'nin B'yi ölçtüğü sayıda ölçer. **[VII.20]**

O zaman, E, B'yi kaç kez ölçüyorsa, G'nin içinde o kadar birim olsun; bu durumda G, E'yi çarparak B'yi oluşturur.

Böylece B bir düzlem sayısı, ve E, G kenarları olur.

Öyleyse A, B düzlem sayılarıdır.

Şimdi de diyorum ki benzerdirler.

Çünkü, F, D'yi çarparak A'yı, ve E'yi çarparak C'yi oluşturduğundan, D'nin E'ye oranı, A'nın C'ye oranına, yani C'nin B'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

> *[Vatikan yazmasında bu son paragrafın yanlış olduğu düşünülüyor. Fitzpatrick hatayı göstermekle yetinip, doğruyu bulmayı okuyana bırakır. Heath aşağıdaki düzeltmeyi önerir.*
>
> *Çünkü, E, C'yi, D'nin A'yı ölçtüğü kadar ölçtüğünden, yani F'deki birimler kadar, F, E'yi çarparak C'yi oluşturur.*
>
> *Peyrard hatadan söz etmeden Heath'in yukardaki önerisine benzer bir açıklayıcı cümle kullanır. Henrion başka bir metin kullandığından yukardaki paragraftaki ayrıntılara girmeden A ve B'nin düzlem sayı olduğunun kanıtlanabileceğini söylemekle yetinir.]*

Ve E sayısı F, G'yi çarparak sırasıyla C, B'yi oluşturduğundan, F'nin G'ye oranı, C'nin B'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

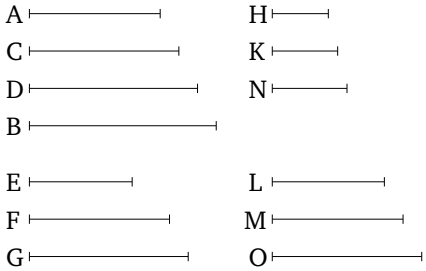
Ama, C'nin B'ye oranı, D'nin E'ye oranına eşittir; bu durumda D'nin E'ye oranı, F'nin G'ye oranına da eşit olur.

Ve yer değiştirerek, D'nin F'ye oranı, E'nin G'ye oranına eşit olur. **[VII.13]**

Öyleyse, A, B benzer düzlem sayılarıdır; çünkü kenarları orantılıdır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

21. Önerme:
Eğer iki sayı arasında orta orantılı iki sayı varsa, o ilk iki sayı benzer cisim sayılarıdır.



A, B sayıları arasında orta orantılı C, D sayıları olsun;

diyorum ki A, B benzer cisim sayılarıdır.

Çünkü, A, C, D sayılarıyla aynı oranda en küçük E, F, G sayıları alınsın; **[VII.33, VIII.2]**

bu durmda bunların ucundaki E, G aralarında asaldır. **[VIII.3]**

Şimdi, E, G arasında orta orantılı bir F sayısı olduğundan, E, G sayıları benzer düzlem sayılarıdır. **[VIII.20]**

O zaman, E'nin kenarları H, K, ve G'nin kenarları L, M olsun.

Bu durumda, bir önceki önermeden açıkça görülür ki E, F, G sayıları, H'nin L'ye oranı, ve K'nin M'ye oranında, sürekli orantılıdır.

Şimdi, E, F, G sayıları, A, C, D sayılarıyla aynı orandaki en küçük sayılar olduğundan, eşit dış oranlar olarak, E'nin G'ye oranı, A'nın D'ye oranına eşittir. **[VII.14]**

Ama E, G aralarında asaldır, ve asallar en küçüktür, ve en küçükler kendileriyle aynı oranda olanları aynı sayıda ölçerler, büyük olan büyük olanı, küçük olan küçük olanı, yani öncüller öncülleri ve ardıllar ardılları; **[VII.20]**

öyleyse E, A'yı G'nin D'yi ölçtüğü sayıda ölçer.

Şimdi, E'nin A'yı ölçtüğü sayıda birim N'nin içinde olsun.

Bu durumda N, E'yi çarparak A'yı oluşturur.

Ama E sayısı H, K çarpımıdır; bu durumda N sayısı H, K çarpımını çarparak A'yı oluşturmuştur.

Öyleyse A bir cisim sayıdır, ve H, K, N de kenarlarıdır.

Yine, E, F, G sayıları C, D, B sayılarıyla aynı orandaki en küçük sayılar olduğundan, E, C'yi, G'nin B'yi ölçtüğü sayıda ölçer.

Şimdi, E'nin C'yi ölçtüğü sayıda birim O'nun içinde olsun.

Öyleyse G, B'yi O'daki birimler kadar ölçer; bu durumda O, G'yi çarparak B'yi oluşturur.

Ama G sayısı L, M çarpımıdır; bu durumda O sayısı L, M çarpımını çarparak B'yi oluşturmuştur.

Öyleyse B bir cisim sayıdır, ve L, M, O da kenarlarıdır; böylece A, B cisim sayılardır.

Diyorum ki benzerdirler de.

Çünkü, N, O sayıları E'yi çarparak A, C'yi yaptıklarından, N'nin O'ya oranı, A'nın C'ye, ve E'nin F'ye oranına eşittir. **[VII.18]**

Ama E'nin F'ye oranı, H'nin L'ye, ve K'nin M'ye oranına eşittir;

bu durumda H'nin L'ye oranı da, K'nin M'ye, ve N'nin O'ya oranına eşit olur.

Ve A'nın kenarları H, K, N, B'nin kenarları da O, L, M'dir.

Öyleyse A, B benzer cisim sayılarıdır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

22. Önerme:
Eğer üç sayı sürekli orantılıysa ve birincisi kareyse üçüncüsü de karedir.



A, B, C sayıları sürekli orantılı üç sayı olsun, ve A bir kare olsun;

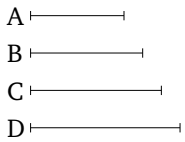
diyorum ki, üçüncü sayı C de karedir.

Çünkü, A, C arasında orta orantılı bir B sayısı olduğundan, A, C benzer düzlem sayılarıdır. **[VIII.20]**

Ama A karedir; öyleyse C de karedir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

23. Önerme:
Eğer dört sayı sürekli orantılıysa ve birincisi küpse üçüncüsü de küptür.



A, B, C, D sayıları sürekli orantılı dört sayı olsun, ve A bir küp sayı olsun;

diyorum ki, D de küptür.

Çünkü, A, D sayıları arasında orta orantılı iki sayı, B, C vardır, öyleyse A, D benzer cisim sayılardır. **[VIII.21]**

Ama A küptür; öyleyse D de küptür.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

24. Önerme:
Eğer iki sayının birbirine oranı bir kare sayının başka bir kare sayıya oranına eşitse, ve birinci sayı bir kareyse ikinci sayı da karedir.



A, B sayılarının birbirine oranı, bir kare sayı C'nin başka bir kare sayı D'ye oranına eşit olsun, ve A bir kare olsun;

diyorum ki, B de karedir.

Çünkü, C, D kare olduklarından, benzer düzlem sayılarıdır.

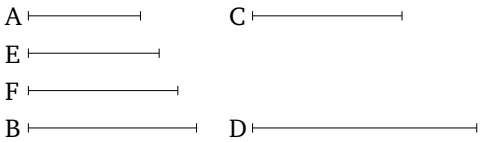
Öyleyse C, D arasında orta orantılı bir sayı vardır. **[VIII.18]**

Ve C'nin D'ye oranı, A'nın B'ye oranına eşittir; öyleyse A, B'nin arasında da orta orantılı bir sayı vardır. **[VIII.8]**

Ve A bir karedir, öyleyse B de karedir. **[VIII.22]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

25. Önerme:
Eğer iki sayının birbirine oranı bir küp sayının başka bir küp sayıya oranına eşitse, ve birinci sayı bir küpse ikinci sayı da küptür.



A, B sayılarının birbirine oranı, bir küp sayı C'nin başka bir küp sayı D'ye oranına eşit olsun, ve A bir küp olsun;

diyorum ki, B de küptür.

Çünkü, C, D küp olduklarından, cisim sayılardır.

Öyleyse C, D arasında orta orantılı iki sayı vardır. **[VIII.19]**

Ve C, D'nin arasında sürekli orantılı kaç sayı varsa, onlarla aynı orandaki sayıların arasında da sürekli orantılı o kadar sayı vardır; **[VIII.8]**

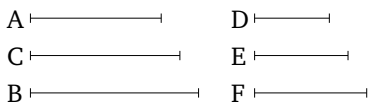
böylece A, B arasında da orta orantılı iki sayı bulunur.

Bu sayılar E, F olsun.

O zaman, A, E, F, B sayıları sürekli orantılı olduğundan, ve A küp olduğundan, B de küptür. **[VIII.23]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

26. Önerme:
İki benzer düzlem sayısının birbirine oranı bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşittir.



A, B benzer düzlem sayıları olsun;

diyorum ki, A'nın B'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşittir.

Çünkü, A, B benzer düzlem sayıları olduğundan, A, B arasında orta orantılı bir sayı vardır. **[VIII.18]**

Bu sayı C olsun; ve A, C, B ile aynı orandaki en küçük sayılar, D, E, F, alınsın; **[VII.33, VIII.2]**

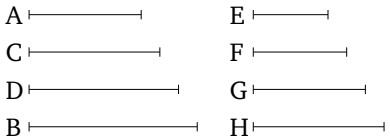
bu durumda uçlardaki D, F sayıları kare olur. **[DS. VIII.2]**

Ve D'nin F'ye oranı, A'nın B'ye oranına eşit olduğundan, ve D, F kare olduğundan,

A'nın B'ye oranı, bir karenin bir kareye oranına eşittir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

27. Önerme:
İki benzer cisim sayısının birbirine oranı bir küp sayının bir küp sayıya oranına eşittir.



A, B benzer küp sayılar olsun;

diyorum ki, A'nın B'ye oranı, bir küp sayının bir küp sayıya oranına eşittir.

Çünkü, A, B benzer küp sayılar olduğundan, A, B arasında orta oranlı iki sayı vardır. **[VIII.19]**

Bu sayılar C, D olsun, ve A, C, D, B ile aynı oranda ve aynı miktardaki en küçük sayılar, E, F, G, H, alınsın; **[VII.33, VIII.2]**

bu durumda uçlardaki E, H sayıları küp olur. **[DS. VIII.2]**

Ve, E'nin H'ye oranı, A'nın B'ye oranına eşittir;

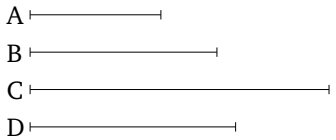
öyleyse A'nın B'ye oranı, bir küp sayının bir küp sayıya oranına eşittir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

Kitap IX

1. Önermeler

1. Önerme:
İki benzer düzlem sayısının çarpımı karedir.



A, B, iki benzer düzlem sayısı olsun, ve A, B'yi çarparak C'yi oluşturmuş olsun;

diyorum ki, C karedir.

Çünkü, A kendisini çarparak D'yi oluştursun. Bu durumda D kare olur.

A kendisini çarparak D'yi, ve B'yi çarparak C'yi oluşturduğundan, A'nın B'ye oranı, D'nin C'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Ve, A, B benzer düzlem sayıları olduğundan, A, B arasında orta oranlı bir sayı vardır. **[VIII.18]**

Ama, iki sayı arasına sürekli orantılı olacak şekilde kaç sayı yerleştirilebiliyorsa, onlarla aynı oranlı olanlar arasına da o kadar yerleştirilir; **[VIII.8]**

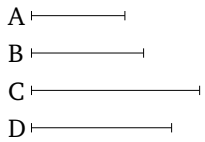
öyleyse D, C arasında da orta orantılı bir sayı vardır.

Ve D bir karedir;

öyleyse C de karedir. **[VIII.22]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

2. Önerme:
Eğer iki sayının çarpımı kareyse o sayılar benzer düzlem sayılarıdır.



A, B iki sayı olsun, ve A, B'yi çarparak kare sayı C'yi oluşturmuş olsun;

diyorum ki, A, B benzer düzlem sayılarıdır.

Çünkü, A kendisini çarparak D'yi oluşturtsun; bu durumda D karedir.

Şimdi, A kendisini çarparak D'yi, ve B'yi çarparak C'yi oluşturduğundan, A'nin B'ye oranı, D'nin C'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Ve, D bir kare olduğundan, ve C de öyle olduğundan, D, C benzer düzlem sayıları olur.

Öyleyse D, C arasında orta orantılı bir sayı vardır. **[VIII.18]**

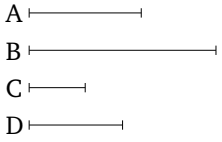
Ve, D'nin C'ye oranı, A'nın B'ye oranına eşittir; öyleyse A, B arasında da orta orantılı bir sayı vardır. **[VIII.8]**

Ama, eğer iki sayı arasında orta orantılı bir sayı varsa, o sayılar benzer düzlem sayılarıdır; **[VIII.20]**

öyleyse A, B benzer düzlem sayılarıdır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

3. Önerme:
Bir küp sayının kendi kendisiyle çarpımı bir küptür.



Çünkü, A küp sayısı kendisini çarparak B'yi oluşturtsun;

diyorum ki, B bir küptür.

Çünkü, A'nın kenarı C alınsın, ve C kendisini çarparak D'yi oluştursun.

Açıkça görülür ki C, D'yi çarparak A'yı oluşturur.

Şimdi, C kendisini çarparak D'yi oluşturduğundan, C, D'yi kendi içindeki birimler kadar ölçer; öyleyse birimin C'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşittir. **[Tan. VII.20]**

Yine, C, D'yi çarparak A'yı oluşturduğundan, D, A'yı, C'deki birimler kadar ölçer.

Ama birim C'yi de C'deki birimler kadar ölçer; öyleyse birimin C'ye oranı, D'nin A'ye oranına eşittir.

Ama, birimin C'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşittir; bu durumda birimin C'ye oranı, C'nin D'ye, ve D'nin A'ya oranına eşit olur. Öyleyse, birimle A arasında sürekli orantılı olacak şekilde orta orantılı iki sayı, C, D, vardır.

Yine, A kendisini çarparak B'yi oluşturduğundan, A, B'yi kendi içindeki birimler kadar ölçer.

Ama birim A'yı da içindeki birimler kadar ölçer; öyleyse birimin A'ye oranı, A'nın B'ye oranına eşittir. **[Tan. VII.20]**

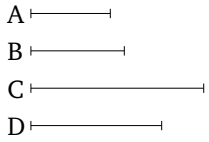
Ama, birimle A arasında orta orantılı iki sayı vardır, öyleyse A, B arasında da orta orantılı iki sayı vardır. **[VIII.8]**

Ama, eğer iki sayı arasında orta orantılı iki sayı varsa, ve birincisi küpse, ikincisi de küptür. **[VIII.23]**

Ve A küptür; öyleyse B de küptür.

Bundan dolayı vs …
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

4. Önerme:
İki küp sayının çarpımı bir küptür.



Çünkü, A küp sayısı, B küp sayısını çarparak C'yi oluşturmuş olsun;

diyorum ki, C bir küptür.

Çünkü, A kendisini çarparak D'yi oluşturtsun; o zaman D küptür. **[IX.3]**

Ve, A kendisini çarparak D'yi, ve B'yi çarparak C'yi oluşturduğundan, A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

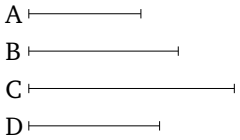
Ve, A, B küp sayılar olduğundan, A, B benzer cisim sayılarıdır. Öyleyse A, B arasında orta orantılı iki sayı vardır; **[VIII.19]**

böylece C, D arasında da orta orantılı iki sayı vardır. **[VIII.8]**

Ve D bir küptür; öyleyse C de küptür. **[VIII.23]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

5. Önerme:
Bir küp sayı bir sayıyı çarparak bir küp oluşturursa, çarpılan sayı da küptür.



Çünkü, A küp sayısı B'yi çarparak C küp sayısını oluşturmuş olsun;

diyorum ki, B bir küptür.

Çünkü, A kendisini çarparak D'yi oluşturtsun; bu durumda D bir küptür. **[IX.3]**

Şimdi, A kendisini çarparak D'yi, ve B'yi çarparak C'yi oluşturduğundan, A'nın B'ye oranı, D'nin C'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Ve, D, C küp olduklarından, benzer cisim sayılarıdır.

Öyleyse, C, D arasında orta orantılı iki sayı vardır. **[VII.19]**

Ve, D'nin C'ye oranı, A'nın B'ye oranına eşittir; öyleyse A, B arasında da orta orantılı iki sayı vardır. **[VIII.8]**

Ve A küptür; öyleyse B de küptür. **[VIII.23]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

6. Önerme:
Bir sayının kendiyle çarpımı küpse, sayının kendisi de küptür.



Çünkü, A sayısı kendisini çarparak B küp sayısını oluşturmuş olsun;

diyorum ki, A da küptür.

Çünkü, A, B'yi çarparak C'yi oluşturtsun.

A kendisini çarparak B'yi, ve B'yi çarparak C'yi oluşturduğundan, C küptür.

Ve, A kendisini çarparak B'yi oluşturduğundan, A, B'yi kendi içindeki birimler kadar ölçer.

Ama birim de A'yı içindeki birimler kadar ölçer.

Öyleyse, birimin A'ya oranı, A'nın B'ye oranına eşittir. **[Tan. VII.20]**

Ve, A, B'yi çarparak C'yi oluşturduğundan, B, C'yi A'daki birimler kadar ölçer.

Ama birim de A'yı içindeki birimler kadar ölçer.

Öyleyse, birimin A'ya oranı, B'nin C'ye oranına eşittir. **[Tan. VII.20]**

Ama, birimin A'ya oranı, A'nın B'ye oranına eşittir; bu durumda A'nın B'ye oranı, B'nin C'ye oranına da eşit olur.

Ve B, C küp olduklarından, benzer cisim sayılarıdır.

Öyleyse B, C arasında orta orantılı iki sayı vardır. **[VIII.19]**

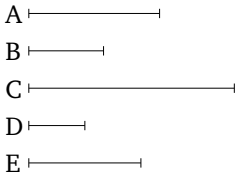
Ve B'nin C'ye oranı, A'nın B'ye oranına eşittir.

Öyleyse A, B arasında da orta orantılı iki sayı vardır. **[VIII.8]**

Ve B küptür; öyleyse A da küptür. **[VII.23]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

7. Önerme:
Bileşik bir sayıyla bir sayının çarpımı bir cisim sayıdır.



Çünkü, A bileşik sayısı bir B sayısını çarparak C'yi oluşturmuş olsun;

diyorum ki, C cisimdir.

Çünkü, A bileşik olduğundan, bir sayı tarafından ölçülecektir. **[Tan. VII.13]**

Bu sayı D olsun; ve D'nin A'yı ölçtüğü kadar birim E'nin içinde olsun.

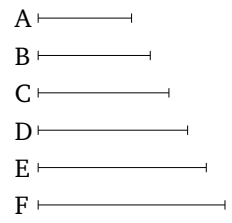
D, A'yı, E'deki birimler kadar ölçtüğünden, E, D'yi çarparak A'yı oluşturur. **[Tan. VII.15]**

Ve A, B'yi çarparak C'yi oluşturmuş olduğundan, ve A sayısı D, E çarpımı olduğundan, D, E çarpımı B'yi çarparak C'yi oluştumuş olur.

Öyleyse C sayısı cisimdir, D, E, B de kenarlarıdır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

8. Önerme:
Birimden başlayarak istediğimiz miktarda aldığımız sayılar sürekli orantılıysa, üçüncü sayı bir karedir, ve ondan sonra birer atlayarak gelenlerin hepsi karedir; dördüncü bir küptür ve ondan sonra ikişer atlayarak gelenlerin hepsi küptür; ve yedinc hem kare hem küptür, ondan sonra beşer atlayarak gelenlerin hepsinin olduğu gibi.



Birimden başlayarak sürekli orantılı istediğimiz miktarda seçtiğimiz sayılar A, B, C, D, E, F olsun;

diyorum ki, birimden itibaren üçüncü olan B, ve birer atlayarak alınanlar karedir; dördüncü olan C, ve ikişer atlayarak alınanlar küptür; ve yedinci olan F, ve beşer atlayarak alınanlar hem küp hem karedir.

Çünkü, birimin A'ya oranı, A'nın B'ye oranına eşit olduğundan, birim A'yı, A'nın B'yi ölçtüğü sayıda ölçer. **[Tan. VII.20]**

Ama birim A'yı içindeki birimler kadar ölçer; öyleyse A, B'yi A'daki birimler kadar ölçer.

Demek ki A kendisini çarparak B'yi oluşturmuştur; öyleyse B karedir.

Ve B, C, D sürekli orantılı olduğundan, ve B kare olduğundan, D da karedir. **[VIII.22]**

Aynı nedenden dolayı F de karedir.

Benzer şekilde, birer atlayarak alınanların kare olduğunu kanıtlayabiliriz.

Şimdi diyorum ki birimden sonra dördüncü olan C, ve ikişer atlayarak alınanlar küptür.

Çünkü, birimin A'ya oranı, B'nin C'ye oranına eşit olduğundan, birim A'yı, B'nin C'yi ölçtüğü sayıda ölçer.

Ama birim A'yı A'nın içindeki birimler kadar ölçer; bu durumda B, C'yi A'daki birimler kadar ölçer.

Öyleyse A, B'yi çarparak C'yi oluşturmuştur.

A kendisini çarparak B'yi oluşturduğundan, ve B'yi çarparak C'yi oluşturduğundan, C küptür.

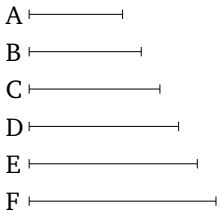
Ve C, D, E, F sürekli orantılı olduğundan, ve C küp olduğundan F de küptür. **[VIII.23]**

Ama kare olduğu da kanıtlanmıştı; öyleyse, birimden sonra yedinci gelen sayı hem küp hem karedir.

Benzer şekilde, beşer atlayarak alınan sayıların da hem küp hem kare olduğunu kanıtlayabiliriz.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

9. Önerme:
Birimden başlayarak istediğimiz miktarda aldığımız sayılar sürekli orantılıysa, birimden sonra gelen sayı kareyse diğerlerinin hepsi de karedir; Ve birimden sonra gelen sayı küpse diğerlerinin hepsi de küptür.



Birimden başlayarak sürekli orantılı istediğimiz miktarda seçtiğimiz sayılar A, B, C, D, E, F olsun, birimden sonraki ilk sayı A kare olsun;

diyorum ki diğerlerinin hepsi karedir.

Şimdi, birimden sonra üçüncü olan B'nin, ve birer atlayarak alınanların kare olduğu kanıtlanmıştı; **[IX.8]**

diyorum ki diğerleri de karedir.

Çünkü, A, B, C sürekli orantılı olduğundan, ve A kare olduğundan, C de karedir. **[VII.22]**

Yine, B, C, D sürekli orantılı olduğundan, ve B kare olduğundan, D de karedir. **[VIII.22]**

Benzer şekilde diğerlerinin de kare olduğunu kanıtlayabiliriz.

Şimdi, A küp olsun;

diyorum ki diğerlerinin hepsi küptür.

Şimdi, birimden sonra dördüncü olan C'nin, ve ikişer atlayarak alınanların küp olduğu kanıtlanmıştı; **[IX.8]**

diyorum ki diğerleri de hepsi küptür.

Çünkü, birimin A'ya oranı, A'nın B'ye oranına eşit olduğundan, birim A'yı, A'nın B'yi ölçtüğü sayıda ölçer.

Ama birim A'yı içindeki birimler kadar ölçer; öyleyse A da B'yi içindeki birimler kadar ölçer; öyleyse A kendisini çarparak B'yi oluşturmuştur.

Ve A, küptür.

Ama, eğer bir küp kendisini çarparak bir sayı oluşturusa, çarpım küptür. **[IX.3]**

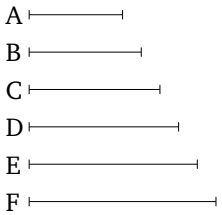
Öyleyse B küptür.

Ve, dört sayı A, B, C, D sürekli orantılı olduğundan, ve A küp olduğundan, D küptür.

Aynı nedenden dolayı E de küptür, ve benzer şekilde diğerlerinin hepsi küptür.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

10. Önerme:
Birimden başlayarak istediğimiz miktarda aldığımız sayılar sürekli orantılıysa, birimden sonra gelen sayı kare değilse, birimden sonra gelen üçüncü sayı ve ondan sonra birer atlayarak gelenlerin dışında hiç biri kare değildir; ve ikinci sayı küp değilse, dördüncü sayı ve ondan sonra ikişer atlayarak gelenlerin dışında hiç biri küp değildir



Birimden başlayarak sürekli orantılı istediğimiz miktarda seçtiğimiz sayılar A, B, C, D, E, F olsun, birimden sonraki ilk sayı A kare olmasın;

diyorum ki, birimden sonraki üçücü sayı ve ondan sonra birer atlayarak alınanların dışında hiçbiri kare değildir.

Çünkü, eğer mümkünse C bir kare olsun.

Ama B de karedir; **[IX.8]**

bu durumda B, C'nin birbirine oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olur.

Ve, B'nin C'ye oranı, A'nın B'ye oranına eşittir; öyleyse A, B'nin birbirine oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşittir; bu durumda A4,B4 benzer düzlem sayıları olur. **[VIII.28]**

Ve B bir karedir; öyleyse A da karedir: bu varsayıma aykırıdır.

Öyleyse C kare değildir.

Benzer şekilde, birimden sonra gelen üçüncü sayı ve ondan sonra birer atlayarak alınanlar dışında hiçbirinin kare olmadığını kanıtlayabiliriz.

Şimdi de A küp olmasın.

diyorum ki, birimden sonra gelen dördüncü sayı ve ondan sonra ikişer atlayarak alınanlar dışında hiçbiri küp değildir.

Çünkü, eğer mümkünse D küp olsun.

Şimdi, C de küptür; çünkü birimden sonra gelen dördüncü sayıdır. **[IX.8]**

Ve, C'nin D'ye oranı, B'nin C'ye oranına eşittir; öyleyse B'nin C'ye oranı, küpün küpe oranına eşittir.

Ve C küptür; öyleyse B de küptür. **[VIII.25]**

Ve, birimin A'ya oranı, A'nın B'ye oranına eşit olduğundan, ve birim A'yı içindeki birimler kadar ölçtüğünden, A da B'yi içindeki birimler kadar ölçer; öyleyse A kendisini çarparak B küp sayısını oluşturmuştur.

Ama, eğer bir sayı kendisini çarparak bir küp sayı oluştururs a, kendisi de küptür. **[IX.6]**

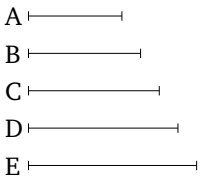
Öyleyse A küptür: bu varsayıma aykırıdır.

Öyleyse D küp değildir.

Benzer şekilde, birimden sonra dördüncü gelen sayı ve ondan sonra ikişer atlayarak alınanlar dışında hiçbirinin küp olmadığını kanıtlayabiliriz.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

11. Önerme:
Birimden başlayarak istediğimiz miktarda aldığımız sayılar sürekli orantılıysa, daha küçük sayı daha büyük sayıyı orantılı sayılardan birine göre ölçer.



Birim A'dan başlayarak sürekli orantılı olan ve istediğimiz miktarda seçtiğimiz sayılar B, C, D, E olsun;

diyorum ki, B, C, D E sayılarının en küçüğü olan B sayısı E'yi C, D sayılarından birine göre ölçer.

Çünkü, birim A2nın B'ye oranı, D'nin E'ye oranına eşit olduğundan, birim A, B'yi, D'nin E'yi ölçtüğü sayıda ölçer;

bu durumda, yer değiştirerek, birim A, D'yi, B'nin E'yi ölçtüğü sayıda ölçer. **[VII.15]**

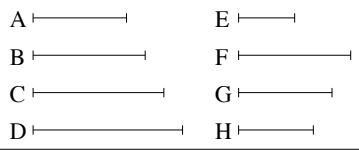
Ama birim A, D'yi D'deki birimler kadar ölçer; öyleyse B de E'yi D'deki birimler kadar ölçer;

böylece daha küçük olan B, daha büyük olan E'yi orantılı sayılar arasında bulunan sayılardan birine kadar böler.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

Doğal Sonuç: Buradan açıkça görüldüğü gibi, ölçen sayının ölçülen sayıyı hangi sayıya göre ölçtüğünü bulmak için ölçülen sayıdan geriye doğru ölçen sayının birime uzaklığı kadar gitmek gerekir.

12. Önerme:
Birimden başlayarak istediğimiz miktarda aldığımız sayılar sürekli orantılıysa, sonuncu sayıyı hangi asallar ölçerse, birimden sonraki ilk sayıyı da aynı asallar ölçer.



Birimden başlayarak istediğimiz miktarda aldığımız sürekli orantılı sayılar A, B, C, D olsun;

diyorum ki D'yi hangi asallar ölçerse, A da aynı asallar tarafından ölçülecektir.

Çünkü, D sayısı E asalı tarafından ölçülsün;

diyorum ki, E, A'yı ölçer.

Çünkü, ölçmediğini varsayalım; E asaldır ve her asal ölçmediği sayıyla aralarında asaldır; **[VII.29]**

bu durumda E, A aralarında asaldır.

Ve, E, D'yi ölçtüğünden, F'ye göre ölçsün, E, F'yi çarparak D'yi oluştumuştur.

Yine, A, C'yi D'deki birimler kadar ölçtüğünden, **[IX.11, DS. IX.11]**

A, C'yi çarparak D'yi oluşturur.

Ama, ayrıca E de F'yi çarparak D'yi oluşturmuştu; öyleyse A, C çarpımı E, F çarpımına eşittir.

Bu durumda A'nın E'ye oranı, F'nin C'ye oranına eşittir. **[VII.19]**

Ama A, E aralarında asaldır, ve asallar en küçüklerdir, **[VII.21]**

ve küçükler kendileriyle aynı oranda olanları aynı sayıda ölçerler, öncüller öncülleri, ardıllar ardılları; **[VII.20]**

öyleyse E, C'yi ölçer.

G'ye göre ölçsün; yani E, G'yi çarparak C'yi oluşturur.

Ama, bundan önceki önermeye göre, A da B'yi çarparak C'yi oluşturmuştur. **[IX.11, DS. IX.11]**

Öyleyse A, B çarpımı, E, G çarpımına eşittir.

Öyleyse, A'nın E'ye oranı, G'nin B'ye oranına eşittir. **[VII.19]**

Ama A, E aralarında asaldır, ve asallar en küçüklerdir, **[VII.21]**

ve küçükler kendileriyle aynı oranda olanları aynı sayıda ölçerler, öncüller öncülleri, ardıllar ardılları; **[VII.20]**

öyleyse E, B'yi ölçer.

H'ye göre ölçsün; yani E, H'yi çarparak B'yi oluşturur.

Ama ayrıca A da kendisini çarparak B'yi oluşturmuştur; **[IX.8]**

öyleyse E, H çarpımı A üzerindeki kareye eşittir.

Bu durumda E'nin A'ya oranı, A'nın H'ye oranına eşit olur. **[VII.19]**

Ama A, E aralarında asaldır, ve asallar en küçüklerdir, **[VII.21]**

ve küçükler kendileriyle aynı oranda olanları aynı sayıda ölçerler, öncüller öncülleri, ardıllar ardılları; **[VII.20]**

öyleyse öncüller olarak E, B'yi ölçer.

Ama aynı zamanda ölçmez de: bu olamaz.

Öyleyse E, A aralarında asal değildir.

Öyleyse aralarında bileşiktirler.

Ama aralarında bileşik olan sayılar bir sayıyla ölçülür. **[Tan. VII.14]**

Ve varsayıma göre E asal olduğundan, ve asal bir sayı kendinden başka bir sayıyla ölçülmediğinden, A, E'yi E ölçer,

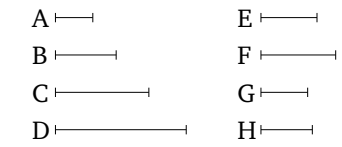
yani E, A'yı ölçer.

Ama D'yi de ölçer; öyleyse E asalı A, D'yi böler.

Benzer şekilde, D ne kadar asalla ölçülürse, A'nın da aynı asallarla ölçüleceğini kanıtlayabiliriz.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

13. Önerme:
Birimden başlayarak istediğimiz miktarda aldığımız sayılar sürekli orantılıysa, eğer birimden sonra gelen sayı asalsa, son sayı orantılı sayılardan başka bir sayıya bölünmez.



Birimden başlayarak istediğimiz miktarda aldığımız sürekli orantılı sayılar A, B, C, D olsun, ve birimden sonra gelen A sayısı asal olsun;

diyorum ki, en büyükleri olan D sayısı, A, B, C sayılarından başka sayılara bölünmes.

Çünkü, eğer mimkünse E'ye bölünsün, ve E sayısı A, B, C sayılarından biri olmasın.

Bu durumda açıkça görülür ki E bir asal değildir. Çünkü asal olsaydı ve D'yi ölçseydi, asal olan A'yı da ölçecekti, **[IX.12]**

ama ondan farklıdır: bu olamaz.

Öyleyse E asal değildir. Demek ki bileşik sayıdır.

Ama her bileşik sayı bir asal tarafından ölçülür; **[VII.31]**

öyleyse E bir asal tarafından ölçülür.

Şimdi diyorum ki A'dan başka hiçbir asal tarafından ölçülmez.

Çünkü, eğer E başkası tarafından ölçülürse, E, D'yi ölçtüğünden, o başkası D'yi de ölçer; o zaman asal olan A'yı da ölçer, **[IX.12]**

ama ondan farklıdır: bu olamaz.

Öyleyse A, E'yi ölçer.

Ve E, D'yi ölçtüğünden, F'ye göre ölçsün.

Diyorum ki, F sayısı A, B, C sayılarından hiçbirine eşit değildir.

Çünkü, eğer F sayısı A, B, C sayılarından birine eşit olsaydı, D'yi E'ye göre ölçtüğünden, A, B, C sayılarından biri D'yi E'ye göre ölçecekti.

Ama A, B, C sayılarından biri D'yi A, B, C sayılarından birine göre ölçer; **[IX.11]**

o zaman E sayısı da A, B, C sayılarından biri olurdu ki bu varsayıma aykırıdır.

Öyleyse F sayısı A, B, C sayılarından biri değildir.

Benzer şekilde, F'nin A tarafından ölçüldüğünü, F'nin asal olmadığını göstererek, kanıtlayabiliriz.

Çünkü asal olsaydı, D'yi ölçtüğünden, asal olan A'yı da ölçecekti, **[IX.12]**

ama ondan farklıdır: bu olamaz; öyleyse F asal değildir. Bileşik sayıdır.

Ama her bileşik sayı bir asal tarafından ölçülür; **[VII.31]**

öyleyse F bir asal tarafından ölçülür.

Şimdi diyorum ki A'dan başka hiçbir asal tarafından ölçülmez.

Çünkü, eğer başka bir asal F'yi ölçerse, ve F D'yi ölçtüğünden, o başka asal D'yi de ölçer; dolayısıyla asal olan A'yı da ölçer, **[IX.12]**

ama ondan farklıdır: bu olamaz.

Öyleyse A, F'yi ölçer.

Ve, E, D'yi F'ye göre ölçtüğünden, E, F'yi çarparak D'yi oluşturmuştur.

Ama ayrıca A da C'yi çarparak D'yi oluşturmuştur; **[IX.11]**

bu durumda A, C çarpımı E, F çarpımına eşit olur.

O zaman oran olarak, A'nın E'ye oranı, F'nin C'ye oranına eşittir. **[VII.19]**

Ama A, E'yi ölçer; öyleyse F de C'yi ölçer.

G'ye göre ölçsün.

Benzer şekilde, G'nin A, B, C'den birine eşit olmadığını ve A'nın G'yi ölçtüğünü kanıtlayabiliriz.

Ve F, C'yi G'ye göre ölçtüğünden, F, G'yi çarparak C'yi oluşturur.

Ama ayrıca A da B'yi çarparak C'yi oluşturur; **[IX.11]**

bu durumda A, B çarpımı F, G çarpımına eşit olur.

O zaman oran olarak, A'nın F'ye oranı, G'nin B'ye oranına eşittir. **[VII.19]**

Ama A, F'yi ölçer; öyleyse G de B'yi ölçer.

H'ye göre ölçsün.

Benzer şekilde H'nin A'ya eşit olmadığını kanıtlayabiliriz.

Ve G, B'yi H'ye göre ölçtüğünden, G, H'yi çarparak B'yi oluşturur.

Ama ayrıca A da kendisini çarparak B'yi oluşturur; **[IX.8]**

bu durumda H, G çarpımı A üzerindeki kareye eşit olur.

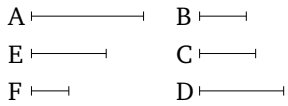
Öyleyse H'nin A'ya oranı, A'nın G'ye oranına eşittir. **[VII.19]**

Ama A, G'yi ölçer; öyleyse H de asal olan A'yı ölçer, ama ondan farklıdır: bu olamaz.

Öyleyse en büyük olan D sayısı, A, B, C'den farklı bir sayı tarafından ölçülmez.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

14. Önerme:
Verilen bazı asallar tarafından ölçülen en küçük sayı, bu asalların dışında başka hiç bir asal tarafından ölçülmez.



A sayısı B, C, D aslları tarafından ölçülen en küçük sayı olsun;

diyorum ki, A sayısı B, C, D asalları dışında hiçbir asal tarafından ölçülmez.

Çünkü, eğer mümkünse E asalı tarafından ölçülsün, ve E asalı B, C, D'nin hiçbirine eşit olmasın.

Şimdi, E, A'yı ölçtüğüne göre, F'ye göre ölçer; bu durumda E, F'yi çarparak A'yı oluşturur.

Ama A sayısı B, C, D asalları tarafından ölçülür.

Ama eğer iki sayı birbirinei çarparak bir sayı oluştururssa, çarpımı ölçen her asal, bu iki sayıdan birini ölçecektir; **[VII.30]**

öyleyse B, C, D'den biri E, F'den birini ölçecektir.

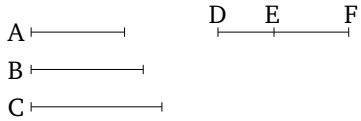
Şimdi, E'yi ölçmeyeceklerdir; çünkü E asaldır ve B, C, D'den farklıdır.

Öyleyse A'dan küçük olan F'yi ölçeceklerdir: bu olamaz, çünkü varsayıma göre A sayısı B, C, D'nin ölçtüğü en küçük sayıdır.

Öyleyse A'yı B, C, D'den başka asal ölçmeyecektir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

15. Önerme:
Sürekli orantılı olan üç sayı bu oranlara sahip en küçük sayılarsa, herhangi ikisinin toplamıyla diğer sayı aralarında asaldır.



Sürekli orantılı A, B, C sayıları bu orandaki en küçük üç sayı olsun;

diyorum ki, A, B, C sayılarınınherhangi ikisinin toplamı ile üçüncüsü aralarında asaldır, yani A, B ile C, B, C ile A, ve A, C ile B.

Çünkü, A, B, C ile aynı orandaki en küçük DE, EF sayıları alınsın. **[VIII.2]**

Buradan açıkça görüldüğü gibi DE kendisini çarparak A'yı, ve EF'yi çarparak B'yi oluşturur, ve ayrıca EF kendisini çarparak C'yi oluşturur. **[VIII.2]**

Şimdi, DE, EF en küçük olduklarından aralarında asaldır. **[VIII.22]**

Ama eğer iki sayı aralarında asalsa, toplamları her biriyle asaldır. **[VIII.28]**

bu durumda DF sayısı DE, EF sayılarının her biriyle arasında asaldır.

Ama ayrıca DE ile DF de aralarında asaldır; bu durumda DF, DE sayıları EF'ye asal olur.

Ama eğer iki sayı herhangi bir sayıya asalsa, çarpımları da o sayıya asal olur; **[VII.24]**

yani FD, DE çarpımı EF'ye asaldır; bu yüzden FD, DE çarpımı DE üzerindeki kareye asaldır. **[VII.25]**

Ama FD, DE çarpımı, DE, EF çarpımıyla DE üzerindeki kareye eşittir; **[II.3]**

bu durumda DE üzerindeki kareyle DE, EF çarpımının toplamı EF üzerindeki kareye asaldır.

Ve DE üzerindeki kare A'dır, DE, EF çarpımı B'dir, ve EF üzerindeki kare C'dir;

öyleyse A, B toplamı C'ye asaldır.

Benzer şekilde, B, C toplamının A£YA asal olduğunu gösterebiliriz.

Şimdi de diyorum ki, A, C toplamı B'ye asaldır.

Çünkü, DF sayısı DE, EF sayılarının her birine asal olduğundan, DF üzerindeki kare de DE, EF çarpımına asaldır. **[VII.24, VII.25]**

Ama DE, EF üzerindeki kareler, DE, EF çarpımının iki katıyla beraber, DF üzerindeki kareye eşittir. **[II.4]**

bu durumda DE, EF üzerindeki kareler, DE, EF çarpımının iki katıyla beraber, DE, EF çarpımına asal olur.

Ayırınca, DE, EF üzerindeki kareler, DE, EF çarpımının tek katıyla beraber, DE, EF çarpımına asal olur.

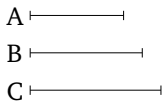
Tekra ayırarak, DE, EF üzerindeki kareler, DE, EF çarpımına asal olur.

Ve, DE üzerindeki kare A'dır, DE, EF çarpımı B'dir, ve EF üzerindeki kare C'dir.

Öyleyse A, C toplamı, B'ye asaldır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

16. Önerme:
İki sayı aralarında asalsa, ikincinin hiçbir sayıya oranı, birincinin ikinciye oranına eşit olmaz.



Çünkü, iki sayı A, B aralarında asal olsun;

diyorum ki, B'nin hiçbir sayıya oranı, A'nın B'ye oranına eşit olmaz.

Çünkü, eğer mümkünse, A'nın B'ye oranı, B'nin C'ye oranına eşit olsun.

Şimdi, A, B aralarında asaldır, ve asallar en küçüktür,

ve küçükler kendileriyle aynı oranda olanları aynı sayıda ölçerler, öncüller öncülleri, ardıllar ardılları; **[VII.20]**

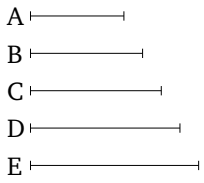
öyleyse öncüller olarak A, B'yi ölçer.

Ama kendisini de ölçer; bu durumda A sayısı aralarında asal olan A, B'yi ölçer: bu olamaz.

Öyleyse B'nin C'ye oranı, A'nın B'ye oranına eşit olmayacaktır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

17. Önerme:
İstediğimiz miktarda aldığımız sayılar sürekli orantılıysa, ve eğer iki uçtaki sayılar aralarında asalsa, sonuncunun hiçbir sayıya oranı, birincinin ikinciye oranına eşit olmayacaktır.



Sürekli orantılı olarak istediğimiz miktarda aldığımız sayılar A, B, C, D olsun, ve iki uçtaki sayılar A, D aralarında asal olsu;

diyorum ki, D'nin hiçbir sayıya oranı, A'nın B'ye oranına eşit olmaz.

Çünkü, eğer mümkünse, A'nın B'ye oranı, D'nin E'ye oranına eşit olsun; öyleyse, yer değiştirerek, A'nın D'ye oranı, B'nin E'ye oranına eşittir. **[VII.13]**

Ama, A, D aralarında asaldır, ve asallar en küçüktür,

ve küçükler kendileriyle aynı oranda olanları aynı sayıda ölçerler, öncüller öncülleri, ardıllar ardılları; **[VII.20]**

öyleyse A, B'yi ölçer.

Ve, A'nın B'ye oranı, B'nin C'ye oranına eşittir. Bu durumda B de C'yi ölçer; böylece A, C'yi de ölçer.

Ve, B'nin C'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşit olduğundan, ve B, C'yi ölçtüğünden, C de D'yi ölçer.

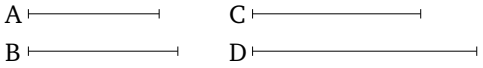
Ama A, C'yi ölçüyordu; o zaman A, D'yi de ölçer.

Ama kendisini de ölçer; bu durumda aralarında asal olan A, D sayılarını A ölçer: bu olamaz.

Öyleyse D'nin hiçbir sayıya oranı, A'nın B'ye oranına eşit olmaz.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

18. Önerme:
İki sayı verildiğinde, onlarla orantılı olacak bir üçüncü sayı bulmanın mümkün olup olmadığını araştırmanın yolu.



A, B sayıları verilmiş olsun, ve bunlarla sürekli orantılı bir üçüncü sayı bulmanın mümkün olup olmadığının araştırılması istenmiş olsun.

Şimdi, A, B sayıları ya aralarında asaldır ya da değildir.

Ve eğer aralarında asalsalar, onlarla orantılı bir üçüncü sayı bulmanın imkansız olduğu kanıtlanmıştı. **[IX.16]**

Öyleyse A, B aralarında asal olmasın, ve B kendisini çarparak C'yi oluştursun.

O zaman A, C'yi ya ölçer ya da ölçmez.

Önce, D'ye göre ölçsün; yani A, D'yi çarparak C'yi oluşturmuştur.

Ama ayrıca, B de kendisini çarparak C'yi oluşturmuştu; bu durumda A, D çarpımı, B üzerindeki kareye eşit olur.

Öyleyse A'nın B'ye oranı, B'nin Dye oranına eşittir; **[VII.19]**

böylece A, B'ye orantılı üçüncü bir D sayısı bulunmuş oldu.

Şimdi de A, C'yi ölçmesin;

diyorum ki, A, B'ye orantılı bir üçüncü sayı bulmak mümkün değildir.

Çünkü, eğer mümkünse üçüncü bir orantılı sayı D bulunmuş olsun.

Bu durumda A, D çarpımı, B üzerindeki kareye eşit olur.

Ama B üzerindeki kare C'dir; öyleyse A, D çarpımı C'ye eşittir.

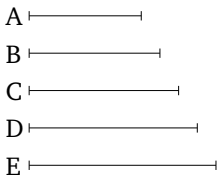
Öyleyse A, D'yi çarparak C'yi oluşturmuştur; dolayısıyla A, C'yi D'ye göre ölçer.

Ama varsayıma göre ölçmez: bu olamaz.

Öyleyse eğer A, C'yi ölçmezse, A, B'ye orantılı bir üçüncü sayı bulmak mümkün değildir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

19. Önerme:
Üç sayı verildiğinde, ne zaman onlarla orantılı olacak bir dördüncü sayı bulmanın mümkün olduğunu araştırmanın yolu.



A, B, C sayıları verilmiş olsun, ve bunlarla orantılı bir dördüncü sayı bulmanın ne zaman mümkün olacağının araştırılması istenmiş olsun.

[Aranan orantılı dördüncü sayının var olması için gerek ve yeter şart A'nın BC'yi bölmesidir. Dikkatli okuyucu aşağıdaki kanıtın gereksiz derecede uzun olduğunu, özellikle ikinci durumun kanıtının yanlış olduğunu görecektir. Heath, Vatikan yazmasında bu kanıtın olduğu yerin zor okunduğunu, okunan yerlerin de düzeltilemeycek kadar yanlış olduğunu söyler. Fitzpatrick ayrıntıya girmeden kanıtın yanlış olduğunu söyler. Peyrard bir yorum yapmadan kendi doğru kanıtını verir.]

Şimdi, ya bunlar sürekli orantılı değildir ve uçtaki sayılar aralarında asaldır;

ya da bunlar bunlar sürekli orantılıdır ve uçtaki sayılar aralarında asal değildir;

ya da hem bunlar sürekli orantılı değildir hem de uçtaki sayılar aralarında asal değildir;

ya da bunlar sürekli orantılıdır ve uçtaki sayılar aralarında asaldır.

Eğer A, B, C sürekli orantılıysa ve uçtaki sayılar A, C aralarında asalsa, bunlara dördüncü orantılı bir sayı bulmanın mümkün olmadığı daha önce kanıtlanmıştı. **[IX.17]**

[Hatalı kısım başlangıcı]

Şimdi A, B, C sürekli orantılı olmasın ve uçtaki A, C yine aralarında asal olsun;

diyorum ki, bu durumda da bunlara orantılı bir dördüncü bulmak mümkün değildir.

Çünkü, eğer mümkünse, A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşit olacak şekilde bir D bulunmuş olsun,

ve B'nin C'ye oranının, D'nin E'ye oranına eşit olması sağlansın.

Şimdi, A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına, ve B'nin Cye oranı, D'nin E'ye oranına eşit olduğundan,

eşit dış oranlar olarak A'nın C'ye oranı, C'nin E'ye oranına eşittir. **[VII.14]**

Ama A, C aralarında asaldır, ve asallar en küçüktür, **[VII.21]**

ve küçükler kendileriyle aynı oranda olanları aynı sayıda ölçerler, öncüller öncülleri, ardıllar ardılları; **[VII.20]**

öyleyse öncüller olarak A, C'yi ölçer.

Ama kendisini de ölçer; bu durumda A, aralarında asal olan A, C'yi ölçer: bu olamaz.

Öyleyse A, B, C'ye orantılı dördüncü bulunamaz.

> *[Hatalı kısım sonu.*
> *Eğer* A, B, C *yerine* 4, 8, 9 *alınırsa, bu kanıtın varsayımları sağlanır ama* 18 *aranan orantılı dördüncü sayı olmasına rağmen, kanıt böyle bir sayı bulunamaz diye biter. Kanıttaki hatayı dikkatli okuyucu bulacaktır.]*

Şimdi A, B, C sürekli orantılı olsun ama A, C aralarında asal olmasın.

Diyorum ki, bunlara orantılı dördüncü bulmak mümkündür.

Çünkü, B, C'yi çarparak D'yi oluştursun; bu durumda A, D'yi ya ölçer ya da ölçmez. Önce, E'ye göre ölçsün; yani A, E'yi çarparak D'yi oluşturmuştur.

Ama, ayrıca B de C'yi çarparak D'yi oluşturmuştur; öyleyse A, E çarpımı B, C çarpımına eşittir;

bu durumda, oran olarak, A'nın B'ye oranı, C'nin E'ye oranına eşit olur. **[VII.19]**

Öyleyse A, B, C'ye orantılı dördüncü olarak E bulunmuştur.

Şimdi de A, D'yi ölçmesin;

diyorum ki, A, B, C'ye orantılı dördüncü bulmak mümkün değildir.

Çünkü, eğer mümkünse, E bulunmuş olsun; bu durumda A, E çarpımı, B, C çarpımına eşit olur. **[VII.19]**

Ama B, C çarpımı D'dir; öyleyse A, E çarpımı D'ye eşittir.

Demek ki A, E'yi çarparak D'yi oluşturmuştur; öyleyse A, D'yi E'ye göre ölçer.

Ama aynı zamanda ölçmez da: bu olamaz.

Öyleyse, A, D'yi ölçmediği durumda A, B, C'ye orantılı dördüncü bulunamaz.

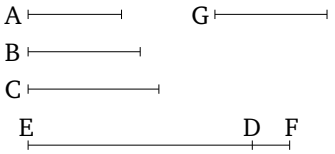
Şimdi de hem A, B, C sürekli orantılı olmasın, hem de A, C aralarında asal olmasın.

Ve B, C'yi çarparak D'yi oluşturtsun.

Benzer şekilde, eğer A, D'yi ölçerse, orantılı dördüncü bulmanın mümkün oladuğu, ama ölçmezse mümkün olmadığı kanıtlanabilir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

20. Önerme:
Asal sayıların miktarı, seçilen her asal sayı topluluğunun miktarından fazladır.



Seçilen asal sayılar A, B, C olsun;

diyorum ki, asal sayılar A, B, C'den çoktur.

Çünkü, A, B, C'nin ölçtüğü en küçük sayı alınsın, bu sayı DE olsun; ve DF birimi DE'ye eklensin.

O zaman EF ya asaldır, ya da değildir.

Önce, asal olsun; o zaman A, B, C'den daha çok olan A, B, C, DE asalları bulunmuş olur.

Şimdi de EF asal olmasın; bu durumda bir asal tarafından ölçülür. **[VII.31]**

G asal sayısı tarafından ölçülsün.

Diyorum ki, G asal sayısı A, B, C sayılarından biri değildir.

Çünkü, eğer mümkünse, öyle olsun.

Şimdi A, B, C asalları DE'yi ölçer; öyleyse G de DE'yi ölçer.

Ama EF'yi de ölçer. Öyleyse G, bir sayı olarak, kalan birim EF'yi de ölçer: bu olamaz.

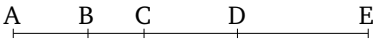
Demek ki G sayısı A, B, C sayılarından biri değildir.

Ama varsayıma göre asaldır.

Öyleyse A, B, C'den daha çok olan A, B, C, DE asalları bulunmuş olur.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

21. Önerme:
İstediğimiz miktarda çift sayıyı toplarsak, toplam yine bir çift sayıdır.



İstediğimiz miktardaki çift sayılar AB, BC, CD, DE toplansın;

diyorum ki, AE toplamı çifttir.

Çünkü, AB, BC, CD, DE sayılarının herbiri çift olduğundan, herbirinin yarısı vardır; **[Tan. VII.6]**

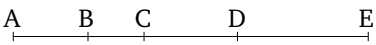
böylece AE'nin tamamının da yarısı vardır.

Ama, çift sayı iki eşit parçaya bölünebilendir; **[Tan. VII.6]**

öyleyse AE çifttir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

22. Önerme:
İstediğimiz miktarda tek sayıyı toplarsak, eğer miktarları çift ise, toplam da bir çift sayıdır.



İstediğimiz kadar ama çift sayıda AB, BC, CD, DE tek sayıları alınsın ve toplansın;

diyorum ki, AE toplamı çifttir.

Çünkü, AB, BC, CD, DE sayılarının herbiri tek olduğundan, herbirinden birim çıkarılırsa, her kalan çift olacaktır; **[Tan. VII.7]**

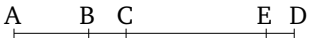
böylece bunların toplamı çift olur. **[IX.21]**

Ama birimlerin miktarı da çifttir.

Öyleyse AE toplamı da çifttir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

23. Önerme:
İstediğimiz miktarda tek sayıyı toplarsak, eğer miktarları tek ise, toplam da bir tek sayıdır.



Miktarları tek olan istediğimiz miktardaki AB, BC, CD tek sayıları toplansın;

diyorum ki AD toplamı da tektir.

Çünkü, CD'den DE birimi çıkartılsın; bu durumda CE çift olur. **[Tan. VII.7]**

Ama CA da çifttir; **[IX.22]**

öyleyse AE toplamı da çifttir. **[IX.21]**

Ve DE birimdir.

Öyleyse AD tektir. **[Tan. VII.7]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

24. Önerme:
Bir çift sayıdan bir çift sayı çıkarılırsa, kalan çifttir.



AB çift sayısında BC çift sayısı çıkarılsın;

diyorum ki, CA kalanı çifttir.

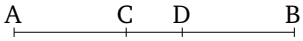
Çünkü, AB çift olduğundan yarısı vardır. **[Tan. VII.7]**

Aynı nedenden dolayı, BC'nin de yarısı vardır.

Öyleyse kalan CA'nın da yarısı vardır, ve AC çifttir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

25. Önerme:
Bir çift sayıdan bir tek sayı çıkarılırsa, kalan tektir.



AB çift sayısından BC tek sayısı çıkarılsın;

diyorum ki, CA tektir.

Çünkü, BC'den CD birimi çıkarılsın; bu durumda DB çift olur. **[Tan. VII.7]**

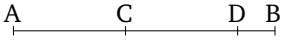
Ama AB de çifttir; öyleyse AD kalanı da çifttir. **[IX.24]**

Ve CD birimdir;

öyleyse CA tektir. **[Tan. VII.7]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

26. Önerme:
Bir tek sayıdan bir tek sayı çıkarılırsa, kalan çifttir.



AB tek sayısından BC tek sayısı çıkarılsın;

diyorum ki, CA kalanı çifttir.

Çünkü, AB tek olduğundan, BD birimi çıkarılsın; bu durumda kalan AD çift olur. **[Tan. VII.7]**

Aynı nedenden dolayı CD de çifttir; **[Tan. VII.7]**

öyleyse kalan CA çifttir. **[IX.24]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

27. Önerme:
Bir tek sayıdan bir çift sayı çıkarılırsa, kalan tektir.



AB tek sayısından, BC çift sayısı çıkarılsın;

diyorum ki, kalan CA tektir.

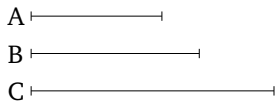
AD birimi çıkarılsın; bu durumda DB çift olur. **[Tan. VII.7]**

Ama BC de çifttir; bu durumda kalan CD çift olur. **[IX.24]**

Öyleyse CA tektir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

28. Önerme:
Bir tek sayının bir çift sayıyla çarpımı çifttir.



A tek sayısı B çift sayısını çarparak C'yi oluştursun;

diyorum ki, C çifttir.

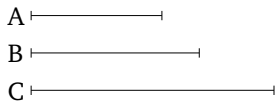
Çünkü, A, B'yi çarparak C'yi oluşturduğundan, C sayısı A'daki birimler kadar ve B'ye eşit sayılardan yapılmıştır. **[Tan. VII.15]**

Ve B çifttir; öyleyse C çift sayılardan yapılmıştır. Ama istediğimiz miktarda çift sayının toplamı çifttir. **[IX.21]**

Öyleyse C çifttir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

29. Önerme:
Bir tek sayının bir tek sayıyla çarpımı tektir.



A tek sayısı B tek sayısını çarparak C'yi oluştursun;

diyorum ki, C tektir.

Çünkü, A, B'yi çarparak C'yi oluşturduğundan, C sayısı A'daki birimler kadar ve B'ye eşit sayılardan yapılmıştır. **[Tan. VII.15]**

Ve A, B sayılarının her biri tektir; demek ki C sayısı tek miktardaki tek sayılardan oluşmuştur.

Öyleyse C tektir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

30. Önerme:
Eğer bir tek sayı bir çift sayıyı ölçerse, onun yarısını da ölçer.



A tek sayısı B çift sayısını ölçsün;

diyorum ki, yarısını da ölçecektir.

