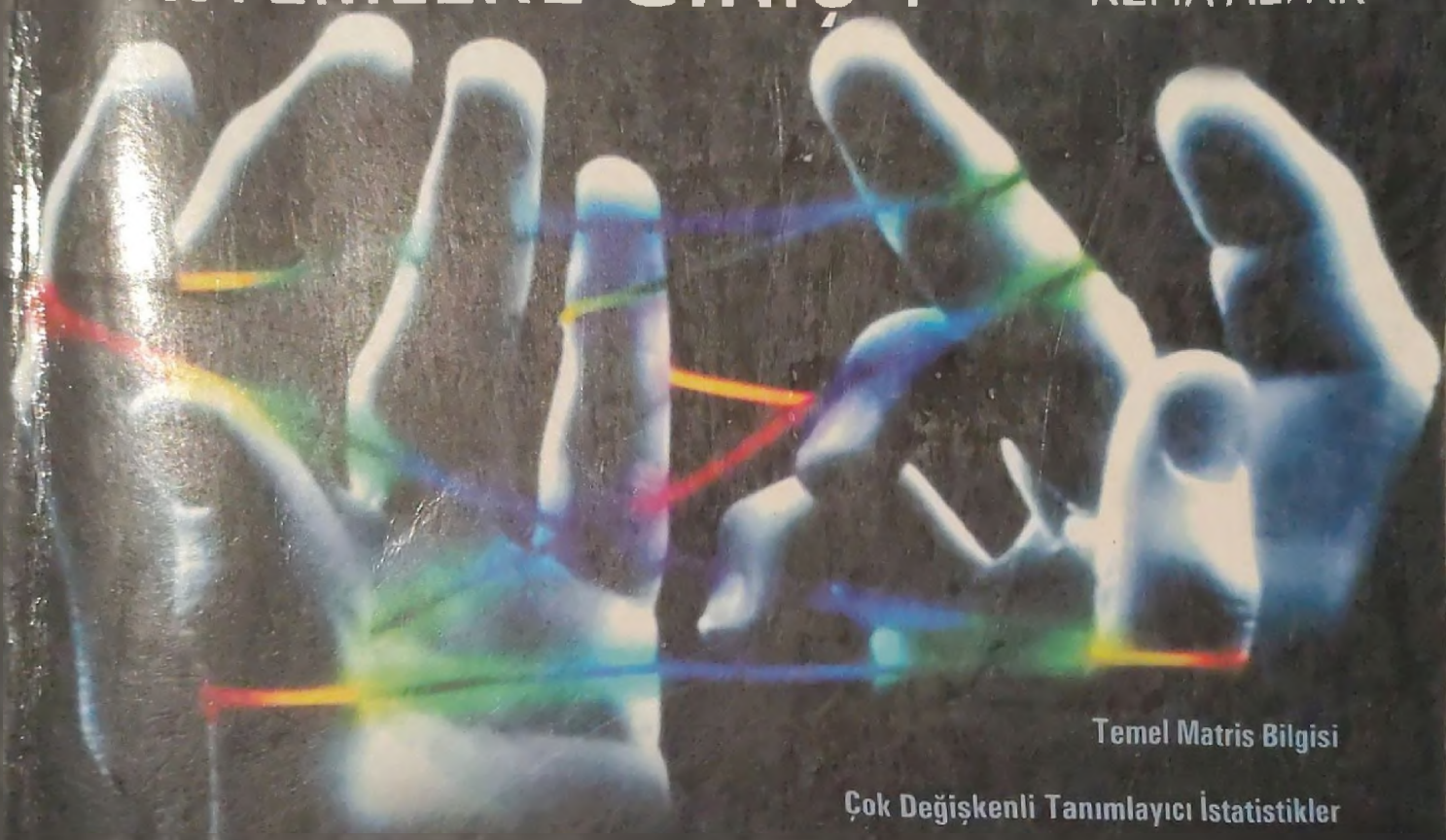
UYGULAMALI ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL YÖNTEMLERE GİRİŞ 1

REHA ALPAR



Temel Matris Bilgisi

Çok Değişkenli Tanımlayıcı İstatistikler

Standartlaştırma

Çok Değişkenli Normal Dağılım

Eksik Veriler ve İncelenmesi

Çok Değişkenli Hipotez Testleri

Çoklu Doğrusal Regresyon

Güvenirlik

Değiştirilmiş ve Genişletilmiş 2. Baskı

nobel

UYGULAMALI ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL YÖNTEMLERE GİRİŞ 1

REHA ALPAR



Temel Matris Bilgisi

Çok Değişkenli Tanımlayıcı İstatistikler

Standartlaştırma

Çok Değişkenli Normal Dağılım

Eksik Veriler ve İncelenmesi

Çok Değişkenli Hipotez Testleri

Çoklu Doğrusal Regresyon

Güvenirlik

Değiştirilmiş ve Genişletilmiş 2. Baskı

ankara, ocak, 2003

nobel

Nobel Yayın No: 452
Teknik Dizisi: 67

UYGULAMALI ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL YÖNTEMLERE GİRİŞ 1

2. Baskı, 2003

Doç.Dr. REHA ALPAR
H.Ü. Tıp Fakültesi Biyoistatistik
Anabilimdalı Öğretim Üyesi

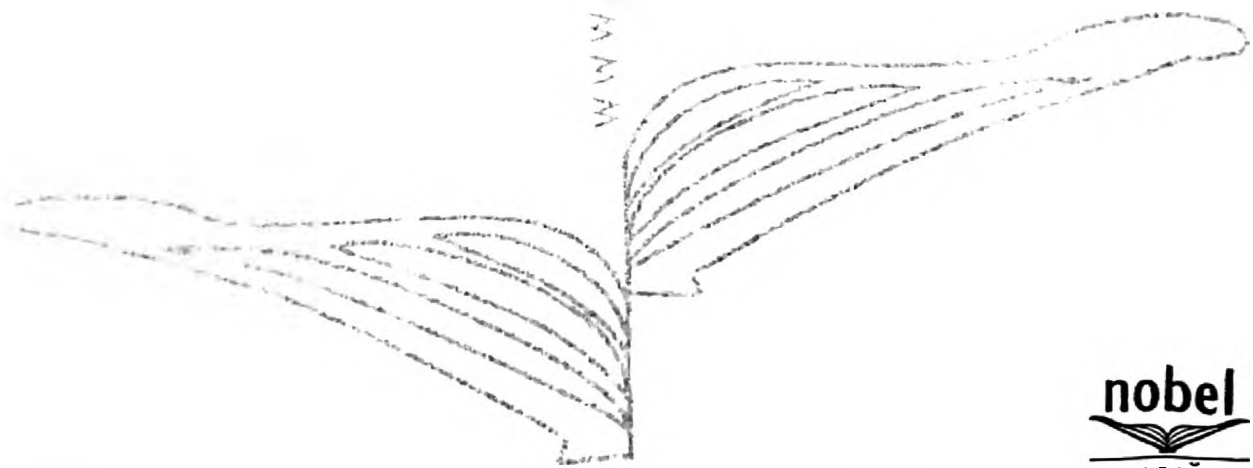
ISBN: 975-591-431-5

Bütün hakları NOBEL YAYIN DAĞITIM LTD. ŞTİ'ne aittir. Yayıncının yazılı izni olmaksızın, kitabın tümünün veya bir kısmının elektronik, mekanik ya da fotokopi yoluyla basımı, yayımı, çoğaltılması ve dağıtımı yapılamaz

GENEL YAYIN YÖNETMENİ
Prof.Dr. Hasan BACANLI

SAYFA TASARIMI___zehra çobanoğlu
KAPAK TASARIMI___mehtap bayraktar
BASKI-CİLT_____nobel basımevi

www.nobelyayin.com nobel@nobelyayin.com



nobel
YAYIN DAĞITIM

Adakale Sokak No:16/2 Kızılay
Tel: 0312 434 38 97 - Fax: 0312 434 48 32
A N K A R A

G E N E L D A Ğ I T I M

atlas yayın dağıtım
Molla Fenari Sokak No: 38 Cağaloğlu
Tel: 0212 511 61 44 - Fax: 0212 511 61 49
İ S T A N B U L

ÖNSÖZ

Çok değişkenli hipotez testleri, çoklu doğrusal regresyon, çok değişkenli çoklu regresyon, lojistik regresyon, Cox regresyon, temel bileşenler analizi, faktör analizi, kümeleme analizi, ayırma analizi, kanonik korelasyon, çok boyutlu ölçekleme, .. gibi her biri ayrı bir kitabın konusu olacak genişlikte birçok konuyu içeren çok değişkenli istatistiksel yöntemlerin temelleri yıllarca önce atılmış ve bu konuda yüzlerce makale, onlarca da kitap yazılmıştır. Ancak, ülkemizde bu konuda yazılmış kitap sayısı son derece azdır. Bu nedenle, çok değişkenli istatistiksel yöntemlerle ilgili olarak yazılacak her kitabın okuyucuya yararlı olacağını düşünmekteyim.

Elinizdeki kitap, 1997 yılında yayınlanan ve çok sınırlı miktarda basılan *Çok Değişkenli İstatistiksel Yöntemlere Giriş I*'in değiştirilmiş ve genişletilmiş yeni baskısıdır.

Bu baskıda,

a) Önceki baskıda yer alan çok değişkenli hipotez testleri ile çoklu doğrusal regresyon bölümlerine birçok ek yapılmış ve örnek sayısı artırılmıştır.

b) *Eksik Veriler* ile *Güvenirlik* konuları yeni bölüm olarak eklenmiştir.

İlk kitap gibi bu kitap da çok değişkenli istatistiksel yöntemlere bir giriş, diğer bir deyişle bir uygulama kitabı niteliğindedir. Bu nedenle, çok değişkenli veriye ilişkin tanımlayıcı istatistikler, çok değişkenli normal dağılım, aşırı gözlemler, eksik veri analizi gibi konular üzerinde ayrıntılı bir şekilde durulmaya çalışılmıştır. Kitapta hemen tüm konular matris işlemleri ile anlatıldığından, *matrisler* bölümü, okuyucunun diğer kaynaklara başvurmadan temel bilgiyi sağlayacak basitlik ve içerikte hazırlanmaya çalışılmıştır.

Kitaptaki *çoklu doğrusal regresyon* bölümü ayrı bir kitap olabilecek genişliktedir. Bunun bir nedeni, bu konunun diğer çok değişkenli yaklaşımlara ilişkin temel bilgileri içermesidir. Bir diğer nedeni ise, bu kitap kapsamında olmaması gereken basit doğrusal regresyonun bu bölüm içinde yer almasıdır.

Kitaptaki tüm konular en az bir örnekle somutlaştırılmış ve elden geldiğince konuların kolay anlaşılmasını sağlayan bir yöntem izlenmeye çalışılmıştır. Verilen örneklerin bir bölümü, o konu içerisinde daha önce anlatılmamış bilgileri içerdiğinden, ilgili örneklerin dikkatli bir şekilde incelenmesi gerekmektedir.

Kitapta, örneklerin istatistiksel yazılımlarla çözümüne ilişkin çok az bilgiye yer verilmiştir. Çünkü, bütün uygulamalara ilişkin veriler kitapta verilmiştir. Böylece, isteyen okuyucu çalıştığı istatistiksel yazılıma *ilgili verileri* girerek, elde edeceği sonuçları kitaptaki sonuç ve yorumlarla karşılaştırabilecektir.

TEŞEKKÜR

Bu ve diğer kitaplarımın hazırlanması sırasında büyük özveride bulunarak gerekli sabrı gösteren Eşim Nilüfer ile Kızım Deniz'e öncelikle teşekkür ederim.

Dizgisi tarafımdan yapılan bu kitaptaki hataları düzeltmek için çok büyük çaba göstererek kitabın tümüne katkı yapan Araştırma Görevlisi Beyza Akdağ'a, tekrarlı ölçümlerde varyans analizi konusunda katkı yapan Araştırma Görevlisi Pınar Özdemir Geyik'e ve eksik veriler ve incelenmesi bölümüne katkı yapan ve eksik verileri sağlayan Dr. Bahadır Bektaş'a, her zaman yardımlarını gördüğüm hocam Prof. Dr. Kadir Sümbüloğlu'na ve diğer çalışma arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Yayınladıkları kitaplardaki bazı verileri kullanmama izin veren John Wiley & Sons Yayınevi yetkililerine ve kitabın oluşmasında yararlandığım tüm bilim çevrelerine teşekkür ederim.

Kitabı büyük özenle baskıya hazırlayan ve kitaba son şeklini veren Sayın Zehra Çobanoğlu'na, kapak tasarımını yapan Sayın Mehtap Bayraktar'a ve yoğun çalışma koşullarında yardımlarını ve güleryüzlerini eksik etmeyen Nobel Yayınevi çalışanlarına teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 1

Temel Matris Bilgisi 1
Matris Bilgisinin Gerekliliği ve Tanımı 1
Matris Çeşitleri 2
Matrislerde Toplama ve Çıkarma 5
Matrislerde Çarpma 6
Bir Matrisin Bir Skaler(Sabit) İle Çarpımı 6
İki Matrisin Çarpımı 7
Matrislerin Doğrudan Çarpımı 10
Bir Matrisin Tersi (İnversi) 11
Determinantlar 12
Minörler, Kofaktörler, Adjoint Matris 12
Ters Matris ve Determinantlara İlişkin Bazı Özellikler ve Uygulamalar: 15
Dik (Orthogonal) Matris 21
Matrislerin Parçalara Ayrılması 21
Çeşitli Uygulamalar ve Açıklamalar 22
Doğrusal Bağımlılık ve Bağımsızlık Kavramları 24
Rank Kavramı 26
Rank İle İlgili Çeşitli Özellikler ve Uygulamalar 27
İdempotent Matris 28
Doğrusal Denklem Sistemlerine Bir Bakış 28
Denklem Sistemlerinin Tanımı 28
Doğrusal Denklem Sistemlerinin Determinantlar Yardımıyla Çözümü 30
Denklem Sistemlerinin Çözümünde Rank Kuralı 31
Homojen Doğrusal Denklem Sistemleri 32
Özdeğerler ve Özvektörler 33
Özdeğer Kavramı ve Özdeğerlerin Bulunması 33
Çeşitli Açıklamalar ve Uygulamalar 34
Özvektörlerin Bulunması 37
Özvektörlerin Bulunması İle İlgili Uygulamalar ve Açıklamalar 37

BÖLÜM 2

Çok Değişkenli Analizde Veri Matrisi ve Tanımlayıcı İstatistikler 43
Ortalama Vektörü 44
Varyans, Kovaryans ve Varyans–Kovaryans Matrisi 44
Korelasyon (İlişki) Katsayısı ve Korelasyon Matrisi 46

Saçılım Grafikleri 50
Doğrusallığın Sağlanması 52
Aşırı Değerler 52
KÇT (SSCP) Matrisleri ve S Matrisinin Bu Matrisler Yardımıyla Bulunması 53
R ve S Matrislerinin Matrisi Yardımıyla Bulunması 55
Genelleştirilmiş Varyans 55
Standartlaştırma ve Genelleştirilmiş Varyans 57
Gruplara İlişkin Çözümlemeler 58
Grup İçi Analiz 59
Gruplar Arası Analiz 60

BÖLÜM 3

Standartlaştırma .....
Standartlaştırma ve Dağılımın Şekli 65

BÖLÜM 4

Çok Değişkenli Normal Dağılım 67
İki Değişkenli (Bivariate) Normal Dağılım: 68
Mahalanobis Uzaklığı 69
Kontur ve Elips Kavramı 70
p Boyutlu Elipsoid 74
İkiden Çok Değişkenli Normal Dağılım Fonksiyonu 74
Normal Dağılıma Uygunluğun Araştırılması 75
Tek Değişken için Normal Dağılıma Uygunluğun Araştırılması 75
Aralık Yöntemi 76
Q-Q Grafik Yöntemi 77
Normallik Testleri 80
İki ve Daha Fazla Değişken için Normallik Testleri 80
Aşırı Değerler 88
Aşırı Değerli Gözlemlerin Araştırılması 89
Normallik Dönüşümleri 93

BÖLÜM 5

Eksik Veriler ve İncelenmesi 97
Eksik Veri Örneği ve Tanımlayıcı İşlemler 98
Eksik Veri Çeşitleri 104
Eksik Veri Yapısının İncelenmesi 104
Eksik Veri Sürecinde Rasgeleliğin Araştırılması 105
Eksik Veri Sorununun Giderilmesine Yönelik Yaklaşımlar 106

BÖLÜM 6

Çok Değişkenli Hipotez Testleri **121**
Çok Değişkenli Evren Ortalaması Önemlilik Testi 123
Hipotezler ve Test İstatistiği 123
Güven Aralıkları ve Farklı Değişkenlerin Belirlenmesi 126
Birden Fazla Gruba İlişkin İki Eş Arasındaki Farkın Önemlilik Testinin,
Çok Değişkenli Evren Ortalaması Önemlilik Testi Yardımıyla Çözümü 129
Varyans-Kovaryans Matrislerinin Eşitliğinin Test Edilmesi (Box–M Testi) 131
Bağımsız İki Gruba İlişkin Ortalama Vektörlerinin Karşılaştırılması 133
Hipotezler ve Test İstatistiği 135
Çok Değişkenli Tek Yönlü Varyans Analizi (MANOVA) 138
Hipotezler ve Test İstatistikleri 141
Wilks Lamda İstatistiği 141
Hotelling İz İstatistiği 143
Pillai İz İstatistiği 143
Roy'un En Büyük Özdeğere Dayalı Test İstatistiği 144
Bonferroni Eşanlı Güven Aralıkları ve Farklı Grup ve Değişkenlerin
Belirlenmesi 149
Çok Değişkenli İki Yönlü Varyans Analizi 151
Tekrarlı Ölçümlerde Tek Yönlü Varyans Analizi 161
Klasik Varyans Analizi Yaklaşımı: 162
Çok Değişkenli Yaklaşım 164
Farklılık Yaratan Grupların Belirlenmesi 166
Varyans Analizi Sonuçları 168
Tek Etken Üzerinde Tekrarlamaların Olduğu Tekrarlı Ölçümlerde
İki Yönlü Varyans Analizi 170
Çok Değişkenli Yaklaşım 171
g=2 İçin Hotelling T2 Yaklaşımı 171
Etkileşimin Test Edilmesi 171
Zaman İçindeki Değişimin Test Edilmesi 172
Paralellik Olması Durumunda Çakışıklığın Test Edilmesi 172
Mauchly Küresellik Testi, ve İstatistikleri 173
Çok Değişkenli Yaklaşımla Değerlendirme 175
Korelasyon Matrisinin Birim Matris Olup Olmadığının Test Edilmesi 182

BÖLÜM 7

Çoklu Doğrusal Regresyon **189**
Bağımlı ve Bağımsız Değişkenler 189
Amaç ve Örnekler 189
Veri Tipleri 191
Bağımlı ve Bağımsız Değişkenlerin Seçimi 191
Regresyon Sonuçlarının Genellenebilirliği ve Gözlem Sayısı 192
Bir Bağımlı Bir Bağımsız Değişken Olduğunda Bazı Regresyon Modelleri 193

Basit Doğrusal Regresyon 193
Basit Doğrusal Regresyona İlişkin Varsayımlar 195
Regresyon Denklemindeki Bilinmeyenlerin Bulunması 196
Regresyon Katsayılarının Varyansları 198
Artık Varyansı (s^2) 198
Regresyon Denkleminin Standart Hatası (s) 198
Önemlilik Testleri 200
β_1 Katsayısının Test Edilmesi: 200
β_0 Katsayısının Test Edilmesi 200
$H_0 : \beta_1 = 0$ Hipotezinin Varyans Analizi Yardımıyla Test Edilmesi 200
Korelasyon (İlişki) Katsayısı (r) 204
Korelasyon Katsayısının Anlamlılığı 204
Korelasyon Katsayısının 0'a Eşitliğinin Test Edilmesi 204
Korelasyon Katsayısının Sıfırdan Farklı Bir Değere Eşitliğinin Test Edilmesi 205
Belirtme Katsayısı (R^2) 206
Korelasyon Katsayısı (r) ile Belirtme Katsayısı (R^2) Arasındaki İlişki 207
İki Değişken Arasındaki İlişkinin Venn Diyagramı İle Gösterimi 207
Regresyon Doğrusunun Çizimi 207
Basit Doğrusal Regresyonun Matrisler Yardımı İle Çözümü 217
Regresyon Katsayılarının Varyansları ve Standart Hataları 217
Varyans Analizi Tablosunun Matrislerle Gösterimi 218
Kestirim Değerleri ve Standart Hataları 218
Belirtme Katsayısı 219
Doğrusal Olmayan Regresyon Modelleri ve Doğrusallığı Sağlayan Dönüşümler 220
Çoklu Doğrusal Regresyon 230
Çoklu Doğrusal Regresyona İlişkin Varsayımlar 232
Çoklu Doğrusal Regresyon Denkleminin Matrislerle Elde Edilmesi 233
Şapka (Hat) Matrisi 234
Çoklu Regresyonda Hipotez Testleri 234
Regresyon Katsayılarının Test Edilmesi 235
Regresyon Katsayılarının Bir Bölümünün Sıfıra Eşit Olması Durumunun Test Edilmesi 236
Çoklu Regresyonda Kestirim 237
Güven Aralıkları 237
Regresyon Katsayıları İçin Güven Aralıkları 237
Kestirim Değerleri İçin Güven Aralığı 238
Standartlaştırılmış Regresyon Katsayıları 238
Korelasyon Matrisinin İncelenmesi 239
Temel Çoklu Regresyon Yöntemleri ve Bağımsız Değişkenlerin Modele Katkısının Venn Diyagramları ile Açıklanması 239
Çoklu Korelasyon Katsayısı (R) 241
Çoklu Belirtme Katsayısı (R^2) 242

Düzeltilmiş R^2, $(\overline{R}^2)$ 243
R^2'deki Değişim 243
Kısmi Korelasyon (İlişki) Katsayıları 244
Kısmi Belirtme Katsayısı 245
Yarı Kısmi Korelasyon (İlişki) Katsayısı 245
Bulguların Özetlenmesi 246
Regresyonda Modelin Yeterliği İle İlgili Ölçüler 259
Gözlem Uzaklığının Araştırılması 263
Mahalanobis Uzaklığı 264
Artıkların İncelenmesi 266
Ham Artıklar(e_i) 266
Standartlaştırılmış Artıklar (e_{is}) 267
Student Türü Artıklar (r_i ve r_i^*) 267
Veriden Gözlem Silerek Elde Edilen Artıkların İncelenmesi
(Deleted Residuals)–($e_{(i)}$) 268
Artık Grafiklerinin Çizimi 269
Etkili Gözlemlerin Araştırılması 269
Cook Uzaklığı (C_i^2) 270
DFBETA 270
DFITS 271
Kovaryans Oranı (KOi) 271
Artıkların Elde Edilmesi ve Yorumlanmasına İlişkin Örnekler 272
Artık Grafiklerinin Çizimi 277
Kısmi Artık Grafikleri 279
Değişen Varyanslılık 291
Hataların Normal Dağılmama Sorunu 298
Çoklubağlantı Kavramı, Nedenleri, Belirlenmesi ve Giderilmesi 299
Çoklubağlantının Nedenleri 301
Çoklubağlantının Ortaya Çıkarılması 302
Çoklubağlantının Giderilmesi 308
Hataların İlişkili Olma Sorunu 317
Otokorelasyonun Araştırılması ve Belirlenmesi 318
Regresyon Çözümlemesinde Nitelik Bağımsız Değişkenlerin Olması Durumu Ve
Göstermelik (Dummy) Değişkenlerin Kullanımı 326
Çoklu Doğrusal Regresyon Modellerinde Değişken Seçimi 342
Tüm Olası Alt Kümeler Yöntemi 343
İleriye Doğru Seçim Yöntemi 345
Geriye Doğru Çıkarma Yöntemi 346
Adım-Adım Regresyon Yöntemi 346
Seçim Yöntemlerinin Kullanımı ile İlgili Bazı Açıklamalar 347
Temel Bileşenler Regresyonu 355

Regresyon Modellerinin Geçerliği 362
Geçerlik Yöntemleri 363
Model Katsayılarının ve Kestirim Değerlerinin İncelenmesi 363
Yeni Veri Elde Etme 364
Verinin Bölünmesi 365

BÖLÜM 8

Güvenirlik 375
Test-Tekrar Test Yöntemi ve Güvenirlik Katsayısı 378
Sınıfiçi Güvenirlik Katsayısı 379
Alfa Katsayısı 380
Bir Testin İki Yarıya Bölünmesi ve Güvenirlik Katsayısı 383
Kuder-Richardson 20 ve 21Yöntemi 384
Madde Analizi 385
Kaynakça 393
Ekler 397

Bölüm 1

TEMEL MATRİS BİLGİSİ

Matris Bilgisinin Gerekliliği ve Tanımı

Çok değişkenli istatistiksel yöntemlerin hemen hemen tümünde, değişkenlerin matrisler şeklinde düzenlenmiş özet bilgileri kullanılarak çözüme ulaşılmaktadır. Hem bu nedenle hem de bazı teorik bilgileri daha çabuk kavrayabilmek için her türden kullanıcının belli düzeyde matris bilgisine gereksinimi vardır. Bu amaçla, bu bölümde, matrislere ilişkin bazı temel kavramlar üzerinde durulacak ve örnekler verilecektir.

Matris sözcüğü, sayısal verilerin dikdörtgen biçiminde (çoğunlukla karesel formda) gösterimi şeklinde ifade edilebilir. Diğer bir deyişle matris; sayıların sütun(lar) ve satır(lar) şeklinde düzenlenmiş durumudur. Örneğin, Hacettepe Üniversitesi Çocuk Hastanesi'ne 2000, 2001 ve 2002 Yıllarında başvuran hastaların mevsimlere göre dağılımı aşağıdaki gibi olsun (Tablo 1.1).

Tablo 1.1. H.Ü. Çocuk Hastanesi'ne Başvuran Hastaların Yıllara ve Mevsimlere Göre Dağılımı

	Yıllar		
Mevsimler	2000	2001	2002
İlkbahar	7643	8216	7324
Yaz	5216	5110	5800
Sonbahar	6250	7100	5960
Kış	8213	8100	7400

Bu tabloyu matris şeklinde ve A matrisi olarak adlandırarak şöyle gösterebiliriz;

$$A = \begin{bmatrix} 7643 & 8216 & 7324 \\ 5216 & 5110 & 5800 \\ 6250 & 7100 & 5960 \\ 8213 & 8100 & 7400 \end{bmatrix}$$

Bu matris, 4 satır ve üç sütun halinde dizilmiş sayılardan oluşmuştur. Dolayısıyla matris, yukarıda belirtildiği gibi dikdörtgen görünümünde satır ve sütunlardan oluşan bir sayılar dizisidir. Bu sayılar matrisin elemanlarıdır (ögeleridir). *n=Satır Sayısı, p=Sütun (Kolon) Sayısı* olmak üzere yukarıdaki matris; $n \times p = 4 \times 3$ boyutlu bir matristir.

Matristeki herhangi bir eleman: i. elemanın içinde bulunduğu satırı, j: elemanın içinde bulunduğu sütunu belirtmek üzere a_{ij} şeklinde gösterilebilir. Dolayısıyla a_{ij} elemanı i. satır ve j. sütunun kesiştiği yerdeki elemandır.

$$A = (a_{ij})_{n\times p} = (a_{ij})_{4x3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki matris, elemanlar şeklinde aşağıdaki gibi gösterilir. Buna göre yukarıda verilen A matrisinin, örneğin 4. satır 2. sütununu gösteren a_{42} elemanının değeri 8100'dür.

Matrislerde satır ve sütun sayısı arasında bir bağlantı yoktur. Örneğin, bir matris 300 satır 15 sütunlu olabileceği gibi 5 satır 90 sütunlu da olabilir.

Matris Çeşitleri

Çalışmalar sırasında sık sık kullanılan birçok matris çeşiti vardır. Bunlardan bazılarına aşağıda değinilmiştir.

Kare Matris: Eğer $n=p$ ise yani "*satır sayısı=sütun sayısı*" ise A matrisine ***p'inci mertebeden*** kare matris denir. Bu matrisin $i=j$ olan elemanlarına **esas köşegen elemanları** denir.

Sıfır Matris: Eğer tüm i, j için $a_{ij} = 0$ ise a matrisine sıfır matrisi denir. Diğer deyişle, bütün elemanları sıfır olan matrise sıfır matrisi denir. Sıfır matrisine ilişkin birkaç örnek aşağıda verilmiştir.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Köşegen matris: Esas köşegen elemanlarının skaler değerler, köşegen dışı elemanların ise sıfır olduğu bir kare matristir. Diğer bir deyişle, esas köşegen ögeleri hariç, bütün elemanları sıfır olan kare matrise köşegen matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

Aşağıda göreceğimiz matrislerden skaler matris; köşegen matrisin özel bir hali iken birim matris; skaler matrisin özel bir halidir.

Birim Matris: $n = p$ iken (yani matris kare matris iken), $i = j$ için $a_{ij} = 1$ (köşegen elemanları 1) ve $i \neq j$ için $a_{ij} = 0$ (köşegen dışı elemanları 0) ise A matrisine birim matris

denir. Bir birim matris, p; matrisin boyutunu göstermek üzere I_p ya da I şeklinde gösterilir. Örneğin p=3 için (üçüncü mertebeden) birim matris;

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Daha açık bir ifade ile; sol üst köşeyi sağ alt köşeye bağlayan köşegen üstündeki elemanları (esas köşegen ögeleri) 1, köşegenin altında ve üstünde bulunan elemanları ise 0 olan matris birim matristir.

Skaler Matris: Birim matrisin bir skaler ile çarpılması sonucunda elde edilen matrise denir. Örneğin,

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

bir skaler matristir. Diğer bir deyişle, köşegen ögeleri birbirine eşit olan köşegen matrise skaler matris denir.

Satır ve Sütun Vektörü: Sadece 1 sütunu olan matrise sütun ya da kolon vektörü, sadece 1 satırı olan matrise satır vektörü denir. Diğer bir deyişle, bir $n \times p$ matrisinde p=1 ise o matrise sütun vektörü, n=1 ise o matrise satır vektörü denir. Tablo 1.1'de sadece ilkbaharda başvuran hasta sayılarını ele alırsak, B=[7643 8216 7324] bir satır vektörü olup 1×3 boyutludur. Sadece 2000 Yılı bilgilerini düşünürsek;

$$Y = \begin{bmatrix} 7643 \\ 5216 \\ 6250 \\ 8213 \end{bmatrix} \quad 4 \times 1 \text{ boyutlu sütun vektörüdür.}$$

Devrik (Transpoz) Matris: Bir A matrisinin satırları ile sütunlarının yer değiştirmesinden elde edilen matrise devrik (transpoz) matris denir ve A' ile gösterilir. Örneğin,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ ise } A' = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

olur. Devrik matrislere ilişkin bazı özellikler Tablo 1.2'de verilmiştir. Tablodaki gösterimlerden örneğin AB; A ile B matrisinin çarpımını ifade etmektedir.

Tablo 1.2. Devrik Matrislere İlişkin Bazı Özellikler

$I' = I$	$(A')' = A$	$(A+B)' = A'+B'$
$(AB)' = B'A'$	$(kA)' = kA'$	$(ABC)' = C'B'A'$

Bazen satır vektörü sütun vektörünün devriği olarak gösterilir. Örneğin,

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ . \\ . \\ v_n \end{bmatrix} \text{ iken, satır vektörü } U' = [u_1 \quad u_2 \quad . \quad . \quad u_n]$$

olarak yazılır.

Simetrik Matris: Bir A kare matrisi simetrik ise $A = A'$ 'dür.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisi simetrik bir matristir. Çünkü,

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

olur ki $A = A'$ 'dür. Çok değişkenli istatistiksel analizde karşılaşacağımız matrislerin çoğu kare matris olup bunların çoğu da simetriktir. İleride göreceğimiz tüm korelasyon ve kovaryans matrisleri simetrik kare matrislerdir.

Çarpık Simetrik Matris: $A = -A'$ ise A matrisine çarpık simetrik matris denir. Örneğin;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ ise } A' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } -A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

olur.

Matrislerin Eşitliği: Bir matrisin her bir elemanı, diğer bir matrisin karşı gelen elemanına eşit ise bu iki matris eşittir denir. Aşağıdaki iki matris;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

ise bu iki matris $a_{11}=b_{11}$, $a_{12}=b_{12}$, ..., $a_{33}=b_{33}$ olması durumunda eşittir. Matrislerin eşit olabilmesi için boyutlarının aynı olması gerekir.

Bir Matrisin İzi: $n\times n$ boyutlu bir A matrisin izi, köşegen elemanlarının toplamına eşittir ve $tr(A)$ ya da $iz(A)$ ile gösterilir.

$$tr(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Örneğin,

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 8 & -1 \\ 5 & 2 & -6 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ise $tr(A)=6+2+1=9$'dur.

Matrislerde Toplama ve Çıkarma

Matrislerde toplama ve çıkarma işleminin yapılabilmesi için ilgili matrislerin aynı boyutta olması gerekir. Örneğin, A ve B 3×2 boyutlu matrislerse, $A+B$;

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} \end{bmatrix}$$

iken, A-B;

$$A-B=\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} \\ a_{31}-b_{31} & a_{32}-b_{32} \end{bmatrix}$$

olur. Örneğin,

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 8 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

ise

$$C=A+B=\begin{bmatrix} 5+3 & 8+3 & 3+2 \\ 6+5 & 1+1 & 4+5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 11 & 5 \\ 11 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

olurken,

$$E=A-B=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde,

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 5\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix}2 & -5\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

ise,

$$Z=A+B+C=\begin{bmatrix}2+3+2 & 1+1-5\\ 4+1+0 & 5+0+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -3\\ 5 & 9\end{bmatrix}$$

$$K=A-B-C=\begin{bmatrix}2-3-2 & 1-1-(-5)\\ 4-1-0 & 5-0-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 5\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

olur. Yine,

$$A=\begin{bmatrix}3\\ 5\\ 0\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}7\\ 1\\ -5\end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\end{bmatrix} \quad D=\begin{bmatrix}5 & 3 & 3\end{bmatrix}$$

ise

$$T=A+B=\begin{bmatrix}3+7\\ 5+1\\ 0+(-5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\ 6\\ -5\end{bmatrix} \text{ ve } F=A-B=\begin{bmatrix}-4\\ 4\\ 5\end{bmatrix}$$

olurken,

$$L=C-D=\begin{bmatrix}2-5 & -1-3 & 3-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -4 & 0\end{bmatrix}$$

olur.

Matrislerde Çarpma

Bir Matrisin Bir Skaler(Sabit) İle Çarpımı

Matris cebrinde, örneğin, 15 gibi herhangi bir sayı skaler (sabit) olarak adlandırılır. Bir matrisi k gibi bir skalerle çarpmak demek, matrisin her elemanını k ile çarpmak demektir. Eğer A, 3×2 boyutlu bir matris ise kA;

$$kA=\begin{bmatrix}ka_{11} & ka_{12}\\ ka_{21} & ka_{22}\\ ka_{31} & ka_{32}\end{bmatrix} \text{ olur. Örneğin, } k=5 \text{ ve } A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 8 & 0\end{bmatrix}$$

ise

$$C=kA=5\begin{bmatrix}3 & 5\\ 8 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15 & 25\\ 40 & 0\end{bmatrix}$$

İki Matrisin Çarpımı

İki matrisin çarpımı biraz daha karmaşıktır. İki matrisin çarpılabilmesi için soldaki matrisin sütun sayısının, sağdaki matrisin satır sayısına eşit olması gerekir. Çarpım sonucunda elde edilen matrisin boyutları; "*soldaki matrisin satır sayısı* × *sağdaki matrisin sütun sayısı*" şeklinde olur. Örneğin, $A_{23}B_{33}=C_{23}$ olur.

A matrisinin B matrisi ile çarpılması sonucunda elde edilen yeni matrise C dersek, bu matrisin c_{ij} elemanı; A matrisinin $i.$ satırındaki elemanların, B matrisinin $j.$ sütunundaki karşıt elemanlarla çarpılıp toplanması ile elde edilir. Örneğin, A_{32} ve B_{22} ise;

$$C = AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} \end{bmatrix}$$

olur. Örneğin, $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

ise

$$C = AB = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4(0)+0(2) & 4(7)+0(1) \\ 3(0)+1(2) & 3(7)+1(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 28 \\ 2 & 22 \end{bmatrix}$$

olur. Matris toplamı ve çarpımına ilişkin bazı özellikler Tablo 1.3'de verilmiştir.

Tablo 1.3. Matrislerin Toplamına ve Çarpımına İlişkin Bazı Özellikler

$A+B = B+A$	$(AB)C = A(BC)$
$AB \neq BA$ *(genellikle)*	$k(A+B) = kA+kB$
$A(B+C) = AB+AC$	$(k_1+k_2)A = k_1A+k_2A$
$(A+B)+C = A+(B+C)$	$A+0=A$
$(B+C)A = BA+CA$	$A+(-A)=0$
$(k_1k_2)A = k_1(k_2A)$	$1A=A \quad 0A=0$

Çeşitli Uygulamalar ve Açıklamalar

Örnek 1.1. A ve B kare matrisler ise AB ve BA şeklinde çarpımları tanımlanabilir. Ancak, AB ve BA çarpımları genellikle eşit değildir.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

iken

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olur.

Örnek 1.2. $(A')' = A$ 'dır.

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ ve } (A')' = \begin{bmatrix} 11 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = A$$

olur.

Örnek 1.3. $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ ve $X' = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]$ ise

$$X'X = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2$$

olur. Örneğin,

$$C = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ise} \quad C'C = 3^2 + 7^2 + 1^2 = 59$$

olur.

Örnek 1.4. $U = [1 \quad -2 \quad 3] \quad V = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ise

$$UV = (1)(3) + (-2)(1) + (3)(-2) = -5$$

olurken VU;

$$VU = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} [1 \quad -2 \quad 3] = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$$

olur.

Örnek 1.5. Çok değişkenli analizde üçlü çarpımlarla da sık sık karşılaşılır. U, n boyutlu bir sütun vektörü ve A, $n \times n$ boyutlu bir kare matris ise $W = U'AU$, 1×1 boyutlu bir matristir.

$$U = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ ve } A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

ise

$$U'AU = [3 \quad -1 \quad 2] \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = [20 \quad 6 \quad 1] \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 56$$

olur. $W=U'AU$ 'ya quadratik form da denir. Bu çarpım daha basit bir cebirsel ifade ile de yazılabilir.

$$U'AU = a_{11}u_1^2 + a_{22}u_2^2 + a_{33}u_3^2$$
$$+(a_{12}+a_{21})u_1u_2 + (a_{13}+a_{31})u_1u_3 + (a_{23}+a_{32})u_2u_3$$

Bu kural, iki aşamalı matris çarpımına gitmeden alternatif bir yöntem önermektedir. Bilgisayarların bu kadar yoğun kullanılmadığı dönemlerde, bir sağlama olması açısından, quadratik formları her iki yöntemle yapmak yararlı bir yaklaşımdı.

Örnek 1.6. Bir matrisin devriği ile çarpımı simetriktir. Bu hem AA' hem de $A'A$ için geçerlidir.

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 7\end{bmatrix} \text{ ise } A'A=\begin{bmatrix}29 & 41\\ 41 & 58\end{bmatrix} \text{ ve } AA'=\begin{bmatrix}13 & 31\\ 31 & 74\end{bmatrix}$$

olup her ikisi de simetriktir.

Örnek 1.7. $AB = 0$ olması $A = 0$ ya da $B = 0$ olmasını gerektirmez. A ve B'nin her ikisi de sıfırdan farklı olduğu halde $AB = 0$ bulunabilir.

$$AB=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

Örnek 1.8. $AB=AC$ olması $B=C$ olmasını gerektirmez.

Örnek 1.9. Esas köşegenin altında kalan tüm elemanları sıfır olan kare matrise üst üçgen matris denirken, esas köşegenin üstünde kalan tüm elemanları sıfır olan matrise alt üçgen matris denir. Aşağıda verilen A ve B matrisleri sırasıyla alt ve üst üçgen matrislerdir.

$$A=\begin{bmatrix}1 & & \\ 0.60 & 1 & \\ 0.72 & -0.12 & 1\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}3 & 2 & 0\\ & 5 & 3\\ & & 1\end{bmatrix}$$

Örnek 1.10. Eğer A bir kare matris ise A'nın kuvvetleri elde edilebilir.

$$A^2 = AA \quad A^3 = A^2A \quad A^0 = I$$

olur.

Örnek 1.11. Eğer A matrisi $n\times n$ boyutlu bir kare matris ise, A'nın n boyutlu birim matris ile sağdan ve soldan çarpımı A'ya eşittir.

$$I_nA = AI_n = A$$

Eğer A kare matris değil de $n\times p$ boyutlu bir matris ise o zaman;

$$I_nA = A \text{ ve } AI_p = A$$

olur.

Örnek 1.12. A ve B kare matrisler ise;

$$tr(A+B) = tr(A)+tr(B)$$

$$tr(AB) = tr(BA)$$

Matrislerin Doğrudan Çarpımı

Eğer A_{nxp} ve B_{mxq} boyutlu matrislerse A ve B'nin doğrudan çarpımı $A \otimes B$ ile gösterilir ve;

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & .... & a_{1p}B \\ a_{21}B & a_{22}B & .... & a_{2p}B \\ . & . & .... & . \\ a_{n1}B & a_{n2}B & .... & a_{np}B \end{bmatrix}$$

olur. Örneğin,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ise

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 2\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} & -1\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \\ 3\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} & 4\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 10 & -5 \\ 9 & 12 \\ 15 & 20 \end{bmatrix}$$

ve

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} 3\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ 5\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 12 \\ 10 & -5 \\ 15 & 20 \end{bmatrix}$$

olur.

Doğrudan çarpıma ilişkin bazı özellikler Tablo 1.4'de verilmiştir.

Tablo 1.4. Doğrudan Çarpıma İlişkin Bazı Özellikler

$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$	$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$
$(A+B) \otimes C = (A \otimes C)+(B \otimes C)$	$tr(A \otimes B) = tr(A)tr(B)$
A ve B vektörler ise $A' \otimes B = B \otimes A' = BA'$	
$(A \otimes B)' = A' \otimes B'$	

Bir Matrisin Tersi (İnversi)

Çok değişkenli yöntemlerin çoğunda matris tersinin bulunması gerekir. Bir matrisin tersini bulma işlemi bölme işleminin bir benzeridir. Bilindiği gibi k sıfırdan farklı bir sabit ise $kk^{-1} = k\frac{1}{k} = 1$ ya da $k^{-1}k = \frac{1}{k}k = 1$ 'dir. Benzer şekilde, A bir kare matris ise A'nın tersi A^{-1} ile gösterilir. A^{-1}, A'nın tersi ise $AA^{-1}=A^{-1}A=I$'dır. Yani bir A matrisinin, tersi ile sağdan ya da soldan çarpımı birim matrise (I'ya) eşittir. Sonuç olarak, bir A kare matrisinde $AA^{-1}=A^{-1}A=I$ koşulunu sağlayan A^{-1} matrisine A'nın tersi denir. Bir matrisin tersinin alınabilmesi için matrisin kare matris olması gerekli olmakla birlikte her kare matrisin de tersi yoktur. Örnek vermeden önce konuyu biraz daha basitleştirebiliriz; örneğin, $ax=b$ denkleminde a ve b bilinenler olsun. O zaman $x = \frac{b}{a} = \frac{1}{a}b = a^{-1}b$ olur. Burada a^{-1} a'nın tersidir ve $a^{-1}a = \frac{1}{a}a = 1$ olur. Benzer şekilde n bilinmeyenli n doğrusal denklem sistemini $AX=B$ şeklinde gösterirsek, X vektöründeki değerlerin bulunması için B vektörünü A matrisine bölmemiz gerekir. Ancak, matris cebrinde bölme $X = \frac{B}{A}$ şeklinde değil $X = A^{-1}B$ şeklinde olur ve A^{-1}'e matrisin tersi denir.

Eğer 2×2 boyutlu bir matrisin tersi varsa aşağıdaki gibi kolayca hesaplanabilir.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{22}/\Delta & -a_{12}/\Delta \\ -a_{21}/\Delta & a_{11}/\Delta \end{bmatrix}$$

Burada $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ olup bu sabit büyüklüğe ***matrisin determinantı*** denir. Buradan da açık bir şekilde görüldüğü gibi bir matrisin determinantı sıfıra eşitse ($\Delta = 0$ ise) bu matrisin tersi yoktur. Bunun tersi de geçerlidir. Yani tersi olmayan matrisin determinantı sıfırdır. Determinantı sıfır olan (ya da tersi olmayan) matrise ***tekil (singular) matris*** denir. Konuya ilişkin bir örnek aşağıdadır.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ ise } \Delta = 4 - 1 = 3 \text{ 'tür. Buradan; } A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Bu örnekte görüldüğü gibi, bir matrisin tersinin alınabilmesi için determinantının bulunması gerekmektedir. Ayrıca, $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ 'dır. Buna göre;

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Determinantlar

Determinantlar *(Belirtenler)* kare matrisler için bulunabilir. $A=(a_{ij})$ biçimindeki *n.* dereceden bir kare matrisin determinantı, belli bir işlem sonucunda bulunan bir sabit değerdir ve $|A|$ biçiminde gösterilir. Yukarıda belirtildiği gibi, 2×2 boyutlu bir A matrisinin determinantı, $|A|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ ile verilir. Eğer A, bir *varyans-kovaryans matrisi* (bak. Bölüm 2) ise, *p=değişken sayısı* olmak üzere bu matris; *p* tane varyans ve $p\times(p-1)/2$ tane kovaryanstan oluşur ve de $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$, "varyans çarpımları–kovaryans çarpımları"nı verir. Diğer bir deyişle, bazen, varyans–kovaryans matrisi (*S*) ile tanımlanan değişim, tek bir sayısal değerle tanımlanmak istenebilir. *S*'nin determinantı bu sayısal değere ulaşmamızı sağlar ve genelleştirilmiş varyans olarak adlandırılır. Bu nedenle de determinantlar, çok değişkenli hipotez testlerindeki (*MANOVA*) istatistiklerde (örneğin, Wilks lambda'da) sıklıkla kullanılır. A matrisi varyans–kovaryans matrisi değilse determinantı eksi çıkabilir. Determinantların en çok kullanıldığı alanlardan biri matrislerin tersinin bulunması ve ileride göreceğimiz gibi denklem sistemlerinin çözümüdür. Örneğin;

$$4x_1-2x_2=2$$
$$4x_1+3x_2=5$$

denklemini matris şeklinde aşağıdaki gibi yazıp,

$$\begin{bmatrix}4 & -2\\ 4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 5\end{bmatrix}$$

$AX=B$ şeklinde gösterdikten sonra $AX=B$ eşitliğinin her iki tarafını A'nın tersi ile çarparsak $A^{-1}AX=A^{-1}B$ olur. $A^{-1}A=I$ *ve* $IX=X$ olduğuna göre $X=A^{-1}B$ şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla A^{-1}'i bulmak gerekir. A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\text{Adj}(A) \qquad (1.1)$$

ile bulunur. Yani, A^{-1}'i bulmak için de $|A|$'yı ve $Adj(A)$'yı bulmak gerekir (bu örnekteki x_1 ve x_2'nin çözümü ileride verilecektir). Formül 1.1'de görüldüğü gibi, A matrisinin determinantı sıfıra eşitse matrisin tersi alınamayacaktır. Hatırlanacağı üzere, determinantı sıfır olan matrise tekil (singular) matris deniyordu.

Minörler, Kofaktörler, Adjoint Matris

$A=(a_{ij})_{nn}$ matrisinin *i.* satır ve *j.* sütunu çıkartılırsa geriye kalan matrisin determinantına a_{ij}'nin ***minörü*** adı verilir ve $|M_{ij}|$ ile gösterilir. Tanım gereği bu matrisin boyutları (*n*-1)(*n*-1)'dir. a_{ij}'nin

$$\alpha_{ij}=(-1)^{i+j}\,|M_{ij}| \qquad (1.2)$$

biçimindeki işaretli minörüne a_{ij}'nin ***kofaktörü*** denir. $(-1)^{i+j}$ işaretleri;

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & . & . \\ - & + & - & + & . & . \\ + & - & + & - & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{bmatrix}$$

biçiminde oluşurlar. $A=(a_{ij})_{3x3}$ matrisi için bu söylediklerimizi özetlersek;

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

olmak üzere 1. satır için minörler;

$$|M_{11}|=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |M_{12}|=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad |M_{13}|=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ve kofaktörler;

$$\alpha_{11}=(-1)^{1+1}|M_{11}|=|M_{11}| \quad \alpha_{12}=(-1)^{1+2}|M_{12}|=-|M_{12}|$$

$$\alpha_{13}=(-1)^{1+3}|M_{13}|=|M_{13}|$$

olur.

Bir matrisin **determinant değeri** A'nın herhangi bir satır ya da sütunundaki her elemanın kendi kofaktörü ile çarpımlarının toplamına eşittir. Yukarıdaki örneğimiz için A'nın determinantı;

$$|A|=a_{11}\alpha_{11}+a_{12}\alpha_{12}+a_{13}\alpha_{13} \qquad (1.3)$$

ile bulunur. Bu işlemler herhangi bir satır ya da sütun için yapılabilir ve sonuç değişmez. Bir matrisin tersini bulabilmek için (1.1) formülü yazılmıştı. Şimdi A matrisinin elemanlarını kofaktörler olarak yazalım. Bu matris örneğimiz için;

$$A_K=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

şeklinde olacaktır. Bu matrisin transpozunu aldığımızda elde edeceğimiz matrise ***A'nın adjoint matrisi*** adı verilir ve A'_K ile gösterilir. Buna göre A'_K;

$$A'_K = Adj(A) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

olur.

Yukarıdaki açıklamalar, 3×3 boyutundaki bir A matrisi üzerinde uygulanmış ve matrisin adjointi ile tersi aşağıda bulunmuştur. A matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

olsun. Bu matrise ilişkin tüm kofaktörleri bulursak;

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (4)(3) - (-2)(1) = 14$$

$$\alpha_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -[(3)(3) - (-2)(-2)] = -5$$

$$\alpha_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (4)(-2) = 11$$

ve

$$\alpha_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \quad \alpha_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 7 \quad \alpha_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\alpha_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6 \quad \alpha_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 8 \quad \alpha_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 7$$

olur ve A'nın ***determinantını*** 1. satır yardımıyla bulursak;

$|A| = a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + a_{13}\alpha_{13} = (1)(14) + (-1)(-5) + (2)(11) = 41$ olur.

Eğer 3. sütun yardımı ile bulacak olursak sonuç değişmez ve determinant yine

$|A| = a_{13}\alpha_{13} + a_{23}\alpha_{23} + a_{33}\alpha_{33} = (2)(11) + (-2)(1) + (3)(7) = 41$

olarak bulunur. A matrisini kofaktörler cinsinden yazarsak;

$$A_K = \begin{bmatrix} 14 & -5 & 11 \\ 5 & 7 & 1 \\ -6 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

olurken, ***bu matrisin devriği bize Adj(A)'yı verecektir.***

$$Adj(A)=\begin{bmatrix}14 & 5 & -6\\ -5 & 7 & 8\\ 11 & 1 & 7\end{bmatrix}$$

olur ve (1.1) yardımıyla A'nın ***tersi*** (A^{-1});

$$A^{-1}=\frac{1}{41}\begin{bmatrix}14 & 5 & -6\\ -5 & 7 & 8\\ 11 & 1 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14/41 & 5/41 & -6/41\\ -5/41 & 7/41 & 8/41\\ 11/41 & 1/41 & 7/41\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Bu matris sağdan ya da soldan A ile çarpılırsa 3×3 boyutlu bir birim matris elde edilir.

Ters Matris ve Determinantlara İlişkin Bazı Özellikler ve Uygulamalar:

Örnek 1.13. Ters matrise ilişkin bazı özellikler Tablo 1.5'de verilmiştir.

Tablo 1.5. Ters Matrise İlişkin Bazı Özellikler

$(A^{-1})^{-1}=A$	
$(A^{-1})'=(A')^{-1}$	$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
$I^{-1}=I$	$(B^{-1}A^{-1})(AB)=I$
$(AB)(B^{-1}A^{-1})=I$	$(A^{-1})(A^{-1})^{-1}=I$
$(cA)^{-1}=\frac{1}{c}A^{-1}$ (c sıfırdan farklı ise)	

Örnek 1.14. $\left|A^{-1}\right|=\dfrac{1}{|A|}$

Örnek 1.15. 1×1 boyutlu bir A matrisinin determinantı $|A|=a_{11}$ 'dir.

Örnek 1.16. Bir matrisin herhangi bir satır ya da sütunundaki elemanlar sıfır ise, bu matrisin determinantı sıfıra eşittir. Örneğin,

$$\begin{vmatrix}0 & 0\\ 2 & 3\end{vmatrix}=0$$

Örnek 1.17. Bir matristeki iki satır ya da sütun birbirine eşitse o matrisin determinantı sıfıra eşittir. Aşağıdaki örnekte 1. ve 3. satırlar aynı olduğu için determinant sıfıra eşittir.

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=0$$

Örnek 1.18. Bir matrisin bir satır ya da sütununun elemanları bir diğer satır ya da sütunun elemanları ile orantılı ise determinantı sıfıra eşittir. Aşağıdaki matrisin determinantı sıfırdır. Çünkü, üçüncü sütundaki elemanlar birinci sütundakilerin iki katıdır.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Örnek 1.19. Bir matrisin herhangi bir satırı yer değiştirirse determinant değeri değişmez, ancak işareti değişir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad |A| = 18$$

Bu matriste ikinci ve üçüncü satırları yer değiştirip yeni matrisi A1 ile tanımlarsak;

$$A1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ olur ve } |A1| = -18$$

olarak bulunur.

Örnek 1.20. Bir matrisin herhangi bir satırı ya da sütunu *k* gibi bir değişmezle çarpılırsa determinantı *k* ile çarpılmış olur. Yukarıda determinantını 18 olarak bulduğumuz matrisin 2. sütununu 2 ile çarpıp yeni matrise *B* der isek;

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = (2)(18) = 36$$

olur.

Örnek 1.21. Bir matrisin herhangi bir satır ya da sütununun elemanları bir sabitle çarpılırsa ve sonuçlar başka bir satır ya da sütunun karşı gelen ögelerine eklenir ya da çıkarılırsa determinantın değeri değişmez. Yukarıda verilen ve determinantı 18 olan *A* matrisini (Örnek 1.19) dikkate alalım ve bu matrisin 2. sütunundaki elemanları 2 ile çarpıp üçüncü sütunun elemanlarından çıkarırsak; yeni matris *C*;

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \text{ olur ve } |C| = 18$$

olarak bulunur. Hatta, C matrisindeki ilk satırı 5 ile çarpıp üçüncü satırdan çıkartarak elde edilen matrisin D determinantını alacak olursak;

$$D=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -3 & -7 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad |D|=18$$

olur.

Örnek 1.22. Bir matrisin herhangi bir satırındaki (ya da sütunundaki) elemanları, başka bir satırdaki (ya da sütundaki) karşı gelen elemanların kofaktörleri ile çarparak toplarsak yani doğrusal (linear) kombinasyonunu alırsak sonuç sıfır olur.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ise 2. sütuna ilişkin kofaktörler Eşitlik (1.2)'den;

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1 \quad A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-5 \quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=7$$

olur. Bu kofaktörlerin 1. sütun elemanlarını katsayılar olarak aldığımızda elde edilen doğrusal kombinasyon;

$$(1)(1)+(3)(-5)+(2)(7)=0$$

olurken, 3. sütun elemanlarını katsayılar olarak aldığımızda;

$$(3)(1)+(2)(-5)+(1)(7)=0$$

olur. Bu özellik bir matrisin tersinin bulunması yönteminde temelleri oluşturduğu gibi, bir matrisin özvektörlerinin (eigen vectors) belirlenmesinde önemli rol oynar.

Örnek 1.23. Köşegen matrisin determinantı, köşegen ögelerinin çarpımına eşittir.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=(2)(3)-(0)(0)=6$$

Örnek 1.24. Birim matrisin determinantı 1'e eşittir ($|I|=1$).

Örnek 1.25. Üst ya da alt üçgen matrisin determinantı esas köşegen elemanlarının çarpımına eşittir.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 5 \end{vmatrix}=(1)(2)(5)=10$$

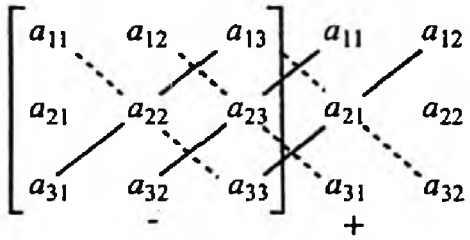
Örnek 1.26. *A, B, C,.....,Z* aynı boyutta matrisler ise;

$$|ABC.....Z| = |A|\ |B|\ |C|\ .....|Z| \text{ dir.}$$

Örnek 1.27. $|A+B| \neq |A|+|B|$

Örnek 1.28. *A* matrisi $p \times p$ boyutlu ise $|kA| = |A|k^p$ olur.

Örnek 1.29. Üçüncü mertebeden matrislerin determinantını bulmak için değişik yöntemler geliştirilmiştir. Bunlardan bir tanesi de Sarrus kuralıdır. Bu amaçla, determinantı alınacak matrisin ilk iki sütunu matrisin sağ tarafına yazılır;



Determinatı hesaplamak için yukarıdaki gösterimde noktalı elemanlar çarpılıp toplanırken bu toplamdan çizgili elemanlar çarpılıp çıkartılır. Buna göre, $|A|$:

$$|A| = +(a_{11}a_{22}a_{33}) + (a_{12}a_{23}a_{31}) + (a_{13}a_{21}a_{32})$$
$$-(a_{13}a_{22}a_{31}) - (a_{11}a_{23}a_{32}) - (a_{12}a_{21}a_{33})$$

olarak yazılır. Ancak bu yöntem, 3×3'den fazla boyutlu matrislerin determinantını bulmada yardımcı olmaz.

Örnek 1.30. Aşağıda verilen 4×4 boyutundaki bir matrisin determinant değerini birinci satıra göre çözelim;

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+0\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$3\left\{4\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right\} - 0 + 0 \quad -1\left\{0\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}\right\} =$$

$$3\{4(6-2)-1(9-4)+0\}-0+0-1\{0-4(4-6)+1(8-9)\} = 26$$

olur.

Örnek 1.31. Aşağıda daha önce verdiğimiz

$$4x_1 - 2x_2 = 2$$
$$4x_1 + 3x_2 = 5$$

denklemini matrisle çözelim. Yukarıdaki denklemi $AX=B$ şeklinde yazarsak;

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

olur. $AX=B$'nin her iki tarafını A^{-1} ile çarparsak $A^{-1}AX = A^{-1}B$ ve $A^{-1}A=I$ ve $IX=X$ olduğu için $X= A^{-1}B$ olur. Yani A'nın tersini alıp B ile çarparsak X vektöründeki x_1 ve x_2 'yi buluruz. Önce matrisin tersi için gerekli olan $Adj(A)$'yı bulmak için kofaktörleri bulalım.

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1}|a_{22}| = a_{22} \qquad \alpha_{12} = (-1)^{1+2}|a_{21}| = -a_{21}$$
$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1}|a_{12}| = -a_{12} \qquad \alpha_{22} = (-1)^{2+2}|a_{11}| = a_{11}$$

ve A matrisini α cinsinden yazarsak;

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ ve } Adj(A) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. A matrisinin determinantı $|A|$ ise;

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (4)(3) - (-2)(4) = 20$$

ve

$$A^{-1} = \frac{1}{20} Adj(A) = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

olur. Buradan $A^{-1}B$;

$$A^{-1}B = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/20 & 2/20 \\ -4/20 & 4/20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16/20 \\ 12/20 \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 16/20 \\ 12/20 \end{bmatrix} \text{ ve } x_1 = 16/20 \text{ ve } x_2 = 12/20$$

olur.

Örnek 1.32. Yukarıda çözdüğümüz örnekten yola çıkarak 2×2 boyutlu bir matrisin tersinin bulunmasında kullanılacak kolay bir yöntem oluşturabiliriz. Buna göre; 2×2 boyutlu matrisin esas köşegen elemanlarının yerlerini ve diğer köşegen elemanların

işaretlerini değiştirdiğimizde matrisin adjointini elde ederiz. Bunu determinanta bölduğümüzde de matrisin tersini buluruz. Örneğin;

$$A=\begin{bmatrix}5 & 3\\ 2 & 6\end{bmatrix} \quad \text{ise} \quad Adj(A)=\begin{bmatrix}6 & -3\\ -2 & 5\end{bmatrix}$$

olur. Buradan,

$$|A|=24 \quad \text{ve} \quad A^{-1}=\frac{1}{24}\begin{bmatrix}6 & -3\\ -2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6/24 & -3/24\\ -2/24 & 5/24\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek 1.33. 2×2 ve 3×3 boyutlu matrisler ile köşegen matrislerde matrisin tersini bulmak için geliştirilmiş basit formüllerin sembollerle gösterimi aşağıda verilmiştir.

I. ***2×2 boyutlu matrisler için;***

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{D}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

olup burada $D = ad\text{-}bc$'dir.

II. ***3×3 boyutlu matrisler için;***

$$\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{D}\begin{bmatrix}ei-fh & ch-bi & bf-ce\\ fg-di & ai-cg & cd-af\\ dh-eg & bg-ah & ae-bd\end{bmatrix}$$

olup burada $D = a(ei\text{-}fh) + b(fg\text{-}di) + c(dh\text{-}eg)$'dir. Yine,

$$A=\begin{bmatrix}a & b & b\\ b & a & b\\ b & b & a\end{bmatrix} \quad \text{ise} \quad A^{-1}=\frac{1}{a(a+b)-2b^2}\begin{bmatrix}a+b & -b & -b\\ -b & a+b & -b\\ -b & -b & a+b\end{bmatrix}$$

olur.

III. ***Köşegen Matrisler İçin;***

$$\begin{bmatrix}a & 0 & 0 & . & 0\\ 0 & b & 0 & . & 0\\ 0 & 0 & c & . & 0\\ . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & 0 & . & z\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1/a & 0 & 0 & . & 0\\ 0 & 1/b & 0 & . & 0\\ 0 & 0 & 1/c & . & 0\\ . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & 0 & . & 1/z\end{bmatrix}$$

olur.

[Not: Tekrar hatırlatmak gerekirse; bir A matrisinin determinantı 0 ise o matrisin tersi alınamaz. Değişkenlerin birbirleri ile doğrusal bağıntılı olduğu çoklubağlantılı ya da tekil matrislerin determinantı 0 olduğu için bu matrislerin tersi alınamaz.]

Dik (Orthogonal) Matris

$n \times n$ boyutundaki bir A matrisi dik ise $AA' = A'A = I$ 'dır. Dik matrislerde $A^{-1} = A'$ olup $|A| = \pm 1$ 'dir. Ayrıca A ve B dik matrisler ise AB de diktir. Aşağıdaki matris diktir.

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Benzer şekilde aşağıda verilen A matrisi de diktir;

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \quad \text{ise} \quad |A| = +1 \quad \text{ve} \quad A^{-1} = A'$$

dur.

Matrislerin Parçalara Ayrılması

Bir A matrisi, ilgili değişkenlerin ortak özellikleri nedeniyle, matrisin satırları ve sütunları arasına yatay ve dikey çizgiler çizilerek alt parçalara (gruplara) ayrılabilir. Bir matrisin parçalara ayrılması bazı hesaplamalarda kolaylık sağlar. Parçalanmış matrislerde toplama, çıkarma ve çarpma işlemleri yapılabilir. Parçalanmış matrislere blok matris de denir.

Parçalara ayrılmış matrislerde toplama ve çıkarma işlemlerini yapabilmek için parçalara ayrılmış matris boyutlarının aynı olması yanında alt matrislerin boyutlarının da aynı olması gerekir. Aşağıdaki A ve B matrisleri aynı boyutta oldukları ve aynı şekilde parçalandıkları için toplanabilirler;

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$B = \left[\begin{array}{c|ccc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & a_{14} \\ \hline b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

Parçalara ayrılmış iki matrisin çarpımı için ilk matrisin sütun sayısının, ikinci matrisin satır sayısına eşit olması gerekir. Ayrıca, birincinin sütunları ile ikincinin satırları aynı şekilde ayrılmış olmalıdır. Aşağıdaki C ve D matrislerini ele alalım;

$$C = \left[\begin{array}{cc|c|cc} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ \hline c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \end{bmatrix}$$

$$D=\left[\begin{array}{c|cc} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ \hline d_{31} & d_{32} & d_{33} \\ \hline d_{41} & d_{42} & d_{43} \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} \end{array}\right]=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \\ D_{31} & D_{32} \end{bmatrix}$$

ise bu matrisler çarpılabilir olduğundan;

$$CD=\begin{bmatrix} C_{11}D_{11}+C_{12}D_{21}+C_{13}D_{31} & C_{11}D_{12}+C_{12}D_{22}+C_{13}D_{32} \\ C_{21}D_{11}+C_{22}D_{21}+C_{23}D_{31} & C_{21}D_{12}+C_{22}D_{22}+C_{23}D_{32} \end{bmatrix}$$

olur.

Çeşitli Uygulamalar ve Açıklamalar

Örnek 1.34. Aşağıda verilen E ve F parçalanmış matrislerinin çarpımlarını bulalım;

$$E=\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \qquad F=\left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ \hline 3 & 1 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \end{bmatrix}$$

ise,

$$EF=\begin{bmatrix} E_{11}F_{11}+E_{12}F_{21} \\ E_{21}F_{11}+E_{22}F_{21} \end{bmatrix}$$

ve

$$E_{11}F_{11}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \quad E_{12}F_{21}=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{11}F_{11}+E_{12}F_{21}=\begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$$

olurken,

$$E_{21}F_{11}+E_{22}F_{21}=\begin{bmatrix} 9 & 3 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur ve EF;

$$EF=\left[\begin{array}{cc} 10 & 4 \\ 7 & -1 \\ \hline 9 & 3 \end{array}\right]$$

olarak elde edilir.

Örnek 1.35. Parçalanmış tekil olmayan (nonsingular) bir matrisin tersini alt matrislerle ifade etmek de olanaklıdır. Eğer $n \times p$ boyutlu A matrisini aşağıda görüldüğü gibi 4 alt matrise parçaladığımızda;

$$A = \left[\begin{array}{c|c} [A_{11}]_{n_1 p_1} & [A_{12}]_{n_1 (p-p_1)} \\ \hline [A_{21}]_{(n-n_1) p_1} & [A_{22}]_{(n-n_1)(p-p_1)} \end{array}\right]_{np} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

A_{11} ve A_{22}'nin her ikisi kare matrislerse, A matrisinin tersinin olması durumunda bu matrise B deyip aşağıdaki gibi gösterirsek;

$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$ ve B_{ij}'leri A ve B ile ilişkili olarak aşağıdaki eşitliklerle bulabiliriz;

1. $B_{11} = \left[A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right]^{-1} = \left[A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}B_{22}A_{21}A_{11}^{-1}\right]$
2. $B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}\left[A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right]^{-1} = -A_{11}^{-1}A_{12}B_{22}$
3. $B_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}\left[A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right]^{-1} = -A_{22}^{-1}A_{21}B_{11}$
4. $B_{22} = \left[A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right]^{-1} = \left[A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}B_{11}A_{12}A_{22}^{-1}\right]$

Örneğin, bir A matrisi aşağıdaki gibi parçalara ayrılsın;

$$A = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ \hline 3 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

$$A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{22}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

ve

$B_{11} = \left[A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ 18 & -5 \end{bmatrix}$ ve diğer hesaplamalar da benzer şekilde yapılarak A matrisinin tersi;

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & -3 & -1 & -1 & -1 \\ 18 & -5 & -2 & -2 & -2 \\ -3 & 1 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ -3 & 1 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ -3 & 1 & 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek 1.36. Parçalara ayrılmış matrisin determinantına da sık sık gereksinim duyulur.

1. Eğer A_{11} tekil olmayan ($|A_{11}| \neq 0$) ise;

$$|A| = |A_{11}| \, |A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|$$

2. Eğer A_{22} tekil olmayan ($|A_{22}| \neq 0$) ise;

$$|A| = |A_{22}| \, |A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}|$$

ile verilir.

Doğrusal Bağımlılık ve Bağımsızlık Kavramları

Herbiri $n \times 1$ boyutunda olan $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_p$ vektörlerini, hepsi sıfır olmayan $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_p$ skalerleri ile çarptığımızda;

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots\ldots + a_pv_p = 0$$

ise $v_1, v_2, \ldots\ldots, v_p$ vektörlerinin ***doğrusal bağımlı*** olduğu söylenir.

Diğer taraftan, sadece $a_1 = a_2 = \ldots\ldots = a_p = 0$ iken $\sum_{i=1}^{p} a_i v_i = 0$ ise vektörler kümesinin ***doğrusal bağımsız*** olduğu söylenir. Öncelikle, "doğrusal bağımlılık ve bağımsızlık kavramları ne işimize yarayacaktır?" sorusunun yanıtını aşağıdaki açıklamalarla vermeye çalışalım. Daha önce,

$$4x_1 - 2x_2 = 2$$
$$4x_1 + 3x_2 = 5$$

denklemlerini $AX=B$ şeklinde göstermiş ve x_1 ve x_2'nin değerlerini bulmak için $X = A^{-1}B$ eşitliğini geliştirmiştik. Buradaki A^{-1} matrisini bulmak için A'nın determinantının sıfırdan farklı olması gerekmekte idi ($|A| \neq 0$). Determinantın sıfırdan farklı olabilmesi için ise, "***matrisin herhangi iki satır ya da sütununun birbirinin aynı ya da biri diğerinin iki, ... vb. katı olmaması***" gerekmektedir. Yani, bir matrisin determinantının sıfırdan farklı olabilmesi için o matristeki bütün satır ya da sütunların birbirinden ***doğrusal bağımsız*** olması gereklidir. Yukarıdaki denklem sisteminin sol tarafını vektörler halinde gösterip sıfıra eşitleyelim;

$$x_1\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

Bu eşitlik ancak x_1=0 ve x_2=0 olması durumunda sağlanmaktadır. Bu durumda bu iki vektörün dağrusal bağımsız olduğu söylenir. Şimdi ise aşağıda verilen denklemleri ele alalım;

$$8x_1 + 4x_2 = 5$$
$$16x_1 + 8x_2 = 2$$

Bu sistem için yukarıda yaptığımız işlemleri yineleyip;

$$x_1\begin{bmatrix}8\\16\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}4\\8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

yazarsak, eşitliği sağlayabilmek amacıyla x_1 ve x_2 için sıfırdan farklı değerler bulabiliriz. Örneğin, x_1 =-1 ve x_2 =2 için;

$$-1\begin{bmatrix}8\\16\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}4\\8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

olur. Bu durumda bu iki vektör birbirinden doğrusal bağımlıdır ve

$$\begin{bmatrix}8 & 4\\16 & 8\end{bmatrix}$$

matrisinin determinantı sıfır çıkacağı için tersi de bulunamaz.

Çeşitli Uygulamalar ve Açıklamalar

Örnek 1.37. $v_1 = \begin{bmatrix}2\\4\\-1\end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}$ $v_3 = \begin{bmatrix}-1\\-2\\1/2\end{bmatrix}$

olsun. Bu vektörler doğrusal bağımlıdır. Çünkü,

$$1v_1 + 0v_2 + 2v_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

olur.

Bu durumda skalerlerden sadece iki tanesi sıfırdan farklıdır ve sadece v_1 ve v_3 diğer iki vektörün doğrusal kombinasyonu olarak ifade edilirler. v_2 ifade edilemez. Yani,

$$1\begin{bmatrix}2\\4\\-1\end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix}-1\\-2\\1/2\end{bmatrix} + 0 \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix}2\\4\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\4\\-1\end{bmatrix}$$

olur ve v_1, v_2 ve v_3'ten oluşan 3×3'lük matrisin tersi alınamaz.

Örnek 1.38. Aşağıda verilen v_1, v_2 ve v_3 vektörlerini inceleyelim;

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Bu vektörler doğrusal bağımsızdır. Çünkü, ancak tüm skalerlerin sıfır olması durumunda;

$$0v_1 + 0v_2 + 0v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

koşulu sağlanır ve bu üç vektörden oluşan matrisin tersi alınabilir.

Örnek 1.39. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 12 \\ 10 & 2 & 30 \\ 6 & 8 & 18 \end{bmatrix}$

matrisi doğrusal bağımlıdır. Çünkü, $a_1 = 3$ $a_2 = 0$ ve $a_3 = -1$ için

$$3v_1 + 0v_2 + (-1)v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

koşulu sağlanır.

Örnek 1.40. Bir vektör kümesi doğrusal bağımsız ise vektörlerden hiçbiri geriye kalanların doğrusal kombinasyonu olarak ifade edilemez.

Örnek 1.41. n boyutlu bir uzayda doğrusal bağımlı maksimum değişken sayısı n'dir.

Rank Kavramı

Matrislerde rank, verilen bir doğrusal denklem sisteminin çözümü olup olmadığını araştırmakta kullanılır. $AX=B$ denklem sisteminde X'i bulabilmek için $X = A^{-1}B$ yazılmıştı. A matrisi kare matris değilse (sistemdeki denklem sayısı değişken sayısından farklı ise) A^{-1} bulunamaz. A matrisi kare matris iken de determinantı sıfır olabilir ve A^{-1} yine bulunamaz. Bu nedenle bu tür problemlerin çözümüne başlamadan önce matrislerin rankını incelemek yararlı olur.

Daha önce belirtildiği gibi, determinantı sıfır olan matrise tekil (singular) matris denir. ***Bir matrisin rankı***; matrisin tekil olmayan (yani determinantı sıfır çıkmayan-nonsingular) en büyük alt matrisinin mertebesidir. Örneğin, elimizde $n \times p$ boyutlu bir A matrisi olsun. Bu matristen belirli sayıda satır ya da sütunların çıkartılması ile elde edilen tüm olası kare alt matrislerin determinantlarını bulduğumuzda, determinantı sıfır olmayan matrisler arasında en yüksek mertebeli alt matrisin mertebesi A matrisinin rankını verir ve *rank(A)* ya da *r(A)* ile gösterilir. Örneğin,

$$A=\begin{bmatrix}6 & 4\\ 3 & 2\\ -1 & 4\end{bmatrix}$$

olsun. A matrisi 3×2 boyutunda olduğundan olası tüm alt kare matrislerin boyutu 2'yi geçemeyeceği için $r(A)$, 2'yi geçemeyecektir. Bu örnekteki olası kare alt matrisler aşağıda verilmiştir;

$$\begin{bmatrix}6 & 4\\ 3 & 2\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 4\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}6 & 4\\ -1 & 4\end{bmatrix}$$

İlk matriste vektörler doğrusal bağımlı olduğu için ($2v_1-3v_2=0$) matrisin determinantı sıfırdır ve bu nedenle bu matris tekildir. Geriye kalan iki alt matris ise tekil değildir. Her iki matrisin boyutu 2×2 olduğu için dolayısıyla, en büyük mertebe 2 olduğu için bu matrisin rankı $r(A)=2$'dir.

Rank İle İlgili Çeşitli Özellikler ve Uygulamalar

Örnek 1.42. Bir matrisin rankı, o matriste birbirinden bağımsız maksimum satır ya da sütun sayısını gösterir.

Örnek 1.43. Bir matriste birbirinden bağımsız maksimum satır sayısı, birbirinden bağımsız maksimum sütun sayısına eşittir.

Örnek 1.44. A, $n\times n$ boyutunda tekil olmayan bir matris ise, dolayısıyla tersi bulunabiliyor ise A matrisinin tam (full) ranklı olduğu söylenir ve $r(A)=n$'dir. Örneğin,

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 6 & 1 & 4\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}\qquad ise\quad |A|=-22$$

olur. Determinant değeri sıfırdan farklı olduğu için $r(A)=3$'tür ve matris tam ranklıdır.

Örnek 1.45. A ve B tekil olmayan matrislerse ve C uygun boyutlu bir matris ise $r(AC) = r(C)$, $r(CA) = r(C)$, $r(ABC) = r(C)$ olur.

Örnek 1.46. Birim matriste satır ya da sütunlar birbirinden bağımsız olduğu için I_n'in rankı n'e eşittir $r(I_n)=n$.

Örnek 1.47. Köşegen matrisin rankı, sıfır olmayan köşegen elemanların sayısına eşittir.

Örnek 1.48. $r(A)=r(A')$

Örnek 1.49. $r(A'A)=r(AA')=r(A)$

Örnek 1.50. A ve B (uygun boyutlarda olduğu için) çarpılabilen ve tekil olmayan matrislerse; AB çarpımının rankı; $r(A)$ ile $r(B)$'den küçük olanınkine eşit ya da ondan küçüktür ($r(AB)\le min[r(A),r(B)]$).

Örnek 1.51. 3×50 boyutlarındaki bir matrisin rankı 3'den büyük çıkamaz. Çünkü oluşacak tüm alt kare matrislerin en büyüğü 3×3 boyutunda olacaktır ($0 \le r(A) \le min(n,p)$).

Örnek 1.52. Yukarıda verdiğimiz yöntemin dışında bir matrisin rankını bulmak için geliştirilmiş başka yöntemler de vardır. Bunlardan biri de elementer satır işlemleri ile rankın bulunmasıdır.

Bir matrisin rankı aşağıda verilen elementer satır işlemleri ile değişmez.

1. Matrisin iki satır ya da sütununun yer değiştirmesi
2. Bir satırın ya da sütunun her elemanının sıfırdan farklı bir sabitle çarpılması
3. Elemanları bir sabitle çarpılmış olan bir satır ya da sütunun diğer satır ya da sütuna eklenmesi

Elementer satır-sütun işlemleri ile rankın bulunması yöntemine burada değinilmeyecektir.

İdempotent Matris

A, $n\times n$ boyutlu bir matris iken $A^2 = A$ özelliğini sağlıyorsa A matrisine idempotent matris denir.

Çeşitli Açıklamalar ve Uygulamalar

Örnek 1.53. A tam ranklı ve idempotent bir matris ise A birim matristir ($A=I$'dır).

Örnek 1.54. İdempotent matrisin rankı, izine eşittir.

Örnek 1.55. Aşağıdaki A ve B matrisleri idempotent matrislerdir:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}1/2 & -1/2\\ -1/2 & 1/2\end{bmatrix}$$

Çünkü, örneğin;

$$BB=\begin{bmatrix}1/2 & -1/2\\ -1/2 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2 & -1/2\\ -1/2 & 1/2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2 & -1/2\\ -1/2 & 1/2\end{bmatrix}=B$$

olur.

Doğrusal Denklem Sistemlerine Bir Bakış

Denklem Sistemlerinin Tanımı:

p değişkenli n denklemden oluşan bir sistemin çözümü Gauss yoketme yöntemi, determinantlar, ... vb. yardımı ile yapılabilir. Doğrusal denklem sistemlerindeki denklemlerin herbiri doğrusal bir denklemdir. Bir denklemin doğrusal olması demek;

denklemde bulunan bilinmeyen veya bilinmeyenlerin birinci dereceden olması ve bilinmeyenlerin çarpımlarının denklemde bulunmaması demektir. Örneğin, $5x_1 + 2x^2 - 1 = 0$ ya da $2x_1 + x_1x_2 - 3x_3 = 0$ denklemleri doğrusal değil iken, $2x_1 + x_2 - 3x_3 - 8 = 0$ denklemi doğrusaldır.

İki ya da daha çok doğrusal denklemin oluşturduğu denklemler topluluğuna doğrusal denklem sistemi denir. Örneğin;

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 5$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

$$3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 4$$

denklem sistemi, üç bilinmeyenli (değişkenli) ve üç denklemli bir doğrusal denklem sistemidir.

Doğrusal denklem sistemlerindeki denklem sayısı, genellikle sistemde bulunan bilinmeyen sayısına eşittir (regresyon modellerinde olduğu gibi). Denklem sayısının değişken sayısına eşit olduğu durumlarda, bilinmeyenler için denklem sistemini sağlayacak tek değerler vardır ve buna tek çözüm denir.

Eğer, bilinmeyen sayısı denklem sayısından büyükse (ki böylesi durumlar doğrusal programlama problemlerinde görülür) bilinmeyenler için sistemi sağlayan sonsuz sayıda değerler vardır. Bu da sonsuz sayıda çözüm olarak nitelenir.

Bazı durumlarda, bilinmeyen sayısı denklem sayısından küçük olabilir. Fizikteki devre problemleri buna örnek gösterilebilir. Bu gibi durumlarda, sistemde bulunan denklemlerin bazıları bağımlıdır ve çözümleri denklemde bulunan diğer denklemlerin çözümü ile elde edilir. Buna da; denklemde bulunan bağımsız denklemleri kullanma yolu ile çözüm denir.

p bilinmeyenli n denklemden oluşan bir doğrusal denklem sistemi:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1p}x_p = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2p}x_p = b_2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots\ldots + a_{np}x_p = b_n$$

biçiminde verilir. Bu denklem sistemi matrislerle;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir ve $AX=B$ şeklinde yazılabilir. Bu sistemde $A = (a_{ij})_{np}$ matrisine katsayılar matrisi denir.

Doğrusal Denklem Sistemlerinin Determinantlar Yardımıyla Çözümü

Doğrusal denklem sistemlerinin çözümünde kullanılan değişik yöntemler vardır. Burada sadece, doğrusal denklem sistemlerinin determinantlar yardımıyla çözümü üzerinde durulacaktır.

Bu amaçla, aşağıdaki denklem sistemini dikkate alalım ve sistemi determinantlar yardımı ile çözelim; Denklem sistemi,

$$\begin{aligned} 3x_1 - 7x_2 + 2x_3 &= -1 \\ 4x_1 + x_2 &= 12 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

olsun. Bu 3×3'lük doğrusal denklem sistemini matris formunda $AX=B$ olarak yazarsak;

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olur.

Bir doğrusal denklem sisteminde, denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşitse ($n=p$) ve doğrusal denklem sistemindeki katsayılar matrisinin determinantı sıfırdan farklı ($|A| \neq 0$) ise denklemin bilinmeyenleri olan x_i'ler;

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \qquad i = 1,\ldots\ldots,p$$

ile bulunur ve sistemin tek çözümü vardır. Burada A_i'ler; A matrisinde i. sütun yerine B sütunu konularak elde edilen matrislerdir ve bu yöntem ***Cramer Kuralı*** olarak adlandırılır. Sistemi Cramer kuralına göre çözersek;

$$|A_1| = \begin{vmatrix} -1 & -7 & 2 \\ 12 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -15 \qquad |A_2| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 12 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 3 & -7 & -1 \\ 4 & 1 & 12 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 25 \qquad \text{ve} \qquad |A| = -5$$

olarak bulunur. Buradan;

$$x_1 = \frac{-15}{-5} = 3, \quad x_2 = \frac{0}{-5} = 0 \quad \text{ve} \quad x_3 = \frac{25}{-5} = -5$$

olarak bulunur. $|A|=0$ ise bu yöntemle sistemin çözümü bulunamaz. Eğer $|A|=0$ ve herhangi bir $|A_i|\neq 0$ ise sistem tutarsız olacaktır. Eğer çözüm varsa ve $|A|=0$ iken her $|A_i|=0$ ise çözümde keyfi bir parametre vardır. Ancak, Cramer Kuralı bu parametrik çözümü vermez.

Denklem Sistemlerinin Çözümünde Rank Kuralı

Determinant yönteminde sistemdeki denklem sayısının değişken sayısına eşit olması durumunda denklem sistemini sağlayacak tek çözümün nasıl elde edileceğini yukarıda gördük.

Rank kuralı da verilen herhangi bir denklem sisteminde çözüm olup olmadığının araştırılmasında kullanılır. Bu kurala göre denklem sayısının (n) değişken sayısına (p) eşit olduğu bir sistemde tek çözüm olabilmesi için katsayılar matrisi olan A'nın rankının değişken sayısına (p) eşit olması gerekir. Eğer $r(A) < p$ ise sistemin çözümünde bir takım zorluklar ortaya çıkar.

n denklemli p bilinmeyenli $AX=B$ sistemini göz önüne aldığımızda A katsayılar matrisine B sütununun eklenmesi ile elde edilen $n\times(p+1)$ boyutlu matrise eklemeli matris adı verilir ve A_B ile gösterilir. A_B eklemeli matrisi aşağıda verilmiştir;

$$A_B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2p} & b_2 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{np} & b_n \end{bmatrix}$$

A_B ve A matrislerinin rankının incelenmesi verilen herhangi bir denklem sisteminin çözümü olup olmadığı hakkında bilgi verir. A katsayılar matrisi A_B eklemeli matrisinin içinde olduğu için $r(A)$, $r(A_B)$'den büyük olamayacaktır. Benzer şekilde $r(A_B)$ ise $r(A)+1$'den büyük olamaz. Buna göre;

1. $r(A_B)=r(A)+1$ ise çözüm yoktur.
2. $r(A_B)=r(A)=p$ ise tek çözüm vardır.
3. $r(A_B)=r(A)<p$ ise sonsuz çözüm vardır.

Buna göre, 1 nolu durumda sistem tutarsız kurulmuştur. Yani A matrisine B'yi eklemek rankını bir artırmaktadır. 2 nolu durumda sistem tutarlıdır. Yani B vektörünü A'ya eklemek A matrisinin rankını artırmaz ve bu sistemdeki X'lerin kümesine anlamlı çözüm kümesi denir. 3 nolu durumda sistem tutarlı kurulmuştur. Ancak, bazı X değerlerini (n-$r(A)$ kadarını) keyfi olarak belirlemek olanaklıdır.

Çeşitli Açıklamalar ve Uygulamalar

Örnek 1.56. Denklem sistemi, A ve A_B aşağıdaki gibi olsun;

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &= 7 \\ 2.25x_1 + 3x_2 &= 1 \end{aligned} \quad \text{ise } A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2.25 & 3 \end{bmatrix} \quad A_B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2.25 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. Burada, $r(A)=1$ ve $r(A_B)=2$ ve $r(A_B)=r(A)+1$ olduğu için çözüm yoktur.

Örnek 1.57. Denklem sistemi, $r(A)$ ve $r(A_B)$ aşağıdaki gibi olsun;

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned} \quad \text{ise } r(A)=3 \text{ ve } r(A_B)=3$$

ve dolayısıyla $r(A)=3=r(A_B)=3=p=3$ olduğundan tek bir çözüm vardır.

Örnek 1.58. Denklem sistemi, $r(A)$ ve $r(A_B)$ aşağıdaki gibi olsun;

$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 2 \end{aligned} \quad \text{ise } r(A)=2 \text{ ve } r(A_B)=2$$

ise $r(A_B)=r(A)<p=3$ olduğundan sistemde sonsuz çözüm vardır.

Homojen Doğrusal Denklem Sistemleri

Doğrusal bir denklem sisteminin sağ tarafındaki sabit sayı vektörü sıfır ise bu denklem sistemine homojen denklem sistemi denir. Yani, $AX=B$ gibi doğrusal bir denklem sisteminde B bir sıfır vektörü ise bu sistem homojen denklem sistemi adını alır ve $AX=0$ olarak yazılır.

Homojen denklem sistemi için mutlaka bir çözüm vardır. Çünkü, sabit sayı vektörü sıfır olduğu için $r(A)=r(A_B)$ eşitliği her zaman sağlanır. Yani, sıfır vektörü bir matrisin rankını artırmaz. Homojen denklem sisteminde özel olarak $r(A)=r(A_B)=p$ ise tek bir çözüm vardır. Bu durumda çözüm kümesi sıfır vektörüdür ve buna anlamsız çözüm denir. Örneğin,

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

ise, $r(A)=3=p=3$ koşulu sağlandığı için sistemin yalnız bir çözümü vardır ve $x_1 = x_2 = x_3 = 0$'dır. Ancak, homojen denklem sistemine çözüm bulmak demek, bilinmeyenler için sistemi sağlayacak sıfırdan farklı değerler elde etmek demektir.

p değişkenli $AX=0$ homojen denklem sisteminde sıfırdan farklı çözümler olabilmesi için gerekli ve yeter koşul $r(A) < p$ olmasıdır. Diğer bir deyişle, sistemdeki denklem sayısı değişken sayısına eşitse, sisteme sıfırdan farklı çözüm olabilmesi için gerekli ve yeter koşul, katsayılar matrisine ilişkin determinantın sıfır olmasıdır.

$$3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0$$
$$4x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0$$
$$x_1 + 6x_2 - x_3 = 0$$

sisteminde $r(A) = r(A_B) = 2 < p = 3$ olduğu için sonsuz çözüm vardır.

Özdeğerler ve Özvektörler

Özdeğer Kavramı ve Özdeğerlerin Bulunması

Verilen n mertebeli bir A matrisi için λ gibi bir skala ve X gibi sıfır olmayan bir vektör belirlenir ki bu değerler $AX = \lambda X$ denklem sistemini sağlarlar. Yapılan bu işleme özdeğer (eigen value) problemi denir. $AX=\lambda X$ sisteminde A, n. dereceden bir kare matristir. Örneğin;

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ ve } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ ise } AX = \lambda X;$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

olur. Buradan,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = \lambda x_1$$
$$a_{21}x_2 + a_{22}x_2 = \lambda x_2$$

olur. Her iki denklemi sıfıra eşitlersek;

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - \lambda x_1 = 0$$
$$a_{21}x_2 + a_{22}x_2 - \lambda x_2 = 0$$

olur. Bu sistemi aşağıdaki gibi yazabiliriz;

$$(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 = 0$$
$$a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 = 0$$

Bu son sistemi matris şeklinde yazarsak;

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olur. Bu ise matris şeklinde, $(A-\lambda I)X=0$ olarak yazılır. $(A-\lambda I)X=0$ bir homojen denklem sistemidir. Bilindiği gibi, X'in sıfırdan farklı çözümleri olabilmesi için $(A-\lambda I)$ matrisinin determinantının sıfır olması gerekir. Yani $|A-\lambda I|=0$ olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}a_{21}=0$$

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=0$$

olur. Bu denkleme ***karakteristik denklem*** denir ve bu örnek için iki kök vardır. λ_1 ve λ_2 gerçek veya karmaşık sayılar olabilir. Eğer matris simetrikse kökler gerçek sayılardır. Aşağıda özdeğerlerin bulunmasına ilişkin çeşitli örnekler verilmiştir.

Çeşitli Açıklamalar ve Uygulamalar

Örnek 1.59. Her zaman olmamakla birlikte A matrisi simetrik bir matristir. $(A-\lambda I)X=0$ ya da diğer bir gösterimle $(A-\lambda I)V=0$ homojen denklem sisteminde A ve λ'nın ne olduğuna bakmaksızın V vektörünün sıfır olması durumunda denklem sağlanacaktır.. V=0 olmasına homojen denklemlerin trivial çözümü denir. Önemli bir sorun, homojen sistemlerin nontrivial çözümünün bulunmasıdır. Bir an için uygun λ değerinin belirlendiğini ve $A-\lambda I$ matrisinin tamamen bilindiğini düşünelim. $A-\lambda I$'nın determinantı sıfır değilse (nonsingular ise) tersi olacaktır. $(A-\lambda I)V=0$ 'ın her iki tarafını soldan $(A-\lambda I)^{-1}$ ile çarparsak; $(A-\lambda I)^{-1}(A-\lambda I)V=(A-\lambda I)^{-1}0$ 'dan $V=(A-\lambda I)^{-1}0=0$ olur ki bu, eşitliğin tek çözümü olan trivial çözümdür. Bu nedenle, homojen bir denklem sisteminin nontrivial bir çözümünün olması için $A-\lambda I$ matrisinin tersinin olmaması, yani λ'nın değerinin; $A-\lambda I$ 'yı tekil yapacak şekilde olması gerekmektedir. Bu amaçla λ, $|A-\lambda I|=0$ denklemini sağlamalıdır. Bu denkleme A matrisinin karakteristik denklemi denir. Yukarıdaki gibi bir matris denklemini çözmenin ilk adımı karakteristik denklemin köklerini belirlemektir. Bu kökler V için nontrivial çözümler veren olası λ değerleridir. λ değerlerine A'nın karakteristik kökleri ya da özdeğerleri denir. Karakteristik denklem ise λ cinsinden bir polinomial denklemdir ve derecesi A'nın mertebesine eşittir. A, $p\times p$ boyutlu bir matris ise, bu matrisin karakteristik denkleminin p tane kökü olacaktır. Bunların hepsinin birbirinden farksız olması ve bazılarının sıfır olması olasıdır. A matrisi simetrik ise özdeğerleri gerçek sayılardır.

Örnek 1.60. Aşağıdaki 2×2'lik A matrisinin özdeğerlerini bulalım;

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ ise } |A-\lambda I|=0 \text{ 'dan;}$$

$$|A-\lambda I| = \left| \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(5-\lambda)(2-\lambda) - 9 = 0$$

$$10 - 5\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 9 = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 1 = 0$$

olur. Bu son denklemin köklerini bulursak;

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

yardımı ile özdeğerler;

$$\lambda_1 = \frac{7 - \sqrt{49-4}}{2} = 0.146 \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = \frac{7 + \sqrt{49-4}}{2} = 6.854$$

olarak bulunur. Dikkat edilirse A matrisinin esas köşegen ögeleri toplamı $(5+2) = \lambda_1 + \lambda_2 = 0.146 + 6.854 = 7$'dir ve gerek λ_1 gerekse de λ_2, $A - \lambda I = 0$ eşitliğini sağlar.

Örnek 1.61. Aşağıda verilen ve nasıl hesaplandığını Bölüm 2'de göreceğimiz varyans-kovaryans matrisinin özdeğerlerini bulalım.

$$S = \begin{bmatrix} 16.81 & 0.88 \\ 0.88 & 6.64 \end{bmatrix}$$ ise karekteristik denklem $|S - \lambda I| = 0$ 'dan

$$\begin{vmatrix} 16.81-\lambda & 0.88 \\ 0.88 & 6.64-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ve} \quad \lambda^2 - 23.45\lambda + 110.84 = 0$$

olur. Buradan, S matrisinin özdeğerleri, $\lambda_1 = 16.8856$ ve $\lambda_2 = 6.5644$ olarak bulunur.

Örnek 1.62. Aşağıda verilen 3×3 boyutundaki matrisin özdeğerlerini bulalım;

$$A = \begin{bmatrix} 136 & 104 & 94 \\ 104 & 106 & 71 \\ 94 & 71 & 65 \end{bmatrix}$$

ise $|A - \lambda I| = 0$ 'dan;

$$\begin{vmatrix} 136-\lambda & 104 & 94 \\ 104 & 106-\lambda & 71 \\ 94 & 71 & 65-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

olur ve Sarrus kuralı ya da bir satır ya da sütunun kofaktörleri yardımıyla çözüm yapılabilir. 1. satır kofaktörleri yardımıyla çözüm yaparsak;

$$(136-\lambda)\begin{vmatrix} 106-\lambda & 71 \\ 71 & 65-\lambda \end{vmatrix} - 104\begin{vmatrix} 104 & 71 \\ 94 & 65-\lambda \end{vmatrix} + 94\begin{vmatrix} 104 & 106-\lambda \\ 94 & 71 \end{vmatrix} = 0$$

$$(136-\lambda)[(106-\lambda)(65-\lambda)-(71)(71)] - 104[104(65-\lambda)-(71)(94)] + 94[(104)(71)-(106-\lambda)(94)]=0$$

$$(136-\lambda)[(6890-106\lambda-65\lambda+\lambda^2)-5041] - 104[(6760-104\lambda)-6674]+94[7384-(9964-94\lambda)]=0$$

$$-\lambda^3+307\lambda^2-5453\lambda=0 \quad \text{ve}$$

$$-\lambda(\lambda^2-307\lambda+5453)=0 \quad \text{ve} \quad \lambda_1=0$$

bulunurken,

$$\lambda^2-307\lambda+5453=0 \text{'dan } \lambda_2=288.0706 \text{ ve } \lambda_3=18.9294$$

olarak bulunur. Dikkat edilecek olursa;

$$iz(S)=136+106+65=307 \quad \text{ve} \quad \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0+288.0706+18.9294=307 \text{'dir}$$

Örnek 1.63. Aşağıdaki A matrisinin özdeğerlerini bulalım;

$$A=\begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ise, } |A-\lambda I|=0 \text{'dan;}$$

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} 7-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 7-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad \text{ve}$$

$$(7-\lambda)\begin{vmatrix} 7-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 7-\lambda \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(7-\lambda)(\lambda^2-10\lambda+21-4)-0+(0-7+\lambda)=0$$

Yukarıdaki eşitliği $(7-\lambda)$ parantezine alırsak;

$$(7-\lambda)(\lambda^2-10\lambda+17)-(7-\lambda)=0$$

$$(7-\lambda)\,[(\lambda^2-10+17)-1\,]=0 \text{ ve buradan; } \lambda_1=7$$

$$\lambda^2-10\lambda+16=0 \text{ 'dan } \lambda_2=8 \text{ ve } \lambda_3=2$$

olarak bulunur. Ya da en büyük değere λ_1 diyerek büyükten küçüğe doğru sıralarsak $\lambda_1=8$, $\lambda_2=7$ ve $\lambda_3=2$ olur.

Örnek 1.64. İkinci ve üçüncü dereceden denklemler için özdeğerlerin nasıl bulunacağını yukarıda gördük. Bu amaçla değişik formüller de geliştirilmiştir. Ayrıca, denklemlerin derecesi arttıkça kökleri bulmak zorlaşmaktadır. Bu nedenle, bu tür problemleri çözmek için bilgisayardan yararlanmak en iyi yoldur. Gelişmiş istatistiksel paket programların tümünde özdeğerleri ve özvektörleri bulan modüller vardır.

Özvektörlerin Bulunması

$(A-\lambda I)X=0$ ya da $(A-\lambda I)V=0$ 'da her bir özdeğer (λ_i) için bir tane özvektör (v_i) olacaktır. v_i 'leri bulmak için aşağıda verilen adımlar izlenebilir;

1. Her bir λ_i için $(A-\lambda_i I)$ matrisi bulunur.
2. $(A-\lambda_i I)$ 'nin adjointi $[Adj(A-\lambda_i I)\,]$ bulunur. $Adj(A-\lambda_i I)$ matrisinin sütunlarının tümünün birbiri ile orantılı olması gerekir.
3. Her sütunun elemanları, ilgili sütundaki elemanların kareleri toplamının kareköküne bölünür. Sonuç sayılar v_i 'nin elemanları olup $v_i'v=1$ 'dir.

Özvektörlerin Bulunması İle İlgili Uygulamalar ve Açıklamalar

Örnek 1.65. Yukarıda özvektörleri bulduğumuz son örneği dikkate alalım.

$$A=\begin{bmatrix}7&0&1\\0&7&2\\1&2&3\end{bmatrix} \text{ ve } |A-\lambda I|=0 \text{ 'dan } \lambda_1=8\ \ \lambda_2=7\ \ \lambda_3=2$$

olarak bulunmuştu.

Şimdi $\lambda_1=8$ için $(A-\lambda_1 I)$ 'yı yazalım; ***(ADIM 1)***

$$(A-8I)=\begin{bmatrix}7&0&1\\0&7&2\\1&2&3\end{bmatrix}-8\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&-1&2\\1&2&-5\end{bmatrix}$$

olur. Adj $(A-\lambda_1 I)$ =Adj $(A-8I)$ 'yı bulalım; ***(ADIM 2)***

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 1 \qquad \alpha_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 2 \qquad \alpha_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$\alpha_{21} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 2 \qquad \cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

ve

$$Adj(A - 8I) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Dikkat edilirse bu üç sütun orantılıdır ve hesaplamalar üzerinde bir kontrol da sağlar. Bu örnekte 1. ve 3. sütun aynı olup böyle durumlarla genellikle karşılaşılmaz. Ayrıca, bu matrisin örneğin 1. vektörü için;

$$(A - 8I)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Şimdi de v_1 'i bulalım; *(ADIM 3)*

v_1 'i elde etmek için $v_1' v = 1$ olacak şekilde birim normuna ulaşmamız gerekir. Bu amaçla, daha önce bulduğumuz $Adj(A - 8I)$ matrisinin her sütunundaki elemanların kareleri toplamı her elemana bölünür ve v_1 bulunur. $Adj(A - 8I)$ matrisindeki 1. sütun için;

$$1/\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = 0.4082$$
$$2/\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = 0.8165$$
$$1/\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = 0.4082$$

bulunurken, 2. ve 3. sütunlar için de aynı sonuçlar elde edilir. Örneğin, 2. sütun için;

$$2/\sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2} = 0.4082$$
$$4/\sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2} = 0.8165$$
$$2/\sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2} = 0.4082$$

olarak bulunur ve $v_1' = [0.4082 \quad 0.8165 \quad 0.4082]$ olarak yazılır.

Aynı işlemler $\lambda_2 = 7$ için yapılırsa $(A - 7I)$

$$(A-7I)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 1 & 2 & -4\end{bmatrix} \text{ ve } Adj(A-7I)=\begin{bmatrix}-4 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Görüldüğü gibi bu sütunlar da orantılıdır. Örneğin, 1. sütun 2. sütunun $-1/2$ katıdır ve

$$(A-7I)\begin{bmatrix}-4\\ 2\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \text{ ya da } (A-7I)\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

olur.

v_2 'yi bulmak için yukarıda yaptığımız işlemleri yinelersek;

$$-4/\sqrt{-4^2+2^2+0^2} = -0.8944$$

$$2/\sqrt{-4^2+2^2+0^2} = 0.4472$$

$$0/\sqrt{-4^2+2^2+0^2} = 0.0000$$

olur ve 2. sütun için de aynı sonuçlar elde edilir. $\lambda_3 = 2$ için aynı işlemleri yinelersek;

$$(A-2I)=\begin{bmatrix}5 & 0 & 1\\ 0 & 5 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix} \text{ ve } Adj(A-2I)=\begin{bmatrix}1 & 2 & -5\\ 2 & 4 & -10\\ -5 & -10 & 0\end{bmatrix}$$

olarak bulunurken v_3 ise,

$$v_3' = [0.18257 \quad 0.3651 \quad -0.91287]$$

olarak bulunur.

Ve sonuçta v_1, v_2, v_3 yani **özvektörler;**

$$V=\begin{bmatrix}0.4082 & -0.8944 & 0.18257\\ 0.8165 & 0.4472 & 0.3651\\ 0.4082 & 0.0000 & -0.91287\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. $v_1 v_1' = v_1' v_1 = 1$, $v_2 v_2' = v_2' v_2 = 1$ ve $v_3 v_3' = v_3' v_3 = 1$ olduğundan bu vektörler ya da $VV' = I$ olduğundan V matrisi diktir.

Bazı çalışmalarda $v_i = \sqrt{\lambda_i}\ v_i$ ile elde edilen özvektörler kullanılır. Yukarıdaki V matrisini buna göre elde edersek;

$$V=\left[\sqrt{8}\begin{bmatrix}0.4082\\0.8165\\0.4082\end{bmatrix}\quad\sqrt{7}\begin{bmatrix}-0.8944\\0.4472\\0.0000\end{bmatrix}\quad\sqrt{2}\begin{bmatrix}0.18257\\0.3651\\-0.91287\end{bmatrix}\right]$$

ve

$$V=\begin{bmatrix}1.155 & -2.366 & 0.258\\2.309 & 1.182 & 0.516\\1.155 & 0.000 & -1.291\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek 1.66. Şimdi ***Örnek 1.61***'e ilişkin özvektörleri bulalım.

$$S=\begin{bmatrix}16.81 & 0.88\\0.88 & 6.64\end{bmatrix}\quad\text{ve}\quad\lambda_1=16.8856\ \text{ve}\ \lambda_2=6.5644\ \text{idi.}$$

$$(S-\lambda_1 I)=\begin{bmatrix}16.81 & 0.88\\0.88 & 6.64\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}16.8856 & 0\\0 & 16.8856\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.0756 & 0.88\\0.88 & -10.2456\end{bmatrix}$$

$$Adj(S-\lambda_1 I)=\begin{bmatrix}-10.2456 & -0.88\\-0.88 & -0.0756\end{bmatrix}$$

olur. Bu iki sütun orantılıdır. Çünkü ikinci sütun 11.64 ile çarparsak sırasıyla 10.24 ve 0.88 buluruz. Buradan birim normuna ulaşmak için gerekli işlemleri yaparsak;

$$v_1=\begin{bmatrix}-10.2456/\sqrt{(-10.2456)^2+(-0.88)^2}\\-0.88/\sqrt{(-10.2456)^2+(-0.88)^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.99633\\-0.08558\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Benzer işlemler λ_2 için yinelenirse;

$$Adj(S-\lambda_2 I)=\begin{bmatrix}0.0756 & -0.88\\-0.88 & 10.2456\end{bmatrix}\quad\text{ve}$$

$$v_2=\begin{bmatrix}0.0756/\sqrt{(0.0756)^2+(0.88)^2}\\-0.88/\sqrt{(0.0756)^2+(0.88)^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.08558\\-0.99633\end{bmatrix}$$

olarak bulunur ve özvektörler;

$$V=\begin{bmatrix}-0.99633 & 0.08558\\-0.08558 & -0.99633\end{bmatrix}$$

olarak yazılır. $V=\sqrt{\lambda_i}\ v_i$ ile ise;

$$V = \begin{bmatrix} -4.09413 & -0.21925 \\ -0.35165 & 2.55271 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Örnek 1.67. Daha somut bir örnek olması açısından, x_1 ve x_2 değişkenlerine ilişkin 11 gözlem aşağıdaki gibi elde edilmiş olsun.

x_1:	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
x_2:	61	61	59	71	80	76	90	106	98	100	114

Verilere ilişkin korelasyon matrisi olan R (korelasyon ve kovaryans matrisleri konusunda ayrıntılı bilgi Bölüm 2'de verilmiştir) ile R'ye ilişkin özvektörler aşağıdaki gibi bulunur.

$$R = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.9561 \\ 0.9561 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$|R - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0.9561 \\ 0.9561 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda) - (0.9561)(0.9561)$$

$$|R - \lambda I| = \lambda^2 - 2\lambda + 0.085873 \; ve \; \lambda_1 = 1.9561 \; \lambda_2 = 0.0439$$

olarak bulunur.

Birinci özdeğer (1.9561) için özvektör;

$$(R - \lambda_1 I) = \begin{bmatrix} -0.9561 & 0.9561 \\ 0.9561 & -0.9561 \end{bmatrix}$$

$$Adj(R - \lambda_1 I) = \begin{bmatrix} -0.9561 & -0.9561 \\ -09561 & -0.9561 \end{bmatrix}$$

bulunur. Buradan birim normuna geçersek;

$$v_1 = \begin{bmatrix} -0.9561/\sqrt{(-0.9561)^2 + (-0.9561)^2} \\ -0.9561/\sqrt{(-0.9561)^2 + (-0.9561)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7071 \\ -0.7071 \end{bmatrix}$$

olur.

İkinci özdeğer (0.0439) için özvektör;

$$(R - \lambda_2 I) = \begin{bmatrix} 0.9561 & 0.9561 \\ 0.9561 & 0.9561 \end{bmatrix}$$

$$Adj(R - \lambda_2 I) = \begin{bmatrix} 0.9561 & -0.9561 \\ -0.9561 & 0.9561 \end{bmatrix}$$

bulunur. Buradan birim normuna geçersek;

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0.9561/\sqrt{(0.9561)^2+(-0.9561)^2} \\ -0.9561/\sqrt{(0.9561)^2+(-0.9561)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7071 \\ 0.7071 \end{bmatrix}$$

olur. Sonuçta özvektörler;

$$V = \begin{bmatrix} -0.7071 & -0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Bu özvektörlere ***standartlaştırılmış asıl özvektörler (ya da standartlaştırılmış asıl temel bileşenler)***'de denir.

Ancak, istatistiksel paket programları (örneğin, *SPSS*) $V = \sqrt{\lambda_i}\, v_i$ ile verilen ***standartlaştırılmış özvektörleri (ya da standartlaştırılmış temel bileşenleri)*** çıktı olarak verebilir. Buna göre; R matrisinin standartlaştırılmış özvektörleri;

$$V = \left[\sqrt{1.9561} \begin{bmatrix} -0.7071 \\ -0.7071 \end{bmatrix} \sqrt{0.0439} \qquad \begin{bmatrix} -0.7071 \\ 0.7071 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} -0.98895 & -0.14815 \\ -0.98895 & 0.14815 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Bölüm 2

ÇOK DEĞİŞKENLİ ANALİZDE VERİ MATRİSİ VE TANIMLAYICI İSTATİSTİKLER

Çok değişkenli istatistiksel analizde genellikle n satır (gözlem) ve p sütundan (değişken) oluşan $n \times p$ boyutlu X veri matrisi ile ilgilenilir (Tablo 2.1). X'in elemanları x_{ij} ile gösterilirken, X matrisinin sütun vektörleri (değişkenler) $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_p$ ile gösterilir. Çok değişkenli ile ilgili birçok kaynakta X veri matrisi, değişkenlerin satırlarda, gözlemlerin ise sütunlarda yer aldığı bir yapıda verilir. Tablo 2.1'deki veri matrisi bu yapıda X' olarak tanımlanır. Bu kitapta, Tablo 2.1'deki yapı dikkate alınacaktır.

Tablo 2.1. X Veri Matrisi

	DEĞİŞKENLER						
Gözlem No	x_1	x_2	x_3	...	x_j	...	x_p
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	...	x_{1j}	...	x_{1p}
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	...	x_{2j}	...	x_{2p}
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	...	x_{3j}	...	x_{3p}
.	.	.	.	...	.	...	.
i	x_{i1}	x_{i2}	x_{i3}	...	x_{ij}	...	x_{ip}
	.	.	.	...	.	...	.
n	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	...	x_{nj}	...	x_{np}

Bilindiği gibi tek değişkenli analizde, ölçümle belirtilen değişkenleri tek bir ölçü ile tanımlamak ve veri yapısını incelemek için birçok istatistik vardır. Tek tepeli simetrik yapıdaki dağılımlarda, dağılımın ortalaması hakkında bilgi veren ***aritmetik ortalama***, dağılımın yaygınlığı hakkında bilgi veren **standart sapma** ve standart sapmanın karesi olan ***varyans*** bunlar arasında en çok kullanılanlarıdır. Çok değişkenli analizde ise değişkenler kümesini tanımlamak için ***ortalama vektörü***, ***kovaryans değeri***, ***varyans–kovaryans matrisi*** **ile** ***korelasyon katsayısı*** **ve** ***korelasyon matrisi***nden sıklıkla yararlanılır.

Ortalama Vektörü

Çok değişkenli analizde tek bir ortalama değil, p tane ortalama vardır ve gösterimi ***ortalama vektörü*** yardımı ile yapılır. Tablo 2.1'de, j. değişkene ilişkin ortalama;

$$\bar{x}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ij}}{n} \qquad (2.1)$$

ile gösterilirken, p tane değişkene ilişkin ortalalama vektörü ($j=1,.....,p$) için;

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{x}_p \end{bmatrix}_{p\times 1} \quad \text{ya da} \quad \bar{x}' = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & .. & \bar{x}_p \end{bmatrix}_{1\times p} \qquad (2.2)$$

ile gösterilir.

Bazen gözlemlere ilişkin ortalama ile de ilgilenilir. Bu kez, herhangi bir i. gözleme ilişkin ortalama;

$$\bar{x}_i = \frac{\sum_{j}^{p} x_{ij}}{p} \qquad (2.3)$$

ile verilirken, n gözleme ilişkin ortalama vektörü, $i = 1,.....,n$ için yazılabilir.

Bazen, değişkenlere ilişkin değerler kendi aritmetik ortalamasından çıkartılarak her bir değişken için ortalamadan sapma (ayrılış) dağılımları elde edilebilir. Bu tür veri ***ortalamaya göre düzeltilmiş veri*** olarak tanımlanır.

Varyans, Kovaryans ve Varyans–Kovaryans Matrisi

Tek değişkenli analizde, dağılımın yaygınlığı hakkında bilgi veren ölçülerden biri olan ve daha çok simetrik yapıdaki dağılımların yaygınlığını tanımlamakta kullanılan standart sapma genellikle s ile gösterilirken, standart sapmanın karesi olan varyans s^2 ile gösterilir. Tablo 2.1'de verilen X veri matrisindeki j. değişken için varyans;

$$s_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_j)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_{ij})^2}{n}}{n-1} \qquad (2.4)$$

ile verilir. Eşitlik 2.4'de görüldüğü gibi varyans, ortalamaya göre düzeltilmiş değerlerin kareleri alınarak toplanması (pay) ve serbestlik derecesine bölünmesi (payda) ile hesaplanır. Ortalamaya göre düzeltilmiş değerlerin kareleri toplamı kısaca; ***Kareler***

Toplamı (KT)–(Sum of Squares–SS) alarak adlandırılır. Kareler toplamının hesaplamalarda kullanılan açık formülü ise yukarıdaki eşitliğin sağ tarafındadır.

Varyansın çok değişkenli analizdeki karşılığı ise $p \times p$ boyutlu simetrik **varyans-kovaryans** matrisidir ve çoğunlukla $S = (s_{ij})_{pxp}$ ile gösterilir. Varyans-kovaryans matrisinde, s_{ii} yani $(i=j)$ elemanları değişkenlere ilişkin varyansları verirken, s_{ij} yani $(i \neq j)$ elemanları kovaryans değerlerini verir. p tane değişken için S matrisi aşağıdaki gibi olur;

$$S = \begin{bmatrix} Var(x_1) & Kov(x_1x_2) & Kov(x_1x_3) & ..... & Kov(x_1x_p) \\ Kov(x_2x_1) & Var(x_2) & Kov(x_2x_3) & ..... & Kov(x_2x_p) \\ Kov(x_3x_1) & Kov(x_3x_2) & Var(x_3) & ..... & Kov(x_3x_p) \\ . & . & . & ..... & . \\ . & . & . & ..... & . \\ Kov(x_px_1) & Kov(x_px_2) & Kov(x_px_3) & ..... & Var(x_p) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & ..... & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & ..... & s_{2p} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & ..... & s_{3p} \\ . & . & . & ..... & . \\ s_{p1} & s_{p2} & s_{p3} & ..... & s_{pp} \end{bmatrix} \qquad (2.5)$$

Ölçümle belirtilen (sürekli sayısal veri tipindeki) iki değişken arasındaki doğrusal ilişki ölçülerinden biri olan kovaryans değerinin formülü, X veri matrisindeki ilk iki değişken için aşağıda verilmiştir;

$$s_{12} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)(x_{i2} - \bar{x}_2)}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1}x_{i2}) - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_{i1})(\sum_{i=1}^{n} x_{i2})}{n}}{n-1} \qquad (2.6)$$

Değişkenlerden birinin değerleri artarken diğerinin değerleri de artıyor ya da biri azalırken diğeri de azalıyorsa iki değişken arasındaki kovaryans değeri pozitif olacaktır. Değişkenlerden birinin değerleri artarken diğerinin değerleri azalıyor ya da birinin değerleri azalırken diğerinin değerleri artıyorsa kovaryans değeri negatif çıkacaktır. Eğer değişkenler arasında belirgin bir ilişki yoksa, kovaryans sıfıra yakın bir değer olur. Yukarıdakinin dışında, kovaryansın bir diğer tanımı da; "her iki değişkendeki gözlemlerin, kendi ortalamalarından ayrılışlar çarpımının ortalamasıdır" şeklinde yapılabilir. Diğer bir deyişle kovaryans, ortalamaya göre düzeltilmiş değişkenlerin çarpımlar toplamının serbestlik derecesine bölünmesi ile hesaplanır (2.6). Gözlem sayısı fazla olduğunda, (2.6) ile verilen eşitlikte, paydada $n-1$ yerine n'nin kullanılması tercih edilir. Eşitlik (2.6)'dan anlaşılacağı üzere, bir değişkenin kendisi ile yaptığı kovaryans, o değişkenin varyansına eşittir. Kovaryans değeri değişkenlerin birimlerinden etkilenir.

Korelasyon (İlişki) Katsayısı ve Korelasyon Matrisi

Kovaryans değeri gibi korelasyon katsayısı da (Pearson's Product Moment Correlation Coefficient), iki değişken arasındaki ***doğrusal*** ilişkinin ölçüsüdür ve r ile gösterilir. Korelasyon ve kovaryansın kullanımına ilişkin uygun bir yapı Grafik 4.6'da verilmiştir. r, incelenen değişkenlerin birimlerinden bağımsızdır ve -1 ile $+1$ arasında değişir ($-1 \le r \le +1$). Korelasyon katsayısı -1 ve $+1$'e yaklaştıkça ilişkinin kuvveti artarken, 0'a yaklaştıkça ilişkinin kuvveti azalır. -1 tam negatif ilişkiyi, $+1$ ise tam pozitif ilişkiyi tanımlar. Korelasyon katsayısı değişkenler arasındaki doğrusal ilişkiyi tanımladığı için, doğrusal olmayan ilişkiler korelasyon katsayısında temsil edilemeyecektir. İki değişken arasındaki korelasyon katsayısı kovaryans değerine bağlı olarak da bulunabilir ve;

$$r_{x_i x_j} = \frac{Kov(x_i x_j)}{\sqrt{Var(x_i)}\sqrt{Var(x_j)}} \qquad (2.7)$$

ile verilir. Yukarıdaki eşitlikte görüldüğü gibi korelasyon katsayısı örneklem kovaryansının ***standartlaştırılmış bir uyarlamasıdır*** ve standartlaştırmayı örneklem varyanslarının kareköklerinin çarpımı sağlamaktadır. Değişkenler arasındaki korelasyonlar matris şeklinde özetlenebilir ve korelasyon matrisi $R = (r_{ij})_{pxp}$ ile gösterilir. Aşağıda p değişken için bir örnek korelasyon matrisi verilmiştir;

$$R = \begin{bmatrix} r_{x_1x_1} & r_{x_1x_2} & r_{x_1x_3} & \cdots & r_{x_1x_p} \\ r_{x_2x_1} & r_{x_2x_2} & r_{x_2x_3} & \cdots & r_{x_2x_p} \\ r_{x_3x_1} & r_{x_3x_2} & r_{x_3x_3} & \cdots & r_{x_3x_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ r_{x_px_1} & r_{x_px_1} & r_{x_px_3} & \cdots & r_{x_px_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \cdots & r_{2p} \\ r_{31} & r_{32} & 1 & \cdots & r_{3p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ r_{p1} & r_{p2} & r_{p3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.8)$$

Eşitlik (2.8)'de görüldüğü gibi, korelasyon matrisinin asıl köşegen ögeleri 1'e eşittir. Çünkü, bir değişkenin kendisi ile yaptığı korelasyon 1'dir. (2.8)'de örneğin r_{12} ya da r_{21}; birinci değişken ile ikinci değişken arasındaki korelasyon katsayısını ifade etmektedir. Çünkü, bu matris de kovaryans matrisi gibi simetriktir.

Eşitlik (2.7)'den anlaşılacağı gibi, elimizde kovaryans matrisi varsa korelasyon matrisine geçiş yapılabilir. Örneğin, r_{23}'ü bulmak için; $kov(x_2x_3)$'ü, $var(x_2)$ ve $var(x_3)$'ün kareköklerinin çarpımına bölmek yeterli olurken, r_{14}'ü bulmak için $kov(x_1x_4)$'ü, $var(x_1)$ ve $var(x_4)$'ün kareköklerinin çarpımına bölmek yeterli olacaktır.

Korelasyon ve kovaryans değerlerinin işaretleri aynı olmakla birlikte, korelasyon katsayısını yorumlamak kolaydır. Çünkü r'nin büyüklüğü sınırlıdır ve yukarıda belirtildiği gibi -1 ile +1 arasında değişir.

Gerek korelasyon katsayısı gerekse de kovaryans değeri, iki değişken arasındaki ilişki hakkında bilmek istediklerimizin çoğunu taşır. Ancak, iki değişken arasında doğrusal

olmayan bir ilişki varsa gerek *s* gerekse de *r*, ilişki hakkında daha az bilgi vermektedir. Ayrıca, bu ölçüler aşırı değerlere karşı çok duyarlı olabilirler ve iki değişken arasında ilişki yok ya da yok denecek kadar az iken, böylesi bir ya da birkaç gözlem nedeniyle değişkenler arasında kuvvetli ilişki olduğu sonucuna ulaşılabilir (Grafik 7.17.*d*). Bunun tersi durumlarla da karşılaşılabilir. Örneğin, iki değişken arasında kuvvetli bir ilişki var iken bir ya da birkaç gözlem nedeniyle olduğundan düşük bir ilişki miktarı elde edilebilir (Grafik 2.4 ve Grafik 7.17.*c*). Bu nedenlerle ilişki yapısının incelenmesinde büyük yarar vardır. Bu inceleme ilerideki sayfalarda göreceğimiz gibi saçılım grafikleri ile yapılır (Konu ile ilgili olarak ilerideki sayfalar dışında; Tablo 7.28'deki Anscombe Verisini, Grafik 7.17'yi ve tartışmayı okuyunuz.) Ayrıca, gerek korelasyon katsayısı gerekse kovaryans değeri, ***değişkenler arasındaki doğrusal ilişkiyi*** tanımladıkları için doğrusal olmayan ilişkiler bu ölçülerle temsil edilmeyeceklerdir.

Korelasyona İlişkin Varsayımlar

Evren hakkında geçerli çıkarsamalar yapabilmek için korelasyon çözümlemesi ile ilgili aşağıdaki varsayımların sağlanması gerekir.

1. x'in her değeri için y değerlerinin normal dağılan bir alt kümesi vardır.
2. y'nin her değeri için x değerlerinin normal dağılan bir alt kümesi vardır.
3. x ve y'nin bileşik dağılımı iki değişkenli normal dağılım gösterir (İki değişkenin bileşik dağılımı normal dağılım gösteriyorsa bu dağılıma iki değişkenli normal dağılım denir. bak. Bölüm 4).
4. y değerlerinin alt kümeleri eşit varyansa sahiptir.
5. x değerlerinin alt kümeleri eşit varyansa sahiptir.

Bu varsayımlar Grafik 4.1, Grafik 4.2 ve Grafik 4.5 incelenerek daha kolay anlaşılabilir. Bu varsayımlar gereğince, "daha sonra göreceğimiz klasik regresyon varsayımları altında" korelasyon çözümlemesini uygulamak anlamlı gözükmemektedir. ***Korelasyon katsayısının anlamlılığı ile ilgili olarak ayrıntılı bilgi Bölüm 7'dedir.***

Örnek 2.1. Tablo 2.2'de verilen ve en az bir canlı doğum yapmış kadınlara ilişkin veri matrisini ele alarak ortalama vektörü, S, R ve diğer bazı matrisleri bulalım. Tabloda x_1: Kadının Hemoglobin Düzeyi, x_2: Canlı Doğum Sayısı, x_3: Kadının Yaşı ve x_4: Çocuk Bakım Bilgi Puanı'dır.

Tablo 2.2. En Az Bir Çocuklu Kadınlara İlişkin Bulgular

Sıra No	x_1	x_2	x_3	x_4
1	13.0	1	20	40
2	14.0	1	25	50
3	12.5	1	40	40
4	12.0	2	22	60
5	12.5	2	33	60
6	12.0	3	35	55
7	11.0	4	21	50
8	10.0	5	25	70
9	10.0	6	42	50
10	12.0	4	30	75
11	10.5	3	35	60
12	10.0	4	28	70
13	11.0	5	25	65
14	9.0	6	40	45
15	11.5	2	33	65
Σx	171.000	49.000	454.000	855.000
Σx^2	1975.000	203.000	14476.000	50425.000
$\bar{x}$	11.400	3.267	30.267	57.000
s^2	1.829	3.067	52.495	120.714
s	1.352	1.751	7.245	10.987
$\Sigma x_1x_2 = 530$		$\Sigma x_1x_3 = 5129.5$		$\Sigma x_1x_4 = 9697.5$
$\Sigma x_2x_3 = 1529$		$\Sigma x_2x_4 = 2870$		$\Sigma x_3x_4 = 25655$

Buradan, ortalama vektörü, Eşitlik (2.2) yardımıyla;

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 11.400 \\ 3.267 \\ 30.267 \\ 57.000 \end{bmatrix} \quad \text{ya da} \quad \bar{x}' = [11.400 \quad 3.267 \quad 30.267 \quad 57.000]$$

olarak yazılır. Şimdi, varyans-kovaryans matrisinin elemanlarından $var(x_1)$ ve $kov(x_1x_2)$'nin nasıl bulunduğunu gösterdikten sonra bu matrisi oluşturalım. Eşitlik (2.4)'den Var(x_1);

$$s_1^2 = Var(x_1) = s_{11} = \frac{1975 - \frac{(171)^2}{15}}{15-1} = 1.829$$

olarak bulunurken, $\sum_{i=1}^{n} x_{i1}x_{i2} = (13.0)(1) + ... + (11.5)(2) = 530$ ve Eşitlik (2.6)'dan

$Kov(x_1 x_2)$;

$$Kov(x_1 x_2) = s_{12} = \frac{530 - \frac{(171)(49)}{15}}{15-1} = -2.043$$

olarak elde edilir ve benzer işlemler diğer değişkenler için de yapılarak varyans-kovaryans matrisi oluşturulur. Varyans-kovaryans matrisi (S), simetrik olduğu için çoğunlukla alt ya da üst üçgen şeklinde gösterilir. Örneğimiz için S;

$$S = \begin{bmatrix} 1.829 & & & \\ -2.043 & 3.067 & Sim. & \\ -3.293 & 3.281 & 52.495 & \\ -3.536 & 5.500 & -15.929 & 120.714 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Varyans-kovaryans matrisi yardımıyla korelasyon matrisi elde edilebiliyordu. Buna göre korelasyon matrisindeki örneğin $r_{x_1 x_2} = r_{12}$ elemanını bulursak, (2.7)'den;

$$r_{12} = r_{x_1 x_2} = \frac{-2.043}{\sqrt{1.829}\sqrt{3.067}} = -0.863$$

ve korelasyon matrisi (2.8)'den;

$$R = \begin{bmatrix} 1.000 & & & \\ -0.863 & 1.000 & & \\ -0.336 & 0.259 & 1.000 & \\ -0.238 & 0.286 & -0.2000 & 1.000 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

R ve S matrisleri ile ortalama vektörü tek bir matris üzerinde gösterilebilir. Örneğimiz için bu gösterim Tablo 2.3'de verilmiştir.

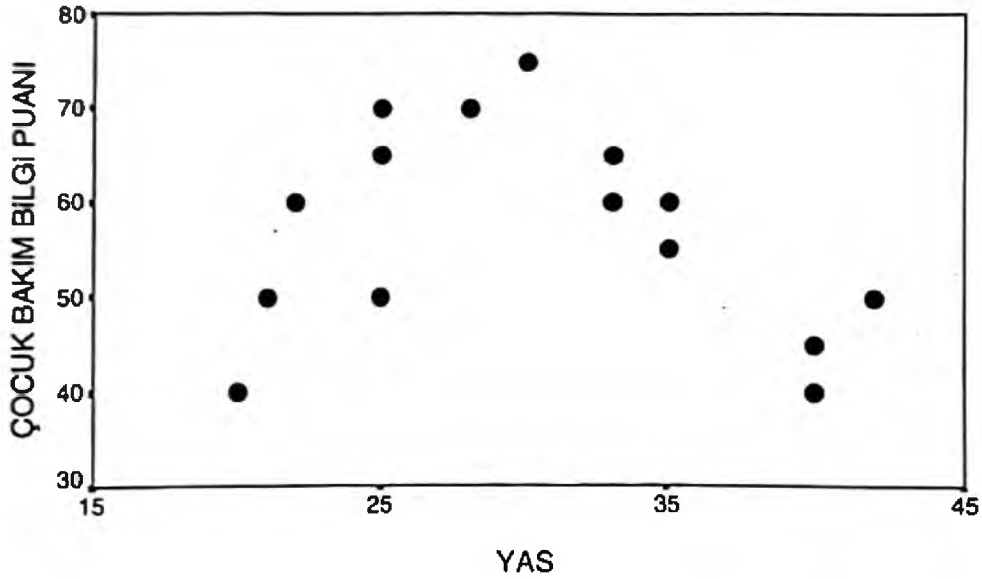
Tablo 2.3. Tablo 2.2'deki Veri İçin Ortalama Vektörü, S ve R Matrisleri

		S ve R Matrisleri			
Değişkenler	*Ort.Vektörü*	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	11.400	1.829	-2.043	-3.293	-3.536
x_2	3.267	-0.863	3.067	3.281	5.500
x_3	30.267	-0.336	0.259	52.495	-15.929
x_4	57.000	-0.238	0.286	-0.200	120.714

Tablo 2.2'deki veriye ilişkin R matrisini incelediğimizde (Tablo 2.3) en yüksek ilişkinin r=–0.863 ile x_1 ile x_2 arasında olduğu görülür. Ancak, r_{ij} değerleri ilişkilerin yapısı hakkında kesin bir bilgi vermemektedir.

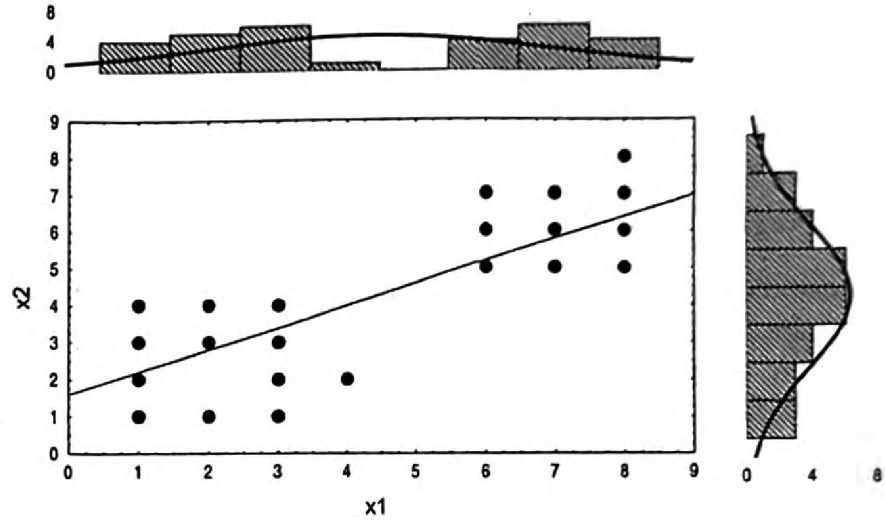
Saçılım Grafikleri

İlişkilerin yapısı hakkında bir bilgi elde etmek için en iyi yöntem değişkenlerin saçılım (nokta) grafiklerini (scatterplot) incelemektir. Bilindiği gibi saçılım grafiklerinde, ***iki değişkenin birlikte dağılımı*** incelenir. Saçılım grafiği oluşturulurken; gözlem çiftlerinin kesiştiği yere bir nokta (ya da başka bir işaret) konur. Grafik 2.1'de Kadının Yaşı (x_3) ile Çocuk Bakım Bilgi Puanı (x_4) arasındaki ilişkinin saçılım grafiği verilmiştir.



Grafik 2.1. Yaş - Çocuk Bakım Bilgi Puanı İlişkisi

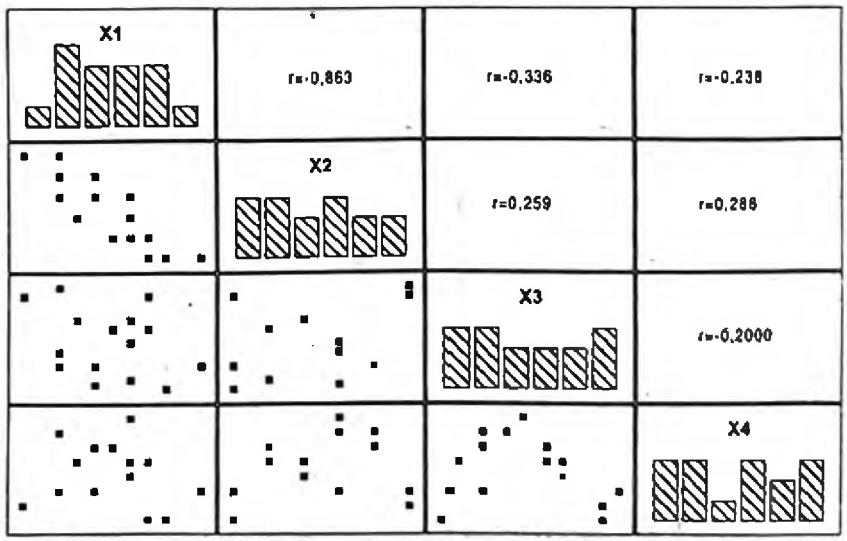
Görüldüğü gibi ilişki doğrusal değildir. Daha doğrusu, iki değişken arasında ***doğrusal olmayan kuvvetli bir ilişki*** vardır. Dolayısıyla, bu iki değişkene ilişkin r katsayısı ve kovaryans değeri bu ilişkiyi açıklamada yetersiz kalmaktadır. Korelasyon katsayısı bazen bir ya da birkaç gözlem çifti nedeniyle olabildiğinden çok yüksek çıkabilmektedir. Örneğin, Tablo 7.28'deki Anscombe Verisi dikkate alınarak çizilen ve Grafik 7.17.d'de verilen saçılımda, tek bir gözlem değeri nedeniyle r=0.817 olarak bulunur. Bu gözlem veriden çıkartıldığında ise, r hesaplanamaz (x değişkeni sabit olacağı için). Yine, Grafik 2.2'deki saçılım grafiğini inceleyelim. n=30 gözlemli (3,3; 3,4; 6,5; 7,6 noktalarında 2, 2,4 ve 7,5 noktalarında 3'er gözlem vardır) bu grafikte; x_2 değişkeni normal dağılırken, x_1 değişkeni iki tepeli bir dağılım göstermektedir. n=30 için r=0.80 bulunurken, grafiğin sol alt köşesindeki 16 gözlem için r=–0.015, sağ üst köşesindeki 14 gözlem için r=0.295 olarak bulunur. Bu tür grafiklere özellikle değişkenlerin bir diğer değişkenden (örneğin, cinsiyetten) etkilendiği durumlarda karşılaşılır. Örneğimiz için x_1 değişkeninin küçük değerlerinin erkeklere, büyük değerlerinin ise bayanlara ait olduğunu varsayarsak, gerek erkeklerde ve gerek bayanlarda x_1 ve x_2 arasında anlamsız bir ilişki söz konusu iken, toplam gözlem sayısı dikkate alındığında yanlışlıkla oldukça yüksek bir ilişki katsayısına ulaşılmaktadır. Bu gibi nedenlerle, tüm ikişerli saçılım grafiklerinin incelenmesi yararlı olacaktır.



Grafik 2.2. Değişik Bir Saçılım Grafiği Örneği

Değişken sayısı fazla olduğunda, tüm ikişerli grafikleri tek tek çizmek bilgisayar ortamında bile vakit alıcı olacağından (örneğin, 10 değişken var ise 45 adet saçılım grafiği çizilmesi gerekir), tüm ikişerli saçılım grafiklerinin tek bir grafik üzerinde gösterilmesi daha uygun olacaktır. Bu amaçla, matris şeklindeki saçılım grafiklerinden yararlanılır (Grafik 2.3).

Gerek istatistik gerekse de grafik amaçlı programlarda matris şeklinde saçılım grafiklerini çizmek amacıyla geliştirilmiş modüller vardır. Matris şeklindeki saçılım grafikleri değişik yaklaşımlarla çizilebilir. Bunların en bilineni, matris şeklindeki grafiğin köşegen elemanlarında değişken adlarının, köşegen dışı elemanlarda ise saçılım grafiklerinin verildiği grafiktir. Tablo 2.2'deki veriye ilişkin olarak çizilebilecek matris şeklindeki saçılım grafiklerinden bir diğeri, Grafik 2.3'dedir. Grafik 2.3'de, matris şeklindeki saçılım grafiğinin köşegen elemanlarında ilgili değişkenin histogramı (ya da kutu-çizgi grafiği), üçgenlerden birinde (burada üst üçgen) ilgili değişkenler arasındaki korelasyon katsayıları, alt üçgende ise değişkenler arasındaki saçılım grafikleri verilmiştir.



Grafik 2.3. Tablo 2.2'deki Veriye İlişkin Saçılım Grafiklerinin Matris Şeklinde Gösterimi

Grafik 2.3'de birinci sütunun ilk saçılım grafiği x_1 ile x_2 arasındaki saçılım grafiğini, ikinci sütunun ilk korelasyon katsayısı x_1 ile x_2 arasındaki korelasyon katsayısını vermektedir. Grafikte görüldüğü gibi x_1 ve x_2 arasında negatif kuvvetli (r=–0.863) ve doğrusal bir ilişki söz konusudur.

Doğrusallığın Sağlanması

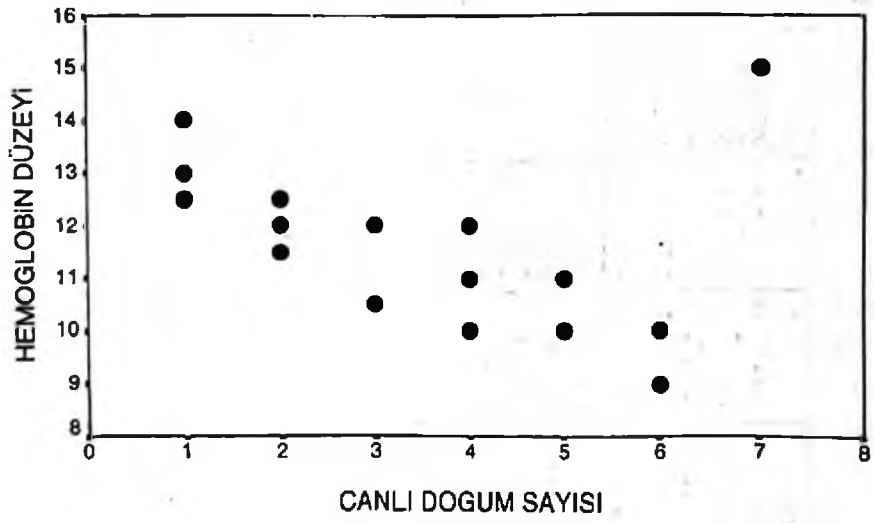
Değişkenler arasında doğrusal olmayan ilişkiler sözkonusu ise, **bazı ilişkiler** için değişkenlerden biri ya da her ikisi üzerinde dönüşüm yapılarak ilişki doğrusallaştırılabilir. Diğer bir deyişle değişkenler arasındaki ilişki, korelasyon katsayısının bir ilişki ölçüsü olarak kullanılabileceği konuma getirilebilir. Yukarıda belirtildiği gibi bu dönüşümler doğrusal olmayan her ilişki için geçerli olmayabilir. Diğer bir deyişle, bazı doğrusal olmayan ilişkiler doğrusallaştırılamaz. Doğrusallaştırılabilinen bazı doğrusal olmayan ilişkiler Grafik 7.7'de ve doğrusallaştırmayı sağlayan bazı dönüşümler Tablo 7.9'da verilmiştir.

Aşırı Değerler

Tablo 2.2'deki veriye $x_1 = 15.0 \quad x_2 = 7 \quad x_3 = 75 \quad x_4 = 43$ olacak şekilde yeni bir gözlem eklediğimizde n=16 için korelasyon matrisi aşağıdaki gibi bulunacaktır;

$$R = \begin{bmatrix} 1.000 & & & \\ -0.348 & 1.000 & & \\ 0.334 & 0.530 & 1.000 & \\ -0.364 & 0.086 & -0.366 & 1.000 \end{bmatrix}$$

Görüldüğü gibi, bir gözlemin eklenmesi ile, x_1 ile x_2 arasındaki ilişki katsayısında büyük bir düşme meydana gelmiştir. Bu iki değişken arasındaki ilişkinin saçılım grafiği *n=16* için Grafik 2.4'de verilmiştir.



Grafik 2.4. Canlı Doğum Sayısı - Hemoglobin Düzeyi İlişkisi

Grafik 2.4'de görüldüğü gibi ilişki aşırı ve etkili tek bir gözlem tarafından ciddi şekilde değiştirilmektedir. Bu nedenle bu gözlemlerin incelenmesi gerekir. Tek ve çok değişkenli aşırı gözlemlerin araştırılması Bölüm 4'de yer almaktadır. Okuyucular bu kitap kapsamında aşırı ve aykırı değer (*extreme value ve outlier*) olmak üzere iki kavram ile karşılaşacaktır. Bu iki sözcük çoğu zaman birbirinin yerine kullanılmakla birlikte, ***aykırı değer kavramı daha çok regresyondaki büyük artıklı değerleri tanımlamak için kullanılır*** (bak. Bölüm 7).

KÇT (SSCP) Matrisleri ve S Matrisinin Bu Matrisler Yardımıyla Bulunması

Varyans-kovaryans matrisi (S) ve korelasyon matrisi (R), matris işlemleri yardımı ile de bulunabilir. Örneğin, kovaryans matrisi matris formunda;

$$S = (X'X - \bar{x}\bar{x}'n)/(n-1) \qquad (2.9)$$

ile verilir. Buradaki $X'X$; X veri matrisinin devriği (transpozu) ile kendisinin çarpımını ifade etmektedir ve $X'X$ matrisine ***kareler ve çarpımlar toplamı matrisi (KÇT) (Sum of Squares and Cross-Product Matrix - SSCP)*** adı verilir. *KÇT* matrisinin köşegen elemanları her bir değişkene ilişkin kareler toplamını verirken, köşegen dışı elemanları ilgili iki değişkenin çarpımlar toplamını verir. Simetrik bir matris olan *KÇT* matrisi, 4 değişken için aşağıdaki gibi olacaktır;

$$X'X = KÇT = SSCP = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_{i1}^2 & \sum_{i=1}^{n} x_{i1}x_{i2} & \sum_{i=1}^{n} x_{i1}x_{i3} & \sum_{i=1}^{n} x_{i1}x_{i4} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i2}x_{i1} & \sum_{i=1}^{n} x_{i2}^2 & \sum_{i=1}^{n} x_{i2}x_{i3} & \sum_{i=1}^{n} x_{i2}x_{i4} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i3}x_{i1} & \sum_{i=1}^{n} x_{i3}x_{i2} & \sum_{i=1}^{n} x_{i3}^2 & \sum_{i=1}^{n} x_{i3}x_{i4} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i4}x_{i1} & \sum_{i=1}^{n} x_{i4}x_{i2} & \sum_{i=1}^{n} x_{i4}x_{i3} & \sum_{i=1}^{n} x_{i4}^2 \end{bmatrix} \qquad (2.10)$$

Örneğimiz (Tablo 2.2 verisi) için $KÇT = X'X$ matrisi;

$$KÇT = SSCP = X'X = \begin{bmatrix} 1975 & 530 & 5129.5 & 9697.5 \\ 530 & 203 & 1529 & 2870 \\ 5129.5 & 1529 & 14476 & 25655 \\ 9697.5 & 2870 & 25655 & 50425 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. $\bar{x}\bar{x}'$ ise, iki ortalama vektörünün çarpımı olup 4×4 boyutunda bir matris olarak bulunur;

$$\bar{x}\bar{x}' = \begin{bmatrix} 11.4 \\ 3.267 \\ 30.267 \\ 57 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11.4 & 3.267 & 30.267 & 57 \end{bmatrix}$$

ve

$$\bar{x}\bar{x}' = \begin{bmatrix} 129.96 & 37.24 & 345.04 & 649.8 \\ 37.24 & 10.67 & 98.88 & 186.22 \\ 345.04 & 98.88 & 916.09 & 1725.22 \\ 649.8 & 186.22 & 1725.22 & 3249 \end{bmatrix}$$

olur. Daha sonra kovaryans matrisi S, Eşitlik (2.9) yardımı ile daha önce verildiği gibi elde edilir.

Bazen her bir değişkene ilişkin gözlemlerden ilgili değişkenin ortalaması çıkartılarak elde edilen ***fark matrisi***, (D), bulunur ve $D'D$'ye ***düzeltilmiş KÇT matrisi*** adı verilir. Kovaryans matrisi, ***düzeltilmiş KÇT matrisi*** yardımı ile de hesaplanabilir;

$$S = (D'D)/(n-1) = Düz.KÇT/(n-1) \qquad (2.11)$$

Örneğimiz için, her bir gözlemi ait olduğu değişkenin ortalamasından çıkartarak elde edilen fark matrisi (D) oluşturulduktan sonra, $D'D$ matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$D = \begin{bmatrix} 13-11.4 & 1-3.267 & 20-30.267 & 40-57.0 \\ 14-11.4 & 1-3.267 & 25-30.267 & 50-57.0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 11.5-11.4 & 2-3.267 & 33-30.267 & 65-57.0 \end{bmatrix}$$

$$D'D = \begin{bmatrix} 1.600 & 2.600 & \ldots\ldots & 0.100 \\ -2.267 & -2.267 & \ldots\ldots & -1.267 \\ -10.267 & -5.267 & \ldots\ldots & 2.733 \\ -17.000 & -7.000 & \ldots\ldots & 8.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.6 & -2.267 & -10.267 & -17 \\ 2.6 & -2.267 & -5.267 & -7 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0.1 & -1.267 & 2.733 & 8 \end{bmatrix}$$

Buradan, düzeltilmiş $KÇT$ ($D'D$) matrisi;

$$Düz.KÇT = D'D = \begin{bmatrix} 25.600 & & & \\ -28.600 & 42.933 & & Sim. \\ -46.100 & 45.933 & 734.933 & \\ -49.500 & 77.000 & -223.000 & 169.0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Daha sonra (2.11) yardımıyla S hesaplanabilir. Eşitlik (2.9) ve (2.10)'dan farkedileceği gibi,

$$D'D = (X'X - \bar{x}\bar{x}'n) \tag{2.12}$$

dir.

R ve S Matrislerinin $V^{1/2}$ Matrisi Yardımıyla Bulunması

Korelasyon matrisi R; $V^{1/2}$, v_{ii} köşegen elemanları değişkenlerin standart sapmaları olan bir köşegen matris olmak üzere,

$$R = (V^{1/2})^{-1} S (V^{1/2})^{-1} \tag{2.13}$$

ile de elde edilebilir. Örneğimiz için,

$$V^{1/2} = \begin{bmatrix} 1.352 & & & \\ & 1.751 & & \\ & & 7.245 & \\ & & & 10.987 \end{bmatrix}$$

$$(V^{1/2})^{-1} = \begin{bmatrix} 1/1.352 & & & \\ & 1/1.751 & & \\ & & 1/7.245 & \\ & & & 1/10.987 \end{bmatrix}$$

olur ve Eşitlik (2.13)'den R matrisine ulaşılır.

S matrisi, R ve $V^{1/2}$ matrisi yardımı ile de hesaplanabilir. Buna göre S;

$$S = V^{1/2} R V^{1/2} \tag{2.14}$$

ile verilir.

Genelleştirilmiş Varyans

$p \times p$ boyutlu bir S matrisi, p tane varyans ve $p(p-1)/2$ tane kovaryans değeri içerir. Bazen, S matrisi ile ifade edilen değişim tek bir sayısal değerle ifade edilmek istenir. Eğer S'nin determinantını alırsak bu sayısal değere ulaşabiliriz ki buna genelleştirilmiş varyans denir.

$$\textit{Genelleştirilmiş Varyans} = |S| \tag{2.15}$$

Örneğimiz için genelleştirilmiş varyans $|S| = 6712$ olarak bulunur.

Tüm varyans ve kovaryanslardaki bilginin tek bir sayıya dönüştürülmesini sağlayan genelleştirilmiş varyans değeri, $p=1$ olduğunda, değişkenin varyansına eşit olur.

Genelleştirilmiş varyansın incelenen S matrisine bağlı olan bazı zayıf yönleri vardır. Aşağıdaki üç farklı S matrisini dikkate alalım;

$$S_1 = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \quad S_2 = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \quad S_3 = \begin{bmatrix} 5 & 2.236 \\ 2.236 & 5 \end{bmatrix}$$

Buradan korelasyon katsayıları sırasıyla; 0.66, −0.66 ve 0.447 olarak bulunurken, $|S_1| = 20$, $|S_2| = 20$ ve $|S_3| = 20$ olarak bulunur. Yani, bu üç kovaryans matrisi birbirinden farklı korelasyonlar vermesine rağmen aynı genelleştirilmiş varyansa sahiptir. Buradan, farklı korelasyon yapısına sahip matrisleri genelleştirilmiş varyansla özetleyerek yorumlamanın pek doğru olmayacağı sonucuna ulaşabiliriz. p>3 olduğunda bu sorun daha da karmaşık olarak ortaya çıkabilir.

Genelleştirilmiş varyans, S matrisine ilişkin özdeğerler yardımı ile de hesaplanabilir. p boyutlu bir S matrisinin genelleştirilmiş varyansı;

$$|S| = \lambda_1 \lambda_2 \ldots\ldots \lambda_p \qquad (2.16)$$

ile verilir. Örneğimiz için S matrisine ilişkin özdeğerler;

$$\lambda_1 = 124.491 \quad \lambda_2 = 49.731 \quad \lambda_3 = 3.577 \quad \lambda_4 = 0.303$$

ve $|S| = 124.491 \times 49.731 \times 3.577 \times 0.303 = 6712$ olarak bulunur (not; yuvarlamalar nedeniyle yaklaşık sonuçlar elde edilebilir.)

Genelleştirilmiş varyans bazı durumlarda sıfır çıkabilir. Bu durumlar aşağıda verilmiştir.

1. X veri matrisinden D fark matrisi oluşturulduğunda, D matrisinin en azından bir sütunu diğer sütunların doğrusal kombinasyonu olarak ifade edilebiliyorsa $|S| = 0$ olur. 3 gözlemden ve 3 değişkenden oluşan X veri matrisi ve ortalama vektörü aşağıdaki gibi olsun;

$$X = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 20 \\ 16 & 4 & 24 \\ 16 & 0 & 16 \end{bmatrix} \qquad \bar{x}' = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 20 \end{bmatrix}$$

Buradan D matrisi;

$$D = \begin{bmatrix} 4-12 & 8-4 & 20-20 \\ 16-12 & 4-4 & 24-20 \\ 16-12 & 0-4 & 16-20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. D fark matrisinde $d_3 = d_1 + 2d_2$ olduğu görülür ve bu nedenle $|S| = 0$ olur. X veri matrisinin varyans-kovaryans matrisini bulup determinantını alırsak,

$$S = \begin{bmatrix} 48 & -24 & 0 \\ -24 & 16 & 8 \\ 0 & 8 & 16 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad |S| = 0$$

olarak bulunur.

2. Gözlem Sayısı (n) ≤ Değişken Sayısı (p) ise $|S| = 0$ olur.

Bir istatistiksel çözümlemede $|S| = 0$ çıkması, bazı değişkenlerdeki gözlemleri çalışmadan çıkartmak gerektiğini bize bildirir. Gözlem sayısı azalmış veri matrisi ile elde edilen yeni S matrisi full ranklı ve dolayısıyla sıfır olmayan genelleştirilmiş varyansa sahip olabilecektir. Ancak, hangi gözlemlerin çıkartılacağı da bir sorundur.

$|S|$ ile $|R|$ arasında da bir ilişki vardır ve bu ilişki;

$$|S| = (s_{11}.s_{22}.....s_{pp})\ |R| \qquad (2.17)$$

ile verilir.

Standartlaştırma ve Genelleştirilmiş Varyans

x_{ij}: j. değişkenin i. gözlem değerini, $\bar{x}_j$: j. değişkenin ortalamasını ve s_{jj}: j. değişkenin varyansını (S matrisinin köşegen elemanları) göstermek üzere her bir x_j değişkeni değerleri,

$$\sum_{i=1}^{n} (x_{ij} - \bar{x}_j) / \sqrt{s_{jj}} \quad \text{j=1,2,.....,p} \qquad (2.18)$$

ile standartlaştırılabilir. Eşitlik (2.18), z standartlaştırması olarak bilinir. Standartlaştırma konusunda ayrıntılı bilgi Bölüm 3'de verilmiştir. z standartlaştırması ile standartlaştırılmış değişkenlerin ortalaması 0, varyansı 1'dir. Standartlaştırılmış değişkenler arasındaki kovaryans değeri ise her zaman –1 ile +1 arasında değişir. Standartlaştırılmış iki değişken arasındaki kovaryans değeri, iki değişken arasında doğrusal bir ilişki yok ise 0 iken, negatif ya da pozitif tam ilişki olması durumunda sırasıyla –1 ve +1'e eşit olur. Kısaca, ***standartlaştırılmış iki değişken arasındaki kovaryans değeri korelasyon katsayısına (r) eşittir.*** Dolayısıyla, standartlaştırılmış değişkenlere ilişkin S matrisi, R matrisine eşittir. Sonuç olarak, standartlaştırılmış değişkenlerin genelleştirilmiş varyansı da $|R|$'ye eşit olacaktır.

$$\textit{Standartlaştırılmış Değişkenlerin Genelleştirilmiş Varyansı} = |R| \qquad (2.19)$$

Örneklem korelasyon matrisi olan R'den ya da yukarıda belirttiğimiz gibi, standartlaştırılmış değişkenlere ilişkin S matrisinden (yani R'den) elde edilen genelleştirilmiş varyans $|R|$, örneklem varyanslarının büyüklüğünden etkilenmez. Korelasyon matrisinde köşegen dışı elemanlar ($i \neq j$ elemanları) sıfır ya da sıfıra yakınsa değişkenler arasında ilişki olmayacak ve $|R|$ = 1 ya da 1'e yakın bir değer olacaktır. Bu durumda değişkenlerin dik olduğu söylenir. Değişkenler arasında kuvvetli ilişki varsa yani r katsayıları ± 1'e yakın ise $|R|$'nin değeri düşecektir (0'a yaklaşacaktır). Örneğimiz için $|R|$ = 0.1883 olarak bulunmuştur. Konu ile ilgili iki örnek aşağıda verilmiştir.

$$R = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.92 & 0.88 \\ 0.92 & 1.00 & 0.70 \\ 0.88 & 0.70 & 1.00 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 2.67016 \\ \lambda_2 = 0.30174 \\ \lambda_3 = 0.02810 \end{matrix} \quad |R| = 0.02264$$

$$R = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.20 & 0.15 \\ 0.20 & 1.00 & 0.30 \\ 0.15 & 0.30 & 1.00 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 1.43980 \\ \lambda_2 = 0.86629 \\ \lambda_3 = 0.69390 \end{matrix} \quad |R| = 0.8655$$

Gruplara İlişkin Çözümlemeler

Birçok çok değişkenli çözümleme (*Diskriminant analizi, MANOVA*, ..) iki ve daha fazla grubun incelenmesini gerektirir. Örneğin, Tablo 2.2'deki veriyi ilk 7 gözlem kentsel, son 8 gözlem kırsal bölge kadınlarına ait veri grupları olarak düşünelim. Dolayısıyla, veri 2 gruptan oluşacaktır. Araştırıcı, incelenen 4 değişken açısından her bir gruptaki kadınların birbirine *ne derece benzer* olduğunu ve de iki gruptaki kadınların incelenen değişkenler açısından ne derece farklı olduğunu belirlemek isteyebilir. Bu amaç için;

1. Veri, her bir grup içindeki benzerlikleri belirlemek amacıyla ayrı ayrı özetlenir ise bu işleme ***grup içi analiz*** (*within–group analysis*) adı verilir.
2. Veri, incelenen değişkenler açısından gruplar arasındaki farklılıkları belirlemek için özetlenir ise bu işleme ***gruplar arası analiz*** (*between-group analysis*) adı verilir.

Örnek 2.2. Tablo 2.2'deki ilk iki değişkeni dikkate alalım ve veriyi *kentsel* ve *kırsal* olarak iki gruba ayırarak (Tablo 2.4) özet istatistikleri bulalım.

Tablo 2.4'de ortalamaya göre düzeltilmiş (her bir gözlemin dağılım ortalamasından çıkartılarak düzeltildiği) değerler de yer almakta ve hesaplamalarda bu değerlerden de yararlanılmaktadır. Tablo 2.4'de görüldüğü gibi, ham verilerin varyansı ile ortalamaya göre düzeltilmiş verilerin varyansı aynıdır.

