EDWARD FRENKEL



Aşk ve Matematik

Saklı Gerçekliğin Kalbi

Paloma

AŞK VE MATEMATİK İÇİN ÖVGÜLER

"[Frenkel'in] anılarını içeren bu kitap ... üç şeydir: Matematiğe platonik bir aşk mektubu; meslekten olmayanlara matematiğin ilerlemekte olan en muhteşem oyunu hakkında bir fikir verme girişimi; yazarın kendisinin bu oyunda nasıl baş aktör olduğunun ilham verici ve eğlenceli bir otobiyografisi.

Matematiğin insan aklını aşan bir gerçekliğe sahip olduğu görüşüne, uygulayıcıları, özellikle de Frenkel, Langlands, Sir Roger Penrose ve Kurt Gödel gibi büyük uygulayıcıları arasında yaygın olarak rastlanır. *Aşk ve Matematik* tuhaf örüntülerin ve eşlemelerin beklenmedik şekilde ortaya çıkış şeklinden kaynaklanarak gizli ve gizemli bir şeyin ipucunu verir."

Jim Holt, *The New York Review of Books*

"Her sayfada, tıpkı Pasternak'ın ünlü romanından uyarlanan ve David Lean'in yönettiği filmde Ömer Şerif'in canlandırdığı Doktor Jivago gibi, aklımın gözünü kitabın yazarının Sibirya kışının derinliklerinde, mum ışığında yazarkenki kurgusal imgesini canlandırırken buldum. *Aşk ve Matematik*, Edward Frenkel'in Lara şiirleri... Bütün büyük Rus romanları için geçerli olduğu gibi, Frenkel'in hikâyesinde de bir kişinin şahsi aşk ve güçlüğün üstesinden gelme hikâyesi ile hem toplumun derinliklerini görmeye yardım eden mercekler hem de insan aklını açığa vuran bir ayna bulacaksınız."

Keith Devlin, ***Huffington Post***

"Frenkel matematiğin 'evrenin akışını yönettiğini' yazıyor. Müzik kadar hoş ve edebiyat kadar da entelektüel mirasımızın parçası. Bizi çok azımızın okulda karşılaştığı 'gizli' dünyayı açığa çıkaran araştırmasında gezdirerek merakımızı uyandırmaya çalışıyor... Frenkel o dünyayı anlaşılabilir ve hatta güzel kılmayı amaçlıyor."

The New York Times Book Review

"Aşk ve matematik kelimeleri genellikle bir solukta söylenmez. Ancak matematikçi Edward Frenkel bunu değiştirme görevini üstleniyor...

Berkeley'deki California Üniversitesi'nde kadrolu öğretim görevlisi olan yazar, *Aşk ve Matematik* isimli kitabında okullarda matematiği öğretmek için kullanılan geleneksel yöntemin yaygın bir bilgisizliğe yol açtığını ve ekonomik durgunluktan bunun sorumlu olabileceğini ileri sürüyor... Kitap onun kişisel hikâyesini anlatıyor ve Langlands Programı'ndaki araştırmasını ve sınıflarda düzenli olarak öğretilmeyen yeni matematiksel keşifleri tanımlıyor."

The Wall Street Journal

"[Frenkel'in] ağır eşitsizlikler karşısında kazandığı mesleki zaferin hikâyesi oldukça tatmin edici... Ancak gençliğinde karşılaştığı darkafalılığa verdiği gerçek yanıt, onun matematik tutkusunda, yani kitabın başlığındaki 'aşk'ta yatıyor... Matematiğin insanlığın ortaklaşa sahip olduğu bir şey olduğuna inanan Frenkel, her bir kavramı teorik olmayan terimlerle açıklarken gündelik hayattan benzerlikleri çokça kullanıyor... Meslekten olmayan okurlar, modern matematiğin ne üzerine olduğuna, onun ihtirasına, güzelliğine ve büyüleme gücüne dair bir anlayış kazanacaklar."

The New York Times

"*Aşk ve Matematik*'te biri matematiksel ve diğeri şahsi olmak üzere iki büyüleyici hikâye birbirinin içine geçmiş... Frenkel okuru ... büyük bir ustalıkla mevcut anlayışımızın çok ötesine götürüyor. Matematiğin güzelliğini herkes için çırılçıplak gözler önüne sermeye çalışıyor. 'Bu dünyada bu kadar derin ve üstün ve yine de herkesin erişebileceği başka hiçbir şey yok,' diyor."

Nature

"Frenkel aşk ve matematik için kendi durumunu ortaya koyarken müthiş bir iş çıkarıyor. Tıpkı Stephen Hawking'in *Zamanın Kısa Tarihi* isimli kitabının kitlelere üstün kozmoloji bilgisi kazandırdığı gibi, bu kitap sayesinde matematikçi olmayan birçok insanın da matematiğe ilgi duyacağını düşünüyorum. Burada söz konusu olan sadece düşüncenin netliği ya

da yazma becerisi değil; her iki örnekte de, dünyadaki en iyi uygulayıcılardan biri derin fikirleri aktarmak için kendisini kişisel olarak açıyor."

Wilmott

"Kısmen övgü, kısmen otobiyografi olan *Aşk ve Matematik*, sayıların güzelliğini herkesin görmesi için çırılçıplak ortaya koymak için gösterilen takdire şayan bir çalışma."

Scientific America

"Edward Frenkel, matematiğin sır dolu ve sıkıcı bir alan olduğu şeklindeki ününe karşı tutkulu bir örnek anlatıyor [ve] matematiğin güzelliğini ve anlamlılığını savunuyor."

Page-Turner blog, ***The New Yorker***

"Frenkel, matematiksel kavramların platonik aşkınlığı üzerine derin düşüncelere dalarken teknik ayrıntıları minimuma indiriyor ve onların fiziksel olguları açıklamadaki gizemli faydasını övüyor. Frenkel'in kutladığı matematik, ders kitaplarındaki kuru formüllerden ibaret olmayıp özgürlüğü besliyor ve hatta aşkın özünü damıtıyor. Nefes kesen bir entelektüel ve kişisel yolculuk."

Booklist

"Büyüleyici... [Frenkel] benzerlikleri kullanarak, simetri, boyut ve Riemann yüzeyleri gibi kavramları matematikçi olmayanların da anlayacağı şekilde tanımlıyor. Okurlar matematiğe âşık olsa da olmasa da, Frenkel'in konuya duyduğu aşkı yakalayacaklar. Matematik canavarları olsun olmasın, konuyla ilgilenmeye meyli olan bütün okurlara tavsiye edilir."

Library Journal

"Frenkel kararlılık, tutku ve Langlands Programı ile ilgili otobiyografik hikâyesinde saf entelektüel keşfin verdiği hazzı ortaya koyuyor... Frenkel'in gustosu, sanki 'nihai resmin neye benzeyeceğini kimsenin bilmediği dev yapboz'muş gibi matematiğin en derin gerçekliklerinin peşinde olan okurları çekecek."

Publishers Weekly

"Yazarın hayatına ve çalışmasına atılan büyüleyici bir bakış."

Kirkus Review

"Edward Frenkel'in sürükleyici yeni kitabı, eski bir matematik korkağı olan bendenizin nefret ettiğimi sandığım konuya bayılmama neden oldu. Matematiğe duyduğu tutku ve taparcasına sevgi o kadar bulaşıcı ki, hem konu hem de Frenkel'in dikkat çekici yolculuğu sizi sürükleyecek. SSCB, Yahudi soyadından dolayı ona üniversitelerin kapısını kapamaya çalıştığında, sınıflara gizlice girmek için 6 metrelik çitleri kelimenin tam anlamıyla tırmanarak çıktı. Daha 21 yaşına gelmeden, Harvard'dan aldığı öğretmenlik daveti mektubu Yukio Mishima'ya saygısını göstermek için *Rites of Love and Math* adını verdiği erotik bir film yazıp oynadığı bir kariyerin başlangıcı oldu. Frenkel'in karizması inkâr edilemez. G. H. Hardy'nin *Mathematician's Apology* (*Bir Matematikçinin Savunması*) isimli kitabından beri, alanın en ince zekâlarından biri bu yanlış anlaşılan sorgulama alanının metafizik güzelliğini açık bir şekilde anlatmamıştı. Bu kitap sadece bir konu üzerine yazılmış bir aşk şarkısı ve eğitim reformu için bir savaş çığlığı olmakla kalmıyor, aynı zamanda en tazesinden bir edebi haz da veriyor."

Mary Karr, ***The Liars' Club***, ***Cherry*** ve ***Lit*** kitaplarının yazarı.

"*Aşk ve Matematik* = hızlı bir macera hikâyesi + samimi biyografi + modern matematiğin merkezindeki Reşit Taşı'nın şifresini çözme arayışının içeriden aktarımı. Bütün bunlar birleşerek heyecan verici entelektüel bir gezinti ve şaşırtıcı bir tutkunun hikâyesini ortaya koyuyor."

Steven Strogatz, ***The Joy of x***'in yazarı ve Uygulamalı Matematik Profesörü, Cornell Üniversitesi

"Daha önce hiç aşk ve matematik kelimelerini bir arada kullandım mı, bilmiyorum ama bu kitap bu durumu değiştirdi. Edward Frenkel, sayıların nesnel güzelliği hakkında yazıyor. Tıpkı müzik notaları gibi, aklımızdan bağımsız olarak varlar ve bizi derinliklerini ölçmeye ve onları bizim hikâyemizi aktaran sır dolu anlatılarda bir araya toplamaya cesaretlendiriyorlar. Bu kitabı okurken, insan her şeyi bırakıp matematiğe bir şans daha vermeye, gizemin doruk noktasına katılmaya zorlanıyor."

Chris Carter, ***X-Files***'ın yaratıcısı

"Modern matematiğin en heyecan verici fikirlerinden bazılarının tutkuyla yazılmış ve okumaya değer anlatısını, güzelliğin meraklı sevdalıları olan herkese şiddetle tavsiye ediyorum."

David Gross, Fizik dalında Nobel Ödülü sahibi

"Bir matematikçinin mücadelelerinin, hazlarının ve tutkularının müthiş ve dikkat çekici bir anlatımı. Frenkel'in matematik alanında büyük amaçlara katkıda bulunmak için Moskova'daki ilk okul yıllarında kötü anti-Semitizmin üstesinden nasıl geldiğine ilişkin bu heyecan verici anlatıda, yazar annesinin borç çorbası tarifi (kuantum dualitesinin lezzetini açıklamak için) ve hayali senaryolar (Langlands Programı'na dair ipuçları vermek için) gibi çeşitli şeyleri çağrıştırarak matematik fikirlerinin renklerini bizim için parlak yapıyor."

Barry Mazur, *Imagining Numbers* isimli kitabın yazarı ve Üniversite Profesörü, Harvard Üniversitesi

"Edward Frenkel için matematik hakkında o erotik filmi yapan o matematikçi diye düşünebilirsiniz ama aslında onu endişelerinizin içyüzünü görmenize ve dünyayı daha derinden algılamanıza yardım edecek adam olarak bilmeniz gerek. *Aşk ve Matematik*, bir otobiyografi, önceden korku duyulan matematiği anlamanız için bir kapı ve bu dönemde insanlığın belli başlı yaratıcı projelerinden biri olan Langlands Programı'nın ilk popüler anlatısı. Bu kitap, gerçekliği her seviyede mümkün olduğunca temel olarak bilmek hakkında."

Jaron Lanier, *You Are Not a Gadget* ve *Who Owns the Future?* kitaplarının yazarı

"Matematikçi Edward Frenkel, bu büyüleyici otobiyografi aracılığıyla büyük Langlands Programı'na bir pencere açıyor; bu matematiğin ve fiziğin birçok branşını birbirine bağlayan çok kapsamlı bir ağ. Modern matematiğin nefes kesici bir görüntüsü."

Mario Livio, astrofizikçi ve *The Golden Ratio* ve *Brilliant Blunders* kitaplarını yazarı

Edward Frenkel

Edward Frenkel, matematik profesörüdür. Harvard Üniversitesi'nde öğretim görevlisi olarak çalıştıktan sonra 1997 yılında Berkeley'deki California Üniversitesi'ne geçti ve halen orada görev yapmaktadır. American Academy of Arts and Science üyesi, Council of American Mathematical Society'nin üyesi ve matematik fizik dalında Hermann Weyl Ödülü sahibi. Frenkel üç kitap ve akademik dergilerde yayınlanmış seksen akademik makale yazdı. Dünyanın çeşitli yerlerinde çalışmaları üzerine konuşmalar yaptı. YouTube'da yayınlanan videoları üç milyondan fazla görüntülendi.

Frenkel'in son kitabı *Aşk ve Matematik New York Times*'ta çok satanlar listesinde yer aldı, 2013 yılında hem Amazon hem de iBooks tarafından En İyi Kitaplardan biri olarak seçildi ve Mathematical Association of America tarafından Euler Book Prize ödülüne layık görüldü. Frenkel aynı zamanda yapımcı ve yönetmenlerinden biri olduğu *Rites of Love and Math* (2010) isimli filmde başrolde yer aldı.

Popüler Bilim Dizisi 4
Aşk ve Matematik-Saklı Gerçekliğin Kalbi
Edward Frenkel
© Paloma Yayınevi, 2015
Yayın hakları Paloma Yayınevine aittir. İzinsiz çoğaltılamaz.

Orijinal adı: Love and Math-The Heart of Hidden Reality
Copyright © 2013 by Edward Frenkel. First published in the United States by Basic Books, A Member of the Perseus Books Group

1. Baskı / Ekim 2015, İstanbul
ISBN: 978-605-9200-04-2

İngilizceden çeviren: Cem Keskin
Düzelti: Banu Erol
Bilimsel yayın danışmanı: Yılmaz Akyıldız
Yayıma hazırlayan: Banu Erol
Kapak tasarımı: Dilek Şişli
Kapak fotoğrafı: Elizabeth Lippman

Baskı: Stimat Matbaa Rek. Org. San. ve Tic. Ltd Şti. Maltepe Mah. Litros Yolu Sok. No: 12/166 Zeytinburnu-İstanbul. Matbaa sertifika no: 30704 • tlf. (212) 576 01 07

Bu kitabın Türkçe yayın hakları Nurcihan Kesim Telif ve Lisans Hakları Ajansı aracılığıyla alınmıştır.

Paloma Yayınevi—Paloma Medya Hizmetleri San. ve Tic. Ltd. Şti.
Yayıncılık sertifika no: 23401
Hocapaşa Mah. Ankara Cad. No: 28 Ankara İşhanı Kat: 2
Büro: 14-15 Cağaloğlu /İstanbul • tlf. (212) 514 27 20
info@palomayayinevi.com • palomakitap@gmail.com
www.palomayayinevi.com

Edward Frenkel

AŞK VE MATEMATİK

Saklı Gerçekliğin Kalbi

Çeviren: Cem Keskin

Paloma

Annem ve babam için

İçindekiler

Önsöz *15*

Okuma Kılavuzu *25*

1. Gizemli Yaratık 27
2. Simetrinin Özü 34
3. Beşinci Problem 50
4. Kerosinka 65
5. Çözümün İpleri 73
6. Acemi Matematikçi 86
7. Büyük Birleşik Teori 104
8. Sihirli Sayılar 116
9. Reşid Taşı 138
10. İlmiğin Parçası Olmak 153
11. Zirvenin Fethi 175
12. Bilgi Birikimi Ağacı 184
13. Harvard'ın Daveti 196
14. Bilgeliğin Demetlerini Örmek 211

15. Narin Bir Dans 230
16. Kuantum Dualitesi 251
17. Gizli Bağlantıların Ortaya Çıkarılışı 278
18. Aşkın Formülünün Peşinde 310

Son Söz 327
Robert Langlands'tan Türk Okurlarına Mektup 330
Teşekkür 340
Notlar 343
Terimler Sözlüğü 404
Dizin 409

Önsöz

Etrafımızda bir yerlerde saklı duran bir dünya var. Bizim dünyamızla karışık biçimde iç içe geçmiş, güzellik ve zarafetin gizli paralel evreni. İşte bu, matematiğin dünyasıdır ve çoğumuz onu göremez. Elinizdeki kitap, bu dünyayı keşfetmek için bir çağrıdır.

Bir paradoksa değinmek istiyorum: Bir açıdan baktığımızda, matematik gündelik hayatımızın içine işlemiştir. Her çevrim içi satın alma işlemi yaptığımızda, bir metin mesajı yolladığımızda, internette arama yaptığımızda veya bir GPS cihazı kullandığımızda, matematiksel formüller ve algoritmalar devreye girer. Öte yandan, çoğu insanın matematikten gözü korkar. Şair Hans Magnus Enzensberger'in kelimeleriyle, "kültürümüzde bir kör nokta; sadece elit, seçilmiş dar bir kesimin içinde kendilerini emniyete almayı becerdiği yabancı bir alan" olmuştur. Şaire göre, "bir roman okumanın, bir resme bakmanın veya bir film izlemenin kendisi için dayanılmaz bir eziyet olduğunu şiddetle savunan bir insanla karşılaşma" olasılığımız epey düşüktür ama "duyarlı ve eğitimli insanlar karşı koyma ve gururu ilginç bir biçimde harmanlayarak" matematiğin "kendilerini bıktıran, tam bir işkence" ya da "kabus" olduğunu sıklıkla ifade eder.

Böyle bir anormallik nasıl mümkün olabilir? Ben iki ana sebep görüyorum. Birincisi, matematik diğer alanlardan daha soyut ve

dolayısıyla diğerleri kadar erişilebilir değil. İkincisi, okulda öğrendiklerimizin çoğu, bin yıldan fazla bir süre önce bulunmuş olup, matematiğin sadece çok küçük bir kısmını oluşturuyor. O günden bu güne matematik oldukça ilerledi ama modern matematiğin hazineleri çoğumuzdan saklanıyor.

Okulda, sadece çit boyamanın öğretildiği bir "sanat dersi" almış olsaydınız ne olurdu? Leonardo da Vinci ya da Picasso'nun resimleri size hiç gösterilmeseydi? Bu şekilde, sanatın kıymetini bilebilir miydiniz? Daha fazlasını öğrenmek ister miydiniz? Pek zannetmiyorum. Muhtemelen şöyle derdiniz: "Okulda sanat öğrenmek benim için tam bir zaman israfıydı. Eğer çit boyamaya ihtiyacım olursa bunu yapacak birilerini tutardım." Pek tabii ki bu biraz komik görünüyor ama matematik böyle öğretiliyor ve çoğumuzun gözünde boyanın kurumasını izlemekle aynı şey oluyor. Büyük ustaların resimlerine ulaşmak kolay ama büyük ustaların matematiği hâlâ kilit altında.

Bununla birlikte, büyüleyici olan sadece matematiğin estetik güzelliği değil. Galileo'nun ünlü sözünde belirttiği üzere, "Doğanın kanunları matematiğin dilinde yazılmıştır." Matematik, gerçekliği tanımlamanın ve dünyanın nasıl işlediğini anlamanın bir yoludur ve gerçeğin altın standardı hâline gelmiş evrensel bir dildir. Bilim ve teknolojinin giderek daha fazla yön verdiği dünyamızda matematik; gücün, zenginliğin ve ilerlemenin her zamankinden daha büyük bir kaynağı hâline geliyor. Dolayısıyla bu yeni dili akıcı biçimde konuşabilenler ilerlemenin zirvesine erişecekler.

Matematiğe dair en büyük yanlış anlamalardan biri, onun sadece bir "alet takımı" olarak kullanılabileceğidir: Söz gelimi biyologlar, bir alan çalışması yaparak veri toplarlar ve bu veriye uygun bir matematiksel model kurmaya çalışırlar (bazen de bir matematikçiden yardım alırlar). Bu, önemli bir çalışma şekli olmakla birlikte, matematik bize *çok daha fazlasını* sunar: Başka türlü yapamayacağımız, çığır açan, ezber bozan atılımlar yapmamızı sağlar. Örneğin, Albert Einstein yerçekiminin içinde bulunduğumuz uzayın bükülmesine

yol açtığını anladığında, herhangi bir veriyi denklemlere oturtmaya çalışmıyordu. Aslına bakarsanız böyle bir veri de yoktu. O dönemde, uzayın bükülmüş olduğunu kimse hayal dahi edemezdi; herkes dünyamızın düz olduğunu "biliyordu"! Fakat Einstein, geliştirdiği özel görelilik teorisini yerçekimi ve ivmenin aynı etkiye sahip olduğu yönündeki içgörüsü ile birlikte, eylemli (non-inertial) sistemlere genelleyebilmenin tek yolunun bu olduğunu fark etmişti. Bu, matematik âleminde yapılan üst düzey bir entelektüel egzersizdi ve Einstein burada, matematikçi Bernhard Riemann'ın kendisinden elli yıl önce yapmış olduğu bir çalışmaya dayanarak hareket etmişti. İnsan beyni, ikiden fazla boyuta sahip bükümlü uzayları aklında canlandırması mümkün olmayacak biçimde donatılmıştır; onlara erişmenin tek yolu matematiktir. Ve bilin bakalım ne oldu? Einstein haklı çıktı: Evrenimiz bükümlü*dür* ve dahası genişliyor. İşte matematiğin bahsettiğim gücü budur!

Sadece fizikte değil, diğer alanlarda da bunun gibi birçok örnek bulunabilir (bunların bir kısmına ileride değineceğiz). Tarih, bilim ve teknolojinin matematiksel fikirler tarafından, gittikçe artan bir tempo ile dönüştürüldüğünü gösteriyor; başlangıçta soyut ve ezoterik görünen matematiksel teoriler bile, zamanla uygulamalar için olmazsa olmaz hâle geliyor. Başlangıçta yaptığı çalışmalar matematiğe dayanmayan Charles Darwin, daha sonra otobiyografisinde şunları yazmıştı: "Matematiğin en azından büyük öncü ilkelerini anlayacak kadar üzerine düşmediğim için oldukça pişmanım çünkü bu donanıma sahip olanlar, fazladan bir duyuya sahip görünüyorlar." Bu sözleri, matematiğin devasa potansiyelinden faydalanmak isteyen gelecek nesillere öngörüsü yüksek bir tavsiye olarak sunabilirim.

Çocukluğumda, matematiğin saklı dünyasının ayırdında değildim. Çoğu kişi gibi matematiğin modası geçmiş ve sıkıcı bir konu olduğunu düşünüyordum. Ancak şanslıydım: Lise son sınıftayken, matematiğin büyülü dünyasını bana gösteren profesyonel bir ma-

tematikçi ile tanıştım. Matematiğin tıpkı şiir, sanat ve müzik gibi, zarafet ve güzelliğin yanı sıra sonsuz olasılıklar barındırdığını da öğrendim.

Sevgili okur, öğretmenlerimin ve akıl hocalarımın benim için yaptıklarını bu kitap aracılığıyla ben de sizin için yapmak istiyorum: "Matematik" ve "aşk" sözcüklerini aynı cümle içinde hiç kullanmamış olsanız dahi matematiğin gücünü ve güzelliğini gün yüzüne çıkarmak ve o büyülü dünyaya benim girdiğim yoldan girmenizi sağlamak. Matematik, tıpkı bana olduğu gibi sizin de teninize işleyecek ve dünyaya bir daha asla eskisi gibi bakmayacaksınız.

* * *

Matematiksel bilgi birikimi, diğer tüm bilgi birikimlerinden farklıdır. Fiziksel dünya algımız her zaman bozulabilir ama matematiksel doğrulara ilişkin algımız bozulmaz. Bunlar, nesnel, kalıcı ve gerekli doğrulardır. Bir matematiksel formül ya da teorem, herkes için her yerde aynı anlamı taşır —cinsiyet, din veya ten renginden bağımsızdır; bugünden binlerce yıl sonra da herkes için aynı anlamı taşıyacak. İşin güzel yanı, hepsinin de sahibi biziz. Kimse bir matematiksel formülün patentini alamaz; onlar, paylaşmak üzere hepimizindir. Bu dünyada bu kadar derinlikli ve mükemmel olup, yine de hepimizin ulaşabildiği başka bir şey yok. Böyle bir birikimin var olduğuna inanmak çok güç. "Seçkin bir azınlığa" verilemeyecek kadar değerli. O, hepimize ait.

Matematiğin temel işlevlerinden biri, bilginin düzenlenmesidir. Van Gogh'un fırça darbelerini önemsiz lekeler olmaktan ayıran da budur. 3-boyutlu baskının gelmesiyle, alışageldiğimiz gerçeklik radikal bir dönüşüm yaşıyor: Her şey, fiziksel nesnelerin dünyasından bilgi ve veri dünyasına taşınıyor. Yakında 3-boyutlu yazıcıları kullanarak, tıpkı bir PDF dosyasını kitaba ya da MP3 dosyasını müzik parçasına dönüştürebildiğimiz gibi, bilgiyi de maddeye dönüştürebileceğiz. Bu yeni cesur dünyada, matematik daha da merkezi bir rol

oynayacak: Bilgiyi düzenleyip sıralamanın yolu ve bilginin fiziksel gerçekliğe dönüşümünü kolaylaştırma aracı olacak.

Bu kitapta sizlere son elli yıl içerisinde matematik alanında ortaya çıkmış en büyük fikirlerden birini anlatacağım: Çoğu kişi tarafından matematiğin Büyük Birleşik Teorisi (Grand Unified Theory-GUT) olarak görülen Langlands Programı. Bu harikulade teori, ilk bakışta birbirlerine ışık yılı kadar uzakta duran cebir, geometri, sayılar teorisi, analiz ve kuantum fiziği gibi farklı matematik alanları arasında cezbedici bağlantılardan oluşan bir ağ kurar. Bu alanları matematiğin gizli dünyasındaki kıtalar olarak düşünürsek Langlands Programı, bunların birinden diğerine anlık geçişler yapıp geri dönmemizi sağlayan nihai ışınlama cihazıdır.

1960'ların sonuna doğru Robert Langlands (kendisi bugün Princeton İleri Araştırmalar Enstitüsü'nde Albert Einstein'ın ofisinde oturan matematikçidir) tarafından ortaya atılan Langlands Programı, çığır açan bir matamatiksel simetri teorisi üzerine kuruludur. Programın temelleri iki yüzyıl önce, bir Fransız dâhi tarafından, henüz yirmi yaşında bir düelloda öldürülmeden hemen önce atılmıştı. Daha sonra, sadece Fermat'nın Son Teoremi'ni ispatlamasına yol açmakla kalmayıp, sayılar ve denklemler hakkındaki düşünce şeklimizde de devrim yaratan bir diğer müthiş buluş tarafından zenginleştirildi. Bir diğer etkili içgörü de, matematiğin kendi Reşid Taşı'na sahip olduğu ve birçok gizemli benzetim ve metaforu da bünyesinde barındırdığı şeklindedir. Langlands Programı'nın ortaya koyduğu fikirler, bu benzetimleri matematiğin büyülü diyarındaki dereler gibi takip edip, görünüşteki kaostan düzen ve uyum yaratarak geometrinin ve kuantum fiziğinin alanlarına taştı.

Size tüm bunları matematiğin çok nadiren gördüğümüz yönlerini göstermek için anlatmak istiyorum: ilham, derin fikirler, şaşırtıcı açımlamalar. Matematik, gelenekselin bariyerlerini kırmanın bir yolu, doğruyu ararken sınırsız hayalin bir ifadesidir. Sonsuzluk teo-

risinin yaratıcılarından Georg Cantor şöyle yazmıştı: "Matematiğin özü, onun özgürlüğünde gizlidir." Matematik bize gerçekliği titizlikle analiz etmeyi, olguları incelemeyi ve her nereye görütürürlerse götürsünler onları takip etmeyi öğretir. Bizi dogmalardan ve önyargılardan kurtarıp, inovasyon kapasitesini besler. Dolayısıyla konunun kendisini aşan araçlar sunar.