Çünkü, A, B'yi ölçtüğüne göre, C'ye göre ölçsün;

diyorum ki C tek değildir.

Çünkü, eğer mümkünse, tek olsun.

O zaman, A, B'yi C'ye göre ölçtüğünden, A, C'yi çarparak B'yi oluşturmuştur.

Öyleyse B sayısı tek miktarda tek sayıdan yapılmıştır.

Bu durumda B tektir: **[IX.23]**

ama bu olamaz çünkü varsayıma göre çifttir.

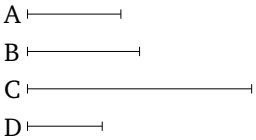
Öyleyse C tek değildir; bu durumda C çift olur.

Böylece A, B'yi çift defa ölçer.

Bu nedenden dolayı yarısını da ölçer.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

31. Önerme:
Eğer bir tek sayı bir başka sayıyla aralarında asalsa, o sayının iki katıyla da aralarında asaldır.



A tek sayısı herhangi bier B sayısına asal olsun, ve B'nin iki katı C olsun;

diyorum ki, A, C'ye asaldır.

Çünkü, eğer aralarında asal değilseler, bir sayı onları ölçer.

Bir sayı onları ölçsün ve o sayı D olsun.

Şimdi A tektir; öyleyse D de tektir.

Ve tek olan D, C'yi ölçtüğünden, ve C çift olduğundan, D, C'nin yarısını da ölçecektir. **[IX.30]**

Ama C'nin yarısı B'dir; öyleyse D, B'yi ölçer.

Ama A'yı da ölçer; bu durumda D sayısı aralarında asal olan A, B'yi ölçer: bu olamaz.

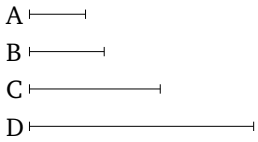
Dolayısıyla A'nın C'ye asal olmaktan başka seçeneği yoktur.

Öyleyse A, C aralarında asaldır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

32. Önerme:
İkiden başlayarak ve hep bir önceki sayının iki katı alınarak elde edilen sayıların her biri yalnızca çift kere çifttir.

[Ölid "yalnızca çift kere çift" tanımını vermez; burada bütün bölenleri çifttir anlamında kullanılıyor.]



İki olan A'dan başlayarak, sürekli iki katını alarak elde ettiğimiz ve istediğimiz miktardaki sayılar B, C, D olsun;

diyorum ki, B, C, D sayıları yalnızca çift kere çifttir.

Şimdi, B, C, D sayılarının her birinin çift kere çift olduğu açıktır; çünkü ikiden katlanarak elde edilmiştir.

Diyorum ki, aynı zamanda yalnızca çift kere çifttir.

Çünkü, bir birim seçilsin. Birimden başlayarak istediğimiz miktarda seçtiğimiz bu sayılar sürekli orantılı olduğundan, ve birimden sonra gelen A asal olduğundan, A, B, C, D'nin en büyüğü olan D sayısı, A, B, C dışında başka hiçbir sayı tarafından ölçülmeyecektir. **[IX.13]**

Ve A, B, C sayılarının her biri çifttir; öyleyse D sayısı yalnızca çift kere çifttir. **[Tan. VII.8]**

Benzer şekilde B, C sayılarının her birinin de yalnızca çift kere çift olduğunu kanıtlayabiliriz.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

33. Önerme:
Bir sayının yarısı tekse, o sayı yalnızca çift kere tektir.

A ⊢——————⊣

A sayısının yarısı tek olsun;

diyorum ki, A sayısı yalnızca çift kere tektir.

Şimdi, çift kere tek olduğu açıktır; çünkü tek olan yarısı onu çift kere ölçer. **[Tan. VII.9]**

Şimdi diyorum ki, yalnızca çift kere tektir de.

Çünkü, eğer A çift kere çift de olsaydı, çift bir sayı tarafından çift bir sayıya göre ölçülecekti; **[Tan. VII.8]**

böylece yarısı da, tek olmasına rağmen, çift bir sayı tarafından ölçülecektir: bu olamaz.

Öyleyse A sayısı yalnızca çift kere tektir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

34. Önerme:
Bir sayı ne ikiden başlayıp ikiyle katı alınarak elde edilmiş olsun, ne de yarısı tek olsun, o zaman o sayı hem çift kere çift hem de çift kere tektir.

A ⊢——————⊣

A sayısı ne ikiden başlayarak ikiyle katı alınarak elde edilmiş olsun, ne de yarısı tek olsun;

diyorum ki, A sayısı hem çift kere çift, hem de çift kere tektir.

Şimdi, yarısı tek olmadığından A'nın çift kere çift olduğu açıktır. **[Tan. VII.8]**

Şimdi de diyorum ki, çift kere tektir.

Çünkü, eğer A'yı ikiye bölersek, sonra yarısını ikiye bölersek, ve bunu sürekli yaparsak, A'yı çift bir sayıya göre ölçen bir tek sayıya varacağız.

Çünkü aksi durumda ikiye varacağız, ve A sayısı ikiden iki katı alınarak elde edilen sayılardan biri olacak: bu varsayıma aykırıdır.

Demek ki A sayısı çift kere tektir.

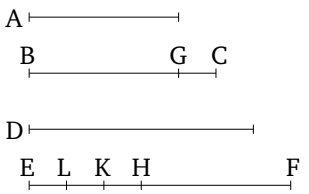
Ama çift kere çift olduğu da kanıtlanmıştı.

Öyleyse A sayısı hem çift kere çift, hem de çift kere tektir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

35. Önerme:
İstediğimiz miktarda sayı sürekli orantılıysa, ve ikinciden ve sonuncudan birinci çıkarılırsa, ikincinin artanının birinciye oranı, sonuncunun artanının öncekilerin hepsine oranına eşit olacaktır.

[Dikkatli okuyucu burada geometrik dizi toplamı için bir kural verildiğini hemen görecektir.]



En küçüğü A olmak üzere istediğimiz miktarda ve sürekli orantılı olan sayılar A, BC, D, EF olsun, BC ve EF'den her biri A'ya eşit olan BG, FH sayıları çıkarılsın;

diyorum ki, GC'nin A'ya oranı, EH'nin A, BC, D'ye oranına eşittir.

Çünkü, FK, BCye, ve FL, D'ye eşit alınsın.

O zaman, FK, BC'ye eşit olduğundan, ve bunların FH parçası BG parçasına eşit olduğundan, kalan HK, kalan GC'ye eşittir.

Ve EF'nin D'ye oranı, D'nin BC'ye, ve BC'nin A'ya oranına eşit olduğundan, ve ayrıca D, FL'ye, BC, FK'ye, ve A da FH'ye eşit olduğundan,

EF'nin FLye oranı, LF'nin FKye oranına, ve FK'nin FH'ye oranına eşittir.

Ayrışık oranlar olarak, EL'nin LF'ye oranı, LK'nin FK'ye oranına, ve FK'nin KH'ye oranına eşittir. **[VII.11, VII.13]**

Ayrıca, öncüllerden birinin ardılına oranı, tüm öncüllerin tüm ardıllara oranına eşittir. **[VII.12]**

Öyleyse KH'nin FH'ye oranı, EL, LK, KH'nin LF, FK, HF'ye oranına eşittir.

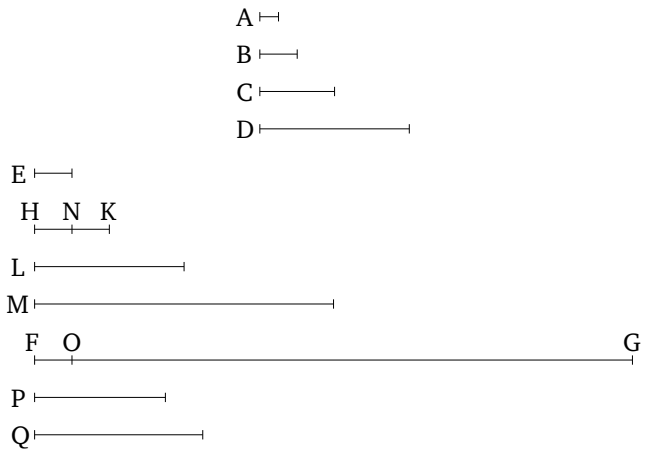
Ama KH, CG'ye eşittir, FH, A'ya, ve LF, FK, HF de D, BC, A'ya eşittir.

Bu durumda CG'nin A'ya oranı, EH'nin D, BC, A'ya oranına eşittir.

Öyleyse ikincinin artanının birinciye oranı, sonuncunun artanının diğerlerinin tümüne oranına eşittir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

36. Önerme:
Birimden başlayarak, ve toplamları bir asal sayı olana kadar, hep bir önceki sayıyının iki katı alınsa, ve son sayı bu toplamla çarpılsa, çarpım bir mükemmel sayıdır.



Toplamları bir asal sayı olana kadar, hep bir önceki sayının iki katını alarak oluşan sayılar birimden sonra A, B, C, D olsun, toplam E olsun, ve E, D'yi çarparak FG'yi oluştursun;

diyorum ki, FG mükemmeldir.

Çünkü, A, B, C, D'nin miktarına eşit miktarda ve E'den başlayıp, bir önceki sayı ikiyle çarpılarak E, HK, L, M alınsın;

bu durumda eşit dış oranlar olarak, A'nın D'ye oranı, E'nin M'ye oranına eşit olur. **[VII.14]**

Öyleyse E, D çarpımı, A, M çarpımına eşittir. **[VII.19]**

Ve E, D çarpımı FG'dir; öyleyse A, M çarpımı FG'ye eşittir.

Demek ki A, M'yi çarparak FG'yi oluşturmuştur; bu durumda M, FG'yi A'daki birimler kadar ölçer.

Ve A ikiye eşittir; öyleyse FG, M'nin iki katıdır.

Ama M, L, HK, E hep bir sonrakinin iki katıdır; öyleyse E, HK, L, M, FG, ortak oranı iki olan, sürekli orantılı sayılardır.

Şimdi, ikinci olan HK'den, ve sonuncu olan FG'den, birinci olan E'ye eşit olan HN, FO sayıları çıkarılsın;

öyleyse ikincinin birinciye fazlalığının birinciye oranı, sonuncunu fazlalaığının kendinden öncekilerin hepsine oranına eşittir. **[IX.35]**

Demek ki, NK'nin E'ye oranı, OG'nin M, L, KH, E'ye oranına eşittir.

Ve NK eşittir E; öyleyse OG de M, L, HK, E'ye eşittir.

Ama FO eşittir E, ve E eşittir A, B, C, D ve birim.

Öyleyse FG'nin tamamı eşittir E, HK, L, M ve A, B, C, D ve birim; ve onlar tarafından ölçülür.

Ayrıca diyorum ki, A, B, C, D, E, HK, L, M sayıları ve birimden başka hiçbir sayı FG'yi ölçmez.

Çünkü, eğer mümkünse, bir P sayısı FG'yi ölçsün, ve P sayısı A, B, C, D, E, HK, L, M sayılarından biri olmasın.

Ve P, FG'yi kaç kez ölçüyorsa Q'nun içinde de o kadar birim olsun; bu durumda Q, P'yi çarparak FG'yi oluşturmuştur.

Ama, E de D'yi çarparak FG'yi oluşturmuştu; bu durumda E'nin Q'ya oranı, P'nin D'ye oranına eşit olur. **[VII.19]**

Ve, A, B, C, D sayıları birimden başlayarak sürekli orantılı olduğundan, D sayısı A, B, C dışında hiçbir sayı tarafından ölçülmeyecektir. **[IX.13]**

Ve varsayıma göre, P sayısı A, B, D'den farklıdır; bu durumda P sayısı D'yi ölçmeyecektir.

Ama P'nin D'ye oranı, E'nin Q'ya oranına eşittir; öyleyse E de Q'yu ölçmez. **[Tan. VII.20]**

Ve E asaldır; ve her asal sayı ölçmediği sayıya asaldır. **[VII.29]**

Öyleyse E, Q aralarında asaldır.

Ama asallar en küçüktür, ve en küçük sayılar, kendileriyle aynı orandaki sayıları aynı sayıda ölçerler, öncüller öncülleri, ve ardıllar ardılları; **[VII.20]**

ve E'nin Q'ya oranı, P'nin D'ye oranına eşittir;

bu durumda E, P'yi, Q'nun D'yi ölçtüğü sayıda ölçer.

Ama D sayıdı A, B, C dışında bir sayı tarafından ölçülmez; öyleyse Q sayısı A, B, C sayılarından birine eşittir.

B'ye eşit olsun.

Ve B, C, D'nin miktarına eşit olacak şekilde E'den başlayarak E, HK, L alınsın.

Şimdi, E, HK, L sayıları B, C, D ile aynı orandadır; öyleyse eşit dış oranlar olarak, B'nin D'ye oranı, E'nin L'ye oranına eşittir. **[VII.19]**

Öyleyse B, L çarpımı D, E çarpımına eşittir. **[VII.19]**

Ama D, E çarpımı, Q, P çarpımına eşitti; bu durumda Q, P çarpımı da B, L çarpımına eşit olur.

Öyleyse Q'nun B'ye oranı, L'nin P'ye oranına eşittir. **[VII.19]**

Ve Q eşittir B; demek ki L de P'ye eşittir: bu olamaz çünkü varsayım gereği P bu sayıulardan biri değildi.

Öyleyse A, B, C, D, E, HK, L, M sayıları ve birimden başka hiçbir sayı FG'yi ölçmez.

Ve FG'nin A, B, C, D, E, HK, L, M ve birime eşit olduğu kanıtlanmıştı; ve mükemmel sayı parçalarının toplamına eşit olandı; **[Tan. VII.22]**

öyleyse FG mükemmeldir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

Kitap X

1. Tanımlar I

1 Aynı ölçü tarafından ölçülebilen niceliklere **eşölçekli**, hiçbir ortak ölçüsü olmayan niceliklere **eşölçeksiz** denir.

2 Kenarlarını oluşturdukları karelerin alanları aynı alan tarafından ölçülebilen doğrulara **karede eşölçekli**, ve bu kareler için ortak ölçü olacak bir alanın olmaması durumunda ise **karede eşölçeksiz** denir.

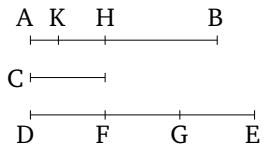
3 Bunlar kabul edildiğinde, verilen bir doğruyla hem uzunlukta hem de karede, ya da yalnızca uzunlukta eşölçekli olan, ya da eşölçeksiz olan doğruların miktarının sonsuz olduğu kanıtlanır. Verilen bu doğruya **rasyonel** densin, ve onunla uzunlukta ya da karede, ya da sadece karede eşölçekli olan doğrulara **rasyonel**, onunla ne uzunlukta ne de karede eşölçekli olan doğrulara da **irrasyonel** densin.

[Dikkatli okuyucu, Öklid'in kullandığı rasyonel kavramının bügünkü kavramdan farklı olduğunu hemen görecektir. Öklid'in rasyonel dediği sayılar, bugünkü tanıma göre, rasyonel sayılar ve onların karekökleridir.]

4 Verilen o doğru üzerindeki karenin alanına rasyonel densin ve o alanla eşölçekli olan alanlara **rasyonel**, ama onunla eşölçeksiz olan alanlara **irrasyonel** densin. İrrasyonel alan eğer bir kareyse, onun kenarı olan doğruya, değilse de aynı alanlı karenin kenarına **irrasyonel** densin.

2. Önermeler

1. Önerme:
Farklı iki nicelikle başlandığında, büyük olandan kendi yarısından büyük bir nicelik çıkarılıp, kalan nicelikten de yine yarısından büyük bir nicelik çıkarılarak devam edildiğinde en baştaki küçük nicelikten daha küçük bir niceliğe ulaşılır.



Büyüğü AB olan iki farklı nicelik AB, C olsun.

Diyorum ki, eğer AB'den kendi yarısından büyük bir nicelik çıkarılırsa, ve kalandan da yine kendi yarısından büyük bir nicelik çıkarılır, ve bu süreç sürekli olarak tekrarlanırsa, sonunda C'den daha küçük bir nicelik kalacaktır.

Çünkü, eğer C çarpılırsa bir ara AB'den daha büyük olacaktır. **[Tan. V.4]**

C'nin AB'den büyük bir katı DE olsun; DE, C'ye eşit DF, FG, GE parçalarına ayrılsın,

AB'den, yarısından büyük BH çıkarılsın, ve AH'den, yarısından büyük HK çıkarılsın, ve bu süreç AB'deki parçalar DE'deki parçaların sayısına eşit olana dek tekrarlansın.

O zaman, DF, FG, GE ile aynı miktarda olan parçalar AK, KH, HB parçaları olsun.

Şimdi, DE, AB'den büyük olduğundan, ve DE'den, yarısından küçük olan EG, ve AB'den de kendi yarısından büyük olan BH çıkarıldığından,

kalan GD, kalan HA'dan büyüktür.

Ve, GD, HA'dan büyük olduğundan, ve GD'den yarısı olan GF, ve HA'dan da yarısından büyük olan HK çıkarıldığından,

kalan DF, kalan AK'den büyüktür.

Ama DF eşittir C; öyleyse C de AK'den büyüktür.

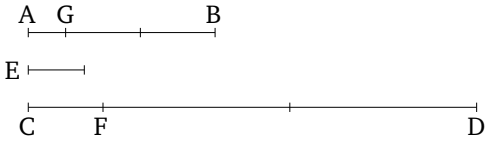
Bu durumda AK, C'den küçük olur.

Öyleyse AB'den, baştaki C niceliğinden küçük olan, AK niceliği kalmıştır.

Bundan dolayı vs …
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

Ve eğer çıkarılan parçalar yarıya eşit olsaydı da, önerme yine aynı şekilde kanıtlanabilirdi.

2. Önerme:
Eşit olmayan iki nicelikten başlayarak daima küçük olanı büyüğünden çıkararak ilerlendiğinde kalan küçük parça büyüğü hiç bir zaman tam olarak ölçmezse, başlangıçtaki iki nicelik eşölçeksizdir.



AB, CD farklı iki nicelik olsun ve AB küçük olan olsun. Hep küçük olan büyük olandan çıkarılarak ilerlendiğinde, hiçbir zaman küçük olan büyük olanı ölçmesin.

Diyorum ki, AB, CD nicelikleri eşölçeksizdir.

Çünkü, eğer eşölçekli olsalar bir nicelik onları ölçecek.

Onları bir nicelik ölçsün, ve mümkünse bu nicelik E olsun;

AB, FD'yi ölçsün ve kalan CF ondan küçük olsun,

CF, BG'yi ölçsün ve kalan AG de ondan küçük olsun,

ve bu süreç E'den küçük bir nicelik kalana dek tekrarlansın.

Bu yapıldı varsayalım, ve kalan AG, E'den küçük olsun.

O zaman, E, AB'yi ölçtüğünden, bu arada AB de DF'yi ölçtüğünden, E, FD'yi ölçer.

Ama CD'nin tamamını da ölçer; öyleyse kalan CF'yi de ölçecektir.

Ama CF, BG'yi ölçer; öyleyse E de BG'yi ölçer.

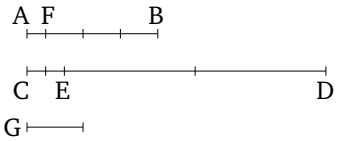
Ama AB'nin tamamını da ölçer, yani büyük olan küçük olanı: bu olamaz.

Öyleyse AB, BC niceliklerini hiçbir nicelik ölçmeyecektir;

bu durumda AB, CD eşölçeksiz olur. **[Tan. X.1]**

Bundan dolayı vs …
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

3. Önerme:
Eşölçekli iki nicelik verildiğinde bunların en büyük ortak ölçüsünü bulmanın yolu.



Verilen eşölçekli iki nicelik AB, CD olsun, ve AB bunların küçük olanı olsun; böylece AB, CD'nin en büyük ortak ölçüsünün bulunması isteniyor.

Şimdi AB niceliği, CD'yi ya ölçer ya da ölçmez.

Eğer ölçerse, kendisini de ölçtüğünden, AB, CD'nin en büyük ortak ölçüsü AB'dir.

Ve açıktır ki en büyüğü de odur; çünkü AB'den daha büyük bir nicelik AB'yi ölçmeyecektir.

Şimdi de AB, CD'yi ölçmesin.

O zaman, AB, CD eşölçeksiz olmadıklarından, eğer sürekli olarak küçük olan büyük olandan çıkarılırsa, bir süre sonra artan nicelik bir öncekini ölçecektir. **[X.2]**

AB, ED'yi ölçsün ve kalan EC ondan küçük olsun,

EC, FB'yi ölçsün ve kalan AF ondan küçük olsun,

ve AF, CE'yi ölçsün.

AF, CE'yi ölçtüğünden, ve bu arada CE, FB'yi ölçtüğünden, AF, FB'yi de ölçecektir.

Ama kendisini de ölçer; öyleyse AF, AB'nin tamamını da ölçecektir.

Ama AB, DE'yi ölçer; öyleyse AF de ED'yi ölçecektir.

Ama CE'yi de ölçer; öyleyse CD'nin tamamını da ölçer.

Öyleyse AF niceliği AB, CD'nin bir ortak ölçüsüdür.

Şimdi de diyorum ki aynı zamanda en büyüğüdür.

Çünkü değilse, AB, CD'yi ölçnen, AFDen büyük bir nicelik olacaktır.

Bu nicelik G olsun.

O zaman, G, AB'yi ölçtüğünden, ve bu arada AB, ED'yi ölçtüğünden, G de ED'yi ölçer.

Ama CD'nin tamamını da ölçer; öyleyse G, kalan CE'yi de ölçecektir.

Ama CE, FB'yi ölçer; öyleyse G, FB'yi de ölçecektir.

Ama AB'nin tamamını da ölçer, ve dolayısıyla kalan AF'yi de ölçecektir, yani büyük olaan küçük olanı: bu olamaz.

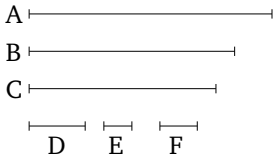
Bu durumda AF'den büyük hiçbir nicelik AB, CD'yi ölçmeyecektir.

Öyleyse, verilen eşölçekli iki nicelik AB, CD'nin en büyük ortak ölçüsü bulunmuştur.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

Doğal Sonuç: Bunun sonucu olarak açıktır ki bir nicelik eğer iki niceliği ölçerse onların en büyük ortak ölçüsünü de ölçer.

4. Önerme:
Eşölçekli üç nicelik verildiğinde bunların en büyük ortak ölçüsünü bulmanın yolu.



Verilen eşölçekli üç nicelik A, B, C olsun; böylece A, B, C'nin en büyük ortak ölçüsünün bulunması isteniyor.

A, B'nin en büyük ortak ölçüsü alınsın ve bu D olsun; [X.3]

O zaman D, C'yi ya ölçer ya da ölçmez.

Önce ölçsün.

D, C'yi ölçtüğünden, ve aynı zamanda A, B'yi de ölçtüğünden, D niceliği A, B, C'nin ortak ölçüsüdür.

Ve en büyük olduğu da açıktır, çünkü D'den daha büyük bir nicelik A, B'yi ölçmez.

Şimdi de D, C'yi ölçmesin.

Önce diyorum ki, C, D eşölçeklidir.

Çünkü, A, B, C eşölçekli olduğundan, bir nicelik onları ölçecektir, ve bu elbette A, B'yi de ölçecektir; bu yüzden A, B'nin en büyük ortak ölçüsünü, yani D'yi de ölçecektir. **[DS. X.3]**

Ama C'yi de ölçer; yani sözü edilen nicelik C, D'yi ölçecektir; bu durumda C, D eşölçekli olur.

Şimdi onların en büyük ortak ölçüsü alınsın ve bu E olsun. **[X.3]**

O zaman, E, D'yi ölçtüğünden, ve bu arada D niceliği de A, B'yi ölçtüğünden, E niceliği A, B'yi de ölçecektir.

Ama C'yi de ölçer; bu durumda E niceliği A, B, C'yi ölçer; öyleyse E niceliği A, B, C'nin bir ortak ölçüsüdür.

Şimdi de diyorum ki, aynı zamanda en büyüğüdür de.

Çünkü, eğer mümkünse, E'den daha büyük bir nicelik F olsun, ve A, B, C'yi ölçsün.

Şimdi, F niceliği A, B, C'yi ölçtüğünden, A, B'yi ölçecektir, ve onların en büyük ortak ölçüsünü de ölçecektir. **[DS. X.3]**

Ama A, B'nin en büyük ortak ölçüsü D'dir; öyleyse F, D'yi ölçer.

Ama C'yi de ölçer; öyleyse F niceliği C, D'yi ölçer; bu durumda F niceliği C, D'nin en büyük ortak ölçüsünü de ölçer. **[DS. X.3]**

Ama bu E'dir; bu durumda F, E'yi ölçer, yani büyük olan küçük olanı: bu olamaz.

Öyleyse E'den büyük hiçbir nicelik A, B, C'yi ölçemez; bu durumda eğer D, C'yi ölçmezse A, B, C'nin en büyük ortak ölçüsü E olur.

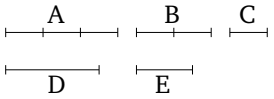
Öyleyse eşölçekli üç niceliğin en büyük ortak ölçüsü bulunmuştur.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. QEF

Doğal Sonuç: Buradan açıkça görülür ki, bir nicelik üç niceliği ölçerse, onların en büyük ortak ölçüsünü de ölçer.

Benzer şekilde, daha çok miktardaki niceliklerin de en büyük ortak ölçüsü bulunabilir ve doğal sonuç bu durum için genellenebilir.

5. Önerme:
Eşölçekli iki niceliğin birbirine oranı iki sayının birbirine oranıyla aynıdır.



A, B eşölçekli nicelikler olsun;

diyorum ki, A'nın B'ye oranı, bir sayının bir sayıya oranına eşittir.

Çünkü, A, B eşölçekli olduğundan, bir nicelik onları ölçecektir.

Ölçsün ve bu C olsun.

Ve C, A'yı kaç kez ölçüyorsa, D'nin içinde de o kadar birim olsun; ve C, B'yi kaç kez ölçüyorsa, E'nin içinde o kadar birim olsun.

C, A'yı D'deki birimler kadar ölçtüğünden, ve bı arada birim de D'yi içindeki birimler kadar ölçtüğünden, birim, D sayısını C niceliğinin A'yı ölçtüğü kadar ölçer; bu durumda C'nin A'ya oranı, birimin D'ye oranına eşit olur; **[Tan. VII.20]**

öyleyse ters oran olarak A'nın C'ye oranı, D'nin birime oranına eşittir. **[DS. V.7]**

Yine, C, B'yi E'deki birimler kadar ölçtüğünden, ve bu arada birim de E'yi içindeki birimler kadar ölçtüğünden, birim E'yi, C'nin B'yi ölçtüğü sayıda ölçer;

öyleyse C'nin B'ye oranı, birimin E'ye oranına eşittir.

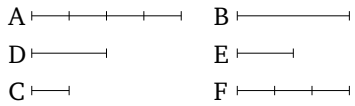
Ama A'nın C'ye oranının, D'nin birime oranına eşit olduğu kanıtlanmıştı;

bu durumda eşit dış oranlar olarak, A'nın B'ye oranı, D sayısının E'ye oranına eşit olur. **[V.22]**

Öyleyse eşölçekli A, B niceliklerinin birbirine oranı, D sayısının E sayısına oranına eşittir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

6. Önerme:
İki niceliğin birbirine oranı iki tamsayının birbirine oranıyla aynıysa bu nicelikler eşölçeklidir.



A, B niceliklerinin birbirine oranı, D sayısının E sayısına oranına eşit olsun;

diyorum ki A, B nicelikleri eşölçeklidir.

Çünkü, A niceliği D'de ne kadar birim varsa o kadar eşit parçaya bölünsün, ve C bunlardan birine eşit olsun;

ve F de, E'de ne kadar birim varsa aynı miktarda ve C'ye eşit nicelikten oluşsun.

O zaman, A'da D'nin içindeki birimler kadar C'ye eşit nicelik olduğundan, birim D'nin hangi parçasıysa, C de A'nın aynı parçasıdır; bu durumda C'nin A'ya oranı, birimin D'ye oranına eşit olur. **[Tan. VII.20]**

Ama birim D sayısını ölçer; öyleyse C de A'yı ölçer.

Ve C'nin A'ya oranı, birimin D'ye oranına eşit olduğundan, ters oran olarak A'nın C'ye oranı, D sayısının birime oranına eşittir. **[DS. V.7]**

Yine, F'de, E'de ne kadar birim varsa aynı miktarda ve C'ye eşit nicelik olduğundan, C'nin F'ye oranı, birimin E'ye oranına eşittir. **[Tan. VII.20]**

Ama A'nın C'ye oranının, D'nin birime oranına eşit olduğu da kanıtlanmıştı; bu durumda eşit dış oranlar olarak, A'nın F'ye oranı, D'nin E'ye oranına eşittir; **[V.22]**

Ama D'nin E'ye oranı, A'nın B'ye oranına eşittir;

Öyleyse A'nın B'ye oranı, onun F'ye oranına da eşittir. **[V.11]**

Bu durumda A'nın B, F niceliklerine oranı aynı olur; öyleyse B eşittir F. **[V.9]**

Ama C, F'yi ölçer; öyleyse B'yi de ölçer.

Ayrıca A'yı da ölçer; bu durumda C niceliği A, B'yi ölçer.

Öyleyse A, B ile eşölçeklidir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

Doğal Sonuç: Buradan açıkça görülür ki eğer D, E gibi iki sayı varsa ve A gibi bir doğru varsa, öyle bir F doğrusu çizilebilir ki verilen doğrunun ona oranı, D sayısının E sayısına oranına eşit olur.

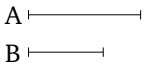
Ve eğer A, F'nin orta orantısı B alınırsa,

A'nın F'ye oranı, A üzerindeki karenin B üzerindeki kareye oranına eşit olacaktır, yani birincinin üçüncüye oranı, birinci üzerindeki şeklin üçüncü üzerindeki benzer ve aynı şekilde çizilmiş şekle oranına eşit olacaktır. **[DS. VI.19]**

[A, B, F sürekli orantılıdır, yani $\frac{A}{B} = \frac{B}{F}$*. Bu durumda* $\frac{A}{F} = \frac{A2}{B^2}$ *olur.]*

Ama A'nın F'ye oranı, D sayısının E sayısına oranına eşittir; öyleyse D sayısının E sayısına oranının, A doğrusu üzerindeki şeklin B üzerindeki şekle oranına eşit olması sağlanmıştır. QED

7. Önerme:
Eşölçeksiz niceliklerin birbirine oranı iki tamsayının birbirine oranıyla aynı olmaz.



A, B eşölçeksiz iki nicelik olsun;

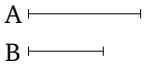
diyorum ki A'nın B'ye oranı, bir sayının bir sayıya oranına eşit olamaz.

Çünkü, eğer A'nın B'ye oranı, bir sayının bir sayıya oranına eşit olsaydı, A, B ile eşölçekli olacaktı. **[X.6]**

Ama değil; öyleyse A'nın B'ye oranı, bir sayının bir sayıya oranına eşit olamaz.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

8. Önerme:
İki niceliğin birbirine oranı iki tamsayının birbirine oranıyla aynı olmazsa o iki nicelik eşölçeksizdir.



İki A, B niceliğinin birbirine oranı, bir sayının bir sayıya oranına eşit olmasın;

diyorum ki, A, B nicelikleri eşölçeksizdir.

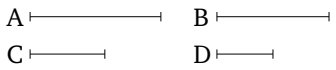
Çünkü eğer eşölçekli olsalardı, A'nın B'ye oranı, bir sayının bir sayıya oranına eşit olacaktı. **[X.5]**

Ama değil;

öyleyse A, B nicelikleri eşölçeksizdir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

9. Önerme:
Eşölçekli doğrular üzerindeki karelerin birbirine oranı kare sayıların birbirine oranına eşittir; ve birbirine oranı kare sayıların birbirine oranına eşit olan karelerin kenarları da uzunlukta eşölçeklidir. Ama eşölçeksiz kenarlar üzerine kurulu karelerin birbirlerine oranı kare sayıların birbirine oranına eşit olmaz; ve birbirlerine oranı kare sayıların oranına eşit olmayan karelerin kenarları uzunlukta eşölçekli olmaz.



A, B uzunlukta eşölçekli olsun;

diyorum ki, A'nın üzerindeki karenin B'nin üzerindeki kareye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşittir.

Çünkü, A ile B uzunlukta eşölçekli olduklarından, A'nın B'ye oranı, bir sayının bir sayıya oranına eşittir. **[X.5]**

Bu oran C'nin D'ye oranı olsun.

O zaman, A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşit olduğundan, ve bu arada benzer şekillerin birbirine oranı karşılıklı kenarların birbirlerine oranının çift kat oranı olması nedeniyle **[DS. VI.20]**

A üzerindeki karenin B üzerindeki kareye oranı A'nın B'ye oranının çift kat oranı olduğundan,

ve iki kare sayı arasında bir orta orantılı sayı bulunduğundan, ve kare sayının kare sayıya oranı, kenarın kenara oranının çift kat oranı olduğundan, **[VIII.11]**

A'nın üzerindeki karenin B'nin üzerindeki kareye oranı, C'nin üzerindeki karenin D'nin üzerindeki kareye oranına eşittir.

Şimdi de A üzerindeki karenin B üzerindeki kareye oranı, C üzerindeki karenin D üzerindeki kareye oranına eşit olsun;

diyorum ki, A, uzunlukta B ile eşölçeklidir.

Çünkü, A üzerindeki karenin B üzerindeki kareye oranı, C üzerindeki karenin D üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan,

ve bu arada A üzerindeki karenin B üzerindeki kareye oranı, A'nın B'ye oranının çift kat oranı olduğundan,

ve C üzerindeki karenin D üzerindeki kareye oranı, C'nin D'ye oranının çift kat oranı olduğundan,

A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşittir.

Öyleyse A'nın B'ye oranı, C sayısının D sayısına oranına eşittir

'öyleyse A, uzunlukta B ile eşölçeklidir. **[X.6]**

Şimdi de, A uzunlukta B ile eşölçeksiz olsun;

diyorum ki, A üzerindeki karenin B üzerindeki kareye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmaz.

Çünkü, eğer A üzerindeki karenin B üzerindeki kareye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olsaydı, A uzunlukta B ile eşölçekli olacaktı.

Ama değil;

öyleyse A üzerindeki karenin B üzerindeki kareye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmaz.

Yine, A üzerindeki karenin B üzerindeki kareye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmasın;

diyorum ki, A uzunlukta B ile eşölçeksizdir.

Çünkü, eğer A uzunlukta B ile eşölçekli olsaydı, A'nın üzerindeki karenin B'nin üzerindeki kareye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olurdu.

Ama değil;

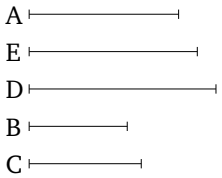
öyleyse A uzunlukta B ile eşölçekli değildir.

Bundan dolayı vs …
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

Doğal Sonuç: Bu kanıttan da açıkça görüleceği gibi uzunlukta eşölçekli olan doğrular karede de eşölçeklidir, ama karede eşölçekli olanlar her zaman uzunlukta eşölçekli değildir.

10. Önerme:
Verilen bir doğruyla, biri yalnızca uzunlukta eşölçeksiz olan bir doğruyla, diğeri onunla hem uzunlukta hem karede eşölçeksiz olan iki doğru bulmanın yolu.

[Bu önermenin Öklid'e ait olmadığı, sonradan eklendiği düşünülmektedir.]



Verilen doğru A olsun; böylece bir A ile yalnız uzunlukta eşölçeksiz, diğeri karede de eşölçeksiz iki doğru bulunması isteniyor.

B, C gibi birbirine oranı bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmayan, yani benzer düzlem sayıları olmayan, iki sayı alınsın;

Ve bunu nasıl yapacağımızı öğrendiğimize göre, **[DS. X.6]**

B'nin C'ye oranının, A üzerindeki karenin D üzerindeki kareye oranına eşit olması sağlansın.

bu durumda A üzerindeki kare B üzerindeki kareyle eşölçekli olur. **[X.6]**

Ve B nin C'ye oranı bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmadığından, A üzerindeki karenin D üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmaz;

öyleyse A uzunlukta D ile eşölçeksizdir. **[X.9]**

A, D arasında orta orantılı E alınsın; bu durumda A'nın D'ye oranı, A üzerindeki karenin E üzerindeki kareye oranına eşit olur. **[Tan. V.9]**

Ama A uzunlukta D ile eşölçeksizdir; öyleyse A üzerindeki kare E üzerindeki kareyle eşölçeksizdir; **[X.11]**

bu durumda A karede E ile eşölçeksiz olur.

Öyleyse verilen A doğrusuyla yalnız uzunlukta eşölçeksiz D doğrusu, ve hem uzunlukta hem de karede eşölçeksiz E doğrusu bulunmuş oldu.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

11. Önerme:
Eğer dört nicelik orantılıysa, birinciyle ikinci eşölçekliyse, üçüncüyle dördüncü de eşölçeklidir; ve eğer birinciyle ikinci eşölçeksizse, üçüncüyle dördüncü de eşölçeksizdir.



A, B, C, D orantılı dört nicelik olsun, yani A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşit olsun, ve A, B eşölçekli olsun;

diyorum ki, C, D de eşölçekli olacaktır.

Çünkü, A, B eşölçekli olduğundan, A'nın B'ye oranı, bir sayının bir sayıya oranına eşit olur. **[X.5]**

Ve A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşittir; bu durumda C'nin D'ye oranı da bir sayının bir sayıya oranına eşit olur;

öyleyse C, D eşçölçeklidir. **[X.6]**

Şimdi de A, B eşölçeksiz olsun;

diyorum ki, C de D ile eşölçeksiz olacaktır.

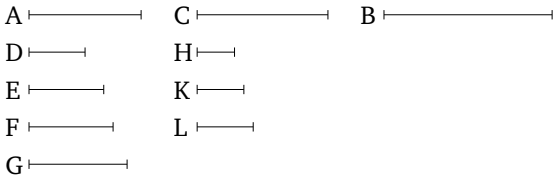
Çünkü, A, B eşölçeksiz olduğundan, A'nın B'ye oranı, bir sayının bir sayıya oranına eşit değildir. **[X.7]**

Ve A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşittir; bu durumda C'nin D'ye oranı da bir sayının bir sayıya oranına eşit olmaz;

öyleyse C, D eşölçeksizdir. **[X.8]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

12. Önerme:
Aynı nicelikle eşölçekli olan nicelikler birbirleriyle de eşölçeklidir.



A, B niceliklerinin her biri C ile eşölçekli olsun;

diyorum ki, A, B eşölçeklidir.

Çünkü, A, C ile eşölçekli olduğundan, A'nın C'ye oranı, bir sayının bir sayıya oranına eşittir. **[X.5]**

Bu oran D'nin E'ye oranı olsun.

Yine, C, B ile eşölçekli olduğundan, C'nin B'ye oranı, bir sayının bir sayıya oranına eşittir. **[X.5]**

Bu oran F'nin G'ye oranına eşit olsun.

Bir miktar oran verildiğinde, yani D'nin E'ye, ve F'nin G'ye oranları, bu oranlarda sürekli orantılı H, K, L sayıları alınsın; **[VIII.4]**

yani, D'nin E'ye oranı, H'nin K'ye oranına, ve F'nin G'ye oranı, K'nin L'ye oranına eşit olsun.

O zaman, A'nın C'ye oranı, D'nin E'ye oranına eşit olduğundan, ve bu arada D'nin E'ye oranı, H'nin K'ye oranına eşit olduğundan,

A'nın C'ye oranı, H'nin K'ye oranına eşittir. **[V.11]**

Yine, C'nin B'ye oranı, F'nin G'ye oranına eşit olduğundan, ve bu arada F2nin G'ye oranı, K'nin L'ye oranına eşit olduğundan,

C'nin B'ye oranı, K'nin L'ye oranına eşittir. **[VI.11]**

Ama bu arada A'nın C'ye oranı, H'nin K'ye oranına eşittir;

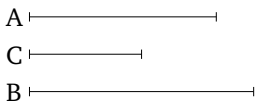
bu durumda eşit dış oranlar olarak, A'nın B'ye oranı, H'nin L'ye oranına eşit olur. **[V.22]**

Böylece A'nın B'ye oranı, bir sayının bir sayıya oranına eşittir;

öyleyse A, B ile eşölçeklidir. **[X.6]**

Bundan dolayı vs …
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

13. Önerme:
Eşölçekli iki nicelikten biri bir başka nicelikle eşölçeksizse, diğeri de o nicelikle eşölçeksizdir.



A, B eşölçekli iki nicelik olsun, ve içlerinden biri, A, bir başka nicelikle, C, eşölçeksiz olsun;

diyorum ki, kalan nicelik B de C ile eşölçeksizdir.

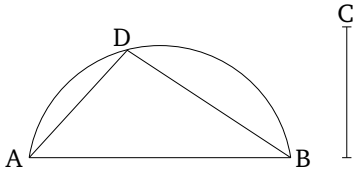
Çünkü, eğer B, C ile eşölçekli olsa, bu arada A, B ile eşölçekli olduğundan, A da C ile eşölçekli olacaktı. **[X.12]**

Ama aynı zamanda onunkla eşölçeksizdir: bu olamaz.

Öyleyse B, C ile eşölçekli değildir; yani onunla eşölçeksizdir.

Bundan dolayı vs …
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

Yardımcı Önerme: Uzunlukları farklı iki doğru verildiğinde bunların üzerindeki karelerin farkının hangi doğru üzerindeki kareye eşit olduğunu bulmanın yolu.



AB, C iki faklı doğru olsun ve AB bunların daha büyük olanı olsun; böylece AB üzerindeki karenin, C üzerindeki kareden hangi kare kadar büyük olduğunun bulunması isteniyor.

AB üzerine ADB yarı çemberi çizilsin, ve AD, C'ye eşit çizilsin; **[IV.1]**

DB birleştirilsin.

ADB açısının dik olduğu, **[III.31]**

ve AB üzerindeki karenin AD üzerindeki, yani C üzerindeki kateden DB üzerindeki kare kadar büyük olduğu açıktır. **[I.47]**

Benzer şekilde, eğer iki doğru verilirse, onların üzerindeki karelerin toplamına eşit karenin hangi doğru üzerinde olacağı da bu yolla bulunur.

Verilen doğrular AD, DB olsun, ve bunların üzerindeki karelerin toplamına eşit bir karenin üzerine çizileceği doğrunun bulunması istensin.

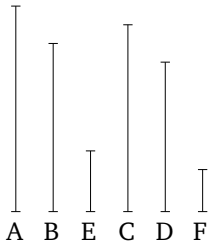
AD, DB bir dik açı oluşturacak şekilde yerleştirilsin; ve AB birleştirilsin.

Yine açıktır ki AB, DB üzerindeki keralerin toplamına eşit karenin üzerine çizileceği doğru AB'dir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

14. Önerme:

Orantılı dört doğru verildiğinde, birincinin üzerindeki kare ikincinin üzerindeki kareden birinciyle eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyükse, üçüncünün üzerindeki kare de dördüncünün üzerindeki kareden üçüncüyle eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.
Ve eğer birincinin üzerindeki kare ikincinin üzerindeki kareden birinciyle eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyükse, üçüncünün üzerindeki kare de dördüncünün üzerindeki kareden üçüncüyle eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.



A, B, C, D, orantılı dört doğru olsun, yani A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşit olsun;

ve A üzerindeki kare, B üzerindeki kareden, E üzerindeki kare kadar büyük olsun, ve C üzerindeki kare, D üzerindeki kareden F üzerindeki kare kadar büyük olsun;

diyorum ki, eğer A, E ile eşölçekliyse, C de F ile eşölçeklidir, ve eğer A, E ile eşölçeksizse, C de F ile eşölçeksizdir.

Çünkü, A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşit olduğundan, A üzerindeki karenin B üzerindeki kareye oranı da, C üzerindeki karenin D üzerindeki kareye oranına eşit olur. **[VI.22]**

Ama E, B üzerindeki kareler, A üzerindeki kareye, ve D, F üzerindeki kareler, C üzerindeki kareye eşittir.

Öyleyse, E, B üzerindeki karelerin B üzerindeki kareye oranı, D, F üzerindeki karenin D üzerindeki kareye oranına eşittir;

bu durumda, ayrışık oranlar olarak, E üzerindeki karenin B üzerindeki kareye oranı, F üzerindeki karenin D üzerindeki kareye oranına eşittir; **[V.17]**

öyleyse E'nin B'ye oranı, F'nin D'ye oranına eşittir. **[VI.22]**

bu durumda, ters oranlar olarak, B'nin E'ye oranı, D'nin F'ye oranına eşittir.

Ama, A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşittir;

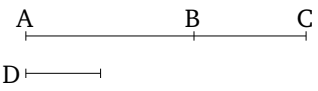
bu durumda eşit dış oranlar olarak, A'nın E'ye oranı, C'nin F'ye oranına eşit olur. **[V.22]**

Öyleyse, eğer A, E ile eşölçekliyse, C de F ile eşölçeklidir,

ve eğer A, E ile eşölçeksizse, C de F ile eşölçeksizdir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

15. Önerme:
Eşölçekli iki nicelik toplanırsa toplam her biriyle eşölçeklidir; ve herhangi iki niceliğin toplamı içlerinden biriyle eşölçekliyse, o iki nicelik de aralarında eşölçeklidir.



Eşölçekli iki nicelik AB, BC birbirine eklensin;

diyorum ki AC'nin tamamı da AB, BC'nin her biriyle eşölçeklidir.

Çünkü, AB, BC eşölçekli olduğundan, bir nicelik onları ölçecektir.

Ölçsün, ve bu nicelik D olsun.

D niceliği AB, BC niceliklerini ölçtüğünden, AC'nin tamamını da ölçecektir.

Ama AB, BC'yi de ölçmektedir; öyleyse, D niceliği AB, BC, AC niceliklerini ölçer;

demek ki AC niceliği AB, BC niceliklerinin her biriyle eşölçeklidir. **[Tan. X.1]**

Şimdi de AC, AB ile eşölçekli olsun;

diyorum ki, AB, BC eşölçeklidir.

Çünkü, AC, AB eşölçekli olduğundan, bir nicelik onları ölçecektir;

ölçsün ve bu nicelik D olsun.

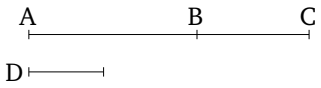
O zaman, D niceliği CA, AB niceliklerini ölçtüğünden, kalan BC'yi de ölçecektir.

Ama AB'yi de ölçer; öyleyse D niceliği AB, BC'yi ölçer.

Öyleyse AB, BC eşölçeklidir. **[Tan. X.1]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

16. Önerme:
Eşölçeksiz iki nicelik toplanırsa toplam her biriyle eşölçeksizdir; ve herhangi iki niceliğin toplamı içlerinden biriyle eşölçeksizse, o iki nicelik de aralarında eşölçeksizdir.



Eşölçeksiz iki nicelik AB, BC birbirine eklensin;

diyorum ki AC'nin tamamı da AB, BC'nin her biriyle eşölçeksizdir.

Çünkü, eğer CA, AB eşölçeksiz olmasaydılar, bir nicelik onları ölçecekti;

mümkünse ölçsün, ve bu nicelik D olsun.

O zaman, D niceliği CA, AB'yi ölçtüğünden, kalan BC'yi de ölçecektir.

Ama AB'yi de ölçer; öyleyse D niceliği AB, BC'yi ölçer.

Bu durumda AB, BC eşölçekli olur; ama varsayım gereği bunlar eşölçeksizdi: bu olamaz.

Öyleyse hiçbir nicelik CA, AB'yi ölçmez: öyleyse CA, AB eşölçeksizdir. **[Tan. X.1]**

Benzer şekilde AC, CB'nin de eşölçeksiz olduğunu kanıtlayabiliriz.

Öyleyse AC niceliği AB, BC'nin herbiriyle eşölçeksizdir.

Şimdi de, AC niceliği AB, BC niceliklerinden biriyle eşölçeksiz olsun.

Önce AB ile eşölçeksiz olsun;

diyorum ki, AB, BC de birbirieyle eşölçeksizdir.

Çünkü, eğer eşölçekli olsalardı, bir nicelik onları ölçecekti.

Ölçsün ve bu nicelik D olsun.

O zaman, D niceliği AB, BC'yi ölçtüğünden, AC'nin tamamını da ölçecektir.

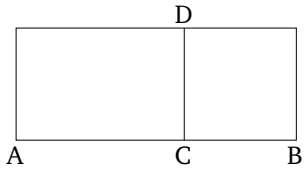
Ama AB'yi de ölçer; öyleyse D niceliği CA, AB'yi ölçer.

Bu durumda CA, AB eşölçekli olur; ama varsayım gereği bunlar eşölçeksizdi: bu olamaz.

Öyleyse hiçbir nicelik AB, BC'yi ölçmez; öyleyse AB, BC eşölçeksizdir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

Yardımcı Önerme: Bir doğrunun bir parçası üzerine çizilen bir paralelkenar, o doğrunun tamamı üzerine çizilen dikdörtgenden bir kare kadar eksikse, çizilen bu bu paralelkenar çizimin sonunda ortaya çıkan iki parçanın içerdiği dikdörtgene eşittir.



AB doğrusu üzerine AD paralelkenarı, fark DB karesi olacak şekilde çizilsin;

diyorum ki, AD paralelkenarı, AC, CB tarafından içerilen dikdörtgene eşittir.

Bu derhal görülür; çünkü DB bir kare olduğundan DC eşittir CB;

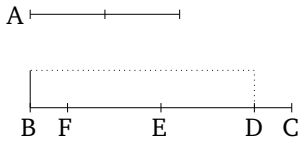
ve AD de AC, CD, yani AC, CB tarafından içerilen dikdörtgene eşittir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

17. Önerme:
Uzunlukları farklı iki doğru alındığında, uzun olanın bir parçası üzerine hem kısa olanın üzerine çizilen karenin dörtte birine eşit hem de uzun olanın tamamı üzerine çizilen bir dikdörtgenden bir kare kadar eksik olan bir paralelkenar çizilir, ve bu çizim doğruyu uzunlukta eşölçekli iki parçaya ayırırsa, uzun doğru üzerindeki karenin kısa doğru üzerindeki kareden farkı uzun doğruyla eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadardır.

Ve eğer uzun olanın üzerine çizilen karenin kısa olanın üzerine çizilen kareden farkı, uzun doğruyla eşölçekli bir doğru üzerine çizilen kare kadarsa, uzun olanın bir parçası üzerine hem kısa olanın üzerine çizilen karenin dörtte birine eşit, hem de uzun olanın tamamı üzerine çizilen dikdörtgenden bir kare kadar eksik olan bir paralelkenar çizildiğinde, bu çizim uzun doğruyu uzunlukta eşölçekli iki parçaya ayırır.

[$a+b=c>d$ *olsun. Eğer* $ab=\frac{1}{4}d^2$ *ise* a *ve* b *nin eşölçekli olması için gerek ve yeter şart* $\sqrt{c^2-d^2}=a-b$ *ile* c *nin eşölçekli olmasıdır.]*



A, BC iki farklı doğru olsun, ve BC daha uzun olanı olsun, ve BC üzerine hem A üzerindeki karenin dörtte birine eşit hem de bir kare kadar eksik bir paralelkenar çizilsin. Bu paralelkenar BD, DC dikdörtgeni olsun, **[bkz yukardaki Yardımcı Önerme]**

ve BD, DC ile eşölçekli olsun;

diyorum ki, BC üzerindeki karenin A üzerindeki kareden farkı, BC ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kareye eşittir.

Çünkü, BC doğrusu E'de ikiye bölünsün, ve EF, DE'ye eşit çizilsin.

Bu durumda kalan DC, BF'ye eşit olur.

Ve, BC doğrusu E'de iki eşit parçaya, ve D'de eşit olmayan parçalara bölündüğünden, BD, DC tarafından içerilen dikdörtgen, ED üzerindeki kareyle birlikte EC üzerindeki kareye eşittir; **[II.5]**

Ve aynı durum bunların dört katları için de doğrudur;

Öyleyse, BD, DC tarafından içerilen dikdörtgenin dört katı, DE üzerindeki karenin dört katıyla birlikte, EC üzerindeki karenin dört katına eşittir.

Ama A üzerindeki kare, BD, DC tarafından içerilen dikdörtgenin dört katına eşittir;

ve DF, DE'nin iki katı olduğundan, DF üzerindeki kare, DE üzerindeki karenin dört katına eşittir.

Ve yine BC, CE'nin iki katı olduğundan, BC üzerindeki kare, EC üzerindeki karenin dört katına eşittir.

Bu durumda, A, DF üzerindeki kareler, BC üzerindeki kareye eşit olur,

yani, BC üzerindeki karenin A üzerindeki kareden farkı, DF üzerindeki kareye eşittir.

Kanıtlanması gereken, BC'nin DF ile eşölçekli olduğudur.

BD, DC ile uzunlukta eşölçekli olduğundan, BC de CD ile uzunlukta eşölçeklidir. **[X.15]**

Ama CD, BF'ye eşit olduğundan, CD uzunlukta CD, BF ile eşölçeklidir. **[X.6]**

Öyleyse, BC de BF, CD ile uzunlukta eşölçeklidir, **[X.12]**

bu yüzden BC, kalan FD ile de uzunlukta eşölçeklidir; **[X.15]**

öyleyse BC üzerindeki karenin, A üzerindeki kareden farkı, BC ile eşölçekli olan bir doğru üzerindeki kareye eşittir.

Şimdi de, BC üzerindeki karenin, A üzerindeki kareden farkı, BC ile eşölçekli olan bir doğru üzerindeki kareye eşit olsun, BC üzerine hem A üzerindeki karenin dörtte birine eşit hem de bir kare kadar eksik bir paralelkenar çizilsin, ve bu paralelkenar BD, DC dikdörtgeni olsun.

Kanıtlanması gereken BD'nin DC ile uzunlukta eşölçekli olduğudur.

Aynı çizimle, ve benzer şekilde BC üzerindeki karenin, A üzerindeki kareden farkının, FD üzerindeki kareye eşit olduğunu kanıtlayabiliriz.

Ama BC üzerindeki karenin, A üzerindeki kareden farkı, BC ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kareye eşittir.

Öyleyse BC, FD ile uzunlukta eşölçeklidir, bu yüzden BC, kalan kısım yani BF, DC toplamıyla da eşölçeklidir. **[X.15]**

Ama BF, DC toplamı DC ile eşölçeklidir, **[X.6]**

böylece BC de uzunlukta CD ile eşölçeklidir; **[X.12]**

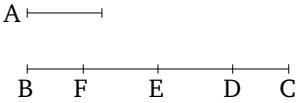
bu durumda ayrışık oranlar olarak, BD, DC ile uzunlukta eşölçeklidir. **[X.15]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

18. Önerme:

Uzunlukları farklı iki doğru alındığında, uzun olanın bir parçası üzerine hem kısa olanın üzerine çizilen karenin dörtte birine eşit hem de uzun olanın tamamı üzerine çizilen bir dikdörtgenden bir kare kadar eksik olan bir paralelkenar çizilir, ve bu çizim doğruyu eşölçeksiz iki parçaya ayırırsa, uzun doğru üzerindeki karenin kısa doğru üzerindeki kareden farkı uzun doğruyla eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadardır.

Ve eğer uzun olanın üzerine çizilen karenin kısa olanın üzerine çizilen kareden farkı, uzun doğruyla eşölçeksiz bir doğru üzerine çizilen kare kadarsa, uzun olanın bir parçası üzerine hem kısa olanın üzerine çizilen karenin dörtte birine eşit, hem de uzun olanın tamamı üzerine çizilen dikdörtgenden bir kare kadar eksik olan bir paralelkenar çizildiğinde, bu çizim uzun doğruyu eşölçeksiz iki parçaya ayırır.



A, BC iki farklı doğru olsun, ve BC daha uzun olanı olsun, ve BC üzerine hem A üzerindeki karenin dörtte birine eşit hem de bir kare kadar eksik bir paralelkenar çizilsin. Bu paralelkenar BD, DC dikdörtgeni olsun, **[bkz X17'den önceki Yardımcı Önerme]**

ve BD, DC ile eşölçeksiz olsun;

diyorum ki, BC üzerindeki karenin A üzerindeki kareden farkı, BC ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kareye eşittir.

Çünkü, önceki çizimi kullanarak ve benzer şekilde, BC üzerindeki karenin $A4üzerindekikaredenfarkınınFD4$ üzerindeki kare olduğunu kanıtlayabiliriz.

Kanıtlanması gereken, BC'nin DF ile uzunlukta eşölçeksiz olduğudur.

BD, DC ile uzunlukta eşölçeksiz olduğundan, BC de DC ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.16]**

Ama DC doğrusu BF, DC toplamıyla eşölçeklidir; **[X.6]**

o yüzden BC doğrusu BF, DC toplamıyla da eşölçeksizdir; **[X.13]**

böylece BC doğrusu kalan FD ile de eşölçeksizdir. **[X.16]**

Ve BC üzerindeki karenin, A üzerindeki kareden farkı, FD üzerindeki kare kadardır;

öyleyse BC üzerindeki karenin, A üzerindeki kareden farkı, BC ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadardır.

Şimdi de, BC üzerindeki karenin, A üzerindeki kareden farkı, BC ile eşölçeksiz olan bir doğru üzerindeki kareye eşit olsun, ve BC üzerine hem A üzerindeki karenin dörtte birine eşit hem de bir kare kadar eksik bir paralelkenar çizilsin, ve bu paralelkenar BD, DC dikdörtgeni olsun.

Kanıtlanması gereken BD'nin DC ile uzunlukta eşölçeksiz olduğudur.

Çünkü, aynı çizimle, ve benzer şekilde BC üzerindeki karenin, A üzerindeki kareden farkının, FD üzerindeki kareye eşit olduğunu kanıtlayabiliriz.

Ama BC üzerindeki karenin, A üzerindeki kareden farkı, BC ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kareye eşittir.