Tablo 2.4. Ez Az Bir Çocuklu Kadınlara İlişkin Bulgular

			Ortalamaya Göre Düzeltilmiş	
Sıra No	x_1	x_2	x_1	x_2
Kentsel				
1	13.0	1	0.572	–1
2	14.0	1	1.572	–1
3	12.5	1	0.072	–1
4	12.0	2	–0.428	0
5	12.5	2	0.072	0
6	12.0	3	–0.428	1
7	11.0	4	–1.428	2
$\bar{x}$	12.428	2	0.000	0.000
KT			5.214	8
s^2	0.869	1.333	0.869	1.333

Tablo 2.4. Ez Az Bir Çocuklu Kadınlara İlişkin Bulgular (devam)

			Ortalamaya Göre Düzeltilmiş	
Sıra No	x_1	x_2	x_1	x_2
Kırsal				
8	10.0	5	–0.500	0.625
9	10.0	6	–0.500	1.625
10	12.0	4	1.500	–0.375
11	10.5	3	0.000	–1.375
12	10.0	4	–0.500	–0.375
13	11.0	5	0.500	0.625
14	9.0	6	-1.500	1.625
15	11.5	2	1.000	–2.375
$\bar{x}$	10.5	4.375	0.000	0.000
KT			6.500	13.875
s^2	0.929	1.982	0.929	1.982

Grup İçi Analiz

Grup içi analiz için gerekli olabilen *ortak* (*pooled*) *grup içi düzeltilmiş KÇT* ($SSCP_w$), *ortak varyans–kovaryans* ve *ortak R matrislerini* elde etmek amacıyla; gruplara göre *düzeltilmiş KÇT, varyans–kovaryans ve korelasyon matrisleri* aşağıda verilmiştir. Aşağıda verilen $Düz.KÇT_1$ matrisindeki (1,1) elemanı olan 5.214 ve (2,2) elemanı olan 8.000 doğrudan Tablo 2.4'den alınırken (ki bunlar düzeltilmiş değerlerin kareleri toplamlarıdır), (1,2) ya da (2,1) elemanı olan –5.500 (ki bu düzeltilmiş değerlerin çarpımlar toplamıdır), (0.572)(–1)+.....+(–1.428)(2) ile de bulunabilir. [Not: Bilindiği üzere, bir değişkene ilişkin kareler toplamı yukarıda verilen "ortalamaya göre düzeltilmiş değerlerin karelerinin toplanması" ile elde edilebileceği gibi, $\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2 / n$ yaklaşımı ile de elde edilebilir. Benzer şekilde, x_1 ve x_2 gibi iki değişkene ilişkin düzeltilmiş çarpımlar toplamı, "ortalamaya göre düzeltilmiş değerlerin çarpılıp toplanması ile elde edilebileceği gibi, $\sum x_1 x_2 - \sum x_1 \sum x_2 / n$ yaklaşımı ile de elde edilebilir.]

$$Düz.KÇT_1 = \begin{bmatrix} 5.214 & -5.500 \\ -5.500 & 8.000 \end{bmatrix} \quad S_1 = \begin{bmatrix} 0.869 & -0.917 \\ -0.917 & 1.333 \end{bmatrix} \quad R_1 = \begin{bmatrix} 1.000 & -0.852 \\ -0.852 & 1.000 \end{bmatrix}$$

$$Düz.KÇT_2 = \begin{bmatrix} 6.500 & -6.000 \\ -6.500 & 13.875 \end{bmatrix} \quad S_2 = \begin{bmatrix} 0.929 & -0.857 \\ -0.857 & 1.982 \end{bmatrix} \quad R_2 = \begin{bmatrix} 1.000 & -0.632 \\ -0.632 & 1.000 \end{bmatrix}$$

İki grubun grup içi düzeltilmiş *KÇT* matrislerini toplarsak, *ortak* (pooled) *grup içi düz. KÇT matrisi* ($SSCP_w$) elde edilir (sadece *W* ile de gösterilebilir);

$$Ortak\ Grup\ İçi\ Düz.\ KÇT\ Matrisi = SSCP_w = \begin{bmatrix} 11.714 & -11.500 \\ -11.500 & 21.875 \end{bmatrix}$$

Ortak varyans-kovaryans matrisi (S_w), *ortak grup içi düz. KÇT* matrisinin ($SSCP_w$) serbestlik derecesi olan $\sum_{i=1}^{k} n_i - k$'ya bölünmesi ile bulunabilir (burada k: grup sayısıdır). Örneğimiz için serbestlik derecesi $n_1 + n_2 - 2 = 7+8-2=13$ olarak bulunur ve S_w aşağıdaki gibi elde edilir.

$$S_w = \begin{bmatrix} 0.901 & -0.885 \\ -0.885 & 1.683 \end{bmatrix}$$

Benzer şekilde grup içi ortak korelasyon matrisi (R_w); S_w ve Eşitlik (2.7) yardımıyla aşağıdaki gibi bulunur.

$$R_w = \begin{bmatrix} 1.000 & -0.718 \\ -0.718 & 1.000 \end{bmatrix}$$

$SSCP_w$, S_w, R_w matrisleri her bir gruptaki değişimin ortak ya da birleşik miktarını verirler. Diğer bir deyişle, bu matrisler, her bir gruptaki gözlemlerin homojenliği (benzerliği) konusunda bilgi sağlar. Her bir gruptaki gözlemler verilen bir değişken açısından homojen ise o değişkene ilişkin kareler toplamı sıfır olarak elde edilirken, gözlemler homojen değil ise kareler toplamı sıfırdan büyük çıkacaktır.

Gruplar Arası Analiz

Gruplar arası kareler toplamı, gruplardaki ortalamaların genel ortalamalardan ne derece farklı olduğu konusunda bilgi verir. Gruplar arası kareler toplamı Eşitlik (2.20) yardımıyla elde edilebilir (daha farklı formüller de söz konusudur).

$$KT_j = \sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{x}_{ji} - \bar{x}_{j.})^2 \qquad (2.20)$$

Burada, KT_j; *j.* değişken için gruplar arası kareler toplamı, n_i; *i.* gruptaki gözlem sayısı, $\bar{x}_{ji}$; *i.* gruptaki *j.* değişkenin ortalaması, $\bar{x}_{j.}$; toplam gözlem sayısı için *j.* değişkenin ortalaması ve *k*; *grup sayısı*'dır.

Örneğimizdeki x_1 ve x_2 değişkenleri için düzeltilmiş gruplar arası kareler toplamları, Tablo 2.2 ve Tablo 2.4 yardımıyla aşağıdaki gibi bulunacaktır;

$KT_1 = 7(12.428-11.40)^2+8(10.5-11.40)^2=13.886$

$KT_2 = 7(2.000-3.267)^2+8(4.375-3.267)^2=21.058$

Bu sonuçlar; $p \times p = 2 \times 2$ boyutundaki gruplar arası kareler ve çarpımlar toplamı matrisinin ($SSCP_{B.}$)'nin (1,1) ve (2,2) elemanlarına ilişkindir. Bu matrisin çarpımlar toplamı (matrisin (1,2) ya da (2,1) elemanı) ise aşağıdaki gibi bulunabilir (formülü burada verilmeyecektir).

$ÇT_{12}=7(12.428-11.4)(2-3.267)+8(10.5-11.4)(4.375-3.267)=-17.100$

Buradan, gruplar arası için düzeltilmiş *KÇT* matrisi ($SSCP_B$):

$$Gruplar\ Arası\ İçin\ Düz.\ KÇT\ Matrisi = (SSCP_B) = \begin{bmatrix} 13.886 & -17.100 \\ -17.100 & 21.058 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

$SSCP_W$ ve $SSCP_B$ matrislerinin toplanması ile toplam için düzeltilmiş kareler ve çarpımlar toplamı matrisi ($SSCP_T$) elde edilir. Diğer bir deyişle, bu üç kareler toplamı arasında bir ilişki vardır. Bu ilişki,

$$Düz.\ SSCP_T = Düz.\ SSCP_B + Düz.\ SSCP_W$$

ile verilir. Dolayısıyla, toplam için elde edilecek düzeltilmiş *KÇT* ve grup içi için düzeltilmiş *KÇT*'nı bulup farkını aldığımızda gruplar arası için düzeltilmiş *KÇT* matrisini elde edebiliriz. Örneğimize ilişkin olarak *toplam için düzeltilmiş kareler ve çarpımlar toplamı matrisi* aşağıda verilmiştir.

$$Düz.\ SSCP_T = \begin{bmatrix} 13.886 & -17.100 \\ -17.100 & 21.058 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11.714 & -11.500 \\ -11.500 & 21.875 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26.600 & -28.500 \\ -28.500 & 42.933 \end{bmatrix}$$

Yukarıda da belirtildiği gibi, toplam bilgi iki parçaya bölünebilir. Bunlardan grup içi bileşeni *grup içi farklılıklar* ile ilgili bilgi verirken, gruplar arası bileşeni *gruplar arası farklılıklar* ile ilgili bilgi verir. İleride bu matrisler kullanılarak birçok hesaplama yapılacaktır.

Bölüm 3

STANDARTLAŞTIRMA

Giriş

Çok değişkenli analizde, çoğu zaman birimleri farklı olan değişkenlerle ilgilenilir. Ancak, bazı durumlarda verilerin aynı birimde olması daha iyi sonuç verir. Bu amaçla değişken değerleri standartlaştırılarak aynı birime dönüştürülürler. Standartlaştırmanın yararını kavrayabilmek için aşağıdaki örneği ele alalım.

Örnek 3.1. Bir üniversite öğrencisinin, üç farklı derse ilişkin ara sınav sonuçları Tablo 3.1'deki gibi olsun.

Tablo 3.1. Bir Öğrencinin Ara Sınav Sonuçları

D e r s	*İng.*	*Mat.*	*Psi.*
Puan (x_i)	80	65	75

Yüzeysel bir bakışla, öğrencinin en başarılı olduğu ders İngilizce, en başarısız olduğu ders ise matematiktir. İlk bakışta, böyle olmasına karşın, ham puanlarla doğrudan karşılaştırma yapılmaması için çeşitli nedenler vardır. Örneğin, İngilizce sınavı kolay olduğu için öğrenciler yüksek puan almış olabilir. Tam tersine matematik sınavı da çok zor olduğu için alınan puanlar düşük olabilir. Ya da İngilizce sınavı 100, matematik sınavı 80 üzerinden değerlendirilmiş olabilir. Bu gibi nedenlerle, ham skorların bir bilgi sağladığını ancak, performansın ne olduğu konusunda pek bir bilgi vermediğini söyleyebiliriz. Şimdi bu veriye, her bir teste ilişkin ortalama ve standart sapmaları ekleyelim (Tablo 3.2).

Tablo 3.2. Ara Sınav İstatistikleri

	İngilizce	*Matematik*	*Psikoloji*
x_i	80	65	75
$\bar{x}$	85	55	60
S. Sapma	10	5	15

Bu ek bilgi, durumu dikkate değer bir şekilde değiştirecektir. Çünkü, ortalamalara şöyle bir bakacak olursak; öğrencinin İngilizce sınav puanı ortalamanın altında iken, matematik ve psikoloji sınav puanları ortalamanın üzerindedir. Bu nedenle, "bu öğrenci en kötü sonucu İngilizceden almıştır" şeklinde yorum yapabiliriz. Tedbirsiz bir

gözlemci, şimdi de öğrencinin en iyi notunun psikoloji notu olduğunu söyleyebilir. Çünkü öğrencinin psikoloji notu ortalamadan 15 puan yüksekken, matematik notu 10 puan yüksektir. Ancak, puanlara ilişkin dağılımın standart sapması yani yaygınlığı, verilen bir notun göreceli derecelemesi yapılacağı zaman dikkate alınmalıdır. Buna göre, psikoloji testinde ortalama yaygınlık ortalamadan 15 puan uzaktadır. Bu nedenle, öğrencinin psikoloji notu (75), ortalamadan 15 puan (yani 1 standart sapma) yüksektir. Matematik sınavındaki ortalama değişkenlik ise sadece 5 puandır ve öğrencinin 65 puanlık matematik notu, ortalamadan 10 puan (yani 2 standart sapma) yüksektir. Bu nedenle bu not, matematik sınavının en iyi notlarından biridir ve bu mantıkla bu notlar arasında en yükseğidir.

Böylece, bu örnekte ham puanla sunulan manzaranın gayet yanıltıcı olduğu görülürken, her bir testi alan grupların her birine dayalı olarak yapılan karşılaştırmada, öğrencinin en iyi notu matematikten, en iyi ikinci notu psikolojiden, en kötü notu da İngilizce'den aldığı görülür. Bu değerlendirme, her bir dersteki diğer öğrencilere görecelidir. 80, 65, 75 ham notları, farklı ortalama ve farklı s. sapmaya sahip olduklarından doğrudan karşılaştırılamaz. Böylece, bu ham skorların ölçtüğü birimler testten teste aynı değildir. Ancak, bu sorunu çözmenin yolları da vardır. Bu yollardan biri, her bir testteki notları ***sabit bir ortalama ve standart sapmaya sahip yeni bir skala***ya çevirmektir. Bu tür çevirme işlemine ***standartlaştırma***, bu tür çevirme sonucunda elde edilen skorlara da ***standart skorlar*** denir.

Verilerin Standartlaştırılması (z Standartlaştırması)

Verilerin standartlaştırılması ile ilgili olarak birçok yöntem olmakla birlikte, daha kullanışlı bir yöntem, orijinal verileri ***ortalaması 0, standart sapması 1*** olan bir yeni skora dönüştürmektir. Bu yeni skora, z değerleri ya da standart değerler denir. Bu işlem sonucunda ortalama sıfır ($\bar{z}$ =0) olduğu için, verilen bir puanın ortalamanın altında ya da üstünde olduğunu hemen söyleyebiliriz. Çünkü ortalamanın üzerindeki değerler pozitif, altındakiler negatif işaretli olacaktır. Aynı zamanda, standart sapma 1 olduğu için, standart değerin sayısal büyüklüğü; herhangi bir gözlemin ortalamadan kaç standart sapma uzakta olduğunu belirtecektir. Bilindiği gibi z standartlaştırması Eşitlik (2.18)'de de belirtildiği gibi bir x değişkeni için;

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s} \qquad (3.1)$$

ile verilir. Bu bölümde incelediğimiz İngilizce, matematik ve psikoloji notlarına ilişkin z değerleri Tablo 3.3'de verilmiştir.

Tablo 3.3. Sınav Notları (x_i), Sınav İstatistikleri ve z Değerleri

	İngilizce	*Matematik*	*Psikoloji*
x_i	80	65	75
$\bar{x}$	85	55	60
S	10	5	15
z_i	(80-85)/10=-0.50	(65-55)/5 = +2	(75-60)/15 =+1

Böylece bir bakışta, öğrencinin İngilizce sınavında; ortalamanın yarım standart sapma altında, matematik sınavında; ortalamanın 2 standart sapma üstünde ve psikoloji sınavında ortalamanın 1 standart sapma üstünde not aldığı görülür.

Zamana karşı yapılan ölçümler (örneğin 100 m koşu süresi) için, elde edilen z skorunun işareti değiştirilerek yoruma gidilir. Örneğin 100 m koşu süresi ortalaması 12.0 sn ve standart sapması 0.2 sn olan bir yarışmayı 12.2 sn'de koşan bir atlet için z değeri 1.0 olarak bulunur. Ancak, işareti değiştirilerek –1.0 olarak kodlanır. Buna göre bu atlet 100 m yarışını ortalama sürenin 1.0 standart sapma altında tamamlamıştır.

Örnek 3.2. Tablo 2.2'deki 4 değişken, z ile standartlaştırılmış ve standartlaştırılmış değişkenler (zx_1, zx_2, zx_3, zx_4) Tablo 3.4'de verilmiştir. Tabloda görüldüğü gibi standart değişkenlerin ortalaması 0, standart sapması ise 1'dir. Bu tabloda, *orijinal değerleri ortalaması 57.0 ve standart sapması 10.987 olan* x_4 *değişkeninin standart değerlerini* sadece 1. kadın için yorumlayacak olursak; bu kadın, ortalaması 0 ve standart sapması 1 olan dağılımda, ortalamadan 1.5473 standart sapma düşük puan almıştır. Ya da orijinal veride bu kadının aldığı 40 puan, ortalaması 57 olan dağılımda ortalamadan 1.5473 standart sapma daha düşük bir değerdir (40=57+(–1.5473× 10.987).

Tablo 3.4. Standartlaştırılmış Tablo 2.2 Değişkenleri

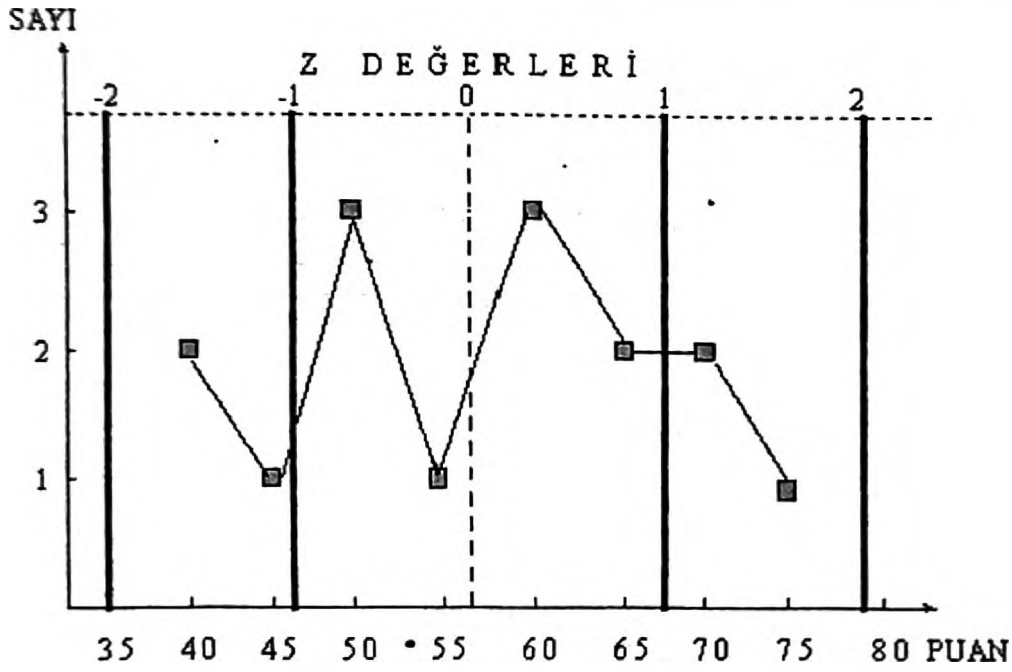
Sıra no	zx_1	zx_2	zx_3	zx_4
1	1.1832	-1.2944	-1.4170	-1.5473
2	1.9227	-1.2944	-0.7269	-0.6371
3	0.8135	-1.2944	1.3434	-1.5473
4	0.4437	-0.7233	-1.1410	0.2731
5	0.8135	-0.7233	0.3773	0.2730
6	0.4437	-0.1523	0.6533	-0.1820
7	-0.2958	0.4187	-1.2790	-0.6371
8	-1.0350	0.9898	-0.7269	1.1832
9	-1.0350	1.5608	1.6194	-0.6371
10	0.4437	0.4188	-0.0368	1.6383
11	-0.6656	-0.1523	0.6533	0.2731
12	-1.0350	0.4188	-0.3128	1.1832
13	-0.2958	0.9898	-0.7269	0.7281
14	-1.7750	1.5608	1.3434	-1.0922
15	0.0739	-0.7233	0.3773	0.7281
Ortalama	**0.0000**	**0.0000**	**0.0000**	**0.0000**
S.sapma	**1.0000**	**1.0000**	**1.0000**	**1.0000**

Standartlaştırma ve Dağılımın Şekli

Ham verilere z dönüşümü uygulandığında dağılımın şekli değişmez. Tablo 2.2'deki standartlaştırılmamış ve Tablo 3.4'deki standartlaştırılmış çocuk bakım bilgi puanlarına (sırasıyla x_4 ve zx_4) ilişkin frekans dağılımı tablosu Tablo 3.5'de, grafiği ise Grafik 3.1'de verilmiştir. Tablo 3.5 ve Grafik 3.1'de görüldüğü gibi ham skorların dağılımı verilerin standartlaştırılması ile değişmemektedir. Değişen tek şey, birimdir.

Tablo 3.5. Tablo 2.2'deki X_4 ve Tablo 3.4'deki ZX_4 Değişkenlerine İlişkin Puanların Frekans Dağılımı

Standartlaştırılmamış	Sayı	Standartlaştırılmış (z)	Sayı
40	2	-1.5473	2
45	1	-1.0922	1
50	3	-0.6371	3
55	1	-0.1820	1
60	3	0.2730	3
65	2	0.7281	2
70	2	1.1832	2
75	1	1.6383	1
Toplam	15	*Toplam*	15



Grafik 3.1. Standartlaştırılmamış ve Standartlaştırılmış Gözlemlerin Dağılımı

Ayrıca, ÇBB puanlarını 100 üzerinden değil de örneğin 50 üzerinden değerlendirsek; 100 üzerinden 40 alan bir öğrenci 50 üzerinden 20 puan almış olur ve 50 puan üzerinden $\bar{x} = 28.5$, $ss = 5.4935$ olarak bulunur.

Eğer 100 üzerinden alınan 40 puan ile 50 puan üzerinden alınan 20 puana ilişkin z değerlerini bulacak olursak;

$$\frac{40-57}{10.987} = -1.547 = \frac{20-28.5}{5.4935}$$

olur. Bu da dağılıma ilişkin skalanın değişmesi ile z değerinin değişmeyeceğini bize gösterir.

Bölüm 4

ÇOK DEĞİŞKENLİ NORMAL DAĞILIM

4.1. TANIMLAR

Çok değişkenli istatistiksel yöntemlerin çoğu, X veri matrisinin çok değişkenli normal dağıldığı varsayımı temeline dayandırılmıştır. Çok değişkenli normal dağılım, bildiğimiz tek değişkenli normal dağılımın, değişken sayısı $(p) \geq 2$ için genellenmiş durumudur.

Bilindiği gibi, tek değişkenli normal dağılım;

x: *incelenen değişken*

μ : *İncelenen değişkenin ortalaması*

σ : *İncelenen değişkenin standart sapması*

olmak üzere;

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\ \sigma^2}} e^{(-1/2)\ [(x-\mu)/\sigma]^2} \quad -\infty < x < +\infty \qquad (4.1)$$

ile verilen bir olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahiptir ve bu fonksiyonda; ortalama (μ) ile ± 1 standart sapma ($\pm 1\sigma$) aralığında gözlemlerin % 68.26'sı, ± 2 standart sapma ($\pm 2\sigma$) aralığında gözlemlerin % 95.44'ü ve ± 3 standart sapma ($\pm 3\sigma$) aralığında gözlemlerin yaklaşık % 100'ü bulunur ve aşağıdaki gibi yazılır;

$$p(\mu - 1\sigma \leq x \leq \mu + 1\sigma) = 0.6826$$

$$p(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) = 0.9544$$

$$p(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) = 0.9974$$

Eğer bir x dağılımı μ ve σ^2 ile normal dağılım gösteriyor ise bu dağılımın normal dağıldığına ilişkin gösterim; $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ şeklinde olur. Örneğin, bir x dağılımı $\mu = 25$ ve $\sigma^2 = 4$ ile normal dağılım gösteriyor ise $x \sim N(25,4)$ yazılır.

Eşitlik (4.1)'deki $[(x-\mu)/\sigma]^2$ terimi; x değişkenine ilişkin gözlemlerin, ortalamaya olan uzaklığının standart sapma ile standartlaştırılmış halinin, yani uzaklığın karesidir ve,

$$\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} = (x-\mu)\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)(x-\mu) = (x-\mu)\,(\sigma^2)^{-1}(x-\mu) \qquad (4.2)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu yaklaşım $p\times 1$ boyutlu x gözlem vektörü için genelleştirilirse,

Σ : $p\times p$ *boyutlu ve p ranklı kovaryans matrisi*

x : $p\times 1$ *boyutlu gözlem vektörü*

μ : $p\times 1$ *boyutlu ortalama vektörü*

olmak üzere,

$$(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu) \qquad (4.3)$$

şeklinde yazılabilir ve bu ifade kısaca, "***x gözlem vektörününden μ ortalama vektörüne olan genelleştirilmiş kare uzaklık***" şeklinde ifade edilebilir. İleride göreceğimiz gibi (4.3)'e ***Mahalanobis uzaklığı*** denir.

Çok değişkenli normal yoğunluk fonksiyonunu elde ederken, tek değişkenli uzaklık (4.2), çok değişkenli genelleştirilmiş uzaklık (4.3) ile yer değiştirirken, $\sqrt{2\pi\,\sigma^2} = (2\pi)^{1/2}\,(\sigma^2)^{1/2}$, $(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}$ ile yer değiştirir ve bir x gözlem vektörü için p boyutlu normal dağılım fonksiyonu;

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}|\Sigma|^{1/2}} e^{-(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)/2} \qquad (4.4)$$

ile verilir. Burada $-\infty < x_i < \infty$ ve $i = 1,..,p$ olup, p boyutlu normal yoğunluk; $N_p(\mu, \Sigma)$ ile gösterilir. Örneklemler için μ yerine $\bar{x}$, Σ yerine S yazılır. ***Özet olarak, çok değişkenli normal dağılım; ortalama vektörü ve varyans–kovaryans matrisi ile tanımlanır.***

İki Değişkenli (Bivariate) Normal Dağılım:

Çok değişkenli dağılımın en küçük boyutlusu olan 2 değişkenli dağılımın incelenmesinde yarar vardır. (4.4) eşitliğinde yapılacak değişikliklerle iki değişkenli normal yoğunluk fonksiyonu;

μ_1 : 1. *Değişkenin ortalaması*

μ_2 : 2. *Değişkenin ortalaması*

σ_{11} : 1. *Değişkenin standart sapması*

σ_{22} : 2. *Değişkenin standart sapması*

ρ_{12} : *Korelasyon katsayısı*

olmak üzere;

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\,\sigma_{11}\sigma_{22}\sqrt{(1-\rho_{12}^2)}}\times \qquad (4.5)$$

$$exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_{12}^2)}\left[\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_{11}}\right)^2+\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_{22}}\right)^2-2\rho_{12}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_{11}}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_{22}}\right)\right]\right\}$$

olarak yazılabildiği gibi,

$$f(x_1x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_{11}\sigma_{22}\sqrt{1-\rho_{12}}}e^{-\frac{q}{2}} \qquad (4.5\text{-}a)$$

şeklinde de yazılabilir. (4.5-a)'da q;

$$q=\frac{1}{1-\rho_{12}^2}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_{11}^2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_{22}^2}-2\rho_{12}\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_{11}\quad\sigma_{22}}\right] \qquad (4.5\text{-}b)$$

dir. (4.5-b)'yi m_i^2 ile gösterip örneklem için yazarsak;

$$m_i^2=\frac{1}{(1-r^2)}\left[\frac{(x_{i1}-\bar{x}_1)^2}{s_{x_1}^2}+\frac{(x_{i2}-\bar{x}_2)^2}{s_{x_2}^2}-2r\frac{x_{i1}-\bar{x}_1}{s_{x_1}}\frac{x_{i2}-\bar{x}_2}{s_{x_2}}\right] \qquad (4.6)$$

olur. Eşitlik (4.6), (4.3) eşitliği yardımıyla matris şeklinde;

$$m_i^2=\begin{bmatrix}x_{i1}-\bar{x}_1\\ x_{i2}-\bar{x}_2\end{bmatrix}'\left[S^{-1}\right]\begin{bmatrix}x_{i1}-\bar{x}_1\\ x_{i2}-\bar{x}_2\end{bmatrix} \qquad (4.7)$$

ile verilir.

Mahalanobis Uzaklığı

Merkezi $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ olan iki boyutlu uzaydaki bir elipsin geometrik yerini tanımlayan ve Eşitlik (4.3)'de p boyut için, (4.6) ve (4.7) de ise iki değişkenli normal dağılım için verilen m_i^2 değerleri, aynı zamanda merkezi $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ olan elipste, x_{i1} ve x_{i2} gözlem çiftlerinden elips merkezine olan uzaklığın karesi olup ***kare Mahalanobis uzaklığı*** olarak adlandırılır. Elips üzerindeki bir x_{i1} ve x_{i2} gözlem çiftinin $\bar{x}_1$ ve $\bar{x}_2$'dan uzaklığı aynı m_i^2 değerine sahiptir. Çünkü, m_i^2 kare Mahalanobis uzaklığı; x_1 ve x_2 değişkenlerini, ortalaması sıfır, standart sapması 1 ve korelasyon katsayısı sıfır olan z_1 ve z_2 gibi iki yeni değişkene dönüştürdükten sonra elde edilen dairenin yarıçapının karesidir. Elips merkezinden m_i^2 uzaklığında çizilecek elipslere ise ***kontur*** denir. Eğer bir gözlem elips merkezinden uzakta ise m_i^2'ler büyük değerler olacaktır.

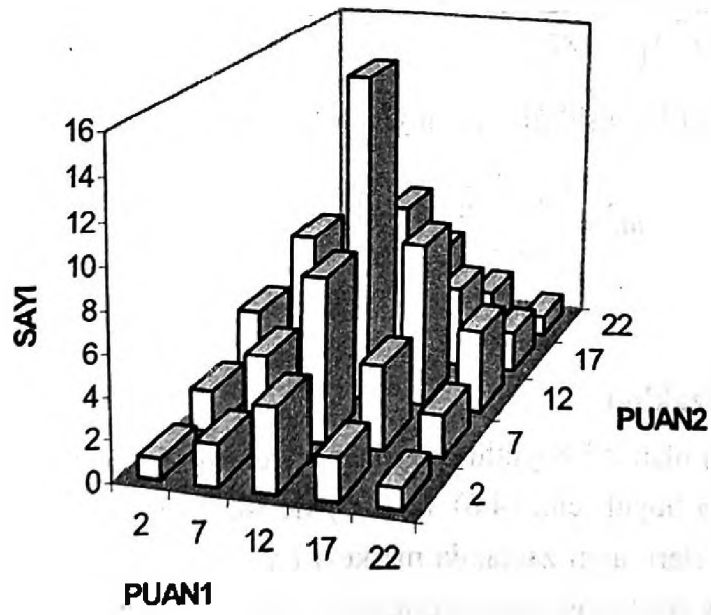
Kontur ve Elips Kavramı

Kontur ve elips kavramını biraz daha açmak amacıyla, öğrencilerin iki farklı dersten (25 üzerinden) aldıkları puanların hipotetik dağılımı Tablo 4.1'de verilmiştir. Bu iki dersten alınan puanların standart sapmaları eşit olup aralarındaki korelasyon katsayısı da sıfırdır (Ders1 ve Ders2 için standart sapma = 5.5, korelasyon katsayısı $r = 0$).

Tablo 4.1. Örnek Çapraz Tablo

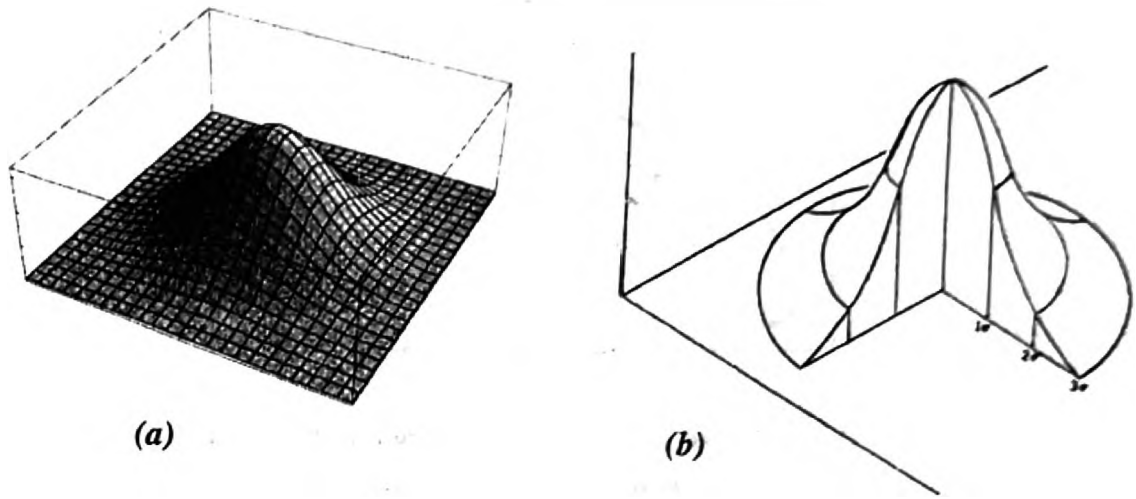
DERS 2	*DERS 1 PUANI*					
PUANI	0-4.9	5.0-9.9	10.0-14.9	15.0-19.9	20.0-24.9	*TOPLAM*
0-4.9	1	2	4	2	1	10
5.0-9.9	2	4	8	4	2	20
10.0-14.9	4	8	16	8	4	40
15.0-19.9	2	4	8	4	2	20
20.0-24.9	1	2	4	2	1	10
TOPLAM	10	20	40	20	10	100

Tablo 4.1'in çubuk grafiği Grafik 4.1'de verilmiştir. Grafikte de görüldüğü gibi frekanslar orta bölgede (Ders1 ile Ders2'ye ilişkin puan ortalamalarının kesiştiği noktada) yoğunlaşmaktadır. Bilindiği gibi tek değişkenli normal dağılışta en fazla yoğunlaşma x_i değerlerinin $\bar{x}$'ya eşit olduğu yerde oluyordu (veriler en çok bu bölgede bulunuyordu).



Grafik 4.1. Tablo 4.1'in Çubuk Grafiği

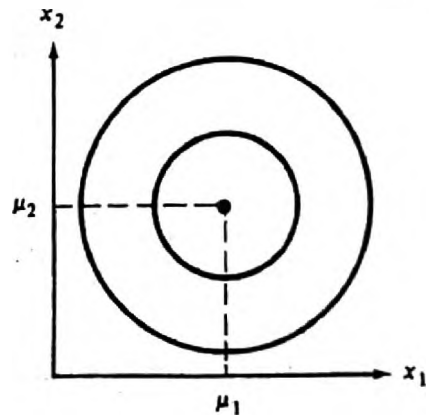
Grafik 4.1'den önce histograma, bu histogramdan da dağılış eğrisine geçersek, gözlem sayısının yeterince artırılması durumunda Grafik 4.2.a'ya ulaşırız.



Grafik 4.2. İki Değişkenli Normal Dağılıma İlişkin İki Farklı Çizim ($\sigma_{11} = \sigma_{22}$, $\rho_{12} = 0$)

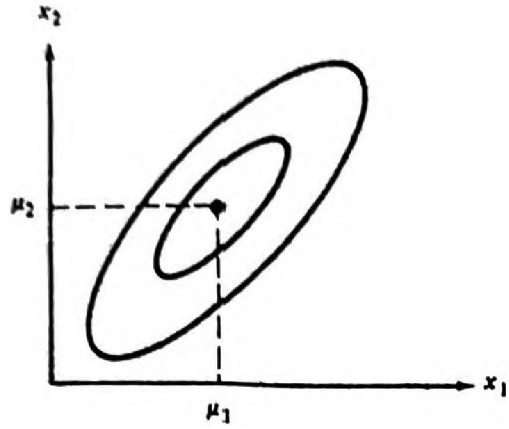
Grafik 4.2.b bir çan şeklinde olup merkezden 3 standart sapma uzaklıkta en geniş halkaya sahiptir. Bu grafikte üç tane kontur (grafiği yatay olarak kesen halkalar) çizilmiştir. Bu konturların herbiri, ders puanlarına ilişkin uzayı; konturun içinde kalan ve kalmayan şeklinde iki bölgeye ayırır.

Öte yandan Tablo 4.1'de verilen dağılımın saçılım grafiğini çizecek olursak Grafik 4.3'e benzeyen bir şekile ulaşırız.



Grafik 4.3. $\sigma_{11} = \sigma_{22}$, $\rho_{12} = 0$ ***ve Olduğunda İki Değişkenli Normal Dağılımın % 50 ve % 90 konturları***

Grafik 4.4'de ise $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ ve $\rho_{12} = 0.75$ olan iki değişkenli normal dağılıma ilişkin % 50 ve % 90 konturları vermektedir.



Grafik 4.4. $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ *ve* $\rho_{12} = 0.75$ *Olduğunda İki Değişkenli Normal Dağılımın % 50 ve % 90 Konturları*

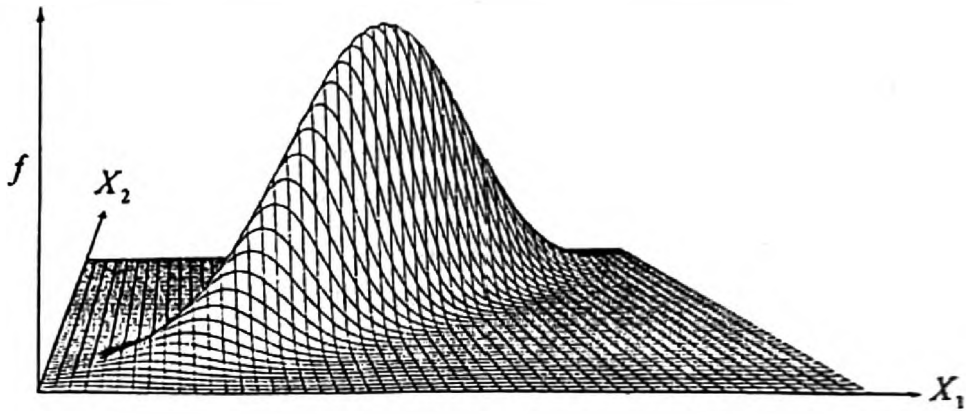
Tablo 4.2-a'da verilen değişkenlerin standart sapmaları eşit iken, korelasyon katsayısı r=0.71'dir. Tablo 4.2-b, bu verilere ilişkin çapraz tabloyu vermektedir. Böylesi bir veri ile Grafik 4.5'de verilen grafiğe benzer bir şekile ulaşırız. Bu grafikte dikkat edilecek bir nokta, Bölüm 2'de *Korelasyona İlişkin Varsayımlar* alt başlığında değindiğimiz 1. ve 2. madde ile ilgilidir. Bu gafikten kolayca ayırdedilebileceği gibi, her bir x_1 değerine karşılık gelen x_2 değerleri normal dağılırken, her bir x_2 değerine karşılık gelen x_1 değerleri de normal dağılmaktadır.

Tablo 4.2-a. Standart Sapmaları Eşit, r=0.71 Olan Örnek Veri

PUAN1	PUAN2	PUAN1	PUAN2	PUAN1	PUAN2	PUAN1	PUAN2	PUAN1	PUAN2
1.0	0.0	5.5	5.5	12.5	11.8	13.0	13.0	15.0	14.4
0.0	1.5	12.0	8.3	14.0	14.0	11.0	11.0	16.0	14.3
1.5	2.2	11.5	6.0	13.0	11.0	12.2	12.0	17.1	14.4
2.6	1.5	11.6	7.5	13.9	10.0	15.5	11.0	17.7	18.0
1.0	3.8	10.8	8.0	11.0	11.8	18.6	15.0	16.8	17.7
5.1	3.6	12.9	9.4	13.0	13.3	15.8	15.0	17.2	16.0
5.0	2.4	15.5	8.0	12.0	14.2	17.7	11.5	18.5	18.4
6.2	2.5	17.5	8.0	13.8	11.6	15.0	15.0	15.6	16.0
10.3	2.9	15.0	5.4	12.0	10.3	20.0	11.0	19.0	19.0
10.5	3.7	15.0	7.9	11.0	10.0	21.1	13.0	20.3	17.0
3.4	5.5	2.5	10.4	12.0	13.2	4.0	15.3	12.8	20.0
3.1	8.1	4.4	12.8	13.0	14.0	8.0	16.8	17.5	21.0
5.0	8.6	7.5	11.5	12.0	11.0	9.0	18.0	18.5	22.4
8.6	7.4	7.6	11.5	10.0	12.5	9.0	15.5	20.8	20.0
7.8	5.0	7.0	12.9	12.0	12.0	9.2	18.8	21.5	21.9
8.5	6.3	8.4	10.8	10.0	11.8	12.0	15.0	22.7	22.8
5.1	6.0	10.3	10.0	13.5	13.2	14.0	15.5	23.5	24.0
8.8	5.5	14.4	11.1	13.0	13.8	11.0	16.7	22.7	21.0
7.1	8.0	10.0	14.0	11.0	14.0	12.8	18.5	23.4	22.6
6.0	8.0	10.6	12.6	12.6	12.0	12.5	16.8	23.7	23.0

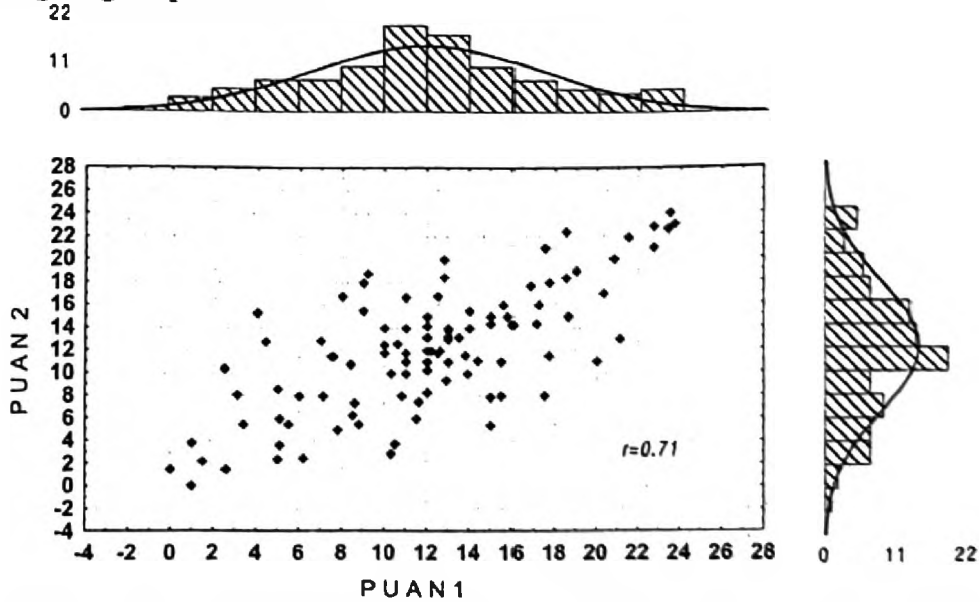
Tablo 4.2-b. Tablo 4.2-a'daki Verilere İlişkin Çapraz Tablo

DERS2	*DERS1 P U A N I*					
PUANI	0–4.9	5.0–9.9	10.0–14.9	15.0–19.9	20.0–24.9	*TOPLAM*
0–4.9	**5**	3	2			**10**
5.0–9.9	2	**9**	5	4		**20**
10.0–14.9	2	4	**27**	5	2	**40**
15.0–19.9	1	4	5	**9**	1	**20**
20.0–24.9			1	2	**7**	**10**
TOPLAM	**10**	**20**	**40**	**20**	**10**	100

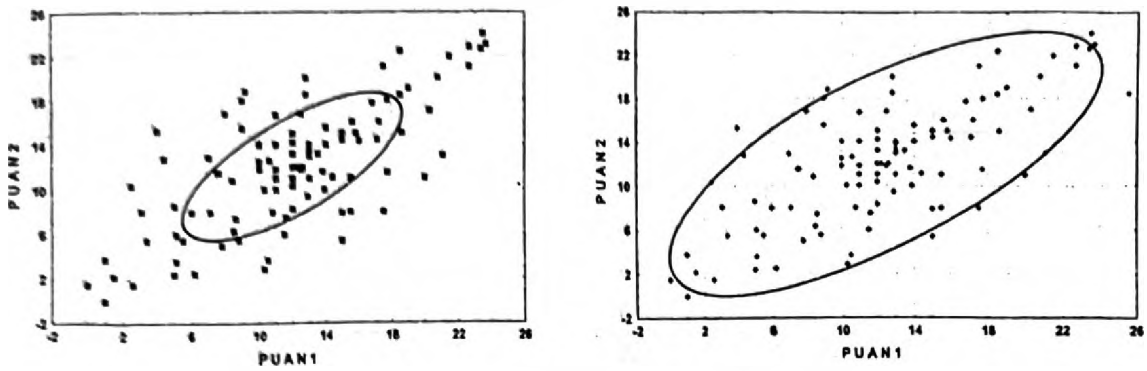


Grafik 4.5. İki Değişkenli Normal Dağılım ($\rho = 0.90$)

Tablo 4.2-a'daki ***her iki değişkenin de normal dağılım gösterdiği*** verilere ilişkin saçılım–histogram grafiği Grafik 4.6.a'da, saçılım–0.50 ve saçılım–0.90'lık konturları ise Grafik 4.6.b'de verilmiştir (Grafikler *STATISTIKA*'da çizilmiştir). Grafik 4.6.*a*'da görüldüğü gibi, değişkenlerin tek değişkenli dağılımları normal ve değişken arasındaki ilişki doğrusaldır. Noktalar elips şeklinde dağılım göstermektedir. Bu durum, iki değişkenli normal dağılımın özelliğidir. Diğer bir deyişle, iki değişkenli normal dağılımın grafiği elipse benzer.



Grafik 4.6 a. Tablo 4.2-a'daki PUAN1 ve PUAN2'ye İlişkin Saçılım Grafiği



Grafik 4.6. b. Tablo 4.2-a'daki PUAN1 ve PUAN2'ye İlişkin Saçılım Grafikleri ile % 50 ve % 90'lık Konturları

p Boyutlu Elipsoid

p boyutlu normal dağılım fonksiyonu (4.4) ile verilmiş ve bu fonksiyondaki $(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)$ büyüklüğüne kare Mahalanobis uzaklığı denmişti. $p\times 1$ boyutlu x gözlem vektörünün $p\times 1$ boyutlu $\bar{x}$ vektöründen uzaklığı m ile verilirken, her bir m_i^2, p boyutlu uzayda bir elipsoidi tanımlar ve örneklem için;

$$m_i^2 = (x_i - \bar{x})' S^{-1} (x_i - \bar{x}) \qquad (4.8)$$

ile hesaplanır. m_i^2 değerleri her bir gözlemin ***verinin merkezine olan uzaklığını belirtmek için*** kullanılabilir. m_i^2 değeri büyüdükçe, gözlemin *çok değişkenli verinin merkezine olan uzaklığı* artar.

Gerek iki gerekse ikiden çok değişken için m_i^2'ler, "***normal dağılıma uygunluk testleri***" başlığı altında hesaplanacak ve yorumlanacaktır.

İkiden Çok Değişkenli Normal Dağılım Fonksiyonu

Aşağıda, n=4 ve p=3 için (3.4) ile verilen normal dağılım fonksiyonunun nasıl bulunduğuna ilişkin bir örnek verilmiştir (Örnek 4.1).

Örnek 4.1. 4 gözlemli bir veri matrisi ve tanımlayıcı istatistikler aşağıda verilmiştir.

$$X = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ ise } \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 2.75 \\ 4.0 \\ 4.25 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 2.917 & & sim \\ -3.00 & 4.667 & \\ 0.750 & -0.333 & 2.917 \end{bmatrix}$$

$$|S| = 12.0078 \qquad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1.124 & 0.708 & -0.208 \\ 0.708 & 0.662 & -0.106 \\ -0.208 & -0.106 & 0.384 \end{bmatrix}$$

Bu bilgiler yardımıyla yoğunluk fonsiyonu;

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\,(12.0078)^{1/2}} \times$$

$$e^{-\left\{ \begin{bmatrix} x_1-2.75 \\ x_2-4.0 \\ x_3-4.25 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 1.124 & 0.708 & -0.208 \\ 0.708 & 0.662 & -0.106 \\ -0.208 & -0.106 & 0.384 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1-2.75 \\ x_2-4.0 \\ x_3-4.25 \end{bmatrix} \right\} / 2}$$

olarak yazılır. Buradaki *e* yerine, *exp* sözcüğü de kullanılabilir.

4.2. NORMAL DAĞILIMA UYGUNLUĞUN ARAŞTIRILMASI

Daha önce de belirtildiği gibi, tek değişkenli ve iki değişkenli normal dağılımlar istatistiksel çıkarsamada önemli rol oynar. *X* veri matrisi çok değişkenli normal dağılıma sahipse, *X* veri matrisindeki herhangi x_j değişkeni tek değişkenli normal dağılım gösterirken, değişken çiftlerinin oluşturduğu birleşik dağılımlar ise iki değişkenli normal dağılım gösterir. Daha genel bir ifade ile, bir *p* boyutlu çok değişkenli normal dağılımdaki *q* değişkenli alt kümeler ($q<p$), *q* boyutlu çok değişkenli normal dağılım gösterirler. Ayrıca, çok değişkenli normal dağılımdan çekilen değişkenlerin bir doğrusal kombinasyonu da tek değişkenli normal dağılım gösterir.

Yukarıda belirtildiği gibi çok değişkenli normal dağılımın bir özelliği; değişkenlerin tüm alt kümeleri için çok değişkenli normalliği sağlamasıdır. Ancak, bunun tersi doğru olmayabilir. Yani, tüm değişkenlerin tek tek normal dağılım göstermesi ya da tüm olası çiftlerin iki değişkenli normal dağılım göstermesi çok değişkenli normalliği garanti etmemektedir.

Bu bölümde bir bütünlük olması açısından önce tek değişkenli normalliğin araştırılması üzerinde durulacak, daha sonra çok değişkenli normallik testleri ele alınacaktır.

Tek Değişken için Normal Dağılıma Uygunluğun Araştırılması

Tek değişken için normalliğin araştırılmasında çeşitli yöntemlerden yararlanılabilir. Bu yöntemlerin bir bölümü grafik, bir bölümü de test yöntemleridir. Her kullanıcının kolaylıkla ve göz kararıyla normalliği sınayabileceği grafik yöntemler (*Q-Q, PP ve Detrended*), istatistik yazılımların çoğunda yeralmaktadır. Burada önce aralık yöntemi yaklaşımı ve *Q-Q* grafik yöntemi üzerinde durulacaktır. Daha sonra diğer grafik yöntemleri olan Detrended, *Q-Q* ve kutu çizgi grafiklerinin "dağılımın şekline göre" nasıl değişiklik gösterdiği bir grafik üzerinde ele alınacaktır. Ayrıca, Shapiro-Wilks ve Kolmogorov-Smirnov (*K-S*) test yöntemlerine sözel olarak değinilecektir.

1. Aralık Yöntemi

Bir değişkenin normal dağılım gösterip göstermediğini test etmek için birçok yöntem geliştirilmiştir. Denek sayısının az ve çan eğrisi şeklinde simetrik (ya da simetriğe yakın) bir histograma sahip dağılımlar için kolay bir yöntem aralık yöntemidir. Bu yönteme göre aşağıdaki üç koşulun sağlanması gerekir. Eğer bir dağılımda;

1. $\bar{x} \pm 1 \times (s.sapma)$ sınırları arasında gözlemlerin % 68.26'sı
2. $\bar{x} \pm 2 \times (s.sapma)$ sınırları arasında gözlemlerin % 95.44'ü
3. $\bar{x} \pm 3 \times (s.sapma)$ sınırları arasında gözlemlerin % 99.74'ü

bulunuyorsa dağılımın normal dağılıma uyduğu söylenir. Şimdi, Örnek 4.2'yi inceleyelim.

Örnek 4.2. 25 kişiye ilişkin yaş dağılımı Tablo 4.3'de verilmiştir. Acaba bu dağılım normal dağılmakta mıdır?

Tablo 4.3. Yaş Dağılımı Verisi

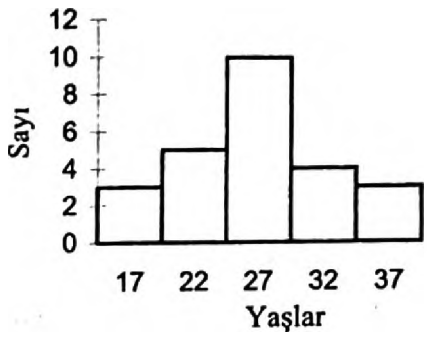
28	26	25	15	18	19	23	26	23	27	26	27	30
23	24	24	27	31	33	32	26	35	36	38	27	

Bu dağılımda $\bar{x} = 26.76$, $s.sapma = 5.456$ ve $n = 25$ dir. Yukarıdaki yaklaşımla;

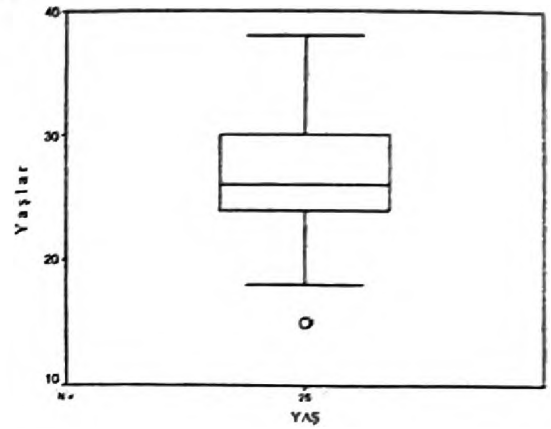
1. $\bar{x} \pm 1(s.sapma)$: $26.76 \pm 1(5.456)$: 21.3 - 32.2
2. $\bar{x} \pm 2(s.sapma)$: $26.76 \pm 2(5.456)$: 15.8 - 37.6
3. $\bar{x} \pm 3(s.sapma)$: $26.76 \pm 3(5.456)$: 10.4 - 43.1

olarak bulunur. Buna göre, 21.3 - 32.2 sınırları (yaşları) arasındaki gözlem sayısı 18 dir ve bunun toplam gözlem sayısı içindeki payı % 72.0'dır (18/25). Buradan 1. koşulun yaklaşık sağlandığını söyleyebiliriz. Çünkü % 72, % 68.26'ya oldukça yakın bir yüzdedir. 2. koşul için bu değer % 92.0 (23/25) olarak bulunur. Bu da % 95.44'e yakın bir değerdir. 3. koşul da % 100 ile sağlandığı için, sonuçta bu dağılımın yaklaşık olarak normal dağıldığını söyleyebiliriz. Bu dağılıma ilişkin histogram, Grafik 4.7.*a*'da verilmiştir. Sürekli sayısal verilerde, dağılımın yapısı hakkında bilgi veren grafiklerden en çok kullanılanı histogramdır. İstatistiksel yazılımlarda, histogram ile birlikte normal eğri de grafik üzerinde gösterilebilmektedir. Dağılımın yapısı hakkında bilgi elde edebilmek için dal ve yaprak (stem and leaf) grafiklerinden de yararlanılır. Dal ve yaprak grafiğinde, dağılımın şekli yanında dağılımdaki tüm gözlem değerleri de görülür (Grafik 4.7.*c*). Dağılımın yapısı hakkında bilgi veren bir diğer grafik çeşiti ise kutu–çizgi (box and whisker) grafiğidir (Grafik 4.7.*b*). Kutu–çizgi grafikleri, dağılımdaki aşırı gözlemlerin belirlenmesinde de sıklıkla kullanılır. Ek bilgi için "*Aşırı Gözlemler*" altbaşlığını okuyunuz.

a)



b)



c)

Dallar	Yapraklar
1	5 8 9
2	3 3 3 4 4
2	5 6 6 6 6 7 7 7 7 8
3	0 1 2 3
3	5 6 8

Grafik 4.7. Tablo 4.3'e İlişkin Tek Değişkenli Grafikler

2. Q-Q Grafik Yöntemi

Bir dağılım normal dağılıyorsa, bu dağılımın yığılımlı frekans dağılımı ⌒ şekline benzer. Ancak, yığılımlı frekans dağılımına bakarak normalliği yargılamak zordur. Bu nedenle dikey eksen uzatılarak kümülatif dağılım fonksiyonu bir doğru durumuna getirilir ve normallikten ayrılışlar bu doğrudan ayrılışlarla kolayca görülebilir. Diğer bir deyişle, bu amaçla çizilen grafikte noktalar, bir doğru etrafında kümelenmemişler ya da belirli şekiller göstermişler ise normallik varsayımının yerine gelmediği sonucuna varılır. Örneğin, incelenen dağılım pozitif çarpık bir dağılım ise *Q-Q* saçılım grafiği ⌒ şeklinde olurken, negatif çarpık bir dağılımda bu grafik ⌒ şeklindedir. Ayrıca, veride aşırı gözlemlerin olması durumunda ise grafiğin şekli ⌒ ya da ⌒ şeklinde oluşur. Eğer dağılım normal dağılım gösteriyor ise tüm noktalar 45 derecelik doğru üzerinde yer alacaktır.

Eğer normallikten ayrılışlar söz konusu ise gerektiğinde dönüşüm yapılarak dağılımın normal dağılım göstermesi sağlanabilir. Bir dağılımın normal dağılıp dağılmadığını görsel olarak veren bu tür grafik yöntemler, istastistiksel paket programlarının çoğunda yer almaktadır. *Q-Q* grafik yönteminin iyi sonuç vermesi için $n \geq 20$ olmasında yarar vardır. *Q-Q* grafik yöntemi aşağıdaki aşamalarla yapılır;

1. Gözlemler küçükten büyüğe doğru sıraya dizilir.
2. Her bir gözleme ilişkin p_i olasılıkları elde edilir. p_i;

$$p_i = \frac{(i-1/2)}{n} \qquad (4.9)$$

ile verilir. Burada *i/n*; *i.* gözlem noktasından daha küçük gözlem sayısı yüzdesini vermektedir. Ancak, 1/2 ile düzeltme işlemi yapıldığı için (4.9) eşitliği elde edilir. Bazı kaynaklarda p_i değerleri (4.9) yerine;

$$p_i = \frac{i-1/3}{n+1/3} \quad \text{ya da} \quad p_i = \frac{i-3/8}{n+1/4} \qquad (4.10)$$

ile verilmekte ve bazı istatistiksel yazılımlardaki grafikler bu eşitliklere göre çizilmektedir. Bu üç eşitlik değişik adlarla anılır. Buna göre, (4.9)'a Rankit, (4.10)'daki eşitliklere de sırasıyla Tukey ve Bloom eşitlikleri denir.

3. $-\infty$ 'dan p_i değerine (olasılığına) karşılık gelen standart normal z değerleri z tablosundan bulunur. Eğer dağılımda benzer gözlemler varsa, o gözlemlere ilişkin z_i değerlerinin ortalaması alınarak ağırlıklı z_i sütunu oluşturulur ve çizim bu yeni z_i sütununa (ağırlıklı z_i sütunu) göre yapılır.

4. Gözlem değerleri (x_i), *y* ekseninde; z_i değerleri de *x* ekseninde (ya da tersi) olmak üzere saçılım grafiği çizilir ve saçılımın bir doğru üzerinde olup olmadığına bakılır.

Q-Q grafik yöntemi Tablo 4.3'de verilen dağılımı dikkate alarak aşağıda açıklanmıştır (Örnek 4.3);

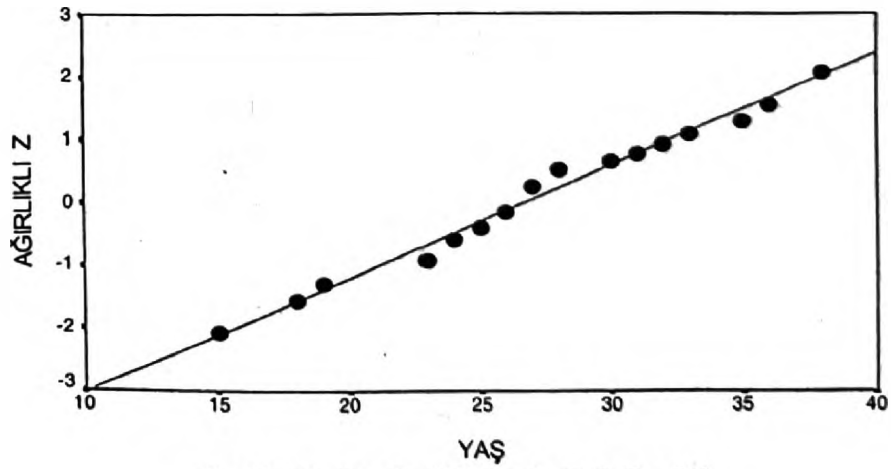
Örnek 4.3. Tablo 4.3'deki veriye *Q-Q* grafik yöntemini uygulamak için Tablo 4.4'deki gibi bir tablo hazırlamak yararlı olacaktır. Tablo 4.4'de görüldüğü gibi, gözlemler küçükten büyüğe doğru sıraya dizilir. Daha sanra p_i yüzdeleri (olasılıkları) bulunur. Örneğin, 1. gözlem için p_i; $p_1 = (1-0.5)/25 = 0.02$ olur. Bu olasılık (yüzde) değeri 0.5'den çıkartılarak elde edilen olasılık ya da bu olasılığa en yakın olasılık z tablosundan bulunur. Örneğin, 0.5-0.02=0.4800 z tablosunda olmadığı için bu olasılığa en yakın olasılık olan 0.4803 dikkate alınarak bu olasılığa ilişkin z değeri 2.06 olarak bulunur. $p_i=(i-1/2)/n$ sütununda, 0.50'den başlamak üzere, ilgili p_i değerinden 0.5 çıkartıldıktan sonra elde edilen olasılığa karşılık gelen z değeri yazılır. Örneğin, 0.74 için 0.74-0.5=0.24 elde edilerek 0.2400 ya da 0.2400'a en yakın olasılık için z değeri 0.64 olarak bulunur. Örneğimizde benzer gözlemler olduğu için, bir de ağırlıklı z_i sütunu oluşturulmuştur. Örneğin, incelenen dağılımda dört tane 26 olduğu için, bu gözlemlere ilişkin ağırlıklı z_i; ilgili z_i değerlerinin ortalaması ile bulunur ve ((–0.31)+(–0.20)+(–0.10)+(0))/4=–0.15 olur. Daha sonra *Q-Q* grafiği çizilir. Ham verilere ilişkin histogram, dal–yaprak ve kutu–çizgi grafikleri Grafik 4.7'de verilmişti. Bu dağılımın *Q-Q* grafiği ise Grafik 4.8'de verilmiştir. Grafik 4.8'de görüldüğü gibi, 45 derecelik doğru şeklinde sunulan normal dağılımdan bir sapma söz konusu değildir. Bu nedenle, dağılımın normal dağıldığını söyleyebiliriz.

Q-Q grafik yönteminde x_i ve z_i değerleri arasındaki ilişki miktarı Eşitlik (2.7) ya da (7.32) ile verilen korelasyon katsayısı yardımıyla bulunabilir. Bulunan *Q-Q* korelasyon

katsayısı (r_q), Ek Tablo B'de verilen kritik değerlerle karşılaştırılarak, dağılımın normal dağılıp dağılmadığı konusunda bir test sonucu da böylece elde edilir. Örneğimiz için r_q=0.988 olarak bulunmuştur. Tablo B'de (normallik için *Q-Q grafiği korelasyon katsayısı* testine ilişkin kritik değerler tablosunda) n=25 ve α=0.10 alırsak, r_q=0.988 > 0.9665 olduğu için dağılımın normal dağıldığını söyleriz. Gerek bu yöntemde gerekse de bu amaçla geliştirilmiş diğer bazı yöntemlerde H_0 hipotezi; korelasyon katsayısının sıfıra değil 1'e eşit olduğu şeklindedir.

Tablo 4.4. Q-Q Grafiği İşlemleri

Gözlem No	*Sıralı Gözlem (x_i)*	$p_i = \frac{i - 1/2}{n}$	*Stand. Normal Sapma (z_i)*	*Ağırlıklı (z_i)*
1	15	0.02	-2.06	-2.06
2	18	0.06	-1.56	-1.56
3	19	0.10	-1.28	-1.28
4	23	0.14	-1.08	-0.92
5	23	0.18	-0.92	-0.92
6	23	0.22	-0.77	-0.92
7	24	0.26	-0.64	-0.58
8	24	0.30	-0.52	-0.58
9	25	0.34	-0.41	-0.41
10	26	0.38	-0.31	-0.15
11	26	0.42	-0.20	-0.15
12	26	0.46	-0.10	-0.15
13	26	0.50	0.00	-0.15
14	27	0.54	0.10	0.25
15	27	0.58	0.20	0.25
16	27	0.62	0.31	0.25
17	27	0.66	0.41	0.25
18	28	0.70	0.52	0.52
19	30	0.74	0.64	0.64
20	31	0.78	0.77	0.77
21	32	0.82	0.92	0.92
22	33	0.86	1.08	1.08
23	35	0.90	1.28	1.28
24	36	0.94	1.56	1.56
25	38	0.98	2.06	2.06



Grafik 4.8. Yaş Değişkeninin Q-Q Grafiği

İstatistiksel yazılımlar yardımıyla, çok değişkenli verideki her değişken için bu yaklaşımdan yararlanılabilir. Ancak, ileride göreceğimiz gibi, değişkenlerin tek tek normal dağılım göstermesi çok değişkenli normalliği garanti etmemektedir.

Dağılımın Şekli İle Q-Q, P-P, Detrended ve Kutu-çizgi Grafikleri Arasındaki İlişki

Sayısal verilerde dağılımın yapısını görmek amacıyla histogramlara başvurulduğunda, grafiğin çan eğrisine benzemesi normalliği garanti etmemektedir. Bu nedenle, özellikle bilgisayar ortamında çalışırken *Q-Q*, *P–P* ve *detrended* grafiklerinden yararlanılır. Ayrıca *kutu–çizgi* grafikleri de bu konuda oldukça bilgi vericidir. Dağılımın şekline göre bu grafiklerin gösterdiği değişim Grafik 4.9'da verilmiştir. Araştırıcı, bu grafikten yararlanarak normallik konusunda görsel bir yargıya varabilir.

3. Normallik Testleri

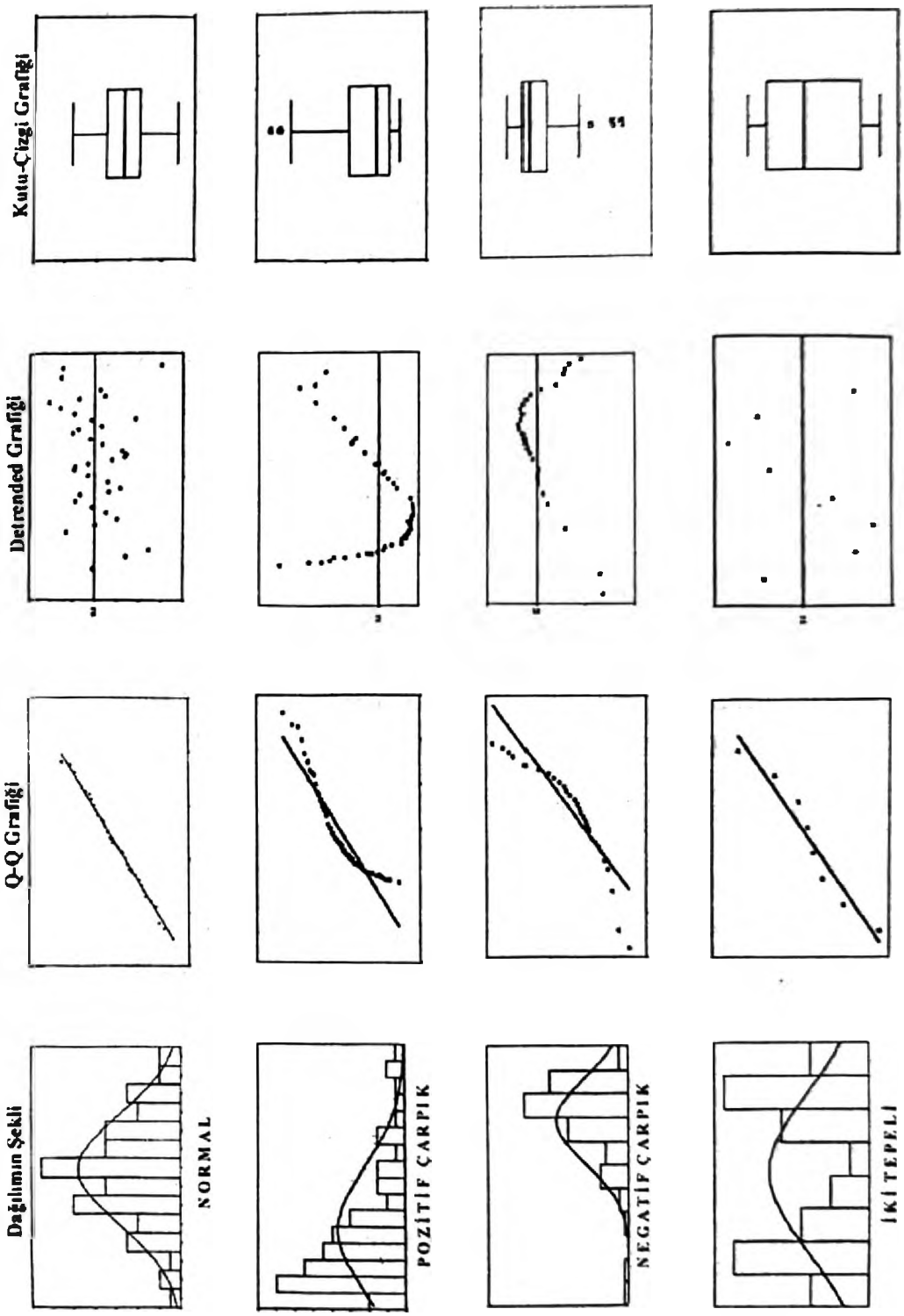
Dağılımların normal dağılıp dağılmadığını test etmek amacıyla kullanılan iki yaygın test yöntemi; ***Shapiro-Wilks*** yöntemi ve ***Kolmogorov-Smirnov (K-S)*** yöntemidir. Çoğu istatistiksel yazılım bu yöntemlere ilişkin sonuçları *P* değerleri (önemlilik düzeyleri) ile birlikte vermektedir. Shapiro-Wilks yöntemi genellikle gözlem sayısının 50'nin altında olduğu durumlarda kullanılır. Bu testlerde sıfır hipotezi **"H_0: Dağılım normal dağılım gösterir"** şeklinde kurulur. Test sonucunda elde edilen önemlilik düzeyi (*P*), araştırıcı tarafından belirlenen α yanılma düzeyinden (α değeri genellikle 0.05 olarak belirlenir) küçükse, dağılımın normal dağılım göstermediği söylenir (diğer bir deyişle, "dağılım normal dağılım gösterir" şeklinde kurulan H_0 hipotezi reddedilir). Tablo 4.3'deki veri için Shapiro-Wilks test istatistiği 0.9698 ve bu istatistiğe ilişkin *P* değeri 0.6370 olarak bulunur. Bulunan *P* değeri α=0.05'den büyük olduğu için dağılımın normal dağıldığı söylenir (*P>0.05*). Aynı veri için *K-S* istatistiği ise *K-S*=0.1625 ve *P* değeri *P*=0.0875 olarak bulunur. Bulunan *P* değeri α=0.05'den büyük olduğu için dağılımın normal dağıldığı söylenir (*P>0.05*). Bulunan *P* değerinin 0.05'den küçük çıkması durumunda, dağılımın normal dağılım göstermediği söylenir.

İki ve Daha Fazla Değişken için Normallik Testleri

Daha önce de belirtildiği gibi, eğer veri setimiz çok değişkenli normal dağılımdan çekilmiş ise verideki her bir değişkenin tek değişkenli normal dağılım, ikişerli dağılımlarının ise iki değişkenli normal dağılım göstermesi beklenir. Bu durumda ikişerli dağılımların saçılım grafikleri elipse benzer.

Çok değişkenli normalliği incelemede kullanılan değişik ve karmaşık yöntemler vardır. Burada, sık kullanılan iki yöntem üzerinde durulacaktır.

İki ve ikiden çok değişkenli dağılımlarda, sıralanmış uzaklıklar olan m_i^2 $(i=1,2,....,n)$ ile $\chi^2_{p;(i-0.5)/n}$ değerlerine ilişkin saçılım grafiğinin düz bir çizgi oluşturması durumunda değişkenlerin çok değişkenli normal dağıldığı söylenir. Diğer bir deyişle, $m_1^2 \le m_2^2 \le m_3^2 \le ..... \le m_n^2$ değerlerine karşı $\chi^2_{p;(1-0.5)/n}$, $\chi^2_{p;(2-0.5)/n}$, $\chi^2_{p;(3-0.5)/n}$, ..., $\chi^2_{p;(n-0.5)/n}$ değerleri saçılım grafiğinin yaklaşık bir doğru üzerinde olması beklenir. $\chi^2_{p;(i-0.5)/n}$ değerleri bir istatistik yazılım ya da Excel yardımıyla kolayca elde edilebilir.



Grafik 4.9. Dağılımın Şekline Göre Q-Q, Detrended ve Kutu-Çizgi Grafiklerinin Gösterdiği Şekiller

Çok değişkenli dağılımın normal dağılım gösterip göstermediğini anlamanın bir diğer yolu yine χ^2 dağılımından yararlanmaktır. Ancak bu yönteme grafik yönteminden daha az başvurulur. Bu yönteme göre, m_i^2 değerlerinin yarısından fazlası $\chi^2_{p;(0.5)}$ değerinden büyükse yani % 50'lik konturun dışında kalıyorsa dağılımın normal dağılmadığı ya da m_i^2 değerlerinin yarısından fazlası $\chi^2_{p;(0.5)}$ değerine eşit ya da ondan küçükse yani % 50'lik konturun üzerine ya da içine düşüyorsa dağılımın normal dağıldığı söylenir.

x_1 ve x_2 gibi iki değişken olması durumunda m_i^2; (x_{i1}, x_{i2}) gözlemleri ile $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ arasındaki Mahalanobis uzaklığının karesini vermekte idi ve (4.6) ya da (4.7) ile bulunabiliyordu. Uygulama amacıyla, iki değişkenli bir dağılımın iki değişkenli normal dağılım gösterip göstermediği Örnek 4.4'de incelenmiştir. İkiden çok değişkenli veri kümelerinin çok değişkenli normal dağılım gösterip göstermediği ise Örnek 4.5 ve Örnek 4.6'dadır.

Örnek 4.4. Tablo 2.2'deki x_1 ve x_3 değişkenlerinin iki değişkenli normal dağılım gösterip göstermediğini belirlemek için bu değişkenlere ilişkin ortalama vektörü, korelasyon katsayısı, S ve S^{-1} matrisleri aşağıda verilmiştir.

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 11.400 \\ 30.267 \end{bmatrix} \qquad r = -0.3361$$

$$S = \begin{bmatrix} 1.829 & -3.293 \\ -3.293 & 52.495 \end{bmatrix} \qquad S^{-1} = \begin{bmatrix} 0.616360 & 0.038664 \\ 0.038664 & 0.021475 \end{bmatrix}$$

Eşitlik (4.6) yardımı ile Tablo 2.2'deki ***1. gözlem*** çifti olan $x_{11} = 13$ ve $x_{12} = 20$ için m_1^2;

$$m_1^2 = \frac{1}{(1-0.3361^2)}\left[\frac{(13-11.4)^2}{1.829} + \frac{(20-30.267)^2}{52.495} - 2(-0.3361)\frac{(13-11.4)}{1.352}\frac{(20-30.267)}{7.245}\right] = 2.571$$

olarak bulunur. Aynı sonuca (4.7) yardımı ile de ulaşabiliriz. Bu amaçla, $p \times 1$ boyutlu x gözlem vektörü;

$x_1 = \begin{bmatrix} 13 \\ 20 \end{bmatrix}$ olarak yazılır ve m_1^2;

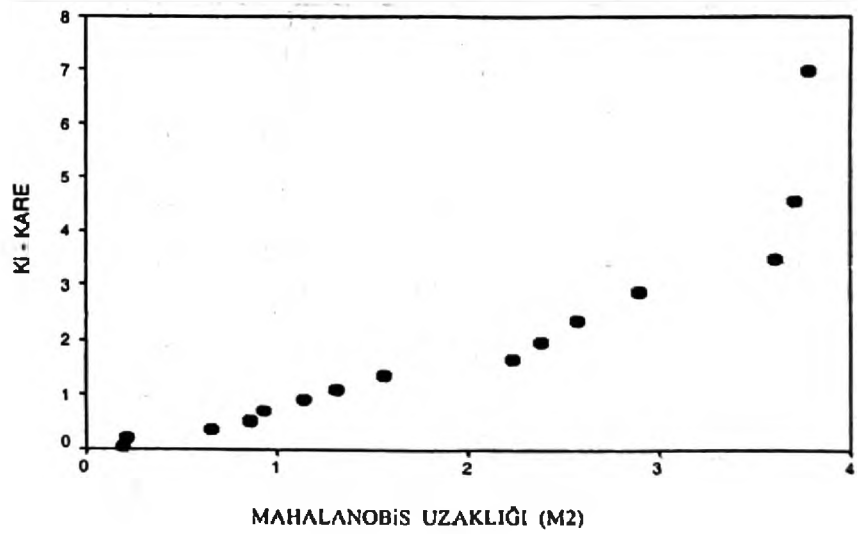
$$m_1^2 = \begin{bmatrix} 13-11.4 & 20-30.267 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.616360 & 0.038664 \\ 0.038664 & 0.021475 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13-11.4 \\ 20-30.267 \end{bmatrix} = 2.571$$

olarak bulunur. Görüldüğü gibi her iki eşitlik ile bulunan kare Mahalanobis uzaklığı aynıdır. Diğer uzaklıklar da hesaplandıktan sonra m_i^2'ler küçükten büyüğe doğru sıraya dizilir ve herbir gözlem için p_i hesaplanır. Daha sonra p serbestlik dereceli $\chi^2_{p;(i-0.5)/n}$

ki-kare yüzdelikleri bulunur. Örneğimiz için bulunanlar Tablo 4.5'de verilmiştir. Tablo 4.5'de görüldüğü gibi elips merkezine en yakın gözlem $m^2 = 0.187$ ile 15. gözlem iken en uzak gözlem $m^2 = 3.778$ ile 14. gözlemdir. Daha sonra Tablo 4.5'deki sıralı m_i^2 değerleri x, χ_i^2 değerleri de y eksenine gelecek şekilde (ki-kare) saçılım grafiğini çizerek Grafik 4.10 elde edilir. Grafik 4.10'da görüldüğü gibi noktalar bir doğru üzerinde değildir. Dolayısıyla x_1 ve x_3 değişkenlerinin iki değişkenli normal dağılım göstermediğine karar verilir. Ancak, örneğimizdeki gözlem sayısı oldukça azdır. Gözlem sayısı arttırılarak işlemlerin yeniden yapılması durumunda sonuçlar farklı olabilecektir.

Tablo 4.5. Tablo 2.2'de x_1 ve x_3'e İlişkin m_i^2, p_i ve χ_i^2 Bulguları

Göz. No	m_i^2	Sıralı m_i^2	p_i	χ_i^2
1	2.571	0.187	0.03	0.061
2	3.703	0.211	0.10	0.210
3	3.608	0.651	0.17	0.372
4	1.306	0.857	0.23	0.523
5	1.139	0.922	0.30	0.713
6	0.922	1.139	0.37	0.924
7	2.229	1.306	0.43	1.124
8	2.374	1.564	0.50	1.386
9	2.894	2.229	0.57	1.688
10	0.211	2.374	0.63	1.988
11	0.651	2.571	0.70	2.408
12	1.564	2.894	0.77	2.940
13	0.857	3.608	0.83	3.544
14	3.778	3.703	0.90	4.605
15	0.187	3.778	0.97	7.013



Grafik 4.10. Tablo 4.5'de Verilen m_i^2 ve χ_i^2 Değerlerine İlişkin Saçılım Grafiği

Normallik için ikinci yöntemden yararlanırsak, örneğimizdeki 15 gözlemden 8'inin (% 53.33) m_i^2 değeri Ek Tablo D'den elde edilen $\chi^2_{2;(0.5)}$=1.386 değerinden büyüktür ve % 50'lik konturun dışına düşer. Dolayısıyla, bu yolla da dağılımın iki değişkenli normal

dağılım göstermediği söylenebilir. Sonucun böyle çıkmasının nedeni gözlem sayısının az olması olabilir. Gözlem sayısının yeterli olduğu durumlarda, değişkenler üzerinde dönüşüm yapılarak normalliğin sağlanabilmesi olanaklıdır.

Örnek 4.5. Tablo 2.2'de verilen p=4 ve n=15 gözlemli X veri matrisinin çok değişkenli normal dağılım gösterip göstermediği aşağıda incelenmiştir. Bu veriye ilişkin varyans-kovaryans matrisi daha önce bulunmuştu. Varyans-kovaryans matrisinin tersi ise;

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 2.264 & 1.434 & 0.055 & 0.008 \\ 1.434 & 1.309 & 0.003 & -0.017 \\ 0.055 & 0.003 & 0.024 & 0.005 \\ 0.008 & -0.017 & 0.005 & 0.010 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan örneğin 1. gözlem için Mahalanobis uzaklığı (4.8)'den;

$$m_1^2 = \begin{bmatrix} 1.600 & -2.267 & -10.267 & -17.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.600 \\ -2.267 \\ -10.267 \\ -17.000 \end{bmatrix} = 5.647$$

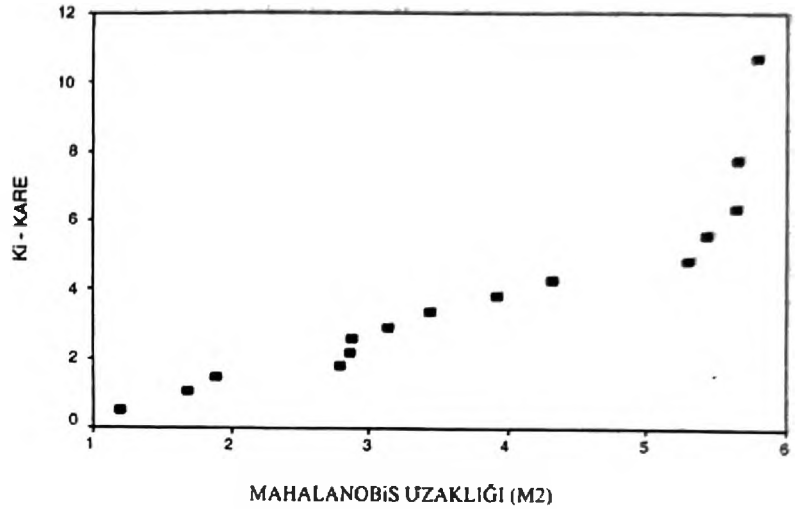
olarak bulunur. Bulunan m_i^2 değerleri küçükten büyüğe doğru sıraya dizilir ve her bir gözlem için p_i değerleri bulunduktan sonra ki-kare tablosundan ya da istatistiksel programlardan yararlanarak $\chi^2_{[p,\ (i-1/2)/n]}$ değerleri (yüzdelikleri) bulunur. Örneğimiz için bulunanlar Tablo 4.6'da verilmiştir.

Tablo 4.6. Tablo 2.2'ye İlişkin m_i^2, p_i ve χ_i^2 Bulguları

Göz. No	m_i^2	Sıralı m_i^2	p_i	χ_i^2
1	5.647	1.199	0.03	0.53
2	4.329	1.679	0.10	1.06
3	5.312	1.894	0.17	1.48
4	1.894	2.792	0.23	1.81
5	1.679	2.859	0.30	2.19
6	1.199	2.877	0.37	2.58
7	3.933	3.147	0.43	2.93
8	2.792	3.435	0.50	3.35
9	5.442	3.933	0.57	3.82
10	5.657	4.329	0.63	4.27
11	2.877	5.312	0.70	4.88
12	3.435	5.442	0.77	5.61
13	2.859	5.647	0.83	6.42
14	5.797	5.657	0.90	7.78
15	3.147	5.797	0.97	10.71

Tablo 4.6'daki sıralı m_i^2 değerleri x, χ_i^2 değerleri de y eksenine gelecek şekilde saçılım grafiği çizersek Grafik 4.11'i elde ederiz. Grafik 4.11'de görüldüğü gibi, noktalar bir doğru üzerinde değildir. Dolayısıyla Tablo 2.2 ile verilen 4 değişkenli ve 15 gözlemli X veri kümesinin çok değişkenli normal dağılmadığını söyleyebiliriz. Ayrıca, Ek Tablo D'deki ki-kare tablosundan $\chi^2_{4,0.50} = 3.36$ bulunur ve m_i^2'lerin % 50'sinden fazlasının ((8/15)×100=% 53.33'ünün) bu değerden büyük olduğu görülür. Bu yaklaşım da 4

değişkenli X veri kümesinin çok değişkenli normal dağılım göstermediğinin bir göstergesidir.



Grafik 4.11. Tablo 4.6'daki m_i^2 ve χ_i^2 İlişkisi

Çok değişkenli normalliğin incelenmesine ilişkin son uygulama Örnek 4.6'da verilmiştir.

Örnek 4.6. Tablo 4.7'de verilen p=10 ve n=25'lik veri matrisinin çok değişkenli normal dağılım gösterip göstermediğini araştırınız.

Tablo 4.7. Örnek 4.6 İçin Veri

no	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
1	2.13	2.75	1.19	3.00	0.28	-0.44	1.55	-1.57	0.65	5.62
2	1.99	3.00	3.55	6.94	6.51	9.91	12.7	8.57	9.27	7.67
3	1.29	1.77	2.75	1.98	-0.14	-2.10	-2.42	2.09	-1.01	-0.02
4	-0.48	-0.02	-3.10	-1.77	-0.52	-2.14	-4.05	-5.60	-3.50	-2.77
5	0.41	1.28	0.01	2.84	0.39	0.34	0.01	-0.72	1.93	-1.72
6	1.51	0.20	1.64	0.52	1.81	-0.31	1.63	2.63	4.78	-0.74
7	0.11	0.45	1.97	-0.38	0.54	0.15	2.77	-1.85	0.16	-2.01
8	-0.14	-0.80	-0.56	1.55	0.27	0.56	1.42	-2.46	-0.67	0.89
9	0.35	-1.59	-1.31	0.75	0.57	1.15	1.19	0.43	-0.62	0.07
10	-0.27	-0.90	1.15	0.89	-0.39	1.81	-1.19	-1.23	1.68	-2.46
11	1.52	1.48	1.81	-1.20	-2.88	-1.79	-4.56	-3.02	-4.81	-5.11
12	-0.31	-0.17	-0.32	-0.54	1.18	-0.26	-3.02	-2.56	-0.67	-0.18
13	1.02	2.53	2.12	2.40	0.75	4.21	0.78	-0.65	-1.51	1.19
14	-0.16	-1.33	-2.58	-2.12	0.37	-2.45	-0.77	-3.79	-3.77	-2.85
15	0.93	0.17	-0.18	0.60	4.35	0.96	-0.25	-1.32	1.36	-2.31
16	0.73	0.78	0.31	0.76	-1.15	3.61	0.78	-2.15	-0.16	-1.42
17	1.00	-0.24	-0.01	2.43	4.46	-0.82	4.71	2.41	4.67	3.54
18	2.13	1.69	1.89	-0.78	-3.34	1.30	-1.35	-1.20	-0.20	-0.74
19	-0.73	-1.75	-1.37	-0.74	-3.90	-5.26	-5.53	-2.55	-5.19	-0.59
20	2.12	0.83	-0.43	-0.52	0.34	-1.60	-3.25	-4.34	-5.17	-1.76
21	-0.54	-2.58	-2.68	-3.22	-3.32	-1.80	-2.95	-3.32	-4.10	-2.34
22	0.25	0.01	-1.02	-2.55	0.17	1.76	1.93	1.14	-0.11	-4.09
23	-0.65	-2.12	-1.54	-3.30	-3.90	-4.67	-4.93	-3.26	-3.85	-4.06
24	-1.16	-1.76	-2.66	-1.70	-3.80	-6.79	-4.75	-1.45	-4.63	-3.40
25	1.30	-0.28	0.33	-2.84	-2.31	-3.43	-2.41	-3.96	-1.88	-2.63

Tablo 4.7'deki veri matrisine ilişkin ortalama vektörü, S ve S^{-1} matrisleri aşağıda verilmiştir (***Not: S matrisindeki varyans ve kovaryanslar evren değerlerine ilişkindir/paydada n-1 yerine n vardır. Bu nedenle elde edilecek S matrisi ile*** m_i^2 ***değerleri bilgisayar çıktıları ile uyuşmayacaktır.***).

$$\bar{x}' = [0.574 \quad 0.136 \quad 0.038 \quad 0.120 \quad -0.146 \quad -0.324 \quad -0.478 \quad -1.189 \quad -0.694 \quad -0.889]$$

$$S = \begin{bmatrix} 0.963 & 1.181 & 1.255 & 1.103 & 0.992 & 1.484 & 1.579 & 1.082 & 1.417 & 1.306 \\ 1.181 & 2.284 & 2.127 & 2.339 & 1.690 & 2.980 & 2.698 & 1.811 & 2.352 & 2.248 \\ 1.255 & 2.127 & 3.166 & 2.666 & 1.773 & 3.457 & 3.445 & 2.983 & 3.563 & 2.414 \\ 1.103 & 2.339 & 2.666 & 5.403 & 4.293 & 5.311 & 6.545 & 4.803 & 5.963 & 5.606 \\ 0.992 & 1.690 & 1.773 & 4.293 & 6.781 & 5.667 & 7.867 & 4.780 & 7.016 & 4.625 \\ 1.484 & 2.980 & 3.457 & 5.311 & 5.667 & 10.779 & 10.108 & 5.847 & 8.146 & 5.270 \\ 1.579 & 2.698 & 3.445 & 6.545 & 7.867 & 10.108 & 14.308 & 8.631 & 11.284 & 7.957 \\ 1.082 & 1.811 & 2.983 & 4.803 & 4.780 & 5.847 & 8.631 & 8.201 & 8.116 & 5.284 \\ 1.417 & 2.352 & 3.563 & 5.963 & 7.016 & 8.146 & 11.284 & 8.116 & 11.677 & 6.521 \\ 1.306 & 2.248 & 2.414 & 5.606 & 4.625 & 5.270 & 7.957 & 5.284 & 6.521 & 8.378 \end{bmatrix}$$

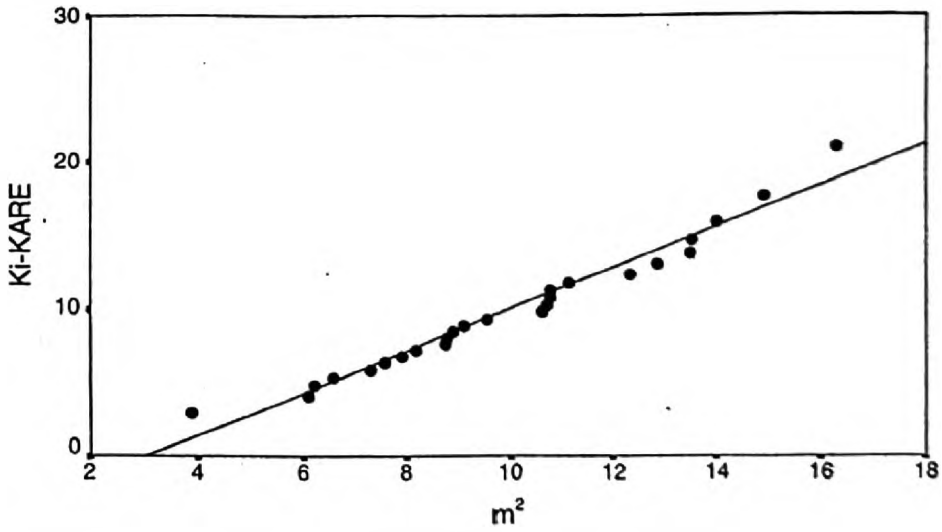
$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 3.740 & -1.665 & -0.744 & 0.910 & -0.302 & 0.119 & -0.008 & -0.010 & -0.010 & -0.417 \\ -1.665 & 2.435 & -0.679 & -0.704 & -0.039 & -0.214 & 0.021 & 0.189 & 0.244 & 0.101 \\ -0.744 & -0.679 & 1.459 & -0.295 & 0.326 & -0.072 & 0.098 & -0.205 & -0.270 & 0.187 \\ 0.910 & -0.704 & -0.295 & 1.457 & -0.314 & -0.136 & 0.231 & -0.195 & -0.083 & -0.616 \\ -0.302 & -0.039 & 0.326 & -0.314 & 0.583 & 0.019 & -0.179 & 0.070 & -0.203 & 0.124 \\ 0.119 & -0.214 & -0.072 & -0.136 & 0.019 & 0.390 & -0.293 & 0.084 & -0.010 & 0.128 \\ -0.008 & 0.021 & 0.098 & 0.231 & -0.179 & -0.293 & 0.655 & -0.194 & -0.197 & -0.250 \\ -0.010 & 0.189 & -0.205 & -0.195 & 0.070 & 0.084 & -0.194 & 0.513 & -0.167 & 0.039 \\ -0.010 & 0.244 & -0.270 & -0.083 & -0.203 & -0.010 & -0.197 & -0.167 & 0.584 & 0.027 \\ -0.417 & 0.101 & 0.187 & -0.616 & 0.124 & 0.128 & -0.250 & 0.039 & 0.027 & 0.559 \end{bmatrix}$$

Tablo 4.7'deki veriye ilişkin, m_i^2, p_i ve χ_i^2 bulguları Tablo 4.8'de, ilgili saçılım grafiği ise Grafik 4.12'de verilmiştir. Ek Tablo D'den $\chi^2_{10;(0.5)} = 9.342$ olarak bulunur ve m_i^2 dağılımında 9.342'den büyük 13 gözlem olduğu ve ((13/25)×100)=%52, % 50 sınırını aştığı için çok değişkenli normalliğin şüpheli olduğu söylenebilir.

Grafik bulgularına göre; bazı gözlemlerin (en alt ve en üstteki iki gözlemin) veriden çıkartılması sonrasında, değişkenlerin çok değişkenli normal dağılıma uyup uymadığının tekrar test edilmesinde yarar vardır. Diğer bir yaklaşım ise verideki gözlem sayısını arttırmak ve normalliği yeniden araştırmak olabilir.

Tablo 4.8. Tablo 4.7'ye İlişkin m_i^2, p_i ve χ_i^2 Bulguları

Göz. No	m_i^2	Sıralı m_i^2	p_i	χ_i^2
1	14.899	3.869	0.02	3.059
2	13.465	6.098	0.06	4.157
3	11.120	6.206	0.10	4.865
4	10.755	6.566	0.14	5.439
5	13.982	7.284	0.18	5.943
6	8.914	7.574	0.22	6.407
7	16.274	7.896	0.26	6.845
8	6.566	8.180	0.30	7.267
9	8.180	8.756	0.34	7.681
10	10.690	8.795	0.38	8.090
11	8.756	8.914	0.42	8.501
12	12.810	9.114	0.46	8.917
13	8.795	9.566	0.50	9.342
14	6.206	10.622	0.54	9.780
15	9.566	10.690	0.58	10.236
16	6.098	10.755	0.62	10.717
17	9.114	10.763	0.66	11.228
18	10.622	11.120	0.70	11.781
19	7.896	12.315	0.74	12.387
20	12.315	12.810	0.78	13.066
21	7.284	13.465	0.82	13.849
22	13.491	13.491	0.86	14.788
23	3.869	13.982	0.90	15.987
24	10.763	14.899	0.94	17.713
25	7.574	16.274	0.98	21.161



Grafik 4.12. Tablo 4.10 İçin m_i^2 - χ_i^2 İlişkisi

Çok değişkenli normallik için çok değişkenli çarpıklık (skewness) ve basıklık (kurtosis) katsayılarından da yararlanılabilir. Bu katsayılar sırasıyla (4.11) ve (4.12)'de verilmiştir.

$$\hat{\gamma}_{1p} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}^3 \qquad (4.11)$$

$$\hat{\gamma}_{2p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i^4 \qquad (4.12)$$

Burada, $m_i^2 = (x_i - \bar{x})'S^{-1}(x_i - \bar{x})$ ve $m_{ij} = (x_i - \bar{x})'S^{-1}(x_j - \bar{x})$'dir.

Çok değişkenli normal dağılan bir evrenden çekilen bir örneklemde, ($n\hat{\gamma}_{1p}/6$) *değeri*; $p(p+1)(p+2)$ serbestlik dereceli bir ki-kare dağılımı gösterirken, ($\hat{\gamma}_{2p}$) *değeri*; $p(p+1)$ ortalama ve $8p(p+2)/n$ varyansı ile normal dağılım gösterir. Formüllerden anlaşılacağı gibi $\hat{\gamma}_{2p}$ değerini bulmak kolaydır. Çünkü, m_i^2 değerlerinin karesini almak ve bu değerleri n gözlem için toplayıp denek sayısına bölmek yeterlidir. Örneğimiz için basıklık değerleri;

$$\hat{\gamma}_{2p} = \frac{1}{25}2725.179 = 109.007$$

olarak bulunur. $\hat{\gamma}_{2p}$=109.007 için standart normal değer, ortalama= $p(p+1)$=10(10+1)=120 ve varyans=$8p(p+2)/n$=8(10)(10+2)/25=38.4 yardımı ile; z=(109.007–120)/$\sqrt{38.4}$ =–1.774 olarak bulunur. z=–1.774 için olasılık 0.0384 olup bu değer 0.05'den küçük olduğu için değişkenlerin çok değişkenli normal dağılmadığı söylenebilir. Yukarıda belirtildiği gibi, veride birkaç tane "sorunlu" gözlem vardır. Bu değerlerin veriden çıkartılması (ya da veriye yeni gözlemlerin eklenmesi) sonrasında değişkenlerin çok değişkenli normal dağılıma sahip olup olmadığı yeniden araştırılmalıdır. Ayrıca, $\chi^2_{10;(0.5)} = 9.34$ ve dolayısıyla bu örneğe ilişkin 13 gözlemin (gözlem sayısının yarısından fazlasının) m_i^2 değerinin, sınırda da olsa % 50'lik konturun dışında kalması, normalliğin şüpheli olduğu şeklindeki kanıyı kuvvetlendirmektedir.

Aşırı Değerler

Bazı gözlem değerleri verideki genel eğilimin dışına çıkabilir. Veride, genel eğilimin oldukça dışına çıkan ya da diğer değerlerden oldukça farklı olan değerlere aşırı değer denir. Aşırı değerler, tek değişkenli, iki değişkenli ve çok değişkenli aşırı değerler şeklinde incelenebilirler. Örneğin, 18-20 yaşları arasındaki bireyler üzerinde yapılan bir çalışmada boy uzunluğu 142 cm olan bir birey boy uzunluğu açısından bu yaş grubunun genel eğiliminin dışında olacaktır. Yine ağırlığı 140 kg olan bir birey, ağırlık değişkeni açısından genel eğilimin dışına çıkabilir. Bu örnekler, tek değişkenli aşırı değerlere birer örnek oluştururlar. Dağılımların negatif ya da pozitif çarpık olması, bu türden 1–2 gözlem nedeniyle ortaya çıkabilmektedir. Çoğu zaman kutu ve çizgi grafiği (box plot) bu dağılımlardaki aşırı değerleri belirlemede yardımcı olur. Örneğin *SPSS* istatistik yazılımında, kutunun alt ve üst sınırlarından (sırasıyla 25. ve 75. yüzdelikler) 3 kutu boyu ve daha fazla uzaklıktaki gözlemler grafik üzerinde "*" ile belirtilir ve *çok aşırı*

değer (extreme value) olarak nitelendirilir. Bu sınırlar; $Q1-3\times IQR$ ve $Q3+3\times IQR$ olarak tanımlanır ($IQR=75.\ yüzdelik-25.\ yüzdelik=Q3-Q1$). Kutunun alt ve üst sınırından 1.5 kutu boyu ile 3 kutu boyu arasında olan gözlemler ise grafik üzerinde "o" ile belirtilir ve *aşırı değer* (outlier) olarak nitelendirilir. Bu sınırlar; $Q1-1.5\times IQR$ ve $Q3+1.5\times IQR$ olarak tanımlanır. Bilindiği gibi kutu-çizgi grafiğinde kutunun içindeki yatay çizgi, ortancadır. Kutunun ortasından geçen dikey çizginin alt ve üst sınırları ise çoğunlukla; aşırı değer olarak nitelendirilmeyen en küçük ve en büyük değerlerdir. Yukarıda belirtildiği gibi iki değişkenli aşırı gözlemler de söz konusudur. Örneğin, yukarıda sözü edilen 18-20 yaş grubunda boyu 146 cm ve ağırlığı 129 kg olan bir birey, iki değişkenli bir aşırı gözlem olarak nitelendirilebilir. Diğer taraftan, incelenen değişkenlerde aşırı değer yok iken iki ya da çok değişkenli dağılımda aşırı değerlerden de söz edilebilir. Örneğin, 18 yaşında 3 kez boşanmış bir birey düşünelim. 3 kez boşanmak, boşanma sayısı değişkeni için aşırı bir değer değildir. 17 yaşında olmak için de durum aynıdır. Ancak, bu iki değişken birlikte incelendiğinde 17 yaşında 3 kez boşanmış bir bireyin oldukça sıradışı olduğu görülecektir. Aşırı gözlemler; hatalı veri girişi, yanlış kodlama, her zaman ortaya çıkmayan bir olayın görülmesi, ... vb. nedenlerle ortaya çıkabilir. Hatalı veri girişi ya da yanlış kodlama, verinin temizlenmesi aşamasında düzeltilmelidir. Eğer aşırı gözlem, her zaman ortaya çıkmayan (nadiren görülen) bir olay ise araştırıcı, her zaman ortaya çıkmayan bir olayın örneklemde temsil edilip edilmeyeceğine karar vermelidir. Bu gözlemin örneklemde temsil edilmesi uygun görülürse bu aşırı gözlem veride kalmalı yoksa silinmelidir. Bazen nadiren ortaya çıkan gözlemler araştırıcı tarafından da tanımlanamayabilir. Bu durumda bu gözlemlerin veriden çıkartılması daha uygundur. Bazen de yukarıda söz edildiği gibi her bir değişkenin değerleri normal sınırlar içinde olmasına rağmen bunların kombinasyonu çok nadir görülen bir durumu ortaya çıkartabilir. Böyle durumlarda, araştırıcı, bu gözlem için geçerli bir nedeni yok ise bu gözlemi veriden çıkartmamalıdır.

Aşırı Değerli Gözlemlerin Araştırılması

Çok değişkenli normal dağılmama sorunu bazen yukarıda tanımladığımız 1-2 aşırı gözlem nedeniyle de ortaya çıkabilmektedir. Aykırı değer (outlier) olarak da adlandırılan bu gözlemlerin (ileride göreceğimiz gibi ***aykırı değer*** tanımlaması daha çok *regresyon çözümlemesindeki büyük artıklı gözlemleri tanımlamak* için kullanılacaktır) belirlenebilmesi için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden bazıları aşağıda özetlenmiştir. Bu yöntemlerden ilk ikisi, aşırı değerleri tek değişkenli boyutta ele almakta iken üçüncü madde ile verilen yöntem iki değişkenli aşırı gözlemleri araştırmak için sıklıkla kullanılır. Diğer maddeler ise 2 ve daha çok değişkenli normalliği incelemekte kullanılmaktadır.

1. Değişkenlerin histogramlarını, kutu–çizgi grafiklerini ya da dal–yaprak grafiklerini çizerek gerek dağılımların yapısını gerekse de dağılımlardaki aşırı gözlemleri görmek. Aynı gözlemin, incelenen diğer değişkenlerin tümü ya da çoğu için aşırı gözlem olarak nitelendirilmesi durumunda bu gözlem çok değişkenli aşırı gözlem olarak nitelendirilebilir.
2. Değişkenlere ilişkin standartlaştırılmış değişkenleri bulmak ve büyük z değerli gözlemleri ($z_i>2.5$) aşırı değer olarak belirlemek. Bu yaklaşımda, gözlem sayısı fazla ise ($n_i > 80$), $z_i>3.0$ olan gözlemlerin aşırı gözlem olarak belirlenmesi önerilmektedir. Ham verilerle çalışılacak ise, gözlem sayısına

bağlı olarak ortalamadan 2.5 ve 3.0 ve bazen de 4.0 standart sapma uzaklıktaki gözlemlerin aşırı gözlem olarak incelenmesi önerilmektedir.

3. Tüm değişkenlerin ikişerli saçılım grafiğini çizmek ve genel eğilime uymayan gözlemleri belirlemek. Bu yaklaşımda, kontur grafiklerinden yararlanmak öznelliği önleme açısından daha iyi bir seçenektir. Bu amaçla, % 90 konturlarından sıklıkla yararlanılır ve bu konturun dışında kalan gözlemler aşırı gözlem kuşkusu ile incelenebilir.
4. Kare Mahalanobis uzaklığı hesaplanarak ki-kare nokta grafiğini çizmek ve doğrudan aşırı derecede ayrılan gözlemleri belirlemek.
5. m_i^2/p değerlerinin p serbestlik derecesi ile *yaklaşık* bir t dağılımı göstermesi nedeniyle her bir gözlem için P olasılıkları bulunarak (herhangi bir istatistik yazılım ya da Excel yardımıyla) 0.001 gibi önemlilik düzeyinden daha küçük *P değerli gözlemleri* aşırı gözlem olarak belirlemek.
6. α=0.005 gibi küçük bir anlamlılık düzeyi için $\chi^2_{p(0.005)}$ değerini bulmak ve bu değerden büyük m_i^2 değerine sahip gözlemleri çok değişkenli aşırı gözlem olarak belirlemektir.
7. Değişkenlerin çok değişkenli normal dağılım göstermesi durumunda *Barnett ve Lewis* tarafından geliştirilmiş tablolardan da yararlanılabilir. 2-5 değişken için kritik değerler Tablo I'da verilmiştir. Mahalanobis değerlerinin tablo değerlerini aşması durumunda ilgili gözlemin diğer gözlemlerden farklı olduğu söylenir.

Ancak, çok değişkenli dağılımlarda aşırı değerleri araştırmak çok da kolay değildir. Yukarıdaki yöntemlere ek olarak aşırı değerler, ***genelleştirilmiş varyans oranı*** ile de araştırılabilirler. Genelleştirilmiş varyans oranı r_i^2;

$$r_i^2 = \frac{|S_i|}{|S|} \qquad (4.13)$$

ile verilir. Burada S_i, x_i gözlemi atıldıktan sonra geriye kalan gözlemlerden elde edilen kovaryans matrisini ifade etmektedir. Göreceli olarak küçük r_i^2 değerine sahip gözlemlerin aşırı değer olduğuna karar verilir. r_i^2 ile m_i^2 arasında;

$$r_i^2 = 1 - \frac{nm_i^2}{(n-1)} \qquad (4.14)$$

gibi bir ilişki olduğundan, aşırı gözlemleri sıralamada her iki yöntem de benzer sonuçlar verir.

Yukarıda verdiğimiz 6 nolu yaklaşım yardımıyla son örneğimiz (n=25) için aşırı gözlem olup olmadığını araştırırsak; Ek Tablo D yardımıyla $\chi^2_{10(0.005)} = 25.188$ olarak elde edilir. Buna göre, çok değişkenli dağılımda aşırı gözlem yoktur. Ancak, normalliğe ilişkin bulgulardan dağılımın normal dağılım göstermediği söylenebilir.

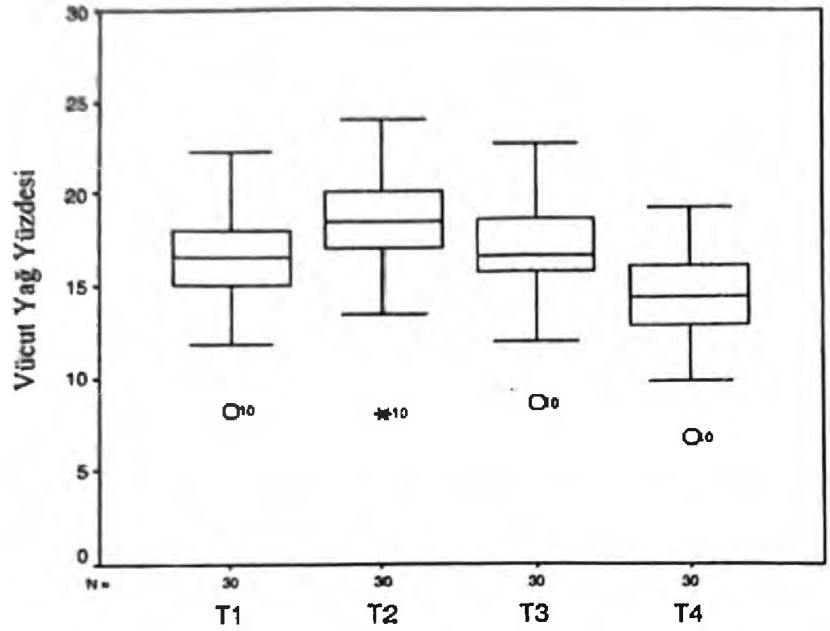
Çok değişkenli verideki aşırı gözlemlerin incelenmesine ilişkin bir örnek Örnek 4.7'de verilmiştir.

Örnek 4.7. 30 sporcunun 4 farklı zaman dilimindeki (T1, T2, T3, T4) vücut yağ yüzdeleri Tablo 4.9'da verilmiştir. Bu veride aşırı gözlem olup olmadığı aşağıda tartışılmıştır. Tablo 4.9'da, verilerle birlikte değişkenlere ilişkin z değerleri ve Mahalanobis uzaklıkları da verilmiştir.

Örneğimizdeki 4 değişkene ilişkin kutu–çizgi grafiği, Grafik 4.13'de verilmiştir (Not: Değişkenlerin m, kg, lt ...vb ölçü birimlerinde olduğu durumlarda bu grafiğin z değerleri yardımıyla çizilmesi daha anlamlı olacaktır.) Bu grafikte de görüldüğü gibi 10 nolu gözlem, her bir değişken için genel eğilimin dışındadır (tek değişkenli inceleme). Bu gözleme ilişkin Mahalanobis uzaklığı (m_{10}^2=12.6), dağılımdaki ikinci en büyük uzaklık değeri olmakla birlikte, kesim noktası olarak alınabilecek olan $\chi^2_{(4;\,\alpha=0.005)}$ = 14.8602 değerinden küçüktür (*madde 6*). Dolayısıyla, 10 nolu gözlem ile 14.86 değerinden küçük m_i^2 değerine sahip diğer gözlemler çok değişkenli aşırı gözlem değillerdir. Bu yaklaşıma göre sadece 27 nolu gözlem çok değişkenli aşırı gözlem olarak incelenmelidir. 27 nolu gözlem incelendiğinde, T_2 ve T_3'ün değerleri ortalamaların üzerinde, T_1 ve T_4'ün değerleri ise ortalamaların altındadır.

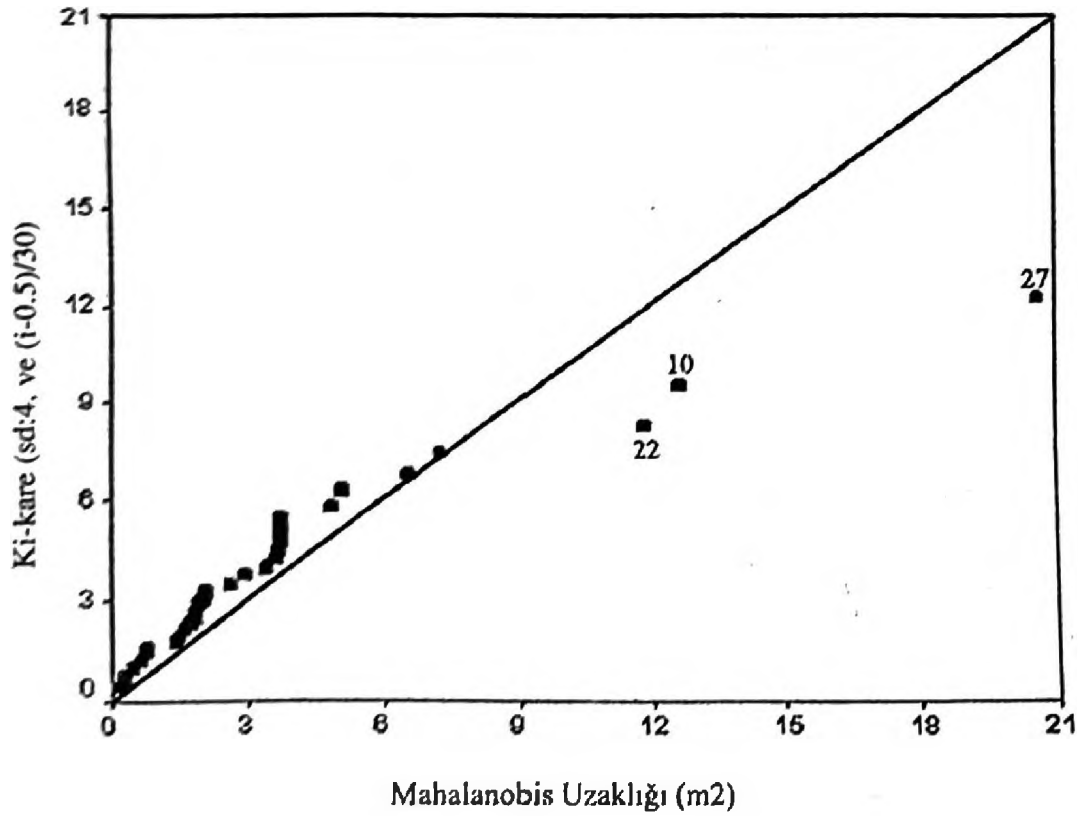
Tablo 4.9. Aşırı Gözlem Verisi

No	T1	T2	T3	T4	z_{T1}	z_{T2}	z_{T3}	z_{T4}	m_i^2
1	12.8	15.3	13.8	12.3	–1.14	–0.97	–1.03	–0.77	1.87
2	22.0	24.0	20.5	18.1	1.60	1.77	1.25	1.49	3.73
3	17.8	19.0	16.5	15.6	0.35	0.19	–0.11	0.51	0.75
4	22.0	21.0	16.9	19.2	1.60	0.82	0.02	1.92	**7.31**
5	15.4	16.6	15.8	10.9	–0.36	–0.56	–0.35	–1.32	4.90
6	15.7	19.9	16.2	14.5	–0.28	0.47	–0.22	0.08	6.59
7	15.5	17.1	17.1	14.4	–0.33	–0.41	0.09	0.04	2.09
8	16.7	19.4	16.8	12.7	0.02	0.32	–0.01	–0.62	3.76
9	18.9	19.9	18.7	16.9	0.68	0.47	0.63	1.02	2.02
10	8.3	8.1	8.6	6.7	**–2.47**	**–3.24**	**–2.80**	**–2.96**	**12.65**
11	15.1	17.5	16.0	13.8	–0.45	–0.28	–0.28	–0.19	0.48
12	16.7	17.1	15.9	15.2	0.02	–0.41	–0.32	0.36	1.95
13	18.0	20.1	19.1	16.3	0.41	0.54	0.77	0.79	1.45
14	17.4	18.4	18.4	15.9	0.23	0.00	0.53	0.63	3.46
15	16.8	18.7	16.8	14.9	0.05	0.10	–0.01	0.24	0.24
16	16.9	18.8	17.0	14.0	0.08	0.13	0.06	–0.11	0.24
17	14.7	17.3	14.1	12.4	–0.57	–0.34	–0.93	–0.74	3.67
18	11.9	13.5	12.0	9.8	–1.40	–1.54	–1.65	–1.75	3.76
19	13.0	14.4	14.2	12.8	–1.08	–1.26	–0.90	–0.58	2.94
20	17.6	18.3	16.3	16.0	0.29	–0.03	–0.18	0.67	1.62
21	16.5	17.5	15.9	13.2	–0.04	–0.28	–0.32	–0.42	0.81
22	22.0	23.1	22.2	14.8	1.59	1.48	1.83	0.20	**11.85**
23	14.8	18.0	16.1	14.2	–0.54	–0.12	–0.25	–0.03	1.88
24	15.2	16.3	15.2	12.9	–0.42	–0.66	–0.56	–0.54	0.62
25	20.4	20.6	18.6	16.5	1.12	0.69	0.60	0.86	1.75
26	15.3	18.6	14.9	13.5	–0.39	0.07	–0.66	–0.31	5.11
27	12.1	20.2	22.7	12.6	–1.34	0.57	2.00	–0.66	**20.61**
28	22.3	23.3	21.0	17.1	1.69	1.55	1.42	1.10	3.76
29	15.2	17.0	17.0	13.8	–0.42	–0.44	.06	–0.19	1.52
30	21.8	22.8	20.8	17.6	1.54	1.39	1.35	1.29	2.62
$\bar{x}_j$	**16.63**	**18.39**	**16.84**	**14.28**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	**0.00**	

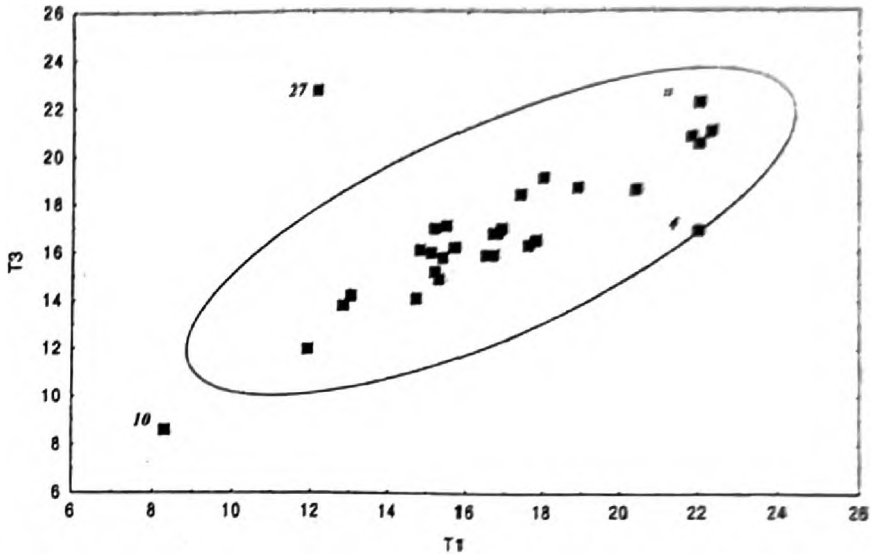


Grafik 4.13. Tablo 4.9 Verisi İçin Kutu–Çizgi Grafikleri

Tablo 4.9 verisi için $m_i^2 - \chi_i^2$ grafiği Grafik 4.14'dedir. Bu grafikten de 27. gözlemin bir aşırı gözlem olduğu anlaşılabilir. Ancak, doğrudan oldukça uzak olan 10 nolu gözlemin de genel eğilimin dışında olduğu izlenimi söz konusudur.



Grafik 4.14. Dört Değişkene İlişkin Sıralı Mahalanobis Uzaklığı–Ki-kare Grafiği



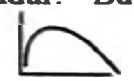
Grafik 4.15. T1 ve T3 Değişkenleri İçin % 90 Konturu ve Sorunlu Gözlemler

Normallik Dönüşümleri

Çok değişkenli normallik varsayımının sağlanamamasına bir ya da daha fazla değişkenin normal dağılım göstermemesi neden olabilir. Bu durumda yapılacaklar iki seçenekle sınırlıdır.

1. Verinin normal dağıldığını varsayarak işlemlere devam etmek,
2. Normallik varsayımını bozduğu düşünülen değişkenler üzerinde dönüşüm yapmaktır.

Birinci seçenek, yanlış sonuçlara, dolayısıyla yanlış yorumlara neden olacağı için "önerilir" bir yöntem değildir. Ancak, ikinci seçenek yardımıyla, veri tam olarak normal dağılım göstermeyebilecek ama, eskisine göre "daha normal" bir yapıya dönüşebilecektir.

Dönüşüm; "*veriyi farklı bir birimle yeniden ifade etmek*" şeklinde tanımlanabilir. Dağılımları normalleştirmede kullanılan çeşitli yaklaşımlar söz konusudur. Bu yaklaşımlardan bazılarına aşağıda kısaca değinilmiştir. İncelenen dağılım;  şeklinde ise *ılımlı derecede pozitif çarpık* bir dağılımken,  şeklinde bir dağılım *şiddetli pozitif çarpık* bir dağılımdır. Eğer bir dağılımda ılımlı derecede pozitif çarpıklık söz konusu ise uygun dönüşüm karekök dönüşümüdür. Şiddetli pozitif çarpık bir dağılım da ise logaritmik dönüşümden yararlanılır. Gerek logaritmik gerekse de karekök dönüşümü yapılacak dağılımlarda 1'den küçük değerler varsa, en küçük değeri 1 yapacak şekilde bir sabit terimin gözlemlere eklenmesi uygun olur. Eğer bir dağılım;  şeklinde ise *ılımlı derecede negatif çarpık* bir dağılımken,  şeklinde ise *şiddetli negatif çarpık* bir dağılıma sahiptir. Eğer bir dağılım negatif çarpık bir dağılıma sahipse en iyi dönüşüm yöntemi; dağılımdaki her bir gözlemi, (dağılımdaki en büyük

değer + 1) değerinden çıkartarak dağılımı pozitif çarpık bir dağılım durumuna getirmek ve daha sonra pozitif çarpık dağılımlar için kullanılan dönüşümleri kullanmaktır.

Negatif çarpık dağılımları normalleştirmede kullanılan bir diğer yöntem ise x değişkenine x^2 ya da x^3 dönüşümü yapmaktır. Bu dönüşümler, çarpıklığı her zaman tam olarak gideremese de azalmasına oldukça yardımcı olabilirler. Negatif çarpık dağılımlarda kullanılan bir diğer dönüşüm de $\log(x/(1-x))$ dönüşümdür. Genel olarak dağılımların normalleştirilmesinde deneme yanılma yönteminden sıklıkla yararlanılır.

Karekök dönüşümü, verilerin kesikli sayısal veri tipinde olduğu durumlarda da uygulanabilir.

Aşırı derecede çarpık dağılımları normalleştirmede kullanılan bir dönüşüm ise gözlem değerlerinin tersini almaktır (örneğin, 1/bilirubin).

Eğer oranlar ile çalışılıyorsa, logit dönüşüm sık kullanılan bir dönüşüm çeşitidir. Bu dönüşüm;

$$Logit(p) = \log_e\left(\frac{p}{1-p}\right) \qquad (4.15)$$

ile verilir. Örneğin, p=0.05 ise logit(p)=-2.94 olur. Bu dönüşüm çoğunlukla, oranların sık kullanıldığı regresyon çözümlemelerinde kullanılır.

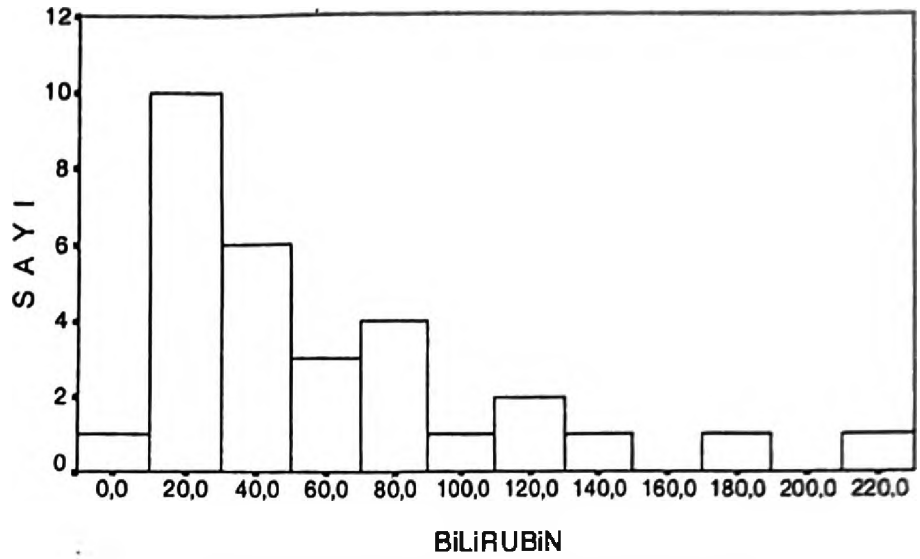
Pozitif çarpıklık, uygulamada sık karşılaşılan bir dağılım çeşitidir. Negatif çarpıklığa ise daha az rastlanır. Pozitif çarpıklığa sahip dağılımları, simetriye yakın bir dağılıma dönüştürmede logaritmik dönüşümden sık sık yararlanılır. Örnek 4.8'de logaritmik dönüşümle ilgili bir uygulama verilmiştir.

Örnek 4.8. 30 Hastaya ilişkin μ *mol/L* bilirubin değerleri ile 10 tabanına göre logaritmaları Tablo 4.10'da verilmiştir.

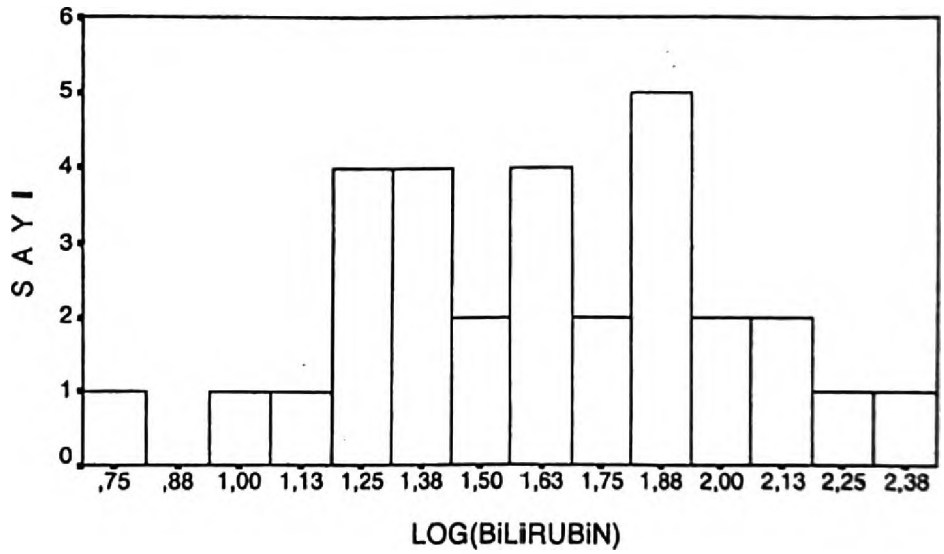
Tablo 4.10. 30 Hastanın Bilirubin (B) Değerleri ve Logaritmaları (L)

Gözlem	*B*	*L*	*Gözlem*	*B*	*L*	*Gözlem*	*B*	*L*
1	58	1.76	11	5	0.70	21	140	2.15
2	220	2.34	12	32	1.50	22	10	1.00
3	86	1.93	13	170	2.23	23	60	1.78
4	91	1.96	14	22	1.34	24	71	1.85
5	30	1.48	15	26	1.41	25	15	1.18
6	19	1.28	16	38	1.58	26	18	1.25
7	45	1.65	17	20	1.30	27	20	1.30
8	80	1.90	18	70	1.84	28	115	2.03
9	24	1.38	19	120	2.08	29	68	1.83
10	40	1.60	20	24	1.38	30	39	1.59

Tablo 4.10'daki ham bilirubin değerlerine ilişkin histogram Grafik 4.16'da verilmiştir. Grafikte görüldüğü gibi dağılım pozitif çarpıktır. Logaritmik dönüşüm uygulanmış gözlemlere ilişkin histogram ise Grafik 4.17'dedir.



Grafik 4.16. Bilirubin Değerlerinin Histogramı



Grafik 4.17. Log(Bilirubin) Değerlerinin Histogramı

Grafik 4.17'de görüldüğü gibi, pozitif eğriliğe sahip veri oldukça normalleşmiş ve simetriye yakın bir duruma gelmiştir.

Uygulama Verileri

Bu bölümdeki konulara ilişkin uygulamalar için BÖLÜM 6'nın sonunda verilen uygulama verilerinden yararlanılabilir.

Bölüm 5

EKSİK VERİLER ve İNCELENMESİ

Giriş

Tek değişkenli çalışmalarda olduğu gibi çok iyi planlanmış çok değişkenli çalışmalarda da eksik verilere sık sık rastlanabilir. Örneğin, ailelerin sosyal aktivitelere katılım düzeyi ile ilgili bir çalışmada, ailenin *yıllık gelir düzeyi*ne ilişkin olarak yönlendirilen bir soru, bazı aileler tarafından yanıtlanmayabilir. Görüşmeyi yapan kişi, bazı soruları bir kasıt olmaksızın atlayabilir. Yine, değişik basılı kaynaklardan veri elde ederek yapılan çalışmalarda bazı değişkenlere ilişkin verilere ulaşılamazken, labaratuvar ya da diğer bir çalışma ortamında cihaz kullanılarak yapılan çalışmalardaki bazı bilgilere de cihazın bozulması nedeniyle ulaşılamayabilinir. Bazen de bir ya da birkaç değişkene ilişkin örnekler kaybolabilir. Benzer şekilde, bazı çalışmalarda eksik gözlemlerin fazlalığı nedeniyle *çok değişkenli yöntemleri uygulayabilecek sayıda* ***tam veriye*** ulaşmak söz konusu olamamakta iken, bazı çalışmalarda da mutlaka eksik veri (genel anlamda bilgi kaybı) söz konusudur. Araştırıcılar öncelikle eksik veriyi ortaya çıkartan nedenleri ve eksik verinin derecesini belirleyebilmelidir. Sonrasında ise ortalamalar, standart sapmalar, korelasyonlar ve kovaryanslar (istenirse eksik veri yerine atama yapılarak) kestirilebilecektir.

Yanıtlayıcı dışında (veri girişi hataları ya da veri toplama sorunları vb.) ya da yanıtlayıcı kaynaklı (sorulara yanıt vermeme gibi) olan ve eksik veriye yol açan sürece ***eksik veri süreci*** denir. Bazen, eksik veri süreci ile karşılaşılabileceği kestirilebilir ve araştırma planında gerekli önlemler alınabilir. Ancak, özellikle yanıtlayıcı kaynaklı olarak ortaya çıkan eksik veri süreci önceden kestirilemeyebilir. Bu durumda, veride eksik veri sürecini ortaya çıkartan bir yapı (pattern) olup olmadığının araştırıcı tarafından incelenmesi önerilir. Bu incelemede genellikle;

1. Eksik verilerin gözlemlere rasgele saçılıp saçılmadıkları ve belirgin bir yapı oluşturup oluşturmadıkları
2. Eksik verinin ne kadar olduğu (ne sıklıkta ortaya çıktığı) sorularına yanıt aranır.

Eksik veri ile ilgili yapılar söz konusu ve eksik verinin derecesi önlem almayı gerektirecek düzeyde ise, veride eksik veri sürecinin varlığından söz edilebilir. Bu durumda, eksik veriler yardımıyla elde edilen istatistiksel sonuçlar, çalışmada kullanılan

değişkenlerin eksik veri sürecinden etkilendiği derecede yanlı olabilecektir. Ancak, eksik verinin etkisi, sonuçlar üzerindeki yanlılığı ile sınırlı değildir. Örneğin, eksik veriye ilişkin sorunların giderilemediği çalışmalarda, eksik verili gözlemlerin veriden çıkartılması söz konusu olabilmektedir. Bu ise gözlem sayısında ciddi bir azalmayı beraberinde getirebilecek ve yeterli olarak düşünülmüş bir örneklem yetersiz sayıdaki bir örnekleme dönüşebilecektir. İleride göreceğimiz gibi, incelenen veride bir ya da birden çok değişkenin eksik veri içermesi nedeniyle ilgili gözlem(ler)in veriden çıkartılması; hesaplanan istatistiklerin kararlılığını düşürebilecek ve çalışmanın geçerliğini ve genellenebilirliğini etkileyebilecektir.

Genel olarak, eksik veri sorunu ile karşılaşıldığında yapılabilecekler; *1) Veriye yeni gözlemler eklemek* ya da *2) Verideki eksik değerleri çeşitli istatistiksel yaklaşımlarla gidermeye çalışmak*, şeklinde iki başlıkta toplanabilir. Bu bölümde, çok değişkenli çözümlemede karşılaşılabilecek çeşitli eksik veri süreçleri, eksik verinin yapısını tanımlayan yöntemler ve verideki eksik yapının giderilmesine yönelik çözümlemeler hakkında bazı temel bilgiler verilmeye çalışılacaktır.

Eksik Veri Örneği ve Tanımlayıcı İşlemler

Eksik veri sorununu çözmeye yönelik yaklaşımlar öncesinde, eksik veri yapılarının ve bazı tanımlayıcı istatistiklerin incelenmesi gerekir. Bu amaçla, bu bölümün sonunda verilen ve eksik veriler de içeren 120 gözlemli verinin (Tablo 5.17) ilk 30 gözlemi bir örnek veri seti olarak incelenmiş ve eksik veriye ilişkin sayı ve yüzdeler Tablo 5.1'de, değişkenlere ilişkin bazı tanımlayıcı ölçüler Tablo 5.2'de verilmiştir. İncelenen veriye ve Tablo 5.1'e ilişkin bazı açıklamalar aşağıdadır;

1. Bu veride en çok eksik veriye sahip *değişken*, 15 eksik veri (% 50.0) ile D2 değişkenidir. Diğer değişkenlerdeki eksik veri sayıları D2'ye göre daha azdır.
2. % 50'den fazla eksik veri içeren *gözlem sayısı* 2'dir (2. ve 11. gözlemler).
3. Eksik verinin olmadığı (tam) gözlemlerin sayısı ise 8'dir (gözlem no: 1, 3, 7, 8, 13, 15, 22, 30). Dolayısıyla, tam verinin gerekli olduğu bir *çok değişkenli* çalışmada, sadece 8 gözlem ile çalışmak gerekecektir. Bu kadar az sayıda bir gözlem üzerinde çalışarak elde edilen sonuçlar üzerinden yorumlara gitmek oldukça sıkıntılıdır.
4. Toplam eksik veri sayısının (31), toplam veri sayısı olan 150 (30×5=150) içindeki payı % 20.7'dir (31/150) (Tablo 5.1).

Tablo 5.1. Bölüm Sonundaki Örnek Veri Setindeki ilk 30 Gözleme İlişkin Veriler (Veri Yapıları)

Gözlem No	D1	D2	D3	D4	D5	*Gözlemlerdeki Eksik Veri İçin Sayı (n)*	*%*
1	0.7	66	918.9	66	53	0	00.00
2	,	,	**915.9**	,	,	**4**	**80,00**
3	1.0	74	915.1	87	135	0	00,00
4	1.9	,	915.6	86	145	1	20,00
5	0.7	,	916.8	93	181	1	20,00
6	2.0	79	,	,	98	2	40,00
7	1.6	70	916.5	63	200	0	00,00
8	-0.2	65	925.1	56	39	0	00,00
9	0.5	,	921.7	114	,	2	40,00
10	0.4	,	913.6	133	68	1	40.00
11	**-2.5**	,	,	,	**33**	**3**	**60.00**
12	-1.6	,	919.2	60	54	1	20.00
13	3.3	65	918.9	122	149	0	00.00
14	4.0	,	919.0	153	269	1	20.00
15	3.8	76	921.9	162	263	0	00.00
16	4.4	72	919.0	,	228	1	20.00
17	4.4	80	912.5	128	,	1	20.00
18	1.4	78	,	109	154	1	20.00
19	,	,	912.7	142	195	2	40.00
20	6.2	,	909.5	94	96	1	20.00
21	8.5	,	913.4	61	26	1	20.00
22	11.0	58	913.6	37	24	0	00.00
23	5.4	,	907.1	30	46	1	20.00
24	4.6	,	906.3	,	66	2	40.00
25	2.6	73	,	48	46	1	20.00
26	0.7	75	,	42	48	1	20.00
27	2.0	,	913.2	62	68	1	20.00
28	,	92	906.0	35	50	1	20.00
29	0.4	,	906.8	51	27	1	20.00
30	-3.1	74	911.1	41	36	0	00.00
Değişkenlere Göre Eksik veriler							
Sayı	***3***	***15***	***5***	***5***	***3***	***31***	
%	***10.0***	***50.0***	***16.***	***16.7***	***10.0***	***21.3***	

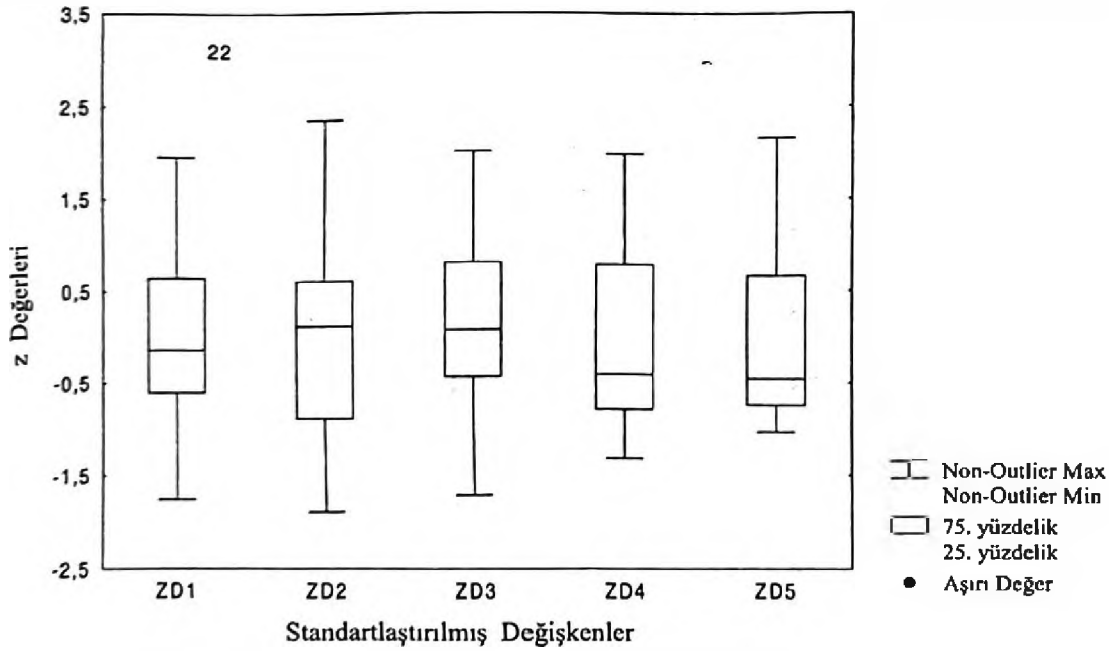
Her bir değişken için eksik olmayan (tam) gözlemlere ilişkin tanımlayıcı istatistiklerin verildiği Tablo 5.2'de görüldüğü gibi, ortalama ve standart sapmalar için gözlem sayıları, eksik gözlem sayısına bağlı olarak farklıdır. Bu tabloda, her bir değişken için Tukey'in Kutu grafiği ölçütüne (*Q1–1.5*IQR, Q3+1.5*IQR*) göre belirlenen aşırı değerleri de görmek olasıdır. Örneğin, D1 değişkeninde 1 tane aşırı değer (ortalamanın üzerinde) var iken, diğer değişkenlerde aşırı değer yoktur. Bazı istatistik yazılımlarda böylesi bir çıktı da verilmekte ve bu yaklaşım yardımıyla değişkenlerdeki olası aşırı

değerler ve/ya da çarpıklıklar konusunda ilk bakışta bilgi sahibi olunması amaçlanmaktadır. Çünkü, bilindiği gibi dağılımların simetrik yapıda olması, çok değişkenli çözümlemede sıklıkla kullanılan ortalama, standart sapma, korelasyon katsayısı ve kovaryans gibi ölçüler için çok önemlidir. Bu amaçla, daha önceki konularda da incelediğimiz kutu-çizgi grafiklerinden de yararlanılabilir (Grafik 5.1). Grafik 5.1'de görüldüğü gibi, D1 değişkenindeki ***22 nolu gözlem*** aşırı gözlem alarak sınıflandırılmıştır. Grafik 5.1'de, değişkenlerin yapısını aynı anda görebilmek için verilere z dönüşümü yapılmıştır. Gerektiğinde normallik dönüşümlerinden yararlanılarak çarpık değişkenler simetrik bir konuma getirilebilir.

Tablo 5.2. 30 Gözleme İlişkin Tanımlayıcı İstatistikler

				Eksik Gözlem		Aşırı Gözlem Sayısı*	
Değişken	n	Ortalama	Standart Sapma	Sayı	%	Küçük	Büyük
D1	27	2.3741	3.1272	3	10.0	0	1
D2	15	73.13	8.01	15	50.0	0	0
D3	25	914.776	5.136	5	16.7	0	0
D4	25	83.00	39.97	5	16.7	0	0
D5	27	103.59	76.66	3	10.0	0	0

(*) (Q1 - 1.5*IQR, Q3 + 1.5*IQR) sınırlarının dışına çıkan gözlem sayısı.



Grafik 5.1. Beş Değişkenin z Değerlerine İlişkin Kutu-Çizgi Grafikleri

İleride göreceğimiz gibi, eksik veri sorununun giderilmesine yönelik olarak oldukça karmaşık yaklaşımlar olmakla birlikte, basit bir yöntem; fazla eksik veri içeren değişkenlerin ve/ya da gözlemlerin veriden çıkartılmasıdır. Örneğimizde çok fazla eksik veri içeren (ancak, çalışmanın yapısını bozmayacağını düşündüğümüz) D2 değişkeni veriden çıkartıldığında, veri setindeki eksik veri sayısı 31'den 16'ya düşmekte ve eksik verinin olmadığı (tam) gözlem sayısı 8'den 18'e çıkmaktadır (ek 10 gözlem elde edilmektedir). Ayrıca, 4 değişkenli veri setinde, % 50'den fazla eksik veri içeren 2. gözlem de veriden çıkartılır ise veri setindeki eksik veri sayısı 13'e düşmektedir.

Ancak, veri setindeki bir durum dikkat çekicidir. Buna göre, D3'deki eksik veriler D1'deki düşük değerlere karşılık gelmektedir. Buradan, D3'deki eksik verilerin D1'in düşük değerleri ile ilişkili olabileceği düşünülebilir. Yani, D3'deki eksik veri sürecinin rasgeleliği konusunda kuşkular söz konusudur. Bu durum, bu iki değişkenin birlikte ele alındığı analizleri doğrudan etkileyebileceği için ilgili değişkenlere ilişkin sonuçların dikkatli bir şekilde incelenmesi gerekecektir. Benzer şekilde, diğer değişkenler arasında da benzer yapıların olup olmadığı incelenmelidir.

Bazı istatistiksel yazılımlarda, Tablo 5.1'deki gösterimden farklı olarak verideki "*tam gözlemler*" ***boşluk*** ile verilmekte iken, "," ile gösterilen eksik gözlemler *S* ile verilmekte ve Tukey'in kutu grafiği ölçütüne göre; aşırı derecede küçük gözlemler "–", aşırı derecede büyük gözlemler "+" ile belirtilerek sunulmaktadır (Tablo 5.3). Bu gösterim, belirli gözlem ve/ya da değişkenlerin oldukça az sayıda tam veriye sahip olup olmadıklarını ve değişkenlerin (ya da değişken gruplarının) rasgele olmayan bir yapıda olup olmadığını görmek için de kullanılmaktadır.

Tablo 5.3. Gözlemlere Göre Veri Yapısı

	Eksik Veri İçin		*Eksik ve Aşırı Gözlem Yapıları*				
Göz. No	*Sayı*	*%*	*D1*	*D2*	*D3*	*D4*	*D5*
1	0	0.0					
2	4	80.0	S	S		S	S
3	0	0.0					
4	1	20.0		S			
5	1	20.0		S			
6	2	40.0			S	S	
7	0	0.0					
8	0	0.0					
9	2	40.0		S			S
10	1	20.0		S			
11	3	60.0		S	S	S	
12	1	20.0		S			
13	0	0.0					
14	1	20.0		S			
15	0	0.0					
16	1	20.0				S	
17	1	20.0					S
18	1	20.0			S		
19	2	40.0	S	S			
20	1	20.0		S			
21	1	20.0		S			
22	0	0.0	+				
23	1	20.0		S			
24	2	40.0		S		S	
25	1	20.0			S		
26	1	20.0			S		
27	1	20.0		S			
28	1	20.0	S				
29	1	20.0		S			
30	0	0.0					

İstatistiksel yazılımlar yardımıyla, eğer istenirse, gerek Tablo 5.1 gerek Tablo 5.3'de gözlemlere göre yapılan inceleme, sadece eksik gözlemler dikkate alınarak *gözlemlerin ve değişkenlerin eksik veri yapısına göre sıralandığı* tablolara da ulaşılabilinmektedir

(Tablo 5.4). Bu sunumda, en çok eksik veriye sahip değişken ve gözlemler en son sütun ve en son satırlarda yer almaktadır. Bu tabloda, D3'ün eksik gözlemlerinin D1'in küçük değerlerine, D3'ün tam gözlemlerinin D1'in büyük değerlerine karşılık geldiği daha kolaylıkla görülebilmektedir. Eksik veri içeren gözlemler arasında aşırı değer içeren gözlem yoktur.

Tablo 5.4. Sıralanmış Eksik Gözlemli Veriler (Eksik Veri Yapısı) ve Değişken Değerleri

	Eksik Veri İçin		Eksik ve Aşırı Değer Yapıları (*)					Değişken Değerleri				
Gözlem	Sayı	%	D1	D5	D4	D3	D2	D1	D2	D3	D4	D5
4	1	20.0					S	1.90	,	915.6	86	145
5	1	20.0					S	0.70	,	916.8	93	181
10	1	20.0					S	0.40	,	913.6	133	68
12	1	20.0					S	-1.60	,	919.2	60	54
14	1	20.0					S	4.00	,	919.0	153	269
20	1	20.0					S	6.20	,	909.5	94	96
21	1	20.0					S	8.50	;	913.4	61	26
23	1	20.0					S	5.40	,	907.1	30	46
27	1	20.0					S	2.00	,	913.2	62	68
29	1	20.0					S	0.40	,	906.8	51	27
19	2	40.0	S				S	,	,	912.7	142	195
28	1	20.0	S					,	92	906.0	35	50
17	1	20.0		S				4.40	80	912.5	128	,
9	2	40.0		S			S	0.50	,	921.7	114	,
24	2	40.0			S		S	4.60	,	906.3	,	66
16	1	20.0			S			4.40	72	919.0	,	228
6	2	40.0			S	S		2.00	79	,	,	98
25	1	20.0				S		2.60	73	,	48	46
26	1	20.0				S		0.70	75	,	42	48
18	1	20.0				S		1.40	78	,	109	154
11	3	60.0			S	S	S	-2.50	,	,	,	33
2	4	80.0	S	S	S		S	,	,	915.9	,	,

(*) Değişkenler eksik veri yapılarına göre en az eksik olandan en çok eksik olana gore sıraya dizilmiştir.

Gözlem sayısının fazla olduğu durumlarda eksik veri yapılarını tablolaştırmak iyi bir çözümdür. Örneğimiz için tablolaştırılmış eksik veri yapıları Tablo 5.5'de verilmiştir. Tablodaki X, ilgili değişken ya da değişkenleri tanımlamaktadır. Tablo 5.5'e ilişkin bazı açıklamalar aşağıdadır;

1) Tam gözlem sayısı 8'dir (Satır 1).

2) Diğer değişken değerlerinin tam, D2'de ise eksik verinin olduğu gözlem sayısı 10'dur. D2 değişkeni veriden çıkartıldığında tam gözlem sayısı 18'e çıkacaktır (Satır 2).

3) Diğer değişken değerlerinin tam, D3'de ise eksik verinin olduğu gözlem sayısı 3'dür. D3 değişkeni veriden çıkartıldığında tam gözlem sayısı 11 olacaktır (Satır 10).

4) Diğer değişken değerlerinin tam, D1 ve D2'de ise eksik verinin olduğu gözlem sayısı 1'dir. D1 ve D2 değişkeni veriden çıkartıldığında tam gözlem sayısı 20'ye çıkmaktadır (Satır 3).

5) Diğer değişken değerlerinin tam, D2 ve D3 ve D4'de ise eksik gözlemlerin olduğu gözlem sayısı 1'dir. Bu üç değişken veriden çıkartıldığında tam gözlem sayısı 25'e çıkmaktadır (Satır 11).

Tablo 5.5. Tablolaştırılmış Eksik Veri Yapıları

Gözlem	*Eksik Yapılar**					*İlgili Değişken Çıkartıldığında*
Sayısı	*D1*	*D5*	*D4*	*D3*	*D2*	*Gözlem Sayısı*
8						8
10					X	18
1	X				X	20
1	X					9
1		X				9
1		X			X	20
1			X		X	20
1			X			9
1			X	X		13
3				X		11
1			X	X	X	25
1	X	X	X		X	25

(*) Değişkenler eksik veri yapılarına göre en az eksik olandan en çok eksik olana göre sıraya dizilmiştir.

Yine, herhangi bir değişken çifti için; değişkenlerden birinin *eksik* diğerinin ise *eksik olmayan* değer içerdiği gözlem sayısının toplam gözlem sayısı içindeki payı da yüzde olarak bir tablo ile verilebilir (Tablo 5.6). Bu tablo ***uyuşmama yüzdesi tablosu*** olarak da adlandırılır. Tablo 5.6'da görüldüğü gibi, örneğin D2 ve D3 için; D2 ya da D3'de eksik değerleri olan gözlem sayısı yüzdesi % 60 (18/30) iken D1 ve D3 için bu yüzde % 26.67'dir (8/30). Bu tablonun köşegen elemanları ise, her bir değişkendeki eksik yüzdeleridir. Tablodan anlaşılacağı üzere diğer değişkenlerin D2 değişkeni ile olan uyuşmama yüzdeleri diğerlerine göre yüksektir.

Tablo 5.6. Uyuşmama Yüzdeleri

Değişkenler	D1	D5	D4	D3	D2
D1	10.00				
D5	13.33	10.00			
D4	20.00	20.00	16.67		
D3	26.67	26.67	20.00	16.67	
D2	46.67	46.67	46.67	60.00	50.00

Özet olarak, yukarıda verilen tablolar yardımı ile eksik verilerin nerelerde ve ne miktarda yoğunlaştığı, bir değişken için eksik olan bir değerin diğer değişken ya da değişkenler için de eksik olma eğiliminde olup olmadığı (ya da tersi), eksik veri yapısının diğer değişkenlerin değerleri ile ilişkili olup olmadığı, değişken silindiğinde gözlem sayısının ne olacağı ve değişkenlerin dağılım özellikleri anlaşılmaya çalışılır.

Eksik Veri Çeşitleri

Veridcki eksik değerlerin giderilmesi öncesinde eksik veri süreçlerinin belirlenmesi gerekir.

Bazen eksik veri süreci araştırıcının denetimi altındadır ve tanımlanabilir. Bu gibi durumlarda eksik veri "*ihmal edilebilir eksik veri*" olarak adlandırılır. Bu tür eksik veri sorununu çözmek için eksik veri sorununu çözecek belirli yöntemler kullanılmasına gerek duyulmaz. Örneğin, evrenden bir örneklem çektiğimizde, örnekleme girmeyen gözlemler bir eksik veri çeşiti olarak algılanabilir. Özet olarak, *istatistiksel çıkarsama; örneklem bilgilerinden yola çıkarak elde edilen sonuçları evrene genelleme sürecidir. Dolayısıyla, örneklem üzerinde yapılan çalışmalar, evrendeki tüm gözlemleri içeremediği için eksik veri üzerinde yapılan çalışmalardır.* Araştırmalarda iyi bir örnekleme planı yapılarak (olasılıklı örnekleme yöntemleri ile), örneklemde olmayan gözlemler nedeniyle ortaya çıkan eksik veri sorunu ihmal edilebilir konuma getirilebilir ve *örnekleme alınmama nedeniyle ortaya çıkan eksik veri* istatistiksel işlemlerde örnekleme hatasına eşdeğer tutulabilir. Diğer bir ihmal edilebilir eksik veri örneği sansürlü veridir. Tipik bir sansürlü veri örneği, incelenen kişinin ölüm nedeniyle araştırmadan ayrılmasıdır. Halen yaşayanlar tam bilgi vermeyeceğinden bu tür veriye sansürlü veri denir. Eksik verinin ihmal edilebilir olarak değerlendirilmesindeki mantık, eksik veri sürecinin ***rasgele*** olması, dolayısıyla eldeki verinin tam ve eksik değerler setinin ***rasgele örneklemi*** olmasıdır.

Diğer bir eksik veri süreci, bazen veri girişi hataları, anketin yarıda bırakılması, yanıtlayıcının rahatsızlığı gibi faktörlere bağlıdır. Bu gibi durumlarda araştırıcının eksik veri süreci üzerindeki denetimi sınırlı olmakla beraber, eksik verilerin ***rasgele olması*** durumunda bu soruna bazı çözümlemeler getirilebilmektedir.

Uygun olmayan sorular sorulması (örneğin, hiç evlenmemiş kişilere kaç yıldan beri evlisiniz sorusunun yöneltilmesi) bir diğer eksik veri kaynağıdır. Bu tür sorunlar da bazı çözümlemeler getirilebilmektedir.

Bazı eksik veri süreçleri kolaylıkla tanımlanamayabilir ve çözümlenemeyebilir. Bu tür eksik veri süreçlerinin çoğu doğrudan yanıtlayıcı kaynaklıdır. Örneğin, yanıtlayıcılar gelir düzeyi gibi bazı sorulara ya da tartışmalı konulara ilişkin yanıt vermeyi reddedebilirler. Bazen de bazı soruları yanıtlayacak düzeyde bilgi sahibi değildirler ya da ilgili konularda bir görüşleri yoktur. Araştırıcı, bu sorunların farkında olmalı, araştırma düzeninde ve veri toplama aşamasında eksik bilgiyi en aza indirmeye çalışmalıdır. *Ancak, eksik veri sorunu hala söz konusu ve eksik veri **rasgele bir yapıda** ise eksik verinin etkilerini azaltmak için bazı çözüm yollarına başvurulabilir. İstatistiksel çıkarsamanın mantığı gereği bir örneklemin evrenden rasgele seçilmesi ne kadar önemli ise bir örneklemdeki eksik verinin rasgele olup olmaması da o derecede önemlidir.*

Eksik Veri Yapısının İncelenmesi

Eksik veri sorununa bir yaklaşımda bulunup bulunmamaya karar vermek için eksik verideki rasgeleliğin derecesinin araştırılması gerekir. Bu amaçla sadece *D1* ve *D2* gibi iki değişkenimizin olduğunu ve sadece *D2*'nin eksik veri içerdiğini düşünelim. *D2*'nin ***eksik*** ve ***tam*** gözlemleri açısından D1'in değerleri arasında fark var ise *eksik* verinin ***rasgele olmadığı*** söylenir. Rasgeleliği belirlemek amacıyla yapılacak

herhangi bir çözümlemede, *D1* ile *D2* arasındaki eksik veri sürecinin belirgin bir şekilde çözüme kavuşturulması gerekir. Aksi durumda sonuçlara yanlılık yansıyacaktır.

Eksik veri içeren *D2* değişkeninin eksik değerleri *D1*'e bağlı ancak *D2*'ye bağlı değil ise eksik veri ***rasgele eksik*** (***MAR–Missing at Random***) olarak adlandırılır. Buna göre, gözlenen (elde edilen) *D2* değerleri, *D1*'in her bir değeri için gerçek *D2* değerlerinin rasgele bir örneklemini temsil eder. Ancak, gözlenen *D2* verisi tüm *D2* değerlerinin tamamen rasgele bir örneklemi olmadığı durumlarla da karşılaşılabilir. Bu durumda, eksik veri süreci, örneklem içinde rasgele olsa bile evrene genellenemeyecektir. Konuyu basitleştirmek için yanıtlayıcıların cinsiyetini (*D1*) bildiğimizi düşünelim ve bu bireylere hanehalkı gelir düzeylerine (*D2*) ilişkin soru soralım. Buradan, yapılacak bir analiz ile eksik verinin hem kadınlar hem de erkekler için rasgele dağıldığı sonucu elde edilebilir (*MAR*). Ancak, örneğin, erkeklerdeki eksik veri oranı kadınlardakine göre belirgin şekilde daha az ise (gelir sorusuna yanıt verme oranının erkek ve kadınlarda eşit olması beklenirken) sonuçlar evrene genellenemez. Çünkü, eksik veri süreci rasgele olmakla birlikte, eksik veri sorununa getirilecek bir çözüm, eksik veri sürecindeki sorunu hala yansıtacaktır. Diğer bir deyişle, *D2*'nin eksik değerleri gerçek *D2* değerlerinin gerçek bir rasgele örneklemi değildir. Görünüşte rasgele ancak evreni yansıtmayan bu durumda da eksik veri süreci *MAR* olarak nitelendirilebilir.

Daha yüksek düzeyde bir rasgelelik ise; ***tamamen rasgele eksik*** (***MCAR-Missing Completely at Random***) olarak adlandırılır. Bu durumda, gözlenen *D2* değerleri bütün *D2* değerlerinin gerçekten rasgele örneklemidir ve gözlenen veride yanlılığa yol açacak bir süreç yoktur.

MCAR ve *MAR* tanımlamalarını değişik bir yaklaşımla da vermek olasıdır. Buna göre *MCAR* tanımı; *eksikliğin değişkenlerin değerleri ile ilişkili olmaması* şeklinde yapılabilir. Bu amaçla yaş ile gelir düzeyi değişkenlerini ele alalım. Veri eksikliğinin yaş ve gelir düzeyi değerleri ile ilişkili olmaması durumunda eksik veri yapısının *MCAR* olduğu söylenir. Örneğin, yaş eksik veri içermez iken gelir düzeyi eksik veri içersin. Araştırmaya giren tüm kişiler için gelir düzeyinin veride yer alması olasılığı; kişilerin yaş ve gelir düzeylerini dikkate almaksızın eşit ise verinin *MCAR* olduğu söylenir. Gelir düzeyinin veride yer alması olasılığı yaş ile ilişkili ancak gelir düzeyi ile ilişkisiz ise veri *MAR*'dır.

Eksik Veri Sürecinde Rasgeleliğin Araştırılması

Daha önce belirtildiği gibi, eksik veri sürecinin *tamamen rasgele eksik* olarak ortaya çıkıp çıkmadığı araştırıcı tarafından incelenmelidir. Bu amaçla kullanılan üç yöntem vardır.

1. Veri yapısındaki bir değişkene ilişkin gözlemler eksik veri içerenler ve içermeyenler olarak iki gruba ayrılarak ***ilgilenilen diğer değişkenlerin değerleri*** açısından bu iki grup arasında anlamlı fark olup olmadığı araştırılır. Bu araştırma, bağımsız gruplarda iki ortalama arasındaki farkın anlamlılık testi (***t testi***) ile yapılır. Anlamlı fark, rasgele olmayan eksik veri sürecinin var olabileceğini gösterir. Ancak, bazı anlamlı farkların rasgele ortaya çıkması söz konusu olabilir. Dolayısıyla, rasgele olmayan bir yapıdan söz

edebilmek için bir dizi farklılığın ortaya çıkması gerektiği unutulmamalıdır. Örneğin, *D1*=yaş, *D2*=gelir düzeyi olsun ve *D2*'de eksik gözlemler bulunsun. *D2* değişkeni, eksik gözlemi olanlar ve olmayanlar şeklinde iki gruba ayrılarak her iki gruptaki yaş ortalamaları arasında fark olup olmadığı incelendiğinde; aradaki fark önemsiz ise eksik verinin rasgele olduğu söylenebilir. Ancak, belirgin bir yapının olup olmadığına karar verebilmek için diğer birkaç değişkenin de araştırıcı tarafından incelenmesi daha doğru olacaktır. Eğer elimizde, cinsiyet ve gelir düzeyi gibi bir veri (veri tipi olarak sırasıyla nitelik ve nicelik) olsa idi iki yüzdenin karşılaştırılması gerekecekti.

2. Rasgeleliğin araştırılmasında kullanılan ikinci yöntem, değişkenlerin ***eksik*** ve ***eksik olmayan*** şeklinde iki kategoriye indirilmesi ve değişken çiftleri arasında Pearson korelasyon katsayısının hesaplanmasıdır. Bu amaçla, eksik olmayan (tam) veriler 1, eksik veriler 0 olarak yeniden kodlanır. Bulunan korelasyon katsayıları, her bir değişken çifti için eksik veriler arasındaki ilişki miktarının derecesini belirtir (*Veriler 0 ve 1 şekline dönüştürüldüğünde, Pearson korelasyon katsayısı (r), ilgili değişkenlerle elde edilecek çapraz tablo yardımıyla bulunacak Phi katsayısına eşit çıkar*). Buna göre, düşük korelasyonlar her bir değişken çifti için eksik verideki rasgeleliği gösterir. Ancak, rasgele olmayan eksik veri sürecini tanımlamak için kesin bir kural söz konusu değildir. Diğer taraftan, korelasyon katsayısının anlamlılık testleri ise rasgeleliğin derecesini tanımlamada oldukça tutucu bir kestirim sağlamaktadır. Eğer rasgelelik tüm değişken çiftleri için sözkonusu ise, araştırıcı, eksik veriyi tamamen rasgele eksik–*MCAR* olarak sınıflandırabilir. Ancak, bazı değişken çiftleri arasında anlamlı korelasyonlar var ise veri rasgele eksik–*MAR* olarak düşünülebilir.