Bu araçların iyilik ve kötülük için kullanılabilir olması, bizi matematiğin gerçek dünyaya etkilerini hesaba katmaya zorlar. Örneğin, global ekonomik krizin önemli nedenlerinden biri, yetersiz matematiksel modellerin finansal piyasalarda yaygın olarak kullanılmasıydı. Karar vericilerin çoğu, matematik alanındaki cahillikleri yüzünden bu modelleri tam manasıyla anlayamamış olmalarına rağmen, söz konusu uygulamaları tüm sistemi yıkana kadar açgözlü bir biçimde kullandılar. Bilgiye erişimin asimetrik olmasının avantajlarını adil olmayan bir biçimde kullanıyor ve kimsenin yaptıkları blöfü anlamamasını umuyorlardı, çünkü diğer insanlar bu modellerin işe yarayıp yaramadığını sorgulamıyordu. Eğer daha çok sayıda insan bu modellerin nasıl işlediğini ve sistemin gerçekte nasıl çalıştığını anlamış olsaydı belki de bu kadar uzun süre kandırılmazdık.

Bir örnek daha verebilirim: 1996 yılında, ABD hükümeti tarafından görevlendirilen bir komisyon gizlice toplandı ve vergi aralıklarını, Sosyal Güvenliği, sağlık sigortasını ve diğer endekslenmiş ödemeleri belirleyen enflasyon ölçütü olan Tüketici Fiyat İndeksi formülünü değiştirdi. On milyonlarca Amerikalı bundan etkilendi ama yeni formül ve doğuracağı sonuçlar kamuoyunda çok az tartışıldı. Son dönemlerde de bu gizemli formülden ABD ekonomisinin arka kapısı olarak faydalanmak için bir girişimde daha bulunuldu.[1]

Matematik bilgisi yüksek olan bir toplumda bu tür karanlık oda tezgâhları çok daha az olacaktır. Matematik, titizlik ve entelektüel dürüstlüğün toplamının olguları esas alma ile çarpımına eşittir. Matematiğin gittikçe daha fazla yön verdiği bir dünyada, hepimizin güçlü azınlığın rastgele kararlarından bizi koruyacak matematiksel

bilgi birikimine ve araçlara erişebilir olması gerekir. Matematiğin olmadığı yerde özgürlük yoktur.

* * *

Matematik de tıpkı sanat, edebiyat ve müzik gibi kültürel mirasımızın bir parçasıdır. İnsan olarak yeni bir şeyler keşfetmek, yeni anlamlara ulaşmak, evreni ve bizlerin içindeki yerini daha iyi anlamak için açlık duyuyoruz ama ne yazık ki Columbus gibi yeni bir kıta keşfetme ya da Ay'a ilk adım atan kişi olma şansımız yok. Peki, ya size dünyanın harikalarını keşfetmek için okyanus geçmenize ya da uzaya uçmanıza gerek olmadığını söylesem? İşte buradalar, mevcut gerçekliğimiz ile iç içe geçmiş hâldeler. Bir anlamda içimizdeler. Matematik, evrenin akışına yön veriyor, eğriler ve şekillerin ardına gizleniyor, minik atomlardan en büyük yıldızlara kadar her şeyin dizginlerini elinde tutuyor.

Elinizdeki kitap bu zengin ve büyüleyici dünyaya bir davettir. Kitabı, herhangi bir matematik altyapısı bulunmayan okurlar için yazdım. Matematiğin zor olduğunu ve onu anlamayacağınızı düşünüyorsanız, ondan korkuyor fakat öte yandan bilmeye değer bir şey içerip içermediğini de merak ediyorsanız bu kitap tam size göre.

Matematiğin önemini anlamak için yıllarca çalışılması gerekiyormuş gibi yaygın bir yanlış anlama söz konusu. Hatta bazıları, söz konusu matematik olunca çoğu insanın doğuştan gelen bir öğrenme zorluğu yaşadığını düşünüyor. Buna katılmıyorum: Birçoğumuz güneş sistemi, atomlar ve temel parçacıklar, DNA'nın ikili sarmalı gibi kavramları ve çok daha fazlasını fizik ya da biyoloji dersi almadan duymuş ve bu konular hakkında en azından temel bir fikir edinmişizdir. Bu karmaşık fikirlerin, kültürümüzün ve ortak bilincimizin bir parçası hâline gelmiş olmasına da kimse şaşırmaz. Benzer şekilde, eğer doğru biçimde açıklanırsa, matematiğin temel kavramlarını ve fikirlerini de herkes kavrayabilir. Bunun için yıl-

larca matematik çalışmaya gerek yok; çoğu durumda, istediğimiz noktaya doğrudan gidip ara adımları atlayabiliriz.

Karşı karşıya olduğumuz problem şu: Dünya genellikle gezegenler, atomlar ve DNA hakkında konuşurken, işe bakın ki kimse, 2 ile 2'nin her zaman 4 etmediği yeni sayısal sistemler ve Riemann yüzeyleri gibi güzel geometrik şekiller ile simetri grupları gibi modern matematiğin cezbedici fikirlerinden bahsetmiyor. Bu, size sürekli küçük bir kedi gösterip, kaplanın da buna benzer bir şey olduğunu söylemek gibi. Oysa aslında kaplan, tamamen farklı bir hayvandır. Size onu tüm ihtişamıyla göstereceğim ve William Blake'in muhteşem biçimde ifade ettiği gibi, onun o "korkunç simetrisi"nin kıymetini çok iyi anlayabileceksiniz.

Beni yanlış anlamayın, bu kitabı okumak tek başına sizi bir matematikçi yapmayacak. Herkesin matematikçi olması gerektiğini de savunmuyorum. Bunu şu şekilde düşünebilirsiniz: Az sayıda akor öğrenmek, birkaç tane şarkıyı gitar ile gayet güzel çalmanızı sağlayacaktır. Bu sizi dünyanın en iyi gitaristi yapmayacak ama hayatınızı zenginleştirecektir. Bu kitapta modern matematiğin daha önce sizden gizlenen akorlarını göstereceğim ve size söz veriyorum, bu hayatınızı zenginleştirecek.

Öğretmenlerimden biri olan büyük insan Israel Gelfand şöyle derdi: "İnsanlar matematiği anlamadıklarını düşünürler ama bu tamamen matematiği onlara nasıl anlattığınızla alakalı bir durumdur. Eğer ayyaşın birine 2/3 mü yoksa 3/5 mi büyük, diye sorarsanız size cevap veremeyecektir ama soruyu '3 kişiye 2 şişe votka mı yoksa 5 kişiye 3 şişe vodka mı?' diye sorarsanız doğru cevabı söyleyecektir: '3 kişiye 2 şişe votka, tabii ki.'"

Amacım, bunu size anlayabileceğiniz şekilde açıklamak.

Size ayrıca, baskıcı bir rejim karşısında matematiğin özgürlüğün ileri karakolu hâline geldiği, eski Sovyetler Birliği'nde yetişme deneyimimden de bahsedeceğim. Moskova Devlet Üniversitesi'ne girmeme, Sovyetler Birliği'nin ayrımcılık politikaları engel oldu.

Kapılar yüzüme kapandı. Dışlandım ama pes etmedim. Derslere ve seminerlere katılmak için, o üniversiteye kaçak göçek girecektim. Matematik kitaplarını bazen gece yarılarına kadar bir başıma okuyacaktım. Ancak sonunda sistemi hack'leyebildim. Benim ön kapıdan girmeme izin vermediler; uçarak pencereden girdim. Eğer âşıksanız sizi kim durdurabilir?

İki zeki matematikçi beni kanatları altına aldılar ve akıl hocam oldular. Onların rehberliğinde, matematiksel araştırma yapmaya başladım. Henüz bir lisans öğrencisiydim ama bilinmeyenin sınırlarını zorlamaya başlamıştım bile. Hayatımın en heyecan verici dönemiydi ve üstelik ayrımcı politikaların Sovyetler Birliği'nde matematikçi olarak bir işe girmeme asla izin vermeyeceğinden emin olmama rağmen bunu yaptım.

Ama beni bekleyen bir sürpriz vardı: Matematik alanındaki ilk makalelerim gizlice yurt dışına çıkıp, bilinir hâle geldi ve yirmi bir yaşında Harvard Üniversitesi'ne misafir öğretim görevlisi olarak davet edildim. Mucize eseri, tam o sırada Sovyetler Birliği'ndeki *perestroyka* demir perdeleri kaldırdı ve vatandaşların yurt dışına çıkışına izin verildi. Böylece ben, doktorasız bir Harvard profesörü olarak, sistemi bir kere daha hack'lemiş oldum. Langlands Programı'nın sınırları üzerinde araştırma yapmama neden olan ve bu alanda son yirmi yılda kaydedilen en önemli ilerlemelere katkıda bulunmamı sağlayan akademik yoluma devam ettim. İlerleyen sayfalarda, zeki bilim adamlarının elde ettiği bulgulardan ve arka planda olup bitenlerden de bahsedeceğim.

Bu kitap aynı zamanda aşk hakkında. Bir zamanlar "aşkın formülünü" keşfeden matematikçi olma hayaline kapılmıştım ve bu hayal, kitabın ilerleyen kısımlarında anlatacağım *Rites of Love and Math* filmi için ilham kaynağı oldu. Filmi izler izlemez insanlar şunu soruyor: "Aşkın formülü gerçekten var mı?"

Benim cevabım ise belli: "Keşfettiğimiz her formül, bir aşk formülüdür". Matematik, tüm maddelerin kalbine giden; kültürler, kı-

talar ve yüzyıllar arasında bizi birleştiren; zamandan bağımsız derin bilgi birikimi kaynağıdır. Bu fikirlerin, formüllerin ve denklemlerin büyülü güzelliğini ve nefes kesen uyumunu hepimizin görebilmesini, değerini anlamasını ve bunlar karşısında şaşırmasını hayal ediyorum çünkü bu sayede bu dünyaya ve birbirimize duyduğumuz aşka çok daha fazla anlam yükleyeceğiz.

Okuma Kılavuzu

Bu kitapta, matematiksel kavramları en temel ve sezgisel biçimde anlatmak için elimden geleni yaptım. Yine de kitabın bazı bölümleri matematik açısından biraz ağır oldu (özellikle Bölüm 8, 14, 15 ve 17'nin bazı kısımları). İlk okuyuşta, kafa karıştırıcı ve sıkıcı görünen bu kısımları *atlamak gayet yerinde olabilir.* Elde ettiğiniz yeni bilgi birikimiyle bu kısımlara sonradan geri döndüğünüzde, bu konuları takip etmek daha kolay olabilir. Bununla birlikte, bir sonraki konuyu takip edebilmek için bu genelde gerekli olmayacaktır.

Belki daha da önemlisi, *eğer bir şey net değilse kesinlikle sorun yok.* Matematikle uğraştığım sürenin yüzde 90'ında ben böyle hissederim; dünyama hoşgeldiniz! Bu karmaşa hissi (hatta bazen hayal kırıklığı), matematikçi olmanın temel parçasıdır. Bardağın dolu tarafına bakalım: Eğer içindeki her şey küçük bir çabayla anlaşılabilir olsaydı hayat ne kadar da sıkıcı olurdu! Matematiği bu kadar heyecan verici kılan şey; bu karmaşanın üstesinden gelmek, anlamak, bilinmeyeni gizleyen örtüyü kaldırmak için duyduğumuz arzudur. Bir şeyi anladığımızda duyduğumuz o şahsi zafer hissi, her şeye değer.

Bu kitapta, teknik ayrıntılara değil, büyük resme ve matematiğin farklı kavramları ile alanları arasındaki mantıklı bağlantılara odaklandım. Ayrıntılı değerlendirmeleri genellikle sonnotlara sakladım; referansları ve okuma tavsiyelerini de bu kısma koydum.

Ancak, sonnotlar kavrayışınızı geliştirebilecek olmakla beraber, en azından ilk okumada pek endişe etmeden atlanabilirler.

Formül kullanımını en az düzeyde tutmaya çalıştım; mümkün olan her noktada sözel ifadeleri tercih ettim. Karşınıza çıkacak az sayıdaki formülü gönül rahatlığıyla atlayabilirsiniz.

Matematiksel terminolojiye dair bir uyarıda bulunmak istiyorum: Bu kitabı yazarken, matematikçilerin belirli bir şekilde kullandığı kimi terimlerin matematikçi olmayanlar için tamamen farklı anlamlar taşıyabildiğini şaşırarak fark ettim. Bunlar, "eşleme" (correspondence), "gösterim" (representation), "bileşim" (composition), "ilmik" (loop), "manifold" (manifold) ve "teori" gibi terimler. Bu tür bir durum sezdiğimde açıklamalara yer verdim. Ayrıca, mümkün olan yerlerde, anlaşılması güç matematiksel terimlerin yerine daha saydam anlam taşıyan terimler kullandım (örneğin, "Langlands eşlemesi" yerine "Langlands bağıntısı" ifadesini kullandım). Tam olarak anlayamadığınız kelimelerle karşılaştığınızda, Sözlük ve Dizin kısımlarından faydalanabilirsiniz.

Güncellemeler ve destekleyici materyallerin yanı sıra kitap hakkındaki görüşlerinizi benimle paylaşmak amacıyla bana e-posta göndermek için, web sitemi ziyaret edebilirsiniz: http://edwardfrenkel.com. (e-posta adresimi web sitesinde bulabilirsiniz.) Görüşleriniz benim için oldukça değerli.

1. Bölüm:

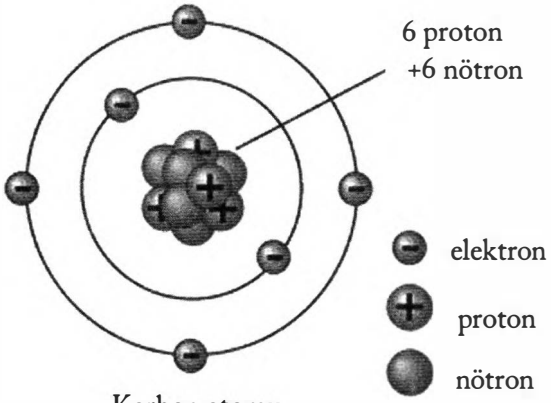
Gizemli Yaratık

Matematikçi nasıl olunur? Bunu başarmanın birçok yolu var. Benim nasıl olduğumu size anlatayım.

Şaşırabilirsiniz ama öğrenciyken matematikten nefret ediyordum. "Nefret" çok sert bir ifade olabilir, sevmiyordum diyelim. Bana sıkıcı geliyordu. Ödevlerimi yapabiliyordum tabii ama neden yaptığıma bir türlü anlam veremiyordum. Sınıfta ele alınan konular bana faydasız, alakasız görünüyordu. İlgimi çeken alan ise fizikti; özellikle de kuantum fiziği. Bu konuda elime geçen tüm popüler fizik kitaplarını bir solukta bitiriyordum. Bu tür kitapların kolaylıkla bulunabildiği Rusya'da büyüdüm ben.

Kuantum dünyası beni büyülüyordu. Antik çağlardan beri bilim insanları ve filozoflar evrenin temel yapısını tanımlamayı hayal etmişti; hatta bunların bir kısmı, tüm maddelerin atom ismi verilen minik parçacıklardan oluştuğu hipotezini kurdu. Atomların var olduğu yirminci yüzyılın başlarında ispatlandı ama aynı dönemlerde bilim insanları, her bir atomun daha küçük parçacıklara bölünebildiğini de keşfetti. Her atomun ortasında bir çekirdek ve onun etrafında dönen elektronlardan oluştuğu anlaşıldı. Çekirdeğin

kendisi ise aşağıdaki diyagramda gösterildiği üzere, proton ve nötronlardan oluşur.[1]



Karbon atomu

Peki ama proton ve nötronlar neyin nesiydi? Okuduğum popüler bilim kitapları, bunların "kuarklar" denen temel parçacıklardan oluştuğunu söylüyordu.

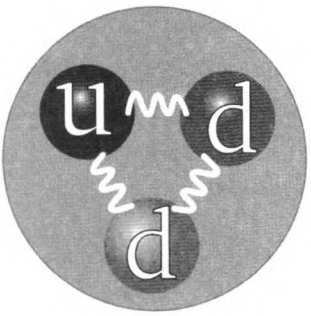
"Kuarklar" ismine ve özellikle de bu ismin ortaya çıkış şekline bayılıyordum. Bu parçacıkları keşfeden fizikçi Murray Gell-Mann, bu ismi James Joyce'un *Finnegan's Wake* isimli kitabında yer alan şu hiciv şiirinden ödünç aldı:

> *Kral Mark'ın üç kuarkı!*
> *Elbette yoktu pek gemisi*
> *Ve sahip olduklarının elbette yok konumuzla bir ilgisi.*

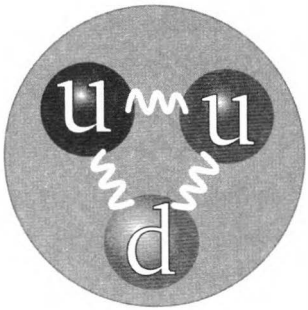
Bir fizikçinin, bir parçacığa isim verirken bir romandan esinlenmesinin gerçekten havalı olduğunu düşündüm; özellikle de, *Finnegan's Wake* gibi anlaşılması zor ve çok önemli bir romandan esinlenmesi. On üç yaşında filan olmalıyım ama bilim insanlarının çalıştıkları konuların derinliklerine inerek, sanat ve beşeri bilimler gibi hayatın diğer alanlarından kopmuş, münzevi ve tarifi zor canlı-

lar olduklarını daha o zamandan biliyordum. Ben ise öyle değildim. Birçok arkadaşım vardı, okumayı seviyordum ve bilimin yanı sıra birçok başka şeyle de ilgileniyordum. Futbol oynamayı seviyordum ve uzun saatler boyunca arkadaşlarımla top peşinde koşuyordum. O dönemde, evdeki kütüphanemizde bulduğum izlenimcilik üzerine büyükçe bir kitap sayesinde izlenimci resimleri keşfettim. Van Gogh favorimdi. Onun çalışmalarından etkilenip, resim yapmayı bile denedim. İlgi duyduğum tüm bu uğraşlar, bilim insanı olmak için gerçekten uygun olduğumdan şüphe duymama neden olmuştu. Dolayısıyla Nobel ödüllü büyük fizikçi Gell-Mann'ın çok farklı alanlarla (sadece edebiyat değil dilbilimi, arkeoloji ve daha niceleri) ilgilendiğini okumak, beni çok mutlu etti.

Gell-Mann'a göre "aşağı" ve "yukarı" iki farklı tür kuark vardır ve bunların farklı karışımları nötron ve protonların özelliklerini belirler. Aşağıdaki resimlerde de görülebileceği üzere bir nötron iki adet aşağı ve bir adet yukarı kuarktan oluşurken; bir proton, iki adet yukarı kuark ile bir adet aşağı kuarktan oluşur.[2]



Nötron



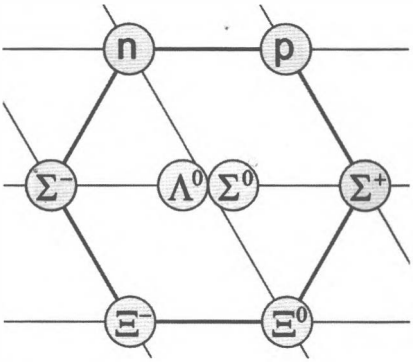
Proton

Bu yeterince açıktı. Fakat fizikçilerin proton ve nötronların bölünmez parçacıklar olmayıp, daha küçük bloklardan oluştuklarını nasıl tahmin ettikleri belirsizdi.

Bu hikâye, hadron ismi verilen çok sayıda temel parçacığın keşfedildiği 1950'lerin sonlarına kadar uzanır. Nötronların ve protonların her ikisi de hadrondur ve elbette maddenin yapı taşı olarak gündelik hayatımızda önemli bir rol oynarlar. Hadronların geri kalanının ne için var olduklarına (ya da bir araştırmacının ifade ettiği biçimiyle "onları kimin sipariş ettiğine") dair kimsenin bir fikri yoktu. O kadar çok hadron vardı ki önemli fizikçilerden Wolfgang Pauli fiziğin bitki bilimine dönüştüğünü söyleyerek bu durumla dalga geçti. Fizikçiler, hadronların davranışlarını yöneten ve akıl almaz biçimde çoğalmalarını açıklayacak temel ilkeleri bulmak için hadronları dizginlemeyi çok istiyorlardı.

Gell-Mann ve ondan bağımsız olarak Yuval Ne'eman, yeni bir sınıflandırma şeması önerdiler. Her ikisi de hadronların her biri sekiz ya da on parçacıktan oluşan küçük öbeklere bölünebileceğini gösterdi. Bunlara sekiz parçacıklı (octet) ile on parçacıklı (decuplet) isimlerini verdiler. Öbeklerin her birinin içindeki parçacıklar benzer özelliklere sahipti.

O zamanlar okuduğum popüler bilim kitaplarında, sekiz parçacıklıların aşağıdakine benzer şemaları yer alırdı.



Yukarıdaki şekilde, *p* ile gösterilen proton ve *n* ile gösterilen nötronun yanı sıra Yunan harfleri ile gösterilen garip isimli altı tane daha parçacık bulunuyor.

Peki ama neden mesela 7 ve 11 değil de 8 ve 10? O sıralar okuduğum kitaplarda tutarlı bir açıklama bulamadım. Gell-Mann'ın "sekiz katlı yol" isimli (Buddha'nın "Sekiz Aşamalı Asil Yol"undan esinlenilmiş) gizemli bir fikrinden bahsediyor ama tüm bunların ne hakkında olduğunu açıklamaya hiç yeltenmiyorlardı.

Böyle bir açıklamanın olmaması beni çok huzursuz ediyordu, tatmin olamıyordum. Hikâyenin asıl önemli kısımları gizli kalıyordu. Bu gizemi çözmek istiyordum fakat nasıl yapacağıma dair hiçbir fikrim yoktu.

Ama şans yüzüme güldü ve bir aile dostumuz bu konuda bana yardım etti. Kolomna isminde, nüfusu yaklaşık yüz elli bin kadar olan küçük bir sanayi kasabasında büyüdüm. Moskova'ya yaklaşık 100 km mesafedeydi ve yolculuk trenle iki saati biraz aşıyordu. Annem ve babam ağır iş makinaları üreten büyük bir firmada mühendis olarak çalışıyordu. Kolomna iki nehrin kesiştiği noktada, 1177 yılında (Moskova'dan sadece otuz yıl sonra) kurulmuş eski bir kasabaydı. Hâlâ ayakta olan az sayıdaki kilise ve şehir surları, Kolomna'nın önemli tarihsel geçmişinin kanıtıdır. Fakat bu küçük yerleşim yeri, eğitim ve entelektüel birikim açısından tam anlamıyla bir merkez sayılmaz. Kasabada, okul öğretmenlerini yetiştiren küçük bir yüksekokul vardı sadece. Buradaki öğretim üyelerinden matematikçi Evgeny Evgenievich Petrov aile dostumuzdu. Uzun bir sürenin ardından bir gün annem onunla sokakta karşılaşmış ve sohbet etmeye başlamışlardı. Annem arkadaşlarına benden bahsetmeyi severdi ve bu sohbette de konu yine bana gelmişti. Bilim ile ilgilendiğimi duyan Evgeny Evgenievich "Onunla tanışmalıyım. Onu matematiğe yönlendirmeyi deneyeceğim," demişti.

Annem, "Ne yazık ki matematiği sevmiyor, sıkıcı olduğunu düşünüyor. Kuantum fiziği ile ilgilenmek istiyor," demişti.

Evgeny Evgenievich, "Endişelenme, sanırım onun fikrini nasıl değiştirebileceğimi biliyorum," diye karşılık vermişti.

Bir buluşma ayarlandı ve pek istememekle birlikte Evgeny Evgenievich ile görüşmek üzere ofisine gittim.

On beş yaşına girmek üzereydim ve dokuzuncu sınıfın bitmesine az bir zaman kalmıştı. Bir yıl sonra lise eğitimimi tamamlamış olacaktım. (Altıncı sınıfı atladığım için sınıf arkadaşlarımdan bir yaş küçüktüm.) O sıralar kırklı yaşlarının başında olan Evgeny Evgenievich, dost canlısı ve mütevazı bir insandı. Gözlükleri ve kirli sakalı ile kafamdaki matematikçi imajına uyuyordu. Büyük gözlerindeki inceleyici bakışlarda, insanı büyüleyen bir şeyler vardı; her şeye karşı büyük bir merak yayıyorlardı.

Evgeny Evgenievich'in beni matematiğe yönlendirmek için zekice bir planı olduğu anlaşıldı. Ofisine girer girmez bana "Kuantum fiziğinden hoşlandığını duydum. Peki, Gell-Mann'ın sekiz katlı yolunu ve kuark modelini duydun mu?" dedi.

"Evet, birkaç popüler bilim kitabında bunun hakkında bir şeyler okudum."

"Peki bu modelin neye dayandığını biliyor musun? Bu fikirleri nasıl geliştirdiğini?"

"Aslında..."

"*SU(3)* grubu hakkında bir şey duydun mu?"

"*SU* ne?"

"*SU(3)* grubunun ne olduğunu bilmeden, kuark modelini nasıl anlayabilirsin ki?"

Kitaplığından birkaç kitap çıkardı ve bana sayfalar dolusu formül gösterdi. Yukarıdakine benzer, aşina olduğum sekiz parçacıklı diyagramları görüyordum ama pek de güzel resimler oldukları söylenemezdi; daha ziyade, kapsamlı ve ayrıntılı bir açıklamanın parçaları gibiydiler.

Bu formüllerin ne başını ne de sonunu anlayabilmiştim ama aradığım cevapları içerdiklerini hemen fark ettim. İşte o an aklımda bir şimşek çaktı. Gördüklerim ve duyduklarımla büyülendim; daha önce hiç deneyimlemediğim bir şey bana dokunmuştu; kelimelerle açıklayamıyor ama enerjisini hissedebiliyordum; etkisinden kurtulamayacağı bir müzik duyan ya da bir tablo gören kişinin heyecanını duyuyordum. Aklıma gelen tek şey şuydu: "Vay be!"

"Muhtemelen matematiğin sana okulda öğretilen şey olduğunu düşünüyordun," dedi Evgeny Evgenievich. Kafasını salladı, "Hayır," dedi ve kitaptaki formülleri işaret ederek devam etti, "asıl matematik budur ve eğer kuantum fiziğini gerçekten anlamak istiyorsan başlaman gereken nokta burasıdır. Gell-Mann, güzel bir matematiksel teori kullanarak kuarkları öngördü. Bu aslında matematiksel bir keşifti."

"Peki ama bunları anlayabilmek için nereden başlamalıyım?"

Bana korkunç görünüyorlardı.

"Endişelenme. İlk önce, simetri grubu kavramını öğrenmen gerekiyor. Temel fikir o. Matematiğin önemli bir kısmı ve teorik fizik bunun üzerine kuruludur. Burada sana vermek istediğim bazı kitaplar var. Bunları okumaya başla ve anlamadığın cümlelerin altını çiz. Her hafta burada buluşarak bunlar hakkında konuşabiliriz."

Bana simetri grupları hakkında bir kitabın yanı sıra farklı konular üzerine birkaç kitap daha verdi: p-li sayılar (bizim alışık olduğumuzdan oldukça farklı bir sayı sistemi) ve topoloji (geometrik şekillerin en temel özelliklerinin çalışıldığı alan). Evgeny Evgenievich'in kusursuz bir üslubu vardı: Bu gizemli yaratığı —*matematik*— farklı açılardan görerek ondan etkilenmemi sağlayacak konuların kusursuz bir kombinasyonunu buldu.

Okulda, ikinci dereceden denklemler, bir miktar kalkülüs, biraz temel Öklid geometrisi ve trigonometri gibi konular görmüştük. Ben tüm matematiğin bunlarla ilgili olduğunu, problemlerin belki zorlaşacağını ama aşina olduğum bu genel çerçevenin içerisinde kalacağını sanmıştım. Ancak Evgeny Evgenievich'in verdiği kitaplar, benim hayalini bile kuramayacağım yepyeni bir dünyanın kapılarını araladı.

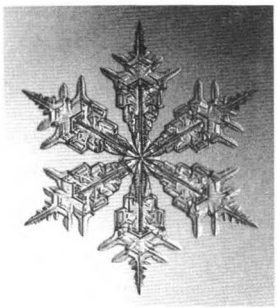
Bir anda değiştim.

2. Bölüm

Simetrinin Özü

Çoğu insan için matematik sadece sayılarla ilgilidir. Onlara göre matematikçiler, günlerini egzotik isimleri olan büyük ve hatta daha da büyük sayılarla karmaşık hesaplar yaparak geçiren insanlardır. Ben de böyle düşünüyordum; en azından, Evgeny Evgenievich beni modern matematiğin kavram ve fikirleri ile tanıştırana kadar. Bunlardan biri, kuarkların keşfine giden yolu açmıştı: simetri kavramı.