Öyleyse BC, FD ile uzunlukta eşölçeksizdir, bu yüzden BC, kalan kısım yani BF, DC toplamıyla da eşölçeksizdir. **[X.16]**

Ama BF, DC toplamı DC ile eşölçeklidir, **[X.6]**

böylece BC de uzunlukta CD ile eşölçeksizdir; **[X.13]**

bu durumda ayrışık oranlar olarak, BD, DC ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.16]**

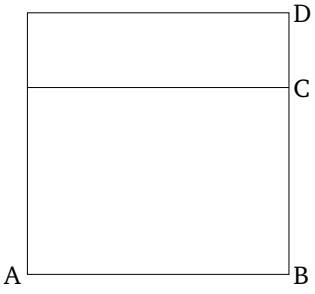
Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

Yardımcı Önerme: Bilindiği gibi uzunlukta eşölçekli olan doğrular aynı zamanda karede de eşölçeklidir ama karede eşölçekli olan doğrular her zaman uzunlukta eşölçekli olmaz. Öte yandan rasyonel bir doğruyla eşölçekli olan bir doğruya da rasyonel denir ve diğer doğruyla hem uzunlukta hem de karede eşölçeklidir.

Verilen bir rasyonel doğruyla karede eşölçekli olan bir doğru onunla aynı zamanda uzunlukta da eşölçekliyse o doğruya rasyonel denir ve verilen rasyonel doğruyla hem uzunlukta hem de karede eşölçekli denir. Ama verilen rasyonel doğruyla karede eşölçekli olmasına rağmen uzunlukta eşölçekli değilse bu durumda ona yine rasyonel denir ve verilen doğruyla yalnızca karede eşölçeklidir denir.

[Bu metnin Öklid'e ait olmadığı ama daha sonraki önermelerin ifadelerine açıklık getirmek üzere eklendiği düşünülmektedir.]

19. Önerme:
Eşölçekli rasyonel doğrular tarafından içerilen dikdörtgen rasyoneldir.



AC dikdörtgeni, uzunlukta eşölçekli doğrular AB, BC tarafından içerilsin;

diyorum ki, AC rasyoneldir.

Çünkü, AB üzerine AD karesi çizilsin; bu durumda AD rasyonel olur. **[Tan. X.4]**

Ve, AB uzunlukta BC ile eşölçekli olduğundan, ve ayrıca AB eşittir BD olduğundan, BD uzunlukta BC ile eşölçeklidir.

Ve, BD'nin BC'ye oranı, DA'nın AC'ye oranına eşittir. **[VI.1]**

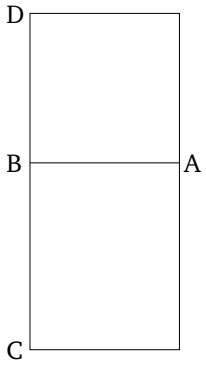
Bu durumda DA, AC ile eşölçeklidir. **[X.11]**

Ama DA rasyoneldir;

öyleyse AC de rasyoneldir. **[Tan. X.4]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

20. Önerme:
Eğer bir doğrunun üzerine rasyonel olan bir alan çizilirse, oluşan genişlik de rasyoneldir ve üzerine çizildiği doğruyla uzunlukta eşölçeklidir.



Daha önce belirtildiği şekilde rasyonel olan bir AB doğrusu üzerine rasyonel AC alanı çizilsin, ve BC genişliği oluşsun;

diyorum ki, BC rasyoneldir ve BA ile uzunlukta eşölçeklidir.

Çünkü, AB üzerine AD karesi çizilsin; bu durumda AD rasyonel olur. **[Tan. X.4]**

Ama AC de rasyoneldir; bu durumda DA, AC ile eşölçekli olur.

Ve, DA'nın AC'ye oranı, DB'nin BC'ye oranına eşittir. **[VI.1]**

Öyleyse, DB de BC ile eşölçeklidir; **[X.11]**

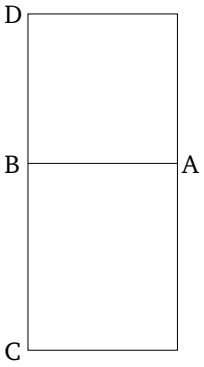
ve DB, BA'ya eşittir; bu durumda AB de BC ile eşölçeklidir.

Ama AB rasyoneldir; öyleyse BC de rasyoneldir ve AB ile uzunlukta eşölçeklidir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

21. Önerme:
Kenarları yalnızca karede eşölçekli iki doğru tarafından içerilen dikdörtgen irrasyoneldir, ve bu dikdörtgene eşit olan karenin kenarı da irrasyoneldir. Bu karenin kenarı gibi olan niceliklere *orta değer* denir.

[Bu önerme içinde tanımı yapılan orta değer *nicelikler, kendisi tam kare olmayan rasyonel sayıların dördüncü kökleri şeklinde yazılabilen niceliklerdir.]*



Yalnız karede eşölçekli olan AB, BC doğrularının içerdiği dikdörtgen AC olsun;

diyorum ki, AC irrasyoneldir, ve ona eşit karenin kenarı da irrasyoneldir; ve bu kenara orta densin.

Çünkü, AB üzerine AD karesi çizilsin; bu durumda AD rasyonel olur. **[Tan. X.4]**

Ve, varsayım gereği yalnızca karede eşölçekli olan AB, BC uzunlukta eşölçeksiz olduğuklarında, ve bu arada AB, BD'ye eşit olduğundan,

DB de BC ile uzunlukta eşölçeksizdir.

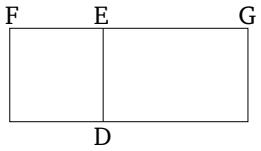
Ve, DB'nin BC'ye oranı, AD'nin AC'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

bu durumda DA, AC ile eşölçeksiz olur. **[X.11]**

Ama DA rasyoneldir; öyleyse AC irrasyoneldir, böylece AC'ye eşit karenin kenarı da irrasyoneldir. **[Tan. X.4]**

Bundan dolayı vs …
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

Yardımcı Önerme: İki doğru verildiğinde, birincinin ikinciye oranı, birincinin üzerine çizilen karenin, ikisi tarafından içerilen dikdörtgene olan oranına eşittir.



Verilen iki doğru FE, EG olsun;

diyorum ki, FE'nin EG'ye oranı, FE üzerindeki karenin FE, EG dikdötgenine oranına eşittir.

Çünkü, FE üzerine DF karesi çizilsin, ve GD tamamlansın.

O zaman, FE'nin EG'ye oranı, FD'nin DG'ye oranına eşit olduğundan, **[VI.1]**

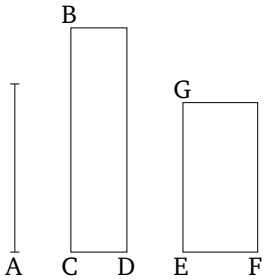
ve FD, FE üzerindeki kare, DG de DE, EG dikdörtgeni, yani FE, EG dikdörtgeni olduğundan,

FE'nin EG'ye oranı, FE üzerndeki karenin FE, EG dikdörtgenine oranına eşittir.

Benzer şekilde, GE, EF dikdörtgeninin EF karesine oranı, yani GD'nin FD'ye oranı, GE'nin EF'ye oranına eşittir.

Bundan dolayı vs …
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

22. Önerme:
Orta uzunluktaki bir doğru üzerindeki kare eğer rasyonel bir doğru üzerine çizilirse, oluşan genişlik rasyoneldir ve çizildiği doğruyla uzunlukta eşölçeksizdir.



A orta değer, CB rasyonel olsun, ve BD dikdörtgeni, A üzerindeki karenin BC'ye uygulanmasıyla elde edilmiş olsun, ve genişlik olarak CD oluşmuş olsun;

diyorum ki, CD rasyoneldir ve CB ile uzunlukta eşölçeksizdir.

Çünkü, A orta değer olduğundan, üzerindeki kare, yalnızca karede eşölçekli olan iki rasyonel doğru tarafından içerilen bir dikdörtgen alana eşittir. **[X.21]**

Üzerindeki kare GF olsun.

Ama üzerindeki kare BD'ye de eşittir; öyleyse BD, GFye eşittir.

Ama onunla eşaçılıdır da;

ve eşit ve eşaçılı paralelkenarlarda eşit açıları çevreleyen kenarlar karşılıklı ters orantılıdır; **[VI.14]**

bu durumda BC'nin EG'ye oranı, EF'nin CD'ye oranına eşit olur.

Öyleyse, BC üzerindeki karenin EG üzerindeki kareye oranı, EF üzerindeki karenin CD üzerindeki kareye oranına eşittir. **[VI.22]**

Ama CB üzerindeki kare EG üzerindeki kareyle eşölçeklidir, çünkü bu doğruların her biri rasyoneldir;

bu durumda EF üzerindeki kare de CD üzerindeki kareyle eşölçeklidir. **[X.11]**

Ama EF üzerindeki kare rasyoneldir; bu durumda CD üzerindeki kare de rasyonel olur; **[Tan. X.4]**

öyleyse CD rasyoneldir.

Ve, EF, uzunlukta EG ile eşölçeksiz olduğundan, çünkü yalnızca karede eşölçekliler, ve EF'nin EG'ye oranı, EF üzerindeki karenin FE, EG dikdörtgenine oranına eşit olduğundan, **[Yardımcı Önerme]**

EF üzerindeki kare, FE, EG dikdörtgeniyle eşölçeklidir. **[X.11]**

Ama CD üzerindeki kare, EF üzerindeki kareyle eşölçeklidir, çünkü bu doğrular karede rasyoneldir;

ve DC, CB dikdörtgeni, FE, EG dikdörtgeniyle eşölçeklidir, çünkü bunlar A üzerindeki kareye eşittir;

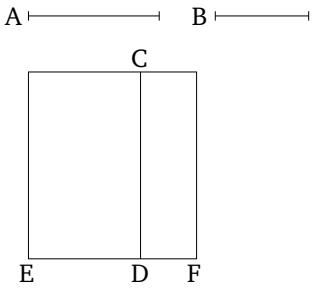
bu durumda CD üzerindeki kare, DC, CB dikdörtgeniyle eşölçeksiz olur. **[X.13]**

Ama, CD üzerindeki karenin DC, CB dikdörtgenine oranı, DC'nin CB'ye oranına eşittir; **[Yardımcı Önerme]**

öyleyse DC rasyoneldir ve CB ile uzunlukta eşölçeksizdir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

23. Önerme:
Orta değer bir doğruyla eşölçekli olan her doğru orta değerdir.



A orta değer olsun, ve B de A ile eşölçekli olsun;

diyorum ki, B de orta değerdir.

Çünkü, bir rasyonel CD doğrusu alınsın, ve CD üzerine, A üzerindeki kareye eşit CE dikdörgen alanı çizilsin, ve ED genişliği oluşmuş olsun;

bu durumda ED rasyoneldir, ve CD ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Ve CD üzerine, B üzerindeki kareye eşit CF dikdörtgen alanı çizilsin, ve DF genişliği oluşmuş olsun.

O zaman, A, B ile eşölçekli olduğundan, A üzerindeki kare de B üzerindeki kareyle eşölçekli olur.

Ama EC, A üzerindeki kareye eşittir, ve CF de B üzerindeki kareye eşittir;

öyleyse EC, CF ile eşölçeklidir.

Ve, EC'nin CF'ye oranı,ED'nin DF'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse ED, DF ile uzunlukta eşölçeklidir. **[X.11]**

Ama ED rasyoneldir, ve DC ile uzunlukta eşölçeksizdir; bu durumda DF de rasyoneldir, **[Tan. X.3]**

ve DC ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.13]**

Öyleyse CD, DF rasyoneldir ve yalnızca karede eşölçeklidir.

Ama üzerindeki kare yalnızca karede eşölçekli doğrular tarafından içerilen dikdörtgene eşit olan doğru orta değerdir; **[X.21]**

öyleyse CD, DF dikdörtgenine eşit olan karenin kenarı orta değerdir.

Ve CD, DF dikdörtgenine eşit olan karenin kenarı B'dir;

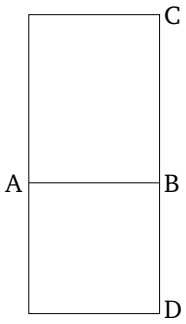
öyleyse B orta değerdir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

Doğal Sonuç: Buradan açıkça görülür ki bir **orta değer alan**la eşölçekli olan bir alan orta değerdir.

> *[Burada sözü edilen orta değer alan, bir orta değer doğru üzerindeki karenin alanıdır. Bugünkü terminolojiyle, rasyonel bir sayının karekköüne eşittir.]*

24. Önerme:
Uzunlukta eşölçekli orta değer kenarlar tarafından içerilen dikdörtgen orta değerdir.



AC dikdörtgeni, uzunlukta eşölçekli orta değer AB, BC doğruları tarafından içerilsin;

diyorum ki AC orta değerdir.

Çünkü, AB üzerine AD karesi çizilsin; bu durumda AD orta değer olur.

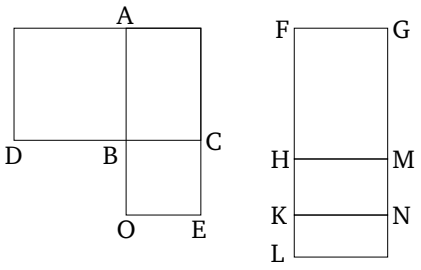
Ve, AB, BC ile uzunlukta eşölçekli olduğundan, ve bu arada AB, BD'ye eşit olduğundan,

DB de BC ile uzunlukta eşölçeklidir; böylece DA da AC ile eşölçekli olur. **[VI.1, X.11]**

Ama DA orta değerdir; öyleyse AC de orta değerdir. **[DS. X.23]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

25. Önerme:
Yalnızca karede eşölçekli orta değer kenarlar tarafından içerilen dikdörtgen ya rasyoneldir ya da orta değer.



AC dikdörtgeni yalnızca karede eşölçekli orta değer AB, BC tarafından içeriliyor olsun;

diyorum ki, AC ya rasyoneldir, ya da orta değer.

Çünkü, AB, BC üzerine AD, BE kareleri çizilsin; bu durumda bu karelerin her biri orta değerdir.

Bir FG rasyonel doğrusu alınsın,

FG üzerine AD'ye eşit GH dikdörtgeni çizilsin, ve FH genişliği oluşturulmuş olsun,

HM üzerine AC'ye eşit MK dikdörtgeni çizilsin, ve HK genişliği oluşturulmuş olsun,

ve ayrıca KN üzerine benzer şekilde, BE'ye eşit NL çizilsin, ve KL genişliği oluşturulmuş olsun;

bu durumda FH, HK, KL aynı doğru üzerinde olur.

O zaman, AD, BE karelerinin her biri orta değer olduğundan, ve AD, GH'ye, ve BE, NL'ye eşit olduğundan, GH, NL dikdörtgenlerinin her biri de orta değerdir.

Ve bunlar FG rasyonel doğrusu üzerine çizilmiştir; bu durumda FH, KL doğrularının her biri rasyoneldir, ve FG ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Ve, AD, BE ile eşölçekli olduğundan, GH de NL ile eşölçeklidir.

Ve, GH'nin NL'ye oranı, FH'nin KL'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

bu durumda FH, KL ile uzunlukta eşölçekli olur. **[X.11]**

Öyleyse FH, KL doğruları uzunlukta eşölçekli rasyonel doğrulardır;

bu durumda FH, KL dikdörtgeni rasyonel olur. **[X.19]**

Ve, DB, BA'ya, ve OB, BC'ye eşit olduğundan, DB'nin BC'ye oranı, AB'nin BO'ya oranına eşit olur.

Ama, DB'nin BC'ye oranı, DA'nın AC'ye oranına eşittir, **[VI.1]**

ve AB'nin BO'ya oranı, AC'nin CO'ya oarnına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse DA'nın AC'ye oranı, AC'nin CO'ya oranına eşittir.

Ama, AD, GH'ye, AC, MK'ye, ve CO da NL'ye eşittir; öyleyse GH'nin MK'ye oranı, MK'nin NL'ye oranına eşittir;

bu durumda ayrıca FH'nin HKye oranı, HK'nin KL'ye oranına eşit olur; **[VI.1, V.11]**

öyleyse FH, KL dikdörtgeni HK üzerindeki kareye eşittir. **[VI.17]**

Ama FH, KL dikdörtgeni rasyoneldir; bu durumda HK de rasyonel olur.

Öyleyse HK rasyoneldir.

Ve, eğer FG ile eşölçekliyse, HN rasyonel olur;

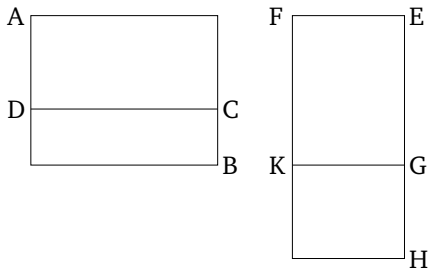
ama eğer FG ile uzunlukta eşölçeksizse, KH, HM yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır, o yüzden HN orta değer olur. **[X.21]**

Öyleyse HN ya rasyoneldir, ya da orta değerdir.

Ama HN, AC'ye eşittir; öyleyse AC ya rasyoneldir, ya da orta değerdir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

26. Önerme:
Orta değer iki alanın farkı rasyonel olamaz.



Çünkü, eğer mümkünse orta değer AB alanı, orta değer AC alanından rasyonel alan DB kadar fazla olsun,

ve rasyonel bir EF doğrusu alınsın;

EF üzerine AB'ye eşit FH dikdörtgeni çizilsin, ve EH genişliği oluşturulmuş olsun,

ve AC'ye eşit FG dikdörtgeni çıkartılsın; bu durumda BD kalanı, KH kalanına eşit olur.

Ama DB rasyoneldir; öyleyse KH de rasyoneldir.

O zaman, AB, AC dikdörtgenlerinin her biri orta değer olduğundan, ve AB, FH'ye, ve AC, FG'ye eşit olduğundan, FH, FG dikdörtgenlerinin her biri de orta değerdir.

Ve bunlar rasyonel EF doğrusu üzerine üzerine çizilmiştir; öyleyse HE, EG doğrularının her biri rasyoneldir ve EF ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Ve, DB rasyonel ve KH'ye eşit olduğundan, KH de rasyoneldir; ve rasyonel EF doğrusu üzerine çizilmiştir;

öyleyse GH rasyoneldir, ve EF ile uzunlukta eşölçeklidir. **[X.20]**

Ama EG de rasyoneldir, ve EF ile uzunlukta eşölçeksizdir;

öyleyse EG, GH ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.13]**

Ve, EG'nin GH'ye oranı, EG üzerindeki karenin EG, GH dikdörtgenine oranına eşit olduğundan, EG üzerindeki kare, EG, GH dikdörtgeniyle eşölçeksizdir. **[X.11]**

Ama EG, GH üzerindeki kareler, EG üzerindeki kareyle eşölçeklidir çünkü ikisi de rasyoneldir;

ve, iki katı olduğundan, EG, GH dikdörtgeninin iki katı, EG, GH dikdörtgeniyle eşölçeklidir; **[X.6]**

bu durumda EG,GH üzerindeki kareler, EG, GH dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksizdir; **[X.13]**

öyleyse, EG, GH üzerindeki karelerle EG, GH dikdörtgeninin iki katının toplamı, yani EH üzerindeki kare, **[II.4]**

EG, GH üzerindeki karelerle eşölçeksizdir. **[X.16]**

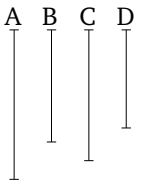
Ama EG, GH üzerindeki kareler rasyoneldir; bu durumda EH üzerindeki kare irrsayonel olur. **[Tan. X.4]**

Öyleyse EH irrasyoneldir.

Ama aynı zamanda rasyoneldir de: bu olamaz.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

27. Önerme:
Yalnızca karede eşölçekli olan ve rasyonel bir dikdörtgen içeren iki orta değer doğru bulmanın yolu.



Yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel A, B doğrusu alınsın; A, B'ye orta orantılı C alınsın, **[VI.13]**

ve A'nın B'ye oranının, C'nin D'ye oranına eşit olması sağlansın. **[VI.12]**

O zaman, A, B rasyonel ve yalnızca karede eşölçekli olduğundan, A, B dikdörtgeni, yani C üzerindeki kare, **[VI.17]**

orta değerdir. **[X.21]**

Öyleyse C orat değerdir. **[X.21]**

Ve, A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşit olduğundan, ve A, B yalnızca karede eşölçekli olduklarından, C, D de yalnızca karede eşölçeklidir. **[X.11]**

Ve C orta değerdir; öyleyse D de orta değerdir. **[X.23]**

Öyleyse, C, D orta değerdir, ve yalnızca karede eşölçeklidir.

Diyorum ki, bunlar aynı zamanda rasyonel bir dikdörtgen içerirler.

Çünkü, A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşit olduğundan, değiştirilmiş oranlar olarak, A'nın C'ye oranı, B'nin D'ye oranına eşit olur. **[V.16]**

Ama A'nın C'ye oranı, C'nn B'ye oranına eşittir;

bu durumda C'nin B'ye oranı, B'nin D'ye oranına eşit olur;

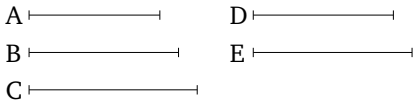
öyleyse C, D dikdörtgeni, B üzerindeki kareye eşittir.

Ama B üzerindeki kare rasyoneldir; bu durumda C, D dikdörtgeni de rasyonel olur.

Öyleyse rasyonel bir dikdörtgen içeren, yalnızca karede eşölçekli iki orta değer doğru bulunmuştur.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. QEF

28. Önerme:
Yalnızca karede eşölçekli olan ve orta değer bir dikdörtgen içeren iki orta değer doğru bulmanın yolu.



Yalnızca karede eşölçekli A, B, C rasyonel doğruları alınsın; A, B'ye orta orantılı D alınsın, **[VI.13]**

ve B'nin C'ye oranının, D'nin E'ye oranına eşit olması sağlansın. **[VI.12]**

A, B, yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğru olduğundan, A, B dikdörtgeni, yani D üzerindeki kare, **[VI.17]**

orta değerdir. **[X.21]**

Öyleyse D orta değerdir. **[X.21]**

Ve B, C yalnızca karede eşölçekli olduklarından, ve B'nin C'ye oranı, D'nin E'ye oranına eşit olduğundan,

D, E de yalnızca karede eşölçeklidir. **[X.11]**

Ama D orta değerdir; öyleyse E de orta değerdir. **[X.23]**

Öyleyse D, E yalnızca karede eşölçekli iki orta değer doğrudur.

Şimdi de diyorum ki, orta değer bir dikdörtgen içerirler.

Çünkü, B'nin C'ye oranı, D'nin E'ye oranına eşit olduğundan, değiştirilmiş oranlar olarak, B'nin D'ye oranı, C'nin E'ye oranına eşit olur. **[V.16]**

Ama, B'nin D'ye oranı, D'nin A'ya oranına eşittir; bu durumda D'nin A'ya oranı, C'nin E'ye oranına eşit olur;

öyleyse A, C dikdörtgeni, D, E dikdörtgenine eşit tir. **[VI.16]**

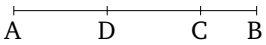
Ama A, C dikdörtgeni orta değerdir; **[X.21]**

öyleyse D, E dikdörtgeni de orta değerdir.

Öyleyse yalnızca karede eşölçekli olan ve orta değer bir dikdörtgen içeren iki orta değer doğru bulunmuştur.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. QEF

Yardımcı Önerme 1: Toplamları da tam kare olan iki kare sayı bulmanın yolu.



AB, BC gibi iki sayı alınsın, ve bunların ya ikisi de çift olsun ya da ikisi de tek olsun.

Bir çift sayıdan bir çift sayı çıkarıldığında, ya da bir tek sayıdan bir tek sayı çıkarıldığında kalan çift olduğundan, **[IX.24, IX.26]**

AC kalanı çifttir.

AC doğrusu D'de ikiye bölünsün.

AB, BC ya benzer düzlem sayıları olsun ya da kare sayılar olsun ki kare sayılar da benzer düzlem sayılarıdır.

Şimdi, AB, BC çarpımı, CD üzerindeki kareyle birlikte, BD üzerindeki kareye eşittir. **[II.6]**

Eğer iki benzer düzlem sayısı birbiriyle çarpılıp bir sayı oluşturursa, çarpımın kare olduğu kanıtlanmış olduğundan, **[IX.1]**

AB, BC çarpımı karedir.

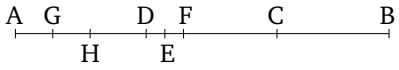
Böylece iki kare sayı, AB, BC çarpımı ve CD üzerindeki kare bulunmuş oldu öyle ki toplamları BD üzerindeki kareye eşittir.

Ve yine açıkça görülür ki iki kare sayı bulunmuş oldu, BD üzerindeki kare ve CD üzerindeki kare, öyle ki farkları olan AB, BC çarpımı, AB, BC benzer düzlem sayıları olduğunda bir kare olur.

Ama benzer düzlem sayıları olmadıkları zaman, iki kare sayı, BD*ve*DC üzerindeki kareler bulunmuş oldu öyle ki farkları, AB, BC çarpımı kare değildir.

QED

Yardımcı Önerme 2: Toplamları tam kare olmayan iki tam kare sayı bulmanın yolu.



Dediğimiz gibi AB, BC çarpımı kare olsun, ve CA çift olsun, ve CA doğrusu D'de ikiye bölünsün.

Açıkça görüldüğü gibi AB, BC çarpımı, CD üzerindeki kareyle birlikte BD üzerindeki kareye eşittir. **[Yardımcı Önerme 1]**

DE birimi çıkarılsın; bu durumda AB, BC çarpımı, CE üzerindeki kareyle birlikte BD üzerindeki kareden küçüktür.

O zaman diyorum ki, kare olan çarpım AB, BC, CE üzerindeki kareyle birlikte bir kare olmayacaktır.

Çünkü, eğer kare olsaydı, ya BE üzerindeki kareye eşit olur, ya da BE üzerindeki kareden küçük olur, ama birim bölünmeyeceğine göre büyük olamaz.

> *[Söz konusu karenin kenarının* BD*'den küçük olduğu söylendi. Eğer* BE*'den büyük olsaydı,* BE *ile* BD *arasında bir sayı olacaktı ama o aralık birim uzunluğunda ve birim bölünmez.]*

Önce, eğer mümkünse, AB, BC çarpımı, CE üzerindeki kareyle birlikte BE üzerindeki kareye eşit olsun, ve GA da DE biriminin iki katı olsun.

O zaman, AC'nin tamamı, CD'nin tamamının iki katı olduğundan, ve içlerinde GA, DE'nin iki katı olduğundan, GC kalanı da EC kalanının iki katı olur;

öyleyse GC doğrusu E'de ikiye bölünmştür.

Bu durumda GB, BC çarpımı, CE üzerindeki kareyle birlikte BE üzerindeki kareye eşit olur. **[II.6]**

Ama varsayım gereği, AB, BC çarpımı da, CE üzerindeki kareyle birlikte, BE üzerindeki kareye eşittir;

öyleyse, GB, BC çarpımı, CE üzerindeki kareyle birlikte, AB, BC çarpımıyla beraber CE üzerindeki kareye eşittir.

Ve CE üzerindeki ortak kare çıkarılınca, AB eşittir GB bulunur: bu olamaz.

Öyleyse AB, BC çarpımı, CE üzerindeki kareyle birlikte BE üzerindeki kareye eşit değildir.

Şimdi de diyorum ki, BE üzerindeki kareden küçük de olamaz.

Çünkü, eğer mümkünse, BF üzerindeki kareye eşit olsun, ve HA, DF'nin iki katı olsun.

Şimdi yine HC'nin CF'nin iki katı olduğu sonucu çıkar; böylece CH, F'de ikiye bölünmüştür,

ve bu nedenle HB, BC çarpımı, FC üzerindeki kareyle birlikte BF üzerindeki kareye eşittir. **[II.6]**

Ama varsayım gereği AB, BC çarpımı da, CE üzerindeki kareyle birlikte BF üzerindeki kareye eşittir.

Öyleyse, HB, BC çarpımı, FC üzerindeki kareyle birlikte, AB, BC çarpımıyla CE üzerindeki kareye eşittir: bu olamaz.

Öyleyse, AB, BC çarpımı, CE üzerindeki kareyle birlikte BE üzerindeki kareden küçük değildir.

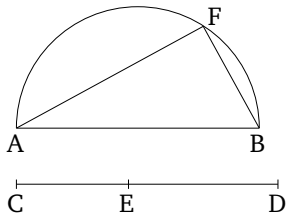
Ama eşit olmadığı da kanıtlanmıştı.

Öyleyse, AB, BC çarpımı, CE üzerindeki kareyle birlikte bir kare değildir.

QED

29. Önerme:

Uzun olanı üzerine çizilen karenin kısa olanın üzerine çizilen kareden, uzun olanıyla uzunlukta eşölçekli olan bir doğru üzerine çizilen bir kare kadar büyük olan, ve aralarında yalnızca karede eşölçümlü olan iki rasyonel doğru çizmenin yolu.



Herhangi bir rasyonel AB doğrusu alınsın, ve iki kare sayı CD, DE alınsın öyle ki farkları CE kare olmasın; **[Yardımcı Önerme 1]**

AB üzerine AFB yarıçemberi çizilsin, ve DC'nin CE'ye oranı, BA üzerindeki karenin AF üzerindeki kareye oranına eşit olması sağlansın. **[DS. X.6]**

FB birleştirilsin.

BA üzerindeki karenin AF üzerindeki kareye oranı, DC'nin CE'ye oranına eşit olduğundan, BA üzerindeki karenin AF üzerindeki kareye oranı, DC sayısının CE sayısına oranına eşittir;

bu durumda BA üzerindeki kare AF üzerindeki kareyle eşölçeklidir. **[X.6]**

Ama AB üzerindeki kare rasyoneldir; **[Tan. X.4]**

dolayısıyla AF üzerindeki kare de rasyoneldir; **[Tan. X.4]**

öyleyse AF rasyoneldir.

Ve, DC'nin CE'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmadığından, BA üzerindeki karenin AF üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

bu durumda AB, AF ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

Öyleyse, BA, AF doğruları yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır.

Ve, DC'nin CEye oranı, BAüzerindekikareninAF üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan,

çevrilmiş oranlar olarak, CD'nin DE'ye oranı, AB üzerindeki karenin BF üzerindeki kareye oranına eşittir. **[DS. V.19, III.31, I.47]**

Ama CD'nin DE'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşittir;

öyleyse AB üzerindeki karenin BF üzerindeki kareye oranı da, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşittir;

bu durumda AB, BF ile uzunlukta eşölçeklidir. **[X.9]**

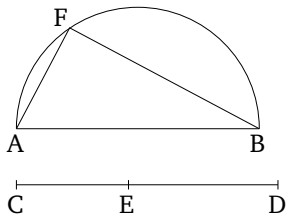
Ve AB üzerindeki kare, AF, FB üzerindeki karelere eşittir; öyleyse AB üzerindeki kare, AF üzerindeki kareden, AB ile eşölçekli olan BF üzerindeki kare kadar büyüktür.

Öyleyse yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel BA, AF doğruları bulduk öyle ki büyük olan AB üzerindeki kare, küçük olan AF üzerindeki kareden, AB ile uzunlukta eşölçekli BF üzerindeki kare kadar büyük.

QED

30. Önerme:

Uzunu üzerine çizilen karenin kısası üzerine çizilen kareden, uzunuyla uzunlukta eşölçeksiz bir doğru üzerine çizilen bir kare kadar büyük olan, ve aralarında yalnızca karede eşölçekli olan iki rasyonel doğru çizmenin yolu.



Herhangi bir rasyonel AB doğrusu alınsın, ve iki kare sayı CE, ED alınsın öyle ki toplamları CD kare olmasın; **[Yardımcı Önerme 2]**

AB üzerine AFB yarıçemberi çizilsin, ve DC'nin CE'ye oranı, BA üzerindeki karenin AF üzerindeki kareye oranına eşit olması sağlansın. **[DS. X.6]**

FB birleştirilsin.

O zaman, öncekindekine benzer bir yolla, BA, AF'nin yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğru olduğunu kanıtlayabiliriz.

Ve, DC'nin CEye oranı, BA üzerindeki karenin AF üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan,

çevrilmiş oranlar olarak, CD'nin DE'ye oranı, AB üzerindeki karenin BF üzerindeki kareye oranına eşittir. **[DS. V.19, III.31, I.47]**

Ama CD'nin DE'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

öyleyse AB üzerindeki karenin BF üzerindeki kareye oranı da, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

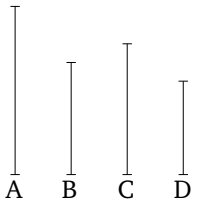
bu durumda AB, BF ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

Ve, AB üzerindeki kare, AF üzerindeki kareden, AB ile eşölçeksiz olan FB üzerindeki kare kadar büyüktür.

Öyleyse yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel AB, AF doğruları bulduk, ve AB üzerindeki kare, AF üzerindeki kareden, AB ile eşölçeksiz olan FB üzerindeki kare kadar büyüktür.

QED

31. Önerme:
Aralarında yalnızca karede eşölçekli olan, rasyonel bir dikdörtgen içeren, ve uzunu üzerine çizilen karenin kısası üzerine çizilen kareden farkının, uzunuyla uzunlukta eşölçekli bir doğru üzerine çizilen bir kare kadar olan, iki orta değer doğru çizmenin yolu.



Yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel A, B doğruları alınsın, öyle ki büyük olan A üzerindeki kare, B üzerindeki kareden, A ile uzunlukta eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olsun. **[X.29]**

Ve C üzerindeki kare A, B dikdörtgenine eşit olsun.

Şimdi, A, B dikdörtgeni orta değerdir. **[X.21]**

C, D dikdörtgeni, B üzerindeki kareye eşit olsun.

Şimdi, B üzerindeki kare rasyoneldir; bu durumda C, D dikdörtgeni de rasyoneldir.

Ve, A'nın B'ye oranı, A, B dikdörtgeninin B üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan, ve bu arada C üzerindeki kare, A, B dikdörtgenine eşit olduğundan, ve C, D dikdörtgeni, B üzerindeki kareye eşit olduğundan,

A'nın B'ye oranı, C üzerindeki karenin, C, D dikdörtgenine oranına eşittir.

Ama, C üzerindeki karenin C, D dikdörtgenine oranı, C'nin D'ye oranına eşittir; bu durumda A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşit olur.

Ama A, B ile yalnızca karede eşölçeklidir; öyleyse C de D ile yalnızca karede eşölçeklidir. **[X.11]**

Ve C orta değerdir; öyleyse D de orta değerdir. **[DS. X.23]**

Ve A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşit olduğundan, ve büyük olan A'nın üzerindeki kare, B'nin üzerindeki kareden, A ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olduğundan,

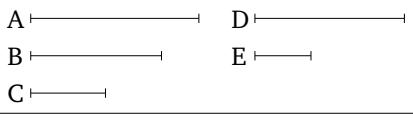
C'nin üzerindeki kare de D'nin üzerindeki kareden, C ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[X.14]**

Öyleyse yalnızca karede eşölçekli, ve rasyonel bir dikdörtgen içeren iki orta değer C, D doğruları bulunmuş oldu, ve büyük olan C üzerindeki kare, D üzerindeki kareden, C ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyük.

A üzerindeki kare, B üzerindeki kareden, A ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olduğu zaman, benzer şekilde C üzerindeki karenin, D üzerindeki kareden, C ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olduğu da kanıtlanabilir. **[X.30]**

32. Önerme:

Aralarında yalnızca karede eşölçekli olan, içerdikleri dikdörtgen orta değer olan ve uzunu üzerine çizilen karenin kısası üzerine çizilen kareden farkı uzunuyla eşölçekli bir doğru üzerine çizilen bir kare kadar olan, orta değer iki doğru çizmenin yolu.



Yalnızca karede eşölçekli üç rasyonel doğru A, B, C alınsın öyle ki A üzerindeki kare, C üzerindeki kareden, A ile eşölçekli bir kare kadar büyük olsun, **[X.29]**

ve D üzerindeki kare A, B dikdörtgenine eşit olsun.

Bu durumda D üzerindeki kare orta değerdir, ve D de orta değer olur. **[X.21]**

D, E dikdörtgeni B, C dikdörtgenine eşit olsun.

O zaman, A, B dikdörtgeninin B, C dikdörtgenine oranı, A'nın B'ye oranına eşit olduğundan, ve bu arada D üzerindeki kare A, B dikdörtgenine, ve D, E dikdörtgeni de B, C dikdörtgenine eşit olduğundan,

A'nın C'ye oranı, D üzerindeki karenin D, E dikdörtgenine oranına eşit olur.

Ama, D üzerindeki karenin D, E dikdörtgenine oranı, D'nin E'ye oranına eşittir; öyleyse A'nın C'ye oranı, D'nin E'ye oranına eşittir.

Ama, A, C ile yalnızca karede eşölçeklidir; bu durumda D de E ile yalnızca karede eşölçekli olur. **[X.11]**

Ama D orta değerdir; öyleyse E de orta değerdir. **[DS. X.23]**

Ve, A'nın C'ye oranı, D'nin E'ye oranına eşit olduğundan, ve bu arada A üzerindeki kare, C üzerindeki kareden, A ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olduğundan,

D üzerindeki kare de E üzerindeki kareden, D ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[X.14]**

Şimdi diyorum ki D, E dikdörtgeni orta değerdir.

Çünkü, B, C dikdörtgeni D, E dikdörtgenine eşit olduğundan, ve bu arada B, C dikdörtgeni orta değer olduğundan, **[X.21]**

D, E dikdörtgeni de orta değerdir.

Öyleyse, yalnızca karede eşölçekli olan, orta değer bir dikdörtgen içeren, ve büyüğü üzerindeki kare küçüğü üzerindeki kareden, büyüğü ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olan, iki orta değer doğru bulunmuş oldu.

Benzer şekilde, A üzerindeki kare C üzerindeki kareden, A ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olduğu zaman D üzerindeki karenin de E üzerindeki kareden, D ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olduğu kanıtlanabilir. **[X.30]**

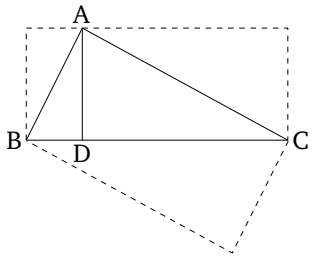
Yardımcı Önerme: A köşesi dik olmak üzere ABC diküçgeni ve AD dikmesi çizilmiş olsun.

Diyorum ki, CB, BD dikdörtgeni, BA üzerindeki kareye eşittir,

BC, CD dikdörtgeni, CA üzerindeki kareye eşittir,

BD, DC dikdörtgeni, AD üzerindeki kareye eşittir,

ve ayrıca, BC, AD dikdörtgeni, BA, AC dikdörtgenine eşittir.



Önce, CB, BD dikdörtgeninin BA üzerindeki kareye eşit olduğu.

Bir dik üçgende AD doğrusu dik açıdan tabana dik çizilmiştir, bu yüzden ABD, ADC üşçgenlerinin ikisi de ABC üçgenine ve birbirine benzerdir. **[VI.8]**

Ve ABC üçgeni, ABD üçgenine benzer olduğundan, CB'nin BA'ya oranı, BA'nın BD'ye oranına eşittir; **[VI.4]**

bu durumda CB, BD dikdörtgeninin AB üzerindeki kareye eşit olur. **[VI.17]**

Aynı nedenden dolayı, BC, CD dikdörtgeni, AC üzerindeki kareye eşit olur.

Ve, eğer bir dik üçgende dik açının olduğu köşeden tabana bir dik çizilirse, bu şekilde çizilen dikme tabanın parçalarının orta orantısı olduğundan, **[DS.VI.8]**

BD'nin DA'ya oranı, AD'nin DC'ye oranına eşit olur;

öyleyse BD, DA dikdörtgeni, AD üzerindeki kareye eşittir. **[VI.17]**

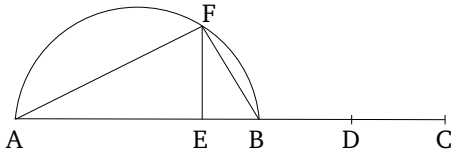
Diyorum ki, BC, AD dikdörtgeni de BA, AC dikdörtgenine eşittir.

Çünkü, dediğimiz gibi, ABC ile ABD benzerdir, o yüzden BC'nin CA'ya oranı, BA'nın AD'ye oranına eşittir. **[VI.4]**

Öyleyse BC, AD dikdörtgeni, BA, AC dikdörtgenine eşittir. **[VI.16]**

QED

33. Önerme:
Üzerlerindeki karelerin toplamı rasyonel ama içerdikleri dikdörtgen orta değer olan, karede eşölçeksiz iki doğru bulmanın yolu.



Yalnız karede eşölçekli iki rasyonel doğru AB, BC alınsın öyle ki büyük olan AB üzerindeki kare, küçük olan BC üzerindeki kareden, AB ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olsun, **[X.30]**

BC doğrusu D'de ikiye bölünsün,

AB üzerine, BD, DC doğrularından herhangi biri üzerindeki kareden bir kare şekil kadar eksik bir paralelkenar çizilsin, ve bu AE, EB dikdörtgeni olsun; **[VI.28]**

AB üzerine AFB yarıçemberi çizilsin,

AB'ye EF dikmesi çizilsin, ve AF, FB birleştirilsin.

AB, BC doğruları eşit olmadığından, ve AB üzerindeki kare, BC üzerindeki kareden, AB ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olduğundan, ve bu arada AB üzerine, BC üzerindeki karenin dörte biri büyüklüğünden, yani yarısı üzerindeki karenin büyüklüğünden bir kare şekil kadar eksik birşekil çizilerek AE, EB dikdörtgeni oluşturulmuş olduğundan,

AE ile EB eşölçeksizdir. **[X.18]**

Ve, AE'nin EB'ye oranı, BA, AE dikdörtgeninin AB, BE dikdörtgenine oranına eşittir,

ve bu arada BA, AE dikdörtgeni, AF üzerindeki kareye eşittir,

ve AB, BE dikdörtgeni, BF üzerindeki kareye eşittir;

bu durumda AF üzerindeki kare, FB üzerindeki kareyle eşölçeksizdir;

öyleyse AF, FB karede eşölçeksizdir.

Ve, AB rasyonel olduğundan, AB üzerindeki kare de rasyoneldir; böylece AF, FB üzerindeki karelerin toplamı da rasyonel olur. **[I.47]**

Ve yine, AE, EB dikdörtgeni, EF üzerindeki kareye eşit olduğundan, ve varsayım gereği AE, EF dikdörtgeni, BD üzerindeki kareye de eşit olduğundan,

FE eşittir BD;

öyleyse BC, FE'nin iki katıdır,

böylece AB, BC dikdörtgeni, AB, EF dikdörtgeniyle eşölçekli olur.

Ama AB, BC dikdörtgeni orta değerdir; **[X.21]**

öyleyse AB, EF dikdörtgeni de orta değerdir. **[DS. X.23]**

Ama AB, EF dikdörtgeni, AF, FB dikdörtgenine eşittir; **[Yardımcı Önerme]**

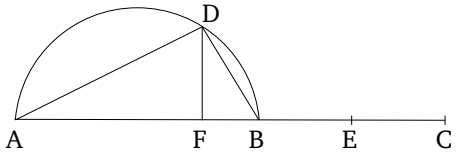
bu durumda AF, FB dikdörtgeni de orta değer olur.

Ama bu doğrular üzerindeki karelerin toplamının rasyonel olduğu da kanıtlanmıştı.

Öyleyse, üzerlerindeki karelerin toplamı rasyonel ama içerdikleri dikdörtgen orta değer olan, karede eşölçeksiz iki doğru bulunmuş oldu.

QED

34. Önerme:
Üzerlerindeki karelerin toplamı orta değer ama içerdikleri dikdörtgen rasyonel olan, karede eşölçeksiz iki doğru bulmanın yolu.



Yalnızca karede eşölçekli orta değer iki doğru AB, BC alınsın öyle ki içerdikleri dikdörtgen rasyonel olsun ve AB üzerindeki kare, BC üzerindeki kareden, AB ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olsun; **[X.31]**

AB üzerine ADB yarıçemberi çizilsin, BC doğrusu E'de ikiye bölünsün,

AB üzerine, BE üzerindeki kareden bir kare şekil kadar eksik bir paralelkenar çizilsin, bu paralelkenar AF, FB dikdörtgeni olsun; **[VI.28]**

bu durumda AF, uzunlukta FB ile eşölçeksiz olur. **[X.18]**

F'den AB'ye dik açıyla FD çizilsin, AD, DB birleştirilsin.

AF, uzunlukta FB ile eşölçeksiz olduğundan, BA, AF dikdörtgeni de AB, BF dikdörtgeniyle eşölçeksiz olur. **[X.11]**

Ama BA, AF dikdörtgeni, AD üzerindeki kareye eşittir, ve AB, BF dikdörtgeni, DB üzerindeki kareye eşittir;

öyleyse AD üzerindeki kare de DB üzerindeki kareyle eşölçeksizdir.

Ve, AB üzerindeki kare orta değer olduğundan, AD, DB üzerindeki karelerin toplamı da orta değerdir. **[III.31, I.47]**

Ve, BC, DF'nin iki katı olduğundan, AB, BC dikdörtgeni de AB,FD dikdörtgeninin iki katı olur.

Ama AB, BC dikdörtgeni rasyoneldir; bu durumda AB, FD dikdörtgeni de rasyoneldir. **[X.6]**

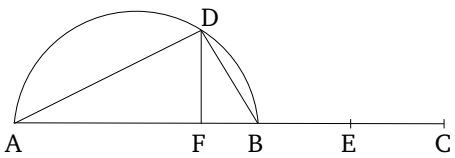
Ama AB, FD dikdörtgeni, AD, DB dikdörtgenine eşittir; **[Yardımcı Önerme]**

böylece AD, DB dikdörtgeni de rasyoneldir.

Öyleyse, üzerlerindeki karelerin toplamı orta değer ama içerdikleri dikdörtgen rasyonel olan, karede eşölçeksiz iki doğru bulunmuş oldu.

QED

35. Önerme:
Üzerlerindeki karelerin toplamı ve içerdikleri dikdörtgen orta değer olan, üzerlerindeki karelerin toplamıyla eşölçeksiz, ve aralarında karede eşölçeksiz iki doğru bulmanın yolu.



Yalnızca karede eşölçekli iki orta değer doğru AB, BC alınsın öyle ki içerdikleri dikdörtgen orta değer olsun ve büyük olan AB üzerindeki

kare, küçük olan BC üzerindeki kareden, AB ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olsun; **[X.32]**

AB üzerine ADB yarıçemberi çizilsin, ve çizimin devamı yukardaki gibi olsun.

O zaman, AF, FB ile uzunlukta eşölçeksiz olduğundan, **[X.18]**

AD de DB ile karede eşölçeksizdir. **[X.11]**

Ve AB üzerindeki kare orta değer olduğundan, AD, DB üzerindeki karelerin toplamı da orta değerdir. **[III.31, I.47]**

Ve, AF, FB dikdörtgeni, BE, DF doğrularının her biri üzerindeki kareye eşit olduğundan, BE eşittir DF;

bu durumda BC, FD'nin iki katı olur, böylece AB, BC dikdörtgeni de AB, FD dikdörtgeninin iki katı olur.

Ama AB, BC dikdörtgeni orta değerdir; öyleyse AB, FD dikdörtgeni de orta değerdir. **[DS. X.32]**

Ve AD, DB dikdörtgenine eşittir; **[Yardımcı Önerme X.32]**

öyleyse AD, DB dikdörtgeni de orta değerdir.

Ve AB, BC ile uzunlukta eşölçeksiz olduğundan, ve bu arada CB, BE ile eşölçekli olduğundan, AB, BE ile de uzunlukta eşölçeksizdir, **[X.13]**

böylece AB üzerindeki kare de AB, BE dikdörtgeniyle eşölçeksiz olur. **[X.11]**

Ama AD, DB üzerindeki kareler, AB üzerindeki kareye eşittir, **[I.47]**

ve AB, FD dikdörtgeni, yani AD, DB dikdörtgeni, AB, BE dikdörtgenine eşittir;

öyleyse AD, DB üzerindeki karelerin toplamı, AD, DB dikdörtgeniyle eşölçeksizdir.

Öyleyse, üzerlerindeki karelerin toplamı ve içerdikleri dikdörtgen orta değer olan, üzerlerindeki karelerin toplamıyla eşölçeksiz, ve aralarında karede eşölçeksiz iki doğru bulunmuş oldu.

QED

36. Önerme:

Yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğru toplanırsa, toplam irrasyoneldir. Bu çeşit doğrulara *iki parçalı* densin.



Yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğru AB, BC birbirine eklensin;

diyorum ki AC toplamı irrasyoneldir.

Çünkü, AB, BC ile uzunlukta eşölçeksiz olduğundan, çünkü yalnızca karede eşölçeklidirler, ve AB'nin BC'ye oranı, AB, BC dikdörtgeninin BC üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan,

AB, BC dikdörtgeni, BC üzerindeki kareyle eşölçeksizdir. **[X.11]**

Ama AB, BC dikdörtgeninin iki katıAB, BC dikdörtgeniyle eşölçeklidir, **[X.6]**

ve AB, BC üzerindeki kareler, BC üzerindeki kareyle eşölçeklidir, çünkü AB, BC doğruları yalnızca karede eşölçekli olan rasyonel doğrulardır, **[X.15]**

öyleyse AB, BC dikdörtgeninin iki katı, AB, BC üzerindeki karelerle eşölçeksizdir. **[X.13]**

Ve birleşik oranlar olarak,AB, BC dikdörtgeninin iki katı, AB, BC üzerindeki karelerle birlikte, yani AC üzerindeki kare, **[II.4]**

AB, BC üzerindeki karelerle eşölçeksizdir. **[X.16]**

Ama AB, BC üzerindeki karelerin toplamı rasyoneldir; öyleyse AC üzerindeki kare irrsayoneldir,

böylece AC de irrasyoneldir. **[Tan. X.4]**

Ve ona *iki parçalı* densin.

QED

37. Önerme:

Yalnızca karede eşölçekli, ve rasyonel bir dikdörtgen içeren iki orta değer doğru toplanırsa, toplam irrasyonel olur; ve ona *birinci türden iki ortalı* densin.



Yalnızca karede eşölçekli, ve rasyonel bir dikdörtgen içeren iki orta değer doğru AB, BC toplansın;

diyorum ki, AC toplamı irrasyoneldir.

Çünkü, AB, BC ile uzunlukta eşölçeksiz olduğundan, AB, BC üzerindeki kareler de AB, BC dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksizdir; **[X.36]**

ve birleşik oranlar olarak, AB, BC üzerindeki kareler, AB, BC dikdörtgeninin iki katıyla beraber, yani AC üzerindeki kare, **[II.4]**

AB, BC dikdörtgeniyle eşölçeksizdir. **[X.16]**

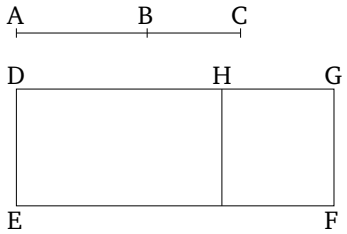
Ama AB, BC dikdörtgeni rasyoneldir, çünkü varsayım gereği AB, BC doğruları rasyonel bir dikdörtgen içeren doğrulardır;

bu durumda AC üzerindeki kare irrasyonel olur;

öyleyse AC irrasyoneldir. **[Tan. X.4]**

Ve ona *birinci türden iki ortalı* densin.

38. Önerme:
Yalnızca karede eşölçekli, ve orta değer bir dikdörtgen içeren iki orta değer doğru toplanırsa, toplam irrasyonel olur; ve ona *ikinci türden iki ortalı* densin.



Yalnızca karede eşölçekli, ve orta değer bir dikdörgen içeren iki orta değer doğru AB, BC birbirine eklensin;

diyorum ki, AC irrasyoneldir.

Çünkü, bir rasyonel DE doğrusu alınsın, ve DE üzerine, AC üzerindeki kareye eşit DF paralelkenarı çizilsin, ve DG genişliği oluşturulmuş olsun. **[I.44]**

O zaman, AC üzerindeki kare, AB, BC üzerindeki karelere ve AB, BC dikdörtgeninin iki katına eşit olduğundan, **[II.4]**

DE üzerine, AB, BC üzerindeki karelere eşit EH çizilsin;

bu durumda HF kalanı, AB, BC dikdörtgeninin iki katına eşit olur.

Ve AB, BC doğrularının her biri orta değer olduğundan, AB, BC üzerindeki kareler de orta değerdir.

Ama varsayım gereği AB, BC dikdörtgeninin iki katı da orta değerdir.

Ve EH dikdörtgeni AB, BC üzerindeki karelere eşittir, ve bu arada FH de AB, BC dikdörtgeninin iki katına eşittir;

bu durumda EH, HF dikdörtgenlerinin her biri orta değer olur.

Ve bunlar DE rsayonel doğrusu üzerine çizilmiştir; öyleyse DH, HG doğrularının her biri rasyoneldir ve DE doğrusuyla eşölçeksizdir. **[X.22]**

O zaman, AB, BC ile uzunlukta eşölçeksiz olduğundan, ve AB'nin BC'ye oranı, AB üzerindeki karenin AB, BC dikdörtgenine eşit olduğundan,

AB üzerindeki kare, AB, BC dikdörtgeniyle eşölçeksizdir. **[X.11]**

Ama AB, BC üzerindeki karelerin toplamı AB üzerindeki kareyle eşölçeklidir, **[X.15]**

ve AB, BC dikdörtgeninin iki katı, AB, BC dikdörtgeniyle eşölçeklidir. **[X.6]**

Öyleyse AB, BC üzerindeki karelerin toplamı, AB, BC dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksizidir. **[X.13]**

Ama EH dikdörtgeni AB, BC üzerindeki karelere eşittir, ve HF dikdörtgeni AB, BC dikdörtgeninin iki katına eşittir.

Öyleyse EH, HF ile eşölçeksizdir, böylece DH de HG ile uzunlukta eşölçeksiz olur. **[VI.1, X.11]**

Bu durumda DH, HG doğruları yalnızca karede eşölçekli olur; böylece DG irrasyonel olur. **[X.36]**

Ama DE rasyoneldir; ve bir rasyonel ve bir irrasyonel doğru tarafından içerilen dikdörtgen irrasyoneldir; **[X.20]**

öyleyse DF alanı irrasyoneldir, ve ona eşit karenin kenarı da irrasyoneldir. **[Tan. X.4]**

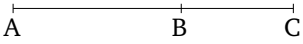
Ama DF'ye eşit karenin kenarı AC'dir;

öyleyse AC irrasyoneldir.

Ve ona *ikinci türden iki ortalı* densin.

QED

39. Önerme:
Üzerlerine çizilen karelerin toplamı rasyonel ama içerdikleri dikdörtgen orta değer olan, karede eşölçeksiz iki doğru toplanırsa, toplam irrasyonel olur; ve ona *üstün* densin.



Verilen şartları sağlayan, karede eşölçeksiz AB, BC doğruları alınsın, **[X.33]**

ve toplansın;

diyorum ki AC irrasyoneldir.

Çünkü, AB, BC dikdörtgeni orta değer olduğundan, AB, BC dikdörtgeninin iki katı da orta değerdir. **[X.6, DS. X.23]**

Ama AB, BC üzerindeki karelerin toplamı rasyoneldir; o yüzden, AB, BC dikdörtgeninin iki katı, AB, BC üzerindeki karelerin toplamıyla eşölçeksizdir,

böylece AB, BC üzerindeki kareler, AB, BC dikdörtgeninin iki katıyla birlikte, yani AC üzerindeki kare, AB, BC üzerindeki karelerin toplamıyla da eşölçeksizdir; **[X.16]**

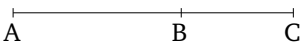
bu durumda AC üzerindeki kare irrasyonel olur,

öyleyse AC irrasyoneldir. **[Tan. X.4]**

Ve ona *üstün* densin.

QED

40. Önerme:
Üzerlerine çizilen karelerin toplamı orta değer ama içerdikleri dikdörtgenin rasyonel olan, karede eşölçeksiz iki doğru toplanırsa, toplam irrasyonel olur; ve ona *rasyonel artı orta alan kenarı* densin.



Verilen şartları sağlayan, karede eşölçeksiz AB, BC doğruları alınsın, **[X.34]**

ve toplansın;

diyorum ki AC irrasyoneldir.

Çünkü, AB, BC üzerindeki karelerin toplamı orta değer olduğundan, ve bu arada AB, BC dikdörtgeninin iki katı rasyonel olduğundan,

AB, BC üzerindeki karelerin toplamı, AB, BC dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksizdir;

böylece AC üzerindeki kare de AB, BC dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksiz olur. **[X.16]**

Ama AB, BC dikdörtgeninin iki katı rasyoneldir;

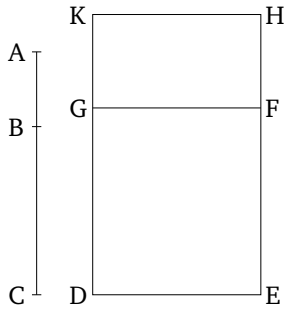
bu durumda AC üzerindeki kare irrasyonel olur.

Öyleyse AC irrasyoneldir. **[Tan. X.4]**

Ve ona *rasyonel artı orta alan kenarı* densin.

QED

41. Önerme:
Üzerlerine çizilen karelerin toplamı orta değer olan ve içerdikleri dikdörtgen hem orta değer hem de üzerlerine çizilmiş karelerin toplamıyla eşölçeksiz olan, karede eşölçeksiz iki doğru toplanırsa, toplam irrasyonel olur; ve ona *iki orta alan toplamı kenarı* densin.



Verilen şartları sağlayan, karede eşölçeksiz AB, BC doğruları alınsın, **[X.35]**

ve toplansın;

diyorum ki AC irrasyoneldir.

Bir rasyonel DE doğrusu alınsın, ve DE üzerine, AB, BC karelerine eşit DF dikdörtgeni, ve AB, BC dildörtgeninin iki katına eşit GH dikdörtgeni çizilsin;

bu durumda DH'nin tamamı AC üzerindeki kareye eşit olur. **[II.4]**

Şimdi, AB, BC üzerindeki karelerin toplamı orta değer olduğundan, ve DF'ye eşit olduğundan, DF de orta değerdir.

Ve rasyonel DE doğrusu üzerine çizilmiştir; öyleyse DG rasyoneldir ve DE ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Aynı nedenden dolayı GK de rasyoneldir ve GF ile, yani GE ile, uzunlukta eşölçeksizdir.