3. Rasgeleliği araştırmanın bir diğer yolu, rasgeleliğin *MCAR* olarak sınıflandırılıp sınıflandırılmayacağını belirlemek amacıyla ***tümel*** bir rasgelelik testinin uygulanmasıdır. Örneğin, ***Little'ın MCAR testi*** yardımıyla, tüm değişkenlerdeki eksik veri yapısı analiz edilir ve rasgele eksik veri süreci için beklenen yapı ile karşılaştırılır. Eğer anlamlı farklılıklar yok ise eksik veri *MCAR* olarak sınıflandırılır. Eğer anlamlı farklılıklar bulunursa (yani veri rasgele değil ise), rasgele olmayan eksik veri süreci ilk iki yöntemin kullanılması ile daha ayrıntılı olarak (rasgele olmayan eksik veri süreci hangi değişkenler nedeniyle ortaya çıkmaktadır) belirlenebilir.

Eksik Veri Sorununun Giderilmesine Yönelik Yaklaşımlar

Eksik verinin rasgele olup olmadığını belirledikten sonra giderilmesine yönelik yaklaşımlarda bulunulur. Eksik veri sorununun giderilmesinde kullanılan yaklaşımlar ya da çözümlemeler, eksik veri sürecinin rasgeleliği ve eksik veriyi kestirmede kullanılan yöntemlere dayalı olarak genellikle 4 başlık altında incelenebilir. Eksik verinin *MCAR* yapıda durumlarda uygulanabilecek yöntemler aşağıdaki ilk 3 anabaşlık altında verilmiştir. Eğer eksik veri rasgele olmayan ya da *MAR* yapısında ise yararlanılabilecek tek çözüm yolu özel olarak düzenlenmiş modelleme yöntemlerinden birinin kullanılmasıdır. Rasgele olmayan ya da *MAR* yapısındaki veriye bu yaklaşım dışında

çözüm arandığında sonuçlar yanlı olacaktır. Bu konuya aşağıdaki 4. anabaşlıkta kısaca değinilmiştir.

1. Tam Gözlemlerin Kullanılması Yöntemi (Listwise Method): Bu yöntemde, sadece tam (eksik veri bulunmayan) gözlemler kullanılır. Diğer bir deyişle, veride bir ya da daha fazla eksik değerlerin olduğu gözlemler veriden çıkartılır. Bu yöntemin olumsuz bir yanı, eksik değere sahip gözlemlerin veriden çıkartılmasının neden olduğu bilgi kaybıdır. ***İstatistik yazılımların çoğunda yer alan ve eksik veri sorununun çözümünde en basit ve doğrudan bir yaklaşım olan bu yöntemin kullanılabilmesi için, eksik verinin tamamen rasgele eksik yapıda (MCAR) olması gereklidir.*** Diğer bir deyişle bu yöntem sadece *MCAR* yapısına sahip veriler için kullanılmalıdır. Çünkü, *MCAR* olmayan yapı, sonuçları yanlılaştıracak rasgele olmayan elemanlara sahiptir. Diğer bir deyişle, *MCAR* varsayımı altında, tam gözlemlerin orijinal gözlemlerin rasgele bir örneklemi olduğu ve dikkate alınmayan eksik verili gözlemlerin kestirimleri yanlılaştırmayacağı, ancak değişkenlere ilişkin güven aralıklarında artışların görüleceği belirtilmektedir. Eğer eksik veri yapısı *MAR* ise gözlemlerin silinmesi durumunda sonuçlar yanlı olabilmektedir. Özetle, eğer yapı *MCAR* değil ise, tam gözlem yaklaşımında tam verili gözlemler kullanılmasına rağmen, yanlı sonuçlara neden olacak rasgele olmayan eksik veriler nedeniyle sonuçlar evrene genellenemez. Tam gözlem yaklaşımının; eksik verinin önemli bir bölümünün az sayıda gözlem üzerine yoğunlaştığı ya da eksik verili gözlem sayısının az ve bu gözlemlerin veriden çıkartıldığında bile örneklem büyüklüğünün yeterli olduğu ya da verideki ilişkilerin eksik veri süreci ile etkilenmeyecek kadar kuvvetli olduğu durumlarda kullanılması önerilmektedir. Bu nedenle, araştırıcıların, örneklem genişliğinin uygun olmayacak kadar az bir sayıya düşüp düşmediğine dikkat etmeleri gerekmektedir. İstatistik paket programları (örneğin *SPSS*) bu yönteme ilişkin ortalama vektörünü, kovaryans matrisini ve korelasyon matrisini çıktı olarak vermektedir.

2. Gözlem(ler)in ve/ya da Değişken(ler)in Silinmesi Yöntemi: Eksik verinin giderilmesine yönelik olarak bir diğer basit yaklaşım, eksik veri içeren gözlem(ler)in ve/ya da değişken(ler)in silinmesidir. Ancak, veriden çıkartılacak uygun eksik veri ya da değişken miktarının ne olacağı konusunda kesin bir yöntem sözkonusu değildir. Bu yöntem, sıklıkla, eksik verilerin küçük bir gözlem grubunda ve/ya da değişkende yoğunlaşması ve de bunların veriden çıkartılmasının eksik veriyi büyük oranda azaltması (ya da tam veriyi artırması) sözkonusu olduğunda kullanılmaktadır. Bu konuda araştırıcıya görev düşer. Araştırıcı, toplam gözlem sayısının fazla olduğu durumlarda Tablo 5.2 ve Tablo 5.5 gibi özet tablolar yardımıyla eksik verinin derecesi hakkında bilgi sahibi olduktan sonra, gözlem ve/ya da değişkenleri veriden çıkartma yoluna gidip gitmeyeceğine karar verir. Ancak, araştırıcının herhangi bir değişkeni kaybetmek istememesi de çok normaldir. Bazı yazarlar, bir değişkenin veriden çıkartılabilmesi için eksik veri oranının % 15'in üzerinde olmasını yeterli bulmaktadırlar. *Bazen, özellikle eksik verinin az sayıda olduğu ve/ ya da az sayıda değişkende yoğunlaştığı ve eksik veri yapısının rasgele olmadığı durumlarda da bu yönteme başvurularak rasgele bir yapıya ulaşılmaya çalışılabilinmektedir.* Eksik verilerin, "yapılacak çözümlemede bağımlı değişken olarak düşünülecek olan değişkende" olması durumunda (örneğin regresyon çözümlemesinde), bu gözlemlerin

veriden çıkartılması önerilmektedir. Böylece, 3. maddede verilecek *değer atama yöntemleri*nden biri ile değer ataması yapıldıktan sonra yapılacak olan çözümlemede, değer atanmasının yol açacağı yapay açıklayıcılık artışının önüne geçilebilir. Eğer eksik verilerin oldukça fazla olduğu bağımsız bir değişken söz konusu ve araştırıcı bu değişkeni veriden çıkartma eğiliminde ise bu değişkenin diğer bağımsız değişkenlerle yüksek derecede ilişkili olmasına özen gösterilmelidir. Genel bir yaklaşım olarak, çok değişkenli çözümlemede, *bir değişkenin silinmesine karşı eksik veri kaynağının ortadan kaldırılmasının getireceği kazanç* her zaman göz önünde bulundurulmalıdır.

*3. **Değer Atanma Yöntemleri (imputation methods)**:* Eksik verinin giderilmesine yönelik olarak başvurulacak bir yöntem; *örneklemdeki tam veri içeren **değişken ve/ya da gözlemlerin** değerlerine dayanarak eksik değerlerin kestirilmesidir (tahmin edilmesidir.)* İstatistiksel çözümlemeler, *eksik verileri kestirilmiş değerlerle doldurulan (tamamlanan) yeni veri* yardımıyla yapılır. Eksik değerlerin kestirilmesi için geliştirilmiş ***birçok yöntem*** vardır. Bu yöntemler ***değer atama yöntemleri*** olarak tanımlanırlar. Değer atama yöntemleri çekici olduğu kadar sonuca etkileri nedeniyle de tehlikeli olabilecek yöntemlerdir. Değer atama yöntemleri; örneklemin tümüne genelleştirmek amacıyla gözlemlerin bir alt kümesinden elde edilen tüm bilginin kullanılması ya da eksik veri yerine atanacak değerlerin kestirilmesi şeklinde tanımlanabilirler. Değer atama yöntemleri aşağıda tartışılmıştır.

*3.1. **Atama Yöntemi Olarak Eldeki Tüm Bilginin Kullanılması**:* Yukarıda açıklanmaya çalışılan *tam gözlemlerin kullanılması yöntemi*, ortalamaların ve basit frekans dağılımlarının elde edilmesi gibi tek değişkenli analizler için oldukça *savurgan* bir yaklaşımdır. Çünkü, bir değişkenin tam değeri, diğer değişken ya da değişkenlerde eksik veri olduğu için veriden çıkartılmaktadır. Bu nedenle, *eldeki tüm bilginin kullanılması yöntemi*ne sıklıkla başvurulur. Bu atama yöntemi, gerçekte eksik verilerin yerine konulması ya da eksik verilerin atanmış değerlerle doldurulması değil, eldeki tüm değerler yardımıyla dağılımı tanımlayıcı ölçülerin (ortalama, standart sapma vb) ve ilişki ölçülerinin (korelasyon, kovaryans) elde edilmesidir. İstatistik yazılımların çoğunda bu yönteme ilişkin menüler olduğu için araştırıcılarca sıklıkla kullanılmış ve bu yaklaşımla elde edilen korelasyon ya da kovaryans matrisleri örneğin *faktör analizi* için *girdi matrisi* olarak kullanılmıştır. Bu yönteme, ***eldekilerin tümü yaklaşımı*** da (all available approach) denir. Bu yöntem, istatistiksel yazılımlarda (örneğin *SPSS*'de) "***pairwise***" seçeneği ile yapılır ve yukarıda belirtildiği gibi sıklıkla iki değişken arasındaki gözlem sayısını enbüyükleyerek (maksimize ederek) korelasyon katsayılarını elde etmek ve dolayısıyla örneklemdeki tüm ikili bilgiyi enbüyüklemek için kullanılır. Bu yöntemin ayırdedici özelliği; her bir korelasyon için ayrı gözlem çiftlerinin ve her hesaplamada farklı sayıda gözlemin kullanılmasıdır. Bu yöntem yardımıyla elde edilen korelasyonlar bütün örneklemin temsilcisi olarak kabul edilir ve değer ataması yapılmaz. Daha önce açıklanmaya çalışılan *tam gözlemlerin kullanılması* yaklaşımında ise sadece tam (eksik verisi olmayan) gözlemler dikkate alınıyordu. Eğer eksik veri süreci tamamen rasgele eksik (*MCAR*) değil ise tam gözlemlerin kullanılması yönteminde olduğu gibi eldekilerin tümü yaklaşımında da elde edilen sonuçlar yanlı olabilecektir.

Eldeki tüm bilginin kullanılması yöntemi, bir değişkendeki bir eksik nedeniyle o gözlemin tamamen veriden çıkartılmasına neden olan sorunu ortadan kaldırması ve kullanılan veriyi en fazlaya çıkartmasına rağmen bazı sorunları da beraberinde getirebilmektedir. Bu sorunların en belirgini, korelasyonların beklenen sınırların dışında elde edilmesi ve hesaplanan korelasyonların korelasyon matrisindeki diğer korelasyonlar ile tutarsız olmasıdır. *x* ve *y* gibi iki değişken arasındaki korelasyon, bu değişkenlerin *z* gibi bir değişken ile yaptığı korelasyonlar ile sınırlı olup bu sınırlar aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$r_{xy}\text{'nin sınırları} = r_{xz} \times r_{yz} \pm \sqrt{(1-r_{xz}^2)(1-r_{yz}^2)}$$

Matristeki korelasyonlara ilişkin sınırları tanımlayan bu formüle göre, *x* ve *y*'nin diğer değişkenlerle yaptığı korelasyonlar arttıkça, *x* ile *y* arasındaki korelasyonun olası sınırları azalır. Bu durum, bir gözlem kümesinden elde edilen korelasyonun diğer gözlem kümesinden elde edilen korelasyonlarla tutarsız olması olasılığını artırır. Örneğin, *x* ile *y*'nin *z* gibi bir değişkenle korelasyonu sırasıyla 0.70 ve 0.30 olsun. Buna göre, *x* ile *y* arasındaki korelasyonun olası sınırları;

$$r_{xy}\text{'nin sınırları} = 0.70 \times 0.30 \pm \sqrt{(1-0.70^2)(1-0.30^2)} = [-0.47\,;+0.89]$$

olarak bulunacaktır. Dolayısıyla, bu sınırlar dışında bir korelasyon katsayısının elde edilmesi, sonuçların matematiksel olarak tutarsızlığını gündeme getirmektedir. Bu durumun, *iki korelasyonun gözlem kümelerinin ve sayılarının değişiklik göstermesi durumunda ortaya çıkması* oldukça olası olup, bu durum *eldekilerin tümü yaklaşımının* bir sonucudur.

Korelasyon katsayılarındaki bu soruna bağlı olarak ortaya çıkan bir diğer sorun ise, korelasyon matrisinin özdeğerlerinin (eigenvalues) 0'dan küçük (negatif) çıkabilmesidir. Bu durumda, korelasyon matrisinin varyans özellikleri değişir. Bu nedenle, korelasyon matrisleri düzeltilebilir. Bazı istatistik yazılımlar düzeltilmiş korelasyon matrislerini de çıktı olarak verebilmektedir. Bu sorunların tümü, eksik veriye eldekilerin tümü yaklaşımı ile çözüm arandığında dikkate alınmalıdır. *(Not: Özdeğerlerinin tümü pozitif olan matrise Pozitif Tanımlı Matris (positive definite matrix) denir. Bir matrisin pozitif tanımlı olmamasının nedenleri arasında; veride oldukça fazla eksik gözlemin olması ve korelasyon/kovaryans matrislerinin eldekilerin tümü yaklaşımıyla elde edilmesi, değişkenler arasında doğrusal bağımlılığın olması, herhangi bir değişkenl değerlerinin sabit olması, gözlem sayısının az olması, ...gibi nedenler söz konusudur.)*

İstatistiksel yazılımlar (Örneğin, *SPSS*), eksik veri analizi menüsünün Pairwise yöntemi seçeneğinde; ikişerli gözlem sayıları matrisi, kovaryans matrisi ve korelasyon matrisi ile eksik gözlemler veriden çıkartıldığında diğer değişkenlerin ortalama ve standart sapmalarında ne miktarda bir değişim olduğunu gösteren tabloları çıktı olarak vermektedir. Örneğimiz için ortalamalardaki değişim Tablo 5.7'de verilmiştir. Bu tablodaki her bir satırda, satır değişkeninin tam değerleri için sütun değişkenlerinin ortalamaları verilmektedir. Tam gözlemler dikkate alındığında D1'in ortalaması

2.3741'dir. Veriyi D3'ün tam gözlemleri ile sınırlandırdığımızda D1 değişkeninin ortalaması 2.7227'ye çıkmakta, D2'nin ortalaması ise 71.7857 olmaktadır.

Tablo 5.7. Pairwise Ortalamalar

Değişkenler	D1	D2	D3	D4	D5
D1	2.3741	71.7857	915.2182	82.5217	102.0800
D2	2.4000	73.1333	916.2364	76.6154	108.7857
D3	2.7227	71.7857	914.7760	85.2727	109.9091
D4	2.4174	72.7692	914.9182	83.0000	103.1304
D5	2.3680	72.6429	914.5136	79.6957	103.5926

3.2. Eksik Değerlerin Atanmış Değerlerle Değiştirilmesi: Değer atama yöntemine ikinci yaklaşım, örneklemdeki diğer bilgiye dayalı olarak kestirilen değerlerle eksik gözlemlerin yer değiştirmesidir. Bu amaçla geliştirilen birçok yöntem vardır. Bunların bazıları aşağıda tartışılmıştır.

3.2.1. Eksik Gözlem ile Tam Gözlemin Yer Değiştirmesi (Case Substitution): Bu yöntemin en yaygın örneği, örnekleme giren (örneklem çerçevesinde yer alan) ancak kendisine ulaşılamayan (verileri tamamen eksik olan) ya da bilgilerinde çok fazla eksik olan kişinin, *örneklemde olmayan ancak "örneğe giren ve kendisine ulaşılamayan kişinin özelliklerine benzer"* bir kişi ile yer değiştirmesidir. Kısaca, yedek denek atama şeklinde de özetlenebilir.

3.2.2. Eksik Gözlem ile Ortalamanın Yer Değiştirmesi (Mean Substitution): Eksik veri yerine atama yapmakta sıklıkla kullanılan yöntemlerden biri, incelenen değişkene ilişkin eksik değerlerin, o değişkene ilişkin tam gözlemlerin ortalaması ile yer değiştirmesidir. Bu işlem sonucunda, ***tam ve atanmış veriler*** için elde edilen ortalama ***tam veriler***le elde edilen ortalamaya eşit çıkacaktır. Bu yöntemin olumlu yönü, kolay uygulanabilir olması ve tam bilgiye sahip gözlemleri dikkate almasıdır. Bu yöntemin olumsuz yönleri de vardır. Örneğin, değişkenlerdeki tüm eksik gözlemler tek bir değer ile (ilgili değişkenin ortalaması ile) yer değiştirdiği için değişkenlerin gerçek dağılımından uzaklaşılır ve verideki gerçek varyans olduğundan küçük çıkar (Not: Tam ve atanmış verilerin varyansı $\left[(n^{(j)}-1)/(n-1)\right]s_{jj}^{(j)}$ ile verilir. Burada n: *toplam gözlem sayısı*, $n^{(j)}$: *tam gözlemlerin sayısı*, $s_{jj}^{(j)}$ ise *tam gözlemlerin varyansı*dır. Böylece, tam ve atanmış dağılımın varyansı $(n^{(j)}-1)/(n-1)$ çarpanı derecesinde olduğundan eksik bulunur.) Ayrıca, varyanstaki küçülmeye bağlı olarak bu değişken ile diğer değişkenler arasındaki korelasyon katsayıları daha düşük elde edilir.

3.2.3. Hot Deck Atama (Hot Deck Imputation): Bu atama yönteminde, verideki diğer gözlemlerden yararlanılır ve eksik gözlemin tam verilerine benzeyen gözlemler arasından rasgele seçilecek bir gözlemin ilgili değer(ler)i, eksik veriye sahip gözlemdeki eksik yer(ler)e atanır. Dolayısıyla, hot deck atama için, atama yapılacak gözleme benzeyen tam gözlemler kümesinin var olması ve tanımlanması gerekir. Bu yöntemin olumlu yanlarından biri, atama yapılan değişkenin varyansının ortalama atama yöntemindeki gibi sistematik bir etki altında olmayışıdır. Çünkü, ilgili değişkenin tam verili gözlemleri arasından seçilen rasgele bir değerin atanması söz konusudur.

Eksik gözleme benzeyen gözlemlerin oluşturduğu kümenin yeterince büyük olması; birbirine benzer eksik gözlemlerin söz konusu olduğu durumlarda, atanacak gözlemin tekrar atanma olasılığının azalmasını sağlaması açısından olumlu olacak iken yeterince küçük olması; atama yapılacaklar ile atanacaklar arasında benzerliklerin tanımlanması açısından olumlu olacaktır. Genellikle verileri tam olan gruptaki gözlemlerin eksik veri yerine atanacak değerlerinin birbirine benzer olması arzu edilir. Bu durumda eksik verili değişkenin alabileceği değerler hakkında da bir bilgimiz olacaktır. Ancak, eksik verili gözlemler ile tam gözlemlerin bir bire karşılık geldiği durumlarda (birbirine benzeyen 1 eksik 1 tam, 1 eksik 1 tam, ...) bu yöntem, bir gözlemin veride ikinci kez kullanılması ile aynı anlama gelecek ve veride ortalama atama yönteminde görülen sorunlarla karşılaşılabilecektir.

3.2.4. Cold Deck Atama (Cold Deck Imputation)*:** Bu yöntemde; *önceki çalışmalardan, aynı çalışmanın bir önceki uygulamasından* ya da *dış kaynaklardan elde edilen* ***sabit bir değer, ilgili değişkendeki tüm eksik değerler yerine atanır. Bu yöntemin *eksik gözlem ile ortalamanın yer değiştirmesi* yönteminden tek farkı, atanacak değerin kaynağıdır. Araştırıcı, dış kaynaklardan elde edilen değerin, eldeki veriler yardımıyla elde edilen ortalama gibi bir değerden daha geçerli olabileceğinden emin olmalıdır. Bu yöntem, ortalama atama yöntemine benzer olumsuzluklara sahiptir.

***3.2.5. Regresyon Atama (Regression Imputation)*:** Bu yöntemde, bir değişkendeki eksik değerler, regresyon çözümlemesi yardımıyla (bak. Bölüm 7) kestirilir. Regresyon çözümlemesinin temel amacı, bir ya da daha fazla bağımsız değişken yardımıyla bağımlı değişken değerlerinin kestirilmesidir. Regresyon atama yönteminde, bağımlı değişken eksik gözlemli değişken, bağımsız değişken(ler) ise diğer değişken(ler)dir. Bu yöntemin, özellikle, eksik verinin orta (ılımlı) düzeyde olduğu ve veride yaygın bir dağılım gösterdiği durumlarda kullanılması önerilmektedir. Ayrıca, değişkenler arasındaki ilişki yeterli olmalı ve iyi bir kestirim yapabilmek için bağımlı değişken bağımsız değişken(ler) tarafından yeterince açıklanmalıdır. Böyle bir açıklanma söz konusu değil ise eksik gözlemlere ortalamanın atanması daha uygun olacaktır. Bu yöntemin olumsuz tarafları da vardır; 1) Bu yöntemde değişkenler arasındaki ilişkiden yola çıkıldığı için atama sonucunda veride zaten var olan ilişki daha da kuvvetlenmiş olur, 2) Bu yöntemin kullanımı arttıkça, elde edilen veri kendine özgü bir yapıya ulaşabilir ve genellenebilirliği azalır, 3) Regresyon yöntemi sonucunda elde edilen kestirimin sınırları, veride var olan sınırların ötesinde bulunabilecektir (örneğin, bağımlı değişken değerleri 0 ile 20 arasında değişiyor ise bu aralıktaki bir değer için kestirim değeri 21 olarak bulunabilir). Bu nedenle bazı düzeltme işlemlerinin yapılması gerekli olur. *SPSS*'de eksik veri çözümlemesi menüsü (*MVA–Missing Value Analysis*) yardımıyla regresyon ataması yapmak *olanaklıdır*. Bu menüde; *kestirilen değerlere, rasgele seçilen bir tam gözlemin artık değeri* ya da *t dağılışına dayalı bir sapma miktarı* ekleyebilme seçenekleri de vardır.

***3.2.6. Çoklu Atama (Multiple Imputation)*:** Bu yöntemde, eksik veri, iki ya da daha fazla atama yönteminin birlikte kullanılması sonucunda kestirilir. Dolayısıyla, çoklu atama yöntemi, karma bir kestirim değeri elde etmeyi amaçlar. Bu *karma* kestirim değeri, genellikle, iki ya da daha fazla yöntemle elde edilmiş kestirim değerlerinin

ortalamasıdır. Bu son kestirimin tek bir yöntemle elde edilen kestirim değerine göre daha güvenilir olacağı düşünülmektedir.

4. EM (Expectation–Maximization) Yöntemi: Regresyon yöntemi gibi *EM* yöntemi de birçok araştırmacı tarafından sıklıkla kullanılmaktadır. *EM* yöntemi, yinelemeli (iterative) ve iki aşamalı bir yöntem olup *E* aşaması eksik veri için en iyi olası kestirimleri, *M* aşaması ise eksik veri atandığında ortalama, standart sapma ya da korelasyona ilişkin kestirimleri verir. Bu süreç, kestirilen değerlerdeki değişimin önemsenmeyecek derecede azalmasına kadar devam eder.

Örnek 5.1. Eksik veri yapılarını incelemek ve eksik veri sorununa çözüm aramak amacıyla bu bölümün sonunda verilen ve eksik veriler içeren çalışma ele alınacak ve ortalama ve standart sapma vektörleri ile korelasyon ve kovaryans matrisleri bulunarak çeşitli karşılaştırmalar aşağıda yapılacaktır.

Genel bir bilgi vermesi açısından 120 gözleme ilişkin tanımlayıcı istatistikler Tablo 5.8'de verilmiştir. İstenirse, değişkenlerin yapısı ile ilgili olarak Grafik 5.1'e benzer bir grafik de çizilebilir.

Tablo 5.8. 120 Gözleme İlişkin Tanımlayıcı istatistikler.

			Standart	Eksik Gözlem		Aşırı Gözlem sayısı*	
Değişken	*n*	*Ortalama*	*Sapma*	*Sayı*	*Yüzde*	*Küçük*	*Büyük*
D1	100	5.5320	5.9691	20	16.7	0	3
D2	72	70.0833	11.9797	48	40.0	0	0
D3	94	913.5255	5.5050	26	21.7	1	0
D4	97	56.4948	38.3189	23	19.2	0	1
D5	112	67.4196	51.9686	8	6.7	0	8
D6	104			16	13.3		

*(*) :(Q1 - 1.5*IQR. Q3 + 1.5*IQR) sınırları dışına çıkan gözlem sayısı*

Ancak, öncelikle % 50'den fazla eksik veri içeren gözlemlerin veriden çıkartılması daha uygundur. Bu amaçla, Tablo 5.4'deki gibi eksik veri yapılarını gösteren bir tablonun elde edilmesi yararlı olacaktır. Bu tabloda, Tablo 5.4'ün sağ tarafında yer alan *değişken değerlerinin* yer alması gerekmemektedir (Not:yer sorunu nedeniyle bu tablo burada verilmeyecektir.) Bu tabloyu kullanarak yapılan ön inceleme sonucunda, % 50'den fazla eksik veri içeren 9 gözlem (gözlem no: 2, 11, 38, 49, 74, 79, 91, 97, 107) veriden çıkartılmış ve $n=111$ gözlemli veride aşırı gözlemlerin olup olmadığı araştırılmıştır. Bu araştırma için kolaylık olması açısından kutu–çizgi grafiklerinden yararlanılmış ve D5 değişkenindeki 12. ve 13. gözlemlerin ***çok aşırı gözlem*** olarak nitelendirildiği görülerek bu gözlemlerin de veriden çıkartılmasına karar verilmiştir. Diğer aşırı gözlemlerin veriden çıkartılmaması uygun bulunmuştur. ***Dolayısıyla, toplam gözlem sayısı 109'a inmiştir.***

$n=109$ gözlemli veriye ilişkin tanımlayıcı istatistikler Tablo 5.9'dadır. Tablo 5.9'da görüldüğü gibi, eksik verisi en fazla olan değişken D2 (% 34.9) olup bunu % 18.3 ile D3 değişkeni izlemektedir. D5'de ise eksik veri yüzdesi % 3.7'dir. İçerdiği fazla eksik veri nedeniyle, D2 değişkenin veriden çıkartılması düşünülebilir. Ayrıca, değişkenlerin 3'ünde hala aşırı gözlemler söz konusudur. Ancak, bunlar veriden çıkartılmamıştır.

Tablo 5.9. n=109 için Tanımlayıcı İstatistikler

Değişken	n	Ortalama	Standart Sapma	Eksik Sayı	Eksik %	Aşırı Gözlem Sayısı Büyük	Aşırı Gözlem Sayısı Küçük
D1	95	5.5863	5.9662	14	12.8	0	3
D2	71	70.0000	12.0440	38	34.9	0	0
D3	89	913.2820	5.5313	20	18.3	1	0
D4	94	54.6809	35.8033	15	13.8	0	0
D5	105	65.0190	45.4932	4	3.7	0	5
D6	96			13	11.9		

(*) *:(Q1 - 1.5*IQR. Q3 + 1.5*IQR) sınırları dışına çıkan gözlem sayısı*

n=109 gözlem için tablolaştırılmış eksik veri yapıları Tablo 5.10'da verilmiştir. Buna göre tam gözlem sayısı 38'dir (% 34.9). Dolayısıyla, eksik verili gözlem sayısı 71'dir (% 65.1). En fazla eksik gözlem içeren *D2* değişkenindeki eksik gözlemler veriden çıkartıldığında tam gözlem sayısı 63'e çıkmaktadır. Ortak eksik veri yapısına sahip *D2* ve *D3* değişkenlerinin veriden çıkartılmasında ise tam gözlem sayısı 79'a çıkmaktadır. Araştırıcı, *D2* ya da *D2* ve *D3* değişkenlerinin veride kalmamasının bir sorun yaratmayacağını düşünüyor ise, eksik veri yapısındaki rasgeleliğin derecesini de dikkate alarak 79 tam gözlemli ve 3 değişkenli veri ile de çalışabilir. İstenirse, 1 eksik verili yapılar bu tabloda gösterilmeyebilir. İstatistik yazılımlarda buna ilişkin seçenekler vardır.

Tablo 5.10. n=109 İçin Tablolaştırılmış Eksik Veri Yapıları

Gözlem Sayısı	Eksik Yapılar* D5	D1	D4	D3	D2	İlgili Değişken Çıkartıldığında Gözlem Sayısı
38						38
25					X	63
2				X	X	79
14				X		52
2		X		X		59
5		X				43
5		X			X	73
5			X		X	74
6			X			44
2			X	X		60
1	X		X			46
1	X					39
1	X	X				45
1		X	X			50
1	X				X	65

(*) Değişkenler eksik veri yapılarına göre en az eksik olandan en çok eksik olana göre sıraya dzilmiştir.

Daha sonra eksik verideki rasgeleliğin araştırılması gerekmektedir. Bu amaç için kullanılan üç yöntemden daha önce söz edilmişti. Bu yöntemlerden *t testi yaklaşımı*'na ilişkin sonuçlar Tablo 5.11'de verilmiştir. Buna göre; *D1* değişkenindeki tam gözlemleri 1, eksik gözlemleri 0 olarak kodlayarak bu iki grubun *D2* değişken değerlerini karşılaştırdığımızda bağımsız gruplarda iki ortalama arasındaki farkın önemlilik testine ilişkin *t* değeri 0.2 olarak bulunur. Yani *D1*'in eksik ve tam değerleri açısından *D2* değerleri arasında fark yoktur (p=0.859). Bu ise *D1* değişkenindeki eksik veri yapısının

D2 açısından rastgele olduğunu gösterir. Benzer şekilde *D3* için *t=1.3* ve *p=0.226* olarak bulunmuştur.

Tablo 5.11. Rasgeleliğin t Testi İle Araştırılması

		D1	*D2*	*D3*	*D4*	*D5*
D1	t Değeri	,	0.2	1.3	1.5	-0.2
	Serbestlik derecesi	,	9.2	15.4	16.4	14.8
	P değeri (iki yönlü)	,	0.859	0.226	0.147	0.867
	Tam Gözlem Sayısı	95	62	77	81	92
	Eksik Gözlem Sayısı	0	9	12	13	13
	Tam Göz. Ortalaması	5.5863	70.1290	913.5545	56.8642	64.7065
	Eksik Göz. Ortalaması	,	69.1111	911.5333	41.0769	67.2308
D2	t Değeri	.4	,	0.1	-1.3	0.1
	Serbestlik derecesi	54.1	,	84.7	69.2	83.7
	P değeri (iki yönlü)	0.695	,	0.895	0.205	0.894
	Tam Gözlem Sayısı	62	71	53	61	68
	Eksik Gözlem Sayısı	33	0	36	33	37
	Tam Göz. Ortalaması	5.7758	70.0000	913.3434	51.2787	65.4412
	Eksik Göz. Ortalaması	5.2303	,	913.1917	60.9697	64.2432
D3	t Değeri	0.3	0.0	,	-1.3	-1.3
	Serbestlik derecesi	34.7	33.0	,	29.2	31.8
	P değeri (iki yönlü)	0.796	0.962	,	0.206	0.206
	Tam Gözlem Sayısı	77	53	89	76	85
	Eksik Gözlem Sayısı	18	18	0	18	20
	Tam Göz. Ortalaması	5.6494	70.0377	913.2820	52.5789	62.4706
	Eksik Göz. Ortalaması	5.3167	69.8889	,	63.5556	75.8500
D4	t Değeri	-0.7	**-2.8**	1.1	,	-0.2
	Serbestlik derecesi	17.5	13.7	16.3	,	15.5
	P değeri (iki yönlü)	0.491	**0.015**	0.283	,	0.811
	Tam Gözlem Sayısı	81	61	76	94	91
	Eksik Gözlem Sayısı	14	10	13	0	14
	Tam Göz. Ortalaması	5.4025	68.6393	913.5526	54.6809	64.5055
	Eksik Göz. Ortalaması	6.6500	78.3000	911.7000	,	68.3571

Bu tablodaki serbestlik dereceleri ve *t* değerleri *varyansların eşit olmadığı* duruma ilişkindir. *D1*'in tam gözlemlerine karşılık gelen *D2*'deki gözlem sayısı 62 olup ortalaması 70.1290'dır. *D1*'in eksik gözlemlerine karşılık gelen *D2*'deki gözlem sayısı 9 olup ortalaması 69.1111'dir. Ayrıca, % 5'den daha az eksik veriye sahip olan *D5* değişkeni satırda yer alınamıştır. Çünkü, bu değişkene göre elde edilecek t değerlerini incelemek gözlem sayısı azlığı nedeniyle pek anlamlı olmayacaktır. İstatistiksel yazılımlarda buna ilişkin seçenekler de vardır.

Tablo 5.11 tümel olarak incelendiğinde, t istatistiğinin anlamlı olduğu sadece bir durum söz konusudur. Dolayısıyla, verideki eksik veri yapısının rasgele olduğu söylenebilir.

Bu aşamada, karşılaştırmalardaki gözlem sayılarına da dikkat edilmesi gerekir. Çünkü, örneğin 3 gözlem ile 53 gözlemin karşılaştırılmasının yapılması ve anlamlı fark bulunması sonucunda, *rasgele olmama yönünde bir karar verme* oldukça sıradışıdır.

Rasgeleliğin araştırılmasında kullanılan ikinci yöntem değişkenlerdeki eksik değerleri *0*, tam değerleri *1* olarak kodlayarak Pearson korelasyon katsayılarının hesaplanması idi. İlgili korelasyon matrisi Tablo 5.12'de verilmiştir. Görüldüğü gibi iki durumlu değişkenler arasında yüksek bir ilişki yoktur. Bu da veri yapısındaki rasgeleliği bize göstermektedir.

*Tablo 5.12. Rasgelelik İçin Pearson Korelasyon Matrisi**

	D1	D2	D3	D4	D5
D1	1.000				
D2	0.007	1.000			
D3	-0.040	-0.247	1.000		
D4	-0.074	-0.013	-0.052	1.000	
D5	0.071	-0.040	-0.093	0.064	1.000

(*) Değişkenlerdeki eksik veriler 0, tam veriler 1 olarak kodlanmıştır.

Rasgeleliğin araştırılmasında kullanılan üçüncü yöntem, eksik verinin *tamamen rasgele eksik* olup olmadığını test eden *Little'ın MCAR* testi idi. Örneğimiz için *test istatistiği, serbestlik derecesi* ve *P değeri, SPSS* yardımıyla *Ki-kare=45.615, sd=47* ve *P=0.530* olarak elde edilir. Dolayısıyla, eksik veri sürecinin tamamen rasgele eksik *(MCAR)* yapıda olduğu sonucuna ulaşılır. Özellikle bu bulgu sonucunda, eksik veri sorununun giderilmesine yönelik olarak daha önce sözü edilen yöntemlerden biri kullanılabilir. Çünkü, eksik veri yapısında yanlılığa neden olan bir durum söz konusu değildir.

Daha önce belirtildiği gibi eksik veri ile ilgili olarak çeşitli yaklaşımlar olmakla birlikte, bu yaklaşımların beraberinde getirdiği olumsuz yanlar da sözkonusudur. İncelediğimiz veride en çok eksik gözleme sahip *D2* değişkeni veriden çıkartıldığında tam gözlem sayısı ancak 63 olabilmektedir. Tüm değişkenler dikkate alındığında ise tam gözlem sayısı 38'dir. Bu ise, birçok çok değişkenli çalışma için yeterli sayılabilecek bir gözlem sayısı değildir. Yukarıda verilen yöntemlerden tam gözlemlerin kullanılması (listwise), eldekilerin tümü (pairwise), ortalama atama (mean substitution) ve *EM* (Expectation-Maximization) yöntemleri ile elde edilen ortalama ve varyanslar sırasıyla Tablo 5.13 ve Tablo 5.14'de verilmiştir. İstatistik yazılımlar isteğe bağlı olarak atama yöntemleri için atama yapılmış dosyaları (files) da vermektedir. Tablo 5.13'de görüldüğü gibi tam gözlem yaklaşımı *(listwise)* ile elde edilen ortalamalar diğerlerine göre farklılık göstermektedir. *Eldekilerin tümü (pairwise)* yöntemi ve *ortalama atama* yöntemi ile elde edilen ortalamalar ise aynıdır. Çünkü, eksik gözlemler yerine ortalama değer atanmaktadır. Tablo 5.14'deki standart sapmalar incelendiğinde ise, daha önce yaptığımız tanımlamalar doğrultusunda bir sonuç elde edilmiş ve standart sapmalar ortalama atama yönteminde diğerlerine göre daha düşük bulunmuştur.

Tablo 5.13. Dört Yönteme Göre Ortalama Kestirimleri

Yöntem	*D1*	*D2*	*D3*	*D4*	*D5*
Listwise	6.0263	68.6053	913.7579	48.1053	60.6842
Pairwise	5.5863	70.0000	913.2820	54.6809	65.0190
Ort. Atama	5.5863	70.0000	913.2820	54.6809	65.0190
EM	5.7299	70.0054	913.4015	53.9767	65.7459

Tablo 5.14. Dört Yönteme Göre Standart Sapma Kestirimleri

Yöntem	*D1*	*D2*	*D3*	*D4*	*D5*
Listwise	5.9610	11.2815	6.3514	37.9222	47.6026
Pairwise	5.9662	12.0440	5.5313	35.8033	45.4932
Ort. Atama	5.5661	9.6963	4.9930	33.2240	44.6428
EM	5.9865	11.7980	5.4513	36.3474	46.3497

Karşılaştırma yapabilmek açısından örneğimize ilişkin *listwise*, *pairwise*, *EM* ve *ortalama atama* yöntemlerine ilişkin korelasyon matrisleri tek bir matris üzerinde Tablo 5.15'de verilmiştir. İstendiğinde ***korelasyon*** ve ***kovaryans matrisleri*** ayrı ayrı da elde edilebilir.

Tablo 5.15. Dört Yönteme İlişkin Korelasyon Matrisi

		D1	D2	D3	D4	D5
D1	LW	1.000				
	PW	1.000				
	EM	1.000				
	ORT	1.000				
D2	LW	-0.260	1.000			
	PW	-0.383	1.000			
	EM	-0.408	1.000			
	ORT	-0.252	1.000			
D3	LW	-0.216	-0.468	1.000		
	PW	-0.174	-0.512	1.000		
	EM	-0.115	-0.423	1.000		
	ORT	-0.154	-0.382	1.000		
D4	LW	-0.229	-0.450	0.635	1.000	
	PW	-0.304	-0.298	0.521	1.000	
	EM	-0.254	-0.197	0.515	1.000	
	ORT	-0.260	-0.214	0.439	1.000	
D5	LW	-0.128	-0.284	0.518	0.775	1.000
	PW	-0.167	-0.159	0.458	0.766	1.000
	EM	-0.168	-0.067	0.440	0.789	1.000
	ORT	-0.153	-0.133	0.413	0.654	1.000

LW: Tam gözlemlerin kullanılması (listwise) PW: Eldekilerin tümü (Pairwise)
EM: Expectation-Maximization ORT: Ortalama atama (Mean Substitution)

Tablo 5.15'deki korelasyon katsayıları incelendiğinde, bazı değişkenler arasındaki korelasyon katsayıları oldukça benzerken, bazılarında da belirgin farklılıklar vardır. Örneğin, *D1* ve *D2* için *LW* ve *ORT* yöntemi sonuçları, *D4* ve *D5* için *LW*, *PW* ve *EM* sonuçları birbirine çok benzerdir. Ancak, sonuçlar tümel olarak incelendiğinde, tüm

değişkenler açısından birbirine benzer sonuçlar veren yöntemler yoktur. Araştırıcı, ilgili yöntemlerin olumlu ve olumsuz yanlarını dikkate alarak en uygun yaklaşımı seçmelidir. Böyle durumlarda kullanılacak bir yöntem; atama yöntemleri ile kestirilen değerlerin ortalamasının alınması ve gerekli istatistiklerin bu yeni veri yardımıyla elde edilmesidir (çoklu atama).

Değişik yaklaşımlarla elde edilen korelasyon matrislerini karşılaştırabilmenin bir diğer yolu da; korelasyonlara ilişkin fark değerleri matrislerinin incelenmesidir. Bazı istatistik yazılımlar istendiğinde bu tür çıktı da verebilmektedir. Örneğimiz için *LW* ve *EM* yöntemleri ile kestirilen korelasyonlara ilişkin fark matrisi Tablo 5.16'da verilmiştir.

Tablo 5.16. LW ve EM Yöntemleri İle Elde Edilen Korelasyon Kestirimleri Fark Matrisi

	D1	D2	D3	D4	D5
D1	0.000				
D2	0.148	0.000			
D3	–0.101	–0.045	0.000		
D4	0.025	–0.253	0.120	0.000	
D5	0.040	–0.217	0.078	–0.014	0.000

Not:Bu bölümün hazırlanmasında öncelikle Kaynakçadaki 20, 22 ve 28 nolu kaynaklardan yararlanılmıştır.

Tablo 6.17. Örnek 5.1 Verisi (D1: Sıcaklık, D2: Nem, D3: Basınç, D4: SO_2, D5:Partiküler Madde)

No	D1	D2	D3	D4	D5
1	0,7	66	918,9	66	53
2	,	,	915,9	,	,
3	1,0	74	915,1	87	135
4	1,9	,	915,6	86	145
5	0,7	,	916,8	93	181
6	2,0	79	,	,	98
7	1,6	70	916,5	63	200
8	-0,2	65	925,1	56	39
9	0,5	,	921,7	114	,
10	0,4	,	913,6	133	68
11	-2,5	,	,	,	33
12	-1,6	,	919,2	60	54
13	3,3	65	918,9	122	149
14	4,0	,	919,0	153	269
15	3,8	76	921,9	162	263
16	4,4	72	919,0	,	228
17	4,4	80	912,5	128	,
18	1,4	78	,	109	154
19	,	,	912,7	142	195
20	6,2	,	909,5	94	96
21	8,5	,	913,4	61	26
22	11,0	58	913,6	37	24
23	5,4	,	907,1	30	46

No	D1	D2	D3	D4	D5
24	4,6	.	906,3	.	66
25	2,6	73	.	48	46
26	0,7	75	.	42	48
27	2,0	.	913,2	62	68
28	.	92	906,0	35	50
29	0,4	.	906,8	51	27
30	-3,1	74	911,1	41	36
31	-4,5	.	914,4	64	57
32	-1,6	.	918,2	76	84
33	0,2	.	912,4	65	69
34	4,1	.	912,2	83	103
35	6,1	81	915,2	.	119
36	5,4	93	.	65	85
37	5,5	85	906,4	38	41
38	1,8	.	.	.	.
39	.	64	.	32	48
40	-0,9	65	919,4	42	64
41	-0,2	.	.	62	79
42	0,6	64	921,3	54	56
43	2,1	.	919,6	85	65
44	5,8	77	912,7	67	33
45	1,6	63	917,6	32	30
46	0,4	70	916,5	38	29
47	5,3	.	917,4	.	71
48	.	81	911,8	.	83
49	.	.	.	.	27
50	-1,4	.	923,6	68	86
51	2,0	59	922,1	126	147
52	6,0	66	926,1	143	167
53	7,6	64	.	76	74
54	7,5	65	.	101	118
55	8,2	65	.	101	115
56	7,5	62	915,8	86	84
57	3,5	60	919,2	44	46
58	2,4	61	.	38	40
59	4,5	57	.	78	90
60	5,9	.	.	114	122
61	5,4	65	.	105	77
62	.	45	920,5	79	67
63	6,7	48	920,3	116	96
64	9,2	46	916,7	141	130
65	8,0	.	912,1	85	77
66	5,2	.	916,2	48	48
67	7,2	47	912,5	48	39
68	10,1	51	.	52	32
69	9,9	86	909,6	38	21
70	.	.	903,9	22	39
71	1,7	86	908,2	.	25
72	3,2	.	916,4	36	35
73	4,2	.	912,9	47	38
74	.	.	.	.	42
75	-2,8	93	896,3	12	33

No	D1	D2	D3	D4	D5
76	-1,1	80	901.9	,	26
77	-0,6	85	904.4	16	24
78	-1.0	94	911.8	,	26
79	,	,	.	25	.
80	1.8	84	.	29	60
81	1.7	.	909,8	14	22
82	-1,3	70	908,6	23	21
83	-3.3	82	915,5	27	35
84	-0,8	.	917.4	44	55
85	,	,	911,8	39	45
86	6.3	74	908,2	33	61
87	.	72	,	41	150
88	.	.	905.2	25	44
89	4.4	72	.	22	26
90	.	,	917,6	29	40
91	,	,	916,5	,	62
92	9,1	65	912,3	33	46
93	6,0	.	910	,	35
94	9,8	74	915.8	30	97
95	12,1	66	919,5	42	107
96	14,4	61	918,7	.	91
97	15,4	.	916	,	.
98	,	50	914,1	34	40
99	19.0	56	,	29	41
100	.	58	916,1	30	62
101	21,2	,	917.3	.	58
102	21,6	.	914,1	20	30
103	20,7	,	910,7	18	30
104	17,8	55	912,4	14	34
105	17,7	,	911,7	18	32
106	17,4	55	907,3	17	35
107	,	,	,	,	28
108	16,5	58	904,3	13	38
109	12,6	72	906,0	12	26
110	10.2	65	909.9	.	.
111	7,0	84	.	,	14
112	.	86	908,5	19	11
113	8,2	74	912,2	19	14
114	8,6	77	914,5	15	13
115	,	74	910,2	7	,
116	12,3	81	903,1	9	22
117	12,3	,	904,6	,	17
118	12.7	,	909,5	24	24
119	13,8	70	913,1	15	39
120	13,2	86	913,9	13	42

Bölüm 6

ÇOK DEĞİŞKENLİ HİPOTEZ TESTLERİ

Giriş

Çoğu temel istatistik-biyoistatistik kitabında, uygulamada çok kullanılan bazı hipotez testleri ayrıntılı şekilde yer almakta ve bu testler parametrik ve parametrik olmayan testler ana başlıklarında ele alınarak incelenmektedir. Bilindiği gibi **parametrik hipotez** testlerinin örneklemin çekildiği **evren ile ilgili** iki temel varsayımı; **normallik** ve **varyansların homojenliği** varsayımıdır. İnceleyeceğimiz çok değişkenli hipotez testlerinde, bu varsayımların çok değişken için genelleştirilmiş durumu olan; çok değişkenli normallik ve varyans-kovaryans matrislerinin eşitliği varsayımları söz konusudur. Bu nedenle, bu bölümde inceleyeceğimiz çok değişkenli hipotez testlerini *çok değişkenli parametrik hipotez testleri* olarak düşünebiliriz.

Gerek parametrik gerekse parametrik olmayan testlerin **örneklemle ilgili** iki önemli varsayımı ise; **gözlemlerin (deneklerin) evrenden rasgele seçilmesi** ve **gözlemlerin (deneklerin) birbirinden bağımsız olarak seçilmesi (bir deneğin seçiminin diğer deneklerin seçimini etkilememesi)** varsayımıdır[49].

Çok Değişkenli Hipotez Testlerinin Gerekliliği

α yanılma düzeyinin 0.05 olarak alındığı tek değişkenli bir testte, evren ortalamaları arasında fark yok iken örneklemden de farksız sonuç bulma olasılığı 0.95'tir. p tane bağımsız testin bu koşullar altında uygulanması durumunda, bu olasılık 0.95^p olur. Buradan, örneğin p=5 için, şansa bağlı olarak en azından bir önemli sonuç bulma olasılığı ise $1-0.95^5 = 0.23$ olacaktır.

Değişkenler birer birer tek değişkenli test ile test edilirlerse, gerçekte evren ortalamaları arasında fark yokken, "$1-0.95^p$ olasılıkla şansa bağlı olarak en azından bir önemli sonuç" evren ortalamaları arasında fark olduğunu gösterecektir. Yukarıda değinildiği gibi, ne kadar çok test uygulanırsa, değişkenler arasında fark yok iken en az bir tane önemli sonuç bulma olasılığı o kadar artacaktır. Örneğin, 10 tane hipotez için $1-0.95^{10}=0.40$ olarak bulunacaktır. Bu olasılığa tümel I. tip hata da denir. Bu kadarlık bir

hata ile sonuçlara ulaşmak oldukça yanıltıcı olacaktır. Halbuki T^2 testi gibi çok değişkenli bir testte, 0.05 yanılma düzeyi kullanıldığında, 0.05 olan I. tip hata, testin içerdiği değişken sayısı ile ilişkili değildir. Bu da özellikle değişken sayısı fazla olduğunda, tek değişkenli testlere göre bir avantaj sağlar. Kısaca, birkaç test yapmak yerine bir tane çok değişkenli test yapmak, birçok durumda daha iyi bir seçenektir.

Tek değişkenli testler, değişkenler arasındaki ilişkinin bir göstergesi olan kovaryansı (ya da korelasyonu) dikkate almadıklarından, değişkenler arasında var olan bilginin daha az bir bölümünü kullanırlar. Diğer taraftan, çok değişkenli hipotez testlerine ilişkin test istatistiklerinin hesaplanmasında, değişkenler arasındaki ilişkiler kovaryans matrisi aracılığı ile dikkate alınır.

Birden çok değişken açısından gruplar arasında fark olup olmadığı tek değişkenli testlerle araştırıldığında, değişkenler açısından gruplar arasında anlamlı bir fark çıkmayabilir. Ancak, çok değişkenli testlerle birleşik değişkenler kümesi arasında fark arandığından gruplar arasında fark çıkabilir. Diğer bir deyişle, birkaç değişkendeki küçük farklılıklar tümel farklılık yaratabilir. Çok değişkenli testler bu tür durumlarda daha güçlü olabilmektedir.

Bu bölümde, çok kullanılan bazı tek değişkenli hipotez testlerinin çok değişkenli karşılıkları üzerinde durulacak ve bazı çok değişkenli testlerin tek değişkenli yaklaşımla elde edilen sonuçlarına da yer verilecektir. Bu testler aşağıda verilmiştir.

1. Çok Değişkenli Evren Ortalaması Önemlilik Testi
2. Birden Fazla Gruba İlişkin İki Eş Arasındaki Farkın Önemlilik Testinin Çok Değişkenli Evren Ortalaması Önemlilik Testi Yardımıyla Çözümü
3. Bağımsız İki Gruba İlişkin Ortalama Vektörlerinin Karşılaştırılması
4. Çok Değişkenli Tek Yönlü Varyans Analizi (MANOVA)
5. Çok Değişkenli İki Yönlü Varyans Analizi
6. Tekrarlı Ölçümlerde Tek Yönlü Varyans Analizi
7. Tek Etken Üzerinde Tekrarlamaların Olduğu Tekrarlı Ölçümlerde İki Yönlü Varyans Analizi

Ayrıca, tek değişkenli testlerden "varyansların homojenlik testi"nin çok değişkenli karşılığı olan *varyans-kovaryans matrislerinin homojenliği* ile *korelasyon matrisinin sıfıra eşit olup olmadığına ilişkin test*ler üzerinde de örneklerle durulacaktır.

Çok Değişkenli Evren Ortalaması Önemlilik Testi

Tek değişkenli hipotez testlerinden "evren ortalaması önemlilik testi", örneklemden elde edilen bir ortalamanın, evren ortalaması olarak kabul edilen hipotetik bir değerden farklı olup olmadığını test etmekte kullanılıyordu. Örneğin, Doğu Anadolu Bölgesi'nde hemoglobin ortalamasının $\mu_0 = 13.5$ mg olup olmadığını öğrenmek istediğimizde, belli bir örneklem üzerinde çalışarak bulunacak olan örneklem ortalamasını; ($\bar{x}$) ve standart hatasını da $s_{\bar{x}}$ olarak gösterdiğimizde, test istatistiği;

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \qquad (6.1)$$

ile veriliyor ve bu test istatistiği *n-1* serbestlik dereceli bir *t* dağılımı gösteriyordu. Bu teste ilişkin H_0 ve H_1 hipotezlerini;

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

şeklinde kurduğumuzda hesapla bulunan *t* değerinin, Eşitlik (6.1), mutlak değeri ($|t|$), *n-1* serbestlik dereceli ve $\alpha/2$ yanılma düzeyindeki *t* tablo istatistiği ($t_{(n-1;\alpha/2)}$) ile karşılaştırıldığında,

$$t_{Hesap} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} > t_{Tablo(n-1;\alpha/2)} \qquad (6.2)$$

ise H_0 hipotezi reddediliyor ve H_1 hipotezi kabul ediliyordu.

Çok değişkenli evren ortalaması önemlilik testinde ise birden çok değişkene ilişkin örneklem ortalamasını içeren ortalama vektörü, evren ortalama vektörü ile karşılaştırılır. Diğer bir deyişle, çok değişkenli evren ortalaması önemlilik testi, tek değişkenli evren ortalaması önemlilik testinin birden çok değişken için genellenmiş durumudur.

Varsayımları

Bu testin varsayımı, verilerin çok değişkenli normal dağılım göstermesidir. Gözlem sayısı oldukça fazla olduğunda bu varsayım gözardı edilebilir.

Hipotezler ve Test İstatistiği

H_0 ve H_1 hipotezleri aşağıdaki gibi kurulabilir;

$$H_0 : \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ . \\ \mu_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{01} \\ \mu_{02} \\ . \\ \mu_{0p} \end{bmatrix} \quad H_1 : \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ . \\ \mu_p \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \mu_{01} \\ \mu_{02} \\ . \\ \mu_{0p} \end{bmatrix}$$

Karara varabilmek için çok değişkenli T^2 istatistiği elde edildikten sonra F istatistiğine dönüşüm yapılır. T^2 istatistiğini bulabilmek için (6.2) ifadesinin karesini alırsak;

$$t^2 = \frac{(\bar{x} - \mu_0)^2}{s^2 / n} = n(\bar{x} - \mu_0)(s^2)^{-1}(\bar{x} - \mu_0) > t^2_{(n-1;\alpha/2)} \qquad (6.3)$$

yazılabilir. Bu ifade çok değişken için genellenirse;

$\bar{x}$: *Örneklem ortalama vektörü*

S^{-1} : *Tekil olmayan örneklem varyans-kovaryans matrisi*

μ_0 : *Evren ortalama vektörü*

olmak üzere T^2;

$$T^2 = n(\bar{x} - \mu)' S^{-1}(\bar{x} - \mu) \qquad (6.4)$$

olarak yazılır ve T^2 istatistiği;

$$F = \frac{(n-p)}{(n-1)p} T^2 \qquad (6.5)$$

olmak üzere p ve n-p serbestlik dereceli bir F dağılımı gösterir. (6.5) ile bulunan F hesap değeri p ve n-p serbestlik dereceli bir F tablo değerinden (Ek Tablo E) büyük ise H_1 hipotezi kabul edilir ve en az bir değişkenin ortalaması, ilgili evren ortalamasından farklıdır denir. Konu ile ilgili uygulama Örnek 6.1'de verilmiştir.

Örnek 6.1. En az 20 kez milli olmuş, 18 yaşın üzerindeki erkek orta mesafe yüzücülerinin oksijen tüketim kapasitelerinin (*MAXVO2*) 68 ml/kg/dk, benç presteki maksimum kaldırma kuvvetlerinin (*MKK*) 40 kg ve genel spor bilgisi puanlarının (*SBİL*) 65 puan olup olmadığı öğrenilmek isteniyor. Bu amaçla belirlenen özelliklere uyanlar arasından 25 yüzücü rasgele seçilerek gerekli ölçümler yapılıyor. Araştırma sonuçları Tablo 6.1'de verilmiştir.

Tablo 6.1'e ilişkin ortalama vektörü ($\bar{x}$), varyans-kovaryans matrisi (S) ve varyans kovaryans matrisinin inversi (S^{-1}) ile evren ortalama vektörü (μ_0), aşağıda verilmiştir.

$$\bar{x}' = [62.00 \quad 41.96 \quad 73.68] \qquad \mu_0' = [68.00 \quad 40.00 \quad 65.00]$$

$$S = \begin{bmatrix} 29.333 & 13.333 & 11.583 \\ 13.333 & 25.457 & 2.612 \\ 11.583 & 2.612 & 34.310 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0.05186 & -0.02556 & -0.01556 \\ -0.02556 & 0.05219 & 0.00466 \\ -0.01556 & 0.00466 & 0.03404 \end{bmatrix}$$

Tablo 6.1. Yüzücü Verisi

Kişi No	*MAXVO2*	*MKK*	*SBİL*
1	62	48	68
2	68	42	75
3	57	38	79
4	56	40	78
5	74	44	83
6	62	48	66
7	62	41	80
8	52	33	75
9	63	36	75
10	73	43	73
11	65	43	74
12	55	37	65
13	57	47	62
14	60	32	64
15	63	45	70
16	61	48	74
17	67	53	76
18	67	46	82
19	62	42	76
20	63	43	84
21	55	37	74
22	58	42	73
23	66	43	74
24	58	36	67
25	64	42	75
Ortalama	62.00	41.96	73.98
Varyans	29.333	25.457	34.310

Çözümlemeye geçmeden önce, Tablo 6.1'deki verilerin çok değişkenli normal dağılıp dağılmadığının incelenmesi gerekir. Tablo 6.1'deki veri için bu varsayımın sağlandığını söyleyebiliriz. Çünkü, Bölüm 4'de verilen normallik testleri bu veriye uygulandığında, normallikten aşırı bir ayrılış olmadığı görülecektir. Bu aşama sonrasında çözüme geçersek; Eşitlik (6.4)'den;

$$T^2 = 25\ [62.00-68.00 \quad 41.96-40.00 \quad 73.68-65.00]\ [S^{-1}] \begin{bmatrix} 62.00-68.00 \\ 41.96-40.00 \\ 73.68-65.00 \end{bmatrix}$$

$$T^2 = 175.3$$

olarak bulunur. Eşitlik (6.5) yardımıyla F hesap istatistiği;

$$F = \frac{25-3}{(25-1)3} 175.3 = 53.56$$

olarak bulunur ve $F_{Hesap} = 53.56 > F_{Tablo(3,22;\alpha=0.05)} = 3.05$ olduğu için H_0 hipotezi reddedilir ve örneklem ortalama vektöründeki en az bir değişkenin ortalaması ilgili evren ortalamasından farklıdır denir. Diğer bir deyişle $H_0 : \mu = \mu_0$ hipotezi reddedilerek, örneklemin varsayılan evrenden çekilmediği sonucuna varılır.

Güven Aralıkları ve Farklı Değişkenlerin Belirlenmesi

H_0 hipotezi reddedildiğinde farklılığın hangi değişken(ler)den kaynaklandığının araştırılması gerekir. Bu amaçla, güven aralıklarından yararlanılır. Güven aralıkları; hem farklı (ya da farksız) değişkenlerin belirlenmesi hem de incelenen değişkene ilişkin çok değişkenli güven aralıklarının bulunmasında yardımcı olur. Aşağıda, bu amaçlarla geliştirilmiş üç farklı güven aralığı yöntemi (bir anlamda çoklu karşılaştırma yöntemi) verilmiştir.

1. Eşanlı Güven Aralıkları Yöntemi ve Farklı Değişken(ler)in Belirlenmesi

a' : *İncelenen değişken için 1, diğerleri için 0 yazılan hipotez vektörü*

$\bar{x}$: *Örneklem ortalamaları vektörü*

$T^2_{(p,n-p;\alpha)}$: (6.5) *yardımı ile elde edilen,*

$$T^2_{(p,n-p;\alpha)} = \frac{(n-1)p}{n-p} F_{(p,n-p;\alpha)} \qquad (6.6)$$

olmak üzere,

$$a'\bar{x} - \sqrt{\frac{1}{n} a'Sa T^2_{(p,n-p;\alpha)}} \le a'\mu \le a'\bar{x} + \sqrt{\frac{1}{n} a'Sa T^2_{(p,n-p;\alpha)}} \qquad (6.7)$$

aralıkları her bir değişken için bulunur. Her bir değişken için bulunan sınırlar ilgili evren ortalamasını içermiyor ise farklılığın ilgili değişkenden kaynaklandığı söylenir.

Eşitlik (6.7) ile verilen güven aralıkları, her bir değişken için aşağıdaki daha kısa yolla da hesaplanabilir.

$$\bar{x}_1 - \sqrt{\frac{(n-1)p}{n-p} F_{p,n-p;\alpha}} \sqrt{\frac{s_{11}}{n}} \le \mu_1 \le \bar{x}_1 + \sqrt{\frac{(n-1)p}{n-p} F_{p,n-p;\alpha}} \sqrt{\frac{s_{11}}{n}}$$

$$\bar{x}_2 - \sqrt{\frac{(n-1)p}{n-p} F_{p,n-p;\alpha}} \sqrt{\frac{s_{22}}{n}} \le \mu_2 \le \bar{x}_2 + \sqrt{\frac{(n-1)p}{n-p} F_{p,n-p;\alpha}} \sqrt{\frac{s_{22}}{n}} \qquad (6.8)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\bar{x}_p - \sqrt{\frac{(n-1)p}{n-p} F_{p,n-p;\alpha}} \sqrt{\frac{s_{pp}}{n}} \le \mu_p \le \bar{x}_p + \sqrt{\frac{(n-1)p}{n-p} F_{p,n-p;\alpha}} \sqrt{\frac{s_{pp}}{n}}$$

Eşitlik (6.7) yardımıyla, Örnek 6.1'deki farklılığın hangi değişken(ler)den kaynaklandığını araştırırsak; Eşitlik (6.6)'dan $\alpha = 0.05$ için T^2.

$$T^2_{(p,n-p;\alpha)} = T^2_{(3,22,\alpha=0.05)} = \frac{(25-1)3}{25-3}3.05$$

olur. Buradan, *MAXVO2* için;

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}62.00\\41.96\\73.68\end{bmatrix} - \sqrt{\frac{1}{25}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}[S]\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\frac{(25-1)3}{25-3}3.05} \le \mu_1 \le$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}62.00\\41.96\\73.68\end{bmatrix} + \sqrt{\frac{1}{25}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}[S]\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\frac{(25-1)3}{25-3}3.05}$$

yazılır. Sonuç olarak, *MAXVO2* için $1-\alpha = 1-0.05 = 0.95$ güven aralığı;

$$58.58 \le \mu_1 \le 65.42$$

olarak bulunur. Bu sınırlar $\mu_{01} = 68.00$'i içermediği için *MAXVO2* ortalamasının evren ortalamasından farklı olduğu söylenir. *MKK* için de 0.95 güven aralığı $38.44 \le \mu_2 \le 45.15$ olarak bulunur ve bu sınırlar $\mu_{02} = 40.00$'ı içerdiği için *MKK* değişkenine ilişkin örneklem ortalaması ile evren ortalaması arasında fark olmadığı söylenir. Benzer şekilde *SBİL* için güven aralığı $69.98 \le \mu_3 \le 77.38$ olarak bulunur. Bu sınırlar 65.00'i içermediği için örnekleme ilişkin *SBİL* ortalamasının evren ortalamasından farklı olduğu söylenir.

Yukarıda verilen *MAXVO2*, *MKK* ve *SBİL*'e ilişkin güven aralıkları, $1-\alpha$ güven düzeyinde sabit tutulur. Diğer bir deyişle, n=25'er gözlemli bu üç değişkenin ortalamalarına ilişkin güven aralıkları hesaplanırken, α=0.05 olarak sabittir. Her bir ortalamaya ilişkin güven aralıkları, tek değişkenli güven aralığı yardımıyla bulunursa, eşanlı güven aralığının daha geniş olduğu görülecektir. Eşanlı güven aralıkları yönteminde $1-\alpha$ olasılığının tüm ortalamalar için sabit tutulabilmesi, aralıkların daha geniş olması ile sağlanabilmektedir. Bu genişlik; p, n ve $1-\alpha$'ya göre değişiklik gösterir. 1. değişkene ilişkin güven aralığını tek değişkenli güven aralığı ile bulursak; $\bar{x}_1 - t_{(n-1,\alpha/2)}\sqrt{s_{11}/n} \le \mu_1 \le \bar{x}_1 + t_{(n-1,\alpha/2)}\sqrt{s_{11}/n}$ yardımıyla $59.76 \le \mu_1 \le 64.23$ elde edilir. Bu da $58.58 \le \mu_1 \le 65.42$'den daha dar bir aralıktır.

2. *Bonferroni Yöntemi ve Farklı Değişkenlerin Belirlenmesi*

Bu yönteme ilişkin güven aralıkları (6.9)'da verilmiştir.

$$\bar{x}_1 - t_{(n-1;\frac{\alpha}{2p})}\sqrt{\frac{s_{11}}{n}} \le \mu_1 \le \bar{x}_1 + t_{(n-1;\frac{\alpha}{2p})}\sqrt{\frac{s_{11}}{n}}$$

$$\bar{x}_2 - t_{(n-1;\frac{\alpha}{2p})}\sqrt{\frac{s_{22}}{n}} \le \mu_2 \le \bar{x}_2 + t_{(n-1;\frac{\alpha}{2p})}\sqrt{\frac{s_{22}}{n}} \qquad (6.9)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\bar{x}_p - t_{(n-1;\frac{\alpha}{2p})}\sqrt{\frac{s_{pp}}{n}} \le \mu_p \le \bar{x}_p + t_{(n-1;\frac{\alpha}{2p})}\sqrt{\frac{s_{pp}}{n}}$$

Örneğimizi Bonferroni yöntemi yardımıyla çözersek; $\alpha = 0.05$ için Ek Tablo C'den $t_{(n-1;\frac{\alpha}{2p})} = t_{(24;\frac{0.05}{2.3})} = t_{(24;0.0083)} = 2.591$ olarak bulunur. Buradan (6.9) yardımıyla güven aralıkları sırasıyla;

$$59.19 \le \mu_1 \le 64.80$$

$$39.35 \le \mu_2 \le 44.57$$

$$70.65 \le \mu_3 \le 76.70$$

olarak bulunur ve bu yöntemle de yukarıdakilere benzer sonuçlara ulaşılır. Dikkat edilirse Bonferroni güven aralıkları, eşanlı güven aralıklarına göre daha dardır. Ayrıca, bu yöntemin uygulaması eşanlı güven aralıklarına göre daha kolaydır.

3. *Gözlem Sayısı Fazla Olduğunda Farklı Grupların Belirlenmesi*

Gözlem sayısı fazla olduğunda μ için güven bölgesi ve hipotez testleri normallik varsayımı olmadan da oluşturulabilir. n yeterince büyükken, eşanlı güven sınırları χ^2 dağılımından yararlanarak;

$$\bar{x}_i - \sqrt{\chi^2_{p;\alpha}}\sqrt{\frac{s_{ii}}{n}} \le \mu_i \le \bar{x}_i + \sqrt{\chi^2_{p;\alpha}}\sqrt{\frac{s_{ii}}{n}} \qquad (6.10)$$

ile verilir ve bulunacak sınırlara dayalı olarak yapılacak karşılaştırmalar da diğer iki yöntemdeki gibi yorumlanır.

Birden Fazla Gruba İlişkin İki Eş Arasındaki Farkın Önemlilik Testinin, Çok Değişkenli Evren Ortalaması Önemlilik Testi Yardımıyla Çözümü

Tek örnekleme ilişkin testlerden iki eş arasındaki farkın önemlilik testi, tek değişkenli evren ortalaması önemlilik testinin bir uyarlamasıdır. Evren ortalaması önemlilik testinde, μ_0; çoğunlukla sıfırdan farklı bir değerken, iki eş arasındaki farkın önemlilik testinde $\mu_0 = 0$'dır. Yani, önce-sonra farkının oluşturduğu dağılıma ilişkin ortalamanın, ortalaması sıfır olan bir evrenden çekilip çekilmediği test edilir. Bu nedenle iki ya da daha fazla iki eş arasındaki farkın önemlilik testi, fark ortalamaları vektörünün ortalaması sıfır olan bir evrenden gelip gelmediğinin testine, yani çok değişkenli evren ortalaması testine dönüştürülerek incelenebilir. Buradaki temel varsayım, fark dağılımlarının çok değişkenli normal dağılım göstermesidir. Farklara ilişkin ortalama vektörü ($\bar{d}$), hipotez vektörü (μ_0), farklara ilişkin varyans-kovaryans matrisi (S_d) ve varyans-kovaryans matrisinin inversi (S_d^{-1}) olmak üzere (6.4), bu soruna yönelik yeniden yazılırsa T^2 istatistiği;

$$T^2 = n(\bar{d} - \mu_0)' S_d^{-1} (\bar{d} - \mu_0) \qquad (6.11)$$

olarak elde edilir. Bu çözümlemede, fark değerleri dağılımının çok değişkenli normal dağılım göstermesi gerekir. Konu ile ilgili bir uygulama Örnek 6.2'de verilmiştir.

Örnek 6.2. Bir çocuk gelişim uzmanı *A* gibi bir hastalığa yakalanan 10 çocuğun kavrama ve denge düzeylerini, eğitim yöntemi uygulamadan önce ve eğitim yöntemi uyguladıktan sonra ölçerek, eğitim yönteminin kavrama ve denge düzeylerinde bir gelişme meydana getirip getirmediğini öğrenmek istiyor. Çalışmaya ilişkin sonuçlar Tablo 6.2'de, farklara ilişkin ortalama vektörü ($\bar{d}$), hipotez vektörü (μ_0), farklara ilişkin varyans-kovaryans matrisi (S_d) ve varyans-kovaryans matrisinin tersi (S_d^{-1}), aşağıda verilmiştir.

$$\bar{d} = \begin{bmatrix} 1.524 \\ 0.462 \end{bmatrix} \quad \mu_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S_d = \begin{bmatrix} 1.9619 & 0.0810 \\ 0.0810 & 0.1765 \end{bmatrix} \quad S_d^{-1} = \begin{bmatrix} 0.519554 & -0.23844 \\ -0.23844 & 5.77515 \end{bmatrix}$$

olur. (6.11)'den;

$$T^2 = 21 \begin{bmatrix} 1.524-0 & 0.462-0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.519554 & -0.23844 \\ -0.23844 & 5.77515 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.524-0 \\ 0.462-0 \end{bmatrix}$$

$$T^2 = (21)(2.1036) = 44.1756$$

olarak elde edilir.

Tablo 6.2. Kavrama ve Denge Verisi

Gözlem	KAVRAMA			DENGE		
No	Önce	Sonra	Fark(d_1)	Önce	Sonra	Fark(d_2)
1	25	26	1	2.0	2.3	0.3
2	22	22	0	2.2	1.6	-0.6
3	28	29	1	2.7	3.0	0.3
4	35	39	4	2.7	3.3	0.6
5	37	36	-1	3.0	4.1	1.1
6	48	51	3	1.0	1.7	0.7
7	49	48	-1	2.7	3.3	0.6
8	36	36	0	1.8	2.0	0.2
9	42	43	1	2.0	2.4	0.4
10	40	42	2	3.4	2.9	-0.5
11	40	43	3	1.6	2.0	0.4
12	32	33	1	2.1	2.2	0.1
13	30	34	4	2.2	3.0	0.8
14	28	31	3	0.9	1.3	0.4
15	26	28	2	1.8	2.4	0.6
16	34	36	2	1.2	2.1	0.9
17	38	40	2	1.6	2.6	1.0
18	40	41	1	1.8	2.5	0.7
19	43	45	2	2.0	2.5	0.5
20	35	36	1	2.1	2.7	0.6
21	43	44	1	2.3	2.9	0.6
$\bar{d}$			1.524			0.462
S_d			1.9619			0.1765

Eşitlik (6.5) yardımıyla;

$$F = \frac{n-p}{(n-1)p} T^2 = \frac{21-2}{(21-1)2} 44.175 = 20.983$$

olarak bulunur ve;

$$F_{Hesap} = 20.983 > F_{Tablo(p,n-p;\alpha)} = F_{(2,19;\alpha=0.05)} = 3.52$$

olduğu için, çocukların kavrama ve denge düzeylerinde eğitim sonrasında anlamlı bir değişme olduğu sonucuna ulaşılır. Diğer bir deyişle, fark ortalamaları, ortalaması sıfır olan evrenden çekilmemiştir denir. Eğitim sonrasında anlamlı bir değişme olduğu için, bu değişmenin hangi grup(lar)dan ileri geldiği, yukarıda verdiğimiz güven aralıkları yöntemleri ile araştırılabilir. Fark ortalamalarına ilişkin güven aralıklarının sıfırı içermemesi durumunda ilgili değişkendeki önce-sonra değişiminin anlamlı olduğu sonucuna ulaşılır. (6.8) yardımıyla güven aralıkları oluşturursak;

Kavrama için;

$$1.524 \pm \sqrt{\frac{(21-1)2}{21-2} 3.52} \sqrt{\frac{1.9619}{21}} \quad \text{ya da} \quad [0.69 \quad 2.35]$$

Denge için;

$$0.462 \pm \sqrt{\frac{(21-1)2}{21-2}3.52}\sqrt{\frac{0.1765}{21}} \quad \text{ya da} \quad [0.21 \quad 0.71]$$

olarak bulunur. Eşanlı güven aralıkları sıfırı içermediği için, her iki grupta da önce-sonra değişiminin anlamlı olduğu söylenir.

Varyans-Kovaryans Matrislerinin Eşitliğinin Test Edilmesi (*Box–M Testi*)

Tek değişkenli testlerden iki ortalama arasındaki farkın önemlilik testini ve varyans analizini uygulayabilmenin iki önemli varsayımı, ***karşılaştırılacak grupların normal dağılım göstermesi ve varyanslarının homojen olması*** idi. Çok değişkenli analizde varyansların homojenliği varsayımı, varyans-kovaryans matrislerinin eşitliğinin testine dönüşür. Varyans–kovaryans matrislerinin eşitliği testi, ***Box-M testi*** olarak bilinir. Box-M testi, normallikten ayrılışlara karşı oldukça duyarlıdır. Bu nedenle, verilerde normallik varsayımının sağlanmış olması gerekir. Bundan sonra göreceğimiz hipotez testlerinin varsayımları arasında *varyans-kovaryans matrislerinin eşitliği* de olduğu için bu bölümde bu konu üzerinde durulacaktır. Varyans-kovaryans matrislerinin eşitliğine ilişkin H_0 hipotezi, $H_0 : \Sigma_1 = \Sigma_2 = \ldots\ldots\ldots = \Sigma_k$ (*burada k, karşılaştırılacak varyans-kovaryans matrisi sayısıdır)* ile verilirken, H_1 hipotezi "*en az bir varyans-kovaryans matrisi diğerinden farklıdır*" şeklinde olacaktır. Bu amaçla önce *ortak varyans-kovaryans matrisi* (S) elde edilir.

k : *Karşılaştırılacak kovaryans matrislerinin (grup) sayısı*

p : *Kovaryans matrislerindeki (gruplardaki) değişken sayısı*

S_i : *Kovaryans matrisleri (i=1,.....,k)*

n_i : *Gözlem sayısı*

olmak üzere ortak varyans-kovaryans matrisi S:

$$S = \frac{\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)S_i}{\sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)} \qquad (6.12.a)$$

ile verilir. Eşitlik (6.12)'den anlaşılacağı gibi, gruplardaki gözlem sayıları eşit ise ortak varyans-kovaryans matrisi;

$$S = \sum_{i=1}^{k} S_i / k \qquad (6.12.b)$$

ile bulunabilir. S yardımıyla ilgili test istatistiği (Box M);

$$M = \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)ln|S| - \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)ln|S_i| \qquad (6.13)$$

olur. n_i'ler yeterince büyükken;

$$C^{-1} = 1 - \frac{2p^2 + 3p - 1}{6(p+1)(k-1)} \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{(n_i - 1)} - \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)} \right) \qquad (6.14)$$

olmak üzere MC^{-1} değeri $\frac{1}{2}(k-1)\ p\ (p+1)$ serbestlik derecesi ile yaklaşık ki-kare dağılımı gösterir. MC^{-1} değerinin seçilen yanılma düzeyinde, $(1/2)\ (k-1)\ p\ (p+1)$ serbestlik dereceli χ^2 tablo değerinden büyük olması durumunda kovaryans matrislerinin eşit olmadığı söylenir. Kovaryans matrislerinin gözlem sayıları eşit ise, n: herhangi bir grubun gözlem sayısı olmak üzere C^{-1} :

$$C^{-1} = 1 - \frac{(2p^2 + 3p - 1)(k+1)}{6(p+1)\ k(n-1)} \qquad (6.15)$$

ile verilir. Örnek 6.3'de Tablo 6.5'de verilen veriye ilişkin kovaryans matrislerinin eşit olup olmadığı incelenmiştir.

Örnek 6.3. Tablo 6.5'de Diabet + Koroner Arter Hastaları ile sadece Diabet hastalarına ilişkin kolesterol, şeker ve HDL ölçümleri verilmiştir. Bu iki gruba ilişkin varyans-kovaryans matrisleri, toplanmış varyans-kovaryans matrisi ve bu matrislerin determinantları aşağıda verilmiştir.

Diabet + Koroner Arter Hastaları için;

$$S_1 = \begin{bmatrix} 633.214 & 169.015 & -10.062 \\ 169.015 & 576.862 & -64.726 \\ -10.062 & -64.726 & 58.345 \end{bmatrix} \quad |S_1| = 17154329.19$$

Diabet Hastaları için;

$$S_2 = \begin{bmatrix} 329.201 & 152.679 & 18.826 \\ 152.679 & 387.172 & -17.464 \\ 18.826 & -17.464 & 30.493 \end{bmatrix} \quad |S_2| = 2837721.17$$

Bu iki hasta grubu için ortak (toplanmış) varyans-kovaryans matrisi (6.12) yardımıyla;

$$S = \frac{(26-1)S_1 + (24-1)S_2}{(26-1)+(24-1)} = \begin{bmatrix} 487.541 & 161.187 & 3.780 \\ 161.187 & 485.969 & -42.079 \\ 3.780 & -42.079 & 45.000 \end{bmatrix}$$

olur. Bu matrisin determinantı ise $|S| = 8571204.575$ 'dir ve (6.13) yardımıyla

$$M = (25+23)\ ln(8571204.575) - [25\ ln(17154329.19) + 23\ ln(2837721.176)]$$

$$M = 8.078$$

olarak bulunur.

k : *Kovaryans matrisi sayısı* = 2

p : *Matrislerin boyutu* = 3 ve $n_1 \neq n_2$ olduğu için (6.14) yardımı ile;

$$C^{-1} = 1 - \frac{2\times 3^2 + 3\times 3 - 1}{6(3+1)(2-1)}\left(\frac{1}{26-1} + \frac{1}{24-1} - \frac{1}{(26-1)+(24-1)}\right)$$

$$C^{-1} = 0.932135 \text{ ve}$$

$$MC^{-1} = (8.078)(0.932135) = 7.53$$

olarak bulunur. Sonuçta, MC^{-1}, Ek Tablo D'deki ki-kare tablo değeri ile karşılaştırılır. Buna göre;

$$MC^{-1} = 7.53 < \chi^2_{\left[\frac{1}{2}(k-1)p(p+1);\alpha\right]} = \chi^2_{(6;\alpha=0.05)} = 12.592$$

olduğu için bu iki gruba ilişkin varyans-kovaryans matrislerinin eşit olduğu sonucuna varılır.

χ^2 yaklaşımı, k ve p'nin 5'i aşmadığı durumlarda ve her bir gruba ilişkin gözlem sayısının 20 ve daha fazla olduğu durumlarda daha iyi sonuç verir. k ve p'nin daha büyük olduğu ve n_i'lerin de küçük olduğu durumlarda χ^2 yaklaşımı yerine F dağılımı yaklaşımı önerilmektedir. Bu yaklaşıma burada değinilmeyecektir. İstatistiksel yazılımların bazıları her iki yaklaşıma (χ^2 ve F) ilişkin sonuçları da vermektedir.

Tek değişkenli çözümlemede, yapılacak dönüşümlerle *varyansların homojenliği* sağlanabiliyordu. Bu dönüşümlerden çok değişkenli çözümlemede de yararlanılabilir. Bu amaçla, çok değişkenli verideki her bir değişkenin gruplara göre incelenmesi gerekir. Bu konuda, Kaynakça'daki 2 nolu kaynaktan yararlanılabilir.

Bağımsız İki Gruba İlişkin Ortalama Vektörlerinin Karşılaştırılması

Tek değişkenli analizde, bir değişken yönünden bağımsız iki gruba ilişkin ortalamaların karşılaştırılması, parametrik . test varsayımlarının *(normallik ve varyansların homojenliği)* sağlanması durumunda "iki ortalama arasındaki farkın önemlilik testi" ile yapılıyordu. Örneğin;

1. Hasta ve sağlam gruplarında hemoglobin yönünden fark olup olmadığı
2. 1-9 ve 10-15 yıldır spor yapan uzun mesafe koşucularının submaksimal yükleme sonrasındaki geri toparlanma süreleri arasında fark olup olmadığı

3. 0.5 doz ile 1.5 doz ilaç verilen haşerelerin ölüm süreleri arasında fark olup olmadığı ....

şeklindeki çalışmalar iki ortalama arasındaki farkın önemlilik testi ile karşılaştırılıyordu. Bu örneklerden ilk ikisi, aşağıdaki şekilde çok değişkenli konuma getirilebilir. Birinci örnekte; hasta ve sağlam gruplarındaki hemoglobin ile birlikte örneğin, potasyum, kalsiyum.....gibi değişkenler de ele alınır ise, sorun; "hasta ve sağlam grupları arasında hemoglobin, potasyum, kalsiyum,.... değişkenleri açısından bir fark var mıdır?" şeklinde çok değişkenli bir soruna dönüşecektir (Tablo 6.3). Yine, ikinci örnekte, spor yaşı 1-9 ve 10-15 yıl olan gruplarda geri toparlanma süresinin (*sn*) yanında bu sporcuların *MAXVO2*'lerinin de farklı olup olmadığı öğrenilmek istendiğinde çok değişkenli bir sorun ile karşılaşılacaktır (Tablo 6.4). Bu örneklerdeki sorun; bağımsız iki gruba ilişkin ortalama vektörlerinin karşılaştırılması sorunudur. Bağımsız iki gruba ilişkin ortalama vektörlerinin karşılaştırılmasında da T^2 (*Hotelling's* T^2) istatistiğinden yararlanılır. Bu yöntem, çok değişkenli ikiden çok grubun karşılaştırılmasında kullanılan *MANOVA* yaklaşımının sadece iki grup olduğundaki özel bir durumudur. T^2 yaklaşımı, değişkenlerin ikişer ikişer *t* testi ile karşılaştırılması sonucunda I. tip hatada meydana gelecek artışı sabit tutar. (*Not : Bir sonraki MANOVA* altbaşlığını okuyunuz.)

Tablo 6.3. Çok Değişkenli Bağımsız İki Grubun Karşılaştırılması

HASTA			*SAĞLAM*		
Hem.	*Pot.*	*Kal.*	*Hem.*	*Pot.*	*Kal.*
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.

Tablo 6.4. Çok değişkenli Bağımsız İki Grubun Karşılaştırılması

SPOR YAŞI (yıl)			
1–9		*10–15*	
Geri Toparlanma Süresi (sn)	*MAXVO2 (ml/kg/dk)*	*Geri Toparlanma Süresi (sn)*	*MAXVO2 (ml/kg/dk)*
41	52	32	67
.	.	.	.
35	56	28	65

Varsayımları

Çok değişkenli iki ortalama vektörünün karşılaştırılmasında, her iki gruptaki verilerin ayrı ayrı normal dağılım göstermesi ve bu iki gruba ilişkin kovaryans matrislerinin homojen olması varsayımları vardır. Genel olarak, çok değişkenli 2 grubun karşılaştırılmasında kullanılan T^2 ile 2'den fazla çok değişkenli grubun karşılaştırılmasını sağlayan *MANOVA* (ileride incelenecektir), *tek yönlü varyans analizi*nden (*ANOVA*) daha fazla gözleme gereksinim duyar. Bu nedenle bazı kaynaklarda, gruplardaki gözlem sayısının 20'den fazla olması özellikle belirtilmektedir. Dikkat edilecek bir diğer özellik ise, bir gruptaki gözlem sayısının değişken sayısından az olmamasıdır. Bazı yazarlara göre ise, *gruplardaki en az gözlem sayısı gruplardaki değişken sayısının* ***en az üç katı*** *kadar olmalıdır.*

Hipotezler ve Test İstatistiği

H_0 hipotezi; μ_1 ve μ_2 ortalama vektörleri olmak üzere, *bu iki ortalama vektörü arasında fark olmadığı* şeklinde kurulur ($H_0 : \mu_1 = \mu_2$). H_1 hipotezi ise $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ şeklindedir. Yukarıdaki varsayımlar altında,

n_1 : 1. *grubun denek sayısı*

n_2 : 2. *grubun denek sayısı*

$\bar{x}_1$: 1. *grubun ortalama vektörü*

$\bar{x}_2$: 2. *grubun ortalama vektörü*

S : *Ortak varyans-kovaryans matrisi,*

olmak üzere T^2 istatistiği;

$$T^2 = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)' S^{-1} (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \qquad (6.16)$$

ile verilir. Eşitlik (6.16) ile verilen T^2 istatistiği;

$$F = \frac{n_1 + n_2 - p - 1}{(n_1 + n_2 - 2)p} T^2 \qquad (6.17)$$

ile p ve $n_1 + n_2 - p - 1$ serbestlik dereceli bir F dağılımı gösterir.

Eğer Eşitlik (6.17) ile verilen F hesap istatistiği F tablo istatistiğinden büyükse bağımsız iki ortalama vektörü arasında fark olduğu söylenir. İki ortalama vektörü arasında fark bulunursa, farklılığın hangi değişken(ler)den kaynaklandığı araştırılır. Konu ile ilgili uygulama Örnek 6.4'de verilmiştir.

Örnek 6.4. Hem koroner arter hastalığı hem de diabet (şeker hastalığı) tanısı konan 26 hasta ile sadece diabet tanısı konan 24 hastaya ilişkin kolesterol, şeker ve *HDL* (*High Density Lipoprotein*) değerleri Tablo 6.5'de verilmiştir. Ölçümler mg/dl cinsindendir. Acaba bu üç değişken açısından hasta grupları arasında (bu iki gruba ilişkin ortalama vektörleri arasında) fark var mıdır?

Bu örnekteki hasta gruplarına ilişkin varyans-kovaryans matrisleri ile ortak varyans-kovaryans matrisi, "varyans-kovaryans matrislerinin homojenliği" konusu incelenirken verilmiş ve varyans-kovaryans matrislerinin eşit olduğu bulunmuştu. Bu nedenle burada sadece gruplara ilişkin ortalama vektörleri ile ortak varyans-kovaryans matrisinin tersi verilecektir. Ayrıca, bu grupların çok değişkenli normal dağılıp dağılmadıklarına bakıldığında normallikten aşırı bir sapma olmadığı görülecektir.

Tablo 6.5. Kolesterol, Şeker ve HDL Verisi

Diabet + Koroner Arter Hastaları			*Diabet Hastaları*		
Koles.	*Şeker*	*HDL*	*Koles.*	*Şeker*	*HDL*
210	130	44	215	160	63
249	185	25	234	150	58
265	183	46	238	190	72
280	200	23	255	169	74
230	175	35	212	145	65
290	170	25	264	185	60
270	150	28	245	176	63
260	188	38	220	168	57
295	172	39	268	185	62
218	165	32	220	175	67
222	165	30	224	180	50
235	167	43	207	176	62
240	178	36	230	170	54
242	180	37	217	151	67
270	169	47	245	166	62
285	180	39	257	175	66
275	160	48	249	173	60
269	145	40	244	190	56
255	140	36	235	139	63
259	190	35	236	118	66
265	125	50	237	163	64
268	130	31	250	152	68
270	120	47	244	196	58
274	190	37	275	205	67
310	215	38			
295	178	27			
Ort: 261.577	167.308	36.769	238.375	169.042	62.667
Var: 633.214	576.862	58.345	329.201	387.172	30.493

$$\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 261.577 \\ 167.308 \\ 36.769 \end{bmatrix} \quad \bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 238.375 \\ 169.042 \\ 62.667 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 0.002345 & -0.00086 & -0.00101 \\ -0.00086 & 0.002558 & 0.002465 \\ -0.00101 & 0.002465 & 0.024611 \end{bmatrix}$$

Eşitlik (6.16)'dan,

$$T^2 = \frac{(26)(24)}{26+24}\begin{bmatrix} 261.577-238.375 & 167.308-169.042 & 36.769-62.667 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 261.577-238.375 \\ 167.308-169.042 \\ 36.769-62.667 \end{bmatrix}$$

$$T^2 = 12.48[23.202 \quad -1.734 \quad -25.898]\,[S^{-1}]\begin{bmatrix} 23.202 \\ -1.734 \\ -25.898 \end{bmatrix}$$

$$T^2 = 12.48(19.28122) = 240.63$$

ve Eşitlik (6.17)'den;

$$F = \frac{26+24-3-1}{(26+24-2)(3)}240.63 = 76.868$$

olarak bulunur. $F_{Hesap} = 76.868 > F_{Tablo(3,46,\alpha=0.05)} \cong 2.84$ olduğu için iki ortalama vektörü arasında fark olduğu sonucuna ulaşılır. Ortalama vektörleri arasında fark olduğu için farklılığın hangi değişken(ler) arasında olduğunun araştırılması gerekir.

Farklı Değişken(ler)in Belirlenmesi

1. Eşanlı Güven Aralıkları Yöntemi

H_0 hipotezinin reddedilmesi durumunda, farklılığın hangi değişken(ler)den kaynaklandığının araştırılması gerekir. Bu amaçla, ortalamaların farklarına ilişkin güven aralıklarından yararlanılır.

a' : *İncelenen değişken için 1, diğerleri için 0 olan hipotez vektörü*

S : *Ortak varyans-kovaryans matrisi*

$T^2_{(p,n_1+n_2-p-1;\alpha)}$: (6.16) *yardımı ile elde edilen*

$$T^2_{(p,n_1+n_2-p-1;\alpha)} = \frac{(n_1+n_2-2)p}{n_1+n_2-p-1}F_{(p,n_1+n_2-p-1;\alpha)} \qquad (6.18)$$

olmak üzere, her bir değişkenin ortalamalarının farkına ilişkin eşanlı güven aralıkları;

$$a'(\bar{x}_1-\bar{x}_2) - \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1n_2}a'Sa\;T^2_{(p,n_1+n_2-p-1;\alpha)}} \le a'\delta \le$$

$$a'(\bar{x}_1-\bar{x}_2) + \sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1n_2}a'Sa\;T^2_{(p,n_1+n_2-p-1;\alpha)}} \qquad (6.19)$$

ile verilir. Buradan elde edilen aralıkların sıfırı içermesi durumunda, ilgili değişken açısından gruplar arasında fark yoktur denir. 1. değişken için güven aralığını bulmak için (6.18) yardımıyla,

$$T^2_{(p,n_1+n_2-p-1;\alpha)} = T^2_{(3,46;\alpha=0.05)} = \frac{(26+24-2)3}{26+24-3-1}F_{(3,46,\alpha=0.05)} = \frac{(48)(3)}{46}2.84$$

$$T^2_{(3,46;\alpha=0.05)} = 8.89$$

olarak elde edilir ve 1. değişken için güven aralığı, (6.19)'da $a' = [1 \quad 0 \quad 0]$ yazılarak;

$$23.202 - \sqrt{\frac{26+24}{(26)(24)}(487.541)(8.898)} \le \mu_{11} - \mu_{12} \le 23.202 + \sqrt{\frac{26+24}{(26)(24)}(487.541)(8.898)}$$

$$4.566 \le \mu_{11} - \mu_{12} \le 41.838$$

olarak bulunur. Bu aralık sıfırı içermediği için kolesterol düzeyleri açısından iki hasta grubu arasında fark olduğu sonucuna ulaşılır. Benzer işlemler şeker ve HDL grupları için de yapılırsa aralıklar;

$$\text{Şeker için ; } -20.34 \le \mu_{21} - \mu_{22} \le 16.87$$

$$\text{HDL için : } -31.56 \le \mu_{31} - \mu_{32} \le -20.24$$

olarak bulunur. Bu sonuçlara göre, şeker düzeyleri açısından iki grup arasında fark olmadığı (aralık sıfırı içerdiği için), ancak HDL düzeyleri açısından fark olduğu sonucuna ulaşılır (aralık sıfırı içermediği için).

2. Bonferroni Güven Aralıkları

Ortalamaların farkına ilişkin Bonferroni eşanlı güven aralıkları ise;

$$(\bar{x}_{i1} - \bar{x}_{i2}) - t_{(n_1+n_2-2;\frac{\alpha}{2p})}\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}s_{ii}} \le \mu_{i1} - \mu_{i2} \le (\bar{x}_{i1} - \bar{x}_{i2}) + t_{(n_1+n_2-2;\frac{\alpha}{2p})}\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}s_{ii}} \qquad (6.20)$$

ile verilir.

Çok Değişkenli Tek Yönlü Varyans Analizi (*MANOVA*)

Çok değişkenli varyans analizleri genelde *MANOVA* (*Multivariate ANalysis Of VAriance*) adı ile bilinirler. Bu bölümde, etken sayısının bir tane olduğu çok değişkenli varyans analizi üzerinde durulacaktır.

Tek yönlü varyans analizi (*ANOVA*), parametrik test varsayımlarının (normallik ve varyansların homojenliği) yerine geldiği durumlarda, bir değişken açısından 2'den çok grup arasında fark olup olmadığını test etmekte kullanılıyordu. Örneğin, üç spor dalında (yüzme, atletizm ve futbol) en az 20 kez milli olmuş, 18 yaşın üzerindeki erkek orta mesafe yüzücü, atlet ve futbolcuların oksijen tüketim kapasiteleri (*MAXVO2*) arasında fark olup olmadığının araştırılması parametrik test varsayımlarının sağlandığı durumlarda tek yönlü varyans analizi ile yapılabilir (Tablo 6.6).

Tablo 6.6. Üç Spor Dalına İlişkin MAXVO2 Ölçümleri (ml/kg/dk)

YÜZME	*ATLETİZM*	*FUTBOL*
56	63	54
62	67	58
.	.	.
69	65	61

Çok değişkenli tek yönlü varyans analizi ise, her bir grupta (grup sayısı ≥3) 2 ve daha fazla değişken olması durumunda uygulanır. Diğer bir deyişle ***ikiden çok grubun ortalama vektörleri*** karşılaştırılır. Örneğin Tablo 6.6'da MAXVO2 ölçümlerinin yanında benç preste maximum kaldırma kuvvetleri (MKK), spor bilgi puanları (SBİL) ..... üç spor dalına göre değişmekte midir sorusu MANOVA ile çözülebilir (Tablo 6.7).

Tablo 6.7. Üç Spor Dalına İlişkin Üç Farklı Ölçüm

YÜZME			*ATLETİZM*			*FUTBOL*		
MAX	*MKK*	*SBİL*	*MAX*	*MKK*	*SBİL*	*MAX*	*MKK*	*SBİL*
56	44	62	63	38	65	54	51	36
62	48	46	67	41	57	58	49	42
.	.	.	.	.	.	.	.	.
69	36	63	65	33	44	61	54	51

Bir açıdan T^2 ve *MANOVA*, incelenen değişkenlerin en iyi doğrusal kombinasyonlarına dayalı yeni bir bağımlı değişken oluşturulması ve bu yeni bağımlı değişken yönünden grupların *ANOVA* ile karşılaştırılmasıdır. Diğer bir yaklaşımla, grupların tümel olarak karşılaştırılması söz konusudur. Bu yeni değişkenin yaratılması ise ileride göreceğimiz çoklu regresyon teknikleri mantığı çerçevesinde olmaktadır.

Özellikle incelenen değişkenler arasında ***çoklubağlantı*** (multicollinearity) olduğunda, ayrı ayrı *t* testi ya da varyans analizi yapmak yerine *MANOVA*'dan (ya da *Hotelling* T^2'den) yararlanmak daha güçlü sonuç elde edilmesini sağlar. Dolayısıyla, araştırıcı, I. tip hatayı denetlemek istiyor ise ve bağımlı değişkenler arasında ilişki söz konusu ise *MANOVA* iyi bir seçim olmaktadır (çoklubağlantı konusunda Bölüm 7'de ayrıntılı bilgi verilmiştir.)

T^2 ve *MANOVA*'da, seçilen bağımlı değişkenlerin araştırma düzenine uygun olması ve bu değişkenlerin her birinin ilgilenilen sorunun farklı bir boyutunu ölçmesi istenir.

Veri setinde genel eğilime uygun olmayan veriler olarak tanımlayabileceğimiz aşırı değerler, T^2 ve *MANOVA* sonuçlarını ciddi şekilde etkileyebilirler. Çalışma sonuçlarını elde etmeden önce, aşırı değerlerin belirlenmesi, düzeltilmesi ya da veriden çıkartılması iyi bir seçenektir. Çok değişkenli aşırı değerler üzerinde Bölüm 4'de durulmuştu.

Varsayımları

Çok değişkenli varyans analizinin genel varsayımları; tüm grupların varyans-kovaryans matrislerinin homojen olması ve her bir grubun çok değişkenli normal dağılım göstermesidir. *İki ortalama vektörünün karşılaştırılması* alt başlığında verildiği gibi *MANOVA*, tek yönlü varyans analizinden daha çok gözleme gereksinim duyar. Bu nedenle, gruplardaki gözlem sayısının 20'den fazla olması ve bir gruptaki gözlem

sayısının değişken sayısından az olmaması istenir. Konu ile ilgili ayrıntılı bilgi *İki ortalama vektörünün karşılaştırılması* başlığının *Varsayımları* altbaşlığında verilmişti.

Çok değişkenli varyans analizinde kullanılan test istatistiklerinin mantığı, tek yönlü varyans analizi mantığından yola çıkarak geliştirilmiştir. Tablo 6.8 ve 6.9 sırasıyla gruplar arasındaki farkın önemsiz ve önemli olduğu tek yönlü varyans analizi sonuçlarını vermektedir.

Tablo 6.8. Tek Yönlü Varyans Analizi Tablosu 1

D.K.	*KT*	*Sd*	*KO*	*F*	*p*
TOPLAM	100				
GRUP. ARASI	15	4	3.75	0.88	>0.05
GRUP İÇİ	85	20	4.25		

Tablo 6.9. Tek Yönlü Varyans Analizi Tablosu 2

D.K.	*KT*	*Sd*	*KO*	*F*	*p*
TOPLAM	100				
GRUP. ARASI	85	4	21.25	28.33	<0.05
GRUP İÇİ	15	20	0.75		

Tablo 6.8'de ve 6.9'da;

Gruplar Arası (Between Groups) KT / Grup İçi (Within Groups) KT

oranı sırasıyla 0.176 ve 5.66 olarak bulunur. Buradan, bu oran küçük ise gruplar arasında fark olmadığı, büyük ise fark olduğu şeklinde bir yoruma gidilebilir. Benzer şekilde;

Grup içi (Within Groups) KT / Toplam (Total) KT

oranı ile yorum yaparsak, bu oranlar sırasıyla 0.85 ve 0.15 olarak bulunur ve bu oranın 1'e yaklaşması durumunda gruplar arasında fark olmadığı, 0'a yaklaşması durumunda ise gruplar arasında fark olduğu sonucuna ulaşılır. Bir açıdan T^2 ve *MANOVA*, tüm bağımlı değişkenlerin en iyi doğrusal kombinasyonlarına dayalı yeni bir bağımlı değişken oluşturulması ve bu yeni bağımlı değişken yönünden grupların *ANOVA* ile karşılaştırılmasıdır.

Çok değişkenli analizlerde ortalama vektörleri arasında fark olup olmadığını incelemekte kullanılan birçok test yöntemi ve test istatistiği vardır. Bu test yöntemlerinden (dolayısıyla test istatistiklerinden) en çok kullanılan 4'ü aşağıda verilmiştir.

1. **Wilks lamda istatistiği** (Wilks' Lambda)
2. **Pillai iz istatistiği** (Pillai's Trace)
3. **Hotelling iz istatistiği** (Hotelling's Trace)
4. **Roy'un en büyük özdeğere dayalı test istatistiği** (Roy's Largest Root)

Bu istatistikler farklı dağılımlara sahiptir. Ancak, bu istatistikler *F* istatistiğine dönüştürülebilir. İstatistiksel yazılımların çoğu bu istatistiklere ilişkin sonuçları vermektedir. Bu yöntemlerden hangisinin tercih edilmesi gerektiği konusunda çeşitli yaklaşımlar söz konusudur. *MANOVA* varsayımlarının bozulmasına karşı Wilks lamda ve Pillai yaklaşımlarının daha bağışık olduğu söylenmekle birlikte, gözlem sayısı daha az ya da eşit olmadığı ya da varyansların homojenliği varsayımının yerine getirilemediği durumlarda Pillai iz yaklaşımının daha güvenilir olduğu belirtilmektedir. Roy yaklaşımı ise varsayımların kesinlikle sağlandığı durumlarda kullanılmalıdır. Aşağıda bu yöntemlere ilişkin test istatistiklerinin nasıl bulunacağı açıklanmış ve örneklerden birinde dört yönteme ilişkin sonuçlar hesaplanmıştır.

Hipotezler ve Test İstatistikleri

Çok değişkenli varyans analizinde H_o hipotezi, ikiden çok ortalama vektörünün eşit olduğu şeklinde kurulur.

$$H_0: \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{21} \\ . \\ . \\ \mu_{p1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{12} \\ \mu_{22} \\ . \\ . \\ \mu_{p2} \end{bmatrix} = \ldots\ldots\ldots = \begin{bmatrix} \mu_{1k} \\ \mu_{2k} \\ . \\ . \\ \mu_{pk} \end{bmatrix}$$

Burada μ_{pk} : *p. değişkenin k. gruptaki ortalamasıdır.*

Wilks Lamda İstatistiği

Varyans analizinde *Genel KT=(Gruplar Arası KT + Grup İçi KT)* şeklinde verilen eşitlik, çok değişkenli varyans analizinde matrislerle ifade edilir ve

T : *Genel kareler toplamı matrisi*

B : *Gruplar arası kareler toplamı matrisi*

W: *Grup içi kareler toplamı matrisi*

p : *Her gruptaki değişken sayısı*

olmak üzere;

$$T_{pxp} = B_{pxp} + W_{pxp} \qquad (6.21)$$

ile verilir. Bu eşitlikte;

k : *Ortalama vektörü sayısı (karşılaştırılacak grup sayısı)*
$\overline{x}_i$: *i. gruba ilişkin ortalama vektörü*
$\overline{x}$: *Genel ortalama vektörü*
n_i : *i. gruba ilişkin gözlem sayısı*
S_i : *i. gruba ilişkin varyans-kovaryans matrisi*

olmak üzere, *B* ve *W* matrisleri;

$$B = \sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{x}_i - \bar{x})(\bar{x}_i - \bar{x})' \qquad (6.22)$$

$$W = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1)S_i \qquad (6.23)$$

ile verilirken ilgili serbestlik dereceleri sırasıyla $Sd = k - 1$ ve $Sd = \sum_{i=1}^{k} n_i - k$ 'dir. Bu bilgiler yardımıyla Wilks lamda (Λ) istatistiği *(U istatistiği olarak da bilinir)*:

$$\Lambda = \frac{|W|}{|W + B|} = \frac{|W|}{|T|} \qquad (6.24)$$

dir. Eşitlik (6.24) iki determinantın oranını içermektedir. Bu oranın sıfıra yaklaşması, gruplar arasında (ortalama vektörleri arasında) fark olduğunun bir göstergesidir. Hatırlanacağı üzere, bir matrisin en iyi tanımlayıcısı o matrisin özdeğerleri ve determinantıdır (bir matrisin özdeğerlerinin çarpımı ise matrisin determinantını verir). Λ , p: değişken sayısını göstermek ve λ_i 'ler BW^{-1} matrisinin özdeğerleri ve s, m ve $\tilde{n}$:

$$s = min(k-1, p) \quad m = \frac{|p-(k-1)|-1}{2} \quad , \quad \tilde{n} = \frac{n-p-k-1}{2} \qquad (6.25)$$

bu ve diğer istatistiklerin hesaplanmasında kullanacağımız parametreler olmak üzere:

$$\Lambda = \prod_{i=1}^{s} \frac{1}{1+\lambda_i} \qquad (6.26)$$

ile de verilir. Eşitlik (6.25) ile verilen s değeri, BW^{-1} matrisinde sıfırdan farklı özdeğerlerin sayısıdır. Eğer incelenen denek sayısı yeterli ise Wilks lamda değeri;

k: Karşılaştıracak grup sayısı

p: Her gruptaki değişken sayısı

n: Toplam gözlem sayısı

olmak üzere;

$$L = -[n - 1 - (p+k)/2] \ln \Lambda \qquad (6.27)$$

ile $p(k-1)$ serbestlik dereceli χ^2 dağılımı gösterir ve $L > \chi^2_{Tablo[p(k-1);\alpha]}$ ise gruplar arasında fark vardır denir.

Wilks lamda istatistiğinin anlamlılığı, F dağılımı yardımı ile de yapılabilir. Tablo 6.10, değişik grup ve denek sayılarında Λ değerlerine bağlı olarak elde edilen F

istatistiklerinin, hangi serbestlik derecelerinde bir F dağılımı gösterdiklerini vermektedir.

Tablo 6.10. Grup ve Değişken Sayısına Göre Λ 'nın Dağılımı

Değişken Sayısı	*Grup Sayısı*	*F Dağılımına Yaklaşım*	*F Dağılımı Serbestlik Dereceleri*
$p=1$	$k \geq 2$	$\left(\frac{n-k}{k-1}\right)\left(\frac{1-\Lambda}{\Lambda}\right)$	$k-1,\ n-k$
$P=2$	$k \geq 2$	$\left(\frac{n-k-1}{k-1}\right)\left(\frac{1-\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}}\right)$	$2(k-1),\ 2(n-k-1)$
$P \geq 1$	$k=2$	$\left(\frac{n-p-1}{p}\right)\left(\frac{1-\Lambda}{\Lambda}\right)$	$p,\ n-p-1$
$P \geq 1$	$k=3$	$\left(\frac{n-p-2}{p}\right)\left(\frac{1-\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}}\right)$	$2p,\ 2(n-p-2)$

Hotelling İz İstatistiği

λ_i'ler BW^{-1} matrisinin özdeğerleri olmak üzere, Hotelling iz istatistiği (T),

$$T = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \tag{6.28}$$

ile verilir. Denek sayısı yeterli iken,

$$nT > \chi^2_{[f\,p(k-1);\alpha]} \tag{6.29}$$

ise ortalama vektörleri arasında fark olduğu söylenir. T istatistiğini test etmek için F dağılımından da yararlanılır. Buna göre,

$$F = \frac{2(s\tilde{n}+1)}{s^2(2m+s+1)}T \tag{6.30}$$

değeri $s(2m+s+1)$ ve $2(s\tilde{n}+1)$ ile bir F dağılımı gösterir.

Pillai İz İstatistiği

$$T = \sum_{i=1}^{s} \frac{\lambda_i}{1+\lambda_i} \tag{6.31}$$

ile verilir. T istatistiği yardımıyla bulunan

$$\frac{2\tilde{n}+s+1}{2m+s+1} \times \frac{T}{s-T} \tag{6.32}$$

değeri $s(2m+s+1)$ ve $s(2\tilde{n}+s+1)$ serbestlik dereceleri ile bir F dağılımı gösterir.

Roy'un En Büyük Özdeğere Dayalı Test İstatistiği

En büyük özdeğer λ_{max} ile gösterilirse, Roy'un en büyük özdeğere dayalı test istatistiği,

$$T = \frac{\lambda_{max}}{1+\lambda_{max}} \qquad (6.33)$$

ile verilir. Bulunan T istatistiği, s, m ve $\tilde{n}$ parametreli Heck grafik (Heck's Chart) değeri ile karşılaştırılır. T istatistiğinin Heck grafik değerinden büyük olması durumunda ortalama vektörleri arasında fark olduğu söylenir. Bazı kaynaklarda ve bilgisayar çıktılarında bu istatistik T yerine θ (teta) ile de gösterilir.

Çok değişkenli varyans analizine ilişkin iki örnek (Örnek 6.5 ve Örnek 6.6) aşağıda verilmiştir.

Örnek 6.5. Üç ayrı bölgede yaşayan çocukların hemoglobin (*HG*) ve kan protein (*KP*) değerleri Tablo 6.11'de verilmiştir. Bölgeler arasında bu iki değişken açısından fark var mıdır? (Bölgelere ilişkin ortalama vektörleri farklı mıdır?). Bu örnek, ortalama vektörü sayısı ikiden çok olduğu için tipik bir MANOVA uygulamasıdır. Herbir gruptaki değişkenlerin çok değişkenli normal dağılım göstermesi ve varyans-kovaryans matrislerinin homojen olması gerekli varsayımlar arasındadır.

Örneğimiz için;

$$\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 11.89 \\ 5.01 \end{bmatrix} \quad \bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 11.75 \\ 5.04 \end{bmatrix} \quad \bar{x}_3 = \begin{bmatrix} 11.54 \\ 5.13 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 11.73 \\ 5.06 \end{bmatrix}$$

olmak üzere Eşitlik (6.22)'den,

Tablo 6.11. Hemoglobin ve Kan Protein Değerleri

BÖLGELER						
A		B		C		
HG	*KP*	*HG*	*KP*	*HG*	*KP*	
12.3	5.2	12.0	5.9	11.4	4.2	
11.5	4.0	11.6	5.3	11.4	5.6	
11.7	4.7	11.4	5.8	11.0	5.8	
11.5	5.3	11.8	5.9	11.1	4.4	
11.8	5.6	12.0	5.3	12.5	4.7	
12.0	5.4	12.1	4.8	12.3	4.2	
12.2	4.8	11.1	4.6	10.3	5.3	
10.8	4.9	11.8	4.0	11.6	5.8	
11.8	4.1	11.2	4.1	12.0	5.7	
12.4	5.3	12.0	5.9	11.8	5.6	
12.8	5.8	12.4	4.3			
		11.6	4.6			
130.8	55.1	141.0	60.5	115.4	51.3	Σx
1558.24	279.33	1658.38	310.91	1335.56	267.31	Σx^2
656.6		711.36		591.12		$\Sigma x_1 x_2$
11		12		10		n
Hemoglobin için Σx=130.8+141.0+115.4=387.2						
Kan Protein için Σx=55.1+60.5+51.3=166.9						

$$B = 11\begin{bmatrix} 11.89-11.73 \\ 5.01-5.06 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11.89-11.73 & 5.01-5.06 \end{bmatrix}+$$

$$12\begin{bmatrix} 11.75-11.73 \\ 5.04-5.06 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11.75-11.73 & 5.04-5.06 \end{bmatrix}+$$

$$10\begin{bmatrix} 11.54-11.73 \\ 5.13-5.06 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11.54-11.73 & 5.13-5.06 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0.2816 & -0.088 \\ -0.088 & 0.0275 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0.0048 & -0.0048 \\ -0.0048 & 0.0048 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0.361 & -0.133 \\ -0.133 & 0.049 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.650 & -0.227 \\ -0.227 & 0.081 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Üç gruba ilişkin varyans-kovaryans matrisleri,

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0.291 & 0.141 \\ 0.141 & 0.333 \end{bmatrix} \quad S_2 = \begin{bmatrix} 0.148 & 0.044 \\ 0.044 & 0.535 \end{bmatrix} \quad S_3 = \begin{bmatrix} 0.427 & -0.098 \\ -0.098 & 0.460 \end{bmatrix}$$

olmak üzere, eşitlik (6.23) yardımıyla W matrisi,

$$W = \begin{bmatrix} 8.383 & 1.014 \\ 1.014 & 13.36 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. B ve W matrislerinin toplamı ve Λ için gerekli determinantlar aşağıda verilmiştir.

$$B+W = \begin{bmatrix} 9.033 & 0.079 \\ 0.79 & 13.44 \end{bmatrix} \quad |W| = 110.986 \quad |B+W| = 120.779$$

olarak bulunur ve eşitlik (6.24) yardımıyla Wilks lamda;

$$\Lambda = \frac{110.986}{120.776} = 0.919$$

olarak elde edilir.

Λ istatistiğinin önemli olup olmadığını gerek eşitlik (6.27)'deki ki-kare dağılımı yaklaşımı gerekse de Tablo 6.10'da verilen F dağılımı yaklaşımı ile araştıralım. Örneğimizde $p = 2$ ve $k = 3$ olup (6.27)'den,

$$L = -\left[33-1-\frac{2+3}{2}\right] ln(0.919) = 2.4918$$

olur. $L = 2.4918 < \chi^2_{[2(3-1),\alpha=0.05]} = 9.488$ olduğu için üç ortalama vektörü arasında fark olmadığı söylenir (üç gruptaki değişkenler arasında fark yoktur). Gruplar arasında fark olmadığını F dağılımı yaklaşımı ile de verebiliriz. Tablo 6.10'dan $n = n_1 + n_2 + n_3 = 33$ ve

$$\left(\frac{33-3-1}{3-1}\right)\left(\frac{1-\sqrt{0.919}}{\sqrt{0.919}}\right) = 0.626 \sim F_{[2(3-1),2(33-3-1),\alpha]}$$

$$0.626 < F_{[2(3-1),2(33-3-1),\alpha]} = F_{[4,58;\alpha=0.05]} = 2.53$$

olduğu için ortalama vektörleri arasında fark olmadığı söylenir.

B ve W matrisleri değişkenlere ilişkin toplamlar ve çarpımlar toplamları yardımı ile de bulunabilir. Buna göre B ve W matrislerinin elemanları:

$$b_{11} = \frac{130.8^2}{11} + \frac{141^2}{12} + \frac{115.4^2}{10} - \frac{387.2^2}{33} = 4543.797 - 4543.147 = 0.65$$

$$b_{22} = \frac{55.1^2}{11} + \frac{60.5^2}{12} + \frac{51.3^2}{10} - \frac{166.9^2}{33} = 844.190 - 844.109 = 0.081$$

$$b_{12} = \frac{130.8*55.1}{11} + \frac{141*60.5}{12} + \frac{115.4*51.3}{10} - \frac{387.2*166.9}{33}$$

$$b_{12} = 1958.066 - 1958.293 = -0.227$$

olarak bulunurken, grup içi kareler toplamı matrisi (W) elemanları;

$$W_{11} = 1558.24 + 1658.38 + 1335.56 - 4543.797 = 8.383$$

$$W_{22} = 279.33 + 310.91 + 267.31 - 844.190 = 13.36$$

$$W_{12} = 656.6 + 711.36 + 591.12 - 1958.066 = 1.014$$

olarak bulunur.

Gruplar arasında fark olmadığı için çalışma burada sonlandırılır. Gruplar arasında fark bulunursa, farklılığın hangi gruplar ve hangi değişkenler arasında olduğunun bulunması gerekecektir. Bu amaçla geliştirilmiş çeşitli yöntemler vardır. Örnek 6.6 sonrasında bu konu üzerinde durulacaktır. Şimdi Örnek 6.6'yı inceleyelim.

Örnek 6.6. Bir araştırıcı üç farklı hastalık grubundaki (Kronik hepatit, siroz ve malignite) hastaların β fonksiyonlarını (ü/l) ve albüminlerini (gr/dl) ölçüyor ve bu ölçümlerin gruplara göre değişip değişmediğini öğrenmek istiyor. Üç gruba ilişkin ortalama vektörleri arasında fark olup olmadığını Wilks lamda yöntemi, Hotelling iz yöntemi, Pillai yöntemi ve Roy yöntemi ile belirleyelim. Veriler Tablo 6.12'de verilmiştir.

Tablo 6.12. Beta Fonksiyonları ve Albümin Değerleri

Kronik Hepatit		*Siroz*		*Malignite*	
β	*Alb.*	β	*Alb.*	β	*Alb.*
21	5.0	11	3.0	17	0.8
16	5.1	13	4.3	15	1.3
15	4.5	14	3.4	17	2.2
19	4.7	10	1.8	18	2.7
18	2.8	9	2.2	17	1.9
13	5.3	12	2.7	16	1.4
16	4.7	10	2.5	14	2.6
14	4.5	8	3.1	16	1.0
17	3.6	12	2.8	17	1.5
16	3.8	11	2.2	15	0.7
19	2.7	14	1.5	19	0.4
15	3.8	9	1.6	19	1.4
17	3.5	13	1.7	14	1.5
17	5.0	11	1.4	16	1.7
16	3.1	10	1.9	13	1.0

Hastalık gruplarına ilişkin ortalama vektörleri, genel ortalama vektörü, varyans-kovaryans matrisleri ile B, W, $B+W$ matrisleri aşağıda verilmiştir.

$$\bar{x}_1 = \begin{bmatrix} 16.600 \\ 4.140 \end{bmatrix} \quad \bar{x}_2 = \begin{bmatrix} 11.133 \\ 2.407 \end{bmatrix} \quad \bar{x}_3 = \begin{bmatrix} 16.200 \\ 1.473 \end{bmatrix} \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 14.644 \\ 2.673 \end{bmatrix}$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 4.257 & -0.397 \\ -0.397 & 0.751 \end{bmatrix} \quad S_2 = \begin{bmatrix} 3.410 & 0.306 \\ 0.306 & 0.668 \end{bmatrix} \quad S_3 = \begin{bmatrix} 3.171 & -0.030 \\ -0.030 & 0.445 \end{bmatrix}$$

$$n = 15+15+15 = 45$$

$$B = \begin{bmatrix} 278.578 & 29.067 \\ 29.067 & 54.933 \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} 151.733 & -1.693 \\ -1.693 & 26.095 \end{bmatrix} \quad B+W = \begin{bmatrix} 430.311 & 27.374 \\ 27.374 & 81.028 \end{bmatrix}$$

$$|W| = 3956.606 \quad |B+W| = 34117.9$$

olarak bulunur. Eşitlik (6.24) yardımıyla Wilks lamda,

$$\Lambda = \frac{3956.606}{34117.9} = 0.116$$

olarak elde edilir. Tablo 6.10 yardımıyla da,

$$\left(\frac{45-2-2}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{0.116}}{\sqrt{0.116}}\right) \sim F_{[2p,2(n-p-2);\alpha]}$$

$$39.69 > F_{(4,82;\alpha=0.05)} \equiv 2.53$$

olduğu için üç ortalama vektörü arasında fark olduğu söylenir. Ortalama vektörleri arasında fark olup olmadığını Hotelling, Pillai ve Roy istatistikleri ile de çözelim.

Örnek 6.6'nın Hotelling İz Yöntemi İle Çözümü

Örnek 6.6'ya ilişkin BW^{-1} matrisi ve bu matrisin özdeğerleri aşağıda verilmiştir.

$$BW^{-1} = \begin{bmatrix} 1.8497426 & 1.2339 \\ 0.215211 & 2.119078 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 2.517 \quad \lambda_2 = 1.452$$

Eşitlik (6.28)'den $T = 2.517 + 1.452 = 3.969$ olarak bulunur. Eşitlik (6.29)'dan,

$$45 \times 3.969 = 178.6 > \chi^2_{[2(3-1);\alpha=0.05)]} = \chi^2_{(4;\alpha=0.05)} = 9.488$$

olduğu için ortalama vektörleri arasında fark olduğu söylenir. Benzer sonuçlara F dağılımı yardımı ile de ulaşılabilir. (6.25)'deki eşitliklerden;

$$s = min(3-1,2) = 2$$

$$m = \frac{|2-(3-1)|-1}{2} = \frac{|2-2|-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\tilde{n} = \frac{45-2-3-1}{2} = \frac{39}{2} = 19.5$$

olarak bulunur ve Eşitlik (6.30)'dan

$$F = \frac{2[2(19.5)+1]}{2^2[2(-1/2)+2+1]} 3.969 = 39.69$$

ve $F_{Hesap} = 39.69 > F_{Tablo[2(2(-1/2)+2+1),2(2(19.5)+1);\alpha]} = F_{Tablo(4,80;\alpha=0.05)} \cong 2.53$

olduğu için ortalama vektörleri arasında fark olduğu söylenir.

Örnek 6.6'nın Pillai Test İstatistiği ile Çözümü:

Eşitlik (6.31) yardımıyla, Pillai istatistiği T,

$$T = \frac{2.517}{1+2.517} + \frac{1.452}{1+1.452} = 1.3078$$

olarak bulunur. Eşitlik (6.32)'den,

$$\frac{2(19.5)+2+1}{2(-1/2)+2+1} \frac{1.3078}{2-1.3078} = 39.676 \sim F_{\left[2\left(2\left(-\frac{1}{2}\right)+2+1\right),2(2(19.5)+2+1);\alpha\right]}$$

ve

$$39.676 > F_{Tablo(4,84;\alpha=0.05)} \cong 2.53$$

olduğu için ortalama vektörleri arasında fark olduğu söylenir.

Örnek 6.6'nın Roy Yöntemi İle Çözümü

Eşitlik (6.33) yardımıyla, Roy'un en büyük özdeğere dayalı test istatistiği,

$$T = \frac{2.517}{1+2.517} = 0.71566$$

olarak bulunur. T istatistiği, seçilen yanılma düzeyindeki s, m ve N parametreli Heck grafik değeri ile karşılaştırılır. Heck grafikleri bu kitapta verilmemiştir. Bu amaçla çeşitli çok değişkenli kitaplarından yararlanılabilir. Örneğimizde Heck grafik değeri $\alpha = 0.05$ için yaklaşık 0.18 olarak bulunur. 0.71566>0.18 olduğu için üç ortalama vektörü arasında fark olduğu söylenir.

Gruplar arasında fark olduğu için, farklılığın hangi gruplar arasında ve hangi değişkenler nedeniyle ortaya çıktığının araştırılması gerekir. Burada, Bonferroni yaklaşımı üzerinde durulacaktır.

Bonferroni Eşanlı Güven Aralıkları ve Farklı Grup ve Değişkenlerin Belirlenmesi

i : *İlgili değişkeni*

m ve l : *i. değişken açısından karşılaştırılacak grupları*

w_{li} : *W matrisinde i. değişkene ilişkin* w_{ii} *köşegen elemanı*

göstermek üzere,

$$\bar{x}_{mi} - \bar{x}_{li} \pm t_{\left(n-k;\frac{\alpha}{pk(k-1)}\right)} \sqrt{\frac{w_{ii}}{n-k}\left(\frac{1}{n_m} - \frac{1}{n_l}\right)} \qquad (6.34)$$

ile verilir. Örnek 6.6 için eşanlı güven aralıkları aşağıda hesaplanmıştır.

Bu amaçla önce, her bir gruba ilişkin ortalama vektörü arasındaki farklara ilişkin fark vektörleri bulunur. Örneğimiz için;

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \begin{bmatrix} 16.6 - 11.133 \\ 4.14 - 2.407 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.467 \\ 1.733 \end{bmatrix}$$

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_3) = \begin{bmatrix} 16.6 - 16.2 \\ 4.14 - 1.473 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.400 \\ 2.667 \end{bmatrix}$$

$$(\bar{x}_2 - \bar{x}_3) = \begin{bmatrix} 11.133 - 16.2 \\ 2.407 - 1.473 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.067 \\ 0.934 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Güven aralıkları (6.34) yardımıyla aşağıda hesaplanmıştır.

1. değişken açısından *1.* ve *2.* grup arasında fark olup olmadığının araştırılması ($\alpha = 0.05$ için):

$$5.467 \pm t_{(42;0.004166)}\sqrt{\frac{151.733}{42}\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{15}\right)}$$

$$= 5.467 \pm 2.7695(0.6940)$$

$$= 5.467 \pm 1.992 \quad \text{ya da} \quad [3.545 \quad 7.389]$$

olarak bulunur. İşaretler aynı olduğu için, **1.** değişken açısından *1.* ve *2.* gruplar arasında fark vardır (Buradaki $t_{(42;0.004166)}$ değerini, t tablosu yardımı ile bulamayız. Çeşitli istatistiksel paket programlarında t dağılımı fonksiyonu yardımıyla bu değer elde edilebilir. Denek sayısının fazla olması durumunda z tablosundan yararlanılabilir.).

1. değişken açısından *1.* ve *3.* grup arasında fark olup olmadığının araştırılması:

$$0.4 \pm 2.7695(0.6940)$$

$$= 0.4 \pm 1.992 \quad \text{ya da} \quad [-1.522 \quad 2.322]$$

olarak bulunur. İşaretler farklı olduğu için **1.** değişken açısından *1.* ve *3.* grup arasında fark yoktur.

1. değişken açısından *2.* ve *3.* grup arasında fark olup olmadığının araştırılması:

$$-5.067 \pm 1.992 \quad \text{ya da} \quad [-6.989 \quad -3.145]$$

olarak bulunur. İşaretler aynı olduğu için **1.** değişken açısından *2.* ve *3.* grup arasında fark vardır.

2. değişken açısından *1.* ve *2.* grup arasında fark olup olmadığının araştırılması:

$$1.733 \pm 2.7695\sqrt{\frac{26.095}{42}\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{15}\right)}$$

$$= 1.733 \pm 2.7695(0.28782)$$

$$= 1.733 \pm 0.7971 \quad \text{ya da} \quad [0.9359 \quad 2.5301]$$

olarak bulunur. İşaretler aynı olduğu için **2.** değişken açısından *1.* ve *2.* grup arasında fark vardır.

2. değişken açısından *1.* ve *3.* grup arasında fark olup olmadığının araştırılması:

$$2.267 \pm 0.7971 \quad \text{ya da} \quad [1.4699 \quad 3.0641]$$

olarak bulunur. İşaretler aynı olduğu için **2.** Değişken açısından *1.* ve *3.* grup arasında fark vardır.

2. değişken açısından *2.* ile *3.* grup arasında fark olup olmadığının araştırılması:

0.934 ± 0.7971 ya da $[0.1369 \quad 1.7311]$

olarak bulunur. İşaretler aynı olduğu için 2. değişken açısından *2. ve 3. grup arasında* fark vardır.

Yukarıda elde ettiğimiz güven aralıklarını bir tabloda toplamak sonucu daha iyi anlamamıza yardımcı olacaktır (Tablo 6.13).

Tablo 6.13. İkişerli Karşılaştırma Sonuçları

DEĞİŞKENLER	*HASTALIK GRUPLARI*		
	K. Hepatit -Siroz	*K. Hepatit - Malignite*	*Siroz - Malignite*
β	Fark Var	Fark Yok	Fark Var
Albümin	Fark Var	Fark Var	Fark Var

Çok Değişkenli İki Yönlü Varyans Analizi

Çok değişkenli tek yönlü varyans analizi, tek bağımsız değişkenin etkisi altında, iki ve daha fazla bağımlı değişkenin olması durumunda kullanılıyordu. Çok değişkenli iki yönlü varyans analizi ise iki bağımsız değişkenin etkisi altında, iki ve daha fazla bağımlı değişkenin olması durumunda kullanılır.

Çok değişkenli tek yönlü varyans analizi için Tablo 6.7'de verilen örnekte üç değişkeni etkileyen bağımsız değişken olan "spor dalları" na bir diğer bağımsız değişken olarak "cinsiyet"i eklersek çok değişkenli iki yönlü varyans analizi sorununa ulaşırız (Tablo 6.14).

Tablo 6.14. Çok Değişkenli İki Yönlü Varyans Analizi

ETKEN I CiNS	*E T K E N (Faktör) II*								
	YÜZME			*ATLETİZM*			*FUTBOL*		
	max	*mkk*	*sbil*	*max*	*mkk*	*sbil*	*max*	*mkk*	*sbil*
Erkek	59	45	62	63	38	55	55	50	45
	62	51	54	69	36	62	59	56	64
	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	60	38	65	61	34	60	56	45	55
Bayan	54	36	63	60	29	71	50	35	62
	57	29	71	58	27	55	53	27	54
	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	52	33	59	50	31	63	47	30	65

1. etkenin düzey sayısı: $l = 1,2,.....,g$

2. etkenin düzey sayısı: $k = 1,2,.....,b$

Her bir $g_l b_i$ alt grubundaki denek sayısı: $r = 1,2,.....,n$

olmak üzere, çok değişkenli iki yönlü varyans analizi tablosu Tablo 6.15'de verilmiştir. Tablo 6.15 yardımıyla Etken I, Etken II ve Etkileşim için Wilks lamda istatistikleri aşağıdaki gibi bulunur.

Tablo 6.15. İki Yönlü MANOVA Tablosu

Değişim Kaynağı	Kareler ve Çarpımlar Toplamı Matrisi	Ser. Derecesi
Etken I	$\sum_{l=1}^{g} bn(\bar{x}_{l.} - \bar{x})(\bar{x}_{l.} - \bar{x})'$	$g-1$
Etken II	$\sum_{k=1}^{b} gn(\bar{x}_{.k} - \bar{x})(\bar{x}_{.k} - \bar{x})'$	$b-1$
Etkileşim	$\sum_{l=1}^{g}\sum_{k=1}^{b} n(\bar{x}_{lk} - \bar{x}_{l.} - \bar{x}_{.k} + \bar{x})(\bar{x}_{lk} - \bar{x}_{l.} - \bar{x}_{.k} + \bar{x})'$	$(g-1)(b-1)$
Hata	$\sum_{l=1}^{g}\sum_{k=1}^{b}\sum_{r=1}^{n}(x_{lkr} - \bar{x}_{lk})(x_{lkr} - \bar{x}_{lk})'$	$gb(n-1)$
Toplam	$\sum_{l=1}^{g}\sum_{k=1}^{b}\sum_{r=1}^{n}(x_{lkr} - \bar{x})(x_{lkr} - \bar{x})'$	$gnb-1$

Etken I için : "İncelenen değişkenlere ilişkin ortalama vektörleri I. Etkenin düzeylerine göre değişmemektedir" şeklindeki sıfır hipotezi için Λ istatistiği (Λ_1):

$$\Lambda_1 = \frac{\left|Hata\ \ KT\right|}{\left|Etken\ \ I\ \ KT + Hata\ \ KT\right|} \qquad (6.35)$$

ile verilir. Λ_1'in küçük değerli olması, sıfır hipotezinin reddedileceğine işaret eder. Λ_1 istatistiği büyük örneklemler için;

$$-\left[gb(n-1) - \frac{p+1-(g-1)}{2}\right] ln(\Lambda_1) > \chi^2_{[(g-1)p;\alpha]} \qquad (6.36)$$

koşulunu sağlıyorsa H_0 hipotezi reddedilir.

Etken II için : "İncelenen değişkenlere ilişkin ortalama vektörleri II. etkenin düzeylerine göre değişmemektedir" şeklindeki sıfır hipotezi için Λ istatistiği (Λ_2):

$$\Lambda_2 = \frac{\left|Hata\ \ KT\right|}{\left|Etken\ \ II\ \ KT + Hata\ \ KT\right|} \qquad (6.37)$$

Λ_2 istatistiği büyük örneklemler için;

$$-\left[gb(n-1) - \frac{p+1-(b-1)}{2}\right] ln(\Lambda_2) > \chi^2_{[(b-1)p;\alpha]} \qquad (6.38)$$

koşulunu sağlıyorsa H_0 hipotezi reddedilir.

Etkileşim için: Etkileşim için Λ istatistiği (Λ),

$$\Lambda = \frac{\left|Hata\ KT\right|}{\left|Etkileşim\ KT + Hata\ KT\right|} \qquad (6.39)$$

ile verilir. Eğer,

$$-\left[gb(n-1) - \frac{p+1-(g-1)(b-1)}{2}\right] \ln(\Lambda) > \chi^2_{[(g-1)(b-1)p;\alpha]} \qquad (6.40)$$

ise "etkileşim önemsizdir ya da incelenen iki bağımsız değişken üzerine etken1'in etkisi etken2'den bağımsızdır" şeklindeki H_0 hipotezi reddedilir ve etkileşimin önemli olduğu söylenir.

Etkileşimin önemli olmadığına ilişkin testin, etkenlere ilişkin testlerden daha önce yapılması daha anlamlıdır. Çünkü, etkileşim önemli ise, etken1 ve etken2'ye ilişkin hipotezlerin açık bir yorumu olmayacaktır. Bu nedenle de, etkenlere ilişkin hesaplamaları yapmaya gerek yoktur. Bunun yerine, p tane (her değişken için ayrı ayrı) tek değişkenli çift yönlü varyans analizi uygulanarak etkileşimin hangi değişkenler arasında olduğunu görmek yararlı olacaktır. Bu işlemin sonunda, etkileşimi önemsiz olan değişken(ler) için etken1 ve etken2'ye ilişkin Λ'lar hesaplanabilir. İstatistik yazılımların bir bölümü tek değişkenli çift yönlü varyans analizi sonuçlarını da MANOVA çıktısı ile birlikte vermektedir.

Wilks lamda istatistiklerine ilişkin F istatistiklerini bulmak için değişik formülasyonlardan yararlanılır.

1. İncelenen etkenin düzey sayısı 2 ise:

$$F_{(Sd_1, Sd_2)} = \left(\frac{1-\Lambda}{\Lambda}\right)\left(\frac{Sd_2}{Sd_1}\right) \qquad (6.41)$$

ile verilir. Burada Sd_2 ve Sd_1

$$Sd_2 = 2(Diğer\ etkenin\ düzey\ sayısı)(n-1) - p + 1 \qquad (6.42)$$

$$Sd_1 = |1-p| + 1 \qquad (6.43)$$

dir.

2. İncelenen Etkenin Düzey Sayısı 3 ve daha fazla ise:

$$F_{(Sd_1, Sd_2)} = \left(\frac{1-y}{y}\right)\left(\frac{Sd_2}{Sd_1}\right) \qquad (6.44)$$

ile verilir. Burada;

$$y = \Lambda^{1/S} \tag{6.45}$$

olup S;

$$S = \sqrt{\frac{p^2(\text{İncelenen Etken } Sd)^2 - 4}{p^2 + (\text{İncelenen Etken } Sd)^2 - 5}} \tag{6.46}$$

ve

$$Sd_2 = S\left[\text{Hata } Sd - \frac{p - \text{İncelenen Etken } Sd + 1}{2}\right] - \left[\frac{p(\text{İncelenen Etken } Sd) - 2}{2}\right] \tag{6.47}$$

$$Sd_1 = p(\text{İncelenen etkenin serbestlik derecesi}) \tag{6.48}$$

ile verilir.

Eşitlik (6.44)'den (6.48)'e kadar olan eşitlikler düzey sayısından bağımsız olarak etkileşim için de geçerlidir. Ayrıca, Hotelling, Pillai, Roy istatistikleri ve serbestlik dereceleri s, m ve n parametrelerine bağlı olarak (6.28)–(6.33) eşitliklerinden yararlanılarak bulunabilir. Burada sadece Wilks lamda istatistiği ile ilgili hesaplamalar yapılacaktır. Konuya ilişkin bir uygulama Örnek 6.7'de verilmiştir.

Örnek 6.7. Biyoistatistik yaz okulu sırasında, kursiyerlerin kısa yoldan öğrenmelerini sağlayacak öğretim yöntemi (*Etken* I) ile dersin veriliş süresinin (*Etken* II) iki farklı değişken üzerine etkileri inceleniyor.

Etken I'in iki düzeyi olup (g=2);

A : *Anlatmaya dayalı öğretim yöntemi* (*pasif yöntem*)

B : *Öğrencinin çalışmasına dayalı öğretim yöntemi* (*aktif yöntem*)

Etken II'nin üç düzeyi olup (b=3);

C1 : *6 hafta süre ile günde iki saatlik kurs*

C2 : *4 hafta süre ile günde üç saatlik kurs*

C3 : *3 hafta süre ile günde dört saatlik kurs*

şeklindedir. Bu amaçla öğrenciler rasgele 6 gruba ayrılarak her gruba "değişik öğretim yöntemi-değişik süre" seviyelerinde kurs veriliyor. Kurs sonunda, bir sınav yapılarak öğrencilerin sınavı bitiriş süreleri (*SÜ*) ve teste verdikleri doğruluk yüzdeleri (*DY*) elde ediliyor (p=2). Kısaca araştırıcı, iki farklı değişken üzerine iki farklı etkenin etkisini incelemek istemektedir. Elde edilen veriler Tablo 6.16'de verilmiştir (Tatsuoka, 1971'den).

Tablo 6.16. Yaz Okulu Verisi

Öğretim Yöntemi	Dersin Veriliş Süresi					
	C1		C2		C3	
	SÜ	DY	SÜ	DY	SÜ	DY
A	36	26	46	17	26	14
	34	22	34	21	31	14
	28	21	31	17	30	16
	34	23	31	18	34	16
	34	21	36	23	30	13
	29	19	26	19	27	13
	48	25	35	16	21	12
	28	20	33	19	31	15
	34	21	23	15	37	14
	38	20	30	14	29	14
Σx	343	218	325	179	296	141
$\bar{x}$	34.3	21.8	32.5	17.9	29.6	14.1
Σx^2	12077	4798	10909	3271	8934	2003
$\Sigma x_1 x_2$	7553		5855		4204	
B	42	25	32	18	28	11
	47	24	39	19	28	10
	51	29	37	17	25	10
	35	25	31	17	22	12
	37	26	36	19	27	11
	44	28	32	19	25	12
	44	25	31	17	33	14
	49	24	41	21	31	13
	43	24	36	18	28	12
	36	26	40	20	23	11
Σx	428	256	355	185	270	116
$\bar{x}$	42.8	25.6	35.5	18.5	27.0	11.6
Σx^2	18586	6580	12733	3439	7394	1360
$\Sigma x_1 x_2$	10970		6601		3153	

Tablo 6.16'ya ilişkin bulgular aşağıda verilmiştir.

I. etkenin 1. düzeyi için ortalama vektörü ve gözlem sayısı:

$$\bar{x}_{11} = \begin{bmatrix} 32.1333 \\ 17.9333 \end{bmatrix} \qquad n = 30$$

I. etkenin 2. düzeyi için ortalama vektörü ve gözlem sayısı:

$$\bar{x}_{21} = \begin{bmatrix} 35.1000 \\ 18.5667 \end{bmatrix} \qquad n = 30$$

II. etkenin 1. düzeyi için ortalama vektörü ve gözlem sayısı:

$$\bar{x}_{12} = \begin{bmatrix} 38.55 \\ 23.70 \end{bmatrix} \qquad n = 20$$

II. etkenin 2. düzeyi için ortalama vektörü ve gözlem sayısı:

$$\bar{x}_{22} = \begin{bmatrix} 34.00 \\ 18.20 \end{bmatrix} \qquad n = 20$$

II. etkenin 3. düzeyi için ortalama vektörü ve gözlem sayısı:

$$\bar{x}_{32} = \begin{bmatrix} 28.30 \\ 12.85 \end{bmatrix} \qquad n = 20$$

Genel ortalama vektörü ve gözlem sayısı:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 33.6167 \\ 18.2500 \end{bmatrix} \qquad n = 60$$

Tablo 6.15'deki ilgili eşitliklerden;

I. etken için kareler ve çarpımlar toplamı matrisi (Et1 KÇT):

Et1 KÇT =

$$(3)(10)\left\{\begin{bmatrix} 32.1333-33.6167 \\ 17.9333-18.2500 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 32.1333-33.6167 & 17.9333-18.2500 \end{bmatrix}+\right.$$

$$\left.\begin{bmatrix} 35.1000-33.6167 \\ 18.5667-18.2500 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 35.1000-33.6167 & 18.5667-18.2500 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\text{Et1 KÇT} = \begin{bmatrix} 132.08 & 28.18 \\ 28.18 & 6.02 \end{bmatrix}$$

II. etken için kareler ve çarpımlar toplamı matrisi (Et2 KÇT):

Et2 KÇT =

$$(2)(10)\left\{\begin{bmatrix} 38.55-33.6167 \\ 23.70-18.2500 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 38.55-33.6167 & 23.70-18.25 \end{bmatrix}+\right.$$

$$\begin{bmatrix} 34.00-33.6167 \\ 18.20-18.2500 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 34.00-33.6167 & 18.20-18.25 \end{bmatrix}+$$

$$\left.\begin{bmatrix} 28.30-33.6167 \\ 12.85-18.2500 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 28.30-33.6167 & 12.85-18.25 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\text{Et2 KÇT} = \begin{bmatrix} 1055.03 & 1111.55 \\ 1111.55 & 1177.30 \end{bmatrix}$$

Hata kareler ve çarpımlar toplamı matrisi (Hata KÇT):

Hata KÇT =

$$\begin{bmatrix}36-34.3\\26-21.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}36-34.3 & 26-21.8\end{bmatrix}+....+\begin{bmatrix}38-34.3\\20-21.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}38-34.3 & 20-21.8\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix}46-32.5\\17-17.9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}46-32.5 & 17-17.9\end{bmatrix}+....+\begin{bmatrix}30-32.5\\14-17.9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}30-32.5 & 14-17.9\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix}26-29.6\\14-14.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}26-29.6 & 14-14.1\end{bmatrix}+....+\begin{bmatrix}29-29.6\\14-14.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}29-29.6 & 14-14.1\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix}42-42.8\\25-25.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}42-42.8 & 25-25.6\end{bmatrix}+....+\begin{bmatrix}36-42.8\\26-25.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}36-42.8 & 26-25.6\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix}32-35.5\\18-18.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}32-35.5 & 18-18.5\end{bmatrix}+....+\begin{bmatrix}40-35.5\\20-18.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}40-35.5 & 20-18.5\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix}28-27.0\\11-11.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}28-27.0 & 11-11.6\end{bmatrix}+....+\begin{bmatrix}23-27.0\\11-11.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}23-27.0 & 11-11.6\end{bmatrix}$$

$$\text{Hata KÇT} = \begin{bmatrix}1333.10 & 211.20\\211.20 & 184.70\end{bmatrix}$$

Toplam kareler ve çarpımlar toplamı matrisi (Toplam KÇT):

$$\text{Toplam KÇT} = \begin{bmatrix}36-33.6167\\26-18.2500\end{bmatrix}\begin{bmatrix}36-33.6167 & 26-18.2500\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix}34-33.6167\\22-18.2500\end{bmatrix}\begin{bmatrix}34-33.6167 & 22-18.2500\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix}23-33.6167\\11-18.2500\end{bmatrix}\begin{bmatrix}23-33.6167 & 11-18.2500\end{bmatrix}$$

$$\text{Toplam KÇT} = \begin{bmatrix}2828.18 & 1525.75\\1525.75 & 1467.25\end{bmatrix}$$

Etkileşim kareler ve çarpımlar toplamı matrisi (Etkileşim KÇT):

Toplam KÇT=Et1 KÇT +Et2 KÇT + Etkileşim KÇT +Hata KÇT

eşitliğinden;

$$\text{Etkileşim KÇT} = \begin{bmatrix}307.97 & 174.82\\174.82 & 99.23\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Wilks lamda istatistiklerini bulabilmek için; *etken*1, *etken*2 ve etkileşime ilişkin kareler ve çarpımlar toplamı matrisleri, hata kareler ve çarpımlar toplamı matrisi ile toplanır ve determinantları alınır. Daha sonra eşitlik (6.35), (6.37) ve (6.39) yardımıyla Wilks lamda istatistikleri bulunur. Bu işlemler sonucunda Wilks lamda istatistikleri, örneğimiz için sırasıyla Λ_1=0.9076, $\Lambda_2 = 0.1341$ ve $\Lambda = 0.6361$ olarak bulunur. Bu istatistiklere ilişkin *F* istatistikleri ise aşağıda hesaplanmıştır.

I. etkenin düzey sayısı 2 olduğu için *F* istatistiği, serbestlik dereceleri eşitlik (6.42) ve (6.43) yardımıyla,

$$Sd_2 = 2(3)(10-1)-2+1 = 53$$

$$Sd_1 = |1-2|+1 = 2$$

olmak üzere eşitlik (6.41)'den:

$$F = \left(\frac{1-0.9076}{0.9076}\right)\frac{2(3)(10-1)-2+1}{|1-2|+1} = 2.698$$

olarak bulunur ve $F = 2.698 < F_{(2,53;\alpha=0.05)} \cong 3.15$ olduğu için kursiyerlerin sınavı bitiriş süreleri ve teste verdikleri doğruluk yüzdelerinin öğretim yöntemlerine göre değişmediği söylenir.

II. etkenin düzey sayısı 3 olduğu için *F* değerini hesaplamakta (6.44)'den (6.48)'e kadar olan eşitlikler kullanılır. Buna göre,

$$S = \sqrt{\frac{2^2(2)^2-4}{2^2+(2)^2-5}} = 2 \quad y = 0.1341^{1/2} = \sqrt{0.1341} = 0.36619667$$

$$Sd_2 = 2\left[54 - \frac{2-(2)+1}{2}\right] - \left[\frac{2(2)-2}{2}\right] = 106$$

$$Sd_1 = 2(2) = 4$$

ve *F* istatistiği:

$$F = \left(\frac{1-0.36619667}{0.36619667}\right)\left(\frac{106}{4}\right) = 45.865$$

olarak bulunur. $F = 45.865 > F_{(4,106;\alpha=0.05)} \cong 2.45$ olduğu için kursiyerlerin sınavı bitiriş süreleri ile testteki doğruluk yüzdelerinin kurs süresine göre değiştiği söylenir.

Etkileşim için de (6.44)'den (6.48)'e kadar olan eşitlikler kullanılır. Etkileşim serbestlik derecesi Tablo 6.15'den (2-1)(3-1)=2'dir. Ayrıca *s*=2, *y*=0.797559, Sd_2=4 ve Sd_1=106 olarak bulunur ve *F* değeri;

$$F = \left(\frac{1-0.797559}{0.797559}\right)\left(\frac{106}{4}\right) = 6.72638$$

olarak bulunur. $F = 6.726 > F_{(4,106;\alpha=0.05)} \cong 2.45$ olduğu için etkileşimin önemli olduğu söylenir. Bu durumda, her bir bağımlı değişken için çift yönlü varyans analizi yardımı ile etkileşimin hangi değişken(ler) için varolduğunu bulmak gerekir. Örneğimiz için bu hesaplamalar yapıldığında her iki değişken için de etkileşimin anlamlı olduğu görülür. Bu nedenle de bu örneğin çözümünde, iki tane iki yönlü-tek değişkenli varyans analizi kullanılması önerilir. Benzer hesaplamalar sırasıyla eşitlik (6.36), (6.38) ve (6.40) ile verilen ki-kare yaklaşımları ile de yapılabilir. Buna göre,

Λ_1 için (6.36)'dan $5.138 < \chi^2_{(2;\alpha=0.05)} \cong 5.99$

Λ_2 için (6.38)'den $107.49 > \chi^2_{(4;\alpha=0.05)} = 9.49$

Λ için (6.40)'dan $24.2 > \chi^2_{(4;\alpha=0.05)} = 9.49$

olduğu için F dağılımı yaklaşımı ile benzer sonuçlara ulaşılır. Bu örneğe ilişkin tüm sonuçlar Tablo 6.17'de verilmiştir.

Tablo 6.17. Örnek 6.7 İçin MANOVA Sonuçları

DK	*KÇT*	*Sd*	*KÇT+Hata*	*|KÇT + Hata|*	*Wilks Lamda*	*F*
Etken1	$\begin{bmatrix}132.08 & 28.18\\ 28.18 & 6.02\end{bmatrix}$	1	$\begin{bmatrix}1465.18 & 239.38\\ 239.38 & 190.72\end{bmatrix}$	222138.74	0.9076	2.698
Etken2	$\begin{bmatrix}1055.03 & 1111.55\\ 1111.55 & 1177.30\end{bmatrix}$	2	$\begin{bmatrix}2388.13 & 1322.75\\ 1322.75 & 1362.00\end{bmatrix}$	1502965.498	0.1341	45.865
Etkileş.	$\begin{bmatrix}307.97 & 174.82\\ 174.82 & 99.23\end{bmatrix}$	2	$\begin{bmatrix}1641.07 & 386.02\\ 386.02 & 283.93\end{bmatrix}$	316937.565	0.6361	6.726
Hata	$\begin{bmatrix}1333.1 & 211.2\\ 211.2 & 184.7\end{bmatrix}$	54	$\begin{bmatrix}1333.10 & 211.20\\ 211.20 & 184.70\end{bmatrix}$	201618.13	-	-
Toplam	$\begin{bmatrix}2828.18 & 1525.75\\ 1525.75 & 1460.25\end{bmatrix}$	59	-	-	-	-

Eğer örneğimizde etkileşim önemsiz olsa idi, bu aşamada yapılması gereken şey; önemli olan etkene (ki örneğimizde etken 2'nin düzeyleri farklıdır) ilişkin farklılığın, hangi düzeyler ve hangi değişkenler nedeniyle ortaya çıktığının belirlenmesidir. Bu amaçla güven aralıklarından yararlanılır. Buna göre, birinci etkenin düzeyleri arasında fark olduğunda, incelenen değişkenin ortalamaları arasındaki farka $\bar{x}_f$ dersek Bonferroni güven aralıkları;

$$\bar{x}_f \pm t_{\left[gb(n-1);\frac{\alpha}{pg(g-1)}\right]}\sqrt{\frac{Hata\ KÇT_{ii}}{gb(n-1)}\frac{2}{bn}} \qquad (6.49)$$

ile verilir. İkinci etken için bu aralık;

$$\bar{x}_f \pm t_{\left[gb(n-1);\frac{\alpha}{pb(b-1)}\right]}\sqrt{\frac{Hata\ KÇT_{ii}}{gb(n-1)}\frac{2}{gn}} \qquad (6.50)$$

ile verilir. Burada $Hata\ KÇT_{ii}$; hata kareler ve çarpımlar toplamı matrisinin *i.* köşegen elemanıdır.

Örneğimiz için etkileşimin önemsiz olduğunu düşünerek, işlemlere devam edelim ve önemli olarak bulunan ikinci etken için güven aralıklarını bulalım. İkinci etkenin üç düzeyindeki ortalama vektörleri (20 gözlem için);

$$\bar{x}_{12}=\begin{bmatrix}38.55\\23.70\end{bmatrix} \quad \bar{x}_{22}=\begin{bmatrix}34.00\\18.20\end{bmatrix} \quad \bar{x}_{32}=\begin{bmatrix}28.30\\12.85\end{bmatrix}$$

olarak bulunmuştu. Ayrıca, $g=2$, $b=3$, $p=2$ 'dir. Buna göre;

1. değişken açısından ikinci etkenin *1.* ve *2.* düzeyi arasında fark olup olmadığının araştırılması (6.50) yardımıyla ($\alpha=0.05$ için):

$$(38.55-34.00)\pm t_{\left[(2)(3)(10-1);\frac{0.05}{(2)(3)(3-1)}\right]}\sqrt{\frac{1333.1}{(2)(3)(10-1)}\frac{2}{2(10)}}$$

$$4.55\pm t_{(54;0.004166)}(1.57121)=4.55\pm 2.73938(1.57121)$$

ya da $[0.24586 \quad 8.8541]$ olarak bulunur. İşaretler aynı olduğu için **1.** değişken açısından ikinci etkenin *1.* ve *2.* düzeyi arasında fark olduğu söylenir.

1. değişken açısından ikinci etkenin *1.* ve *3.* düzeyi arasında fark olup olmadığının araştırılması:

$(38.55-28.3)\pm 2.73938(1.57121)=10.25\pm 4.30414$

ya da $[5.9458 \quad 14.554]$ olarak bulunur. İşaretler aynı olduğu için **1.** değişken açısından ikinci etkenin *1.* ve *3.* düzeyi arasında fark olduğu söylenir.

2. değişken açısından ikinci etkenin *1.* ve *2.* düzeyi arasında fark olup olmadığının araştırılması:

$(23.70-18.20)\pm 2.73938\sqrt{\frac{184.7}{54}\frac{2}{20}}=5.5\pm 2.73938(0.584839)$ ya da

$[3.8979 \quad 7.1021]$ olarak bulunur. İşaretler aynı olduğu için **2.** değişken açısından ikinci etkenin *1.* ve *2.* düzeyi arasında fark olduğu söylenir.

2. değişken açısından ikinci etkenin *1.* ve *3.* düzeyi arasında fark olup olmadığının araştırılması:

$(23.70-12.85)\pm 2.73938(0.584839)$ ya da $[9.2479 \quad 12.4529]$ olarak bulunur. İşaretler aynı olduğu için **2.** değişken açısından ikinci etkenin *1.* ve *3.* düzeyi arasında fark olduğu söylenir.

2. değişken açısından ikinci etkenin *2.* ve *3.* düzeyi arasında fark olup olmadığının araştırılması:

$(18.20-12.85)\pm 2.73938(0.584839)$ ya da $[3.748 \quad 6.952]$ olarak bulunur. İşaretler aynı olduğu için **2.** değişken açısından ikinci etkenin *2.* ve *3.* düzeyi arasında fark olduğu söylenir.

Tekrarlı Ölçümlerde Tek Yönlü Varyans Analizi

Bir çok deney, herhangi bir değişken yönünden aynı gözlemlerin (deneklerin, bireylerin) değişik zaman ya da durumdaki ölçümleri arasında fark olup olmadığının araştırılması şeklinde planlanır. Bilindiği gibi, iki eş arasındaki farkın önemlilik testi, ölçümle belirtilen bir değişken yönünden aynı bireylerin değişik zaman ya da durumdaki iki ölçümü (ameliyattan önce-sonra, ilaç verilmeden önce-sonra,... vb) yapıldığında, ölçüm grupları arasında fark olup olmadığını test etmekte kullanılıyordu. Tekrarlı ölçümlerde tek yönlü varyans analizi ise, bireyler üzerinde ikiden çok ölçümün yapıldığı durumlarda ölçüm grupları arasında fark olup olmadığını test etmekte kullanılır. Örneğin, yüksek tansiyonu düşürmede etkili olacağı düşünülen bir ilacın etkisini görmek istediğimizde, yüksek tansiyonlu kişiler seçilerek, bu kişilerin ilaç verilmeden önceki 4 günlük tansiyon ölçümleri ortalaması ve ilaç verildikten belli bir süre (örneğin 1 ay, 2 ay, 3 ay, ...) sonraki 4'er günlük tansiyon ölçümleri ortalamalarının elde edilmesi ve bu ölçümler arasında fark olup olmadığının araştırılması söz konusu olabilir (Tablo 6.18). Benzer şekilde, bir grup birey üzerinde, bir x değişkeni açısından çeşitli aralıklarla A, B, C,... ilaçlarının etkisinin incelenmesi de aynı bireyler üzerinde birden çok ölçümün yapıldığı durumun bir başka uygulama biçimidir. Yine, aynı sporcuların vücut yağ yüzdelerinin 4 farklı yöntemle saptanması ve vücut yağ yüzdeleri açısından yöntemler arasında fark olup olmadığının araştırılması da tekrarlı ölçümlerde varyans analizine ilişkin bir örnek olarak verilebilir (Tablo 6.19). Bu tür çalışmalarda, her birey kendisinin kontrolüdür ve aynı denek üzerinde çalışma boyunca birden fazla ölçüm yapılır. Deney düzenleme açısından bu tür denemelerin mantığında, bireysel farklılıklardan meydana gelecek hataların en aza indirilmesi yatmaktadır.

Tablo 6.18. İlacın Kan Basıncına Zaman İçindeki Etkisi

Hasta No	*İlaç Verilmeden Önce*	*İlaç Verildikten 1 Ay Sonra*	*İlaç Verildikten 2 Ay Sonra*
1	220	180	100
2	230	175	110
.	.	.	.
n	240	150	105

Tablo 6.19. Dört Farklı Yöntemle Vücut Yağ Yüzdeleri Ölçümü

	YÖNTEMLER			
Sporcular	*A*	*B*	*C*	*D*
1	28	26	27	28
2	33	32	33	33
.	.	.	.	.
n	24	24	25	23

Klasik Varyans Analizi Yaklaşımı:

Tekrarlı ölçümlere ilişkin çalışmalar klasik varyans analizi ile çözümlenmek istenirse, verilerin; bağımsız gruplarda tek yönlü varyans analizinin temel varsayımları olan ***normallik*** ve ***varyansların homojenliği*** varsayımlarını sağlaması yanında, ***tam simetriklik*** (compound symmetry) ve ***küresellik*** (sphericity) varsayımlarını da sağlaması gerekir. Ancak, son iki varsayımın sağlanma olasılığı düşük olduğu için tekrarlı ölçümleri klasik varyans analizi *(ANOVA)* ile test etmek yerine çok değişkenli yaklaşımla *(MANOVA)* test etmek daha çok tercih edilmektedir. Çünkü, çok değişkenli yaklaşım bu varsayımları içermez.