Simetri nedir? Hepimizin simetriye dair sezgisel bir kavrayışı vardır; onu gördüğümüzde tanırız. İnsanlardan simetrik nesnelere örnek vermelerini istediğimde kelebekleri, kar tanelerini veya insan vücudunu söylerler.





Onlara bir nesnenin simetrik olduğunu söylerken ne kastettiklerini sorduğumda ise duraklarlar.

Evgeny Evgenievich simetri kavramını bana açıklarken "Bu yuvarlak masaya ve şu kare masaya bir bak," diyerek ofisindeki iki masayı gösterdi ve "Sence hangisi daha simetrik?" diye sordu

"Tabii ki yuvarlak olan; bariz değil mi?"

"Peki neden? Matematikçi olmak demek, 'açıkça görülen' şeyleri hemen kabullenmeyip, kanıtlamaya çalışmak demektir. Çoğu kez, en bariz cevapların aslında yanlış olduğunu anlayıp şaşıracaksın."

Yüzümdeki şaşkınlığı fark eden Evgeny Evgenievich bana bir ipucu verdi: "Yuvarlak masanın daha simetrik olduğunu düşündüren özelliği nedir?"

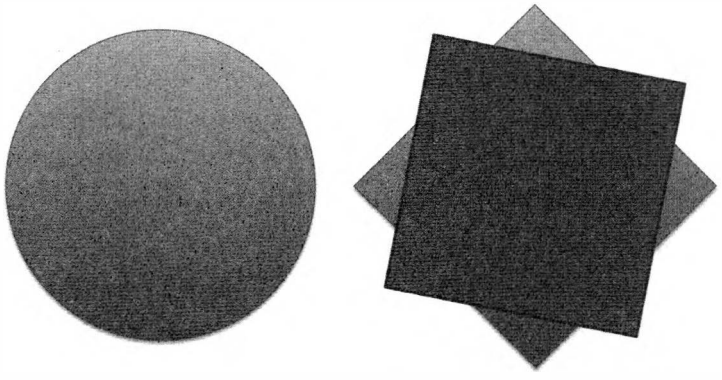
Bunun hakkında bir süre düşündükten sonra aklıma geldi: "Bence bir nesnenin simetrisi, nesneye etki ettiğimizde dahi şeklini ve konumunu değişmeden koruyabilmesi ile alakalı olmalı".

Evgeny Evgenievich başını salladı.

"Elbette. Bu iki masanın şeklini ve konumunu koruduğu olası bütün dönüşümlere bakalım," dedi. "Yuvarlak masa örneğinde..."

Sözünü kestim ve devam ettim: "Merkez nokta etrafındaki tüm dönme hareketleri simetriyi sağlar ve yine aynı şekilde konumlanmış bir masa elde ederiz. Oysa kare masayı rastgele döndürürsek genellikle farklı biçimde konumlanmış bir masa elde ederiz. Sadece 90 derece ve onun katları şeklindeki dönme hareketlerinde masanın şekli korunacaktır."

"Tam isabet! Sen bir dakikalığına dışarı çıksan ve ben yuvarlak masayı herhangi bir açıda döndürsem aradaki farkı algılayamazsın ama aynı şeyi kare masa için yapsam, ben masayı 90, 180 veya 270 derece döndürmediğim müddetçe, değişikliği hemen farkedersin."



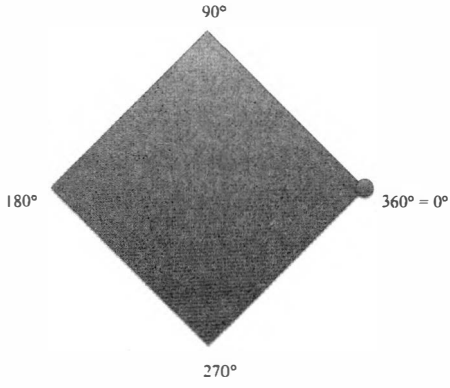
Yuvarlak bir masa herhangi bir açıda döndürüldüğünde konumu değişmezken, kare masa 90 derecenin katı olmayan bir açı ile döndürüldüğünde konumu değişir (burada her ikisi de tepeden görünüyor).

Sözlerine şöyle devam etti: "Bu tür dönüşümlere simetri denir. Gördüğün üzere kare masanın sadece dört simetrisi varken, yuvarlak masanın çok daha fazla —hatta sonsuz— sayıda simetrisi vardır. Yuvarlak masanın daha simetrik olduğunu söylememizin sebebi budur."

Bu çok anlamlıydı.

Evgeny Evgenievich, "Bu çok basit bir gözlem," diyerek devam etti. "Bunu görmek için bir matematikçi olman gerekmez. Ama eğer bir matematikçi isen, bir sonraki soruyu sorarsın: Verilen bir cismin *tüm* olası simetrileri nelerdir?"

Kare masayı ele alalım. Cismin simetrileri[1], masanın merkezi etrafında gerçekleştirilen şu dört dönme hareketidir: saat yönünün tersine 90 derece, 180 derece, 270 derece ve 360 derece[2]. Bir matematikçi kare masanın simetrilerinden oluşan *küme*nin 90, 180, 270 ve 360 derecelik açılara karşılık gelen dört eleman içerdiğini söyleyecektir. Dönme hareketlerinin her biri, sabit bir köşeyi (aşağıdaki resimde baloncuk işareti ile gösterilen) dört köşeden birine taşır.



Bu dönme hareketlerinden biri özeldir; şöyle ki, 360 derecelik dönme hareketi, 0 derecelik dönme hareketinin aynısıdır, yani dönme hareketi hiç olmamış gibidir. Bu özel bir simetridir çünkü cismimize hiçbir etkisi olmaz: Masanın üzerindeki tüm noktalar, tam olarak dönme hareketinden önceki konumlarına gelir. Biz buna *özdeş simetri* (identical symmetry) ya da kısaca *özdeşlik* (identity) ismini veriyoruz.[3]

360 dereceden büyük tüm açılardaki dönme hareketinin, 0 ile 360 arasındaki açılardaki dönme hareketine karşılık geldiğine dikkat ediniz. Örneğin, 450 derecelik dönme hareketi, 90 derecelik dönme hareketinin aynısıdır, çünkü 450=360+90'dır. Sadece 0 ile 360 derece arasındaki açıları ele almamızın sebebi budur.

Şimdi çok önemli bir tespit geliyor: Yukarıdaki listede {90°, 180°, 270°, 360°} yer alan dönme hareketlerinden ikisini arka arkaya uyguladığımızda, aynı listedeki bir başka dönme hareketini elde ederiz. Bu yeni simetriye ikisinin *bileşimi* adını veriyoruz.

Tabii ki nedeni gayet açık: Her iki simetri de, masayı değişikliğe uğratmıyor. Dolayısıyla, bu simetrilerin bileşimi de değişiklik yaratmıyor. Bu yüzden, bu bileşimin de bir simetri olması gerekir. Örneğin, eğer masayı önce 90 derece ve ardından da 180 derece döndürürsek elde edeceğimiz net sonuç 270 derecelik dönme hareketidir.

Bu simetrilerde masaya ne olduğuna bakalım. Masayı saat yönünün tersine 90 derece döndürdüğümüzde, masanın sağ köşesi (bir önceki resimde baloncuk işareti ile gösterilmişti) üst köşeye denk gidecektir. Ardından, 180 derecelik dönüş hareketini uyguladığımızda ise üst köşe alt köşeye gidecektir. Net sonuç, sağ köşenin alt köşeye gitmesi olur. Bu, masanın saat yönünün tersine 270 derece döndürülmesi ile elde edilecek sonuçtur.

Bir örnek daha ele alalım:

$$90^\circ + 270^\circ = 0^\circ.$$

Masayı önce 90 derece ve ardından da 270 derece döndürdüğümüzde, 360 derecelik tek bir dönme hareketi elde ederiz. Bununla birlikte 360 derecelik bir dönme hareketinin etkisi, 0 derecelik dönme hareketininki ile aynıdır. Bu, yukarıda görmüş olduğumuz "özdeş simetri"dir.

Diğer bir deyişle, 270 derecelik ikinci dönme hareketi, 90 derecelik ilk dönme hareketinin etkisini ortadan kaldırır. Bu oldukça önemli bir özelliktir: Tüm simetriler geri döndürülebilir; yani, herhangi bir S simetrisi için, bileşimleri özdeş simetriyi veren başka bir S' simetrisi bulunur. Bu S' simetrisine S simetrisinin *tersi* denir. Dolayısıyla 270 derecelik dönme hareketinin 90 derecelik dönme hareketinin tersi olduğunu görüyoruz. Benzer şekilde, 180 derecelik dönme hareketinin tersi de, yine 180 derecelik aynı dönme hareketidir.

Kare masanın simetrilerinin çok basit bir topluluğu gibi görünen şeyin —dört dönme hareketi {90°, 180°, 270°, 0°}— aslında küme elemanlarının birbirleriyle nasıl etkileşime girdiğine dair birçok içsel yapı ya da kural barındırdığını görüyoruz.

İlki, herhangi iki simetriyi birleştirebiliriz (yani bir tanesini diğerinin ardından uygulayabiliriz).

İkincisi, özel bir simetri türü vardır: özdeş simetri. Örneğimizde bu, 0°'lik döndürme hareketidir. Özdeş simetriyi başka bir simetri ile birleştirirsek yine aynı simetriyi elde ederiz. Örneğin,

$$90° + 0° = 90°, \qquad 180° + 0° = 180°, \text{ vb.}$$

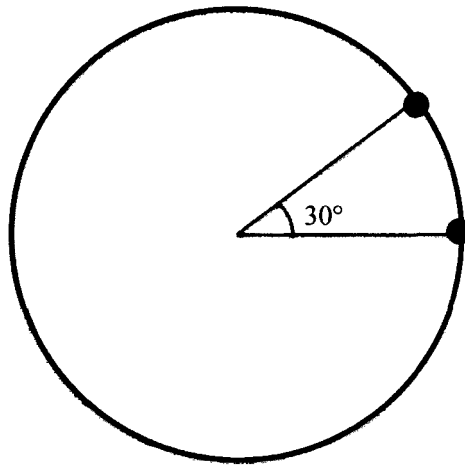
Üçüncüsü, herhangi bir S simetrisi için, onun tersi olan bir S' simetrisi bulunur ki her ikisinin bileşimi özdeşliktir.

Şimdi asıl konuya gelmiş bulunuyoruz: Bu üç yapıya sahip dönme hareketlerinin kümesi, matematikçilerin *grup* ismini verdikleri kavrama bir örnek teşkil etmektedir.

Başka bir cismin simetrileri de bir grup oluşturur ve bu grubun genellikle daha çok —muhtemelen sonsuz sayıda— elemanı vardır.[4]

Şimdi bu yapının yuvarlak masa için nasıl işlediğini görelim. Artık biraz tecrübe kazanmış olarak, yuvarlak masanın bütün simetrilerinin kümesinin, tüm olası dönme hareketlerinin kümesi (sadece 90 derecenin katları değil) olduğunu hemen görebilir ve bunu bir çemberin tüm noktaları olarak gözümüzde canlandırabiliriz.

Bu çember üzerindeki tüm noktalar, yuvarlak masanın saat yönünün tersine döndürülmesini gösteren, 0 ile 360 arasında bir açıya karşılık gelir. Bunların arasında, 0 derecelik dönme hareketine karşılık gelen özel bir nokta vardır. Bu nokta, aşağıdaki şemada 30 derecelik dönme hareketine karşılık gelen bir başka nokta ile birlikte gösterilmiştir.



Bu çemberin noktalarını yuvarlak masanın noktaları olarak düşünmemeliyiz. Çemberin her bir noktası aslında yuvarlak masanın belli bir açıyla dönüşünü temsil eder. Yuvarlak masanın öncelikli bir noktası bulunmazken, bizim çemberimizin var: 0 derecelik dönme hareketine karşılık gelen nokta.[5]

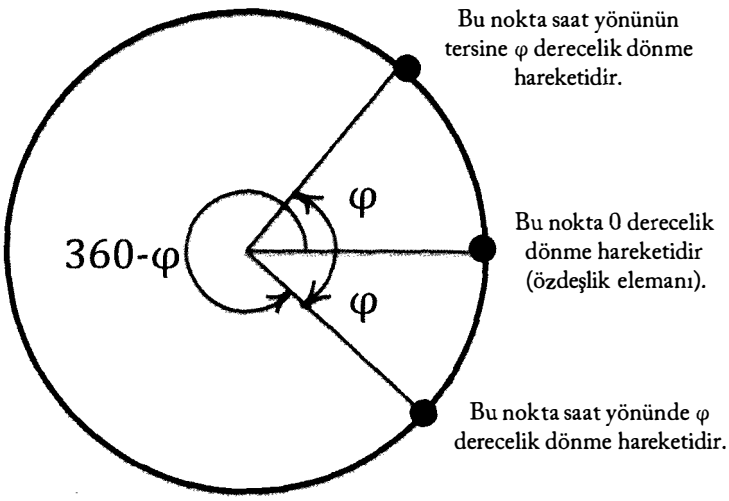
Şimdi, yukarıda ele aldığımız üç yapının, çemberin noktalarının oluşturduğu kümeye uygulanabilirliğine bakalım.

İlk olarak, φ_1 ve φ_2 derecelik iki dönme hareketinin bileşimi, $\varphi_1+\varphi_2$ derecelik dönme hareketidir. Eğer $\varphi_1+\varphi_2$, 360 dereceden büyükse bundan 360 çıkartırız. Matematikte buna 360 *modunda toplama* adı verilir. Örneğin φ_1=195 ve φ_2=250 ise iki açının toplamı 445 olur ve 445 derecelik dönme hareketi 85 derecelik dönme hareketinin aynısıdır. Dolayısıyla yuvarlak masanın dönme hareketlerinin grubu için şunu yazabiliriz:

$$195° + 250° = 85°.$$

İkincisi, çember üzerinde 0 derecelik dönme hareketine karşılık gelen özel bir nokta vardır. Bu nokta grubumuzun özdeşlik elemanıdır.

Üçüncüsü, saat yönünün tersine φ derecelik bir dönme hareketinin tersi, saat yönünün tersine $(360-\varphi)$ derecelik dönme hareketi ya da eşit biçimde, saat yönünde φ derecelik bir dönme hareketidir (aşağıdaki şekli inceleyiniz).



Böylece yuvarlak masa için dönme hareketlerinin grubunu tanımlamış olduk. Buna *çember grubu* diyeceğiz. Kare masanın dört elemanlı simetriler grubundan farklı olarak, bu grubun sonsuz sayıda çok elemanı vardır çünkü 0 ile 360 derece arasında sonsuz sayıda çok açı bulunur.

Bu aşamada, simetriye dair sezgisel anlayışımızı, sağlam bir teorik temele oturttuk, aslında matematiksel bir kavram hâline getirdik. İlk olarak, verilen bir cismin simetrisinin cismi ve özelliklerini koruyan bir dönüşüm olduğunu kabul ettik. Ardından belirleyici bir adım attık: Verilen bir cismin tüm simetrilerinin kümesine odaklandık. Kare masa örneğinde, bu küme dört eleman içerirken (90 derecenin katlarına karşılık gelen dönme hareketleri), yuvarlak masa örneğinde karşımıza bir sonsuz küme (çember üzerindeki tüm noktalar) çıktı. Son olarak da bu simetriler kümesinin her zaman sahip olduğu muntazam yapıları tanımladık: Her iki simetri, bir başka simetriyi meydana getirmek üzere birleştirilebilir; özdeş simetri mevcuttur ve her simetrinin tersi vardır. (Simetrilerin bileşimi, 4. sonnotta tanımlanan birleşimlilik (associativity) özelliğini de sağlar.) Böylece, matematiksel grup kavramına gelmiş bulunuyoruz.

Bir simetriler grubu, başlangıçta ele aldığımız cisimden farklı olarak, soyut bir konudur. Bir masanın simetriler kümesine dokunamayız (masanın kendisinin aksine) ya da onu elimize alamayız fakat aklımızda canlandırabilir, elemanlarını çizebilir, üzerinde çalışabilir ve hakkında konuşabiliriz. Ancak bu soyut kümenin tüm elemanlarının somut birer anlamı vardır: Somut bir cismin belli bir dönüşümünü yani simetrisini temsil eder.

Matematik, bu tür soyut cisimler ve kavramlar üzerine yapılan çalışmalarla ilgilidir.

Tecrübelerimiz bize simetrinin doğa yasaları için temel yol gösterici ilke olduğunu gösteriyor. Örneğin, kar tanesi kusursuz bir altıgen şekil oluşturur çünkü bunun kristalize olmuş su moleküllerinin

zorlandığı en düşük enerji seviyesi olduğu ortaya çıkmıştır. Kar tanesinin simetrileri, 60 derecenin katı şeklinde olan dönme hareketleridir; yani 60, 120, 180, 240, 300 ve 360 (0 derece ile aynı) derecelik dönme hareketleri. Ayrıca kar tanesini bu açılara denk gelen eksenlerin her biri etrafında çevirebiliriz de. Bu döndürme ve çevirme hareketleri neticesinde kar tanesinin şekli ve konumu korunur, dolayısıyla bunlar kar tanesinin simetrileridir.*

Kelebek örneğinde ise, hayvanı çevirdiğimizde bir alt üst olma söz konusudur. Bir tarafta ayakları bulunduğundan, çevirme neticesinde ortaya çıkan, aslına bakılırsa kelebeğin simetrisi değildir. Bir kelebeğin simetrik olduğunu söylediğimizde, kelebeğin ön ve arka kısımlarının tamamen aynı olduğu (gerçek bir kelebek için geçerli olmayan) ideal bir durumdan bahsetmekteyiz. Bu şartlar altında, sol ve sağ kanatların yerini değiştiren çevirme hareketi bir simetridir. (Alternatif olarak, kelebeği çevirmeden kanatların değişimini aklımızda canlandırabiliriz.)

Bu gözlemler bizi önemli bir noktaya getirmiş bulunuyor: Doğada, simetrileri yaklaşık olan birçok nesne bulunur. Gerçek hayatta karşılaştığımız masalar, tam olarak yuvarlak ya da kare değildir; canlı bir kelebeğin ön ve arka kısımları arasında asimetri söz konusudur ve insan vücudu da tam simetrik değildir. Ancak bu durumda bile nesnelerin soyut, ideal versiyonlarını ya da modellerini (kusursuz yuvarlaklığa sahip bir masa ya da ön ve arka kısımları arasındaki farkı ayırt edemediğimiz bir kelebek şekli gibi) ele almanın yararlı olduğu görülmüştür. Sonra, bu idealleştirilmiş cisimlerin simetrilerini inceleyebilir ve gerçek nesnelerle modelleri arasındaki farkı açıklamak için bu analizden yapabileceğimiz her türlü çıkarımı uyarlayabiliriz.

Bu, asimetriye değer vermediğimiz anlamına gelmez; veririz ve genellikle onda güzellikler buluruz. Ne var ki metematikteki simetri

* Masayı çevirmenin bir simetri olmadığına dikkat ediniz: Bu hareket masayı tersyüz edecektir —masanın ayakları olduğunu unutmayın. Eğer bir kare ya da çemberi (ayakları olmayan) ele alıyor olsaydık, çevirme hareketleri de gerçek bir simetri teşkil ederdi. Böyle bir durumda bunları da ilgili simetri gruplarına dahil etmemiz gerekirdi.

teorisinin asıl meselesi estetik değildir. Simetri kavramını en genel ve dolayısıyla kaçınılmaz olarak en soyut terimlerle formüle etmeye çalışır. Bu şekilde, geometri, sayı teorisi, fizik, kimya ve biyoloji gibi farklı alanlarda birleşik olarak uygulanabilir. Bu tür bir teori bir kez oluşturulduktan sonra, simetrinin kırılması mekanizmasından da —asimetrinin bu süreçte ortaya çıktığını düşünerek— bahsetmeye başlayabiliriz. Örneğin temel parçacıklar kütleler kazanır çünkü itaat ettikleri ayar simetrisi (gauge symmetry) (16. Bölüm'de tartışacağız) kırılır. Bunu sağlayan ise kısa süre önce Cenevre'deki Büyük Hadron Çarpıştırıcısı'nda keşfedilen kayıp parçacık "Higgs bozonu"dur.[6] Bu tür simetri kırılma mekanizmaları üzerine yapılan çalışmalar, doğanın temel bileşenlerinin davranışlarını anlamak açısından eşsiz içgörüler sağlar.

Soyut simetri teorisinin bazı temel nitelikleri üzerinde durmak istiyorum çünkü matematiğin neden önemli olduğuna güzel bir örnek teşkil ediyor.

Bunların ilki *evrensellik*'tir (universality). Çember grubu sadece yuvarlak bir masanın değil bardak, şişe veya sütun gibi diğer tüm yuvarlak nesnelerin de simetriler grubudur. Bir nesnenin yuvarlak olduğunu söylemekle, simetriler grubunun çember grubu olduğu söylemek aynı anlama gelir. Bu oldukça güçlü bir ifadedir: Bir cismin simetri grubunu (çember) tanımlayarak önemli bir özelliğini ("yuvarlak olmak") tanımlayabildiğimizi görüyoruz. Benzer şekilde, "kare olmak" simetri grubunun yukarıda tanımladığımız dört elemanlı grup olduğu anlamına gelir. Diğer bir deyişle, aynı soyut matematiksel cisim (çember grubu gibi), birden çok somut cisim için aynı işlevi yerine getirir ve bu, hepsinde ortak olan evrensel özelliklere (yuvarlak olmak gibi) işaret eder.[7]

İkinci özellik ise *nesnellik*'tir (objectivity). Söz gelimi grup kavramı bizim yorumumuzdan bağımsızdır. Onu öğrenen herkese aynı şeyi ifade eder. Pek tabii ki bu kavramı anlamak için, ifade edildi-

ği dilin, yani matematik dilinin bilinmesi gerekir. Bu dili herkes öğrenebilir. Tıpkı Descartes'ın ünlü "*Je pense, donc je suis**" sözünü anlamak için Fransızca bilmek gerektiği (en azından cümlede geçen kelimeleri) ve bunu da herkesin öğrenebileceği gibi. Öte yandan, ikinci örnekteki cümleyi bir kez anladıktan sonra onunla ilgili farklı yorumlar yapılabilir. Ayrıca farklı kişiler bu cümleye dair yapılacak yorumların doğru ya da yanlış olduğu konusunda uzlaşabilir veya fikir ayrılığına düşebilirler. Aksine, mantıksal açıdan tutarlı bir matematiksel ifade çıkarıma açık değildir.[8] Dahası, doğruluğu da nesneldir. (Belirli bir ifadenin doğruluğu, içinde ele alındığı aksiyom sistemine bağlı olabilir. Böyle olsa dahi, aksiyomlara olan bu bağlılık da nesneldir.) Örneğin, "yuvarlak masanın simetriler grubu çemberdir" ifadesi, herkes için her zaman ve her yerde doğrudur. Diğer bir deyişle, matematiksel doğrular gerekli doğrulardır. 18. Bölüm'de bu konuyu daha ayrıntılı ele alacağız.

Üçüncü ve bununla yakından ilişkili özellik, *kalıcılık*'tır (endurance). Pisagor Teoremi'nin Antik Yunanlılar ve günümüzde bizler için aynı şeyi ifade ettiğine ve gelecekte de herkes için aynı anlamı taşıyacağına şüphe yok. Benzer şekilde, bu kitapta ele aldığımız tüm doğru matematiksel ifadeler de sonsuza dek doğru kalacaktır.

Böyle nesnel ve kalıcı bilgi birikiminin var olduğu (ve de hepimize ait olduğu) gerçeği, mucizeden başka bir şey değildir. Bu durum, matematiksel kavramların fiziksel ve zihinsel dünyalardan ayrı bir dünyada var olduğunu ileri sürer ve buna bazen "matematiğin Platonik dünyası" denir (son bölümde bu konuyu daha ayrıntılı olarak ele alacağız). Bunun ne olduğunu ve matematiksel keşiflerin nasıl ortaya çıktıklarını hâlâ bilmiyoruz. Fakat bu gizli gerçekliğin hayatımızda giderek daha büyük bir rol oynayacağı açık; özellikle de yeni bilgisayar ve 3-boyutlu baskı teknolojisinin gelişimi ile.

---

* Düşünüyorum, öyleyse varım.—ed.n.

Dördüncü özellik, matematiğin fiziksel dünyaya *uygunluğudur* (relevance). Örneğin, geçtiğimiz elli yılda, simetri kavramının temel parçacıklara ve bunlar arasındaki etkileşime uygulamasıyla kuantum fiziği alanında birçok gelişme kaydedildi. Bu noktadan bakıldığında, elektron ya da kuark gibi bir parçacık yuvarlak masa ya da kar tanesine benzer ve davranışını büyük oranda simetrileri belirler. (Bu simetrilerin bir kısmı tam iken bir kısmı yaklaşıktır.)

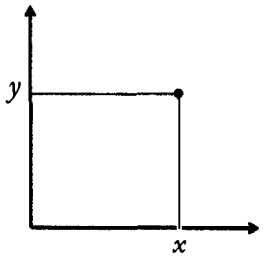
Kuarkların keşfi, bu sürecin nasıl işlediğine dair mükemmel bir örnektir. Evgeny Evgenievich'in bana verdiği kitapları okurken, bir önceki bölümde ele aldığımız hadronların Gell-Mann ve Ne'eman sınıflandırmasının temelinin bir *simetri grubu* olduğunu öğrendim. Bu grup, atom altı parçacıklar ile hiçbir bağlantı öngörmeyen matematikçiler tarafından daha önce de çalışılmıştı. Bunun matematikteki ismi *SU(3)* olup, açılımı "özel üniter"dir (Special Unitary). Bu grup ile —10. Bölüm'de ayrıntılı olarak değineceğimiz— kürenin simetriler grubu özellikleri açısından birçok benzerlik taşır.

Matematikçiler *SU(3)* grubunun gösterimlerini, yani *SU(3)* grubunun bir simetri grubu olarak gerçekleştirilebileceği farklı yolları daha önce tanımlamıştı. Gell-Mann ve Ne'eman, bu gösterimlerin yapısı ile daha önce bulmuş oldukları hadronların örüntüleri arasındaki benzerliği fark ettiler. Hadronları sınıflandırmak için bu bilgiyi kullandılar.

"Gösterim" (representation) kelimesi matematikte, yaygın kullanımından farklı olarak, daha özel bir şekilde kullanılır. Bu yüzden burada bir ara verip, gösterimin mevcut bağlamda ne anlama geldiğini açıklayalım. Başlangıçta bir örneğe başvurmak bize yardımcı olabilir. Yukarıda değindiğimiz, yuvarlak masanın dönme hareketlerinin grubu olan çember grubunu hatırlayalım. Bu masanın yuvarlak tablasını tüm yönlerde sonsuz mesafede uzattığımızı hayal edelim. Bu şekilde, soyut bir matematiksel cisim elde ederiz: düzlem. Masa yüzeyinin merkezi etrafındaki her bir dönme hareketi, bu düzlemin

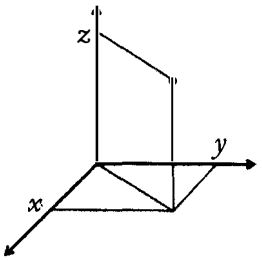
de aynı nokta etrafında dönmesine yol açar. Böylece, bu düzlemin bir simetrisini (dönme hareketi) çember grubunun tüm elemanlarına devreden bir kural elde etmiş oluruz. Diğer bir deyişle, çember grubunun her bir elemanı düzlemin bir simetrisi ile gösterilebilir. Bu yüzden matematikçiler, bu işleme çember grubunun *gösterimi* (representation) ismini vermektedir.