Ve AB, BC üzerindeki kareler, AB, BC dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksiz olduğundan, DF, GH ile eşölçeksizdir;

böylece DG, GH ile eşölçeksiz olur. **[VI.1, X.11]**

Ve bunlar rasyoneldir; öyleyse DG, GK yalnızca karede eşölçekli olan rasyonel doğrulardır;

öyleyse DK, iki parçalı denen irrasyonel bir doğrudur. **[X.36]**

Ama DE rasyoneldir; öyleyse DH irrasyoneldir, ona eşit karenin kenarı da irrasyoneldir. **[Tan. X.4]**

Ama HD'ye eşit karenin kenarı AC'dir;

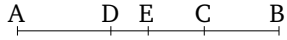
öyleyse AC irrasyoneldir.

Ve ona *iki orta alan toplamı kenarı* densin.

QED

Yukarda sözü edilegelen irrasyonel doğruların, tanımlarındaki koşulları sağlayacak şekilde iki doğru parçaya ancak tek bir noktada bölünebileceğini aşağıdaki yardımcı önermeden sonra kanıtlayacağız.

Yardımcı Önerme: Verilen bir AB doğrusu D ve C noktalarının her birinde eşit olmayan iki parçaya bölünmüş olsun öyle ki AC, DB'den büyük olsun. Bu durumda AC ve CB üzerine çizilen karelerin toplamı AD ve DB üzerine çizilen karelerin toplamından büyüktür.



Çünkü, AB doğrusu E'de ikiye bölünsün;

Sonra, AC, DB'den büyük olduğundan, her birinden DC çıkarılsın;

o zaman AD kalanı, CB kalanından büyük olur.

Ama AE eşittir EB; öyleyse DE, EC'den küçüktür;

bu durumda C, D noktaları orta noktadan eşit uzaklıkta değildir.

Ve AC, CB dikdörtgeni, EC üzerindeki kareyle birlikte, EB üzerindeki kareye eşit olduğundan, **[II.5]**

ve ayrıca AD, DB dikdörtgeni, DE üzerindeki kareyle birlikte, EB üzerindeki kareye eşit olduğundan, **[II.5]**

AC, CB dikdörtgeni, EC üzerindeki karyle birlikte, AD, DB dikdörtgeniyle ve DE üzerindeki karenin toplamına eşittir.

Ve bunlardan DEüzerindekikare,EC üzerindeki kareden küçüktür;

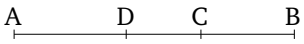
öyleyse kalan AC, CB dikdörtgeni, kalan AD, DB dikdörtgeninden büyüktür,

böylece AC, CB dikdörtgeninin iki katı da AD, DB dikdörtgeninin iki katından büyük olur.

Öyleyse kalanlar, AC, CB üzerindeki karelerin toplamı, AD, DB üzerindeki karelerin toplamından büyüktür.

QED

42. Önerme:
İki parçalı bir doğru onu oluşturan parçalara ancak tek bir noktada bölünebilir.



İki parçalı doğru AB, onu oluşturan parçalara C noktasında bölünmüş olsun;

bu durumda AC, CB doğruları yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur. **[X.36]**

Diyorum ki, AB doğrusu, yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğruya başk bir noktada bölünmez.

Çünkü, eğer mümkünse, D noktasında da bölünsün, böylece AD, DB yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğru olur.

Açıktır ki AC, DB'ye eşit olmaz.

Çünkü, eğer mümkünse, olsun.

O zaman AD de CB'ye eşit olacaktır, ve AC'nin CB'ye oranı, BD'nin DA'ya oranına eşit olacaktır;

böylece AB doğrusu D noktasında da C noktasındaki gibi bölünmüş olacaktır: bu varsayıma aykırıdır.

Öyleyse AC, DB'ye eşit değildir.

Bu nedenle de C, D noktaları orta noktadan eşit uzaklıkta değildir.

Öyleyse, AC, CB üzerindeki karelerin, AD, DB üzerindeki karelerden farkı, AD, DB dikdörtgeninin iki katının, AC, CB dikdörtgeninin iki katından fakına eşittir,

çünkü hem AC, CB üzerindeki karelerle AC, CB dikdörtgeninin iki katı, hem de AD, DB üzerindeki karelerle AD, DB dikdörtgeninin iki katı AB üzerindeki kareye eşittir. **[II.4]**

Ama AC, CB üzerindeki karelerin AD, DB üzerindeki karelerden farkı rasyonel bir alandır, çünkü her ikisi de rasyoneldir;

öyleyse AD, DB dikdörtgeninin iki katının AC, CB dikdörtgeninin iki katından farkı da,

kendileri orta değer olmasına rağmen, **[X.21]**

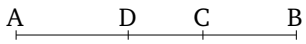
rasyonel bir alandır ki bu olamaz.

Demek ki iki parçalı doğru farklı noktalarda bölünemez;

öyleyse yalnızca tek bir noktada bölünebilir.

QED

43. Önerme:
Birinci türden iki ortalı bir doğru onu oluşturan parçalara ancak tek bir noktada bölünebilir.



Birinci türden iki ortalı AB doğrusu C noktasında bölünsün öyle ki AC, CB yalnızca karede eşölçekli ve rasyonel bir dikdörtgen içeren iki orta değer doğru olsun;

diyorum ki, AB başka noktada bölünemez.

Çünkü, eğer mümkünse, D noktasında da bölünsün, öyle ki AD, DB yalnızca karede eşölçekli ve rasyonel bir dikdörtegn içeren iki orta değer doğru olsun.

O zaman, AD, DB dikdörtgeninin iki katının AC, CB dikdörtgeninin iki katından farkı, AC, CB üzerindeki karelerin, AD, DB üzerindeki karelerden farkına eşittir,

ve bu arada AD, DB dikdörtgeninin iki katı, AC, CB dikdörtgeninin iki katından farkı rasyonel bir alandır, çünkü ikisi de rasyoneldir,

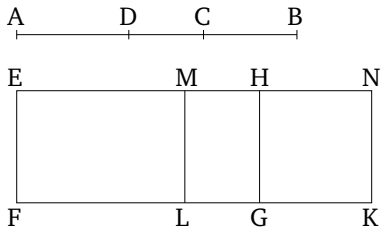
öyleyse AC, CB üzerindeki karelerin, AD, DB üzerindeki karelerden farkı da, onlar orta değer olmalarına rağmen, rasyoneldir ki bu olamaz. **[X.26]**

Demek ki birinci türden iki ortalı doğru parçalarına iki farklı noktada bölünemez;

öyleyse yalnızca tek bir noktada bölünebilir.

QED

44. Önerme:
İkinci türden iki ortalı bir doğru onu oluşturan parçalara ancak tek bir noktada bölünebilir.



İkinci türden iki ortalı AB doğrusu C noktasında bölünsün, öyle ki AC, CB yalnızca karede eşölçekli olan ve orta değer bir dikdörtgen içeren iki orta değer doğru olsun; **[X.38]**

Açıktır ki C noktası orta nokta değildir, çünkü parçalar uzunlukta eşölçekli değiller.

Diyorum ki, AB başka noktada bölünemez.

Çünkü, eğer mümkünse, D noktasında bölünsün, öyle ki AC, DB'ye eşit olmasın, ve AC daha büyük olsun;

o zaman açıkça görülür ki, AD, DB üzerindeki kareler, daha önce kanıtladığımız gibi, **[Yardımcı Önerme]**

AC, CB üzerindeki karelerden küçüktür;

ve varsayalım ki AD, DB yalnızca karede eşölçekli, ve orta değer bir dikdörtgen içeren iki orta değer doğru olsun.

Şimdi bir EF rasyonel doğrusu alınsın,

EF üzerine AB üzerindeki kareye eşit EK dikdörtgeni çizilsin,

ve bundan AC, CB üzerindeki karelere eşit EG çıkarılsın;

bu durumda HK kalanı, AC, CB dikdörtgeninin iki katına eşit olur. **[II.4]**

Yine bu sefer, AC, CB üzerindeki karelerden küçük olduğu kanıtlanan AD, DB üzerindeki karelere eşit EL çıkarılsın; **[Yardımcı Önerme]**

bu durumda MKkalanı,AD,DB4 dikdörtgeninin iki katına eşit olur.

Şimdi, AC, CB üzerindeki kareler orta değer olduğundan, EG orta değerdir.

Ve EF rasyonel doğrusu üzerine çizilmiştir;

öyleyse EH rasyoneldir, ve EF ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Aynı nedenden dolayı, HN de rasyoneldir, ve EF ile uzunlukta eşölçeksizdir.

Ve AC, CB yalnızca karede eşölçekli orta değer doğrular olduğundan, AC, CB ile uzunlukta eşölçeksizdir.

Ama, AC'nin CB'ye oranı, AC üzerindeki karenin AC, CB dikdörtgenine oranına eşittir;

bu durumda AC üzerindeki kare, AC, CB dikdörtgeniyle eşölçeksiz olur. **[X.11]**

Ama AC, CB üzerindeki kareler, AC üzerindeki kareyle eşölçeklidir, çünkü AC, CB karede eşölçeklidir. **[X.15]**

Ve AC, CB dikdörtgeninin iki katı, AC, CB dikdörtgeniyle eşölçeklidir. **[X.6]**

bu durumda AC, CB üzerindeki kareler de AC, CB dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksiz olur. **[X.13]**

Ama EG dikdörtgeni, AC, CB üzerindeki karelere eşittir,

ve HK dikdörtgeni, AC, CB dikdörtgeninin iki katına eşittir;

bu durumda EG, HK ile eşölçeksiz olur, böylece EH de HN ile uzunlukta eşölçeksiz olur. **[VI.1, X.11]**

Ve bunlar rasyoneldir;

öyleyse EH, HN yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur.

Ama, eğer yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğru toplanırsa, toplam iki parçalı denen irrasyonel doğrudur. **[X.36]**

Öyleyse EN doğrusu H'de bölümüş olan iki parçalı bir doğrudur.

Aynı yolla, EM, MN'nin de yalnızca karede eşölçekli olan iki rasyonel doğru olduğu kanıtlanabilir;

ve EN, iki farklı H ve M noktalarında bölünmüş iki parçalı doğru olur.

Ve EH, MN'ye eşit değildir. Çünkü,

AC, CB üzerindeki kareler, AD, DB üzerindeki karelerden büyüktür.

Ama AD, DB üzerindeki kareler, AD, DB dikdörtgeninin iki katından büyüktür;

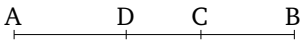
öyleyse AC, CB üzerindeki kareler, yani EG, AD, DB dikdörtgeninin iki katından, yani MK'den, daha da büyüktür,

böylece EH de MN'den büyük olur.

Öyleyse EH, MN'ye eşit değildir.

QED

45. Önerme:
Üstün bir doğru onu oluşturan parçalara ancak tek bir noktada bölünebilir.



AB üstün doğrusu C'de bölünmüş olsun, öyle ki AC, CB karede eşölçeksiz olsun, ve AC, CB üzerindeki karelerin toplamı rasyonel ama AC, CB dikdörtgeni orta değer olsun; **[X.39]**

diyorum ki, AB başka noktada bu şekilde bölünmez.

Çünkü, eğer mümkünse, D noktasında da bölünsün, yani AD, DB karede eşölçeksiz, AD, DB üzerindeki karelerin toplamı rasyonel ama içerdikleri dikdörtgen orta değer olsun.

O zaman, AC, CB üzerindeki karelerin, AD, DB üzerindeki karelerden farkı, AD, DB dikdörtgeninin iki katının, AC, CB dikdörtgeninin iki katından farkına eşit olduğundan,

ve bu arada AC, CB üzerindeki karelerin AD, DB üzerindeki karelerden farkı, her ikisi de rasyonel olduğu için, rasyonel olduğundan,

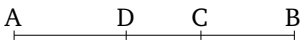
AD, DB dikdörtgeninin iki katının, AC, CB dikdörtgeninin iki katından farkı da, her ikisi de orta değer olmasına rağmen, rasyonel olur: bu olamaz. **[X.26]**

Öyleyse üstün bir doğru farklı noktalarda bölünemez;

öyleyse tek bir noktada bölünür.

QED

46. Önerme:
Rasyonel artı orta alan kenarı bir doğru onu oluşturan parçalara ancak tek bir noktada bölünebilir.



AB doğrusu rasyonel artı orta alan kenarı olan bir doğru olsun ve C noktasında bölünsün, öyle ki AC, CB karede eşölçeksiz olsun ve AC, CB üzerindeki karelerin toplamı orta değer, ama AC, CB dikdörtgeninin iki katı rasyonel olsun; **[X.40]**

diyorum ki, AB başka bir noktada bölünemez.

Çünkü, eğer mümkünse, D noktasında da böünsün, öyle ki AD, DB de karede eşölçeksiz olsun, AD, DB üzerindeki karelerin toplamı orta değer, ama AD, DB dikdörtgeninin iki katı rasyonel olsun.

O zaman, AC, CB dikdörtgeninin iki katının, AD, DB dikdörtgeninin iki katından farkı, AD, DB üzerindeki karelerin, AC, CB üzerindeki karelerden farkına eşit olduğundan,

ve bu arada AC, CB dikdörtgeninin iki katının AD, DB dikdörtgeninin iki katından farkı rasyonel bir alan olduğundan,

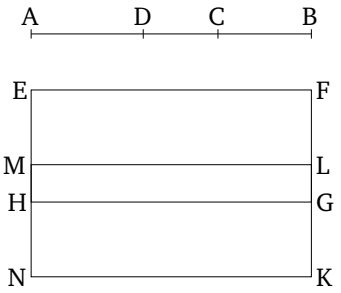
AD, DB üzerindeki karelerin, AC, CB üzerindeki karelerden farkı da, kendileri orta değer olmalarına rağmen, rasyonel olur: bu olamaz. **[X.26]**

Öyleyse rasyonel artı orta alan kenarı bir doğru farklı noktalarda bölünemze;

öyleyse tek bir noktada bölünebilir.

QED

47. Önerme:
İki orta alan toplamı kenarı bir doğru onu oluşturan parçalara ancak tek bir noktada bölünebilir.



AB doğrusu C noktasında bölünsün öyle ki AC, CB karede eşölçeksiz olsun, AC, CB üzerindeki karelerin toplamı orta değer olsun, ve AC, CB dikdörtgeni hem orta değer olsun hem de AC, CB üzerindeki karelerin toplamıyla eşölçeksiz olsun;

diyorum ki, AB doğrusu verilen koşulları sağlayacak şekilde başka bir noktada bölünemez.

Çünkü, eğer mümkünse, D noktasında bölünsün öyle ki AC, BD ile elbette aynı olmasın, ama AC daha büyük olsun;

Bir EF rasyonel doğrusu alınsın,

ve EF üzerine, AC, CB üzerindeki karelere eşit EG dikdörtgeni,

ve AC, CB dikdörtgeninin iki katına eşit HK dikdörtgeni çizilsin;

böylece EK'nin tamamı, AB üzerindeki kareye eşit olur. **[II.4]**

Yine, AD, DB üzerindeki karelere eşit EL dikdörtgeni EF üzerine çizilsin;

bu durumda kalan, yani AD, DB dikdörtgeninin iki katı, MK'ye eşit olur.

Ve, varsayım gereği, AC, CB üzerindeki karelerin toplamı orta değer olduğundan, EG orta değerdir.

Ve rasyonel EF doğrusu üzerine çizilmiştir;

öyleyse HE rasyoneldir ve EF ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Aynı nedenden dolayı, HN de rasyonel ve EF ile eşölçeksizdir.

Ve AC, CB üzerindeki karelerin toplamı, AC, CB dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksiz olduğundan,

EG de GN ile eşölçeksizdir,

bu durumda EH de HN ile eşölçeksiz olur. **[VI.1, X.11]**

Ve bunlar rasyoneldir;

öyleyse EH, HN, yalnızca karede eşölçekli rasyonel iki doğrudur;

bu durumda EN doğrusu H'de bölünmüş iki parçalı doğrudur. **[X.36]**

Benzer şekilde M'de de bölündüğünü kanıtlayabiliriz.

Ama EH, MN'ye eşit değildir;

bu durumda iki parçalı doğru iki farklı noktada bölünmüş olur; bu olamaz. **[X.42]**

Öyleyse iki orta alan toplamı kenarı olan bir doğru iki farklı noktada bölünemez;

öyleyse tek bir noktada bölünebilir.

QED

3. Tanımlar II

5 Rasyonel bir doğru ve parçalarına bölünmüş iki parçalı bir doğru verildiğinde, uzun parçanın üzerindeki karenin küçük parçanın üzerindeki kareden farkı, uzun parçayla uzunlukta eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadarken, eğer uzun parça baştaki rasyonel doğruyla uzunlukta eşölçekliyse, bu iki parçalı doğruya *birinci türden iki parçalı* doğru densin;

6 ama eğer kısa parça baştaki verilen rasyonel doğruyla uzunlukta eşölçekliyse, bu iki parçalı doğruya *ikinci türden iki parçalı* doğru densin;

7 ve eğer hiç biri baştaki rasyonel doğruyla uzunlukta eşölçekli değilse, bu iki parçalı doğruya **üçüncü türden iki parçalı** doğru densin.

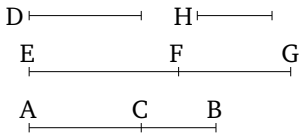
8 Ve yine, uzun parçanın üzerindeki karenin küçük parçanın üzerindeki kareden farkı, uzun parçayla uzunlukta eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadarken, eğer uzun parça baştaki rasyonel doğruyla uzunlukta eşölçekliyse, bu iki parçalı doğruya *dördüncü türden iki parçalı* doğru densin;

9 eğer kısa olansa **beşinci türden iki parçalı**;

10 ve hiç biriyse **altıncı türden iki parçalı**.

4. Önermeler

48. Önerme:
Birinci türden iki parçalı doğru çizmenin yolu.



AC, CB gibi iki sayı alınsın öyle ki toplam AB'nin BC'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olsun, ama CA'ya oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmasın; **[YÖ. 1, X.28]**

herhangi bir rasyonel doğru D alınsın, ve EF, D ile uzunlukta eşölçekli olsun.

Bu durumda EF de rasyonel olur.

BA sayısının AC'ye oranının, EF üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye eşit olması sağlansın. **[DS. X.6]**

Ama AB'nin AC'ye oranı, bir sayının bir sayıya oranıdır; öyleyse EF üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranı, bir sayının bir sayıya oranıdır,

böylece EF üzerindeki kare FG üzerindeki kareyle eşölçeklidir. **[X.6]**

Ve EF rasyoneldir; öyleyse FG de rasyoneldir.

Ve, BA'nın AC'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmadığından, EF üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmaz;

bu durumda EF, FG ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

Öyleyse EF, FG yalnızca karede eşölçekli rasyonel sayılardır; bu durumda EG iki parçalıdır. **[X.36]**

Diyorum ki aynı zamanda birinci türden iki parçalıdır.

Çünkü, BA sayısının AC'ye oranı, EF üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan, ve bu arada BA, AC'den büyük olsuğundan,

EF üzerindeki kare de FG üzerindeki kareden büyüktür.

O zaman, FG, H üzerindeki kareler EF üzerindeki kareye eşit olsun.

Şimdi, BA'nın AC'ye oranı, EF üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan,

çevrilmiş oranlar olarak, AB'nin BC'ye oranı, EF üzerindeki karenin H üzerindeki kareye oranına eşittir. **[DS. V.19]**

Ama AB'nin BC'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşittir;

öyleyse EF üzerindeki karenin H üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşittir.

Öyleyse EF, H ile uzunlukta eşölçeklidir; **[X.9]**

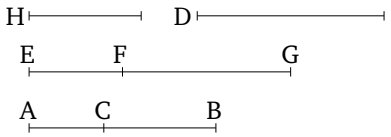
bu durumda EF üzerindeki kare, FG üzerindeki kareden, EF ile uzunlukta eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

Ve EF, FG rasyoneldir, ve EF, D ile uzunlukta eşölçeklidir.

Öyleyse EG birinci türden iki parçalı bir doğrudur.

QED

49. Önerme:
İkinci türden iki parçalı doğru çizmenin yolu.



AC, CB gibi iki sayı alınsın öyle ki toplam AB'nin BC'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olsun, ama CA'ya oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmasın; **[YÖ. 1, X.28]**

herhangi bir rasyonel doğru D alınsın, ve EF, D ile uzunlukta eşölçekli olsun.

Bu durumda EF rasyonel olur.

CA sayısının AB'ye oranının, EF üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye eşit olması sağlansın. **[DS. X.6]**

böylece EF üzerindeki kare FG üzerindeki kareyle eşölçeklidir. **[X.6]**

öyleyse FG de rasyoneldir.

Şimdi, CA sayısının AB'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmadığından, EF üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmaz;

bu durumda EF, FG ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

Öyleyse EF, FG yalnızca karede eşölçekli rasyonel sayılardır; bu durumda EG iki parçalıdır. **[X.36]**

Sırada bunun aynı zamanda ikinci türden iki parçalı bir doğru olduğunu kanıtlamak var.

Çünkü, ters oran olarak, BA sayısının AC'ye oranı, GF üzerindeki karenin FE üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan, ve bu arada BA, AC'den büyük olsuğundan,

GF üzerindeki kare de FE üzerindeki kareden büyüktür.

EF, H üzerindeki kareler GF üzerindeki kareye eşit olsun;

bu durumda, çevrilmiş oranlar olarak, AB'nin BC'ye oranı, FG üzerindeki karenin H üzerindeki kareye oranına eşit olur. **[DS. V.19]**

Ama AB'nin BC'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşittir;

öyleyse FG üzerindeki karenin H üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşittir.

Öyleyse FG, H ile uzunlukta eşölçeklidir; **[X.9]**

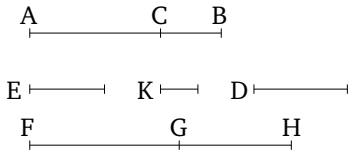
böylece FG üzerindeki kare, FE üzerindeki kareden, FG ile uzunlukta eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

Ve FG, FE, yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır, ve küçük olan EF, başta berilen D doğrusuyla uzunlukta eşölçeklidir.

Öyleyse EG ikinci türden iki parçalı bir doğrudur.

QED

50. Önerme:
Üçüncü türden iki parçalı doğru çizmenin yolu.



AC, CB gibi iki sayı alınsın öyle ki toplam AB'nin BC'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olsun, ama CA'ya oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmasın.

Kare olmayan herhangi bir D sayısı alınsın, ve ne BA'ya ne de AC'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olsun.

Herhangi bir rasyonel E doğrusu alınsın, ve D'nin AB'ye oranının, E üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranına eşit olması sağlansın; **[DS. X.6]**

bu durumda E üzerindeki kare, FG üzerindeki kareyle eşölçekli olur. **[X.6]**

Ve E rasyoneldir; öyleyse FG de rasyoneldir.

Ve, D'nin AB'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmadığından, E üzerindeki karenin, FG üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

öyleyse E, FG ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

Sonra, BA'nın AC'ye oranının, FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranının eşit olması sağlansın; **[DS. X.6]**

bu durumda FG üzerindeki kare, GH üzerindeki kareyle eşölçekli olur. **[X.6]**

Ama FG rasyoneldir; öyleyse GH de rasyoneldir.

Ve, BA'nın AC'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmadığından, FG üzerindeki karenin, HG üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

öyleyse FG, HG ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

Öyleyse FG, GH doğruları, yalnızca karede eşölçekli olan rasyonel doğrulardır; bu durumda FH iki parçalıdır. **[X.36]**

Şimdi de diyorum ki üçüncü türden iki parçalı bir doğrudur.

Çünkü, D'nin AB'ye oranı, E üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan, ve BA'nın AC'ye oranı, FG üzerindeki karenin, GH üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan,

eşit dış oranlar olarak, D'nin AC'ye oranı, E üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranına eşittir. **[V.22]**

Ama D'nin AC'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir; öyleyse E üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

bu durumda E, GH ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

Ve, BA'nın AC'ye oranı, FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye eşit olduğundan, FG üzerindeki kare, GH üzerindeki kareden büyüktür.

O zaman, GH, K üzerindeki kareler FG üzerindeki kareye eşit olsun;

bu durumda çevrilmiş oranlar olarak, AB'nin BC'ye oranı, FG üzerindeki karenin K üzerindeki kareye oranına eşit olur. **[DS. V.19]**

Ama AB'nin BC'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşittir; öyleyse FG üzerindeki karenin K üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşittir;

bu durumda FG, K ile uzunlukta eşölçekli olur. **[X.9]**

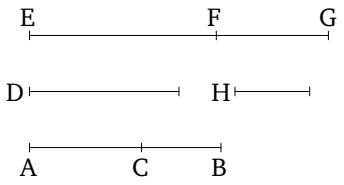
Öyleyse, FG üzerindeki kare, GH üzerindeki kareden, FG ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

Ve FG, GH, hiçbiri uzunlukta E ile eşölçekli olmayan, yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır.

Öyleyse FH üçüncü türden iki parçalı doğrudur.

QED

51. Önerme:
Dördüncü türden iki parçalı doğru çizmenin yolu.



AC, CB gibi iki sayı alınsın öyle ki AB'nin ne BC'ye oranı ne de AC'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olsun.

Rasyonel bir D doğrusu alınsın, ve EF, D ile uzunlukta eşölçekli olsun; bu durumda EF de rasyonel olur.

BA'nın AC'ye oranının, EF üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye eşit olması sağlansın. **[DS. X6]**

öyleyse EF üzerindeki kare, FG üzerindeki kareyle eşölçeklidir; **[X.6]**

bu durumda FG de rasyonel olur.

Şimdi, BA'nın AC'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmadığından, EF üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

öyleyse EF, FG ile eşölçeksizdir. **[X.9]**

Öyleyse, EF, FG yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır; böylece EG iki parçalıdır.

Şimdi de diyorum ki dördüncü türden iki parçalı bir doğrudur.

Çünkü, BA'nın AC'ye oranı, EF üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan, EF üzerindeki kare FG zerindeki kareden büyüktür.

O zaman, FG, H üzerindeki kareler, EF üzerindeki kareye eşit olsun;

bu durumda çevrilmiş oranlar olarak, AB'nin BC'ye oranı, EF üzerindeki karenin H üzerindeki kareye oranına eşit olur. **[DS. V.19]**

Ama AB'nin BC'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

öyleyse EF üzerindeki karenin H üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir.

Bu durumda EF, H ile eşölçeksiz olur. **[X.9]**

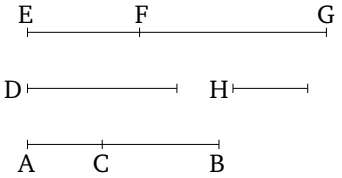
öyleyse EF üzerindeki kare, GF üzerindeki kareden, EF ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

Ve EF, FG, yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır, ve EF, D ile uzunlukta eşölçeklidir.

Öyleyse EG dördüncü türden iki parçalı bir doğrudur.

QED

52. Önerme:
Beşinci türden iki parçalı doğru çizmenin yolu.



AC, CB gibi iki sayı alınsın öyle ki AB'nin hiçbirine oranı bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmasın;

Rasyonel bir D doğrusu alınsın, ve EF, D ile eşölçekli olsun; bu durumda EF rasyonel olur.

CA'nın AB'ye oranının, EF üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranına eşit olması sağlansın. **[DS. X.6]**

Ama CA'nın AB'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir; öyleyse EF üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir.

Öyleyse EF, FG doğruları, yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur; **[X.9]**

Bu durumda EG iki parçalı olur. **[X.36]**

Şimdi de diyorum ki, beşinci türden iki parçalı doğrudur.

Çünkü, CA'nın AB'ye oranı, EF üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan, ters oranlar olarak, BA'nın AC'ye oranı, FG üzerindeki karenin FE üzerindeki kareye oranına eşit olur;

bu durumda GF üzerindeki kare FE üzerindeki kareden büyük olur.

O zaman, EF, H üzerindeki kareler GF üzerindeki kareye eşit olsun;

bu durumda çevrilmiş oranlar olarak, AB sayısının BC'ye oranı, GF üzerindeki karenin H üzerindeki kareye oranına eşit olur. **[DA. V.19]**

Ama AB'nin BC'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

öyleyse FG üzerindeki karenin H üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir.

Demek ki FG, H ile eşölçeksizdir; **[X.9]**

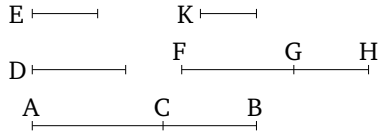
böylece FG4zerindekikareFEüzerindekikareden,FG4 ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

Ve GF, FE doğruları, yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır, ve küçük parça EF, başta alınan rasyonel doğru D ile uzunlukta eşölçeklidir.

Öyleyse EG beşinci türden iki parçalı doğrudur.

QED

53. Önerme:
Altıncı türden iki parçalı doğru çizmenin yolu.



AC, CB gibi iki sayı alınsın öyle ki AB'nin hiçbirine oranı bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmasın;

ve kare olmayan bir başka sayı D olsun öyle ki onuun da BA, AC'ye oranları bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmasın.

Herhangi bir rasyonel E doğrusu alınsın, ve D'nin AB'ye oranının, E üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye eşit olması sağlansın; **[DS. X.6]**

bu durumda E üzerindeki kare FG üzerindeki kareyle eşölçeklidir. **[X.6]**

Ve E rasyoneldir; öyleyse FG de rasyoneldir.

Şiimdi, D'nin AB'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmadığından, E üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmaz;

bu durumda E, FG ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

Şimdi de, BA'nın AC'ye oranının, FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranına eşit olması sağlansın. **[DS. X.6]**

Öyleyse FG üzerindeki kare, HG üzerindeki kareyle eşölçeklidir. **[X.6]**

Bu durumda HG üzerindeki kare rasyonel olur; demek ki HG rasyoneldir.

Ve, BA'nın AC'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmadığından, FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmaz;

bu durumda FG, GH ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

Öyleyse FG, GH, yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır; bu durumda FH iki parçalı olur. **[X.36]**

Sırada bunun altıncı türden iki parçalı bir doğru olduğunun kanıtlanması var.

Çünkü, D'nin AB'ye oranı, E üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan, ve aynı zamanda BA'nın AC'ye oranı, FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan,

eşit dış oranlar olarak, D'nin AC'ye oranı, E üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranına eşittir. **[V.22]**

Ama D'nin AC'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

bu durumda E üzerindeki karenin GH zerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

öyleyse E, GH ile eşölçeksizdir. **[X.9]**

Ama FG ile eşölçeksiz olduğu da kanıtlanmıştı; öyleyse FG, GH doğrularının her biri E ile uzunlukta eşölçeksizdir.

Ve BA'nın AC'ye oranı, FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan, FG üzerindeki kare GH üzerindeki kareden büyüktür.

O zaman, GH, K üzerindeki kareler FG üzerindeki kareye eşit olsun;

bu durumda, çevrilmiş oranlar olarak, AB'nin BC'ye oranı, FG üzerindeki karenin K üzerindeki kareye oranına eşit olur. **[DS. V.19]**

Ama AB'nin BC'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir; bu yüzden FG üzerindeki karenin K üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmaz.

Öyleyse FG, K ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

bu durumda FG üzerindeki kare, GH üzerindeki kareden, FG ile uzunlukta eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olur.

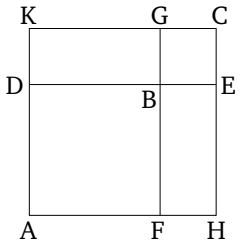
Ve FG, GH doğruları, yalnızca karede eşölçekli olan, ve hiçbiri başta alınan rasyonel E doğrusuyla eşölçekli olmayan iki rasyonel doğrudur.

Öyleyse FH altıncı türden iki parçalı bir doğrudur.

QED

Yardımcı Önerme: AB ve BC kareleri DB ve BE kenarları aynı doğru üzerinde olacak şekilde yerleştirilmiş olsunlar; dolayısıyla FB ve BG kenarları da aynı doğru üzerinde olurlar. AC paralelkenarını tamamlansın;

diyorum ki, AC bir karedir, DG dikdörtgeni AB, BC arasında orta orantılıdır, ayrıca DC de AC, CB arasında orta orantılıdır.



Çünkü, DB, BF'ye eşit olduğundan, ve BE de BG'ye, DE'nin tamamı, FG'nin tamamına eşit olur.

Ama DE doğrusu, AH, KC doğrularının her birine eşittir, ve FG de AK, HC doğrularının her birine eşittir; **[I.34]**

öyleyse AH, KC doğrularının her biri AK, HC doğrularının her birine eşittir.

Bu durumda AC paralelkenarı eşkenardır.

Ama aynı zamanda dikdörtgendir de; öyleyse karedir.

Ve FB'nin BG'ye oranı, DB'nin BE'ye oranına eşit olduğundan, ve bu arada FB'nin BE'ye oranı, AB'nin DG'ye oranına eşit olduğundan, ve DB'nin BE'ye oranı, DG'nin BC'ye oranına eşit olduğundan, **[VI.1]**

AB'nin DG'ye oranı, DG'nin BC'ye oranına eşittir. **[V.11]**

Öyleyse DG dikdörtgeni AB, BC arasında orta orantılıdır.

Şimdi de diyorum ki, DC de AC, CB arasında orta orantılıdır.

Çünkü, AD'nin DK'ye oranı, KG'nin GC'ye oranına, bunlar karşılıklı eşit olduklarından, eşittir,

ve birleşik oranlar olarak AK'nin KD'ye oranı, KC'nin GC'ye oranına eşittir, **[V.18]**

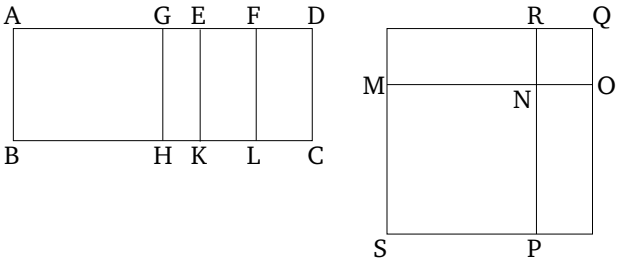
bu arada AK'nin KD'ye oranı, AC'nin CD'ye oranına, ve KC'nin CG'ye oranı, DC'nin CB'ye oranına eşittir, **[VI.1]**

bu durumda AC'nin DC'ye oranı, DC'nin BC'ye oranına eşit olur. **[V.11]**

Öyleyse DC dikdörtgeni, AC, CB arasında orta orantılıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu.

54. Önerme:
Rasyonel bir doğruyla birinci türden iki parçalı bir doğrunun oluşturduğu dikdörtgenin alanına eşit bir karenin kenarı iki parçalı denen irrasyonel bir doğrudur.



AC alanı AB rasyonel doğrusuyla birinci türden iki parçalı AD tarafından içerilsin;

diyorum ki, AC alanına eşit karenin kenarı iki parçalı denen irrasyonel doğrudur.

Çünkü, AD birinci türden iki parçalı doğru olduğundan, E'de parçalarına bölünmüş olsun, ve AE daha büyük parça olsun.

Açıktır ki, AE, ED doğruları yalnızca karede eşölçekli rasyonel iki doğrudur,

AE üzerindeki kare, ED üzerindeki kareden, AE ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür

ve AE, başta alınan AB doğrusuyla eşölçeklidir. **[Tan. X.5]**

ED doğrusu F'de ikiye bölünsün.

O zaman, AE üzerindeki kare, ED üzerindeki kareden, AE ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olduğundan,

daha büyük olan AE üzerine, daha küçük olanın üzerindeki karenin dörtte birine eşit, yani EF üzerindeki kareye eşit, ve AE'nin tamamı üzerine çizilen dikdörtgenden bir kare kadar eksik, bir paralelkenar çizilirse, AE eşölçekli parçalara ayrılır. **[X.17]**

O zaman, AE üzerine, EF üzerindeki kareye eşit, AG, GE dikdörtgeni çizilmiş olsun; bu durumda AG, EG ile uzunlukta eşölçeklidir.

G, E, F noktalarından, AB, CD doğrularından herhangi birine paralel GH, EK, FL çizilsin;

AH paralelkenarına eşit SN karesi, ve GK'ye eşit NQ karesi çizilsin, **[II.14]**

ve MN ile NO aynı doğru üzerinde olacak şekilde yerleştirilsinler;

bu durumda RN ile NP de aynı doğru üzerinde olur.

Ve SQ paralelkenarı tamamlansın; bu durumda SQ bir karedir. **[Yardımcı Önerme]**

Şimdi, AG, GE dikdörtgeni EF üzerindeki kareye eşit olduğundan, AG'nin EF'ye oranı, FE'nin EG'ye oranına eşittir; **[VI.17]**

öyleyse AH'nin EL'ye oranı da EL'nin KG'ye oranına eşit olur; **[VI.1]**

bu durumda EL niceliği AH, GK arasında orta orantılı olur.

Ama AH eşittir SN, ve GK eşittir NQ;

öyleyse EL niceliği SN, NQ arasında orta orantılıdır.

Ama MR de aynı SN, NQ arasında orta orantılıdır; **[Yardımcı Önerme]**

öyleyse EL, MR'ye eşittir, bu yüzden PO'ya da eşittir.

Ama AH, GK de SN, NQ'ya eşittir; öyleyse AC'nin tamamı SQ'nun tamamına eşittir, yani MO üzerindeki kareye;

bu durumda MO, AC'e eşit bir karenin kenarı olur.

Şimdi diyorum ki MO iki parçalıdır.

Çünkü, AG, GE ile eşölçekli olduğundan, AE doğrusu AG, GE doğrularının her biriyle eşölçeklidir. **[X.15]**

Ama varsayıma göre AE, AB ile de eşölçeklidir; öyleyse AG4,GE de AB ile eşölçeklidir. **[X.12]**

Ve AB rasyoneldir; öyleyse AG, GE doğrularının her biri de rasyoneldir; bu durumda AH, GK dikdörtgenlerin her biri de rasyonel olur, **[X.19]**

ve AH, GK ile eşölçeklidir.

Ama AH eşittir SN, ve GK eşittir NQ;

öyleyse SN,NQ, yani MN, NO üzerindeki kareler, rasyonel ve eşölçeklidir.

Ve AE, ED ile uzunlukta eşölçeksiz olduğundan, ve bu arada AE, AG ile, ve DE, EF ile eşölçekli olduğundan,

AG, EF ile eşölçeksizdir, **[X.13]**

böylece AH de EL ile eşölçeksiz olur. **[VI.1, X.11]**

Ama AH eşittir SN, ve EL eşittir MR; öyleyse SN de MR ile eşölçeksizdir.

Ama, SN'nin MR'ye oranı, PN'nin NR'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse PN, NR ile eşölçeksizdir. **[X.11]**

Ama PNeşittirMN, ve NR eşittir NO; öyleyseMN, NO ile eşölçeksizdir.

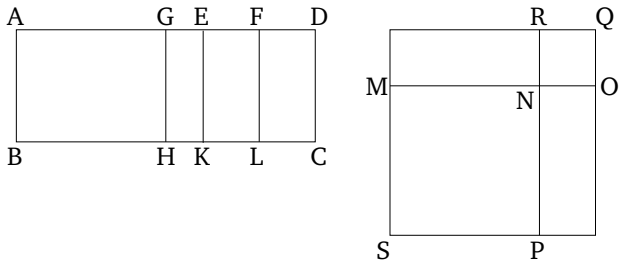
Ve MN üzerindeki kare NO üzerindeki kareyle eşölçeklidir, ve her ikisi de rasyoneldir; öyleyse MN, NO doğruları, yalnızca karede eşölçekli olan rasyonel doğrulardır.

Öyleyse MO iki parçalıdır, **[X.36]**

ve AC'ye eşit bir karenin kenarıdır.

QED

55. Önerme:
Rasyonel bir doğruyla ikinci türden iki parçalı bir doğrunun oluşturduğu dikdörtgenin alanına eşit bir karenin kenarı birinci türden iki ortalı denen irrasyonel bir doğrudur.



ABCD alanı, rasyonel doğru AB ve ikinci türden iki parçalı AD tarafından içerilsin;

diyorum ki, AC'ye eşit karenin kenarı birinci türden iki ortalı bir doğrudur.

Çünkü, AD ikinci türden iki ortalı bir doğru olduğundan, E'de parçalarına bölünsün, ve AE daha büyük parça olsun;

bu durumda AE, ED yalnızca karede eşölçekli olan rasyonel doğrulardır,

ve AE üzerindeki kare, ED üzerindeki kareden, AE ile eşölçekli olan bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür,

ve daha küçük olan parça ED, AB ile uzunlukta eşölçeklidir. **[Tan. X.6]**

ED, F'de ikiye bölünsün,

AE üzerindeki dikdörtgenden bir kare kadar eksik ve EF üzerindeki kareye eşit AG, GE dikdörtgeni çizilsin;

bu durumda AG, GE ile uzunlukta eşölçekli olur. **[X.17]**

G, E, F'den, AB, BC'ye paralel GH, EK, FL çizilsin,

ve AH paralelkenarına eşit SN karesi, ve GK'ye eşit NQ karesi çizilsin,

ve MN ile NO aynı doğru üzerinde olacak şekilde yerleştirilsin; bu durumda RN de NP ile aynı doğru üzerinde olur.

SQ karesi tamamlansın.

Daha önce kanıtlananlardan açıktır ki MR niceliği SN, NQ arasında orta orantılıdır ve EL'ye eşittir, ve MO da AC'ye eşit karenin kenarıdır.

Şimdi MO'nun birinci türden iki ortalı bir doğru olduğu kanıtlanmalıdır.

AE, ED ile eşölçeksiz olduğundan, ve bu arada ED, AB ile eşölçekli olduğundan, AE, AB ile eşölçeksizdir. **[X.13]**

Ve AG, EG ile eşölçekli olduğundan, AE doğrusu AG, GE doğrularının her biriyle eşölçeklidir. **[X.15]**

Ama AE, AB ile eşölçeksizdir; öyleyse AG, GE de AB ile eşölçeksizdir. **[X.13]**

Öyleyse BA, AG ve BA, GE çiftleri yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğru çiftleridir;

bu yüzden AH, GK dikdörtgenlerinin her biri orta değerdir. **[X.21]**

Bundan dolayı SN, NQ karelerinin her biri orta değerdir.

Öyleyse MN, NO orta değerdir.

Ve AG, GE ile uzunlukta eşölçekli olduğundan, AH de GK ile eşölçeklidir, **[VI.1, X.11]**

yani SN, NQ ile eşölçeklidir, yani MN üzerindeki kare ile NO üzerindeki.

Ve, AE, ED ile uzunlukta eşölçeksiz olduğundan, ve bu arada AE, AG ile eşölçekli olduğundan, ve ED, EF ile eşölçekli olduğundan,

AG, EF ile eşölçeksizdir; **[X.13]**

böylece AH ile EL eşölçeksiz olur, yani SN ile MR eşölçeksizdir, yani PN ile NR, **[VI.1, X.11]**

yani MN, NO ile eşölçeksizdir.

Ama MN, NO'nun hem ikisinin de orta değer hem de karede eşölçekli oldukları kanıtlanmıştı;

öyleyse MN, NO doğruları yalnızca karede eşölçekli orta değer doğrulardır.

Şimdi de diyorum ki rasyonel bir dikdörtgen içerirler.

Çünkü, varsayım gereği DE doğrusu AB, EF doğrularının her biriyle eşölçekli olduğundan, EF, EK ile de eşölçeklidir. **[X.12]**

Ve ikisi de rasyoneldir; bu durumda EL, yani MR rasyonel olur, **[X.19]**

ve MR de MN, NO dikdörtgenidir.

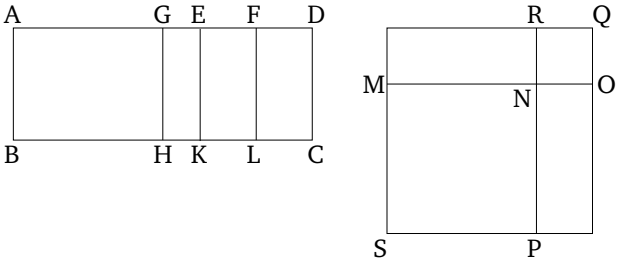
Ama, eğer yalnızca karede eşölçekli ve rasyonel bir dikdörtgen içeren iki orta değer doğru toplanırsa, bütün irrasyonel olur ve birinci türden iki ortalı doğru olur. **[X.37]**

Öyleyse MO birinci türden iki ortalı bir doğrudur.

QED

56. Önerme:

Rasyonel bir doğruyla üçüncü türden iki parçalı bir doğrunun oluşturduğu dikdörtgenin alanına eşit bir karenin kenarı ikinci türden iki ortalı denen irrasyonel bir doğrudur.



$ABCD$ alanı, AB rasyonel doğrusuyla, büyük parçası AE olacak şekilde E noktasında parçalarına ayrılmış üçüncü türden iki parçalı AD doğrusu tarafından içerilsin;

diyorum ki, AC'ye eşit karenin kenarı ikinci türden iki ortalı denen irrasyonel bir doğrudur.

Çünkü, daha önceki çizim yapılsın.

Şimdi, AD üçüncü türden iki parçalı bir doğru olduğundan, AE, ED doğruları yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır,

AE üzerindeki kare, ED üzerindeki kareden, AE ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür,

ve AE, ED parçalarının hiç biri AB ile eşölçekli değildir. **[Tan. X.7]**

O zaman, öncekine benzer şekilde MO'non AC alanına eşit karenin kenarı olduğunu,

ve MN, NO'nun yalnızca karede eşölçekli orta değer doğrular olduğunu kanıtlayacağız;

böylece MO iki ortalı olur.

Sonra da ikinci türden iki ortalı doğru olduğu kanıtlanmalı.

DE, AB ile, yani EK ile, uzunlukta eşölçeksiz olduğundan,

ve DE, EF ile eşölçekli olduğundan,

EF, EK ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.13]**

Ve bunlar rasyoneldir;

bu durumda FE, EK yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrular olur.

Öyleyse EL, yani MR, orta değerdir. **[X.21]**

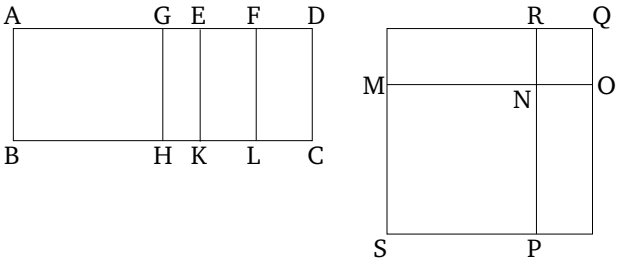
Ve MN, NO tarafından içerilir; bu durumda MN, NO dikdörtgeni orta değerdir.

Öyleyse MO ikinci türden iki ortalı bir doğrudur. **[X.38]**

QED

57. Önerme:

Rasyonel bir doğruyla dördüncü türden iki parçalı bir doğrunun oluşturduğu dikdörtgenin alanına eşit bir karenin kenarı üstün denen irrasyonel bir doğrudur.



AC alanı, AB rasyonel doğrusuyla, büyük parçası AE olacak şekilde E noktasında parçalarına ayrılmış dördüncü türden iki parçalı AD doğrusu tarafından içerilsin;

diyorum ki, AC'ye eşit karenin kenarı üstün denen irrasyonel bir doğrudur.

Çünkü, AD dördüncü türden iki parçalı doğru olduğundan, AE, ED yalnızca karede eşölçekli olan rasyonel doğrulardır,

AE üzerindeki kare, ED üzerindeki kareden, AE ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[Tan. X.8]**

DE doğrusu F'de ikiye bölünsün, ve AE üzerine, EF üzerindeki kareye eşit bir paralelkenar, AG, GE dikdörtgeni çizilsin;

bu durumda AG, GE ile uzunlukta eşölçeksiz olur. **[X.18]**

AB'ye paralel GH, EK, FL çizilsin, ve çizimin kalan kısmı önceden olduğu gibi olsun;

o zaman açıktır ki, MO doğrusu AC'ye eşit karenin kenarı olur.

Sırada MO'nun üstün denen irrasyonel bir doğru olduğunu kanıtlamak var.

AG, EG ile eşölçeksiz olduğundan, AH de GK ile eşölçeksizdir, yani SN, NQ ile; **[VI.1, X.11]**

öyleyse MN,NO karede eşölçeksizdir.

Ve AE, AB ile eşölçekli olduğundan, AK rasyoneldir; **[X.19]**

ve MN, NO üzerindeki karelere eşittir; öyleyse MN, NO üzerindeki karelerin toplamı da rasyoneldir.

Ve, DE uzunlukta AB ile eşölçeksiz olduğundan, yani EK ile, ve bu arada DE, EF ile eşölçekli olduğundan,

EF, EK ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.13]**

Öyleyse EK, EF doğruları yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır; bu durumda LE, yani MR, orta değerdir. **[X.21]**

Ve MN, NO tarafından içerilir; öyleyse MN, NO dikdörtgeni orta değerdir.

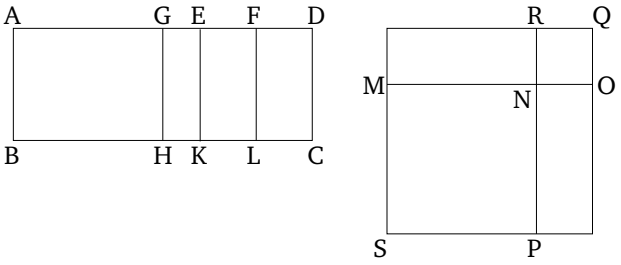
Ve MN, NO üzerindeki karelerin toplamı rasyoneldir, ve MN, NO karede eşölçeksizdir.

Ama, üzerlerindeki karelerin toplamı rasyonel ama içerdikleri dikdörtgen orta değer olan karede eşölçeksiz iki doğru birbirine eklenirse, toplam üsütn denen irrasyonel doğrudur. **[X.39]**

Öyleyse MO doğrusu, AC'ye eşit karenin kenarı olan, ve üstün denen bir irrrasyonel doğrudur.

QED

58. Önerme:
Rasyonel bir doğruyla beşinci türden iki parçalı bir doğrunun oluşturduğu dikdörtgenin alanına eşit bir karenin kenarı rasyonel artı orta alan kenarı denen irrasyonel bir doğrudur.



AC alanı, AB rasyonel doğrusuyla, büyük parçası AE olacak şekilde E noktasında parçalarına ayrılmış beşinci türden iki parçalı AD doğrusu tarafından içerilsin;

diyorum ki, AC'ye eşit karenin kenarı rasyonel artı orta alan kenarı denen irrasyonel bir doğrudur.

Çünkü, önceki çizim yapılsın; o zaman açıktır ki, MO doğrusu ACye eşit karenin kenarıdır.

O zaman, MO'nun rasyonel artı orta alan kenarı olduğu kanıtlanacaktır.

AG, GE ile eşölçeksiz olduğundan, **[X.18]**

AH de HE ile eşölçeksizdir, **[VI.1, X.11]**

yani, MN üzerindeki kare NO üzerindeki kareyle; bu durumda MN, NO karede eşölçeksiz olur.

Ve AD beşinci türden iki parçalı bir doğru olduğundan, ve ED de küçük parça olduğundan, ED, AB ile uzunlukta eşölçeklidir. **[Tan. X.9]**

Ama AE, ED ile eşölçeksizdir; bu durumda AB de AE ile eşölçeksiz olur. **[X.13]**

Öyleyse AK, yani MN, NO üzerindeki karelerin toplamı, orta değerdir. **[X.21]**

Ve DE, AE ile uzunlukta eşölçekli olduğundan, yani EK ile, ve bu arada DE, EF ile eşölçekli olduğundan, EF de EK ile eşölçeklidir. **[X.12]**

Ve EK rasyoneldir; öyleyse EL, yaniMR, yaniMN, NO dikdörtgeni de rasyoneldir. **[X.19]**

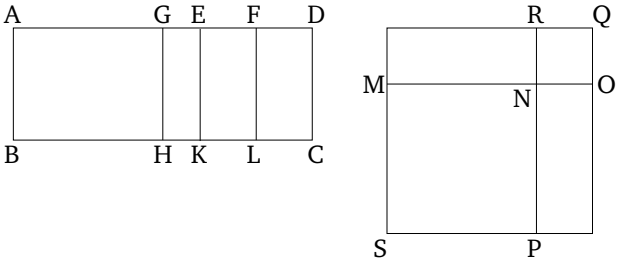
Bu durumda MN, NO doğruları üzerlerindeki karelerin toplamı orta değer, ama içerdikleri dikdörtgen rasyonel olan karede eşölçeksiz iki doğru olur.

Öyleyse MO, rasyonel artı orta alan kenarıdır, **[X.40]**

ve AC'ye eşit karenin kenarıdır.

QED

59. Önerme:
Rasyonel bir doğruyla altıncı türden iki parçalı bir doğrunun oluşturduğu dikdörtgenin alanına eşit bir karenin kenarı iki orta alan toplamı kenarı denen irrasyonel bir doğrudur.



ABCD alanı, AB rasyonel doğrusuyla, büyük parçası AE olacak şekilde E noktasında parçalarına ayrılmış altıncı türden iki parçalı AD doğrusu tarafından içerilsin;

diyorum ki, AC'ye eşit karenin kenarı iki orta alan toplamı kenarı denen irrasyonel bir doğrudur.

Çünkü, daha önceki çizim yapılsın.

O zaman açıktır ki, MO doğrusu AC'ye eşit karenin kenarıdır, ve MN, NO ile karede eşölçeksizdir.

Şimdi, EA, AB ile eşölçeksiz olduğundan, EA, AB yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır;

öyleyse AK, yani MN, NO üzerindeki karelerin toplamı, orta değerdir. **[X.21]**

Yine, ED, AB ile uzunlukta eşölçeksiz olduğundan, FE de EK ile eşölçeksizdir; **[X.13]**

öyleyse FE, EK yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır;

bu durumda EL, yani MR, yani MN, NO dikdörtgeni, orta değerdir. **[X.21]**

Ve AE, EF ile eşölçeksiz olduğundan, AK de EL ile eşölçeksizdir. **[VI.1, X.11]**

Ama AK alanı, MN, NO üzerindeki karelerin toplamıdır, ve EL de MN, NO dikdörtgenidir;

öyleyse MN , NO üzerindeki karelerin toplamı, MN, NO dikdörtgeniyle eşölçeksizdir.

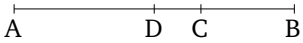
Ve her ikisi de orta değerdir, ve MN, NO karede eşölçeksizdir.

Öyleyse MO iki orta alan toplamı kenarıdır, **[X.41]**

ve ACye eşit karenin kenarıdır.

QED

Yardımcı Önerme: Bir doğru eşit olmayan iki parçaya bölünürse, bu parçalar üzerindeki karelerin toplamı bu iki parçanın içerdiği dikdörtgenin iki katından büyüktür.



AB bir doğru olsun ve C'de eşit olmayan iki parçaya bölünsün, ve AC daha büyük parça olsun;

diyorum ki, AC, CB üzerindeki kareler AC, CB dikdörtgeninin iki katından büyüktür.

Çünkü, AB doğrusu D'de ikiye bölünsün.

O zaman, bir doğru D'de eşit parçalara, ve C'de eşit olmayan parçalara bölündüğünden, AC, CB dikdörtgeni, CD üzerindeki kareyle birlikte AD üzerindeki kareye eşit olur, **[II.5]**

böylece AC, CB dikdörtgeni AD üzerindeki kareden küçük olur;

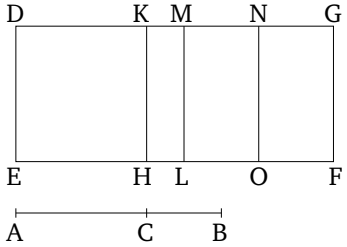
öyleyse AC, CB dikdörtgeninin iki katı, AD üzerindeki karenin iki katından küçüktür.

Ama AC, CB üzerindeki kareler, AD, DC üzerindeki karelerin iki katıdır; **[II.9]**

öyleyse AC, CB üzerindeki kareler, AC, CB dikdörtgeninin iki katından büyüktür.

QED

60. Önerme:
İki parçalı bir doğru üzerindeki kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizilirse, oluşan genişlik birinci türden iki parçalı bir doğrudur.



AB doğrusu, uzun parçası AC olacak şekilde C'de parçalarına bölünmüş iki parçalı bir doğru olsun;

Bir DE rasyonel doğrusu alınsın, ve AB üzerindeki kareye eşit DEFG dikdörtgeni DE üzerine çizilsin, ve genişlik olarak DG oluşmuş olsun;

diyorum ki, DG birinci türden iki parçalı bir doğrudur.

Çünkü, DE üzerine AC üzerindeki kareye eşit DH dikdörtgeni, ve BC üzerindeki kareye eşit KL çizilsin;

bu durumda kalan, AC, CB dikdörtgeninin iki katı, MF'ye eşit olur.

MF doğrusu N'de ikiye bölünsün, ve NO doğrusu ML'ye veya GF'ye paralel çizilsin.

Bu durumda MO, NF dikdörtgenlerinin her biri AC, CB dikdörtgenine eşit olur.

Şimdi, AB doğrusu C'de parçalarına bölünmüş iki parçalı olduğundan, AC, CB yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur; **[X.36]**

öyleyse AC, CB üzerindeki kareler rasyoneldir ve birbirleriyle eşölçeklidir, böylece AC, CB üzerindeki karelerin toplamı da rasyonel olur. **[X.15]**

Ve bu, DL'ye eşittir; öyleyse DL rasyoneldir.

Ve DE rasyonel doğrusu üzerine çizilmiştir; öyleyse DM rasyoneldir ve DE ile uzunlukta eşölçeklidir. **[X.20]**

Yine, AC, CB yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğru olduğundan, AC, CB dikdörtgeninin iki katı, yani MF, orta değerdir. **[X.21]**

Ve ML rasyonel doğrusu üzerine çizilmiştir; öyleyse MG de rasyoneldir ve ML ile, yani DE ile, uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Ama MD de rasyoneldir ve DE ile uzunlukta eşölçeklidir; öyleyse DM, MG ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.13]**

Ve bunlar rasyoneldir;

öyleyse DM, MG rasyonel ve yalnızca karede eşölçeklidir; bu durumda DG iki parçalı olur. **[X.36]**

O zaman, bir de birinci türden iki parçalı olduğu kanıtlanmalıdır.