Tam simetriklik varsayımı; tekrarlı ölçümlerin varyanslarının ve kovaryanslarının homojenliği ile ilgilidir. Bu varsayım, varyanslar eşit ise $p \times (p\text{-}1)$ tane kovaryansın (ya da korelasyonun) benzer olacağı şeklinde de özetlenebilir. Küresellik varsayımı ise gruplar içi bir model olan bu modelin bağımsız (dik) bileşenlerden oluştuğunu belirtir. Ancak, birçok kaynakta bu iki varsayım tek bir varsayım olarak ele alınarak, küresellik varsayımı başlığı altında özetlenir. Bu varsayım, "tekrarlı ölçümlerin ortonormal (orthonormal) ağırlıklar kümesiyle dönüştürüldüğünde birbiriyle ilişkisiz ve eşit varyanslı olduğu" şeklindedir. ***Çok daha genel bir ifade ile küresellik varsayımı; varyansların homojenliği ve kovaryansların homojenliğidir.*** Küresellik varsayımı bozulduğunda, klasik *ANOVA* sonuçlarının hatalı sonuç ürettiği ve I. tip hata yapma olasılığının arttığı bilinmektedir. Çok değişkenli yaklaşımlar öncesinde bu bozulmalardan kaynaklanan sorunları ortadan kaldırmak amacıyla bazı düzeltme yöntemleri geliştirilmiştir. Halen yaygın olarak kullanılan bu yaklaşımlardan ikisi, ***Greenhouse-Geisser düzeltmesi*** ve ***Huynh-Feldt düzeltmesi*** olup bu düzeltmeler ***serbestlik dereceleri*** üzerinde yapılır. Küresellik varsayımının sağlanıp sağlanmadığı ***Mauchly küresellik testi*** ile test edilir. Mauchly küresellik testi için 2'den çok tekrar olması gerekir (önce, 1 hafta sonra, 2 hafta sonra, ... gibi). Çünkü, önce-sonra gibi iki ölçüm grubu olduğunda ölçümler arasında bir tane korelasyon katsayısı vardır. Mauchly küresellik testi, dönüşmüş değişkenlere ilişkin kovaryans matrisinin sabit varyanslı olup olmadığını ve köşegen dışı elemanların 0'a eşitliğini test eder. Küresellik testinin gücü gözlem sayısı az olduğunda düşer. Kovaryans matrisinin küreselliği için geliştirilen ***Mauchly küresellik testi*** istatistiği *W*, aşağıdaki eşitlik ile verilir.

$$W = \frac{|R|}{\left|\frac{1}{q}\, tzR\right|^{q}} \qquad (6.51)$$

Burada, *q=deneme (grup) sayısı–1=p–1* ve *R=CSC'* olarak tanımlanır. *R=CSC'* eşitliğindeki *C*, $q \times p$ boyutlu orthonormal kontras katsayıları matrisidir (diğer bir deyişle, orthonormal polinomlardan elde edilen normalleştirilmiş kontraslardır). *W* istatistiği, *bir dönüşüm yardımıyla* (burada verilmeyecektir) $[(q-1)(q+2)/2]$ serbestlik dereceli bir Ki-kare dağılımı gösterir. İstatistik yazılımlar *W* değerini *ki-kare istatistiği* ve *ilgili P değeri* ile birlikte vermektedir. Eğer *P* değeri, belirlenen α önemlilik düzeyinden büyük ise, tek değişkenli yaklaşım için gerekli varsayımlardan olan küresellik varsayımının sağlandığını söyleyebiliriz.

Yukarıda da söz edildiği gibi, varyansların ve tüm ikişerli kovaryansların eşitliği şeklinde özetlenebilecek olan küresellik varsayımı bozulduğunda I. tip hata yapma olasılığı artar. Bu nedenle, **klasik *F* testi yaklaşımında, tekrarlı ölçümlerin varyans–kovaryanslarının bir fonksiyonu olan ε (epsilon) ölçüsü dikkate alınır ve klasik varyans analizindeki gruplar (denemeler) arası serbestlik derecesi ve hata serbestlik derecesi ε değeri ile çarpılarak azaltılır.** Böylece, I. tip hata olasılığının sınırda kalması sağlanmaya çalışılır. Bu amaçla değişik epsilon yaklaşımları vardır. Aşağıda sırasıyla Greenhouse-Geisser ve Huynh-Feldt için epsilon değerlerinin formülleri verilmiştir. Greenhouse-Geisser ε , ε_{GG} ;

$$\varepsilon_{GG} = \frac{p^2 (\bar{S}_K - \bar{S})^2}{(p-1)(S^2 - 2p S_{so}^2 + p^2 \bar{S}^2)} \qquad (6.52)$$

ile verilir. Burada,

p : *Tekrar sayısı*

$\bar{S}_K$: *Varyans-kovaryans matrisinin asıl köşegen elemanlarının (varyansların) ortalaması*

$\bar{S}$: *Varyans-kovaryans matrisindeki tüm elemanların ortalaması*

S^2 : *Varyans-kovaryans matrisinin tüm elemanlarının kareleri toplamı*

S_{so}^2 : *Varyans-kovaryans matrisinin satır elemanları ortalamalarının kareleri toplamıdır.*

Huynh ve Feldt'in epsilonu (ε_{HF}) ise Greenhouse-Geisser'in epsilonuna bağlı bir yaklaşımdır. Buna göre,

$$a = n\,(p-1)\,\varepsilon_{GG} - 2 \quad \text{ve} \quad b = (p-1)\,[n - G - (p-1)\,\varepsilon_{GG}] \qquad (6.53)$$

olmak üzere ε_{HF} ;

$$\varepsilon_{HF} = min\,(1,\ a/b) \qquad (6.54)$$

ile verilir. Burada,

p: *Tekrar sayısı*

n: *Gözlem sayısı*

G: 1 *(Not: Tablo 6.18'deki örneği dikkate alalım. Bu çalışma; 2 ya da daha fazla ilaç için yapılsa idi, modele zaman dışında ikinci bir etkenin (faktörün) etkisini de eklemek gerekecek ve* ***model tek etken üzerinde tekrarlamaların olduğu tekrarlı ölçümlerde iki yönlü varyans analizine*** *dönüşecek idi. Bu durumda G, ilaç grupları sayısını belirtir. Dolayısıyla, eğer iki ilacın zaman içinde tansiyonlarda yaptığı değişim incelenecekse G=2 olacaktır.)*

ε değeri 0 ile 1 arasında değişirken bozulmanın derecesi hakkında da bilgi verir. Buna göre, $\varepsilon = 0$ ise ***en yüksek*** düzeyde bozulma, $\varepsilon = 1$ ise ***en düşük*** düzeyde bozulma söz konusudur. Diğer bir deyişle, $p \times (p-1)$ tane korelasyonun hepsi birbirine eşit ise, epsilon en büyük değere ulaşır ve $\varepsilon = 1$ olur. Genellikle, $\varepsilon \geq 0.75$ olması istenir. Bu koşulun sağlanması durumunda bozulmanın düşük düzeyde olduğu söylenir ve serbestlik dereceleri üzerinden bir düzeltme yapma yoluna gidilmez. Bu durumda çok değişkenli yaklaşımı kullanmaya da gerek yoktur. ε değeri 0.75'in altında ise Greenhouse-Geisser ya da Huynh-Feldt düzeltmesinden biri yapılabilir ya da çok değişkenli yaklaşımdan yararlanılabilir.

Çok Değişkenli Yaklaşım

Çok değişkenli yaklaşımda, ölçümlerin çok değişkenli normal dağılım göstermesi ve varyansların homojen olması istenir. Tekrarlı ölçümlerde varyans analizine çok değişkenli yaklaşımda (*MANOVA*), H_0 hipotezlerini amaca uygun olarak kurmak olanaklıdır. Eğer, "ardışık grup ortalamaları arasında fark yoktur" hipotezi test edilmek isteniyorsa *p=tekrar sayısı* olmak üzere H_0 ve H_1 hipotezleri:

$$H_0: \begin{bmatrix} \mu_1 - \mu_2 \\ \mu_2 - \mu_3 \\ . \\ \mu_{p-1} - \mu_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{bmatrix} \quad H_1: \begin{bmatrix} \mu_1 - \mu_2 \\ \mu_2 - \mu_3 \\ . \\ \mu_{p-1} - \mu_p \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (6.55)$$

şeklinde olacaktır. Tekrarlar arası farklılıklar başlangıç ölçümlerine göre test edilecek ise H_0 hipotezi:

$$H_0: \begin{bmatrix} \mu_1 - \mu_2 \\ \mu_1 - \mu_3 \\ . \\ \mu_1 - \mu_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (6.56)$$

olarak kurulacaktır.

"Gruplar arasında genel anlamda bir fark yoktur" şeklindeki H_0 hipotezini test etmek için bulunacak T^2 istatistiği, iki farklı yaklaşımla hesaplanabilir.

1. Yaklaşıma Göre T^2 İstatistiği:

$$T^2 = n\bar{y}' S_y^{-1} \bar{y} \qquad (6.57)$$

ile verilir. Burada,

$\bar{y}'$: Kurulan H_0 hipotezine göre, $p-1$ boyutlu grup ortalamaları arasındaki fark vektörü olup, (6.55) ile verilen H_0 hipotezi için bu vektör;

$$\bar{y}' = \lfloor \bar{y}_1, \bar{y}_2, ..., \bar{y}_{p-1} \rfloor = \lfloor \bar{x}_1 - \bar{x}_2, \bar{x}_2 - \bar{x}_3, ..., \bar{x}_{p-1} - \bar{x}_p \rfloor \qquad (6.58)$$

olarak yazılacaktır.

S_y: Kurulan H_0 hipotezine göre, grupların farklarından elde edilen dağılımlara ilişkin "fark varyans-kovaryans matrisi"dir.

2. Yaklaşıma Göre T^2 İstatistiği:

$$T^2 = n\bar{x}'C'(CSC')^{-1}C\bar{x} \qquad (6.59)$$

ile verilir. Burada,

$\bar{x}$: Grup ortalamaları vektörüdür.

$$\bar{x}' = \lfloor \bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_p \rfloor \qquad (6.60)$$

C : Kurulan hipoteze uyan $(p\text{-}1)\times p$ boyutlu ***Kontras Katsayıları matrisi***'dir. Örneğin, ardışık (repeated) grup ortalamaları arasında fark olup olmadığını test etmek için kurulan H_0 hipotez vektörüne ilişkin ((6.55) için) C matrisi:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & ..... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & ..... & 0 & 0 \\ . & . & . & ..... & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ..... & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (6.61)$$

şeklinde oluşturulurken, (6.56) için (başlangıca göre yapılacak karşılaştırmalar için),

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & ..... & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & ..... & 0 & 0 \\ . & . & . & ..... & . & . \\ 1 & 0 & 0 & ..... & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (6.62)$$

şeklinde oluşturulur.

S : Gözlemlere ilişkin p boyutlu varyans-kovaryans matrisidir.

Eşitlik (6.57) ya da Eşitlik (6.59) ile bulunan T^2 istatistiği;

$$F = \frac{n-p+1}{(n-1)(p-1)} T^2 \qquad (6.63)$$

ile $p-1$ ve $n-p+1$ serbestlik dereceli F dağılımı gösterir. Eğer $F_{Hesap} > F_{Tablo(p-1,\ n-p+1;\ \alpha)}$ ise H_0 hipotezi reddedilir.

Farklılık Yaratan Grupların Belirlenmesi

H_0 hipotezinin reddedilmesi durumunda, farklılık yaratan grupların bulunması, eşanlı güven aralıkları ile yapılabilir. Bulunacak güven aralıklarının sıfırı içermemesi durumunda, karşılaştırılan iki grup arasında fark olduğu söylenir. Eşanlı güven aralıkları; b: toplamı sıfır olacak şekilde oluşturulan kontras katsayıları vektörü olmak üzere,

$$b'\bar{x} - \sqrt{\frac{1}{n}b'Sb}\ T_{(p-1,n-p+1;\alpha)} \le b'\mu \le b'\bar{x} + \sqrt{\frac{1}{n}b'Sb}\ T_{(p-1,n-p+1;\alpha)} \qquad (6.64)$$

ile ya da

$$b'\bar{x} \pm \sqrt{\frac{(n-1)(p-1)}{n-p+1}F_{(p-1,n-p+1;\alpha)}}\sqrt{\frac{b'Sb}{n}} \qquad (6.65)$$

ile verilir. Konuya ilişkin uygulama Örnek 6.8'de verilmiştir.

Örnek 6.8. Aynı etken maddeyi içeren üç farklı farmasötik dozaj şekli, sekiz gönüllüye uygulanmış ve eğri altı alanlar Tablo 6.20'deki gibi hesaplanmıştır. Biyoyararlanım yönünden dozaj şekilleri arasında fark var mıdır?

Tablo 6.20. Üç Ayrı Dozaj Şekline İlişkin Eğri Altı Alanları

	DOZAJ ŞEKLİ		
Gönüllüler	I	II	III
1	261	162	232
2	237	194	216
3	239	182	193
4	233	184	208
5	214	164	197
6	212	170	235
7	221	152	224
8	224	150	230
$\bar{x}$	230.125	169.750	216.875
S^2	256.665	248.536	260.683

Örneğimize ilişkin ortalama vektörü ve varyans-kovaryans matrisi aşağıda verilmiştir.

Ortalama vektörü;

$$\bar{x}' = [230.125 \quad 169.750 \quad 216.875]$$

Varyans -kovaryans matrisi, S;

$$S = \begin{bmatrix} 256.6650 & 64.0358 & 10.0179 \\ 64.0358 & 248.5360 & -117.7500 \\ 10.0179 & -117.7500 & 260.6830 \end{bmatrix}$$

Örneği çok değişkenli yaklaşımla çözmeden önce, küresellik varsayımının sağlanıp sağlanmadığı üzerinde durulacak ve bu amaçla Mauchly küresellik testi istatistiği ile ε_{GG} ve ε_{HF} istatistikleri bulunacaktır. Örneğe ilişkin Mauchly istatistiğinin elde edilmesi aşağıda verilmiştir. Bu amaçla R'yi hesaplayabilmek için ***orthonormal kontras katsayıları matrisi*** (C) gereklidir. C orthonormal kontras katsayıları matrisi, değişken sayısına göre değişir. Örneğimizde, deneme (tekrar) sayısı p = 3 olduğu için $q \times p=(p-1)\times p=2\times 3$ boyutlu orthonormal kontras katsayıları matrisi, C, aşağıdaki gibidir;

$$C=\begin{bmatrix} -0.707 & 0 & 0.707 \\ 0.408 & -0.816 & 0.408 \end{bmatrix}$$

Orthonormal kontras katsayılar bazı istatistik yazılımlarda (*örneğin SPSS'de*) çıktı olarak verilmektedir ($p=4$ için C matrisi, Örnek 6.9'da verilmiştir.) Buradan, $R=CSC'$ yardımıyla,

$$R=\begin{bmatrix} 248.603 & 106.028 \\ 106.028 & 290.693 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad |R| = 61025$$

olarak bulunur. Ayrıca, $q=p-1=3-1=2$ *ve* $İz(R)=248.603+290.693=539.3$

olarak elde edilir. Eşitlik 6.51 yardımıyla, *W istatistiği*;

$$W=\frac{61025}{\left|\frac{1}{2}(539.3)\right|^2}=0.839$$

olarak bulunur. İstatistik yazılımlar W istatistiğinin anlamlılığına ilişkin sonuçları vermektedir. Örneğin, *SPSS* yardımıyla $W=0.839$ için ki-kare istatistiği, $\chi^2=1.052$ olarak bulunur. 1.052 için P=0.591'dir. Bu nedenle, verinin küresellik varsayımını sağladığı söylenir ($P>0.05$). Eğer küresellik varsayımı sağlanmasa idi; ya epsilonlar yardımı ile gruplar (denemeler) arası ve hata serbestlik dereceleri üzerinde düzeltme yapmamız ya da normallik ve homojenlik varsayımlarının sağlanması koşuluyla *MANOVA* yaklaşımını kullanmamız gerekecekti. Örnek olması açısından epsilon değerlerinin bulunuşu aşağıda verilmiştir.

Greenhouse–Geisser için Epsilonun Bulunması:

p=3

$\bar{S}_K$: (256.7+248.5+260.7)/3=255.3

$\bar{S}$: (256.7+64.036+ .... + 260.7)/9=75.39

S^2 : (256.7^2+64.036^2+ .... +260.7^2)=231739.9

S^2_{so} : [(256.7+64.036+10.02)/3]^2 +[(64.036+248.5+(−117.75))/3)]^2+

[(10.02+(−117.75)+260.7)/3)]^2=18970.57

Buradan Greenhouse-Geisser için ε, Eşitlik 6.52 yardımıyla,

$$\varepsilon_{GG} = \frac{3^2 (255.3 - 75.39)^2}{(3-1)(231739.9 - 2(3)(18970.57) + 3^2(75.39)^2)} = 0.862$$

olarak bulunur.

Huynh–Feldt'e göre ε, Eşitlik 6.53 ve Eşitlik 6.54 yardımıyla,

$a=8(3-1)(0.862)-2=11.78$

$b=(3-1)(8-1-(3-1)(0.862))=10.55$

$a/b=11.78/10.55=1.12$

ve

$$\varepsilon_{HF} = min(1,\ 1.12) = 1$$

olarak bulunur.

Her iki yöntemle de elde edilen epsilonun 0.75'den büyük olması (özellikle, epsilonu daha yansız olarak kestiren Huynh–Feldt epsilonun 1'e eşit olması) ***küresellik varsayımının bozulmadığı*** anlamına da gelir.

Varyans Analizi Sonuçları

Çalışmaya ilişkin klasik varyans analizi sonuçları Tablo 6.21.a'da verilmiştir. Buna göre eğri altı alanlar dozaj şekline göre değişiklik göstermektedir (F=29.850, p=0.000).

Tablo 6.21.a. Eğri Altı Alanları Verisi (Tablo 6.20) İçin KlasikVaryans Analizi Sonuçları

Değ. Kaynağı	*KT*	*SD*	*KO*	*F*	*P*
Genel	21471.9	23			
Gruplar Arası	16110.6	2	8055.3	29.850	0.0000
Denekler Arası	1583.2	7	226.2		
Hata	3778.1	14	269.9		

Bazı istatistiksel yazılımlarda, klasik varyans analizi yaklaşımı ve düzeltilmiş sonuçlar birlikte sunulmaktadır. İlgili Tablo, Tablo 6.21.b'de dir.

Tablo 6.21.b. Düzeltme Yapılmış ve Yapılmamış Varyans Analizi Sonuçları

DK		*KT*	*SD*	*KO*	*F*	*P*
Dozaj Şekli	*VarsayımlarSağlandığında*	16110.6	2	8055.3	29.850	0.000
	Greenhouse-Geisser	16110.6	1.72	9350.3	29.850	0.000
	Huynh-Feldt	16110.6	2.00	8055.3	29.850	0.000
Hata	*VarsayımlarSağlandığında*	3778.1	14	269.9		
	Greenhouse-Geisser	3778.1	12.06	313.2		
	Huynh-Feldt	3778.1	14.00	269.9		

Çok Değişkenli Yaklaşım ve T^2 İstatistiği

Çok değişkenli yaklaşımda ölçümlerin çok değişkenli normal dağılım göstermesi ve varyansların homojen olması istenir.

Örneğimiz için H_0 hipotezi önce Eşitlik (6.55)'deki gibi, "*ardışık fark ortalamaları arasında fark yoktur*" şeklinde kurulmuş ve T^2 istatistiği 2. yaklaşıma göre (yani (6.59) yardımıyla) aşağıda bulunmuştur. Bu varsayım altında, "*ardışık fark ortalamaları arasında fark yoktur*" şeklindeki H_0 hipotezine uyan kontras katsayıları matrisi;

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

şeklinde olacaktır. Buna göre,

$$CSC' = \begin{bmatrix} 377.129 & -312.628 \\ -312.628 & 744.719 \end{bmatrix} \quad (CSC')^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0041 & 0.0017 \\ 0.0017 & 0.0021 \end{bmatrix}$$

ve (6.59) yardımıyla $T^2 = 79.4808$ bulunur. Buradan, F istatistiği, eşitlik (6.63) yardımıyla, F=34.0632 olarak elde edilir. F=34.0632> $F_{Tablo(2,6;\alpha=0.05)}$=5.14 olduğu için H_0 hipotezi reddedilir.

T^2'yi elde etmek için eşitlik (6.57)'den yararlanılsaydı, H_0 hipotezi yukarıdaki yaklaşımdaki gibi kurulacak ve ardışık gruplara (dozaj şekli) ilişkin fark dizileri aşağıdaki gibi elde edilecekti.

I-II	99	43	57	49	50	42	69	74
II-III	-70	-22	-11	-24	-33	-65	-72	-80

Sonuçta, yukarıdaki fark dizisine ilişkin p-1 boyutlu varyans-kovaryans matrisinin tersi (S_y^{-1}) ile $(CSC')^{-1}$'in aynı olduğu görülecek ve sonuçlar değişmeyecekti.

Farklılık Yaratan Grupların Belirlenmesi

Ardışık fark ortalamaları arasındaki fark önemli bulunduğu için bunlardan hangisinin önemlilik yarattığını araştırmak gerekecektir. Bu amaçla, örneğin dozaj şekli I ile II'yi karşılaştıracak olursak, (6.64)'de $b' = [1 \quad -1 \quad 0]$ olarak yazılırken, dozaj şekli II ile III için $b' = [0 \quad 1 \quad -1]$ olacaktır. (6.63) yardımıyla,

$$5.14 = \frac{6}{14} T^2_{(p-1,n-p+1;\alpha=0.05)} \quad \text{ve} \quad T_{(p-1,n-p+1;\alpha=0.05)} = T_{(2,6;\alpha=0.05)} = 3.463$$

olarak bulunur. Sonuçta eşanlı güven aralıkları (6.64) yardımıyla;

$$36.5983 \le \mu_I - \mu_{II} \le 84.1517$$

$$-80.5371 \le \mu_{II} - \mu_{III} \le -13.7129$$

olarak elde edilir. (6.65)'de, $F_{Tablo(2,6;\alpha=0.05)} = 5.14$ alınarak çözümleme yapılırsa aynı sonuçlara ulaşılır. Güven aralıkları aynı işarete sahip olduğu, diğer bir deyişle sıfırı kapsamadığı için her iki ardışık grup arasında da fark olduğu söylenir.

Tek Etken Üzerinde Tekrarlamaların Olduğu Tekrarlı Ölçümlerde İki Yönlü Varyans Analizi

Yukarıda incelediğimiz gibi tekrarlı ölçümlerde varyans analizi, iki eş arasındaki farkın anlamlılık testinin ikiden çok tekrar ya da durum için genellenmiş şeklidir. Bazen, bu tür çalışmalar, ***iki ya da daha çok grup*** birey üzerinde yapılabilir ve her grupta meydana gelen değişmeler açısından gruplar arasında fark olup olmadığı öğrenilmek istenebilir. Örneğin, ***üç farklı esneklik yöntemi*** (Etken I) ile antrene edilen bireylerin, ***otur eriş testi*** sonucunda elde edilen *cm cinsinden esneklik ölçümlerinin* ***zaman*** (Etken II) içinde gösterdiği değişimler arasında fark olup olmadığı incelenmek istensin (Tablo 6.22). Bu çalışmayı yapabilmek için, benzer özelliklere sahip bireyler rasgele üç gruba ayrılarak birinci grup statik germe, ikinci grup ani germe, üçüncü grup *PNF* yöntemi ile esnetilir ve esneklikteki gelişim birer ay ara ile ölçülebilir. Burada, esneklik yönteminin düzey sayısı 1'den fazladır (3'dür). Ayrıca, etkenlerden biri (burada zaman) üzerinde tekrarlar söz konusudur. Yani, her üç gruptaki bireylerin zaman içinde yapılan ölçümleri birbirine bağımlıdır. Bu tür bir deney düzenine, ***etkenlerden biri üzerinde tekrarlamaların olduğu, tekrarlı ölçümlerde iki yönlü varyans analizi*** adı verilir.

Tablo 6.22. Esneklik Yöntemlerine Göre Esneklik Miktarında Meydana Gelen Değişikliklerin (cm) Zaman İçindeki Dağılımı

	Zaman			
Esneklik Yöntemi	*Başlangıç*	*1 Ay Sonra*	*2 Ay sonra*	*3 Ay Sonra*
Statik Germe	12	18	18	19
	16	21	23	23
	15	19	22	22
	.	.	.	.
Ani Germe	17	20	21	21
	12	15	16	17
	16	18	18	18
	.	.	.	.
PNF	14	14	15	16
	20	21	21	21
	17	14	15	15
	.	.	..	.

Bu çalışmanın amacı; ***uygulanan esneklik yöntemlerine göre*** zaman içerisinde esneme miktarında meydana getirdiği değişikliğin anlamlı olup olmadığı, esneme miktarı üzerine ***zaman etkisinin*** anlamlı olup olmadığını ve farklı esneklik yöntemi gruplarındaki bireylerin zaman içinde gösterdiği değişimin ***benzer olup olmadığını*** (***esneklik yöntemi×zaman etkileşimi***) anlamaktır. Daha önce de belirtildiği gibi, bu tür deney düzenlerinin bağımsız gruplarda iki yönlü varyans analizinden farkı, zaman içindeki ölçümlerin aynı bireyler üzerinde yapılması nedeniyle, etkenlerden biri üzerinde tekrarlamaların olmasıdır. Diğer bir deyişle; statik germe, ani germe ve *PNF* yöntemi uygulanan bireyler incelenen süre boyunca aynı bireylerdir. Halbuki, bağımsız gruplarda iki yönlü varyans analizinde iki etkenin alt gruplarındaki bireyler birbirinden bağımsızdır.

Çok Değişkenli Yaklaşım

Karşılaştırılacak iki ve daha fazla grup olması durumunda grup×zaman etkileşiminin (grup ortalamalarındaki değişimin zaman (ya da tekrarlar) boyunca paralel olup olmadığının) öncelikle incelenmesi gerekmektedir. Bu inceleme için değişik yaklaşımlardan yararlanılabilir. Bunlardan biri, daha önce tekrarlı ölçümlerde tek yönlü varyans analizi alt başlığında gördüğümüz ve kurulan hipoteze uyan $(p-1)\times p$ boyutlu ***Kontras Katsayıları*** matrislerinden (bak. eşitlik 6.61 ve 6.62) yararlanmaktır. Bir diğer yaklaşım ise ***ortogonal polinomlardan*** yararlanmaktır. $p\leq 6$ için ortogonal polinomlar Tablo 6.23'de verilmiştir.

Tablo 6.23. $p\leq 6$ için Ortogonal Polinomlar

$p=3$		$p=4$			$p=5$			
Doğrusal	*İkinci Derece*	*Doğrusal*	*İkinci Derece*	*Kübik*	*Doğrusal*	*İkinci Derece*	*Kübik*	*Dördüncü Derece*
−1	1	−3	1	−1	−2	2	−1	1
0	−2	−1	−1	3	−1	−1	2	−4
1	1	1	−1	−3	0	−2	0	6
		3	1	1	1	−1	−2	−4
					2	2	1	1

$p=6$				
Doğrusal	*İkinci Derece*	*Kübik*	*Dördüncü Derece*	*Beşinci Derece*
−5	5	−5	1	−1
−3	−1	7	−3	5
−1	−4	4	2	−10
1	−4	−4	2	10
3	−1	−7	−3	−5
5	5	5	1	1

g=2 İçin Hotelling T^2 Yaklaşımı

Karşılaştırılacak grup sayısının 2 ($g=2$) olması durumunda *Hotelling* T^2 istatistiğinden yararlanılabilir.

Etkileşimin Test Edilmesi

İki gruba ilişkin ortalama vektörlerini ($\bar{x}_1$ ve $\bar{x}_2$);

$$\bar{x}_1' = (\bar{x}_{11}, \bar{x}_{12}, \ldots\ldots, \bar{x}_{1p}) \quad \text{ve} \quad \bar{x}_2' = (\bar{x}_{21}, \bar{x}_{22}, \ldots\ldots, \bar{x}_{2p})$$

olarak tanımlayalım. Etkileşim yoktur hipotezi altında, iki ortalama kontras vektörü;

$$\bar{Y}_1 = C\bar{x}_1 \quad \text{ve} \quad \bar{Y}_2 = C\bar{x}_2 \qquad (6.66)$$

olarak yazılır. $\bar{S}$, $p \times p$ boyutlu ortak (pooled) varyans–kovaryans matrisi olmak üzere ***etkileşime ilişkin Hotelling T^2 istatistiği***;

$$T^2 = \frac{n_1 \times n_2}{n_1 + n_2}(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2)'(C\bar{S}C')^{-1}(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) \qquad (6.67)$$

ile verilir. Bileşik normallik varsayımı altında T^2 istatistiği,

$$F = \frac{n_1 + n_2 - p}{(n_1 + n_2 - 2)(p-1)} T^2 \qquad (6.68)$$

ile $p-1$ ve n_1+n_2-p serbestlik dereceli F dağılımı gösterir.

Zaman İçindeki Değişimin Test Edilmesi

Zaman içindeki değişimin (genel anlamda) anlamlı olup olmadığı karşılaştırılacak grup sayısı 2 ya da daha fazla olsun olmasın, aşağıda verilecek T^2 istatistiği ile araştırılabilir. Bu amaçla T^2 :

$$T^2 = n\bar{Y}'(C\bar{S}C')^{-1}\bar{Y} \qquad (6.69)$$

ile verilir. Burada, n: *toplam gözlem sayısı*dır. $\bar{Y}$ ise:

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{g} n_i \bar{Y}_i \qquad (6.70)$$

olup burada, g=*grup sayısı*dır. Bulunan T^2 istatistiği, *p-1* ve *n-g-p+2 serbestlik dereceli* F dağılımı gösterir (Eşitlik 6.71).

$$F = \frac{n-g-p+2}{(n-g)(p-1)} \times T^2 \qquad (6.71)$$

Parelellik Olması Durumunda Çakışıklığın Test Edilmesi

Gruplara göre ortalamalardaki değişimin paralellik gösterdiği (etkileşimin anlamsız olduğu) durumlarda, gruplara ilişkin ortalamaların çakışık olup olmadığı (gruplara göre genel anlamda fark olup olmadığı) incelenebilir. Bu amaçla, $\bar{X}_{T1}$: birinci grubun ortalamaları toplamı ve $\bar{X}_{T2}$: ikinci grubun ortalamaları toplamı olmak üzere t istatistiği;

$$t = \frac{\bar{X}_{T1} - \bar{X}_{T2}}{\sqrt{j'\bar{S}j(1/n_1 + 1/n_2)}} \qquad (6.72)$$

ile verilir. Burada, $j' = [1 \;\; 1 \;\; . \;\; . \;\; 1]$ ile verilir. Dolayısıyla, $j'\bar{S}j$: *ortak varyans kovaryans matrisi olan* $\bar{S}$ *'nin elemanlarının toplamıdır.* Eşitlik 6.72 ile verilen t istatistiği $n_1 + n_2 - 2$ serbestlik dereceli t dağılışı gösterir.

Tekrarlı ölçümlerde iki yönlü varyans analizine çok değişkenli yaklaşım, klasik varyans analizi sonuçları ile birlikte Örnek 6.9'da verilmiştir. Klasik varyans analizi yaklaşımı ile ilgili olarak isteyen okuyucular, kaynakça'daki 1 nolu kaynağa başvurabilirler.

Örnek 6.9. Dinlenen ve hafif yürüyüş yapan benzer yaş, boy ve kilodaki bireylerin baldır çevresi ölçümleri (cm) 30 dk aralarla aşağıdaki gibi ölçülmüştür (Tablo 6.24). Tabloda görüldüğü gibi, dağılımların ***yaygınlıkları benzerdir.***

Tablo 6.24. Baldır Çevresi Verisi (cm)

Hareket Durumu		Zaman			
		İlk ölçüm	*30 dk sonra*	*60 dk sonra*	*90 dk sonra*
Dinlenen Grup	1	30.90	30.70	30.90	30.90
	2	31.90	31.60	31.60	31.70
	3	31.30	31.10	31.00	31.30
	4	32.10	31.00	31.70	31.30
	5	30.90	31.20	30.50	30.80
	6	31.30	31.70	31.40	31.20
	7	31.30	31.80	31.80	31.70
	8	32.10	33.00	31.70	31.50
	9	30.30	30.90	30.80	30.60
	10	32.20	32.10	32.20	32.40
Ortalama		**31.43**	**31.51**	**31.36**	**31.34**
Stan. Sapma		**0.63**	**0.69**	**0.54**	**0.52**
Hafif Yürüyüş Grubu	1	31.50	30.60	30.80	31.00
	2	31.20	31.20	31.10	31.30
	3	31.30	31.30	31.50	31.40
	4	30.40	30.80	30.40	30.20
	5	30.70	30.90	30.90	30.90
	6	29.80	30.80	30.90	30.80
	7	31.40	32.00	31.70	31.60
	8	30.90	32.40	31.80	31.90
	9	31.10	31.30	31.20	31.20
	10	31.30	31.50	31.60	31.70
Ortalama		**30.96**	**31.28**	**31.19**	**31.20**
Stan. Sapma		**0.53**	**0.57**	**0.45**	**0.50**

Mauchly Küresellik Testi, ε_{GG} ***ve*** ε_{HF} ***İstatistikleri***

Klasik varyans analizi sonuçlarına geçmeden önce Mauchly kürsellik testi ve Greenhouse-Geisser ve Huynh-Feldt istatistikleri aşağıda hesaplanmıştır. Mauchly için Eşitlik 6.51'den yararlanılır. Ancak, burada R, $R = C\bar{S}C'$ ile verilir. $p=4$ için $(p-1)\times p = 3\times 4$ boyutlu orthonormal kontras katsayıları matrisi, C, aşağıdaki gibidir.

$$C = \begin{bmatrix} -0.671 & -0.224 & 0.224 & 0.671 \\ 0.500 & -0.500 & -0.500 & 0.500 \\ -0.224 & 0.671 & -0.671 & 0.224 \end{bmatrix}$$

Örneğimiz için ortak varyans kovaryans matrisinin ($\bar{S}$) elde edilişi, bu örneğe ilişkin "*çok değişkenli yaklaşımla değerlendirme*" alt başlığı altında verilmiştir. Buradan,

$R = C\bar{S}C'$ matrisi, R'nin determinantı ($|R|$), izR ve Eşitlik 6.51 yardımıyla Mauchly W istatistiği sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir.

$$R = \begin{bmatrix} 0.08866 & -0.0335 & 0.003281 \\ -0.0335 & 0.10985 & -0.07625 \\ 0.003281 & -0.07625 & 0.09299 \end{bmatrix} \quad |R| = 0.000299 \quad izR = 0.2909$$

$$W = \frac{0.000299}{\left|\frac{1}{3}0.2909\right|^3} = 0.327$$

W için 5 serbestlik dereceli ki-kare istatistiği $\chi^2 = 18.678$ olarak bulunur. İlgili p değeri, $p=0.002$ olduğu için küresellik varsayımının ***sağlanmadığı*** söylenir ve ***serbestlik dereceleri üzerinde düzeltme yapılması önerilir. Diğer bir seçenek ise normallik ve varyansların homojenliği varsayımlarının yerine geldiği durumlarda çok değişkenli yaklaşımdan yararlanmaktır.*** Eşitlik (6.52) yardımıyla, ε_{GG} istatistiği,

$$\varepsilon_{GG} = \frac{4^2(0.31125 - 0.2385625)^2}{3\times(0.95780878 - 2\times 4\times 0.22826 + 4^2\times 0.2385625^2)} = 0.665$$

olarak bulunur. Huynh-Feldt istatistiği için ise, eşitlik (6.53) yardımıyla,

a= 20(4–1)(0.665)–2=37.9

b=(4-1)(20–2–(4–1)(0.665)=48.015

olarak elde edilir. Eşitlik 6.54'den, Huynh–Feldt istatistiği,

$$\varepsilon_{HF} = \min(1, a/b) = \min(1, 0.79) = 0.79$$

olarak bulunur.

Klasik Varyans Analizi Yaklaşımı Sonuçları

Veriye ilişkin klasik varyans analizi sonuçları Tablo 6.25'de, zaman içinde gruplara göre ortalamalardaki değişim grafiği ise Grafik 6.1'de verilmiştir. Gerektiğinde kullanılmak üzere, serbestlik dereceleri üzerinde düzeltme yapılarak elde edilen varyans analizi sonuçları ve P istatistikleri, istatistik yazılımların çoğunda çıktı olarak sunulmaktadır. Örneğimize ilişkin Greenhouse–Geisser ve Huynh–Feldt düzeltmesi yapılmış sonuçlar Tablo 6.26'dadır.

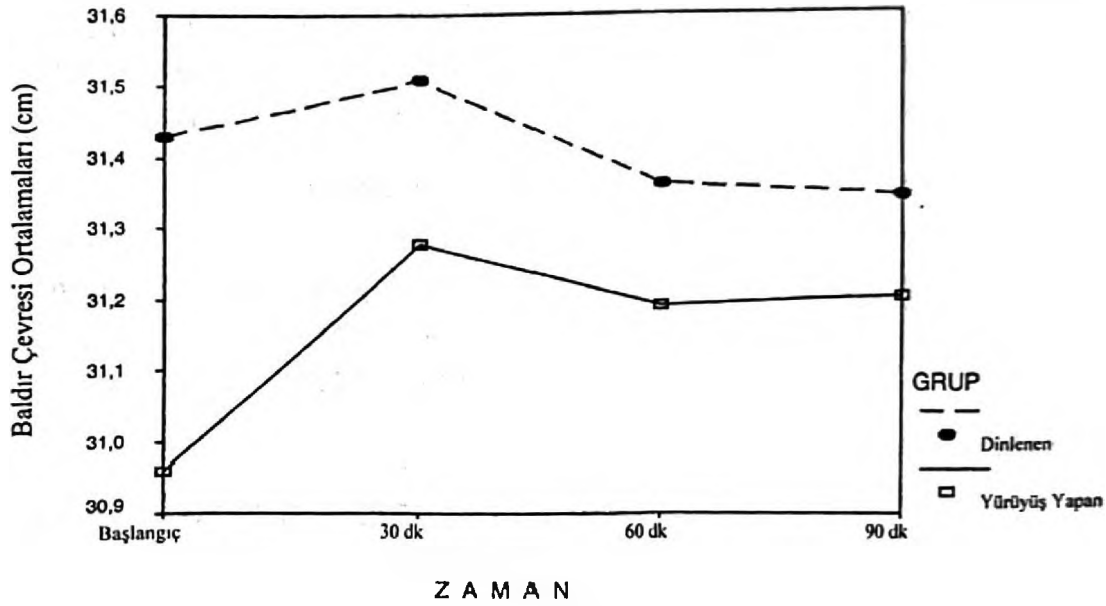
Tablo 6.25. Baldır Çevresi Verisi İçin Klasik Varyans Analizi Sonuçları

Değişim Kaynağı	*KT*	*SD*	*KO*	*F*	*P*
Genel	24.4288	79	-		
Hareket Durumu	1.2751	1	1.275	1.275/0.954=**1.34**	>0.05
Zaman	0.4104	3	0.137	0.137/0.097=**1.41**	>0.05
Har. Dur.×Zaman	0.3364	3	0.112	0.112/0.097=**1.15**	>0.05
*DAH**	17.1762	18	0.954		
*DİH***	5.2308	54	0.097		

** Denekler Arası Hata** Denekler İçi Hata*

Tablo 6.26. Baldır Çevrsi Verisi İçin Düzeltme Yapılmış Varyans Analizi Sonuçları

DK		KT	SD	KO	F	P
Zaman	Varsayımlar Sağlandığında	0.410	3	0.137	1.412	0.249
	Greenhouse-Geisser	0.410	1.996	0.206	1.412	0.257
	Huynh-Feldt	0.410	2.370	0.173	1.412	0.255
Har. Dur.× Zaman	Varsayımlar Sağlandığında	0.336	3	0.112	1.158	0.334
	Greenhouse-Geisser	0.336	1.996	0.168	1.158	0.326
	Huynh-Feldt	0.336	2.370	0.142	1.158	0.330



Grafik 6.1. Zaman İçinde Ortalamalardaki Değişim

Küresellik varsayımı sağlanmadığı için Tablo 6.26'dan yararlanırsak, zaman içindeki ölçümlerde (genel anlamda) bir değişiklik gözlenmemektedir (*F=1.412, P=0.257*). Zaman içindeki değişim gruplara göre değişmemektedir (zaman içindeki değişim paraleldir) (*F=1.158, P=0.326*). Bu durum Grafik 6.1'den de görülebilir.

Çok Değişkenli Yaklaşımla Değerlendirme

Küresellik varsayımı sağlanamadığı için ikinci bir seçenek çok değişkenli yaklaşımdan yararlanmaktadır.

Etkileşimin İncelenmesi

Eşitlik 6.66 yardımıyla;

$$\overline{Y}_1 = C\overline{x}_1 = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 31.43 \\ 31.51 \\ 31.36 \\ 31.34 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.42 \\ -0.10 \\ 0.36 \end{bmatrix}$$

$$\bar{Y}_2 = C\bar{x}_2 = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 30.96 \\ 31.28 \\ 31.19 \\ 31.20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.63 \\ -0.31 \\ 0.51 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Dinlenen ve hafif yürüyüş yapan grup için varyans-kovaryans matrisleri aşağıdadır.

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0.4001 & 0.2697 & 0.2813 & 0.2664 \\ 0.2697 & 0.4721 & 0.2349 & 0.2207 \\ 0.2813 & 0.2349 & 0.2871 & 0.2518 \\ 0.2664 & 0.2207 & 0.2518 & 0.2738 \end{bmatrix} \quad S_2 = \begin{bmatrix} 0.2804 & 0.0969 & 0.1173 & 0.1544 \\ 0.0969 & 0.3218 & 0.2276 & 0.2333 \\ 0.1173 & 0.2276 & 0.2054 & 0.2178 \\ 0.1544 & 0.2333 & 0.2178 & 0.2489 \end{bmatrix}$$

Ortak varyans–kovaryans matrisi ise Eşitlik (6.12) yardımıyla,

$$\bar{S} = \frac{(n_1 - 1)S_1 + (n_2 - 1)S_2}{n_1 + n_2 - 2} = (S_1 + S_2)/2 = \begin{bmatrix} 0.3403 & 0.1833 & 0.1993 & 0.2104 \\ 0.1833 & 0.3970 & 0.2312 & 0.2270 \\ 0.1993 & 0.2312 & 0.2463 & 0.2348 \\ 0.2104 & 0.2270 & 0.2348 & 0.2614 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Ayrıca,

$$C\bar{S}C' = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \bar{S} \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7598 & -0.2998 & 0.0656 \\ -0.2998 & 0.4394 & -0.6816 \\ 0.0656 & -0.6816 & 1.8582 \end{bmatrix}$$

$$(C\bar{S}C')^{-1} = \begin{bmatrix} 0.7375 & 1.0737 & 0.3678 \\ 1.0737 & 6.8435 & 2.4723 \\ 0.3678 & 2.4723 & 1.4320 \end{bmatrix}$$

$$(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) = \begin{bmatrix} -0.42 - (0.63) \\ -0.10 - (-0.31) \\ 0.36 - 0.51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.05 \\ 0.21 \\ -0.15 \end{bmatrix}$$

$$(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2)' = \begin{bmatrix} -1.05 & 0.21 & -0.15 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan, Eşitlik (6.67) yardımıyla etkileşimin anlamlı olup olmadığına ilişkin Hotelling T^2 istatistiği;

$$T^2 = \frac{10\times10}{10+10}[-1.05 \quad 0.21 \quad -0.15](C\bar{S}C')^{-1}\begin{bmatrix}-1.05\\0.21\\-0.15\end{bmatrix}$$

$$T^2 = \frac{10\times10}{20}\times0.6337 = 3.1685$$

ve Eşitlik (6.68) yardımıyla F istatistiği;

$$F = \frac{10+10-4}{(10+10-2)(4-1)}3.1685 = 0.94$$

olarak elde edilir. Bulunan $F=0.94$ değeri 3 ve 16 serbestlik dereceli bir F dağılımı gösterir. Buna göre, her iki grupta zaman boyunca yapılan ölçümler paralellik göstermektedir ($P>0.05$).

Örneğimizi $(p\text{-}1)\times p$ boyutlu ***ardışık fark değer***leri için geliştireceğimiz matris yardımı ile de çözdüğümüzde sonuç değişmeyecekti. Örneğimiz için ardışık farklara ilişkin $(p\text{-}1)\times p=3\times 4$ boyutlu C matrisi aşağıdaki gibi olacaktır:

$$C = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

T^2 istatistiğini bu yaklaşımla hesaplarsak:

$$\bar{Y}_1 = C\bar{x}_1 = \begin{bmatrix}-0.08\\0.15\\0.02\end{bmatrix} \quad \bar{Y}_2 = C\bar{x}_2 = \begin{bmatrix}-0.32\\0.09\\-0.01\end{bmatrix} \quad \bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 = \begin{bmatrix}0.24\\0.06\\0.03\end{bmatrix}$$

$$C\bar{S}C' = \begin{bmatrix}0.3707 & -0.1818 & -0.0153\\-0.1818 & 0.1809 & -0.0073\\-0.0153 & -0.0073 & 0.0381\end{bmatrix}$$

ve

$$T^2 = \frac{10\times10}{10+10}[0.24 \quad 0.06 \quad 0.03](C\bar{S}C')^{-1}\begin{bmatrix}0.24\\0.06\\0.03\end{bmatrix} = 3.1685$$

olarak bulunur. Görüldüğü gibi sonuç değişmez.

Zaman İçindeki Değişimin Test Edilmesi

Örneğimiz için ilgili istatistikler aşağıdaki gibi elde edilir.

Eşitlik (6.70)'den,

$$\bar{Y} = \frac{1}{10+10}\left\{10\times\begin{bmatrix}-0.42\\-0.10\\0.36\end{bmatrix}+10\times\begin{bmatrix}0.63\\-0.31\\0.51\end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix}0.105\\-0.205\\0.435\end{bmatrix}$$

$$T^2 = 20\times\begin{bmatrix}0.105 & -0.205 & 0.435\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.7375 & 1.0737 & 0.3678\\1.0737 & 6.8435 & 2.4723\\0.3678 & 2.4723 & 1.4320\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.105\\-0.205\\0.435\end{bmatrix}$$

$$T^2 = 20\times 0.1131 = 2.262$$

olarak bulunur. İlgili F istatistiği ise;

$$F = \frac{20-2-4+2}{(20-2)(4-1)}\times 2.262 = 0.67$$

olarak bulunur. Bulunan F istatistiği 3 ve 16 serbestlik dereceli F tablo değeri ile karşılaştırılır. Buna göre, baldır çevresi ölçümlerinin zaman içindeki değişimi (genel anlamda) anlamlı değildir ($P>0.05$).

Paralellik Olması Durumunda Çakışıklığın Test Edilmesi

$j'\bar{S}j$: ortak varyans kovaryans matrisi ($\bar{S}$) elemanlarının toplamı=3.817'dir. Buradan Eşitlik (6.72) yardımıyla t istatistiği;

$$t = \frac{125.64-124.63}{\sqrt{3.817(1/10+1/10)}} = 1.155966$$

olarak bulunur. $t_{Hesap} = 1.156 < t_{T(sd=10+10-2;\,\alpha=0.05)} = 2.2$ olduğu için, "gruplara göre tekrarlı ölçümlerin çakışık olduğu" şeklinde kurulan H_0 hipotezi kabul edilir. İstenirse $t^2=F$ yardımıyla; $F=t^2=1.156^2=1.336$ değeri *1* ve *18* serbestlik dereceli F tablo istatistiği ile karşılaştırılarak da yoruma gidilebilir.

Çok değişkenli varyans analizi sonuçları P değerleri ile birlikte Tablo 6.27'de özetlenmiştir.

Tablo 6.27. Çok Değişkenli Varyans Analizi Sonuçları

DK	F	Serbestlik Dereceleri		P
Zaman	0.671	3	16	0.582
Har. Dur. × Zaman	0.940	3	16	0.444

g* ≥ 3 *İçin Örnek

Grup sayısı 3 ve daha fazla olduğu durumlara ilişkin olarak genel formüller burada verilmeyecek ve aşağıdaki örneğe ilişkin sonuçlar tartışılacaktır.

Örnek 6.10. Spor yapmayan 25-30 yaşları arasındaki erkek gönüllüler üzerinde yapılan bir çalışmada, 3 farklı antrenman yönteminin 6 aylık zaman dilimi içerisinde laktat

düzeylerinde meydana getirdiği değişiklikler incelenmiştir. Bu amaçla gönüllüler arasından rasgele seçilen 30 birey rasgele 3 gruba (*A*, *B*, *C*) ayrılarak, *A* grubundaki bireylere 6 ay boyunca haftada 4 gün sadece hafif bir antrenman sonrasında cimnastik yaptırılırken, *B* grubundaki bireylere haftada 4 gün anaerob ağırlıklı interval antrenman, *C* grubundaki bireylere ise haftada 4 gün aerob ağırlıklı ve *AEN*'i (Anaerobik Eşik Noktası) geliştirici antrenman yaptırılmıştır. Gönüllülerin laktat düzeyleri başlangıçta ve her iki ayda bir 2.5 m/sn sabit hızda 1000 m mesafe koşusu sonucunda kulak memesinden alınan kan yardımıyla belirlenmiştir. Veriler Tablo 6.28'dedir.

Tablo 6.28. Laktat Düzeyleri (mmol/l)

	Zaman (ay)			
Yöntem	*Baş.*	*2*	*4*	*6*
	7.3	7.2	7.2	7.1
	7.6	7.6	7.5	7.6
	7.0	7.1	7.0	7.2
	7.6	7.4	6.9	6.7
A	6.9	7.0	6.8	7.0
	7.7	7.5	7.3	7.1
	7.5	7.6	7.5	7.3
	7.1	6.9	6.8	6.7
	7.4	7.6	7.4	7.3
	7.5	7.3	7.1	7.2
$\bar{x}_A$	7.36	7.32	7.15	7.12
S	*0.2757*	*0.2616*	*0.2718*	*0.2741*
	7.7	6.2	6.0	5.1
	6.9	6.4	5.8	5.6
	7.0	6.6	6.0	5.5
	7.5	7.0	6.3	5.6
B	7.6	7.1	6.4	5.8
	7.6	7.1	6.2	5.8
	7.4	6.7	6.0	5.8
	7.5	6.8	6.3	5.9
	7.3	6.5	5.9	5.5
	7.4	6.6	5.8	5.7
$\bar{x}_B$	7.39	6.70	6.07	5.63
S	*0.2601*	*0.3018*	*0.2163*	*0.232*
	7.1	5.9	4.9	3.6
	7.8	6.7	5.2	4.0
	7.0	6.3	5.3	3.7
	7.4	6.0	5.3	3.2
C	6.9	5.8	4.8	4.1
	7.7	6.2	5.0	4.1
	7.5	6.1	5.1	3.4
	7.7	6.4	4.7	3.7
	7.5	6.1	5.3	3.9
	7.4	6.2	5.6	3.5
$\bar{x}_C$	7.40	6.17	5.12	3.72
S	*0.3091*	*0.2584*	*0.2741*	*0.3048*

Varyans Analizi Yaklaşımı

Örneğimiz için *Mauchly W istatistiği 0.709* ve bu istatistiğe ilişkin *Ki-kare=8.855*, *sd=5* ve *P=0.115* olarak bulunur. Ayrıca, *Greenhouse-Geisser Epsilon=0.831* ve *Huynh-Feldt Epsilon=0.990*'dır. Bu bulgular sonucunda ***varsayımların sağlandığı*** anlaşılır. Bu durumda, klasik varyans analizi sonuçları ile yetinilebilir. Diğer bir deyişle, düzeltme yapmaya ya da çok değişkenli yaklaşımdan yararlanma yoluna gitmeye gerek yoktur. Ancak, bununla birlikte tüm yaklaşımlara ilişkin sonuçlar Tablo 6.29, Tablo 6.30 ve Tablo 6.31'de verilmiştir. Ortalamalar yardımıyla çizilmiş grafik ise Grafik 6.2'dedir.

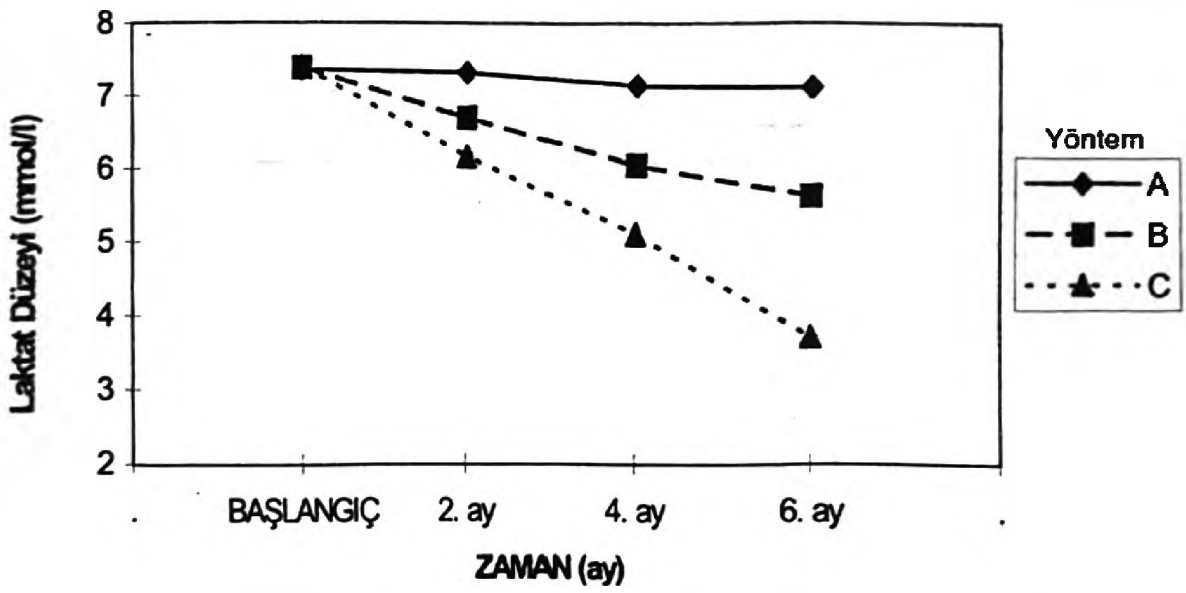
Tablo 6.29. Laktat Verisi İçin Klasik Varyans Analizi Sonuçları

Değişim Kaynağı	*KT*	*SD*	*KO*	*F*	*P*
Genel	353.9	119	-		
Ant. Yöntemi	53.48	2	26.74	162.78	<0.05
Zaman	59.48	3	19.8266	457.65	<0.05
Ant.Y.×Zaman	31.88	6	5.3133	122.63	<0.05
*DAH**	4.44	27	0.1644		
*DİH***	3.51	81	0.0433		

* *Denekler Arası Hata* ****Deneklerİçi Hata***

Tablo 6.30. Laktat Verisi İçin Düzeltme Yapılmış Varyans Analizi Sonuçları

DK		KT	SD	KO	*F*	*P*
Zaman	Varsayımlar Sağlandığında	59.48	3	19.82	457.65	0.000
	Greenhouse-Geisser	59.48	2.49	23.87	457.65	0.000
	Huynh-Feldt	59.48	2.97	20.03	457.65	0.000
Ant. Yön.×Zaman	Varsayımlar Sağlandığında	31.88	6	5.31	122.63	0.000
	Greenhouse-Geisser	31.88	4.98	6.39	122.63	0.000
	Huynh-Feldt	31.88	5.94	5.37	122.63	0.000



Grafik 6.2. Laktat Düzeylerinin Antrenman Gruplarına ve Zamana Göre Değişimi

Genel yorum

1. Laktat düzeylerindeki değişim genel anlamda antrenman yöntemlerine göre farklılık göstermektedir (F=162.78, P<0.05).
2. Laktat düzeylerindeki değişim genel anlamda zaman içinde farklılık göstermektedir (F=457.65, P<0.05).
3. Laktat düzeylerinin zaman içindeki değişimi, antrenman yöntemlerine göre farklılık göstermektedir (F=122.63, P<0.05).

Gerek Grafik 6.2 gerekse varyans analizi sonuçlarından anlaşıldığı gibi, laktat düzeylerinin her bir yönteme göre zaman içindeki değişimi farklıdır. Yani doğrular paralel değildir. Bu "paralel olmayışlık", etkileşimin anlamlı bulunması ile de doğrulanmaktadır.

Çok Değişkenli Yaklaşım

Tekrarlı ölçümlerde iki yönlü varyans analizi de normallik yanında zaman süresince yapılan ölçümlere ilişkin varyansların homojen olduğunu varsayar. Bazen bu varsayımların sağlanması için dönüşümlerden yararlanılır. Eğer varyanslar homojen iken kovaryansların homojenliği de sağlanamıyorsa ya da genel yaklaşımla küresellik varsayımı sağlanamıyorsa tekrarlanan ölçüm (örneğin, zaman) etkenine ilişkin hipotezler çok değişkenli yöntemlerle test edilebilir. Bu hipotezler iki tane olup;

a. Tekrarlanan etken boyunca ortalamalarda bir değişiklik olup olmadığı,

b. Karşılaştırılacak g tane grubun paralel olup olmadığı,

şeklindedir. Tablo 6.31'de çok değişkenli yaklaşıma ilişkin sonuçlar verilmiştir (*Wilks Lambda* için). İlgili değişim kaynaklarına ilişkin yorumlar yukarıdaki gibidir.

Tablo 6.31. Çok Değişkenli Varyans Analizi Sonuçları

DK	Λ	*F*	*Serbestlik Dereceleri*		*P*
Zaman	*0.026*	*311.487*	*3*	*25*	*0.000*
Har. Dur.×Zaman	*0.042*	*32.299*	*6*	*50*	*0.000*

Zaman Dilimindeki Değişim(ler)in Gruplara Göre Karşılaştırılması

Tekrarlı ölçümlerde iki yönlü varyans analizi sonunda etkileşim anlamlı ise *her zaman dilimindeki değişimin gruplara göre karşılaştırılması* istenebilir. Bu karşılaştırma, çoğunlukla, tekrarlanan ölçüm için elde edilecek ***ardışık*** ya da ***başlangıca göre fark değerleri dağılımlarının*** *bağımsız iki ya da ikiden çok grubun karşılaştırılmasında kullanılan* testler (*bağımsız gruplarda t testi (2 grup var ise) ya da varyans analizi (ikiden çok grup var ise)*) ile yapılır. Ancak, bu karşılaştırmalar araştırmacının amacına göre değişiklik gösterebilir. İstatistiksel yazılımlarda bu amaçla geliştirilmiş modüller vardır. Bu modüllerdeki *CONTRAST* seçenekleri ile değişik karşılaştırmalar yapmak olanaklıdır. Örneğin, *SPSS*'deki General Linear Model/*Repeated Measures*...alt başlığı altındaki ***Contrasts*** penceresinde ***None, Deviation, Simple, Difference, Helmert,***

Repeated, Polynomial seçenekleri vardır. Araştırmacılar amaca göre istenen kontrastı (*none* dışındakiler) seçebilir. Tekrarlanan ölçüm sayısı örneğimiz için 4 idi. Bu örneğe ilişkin olarak kontras seçeneklerinin kullanım yerleri şöyle olacaktır; Örneğin, ***ardışık fark değerlerinin*** (örneğin; 1–2, 2–3, 3–4) gruplara göre değişip değişmediği öğrenilmek isteniyorsa ***Repeated*** seçeneği (kontrastı), ***başlangıca göre fark değerlerinin*** (örneğin; 1–2, 1–3, 1–4) gruplara göre değişip değişmediği öğrenilmek isteniyorsa ***Simple/first*** seçeneği, ***son ölçüme göre fark değerlerinin*** (örneğin; 1–4, 2–4, 3–4) gruplara göre değişip değişmediği öğrenilmek isteniyorsa ***Simple/last*** seçeneği, ***kendinden önceki ölçümlerin ortalaması ile bir sonraki ölçüm arasındaki fark değerlerinin*** (örneğin; 1–2, ((1+2)/2)–3, ((1+2+3)/3)–4) gruplara göre değişip değişmediği öğrenilmek isteniyorsa ***difference*** seçeneği, ***birinci-ikinci-üçüncü ölçüm ile kendilerinden sonraki ölçümler ortalaması arasındaki fark değerlerinin*** (örneğin, 1–((2+3+4)/3), 2–((3+4)/2), 3–4) gruplara göre değişip değişmediği öğrenilmek isteniyorsa ***Helmert*** seçeneği, ***birinci-ikinci-üçüncü ölçüm ile diğer ölçümlerin ortalaması arasındaki fark değerlerinin*** (örneğin, 1–((2+3+4)/3), 2–((1+3+4)/3), 3–((1+2+4)/3)) gruplara göre değişip değişmediği öğrenilmek isteniyorsa ***deviation/last*** seçeneği, ***ikinci-üçüncü-dördüncü ölçüm ile diğer ölçümlerin ortalaması arasındaki fark değerlerinin*** (örneğin, 2–((1+3+4)/3), 3–((1+2+4)/3), 4–((1+2+3)/3)) gruplara göre değişip değişmediği öğrenilmek isteniyorsa ***Deviation/first*** seçeneği, ... dikkate alınmalıdır.

Korelasyon Matrisinin Birim Matris Olup Olmadığının Test Edilmesi

Bazı çok değişkenli analizleri (örneğin, *faktör analizi*) uygulayabilmenin ön koşulu, korelasyon matrisinin sıfırdan farklı olmasıdır. Bu amaçla kurulacak H_0 hipotezi, R matrisinin birim matrise eşit olduğu ($R = I$), H_1 hipotezi ise R matrisinin birim matrise eşit olmadığı ($R \neq I$) şeklindedir. *R=I ise* verilerin p boyutlu uzayda bir küre oluşturdukları söylenir. Ancak, *R=I* olma özelliğine pek rastlanmaz. Yine de ilişki matrislerinin hangi durumda birim matris olarak kabul edilebileceği test edilebilir. Bunun için ***Bartlett testi***nden (***Bartlett's test of sphericity***) yararlanılır. Bartlett test istatistiği (x), ki-kare dağılımı gösterir (6.73). Buna göre;

$$x = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2p + 5)\right] \ln|R| > \chi^2_{\left(\frac{1}{2}p(p-1);\alpha\right)} \qquad (6.73)$$

koşulunun sağlanması durumunda H_0 hipotezi reddedilir ve korelasyon matrisinin birim matris olmadığına karar verilir. Konu ile ilgili bir örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 6.11. n=115 gözlemli 4 değişkene ilişkin korelasyon matrisinin birim matris olup olmadığını araştıralım.

$$R = \begin{bmatrix} 1.000 & & & \\ -0.863 & 1.000 & S & \\ -0.336 & 0.580 & 1.000 & \\ -0.238 & 0.286 & 0.430 & 1.000 \end{bmatrix} \qquad |R| = 0.11356856$$

ve (6.73)'den,

$$x = -\left[115 - 1 - \frac{1}{6}(2(4)+5)\right] ln(0.11356856) \cong 243 > \chi^2_{(6;\alpha=0.05)} = 12.592$$

olduğu için verilerin 4 boyutlu uzayda bir elipsoid oluşturdukları (R'nin I'ya eşit olmadığı) söylenir.

Uygulama Verileri

Aşağıdaki veriler dikkate alınarak; grupların çok değişkenli normal dağılım gösterip göstermedikleri, gruplara ilişkin varyans-kovaryans matrislerinin homojen olup olmadıkları, gruplar arasında incelenen değişkenler açısından fark olup olmadığı, seçilecek gruplara ilişkin korelasyon matrislerinin I'ya eşit olup olmadığı vb. incelenebilir.

1. Zamanında doğum yapan ve sigara içmeyen kadınlarla, zamanında doğum yapan ancak günde en az 10 adet sigara içen kadınların çocuklarına ilişkin Canlı Doğum Ağırlığı (*CDA*) ve Baş Çevresi (*BÇ*) ölçümleri (araştırma verisinden rasgele 20 örnek alınarak) aşağıda verilmiştir. İlgili değişkenler açısından gruplar arasında fark var mıdır? Ayrıca, sigara içen grubun *CDA* ve *BÇ* ölçümlerinin $\mu_0' = [3200 \quad 37.5]$ olan bir evrenden çekilip çekilmediğini test ediniz.

Sigara İçmeyen		*Sigara İçen*	
CDA (gr)	*BÇ (cm)*	*CDA (gr)*	*BÇ (cm)*
2700	36.5	2600	34.0
2850	35.9	2460	34.5
3020	37.0	2010	33.0
2950	36.5	3000	35.6
3240	36.0	1970	32.8
2900	36.2	2730	34.6
3300	37.5	2350	33.2
2850	35.8	2100	32.7
2500	35.0	2330	34.7
2960	36.4	2180	33.4
3400	37.2	2645	36.1
3260	36.6	1860	32.0
3700	38.3	2440	32.5
3120	35.9	2120	32.0
3350	37.0	2090	33.5
3290	37.2	2310	33.5
3860	38.4	3100	37.4
2740	36.7	2860	35.4
2780	34.2	2200	34.2
3410	36.0	2040	33.1

2. Üç farklı bölgede yaşayan bireyler üzerinde yapılan bir çalışmada, bireylerin *kolesterol*, *trigliserit* ve *HDL* değerleri mg/dl cinsinden ölçülmüştür. Elde edilen geniş örneklemden rasgele seçilen 25'er bireye ilişkin *kolesterol*, *trigliserit* ve *HDL* değerleri aşağıda verilmiştir. İncelenen değişkenler açısından bölgeler arasında fark var mıdır?

Doğu Karadeniz			*Ege*			*Orta Anadolu*		
Kol.	*Tri.*	*HDL*	*Kol.*	*Tri.*	*HDL*	*Kol.*	*Tri.*	*HDL*
220	180	32	170	150	52	190	165	42
310	175	41	180	165	49	250	170	45
200	280	36	140	175	65	175	230	51
270	260	39	160	160	72	215	210	56
300	200	28	176	155	58	240	170	43
285	175	27	183	176	54	235	175	41
210	200	44	191	127	49	200	165	47
180	300	52	210	110	56	195	205	54
250	185	40	195	118	61	220	150	51
170	260	39	173	125	61	170	190	50
195	190	48	220	133	65	210	160	57
290	210	54	192	122	70	240	165	62
320	260	52	185	156	59	250	210	56
305	190	38	170	170	63	240	180	51
300	160	35	165	190	68	230	175	52
320	175	28	130	200	59	225	190	44
330	185	33	192	148	63	260	170	48
260	285	40	245	120	68	250	205	54
310	160	50	183	165	57	240	165	54
280	160	27	170	140	49	225	150	38
225	170	29	220	155	64	220	165	47
285	190	30	210	148	54	250	170	42
265	280	42	180	143	49	225	210	46
270	280	49	165	205	70	220	250	60
200	260	46	200	185	75	200	230	61

3. Kronik Böbrek Yetmezliği (*KBY*) olan erişkin hastaların, Üre (bun) ve Kreatin değerleri Normal bireylerin değerleri ile karşılaştırılmak isteniyor. Veriler aşağıdaki tabloda verilmiştir. İncelenen değişkenler açısından KBY ve Normal grupları arasında fark var mıdır?

KBY		*NORMAL*	
Üre (mg/dL)	*Kreatin (mg/dL)*	*Üre (mg/dL)*	*Kreatin (mg/dL)*
15	0.8	30	2.0
20	1.0	40	2.5
18	0.9	48	3.7
19	0.9	36	8.0
16	0.8	60	5.3
12	1.0	25	3.5
13	1.1	32	2.0
16	0.8	28	7.6
17	0.7	35	4.8
15	0.8	33	6.0
15	0.9	43	2.0
16	0.9	54	2.1
17	1.0	21	1.8
19	1.0	55	3.6
20	0.9	40	7.1
22	0.9	57	3.0
18	0.8	43	3.2
18	0.7	28	5.0
13	1.2	31	4.5
14	1.1	57	4.6
11	0.9	51	5.2

4. Takım sporu olan *SUTOPU*, bireysel spor olan *ATLETİZM* ve mücadele sporu olan *GÜREŞ* milli takım sporcuları; spor yaşı, eğitim düzeyi ve fizyolojik yaşları dikkate alınarak eşleştirildikten sonra rasgele seçilen 34'er sporcunun konsantrasyon süresi (*saniye*) ve reaksiyon zamanı (*milisaniye*) ölçülüyor. ***K***onsantrasyon ***S***üresi ve ***R***eaksiyon ***Z***amanı açısından üç spor dalı arasında fark var mıdır?

SUTOPU				*ATLETİZM*				*GÜREŞ*			
KS		*RZ*		*KS*		*RZ*		*KS*		*RZ*	
230	235	145	171	230	210	157	146	210	219	140	134
270	230	165	185	240	223	180	140	205	231	120	155
225	240	195	170	210	230	166	160	230	220	165	140
240	255	170	174	220	232	179	151	215	180	130	153
255	248	177	165	235	225	135	165	240	176	155	133
245	257	145	173	242	244	165	155	177	191	144	115
250	259	186	180	217	210	130	150	215	186	135	120
265	260	150	169	211	220	160	155	245	165	120	124
235	247	155	177	250	215	144	148	225	190	125	133
243	251	175	190	223	225	150	153	180	173	135	138
252	269	163	177	205	230	157	162	217	188	144	155
248	272	190	210	233	228	137	159	210	204	138	150
273	250	175	170	247	224	150	150	196	210	160	163
261	246	170	200	230	219	144	155	207	195	155	151
238	253	181	190	220	200	160	125	183	203	145	140
220	247	170	155	195	205	144	138	198	215	140	143
210		174		225		178		170		140	
225		163		220		185		218		142	

5. Basketbol genç milli takımına seçilen sporcular üzerinde bir araştırma planlanarak, 1.5 aylık kamp dönemi sonunda bazı parametrelerde bir gelişme olup olmadığı öğrenilmek isteniyor. Bu amaçla, sporcuların 1 dk içinde yaptıkları mekik sayıları, durarak uzun atlama mesafeleri (*cm*) ve durarak dikey sıçrama yükseklikleri (*cm*), kamp döneminin başında ve sonunda ölçülüyor. Bu üç parametre açısından kamp öncesi ve sonrası ölçümleri arasında fark var mıdır?

Mekik Sayısı		*Dur. Uzun At.*		*Dur. Dik. Sıç.*	
Önce	*Sonra*	*Önce*	*Sonra*	*Önce*	*Sonra*
18	23	191	197	44	49
22	27	187	193	54	56
23	29	195	205	40	47
16	16	198	213	38	39
19	23	185	199	42	49
21	28	187	193	48	57
20	25	178	184	54	59
16	24	190	200	35	35
17	21	195	195	38	46
19	26	192	200	39	50
19	23	188	197	40	45
18	19	179	188	42	48
18	23	188	194	43	47
20	30	196	201	44	52
21	21	193	201	38	48
18	20	182	190	36	46
25	28	191	197	32	34
17	26	183	187	48	51
16	23	195	209	44	50
24	24	194	199	46	54

6. Dişhekimliği Fakültesi Periodontoloji (Dişeti ve Hastalıkları) bölümünde yapılan bir çalışmada; iki grup dişeti hastaları (*Juvenil Periodontisis grubu, Hızlı İlerleyen Periodontisis grubu)* ile kontrol grubuna ilişkin *Cep Derinliği* (*mm*), *Periodantal İndex* (*PI*), *Plak İndeksi* (*PLI*) ve *Gingival İndex* (*GI*) ölçümleri elde ediliyor. Bu üç grup arasında incelenen değişkenler açısından fark var mıdır?

JUVENİL				*HIZLI İLERLEYEN*				*KONTROL*			
CD	*PI*	*PLI*	*GI*	*CD*	*PI*	*PLI*	*GI*	*CD*	*PI*	*PLI*	*GI*
3.38	4.93	0.43	1.33	4.34	5.05	1.31	2.24	1.75	0.00	0.32	0.00
3.38	5.04	0.44	2.15	4.00	6.34	2.04	2.13	1.85	0.00	0.34	0.00
4.50	5.35	0.71	1.71	4.30	5.10	1.86	1.96	1.65	0.21	0.21	0.20
3.57	5.66	2.06	1.73	4.65	5.62	1.66	2.03	1.54	0.00	0.40	0.00
2.87	4.68	0.53	1.75	6.15	6.63	1.59	1.86	1.58	0.18	0.35	0.14
3.56	4.74	1.85	1.74	4.70	5.28	1.61	1.89	1.54	0.06	0.22	0.07
2.83	3.74	1.01	1.38	4.16	5.42	1.32	1.57	1.62	0.26	0.42	0.26
3.08	4.66	0.88	1.40	4.13	5.57	2.46	2.00	1.82	0.10	0.38	0.09
5.38	6.52	1.26	2.52	3.55	5.64	1.42	1.50	1.86	0.13	0.30	0.12
3.52	4.78	0.92	1.64	4.35	5.03	1.18	1.29	1.81	0.00	0.21	0.00
3.05	4.50	1.07	1.57	3.12	6.26	1.86	1.65	1.92	0.12	0.37	0.13
3.48	4.96	1.00	1.62	4.66	6.96	1.52	2.32	1.96	0.00	0.31	0.00
2.97	4.66	0.55	1.29	4.92	5.87	2.29	2.22	1.78	0.00	0.38	0.00
3.34	5.00	1.00	1.42	4.67	5.92	1.66	2.03	1.88	0.15	0.32	0.15
3.38	5.15	0.96	1.15	4.98	5.62	1.40	1.57	1.77	0.00	0.33	0.00

7. 18-22 yaşları arasındaki 24 elit erkek yüzücünün vücut yağ yüzdeleri 4 farklı ölçüm yöntemi ile belirleniyor. Vücut yağ yüzdeleri açısından ölçüm yöntemleri arasında fark var mıdır?

	Ölçüm Yöntemleri			
Yüzücü	*I*	*II*	*III*	*IV*
1	28	27	29	28
2	31	31	32	33
3	23	24	24	22
4	24	26	22	27
5	25	28	23	26
6	23	27	22	23
7	24	24	24	24
8	30	28	31	30
9	26	26	24	24
10	27	25	25	25
11	29	31	30	26
12	24	26	26	27
13	22	25	23	21
14	18	18	18	18
15	22	21	22	23
16	26	26	26	26
17	30	32	30	20
18	25	26	24	25
19	33	33	34	33
20	28	28	29	27
21	32	32	33	32
22	28	29	28	27
23	24	24	24	24
24	30	30	30	31

8. Hacettepe Üniversitesi Diş hekimliği Fakültesi Dişeti Hastalıkları ve Tedavisi Bölümü'ne başvuran kronik periodontitisli hastalar, rasgele üç gruba (I, II, III) ayrılarak üç farklı tedavi yöntemi ile tedaviye alınmışlardır. Hastaların diş cep derinliği ölçümleri (mm); tedavinin başlangıcında, 6. hafta kontrolünde, 12. hafta kontrolünde ve 24. hafta kontrolünde ölçülmüştür. Cep derinliğinde meydana gelen değişimin tedavi süresince değişip değişmediği, zaman içindeki değişim önemli ise, bu değişimin gruplara göre farklılık gösterip göstermediğini inceleyiniz. (Kaynak: *Yetkin, Zuhal. Kronik Periodontitisli Hastalarda %1'lik Kitosan Jel ve Dıştaşı. Yayınlanmamış Doktora tezi. 2001. H.Ü. Sağlık Bil. Enst.*)

Grup	Başlangıç	Hafta 6	Hafta 12	Hafta 24
I	3.50	2.17	1.33	2.67
I	3.17	1.67	1.67	2.67
I	3.67	1.33	1.67	2.33
I	4.00	2.17	2.67	2.50
I	2.67	3.00	3.67	2.83
I	3.17	2.17	2.17	1.67
I	2.83	2.00	2.67	2.50
I	3.00	1.83	2.33	2.33
I	3.67	2.17	1.67	1.67
I	2.50	1.17	1.00	1.00
I	5.67	5.17	1.83	5.83
I	3.67	2.50	2.50	3.17
I	4.33	4.17	2.17	5.67
I	4.00	2.67	2.33	2.00
I	3.33	2.33	2.33	2.83
I	3.50	3.33	2.00	2.00
II	2.17	2.00	1.50	1.50
II	2.83	1.83	1.67	1.33
II	2.50	1.83	1.50	1.33
II	2.33	2.83	1.83	2.17
II	3.33	2.50	2.00	2.17
II	4.50	2.67	2.00	2.00
II	4.00	2.33	2.33	1.33
II	3.50	2.67	1.83	1.67
II	4.17	3.83	3.00	4.33
II	3.83	2.17	1.50	2.00
II	3.00	1.83	1.83	2.83
II	5.17	3.67	4.67	5.00
II	4.00	2.00	2.33	2.00
II	3.33	2.00	2.17	2.17
II	4.67	2.00	1.83	1.50
II	3.00	3.00	2.83	1.83
III	4.00	1.67	1.67	1.00
III	3.83	3.33	2.67	3.67
III	3.50	1.50	1.33	2.83
III	3.50	2.00	2.17	2.83
III	4.00	2.83	2.00	2.83
III	4.33	2.33	1.00	1.67
III	4.00	2.83	2.50	2.17
III	5.67	3.83	4.33	3.50
III	4.83	1.00	2.33	2.50
III	2.83	1.83	1.67	1.67
III	6.00	4.83	5.67	6.17
III	3.33	2.50	3.00	2.67
III	3.00	2.17	3.00	3.00
III	4.33	3.67	3.00	4.00
III	5.17	3.50	3.67	4.67
III	4.00	2.50	1.83	2.83

Bölüm 7

ÇOKLU DOĞRUSAL REGRESYON

7.1. GENEL BİLGİLER

Bağımlı ve Bağımsız Değişkenler

Birçok çalışmada, bağımlı (y) ve bağımsız (x) değişken arasındaki ilişki ile ilgilenilir. Örneğin, sporcularda milli olma sayısı ile genel spor kültürü puanı arasında bir ilişki olup olmadığı öğrenilmek istenebilir. Bu çalışmada, sporcuların genel spor kültürü puanları milli olma sayısına göre değişebileceği (diğer bir deyişle, milli olma sayısı spor kültürü puanlarını etkileyebileceği) için, milli olma sayısı; *etkileyen, açıklayan, neden olan* ya da *bağımsız değişken* olarak adlandırılırken genel spor kültürü puanı; *etkilenen, açıklanan, sonuç* ya da *bağımlı değişken* olarak adlandırılır. Genellikle bağımlı değişken y, bağımsız değişken(ler) ise x ile gösterilir. Değişkenler arasındaki ilişkiler aşağıda belirteceğimiz amaç dışında tablolar, grafikler ve hipotez testleri ile de incelenebilir.

Amaç ve Örnekler

Regresyon çözümlemesinin genel amacı; *bağımlı değişken ile bağımsız değişken(ler) arasındaki ilişkiyi matematiksel modelle açıklayarak bağıntılar bulmak ve bağımsız değişken(ler) yardımı ile bağımlı değişkeni kestirmek* şeklinde özetlenebilir [Not: Regresyon ile daha önce üzerinde durduğumuz korelasyon çözümlemesi arasında yakın bir ilişki vardır. Ancak bu iki kavram sıklıkla birbirine karıştırılır. Daha önce de belirtildiği gibi (Bölüm 2), *korelasyon çözümlemesi yardımıyla*; iki değişken arasındaki *doğrusal* ilişkinin yönü ve kuvveti (derecesi) sayısal olarak belirlenmeye çalışılır. İlişki ölçüleri arasında en bilineni doğrusal korelasyon katsayısı olan r'dir. Bu bölüm içerisinde bir bağımlı, birden çok bağımsız değişken olduğundaki ilişki ölçüleri üzerinde de durulacaktır.]

Regresyona ilişkin çeşitli örnekler aşağıda verilmiştir. Ancak, regresyon tanımından anlaşılacağı üzere, bağımsız değişken sayısı 1'den fazla olabilir. Bu nedenle, aşağıda bir bağımlı-bir bağımsız ve bir bağımlı-birden çok bağımsız değişken olduğu durumlara ilişkin örnekler ayrı ayrı ele alınmıştır.

Bir bağımlı ve bir bağımsız değişkenin olduğu *regresyon* çözümlemesinde, matematiksel bir model yardımıyla ilişkinin biçimi ortaya konarak, bilinen (ya da kolay elde edilen) bağımsız x değişkeni değeri yardımıyla bilinmeyen (ya da elde edilmesi zor olan) y bağımlı değişkeni değeri ***kestirilebilir***. Dolayısıyla, regresyon çözümlemesinin amaçlarından biri *kestirim*dir. Örneğin, 30-80 yaşları arasındaki sağlıklı bireylerin yaşları (x) ile aerobik performansları (y) arasında anlamlı bir matematiksel model (regresyon denklemi) elde edilebilir ise bu denklem yardımı ile yaşı bilinen bir kişinin aerobik performansı kestirilebilir. Yine, örneğin; yaş (x) ile kan basıncı (y), boy (x) ile ağırlık (y), ilacın dozu (x) ile kalp atım hızı (y), bazı besin maddelerinin tüketimi (x) ile ağırlık kazanımı (y), aile geliri (x) ile tıbbi bakım harcamaları (y),... vb. değişkenler arasındaki ilişkiler kestirime yönelik olarak regresyon modelleri ile incelenebilir. Diğer taraftan bir regresyon modeli, sadece *bir veri kümesini özetlemek ve tanımlamak* amacı ile de kullanılabilir. Örneğin, boy uzunluğu (x) ile ağırlık (y) arasındaki ilişki öğrenilmek istendiğinde, değişkenler arasındaki ilişkiyi denklem ile göstermek, y bağımlı değişkeni ile x bağımsız değişkeni arasındaki ilişkiyi bir tablo (örneğin çapraz tablo) ile göstermekten daha yararlı olabilir. Bir bağımsız bir bağımlı değişken arasındaki ilişkiler, ***doğrusal*** ve ***doğrusal olmayan*** ilişkiler şeklinde iki ana gruba ayrılabilir (bak. Bölüm 2, kesim 7.2.1 ve kesim 7.2.2). Çünkü bazı değişkenler arasında doğrusal, bazı değişkenler arasında da doğrusal olmayan ilişki vardır. Örneğin, yaş ile sıçrama yüksekliği arasında doğrusal olmayan bir ilişki vardır. Çünkü, sıçrama yüksekliği küçük yaşlarda düşük iken, yaklaşık 20-30 yaşları arasında en yüksek düzeye ulaşır ve ileri yaşlarda tekrar düşme eğilimi gösterir.

Çalışmaların çoğunda ise bağımlı değişkeni etkileyen birden çok bağımsız değişken söz konusudur. Bu durumda, *çoklu regresyon çözümlemesi* gündeme gelmektedir. Çoklu regresyon çözümlemesi yardımı ile; *bir bağımlı değişken ile birden çok bağımsız değişken arasındaki ilişkiler matematiksel modellerle incelenir ve bağıntılar kurulur.* Elde edilecek matematiksel modelin (regresyon denkleminin) iki önemli amacı;

1. *Bağımsız değişkenler yardımıyla bağımlı değişkeni kestirmek,*
2. *Bağımsız değişkenlerden hangisi ya da hangilerinin bağımlı değişkeni daha çok etkilediğini bulmak ve aralarındaki karmaşık yapıyı tanımlamak,*

olarak verilebilir. Örneğin, hava kirliliğinin bir göstergesi olan SO_2 miktarının bir gün önceden *kestirilmesi* amacıyla, bir gün önceki çeşitli meteorolojik faktörler [rüzgarın hızı (x_1), hava sıcaklığı (x_2), basınç (x_3),...vb.] bağımsız değişkenler, *bir gün sonraki* SO_2 *ölçümleri* de bağımlı değişken (y) olarak ele alınıp bir çoklu regresyon modeli oluşturulabilir. Bu kapsamdaki bir çalışmanın kestirim dışındaki diğer bir amacı; bir gün sonraki SO_2 miktarını *en fazla etkileyen bağımsız değişkenlerin belirlenmesi* de olabilir. Benzer şekilde; *mmHg* cinsinden ortalama kan basıncı (y) üzerine *yıl* cinsinden yaşın (x_1), *kg* cinsinden ağırlığın (x_2), m^2 cinsinden vücut yüzeyi alanının (x_3), *atış/dk* cinsinden bazal kalp atım hızının (x_4) ve *yıl* cinsinden hipertansiyon hikayesi süresinin (x_5) etkisi incelenebildiği gibi, ailede kullanılan toplam kredi kartı sayısı (y) ile aile büyüklüğü (x_1) ve aile gelir düzeyi (x_2) arasındaki ilişkiler yukarıdaki amaçlar

çerçevesinde incelenebilir ve bu örnekler çoğaltılabilir. Bu tür çalışmalarda, *y* bağımlı değişkenini etkilediği düşünülen "tüm bağımsız değişkenlerin modele alınması" ile "ekonomi, zaman ve elde edilecek modelin kullanım kolaylığı açısından modelin daha az bağımsız değişken ile oluşturulması" arasındaki ikilem ileride göreceğimiz "değişken seçimi" yöntemleri (bak. Kesim 7.6) kullanılarak giderilebilir.

Kısaca özetlemek gerekirse, regresyon çözümlemesi, bağımlı değişken ile bağımsız değişken(ler) arasındaki ilişkilerin (*bağımlılık yapısının*) incelenmesidir. Değişkenler arasındaki fonksiyonel ilişkinin kurulmasını sağlaması nedeni ile de ekonomiden ziraate, biyolojiden psikolojiye, tıptan eğitime kadar hemen tüm alanlarda oldukça yaygın bir şekilde kullanılmış ve kullanılmaktadır.

Veri Tipleri

Regresyon çözümlemesindeki değişkenler yaş, ağırlık, boy uzunluğu, kalp atım sayısı gibi *sürekli ve kesikli sayısal* değişkenlerdir. Ancak, sıralı (ordinal) ya da nitelik (nominal) bağımsız değişkenleri de göstermelik değişken (dummy variable) şekline dönüştürerek modele katmak olanaklıdır (bak. kesim 7.5). Bazen de bağımlı değişkenin iki durumlu nitelik veri (hasta-sağlam, sigara içen-içmeyen, .. gibi) olması söz konusudur. Böyle durumlarda, bağımlı ve bağımsız değişken(ler) arasındaki ilişki ***lojistik (logistic) regresyon*** yardımı ile incelenir. Lojistik regresyon çözümlemesi bu kitabın kapsamı dışındadır.

Regresyon çözümlemesi yardımıyla değişkenler arasındaki ilişkinin *neden-sonuç ilişkisi* olup olmadığı konusunda bir yargıya varılamaz. İki ya da daha fazla değişken arasında kuvvetli bir ilişki olsa bile, bu durum neden-sonuç ilişkisinin bir sonucu olmayabilir. Bu nedenle, ilişkiler kuramsal bir temele dayandırılmalıdır. Regresyon çözümlemesi, ilişkilerin kuramsal nedene dayandırıldığı durumlarda neden-sonuç ilişkilerinin kurulmasında da sıklıkla kullanılan bir yardımcı yöntemdir.

Bağımlı ve Bağımsız Değişkenlerin Seçimi

Regresyon çözümlemesini de içermek üzere, çok değişkenli yöntemlerin birinci adımı bağımlı değişken ile bağımsız değişkenlerin belirlenmesidir. Özellikle regresyon çözümlemesinde, hangi değişkenin bağımlı hangi değişkenlerin bağımsız olduğunun belirlenmesinde dikkatli olunmalıdır. Her iki tür değişkenin belirlenmesi kavramsal ve teorik temellere dayandırılmalıdır. Araştırmacıların kendi yargılarını ve bilgi birikimini ortaya koymadan belirleme yaptığı durumlarda (örneğin, değişkenlerin herhangi bir ayırım işlemi yapılmadan seçilmesi ve/ya da sadece deneysel temellere dayalı bağımsız değişken seçimine olanak tanınması), model geliştirmenin bazı temel ilkelerinin dikkate alınmadığı söylenebilir.

Regresyon çalışmalarındaki önemli bir sorun, özellikle bağımlı değişkende ortaya çıkan *ölçüm hatası* kavramıdır. Ölçüm hatası kavramı, incelenen değişkene ilişkin ölçümlerin tutarlılığı ve doğruluğu ile ilgilidir. Diğer bir deyişle, ölçüm hatası; gözlenen değerlerin, gerçek değerlerin temsilcisi olup olmadığını ifade eder. Ölçüm hataları, veri girişi hatalarından ölçümlerin kararsızlığına kadar birçok nedenle ortaya çıkabilir. Eğer bağımlı değişkende ciddi ölçüm hataları varsa, çok iyi seçilmiş bağımsız değişkenler

bile kestirimin doğruluğu konusunda birşey ifade etmeyeceklerdir. Ölçüm hataları bağımsız değişkenleri de etkiler. Bağımsız değişkenlerdeki ölçüm hataları arttıkça, bu değişkenlerin kestirim gücü azalacaktır.

Bağımsız değişkenlerin seçiminde önemli bir sorun, birçok değişken arasından ilgisiz değişkenlerin modele alınması, ilgili değişkenlerin ise model dışında bırakılmasıdır. Bu durum *belirleme hatası* olarak adlandırılabilir. İlgisiz değişkenlerin modele alınması diğer bağımsız değişkenler için yanlı sonuçlar doğurmamakla birlikte, bunların üzerine bazı etkisi vardır. Örneğin, ilişkiyi tanımlayan daha az değişkenle çalışmak yerine daha fazla değişkenle çalışılmak zorunda kalınır. Bu ise *verideki yapıyı yeterince tanımlayan daha az sayıda değişkenle çalışma* gibi bir amaçtan uzaklaşılmayı getirecektir. Ayrıca, özellikle adımsal yöntemlerle değişken seçiminde (ileride ayrıntılı şekilde incelenecektir), daha yararlı değişken(ler)in yerini alarak onların modelde kalmasını engelleyebilirler. Sonuç olarak, ilgili değişkenlerin model dışında tutulması, sonuçlar üzerinde ciddi bir yanlılık yaratabilir ve sonuçlar üzerinde yapılabilecek herhangi bir yorumu olumsuz etkileyebilir. Diğer taraftan, modele alınan ilgisiz bir değişkenle modele alınmayan ilgili bir değişken arasında ilişki yok ise bu durumun etkisi *çözümlemenin genel kestirim doğruluğunu azaltması* yönünde olur iken, modele alınan ve alınmayan değişkenler arasında yüksek ilişki (korelasyon) olması durumunda *sonuçların yanlı olma riski artar ve bu risk korelasyonun derecesine bağlı olarak artış gösterir.* Bu durumda, modele alınan değişkenlerin kestirilen etkileri, kendi etkilerinin yanında model dışında tutulan değişkenlerle paylaşmış olduğu etkileri de içerir. Bu ise modelin yorumlaması ve değerlendirilmesinde ciddi sorunlara yol açar. Bu nedenle araştırmacılar her iki tür belirleme hatasından mutlaka kaçınmaya çalışmalıdır.

Regresyon Sonuçlarının Genellenebilirliği ve Gözlem Sayısı

Regresyon çözümlemesi sonuçlarının genellenebilmesi için önerilen en az gözlem sayısı, bağımsız değişken başına 5 gözlemdir. Bu sayının 5'in altına düşmesi durumunda sonuçların "aşırı uygunluk" riski ile karşılaşılabilir. Bu durumda, sonuçlar örnekleme özgü olacağından genelleme de yapılamaz. Genellenebilirlik için en az gözlem sayısının *bağımsız değişken başına 5 olması* gerekmekle birlikte bu sayının 15 ile 20 arasında olması arzu edilir. Bu sayılara ulaşıldığında, örneklemin evreni temsil etmesi koşulunda sonuçların genellenebileceği söylenir. Ölçeklerin geçerliliği ile ilgili çalışmalarda bağımsız değişken başına gözlem sayısının 30-40 olması önerilmektedir. Ayrıca, ileride göreceğimiz adımsal yöntemlerin uygulandığı durumlarda bu sayı 50'ye kadar çıkmaktadır. Bu kriterlerin sağlanamadığı durumlarda, araştırıcı, sonuçların genellenebileceğinden emin olmalıdır.

Yukarıdaki genel yaklaşımın dışında da bazı yaklaşımlar vardır. Bunlardan birinde katsayıları test edebilmek için uygun gözlem sayısının en az $104+p$ ($n \geq 104+p$) kadar olması önerilmektedir (*p: bağımsız değişken sayısı*). Örneğin 5 bağımsız değişkenimiz var ise önerilen gözlem sayısı en az 104+5=109 olmalıdır. İleride göreceğimiz çoklu korelasyon katsayısına yönelik hesaplamalar için önerilen bir kesim noktası ise $n \geq 50+8p$ ile verilmektedir. Buna göre 5 bağımsız değişken için önerilebilecek gözlem sayısı en az 50+8(5)=90 olmalıdır. Her iki kestirime ilişkin hesaplamaların gerekli olduğu çözümlemelerde ise büyük olan gözlem sayısının kullanılması önerilmektedir.

Bu bölümde önce, *bir bağımlı bir bağımsız* değişkenin söz konusu olduğu regresyon modellerinden bazıları incelenecek (kesim 7.2), daha sonra da *çoklu regresyon çözümlemesi* (kesim 7.3) üzerinde durulacaktır.

7.2. BİR BAĞIMLI BİR BAĞIMSIZ DEĞİŞKEN OLDUĞUNDA BAZI REGRESYON MODELLERİ

İki değişken arasındaki ilişki çeşitli şekillerde ortaya çıkabilir. Bu ilişkiler arasında en bilineni, iki değişken arasında doğrusal ilişkinin olduğu *Basit Doğrusal Regresyon*dur. Ancak, değişkenler arasındaki ilişki her zaman doğrusal değildir. Bu tür ilişkiler genellikle *Doğrusal Olmayan İlişkiler* başlığı altında incelenir. Doğrusal olmayan ilişkilerin bir bölümü, değişkenler üzerinde yapılacak dönüşümlerle doğrusal ilişkiye dönüştürülebilir.

7.2.1. Basit Doğrusal Regresyon

Regresyon çözümlemesini yapıp kullanabilmek için değişkenler arasındaki ilişkinin fonksiyonel yapısının bilinmesi gerekmektedir. Fonksiyonel yapıyı öğrenmek için değişkenlere ilişkin saçılım (nokta) grafiklerden yararlanılır. Eğer ilişki doğrusal ise, bu iki değişken için doğrusal regresyon denklemi bulunabilir. Bir bağımlı bir bağımsız değişken olduğunda verilere ilişkin gösterim Tablo 7.1'deki gibidir.

Daha önce de belirtildiği gibi, Tablo 7.1'de verilen x_1 değişkeni çoğunlukla *bağımsız değişken* olarak adlandırılır. x_1 'e *açıklayıcı değişken* ya da *etkileyen değişken* de denir. y değişkeni ise, x_1 değişkenine bağlı olarak değiştiği düşünüldüğü için *bağımlı değişken*, *açıklanan değişken* ya da *etkilenen değişken* olarak adlandırılır.

Tablo 7.1. İki Değişkene İlişkin Veriler

Gözlem No	y	x_1
1	y_1	x_{11}
2	y_2	x_{21}
.	.	.
.	.	.
n	y_n	x_{n1}

Bir bağımlı bir bağımsız değişkenin olduğu iki değişkenli doğrusal modelde x_1, sabit değerlerden oluşur. Yani x_1 bağımsız değişkenine ilişkin veriler araştırıcı tarafından önceden belirlenir. Örneğin, doz (x_1) ile kalp atım sayısı (y) arasında bir fonksiyonel ilişki aranıyor ise, çalışma 0.5, 0.75, 1.0, ... gibi belirli (sabit) dozlar dikkate alınacak şekilde planlanır ve her bir dozda birçok deneğin (örneğin, deney hayvanının ya da bireyin) kalp atım sayısı incelenir. Bu tür çalışmalarda x_1'in bir raslantı değişkeni (random variable) olmadığı söylenir. Ancak, deneyi aynı x_1 değerleri için çok sayıda tekrarlayarak y'ye ilişkin çok sayıda farklı değer elde etmek olanağı çoğunlukla laboratuvar çalışmalarında söz konusu olabilmektedir. Birçok bilim alanında bu tür bir

yaklaşım olanaklı değildir. Dolayısıyla regresyon çözümlemesi, sadece y'nin değil x_1'in de rastlantı değişkeni olduğu durumlarda da uygulanır. Örneğin, bir gün sonraki SO_2 miktarını belirlemede bir gün önceki hava sıcaklığının etkisi incelenecekse, buradaki hava sıcaklığı araştırıcı tarafından denetlenemiyeceği için x_1, bir rastlantı değişkenidir.

y bağımlı değişkeni ise çoğunlukla ölçümle belirtilen sürekli bir raslantı değişkenidir. Ancak, y bağımlı değişkeninin sayımla belirtildiği (kesikli olduğu) durumlarla da karşılaşılır. Bu tür değişkenler, değişik dönüşümler yardımıyla sürekli değişken durumuna getirilebilirler.

Bir bağımlı bir bağımsız değişken olması durumunda doğrusal regresyon denklemi (y ile x_1'in evren değerleri arasındaki gerçek doğrusal bağıntı);

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \varepsilon_i \qquad (i = 1,2,.....,n) \qquad (7.1)$$

ile verilir. Burada, β_0 ve β_1, regresyon modelinin (denkleminin) bilinmeyenleridir. Bu bilinmeyenlere *parametre* ya da genel anlamda *regresyon katsayıları* denir. β_0, regresyon doğrusunun y eksenini kestiği noktayı gösterirken, *kesim noktası* veya *sabit* (değişmez) gibi adlar alır. Eğer x_1 değişkeninin dağılım aralığı 0'ı içeriyorsa, β_0; "x_1=0 olduğunda y'deki ortalama yanıt" olarak tanımlanır, x_1 değişkeni 0'ı içermiyorsa, β_0'ın uygulama yönünden bir yorumu yoktur. β_1'e regresyon katsayısı denir ve bağımsız değişkende bir birimlik değişme (artma ya da azalma) olduğunda, bağımlı değişkende meydana gelecek ortalama değişiklik miktarını verir. $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1}$ doğrusal regresyon denklemi, y ile x_1 arasındaki gerçek ilişkiye kabul edilebilir bir yaklaşım sağlar ve y, x_1'in doğrusal bir fonksiyonu iken, ε_i, bu yaklaşımdan sapmaları ifade ettiğinden *hata (yanılgı) terimi* olarak adlandırılır. Hata teriminin modelde yer almasının nedeni, y'deki değişimin bağımsız değişken(ler)in doğrusal bileşimi tarafından kesin bir şekilde açıklanamayacağı gerçeğine dayanır. Regresyona ilişkin çeşitli hipotez testlerinin yapılabilmesi ve güven aralıklarının bulunabilmesi için *hataların 0 ortalama ve σ^2 varyansı ile normal ve birbirinden bağımsız dağıldığı varsayılır* ($\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$). σ^2'nin gerçek değerini bilmek olanaklı olmadığı için bir kestiriminin ($\hat{\sigma}^2$) bulunması gerekir.

Regresyon çözümlemesinin önemli bir amacı bilinmeyenlerin (β_0 ve β_1 parametrelerinin) kestirilmesidir. Bu süreç, modelin veriye uyumu olarak adlandırılır. Parametrelerin kestiricilerinin bulunmasında kullanılan çeşitli yöntemler vardır. Bunlardan biri, ileride üzerinde duracağımız *en küçük kareler yöntemi*dir. (7.1) eşitliğinin en küçük kareler yöntemi ile elde edilen kestirimi;

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_{i1} \qquad (7.2)$$

olarak yazılır. Bu doğru denkleminde b_0 ve b_1, sırasıyla; gerçek kesim noktası olan β_0 ve gerçek regresyon katsayısı olan β_1 parametrelerinin en küçük kareler kestiricileridir.

$\hat{y}_i$ ise; kestirim değeri ya da kestirilen değerdir. $\hat{y}_i$ kestirimlerinin (regresyon doğrusunun) y_i gözlenen değerlerini ne kadar iyi kestirebildiğinin bir ölçüsü. y_i *gözlenen değeri ile* $\hat{y}_i$ *kestirim değeri arasındaki farktır* (yani, y_i gözlenen değerleri ile regresyon doğrusu arasındaki farktır). Bu fark, *i.* gözlem için;

$$e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (b_o + b_1 x_{i1}) \qquad (7.3)$$

olarak yazılır. Burada e_i'ye *artık* denir. e_i'ler (artıklar), hataların (ε_i) gözlenen değerleri olarak düşünülebilir. Diğer bir deyişle, gerçek değerleri bilemediğimiz için e_i, ε_i'nin kestirimi olarak düşünülür. ε_i'nin varyansının (σ^2) yansız bir kestirimi ise e_i'lerin varyansıdır ($\hat{\sigma}^2$) ve ileride göreceğimiz gibi daha çok s^2 ile gösterilir ve *A*rtık *K*areler *O*rtalaması (*AKO*) olarak tanımlanır. Artıkların olabildiğince küçük olması istenir. e_i artıkları, elde edilen regresyon denkleminin yeterliliğinin ve gerekli varsayımların araştırılmasında önemli bir rol oynar.

Basit Doğrusal Regresyona İlişkin Varsayımlar

Bir bağımlı bir bağımsız değişken olduğunda, oluşturulacak doğrusal regresyon modeli belli varsayımları içerir. Bu varsayımlar aşağıda sözel olarak özetlenmiştir.

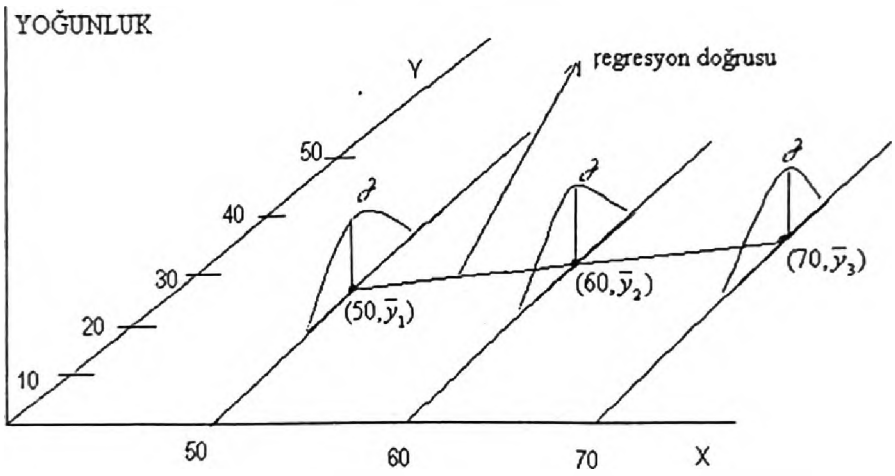
1. Bağımsız x_1 değişkeni değerlerinin *sabit* olduğu söylenir. Bunun anlamı, x_1 değerleri araştırıcı tarafından seçilir. Örneğin, doz miktarı ile haşerelerin ölüm süreleri arasında bir regresyon modeli kurulacak ise değişik dozlar (0.5, 1.0, 1.5 2.0, ...) belirlenerek her dozda yeterince haşerenin ölüm süreleri belirlenir. Diğer bir deyişle x_1 değişkeni rasgele değişken değildir ve kontrol edilebilir. *Bu varsayım, regresyon analizini korelasyon analizinden ayırır* (bak. Bölüm 2/*Varsayımlar*). Ancak regresyon analizi x_1 değişkeninin rasgele değişken olduğu durumlarda da uygulanabilir. Bu durumda, x_1 değişkeni kontrol edilemez. Örneğin, hastaların yaşı (x_1) ile doktora başvuru sayısı (y) arasında ilişki arayan bir araştırıcı evreni temsil ettiğini düşündüğü değişik yaşlardaki bireyleri rasgele örnekleme alır ve doktora başvuru sayılarını öğrenir. Bu gibi durumlarda, x_1 ve y nin birleşik dağılımının *iki değişkenli normal dağılım* gösterdiği varsayılır.
2. Regresyon çözümlemesinde bağımsız değişken değerleri *hatasız* ölçülür. Ancak, hiçbir ölçüm işlemi mükemmel olmadığından, bu ifadenin anlamı; x_1'deki ölçüm hatalarının önemsenmeyebileceği (ihmal edilebileceği) şeklinde yorumlanır.
3. Her bir x_1 değeri için birden çok y değeri (y değerleri altkümesi) söz konusudur. Örneğin, kalp atım sayısı örneğinde, her bir doz için birçok kişinin kalp atım sayısı incelenir ve her bir x_1 değerine karşılık gelen bir y değerleri altkümesi vardır. Kestirimin ve hipotez testlerinin geçerli olabilmesi için bu altkümelerin *normal* dağılım göstermesi gerekir.
4. Her bir x_1 değerine karşılık gelen y değerleri altkümelerine ilişkin varyanslar *homojendir.*

5. y değerleri istatistiksel olarak *bağımsızdır*. Yani, x_1'in herhangi bir değeri için elde edilen y değeri, x_1'in bir diğer değeri için elde edilen y değerinden etkilenmez.
6. y altkümelerinin oluşturduğu dağılımlara ilişkin ortalamalar bir *doğru* üzerindedir. Bu varsayım *doğrusallık varsayımı* olarak bilinir.

Bu sözel varsayımlar, regresyon çözümlemesine ilişkin kuramsal kaynaklarda hatalar (ε_i'ler) dikkate alınarak özetlenir. Örneğin *hataların*; *0 ortalama* ve y alt kümelerinin varyansına eşit bir varyansla (σ^2) *normal* ve *birbirinden bağımsız* dağıldığı ifade edilir ($\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$).

Regresyon çözümlemesine ilişkin olarak yukarıda verilen varsayımlar, uygulamada, gözlenen y_i değeri ile regresyon modeli sonucunda bulunan $\hat{y}_i$ kestirim değeri arasındaki farkı belirten e_i *artık dağılımları* yardımı ile incelenirler. Diğer bir deyişle, ε_i'ler için belirtilen varsayımlar e_i'ler için de söylenebilir. Örneğin, y değerlerinin istatistiksel olarak bağımsız olması ε_i'lerin kestirimi olan e_i'lerin de birbirleri ile ilişkili olmamasını ifade eder ve varsayımlara ilişkin bozulmalar çoğunlukla e_i'ler yardımı ile incelenir.

Yukarıdaki varsayımlarla ilgili olarak Grafik 7.1'i incelemek yararlı olacaktır. Grafik 7.1'de görüldüğü gibi, her bir x_1 değerine karşılık gelen birden çok y değeri vardır ve bu y değerleri eşit varyans ile normal dağılım gösterirler. Ayrıca, y alt kümelerinin ortalamaları bir doğru üzerindedir.



Grafik 7.1. Basit Doğrusal Regresyon Modelinin Gösterimi

Regresyon Denklemindeki Bilinmeyenlerin Bulunması

Yukarıda belirtildiği gibi, *en küçük kareler yöntemi*, β_0 ve β_1 gibi parametrelerin (bilinmeyenlerin) kestiriminde kullanılan yöntemlerden biridir. Bu yöntemin mantığı; artıkların karelerine ilişkin toplamın en küçük olması (en küçüklenmesi) temeline dayanır. Bu amaçla, (7.3) ile verilen $y_i - \hat{y}_i = y_i - (b_o + b_1 x_{i1})$ eşitliğinin her iki tarafının karesi alınıp n gözlem için yeniden yazılırsa;

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - b_0 - b_1 x_{i1})^2 \qquad (7.4)$$

elde edilir. (7.4) eşitliğinin sağ tarafı sıfıra eşitlenir ve b_0 ve b_1'e göre türevi alınırsa, artık kareler toplamı olan $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$'yi en küçük yapan b_0 ve b_1 katsayılarının formüllerine ulaşılır. Bu formüller (7.5) ve (7.6)'da verilmiştir.

b_1;

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(x_{i1} - \bar{x}_1)}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{i1} y_i - \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_{i1} \sum_{i=1}^{n} y_i}{n}}{\sum_{i=1}^{n} x_{i1}^2 - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_{i1}\right)^2}{n}} =$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_{i1} y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_{i1}^2 - n\bar{x}} = \frac{\text{ÇT}_{XY}}{KT_X} \qquad (7.5)$$

Burada,

KT*$_X$** : x bağımsız değişkenindeki her bir gözlemi dağılımın ortalamasından çıkartarak elde edilen yeni dağılımdaki değerlerin kareleri toplamıdır. KT_X'e, x_i'lerin ***ortalamaya göre düzeltilmiş *kareler toplamı* ya da ***x*** *Ortalamadan* Ayrılış Kareler Toplamı (*XOAKT*) da denir.

ÇT*$_{XY}$** : x ve y değişkenlerinin kendi ortalamalarına göre düzeltilmiş değerlerinin çarpılarak toplanması ile elde edilir. ***Düzeltilmiş çarpımlar toplamı olarak da adlandırılır.

(Not: Bu tanımlarla ilgili olarak Bölüm 2'deki *Gruplara İlişkin Çözümlemeler* alt başlığını okuyunuz.)

b_0;

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}_1 \qquad (7.6)$$

ile verilir. Burada,

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i / n \text{ ve } \bar{x}_1 = \sum_{i=1}^{n} x_{i1} / n \qquad (7.7)$$

dir. Buradan, örnekleme ilişkin regresyon kestirim denklemi;

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_{i1} \qquad (7.8)$$

olarak yazılır. Bu denklemde, her bir x_{i1} değerinin yerine konması ile elde edilen $\hat{y}_i$ değerleri regresyon doğrusu üzerinde olacaktır.

Regresyon Katsayılarının Varyansları

Regresyon modelindeki parametreler için *hipotez testlerini uygulamak* ve *güven aralıklarını bulmak* amacıyla ε_i'lerin normal dağılım gösterdiği varsayılır. Bu varsayım altında, β_1' in en küçük kareler kestiricisi olan b_1; β_1 ortalama ve aşağıda verilen varyans ile normal dağılım gösterir.

$$Var(b_1) = \frac{s^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_{i1} - \bar{x}_1)^2} = \frac{s^2}{KT_X} \qquad (7.9)$$

Regresyon doğrusunun y eksenini kestiği nokta olan b_0 ise; β_0 ortalama ve aşağıdaki varyansla normal dağılım gösterir.

$$Var(b_0) = s^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}_1^2}{KT_X}\right] \qquad (7.10)$$

Güven aralıkları ve hipotez testleri için σ^2'nin kestiricisi olan s^2'nin bilinmesi gerekir.

Artık Varyansı (s^2)

(7.9) ve (7.10)'daki varyans formüllerinde yer alan s^2; hatalara ilişkin σ^2 varyansının örneklemden elde edilen yansız kestiricisi olup artık varyansı olarak bilinir ve;

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - b_0 - b_1 x_{i1})^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-2} \qquad (7.11)$$

ile verilir. s^2, ileride ***artık kareler ortalaması*** (*AKO*) olarak da tanımlanacaktır.

Regresyon Denkleminin Standart Hatası (s)

(7.11) ile verilen artık varyansı olan s^2'nin karekökü, *s*, *regresyon denkleminin standart hatasını verir.* Birimi *y* değişkeni ile aynıdır. *s*, regresyon doğrusuna uyumun göstergelerinden biridir. Regresyon denkleminin (kestirim denkleminin) standart hatası, *s*, kestirim değerlerinin gerçek değerlerden ne derece ayrılış gösterdiğini belirten bir standart sapmadır ((e_i) değerlerinin standart sapmasıdır). Diğer bir anlamda, *s*; kestirimin doğruluğunun miktarı konusunda bilgi verir. Çünkü gerçek değerler (*y*) ile

kestirilen değerler ($\hat{y}_i$) arasındaki fark değerlerinin ($y_i - \hat{y}_i = e_i$) küçük çıkması. $\hat{y}_i$ kestirimlerinin y_i gözlem değerlerine yaklaştığının, yani regresyon doğrusunun verilere uygunluğunun bir göstergesidir. s ile korelasyon katsayısı arasında ters bir ilişki vardır. Korelasyon katsayısı arttıkça, s azalır. s azaldıkça, elde edilecek kestirimler daha güvenilir olacaktır. $r = \pm 1$ olduğunda $s=0$ olur. s bazen s_{yx} ile de gösterilir. Doğrusal regresyonun temel varsayımlarından olan "varyansların homojenliği" varsayımının sağlanması durumunda gerçek değerlerin (y) % 68'inin regresyon doğrusuna (yani $\hat{y}_i$ değerlerine) olan uzaklığının $\pm 1s$ aralığında olması beklenirken, gerçek değerlerin % 95'inin $\pm 1.96\,s$ aralığında olması beklenir (uygulamada $1.96s$ yerine $2s$ de kullanılır). s, artıkların kareleri toplamına bağlı olarak hesaplandığı için artık varsayımlarının yerine getirilememesinden ciddi şekilde etkilenir.

Regresyon doğrusuna uyumun bir göstergesi de daha sonra üzerinde duracağımız *belirtme (tanımlayıcılık) katsayısı*dır (R^2). s ile karşılaştırıldığında, R^2 değerinin *alt ve üst sınırlarının olması* ve *ölçü biriminden etkilenmemesi* uyum açısından yorumsal kolaylık sağlamaktadır.

b_0 ve b_1 Katsayılarının Standart Hataları

b_0 ve b_1 katsayılarına ilişkin standart hatalar Eşitlik (7.9) ve Eşitlik (7.10)'un kareköklerinin alınması ile Eşitlik (7.12) ve (7.13)'de verilmiştir.

$$S(b_1) = \frac{s}{\sqrt{KT_X}} \qquad (7.12)$$

$$S(b_0) = s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}_1^2}{KT_X}} \qquad (7.13)$$

β_0 ve β_1 İçin Güven Aralıkları

Örneklemden elde edilen b_0 ve b_1 yardımıyla, bu katsayıların evren değerleri olan β_0 ve β_1'in içinde bulunduğu sınırlar, istenilen α *yanılma düzeyleri* ya da *yüzde 100(1–α) güven düzeyleri* için bulunabilir. β_0 için %100(1–α) güven aralığı;

$$b_0 - t_{(n-2;\ \alpha/2)}\, S(b_0) \le \beta_0 \le b_0 + t_{(n-2;\ \alpha/2)}\, S(b_0) \qquad (7.14)$$

ile verilirken β_1 için güven aralığı;

$$b_1 - t_{(n-2;\ \alpha/2)}\, S(b_1) \le \beta_1 \le b_1 + t_{(n-2;\ \alpha/2)}\, S(b_1) \qquad (7.15)$$

ile verilir.

Önemlilik Testleri

β_1 Katsayısının Test Edilmesi:

β_1 katsayısının araştırıcı tarafından seçilen β_1^0 gibi bir değere eşit olup olmadığını test etmek için hipotezler $H_0 : \beta_1 = \beta_1^0$ ve $H_1 : \beta_1 \neq \beta_1^0$ olarak kurulursa, ilgili test istatistiği;

$$t = \frac{b_1 - \beta_1^0}{S(b_1)} \qquad (7.16)$$

ile verilir. Eşitlik (7.16) ile bulunan t hesap istatistiği n-2 serbestlik dereceli ve $\alpha/2$ yanılma düzeyindeki t tablo istatistiği ile karşılaştırılır. $\beta_1^0 = 0$ olarak alınırsa, β_1 katsayısının sıfıra eşit olup olmadığı ya da ilişkinin doğru ile gösterilip gösterilemeyeceği test edilmiş olur. $\beta_1^0 = 0$ ise hipotezler $H_0 : \beta_1 = 0$ ve $H_1 : \beta_1 \neq 0$ olur ve de t istatistiği; $t = b_1 / S(b_1)$ şekline dönüşür. Test sonucunda H_1 hipotezi kabul edilirse [$(\beta_1 \neq 0)$ ise], regresyon doğrusunun çizilebileceği söylenir (Not: $\beta_1 = 0$ olması, değişkenler arasında ilişki olmadığını değil *doğrusal ilişki* olmadığını gösterir).

β_0 Katsayısının Test Edilmesi

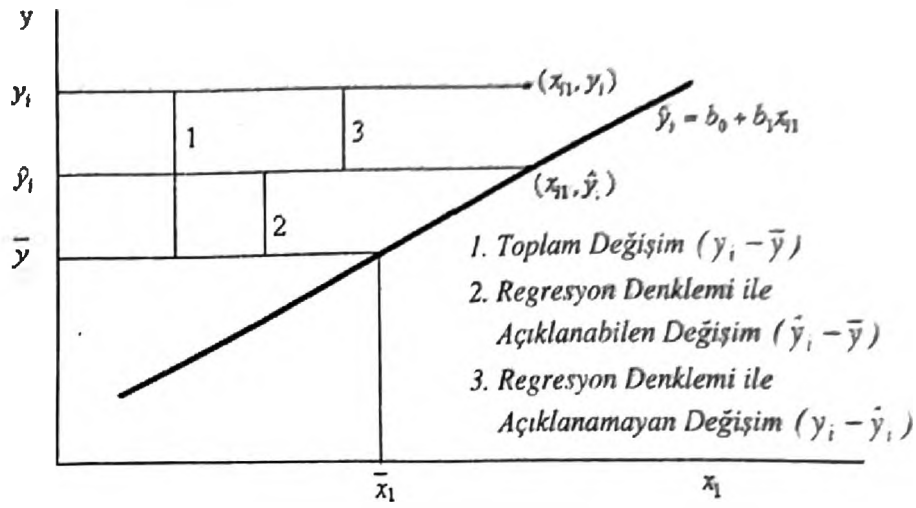
Benzer şekilde β_0 katsayısının araştırıcı tarafından belirlenen β_0^* gibi bir değere eşit olup olmadığını test etmek için $H_0 : \beta_0 = \beta_0^*$ ve $H_0 : \beta_0 \neq \beta_0^*$ hipotezleri için test istatistiği;

$$t = \frac{b_0 - \beta_0^*}{S(b_0)} \qquad (7.17)$$

ile verilir. Hesapla bulunan istatistik seçilen yanılma düzeyindeki n-2 serbestlik dereceli $\alpha/2$ yanılma düzeyindeki t tablo istatistiği ile karşılaştırılır. Ancak, β_0'ın test edilmesi β_1 kadar önemli değildir ve çoğunlukla da yapılmaz.

$H_0 : \beta_1 = 0$ Hipotezinin Varyans Analizi Yardımıyla Test Edilmesi

$H_0 : \beta_1 = 0$ hipotezinin test edilmesi varyans analizi yardımı ile de yapılabilir. Bu amaçla F değerine ulaşmak için çeşitli kareler toplamlarından ve kareler ortalamalarından yararlanılır. Varyans analizindeki mantığı kavrayabilmek için grafiksel bir gösterimden yararlanılabilir (Grafik 7.2).



Grafik 7.2. Çeşitli Kareler Toplamlarının Grafiksel Gösterimi

Grafik 7.2 incelenirse, $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_{i1}$ denklemini oluşturan gözlemlerden biri olan ve (x_{i1}, y_i) ile verilen gözlemin bu denklem yardımıyla elde edilen kestirim değeri, $(x_{i1}, \hat{y}_i)$ regresyon doğrusu üzerinde olacaktır. x_{1i} gözlem değerine karşılık gelen y_i değerinin $\bar{y}$ değerine olan uzaklığına toplam değişim dersek, bu büyüklük iki farkın toplamı ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$(y_i - \bar{y}) = (\hat{y}_i - \bar{y}) + (y_i - \hat{y}_i) \qquad (7.18)$$

(7.18) eşitliği tüm gözlemler için genellenip kareleri alınırsa;

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 &= \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 \\ \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 &= \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \end{aligned}\right\} \qquad (7.19)$$

olur ve bu eşitlikler;

$$KT_Y = RKT + AKT \qquad (7.20)$$

olarak yazılır. Burada,

KT_Y: y'deki Toplam Değişim
RKT: Regresyon Kareler Toplamı
AKT: Artık Kareler Toplamı

dır. Yukarıda da belirtildiği gibi bu üç kareler toplamının (*Değişim Kaynağının*) uygulamadaki anlamları sırasıyla; y'deki toplam değişim, regresyon modeli (burada $b_0 + b_1 x_{i1}$) tarafından açıklanabilen değişim ve regresyon modeli tarafından açıklanamayan değişimdir. Eşitlik (7.19) ya da (7.20) sözel olarak;

TOPLAM DEĞİŞİM = AÇIKLANABİLEN DEĞİŞİM +AÇIKLANAMAYAN DEĞİŞİM

şeklinde yazılabilir. Toplam değişime (KT_Y); y_i'lerin ***ortalamaya göre düzeltilmiş kareler toplamı*** ya da ***y Ortalamadan Ayrılış Kareler Toplamı*** (*YOAKT*) da denir. Kısaca, y'deki değişimin ölçüsüdür.

Eşitlik (7.19)'dan, regresyon doğrusuna uyumun göstergesi olan *açıklanabilen değişimin* (*RKT*) büyüklüğü ne kadar fazla ise, *açıklanamayan değişimin* o kadar az olacağı kolayca görülebilir. İlgili kareler toplamlarının açık formülleri;

$$KT_Y = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} y_i)^2}{n} = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\bar{y} \qquad (7.21)$$

$$RKT = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_{i1} y_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{i1} \sum_{i=1}^{n} y_i}{n} \right)^2}{\sum_{i=1}^{n} x_{i1}^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_{i1} \right)^2}{n}} = \frac{(ÇT_{XY})^2}{KT_X} = b_1(ÇT_{XY}) \qquad (7.22)$$

olarak verilir. *AKT* ise (7.20) yardımı ile,

$$AKT = KT_Y - RKT \qquad (7.23)$$

olarak bulunacaktır. $\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = AKT$ olduğu için, eşitlik (7.11) ile verilen artık varyansı,

$$s^2 = AKT/(n-2) \qquad (7.24)$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Varyans analizi sonucunda bulunacak F istatistiğine ulaşabilmek için iki varyansın oranına gereksinim duyulur. Bu amaçla, *RKT* ve *AKT* kendi serbestlik derecelerine (sırasıyla, regresyon serbestlik derecesi (*RSD*) ve artık serbestlik derecesi (*ASD*)) bölünerek ilgili varyanslar bulunur. Buna göre;

H_0 : $\beta_1 = 0$ ($y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \varepsilon_i$ denklemine uyum anlamlı değildir)

H_1 : $\beta_1 \neq 0$ ($y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \varepsilon_i$ denklemine uyum anlamlıdır)

hipotezleri,

$$F = \frac{RKT / RSD}{AKT / ASD} = \frac{RKT / 1}{AKT / (n-2)} = \frac{RKO}{AKO} \qquad (7.25)$$

ile test edilir. Bulunan F istatistiği; ε_i'lerin sıfır ortalama ve σ^2 varyans ile normal dağıldığı varsayımı altında bir F dağılımı gösterir ve (7.25) ile bulunan F değeri, seçilen α yanılma düzeyinde regresyon ve artık serbestlik dereceli F tablo istatistiği ile karşılaştırılır. F istatistiği çoğunlukla kareler toplamları, serbestlik dereceleri ve kareler ortalamalarını içeren varyans analizi tablosu ile birlikte verilir (Tablo 7.2). F hesap istatistiği, (7.16) ile verilen t istatistiğinin karesine eşittir ($F=t^2$).

Tablo 7.2. Bir Bağımlı Bir Bağımsız Değişken İçin Varyans Analizi Tablosu

Değişim Kaynağı (DK)	*Kareler Toplamı (KT)*	*Serbestlik Derecesi (Sd)*	*Kareler Ortalaması (KO)*	*F Değeri*
Toplam	KT_Y	*n-1*	-	
Regresyon (R)	b_1 $(ÇT_{XY})$	*1*	b_1 $(ÇT_{XY})$	*RKO/AKO*
Artık (A)	KT_Y-*RKT*	*n-2*	*AKT/(n-2)*	

Kestirim Değerleri, Kestirim Değerlerinin Standart Hataları ve Güven Aralıkları

Regresyon denklemi, bağımsız değişkenin belirlenen *herhangi bir* x_1^0 *değerine karşılık gelen y bağımlı değişken değerini kestirmek için* kullanılabilir. Buna göre, $\hat{y}_0$ kestirim değeri

$$\hat{y}_0 = b_0 + b_1 x_1^0 \qquad (7.26)$$

ile verilirken, bu kestirim değerinin standart hatası $V(\hat{y}_o)$'ın karekökü olup $S(\hat{y}_o)$ ile gösterilir ve $S(\hat{y}_o)$;

$$S(\hat{y}_o) = s\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_1^0 - \bar{x}_1)^2}{KT_X}} \qquad (7.27)$$

ile verilir. Herhangi bir x_1^0 değerine karşılık gelen kestirim değerinin $\%100(1-\alpha)$ güven aralığı;

$$\hat{y}_0 - t_{(n-2;\alpha/2)} S(\hat{y}_0) \le \hat{Y}_0 \le \hat{y}_0 + t_{(n-2;\alpha/2)} S(\hat{y}_0) \qquad (7.28)$$

ile verilir.

Eğer amaç, x_1^0 *değerine karşılık y değerlerinin ortalaması* (μ_0) *için* bir güven aralığı bulmak ise kestirim değeri (7.26)'daki gibi,

$$\hat{\mu}_0 = b_0 + b_1 x_1^0 \qquad (7.29)$$

olurken, bu kestirimin standart hatası $V(\hat{\mu}_0)$'nın karekökü olup, $S(\hat{\mu}_0)$ ile gösterilir ve

$$S(\hat{\mu}_0) = s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_i^0 - \bar{x}_1)^2}{KT_X}} \qquad (7.30)$$

ile verilir. Bu ortalama kestirim değerine ilişkin $\%100(1-\alpha)$ güven aralığı ise;

$$\hat{\mu}_0 - t_{(n-2;\alpha/2)} S(\hat{\mu}_0) \le \hat{Y}_{\mu 0} \le \hat{\mu}_0 + t_{(n-2;\alpha/2)} S(\hat{\mu}_0) \qquad (7.31)$$

ile verilir. (7.26)'da yanlızca bir gözleme ilişkin kestirim düşüncesi varken, (7.29)'da olası tüm y değerlerinin ortalaması gibi daha kararlı bir kestirim düşüncesi vardır. Bu nedenle de Eşitlik (7.30) ile verilen varyans (standart hatanın karesi), (7.27) ile verilene göre daha küçük olur. Dolayısıyla da (7.31) ile verilen güven aralığı, (7.28) ile verilene göre daha dar olacaktır.

Korelasyon (İlişki) Katsayısı (r)

Korelasyon (ilişki) katsayısı (r) üzerinde Bölüm 2'de durulmuş ve r'nin formülü, kovaryans ve varyansa bağlı olarak Eşitlik (2.7)'de verilmişti. Korelasyon katsayısı, çarpımlar ve kareler toplamları ile de verilebilir ve r;

$$r = \frac{ÇT_{XY}}{\sqrt{KT_X \times KT_Y}} \qquad (7.32)$$

olarak yazılır. Korelasyon katsayısı evren için ρ (ro) ile gösterilir.

Korelasyon Katsayısının Anlamlılığı

Korelasyon Katsayısının 0'a Eşitliğinin Test Edilmesi

Korelasyon katsayısının anlamlı olup olmadığı genellikle örneklem korelasyon katsayısının $\rho = 0$ olan bir evrenden çekilip çekilmediğinin testidir. İlişki katsayısı $\rho = 0$ olan bir evrenden çekilen örneklemlerin r katsayıları normal dağılırlar. Bu nedenle, korelasyon katsayısının *sıfırdan farklı olup olmadığını* bulmak için ilgili hipotezler; $H_0 : \rho = 0 \quad H_1 : \rho \neq 0$ olmak üzere ilgili test istatistiği ;

$$t = r / s_r = r / \sqrt{(1-r^2)/(n-2)} \qquad (7.33)$$

ile verilir. Burada s_r, korelasyon katsayısının standart hatasıdır. Hesapla bulunan t istatistiği n-2 serbestlik dereceli ve $\alpha/2$ yanılma düzeyindeki t tablo istatistiği ile karşılaştırılır.

Gözlem sayısının az, ancak korelasyon katsayısının yüksek elde edildiği durumlarda (7.33) ile yapılacak test sonucunda r değeri anlamsız bulunabilir. Bu durumda, ilişki katsayısının rasgele olarak elde edildiği söylenir. Örneğin, $n=5$ için $r=0.70$'lik bir ilişki

katsayısı anlamsız bulunur. Bunun tersine, gözlem sayısı arttıkça, ilişki katsayısı küçük çıksa bile anlamlı bulunabilir. Örneğin, *n=300* olduğunda *r=0.20*'lik bir ilişki katsayısı anlamlı bulunur ve ilişkinin rasgele ortaya çıkmadığı söylenir. İstatistiksel yazılımlarda ilişki katsayıları matris şeklinde sunulurken isteğe bağlı olarak anlamlılık düzeyleri de matris üzerinde yer alabilmektedir.

Korelasyon Katsayısının Sıfırdan Farklı Bir Değere Eşitliğinin Test Edilmesi

Eğer ρ 'nun $\rho_0 \neq 0$ gibi özel bir değere eşitliği test edilecek ise yukarıdakinden farklı bir yol izlenir. Çünkü, $\rho_0 \neq 0$ bir evrenden çekilen örneklemlerin r katsayıları normal dağılım göstermez. Bu nedenle, örneklem korelasyon katsayısı ve evren korelasyon katsayısı aşağıdaki formüller yardımıyla z'ye dönüştürülür.

$$z_r = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} \qquad (7.34)$$

$$z_{\rho_0} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho_0}{1-\rho_0} \qquad (7.35)$$

Buradan, $H_0 : \rho = \rho_0$ için test istatistiği,

$$z = (z_r - z_{\rho_0})(\sqrt{n-3}) \qquad (7.36)$$

ile verilir. Eşitlik 7.36 ile elde edilen *z istatistiği,* seçilen alfa yanılma düzeyindeki çift yönlü (eğer $H_1 : \rho \neq \rho_0$ ise) z tablo istatistiği ile karşılaştırılabilir.

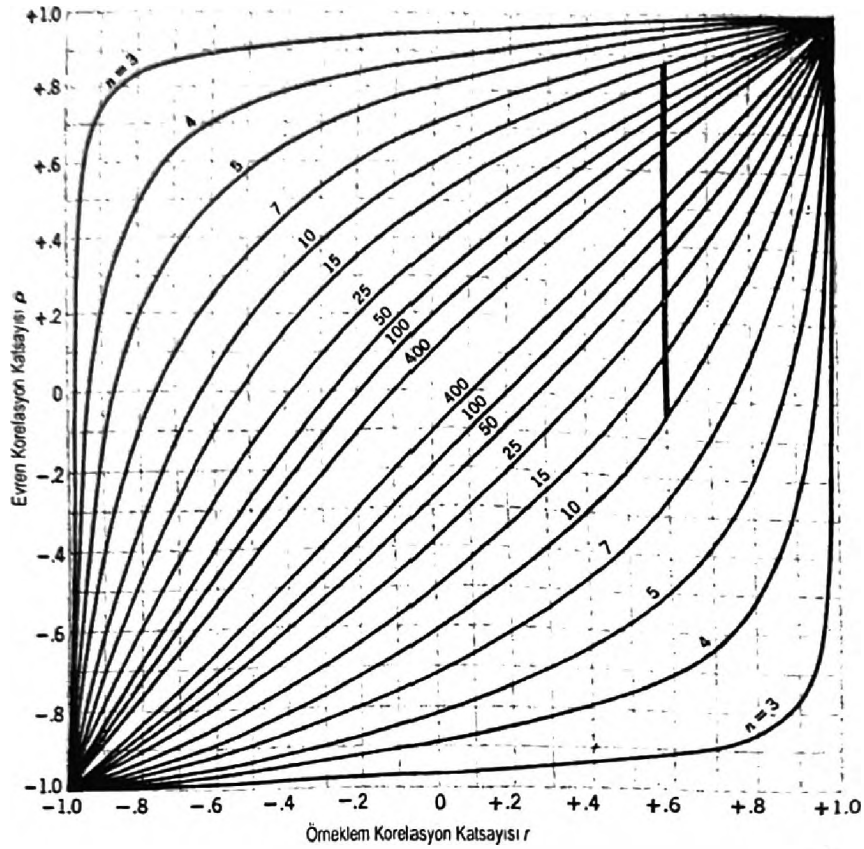
Eşitlik (7.34) ile verilen dönüşümden yararlanarak ρ için güven aralığı da yazılabilir. Buna göre, 100(1-α) güven aralığı;

$$tanh\left(z_r - \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}\right) \leq \rho \leq tanh\left(z_r + \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}\right) \qquad (7.37)$$

ile verilir. Eşitlik (7.37)'de parantez içindeki ifadeleri u ile gösterirsek, $tanh\,u = (e^u - e^{-u})/(e^u + e^{-u})$'dir.

İşlemlerin fazlalığı nedeniyle korelasyon katsayısının güven sınırları için iyi bir yaklaşım, bu amaçla geliştirilmiş grafiklerden yararlanmaktır. Grafik 7.3'de, değişik gözlem sayıları için iki değişkenli normal dağılım gösteren dağılımlarda ρ için % 95 güven aralıkları verilmektedir. Grafikte görüldüğü gibi, n=10 gözlem olduğunda r=0.60 için % 95 güven aralığı; –0.05 ile 0.87 arasında değişmektedir. Bu aralık grafikte koyu dik çizgi ile verilmiştir.

Çoklu regresyondaki ilişki kavramı, Kesim 7.3'dedir.



Grafik 7.3. Çeşitli Örneklem Büyüklüklerinde İki Terimli Normal Evrendeki ρ İçin %95 Güven Sınırları (Wonnacott-Wonnacott, 1981'den)

Belirtme Katsayısı (R^2)

Regresyon modeli tarafından açıklanabilen değişimin toplam değişim içindeki payı olan belirtme katsayısı, bağımlı değişkendeki değişimin yüzde kaçının bağımsız değişken tarafından açıklanabildiğini belirtir ve Eşitlik (7.19) ve (7.20) yardımıyla;

$$R^2 = \frac{RKT}{KT_Y} \qquad (7.38)$$

ile verilir. R^2, 0 ile 1 arasında değişir. Belirtme katsayısı, *açıklayıcılık* ya da *tanımlayıcılık* katsayısı gibi adlar ile de bilinir. İki değişken arasında *doğrusal bir ilişki varken* R^2 değerinin 1'e yaklaşması bağımlı değişkendeki değişimin büyük bir bölümünün bağımsız değişken tarafından açıklandığını ve varsayımlar sağlandığında modelin uygun olduğunu gösterir. Daha önce de belirtildiği gibi *s*, regresyon doğrusuna uyumun göstergelerinden biri idi. *s* ile karşılaştırıldığında, R^2 değerinin alt ve üst sınırlarının olması ve ölçü biriminden etkilenmemesi uyum açısından yorumsal kolaylık sağlamaktadır. R^2 ile ilgili olarak *çoklu belirtme katsayısı* alt başlığında daha ayrıntılı bilgi verilmiştir.

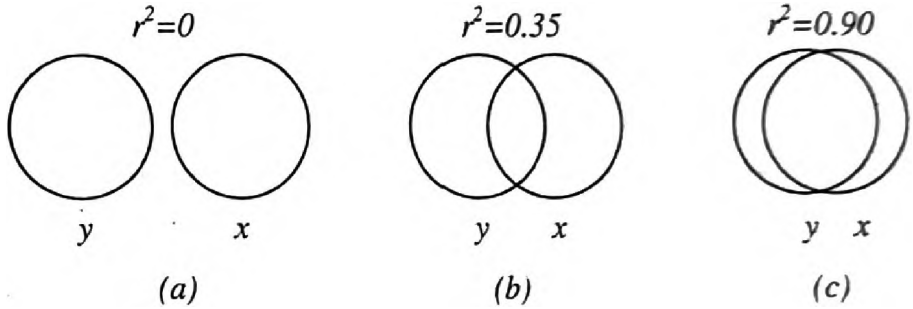
Korelasyon Katsayısı (r) ile Belirtme Katsayısı (R^2) Arasındaki İlişki

İki değişken arasında doğrusal ilişki olması durumunda, korelasyon katsayısının karesi belirtme katsayısına eşittir.

$$R^2 = r^2 \qquad (7.39)$$

İki Değişken Arasındaki İlişkinin Venn Diyagramı İle Gösterimi

İki değişken arasındaki ilişkiyi Venn diyagramı ile göstermek bazen yararlı olabilmektedir. Venn diyagramında her değişken bir *daire* ile gösterilir. Elimizde y ve x gibi iki değişken olsun. Eğer iki değişken arasında ilişki yok ise her bir değişkeni tanımlayan daireler çakışık değildir (Grafik 7.4.a)



Grafik 7.4. İki Değişkene İlişkin 3 Farklı Venn Diyagramı

Eğer değişkenler arasında bir ilişki var ise daireler çakışıktır (Grafik 7.4.*b* ve *c*). Bu çakışma alanı ***ortak varyans*** olarak adlandırılır ve *belirtme katsayısı olan* r^2'ye eşittir. Diğer bir deyişle, çakışma alanı bağımlı değişkendeki varyansın bağımsız değişken tarafından açıklanabilen bölümünü tanımlar. Eğer iki değişken arasındaki ilişki katsayısı r=0.80 ise, bu değişkenlerin ortak varyansının % 64 (0.8^2=0.64) olduğu söylenir. Buna göre, y değişkenindeki değişimin % 64'ü x değişkenindeki varyans tarafından açıklanmaktadır. Eğer daireler üst üste çakışık ise r=1 ve dolayısıyla r^2=1 olacaktır. Birden çok bağımsız değişkene ilişkin olarak çizilen Venn diyagramları üzerinde ileride durulacaktır.

Regresyon Doğrusunun Çizimi

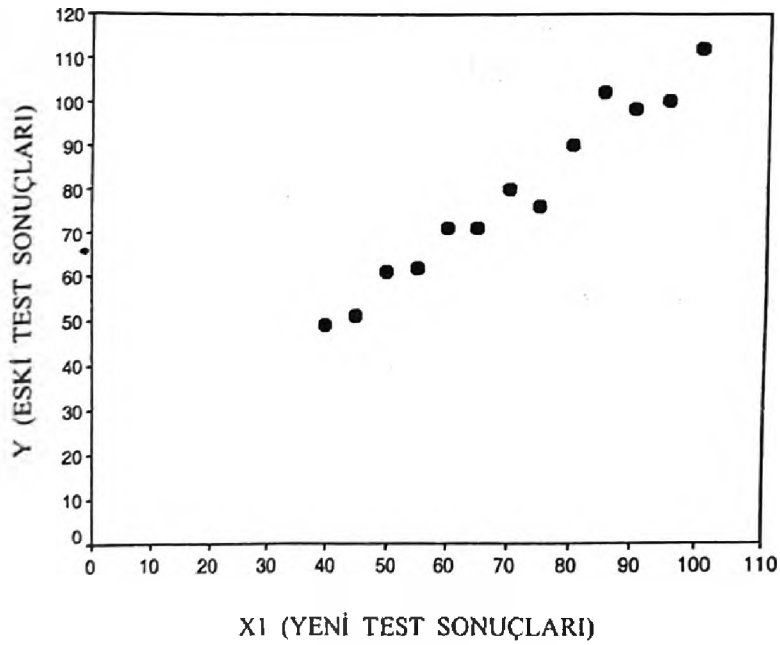
Regresyon doğrusu, herhangi iki $(x_{i1}, \hat{y}_i)$ noktasının (bir doğru ile) birleştirilmesi ile elde edilebilir. Şu ana kadar verilen bilgilere ilişkin bir örnek uygulama Örnek 7.1'de verilmiştir.

Örnek 7.1. Bir araştırma grubu, akıl hastalarına sürekli olarak uygulanan, ancak uygulaması zor, pahalı ve zaman alıcı olan standart bir test yerine yeni bir test geliştiriyor ve elde edilen yeni test sonuçlarından, çok yaygın olarak kullanılan standart test sonuçlarını bir denklem yardımıyla elde etmek istiyor. Bu amaçla, bir hasta grubuna ilişkin test ölçümleri her iki test ile elde edildikten sonra, yeni test (x_1) sonuçları 40, 45, 50, 55, 60, ...,100 olan hastalar arasından birer hasta rasgele seçiliyor. İlgili sonuçlar Tablo 7.3'de verilmiştir. Daha önce belirtildiği gibi, iki değişken arasındaki ilişkiyi

incelemek için ilk adım, değişkenlere ilişkin saçılım (nokta) grafiğinin çizilmesidir (Grafik 7.5).

Tablo 7.3. Eski ve Yeni Test Sonuçları Verisi

Yeni Test Sonuçları (x_1)	*Stan. Test Sonuçları* (y)
40	49
45	51
50	61
55	62
60	71
65	71
70	80
75	76
80	90
85	102
90	98
95	100
100	112
$\sum_{i=1}^{13} x_i = 910$	$\sum_{i=1}^{13} y_i = 1023$
$\sum_{i=1}^{13} x_{i1}^2 = 68250$	$\sum_{i=1}^{13} y_i^2 = 85477$
$\bar{x}_1 = 70$	$\bar{y} = 78.6923$
$\sum_{i=1}^{13} x_{i1} y_i = 76280$	



Grafik 7.5. Test Sonuçları Verisi'nin (Tablo 7.3) Saçılım Grafiği

Grafik 7.5'de görüldüğü gibi bu iki değişken arasında doğrusal bir ilişki vardır. Bu nedenle de değişkenler arasında bir doğrusal regresyon modeli oluşturulabileceği

düşünülür. Grafikte başlangıç noktası olarak sıfır alınmıştır. Ancak, bu her zaman söz konusu olmayabilir. Bu durumlarda eksenlere kesme konulmasında yarar vardır.

Regresyon Katsayılarının Bulunması

Eşitlik (7.5) yardımıyla,

$$KT_X = 68250 - (910)^2 / 13 = 4550$$

$$ÇT_{XY} = 76280 - (910)\ (1023)/13 = 4670$$

olarak elde edilir ve regresyon katsayısı;

$$b_1 = 4670/4550 = 1.026374$$

olarak bulunur. (7.6) yardımıyla,

$$b_0 = 78.6923 - (1.026374)\ (70) = 6.8461$$

olarak elde edilir ve doğrusal regresyon kestirim denklemi;

$$\hat{y}_i = 6.8461 + 1.026374 x_{i1}$$

olarak yazılır. Buna göre x_1 bağımsız değişkeninde bir birimlik bir artış olduğunda y bağımlı değişkeninde 1.026374 birimlik bir artış olmaktadır. Ya da x_1 bağımsız değişkeninde 10 birimlik bir artış olduğunda y bağımlı değişkeninde 10.26374 birimlik artış olmaktadır. Örneğin, x_1 bağımsız değişkeninde $x_{11} = 70$ puandan $x_{21} = 71$ puana bir birimlik bir artış olduğunda;

$x_{11} = 70$ için $\quad \hat{y}_1 = 78.69228$

$x_{21} = 71$ için $\quad \hat{y}_2 = 79.718654$

olarak bulunur. Bu iki kestirim değeri arasındaki fark b_1 kadar (79.718654–78.69228 = 1.026374) olup her "bir" birimlik artış ya da azalış için aynıdır. b_0 katsayısı ise x değişkeninin 0'ı içermesi durumunda yorumsal içerik kazanıyordu. Bu örnekte x, 40 ile 100 arasında değiştiği için b_0 katsayısının uygulama yönünden bir anlamı yoktur. Ancak, bu durum onun kullanımını geçersiz kılmaz.

Regresyon denklemi elde edildikten sonra, bu denklemin veriye ne kadar uyduğu, diğer bir deyişle modelin yeterliği, sabit varyans, hataların ilişkisiz olması, ..vb varsayımların sağlanıp sağlanmadığı ve modelin kestirim açısından uygun olup olmadığı yapılacak ek incelemelerle belirlenmelidir. Bu incelemelerde artıklar önemli rol oynar. Diğer bir deyişle, bu tür incelemelerin önemli bir bölümü artıkların incelenmesi yardımıyla yapılır. Örneğimiz için model yardımıyla elde edilen kestirim değerleri ($\hat{y}_i$) ve artıklar (e_i) ile diğer bazı hesaplamalar Tablo 7.6'da verilmiştir. Artıklar yardımıyla modelin yeterliği ve geçerliğinin incelenmesi konuları üzerinde ileride durulacaktır.

Gerek b_0 ve b_1 katsayılarının anlamlılığının test edilmesi, gerekse de güven aralıklarının bulunması için gerekli olan kareler toplamları, kareler ortalamaları ve standart hatalar aşağıda verilmiştir.

(7.21)'den $KT_Y = 85477 - (1023)^2 / 13 = 4974.769$

(7.22)'den $RKT = (4670)^2 / 4550 = 4793.165$

(7.23)'den $AKT = 4974.769 - 4793.165 = 181.604$

(7.25)'in payından $RKO = 4793.165 / 1 = 4793.165$

(7.25)'in paydasından $AKO = s^2 = 181.604 / (13 - 2) = 16.509$

olarak bulunur. Artık varyansı olan s^2'nin karekökünün alınması ile regresyon denkleminin standart hatası, s:

$$s = \sqrt{AKO} = \sqrt{16.509} = 4.0631$$

olarak elde edilir.

(7.12)'den $S(b_1) = 4.0631 / \sqrt{4550} = 0.060235$

(7.13)'den $S(b_0) = 4.0631 \sqrt{\frac{1}{13} + \frac{(70)^2}{4550}} = 4.365$

olarak bulunur. Bulunanlar yardımıyla önemlilik testleri kolayca yapılabilir.

β_1 Katsayısının Önemlilik Testi

$H_0 : \beta_1 = 0$ ve $H_1 : \beta_1 \neq 0$ hipotezleri için (7.16) yardımıyla ;

$$t = 1.026374 / 0.060235 = 17.0395$$

olarak bulunur. $t_{Hesap} = 17.0395 > t_{Tablo(11;\alpha=0.05)} = 2.20$ olduğu için regresyon katsayısının sıfırdan farklı olduğu ve de regresyon doğrusunun çizilebileceği söylenir.

β_1 Katsayısının Varyans Analizi ile Test Edilmesi

$H_0 : \beta_1 = 0$ hipotezi varyans analizi ile de sorgulanabiliyordu. Bu amaçla, (7.25)'den $F = 4793.165 / 16.509 = 290.3$ olarak bulunur. $F_{Hesap} = 290.3 > F_{Tablo(1,11;\alpha=0.05)} = 4.84$ olduğu için regresyon doğrusuna uyumun anlamlı olduğu söylenir ($p<0.05$). F istatistiği çoğunlukla varyans analizi tablosu ile birlikte verildiği için, Tablo 7.2'de verilen varyans analizi tablosunu örneğimiz için oluşturursak Tablo 7.4 elde edilir.

Tablo 7.4. Test Sonuçları Verisi İçin Varyans Analizi Tablosu

DK	*KT*	*Sd*	*KO*	*F*	*P*
Toplam	4974.769	12			
Regresyon	4793.165	1	4793.165	290.3	0.000
Artık	181.604	11	16.509		

Ayrıca, regresyon katsayısına ilişkin istatistikler de bir tablo ile gösterilebilir. Tablo 7.5 bu amaçla düzenlenmiştir. Gerek Tablo 7.4 gerek Tablo 7.5'de verilen *p* değerleri, ilgili test istatistiklerine (burada *F* ve *t*) karşılık gelen anlamlılık düzeylerini doğrudan vermektedir. *p*'nin seçilen α yanılma düzeyinden, örneğin α=0.05'den küçük olması ilgili test istatistiği değerinin anlamlı olduğunu gösterir. Sonuçların sunumu aşamasında (t=17.0395, p<0.05) şeklindeki bir gösterim yerine (t=17.0395, p=0.0000) şeklindeki bir gösterim daha çok kullanılmakta olup, *p* olasılıkları bütün istatistik paket programlarda verilmektedir.

Tablo 7.5. Test Sonuçları Verisi İçin Regresyon Katsayıları, Katsayılara İlişkin Standart Hatalar, t İstatistikleri ve p Değerleri

Değişken	*Katsayı*	*S.Hata*	*t*	*p*
x_1	1.026374	0.060235	17.0395	0.000
Sabit	6.8461	4.365	1.568	0.145

Tablo 7.5'de regresyon katsayısına ilişkin *t* istatistiği 17.039 olarak bulunmuştu. $t^2 = F$ eşitliği yardımıyla, 17.0396^2=290.3 olarak bulunur. Bu ise Tablo 7.4'deki *F* istatistiğidir.

KT_Y, *RKT* ve *AKT*'na ilişkin hesaplamalar Eşitlik (7.19) ile verilen kapalı formüller yardımı ile de hesaplansa aynı sonuçlar elde edilecekti. Tablo 7.6 bu amaçla oluşturulmuştur. Tablodaki $\hat{y}_i$ değerleri x_{i1} değerlerinin regresyon denkleminde yerine konulması ile bulunmuştur.

Tablo 7.6. Çeşitli Kareler Toplamlarının Kapalı Formüllerle Hesaplanması

				KT_Y		RKT		AKT
x_{1i}	y_i	$\hat{y}_i$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(\hat{y}_i - \bar{y})$	$(\hat{y}_i - \bar{y})^2$	$y_i - \hat{y}_i = e_i$	$(y_i - \hat{y}_i)^2 = e_i^2$
40	49	47.9011	-29.6923	881.633	-30.791	948.098	1.099	1.208
45	51	53.0329	-27.6923	766.863	-25.659	658.401	-2.033	4.133
50	61	58.1648	-17.6923	313.017	-20.527	421.377	2.835	8.038
55	62	63.2967	-16.6923	278.633	-15.396	237.024	-1.297	1.681
60	71	68.4285	-7.6923	59.171	-10.264	105.344	2.571	6.612
65	71	73.5604	-7.6923	59.171	-5.132	26.336	-2.560	6.556
70	80	78.6923	1.3077	1.710	.000	.000	1.308	1.710
75	76	83.8242	-2.6923	7.248	5.132	26.336	-7.824	61.218
80	90	88.9560	11.3077	127.864	10.264	105.344	1.044	1.090
85	102	94.0879	23.3077	543.249	15.396	237.025	7.912	62.601
90	98	99.2198	19.3077	372.787	20.527	421.377	-1.220	1.488
95	100	104.3516	21.3077	454.018	25.659	658.402	-4.352	18.937
100	112	109.4835	33.3077	1109.403	30.791	948.099	2..516	6.333
$\bar{x}$ =70	$\bar{y}$ =78.6923			KT_Y=4974.769		RKT=4793.165		AKT=181.604

β_0 ve β_1 İçin Güven Aralıkları

$\hat{y}_i = 6.8461 + 1.026374x_{i1}$ denklemi örneklem sonucunda elde edildiğinden 6.8461 ve 1.026374 katsayıları β_0 ve β_1 gerçek değerlerinin birer kestirimidir. Güven aralıkları yardımıyla bilinmeyen evren katsayılarının % 95 güvenirlikle içinde bulunduğu olası sınırlar; $S(b_0) = 4.365$, $S(b_1) = 0.060235$, $t_{Tablo(11,\alpha=0.05)} = 2.20$ değerinin Eşitlik (7.14) ve (7.15)'de yerine konması ile;

$$6.8461 - 2.20 \times 4.365 \le \beta_0 \le 6.8461 + 2.20 \times 4.365$$

$$-2.76 \le \beta_0 \le 16.45$$

$$1.026374 - 2.20 \times 0.060235 \le \beta_1 \le 1.026374 + 2.20 \times 0.060235$$

$$0.894 \le \beta_1 \le 1.159$$

olarak bulunur. Buna göre, incelenen örneklemin çekildiği evrenin regresyon katsayısı 0.95 (%100(1–0.05)= % 95) güvenirlikle 0.894 ile 1.159 arasında bir değerdir. Bu sınırlar dışında olması olasılığı ise 0.05'tir.

Korelasyon Katsayısı (r)

Eşitlik (7.32) yardımıyla,

$$r = \frac{4670}{\sqrt{(4550) \times (4974.769)}} = 0.982$$

olarak bulunur ve incelenen iki değişken arasında pozitif güçlü bir ilişki olduğu söylenebilir. Bulduğumuz korelasyon katsayısı 1'e yakın olmakla birlikte, anlamlılık testinin yapılmasında yarar vardır. Eşitlik (7.33) ile korelasyon katsayısı için anlamlılık testi yapılırsa t=17.039 olarak elde edilir. r'nin anlamlılığı için, hesapla bulunan t değeri n-2 serbestlik dereceli t tablo istatistiği ile karşılaştırılabileceği gibi, bilgisayar çıktılarında verilen p değeri ile daha çabuk yoruma gidilir. Örneğimiz için (t=17.039, p=0.000) bulunur. Buna göre, incelenen iki değişken arasındaki r=0.982'lik ilişkinin anlamlı (sıfırdan farklı) olduğu söylenir.

Bulunan korelasyon katsayısının $\rho_0 \neq 0$ olan bir evrenden, örneğin $\rho_0 = 0.90$ olan bir evrenden çekilip çekilmediğini test etmek için hipotezlerimizi $H_0 : \rho = 0.90$ ve $H_1 : \rho \neq 0.90$ olarak yazarsak, Eşitlik 7.34 ve 7.35 yardımıyla,

$$z_r = \frac{1}{2} \ln \frac{1+0.982}{1-0.982} = 2.3507 \text{ ve } z_{\rho_0} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+0.90}{1-0.90} = 1.4722$$

olarak elde edilir. α=0.05 alınırsa, Eşitlik (7.36) yardımıyla test istatistiği,

$$z = (2.3507 - 1.4722)(\sqrt{13-3}) = 2.778$$

olarak bulunur. α=0.05 alındığı için α=0.05/2=0.025 değeri 0.5'den çıkartılarak (0.5–0.025=0.475) olasılığı elde edilir. Ek Tablo A'daki z tablosunun içinden 0.4750 bulunarak buna ilişkin z değeri 1.96 olarak belirlenir. $z_H = 2.778 > z_T = 1.96$ olduğu için örneklem korelasyon katsayısının $\rho = 0.90$ olan bir evrenden seçilmemiş olduğu

söylenebilir. Dolayısıyla, örneklem ilişki katsayısı ile $\rho = 0.90$ arasındaki farklılık istatistiksel olarak anlamlıdır. Güven aralıklarını bulmak istersek, Eşitlik 7.37 yardımıyla ρ için alt sınır (as) ve üst sınır (üs) sırasıyla,

$$\tanh as = 2.3507 - \frac{1.96}{\sqrt{13-3}} = 1.7309 \qquad \text{ve} \qquad as = \frac{e^{1.7309} - e^{-1.7309}}{e^{1.7309} + e^{-1.7309}} = 0.939$$

$$\tanh üs = 2.3507 + \frac{1.96}{\sqrt{13-3}} = 2.9705 \qquad \text{ve} \qquad üs = \frac{e^{2.9705} - e^{-2.9705}}{e^{2.9705} + e^{-2.9705}} = 0.995$$

olarak elde edilir ve $0.939 \le \rho \le 0.995$ yazılır.

Belirtme Katsayısı

Eşitlik (7.38) yardımıyla belirtme katsayısı,

$$R^2 = 4793.165 / 4974.769 = 0.963$$

olarak bulunur. Buna göre yeni yöntem, standart yöntemi % 96 oranında açıklayabilmektedir. Geriye kalan % 4'lük bölüm (1–0.96=0.04) ise, modele almayı düşünmediğimiz diğer değişken(ler) tarafından açıklanır.

Regresyon Denkleminin Kullanımı

$\hat{y}_i$=6.8461+1.026374 x_{i1} regresyon denklemini kullanarak kestirimde bulunabiliyor ve kestirim değerlerinin güven sınırlarını bulabiliyorduk. Yeni test puanı $x_1^0 = 70$ puan olan bir hastanın standart test puanı;

$$\hat{y}_0 = 6.8461 + 1.026374(70) = 78.6923 \text{ puan}$$

olarak kestirilir. Bu kestirimin standart hatası Eşitlik (7.27)'den;

$$S(\hat{y}_0) = 4.0631\sqrt{1 + \frac{1}{13} + \frac{(70-70)^2}{4550}} = 4.2165 \text{ puan}$$

ve kestirimin % 95 güven sınırları (7.28)'den;

$$78.6923 \pm 2.20(4.2165) = 78.6923 \pm 9.2763 = 69.41 - 87.97 \text{ puan}$$

olarak elde edilir. Buna göre, yeni testten 70 puan alan bir hastanın standart test puanı 78.69 puan olarak kestirilir. Bu puan % 95 güvenirlikle evrende 69.41 ile 87.97 arasında değişebilir.

Yeni testten 70 puan alan birçok kişinin olduğunu düşünürsek, standart test puanlarının ortalaması için bir kestirim ile ilgilenmiş oluruz. Bu kestirimin standart hatası (7.30)'dan;

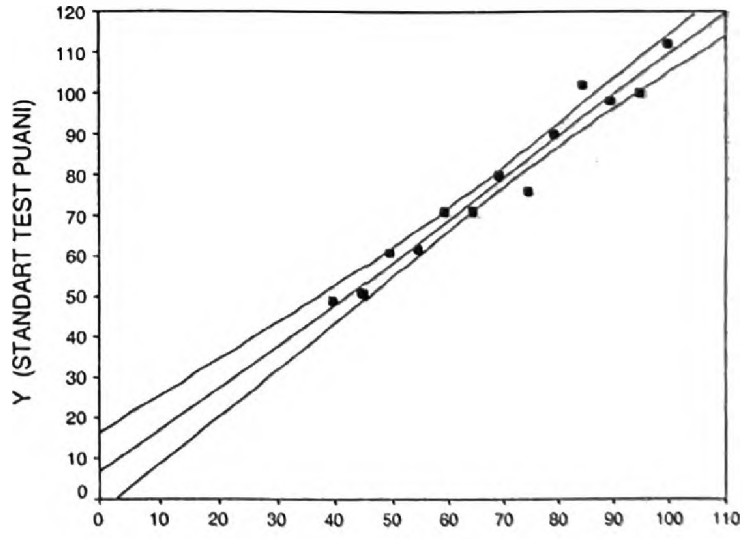
$$S(\hat{\mu}_0) = 4.0631\sqrt{\frac{1}{13} + \frac{(70-70)^2}{4550}} = 1.1269 \text{ puan}$$

ve bu kestirimin güven aralığı (7.31)'den;

$$78.6923 \pm 2.20(1.1269) = 76.21 - 81.17 \text{ puan}$$

olarak bulunur. Buna göre, yeni test puanı 70 olduğunda standart test puanlarının ortalaması % 95 güvenilirlikle 76.2 ile 81.2 puan arasında bir değer olacaktır. Regresyon denklemini kullanarak x_1'in alt ve üst sınırları dışında kestirim yaparken dikkatli olunmalıdır. Çünkü, x_1'in gözlenen değerleri arasında doğrusal bir eğilim gösteren bir ilişki, x_1'in sınırları dışında olan değerler için doğrusal olmayabilir. Örneğin, yaş ile boy uzunluğu arasında 0-16 yaşları arasında doğrusal bir ilişki olabilir. Bu yaşları dikkate alan bir çalışma sonucunda elde edilen regresyon denklemini kullanarak, örneğin 25 yaşındaki bir kişinin boy uzunluğunun ne olduğunu kestirirsek hatalı bir sonuç elde ederiz. Çünkü, 18-20 yaşından sonra boy uzunluğu pek değişmemekte, yaş ne kadar artarsa artsın boy uzunluğundaki değişim sabit kalmaktadır. Diğer bir deyişle, yaş aralığını örneğin 0-35 olarak aldığımızda yaş ile boy uzunluğu arasında doğrusal olmayan bir ilişki söz konusu olmaktadır. Bu gibi nedenlerle, değişkenler arasındaki ilişkinin yapısını kesin olarak bilmeden x_1 veri kümesine ilişkin alt ve üst sınırların çok üzerindeki değerler için kestirim yapmaktan kaçınılmalıdır.