Elde etmiş bulunduğunuz düzlem, iki koordinat eksenine sahip olduğu ve her bir nokta iki koordinatla gösterildiği için artık iki boyutludur:



Dolayısıyla dönme hareketleri grubunun "iki boyutlu gösterimi"ni inşa ettiğimizi söyleriz. Bu, basitçe ifade etmek gerekirse, dönme hareketleri grubunun her bir elemanının düzlemin bir simetrisi olarak gerçekleştiği anlamına gelir.[9]

İkiden daha fazla boyuta sahip olan uzaylar da vardır. Örneğin bizleri çevreleyen uzay üç boyutludur; yani üç koordinat ekseni vardır, dolayısıyla bir noktanın konumunu belirlemek için aşağıdaki şekilde gösterilen üç koordinatını (x, y ve z) belirlememiz gerekir.



Bizler kafamızda dört boyutlu uzayı canlandıramayız ama matematikçiler bize dilediğimiz sayıda boyuta sahip uzaylar hakkında konuşabilmemizi mümkün kılan evrensel bir dil sunarlar. Şöyle ki dört boyutlu uzayda yer alan noktaları, (x, y, z, t) biçiminde dörtlü sayılarla gösterebiliriz; tıpkı üç boyutlu uzayda yer alan noktaları üçlü sayılarla (x, y, z) gösterdiğimiz gibi. Aynı şekilde, herhangi bir n doğal sayısı için, n-boyutlu bir uzayın noktalarını da n-li sayılar ile gösteririz. Bir elektronik çizelge programıyla çalıştıysanız bu tür n-li sayılarla karşılaşmışsınızdır: Elektronik çizelgede satır olarak görünürler ve n adet sayının her biri kaydedilmiş verinin belirli bir özelliğine işaret eder. Dolayısıyla tablodaki her bir satır, n-boyutlu uzayda bir noktaya karşılık gelir. (10. Bölüm'de, farklı sayılarda boyuta sahip uzaylar üzerinde daha fazla duracağız.)

Eğer bir grubun her bir elemanı, tutarlı bir biçimde[10], n-boyutlu uzayın simetrisi olarak gerçekleştirilebiliyorsa grubun "n-boyutlu gösterimi" olduğunu söyleriz.

Bu durumda, verilen bir grubun farklı boyutlarda gösterimleri bulunabileceği gerçeği karşımıza çıkıyor. Temel parçacıkların 8-li ve 10-lu parçacık öbekleri biçiminde bir araya getirilebilmesinin nedeni, *SU(3)* grubunun 8 ve 10 boyutlu gösterimlerinin bulunduğunun bilinmesidir. Gell-Mann ve Ne'eman tarafından oluşturulan her bir 8 parçacıklının 8 parçacığı 30. sayfada yer alan şekilde gösterilen gibi), *SU(3)*'ün bir gösterimi olan 8-boyutlu uzayın 8 koordinat ekseni ile de bire bir eşleme hâlindedir. Aynı durum, parçacıkların onluları için de geçerlidir. (Bununla birlikte, parçacıklar sözgelimi 7-li yada 11-li öbeklerde bir araya getirilemez çünkü matematikçiler *SU*(3) grubunun 7-li veya 11-li gösterimlerinin olmadığını ispatlamıştır.)

Başlangıçta bu sadece, benzer özelliklere sahip parçacıkları bir araya getirmenin uygun bir yolu olarak görülüyordu. Fakat Gell-Mann bunu biraz daha ileriye götürdü. Bu sınıflandırma düzeninin arkasında daha derin bir sebep yattığını kabul etti. Temel olarak

hadronlar daha küçük parçacıklar olan kuarklardan (bazen iki, bazen de üç tane) oluştuğu için bu düzenin çok iyi işlediğini söyledi. Benzer bir öneriyi, Gell-Mann'dan bağımsız olarak fizikçi George Zweig da yaptı (parçacıklara "aslar" ismini verdi).

Bu oldukça ilgi çekici bir öneriydi. O zamanlarda popüler olan, diğer hadronlar gibi proton ve nötronların da bölünmez olduğu yönündeki yaygın kanının karşısında olmasının yanı sıra bu yeni parçacıkların elektronların yükünün bir kısmını meydana getiren elektrik yüküne sahip olduklarını da varsayıyordu. Bu oldukça sarsıcı bir kestirimdi çünkü bu parçacıklar daha önce hiç görülmemişti. Gerçi kısa süre içerisinde kuarklar deneysel olarak keşfedildi ve tahmin edildiği üzere küçük bir elektrik yüküne sahip oldukları anlaşıldı!

Gell-Mann ve Zweig'ı kuarkların varlığını tahmin etmeye teşvik eden neydi? $SU(3)$ grubunun gösterimlerinin ardındaki matematiksel teori. Bilhassa da, $SU(3)$ grubunun iki farklı 3-boyutlu gösteriminin olduğu gerçeği. (Grubun isminde "3" bulunmasının asıl sebebi de budur.) Gell-Mann ve Zweig, bu iki gösterimin iki temel parçacık öbeğini (3 kuark ve 3 anti-kuark) tanımlıyor olması gerektiğini ileri sürdüler. $SU(3)$'ün 8 ve 10-boyutlu gösterimlerinin, 3-boyutlu gösterimlerden meydana getirilebileceği anlaşıldı. Bu da bize kuarkları kullanarak (tıpkı Lego oynar gibi) hadronları nasıl oluşturabileceğimizin kesin ve ayrıntılı bir planını verir.

Gell-Mann bu üç kuarka "yukarı", "aşağı" ve "garip" isimlerini verdi.[11] Bir proton iki "yukarı" kuark ile bir "aşağı" kuarktan oluşurken, bir nötron iki "aşağı" kuark ile bir "yukarı" kuarktan oluşur (29. sayfadaki resimlerde görmüştük). Bu parçacıkların her ikisi de 30. sayfadaki diyagramda gösterilen sekiz parçacıklıya aittir. Bu sekiz parçacıklıdaki diğer parçacıklar, "aşağı" ve "yukarı" kuarklara ek olarak "garip" kuarkını da içerirler. Ayrıca, bir kuark ve bir anti-kuarkın bileşimleri olan parçacıklardan oluşan sekiz parçacıklılar da mevcuttur.

Kuarkların keşfi, Önsöz bölümünde değindiğimiz, matematiğin bilimde oynadığı çok kıymetli rolün güzel bir örneğidir. Bu

parçacıklar, deneysel verilere dayanarak değil matematiksel simetri örüntülerinden hareketle keşfedilmiştir. Bu keşif, $SU(3)$ grubunun gösterimlerinin karışık matematiksel teorisi çerçevesinde yapılmış, tamamen teorik bir tahmindi. Bu teoride ustalaşmak, fizikçilerin yıllarını aldı (ve aslına bakarsanız, başlarda biraz dirençle de karşılaşıldı) ama günümüzde temel parçacık fiziğinin temelidir. Teori, hadronların sınıflandırılmasını sağlamakla kalmayıp, fiziksel gerçekliği algılayışımızı sonsuza değin değiştiren kuarkların keşfine de yol açtı.

Görünüşte ezoterik bir matematiksel teorinin doğanın temel yapı taşlarınının kalbine inmemizi sağladığını hayal edin. Maddenin bu zerrecikleri arasındaki büyülü uyuma hayran olmamak, matematiğin evrenin iç işleyişlerini ortaya çıkarma kapasitesi karşısında hayrete düşmemek mümkün mü?

Rivayet olunur ki Einstein'ın eşi Elsa, Mount Wilson Gözlemevi'ndeki teleskopun uzay-zamanın şeklini belirlemek için gerekli olduğunu duyduğunda şöyle demiş: "Oooo! Kocam bunu eski bir zarfın arka yüzünde yapıyor."

Fizikçiler, Cenevre'deki Büyük Hadron Çarpıştırıcısı gibi pahalı ve karmaşık cihazlara ihtiyaç duyarlar fakat Einstein ya da Gell-Mann gibi bilim adamları, etrafımızdaki dünyanın en derin sırlarını çözmek için en saf ve en soyut matematiksel bilgi birikimini kullanmaktadır.

Kim olduğumuzdan ve neye inandığımızdan bağımsız olarak, hepimiz bu bilgi birikimini paylaşıyoruz. Bizi birbirimize daha da yaklaştırıyor ve evrene duyduğunuz sevgiye yeni bir anlam katıyor.

3. Bölüm:

Beşinci Problem

Evgeny Evgenievich'in planı kusursuz işledi ve ben matematiğe "döndüm". Hızlı öğreniyordum ve matematiğin derinlerine indikçe ilgim artıyor, daha da fazla öğrenmek istiyordum. Âşık olduğunuzda böyle olur.

Evgeny Evgenievich ile düzenli olarak görüşmeye başladım. Bana okumam için kitaplar verecek ve ben de haftada bir kere okuduklarımı tartışmak üzere öğretmenlik yaptığı Eğitim Bilimleri Yüksek Okulu'na gidecektim. Evgeny Evgenievich düzenli olarak futbol, buz hokeyi ve voleybol oynardı ama o sıralar Sovyetler Birliği'nde yaşayan birçok erkek gibi adeta ucuca ekleyerek sigara da içerdi. Bu çalışmaların ardından uzunca bir süre sigara kokusu ile matematik uğraşı aklımda özdeşleşmiş olarak kaldı.

Bazı görüşmelerimizin geceye kadar uzadığı olurdu. Bir keresinde, o geç saatte içeride kimsenin olacağına ihtimal vermeyen hademe, bulunduğumuz amfiyi kilitledi. Tartışmamıza o kadar dalmış olmalıyız ki, kapının kilitlendiğini duymadık. Neyse ki amfi zemin kattaydı da pencereden çıkabildik.

1984 yılıydı, lise son sınıftaydım. Hangi üniversiteye başvuraca-

ğıma karar vermek zorundaydım. Moskova'da birçok okul olmasına rağmen soyut matematik çalışılabilecek tek bir yer vardı: Moskova Devlet Üniversitesi. Rusça adı *Moskovskiy Gosudarstvenny Universitet* olan üniversite, MGU kısaltması ile bilinirdi. *Mekh-Mat* olarak anılan meşhur Mekanik ve Matematik Bölümü, SSCB'deki matematik programları arasında amiral gemisi konumundaydı.

Rusya'da üniversiteye giriş sınavları, Amerika'daki öğrencilerin girdiği SAT sınavına hiç benzemez. *Mekh-Mat*'ın dört sınavı vardı: yazılı matematik, sözlü matematik, edebi deneme yazma ve sözlü fizik. Benim gibi liseden onur derecesiyle mezun olanlar (Sovyetler Birliği'nde o dönemde bize "altın madalya" verilirdi) ilk sınavda, 5 yani en yüksek puanı aldıklarında otamatik olarak kabul edilirlerdi.

O zamana kadar lisede öğretilen matematiğin çok ötesine geçtiğim için, MGU'daki sınavların kolayca üstesinden gelecekmişim gibi duruyordu.

Fakat çok iyimsermişim. İlk ikaz ateşi, öğrencisi olduğum uzaktan eğitim okulundan aldığım bir mektup şeklinde geldi. Bu okul, birkaç yıl önce ünlü Sovyet matematikçi Israel Gelfand (hakkında konuşmaya devam edeceğiz) ve birkaç meslektaşı tarafından kurulmuştu. Benim gibi büyük şehirlerin dışında yaşayan ve özel matematik okullarına erişim imkânı olmayan öğrencilere yardım amacı güdüyordu. Katılan öğrencilere her ay, okulda ele alınan konuları açıklayan bir kitapçık ulaşır ve biraz daha derinlemesine bilgi edinmeleri sağlanırdı. Ayrıca okulda gösterilenlerden biraz daha zor problemler bulunur ve öğrencilerin bunları çözerek cevaplarını mektupla göndermeleri beklenirdi. Okutmanlar (genellikle Moskova Üniversitesi'nde lisans öğrencisiydiler) bu çözümleri okur ve geri bildirimde bulunurlardı. Bu okula üç yıl boyunca devam ettim; ayrıca fizik üzerine başka bir okulda da kayıtlıydım. Elimize ulaşan materyaller okulda gördüklerimize benzemesine rağmen (Evgeny Evgenievich ile sürdürdüğüm özel çalışmadakiler hiç de böyle değildi) benim için yine de faydalı bir kaynaktı.

Bu okuldan aldığım mektup gayet kısaydı: "Eğer Moskova Üniversitesi'ne başvurmak istiyorsanız ofisimize uğrayın, size tavsiyede bulunmaktan da mutluluk duyarız," diyor ve MGU yerleşkesinin adresi ile ziyaret saatlerini veriyordu. Mektubu aldıktan kısa bir süre sonra, iki saatlik bir tren yolculuğu yaparak Moskova'ya gittim. Okulun ofisi, içinde birkaç sıra, çalışan, yazan ve kâğıtlarda düzeltmeler yapan birkaç kişinin bulunduğu büyük bir odaydı. Kendimi tanıttım, kısa mektubumu çıkardım ve otuzlarının başındaki ufak tefek genç kadına uzattım.

Selam verircesine "İsminiz?" diye sordu.

"Eduard Frenkel." (O günlerde Edward'ın Rusça versiyonunu kullanıyordum.)

"Ve MGU'ya başvurmak istiyorsunuz, öyle mi?"

"Evet."

"Hangi bölüm?"

"*Mekh-Mat*."

"Anlıyorum." Gözlerini indirdi ve sordu:

"Uyruğunuz nedir?"

"Rus," dedim.

"Gerçekten mi? Peki annenizin ve babanınız uyruğu nedir?"

"Şey.. Annem Rus."

"Peki ya babanız?"

"Babam Yahudi," dedim.

Başını salladı.

Bu diyalog size gerçeküstü görünebilir ki şu an yazarken bana da öyle geliyor. Fakat Sovyetler Birliği'nde 1984 yılında (Orwell'i hatırlayın?*), birisine uyruğunu sormak hiç de garip bir şey değildi. Sovyet yurttaşlarının yanlarında taşımak zorunda oldukları yurt içi pasaportlarının üzerinde özel bir "uyruk" satırı vardı. Kişinin ismi

* Sovyetler Birliği'nde Mikhail Gorbaçov'un iktidara gelmesinden bir yıl ve *perestroyka*'yı uygulamaya başlamasından da birkaç yıl önceydi. 1984 yılındaki totaliter Sovyet rejimi, birçok açıdan George Orwell'in geleceği gören romanının rahatsız edici bir kopyasıydı.

ilk satırda, babadan gelen ismi ikinci satırda, soy ismi üçüncü satırda, doğum tarihi dördüncü satırdaydı ve hemen arkasından beşinci satırda uyruk yer alırdı. Bu nedenle ona *pyataya grafa* yani "beşinci satır" denirdi. Ayrıca vatandaşların doğum belgelerinde hem kendisinin hem de anne ve babasının uyruk bilgisi bulunurdu. Benim durumumda olduğu gibi eğer uyrukları farklı ise anne ve baba çocukları için hangi uyruğu seçeceklerine karar verirdi.

Amaç ve niyet ne olursa olsun, "beşinci satır" kişinin Yahudi olup olmadığını sormanın bir yoluydu. (Yahudiler kadar olmasa da Tatarlar veya Ermeniler gibi diğer milletlere mensup olup, önyargılara ve zulme maruz kalanlar da bu şekilde ayırt ediliyordu.) Benim "beşinci satır"ımda Rus olduğum yazmasına rağmen babamdan gelen ve bariz biçimde Yahudiliği çağrıştıran soyadım beni ele veriyordu.

Ailemin hiç dindar olmadığını özellikle belirtmek isterim. Babam, dini bir gelenek içinde büyümemişti, ben de öyleydim. O günlerin Sovyetler Birliği'nde, dinin varlığından bahsetmek pek de mümkün değildi. Çoğu Ortodoks Hristiyan kilisesi hasar görmüş ya da kapatılmıştı. Ayakta kalan az sayıdaki kiliseye ise sadece birkaç "*babushkas*" (nineler) gidiyordu ve anneannem de bunlardan biriydi. Anneannem arada sırada memleketim Kolomna'daki tek aktif kilisenin ayinlere katılırdı. Sinagogların sayısı ise daha da azdı. Örneğin benim kasabamda hiç yoktu, nüfusu on milyona ulaşan Moskova'da da resmi olarak sadece bir tane vardı[1]. Bir kilise veya sinagogda ayinlere katılmak tehlikeliydi: Sivil giyimli ajanlar tarafından fişlenebilir ve buna bağlı olarak birçok sorunla karşılaşabilirdiniz. Bu yüzden birinin Yahudi olduğu söylendiğinde, kastedilen dini değil daha ziyade etnik kökeni, yani "kanı"ydı.

Seçim komitesi, babamın soyadını kullanmıyor olsaydım da Yahudî kökenimi tespit edebilecekti çünkü başvuru formunda özellikle her iki ebeveynimin de tam isimleri sorulmuştu. Tam isimler babadan gelen ismi yani başvuran kişinin dedelerinin ilk adını da içeriyordu. Babamın baba tarafından gelen ismi, o dönem Sovyetler

Birliği'nde hataya yer bırakmayacak şekilde Yahudi çağrışımı yapan Joseph'ti; dolayısıyla soyadı beni ele vermese bile buradan ortaya çıkardı. Sistem, kişilerin en azından dörtte bir oranında Yahudi olup olmadıklarını tespit edebilecek şekilde kurulmuştu.

Yahudi olduğum bu şekilde ortaya çıktıktan sonra, görevli kadın "Yahudilerin Moskova Üniversitesi'ne kabul edilmediklerini biliyor musun?" diye sordu.

"Ne demek istiyorsunuz?"

"Demek istediğim şu ki, başvurmak zahmetinde bulunmayın. Boşu boşuna zamanınızı harcamayın. Girmenize müsaade etmeyeceklerdir."

Ne diyeceğimi bilemedim.

"Bu mektubu bana bunun için mi yolladınız?"

"Evet. Sadece size yardım etmeye çalışıyorum."

Etrafa bir bakındım. Yakından dinlemeseler de ofisteki herkesin bu diyaloğun ne hakkında olduğunu bildiği çok açıktı. Birçok kez gerçekleşmiş olmalıydı zira herkes alışkın gibi görünüyordu. Ölümcül bir hastaymışım gibi herkes gözlerini kaçırdı. Kalbim kırılmıştı.

Daha önce de anti-Semitizme maruz kalmıştım ama bireysel seviyedeydi, kurumsal değil. Beşinci sınıftayken, sınıf arkadaşlarımdan bazıları "*evrey, evrey*" ("Yahudi, Yahudi") diyerek bana sataşırlardı. Bu kelimenin ne anlama geldiğine dair en ufak bir fikirleri olduğunu sanmıyorum çünkü aralarından bazıları Yahudi anlamına gelen *evrey* kelimesini Avrupalı anlamına gelen *evropeyets* ile karıştırırdı. Anti-Semitist yorumları ailelerinden ya da diğer yetişkinlerden duyuyor olmalıydılar. (Üzülerek söylüyorum ki anti-Semitizm Rus kültürünün derinliklerine işlemişti.) Ben, yanımda duran gerçek arkadaşlara sahip olduğum için şanslı ve yeterince güçlü idim; bu sayede o zorbalar tarafından ezilmedim ama yine de kötü bir tecrübeydi. Öğretmenlerime ya da aileme şikâyet etmeyecek kadar gururluydum ama bir gün öğretmenlerden birisi duydu ve araya girdi. Sonuç olarak okul müdürü bu çocukları derhal yanına çağırdı ve sataşmalar kesildi.

Ailem, üniversiteye giriş sınavlarında Yahudilerin aleyhine yapılan ayrımcılığı duymuş ama her nasılsa buna pek dikkat etmemişti. Memleketimde üniversiteye başlayacak Yahudi sayısı azdı ve ailemin duyduğu ayrımcılık vakaları fizik programlarında yaşanmıştı. Bu tür programlarda yapılan çalışmalar nükleer araştırmalar ve bununla bağlantılı olarak savunma ve hükümet sırları ile ilişkili olduğu için, Yahudilerin kabul edilmediği şeklinde tipik bir argüman vardı; İsrail veya başka yerlere göç etme ihtimalleri olduğundan hükümet bu alanlarda Yahudilerin olmasını istemiyordu. Bu şekilde düşününce, soyut matematik okuyan kişiler hakkında kaygılanmaya gerek olmamalıydı ama görünen o ki birisi kaygılanmıştı.

MGU'daki görüşmem her açıdan tuhaftı. Sadece Kafkaesk yönünü kastetmiyorum. Konuştuğum kadının neler olacağına dair bizleri uyararak bana ve diğer öğrencilere yardım etmeye çalıştığı söylenebilirdi. Peki ama durum gerçekten bu olabilir miydi? Unutmayın, Komunist Parti ve KGB'nin Sovyetler Birliği'nde hayatın her alanını hâlâ sıkı bir biçimde kontrol ettiği 1984 yılından bahsediyoruz. Hükümetin resmi politikasına göre tüm uluslar eşitti ve bunun aksini kamu önünde ileri sürmek insanın başını derde sokabilirdi. Yine de bu kadın, ilk defa gördüğü bir yabancıya bunları sakince söylüyor ve bunu yaparken iş arkadaşlarının işitmesinden endişeleniyormuş gibi görünmüyordu.

Öte yandan MGU'nun sınav takvimi diğer tüm okullardan bir ay önde giderdi. Bu yüzden MGU'ya giremeyenlerin diğer okulları denemek için halâ şansları olurdu. Birinin öğrencileri denememeye ikna etmesine ne gerek vardı ki? Bana öyle geliyordu ki etkili bazı güç odakları, beni ve diğer Yahudi öğrencileri korkutarak uzaklaştırmaya çalışıyordu.

Tüm bunlara rağmen vazgeçmeyecektim. Ailemle uzun uzun konuştuktan sonra, kaybedecek bir şeyim olmadığına karar verdik. Her ne olursa olsun MGU'ya başvuracak ve en iyisini umacaktım.

Temmuz'un başında yapılan ilk sınav, yazılı bir matematik testiydi. Her zaman beş problemden oluşurdu. Beşinci soru son derece zor ve çözülemez kabul edilirdi. Adeta sınavın beşinci elementiydi. Ancak ben, beşincisi de dahil olmak üzere tüm soruları çözdüm. Sınavı okuyacak kişi her kim olursa olsun, çok büyük ihtimalle bana önyargılı yaklaşacağının ve çözümümde açıklar arayacağının farkında olduğumdan, herşeyi kendime işkence edercesine ayrıntılı olarak yazdım. Hiçbir hata yapmadığımdan emin olmak için tüm savlarımın ve hesaplarımın üstünden iki kez geçtim. Her şey kusursuz görünüyordu! Oldukça keyifli bir tren yolculuğu ile eve döndüm. Ertesi gün Evgeny Evgenievich'e çözümlerimi anlattım ve o da hepsinin doğruluğunu onayladı. İyi bir başlangıç yapmış gibi görünüyordum.

Bir sonraki sınav sözlü matematikti, 13 Temmuz Cuma günü yapılacaktı.

O güne dair birçok ayrıntıyı gayet net hatırlıyorum. Sınav öğleden hemen sonra yapılacaktı ve o sabah annemle birlikte kasabamızdan trene bindik. Başlamasına birkaç dakika kala MGU'da sınavın gerçekleştirileceği odaya girdim. Normal bir derslikti ve on beş ila yirmi öğrenciyle dört beş gözetmen vardı. Sınava başlarken sınıfın ön kısmında duran masanın üzerindeki tomardan birkaç kâğıt almamız gerekiyordu. Kâğıtların her birinde iki soru vardı ve yazılı kısımları alta gelecek şekilde istiflenmişlerdi. Piyango bileti çekmeye benziyordu, o yüzden bu kâğıt parçasına *bilet* derdik. Tomarda hepsi de önceden bilinen yaklaşık yüz adet soru vardı. Hangi bileti seçtiğime pek dikkat etmedim çünkü arka yüzlerinde bulunanları biliyordum. Biletlerini çeken öğrencilerin sıralardan birine oturup, sadece kendilerine verilen boş kâğıtları kullanarak soruları çözmesi gerekiyordu.

Benim kâğıdımdaki sorular: (1) Bir üçgenin içine yerleştirilmiş çemberin yarıçapını kullarak üçgenin alanını hesaplamakta kullanılacak formül; (2) iki fonksiyonun oranının türevi (sadece formül). Bu sorulara hazırlıklıydım; uykuda dahi çözebilirdim.

Sıraya oturdum, bir kâğıt parçasına birkaç formül yazdım ve düşüncelerimi toparladım. İki dakikamı almış olmalı. Daha fazlasına ihtiyacım yoktu; hazırdım. Elimi kaldırdım. Sınavı yapmak üzere sınıfta bulunan birkaç kişi öğrencilerin ellerini kaldırmaları için bekliyordu ama tuhaf bir biçimde beni görmezden geldiler; adeta ben yoktum. Sanki bakışları içimden geçip gidiyordu. Bir süre elimi kaldırmış şekilde oturdum; herhangi bir tepki vermediler.

Yaklaşık on dakika kadar sonra, birkaç çocuk elini kaldırdı ve gözetmenler hemen onlarla ilgilendi. Öğrencilerin yanına oturuyor ve yanıtlarını dinliyorlardı. Bana çok yakın olduklarından onları duyabiliyordum. Gözetmenler çok kibardı; genellikle başlarını sallıyor ve nadiren soru soruyorlardı. Olağandışı hiçbir şey yoktu. Öğrencilerden biri kâğıdındaki soruları cevaplamayı bitirdiğinde (yaklaşık on dakika sonra), gözetmen çözmesi için bir soru daha veriyordu. Bu sorular daha da kolaydı ve çoğu öğrenci hemen çözüyordu. İşte bu kadar!

İlk iki öğrenci, en yüksek not olan 5 puanı aldıkları belli olacak şekilde mutlu mutlu gittiler ama ben hâlâ orada oturuyordum. Sonunda yanımdan geçen ve henüz doktorasının ilk yıllarında olduğunu tahmin ettiğim genç bir gözetmeni yakaladım ve doğrudan "Neden benimle konuşmuyorsunuz?" diye sordum. Gözlerini kaçırarak, sessiz bir biçimde, "Üzgünüm, sizinle konuşmamıza müsaade edilmiyor," dedi.

Sınav başlayalı yaklaşık bir saat olmuştu ki, orta yaşlı iki adam sınıfa girdi. Ön taraftaki masaya doğru yürüdüler ve orada oturan görevliye kendilerini tanıttılar. O da başını salladı ve beni işaret etti. Bunların beklediğim kişiler olduğu anlaşılıyordu: engizisyon sorgulamamı yapacak olan kişiler.

Oturduğum sıraya yaklaştılar ve kendilerini tanıttılar. Bir tanesi zayıf ve hızlı, diğeri hafif kiloluydu ve büyük bir bıyığı vardı.

"Evet," dedi zayıf olanı —genellikle o konuşuyordu— "bakalım burada ne var? İlk soru nedir?"

"Bir üçgenin içine yerleştirilmiş bir çember ve..."

Sözümü kesti: "Çemberin tanımı nedir?"

Sınıftaki gözetmenlerin diğer öğrencilere davranışı ile karşılaştırıldığında oldukça sert bir üslubu vardı. Ayrıca diğer gözetmenler, öğrenci biletteki sorunun cevabını tamamen anlatmadan başka bir şey sormamıştı.

"Çember, düzlem üzerindeki sabit bir noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktalar kümesidir," dedim.

Bu standart tanımdı.

"Yanlış!" dedi sırıtarak.

Nasıl yanlış olabilirdi? Birkaç saniye bekledikten sonra "Düzlem üzerindeki sabit bir noktaya eşit uzaklıkta bulunan *tüm* noktaların kümesidir," dedi.

Abartılı bir biçimde laf oyunu yapıyordu; beni bekleyen sıkıntının ilk işaretiydi bu.

"Tamam," dedi ve devam etti: "Üçgenin tanımı nedir?"

Ben tanımı söyledikten sonra üzerinde biraz düşündü, eğer gereğinden fazla kurcalamazsa bir eksiği yok gibiydi. Devam etti:

"Peki, bir üçgenin içine çizilmiş çember ne demektir?"

Bu bizi teğet çizginin, ardından "çizgi"nin tanımına ve başka şeylere götürdü. Kısa bir süre sonra bana Öklid'in, bir doğruya onun dışındaki bir noktadan sadece bir paralel çizgi çizilebileceğini belirten ve lise müfredatında yer almayan beşinci aksiyomunu sordu. Bilet üzerindeki soruyla alakasız ve benim bilmek zorunda olmadığım konular hakkında konuşuyorduk.