AC, CB dikdörtgeni, AC, CB üzerindeki kareler arasında orta orantılı olduğundan, **[YÖ. X.53]**

MO da DH, KL arasında orta orantılıdır.

Öyleyse, DH'nin MO'ya oranı, MO'nun KL'ye oranına eşittir,

yani DK'nin MN'ye oranı, MN'nin MK'ye oranına eşit olur; **[VI.1]**

bu durumda DK, KM dikdörtgeni MN üzerindeki kareye eşittir. **[VI.17]**

Ve AC üzerindeki kare, CB üzerindeki kareyle eşölçekli olduğundan, DH de KL ile eşölçeklidir,

böylece DK de KM ile eşölçekli olur. **[VI.1, X.11]**

Ve AC, CB üzerindeki kareler, AC, CB dikdörtgeninin iki katından büyük olduğundan, **[Yardımcı Önerme]**

DL de MF'den büyüktür, böylece DM de MG'den büyük olur. **[VI.1]**

Ve DK, KM dikdörtgeni, MN üzerindeki kareye eşittir, yani MG üzerindeki karenin dörtte birine, ve DK, KM ile eşölçeklidir.

Ama, eğer eşit olmayan iki doğru varsa, ve büyük olanı üzerine küçük olanı üzerindeki karenin dörtte birine eşit bir paralelkenar, bir kare şekil kadar eksik olarak, çizilirse, ve bu onu eşölçekli parçalara bölerse, büyüğü üzerindeki kare, küçüğü üzerindeki kareden, büyüğüyle eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olur; **[X.17]**

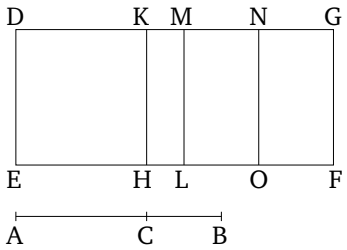
öyleyse DM üzerindeki kare, MG üzerindeki kareden, DM ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

Ve DM, MG rasyoneldir,

ve büyük olan parça DM, verilen rasyonel doğru DE ile uzunlukta eşölçeklidir.

Öyleyse DG birinci türden iki parçalı bir doğrudur. **[Tan. X.5]**

61. Önerme:
Birinci türden iki ortalı bir doğru üzerindeki kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizilirse, oluşan genişlik ikinci türden iki parçalı bir doğrudur.



AB doğrusu, uzun parçası AC olacak şekilde C'de parçalarına bölünmüş birinci türden iki ortalı bir doğru olsun;

Bir DE rasyonel doğrusu alınsın, ve AB üzerindeki kareye eşit DF paralelkenarı DE üzerine çizilsin, ve genişlik olarak DG oluşmuş olsun;

diyorum ki, DG ikinci türden iki parçalı bir doğrudur.

Çünkü, önceki çizim yapılsın.

Sonra, AB doğrusu C'de bölünmüş birinci türden iki ortalı olduğundan, AC, CB yalnızca karede eşölçekli orta değer doğrulardır, ve rasyonel bir dikdörtgen içerirler, **[X.37]**

böylece AC, CB üzerindeki kareler de orta değer olur. **[X.21]**

Öyleyse DL orta değerdir. **[X.15, DS. X.23]**

Ve rasyonel doğru DE üzerine çizilmiştir; öyleyse MD rasyoneldir ve DE ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Yine, AC, CB dikdörtgeninin iki katı rasyonel olduğundan, MF de rasyoneldir.

Ve rasyonel ML dodğrusu üzerine çizilmiştir; öyleyse MG de rasyoneldir ve ML ile, yani DE ile, uzunlukta eşölçeklidir; **[X.20]**

öyleyse DM,MG ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.13]**

Ve bunlar rasyoneldir;

öyleyse DM,MG yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır;

bu durumda DG iki parçalı olur. **[X.36]**

O zaman, bir de ikinci türden iki parçalı olduğu kanıtlanmalıdır.

Çünkü, AC, CB üzerindeki kareler AC, CB dikdörtgeninin iki katından büyük olduğundan, DL de MF'den büyüktür,

böylece DM de MG'den büyük olur. **[VI.1]**

Ve AC üzerindeki kare, CB üzerindeki kareyle eşölçekli olduğundan, DH de KL ile eşölçeklidir,

bu yüzden DK de KM ile eşölçekli olur. **[VI.1, X.11]**

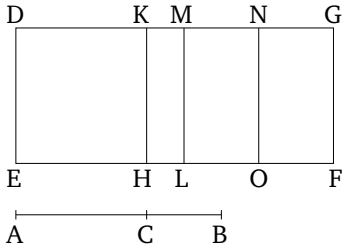
Ve DK, KM dikdörtgeni, MN üzerindeki kareye eşittir; öyleyse DM üzerindeki kare, MG üzerindeki kareden, DM ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[X.17]**

Ve MG, DE ile uzunlukta eşölçeklidir.

Öyleyse DG ikinci türden iki parçalı doğrudur. **[Tan. X.6]**

QED

62. Önerme:
İkinci türden iki ortalı bir doğru üzerindeki kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizilirse, oluşan genişlik üçüncü türden iki parçalı bir doğrudur.



AB doğrusu, uzun parçası AC olacak şekilde C'de parçalarına bölünmüş ikinci türden iki ortalı bir doğru olsun;

Bir DE rasyonel doğrusu alınsın, ve AB üzerindeki kareye eşit DF paralelkenarı DE üzerine çizilsin, ve genişlik olarak DG oluşmuş olsun;

diyorum ki, DG üçüncü türden iki parçalı bir doğrudur.

Çünkü, önceki çizim yapılsın.

Sonra, AB doğrusu C'de bölünmüş ikinci türden iki ortalı olduğundan, AC, CB yalnızca karede eşölçekli orta değer doğrulardır, **[X.38]**

ve bu yüzden AC, CB üzerindeki karelerin toplamı orta değerdir. **[X.15, DS. X.23]**

Ve DL'ye eşittir; öyleyse DL orta değerdir.

Ve DE rasyonel doğrusu üzerine çizilmiştir; bu durumda MD de rasyoneldir ve DE ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Aynı nedenden dolayı, MG de rasyoneldir ve ML ile, yani DE ile, uzunlukta eşölçeksizdir,

öyleyse DM, MG doğrularının her biri rasyoneldir ve DE ile uzunlukta eşölçeksizdir.

Ve AC, CB ile uzunlukta eşölçeksiz olduğundan, ve AC'nin CB'ye oranı, AC üzerindeki karenin AC, CB dikdörtgenine oranına eşit olduğundan,

AC üzerindeki kare de AC, CB dikdörtgeniyle eşölçeksizdir. **[X.11]**

Bu nedenle AC, CB üzerindeki karelerin toplamı, AC, CB dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksizdir, **[X.12, X.13]**

yani DL, MF ile eşölçeksizdir,

böylece DM de MG ile eşölçeksiz olur. **[VI.1, X.11]**

Ve bunlar rasyoneldir;

öyleyse DG iki parçalıdır. **[X.36]**

Şimdi de üçüncü türden iki parçalı olduğu kanıtlanmalıdır.

Az öncekine benzer yolla DM'nin MG'den büyük olduğu, ve DK'nin KM ile eşölçekli olduğu sonucuna varabiliriz.

Ve DK, KM dikdörtgeni, MN üzerindeki kareye eşittir;

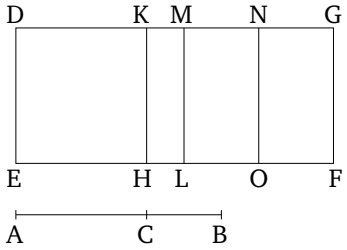
öyleyse DM üzerindeki kare, MG üzerindeki kareden, DM ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

Ve DM, MG doğrularının hiç biri DE ile eşölçekli değildir.

Öyleyse DG üçüncü türden iki parçalı bir doğrudur. **[Tan. X.7]**

QED

63. Önerme:
Üstün bir doğru üzerindeki kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizilirse, oluşan genişlik dördüncü türden iki parçalı bir doğrudur.



AB üstün bir doğru olsun ve büyük parçası AC olacak şekilde C'de bölünmüş olsun;

bir DE rasyonel doğrusu alınsın, ve DE üzerine AB üzerindeki kareye eşit DF paralelkenarı çizilsin ve DG genişliği oluşmuş olsun;

diyorum ki, DG dördüncü türden iki parçalı bir doğrudur.

Önceki çizim yapılsın.

O zaman, AB üstün bir doğru olduğundan ve C'de bölündüğünden, AC, CB doğruları karede eşölçeksizdir, üzerlerindeki karelerin toplamı rasyonel ama içerdikleri dikdörtgen orta değerdir. **[X.39]**

Öyleyse, AC, CB üzerindeki karelerin toplamı rasyonel olduğundan, DL rasyoneldir;

bu durumda DM de rasyonel olur ve DE ile uzunlukta eşölçeklidir. **[X.20]**

Yine, AC, CB dikdörtgeninin iki katı, yani MF, orta değer olduğundan, ve ML üzerine çizildiğinden, MG de rasyoneldir ve DE ile uzunlukta eşölçeksizdir; **[X.22]**

öyleyse DM de MG ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.13]**

Bu nedenle DM, MG yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır; bu durumda DG iki ortalı olur. **[X.36]**

Dördüncü türden iki ortalı olduğu da kanıtlanmalı.

Öncekine benzer yolla DM'nin MG'den büyük olduğunu,

ve DK, KM dikdörtgeninin MN üzerindeki kareye eşit olduğunu kanıtlayabiliriz.

AC üzerindeki kare, CB üzerindeki kareyle eşölçeksiz olduğundan, DH de KL ile eşölçeksizdir,

bu yüzden DK de KM ile eşölçeksiz olur. **[VI.1, X.11]**

Ama eğer eşit olmayan iki doğru varsa, ve büyük olanı üzerine, küçük olanı üzerindeki karenin dörtte birine eşit ama bir kare şekil kadar eksik bir paralelkenar çizilirse, ve bu onu eşölçeksiz iki parçaya ayırırsa, büyük olanın üzerindeki kare, küçük olanın üzerindeki kareden, büyük olanla uzunlukta eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür; **[X.18]**

öyleyse DM üzerindeki kare, MG üzerindeki kareden, DM ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

Ve DM, MG yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır,

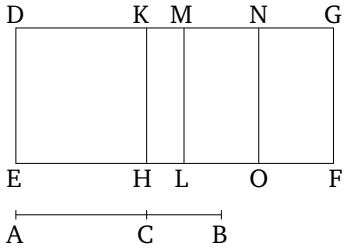
ve DM, DE rasyonel doğrusuyla eşölçeklidir.

Öyleyse DG dördüncü türden iki parçalı bir doğrudur. **[Tan. X.8]**

QED

64. Önerme:

Rasyonel artı orta alan kenarı bir doğru üzerindeki kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizilirse, oluşan genişlik beşinci türden iki parçalı bir doğrudur.



AB, rasyonel artı orta alan kenarı bir doğru olsun, AC daha büyük olacak şekilde C'de parçalarına bölünmüş olsun;

Bir DE rasyonel doğrusu alınsın, ve DE üzerine, AB üzerindeki kareye eşit DF paralelkenarı çizilsin, ve DG genişliği oluşmuş olsun;

diyorum ki, DG beşinci türden iki parçalı bir doğrudur.

Önceki çizimin aynızı yapılsın.

AB doğrusu, C'de parçalarına bölünen rasyonel artı orta alan kenarı bir doğru olduğundan,

AC, CB karede eşölçeksiz, üzerlerindeki karelerin toplamı orta değer, ama içerdikleri dikdörtgen rasyonel olan iki doğrudur. **[X.40]**

AC, CB üzerindeki karelerin toplamı orta değer olduğundan, DL orta değerdir,

bu yüzden DM rasyoneldir ve DE ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Yine, AC, CB dikdörtgeninin iki katı, yani M, rasyonel olduğundan, MG rasyoneldir ve DE ile eşölçeklidir. **[X.20]**

Bu durumda DM,MG ile eşölçeksiz olur; **[X.13]**

öyleyse DM, MG yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır;

bu yüzden DG iki parçalıdır. **[X.36]**

Şimdi de diyorum ki beşinci türden iki parçalı bir doğrudur.

Çünkü, benzer şekilde, DK, KM dikdörtgeninin MN üzerindeki kareye eşit olduğu, ve böylece DK'nın KM ile uzunlukta eşölçeksiz olduğu kanıtlanabilir.

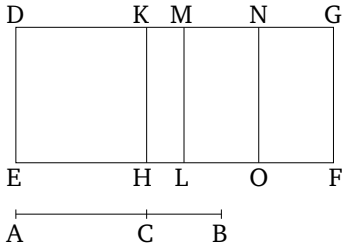
öyleyse DM üzerindeki kare, MG üzerindeki kareden, DM ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[X.18]**

Ve DM, MG yalnızca karede eşölçeklidir, ve küçük olan MG, DE ile uzunlukta eşölçeklidir.

Öyleyse DG beşinci türden iki parçalıdır.

QED

65. Önerme:
İki orta alan toplamı kenarı bir doğru üzerindeki kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizilirse, oluşan genişlik altıncı türden iki parçalı bir doğrudur.



AB, iki orta alan toplamı kenarı olsun, C'de bölünmüş olsun,

ve DE, rasyonel bir doğru olsun,

ve DE üzerine, AB üzerindeki kareye eşit DF paralelkenarı çizilsin, ve DG genişliği oluşmuş olsun;

diyorum ki, DG altıncı türden iki parçalı bir doğrudur.

Önceki çizimin aynısı yapılsın.

AB, iki orta alan toplamı kenarı olduğundan, ve C'de bölündüğünden, AC, CB doğruları karede eşölçeksizdir, üzerlerindeki karelerin toplamı orta değerdir, içerdikleri dikdörtgen orta değerdir, ve üzerlerindeki karelerin toplamıyla içerdikleri dikdörtgen eşölçeksizdir, **[X.41]**

böylece, daha önce kanıtlananlar doğrultusunda, DL, MF dikdörtgenlerinin her biri orta değerdir.

Ve bunlar rasyonel DE doğrusu üzerine çizilmiştir;

öyleyse DM, MG doğrularının her biri rasyoneldir ve DE ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Ve AC, CB üzerindeki karelerin toplamı AC, CB dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksiz olduğundan, DL, MF ile eşölçeksizdir.

Öyleyse DM de MG ile eşölçeksizdir; **[VI.1, X.11]**

öyleyse DM, MG yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır;

bu durumda DG iki parçalı olur. **[X.36]**

Şimdi de diyorum ki, altıncı türden iki parçalı bir doğrudur.

Yine benzer şekilde, DK, KM dikdörtgeninin MN üzerindeki kareye eşit olduğunu, ve DK'nin KM ile uzunlukta eşölçeksiz olduğunu kanıtlayabiliriz;

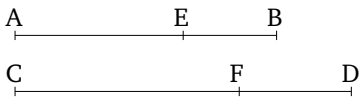
ve aynı nedenden dolayı, DM üzerindeki kare, MG üzerindeki kareden, DM ile uzunlukta eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

Ve DM, MG doğrularının hiç biri başta alınan DE rasyonel doğrusuyla eşölçekli değildir.

Öyleyse DG altıncı türden iki parçalı bir doğrudur.

QED

66. Önerme:
İki parçalı bir doğruyla uzunlukta eşölçekli olan bir doğru kendisi de iki parçalıdır ve aynı türdendir.



AB iki parçalı olsun, ve CD de AB ile uzunlukta eşölçekli olsun; diyorum ki, CD iki parçalıdır ve AB ile aynı türdendir.

Çünkü, AB iki parçalı olduğundan, parçalarına E'de bölünsün, ve AE daha büyük parça olsun;

bu durumda AE, EB yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur. **[X.36]**

AB'nin CD'ye oranının, AE'nin CF'ye oranına eşit olması sağlansın; **[VI.12]**

bu durumda, kalan EB'nin kalan FD'ye oranı, AB'nin CD'ye oranına eşit olur. **[V.19]**

Ama AB, CD ile uzunlukta eşölçeklidir;

öyleyse AE, CF ile, ve EB, FD ile eşölçeklidir. **[X.11]**

Ve AE, EB rasyoneldir; öyleyse CF, FD de rasyoneldir.

Ve AE'nin CFye oranı, EB'nin FD'ye oranına eşittir. **[V.11]**

Öyleyse, değiştirilmiş oranlar olarak, AE'nin EB'ye oranı, CF'nin FD'ye oranına eşit olur. **[V.16]**

Ama AE, EB yalnızca karede eşölçeklidir; öyleyse CF, FD de yalnızca karede eşölçeklidir. **[X.11]**

Ve rasyoneldirler; öyleyse CD iki parçalıdır. **[X.36]**

Şimdi de diyorum ki, AB ile aynı türdendir.

Çünkü, AE üzerindeki kare, EB üzerindeki kareden, AE ile ya eşölçekli ya da eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

O zaman, eğer AE üzerindeki kare, EB üzerindeki kareden, AE ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyükse, CF üzerindeki kare de, FD üzerindeki kareden, CF ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olacaktır. **[X.14]**

Ve eğer AE, başta verilen rasyonel doğruyla eşölçekliyse, CF de onunla eşölçekli olacaktır, **[X.12]**

ve bu nedenle AB, CD doğrularının her biri birinci türden iki parçalıdır, yani aynı türdendir. **[Tan. X.5]**

Ama eğer EB, baştaki rasyonel doğruyla eşölçekliyse, FD de baştaki doğruyla eşölçekli olur, **[X.12]**

ve bu nedenle yine CD, AB ile aynı türden olur, çünkü her biri ikinci türden iki parçalı olacaktır. **[Tan. X.6]**

Ama eğer AE, EB doğrularının hiçbiri başta alınan rasyonel doğruyla eşölçekli değilse, CF, FD doğrularının da hiçbiri onunla eşölçekli olmayacaktır, **[X.13]**

ve bu durumda AB, CD doğrularının her biri üçüncü türden iki parçalıdır. **[X.7]**

Ama eğer AE üzerindeki kare, EB zerindeki kareden, AE ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyükse, CF üzerindeki kare de, FD üzerindeki kareden, CF ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olacaktır. **[X.14]**

Ve eğer AE, başat alınan rasyonel doğruyla eşölçekliyse, CF de onunla eşölçekli olacaktır,

ve bu durumda AB, CD doğrularının her biri dördüncü türden iki parçalı olur. **[Tan. X.8]**

Ama eğer EB bu şekilde eşölçekliyse, FD de olacaktır,

ve bu durmda da AB, CD doğrularının her biri beşinci türden iki parçalı olur. **[Tan. X.9]**

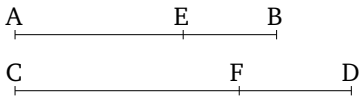
Ama eğer AE, EB doğrularının hiçbiri bu şekilde eşölçekli değilse, CF, FD doğrularının da hiçbiri başta alınan rasyonel doğruyla eşölçekli olmayacaktır,

ve bu durumda AB, CD doğrularının her biri altıncı türden iki parçalı olacaktır. **[Tan. X.10]**

Bu yüzden iki parçalı bir doğruyla eşölçekli olan bir doğru da eşölçeklidir ve aynı türdendir.

QED

67. Önerme:
İki ortalı bir doğruyla uzunlukta eşölçekli olan bir doğru kendisi de iki ortalıdır ve aynı türdendir.



AB iki ortalı olsun, ve CD, AB ile uzunlukta eşölçekli olsun;

diyorum ki, CD de iki ortalıdır, ve AB ile aynı türdendir.

Çünkü, AB iki ortalı olduğundan, orta değerlerine E'de bölünsün; o zaman AE, EB yalnızca karede eşölçekli orta değer doğrulardır. **[X.37, X.38]**

Ve, AB'nin CD'ye oranının, AE'nin CF'ye oranına eşit olması sağlansın; bu durumda kalan EB'nin kalan FD'ye oranı da AB'nin CD'ye oranına eşi olur. **[V.19]**

Ama AB, CD ile uzunlukta eşölçeklidir; öyleyse AE, EB, sırasıyla CF, FD ile eşölçeklidir. **[X.11]**

Ama AE, EB orta değerdir; öyleyse CF, FD de orta değerdir. **[X.23]**

Ve, AE'nin EB'ye oranı, CF'nin FD'ye oranına eşit olduğundan, ve AE, EB yalnızca karede eşölçekli olduklarından,

CF, FD de yalnızca karede eşölçeklidir. **[X.11]**

Ama orta değer oldukları da kanıtlanmıştı; bu durumda CD iki ortalı olur.

Şimdi de diyorum ki, AB ile aynı türdendir.

Çünkü, AE'nin EB'ye oranı, CF'nin FD'ye oranına eşit olduğundan,

AE üzerindeki karenin AE, EB dikdörtgenine oranı da, CF üzerindeki karenin CF, FD dikdörtgenine oranına eşit olur;

bu durumda, değiştirilmiş oranlar olarak, AE üzerindeki karenin CF üzerindeki kareye oranı, AE, EB dikdörtgeninin CF, FD dikdörtgenine oranına eşit olur. **[V.16]**

Ama AE üzerindeki kare CF üzerindeki kareyle eşölçeklidir; öyleyse AE, EB dikdörtgeni de CF, FD dikdörtgeniyle eşölçeklidir.

Öyleyse, eğer AE, EB dikdörtgeni rasyonelse, CF, FD dikdörtgeni de rasyoneldir, ve bu durumda AB, CD birinci türden iki ortalıdır, **[X.37]**

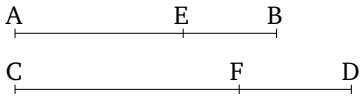
ama eğer orta değerse, orta değer olur, **[DS. X.23]**

ve bu durumda AB, CD'nin her biri ikinci türden iki ortalı doğrudur. **[X.38]**

Bu nedenle CD, AB ile aynı türden olacaktır.

QED

68. Önerme:
Üstün bir doğruyla eşölçekli olan bir doğru kendisi de üstündür.



AB üstün olsun, ve CD, AB ile eşölçekli olsun;

diyorum ki, CD üstündür.

AB doğrusu E'de bölünsün;

bu durumda AE, EB, karede eşölçeksiz, üzerlerindeki karelerin toplamı rasyonel, ama içerdikleri dikdörtgen orta değer olan iki doğru olur. **[X.39]**

Önceki çizim yapılsın.

O zaman, AB'nin CD'ye oranı, AE'nin CF'ye oranına, ve EB'nin FD'ye oranına eşit olduğundan,

AE'nin CF'ye oranı, EB'nin FD'ye oranına eşittir. **[V.11]**

Ama AB, CD ile eşölçeklidir; öyleyse AE, EB, sırasıyla CF, FD ile eşölçeklidir. **[X.11]**

Ve AE'nin CF'ye oranı, EB'nin FD'ye oranına eşit olduğundan,

değiştirilmiş oranlar olarak, AE'nin EB'ye oranı, CF'nin FD'ye oranına eşittir; **[V.16]**

öyleyse birleşik oranlar olarak, AB'nin BE'ye oranı, CD'nin DF'ye oranına eşittir; **[V.18]**

öyleyse, AB üzerindeki karenin BE üzerindeki kareye oranı, CD üzerindeki karenin DF üzerindeki kareye oranına eşittir. **[VI.20]**

Aynı şekilde, AB üzerindeki karenin AE üzerindeki kareye oranının, CD üzerindeki karenin CF üzerindeki kareye oranına eşit olduğunu kanıtlayabiliriz.

Öyleyse AB üzerindeki karenin AE, EB üzerindeki karelere oranı, CD üzerindeki karenin CF, FD üzerindeki karelere oranına eşittir;

öyleyse değiştirilmiş oranlar olarak, AB üzerindeki karenin CD üzerindeki kareye oranı, AE, EB üzerindeki karelerin CF, FD üzerindeki karelere oranına eşittir. **[V.16]**

Ama AB üzerindeki kare, CD üzerindeki kareyle eşölçeklidir;

öyleyse AE, EB üzerindeki kareler de, CF, FD üzerindeki karelerle eşölçeklidir.

Ve AE, EB üzerindeki kareler birlikte rasyoneldir;

öyleyse CF, FD üzerindeki kareler de birlikte rasyoneldir.

Benzer şekilde, AE, EB dikdörtgeninin iki katı, CF, FD dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeklidir.

Ve AE, EB dikdörtgeninin iki katı orta değerdir;

öyleyse CF, FD dikdörtgeninin iki katı da orta değerdir. **[DS. X.23]**

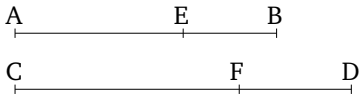
Demek ki, CF, FD doğruları karede eşölçeksizdir, üzerlerindeki karelerin toplamı rasyonel, ama içerdikleri dikdörtgen orta değerdir;

bu durumda CD'nin tamamı üstün denen irrasyonel bir doğru olur.

Öyleyse üstün bir doğruyla eşölçekli olan bir doğru üstündür.

QED

69. Önerme:
Rasyonel artı orta alan kenarı bir doğruyla eşölçekli olan bir doğru kendisi de rasyonel artı orta alan kenarıdır.



AB, rasyonel artı orta alan kenarı olsun, ve CD, AB ile eşölçekli olsun;

CD'nin de rasyonel artı orta alan kenarı olduğunun kanıtlanacaktır.

AB doğrusu doğrularına E'de bölünsün;

bu durumda AE, EB doğruları karede eşölçeksizdir, üzerlerindeki karelerin toplamı orta değer, ama içerdikleri dikdörtgen rasyoneldir. **[X.40]**

Önceki çizim yapılsın.

Benzer şekilde, CF, FD'nin karede eşölçeksiz olduğunu,

AE, EB üzerindeki karelerin toplamının, CF, FD üzerindeki karelerin toplamıyla,

ve AE, EB dikdörtgeninin de CF, FD dikdörtgeniyle eşölçekli olduğunu kanıtlayabiliriz;

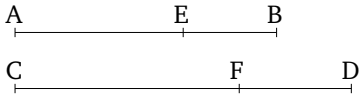
böylece CF, FD üzerindeki karelerin toplamı orta değer,

ve CF, FD dikdörtgeni de rasyonel olur.

Öyleyse CD rasyonel artı orta alan kenarıdır.

QED

70. Önerme:
İki orta alan toplamı kenarı bir doğruyla eşölçekli olan bir doğru kendisi de iki orta alan toplamı kenarıdır.



AB, iki orta alan toplamı kenarı olsun, ve CD, AB ile eşölçekli olsun;

CD'nin de iki orta alan toplamı kenarı olduğu kanıtlanacaktır.

Çünkü, AB, iki orta alan toplamı kenarı olduğundan, E'de doğrularına bölünsün;

bu durumda AE, EB doğruları karede eşölçeksizdir, üzerlerindeki karelerin toplamı, ve içerdikleri dikdörtgen orta değerdir, ayrıca AE, EB üzerindeki karelerin toplamı AE, EB dikdörtgeniyle eşölçeksizdir. **[X.41]**

Önceki çizim yapılsın.

Benzer şekilde,

CF, FD'nin karede eşölçeksiz olduğunu,

AE, EB üzerindeki karelerin toplamının CF, FD üzerindeki karelerin toplamıyla,

ve AE, EB dikdörtgeninin CF, FD dikdörtgeniyle eşölçekli olduğunu kanıtlayabiliriz;

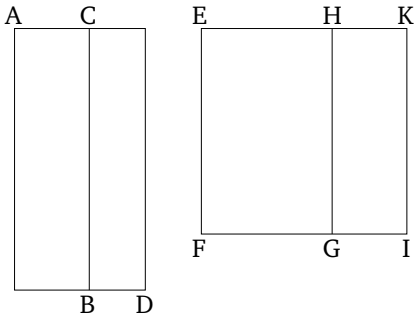
bu yüzden, CF, FD üzerindeki karelerin toplamı, ve CF, FD dikdörtgeni orta değer olur,

ve dahası CF, FD üzerindeki karelerin toplamı, CF, FD dikdörtgeniyle eşölçeksiz olur.

Öyleyse CD iki orta alan toplamı kenarıdır.

QED

71. Önerme:
Eğer rasyonel bir alanla orta değer bir alan toplanırsa, bu toplama eşit bir karenin kenarı olarak dört çeşit doğru ortaya çıkar. Bunlar iki parçalı, birinci türden iki ortalı, üstün, ya da rasyonel artı orta alan kenarıdır.



AB rasyonel, CD orta değer olsun;

diyorum ki, AD alanına eşit karenin kenarı ya iki parçalıdır, ya birinci türden iki ortalıdır, ya üstündür, ya da rasyonel artı orta alan kenarıdır.

Çünkü, AB, CD'den ya büyüktür ya da küçüktür.

Önce büyük olsun;

rasyonel bir EF doğrusu alınsın, ve EF üzerine, AB'ye eşit EG dikdörtgeni çizilsin, ve EH genişliği oluşsun,

ve EF üzerine, DC'ye eşit HI çizilsin, ve HK genişliği oluşsun.

O zaman, AB rasyonel olduğundan ve EG'ye eşit olduğundan, EG de rasyoneldir.

Ve EF üzerine çizilip EH genişliğini oluşturmuştur; bu durumda EH rasyoneldir ve EF ile uzunlukta eşölçeklidir. **[X.20]**

Yine, CD orta değer olduğundan ve HI'ya eşit olduğundan, HI da orta değerdir.

Ve EF rasyonel doğrusu üzerine çizilip HK genişliğini oluşturmuştur; bu durumda HK rasyoneldir ve EF ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Ve CD orta değer olduğundan, ve aynı zamanda AB rasyonel olduğundan, AB, CD ile eşölçeksizdir,

böylece EG de HI ile eşölçeksiz olur.

Ama, EG'nin HI'ya oranı, EH'nin HK'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse EH de HK ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.11]**

Ve ikisi de rasyoneldir; öyleyse EH, HK yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur;

bu durumda EK doğrusu H'de bölünmüş iki parçalı bir doğru olur. **[X.36]**

Ve, AB, CD'den büyük olduğundan, ve ayrıca AB, EG'ye, ve CD, HI'ya eşit olduğundan,

EG, HI'dan büyüktür;

öyleyse EH de HK'den büyüktür.

O zaman, EH üzerindeki kare, HK üzerindeki kareden, ya EH ile uzunlukta eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür, ya da onunla eşölçekisz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

Önce, üzerindeki kare, kendisiyle eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olsun.

Şimdi, daha büyük olan HE doğrusu, başta alınan EF rasyonel doğrusuyla eşölçeklidir;

bu durumda EK birinci türden iki parçalıdır. **[Tan. X.5]**

Ama EF rasyoneldir; ve eğer bir alan bir rasyonel doğruyla birinci türden iki parçlı bir doğru tarafından içerilirse, ona eşit karenin kenarı iki parçalı olur. **[X.54]**

Öyleyse EI'ya eşit karenin kenarı iki parçalıdır; böylece AD'ye eşit karenin kenarı da iki parçalı olur.

Şimdi de EH üzerindeki kare, HK üzerindeki kareden, EH ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olsun.

Şimdi büyük doğru EH, başta alınan rasyonel doğru EF ile uzunlukta eşölçeklidir; öyleyse EK dördüncü türden iki parçalıdır. **[Tan. X.8]**

Ama EF rasyoneldir; ve eğer bir alan bir rasyonel doğruyla dördüncü türden iki parçalı bir doğru tarafından içerilirse, ona eşit karenin kenarı üstün denen irrasyonel bir doğrudur. **[X.57]**

Öyleyse EI'ye eşit karenin keanrı üstündür;

böylece AD'ye eşit karenin kenarı da üstün olur.

Şimdi ise AB, CD'den küçük olsun;

bu durumda EG de HI'dan küçük olur, böylece EH de HK'den küçük olur.

Şimdi, HK üzerindeki kare, EH üzerindeki kareden, ya HK ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür, yada onunla eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

Önce, üzerindeki kare kendisiyle eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olsun.

Şimdi, daha küçük olan doğru EH, başta alınan EF rasyonel doğrusuyla eşölçeklidir;

bu durumda EK ikinci türden iki parçalı olur. **[Tan. X.6]**

Ama EF rasyoneldir; ve eğer bir alan bir rasyonel doğru ve ikinci türden iki parçalı bir doğru tarafından içerilirse, ona eşit karenin kenarı birinci türden iki ortalıdır; **[X.55]**

öyleyse EI'ya eşit karenin kenarı birinci türden iki ortalıdır,

böylece AD'ye eşit karenin kenarı da birinci türden iki ortalı olur.

Şimdi de, HK üzerindeki kare, HE üzerindeki kareden, HK ile eşölçeksiz olan bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olsun.

Şimdi, daha küçük olan EH doğrusu başta alınan EF rasyonel doğrusuyla eşölçeklidir;

bu durumda EK beşinci türden iki parçalı olur. **[Tan. X.9]**

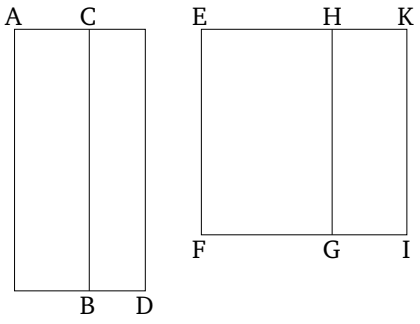
Ama EF rasyoneldir; ve eğer bir alan bir rasyonel doğru ve beşinci türden iki parçalı bir doğru tarafından içerilirse, ona eşit karenin kenarı rasyonel artı orta alan kenarı olur. **[X.58]**

Öyleyse EI'ya eşit karenin kenarı rasyonel artı orta alan kenarıdır,

böylece AD'ye eşit karenin kenarı da rasyonel artı orta alan kenarı olur.

Bundan dolayı vs …
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

72. Önerme:
Eğer aralarında eşölçeksiz iki orta değer alan toplanırsa, bu toplama eşit karenin kenarı kalan diğer iki irrasyonel doğrulardır, yani ya ikinci türden iki ortalı, ya da iki orta alan toplamı kenarı.



Birbiriyle eşölçeksiz iki orta değer alan AB, CD toplansın;

diyorum ki, AD'ye eşit karenin kenarı ya ikinci türden iki ortalıdır, ya da iki orta alan toplamı kenarıdır.

Çünkü, AB, CD'den ya büyüktür, ya da küçüktür.

Önce, rastgele AB, CD'den büyük olsun.

EF rasyonel doğrusu alınsın,

ve EF üzerine, AB'ye eşit EG dikdörtgeni, EH genişliğini oluşturarak, ve CD'ye eşit HI dikdörtgeni, HK genişliğini oluşturarak çizilsin.

Şimdi, AB, CD alanlarının her biri orta değer olduğundan, EG, HI alanlarının her biri de orta değerdir.

Ve rasyonel FE doğrusu üzerine, EH, HK genişliklerini oluşturarak çizilmişlerdir;

bu durumda EH, HK doğrularının her biri rasyoneldir ve EF ile eşölçeksizdir. **[X.22]**

Ve, AB, CD ile eşölçeksiz olduğundan, ve AB, EG'ye, ve CD de HI'ya eşit olduğundan,

EG de HI ile eşölçeksizdir.

Ama EG'nin HI'ya oranı, EH'nin HK'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

bu durumda EH, HK ile uzunlukta eşölçeksiz olur. **[X.11]**

Öyleyse EH,HK doğruları yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur;

bu durumda EK iki parçalı olur. **[X.36]**

Ama EH üzerindeki kare, HK üzerindeki kareden, ya EH ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür, ya da onunla eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

Önce, üzerindeki kare, kendisiyle uzunlukta eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olsun.

Şimdi, EH, HK doğrularının hiçbiri başta alınan EF rasyonel doğrusuyla eşölçekli değildir;

bu durumda EK üçüncü türden iki parçalı olur. **[Tan. X.7]**

Ama EF rasyoneldir; ve eğer bir alan bir rasyonel doğru ve üçüncü türden iki parçalı bir doğru tarafından içerilirse, ona eşit karenin kenarı ikinci türden iki ortalı olur **[X.56]**

Öyleyse EI'ya, yani AD'ye eşit karenin kenarı ikinci türden iki ortalıdır.

Şimdi de, EH üzerindeki kare, HK üzerindeki kareden, EH ile eşölçeksiz olan bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olsun.

Şimdi, EH, HK doğrularının her biri EF ile eşölçeksizdir;

bu durumda EK altıncı türden iki parçalı olur. **[Tan. X.10]**

Ama eğer bir alan bir rasyonel doğru ve altıncı türden iki parçalı bir doğru tarafından içerilirse, ona eşit karenin kenarı iki orta alan toplamı kenarı olur; **[X.59]**

böylece AD'ye eşit karenin kenarı da iki orta alan toplamı kenarı olur.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

Şu ana kadar sözü edilen doğrular, iki parçalı doğru ve ondan sonra gelen irrasyonel doğrular, ne orta değer doğrularla ne de birbirleriyle aynıdır.

Orta değer bir doğru üzerine çizilen kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizilirse diğer kenar bu rasyonel doğruyla uzunlukta eşölçeksiz olan bir rasyonel doğru olur. **[X.22]**

Ama iki parçalı türden bir doğru üzerine çizilen kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizilirse diğer kenar birinci türden iki parçalı olur. **[X.60]**

Birinci türden iki ortalı bir doğru üzerine çizilen kareye eşit bir dikdötgen rasyonel bir doğru üzerine çizilirse diğer kenar ikinci türden iki parçalı olur. **[X.61]**

İkinci türden iki ortalı bir doğru üzerine çizilen kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizilirse diğer kenar üçüncü türden iki parçalı olur. **[X.62]**

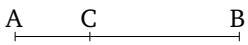
Üstün türden bir doğru üzerine çizilen kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizilirse diğer kenar dördüncü türden iki parçalı olur. **[X.63]**

Rasyonel artı orta alan kenarı türden bir doğru üzerine çizilen kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizilirse diğer kenar beşinci türden iki iki parçalı olur. **[X.64]**

İki orta alan toplamı kenarı türden bir doğru üzerine çizilen kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizilirse diğer kenar altıncı türden iki parçalı olur. **[X.65]**

Sözü edilen bu kenarlar hem birinci kenardan hem de birbirlerinden farklıdır; birincisinden farklıdırlar çünkü birinci kenar rasyoneldir, birbirlerinden farklıdırlar çünkü aynı türden değiller. Rasyonel olanlar da birbirlerinden farklıdırlar çünkü türleri farklıdır; böylece bu irrasyonel doğrular birbirinden de farklıdır.

73. Önerme:
Rasyonel bir doğrudan, bütünle sadece karede eşölçekli bir parça çıkarılırsa, kalan parça irrasyoneldir; ve bu tür doğrulara *ayrık* densin.



AB rasyonel doğrusundan, bütünle yalnızca karede eşölçekli olan BC doğrusu çıkarılsın;

diyorum ki, kalan AC doğrusu *ayrık* denen irrasyonel bir doğrudur.

Çünkü, AB, BC ile uzunlukta eşölçeksiz olduğundan, ve AB'nin BC'ye oranı, AB üzerindeki karenin AB, BC dikdörtgenine oranına eşit olduğundan,

AB üzerindeki kare, AB, BC dikdörtgeniyle eşölçeksizdir. **[X.11]**

Ama AB, BC üzerindeki kareler AB üzerindeki kareyle eşölçeklidir, **[X.15]**

ve AB, BC dikdörtgeninin iki katı AB, BC dikdörtgeniyle eşölçeklidir. **[X.9]**

Ve AB, BC üzerindeki karelerin, CA üzerindeki kareyle birlikte AB, BC dikdörtgeninin iki katına eşit olmasından dolayı, **[II.7]**

AB, BC üzerindeki kareler de kalanla, AC üzerindeki kare, eşölçeksizdir. **[X.13, X.16]**

Ama AB, BC üzerindeki kareler rasyoneldir;

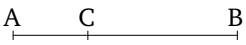
öyleyse AC irrasyoneldir.

Ve buna ayrık densin.

QED

74. Önerme:

Eğer orta değer bir doğrudan, bütünle yalnızca karede eşölçekli olan, ve onunla rasyonel bir dikdörtgen içeren bir orta değer doğru çıkarılırsa, kalan irrasyoneldir. Ve bu tür doğrulara *orta değer doğrunun birinci ayrığı* densin.



Orta değer AB doğrusundan, AB ile yalnızca karede eşölçekli olan ve AB ile AB, BC dikdörtgenini rasyonel yapan, orta değer BC doğrusu çıkarılsın;

diyorum ki, kalan AC doğrusu irrasyoneldir; ona *orta değer doğrunun birinci ayrığı* densin.

Çünkü, AB, BC orta değer olduğundan, AB, BC üzerindeki kareler de orta değerdir.

Ama AB, BC dikdörtgeninin iki katı rasyoneldir;

öyleyse AB, BC üzerindeki kareler, AB, BC dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksizdir;

bu durumda AB, BC dikdörtgeninin iki katı da kalanla, AC üzerindeki kareyle, eşölçeksizdir, **[II.7]**

çünkü, eğer bütün niceliklerden biriyle eşölçeksizse, baştaki nicelikler de eşölçeksizdir. **[X.16]**

Ama AB, BC dikdörtgeninin iki katı rasyoneldir;

bu durumda AC üzerindeki kare irrasyonel olur.

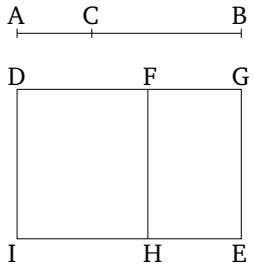
öyleyse AC irrasyoneldir. **[Tan. X.4]**

Ve buna *orta değer doğrunun birinci ayrığı* densin.

QED

75. Önerme:

Eğer orta değer bir doğrudan, bütünle yalnızca karede eşölçekli olan, ve onunla orta değer bir dikdörtgen içeren bir orta değer doğru çıkarılırsa, kalan irrasyoneldir; ve bu tür doğrulara *orta değer doğrunun ikinci ayrığı* densin.



Orta değer AB doğrusundan, AB ile yalnızca karede eşölçekli olan ve AB ile içerdiği AB, BC dikdörtgeni rasyonel olan, orta değer BC doğrusu çıkarılsın; **[X.28]**

diyorum ki, kalan AC doğrusu irrasyoneldir; ona *orta değer doğrunun ikinci ayrığı* densin.

Çünkü, rasyonel bir DI doğrusu alınsın,

DI üzerine, AB, BC üzerindeki karelere eşit DE çizilsin,

DG genişliği oluşmuş olsun,

ve yine DI üzerine, AB, BC dikdörtgeninin iki katına eşit DH çizilsin,

DF genişliği oluşmuş olsun;

bu durumda FE kalanı, AC üzerindeki kareye eşittir. **[II.7]**

Şimdi, AB, BC üzerindeki kareler orta değerdir ve eşölçeklidir, öyleyse DE de orta değerdir. **[X.15, DS. X.23]**

öyleyse DG rasyoneldir ve DI ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Yine, AB, BC dikdörtgeni orta değer olduğundan, AB, BC dikdörtgeninin iki katı da orta değerdir. **[DS. X.23]**

Ve DH'ye eşittir; öyleyse DH de orta değerdir.

Ve rasyonel DI doğrusu üzerine çizilip DF genişliğini oluşturmuştur;

öyleyse DF rasyoneldir ve DI ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Ve, AB, BC yalnızca karede eşölçekli olduğundan, AB, BC ile uzunlukta eşölçeksizdir;

öyleyse AB üzerindeki kare de AB, BC dikdörtgeniyle eşölçeksizdir. **[X.11]**

Ama AB, BC üzerindeki kareler AB üzerindeki kareyle eşölçeklidir, **[X.15]**

ve AB, BC dikdörtgeninin iki katı, AB, BC dikdörtgeniyle eşölçeklidir; **[X.6]**

öyleyse AB, BC dikdörtgeninin iki katı, AB, BC üzerindeki karelerle eşölçeksizdir. **[X.13]**

Ama DE alanı AB, BC üzerindeki karelere eşittir, ve DH de AB, BC dikdörtgeninin iki katına eşittir;

öyleyse DE, DH ile eşölçeksizdir.

Ama DE'nin DH'ye oranı, GD'nin DF'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

bu durumda GD, DF ile eşölçeksiz olur. **[X.11]**

Ama ikisi de rasyoneldir;

öyleyse GD, DF yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur;

bu durumda FG ayrık olur. **[X.73]**

Ama DI rasyoneldir,

ve bir rsyonel doğruyla bir irrasyonel doğru tarafından içerilen dikdörtgen irrasyoneldir, **[X.20]**

ve ona eşit karenin kenarı irrasyoneldir.

Ve FE'ye eşit karenin kenarı AC'dir; bu durumda AC irrasyonel olur.

Ve ona *orta değer doğrunun ikinci ayrığı* densin.

QED

76. Önerme:

Bir doğru parçasından onunla karede eşölçeksiz olan bir doğru çıkarıldığında, çıkarılan parçayla bütünün üzerlerine çizilen karelerin toplamı rasyonelse ama çıkarılan parçayla bütünün oluşturduğu dikdörtgen orta değer ise, kalan parça irrasyoneldir; ve bu tür doğrulara *ufak* densin.



AB doğrusundan onunla karede eşölçeksiz ve verilen koşulları sağlayan BC doğrusu çıkarılsın. **[X.33]**

Diyorum ki, kalan AC ufak denen irrasyonel doğrudur.

Çünkü, AB,BC üzerindeki karelerin toplamı rasyonel olduğundan, ve bu arada AB, BC dikdörtgeninin iki katı orta değer olduğundan,

AB, BC üzerindeki kareler, AB, BC dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksizdir;

ve çevrilmiş oranlar olarak, AB, BC üzerindeki kareler, kalan ile, AC üzerindeki kareyle, eşölçeksizdir. **[II.7, X.16]**

Ama AB, BC üzerindeki kareler rasyoneldir;

öyleyse AC üzerindeki kare irrasyoneldir;

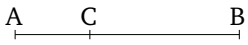
bu durumda AC irrasyonel olur.

Ve buna *ufak* densin.

QED

77. Önerme:

Bir doğru parçasından onunla karede eşölçeksiz olan bir doğru çıkarıldığında, çıkarılan parçayla bütünün üzerlerine çizilen karelerin toplamı orta değer, ama çıkarılan parçayla bütünün oluşturduğu dikdörtgenin iki katı rasyonelse, kalan parça irrasyoneldir; ve bu tür doğrulara *rasyonel alanla orta değer bütün üreten* densin.



AB doğrusundan onunla karede eşölçeksiz ve verilen koşulları sağlayan BC doğrusu çıkarılsın. **[X.34]**

Diyorum ki, kalan AC sözü edilen irrasyonel doğrudur.

Çünkü, AB, BC üzerindeki kareler orta değer olduğundan, ve ayrıca AB, BC dikdörtgeninin iki katı rasyonel olduğundan,

AB, BC üzerindeki kareler, AB, BC dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksizdir;

öyleyse kalan da, AC üzerindeki kare, AB, BC dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksizdir. **[II.7, X.16]**

Ve AB, BC dikdörtgeninin iki katı rasyoneldir;

öyleyse AC üzerindeki kare irrasyoneldir;

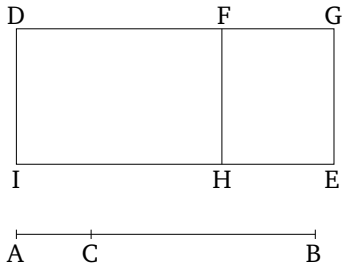
bu durumda AC irrasyonel olur.

Ve buna *rasyonel alanla orta değer bütün üreten* densin.

QED

78. Önerme:

Bir doğru parçasından onunla karede eşölçeksiz olan bir doğru çıkarıldığında, hem çıkarılan parçayla bütünün üzerlerine çizilen karelerin toplamı, hem de çıkarılan parçayla bütünün oluşturduğu dikdörtgenin iki katı orta değerse, ve dahası üzerlerindeki karelerin toplamı içerdikleri dikdörtgenin iki katıyla eşölçeksizse, kalan parça irrasyoneldir; bu tür doğrulara *orta değer alanla orta değer bütün üreten* densin.



AB doğrusundan onunla karede eşölçeksiz olan ve verilen koşulları sağlayan BC doğrusu çıkarılsın; **[X.35]**

diyorum ki, kalan AC *orta değer alanla orta değer bütün üreten* denen irrasyonel doğrudur.

Çünkü, bir rasyonel DI doğrusu alınsın,

DI üzerine, AB, BC üzerindeki karelere eşit DE çizilsin, ve DG genişliği oluşturulmuş olsun,

ve AB, BC dikdörtgeninin iki katına eşit DH çıkarılsın.

Bu durumda FE kalanı, AC üzerindeki kareye eşit olur, **[II.7]**

bu yüzden AC doğrusu FE'ye eşit karenin kenarıdır.

Şİmdi, AB, BC üzerindeki karelerin toplamı orta değer olduğundan ve DE'ye eşit olduğundan, DE orta değerdir.

Ve rasyonel DI doğrusu üzerine çizilip DG genişliğini oluşturmuştur;

öyleyse DG rasyoneldir ve DI ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Yine, AB, BC dikdörtgeninin iki katı orta değer olduğundan ve DH'ye eşit olduğundan, DH orta değerdir.

Ve rasyonel DI doğrusu üzerine çizilip DF genişliğini oluşturmuştur;

öyleyse DF de rasyoneldir ve DI ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Ve AB, BC üzerindeki kareler, AB, BC dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksiz olduğundan,

DE de DH ile eşölçeksizdir.

Ama, DE'nin DH'ye oranı, DG'nin DF'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

bu durumda DG, DF ile eşölçeksiz olur. **[X.11]**

Ve ikisi de rasyoneldir;

öyleyse GD, DF doğruları, yalnızca karede eşölçekli olan rasyonel doğrulardır; Bu durumda FG ayrık olur. **[X.73]**

Ve FH rasyoneldir;

ama rasyonel bir doğruyla ayrık bir doğru tarafından içerilen dikdörtgen irrasyoneldir; **[X.20]**

ve ona eşit olan karenin kenarı da irrasyonel olur.

Ve FE'nin kenarı AC'dir;

öyleyse AC irrasyoneldir.

Ve buna *orta değer alanla orta değer bütün üreten* densin.

QED

79. Önerme:
Ayrık bir doğruya bütünle yalnızca karede eşölçekli olacak şekilde yalnızca tek bir rasyonel doğru eklenebilir.



AB ayrık olsun, ve BC ona eklensin;

bu durumda AC, CB yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır. **[X.73]**

Diyorum ki, başka hiçbir doğru bütünle yalnızca karede eşölçekli olacak şekilde AB'ye eklenemez.

Çünkü, eğer mümkünse, BD bu şekilde eklensin;

bu durumda AD, DB yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır. **[X.73]**

Şimdi, AD, DB üzerindeki karelerin, AD, DB dikdörtgeninin iki katından farkı, AC, CB üzerindeki karelerin AC, CB dikdörtgeninin iki katından farkına eşit olduğundan,

çünkü ikisinin farkı da aynıdır, yani AB üzerindeki kare, **[II.7]**

yer değiştirerek, AD, DB üzerindeki karelerin AC, CB üzerindeki karelerden farkı, AD, DB dikdörtgeninin iki katının AC, CB dikdörtgeninin iki katından farkına eşittir.

Ama , her ikisi de rasyonel olduğundan, AD, DB üzerindeki karelerin AC, CB üzerindeki karelerden farkı rasyoneldir;

öyleyse AD, DB dikdörtgeninin iki katının AC, CB dikdörtgeninin iki katından farkı da rasyoneldir;

ama bu olamaz,

çünkü ikisi de orta değerdir, **[X.21]**

ve bir orta değer alanın bir orta değer alandan farkı rasyonel olmaz. **[X.26]**

Bu durumda, bütünle yalnızca karede eşölçekli olacak şekilde hiçbir rasyonel doğru AB'ye eklenemez.

Öyleyse bir ayrığa, bütünle yalnızca karede eşölçekli olacak şekilde, yalnızca bir tek rasyonel doğru eklenebilir.

QED

80. Önerme:
Orta değer doğrunun birinci ayrığına bütünle yalnızca karede eşölçekli olacak ve bütünle içerdiği dikdörtgen rasyonel olacak şekilde yalnızca tek bir orta değer doğru eklenebilir.



AB, orta değer doğrunun birinci ayrığı olsun, ve BC ona eklensin;

bu durumda AC, CB yalnızca karede eşölçekli orta değer doğrulardır, ve içerdikleri AC, CB dikdörtgeni rasyoneldir; **[X.74]**

diyorum ki, bütünle yalnızca karede eşölçekli olacak ve bütünle rasyonel bir alan içerecek şekilde AB'ye yalnızca tek bir orta değer doğru eklenebilir.

Çünkü, eğer mümkünse, aynı şekilde DB de eklenmiş olsun;

bu durumda AD, DB yalnızca karede eşölçekli orta değer doğrulardır, ve içerdikleri AD, DB dikdörtgeni rasyoneldir. **[X.74]**

Şimdi, AD, DB üzerindeki karelerin AD, DB dikdörtgeninin iki katından farkı, AC, CB üzerindeki karelerin AC, CB dikdörtgeninin iki katından farkına eşit olduğundan,

çünkü ikisinin de farkı aynıdır, yani AB üzerindeki kare, **[II.7]**

yer değiştirerek, AD, DB üzerindeki karelerin AC, CB üzerindeki karelerden farkı, AD, DB dikdörtgeninin iki katının AC, CB dikdörtgeninin iki katından farkına eşittir.

Ama, AD, DB4dikdörtgeininikikatınınAC,CB4 dikdörtgeninin iki katından farkı rasyonel bir alandır,

çünkü ikisi de rasyoneldir.

Öyleyse AD, DB üzerindeki karelerin AC, CB üzerindeki karelerden farkı rasyoneldir:

ama bu olamaz,

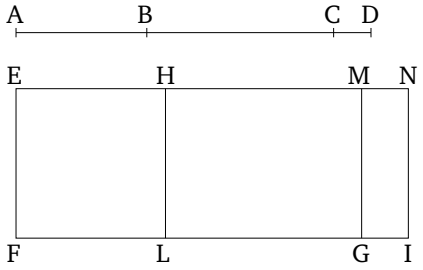
çünkü ikisi de orta değerdir, **[X.15, DS. X.23]**

ve orta değer bir alanın orta değer bir alandan farkı rasyonel olmaz. **[X.26]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

81. Önerme:

Orta değer doğrunun ikinci ayrığına bütünle yalnızca karede eşölçekli olacak ve bütünle içerdiği dikdörtgen orta değer olacak şekilde yalnızca tek bir orta değer doğru eklenebilir.



AB, orta değer doğrunun birinci ayrığı olsun, ve BC ona eklensin;

bu durumda AC, CB yalnızca karede eşölçekli olan orta değer doğrulardır, ve içerdikleri AC, CB dikdörtgeni orta değerdir. **[X.75]**

Diyorum ki, bütünle yalnızca karede eşölçekli olacak ve bütünle orta değer bir dikdörtgen içerecek şekilde hiçbir orta değer doğru AB'ye eklenemez.

Çünkü, eğer mümkünse, BD de bu şekilde eklensin;

öyleyse AD, DB yalnızca karede eşölçekli olan ve içerdikleri AD, DB dikdörgeni orta değer olan, orta değer iki doğrudur. **[X.75]**

Bir EF rasyonel doğrusu alınsın,

ve EF üzerine AC, CB üzerindeki karelere eşit EG çizilsin, ve EM genişliği oluşmuş olsun,

ve AC, CB dikdörtgeninin iki katına eşit HG çıkarılsın, ve HM genişliği oluşmuş olsun;

bu durumda EL kalanı AB üzerindeki kareye eşittir, **[II.7]**

böylece AB doğrusu EL'ye eşit karenin kenarıdır.

Yine, EF üzerine AD, DB üzerindeki karelere eşit EI çizilsin, ve EN genişliği oluşmuş olsun.

Ama EL de AB üzerindeki kareye eşittir; öyleyse HI kalanı AD, DB dikdörtgeninin iki katına eşittir. **[II.7]**

Şimdi, AC, CB orta değer doğrular olduğundan, AC, CB üzerindeki kareler de orta değerdir.

Ve EG'ye eşittir; öyleyse EG de orta değerdir. **[X.15, DS. X.23]**

Ve rasyonel EF doğrusu üzerine çizilmiş ve EM genişliğini oluşturmuştur;

bu durumda EM rasyoneldir ve EF ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Yine, AC, CB dikdörtgeni orta değer olduğundan, AC, CB dikdörtgeninin iki katı da orta değerdir. **[DS. X.23]**

Ve HG'ye eşittir; öyleyse HG de orta değerdir.

Ve EF üzerine çizilmiş ve HM genişliğini oluşturmuştur;

öyleyse HM de rasyoneldir ve EF ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Ve AC, CB yalnızca karede eşölçekli olduğundan, AC, CB ile uzunlukta eşölçeksizdir.

Ama, AC'nin CB'ye oranı, AC üzerindeki karenin AC, CB dikdörtgenine oranına eşittir;

bu durumda AC üzerindeki kare AC, CB dikdörtgeniyle eşölçeksizdir. **[X.11]**

Ama, AC, CB üzerindeki kareler AC üzerindeki kareyle eşölçeklidir, ve ayrıca AC, CB dikdörtgeninin iki katı AC, CB dikdörtgeniyle eşölçeklidir; **[X.6]**

bu durumda AC, CB üzerindeki kareler AC, CB dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksizdir. **[X.13]**

Ve EG alanı AC, CB üzerindeki karelere eşittir,

ve bu arada GH alanı da AC, CB dikdörtgeninin iki katına eşittir;

bu durumda EG, HG ile eşölçeksiz olur.

Ama EG'nin HG'ye oranı, EM'nin HM'ye oranına eşittir. **[X.11]**

Ve ikisi de rasyoneldir;

öyleyse EM, MH yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur;

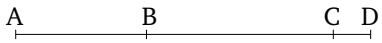
bu durumda EH bir ayrıktır ve HM ona eklenmiştir. **[X.73]**

Benzer şekilde HN'nin de ona eklenmiş olduğunu kanıtlayabiliriz;

öyleyse bir ayrığa, bütünle yalnızca karede eşölçekli olan farklı doğrular eklenmiş olur: bu olamaz. **[X.79]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

82. Önerme:
Ufak bir doğruya bütünle karede eşölçeksiz olan, ve bütünle üzerine çizilen karelerin toplamı rasyonel olan ama bütünle içerdiği dikdörtgen orta değer olan yalnızca tek bir doğru eklenebilir.