Örneğimizdeki tüm x_{i1} değerleri için % 95 güven sınırları hesaplanmış ve regresyon doğrusu ile birlikte Tablo 7.7'de verilmiştir. Bilindiği gibi, regresyon doğrusu iki $(x_{i1}, \hat{y}_i)$ noktasının bir doğru ile birleştirilmesiyle çizilir. Buna göre, regresyon doğrusu örneğin $x_{i1} = 45$ için $\hat{y}_i = 53$ ve $x_{i1} = 85$ için $\hat{y}_i = 94$ noktalarının birleştirilmesi ile çizilebilir (Grafik 7.6). Grafik 7.6'da gözlem değerleri, regresyon doğrusu ve x'lerin ortalamalarına ilişkin %95 güven sınırları birlikte verilmiştir. Ayrıca, regresyon doğrusunun x'in tanımlı olduğu bölge ile sınırlandırılması daha doğrudur. Buna göre, Grafik 7.6'da $x_1 = 40$'ın altındaki çizimin grafikte gösterilmemesi daha doğru olacaktır. Gerek Tablo 7.7, gerekse Grafik 7.6 incelendiğinde, alt sınır ile üst sınır farkını veren "genişlik" değerlerinin $\bar{x}_1$ değerine (70.0) yakın gözlemler için daha az olduğu görülür. Gerek Tablo 7.7'deki aralıklar gerekse bu aralıkların grafik üzerinde gösterimi (Grafik 7.6), istatistik yazılımlar yardımıyla kolayca elde edilebilir.



Grafik 7.6. Regresyon Doğrusu ve % 95 Güven Sınırları

Tablo 7.7. Örnek 7.1'e İlişkin Kestirim Değerleri ve %95 Güven Sınırları

			x Değerleri İçin y'lerin Ortalamalarına İlişkin				x Değerleri İçin y'lerin Kestirimine İlişkin			
x_{i1}	y_i	$\hat{y}_i$	$S(\hat{\mu}_0)$	*Alt Sınır*	*Üst Sınır*	*Genişlik*	$S(\hat{y}_0)$	*Alt Sınır*	*Üst Sınır*	*Genişlik*
40	49	47.9011	2.1297	43.2	52.6	9.4	4.5874	37.8	58.0	20.2
45	51	53.0329	1.8809	48.9	57.2	8.3	4.4773	43.2	62.9	19.7
50	61	58.1648	1.6496	54.5	61.8	7.3	4.3852	48.5	67.8	19.3
55	62	63.2967	1.4444	60.1	66.5	6.4	4.3122	53.8	72.8	19.0
60	71	68.4285	1.2778	65.6	71.2	5.6	4.4649	59.1	77.8	18.7
65	71	73.5604	1.1665	71.0	76.1	5.1	4.2272	64.3	82.9	18.6
70	80	78.6923	1.1269	76.2	81.2	5.0	4.2165	69.4	88.0	18.6
75	76	83.8242	1.1665	81.3	86.4	5.1	4.2272	74.5	93.1	18.6
80	90	88.9560	1.2778	86.1	91.8	5.6	4.4649	79.6	98.3	18.7
85	102	94.0879	1.4444	90.9	97.3	6.4	4.3122	84.6	103.6	19.0
90	98	99.2198	1.6496	95.6	102.9	7.3	4.3852	89.6	108.9	19.3
95	100	104.3516	1.8809	100.2	108.5	8.3	4.4773	94.5	114.2	19.7
100	112	109.4835	2.1297	104.8	114.2	9.4	4.5874	99.4	119.6	20.2

Basit Doğrusal Regresyonun Matrisler Yardımı İle Çözümü

$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \varepsilon_i$ şeklinde verilen doğrusal regresyon modeli, matris yaklaşımı ile,

$$y_i = \begin{bmatrix} 1 & x_{i1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \varepsilon_i \qquad (7.40)$$

olarak gösterilir. Bu yaklaşım *n* gözlem için,

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} \\ 1 & x_{21} \\ . & . \\ 1 & x_{n1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ . \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

olarak verilir ve kısaca,

$$Y = X\beta + \varepsilon \qquad (7.41)$$

olarak yazılır. Burada,

Y : *n x 1 boyutlu bağımlı değişken vektörü*

X : *n x 2 boyutlu girdi matrisi (bu matrisin ilk sütunu 1'lerden, ikinci sütunu x'lerden oluşur)*

β : *2 x 1 boyutlu bilinmeyen katsayılar vektörü*

ε : *n x 1 boyutlu hata (yanılgı) vektörü*

olarak tanımlanır.

(7.41) eşitliği örneklem kestirim denklemi şeklinde;

$$\hat{Y} = X\hat{\beta} \qquad (7.42)$$

olarak verilir. Burada $\hat{\beta}$; b_0 ve b_1'den oluşan 2x1 boyutlu regresyon katsayıları vektörüdür ve bu katsayılar,

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} XY \qquad (7.43)$$

ile bulunur.

Regresyon Katsayılarının Varyansları ve Standart Hataları

β 'nın yansız kestiricileri olan b_0 ve b_1 regresyon katsayılarına ilişkin varyanslar, $\hat{\beta}$ 'ya ilişkin varyans-kovaryans matrisi, $V(\hat{\beta})$, yardımıyla hesaplanır. $V(\hat{\beta})$;

$$V(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} V(b_0) & Cov(b_0, b_1) \\ Cov(b_0, b_1) & V(b_1) \end{bmatrix} = AKO\ (X'X)^{-1} = s^2\ (X'X)^{-1} \qquad (7.44)$$

yardımıyla bulunur. Buna göre, $V(\hat{\beta})$ matrisinin köşegen elemanları b_0 ve b_1 regresyon katsayılarına ilişkin varyanslardır $(V(\hat{\beta}_j) = s^2\ (X'\ X)^{-1}_{jj})$. $V(\hat{\beta})$ matrisinin köşegen elemanlarının karekökü ise b_0 ve b_1 regresyon katsayılarına ilişkin standart hataları ($S(\hat{\beta}_j) = s\sqrt{(X'X)^{-1}_{jj}}$) verecektir.

Varyans Analizi Tablosunun Matrislerle Gösterimi

Varyans analizi tablosunun matris gösterimi Tablo 7.8'de verilmiştir.

Tablo 7.8. Varyans Analizi Tablosunun Matris Gösterimi

DK	*KT*	*Sd*	*KO*
Toplam	$Y'\,Y - n\bar{y}^2$	*n-1*	
R	$\hat{\beta}'\,X'Y - n\bar{y}^2$	*1*	*RKT/1*
Artık (A)	$Y'Y - \hat{\beta}'\,X'Y$	*n-2*	*AKT/(n-2)*

Kestirim Değerleri ve Standart Hataları

Kestirim değerleri, $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_{i1}$ yardımıyla matris şeklinde;

$$\hat{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 & x_{i1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} \qquad (7.45)$$

olarak yazılabilir. y değerlerinin ortalaması (μ_0) için yapılacak kestirime ($\hat{\mu}_0$) ilişkin standart hata,

$$S(\hat{\mu}_0) = s\sqrt{\begin{bmatrix} 1 & x_{i1} \end{bmatrix} [X'X]^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ x_{i1} \end{bmatrix}} \qquad (7.46)$$

ile verilirken, herhangi bir x_{i1} değerine karşılık gelen $\hat{y}_0$ kestirimine ilişkin standart hata,

$$S(\hat{y}_0) = s\sqrt{1 + \begin{bmatrix} 1 & x_{i1} \end{bmatrix} [X'X]^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ x_{i1} \end{bmatrix}} \qquad (7.47)$$

ile verilir.

Belirtme Katsayısı

Belirtme (açıklayıcılık) katsayısının matris gösterimi ise (7.48)'de verilmiştir.

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}'X'Y - n\bar{y}^2}{Y'Y - n\bar{y}^2} \qquad (7.48)$$

Örnek (7.1)'in matris işlemleri ile çözümü, ***bazı matris işlemlerinin kısaltılmış çözümleri*** ile birlikte aşağıda verilmiştir.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 40 \\ 1 & 45 \\ 1 & 50 \\ . & . \\ 1 & 100 \end{bmatrix} \qquad Y = \begin{bmatrix} 49 \\ 51 \\ 61 \\ . \\ 112 \end{bmatrix} \qquad Y'Y = \sum_{i=1}^{13} y_i^2 = 85477$$

$$X'X = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_{i1} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i1} & \sum_{i=1}^{n} x_{i1}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 910 \\ 910 & 68250 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{KT_X}\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_{i1}^2 / n & -\bar{x} \\ -\bar{x} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4550}\begin{bmatrix} 68250/13 & -70 \\ -70 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.153846154 & -0.0153846 \\ -0.0153846 & 0.00021978 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i1} y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1023 \\ 76280 \end{bmatrix}$$

yardımı ile regresyon denklemine ilişkin katsayılar,

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 1.153846154 & -0.0153846 \\ -0.0153846 & 0.00021978 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1023 \\ 76280 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.8461 \\ 1.026374 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur ve buradan $\hat{y}_i$=6.8461+1.026374 x_{i1} yazılır.

AKT (artık KT)=

$$85477 - [6.8461 \quad 1.026374]\begin{bmatrix}1023\\76280\end{bmatrix} = 85477 - 85295.369 = 181.6$$

$AKO = s = 181.6/11 = 16.509$

b_0 ve b_1 katsayılarına ilişkin varyans ve standart hatalar (7.44)'den,

$$V(\hat{\beta}) = 16.509\begin{bmatrix}1.153846154 & -0.0153846\\-0.0153846 & 0.00021978\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}19.0488 & -0.25398\\-0.25398 & 0.0036283\end{bmatrix}$$

ve

$$V(b_0) = 19.0488 \quad S(b_0) = \sqrt{V(b_0)} = \sqrt{19.0488} = 4.3645$$

$$V(b_1) = 0.0036283 \quad S(b_1) = \sqrt{V(b_1)} = \sqrt{0.0036283} = 0.060235$$

olarak bulunur.

$x_{i1} = 70$ olduğunda, y değerlerinin ortalaması için bir kestirimde bulunursak, (7.45) yardımıyla;

$$\hat{\mu}_0 = [1 \quad 70]\begin{bmatrix}6.8461\\1.026374\end{bmatrix} = 78.6923 \text{ puan}$$

olarak kestirilir ve bu kestirimin standart hatası (7.46)'dan;

$$S(\hat{\mu}_0) = 4.0631\sqrt{[1 \quad 70][X'X]^{-1}\begin{bmatrix}1\\70\end{bmatrix}} = 1.1269 \text{ puan}$$

olarak bulunur.

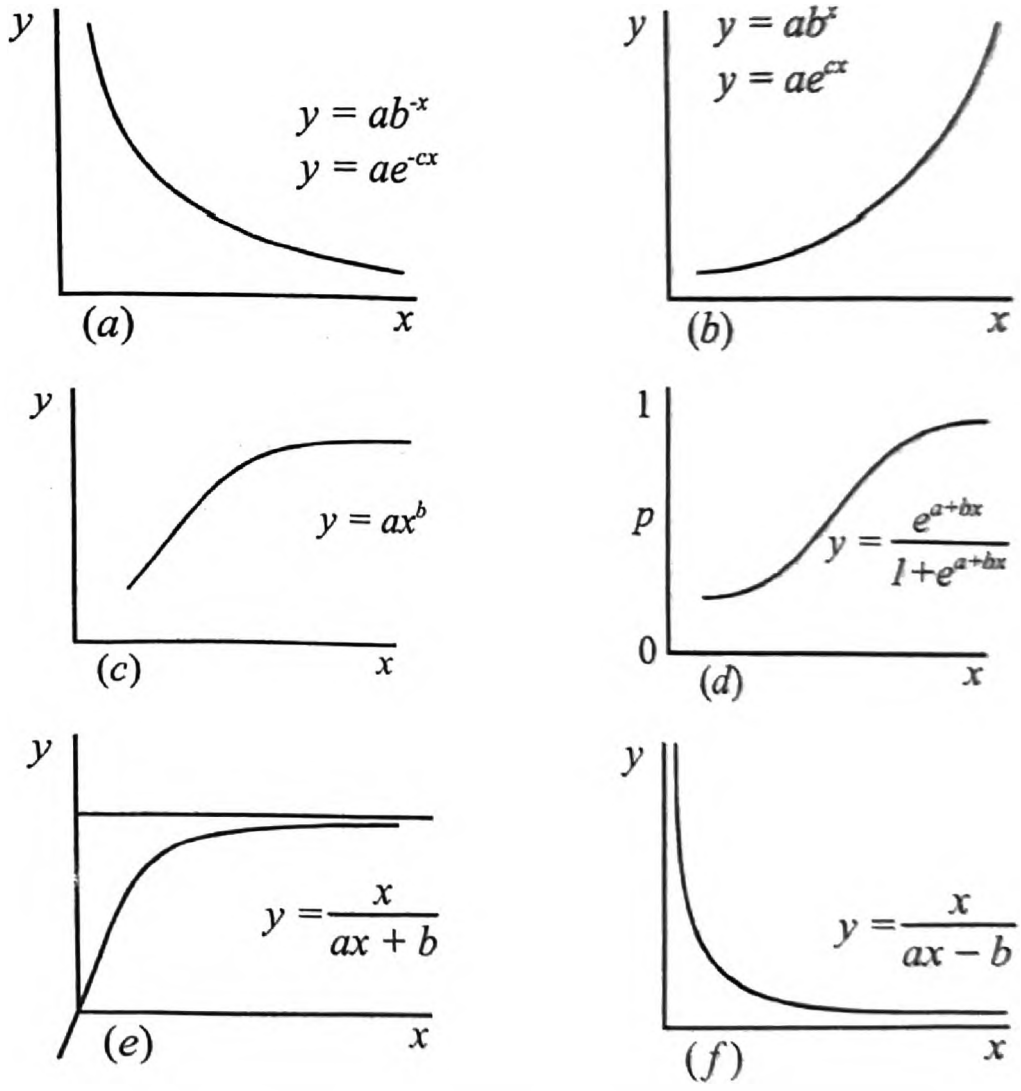
7.2.2. Doğrusal Olmayan Regresyon Modelleri ve Doğrusallığı Sağlayan Dönüşümler

İki değişken arasındaki ilişki her zaman doğrusal olmayabilir. Bu tür ilişkilere çoğunlukla "doğrusal olmayan ilişkiler" denir. ***Doğrusal modeller; her parametrenin üssünün "1" olduğu, parametrelerin modellerde üs olarak yer almadığı ve parametrelerin diğer parametrelerle çarpılıp bölünmediği modellerdir.*** Buna göre aşağıdaki 4 model;

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \varepsilon_i$$
$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i1}^2 + \varepsilon_i$$
$$y_i = \beta_0 + \beta_1 \log(x_{i1}) + \varepsilon_i$$
$$y_i = \beta_0 + \beta_1 \sqrt{x_{i1}} + \varepsilon_i$$

birer doğrusal modeldir. Çünkü, modele katkılar toplamsaldır. Ayrıca, parametrelerin üssü 1 olup modelde üs olarak yer almazlar. Diğer taraftan, $y_i = \beta_0 + e^{\beta_1 x_{i1}} + \varepsilon_i$ ya da $y_i = b_0 x_{i1}^{b_1}$ modelleri yukarıdaki açıklamalar nedeniyle birer doğrusal model değildir. Doğrusal olmayan ilişkilerin bir bölümü değişik dönüşümler yardımıyla doğrusal ilişki şekline dönüştürülebilirken bazıları da dönüştürülemez. Örneğin, grafiği normal dağılım eğrisine benzeyen $y_i = k_1/(k_1 - k_2)(e^{-k_2 x_{i1}} - e^{-k_1 x_{i1}})$ fonksiyonu doğrusallaştırılamaz.

Doğrusallaştırılamayan modellerde parametre kestirimleri için değişik yöntemler vardır. Doğrusallaştırılabilen ilişkilere ilişkin bazı örnekler, doğrusal olmayan denklemleri ile birlikte Grafik 7.7'de verilmiştir. Bu grafikte b_0 yerine a, b_1 yerine b ve x_1 yerine x kullanılmıştır.



Grafik 7.7. Doğrusallaştırılabilen Bazı Doğrusal Olmayan İlişkiler

Yukarıdaki grafik gösterimlerin yanındaki denklemler, bu ilişkilere uyan temel eğrisel denklemleri vermektedir. Ancak, bu denklemler tek ve kesin denklemler olmayıp, verilen eğrisel modeller ile bu modellere benzeyen diğer eğrisel modellere uyan ve eğrisel ilişkiyi daha iyi açıklayabilecek olan değişik denklem yapıları da söz konusudur.

Grafik 7.7'deki doğrusal olmayan ilişkiler, değişkenler üzerinde yapılacak dönüşümlerle doğrusallaştırılabilirler. Sık sık karşılaşılan ve Grafik 7.7'de verilen altı ilişkiyi doğrusallaştırabilmek için gerekli dönüşümler Tablo 7.9'da verilirken, konuya ilişkin 4 örnek Örnek 7.2, 7.3, 7.4 ve 7.5'de verilmiştir.

Tablo 7.9. Doğrusallaştırmayı Sağlayan Bazı Dönüşümler

Denklem	*Grafik*	*Dönüşüm*	*Doğrusal Denklem*
$y = ab^x$	*7.7-b*	*log(y)*	*log(y)=loga+xlogb*
$y = ab^{-x}$	*7.7-a*	*log(y)*	*log(y)=loga-xlogb*
$y = ax^b$	*7.7-c*	*log(y) ve log(x)*	*log(y)=loga+blog(x)*
$y = \frac{x}{ax+b}$	*7.7-e*	$\frac{1}{x}$ *ve* $\frac{1}{y}$	$\frac{1}{y} = a + b\frac{1}{x}$
$y = \frac{x}{ax-b}$	*7.7-f*	$\frac{1}{x}$ *ve* $\frac{1}{y}$	$\frac{1}{y} = a - b\frac{1}{x}$
$p = y = \frac{e^{a+bx}}{1+e^{a+bx}}$	*7.7-d*	$\ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$	$\ln\left(\frac{y}{1-y}\right) = a+bx$

Örnek 7.2. Hastanelerin gelişme düzeylerini gösteren hastane gelişmişlik indeksi (x) ile harcamalardaki birim başına maliyet (y), geliştirilen bir ölçek yardımıyla Tablo 7.10'da verilmiştir. Bu verilere ilişkin saçılım grafiği çizildiğinde Grafik 7.5'de (a) grafiğine benzediği görülecektir. Böylesi bir grafik ise y değerlerinin logaritması alınarak doğrusallaştırılabiliyor idi. Bu nedenle, Tablo 7.10'da $log(y)$ değerleri de verilmiştir ve x ile $log(y)$'nin saçılım grafiği alındığında ilişkinin doğrusal olduğu görülecektir.

Tablo 7.10. Gelişmişlik İndeksi-Maliyet Verisi

Gelişmişlik İndeksi (x)	*Birim Başına Maliyet* (y)	$log(y)$
6	2.812	0.449
7	1.882	0.275
8	1.130	0.053
9	0.738	-0.132
10	0.425	-0.372
11	0.261	-0.583
12	0.181	-0.742
13	0.125	-0.903
14	0.079	-1.102
15	0.052	-1.284
16	0.029	-1.538

x ile log(y) arasındaki logaritmik doğrusal regresyon denklemi; $log(y)=1.6203-0.1959x$ olarak bulunur. Logaritmik doğrusal denkleme ilişkin F istatistiği; (F=5355.6, p=0.0000) olarak bulunur. Logaritmik denklem yardımıyla örneğin x=11.5 için bir kestirimde bulunursak $log(y)$ = –0.63255 olarak bulunur. Bulunan bu değerin antilogaritması alınarak orijinal değer elde edilebilir ve birim başına maliyet $Antilog(log(y))$ = y = 0.233 olarak bulunur. İstenirse, logaritmik doğru denklemi yardımıyla $y = ab^{-x}$ ya da $y = ae^{-cx}$ şeklindeki üstel fonksiyon denklemine de geçilebilir ve birim başına maliyet doğrudan elde edilebilir. Bu amaçla, $log(y)=1.6203-0.1959x$ denkleminde her iki katsayının antilogaritması alınırsa, $Antilog(1.6203)$ = 41.7157 ve $Antilog((0.1959)=1.57$ olarak bulunur ve üstel denklem: $\hat{y}_{ii} = 41.7157\ (1.57)^{-x}$ olarak bulunur. İstenirse buradan, $1.57 = e^{0.451}$ yazılır ve Grafik 7.7-*a*'da verilen $y = ae^{-cx}$ modeli ile $\hat{y}_{ii} = 41.7157\ e^{-0.451x}$ şeklinde de elde edilebilir.

Örnek 7.3. Allison ve Cichetti 1976 yılında yaptıkları bir araştırmada, her bir memeliden birçok örnek alarak, 62 farklı memelinin çeşitli özelliklerine ilişkin ortalama sonuçlar elde etmiştir. Tablo 7.11'de 62 memeliye ait ortalama vücut ağırlığı (*VA*) ve beyin ağırlıkları (*BA*) verilmiştir. Amaç, vücut ağırlığı yardımı ile beyin ağırlığı arasında bir ilişki olup olmadığına bakmak ve eğer ilişki varsa vücut ağırlığı yardımı ile beyin ağırlığını kestirebilmektir.

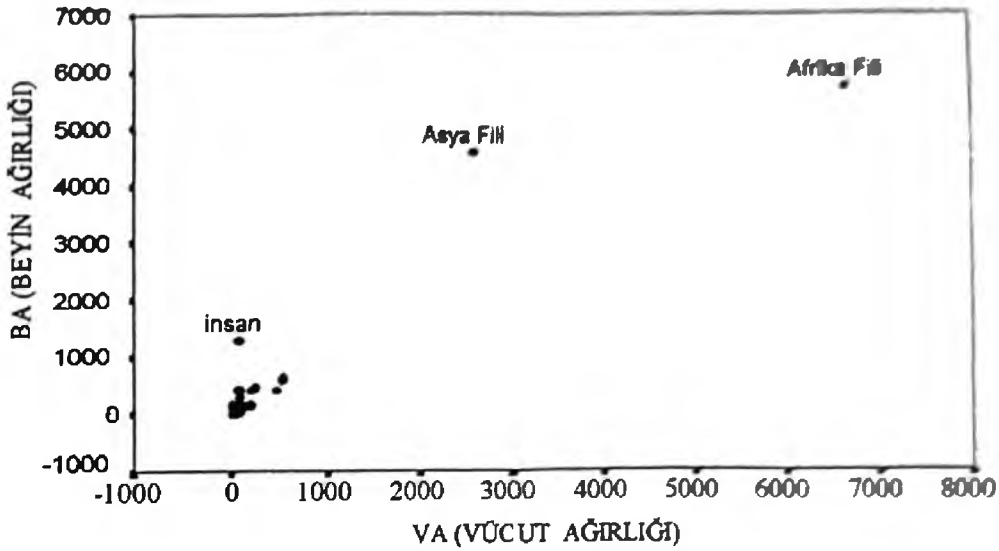
Tablo 7.11. 62 Memelinin Vücut ve Beyin Ağırlığı

Memeli	*VA (kg)*	*BA (gr)*	*log(VA)*	*log(BA)*	*Memeli Adı*
1	3.385	44.500	0.530	1.648	KUTUP TİLKİSİ
2	0.480	15.5	-0.319	1.190	OWL MAYMUNU
3	1.350	8.100	0.130	0.908	DAĞ KUNDUZU
4	465.000	423.000	2.667	2.626	
5	36.330	119.500	1.560	2.077	
6	27.660	115.000	1.442	2.061	
7	14.830	92.200	1.171	1.964	
8	1.040	5.500	0.017	0.740	GİNE DOMUZU
9	4.190	58.000	0.622	1.763	
10	0.425	6.400	-0.372	0.806	
11	0.101	4.000	-0.996	0.602	
12	0.920	5.700	-0.036	0.756	
13	1.000	6.600	0.000	0.820	
14	0.005	0.140	-2.301	-0.854	
15	0.060	1.000	-1.222	0.000	KÖSTEBEK
16	3.500	10.800	0.544	1.033	
17	2.000	12.300	0.301	1.090	
18	1.700	6.300	0.230	0.799	
19	2567.000	4603.000	3.409	3.663	ASYA FİLİ
20	0.023	0.300	-1.638	-0.523	
21	187.100	419.000	2.272	2.622	EŞEK
22	521.000	655.000	2.717	2.816	AT
23	0.785	3.500	-0.105	0.544	
24	10.000	115.000	1.000	2.061	

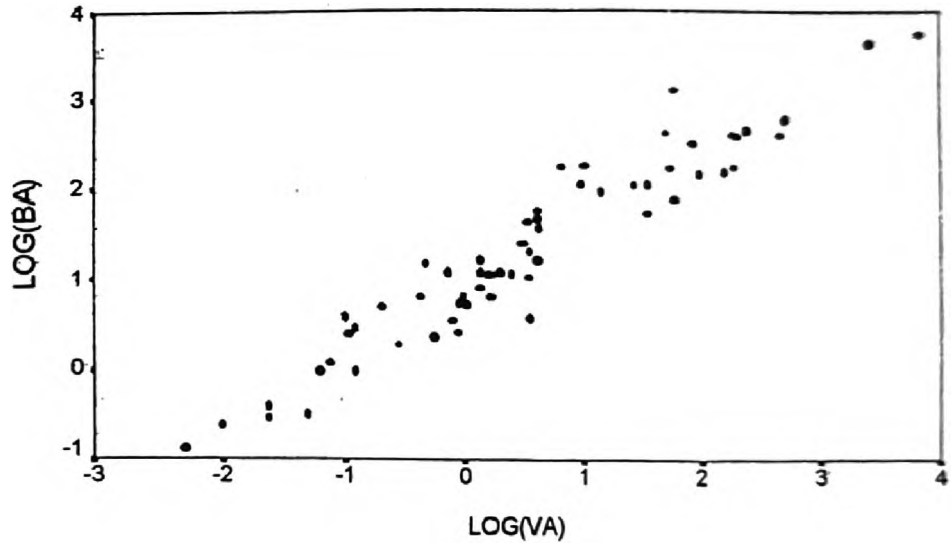
Tablo 7.11. 62 Memelinin Vücut ve Beyin Ağırlığı (devam)

Memeli	*VA (kg)*	*BA (gr)*	*log(VA)*	*log(BA)*	*Memeli Adı*
25	3.300	25.600	0.519	1.408	KEDİ
26	0.200	5.000	-0.699	0.699	
27	1.410	17.500	0.149	1.243	
28	529.000	680.000	2.723	2.833	
29	207.000	406.000	2.316	2.609	GORİL
30	85.000	325.000	1.929	2.512	
31	0.750	12.300	-0.125	1.090	
32	62.000	1320.000	1.792	3.121	İNSAN
33	6654.000	5712.000	3.823	3.757	AFRİKA FİLİ
34	3.500	3.900	0.544	0.591	
35	6.800	179.000	0.833	2.253	
36	35.000	56.000	1.544	1.748	
37	4.050	17.000	0.607	1.230	
38	0.120	1.000	-0.921	0.000	
39	0.023	0.400	-1.638	-0.398	FARE
40	0.010	0.250	-2.000	-0.602	
41	1.400	12.500	0.146	1.097	
42	250.000	490.000	2.398	2.690	
43	2.500	12.100	0.398	1.083	TAVŞAN
44	55.500	175.000	1.744	2.243	KOYUN
45	100.000	157.000	2.000	2.196	PANTER
46	52.160	440.000	1.717	2.643	
47	10.550	179.500	1.023	2.254	
48	0.550	2.400	-0.260	0.380	
49	60.000	81.000	1.778	1.908	DEV ARMODİLLO
50	3.600	21.000	0.556	1.322	
51	4.288	39.200	0.632	1.593	
52	0.280	1.900	-0.553	0.279	İRİ FARE
53	0.075	1.200	-1.125	0.079	
54	0.122	3.000	-0.914	0.477	
55	0.048	0.330	-1.319	-0.481	
56	192.000	180.000	2.283	2.255	DOMUZ
57	3.000	25.000	0.477	1.398	
58	160.000	169.000	2.204	2.228	BREZİLYA TAPİRİ
59	0.900	2.600	-0.046	0.415	
60	1.620	11.400	0.210	1.057	
61	0.104	2.500	-0.983	0.398	
62	4.235	50.400	0.627	1.702	KIZIL TİLKİ

Bu amaçla, verilere ilişkin saçılım grafiğine bakıldığında (Grafik 7.8), birçok noktanın sol alt köşede yoğunlaştığı, ancak, iki gözlem nedeniyle de olsa grafiğin Grafik 7.7-*c*'ye uyma eğiliminde olduğu görülür. Bu tür bir ilişki için önerilen denklemlerden biri $y = ax^b$ idi. Bu tür bir ilişkiyi doğrusal ilişki durumuna getirmek için her iki değişken değerlerinin logaritmalarının alınması gerekiyordu. Bu amaçla Tablo 7.11'de, orijinal değerlerin logaritmik dönüşüm (10 tabanına göre) ile elde edilen değerleri de verilmiştir. Logaritmik dönüşüm yapılmış değişkenlere ilişkin grafik ise Grafik 7.9'da verilmiştir.



Grafik 7.8. 62 Memelide Vücut Ağırlığı-Beyin Ağırlığı İlişkisi



Grafik 7.9. Logaritmik Dönüşüm Sonrası Saçılım Grafiği

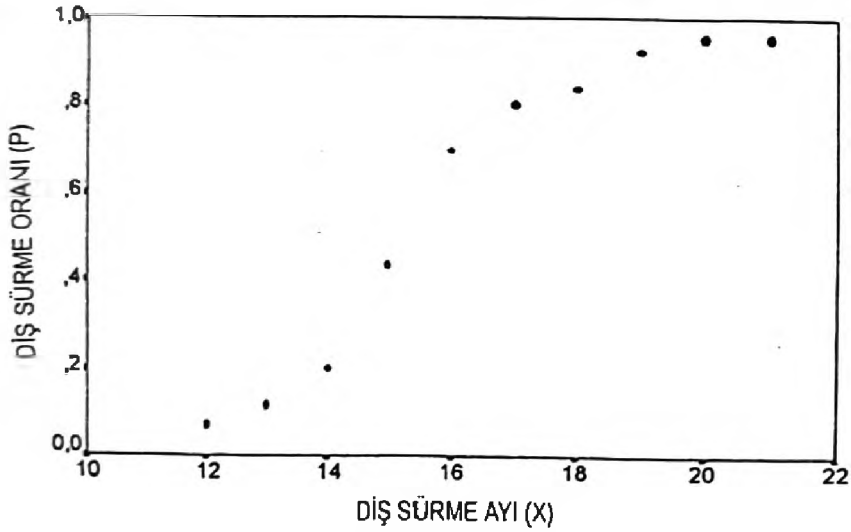
Logaritmik dönüşüm sonrasında, değişkenler arasında kuvvetli bir doğrusal ilişki olduğu görülmektedir (Grafik 7.9). Buradan doğrusal regresyon denklemi $log(BA)=0.927+0.752log(VA)$ olarak bulunur ($F=698.47$, $p=0.000$). İstenirse üstel denkleme dönüş yapılabilir. Her iki tarafın antilogaritmasını alırsak, $BA = anti\log(0.927)\ (VA)^{0.752}$ olur ve sonucu orijinal değişken cinsinden veren denklem; $BA = 8.45279\ (VA)^{0.752}$ olarak bulunur. Gerek logaritmik doğrusal denklem gerekse de üstel denklemle elde edilen kestirimler aynı sonucu verecektir.

Örnek 7.4. Bir araştırıcı, yaşları 4-36 ay arasında değişen bebeklerde, çeşitli dişler için sürme yaşı (x) ile her yaştaki sürme oranı (y ya da p) arasındaki ilişkiyi öğrenmek istemektedir. Tablo 7.12, erkek bebeklerdeki üst 1 nolu azı dişlerinin 12-21 aylar arasında her ay yüzde kaçının tamamlandığına ilişkin verileri içermektedir. Buradan, çizilecek nokta grafikleri yardımıyla, sürme yaşı - diş sürme oranı arasındaki ilişkinin *S*

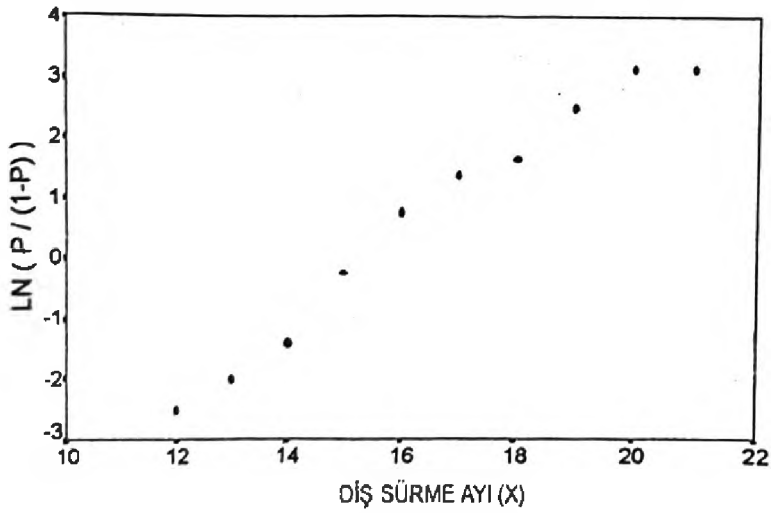
harfi şeklinde (Grafik 7.10), sürme yaşı ile $\ln(p/(1-p))$ arasındaki ilişkinin (Grafik 7.11) doğrusal olduğu görülür.

Tablo 7.12. Diş Sürme Yaşı (x) - Diş sürme Oranı (y) Verileri

Diş Sürme Yaşı (x)	*Toplam Çocuk Sayısı*	*Dişi Tamamen Süren Çocuk S.*	*Diş Sürme Oranı (p)*	$\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)$
12	26	2	0.077	-2.4838
13	25	3	0.120	-1.9924
14	25	5	0.200	-1.3863
15	25	11	0.440	-0.2412
16	26	19	0.731	0.9997
17	26	21	0.807	1.4306
18	25	21	0.840	1.6582
19	27	25	0.926	2.5268
20	25	24	0.960	3.1780
21	25	24	0.960	3.1780
22	25	24	0.960	3.1780



Grafik 7.10. Diş Sürme Ayı - Diş Sürme Oranı İlişkisi

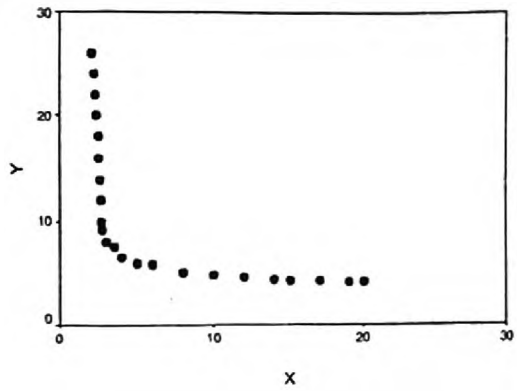


Grafik 7.11. Diş Sürme Ayı - ln (p/(1-p)) İlişkisi

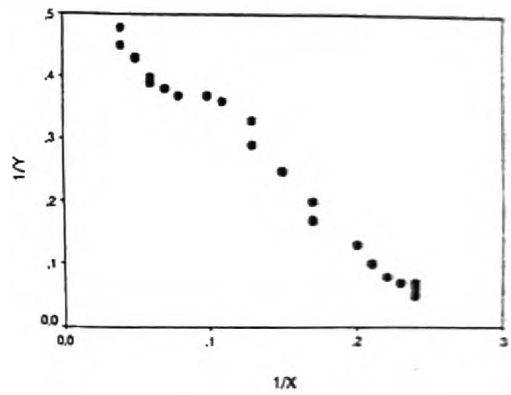
Örnek 7.5. Konuya ilişkin son örnek $1/x$ ve $1/y$ dönüşümü ile ilgilidir. Bu amaçla oluşturulan hipotetik veriler Tablo 7.13'de verilirken, orijinal ve dönüşmüş verilere ilişkin grafikler sırasıyla Grafik 7.12 ve 7.13'de verilmiştir.

Tablo 7.13. 1/x ve 1/y Dönüşümü

Gözlem	*x*	*y*	*1/x*	*1/y*	*Gözlem*	*x*	*y*	*1/x*	*1/y*
1	2.10	26.00	0.48	0.04	13	4.00	6.54	0.25	0.15
2	2.20	24.00	0.45	0.04	14	5.00	5.90	0.20	0.17
3	2.30	22.00	0.43	0.05	15	6.00	5.80	0.17	0.17
4	2.35	20.00	0.43	0.05	16	8.00	5.00	0.13	0.20
5	2.50	18.00	0.40	0.06	17	10.00	4.80	0.10	0.21
6	2.55	16.00	0.39	0.06	18	12.00	4.60	0.08	0.22
7	2.60	14.00	0.38	0.07	19	14.00	4.30	0.07	0.23
8	2.68	12.00	0.37	0.08	20	15.00	4.20	0.07	0.24
9	2.70	10.00	0.37	0.10	21	17.00	4.18	0.06	0.24
10	2.80	9.20	0.36	0.11	22	19.00	4.10	0.05	0.24
11	3.00	8.00	0.33	0.13	23	20.00	4.09	0.05	0.24
12	3.50	7.50	0.29	0.13					



Grafik 7.12. x ve y'nin Saçılım Grafiği



Grafik 7.13. 1/X ve 1/Y 'nin Saçılım Grafiği

Grafik 7.12'de görüldüğü gibi x ve y'nin saçılım grafiği Grafik 7.7-f'ye benzemektedir. $1/x$ ve $1/y$ dönüşümü uygulandıktan sonra, doğruya yakın bir grafik elde edilmektedir (Grafik 7.13). Dönüşmüş veriye ilişkin doğru denklemi;

$$\frac{1}{y} = 0.2662 - 0.4886\frac{1}{x}$$

olarak elde edilir. Denkleme ilişkin istatistikler Tablo 7.14'de verilmiştir.

Tablo 7.14. 1/y = 0.2662-0.4886(1/x) Denklemine İlişkin İstatistikler

Değişken	*Katsayılar*	*S. Hata*	*t*	*p*
1/x	-0.4886	0.0137	-35.661	0.000
Sabit	0.26622	0.004083	65.197	0.000
	F=1271.937	*p=0.000*	$R^2 = 0.98$	

İstenirse eğrisel ilişki denklemi elde edilebilir. Bu amaçla aşağıdaki adımlar yapılır;

$$\frac{1}{y} = 0.2662 - 0.4886\frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{0.2662x - 0.4886}{x}$$

ve eğrisel denklem;

$$y = \frac{x}{0.2662x - 0.4886}$$

olarak elde edilir.

Yukarıda, doğrusallaştırılabilen ilişkilere ilişkin örnekler üzerinde duruldu. Bu örneklerden anlaşılacağı üzere, bir ilişkiyi doğrusal duruma getirmek, örneğin $y = ab^x$ gibi çarpımsal bir modelden $log(y)=log(a)+xlog(b)$ gibi toplamsal bir modele geçmektir.

Bir Bağımlı Bir Bağımsız Değişken İçin Uygulama Verileri

1. 24 tek yumurta ikizine ilişkin sistolik kan basınçları aşağıda verilmiştir. Veriye ilişkin nokta grafiğini çiziniz ve korelasyon katsayısını hesaplayınız.

Gözlem	*1. İkiz*	*2. İkiz*	*Gözlem*	*1. ikiz*	*2. ikiz*
1	118	115	13	142	164
2	116	119	14	144	160
3	118	116	15	145	158
4	120	119	16	162	145
5	122	118	17	180	184
6	122	138	18	180	190
7	122	124	19	182	188
8	120	128	20	185	180
9	124	126	21	170	174
10	125	130	22	172	170
11	138	130	23	150	160
12	140	125	24	152	155

2. Bir bölgedeki trafik hacmi (bir saatteki ortalama araç sayısı) ile karbon monoksit yoğunluğu (*ppm*) arasında ilişki aranmıştır. Verilere ilişkin saçılım (nokta) grafiğini çiziniz. Korelasyon katsayısını, regresyon denklemini bulunuz ve gerekli diğer hesaplamaları yapınız.

Trafik Hacmi (x)	*Karbon Mon. (y)*
100	8.8
110	9.0
125	9.5
145	10.0
178	10.5
190	10.5
200	10.5
222	10.6
253	11.0
275	12.1
305	12.1
323	12.5
350	13.0
378	13.2
400	14.5

3. Doğumsal (congenital) kalp hastalığı olan 16 çocuğa ilişkin kalpten akciğerlere giden (pulmonary) kan akışı (*PBF*) ile kalpten akciğerlere giden kan hacmi (*PBV*) bulguları aşağıda verilmiştir. Regresyon denklemini bulunuz ve anlamlılığını test ediniz.

y *PBV (ml-sqM)*	*x* *PBF(L/min/sqM)*
168	4.31
280	3.40
391	6.20
420	17.30
303	12.30
429	13.99
350	8.73
422	8.90
224	5.87
291	5.00
233	3.51
370	4.24
531	19.41
516	16.61
211	7.21
439	11.60

4. Bir çalışmada, öğrencilerin davranış testinden aldıkları puan (x) ile okulu bitirme puanları (y) arasında ilişki aranıyor. Veriler aşağıda verilmiştir. Veriye ilişkin saçılım grafiğini çiziniz. Korelasyon katsayısını bulunuz ve anlamlılığını test ediniz.

no	*x*	*y*	*no*	*x*	*y*
1	625	3.7	11	320	2.7
2	485	3.0	12	370	2.8
3	440	2.7	13	480	3.0
4	650	3.8	14	725	3.8
5	480	2.8	15	300	2.0
6	520	3.0	16	490	2.8
7	490	2.8	17	420	2.9
8	500	2.2	18	475	2.6
9	680	3.2	19	425	2.6
10	530	3.2	20	320	3.1

5. Elit orta mesafe erkek yüzücülerin spor yaşı (*x-yıl*) ile oksijen kullanım kapasiteleri (*y-ml/dk/kg*) arasında ilişki arayan bir araştırıcı aşağıdaki bulguları elde ediyor. Regresyon çözümlemesine ilişkin gerekli hesaplamaları yapınız ve grafikleri çiziniz.

no	*y*	*x*	*no*	*y*	*x*	*no*	*y*	*x*
1	51	5.0	5	55	6.5	9	64	8.5
2	53	5.5	6	60	7.0	10	66	9.0
3	54	6.0	7	58	7.0	11	68	9.0
4	56	6.0	8	62	8.0	12	69	10.0

7.3. ÇOKLU DOĞRUSAL REGRESYON

Bu bölümün başında regresyon konusuna genel bir giriş yapılmış ve çoklu regresyon konusu için temel oluşturan basit regresyon modelleri üzerinde durulmuştur. Bu kesimde, çoklu regresyon konusu örneklerle açıklanmaya çalışılacaktır.

Daha önce de belirtildiği gibi çoklu doğrusal regresyonda, bağımlı değişkeni etkileyen birden çok bağımsız değişken söz konusudur. Çoklu doğrusal regresyonda araştırıcıların iki genel amacı vardır. Bu amaçlar aşağıda verilmiştir. Araştırıcının amacı, bu iki amaçtan her ikisine ya da herhangi birine ulaşmak olabilir.

1. Bağımlı değişkeni etkilediği belirlenen değişkenler yardımıyla bağımlı değişken değerini kestirmek.
2. Bağımlı değişkeni etkilediği düşünülen bağımsız değişkenlerden hangisi ya da hangilerinin bağımlı değişkeni daha çok etkilediğini bulmak ve aralarındaki karmaşık yapıyı tanımlamak.

Hava kirliliği ile ilgili olarak daha önce verdiğimiz örnekte, hava kirliliğinin bir göstergesi olan SO_2 miktarını bir gün önceden kestirebilmek amacı ile sadece "bir gün önceki rüzgar hızı" dikkate alınarak bu iki değişken arasında bir regresyon modeli oluşturulduğunda, bir gün önceki rüzgar hızının bir gün sonraki SO_2 miktarındaki değişimi açıklamakta yetersiz kaldığı görülürse, bağımlı değişkene etki ettiği düşünülen "bir gün önceki nem oranı, hava sıcaklığı, basınç, ..." gibi bağımsız değişkenler de modele eklenerek bir çoklu regresyon modeli oluşturulabilir. Bu örnekteki birinci amaç; bulunacak çoklu regresyon denklemi yardımıyla, bir gün önceki meteorolojik faktörleri kullanarak bir gün sonraki SO_2 miktarını kestirmektir. Böyle bir kestirimin, gerektiğinde ilgilileri bir gün önceden uyarmak (bir gün sonraki SO_2 miktarı tehlike sınırını aştığında) gibi bir yararı vardır. İkinci amaç ise bağımsız değişkenlerden hangisi ya da hangilerinin bağımlı değişkeni daha çok etkilediğini belirlemektir. Dolayısıyla bu örnek her iki amaç için de uygundur. Yukarıdaki örnekte, bir gün sonraki SO_2 miktarındaki değişim sadece bir gün önceki rüzgarın hızı ile açıklanmaya çalışılırsa;

SO_2 ***miktarındaki toplam değişim*** = *Rüzgar Hızı + Modele Alınmayan Diğer Değişkenler*

şeklinde ifade edilirken, birden çok bağımsız değişken olması durumunda;

SO_2 ***miktarındaki toplam değişim*** = *Rüzgar Hızı + Nem Oranı + Hava Sıcaklığı + ... + Modele Alınmayan Diğer Değişkenler*

şeklinde ifade edilir. Bilindiği gibi, modele alınan rüzgarın hızı, nem oranı, hava sıcaklığı gibi değişkenler SO_2 miktarındaki değişimin *bağımsız değişkenlerin oluşturduğu* ***model*** *tarafından* açıklanabilen bölümünü, modele alınmayan diğer değişkenler (etkenler) ise SO_2 miktarındaki değişimin açıklanamayan bölümünü oluşturacaktır (*Toplam Değişim = Açıklanabilen Değişim + Açıklanamayan Değişim*).

Çoklu regresyon çözümlemesinde, bağımlı değişken y, bağımsız değişkenler $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_p$ ile gösterilir. Verilere ilişkin genel gösterim Tablo 7.15'de verilmiştir.

Tablo 7.15. Çoklu Regresyon Modelinde Verilerin Gösterimi

Gözlem	y	x_1	x_2	x_3	...	x_j	...	x_p
1	y_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	...	x_{1j}	...	x_{1p}
2	y_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	...	x_{2j}	...	x_{2p}
3	y_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	...	x_{3j}	...	x_{3p}
.	.	.	.	.	...	.	...	.
i	.	.	.	.	...	x_{ij}	...	x_{ip}
.	.	.	.	.	...	.	...	.
n	y_n	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	...	x_{nj}	...	x_{np}

Çoklu doğrusal regresyonda y bağımlı değişkeni ile $x_1, x_2, ..., x_j, ..., x_p$ bağımsız değişkenleri arasındaki ilişki gözlemler cinsinden;

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + ... + \beta_j x_{ij} + ... + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i \qquad (7.49\text{–}a)$$

ile verilir. (7.49–a) denklemi sadece değişkenler dikkate alınarak,

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_j x_j + ... + \beta_p x_p + \varepsilon \qquad (7.49\text{–}b)$$

olarak yazılabilir. Burada, $\beta_0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_j, ..., \beta_p$ bilinmeyenlerine ***regresyon katsayıları*** denir. Herhangi bir β_j regresyon katsayısı, diğer değişkenler sabit tutulduğunda (diğer değişkenlerin etkisi ortadan kaldırıldığında) x_j değişkeninde meydana gelen bir birimlik değişmeye karşılık y değişkenindeki beklenen değişiklik miktarını verir. Diğer bir deyişle $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_j, ..., \beta_p$; bağımsız değişkenlerin y'nin kestirimine yaptıkları göreceli katkıya ilişkin ağırlıklardır. Bu nedenle, β_j ($j = 1, 2, ..., p$) parametreleri genellikle ***kısmi regresyon katsayıları*** olarak adlandırılır. β_0'a ise kesim noktası ya da sabit denir ve tüm x_j değişken değerleri sıfır olduğunda bağımlı değişkenin aldığı değeri gösterir. ε_i daha önce de belirtildiği gibi hata (yanılgı) terimidir. Buradan, regresyon kestirim denklemi (gözlemler cinsinden);

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2} + ...+ b_p x_{ip} \qquad (7.50)$$

ile verilir. ***Çoklu regresyon denklemi yardımıyla, bağımlı değişkenin belirlenmesinde "her bir bağımsız değişkenin göreceli önemi" belirlenmiş olur. Bu bağlamda, çoklu doğrusal regresyonu basit doğrusal regresyondan ayıran özellik; her bir bağımsız değişken ile bağımlı değişken arasındaki ilişkilerin eşanlı olarak belirlenmesidir.***

i. artık (e_i);

$$e_i = y_i - \hat{y}_i \qquad (7.51)$$

olarak yazılır. e_i'ler çoğunlukla modelin yeterliğini değerlendirmekte ve gerekli varsayımların araştırılmasında kullanılır.

Diğer taraftan bağımsız değişken sayısının iki ve ikiden daha fazla olduğu çoklu doğrusal olmayan modeller de vardır. Bu modellerden bir bölümü doğrusallaştırılamazken bir bölümü de doğrusallaştırılabilir. Örneğin, $y_i = \beta_0 x_{i1}^{\beta_1} x_{i2}^{\beta_2}$ gibi doğrusal olmayan bir model, her iki tarafın logaritmasının alınmasıyla; $\log(y_i) = \log \beta_0 + \beta_1 \log(x_{i1}) + \beta_2 \log(x_{i2})$ gibi çoklu doğrusal regresyon modeline dönüştürülebilir. Böyle bir modele, doğrusal logaritmik model de denir. Benzer şekilde, $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \varepsilon$ gibi üçüncü dereceden polinomiyal bir model, $x_1 = x$, $x_2 = x^2$ ve $x_3 = x^3$ olmak üzere $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \varepsilon$ olarak yazılabilir. Bu ise üç bağımsız değişkenli çoklu doğrusal bir modeldir. Etkileşim etkisinin içerildiği modeller de çoklu regresyon modelleriyle çözümlenebilir. Örneğin, $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \varepsilon$ modelinde $x_1 x_2 = x_3$ ve $\beta_{12} = \beta_3$ yazılırsa, çoklu doğrusal regresyon modeli $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \varepsilon$ olur.

Çoklu Doğrusal Regresyona İlişkin Varsayımlar

Basit doğrusal regresyonda olduğu gibi, çoklu doğrusal regresyonda da varsayımlar vardır. Bu varsayımlar aşağıda özetlenmiştir.

1. x_i değişkenlerine ilişkin değerler ***sabittir*** (x_1 değişkenleri raslantı değişkeni değildir). Bu varsayım çoklu regresyon modelini çoklu korelasyon modelinden ayırır (bak. *Çoklu Korelasyon Katsayısı*). Regresyon modeli altında korelasyon analizinin uygulanması anlamlı değildir. Korelasyon modeli altında ise regresyon yöntemleri uygulanabilir. Ancak çoklu regresyon analizi x değişkeninin rasgele değişken olduğu durumlarda da uygulanabilir.
2. Her bir x_i değerleri kümesi için y değerinin bir alt kümesi vardır. Örneğin Tablo 7.17'deki hastane verisini dikkate alırsak x_1=1 ve x_2=1 için birçok y değerlerinden oluşan bir y değerleri alt kümesi , x_1=2 ve x_2=1 için birçok y değerinden oluşan bir y değerleri alt kümesi, ... olduğu düşünülür. Güven aralıklarını bulmak ve bilinen hipotezleri test etmek için y alt kümelerinin ***normal dağılım*** gösterdiğinin bilinmesi ya da varsayılması gerekir.
3. y alt kümelerinin ***varyansları eşittir*** (homojendir).
4. y değerleri bağımsızdır. Yani, x değerlerinin seçilen bir kümesi için elde edilen y değerleri, x değerlerinin seçilen diğer bir kümesi için elde edilen y değerlerinden bağımsızdır.

Yukarıdaki varsayımlar ε_i'ler yardımıyla da belirtilebilir. ε_i'ler bir raslantı değişkeni olup sıfır ortalama ve y alt kümelerinin ortak varyansı olan σ^2 ile ***normal ve***

birbirinden bağımsız dağılırlar. Bu varsayım, özellikle regresyon katsayıları için hipotezlerin test edilmesi ve güven aralıklarının oluşturulabilmesi için gereklidir. Daha önce de belirtildiği gibi, uygulamada bu varsayımlar e_i artık dağılımları yardımıyla incelenir. Ayrıca, ***bağımsız değişkenler arasında yüksek derecede ilişki olmaması*** istenir. Bazı durumlarda ise, bağımsız değişkenler arasındaki ilişki çok belirgindir. Eğer bir bağımsız değişken diğer bağımsız değişken ya da değişkenlerin bir doğrusal fonksiyonu olarak yazılabiliyorsa, değişkenler arasında ***doğrusal bağımlılık*** söz konusu olacak ve regresyon katsayıları bulunamayacaktır.

Çoklu Doğrusal Regresyon Denkleminin Matrislerle Elde Edilmesi

(7.49) denkleminin matris gösterimi;

$$Y = X\beta + \varepsilon \qquad (7.52)$$

ile verilir. Burada,

$Y : n \times 1$ *boyutlu bağımlı değişken vektörü*

$X : n \times (p + 1)$ *boyutlu girdi matrisi olup bu matrisin ilk sütunu 1'lerden, diğer sütunları değişken değerlerinden oluşur.*

$\beta : (p+1) \times 1$ *boyutlu katsayılar vektörü*

$\varepsilon : n \times 1$ *boyutlu hata (yanılgı) vektörü*

olmak üzere (7.52) eşitliği n gözlem için aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ . & . & . & \dots & . \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ . \\ \beta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ . \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \qquad (7.53)$$

(7.50) ile verilen örneklem kestirim denklemi ise;

$$\hat{Y} = X\hat{\beta} \qquad (7.54)$$

olarak verilir. Burada, $\hat{\beta}$; b_0, b_1, b_2, ..., b_p 'den oluşan (p+1)×1 boyutlu katsayılar vektörüdür. Çoklu regresyon çözümlemesinde, regresyon katsayılarının en küçük kareler yöntemi ile bulunması için (7.55) eşitliğinden yararlanılır.

$$\hat{\beta} = [X'X]^{-1} X'Y \qquad (7.55)$$

(7.55) eşitliğinde $[X'X]$ matrisinin tersinin (inversinin) alınabilmesi gerekir. Bunun için ise bağımsız değişkenler doğrusal bağımsız olmalıdır. Eğer bir bağımsız değişken bir diğer bağımsız değişken ya da değişkenlerin bir doğrusal fonksiyonu olarak

yazılabiliyorsa (yani bağımsız değişkenler doğrusal bağımlı ise), $[X'X]$ matrisinin tersi alınamayacaktır. (7.55) eşitliğinde, $\hat{\beta}$ ile $X'X$ ve $X'Y$ çarpımlarına ilişkin sonuç matrisler boyutları ile birlikte aşağıda verilmiştir.

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ . \\ b_p \end{bmatrix}_{[(p+1)\ \times\ 1]} \qquad (7.56)$$

$$X'X = \begin{bmatrix} n & \Sigma x_1 & \Sigma x_2 & \dots & \Sigma x_p \\ & \Sigma x_1^2 & \Sigma x_1 x_2 & \dots & \Sigma x_1 x_p \\ & & \Sigma x_2^2 & \dots & \Sigma x_2 x_p \\ & Sim. & & \dots & . \\ & & & & \Sigma x_p^2 \end{bmatrix}_{[(p+1)\times(p+1)]} \qquad (7.57)$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} \Sigma y \\ \Sigma x_1 y \\ \Sigma x_2 y \\ \\ \Sigma x_p y \end{bmatrix}_{[(p+1)\ \times\ 1]} \qquad (7.58)$$

Şapka (Hat) Matrisi

$\hat{Y} = X\hat{\beta} = X(X'X)^{-1}X'Y = PY$ olarak yazılırsa, $P = X(X'X)^{-1}X'$ matrisine şapka (hat) matrisi denir. Hat matrisi regresyon çözümlemesinde önemli rol oynar. P matrisi simetriktir ($P = P'$). Bilindiği gibi, gözlenen y_i değeri ile kestirilen $\hat{y}_i$ değeri arasındaki fark artık olarak bilinir ve $e_i = y_i - \hat{y}_i$'dir. n tane artık matrislerle $e = Y - \hat{Y}$ şeklinde yazılabilir. Bu gösterim değişik şekillerde de yazılabilir. Buna göre; $e = Y - X\hat{\beta} = Y - PY = (I - P)Y$ olarak yazılabilir.

Çoklu Regresyonda Hipotez Testleri

Çoklu regresyon denklemi elde edildikten sonra, çeşitli hipotezler test edilebilir. Öncelikle, varyans analizi yapılarak, bağımlı değişkenin bağımsız değişkenler tarafından açıklanıp açıklanmadığı, diğer bir deyişle, bağımlı değişkenle bağımsız değişkenler kümesi arasında doğrusal bir ilişki olup olmadığı test edilir. F dağılışı yardımıyla yapılan bu testte H_0 hipotezi, tüm regresyon katsayılarının sıfıra eşit olduğu ($H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_p = 0$) şeklinde kurulurken, H_1 hipotezi, en az bir β_j'nin sıfırdan farklı olduğu şeklinde kurulur. Bilindiği gibi, F değerini bulabilmek için çeşitli kareler toplamları, serbestlik dereceleri ve kareler ortalamalarına gereksinim duyuluyor

ve bu sonuçlar varyans analizi tablosu ile özetleniyordu. Çoklu regresyonla ilgili varyans analizi tablosunun matris gösterimi Tablo 7.16'da verilmiştir. Tablodan anlaşılacağı gibi, σ^2 'nin yansız kestiricisi olan s^2;

$$s^2=AKO=(Y'Y-\hat{\beta}'X'Y)/(n-p-1)=e'e/(n-p-1)'\text{dir.}$$

Tablo 7.16. Çoklu Regresyonda Varyans Analizi Tablosu

DK	*KT*	*Sd*	*KO*	*F*
Toplam	$Y'Y-n\bar{y}^2$	$n-1$		
R	$\hat{\beta}'X'Y-n\bar{y}^2$	p	*RKT/p*	*RKO/AKO*
A (Artık)	$Y'Y-\hat{\beta}'X'Y$	*n-p-1*	*AKT/(n-p-1)*	

Tablo 7.16'daki gibi elde edilen F_H istatistiği; $p, n-p-1$ serbestlik dereceli F tablo değeri (F_T) ile karşılaştırılır. Eğer, $F_H < F_{T(Sd=p,n-p-1;\alpha)}$ ise H_0 hipotezi kabul edilir.

H_0 hipotezinin kabul edilmesi durumunda , seçilen α yanılma düzeyi için, bağımlı değişkenle bağımsız değişkenler arasında doğrusal bir ilişki olmadığı ya da bağımsız değişkenlerin bağımlı değişkendeki değişimi açıklayamadığı söylenir.

Regresyon Katsayılarının Test Edilmesi

F istatistiğine ilişkin H_0 hipotezinin reddedilmesi durumunda, bağımlı değişken ile bağımsız değişkenler arasında doğrusal bir ilişkinin varlığından söz edilmekle birlikte, katsayılara ilişkin sadece "en az bir regresyon katsayısının sıfırdan farklı olduğu" yorumu yapılır. Bu durumda hangi regresyon katsayısı ya da katsayılarının sıfırdan farklı olduğu ya da hangilerinin sıfıra eşit olduğu test edilebilir. Bu işlemlerin geçerliliği, daha önceden verilen "her bir x_i veri kümesi için bir y alt kümesi vardır ve y'ler σ^2 varyansla normal dağılım gösterir" şeklinde ifade edilen varsayıma dayalıdır. Bu varsayımlar yerine geldiğinde her bir b_j, β_j ortalama ve $\sigma^2[X'X]^{-1}_{jj}$ varyansı ile normal dağılır.

β_j regresyon katsayısının araştırıcı tarafından seçilen β_j^0 gibi bir değere eşit olup olmadığı,

$$t=\frac{b_j-\beta_j^0}{S(b_j)} \qquad (7.59)$$

ile test edilir. Burada, $S(b_j)$, j. regresyon katsayısına ilişkin standart hatadır. Regresyon katsayılarına ilişkin standart hatalar, regresyon katsayılarına ilişkin $(p+1)\times(p+1)$ boyutlu varyans-kovaryans matrisi olan

$V(\hat{\beta})=\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}==s^2[X'X]^{-1}$ matrisinin karekökünün alınması ile elde edilen matrisin asıl köşegen ögeleridir. $S(b_j)$;

$$S(b_j) = s\sqrt{[X'X]^{-1}_{jj}} = \sqrt{AKO}\sqrt{[X'X]^{-1}_{jj}} \qquad (7.60)$$

ile verilir. (7.59) ile bulunan t değeri, seçilen yanılma düzeyinde n-p-1 serbestlik dereceli t tablo değeri ile karşılaştırılır. $\beta_j^0 = 0$ **ise (7.59) ile verilen t istatistiği, j. regresyon katsayısının kendi standart hatasına bölümüne eşit olacaktır.** $H_0 : \beta_j = 0$ ve $H_1 : \beta_j \neq 0$ ise ve test sonucunda H_0 hipotezi kabul edilirse ($t_H < t_{T(Sd=n-p-1;\alpha)}$ ise); ilgili regresyon katsayısına ilişkin değişkenin modele katkısının önemli olmadığı ve istenirse modelden çıkartılabileceği (dolayısıyla, bu değişken olmaksızın yeni bir model kurulabileceği) anlaşılır. H_0 hipotezi reddedildiğinde ise, ilgili değişkenin regresyon kareler toplamında ve de dolayısıyla R^2'de meydana getireceği artışın anlamlı olduğu söylenebilir. β_j regresyon katsayılarına ilişkin t istatistikleri, modeldeki değişkenlerin bağımlı değişkeni açıklamaktaki önemlilik derecelerini belirlemekte de kullanılır.

İncelenen değişkenin regresyon kareler toplamında yapacağı artışların anlamlı olup olmadığı *kısmi F testi* ile de test edilebilir. Regresyon denklemine ilişkin varsayımların yerine gelmesi durumunda, bulunacak F istatistiklerinin (ki bunlar regresyon katsayılarının anlamlılığına ilişkin bulunan t istatistiklerinin kareleridir, $F = t^2$) büyüklüğüne bakarak hangi değişkenlerin modele daha fazla katkı yaptığı konusunda da bir kanıya varılabilir. Bu konuya ilişkin çözümlemeler Örnek 7.6 ile birlikte verilecektir.

Regresyon Katsayılarının Bir Bölümünün Sıfıra Eşit Olması Durumunun Test Edilmesi

Bazen, y bağımlı değişkeninin yeterli sayıdaki daha az değişkenle açıklanıp açıklanamayacağı incelenmek istenebilir. Çünkü, regresyon çözümlemesindeki önemli bir amaç, olanaklar ölçüsünde, birkaç anlamlı değişkenle bağımlı değişkeni açıklamaktır. Böylece, en önemli değişkenlerin ayrılması sağlandığı gibi, incelenen ilişki de daha kolay tanımlanmış olur.

Bu amaçla, tüm değişkenlerin olduğu modele ***Tümel Model*** (*TM*), önemsiz olarak düşündüğümüz değişkenler dışarıda bırakılarak elde edilen modele de ***İndirgenmiş Model*** (*İM*) denirse, ilgili F istatistiği;

$$F = \frac{(iM\ için\ AKT - TM\ için\ AKT)/(p+1-l)}{(TM\ için\ AKT)/(n-p-1)} \qquad (7.61)$$

ile verilir. Burada,

p : *Bağımsız değişken sayısı*

l : *İM'deki parametre sayısı* (b_0 *dahil*)'dır.

Eşitlik (7.61) ile bulunan F istatistiği, $(p+1-l)$ ve $(n-p-1)$ serbestlik dereceli F tablo değeri ile karşılaştırılır. (7.61) ile verilen test istatistiği, (7.69) ile verilen çoklu belirtme katsayısı yardımı ile de verilebilir. Buna göre;

R_p^2 : *Tümel model için çoklu belirtme katsayısı*

R_q^2 : *İndirgenmiş model için çoklu belirtme katsayısı*

p : *Tümel model için değişken sayısı*

q : *İndirgenmiş model için değişken sayısı*

iken,

$$F = \frac{(R_p^2 - R_q^2)/(p-q)}{(1-R_p^2)/(n-p-1)} \qquad (7.62)$$

ile verilir ve hesapla bulunan F değeri, p-q ve n-p-1 serbestlik dereceli F tablo istatistiği ile karşılaştırılır.

Çoklu Regresyonda Kestirim

Herhangi bir $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ip}$ bağımsız değişken kümesi için kestirim değeri matrisler yardımıyla,

$$\hat{y}_i = \begin{bmatrix} 1 & x_{i1} & x_{i2} & \ldots & x_{ip} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ . \\ . \\ b_p \end{bmatrix} \qquad (7.63)$$

ile verilir.

Güven Aralıkları

Regresyon Katsayıları İçin Güven Aralıkları

β_j regresyon katsayıları için güven aralıkları oluşturulurken, ε_i hatalarının 0 ortalama ve σ^2 varyansı ile normal ve birbirinden bağımsız dağıldığı varsayılır. Bu varsayım altında, her bir regresyon katsayısı (β_j) için güven aralığı bulunabilir. b_j örneklem regresyon katsayısını, $S(b_j)$ ise katsayıya ilişkin standart hatayı göstermek üzere bilinmeyen β_j için güven aralığı;

$$b_j - t_{(n-p-1;\ \alpha/2)}\, S(b_j) \le \beta_j \le b_j + t_{(n-p-1;\ \alpha/2)}\, S(b_j) \qquad (7.64)$$

ile verilir.

Kestirim Değerleri İçin Güven Aralığı

Herhangi bir $(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ip})$ bağımsız değişken kümesine karşılık gelen bağımlı değişken değerini ($\hat{y}_i$) kestirdiğimizde, bu kestirime ilişkin standart hata,

$$S(\hat{y}_0) = s\sqrt{1 + \begin{bmatrix} 1 & x_{i1} & x_{i2} & \ldots & x_{ip} \end{bmatrix} [X'X]^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ x_{i1} \\ x_{i2} \\ . \\ x_{ip} \end{bmatrix}} \qquad (7.65)$$

ile verilirken, $\hat{y}_i$ değerlerinin ortalaması için bir kestirimde bulunulacaksa standart hata;

$$S(\hat{\mu}_0) = s\sqrt{\begin{bmatrix} 1 & x_{i1} & x_{i2} & \ldots & x_{ip} \end{bmatrix} [X'X]^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ x_{i1} \\ x_{i2} \\ . \\ x_{ip} \end{bmatrix}} \qquad (7.66)$$

ile verilir. Buradan güven aralıkları (7.28) ve (7.31) yardımıyla bulunabilir. Ancak burada $t_{(n-2;\ \alpha/2)}$ tablo istatistiği $t_{(n-p-1;\ \alpha/2)}$ ile yer değiştirir.

Standartlaştırılmış Regresyon Katsayıları

Çoklu regresyon çözümlemesinin amaçlarından biri; bulunan regresyon denklemi yardımıyla kestirimde bulunmak, diğeri de değişkenlerden hangilerinin modele daha fazla katkı yaptığını belirlemek idi. Tüm bağımsız değişkenlerin aynı ölçü biriminde olmaları durumunda, regresyon katsayılarının büyüklüğü, ilgili bağımsız değişkenin bağımlı değişken üzerindeki etkisi konusunda bir fikir verebilmektedir. Ayrıca, kısmi F istatistiklerinin (ya da katsayılara ilişkin t istatistiklerinin) büyüklüğe göre sıralanması, bağımsız değişkenlerin (ölçü biriminden bağımsız olarak) modele yaptığı katkı konusunda bilgi verir. Diğer taraftan, ***bağımlı ve bağımsız*** tüm değişkenleri standartlaştırıp tek ölçü birimi durumuna getirmek ve elde edilen standartlaştırılmış regresyon katsayılarının büyüklüğünü incelemek de değişkenlerin modele yaptıkları katkı konusunda yoruma gitmemizi sağlar. Buna göre, standartlaştırılmış regresyon katsayılarından en büyüğüne ilişkin değişkenin, modele en fazla katkıyı yapan değişken olduğuna karar verilir. Bu amaçla, Eşitlik (3.1) ile verdiğimiz z standartlaştırmasından yararlanılır. Standartlaştırılmış değişkenlere ilişkin çoklu regresyon modelindeki R^2 ve F değerleri, orijinal değerler ile elde edilen R^2 ve F değerleri ile aynıdır (Örnek 7.6 için elde edilen standartlaştırılmış katsayıların yorumunu okuyunuz.)

Orijinal değişkenlere ilişkin regresyon denklemi ile birlikte değişkenlere ilişkin standart sapmaların bilinmesi durumunda da standartlaştırılmış regresyon katsayıları elde edilebilir. Buna göre, s_j : j. değişkene ilişkin standart sapma, s_y : bağımlı değişkene ilişkin standart sapma olmak üzere standartlaştırılmış regresyon katsayısı b_j^* :

$$b_j^* = b_j \frac{s_j}{s_y} \qquad (7.67)$$

ile verilir. Standartlaştırılmış regresyon katsayılarına ***BETA* katsayıları** da denir. Çoklu regresyon çözümlemesinin sonuçları sunulurken regresyon katsayıları yanında *BETA katsayıları* da ilgili tablolarda sıklıkla yer alır. Standartlaştırılmış regresyon denklemi b_0'ı içermez. Çünkü bu durumda b_0 her zaman 0'dır.

Korelasyon Matrisinin İncelenmesi

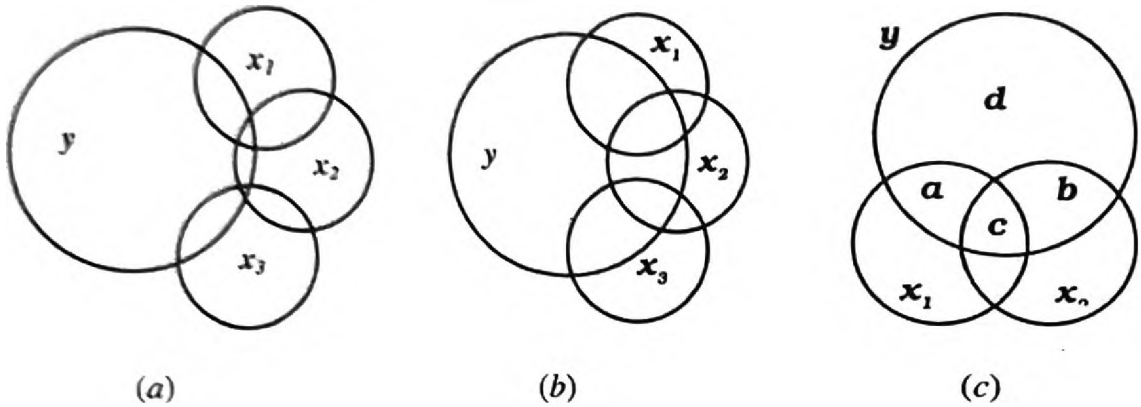
Regresyon çözümlemesine başlamadan önce tüm değişkenlere ilişkin korelasyon matrisinin incelenmesininde yarar vardır. Böylece, öncelikle bağımsız değişkenler arasında kuvvetli ilişki (çakışıklık) olup olmadığı kolayca görülebilir. Çoklu regresyonda bağımsız değişkenler arasındaki yüksek ilişki çoklubağlantı (multicollinearity) sorununa neden olabilmektedir. Bu konu ileride incelenecektir. Ayrıca, bir değişkenin çoklu regresyon modelinde göreceli olarak neden önemsiz olduğu konusunda da bu matristen yararlanılabilir. Önemsizliğin nedeni, ilgili değişkenin bağımlı değişkenle ilişkisinin olmaması olabileceği gibi bağımsız değişkenlerin kendi aralarında yüksek ilişki göstermesi de olabilir. Bu konu, çoklu ve kısmi ilişki kavramlarını incelemeden önce Venn diyagramları ile aşağıda incelenmeye çalışılmıştır.

Temel Çoklu Regresyon Yöntemleri ve Bağımsız Değişkenlerin Modele Katkısının Venn Diyagramları ile Açıklanması

Çoklu regresyon modelinin elde edilmesinde üç temel yöntemden söz edilebilir. Bunlar; ***standart çoklu regresyon***, ***aşamasıralı (hiyerarşik) regresyon*** ve ***adımsal regresyon***dur. Standart regresyonda tüm bağımsız değişkenler modelde yer alır. Aşama sıralı regresyonda bağımsız değişkenler araştırıcının belirleyeceği sırada modele alınırlar. Adımsal regresyonda ise değişkenlerin modele girişi ve modelden çıkışı istatistiksel ölçütler (kriterler) çerçevesinde olmaktadır. Bu nedenle bu yaklaşıma ***istatistiksel regresyon*** da denilmektedir.

Çoklu regresyon modelindeki bağımsız değişkenlerin modele katkısı Venn diyagramları ile de tanımlanabilir. Bu amaçla önce Grafik 7.14.a'daki üç bağımsız değişkenli ilişki yapısını inceleyelim. Bu grafikte, y ile bağımsız değişkenler arasındaki ilişki çok düşüktür. Çünkü, her bir bağımsız değişken (örneğin x_2) ile y değişkeni arasındaki çakışma alanı çok küçüktür. Grafik 7.14.*b*'de ise y ile ortak alanları eşit olan üç değişken verilmiştir. Bu grafikte, y ile x_2 arasındaki korelasyon katsayısı yüksek olmasına rağmen, x_2 değişkeninin regresyon modeline katkısı oldukça düşük olarak elde edilecektir. Çünkü, x_2 değişkeninin y ile paylaştığı alanın büyük bir bölümü x_1 ve x_3 ile

çakışmaktadır. Ancak, gerek x_2'nin x_1 ile gerekse x_3'ün x_2 ile y üzerindeki çakışma alanları modele iki kat fazla katkı yapmamaktadır. Bu gibi nedenlerle, bağımsız değişkenler arasındaki korelasyon matrisi ve bağımsız değişkenler ile bağımlı değişken arasındaki korelasyon matrisinin incelenmesinde yarar vardır.



(a) (b) (c)

Grafik 7.14. Üç Farklı Venn Diyagramı

Şimdi de Grafik 7.14.*c*'de verilen bir bağımlı iki bağımsız değişkenli diyagramı inceleyelim. Bu diyagramda:

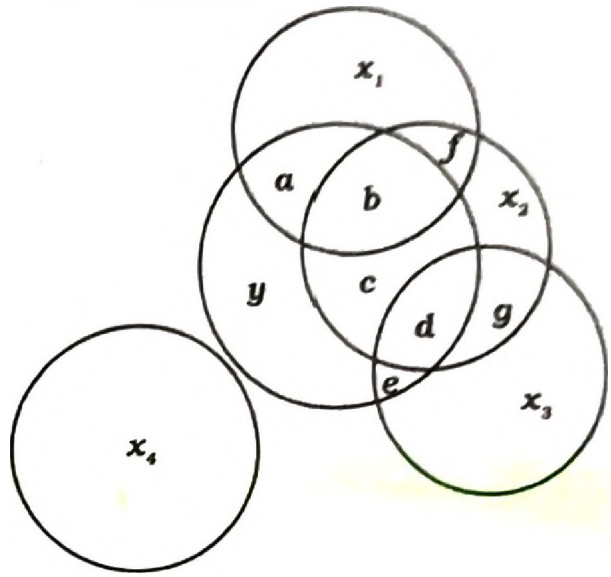
a: *y*'deki varyansın sadece x_1 tarafından açıklanan bölümünü

b: *y*'deki varyansın sadece x_2 tarafından açıklanan bölümünü

c: *y*'deki varyansı x_1 *ve* x_2'nin birleşik olarak açıkladığı bölümü

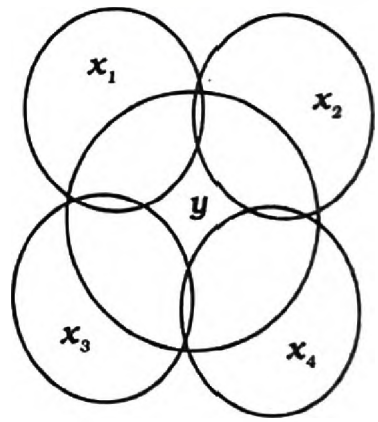
d: *y*'deki varyansın x_1 ya da x_2 tarafından açıklanamayan bölümünü gösterir.

Grafik 7.15'de ise bir bağımlı dört bağımsız değişkene ilişkin bir Venn diyagramı tartışılmıştır. Grafik 7.15'de görüldüğü gibi, x_4 ile y arasında ortak varyans (çakışma alanı) yoktur. Dolayısıyla, ileride göreceğimiz istatistiksel değişken seçimi yöntemlerinin (Kesim 7.6) kullanılması durumunda x_4 değişkeni modelde yer almayacak ya da dört değişkenli modelde bu değişkenin modele katkısı önemsiz bulunacaktır. Bu durumda R^2, $a+b+c+d+e$ ile tanımlanmaktadır. y ile en yüksek ortak varyansa sahip değişken x_2 değişkenidir (y ile x_2 değişkeni arasındaki ortak varyans alanı ($b+c+d$)'dir. Diğer taraftan x_1'in y'nin kestirimine doğrudan (diğer değişkenlerle ilgisi olmadan-unique) katkısı a kadar olup, x_2'ninkinden (c) daha azdır. Bu konuda en az katkıya sahip değişken (e) kadar katkı ile x_3'tür. Diğer bir deyişle, kestirime e kadar yapılacak bir katkı, $a+b+c+d$ toplamının yanında oldukça küçük kalmaktadır. Diğer taraftan, x_1 ve x_2 bağımsız değişkenleri arasında $b+f$, x_2 ile x_3 değişkenleri arasında $d+g$ kadar bir ilişki (ortak varyans) söz konusudur. Ancak, x_1 ile x_3 arasında bir ilişki yoktur (x_1 ve x_3 diktir). Bazı bağımsız değişkenler birbiri ile ilişkili olduğu için y ile en fazla ortak varyansa sahip olan x_2 değişkeninin yapılacak bir değişken seçiminde modelde kalması öncelikle söz konusudur. x_2 regresyon denkleminde yer aldıktan sonra x_1'in modele katkısı a, x_3'ün modele katkısı e kadar olacaktır. Özet olarak, regresyon modelindeki bağımsız değişkenlerin ilişkili olması durumu ile sıklıkla karşılaşılır. Bu durum, değişkenlerin kestirime katkısındaki etkinliklerini azaltabilmektedir. Çünkü, her bağımsız değişken, diğerlerinden bağımsız olan alan (unique variance) kadar modele katkı yapabilmektedir.



Grafik 7.15. Çoklu Regresyonda Değişkenlerin ortak (common) ve Tek (unique) varyansının Venn Diyagramı ile Gösterimi

Grafik 7.16'da ise bağımlı ve dört bağımsız değişken arasındaki ideal bir ilişki yapısı görülmektedir. Bu örnekte, bağımsız değişkenler ilişkisiz iken, bunların bağımlı değişken ile ilişkileri oldukça yüksektir. Ancak, bu tür bir yapı ile çok sık karşılaşılmaz. Genelde, bağımsız değişkenler, hem kendileri hem de bağımlı değişken ile ilişkilidirler. Bu nedenle de kestirime katkılarındaki etkinlik azalma gösterir.



Grafik 7.16. Çoklu Regresyonda Bağımlı ve Bağımsız Değişkenlerin İdeal İlişkisine İlişkin Venn Diyagramı

Tüm bağımsız değişkenler *y* ile yüksek derecede ilişkili ancak kendi aralarında ilişkisiz ise *s* azalmakta ve sonuç olarak iyi bir kestirim denklemi elde edilmektedir. Grafik 7.16'da *y*'deki varyansın hemen hemen tümü bağımsız değişkenlerce açıklanabilmektedir.

Çoklu Korelasyon Katsayısı (R)

y ile x_1 gibi iki değişken arasındaki doğrusal ilişkinin miktarı basit korelasyon katsayısı ile veriliyordu. Benzer şekilde, birden fazla bağımsız değişken ile bağımlı değişken arasında ne derecede bir ilişki olduğunu gösteren ölçüye ***Çoklu Korelasyon Katsayısı***

denir ve R ile gösterilir. Çoklu korelasyon katsayısı gözlenen y_i değerleri ile kestirilen $\hat{y}_i$ değeri arasındaki korelasyon katsayısıdır. Bu nedenle, R'nin değeri her zaman pozitiftir ve 0 ile 1 arasında değişir $(0 \le R \le 1)$. R'nin yorumu r'nin yorumu gibidir. y_i gözlenen değerleri ile $\hat{y}_i$ kestirilen değerleri arasında mükemmel bir uyum olduğunda R=1 iken, uyumun az olduğu durumlarda 0'a yaklaşır. ***Çoklu korelasyon katsayısı, çoklu regresyon modeli sonucunda bulunan $\hat{y}_i$ kestirim değerleri ile y_i gözlem değerleri arasındaki basit korelasyon katsayısının hesaplanması ile bulunabileceği gibi, Eşitlik (7.69) ile verilen çoklu belirtme katsayısının karekökünün alınması ile de bulunabilir.***

Çoklu korelasyon modelini çoklu regresyon modelinden ayıran en önemli fark, bağımsız değişkenlerin rastlantı değişkeni olmasıdır. Örneklemin çekildiği evren hakkında çıkarsamalar yapabilmek ve hipotezleri test edebilmek için, ***bağımlı değişken ile bağımsız değişkenler kümesinin birleşik dağılımının çok değişkenli normal dağılım*** varsayımını sağlaması gerekir.

Çoklu korelasyon katsayısının anlamlılığı test edilebilir. $H_0 : \delta = 0$ için F istatistiği,

$$F = \frac{R^2}{1-R^2}\frac{n-p-1}{p} \qquad (7.68)$$

ile verilir. (7.68) ile bulunan F hesap istatistiği p, n-p-1 serbestlik dereceli F tablo istatistiği ile karşılaştırılır. (7.68) ile bulunan F değeri, $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = ...\beta_p = 0$ hipotezini test ettiğimizde bulduğumuz F değerine eşit çıkar.

Çoklu Belirtme Katsayısı (R^2)

Çoklu belirtme katsayısı (multiple coefficient of determination), R^2, birden çok bağımsız değişkenin bağımlı değişkeni açıklama miktarını verir. Regresyon denkleminin uygunluk (modelin veriye uyumunun) ölçüsü olarak da kullanılan R^2, regresyon modeli ile açıklanabilen değişimin (RKT), toplam değişim (KT_Y) içindeki yüzdesidir. Diğer bir tanımla, y bağımlı değişkenindeki varyansın bağımsız değişkenlerce açıklanan miktarıdır. Grafik 7.15'deki Venn diyagramında R^2, $a+b+c+d+e$ ile tanımlanır. Grafik 7.16'dan anlaşılacağı üzere eğer bağımsız değişkenler arasında ilişki yok ise $R^2 = R^2_{yx_1} + R^2_{yx_2} + ... + R^2_{yx_p}$ ile tanımlanabilir. R^2,

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} = \frac{RKT}{KT_Y} = \frac{\hat{\beta}'X'Y - n\bar{y}^2}{Y'Y - n\bar{y}^2} \qquad (7.69)$$

ile verilir. Basit ve daha sonra vereceğimiz kısmi korelasyon katsayıları -1 ile +1 arasında değişirken çoklu korelasyon katsayısı ve çoklu belirtme katsayısı 0 ile +1 arasında değişir. R^2 değeri 0'a yaklaşırsa modelin veriye uyum göstermediği anlaşılır. Doğrusal modelin sabit terimi olan b_0'ı içermemesi durumunda, R^2 sıfırdan küçük ya da 1'den büyük çıkabilir. Diğer taraftan, R^2'nin dikkatli bir şekilde kullanılması gerekmektedir. Çünkü, veriye ilgisiz bir değişkenin eklenmesinde bile R^2'de artış olacaktır. Bu ise, modele yeni bir değişken eklendiğinde, yeni modelin eskisinden daha iyi olduğu gibi bir izlenim uyandırabilir. Sonuç olarak, R^2'si büyük olan modellerle her zaman iyi kestirimler elde etmek olası değildir.

Düzeltilmiş R^2, $(\overline{R}^2)$

Regresyon denklemine konu ile ilgisi olmayan bir bağımsız değişkenin eklenmesi durumunda bile R^2'de bir miktar artış olacağı için R^2 belli miktarda azaltılarak düzeltilir ve düzeltilmiş R^2, $(\overline{R}^2)$ elde edilir. R^2 ile $\overline{R}^2$ arasındaki fark *fark edilir şekilde farklı* ise belirtme katsayısı olarak $\overline{R}^2$'nin kullanılması önerilmektedir. $\overline{R}^2$,

$$\overline{R}^2 = \left(R^2 - \frac{p}{n-1}\right)\left(\frac{n-1}{n-p-1}\right) \tag{7.70}$$

ile verilir. Sabit teriminin bulunduğu modellerde $R^2 > 0$ olmasına rağmen $\overline{R}^2 < 0$ çıkabilir. Örneğin, n=12, p=2 ve R^2=0.08 için $\overline{R}^2 = -0.124$ bulunur. Böyle durumlarda $\overline{R}^2 = 0$ olarak alınmalıdır. Bazen $\overline{R}^2$, ***farklı sayıda bağımsız değişkene sahip*** modeller arasında karşılaştırma yapmak amacı ile de kullanılır. Ancak, bu gibi bir karşılaştırma yapabilmek için, bağımsız değişkenlere ilişkin birimlerin aynı olması gerekir.

R^2'deki Değişim

Düzeltilmemiş R^2 değeri modele herhangi bir değişkenin eklenmesi ile değişir (artış gösterir). R^2 değerindeki değişim miktarı, bir değişkenin ya da değişkenlerin modelin kestirim gücüne yaptığı katkının bir ölçüsüdür.

Bir değişkenin bir regresyon modeline anlamlı bir kestirim gücü ekleyip eklemediğini test etmek için regresyon modeli aşamalı olarak oluşturulur ve bağımsız değişkenler modele teker teker dahil edilir. Bu işlemler istatistik yazılımlarda (Örneğin, *SPSS*'de) **bloklama** yardımı ile yapılır. Örneğin, x_1'den sonra x_2'nin kestirim gücünde yapacağı artış öğrenilmek isteniyor ise; x_1 ilk blok, x_2 ise ikinci blok olarak modele dahil edilir. Bu yaklaşıma ilişkin bulgular "R^2'deki değişim" başlığı ile sunulur. Bloklama birden fazla değişken için de yapılabilir.

Kısmi Korelasyon (İlişki) Katsayıları

Korelasyon katsayısı (r), iki değişken arasındaki doğrusal ilişkinin miktarı hakkında bilgi verirken, diğer değişkenlerin etkisini dikkate almaz. Ancak bazen, geriye kalan değişkenlerin etkisi ortadan kaldırıldıktan sonra, iki değişken arasındaki *doğrusal* ilişkinin miktarı incelenmek istenebilir. Diğer bir deyişle, ikincil ilişkilerin etkisi ortadan kaldırıldıktan sonra iki değişken arasındaki doğrusal ilişkinin miktarı incelenmek istenebilir. Bu inceleme kısmi korelasyon katsayıları yardımı ile yapılır. Örneğin, yaş değişkeni, çocuğun boy uzunluğunu, ağırlığını, zeka düzeyini, psikomotor yeteneğini, ... etkiler. Böyle bir durumda, örneğin yaş değişkenini düşünmeden zeka düzeyi ile psikomotor yetenek arasında bir ilişki arandığında pozitif yönde yüksek bir ilişki bulunabilir. Ancak, bu değişkenler arasındaki ilişki bir neden sonuç ilişkisi değildir. İkincil bir ilişkidir. Yani, zeka düzeyi ile psikomotor yetenekteki artış yaşa bağımlıdır. Bu nedenle de aralarında ilişki varmış gibi gözükür. Bu tür ilişkilerde, ***etkileyici değişkenin etkisi*** (burada yaşın etkisi) ***her iki değişken üzerinden kaldırılarak*** değişkenler (burada zeka düzeyi ile psikomotor yetenek) arasındaki ilişkinin incelenmesi bir kısmi korelasyon katsayısı sorunudur. Bu örnekte olduğu gibi eğer bir değişken kontrol değişkeni olarak alınarak kısmi korelasyon katsayısı hesaplanmış ise elde edilen kısmi korelasyon katsayısına *birinci derece kısmi korelasyon* katsayısı (first-order partial correlation) adı verilir. Eğer iki değişken kontrol değişkeni olarak alınarak kısmi korelasyon katsayısı hesaplanmış ise elde edilen kısmi korelasyon katsayısına *ikinci derece kısmi korelasyon* katsayısı (second-order partial correlation) adı verilir. İki değişken arasındaki korelasyon katsayısı ise bu adlandırmada, *sıfırıncı derece korelasyon katsayısı* (zero-order correlation coefficient) olarak tanımlanır.

Çoklu doğrusal regresyon çözümlemesinde, genellikle y bağımlı değişkeni ve herhangi bir x_i bağımsız değişkeni arasındaki kısmi korelasyon katsayısı ile ilgilenilir. Örneğin, eğer elimizde y, x_1 ve x_2 gibi üç değişken varsa, x_2 sabit tutulduğunda (x_2'nin hem y hem de x_1 üzerindeki etkisi ortadan kaldırıldığında) y ile x_1 arasındaki korelasyon katsayısına kısmi korelasyon katsayısı denir ve $r_{y1.2}$ ile gösterilir. $r_{y1.2}$'nin alt indisinde noktanın sağındaki sayı, sabit tutulan değişkeni ifade eder. $r_{y1.2}$;

$$r_{y1.2} = \frac{r_{y1} - r_{12} \times r_{y2}}{\sqrt{(1 - r_{12}^2) \times (1 - r_{y2}^2)}} \qquad (7.71)$$

ile verilir. Bir bağımlı ve x_1, x_2, x_3 gibi üç bağımsız değişken olduğunda ve bağımsız değişkenlerin ikisi sabit tutulduğunda, örneğin y ile x_1 arasındaki kısmi korelasyon katsayısı $r_{y1.23}$ ile gösterilir ve $r_{y1.23}$;

$$r_{y1.23} = \frac{r_{y1.3} - r_{y2.3} \times r_{12.3}}{\sqrt{(1 - r_{y2.3}^2) \times (1 - r_{12.3}^2)}} \qquad (7.72)$$

ile verilir. Toplam değişken sayısı ≥ 4 olduğunda hesaplamalar karmaşıklaşmaktadır. ***İstatistik yazılımların çoğunda bu hesaplamaları yapmak için modüller vardır.***

Yukarıdaki açıklamalardan da anlaşılacağı üzere, kısmi korelasyon (ilişki) katsayıları, regresyon katsayılarının (*regresyon katsayılarına kısmi regresyon katsayıları da deniyor idi*) ilişki anlamındaki karşılıklarıdır ve regresyon denkleminde varolan bağımsız değişkenler içerisinden kestirici gücü en fazla artıran bağımsız değişkenleri belirlemek için kullanılır. Kısmi korelasyon katsayıları, basit korelasyon katsayıları gibi −1 ile +1 arasında değişir.

Kısmi korelasyon katsayısının önem kontrolü *t* istatistiği ile yapılır. Örneğin, H_0: $\rho_{y1.2,3,\ldots,p} = 0$'ı test etmek için *t* hesap istatistiği ;

$$t = \frac{r_{y1.2,3,\ldots,p}}{\sqrt{\frac{1 - r^2_{y1.2,3,\ldots,p}}{n - p - 1}}} \qquad (7.73)$$

ile verilir. Eşitlik (7.73) ile bulunan *t* hesap istatistiği seçilen yanılma düzeyinde $n-p-1$ serbestlik dereceli *t* tablo istatistiği ile karşılaştırılır.

Kısmi Belirtme Katsayısı

Kısmi korelasyon katsayısının karesine ***kısmi belirtme katsayısı*** denir. Örneğin, $r_{y1.2}$ kısmi korelasyon katsayısını ele alırsak bunun karesi olan $r^2_{y1.2}$, *y*'deki toplam değişimin x_2 tarafından açıklanabildiği kadarı açıklandıktan sonra, *y*'de geriye kalan değişimin ne kadarının x_1 tarafından açıklanmakta olduğu hakkında bilgi verir. Kısmi belirtme katsayısını Venn diyagramları ile de gösterebiliriz. Bu amaçla Grafik 7.14.*c*'yi dikkate alalım. Buna göre, x_2 değişkeninin hem *y* (*b kadar*) hem de x_1 (*c kadar*) üzerindeki etkisi ortadan kaldırıldığında x_1'in *y* ile kısmi korelasyonu ile ilgili varyans (kısmi belirtme katsayısı), $a/(a+d)$ kadar olacaktır. Burada $a+d$; x_2'yi hesaba kattıktan (ya da x_2 açıkladıktan) sonra açıklanamayan varyansı tanımlar. Dolayısıyla, $a/(a+d)$; açıklanamayan varyansın x_1 tarafından açıklanan bölümüdür.

Aşağıda verilecek olan yarı kısmi korelasyon katsayısı kısmi korelasyon katsayısının farklı bir şekli olup karmaşık yarı kısmi korelasyon katsayısının hesaplanmasında kısmi korelasyon katsayısından yararlanılır.

Yarı Kısmi Korelasyon (İlişki) Katsayısı

Kısmi korelasyon katsayısı, *x_i ile y üzerinden diğer bağımsız değişkenlerin etkisini arıttıktan sonra* x_i ile *y* arasındaki ilişki hakkında bilgi veriyor idi. Yarı kısmi korelasyon katsayısı (***semipartial*** ya da ***part correlation***) ise, diğer bütün bağımsız değişkenlerin x_i *bağımsız* değişkeni üzerindeki etkisi ortadan kaldırıldıktan sonra x_i *bağımsız* değişkeni ile *y* bağımlı değişkeni arasındaki korelasyon katsayısı olarak tanımlanır. Diğer bir tanımla, diğer tüm bağımsız değişkenler tarafından açıklanan varyans çıkarıldıktan sonra bir bağımsız değişken tarafından açıklanan varyansı verir (yarı kısmi korelasyon katsayısının karesi, bağımsız değişken tarafından açıklanan varyansı verecektir) ve bağımlı değişken üzerine bağımsız değişkenin tek başına yaptığı etkiyi belirlemek için kullanılır. Venn diyagramı ile tanımlama yapmak için Grafik

7.14.c'yi dikkate alalım; x_2'nin etkisi arıtıldıktan sonra x_1'in yarı kısmi korelasyon katsayısı, $a/(a+b+c+d)$ olarak tanımlanır. Burada, $a+b+c+d$; y'deki toplam varyans, a ise sadece x_1 tarafından açıklanan varyansın miktarıdır. Bir bağımlı iki bağımsız değişken olduğunda x_2'nin x_1 üzerindeki etkisi arıtıldıktan sonra y ile x_1 arasındaki yarı kısmi korelasyon katsayısı sıklıkla $r_{y,x_1(x_2)}$ olarak gösterilir ve Eşitlik (7.74) ile verilir.

$$r_{y,x_1(x_2)} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} r_{x_1x_2}}{\sqrt{1 - r^2_{x_1x_2}}} \qquad (7.74)$$

Örnek 7.6'da verilecek olmakla birlikte konuyu daha basitleştirmek amacıyla Grafik 7.14.c'de $r_{yx_1} = 0.60$ $r_{yx_2} = 0.50$ ve $r_{x_1x_2} = 0.70$ olduğunu düşünelim. x_1'in x_2 üzerindeki etkisi ortadan kaldırıldığında x_2 ile y arasındaki yarı kısmi korelasyon katsayısı $r_{yx_2(x_1)} = 0.11$ olur. Buradan, x_1'in etkisi sabit tutulduğunda y'deki varyansın %1.2'si (0.11x0.11=1.2) x_2'den kaynaklanmaktadır. $r_{yx_1(x_2)}$ ise 0.35 olur iken $r^2_{yx_1(x_2)} = 0.12$ olarak bulunur.

Bulguların Özetlenmesi

Çoğu zaman, çoklu regresyon analizinde modele ilişkin sonuçların sunulduğu tablolarda: regresyon katsayıları, regresyon katsayılarının standart hataları, katsayılara ilişkin t ve p değerleri ve standartlaştırılmış regresyon katsayıları yer alır (bak. Tablo 7.21). Bunların yanısıra, regresyon denklemindeki bağımsız değişkenlerin rolünü yorumlamaya yardımcı olmak için çeşitli korelasyon katsayıları da istenirse aynı tabloda yer alabilmektedir.

Örnek 7.6. Bir hastane yöneticisi, *A* hastalığı nedeni ile ameliyat olan hastaların ameliyat sonrası hastanede kalış gün sayısını (y), hastaların tıbbi sorun sayısı (x_1) ve ameliyat öncesi hastanede kalış gün saysı (x_2) ile ilişkili olup olmadığını, eğer bağımlı ve bağımsız değişkenler arasında bir ilişki varsa ameliyat sonrası hastanede kalış gün sayısını bu iki bağımsız değişkenden hangisinin daha fazla etkilediğini öğrenmek ve de bu iki bağımsız değişkeni kullanarak hastaların ameliyat sonrası hastanede kalış gün sayısını önceden kestirmek istiyor. Rasgele seçilen 20 hastaya ilişkin veriler Tablo 7.17'de verilmiştir.

Tablo 7.17. Hastane Verisi

No	y	x_1	x_2	No	y	x_1	x_2
1	6	1	1	11	13	1	4
2	6	2	1	12	9	1	2
3	11	2	2	13	17	3	3
4	9	1	3	14	17	2	4
5	16	3	3	15	12	4	1
6	16	1	5	16	6	1	1
7	4	1	1	17	5	1	1
8	8	3	1	18	12	3	2
9	11	2	2	19	8	1	2
10	13	3	2	20	9	2	2

Hastane verisine ilişkin bazı istatistikler aşağıdadır.

$\sum_{i=1}^{20} y_i = 208$	$\sum_{i=1}^{20} x_{i1} = 38$	$\sum_{i=1}^{20} x_{i2} = 43$
$\sum_{i=1}^{20} y_i^2 = 2478$	$\sum_{i=1}^{20} x_{i1}^2 = 90$	$\sum_{i=1}^{20} x_{i2}^2 = 119$
$\sum_{i=1}^{20} x_{i1} y_i = 430$	$\sum_{i=1}^{20} x_{i2} y_i = 519$	$\sum_{i=1}^{20} x_{i1} x_{i2} = 79$
$\bar{y} = 10.4$	$\bar{x}_1 = 1.9$	$\bar{x}_2 = 2.15$

Regresyon Denkleminin Bulunması

(7.53) yardımıyla, Y, X, ve X' matrisleri aşağıdaki gibi yazılır.

$$Y = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ . \\ 9 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ . & . & . \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & ..... & 1 \\ 1 & 2 & ..... & 2 \\ 1 & 1 & ..... & 2 \end{bmatrix}$$

(7.57)'den

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & .. & 1 \\ 1 & 2 & .. & 2 \\ 1 & 1 & .. & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ . & . & . \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 38 & 43 \\ 38 & 90 & 79 \\ 43 & 79 & 119 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_{i1} & \sum_{i=1}^{n} x_{i2} \\ & \sum_{i=1}^{n} x_{i1}^2 & \sum_{i=1}^{n} x_{i1} x_{i2} \\ Sim. & & \sum_{i=1}^{n} x_{i2}^2 \end{bmatrix}$$

$$[X'X]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.480228 & -0.12089 & -0.09327 \\ -0.12089 & 0.05706 & 0.005803 \\ -0.09327 & 0.005803 & 0.038255 \end{bmatrix}$$

(7.58)'den,

$$X'Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & .. & 1 \\ 1 & 2 & .. & 2 \\ 1 & 1 & .. & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ . \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 208 \\ 430 \\ 519 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i1} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{i2} y_i \end{bmatrix}$$

ve regresyon katsayıları (7.55) yardımıyla,

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 0.480228 & -0.12089 & -0.09327 \\ -0.12089 & 0.05706 & 0.005803 \\ -0.09327 & 0.005803 & 0.038255 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 208 \\ 430 \\ 519 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.50398 \\ 2.402321 \\ 2.948635 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur ve ***regresyon kestirim denklemi***,

$$\hat{y}_i = -0.50398 + 2.402321x_{i1} + 2.948635x_{i2}$$

olarak elde edilir.

Buna göre, örneğin, ameliyat öncesi hastanede kalış gün sayısı sabit tutulduğunda, hastanın tıbbi sorun sayısındaki 1 (birimlik) artış, ameliyat sonrası hastanede kalış gün sayısında 2.402321 (2.4) günlük bir artışa neden olmaktadır. Bu yorumu biraz daha açabiliriz. Örneğin, hastanın ameliyat öncesi hastanede kalış gün sayısını 2 gün olarak sabit tutarak tıbbi sorun sayısını 2'den 3'e çıkartırsak, $\hat{y}_i$ kestirim değerleri aşağıdaki gibi elde edilir.

x_{i1}	x_{i2}	$\hat{y}_i$
2	2	10.197932
3	2	12.600253

Bulduğumuz iki kestirim değeri arasındaki fark b_1 katsayısını verecektir (12.600253 - 10.197932 = 2.402321).

Çeşitli Kareler Toplamlarının, Serbestlik Derecelerinin ve Kareler Ortalamalarının Hesaplanması ve F İstatistiği

Tablo 7.16 yardımıyla,

$$Toplam\ Değişim = KT_Y = \begin{bmatrix} 6 & 6 & .. & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ . \\ 9 \end{bmatrix} - 20(10.4)^2 = 2478 - 2163.2 = 314.8$$

$$Açıklanabilen\ Değ. = RKT = \begin{bmatrix} -0.50498 & 2.402 & 2.948 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 208 \\ 430 \\ 519 \end{bmatrix} - 20(10.4)^2$$

$$= 2458.511755 - 2163.2 = 295.31279$$

$$Açıklanamayan\ Değişim = AKT = KT_Y - RKT$$

$$= 314.8 - 295.31279 = 19.48721$$

$$Toplam\ Sd = 20-1 = 19 \qquad RSd = 2 \qquad Artık\ Sd = 20-2-1 = 17$$

olarak bulunduktan sonra kareler toplamlarının serbestlik derecelerine bölünmesi ile kareler ortalamaları hesaplanır ve çoklu regresyon için varyans analizi tablosu Tablo 7.18'deki gibi elde edilir.

Tablo 7.18. Hastane Verisi İçin Varyans Analizi Sonuçları

DK	*KT*	*Sd*	*KO*	*F*	*p*
Toplam	314.8	19			
R	295.31279	2	147.65639	128.81	0.0000
A (Artık)	19.48721	17	1.14631		

$F_{Hesap} = 128.81 > F_{Tablo(2,17;\ \alpha=0.05)} = 3.59$ olduğu için doğrusal ilişkinin anlamlı olduğu ya da y değişkenindeki değişimin x_1 ve x_2 değişkenlerince açıklanabildiği söylenir (α =0.05 düzeyinde). Aynı sonuca Tablo 7.18'de verilen p olasılığı (p=0.000) yardımı ile de varabilirdik. Çünkü p değeri 0.05'den küçüktür.

Regresyon Katsayılarının Anlamlılığı

Regresyon katsayılarının standart hataları Eşitlik (7.60) yardımı ile bulunabilir. Bu amaçla s yani regresyon denkleminin standart hatası, $s = \sqrt{AKO} = \sqrt{1.14631} = 1.07066$ olarak bulunur ve katsayılara ilişkin standart hatalar $S(b_j) = s\sqrt{[X'X]^{-1}_{jj}}$ yardımıyla,

$$S(b_j) = 1.07066\sqrt{\begin{bmatrix} 0.480228 & & \\ & 0.05706 & \\ & & 0.038255 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0.74194 \\ 0.25575 \\ 0.209408 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(b_0) \\ S(b_1) \\ S(b_2) \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir ve regresyon katsayılarının anlamlılığı için t istatistikleri (7.59) yardımıyla ;

b_0 *için;* t=–0.503976/0.741949=–0.679

b_1 *için;* t = 2.402321/0.255750 = 9.393

b_2 *için;* t = 2.948635/0.209408 = 14.081

olarak elde edilir. $\alpha = 0.05$ alındığında $t_{Tablo(20-2-1;\ \alpha/2)} = t_{(17;\ \alpha=0.025)} = 2.11$ olduğu için b_1 ve b_2 katsayılarının anlamlı olduğu söylenir. Daha açık bir ifade ile, ***her iki bağımsız değişkenin ameliyat sonrası hastanede kalış gün sayısı üzerine etkisi anlamlıdır.***

Regresyon katsayılarının anlamlılığı kısmi F testleri ile de yapılabiliyor idi. Bu amaçla, $y_i = b_0 + b_1 x_{i1}$, $y_i = b_0 + b_2 x_{i2}$ ve $y_i = b_0 + b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2}$ modellerine ilişkin kareler toplamlarından yararlanılır. Bu üç modele ilişkin bulgular Tablo 7.19'da verilmiştir.

Tablo 7.19. Üç Modele İlişkin Kareler Toplamları

	$y_i = b_0 + b_1 x_{i1}$		$y_i = b_0 + b_2 x_{i2}$		$y_i = b_0 + b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2}$		
DK	*KT*	*Sd*	*KT*	*Sd*	*KT*	*Sd*	*KO*
Toplam	314.8		314.8		314.8		
R	68.026	1	194.171	1	295.313	2	
A	246.764	18	120.629	18	19.487	17	1.146

Buna göre, x_1 değişkeninin regresyon kareler toplamında yaratacağı artış; 295.313-194.171=101.142 ve F=101.142/1.146=88.256 olarak bulunur. Bu ise b_1 için bulunan t istatistiğinin karesidir. Bulunan F istatistiği, seçilen α yanılma düzeyindeki p, n-p-1 serbestlik dereceli F tablo istatistiği ile karşılaştırılır. $F_{Tablo(\alpha=0.05;\ 1,18)} = 4.41$ olduğu için x_1 değişkeninin regresyon kareler toplamında yaratacağı artışın anlamlı olduğu söylenir. x_2 değişkeninin regresyon kareler toplamında yapacağı artış ise 295.313-68.026 = 227.277 ve F=227.277/1.146 ≅ 198.269 olarak bulunur. Bu ise b_2 için bulunan t değerinin karesidir.

Bulunanlar yardımıyla, bağımlı değişkeni açıklamakta, x_2'nin etkisinin x_1'e göre daha fazla olduğu söylenebilir. Çünkü, x_2 için bulunan kısmi F istatistiği x_1 için bulunandan daha büyüktür. Benzer yoruma t istatistikleri yardımı ile de gidilebilir.

Standartlaştırılmış Regresyon Katsayıları

Daha önce de belirtildiği gibi, örneğimize ilişkin standartlaştırılmış regresyon katsayıları; y, x_1 ve x_2 değişkenlerini (3.1) ile standartlaştırdıktan sonra, standartlaştırılmış değişkenlere çoklu regresyon çözümlemesinin uygulanması ile elde edilebilir. Burada, çözümlemeleri (7.67) yardımı ile yapalım. Değişkenlere ilişkin standart sapmalar $s_y = 4.0704$, $s_{x_1} = 0.9679$ ve $s_{x_2} = 1.1821$ olmak üzere b_1 ve b_2'ye ilişkin standartlaştırılmış regresyon katsayıları;

$$b_1^* = 2.402321\frac{0.9679}{4.0704} = 0.571 \quad b_2^* = 2.948635\frac{1.1821}{4.0704} = 0.856$$

olarak bulunur. Buradan, $z_y = 0.571(z_{x_1}) + 0.856(z_{x_2})$ elde edilir. Buna göre, hastanın tıbbi sorun sayısındaki 1 standart sapmalık bir artış, ameliyat sonrası hastanede kalış gün sayısında 0.571 standart sapmalık artış meydana getirirken, ameliyat öncesi hastanede kalış gün sayısındaki 1 standart sapmalık artış, ameliyat sonrası hastanede kalış gün sayısında 0.856 standart sapmalık artış meydana getirmektedir. Dolayısıyla, x_2 değişkeni modele daha fazla katkı yapmaktadır.

Regresyon Katsayılarının Güven Aralıkları

Regresyon katsayılarına ilişkin güven aralıkları (7.64) yardımıyla bulunabilir. % 95 güven aralıkları aşağıda verilmiştir.

b_0 *için güven aralığı;*

$$-0.503976 - 2.11\ (0.741949) \le \beta_0 \le -0.503976 + 2.11\ (0.741949)$$

$$-2.069 \le \beta_0 \le 1.061$$

b_1 *için* güven aralığı;

$$2.402321 - 2.11\ (0.25575) \le \beta_1 \le 2.402321 + 2.11\ (0.25575)$$

$$1.863 \le \beta_1 \le 2.942$$

b_2 *için* güven aralığı;

$$2.948635 - 2.11\ (0.209408) \le \beta_2 \le 2.948635 + 2.11\ (0.209408)$$

$$2.506 \le \beta_2 \le 3.390$$

olarak bulunur. Buna göre, örneğin, ameliyat öncesi hastanede kalış gün sayısı için evren regresyon katsayısı % 95 güvenilirlikle 2.5 ile 3.4 gün arasında değişir.

Çoklu Belirtme Katsayısı

(7.69) yardımıyla,

$$R^2 = \frac{295.31279}{314.8} = 0.938$$

olarak bulunur. Buna göre x_1 ve x_2 değişkenleri y'deki değişimi % 93.8 oranında açıklamaktadır.

Düzeltilmiş R^2 $(\overline{R}^2)$

(7.70)'den,

$$\overline{R}^2 = (0.938 - \frac{2}{20-1})(\frac{20-1}{20-2-1}) = 0.93$$

olur.

Çoklu Korelasyon Katsayısı

Çoklu belirtme katsayısının karekökünün alınması ile çoklu korelasyon katsayısı $R = \sqrt{0.938} = 0.968$ olarak bulunur. (7.68) yardımıyla $H_0 : \delta = 0$ ve $H_0 : \delta \neq 0$ için F=128.81 bulunur ve de x_1 ve x_2 ile y arasındaki R=*0.968*'lik ilişkinin anlamlı olduğu söylenir.

Kısmi Korelasyon (İlişki) Katsayıları

Örneğimize ilişkin korelasyon katsayıları (ilişki) matrisi Tablo 7.20'de verilmiştir.

Tablo 7.20. Örnek 7.6 İçin İlişki Matrisi

Değişkenler	y	x_1	x_2
y	1.000		
x_1	0.465	1.000	
x_2	0.785	–0.124	1.000

Ameliyat öncesi hastanede kalış gün sayısı (x_2) değişkeninin etkisi sabit tutulduğunda (yani, x_2'nin hem x_1 hem de y üzerindeki etkisi ortadan kaldırıldığında), y ile x_1 arasındaki kısmi korelasyon katsayısı Eşitlik (7.71) yardımıyla;

$$r_{y1.2} = \frac{0.465 - (-0.124)(0.785)}{\sqrt{(1-(-0.124)^2)(1-0.785^2)}} = 0.916$$

olarak elde edilir. x_1 sabit tutulduğunda y ile x_2 arasındaki kısmi korelasyon katsayısı ise $r_{y2.1}$=0.960 olarak bulunur. Dolayısıyla, y ile x_1 arasındaki 0.465'lik ilişki katsayısı, x_2'nin etkisi arıtıldığında 0.916'ya, y ile x_2 arasındaki 0.785'lik ilişki katsayısı x_1'in etkisi arıtıldığında 0.96'ya çıkmaktadır. Bu da değişkenlerin etkilerinin önemli ve x_2'nin modele katkısının x_1'e göre daha fazla olduğu konusunda bilgi verir. Diğer bir deyişle, bağımsız değişkenler içerisinde kestirici gücü en çok artıran değişken x_2 değişkenidir.

$H_0 : \rho_{y2.1} = 0$ hipotezine karşı $H_1 : \rho_{y2.1} \neq 0$ hipotezini test ederek yoruma gidersek, (7.73) yardımıyla ;

$$t = \frac{r_{y2.1}}{\sqrt{\frac{1-r_{y2.1}^2}{n-p-1}}} = \frac{0.96}{\sqrt{\frac{1-0.96^2}{20-2-1}}} = 14.081$$

olarak bulunur. Görüldüğü gibi bulunan t istatistiği b_2 katsayısının anlamlılığına ilişkin t istatistiğine eşittir (bak. Tablo 7.21.*a*). $t_H = 14.081 < t_{T(Sd=20-2-1,\alpha=0.05)} = 2.11$ olduğu için H_0 hipotezi kabul edilir ve x_1 sabit tutulduktan sonra y ile x_2 arasındaki kısmi korelasyon katsayısının anlamlı olduğu söylenir.

Kısmi Belirtme Katsayısı

$r_{y2.1}^2$=0.96^2= 0.92 olarak bulunur. Buna göre, y'deki (hastanede kalış gün sayısındaki) toplam değişimin x_1 (hastaların tıbbi sorun sayısı) tarafından açıklanabildiği kadarı açıklandıktan sonra, geriye kalan değişimin 0.92'lik kadarı x_2 (ameliyat öncesi hastanede kalış gün sayısı) değişkenince açıklanır.

Yarı Kısmi Korelasyon Katsayıları

x_1 değişkeni üzerinden x_2 değişkeninin etkisi kaldırıldığında y ile x_1 arasındaki yarı kısmi korelasyon katsayısı, $r_{y.x_1(x_2)}$, Eşitlik (7.74) yardımıyla:

$$r_{y.x_1(x_2)} = \frac{0.465 - 0.785 \times (-0.124)}{\sqrt{1-(-0.124)^2}} = 0.567$$

olarak bulunur iken, x_2 değişkeni üzerinden x_1 değişkeninin etkisi kaldırıldığında y ile x_2 arasındaki yarı kısmi korelasyon katsayısı, $r_{y.x_2(x_1)}$ ise,

$$r_{y.x_2(x_1)} = \frac{0.785 - 0.465 \times (-0.124)}{\sqrt{1-(-0.124)^2}} = 0.850$$

olarak elde edilir. Bu katsayıların kareleri ilgili değişken ile y arasındaki varyansı tanımlar.

Bulguların Özetlenmesi

İstenirse, katsayılara ve regresyon denklemine ilişkin bulgular bir tablo yardımıyla özetlenebilir. Örneğimize ilişkin bulgular Tablo 7.21.*a*, Tablo 7.21.*b* ve Tablo 7.21.*c*'de özetlenmiştir. Tablo 7.21.*a* ile Tablo 7.21.*b*'nin tek farkı korelasyon katsayılarının sunulmasıdır. Tablo 7.21.*c* oluşturulurken, Tablo 7.19 ve bu tabloya ilişkin açıklamalardan da yararlanılmıştır.

Tablo 7.21.a. Hastane Verisi İçin Özet İstatistikler

Değişken	b_j	$S(b_j)$	b_j *İçin Güven Sınırları*	*Beta*	*t*	*p*
x_1	2.402321	0.255750	1.86 - 2.94	0.571	9.393	0.0000
x_2	2.948635	0.209408	2.50 - 3.39	0.856	14.081	0.0000
Sabit	-0.503976	0.741949	-2.07 - 1.06	-	-0.679	0.5061
$n=20$	s=1.07066		$R^2 = 0.938$		(F=128.81, p=0.0000)	

Tablo 7.21.b. Hastane Verisi İçin Özet İstatistikler

Değ.	b_j	$S(b_j)$	*Beta*	*t*	*p*	***Korelasyonlar*** *r*	*Kısmi*	*Y.Kıs.*
x_1	2.40232	0.25575	0.571	9.393	0.000	0.465	0.916	0.567
x_2	2.94863	0.20941	0.856	14.081	0.000	0.785	0.960	0.850
Sabit	-0.50397	0.74195	–	-0.679	0.506	–	–	–
	$n=20$	s=1.07066	$R^2 = 0.938$	(F=128.81,	p=0.0000)			

Tablo 7.21.c. Hastane Verisi İçin Özet İstatistikler

Model	R	R^2	$\overline{R}^2$	s	R^2'deki değişim	F'deki Değişim	p
x_1	0.465	0.216	0.173	3.7026	0.216	4.963	0.039
$x_1 + x_2$	0.969	0.938	0.931	1.0707	0.722	198.322	0.000

Tablo 7.21.*b*'de ise regresyona ilişkin temel istatistikler korelasyon katsayıları ile birlikte sunulmuştur. Diğer taraftan, Tablo 7.21.*c*'de görüldüğü gibi, model sadece x_1 değişkeni ile oluşturulduğunda denklemin standart hatası 3.70 iken x_1 ve x_2 değişkenleri ile oluşturulduğunda bu hata 1.0707'ye düşmüştür. Ayrıca, x_1 değişkeni sonrasında modele x_2 değişkeni dahil edildiğinde, R^2 0.216'dan 0.938'e yükselmiş ve R^2'de 0.722'lik bir artma olmuştur (0.938–0.216=0.722). Bu artma anlamlıdır (sıfırdan farklıdır) (*F=198.322, p=0.000*). Buna göre, x_1 modelde iken x_2 değişkeninin modele eklenmesi sonucunda x_2'nin y'nin kestirimine olumlu katkı yaptığı söylenir. Daha önce de belirtildiği gibi istatistiksel yazılımların çoğunda, Tablo 7.21.*c*'ye benzer çıktıların elde edilebilmesi için regresyon menüsü içinde alt menüler vardır. Bu menülere, ileride göreceğimiz adımsal yöntemlerle değişken seçimi yerine modele girecek değişkenlerin araştırıcı tarafından belirlenerek modele tek tek alındığı durumlarda (aşamasıralı/hiyerarşik regresyon olarak bilinir) başvurulur. SPSS'de bu tür çıktıyı elde etmek için değişkenlerin istenilen sırada tek tek bloklanması gerekir.

Regresyon ve Kestirim

Gerek F testinin anlamlı olması gerekse de R^2 istatistiğinin 1'e yakın olması nedeniyle bulunan regresyon modelini kullanarak kestirimlerde bulunabiliriz (Not: Regresyon modelinin yüksek bir F ya da R^2 değerine sahip olması modelin kestirim geçerliği konusunda her zaman ayrıntılı bilgi vermez. Bu konu *artıkların incelenmesi* ve *regresyon modellerinin geçerliği* alt başlıklarında ayrıntılı olarak ele alınacaktır.) Örneğin, tıbbi sorun sayısı 1 ve ameliyat öncesi hastanede kalış gün sayısı 3 olan hastalar için ameliyat sonrası hastanede ortalama kalış gün sayısı;

$$\hat{y}_0 = -0.50398 + 2.402321(1) + 2.948635(3) = 10.7 \text{ gün}$$

olarak bulunur. Bu kestirime ilişkin standart hata, kestirimin ortalama bir değer olması nedeniyle Eşitlik (7.66) yardımıyla;

$$S(\hat{\mu}_0) = s\sqrt{\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\end{bmatrix}[X'X]^{-1}\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}} = 1.07066\ \sqrt{0.11498} = 0.363$$

olarak bulunur. Buna göre, tıbbi sorun sayısı 1 ve ameliyat öncesi hastanede kalış gün sayısı 3 gün olan hastaların ameliyat sonrası hastanede kalış gün sayısı güven sınırları ((7.31) nolu formülde $t_{(n-2,\alpha/2)}$ yerine $t_{(n-p-1,\alpha/2)}$ yazarak) % 95 güvenirlikle;

$$10.7 - t_{(17-2-1;\ \alpha=0.025)}(0.363) \le \hat{Y}_{\mu_0} \le 10.7 + t_{(17-2-1;\ \alpha=0.025)}(0.363)$$

$$10.7 - (2.11)\ (0.363) \le \hat{Y}_{\mu_0} \le 10.7 + (2.11)\ (0.363)$$

$$10.0 \le \hat{Y}_{\mu_0} \le 11.5$$

gün arasında değişir.

Hastane verisi (Tablo 7.17) için $\hat{y}_i$ kestirim değerleri, e_i artıkları ve $\hat{y}_i$ kestirim değerlerinin ortalaması için % 95 güven sınırları Tablo 7.22'de verilmiştir.

Tablo 7.22. Hastane Verisi İçin Kestirim Değerleri, Artıklar ve Kestirime İlişkin İstatistikler

No	*y*	x_1	x_2	$\hat{y}_i$	e_i	*s.hata*	*Alt S*	*Üst S*
1	6	1	1	4.85	1.153	0.427	3.9	5.7
2	6	2	1	7.25	-1.249	0.338	6.5	8.0
3	11	2	2	10.20	0.802	0.242	10.0	10.7
4	9	1	3	10.74	-1.744	0.363	10.0	11.5
5	16	3	3	15.55	0.451	0.425	14.6	16.4
6	16	1	5	16.64	-0.642	0.657	15.3	18.0
7	4	1	1	4.85	-0.847	0.427	3.9	5.7
8	8	3	1	9.65	-1.651	0.421	8.7	10.5
9	11	2	2	10.20	0.802	0.242	9.7	10.7
10	13	3	2	12.60	0.400	0.368	11.8	13.4
11	13	1	4	13.70	-0.693	0.488	12.7	14.7
12	9	1	2	7.80	1.204	0.336	7.0	8.5
13	17	3	3	15.55	1.451	0.425	14.6	16.4
14	17	2	4	16.10	0.905	0.459	15.1	17.0
15	12	4	1	12.05	-0.054	0.609	10.7	13.3
16	6	1	1	4.85	1.153	0.427	3.9	5.7
17	5	1	1	4.85	0.150	0.427	3.9	5.7
18	12	3	2	12.60	-0.600	0.368	11.8	13.4
19	8	1	2	7.80	0.204	0.336	7.0	8.5
20	9	2	2	10.20	-1.198	0.242	9.7	10.7

Örnek 7.7'de ise 6 bağımsız değişkenli bir çalışmaya ilişkin veriler ve çoklu regresyon sonuçları tartışılmıştır.

Örnek 7.7. Hastane çalışanlarının, hastane yöneticilerinin performansını değerlendirmeleri amacıyla bir çalışma planlanıyor ve bu amaçla 30 özel hastane örnekleme alınıyor. Her hastaneden rasgele seçilen 35'er çalışana hastane yöneticisi hakkında anket veriliyor. Her çalışanın ilgili soruya verdiği yanıtlar daha sonra puana çevriliyor ve her soru için 35 çalışanın ortalaması çalışmaya alınıyor. Elde edilen ortalama puanların yüksek olması yöneticinin ilgili soruya ilişkin performansının istenen düzeyde olduğunu göstermektedir. Çalışma sonucunda bağımlı ve bağımsız değişkenler aşağıdaki gibi oluşturulmuştur. Veriler Tablo 7.23'de, çoklu regresyon çözümlemesi sonuçları ise Tablo 7.24.*a* ve *b*'de verilmiştir.

y : *Yöneticinin performansına çalışanlar tarafından verilen tümel puan*

x_1 : *Çalışanların şikayetlerinin yönetici tarafından dikkate alınma puanı*

x_2 : *Özel ayrıcalıklara izin vermeme puanı*

x_3: *Yeni şeyleri öğrenmeye fırsat verme puanı*

x_4 : *Bireysel yükseltmelerde performansı dikkate alma puanı*

x_5: *Düşük performansı aşırı derecede eleştirme puanı*

x_6: *Çalışanları daha iyi işlere atama puanı*

Tablo 7.23. Hastane Yöneticisi Verisi (*)

Gözlem	Y	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	43	51	30	39	61	92	45
2	63	64	51	54	63	73	47
3	71	70	68	69	76	86	48
4	61	63	45	47	54	84	35
5	81	78	56	66	71	83	47
6	43	55	49	44	54	49	34
7	58	67	42	56	66	68	35
8	71	75	50	55	70	66	41
9	72	82	72	67	71	83	31
10	67	61	45	47	62	80	41
11	64	53	53	58	58	67	34
12	67	60	47	39	59	74	41
13	69	62	57	42	55	63	25
14	68	83	83	45	59	77	35
15	77	77	54	72	79	77	46
16	81	90	50	72	60	54	36
17	74	85	64	69	79	79	63
18	65	60	65	75	55	80	60
19	65	70	46	57	75	85	46
20	50	58	68	54	64	78	52
21	50	40	33	34	43	64	33
22	64	61	52	62	66	80	41
23	53	66	52	50	63	80	37
24	40	37	42	58	50	57	49
25	63	54	42	48	66	75	33
26	66	77	66	63	88	76	72
27	78	75	58	74	80	78	49
28	48	57	44	45	51	83	38
29	85	85	71	71	77	74	55
30	82	82	39	59	64	78	39

(*) Att. Sur. Data. Reg. Analysis by Example. S. Chatterjee ve B. Price, 1991, Sayfa 70. John Wiley-Sons Inc. Yayınevi'nin izniyle kullanılmıştır. Her hakkı saklıdır.

Tablo 7.24.a. Hastane Yöneticisi Verisi İçin Çoklu Regresyon Sonuçları

Değ.	b_j	$S(b_j)$	*Beta*	t	p	*Korelasyonlar* r	*Kısmi*	*Y.Kısmi*
x_1	**0.613**	0.1610	0.671	3.81	0.001	0.825	0.622	0.411
x_2	**-0.073**	0.1357	-0.073	-0.54	0.595	0.426	-0.112	-0.058
x_3	**0.320**	0.1685	0.309	1.90	0.070	0.624	0.368	0.205
x_4	**0.081**	0.2215	0.070	0.37	0.715	0.590	0.077	0.040
x_5	**0.038**	0.1470	0.031	0.26	0.796	0.156	0.054	0.028
x_6	**-0.217**	0.1782	-0.183	-1.22	0.235	0.155	-0.246	-0.131
Sabit	**10.787**	11.5890		0.93	0.361			

n=30 R^2 = 0.7326 s = 7.068

Değişkenlerin modele aşamalı olarak sıra ile alınması durumunda R^2 ve diğer istatistiklerde meydana gelen değişiklikler Tablo 7.24.*b*'dir. Bu tablodaki *Model* kolonunda değişkenler yerine sadece indisleri verilmiştir.

Tablo 7.24.b. Hastane Yöneticisi Verisi İçin Özet İstatistikler

Model	*R*	R^2	$\overline{R}^2$	*s*	R^2'deki *Değişim*	*F*'deki *Değişim*	*P*
1	0.825	0.681	0.670	6.9933	0.681	59.861	0.000
1+2	0.826	0.683	0.660	7.1021	0.002	0.149	0.702
1+2+3	0.846	0.715	0.682	6.8630	0.032	2.914	0.100
1+2+3+4	0.846	0.715	0.670	6.9962	0.000	0.019	0.891
1+2+3+4+5	0.846	0.715	0.656	7.1388	0.000	0.011	0.917
1+2+3+4+5+6	0.856	0.733	0.663	7.0680	0.017	1.483	0.236

Tablo 7.24.*a*'da görüldüğü gibi x_2'deki 1 birimlik artış *y*'de 0.073 birimlik azalışa neden olmaktadır. Yani, özel ayrıcalıklara izin vermeme puanı arttıkça, yönetici performansına verilen puanda azalma olmaktadır.

Katsayılara ilişkin *t* istatistikleri de (ki kısmi *F* istatistikleri *t* istatistiklerinin karesidir) bu iki değişkenin sıfırdan farklı regresyon katsayılarına sahip olduğunu, dolayısıyla bu katsayıların anlamlı olduğunu göstermektedir. x_1'e ilişkin *t* istatistiği x_2'ye ilişkin *t* istatistiğinden daha büyük olduğu için x_1'in modele katkısının daha fazla olduğu söylenebilir. Ayrıca, standartlaştırılmış katsayılar (Beta) yardımıyla, modele en çok katkı yapan ya da bağımlı değişkendeki değişimi en çok açıklayan iki değişkenin sırasıyla x_1 ve x_3 olduğu anlaşılmaktadır. Bu sonuçlara kısmi ve yarı kısmi (part) korelasyonların incelenmesi ile de ulaşılabilir. R^2 istatistiğinin 0.73 olarak bulunması, hastane yöneticisi tarafından yapılan işlerin değerlendirilmesinde, toplam değişimin % 73'ünün ele alınan altı bağımsız değişken tarafından açıklanabilmekte olduğunu göstermektedir.

Tablo 7.24.*b* incelendiğinde ise modele ilk olarak x_1 alındığında R^2'deki artış anlamlı bulunmakta iken diğer değişkenlerin modele tek tek eklenmesi ile R^2'de meydana getirdikleri artışlar anlamlı değildir.

Altı bağımsız değişkenli çoklu regresyon modeli (tümel model) için varyans analizi tablosu Tablo 7.25'de verilmiştir.

Tablo 7.25. Tümel Model İçin Varyans Analizi Sonuçları

DK	*KT*	*Sd*	*KO*	*F*
Toplam	4297.0			
R	3148.0	6	524.66	10.50
Artık (RA)	1149.0	23	49.95	

$F_{Hesap} = 10.50 > F_{Tablo(6,23;\ \alpha=0.01)} = 3.71$ olduğu için regresyon katsayılarının sıfıra eşit olduğu şeklindeki H_0 hipotezi ($H_0 : \beta_j = 0$) reddedilir ve en az bir regresyon katsayısının sıfırdan farklı olduğu söylenir. Tablo 7.24'de de bazı katsayılara (x_1 ve x_3) ilişkin büyük *t* istatistikleri vardır.

Ancak, bazen, regresyon katsayılarını test eden *t* değerlerinin hiçbiri anlamlı değilken *F* istatistiği anlamlı bulunabilmektedir. Böylesi bir sonuç; "değişkenlerin hiçbiri, tek tek ele alındığında bağımlı değişkendeki değişimi açıklayıcı bir güce sahip değilken, tüm

değişkenlerin oluşturduğu küme, bağımlı değişkendeki değişimin önemli bir bölümünü toplu olarak açıklar" anlamına gelmektedir. Böyle durumlar ortaya çıktığında çok dikkatli olunmalıdır. Çünkü, bu durum, incelenen veri ile ilgili bir sorunun göstergelerinden biridir. ***Çoklubağlantı*** (multicollinearity) olarak adlandırılan bu durum, bağımsız değişkenlerden bazılarının oldukça yüksek ilişkiye sahip olması durumudur. Bu sorun üzerinde daha sonra durulacaktır.

Regresyon Katsayılarının Bir Bölümünün Sıfıra Eşit Olup Olmadığının Test Edilmesi

y bağımlı değişkeninin, yeterli olabilecek birkaç değişken tarafından açıklanıp açıklanamayacağını incelemek istediğimizde, katsayılara ilişkin t değerlerinden yararlanılabilir. Örneğimiz için, x_1 ve x_3'e ilişkin katsayıların anlamlı olduğu görülmüştü. Bu aşamada incelenmek istenen, x_1 ve x_3 değişkenlerinin y bağımlı değişkenini altı değişkenin tümü kadar açıklayıp açıklayamayacağıdır. Bu amaçla, örneğimiz için H_0 hipotezi; $H_0 : \beta_2 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 0$ iken alternatif hipotez; bunların tümü sıfıra eşit değildir şeklinde kurulacaktır. Sorunu çözebilmek için indirgenmiş modele ilişkin kareler toplamlarına gereksinim vardır. x_1 ve x_3 bağımsız değişkenler olarak alındığında kareler toplamları Tablo 7.26'da verilmiştir. Tablo 7.26'dan, iki bağımsız değişkenli model için $R^2 = 3042.3/4297 = 0.708$ olarak bulunur.

Tablo 7.26. İndirgenmiş Model İçin Kareler Toplamları

DK	*KT*
Toplam	4297.0
R	3042.3
A (ARTIK)	1254.6

Buradan, (7.61) yardımıyla F istatistiğini bulacak olursak,

$$F = \frac{(1254.6 - 1149)/(6+1-3)}{1149/(30-6-1)} = \frac{(1254.6-1149)/4}{1149/23} = 0.528$$

olarak elde edilir. $F_H = 0.528 < F_{T(4,23;\ \alpha=0.05)} = 2.80$ olduğu için H_0 hipotezi kabul edilir. Buna göre, x_1 ve x_3 değişkenleri y'deki değişimi, x'lerin tümünün oluşturduğu küme kadar açıklamaktadır denir. Diğer bir deyişle, altı bağımsız değişkenli modelden iki bağımsız değişkenli modele geçmek R^2'de % 2.46'lık (0.7326–0.708=0.0246) bir azalmaya neden olmuştur. Benzer sonuçlara (7.62) ile de ulaşılabilirdi. Tümel ve indirgenmiş modele ilişkin çoklu belirtme katsayıları sırasıyla $R^2 = 0.7326$ ve $R^2 = 0.708$ olmak üzere Eşitlik (7.62)'den,

$$F = \frac{(0.7326 - 0.708)/(6-2)}{(1-0.7326)/(30-6-1)} = 0.528$$

olarak bulunur. İndirgenmiş modele ilişkin sonuçlar Tablo 7.27'de verilmiştir.

Tablo 7.27. İndirgenmiş Modele İlişkin Sonuçlar

Değişkenler	b_i	$S(b_i)$	*BETA*	t	P
x_1	0.6435	0.1185	0.704	5.432	0.0000
x_3	0.2111	0.1344	0.204	1.571	0.1278
Sabit	9.8709	7.0612		1.398	0.1735
	n=30	$R^2 = 0.708$	$s = 6.81678$		

Örnek 7.8. Bir çalışmada çocukların zeka düzeyleri (y), ağırlıkları (x_1) ve yaşları (x_2) ölçülüyor. Korelasyon matrisi aşağıdaki gibi elde edildiğine göre yaş değişkeni sabit tutulduğunda ağırlık ile zeka puanı arasındaki kısmi korelasyon katsayısını bulunuz.

Değişken	Zeka Puanı (y)	Ağırlık (x_1)	Yaş (x_2)
Zeka Puanı (y)	*1.00*		
Ağırlık (x_1)	*0.60*	*1.00*	
Yaş (x_2)	*0.70*	*0.75*	*1.00*

Yukarıdaki tabloda görüldüğü gibi zeka puanı ile ağırlık arasında 0.60'lık bir ilişki vardır. Yaş değişkeninin etkisi sabit tutulduğunda (yaşın hem zeka puanı hem de ağırlık üzerindeki etkisi ortadan kaldırıldığında) ağırlık ile zeka puanı arasındaki kısmi korelasyon katsayısı Eşitlik (7.71) yardımı ile aşağıdaki gibi bulunur.

$$r_{y2.1} = \frac{0.60 - 075 \times 0.70}{\sqrt{(1-0.75^2)(1-0.70^2)}} = 0.16$$

olarak bulunur. Dolayısıyla, ağırlık ve zeka puanı arasındaki 0.60'lık ilişki katsayısı, yaşın etkisi ortadan kaldırıldıktan sonra 0.16'ya düşmüştür. Bu da iki değişken arasında ilişki olmadığını gösterir.

7.4. REGRESYONDA MODELİN YETERLİĞİ İLE İLGİLİ ÖLÇÜLER

Regresyon çözümlemesi sonucunda ulaşılan modelin doğru olduğu biliniyorsa, daha ileri bir analize gerek kalmadan çalışma sonlandırılabilir. Ancak, yine de elde edilen sonuçlar üzerinde dikkatli bir denetim yapmadan sonuç modeli kullanmamak gerekir. Bu denetim süreci, genellikle, *modelin yeterliğinin saptanması süreci* olarak bilinir. Modelin yeterliğinin saptanmasına ilişkin çeşitli ölçülerden yararlanılır. Bunlar arasında, belirtme katsayısının bulunması, artıkların incelenmesi (etkili, uzak ve aykırı gözlemlerin belirlenmesi), artık grafiklerinin çizimi, çoklubağlantı sorununun olup olmadığının saptanması, ... vb. işlemler yer alır. R^2 'nin elde edilmesi ve yorumlanması konusunda daha önce bilgi verilmiş ve sonuç modele ilişkin anlamlı bir F istatistiğine ulaşılmasının ve de büyük bir R^2 değeri elde edilmesinin her zaman uyumun bir göstergesi olamayacağı belirtilmişti. Bu nedenle, modelin yeterliğine ilişkin diğer ölçülerin bir bölümünde, test istatistiklerinin ve katsayıların belirlenmesinde her bir gözlemin rolüne önem verilerek veri ayrıntılı bir şekilde test edilir. Çünkü, elde edilen

tümel istatistikler, sadece bir gözleme bile bağlı olabilir ve bu gözlemin veriden çıkartılması tümel analiz sonuçlarını ciddi şekilde değiştirebilir.

Regresyon çözümlemesinin bu ikinci aşamasında, verideki her bir gözlem için değişik istatistikler elde edilir. Bu istatistiklere, ***gözlem istatistikleri*** (case statistics), yapılan işleme ise ***gözlem analizi*** (case analysis) adı verilir. Gözlem analizi öncesinde, kullanılan modelin gözlem verisini ne kadar temsil ettiği konusu üzerinde durulması daha anlamlıdır. Bu amaçla, artık terimlerinin incelenmesi gerekecektir. Çünkü, daha önce de belirtildiği gibi, model denklemine ilişkin varsayımlarda, artıklara ilişkin varsayımlar söz konusudur ve artıklara ilişkin varsayımların sağlanmaması durumunda elde edilen regresyon modeli geçerli olmayacaktır.

Artıkların ve gözlem değerlerinin incelenmesine geçmeden önce, Anscombe'nin klasikleşmiş olan ve anlamlı bir R^2 değerine ve anlamlı bir t ve F istatistiklerine ulaşmanın neden her zaman iyi bir gösterge olamayacağını gösteren çalışmasına değinmekte yarar vardır. Bu çalışmada, aynı regresyon denklemini ($\hat{y}_i$=3+0.5x) veren dört ayrı veri kümesi vardır (Tablo 7.28) ve bu tablonun altında verilen istatistikler dört ayrı veri kümesi için de aynıdır.

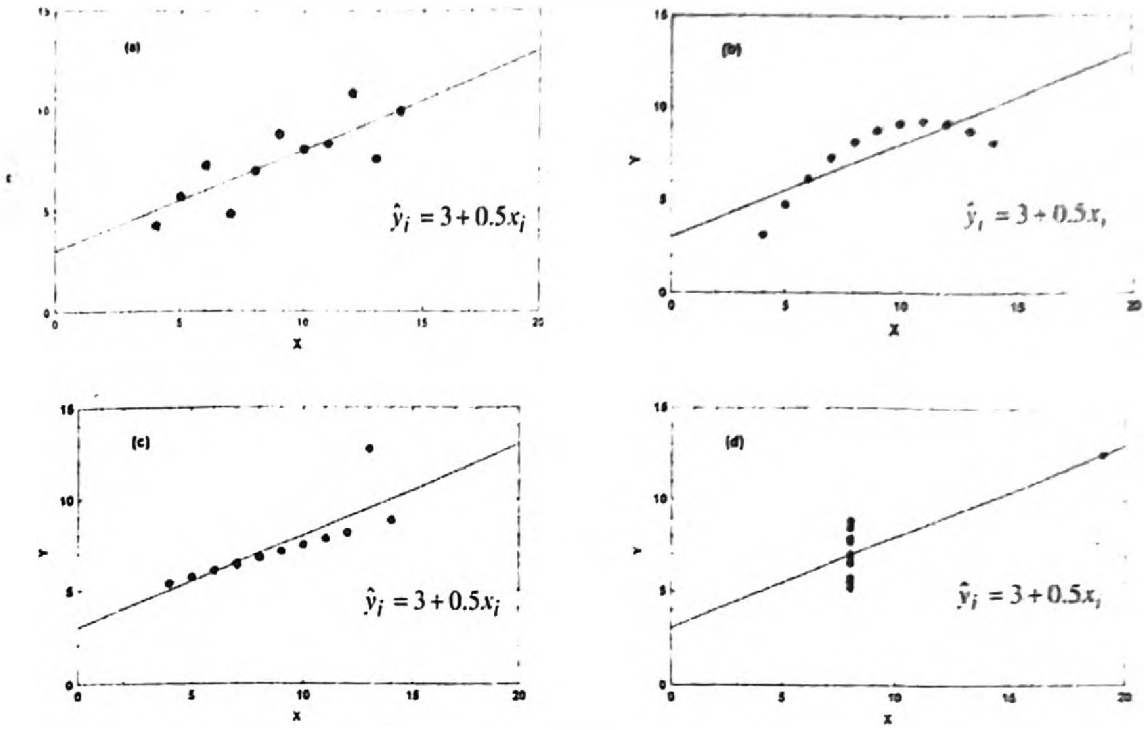
Regresyon denklemleri ve istatistikleri aynı olan dört veri kümesine ilişkin saçılım grafikleri çizildiğinde (Grafik 7.17), a kümesi için çizilen ilk grafik dışında, doğrusal model ile nokta dağılımları arasında bir uyumdan söz edilemeyeceği görülmektedir. Çünkü, *b* grafiği ikinci dereceden bir fonksiyonu ifade etmekte iken, *c* grafiğinde regresyon katsayılarını değiştirecek nitelikte olan bir nokta söz konusudur. *d* grafiğinde ise doğrusal ilişki bir gözlem tarafından belirlenmektedir. Regresyon doğrusunu belirleyen bu tür uç (aşırı) noktaların veriden çıkartılması sonucunda çok farklı bir durum ortaya çıkacak ve örneğin *d* grafiğinde x ile y arasında bir ilişkiden söz edilemeyecektir.

Tablo 7.28. Anscombe Verisi

	Küme a		*Küme b*		*Küme c*		*Küme d*	
Gözlem	x	y	x	y	x	y	x	y
1	10	8.04	10	9.14	10	7.46	8	6.58
2	8	6.95	8	8.14	8	6.77	8	5.76
3	13	7.58	13	8.74	13	12.74	8	7.71
4	9	8.81	9	8.77	9	7.11	8	8.84
5	11	8.33	11	9.26	11	7.81	8	8.47
6	14	9.96	14	8.10	14	8.84	8	7.04
7	6	7.24	6	6.13	6	6.08	8	5.25
8	4	4.26	4	3.10	4	5.39	19	12.50
9	12	10.84	12	9.13	12	8.15	8	5.56
10	7	4.82	7	7.26	7	6.42	8	7.91
11	5	5.68	5	4.74	5	5.73	8	6.89
n=11	$\bar{x}=9$	$\bar{y}=7.5$	*RKT*=27.5		*AKT*= 13.75		$R^2=0.667$	

Ancak incelenen birkaç değişken varsa, örneğin *d* grafiğindeki gibi bir durumu verinin nokta grafiğini çizerek grafiksel olarak incelemek olanaklı değildir. Diğer taraftan, bu gibi noktaların varlığından da haberdar olmak isteriz.

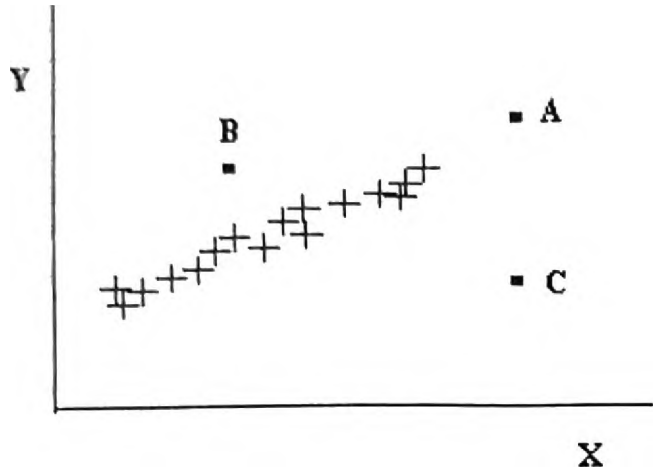
İleride ayrıntılı olarak göreceğimiz gibi, diğerlerine göre ***büyük artık değere*** sahip gözlemlere "**aykırı değer**" (outlier) denir ve bu gözlemlerin aykırı değer olup olmadığı çeşitli yöntemlerle incelenebilir. Ancak, *d* kümesindeki uç noktaya bu açıdan baktığımızda, e_i artık değerinin sıfır olduğunu görürüz.



Grafik 7.17. Anscombe Verisi Grafikleri

Çünkü bu nokta regresyon doğrusu üzerindedir. Bu nedenle, bu gözlemin aykırı değer olamayacağı ve bu gözlem için artıkların incelenmesinin birşey vermeyeceği görülür. Ancak bu nokta (çok) **etkili bir gözlemdir** (influential point). Bu gözlemin ya da buna benzer gözlemlerin veriden çıkartılması, elde edilen modeldeki regresyon katsayılarında ve $\hat{y}_i$ kestirim değerlerinde önemli değişikliklere neden olur. Örneğin, *AKO* büyür. Benzer şekilde, *c* kümesine ilişkin grafikte, genel eğilimin dışında kalan nokta da regresyon katsayılarını ciddi şekilde değiştireceği için bir etkili gözlemdir. Etkili gözlemlerin araştırılması için de değişik ölçütler vardır. *c* kümesindeki bu gözlem, aynı zamanda büyük artıklı bir gözlemdir. Çünkü, regresyon doğrusuna olan uzaklığı diğerlerine göre oldukça fazladır.

Yine *d* veri kümesine ve ilgili grafiğe dönersek, en sağda kalan bu "sorunlu" nokta artığın sıfır olması nedeniyle bir aykırı değer değil iken, *x* değerlerine uzaklığı nedeniyle bir aykırı değerdir. Diğer bir deyişle, bu uç nokta, *x* uzayında bir aykırı değerdir. *x* uzayında aykırı değer olan bu noktaya "**büyük gözlem uzaklığına sahip nokta**" (high leverage point) denir. Bir noktanın uzaklığı (leverage of a point), $x_1, x_2, \ldots, x_p$ bağımsız değişken uzayında o noktanın ayrılma ölçüsüdür. Şimdi, Grafik 7.18'i inceleyelim.



Grafik 7.18. Uzak, Etkili ve Aykırı Gözlemler

Grafik 7.18'de (+) işaretli noktalar *x* ve *y* değerlerinin oluşturduğu nokta grafiği göstermektedir. Grafik 7.17-*d*'den farklı olarak bu grafikteki değişkenler arasında bir ilişki söz konusudur. Bu ilişkiye *A*, *B* ve *C* gibi üç noktayı sırasıyla ekleyelim.

Bu veriye hem *x* hem de *y* değişkenlerinde aşırı bir değer olan *A* noktasının (gözleminin) eklenmesi ile eğilimde bir değişiklik olmayacaktır. Diğer bir deyişle, *A* noktası regresyon katsayılarında bir değişiklik yaratmayacak ancak, regresyon katsayılarına ilişkin standart hataları etkileyebilecektir. Ayrıca, bu noktaya ilişkin artık da oldukça küçük olacaktır. Özet olarak, bu nokta aykırı bir değer olmadığı gibi, etkili bir gözlem de değildir. Ancak, bu nokta *x* uzayında aykırı bir değerdir. Çünkü *A* gözlemi diğer x'lerin tanım aralığının oldukça dışındadır. Genelde, uzak gözlemler (high leverage points) etkili gözlem (influential point) değil ise model için pek sorun yaratmamaktadır.

İlişkiye *B* noktasını eklediğimizi düşünelim. Bu nokta, *x*'in merkezine yakın olduğu için *x* uzayında bir uzak gözlem değildir. Ancak, belirgin bir şekilde bir aykırı değer ve etkili bir gözlemdir. Çünkü sırasıyla, bu gözlem artık değeri büyük bir gözlemdir ve bu gözlemin hesaplamalara katılması belki eğimi değiştirmeyebilecek ancak, doğrunun *y* eksenini kestiği noktayı ise değiştirecektir. Ayrıca, bu noktanın varlığı, artık varyansını ve dolayısıyla regresyon katsayılarının varyanslarını değiştirecektir.

Eğer veriye *C* noktası eklenirse, bu nokta açık bir şekilde bir aykırı değerdir. Çünkü büyük bir artığa sahip olacaktır. Bu nokta, aynı zamanda *x* uzayında bir aykırı değerdir (büyük gözlem uzaklığına sahip gözlem). Çünkü, *x* uzayında bir uç noktadır. Diğer taraftan, hesaplamalara katılması durumunda katsayılarda değişiklik yapacağı için de bir etkili gözlemdir.

Özetlenecek olursa, bazı gözlemler aykırı ve/ya da gözlem uzaklığı büyük ve/ya da etkili gözlem olarak belirlenebilir. Bu nitelendirmelerden birine sahip bir gözlemin yazım hatalarından kaynaklanıp kaynaklanmadığı, bu veriye uygun olup olmadığı ve normal olmayan bir durumu temsil edip etmediği dikkatli bir şekilde incelenmelidir.

Aykırı gözlemler üzerinde yapılacak incelemeler üzerinde ise daha dikkatle durulmalıdır.

Büyük gözlem uzaklığına sahip gözlemler etkili gözlem değilse bir sorun yaratmamaktadır. Ancak, büyük gözlem uzaklığına sahip etkili gözlemler dikkatli bir şekilde incelenmelidir. Diğer taraftan, aykırı gözlemlerin etkili gözlem olması ya da etkili gözlemlerin aykırı değer olması sözkonusu olmayabilir.

Bazen, aykırı gözlemler verinin yapısını bozmakla birlikte verinin yanlış girilmesi, ölçüm aracının yanlış ölçmesi, hatalı ölçüm alınması, ... gibi *açıklanabilen bir olayın sonucu* ortaya çıkabilirler. Böyle durumlarda, eğer olanaklı ise bu değerler düzeltilmeli, eğer düzeltilemiyorsa veriden silinmelidir. Bazen de genel eğilimin dışına çıkan ancak akla çok yatkın bir aykırı değerle karşılaşılabilir. Bu gözlemin veriden silinmesi, modelin veriye uyumunu artırmakla birlikte bu uyumun beraberinde bazı tehlikeleri de getirir. Örneğin, kestirime ilişkin olarak araştırıcıyı yanlış yönlendirebilir.

Yapılan incelemeler sonrasında sorunlu gözlemler hemen veriden silinmemeli, bu gözlemler olmadan model yeniden oluşturulmalı ve sonuçlar bir önceki modelle karşılaştırılarak incelenmelidir.

7.4.1. Gözlem Uzaklığının Araştırılması

Daha önce de belirtildiği gibi, x uzayında aykırı değer olan bir nokta, büyük gözlem uzaklığına sahiptir. Çoğunlukla p_{ii} ile gösterilen gözlem uzaklığı değeri, "*i.* gözlem noktasının, değişkenlerin oluşturduğu elipsoid merkezine uzaklığının bir ölçüsü olup ***0 ile 1 arasında değişir*** $(0 \le p_{ii} \le 1)$. Gözlem uzaklığı değeri 1'e yaklaştıkça, ilgili gözlemin veri merkezine uzaklığı artar. X matrisi, ilk kolonu 1'lerden, diğer kolonları x_i değişken değerlerinden oluşan veri matrisi olmak üzere $n \times n$ boyutlu P matrisi,

$$P = p_{ij} = X(X'X)^{-1}X' \qquad (7.75)$$

olarak yazılırsa, p_{ii} köşegen elemanları *i.* gözlem noktasına ilişkin gözlem uzaklığını verir. $\sum_{i=1}^{n} p_{ii} = p+1$ olduğu için p_{ii} değerlerinin ortalaması $(p+1)/n$ 'e eşittir. Eşitlik (7.75) ile verilen P matrisinde (bu matris y'yi kestirmekte kullanıldığı için *şapka* ya da *hat* matrisi olarak adlandırılmıştır), p_{ii} köşegen elemanları hat değerleri olarak da bilinir. p_{ii} gözlem uzaklığı değerlerinin (*hat değerlerinin*) tanımı daha önce verdiğimiz ve aşağıda tekrar tartışacağımız ***Mahalanobis uzaklığı*** kavramı ile benzerdir. Bir bağımlı bir bağımsız değişkenin olduğu basit doğrusal regresyonda gözlem uzaklığı (p_i):

$p_i = (1/n) + (x_i - \bar{x})^2 / (\sum_{i=1}^{n} x_i^2) - (1/n)(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2$ ile kolayca hesaplanabilir.

Genellikle, $2(p+1)/n$ ***'den büyük*** p_{ii} ***değerlerine sahip gözlemler, büyük gözlem uzaklığına sahip (high leverage) noktalar olarak belirtilir.*** Büyük gözlem uzaklığına

sahip gözlemlerin belirlenmesinde kullanılan daha ayrıntılı değişik yaklaşımlar da vardır. Bunlardan biri F dağılımı yaklaşımı ile yapılır. Buna göre,

$$p_{ii} > \frac{nFp + (n - p - 1)}{nFp + n(n - p - 1)} \qquad (7.76)$$

koşulunun sağlanması durumunda, p_{ii} gözleminin x uzayında bir aykırı değer olduğu söylenir. Burada F değeri seçilen α yanılma düzeyinde p ve n-p-1 serbestlik dereceli F tablo istatistiğidir.

Konuya ilişkin bir diğer pratik yaklaşım parametre sayısı dikkate alınarak yapılmaktadır. Tablo 7.29'da, (n-p-1)>30 olduğu durumlarda değişik parametre sayılarında (p+1), p_{ii} değerlerinin %95'inin içinde bulunduğu kesim noktaları aşağıda verilmiştir.

Tablo 7.29. (n-p-1)>30 Olduğunda, Bazı Parametre Sayılarında (p+1), p_{ii} Değerlerinin % 95'inin İçinde Bulunduğu Yaklaşık Kesim Noktaları

Eğer p+1	*% 95 Kesim Noktası*
2'den büyükse	*2.5(p+1)/n*
6'dan büyükse	*2.0(p+1)/n*
15'den büyükse	*1.5(p+1)/n*

Buna göre, örneğin n=37 ve p=5 ise, Eşitlik (7.76) yardımıyla α=0.05 için yaklaşık 0.31 olarak bulunan kesim noktası, Tablo 7.29 yardımıyla 2(5+1)/37=0.32 olarak bulunur.

Bazı kaynaklarda, bağımsız değişken sayısının *10*'dan az ya da gözlem sayısının *50*'den az olduğu durumlarda kesim noktası olarak *3(p+1)/n*, değişken sayısının *10*'dan fazla ve gözlem sayısının *50*'nin üzerinde olduğu durumlarda ise kesim noktası olarak *2(p+1)/n* önerilmektedir.

Bu aşamada tekrar hatırlatmak gerekirse, diğer gözlemlerle karşılaştırıldığında, x uzayında aykırı değer olan bir "uzak gözlem", etkili bir gözlem olmayabilir.

Mahalanobis Uzaklığı

Mahalanobis uzaklığı Bölüm 4'de Eşitlik (4.3) ile verilmişti. Bilindiği üzere, m_i^2 değerleri, X veri matrisindeki herhangi bir gözlemin, verinin merkezinden (ortalama vektöründen) uzaklığının bir ölçüsüdür. m_i^2 değerleri büyüdükçe, ilgili gözlemin veri merkezinden uzaklığı artar. Bağımsız değişken sayısı bir tane olduğunda, bağımsız değişkene z dönüşümü yapılır ve z değerlerinin karesi alınırsa, her bir gözleme ilişkin Mahalanobis uzaklığı kolayca bulunabilir.

Diğer gözlemlere göre büyük Mahalanobis uzaklığına sahip gözlemler, bağımsız değişken ya da değişkenler kümesinde aşırı (aykırı) gözlemlerin varlığı konusunda bilgi verir. Diğer bir deyişle, bir gözlemin *uzak gözlem* olup olmadığı Mahalanobis uzaklığı ile de araştırılabilir (Bak. Bölüm 4, Aşırı Değerli Gözlemlerin Araştırılması, Madde 7).

Mahalanobis uzaklığının p_{ii} değerlerine bağlı formülleri de vardır. Burada bunlara değinilmeyecektir. X veri kümesindeki bir gözlemin aykırı bir gözlem olup olmadığının m_i^2 değerleri ile araştırılması konusunda Bölüm 4'de ayrıntılı bilgi verilmişti.

Örnek 7.9. Tablo 7.17'deki n=20 gözlemli **hastane verisi** için p_{ii} ve m_i^2 değerleri aşağıda bulunmuş ve yorumlanmıştır. Bu örneğe ilişkin olarak X, X', $X'X$ ve $(X'X)^{-1}$ matrisleri daha önce verilmişti. Eşitlik (7.75) yardımıyla P matrisi;

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ . & . & . \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.480228 & -0.12089 & -0.09327 \\ -0.12089 & 0.05706 & 0.005803 \\ -0.09327 & 0.005803 & 0.038255 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & .. & 1 \\ 1 & 2 & .. & 2 \\ 1 & 1 & .. & 2 \end{bmatrix}$$

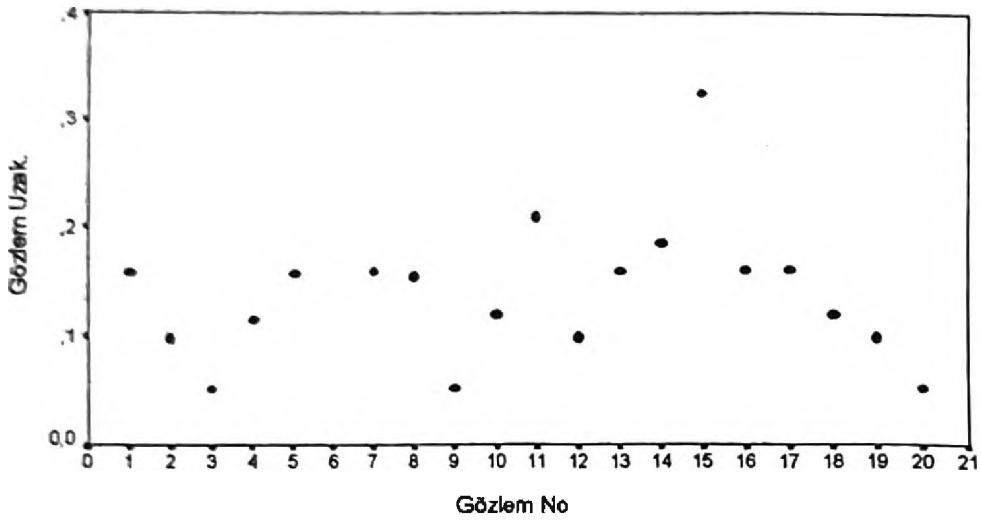
olarak yazılır. Bu çarpım sonucunda bulunacak ***20×20'lik P matrisi***nin köşegen elemanları, gözlem uzaklığı değerlerini verecektir. Gözlem uzaklıkları (p_{ii}) ve Mahalanobis uzaklıkları (m_i^2) Tablo 7.30'da verilmiştir.