Söylediğim her kelime sorgulanıyordu. Her kavramı tanımlamak zorunda olduğum gibi, eğer bu esnada başka bir kavram kullanırsam derhal onları da tanımlamam isteniyordu.

Söylemeye gerek yok ama eğer soyadım İvanov olsaydı bu soruların hiçbiri sorulmayacaktı. Geçmişe dönüp baktığımda, üzerime düşenin olup bitenleri protesto etmek ve gözetmenlere fazla ileri gittiklerini söylemek olduğunu görebiliyorum. Ancak bunu söyle-

mek şimdi kolay. Ben on altı yaşındaydım ve onlar benden 25 yaş kadar büyüktü. Onlar, Moskova Devlet Üniversitesi'nde bir sınavı idare eden resmi görevlilerdi ve ben kendimi tüm soruları mümkün olan en iyi şekilde cevaplamak zorunda hissediyordum.

Yaklaşık bir saatlik sorgulamanın ardından biletimdeki ikinci soruya geçtik. Diğer öğrenciler çoktan gitmiş ve sınıf boşalmıştı. Anlaşılan sınıfta "özel ilgiye" mazhar olan tek öğrenci bendim. Belli ki Yahudi öğrencileri aynı sınıfta bir ya da ikiden fazla bulunmayacak şekilde yerleştirmişlerdi.

İkinci soruda, iki fonksiyonun oranının türevinin alınmasında kullanılacak formulü yazmam isteniyordu. Herhangi bir tanım ya da ispat yapmam istenmiyordu. Sadece formül istendiği özel olarak belirtilmişti ama tabii ki sınavı yapanlar kalkülüs kitabının bütün bir ünitesini açıklamamda ısrar ettiler.

"Türevin tanımı nedir?"

Verdiğim standart tanım limit kavramını içeriyordu.

"Limitin tanımı nedir?" Sonrasında, "Fonksiyon nedir?" vs vs.

MGU'nun giriş sınavlarında yapılan etnik ayrımcılık sorunu çok sayıda yayının konusu olmuştur. Örneğin, bir matematikçi ve eğitimci olan Mark Saul, *Notices of the American Mathematical Society* isimli kitaptaki ayrıntılı makalesinde benim hikâyemi örnek olarak kullandı. Benim durumumu, *Alice Harikalar Diyarında* kitabında Alice'in Kırmızı Kraliçe tarafından sorguya çekilirken düştüğü duruma benzetiyordu, bu gayet yerinde bir karşılaştırmaydı. Cevapları biliyordum ama söylediğim her şeyin benim aleyhime döndüğü bu oyunda muhtemelen kazanamazdım.

Konuyla ilgili olarak *Notices*'ta yer alan bir başka makalede[3], gazeteci George G. Szpiro şöyle bir değerlendirme yapmıştı:

> Yahudiler —ya da Yahudiliği çağrıştıracak isimlere sahip adaylar— belirlenerek, giriş sınavlarında özel bir uygulamaya tabi tu-

tulurlardı... Sözlü sınavda engeller artırılırdı. İstenmeyen adaylara zorlu bir muhakeme ve uzun hesaplamalar gerektiren "öldürücü sorular" sorulurdu. Bunların bazıları çözülemeyen, doğru cevabı bulunmayan ya da muğlak sorulardı. Adayın becerilerini ölçmekten ziyade, "istenmeyenleri" elemek için tasarlanmışlardı. Adil olmanın çok uzağındaki eziyet dolu bu sınavlar, ilgili yönetmeliklerde en fazla üç buçuk saat sürebileceği belirtilmiş olmasına rağmen, bazen beş altı saate kadar uzardı. Adayın cevapları doğru olsa bile onu eleyecek gerekçeler her zaman bulunabilirdi. Bir keresinde adaylardan birinin, "çemberin tanımı nedir?" sorusuna verdiği "sabit bir noktaya eşit uzaklıkta bulunan noktaların kümesidir" şeklindeki cevap hatalı bulunmuştu. Gözetmenin dediğine göre, doğru cevabın "sabit bir noktaya eşit uzaklıkta bulunan *tüm* noktaların kümesidir" olması gerekiyordu. Aynı soruyla karşılaşan bir başka adayın cevabı, aradaki uzaklığın sıfıra eşit olmadığını belirtmediği için hatalı bulunmuştu. Bir denklemin çözümleri sorulduğunda, "1 ve 2" yanıtı hatalı bulundu, gözetmene göre cevabın "1 veya 2" olması gerekiyordu. (Aynı gözetmen bir başka adaya tam tersi cevabı vermiş, "1 veya 2"nin yanlış olduğunu söylemişti.)

Sınava geri dönelim. Bir buçuk saat daha geçti. Sonra gözetmenlerden birisi şöyle dedi:

"Tamam, bu sorularla işimiz bitti. Burada çözmeni istediğimiz bir soru var."

Verdikleri soru oldukça zordu. Çözüm için okulda öğretilmeyen Sturm ilkesinin kullanılması gerekiyordu.[4] Aldığım uzaktan eğitim derslerinde bu konuyu öğrendiğim için problemi çözebilirdim. Son hesaplamaları yapmak üzereydim ki sınavı yapanlardan biri geri geldi.

"Sonunda yaptın mı?"

"Neredeyse."

Yazdıklarıma baktı ve çözümümün doğruluğunu gölgeleyecek bir şey olmadığı gibi hesapları da bitirmek üzere olduğumu gördü.

"Ne diyeceğim biliyor musun," dedi ve devam etti "sana bir başka problem daha vereyim."

Merakla beklediğim ikinci soru ilkinin iki katı daha zordu ama yine de soruyu çözüyordum ki yarısında gözetmen yine geldi.

"Henüz yapamadın mı?" dedi. "Bunu bir dene."

Eğer bu, kana bulanmış vaziyette köşeye sıkışan bir boksörün üzerine adeta yağmakta olan yumruklardan (ki bazılarının belden aşağı olduğunu da ekleyebilirim) çaresizce kaçmaya çalıştığı bir boks maçı olsaydı, bu soru o maçın son ve ölümcül yumruğu olurdu. Soru, ilk bakışta gözüme masum görünmüştü: Bir çember ile aynı düzlem üzerinde ve bu çemberin dışında bulunan iki nokta verilmişti; bu iki noktadan geçen ve ilk çembere bir noktada teğet olan ikinci bir çemberin çizilmesi isteniyordu.

Fakat çözüm aslında oldukça karmaşıktı. Profesyonel bir matematikçi dahi bu soruyu hemen çözemeyebilirdi. Çözüm için ya "evirtim" (inversion) ismi verilen yöntemin kullanılması ya da detaylı bir geometrik yapı kurulması gerekiyordu. Bu yöntemlerin hiçbiri liselerde öğretilmediğinden, aslında sınavda bu sorunun sorulmasına izin verilmemeliydi.

Evirtim yöntemini biliyordum ve bu soruda uygulayabileceğimi fark ettim. Problem üzerinde çalışmaya başladım ama birkaç dakika sonra gözetmenler geri geldi ve yanıma oturdular. Bir tanesi söze girdi:

"Biliyor musun, biraz önce kayıt komitesinin Başkan Vekili ile görüştüm ve senin durumundan bahsettim. Neden hâlâ zamanımızı harcamaya devam ettiğimizi sordu... Bak," dedi ve ilk defa gördüğüm, üzerinde notlar düşülmüş resmi gibi görünen bir form çıkardı. "Biletindeki ilk soruda, bize eksiksiz bir cevap veremedin, bir çemberin tanımını dahi bilmiyorsun. Dolayısıyla eksi puan vermek zorundayız. İkinci soruda bilgin sağlam değildi ama tamam, sana eksi artı veriyoruz. Sonra ilk soruyu tam olarak çözmediğin gibi ikinci soruyu da çözemedin. Üçüncüsü? Onu da henüz çözemedin. Dolayısıyla seni elemekten başka çaremiz yok."

Saatime baktım. Sınav başladığından beri dört saatten fazla bir süre geçmişti ve artık yorulmuştum.

"Yazılı sınavımı görebilir miyim?"

Diğer gözetmen kürsüye gitti, sınav kâğıdımı getirdi ve önüme koydu. Sayfaları çevirirken kendimi gerçeküstü bir filmdeymiş gibi hissediyordum. Tüm cevaplar ve tüm çözümler doğruydu ama yine de üzerinde bir sürü yorum vardı. Hepsi kurşun kalemle yazılmıştı —yani kolayca silinebilirler diye düşündüm— ve hepsi de gülünç şeylerdi, sanki birisi bana eşek şakası yapıyordu. Bir tanesi hâlâ aklımda: Yaptığım hesapların birinde "$\sqrt{8}>2$" yazmıştım ve yanına şöyle bir not düşülmüştü: "ispat edilmemiş". Cidden mi? Diğer yorumlar da pek farklı değildi. Peki, hepsi doğru olarak çözülmüş beş soru karşılığında bana hangi notu verseler beğenirsiniz? 5 değil, 4 de değil. Rusya'da C'ye karşılık gelen 3. Tüm bunların karşılığında bana C mi vermişlerdi?

Bittiğini biliyordum. Bu sistemle mücadele etmenin bir yolu yoktu. "Peki," dedim.

Bir tanesi sordu: "İtiraz etmeyecek misin?"

Bir itiraz makamı olduğunu biliyordum ama ne işe yarardı ki? Yazılı sınavdaki notumu belki 3'ten 4'e yükseltebilirdim ama sözlü sınav notuna itiraz etmem daha zordu; onların sözüne karşılık benimki olacaktı. Sözlü sınav notunu 3'e yükseltebilsem bile ne işe yarayacaktı ki? Önümde, beni avlayabilecekleri iki sınav daha vardı.

George Szpiro *Notices* isimli kitabında konuyla ilgili olarak şunları yazmıştı:

> Olur da adaylardan birisi tüm tersliklerin üstesinden gelip, yazılı ve sözlü sınavlardan geçse dahi, "konu yeterince kapsamlı biçimde ele alınmamıştır," gibi genelgeçer bir gerekçe ile Rus edebiyatı sınavında yazması gereken denemede başarısız olması işten değildi. Çok nadir karşılaşılan istisnalar hariç, olumsuz kararlara yapılan itirazların başarı elde etmeleri imkânsızdı. En iyi durum-

da görmezden gelinirler, en kötü durumdaysa aday "gözetmenlere hakaret" gerekçesi ile cezalandırılırdı.

Asıl kritik soru ise orada olmamı engellemek için elinden geleni yapan bir üniversiteye kayıt olmayı gerçekten isteyip istemediğimdi. Cevabım şöyle oldu: "Hayır. Aslına bakarsanız başvurumu geri çekmek istiyorum."

Birden yüzleri güldü. İtiraz etmememe, onlar için daha az sıkıntı, daha az sorun olasılığı demekti.

"Emin misin?" diye sordu konuşkan olanı, "Sana eşyalarını hemen teslim edeyim."

Odadan çıkıp asansöre bindik ve kapı kapandı. Asansörde sadece ikimizdik ve gözetmenin keyfi yerindeydi. "Çok iyiydin. Gerçekten etkileyici bir performans sergiledin. Özel matematik okullarından birisine gidip gitmediğini merak ettim," dedi.

Küçük bir kasabada büyüdüm; özel matematik okullarımız yoktu.

"Gerçekten mi? Annen ya da baban matematikçi mi?"

Hayır, her ikisi de mühendis.

"İlginç... Özel matematik okullarından birisine gitmeyen bu kadar sıkı bir öğrenciyi ilk defa görüyorum."

Söylediklerine inanamıyordum. Bu adam az önce, yaklaşık dört buçuk saat süren, adaletten yoksun, taraflı ve oldukça zor bir sınavla beni elemişti. Tek bildiğim, matematikçi olma hayallerimi suya düşürdüğüydü. Tek hatası Yahudi bir aileden gelmek olan 16 yaşında bir çocuktum... Yani şimdi bu adam bana iltifatlar düzüp, ona açılmamı mı bekliyordu?!

Ne yapabilirdim ki? Ona bağıracak ya da yüzüne bir yumruk mu indirecektim? Orada öyle sessiz ve sersem bir hâlde duruyordum. Sözlerine şöyle devam etti: "Sana bir tavsiyede bulunayım. Moskova Petrol ve Gaz Enstitüsü'ne git. Oldukça iyi bir uygulamalı matematik programları var. Oraya *senin gibi* öğrencileri alıyorlar."

Kapı açıldı ve bir dakika sonra okulda aldığım ödüllerin garip bir şekilde içinden fırladığı gayet kalın başvuru dosyamı bana teslim etti.

Bana iyi şanslar diledi ama ben karşılık veremeyecek kadar yorgundum. Sadece ve sadece oradan uzaklaşmak istiyordum!'

Sonunda dışarı çıktım, devasa MGU binasının önündeki uzun merdivenlerde durdum. Taze yaz havasını tekrar içime çekiyor ve büyük şehrin uzaklardan duyulan sesini dinliyordum. Hava kararmak üzereydi ve ortalıkta kimsecikler yoktu. Birden, tüm gün merdivenlerde endişeyle beni bekleyen annemle babamı fark ettim. Yüzümdeki ifade ve elimdeki büyük klasörden içeride olup bitenleri hemen anladılar.

4. Bölüm:

Kerosinka

O gün sınavdan sonra gece geç saatte eve varabildik. Yaşadığımız şokun etkisi ilk andaki gibi devam ediyor ve olup bitene bir türlü inanamıyorduk.

Bu durum, anne ve babam için de gayet can sıkıcı bir deneyimdi. Onlara hep çok yakındım ve onlar da karşılıksız sevgi ve desteklerini benden esirgemedi. Hiçbir zaman beni daha fazla çalışmaya ya da belli bir alana yönelmeye zorlamayıp, tutkularımın peşinden gitmem için cesaretlendirdiler. Tabii ki başarılarımla gurur duyuyorlardı. Hem düpedüz haksızlık yapıldığından hem de oğullarını korumak için ellerinden bir şey gelmediğinden sınavda olup bitenler onları da sarsmıştı.

Babamın teorik fizikçi olma hayalleri, otuz yıl önce (1954 yılında), başka bir sebepten dolayı acımasızca yıkılmıştı. Milyonlarca masum insan gibi babamın babası da Joseph Stalin'in zulmünün kurbanı olmuştu. 1948 yılında, tedarik şefi olarak çalışmakta olduğu Gorky'deki (şimdiki Nizhny Novgorod) büyük otomobil fabrikasını havaya uçurmak gibi düzmece bir iddia ile tutuklanmıştı. İddianamesinde sunulan tek "delil", tutuklandığı sırada yanında bir

kutu kibrit olmasıydı. Rusya'nın kuzeyinde yer alan bir kömür madenine ağır işlerde çalışmak üzere yollanmıştı. Gulag Archipelago'da bulunan bu bölge, yıllar sonra Soljenitsin ve diğer bazı yazarlarca tüm yönleriyle anlatıldı. Dedem "halk düşmanı" olmakla itham edildiğinden babam da "halk düşmanının oğlu"ydu.

Babam, Gorky Üniversitesi Fizik Bölümü'ne başvururken, bu durumu da yazmak zorunda kalmıştı. Aslında liseyi onur nişanı ile bitirdiği için doğrudan kabul edilmesi gerekirken, tek amacı "halk düşmanı" olanları belirlemek olan sözlü mülakatta elenince, bir mühendislik okuluna gitmek zorunda kalmıştı. (Diğer mahkûmlar gibi dedem de önce rehabilite edilip, ardından 1956 yılında yayımlanan Kruşçev Kararnamesi ile serbest bırakılmıştı ama bu adaletsizliğin telafisi artık imkânsızdı.)

Aradan geçen otuz yılın ardından, bu sefer de oğlu benzer bir tecrübe yaşamak zorunda kalıyordu.

Fakat hâlimize acıyacak zamanımız yoktu. Bundan sonra ne yapacağımıza derhal karar vermeliydik ve ilk olarak da hangi okula başvuracağımı belirlememiz gerekiyordu. Diğer bütün okullar sınavlarını aynı zamanda, yaklaşık iki hafta sonra Ağustos ayında yaptıklarından tek bir tanesine başvurabilecektim.

Ertesi sabah babam erkenden uyanıp, Moskova'ya gitti. MGU'daki gözetmenin tavsiyesini ciddiye almıştı. Gözetmen yardımcı olmak ister gibiydi; belki de yaptığı haksızlığı biraz olsun telafi etmeye çalışıyordu. Babam Moskova'ya varır varmaz başvuru komitesi ile görüşmek üzere doğrudan Petrol ve Gaz Enstitüsü'ne gitti*. Ne yapıp edip, onunla özel olarak görüşmeyi kabul ederek durumum hakkında konuşabileceği birini bulmuş. Söz konusu kişi, MGU'nun anti-Semitist tutumundan haberdar olduğunu ve Petrol ve Gaz Enstitüsü'nde böyle bir durumun geçerli olmadığını belirt-

* O dönemde, Gubkin Petrokimya ve Gaz Endüstrisi Enstitüsü olarak da biliniyordu (adını SSCB'de uzun yıllar Petrol ve Gaz Bakanlığı yapan I. M. Gubkin'den almıştı). Ben orada öğrenci olduktan sonra adı Gubkin Petrol ve Gaz Enstitüsü ve daha sonra da Gubkin Petrol ve Gaz Üniversitesi oldu.

miş. Benim gibi MGU'ya kabul edilmeyen çok sayıdaki öğrenci nedeniyle uygulamalı matematik bölümlerine başvuran öğrencilerin seviyesinin gayet yüksek olduğunu da eklemiş. Giriş sınavının pek de kolay olmayacağını belirtip, "Eğer oğlunuz dediğiniz gibi parlak bir öğrenci ise kabul edilecektir. Giriş sınavımızda Yahudilere karşı herhangi bir negatif ayrımcılık yapılmaz," demiş.

Görüşmenin sonunu da "Ama yine de sizi uyarmalıyım. Lisans sonrası çalışmalarımız başka insanlar tarafından yönetiliyor ve oğlunuz muhtemelen yüksek lisansa kabul edilmeyecektir," diye bağlamış.

Ancak bu, beş yıl sonra düşünülmesi gereken oldukça uzak bir meseleydi.

Babam, uygulamalı matematik bölümü bulunan Moskova'daki diğer okullara da gitmiş ama Petrol ve Gaz Enstitüsü'ndeki gibi bir intiba edinememiş. Akşam eve gelip, olan biteni annemle bana anlattığında, bir an önce Petrol ve Gaz Enstitüsü'nün matematik programına başvurmaya karar verdik.

Enstitü, Metalürji Enstitüsü ya da Demiyolları Mühendisliği Enstitüsü (Sovyetler Birliği'nde, birçok okula "enstitü" ismi verilirdi) gibi farklı sanayi sektörlerine teknisyen yetiştiren Moskova'daki bir düzine kadar okuldan biriydi. Mark Saul makalesinde, 1960'ın sonlarından itibaren MGU'da uygulanan anti-Semitist politikanın "Yahudi öğrenciler için matematikçi kontenjanı piyasası yarattığını" yazmıştı.[1] Petrol ve Gaz Enstitüsü de "bu piyasaya açılarak, yüksek nitelikli öğrencileri kazanmak üzere, diğer üniversitelerin anti-Semitik politikalarından istifade etmeye başladı." Mark Saul durumu şu şekilde açıklıyordu:

> "Takma adı Kerosinka, (onların) gurur ve kinizmlerini yansıtmaktaydı. Kerosinka, gazyağı yakan, düşük teknolojili ama yoklukta iyi iş gören bir tür sobadır. Enstitü'nün öğrencileri ve mezunları hızla "kerosinkacık"lar olarak anılmaya başladı ve okul matematik tutkunu Yahudi öğrenciler için bir sığınak oldu.

Nasıl oldu da kader Kerosinka'yı bu kadar çok yeteneğin deposu hâline getirdi? Bu soruyu cevaplamak kolay değil. MGU'nun Yahudilere uyguladığı dışlayıcı tutumdan istifade eden başka kurumlar da olduğunu biliyoruz. Bu dışlayıcı tutumun bilinçli bir hareket olduğunu ve muhtemelen başlangıçta biraz dirençle karşılaştığını da biliyoruz. Bazı kurumlar için Yahudi öğrencileri kabule devam etmek, onlar için yeni bir politika belirlemekten daha kolay olmalı. Ancak bu olgu yayıldıktan ve Kerosinka'da Yahudi öğrencilere kadro açıldıktan sonra buna neden göz yumuldu? Gizli polisin (KGB), Yahudi öğrencileri sadece bir iki yerde gözetim altında tutmak gibi bir planı olduğuna dair bazı karanlık fısıltılar var. Ne var ki arkada yatan daha olumlu bir sebep de olabilir: Enstitü'nün yetkilileri gelişmekte olan yeni bir bölüm görmüş ve bu durumun devam etmesi için de ellerinden geleni yapmış da olabilirler."

Son cümle bana daha doğru görünüyor. Petrol ve Gaz Enstitüsü'nün Başkanı (ya da Rektörü) olan Vladimir Nikolaevich Vinogradov zeki bir yöneticiydi. Yaratıcı eğitim ve araştırma teknikleriyle ilgilenen profesörleri kadrosuna dahil etmesi ve sınıflarda yeni teknolojiler kullanması ile tanınırdı. Tüm sınavların (giriş sınavları dahil) *yazılı* olarak gerçekleştirildiği bir sistem oluşturmuştu. Yazılı sınavlar da suistimale (MGU'daki yazılı sınavda benim başıma geldiği gibi) açıktı tabii ki ama en azından MGU'daki sözlü sınavda yaşadığım türden felaketler engellenebiliyordu. Yahudi adaylara karşı ayrımcılık yapılmaması Vinogradov'un aldığı bir karar olsaydı şaşırmazdım ama eğer öyleyse onun biraz iyi niyet ve hatta biraz da cesaret göstermiş olması gerekirdi.

Tahmin edileceği üzere, giriş sınavında herhangi bir ayrımcılık yok gibi görünüyordu. İlk sınavda (yazılı matematik) A notuna karşılık gelen 5 puanı alınca kabul edildim (ilk sınavda A notunu alan altın madalyalılar doğrudan kabul ediliyordu). Gelin görün ki bu notu almam da pek kolay olmadı çünkü sınavda yaptığım bazı

çözümler otomatik notlama sistemine hatalı girilmişti ve bu yüzden notum ilk önce 4, yani B olarak kaydedilmişti. İtiraz edebilmek için aklımda bin bir türlü kötü düşünceyle saatlerce kuyrukta beklemem gerekti ama itiraz komitesine durumu açıkladığımda, hata bulundu ve ânında düzeltildi; ardından da özür dilendi ve böylece benim giriş sınavları efsanem sona erdi.

1 Eylül 1984 günü eğitim-öğretim yılı başladı yeni sınıf arkadaşlarımla tanıştım. Bu programa her yıl sadece elli öğrenci kabul ediliyordu (oysa *Mekh-Mat* için bu rakam beş yüzdü). Etrafımdaki bazı arkadaşlar da benzer bir tecrübe yaşamıştı. Bunlar en zeki ve en yetenekli matematik öğrencilerinden bazılarıydı.

Ben ve yurttaki oda arkadaşım Kişinev'li Misha Smolyak hariç herkes Moskova'dandı. Moskova dışında yaşayanlar, sadece altın madalyalı bir okuldan mezun iseler başvurabiliyorlardı; neyse ki benim okulum da onlardan biriydi.

Arkadaşlarımın çoğu, Moskova'nın özel matematik programları olan en iyi okullarında (No. 57, No. 179, No. 91 ve No. 2 okulları gibi) okumuşlardı. Bir kısmı profesyonel matematikçi olma yoluna girdi ve bugün dünyanın en iyi üniversitelerinde öğretim üyesi olarak çalışıyorlar. Sadece benim sınıfımda, bizim neslin en iyi matematikçilerinden olacak isimler vardı: Pasha Etingof MIT'de, Dima Kleinbock Brandeis Üniversitesi'nde ve Misha Finkelberg Moskova Yüksek Ekonomi Okulu'nda öğretim üyesi. Oldukça ilham verici bir ortamdı

Kerosinka'da yüksek düzeyde bir matematik eğitimi veriliyordu; analiz, fonksiyonel analiz ve lineer cebir gibi temel dersler, MGU'daki kadar sıkı bir biçimde işleniyordu. Fakat geometri ve topoloji gibi diğer soyut matematik alanlarında dersler verilmiyordu. Kerosinka sadece uygulamalı matematik programı verdiğinden eğitimimiz başta petrol ve gaz arama ve üretmeye yönelik olmak üzere somut uygulamalara odaklanmıştı. Daha fazla uygulama

ağırlıklı birkaç ders almak zorundaydık: optimizasyon, nümerik analiz, olasılık ve istatistik. Bunların yanı sıra bilgisayar bilimine de epey yer verilmekteydi.

Bu tür uygulamalı matematik dersleri almak zorunda kalmış olmaktan hoşnuttum. Bu sayede "soyut" ve "uygulamalı" matematik arasında aslında çok keskin bir ayrım olmadığını öğrendim; yüksek kalitedeki uygulamalı matematik çalışmaları, her zaman karmaşık soyut matematik altyapısı üzerine kuruluydu. Edindiğim tecrübe ne kadar faydalı olursa olsun, gerçek aşkımı unutamıyordum. Kerosinka'da verilmeyen soyut matematik konularını öğrenmenin bir yolunu bulmalıydım.

Bir kısmı Moskova'daki prestijli ve özel matematik okullarına gitmiş olan diğer öğrencilerle arkadaş oldukça, çözüm kendiliğinden ortaya çıktı. Birbirimize hikâyelerimizi anlattık. Yahudi olanlar (yukarıda bahsettiğim kriterlere göre) sınavlarda en az benimki kadar insafsız bir biçimde elenirken, Yahudi olmayan tüm sınıf arkadaşları, sorunsuz bir biçimde MGU'ya yerleşmişti. Arkadaşlarım, bu öğrenciler aracılığıyla *Mekh-Mat*'ta neler olup bittiğinden, hangi derslerin iyi olduğundan, derslerin nerede ve ne zaman işlendiğinden haberdar oluyordu. Kerosinka'daki ikinci haftamda, sınıf arkadaşım (yanılmıyorsam Dima Kleinbock'tu) şöyle bir teklifte bulundu: "MGU'ya, Kirillov'un dersine gidiyoruz. Sen de bizimle gelmek ister misin?"

Kirillov ünlü bir matematikçiydi ve ben elbette dersine katılmak isterdim. Ancak bunun nasıl mümkün olacağına dair hiçbir fikrim yoktu. MGU'nun devasa binası polis tarafından sıkı bir biçimde korunuyordu. İçeri girebilmek için özel kimlik gerekiyordu.

"Endişelenme," dedi arkadaşım, "korkulukların üstünden atlayacağız."

Tehlikeli ve heyecanlı olacak gibi görünüyordu; bu yüzden, "Elbette," dedim.

Binanın yanındaki korkuluklar oldukça yüksekti, en az altı metre olmalıydılar ama bir yerde demirler eğildiğinden içeri sızılabilirdi. İyi hoş ama bundan sonrası ne olacaktı? Bir yan kapıdan binaya girdik ve sonu mutfağa çıkan uzun bir koridor boyunca yürüdük. Çalışanların dikkatini çekmeden mutfağın içinden geçip yemekhaneye ulaştık ve ana giriş holüne çıktık. Buradan asansöre binerek amfinin bulunduğu on dördüncü kata çıktık.

Alexandre Alexandrovich Kirillov (ya da sevilen ismiyle San Sanych) karizmatik bir öğretim üyesiydi ve bu büyük insanı yıllar sonra gayet iyi tanıyacaktım. Sanırım, meşhur kitabını takip ederek, gösterim teorisi hakkında tipik bir lisans dersi veriyordu. Ayrıca yüksek lisans öğrencilerine yönelik bir seminer veriyordu ve biz ona girdik.