AB ufak bir doğru olsun ve BC ona eklensin;

bu durumda AC, CB üzerlerindeki karelerin toplamı rasyonel olan ama içerdikleri dikdörtgenin iki katı orta değer olan karede eşölçeksiz iki doğrudur. **[X.76]**

Diyorum ki, başka hiçbir doğru aynı koşulları sağlayacak şekilde AB'ye eklenemez.

Çünkü, eğer mümkünse, BD bu şekilde eklensin;

bu durumda AD, DB de yukardaki koşulları sağlayan karede eşölçeksiz iki doğrudur. **[X.76]**

Şimdi, AD, DB üzerindeki karelerin AC, CB üzerindeki karelerden farkı, AD, DB dikdörtgeninin iki katının AC, CB dikdörtgeninin iki katından farkına eşit olduğundan,

ve bu arada, ikisi de rasyonel olduğundan, AD, DB üzerindeki karelerin AC, CB üzerindeki karelerden farkı rasyonel olduğundan,

AD, DB dikdörtgeninin ii katının AC, CB dikdörtgeninin iki katından farkı da rasyoneldir:

ama bu olamaz, çünkü ikisi de orta değerdir. **[X.26]**

Öyleyse ufak bir doğruya, bütünle üzerindeki karelerin toplamı rasyonel olan ama içerdikleri dikdörtgenin iki katı orta değer olan, bütünle karede eşölçeksiz tek bir doğru eklenebilir.

QED

83. Önerme:

Rasyonel alanla orta değer bütün üreten türden bir doğruya bütünle karede eşölçeksiz olacak şekilde, bütünle üzerine çizilen karelerin toplamı orta değer olan ama bütünle oluşturduğu dikdörtgenin iki katı rasyonel olan yalnızca tek bir doğru eklenebilir.



AB, rasyonel alanla orta değer bütün oluşturan türde bir doğru olsun, ve ABye AC eklensin;

bu durumda AC, CB yukardaki koşulları sağlayan karede eşölçeksiz iki doğrudur. **[X.77]**

Diyorum ki, AB'ye aynı koşulları sağlayacak şekilde başka hiçbir doğru eklenemez.

Çünkü, eğer mümkünse, bu şekilde BD eklensin;

bu durumda AD, DB de yukardaki koşulları sağlayan, karede eşölçeksiz iki doğrudur. **[X.77]**

O zaman, önceki durumlarda olduğu gibi, AD, DB üzerindeki karelerin AC, CB üzerindeki karelerden farkı, AD, DB dikdörtgeninin iki katının AC, CB dikdörtgeninin iki katından farkına eşit olduğundan,

ve bu arada AD, DB dikdörtgeninin iki katının AC, CB dikdörtgeninin iki katından farkı, her ikisi de rasyonel olduğu için, rasyonel olduğundan,

AD, DB üzerindeki karelerin de AC, CB üzerindeki karelerden farkı rasyoneldir:

ama bu olamaz, çünkü ikisi de orta değerdir. **[X.26]**

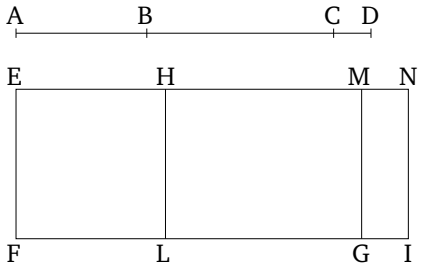
Öyleyse AB'ye yukardaki koşulları sağlayan ve bütünle karede eşölçeksiz başka bir doğru eklenemez;

öyleyse tek bir doğru eklenebilir.

QED

84. Önerme:

Orta değer alanla orta değer bütün üreten türden bir doğruya bütünle karede eşölçeksiz olacak şekilde, bütünle üzerine çizilen karelerin toplamı orta değer olan ama bütünle oluşturduğu dikdörtgenin alanının iki katı hem orta değer hem de bütünle üzerine çizilen karelerin toplamıyla eşölçeksiz olan yalnızca tek bir doğru eklenebilir.



AB, orta değer alanla orta değer bütün üreten türden bir doğru olsun, ve ona BC eklensin;

bu durumda AC, CB yukardaki koşulları sağlayan karede eşölçeksiz iki doğrudur. **[X.78]**

Diyorum ki, başka hiçbir doğru yukardaki koşulları sağlayacak şekilde AB'ye eklenemez.

Çünkü, eğer mümkünse, BD bu şekilde eklensin,

bu durumda AD, DB doğruları karede eşölçeksizdir, AD, DB üzerindeki karelerin toplamı orta değerdir, AD, DB dikdörtgeninin iki katı orta değerdir, ve AD, DB üzerindeki kareler AD, DB dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksizdir. **[X.78]**

Bir EF rasyonel doğrusu alınsın,

EF üzerine, AC, CB üzerindeki karelere eşit EG çizilsin, ve EM genişliği oluşsun,

ve EF üzerine, AC, CB dikdörtgeninin iki katına eşit HG çizilsin, ve HM genişliği oluşsun;

öyleyse kalan, AB üzerindeki kare, **[II.7]**

EL'ye eşittir;

bu durumda EL'ye eşit karenin kenarı EL olur.

Yine, EF üzerine, AD, DB üzerindeki karelere eşit EI çizilsin, ve EN genişliği oluşsun.

Ama AB üzerindeki kare EL'ye eşittir;

öyleyse kalan, AD, DB dikdörtgeninin iki katı, **[II.7]**

HI'ya eşittir.

Şimdi, AC, CB üzerindeki karelerin toplamı orta değer olduğundan ve EG'ye eşit olduğundan, EG de orta değerdir.

Ve EF rasyonel doğrusu üzerine çizilmiş ve EM genişliğini oluşturmuştur;

öyleyse EM rasyoneldir ve EF ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Yine, AC, CD dikdörtgeninin iki katı orta değer olduğundan ve HG'ye eşit olduğundan, HG de orta değerdir.

Ve EF rasyonel doğrusu üzerine çizilmiş ve HM genişliğini oluşturmuştur;

öyleyse HM rasyoneldir ve EF ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Ve AC, CB üzerindeki kareler AC, CB dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksiz olduğundan,

EG de HG ile eşölçeksizdir;

öyleyse EM de MH ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[VI.1, X.11]**

Ve ikisi de rasyoneldir;

öyleyse EM, MH yalnızca karede eşölçekli rasyonel iki doğrudur;

bu durumda EH ayrık olur ve HM ona eklenmiştir. **[X.73]**

Benzer şekilde yine EH'nin ayrık olduğunu ve HN'nin ona eklendiğini kanıtlayabiliriz.

Böylece bir ayrığa bütünle yalnızca karede eşölçekli olan farklı doğrular eklenmiş olur:

ama bunun olamayacağı kanıtlanmıştı. **[X.79]**

Öyleyse AB'ye başka doğrular eklenemez.

Öyleyse AB'ye bütünle karede eşölçeksiz olan, bütünle üzerindeki karelerin toplamı orta değer olan, bütünle içerdiği dikdörtgenin iki

katı orta değer olan, ve bütünle üzerindeki karelerin bütünle içerdiği dikdörtgenle eşölçeksiz olduğu tek bir doğru eklenebilir.

QED

5. Tanımlar III

11 Bir rasyonel doğru ve bir de ayrık doğru verilmiş olsun. Bu ayrık doğruya öyle bir doğru eklenmiş olsun ki bütün üzerindeki kare eklenen parça üzerindeki kareden bütünle uzunlukta eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olsun ve bütün de başta seçilmiş olan rasyonel doğruyla uzunlukta eşölçekli olsun. Bu durumda bu ayrık doğruya **birinci türden ayrık** denir.

12 Ama eklenen doğru baştaki rasyonel doğruyla eşölçekliyse, ve bütün üzerindeki kare eklenen parça üzerindeki kareden bütünle eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyükse, bu durumda bu ayrık doğruya **ikinci türden ayrık** denir.

13 Ame ne bütün ne de eklenen parça baştaki rasyonel doğruyla eşölçekliyse; ve bütün üzerindeki kare eklenen parça üzerindeki kareden bütünle uzunlukta eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyükse, bu durumda bu ayrık doğruya **üçüncü türden ayrık** denir.

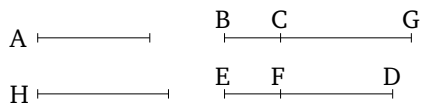
14 Ve yine, bütün üzerindeki kare eklenen parça üzerindeki kareden bütünle eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyükse, ve eğer bütün baştaki rasyonel doğruyla eşölçekliyse, bu durumda bu ayrık doğruya **dördüncü türden ayrık** denir.

15 ve eğer eklenen parça eşölçekliyse **beşinci**;

16 ikisi de değilse **altıncı**.

6. Önermeler

85. Önerme:
Birinci türden ayrık bir doğru bulmanın yolu.



Rasyonel bir A doğrusu alınsın, ve BG doğrusu A ile uzunlukta eşölçekli olsun; böylece BG de rasyonel olur.

Aralarındaki FD farkı kare olmayan iki kare sayısı DE, EF alınsın; bu durumda ED'nin DF'ye oranı da bir kare sayı olmaz.

ED'nin DF'ye oranının BG üzerindeki karenin GC üzerindeki kareye eşit olması sağlansın; **[DS. X.6]**

öyleyse BG üzerindeki kare GC üzerindeki kareyle eşölçeklidir. **[X.6]**

Ama BG üzerindeki kare rasyoneldir; öyleyse GC üzerindeki kare de rayoneldir;

bu durumda GC de rasyonel olur.

Ve, ED'nin FD'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmadığından, BG üzerindeki karenin GC üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

öyleyse BG, GC ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

Ve ikisi de rasyoneldir; öyleyse BG, GC yalnızca karede eşölçekli olan iki rasyonel doğrudur;

bu durumda BC ayrık olur. **[X.73]**

Şimdi de diyorum ki, aynı zamanda birinci türden ayrıktır.

Çünkü, H üzerindeki kare, BG üzerindeki karenin GC üzerindeki kareye farkına eşit olsun.

Şimdi, ED'nin FD'ye oranı, BG üzerindeki karenin GC üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan,

çevrilmiş oranlar olarak, DE'nin EF'ye oranı, GB üzerindeki karenin H üzerindeki kareye oranına eşittir. **[DS. V.19]**

Ama DE'nin EFye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşittir, çünkü ikisi de karedir;

öyleyse GB üzerindeki karenin H üzerindeki kareye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşittir;

bu durumda BG, H ile eşölçekli olur. **[X.9]**

Ve BGüzerindekikareGCüzerindekikaredenH üzerindeki kare kadar büyüktür;

öyleyse BG üzerindeki kare GC üzerindeki kareden, BG ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

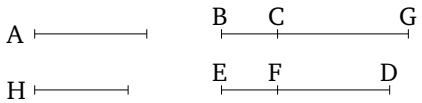
Ve BG'nin tamamı başta alınan A rasyonel doğrusuyla eşölçeklidir:

Öyleyse BC birinci türden ayrıktır. **[Tan. X.11]**

Böylece birinci türden ayrık BC bulunmuştur.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

86. Önerme:
İkinci türden ayrık bir doğru bulmanın yolu.



Rasyonel bir A doğrusu alınsın, ve GC doğrusu A ile uzunlukta eşölçekli olsun; böylece GC rasyonel olur.

İki kare sayı DE, EF alınsın, ve farkları DF kare olmasın.

Şimdi, FD'nin DE'ye oranının, CG üzerindeki karenin GB üzerindeki kareye eşit olması sağlansın. **[DS. X.6]**

Bu durumda CG üzerindeki kare GB üzerindeki kareyle eşölçekli olur. **[X.6]**

Ama CG üzerindeki kare rasyoneldir; öyleyse GB üzerindeki kare de rasyoneldir;

bu durumda BG rasyonel olur.

Ve, GC üzerindeki karenin GB üzerindeki kareye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmadığından,

CG, GB ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

Ve ikisi de rasyoneldir; öyleyse CG, GB yalnızca karede eşölçekli olan iki rasyonel doğrudur;

bu durumda BC ayrık olur. **[X.73]**

Şimdi de diyorum ki, aynı zamanda ikinci türden ayrıktır.

Çünkü, H üzerindeki kare, BG üzerindeki karenin GC üzerindeki kareden farkına eşit olsun.

O zaman, BG üzerindeki karenin GC üzerindeki kareye oranı, ED sayısının DF sayısına oranına eşit olduğundan,

çevrilmiş oranlar olarak, BG üzerindeki karenin H üzerindeki kareye oranı, DE'nin EF'ye oranına eşittir. **[DS. V.19]**

Ve DE, EF sayılarının her biri karedir;

öyleyse BG üzerindeki karenin H üzerindeki kareye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşittir;

bu durumda BG, H ile uzunlukta eşölçekli olur. **[X.9]**

Ve BG üzerindeki kare GC üzerindeki kareden H üzerindeki kare kadar büyüktür;

öyleyse BG üzerindeki kare GC üzerindeki kareden, BG ile uzunlukta eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

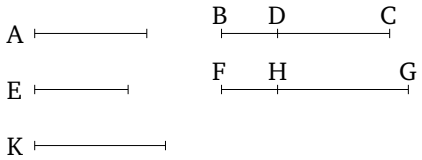
Ve, eklenen CG, başta alınan A rasyonel doğrusuyla eşölçeklidir.

Öyleyse BC ikinci türden ayrıktır. **[Tan. X.12]**

Böylece ikinci türden ayrık BC bulunmuştur.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

87. Önerme:
Üçüncü türden ayrık bir doğru bulmanın yolu.



Rasyonel bir A doğrusu alınsın, birbirine oranı bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmayan E, BC, CD gibi üç sayı alınsın, ama CB'nin BD'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olsun.

Ve E'nin BC'ye oranının, A üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranına eşit olması,

ve BC'ninCD'ye oranının, FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranına eşit olması sağlansın. **[DS. X.6]**

O zaman, E'nin BC'ye oranı, A üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan, A üzerindeki kare FG üzerindeki kareyle eşölçeklidir. **[X.6]**

Ama A üzerindeki kare rasyoneldir; öyleyse FG üzerindeki kare de rasyoneldir;

bu durumda FG rasyonel olur.

Ve, E'nin BC'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmadığından, A üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

öyleyse A, FG ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

Yine, BC'nin CD'ye oranı, FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan, FG üzerindeki kare GH üzerindeki kareyle eşölçeklidir. **[X.6]**

Ama FG üzerindeki kare rasyoneldir; öyleyse GH üzerindeki kare de rasyoneldir;

bu durumda GH rasyonel olur.

Ve, BC'nin CD'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmadığından, FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

öyleyse FG, GH ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

Ve ikisi de rasyoneldir; öyleyse FG, GH yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur;

bu durumda FH ayrıktır. **[X.73]**

Şimdi de diyorum ki, aynı zamanda üçüncü türden ayrıktır.

Çünkü, E'nin BC'ye oranı, A üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan,

ve BC'nin CD'ye oranı, FG üzerindeki karenin HG üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan,

eşit dış oranlar olarak, E'nin CD'ye oranı, A üzerindeki karenin HG üzerindeki kareye oranına eşit olur. **[V.22]**

Ama E'nin CD'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

bu nedenle A üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kar sayıya oranına eşit değildir;

öyleyse A, GH ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

Öyleyse, FG, GH doğrularının hiçbiri başta alınan A rasyonel doğrusuyla eşölçekli değildir.

Şimdi, K üzerindeki kare FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye farkına eşit olsun.

O zaman, BC'nin CD'ye oranı, FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan,

çevrilmiş oranlar olarak, BC'nin BD'ye oranı, FG üzerindeki karenin K üzerindeki kareye oranına eşit olur. **[DS. V.19]**

Ama BC'nin BD'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşittir;

öyleyse FG üzerindeki karenin K üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşittir.

Bu durumda FG, K ile uzunlukta eşölçeklidir, **[X.9]**

ve FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareden farkı, FG ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kareye eşittir.

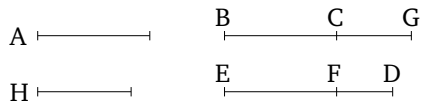
Ve FG, GH doğrularının hiçbiri başta alınan rasyonal A doğrusuyla eşölçekli değildir;

Öyleyse FH üçüncü türden ayrıktır. **[Tan. X.13]**

Böylece üçüncü türden ayrık FH bulunmuştur.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

88. Önerme:
Dördüncü türden ayrık bir doğru bulmanın yolu.



Rasyonel bir A doğrusu ve onunla uzunlukta eşölçekli bir BG doğrusu alınsın; bu durumda BG rasyoneldir.

DF, FE gibi iki sayı alınsın öyle ki DE toplamının DF, EF sayılarının hiçbirine oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmasın.

DE'nin EF'ye oranının, BG üzerindeki karenin GC üzerindeki kareye oranına eşit olması sağlansın; **[DS. X.6]**

bu durumda BG üzerindeki kare GC üzerindeki kareyle eşölçekli olur. **[X.6]**

Ama BG üzerindeki kare rasyoneldir; öyleyse GC üzerindeki kare de rasyoneldir;

bu durumda GC rasyonel olur.

Şimdi, DE'nin EF'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmadığından, BG üzerindeki karenin GC üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

öyleyse BG, GC ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

Ve ikisi de rasyoneldir;

öyleyse BG, GC yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur;

bu durumda BC ayrık olur. **[X.73]**

Şimdi, H üzerindeki kare BG üzerindeki karenin GC üzerindeki kareye farkına eşit olsun.

O zaman, DE'nin EF'ye oranı, BG üzerindeki karenin GC üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan,

çevrilmiş oranlar olarak, ED'nin DF'ye oranı, GB üzerindeki karenin H üzerindeki kareye oranına eşit olur. **[DS. V.19]**

Ama ED'nin DF'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

öyleyse GB'nin üzerindeki karenin H üzerindeki kareye ornaı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

bu durumda BG, H ile eşölçeksizdir. **[X.9]**

Ve BG üzerindeki karenin GC üzerindeki kareye farkı H üzerindeki kareye eşittir;

öyleyse BG üzerindeki karenin GC üzerindeki kareye farkı BG ile eeşölçeksiz bir doğru üzerindeki kareye eşittir.

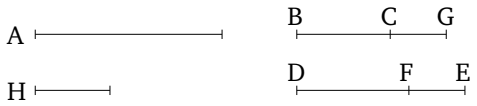
Ve BG'nin tamamı başta alınan A rasyonel doğrusuyla uzunlukta eşölçeklidir.

Öyleyse BC dördüncü türden ayrıktır. **[Tan. X.14]**

Böylece dördüncü türden ayrık bulunmuştur.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

89. Önerme:
Beşinci türden ayrık bir doğru bulmanın yolu.



Rasyonel bir A doğrusu alınsın ve CG, A ile uzunlukta eşölçekli olsun; bu durumda CG rasyonel olur.

Yine DF, FE gibi iki sayı alınsın öyle ki DE toplamının DF, EF sayılarının hiçbirine oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmasın;

ve FE'nin ED'ye oranının, CG üzerindeki karenin GB üzerindeki kareye oranına eşit olması sağlansın.

Öyleyse GB üzerindeki kare de rasyoneldir; **[X.6]**

bu durumda BG de rasyonel olur.

Şimdi, DE'nin EF'ye oranı, BG üzerindeki karenin GC üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan,

ve bu arada DE'nin EF'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmadığından,

BG üzerindeki karenin GC üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

bu durumda BG, GC ile uzunlukta eşölçeksiz olur. **[X.9]**

Ve ikisi de rasyoneldir;

öyleyse BG, GC yalnızca karede eşölçekli olan iki rasyonel doğrudur;

bu durumda BC ayrıktır. **[X.73]**

Şimdi de diyorum ki, aynı zamanda altıncı türden ayrıktır.

Çünkü, H üzerindeki kare BG üzerindeki karenin GC üzerindeki kareden farkına eşit olsun.

O zaman, BG üzerindeki karenin GC üzerindeki kareye oranı, DE'nin EF'ye oranına eşit olduğundan,

çevrilmiş oranlar olarak, ED'nin DF'ye oranı, BG üzerindeki karenin H üzerindeki kareye oranına eşittir. **[DS. V.19]**

Ama ED'nin DF'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

öyleyse BG üzerindeki karenin H üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

bu durumda BG, H ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

Ve BG üzerindeki karenin GC üzerindeki kareden farkı H üzerindeki kareye eşittir;

öyleyse GB üzerindeki karenin GC üzerindeki kareden farkı, GB ile uzunlukta eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kareye eşittir.

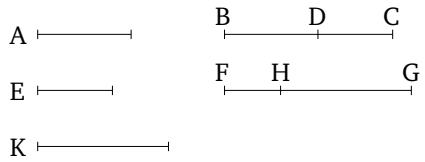
Ve eklenen CG, başta alınan A rasyonel doğrusuyla uzunlukta eşölçeklidir;

öyleyse BC beşinci türden ayrıktır. **[Tan. X.15]**

Böylece beşinci türden ayrık BC bulunmuştur.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

90. Önerme:
Altıncı türden ayrık bir doğru bulmanın yolu.



Rasyonel bir A doğrusu, vebirbirlerine oranı bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmayan üç tane E, BC, CD sayıları alınsın;

ve dahası CB'nin BD'ye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmasın.

E'nin BC'ye oranının A üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranına eşit olması,

ve BC'nin CD'ye oranının, FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranına eşit olması sağlansın. **[DS. X.6]**

Şimdi, E'nin BC'ye oranı, A üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan, A üzerindeki kare FG üzerindeki kareyle eşölçeklidir. **[X.6]**

Ama A üzerindeki kare rasyoneldir; öyleyse FG üzerindeki kare de rasyoneldir;

bu durumda FG de rasyonel olur.

Ve, E'nin BC'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmadığından, A üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

bu durumda A, FG ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

Yine, BC'nin CD'ye oranı, FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan, FG üzerindeki kare GH üzerindeki kareyle eşölçeklidir. **[X.6]**

Ama FG üzerindeki kare rasyoneldir; öyleyse GH üzerindeki kare de rasyoneldir;

bu durumda GH de rasyonel olur.

Ve, BC'nin CD'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmadığından, FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

bu durumda FG, GH ile eşölçeksizdir. **[X.9]**

Ve ikisi de rasyoneldir;

öyleyse FG, GH yalnızca karede eşölçekli olan iki rasyonel doğrudur;

bu durumda FH ayrıktır. **[X.73]**

Şimdi de diyorum ki, aynı zamanda altıncı türden ayrıktır.

Çünkü, E'nin BC'ye oranı, Aüzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan,

ve BC'nin CD'ye oranı, FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan,

eşit dış oranlar olarak, E'nin CD'ye oranı, A üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranına eşittir. **[V.22]**

Ama E'nin CD'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

öyleyse A üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

bu durumda A, GH ile uzunlukta eşölçeksizdir; **[X.9]**

öyleyse FG, GH doğrularının hiçbir A rasyonel doğrusuyla eşölçekli değildir.

Şİmdi, K üzerindeki kare, FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareden farkına eşit olsun.

O zaman, BC'nin CD'ye oranı, FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan,

çevrilmiş oranlar olarak, CB'nin BD'ye oranı, FG üzerindeki karenin K üzerindeki kareye oranına eşittir. **[DS. V.19]**

Ama CB'nin BD'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

öyleyse FG üzerindeki karenin K üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

bu durumda FG, K ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

Ve FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareden farkı K üzerindeki kareye eşittir;

öyleyse FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareden farkı FG ile uzunlukta eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kareye eşittir.

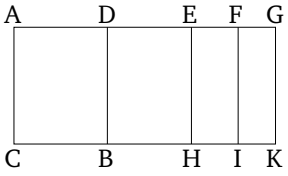
Ve FG, GH doğrularının hiçbiri başta alınan A rasyonel sayısıyal eşölçekli değildir.

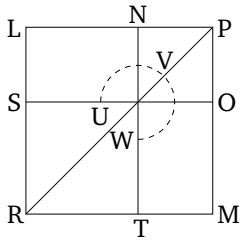
Öyleyse FH altıncı türden ayrıktır. **[Tan. X.16]**

Böylece altıncı türden ayrık FH bulunmuştur.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

91. Önerme:
Rasyonel bir doğruyla birinci türden ayrık bir doğrunun içerdiği alana eşit olan karenin kenarı ayrıktır.





AB alanı, AC rasyonel doğrusuyla birinci türden ayrık AD doğrusunun içerdiği bir alan olsun;

diyorum ki, AB'ye eşit karenin kenarı ayrıktır.

Çünkü, AD birinci türden ayrık olduğundan, eklentisi DG olsun; öyleyse AG, GD yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur. **[X.73]**

Ve AG'nin tamamı, başta alınan rasyonel AC doğrusuyla eşölçeklidir,

ve AG üzerindeki kare GD üzerindeki kareden AG ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür; **[Tan. X.11]**

bu durumda, eğer AG üzerine DG üzerindeki karenin dörtte birine eşit ve bir kare kadar eksik bir paralelkenar çizilirse, bu çizim AG'yi eşölçekli parçalara böler. **[X.17]**

DG doğrusu E'de ikiye bölünsün,

ve AG üzerine EG üzerindeki kareye eşit ve bir kare kadar eksik bir paralelkenar çizilsin, ve bu AF, FG dikdörtgeni olsun;

bu durumda AF, FG ile eşölçeklidir.

Ve E, F, G noktalarından AC'ye paralel EH, FI, GK çizilsin.

Şimdi, AF, FG ile eşölçekli olduğundan, AG de AF, FG doğrularının her biriyle uzunlukta eşölçeklidir. **[X.15]**

Ama AG, AC ile eşölçeklidir; öyleyse AF, FG doğrularının her biri AC ile uzunlukta eşölçeklidir. **[X.12]**

Ve AC rasyoneldir; öyleyse AF, FG doğrularının her biri rasyoneldir, ve böylece AI, FK dikdörtgenlerinin her biri de rasyonel olur. **[X.19]**

Şimdi, DE, EG ile eşölçekli olduğundan, DG de DE, EG doğrularının her biriyle eşölçeklidir. **[X.15]**

Ama DG rasyoneldir ve AC ile uzunlukta eşölçeksizdir; öyleyse DE, EG doğrularının her biri de rasyoneldir ve AC ile eşölçeksizdir; **[X.13]**

bu durumda DH, EK dikdörtgenlerinin her biri orta değerdir. **[X.21]**

Şimdi, AI'ya eşit LM karesi çizilsin, ve onunla ortak bir açısı olan, LPM açısı, ve FKye eşit NO karesi çizilsin;

bu durumda LM, NO kareleri aynı köşegen etrafındadır. **[VI.26]**

Köşegenleri PR olsun ve şekil çizilsin.

O zaman, AF, FG tarafından içerilen dikdörtgen EG üzerindeki kareye eşit olduğundan, AF'nin EG'ye oranı, EG'nin FG'ye oranına eşittir. **[VI.17]**

Ama AF'nin EG'ye oranı, AI'nın EK'ye oranına eşittir, ve EG'nin FG'ye oranı, EK'nin KFye oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse EK alanı AI, KF arasında orta orantılıdır. **[V.11]**

Ama daha önce kanıtlandığı gibi MN de LM, ve NO arasında orta orantılıdır, **[YÖ./ X.53]**

ve AI alanı LM karesine, KF de NO'ya eşittir;

bu durumda MN, EK'ye eşit olur.

Ama EK, DH'ye, ve MN, LO'ya eşittir;

öyleyse DK alanı UVW kadranı ve NO!ya eşittir.

Ama AK de LM, NO karelerine eşittir;

öyleyse AB kalanı ST'ye eşittir.

Ama ST alanı LN üzerindeki karedir; öyleyse LN üzerindeki kare AB'ye eşittir;

bu durumda AB'ye eşit karenin kenarı LN olur.

Şimdi de diyorum ki, LN ayrıktır.

Çünkü, AI, FK dikdörtgenlerinin her biri rasyonel ve LM, NO'ya eşit olduğundan, LM,NO karelerinin her biri, yanı sırasıyla LP, PN üzerindeki kareler, rasyoneldir;

bu durumda LP, PN doğrularının her biri de rasyonel olur.

Yine, DH orta değer olduğundan ve LO'ya eşit olduğundan, LO da orta değerdir.

O zaman, LO orta değerken NO rasyonel olduğundan, LO, NO ile eşölçeksizdir.

Ama, LO'nun NO'ya oranı, LP'nin PN'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

bu durumda LP, PN ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.11]**

Ve her ikisi de rasyoneldir; öyleyse LP, PN yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur;

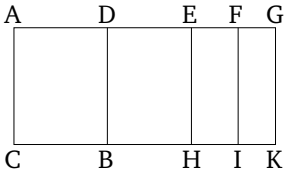
bu durumda LN ayrık olur. **[X.73]**

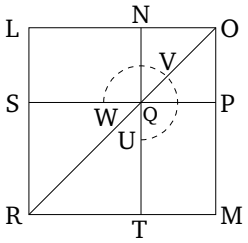
Ve AB alanına eşit karenin kenarıdır;

öyleyse AB alanına eşit karenin kenarı ayrıktır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

92. Önerme:
Rasyonel bir doğruyla ikinci türden ayrık bir doğrunun içerdiği alana eşit olan karenin kenarı orta değer doğrunun birinci ayrığı olan bir doğrudur.





AB alanı, AC rasyonel doğrusuyla ikinci türden ayrık AD doğrusunun içerdiği bir alan olsun;

diyorum ki, AB'ye eşit karenin kenarı orta değer doğrunun birinci ayrığıdır.

Çünkü, AD'nin eklentisi DG olsun; bu durumda AG, GD yalnızca karede eşölöekli rasyonel doğrulardır, **[X.73]**

ve DG eklentisi başta alınan AC rasyonel doğrusuyla eşölçeklidir,

ayrıca AG'nin tamamı üzerindeki kare GD eklentisi üzerindeki kareden AG ile uzunlukta eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[Tan. X.12]**

O zaman, AG üzerindeki kare GD üzerindeki kareden AG ile uzunlukta eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olduğundan,

eğer AG üzerine GD üzerindeki karenin dörtte birine eşit ve bir kare şekil kadar eksik bir paralelkenar çizilirse, bu çizim AG'yi eşölçekli parçalara böler. **[X.17]**

O zaman DG, E'de ikiye bölünsün,

AG üzerine EG üzerindeki kareye eşit ve bir kare şekli kadar eksik bir paralelkenar çizilsin, ve bu AF, FG dikdörtgeni olsun;

bu durumda AF, FG ile uzunlukta eşölçeklidir.

Öyleyse AG de AF, FG doğrularının her biriyle eşölçeklidir. **[X.15]**

Ama AG rasyoneldir ve AC ile uzunlukta eşölçeksizdir;

bu nedenle AF, FG doğrularının her biri de rasyoneldir ve AC ile uzunlukta eşölçeksizdir; **[X.13]**

bu durumda AI, FK dikdörtgenlerinin her biri orta değer olur. **[X.21]**

Yine, DE, EG ile eşölçekli olduğundan, DG de DE, EG doğrularının her biriyle eşölçeklidir. **[X.15]**

Ama DG, AC ile uzunlukta eşölçeklidir.

Öyleyse DH, EK dikdörtgenlerinin her biri rasyoneldir. **[X.19]**

O zaman, AI'ya eşit LM karesi çizilsin, ve FK'ye eşit ve LM ile aynı açı, yani LPM açısı, etrafında olan NO çıkarılsın;

bu durumda LM, NO kareleri aynı köşegen etrafındadır. **[VI.26]**

Köşegenleri PR olsun ve şekil çizilsin.

O zaman, AI, FK orta değer oldukları ve LP, PN üzerindeki karelere eşit olduklarından, LP, PN üzerindeki kareler de orta değerdir;

bu durumda LP, PN de yalnızca karede eşölçekli orta değer doğrulardır.

> *[Dikkatli okuyucu bu aşamada* LP *ile* PN*'nin karede eşölçekli olduklarının kanıtlandığını ama "yalnızca karede" eşölçekli olduklarının henüz kanıtlanmadığını farkedecektir. Bu eksiklik kanıtın sonlarında kapatılır.]*

Ve AF, FG dikdörtgeni AG üzerindeki kareye eşit olduğundan,

AF'nin EG'ye oranı, EG'nin FG'ye oranına eşittir, **[VI.17]**

ayrıca AF'nin AG'ye oranı, AI'nın EK'ye oranına eşittir,

ve EG'nin FG'ye oranı, EK'nin FK'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse EK alanı AI, FK arasında orta orantılıdır. **[VI.11]**

Ama MN alanı da LM, NO kareleri arasında orta orantılıdır, ve AI, LM'ye, ve FK, NO'ya eşittir;

bu durumda MN, EK'ye eşit olur.

Ama DH, EK'ye, ve LO, MN'ye eşittir;

öyleyse DK'nin tamamı *UVW* kadranına ve NOya eşittir.

O zaman, AK'nin tamamı LM, NO'ya eşit olduğundan, ve bunların içinde DK alanı UVW kadranı ve NOya eşit olduğundan,

AB kalanı TS'ye eşittir.

Ama TS alanı LN üzerindeki karedir; öyleyse LN üzerindeki kare AB alanına eşittir;

bu durumda ABye eşit karenin kenarı LN'dir.

Şimdi de diyorum ki, LN doğrusu orta değer doğrunun ayrığıdır.

Çünkü, EK rasyonel ve LO'ya eşit olduğundan, LO, yani LP, PN dikdörtgeni rasyoneldir.

Ama NO'nun orta değer olduğu kanıtlanmıştı; öyleyse LO, NO ile eşölçeksizdir.

Ama, LO'nun NO'ya oranı, LP'nin PN'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse LP, PN doğruları rasyonel bir dikdörtgen içeren, yalnızca karede eşölçekli orta değer doğrulardır;

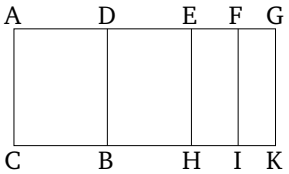
bu durumda LN orta değer doğrunun birinci ayrığı olur. **[X.74]**

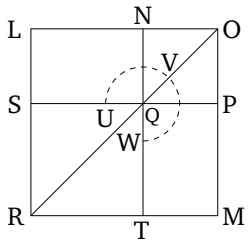
Ve AB alanına eşit karenin kenarıdır.

Öyleyse AB alanına eşit karenin kenarı orta değer doğrunun birinci ayrığıdır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

93. Önerme:
Rasyonel bir doğruyla üçüncü türden ayrık bir doğrunun içerdiği alana eşit karenin kenarı orta değer doğrunun ikinci ayrığıdır.





AB alanı, AC rasyonel doğrusuyla üçüncü türden ayrık AD doğrusunun içerdiği bir alan olsun;

diyorum ki, AB'ye eşit karenin kenarı orta değer doğrunun ikinci ayrığıdır.

Çünkü, AD'nin eklentisi DG olsun; bu durumda AG, GD yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır,

ve AG, GD doğrularının hiçbiri başta alınan AC rasyonel doğrusuyla uzunlukta eşölçekli değildir,

ayrıca AG bütünü üzerindeki kare DG eklentisi üzerindeki kareden, AG ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[Tan. X.13]**

O zaman, AG üzerindeki kare GD üzerindeki kareden AG ile uzunlukta eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olduğundan,

eğer AG üzerine GD üzerindeki karenin dörtte birine eşit ve bir kare şekil kadar eksik bir paralelkenar çizilirse, bu çizim AG'yi eşölçekli parçalara böler. **[X.17]**

O zaman DG, E'de ikiye bölünsün,

AG üzerine EG üzerindeki kareye eşit ve bir kare şekli kadar eksik bir paralelkenar çizilsin, ve bu AF, FG dikdörtgeni olsun;

E, F, G noktalarından AC'ye paralel EH, FI, GK çizilsin.

Öyleyse AF, FG eşölçeklidir; bu durumda AI'da FK ile eşölçekli olur. **[VI.1, X.11]**

Ve, AF, FG uzunlukta eşölçekli olduklarından, AG de AF, FG doğrularının her biriyle uzunlukta eşölçeklidir. **[X.15]**

Ama AG rasyoneldir ve AC ile uzunlukta eşölçeksizdir; öyleyse AF, FG de öyledir. **[X.13]**

Öyleyse AI, FK dikdörtgenlerinin her biri orta değerdir. **[X.21]**

Yine, DE, EG ile uzunlukta eşölçekli olduğundan, DG de DE, EG doğrularının her biriyle uzunlukta eşölçeklidir. **[X.15]**

Ama GD rasyoneldir ve AC ile uzunlukta eşölçeksizdir;

öyleyse DE, EG doğrularının her biri de rasyoneldir ve AC ile uzunlukta eşölçeksizdir; **[X.13]**

bu durumda DH, EK dikdörtgenlerinin her biri orta değer olur. **[X.21]**

Ve AG, GD yalnızca karede eşölçekli olduğundan, AG, GD ile uzunlukta eşölçeksizdir.

Ama AG, AFile, ve DG, EG ile uzunlukta eşölçeklidir;

öyleyse AF, EG ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.13]**

Ama AF'nin EG'ye oranı, AI'nın EKye oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse AI, EK ile eşölçeksizdir. **[X.11]**

Şimdi, AI'ya eşit LM karesi çizilsin, ve LM ile aynı açı etrafında ve FK'ye eşit NO çıkarılsın;

bu durumda LM, NO aynı köşegen etrafındadır. **[VI.26]**

Köşegenleri PR olsun ve şekil çizilsin.

Şimdi, AF, FG dikdörtgeni EG üzerindeki kareye eşit olduğundan,

AF'nin EG'ye oranı, EG'nin FG'ye oranına eşit olur. **[VI.17]**

Ama, AF'nin EG'ye oranı, AI'nın EK'ye oranına eşittir,

ve EG'nin FG'ye oranı, EK'nin FK'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse AI'nın EK'ye oranı da EK'nin FK'ye oranına eşittir; **[V.11]**

bu durumda EK alanı AI, FK arasında orta orantılıdır.

Ama MN de LM, NO kareleri arasında orta orantılıdır,

ve AI, LM'ye, ve FK, NO'ya eşittir;

bu durumda EK de MN'ye eşit olur.

Ama MN, LO'ya, ve EK, DH'ye eşittir;

öyleyse DK'nin tamamı UVW kadranı ve NO'ya eşittir.

Ama AK de LM, NO'ya eşittir;

öyleyse AB kalanı ST'ye, yani LN üzerindeki kareye eşittir;

öyleyse LN doğrusu AB alanına eşit karenin kenarıdır.

Diyorum ki, LN orta değer doğrunun ikinci ayrığıdır.

Çünkü, AI, FK'nin orta değer olduğu ve LP, PN üzerindeki karelere eşit olduğu kanıtlandığından, LP, PN üzerindeki karelerin her biri de orta değerdir;

bu durumda LP, PN doğrularının her biri orta değer olur.

Ve AI, FK ile eşölçekli olduğundan, **[VI.1, X.11]**

LP üzerindeki kare de PN üzerindeki kareyle eşölçeklidir.

Yine, AI'nın EK ile eşölçeksiz olduğu kanıtlandığından, LM de MN ile eşölçeksizdir, yani LP üzerindeki kareyle LP, PN dikdörtgeni;

böylece LP, PN ile uzunlukta eşölçeksizdir; **[VII.1, X11]**

öyleyse LP, PN yalnızca karede eşölçekli orta değer doğrulardır.

Şimdi de diyorum ki, orta değer bir dikdörtgen içerirler.

Çünkü, EK'nin orta değer olduğu ve LP, PN dikdörtgenine eşit olduğu kanıtlandığından, LP, PN dikdörtgeni de orta değerdir, böylece LP, PN doğruları, orta değer bir dikdörtgen içeren, yalnızca karede eşölçekli orta değer doğrulardır.

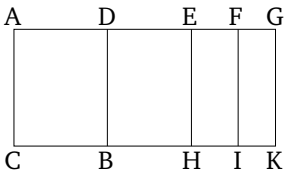
Bu durumda LN orta değer doğrunun ikinci ayrığı olur; **[X.75]**

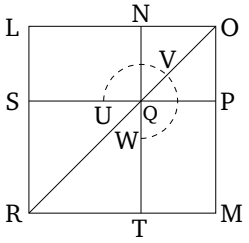
ve AB alanına eşit karenin kenarıdır.

Öyleyse AB alanına eşit karenin kenarı orta değer doğrunun ikinci ayrığıdır.

QED

94. Önerme:
Rasyonel bir doğruyla dördüncü türden ayrık bir doğrunun içerdiği alana eşit karenin kenarı ufaktır.





AB alanı AC rasyonel doğrusuyla dördüncü türden ayrık AD doğrusu tarafından içerilsin;

diyorum ki, AB alanına eşit karenin kenarı ufaktır.

Çünkü, AD'nin eklentisi DG olsun; bu durumda AG, GD yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır,

AG, başta alınan rasyonel AC doğrusuyla eşölçeklidir,

ve AG'nin tümü üzerindeki kare DG eklentisi üzerindeki kareden, AG ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[Tan. X.14]**

O zaman, AG üzerindeki kare GD üzerindeki kareden, AG ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olduğundan,

eğer AG üzerine DG üzerindeki karenin dörtte birine eşit ve bir kare şekil kadar eksik bir paralelkenar çizilirse, bu çizim AG'yi uzunlukta eşölçeksiz parçalara bölecektir. **[X.18]**

O zaman DG, E'de ikiye bölünsün, ve AG üzerine EG üzerindeki kareye eşit ve bir kare şekil kadar eksik bir paralelkenar çizilsin,

ve bu AF, FG dikdörtgeni olsun;

öyleyse AF, FG ile uzunlukta eşölçeksizdir.

E, F, G'den AC, BD'ye paralel EH, FI, GK çizilsin.

O zaman, AG rasyonel ve AC ile uzunlukta eşölçekli olduğundan, AK'nin tamamı rasyoneldir. **[X.19]**

Yine, DG, AC ile uzunlukta eşölçeksiz olduğundan, ve her ikisi de rasyonel olduklarından, DK orta değerdir. **[X.21]**

Yine, AF, FG ile uzunlukta eşölçeksiz olduğundan, AI da FK ile eşölçeksizdir. **[VI.1, X.11]**

Şimdi, AI'ya eşit LM karesi çizilsin, ve aynı açı etrafında, LPM açısı, ve FK'ye eşit NO çıkarılsın.

Bu durumda LM, NO kareleri aynı köşegen etrafında olur. **[VI.26]**

Köşegenleri PR olsun ve şekil çizilsin.

O zaman, AF, FG dikdörtgen, EG üzerindeki kareye eşit olduğundan,

orantılar olarak, AF'nin EG'ye oranı, EG'nin FG'ye oranına eşittir. **[VI.17]**

Ama, AF'nin EG'ye oranı, AI'nın EK'ye oranına,

ve EG'nin FG'ye oranı, EK'nin FK'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

bu durumda EK alanı AI, FK arasında orta orantılıdır. **[V.11]**

Ama MN de LM, NO kareleri arasında orta orantılıdır,

ve AI, LM'ye, ve FK, NO'ya eşittir;

bu durumda EK de MN'ye eşit olur.

Ama DH eşittir EK, ve LO eşittir MN; öyleyse DK'nin tamamı UVW kadranı ve NO'ya eşittir.

O zaman, AK'nin tamamı LM, NO karelerine eşit olduğundan,

ve bunların içinde DK alanı *UVW* kadranı ve NO karesine eşit olduğundan,

AB kalanı ST'ye, yani LN üzerindeki kareye eşittir;

bu durumda AB alanına eşit karenin kenarı LN olur.

Diyorum ki, LN ufak denen irrasyonel bir doğrudur.

Çünkü, AK rasyonel olduğundan ve LP, PN üzerindeki karelere eşit olduğundan, LP, PN üzerindeki karelerin toplamı rasyoneldir.

Yine, DK orta değer olduğundan, ve DK alanı LP, PN dikdörtgeninin iki katı olduğundan, LP, PN dikdörtgeninin iki katı orta değerdir.

Ve, AI'nın FK ile eşölçeksiz olduğu kanıtlandığından, LP üzerindeki kare de PN üzerindeki kareyle eşölçeksizdir.

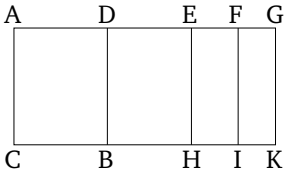
Öyleyse LP, PN doğruları üzerlerindeki karelerin toplamı rasyonel ilan karede eşölçeksiz iki doğrudur, ve içerdikleri dikdörtgenin iki katı orta değerdir.

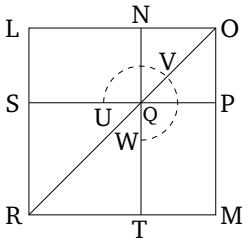
Bu durumda LN doğrusu ufak denen irrasyonel bir doğrudur. **[X.76]**

Öyleyse AB alanına eşit karenin kenarı ufaktır.

QED

95. Önerme:
Rasyonel bir doğruyla beşinci türden ayrık bir doğrunun içerdiği alana eşit karenin kenarı rasyonel alanla orta değer bütün üreten türden bir doğrudur.





AB alanı AC rasyonel doğrusuyla beşinci türden ayrık AD doğrusu tarafından içerilsin;

diyorum ki, AB alanına eşit karenin kenarı rasyonel alanla orta değer alan üreten doğrudur.

Çünkü, AD'nin eklentisi DG olsun; bu durumda AG, GD yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır,

GD eklentisi başta alınan AC rasyonel doğrusuyla uzunlukta eşölçeklidir,

ve AG'nin tümü üzerindeki kare DG eklentisi üzerindeki kareden AG ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[Tan. X.15]**

Öyleyse, AG üzerine DG üzerindeki karenin dörtte birine eşit ve bir kare şekil kadar eksik bir paralelkenar çizildiğinde, bu çizim AG'yi eşölçeksiz parçalara ayırır. **[X.18]**

O zaman, DG, E'de eşit iki parçaya bölünsün,

AG üzerine EG üzerindeki kareye eşit ve bir kare şekil kadar eksik bir paralelkenar çizilsin, ve bu AF, FG dikdörtgeni olsun;

bu durumda AF, FG ile uzunlukta eşölçeksiz olur.

Şimdi, AG, CA ile eşölçeksiz olduğundan, ve ikisi de rasyonel olduklarından, AK orta değerdir. **[X.21]**

Yine, DG rasyonel olduğundan ve AC ile eşölçekli olduğundan, DK rasyoneldir. **[X.19]**

Şimdi AI'ya eşit LM karesi çizilsin, ve aynı açı etrafında, LPM açısı, FK'ye eşit NO karesi çıkarılsın;

bu durumda LM, NO kareleri aynı köşegen etrafındadır. **[VI.26]**

Köşegenleri PR olsun, ve şekil çizilsin.

Benzer şekilde LN'nin AB alanına eşit karenin kenarı olduğunu kanıtlayabiliriz.

Diyorum ki, LN doğrusu rasyonel alanla orta değer üreten bir doğrudur.

Çünkü, AK'nin orta değer olduğu ve LP, PN üzerindeki karelere eşit olduğu kanıtlandığından, LP, PN üzerindeki karelerin toplamı da orta değerdir.

Yine, DK rasyonel olduğundan ve LP, PN dikdörtgeninin iki katına eşit olduğundan, dikdörtgen de rasyoneldir.

Ve, AI, FK ile eşölçeksiz olduğundan, LP üzerindeki kare PN üzerindeki kareyle eşölçeksizdir;

öyleyse LP, PN doğruları, üzerlerindeki karelerin toplamı orta değer ama içerdikleri dikdörtgen rasyonel olan, karede eşölçeksiz iki doğrudur.

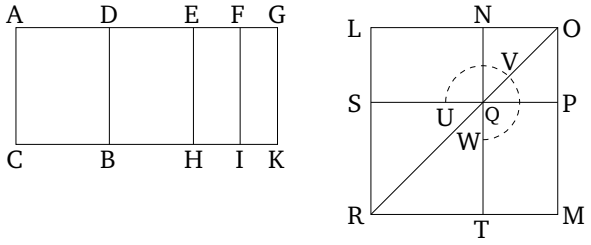
Bu durumda LN kalanı rasyonel alalnla orta değer bütün üreten türde irrasyonel bir doğrudur; **[X.77]**

ve AB alanına eşit karenin de kenarıdır.

Öyleyse AB alanına eşit karenin kenarı rasyonel alanla orta değer üreten türden bir doğrudur.

QED

96. Önerme:
Rasyonel bir doğruyla altıncı türden ayrık bir doğrunun içerdiği alana eşit karenin kenarı orta değer alanla orta değer bütün üreten türden bir doğrudur.



AB alanı rasyonel AC doğrusuyla altıncı türden ayrık AD doğrusu tarafından içerilsin;

diyorum ki, AB alanına eşit karenin kenarı orta değer alanla orta değer bütün üreten türden bir doğrudur.

Çünkü, AD'nin eklentisi DG olsun; bu durumda AG, GD yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır,

hiçbiri başta alınan AC rasyonel doğrusuyla uzunlukta eşölçekli değildir,

ve AG'nin tümü üzerindeki kare DG eklentisi üzerindeki kareden AG ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[Tan. X.16]**

O zaman, AG üzerindeki kare GD üzerindeki kareden AG ile uzunlukta eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olduğundan,

eğer AG üzerine DG üzerindeki karenin dörtte birine eşit ama bir kare şekil kadar eksik bir paralelkenar çizilirse, bu çizim AG'yi eşölçeksiz parçalara ayırır. **[X.18]**

O zaman, DG, E'de eşit iki parçaya bölünsün,

AG üzerine EG üzerindeki kareye eşit ve bir kare şekil kadar eksik bir paralelkenar çizilsin, ve bu AF, FG dikdörtgeni olsun;

bu durumda AF, FG ile uzunlukta eşölçeksiz olur.

Ama, AF'nin FG'ye oranı, AI'nın FK'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

bu durumda AI, FK ile eşölçeksiz olur. **[X.11]**

Ve, AG, GC yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrular olduğundan, AK orta değerdir. **[X.21]**

Yine, AC, DG uzunlukta eşölçeksiz rasyonel doğrular olduğundan, DK de orta değerdir. **[X.21]**

Şimdi, AG, GD yalnızca karede eşölçekli olduğundan, AG, GD uzunlukta eşölçeksizdir.

Ama, AG'nin GD'ye oranı, AK'nin KD'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

bu durumda AK, KD ile eşölçeksiz olur. **[X.11]**

Şimdi, AI'ya eşit LM karesi çizilsin, ve aynı açı etrafında, FKye eşit NO karesi çıkarılsın;

bu durumda LM, NO kareleri aynı köşegen etrafındadır. **[VI.26]**

Köşegenleri PR olsun ve şekil çizilsin.

Yukardakine benzer yoldan LN'nin AB alanına eşit karenin kenarı olduğunu kanıtlayabiliriz.

Diyorum ki, LN doğrusu orta değer alandan orta değer bütün üreten türden bir doğrudur.

Çünkü, AK'nin orta değer olduğu ve LP, PN üzerindeki karelere eşit olduğu kanıtlandığından, LP, PN üzerindeki karelerin toplamı orta değerdir.

Yine, DK'nin orta değer olduğu ve LP, PN dikdörtgeninin iki katına eşit olduğu kanıtlandığından, LP, PN dikdörtgeninin iki katı da orta değerdir.

Ve AK'nin DK ile eşölçeksiz olduğu kanıtlandığından, LP, PN üzerindeki karelerin toplamı LP, PN dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksizdir.

Ve, AI, FK ile eşölçeksiz olduğundan, LP üzerindeki kare de PN üzerindeki kareyle eşölçeksizdir;

öyleyse LP, PN doğruları üzerlerindeki karelerin toplamı ve içerdikleri dikdörtgenin iki katı orta değer olan, ve dahası üzerlerindeki karelerin içerdikleri dikdörtgenin iki katıyla eşölçeksiz olduğu, karede eşölçeksiz iki doğrudur.

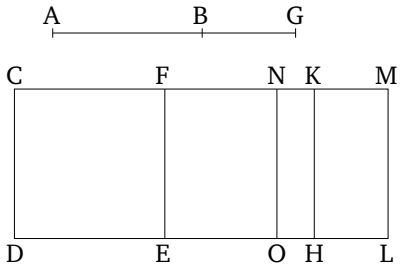
Bu durumda LN doğrusu orta değer alanla orta değer bütün üreten türden irrasyonel bir doğrudur; **[X.78]**

ve AB alanına eşit karenin de kenarıdır.

Öyleyse bu alana eşit karenin kenarı orta değer alanla orta değer bütün üreten türden bir doğrudur.

QED

97. Önerme:
Ayrık bir doğru üzerindeki kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizildiğinde birinci türden ayrık bir genişlik oluşturur.



AB ayrık, ve CD rasyonel olsun, ve CD üzerine AB üzerindeki kareye eşit CE çizilsin ve CF genişliği oluşsun;

diyorum ki, CF birinci türden ayrıktır.

Çünkü BG, AB'nin eklentisi olsun; bu durumda AG, GB yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır. **[X.73]**

CD üzerine AG üzerindeki kareye eşit CH, ve BG üzerindeki kareye eşit KL çizilsin.

Öyleyse CL'nin tamamı AG, GB üzerindeki karelere eşittir, içlerinde CE alanı da AB üzerindeki kareye eşittir;

bu durumda FL kalanı AG, GB dikdörtgeninin iki katına eşit olur. **[II.7]**

FM, N'de ikiye bölünsün,

ve Nden CD'ye paralel NO çizilsin;

bu durumda FO, LN dikdörtgenlerinin her biri AG, GB dikdörtgenine eşit olur.

Şimdi, AG, GB üzerindeki kareler rasyonel olduğundan, ve DM alanı AG, GB üzerindeki karelere eşit olduğundan, DM rasyoneldir.

Ve rasyonel CD doğrusu üzerine çizilip CM genişliğini oluşturmuştur;

öyleyse CM rasyoneldir ve CD ile uzunlukta eşölçeklidir. **[X.20]**

Yine, AG, GB dikdörtgeninin iki katı orta değer olduğundan, ve FL alanı AG, GB dikdörtgeninin iki katına eşit olduğundan, FL orta değerdir.

Ve CD rasyonel doğrusu üzerine çizilip FM genişliğini oluşturmuştur;

öyleyse FM rasyoneldir ve CD ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Ve, AG, GB üzerindeki kareler rasyonel olduğundan, ve bu arada AG, GB dikdörtgeninin iki katı orta değer olduğundan, AG, GB üzerindeki kareler AG, GB dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksizdir.

Ve, CL alanı AG, GB üzerindeki karelere, ve FL alanı da AG, GB dikdörtgeninin iki katına eşittir;

bu durumda DM, FL ile eşölçeksizdir.

Ama, DM'nin FL'ye oranı, CM'nin FM'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse CM, FM ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.11]**

Ve ikisi de rasyoneldir; öyleyse CM, MF yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır;

bu durumda CF ayrık olur. **[X.73]**

Şimdi de diyorum ki, birinci türden ayrıktır.

Çünkü, AG, GB dikdörtgeni AG, GB üzerindeki kareler arasında orta orantılı olduğundan,

ve CH alanı AG üzerindeki kareye,

KL alanı da BG üzerindeki kareye eşit olduğundan,

ve NL alanı AG, GB dikdörtgenine eşit olduğundan,

NL de CH, KL arasında orta orantılıdır;

bu durumda CH'nin NL'ye oranı, NL'nin KL'ye oranına eşit olur.

Ama, CH'nin NL'ye oranı, CK'nin NM'ye oranına,

ve NL'nin KL'ye oranı da NM'nin KM'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse CK, KM dikdörtgeni NM üzerindeki kareye eşittir, **[VI.17]**

yani FM üzerindeki karenin dörtte birine.

Ve AG üzerindeki kare GB üzerindeki kareyle eşölçekli olduğundan, CH de KL ile eşölçeklidir.

Ama, CH'nin KL'ye oranı, CK'nin KM'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

bu durumda CK, KM ile eşölçekli olur. **[X.11]**

O zaman, CM, MF iki farklı doğru olduğundan, ve CM üzerine FM üzerindeki karenin dörtte birine eşit ve bir kare şekil kadar eksik CK, KM dikdörtgeni çizildiğinden,

ve bu arada CK, KM ile eşölçekli olduğundan,

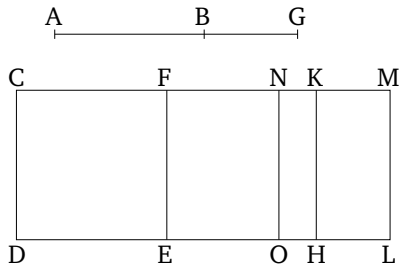
CM üzerindeki kare MF üzerindeki kareden CM ile uzunlukta eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[X.17]**

Ve CM, başta alınan rasyonel AC doğrusuyla uzunlukta eşölçeklidir;

öyleyse CF birinci türden ayrıktır. **[Tan. X.11]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

98. Önerme:
Orta değer doğrunun birinci ayrığı türünden bir doğru üzerindeki kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizildiğinde ikinci türden ayrık bir genişlik oluşturur.



AB orta değer doğrunun birinci ayrığı türünden bir doğru, ve CD de rasyonel bir doğru olsun,

ve CD üzerine AB üzerindeki kareye eşit CE çizilerek CF genişliği oluşsun;

diyorum ki, CF ikinci türden ayrıktır.

Çünkü BG, AB'nin eklentisi olsun; bu durumda AG, GB yalnızca karede eşölçekli verasyonel bir dikdörtgen içeren iki orta değer doğrudur. **[X.74]**

CD üzerine AG üzerindeki kareye eşit CH çizilip CK genişliği oluşsun, ve GB üzerindeki kareye eşit KL çizilip KM oluşsun;

öyleyse CL'nin tamamı AG, GB üzerindeki karelere eşittir; bu durumda CL de orta değer olur. **[X.15, DS. X.23]**

Ve CD rasyonel doğrusu üzerine çizilmiş ve CM genişliğini oluşturmuştur;

öyleyse CM rasyoneldir ve CD ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Şimdi, CL alanı AG, GB üzerindeki karelere eşit olduğundan, bunun içinde AB üzerindeki kare CE'ye eşit olduğundan, FL kalanı AG, GB dikdörtgeninin iki katına eşittir. **[II.7]**

Ama AG, GB dikdörtgeninin iki katı rasyoneldir; öyleyse FL de rasyoneldir.