Tablo 7.30'da görüldüğü gibi, p_{ii} köşegen elemanlarından hiçbiri 1'e yakın değildir. $2(p+1)/n$ yaklaşımı yardımıyla, gözlem uzaklığı 2(2+1)/20=0.30'un üzerinde olan gözlemlerin x uzayında birer aykırı gözlem olduğu söylenebilir. Buna göre örneğimizde 6. ve 15. gözlemler x uzayında birer aykırı gözlem olarak nitelendirilebilir. Aynı gözlemlere ilişkin Mahalanobis uzaklıkları da diğerlerine göre oldukça yüksektir. p_{ii} değerleri ile m_i^2 değerleri arasında *doğrusal bir ilişki* vardır. ***Bu ilişki çizilecek bir saçılım grafiği ile görülebilir.*** Bu grafiğin çizimi okuyucuya bırakılmıştır.

Tablo 7.30. Hastane Verisi (Tablo 7.17) için p_{ii} ve m_i^2 Uzaklıkları

Gözlem No	x_1	x_2	p_{ii}	m_i^2
1	1	1	0.1588	2.06762
2	2	1	0.0998	0.94673
3	2	2	0.0512	0.02389
4	1	3	0.1150	1.23461
5	3	3	0.1575	2.04312
6	1	5	0.3772	6.21634
7	1	1	0.1588	2.06762
8	3	1	0.1549	1.99412
9	2	2	0.0512	0.02389
10	3	2	0.1180	1.29178
11	1	4	0.2078	2.99864
12	1	2	0.0986	0.92427
13	3	3	0.1575	2.04312
14	2	4	0.1836	2.53925
15	4	1	0.3242	5.20979
16	1	1	0.1588	2.06762
17	1	1	0.1588	2.06762
18	3	2	0.1180	1.29178
19	1	2	0.0986	0.92427
20	2	2	0.0512	0.02389

p_{ii}'lerin birbirine göre büyüklüğünü incelemenin kolay bir yolu, gözlem sıra numaralarını x eksenine, p_{ii} değerlerini de y eksenine koyarak saçılım grafiği (indeks plot) çizmektir. Örneğimize ilişkin sonuçlar için çizilen index plot, Grafik 7.19'da verilmiştir. Grafikten de görüldüğü gibi, 6. ve 15. gözlemler diğer gözlemlere göre farklılık göstermektedir. Ancak, yine hatırlatmak gerekirse, x uzayında aykırı değer olan bu uzak gözlemler, etkili gözlem olmayabilir.



Grafik 7.19. Örnek 7.9 İçin Gözlem Uzaklıkları İndeks Grafiği

7.4.2. Artıkların İncelenmesi

Regresyon çözümlemesindeki model bozukluklarını araştırmak ve aykırı değerleri belirlemek için basit ve etkin yöntem artıkların incelenmesidir. Çünkü, daha önce de belirtildiği gibi artıklar, hataların gerçekleşen ya da gözlenen değerleri olarak düşünülebilir. Bu nedenle, ***hatalar*** için söz konusu olan varsayımlara ilişkin bozulmalar ***artıklar*** yardımıyla incelenir. Bu incelemede değişik artık türlerinden yararlanılır. Ham artıklar, standartlaştırılmış artıklar, student türü artıklar, ...vb. değişik artık türlerine örnek oluştururlar. Ham artıklar dışında, değişik dönüşümler yardımıyla hesaplanan değişik artıkların benzer amaçları olduğu gibi, verideki değişik yapıların incelenmesi gibi amaçları da vardır. Verideki gözlem sayısı arttıkça, artıklarla yapılacak incelemelerin güvenirliği de artacaktır.

Ham Artıklar (e_i)

Bilindiği gibi i. ham artık;

$$e_i = y_i - \hat{y}_i \qquad (i=1,2,....,n) \qquad (7.77)$$

olarak tanımlanır. Bu tür artıklar adından da anlaşılacağı gibi ham ya da ölçeklenmemiş artıklardır. Matris yaklaşımı ile n tane gözlemden oluşan ham artık vektörü; $e = Y - X\hat{\beta} = Y - PY = (I - P)Y$ olarak yazılabilir. Ham artıkların toplamı dolayısıyla ortalaması sıfır olmakla birlikte, varyansı (s^2) örneklemden örnekleme değişir. s^2 varyansının değişkenlik göstermesi sorunu, artıkların standartlaştırılması ile giderilmeye çalışılır.

Standartlaştırılmış Artıklar (e_{is})

Eğer ε_i 'ler 0 ortalama ve σ^2 varyansı ile normal dağılım gösteriyor ise, ε_i / σ 'nın standart normal dağılım göstermesi söz konusudur. Bu nedenle e_i artıkları s'ye bölünerek standartlaştırılmış artıklar, (e_{is}), elde edilir (7.78).

$$e_{is} = \frac{e_i}{\sqrt{\text{Artık } KO}} = \frac{e_i}{s} \qquad i = 1,2,....,n \qquad (7.78)$$

Gözlem sayısının fazla olması durumunda, e_{is}'lerin 0 ortalama 1 s.sapma ile yaklaşık standart normal [$e_{is} \sim N(0,1)$] dağıldıkları ve artıkların birbiri ile ilişkili olmadıkları söylenir. e_{is} artıklarının % 95'inin çoğunlukla [-2 +2] sınırları arasında değiştiği kabul edilir (halbuki, standart normal dağılımda gözlemlerin % 95'i –1.96 ile +1.96 arasında değişmektedir). Bu sınırların dışına çıkan gözlemlerin aykırı değer kuşkusu ile incelenmesi önerilir.

Student Türü Artıklar (r_i ve r_i^*)

1. r_i

e_{is} artıkları her zaman 0 ortalama ve 1 standart sapma ile normal dağılım göstermemektedir. Çünkü paydadaki s istatistiği e_i değerlerinin standart sapması değildir. Bu nedenle e_i artıkları kendi standart sapması olan $s\sqrt{1-p_{ii}}$ ile standartlaştırılır. Buna göre, student türü artık r_i ;

$$r_i = \frac{e_i}{\sqrt{s^2(1-p_{ii})}} = \frac{e_i}{s\sqrt{1-p_{ii}}} \qquad i = 1,2,....,n \qquad (7.79)$$

ile verilir. r_i'ler 0 ortalama ve 1 s. sapma ile standart normal dağılıma yakın bir dağılım gösterirler. r_i'ler az da olsa $\hat{y}_i$ değerleri ile ilişkilidir. Ancak bu ilişki pratikte ihmal edilir. r_i değerleri model doğru olduğunda ve gözlem sayısı fazla olduğunda (p_{ii} değerleri sıfıra yaklaşırken r_i'ler de e_{is} artıklarına yaklaşacağı için) genellikle [–2 +2] sınırları arasında ve sıfır etrafında bir dağılım gösterirler. Dolayısıyla böyle durumlarda bu sınırların dışına çıkan gözlemlerin aykırı gözlem olabileceği düşünülmeli ve bu gözlemler incelenmelidir. Bu yaklaşımın dışında, özellikle gözlem sayısı az olduğunda r_i artıklarının incelenmesinde $n-p-1$ serbestlik dereceli t dağılımından yararlanmak daha iyi bir yaklaşımdır. Çünkü, e_i'nin standart sapması olan $s\sqrt{1-p_{ii}}$ formülündeki s, σ 'nın bir kestiricisidir. Konu ile ilgili örnek incelenirken bir başka yaklaşım üzerinde de durulacaktır (bak. Sayfa 274).

2. r_i^*

Student türü artık r_i'nin hesaplanmasında σ^2'nin kestiricisi olan artık kareler ortalaması (s^2) kullanılır. Burada, σ^2'nin kestiricisi olan s^2, modelin n tane gözleme uyumundan elde edilen bir değerdir. Bu nedenle r_i'ye içsel Student türü artık denir. i. gözlemi veriden çıkardıktan sonra geriye kalan veri kümesine dayalı olarak σ^2'nin bir kestiricisini kullanmak ise bir diğer yaklaşım olabilir. Böylece, σ^2'nin kestiricisi olarak $s^2_{(i)}$ elde edilir. $s^2_{(i)}$:

$$s^2_{(i)} = \frac{(n-p-1)\ s^2 - e_i^2/(1-p_{ii})}{n-p-2} \qquad (7.80)$$

ile verilir. σ^2'nin kestiricisi olan s^2 yerine kullanılan $s^2_{(i)}$, dışsal Student türü olarak adlandırılan r_i^*'ın elde edilmesinde kullanılır. Buna *R*-Student de denir.

$$r_i^* = \frac{e_i}{\sqrt{s^2_{(i)}\ (1-p_{ii})}} = \frac{e_i}{s_{(i)}\sqrt{1-p_{ii}}} \qquad i = 1,2,....,n \qquad (7.81)$$

Uygulamada (7.81) yerine, eşdeğeri olan,

$$r_i^* = r_i \sqrt{\frac{n-p-2}{n-p-1-r_i^2}} \qquad i = 1,2,....,n \qquad (7.82)$$

kullanılır. Birçok durumda, r_i ve r_i^* değerleri arasında çok az fark vardır. Bununla birlikte, i. gözlemin etkili gözlem olduğu durumlarda s^2 ile $s^2_{(i)}$ arasında anlamlı bir fark olabileceği için, r_i^*'ın böyle bir gözleme daha duyarlı olabileceği söylenebilir. Varsayımlar yerine geldiğinde, r_i^* değerleri, n-p-2 serbestlik dereceli bir t dağılışı gösterirler. n tane gözlemi karşılaştırmak için bir yaklaşım Bonferroni türü bir yaklaşım olup, $|r_i^*|$ değerlerini $t_{(Sd=n-p-2;\alpha/2n)}$ ile karşılaştırmaktır. Bir diğer yaklaşım ise bu amaçla hazırlanmış tablolardan yararlanmaktır. Gözlem sayısı (n) ve parametre sayısı (p+1)'e göre düzenlenmiş kritik değerler Ek Tablo G'de verilmiştir. Ancak, genel olarak önerilen bir yaklaşım, yukarıda verilenler gibi belirli bir kesim noktasına dayanmadan, daha çok görsel bir yaklaşımla artıkların incelenmesidir.

Veriden Gözlem Silerek Elde Edilen Artıkların İncelenmesi (Deleted Residuals)–($e_{(i)}$)

Aykırı değerleri araştırmanın diğer bir yolu, sorunlu olduğu düşünülen gözlemlerin veriden çıkartılması durumunda, ilgili gözlemin kestirim denkleminde yapacağı değişiklerin incelenmesidir. Gözlemi veriden çıkartarak elde edilen artıkları ($e_{(i)}$)

bulabilmek için *i.* gözlem veriden çıkartılarak (silinerek) *n-1* gözlem için regresyon denklemi bulunur. Daha sonra, *i.* gözlemin bağımsız değişken değerleri bu denklemde yerine konarak $\hat{y}_{(i)}$ kestirim değeri elde edilir. $\hat{y}_{(i)}$ kestirim değerinin *i.* gözlemin y_i değerinden çıkartılması ile $e_{(i)}$ bulunmuş olur ($e_{(i)}=y_i-\hat{y}_{(i)}$). Bu işlemler tüm gözlemler için tekrarlanarak *n* adet silinmiş artık ($e_{(1)}, e_{(2)}, \ldots, e_{(n)}$) elde edilir. Bu artıklara *PRESS* artıkları da denir. $e_{(i)}=y_i-\hat{y}_{(i)}$ olması nedeniyle $e_{(i)}$, bir ***kestirim hatasını*** ifade eder. Uygulamada, özellikle gözlem sayısı fazla olduğunda, *n-1* gözlemli *n* tane regresyon denklemi elde etmek zor ve pratik değildir. Bu nedenle, $e_{(i)}$'ler aşağıdaki yaklaşımla elde edilir.

$$e_{(i)} = \frac{e_i}{1-p_{ii}} \qquad (7.83)$$

$e_{(i)}$'lerin kestirilmiş varyanslarının da dikkate alınması ile ***Student türü silinmiş artıklara*** ($e^*_{(i)}$) ulaşılır. $e^*_{(i)}$ **değerleri (*n-p-2*) serbestlik derecesi ile bir *t* dağılışı gösterir** ve aşağıdaki formülle verilir. $e^*_{(i)}$ ***değerleri ile*** r^*_i ***değerleri birbirinin aynıdır.***

$$e^*_{(i)} = \frac{e_i}{\sqrt{\dfrac{(1-p_{ii})\,AKO - e_i^2}{n-p-2}}} \qquad (7.84)$$

Artık Grafiklerinin Çizimi

Elde edilen artıklara ilişkin uygun grafiklerin çizilmesi, eğer varsa model varsayımlarındaki bozulmaların belirlenmesine de yardımcı olur. Bu amaçla en çok kullanılan grafik yöntemi; artıkların dikey eksene, $\hat{y}_i$ değerlerinin de yatay eksene konulması ile yapılan çizimlerdir. Ayrıca, her bir x_i değişkenine karşı yapılacak artık çizimleri ile de ayrıntılı bilgiler elde edilebilir. Ancak, bu konu üzerinde ayrıntılı şekilde durmadan ve çeşitli çizimler yapmadan önce, etkili gözlemlerin araştırılması üzerinde durulacaktır.

7.4.3. Etkili Gözlemlerin Araştırılması

Yukarıda belirttiğimiz gibi bazı gözlemlerin veriye eklenmesi ya da veriden çıkartılması, elde edilen modeldeki ***regresyon katsayılarında*** ve $\hat{y}_i$ kestirim değerlerinde önemli değişikliklere neden olabilir. Bu gözlemler etkili gözlemler olarak bilinir. Bir gözlemin etkili gözlem olup olmadığını test etmek için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Bunlar arasında en yaygın olarak kullanılan üç tanesi ***Cook Uzaklığı*** ölçüsü, ***DFBETA*** ölçüsü ile ***DFITS*** ölçüsüdür. Diğer bir deyişle, bu üç ölçü, regresyon katsayıları ve $\hat{y}_i$ kestirim değerleri üzerine gözlemlerin etkisi hakkında bilgi verir.

Cook Uzaklığı (C_i^2)

Eşitlik (7.85)'de verilen ***Cook Uzaklığı*** ölçüsü, gözlem uzaklığı ve Student türü artıklara dayanır ve C_i^2 ile gösterilir.

$$C_i^2 = \frac{1}{p+1} r_i^2 \left(\frac{p_{ii}}{1-p_{ii}} \right) \qquad i=1,2,\ldots,n \qquad (7.85)$$

C_i^2'nin büyük değerlerine karşılık gelen gözlemlerin özellikle ***regresyon katsayıları*** üzerinde etkili olduğu söylenir. Bir gözlemin etkili gözlem olup olmadığı F dağılımı yardımıyla incelenebilir. Bu amaçla, C_i^2 değeri, $\alpha = 0.50$ için p+1 ve n-p-1 serbestlik dereceli F dağılımı değeri ile karşılaştırılır ve $C_i^2 > F_{(p+1,n-p-1;\ \alpha=0.50)}$ ise bu gözlemin etkili gözlem olduğu söylenir. Gözlemlerin etkili olup olmadığını anlamanın kolay bir yolu C_i^2 değeri 1 ve daha büyük olan gözlemleri etkili gözlem olarak nitelemektir. Çünkü, $F_{(p+1,n-p-1;\ \alpha=0.50)} \cong 1$'dir. **Gözlem sayısının küçük olduğu durumlarda kullanılabilecek *daha esnek olmayan* bir kesim noktası, 4/(*n-p-1*) ile verilir**. Ancak, bu gibi kesin bir "kesim noktası" kuralı kullanmak yerine C_i^2 değerlerinin incelenmesi önerilmektedir. Çünkü, yukarıdaki kesim noktalarını aşmayan, ancak verideki diğer küçük C_i^2 değerli gözlemlere göre daha büyük olan gözlem(ler) olabilir. Bu gibi nedenlerle grafiklerden sıklıkla yararlanılır. Gözlem sıra numaralarını x eksenine, C_i^2 değerlerini de y eksenine koyarak çizilecek nokta grafiği (indeks plot) bu konuda en görsel olanıdır. Gerek grafik kullanarak gerekse kullanmadan yapılan incelemede C_i^2 değerlerinin tümü aşağı yukarı aynı ise herhangi bir önlemin alınmasına gerek yoktur. Ancak, eğer var ise, diğer değerlerden daha yüksek değer alan gözlemler belirlenmeli ve istenmeyen gözlemler olmaksızın model yeniden kurularak bu gözlemlerin etkisi görülmelidir.

DFBETA

$DFBETAS_{j,i}$ istatistiği, *i.* gözlem veriden çıkartıldığında β_j'nin ne kadar değiştiğini belirtmek amacıyla geliştirilmiştir. Diğer bir deyişle, $DFBETAS_{j,i}$ her bir gözlemin her bir değişken ya da regresyon katsayıları üzerine etkisini gösterir. $DFBETAS_{j,i}$'nin büyük değerleri, *i.* gözlemin *j.* ***regresyon katsayısı*** üzerine dikkate değer bir şekilde etkili olduğunu gösterir. **$|DFBETAS_{j,i}| > 2/\sqrt{n}$ olması bu gözlemin dikkatlice incelenmesi konusunda bilgi verir.** X, ilk kolonu 1'lerden, diğer kolonları bağımsız değişken değerlerinden oluşan $n\times(p+1)$ boyutlu veri matrisi olmak üzere, $R=(X'X)^{-1}X'$ matrisi $(p+1)\times n$ boyutlu bir matristir. Örneğin, modelde 2 bağımsız değişken var ise R matrisi $3\times n$ boyutlu bir matristir. R'nin *j.* satırındaki n

eleman, örneklemdeki n gözlemin b_j üzerindeki gözlem uzaklığını verecektir. Buradan, r_j'; R matrisinin j. satırını göstermek üzere;

$$DFBETAS_{j,i} = \frac{r_{ji}}{\sqrt{r_j' r_j}} \frac{r_i^*}{\sqrt{1-p_{ii}}} \qquad (7.86)$$

ile verilir.

DFITS

$DFITS_i$ ölçütü de C_i^2 ölçütüne benzer. Özellikle, i. gözlemin $\hat{y}_i$ ***kestirim değeri*** üzerine etkisini incelemek için kullanılan $DFITS_i$ değeri;

$$DFITS_i = \frac{\hat{y}_i - \hat{y}_{(i)}}{\sqrt{s_{(i)}^2 \; p_{ii}}} \qquad i = 1,2,....,n \qquad (7.87)$$

ile verilir. Eşitlik (7.87)'de verilen $\hat{y}_{(i)}$ değeri, i. gözlem için şöyle bulunur; i. gözlem veriden çıkartıldıktan sonra elde edilen regresyon denkleminde, çıkartılan gözleme ilişkin x_i değerleri konularak $\hat{y}_{(i)}$ ile gösterilen kestirim değeri elde edilir. Böylece, i. gözlem için $e_{(i)} = y_i - \hat{y}_{(i)}$ kestirim hatası değeri bulunur ve bu işlem her bir gözlem için yinelenir. Ancak uygulamada, Eşitlik (7.87) yerine eşdeğeri olan ve Eşitlik (7.88) kullanılır.

$$DFITS_i = r_i^* \sqrt{\frac{p_{ii}}{1-p_{ii}}} = \frac{e_i}{s_{(i)}\sqrt{1-p_{ii}}} \sqrt{\frac{p_{ii}}{1-p_{ii}}} \qquad i = 1,2,....,n \qquad (7.88)$$

$|DFITS_i| > 2\sqrt{(p+1)/(n-p-1)}$ ***koşulunu sağlayan gözlemler, genellikle etkili gözlem olarak sınıflandırılır. Bazı kaynaklarda kesim noktası olarak*** $|DFITS_i| > 2\sqrt{(p+1)/n}$ ***koşulunu sağlayan gözlemlerin etkili olarak sınıflandırılması önerilmektedir.*** İstatistik yazılımların çoğu, gerek *Cook* gerekse *DFITS* değerlerinin her ikisini de vermektedir. Ancak, bunlardan sadece birine bakmak yeterlidir.

Kovaryans Oranı (KO_i)

Yukarıda belirtildiği gibi $DFBETAS_{j,i}$, i. gözlemin j. ***regresyon katsayısı*** üzerine dikkate değer bir şekilde etkili olduğunu gösteriyordu. Kovaryans oranı, ***kestirilen regresyon katsayılarının tümü üzerine bir gözlemin etkisinin ölçüsü*** şeklinde tanımlanabilir. Bu özelliği nedeniyle de ***DFBETA*** değerlerinden ayrılır. i. gözlem için kovaryans oranı (KO_i), Eşitlik (7.89) yardımı ile bulunabilir.

$$KO_i = \frac{\left|(X'_{(i)}X_{(i)})^{-1}s^2_{(i)}\right|}{\left|(X'X)^{-1}AKO\right|} \quad i=1,2,\ldots,n \qquad (7.89)$$

i. gözlemin kovaryans oranı 1'e yakın ise, i. gözlemin, kestirimin doğruluğu üzerine etkisinin az olduğunu gösterir. $KO_i>1$ ise i. gözlemin kestirimin doğruluğunu artırdığı, $KO_i<1$ ise i. gözlemin veriye alınmasının kestirimin doğruluğunu azalttığı söylenir.

Kovaryans oranı için de kesim noktaları vardır. Eğer i. gözlem için $KO_i>1+3(p+1)/n$ ya da $KO_i<1-3(p+1)/n$ ise i. gözlemin etkili olduğu söylenir.

Artıkların Elde Edilmesi ve Yorumlanmasına İlişkin Örnekler

Aşağıda, artıkların incelenmesi ile ilgili olarak üç farklı çoklu regresyon örneği üzerinde durulacak, bu örneklere ilişkin çeşitli istatistikler hesaplanacak ve artık grafikleri incelenecektir. Bu incelemeler, şüphesiz bir bağımlı-bir bağımsız değişken olması durumu için de söz konusudur. Ancak, buna ilişkin örnekler burada verilmeyecektir. Ancak okuyucular, önce Tablo 7.3'deki Test Sonuçları Verisi'ne ilişkin artıkları inceleyebilirler ve artık grafiklerini çizebilirler. Daha sonra da, örneğin Tablo 7.10'daki veri için sırasıyla doğrusal model ve üstel model denklemleri için artıkları inceleyip, ileride göreceğimiz artık grafiklerini çizebilirler ve aradaki farkları tartışabilirler.

Örnek 7.10. Örnek 7.6'daki ***Hastane Verisi***'ne (Tablo 7.17) ilişkin çeşitli artık hesaplamaları 1 ve 20 nolu gözlemler için aşağıda elde edilirken, tüm gözlemler için e_i, e_{is}, r_i, r_i^*, (e_i) ve $e^*_{(i)}$ artıkları Tablo 7.31'de verilmiştir. r_i^* ve $e^*_{(i)}$ değerleri aynı olduğu için Tablo 7.31'de sadece r_i^* değerleri yer almıştır. İlgili örneğe ilişkin ***AKT=19.48721*** ve ***s=1.07066*** olarak bulunmuştu.

1 nolu gözlem için hesaplamalar:

$$\hat{y}_1 = -.50398 + 2.402321\times(1) + 2.948635\times(1) = 4.847$$

$$e_1 = 6 - 4.847 = 1.153$$

$$e_{1s} = 1.153/1.07066 = 1.0769$$

$$r_1 = 1.153/(1.07066\sqrt{1-0.1588}) = 1.174$$

$$s^2_{(1)} = \frac{(20-2-1)\ 1.14631 - 1.153^2\ /(1-0.1588)}{20\ \ 2-2} = 1.119181$$

$$r_1^* = \frac{1.153}{\sqrt{1.119181(1-0.1588)}} = 1.188$$

ya da

$$r_1^* = 1.174\sqrt{\frac{20-2-2}{20-2-1-1.174^2}} = 1.188$$

$$e_{(1)} = \frac{1.153}{1-0.1588} = 1.371$$

$$e_{(1)}^* = \frac{1.153}{\sqrt{\frac{(1-0.1588)\times 19.48721 - 1.153^2}{20-2-2}}} = 1.188$$

20 nolu gözlem için hesaplamalar;

$$\hat{y}_{20} = -.50398 + 2.402321\times(2) + 2.948635\times(2) = 10.198$$

$$e_{20} = -1.198$$

$$e_{20s} = -1.198/1.07066 = -1.1189$$

$$r_{20} = -1.198/1.07066\ \sqrt{1-0.0512} = -1.148$$

$$s^2_{(20)} = \frac{(20-2-1)\ 1.14631 - (-1.198^2)/(1-0.0512)}{20-2-2} = 1.12341$$

$$r_{20}^* = -1.198/\sqrt{1.12341(1-0.0512)} = -1.160$$

ya da

$$r_{20}^* = -1.1487\sqrt{\frac{20-2-2}{20-2-1-1.1487^2}} = -1.160$$

$$e_{(20)} = \frac{-1.198}{1-0.0512} = -1.262$$

$$e_{(20)}^* = \frac{-1.198}{\sqrt{\frac{(1-0.0512)\times 19.48721 - (-1.198)^2}{20-2-2}}} = -1.160$$

olarak bulunur. İlgili istatistikler Tablo 7.31'de özetlenmiştir.

Tablo 7.31. Hastane Verisi İçin Kestirim Değerleri ve Artıklar

Göz. No	$\hat{y}_i$	e_i	e_{is}	p_{ii}	r_i	r_i^*	$e_{(i)}$
1	4.847	1.153	1.0769	0.1588	1.174	1.188	1.371
2	7.249	-1.249	-1.1665	0.0998	-1.229	-1.250	-1.388
3	10.198	0.802	0.7490	0.0512	0.769	0.759	0.845
4	10.744	-1.744	-1.6289	0.1150	-1.731	-1.851	-1.971
5	15.549	0.451	0.4212	0.1575	0.459	0.448	0.535
6	16.641	-0.642	-0.5996	0.3772	-0.759	-0.749	-1.030
7	4.847	-0.847	-0.7911	0.1588	-0.862	-0.856	-1.007
8	9.651	-1.651	-1.5420	0.1549	-1.678	-1.782	-1.954
9	10.198	0.802	0.7490	0.0512	0.769	0.759	0.845
10	12.600	0.400	0.3736	0.1180	0.397	0.387	0.453
11	13.693	-0.693	-0.6473	0.2078	-0.727	-0.717	-0.875
12	7.795	1.204	1.1245	0.0986	1.185	1.200	1.336
13	15.549	1.451	1.3552	0.1575	1.476	1.534	1.722
14	16.095	0.905	0.8453	0.1836	0.935	0.931	1.108
15	12.054	-0.054	-0.0504	0.3242	-0.061	-0.059	-0.079
16	4.847	1.153	1.0769	0.1588	1.174	1.188	1.371
17	4.847	0.153	0.1429	0.1588	0.156	0.151	0.182
18	12.600	-0.600	-0.5604	0.1180	-0.597	-0.585	-0.680
19	7.795	0.204	0.1905	0.0986	0.201	0.195	0.227
20	10.198	-1.198	-1.1189	0.0512	-1.149	-1.160	-1.262

r_i Artıklarının Test Edilmesi

Yukarıda da belirtildiği gibi r_i Student türü artıklarının test edilmesinde $n-p-1$ serbestlik dereceli t dağılımından yararlanmak daha iyi bir yaklaşımdır. α=0.01 için 17 serbestlik dereceli t tablo değeri Ek Tablo C'den 2.898 olarak bulunur. r_i değerlerinin dağılımında bu değerden daha büyük değer yoktur. Student türü artıkların test edilmesinde Lund tarafından geliştirilen tablolardan da yararlanılabilir (Ek Tablo F). Ek Tablo F: α=0.05 ve α=0.01 için değişik gözlem ve parametre sayılarındaki (n ve (p+1)) kritik değerleri vermektedir. Tablo 7.31'de en büyük r_i değerine (-1.731) sahip 4 nolu gözlemin, bu yöntem ile bir aykırı gözlem olup olmadığını araştırırsak; α=0.05 için n=20 ve p+1=3'deki tablo istatistiği Ek Tablo F'den $r_{(20,3;\ \alpha=0.05)}$=2.76 olarak bulunur. r_i= |−1.731| < 2.76 olduğu için, bu gözleme ilişkin veri kümesinin aykırı değer içermediği şeklinde kurulan H_0 hipotezi kabul edilir ve bu değerin aykırı değer olmadığına karar verilir. Bunların dışında en kolay yöntem, –2 ve +2 sınırlarını aşan gözlemlerin aykırı değer olarak belirlenmesi ve incelenmesidir.

r_i^* Artıklarının Test Edilmesi

Eğer r_i değerleri yerine r_i^* değerleri hesaplanmış ise bu artık değerleri test etmek için de tablolar geliştirilmiştir. Denek sayısı (n) ve parametre sayısı (p+1)'e göre düzenlenmiş tablo kritik değerleri Ek Tablo G'de verilmiştir. Buna göre, en büyük r_i^* değerine sahip 4 nolu gözlem (-1.851) için tablo istatistiği Ek Tablo G'den α=0.05, n=20 ve p+1=2+1=3 için 3.58 olarak bulunur. |−1.851| < 3.58 olduğu için bu değerin aykırı değer olmadığına karar verilir.

Bazı kaynaklarda, regresyon varsayımlarının yerine gelmesi durumunda r_i^* değerlerinin, seçilen α yanılma düzeyinde n-p-2 serbestlik dereceli t tablo istatistiği ile karşılaştırılabileceği de daha kısa bir yol olarak önerilmektedir.

$e_{(i)}^*$ *Artıklarının Test Edilmesi*

$e_{(i)}^*$ artıkları (n-p-2) serbestlik derecesi ile bir t dağılışı gösteriyordu. Buna göre, α=0.01 için =20−2−2=16 serbestlik dereceli t tablo değeri Ek Tablo C'den 2.921 olarak bulunur. $e_{(i)}^*$ artıklarının dağılımında bu değerden daha büyük değer yoktur. Dolayısıyla aykırı değer de yoktur.

Örnek 7.11. Örnek 7.6'daki ***Hastane Verisi***'ne (Tablo 7.17) ilişkin ***Cook uzaklıkları ve*** $\boldsymbol{DFITS_i}$ ***değerleri*** $\boldsymbol{DFBETAS_{j,i}}$ değerleri ile birlikte Tablo 7.32'de verilirken, *1. gözlem için Cook uzaklığı ve* $\boldsymbol{DFITS_i}$ değeri'nin hesaplanması aşağıda verilmiştir. Tablo 7.30 ve Tablo 7.31 ile Eşitlik (7.85) ve Eşitlik (7.87) yardımıyla;

$$C_1^2 = \frac{1}{2+1} 1.174^2 \left(\frac{0.1588}{1-0.1588}\right) = 0.0867$$

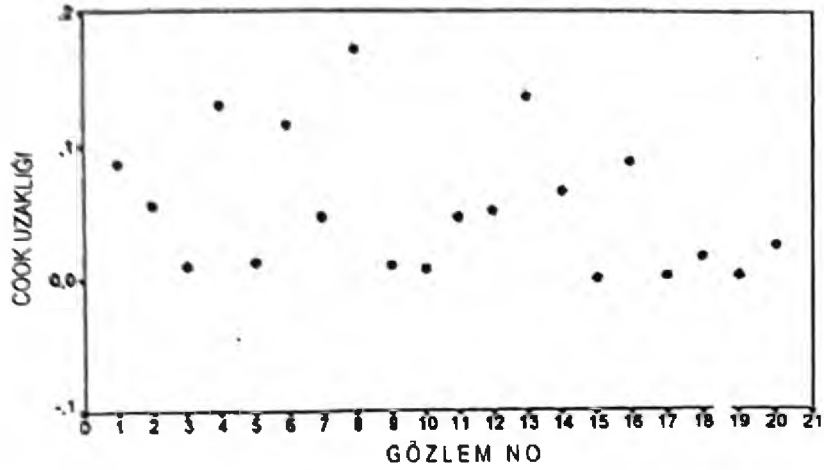
$$DFITS_1 = 1.188 \sqrt{\frac{0.1588}{1-0.1588}} = 0.51617$$

olarak bulunur.

Tablo 7.32. Hastane Verisi İçin Cook, DFITS ve DFBETA Değerleri

Gözlem	C_i^2	$DFITS_i$	*DFBETA* Değerleri		
			b_0 için	b_1 için	b_2 için
1	0.08677	0.51617	0.49747	-0.31475	-0.32603
2	0.05591	-0.41620	-0.27601	0.00533	0.29244
3	0.01065	0.17632	0.05840	0.01578	-0.02056
4	0.12987	-0.66724	-0.22580	0.38242	-0.27461
5	0.01313	0.19370	-0.11432	0.13837	0.09710
6	0.11636	-0.58290	0.14665	0.13840	-0.50396
7	0.04682	-0.37192	-0.35822	0.22665	0.23477
8	0.17212	-0.76292	-0.06795	-0.45528	0.37282
9	0.01065	0.17632	0.05840	0.01578	-0.02056
10	0.00705	0.14155	-0.04107	0.10691	0.00136
11	0.04623	-0.36722	0.01598	0.13691	-0.26984
12	0.05121	0.39688	0.31519	-0.27636	-0.07084
13	0.13591	0.66326	-0.39141	0.47375	0.33246
14	0.06560	0.44150	-0.20035	0.07097	0.37617
15	0.00060	-0.04086	0.01008	-0.03427	0.01176
16	0.08677	0.51617	0.49747	-0.31475	-0.32603
17	0.00153	0.06561	0.06333	-0.04007	-0.04151
18	0.01589	-0.21397	0.06204	-0.16149	-0.00205
19	0.00147	0.06449	0.05129	-0.04497	-0.01153
20	0.02376	-0.26947	-0.08922	-0.02412	0.03142

Gözlem numaralarına karşı Cook uzaklıklarının saçılım grafiği (indeks plot) Grafik 7.20'de verilmiştir.



Grafik 7.20. Hastane Verisi İçin Cook Uzaklıklarının-Gözlem No Grafiği

Gerek Tablo 7.32'de gerekse Grafik 7.20'de görüldüğü gibi değeri 1'e yakın C_i^2'ler yoktur ve C_i^2'ler birbirine yakın değerlerden oluşmaktadır. Dolayısıyla, bu veride etkili gözlem olmadığını söyleyebiliriz. Ancak yine de en yüksek C_i^2 değerine sahip olan 8. gözlem değerini test edersek; $C_8^2 = 0.172 < F_{(3,17;\ \alpha=0.50)} = 0.82$ olduğu için yukarıdaki yorum ile aynı sonuca ulaşırız ($\alpha = 0.50$ için düzenlenmiş F tabloları kitaplarda yer almamaktadır. Buradaki 0.82 değeri istatistik programları yardımıyla kolayca bulunabilir). İstenirse $4/(n\text{-}p\text{-}1)$ ile verilen kesim noktası yardımıyla da sonuca gidilebilir. Buna göre kesim noktası 0.23 olarak bulunur. Bu değeri geçen C_i^2 değeri olmadığı için veride etkili gözlem yoktur denir.

Veriyi $\boldsymbol{DFITS}_i$ değerleri açısından incelediğimizde, $\boldsymbol{DFITS}_i$ için kesim noktası olan $2\sqrt{(p+1)/(n-p-1)} = 2\sqrt{(2+1)/(20-2-1)} = 0.84$ olarak bulunur. $|\boldsymbol{DFITS}_i|$ değerleri arasında 0.84'den büyük değer alan gözlem olmadığı için gözlemlerin hiçbirinin özellikle kestirim değerleri üzerine etkili olmadığı söylenir.

$\boldsymbol{DFBETAS}_{ji}$'ler incelendiğinde kesim noktası; $2/\sqrt{20} = 0.45$ olarak bulunur. Her üç katsayı için bulunan $\boldsymbol{DFBETAS}_{ji}$ değerlerinden bazı gözlemlerin bazı katsayılar üzerinde etkili olduğu söylenebilir. Örneğin, 6. gözlem için b_2 katsayısına ilişkin *DFBETA* istatistiği 0.45'in üzerindedir. Bu nedenle, 6. gözlemin b_2 katsayısı üzerine etkili olduğu söylenir.

Ayrıca, veride artık değeri büyük gözlem olmadığı anlaşılmıştır. Diğer taraftan, x uzayında iki tane uzak gözlemin olduğu belirlenmişti. Ancak bu gözlemler etkili gözlem olmadıkları için sorun yaratmayacakları sonucuna varılmıştır.

7.4.4. Artık Grafiklerinin Çizimi

Artıkları test ederek büyük artıklı bir gözlemin bir aykırı değer olup olmadığı konusunda bilgiye sahip olabiliyorduk. Ayrıca, artıklara ilişkin çizilecek grafiklerin oluşturacağı şekiller, hem model bozukluklukları hem de büyük artıklı gözlemlerin olup olmadığı konusunda görsel bilgi verir. Diğer bir deyişle artık grafikleri sadece aykırı değerlerin varlığı konusunda değil, aynı zamanda modelin yeterliliği ve modele ilişkin varsayımların geçerliliği konusunda da bilgi verir.

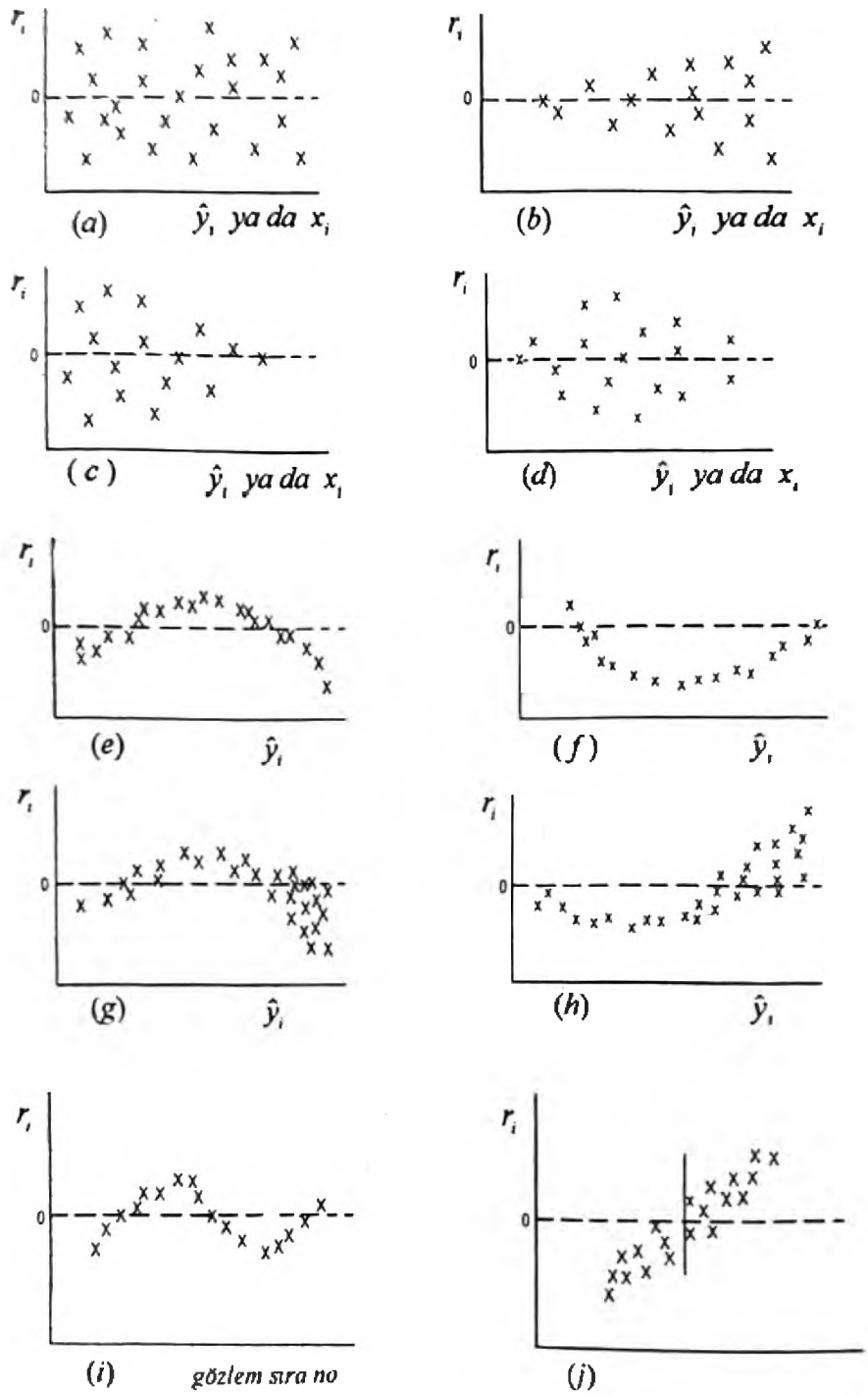
Artık çizimlerine ilişkin birçok grafik yöntemi vardır. Bunlar arasında en çok kullanılanları aşağıda verilmiştir.

1. Artıkların frekans dağılımlarını histogram, dal-yaprak (stem and leaf) ya da kutu-çizgi (box-plot) grafiği şeklinde göstermek,
2. Artıkların *Q-Q* grafiğini çizmek,
3. Artıkların indeks plotunu çizmek (*x* eksenine gözlem sıra numaralarını *y* eksenine de artıkları koyarak çizilen saçılım grafiği),
4. $\hat{y}_i$ değerlerine karşı artıkların saçılım (nokta) grafiğini çizmek,
5. Her bir bağımsız değişkene (x_i) karşı artıkların saçılım grafiğini çizmek.
6. Kısmi artık grafiklerini (partial residual plot) çizmek.

Yukarıdaki 3, 4 ve 5. maddedeki çizimler çoğunlukla e_i ya da Student türü r_i artıklarına göre yapılmaktadır. Bu çizimlerde e_i ya da r_i değerleri *y* ekseninde, $\hat{y}_i$ ya da her bir bağımsız değişken değerleri *x* ekseninde yer alır. e_i ya da r_i değerlerinin $\hat{y}_i$ ya da x_i değişkenlerine karşı çizilecek saçılım grafiklerinde ortaya çıkabilecek biçimler Grafik 7.21'de verilmiştir. Bu grafiklerin r_i değerlerine karşı çizilmesi, aykırı değerleri grafiksel olarak belirlemede de kolaylık sağlamaktadır. Çünkü r_i değerleri için bir kesim noktası olarak düşünülebilecek olan ±2 sınırlarının üzerine çıkan gözlemleri belirlemek kolaydır. Artıklar y_i gözlenen değerlerine karşı çizilmemelidir. Çünkü e_i artıkları ile y_i değerleri genellikle ilişkilidir.

Model varsayımlarının yerine geldiği koşullarda $\hat{y}_i$ ya da x_i değerlerine göre r_i'lerin nokta grafiğinin sıfır etrafında dikdörtgen biçiminde rasgele bir dağılım göstermesi beklenir (Grafik 7.21.a). Bu biçimin dışında ortaya çıkabilecek biçimler modelin yetersizliği hakkında bilgi verecektir. Örneğin, Grafik 7.21-*b* ve *c* ile verilen sağa ya da sola megafon şeklinde ortaya çıkan saçılım grafiği "***artık varyanslarının homojenliği***" varsayımının bozulumu sorununu ortaya koyarken, *e* ve *f* grafikleri "***değişkenler arasında doğrusal olmayan bir ilişkinin varlığı***" konusunda bilgi verir. Yine, *g* ve *h* grafikleri "***değişkenler arasında doğrusal olmayan bir ilişkinin varlığı ile artık varyanslarının homojen olmadığı***" konusunda uyarıda bulunurken, *i* ve *j* grafikleri, "***artıklar arasında ilişki olduğu***" konusunda bilgi veren şekillerdir. r_i artıklarının her bir x_i değişkenine göre çizimlerinde görülen sistematik şekiller, incelenen değişkenle ilgili sorunlar olduğunu ortaya koyar.

Bu temel artık çizimlerinin dışında, her zaman kullanılmayan bazı artık çizimleri de vardır. Örneğin, eğer veride zaman süreci söz konusu ise ham artıkların zamana göre çizilmesi değişik yorumlara neden olabilmektedir. İleride ***hata terimlerinin ilişkili olma sorunu*** (*otokorelasyon*) üzerinde durulurken bu tür grafiklerden yararlanılacaktır. Ayrıca, herhangi bir bağımsız değişkenle artıklar arasındaki ilişkiyi daha kesin bir şekilde ortaya çıkartmak için ***kısmi artık*** grafiklerine de (partial residual plots) sıklıkla başvurulur. Kısmi artık grafikleri aşağıda incelenmiştir.



Grafik 7.21. Artık Grafikleri

Kısmi Artık Grafikleri

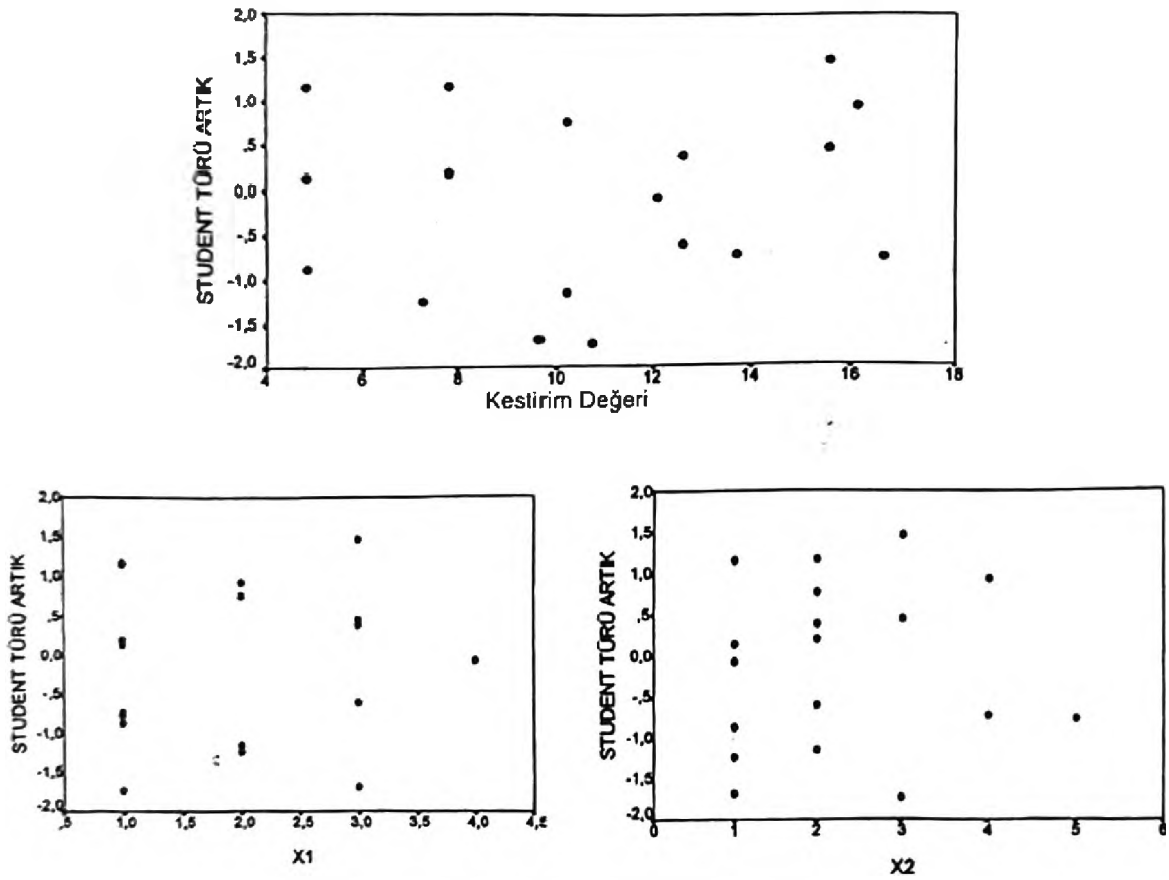
Kısmi artık grafikleri (partial residual plots), x_j ***bağımsız değişkenleri*** ile ***artıklar*** arasındaki ilişkiyi daha doğru bir şekilde ortaya çıkartmak amacıyla çizilirler. Bu amaçla, önce tümel modele ilişkin artıklar elde edilir. Tümel modeldeki her bir regresyon katsayısı ile ilgili değişken değerleri çarpılarak her bir değişken için yeni bir değişken elde edilir. Elde edilen yeni değişken değerleri ile tümel modele ilişkin artıklar ayrı ayrı toplanırsa ilgili değişkene ilişkin kısmi artıklar elde edilmiş olur. Herhangi x_j bağımsız değişkeni için *i.* kısmi artık; $e_{ij}^{*} = e_i + \hat{\beta} x_{ij}$ $(i=1, 2, 3, \ldots n)$ şeklinde özetlenebilir. Her bir bağımsız değişken değerlerine (x_{ij}) karşı e_{ij}^{*}'lerin grafiklerine ***kısmi artık grafiği*** denir. Her bir bağımsız değişken değerine karşı e_i ya da r_i artıklarının çizilmesi gibi, kısmi artık grafikleri de artıkların belirlenmesi ve varyansların homojen olup olmadığının belirlenmesinde yararlıdır. Ayrıca, diğer bağımsız değişkenlerin etkisi kaldırıldıktan sonra x_j bağımsız değişkeni ile y arasındaki ilişkiyi gösterdiği için diğer değişkenlerin varlığında y'deki yanıt üzerine x_j değişkeninin etkisini ve önemini de gösterir. Bu nedenle, bir bakıma x_j değişkenlerine karşı y bağımsız değişken değerlerinin çizimi yerine geçer. Kısmi artık grafiklerinin bir yararı da bağımsız değişkenlerdeki ***doğrusal olmayışlığın boyutunu*** ve diğer değişkenlerin varlığında her bir bağımsız değişkenin önemini belirlemesidir. x_j ile y arasındaki ilişki doğrusal değilse, kısmi artık grafikleri doğrusallığı sağlamada kullanılacak dönüşüm hakkında daha aydınlatıcı bilgi verebilmektedir.

Artık Grafiklerinin Çizimine İlişkin Örnekler

Artıkların ve çeşitli gözlem istatistiklerinin hesaplanması üzerinde yukarıda durulmuş ve ***iki bağımsız değişkenli bir çoklu regresyon modeline*** ilişkin bir örnek verilmişti. Aşağıda verilecek olan artık grafiklerine ilişkin örnekler de iki ve çok bağımsız değişkenli çoklu doğrusal modellere ilişkindir. Ancak, gerek yukarıda verdiğimiz hesaplamalar gerekse aşağıda yapacağımız grafik çizimleri kuşkusuz bir bağımlı bir bağımsız değişken olması durumunda da söz konusudur. Diğer bir deyişle hata varyansının sabitliği, hataların bağımsızlığı, hataların normalliği, ..vb incelemeler bir bağımlı bir bağımsız değişken olması durumunda da söz konusudur. Bu amaçla, okuyucular daha önce de belirttiğimiz gibi Tablo 7.3'deki veriye ilişkin artıkları inceleyebilirler ve artık grafikleri yardımıyla çeşitli incelemeleri yapabilirler. Ayrıca, örneğin Tablo 7.10'daki veriyi ele alarak, sırasıyla; a) y ile x arasında elde edilecek $y = b_0 + b_1 x$ doğrusal regresyon denklemi ($y=3.287-0.235x$) için modelin *ham veriye uyumuna* ilişkin artıkları, b) y bağımlı değişkenine logaritmik dönüşüm uygulanması sonrasında elde edilen $log(y)=1.6203-0.1959x$ doğrusal modelinin veriye uyumuna ilişkin artıkları inceleyip grafiklerini çizerek aradaki farkları görebilirler.

Örnek 7.12. Örnek 7.6'daki ***Hastane Verisi***nde (Tablo 7.17) büyük gözlem uzaklığına ve/ya da aykırı ve/ya da etkili gözlem olup olmadığına ilişkin olarak çeşitli gözlem istatistiklerini bulmuş, gerekli testleri yapmış ve p_{ii} ile C_i^2'lere ilişkin grafikleri çizmiştik. Şimdi ise, bu örneğe ilişkin $\hat{y}_i$ kestirim değerlerine ve her bir değişken değerlerine karşı r_i değerlerinin saçılım grafiklerini inceleyerek (Grafik 7.22), şu ana kadar öğrendiklerimizle, modelin yeterliliği ve aykırı gözlemlerin varlığı konusunda bir yargıya varmaya çalışalım. Artık grafiği çizimlerine çoğunlukla kestirim değerlerine karşı student türü grafiklerin çizilmesi ile başlanır ve bunu her bir bağımsız değişkene karşı Student türü artıkların çizimi izler. Kısmi artık grafikleri de verideki doğrusallıktan ayrılışları göstermesi açısından öncelikle çizilmesi gereken grafikler arasındadır.

Aşağıdaki grafiklerde, r_i değerleri -2 ile +2 arasında ve Grafik 7.21'deki gibi 0 etrafında rastgele bir dağılım göstermektedir. Bu da model varsayımlarında bir bozulma olmadığını göstermektedir.



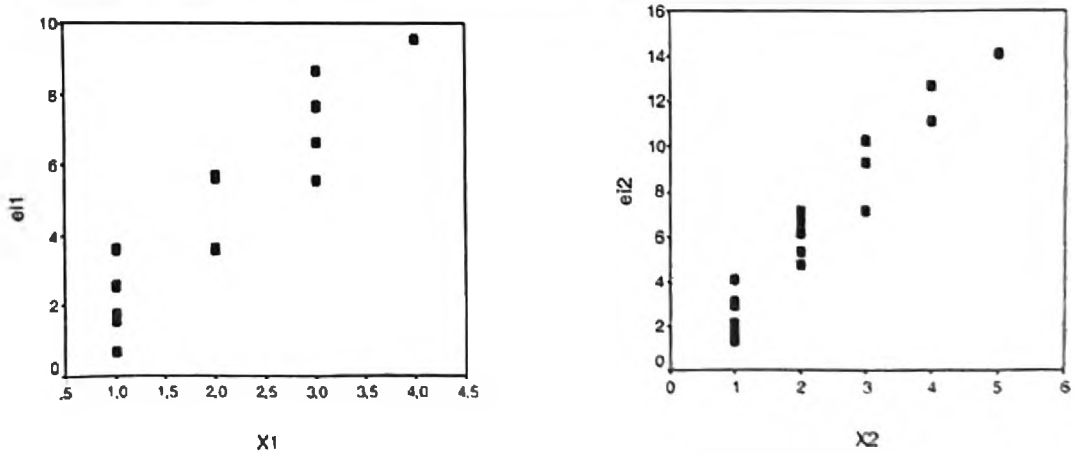
Grafik 7.22. Hastane Verisi (Tablo 7.17) İçin r_i Değerlerinin Kestirim Değerleri ile x_1 ve x_2 Değişkenlerine Göre Çizimi

Örneğimize ilişkin kısmi artıklar Tablo 7.33'de verilmiştir. Burada, 1 nolu kolon iki değişkenli çoklu doğrusal regresyon modeline ($\hat{y}_i = -0.50398 + 2.402321\, x_{i1} + 2.948635\, x_{i2}$) ilişkin artıklardır. 2 ve 3 nolu kolonlar ise kısmi artıklar

olup sırasıyla $e_i + 2.402321\, x_{i1}$ ve $e_i + 2.948635\, x_{i2}$ yardımı ile bulunur. Örneğin, 1. değişkenin 1. gözlemi için kısmi artık $e^*_{1.1} = 1.153 + 2.402321(1) = 3.56$ ve 2. değişkenin 14. gözlemi için kısmi artık $e^*_{2.14} = 0.905 + 2.948635(4) = 12.70$ olarak bulunur. Hastane verisi'ne ilişkin kısmi artık grafikler Grafik 7.23'de verilmiştir. Bu grafiklerden, gerek x_1 ile y gerekse x_2 ile y arasında doğrusal bir ilişkinin varlığı açıkça görülmektedir. Bu nedenle, regresyon modelinde, *doğrusal olmayışlığa ilişkin* bir model değişikliğine gidilmesine gerek yoktur. Bu grafiklerde görülecek eğrisellikler ilgili değişkende logaritmik bir dönüşümün yapılmasının ya da ilgili değişkene ilişkin ikinci derecede (quadratic) bir terimin (x^2) modele eklenmesinin gereği konusunda bilgi verir. Ayrıca, genel eğilimin dışına çıkan büyük kısmi artıklı gözlemlerin olması durumunda bu gözlemler incelenmelidir.

Tablo 7.33. Hastane Verisi İçin Artıklar ve Kısmi Artıklar

Gözlem No	Tümel Model İçin e_i (1)	$e^*_{i1} = e_i + \hat{\beta}_1 x_{i1}$ (2)	$e^*_{i2} = e_i + \hat{\beta}_2 x_{i2}$ (3)
1	1.153	3.56	4.10
2	-1.249	3.56	1.70
3	0.802	5.61	6.70
4	-1.744	0.66	7.10
5	0.451	7.66	9.30
6	-0.642	1.76	14.10
7	-0.847	1.56	2.10
8	-1.652	5.56	1.30
9	0.802	5.61	6.70
10	0.400	7.61	6.30
11	-0.693	1.71	11.10
12	1.204	3.61	7.10
13	1.451	8.66	10.30
14	0.905	5.71	12.70
15	-0.054	9.56	2.89
16	1.153	3.56	4.10
17	0.153	2.56	3.10
18	-0.600	6.61	5.30
19	0.204	2.61	6.10
20	-1.198	3.61	4.70



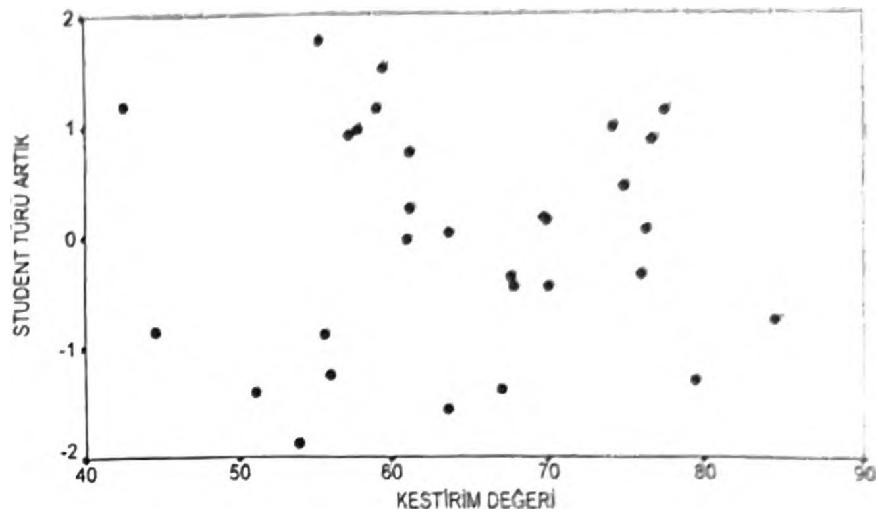
Grafik 7.23. Hastane Verisi İçin Kısmi Artık Grafikleri

Örnek 7.13. Daha önce çoklu regresyon sonuçlarını verdiğimiz ***Hastane Yöneticisi*** verisine (Tablo 7.23) ilişkin $\hat{y}_i$, e_i, p_{ii}, C_i^2, r_i ve r_i^* istatistiklerini inceleyerek yorumlamaya çalışalım. Sonuçlar Tablo 7.34'de verilmiştir.

Tablo 7.34. Hastane Yöneticisi Verisi İçin $\hat{y}_i$, e_i, p_{ii}, C_i^2, r_i ***ve*** r_i^* ***İstatistikleri***

Gözlem	$\hat{y}_i$	e_i	p_{ii}	C_i^2	r_i	r_i^*
1	51.110	-8.110	0.342	0.149	-1.415	-1.448
2	61.353	1.647	0.054	0.000	0.239	0.235
3	69.939	1.061	0.197	0.001	0.167	0.164
4	61.227	-0.227	0.165	0.000	-0.035	-0.034
5	74.454	6.546	0.092	0.014	0.972	0.971
6	53.942	-10.942	0.308	0.221	-1.861	-1.975
7	67.148	-9.148	0.124	0.039	-1.383	-1.413
8	70.097	0.903	0.132	0.000	0.137	0.134
9	79.531	-7.531	0.323	0.114	-1.295	-1.315
10	59.198	7.802	0.076	0.015	1.148	1.156
11	57.926	6.074	0.185	0.029	0.952	0.950
12	55.401	11.599	0.139	0.072	1.769	1.861
13	59.582	9.418	0.225	0.095	1.514	1.560
14	70.214	-2.214	0.541	0.036	-0.462	-0.454
15	76.549	0.451	0.161	0.000	0.069	0.068
16	84.150	-3.548	0.538	0.091	-0.738	-0.731
17	76.150	-2.150	0.220	0.005	-0.344	-0.338
18	61.397	3.603	0.543	0.097	0.754	0.747
19	68.017	-3.017	0.134	0.005	-0.458	-0.451
20	55.620	-5.620	0.195	0.027	-0.886	-0.882
21	42.603	7.397	0.236	0.063	1.197	1.209
22	63.819	0.181	0.112	0.000	0.027	0.027
23	63.664	-10.664	0.067	0.025	-1.562	-1.616
24	44.625	-4.625	0.411	0.073	-0.853	-0.848
25	57.317	5.683	0.201	0.029	0.899	0.896
26	67.843	-1.843	0.492	0.018	-0.366	-0.359
27	75.140	2.860	0.171	0.006	0.444	0.436
28	56.045	-8.045	0.176	0.048	-1.254	-1.271
29	77.661	7.339	0.151	0.032	1.127	1.134
30	763878	5.122	0.290	0.043	0.860	0.855

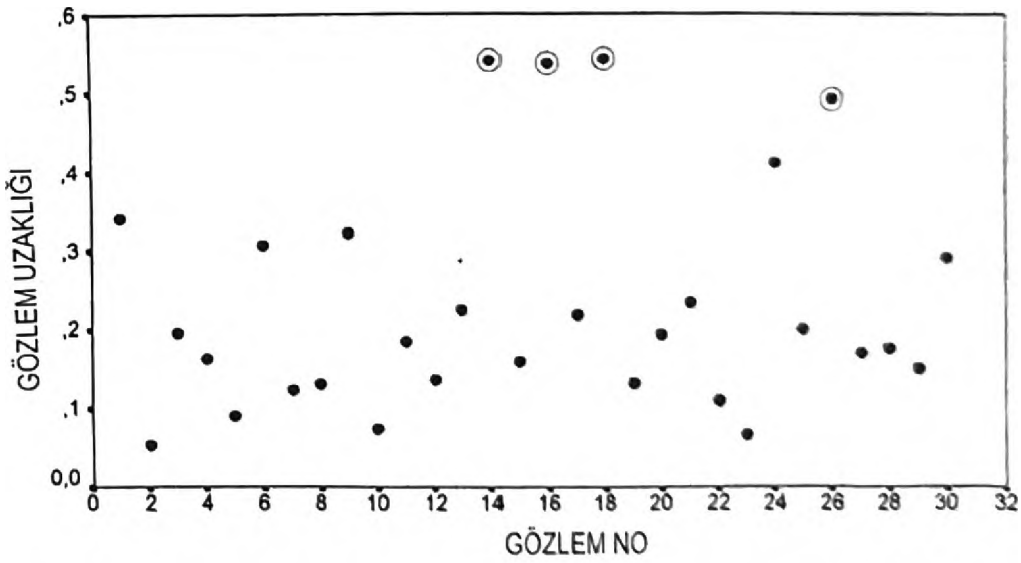
r_i ile $\hat{y}_i$ değerlerinin grafiği Grafik 7.24'de verilmiştir. Grafikten anlaşılacağı gibi, artıkların dağılımında sistematik bir değişme yoktur. Buradan modele ilişkin bir bozukluğun olmadığı söylenebilir. Ayrıca, r_i değerleri ± 2 arasında değişmektedir. Dolayısıyla, herhangi bir test yöntemine başvurmaya gerek kalmadan veride aykırı değer olmadığını söyleyebiliriz.



Grafik 7.24. Hastane Yöneticisi Verisi (Tablo 7.23) İçin– StudentTürü Artık Grafiği

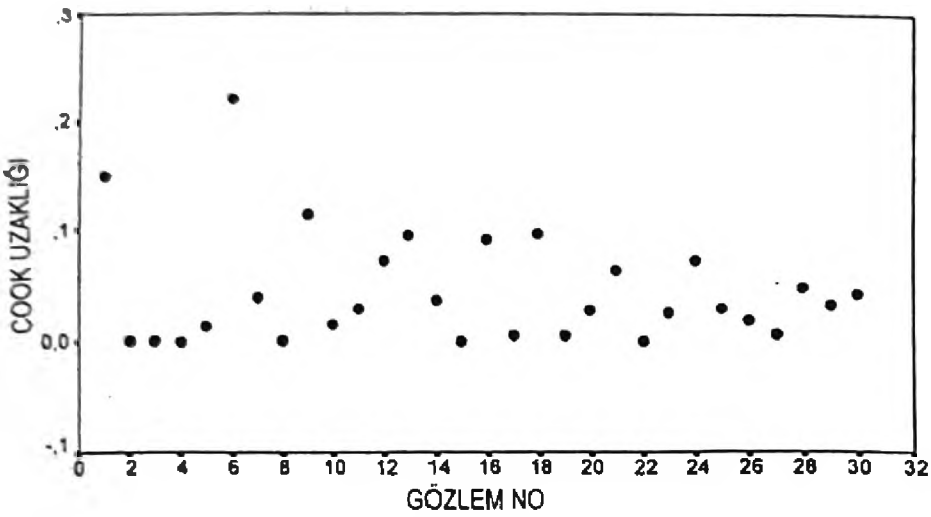
Artık çizimleri için bundan sonra yapılması gereken bir başka şey, r_i artıklarının x_i bağımsız değişkenlerine karşı çizimlerinin incelenmesidir. Bu çizimler incelendiğinde, model varsayımlarından büyük bir sapma ya da modelin belirlenememesi gibi bir sorunun olmadığı görülecektir. Herhangi bir bağımsız değişkene göre yapılan artık çiziminin, örneğin sistematik bir eğrilik göstermesi söz konusu olsa idi, belki ilgili değişkene ilişkin x_i^2 gibi bir yeni değişkenin modele eklenmesi ya da veri üzerinde dönüşüm yapılması gerekebilecekti.

Veri gözlem uzaklığı açısından incelendiğinde, $2(p+1)/n$ yardımıyla gözlem uzaklığı kesim noktası 2(6+1)/30=0.466 olarak bulunur. Bunun sonucunda; 14,16,18 ve 26. gözlemler, büyük gözlem uzaklığına sahiptir. Bu tür gözlemlerin diğer gözlemlerden ayrıldığını görsel olarak anlayabilmek için index nokta grafiği de çizilebiliyor idi. İlgili grafik, Grafik 7.25'de verilmiştir ve x uzayındaki aykırı gözlemler yuvarlak içine alınmıştır.



Grafik 7.25. Hastane Yöneticisi Verisi İçin Gözlem Uzaklığı-Gözlem No Grafiği

Veriyi etkili gözlemlerin varlığı açısından incelersek kesim noktası; $F_{(6+1,30-6-1,\ \alpha=0.50)} = F_{(7,23;\ \alpha=0.50)} = 0.933$ olarak bulunur. Buna göre hiçbir C_i^2 değeri F değerinden büyük olmadığı için veride etkili gözlem olmadığını söyleyebiliriz. Etkili gözlemleri araştırmanın bir yolu da index nokta grafiği çizmek idi. İlgili grafik Grafik 7.26'da verilmiştir.



Grafik 7.26. Hastane Yöneticisi Verisi (Tablo 7.23) için Cook Uzaklığı–Gözlem No Grafiği

Grafik 7.26'da 6 nolu gözlem diğerlerinden oldukça ayrı bir yerde olmasına rağmen yapılan test sonucunda etkili bir gözlem olmadığı görülmüştü. Bazı kaynaklarda F istatistiği $\alpha = 0.50$ yerine $\alpha = 0.10$ olarak da alınmaktadır. $\alpha = 0.10$ için F değeri 0.38 olarak bulunur ki örneğimizde bu değerden daha büyük değer de yoktur. Sonuç olarak, yukarıda belirtilen uzak gözlemlerin etkili gözlem olmadıkları anlaşılmıştır. Bu nedenle, veriden herhangi bir gözlemin bu nedenle çıkartılmasına ve modelin tekrar incelenmesine gerek kalmamaktadır.

Artıkların incelenmesine ilişkin son örnek (Örnek 7.14) aşağıda verilmiştir. Bu örnekle birlikte çeşitli artık çizimleri de tartışılacaktır.

Örnek 7.14. Bir spor bilimci, yüzücülerin sezon sonlarında (bir sezon 6 aylık bir dönemdir) federasyon istatistik bürosunca elde edilen ve sporcuların yarışmalarda elde ettiği derecelere dayalı olarak hesaplanan ***dönemsel performans skorlarını*** (y), ***6 aylık dönemin 4. ayında "belirlenen bir yöntem çerçevesinde" sporcunun atabildiği kaliteli 50 m sprint sayısı*** (x_1) ve ***dönemin 4. ayına kadar yüzülen kilometre cinsinden toplam mesafe*** (x_2) ile önceden kestirmek istiyor. Bu amaçla, Türkiye Şampiyonalarına katılacak 16-18 yaş yüzücüleri arasından 28 orta ve uzun mesafe yüzücüsünü rasgele seçerek 4. ay ölçümlerini (x_1 ve x_2) belirledikten sonra sezon sonu dönemsel performans skorlarını (y) elde ediyor. Veriler Tablo 7.35'de verilmiştir.

Tablo 7.35. Dönemsel Performans Verisi

Kişi no	y	x_1	x_2
1	12.30	3	340
2	79.30	31	1320
3	35.15	17	769
4	16.68	7	563
5	11.48	3	221
6	14.88	4	80
7	13.75	6	150
8	18.11	7	330
9	8.00	2	110
10	17.83	7	210
11	21.50	5	605
12	40.33	16	688
13	21.00	10	214
14	13.50	4	257
15	19.75	6	463
16	24.00	9	448
17	29.00	10	776
18	15.35	6	200
19	19.00	7	132
20	18.00	19	240
21	17.90	10	141
22	18.75	9	450
23	20.00	8	635
24	52.00	25	780
25	10.75	4	150
26	40.00	12	505
27	37.00	13	550
28	55.50	20	600

Basit doğrusal regresyonda değindiğimiz gibi, çözümleme öncesinde bağımlı ve bağımsız değişken arasındaki saçılım grafiğinin incelenmesi yararlıdır. Bu yaklaşım, çoklu doğrusal regresyon için de *her bir bağımsız değişkenle bağımlı değişkenin saçılım grafiklerinin incelenmesi* şeklinde genellenebilir gibi gözükse de bu yaklaşım genel olarak doğru değildir. Tablo 7.35'de verilen Dönemsel Performans Verisi için çoklu regresyona ilişkin varyans analizi sonuçları ile çoklu regresyon sonuçları sırasıyla Tablo 7.36 ve Tablo 7.37'de verilmiştir.

Tablo 7.36. Dönemsel Performans Verisi (Tablo 7.35) İçin Varyans Analizi Sonuçları

DK	*KT*	*Sd*	*KO*	*F*	*p*
Toplam	7045.629	27			
R	6222.329	2	3111.165	94.472	0.000
A (Artık)	823.299	25	32.932		

Tablo 7.37. Dönemsel Performans Verisi (Tablo 7.35) İçin Çoklu Regresyon Sonuçları

Değişken	b_j	$S(b_j)$	*Beta*	*t*	*p*
x_1	1.462	0.234	0.635	6.257	0.000
x_2	0.02083	0.006	0.367	3.613	0.000
Sabit	1.532	2.045		0.749	0.481
	n=28	*R=0.94*	*R^2=0.883*	*s=5.7386*	

Dönemsel Performans verisine (Tablo 7.35) ilişkin artıkların bir bölümü Tablo 7.38'de, bir bölümü de Tablo 7.39'dadır. Tablolarda verilenlerin bir bölümüne ilişkin hesaplamalar ise ***1. gözlem için*** aşağıdadır.

$$\hat{y}_1 = 1.532 + 1.462(3) + 0.02083(340) = 13.001$$

$$e_1 = 12.30 - 13.001 = -0.701$$

$$e_{1S} = -0.701/5.7386 = -0.1222$$

$$r_1 = -0.701/\sqrt{5.7386^2(1-0.088)} = -0.1279$$

$$r_1^* = -0.1279\sqrt{\frac{28-2-2}{28-2-1-(-0{,}1279)^2}} = -0.1254$$

$$e_{(1)} = -0.701/(1-0.088) = -0.769$$

$$C_1^2 = \frac{1}{2+1}(-0.1279)^2\left(\frac{0.088}{1-0.088}\right) = 0.00053$$

$$DFITS_1 = -0.1279\sqrt{\frac{0.088}{1-0.088}} = -0.0397$$

DFBETA'ları bulmak için (3x28) boyutlu R matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$R = \begin{bmatrix} \mathbf{0.072571} & -0.15586 & \ldots\ldots\ldots & -0.02346 \\ \mathbf{-0.00901} & 0.007788 & \ldots\ldots\ldots & 0.011323 \\ \mathbf{0.000125} & 0.000267 & \ldots\ldots\ldots & -0.00013 \end{bmatrix} \begin{matrix} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \end{matrix}$$

Buradan $r'_1 r_1 = 0.126968666$, $r'_2 r_2 = 0.001659$, $r'_3 r_3 = 0.0000010092$ ve sırasıyla b_0, b_1 ve b_2 için DFBETA'lar aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\boldsymbol{DFBETAS_{0,1}} = (b_0 \text{ için DFBETA}) = \frac{0.072571}{\sqrt{0.126969}}\frac{-0.1254}{\sqrt{1-0.088}} = -0.02675$$

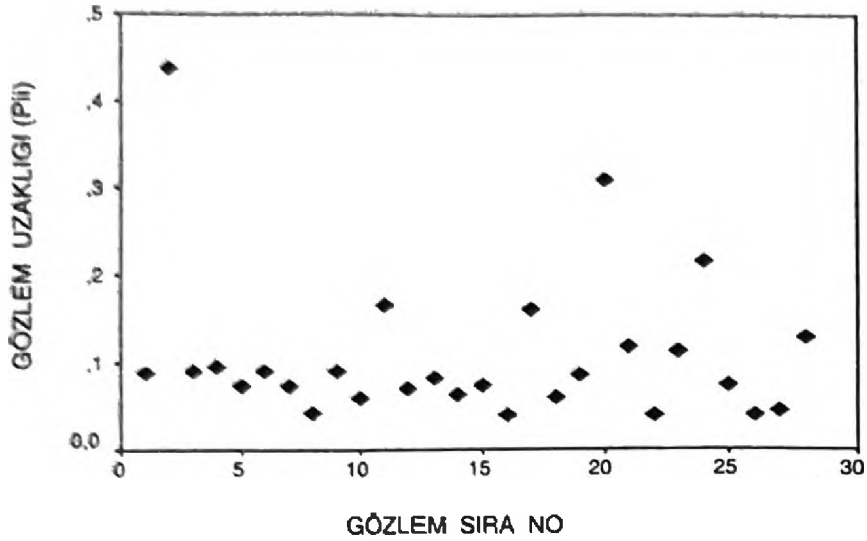
$$\boldsymbol{DFBETAS_{1,1}} = (b_1 \text{ için DFBETA}) = \frac{-0.00901}{\sqrt{0.001659}}\frac{-0.1254}{\sqrt{1-0.088}} = 0.02906$$

$$\boldsymbol{DFBETAS_{2,1}} = (b_2 \text{ için DFBETA}) = \frac{0.000125}{\sqrt{0.0000010092}}\frac{-0.1254}{\sqrt{1-0.088}} = -0.01634$$

Tablo 7.38. Dönemsel Performans Verisine İlişkin Gözlem İstatistikleri

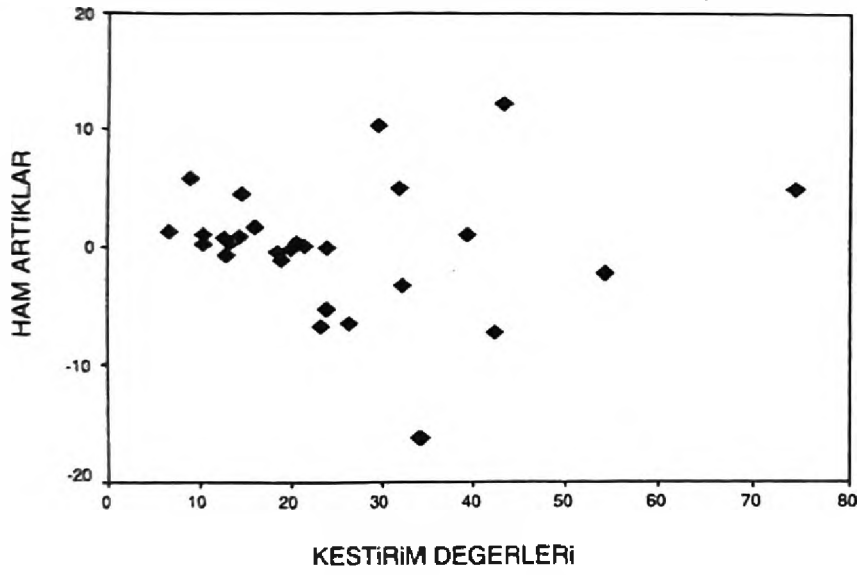
No	y_i	$\hat{y}_i$	e_i	p_{ii}	e_{ii}	r_i	r_i^*	m_i^2
1	12.30	13.001	-0.701	0.0880	-0.1222	-0.1279	-0.1254	1.413
2	79.30	74.363	4.937	0.4379	0.8603	1.1475	1.1551	10.858
3	35.15	42.412	-7.262	0.0904	-1.2654	-1.3268	-1.3483	1.478
4	16.68	23.496	-6.816	0.0945	-1.1878	-1.2482	-1.2630	1.586
5	11.48	10.522	0.957	0.0726	0.1667	0.1733	0.1699	0.995
6	14.88	9.0477	5.832	0.0906	1.0163	1.0657	1.0688	1.483
7	13.75	13.431	0.319	0.0723	0.0556	0.0578	0.0566	0.988
8	18.11	18.643	-0.533	0.0425	-0.0928	-0.0949	-0.0930	0.184
9	8.00	6.7478	1.252	0.0897	0.2182	0.2287	0.2243	1.457
10	17.83	16.143	1.687	0.0585	0.2939	0.3030	0.2974	0.615
11	21.50	21.446	0.054	0.1637	0.0094	0.0102	0.0100	3.455
12	40.33	39.262	1.068	0.0696	0.1861	0.1930	0.1892	0.915
13	21.00	20.614	0.386	0.0810	0.0673	0.0702	0.0688	1.224
14	13.50	12.735	0.765	0.0629	0.1333	0.1378	0.1350	0.734
15	19.75	19.951	-0.200	0.0726	-0.0350	-0.0363	-0.0356	0.996
16	24.00	24.026	-0.025	0.0392	-0.0044	-0.0045	-0.0044	0.094
17	29.00	32.320	-3.320	0.1593	-0.5786	-0.6311	-0.6233	3.338
18	15.35	14.472	0.878	0.0591	0.1529	0.1577	0.1546	0.631
19	19.00	14.518	4.482	0.0845	0.7810	0.8162	0.8106	1.317
20	18.00	34.317	-16.32	0.3062	-2.843	-3.4136	-4.5775	7.304
21	17.90	19.093	-1.193	0.1176	-0.2079	-0.2213	-0.2170	2.212
22	18.75	24.067	-5.317	0.0394	-0.9266	-0.9454	-0.9433	0.099
23	20.00	26.458	-6.458	0.1117	-1.1254	-1.1941	-1.2048	2.053
24	52.00	54.340	-2.340	0.2141	-0.4078	-0.4600	-0.4526	4.817
25	10.75	10.506	0.244	0.0721	0.0425	0.0442	0.0433	0.982
26	40.00	29.600	10.400	0.0391	1.8123	1.8488	1.9496	0.091
27	37.00	32.000	5.000	0.0436	0.8713	0.8909	0.8871	0.214
28	55.50	43.278	12.222	0.1269	2.1297	2.2792	2.5090	2.461

Gözlem uzaklığı açısından inceleme yapıldığında, x veri kümesinde, verinin merkezine en uzak olan gözlemin p_2=0.4379 ile 2. gözlem olduğu görülür. Bu gözleme ilişkin Mahalanobis uzaklığı 10.858'dir ve diğer m_i^2 değerlerinden oldukça farklıdır. p_{ii}'leri $2(p+1)/n$ yaklaşımı ile incelersek, kesim noktası 2(2+1)/28=0.214 bulunur. Bu ise 2 ve 20 nolu gözlemlerin x uzayında birer aykırı gözlem oldukları konusunda bilgi verir. Yukarıda belirtildiği gibi belli bir kesim noktası yerine farklılıkları görsel olarak inceleyebileceğimiz grafikler çizmek oldukça yararlıdır. Bu örneğe ilişkin *gözlem uzaklığı-gözlem sıra no* grafiği Grafik 7.27'de verilmiştir. Grafikte görüldüğü gibi p_{ii} değerleri 0.0 ile 0.20 arasında yoğunlaşmaktadır.



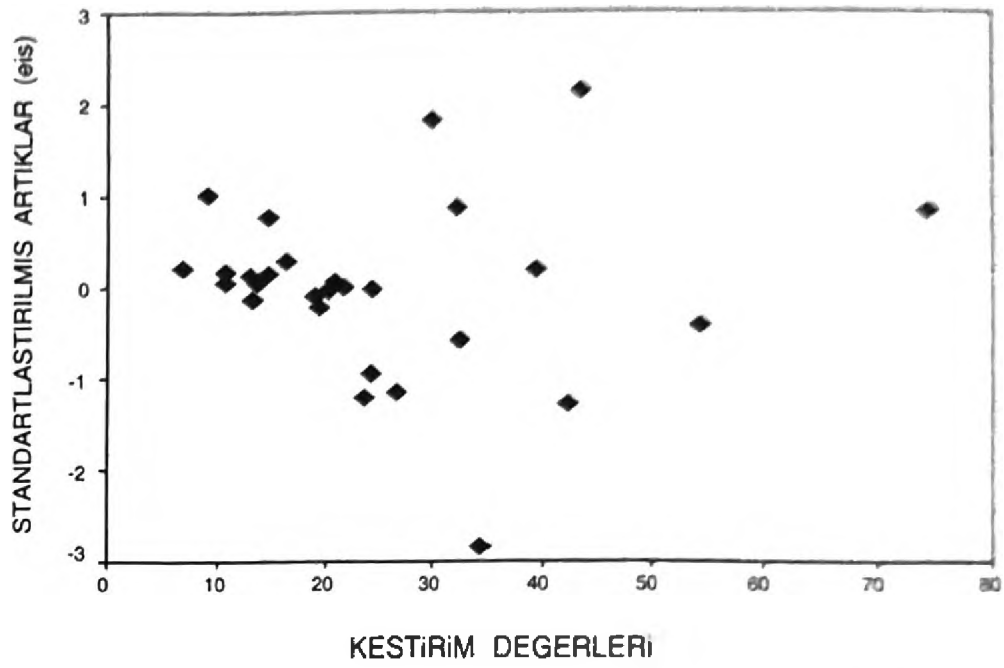
Grafik 7.27. Dönemsel Performans Verisi'nin Gözlem Sıra No–p_{ii} Grafiği

Tablo 7.38'de e_i ham artıkları incelendiğinde, 20 nolu artığın (e_{20}=–16.32), diğerlerine göre oldukça büyük olduğunu görürüz. Bu büyüklüğü e_{28}=12.222 ile 28 nolu artık izlemektedir. Gözlem uzaklığı büyük olan 2 nolu gözlemin ham artığı bu büyük artıklar yanında oldukça küçük kalmaktadır. Yukarıda belirtildiği gibi ham artıklara karşı kestirim değerlerinin grafiği bu büyüklükleri incelemenin yanısıra model bozuklukları konusunda da bilgi veriyordu. İlgili grafik aşağıda verilmiştir (Grafik 7.28). Grafikte görüldüğü gibi artıkların saçılımı Grafik 7.21-d'ye benzemektedir. Bu tür şekillere ilişkin tartışmalar değişen varyanslılık konusu işlenirken daha ayrıntılı ele alınacaktır.



Grafik 7.28. Dönemsel Performans Verisi İçin Kestirim Değerleri–Ham Artık Grafiği

Aykırı gözlemleri bulabilmek için ham artıklar yerine standartlaştırılmış artıkları (e_{is}) incelemek daha yararlıdır. Çünkü ±2 sınırlarından yararlanma olanağı vermektedir. Buna göre, 20 ve 28 nolu gözlemlere ilişkin standartlaştırılmış artıkların ±2 sınırlarını aştığı, diğerlerinin ise bu sınırlar arasında olduğu görülür. Bu durum ve grafiğin yapısı Grafik 7.29'da verilmiştir. Bir önceki grafikle bu grafiğin yapısı aynı olmakla birlikte artıkların dağılım aralığı değişmiştir.



Grafik 7.29. Dönemsel Performans Verisi İçin Kestirim Değerleri–Standartlaştırılmış Artık Grafiği

Tablo 7.38'de, r_i türü Student artıkları incelendiğinde test için t değeri, t tablosundan $t_{(sd=n-p-1,\alpha)} = t_{(sd=28-2-1;\alpha=0.05)} = 2.06$ olarak bulunur. Buna göre 20 ve 28. gözlemlerin r_i türü Student artıkları bu sınırları geçmektedir. r_i^* türü Student artıkları için de durum aynıdır. İstenirse, kestirim değerlerine karşı r_i *ya da* r_i^* artıkları grafiği de çizilebilir (bu çizimler okuyucuya bırakılmıştır).

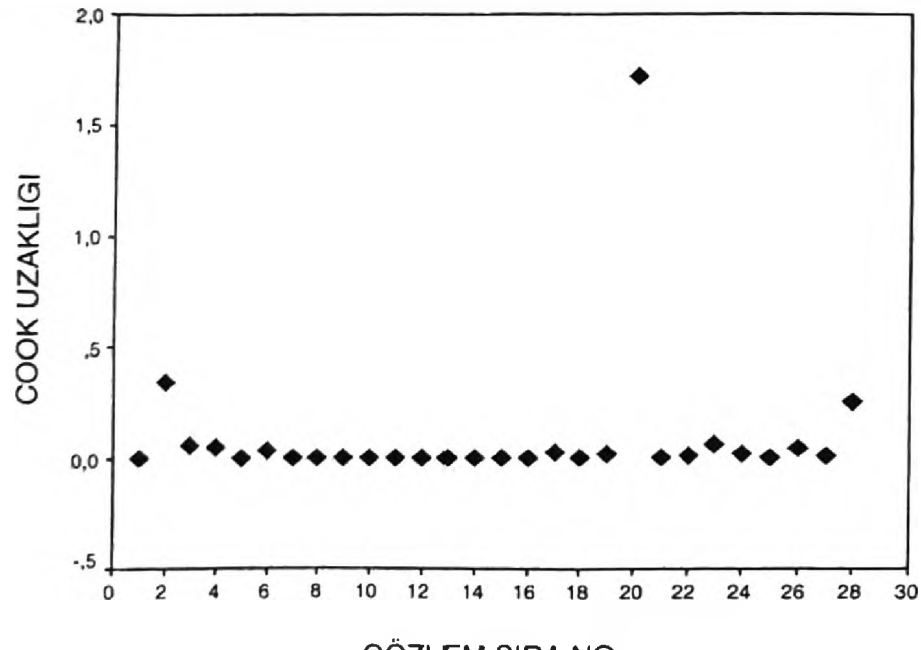
Silinmiş artıklar incelendiğine ise yine 20 ve 28 nolu gözlemlerin diğerlerinden daha büyük olduğu görülür. Bu gözlemler nedeniyle, yeni bir verinin modele uyumunda sorunlar olabileceği düşünülür.

Verilere ilişkin $e_{(i)}$, C_i^2, $DFITS_I$, standartlaştırılmış $DFBETA_{ji}$ ve kovaryans oranı (KO_i) bulguları Tablo 7.39'da verilmiştir.

Veri Cook uzaklığı açısından incelendiğinde, yine 20. gözlemin regresyon katsayıları üzerine çok etkili olduğu (Cook uzaklığı 1'in üzerinde olduğu için), 2. ve 28. gözlemin ise diğerlerine göre oldukça etkili gözlemler olduğu görülür. Gözlem sıra no'ya karşı Cook uzaklığı grafiği Grafik 7.30'da verilmiştir. Kesim noktası kuralıyla, 4/(28-2-1)=0.16'nın üzerinde olan Cook uzaklıklarının oldukça etkili olduğu söylenebilir.

Tablo 7.39. Dönemsel Performans Verisi İçin Gözlem İstatistikleri (devam)

No	$e_{(i)}$	C_i^2	$DFITS_i$	$DFBETA_{j,i}$ b_0 için	b_1 için	b_2 için	KO_i
1	-0.769	0.00053	-0.03897	-0.02675	0.02906	-0.01635	1.237
2	8.783	0.34188	1.01949	-0.67388	0.29459	0.40933	1.710
3	-7.984	0.05836	-0.42522	0.13441	-0.04283	-0.18916	0.998
4	-7.527	0.05418	-0.40793	-0.10939	0.29727	-0.30262	1.029
5	1.0323	0.00078	0.04752	0.04343	-0.02343	0.00087	1.214
6	6.413	0.03773	0.33739	0.32075	0.01414	-0.18700	1.081
7	0.344	0.00009	0.01580	0.01413	0.00247	-0.00921	1.218
8	-0.556	0.00013	-0.01959	-0.01574	0.00484	0.00058	1.179
9	1.376	0.00172	0.07041	0.06965	-0.02143	-0.01798	1.234
10	1.792	0.00190	0.07414	0.06393	0.01172	-0.03880	1.187
11	0.064	0.00001	0.00444	0.00097	-0.00369	0.00363	1.352
12	1.148	0.00093	0.05175	-0.01093	0.00976	0.01619	1.209
13	0.421	0.00015	0.02044	0.01264	0.01131	-0.01529	1.229
14	0.817	0.00042	0.03498	0.03109	-0.01658	0.00153	1.203
15	-0.216	0.00003	-0.00996	-0.00475	0.00704	-0.00583	1.219
16	-0.027	0.00000	-0.00090	-0.00047	0.00026	-0.00024	1.176
17	-3.950	0.02517	-0.27139	0.01690	0.17676	-0.23905	1.281
18	0.933	0.00052	0.03874	0.03546	0.00079	-0.01698	1.198
19	4.895	0.02050	0.24626	0.20031	0.08148	-0.17364	1.138
20	-23.52	1.71485	-3.04157	-0.40228	-2.77389	2.51647	0.248
21	-1.352	0.00218	-0.07926	-0.04669	-0.04891	0.06615	1.273
22	-5.535	0.01222	-0.19107	-0.09820	0.05638	-0.05222	1.055
23	-7.271	0.05980	-0.42735	-0.05920	0.30264	-0.34546	1.067
24	-2.978	0.01922	-0.23625	0.09297	-0.17765	0.04906	1.402
25	0.263	0.00005	0.01206	0.01173	-0.00177	-0.00434	1.218
26	10.823	0.04635	0.39321	0.10185	0.04524	0.03812	0.757
27	5.228	0.01208	0.18954	0.02244	0.02726	0.03108	1.073
28	13.997	0.25158	0.95635	-0.17679	0.74648	-0.33920	0.644



Grafik 7.30. Dönemsel Performans Verisi İçin Gözlem Sıra no-Cook Uzaklığı Grafiği

$DFITS_i$ için kesim noktası $2\sqrt{(p+1)/n}$ idi. Buradan, kesim noktası= $2\sqrt{(2+1)/28} = 0.655$ olarak bulunur ve yine aynı gözlemlerin (2 , 20 ve 28) sorunlu olduğu ve bu gözlemlerin kestirim üzerine etkili oldukları söylenir.

$DFBETA_{j,i}$ değerleri için kesim noktası $2/\sqrt{n} = 2/\sqrt{28} = 0.38$ olarak bulunur. Buradan, özellikle 20 nolu gözlemin bu üç regresyon katsayısı üzerine olan etkisinin oldukça fazla olduğu görülür. 28. gözlemin özellikle b_1 üzerine etkisi oldukça fazla, b_0 ve b_2 üzerine etkisi ise daha azdır. Yine, 2. gözlemin b_0 üzerine etkisi oldukça fazladır.

Kovaryans oranı ise regresyon katsayıları üzerine bir gözlemin etkisi konusunda bilgi veriyordu. Kovaryans oranı için kesim noktası $1 \pm 3(3)/28$ ya da 0.67 ile 1.32 arasındaki değerler normal kabul edilirse 2., 20. ve 28. gözlemlerin kovaryans oranları bu sınırları geçmektedir. Bu nedenle bu gözlemlerin etkili olduğu söylenir.

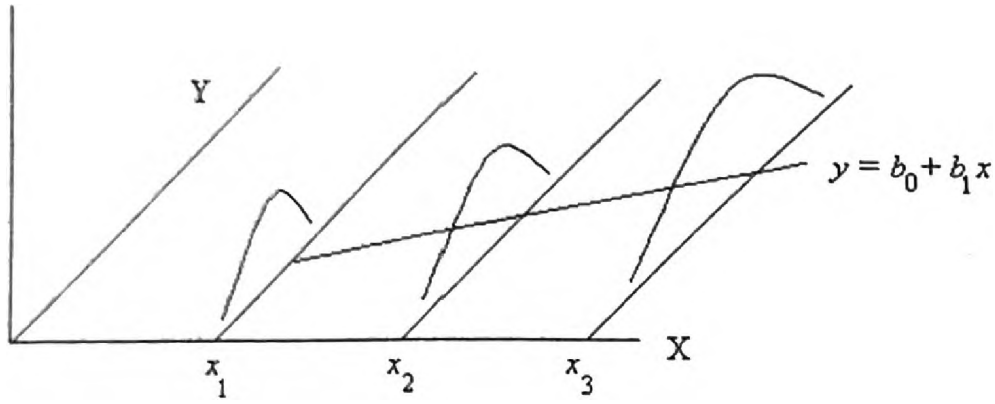
Yukarıdaki açıklamalar sonucunda, öncelikle 20. ve 28. gözlemlerin veriden çıkartılması ve regresyon sonuçlarının 26 gözlem üzerinden yeniden elde edilmesi iyi bir yaklaşım olacaktır. Veriden gözlem silme yaklaşımı sonucunda elde edilen sonuçlar ile veriden gözlem silinmemiş sonuçlar bir tablo üzerinde özetlenirse, bazı istatistiklerdeki değişimleri aynı anda görmek açısından yararlı olabilmektedir. Örneğin, n=28 ve n=26 için sonuçlar Tablo 7.40'da özetlenmiştir. 20 ve 28. gözlemin veriden silinmesi katsayılarda oldukça değişikliğe neden olurken *AKO*'sında azalmaya ve R^2'de ciddi denebilecek bir artışa neden olmuştur. Bu nedenle, n=26 gözlemli modelin daha iyi bir seçenek olduğu söylenebilecektir. Ancak, artıklara ilişkin incelemeler bu yeni veri için yapılarak sonuçların irdelenmesi gerekmektedir.

Tablo 7.40. n'deki Değişmeler Sonucunda Bazı İstatistiklerdeki Değişmeler

n	b_0	b_1	b_2	*AKO*	R^2
28	1.532	1.462	0.02083	32.932	0.883
26 (20 ve 28. gözlem silindiğinde)	2.321	1.738	0.01237	15.413	0.941

7.4.5. Değişen Varyanslılık

Hata (yanılgı) varyansının sabitliği ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_n^2 = \sigma^2$), en küçük kareler teorisinin standart varsayımlarından biri olup "homoscadasticity" olarak bilinir. Bu varsayımın bozulmasına değişen varyanslılık (heteroscadasticity) sorunu denir. Bu bozulma, bir bağımlı bir bağımsız değişken olması durumu için Grafik 7.31'de verilmiştir. Grafikte görüldüğü gibi, x değerleri için y alt kümelerinin yaygınlığı sabit değildir. Grafik 7.31'deki gibi bir sorun için, x'in küçük değerlerinde y'lerin varyansı küçük, x'in büyük değerlerinde y'lerin varyansı büyüktür. Varsayım gereği, y alt kümelerinin varyanslarının eşitliği istenir. Uygulamada, gerek basit gerekse çoklu regresyon modelinde değişen varyanslılık sorunu olup olmadığı, $\hat{y}_i$ kestirim değerlerine karşı e_i ya da r_i artık grafiğinin çizilmesi ile görsel olarak belirlenmeye çalışılır (Grafik 7.21'i inceleyiniz).



Grafik 7.31. Değişen Varyanslılık Bozulumu

Bilindiği gibi hata varyansları özellikle bağımlı değişkenin değerlerine bağlıdır. Buna bağlı olarak değişen varyanslılık bozulumu da çoğunlukla bağımlı değişken değerlerine bağlıdır. Özellikle, bağımlı değişken değerlerine ilişkin değişim aralığının çok büyük olduğu durumlarda (örneğin, 0 ile 1000 arasında) bu sorunla karşılaşmak olasıdır. Örneğin, gelir düzeyi düşük, sigortasız kişilerin sağlık harcamaları belli bir sınır çerçevesinde değişirken, gelir düzeyi yüksek olan kişilerin sağlık harcamaları kişiden kişiye çok farklılık gösterebilir. Bu, sağa megafon şeklinde ortaya çıkan bozuluma ilişkin bir örnektir (Grafik 7.21-*b*). Yine, hizmet yılı az olan kişilerin hatalı davranışta bulunma sayıları geniş bir aralıkta değişim gösterirken, hizmet yılı fazla olanların hatalı davranışta bulunma sayıları daha dar bir aralıkta değişim gösterecektir. Bu ise sola megafon (7.21-*c*) şeklindeki bozuluma bir örnektir.

Diğer taraftan, *y* bağımlı değişkeni, "varyansı o dağılımın ortalamasının bir fonksiyonu olan" bir olasılık dağılımına uyabilir. Binom ve Poisson dağılımları bu özelliğe sahip iki yaygın olasılık dağılımıdır. Yani, bu dağılımların ortalaması ile varyansı arasında bir ilişki vardır. Örneğin, bir dağılım *n* ve *p* parametreli bir Binom dağılımı gösteriyor ise bu dağılımın ortalaması *np*, varyansı *np*(1-*p*)'dir. Yine, poisson dağılımının ortalaması ve varyansı birbirine eşittir. Bağımlı değişkenin bu türden dağılımlar gösterdiği durumlarda da değişen varyanslılık sorunu ile karşılaşılır. Ayrıca, bağımlı değişkenin çarpık olduğu durumlarda da değişen varyanslılık sorunu ile karşılaşılabilir.

Değişen varyanslılık sorunu araştırılmaz ve giderilmesi konusunda gerekli önlemler alınmazsa, elde edilen regresyon katsayıları yansız olmasına rağmen büyük standart hataya sahip olacaktır. Bu ise, parametrelere ilişkin geniş güven aralıklarının oluşmasına ve katsayılara ilişkin testlerin düşük duyarlıkta olmasına neden olacaktır.

Bir regresyon modelindeki hata terimlerinin eşit varyansa sahip olup olmadıklarını ortaya çıkartan birkaç farklı yöntem olmakla birlikte, en çok kullanılanı artık çizimlerinin incelenmesidir (7.21-*b ve c*). Grafik 7.21-*d* ile verilen elips biçimine *y* bağımlı değişkeninin 0 ile % 100 arasında değişen yüzde değerler alması durumunda raslanmaktadır. Grafiğin biçiminden görüleceği gibi, düşük ve yüksek yüzdelerdeki değişim, % 50 civarındaki değişimden daha küçüktür. Ancak, artık çizimleri Grafik 7.21'de verdiğimiz kadar belirgin olmayabilir ve birkaç nokta nedeniyle yanlış kararlar verilebilir. Bazen, gerçek bir aykırı değer nedeniyle değişen varyanslılık sorunu olduğu izlenimi doğabilir. Diğer taraftan, *x* eksenindeki değişkenin uç noktalarındaki

gözlemler, değişen varyanslılığın göstergeleri olarak dikkatlice incelenmelidir. Bu noktalar, çoğunlukla, regresyon katsayıları üzerinde etkiye sahip olup, göreceli olarak küçük artığa sahiptir.

Değişen varyanslılığın araştırılmasında, $\hat{y}_i$ değerlerine karşı r_i^2 değerlerinin nokta grafiğinin elde edilmesi de yararlı sonuçlar verir. Bu durumda r_i^2 değerleri $\hat{y}_i$ değerleri ile birlikte sistematik olarak artar ya da azalır. $\hat{y}_i$ değerlerine karşı r_i değerlerinin nokta grafiği, değişen varyanslılığa ek olarak model yetersizliğini ve aykırı değerleri araştırabilmekte iken, $\hat{y}_i$'lara karşı r_i^2 değerlerinin nokta grafiği, r_i ile $\hat{y}_i$ arasında var olan bazı eğilimleri belirtebilir. Öte yandan, y_i'lere karşı r_i'lerin grafiğinden kaçınılmalıdır. Çünkü, bu değişkenler genellikle ilişkilidir. Uyumun mükemmel ve tüm varsayımların yerine geldiği durumlarda bile y_i'lere karşı r_i'lerin grafiği genellikle doğrusal bir eğilim gösterir.

Değişen varyanslılık sorununu giderebilmek için; değişkenler üzerinde yapılacak dönüşümlerden yararlanmak sık başvurulan bir yöntemdir. Sadece y veya bir ya da daha fazla x değişkeninde ya da hem y hem de x değişkenlerinde yapılabilen bu dönüşümlere "varyans dengeleme dönüşümleri" denir. Ancak, bu dönüşümler çoğunlukla y değişkeni üzerinde yapılır. Varyansları ortalamaların bir fonksiyonu olan raslantı değişkenleri için bazı varyans dengeleme dönüşümleri Tablo 7.41'de verilmiştir.

Tablo 7.41. Varyans Dengeleme Dönüşümleri

Açıklama ve y Değişkeninin Olasılık Dağılışı	*Dağılımın Ortalaması Açısından y'nin Varyansı*	*Dönüşüm*	*Artık Durumu*
y'ler Poisson Dağılışına Uyan Sayımlar İse	μ	$\sqrt{y}$	Sağa ya da Sola Megafon
y'ler Poisson Dağılışına Uyan Sayımlar ve y'ler Sıfıra Yakın ya da Çok Küçükse	μ	$\sqrt{y}+\sqrt{y+1}$ $\sqrt{y+0.5}$ $\sqrt{y+1}$	"
y'lerin Dağılım Genişliği Çok Büyük ve Tüm y_i'ler Pozitif İse	μ^2	$log(y)$	"
Yukarıdakine Ek Olarak y_i'lerin Bazıları 0'a Eşit İse	μ^2	$log(y+1)$	"
y'lerin Sıfıra Yakın Olacak Şekilde Toplandığı ve Pozitif Olduğu Durumlarda	μ^4	$1/y$	"
Yukarıdakine Ek olarak Bazı y_i'ler Sıfır İse	μ^4	$1/(y+1)$	"
Binom Oranları İçin $0 \le y_i \le 1$	$\frac{\mu(\mu+1)}{n}$	$Sin^{-1}(\sqrt{y})$	Elips Biçimi

Tablodaki ikinci sütun, y'nin varyansını ortalama ile ifade etmektedir. Örneğin, birinci durum için y'nin varyansı 15 ise ortalaması da 15'tir. 3. durum için, y'nin varyansı 16 ise, y'lerin ortalamasının karesi de 16'dır ($s^2 = \bar{x}^2$).

$1/y$ türü dönüşümler daha çok bağımlı değişkenin; bekleme süresi, yaşam süresi,... gibi değişkenler olduğu durumlarda uygulanır.

Değişen varyanslılık sorununu giderebilmenin bir yolu da "ağırlıklı en küçük kareler" yöntemini kullanmaktır.

Örnek 7.15. Bir özel hastanede çalışan sağlık personelinin aylık gelir farklarını belirlediği düşünülen çeşitli faktörler dikkate alınarak, bu faktörlerin aylık geliri belirleyip belirlemediği öğrenilmek isteniyor. Bu amaçla rastgele 31 personel seçilerek aşağıdaki bilgiler elde ediliyor. Veriler Tablo 7.42'de verilmiştir.

x_1 : *İş değerlendirme puanı*

x_2 : *Cinsiyet* (1= *Erkek*, 0=*Kadın*)

x_3 : *Hastanedeki çalışma yılı*

x_4 : *Şu andaki pozisyonunda çalışma yılı*

x_5 : *Performans değeri* (1= *tatminkar değil*,....., 5= *iyi*)

y : *Ortalama aylık gelir* (*Dolar*)

Tablo 7.42. Aylık Gelir Verisi (*)

Kişi No	y	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	1000	350	1	2	2	5
2	1400	350	1	5	5	5
3	1200	350	0	4	4	4
4	1800	350	1	20	20	1
5	2800	425	0	10	2	3
6	4000	425	1	15	10	3
7	2500	425	0	1	1	4
8	3000	425	1	5	5	4
9	3500	600	1	10	5	2
10	2800	600	0	8	8	3
11	2900	600	0	4	3	4
12	3800	600	1	20	10	2
13	4200	600	1	7	7	5
14	4600	700	1	8	8	1
15	5000	700	0	25	15	5
16	4600	700	1	19	16	4
17	4700	700	0	20	14	5
18	1800	400	0	6	4	3
19	3400	400	1	20	8	3
20	2000	400	0	5	3	5
21	3200	500	1	22	12	3
22	3200	500	1	25	10	3
23	2800	500	0	8	3	4
24	2400	500	0	2	1	5
25	5200	800	1	10	10	3
26	2400	475	1	10	4	3
27	2400	475	0	3	3	4
28	3000	475	1	8	8	2
29	2800	475	1	6	6	4
30	2500	475	0	12	4	3
31	2100	475	0	4	2	5

(*) Salary Survey Data. Sensitivity Analysis in Linear Regression. S. Chatterjee ve A.S. Hadi, 1988, Sayfa 88. John Wiley-Sons Inc.Yayınevinin izniyle kullanılmıştır. Her hakkı saklıdır.

Tablo 7.42'deki veriler için çoklu regresyon çözümlemesi yapıldığında; R^2=0.836, F=25.421 olarak bulunmuştur. Modele en çok katkı yapan iki değişken; 0.788 ve 0.304'lük standartlaştırılmış regresyon katsayıları ile x_1 ve x_3 değişkenleridir. Ayrıca, bu değişkenlere ilişkin regresyon katsayıları anlamlı, diğer katsayılar anlamsızdır.

Beş bağımsız değişkenli çoklu regresyon modeline ilişkin $\hat{y}_i$, e_i, p_{ii}, r_i, r_i^* ve C_i^2 istatistikleri Tablo 7.43'de verilmiştir.

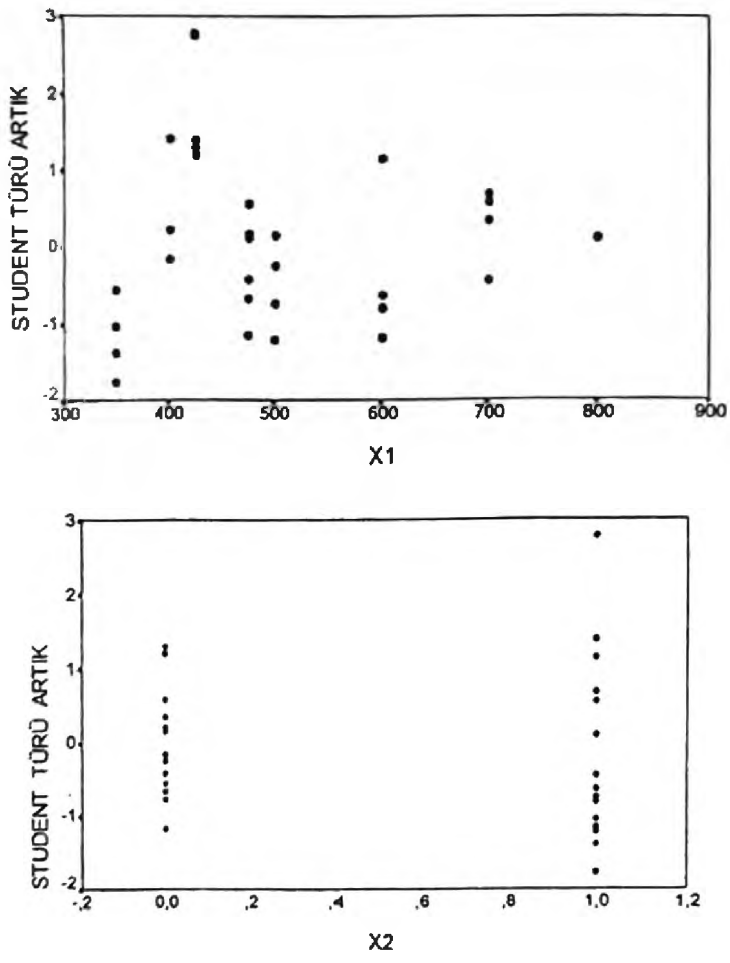
Tablo 7.43. Aylık Gelir Verisine İlişkin Gözlem İstatistikleri

Kişi No	$\hat{y}_i$	e_i	p_{ii}	r_i	r_i^*	C_i^2
1	1754.302	-754.302	0.235	-1.756	-1.838	0.158
2	1843.378	-443.378	0.223	-1.025	-1.026	0.050
3	1447.590	-247.590	0.147	-0.546	-0.538	0.009
4	2170.705	-370.705	0.698	-1.373	-1.400	0.726
5	2263.821	536.179	0.182	1.207	1.219	0.054
6	2699.758	1300.242	0.093	2.781	3.279	0.132
7	1895.157	604.843	0.112	1.307	1.327	0.036
8	2350.507	649.493	0.117	1.407	1.437	0.044
9	3773.950	-273.950	0.185	-0.618	-0.610	0.014
10	3325.654	-525.654	0.162	-1.169	-1.178	0.044
11	3252.768	-352.768	0.123	-0.767	-0.761	0.014
12	4152.714	-352.714	0.166	-0.787	-0.781	0.021
13	3691.572	508.428	0.202	1.159	1.168	0.057
14	4318.733	281.267	0.345	0.708	0.701	0.044
15	4768.657	231.343	0.373	0.595	0.587	0.035
16	4782.993	-182.993	0.237	-0.427	-0.420	0.009
17	4554.722	145.278	0.299	0.353	0.347	0.009
18	1867.960	-67.960	0.136	-0.149	-0.146	0.001
19	2783.917	616.083	0.218	1.419	1.450	0.094
20	1897.295	102.705	0.118	0.222	0.218	0.001
21	3526.088	-326.088	0.139	-0.716	-0.709	0.014
22	3697.007	-497.007	0.285	-1.197	-1.208	0.095
23	2721.487	78.513	0.088	0.167	0.164	0.000
24	2507.374	-107.374	0.119	-0.233	-0.229	0.001
25	5152.668	47.332	0.295	0.115	0.113	0.001
26	2925.428	-525.428	0.119	-1.140	-1.148	0.029
27	2312.303	87.697	0.093	0.187	0.184	0.001
28	2738.318	261.682	0.135	0.573	0.565	0.009
29	2737.961	62.039	0.104	0.133	0.131	0.000
30	2680.967	-180.967	0.150	-0.400	-0.393	0.005
31	2404.246	-304.246	0.104	-0.654	-0.647	0.008

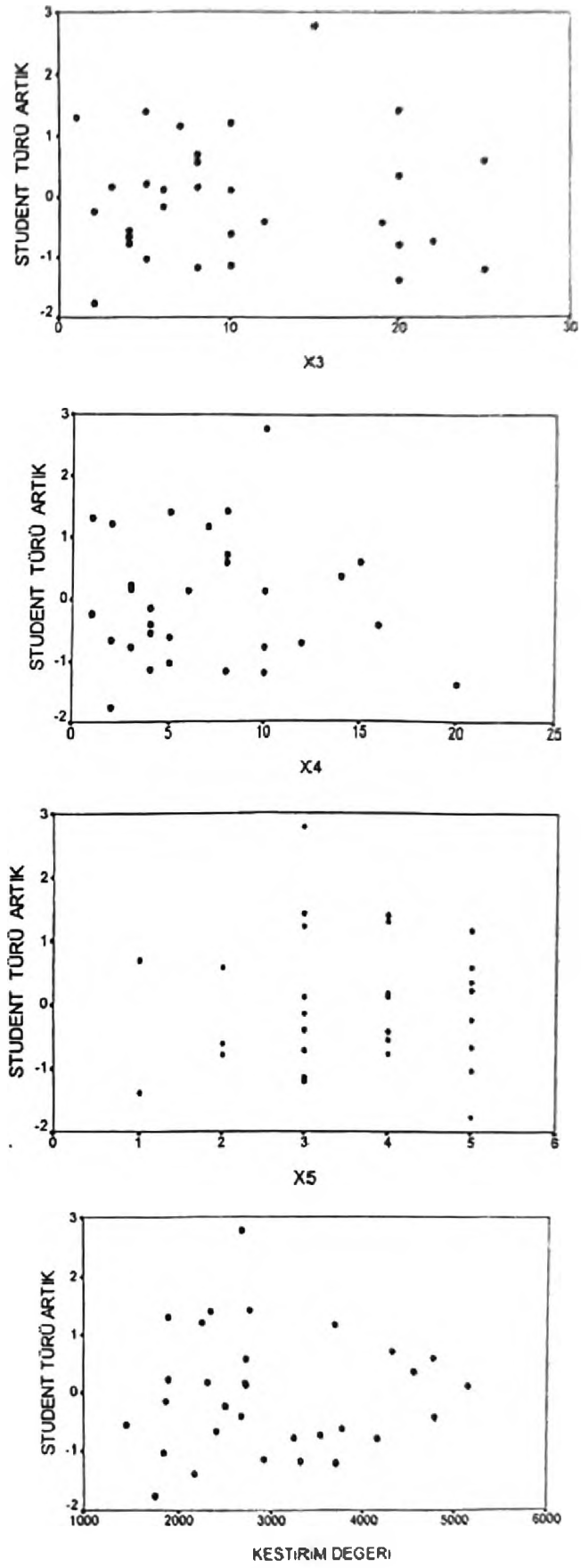
Tablo 7.43'de 6. gözleme ilişkin r_i ve r_i^* değerlerinin diğerlerine göre oldukça yüksek olduğu görülmektedir (2.781 ve 3.279). r_6=2.781'i test edersek; $\alpha = 0.05$, $n = 31$ ve $p + 1 = 5 + 1 = 6$ için tablo istatistiği Ek Tablo F'den 2.93 olarak bulunur. 2.781<2.93 olduğu için bu değerin bir aykırı değer olmadığı söylenir. Ayrıca, 4 nolu gözleme

ilişkin gözlem uzaklığı değeri ($p_{44} = 0.698$), diğerlerinden oldukça farklıdır. Örneğimiz için kesim noktası 2(5+1)/31 = 0.387 olduğundan bu gözlemin x uzayında bir aykırı değer olduğu söylenebilir. Bu gözleme ilişkin Cook uzaklığı değeri $C_i^2 = 0.726$ 'dır ve diğerlerinden oldukça farklıdır. $F_{(6,25;\ \alpha=0.50)} = 0.916$ olarak bulunduğundan, bu gözlemin etkili olmadığı söylenebilir. 6 nolu gözlem aykırı değer gibi gözükmemekle birlikte, oldukça büyük bir değerdir ve grafikle yapılacak incelemeler sonucunda bu nokta hakkında daha ayrıntılı bilgi elde edebiliriz. Gerek bu amaçla, gerekse model bozukluğu olup olmadığı konusunda bilgi edinmek amacıyla $\hat{y}_i$ ile her bir x_i değişkenine göre yapılan artık çizimleri Grafik 7.32'de verilmiştir.

Grafik 7.32 ile verilen tüm çizimlerde de görüldüğü gibi, 6 nolu gözlemin diğer gözlemlerin oluşturduğu kümeden ayrıldığı görülmektedir. Ayrıca, r_i'ye karşı $\hat{y}_i$ nokta grafiğinde, artıkların varyansı kestirim değerleri artarken azalmaktadır. Diğer bir deyişle, sola megafon şeklinde bir bozulum söz konusudur. Bu durum, veride aylık geliri yüksek birkaç sağlık personeli olması gerçeği ile ilgilidir. Yine, x_1 ve x_4'e karşı yapılan çizimlerde de sola megafon bozulumu söz konusudur. x_2'ye karşı yapılan çizimde ise artıklardaki değişim erkeklerde daha fazladır. Diğer çizimlerde ise belirli bir şekillenme söz konusu değildir.



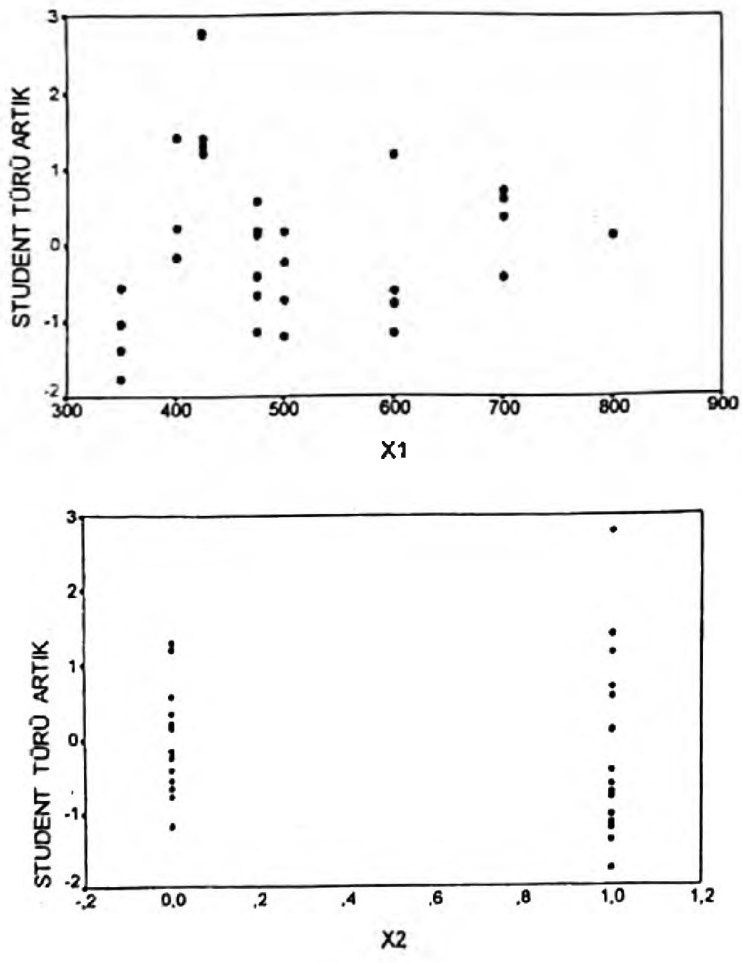
Grafik 7.32. Aylık Gelir Verisine İlişkin Artık Grafikleri



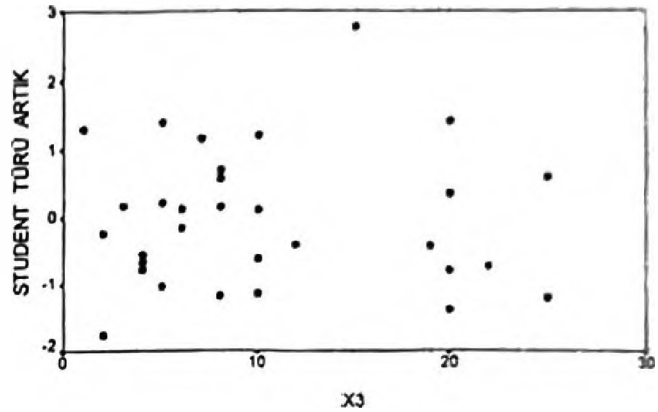
Grafik 7.32. Aylık Gelir Verisi'ne İlişkin Artık Grafikleri (devam)

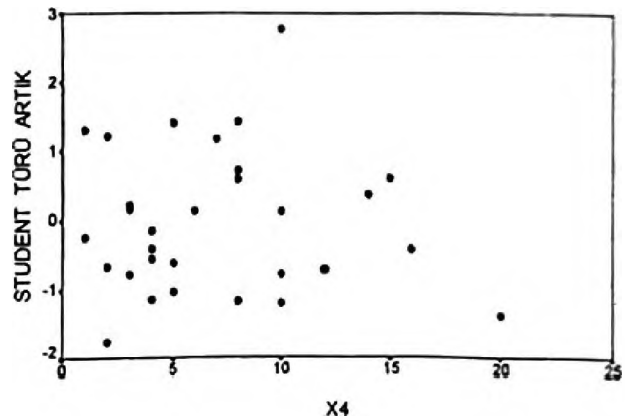
ilişkin gözlem uzaklığı değeri ($p_{44} = 0.698$), diğerlerinden oldukça farklıdır. Örneğimiz için kesim noktası $2(5+1)/31 = 0.387$ olduğundan bu gözlemin x uzayında bir aykırı değer olduğu söylenebilir. Bu gözleme ilişkin Cook uzaklığı değeri $C_i^2 = 0.726$ 'dır ve diğerlerinden oldukça farklıdır. $F_{(6,25;\ \alpha=0.50)} = 0.916$ olarak bulunduğundan, bu gözlemin etkili olmadığı söylenebilir. 6 nolu gözlem aykırı değer gibi gözükmemekle birlikte, oldukça büyük bir değerdir ve grafikle yapılacak incelemeler sonucunda bu nokta hakkında daha ayrıntılı bilgi elde edebiliriz. Gerek bu amaçla, gerekse model bozukluğu olup olmadığı konusunda bilgi edinmek amacıyla $\hat{y}_i$ ile her bir x_i değişkenine göre yapılan artık çizimleri Grafik 7.32'de verilmiştir.

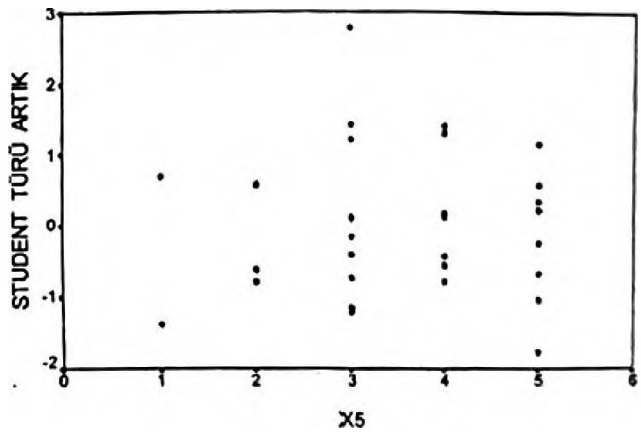
Grafik 7.32 ile verilen tüm çizimlerde de görüldüğü gibi, 6 nolu gözlemin diğer gözlemlerin oluşturduğu kümeden ayrıldığı görülmektedir. Ayrıca, r_i'ye karşı $\hat{y}_i$ nokta grafiğinde, artıkların varyansı kestirim değerleri artarken azalmaktadır. Diğer bir deyişle, sola megafon şeklinde bir bozulum söz konusudur. Bu durum, veride aylık geliri yüksek birkaç sağlık personeli olması gerçeği ile ilgilidir. Yine, x_1 ve x_4'e karşı yapılan çizimlerde de sola megafon bozulumu söz konusudur. x_2'ye karşı yapılan çizimde ise artıklardaki değişim erkeklerde daha fazladır. Diğer çizimlerde ise belirli bir şekillenme söz konusu değildir.

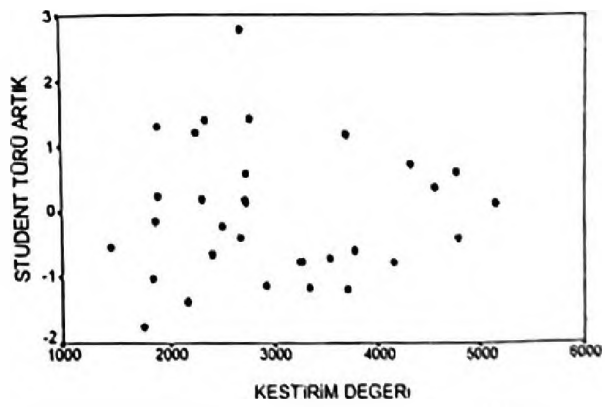


Grafik 7.32. Aylık Gelir Verisine İlişkin Artık Grafikleri









Grafik 7.32. Aylık Gelir Verisi'ne İlişkin Artık Grafikleri (devam)

Sonuç olarak 6 nolu gözlem, normal test işlemlerinde bir aykırı değer gibi gözükmemekle birlikte, grafik gösterimler bu gözlemin sorunlu olduğunu belirtmektedir. Ayrıca, 4 nolu gözlem de uzak ve etkili gözlem sayılabilecek kadar diğerlerinden ayrıktır. Bu gözlemleri modelden çıkartarak sonuçları elde etmek yerine, olanaklı ise daha fazla veri elde edilmesi yoluna gidilmelidir. Elde edilecek bu gözlemlerin; yüksek maaşlı personel (y) arasından, o anki görevinde daha fazla süredir çalışanlar (x_4) arasından ve yüksek değerlendirme puanına sahip kişiler (x_1) arasından elde edilmesinde büyük yarar vardır.

Bu örnekle verilmek istenen şey; aykırı gözlemlerin otomatik olarak veriden çıkartılmamaları ve gerekirse veriye ne tür gözlemlerin eklenmesi konusudur. Bu hatırlatmalar sonrasında, veriden 6 nolu gözlemi çıkartıp, modeli sadece önemli olan x_1 ve x_3 değişkenleri ile kuracak olursak; $R^2 = 0.87$, $F = 90.63$ olarak bulunurken, model varsayımlarından değişen varyanslılık sorununun devam ettiği görülecektir.

7.4.6. Hataların Normal Dağılmama Sorunu

Regresyon çözümlemesinin varsayımlarından biri, bilindiği gibi "hataların (ε_i) normal dağıldığı" varsayımıdır. Normallikten sapma önemsenmeyecek bir düzeyde ise sonuçları fazla etkilemeyecektir. Ancak, normallikten ciddi sapmalar sözkonusu olduğunda, bu varsayıma bağlı olan güven aralıkları, t ve F istatistiklerinde sorunlar çıkabilir. Normallik varsayımının yerine gelip gelmediği ***artıkların incelenmesi*** ile yapılır. Bu incelemede daha çok e_{is} ya da r_i artıkları kullanılır. Bölüm 4'de, çok değişkenli normal dağılım konusu incelenirken bir dağılımın normal dağılıp dağılmadığını araştıran yöntemlerden ikisi olan aralık yöntemi ile *Q-Q* grafik yöntemi üzerinde durulmuştu. Artık dağılımlarının normal dağılıp dağılmadığı da bu yöntemlerden biri ile incelenebilir. İstatistik yazılımların çoğunda, incelenen dağılımın normal dağılıp dağılmadığı grafik yöntemlerle (Histogram, *P-P, Q-Q, Kutu-çizgi, Detrended*) "görsel" olarak kolayca anlaşılabilir. Bölüm 4'de belirtildiği gibi, artıklara ilişkin *PP ya da Q-Q* grafiğinde saçılımın doğru üzerinde ya da çevresinde kümelenmemiş olması ya da belirli şekiller göstermesi, normallik varsayımının yerine gelmediği hakkında bilgi verir. İstenirse, normallik testlerinden de yararlanılabilir. Bu testlerden ikisine, Bölüm 4'de sözel olarak değinilmişti.

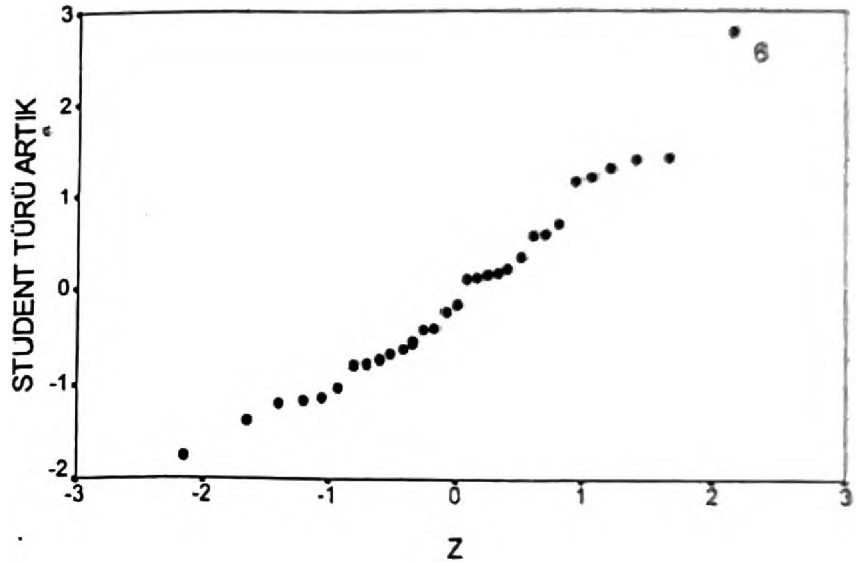
Normallik varsayımının sağlanamamasının nedeni; aykırı değerler olabileceği gibi, etkili gözlemlerin varlığı da olabilir. Bu nedenle, bu sorunun giderilmesi için aykırı ve etkili gözlemlerin dikkatlice incelenmesi ve gerekirse bu gözlemlerin veriden çıkarılması gerekebilir. Ayrıca, bağımlı değişken üzerinde yapılacak dönüşümlerden yararlanılabilir. Bu konu üzerinde Bölüm 4'de durulmuştu. Bazen, bu amaçla, bağımsız değişkenler üzerinde de dönüşümler yapmak gerekebilir.

Bölüm 4'de bir dağılımın normal dağılıp dağılmadığına ilişkin örnek vermiştik. Şimdi, Örnek 7.15'e ilişkin artıkların normal dağılım gösterip göstermediğini *Q-Q* grafik yöntemi ile araştıralım. Bu amaçla, hasaplamalara ilişkin gösterim Tablo 7.44'de, ilgili grafik ise Grafik 7.33'de verilmiştir. Bu grafik r_i artıklarına göre çizilmiştir.

Grafik 7.33'de görüldüğü gibi, artıklar bir doğru üzerindedir. Bu nedenle de artıkların normal dağılım gösterdiği söylenebilir. Ancak, en sağda üst köşede yer alan 6 nolu gözlem oldukça uç bir noktadadır.

Tablo 7.44. Aylık Gelir Verisi İçin Normal Dağılıma Uygunluğun Araştırılması

Gözlem no	Sıralı r_i	$(i-0.5)/31$	z_i
1	-1.756	0.016	-2.15
2	-1.373	0.048	-1.66
3	-1.197	0.080	-1.41
.	.	.	.
31	2.781	0.984	2.15



Grafik 7.33. Aylık Gelir Verisi'ne İlişkin Artıklar İçin Q-Q Grafiği

7.4.7. Çoklubağlantı Kavramı, Nedenleri, Belirlenmesi ve Giderilmesi

Çoklu regresyon denkleminin yorumu, bağımsız değişkenlerin kuvvetli bir şekilde ilişkili olmaması varsayımına bağlıdır. Bu varsayımın bozulması, yani bağımsız değişkenler arasında bir ya da daha fazla doğrusal bağıntının olması çoklubağlantı (multicollinearity) sorununu gündeme getirir.

Bağımsız değişkenler arasında ilişki olmaması durumunda bu değişkenlerin dik (orthogonal) olduğu söylenir. Ancak, regresyon uygulamalarının çoğunda, bağımsız değişkenler arasında ilişki söz konusudur. Hatta, bazı durumlarda, bağımsız değişkenler arasında çok kuvvetli doğrusal ilişki vardır ve böyle durumlarda, regresyon modeli yardımıyla yapılacak çıkarsamalar yanlış yönlendirmelere ve hatalara neden olur. Örneğin, veride çok küçük değişiklik yapıldığında katsayılarda büyük değişiklikler olur.

Çoklubağlantı; X, $n\times(p+1)$ boyutlu girdi matrisini göstermek üzere, $x_1, x_2, \ldots, x_p$ kolonlarının doğrusal bağımsızlığı açısından tanımlanabilir. $(k \le p)$ olmak üzere

$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k$ bağımsız değişken vektörleri hepsi sıfır olmayan $t_1, t_2, \ldots, t_k$ skalerleri ile çarpıldığında:

$$\sum_{i=1}^{k} t_i x_i = t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots\ldots + t_k x_k = 0 \qquad (7.90)$$

ise, $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_k$ vektörleri doğrusal bağımlıdır ve bu durumda ***tam çoklubağlantıdan*** söz edilir. (7.90)'dan anlaşılacağı üzere herhangi bir x_i vektörü diğerleri cinsinden yazılabilir. Böyle durumlarda $X'X$ matrisinin rankı p+1'den küçük olacağı için (çoklu doğrusal regresyonun varsayımlarından biri, $n \times (p+1)$ boyutlu X girdi matrisinin p+1 ranklı olmasıdır. Rankın p+1 olması, X girdi matrisinin sütunlarının birbirinden bağımsız olduğunu, diğer bir deyişle, bağımsız değişkenler arasında doğrusal bir bağıntı bulunmadığını ifade eder. X girdi matrisinin sütunlarının birbirinden bağımsız olması, $(p+1)\times(p+1)$ boyutlu $X'X$ matrisinin sütunlarının da birbirinden doğrusal bağımsız ve rankının p+1'e eşit olmasını sağlar) regresyon katsayılarının hesaplanması için gerekli olan $(p+1)\times(p+1)$ boyutlu $X'X$ matrisinin tersi $[(X'X)^{-1}]$ alınamayacaktır.

Örneğin, 4 bağımsız değişken aşağıdaki gibi olsun. Bu değişkenlerden 3'ü arasında $x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$ eşitliği söz konusudur. Diğer bir deyişle,

x_1	x_2	x_3	x_4
5	1	2	13.0
3	1	1	6.5
10	4	3	8.0
8	2	3	6.6
14	4	5	4.5
7	1	3	7.0
10	2	4	6.5
6	2	2	8.5

örneğin x_1 değişkeni, $x_1 = x_2 + 2x_3$ şeklinde diğer ikisi yardımıyla yazılabilir. Bu dört bağımsız değişkene ilişkin p+1 boyutlu $X'X$ matrisini bulacak olursak,

$$X'X = \begin{bmatrix} 8 & 63 & 17 & 23 & 60.6 \\ 63 & 579 & 159 & 210 & 445.3 \\ 17 & 159 & 47 & 56 & 119.7 \\ 23 & 210 & 56 & 77 & 162.8 \\ 60.6 & 445.3 & 119.7 & 162.8 & 502.56 \end{bmatrix}$$

olur. Görülebileceği gibi, X matrisindeki $x_1 = x_2 + 2x_3$ doğrusal bağıntısı $X'X$ matrisi için de geçerlidir (63=17+2(23), 579=159+2(210), ...). Dolayısıyla, bu değişkenler arasında tam çoklubağlantı vardır ve $X'X$ matrisinin tersi (inversi) alınamaz.

(7.90) ifadesi,

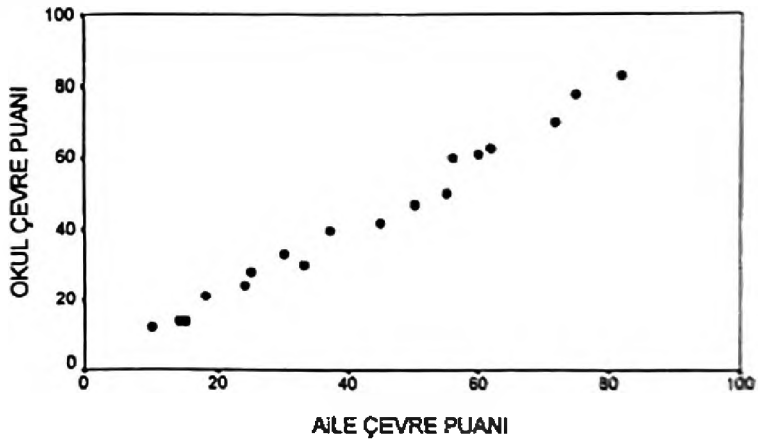
$$\sum_{i=1}^{p} t_i x_i \cong 0 \qquad (7.91)$$

şeklinde sağlanıyorsa, ***güçlü çoklubağlantıdan*** söz edilir. Bu durumda $X'X$ matrisinin tersi alınabilecektir. Ancak, regresyon sonuçlarında belirsizlikler söz konusu olacaktır. Örneğin, elde edilen regresyon katsayıları, verideki küçük değişikliklere ve de modelden bir değişkenin çıkartılması ve eklenmesine karşı çok duyarlı duruma gelir. Yani, veride çok küçük değişiklikler yapıldığında regresyon katsayılarında büyük değişiklikler olur. Ayrıca, regresyon katsayılarına ilişkin standart hataların çok büyük çıkması, t değerlerinin küçük, dolayısıyla da önemsiz çıkmasına neden olur. Çoklubağlantının bir diğer etkisi de, en küçük kareler yöntemi ile elde edilen regresyon katsayıları üzerine olup, katsayıların mutlak değerleri olduğundan çok büyük çıkabilir.

Çoklubağlantının Nedenleri

Çoklubağlantı çoğunlukla aşağıdaki nedenlerden dolayı ortaya çıkar.

1. Örneklemin evreni temsil etmemesi nedeni ile ortaya çıkan çoklubağlantı sorununa sık sık rastlanır. Örneğin, öğrencilerin genel başarı puanını etkilediği düşünülen üç bağımsız değişkenin; okulun fiziki yapısı ve eğitim kalitesine verilen "okul çevresi puanı", aile çevresinin özelliklerini yansıtan "aile çevresi puanı" ve arkadaş çevresinin özelliklerini yansıtan "arkadaş çevresi puanı" olduğunu düşünelim. Bu çalışmadaki iki bağımsız değişken olan okul çevresi puanı ile aile çevresi puanı arasında görülen çok yüksek ilişki (Grafik 7.34), sadece örnekleme hatasından kaynaklanabilir.



Grafik 7.34. Aile-Okul Çevre Puanları İlişkisi

Grafikten de görüldüğü gibi örneklemde; aile çevresi puanının düşük, okul çevresi puanının yüksek olduğu durumlar ile aile çevresi puanının yüksek, okul çevresi puanının düşük olduğu durumlara ilişkin hiçbir bilgi yoktur.

2. Çoklubağlantının ortaya çıkabileceği bir ikinci neden, bağımsız değişkenler arasında gerçekten ilişki olması durumudur.
3. Yukarıdakilerin dışında, gözlem sayısı değişken sayısından küçük olduğu durumlarda ($n<p+1$) tam çoklubağlantı ortaya çıkar.

Çoklubağlantının Ortaya Çıkarılması

Çoklubağlantının varlığını ortaya çıkartan birçok gösterge vardır. En basit şekilde, iki değişken arasındaki korelasyon katsayısının 1'e yakın olması (yaklaşık 0.80'in üzerinde olması), çoklubağlantı olabileceğini düşündürür.

Regresyon modelinin anlamlılığı konusunda bilgi veren F istatistiği ile katsayılara ilişkin t istatistiklerinin incelenmesi de çoklubağlantının varlığı konusunda bilgi verebilir. Özellikle, katsayılara ilişkin t istatistiklerinin tümü anlamsız iken F istatistiğinin anlamlı çıkması, çoklubağlantının varlığı konusunda bir belirtidir. Ancak, anlamlı derecede çoklubağlantı sorunu olan birçok veri kümesi bu şekilde bir sonuç sergilemediği için, bu yaklaşım kuşkulu olabilmektedir.

Regresyon katsayılarının büyüklüğü ve işareti de bazen çoklubağlantının varlığı konusunda bilgi sağlayabilir. Buna göre, regresyon modelindeki regresyon katsayılarının büyüklüğü ve işareti beklenenin tersine bir durum gösteriyorsa (örneğin, regresyon katsayısının işaretinin negatif çıkması beklenirken pozitif çıkması sözkonusu ise) bu durum çoklubağlantının varlığı konusunda bir gösterge olabilmektedir.

Bir bağımsız değişkenin ya da gözlemin modele eklenmesi ya da modelden çıkartılması sonucunda regresyon katsayılarında meydana gelen büyük değişiklikler, çoklubağlantının varlığı konusunda işaret olabilmektedir.

Ancak, çoklubağlantının varlığının belirlenmesinin yanısıra, derecesinin belirlenmesi de anlamlıdır. Çoklubağlantının derecesi ile ilgili bazı ölçütlere aşağıda kısaca değinilmiştir.

1. Bağımsız Değişkenler Arasındaki Çoklu Belirtme Katsayısı

Herhangi bir x_i bağımsız değişkeni ile geriye kalan diğer bağımsız değişkenler arasında bulunacak çoklu belirtme katsayısını R_i^2 ile gösterirsek, R_i^2'nin 1'e yaklaşması durumunda x_i bağımsız değişkeni ile diğer değişkenler ya da diğer değişkenlerin herhangi bir alt kümesi arasında güçlü çoklubağlantı olduğu söylenir. $1-R_i^2$ değerine bir değişkenin ***toleransı*** denir. Eğer bir değişkenin toleransı küçük ise, bu değişkenin diğer değişkenler ile doğrusal bağıntılı olduğu söylenir.

2. Bağımsız Değişkenlere İlişkin Korelasyon Katsayılarının İncelenmesi

Eğer x_i ve x_j gibi herhangi iki değişken arasındaki korelasyon katsayısının mutlak değeri ($|r_{ij}|$), 1'e yaklaşıyorsa x_i ve x_j'nin yakın doğrusal bağımlı olduğu söylenir. Örneğin, 7 bağımsız değişkene ilişkin bir korelasyon matrisinde, $r_{13} = -0.96$ ve $r_{4,5} = 0.98$ gibi yüksek korelasyonların olması, veride birkaç "yakın" doğrusal bağımlılık olduğu hakkında bilgi verecektir. Bu da güçlü çoklu bağlantı ortaya çıkaracaktır. Korelasyon katsayılarının tümü şüphe yaratmayacak kadar küçükse, değişkenler arasında "yakın" doğrusal bağımlılıkla ilgili bir belirtinin olmadığı söylenebilir. Ancak, korelasyon katsayılarının incelenmesi, ikili çoklu bağlantıdan daha karmaşık çoklu bağlantıların incelenmesi için yeterli değildir.

3. Varyans Şişme Değerleri (Variance Inflation Factors-VIF)

Bağımsız değişkenlere ilişkin korelasyon matrisinin tersinin (inversinin) köşegen öğelerine varyans şişme değerleri denir ve VIF_i ile gösterilir. VIF_i değerleri tolerans değeri ile ilgili olarak;

$$VIF_i = 1/(1 - R_i^2) \qquad (7.92)$$

ile de hesaplanabilir. Uygulamada, VIF_i değerlerinin 5 ya da 10'un üzerinde olması güçlü çoklu bağlantının bir göstergesidir ve ilgili değişkenlere ilişkin regresyon katsayılarına pek güvenilmemesi gerektiğini bildirir. Bazı yazarlar, VIF_i değerinin ancak 30'un üzerinde olması durumunda, ilgili değişkenler arasında güçlü çoklu bağlantı olduğunu belirtmektedir. VIF_i'ler, iki ve daha fazla çoklu bağıntının varlığını göstermede yararlı olabilecek en iyi ölçütlerden biridir. VIF_i'lerle ilgili olarak, daha önce incelediğimiz Hastane Yöneticisi verisine (Tablo 7.23) ilişkin korelasyon matrisi ve korelasyon matrisinin tersi sırasıyla Tablo 7.45 ve Tablo 7.46'da verilmiştir.

Tablo 7.45 incelendiğinde, yüksek korelasyonlu değişkenlerin olmadığı görülür. Bu veriye ilişkin VIF_i değerlerinin (2.66706, 1.60089, ..., 1.95159) 10'u geçmemesi (Tablo 7.46), veride çoklu bağlantıyı belirten bir durumun olmadığını göstermektedir.

Tablo 7.45. Hastane Yöneticisi Verisine (Tablo 7.23) İlişkin Korelasyon Matrisi

Değişken	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1.00000					
x_2	0.55829	1.00000				
x_3	0.59674	0.49333	1.00000			
x_4	0.66920	0.44548	0.64031	1.00000		
x_5	0.18771	0.14723	0.11597	0.37688	1.00000	
x_6	0.22458	0.34329	0.53162	0.57419	0.28334	1.00000

Tablo 7.46. Hastane Yöneticisi Verisine (Tablo 7.23) İlişkin Korelasyon Matrisinin Tersi ve VIF Değerleri

Değişken	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	**2.66706**					
x_2	-0.77308	**1.60089**				
x_3	-0.74249	-0.26034	**2.27104**			
x_4	-1.49254	0.17032	-0.54475	**3.07823**		
x_5	0.00179	-0.03215	0.32678	-0.54531	**1.22811**	
x_6	0.91764	-0.32624	-0.73101	-1.04664	-0.19796	**1.95159**

Örnek 7.16. Tablo 7.47'de hipotetik bir veri verilmiştir. Bu veriye ilişkin korelasyon matrisini (Tablo 7.48) ve *VIF* değerlerini (Tablo 7.49) inceleyelim.

Tablo 7.47. Örnek 7.16 Verisi (Webster, Gunnst ve Mason, 1974'den)

Gözlem	y	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	10.937	0	0	0	10	0.440	0.432
2	16.289	0	0	9	1	0.365	1.504
3	9.313	2	7	0	1	0.228	-0.055
4	10.006	8	1	1	1	0.541	-0.099
5	12.960	2	7	0	1	1.380	0.502
6	9.737	8	1	1	0	0.130	0.070
7	8.422	0	0	9	1	-2.397	0.252
8	8.625	0	0	9	1	-0.046	0.017
9	5.958	2	7	0	1	1.996	-0.865
10	8.756	0	0	0	10	0.257	0.101
11	5.541	0	0	0	10	-0.798	-0.399
12	15.087	8	1	1	0	2.116	0.115

Tablo 7.48. Tablo 7.47'deki Veri İçin Korelasyon Matrisi

Değişken	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1.00000					
x_2	0.05231	1.00000				
x_3	-0.34338	-0.43160	1.00000			
x_4	-0.49761	-0.37070	-0.35512	1.00000		
x_5	0.41730	0.48455	-0.50516	-0.21455	1.00000	
x_6	-0.19210	-0.31674	0.49438	-0.08691	-0.12295	1.00000

Tablo 7.49. Tablo 7.47'deki Veri İçin Korelasyon Matrisinin Tersi ve VIF Değerleri

Değişken	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	**182.0519**					
x_2	170.3142	**161.3619**				
x_3	218.8041	205.8073	**266.2636**			
x_4	231.9432	218.1160	280.5629	**297.7146**		
x_5	1.9398	1.6557	3.7231	3.2764	**1.9199**	
x_6	1.1407	1.2391	0.4244	1.2135	-0.42275	**1.45527**

Tablo 7.47'deki veriye ilişkin korelasyon matrisi (Tablo 7.48) incelendiğinde, yüksek korelasyonlu değişkenlerin olmadığı görülür. Ancak, ikiden çok bağımsız değişken arasında "yakın" doğrusal bağımlılık olduğunda, korelasyon katsayılarının büyük olması da gerekmemektedir. Bu nedenle Tablo 7.49'u incelediğimizde, 4 değişkene

ilişkin VIF_i değerlerinin 10'un çok üzerinde çıkması; bu değişkenlerin çoklu bağlantıdan etkilendiğini ve en fazla etkilenen değişkenin ise 4. değişken olduğunu gösterirken, 5. ve 6. değişkenlerin çoklu bağlantıdan etkilenmediğini gösterir.

4. Korelasyon Matrisine İlişkin Özdeğerlerin İncelenmesi

Bölüm 1'de matrisler konusu işlenirken, özdeğer ve özvektörlerin bulunması üzerinde durulmuştu. Ayrıca, Kesim 7.7'de de bu konu hakkında bazı temel bilgiler vardır. ***Özvektörler, değişkenlerin doğrusal bileşenleri olup p değişken için p tane özvektör bulunur. Özdeğerler ise özvektörlerce açıklanan varyans olarak tanımlanır.*** Bağımsız değişkenlere ilişkin korelasyon matrisinin özdeğerleri olan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$; verideki çoklubağlantının (doğrusal bağımlılığın) ***derecesini*** ölçmede kullanılabilir. Veride bir ya da daha fazla "yakın" doğrusal bağımlılık olduğunda, R'nin özdeğerlerinin bir ya da daha fazlası sıfır ya da sıfıra çok yakın olur. Örneğin, $\lambda_p = 0$ ise veride bir tane doğrusal bağımlılık vardır. Bu amaçla geliştirilmiş iki ölçü aşağıda verilmiştir.

a.) R matrisi yardımıyla bulunan öz değerlerin tersleri toplamı, çoklu bağlantı olmadığı durumda,

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i} = p \qquad (7.93)$$

olur. Çoklu bağlantı olduğu durumlarda bu toplamın oldukça büyük değerlere ulaştığı görülür. Hastane Yöneticisi Verisi'nin (Tablo 7.23) korelasyon matrisine ilişkin özdeğerlerin tersleri toplamı;

$$\frac{1}{3.16922} + \frac{1}{1.00635} + \frac{1}{0.76291} + \frac{1}{0.55252} + \frac{1}{0.31725} \frac{1}{0.19176} = 12.7968$$

olarak bulunur. 12.7968 değeri, çoklubağlantı olmadığı durumda elde edilecek olan *p=bağımsız değişken sayısı*=6'ya oldukça yakın bir değerdir. Bu nedenle veride çoklubağlantı olmadığı sonucuna ulaşılır. Tablo 7.47 verisinin korelasyon matrisine (Tablo 7.48) ilişkin özdeğerlerin tersleri toplamı ise;

$$\frac{1}{2.42879} + \frac{1}{1.54615} + \frac{1}{0.92208} + \frac{1}{0.79398} + \frac{1}{0.30789} + \frac{1}{0.00111} = 907.5$$

olarak bulunur. Bu ise, değişkenler arasında doğrusal bağıntı olmadığı durumda elde edilecek olan p=6 değerinden çok büyük bir değerdir ve güçlü çoklu bağlantının varlığından söz edilir.

b) Bu konuya ilişkin ikinci bir yaklaşım ise, korelasyon matrislerinden elde edilen özdeğerlerden en büyüğünün en küçüğüne bölünmesi şeklinde tanımlanır ve bu büyüklük K ile gösterilir. K;

$$K = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \qquad (7.94)$$

ile verilir. Özdeğer yelpazesindeki yayılımın bir ölçüsü olan K'ya "durum (ya da koşul) sayısı" adı verilir. Buna göre, bu oran sonucunda bulunacak sayının 100'ün altında olması, veride ciddi bir çoklubağlantı sorununun olmadığının göstergesidir. Bulunacak sayının 100 ile 1000 arasında olması orta düzeyden güçlüye doğru bir eğilim içinde bulunan çoklubağlantının göstergesidir. K değerinin 1000'in üzerinde bulunması ise çok güçlü çoklubağlantının bir göstergesidir. Hastane Yöneticisi Verisi'ne (Tablo 7.23) ilişkin durum sayısı, $\kappa = 3.16922/0.19176 = 16.527$ olarak elde edilir. Buna göre, durum sayısı 100'ün altındadır ve veride bir çoklubağlantı sorunu bulunmamaktadır. Tablo 7.47 Verisi'ne ilişkin durum sayısı $\kappa = 2.4288/0.00111 = 2188.11$ olarak bulunur. Bu ise 1000'in çok üzerindedir ve güçlü çoklubağlantının varlığına işaret eder.

K için bir diğer yaklaşım ise (7.94)'ün karekökünün alınmasıdır. Bu durumda, $\sqrt{\kappa}$ değerinin 15'i geçmesi, çoklu bağlantıya ilişkin olumsuz etkilerin varlığı konusunda bilgi verirken, bu değerin 30'un üzerinde olması çoklubağlantıyı giderici önlemlerin alınması konusunda bir bilgi verir. Hastane Yöneticisi Verisi (Tablo 7.23) için $\sqrt{\kappa} = \sqrt{16.527} = 4.065$ olarak bulunur. Bu değer 15'in oldukça altındadır.

Diğer taraftan,

$$\kappa_i = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_i} \qquad i = 1, 2, ..., p \qquad (7.95)$$

durum (koşul) indeksi olarak bilinir. Ayırdedileceği gibi, en büyük koşul indeksi, koşul sayısına eşittir. Koşul indeksi sayısının 1000'den büyük olması korelasyon matrisindeki yakın doğrusal bağıntı sayısı konusunda bilgi verir. Tablo 7.47 verisi için koşul indeksleri aşağıda verilmiştir.

$$\kappa_1 = \frac{2.4288}{2.4288} = 1 \qquad \kappa_2 = \frac{2.4288}{1.5462} = 1.57 \qquad \kappa_3 = \frac{2.4288}{0.9221} = 2.63$$

$$\kappa_4 = \frac{2.4288}{0.7940} = 3.06 \qquad \kappa_5 = \frac{2.4288}{0.3079} = 7.88 \qquad \kappa_6 = \frac{2.4288}{0.0011} = 2188.11$$

1000'i aşan sadece bir durum indeksi olduğu için veride sadece bir tane yakın doğrusal bağımlılık olduğu söylenir. K değerlerinin karekökünün alınması yardımı ile de konuya yaklaşımda bulunulabiliyordu. Buna göre koşul indeksleri;

$$\kappa_1 = 1, \quad \kappa_2 = 1.25 \quad \kappa_3 = 1.62 \quad \kappa_4 = 1.75 \quad \kappa_5 = 2.80 \quad \kappa_6 = 46.77$$

olarak bulunur. Buna göre, ***30'un üzerinde koşul indeksi 1 tane olduğu*** için veride (x değişkenlerinde) *1 tane doğrusal bağımlılık* olduğu söylenir.

Korelasyon matrisine ilişkin özvektörlerin bulunması, verideki yakın doğrusal bağımlılığın yapısını tanımlamak için kullanılabilir. Buna göre, özdeğerleri sıfıra yakın olan özvektörler R matrisindeki doğrusal bağımlılığın yapısını verir ve 0'a yakın özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerdeki büyük değerler, çoklubağlantılı değişkenleri gösterir. Tablo 7.47 verisi için sıfıra en yakın özdeğer 0.0011'dir. Bu özdeğere ilişkin özvektör, R matrisindeki doğrusal bağıntının katsayılarını oluşturur. Bu örneğe ilişkin özvektörler aşağıdaki tabloda verilmiştir (Tablo 7.50).

Tablo 7.50. Tablo 7.47 Verisinin Korelasyon Matrisine İlişkin Özvektörler

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
x_1	-0.39072	-0.33968	0.67980	0.07990	-0.25104	-0.44768
x_2	-0.45560	-0.05392	-0.70013	0.05769	-0.34447	-0.42114
x_3	0.48264	-0.45333	-0.16078	0.19103	0.45364	-0.54169
x_4	0.18766	0.73547	0.13587	-0.27645	0.01521	-0.57337
x_5	-0.49773	-0.09714	-0.03185	-0.56356	0.65128	-0.00605
x_6	0.35195	-0.35476	-0.04864	-0.74818	-0.43375	-0.00217

İlgili özvektöre ilişkin katsayıları *a* ile gösterirsek, doğrusal bağımlılık olması durumunda $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_6x_6 \cong 0$ olacaktır. Örneğimizde tek çoklubağlantı olduğuna göre, sıfıra en yakın olan 6. özvektörün katsayılarını kullanarak,

$$-0.44768x_1 - 0.42114x_2 - 0.54169x_3 - 0.57337x_4 - 0.00605x_5 - 0.00217x_6 = 0$$

yazılır. -0.00605 ve -0.00217 sıfıra çok yakın oldukları için bu eşitlikten çıkartılırsa, geriye kalan değişkenler için $-0.44768x_1 - 0.42114x_2 - 0.54169x_3 - 0.57337x_4 = 0$ yazılır ve $x_1 \cong -0.94x_2 - 1.21x_3 - 1.281x_4$ elde edilir. Buradan, bu dört değişken arasında doğrusal bağımlılık olduğu söylenir. Eğer iki özdeğer sıfır ya da sıfıra yakın ise bu işlemler iki özdeğer için yapılarak iki tane doğrusal bağımlılığa ilişkin yapı ortaya çıkartılabilir.

Bu konu için bir diğer yaklaşım ise ***varyans dekompozisyon (ayrışım) matrisinden*** (variance decomposition matrix) yararlanmaktır. Burada nasıl elde edildiğine değinilmeyecek olan bu matris, örneğimize ilişkin olarak Tablo 7.51'de verilmiştir. (Not: Bazı istatistik yazılımlarda aşağıdaki sonuçları elde etmek için bağımlı ve bağımsız değişkenlere *önce ya z dönüşümü uygulanır ya da her bir değişken kendi aritmetik ortalamasından çıkartılarak merkezleştirilir* ve model bu değişkenlerle kurulur.)

Tablo 7.51. Tablo 7.47 Verisi İçin Varyans Dekompozisyon (Ayrışım) Oranları

Sayı	Özdeğerler λ_i	Koşul İndeksi $\sqrt{K}$	*Varyans Dekompozisyon (Ayrışım) Oranları*					
			x1	*x2*	*x3*	*x4*	*x5*	*x6*
1	2.4288	1.00	0.00035	0.00053	0.00036	0.00005	0.05313	0.03505
2	1.5462	1.25	0.00041	0.00001	0.00050	0.00118	0.00318	0.05594
3	0.9221	1.62	0.00275	0.00329	0.00011	0.00007	0.00057	0.00176
4	0.7940	1.75	0.00004	0.00003	0.00017	0.00032	0.20834	0.48445
5	0.3079	2.80	0.00112	0.00239	0.00251	0.00000	0.71753	0.41989
6	0.0011	46.77	0.99532	0.99375	0.99635	0.99838	0.01725	0.00292

Tablo 7.51'de, 30'un üzerinde koşul indeksi sayısı 1 tane olduğuna göre, veride 1 tane doğrusal bağımlılık vardır. Doğrusal bağımlılığın hangi değişkenler arasında olduğunu anlamak için varyans dekompozisyon oranları 0.90'ın üzerinde olan değişkenler belirlenir (bazı kaynaklarda 0.90 yerine 0.50 önerilmektedir). Bu değişkenler doğrusal bağımlılığın olduğu değişkenlerdir. Tablo 7.49'da bu değişkenler x1, x2, x3, x4 olarak belirlenmektedir.