Krillov'un iyi niyeti sayesinde arada kaynadık. Oğlu Shurik (şu anda Stony Brook Üniversitesi'nde öğretim üyesi), No. 179 isimli özel matematik okulunda, sınıf arkadaşlarım Dima Kleinbock ve Syoma Hawkin ile birlikte okumuştu. Kuşkusuz San Sanych, MGU kabul komitesinde olup bitenlerin fakındaydı. Yıllar sonra bana bu konuda yapabileceği hiçbir şey olmadığını söyledi; büyük çoğunluğu Kominist Parti aparatçiklerinden oluşan kabul komitesine onu kesinlikle yaklaştırmıyorlardı. Yapabileceği tek şey, derslere sızmamıza göz yummaktı.

Kirillov, derslerine gelen Kerosinka öğrencilerinin kendilerini rahat hissetmesi için elinden gelen her şeyi yapıyordu. Onun eğlenceli ders ve seminerlerine katılmak, üniversitedeki ilk yılıma dair anılar içerisinde önemli bir yer tutar. Bunun yanında, Alexander Rudakov'un verdiği bir seminere de katılırdım ki o da benim için büyük bir tecrübeydi.

Bu esnada, Kerosinka'da matematiğe dair öğrenebileceğim ne varsa öğreniyordum. Yurtta kalıyor ama hafta sonları eve gidiyor ve her iki haftada bir Evgeny Evgenievich ile buluşuyordum. Bana okumam için kitap tavsiyelerinde bulunuyor, ben de ona düzenli olarak

rapor veriyordum. Ancak momentumumu ve bunun için motivasyonumu korumam gereken noktaya hızla ulaşıyordum, bu yüzden daha düzenli görüşebileceğim ve sadece öğrenmek değil üzerinde çalışmak için problem de alacağım bir danışmana ihtiyacım olacaktı. *Mekh-Mat* mensubu olmadığım için, sağladığı sonsuz olanaklardan faydalanma imkânım yoktu. A. A. Kirillov gibi birisine gidip bireysel olarak benimle çalışmasını veya üzerinde çalışmam için bir problem vermesini isteyemeyecek kadar da utangaçtım. Kendimi dışlanmış hissediyordum. Kerosinka'daki ikinci senem olan 1986 yılı bahar döneminde, kayıtsızlık ve tembelliğe teslim olmaya başladım. Karşılaştığım kısmetsizliklere bağlı olarak, bir matematikçi olma hayallerimi gerçekleştireceğimden şüphe duyar oldum.

5. Bölüm:

Çözümün İpleri

Artık iyiden iyiye umudumu yitirmeye başlamıştım ki bir gün Kerosinka'da ders arasındayken, saygın matematik öğretmenlerimizden biri olan Alexander Nikolaevich Varchenko koridorda yanıma geldi. Varchenko, önde gelen Sovyet matematikçilerinden biri olan Vladimir Arnold'un eski öğrencilerindendi ve dünya çapında bir matematikçiydi.

"Bir matematik problemi üzerinde çalışmak ister misin?" diye sordu.

"Evet, tabii ki," diye cevapladım ve sanki ne olursa olsun bir şey yapmak beni mutlu etmeyecekmiş gibi, "Ne tür bir problem?" diye sordum.

"Kendi araştırmam esnasında ortaya çıkan ve senin gibi parlak bir öğrenci için uygun olabileceğini düşündüğüm bir problem. Bu konunun uzmanı Dmitry Borisovich Fuchs'tur." Daha önce de adını duyduğum Fuchs ünlü bir matematikçiydi. "Ben kendisi ile görüştüm ve bu konuda araştırma yapacak bir öğrenciye rehberlik yapmayı kabul etti. Burada numarası yazıyor. Onu ara, sana ne yapman gerektiğini söyleyecek."

Varchenko gibi tecrübeli matematikçilerin kendi araştırmaları esnasında, daha önce çözülmemiş her türden matematik problemiyle sıkça karşılaşmaları oldukça yaygın bir durumdur. Eğer bu problem kendi araştırma programıyla yakından alakalı olsaydı kendisi çözmeyi denerdi. Ancak hiçbir matematikçi her şeyi tek başına yapmaz; dolayısıyla daha önce çözülmemiş bu tür (genellikle daha basit gördükleri) problemlerin bazılarını öğrencilerine havale ederler. Bazen de bir problem profesörün o anki ilgi alanının dışında olmasına rağmen, yine de çözümü merak edebilir; benim durumum da bunun bir örneğiydi. Bu yüzden Varchenko, konunun uzmanı olan Fuchs'tan bana nezaret etmesini istemişti. Neticede bu, matematik dünyasının sosyal düzeni içerisinde tipik bir "işlem"di.

İşin asıl ilginç yanı, Fuchs'un herhangi bir üniversitede eğitim kadrosunda resmen yer almamasıydı. Buna rağmen Fuchs ve önde gelen başka birkaç matematikçi, Yahudi öğrencilere karşı sürdürülen ayrımcı tutumun etkisini azaltmak için, MGU'ya kabul edilmeyen yetenekli gençlere yıllardır özel olarak ders veriyordu.

Bu çerçevede Fuchs, "Yahudi Cemaati Üniversitesi" olarak bilinen gayriresmî akşam okulunda öğrencilere ders veren meslektaşları arasına katılmıştı. Bu derslerin bir kısmı benden önce Kerosinka'da verilmişti.

Okulun kurucusu olan Bella Muchnik Subbotovskaya isimli cesur kadın, aynı zamanda okulun kalbi ve ruhuydu. Maalesef KGB durumu öğrendi ve Yahudilerin izinsiz toplanmasına karşı alarma geçti. Subbotovskaya sonunda KGB'ye çağırıldı ve sorguya çekildi. Sorgudan kısa bir süre sonra, şüpheli bir biçimde bir kamyonun altında kalarak hayatını kaybetti. Bu, birçok kişinin olayın soğukkanlı bir cinayet[1] olduğundan şüphelenmesine yol açtı. Onun yokluğunda okul dağıldı.

Kerosinka'ya bu trajik olaylar zincirinden iki yıl kadar sonra gelmiştim. Akşam okulu artık var olmasa da bir grup gönüllü profesyonel matematikçi, benim gibi talihsiz dışlanmışlara bireysel olarak

yardım ediyordu. Gelecek vadeden öğrencileri seçip, onlara akıl ve cesaret veriyor, bazen de tam manasıyla akıl hocalığı ve danışmanlık yapıyorlardı. Bu yüzden Varchenko o problemi, bağlantıları sayesinde kolaylıkla ulaşabileceği *Mekh-Mat*'ta okuyan istekli bir öğrenciye değil de Kerosinka'da okuyan benim gibi bir öğrenciye vermişti. Fuchs'un kendi zamanından harcayarak bana danışmanlık yapmayı kabul etmesinin nedeni de buydu.

Bunun için Fuchs'a şükran borçluyum. Geriye dönüp baktığımda anlıyorum ki eğer onun iyilikseverliği ve fedakârlığı olmasaydı asla bir matematikçi olamazdım. Kerosinka'da matematik okuyor ve MGU'daki derslere katılıyordum ama tek başına yeterli değildi. Aslında bir başkasının rehberliği olmadan bir öğrencinin kendi araştırmasını yapması imkânsızdır; mutlak suretle bir danışmanı olması gerekir.

Bununla birlikte elimde ünlü matematikçi Fuchs'un telefon numarası vardı ve onun danışmanlığında bir projeye başlayacaktım. Bu inanılmazdı! Sürecin nereye varacağını bilmiyordum ama büyük bir şeyin gerçekleşmiş olduğunu hemen anlamıştım.

O akşam tüm cesaretimi toplayıp ankesörlü telefondan Fuchs'u aradım ve kendimi tanıttım.

"Tamam, haberim var," dedi Fuchs, "okuman için sana bir makale vereceğim."

Ertesi gün buluştuk. Fuchs, tahminlerimden çok farklı olarak, dev gibi bir fiziksel görünüme sahipti. Çok ciddiydi.

"İşte," diyerek bir makalenin çıktısını uzattı ve "bunu okumaya çalış ve anlamadığın bir kelime ile karşılaştığın an beni ara," dedi.

Az önce bana Kutsal Kâse'yi vermiş gibi bir hisse kapıldım.

Örgü grupları (braid groups) hakkında birkaç yıl önce yazdığı, düzinelerce sayfa uzunluğunda bir makaleydi. O akşam okumaya başladım.

Evgeny Evgenievich ile üç yıldır süren ve ilaveten tek başıma sürdürdüğüm çalışmalar boşa gitmemişti. Sadece başlıktaki tüm

kelimeleri anlamakla kalmıyor, içeriğinin anlamını da kavrayabiliyordum. Tamamını kendi başıma okumaya karar verdim. Bunu gurur meselesi yaptım. Tüm makaleyi tek başıma anlayabildiğimi söylediğimde Fuchs'un ne kadar etkileneceğini hayal ediyordum.

"Örgü grupları" kavramını daha önce de duymuştum. 2. Bölüm'de gördüğümüz grup kavramının mükemmel örnekleridirler. Evgeny Evgenievich, bu kavramı simetri bağlamında göstermişti; birlikte çalıştığımız grupların elemanları da bazı cisimlerin simetrileriydi. Örneğin çember grubu, yuvarlak bir masa tablasının (veya herhangi bir "yuvarlak" nesnenin) simetrilerinden oluşurken, dört dönme hareketinin oluşturduğu grup, kare masa tablasının (veya herhangi bir "kare" nesnenin) simetri grubu idi. "Grup" kavramı bir kez anlaşıldıktan sonra, başka örneklere bakabiliriz. Simetri ile herhangi bir alakası olmayan grupların çok sayıda örneği olduğu anlaşılıyor ki bizim de grup kavramını ilk olarak sunma nedenimiz buydu. Aslına bakarsanız bu tipik bir hikâyedir. Matematiksel bir kavramın ortaya çıkışına matematiğin (ya da fizik, mühendislik, vb) belirli bir alanındaki problem veya olgular sebep olabilir ama zamanla farklı alanlar için de faydalı ve kullanışlı olduğu görülebilir.

Zaman içerisinde birçok grubun simetrilerden ortaya çık*ma*dığı anlaşıldı ve örgü grupları da bunlardan biridir.

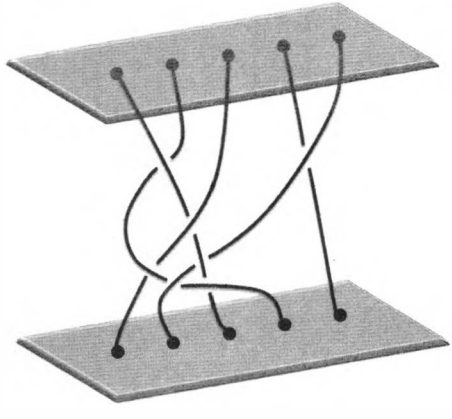
Örgü gruplarının kriptografi, kuantum hesaplama veya biyoloji gibi gerçek dünya uygulamalarına (bunlara daha sonra değineceğiz) dair henüz hiçbir fikrim yoktu. Ama bu matematiksel soyutlamaların içsel güzelliği aklımı başımdan aldı.

Tüm doğal sayılar (n = 1, 2, 3...) için bir örgü grubu vardır. Her bir örgü grubunu isimlendirmek için bu sayıları kullanabiliriz. Grupları genellikle B_n biçiminde adlandırırız; örneğin, n=1 için grup adı olarak B_1, n=2 için B_2, vs kullanırız.

B_n grubunu tanımlamak için ilk olarak elemanlarını tanımlamalıyız ki yuvarlak ve kare masa örneklerinin dönel (rotational) simetrileri için de böyle yapmıştık. B_n grubunun elemanları, *n-ipli*

örgüler olarak adlandırılır. Aşağıdaki şekilde n=5 için bir örnek verilmiştir. Üzerinde beş adet çivi bulunan iki adet saydam tabaka düşünelim ve her bir çivi bir ip aracılığıyla diğer tabaka üzerindeki bir çiviye bağlanmış olsun. Tabakalar saydam olduğundan, iplerin her birini bütün olarak görebiliriz. Her ip, diğer bir ipin etrafından istediğimiz gibi dolanabilir ama kendi üzerinden dolanmamalıdır. Ayrıca her bir çiviye sadece bir ip bağlanabilir. Tabakaların konumu bir kere sabitlenir ve o hâlde kalır.

Nasıl bir araba dört teker, bir şanzıman, dört kapı vb'den oluşuyorsa yukarıda bahsedilen yapının tamamı da (iki tabaka ve çok sayıda ip) tek bir örgü oluşturmaktadır. Söz konusu parçaları ayrı ayrı düşünmüyor, örgüye bir bütün olarak odaklanıyoruz.

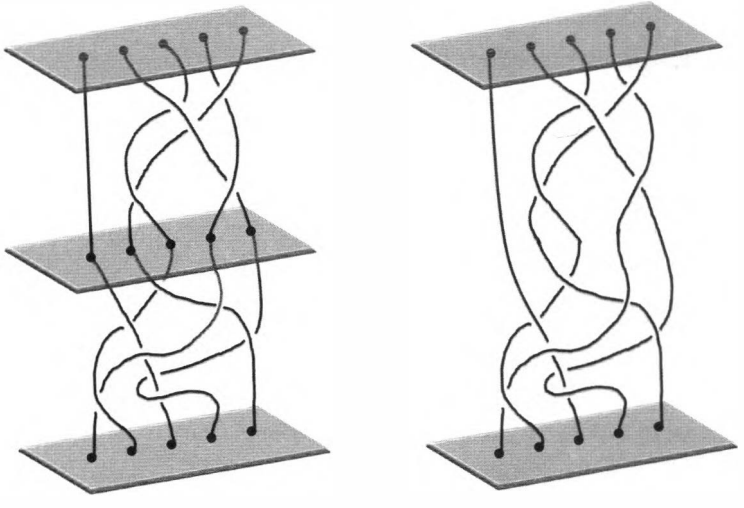


Bunlar, n-ipli örgülerdir. Şimdi de tüm n-ipli örgülerin bir grup oluşturduğunu göstermemiz gerek. Bunun için de bu türde iki örgünün bileşimini nasıl yapacağımızı tanımlamalıyız. Diğer bir deyişle, n-ipli her bir örgü çifti için n-ipli bir başka örgü üretmeliyiz; tıpkı iki dönme hareketini arka arkaya uygulamanın bize üçüncü dönme hareketini vermesi gibi. Ardından da bu birleşimin 2. Bölüm'de verilen özellikleri sağlayıp sağlamadığını kontrol edeceğiz.

Elimizde iki örgü olduğunu farz edelim. Bunları kullanarak yeni bir örgü elde etmek için, bir tanesini diğerinin üstüne, çivileri

aynı hizaya gelecek şekilde (resimde gösterildiği gibi) yerleştirelim. Ardından, eşleşen çivilere bağlı olan üstteki ipleri alttaki iplere birleştirerek ortada kalan iki tabakayı kaldıralım.

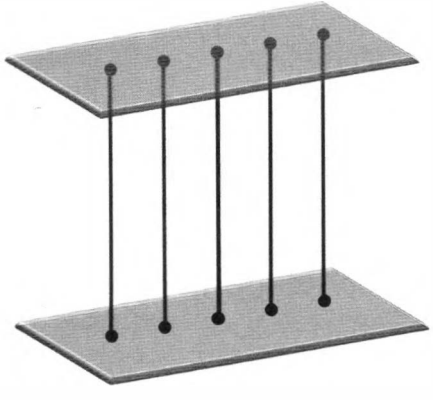
Elde ettiğimiz yeni örgü, diğerlerinin iki katı uzunluğunda olacak ama bu hiç önemli değil. İplerin boyunu kısaltarak, örgünün başlangıçtakilerle aynı uzunlukta olmasını ve iplerin birbirleri etrafında aldıkları yolların korunmasını sağlayabiliriz. Voilà! İki örgü ile yola çıktık ve yeni bir örgü elde ettik. Bu, örgü grubumuzdaki iki örgünün bileşimini veren kuraldır.



Örgü grupları simetriden kaynaklanmadıkları için, bu işlemi — simetri gruplarında olduğu gibi— "birleşim" olarak değil de, sayılarla yaptığımız işlemlere benzer biçimde "toplam" ya da "çarpım" olarak düşünebiliriz. Böyle bakınca, örgüler sayılara benzer; eğer isterseniz "püsküllü sayılar" olarak da düşünebilirsiniz.

Bize iki tam sayı verildiğinde, bunları toplayarak yeni bir sayı elde edebiliriz. Benzer biçimde, iki örgü verildiğinde de yukarıdaki kurala uyarak yeni bir örgü elde edebiliriz. Dolayısıyla bunu iki örgünün "toplanması" olarak düşünebiliriz.

Bu aşamada, örgülerin toplanması işleminin grupların tüm özelliklerini (ya da aksiyomlarını) sağlayıp sağlamadığını kontrol etmeliyiz. İlk olarak özdeşlik elemanını bulmamız lazım. (Çember grubu için özdeşlik elemanı, 0 derecelik dönme hareketine karşılık gelen noktaydı.) Örgü gruplarında bu, bir sonraki şekilde gösterildiği üzere, ipleri hiç dolaşmadan dümdüz uzanan örgüdür. Bu hiçbir örülmenin olmadığı, bir tür "abes" örgüdür; dönme hareketinin hiç gerçekleşmediği 0 derecelik dönme hareketi gibi.[2]



Sonra, verilen bir *b* örgüsünün ters örgüsünü bulmamız gerek (çember grubunda bu, aynı açı ile ters yönde gerçekleştirilen dönme hareketiydi). Yukarıda verilen kurala göre, eğer bu örgüyü *b* örgüsü ile toplarsak özdeş örgüyü elde etmemiz gerekir.

Bu ters örgü, *b*'nin tabanındaki tabakaya göre yansıması olacaktır. Eğer bu örgü ile orijinal örgüyü yukarıdaki kurala göre birleştirirsek tüm ipleri sonuç özdeş birim örgü olacak şekilde yeniden düzenleyebileceğiz.

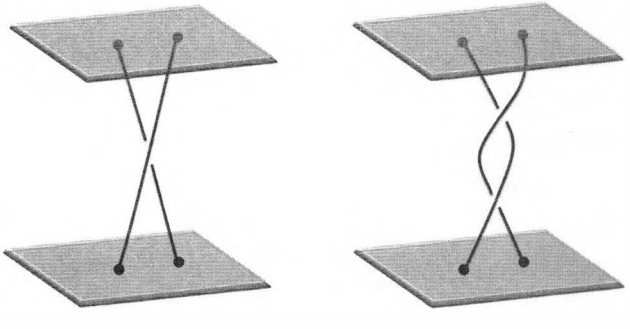
Burada, şimdiye kadar biraz göz ardı ettiğim önemli bir noktaya vurgu yapmak ihtiyacı duyuyorum: İpleri kesip tekrar bağlamadığımız müddetçe, orijinal örgü ile ipleri istediğimiz gibi çekerek, gererek ya da büzerek elde ettiğimiz örgü arasındaki farkı ayırt edemeyiz. Diğer bir deyişle, ipler aynı çivilere bağlanmış olmalı ve

birbirlerinin içinden geçmelerine izin verilmemeli; bunların dışında istediğimiz gibi kesip birleştirebiliriz. Bunu örgümüze çeki düzen vermek olarak düşünebilirsiniz. Bu durumda yine aynı örgüyü (ama biraz daha şirin bir hâlde) elde ederiz. Bu aslında, bir örgüyü ayna simetrisi biçimindeki diğer örgü ile toplayarak özdeş örgünün "aynısını" elde etmektir; tam olarak aynısı olmamakla birlikte, ipleri kesip birleştirdikten sonra aynı hâle gelecektir.[3]

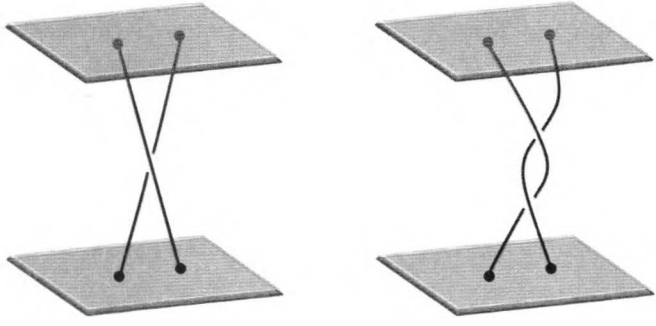
Gördüğümüz üzere, bir grubun tüm aksiyomları —bileşim (toplama), özdeş ve ters eleman— sağlanmış oldu. Böylece, *n*-ipli örgünün bir grup oluşturduğunu ispatlamış olduk![4]

Örgü gruplarını daha somut biçimde görmek için, en basit örnek olan iki ipli örgülerin B_2 grubunu daha yakından inceleyelim. (Tek ipli B_1 grubunun sadece bir tane elemanı olduğu için, tartışacak bir şey yok.[5]) Bu örgülerin her birine bir N tam sayısı atayacağız. Burada tam sayı ile bir doğal sayıyı (1, 2, 3...) ya da 0'ı veya bir doğal sayının negatifini (-1, -2, -3,...) kastediyorum.

İlk olarak, özdeş örgüye 0 sayısını atayacağız. İkinci olarak, eğer üstteki tabakanın sol çivisinden başlayan ip diğer ipin altından geçiyorsa ona 1 sayısını atayacağız. Eğer ip diğerinin etrafında dolaşıyorsa bu sefer de 2 değerini atayacağız ve aşağıdaki şekillerde gösterildiği gibi bu böyle devam edecek.



Eğer bu ip diğerinin üstünden gidiyorsa örgüye negatif sayı atayacağız: -1. Eğer aşağıda gösterildiği gibi diğerinin etrafından dolaşıyorsa -2 değerini atayacağız, vs.



Bir örgüye bu şekilde verilen numaralara "üst üste binme sayısı" diyelim. Eğer elimizde üst üste binme sayıları aynı olan iki örgü varsa ipleri "kesip birleştirerek" birini diğerine dönüştürebiliriz. Diğer bir deyişle, örgü tamamen üst üste binme sayısı ile tanımlanır. Dolayısıyla iki ipli örgülerle tam sayılar arasında bire bir eşleme söz konusudur.

Bu aşamada, her zaman kesin gözüyle baktığımız bir noktaya değinmek faydalı olabilir: Tüm tam sayılar kümesinin kendisi de bir gruptur! Yani, toplama işlemimiz var, "özdeş eleman" 0 ve herhangi bir N tam sayısının "tersi" $-N$'dir. Dolayısıyla bir grubun 2. Bölüm'de listelenen özelliklerin tamamı karşılanmış durumdadır. Gerçekten de $N+0=N$ ve $N+(-N)=0$'dır.

Böylece iki ipli örgüler grubunun tam sayılar grubuyla aynı yapıda olduklarını tespit etmiş bulunuyoruz.[6]

Tam sayılar grubunda iki tam sayıyı (a ve b) iki farklı sırada topladığımızda, yine aynı sonucu elde ederiz:

$$a + b = b + a$$

Bu durum, B_2 örgü grubu için de geçerlidir. Bu özelliği sağlayan gruplara "değişmeli" (commutator) ya da —Norveçli matematikçi Niels Henrik Abel'e ithafen— "abelian" denir.

Üç veya daha fazla sayıda ip içeren bir örgüde ipler kendi aralarında, sadece iki ipi olan bir örgüye nazaran çok daha karmaşık bir biçimde iç içe geçebilirler. Budaklanma yapısını sadece üst üste binme sayısı ile ifade etmek ise artık imkânsız hâle gelir (yukarıda verilen 5 ipli örgü resmine bakın). Üst üste binmelerin oluşturduğu yapı da önemlidir. Dahası, 3 veya daha fazla sayıda ipli iki örgünün toplamı, hangi sıranın seçildiğine bağlıdır (yani yukarıda örgülerin toplamını gösteren resimde hangi örgünün üstte olduğu). Diğer bir deyişle, n=3, 4, 5... olan B_n grubu için genellikle şu sonuca varırız:

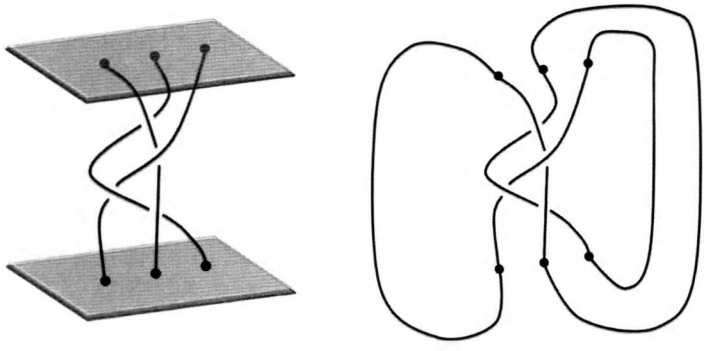
$$a + b \neq b + a$$

Bu tür gruplara "değişmeli olmayan" (non-commutative) ya da non-abelian gruplar denir.

Örgü gruplarının birçok pratik uygulaması vardır. Örneğin, etkili ve sağlam açık anahtarlı şifreleme algoritmalarının oluşturulmasında kullanılırlar.

Gelecek vadeden diğer bir kullanım alanı ise, anyon (anion) ismi verilen kuantum parçacıklarıyla karmaşık örgüler oluşturmaya dayanan kuantum bilgisayarların tasarlanmasıdır. Gidim izleri (trajectory) birbirlerinin etrafında dolaşır ve üst üste binmeleri kuantum bilgisayarın "mantık geçitlerini" oluşturmakta kullanılır.[8]

Benzer şekilde, biyoloji alanında da uygulamaları vardır. n-ipli bir örgü için, iki tabaka üzerindeki çivileri soldan sağa doğru 1'den n'e kadar numaralandıralım. Her iki tabakada da aynı numaralı çivideki iplerin uçlarını bağlayalım. Bu yapı, matematikçilerin "bağ" ismini verdikleri, birbiri etrafında dolaşan ilmiklerin birliğidir.



Yukarıdaki resimde tek ilmikli bir örnek gösterilmiştir. Matematikçiler bu yapıya "düğüm" ismini verir. Bu tür yapılarda genellikle birden fazla kapalı ip bulunur.

Bağ ve düğümlerin matematiksel teorisi biyolojide de kullanılmaktadır: DNA ve enzimlerin bağları üzerine yapılan çalışmalar gibi. DNA molekülüne bir ip, enzim molekülüne ise başka bir ip gözüyle bakarız. Bunlar birbirlerine bağlandığında, aralarında DNA'yı değiştirebilecek, oldukça karmaşık düğümlenmeler oluşabilir. Dolayısıyla ne şekilde iç içe geçtikleri oldukça önemlidir. Bu yüzden, ortaya çıkan bağ(lantı)lar üzerinde sürdürülen matematiksel çalışmalar, DNA'ların yeniden birleşme mekanizmalarına yeni bir ışık tutar.

Matematikte örgüler, geometrik yorumları nedeniyle de önemlidir. Bunu açıklamak için, düzlem üzerinde bulunan n adet noktanın oluşturabileceği tüm olası toplulukları ele alalım. Noktaların birbirinden ayrı olduklarını yani herhangi iki noktanın düzlemdeki konumlarının farklı olduğunu varsayalım. Bu tür bir topluluk seçelim; söz gelimi, düz bir çizgi üzerinde eşit aralıklarla sıralanan n adet noktayı ele alalım. Noktaların her birini küçük birer böcek gibi düşünün. Müziği açtığımızda, böcekler harekete geçip düzlem üzerinde hareket etsinler. Eğer zamanı dikey yön olarak kabul edersek her bir böceğin izlediği yol bir ip gibi görünecektir. Eğer düzlem üzerindeki böceklerin konumları her zaman birbirinden

ayrıysa yani böcekler birbirlerine çarpmıyorlarsa bu ipler hiçbir zaman kesişmeyecektir. Müzik çalarken böcekler, tıpkı örgünün ipleri gibi, birbirleri etrafında dolaşabilirler. Ancak sabit bir süre sonra müziği kestiğimizde, böceklerin düz bir çizgi üzerinde ayni başlangıçtaki gibi dizilmesini istiyoruz ama her böcek bir başkasının ilk yerini alabilir. Bu durumda, oluşturdukları ortaklaşa yol n ipli bir örgü gibi görünecektir.