Ve FE rasyonel doğrusu üzerine çizilmiş ve FM genişliğini oluşturmuştur;

bu durumda FM de rasyoneldir ve CD ile uzunlukta eşölçeklidir. **[X.20]**

Şimdi, AG, GB üzerindeki karelerin toplamı, yani CL, orta değer olduğundan,

ve bu arada AG, GB dikdörtgeninin iki katı, yani FL, rasyonel olduğundan,

CL, FL ile eşölçeksizdir.

Ama, CL'nin FL'ye oranı, CM'nin FM'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse CM, FM ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.11]**

Ve ikisi de rasyoneldir; öyleyse CM, MF yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır;

bu durumda CF ayrık olur. **[X.73]**

Şimdi de diyorum ki, ikinci türden ayrıktır.

Çünkü, FM, N'de ikiye bölünsün,

ve N'den CD'ye paralel NO çizilsin;

bu durumda FO, NL dikdörtgenlerinin her biri AG, GB dikdörtgenine eşit olur..

Şimdi, AG, GB dikdörtgeni AG, GB üzerindeki kareler arasında orta orantılı olduğundan,

ve AG üzerindeki kare CHye, AG, GB dikdörtgeni NL'ye, ve BG üzerindeki kare KL'ye eşit olduğundan,

NL alanı da CH, KL arasında orta orantılıdır;

bu durumda CH'nin NL'ye oranı, NL'nin KL'ye oranına eşit olur.

Ama, CH'nin NL'ye oranı, CK'nin NM'ye oranına, ve NL'nin KL'ye oranı da NM'nin MK'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse CK'nin NM'ye oranı, NM'nin KM'ye oranına eşittir; **[V.11]**

bu durumda CK, KM dikdörtgeni, NM üzerindeki kareye eşit olur, **[VI.17]**

yani FM üzerindeki karenin dörtte birine.

O zaman, CM, MF iki farklı doğrudur, CK, KM dikdörtgeni ise MF üzerindeki karenin dörtte birine eşittir ve doğruların daha büyüğü olan CM üzerine bir kare şekil kadar eksik çizilmiştir ve onu eşölçekli iki parçaya bölmüştür,

bu durumda CM üzerindeki kare MF üzerindeki kareden CM ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olur. **[X.17]**

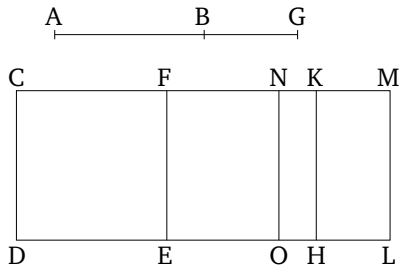
Ve FM eklentisi başta alınan CD rasyonel doğrusuyla uzunlukta eşölçeklidir;

öyleyse CF ikinci türden ayrıktır. **[Tan. X.12]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

99. Önerme:

Orta değer doğrunun ikinci ayrığı türünden bir doğru üzerindeki kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizildiğinde üçüncü türden ayrık bir genişlik oluşturur.



AB orta değer bir doğrunun ikinci ayrığı olsun, ve CD de rasyonel bir doğru olsun,

ve CD üzerine AB üzerindeki kareye eşit CE çizilsin, ve CF genişliği oluşsun;

diyorum ki, CF üçüncü türden ayrıktır.

Çünkü BG, AB'nin eklentisi olsun; bu durumda AG, GB yalnızca karede eşölçekli olan ve orta dğer bir dikdörtgen içeren orta değer iki doğru olur. **[X.75]**

CD üzerine AG üzerindeki kareye eşit CH çizilsin, ve CK genişliği oluşsun,

ve KH üzerine BG üzerindeki kareye eşit KL çizilsin, ve KM genişliği oluşsun;

öyleyse CL'nin tamamı AG, GB üzerindeki karelere eşittir;

bu durumda CL orta değer olur. **[X.15, DS. X.23]**

Ve CD rasyonel doğrusu üzerine çizilip CM genişliğini oluşturmuştur;

öyleyse CM rasyoneldir ve CD ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Şimdi, CL'nin tamamı AG, GB üzerindeki karelere eşit olduğundan, ve bunların içinde CE alanı AB üzerindeki kareye eşit olduğundan,

LF kalanı AG, GB dikdörtgeninin iki katına eşittir. **[II.7]**

FM, N'de iki eşit parçaya bölünsün, ve CD'ye paralel NO çizilsin;

bu durumda FO,NL dikdörtgenşlerinin her biri AG, GB dikdörtgenine eşit olur.

Ama AG, GB dikdörtgeni orta değerdir; öyleyse FL de orta değerdir.

Ve EF rasyonel doğrusu üzerine çizilmiş ve FM genişliğini oluşturmuştur;

öyleyse FM de rasyoneldir ve CD ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Ve, AG, GB yalnızca karede eşölçekli olduklarından, AG, GB ile uzunlukta eşölçeksizdir;

öyleyse AG üzerindeki kare de AG, GB dikdörtgeniyle eşölçeksizdir. **[VI.1, X.11]**

Ama AG, GB üzerindeki kareler AG üzerindeki kareyle,

ve AG, GB dikdörtgeninin iki katı AG, GB dikdörtgeniyle eşölçeklidir;

öyleyse AG, GB üzerindeki kareler AG, GB dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksizdir. **[X.13]**

Ama CL alanı AG, GB üzerindeki karelere, ve FL alanı da AG, GB dikdörtgeninin iki katına eşittir;

öyleyse CL de FL ile eşölçeksizdir.

Ama CL'nin FL'ye oranı, CM'nin FM'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

bu durumda CM, FM ile uzunlukta eşölçeksiz olur. **[X.11]**

Ve ikisi de rasyoneldir;

öyleyse CM, MF yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur;

bu durumda CF ayrık olur. **[X.73]**

Şimdi de diyorum ki, üçüncü türden bir ayrıktır.

Çünkü, AG üzerindeki kare GB üzerindeki kareyle eşölçekli olduğundan, CH de KL ile eşölçeklidir,

böylece CK de KM ile eşölçekli olur. **[VI.1, X.11]**

Ve AG, GB dikdörtgeni AG, GB üzerindeki kareler arasında orta orantılı olduğundan,

ve CH alanı AG üzerindeki kareye,

KL alanı GB üzerindeki kareye,

ve NL alanı da AG, GB dikdörtgenine eşit olduğundan,

NL de CH, KL arasında orta orantılıdır;

bu durumda CH'nin NL'ye oranı, NL'nin KL'ye oranına eşit olur.

Ama CH'nin NL'ye oranı, CK'nin NM'ye oranına,

ve NL'nin KL'ye oranı da NM'nin KM'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse CK'nin MN'ye oranı, MN'nin KM'ye oranına eşittir; **[V.11]**

bu durumda CK, KM dikdörtgeni MN üzerindeki kareye, yani FM üzerindeki karenin dörtte birine eşit olur.

O zaman, CM, MF iki farklı doğrudur, ve CM üzerine FM üzerindeki karenin dörtte birine eşit ve bir kare şekil kadar eksik bir paralelkenar çizilmiştir, ve bu çizim CM'yi eşölçekli parçalara bölmüştür,

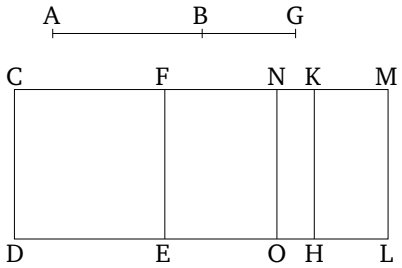
öyleyse CM üzerindeki kare MF üzerindeki kareden CM ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[X.17]**

Ve CM, MF doğrularının hibiri başta alınan CD rasyonel doğrusuyla eşölçekli değildir;

öyleyse CF üçüncü türden ayrıktır. **[Tan. X.13]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

100. Önerme:
Ufak türünden bir doğru üzerindeki kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizildiğinde dördüncü türden ayrık bir genişlik oluşturur.



AB ufak türünden birdoğru ve CD de rasyonel bir doğru olsun, ve CD rasyonel doğrusu üzerine AB üzerindeki kareye eşit CE çizilsin ve CF genişliği oluşsun;

diyorum ki, CF dördüncü türden ayrıktır.

Çünkü BG, AB'nin eklentisi olsun; bu durumda AG, GB karede eşölçeksiz olan, AG, GB üzerindeki karelerin toplamını rasyonel, ama AG, GB dikdörtgeninin iki katını orta değer yapan iki doğrudur. **[X.76]**

CD üzerine AG üzerindeki kareye eşit CH çizilsin, ve CK genişliği oluşsun,

ve BG üzerindeki kareye eşit KL çizilsin, ve KM genişliği oluşsun;

öyleyse CL'nin tamamı AG, GB üzerindeki karelere eşittir.

Ve AG, GB üzerindeki karelerin toplamı rasyoneldir; öyleyse CL de rasyoneldir.

Ve CD rasyonel doğrusu üzerine çizilip CM genişliğini oluşturmuştur;

öyleyse CM de rasyoneldir ve CD ile uzunlukta eşölçeklidir. **[X.20]**

Ve, CL'nin tamamı AG, GB üzerindeki karelere eşit olduğundan, ve bunların içinde CE alanı AB üzerindeki kareye eşit olduğundan,

LF kalanı AG, GB dikdörtgeninin iki katına eşittir. **[II.7]**

FM, N'de iki eşit parçaya bölünsün, ve N'den CD, ML doğrularından herhangi birine paralel NO çizilsin;

bu durumda FO, NL dikdörtgenlerinin her biri AG, GB dikdörtgenine eşit olur.

Ve AG, GB dikdörtgeninin iki katı orta değer olduğundan, ve de FL'ye eşit olduğundan,

FL de orta değerdir.

Ve FE rasyonel doğrusu üzerine çizilip FM genişliğini oluşturmuştur;

öyleyse FM rasyoneldir ve CD ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Ve, AG, GB üzerindeki karelerin toplamı rasyonel olduğundan, ve bu arada AG, GB dikdörtgeninin iki katı orta değer olduğundan,

AG, GB üzerindeki kareler AG, GB dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksizdir.

Ama, CL alanı AG, GB üzerindeki karelere eşittir, ve FL alanı da AG, GB dikdörtgeninin iki katına eşittir;

öyleyse CL, FL ile eşölçeksizdir.

Ama, CL'nin FL'ye oranı, CM'nin MF'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse CM, MF ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.11]**

Ve ikisi de rasyoneldir;

öyleyse CM, MF yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur;

bu durumda CF ayrık olur. **[X.73]**

Diyorum ki, aynı zamanda dördüncü türden ayrıktır.

Çünkü, AG, GB karede eşölçeksiz olduklarından, AG üzerindeki kare de GB üzerindeki kareyle eşölçeksizdir.

Ve, CH alanı AG üzerindeki kareye eşittir, ve KL alanı GB üzerindeki kareye eşittir;

bu durumda CH, KL ile eşölçeksiz olur.

Ama, CH'nin KL'ye oranı, CK'nin KM'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

bu durumda CK, KM ile uzunlukta eşölçeksiz olur. **[X.11]**

Ve, AG, GB dikdörtgeni AG, GB üzerindeki kareler arasında orta orantılı olduğundan,

ve AG üzerindeki kare CH'ye,

GB üzerindeki kare KL'ye,

ve AG, GB dikdörtgeni de NL'ye eşit olduğundan,

NL alanı CH, KL arasında orta orantılıdır;

öyleyse CH'nin NL'ye oranı, NL'nin KL'ye oranına eşittir.

Ama, CH'nin NL'ye oranı, CK'nin NM'ye oranına,

ve NL'nin KL'ye oranı, NM'nin KM'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse CK'nin MN'ye oranı, MN'nin KM'ye oranına eşittir; **[V.11]**

öyleyse CK, KM dikdörtgeni MN üzerindeki kareye eşittir, **[VI.7]**

yani FM üzerindeki karenin dörtte birine.

O zaman, CM, MF iki farklı doğru olduğundan, ve CM üzerine MF üzerindeki karenin dörtte birine eşit CK, KM dikdörtgeni bir kare şekil kadar eksik çizildiğinden, ve CM'yi eşölçeksiz parçalara ayırdığından,

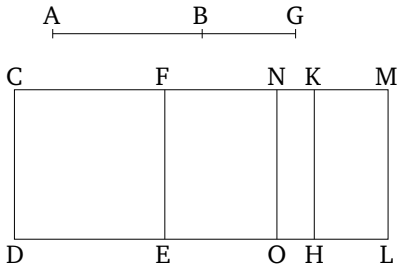
CM üzerindeki kare MF üzerindeki kareden CM ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[X.18]**

Ve CM'nin tamamı başta alınan CD rasyonel doğrusuyla eşölçeklidir;

öyleyse CF dördüncü türden ayrıktır. **[Tan. X.14]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

101. Önerme:
Rasyonel alanla orta değer bütün üreten türünden bir doğru üzerindeki kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizildiğinde beşinci türden ayrık bir genişlik oluşturur.



AB rasyonel alalnla orta değer bütün üreten bir doğru olsun, ve CD de rasyonel bir doğru olsun, ve CD üzerine AB üzerindeki kareye eşit CE çizilsin, CF genişliği oluşsun;

diyorum ki, CF beşinci türden ayrıktır.

Çünkü BG, AB'nin eklentisi olsun; bu durumda AG, GB üzerlerindeki karelerin toplamı orta değer ama içerdikleri dikdörtgenin iki katı rasyonel olan karede eşölçeksiz iki doğrudur. **[X.77]**

CD üzerine AG üzerindeki kareye eşit CH,

ve GB üzerindeki kareye eşit KL çizilsin;

öyleyse CL'nin tamamı AG, GB üzerindeki karelere eşittir.

Ama AG, GB üzerindeki karelerin toplamı orta değerdir; öyleyse CL orta değerdir.

Ve CD rasyonel doğrusu üzerine çizilmiş ve CM genişliğini oluşturmuştur;

öyleyse CM rasyoneldir ve CD ile eşölçeksizdir. **[X.22]**

Ve, CL'nin tamamı AG, GB üzerindeki karelere eşit olduğundan, ve bunların içinde CE alanı AB üzerindeki kareye eşit olduğundan,

LF kalanı AG, GB dikdörtgeninin iki katına eşittir. **[II.7]**

FM, N'de iki eşit parçaya bölünsün, ve N'den CD, ML doğrularından herhangi birine paralel NO çizilsin;

bu durumda FO, NL dikdörtgenlerinin her biri AG, GB dikdörtgenine eşit olur.

Ve, AG, GB diködrtgeninin iki katı rasyonel olduğundan, ve FL'ye eşit olduğundan, FL rasyoneldir.

Ve EF rasyonel doğrusu üzerine çizilmiş ve FM genişliğini oluşturmuştur;

öyleyse FM rasyoneldir ve CD ile uzunlukta eşölçeklidir. **[X.20]**

Şimdi, CL orta değer ve FL rasyonel olduğundan, CL, FL ile eşölçeksizdir.

Ama, CL'nin FL'ye oranı, CM'nin MF'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse CM, MF ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.11]**

Ve ikisi de rasyoneldir;

öyleyse CM, MF yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur;

bu durumda CF ayrık olur. **[X.73]**

Şimdi de diyorum ki, aynı zamanda beşinci türden ayrıktır.

Çünkü, benzer yolla CK, KM dikdörtgeninin MN üzerindeki kareye, yani FM üzerindeki karenin dörtte birine, eşit olduğunu kanıtlayabiliriz.

Ve AG üzerindeki kare GB üzerindeki kareyle eşölçeksiz olduğundan,

ve bu arada AG üzerindeki kare CH'ye, ve GB üzerindeki kare de KL'ye eşit olduğundan,

CH, KL ile eşölçeksizdir.

Ama CH'nin KL'ye oranı, CK'nin KM'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse CK, KM ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.11]**

O zaman, CM, MF iki farklı doğru olduğundan, ve CM üzerine FM üzerindeki karenin dörtte birine eşit bir paralelkenar bir kare şekil

kadar eksik çizildiğinden, ve CM'yi eşölçeksiz parçalara ayırdığından,

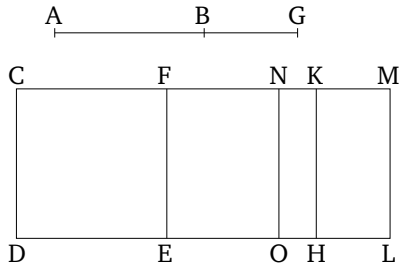
CM üzerindeki kare MF üzerindeki kareden CM ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[X.18]**

Ve FM eklentisi başta alınan CD rasyonel doğrusuyla eşölçeklidir;

öyleyse CF altıncı türden ayrıktır. **[Tan. X.15]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

102. Önerme:
Orta değer alanla orta değer bütün üreten türünden bir doğru üzerindeki kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizildiğinde altıncı türden ayrık bir genişlik oluşturur.



AB orta değer alanla orta değer bütün üreten türde bir doğru olsun, ve CD de rasyonel bir doğru olsun,

CD üzerine AB üzerindeki kareye eşit CE çizilsin ve CF genişliği oluşsun;

diyorum ki, CF altıncı türden ayrıktır.

Çünkü, BG, AB'nin eklentisi olsun; bu durumda AG, GB doğruları, üzerlerindeki karelerin toplamı ve AG, GB dikdörtgeni orta değer olan ve AG, GB üzerindeki karelerin AG, GB dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksiz olduğu iki eşölçeksiz doğrudur. **[X.78]**

Şimdi, CD üzerine AG üzerindeki kareye eşit CH çizilsin, CK genişliği oluşsun,

ve BG üzerindeki kareye eşit KL çizilsin;

öyleyse CL'nin tamamı AG, GB üzerindeki karelere eşittir;

bu durumda CL de orta değerdir.

Ve CD rasyonel doğrusu üzerine çizilmiş ve CM genişliğini oluşturmuştur;

bu durumda CM rasyoneldir ve CD ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Şimdi, CL alanı AG, GB üzerindeki karelere eşit olduğundan, ve bunların içinde CE alanı AB üzerindeki kareye eşit olduğundan,

LF kalanı AG, GB dikdörtgeninin iki katına eşittir. **[II.7]**

Ve AG, GB dikdörtgeninin iki katı orta değerdir; öyleyse FL de orta değerdir.

Ve FE rasyonel doğrusu üzerine çizilmiş ve FM genişliğini oluşturmuştur;

öyleyse FM de rasyoneldir ve CD ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Ve AG, GB üzerindeki kareler AG, GB dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksiz olduğundan,

ve CL alanı AG, GB üzerindeki karelere,

ve FL alanı da AG, GB dikdörtgeninin iki katına eşit olduğundan,

CL, FL ile eşölçeksizdir.

Ama CL'nin FL'ye oranı, CM'nin MF'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse CM, MF ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.11]**

Ve ikisi de rasyoneldir.

Öyleyse CM, MF yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur;

bu durumda CF ayrık olur. **[X.73]**

Şimdi de diyorum ki aynı zamanda altıncı türden ayrıktır.

Çünkü, FL alanı AG, GB dikdörtgeninin iki katına eşit olduğundan,

FM, N'de iki eşit parçaya bölünsün,

ve N'den CD'ye paralel NO çizilsin;

bu durumda FO, NL dikdörtgenlerinin her biri AG, GB dikdörtgenine eşit olur.

Ve AG, GB karede eşölçeksiz olduğundan, AG üzerindeki kare GB üzerindeki kareyle eşölçeksizdir.

Ama CH alanı AG üzerindeki kareye,

KL de GB üzerindeki kareye eşittir;

öyleyse CH, KL ile eşölçeksizdir.

Ama CH'nin KL'ye oranı, CK'nin KM'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

bu durumda CK, KM ile eşölçeksiz olur. **[X.11]**

ve AG, GB dikdörtgeni AG, GB üzerindeki kareler arasında orta orantılı olduğundan,

ve CH alanı AG üzerindeki kareye,

KL alanı GB üzerindeki kareye,

ve NL alanı da AG, GB dikdörtgenine eşit olduğundan,

NL de CH, KL arasında orta orantılıdır;

öyleyse CH'nin NL'ye oranı, NL'nin KL'ye oranına eşittir.

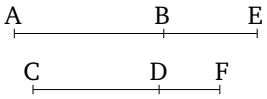
Ve daha öncekiyle aynı nedenden dolayı CM üzerindeki kare MF üzerindeki kareden CM ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[X.18]**

Ve hiç biri başta alınan CD rasyonel doğrusuyla eşölçekli değildir;

öyleyse CF altıncı türden ayrıktır. **[Tan. X.16]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

103. Önerme:
Ayrık bir doğruyla uzunlukta eşölçekli olan bir doğru kendisi de ayrıktır, ve aynı türdendir.



AB ayrık olsun, ve CD de AB ile uzunlukta eşölçekli olsun;

diyorum ki, CD de ayrıktır ve AB ile aynı türdendir.

Çünkü, AB ayrık olduğundan, eklentisi BE olsun; bu durumda AE, EB yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur. **[X.73]**

BE'nin DF'ye oranının AB'nin CD'ye oranına eşit olması sağlansın; **[VI.12]**

karşılıklı terimlerin oranları toplamların oranına eşit olduğundan, **[V.12]**

AE'nin tamamının CF'nin tamamına oranı, AB'nin tamamının CD'ye oranına eşittir.

Ama AB, CD ile uzunlukta eşölçeklidir.

Öyleyse AE, CF ile, ve BE de DF ile eşölçeklidir. **[X.11]**

Ve AE, EB yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır;

öyleyse CF, FD de yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır. **[X.13]**

Şimdi, AE'nin CF'ye oranı, BE'nin DF'ye oranına eşit olduğundan,

değiştirilmiş oranlar olarak AE'nin EB'ye oranı, CF'nin FD'ye oranına eşittir. **[V.16]**

Ve AE üzerindeki kare EB üzerindeki kareden AE ile eşölçekli olan bir doğru üzerindeki kare kadar, ya da onunla eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

O zaman, eğer AE üzerindeki kare EB üzerindeki kareden AE ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyükse, CF üzerindeki kare de FD üzerindeki kareden CF ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olacaktır. **[X.14]**

Ve eğer AE başta alınan rasyonel doğruyla eşölçekliyse, CF de öyledir, **[X.12]**

eğer BE eşölçekliyse, DF de eşölçeklidir, **[X.12]**

ve eğer AE, EB doğrularının hiçbiri başta alınan rasyonel doğruyla eşölçekli değilse, CF, FD doğrularının da hiçbiri başta alınan rasyonel doğruyla eşölçekli değildir. **[X.13]**

Ve, eğer AE üzerindeki kare EB üzerindeki kareden AE ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyükse, CF üzerindeki kare de FD üzerindeki kareden CF ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olacaktır. **[X.14]**

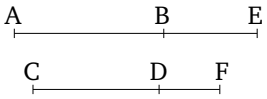
Ve eğer AE başta alınan rasyonel doğruyla eşölçekliyse, CF de öyledir, eğer BE eşölçekliyse, DF de eşölçeklidir, **[X.12]**

ve eğer AE, EB doğrularının hiçbiri başta alınan rasyonel doğruyla eşölçekli değilse, CF, FD doğrularının da hiçbiri başta alınan rasyonel doğruyla eşölçekli değildir. **[X.13]**

Öyleyse CD ayrıktır ve AB ile aynı türdendir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

104. Önerme:
Orta değer doğrunun ayrığı bir doğruyla uzunlukta eşölçekli olan bir doğru kendisi de orta değer doğrunun ayrığıdır, ve aynı türdendir.



AB orta değer doğrunun ayrığı olsun ve CD de AB ile uzunlukta eşölçekli olsun;

diyorum ki, CD de orta dğer doğrunun ayrığıdır ve AB ile aynı türdendir.

Çünkü, AB orta değer doğrunun ayrığı olduğundan, eklentisi EB olsun.

Bu durumda AE, EB yalnızca karede eşölçekli olan orta değer doğrulardır. **[X.74, X.75]**

AB'nin CD'ye oranının BE'nin DF'ye oranına eşit olması sağlansın; **[VI.12]**

bu durumda AE, CF ile, ve BE de DF ile eşölçekli olur. **[V.12, X.11]**

Ama AE, EB yalnızca karede eşölçekli olan orta değer doğrulardır;

öyleyse CF, FD de yalnızca karede eşölçekli **[X.13]**

orta değer doğrulardır; **[X.23]**

bu durumda CF orta değer doğrunun ayrığı olur. **[X.74, X.75]**

Şimdi de diyorum ki AB ile aynı türdendir.

AE'nin EB'ye oranı, CF'nin FD'ye oranına eşit olduğundan, AE üzerindeki karenin AE, EB dikdörtgenine oranı, CF üzerindeki karenin CF, FD dikdörtgenine oranına eşittir.

Ama AE üzerindeki kare CF üzerindeki kareyle eşölçeklidir;

öyleyse AE, EB dikdörtgeni de CF, FD dikdörtgeniyle eşölçeklidir. **[V.16, X.11]**

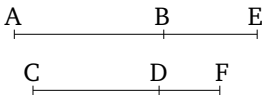
Öyleyse, AE, EB dikdörtgenni rasyonelse, CF, FD diködrtgeni de rasyoneldir, **[Tan. X.4]**

ve eğer AE, EB dikdörtgeni orta değerse, CF, FD dikdörtgeni de orta değerdir. **[DS. X.23]**

Öyleyse CD orta değer doğrunun ayrığıdır ve AB ile aynı türdendir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

105. Önerme:
Ufak bir doğruyla eşölçekli olan bir doğru kendisi de ufaktır.



AB ufak bir doğru olsun ve CD de AB ile eşölçekli olun;

diyorum ki, CD de ufaktır.

Önceki çizimin aynısı yapılsın;

o zaman, AE, EB karede eşölçeksiz olduğunda **[X.76]**

CF, FD de karede eşölçeksizdir. **[X.13]**

Şimdi, AE'nin EB'ye oranı, CF'nin FD'ye oranına eşit olduğundan, **[V.12, V.16]**

AE üzerindeki karenin EB üzerindeki kareye oranı da CF üzerindeki karenin FD üzerindeki kareye oranına eşittir. **[VI.22]**

Bu durumda birleşik oranlar olarak, AE, EB üzerindeki karelerin EB üzerindeki kareye oranı, CF, FD üzerindeki karelerin FD üzerindeki kareye oranına eşittir. **[V.18]**

Ama BE üzerindeki kare DF üzerindeki kareyle eşölçeklidir;

öyleyse AE, EB üzerindeki karelerin toplamı CF, FD üzerindeki karelerin toplamıyla eşölçeklidir. **[V.16, X.11]**

Ama AE, EB üzerindeki karelerin toplamı rasyoneldir; **[X.76]**

öyleyse CF, FD üzerindeki karelerin toplamı da rasyoneldir. **[Tan. X.4]**

Yine, AE üzerindeki karenin AE, EB dikdörtgenine oranı, CF üzerindeki karenin CF, FD dikdörtgenine oranına eşit olduğundan,

ve bu arada AE üzerindeki kare CF üzerindeki kareyle eşölçekli olduğundan,

AE, EB dikdörtgeni de CF, FD dikdörtgeniyle eşölçeklidir.

Ama AE, EB dikdörtgeni orta değerdir; **[X.76]**

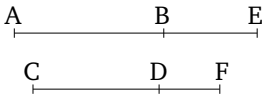
öyleyse CF, FD dikdörtgeni de orta değerdir; **[DS. X.23]**

öyleyse CF, FD doğruları üzerlerindeki karelerin toplamları rasyonel ama içerdikleri dikdörtgen orta değer olan karede eşölçeksiz doğrulardır.

Öyleyse CD ufaktır. **[X.76]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

106. Önerme:
Rasyonel alanla orta değer bütün üreten türden bir doğruyla eşölçekli olan bir doğru kendisi de rasyonel alanla orta değer bütün üreten türdendir.



AB rasyonel alanla orta değer bütün üreten doğru olsun, ve CD de AB ile eşölçekli olsun;

diyorum ki, CD de rasyonel alanla orta değer bütün üreten türden bir doğrudur.

Çünkü, BE, AB'nin eklentisi olsun; bu durumda AE, EB üzerlerindeki karelerin toplamı orta değer olan ama içerdikleri dikdörtgen rasyonel olan karede eşölçeksiz iki doğrudur. **[X.77]**

Aynı çizim yapılsın.

O zaman, daha öncekine benzer yollardan

CF, FD'nin AE, EB ile aynı oranda olduğunu,

AE, EB üzerindeki karelerin toplamının CF, FD üzerindeki karelerin toplamıyla,

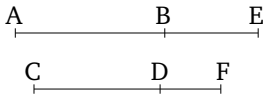
ve AE, EB dikdörtgeninin CF, FD dikdörtgeniyle eşölçekli olduğunu kanıtlayabiliriz;

böylece CF, FD doğruları CF, FD üzerindeki karelerin toplamı orta değer ama içerdikleri dikdörtgen rasyonel olan karede eşölçeksiz iki doğrudur.

Öyleyse CD rasyonel alanla orta değer bütün üreten türden bir doğrudur. **[X.77]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

107. Önerme:
Orta değer alanla orta değer bütün üreten türden bir doğruyla eşölçekli olan bir doğru kendisi de orta değer alanla orta değer bütün üreten türdendir.



AB orta değer alanla orta değer bütün üreten doğru olsun, ve CD de AB ile eşölçekli olsun;

diyorum ki, CD de orta değer alanla orta değer bütün üreten türden bir doğrudur.

Çünkü, BE, AB'nin eklentisi olsun, ve aynı çizim yapılsın; bu durumda AE, EB doğruları üzerlerindeki karelerin toplamları ve içerdikleri dikdörtgen orta değer olan ve ayrıca üzerlerindeki karelerin toplamları içerdikleri dikdörtgenle eşölçeksiz olan karede eşölçeksiz iki doğrudur. **[X.78]**

Şimdi, daha önce kanıtlanmış olduğu gibi

AE, EB ile CF, FD,

AE, EB üzerindeki karelerin toplamıyla CF, FD üzerindeki karelerin toplamı,

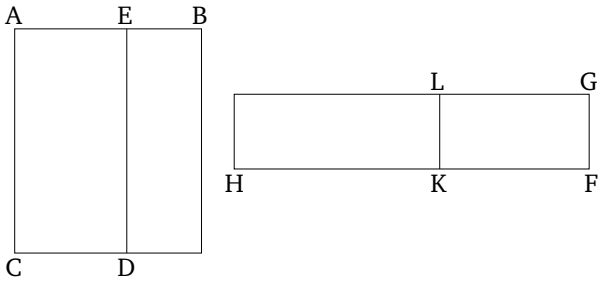
ve AE, EB dikdörtgeniyle CF, FD dikdörtgeni eşölçeklidir;

öyleyse CF, FD doğruları da üzerlerindeki karelerin toplamı ve içerdikleri dikdörtgen orta değer olan ve ayrıca üzerlerindeki karelerin toplamı içerdikleri dikdörtgenle eşölçeksiz olan karede eşölçeksiz iki doğrudur.

Öyleyse CD orta değer alanla orta değer bütün üreten türden bir doğrudur. **[X.78]**

Bundan dolayı vs …
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

108. Önerme:
Rasyonel bir alandan orta değer bir alan çıkartıldığında, kalan alana eşit olan karenin kenarı iki irrasyonel doğrudan biri olur, ya ayrıktır ya da ufaktır.



BC rasyonel alanından BD orta değer alnı çıkartılsın;

diyorum ki, EC kalanına eşit karenin kenarı iki irrasyonel doğrudan biridir, ya ayrıktır ya da ufaktır.

Çünkü, bir FG rasyonel doğrusu alınsın, ve FG üzerine BC'ye eşit GH dikdörtgeni çizilsin,

ve DB'ye eşit GK çıkartılsın; bu durumda EC kalanı LH'ye eşit olur.

O zaman, BC rasyonel, ve BD orta değer olduğundan,

ve bu arada BC, GH'ye, ve BD, GK'ye eşit olduğundan,

GH rasyoneldir, ve GK orta değerdir.

Ve bunlar FG rasyonel doğrusu üzerine çizilmiştir;

öyleyse FH rasyoneldir ve FG ile uzunlukta eşölçeklidir, **[X.20]**

ve bu arada FK rasyoneldir ve FG ile uzunlukta eşölçeksizdir; **[X.22]**

bu durumda FH, FK ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.13]**

Öyleyse FH, FK yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur;

bu durumda KH ayrık olur, **[X.73]**

ve KF de onun eklentisi olur.

Şimdi, HF üzerindeki kare FK üzerindeki kareden HF ile eşölçekli ya da eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

Önce üzerindeki kare onunla eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olsun.

Şimdi HF'nin tamamı başta alınan FG rasyonel doğrusuyla uzunlukta eşölçeklidir;

bu durumda KH birinci türden ayrık olur. **[Tan. X.11]**

Ama rasyonel bir doğruyla birinci türden ayrık bir doğrunun içerdiği dikdörtgenin alanına eşit karenin kenarı ayrıktır. **[X.91]**

Öyleyse LH'ye, yani EC'ye, eşit karenin kenarı ayrıktır.

Ama, eğer HF üzerindeki kare FK üzerindeki kareden HF ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyükse,

FH'nin tamamı başta alınan FG rasyonel doğrusuyla uzunlukta eşölçekli olduğundan,

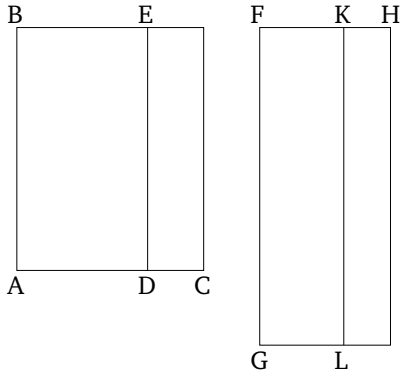
KH dördüncü türden ayrıktır. **[Tan. X.14]**

Ama rasyonel bir doğruyla dördüncü türden ayrık bir doğrunun içerdiği dikdörtgene eşit karenin kenarı ufaktır. **[X.94]**

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

109. Önerme:

Orta değer bir alandan rasyonel bir alan çıkartıldığında, kalan alana eşit olan karenin kenarı irrasyoneldir ve ya orta değer doğrunun birinci ayrığıdır ya da rasyonel alanla orta değer bütün üreten türdendir.



BC orta değer alanından BD rasyonel doğrusu çıkarılsın;

diyorum ki, EC kalanına eşit karenin kenarı iki irrasyonel doğrudan bir olur, ya orta değer doğrunun birinci ayrığı ya da rasyonel alanla orta değer bütün üreten.

Çünkü, bir FG rasyonel doğrusu alınsın, ve alanlar benzer şekilde çizilsin.

O zaman buradan FH'nin rasyonel olduğu ve FG ile uzunlukta eşölçeksiz olduğu,

ve bu arada KF'nin rasyonel olduğu ve FG ile uzunlukta eşölçekli olduğu çıkar.

öyleyse FH, FK yalnızca karede eşölçekli olan iki rasyonel doğrudur; **[X.13]**

bu durumda KH ayrık olur ve FK de onun eklentisi olur. **[X.73]**

Şimdi, HF üzerindeki kare FK üzerindeki kareden ya HF ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar ya da onunla eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

O zaman, eğer HF üzerindeki kare FK üzerindeki kareden HF ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyükse,

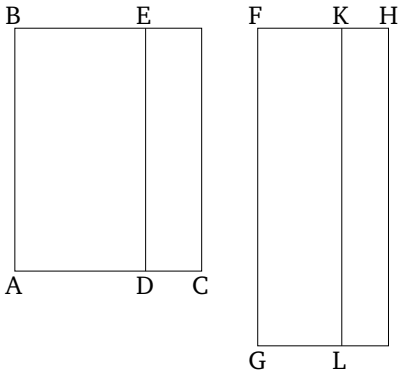
ve bu arada FK eklentisi başta alınan FG rasyonel doğrusuyla uzunlukta eşölçekli olduğundan,

KH ikinci türden ayrıktır. **[Tan. X.12]**

Ama FG rasyoneldir; bu yüzden LH'ye, yani EC'ye eşit karenin kenarı rasyonel alanla orta değer bütün üreten türden olur. **[X.95]**

110. Önerme:

Orta değer bir alandan bütünle eşölçeksiz orta değer bir alan çıkartıldığında, kalan alana eşit olan karenin kenarı irrasyoneldir ve ya orta değer doğrunun ikinci ayrığıdır ya da orta değer alanla orta değer bütün üreten türdendir.



Çünkü, daha önceki şekillerde olduğu gibi, BC orta değer alanından bütünle eşölçeksiz BD orta değer alnı çıkartılsın;

diyorum ki, EC kalanına eşit karenin kenarı iki tür irrasyonel doğrudan biridir, ya orta değer doğrunun ikinci ayrığı, ya da orta değer alanla orta değer bütün üreten türden bir doğru.

Çünkü, BC, BD dikdörtgenlerinin her biri orta değer olduğundan, ve BC, BD ile eşölçeksiz olduğundan, FH, FK doğrularının her birinin rasyonel olacağı ve FG ile uzunlukta eşölçeksiz olacağı görülür. **[X.22]**

Ve, BC, BD ile eşölçeksiz olduğundan, yani GH, GK ile,

HF de FK ile eşölçeksizdir; **[VI.1, X.11]**

öyleyse FH, FK yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır;

bu durumda KH ayrık olur. **[X.73]**

O zaman, eğer FH üzerindeki kare FK üzerindeki kareden FH ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyükse,

ve bu arada FH, FK doğrularının hiçbiri başta alınan FG rasyonel doğrusuyla eşölçekli olmadığından,

KH üçüncü türden ayrıktır. **[Tan. X.13]**

Ama KL rasyoneldir, ve rasyonel bir doğruyla üçüncü türden ayrık bir doğrunun içerdiği dikdörtgen irrasyoneldir,

ve ona eşit karenin kenarı da irrasyonel olur ve ona orta değer doğrunun ikinci ayrığı denir; **[X.93]**

bu yüzden LH'ye, yani EC'ye eşit karenin kenarı orta değer doğrunun ikinci ayrığıdır.

Ama eğer FH üzerindeki kare FK üzerindeki kareden FH ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyükse,

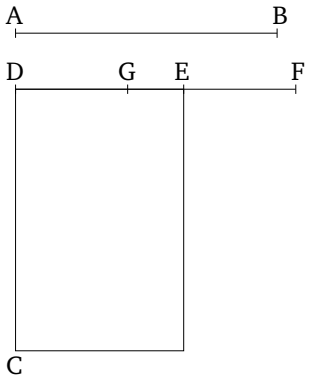
KH altıncı türden ayrık olur. **[Tan. X.16]**

Ama rasyonel bir doğruyla altıncı türden ayrık bir doğrunun içerdiği dikdörtgene eşit karenin kenarı orta değer alanla orta değer bütün üreten türden bir doğrudur. **[X.96]**

Öyleyse LH'ye, yani EC'ye eşit karenin kenarı orta değer alalnla orta değer bütün üreten türden bir doğrudur.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

111. Önerme:
Ayrık bir doğru iki parçalı bir doğruya eşit olamaz.



AB ayrık olsun;

diyorum ki, AB iki parçalı bir doğruya eşit olamaz.

Çünkü, eğer mümkünse, öyle olsun;

bir DC rasyonel doğrusu alınsın, CD üzerine AB üzerindeki kareye eşit CE çizilsin, DE genişliği oluşsun.

O zaman, AB ayrık olduğundan, DE birinci türden ayrıktır. **[X.97]**

Eklentisi EF olsun; bu durumda DF, FE yalnızca karede eşölçekli olan rasyonel doğrulardır,

DF üzerindeki kare FE üzerindeki kareden DF ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür,

ve DF başta alınan DC rasyonel doğrusuyla uzunlukta eşölçeklidir. **[Tan. X.11]**

Yine, AB iki parçalı olduğundan, DE birinci türden iki parçalıdır. **[X.60]**

G'de parçalarına ayrılsın, ve DG büyük parça olsun; bu durumda DG, GE yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır,

DG üzerindeki kare GE üzerindeki kareden DG ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür,

ve daha büyük olan DG parçası başta alınan DC rasyonel doğrusuyla uzunlukta eşölçeklidir. **[Tan. X.5]**

Öyleyse DF, DG ile de uzunlukta eşölçeklidir; **[X.12]**

bu durmda GF kalanı da DF ile uzunlukta eşölçeklidir. **[X.15]**

Ama DF, EF ile uzunlukta eşölçeksizdir; öyleyse FG de EF ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.13]**

Öyleyse GF, FE yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır; bu durumda EG ayrık olur. **[X.73]**

Ama rasyoneldir de: bu olamaz.

Öyleyse ayrık bir doğru iki parçalı bir doğruya eşit olamaz.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

Ayrık ve ondan sonra gelen irrasyonel doğrular ne orta değer doğrularla ne de birbirleriyle aynıdır.

Çünkü orta değer bir doğru üzerindeki kare, eğer rasyonel bir doğru üzerine çizilirse, genişlik olarak çizildiği doğruyla eşölçeksiz bir rasyonel doğru oluşturur, **[X.22]**

ama bir ayrık üzerindeki kare, eğer rasyonel bir doğruya çizilirse, genişlik olarak birinci türden ayrık oluşturur, **[X.97]**

orta değer doğrunun birinci ayrığı üzerindeki kare, eğer bir rasyonel doğru üzerine çizilirse, genişlik olarak ikinci ayrık oluşturur, **[X.98]**

orta değer doğrunun ikinci ayrığı üzerindeki kare, eğer rasyonel bir doğru üzerine çizilirse, genişlik olarak üçüncü türden ayrık oluşturur, **[X.99]**

ufak doğrunun üzerindeki kare, eğer rasyonel bir doğru üzerine çizilirse, genişlik olarak dördüncü türden ayrık oluşturur, **[X.100]**

rasyonel alanla orta değer bütün üreten türden doğrunun üzerindeki kare, eğer rasyonel bir doğru üzerine çizilirse, genişlik olarak beşinci türden ayrık oluşturur, **[X.101]**

ve üstün doğrunun üzerindeki kare, eğer rasyonel bir doğru üzerine çizilirse, genişlik olarak altıncı türden ayrık oluşturur. **[X.102]**

O zaman, sözü edilen genişlikler birinciden ve birbirinden farklı olduğundan, birinciden çünkü o rasyoneldir, ve birbirlerinden çünkü aynı türden değiller,

açıktır ki irrasyonel doğruların kendileri de birbirinden farklıdır.

Ve ayrığın iki parçalı doğruylla aynı olmadığı kanıtlandığından, **[X.111]**

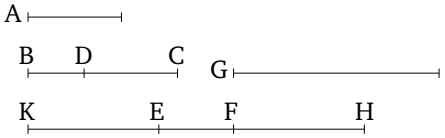
ama rasyonel doğru üzerine uygulandıklarında, ayrığı takip eden doğrular genişlik olarak kendi türüne göre ayrıklar, ve iki parçalı doğruyu takip eden doğrular da kendi türlerine göre iki parçalı doğruları genişlik olarak oluşturduklarından,

ayrığı takip edenler farklıdır, ve iki parçalı doğruyu takip edenler farklıdır, böylece toplam olarak sırayla on üç irrasyonel doğru vardır,

Orta değer,
İki parçalı,
Birinci türden iki ortalı,
İkinci türden iki ortalı,
Üstün,
Rasyonel artı orta alan kenarı,
İki orta alan toplamı kenarı,
Ayrık,
Orta değer doğrunun birinci ayrığı,
Orta değer doğrunun ikinci ayrığı,
Ufak,
Rasyonel alanla orta değer üreten,
Orta değer alanla orta değer bütün üreten.

112. Önerme:

Rasyonel bir doğru üzerindeki kareye eşit bir dikdörtgen iki parçalı doğru üzerine çizildiğinde genişlik olarak parçaları iki parçalı doğrunun parçalarıyla eşölçekli ve aynı oranda olan bir ayrık oluşturur; ve ayrıca bu şekilde oluşan ayrığın türü iki parçalı doğrunun türüyle aynıdır.



A rasyonel bir doğru olsun, BC iki parçalı olsun, ve DC onun büyük parçası olsun;

BC, EF dikdörtgeni A üzerindeki kareye eşit olsun;

diyorum ki, EF, parçaları CD, DB ile eşölçekli ve aynı oranda olan bir ayrıktır, ve ayrıca EF'nin türü BC'nin türüyle aynı olacaktır.

Çünkü yine BD, G dikdörtgeni A üzerindeki kareye eşit olsun.

O zaman BC, EF dikdörtgeni BD, G dikdörtgenine eşit olduğundan, CB'nin BD'ye oranı, G'nin EF'ye oranına eşit olur. **[VI.16]**

Ama CB, BDden büyüktür; öyleyse G de EF'den büyüktür. **[V.16, V.14]**

EH, G'ye eşit olsun; o zaman CB'nin BDye oranı, HE'nin EF'ye oranına eşit olur;

bu durumda ayrışık oranlar olarak, CD'nin BD'ye oranı, HF'nin FEye oranına eşit olur. **[V.17]**

HF'nin FE'ye oranının FK'nin KE'ye oranına eşit olması sağlansın;

bu durumda HK'nin tamamının KF'nin tamamına oranı, FK'nin KEye oranına eşit olur;

çünkü, bir öncülün bir ardıla oranı, öncüllerin tamamının ardılların tamamına oranına eşittir. **[V.12]**

Ama, FK'nin KE'ye oranı, CD'nin DB'ye oranına eşittir; **[V.11]**

öyleyse HK'nin KF'ye oranı, CD'nin DB'ye oranına eşittir. **[V.11]**

Ama CD üzerindeki kare DB üzerindeki kareyle eşölçeklidir; **[X.36]**

öyleyse HK üzerindeki kare de KF üzerindeki kareyle eşölçeklidir. **[VI.22, X.11]**

Ve, HK üzerindeki karenin KF üzerindeki kareye oranı, HK'nin KE'ye oranına eşittir, çünkü üç doğru HK, KF, KE orantılıdır. **[Tan. V.9]**

Öyleyse HK, KE ile uzunlukta eşölçeklidir, böylece HE de EK ile uzunlukta eşölçekli olur. **[X.15]**

Şimdi, A üzerindeki kare EH, BD dikdörtgenine eşit olduğundan,

ve bu arada A üzerindeki kare rasyonel olduğundan,

EH, BD dikdörtgeni de rasyoneldir.

Ve BD rasyonel doğrusu üzerine çizilmiştir;

öyleyse EH rasyoneldir ve BD ile uzunlukta eşölçeklidir; **[X.20]**

böylece EK de, onunla eşölçekli olduğundan, rasyoneldir ve BD ile uzunlukta eşölçeklidir.

O zaman, CD'nin DB'ye oranı, FK'nin KE'ye oranına eşit olduğundan,

ve bu arada CD, DB doğruları yalnızca karede eşölçekli olduğundan,

FK, KE de yalnızca karede eşölçeklidir. **[X.11]**

Ama KE rasyoneldir; öyleyse FK de rasyoneldir.

Öyleyse FK, KE yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır;

bu durumda EF ayrık olur. **[X.73]**

Şimdi, CD üzerindeki kare DB üzerindeki kareden ya CD ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar ya da onunla eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

O zaman eğer CD üzerindeki kare DB üzerindeki kareden CD ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyükse,

FK üzerindeki kare de KE üzerindeki kareden FK ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[X.14]**

Ve eğer başta alınan rasyonel doğruyla CD eşölçekliyse, FK de öyledir; **[X.11, X.12]**

eğer BD eşölçekliyse, KE de öyledir; **[X.12]**

ama eğer CD, DB doğrularının hiçbiri bu şekilde eşölçekli değilse FK, KE'nin de hiçbiri değildir.

Ama eğer CD üzerindeki kare DB üzerindeki kareden CD ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyükse,

FK üzerindeki kare de KE üzerindeki kareden FK ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[X.14]**

Ve eğer başta alınan rasyonel doğruyla CD eşölçekliyse, FK de öyledir;

eğer BD bu şekilde eşölçekliyse, KE de öyledir;

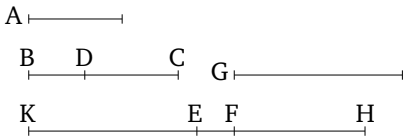
ama CD, DB doğrularının hiçbiri bu şekilde eşölçekli değilse, FK, KE doğrularının da hiçbiri değildir;

Böylece FE, parçaları olan FK, KE'nin iki parçalı doğrunun parçaları olan CD, DB ile eşölçekli ve aynı oranda olduğu bir ayrıktır, ve BC ile aynı türdendir.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

113. Önerme:

Rasyonel bir doğru üzerindeki kareye eşit bir dikdörtgen ayrık üzerine çizildiğinde genişlik olarak parçaları ayrığın parçalarıyla eşölçekli ve aynı oranda olan iki parçalı doğru oluşturur; ve ayrıca bu şekilde oluşan iki parçalının türü ayrığın türüyle aynıdır.



A rasyonel bir doğru olsun, BD bir ayrık olsun, ve BD, KH dikdörtgeni A üzerindeki kareye eşit olsun, öyle ki A üzerindeki kare BD ayrığı üzerine çizilince KH genişliği oluşsun:

diyorum ki, KH, parçaları BD'nin parçalarıyla eşölçekli ve aynı oranda olan iki parçalı doğrudur, ve ayrıca KH'nin türü BD'ninkiyle aynıdır.

Çünkü, DC, BD'nin eklentisi olsun; bu durumda BC, CD yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır. **[X.73]**

BC, G dikdörtgeni A üzerindeki kareye eşit olsun.

Ama A üzerindeki kare rasyoneldir;

öyleyse BC, G dikdörtgeni de rasyoneldir.

Ve BC rasyonel doğrusu üzerine çizilmiştir;

öyleyse G rasyoneldir ve BC ile uzunlukta eşölçeklidir. **[X.20]**

Şimdi BC, G dikdörtgeni BD, KH dikdörtgenine eşit olduğundan,

orantı olarak, CB'nin BD'ye oranı, KH'nin G'ye oranına eşittir. **[VI.16]**

Ama BC, BD'den büyüktür; öyleyse KH de G'den büyüktür. **[V.16, V.14]**

KE, G'ye eşit çizilsin; bu durumda KE, BC ile uzunlukta eşölçeklidir.

Ve CB'nin BD'ye oranı, HK'nin KE'ye oranına eşit olduğundan,

çevrilmiş oranlar olarak, BC'nin CD'ye oranı, KH'nin HE'ye oranına eşittir. **[DS. V.19]**

KH'nin HE'ye oranının HF'nin FEye oranına eşit olması sağlansın;

bu durumda kalanlar olarak KF'nin FH'ye oranı, KH'nin HE'ye oranına eşit olur, yani BC'nin CDye oranına. **[V.19]**

Ama BC, CD yalnızca karede eşölçeklidir; öyleyse KF, FH de yalnızca karede eşölçeklidir. **[X.11]**

Ve, KH'nin HE'ye oranı, KF'nin FH'ye oranına eşit olduğundan, ve bu arada KH'nin HE'ye oranı, HF'nin FE'ye oranına eşit olduğundan,

KF'nin FH'ye oranı, HF'nin FE'ye oranına eşittir, **[V.11]**

böylece birincinin üçüncüye oranı, birincinin üzerindeki karenin ikincinin üzerindeki kareye oranına eşit olur; **[Tan. V.9]**

bu durumda KF'nin FE'ye oranı, KF üzerindeki karenin FH üzerindeki kareye oranına eşit olur.

Ama KF üzerindeki kare FH üzerindeki kareyle eşölçeklidir, çünkü KF, FH karede eşölçeklidir;

öyleyse KF de FE ile uzunlukta eşölçeklidir, **[X.11]**

böylece KF, KE ile de uzunlukta eşölçekli olur. **[X.15]**

Ama KE rasyoneldir ve BC ile uzunlukta eşölçeklidir; öyleyse KF de rasyoneldir ve BC ile uzunlukta eşölçeklidir. **[X.12]**

Ve BC'nin CD'ye oranı, KF'nin FHye oranına eşit olduğundan,

değiştirilmiş oranlar olarak, BC'nin KF'ye oranı, DC'nin FH'ye oranına eşittir. **[V.16]**

Ama BC, KFileeşölçeklidir; öyleyseFH de CD ile uzunlukta eşölçeklidir. **[X.11]**

Ama BC, CD yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır; öyleyse KF, H de rasyonel doğrulardır **[Tan. X.3]**

ve yalnızca karede eşölçeklidirler;

bu durumda KH iki parçalı olur. **[X.36]**

Şimdi eğer BC üzerindeki kare CD üzerindeki kareden BC ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyükse,

KF üzerindeki kare de FH üzerindeki kareden KF ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[X.14]**

Ve eğer CD, başta alınan rasyonel doğruyla uzunlukta eşölçekliyse, FH de öyledir,

ama BC, CD doğrularının hiçbiri değilse, KF,FH doğrularının da hiçbiri değildir.

Ama eğer BC üzerindeki kare CD üzerindeki kareden BC ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyükse,

KFüzerindekikaredeFHüzerindekikaredenKF ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[X.14]**

Ve eğer BC, başta alınan rasyonel doğruyla eşölçekliyse, KF de öyledir;

eğer CD eşölçekliyse, FH de öyledir;

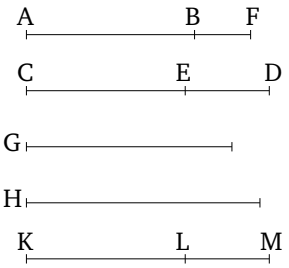
ama BC, CD doğrularının hiçbiri değilse, KF, FH doğrularının da hiçbiri değildir.

Öyleyse KH, parçaları KF, FH'nin ayrığın parçaları BC, CD ile eşölçekli ve aynı oranda olduğu iki parçalı bir doğrudur, ve ayrıca KH'nin türü BD'nin türüyle aynıdır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

114. Önerme:

Karşılıklı olarak parçaları eşölçekli ve aynı oranda olan bir ayrık doğruyla iki parçalı bir doğrunun içerdiği dikdörtgene eşit olan karenin kenarı rasyoneldir.



AB, CD dikdörtgeni AB ayrığıyla CD iki parçalısı tarafından içerilsin,

ve iki parçalının CE, ED parçaları ayrığın AF, FB parçalarıyla eşölçekli ve aynı oranda olsun;

ve AB, CD dikdörtgenine eşit kareninin kenarı G olsun;

diyorum ki, G rasyoneldir.

Çünkü, bir H rasyonel doğrusu alınsın,

ve CD üzerine H üzerindeki kareye eşit bir dikdörtgen çizilerek KL genişliği oluşturulsun.

Bu durumda KL ayrıktır.

Parçaları KM, ML iki parçalı doğrunun parçaları CE, ED ile eşölçekli ve aynı oranda olsun. **[X.112]**

Ama CE, ED aynı zamanda AF, FB ile de eşölçekli ve aynı orandadır;

öyleyse AF'nin FB'ye oranı, KM'nin ML'ye oranına eşittir.

Öyleyse değiştirilmiş oranlar olarak, AF'nin KM'ye oranı, BF'nin LM'ye oranına eşittir;

bu durumda kalanlar olarak, AB'nin KL'ye oranı da AF'nin KM'ye oranına eşit olur. **[V.19]**

Ama AF, KM ile eşölçeklidir; **[X.12]**

öyleyse AB de KL ile eşölçeklidir. **[X.11]**

Ve AB'nin KL'ye oranı, CD, AB dikdörtgeninin CD, KL dikdörtgenine oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse CD, AB dikdörtgeni de CD, KL dikdörtgeniyle eşölçeklidir. **[XZ.11]**

Ama CD, KL dikdörtgeni H üzerindeki kareye eşittir; öyleyse CD, AB dikdörtgeni H üzerindeki kareyle eşölçeklidir.

Ama G üzerindeki kare CD, AB dikdörtgenine eşittir; öyleyse G üzerindeki kare H üzerindeki kareyle eşölçeklidir.

Ama H üzerindeki kare rasyoneldir; öyleyse G üzerindeki kare de rasyoneldir;

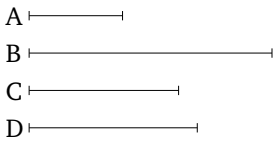
bu durumda G rasyonel olur.

Ve CD, AB dikdörtgenine eşit karenin kenarıdır.

Bundan dolayı vs ...
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

Doğal Sonuç: Ve bu sayede açıkça görülür ki rasyonel bir alan irrasyonel kenarlar tarafından içerilebilir.

115. Önerme:
Orta değer bir doğruyla başlayarak, hiçbiri daha öncekilerden biriyle aynı olmayan sonsuz sayıda irrasyonel doğru türetilebilir.



A orta değer bir doğru olsun;

diyorum ki, A'dan başlayarak hiçbiri daha öncekilere eşit olmayan sonsuz sayıda irrasyonel doğru türetilebilir.

Bir B rasyonel doğrusu alınsın, ve C üzerindeki kare B, A dikdörtgenine eşit olsun;

bu durumda C irrasyonel olur; **[Tan. X.4]**

çünkü bir irrasyonel ve bir rasyonel doğru tarafından içerilen alan irrasyoneldir. **[X.20]**

Ve daha öncekilerin hiçbiriyle aynı değildir; çünkü daha öncekilerden hiçbirinin üzerindeki kare, eğer rasyonel bir doğru üzerine çizilirse genişlik olarak orta değer bir doğru vermez.

Yine, D üzerindeki kare B, C dikdörtgenine eşit olsun; öyleyse D üzerindeki kare irrasyoneldir. **[X.20]**

Bu durumda D irrasyonel olur; **[Tan. X.4]**

ve daha öncekilerden hiçbiriyle aynı değildir, çünkü daha öncekilerden hiçbirinin üzerindeki kare, eğer rasyonel bir doğru üzerine çizilirse genişlik olarak C'yi vermez.

Benzer şekilde, eğer bu düzen durmaksızın sürdürülürse, açıktır ki orta değer bir doğrudan başlayıp sonsuz sayıda irrasyonel doğru türetilir ve bunların hiçbiri daha öncekilerden biriyle aynı olmaz.