Konu ile ilgili olarak aşağıdaki hipotetik tabloyu inceleyelim (Tablo 7.52). Bu tabloda 30'un üzerinde koşul indeksi sayısı 3'tür. Bu nedenle, ilk aşamada 3 tane doğrusal bağımlılıktan söz edilebilir. 42.90 için *x*1, *x*3 ve *x*6 değişkenleri, 125.30 için *x*2 ve *x*5 değişkenleri arasında doğrusal bağımlılık olup bu değişkenlere ilişkin korelasyonlar için bir çözüm aranması gerekir. Ancak, 88.00 için sadece *x*4'ün dekompozisyon oranı 0.90'ı geçtiği için çoklubağlantı söz konusu değildir.

Tablo 7.52. Varyans Ayrışım (Dekompozisyon) Oranlarına İlişkin Hipotetik Sonuçlar

Sayı	Koşul İndeksi $\sqrt{K}$	*Varyans Ayrışım (Dekompozisyon) Oranları*					
		x1	*x2*	*x3*	*x4*	*x5*	*x6*
1	1.00	0.001	0.003	0.000	0.000	0.003	0.003
2	4.10	0.020	0.000	0.000	0.000	0.000	0.003
3	16.30	0.013	0.000	0.000	0.001	0.000	0.011
4	42.90	**0.960**	0.001	**0.973**	0.000	0.001	**0.975**
5	88.00	0.002	0.003	0.015	**0.985**	0.003	0.008
6	125.30	0.000	**0.992**	0.003	0.012	**0.991**	0.003

Bir diğer çoklubağlantı ölçütü, bağımsız değişkenlere ilişkin korelasyon matrisinin determinantını almaktır. Bir korelasyon matrisinin determinantı 0 ile 1 arasında değişir. Eğer |R|=1 ya da 1'e yakın ise bağımsız değişkenler diktir. Bu ise bilindiği gibi çoklu bağlantı olmadığının bir göstergesidir. Determinant değerinin sıfıra yaklaşması ise güçlü çoklubağlantıyı gösterir. Bu yöntemin uygulanması basit olmakla birlikte, hangi değişkenler arasında çoklubağlantı olduğunu göstermez.

Çoklubağlantının Giderilmesi

Çoklubağlantının giderilmesi için önerilen birçok yöntem vardır. Ancak, veriye yeni gözlemlerin eklenmesi, modelin yeniden belirlenmesi ve en küçük kareler yönteminden başka kestirim yöntemlerinin kullanılması en genel yaklaşımlardır. Örneğin, gözlem sayısı parametre sayısından az ise (n<p+1), gözlem sayısının artırılması ya da değişken sayısının azaltılması önerilir.

Özellikle, örneklemin evreni temsil etmemesi nedeniyle ortaya çıkan durumlarda veriye yeni gözlemlerin eklenmesi önerilir. Ancak bu gözlemler aile-okul çevre puanları örneğini dikkate alırsak; örneğin, aile-çevre puanı düşük, okul-çevre puanı yüksek ya da aile-çevre puanı yüksek, okul-çevre puanı düşük olanlar arasından seçilmelidir.

Çoklubağlantının, bağımsız değişkenler arasındaki gerçek ilişki nedeniyle ortaya çıktığı durumlarda, diğer bir deyişle sorunun bir örnekleme sorunu olmadığı durumlarda uygulanabilecek bir yöntem, çoklubağlantılı değişkenlerin birleştirilerek yeni bir değişken yaratılması ve modele, çoklubağlantılı değişkenler yerine bu yeni değişkenin

konmasıdır. Bu ise, yeniden model belirleme işlemidir. Böylesi durumlarda kullanılması önerilebilecek bir başka yöntem, çoklubağlantılı değişkenlerden bir ya da birkaçını modelden çıkarmak, diğer bir deyişle, değişken seçimi yapmaktır. Örneğin, x_1, x_2, x_3 yaklaşık doğrusal bağımlı değişkenlerse, bir değişkeni, örneğin x_2'yi modelden çıkartmak çoklubağlantı sorununu giderebilir. Ancak bu yöntem, örneklemin evreni temsil etmemesi nedeniyle ortaya çıkan durumlarda kullanılmamalıdır. Çünkü, modele gerçekten katkı yapabilecek bir değişken, çoklubağlantı nedeniyle model dışında bırakılabilir. Gözlem sayısı parametre sayısından az ise ($n<p+1$), gözlem sayısının artırılması ya da değişken sayısının azaltılması önerilir. En küçük kareler yöntemi, dik olmayan bir veriye uygulandığında, genellikle zayıf kestirimli regresyon katsayıları elde edilir. Bu nedenle, bazen değişik kestirim yöntemlerine başvurulur. Bunlar, Ridge regresyon yöntemi ve Temel Bileşenler regresyonudur. Çoklubağlantı ve değişen varyanslılık sorunu olan bir çalışma Örnek 7.17'de verilmiştir.

Örnek 7.17. Hava kirliliğinin bir göstergesi olan kükürtdioksit (SO_2) gazı miktarını bir gün önceden kestirebilmek amacıyla; bir gün önceki meteorolojik faktörler dikkate alınarak çoklu regresyon çözümlemesi yapılıyor (Etikan, İ.). Bu amaçla oluşturulan ve Ankara-Cebeci Bölgesi ölçümlerine ilişkin 365 günlük veriden 80 günlük veri rasgele olarak seçilmiş ve modele aşağıdaki değişkenler alınmıştır.

y: *Bir gün sonraki ortalama SO_2 miktarı (mikrogram/metreküp)*
x_1: *Bir gün önceki en yüksek sıcaklık* (^oC)
x_2: *Bir gün önceki saat 07.00 sıcaklığı* (^oC)
x_3: *Bir gün önceki bağıl nem oranı*
x_4: *Bir gün önceki saat 21.00'deki görüş mesafesi*
x_5: *Bir gün önceki rüzgar hızı (00.00 z ölçümleri 850 mb Hz)*
x_6: *Bir gün önceki inverziyon kalınlığı (12.00 z ölçümleri)*

Veriler Tablo 7.53'de verilmiştir. y değerlerine (ln) dönüşümü yapıldıktan sonra elde edilen $ln(y)$ değişkeni de tabloda gösterilmiştir.

Tablo 7.53. Hava Kirliliği Verisi

Gözlem	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y	$ln(y)$
1	-2.8	-1.2	72	35000	6	120	326	5.78690
2	-11.8	-11.2	78	25000	3	668	556	6.32077
3	-2.3	0.4	74	35000	9	100	329	5.79606
4	-9.3	-8.6	82	30000	3	240	406	6.00635
5	-7.5	-7.2	87	10000	6	100	499	6.21261
6	-1.5	-1.0	72	8000	7	570	390	5.96615
7	-9.0	-8.8	77	25000	8	590	311	5.73979
8	-10.0	-8.8	82	15000	6	250	412	6.02102
9	-10.1	-9.5	86	5000	2	183	425	6.05209
10	-7.0	-4.0	77	15000	4	290	314	5.74939
11	-4.7	-3.5	76	25000	3	120	363	5.89440
12	-8.4	-7.0	84	15000	3	300	449	6.10702
13	-2.3	-1.9	72	20000	2	300	222	5.40268
14	-3.5	-2.4	63	30000	1	300	240	5.48064
15	-9.3	-8.3	85	15000	1	640	397	5.98394

Tablo 7.53. Hava Kirliliği Verisi (devam)

Gözlem	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y	$ln(y)$
16	-4.4	-3.2	80	25000	7	760	368	5.90808
17	-9.0	-8.8	80	25000	4	600	336	5.81711
18	-8.6	-8.0	78	8000	1	500	448	6.10479
19	-6.7	-5.6	88	20000	4	700	368	5.90808
20	-5.6	-5.5	80	30000	7	210	384	5.95064
21	-9.0	-8.0	88	10000	5	330	540	6.29157
22	-1.1	-0.3	86	35000	4	100	192	5.25750
23	1.8	2.0	85	30000	8	100	82	4.40672
24	0.3	0.5	95	20000	2	330	77	4.34381
25	0.6	1.7	85	35000	6	280	84	4.43082
26	3.3	4.2	91	35000	2	310	69	4.23411
27	-1.2	-1.0	82	30000	4	75	92	4.52179
28	0.7	1.4	84	35000	5	100	54	3.98898
29	2.6	3.2	79	35000	2	180	65	4.17439
30	8.8	9.2	79	25000	5	150	35	3.55535
31	7.8	10.2	79	25000	4	150	58	4.06044
32	10.4	14.2	69	25000	3	150	26	3.25810
33	9.6	12.6	81	20000	4	18	25	3.21888
34	12.6	15.0	77	5000	7	113	17	2.83321
35	18.7	21.8	46	30000	8	115	48	3.87120
36	20.0	22.3	49	35000	12	117	64	4.15888
37	12.2	15.6	64	30000	6	320	29	3.36730
38	13.1	16.8	65	25000	10	212	16	2.77259
39	13.8	16.1	68	35000	6	227	7	1.94591
40	17.6	20.0	56	35000	1	480	9	2.19722
41	18.2	20.0	60	30000	4	200	9	2.19722
42	14.8	17.2	62	30000	6	200	10	2.30259
43	12.2	14.6	64	35000	11	200	22	3.09104
44	17.3	19.0	65	35000	2	100	13	2.56495
45	16.6	18.4	63	35000	4	130	25	3.21888
46	17.3	19.2	58	25000	7	150	25	3.21888
47	16.6	17.8	64	35000	6	110	28	3.33220
48	16.7	18.3	58	30000	3	148	25	3.21888
49	17.5	18.5	45	35000	8	240	25	3.21888
50	14.4	15.8	65	30000	4	400	37	3.61092
51	12.7	13.2	78	35000	5	130	25	3.21888
52	10.0	11.2	73	20000	5	200	31	3.43399
53	10.7	11.7	64	25000	4	130	50	3.91202
54	11.0	11.6	69	35000	5	220	97	4.57471
55	10.5	11.5	75	20000	4	130	56	4.02535
56	10.8	12.2	56	15000	5	250	33	3.49651
57	16.0	16.4	41	35000	6	130	45	3.80666
58	13.3	13.8	83	35000	7	185	18	2.89037
59	6.8	8.8	72	25000	3	390	41	3.71357
60	9.3	10.2	86	20000	4	200	40	3.68888
61	8.6	9.4	71	25000	4	270	48	3.87120
62	3.2	3.8	83	5000	1	150	161	5.08140
63	2.6	3.1	87	5000	1	270	142	4.95583
64	8.4	11.2	66	20000	6	120	87	4.46591
65	-4.2	-2.6	79	25000	5	633	197	5.28320
66	-6.4	-6.0	84	10000	4	200	297	5.69373
67	1.6	5.8	94	25000	10	400	104	4.64439
68	-0.4	1.3	79	5000	4	830	90	4.49981

Tablo 7.53. Hava Kirliliği Verisi (devam)

Gözlem	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y	$ln(y)$
69	-4.6	-3.8	85	2000	5	360	191	5.25227
70	-3.5	-3.0	88	20000	3	650	205	5.32301
71	-5.6	-4.6	92	25000	8	265	594	6.38688
72	0.1	2.8	94	25000	11	130	236	5.46383
73	-4.4	-1.8	81	20000	4	80	347	5.84932
74	-7.1	-6.4	81	10000	1	180	310	5.73657
75	-8.3	-8.0	86	3000	4	410	403	5.99894
76	0.4	1.4	97	50	4	320	196	5.27811
77	1.2	1.7	92	2000	1	700	225	5.41610
78	-1.0	-0.8	89	8000	3	700	165	5.10595
79	-1.7	-1.4	93	500	8	186	270	5.59842
80	2.5	3.7	89	10000	16	220	374	5.92426

Değişkenlere ilişkin korelasyon matrisi Tablo 7.54'de, bağımlı değişken olarak y değişkeni alındığında, tümel modele ilişkin çoklu regresyon çözümlemesi sonuçları ise Tablo 7.55'de verilmiştir.

Tablo 7.54. Hava Kirliliği Verisi İçin Korelasyon Matrisi

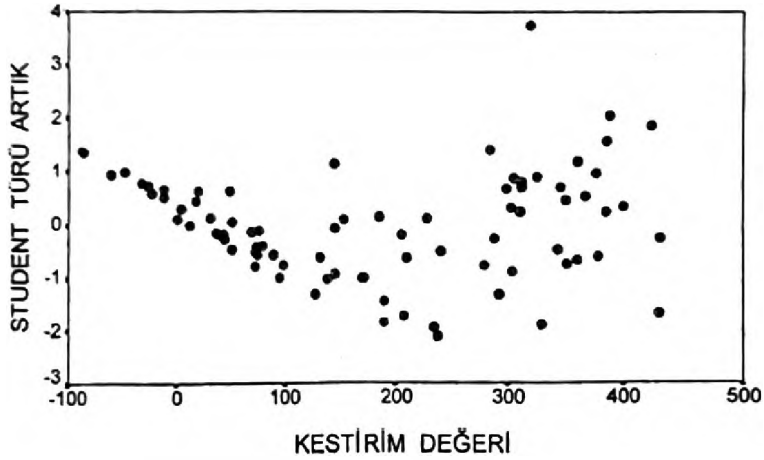
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y
x_1	1.0000	0.9957	-0.6938	0.4713	0.2110	-0.4155	-0.8625
x_2	0.9957	1.0000	-0.6964	0.4725	0.2334	-0.4176	-0.8565
x_3	-0.6938	-0.6964	1.0000	-0.4976	-.0.1246	0.2496	0.4801
x_4	0.4713	0.4725	-0.4976	1.0000	0.1891	-0.3161	-0.4231
x_5	0.2110	0.2334	-0.1246	0.1891	1.0000	-0.1241	-0.0353
x_6	-0.4155	-0.4176	0.2496	-0.3161	-0.2141	1.0000	0.3305
y	-0.8625	-0.8565	0.4801	-0.4231	-0.0353	0.3305	1.0000

Tablo 7.54'de görüldüğü gibi x_1 ile x_2 değişkenleri arasında çok yüksek ilişki vardır (r=0.9957). Ayrıca, bağımsız değişkenlere ilişkin korelasyon matrisinden bulunan özdeğerler sırasıyla 3.26172, 0.97932, 0.74462, 0.66258, 0.34772, 0.00403 olarak bulunur. İki değişkene ilişkin korelasyon katsayısının çok yüksek ve son özdeğerin sıfıra çok yakın olması, veride çoklubağlantı sorunu olduğunun habercisidir.

Tablo 7.55. Tümel Modele İlişkin Sonuçlar (Bağımlı Değişken y)

Değiş.	b_j	$S(b_j)$	*Beta*	*Tolerans*	*VIF*	t	p
x_1	-12.3141	10.3156	-0.6869	0.0081	123.421	-1.194	0.2364
x_2	-6.3570	9.9349	-0.3715	0.0079	125.668	-0.640	0.5243
x_3	-3.7055	1.0094	-0.2772	0.4705	2.125	-3.671	0.0005
x_4	-0.0016	0.0009	-0.1064	0.6939	1.441	-1.712	0.0911
x_5	10.1902	3.2589	0.1740	0.8664	1.154	3.127	0.0025
x_6	-0.0321	0.0502	-0.0373	0.7876	1.270	-0.640	0.5245
Sabit	527.5345	92.9555	-	-	-	5.675	0.0000
	n=80	s =76.31296		R^2 = 0.80415		F = 49.955	

Tablo 7.55 incelendiğinde, x_1 ve x_2'ye ilişkin *VIF* değerlerinin 10'un çok üzerinde olduğu görülür. Bu da veride güçlü çoklubağlantının varlığını göstermektedir. Çoklubağlantının varlığı için özdeğerlerden yararlanılırsa (7.94)'den $\kappa = 3.26172 / 0.00403 = 809.36$ olarak bulunur ve güçlüye yakın bir çoklubağlantının varlığından söz edilebilir. Yine, $\sqrt{\kappa} = \sqrt{809.36} = 28.45$ olarak bulunur ve 30'a çok yakın bir değerdir. Ayrıca, korelasyon katsayıları incelendiğinde x_1 ile x_2 arasındaki ilişki katsayısının $r_{12} = 0.9957$ olduğu görülecektir. Artık dağılımlarına ilişkin olarak Grafik 7.35 incelendiğinde ise, veride değişen varyanslılık sorununun da olduğu görülür.



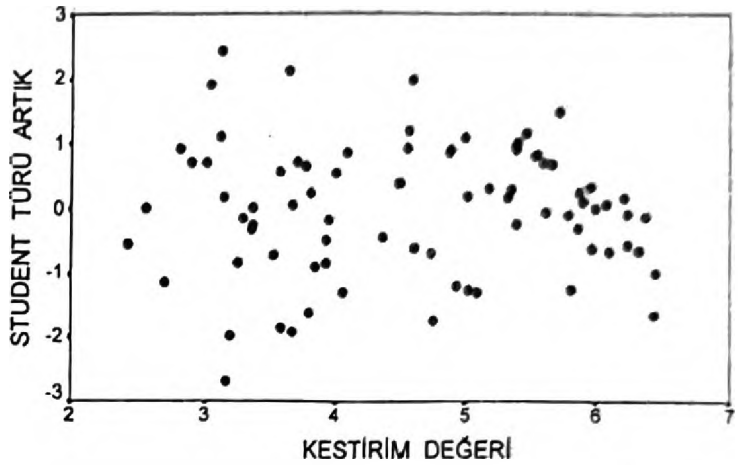
Grafik 7.35. Tümel Model İçin Artık Dağılımı

Bu nedenle, önce değişen varyanslılık sorununu gidermek amacıyla, değişim aralığı oldukça büyük olan y bağımlı değişkenine ln dönüşümü yaparak elde edilen çoklu regresyon çözümlemesi sonuçları Tablo 7.56'da verilmiştir.

Tablo 7.56. Tümel Modele İlişkin Sonuçlar (bağımlı değişken ln(y))

Değiş.	b_j	$S(b_j)$	*Beta*	*Tolerans*	*VIF*	*t*	*P*
x_1	-0.0210	0.0620	-0.1574	0.0081	123.421	-0.339	0.7357
x_2	-0.1114	0.0598	-0.8740	0.0079	125.668	-1.864	0.0663
x_3	-0.0173	0.0060	-0.1741	0.4705	2.125	-2.856	0.0056
x_4	-1.3597E-5	5.7504E-6	-0.1187	0.6939	1.441	-2.364	0.0207
x_5	0.0720	0.0196	0.1649	0.8664	1.154	3.671	0.0005
x_6	-2.4876E-4	3.0232E-4	-0.0387	0.7876	1.270	-0.823	0.4133
Sabit	6.5178	0.5593				11.653	0.0000
	n=80	s=0.4592		$R^2 = 0.87232$		$F = 83.12397$	

Tablo 7.56'da görüldüğü gibi, X matrisinde değişiklik olmadığı için, *VIF* değerleri, sonuçları Tablo 7.55'de verilen modelle aynıdır. Ancak, $ln(y)$'li modele ilişkin artık grafiği oldukça yeterli bir duruma gelmiştir (Grafik 7.36).



Grafik 7.36. ln(y) Dönüşümlü Model Sonucunda Artık Dağılımı

Çoklubağlantıyı giderebilmenin yollarından biri, sorun yaratan değişkenlerin değerlerini toplayarak yeni bir değişken yaratmaktı (sorunun bir örneklem sorunu olmadığı durumlarda). Bu amaçla, $x_{1+2} = x_1 + x_2$ olacak şekilde yeni bir değişken yaratıldığında ve $ln(y)$ dönüşümlü modele x_{1+2} değişkenini koyduğumuzda elde edilen sonuçlar Tablo 7.57'de verilmiştir.

Tablo 7.57. Tümel Modele İlişkin Sonuçlar (bağımlı değişken ln(y))

Değiş.	b_j	$S(b_j)$	*Beta*	*Tolerans*	*VIF*	*t*	*P*
x_{1+2}	-0.0671	0.0041	-1.0273	0.4378	2.248	-16.303	0.0000
x_3	-0.0171	0.0060	-0.1717	0.4718	2.119	-2.829	0.0060
x_4	-1.3498E-5	5.7315E-6	-0.1178	0.6942	1.440	-2.355	0.0212
x_5	0.0684	0.0189	0.1566	0.9235	1.083	3.611	0.0006
x_6	-2.4957E-4	3.0140E-4	-0.0389	0.7876	1.270	-0.828	0.4103
Sabit	6.4623	0.5526				11.693	0.0000
	n=80	s=0.4578	$R^2 = 0.87135$		($F = 100.24$ p=0.0000)		

Tablo 7.57'de görüldüğü gibi, çoklubağlantıya ilişkin sorunlar da giderilmiştir. Bu son modele ilişkin artık grafiğinin incelenmesi ve varsa (ki anlamlılık sınırına yakın iki tane var) aykırı değerlere ilişkin sorunların çözümü okuyucuya bırakılmıştır.

Çoklubağlantı sorununu giderebilmek amacıyla yapılacak bir başka yaklaşım, sorunlu olan değişkenlerden birini (öncelikle zor elde edileni) model dışında bırakmaktır. Örneğin, x_1 ve x_2'yi toplayarak x_{1+2} gibi yeni bir değişken yaratmak yerine yüksek korelasyonlu değişkenlerden olan x_1 değişkeni model dışında bırakılırsa; x_2, x_3, x_4, x_5 ve x_6 değişkenlerinin bulunduğu model için $R^2 = 0.87212$, s=0.45643 ve F=100.933 olarak bulunur. Bu modelde, 36. ve 39. gözlemler $r_{36} = 2.43156$ ve $r_{39} = -2.68096$ diğerlerine göre oldukça büyük artığa sahiptir. Bu gözlemler veriden çıkartıldığında n=78 için; $R^2 = 0.88702$, $s = 0.42150$, F=113.0517 olarak elde edilir. Dolayısıyla, R^2'de bir miktar artış sağlanmış olur.

Örnek 7.18. 32 ülkeye ilişkin dolar cinsinden kişi başına ulusal gelir ile bazı temel göstergeler arasında ilişki olup olmadığı araştırılmak isteniyor. Değişkenlere ilişkin tanımlar aşağıda, 1995 Yılı'na ilişkin veriler ise Tablo 7.58'de verilmiştir.

y: *Kişi başına ulusal gelir (Dolar)*
x_1: *Bebek ölüm hızı (% o)*
x_2: *Toplam doğurganlık hızı (kişi)*
x_3: *Yetişkinlerde okur-yazar oranı (%)*
x_4: *Kentsel nüfus oranı (%)*

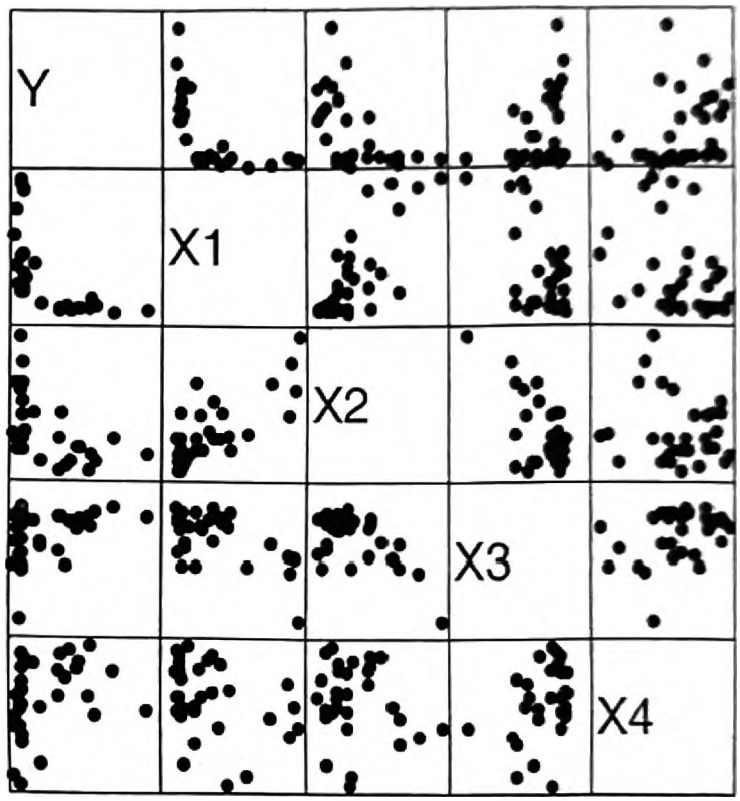
(Not: Bu örneğin amacı, sadece bazı dönüşümlerin nasıl uygulandığını göstermektir. Kestirime yönelik olarak *bebek ölüm hızı=y, kişi başına ulusal gelir (dolar)=x1. yetişkinlerde okur-yazar oranı=x2 ve kentsel nüfus oranı=x3* ile daha mantıklı bir çözümleme yapılabilir. Çünkü, bebek ölüm hızının bu üç değişkenden ciddi şekilde etkilenmesi söz konusudur. Bu yaklaşımın çözümü okuyucuya bırakılmıştır.)

Tablo 7.58. Ulusal Gelir Verisi (*)

Ülkeler	y	x_1	x_2	x_3	x_4
Belçika	20880	10.0	1.7	93.0	97.0
Hong Kong	15360	6.0	1.5	95.0	95.0
İsviçre	36080	6.0	1.7	97.0	63.0
İsveç	27010	5.0	2.1	100.0	84.0
Macaristan	2970	13.0	1.8	99.0	66.0
İspanya	13970	8.0	1.4	78.0	80.0
İtalya	20460	7.0	1.3	97.0	70.0
Şili	2730	15.0	2.7	93.0	85.0
Romanya	1130	23.0	2.1	97.0	55.0
Portekiz	7450	9.0	1.5	85.0	35.0
Avusturya	22380	7.8	1.5	99.0	60.0
Arjantin	6050	24.0	2.8	95.0	87.0
İrlanda	12210	6.0	1.3	83.0	70.0
Tayland	1840	27.0	2.2	93.0	24.0
Uruguay	3340	19.0	2.3	96.0	90.0
Polonya	1910	13.0	2.1	99.0	63.0
Çin	500	35.0	2.2	78.0	29.0
İngiltere	17790	7.0	1.9	96.0	89.0
Bulgaristan	1330	16.0	1.8	92.0	70.0
Malezya	2791	13.0	3.6	78.0	46.0
İsrail	13220	7.0	2.8	97.0	92.0
Rusya Fed.	2510	28.0	1.8	99.0	74.0
Yunanistan	7290	9.0	1.5	87.0	64.0
Güney Afr.	2670	53.0	4.1	76.0	50.0
Ekvator	1070	45.0	3.6	87.0	59.0
Brezilya	2770	52.0	2.7	82.0	77.0
Avustralya	17260	7.0	1.9	92.0	85.0
Yeni Zel.	12300	7.0	2.1	97.0	84.0
Venezüella	2910	20.0	3.1	88.0	92.0
Estonya	2760	20.0	2.1	100.0	73.0
Cezayir	1840	57.0	4.8	57.0	54.0
Türkiye	1980	55.0	3.4	81.0	66.0

(*) State of The World Children, Unicef,1995.

Şu ana kadar yapılanların dışında, değişkenlere ilişkin matris şeklinde saçılım grafiğini öncelikle inceleyelim (Grafik 7.37). Grafikte görüldüğü gibi y ile x_1 ve y ile x_2 arasında doğrusal olmayan ilişki vardır. Bu tür ilişkiler daha önceki bölümlerde belirtildiği gibi her iki tarafın logaritması alınarak ya da 1/y ve $1/x_1$ türü dönüşümler yapılarak doğrusallaştırılabilir. Bu tür dönüşümlerin yapılmadığı durumlarda model varsayımlarından uzaklaşma olasılığı bu veri için oldukça yüksektir.

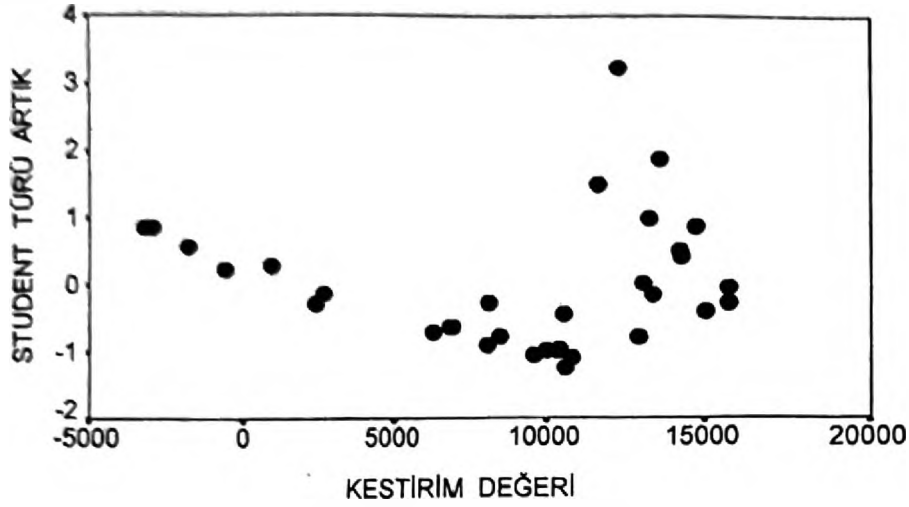


Grafik 7.37. Ulusal Gelir Verisinin Matris Şeklinde Saçılım Grafiği

Çoklu regresyon modelini veride herhangi bir dönüşüm yapmadan $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i4} + \varepsilon_i$ şeklinde kurduğumuzda sonuçlar Tablo 7.59'daki gibi bulunur. Modele ilişkin artık dağılımı ise Grafik 7.38'de verilmiştir.

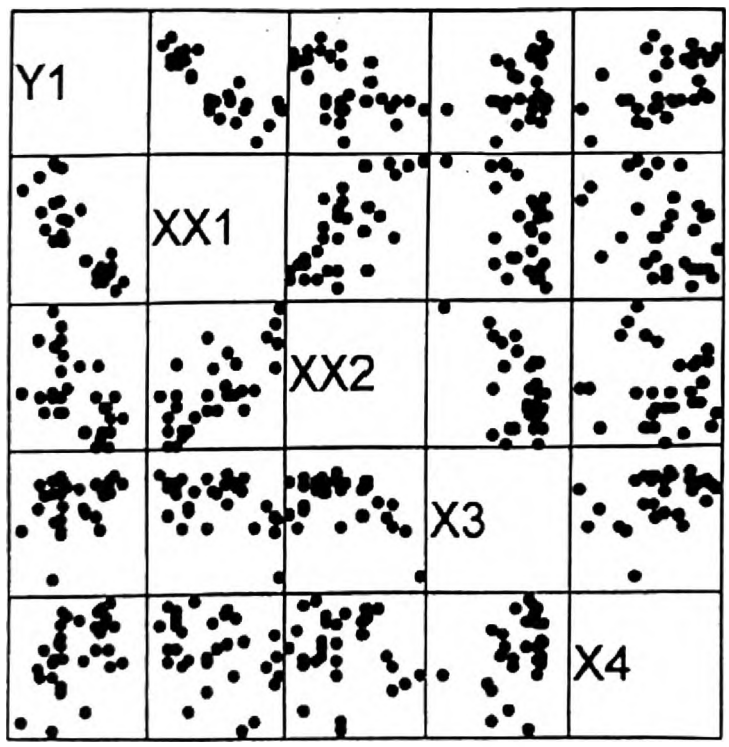
Tablo 7.59. Ulusal Gelir Verisi İçin Çoklu Regresyon Sonuçları

Değişken	b_j	$S(b_j)$	*BETA*	*VIF*	*t*	*P*
x_1	-276.463	140.068	-0.492	2.743	-1.974	0.0587
x_2	-1469.067	2621.773	-0.138	2.694	-1.560	0.5799
x_3	-104.655	195.552	-0.110	1.885	-0.535	0.5969
x_4	90.411	81.408	0.189	1.275	1.111	0.2765
Sabit	20918.041	19754.907			1.059	0.2990
n=32	s= 7646.548		R^2 = 0.3867		(F=4.256 p=0.0085)	



Grafik 7.38. Ulusal Gelir Verisi İçin Artık Dağılımı

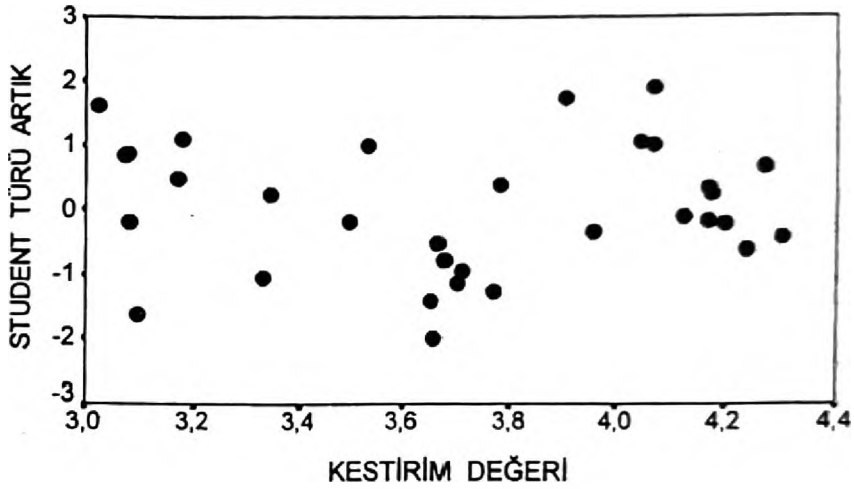
Artık dağılımından, artıkların sıfır etrafında rasgele dağılmadıkları görülmektedir. Ayrıca artık değerlerine karşı x_1 ve x_2'nin grafikleri incelendiğinde, artıkların sistematik bir değişim gösterdiği görülecektir. Bu nedenle, $yl = \log(y)$, $xx_1 = \log(x_1)$ ve $xx_2 = \log(x_2)$ olacak şekilde yeni değişkenler yarattıktan sonra elde edilen yeni matris şeklinde saçılım grafiği Grafik 7.39'da verilirken, bu yeni değişkenlere ilişkin çoklu regresyon modeli $yl_i = \beta_0 + \beta_1 xx_{i1} + \beta_2 xx_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i4} + \varepsilon_i$ şeklinde oluşturulduğunda regresyon sonuçları Tablo 7.60, artık dağılımı ise Grafik 7.40'da verilmiştir.



Grafik 7.39. Dönüştürülmüş Verilere İlişkin Saçılım Grafiklerinin Matris Şeklinde Gösterimi

Tablo 7.60. Dönüştürülmüş Ulusal Gelir Verisi İçin Çoklu Regresyon Sonuçları

Değiş.	b_j	$S(b_j)$	*BETA*	*VIF*	*t*	*p*
xx_1	-1.1706	0.2351	-0.7891	2.516	-4.979	0.0000
xx_2	-0.0656	0.5112	-0.0198	2.391	-0.128	0.8988
x_3	-0.0083	0.0063	-0.1630	1.561	-1.306	0.2055
x_4	0.0066	0.0030	0.2582	1.355	2.220	0.0350
Sabit	5.3814	0.6730			7.996	0.0000
n=32	s=0.27372	R^2 = 0.73047		(F=18.294 p=0.0000)		



Grafik 7.40. $y1_i = \beta_0 + \beta_1 xx_{i1} + \beta_2 xx_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i4} + \varepsilon_i$ *Modeli İçin Artık Dağılımı*

Grafik 7.40'da görüldüğü gibi yeni model için artıklar sıfır etrafında rasgele dağılmaktadır. Ayrıca, Student türü artıkların modeldeki bağımsız değişken değerlerine karşı çizimleri yapıldığında da sorunlu bir duruma raslanmadığı görülecektir. Student türü artıkların *Q-Q* nokta grafiğinden artıkların normal dağılım gösterdiği de kolayca anlaşılabilir. Diğer taraftan bu yeni model ile çoklu belirtme katsayısı 0.38'den 0.73'e çıkmıştır. Ancak, xx_2 ve x_3 değişkenlerine ilişkin katsayılar önemsizdir ve bu katsayılara ilişkin beta katsayıları da diğer ikisine göre oldukça düşüktür. Bu durumda bu iki değişken modelden çıkartılarak diğer iki değişkeni içeren bir model kurulabileceği gibi, ileride göreceğimiz adımsal yöntemlerle en iyi alt küme elde edilebilir.

Eğer bağımlı ve bağımsız değişkenlerin tümüne logaritmik dönüşüm uygulansa idi, tümel sonuçlarda çok az değişiklik olduğu görülecektir.

7.4.8. Hataların İlişkili Olma Sorunu

Hata terimlerinin (ε_i'lerin) sıfır ortalama ve sabit varyansla normal dağılmaları ve de birbirleri ile ilişkisiz olmaları doğrusal regresyonun temel varsayımlarındandır ve artıklar yardımıyla incelenir. Bazı regresyon uygulamaları, zamana bağlı olarak "doğal

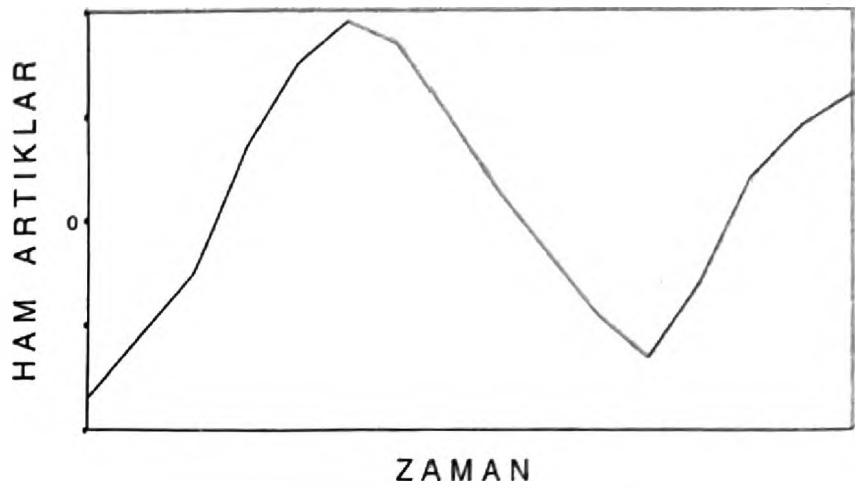
sıralı" olan ***bağımlı*** ve ***bağımsız*** değişkenler içerir. Bu tür verilere zaman serisi verileri denir. Zaman serisi verilerinde hata terimleri, çoğunlukla sıra ile devam eden ilişki gösterirler. Diğer bir yaklaşımla, eğer değişkenler zamana bağımlı ise gözlemler arasındaki bağımsızlık ya da ilişkisizlik ortadan kalkar. Çoğunlukla gözlemlerin doğal sırada olduğu durumlarda ortaya çıkan bu ilişkiye **otokorelasyon (özilişki)** denir. Ancak, hata terimlerinin ilişkili olma sorunu (otokorelasyon) sadece zaman serileri verilerinde ortaya çıkmaz. Otokorelasyon birçok nedenle ortaya çıkabilir;

1. Bazı önemli bağımsız değişkenlerin denkleme alınmaması. Örneğin, bir ürünün yıllara göre satış miktarı ile reklam harcamaları arasında regresyon çözümlemesi yaptığımızı düşünelim. Bu çalışmanın yapıldığı zaman sürecinde, nüfusta olan gelişmeler ürün satışını etkileyecektir. Eğer nüfus büyüklüğü modele alınmazsa, bu modeldeki hatalar bir "pozitif" otokorelasyona neden olabilir.
2. Regresyon modelinin yanlış seçilmiş olması. Örneğin, logaritmik bir model yerine doğrusal bir modelin kullanılmış olması otokorelasyona neden olabilir.
3. Bağımlı değişkende ölçüm hatalarının olması. Örneğin, ölçme hatalarının belirli bir yöne doğru eğilim göstermesi, hata terimlerinin bu hatalara bağlı olarak bir eğilim içinde olmasını sağlayabilmektedir. Ancak, ölçüm hatalarının bütün gözlemler için sabit kalması durumunda, artık terimleri bundan etkilenmeyecektir.

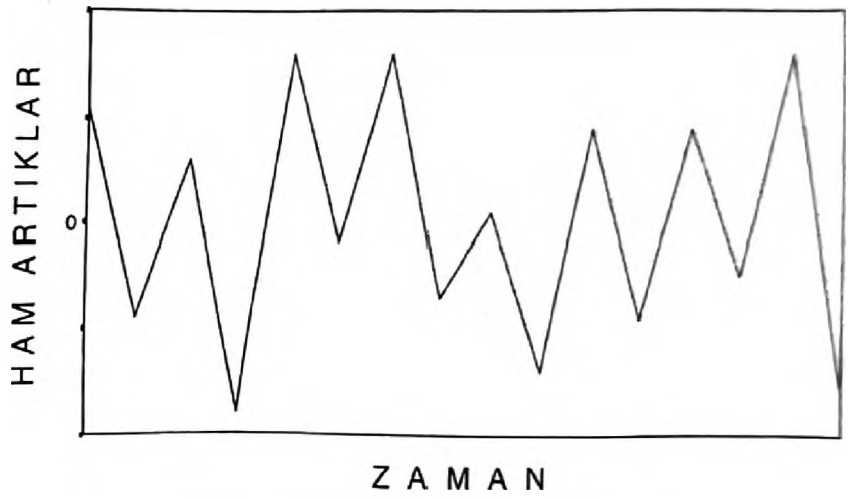
Otokorelasyonun varlığı, yapılacak çözümleme üzerine çeşitli şekilde etki eder. Örneğin, regresyon katsayıları yansız olmakla birlikte, en küçük varyanslı olma özelliğini kaybeder. Hata terimleri pozitif otokorelasyona sahipse, hata varyansının kestiricisi olan *AKO*, olması gerekenden çok küçük çıkabilir. Bu ise regresyon katsayılarına ilişkin standart hataların çok küçük çıkmasına neden olur. Böylece, katsayılara ilişkin güven aralıkları, gerçekte olması gerekene göre daha dar olur. Ayrıca, hipotez testlerinde, bir ya da daha fazla değişkenin gerçekte olmadığı halde modele katkısının anlamlı olduğu şeklinde bulgular ortaya çıkabilir. Son olarak da, t ve F testlerine dayalı güven aralıkları ve hipotez testleri geçerliğini yitirir. Eğer otokorelasyon, bir değişkenin modele alınmaması nedeniyle ortaya çıkıyor ve bu değişken tanımlanabiliyor ise, otokorelasyon ortadan kalkacaktır.

Otokorelasyonun Araştırılması ve Belirlenmesi

Otokorelasyonun araştırılmasında artık grafiklerinden yararlanılabilir. Bu amaçla, zamana göre artıkların nokta grafikleri çizilir. Bu çizimlerde, benzer işaretli artıkların kümeler halinde değişmesi pozitif otokorelasyonun varlığını işaret eder (Grafik 7.41-*a*). Grafik 7.41-*a*'da görüldüğü gibi; ilk artık kümesi negatif işaretli, onu izleyen artık kümesi pozitif işaretli, bu pozitif işaretli artık kümesini izleyen artık kümesi ise yine negatif işaretlidir. İşaretlerin gözlemden gözleme değişmesi ya da sık sık değişmesi ise negatif otokorelasyonun varlığına işaret eder (Grafik 7.41-*b*).



Grafik 7.41-a. Pozitif otokorelasyon



Grafik 7.41-b. Negatif Otokorelasyon

Grafik bulguların dışında otokorelasyonun belirlenmesi amacıyla geliştirilmiş değişik testler vardır. Bunların arasında en çok kullanılanı, gözlem sayısı 15'in üzerinde olduğu durumlarda kullanılan Durbin-Watson *d* istatistiğidir. Gözlem sayısı 15'in altında olduğu durumlarda ise çoğunlukla Von-Neumann testi kullanılır. Durbin-Watson *d* istatistiği;

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} \qquad (7.96)$$

ile verilir. Burada e_t, (t=1,2,.....,n); y_t ve x_t veri kümesine, en küçük kareler yönteminin uygulanması ile elde edilen ham artıklardır. Bulunan *d* istatistiğinin; *Durbin-Watson d İstatistiği Tablosu*'ndaki α yanılma düzeyi, bağımsız değişken sayısı ve gözlem sayısına göre değişen alt ($d_{LOWER} = d_L$) ve üst ($d_{UPPER} = d_U$) sınırlar ile

karşılaştırılması, otokorelasyonun varlığı ya da yokluğu konusunda karar vermemizi sağlar. *Durbin-Watson d İstatistiği Tablosu* değerleri $\alpha = 0.05$ ve $\alpha = 0.01$ için Ek Tablo H'de verilmiştir. Buna göre pozitif otokorelasyona ilişkin karar verme süreci aşağıda verilmiştir.

Eğer $d \leq d_L$ ise	pozitif otokorelasyon vardır
Eğer $d \geq d_U$ ise	pozitif otokorelasyon yoktur
Eğer $d_L < d < d_U$ ise	otokorelasyon için karar verilemez

Negatif otokorelasyon sık sık karşılaşılan bir bozulum türü değildir. Negatif otokorelasyonun varlığı konusunda karar verebilmek için 4-d farkından yararlanılır. Buna göre,

Eğer $4 - d \leq d_L$ ise	negatif otokorelasyon vardır
Eğer $4 - d \geq d_U$ ise	negatif otokorelasyon yoktur
Eğer $d_L < 4 - d < d_U$ ise	otokorelasyon için karar verilemez

Örnek 7.19. Bünyesinde 6 sağlık ocağı olan bir bölgede, kişilerin sağlık ocaklarına başvuru sayısını arttırmak amacıyla 20 yıl boyunca bir eğitim programı yürütülmüş ve sağlık ocaklarına yapılan günlük ortalama başvuru sayısı (y) ile eğitim programına ayrılan bütçe (x_1) arasında bir ilişki aranmıştır. Ancak, bu süre içinde bölge nüfusunda da (x_2) değişiklik olmuştur. Veriler Tablo 7.61'de verilmiştir.

Tablo 7.61 Sağlık Ocağı Verisi

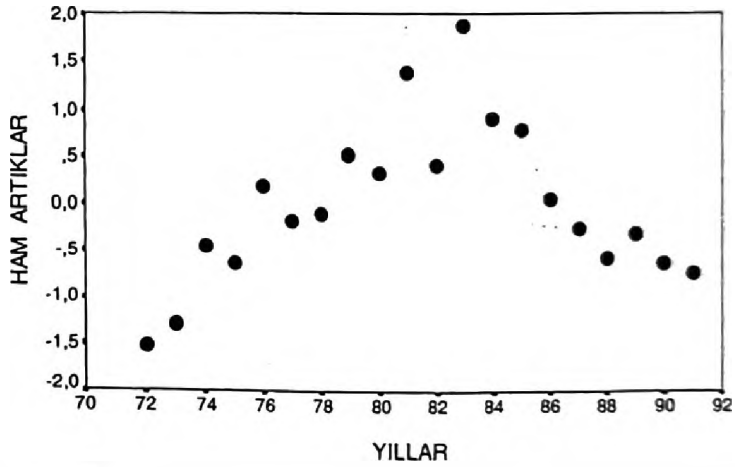
Yıllar(t)	y	x_1	x_2
72	90	3060	24030
73	92	3182	24262
74	94	3263	24500
75	95	3344	24733
76	97	3425	24915
77	99	3588	25010
78	102	3790	25265
79	105	3953	25475
80	106	4035	25686
81	110	4239	25920
82	112	4443	26170
83	117	4688	26435
84	119	4892	26505
85	123	5177	26520
86	127	5503	26720
87	132	5870	26805
88	137	6237	26860
89	142	6563	27000
90	147	6930	27205
91	154	7420	27340

y ile x_1 arasındaki nokta grafiğine bakıldığında ilişkinin doğrusal olduğu görülecektir. Bu nedenle model denklemi $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \varepsilon_t$ olarak kurulmuştur. Bu modele ilişkin sonuçlar Tablo 7.62'de verilmiştir.

Tablo 7.62. $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \varepsilon_t$ *Modeli İçin Sonuçlar*

Değişken	*Katsayı*	*S. Hata*	*t*	*P*
x_1	0.01450	0.000148	97.76	0.0000
Sabit	47.13804	0.720839	65.39	0.0000
n=20	s=0.86917	R^2 = 0.99812	(F=9557.69 p=0.0000)	

Bağımlı değişken ile bağımsız değişkenler zaman serisi olduğu için otokorelasyonun varlığından şüphelenilebilir. Bu amaçla, bu modele ilişkin ham artıkların yıllara göre nokta grafiği incelendiğinde (Grafik 7.42), grafiğin rahatsız edici olduğu görülmektedir. Çünkü artıklar, kümeler halinde sırasıyla önce negatif, sonra pozitif ve daha sonra tekrar negatif değerler almakta ve pozitif otokorelasyon kuşkusunu uyandırmaktadır. Bu durum, Tablo 7.63'de verilen e_t ham artıklarına ilişkin dağılımın incelenmesi ile de görülebilir.



Grafik 7.42. $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \varepsilon_t$ *Modeli İçin Yıllara Göre Artıkların Dağılımı*

Otokorelasyonun var olup olmadığını Durbin-Watson d istatistiği ile test edebilmek amacıyla $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \varepsilon_t$ modeli için bazı hesaplamalar Tablo 7.63'de verilmiştir. Tablo 7.63'den;

$$\sum_{t=1}^{n} e_t^2 = 2.27518 + ... + 0.53122 = 13.598$$

$$\sum_{t=2}^{n} (e_t - e_{t-1})^2 = 0.05335 + ... + 0.01103 = 7.983$$

olarak elde edilir. Buradan d istatistiği (7.96) yardımıyla;

$$d = \frac{7.983}{13.598} = 0.587$$

olarak bulunur.

Tablo H'de verilen Durbin-Watson Tablosu yardımıyla $\alpha = 0.05$ düzeyinde, n=20 ve bağımsız değişken sayısı p=1 için $d_L = 1.20$, $d_U = 1.41$ olarak bulunur. Buradan, $d = 0.587 < d_L = 1.20$ olduğu için artıklar arasında pozitif otokorelasyon olduğu anlaşılır.

Otokorelasyon kaynağı olarak, "modele alınmayan ikinci bir değişkenin varlığı" düşünülerek, yıllar içindeki nüfus ikinci bağımsız değişken olarak modele katıldığında çoklu regresyon sonuçları Tablo 7.64'de verilmiştir.

Tablo 7.63. $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \varepsilon_t$ *Modeli için Bazı Sonuç ve Hesaplamalar*

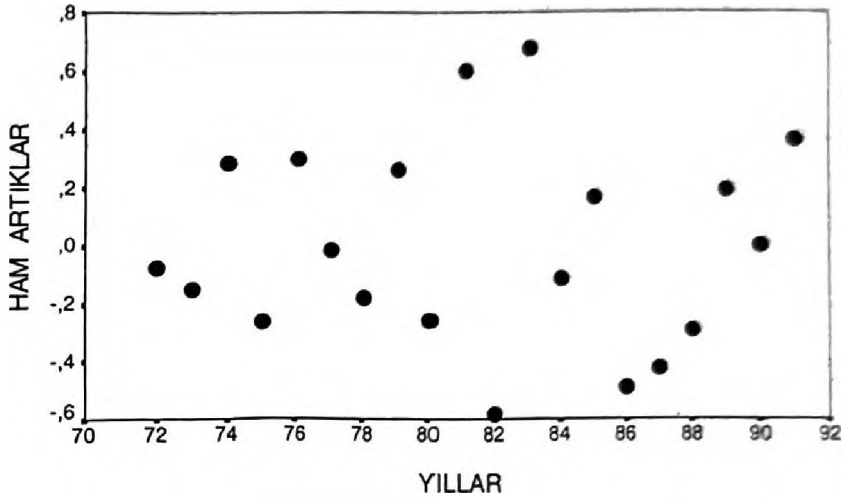
Yıllar	t	y	x_1	e_t	e_t^2	$(e_t - e_{t-1})^2$
72	1	90	3060	-1.50837	2.27518	
73	2	92	3182	-1.27739	1.63172	0.05335
74	3	94	3263	-0.45190	0.20421	0.68143
75	4	95	3344	-0.62640	0.39238	0.03045
76	5	97	3425	0.19909	0.03964	0.68143
77	6	99	3588	-0.16443	0.02704	0.13215
78	7	102	3790	-0.09345	0.00873	0.00504
79	8	105	3953	0.54303	0.29488	0.40510
80	9	106	4035	0.35402	0.12533	0.03572
81	10	110	4239	1.39600	1.94881	1.08572
82	11	112	4443	0.43798	0.19182	0.91780
83	12	117	4688	1.88545	3.55492	2.09516
84	13	119	4892	0.92743	0.86012	0.91780
85	14	123	5177	0.79490	0.63186	0.01756
86	15	127	5503	0.06786	0.00461	0.52859
87	16	132	5870	-0.25368	0.06435	0.10339
88	17	137	6237	-0.57522	0.33088	0.10339
89	18	142	6563	-0.30226	0.09136	0.07450
90	19	147	6930	-0.62380	0.38912	0.10339
91	20	154	7420	-0.72885	0.53122	0.01103

Tablo 7.64. $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \varepsilon_t$ *İçin Çoklu Regresyon Sonuçları*

Değişken	*Katsayı*	*S. Hata*	*Beta*	*VIF*	*t*	*P*
x_1	0.012949	0.000180	0.892182	8.309	71.688	0.0000
x_2	0.002147	0.000234	0.113955	8.309	9.156	0.0000
Sabit	-1.135245	5.280869	-	-	-0.215	0.8323
n=20	s=0.36722	$R^2 = 0.99968$		(F=26813.993	p=0.0000)	

Çoklu regresyon modeli sonuçlarına ilişkin Durbin-Watson istatistiği d=2.90126 olarak bulunmuştur. Tablo H yardımıyla n=20 ve p=2 için tablo istatistikleri $d_L = 1.10$, $d_U = 1.54$ olarak bulunur. $d = 2.90126 > d_U = 1.54$ olduğu için artıklarda

otokorelasyona ilişkin bir belirti olmadığı söylenecektir. Bu saptama, Grafik 7.43 ile verilen artık dağılımlarından da anlaşılmaktadır.



Grafik 7.43. $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \varepsilon_t$ ***Modeli İçin Yıllara Göre Artık Dağılımı***

Otokorelasyon ve Cochrane ve Orcutt Yöntemi

Otokorelasyonun, modele bir ya da daha fazla değişken eklenmesi ile giderilemediği durumlarda, otokorelasyonun ortadan kaldırılması amacıyla geliştirilmiş çeşitli parametre kestirim yöntemlerinden yararlanılabilir. Cochrane ve Orcutt yöntemi bunlardan birisidir. Bu yöntemde, önce otokorelasyon parametresi olan ρ istatistiği bulunur. Daha sonra dönüştürülmüş bağımlı (y_t') ve bağımsız (x_t') değişkenler elde edilerek, dönüşüm yapılmış değişkenlere en küçük kareler yöntemi uygulanır. ρ istatistiği eşitliği aşağıda verilmiştir.

$$\rho = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} \qquad (7.97)$$

Dönüştürülmüş bağımlı ve bağımsız değişkenler ise;

$$x_t' = x_t - \rho\, x_{t-1}$$

$$y_t' = y_t - \rho\, y_{t-1}$$

ile elde edilir. Bu yeni değişkenlere ilişkin d istatistiği yeniden hesaplanır. Bu hesaplama sonucunda artıkların ilişkisiz olduğu belirlenirse işlemler sonlandırılır. Ancak, pozitif otokorelasyonun varlığı hala sözkonusu ise dönüşmüş veri üzerinde aynı işlemlerin tekrarlanması gerekir. Diğer taraftan, tekrarlama işlemleri sonucunda her zaman olumlu bir sonuç elde edilmeyebilir. İki tekrarlama sonunda ilişkisiz artıklara ulaşılamıyorsa , başka bir kestirim yönteminin uygulanması önerilmektedir. Konuya ilişkin bir uygulama Örnek 7.20'de verilmiştir.

Örnek 7.20. Sağlık sektöründe kullanılan bir ürünün birim fiyatındaki ($) düşme ile pazar payındaki artış (%) arasındaki ilişki 18 ay süre ile incelenmiştir. Veriler, $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \varepsilon_t$ modeline ilişkin artıklar ve ρ için gerekli hesaplamalar Tablo 7.65'de verilmiştir.

Tablo 7.65. Pazar Payı Verisi

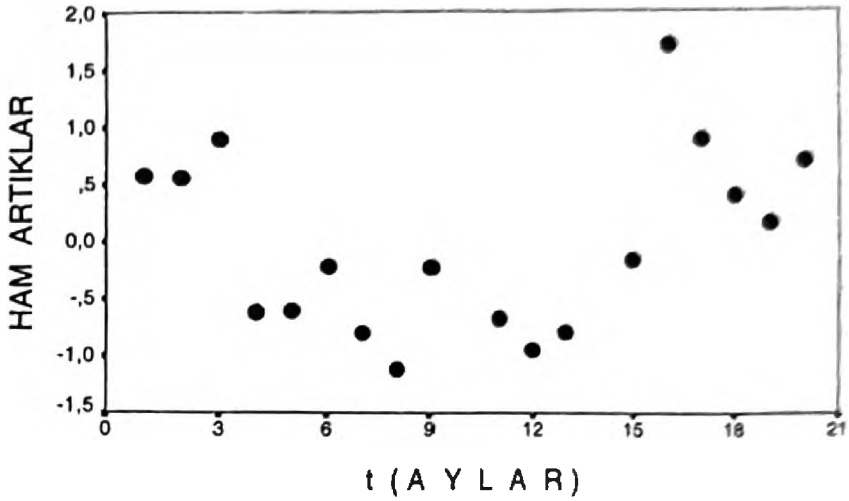
Aylar-t	Pazar Payı (y_t)	Birim Fiyat (x_t)	e_t	$e_t e_{t-1}$	e_t^2
1	7.25	975	0.57833		0.3345
2	8.40	950	0.56126	0.32459	0.3150
3	6.65	995	0.91198	0.51186	0.8317
4	9.10	910	-0.60604	-0.55270	0.3673
5	5.85	980	-0.58826	0.35651	0.3460
6	9.74	905	-0.19946	0.11733	0.0398
7	9.85	890	-0.78970	0.15751	0.6236
8	10.70	865	-1.10676	0.87400	1.2249
9	12.30	850	-0.20700	0.22910	0.0429
10	14.65	790	-0.65796	0.13620	0.4329
11	12.60	828	-0.93402	0.61455	0.8724
12	13.60	810	-0.77431	0.72322	0.5996
13	16.80	755	-0.14185	0.10982	0.0201
14	16.55	800	1.70886	-0.24240	2.9202
15	14.35	830	0.90934	1.55393	0.8269
16	15.50	795	0.42545	0.38688	0.1810
17	16.90	760	0.19156	0.08150	0.0367
18	16.40	782	0.71858	0.13765	0.5164

Örnek veriye ilişkin doğrusal regresyon sonuçları Tablo 7.66'da verilmiştir.

Tablo 7.66. Pazar Payı Verisi İçin En Küçük Kareler Çözümlemesi Sonuçları

Değişken	Katsayı	S. Hata	t	P
x_t	-0.046683	0.002519	-18.534	0.0000
Sabit	52.187254	2.173198	24.014	0.0000
n=18	s=0.81132	$R^2 = 0.95549$	(F=343.49758	p=0.0000)

En küçük kareler artıklarının aylara göre dağılımı Grafik 7.44'de verilmiştir. Bu grafikten, artıklar arasında pozitif otokorelasyon olması olasılığının yüksek olduğu düşünülebilir. Durbin-Watson d istatistiği ise d=0.87105 olarak bulunmuştur. $\alpha = 0.05$ ve n=18 için Durbin-Watson Tablo değerleri $d_L = 1.16$ ve $d_U = 1.39$ 'dur. d=0.87105< $d_L = 1.16$ olduğu için artıklar arasında pozitif otokorelasyon olduğu söylenir.



Grafik 7.44. Zamana Karşı Ham Artıkların (e_t) Grafiği

Cochrane-Orcutt yöntemi ile model parametrelerini elde edebilmek için otokorelasyon parametresi, ρ ; Eşitlik (7.97) yardımı ile;

$$\rho = \frac{5.51956}{10.53} = 0.524$$

olarak bulunur. Bu değer yardımıyla dönüşmüş değişkenler; $t = 2,3,...,18$ için;

$$x'_t = x_t - 0.524x_{t-1} \qquad y'_t = y_t - 0.524y_{t-1}$$

olarak yazılır. Dönüşmüş değişkenler ve $y'_t = \beta'_0 + \beta'_1 x'_t + \varepsilon'_t$ için en küçük kareler artıkları Tablo 7.67'de, en küçük kareler sonuçları ise Tablo 7.68'de verilmiştir.

Tablo 7.67. Dönüşmüş Değişken Değerleri ve EKK Artıkları

t	x'_t	y'_t	e'_t
2	439.10	4.601	0.23114
3	497.20	2.248	0.49350
4	388.62	5.615	-1.47721
5	503.16	1.082	-0.40421
6	391.48	6.675	0.16153
7	415.78	4.746	-0.67361
8	398.64	5.539	-0.65216
9	396.74	6.693	0.41631
10	344.60	8.205	-0.41877
11	414.04	4.923	-0.57493
12	376.13	6.998	-0.20645
13	330.56	9.674	0.41823
14	404.38	7.747	1.81422
15	410.80	5.678	0.03422
16	360.08	7.981	0.05406
17	343.42	8.778	0.10112
18	383.76	7.544	0.68302

Tablo 7.68. Dönüşmüş Veri İçin En Küçük Kareler Çözümlemesi Sonucu

Değişken	Katsayı	S. Hata	t	P
x_t	-0.045015	0.003904	-11.529	0.0000
Sabit	24.135882	1.571668	15.357	0.0000
n=17	s=0.74012	$R^2 = 0.898$	(F=132.929	p=0.0000)

Dönüşmüş veri için Durbin-Watson d istatistiği d=1.70016 olarak bulunmuştur. $\alpha = 0.05$ ve n=17 için Durbin-Watson Tablo değerleri $d_L = 1.13$ ve $d_U = 1.38$'dir. $d = 1.70016 > d_U = 1.38$ olduğu için artıkların ilişkisiz olduğu söylenir. Bir diğer deyişle, Cochrane-Orcutt işlemi otokorelasyon sorununu gidermiştir. Dikkat edilirse dönüşmemiş ve dönüşmüş değişkenler için bulunan regresyon katsayıları hemen hemen birbirine eşittir. Ancak, katsayılara ilişkin standart hatalar karşılaştırıldığında, Cochrane-Orcutt yöntemi için bulunan regresyon katsayısına ilişkin standart hatanın, orijinal değişkenler için bulunan standart hataya göre daha büyük olduğu görülür. Bu sonuç, bir diğer şekilde belirtildiği üzere, "artıklar arasında pozitif otokorelasyon varsa ve veriye en küçük kareler yöntemi uygulanırsa, regresyon katsayısına ilişkin standart hata olması gerekenden daha küçük elde edilir" şeklindeki açıklamayı doğrulamaktadır. Cochrane-Orcutt yöntemi sonucunda bulunan denklemin orijinal değişkenlerle kullanılabilmesi için β_0 değerinin orijinal değişkenler cinsinden elde edilmesi gerekir. Buna göre;

$$\beta_0 = \frac{\beta_0'}{1-\rho} = \frac{24.135882}{1-0.524} = 50.7056$$

olarak bulunur. Bu katsayıya ilişkin standart hata ise;

$$S(\beta_0) = \frac{s(\beta_0')}{1-\rho} = \frac{1.571668}{1-0.524} = 3.3018$$

olarak elde edilir. Bu sonuçlar ise, en küçük kareler yöntemi ile elde edilen sabit teriminin, Cochrane-Orcutt yöntemi ile elde edilen kestirimi arasında ciddi bir fark olmadığını gösterir.

7.5. REGRESYON ÇÖZÜMLEMESİNDE NİTELİK BAĞIMSIZ DEĞİŞKENLERİN OLMASI DURUMU VE GÖSTERMELİK (DUMMY) DEĞİŞKENLERİN KULLANIMI

Regresyon çözümlemesinde, bağımsız değişkenler genellikle sürekli ve kesikli sayısal veri tipindedir (yaş, kan basıncı, maliyet, puan, ailedeki çocuk sayısı, ailedeki kredi kartı sayısı, ...vb.). Ancak, bazı durumlarda modele; cinsiyet (erkek- kadın), medeni durum (evli-bekar-dul), sigara (içen-içmeyen), sağlık durumu (iyi-kötü), mesleği (işçi-memur-serbest) gibi değişkenlerin katılması gerekir. Örneğin, sistolik kan basıncı (y) ile ağırlık (x_1) ve yaş (x_2) arasındaki ilişkiyi incelediğimizi düşünelim. Bu ilişkiye, cinsiyet bağımsız değişkenini de eklemek isteyebiliriz. Yine, akciğer kapasitesi ile diğer

bağımsız değişkenler arasındaki ilişkiyi incelerken; boy uzunluğu, ağırlık, yaş gibi ölçümle belirtilen değişkenlerin yanında cinsiyet, yaşanan bölge (köy, kasaba, kent), sigara içme durumu (bırakmış, içmekte olan, hiç içmemiş) gibi nitelik değişkenleri de dikkate alabiliriz. Genelde, nitelik değişkenlerin doğal bir ölçüm skalası yoktur. Bu nedenle, bu değişkenlerin modele katkısını görmek için "bir düzey kümesini" bu tür değişkenlere atamamız gerekir. Bu düzey kümesini oluşturan değişkenlere göstermelik (yapay-dummy) değişkenler denir. Göstermelik değişkenler çoğunlukla 0 ve 1 değerlerini alır (0 ve 1'in seçimi keyfi olup herhangi ayrı iki değer de olabilir) ve bu yeni değişkenlerin sayısal olarak hiçbir önemi yoktur. Çünkü, sadece gözlemlerin hangi kategoriye ait olduklarını ya da bir değişken değerinin varlığını ya da yokluğunu gösterirler.

Yukarıda verilen örneklerde bazı nitelik değişkenlerin iki, bazılarının üç sınıfı (kategorisi) vardır. Bu tür değişkenler daha fazla sınıflı da olabilir. Eğer, nitelik değişkenin k tane sınıfı var ise, modelde bu değişken için, k-1 tane göstermelik değişken tanımlanır. Örneğin, çocuğun doğum ağırlığı (y) üzerine, gebelik haftasının (x_1) ve annenin sigara içip içmediğinin (x_2) etkisini incelemek isteyelim. Annenin sigara içme durumu, içen-içmeyen şeklinde iki sınıflı ise, bu değişken modelde; sigara içen anneler için 1, içmeyen anneler için 0 olarak kodlanmak (ya da tersi) üzere tek bir değişken olarak yer alabilir (Tablo 7.69).

Tablo 7.69. Göstermelik Değişken Kullanımı

Doğum Ağırlığı (gr) (y)	Doğum Ayı (x_1)	Sigara (x_2)
2950	38	1
2440	35	0
3446	42	0
.	.	.
.	.	.
2619	35	1

Bu ilişkiye ilişkin regresyon modeli $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon$ şeklinde olacaktır. Ancak, bu çalışmada, sigara içme durumunu hiç-az-çok şeklinde nitelendirse idik, bu durumda üç sınıf olduğu için sigara içme durumu modelde, x_2 yerine, x_2 ve x_3 gibi iki değişkenle temsil edilecek ve kodlama aşağıdaki gibi olabilecekti.

x_2	x_3	Kategori
0	0	Hiç
1	0	az
0	1	çok

Yukarıdaki gibi bir kodlama için önce aşağıdaki gibi bir tablonun hazırlanması, daha sonra da yapay değişkenlerden birisinin veriden çıkartılması gerekir:

Orijinal Kategori	Yapay Değişken 1	2	3
Hiç	1	0	0
Az	0	1	0
Çok	0	0	1

Yukarıdaki tabloda ilk yapay değişken veriden çıkartılmıştır. Veriden çıkartılan yapay değişken ***temel*** ya da ***karşılaştırma*** ya da ***referans kategorisi*** olarak adlandırılır. Örneğimizde, hiç kategorisi yapay değişkeni (ilk kolon) veriden çıkartıldığı için referans kategorisi ***hiç***'tir. Bu durum için model denklemi ise $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \varepsilon$ şeklinde yazılacaktır.

Eğer, sigara içme durumu; hiç, ≤ 5 tane/gün, $6-10$ tane/gün ve $11+$ tane/gün şeklinde sınıflandırılırsa üç tane yeni değişken tanımlamamız gerekecek ve model $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \varepsilon$ şeklinde yazılacaktır.

x_2	x_3	x_4	Kategori
0	0	0	hiç
1	0	0	≤ 5
0	1	0	$6-10$
0	0	1	$11+$

Yukarıda örneklerle verilen kodlama yöntemine ***indicator*** kodlama yöntemi denir. Bunun dışında yaygın olarak kullanılan diğer bir kodlama yöntemi ise ***deviation*** kodlama yöntemidir. Bu kodlama sisteminde referans kategoriye 0 yerine -1 değerleri atanır. Elde edilen regresyon katsayıları ilgili kategori ile diğer değişkenlerin ortalamaları arasındaki farkı verir.

Referans kategorinin seçimi keyfi olmakla birlikte, bazen özel bir referans kategorisinin seçimi için çeşitli nedenler olabilir. Örneğin, belirli bir hastalık için değişik tedavi yöntemleri söz konusu ise her bir tedavi yöntemini standart tedavi yöntemi ile karşılaştırmak gerekebilir. Bu durumda, standart tedavi yöntemi referans kategori olarak kullanılır. Referans kategorinin seçimi tümel modele uyumu etkilemez. Konuya ilişkin iki örnek aşağıda verilmiştir.

Örnek 7.21. Doğum ağırlığı ile ilgisi olduğu düşünülen faktörlerle ilgili bir çalışma yapılıyor. Çalışmada, gebelik haftası ile annenin sigara içip içmemesi doğum ağırlığını etkileyen iki bağımsız değişken olarak düşünülüyor. Bu amaçla 32 anneye ilişkin dosya inceleniyor. Veriler Tablo 7.70'de verilmiştir. Nitelik değişken olan annenin sigara içme durumu, iki düzeylidir. Bu nedenle, tek bir göstermelik değişkende; sigara içmeyen anneler 0, içen anneler ise 1 olarak kodlanmıştır.

Tablo 7.70. Doğum Ağırlığı Verisi (*)

Kişi no	*Doğum Ağırlığı (gr) (y)*	*Gebelik Haftası (x_1)*	*Annenin Sigara İçme Durumu (x_2)*
1	2940	38	1
2	3130	38	0
3	2420	36	1
4	2450	34	0
5	2760	39	1
6	2440	35	1
7	3226	40	0
8	3301	42	1
9	2729	37	0
10	3410	40	0
11	2715	36	1
12	3095	39	0
13	3130	39	1
14	3244	39	0
15	2520	35	0
16	2928	39	1
17	3523	41	0
18	3446	42	1
19	2920	38	0
20	2957	39	1
21	3530	42	0
22	2580	38	1
23	3040	37	0
24	3500	42	1
25	3200	41	1
26	3322	39	0
27	3459	40	0
28	3346	42	1
29	2619	35	0
30	3175	41	1
31	2740	38	1
32	2841	36	0

(*) Births Data. Biostatistics: A Foundation for Analysis in the Health Sciences. Wayne W. Daniel, 1987. Sayfa 468. John Wiley-Sons Inc. Yayınevinin izniyle kullanılmıştır. Her hakkı saklıdır.

Bu çalışma için, tümel modele ilişkin çoklu doğrusal regresyon denklemi ve ilgili istatistikler Tablo 7.71'de verilirken, yapay değişken kullanımı ile ilgili bazı ek açıklamalar ilerleyen satırlarda verilmiştir.

Tablo 7.71. Doğum Ağırlığı Verisine İlişkin İstatistikler

Değişken	b_j	$S(b_j)$	*Beta*	*t*	*p*
x_1	143.100	9.128	0.963	15.677	0.000
x_2	–244.544	41.982	–0.358	–5.825	0.000
Sabit	–2389.573	349.206		–6.843	0.000
$n = 32$	$s = 115.53$	$R^2 = 0.896$		(F=125.446,	p=0.0000)

Tümel denkleme ilişkin regresyon katsayılarından anlaşılacağı gibi, sigara içen annelerin çocuk doğum ağırlığı içmeyenlere göre 244.544 gram daha düşüktür. İlgili *t*

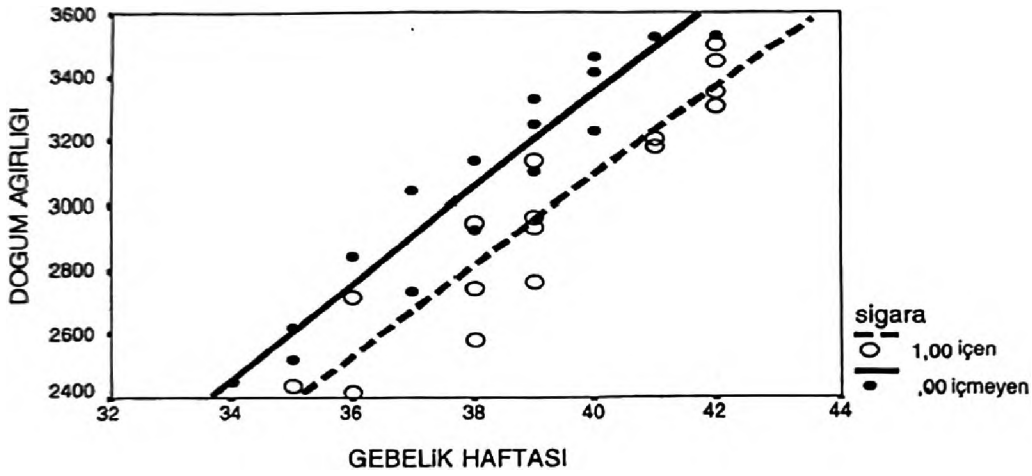
istatistiği (t=–5.825, p=0.000), bu farkın anlamlı olduğunu göstermektedir. Tümel regresyon denkleminde x_2 yerine 1 koyduğumuzda model denklemi;

$$\hat{y}_i = -2389.573 + 143.100(x_{i1}) - 244.544(1) = -2634.117 + 143.100(x_{i1})$$

olarak elde edilir. Görüldüğü gibi, sigara içen annelerden elde edilen denklem için b_0 katsayısı, tümel modeldeki $b_0 + b_2$ kadardır ($b_0 + b_2$=–2389.573+(–244.544)=–2634.117). Yani sigara içen annelerin çocuk doğum ağırlığı 244.544 gram daha düşüktür. Sigara içmeyen anneler için doğum ağırlığı düşünüldüğünde ise denklem aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\hat{y}_i = -2389.573 + 143.1x_{i1} - 244.544(0) = -2389.573 + 143.1x_{i1}$$

Görüldüğü gibi eğim her iki denklemde de aynıdır (143.1). Şimdi ise konuya grafiksel olarak yaklaşalım. Sigara içen ve içmeyen anneler için doğum ağırlığı-gebelik haftası grafiği Grafik 7.45'de verilmiştir.



Grafik 7.45. Doğum Ağırlığı Verisi Grafiği

Gerek grafikten, gerekse sigara içen ve içmeyen anneler için elde edilen iki denklemden anlaşılacağı gibi doğrular birbirine paraleldir (çünkü, her iki denklemde de eğimler aynıdır) ve gebelik haftası fazla olan annelerin çocuk doğum ağırlığı daha fazladır. Ancak, denklemlerin kesim noktaları farklıdır ve sigara içen anneler için kesim noktası daha alttadır. Bu sonuçlara göre, gebelik haftası dikkate alındığında, sigara içmeyen annelerin çocukları içenlere göre daha kilolu doğmaktadır. Bunlara ilişkin fark ise ortalama 244.544 gramdır. Sonuç olarak, yukarıda bulduğumuz denklemler ve grafik yaklaşımdan anlaşılacağı üzere, eğimler aynı olduğu için, tümel denklemdeki b_2 katsayısı, iki regresyon doğrusu arasındaki yükseklik farkını vermektedir ve bu 244.544 gram kadardır.

Bu tür bir çalışmada, sigara içen ve içmeyen anneler için neden iki ayrı regresyon denklemi bulunmadığı sorulabilir. Böyle bir yaklaşım, yapay değişken kullanımının bazı avantajlarını ortadan kaldıracaktır. Örneğin, denklemler ayrı ayrı ele alındığında, gözlem sayısı her iki grup için 16 olurken, tümel model için bu sayı 32'ye çıkmaktadır.

Gözlem sayısındaki bu artış, artık serbestlik derecesinin artmasına ve artık kareler ortalamasının azalmasına ve de daha iyi regresyon sonucu elde edilmesine neden olur. Ayrıca, iki denklemle çalışmak yerine bir denklemle çalışmanın getirdiği kolaylık da söz konusudur.

Bu aşamada, yaklaşık 245 gramlık farkın anlamlı olup olmadığına, diğer bir deyişle sigara içmenin doğum ağırlığı üzerine bir etkisinin olup olmadığına Tablo 7.71 yardımıyla bakabiliriz. Buradan, annenin sigara içme durumunun doğum ağırlığı üzerine etkisi anlamlıdır. Gerektiğinde, regresyon katsayılarına ilişkin güven aralıkları da kolaylıkla elde edilebilir.

Yukarıda, doğruların paralel olduğu duruma ilişkin bir örnek verdik. Ancak, bazen bu doğrular paralel olmayabilir. Doğruların paralel olmadığı durumlarda model denklemi biraz daha karmaşıklaşacaktır. Şimdi, Örnek 7.22'yi inceleyelim.

Örnek 7.22. Yaş (x_1) ile şiddetli depresyon tedavisinde kullanılan üç yöntemin (*Yöntem*), tedavi etkinliği (y) üzerine etkisi incelenmek isteniyor. Çalışmanın bir diğer amacı, eğer var ise yaş ile tedavi yöntemi arasındaki etkileşimin etkisini de incelemektir. Bu amaçla, hastalığın tanısına ve şiddetine göre üç farklı yöntem uygulanan 36 hasta rasgele seçiliyor. Veriler Tablo 7.72'de verilmiştir. Tedavi etkinliği ve yaş ölçümle belirtilen değişkenler iken, tedavi yöntemi nitelik değişkendir ve kategori sayısı üç olduğu için (A, B, C), modelde iki yapay değişkenle (x_2 ve x_3) gösterilmiştir. Tabloda yer alan x_1x_2 ve x_1x_3 değişkenleri ise daha sonra oluşturulacak bir modelde kullanılacağı için bu tabloda verilmiştir.

Tablo 7.72. Etkinlik Verisi (*)

Göz. No	y	x_1	Yöntem	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3
1	56	21	A	1	0	21	0
2	41	23	B	0	1	0	23
3	40	30	B	0	1	0	30
4	28	19	C	0	0	0	0
5	55	28	A	1	0	28	0
6	25	23	C	0	0	0	0
7	46	33	B	0	1	0	33
8	71	67	C	0	0	0	0
9	48	42	B	0	1	0	42
10	63	33	A	1	0	33	0
11	52	33	A	1	0	33	0
12	62	56	C	0	0	0	0
13	50	45	C	0	0	0	0
14	45	43	B	0	1	0	43
15	58	38	A	1	0	38	0
16	46	37	C	0	0	0	0
17	58	43	B	0	1	0	43
18	34	27	C	0	0	0	0
19	65	43	A	1	0	43	0
20	55	45	B	0	1	0	45
21	57	48	B	0	1	0	48
22	59	47	C	0	0	0	0
23	64	48	A	1	0	48	0

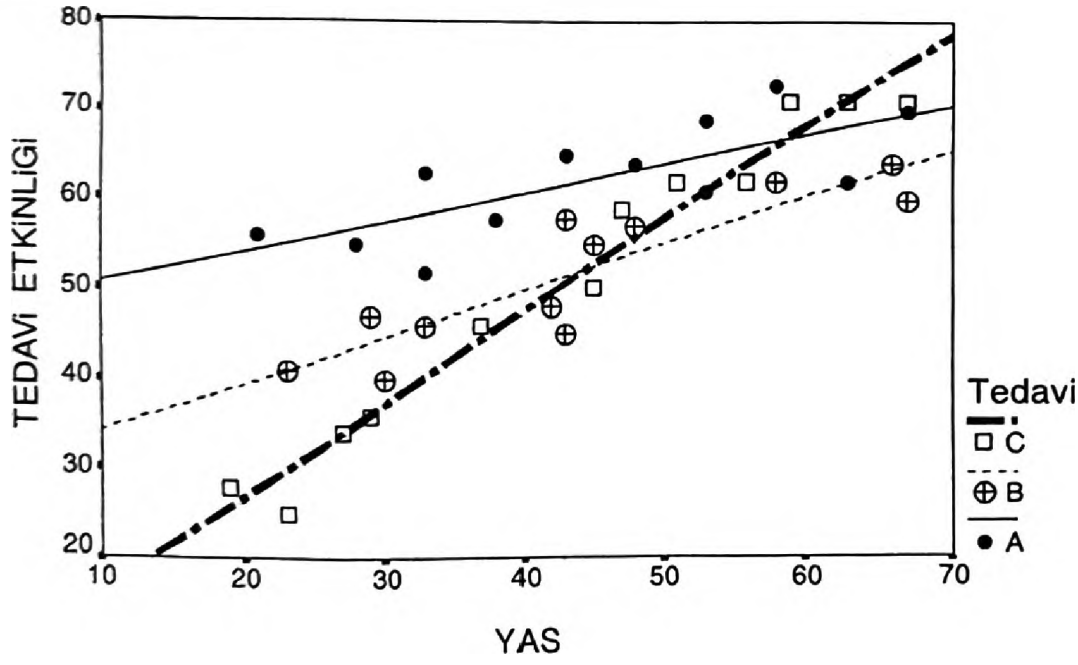
Tablo 7.72. Etkinlik Verisi (devam)

Göz. No	y	x_1	Yöntem	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3
24	61	53	A	1	0	53	0
25	62	58	B	0	1	0	58
26	36	29	C	0	0	0	0
27	69	53	A	1	0	53	0
28	47	29	B	0	1	0	29
29	73	58	A	1	0	58	0
30	64	66	B	0	1	0	66
31	60	67	B	0	1	0	67
32	62	63	A	1	0	63	0
33	71	59	C	0	0	0	0
34	62	51	C	0	0	0	0
35	70	67	A	1	0	67	0
36	71	63	C	0	0	0	0

(*) Biostatistics: A Foundation for the Analysis in the Health Sciences. Daniel W. Wayne, 1987, Sayfa 473. John Wiley-Sons Inc. Yayınevi'nin izniyle kullanılmıştır. Her hakkı saklıdır.

Tablo 7.72'de görüldüğü gibi x_2 ve x_3 değişkenlerinde; *A* tedavi yöntemi 1 0, *B* tedavi yöntemi 0 1 ve *C* tedavi yöntemi 0 0 olarak kodlanmıştır. Dolayısıyla, çözümleme sonucunda elde edilen katsayılar *C* tedavi yöntemine göre yorumlanacaktır. Yani, C tedavi yöntemi referans kategorisidir.

Bir önceki örnekten farklı olarak, üç farklı tedavi yöntemi olduğu için veriye ilişkin grafikte üç doğru olacaktır (Grafik 7.46).

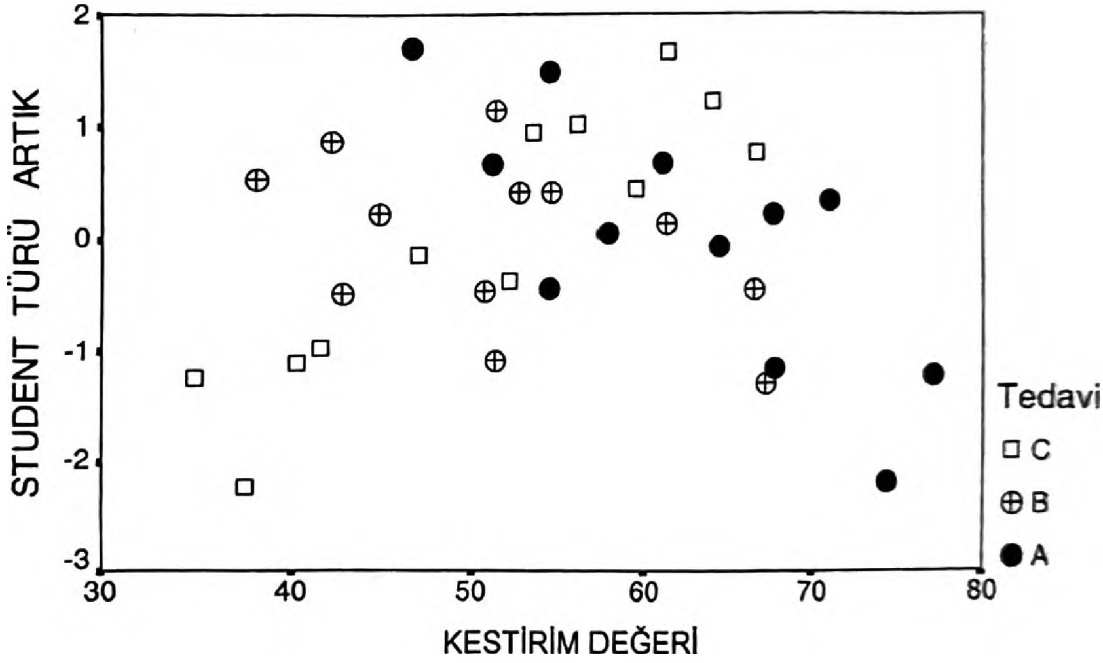


Grafik 7.46. Etkinlik Verisi Grafiği

Grafik 7.46'da görüldüğü gibi, *A* ve *B* tedavi yöntemleri eğim bakımından birbirinden pek farklı olmamakla birlikte, kesim noktaları oldukça farklıdır ve genç hastalar için *A* tedavi yöntemi *B*'den daha iyidir. *C* tedavi yöntemi ise genç hastalar için *A* ve *B*'ye göre en az tercih edilecek yöntemdir. Ancak bu yöntem (*C*), yaşlı kişiler için en az B yöntemi kadar etkilidir. Dolayısıyla, tümel bir incelemede, bu doğruların birbirine

paralel olmadığı görülür. Diğer bir deyişle, yaş ile tedavi yöntemleri arasında bir etkileşim söz konusudur. Bu tür durumlarda, modele bazı yeni değişkenlerin eklenmesi gerekecektir.

Modeli $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i$ şeklinde kurduğumuzda, regresyon denklemi $\hat{y}_i = 22.2906 + 0.66446 x_{i1} + 10.25276 x_{i2} + 0.44518 x_{i3}$ olarak elde edilirken, modele ilişkin tümel istatistikler; $R^2 = 0.784$, $s = 6.035$ ve F=38.705 olarak bulunur. Buna göre; **A yöntemi ile tedavi edilenlerin C yöntemi ile tedavi edilenlere göre tedavi etkinliği puanı 10.25276 puan daha fazla iken, B yöntemi ile tedavi edilenlerin C tedavi yöntemine göre tedavi etkinliği puanı 0.44518 puan daha fazladır.** Bu modele ilişkin artık grafiği Grafik 7.47'de verilmiştir. Bu grafikte artıkların 0 etrafında rasgele dağılmadıkları görülmektedir. Bu da modelin iyi olmadığının bir işaretidir.



Grafik 7.47. $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i$ ***için Artık Dağılımı***

Yukarıda, etkileşim olması durumunda, modele yeni değişkenlerin eklenmesi gerektiğini söylemiştik. Bu amaçla, modelimizi;

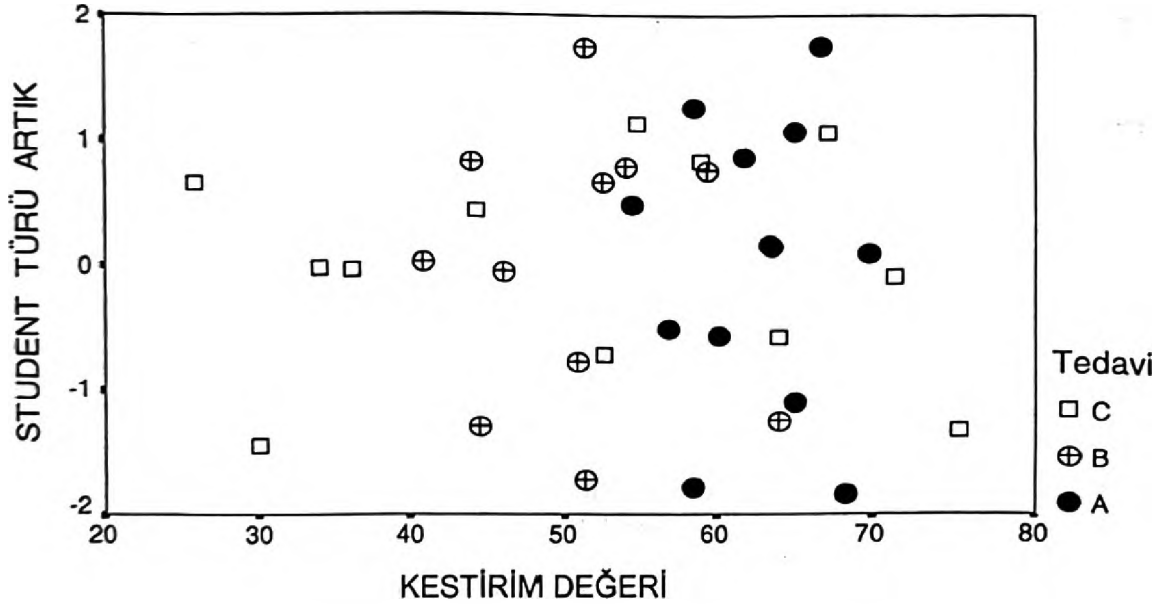
$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i1} x_{i2} + \beta_5 x_{i1} x_{i3} + \varepsilon_i$$

olarak yazalım. Bu modelden anlaşılacağı gibi, modele iki yeni değişken eklenmiştir. Bunlar ; x_1 ve x_2 değişkenlerinin çarpımı ile x_1 ve x_3 değişkenlerinin çarpımından oluşmuştur. Modelde, $\beta_4 x_{i1} x_{i2}$ ve $\beta_5 x_{i1} x_{i3}$'e etkileşim terimleri denir ve nitelik ve nitelik olmayan bağımsız değişkenler arasındaki etkileşimi belirtir. Modele, $x_{i2} x_{i3}$ gibi bir terimin eklenmesine gerek yoktur. Çünkü bu çarpımın sonucu her zaman sıfır olacaktır (Bakınız Tablo 7.72). Yeni modele ilişkin sonuçlar Tablo 7.73'de verilmiştir.

Tablo 7.73. Etkinlik Verisi (Etkileşimli Model)

Değişken	b_j	$S(b_j)$	*Beta*	t	P
x_1	1.03339	0.0723	1.217	14.288	0.0000
x_2	41.30421	5.0845	1.590	8.124	0.0000
x_3	22.70682	5.0909	0.874	4.460	0.0001
x_1x_2	-0.70288	0.1089	-1.298	-6.451	0.0000
x_1x_3	-0.50970	0.1104	-0.922	-4.617	0.0001
Sabit	6.21138	3.3496		1.854	0.0735
$n = 36$	$s = 3.925$		$R^2 = 0.914$	$F = 64.042$	

Tablo 7.73'de görüldüğü gibi yeni değişkenlerin modele eklenmesi ile R^2'de 0.13'lük bir artış olmuştur. Ayrıca, bir önceki modelde katsayılara ilişkin t istatistiklerinden bir tanesi önemsiz çıkarken (yukarıda verilmemiştir), bu yeni modeldeki bütün katsayılar anlamlıdır. Buna göre, A yöntemi ile tedavi edilenlerin etkinlik puanı C tedavi yöntemi ile tedavi edilenlere göre 41.3 puan daha fazladır. Bu modele ilişkin artık grafiği Grafik 7.48'de verilmiştir. Grafikten görüldüğü gibi modelde herhangi bir bozulma söz konusu değildir. Ayrıca, diğer artık çiziminden farklı olarak, her tedavi yöntemi için artıklar 0 etrafında rasgele dağılmaktadır. Diğer taraftan, modele ilişkin diğer gözlem istatistikleri ile birlikte artıkların normal dağılıp dağılmadığına bakıldığında yeni model için bir sorunun olmadığı görülecektir.



Grafik 7.48. Etkileşimli Modele İlişkin Artık Grafiği

Bunların dışında, Tablo 7.73'de verilen çoklu regresyon sonuçlarından yararlanarak üç tedavi yöntemi için regresyon denklemleri aşağıda verilmiştir. Daha az parametreli bu denklemleri kullanmakla tümel modeli kullanmak arasında bir fark yoktur. Örneğin, *A* tedavi yöntemi için, tümel modelde x_2 yerine 1, x_3 yerine 0 koyduğumuzda;

$$\hat{y}_i = 6.21 + 1.03x_{i1} + 41.30(1) + 22.70(0) - 0.703x_{i1}(1) - 0.510x_{i1}(0)$$

$$= 6.21 + 1.03x_{i1} + 41.30 - 0.703x_{i1}$$
$$= (6.21 + 41.30) + (1.03 - 0.703)x_{i1}$$
$$= (b_0 + b_2) + (b_1 + b_4)x_{i1}$$
$$= 47.51 + 0.327x_{i1}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde, *B* ve *C* tedavi yöntemleri için denklemler aşağıda verilmiştir;

B tedavi yöntemi için;

$$\hat{y}_i = (6.21 + 22.7) + (1.03 - 0.510)x_{i1}$$

$$= (b_0 + b_3) + (b_1 + b_5)x_{i1} = 28.91 + 0.520x_{i1}$$

C tedavi yöntemi için;

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_{i1} = 6.21 + 1.03x_{i1}$$

olarak bulunur.

A tedavi yöntemi için regresyon doğrusunun kesim noktası $b_0 + b_2$ kadardır. b_2 katsayısı için *t* istatistiği (*t*=8.12, *p*=0.000) olduğu için; *A* tedavi yöntemine ilişkin regresyon doğrusu kesim noktasının, *C* tedavi yönteminin kesim noktasından (b_0'a eşittir) farklı olduğu söylenecektir. Benzer şekilde, *B* tedavi yöntemi için regresyon doğrusunun kesim noktası *C* tedavi yöntemi için regresyon doğrusu kesim noktasından farklıdır. Çünkü, b_3 için *t* istatistiği *t*=4.46, *p*=0.0001 olarak bulunmuştur.

Eğimleri düşünürsek, *A* tedavi yöntemi için eğim $b_1 + b_4$ kadardır. b_4 anlamlı olduğundan (*t*=-6.45 *p*=0.0000), *A* ve *C* tedavi yöntemlerinin eğimlerinin farklı olduğu söylenecektir. Yine, *B* tedavi yöntemi için eğim $b_1 + b_5$ kadardır. b_5 anlamlı olduğundan (*t*=4.62, *p*=0.0001), *B* ve *C* tedavi yöntemlerinin farklı eğimlere sahip olduğu söylenir. Buradan da yaş ile tedavi yöntemi arasındaki etkileşimin varlığı ortaya konmuş olur.

Konuya daha farklı bir boyutta bakan son uygulama Örnek 7.23'de verilmiştir. Bu örnekte iki tane nitelik değişken vardır.

Örnek 7.23. Büyük bir şirkette bilgisayar uzmanı olarak çalışan personelin dolar cinsinden gelir (y) farklılıklarını belirleyen faktörleri tanımlamak ve bu faktörlerle temel ücret düzeyini belirlemek amacıyla bir çalışma yapılıyor. Bu amaçla, çalışma yılı (deneyim), eğitim düzeyi ve yönetim sorumluluğunun olup olmaması geliri etkileyen faktörler olarak alınıyor.

Çalışma yılı (Deneyim) : *Yıl olarak verilmiştir* (x_1)

Eğitim : *Liseyi bitirenler* 1, *üniversiteyi bitirenler* 2 *daha yüksek eğitim alanlar* 3 *olarak kodlandıktan sonra* x_2 *ve* x_3 *yapay değişkenleri ile;*

x_2	x_3	
1	0	*Liseyi bitirenler*
0	1	*Üniversiteyi bitirenler*
0	0	*Daha yüksek eğitim alanlar*

şeklinde yeniden kodlanmıştır.

Yönetim: *Yönetim sorumluluğu olanlar* 1, *olmayanlar* 0 *olarak kodlanmıştır* (x_4).

Veriler Tablo 7.74'de verilmiştir. Tablodaki son sütun, eğitim-yönetim kategorilerinin birlikte oluşturduğu 6 kümeyi tanımlamaktadır. Buna göre;

x_2	x_3	x_4	Küme
0	0	0	1
1	0	0	2
0	1	0	3
0	0	1	4
1	0	1	5
0	1	1	6

olarak 1'den 6'ya kadar kodlanmıştır.

Tablo 7.74. Maaş Verisi (*)

Gözlem	Maaş	x_1	Eği.	x_2	x_3	x_4	Küme
1	13876	1	1	1	0	1	5
2	11608	1	3	0	0	0	1
3	18701	1	3	0	0	1	4
4	11283	1	2	0	1	0	3
5	11767	1	3	0	0	0	1
6	20872	2	2	0	1	1	6
7	11772	2	2	0	1	0	3
8	10535	2	1	1	0	0	2
9	12195	2	3	0	0	0	1
10	12313	3	2	0	1	0	3
11	14975	3	1	1	0	1	5
12	21371	3	2	0	1	1	6
13	19800	3	3	0	0	1	4
14	11417	4	1	1	0	0	2
15	20263	4	3	0	0	1	4
16	13231	4	3	0	0	0	1
17	12884	4	2	0	1	0	3
18	13245	5	2	0	1	0	3
19	13677	5	3	0	0	0	1

Tablo 7.74.Maaş Verisi (devam)

Gözlem	Maaş	x_1	Eği.	x_2	x_3	x_4	Küme
20	15965	5	1	1	0	1	5
21	12336	6	1	1	0	0	2
22	21352	6	3	0	0	1	4
23	13839	6	2	0	1	0	3
24	22884	6	2	0	1	1	6
25	16978	7	1	1	0	1	5
26	14803	8	2	0	1	0	3
27	17404	8	1	1	0	1	5
28	22184	8	3	0	0	1	4
29	13548	8	1	1	0	0	2
30	14467	10	1	1	0	0	2
31	15942	10	2	0	1	0	3
32	23174	10	3	0	0	1	4
33	23780	10	2	0	1	1	6
34	25410	11	2	0	1	1	6
35	14861	11	1	1	0	0	2
36	16882	12	2	0	1	0	3
37	24170	12	3	0	0	1	4
38	15990	13	1	1	0	0	2
39	26330	13	2	0	1	1	6
40	17949	14	2	0	1	0	3
41	25685	15	3	0	0	1	4
42	27837	16	2	0	1	1	6
43	18838	16	2	0	1	0	3
44	17483	16	1	1	0	0	2
45	19207	17	2	0	1	0	3
46	19346	20	1	1	0	0	2

(*) Salary Survey Data. Regression Analysis by Example. S. Chatterjee ve Bertram Price. 1991, Sayfa 97. John Wiley-Sons Inc. Yayınevi'nin izniyle kullanılmıştır. Her hakkı saklıdır.

Model denklemi $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i4} + \varepsilon_i$ olarak yazılırsa, yapay değişkenlerin yukarıda belirtilen farklı eğitim düzeyi- yönetim sorumluluğu kategorileri için 6 farklı regresyon denklemi aşağıdaki gibi elde edilec ektir.

x_2	x_3	x_4	*Küme*	*Denklem*
0	0	0	1	$\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \varepsilon_i$
1	0	0	2	$(\beta_0 + \beta_2) + \beta_1 x_{i1} + \varepsilon_i$
0	1	0	3	$(\beta_0 + \beta_3) + \beta_1 x_{i1} + \varepsilon_i$
0	0	1	4	$(\beta_0 + \beta_4) + \beta_1 x_{i1} + \varepsilon_i$
1	0	1	5	$(\beta_0 + \beta_2 + \beta_4) + \beta_1 x_{i1} + \varepsilon_i$
0	1	1	6	$(\beta_0 + \beta_3 + \beta_4) + \beta_1 x_{i1} + \varepsilon_i$

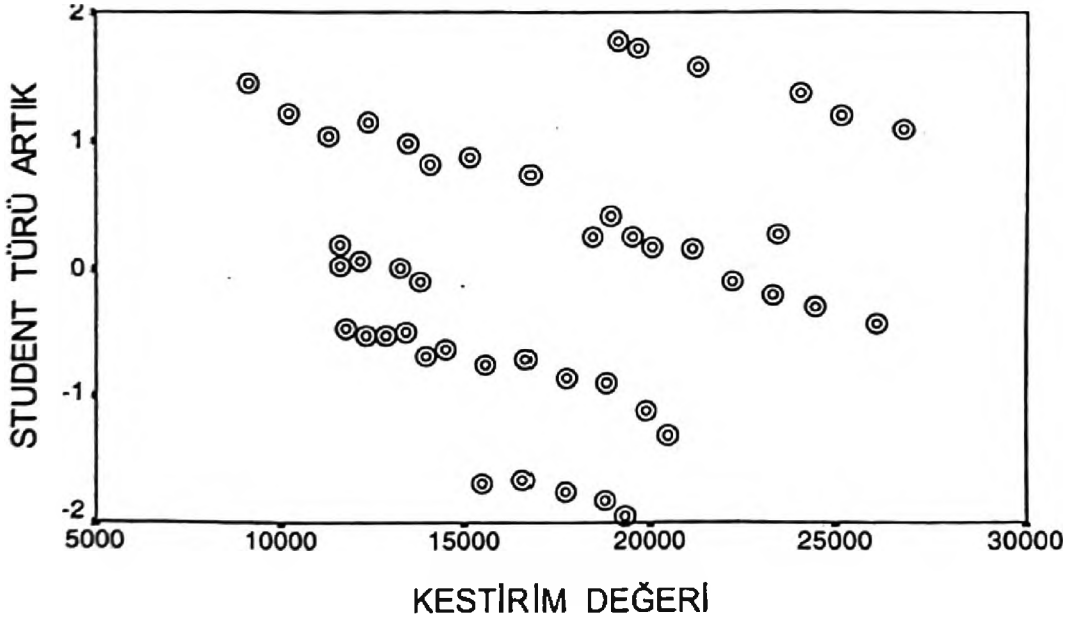
Yukarıda verdiğimiz 4 değişkenli modele ilişkin regresyon çözümlemesi sonuçları Tablo 7.75'de verilmiştir.

Tablo 7.75. Maaş Verisi İçin Çoklu Regresyon Sonuçları

Değişken	b_j	$S(b_j)$	t	p
x_1	546.1840	31.5192	17.896	0.0000
x_2	-2996.2102	411.7527	-7.277	0.0000
x_3	147.8249	387.6593	0.381	0.7049
x_4	6883.5310	313.9190	21.928	0.0000
Sabit	11031.8079	383.2171	28.787	0.0000
n=46	s=1027.437	$R^2 = 0.9568$	(F= 226.836 p=0.000)	

Buna göre, çalışma (deneyim) yılına ilişkin katsayının (x_1) 546.184 olması, her bir deneyim yılı için gelirin ortalama 546.18 dolar artması demektir. Yine, yönetim sorumluluğu olan bir kişi için, yıllık gelirin ortalama 6883.5 dolar fazla olduğu kestirilmiştir. Eğitim değişkeni ile ilgili olarak ise, lise mezunu ile daha yüksek düzeyde eğitim almış kişiler arasındaki gelir farkını b_2, üniversite mezunu olanlar ile daha yüksek düzeyde eğitim almış olanlara ilişkin gelir farkını ise b_3 vermektedir. Ayrıca, üniversite mezunu olanlarla lise mezunu olanlar arasındaki gelir farkı ise b_3- b_2 ile elde edilebilecektir. Buradan, lise mezunu olanların daha yüksek düzeyde eğitim alanlardan 2996 dolar daha az aldıkları, üniversite eğitimi alan bir çalışanın daha yüksek düzeyde eğitim almış bir çalışandan 147.8 dolar daha fazla aldığı (Bu fark istatistiksel olarak anlamsızdır. Çünkü ilgili t istatistiği anlamsızdır) anlaşılmaktadır. Ve son olarak, lise bitirmişlerin üniversite bitirmişlere göre ortalama 3144 dolar (-2996-147.8) daha az aldığı görülmektedir.

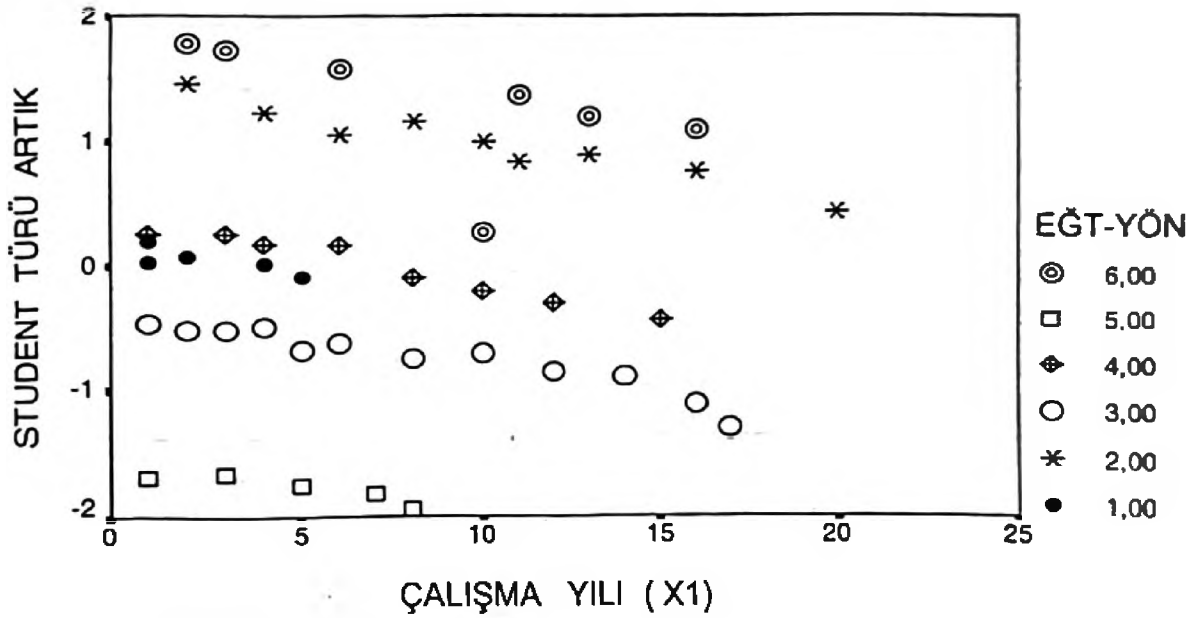
Denkleme model uyumluluğu açısından bakılırsa, kestirim değerlerine karşı Student türü artık grafiğinden (Grafik 7.49), model bozukluğu olduğu kolayca görülebilir.



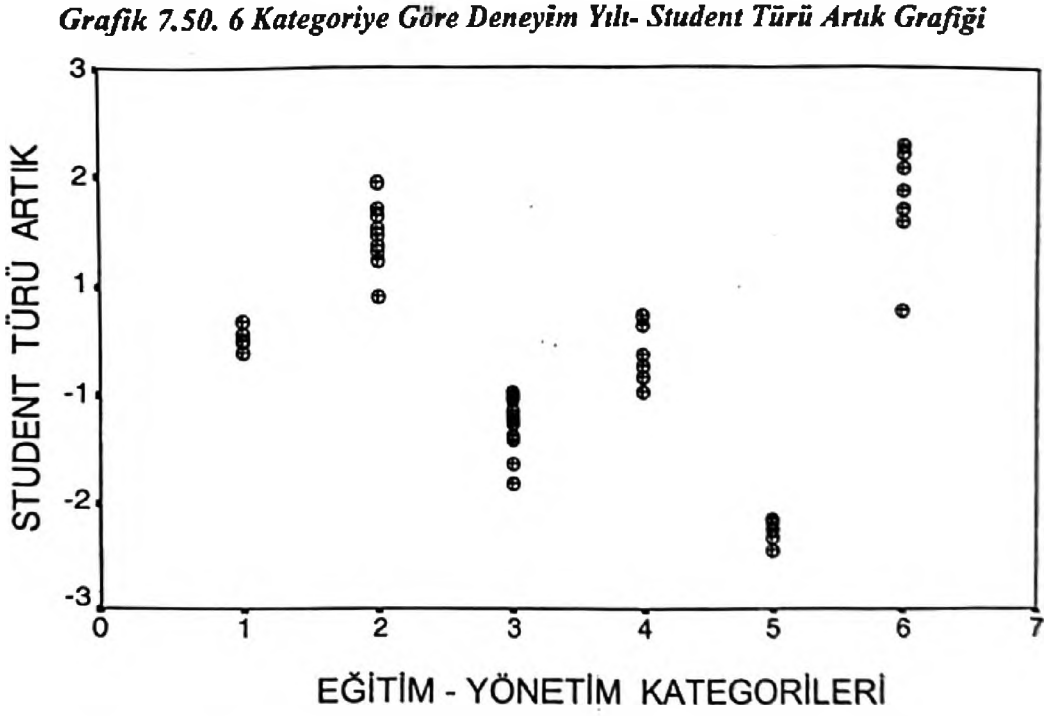
Grafik 7.49. Tümel Model İçin Kestirim Değerleri-r_i Değerleri grafiği

Student türü artıkları deneyim yılı değişkenine (x_1) göre çizdiğimizde de benzer bir grafik elde ederiz. Buradan, eğitim ve yönetim durumlarının, tanımlanan yapay değişkenlerle yeterince açıklanamadığını düşünebiliriz. Eğitim ve yönetim değişkenlerinin oluşturduğu 6 kategori dikkate alınarak Deneyim Yılı-Student Türü Artık çiziminde (Grafik 7.50), 6 kategoriye ilişkin artıkların, büyüklüklerine göre kendi aralarında kümelendikleri görülür.

Bu etkiyi görebilmenin bir diğer yolu, 6 birleşimin herbiri için ayrı bir değer olan yeni kategorik değişkene karşı artıkların grafiğini çizmektir. Bu çizim, Grafik 7.51'de verilmiştir.



Grafik 7.50. 6 Kategoriye Göre Deneyim Yılı- Student Türü Artık Grafiği



Grafik 7.51. 6 Kategoriye Göre Student Türü Artıkların Grafiği

Grafik 7.51, eğitim ve yönetim bileşenlerinin modelde yeterince temsil edilmediği (çünkü, her bir kategori için artık dağılımları sıfır etrafında simetrik dağılmamaktadır) ve modelde henüz dikkate alınmayan bir yapının olduğu hakkında ipuçları verir. Modelde, eğitim-yönetim etkisi birbirinden bağımsız iken, bunların çarpımlarından oluşan etkileşim etkisi yapay değişkenlerin çarpımı ile oluşturulabilir. Buna göre yeni model;

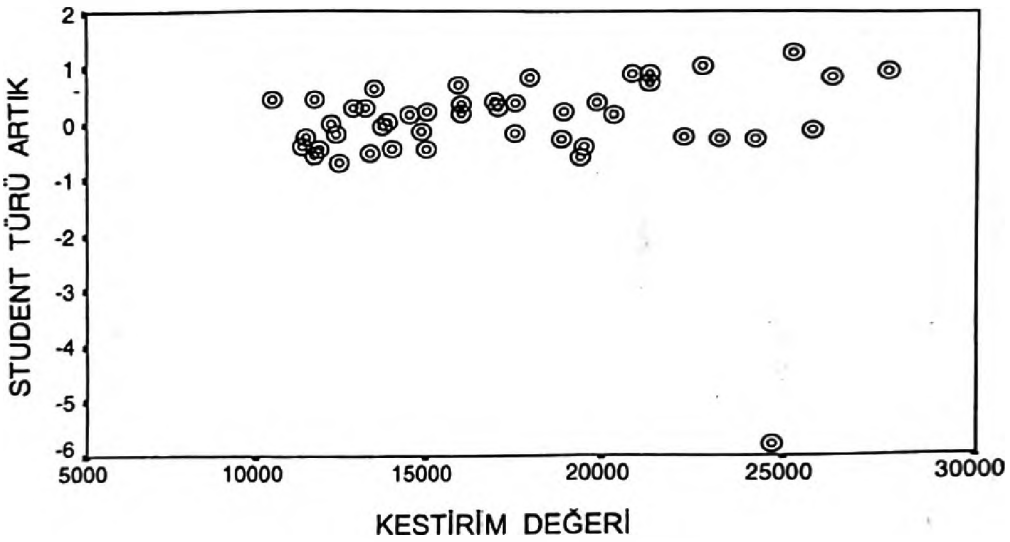
$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i4} + \beta_5 (x_{i2} x_{i4}) + \beta_6 (x_{i3} x_{i4}) + \varepsilon_i$$

şeklinde yazılabilir. Bu yeni modele ilişkin sonuçlar Tablo 7.76'da verilmiştir.

Tablo 7.76. Genişletilmiş Modele İlişkin Çoklu Regresyon Sonuçları

Değişken	b_j	$S(b_j)$	t	P
x_1	496.9870	5.5664	89.283	0.0000
x_2	-1730.7483	108.3339	-16.431	0.0000
x_3	-349.0777	97.5679	-3.578	0.0009
x_4	7047.4120	102.5892	68.695	0.0000
x_2x_4	-3066.0351	149.3304	-20.532	0.0000
x_3x_4	1836.4879	131.1674	14.001	0.0000
Sabit	11203.4338	79.0654	141.698	0.0000
n=46	s=173.8086	R^2 =0.9988	F=5516.596	

Tablo 7.76'da görüldüğü gibi, yeni modelle birlikte artıkların standart hatası 1027.437'den 173.808'e düşmüştür. Bu yeni modele ilişkin artık dağılımı Grafik 7.52'de verilmiştir.



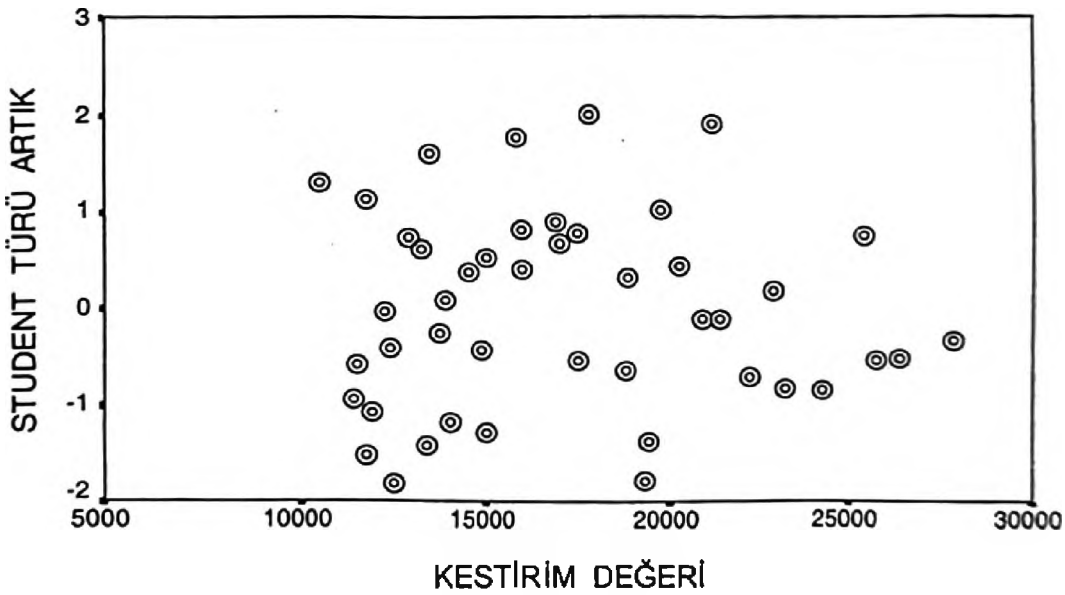
Grafik 7.52. Genişletilmiş Model İçin Artık Grafiği

Grafik 7.52'de görüldüğü gibi, bir gözlem (33. gözlem) aykırı değerdir. Bu gözleme ilişkin Cook değeri de diğerlerine göre çok yüksektir ($C_{33}^2 = 0.804$). Bu gözlemi veriden çıkarttığımızda, n=45 için elde edilen çoklu regresyon sonuçları Tablo 7.77'de verilmiştir.

Tablo 7.77. Genişletilmiş Modele İlişkin Çoklu Regresyon Sonuçları (n=45)

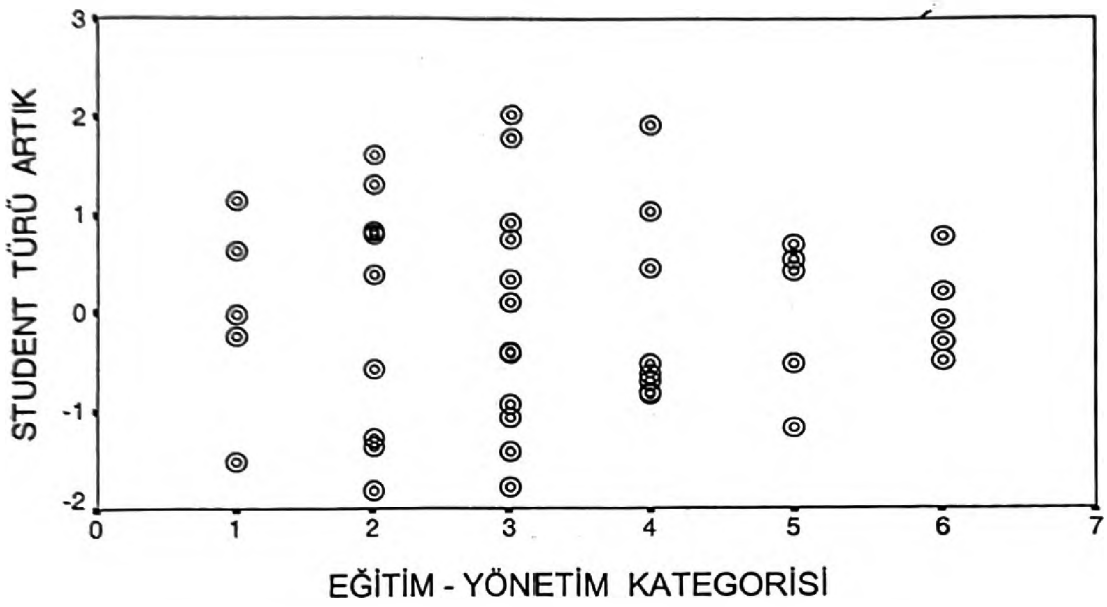
Değişken	b_j	$S(b_j)$	t	p	*Beta*	*VIF*
x_1	498.4178	2.1517	231.640	0.0000	0.557	1.230
x_2	-1741.3359	40.6825	-42.803	0.0000	-0.175	3.543
x_3	-357.0422	37.6711	-9.475	0.0000	-0.038	3.404
x_4	7040.5801	39.6190	177.707	0.0000	0.754	3.825
x_2x_4	-3051.7633	57.6742	-52.914	0.0000	-0.208	3.282
x_3x_4	1997.5306	51.7850	38.574	0.0000	0.147	3.095
Sabit	11199.7138	30.3334	366.802	0.0000		
n=45	s = 67.1189		R^2 = 0.9998	F=35427.955		

Tablo 7.76 ve 7.77'den görüleceği gibi, katsayılar pek değişmemiştir. Ancak, denklemin standart hatası 173.808'den 67.1189'a düşmüştür. n=45 için genişletilmiş modele ilişkin artık grafiği Grafik 7.53'de verilmiştir.



Grafik 7.53. Genişletilmiş Modele İlişkin Artık Grafiği (n=45)

Grafik 7.53'de görüldüğü gibi, artıklara ilişkin oldukça doyurucu bir dağılım söz konusudur. Ek olarak, herbir eğitim-öğretim kategorisi için artıkların grafiği incelendiğinde (Grafik 7.54), bu kategorilerin herbiri sıfır etrafında simetrik olarak dağılan artıklara sahiptir. Böylece, "etkileşim terimlerinin tanımlanması, ücret değişimleri için doğru bir yaklaşım olmuştur" denilebilir.



Grafik 7.54. 6 Kategoriye Göre Artık Dağılımları (n=45)

7.6. ÇOKLU DOĞRUSAL REGRESYON MODELLERİNDE DEĞİŞKEN SEÇİMİ

Çoklu doğrusal regresyon çözümlemesinde, modeli oluşturan bağımsız değişkenlerden bazılarının modele katkısı önemsiz olabilir. Bu nedenle, bağımlı değişkeni "en uygun" şekilde açıklayacak bağımsız değişkenlerin belirlenmesi ve önemsiz değişkenlerin modelden çıkartılması gerekir. Bu sürece, "değişken seçimi" denir.

Bağımsız değişkenlerin bir alt kümesi oluşturulurken; y bağımlı değişkenini daha iyi kestirebilmek amacıyla, olanaklar ölçüsünde modele daha fazla bağımsız değişken alınmak istenir. Ancak, $\hat{y}_i$ kestirim değerlerine ilişkin varyansın bağımsız değişken sayısı arttıkça artması nedeniyle de daha az değişkenli bir model oluşturulması bir başka seçenektir. Diğer taraftan, daha sonra yapılacak kestirimler için bağımsız değişkenlere ilişkin verilerin elde edilmesi; zaman, maliyet vb. nedenlerle güçleşebilir ve araştırıcılar bu nedenle de daha az sayıda değişkenle çalışmak isteyebilir. Böylelikle, birbirine zıt iki durumun bir anlamda dengelenmesi söz konusudur. Yukarıda belirttiğimiz gibi, bu durumlar dikkate alındığında, uygun bir model bulma sürecine "değişken seçimi" ya da "en iyi regresyon denkleminin seçimi" denir. Amaç ise genellikle; *kestirici değişken sayısını en küçük, R^2'yi ise en büyük yapacak modelin elde edilmesi* şeklinde özetlenir.

Değişken seçimi amacıyla kullanılan değişik yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemler, hesaplama tekniklerine göre; ***tüm olası alt kümeler yöntemi*** ve ***adımsal yöntemler*** olarak iki grupta incelenir. Adımsal yöntemler; ***ileriye doğru seçim*** (forward selection), ***geriye doğru çıkarma*** (backward elimination) ve ***adım-adım regresyon yöntemi*** (stepwise regression) olarak bilinirler.

7.6.1. Tüm Olası Alt Kümeler Yöntemi

Sadece b_0'ın modelde olduğu durum dışında tüm tek, iki, üç, dört,... değişkenin yer aldığı alt kümeler ile tüm değişkenlerin yer aldığı kümeyi kapsayan tüm olası alt kümeler yöntemi, araştırıcılara tüm olası alt kümeleri sunması açısından oldukça yararlıdır. Ancak, değişken sayısının fazla olduğu durumlarda bu yöntemi uygulamak güçleşir. Bazen de olanaksızlaşır. Örneğin, 4 bağımsız değişken (p=4) söz konusu ise, olası regresyon denklemi sayısı; modelde sadece β_0'ın bulunduğu denklemle birlikte $2^p = 2^4 = 16$'dır. Bu sayı p=7 için $2^7 = 128$'e, p=17 için $2^{17} = 131072$'ye ulaşır. Görüldüğü gibi, tüm olası alt kümeler yönteminde, modeldeki bağımsız değişken sayısı artarken, incelenecek denklem sayısı da hızlı bir şekilde artmaktadır.

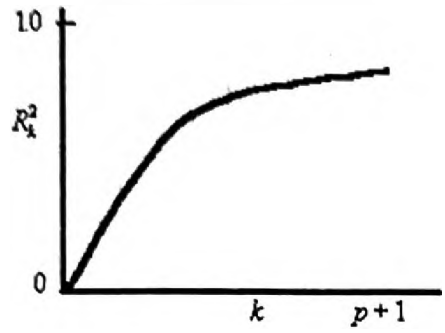
Tüm Olası Alt Kümeler Yönteminde Seçim Ölçütleri

Tüm olası alt kümeler yönteminde uygun alt kümenin seçimi için geliştirilmiş birçok ölçüt vardır. Bunlardan 4 tanesi aşağıda verilmiştir.

1. ***Çoklu Belirtme Katsayısı***

Bir regresyon modelinin yeterliliği konusunda yaygın olarak kullanılan ölçütlerden biri, çoklu belirtme katsayısıdır. p tane değişkenin, "her biri β_0 dahil k parametreli" ve dolayısıyla "k-1 değişkenli" alt küme sayısı; $\binom{p}{k-1}$ tanedir. Örneğin, bağımsız değişken sayısı 4 olduğunda (p=4), β_0 ile birlikte üç parametreli (k=3) ve iki değişkenli (k-1=3-1=2) alt küme (denklem) sayısı; $\binom{4}{3-1} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{1\times2\times3\times4}{1\times2(1\times2)} = 6$ tane iken, üç değişkenli (4 parametreli) alt kümelerin sayısı; $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{1\times2\times3\times4}{1\times2\times3(1)} = 4$ tanedir. Dolayısıyla, örneğin 4 bağımsız değişkenli bir modelde toplam 16 tane çoklu belirtme katsayısı, R_k^2, değeri varken ($2^p = 2^4 = 16$), 2 değişkenli alt kümeler için 6, 3 değişkenli alt kümeler için 4 tane çoklu belirtme katsayısı, R_k^2, değeri vardır.

Çoklu belirtme katsayısı yönteminde, her bir alt kümeye ilişkin en büyük R_k^2 değeri dikkate alınarak k'ya karşı (k=1 ,2,.....,p+1), en büyük R_k^2 grafiği çizilir. k'ya karşı en büyük R_k^2'ların hipotetik bir çizimi Grafik 7.55'de verilmiştir. Çizilecek grafikte, eğrinin "büküldüğü" (diz biçimini oluşturduğu)



Grafik 7.55. k'ya Karşı R_k^2'nin Grafiği

noktaya karşı gelen alt kümenin en iyi alt küme olduğu yorumu yapılır. R_k^2, en büyük değere $k=p+1$ olduğunda ulaşır. Ancak, bir kesim noktası kuralından yararlanmak daha pratik olabilir. Buna göre, doyurucu bir R^2 değeri için kesim noktası R_0^2 ile gösterilir ve p, bağımsız değişken sayısını göstermek üzere R_0^2;

$$R_0^2 = 1-(1-R^2_{\text{TÜMEL}})\left(1+\frac{p(F_{p;\ n-p-1;\ \alpha})}{n-p-1}\right) \qquad (7.98)$$

ile verilir. R_0^2 değerinden büyük herhangi bir R^2 değerine sahip alt kümenin, α yanılma düzeyinde "yeterli" bir alt küme olduğu söylenir.

2. *Düzeltilmiş* R^2

R^2'nin yorumlanması sırasında ortaya çıkan güçlüklerden kaçınmak için düzeltilmiş R^2'den, ($\overline{R}^2$), yararlanılır. Herhangi k değişkenli düzeltilmiş R^2 değeri, $\overline{R}_k^2$ ile gösterilir. Modele yeni bir değişken eklendiğinde $\overline{R}^2$'de meydana gelecek artış R^2'den daha azdır.

$\overline{R}^2$ yardımıyla "en uygun" alt küme modelinin seçimi için kriter, en yüksek $\overline{R}_k^2$'ye sahip modeli seçmektir.

3. *Artık Kareler Ortalaması*

Alt küme denklemlerine ilişkin artık kareler ortalamaları (AKO_k ya da $RAKO_k$), model değerlendirme kriteri olarak kullanılabilir. Bu yöntem, aslında düzeltilmiş R^2 yaklaşımının eşdeğeridir. AKO_k ;

$$AKO_k = \frac{\text{Artık } KT_k}{n-k} \qquad (7.99)$$

ile verilir. En küçük AKO_k ile k arasındaki ilişki, Grafik 7.56'da verilmiştir. Grafikte görüldüğü gibi, k artarken AKO_k önceleri düşer, sonra sabitleşir ve sonunda biraz yükselir.



Grafik 7.56. k- AKO_k Grafiği

Bu yaklaşıma göre seçim kriterleri aşağıda verilmiştir. Buna göre, tüm altkümelere ilişkin AKO_k 'lar bulunduktan sonra;

a. En küçük AKO_k değerine sahip alt küme, en uygun alt küme olarak seçilir.

b. Tümel model için bulunan *AKO*'sına en yakın AKO_k 'lı model seçilir.

c. Grafikte, en küçük AKO_k 'nın yukarı doğru döndüğü noktaya yakın *k* değişkenli bir model seçilir.

4. C_k İstatistiği

C_k seçim ölçütü istatistiği;

$$C_k = \frac{Artık\ KT_k}{Tümel\ Model\ Artık\ KO} - n + 2k \qquad (7.100)$$

ile verilir. Bu yaklaşıma göre seçim kriterleri aşağıda verilmiştir.

a. En küçük C_k değerini veren alt küme seçilir.

b. C_k değerlerinin *k*'ya karşı çizimleri yapılır. C_k=*k* doğrusuna yakın olan alt kümeler seçilir.

7.6.2. İleriye Doğru Seçim Yöntemi

İleriye doğru seçim yönteminde, değişken seçme işlemine modelde sadece sabit terimin bulunduğu bir denklemle başlanır ve değişkenler modele teker teker eklenir. Modele alınması düşünülen ilk bağımsız değişken, bağımlı değişken (*y*) ile en yüksek korelasyona (negatif ya da pozitif) sahip değişkendir. Modele ilk olarak alınması düşünülen değişken, aynı zamanda *y* bağımlı değişkeni ile en yüksek *F* istatistiğine sahip değişkendir. Seçilen α yanılma düzeyinde, hesapla bulunan *F* istatistiği (ki modele alınması düşünülen değişkene ilişkin *t* istatistiğinin karesidir) anlamlı ise, bu değişken modele alınır ve ileriye doğru seçim işlemi devam eder. Yapılan test sonucunda, bu değişken modele alınmazsa seçim süreci sona erer. İlk değişkenin modele alınması durumunda, modele girecek diğer değişken; bağımlı değişkenle en yüksek kısmi *F* değerine sahip olan (ya da bağımlı değişkenle en yüksek kısmi korelasyon katsayısına sahip olan) değişkendir. İkinci değişkene ilişkin kısmi *F* testi, seçilen α yanılma düzeyinde anlamlı ise, ileriye doğru seçim işlemi devam edecektir.

İleriye doğru seçim işleminde modele alınacak değişken için değişik seçim kriterleri vardır. İstatistiksel paket programları, çoğunlukla, modele girecek değişkenlere ilişkin α yanılma düzeyinin (buna modele girmek için F değeri olasılığı-***probability of F to enter*** denir) araştırıcı tarafından belirlenmesine olanak tanıyacak şekilde bir seçim kriterine sahiptir. Örneğin araştırıcı, modele girmek için F değeri olasılığını 0.05 olarak belirlerse, F testi sonucunda F değerine ilişkin olarak bulunan p olasılık değeri, 0.05'den küçük ya da 0.05'e eşit ise ilgili değişken modele alınacaktır. İstatistiksel paket programların hemen tümünde, değişkenlere ilişkin t değerleri ve bu değerlere ilişkin olasılıklar (p değerleri) çıktı olarak verilir. Her bir değişkenin anlamlılığına ilişkin bulunan bu olasılıklar, kısmi F değeri olasılıklarının eşdeğeri olup, t değerlerinin karesi de F değerini verir. *SPSS* paket programı, modeldeki değişken sabit tutulduğunda, modelde bulunmayan değişkenlerin y bağımlı değişkeni ile yaptığı kısmi korelasyon katsayılarını da içeren bazı istatistikleri çıktı olarak vermektedir.

7.6.3. Geriye Doğru Çıkarma Yöntemi

İleriye doğru seçim yönteminde işlemlere, herhangi bir bağımsız değişkenin bulunmadığı modelle başlanır ve bağımsız değişkenler teker teker modele eklenir. Geriye doğru çıkarma yönteminde ise işlemlere, tüm bağımsız değişkenlerin bulunduğu model ile başlanır ve "önemsiz" bağımsız değişkenler teker teker modelden çıkartılır. Bu yöntemde, değişkenlerin modele girmesine ilişkin seçim kriterleri yerine, değişkenlerin modelden çıkartılmasına yönelik seçim kriterleri söz konusudur. Örneğin, çıkarma kriteri olarak $\alpha = 0.10$ olarak alınırsa (ki buna modelden çıkarmak için en büyük F değeri olasılığı-***probability of F to remove*** denir), tümel modelde, modele katkısı en az olan değişken (kısmi F istatistiği en küçük olan ya da anlamlılık düzeyi $\alpha = 0.10$'dan büyük olanlar arasında en büyük olan değişken) modelden çıkartılır.

7.6.4. Adım-Adım Regresyon Yöntemi

Adım-adım değişken seçim yöntemi, geriye doğru çıkarma ile ileriye doğru seçim yöntemlerinin birleşimidir. Modele girecek ilk değişken, ileriye doğru seçim yöntemindeki gibi belirlenir. Eğer değişken modele alınmazsa, işlem sonlanır. Bu durumda modelde hiç bir değişken olmayacaktır. Eğer değişken modele alınırsa, modele girecek ikinci değişken, modeldeki değişken sabit tutulduğunda y bağımlı değişkeni ile en yüksek kısmi korelasyon katsayısına sahip olan değişkendir. Bu değişken de gerekli girme koşullarını sağlarsa modele alınır.

Ancak, ilk değişken modele girdikten sonra, adım-adım seçim yöntemi, ileriye doğru seçim yöntemine göre bazı farklılıklar gösterir. Şöyle ki; modele giren ilk değişken geriye doğru seçim yönteminde olduğu gibi önceden belirlenen modelden çıkarma kriterine göre ayrıca incelenir. Bir sonraki adımda, modelde olmayan değişkenler modele alınmak amacıyla incelenir. Her adım sonrasında, modelde olan değişkenlerin tümü modelden çıkma kriterine göre incelenir. Değişken seçimi, girme-çıkma kriterlerini sağlayan herhangi bir değişken kalmadığında sonlanacaktır.

Aynı değişkenin sürekli olarak modele girme ve modelden çıkma döngüsüne girmesini önlemek için, modele girme kriteri modelden çıkma kriterinden küçük olmalıdır. Örneğin, modele girme için F değeri olasılığı 0.05 ise çıkma olasılığı bundan büyük, örneğin 0.10 olmalıdır.

Seçim Yöntemlerinin Kullanımı ile İlgili Bazı Açıklamalar

Değişken seçim yöntemleri çoklubağlantıdan etkilenir. Bu nedenle, seçim yöntemi uygulanacak veride öncelikle çoklubağlantı durumu incelenmeli ve olanaklı ise çoklubağlantı durumu giderildikten sonra seçim işlemi yapılmalıdır. Çoklubağlantı varlığına rağmen bir seçim işlemi yapılacaksa, modele girmek ve modelden çıkmak için F değerleri olasılıklarının düşük (örneğin, $\alpha / 2$ kadar ya da 0.05'in altında) tutulması önerilmektedir.

Ayrıca, çoklubağlantı olduğu durumlarda geriye doğru seçim yönteminin, çoklubağlantı olmadığı durumlarda ise adım-adım regresyon yönteminin uygulanması da genelde kabul görmektedir.

Bazı istatistik paket programlarında, modele katkısı anlamsız bile olsa, araştırıcının modelde kalmasını istediği değişkeni sonuç modele alan seçenekler de vardır. Örneğin, SYSTAT uyarlamalarında, adımsal yöntem ile oluşturulacak alt kümede bu tür bir işlem için *force* komutundan yararlanılır.

Veri yapısına bağlı olarak farklı seçim yöntemleri ile elde edilen denkleme eşdeğer diğer başka denklemler de olabilir. Modele eşdeğer birçok alt kümenin olduğu durumlarda, uygulanan ***adımsal*** seçim yöntemi tarafından herhangi bir alt küme gelişigüzel seçilir. Bu ise, araştırıcının seçenek modelleri inceleme olanağını ortadan kaldırır.

Örnek 7.24. Bir araştırıcı grubu, stres ile bilinen bazı değişkenler arasındaki ilişkiyi incelemek istiyor. Bu amaçla, modele alınacak değişkenler aşağıda belirtilirken, farklı işyerlerinden seçilen 15 yöneticiye ilişkin veriler Tablo 7.78'de verilmiştir.

y: *Stres puanı*
x_1: *İşyeri büyüklüğü ölçütü*
x_2: *Bulunduğu pozisyondaki çalışma yılı*
x_3: *Yıllık ücret (x1000 $)*
x_4: *Yaş*

Tablo 7.78. Stres Verisi

y	x_1	x_2	x_3	x_4
101	812	15	30	38
60	334	8	20	52
10	377	5	20	27
27	303	10	54	36
89	505	13	52	34
60	401	4	27	45
16	177	6	26	50
184	598	9	52	60
34	412	16	34	44
17	127	2	28	39
78	601	8	42	41
141	297	11	84	58
11	205	4	31	51
104	603	5	38	63
76	484	8	41	30

Stres verisine ilişkin korelasyon matrisi Tablo 7.79'da, çoklu regresyon sonuçları ise Tablo 7.80'de verilmiştir.

Tablo 7.79. Stres Verisine İlişkin Korelasyon Matrisi

	y	x_1	x_2	x_3	x_4
y	1.0000				
x_1	0.6216	1.0000			
x_2	03554	0.5011	1.0000		
x_3	0.6146	0.0884	0.3842	1.0000	
x_4	0.4852	-0.0189	-0.1135	0.2608	1.0000

Tablo 7.80. Stres Verisine İlişkin Çoklu Regresyon Sonuçları

Değişken	b_j	$S(b_j)$	*Beta*	*Tolerans*	*VIF*	*t*	*p*
x_1	0.17629	0.04009	0.6461	0.7297	1.370	4.397	0.0013
x_2	-1.56295	2.01205	-0.1267	0.5920	1.689	-0.777	0.4553
x_3	1.57454	0.44567	0.5153	0.7406	1.350	3.533	0.0054
x_4	1.62928	0.62872	0.3486	0.8708	1.148	2.591	0.0269
Sabit	-126.50532	32.28106	-			-3.919	0.0029
n=15	s=24.031	$R^2 = 0.84242$		(F=13.365, p=0.0000)			

4 bağımsız değişkenin olduğu Stres verisinde tümel modele ilişkin artık dağılımları incelendiğinde (artıkların incelenmesi ve çizimleri okuyucuya bırakılmıştır); aşırı derecede uzak, etkili ve aykırı gözlemlerle karşılaşılmamıştır. Çoklubağlantının varlığı değişken seçimini etkileyeceği için, tümel modele ilişkin sonuçlar çoklubağlantı açısından da incelenmiştir. Tablo 7.79'da görüldüğü gibi, bağımsız değişkenler arasında yüksek ilişki yoktur. Yine, Tablo 7.80'de *VIF* değerleri 10'un altındadır. Buradan, bağımsız değişkenler arasında çoklubağlantının varlığı konusunda bir belirti olmadığı söylenebilir. Bu "ön" işlemler sonrasında en uygun alt kümeyi bulma süreci başlatılabilir.

Stres Verisi için Tüm Olası Alt Kümeler Yöntemi Yardımıyla Alt küme Seçimi

Stres verisine ilişkin tüm olası alt kümeler yöntemi için seçim ölçütleri Tablo 7.81'de verilmiştir. Tablo 7.81'deki istatistiklerden C_k değerlerinin bulunmasına ilişkin üç örnek aşağıda verilmiştir. Eşitlik (7.100) yardımıyla;

x_1 için; $$C_2 = \frac{22489.37}{577.49} - 15 + 2(2) = 27.94$$

$x_1 x_2$ için; $$C_3 = \frac{22394.71}{577.49} - 15 + 2(3) = 29.78$$

$x_2 x_3 x_4$ için; $$C_4 = \frac{16939.49}{577.49} - 15 + 2(4) = 22.33$$

olarak bulunur.

Tablo 7.81. Stres Verisi İçin Tüm Olası Alt Kümeler İstatistikleri

Bağımsız Değişken Sayısı-(p)	*k*	*Modeldeki Değişkenler*	AKT_k	R_k^2	$\overline{R}_k^2$	AKO_k	C_k
Hiç	1	Hiç	36648.40	0	0	2617.74	50.46
1	2	x_1	22489.37	0.38635	0.33914	1729.95	27.94
1	2	x_2	32018.24	0.12634	0.05914	2462.94	44.44
1	2	x_3	22803.55	0.37777	0.32991	1754.12	28.48
1	2	x_4	28021.60	0.23539	0.17658	2155.51	37.52
2	3	$x_1 x_2$	22394.71	0.38893	0.28709	1866.23	29.78
2	3	$x_1 x_3$	10917.99	0.70209	0.65244	909.83	9.90
2	3	$x_1 x_4$	13437.55	0.63334	0.57223	1119.79	14.27
2	3	$x_2 x_3$	22191.35	0.39448	0.29356	1849.28	29.43
2	3	$x_2 x_4$	21765.78	0.40609	0.30711	1813.81	28.69
2	3	$x_3 x_4$	18652.67	0.49104	0.40621	1554.39	23.30
3	4	$x_1 x_2 x_3$	9653.14	0.73660	0.66477	877.56	9.71
3	4	$x_1 x_2 x_4$	12982.98	0.64574	0.54913	1180.27	15.48
3	4	$x_1 x_3 x_4$	6123.39	0.83292	0.78735	556.67	3.60
3	4	$x_2 x_3 x_4$	16939.49	0.53778	0.41172	1539.95	22.33
4	5	$x_1 x_2 x_3 x_4$	5774.93	0.84242	0.77939	577.49	5.00

Tablo 7.82, 15 farklı modele ilişkin regresyon katsayılarını vermektedir. Örneğin, modelin sadece x_3 değişkenini içermesi durumunda, regresyon katsayısı 1.87798'dir. Modele x_2 değişkeninin eklenmesi durumunda x_2 ve x_3 için regresyon katsayıları sırasıyla 1.72650 ve 1.71367 olarak bulunur. Görüldüğü gibi, modele x_2 'nin eklenmesi x_3'e ilişkin katsayıda çok az değişiklik yapmıştır (daha önce de belirtildiği gibi, modele bir değişkenin eklendiği ya da modelden çıkartıldığı durumlarda katsayılarda meydana gelen büyük değişiklikler çoklubağlantının varlığını düşündürür).

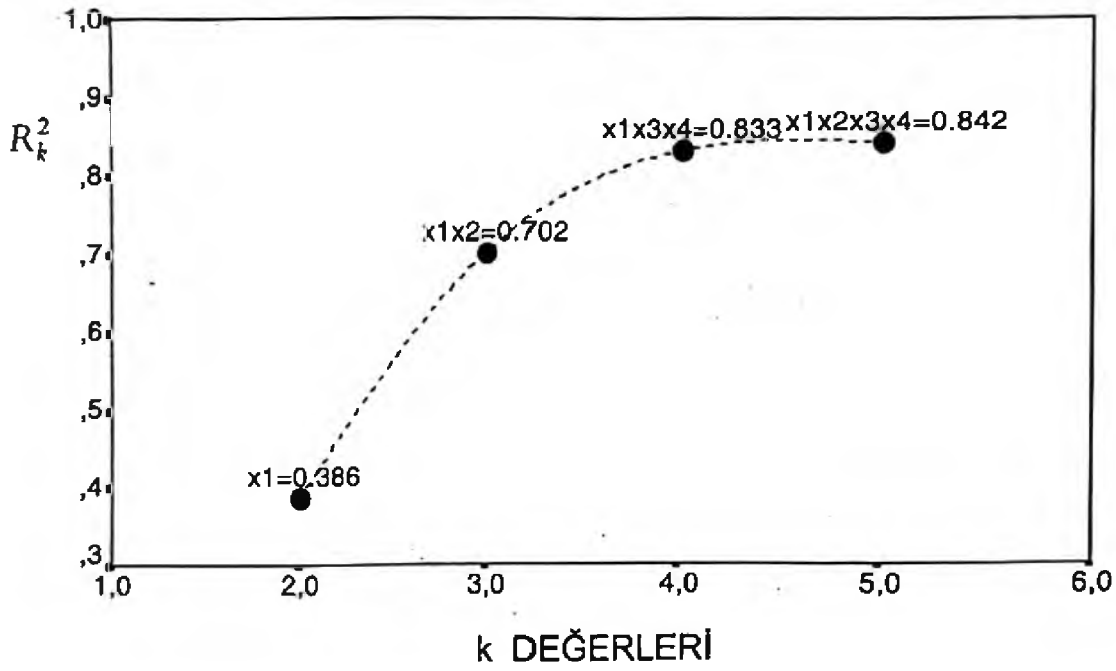
Tablo 7.82'den yararlanarak, önce çoklu belirtme katsayısına göre en uygun alt kümeyi seçelim. Bu amaçla, *k*'ya karşı en büyük R_k^2 değerleri grafiği Grafik 7.57'de verilmiştir. Buradan, **en uygun** alt kümenin, $x_1 x_3 x_4$ alt kümesi olduğu söylenebilir. Çünkü, noktaları birleştiren eğrinin bir diz biçimi oluşturduğu yerdeki (bu örnekte k=4 olduğu yer) alt kümeler içinde en büyük R^2'ye sahip olan alt küme; x_1, x_3 ve x_4 değişkenlerinin oluşturduğu alt kümedir. Bu alt kümeye ilişkin R^2 değeri, tümel R^2 değerinden hemen hemen farksızdır. Konuya (7.98) ile verilen R_0^2 değeri ile yaklaşırsak, bu değer örneğimiz için $\alpha = 0.05$'de,

$$R_0^2 = 1-(1-0.84242)\ (1+\frac{4F_{4;15-4-1;\ \alpha=0.05}}{15-4-1}) = 1-(0.15758)\ (1+\frac{4(3.48)}{10}) = 0.623$$

olarak bulunur.

Tablo 7.82. Stres Verisi İçin Tüm Olası Altkümeler Sonuçları

Modeldeki Değişkenler	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4
x_1	-3.30755	0.16959			
x_2	30.96070		4.37378		
x_3	-5.29004			1.87798	
x_4	-33.78304				2.26758
x_1x_2	-5.95701	0.16156	0.72430		
x_1x_3	-64.18488	0.15599		1.72362	
x_1x_4	-107.82989	0.17215			2.32318
x_2x_3	-13.22007		1.72650	1.71367	
x_2x_4	-86.00013		5.12869		2.48809
x_3x_4	-67.12697			1.60023	1.62929
$x_1x_2x_3$	-62.28167	0.18600	-2.88102	1.96811	
$x_1x_2x_4$	-116.51434	0.15450	1.59880		2.38622
$x_1x_3x_4$	-132.33834	0.16032		1.42055	1.75274
$x_2x_3x_4$	-90.59815		2.97489	1.27306	1.88770
$x_1x_2x_3x_4$	-126.50532	0.17629	-1.56295	1.57454	1.62928

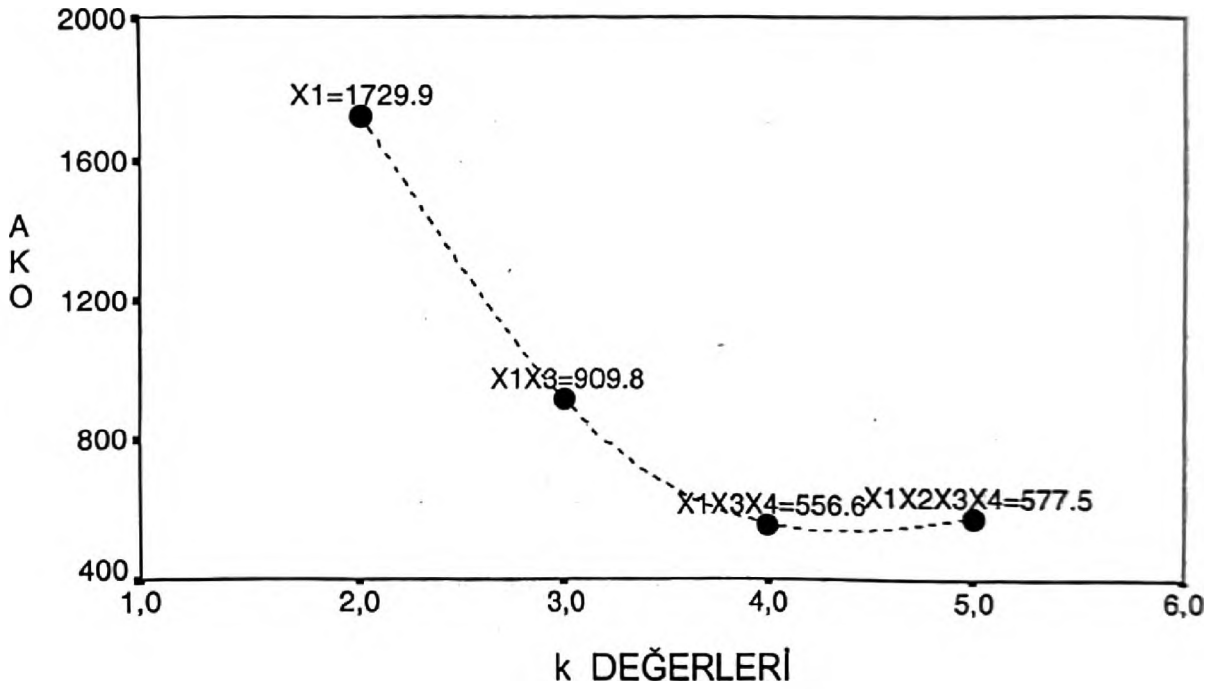


Grafik 7.57. k-R_k^2 Grafiği

Buna göre, $1-(0.15758)\ (1+\frac{4(3.48)}{10}) = 0.623$'den daha büyük herhangi bir alt küme yeterli alt küme olabilir.

Düzeltilmiş R^2, ($\overline{R}^2$), değeri ile yoruma gidecek olursak, $\overline{R}^2$ değeri en büyük olan alt küme; $\overline{R}^2$ = 0.83292 ile x_1, x_3 ve x_4 bağımsız değişkenlerinin oluşturduğu alt kümedir. Dolayısıyla, modelde x_1, x_3 ve x_4 değişkenlerin bulunduğu alt küme **en uygun** alt kümedir.

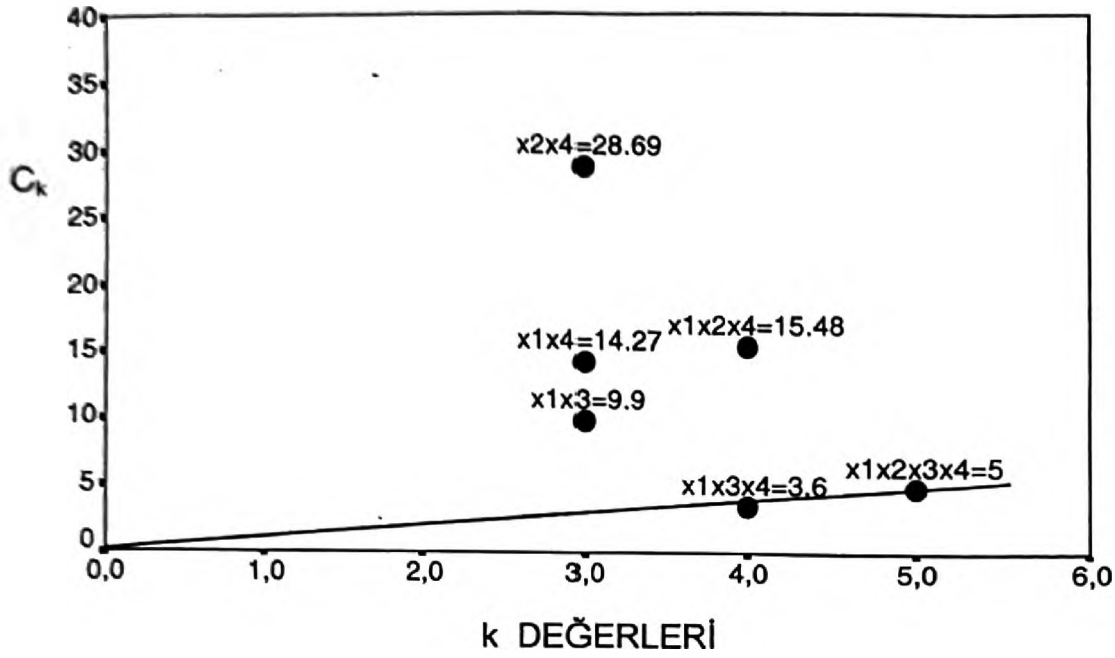
Artık kareler ortalaması ile yoruma gidecek olursak, en küçük *AKO*'na sahip alt küme; $x_1x_3x_4$ alt kümesidir. Yine, bu alt kümeye ilişkin *AKO*'sı, tümel model için bulunan *AKO*'na en yakın olanıdır. *AKO* için üçüncü yaklaşım olan *k-AKO*$_k$ grafiği Grafik 7.58'de verilmiştir.



Grafik 7. 58. k-AKO$_k$ Grafiği

Bu uygulama için eğrinin yukarı doğru döndüğü yerdeki en yüksek *AKO*'na sahip alt küme $x_1x_3x_4$ alt kümesidir. Tüm bu göstergelerden, *AKO* yaklaşımına göre en iyi alt kümenin $x_1x_3x_4$ alt kümesi olduğu anlaşılır.

Konuya C_k istatistiği ile yaklaşırsak, C_k seçim kriterine göre en küçük C_k değeri $x_1x_3x_4$ alt kümesine aittir. Bu nedenle, bu alt kümenin en iyi alt küme olduğu söylenir. Benzer sonuca *k*'ya karşı C_k çizimleri ile de ulaşılabilir (Grafik 7.59). Grafik 7.59'da görüldüğü gibi, C_k=*k* doğrusuna en yakın alt küme $x_1x_3x_4$ alt kümesidir.



Grafik 7.59. k-C_k Grafiği

Stres Verisi İçin En İyi Alt Kümenin İleriye Doğru Seçim Yöntemi İle Belirlenmesi

İleriye doğru seçim yönteminde, modele ilk alınacak değişken, bağımlı değişkenle en yüksek korelasyon katsayısına sahip olan x_1 değişkenidir. Bu nedenle, $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1}$ modeline ilişkin sonuçlar Tablo 7.83'de verilmiştir.

Tablo 7.83. $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1}$ *İçin Regresyon Sonuçları*

Değişken	b_i	$S(b_i)$	t	P
x_1	0.169598	0.05928	2.861	0.0134
Sabit	-3.307549	20.88356	-0.123	0.9040
n=15	s=41.592	$R^2 = 0.38635$	F=8.1846	

$F_{Hesap} = 8.1846 > F_{Tablo(1,13;\ \alpha=0.05)} = 4.67$ olduğu için $H_0 : \beta_1 = 0$ hipotezi reddedilir ve x_1 değişkeni modele alınır (Benzer yoruma x_1'e ilişkin t istatistiği ile de gidilebilir. Hatırlanacağı üzere $t^2 = F$ olduğundan $2.861^2 = 8.185$ olur).

Bu aşamadan sonra, bağımlı değişkenle en yüksek kısmi korelasyon katsayısına sahip değişken modele alınacaktır. Buna göre; x_1 sabit tutulduğunda y ile diğer bağımsız değişkenler arasındaki kısmi korelasyon katsayıları; $r_{y2.1} = 0.0649$, $r_{y3.1} = 0.7173$ ve $r_{y4.1} = 0.6344$ olarak bulunur. Buna göre x_3 değişkeni modele girecektir. $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_3 x_{i3}$ için çoklu regresyon sonuçları Tablo 7.84'de verilmiştir.

Tablo 7.84. $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_3 x_{i3}$ *İçin Regresyon Sonuçları*

Değişken	b_i	$S(b_i)$	t	P
x_1	0.15599	0.04316	3.614	0.0036
x_3	1.72362	0.48331	3.566	0.0039
Sabit	-64.18488	25.91335	-2.477	0.0291
n=15	s=30.1634	$R^2 = 0.70209$	F=14.1402	

Modele son giren x_3 değişkenine ilişkin kısmi F istatistiği de anlamlıdır $(F = 3.566^2 = 12.716)$. Dolayısıyla değişken seçimine devam edilecektir. Son modeldeki değişkenler sabit tutulduğunda geriye kalan değişkenlerle y bağımlı değişkeni arasındaki kısmi korelasyon katsayıları; $r_{y2.13} = -0.3404$ ve $r_{y4.13} = 0.6627$ olarak bulunur. Buna göre, modele x_4 değişkeni alınacaktır. $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i4}$ modeli için çoklu regresyon çözümlemesi sonuçları Tablo 7.85'de verilmiştir.

Tablo 7.85. $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i4}$ *İçin Sonuçlar*

Değişken	b_i	$S(b_i)$	t	P
x_1	0.16032	0.03379	4.744	0.0006
x_3	1.42055	0.39190	3.625	0.0040
x_4	1.75274	0.59723	2.935	0.0136
Sabit	-132.33834	30.82438	-4.293	0.0013
n=15	s=23.59390	$R^2 = 0.83292$	F=18.27826	

Tablo 7.85'den, x_4 değişkeninin modele katkısının anlamlı olduğu görülür. Dolayısıyla, değişken seçimine devam edilir. Ancak, tümel model sonuçlarından anlaşılacağı üzere (Tablo 7.80), x_2 değişkeninin modele katkısı anlamsız bulunacaktır (x_2 için kısmi F değeri Tablo 7.80'den $F = t^2 = -0.777^2 = 0.6037$ olarak bulunur ki bu da anlamsızdır). Bu nedenle de x_2 değişkeni modele alınmadan seçim işlemi sonlandırılarak sonuç modelin $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i4}$ olduğu anlaşılır.