Dolayısıyla, n ipli örgüler, bir düzlemde yer alan n farklı noktadan oluşan öbekler uzayındaki yollar olarak da görülebilir.[10]

Varchenko'nun bana verdiği ve çözümü için Fuchs ile çalışmaya başlamak üzere olduğum problem, örgü grubunun bir parçası olan ve "değişmeli altgrup" adıyla bilinen yapı ile ilgiliydi. Hatırlarsak, iki ipli örgülerde üst üste binme sayısını tanımlamıştık. Benzer bir sayı, herhangi miktarda ip içeren bir örgüye de verilebilir.[11] Bu sayıyı, n ipli örgü grubunun B'_n değişmeli altgrubunu tanımlamak için kullanırız. Bu değişmeli altgrup, üst üste binme sayıları toplamı 0 olan tüm örgüleri içerir.[12]

Çözmem gereken problem, B'_n grubunun "Betti sayılarının" hesaplanmasıydı. Bu sayılar, bu grupların uygulamalar açısından oldukça önemli olan derin özelliklerini yansıtırlar. Bunu, ev gibi fiziksel bir nesne ile benzerlik kurarak açıklayabiliriz. Bir evin özelliklerinin bazıları gayet belirginken (kat, oda, kapı, pencere sayısı gibi), kimisi de muğlaktır (evi oluşturan malzemelerin oranı gibi). Benzer şekilde, bir grubun da çeşitli özellikleri bulunur ve bunlar Betti sayılarıdır.[13] Fuchs, B'_n grubunun kendi örgüsünün Betti sayılarını daha önce hesaplamıştı. Makalesini bana konunun temellerini öğrenmem için vermişti.

Bir hafta içinde, Fuchs'un makalesinin tamamını tek başıma okudum. Daha önceden bilmediğim kavram ve tanımlar için ara sıra —artık epeyce zenginleşmiş olan— matematik kütüphanemdeki kitaplara sık sık baktım. Sonra Fuchs'u aradım.

"Ah, sen misin? Ben de neden aramadığını merak ediyordum. Makaleyi okumaya başladın mı?" diye sordu.

"Evet, Dmitry Borisovich. Aslına bakarsanız bitirdim bile."

"Bitirdin mi?" diye sordu şaşkınlıkla. "O hâlde buluşalım. Neler öğrendiğini duymak istiyorum".

Fuchs, ertesi gün MGU'da, katılacağı bir seminerden sonra buluşmamızı teklif etti. Buluşmaya hazırlanmak için, makaleyi tekrar tekrar okudum ve Fuchs'tan beklediğim olası soru türleri için hazırladığım cevaplara çalıştım. Onun gibi dünya çapında bir matematikçi yeni bir öğrenciyle sadece acıdığı için ilgilenmezdi. Çıta yüksekti. Fuchs ile ilk mülakatımın bir eleme olacağını anlamıştım, bu yüzden de onda iyi bir izlenim bırakmak konusunda çok hevesliydim.

Sözleştiğimiz saatte buluştuk ve rahatsız edilmeyeceğimiz bir bank bulmak için *Mekh-Mat*'ın koridorlarında yürüdük. Oturduktan sonra, makaleden neler öğrendiğimi Fuchs'a anlatmaya başladım. Beni dikkatli bir biçimde ve arada bir soru sorarak dinledi. Duymuş olduklarının hoşuna gittiğini zannediyorum. Tüm bunları nereden öğrendiğimi merak etti ve ben de Evgeny Egenievich ile yaptığımız çalışmalardan, okuduğum kitaplardan ve *Mekh-Mat*'ta katıldığım derslerden bahsettim. MGU'daki sınavım hakkında da konuştuk (tabii bu Fuchs'un hiç de yabancı olmadığı bir durumdu).

Neyse ki görüşmemiz iyi geçti. Fuchs, bilgi birikimimden etkilenmişe benziyordu. Varchenko'nun problemi ile ilgilenmeye başlayabileceğimi ve kendisinin de bana yardımcı olacağını söyledi.

O akşam MGU'dan gayet mutlu bir biçimde ayrıldım. İlk matematik problemim üzerinde çalışmaya başlıyordum ve dünyanın en iyi matematikçilerinden birisi de bana rehberlik edecekti. *Mekh-Mat*'a giriş sınavının üzerinden iki yıl geçmemişti ki oyuna tekrar dahil olmuştum.

6. Bölüm:

Acemi Matematikçi

Bir matematik problemini çözmek, bir yapbozu tamamlamak gibidir; tek farkla, ortaya çıkacak resme dair başlangıçta en ufak bir fikriniz yoktur. Zor, kolay veya çözümü imkânsız olabilir. Problemi çözene —ya da çözmenin imkânsız olduğunu anlayana— kadar, bunu asla bilemezsiniz. Bu belirsizlik, belki de matematikçi olmanın en zor yönüdür. Diğer disiplinlerde doğaçlama yapabilir, farklı çözümler bulabilir ve hatta oyunun kurallarını değiştirebilirsiniz. Bir çözümü oluşturan şeyler dahi tam olarak tanımlanmamıştır. Örneğin bir işletmenin verimliliğini artırmakla görevlendirilsek başarıyı ölçmek için hangi göstergeleri kullanırız? Yüzde 20'lik bir artış sağladığımızda, problemi çözmüş olur muyuz? Peki ya yüzde 10? Matematikte, problem her zaman net olarak tanımlanır ve onu çözmenin ne anlama geldiği hakkında belirsizlik yoktur. Bir problemi ya çözersiniz ya da çözemezsiniz.

Fuchs'un problemi için B'_n gruplarının Betti sayılarını hesaplamam gerekiyordu. Bunun ne anlama geldiği ile ilgili herhangi bir belirsizlik yoktu. Benim bu problemle tanıştığım 1986 yılında bana ifade ettikleri ile günümüzde matematik diline aşina olanlara

ifade ettikileri tamamen aynı ve bundan yüzlerce yıl sonra da aynı anlamı taşıyacak.

Fuchs'un benzer bir problemi çözdüğünü ve bunu nasıl yaptığını biliyordum. Daha önce çözülmüş benzer problemler üzerinde çalışarak kendi vazifeme hazırlandım. Bu sayede, sezgi ve yeteneklerimi geliştirip, bir dizi yöntem öğrendim. Buna rağmen bu yöntemlerin hangisinin işe yarayacağını ya da bu probleme nasıl yaklaşmam gerektiğini *a priori* (önceden) bilemediğim gibi, gerçekten yeni bir teknik veya tamamen farklı bir yöntem yaratarak çözüp çözemeyeceğimi de bilmiyordum.

Bu ikilem tüm matematikçileri rahatsız eder. Matematiğin en ünlü problemlerinden birisi olan Fermat'nın Son Teoremi'ni inceleyerek, ifade etmesi kolay ama çözümü açık olmaktan çok uzak problemin nasıl ele alındığını daha iyi anlayabiliriz. n için bir doğal sayı değeri (1, 2, 3, ...) belirleyerek, x, y ve z'nin birer doğal sayıyı gösterdiği aşağıdaki denklemi ele alalım:

$$x^n + y^n = z^n$$

Eğer n=1 ise

$$x + y = z$$

denklemini elde ederiz ve bunun doğal sayılar kümesinde birçok çözümü mevcuttur: Bunlardan herhangi birisini bulmak için birer x ve y değeri belirleyip, z=x+y denklemini kurmamız yeterli olacaktır. Bu noktada, bir önceki bölümde ele aldığımız doğal sayıların toplamı işlemini kullanmış olduğumuza dikkat edin.

Eğer n = 2 ise

$$x^2 + y^2 = z^2$$

denklemini elde ederiz.

Doğal sayılar kümesinde, bu denklemin de birçok çözümü vardır. Örneğin,

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Tüm bunlar antik çağlardan beri bilinmektedir. Bilinmeyense, 2'den büyük n için denklemin çözümleri olup olmadığıdır. Halbuki oldukça basit görünüyor, değil mi? Böyle bir soruyu cevaplamak ne kadar zor olabilir?

Geçen zaman gösterdi ki bir hayli zor. 1637'de, Fransız matematikçi Pierre Fermat, eski bir kitabın sayfa boşluğuna şöyle bir not düşmüştü: Eğer n değeri 2'den büyükse, x, y ve z doğal sayıları için denklemin çözümü yoktur. Diğer bir deyişle,

$$x^3 + y^3 = z^3$$

ya da

$$x^4 + y^4 = z^4$$

vs eşitliklerini sağlayacak x, y ve z doğal sayıları bulunmamaktadır.

Fermat, 2'den büyük tüm n değerleri için bu ifadenin basit bir ispatını bulduğunu ama "sayfa boşluğunun bunun için yeterli olmadığını" not etmişti. Gerek amatör gerekse de profesyonel birçok matematikçi, Fermat'nın notunu bir meydan okuma olarak görüp, onun "ispat"ını yeniden üretmeye çalıştı. Böylece, bahsi geçen problem tüm zamanların en ünlü problemi hâline geldi. Çözümü için ödüller kondu. Yüzlerce ispat kaleme alındı ve basıldı, bir süre sonra da çürütüldü. Neticede problem, 350 yıl boyunca çözülemeden kaldı.

1993 yılında, Princeton'dan bir matematikçi olan Andrew Wiles, Fermat'nın Son Teoremi için bulduğu ispatı duyurdu. Gelin görün ki bu ispat, ilk bakışta asıl problemle alakasız gibi duruyordu. Wiles, Fermat'nın Son Teoremi'ni ispatlamak yerine tamamen farklı bir şeyle ilgili ve de ifade etmesi çok daha karmaşık olan Shimura-Taniyama-Weil sanısıyla uğraşmıştı. Ancak bundan birkaç yıl önce, Berkeley'den bir matematikçi olan Ken Ribet, bu sanının ifadesinin Fermat'nın Son Teoremi'ne işaret ettiğini ispat etmişti. Bu nedenle sanının ispatı, Fermat'nın Son Teoremi'ni de ispatlayacaktı. Bunları, 8. Bölüm'de daha ayrıntılı olarak göreceğiz ama burada şunu bilmenizi istiyorum: Basit bir problemin her zaman için temel

bir çözümü olmayabilir. Bugün, Fermat'nın bu ifadeyi kendisine atfedildiği gibi ispatlamamış olabileceğini biliyoruz. Bunu yapmak için, matematiğin tüm alanlarının oluşturulmuş olması gerekti ve bu ilerlemeyi sağlayabilmek için, matematikçiler nesiller boyu yoğun bir emek harcamak zorunda kaldı.[1]

Peki tüm bunları, şu masum görünüşlü denkleme bakarak söyleyebilmek mümkün müdür?

$$x^n + y^n = z^n$$

Hiç de değil!

Herhangi bir matematik probleminde, çözümün neleri içereceğini hiçbir zaman bilemezsiniz. İyi ve şık bir çözüm bulabilmeyi umar ve dua edersiniz ve belki bu yolda ilginç bir şey de keşfedersiniz. Tabii bunu da makul bir zaman zarfında yapmayı umar, sonuca ulaşmak için 350 yıl beklemek zorunda kalmayı istemezsiniz. Fakat bundan asla emin olamazsınız.

Bana verilen problemde şansım yaver gitti; yaklaşık iki ay gibi makul bir sürede gerçekten güzel bir çözüm buldum ama bu pek kolay olmadı. Zaten hiçbir zaman olmaz. Birçok farklı yöntem denedim. Her biri tek tek başarısız oldukça da giderek daha fazla hayal kırıklığına uğrayıp endişelendim. Bu benim ilk problemimdi ve elimde olmadan matematikçi olup olamayacağımı sorguluyordum; gerekli özelliklere sahip olup olmadığımı sınayan ilk gerçek sınavımdı.

Bu problem üzerinde çalışmak, beni Kerosinka'da derslere girme ve sınavlardan geçme zorunluluğundan muaf kılmıyordu ama yine de önceliği probleme veriyor, bitmez tükenmez saatler, geceler ve hafta sonları boyunca problemle uğraşıyordum. Kendime çok fazla baskı uyguluyordum. Hayatımda ilk defa uyku sorunları yaşamaya başladım. Bu problemi çözerken yakalandığım uykusuzluk hastalığı, matematik çalışmalarımın ilk "yan etkisi" oldu. Beni aylarca

esir aldı ve ondan sonra kendime bir matematik probleminde böyle tamamen kaybolma iznini bir daha hiç vermedim.

Fuchs ile neredeyse hemen her hafta *Mekh-Mat* binasında buluşuyor ve yaptıklarımı veya yapamadıklarımı ona anlatıyordum. (Bana bir kimlik kartı ayarlamış ve parmaklıkların üzerinden atlamaktan kurtarmıştı.) Hep destekleyici ve yüreklendirici bir tutum takınıyor ve her buluştuğumuzda bana ya problemi çözmek için kullanabileceğim yeni bir püf noktası gösteriyor ya da yeni bir bakış açısı öneriyordu.

Sonra, soruyu birdenbire çözüverdim. Çözümünü bulmuştum ya da daha doğrusu çözüm tüm ihtişamıyla kendini göstermişti.

Fuchs'un öğrettiği ve Betti sayılarını hesaplamak için kullanılan standart yöntemlerden biri olan "*spectral dizi*"yi (spectral sequence) kullanmayı deniyordum. $m < n$ olmak üzere, bütün B'_m gruplarının Betti sayıları bilindiğinde B'_n grubunun Betti sayılarını hesaplamayı ilkesel olarak mümkün kılan bu yöntemi belli bir biçimde uygulayabiliyordum. Burada beni durduran şey, pek tabii ki diğer Betti sayılarının ne olduklarını bilmememdi.

Ama probleme bu noktadan saldırabileceğimi fark ettim: Eğer doğru cevabı *tahmin* edebilirsem söz konusu yöntemi uygulayarak cevabımın doğruluğunu *ispatlamak için* bir yolum olurdu.

Söylemesi kolay ama böyle bir tahmini yapabilmek için giderek daha karmaşıklaşan birçok örnek hesaplama yapmam gerekiyordu. Uzun süre, hiçbir model çıkmayacak gibi gözüktü.

Sonra birden, adeta bir kara büyü çarpmış gibi, her şey netleşiverdi. Yapboz tamamlanmış ve resmin tamamı tüm güzelliği ve zarafetiyle gözlerimin önüne serilmişti. Bu ânı hep hatırlar ve sevgiyle anarım. Ayaklarımı yerden kesen inanılmaz bir duyguydu, uykusuz geçen o uzun gecelere değmişti.

Ömrümde ilk kez, *dünyada benden başka kimsede olmayan* bir şeye sahiptim. Evrene dair söyleyecek yeni bir sözüm vardı. Kanserin

çaresi değildi ama bilgi birikiminin değerli bir parçasıydı ve kimse onu benden alıp götüremezdi.

Bu hissi bir kez tadarsanız geriye dönüp tekrar yaşamak istersiniz. Benim başıma ilk kez geliyordu ve tıpkı ilk öpücük gibi, çok özeldi. Artık kendime matematçi diyebileceğimi biliyordum.

Aslında oldukça beklenmedik bir cevaptı ve Fuchs ile benim tahmin ettiğimizden çok daha ilginçti. Bulduğum şey şuydu: n doğal sayısının (ele aldığımız örgüdeki iplerin sayısı) her bir böleni için, B'_n grubunun bir Betti sayısı vardır ve bu sayı, o bölenin meşhur "Euler fonksiyonu"nda aldığı değere eşittir.

Euler fonksiyonu, her bir d doğal sayısına başka bir $\phi(d)$ doğal sayı atar. Bu, 1 ile d arasında, d ile *aralarında asal* olan (yani d ile —1 hariç— ortak böleni olmayan) kaç tane sayı bulunduğunu veren değerdir.

Örnek olarak d=6'yı ele alalım. Bu durumda, 1 ile 6 aralarında asaldır; 2 ile 6 aralarında asal değildir (çünkü 2, 6'nın bölenidir); 3 ile 6 aralarında asal değildir (çünkü 3 de 6'nın bölenidir); 4 ile 6 aralarında asal değildir (çünkü ortak bölenleri vardır: 2); 5 ile 6 aralarında asaldır, 6 değildir. Dolayısıyla 1 ile 6 arasında, 6 ile aralarında asal olan iki sayı vardır: 1 ve 5. Bu yüzden 6'nın Euler fonksiyonunda aldığı değer 2'dir. Bunu $\phi(6)=2$ şeklinde yazarız.

Euler fonksiyonunun birçok uygulaması vardır. Örneğin çevrim içi işlemlerde kredi kartı numaralarını şifrelemekte kullanılan RSA algoritması bunlardan biridir (14. Bölüm'ün 7. sonnotunda ayrıntılı olarak açıklanmıştır). Fonksiyon adını, on sekizinci yüzyılda yaşamış İsviçreli matematikçi Leonhard Euler'den almıştır.

Bulduğum Betti sayılarının Euler fonksiyonu ile elde edilen değerler olması, örgü grupları ile sayı kuramı arasında gizli bağlantılar bulunduğuna işaret ediyordu. Bu yüzden, çözdüğüm problemin ilk kapsamının çok ötesinde çıkarımları olabilirdi.

Pek tabii ki bulduğum sonuçlar hakkında Fuchs ile konuşmak için sabırsızlanıyordum. 1986'nın Temmuz ayına girmek üzereydik yani

ilk buluşmamızın ardından üç ay geçmişti. Bu arada Fuchs ve ailesi (eşi ve iki küçük kızı) yazlarını geçirmek üzere Moskova yakınlarındaki kır evlerine taşınmışlardı. Moskova'dan kasabama giden tren yolunun ortalarına denk gelen bir yere taşınmış oldukları için oldukça şanslı sayılırdım, eve giderken onlara uğramak benim için kolaydı.

Fuchs bana âdet gereği bir bardak çay ikram ettikten sonra, neler yapmış olduğumu sordu.

"Problemi çözdüm!"

Heyecanımı zaptedemiyordum ve sanırım ispatı biraz düzensiz bir şekilde açıkladım. Ama endişelenmeyin, Fuchs her şeyi hemen anladı. Memnun görünüyordu.

"Bu harika," dedi, "İyi iş çıkardın! Şimdi bununla ilgili bir makale yazmaya başlamalısın."

İlk defa bir matematik makalesi yazıyordum ve yaptığım matematik çalışmalarımdan daha sinir bozucu ve daha az eğlenceli bir şey olduğunu gördüm. Bilgi birikiminin sınırlarında yeni modeller aramak büyüleyici ve heyecan vericiydi. Masaya oturup düşüncelerimi düzenlemeye çalışmak ve sonra da onları kâğıda aktarmak ise tamamen farklı bir süreçti. Daha sonraları birinin bana söylediği gibi, makale yazmak, matematikte yeni keşifler yapmanın heyecanı için katlanmak zorunda olduğumuz cezaydı. Bu da benim çektiğim ilk cezaydı.

Fuchs'a farklı taslaklar götürdüm ve o bunları dikkatle okuyup, eksikliklerini tespit etti ve iyileştirme önerilerinde bulundu. Yardım etme konusunda her zamanki gibi çok cömertti. En başından itibaren, yazarlar arasına onun da adını koydum ama o "Bu senin makalen," diyerek ısrarla reddetti. Sonunda, makalemin tamamlandığını ilan etti ve Sovyet matematik okulunun duayeni Israel Moiseevich Gelfand tarafından çıkarılan *Functional Analysis and Applications* isimli matematik dergisine göndermem gerektiğini söyledi.

O sırada yetmişli yaşlarının başlarında, ufak tefek ve karizmatik bir adam olan Gelfand, Moskova'daki matematik camiasının efsane isimlerindendi. Ana MGU binasının 14. katındaki büyük amfide

düzenlenen haftalık bir semineri yönetiyordu. Hem matematiksel hem de sosyal açıdan değerli olan bu etkinlik elli yılı aşkın bir süredir yapılmaktaydı ve dünya çapında biliniyordu. Fuchs, Gelfand'ın eski çalışma arkadaşlarından (ortak eserleri olan "Gelfand-Fuchs kohomolojisi" yaygın olarak bilinen ve kabul görmüş bir çalışmadır) ve seminerlerinin en kıdemli üyelerindendi. (Üyeler arasında Gelfand'ın eski öğrencilerinden A. A. Kirillov ile uzun süre birlikte çalıştığı M. I. Graev de yer alıyordu.)

Bu seminer, daha önce katıldığım seminerlere hiç benzemiyordu. Genellikle seminerlerin belli bir süresi olur —ABD'de bu süre bir ya da bir buçuk saattir— ve daha önce belirlenen bir konuda hazırlanmış bir konuşmacı bulunur. Katılımcılar arada sırada soru sorar. Oysa Gelfand'ın semineri hiç de böyle değildi. Her Pazartesi akşamı buluşulurdu ve başlangıç saati 19:00'du. Ama nadiren 19:30'dan önce, genellikle de 19:45-20:00 arasında başlardı. Aralarında Gelfand'ın da (genellikle 19:15-19:30 dolaylarında gelirdi) bulunduğu katılımcılar, seminer başlamadan önceki yaklaşık bir saat boyunca amfinin içinde ya da dışarıdaki geniş fuayede gezinirler ve birbirleriyle sohbet ederlerdi. Hiç şüphe yok ki bu Gelfand'ın tarzıydı. Bir matematik semineri olduğu kadar, bir sosyal etkinlikti de.

Gelfand'ın seminerine katılan matematikçilerin çoğu, MGU'ya bağlı olmayan çeşitli yerlerde çalışıyorlardı. Gelfand'ın semineri, bu insanların bir araya gelerek matematik dünyasında olup bitenleri değerlendirebildikleri, fikir paylaşımında bulunabildikleri ve işbirliği yapabildikleri tek yerdi. Gelfand'ın kendisi de Yahudi olduğundan, bu seminerler Yahudiler için "güvenli cennet"lerden birisi olarak görülür ve Yahudi matematikçilerin katılabileceği "kasabadaki tek oyun" (ya da az sayıdakilerden birisi) olarak kabul edilirdi. (Öte yandan şunu da belirtmek gerekir ki MGU'daki başka birçok seminer halka açık olup, herhangi bir etnik ayrımcılık kaygısı gütmeyen insanlarca yürütülürdü.) Hiç şüphe yok ki Gelfand, bu durumdan memnuniyetle istifade ediyordu.

MGU'ya giriş sınavında karşılaştığım anti-Semitist tutum, Sovyetler Birliği'ndeki akademik yaşantının her seviyesine yayıldı. Daha önceleri, 1960'larda ve 70'lerin başında, Yahudi kökenli öğrencilere karşı uygulanan kısıtlamalar ya da "kotalar" olmasına rağmen *Mekh-Mat*'a lisans öğrencileri girebiliyormuş. (1970'ler ve 80'lerin başında durum daha kötüye gitti ve benim başvurduğum yıl olan 1984'e gelindiğinde, hiçbir Yahudi öğrencinin kabul edilmediği bir hâl aldı.)[3] Ama o yıllarda dahi, Yahudi öğrencilerin yüksek lisansa kabul edilmeleri neredeyse imkânsızdı. Bunu yapabilmelerinin tek yolu, üniversiteden mezun olup, bir yerde üç yıl çalıştıktan sonra işvereni tarafından yüksek lisans programına yollanmaktı (iş yerleri genellikle uzak bölgelerde olurdu). Tüm bunların üstesinden gelip, doktora derecelerini almayı becerseler dahi, Moskova'da (örneğin MGU'da) matematik alanında akademik bir iş bulmaları imkânsızdı. Ya taşrada iş bulacak ya da Moskova'da matematikle uzaktan yakından alakası olmayan araştırma enstitülerinden birine gireceklerdi. Moskova'dan olmayanlar için durum daha da zordu çünkü yurt içi pasaportlarında başkentte çalışabilmek için bulunması gereken ikâmetgah pulları (*propiska*) yoktu.

En istisnai öğrenciler dahi bu muameleye maruz kalıyordu. İlerleyen kısımlarda daha yakından tanıyacağımız parlak matematikçi ve sonradan Fields Madalyası kazanacak olan Vladimir Drinfeld'in lisans mezuniyetinin ardından *Mekh-Mat*'ta yüksek lisans öğrencisi olmasına müsaade edildi (daha sonra bunun çok zor olduğunu öğrendim) fakat aslen Ukrayna'nın Harkov şehrinden olduğu için Moskova'da iş bulamadı. Ural Dağları'ndaki bir endüstri şehri olan Ufa'da bulunan bir taşra üniversitesinde eğitmen kadrosuna yerleşmek zorunda kaldı. Sonunda, Harkov'daki Düşük Sıcaklıklar Fiziği Enstitüsü'nde araştırmacı olarak bir iş buldu.

Moskova'da kalanlar ise Sismik Çalışmalar Enstitüsü ya da Sinyal İşleme Enstitüsü gibi kurumlarda çalıştırılıyordu. Gündelik işleri, enstitülerinin bağlı bulunduğu endüstri dalı ile ilgili sıkıcı hesap-

lar yapmaktı (bazıları bu alanlarda çığır açacak kadar yetenekliydi). Gerçek tutkuları olan matematiksel araştırmaları ise ancak boş zamanlarında yapabiliyorlardı.

Gelfand, 1968 yılında imza atarak destek olduğu bir açık mektup kampanyası yüzünden *Mekh-Mat*'taki eğitmenlik görevinden ayrılmaya zorlanmıştı. Kampanyaya konu olan ünlü mektup, bir matematikçi ve insan hakları aktivisti olan Alexander Esenin-Volpin'in (şair Sergei Esenin'in oğlu) politik sebeplerden ötürü tutuklu bulunduğu pskiyatri hastanesinden tahliye edilmesini talep ediyordu ve 99 tane matematikçi tarafından imzalanmıştı. Mektup o kadar büyük bir ustalıkla kaleme alınmıştı ki BBC radyoda yayımlamlanmasının ardından dünya çapında oluşan öfke, Sovyet yöneticileri sıkıntıya soktu ve Esenin-Volpin'i derhal serbest bırakmak zorunda kaldılar.[4] Ancak bu durum, yetkilileri çok kızdırdı. Derhal harekete geçip, imza atan herkesi cezalandırmak için türlü yollar buldular; çoğu eğitimcilik işinden atıldı.[5]

Bu yüzden Gelfand artık MGU'da matematik eğitimi vermiyordu ama MGU'nun ana binasında gerçekleştirilen seminerlerini sürdürme şansı bulabilmişti. Resmi görevi, bir diğer tutkusu olan biyoloji alanında araştırmalar yapmak üzere MGU'da kurduğu biyoloji laboratuvarındaydı.* Fuchs da burada çalışıyordu.

Fuchs daha önce de Gelfand'ın seminerlerine katılmam yönünde ısrarcı olmuştu. Bu yüzden bahar döneminin sonuna doğru birkaç buluşmaya gitmiş ve çok etkilenmiştim. Gelfand semineri otoriter bir tarzda yönetiyor ve her şeye o karar veriyordu. Deneyimsiz birine kaotik ve düzensiz görünebilecek olmakla beraber, haftalık buluşmaları hazırlamak ve düzenlemek için inanılmaz ölçüde zaman ve enerji harcıyordu.

---

* Şunu da not etmekte fayda var: Gelfand, 1980'lerin ortalarına kadar SSCB Bilimler Akademisi'ne asil üye olarak seçilmemişti çünkü Akademi'nin Matematik Dalı onlarca yıldır Moskova'daki Steklov Matematik Enstitüsü'nün "SSCB'nin Anti-Semitist Başı" lakabıyla bilinen müdürü İvan Matveevich Vönogradov tarafından yönetiliyordu. Vinogradov Akademi'de ve yaklaşık elli yıldır avucunda tuttuğu Steklov Enstitüsü'nde zalim anti-Semitik politikalar yürürlüğe koymuştu.

Üç yıl sonra Gelfand benden çalışmam hakkında konuşma yapmamı istediğinde, seminerlerin iç işleyişini yakından görme fırsatım oldu ama o an sadece, matematik kariyerine yeni başlamış, on yedi yaşındaki bir öğrencinin bakış açısı ile gözlem yapıyordum.

Seminer çoğu açıdan tek kişilik bir tiyatro gösterisiydi. Resmi olarak, belli bir konuyu anlatan belirli bir konuşmacı bulunurdu ama genelde seminerin sadece bir kısmı ona ayrılırdı. Gelfand sıklıkla başka konuları gündeme getirir ve önceden hazırlık yapmaları istenmemiş başka matematikçileri de açıklama yapmak üzere kara tahtaya çağırırdı. Ancak her şeyin merkezinde daima kendisi vardı. Seminerin akışını sadece ve sadece kendisi kontrol ediyordu ve konuşmacıların sözünü soru, tavsiye veya vurgularla kesecek mutlak güce sahipti. Konuşmacılara sıklıkla söylediği "*Dayte opredelenie*" —"Tanımını söyle"— uyarısı hâlâ kulaklarımda çınlar.