Bundan dolayı vs …
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. QED

Kitap XI

1. Tanımlar

1 Uzunluğu, genişliği ve derinliği olana **cisim** denir.

2 Cismin sınırı yüzeydir.

3 Bir doğru bir düzleme değdiği noktadan geçen ve düzlemde bulunan tüm doğrulara dikse, bu doğru o **düzleme diktir** denir.

4 Bir düzlemin içindeki doğrular arasında o düzlemin bir diğer düzlemle kesiştiği doğruya dik olanların hepsi diğer düzleme dikse, o **düzlem diğer düzleme diktir** denir.

5 **Bir doğrunun bir düzlemle yaptığı açı**, o doğrunun düzlemde olmayan ucundan düzleme çizilen dikmenin düzlemi kestiği noktadan o doğrunun düzlemde olan ucuna çizilen doğruyla baştaki doğrunun yaptığı açıdır.

6 **Bir düzlemin bir başka düzlemle yaptığı açı**, bu iki düzlemin kesiştiği doğruya bu doğru üzerindeki bir noktada dik olacak şekilde çizilen ve biri bir düzlemde öbürü de diğer düzlemde olan iki doğrunun arasındaki dar açıdır.

7 Bir düzlemin bir diğer düzlemle yaptığı açı bir başka düzlemin daha başka bir düzlemle yaptığı açıya eşitse bu **düzlemler eşit açılıdır** denir.

8 Kesişmeyen düzlemlere **paralel düzlemler** denir.

9 Eşit sayıda benzer düzlem şekilleri içinde kalan cisimlere **benzer cisimler** denir.

10 Eşit sayıda ve aynı nicelikte benzer düzlem şekilleri içinde kalan cisimlere **eşit ve benzer cisimler** denir.

11 Aynı düzlemde olmayan ve ortak bir noktadan geçen düzlemlerin arasında kalan açıya **çokyüzlü açı** denir.

[Öklid bu tanımı önce "aynı yüzeyde olmayan ve kesişen ikiden fazla çizginin oluşturduğu açı" olarak tanımlar ve sonra ona eşdeğer olarak yukardaki tanımı verir. İki tanımın eşanlamlı oladuğu tartışmalıdır.]

12 Kenarları doğrulardan oluşan bir düzlem şeklinin kenarlarından geçen ve bu düzlemin dışındaki sabit bir noktadan geçen düzlemler ve bu düzlem şeklin arasında kalan cisime **piramit** denir.

13 İki karşılıklı kenarı paralel, benzer ve eşit olan, diğer kenarları paralelogram olan cisime **prizma** denir.

14 Bir yarım daire çapı etrafında döndürülüp yine başladığı konuma geri getirildiğinde oluşan cisime **küre** denir.

15 Küre elde edilirken sabit kalan ve yarı dairenin etrafında döndürüldüğü doğruya **kürenin ekseni** denir.

16 **Kürenin merkezi** yarım daireninkiyle aynıdır.

17 Kürenin merkezinden geçen ve her iki yönde de küre tarafından kesilen doğru parçasına **kürenin çapı** denir.

18 Dik açılı bir üçgen dik kenarlardan biri etrafında döndürülüp yine başladığı konuma geri getirildiğinde oluşan cisme **koni** denir.
Sabit kalan dik kenar döndürülen diğer dik kenara eşitse bu koniye **dik açılı koni**, ondan küçükse **dar açılı koni**, büyükse **geniş açılı koni** denir.

19 Üçgen döndürülürken sabit kalan dik kenara **koninin ekseni** denir.

20 **Koninin tabanı** döndürülen dik kenarın oluşturduğu dairedir.

21 Bir dikdörtgen kenarlardan biri etrafında döndürülüp yine başladığı konuma geri getirildiğinde oluşan cisme **silindir** denir.

22 Dörtgen döndürülürken sabit kalan kenara **silindirin ekseni** denir.

23 **Silindirin tabanları** döndürülen karşılıklı iki kenarın oluşturduğu dairelerdir.

24 Karşılıklı olarak eksenleri ve tabanlarının çapları aynı oranda olan koni veya silindirlere **benzer koniler** veya **benzer silindirler** denir.

25 Altı adet eşit kare tarafından sınırlandırılmış cisme **küp** denir.

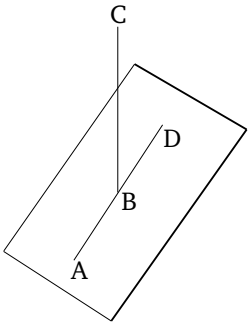
26 Sekiz adet eşit eşkenar üçgen tarafından sınırlandırılmış cisme **sekizyüzlü** denir.

27 Yirmi adet eşit eşkenar üçgen tarafından sınırlandırılmış cisme **yirmiyüzlü** denir.

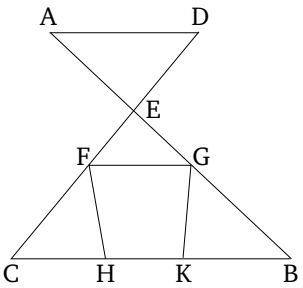
28 On iki adet eşit eşkenar beşgen tarafından sınırlandırılmış cisme **onikiyüzlü** denir.

2. Önermeler

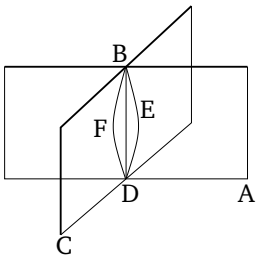
1. Önerme:
Bir doğrunun bir parçası bir düzlemde, bir diğer parçası da başka bir düzlemde olamaz.



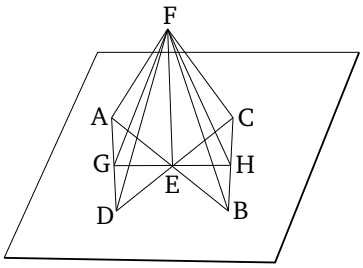
2. Önerme:
Kesişen iki doğru aynı düzlemdedir, ve her üçgen bir düzlemde yatar.



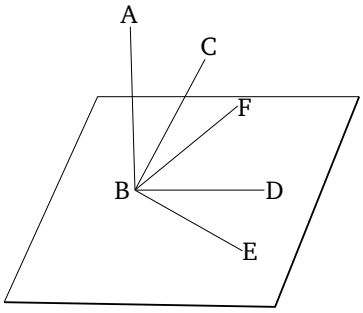
3. Önerme:
Kesişen iki düzlemin arakesiti bir doğrudur.



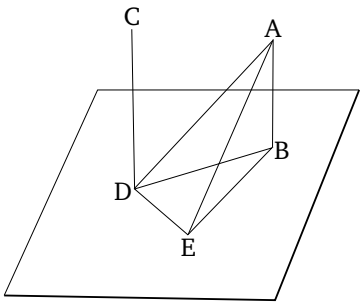
4. Önerme:
Kesişen iki doğruya kesiştiklri noktada dik olan bir doğru bu kesişen iki doğrunun bulunduğu düzleme de diktir.



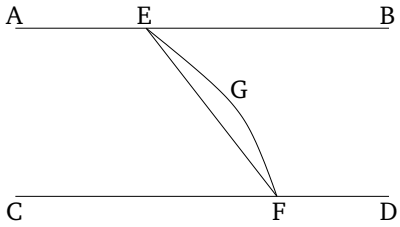
5. Önerme:
Aynı noktada kesişen üç doğruya kesiştikleri noktada dik olan bir doğru bulunuyorsa bu üç doğru aynı düzlemdedir.



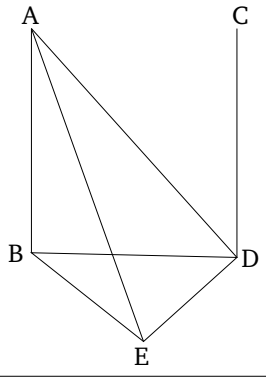
6. Önerme:
Aynı düzleme dik olan iki doğru birbirine paraleldir.



7. Önerme:
Paralel iki doğrunun her biri üzerinde rastgele alınacak birer noktayı birleştiren doğru bu iki paralel doğruyla aynı düzlemdedir.

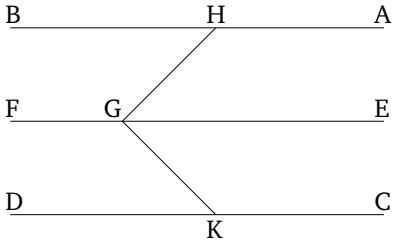


8. Önerme:
Paralel iki doğrudan biri bir düzleme dikse diğeri de aynı düzleme diktir.



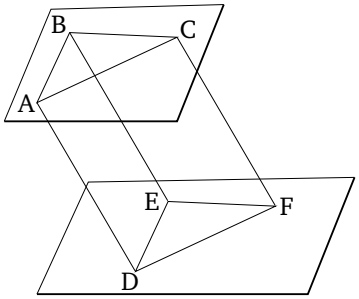
9. Önerme:

Aynı doğruya paralel olan ama onunla aynı düzlemde olmayan doğrular birbirine paraleldir.



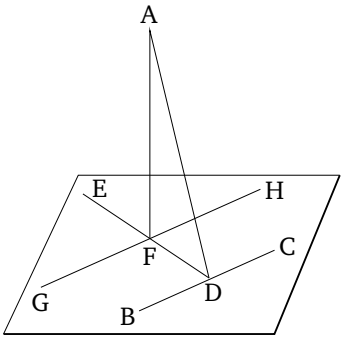
10. Önerme:

Birbirini kesen iki doğru kendileriyle aynı düzlemde olmayan ve birbirini kesen başka iki doğruya paralellerse, bu kesişen doğrular aynı açıyla birbirlerini keserler.

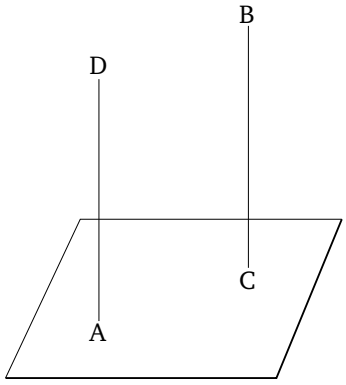


11. Önerme:

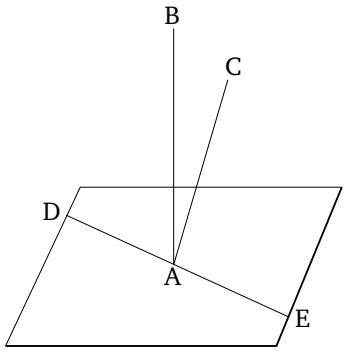
Bir düzlemin dışındaki bir noktadan düzleme dik bir doğru çizmenin yolu.



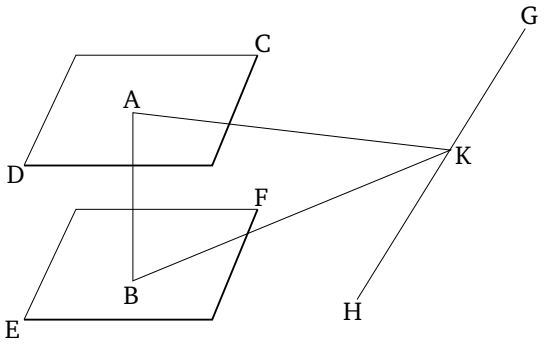
12. Önerme:
Düzlemdeki bir noktadan o düzleme dik bir doğru çizmenin yolu.



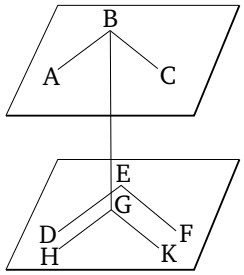
13. Önerme:
Düzlemdeki bir noktadan düzlemin aynı tarafında olmak ve düzleme dik olmak şartıyla iki farklı doğru çizilemez.



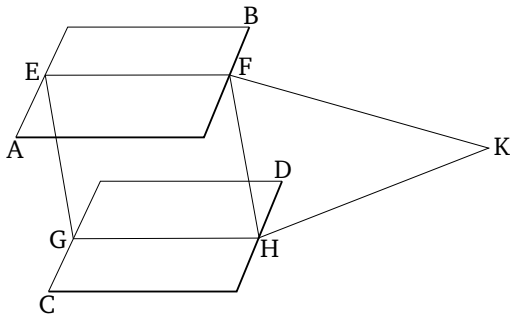
14. Önerme:
Aynı doğruyla dik açı yapan düzlemler birbirine paraleldir.



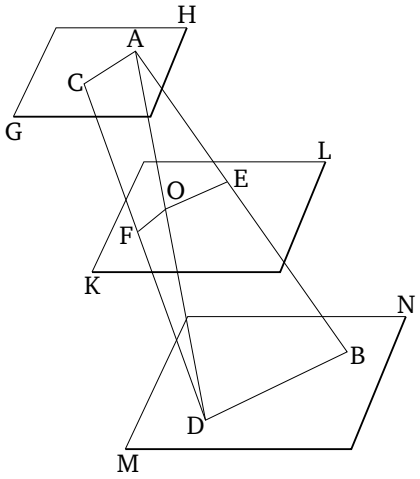
15. Önerme:
Birbirini kesen iki doğru kendileriyle aynı düzlemde olmayan ve birbirini kesen başka iki doğruya paralellerse, bu doğruların bulunduğu düzlemler paraleldir.



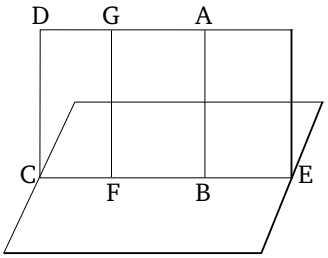
16. Önerme:
Paralel iki düzlemi kesen bir düzlemin bu düzlemlerle olan arakesitleri paraleldir.



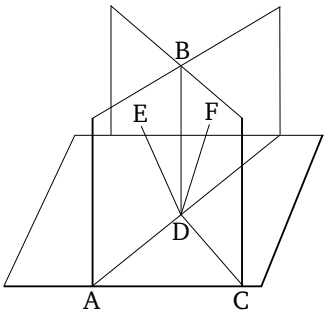
17. Önerme:
İki doğru paralel düzlemler tarafından kesildiğide kesilen parçaların oranları aynıdır.



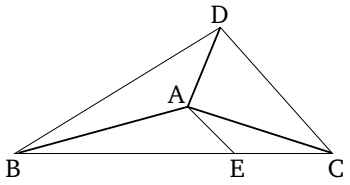
18. Önerme:
Bir doğru bir düzleme dikse, o doğruyu içeren tüm düzlemler de o düzleme diktir.



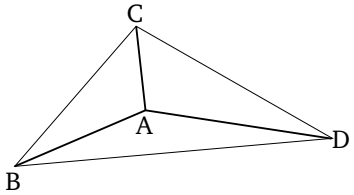
19. Önerme:
Kesişen iki düzlem bir başka düzleme dikse, onların arakesiti de o düzleme diktir.



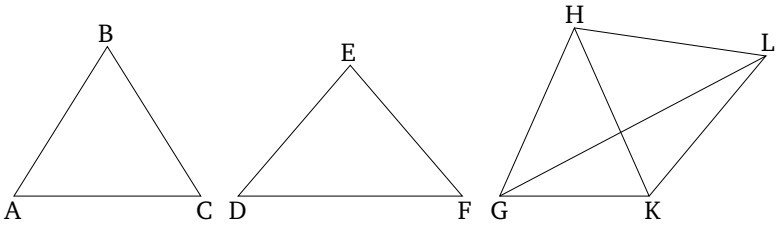
20. Önerme:
Bir çokyüzlü açı eğer üç düzlem açısıyla çevreleniyorsa, bu açılardan herhangi iki tanesinin toplamı diğerinden büyüktür.



21. Önerme:
Çokyüzlü bir açıyı çevreleyen düzlem açıların toplamı dört dik açıdan azdır.

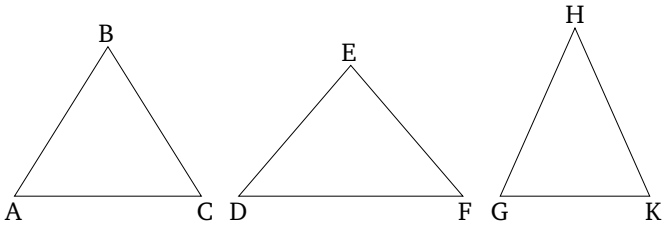


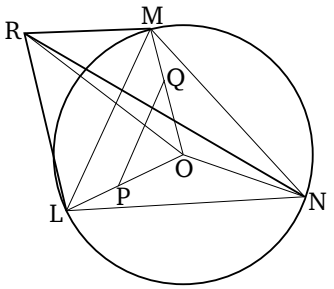
22. Önerme:
Eşit uzunlukta doğrular tarafından belirlenmiş, herhangi ikisinin toplamı diğerinden büyük olan üç düzlem açısı varsa, her bir açının kenarlarının uçlarını birleştirerek elde edilen doğrularla bir üçgen oluşturulabilir.



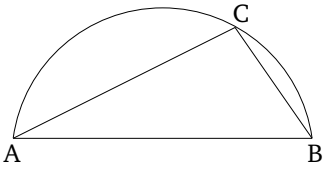
23. Önerme:

Toplamları dört dik açıdan küçük ve herhangi iki tanesinin toplamı üçüncüden büyük olacak şekilde verilen üç düzlem açısıyla çevrelenen bir çokyüzlü açı çizmenin yolu.



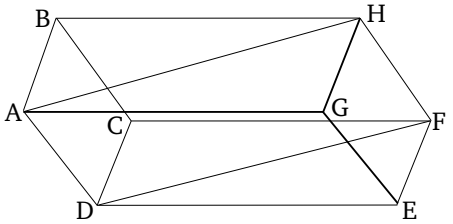


Yardımcı Önerme: AB üzerine çizilen karenin alanıyla LO üzerine çizilen karenin alanına eşit bir kareyi OR üzerine nasıl çizebileceğimizi aşağıda anlatacağız.



24. Önerme:

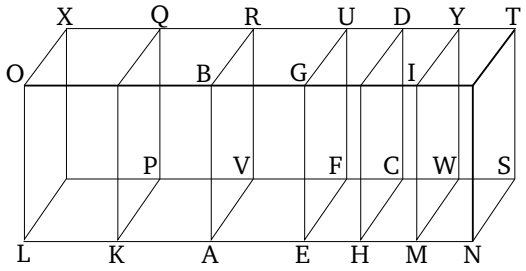
Bir cisim paralel düzlemler tarafından çevreleniyorsa, karşılıklı kenarlar eşittir ve her biri paralelkenardır.



[Bu önermenin kanıtından da anlaşılacağı gibi Öklid burada "paralel düzlemler" derken "üç çift paralel düzlem" demek istiyor.]

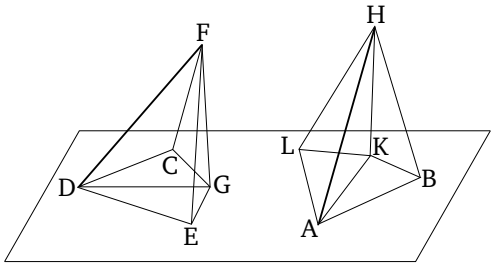
25. Önerme:

Bir paralelyüzlüyü karşı iki kenra paralel olan bir düzlemle kestiğimizde oluşan iki cismin hacimlerinin oranı kesilen yüzde oluşan iki tabanın alanlarının oranına eşittir.



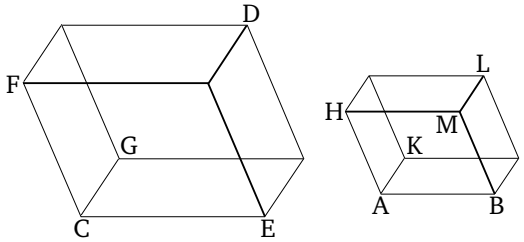
26. Önerme:

Verilen bir doğru üzerinde verilen bir noktada verilen bir çokyüzlü açıya eşit bir çokyüzlü açı çizmenin yolu.

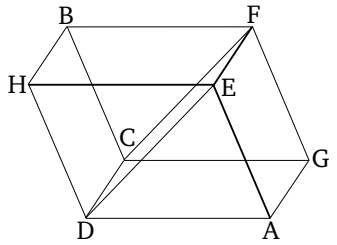


27. Önerme:

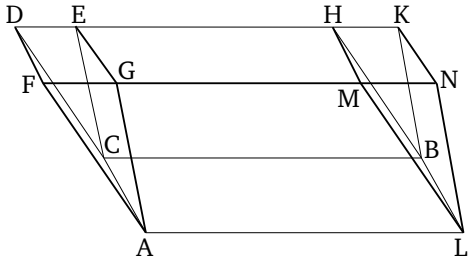
Verilen bir doğru üzerine verilen bir paralelyüzlüye benzer ve aynı konumda bir paralelyüzlü çizmenin yolu.



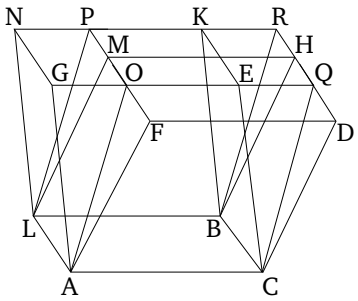
28. Önerme:
Bir paralelyüzlünün karşılıklı iki yüzünün köşegenlerinden geçen bir düzlem o paralelyüzlüyü iki eşit parçaya böler.



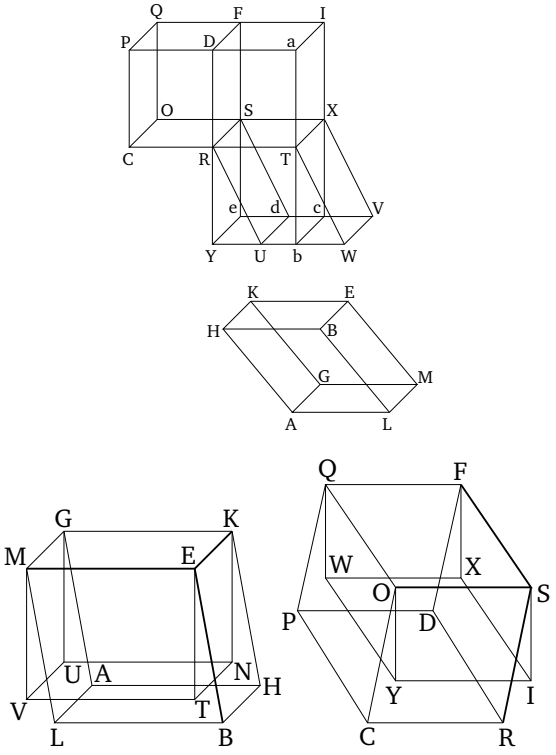
29. Önerme:
Tabanları ve yükseklikleri aynı olan ve tabandan yükselen yüzlerinin kenarları aynı doğruları kesen paralelyüzlerin hacimleri aynıdır.



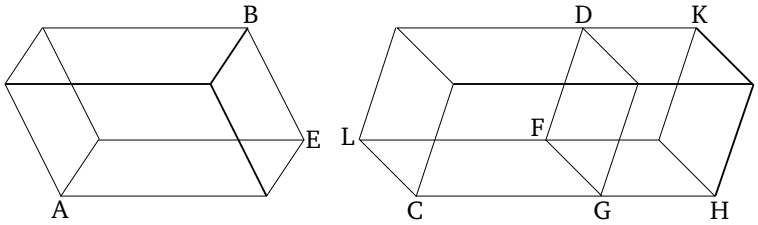
30. Önerme:
Tabanları ve yükseklikleri aynı olan ve tabandan yükselen yüzlerinin kenarları aynı doğruları kesmeyen paralelyüzlerin hacimleri aynıdır.



31. Önerme:
Taban alanları ve yükseklikleri aynı olan paralelyüzlerin hacimleri aynıdır.

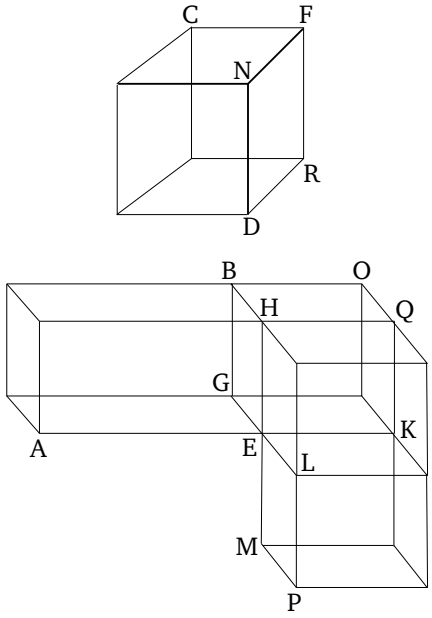


32. Önerme:
Yükseklikleri aynı olan paralelyüzlerin hacimlerinin oranı taban alanlarının oranına eşittir.



33. Önerme:

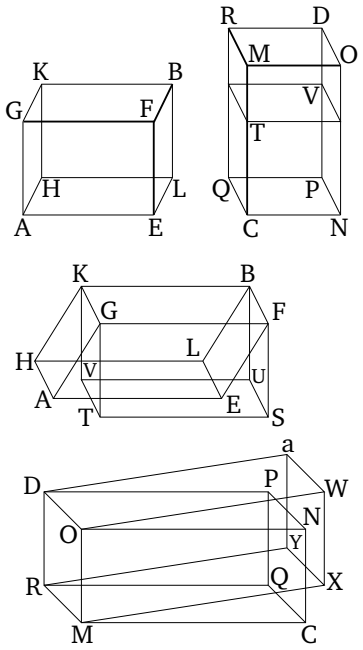
Benzer paralelyüzlerin hacimlerinin oranı karşılıklı her hangi iki kenarlarının oranının kübüne eşittir.



Doğal Sonuç: Bunun sonucunda açıkça görülür ki eğer uzunlukları sürekli orantılı olan dört doğru varsa, birinci üzerine kurulan her hangi bir paralelyüzün hacminin ikinci üzerine kurulan ve biriciyle benzer ve aynı konumda kurulmuş paralelyüzün hacmine oranı, birinci doğrunun dördüncüye oranına eşittir çünkü birincinin ikinciye oranının küpü birincinin dördüncüye oranıyla aynıdır.

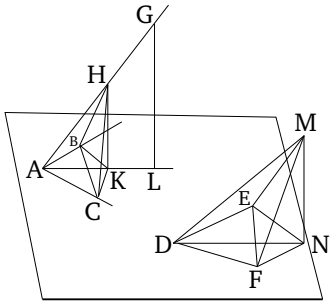
34. Önerme:

Hacimleri aynı olan iki paralelyüzün taban alanlarının oranı yüksekliklerinin oranının tersidir; ve taban alanlarının oranı yüksekliklerinin oranına ters olan iki paralelyüzün hacimleri aynıdır.



35. Önerme:

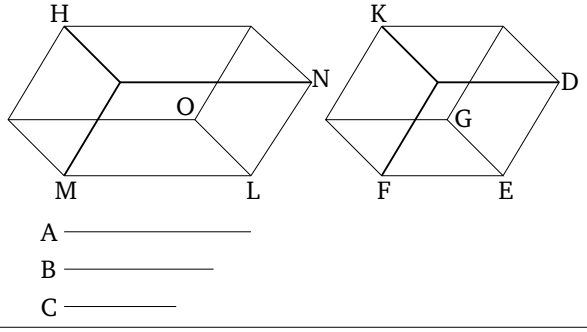
Eşit iki düzlem açısı alındığında bunların köşelerinden karşılıklı kenarlarıyla aynı açıyı yapacak şekilde düzlemden yukarı doğru birer doğru çizilse ve bu doğrular üzerinde rastgele birer nokta alınıp bu noktalardan başladığımız düzleme birer dikme indirilse, bu dikmelerin düzlemi kestiği noktaları düzlemdeki açıların köşelerine birleştiren doğrular düzlemden yukarı doğru çizilmiş olan doğrularla eşit açı yaparlar.



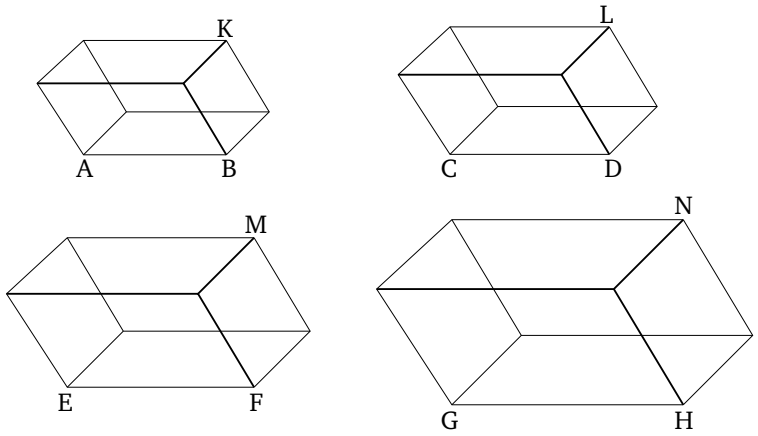
Doğal Sonuç: Bunun sonucunda açıkça görülür ki eğer eşit iki düzlem açısı alındığında bunların köşelerinden karşılıklı kenarlarıyla aynı açıyı yapacak şekilde düzlemden yukarı doğru eşit uzunlukta birer doğru çizilse, bu doğruların ucundan düzleme çizilen dikmelerin uzunlukları eşittir.

36. Önerme:

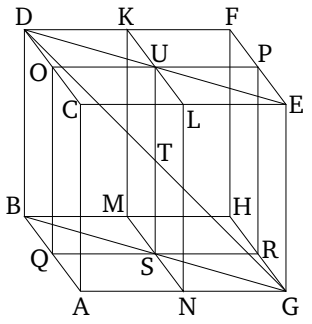
Sürekli orantılı üç doğru üzerine kurulan paraleyüzün hacmi ikincinin üzerine kurulan eşyüzlü ama birinciyle eş açılı paralelyüzün hacmine eşittir.



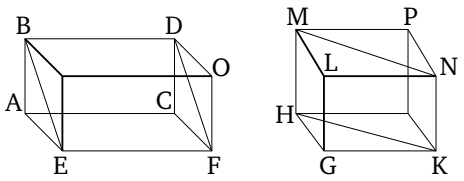
37. Önerme:
Orantılı dört doğru üzerine aynı konumda kurulan benzer paralelyüzler de orantılıdır; ve üzerlerine kurulan benzer ve aynı konumdaki paralelyüzlerin orantılı olduğu doğrular da orantılıdır.



38. Önerme:
Bir kübün karşılıklı iki yüzünün karşılıklı kenarlarını ikiye bölen düzlemlerin kesişme doğrusuyla kübün köşegeni bir birlerine ikiye bölerler.



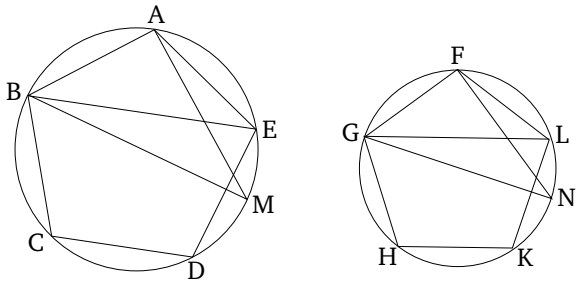
39. Önerme:
Aynı yüksekliğe sahip iki prizmadan birinin tabanı paralelkenar diğerinin tabanı üçgense ve paralelkenar üçgenin iki katıysa bu prizmalar eşittir.



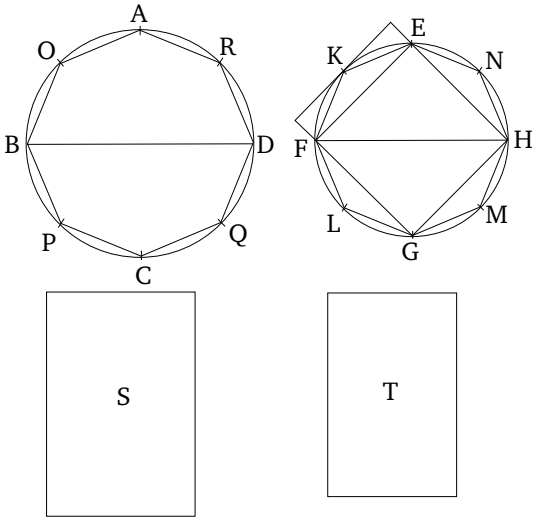
Kitap XII

1. Önermeler

1. Önerme:
Çember içine çizilmiş benzer çokgenlerin oranları çemberlerin çapları üzerine çizilen karelerin oranına eşittir.

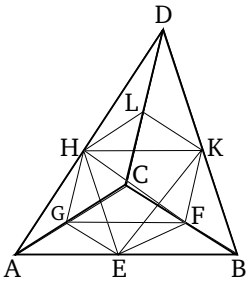


2. Önerme:
Dairelerin birbirine oranı çapları üzerine çizilen karelerin oranına eşittir.

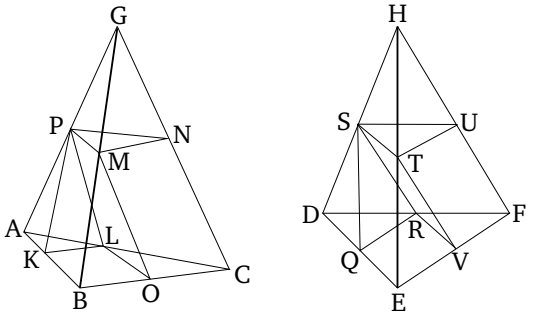


Yardımcı Önerme: S nin alanı $EFGH$ çemberinin alanından büyük olduğu için, S nin alanının $ABCD$ çemberinin alanına oranı, $EFGH$ çemberinin alanının $ABCD$ çemberindin alanından daha küçük olan bir alana oranına eşittir.

3. Önerme:
Üçgen tabanlı bir piramidi iki aynı hacimli, birbirine ve ana piramide benzer piramit, ve hacimleri aynı iki prizma oluşturacak şekilde öyle bölebiliriz ki prizmaların toplam hacmi ana piramidin hacminin yarısından fazla olsun.

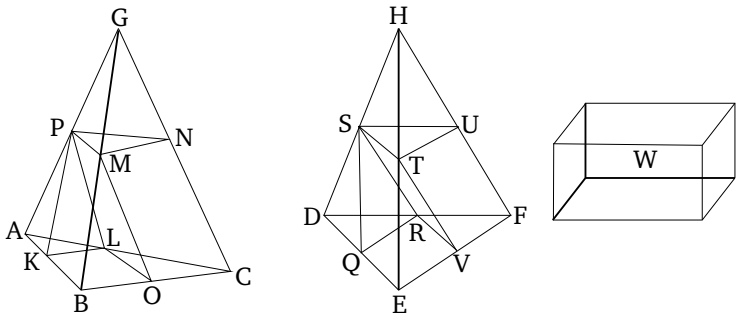


4. Önerme:
Aynı yükseklikte ve üçgen tabanlı iki piramit alınmış olsun ve her biri kendisine benzer ve bir birleriyle aynı hacimde iki piramit ve aynı hacimli iki prizmaya bölünmüş olsun; bu durumda başta alınmış olan piramitlerin taban alanlarının oranı içlerindeki prizmaların toplam hacimlerinin oranına eşittir.

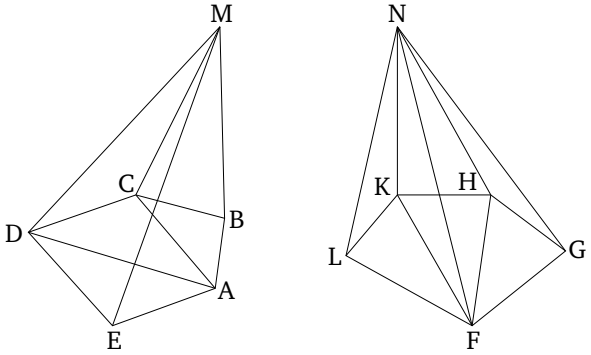


Yardımcı Önerme: LOC üçgeninin alanının RVF üçgeninin alanına oranının, bir tabanı LOC üçgeni ve karşı kenarı PMN olan prizmanın hacminin, bir tabanı RVF üçgeni ve karşı kenarı STU olan prizmanın hacmine oranına eşit olduğunu aşağıdaki gibi kanıtlayabiliriz.

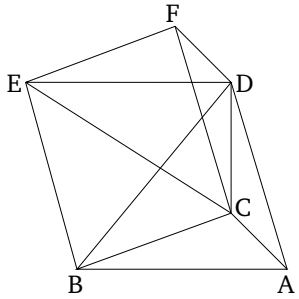
5. Önerme:
Yükseklikleri aynı olan üçgen tabanlı piramitlerin hacimlerinin oranı tabanlarının alanlarının oranına eşittir.



6. Önerme:
Yükseklikleri aynı olan çokgen tabanlı piramitlerin hacimlerinin oranı tabanlarının alanlarının oranına eşittir.

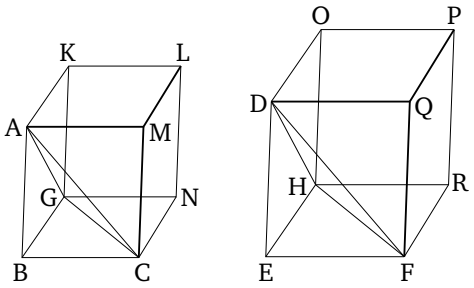


7. Önerme:
Üçgen tabanlı her prizma üçgen tabanlı ve eşit hacimli üç piramide bölünebilir.



Doğal Sonuç: Buradan açıkça görülür ki bir prizmayla aynı tabana ve yüksekliğe sahip piramidin hacmi prizmanın hacminin üçte biridir.

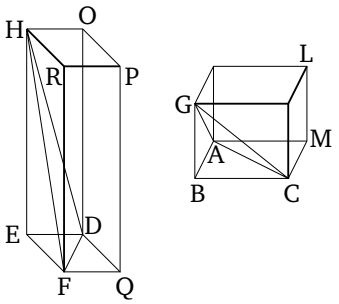
8. Önerme:
Üçgen tabanlı benzer piramitlerin hacimlerinin oranı tabanlarının karşılıklı kenarlarının oranlarının kübüne eşittir.



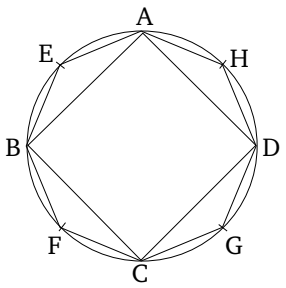
Doğal Sonuç: B

uradan açıkça görülür ki çokgen tabanlı benzer piramitlerin hacimlerinin oranı tabanlarının karşılıklı kenarlarının oranlarının kübüne eşittir. **9. Önerme:**

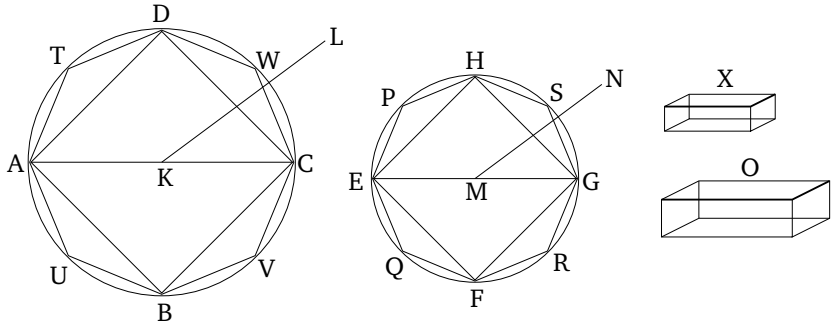
Eşit hacimli ve üçgen tabanlı piramitlerde tabanların alanlarının oranı piramitlerin yüksekliklerinin oranının tersidir; ve taban alanlarının oarnı yüksekliklerinin oranının tersi olan piramitlerin hacimleri eşittir.



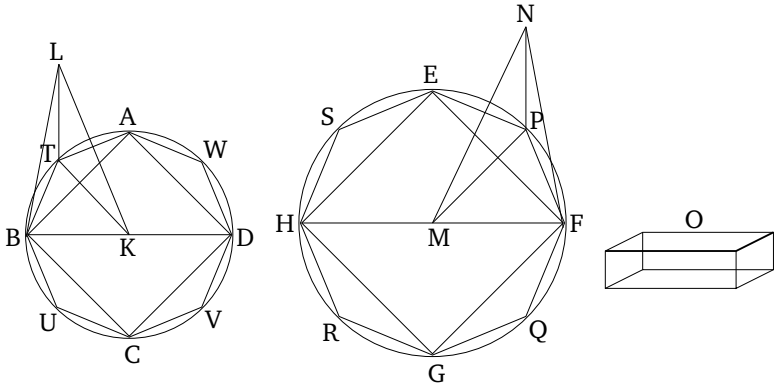
10. Önerme:
Bir koninin hacmi aynı tabanlı ve aynı yükseklikteki silindirin hacminin üçte biridir.



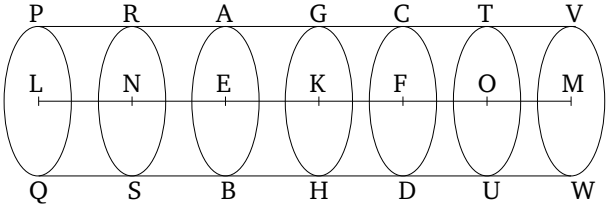
11. Önerme:
Aynı yükseklikteki bir koniyle silindirin hacimlerinin oranı tabanlarının alanlarının oranına eşittir.



12. Önerme:
Benzer koni ve silindirlerin hacimlerinin oranı taban çaplarının oranlarının kübüne eşittir.

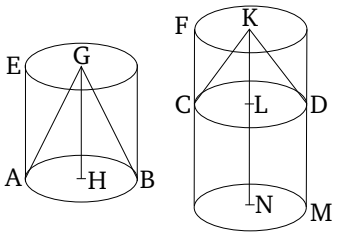


13. Önerme:
Bir silindir karşılıklı kenarlarına paralel bir düzlemle kesildiğinde oluşan silindirlerin hacimlerinin oranı kesilen eksen parçalarının uzunluklarının oranına eşittir.



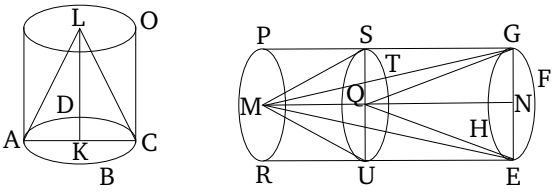
14. Önerme:

Aynı tabanlı koni ve silindirlein hacimlerinin oranı yüksekliklerinin oranına eşittir.



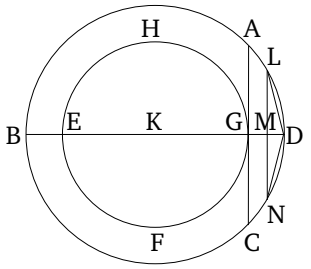
15. Önerme:

Eşit hacimli koni ve silindirlerin taban alanlarının oranı yüksekliklerinin oranının tersidir; ve taban alanlarının oranı yüksekliklerinin oranının tersi olan koni ve silindirlerin hacimleri eşittir.



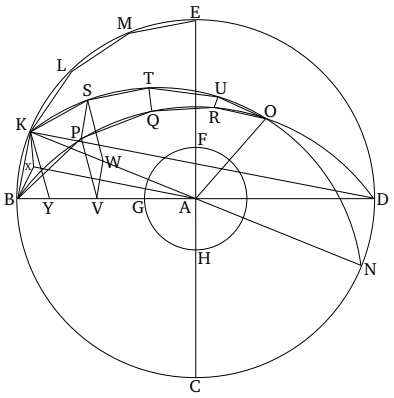
16. Önerme:

Aynı merkezli iki çember verildiğinde büyük çemberin içine çift sayıda kenarı olan ve küçük çembere değmeyen bir eşkenar çokgen çizmenin yolu.



17. Önerme:

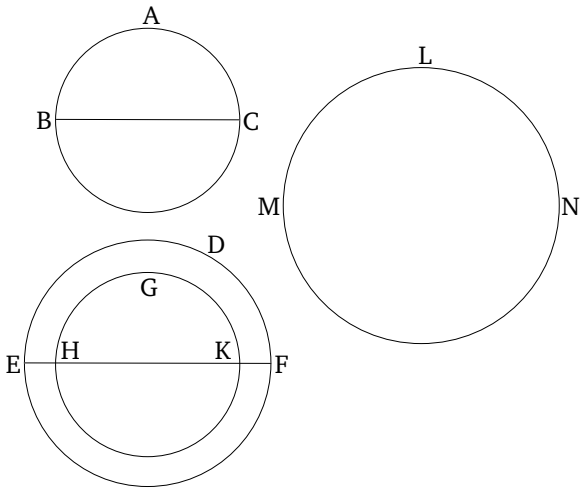
Aynı merkezli iki küre verildiğinde büyük kürenin içine küçük küreye değmeyen bir çokyüzli cisim çizmenin yolu.



Doğal Sonuç: Ama bir başka kürenin içine de BCDE ye benzer bir çokyüzlü cisim çizilirse, bu çokyüzlü cisimlerin hacimlerinin oranı içine çizildikleri kürelerin çaplarının oranının kübüne eşittir.

18. Önerme:

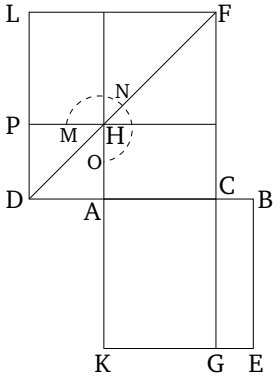
Kürelerin hacimlerinin oranı çaplarının oranının kübüne eşittir.



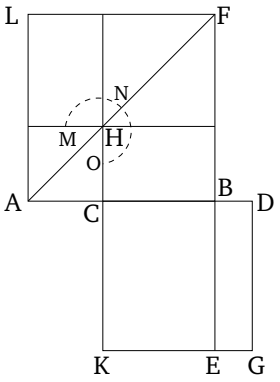
Kitap XIII

1. Önermeler

1. Önerme:
Bir doğru altın oranda kesildiğinde büyük parçanın üzerindeki karenin alanının bütün üzerindeki karenin alanının yarısıyla toplamı, bütün doğrunun yarısı üzerindeki karenin alanının beş katıdır

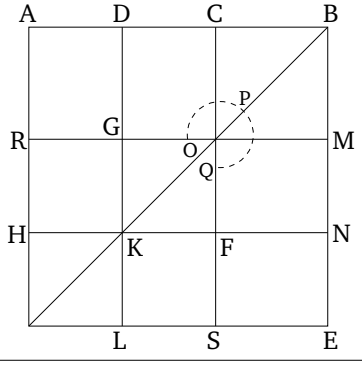


2. Önerme:
Eğer bir doğru üzerindeki karenin alanı bu doğrunun seçilmiş bir parçası üzerindeki alanın beş katıysa, kalan parça seçilmiş parçanın iki katına ulaşacak şekilde uzatılıp altın oranda bölünürse, bu bölümün büyük parçası asıl doğrudan seçilmiş parça çıktığında kalan kısımdır.

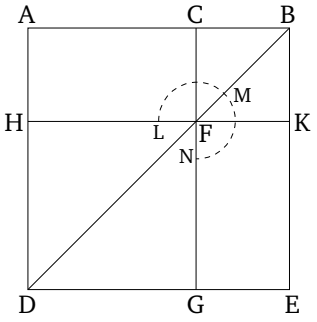


Yardımcı Önerme: AC nin iki katının BC den uzun olduğu şöyle gösterilir.

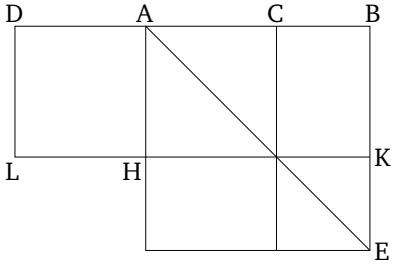
3. Önerme:
Bir doğru altın oranda bölündüğünde, küçük parçanın üzerindeki karenin alanıyla büyük parçanın üzerindeki karenin alanının yarısının toplamı büyük parçanın yarısı üzerindeki karenin alanının beş katıdır.



4. Önerme:
Bir doğru altın oranda bölündüğünde bütün üzerindeki karenin alanıyla küçük parça üzerindeki karenin alanının toplamı büyük parça üzerindeki karenin alanının üç katıdır.



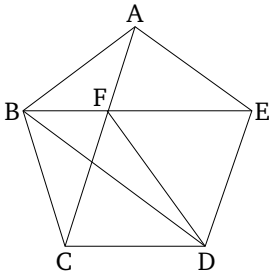
5. Önerme:
Bir doğru altın oranda kesilir ve uzun parça kadar uzatılırsa, yeni doğru altın oranda bölündüğünde bu sefer baştaki doğru uzun parça olur.



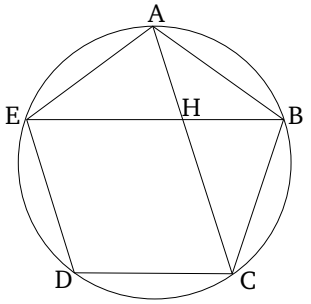
6. Önerme:
Rasyonel bir doğru altın oranda bölündüğünde her iki parça ayrık türde irrasyonel olur.



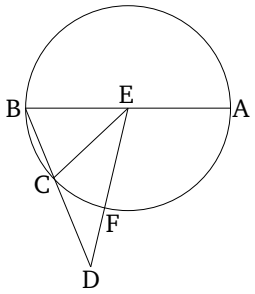
7. Önerme:
Eşkenar bir beşgenin rastgele seçilen üç açısı eşitse bu beşgen eşaçılıdır.



8. Önerme:
Düzgün bir beşgende ardışık iki açıyı gören iki köşegen alındığında bu köşegenler bir birlerini altın oranda keserler ve uzun parçaları beşgenin kenarlarına eşittir.

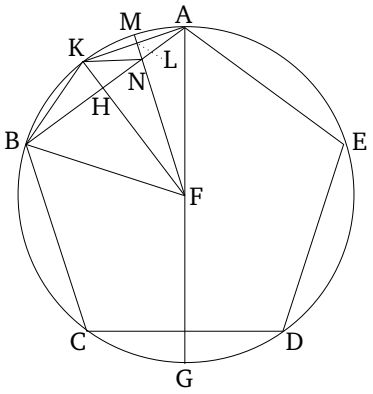


9. Önerme:
Bir çember içine çizilen düzgün sekizgenin bir kenarına aynı çember içine çizilen ongenin kenarı eklenirse, bu yeni doğru altın oranda bölünmüş olur ve uzun parçası sekizgenin kenarı olur.



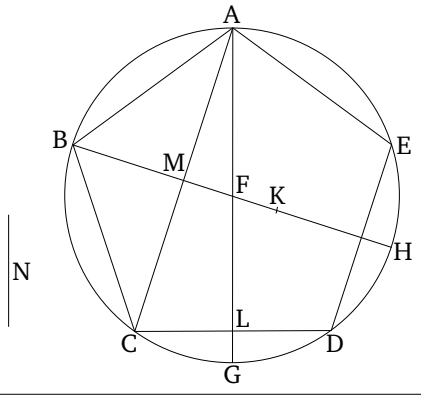
10. Önerme:

Bir çember içine çizilen beşgenin bir kenarı üzerindeki karenin alanı aynı çember içine çizilen altıgenle ongenin birer kenarları üzerine çizilen karelerin alanlarının toplamına eşittir.

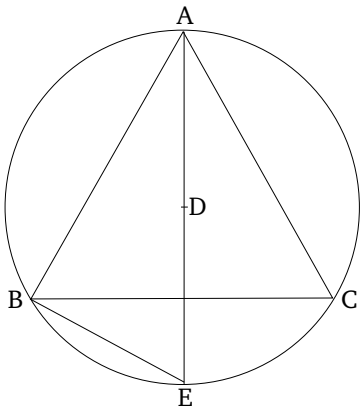


11. Önerme:

Rasyonel çaplı bir çemberin içine çizilen düzgün bir beşgenin kenarı ufak türde irrasyonel olur.

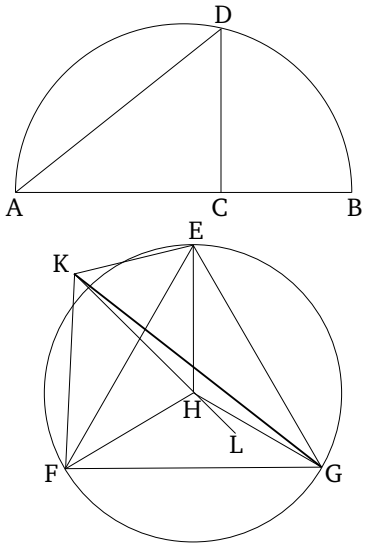


12. Önerme:
Çember içine çizilen bir eşkenar üçgenin kenarı üzerindeki karenin alanı çemberin yarıçapı üzerine çizilen karenin alanının üç katıdır.

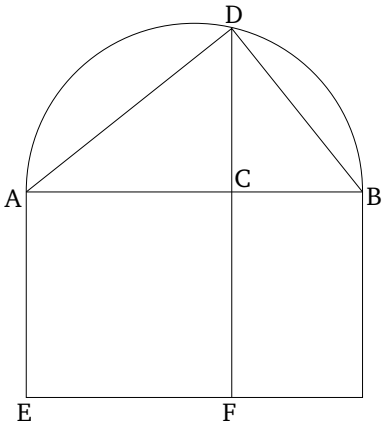


13. Önerme:

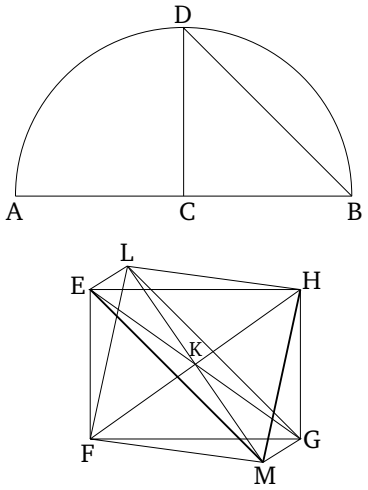
Bir küre içine bir dörtyüzlü çizmenin ve çemberin çapı üzerindeki karenin alanının dörtyüzlünün kenarı üzerindeki karenin alanının bir buçuk katı olduğunu göstermenin yolu.



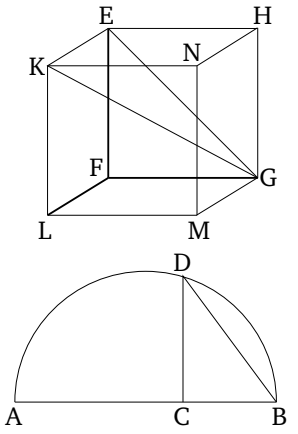
Yardımcı Önerme: AB nin BC ye oranının, AD üzerindeki karenin alanının DC üzerindeki karenin alanına olan oranına eşit olduğu gösterilecek.



14. Önerme:
Bir küre içine bir sekizyüzlü çizmenin ve çemberin çapı üzerindeki karenin alanının sekizyüzlünün kenarı üzerindeki karenin alanının iki katı olduğunu göstermenin yolu.

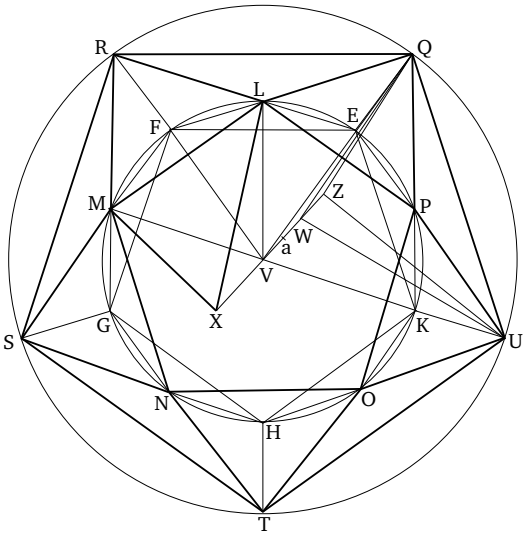


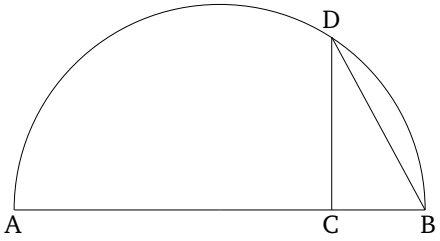
15. Önerme:
Bir küre içine bir küp çizmenin ve çemberin çapı üzerindeki karenin alanının küpün kenarı üzerindeki karenin alanının üç katı olduğunu göstermenin yolu.



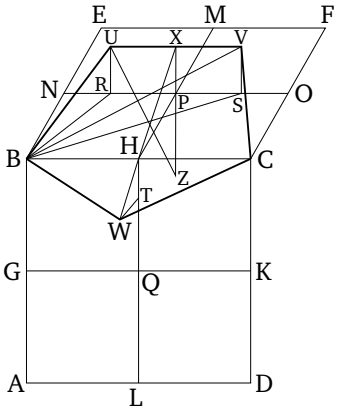
16. Önerme:

Bir küre içine bir yirmiyüzlü çizmenin ve bu yirmiyüzlünün bir kenarının ufak türde bir irrasyonel doğru olduğunu göstermenin yolu.

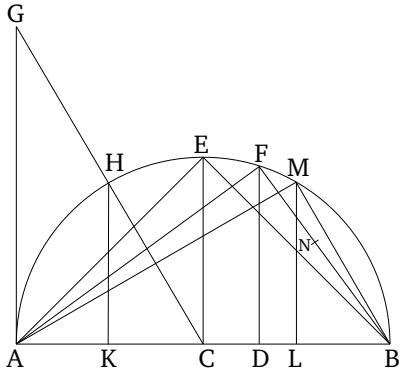




17. Önerme:
Bir küre içine bir onikiyüzlü çizmenin ve bu onikiyüzlünün bir kenarının ayrık türde bir irrasyonel doğru olduğunu göstermenin yolu.



18. Önerme:
Sözü konusu edilmiş olan beş düzgünyüzlünün kenarlarının uzunluklarını kıyaslamanın yolu.



Yüzeyleri, eşkenar, eşaçılı ve bir birinin aynı şekillerden oluşan ve yukarda belirtilen beş çokyüzlüden başka çokyüzlü çizilemez.

Yardımcı Önerme: Bir düzgün beşgenin iç açısının bir dik açıyla bir dik açının beşte birinin toplamına eşit olduğu gösterilebilir.