Stres Verisi İçin En İyi Alt Kümenin Geriye Doğru Seçim Yöntemi İle Belirlenmesi

Tümel modele ilişkin sonuçlar Tablo 7.80'de verilmişti. Bu tabloda, modele katkısı en az olan değişkenin x_2 olduğu görülür. Bu değişken, kısmi F değeri en küçük olan değişken olup $(F = t^2 = (-0.777)^2 = 0.6037)$, aynı zamanda modelden çıkmak için F istatistiği olasılığı 0.10 olarak alındığında, p değeri 0.10'dan büyük olan değişkendir. Dolayısıyla, modele katkısı anlamsız olan bu değişken model dışında kalır. Geriye kalan değişkenlerin hiçbirinin anlamlılık düzeyi 0.10'dan büyük olmadığı (Tablo 7.85) ya da tümünün kısmi F değeri anlamlı olduğu için işlemler sonlandırılır. Sonuç alt küme; x_1, x_3 ve x_4 değişkenlerinin oluşturduğu alt kümedir.

Stres Verisi İçin En İyi Alt Kümenin Adım-Adım Regresyon Yöntemi İle Belirlenmesi

Bu seçim yöntemi için her adımda elde edilen modellere ilişkin istatistikler, tekrardan kaçınmak için burada verilmemiştir. Okuyucunun gerektiğinde daha önce elde edilen modellere ilişkin tabloları incelemesi yeterli olacaktır.

Örneğimiz için modele girmek için F değeri olasılığını 0.05, modelden çıkartmak için F değeri olasılığını da 0.10 olarak belirleyelim. Modele ilk girecek değişken y ile en yüksek korelasyonu yapan x_1 değişkenidir. x_1 değişkenine ilişkin anlamlılık düzeyi 0.0134 olduğu için, bu değişken modele alınır. Çünkü, bu olasılık değeri modele girme kriteri olan 0.05'den küçüktür. Daha sonra modele alınacak değişken, y ile en yüksek kısmi korelasyon katsayısına sahip olan değişkendir. Buna göre, y ile x_3 arasındaki kısmi korelasyon katsayısı 0.7173 ile en büyük olduğu için x_3 değişkeni modele girmeye adaydır. İki bağımsız değişkenli modelde x_3 değişkenine ilişkin p değeri 0.0039 olduğu ve bu olasılık değeri 0.05'den küçük olduğu için x_3 değişkeni modele alınacaktır. Bu arada, x_1 değişkenine ilişkin olasılık ise 0.0036 olarak değişmiştir. Bu olasılık, çıkma kriteri olan 0.10'dan küçük olduğu için, x_1 değişkeni modelde kalacaktır. x_1 ve x_3 modelde iken x_2 ve x_4 değişkenlerinin y ile yaptığı kısmi korelasyon katsayıları arasında büyük olanı 0.6627 ile x_4 değişkenine ait olduğu için, x_4 değişkeni modele girmeye adaydır. x_1,x_3 ve x_4 değişkenleri modelde iken, bu değişkenlere ilişkin kısmi F değeri olasılıkları sırasıyla 0.0006, 0.004 ve 0.0136 olduğu için x_4 değişkeni de modele girer. Ayrıca, diğer değişkenlere ilişkin olasılıklar, modelden çıkma olasılığı olan 0.10'dan küçük olduğu için modelden çıkacak değişken bulunmamaktadır. Modele son olarak x_2 değişkeninin alınması düşünüldüğünde, bu değişken için olasılık 0.4553 olarak bulunur. Bu olasılık değeri, modele girme kriteri olan 0.05'den büyük olduğu için sonuç model; x_1,x_3 ve x_4 değişkenlerinden oluşan model olacaktır.

Sonuç olarak, her üç seçim yöntemi ile de aynı alt küme elde edilmiştir. Ancak, her zaman bu tür bir sonuca ulaşılamayabilinir ve değişik seçim yöntemleri değişik sonuçlar verebilir.

Hava Kirliliği Verisi İçin En İyi Alt Kümenin Adım-Adım Regresyon Yöntemi İle Belirlenmesi

Hava Kirliliği Verisi (Tablo 7.53) daha önce çeşitli yönlerden incelenmişti. Bu inceleme sonucunda, değişen varyanslılık sorununu giderebilmek için bağımlı değişken üzerinde logaritmik dönüşüm yapılmış, yüksek korelasyonlu x_1 ve x_2 değişkenlerinden sadece biri, x_2, modele alınmış ve x_2, x_3, x_4, x_5 ve x_6 değişkenlerini içeren model (n=78) için yapılan incelemelerde, değişen varyanslılık, artıkların normal dağılımı ve çoklubağlantı sorunlarında daha iyimser bir tablo oluştuğu belirtilmişti. Dolayısıyla veride, geçerli bir seçim işlemi için yeterli bir aşamaya ulaşıldığı düşünülebilir.

n=80 için $ln(y)$ ile x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 arasındaki çoklu regresyon çözümlemesi adım-adım regresyon yöntemi ile incelendiğinde (modele girmek için F değeri olasılığı 0.05,

modelden çıkartmak için F değeri olasılığı 0.10 olarak alınmıştır) x_6 değişkeni model dışında kalır ve 4 bağımsız değişkenli (x_2, x_3, x_4, x_5) bir alt kümeye ulaşılır. Bu son modele ilişkin istatistikler ise; n=80, s=0.45544, $R^2 = 0.87096$, F=126.551 olarak bulunur. Fark edileceği gibi, daha önce elde ettiğimiz 5 bağımsız değişkenli tümel modeldeki R^2 değeri (0.87212) ile 4 değişkenli alt kümeye ilişkin R^2 değeri (0.87096) arasında hemen hiçbir fark yoktur. Bu da x_6 değişkeninin modele katkısının olmadığını bize gösterir. n=78 için çözüm okuyucuya bırakılmıştır.

7.7. TEMEL BİLEŞENLER REGRESYONU

Bilindiği gibi, çoklu regresyon denkleminin yorumu, bağımsız değişkenlerin kuvvetli bir şekilde ilişkili olmaması, daha genel anlamda çoklubağlantı olmaması varsayımına bağlıdır. Bağımsız değişkenler arasında ilişki olmaması durumunda (bu durumda korelasyon katsayısı 0 ya da 0'a yakın olacaktır), bu değişkenlerin dik (ortogonal) olduğu söylenir. Regresyon uygulamalarının çoğunda, bağımsız değişkenler dik olmamakla birlikte, dikliğin olmayışı, gerekli analizi etkileyecek şiddette değildir. Ancak, bazı durumlarda, bağımsız değişkenler regresyon sonuçlarını belirsizleştirecek kadar ilişkilidir (çoklubağlantı durumu).

Bağımsız değişkenler arasında çoklubağlantı olduğunda uygulanabilecek regresyon yöntemlerinden biri, temel bileşenler regresyonudur. Değişkenler arasındaki çoklubağlantının ortaya çıkartılması amacıyla özdeğerlerden nasıl yararlanıldığı ve en küçük özdeğere karşılık gelen özvektörün (temel bileşenin) ne tür bir özelliğe sahip olduğu konusu üzerinde daha önce durulmuştu.

Temel bileşenler regresyonu; "her doğrusal regresyon modelinin bir dik açıklayıcı değişkenler kümesine dayanarak yeniden açıklanabileceği" gerçeği üzerine oluşturulmuştur. Bu yeni ve dik açıklayıcı değişkenler, orijinal açıklayıcı değişkenlerin doğrusal bileşeni olarak elde edilirler ve bağımsız değişkenlerin ***temel bileşenleri*** olarak adlandırılırlar.

Temel bileşenler analizi sonucunda, p boyutlu (değişkenli) uzayı çok iyi tanımlayan ***p tane yeni dik değişken*** (temel bileşen ya da özvektör) elde edilir. Elde edilen temel bileşenlerin birimi yoktur. p tane değişkenin taşıdığı bilginin k tane ($k \leq p$) yeni değişkenle açıklanması ise temel bileşenlerin ana amacını oluşturur. Bu amaç doğrultusunda, p boyutlu uzaydaki toplam varyans (özdeğerler toplamı), herbiri özvektörlerle tanımlanan öyle yeni değişkenlerle ifade edilir ki, en büyük varyans (özdeğer) birinci özvektöre, en küçük varyans sonuncu özvektöre ait olur ($\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > .... > \lambda_p$). Diğer bir deyişle, bağımsız değişkenler kümesindeki toplam değişimin büyük bir bölümü birinci özvektör, ondan daha az bir bölümü ikinci özvektör, ... tarafından açıklanır.

Tekrar hatırlatmak gerekirse, değişkenler kümesinde doğrusal bağıntı yoksa, bu veri kümesinin dik olduğu söylenir. Temel bileşenler analizi sonucunda, dik olmayan bir veri kümesi için, değişkenlerin birbirine dik olduğu yeni değişkenler kümesi elde edilir.

Elde edilen yeni değişkenler arasındaki korelasyon katsayıları, bu değişkenlerin birbirlerine dik olmaları nedeniyle sıfıra eşittir.

Değişkenler kümesine ilişkin özvektörler ve özdeğerler korelasyon ya da kovaryans matrisi yardımıyla bulunabilir (Bakınız Bölüm 1). Korelasyon matrisi R'yi dikkate alarak temel bileşenlere ilişkin bazı özellikler aşağıda verilmiştir;

a. R'nin özdeğerleri gerçel olup ($\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > .... > \lambda_p > 0$)'dır.

b. R'nin asıl köşegen elemanları toplamı (izi), özdeğerlerin (özvektörlerin varyanslarının) toplamına eşittir.

$$tr(R) = \sum_{i=1}^{p} r_{ii} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \qquad (7.101)$$

c. Her bir özdeğerin, özdeğerler toplamına bölünmesiyle, temel bileşenlerin toplam varyansı açıklama yüzdeleri elde edilir.

d. Bölüm 3'de belirtildiği gibi, standartlaştırılmış değişkenler arasındaki kovaryans değeri, standartlaştırılmamış değişkenler arasındaki korelasyon katsayısına eşittir. Standartlaştırılmış değişkenler dik ise, bu değişkenlere ilişkin varyans-kovaryans matrisinin köşegen elemanları 1, köşegen dışı elemanları da 0 olacaktır.

Buraya kadar verilen kavramlar, temel bileşenler regresyonunun elde edilişi ve de konu ile ilgili diğer açıklamalar, aşağıdaki örnekle birlikte verilmiştir.

Örnek 7.25. Bir çalışmada, elde edilmesi zor olan sporcuların vücut yağ yüzdesi (y); triceps deri kıvrımı kalınlığı (x_1), uyluk çevresi (x_2) ve biceps orta kol çevresi (x_3) gibi kolay elde edilen bazı antropometrik ölçümlerle kestirilmek isteniyor. 20 sporcuya ilişkin ölçümler Tablo 7.86'da verilmiştir. Daha sonraki işlemlerde kullanılacağı için standartlaştırılmış bağımsız değişkenler de (zx_1, zx_2, zx_3) bu tabloda verilmiştir.

Tablo 7.86. Vücut Yağ Yüzdesi Verisi

Kişi No	y	x_1	x_2	x_3	zx_1	zx_2	zx_3
1	11.9	19.5	43.1	29.1	-1.1556	-1.5415	0.4058
2	22.8	24.7	49.8	28.2	-0.1204	-0.2617	0.1590
3	18.7	30.7	51.9	37.0	1.0740	0.1395	2.5719
4	20.1	29.8	54.3	31.1	0.8949	0.5979	0.9542
5	12.9	19.1	42.2	30.9	-1.2352	-1.7136	0.8993
6	21.7	25.6	53.9	23.7	0.0587	0.5215	-1.0749
7	27.1	31.4	58.5	27.6	1.2133	1.4003	-0.0055
8	25.4	27.9	52.1	30.6	0.5166	0.1777	0.8171
9	21.3	22.1	49.9	23.2	-0.6380	-0.2426	-1.2119
10	19.3	25.5	53.5	24.8	0.0388	0.4451	-0.7732
11	25.4	31.1	56.6	30.0	1.1536	1.0372	0.6525
12	27.2	30.4	56.7	28.3	1.0143	1.0564	0.1864
13	11.7	18.7	46.5	23.0	-1.3149	-0.8921	-1.2667
14	17.8	19.7	44.2	28.6	-1.1158	-1.3314	0.2687
15	12.8	14.6	42.7	21.3	-2.1311	-1.6181	-1.7328
16	23.9	29.5	54.4	30.1	0.8351	0.6170	0.6799
17	22.6	27.7	55.3	25.7	0.4768	0.7889	-0.5264
18	25.4	30.2	58.6	24.6	0.9745	1.4194	-0.8280
19	14.8	22.7	48.2	27.1	-0.5186	-0.5674	-0.1426
20	21.1	25.2	51.0	27.5	-0.0209	-0.0325	-0.0329
Ort.	20.195	25.305	51.170	27.620	0.0000	0.0000	0.0000
S.Sap	5.106	5.023	5.235	3.647	1.0000	1.0000	1.0000

Tablo 7.86'daki veriye ilişkin çoklu doğrusal regresyon sonuçları Tablo 7.87'de, değişkenlere ilişkin korelasyon matrisi Tablo 7.88'de verilmiştir.

Tablo 7.87. Vücut Yağ Yüzdesi Verisine İlişkin Çoklu Regresyon Sonuçları

Değişken	b_j	$S(b_j)$	*BETA*	*VIF*	*t*	*p*
x_1	4.334	3.016	4.264	670.58	1.437	0.170
x_2	-2.857	2.582	-2.929	533.87	-1.106	0.285
x_3	-2.186	1.595	-1.561	99.01	-1.370	0.190
Sabit	117.085	99.782	-	-	1.173	0.258
n=20	s=2.480	$R^2 = 0.801$	(F=21.516 , p=0.0000)			

Tablo 7.88. Vücut Yağ Yüzdesi Verisi İçin Korelasyon Matrisi

Değişkenler	x_1	x_2	x_3	y
x_1	1.0000			
x_2	0.9238	1.0000		*S*
x_3	0.4578	0.0847	1.0000	
y	0.8433	0.8781	0.1424	1.0000

Tablo 7.87'de görüldüğü gibi, *VIF* değerleri çok yüksektir. Ayrıca, katsayılara ilişkin *t* değerlerinden hiçbiri anlamlı değilken, *F* istatistiği anlamlıdır. Yine, Tablo 7.88'de *y* ile bağımsız değişkenler arasında negatif değer alan ilişki katsayısı olmamasına rağmen, çoklu regresyon çözümlemesi sonucunda elde edilen regresyon katsayılarından ikisinin işareti negatiftir. Ayrıca, x_1 ile x_2 arasındaki ilişki katsayısı çok yüksektir (0.9238). Tüm bu bulgular, veride çoklubağlantı olduğunu göstermektedir.

Diğer taraftan, bağımsız değişkenlere ilişkin *R* matrisinden elde edilen özdeğerler sırasıyla; λ_1=2.06647, λ_2=0.93280 ve λ_3=0.00073 olarak bulunur. Bu da çoklubağlantının bir göstergesidir. Çünkü, son özdeğer sıfıra çok yakın bir değere sahiptir.

Daha önce de belirtildiği gibi, temel bileşenler regresyonunun amaçlarından biri, verideki çoklubağlantıyı azaltmaktır. Bu azaltma, bağımlı değişkendeki değişimi açıklamak için, temel bileşenlerin tüm setinden daha azını kullanarak sağlanır. Çünkü, tüm temel bileşenler kullanıldığında, normal en küçük kareler çözümüne ulaşılır.

Bağımsız değişkenlere ilişkin korelasyon matrisinin standartlaştırılmış asıl özvektörleri, (t_i), Tablo 7.89'da verilmiştir. Ancak, son temel bileşene ilişkin özdeğer çok küçük (0.00073) olduğu için sonuçlar anlamlı olmayacaktır. Çünkü bu özvektör, verideki çoklubağlantının kaynağını oluşturur. Bu nedenle de, bu özdeğere ilişkin özvektör tabloda verilmemiştir.

Tablo 7.89. Standartlaştırılmış Asıl Özvektörler

Değişkenler	t_1	t_2
x_1	0.99864	0.04839
x_2	0.90482	0.42585
x_3	0.50049	-0.86571
Özdeğerler	λ_1=2.06647	λ_2=0.93280

Bazı İstatistik programlar ***standartlaştırılmış asıl temel bileşenler*** yerine doğrudan ***standartlaştırılmış temel bileşenleri*** çıktı olarak verebilir. Standartlaştırılmış temel bileşenler, v_i;

$$v_i = t_i / \sqrt{\lambda_i} \qquad (7.102)$$

ile elde edilir. Standartlaştırılmış temel bileşenler Tablo 7.90'da verilmiştir. Tablo 7.90'daki örneğin 0.6947; Eşitlik (7.102) yardımıyla, $0.6947 = 0.99864/\sqrt{2.06647}$ ile elde edilir. Aynı sonuca ;

$$0.6947 = 0.99864/\sqrt{0.99864^2 + 0.90482^2 + 0.50049^2}$$

ile de ulaşılabilir.

Tablo 7.90. Standartlaştırılmış Özvektörler

Değişkenler	v_1	v_2
x_1	0.6947	0.0501
x_2	0.6294	0.4405
x_3	0.3482	-0.8963

Tablo 7.90'da verilen standartlaştırılmış temel bileşenler yardımıyla,

$$z_1 = 0.6947(zx_1) + 0.6294(zx_2) + 0.3482(zx_3)$$
$$z_2 = 0.0501(zx_1) + 0.4405(zx_2) - 0.8963(zx_3)$$

doğrusal bağıntılarını yazabiliriz. Bu iki doğrusal bağıntı sonucunda elde edilen ***iki yeni değişkene*** ilişkin bulgular *y* bağımlı değişkeni ile birlikte Tablo 7.91'de verilmiştir.

Bu yeni z_1 ve z_2 değişkenlerinin ortalaması sıfır, varyansları ise sırasıyla λ_1 ve λ_2'ye yani, 2.0665 ve 0.9328'e eşittir. Ayrıca, bu değişkenler birbirine diktir. Yani bu iki yeni değişken arasındaki korelasyon katsayısı sıfırdır (Tablo 7.92). Çok daha açık bir ifade ile, korelasyon matrisindeki değişimin (ki bu değişim *R* matrisinin köşegen elemanlarının toplamı olup, örneğimiz için üç bağımsız değişken olduğundan bu değişim 3'e eşittir), % 68.883'ü (2.0665/3) birinci özvektör, % 31.093'ü (0.9328/3) ikinci özvektör, yaklaşık % 0.02'si ise üçüncü özvektör tarafından açıklanır ve bu özvektörler arasındaki korelasyon katsayıları sıfırdır. Dolayısıyla, ***birbiri ile ilişkili üç değişkenden birbiri ile ilişkisiz iki değişken*** elde edilmiştir.

Tablo 7.91. z_1, z_2 *ve y Değişkenleri*

z_1	z_2	y
-1.6318	-1.1007	11.9
-0.1930	-0.2639	22.8
1.7294	-2.1899	18.7
1.3302	-0.5470	20.1
-1.6235	-1.6228	12.9
-0.0052	1.1960	21.7
1.7224	0.6825	27.1
0.7552	-0.6282	25.4
-1.0179	0.9474	21.3
0.0379	0.8910	19.3
1.6815	-0.0702	25.4
1.4345	0.3491	27.2
-1.9160	0.6765	11.7
-1.5197	-0.8833	17.8
-3.1023	0.7336	12.8
1.2053	-0.2958	23.9
0.6445	0.8433	22.6
1.2820	1.4162	25.4
-0.7670	-0.1481	14.8
-0.0464	0.0141	21.1

Tablo 7.92. z_1, z_2 *ve y İçin Korelasyon Matrisi*

Değişkenler	z_1	z_2	y
z_1	1.0000		
z_2	**0.0000**	1.0000	
y	0.8265	0.3121	1.0000

Temel bileşenler regresyonunda kullanacağımız ***standartlaştırılmış temel bileşen skorlarını*** bulabilmek için z_i değişkeni kendi özdeğerinin karekköüne bölünür ($z_i / \sqrt{\lambda_i}$). z_1 ve z_2 için bulunan standartlaştırılmış temel bileşen skorları (sz_1, sz_2) ve y bağımlı değişkeni Tablo 7.93'de verilmiştir.

Tablo 7.93. Standartlaştırılmış Temel Bileşen Skorları ve y Bağımlı Değişkeni

sz_1	sz_2	y
-1.13521	-1.13971	11.9
-0.13428	-0.27321	22.8
1.20298	-2.26756	18.7
0.92535	-0.56640	20.1
-1.12944	-1.68030	12.9
-0.00358	1.23842	21.7
1.19816	0.70671	27.1
0.52534	-0.65047	25.4
-0.70809	0.98098	21.3
0.02639	0.92262	19.3
1.16975	-0.07265	25.4
0.99788	0.36142	27.2
-1.33286	0.70051	11.7
-1.05716	-0.91457	17.8
-2.15804	0.75966	12.8
0.83844	-0.30631	23.9
0.44837	0.87316	22.6
0.89186	1.46643	25.4
-0.53357	-0.15336	14.8
-0.03229	0.01464	21.1

Çoklu regresyon modelini birinci temel bileşen için $y = \beta_0 + \beta_1(sz_1) + \varepsilon$ olarak yazarken, ilk iki temel bileşen için $y = \beta_0 + \beta_1(sz_1) + \beta_2(sz_2) + \varepsilon$ olarak yazarsak, elde edilen temel bileşenler regresyonlarına ilişkin bulgular sırasıyla Tablo 7.94 ve 7.95'de verilmiştir.

Tablo 7.94. $y = \beta_0 + \beta_1(sz_1) + \varepsilon$ *Modeli Sonuçları*

Değişken	b_j	$S(b_j)$	*Beta*	*Tolerans*	*VIF*	*t*	*p*
sz_1	4.22022	0.677531	0.826	1.00000	1.00000	6.229	0.0000
Sabit	20.19500	0.660375	-	-	-	30.581	0.0000
n=20	*s*=2.95329	$R^2 = 0.68309$		(F=38.79829 p=0.0000)			

Tablo 7.95. $y = \beta_0 + \beta_1(sz_1) + \beta_2(sz_2) + \varepsilon$ Modeli Sonuçları

Değişken	b_j	$S(b_j)$	*Beta*	*Tolerans*	*VIF*	*t*	*p*
sz_1	4.22022	0.580267	0.826	1.00000	1.00000	7.273	0.0000
sz_2	1.59336	0.580267	0.312	1.00000	1.00000	2.746	0.0138
Sabit	20.19500	0.565574	-			35.707	0.0000
n=20	*s*=2.52932	$R^2 = 0.78046$		(F=30.21755 p=0.0000)			

Bu kestirimler yanlıdır. Çünkü, bu denklemlerde bazı bilgiler dikkate alınmamaktadır. Örneğin, Tablo 7.94'deki denklemde sz_2 ve sz_3 dikkate alınmamıştır. 1. temel bileşenin toplam varyansı açıklama yüzdesi % 69, ilk iki temel bileşenin toplam varyansı açıklama yüzdesi yaklaşık % 100'dür ((2.0665+0.9328)/3).

Görüldüğü gibi her iki modelde de sabit aynı ve *y* bağımlı değişkeninin ortalamasına eşittir. Ayrıca, Tablo 7.95'de *VIF* değerleri, bağımsız değişkenler arasında doğrusal bağıntının olmadığındaki değer olan 1'e eşittir.

Ancak, bu modeller geriye dönüşü gerektirir. Diğer bir deyişle, bu denklemlerle kestirim yapmak için orijinal değişkenleri doğrudan kullanamayız. Örneğin, Tablo 7.86'daki 1. gözlemi ele alalım. $x_1 = 19.5$, $x_2 = 43.1$ ve $x_3 = 29.1$ için temel bileşen skorları -1.1352 ve -1.1397 olarak bulunmuştur (Tablo 7.93). Buna göre kestirim değeri Tablo 7.95'deki katsayılar yardımıyla;

$$y = 20.195 + 4.22(-1.1352) + 1.593(-1.13987) = 13.588$$

olarak bulunur. Dolayısıyla, orijinal değişkenler üzerinden kestirim yapabilecek denklemlerin bulunması daha anlamlıdır. Bu amaçla aşağıdaki yol izlenir.

1. Standartlaştırılmış *y* bağımlı değişkeninin (zy), ilk ve ilk iki standartlaştırılmış temel bileşen skorları ile yaptığı regresyon denklemleri bulunur. Örneğimiz için bu denklemler sırasıyla,

$$zy = 0.574940(z_1)$$
$$zy = 0.574940(z_1) + 0.323131(z_2)$$

olarak elde edilir.

2. İlk denklem için bulunan katsayı (0.57494), 1. temel bileşenle çarpılarak 1.temel bileşen için regresyon katsayıları, ($\tilde{b}_1$, $\tilde{b}_2$ ve $\tilde{b}_3$), elde edilir. Buna göre katsayılar;

$$\tilde{b}_1 = \quad 0.6947*0.574940=0.399410$$

$$\tilde{b}_2 = \quad 0.6294*0.574940=0.361867$$

$$\tilde{b}_3 = \quad 0.3482*0.574940=0.200194$$

olarak elde edilir. Temel bileşen kestiricileri ile en küçük kareler kestiricileri arasında;

$$b_i = \tilde{b}_i (Sy / Sx_i) \qquad (7.103)$$

ilişkisi vardır. Burada, *Sy*: *y* bağımlı değişkeninin standart sapmasını, Sx_i : *i*. bağımsız değişkenin standart sapmasını gösterir. Eşitlik (7.103) yardımıyla birinci temel bileşen için en küçük kareler kestiricileri;

$$b_1 = \quad 0.399410*(5.106/5.023)=0.40600$$

$$b_2 = \quad 0.361867*(5.106/5.235)=0.35295$$

$$b_3 = \quad 0.200194*(5.106/3.647)=0.28028$$

ve

$$b_0 = \bar{y} - \left[b_1\bar{x}_1 + b_2\bar{x}_2 + b_3\bar{x}_3\right] \qquad (7.104)$$

yardımıyla b_0;

$$b_0 = 20.195 - [0.40600*25.305+0.35295*51.170+0.28025*27.620]$$

$$b_0 = -15.88$$

olarak bulunur.

3. Daha sonra ikinci denklem için bulunan katsayılar (0.57494 ve 0.323131), sırasıyla 1. ve 2. temel bileşenle çarpılarak ilk iki temel bileşen için regresyon katsayıları ($\tilde{b}_1$,$\tilde{b}_2$ ve $\tilde{b}_3$), elde edilir. Buna göre katsayılar;

$$\tilde{b}_1 = \quad 0.6947*0.57494+0.0501*0.323131=0.415600$$

$$\tilde{b}_2 = \quad 0.6294*0.57494+0.4405*0.323131=0.504206$$

$$\tilde{b}_3 = \quad 0.3482*0.57494 -0.8963*0.323131=-0.089428$$

olarak elde edilir. Eşitlik (7.103) yardımıyla ilk iki temel bileşen için en küçük kareler kestiricileri;

b_1= 0.415600(5.106/5.023)=0.42246

b_2= 0.504206(5.106/5.235)=0.49184

b_3= -0.089428(5.106/3.647)=-0.12520

olarak bulunurken, Eşitlik (7.104) yardımıyla b_0;

$$b_0 = 20.195 - [0.42246*25.305+0.49184*51.170-0.12520*27.620] = -12.2048$$

olarak elde edilir. Birinci ve birinci+ikinci temel bileşen için bulunan katsayılar ile en küçük kareler kestiricileri Tablo 7.96'da verilmiştir.

Tablo 7.96. Temel Bileşenler Regresyonu Sonuçları

Değişken	*Birinci Temel Bileşen İçin Denklem*		*Birinci ve İkinci Temel Bileşen İçin Denklem*	
	$\tilde{b}_j$	b_j	$\tilde{b}_j$	b_j
x_1	0.399410	0.40600	0.415600	0.42246
x_2	0.361867	0.35295	0.504206	0.49184
x_3	0.200194	0.28028	-0.089428	-0.12520
Sabit	0	-15.88	0	-12.2048
R^2	0.683		0.780	

Eğer 1. ve 2. temel bileşen denklemini kullanarak 1. gözlem için kestirim yaparsak,

$$y=-12.2048+0.42246*19.5+0.49184*43.1-0.1252*29.1=13.588$$

olarak bulunur ki, bu kestirim değeri Tablo 7.95'deki model yardımıyla elde edilen kestirim değeri ile aynıdır.

7.7. REGRESYON MODELLERİNİN GEÇERLİĞİ

Bir model yardımıyla kestirim değeri elde edildiğinde, bu kestirim değerinin ne kadar güvenilir (doğru) olduğu önemli bir sorundur. Bu durum modeli kullanan birey(ler)in model geliştiriciden başka birey(ler) olduğu durumlar da daha da önem kazanır. Bu nedenle, geliştirilen model kullanıcılara ulaşmadan önce modelin geçerliği ile ilgili olarak bazı değerlendirmelerin yapılması önerilmektedir. Ancak, modelin yeterliği ile modelin geçerliği kavramları birbirine karıştırılmamalıdır. Daha önce belirtildiği gibi modelin yeterliği; artıkların incelenmesi, etkili, uzak ve aykırı değerlerin incelenmesi ile regresyon modelinin eldeki veriye uyumunu araştıran diğer içsel analizleri kapsar. Modelin geçerliği ise ***modelin ölçmek istediği şeyi ölçüp ölçmediği*** ile ilgilidir. Yani, bir modelin amaçlanan kullanım ortamında başarılı bir şekilde kullanılıp kullanılamayacağının belirlenmesine yönelik bir kavramdır. Modelin eldeki veriye uyumu, model geliştirme sürecinde kullanılan birçok yöntemin (değişken seçimi gibi) temelini oluşturduğu için *veriye uyum sağlayan bir modelin son uygulamada başarılı olacağı* kararını çıkartmaya da neden olabilir. Ancak, bu durum her zaman gerçekleşmeyebilir. Örneğin, model sadece yeni gözlemlerin kestirimi için geliştirilmiş olmakla birlikte, eldeki veriye en iyi uyumu sağlayan bu model yardımıyla çok iyi

kestirimler yapabilmek her zaman olanaklı olmayabilir. Çünkü, modelin oluşturulması aşamasında ortaya çıkmayan bazı etkileyici faktörler yeni gözlemleri anlamlı derecede etkileyebilir ve kestirimleri kullanılmaz duruma getirebilir. Yine, bağımsız değişkenler arasındaki bağımlılık yapısı modelin oluşumunu, dolayısıyla da modelin kestirim başarısını olumsuz yönde etkileyebilir. Bu nedenle, yeni gözlemleri kestirmek amacıyla geliştirilen bir model, kullanıma sunulmadan önce, ilgili kullanım ortamında geçerlik yönünden incelenmelidir. Sonuç olarak, modelin geçerlik yönünden incelenmiş olması, hem model tasarlayıcı hem de kullanıcı açısından yararlıdır.

Bir regresyon modeline ilişkin geçerliğin uygun bir şekilde yapılması; önce *regresyon katsayılarının büyüklük ve işaretinin beklenenler çerçevesinde olup olmadığının incelenmesi, daha sonra da modelin kestirim performansı açısından incelenmesi* aşamalarını içerir.

Geçerlik Yöntemleri

Bir regresyon modelinin geçerliğinin saptanmasında genellikle üç değişik yöntemden yararlanılır.

1. Model katsayılarının ve elde edilen kestirimlerin önceki deneyimlerin getirdiği birikimlerle, teoriyle, ..vb. karşılaştırılması.
2. Modelin kestiricilik başarısını (performansını) incelemek için yeni veri elde edilmesi ya da toplanması.
3. Eldeki verinin bir kısmının bir tarafa ayrılması ve bu gözlemler yardımıyla modelin kestirim performansının bulunmaya çalışılması (verinin bölünmesi).

1. Model Katsayılarının ve Kestirim Değerlerinin İncelenmesi

Sonuç regresyon modelindeki regresyon katsayıları; kararlı (ya da değişmez) olup olmadıkları, işaretlerinin ve büyüklüklerinin akla uygun olup olmadığı yönünden incelenmelidir. Bu amaçla; önceki deneyimlerden, teorik bilgilerden, bağımsız değişkenlerin yapabileceği etkilerin göreceli büyüklüğünden yararlanılabilir. Beklenenin tersi işarete (+ iken – ya da – iken + işarete sahip katsayılar) ya da olabileceğinden büyük değerlere sahip katsayılar genellikle uygun olmayan bir modelin (bağımsız değişkenlerin eksik ya da yanlış belirlendiği) sonucu olarak ortaya çıkabileceği gibi bağımsız değişkenlerin bireysel etkilerinin zayıf tahminlerinden de kaynaklanabilir. Diğer taraftan, varyans şişme değerleri ve diğer çoklubağlantı ölçüleri de modelin geçerliğinin belirlenmesinde önemli rol oynar. Bilindiği gibi, 5 ya da 10'u aşan VIF değerlerine sahip değişkenler, bağımsız değişkenler arasındaki yakın doğrusal bağımlılık nedeniyle *iyi şekilde kestirilememiş* ve *kararlı olmayan* katsayılara sahiptir.

Elimizde zaman boyutunda elde edilmiş veri var ise katsayıların sabit olup olmadığı, verinin zaman aralıklarına bölünmesi ile incelenebilir. Örneğin, uzun yıllara ilişkin ***aylık*** veriler var ise her bir yıl için bir model kurularak her yıl için elde edilen katsayıların benzer olup olmadığı incelenebilir.

$\hat{y}_i$ kestirim değerleri de model geçerliğine ilişkin bilgi verebilir. Örneğin, $\hat{y}_i$ değerlerinin pozitif çıkması beklenirken negatif elde edilmesi ya da elde edilen kestirim değerlerinin bilinen sınırların dışına çıkması, kestirilen regresyon katsayılarının oldukça zayıf kestirilmiş katsayılar olduğu ya da modelin yanlış kurulduğu konusunda bilgi verir. Bağımsız değişkenin değişim aralığındaki değerler için kestirilen değerlerin incelenmesi modelin iç değer bulma (interpolasyon) performansı hakkında bilgi verirken, değişim aralığının dışındaki değerler için elde edilen kestirim değerlerinin incelenmesi modelin dış değer bulma (ekstrapolasyon) performansı hakkında bilgi verir.

2. Yeni Veri Elde Etme

Bir regresyon modelinin kestirim başarısı (performansı) ile ilgili olarak geçerliğin sağlanmasında en etkin yöntem, yeni verinin elde edilmesi ve model kestirimlerinin yeni veri için yapılmasıdır. Bu işlemin sonucunda istenen şey, modelin yeni veri için doğru kestirimler vermesidir. Bu amaçla 15-20 yeni gözleme gereksinim duyulur. Bu yeni gözlemler model denkleminde yerine konarak aşağıda verilen yöntem çerçevesinde incelenir. Veri için iki ya da daha fazla regresyon modelinin geliştirildiği durumlarda, yeni veri yardımıyla bu modellerin kestirim başarısının karşılaştırılması sonuç modelin seçimi için bir temel oluşturabilir.

Örnek 7.26. Yeni veri elde etme yaklaşımına ilişkin olarak temel amacı kestirim olan ve Tablo 7.35'de verilen *dönemsel performans verisi* dikkate alınmış ve yeni elde edilen 13 gözlem için gerekli işlemler aşağıda verilmiştir. Bilindiği gibi, n=28 için bulduğumuz kestirim denklemi $\hat{y} = 1.532 + 1.462x_1 + 0.02083x_2$ idi. Yeni 13 gözleme ilişkin veriler ve kestirim denklemi yardımıyla elde edilen kestirim değerleri Tablo 7.97'de verilmiştir.

Tablo 7.97. Yeni Veri Seti ve n=28'lik Regresyon Denklemine İlişkin Regresyon Sonuçları

Sıra no	y	x_1	x_2	$\hat{y}$	$y-\hat{y}$
1	18.50	6	220	14.89	3.61
2	58.00	28	1210	67.68	**-9.68**
3	51.85	21	880	50.57	1.28
4	19.50	5	480	18.84	0.66
5	23.36	8	375	21.04	2.32
6	7.00	1	120	5.49	1.51
7	15.30	4	170	10.92	4.38
8	23.65	15	310	29.93	-6.28
9	10.45	3	120	8.42	2.03
10	17.66	10	430	25.11	-7.45
11	35.40	12	950	38.87	-3.47
12	18.20	5	225	13.53	4.67
13	51.50	19	575	41.29	**10.20**

Bu tabloda $y-\hat{y}$'ların toplamı (kestirim hatalarının toplamı) 3.77 olarak bulunur ki bu değerin sıfıra yakın olduğu düşünülebilir ve modelin yaklaşık olarak yansız kestirimler yapabildiği gibi yargıya varılabilir. Sırasıyla 13. ve 2. yeni gözlemlere

ilişkin artıkların en büyük kestirim hatasına sahip oldukları tablodan görülmektedir. Bu gözlemlerden 2. gözleme ilişkin ölçümlerin, *n=28*'lik verilerde bir benzeri yoktur. 13. gözlem ise, ana veride aykırı gözlem olarak belirlenen 28. gözleme benzemektedir. Ancak, yukarıdaki tabloda çok büyük artıklı gözlemler de yoktur. Bu nedenlerle, genel olarak, *n=28* gözlemli veri için elde ettiğimiz modelin kullanım açısından güvenilebilecek bir yapıda olduğu söylenebilir. Genellikle yeni gözlemlere ilişkin kestirim hataları, modele ilişkin artıklarından büyük çıkar. Örneğimizde *n=28*'lik veri için *AKO*=32.932 olarak bulunmuştu. *n=13* olan kestirim verisi için ortalama kare kestirim hatası Tablo 7.97 yardımıyla, 28.67 olarak bulunur;

$$\frac{\sum_{i=29}^{40}(y_i-\hat{y}_i)^2}{13}=\frac{(3.61)^2+....+(10.20)^2}{13}=\frac{372.73}{13}=28.67$$

Kestirime ilişkin hata (28.67), modele ilişkin artık varyansı olan 32.932'den küçük olduğu için modelin yeni veriyi orijinal veri kadar hatta ondan daha iyi kestirdiğini söyleyebiliriz. Bunun dışında, *n=28*'lik veriye ilişkin R^2 (0.883) ile yeni veride model tarafından açıklanan değişimin yüzdesini karşılaştırmak yararlı olabilmektedir. Bu yüzde aşağıdaki gibi bulunur;

$$R^2_{Kestirim}=1-\frac{\sum_{i=29}^{41}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum_{i=29}^{41}(y_i-\bar{y})^2}=1-\frac{372.73}{3377.74}0.8896$$

Genellikle bir düşme olmasını beklemekle birlikte, örneğimiz için R^2'de çok az bir artış olmuştur (ya da bir değişme olmamıştır). Burada izlenen yol, eğer var ise veriye ilişkin başka modeller için de yinelenebilir. Bu bize incelediğimiz amaç doğrultusunda modeller arasında karşılaştırma yapma olanağı verir.

3. Verinin Bölünmesi

Modelin geçerliği ile ilgili olarak yeni veri elde edilmesi her zaman olanaklı olmayabilir. Bu nedenle başka yöntemlerden yararlanma yoluna gidilir. Bunlardan biri de veriyi bölme yöntemidir. Verinin bölünmesi yöntemine ***çapraz geçerlik*** (*cross validation*) de denir (Gözlem sayısı tek olduğunda verinin iki eşit parçaya bölünememesi aşağıdaki açıklamalardan anlaşılacağı gibi çok da önemli değildir.) Bu yöntem aşağıdaki gibi uygulanır;

1. Veri rasgele iki eşit parçaya bölünerek bu parçaların birinden (A diyelim) kestirim denklemi ve belirtme katsayısı (R^2) elde edilir (SPSS'de verinin rasgele 2 eşit parçaya bölünmesi için ***DATA*** menüsünden ***Select Cases*** seçilir. Daha sonra ***Random Sample*** tıklanır.)
2. Diğer parçanın (B) bağımsız değişken değerleri A grubunun kestirim denkleminde yerine konarak $\hat{y}_i$ kestirimleri elde edilir.

3. B parçasının y değerleri ile $\hat{y}_i$ kestirim değerleri arasındaki belirtme katsayısı (R^2) hesaplanır.
4. A grubunun R^2 değeri ile 3. şıkta elde edilen R^2 değeri arasında ciddi sayılabilecek bir farkın olmaması arzu edilir.

Aşağıda konuya ilişikin hipotetik bir örnek adımsal olarak verilmiştir.

Adım 1. 100 gözlemli ve iki bağımsız değişkenli veriyi A ve B gibi 50'şer gözlemli 2 parçaya bölelim ve A parçasına ilişkin kestirim denklemini $\hat{y}_i = 3 + 0.3\, x_{i1} x + 0.8\, x_{i2}$ olarak bulalım.

A Grubu (n=50)
$\hat{y}_i = 3 + 0.3\, x_{i1} x + 0.8\, x_{i2}$

B Grubu (n=50)		
y	x_1	x_2
4	2	0.4
5	1	0.6
.	.	.
.	.	.
7	4	0.3

Adım 2. B grubu verilerini $\hat{y}_i$ kestirim denkleminde yerine koyalım ve $\hat{y}_i$ kestirimlerini bulalım;

$$\hat{y}_1 = 3 + 0.3(2) + 0.8(0.4) = \mathbf{3.92}$$
$$\hat{y}_2 = 3 + 0.3(1) + 0.8(0.6) = \mathbf{3.78}$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\hat{y}_{50} = 3 + 0.3(4) + 0.8(0.3) = \mathbf{4.44}$$

Adım 3. Çapraz geçerlik belirtme katsayısı aşağıdaki değişkenler arasında hesaplanır.

y	$\hat{y}_i$
4	3.92
5	3.78
.	.
.	.
7	4.44

Adım 4. 1. Adımda A grubundan elde edilen R^2 ile 3. Adımda elde edilen R^2 karşılaştırılır.

Ancak, regresyon çözümlemesinde çoğunlukla az veri ile çalışılır. Dolayısıyla veriyi rasgele iki gruba ayırabilecek kadar veri elde yoktur. Böyle durumlarda *PRESS* istatistiğinden yararlanmak iyi bir yaklaşımdır.

PRESS (The *PR*ediction *E*rror *S*um of *S*quares-kestirim hata kareler toplamı) istatistiği, regresyon modelinin geçerliğinin ve kestirimdeki başarısının bir ölçüsü olarak kullanılır ve de verideki diğer gözlemleri kullanarak soruna yukarıdaki yaklaşımların dışında bir

yaklaşım getirir. *i.* gözlem için bulunan $e_{(i)} = y_i - \hat{y}_{(i)}$ artığına ***PRESS artığı*** denir. Buradaki $\hat{y}_{(i)}$ kestirimini bulmak için; *i. gözlem veriden çıkartılarak geriye kalan n−1* gözlem için regresyon denklemi bulunur. Bu denklemde, veriden çıkartılan *i.* gözlemin bağımsız değişken değerleri için kestirilen y değeri, $\hat{y}_{(i)}$ değeridir. Bu nedenle $e_{(i)}$ bir ***kestirim hatasını*** ifade eder. Bu işlemler tüm gözlemler için tekrarlanarak *n* adet *PRESS* artığı ($e_{(1)}, e_{(2)}, \ldots, e_{(n)}$) elde edilir. Buradan, *PRESS* istatistiği ise, *n* tane *PRESS* artığının kareleri toplamı olarak tanımlanır. *PRESS* istatistiği aşağıda verilmiştir.

$$PRESS = \sum_{i=1}^{n} e_{(i)}^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_{(i)})^2 \qquad (7.105)$$

Yukarıdaki açıklama ve eşitlikten anlaşılacağı gibi, *PRESS* istatistiği *n-1* gözlemli *n* tane regresyon denkleminin kullanımını gerektirir. Ancak, *PRESS* istatistiği *n* gözlemli en küçük kareler regresyon denklemi yardımı ile de bulunabilir. Bu amaçla gözlem uzaklıklarından yararlanılır ve *i. PRESS* artığı, $e_{(i)}$;

$$e_{(i)} = \frac{e_i}{1 - p_{ii}} \qquad (7.106)$$

ile verilir. *PRESS* istatistiği *PRESS* artıklarının kareleri toplamı olduğu için, *PRESS* istatistiği için kısa formül;

$$PRESS = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{e_i}{1 - p_{ii}} \right)^2 \qquad (7.107)$$

olarak verilir. Yukarıdaki eşitlikten de anlaşılacağı gibi, p_{ii} gözlem uzaklıkları büyük ise *PRESS* artıkları da büyük değerler alır. Bu gözlemler genellikle etkili gözlemlerdir. Genellikle, bir *PRESS* artığı ($e_{(i)}$) ile ilgili ham artık (e_i) arasındaki fark büyük ise modelin o gözlem için veriye uyabileceğini, ancak yeni bir veri ya da veri grubu için bu noktanın iyi kestirim değerleri vermekte yetersiz kalacağı anlaşılmalıdır. Bu tür noktalar verinin geri kalan gözlemlerinden uzak gözlemlerdir.

Kestirim amaçlı birden çok model söz konusu olduğunda (örneğin, adımsal yöntemlerin kullanıldığı durumlarda), ***PRESS istatistiğinin küçük olduğu modeller kestirime ilişkin olarak daha elverişli modellerdir.***

Bazı *PRESS* artıklarının büyük olduğu durumlarda, *PRESS* istatistiğine en çok katkı, bu gözlemler tarafından yapılabilmektedir. Örneğin, Tablo 7.98'de *PRESS* istatistiğine en fazla katkıyı yapan gözlem 4. gözlemdir. Bir dağılımda bu katkıyı fazlasıyla yapan gözlemlerin (örneğin % 50'ye yakını oluşturan bir iki gözlemin) görece olarak uzak ve etkili oldukları söylenebilir.

Tablo 7.98. Hastane Verisi (Tablo 7.17) İçin e_i, p_{ii}, PRESS, r_i^* Artıkları ve PRESS İstatistiği

Gözlem No	e_i	p_{ii}	$e_i/(1-p_{ii})$	$e_{(i)}=[e_i/(1-p_{ii})]^2$	r_i^*
1	1.153	0.1588	1.3707	1.8787	1.188
2	-1.249	0.0998	-1.3875	1.9251	-1.250
3	0.802	0.0512	0.8453	0.7145	0.759
4	-1.744	0.1150	-1.9706	3.8833	-1.851
5	0.451	0.1575	0.5353	0.2866	0.448
6	-0.642	0.3772	-1.0308	1.0626	-0.749
7	-0.847	0.1588	-1.0069	1.0138	-0.856
8	-1.651	0.1549	-1.9536	3.8166	-1.782
9	0.802	0.0512	0.8453	0.7145	0.759
10	0.400	0.1180	0.4535	0.2057	0.387
11	-0.693	0.2078	-0.8748	0.7652	-0.717
12	1.204	0.0986	1.3357	1.7841	1.200
13	1.451	0.1575	1.7223	2.9662	1.534
14	0.905	0.1836	1.1085	1.2288	0.931
15	-0.054	0.3242	-0.0799	0.0064	-0.059
16	1.153	0.1588	1.3707	1.8787	1.188
17	0.153	0.1588	0.1819	0.0331	0.151
18	-0.600	0.1180	-0.6803	0.4628	-0.585
19	0.204	0.0986	0.2263	0.0512	0.195
20	-1.198	0.0512	-1.2626	1.5943	-1.160
				PRESS=26.2722	

PRESS istatistiği kestirim için yaklaşık bir R^2 değeri hesaplamakta da kullanılabilmektedir. Bu istatistik $R^2_{Kestirim}$ olarak gösterilir ve aşağıdaki eşitlikle hesaplanır.

$$R^2_{Kestirim} = 1 - \frac{PRESS}{KT_Y} \qquad (7.108)$$

Burada, Hastane Verisi (Tablo 7.17) için $R^2_{Kestirim}$ değeri;

$$R^2_{Kestirim} = 1 - \frac{PRESS}{KT_Y} = 1 - \frac{26.2722}{314.8} = 0.916$$

olarak bulunur. Buna göre, bu modelden yeni gözlemlerin kestirilmesindeki değişkenliğin % 91.6'sını açıklamasını bekleyebiliriz.

Uygulama verileri

1. Sistik Fibrosisli 25 hastaya ilişkin bazı veriler aşağıda verilmiştir. Bu örnekte, kötü beslenmenin bir ölçüsü olan y bağımlı değişkeni ile diğer bağımsız değişkenler arasındaki ilişkinin incelenmesi istenmektedir.

y: *Maksimal statik ekspirasyon basıncı* ($cm\ H_2O$)

x_1: *Yaş*

x_2: *Cinsiyet* (0 = *Erkek*, 1 = *Kadın*)

x_3: *Boy uzunluğu* (*cm*)

x_4: *Ağırlık* (*kg*)

x_5: Normal bireylerdeki yaşa özel medyanın yüzdesi olarak *vücut kitlesi* (*Ağırlık* / (*Boy uzunluğu*)^2) (*BMP*)

x_6: *1 saniyedeki zorlamalı ekspirasyon* (*nefes verme*) *hacmi* (FEV_1)

x_7: *Residual hacim* (*RV*)

x_8: *Fonksiyonel residual kapasite* (*FRC*)

x_9: *Toplam akciğer kapasitesi* (*TLC*)

Kişi	y	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
1	95	7	0	109	13.1	68	32	258	183	137
2	85	7	1	112	12.9	65	19	449	245	134
3	100	8	0	124	14.1	64	22	441	268	147
4	85	8	1	125	16.2	67	41	234	146	124
5	95	8	0	127	21.5	93	52	202	131	104
6	80	9	0	130	17.5	68	44	308	155	118
7	65	11	1	139	30.7	89	28	305	179	119
8	110	12	1	150	28.4	69	18	369	198	103
9	70	12	0	146	25.1	67	24	312	194	128
10	95	13	1	155	31.5	68	23	413	225	136
11	110	13	0	156	39.9	89	39	206	142	95
12	90	14	1	153	42.1	90	26	253	191	121
13	100	14	0	160	45.6	93	45	174	139	108
14	80	15	1	158	51.2	93	45	158	124	90
15	134	16	1	160	35.9	66	31	302	133	101
16	134	17	1	153	34.8	70	29	204	118	120
17	165	17	0	174	44.7	70	49	187	104	103
18	120	17	1	176	60.1	92	29	188	129	130
19	130	17	0	171	42.6	69	38	172	130	103
20	85	19	1	156	37.2	72	21	216	119	81
21	85	19	0	174	54.6	86	37	184	118	101
22	160	20	0	178	64.0	86	34	225	148	135
23	165	23	0	180	73.8	97	57	171	108	98
24	95	23	0	175	51.1	71	33	224	131	113
25	195	23	0	179	71.5	95	52	225	127	101

O'Neil ve Diğerleri., Am. Rev. Respir. Dis., 128, Sayfa 1051,1983.

2. Bir araştırıcı, uzun atlama verimine etki eden faktörleri incelemek amacıyla uzun atlayıcılar arasından rasgele seçilen 11 sporcuya ilişkin aşağıdaki ölçümleri elde ediyor (her bir ölçüm 5'er tekrarın ortalamasıdır).

y: *Uzun atlama verimi* (*m*)

x_1: *Son 10 metredeki ortalama hız* (*m/sn*)

x_2: *30 m deparlanse sprint koşusu* (*sn*)

x_3: *Üç adım durarak atlama mesafesi* (*m*)

x_4: *Durarak uzun atlama mesafesi* (*m*)

x_5: *5 adım koşudan uzun atlama mesafesi* (*m*)

Sporcu	y	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	6.525	9.045	3.38	7.75	2.66	4.80
2	6.117	9.048	3.40	8.42	2.88	5.18
3	5.888	9.285	3.30	8.60	2.94	5.21
4	6.152	9.015	3.21	8.81	2.98	5.00
5	5.968	8.595	3.43	7.28	2.54	4.73
6	5.676	8.770	3.45	7.91	2.70	4.66
7	5.937	8.756	3.46	7.66	2.66	4.25
8	5.543	8.453	3.53	8.10	2.68	4.68
9	5.495	8.400	3.51	7.62	2.62	4.53
10	4.602	7.938	3.85	6.25	2.20	3.54
11	5.124	8.120	3.44	7.50	2.53	4.44

Candan, Nurullah. Manisa Beden Eğitimi ve Spor Yüksek Okulu

3. Akciğer transplantasyonunda, alıcı ve vericilerin akciğerlerinin birbirine benzer boyutlarda olması istenmektedir. Ancak, toplam akciğer kapasitesinin (*TLC*) ölçülmesi oldukça güç olduğu için, bunun diğer bilgiler yardımıyla kestirilmesi oldukça kullanışlı bir yoldur. 32 alıcının transplantasyon öncesi *TLC* ölçümleri (tüm vücut plentismografisi ile elde edilmiştir) ile yaş, cinsiyet ve boy uzunluğu ölçümleri aşağıda verilmiştir. *TLC* ölçümleri ile kolay elde edilebilir diğer değişkenler arasındaki ilişkiyi araştırınız.

y: *Toplam akciğer kapasitesi (lt)*

x_1: *Yaş*

x_2: *Cinsiyet (0 = Kadın, 1 = Erkek)*

x_3: *Boy uzunluğu (cm)*

Kişi	y	x_1	x_2	x_3	*Kişi*	y	x_1	x_2	x_3
1	3.40	35	0	149	17	6.30	30	0	172
2	3.41	11	0	138	18	6.55	21	0	163
3	3.80	12	1	148	19	6.60	21	0	164
4	3.90	16	0	156	20	6.62	20	1	189
5	4.00	32	0	152	21	6.89	34	1	182
6	4.10	16	0	157	22	6.90	43	1	184
7	4.46	14	0	165	23	7.00	35	1	174
8	4.55	16	1	152	24	7.20	39	1	177
9	4.83	35	0	177	25	7.30	43	1	183
10	5.10	33	0	158	26	7.65	37	1	175
11	5.44	40	0	166	27	7.80	42	1	173
12	5.50	28	0	165	28	7.90	24	1	173
13	5.73	23	0	160	29	8.05	20	0	162
14	5.77	52	1	178	30	8.10	25	1	180
15	5.80	46	0	169	31	8.70	22	1	173
16	6.00	29	1	173	32	9.45	25	1	171

Otulana ve diğerleri. Transplantation, 48, Sayfa 625,1989.

4. Yüksek tansiyon (hipertansiyon) hastası olan 20 kişiye ilişkin veriler aşağıda verilmiştir. Regresyon denklemini elde edip gerekli incelemeleri yapınız.

y: *Ortalama arteryel kan basıncı (mm Hg)*

x_1: *Yaş (yıl)*

x_2: *Ağırlık (kg)*

x_3: *Vücut yüzeyi alanı* (m^2)

x_4: *Yüksek tansiyon hikayesi süresi (yıl)*

x_5: *Bazal kalp atım hızı (vuruş/dk)*

x_6: *Stres Ölçüsü*

Hasta	y	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	106	46	85.3	1.75	5.1	63	33
2	115	49	94.2	2.10	3.8	70	14
3	116	49	95.4	1.97	8.2	72	10
4	117	50	94.7	2.01	5.8	73	99
5	112	51	89.4	1.88	7.0	72	95
6	121	48	99.5	2.24	9.3	71	10
7	121	49	99.8	2.25	2.5	69	42
8	110	47	90.9	1.90	6.2	66	8
9	110	49	89.2	1.83	7.1	69	62
10	114	48	92.7	2.07	5.6	64	35
11	114	47	94.4	2.07	5.3	74	90
12	115	49	94.1	1.98	5.6	71	21
13	114	50	91.6	2.05	10.2	68	47
14	106	45	87.1	1.92	5.5	67	80
15	125	52	101.3	2.19	10.0	76	98
16	114	46	94.5	1.98	7.4	69	95
17	106	46	87.0	1.87	3.6	62	18
18	113	46	84.5	1.90	4.3	70	12
19	110	48	90.5	1.88	9.0	71	99
20	122	56	95.7	2.09	7.0	75	99

5. Bir araştırma grubu, solunum hastalıkları ile nelerin ilgili olabileceği konusunda bir çalışma yürütüyor. Veriler aşağıdadır.

y: *Hastalığın şiddeti (büyük değerler daha ciddi durumu gösterir)*

x_1: Bitirilen en son sınıf

x_2: *Yaşanan yerlerin kalabalıklık ölçüsü*

x_3: *Yerleşim yerindeki hava kalitesi (büyük değerler kötü kaliteyi gösterir)*

x_4: *Beslenme durumu (büyük değerler iyi beslemeyi belirtir)*

x_5: *Sigara içme durumu (0 = içen, 1=içmeyen)*

No	y	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	*No*	y	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	41	7	24	22	94	0	31	34	5	19	36	48	0
2	30	6	19	30	103	0	32	35	8	18	25	61	0
3	52	11	21	61	90	1	33	51	8	30	42	88	1
4	67	8	33	61	18	1	34	47	11	23	52	171	0
5	49	12	28	22	152	0	35	71	15	29	50	17	1
6	64	10	28	76	79	1	36	41	8	19	27	-37	0
7	62	11	25	79	11	1	37	55	8	28	31	-10	0
8	43	11	22	37	148	0	38	69	12	34	42	107	1
9	51	9	28	32	87	1	39	33	9	17	36	84	0
10	43	8	21	49	104	0	40	45	9	25	25	120	0
11	39	7	16	53	-4	0	41	41	10	24	15	91	0
12	66	12	32	52	41	1	42	38	10	21	34	188	0
13	48	8	25	44	70	0	43	42	10	19	29	35	0
14	58	9	33	13	44	1	44	71	13	34	51	16	1
15	67	10	28	78	59	1	45	65	10	32	64	51	1
16	29	6	16	29	66	0	46	40	7	23	42	97	0
17	50	9	24	23	36	0	47	56	13	28	38	114	1
18	68	11	33	31	-5	1	48	65	14	28	45	123	1
19	43	7	25	31	80	0	49	44	9	22	33	94	0
20	45	10	22	41	137	0	50	36	8	17	38	54	0
21	42	12	20	20	155	0	51	37	7	18	42	24	0
22	56	11	29	52	171	1	52	67	11	32	45	28	1
23	62	9	32	33	56	1	53	35	10	16	25	97	0
24	29	9	15	31	8	0	54	30	6	18	23	48	0
25	42	9	17	50	15	0	55	35	5	16	30	-2	0
26	33	9	17	36	84	0	56	42	11	16	29	43	0
27	52	7	30	42	26	1	57	51	9	24	44	14	1
28	54	11	25	40	81	1	58	60	13	23	70	24	1
29	64	13	25	65	50	1	59	25	7	15	32	27	0
30	47	8	25	39	79	0	60	75	12	36	50	95	1

Bölüm 8

GÜVENİRLİK

Kitabın değişik yerlerinde kullanılan veri gruplarındaki değişkenlerin bazıları geliştirilen değişik "testler" yardımıyla elde edilmiştir. Örneğin, Tablo 6.1'deki değişkenler arasında yer alan *MAXVO2*, sporcuların maksimum oksijen kullanımını belirleyebilmek amacıyla geliştirilen bir test yardımıyla elde edilmiş bir ölçümdür. Bu anlamda ölçüm sözcüğü, test sözcüğü ile birbiri yerine kullanılabilen bir anlam taşımaktadır. Diğer bir deyişle, örneğin *MAXVO2* ölçümü, *MAXVO2* testi ile aynı anlamı taşımaktadır. Aynı tablodaki *SBİL* değişkeni de sporcuların spor bilgi puanını belirlemek amacıyla çeşitli sorulardan oluşan bir bilgi testi sonucunda elde edilmiş puanları içermektedir.

Birçok alanda fiziksel yöntemlere dayalı ölçme araçlarının kullanılması gerekir. Örneğin, boy ve ağırlık gibi somut nitelikleri doğrudan doğruya bir metre ve terazi ile ölçmek olanaklıdır. Ancak, bireylerin tutum, kişilik gibi soyut özelliklerinin ölçülmesinde fiziksel araç ve gereçler bulunmadığı için değişik ölçme araçları geliştirilerek dolaylı ölçüm elde etme yoluna gidilir. Bu tür ölçüm araçlarının bir bölümü *k* tane madde (soru) içerir. Çünkü tek bir madde ile bir özelliği ölçmek pek olası değildir. Özet olarak birçok alanda (özellikle psikoloji ve eğitim alanında) bireylerin tutumları, davranışları ve benzeri özellikleri amaca yönelik olarak sorulan sorulardan oluşan ***ölçek*** (scale) ya da ***test*** yardımıyla öğrenilmek istenir.

Yeni geliştirilen bir testin iki özelliği yerine getirmesi istenir. Bunlar, ***geçerlik*** ve ***güvenirlik***tir (validity ve reliability). Bunların dışında bir diğer özellik de testin ***kullanışlılığı***dır. Kullanışlılık kısaca, ölçtüğü şeyi geçerli ve güvenilir şekilde ölçen bir teste ilişkin uygulama ve puanlamanın kolay olması ve de testin ekonomik açıdan masrafsız olması ile ilgili bir kavramdır.

Bir test, "ölçmek istediği özelliği" doğru ve diğer özelliklerle karıştırmadan ölçüyor ise testin ***geçerli*** olduğu söylenir. Örneğin, genç atletlerin ileride kısa ya da uzun mesafeci olup olmayacağını belirlemek amacıyla bir test geliştirilmiş ise bu test istenen amacı sağlamalıdır. Diğer bir deyişle, yanlışlıkla uzun mesafecileri kısa mesafeciler grubuna katmamalıdır. Yine örneğin, voleybol dersi genel sınavında öğrencilerin ***genel başarısını*** ölçmek için geliştirilen bir testteki soruların anlatılan tüm konuları (oyun kuralları, teknik-taktik ve maç stratejileri) kapsaması beklenirken, yöneltilen soruların tümünün teknik-taktik çalışmalar konusunda olması, testin öğrencilerde "iyi bir test

olmadığı, çünkü testin ölçmek istediği özelliği (genel başarıyı) ölçmediği kanısını uyandırması" çok doğaldır. Geçerliğin kapsam geçerliği, ölçüt geçerliği, kestirim (yordama) geçerliği, .. gibi birçok çeşiti vardır. Ancak, burada bunlara değinilmeyecektir. İsteyen okurlar bu konuda, Kaynakçadaki 2, 5, 6, 35, 41, 44 ve 54 nolu kaynaklara başvurabilirler.

Geçerliğin değerlendirilmesinde korelasyon katsayılarından ve regresyon yöntemlerinden sıklıkla yararlanılır.

Geçerli bir testte bulunması gereken önemli bir özellik, ***testin güvenilir olmasıdır.*** Bir testin aynı bireylere birden çok kez uygulanması durumunda testten beklenen şey; uygulama sonuçlarının benzerliğidir. Dolayısıyla ***güvenirlik***; "***bir ölçüm sürecinde, ölçüm işleminin tekrarlanabilirliği ya da tekrarlardaki tutarlılık***" olarak tanımlanabilir. Örneğin, uygulanılan testten elde edilen skorlar, test aynı koşullar altında tekrar uygulandığında önemli düzeyde farklılık gösteriyor ise testin güvenirlik derecesinin düşük olduğu anlaşılır. Benzer şekilde, 10 bireyin aerobik kapasiteleri 4 saat ara ile iki kez ölçüldüğünde, elde edilen değerlerin benzer olması, aerobik kapasiteyi ölçen testin güvenilir olduğunu gösterecektir. Bu özellik, bir test için son derece önemlidir. Çünkü, test sonucunda elde edilen skorun, bireyin gerçek yeteneğinin, başarısının, .. vb. iyi bir göstergesi olması beklenir. Elde edilen skorlar önemli hatalar içerirse; aynı gün ya da birkaç gün içinde yapılan ölçümler farklı bulunur ve testin güvenirliğinden söz edilemez. Güvenirlik bir testin geçerliğini etkiler. Bu aşamada bilinmesi gereken bir özellik, ***geçerli bir testin mutlaka güvenilir olması gerektiğidir.*** Çünkü, ölçmek istediğini ölçen bir test, bir şey hakkında sürekli olarak aynı bilgiyi vermelidir. Ancak, ***güvenilir bir test geçerli olmayabilir.*** Örneğin, voleybol dersi alan öğrencilerin voleybol becerilerini ölçmek için geliştirilmiş çok bilinen bir test; "parmak pas" testidir. Bu test sonucunda elde edilecek skor, belirli bir mesafe, yükseklik ve süre kısıtlaması altında topun duvara vurma sayısıdır. Bu teste ilişkin olarak yapılacak bir güvenirlik çalışmasında, öğrenciler; istenen beceriyi kötü ve belki de oyun kurallarına aykırı şekilde uygulayarak bu testin güvenilir bir test olduğu izlenimini uyandırabilirler. Ancak, becerinin istenen şekilde uygulanmaması testin geçerli olmadığını gösterir. Yani güvenirlik, geçerliği garanti etmemektedir.

Klasik test teorisine göre, ölçmenin hatasız yapılabilmesi durumunda bile, ölçülen bireylerin ölçülen niteliğine ilişkin ***gerçek skorları*** vardır. Diğer bir yaklaşımla, ölçme sürecini etkileyen faktörler ve ölçme araçlarının az ya da çok kusurlu olmaları nedeniyle ölçme araçları ile elde edilen ***gözlenen skorlar*** gerçek skorlara göre farklılıklar gösterir. Bu iki skor arasındaki farkın ölçme hatalarından kaynaklandığı söylenir. Test sonucunda elde edilen ***gözlenen skor*** genellikle x ile gösterilir. Gözlenen skorun iki bileşeni; ***gerçek skor*** (t) ve ***hata skoru***, (e)'dir. Diğer bir deyişle, gözlenen (elde edilen) skor, gerçek skor ile hata skorunun toplanmasından oluşur ve ;

$$x = t + e \qquad (8.1)$$

ile verilir. Eşitlik (8.1), bireylerin gerçek puanı hiçbir zaman bilinmediği için kuramsal (teorik) bir eşitliktir. Diğer bir deyişle, gerçek puan kuramsal bir kavramdır. Temelde gerçek puan, sayılabilir sonlu sayıdaki ölçüm sonuçlarının aritmetik ortalaması olarak tanımlanır. Ancak, bir bireyin belirli bir özelliğinin aynı koşullarda sonsuz kez

ölçülmesi uygulama olarak olanaklı değildir. Olanaklı olsa bile, uygulama sırasında değişiklikler ve ardışık ölçümler süresince gerçekleşen öğrenmeler nedeniyle gerçek performans elde edilemeyecektir.

Eşitlik (8.1) ile ilgili olarak, örneğin, boy uzunluğu t=191.75 cm olan bir bireyin ölçüm (test) sonucunda elde edilen gözlenen skoru x=192.00 cm ise ölçümün hatası e=0.25 cm olacaktır. Buradan, (8.1) yardımıyla,

$$192.00=191.75+0.25=192.00$$

olur. Bireyi tekrar ölçtüğümüzde boy uzunluğunu 191.00 cm olarak bulursak, ölçüm hatası −0.75 cm olacak ve (8.1) yardımıyla,

$$191.00=191.75+(-0.75)=191.00$$

bulunacaktır.

(8.1) ile verilen eşitlik, varyanslar için de söz konusudur. Diğer bir deyişle, gözlenen skorların varyansı, σ_x^2; gerçek skorların varyansı olan σ_t^2 ile hata skorları varyansı olan σ_e^2'nin toplamına eşittir (8.2).

$$\sigma_x^2 = \sigma_t^2 + \sigma_e^2 \qquad (8.2)$$

Eşitlik (8.2) yardımıyla ***güvenirlik*** ya da ***güvenirlik katsayısı***; gerçek skorlar varyansının gözlenen skorlar varyansına bölünmesi ile bulunur (8.3).

$$Güvenirlik = \frac{\sigma_t^2}{\sigma_x^2} \qquad (8.3)$$

Ancak, bireylerin gerçek skoru bilinmediği için σ_t^2'nin hesaplanması olanaklı değildir. Daha sonra görüleceği gibi güvenirlik, σ_t^2 ve σ_x^2'in kestiricileri yardımıyla elde edilebilir.

(8.3) eşitliği σ_e^2 cinsinden de yazılabilir. Buna göre güvenirlik;

$$Güvenirlik = \frac{\sigma_t^2}{\sigma_x^2} = \frac{\sigma_x^2 - \sigma_e^2}{\sigma_x^2} = 1 - \frac{\sigma_e^2}{\sigma_x^2} \qquad (8.4)$$

olur. (8.4) eşitliği yardımıyla aşağıdaki yorumlar yapılabilir.

1. Test yapılan bir bireyin skorunda hiçbir hata yok ise σ_e^2=0 olacaktır. Bu durumda, maksimum güvenirliğe ulaşılacak ve güvenirlik=1 olarak bulunacaktır.
2. Ölçüm hataları yani σ_e^2 artarken, güvenirlik düşer. Böylece güvenirlik, bir skorlar kümesindeki ölçüm hataları miktarının bir göstergesidir.

İstatistik yazılımların bir bölümünde güvenirlik ile ilgili alt modül vardır. Bu modül yardımı ile toplama dayalı ölçeklerin oluşturulmasında ve değerlendirilmesinde yardımcı olacak birçok istatistik ilgililere sunulmaktadır. Bu modüller, tekrarlı ölçümlerin güvenirliğinin değerlendirilmesi, farklı ölçüm araçlarına ilişkin sonuçların değerlendirilmesi gibi amaçlar için de kullanılmaktadır.

Güvenirlik Katsayısı ve Kestirimi

Yukarıda belirtildiği gibi güvenirlik katsayısı, gerçek skorlara ilişkin varyansın gözlenen skorlara (Eşitlik (8.2)'de belirtildiği gibi gerçek skor ve hata skorundan oluşuyordu) ilişkin varyansa bölünmesi ile bulunur. Ancak, gerçek skorların bilinmemesi, güvenirlik katsayısının dolaylı olarak hesaplanması zorunluluğunu doğurur. Güvenirlik katsayıları, güvenirliği bulmak için izlenen yönteme ve amaca bağlı olarak değişik formüllerle hesaplanır. Burada, önce ***Test–tekrar test yöntemi, sınıfiçi güvenirlik katsayısı*** (R_1), ***Cronbach alfa katsayısı*** (R_2 ya da α), ***bir testin iki yarıya bölünmesi yöntemine dayalı güvenirlik katsayısı*** üzerinde durulacak ve ***Kuder-Richardson 20 ve 21 formüllerine*** kısaca değinilecektir. Daha sonra da ***ölçekteki maddelerin ölçeğe katkısını anlamaya yönelik olarak yapılan yaklaşımlar*** üzerinde durulacaktır.

Test-Tekrar Test Yöntemi Ve Güvenirlik (Korelasyon) Katsayısı

Güvenirlik katsayısının kestiriminde kullanılan bir yöntem; bir testin aynı gruba belli bir zaman aralığı ile iki kez uygulanması (test–tekrar test ya da *test-retest*) ve bu iki testten elde edilen skorlar arasındaki *korelasyon katsayısının* hesaplanmasıdır. Bulunan korelasyon katsayısı (*r*), teste ilişkin güvenirlik katsayısıdır. *r*; +1'e ne kadar yaklaşırsa testin o kadar güvenilir olduğu söylenir. Diğer bir deyişle, konu güvenirlik katsayısı olunca, elde edilen korelasyon katsayısının pozitif ve oldukça yüksek olması arzu edilmektedir. Benzer yaklaşımlar, değerlendiriciler arasındaki güvenirliğin belirlenmesi açısından da geçerlidir. Ancak, ***iki değişken*** arasındaki doğrusal ilişkinin kuvveti hakkında bilgi veren ***Pearson Korelasyon Katsayısı***, "aynı testin tekrarlandığı durumlara ilişkin güvenirliği" hesaplamak amacıyla bazen yanlışlıkla kullanılmaktadır. Bilindiği gibi bu yöntemi kullanabilmek için her bir birey için *x* ve *y* gibi iki skorun elde edilmesi gerekmektedir. Örneğin *x* skorları aynı gün içinde 1. denemeye, *y* skorları ise aynı gün içinde 2. denemeye ya da *x* skorları 1. gündeki ölçümlere, *y* skorları ise 2. gündeki ölçümlere ilişkin skorlar olabilir. Buna göre, testin ilk uygulanışı ile ikinci uygulanışından elde edilen değerler arasında ***sistematik*** bir artış ya da azalış var ise korelasyon katsayısı yüksek çıkacaktır. Ancak, korelasyon katsayısı yüksek çıkmakla birlikte iki uygulamadan elde edilen sonuçların ortalamaları anlamlı derecede farklı olabilir. Örneğin, Tablo 8.1'de verilen skorları ele alalım. Bu veride, sporcuların aynı teste ilişkin 1. gün ve 2. gün sonuçları verilmiştir. Tabloda görüldüğü gibi, ***r=+1*** olmasına rağmen, 2. gün yapılan ölçümlerin ortalaması 1. gün ölçümleri ortalamasına göre çok farklıdır.

Tablo 8.1. Korelasyon Verisi

	Test Sonuçları	
Sporcu	*1. Gün*	*2. Gün*
1	3	30
2	6	60
3	9	90
4	12	120
5	15	150
6	18	180
$\bar{X}$	**10.5**	**105.0**
S	5.61	56.12
	r=+1.00	

Böyle durumlarda, iki gruptaki değerler arasında anlamlı fark olmasına rağmen (çünkü, ortalamalar çok farklıdır), korelasyon katsayısı yardımıyla, "***skorların yüksek derecede güvenilir olduğu***" şeklinde yanlış bir sonuca ulaşılabilir. Diğer bir deyişle, korelasyon katsayısı, ortalamalardaki değişimi incelemekte yetersiz kalır. ***Korelasyon katsayısının diğer bir sorunu ise, aynı anda sadece iki veri setine uygulanabilmesidir***. Ancak, birçok durumda, ***ikiden çok ölçümün*** güvenirliği ile ilgilenilir. Örneğin, geliştirilen bir testin güvenirliğini öğrenmek amacıyla, ilgili test bireylere ***peşpeşe 3 gün uygulanabilir***. Bu konuda ayrıntılı bilgi için Kaynakçadaki 2 ve 6 nolu kaynaklara başvurulabilir.

Sınıfiçi Güvenirlik Katsayısı (*Intraclass Correlation Coefficient*)-(R_1)

Sınıfiçi (intraclass) sözcüğü, aynı değişkenin tekrarlı ölçümlerini analiz etmek (bir testin aynı bireylere tekrar verilmesi, bir ölçümün aynı ölçücü tarafından değişik zamanlarda yapılması, bir testin iki ölçücü tarafından yapılması, .. vb.) gibi bir kavram içerirken, sınıflararası (interclass) sözcüğü iki farklı değişkenin analizi için uygun bir kavramdır (korelasyon katsayısı gibi). Yukarıda belirtildiği gibi korelasyon katsayısı sadece iki veri setine uygulanabilir ve ortalamalardaki değişiklikleri dikkate almaz.

Sınıfiçi güvenirlik katsayısı (R_1), denemeden denemeye ya da günden güne iki ya da daha fazla ölçümün yapıldığı durumlarda uygulanabilir ve tekrarlı ölçümlerin ***hem sistematik hem de ortalamalara*** ilişkin değişikliklerine duyarlıdır. Bu nedenle de yukarıdaki durumların her ikisine de çözüm getirir. Bu yöntemde sınıfiçi (intraclass) sözcüğünün kullanılmasının nedeni, aynı değişkenin tekrarlı ölçümlerinin incelenmesi nedeniyledir.

Sınıfiçi güvenirlik katsayısı (R_1) bulunurken, ***bağımsız gruplarda tek yönlü varyans analizi***nden ya da ***tekrarlı ölçümlerde varyans analizi***nden yararlanılabilir. Ancak, tekrarlı ölçümlerde varyans analizini kullanmak; R_1 ve R_2 katsayılarının her ikisinin de bulunmasını sağladığı için daha çok tercih edilir.

R_1 katsayısını ***tekrarlı ölçümlerde tek yönlü varyans analizi*** ile bulabilmek için, verilere tekrarlı ölçümlerde varyans analizi uygulanır. Tekrarlı ölçümlerde varyans analizine ilişkin sonuçların özetlendiği bir varyans analizi tablosu örneği Tablo 6.21'dedir. Varyans analizi tablosundaki değerler yardımıyla sınıfiçi güvenirlik katsayısı, R_1 ;

$$R_1 = \frac{Denekler\ Arası\ KO - \dfrac{Gruplar\ Arası\ KT + Hata\ KT}{Gruplar\ Arası\ SD + Hata\ SD}}{Denekler\ Arası\ KO} \qquad (8.5)$$

ile verilir. İstatistiksel yazılımlar, ilgili menünün çıktılarında isteğe bağlı olarak tekrarlı ölçümlerde varyans analizi sonuçlarını da vermektedir. Tekrarlı ölçümlerde varyans analizi sonucunda gruplar (maddeler-tekrarlar) arasına ve denekler arasına ilişkin iki tane F istatistiği bulunabilir. Her iki F istatistiği de ilgili kareler ortalamasının hata kareler ortalamasına bölünmesi ile bulunur. Deneklere ilişkin F istatistiğinin anlamlı bulunmaması durumunda güvenirliğin düşük olması beklenir. Gruplar arasına ilişkin F

istatistiğinin anlamlı bulunmaması, grup ortalamaları arasındaki farkın önemli olmadığı hakkında bilgi verir ki bu istenen bir durumdur.

Genel olarak, ***fizyolojik veriler*** için R_1 değerinin ***0.90'ın üzerinde olması*** "*yüksek*", ***0.80-0.89 arasında olması*** "*orta*" ve ***0.80'in altında olması*** "*şüpheli*" olarak nitelendirilir. ***Davranış bilimlerinde, 0.70-0.80 arasındaki değerler***, ölçüm aracının tipine bağlı olarak "*kabul edilebilir*" olarak nitelendirilebilir. R_1 değeri, ***değerlendiriciler arasındaki güvenirliği*** hesaplamak için kullanıldığında; ***0.95-1.00 arası*** "*mükemmel*", ***0.85-0.94 arası*** "*yüksek*", ***0.70-0.84 arası*** "*orta*" ve ***0.0-0.69 arası*** "*kabul edilemez*" olarak nitelendirilir. Tekrar ortalamaları arasındaki fark anlamlı ise R_1'in değeri negatif çıkabilmektedir. Bu durumda güvenirlikten söz edilemez.

Alfa Katsayısı (*Cronbach's Alpha*)- (R_2 ya da α)

Bazen, denemeden denemeye ortalama değerlerde meydana gelen değişiklikleri gözönüne almadan güvenirliği ölçmek isteyebiliriz. Örneğin, veriler ***sıralı (ordinal)*** bir veri tipinde (örneğin, Likert tipi bir ölçek) ise ortalama değerleri dikkate almak uygun değildir. Böyle durumlarda, ortalamalardaki değişimlerden kaynaklanan varyansı gözardı ederek, deneklerin sadece sıralamadan kaynaklanan varyansı elde edilir ve bu değere ***alfa katsayısı*** (Cronbach's alpha) denir. Alfa katsayısı R_2 ya da α ile de gösterilir.

Cronbach alfa katsayısı, çoktan seçmeli ve toplam puanlar üzerine kurulu ölçeklerin güvenirliğinin belirlenmesinde de sıklıkla kullanılır. Bir bireyin bir olay çerçevesindeki bilgi, tutum ve davranışı ölçekte yer alan *k* tane maddeye (soruya) verilen yanıtların değerleri (puanları–skorları) toplanarak bulunuyorsa bu ölçek toplam puanlar üzerine kurulu bir ölçektir. Bu amaçla ***Likert tipi ölçek***lerden sıklıkla yararlanılır. Likert tipi ölçekler genellikle 5 seçeneklidir ve bu ölçekteki maddelere ilişkin her seçeneğe 1'den 5'e kadar puan verilir. Örneğin, bireylerin spora ilişkin tutumlarını ölçmek amacıyla bir ölçek geliştirilecekse, önce spora ilişkin tutum belirttiği düşünülen olumlu ve olumsuz birçok cümle yazılır. *Sporla ilgili olumlu bir tutum için "spor ile ilgilenmek beni eğlendirir", olumsuz bir tutum için "spordan hiç hoşlanmam", .. gibi cümleler (maddeler) oluşturulur. Bireylerden, bu cümleleri; a) Kesinlikle katılıyorum, b) Katılıyorum, c) Kararsızım, d) Katılmıyorum e) Kesinlikle katılmıyorum gibi 5 seçenek içeren bir ölçekle derecelemeleri istenir. Ölçek yeterli sayıda deneğe uygulandıktan sonra, olumlu cümleler a=5, b=4, c=3, d=2, e=1 ve olumsuz cümleler a=1, b=2, c=3, d=4, e=5 olacak şekilde puanlanır. Böylece, yüksek puanlar her zaman olumlu tutumu gösterir.* ***Daha sonra her bireyin maddelerden aldığı puanlar toplanarak o bireyin geliştirilen testten (ölçekten) aldığı puan elde edilir*** *(bu konuda ayrıntılı bilgi için Kaynakçadaki 6 ve 53 nolu kaynaklara başvurulabilir).* Bu tür çalışmalarda, birbiriyle yüksek ilişki gösteren maddelerden oluşan ölçeklerin alfa katsayısı daha yüksek bulunur. ***Cronbach alfa katsayısı, ölçek içinde bulunan maddelerin iç tutarlığının (homojenliğinin) bir ölçüsüdür. Diğer bir deyişle, alfa katsayısı ile ölçekte yer alan k tane maddenin (sorunun) türdeş bir yapıyı açıklamak ya da sorgulamak üzere bir bütün oluşturup oluşturmadıklarının sorgulanması konusunda bilgi elde edilir. İlgili ölçeğin alfa katsayısı ne kadar yüksek olursa "bu ölçekte bulunan maddelerin o ölçüde birbirleriyle tutarlı ve aynı özelliğin***

ögelerini yoklayan maddelerden oluştuğu ya da tüm maddelerin o ölçüde birlikte çalıştığı" yorumu yapılır.

Alfa katsayısının hesaplanmasında çeşitli yaklaşımlardan yararlanılabilir. Bunlar aşağıda verilmiştir;

1. ***Varyans Analizi Yaklaşımı***: Bu yaklaşımda, ***maddeleri tekrar olarak düşünerek*** veriye tekrarlı ölçümlerde varyans analizi uygulanır ve varyans analizi sonuçlarından yararlanılarak alfa katsayısı elde edilir. Buna göre alfa katsayısı;

$$R_2 = \alpha = \frac{DAKO - HKO}{DAKO} \qquad (8.6)$$

olarak verilir. Burada, *DAKO*: *Denekler Arası Kareler Ortalaması*, *HKO*: *Hata Kareler Ortalaması*'dır.

2. ***Madde ve Madde Toplamlarının Bulunması Yaklaşımı***: Alfa katsayısı, R_2, varyans analizine başvurmadan da hesaplanabilir. Bu amaçla, maddelerin ve maddelerdeki değerlerin toplanmasından elde edilen değişkenin (ölçeğin/bütünün) varyansları bulunur ve Eşitlik (8.7)'den yararlanılır:

$$R_2 = \alpha = \left(\frac{k}{k-1}\right)\left(\frac{S^2_{Toplam} - \sum_{i=1}^{k} S_i^2}{S^2_{Toplam}}\right) \qquad (8.7)$$

Burada,

k : *Grup (deneme-madde) sayısı*

S^2_{Toplam} : *Her bir gözleme ilişkin deneme (madde) değerlerinin toplanması ile elde edilen değişkenin varyansı*

S_i^2 : *Her bir deneme (madde) varyansı*

3. ***Maddeler Arası Kovaryans Değerlerinin ve Korelasyon Katsayılarının Elde Edilmesi Yaklaşımı:*** Toplam puanlar üzerine kurulu bir ölçekte yer alan maddelerin birbirleri ile yakınlıklarının derecesini ortaya koymak için geliştirilen güvenirlik ölçülerinden çoğu maddeler arası korelasyonlar yardımıyla geliştirilmiştir. Maddeler aynı özelliği yoklayan maddeler ise aralarındaki korelasyon da doğrusal ve pozitif yönde olacaktır. Daha önce de belirtildiği gibi, iki değişken arasındaki ilişkinin kuvvetini gösteren birçok ilişki katsayısı vardır. Bunlardan Pearson korelasyon katsayısı (r), sürekli sayısal veri tipindeki iki değişken arasındaki doğrusal ilişkinin kuvveti hakkında bilgi verir. İki değişken arasındaki doğrusal ilişkinin bir diğer göstergesi de kovaryanstır. Alfa katsayısının kovaryans ve korelasyona bağlı formülleri ise aşağıdadır;

$$R_2 = \alpha = \frac{k\overline{cov}/\overline{var}}{1+(k-1)\overline{cov}/\overline{var}} \qquad (8.8)$$

Burada,

k: *madde (soru) sayısı,*

$\overline{cov}$: *maddeler arasındaki kovaryansların ortalaması,*

$\overline{var}$: *maddelere ilişkin varyansların ortalamasıdır.*

Maddeler, aynı varyansa sahip olacak şekilde standartlaştırıldığında (örneğin, maddelere z dönüşümü yapıldığında) alfa katsayısı;

$$R_2 = \alpha = \frac{k\bar{r}}{1+(k-1)\bar{r}} \qquad (8.9)$$

ile verilir. Burada,

k: *madde (soru) sayısı,*

$\bar{r}$: *maddeler arasındaki korelasyon katsayılarının ortalaması*

Ölçekteki maddelerin varyansları farklı ise Eşitlik (8.8) ve Eşitlik (8.9) ile elde edilen alfa katsayıları oldukça farklı bulunur.

Eşitlik (8.9)'dan anlaşılacağı gibi, alfa katsayısı maddeler arasındaki korelasyon katsayılarının büyüklüğüne ve ölçekteki soru sayısına bağlıdır. Örneğin, korelasyon katsayıları ortalamasının 0.25 olduğu 10 maddelik bir ölçekte (testte) alfa katsayısı Eşitlik (8.9) yardımıyla 0.769 olarak bulunurken, madde sayısı 20'ye çıktığında alfa katsayısı 0.869'a çıkar. Diğer bir deyişle, maddeler arasındaki korelasyon katsayıları ortalaması küçük bile olsa, ölçekteki madde (soru) sayısı yeterince büyükse, oldukça büyük bir güvenirlik katsayısına ulaşılabilir. Alfa katsayısı korelasyon katsayısı gibi yorumlanabilir ve 0 ile 1 arasında değerler alır (Not: Maddeler arasında negatif ilişki var ise alfa katsayısı negatif bulunabilir. Bu durumda ölçek güvenilir değildir.)

Alfa katsayısı aşağıdaki gibi nitelendirilir.

Alfa katsayısı;

0.80-1.00 arasında ise;	*Geliştirilen test (ölçek) yüksek güvenirliğe sahiptir.*
0.60-0.80 arasında ise;	*Geliştirilen test oldukça güvenilirdir.*
0.40-0.60 arasında ise;	*Geliştirilen testin güvenirliği düşüktür.*
0.00-0.40 arasında ise;	*Geliştirilen test güvenilir değildir.*

Yukarıdaki açıklamalardan anlaşılacağı üzere, ileride üzerinde duracağımız madde analizine yönelik çalışmalarda, maddelere ilişkin matris şeklindeki saçılım grafiklerinin ve korelasyon matrisinin öncelikle incelenmesi ve kitabın diğer bölümlerinde

korelasyon katsayısı ile ilgili olarak verilen çeşitli açıklamaların dikkate alınması gerekmektedir.

R_1 ve R_2'nin Kullanım Yerleri

R_1, ölçüm sonucunun sürekli veri tipinde olduğu durumlarda tercih edilirken R_2, ölçüm sonucunun sıralı veri tipinde olduğu durumlarda tercih edilmektedir. R_2 veri tipinin sürekli olduğu durumlarda da kullanılabilmektedir. R_2, grup (madde-tekrar) ortalamaları arasındaki farkın anlamlı olmadığı ya da ihmal edilebilir olduğu durumlarda tercih edilmeli, ortalamalar arasında fark var ise R_2 kullanılmamalıdır. Çünkü, ortalamalar arasındaki farkın anlamlı olduğu ancak, gruplar arasındaki korelasyon katsayılarının yüksek olduğu durumlarda, R_2 ile çok yüksek bir güvenirliğe ulaşmak söz konusu olabilmektedir. Ortalamalardaki değişimin anlamlı olmadığı ya da ihmal edilebilir olduğu durumlarda R_1 ve R_2 birbirine oldukça yakın elde edilirler.

Bir Testin İki Yarıya Bölünmesi Yöntemine Dayalı Güvenirlik Katsayısı (Split Half Reliability)

Özellikle *yazılı* testlerinde bir testin (ya da ölçeğin) güvenirliğini belirlemek için aynı testin aynı gruba iki kez uygulanmasının getireceği bazı sakıncalar (örneğin, iki testin aynı koşullarda uygulanamaması gibi) vardır. Bu sakıncaları giderebilmek için *testin bir kez uygulanması ile elde edilebilecek* değişik güvenirlik yöntemlerinden en çok kullanılanı, bir testin iki yarıya bölünmesi yöntemidir. Bu yöntemde test, iki eşdeğer yarıya bölünerek her iki yarıdaki maddelerin toplamından oluşan iki değişken arasındaki korelasyon katsayısı (r) bulunur. Bulunan korelasyon katsayısı testin yarısı için güvenirlik katsayısını verir. Testin tamamına ilişkin güvenirlik katsayısı ***Spearman-Brown*** formülü yardımıyla hesaplanır. Spearman-Brown formülü (r_{sb}) aşağıda verilmiştir.

$$r_{sb} = \frac{2r}{1+r} \qquad (8.10)$$

Burada, r: *her iki yarıdaki maddelerin toplanmasından elde edilen iki değişken arasındaki Pearson korelasyon katsayısı*dır. Eğer bir ölçek ya da test mükemmel derecede güvenilirse, her iki yarıdaki maddelerin toplanmasından elde edilen iki değişken arasındaki korelasyon katsayısı 1 ya da 1'e çok yakın olacaktır. Eğer r=1 ise r_{sb}=1 olarak bulunur. ***Eğer her iki yarıdaki madde sayısı eşit değil ise, testin bütününe ilişkin Spearman-Brown katsayısı (unequal-length Spearman-Brown coefficient) bazı istatistiksel yazılımlarda çıktı olarak verilmektedir.*** Bir testin iki yarıya bölünmesi yönteminde, her iki bölümün içerik ve zorluk açısından eşdeğer (benzer) olduğu varsayımı olmakla birlikte uygulamada bu varsayım sıklıkla gözardı edilir.

Bu yöntemin sakıncalı yönü, sonuçların maddeleri iki yarıya bölme işlemine bağlı olmasıdır. Bir testin iki yarıya bölünmesi yönteminde, testin iki eşdeğer yarıya bölünmesi genellikle iki şekilde olur.

I. Örneğin, testte 10 madde varsa, ilk 1-5. maddeler birinci yarıyı, 6-10. maddeler de ikinci yarıyı oluşturur.

II. İlk yarıyı tek sayılı 1, 3, 5, 7 ve 9. maddeler oluştururken, ikinci yarıyı çift sayılı 2, 4, 6, 8, ve 10. maddeler oluşturur.

Bazen, testteki madde sayısı fazla ise testin iki eşdeğer yarıya bölünmesi işlemi rasgele olarak da yapılabilmektedir. Ancak, testteki sorular güçlük dereceleri açısından baştan sona doğru farklılıklar gösteriyor ise tek numaralı sorular bir grubu, çift numaralı sorular diğer grubu oluşturacak şekilde testi ikiye bölmek daha uygundur.

Bir testin iki yarıya bölünmesi yöntemine spor bilimlerinde de (örneğin, motor beceri testlerinde) sıklıkla başvurulur. Özellikle yukarıda verilen testi iki yarıya bölme yöntemlerinden ikincisi, motor beceri testlerini, testin son birkaç denemesinde yorgunluğa ve performansı etkileyebilecek olan motivasyon eksikliğine karşı korumak için sıklıkla kullanılır. Örneğin, 10 denemeli mekik testinde (örneğin 10 tane 100 m koşusu içeren bir testte), ilk 5 denemenin ortalaması, ikinci 5 denemenin ortalamasından daha düşük (performans açısından daha iyi) olacaktır. Bu ise teste ilişkin güvenirliğin düşük çıkmasına neden olacaktır. Ancak, testin güvenirliğini, testi II. Bölme yöntemi ile bölerek hesaplayacak olursak 1, 3, 5, 7 ve 9. deneme ortalamasının 2, 4, 6, 8, ve 10. deneme ortalaması ile benzer çıkması olasılığı oldukça yüksektir. Örnek olması açısından, 10 tane 100 m koşu süresi sonuçları ile her iki bölme yöntemine göre iki yarı ortalamaları Tablo 8.2'de verilmiştir.

Tablo 8.2. 10 tane 100 m koşu süresi sonuçları (sn)

Denemeler									
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
11.3	**11.0**	**11.1**	**10.9**	**11.0**	**11.2**	**11.2**	**11.4**	**11.9**	**12.0**
I. Bölme yöntemine göre ortalamalar:					(11.3+11.0+11.1+10.9+11.0)/5=**11.06**				
					(11.2+11.2+11.4+11.9+12.0)/5=**11.54**				
II. Bölme yöntemine göre ortalamalar:					(11.3+11.1+11.0+11.2+11.9)/5=**11.30**				
					(11.0+10.9+11.2+11.4+12.0)/5=**11.30**				

Tablo 8.2'de, ilk 5 deneme ortalaması (11.06), ikinci 5 deneme ortalamasından (11.54) oldukça farklıdır. Bu farklılık büyük bir olasılıkla yorgunluktan kaynaklanmaktadır. Ancak, tek ve çift sayılı denemelerin ortalamaları dikkate alındığında ortalamaların aynı olduğu görülür. Bu örnekten de anlaşılabileceği gibi, bu yöntemin bir sorunu, test sonucunun iki yarıya bölünen gruplara bağlı olmasıdır.

Kuder-Richardson 20 ve 21 Yöntemi

Özellikle ***bilgi testlerinde, Kuder-Richardson yönteminden*** sıklıkla yararlanılır. Bu tür testlerde ***maddeler iki durumlu seçeneklerden oluşuyorsa*** (*örneğin, doğru-yanlış, evet-hayır, ... gibi*) ölçeğin (testin) güvenirliği *KR-20 ve KR-21* formülleri ile kestirilebilir. Kuder-Richardson yaklaşımı da alfa katsayısı gibi maddelerin iç tutarlılığı konusunda bilgi verir. Yani, testteki maddelerin tümünün aynı özelliği ölçtüğü varsayılarak maddelerin uyumuna bakılır. Test maddelerinin tek bir özelliği ölçmediği dolayısıyla testin tek boyutlu olmadığı durumlarda bu yöntem kullanılmaz. Bu yaklaşımda, testin sadece bir kez uygulanması yeterli olup korelasyon katsayısının hesaplanmasına da gerek yoktur. Bu formüllerden *KR-21* daha sık kullanılmakla birlikte, madde güçlüklerinin değişiklik gösterdiği durumlarda *KR-21* ile elde edilen güvenirlik *KR-20*

ile elde edilenden daha düşüktür. ***Maddeler iki durumlu olduğunda (0=yanlış ve 1=doğru olarak kodlandığında ya da örneğin beş seçenekli bir test yanlış-doğru olacak şekilde yeniden kodlandığında) Alfa Katsayısı, KR-20 ile aynı sonucu verir. Diğer bir deyişle, KR-20, alfa katsayısının özel bir durumudur.*** Bu konuda ayrıntılı bilgi için 2, 5 ve 6 nolu kaynaklara başvurulabilir.

Ölçekteki Maddelerin Ölçeğe Katkısına İlişkin Yaklaşımlar: Madde Analizi (Item Analysis)

Ölçeği oluşturan maddeler üretildikten sonra, ölçekteki maddelerin ölçeğe katkısını incelemek için yapılan işlemlere madde analizi adı verilir. Bu amaçla geliştirilen ölçeğin, ilgili bireylerin bir örneklemine uygulanması gerekir. Madde analizi, genellikle aşağıdaki alt başlıklar dikkate alınarak yapılır.

Maddelere İlişkin Ortalama, Standart Sapma ve Korelasyon Katsayının İncelenmesi

Analizlerin başlangıcında maddelere ilişkin ortalama ve standart sapmaların incelenmesinde yarar vardır. Madde ortalamalarının birbirine benzer olması arzu edilir. Maddelere ilişkin dağılımların tek tepeli olması ve normal dağılım göstermesi ya da daha genel anlamda çok değişkenli normallik varsayımının sağlanması istenir. Bu amaçla, maddelere ilişkin histogramlar ya da tek bir grafik üzerinde kutu-çizgi grafikleri çizilebilir (Bakınız Bölüm 2) ve normallik testlerinden (Bakınız Bölüm 4) yararlanılabilir. **Bazen bir maddeye verilen yanıtların dağılımı çok tepeli (örneğin iki tepeli) olabilir. Bu durum, çalışmaya katılan bireylerin ölçülmeye çalışılan özellik konusunda benzer fikirde olmadıklarını gösterir. Böyle durumlarda, maddeler arasındaki korelasyonlar, olabileceğinden daha büyük çıkabilir** (Bakınız Grafik 2.2). Sonuçta da, ölçeğe ilişkin güvenirlik kestirimi yanıltıcı olabilir. Bu amaçla matris şeklindeki saçılım grafiklerinden de yararlanılabilir ve korelasyonu etkileyecek ya da doğrusal yapıyı bozabilecek yapıdaki gözlemler bulunabilir. Ayrıca, standart sapması sıfır olan madde(ler) var ise, korelasyon katsayısı hesaplanamayacağından bu madde(ler)in ölçekten çıkartılması gerekir. Madde ortalamaları arasında fark olup olmadığı, tekrarlı ölçümlerde varyans analizi ile yapılabilir (klasik varyans analizi yaklaşımı için kaynakçadaki 2 nolu kaynaktan yararlanılabilir.) İstatistiksel yazılımlarda, ***Hotelling*** T^2 seçeneği de vardır. Buradaki T^2 istatistiği, tekrarlı ölçümlerde tek yönlü varyans analizine çok değişkenli yaklaşım sonucunda elde edilen T^2 istatistiği olup, madde ortalamaları arasında fark olup olmadığını test eder (Bakınız Bölüm 6). İstatistiksel yazılımlarda T^2 *istatistiğinin F* istatistiğine dönüştürülmüş değeri de çıktı olarak verilmektedir. Veriler sıralama ölçeğinde ise maddeler arasında fark olup olmadığı ***Friedman testi*** ile araştırılabilir. İstatistik yazılımlarda Friedman'a ilişkin ki-kare istatistiği de verilmektedir. Maddelerin 0-1 biçiminde kodlanması durumunda madde seçeneklerinin dağılımları arasında fark olup olmadığını anlamak için ***Cochran Q testi*** kullanılır (Bu konuda Kaynakçadaki 2 nolu kaynaktan yararlanılabilir.)

Bir Madde İle Bu Madde Dışındaki Diğer Maddeler Toplamı (Bütün) Arasındaki Korelasyonlar (Madde-Bütün Korelasyon Katsayısı) (Item-Total Correlation) :

Ölçekle ölçülmek istenen şeyi, (örneğin, tutumu) ölçmede, her bir maddenin ölçme gücünü belirlemek ve bu bilgilerden yararlanarak ölçeği daha güvenilir bir duruma

getirebilmek için yararlanılacak istatistiklerden biri, her bir madde için; madde ile bu madde dışındaki maddelerin toplanması ile elde edilen yeni değişken (bütün) arasındaki korelasyon katsayılarının hesaplanmasıdır. Eğer herhangi bir değişkene ilişkin madde-bütün korelasyon katsayısı düşük ise o sorunun ölçeğe olan katkısının da düşük olduğu söylenir. Madde-bütün korelasyon katsayısının eksi işaretli olmaması (madde-bütün korelasyon katsayısının eksi işaretli olması durumunda ölçeğin toplanabilirlik özelliği bozulur) ve +0.25'den büyük olması istenir. Bu koşulu sağlamayan maddelerin ölçekten çıkarılması önerilmekle birlikte, *madde silindiğinde güvenirlik katsayısına*, *madde silindiğinde bütün ortalamalarındaki değişime* ya da ilgili maddeyi *bağımlı*, diğer maddeleri de *bağımsız* değişken olarak düşünerek oluşturulan *çoklu doğrusal regresyon modeli yardımıyla elde edilecek çoklu belirtme (açıklayıcılık) katsayısına* (R^2) bakılarak bu konuda daha iyi bir sonuca ulaşılabilir. Ancak, bir maddenin, madde-bütün korelasyon katsayısı çok küçük (ya da negatif) ise bu maddenin ilgili ölçekte yer almaması gerektiğine doğrudan karar verilebilir.

Madde Silindiğinde Ortalamalardaki Değişim

Madde silindiğinde hesaplanan ortalamalarda büyük değişiklik olmaması istenir. İstatistik paket programlarının çoğu, incelenen madde ölçekten çıkartıldığında geriye kalan maddeler toplamından oluşan değişkenin (bütünün) ortalama ve varyansını da çıktı olarak vermektedir.

Madde Silindiğinde Güvenirlik Katsayısı

İncelenen madde ölçekten çıkartıldığında, geriye kalan diğer maddeler için güvenirlik katsayısının hesaplanması, ölçeğin güvenirliğindeki değişimleri incelemek bakımından yararlıdır. Bir madde ölçekten çıkarıldığındaki alfa katsayısı, ölçeğin tümü için hesaplanan alfa katsayısına göre artış gösterirse, o maddenin "güvenirliği azaltan" bir madde olduğu söylenir ve bu maddenin ölçekten çıkartılması önerilir. Eğer bir madde ölçekten çıkarıldığındaki alfa katsayısı, ölçeğin tümü için hesaplanan alfa katsayısından küçük çıkıyorsa o maddenin ölçekte yer alması gerektiği düşünülür. İstatistik paket programları, madde silindiğinde güvenirlik katsayısı olarak alfa katsayısını (alfa if item deleted) çıktı olarak vermektedir.

Çoklu Belirtme (Açıklayıcılık) Katsayısı (R^2)

Bir madde ile geriye kalan diğer maddeler arasındaki ilişkiyi incelemenin bir yolu da ilgili maddeyi bağımlı, diğer maddeleri de bağımsız değişken olarak düşünerek oluşturulan *çoklu doğrusal regresyon modeli* (Bakınız Bölüm 8) yardımıyla bulunacak *çoklu belirtme katsayısı*dır. Bölüm 7'de belirtildiği gibi, çoklu belirtme katsayısı, çoklu korelasyon katsayısının karesidir. Bir maddeye ilişkin çoklu belirtme katsayısının küçük çıkması, o maddenin diğer maddeler tarafından yeterince açıklanmadığını gösterir.

Konuya İlişkin Diğer Yaklaşımlar

Ölçekler yardımı ile bir ya da birden çok özellik (bir anlamda boyut) ölçülebilir. Diğer bir deyişle ölçek alt testler (boyutlar) içerebilir. Bu amaçla, bu boyutlara ilişkin maddeler hazırlanır. Eğer test tek boyutlu ise (tek bir özelliği ölçüyor ise) yukarıda

belirtilen yaklaşımlar oldukça yeterlidir. Ayrıca, maddelere uygulanacak bir ***faktör analizi***nde tek boyut elde edilmesi beklenir. Eğer test birden çok boyutlu ise (birden çok özelliği ölçüyor ise): "bir yandan bir alt test içinde birbirleri ile yüksek korelasyon veren, diğer taraftan da diğer alt testlerle olabildiği kadar düşük korelasyon veren maddelerin seçilmesi gerekir. Tek boyutlu testlerde madde sayısı arttıkça, birden çok boyutlu testerde ise alt test ve madde sayısı arttıkça korelasyonlar yardımıyla madde seçmek zorlaşır. Bu nedenle, faktör analizinden yararlanmak kolaylık sağlar". Faktör analizi ve madde analizine ilişkin diğer yaklaşımlar konusunda kaynakçadaki 6 nolu kaynağa başvurulabilir.

Örnek 8.1. 25 bireye uygulanan ***10 maddelik (soruluk) ve her maddesi 8 seçenekli bir ölçeğe ilişkin*** sonuçlar (***M1-M10***) ile hesaplamalarda kullanmak üzere: maddelerin toplamı (***ÖLÇEK***), 1. madde dışındaki diğer maddelerin (*M2, M3,.... M10*) toplamı (***TOP210***), ilk 5 maddenin toplamı (***TOP15***) ve ikinci 5 maddenin toplamı (***TOP610***) Tablo 8.3'de verilmiştir. 10 maddeye ve maddeler toplamına (ölçeğe) ilişkin ortalama, standart sapma ve varyanslar ise Tablo 8.4'dedir.

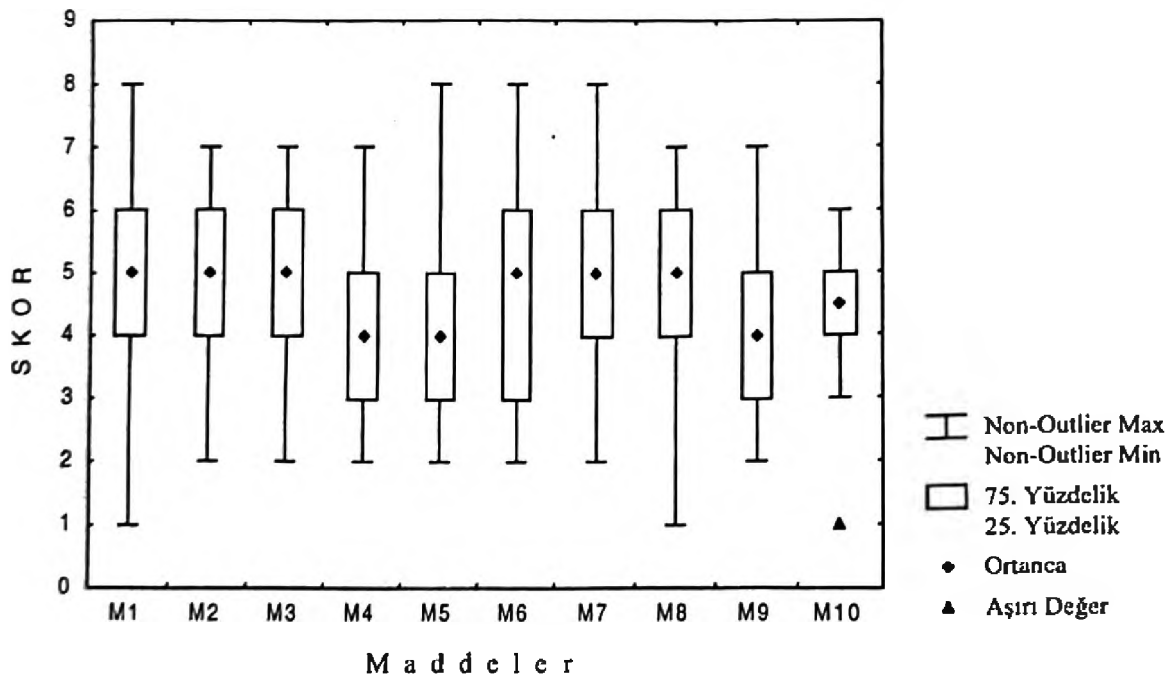
Tablo 8.3. Örnek 8.1 Verisi ve İleri Analizler İçin Bazı Toplamlar

	M A D D E L E R													
KİŞİ	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9	M10	ÖLÇEK	TOP210	TOP15	TOP610
1	5	4	5	5	4	8	6	5	5	4	**51**	46	23	28
2	5	3	4	3	5	6	3	4	5	3	**41**	36	20	21
3	4	5	5	5	3	3	4	4	3	4	**40**	36	22	18
4	5	4	5	2	6	5	4	6	4	4	**45**	40	22	23
5	6	6	4	5	4	4	4	6	3	5	**47**	41	25	22
6	4	4	4	4	4	5	6	5	3	4	**43**	39	20	23
7	5	7	4	5	5	7	7	6	3	4	**53**	48	26	27
8	6	4	5	6	3	3	4	3	6	5	**45**	39	24	21
9	6	6	6	4	8	5	6	6	4	5	**56**	50	30	26
10	3	5	4	3	3	5	6	4	4	5	**42**	39	18	24
11	7	4	5	4	7	5	7	5	4	4	**52**	45	27	25
12	1	2	2	3	3	2	2	2	3	1	**21**	20	11	10
13	7	6	7	7	4	4	5	5	6	5	**56**	49	31	25
14	5	5	4	6	6	5	5	6	6	6	**54**	49	26	28
15	6	7	7	4	6	3	8	7	5	6	**59**	53	30	29
16	5	6	6	4	4	7	6	6	5	6	**55**	50	25	30
17	3	5	5	3	5	3	4	4	6	3	**41**	38	21	20
18	7	6	7	6	6	6	6	7	6	4	**61**	54	32	29
19	3	4	5	2	3	6	4	4	3	4	**38**	35	17	21
20	4	4	3	3	4	5	2	1	4	1	**31**	27	18	13
21	6	6	5	5	3	6	5	4	7	5	**52**	46	25	27
22	4	5	5	5	6	3	6	4	4	5	**47**	43	25	22
23	4	5	4	3	2	4	5	5	5	5	**42**	38	18	24
24	4	5	2	3	3	2	3	4	2	4	**32**	28	17	15
25	6	7	7	5	5	6	6	5	5	5	**57**	51	30	27
26	6	6	3	3	5	7	4	6	5	6	**51**	45	23	28
27	6	6	6	5	5	4	5	5	6	5	**53**	47	28	25
28	3	4	2	2	4	7	3	3	3	3	**34**	31	15	19
29	4	4	2	4	5	3	5	2	4	4	**37**	33	19	18
30	8	7	6	5	3	2	7	5	4	5	**52**	44	29	23

Tablo 8.4. Maddelere ve Maddeler Toplamına (Ölçeğe) İlişkin Ortalama, S. Sapma ve Varyanslar

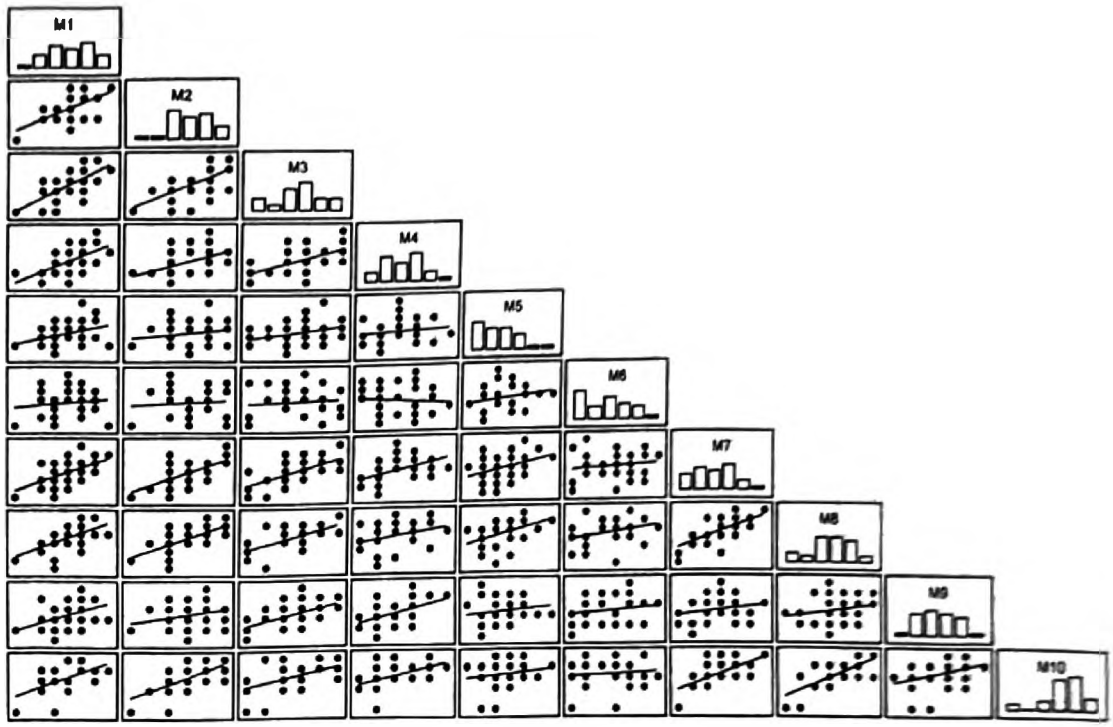
Madde	*Ortalama*	*S. Sapma*	*Varyans*	*n*
M1	4.9333	1.5298	2.3402	30.0
M2	5.0667	1.2576	1.5815	30.0
M3	4.6333	1.5196	2.3092	30.0
M4	4.1333	1.3060	1.7056	30.0
M5	4.4667	1.4077	1.9816	30.0
M6	4.7000	1.6846	2.8378	30.0
M7	4.9333	1.5071	2.2713	30.0
M8	4.6333	1.4499	2.1022	30.0
M9	4.4333	1.2507	1.5642	30.0
M10	4.3333	1.2411	1.5403	30.0
ÖLÇEK	46.2667	9.4319	88.9609	30.0

Maddelerin yapısına ilişkin incelemelerde (simetriklik, çarpıklık, iki tepelilik, .. vb.) kutu çizgi grafiklerinden de sıklıkla yararlanılabilir. Örneğimizdeki maddelere ilişkin kutu çizgi grafiği, Grafik 8.1'de verilirken maddelere ilişkin matris şeklindeki saçılım grafiği Grafik 8.2'de verilmiştir.



Grafik 8.1. Maddelere İlişkin Kutu-Çizgi Grafiği

Grafik 8.1'de görüldüğü gibi maddeler simetrik yapıdadır (10. madde ayrıca incelenmelidir). Eğer maddeler simetrik yapıda olmasa idi, ilgili maddelere ilişkin histogramı incelemek daha yararlı olabilecekti.



Grafik 8.2. Maddelere İlişkin Saçılım Grafiği

Maddeleri tekrar olarak düşünerek yapılacak klasik tekrarlı ölçümlerde tek yönlü varyans analizi sonuçları Tablo 8.5'de verilmiştir. Denekler (satırlar) arası değişkenlik de tabloda verilmiş olup F değeri oldukça büyüktür ($F=7.0615$, $p<0.01$). Bu beklenen bir durumdur. Çünkü, her bireyin soruları yanıtlama şekli farklıdır. Diğer taraftan, grup (madde) ortalamaları arasında fark yoktur ($F=2.0626$, $p>0.01$).

Tablo 8.5. Tekrarlı Ölçümlerde Tek Yönlü Varyans Analizi Sonuçları

D.K.	KT	Sd	KO	F	P
Gruplar A.	23.3867	9	2.5985	2.0626	>0.01
Denekler A.	257.9867	29	8.8961	7.0615	<0.01
Hata	328.8133	261	1.2598		

Eşitlik (8.5) ve Tablo 8.5 yardımıyla ***sınıfiçi güvenirlik katsayısı*** (R_1);

$$R_1 = \frac{8.8961 - \dfrac{23.3867 + 328.8133}{9 + 261}}{8.8961} = 0.853$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla, orta düzeyde güvenirlikten söz edilebilir.

Alfa Katsayısının Elde Edilmesi

Alfa katsayısı, Eşitlik (8.6) yardımıyla R_2=(8.8961–1.2598)/8.8961= 0.858 olarak bulunur. Aynı sonuca, Tablo 8.4'deki istatistikleri kullanarak Eşitlik (8.7) yardımıyla da ulaşılabilir;

$$R_2 = \left(\frac{10}{10-1}\right)\left(\frac{88.9609 - (2.3402 + 1.5815 + ... + 1.5403)}{88.9609}\right) = 0.858$$

Sonuçlardan anlaşılacağı üzere, madde ortalamaları farklı olmadığı için bu iki güvenirlik katsayısı (R_1 ve R_2) benzer bulunmuştur. Madde ortalamaları arasında 0.01 yanılma düzeyinde fark yoktur ($F=2.0626$, $P=0.0332$). Bu maddelere ilişkin histogramlar çizildiğinde dağılımın tek tepeli olduğu, ancak bazı maddelerin normal dağılmama eğiliminde olduğu görülür (bu durum gözlem sayısının azlığına bağlanabilir). Maddeler arasındaki kovaryans matrisi Tablo 8.6'da, korelasyon matrisi ise Tablo 8.7'de verilmiştir.

Tablo 8.6. Maddelere İlişkin Kovaryans Matrisi

Madde	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9	M10
M1	**2.34**	1.21	1.49	1.22	0.76	0.29	1.24	1.29	0.86	1.06
M2	1.21	**1.58**	1.13	0.75	0.31	0.16	1.18	1.16	0.42	1.05
M3	1.49	1.13	**2.31**	1.05	0.66	0.20	1.42	1.31	0.99	0.92
M4	1.22	0.75	1.05	**1.71**	0.21	-0.20	0.84	0.57	0.77	0.68
M5	0.76	0.31	0.66	0.21	**1.98**	0.42	0.79	0.90	0.27	0.29
M6	0.29	0.16	0.20	-0.20	0.42	**2.84**	0.32	0.71	0.34	0.21
M7	1.24	1.18	1.42	0.84	0.79	0.32	**2.27**	1.39	0.37	1.16
M8	1.29	1.16	1.31	0.57	0.90	0.71	1.39	**2.10**	0.41	1.23
M9	0.86	0.42	0.99	0.77	0.27	0.34	0.37	0.41	**1.56**	0.57
M10	1.06	1.05	0.92	0.68	0.29	0.21	1.16	1.23	0.57	**1.54**

Tablo 8.7. Maddelere İlişkin Korelasyon Matrisi

Madde	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9	M10
M1	**1.00**	0.63	0.64	0.61	0.35	0.11	0.54	0.58	0.45	0.56
M2	0.63	**1.00**	0.59	0.46	0.18	0.07	0.62	0.64	0.27	0.67
M3	0.64	0.59	**1.00**	0.53	0.31	0.08	0.62	0.59	0.52	0.49
M4	0.61	0.46	0.53	**1.00**	0.12	-0.09	0.43	0.30	0.47	0.42
M5	0.35	0.18	0.31	0.12	**1.00**	0.18	0.37	0.44	0.16	0.16
M6	0.11	0.07	0.08	-0.09	0.18	**1.00**	0.13	0.29	0.16	0.10
M7	0.54	0.62	0.62	0.43	0.37	0.13	**1.00**	0.64	0.20	0.62
M8	0.58	0.64	0.59	0.30	0.44	0.29	0.64	**1.00**	0.22	0.68
M9	0.45	0.27	0.52	0.47	0.16	0.16	0.20	0.22	**1.00**	0.37
M10	0.56	0.67	0.49	0.42	0.16	0.10	0.62	0.68	0.37	**1.00**

Korelasyon matrisi incelendiğinde, korelasyonların -0.09 ile 0.68 arasında değiştiği görülür. Ayrıca, 6. madde (M6) ile diğer maddeler arasındaki korelasyon katsayılarının oldukça düşük olduğu görülür. Bu matrisler yardımıyla,

Kovaryansların ortalaması $(\overline{cov}) = (1.21+1.49+ ..... + 1.23+0.57)/45 = 0.7636$

Varyansların ortalaması $(\overline{var}) = (2.34+1.58+ ... +1.54)/10 = 2.023$

Korelasyonların ortalaması $(\bar{r}) = (0.63+0.64+ .... +0.37)/45 = 0.3880$

olarak elde edilir. Bu bilgiler ve Eşitlik (8.8) yardımıyla ***alfa katsayısı***, R_2 ;

$$\alpha = \frac{10 \times 0.7636 / 2.023}{1 + (10 - 1) \times 0.7636 / 2.023} = 0.858$$

olarak bulunur. Bu sonuca göre ölçek (test) yüksek bir güvenirliğe sahiptir. Standartlaştırılmış alfa katsayısı ise Eşitlik (8.9) yardımıyla, 0.8637 olarak bulunur.

Madde analizine ilişkin *madde-bütün* istatistikleri ise Tablo 8.8'de verilmiştir. Tablo 8.8'de görüldüğü gibi, ilgili madde silindiğinde geriye kalan maddelerin toplanması ile elde edilen değişkenlerin (bütün) ortalamaları, standart sapmaları ve varyanslarında aşırı bir değişiklik yoktur. Ancak, madde-bütün korelasyon katsayısı incelendiğinde, madde 6 (M6) ile bu madde dışındaki diğer maddelerin toplanmasından elde edilen değişken (Bu değişken Tablo 8.3'de madde 1 ile madde 2-10 için TOP210 olarak verilmişti. Buna göre madde 1 ile diğer maddelerin toplamı (TOP210) için $r=0.746$ olarak bulunur) arasındaki korelasyon katsayısı oldukça düşük ve 0.161'dir. Bu maddeye ilişkin çoklu belirtme (açıklayıcılık) katsayısı da $R^2=0.206$ gibi düşük bir değerdir. Ayrıca, 0.858 olarak bulunan ölçek alfa katsayısı, bu madde silindiğinde 0.884'e çıkmaktadır. Sonuç olarak, bu bilgiler çerçevesinde M6'nın ölçekten çıkartılmasının daha yararlı olabileceği söylenebilir (Yani, M6, ölçeğin türdeşliğini (homojenite) bozar nitelikte bir maddedir.) Ayrıca, M5'in de bazı sorunlar içerdiği görülmektedir. Sonuç olarak, M6 ve M5 dışındaki diğer maddelerin *madde silindiğinde alfa katsayısı*, ölçeğin tümü için elde edilen alfa katsayısından düşük olduğu için bu maddeler (madde 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10) ölçek için vazgeçilmez maddelerdir (iyimser bir yaklaşımla madde 5'de ölçekte kalabilir.)

Tablo 8.8. Madde-Bütün İstatistikleri

Madde	Madde Silindiğinde Bütün Ortalaması	Madde Silindiğinde Bütün Varyansı	Madde Silindiğine Bütün S. Sapması	Madde-Bütün Korelasyon Katsayısı	R^2	Madde Silindiğinde Cronbach Alfa
M1	41.333	67.82	8.235	0.746	0.627	0.828
M2	41.200	72.65	8.523	0.687	0.618	0.836
M3	41.633	68.31	8.265	0.730	0.664	0.830
M4	42.133	75.50	8.689	0.518	0.497	0.849
M5	41.800	75.75	8.817	0.372	0.333	0.861
M6	41.567	81.22	9.012	0.161	0.206	0.884
M7	41.333	69.26	8.322	0.695	0.619	0.833
M8	41.633	68.93	8.302	0.745	0.711	0.829
M9	41.833	77.38	8.797	0.455	0.490	0.854
M10	41.933	73.10	8.549	0.675	0.669	0.837

Tek boyutu ölçtüğünü düşündüğümüz örneğimize ***faktör analizi*** ile yaklaştığımızda da 5. ve 6. maddelerin (hatta 9. maddenin) diğerlerine göre farklı yükler aldığını kolayca görebiliriz. Faktör analizi bu kitapta yer almadığı için bu konuda ayrıntıya girilmeyecektir.

Testin İki Yarıya Bölünmesi Yöntemi İle Güvenirliğin Bulunması

Tablo 8.3'de, 10 maddeden oluşan ölçeğin güvenirliğinin ***testin iki yarıya bölünmesi yöntemi***yle nasıl hesaplandığını göstermek amacıyla, ilk beş ve ikinci beş maddenin toplamları (sırasıyla *TOP15* ve *TOP610* değişkenleri) da verilmişti. Bu iki değişken (form) arasındaki Pearson korelasyon katsayısı r=0.7377 olarak bulunur. Sonuçta, ölçeğin iki yarıya bölünmesi yöntemi ile elde edilen ***testin bütününe ilişkin güvenirliği***, Eşitlik (8.10) yardımıyla; $r_{sb}=2\times(0.7377)/(1+0.7377)=0.8490$ olarak bulunur.

Bazı istatistiksel yazılımlar, ***testin iki yarıya bölünmesi yöntemi***'ne ilişkin olarak Spearman-Brown katsayısı ile birlikte ***Guttman katsayısı***nı da (*Guttman split–half coefficient*) çıktı olarak vermektedir. Bu katsayı da, r_{sb} gibi testin bütününe ilişkin güvenirliğin bir kestirimini verir. Guttman katsayısında her iki yarıdaki güvenirliğin eşit olması ve varyansların homojen olması varsayımı yoktur.

KAYNAKÇA

1. Allison, T. ve Cicchetti D. V. "Sleep in Mammals: Ecological and Constitutional Correlates", **Science**, 194, s:732-734, (1976).
2. Alpar, Reha. **Spor Bilimlerinde Uygulamalı İstatistik.** 2. bs., Ankara, Nobel Yayın Dağıtım, 2001.
3. Altman, Douglas G. **Practical Statistics for Medical Research**. 2. bs., London. Chapman and Hall, 1992.
4. Anscombe, F. J. "Graphs in Statistical Analysis," **Amer. Stat.**, 27, 17-21, (1973).
5. Baumgartner, A. T. ve Jackson, A.S. **Measurement for Evaluation in Physical Education and Exercise Science.** Wm. C. Brown Publishers, 1991.
6. Baykul, Y. **Eğitimde ve Psikolojide Ölçme:** ***Klasik Test Teorisi ve Uygulaması***. Ankara, ÖSYM Yayınları, 2000.
7. BMDP Statistical Software Manual. Volume 1-2, University og California Press. USA, 1988.
8. Bolton, Sanford. **Pharmaceutical Statistics : Practical and Clinical Applications**. 2. bs., New York, Marcel Dekker Inc., 1990.
9. Brown, R. A. ve Back, J. S. "Correlation and Regression," **Journal of Clinical Pathology,** 42, 4-21, (1989).
10. Chatterjee, Samprit and Price, Bertram. **Regression Analysis by Example**. New York, John Wiley and Sons Inc., 1991.
11. Chatterjee, Samprit ve Hadi, Ali S. **Sensitivity Analysis in Linear Regression**. New York, John Wiley and Sons Inc., 1988.
12. Daniel, Wayne W. **Biostatistics: A Foundation for Analysis in the Health Sciences**. Toronto, John Wiley and Sons Inc., 1987.
13. Draper, N. R. ve Smith, H. **Applied Regression Analysis**. New York, John Wiley and Sons Inc., 1966.
14. Erar, Aydın. "Bağlanım (Regresyon) Çözümlemesi Ders Notları" (mimograf. Ankara, 1985).
15. Ertek, Tümay. **Ekonometriye Giriş**. 2. bs., Ankara, ODTÜ İdari İlimler Fakültesi, 1978.
16. Etikan, İlker. "Hava Kirliliği İle İlgili Ölçümlerle Meteorolojik Ölçümlerin Çok Değişkenli İstatistiksel Yöntemlerle İncelenmesi," (Yayınlanmamış Doktora Tezi, H. Ü. Sağlık Bilimleri Enstitüsü, Biyoistatistik Programı 1993).
17. Fleiss, J. L. **The Design and Analysis of Clinical Experiments**. New York, John Wiley and Sons Inc., 1996.
18. Genceli, Mehmet. **Ekonometride İstatistik İlkeler**. İstanbul, Filiz Kitabevi, 1989.
19. Gunst, R. F. ve Mason, R. L. **Regression Analysis and Its Application: A Data-Oriented Approach**. New York, Marcel Dekker Inc., 1980.
20. Hair, J. F., Anderson, R.E., Tatham, R.L., Black, W.C., **Multivariate Data Analysis**. 5. Bs., New Jersey, Prentice Hall, Inc., 1998.

21. Harris, R. J. **A Primer of Multivariate Statistics**. New York, Academic Press Inc., 1975.
22. Hill, MaryAnn. **SPSS Missing Value Analysis.** USA, SPSS Inc., 1997.
23. Hutcheson, G. ve Sofroniou, N. **The Multivariate Social Scientists.** California, SAGE Publication Inc., 1999.
24. Jobson, J. D. **Applied Multivariate Data Analysis**. Volume 2, New York, Springer-Verlag Inc., 1992.
25. Johnson, R. A. ve Wichern, D. W. Applied Multivariate Statistical Analysis. 3. bs., New Jersey, Prentice-Hall Inc., 1992.
26. Krzanowski, W. J. Marriott, F. H. C. **Multivariate Analysis,** Part I Distributions, Ordination and Inference. London, Edward Arnold, 1994.
27. Kutsal, Alaettin ve Oral, Gülsüm. **Doğrusal Programlama"**. H.Ü. yayınları A 33, Ankara, 1981.
28. Little, R. J. A. **Statistical Analysis with Missing Data**. New York, John Wiley and Sons, Inc., 1987.
29. Lund, R. E. "Tables for an Approximate Test for Outliers in Linear Regression," **Technometrics**, 17, s: 473-476, (1975).
30. Manly, B. F. J. **Multivariate Statistical Methods: A Primer**. London, Chapman and Hall, 1990.
31. Mardia, K. V., Kent, J. T. ve Bibby, J. M. **Multivariate Analysis**. London, Academic Press Ltd., 1979.
32. Marascuilo, Leonard A. ve Levin, Joel R. **Multivariate Statistics in the Social Sciences: A Researcher's Guide**. California, Brooks/Cole Publishing Campany, 1983.
33. Montgomery, Douglas C. ve Peck, Elizabeth A. **Introduction to Linear Regression Analysis**. 2. bs., New York, John Willey and Sons Inc., 1992
34. Morrison, Donald F. **Multivariate Statistical Methods**. 2, bs., Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha Ltd., 1976.
35. Morrow, J. R. ve Diğerleri. **Measurement and Evaluation in Human Performance**. USA, Human Knetics, 1995.
36. Neavw, H.R. ve Worhington, P.L. Distribution Free Tests. London, Unwin Hyman Ltd., 1988.
37. Newton, R. R. ve Rudestam, K. E. **Your Statistical Consultant.** California, SAGE Publication Inc., 1999.
38. O'Neil, S. ve diğerleri, "The Effects of Chronic Hyperinflation, Nutritional Status and posture on respiratory muscle strength in systic Fibrosis," **Am. Rev. Respir. Dis.,** 128, 1051-4, 1989.
39. Özdamar, K. **Paket Programlar İle İstatistiksel Veri Analizi I.** Eskişehir, Anadolu Üniversitesi Yayınları, 1997.
40. Özdamar, K. **Paket Programlar İle İstatistiksel Veri Analizi *Çok Değişkenli Analizler 2***. Eskişehir, Kaan Kitabevi., 1999.
41. Özgüven, İ. E. **Psikolojik Testler.** Ankara, PDREM Yayınları, 1998.
42. Özhan, Gazi H. **Doğrusal Programlamaya Giriş.** Ankara, Polat Yayınları, 1990.

43. Rulon, P. J., Tiederman, D. V., Tatsuoka, M. M. ve Langmuir, C. R. **Multivariate Statistics for Personnel Classification**. New York, John Wiley and Sons Inc., 1967.
44. Safrit, J. M. **Introduction to Measurement** in Physical Education and Exercise Science. 2. bs., Toronto, Times Mirros/Mosby College Publishing. 1992.
45. Seber, G. A. **Multivariate Observations**. New York, John Wiley and Sons Inc., 1984.
46. Sharma, S. **Applied Multivariate Techniques.** New York, John Wiley Sons Inc., 1996.
47. SPSS: SPSS for Windows, **Base System User's Guide**, Release 6.0.
48. Stevens J. **Applied Multivariate Statistics for the Social Sciences.** Fourth edition, London, Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 2002.
49. Sümbüloğlu, Kadir. ve Sümbüloğlu, Vildan. **Biyoistatistik**. 5. bs., Ankara, Özdemir Yayıncılık, 1995.
50. SYSTAT: The System for Statistics. Statistics Manual. 1990.
51. Tabachnick, Barbara G. ve Fidell, L. S. **Using Multivariate Statistics**. New York, Harper and Row Inc., 1983.
52. Tatlıdil, Hüseyin. **Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistiksel Analiz**. Ankara, Akademi Matbaası, 1996.
53. Tatsuoka, Maurice M. **Multivariate Analysis: Techniques for Educational and Psychological Research**. New York, John Wiley and Sons, 1971.
54. Tezbaşaran, A. **Likert Tipi Ölçek Geliştirme Kılavuzu.** 2. bs. Ankara, Türk Psikologlar Derneği Yayınları, 1997.
55. Thomas, J. R. ve Nelson J. K. **Research Methods in Physical Activity**.3. bs. USA, Human Knetics, 1996.
56. Turgut, M. F. ve Baykul, Y. **Ölçekleme Teknikleri**. Ankara, ÖSYM Yayınları, 1992.
57. Vincent, W. J. **Statistics in Kinesiology.** Human Kinetics, 1994.
58. Webster, J. T., Gunst, R. F. ve Mason, R. L., "Latent Root Analysis," **Technometrics,** 16, 513-522, 1974.
59. Weisberg, Sanford. **Applied Linear Regression**. New York, John Wiley and Sons, 1980.
60. Welkowitz, J., Ewen, R. B., Cohen, J. **Introductory Statistics for the Behavioral Sciences**. 3. bs., San Diego, Harcourt Brace Jovanowich Inc., 1982.
61. Winer, B. J. **Statistical Principles in Experimental Design**. 2. bs., New York, McGraw-Hill Book Campany, 1971.
62. Wonnacott TH ve Wonnacott R.J. Regression: A Second Course in Statistics, NY, John Wiley and Sons. Inc, 1981.

EKLER

A. STANDART NORMAL DAĞILIM TABLOSU

B. NORMALLİK İÇİN Q-Q KORELASYON KATSAYISININ (r_q) TESTİNE İLİŞKİN KRİTİK DEĞERLER TABLOSU

C. t DAĞILIMI TABLOSU

D. χ^2 DAĞILIMI TABLOSU

E. F DAĞILIMI TABLOSU

F. r_i KRİTİK DEĞERLERİ TABLOSU

G. r_i^* KRİTİK DEĞERLERİ TABLOSU

H. DURBİN-WATSON d İSTATİSTİĞİ TABLOSU

I. MAHALANOBİS UZAKLIĞI İÇİN KRİTİK DEĞERLER

Tablo A. Standart Normal Eğri Altında 0 ile z Değerleri Arasında Kalan Alanlar (Olasılıklar)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4467
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

Tablo B. Normallik İçin Q-Q Korelasyon Katsayısının (r_q) Testine İlişkin Kritik Değerler

	Önem Düzeyi (α)		
Gözlem Sayısı	0.01	0.05	0.10
5	0.8299	0.8788	0.9032
10	0.8801	0.9198	0.9351
15	0.9126	0.9389	0.9503
20	0.9269	0.9508	0.9604
25	0.9410	0.9591	0.9665
30	0.9479	0.9652	0.9715
35	0.9538	0.9682	0.9740
40	0.9599	0.9726	0.9771
45	0.9632	0.9749	0.9792
50	0.9671	0.9768	0.9809
55	0.9695	0.9787	0.9822
60	0.9720	0.9801	0.9836
75	0.9771	0.9838	0.9835
100	0.9822	0.9873	0.9895
150	0.9879	0.9913	0.9928
200	0.9905	0.9931	0.9942
300	0.9935	0.9953	0.9960

TABLO C. t Dağılımı Tablosu

	α (Tek Yönlü Testte)						
	0.250	0.100	0.050	0.025	0.010	0.00833	0.005
	α (Çift Yönlü Testte)						
Sd	0.500	0.200	0.100	0.050	0.020	0.01666	0.010
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	38.190	63.657
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	7.649	9.925
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	4.857	5.841
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	3.961	4.604
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	3.534	4.032
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.287	3.707
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.128	3.499
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.016	3.355
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	2.933	3.250
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	2.870	3.169
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	2.820	3.106
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	2.779	3.055
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	2.746	3.012
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.718	2.977
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.694	2.947
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.673	2.921
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.655	2.898
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.639	2.878
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.625	2.861
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.613	2.845
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.601	2.831
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.591	2.819
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.582	2.807
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.574	2.797
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.566	2.787
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.559	2.779
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.552	2.771
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.546	2.763
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.541	2.756
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.536	2.750
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.499	2.704
60	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.463	2.660
120	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.428	2.617
∞	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.394	2.576

Tablo D. χ^2 *Dağılımı Tablosu* ($\chi^2_{(sd,\alpha)}$)

Sd	α =0.90	α =0.50	α =0.10	α =0.05	α =0.025	α =0.01	α =0.005
1	0.016	0.455	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.211	1.386	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.584	2.366	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	1.064	3.357	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	1.610	4.351	9.236	11.070	12.832	15.086	16.750
6	2.204	5.348	10.654	12.592	14.449	16.812	18.548
7	2.833	6.346	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	3.490	7.344	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	4.168	8.343	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	4.865	9.342	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	5.578	10.341	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	6.304	11.340	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	7.042	12.340	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	7.790	13.339	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	8.547	14.339	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	9.312	15.338	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	10.085	16.338	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	10.865	17.338	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	11.651	18.338	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	12.443	19.337	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	13.340	20.337	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	14.042	21.337	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	14.848	22.337	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	15.659	23.337	33.196	36.415	39.364	42.980	45.558
25	16.473	24.337	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	17.292	25.336	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	18.114	26.336	36.741	40.113	43.194	46.963	49.645
28	18.939	27.336	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	19.768	28.336	39.088	42.557	45.722	49.588	52.336
30	20.599	29.336	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
50	37.689	49.335	63.167	67.505	71.720	76.154	79.490
100	82.358	99.334	118.500	124.34	129.56	135.81	140.17

Tablo E. F Dağılımı Tablosu (α =0.05)

Sd	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.45	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.84	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.00	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	3.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.30	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.69	1.32	1.22	1.00

Tablo F. r_i 'ler İçin Kritik Değerler

	α =0.05									
	$p+1$									
n	1	2	3	4	5	6	8	10	15	25
5	1.92									
6	2.07	1.93								
7	2.19	2.08	1.94							
8	2.28	2.20	2.10	1.94						
9	2.35	2.29	2.21	2.10	1.95					
10	2.42	2.37	2.31	2.22	2.11	1.95				
12	2.52	2.49	2.45	2.39	2.33	2.24	1.96			
14	2.61	2.58	2.55	2.51	2.47	2.41	2.25	1.96		
16	2.68	2.66	2.63	2.60	2.57	2.53	2.43	2.26		
18	2.73	2.72	2.70	2.68	2.65	2.62	2.55	2.44		
20	2.78	2.77	2.76	2.74	2.72	2.70	2.64	2.57	2.15	
25	2.89	2.88	2.87	2.86	2.84	2.83	2.80	2.76	2.60	
30	2.96	2.96	2.95	2.94	2.93	2.93	2.90	2.88	2.79	2.17
35	3.03	3.02	3.02	3.01	3.00	3.00	2.98	2.97	2.91	2.64
40	3.08	3.08	3.07	3.07	3.06	3.06	3.05	3.03	3.00	2.84
45	3.13	3.12	3.12	3.12	3.11	3.11	3.10	3.09	3.06	2.96
50	3.17	3.16	3.16	3.16	3.15	3.15	3.14	3.14	3.11	3.04
60	3.23	3.23	3.23	3.23	3.22	3.22	3.22	3.21	3.20	3.15
70	3.29	3.29	3.28	3.28	3.28	3.28	3.27	3.27	3.26	3.23
80	3.33	3.33	3.33	3.33	3.33	3.33	3.32	3.32	3.31	3.29
90	3.37	3.37	3.37	3.37	3.37	3.37	3.36	3.36	3.36	3.34
100	3.41	3.41	3.40	3.40	3.40	3.40	3.40	3.40	3.39	3.38

Tablo F. r_i'ler İçin Kritik Değerler (Devam)

	α=0.01									
	p+1									
n	1	2	3	4	5	6	8	10	15	25
5	1.98									
6	2.17	1.98								
7	2.32	2.17	1.98							
8	2.44	2.32	2.18	1.98						
9	2.54	2.44	2.33	2.18	1.99					
10	2.62	2.55	2.45	2.33	2.18	1.99				
12	2.76	2.70	2.64	2.56	2.46	2.34	1.99			
14	2.86	2.82	2.78	2.72	2.65	2.57	2.35	1.99		
16	2.95	2.92	2.88	2.84	2.79	2.73	2.58	2.35		
18	3.02	3.00	2.97	2.94	2.90	2.85	2.75	2.59		
20	3.08	3.06	3.04	3.01	2.98	2.95	2.87	2.76	2.20	
25	3.21	3.19	3.18	3.16	3.14	3.12	3.07	3.01	2.78	
30	3.30	3.29	3.28	3.26	3.25	3.24	3.21	3.17	3.04	2.21
35	3.37	3.36	3.35	3.34	3.34	3.33	3.30	3.28	3.19	2.81
40	3.43	3.42	3.42	3.41	3.40	3.40	3.38	3.36	3.30	3.08
45	3.48	3.47	3.47	3.46	3.46	3.45	3.44	3.43	3.38	3.23
50	3.52	3.52	3.51	3.51	3.51	3.50	3.49	3.48	3.45	3.34
60	3.60	3.59	3.59	3.59	3.58	3.58	3.57	3.56	3.54	3.48
70	3.65	3.65	3.65	3.65	3.64	3.64	3.64	3.63	3.61	3.57
80	3.70	3.70	3.70	3.70	3.69	3.69	3.69	3.68	3.67	3.64
90	3.74	3.74	3.74	3.74	3.74	3.74	3.73	3.73	3.72	3.70
100	3.78	3.78	3.78	3.77	3.77	3.77	3.77	3.77	3.76	3.74

Tablo G. r_i^* *'lar İçin Kritik Değerler*

$\alpha = 0.05$

	$p+1$									
n	1	2	3	4	5	6	8	10	15	25
6	4.85	6.23	10.89	76.39						
7	4.38	5.07	6.58	11.77	89.12					
8	4.12	4.53	5.26	6.90	12.59	101.9				
9	3.95	4.22	4.66	5.44	7.18	13.36				
10	3.83	4.03	4.32	4.77	5.60	7.45	14.09			
12	3.69	3.81	3.96	4.17	4.49	4.98	7.94	152.8		
14	3.61	3.69	3.79	3.91	4.07	4.30	5.16	8.37		
16	3.56	3.62	3.68	3.77	3.87	4.00	4.41	5.33	203.7	
18	3.53	3.57	3.62	3.68	3.75	3.83	4.08	4.51	18.93	
20	3.51	3.54	3.58	3.62	3.67	3.73	3.89	4.15	6.76	
25	3.48	3.50	3.53	3.55	3.58	3.61	3.69	3.79	4.30	
30	3.48	3.49	3.51	3.52	3.54	3.56	3.60	3.66	3.88	7.38
35	3.48	3.49	3.50	3.51	3.52	3.54	3.57	3.60	3.73	4.53
40	3.49	3.49	3.50	3.51	3.52	3.53	3.55	3.58	3.66	4.03
50	3.51	3.51	3.51	3.52	3.53	3.53	3.54	3.56	3.60	3.75
60	3.53	3.53	3.53	3.54	3.54	3.54	3.55	3.56	3.59	3.67
70	3.55	3.55	3.55	3.55	3.56	3.56	3.56	3.57	3.59	3.64
80	3.57	3.57	3.57	3.57	3.57	3.58	3.58	3.58	3.60	3.63
90	3.58	3.59	3.59	3.59	3.59	3.59	3.60	3.60	3.61	3.63
100	3.60	3.60	3.60	3.60	3.61	3.61	3.61	3.61	3.62	3.64
200	3.73	3.73	3.73	3.73	3.73	3.73	3.73	3.73	3.74	3.74
300	3.81	3.81	3.81	3.81	3.81	3.81	3.81	3.81	3.82	3.82
400	3.87	3.87	3.87	3.87	3.87	3.87	3.88	3.88	3.88	3.88
500	3.92	3.92	3.92	3.92	3.92	3.92	3.92	3.92	3.92	3.92

Tablo G. T_i^*'lar İçin Kritik Değerler (Devam)

$\alpha = 0.01$

	p+1									
n	1	2	3	4	5	6	8	10	15	25
6	7.53	10.87	24.46	382.0						
7	6.35	7.84	11.45	26.43	445.6					
8	5.71	6.54	8.12	11.98	28.26	509.3				
9	5.31	5.84	6.71	8.38	12.47	29.97				
10	5.04	5.41	5.96	6.87	8.61	12.92	636.6			
12	4.71	4.91	5.19	5.50	6.17	7.15	13.75	763.9		
14	4.51	4.64	4.81	5.02	5.32	5.73	7.39	14.48		
16	4.38	4.48	4.59	4.72	4.90	5.12	5.86	7.60		
18	4.30	4.36	4.44	4.54	4.66	4.80	5.21	5.98	42.41	
20	4.23	4.29	4.35	4.42	4.50	4.60	4.86	5.29	10.31	
25	4.14	4.17	4.20	4.24	4.28	4.33	4.45	4.62	4.46	
30	4.09	4.11	4.13	4.15	4.18	4.21	4.28	4.36	4.71	11.44
35	4.06	4.07	4.09	4.11	4.12	4.14	4.19	4.27	4.43	5.72
40	4.04	4.05	4.06	4.08	4.09	4.10	4.14	4.17	4.29	4.87
50	4.03	4.03	4.04	4.05	4.06	4.07	4.08	4.10	4.17	4.38
60	4.03	4.03	4.04	4.04	4.05	4.05	4.06	4.08	4.12	4.23
70	4.03	4.03	4.04	4.04	4.05	4.05	4.06	4.07	4.09	4.17
80	4.04	4.04	4.04	4.05	4.05	4.05	4.06	4.07	4.09	4.13
90	4.05	4.05	4.05	4.05	4.06	4.06	4.06	4.07	4.08	4.12
100	4.06	4.06	4.06	4.06	4.06	4.07	4.07	4.07	4.09	4.11
200	4.15	4.15	4.15	4.15	4.15	4.15	4.15	4.15	4.15	4.16
300	4.21	4.21	4.21	4.21	4.21	4.21	4.22	4.22	4.22	4.22
400	4.26	4.27	4.27	4.27	4.27	4.27	4.27	4.27	4.27	4.27
500	4.31	4.31	4.31	4.31	4.31	4.31	4.31	4.31	4.31	4.31

Tablo H. Durbin-Watson d İstatistiği Tablosu

		Bağımsız Değişken Sayısı									
		1		2		3		4		5	
n	α	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	0.05	1.08	1.36	0.95	1.54	0.82	1.75	0.69	1.97	0.56	2.21
	0.01	0.81	1.07	0.70	1.25	0.59	1.46	0.49	1.70	0.39	1.96
16	0.05	1.10	1.37	0.98	1.54	0.86	1.73	0.74	1.93	0.62	2.15
	0.01	0.84	1.09	0.74	1.25	0.63	1.44	0.53	1.66	0.44	1.90
17	0.05	1.13	1.38	1.02	1.54	0.90	1.71	0.78	1.90	0.67	2.10
	0.01	0.87	1.10	0.77	1.25	0.67	1.43	0.57	1.63	0.48	1.85
18	0.05	1.16	1.39	1.05	1.53	0.93	1.69	0.82	1.87	0.71	2.06
	0.01	0.90	1.12	0.80	1.26	0.71	1.42	0.61	1.60	0.52	1.80
19	0.05	1.18	1.40	1.08	1.53	0.97	1.68	0.86	1.85	0.75	2.02
	0.01	0.93	1.13	0.83	1.26	0.74	1.41	0.65	1.58	0.56	1.77
20	0.05	1.20	1.41	1.10	1.54	1.00	1.68	0.90	1.83	0.79	1.99
	0.01	0.95	1.15	0.86	1.27	0.77	1.41	0.68	1.57	0.60	1.74
21	0.05	1.22	1.42	1.13	1.54	1.03	1.67	0.93	1.81	0.83	1.96
	0.01	0.97	1.16	0.89	1.27	0.80	1.41	0.72	1.55	0.63	1.71
22	0.05	1.24	1.43	1.15	1.54	1.05	1.66	0.96	1.80	0.86	1.94
	0.01	1.00	1.17	0.91	1.28	0.83	1.40	0.75	1.54	0.66	1.69
23	0.05	1.26	1.44	1.17	1.54	1.08	1.66	0.99	1.79	0.90	1.92
	0.01	1.02	1.19	0.94	1.29	0.86	1.40	0.77	1.53	0.70	1.67
24	0.05	1.27	1.45	1.19	1.55	1.10	1.66	1.01	1.78	0.93	1.90
	0.01	1.04	1.20	0.96	1.30	0.88	1.41	0.80	1.53	0.72	1.66
25	0.05	1.29	1.45	1.21	1.55	1.12	1.66	1.04	1.77	0.95	1.89
	0.01	1.05	1.21	0.98	1.30	0.90	1.41	0.83	1.52	0.75	1.65
26	0.05	1.30	1.46	1.22	1.55	1.14	1.65	1.06	1.76	0.98	1.88
	0.01	1.07	1.22	1.00	1.31	0.93	1.41	0.85	1.52	0.78	1.64
27	0.05	1.32	1.47	1.24	1.56	1.16	1.65	1.08	1.76	1.01	1.86
	0.01	1.09	1.23	1.02	1.32	0.95	1.41	0.88	1.51	0.81	1.63
28	0.05	1.33	1.48	1.26	1.56	1.18	1.65	1.10	1.75	1.03	1.85
	0.01	1.10	1.24	1.04	1.32	0.97	1.41	0.90	1.51	0.83	1.62
29	0.05	1.34	1.48	1.27	1.56	1.20	1.65	1.12	1.74	1.05	1.84
	0.01	1.12	1.25	1.05	1.33	0.99	1.42	0.92	1.51	0.85	1.61
30	0.05	1.35	1.49	1.28	1.57	1.21	1.65	1.14	1.74	1.07	1.83
	0.01	1.13	1.26	1.07	1.34	1.01	1.42	0.94	1.51	0.88	1.61
35	0.05	1.40	1.52	1.34	1.58	1.28	1.65	1.22	1.73	1.16	1.80
	0.01	1.19	1.31	1.14	1.37	1.08	1.44	1.03	1.51	0.97	1.59
40	0.05	1.44	1.54	1.39	1.60	1.34	1.66	1.29	1.72	1.23	1.79
	0.01	1.25	1.34	1.20	1.40	1.15	1.46	1.10	1.52	1.05	1.58
45	0.05	1.48	1.57	1.43	1.62	1.38	1.67	1.34	1.72	1.29	1.78
	0.01	1.29	1.38	1.24	1.42	1.20	1.48	1.16	1.53	1.11	1.58
50	0.05	1.50	1.59	1.46	1.63	1.42	1.67	1.38	1.72	1.34	1.77
	0.01	1.32	1.40	1.28	1.45	1.24	1.49	1.20	1.54	1.16	1.59
60	0.05	1.55	1.62	1.51	1.65	1.48	1.69	1.44	1.73	1.41	1.77
	0.01	1.38	1.45	1.35	1.48	1.32	1.52	1.28	1.56	1.25	1.60
70	0.05	1.58	1.64	1.55	1.67	1.52	1.70	1.49	1.74	1.46	1.77
	0.01	1.43	1.49	1.40	1.52	1.37	1.55	1.34	1.58	1.31	1.61
80	0.05	1.61	1.66	1.59	1.69	1.56	1.72	1.53	1.74	1.51	1.77
	0.01	1.47	1.52	1.44	1.54	1.42	1.57	1.39	1.60	1.36	1.62
90	0.05	1.63	1.68	1.61	1.70	1.59	1.73	1.57	1.75	1.54	1.78
	0.01	1.50	1.54	1.47	1.56	1.45	1.59	1.43	1.61	1.41	1.64
100	0.05	1.65	1.69	1.63	1.72	1.61	1.74	1.59	1.76	1.57	1.78
	0.01	1.52	1.56	1.50	1.58	1.48	1.60	1.46	1.63	1.44	1.65

Tablo I. Mahalanobis Uzaklığı için Kritik Değerler

	Bağımsız Değişken Sayısı							
	p=2		p=3		p=4		p=5	
n	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01	0.05	0.01
5	3.17	3.19						
6	4.00	4.11	4.14	4.16				
7	4.71	4.95	5.01	5.10	5.12	5.14		
8	5.32	5.70	5.77	5.97	6.01	6.09	6.11	6.12
9	5.85	6.37	6.43	6.76	6.80	6.97	7.01	7.08
10	6.32	6.97	7.01	7.47	7.50	7.79	7.82	7.98
12	7.10	8.00	7.99	8.70	8.67	9.20	9.19	9.57
14	7.74	8.84	8.78	9.71	9.61	10.37	10.29	10.90
16	8.27	9.54	9.44	10.56	10.39	11.36	11.20	12.02
18	8.73	10.15	10.00	11.28	11.06	12.20	11.96	12.98
20	9.13	10.67	10.49	11.91	11.63	12.93	12.62	13.81
25	9.94	11.73	11.48	13.18	12.78	14.40	13.94	15.47
30	10.58	12.54	12.24	14.14	13.67	15.51	14.95	16.73
35	11.10	13.12	12.85	14.92	14.37	16.40	15.75	17.73
40	11.53	13.74	13.36	15.56	14.96	17.13	16.41	18.55
45	11.90	14.20	13.80	16.10	15.46	17.74	16.97	19.24
50	12.23	14.60	14.18	16.56	15.89	18.27	17.45	19.83
100	14.22	16.95	16.45	19.26	18.43	21.30	20.26	23.17
200	15.99	18.94	18.42	21.47	20.59	23.72	22.59	25.82
500	18.12	21.22	20.75	23.95	23.06	26.37	25.21	28.62

İNDEKS

A

Adım-Adım Regresyon 342, 346, 354
Alfa katsayısı 378-392
Aralık Yöntemi 76
Aşamasıralı Regresyon 239
Aşırı değer 52, 88-93, 100, 112
Aykırı Gözlem (değer) 89, 261
Adjoint 12, 13, 14, 19

B

Bartlett 182
Basit doğrusal regresyon 193-229
Belirtme katsayısı 206, 207
BETA 238, 239, 250-
Bloom 78
Bonferroni 128
Box-M 131

C

Cold Deck atama 111,
Cook uzaklığı 269, 270, 275, 276-
Cronbach alfa (bkz. alfa katsayısı)

Ç

Çoklu atama 111
Çoklu belirtme katsayısı 242, 243, 251, 302, 343, 386
Çoklu doğrusal regresyon 189, 190, 230-373
Çoklu korelasyon katsayısı 241, 242, 451
Çoklubağlantı 299, 300-

D

Dal-yaprak grafiği 76, 277
Değişken seçimi 342
Değişen varyanslılık 291-
Determinant 12, 14, 15, 20
Detrented grafiği 80, 81
Deviation 181, 182
DFBETA 269, 270, 275, 276-
DFITS 269, 271, 275, 276-
Difference 181, 182
Doğrudan çarpım 10
Doğrusal bağımlılık 20, 24, 25
Dönüşüm 93-95, 100

E

Eksik veriler 97-119
Elipsoid 74
EM yöntemi 112, 115, 116
Etkili gözlem 261, 262, 269
Faktör analizi 287, 391

G

Genelleştirilmiş varyans 55, 56, 57
Geriye doğru çıkarma 242, 346
Göstermelik değişken 191, 326-342
Gözlem uzaklığı 261, 262, 263-
Greenhouse-Geisser 162, 163, 167, 168, 173, 175, 180
Güvenirlik 375-392

H

Ham artık 266
Hat matrisi (bkz. Şapka matrisi)
Helmert 181, 182
Hot Deck atama 110
Hotelling iz 140, 143
Huynh-Feldt 162, 163, 168, 173, 175, 180

F

İleriye doğru seçim 342, 345
İstatistik regresyon 239

K

Kısmi artık grafiği 277, 278, 279, 281
Kısmi belirtme katsayısı 245, 252-
Kısmi korelasyon 244, 252, 259-
Kofaktor 13, 14, 17
Kolmogorov-Smirnov 75, 80
Kontras katsayıları 165, 167, 171
Kontur 69, 70, 71, 72, 82
Korelasyon 41, 43-
Koşul indeksi 306, 308
Kovaryans oranı 271, 272
Kuder-Richardson 378
Kutu-çizgi grafiği 76, 80, 81, 100, 277, 278, 388

L

Listwise 107, 116, 117

M

Madde Analizi 385-
Mahalanobis uzaklığı 68, 69-, 264-
MANOVA 12, 58, 122, 138, 140, 164
MAR 105, 106, 107
Matris
- Birim 2, 182
- Devrik 3
- Dik 21
- Kare 2, 9, 23
- Köşegen 2, 17, 27
- Sıfır 2
- Simetrik 4
- Skaler 3, 6
- Tekil 11, 20, 27
- Ters 11, 15, 19, 20

Matrisin İzi 5, 256
Mauchly 162, 167, 173-
MCAR 105, 106, 107, 115
Minör 12

N

Negatif çarpık 93, 94
Normal dağılım
- Çok değişkenli 67-95
- İki değişkenli 67-95
- Tek değişkenli 67-95

O

Ortogonal polinom 171
Otokorelasyon 278, 318, 319

Q

Q-Q grafiği 75, 77-79, 80, 81, 277, 278, 279

Ö

Özdeğer 33-35, 41, 109, 305, 355-362
Özvektör 33, 37, 39-41, 305, 307, 356-362

P

Pairwise 108, 110
Pillai iz 140, 141, 143
Pozitif çarpık 93-95
Pozitif Tanımlı Matris 109
P-P grafiği 75, 80, 298
PRESS 269, 366-368

R

Rank 26, 27, 31
Rankit 78
Regresyon Atama 111
Roy 140, 141-

S

Saçılım grafiği 50, 51-
Sarrus Kuralı 18, 36
Shapiro-Wilks 80
Sınıfiçi güvenirlik katsayısı 379
Singular matris (bkz. Tekil matris)
Standartlaştırılmış artıklar 267

Standartlaştırılmış regresyon katsayıları (bak. BETA)
Standartlaştırma 57, 63-66
Student türü artık 267-

Ş

Spearman Brown 383, 392
Şapka matrisi 234

T

Temel bileşenler 42, 355-362
Temel bileşenler regresyonu 355-361
Test-tekrar test 378
Tolerans 302
Tukey 78
Tüm olası alt kümeler 342, 343, 348

Y

Yarı kısmi korelasyon katsayısı 245, 246

V

Varyans ayrışım oranı 307
Varyans kovaryans matrisi 43-
Venn diyagramı 207, 240, 241
VIF 303, 304

W

Wilks Lamda 12, 140, 141

Z

z değerleri 57, 64-66



REHA ALPAR

UYGULAMALI ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL YÖNTEMLERE GİRİŞ 1

nobel
YAYIN DAĞITIM

atlas
yayın dağıtım
GENEL DAĞITIM
Molla Fenari Sokak No:38 Cağaloğlu
Tel: 0212 511 61 44 - Fax: 0212 511 61 49
İSTANBUL

Adalale Sokak No:16/2 Kızılay
nobel
NOBEL KİTAP DAĞ. A.Ş.
Tel.: 0 212 511 61 44
16,00 YTL