Ayrıca çeşitli konularda (bazen tartışılan konuyla alakasız) uzun tiradlar atmak, çoğu eğlenceli fıkralar, anektodlar ve hikâyeler anlatmak gibi bir huyu da vardı. Giriş kısmında aktardığım kıssayı da orada duymuştum: Bir ayyaş 2/3'ün mü yoksa 3/5'in mi büyük olduğunu bilemeyebilir ama beş kişiyle üç şişe votkayı paylaşmaktansa üç kişiyle iki şişe votkayı paylaşmanın daha iyi olduğunu bilir. Gelfand'ın ustalıklarından biri de, başkaları tarafından sorulan soruları, cevabını açık edecek şekilde "bir başka biçimde ifade etmek"ti.

Anlatmayı sevdiği diğer bir fıkra da telsiz telgrafla ilgiliydi: "Yirminci yüzyılın başında bir partide, bir fizikçiden telsiz telgrafın nasıl çalıştığını açıklaması istenmiş. O da bunun gayet basit olduğunu söylemiş: 'Öncelikle normal (kablolu) telgrafın nasıl çalıştığını anlamalısınız. Öyle bir köpek hayal edin ki başı Londra'da kuyruğu da Paris'te olsun. Paris'te kuyruğu çektiğinizde, köpek Londra'da havlayacaktır. Telsiz telgraf da tıpkı bunun gibi ama bir tek köpek eksik,' demiş."

Gelfand fıkrayı anlatıp, gülüşmelerin yatışmasını bekledikten sonra (ki dinleyiciler arasında bu fıkrayı belki yüz kez dinlemiş

olanlar da olurdu) tartışılan matematik problemine geri dönerdi. Problemin çözümü için tamamıyla yeni bir yaklaşımın gerektiğini düşündüğü anlarda şöyle derdi: "Demek istediğim, biz bu işi köpek olmadan halletmeliyiz."

Seminerler esnasında sıklıkla uygulanan yöntemlerden biri de, bir *kontrol'nyj slushatel* yani bir test dinleyicisi (genellikle gençlerden) görevlendirip, konuşmacının anlattıklarını ona düzenli bir biçimde tekrarlattırmaktı. Eğer "test dinleyicisi" dersi iyi takip ediyorsa konuşmacı iyi iş çıkarıyor demekti. Aksi takdirde konuşmacı biraz yavaşlamalı ve daha iyi anlatmalıydı. Gelfand bazen de yetersiz bulduğu konuşmacıları rezil eder ve onun yerine başka bir dinleyiciyi çıkarırdı. (Tabii ki test dinleyicisiyle de alay ederdi.) Tüm bunlar, seminerleri eğlenceli kılıyordu.

Seminerlerin çoğu tekdüze bir biçimde ilerler, katılımcılar ise kibarca dinlerdi (ve bazıları da uyuklardı); çok ilgisiz, çok kibar ya da sadece konuşmacıya bir şeyler sormaya çekinerek ve belki çok az şey öğrenerek. Hiç kuşku yok ki Gelfand'ın seminerinin değişen temposu ve genellikle sarsıcı yapısı, insanları uyanık tutmakla kalmaz (gece yarılarına kadar sürebilen bu seminerler için hiç de kolay olmayan bir şey), onları diğer seminerlerin asla yapamayacağı şekilde canlandırırdı. Gelfand, konuşmacılardan çok şey bekliyordu. Onlar da Gelfand gibi çok çalışıyordu. Gelfand'ın tarzına dair ne söylenirse söylensin, insanlar onun seminerinden asla elleri boş ayrılmazdı.

Bununla birlikte, bu tür bir seminerin ancak Sovyetler Birliği gibi totaliter toplumlarda olabileceğini düşünüyorum. İnsanlar, Gelfand'ın sergilemiş olduğu diktatörlere özgü güç gösterisine ve davranış tarzına alışkındı. İnsanlara karşı acımasız ve bazen de aşağılayıcı olabiliyordu. Batı toplumlarında insanların bu tür bir muameleyi hoş göreceğini sanmıyorum. Ancak Sovyetler Birliği'nde bu tür hareketler yadırganmadığı gibi kimse karşı da gelmezdi. (Bunun gibi ünlü bir diğer örnek ise Lev Landau'nun teorik fizik semineriydi.)

Seminere katılmaya başladığım sırada Gelfand, çalışmakta olduğu matriks modelleri hakkında bir dizi konuşma yapmak üzere Vladimir Kazakov isimli genç bir fizikçiyi konuk ediyordu. Kazakov matematikçilerin daha alışılagelmiş yöntemlerle ulaşamadığı sonuçlar elde etmek için kuantum fiziği yöntemlerini yeni bir biçimde kullandı. Gelfand, kuantum fiziğine hep ilgi duymuştu ve seminerlerinde bu konu geleneksel olarak büyük bir rol oynardı. Kazakov'un çalışmalarından oldukça etkilenmişti ve matematikçiler arasında yayılması için etkin biçimde çaba sarf ediyordu. Gelfand'ın birçok öngörüsü gibi, bu da altın değerinde olduğunu kanıtladı: Birkaç yıl içinde bu konu meşhur oldu ve rağbet gördü, hem matematiğe hem de fiziğe önemli katkılar sağladı.

Kazakov seminerde verdiği dersler boyunca, fikirlerini matematikçilere açıklayabilmek için takdir edilesi bir çaba gösteriyordu. Gelfand da ona karşı her zamankinden daha saygılı davranıyor, sözünü kesmeden ve diğer konuşmacılarla karşılaştırıldığında daha uzun konuşmasına müsade ediyordu.

Bu dersler devam ederken, Harer ve Zagier'in yeni bir makaleleri geldi: Oldukça zor bir kombinasyon problemine güzel bir çözüm bulmuşlardı.[6] Don Zagier, zor görünen problemleri çözmesi ile ünlüydü; ayrıca çok da hızlıydı. Söylenenlere bakılırsa, problemi çözmek onun altı ayını almıştı ve bundan büyük bir gurur duyuyordu. Bir sonraki seminerde Gelfand, sunumunu yapmakta olan Kazakov'dan Harer-Zagier problemini matriks modelleri üzerine yaptığı çalışmasını kullanarak çözmesini istedi. Gelfand, Kazakov'un yönteminin bu tür problemleri çözmek için kullanılabileceğini sezmiş ve de yanılmamıştı. Kazakov'un Harer ve Zagier'in makalesinden haberi yoktu ve problemi de ilk defa duyuyordu. Kara tahtanın önünde durarak birkaç dakika düşündü ve hemen Lagrangian kuantum alan teorisini yazdı, bu da onun kendi yöntemlerini kullanarak çözüme gitmesini sağladı.

Dinleyen herkes afallamıştı. Gelfand hariç. Masumane bir biçimde Kazakov'a sordu: "Volodya, kaç yıldır bu konu üzerinde çalışıyorsun?"

"Israle Moiseevich, emin değilim ama yaklaşık altı yıl kadar olmalı."

"Öyleyse, bu çözüm senin altı yıl iki dakikanı alırken, Don Zagier'in altı ayını aldı. Hımmm... Onun ne kadar iyi olduğunu anlayabiliyor musun?"

Bu "şaka" diğerleriyle karşılaştırıldığında yumuşak sayılırdı. Bu ortamda hayatta kalabilmek için deriniz kalın olmalıydı. Ne yazık ki bazı konuşmacılar, toplum önündeki bu tür tenkitleri şahıslarına yönelik olarak algılayıp, çok üzülüyordu. Ayrıca şunu da eklemeliyim ki Gelfand, yaşlı ve bilindik kişilere karşı her zaman daha sivri dilliydi ve genç matematikçilere özellikle de öğrencilere daha anlayışlı davranırdı.

Gelfand, seminerlerine katılan bütün lisans öğrencilerini, yetenekli yüksek lisans öğrencilerini ve sadece çok zeki profesörleri hoş karşıladığını dile getirirdi. Matematikte ilerleme sağlayabilmek için, yeni nesil matematikçiler yetiştirmenin çok önemli olduğunu anlamıştı ve etrafında her daim istekli gençler olurdu. Bu kişiler, Gelfand'ın da genç kalmasını sağlıyorlardı (80'li yaşlarının sonuna kadar aktif olarak ileri düzeyde araştırma yaptı). Lise öğrencilerini sık sık seminerlerine davet eder ve onları en ön sıraya oturtarak olan biteni takip ettiklerinden emin olmak isterdi. (Tabii bunlar sıradan lise öğrencisi değillerdi. Çoğu dünya çapında bilinen matematikçiler arasına girdi.)

Gelfand, öğrencilerine karşı her açıdan çok cömertti; onlarla düzenli olarak konuşmak için saatlerini harcardı. Bunu çok az öğretim üyesi yapar. Onun öğrencisi olmak kolay değildi; onlara karşı yoğun bir sevgi duyar, onlar da Gelfand'ın türlü acayipliklerine ve diktatörlere has alışkanlıklarına katlanmak zorunda kalırlardı. Ancak konuştuğum birçok öğrencisinden edindiğim izlenim, hepsinin ona büyük saygı duyduğu ve ona çok şey borçlu olduklarını düşündükleri yönündedir.

Ben Gelfand'ın öğrencisi değil, "torun-öğrencisi"ydim çünkü iki öğretmenim de (Fuchs ve henüz hayatıma girmemiş olan

Feigin) kısmen onun öğrencisiydi. Bu yüzden, kendimi her zaman "Gelfand'ın matematik okulunun" bir parçası olarak görmüşümdür. Çok daha sonraları, ben ve o ABD'ye geldiğimizde, Gelfand bana bunu doğrudan sordu ve verdiğim "evet" cevabı karşısında yüzünde beliren tatminkâr ifadeden okulunun ve kimin o okulun parçası olduğunun bilinmesinin onun için ne kadar önemli olduğunu anladım.

Seminerin odak noktası olduğu bu okul, onun dünyaya açılan kapısıydı ve sadece Moskova'dakiler değil, dünyanın her tarafındaki matematikçiler üzerinde büyük bir etkisi vardı. Yabancı matematikçiler, sırf Gelfand ile tanışmak ve seminerine katılmak için Moskova'ya gelirler ve orada konuşma yapmaktan onur duyarlardı.

Gelfand'ın etkileyici ve hayatın sınırlarını aşan kişiliğinin seminerin kazandığı şöhrette büyük bir rolü vardı. Birkaç yıl sonra, benim çalışmama ilgi duydu ve benden seminerinde bir konuşma yapmamı istedi. Onunla sadece matematik değil, birçok başka konu hakkında da konuşarak epey zaman geçirdim. Matematik tarihine ve özellikle de miras bıraktıklarına büyük ilgi duyardı. Onu Moskova'daki evinde ilk ziyaretimde (21 yaşına yeni basmıştım), kendisini matematiğin Mozart'ı olarak gördüğünü anlatışını hâlen çok net hatırlıyorum.

"Çoğu bestekâr, yazdığı belli eserlerle hatırlanır ama Mozart için durum farklı. Onu bir dâhi yapan, eserlerinin bütünüdür," demiş ve biraz durakladıktan sonra "Aynı durum benim matematik çalışmalarım için de geçerlidir," diye eklemişti.

Gelfand'ın kendine dair bu değerlendirmelerinin akla getirdiği bazı soruları bir kenara bırakırsak bunun uygun bir karşılaştırma olduğunu düşünüyorum. Uzun süredir aşılamamış meşhur varsayımlardan (Fermat'nın Son Teoremi gibi) herhangi birini ispatlamamış olsa da matematik hakkındaki fikirlerinin toplam etkisi sarsıcıydı. Belki daha da önemlisi, güzel matematiğe dair sahip olduğu mükemmel gustonun yanı sıra matematiğin hangi alanlarının daha ilginç olduğunu ve gelecek vaat ettiğini anlamaya yönelik de akıl

almaz bir sezgisi vardı. Matematiğin hangi yöne sapacağını kestirebilme gücüne sahip bir kâhin gibiydi.

Gelfand, giderek daha fazla alana ayrılan ve uzmanlaşmanın alıp başını gittiği bir konuda, farklı alanlar arasında köprü kurabilen en son Rönesans insanlarından biriydi. Matematiğin bütünlüğünün somut hâliydi. Çoğunlukla matematiğin tek bir alanına odaklanan seminerlerin aksine, eğer Gelfand'ın seminerlerine katılırsanız farklı alanların birbirine nasıl uyum sağlayabileceğini görürdünüz. İşte bu yüzden, her pazartesi akşamı MGU'nun ana binasının 14. katında toplanıp, ustanın konuşmasını hevesle beklerdik.

Fuchs, ilk makalemi işte bu büyüleyici adama götürmemi tavsiye etti. Gelfand'ın dergisi olan *Functional Analysis and Applications*, yılda dört kez yaklaşık yüz sayfalık ince ciltler hâlinde basılırdı (böyle bir dergi için acınası bir rakam olmasına rağmen yayıncı daha fazlasına müsaade etmediğinden razı olmak zorundaydık). Tüm dünyada büyük saygı gören dergi İngilizceye çevrilirdi ve dünyanın birçok yerinden bilim kütüphaneleri abonesiydi.

Bu dergide bir makale yayınlatmak, kısmen ciddi sayfa sınırından dolayı oldukça zordu. Aslına bakarsanız yayınlanan makaleler iki türdü: her biri on-onbeş sayfa kadar olan ve ayrıntılı ispatlar içeren araştırma makaleleri ile ispatlarına yer verilmeyen, sadece sonuçların bulunduğu kısa duyurular. Bu duyurular iki sayfadan uzun olamazdı. Teorik olarak, bu tür kısa bir makaleyi takiben tüm ispatları içeren ayrıntılı bir makalenin bulunması gerekirdi ama pratikte uzun makaleleri yayınlamak çok zor olduğundan, bu pek sık gerçekleşmezdi. Aslına bakarsanız SSCB'de bir matematikçinin yurt dışında yayın yapması neredeyse imkânsızdı (bunu yapmak isteyen birinin, bir yıldan fazla bir süre ve çokça çabayı göze alıp, her türlü güvenlik onayını vb alması gerekiyordu). Öte yandan, Sovyetler Birliği'ndeki matematik yayınlarının sayısı, matematikçi sayısı ile karşılaştırıldığında oldukça azdı. Maalesef makalelerin çoğu, yabancılar tara-

fından yayınlanmasını engelleyen farklı gruplar tarafından kontrol edilirdi ve anti-Semitizm bunların bir kısmında etkiliydi.

Bütün bunlara bağlı olarak, SSCB'de matematik makalelerinin belli bir altgrubu oluştu. Zamanla "Rus geleneği" olarak anılan bu tür makalelerde çok özlü bir yazı kullanılmakta ve çok az ayrıntıya girilmekteydi. Sovyetler Birliği'nin dışındaki çoğu matematikçi ise bunun bir tercih unsuru olmayıp zorunluluktan kaynaklandığının farkında değildi.

Fuchs'un ilk makalem için düşündüğü yayın, bu türden kısa bir duyuru idi.

Functional Analysis and Applications'a sunulan her makale, kısa duyurular da dahil, Gelfand'a gösterilmek ve onayını almak zorundaydı. Eğer hoşuna giderse makalenin olağan hakem sürecine girmesine müsaade ederdi. Bu da demek oluyordu ki makalemin değerlendirilmesi için Israel Moiseevich ile şahsen görüşmeliydim. 1986 yılı güz döneminin ilk seminerlerinin birinden önce Fuchs beni Gelfand'a takdim etti.

Gelfand elimi sıktı, gülümsedi ve şöyle dedi: "Tanıştığımıza memnun oldum. Adını duyuyorum."

Adeta büyülendim. Gelfand'ın başının üstünde bir hâle gördüğüme yemin edebilirim.

Sonra Gelfand Fuchs'a döndü ve elinde tuttuğu makalemi göstermesini istedi. Gelfand sayfaları çevirmeye başladı. Beş sayfalık bu makaleyi yazmak için Kerosinka'dan bir daktilo ödünç almış ve yavaş yavaş —iki parmakla— temize çekmiş, formülleri de elimle yazmıştım.

Gelfand onaylayarak "İlginç," dedi ve Fuchs'a dönerek, "Peki ama bu makale neden önemli?" diye sordu.

Fuchs, n dereceden farklı köklü polinomların diskriminantı hakkında birşeyler açıklamaya koyuldu ve bulduğum sonuçların diskriminantın lifinin topolojisini tanımlamak için nasıl kullanılabileceğini anlatıyordu ki Gelfand sözünü kesti:

"Mitya" dedi, Fuchs'a isminin kısaltılmışı ile hitap ederek, "Bu derginin kaç abonesi var biliyor musun?"

"Hayır, Israle Moiseevich, bilmiyorum."

"Binden fazla." Böylesine uzmanlaşmış bir dergi için oldukça büyük bir sayıydı. "Bunların her birine dergiyle beraber seni de yollayarak bu sonuçların neden iyi olduğunu anlatmanı sağlayamam, değil mi?"

Fuchs başını salladı.

"Bunu çok açık bir biçimde makalede belirtmelisin, anlaşıldı mı?" Gelfand'ın Fuchs'a bunları anlatmasının sebebi, bu durumun *onun* hatası olduğunu düşünmesiydi. Sonra ikimize dönerek "Bunun haricinde makale hoşuma gitti," dedi.

Sonra bana tekrar gülümsedi ve bir başkası ile konuşmak üzere yanımızdan ayrıldı.

Tam bir değiş tokuştu! Fuchs, Gelfand bizi duyamayacak kadar uzaklaşınca "Sakın endişelenme. Sadece seni etkilemek istedi," dedi. (Kesinlikle becermişti!) "Sadece makalenin başlangıç kısmına istediği etkiyi verecek bir paragraf ekleyeceğiz ve sonra büyük olasılıkla onu yayımlayacak".

Bu, olabilecek en güzel sonuçtu. Gelfand'ın istediği paragrafı ekledikten sonra makaleyi resmen teslim ettim ve sonunda dergide yayımlandı.[7] Böylece ilk matematik projem tamamlanmış oldu. İlk eşiği geçtim ve beni modern matematiğin büyülü dünyasına götürecek yola adımımı attım.

Sizinle işte bu dünyayı paylaşmak istiyorum.

7. Bölüm:

Büyük Birleşik Teori

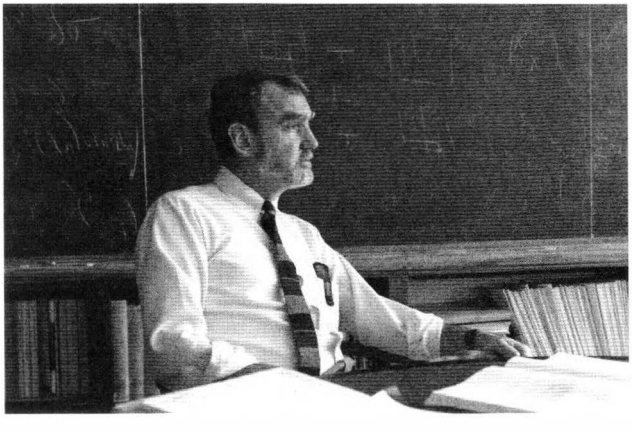
İlk problemin çözümü benim için matematik tapınağına davetiyem oldu. Fuchs'la yaptığım bir sonraki proje ile kendimi, bir şekilde tesadufi olarak, son elli yılda ortaya çıkan en derin ve ilgi çekici matematik teorilerinden birisi olan Langlands Programı'nın ortasında buldum. Aşağıda size projemi anlatacağım ama bu kitaptaki amacım kendi tecrübelerimden daha fazlasını aktarmak, modern matematik hakkında fikir vermek, onun gerçekten de özgünlük, hayal gücü ve çığır açan sezgilerle ilgili olduğunu kanıtlamak. Langlands Programı bunun için harika bir örnek teşkil eder. Bu programın Matematiğin Büyük Birleşik Teorisi olduğunu düşünmek hoşuma gidiyor çünkü matematiğin farklı alanlarının ortak gizemlerini çıkarıp bunlara odaklanarak aralarındaki hiç beklenmedik derin ilişkileri ortaya koyuyor.

Matematiğin birçok alt dalı vardır. Bunlar, çoğu kez ayrı kıtalar gibidir; bu alt dallar üzerinde çalışan matematikçilerin farklı dillerde konuştukları zannedilebilir. "Birleştirme" fikri yani bu farklı alanlarda ortaya çıkan teorileri bir araya getirerek hepsinin tek bir anlatının parçası olduğunu anlamak, işte bu sebeple bu denli güç-

lüdür. Bu adeta daha önce öğrenmeyi deneyip pek de başarılı olamadığınız bir yabancı dili birdenbire anlayabilmek gibidir.

Matematiği sonunda ortaya çıkacak resmi kimsenin bilmediği devasa bir yapbozun bütünü olarak düşünmek, doğru bir yaklaşımdır. Bu yapbozun birleştirilmesi, binlerce insanın ortak girişimidir. Gruplar halinde çalışırlar: Bir yanda cebirciler yapbozun kendi paylarına düşen kısmı üzerinde çalışırken, diğer tarafta sayı kuramcıları, başka bir tarafta geometriciler, vb çalışır. Her bir grup, büyük resmin küçük bir "adacığı"nı oluşturabilir ama matematik tarihi boyunca bu parçaların nasıl olup da bir araya geleceğini kestirmek zor olmuştur. Bu yüzden çoğu kişi, yapbozun bu adacıklarını genişletmek üzerine çalışır ama bir gün, bu parçaların birbirine nasıl bağlanacağını görebilecek birisi ortaya çıkacak. Bu olduğunda, büyük resmin önemli özellikleri belirecek ve bu münferit alanlara yeni bir anlam yüklenecektir.

Robert Langlands'ın yaptığı da buydu ama tutkusu sadece birkaç adayı birbirine bağlamaktan çok daha derinlere gitti. Böylece, 1960'ların sonunda başlattığı Langlands Programı, birbirleriyle ne kadar ilgisiz görünürlerse görünsünler, birçok adacık arasında köprüler inşa edebileceğimiz mekanizmayı bulmak için bir girişim hâlini aldı.



Robert Langlands, Princeton'daki ofisinde. (Fotoğraf: Jeff Mozzochi)

Langlands, şimdi Princeton'daki İleri Araştırmalar Enstitüsü'nde matematik alanında fahri profesör. Orada, daha önce Albert Einstein'a tahsis edilmiş olan bir odayı kullanıyor. Bu şaşırtacak ölçüde yetenekli ve vizyon sahibi adam, 1936 yılında doğmuş ve Vancouver yakınlarındaki küçük bir kasabada büyümüştü. Ailesi marangozlukla meşguldü. Langlands'ın şaşkınlık veren özelliklerinden birisi, birçok yabancı dili akıcı biçimde konuşabilmesidir: Yüksek öğrenimine başlamadan önce, anadili olan İngilizceden başka bir dil bilmemesine rağmen Fransızca, Almanca, Rusça ve Türkçe* konuşmaktadır.[1]

Son yıllarda Langlands ile sıkı bir işbirliği sürdürme imkânım oluyor ve çoğunlukla Rusça yazışıyoruz. Bir keresinde bana orijinal dilinden okuduğu Rus yazarların listesini yolladı. Bu liste o kadar kapsamlı ki anadilimdeki Rusça edebiyatta benden fazla okuma yapmış gibi görünüyor. Langlands'ın bu olağandışı dil yeteneğinin matematiğin farklı alanlarını bir araya getirmedeki üstün becerisi ile bir ilişkisi olup olmadığını hep merak ederim.

Langlands Programı'nın kilit noktası, zaten aşina olduğumuz simetri kavramıdır. Geometrideki simetriye değinmiştik; örneğin herhangi bir döndürme hareketi, yuvarlak masanın bir simetrisidir. Bu tür simetriler üzerinde sürdürdüğümüz çalışmalar bizi grup kavramına götürdü. Devamında fark ettik ki gruplar matematikte farklı biçimlerde karşımıza çıkabiliyor: döndürme hareketi grupları, örgü grupları, vb. Ayrıca grupların, temel parçacıkların sınıflandırılması ve kuarkların varlığının öngörülmesinde de yararlı olduğunu gördük. Langlands Programı ile ilişkili olan gruplar, sayılar üzerine sürdürülen çalışmalarda karşımıza çıkar.

Bunu açıklayabilmek için, ilk olarak gündelik hayatımızda karşılaştığımız sayılara değinmeliyiz. Her birimiz belli bir yılda doğduk;

---

* *Kitabın Türkçe baskısına özel not*: Gerçekten de Langlands Türkiye'de çok verimli bir yıl geçirdi. 1967-1968 döneminde Ankara'da ODTÜ'de ders verdi. Ofisi Cahit Arf'ın (portresi ve adıyla anılan formül 10 Liralık banknotun üzerinde yer alıyor) ofisinin yanındaydı. Langlands'ın Türkiye'ye ziyaretini, Türkiye ve Türk matematikçilerle yakın bağlantısını anlattığı ve Türkçe olarak yazdığı özel notu kitabın sonunda bulabilirsiniz.

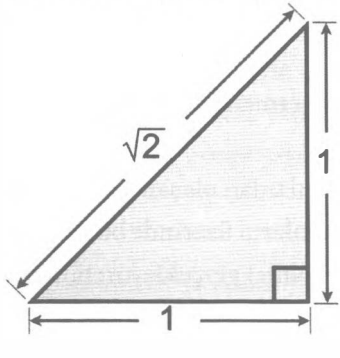
cadde üzerinde belli bir kapı numarasına sahip olan bir evde oturuyoruz; bir telefon numaramız var; ATM'lerde hesabımıza erişebilmek için bir şifre kullanıyoruz, vb. Tüm bu sayıların ortak bir noktası vardır. Her biri, 1'in kendisi ile belli bir kere toplanmasıyla elde edilir: 1+1 işlemi 2'yi, 1+1+1 3'ü verir, vb... Bu sayılara doğal sayılar denir.

Ayrıca 0 sayısı ve negatif sayılar da var (-1, -2, -3,...). 5. Bölüm'de değineceğimiz üzere bu sayıların hepsine birden "tam sayı" adı verilir. Diğer bir deyişle, bir tam sayı ya bir doğal sayı, ya sıfır ya da doğal sayının negatifidir.

Daha genel sayıları da hesaba katmalıyız. Dolar ve sent cinsinden bir fiyatı genellikle $2,59 gibi bir biçimde gösteririz ki iki dolar ve elli dokuz sente karşılık gelir. Bu değer, 2 ile 59/100 kesrinin (ya da 59 tane 1/100'ün) toplamının aynısıdır. Burada 1/100, kendisiyle 100 kere toplandığında 1 eden miktardır. Bu tür sayılara da rasyonel sayı ya da kesirli sayı denir.

Çeyrek, rasyonel sayıların güzel bir örneğidir ve matematiksel olarak 1/4 kesriyle gösterilir. Daha genel olarak ifade etmek gerekirse herhangi iki m ve n tam sayısı ile m/n kesrini oluşturabiliriz. Eğer m ve n'nin d gibi ortak bir böleni varsa (yani $m = dm'$ ve $n = dn'$ ise), d'yi iptal ederek m/n yerine m'/n' yazabiliriz. Örneğin, 1/4 kesri, 25/100 biçiminde de gösterilebilir. Amerikalıların 25 sente çeyreklik demelerinin sebebi budur.

Gündelik hayatta karşılaştığımız sayıların büyük çoğunluğu bu kesirler yani rasyonel sayılardır. Bununla birlikte, rasyonel olmayan sayılar da vardır. Örnek olarak, 2'nin $\sqrt{2}$ biçiminde yazılan karekökünü verebiliriz. Bu, karesi 2 eden sayı demektir. Geometrik olarak dik kenarlarının uzunluğu 1 birim olan dik üçgenin hipotenüsünün uzunluğudur.



m ve n iki doğal sayı olduğunda, bu değeri m/n biçiminde gösteremeyeceğimiz anlaşılıyor.[2] Bununla birlikte eğer ondalık gösterimini ilk birkaç basamak ile sınırlayacak şekilde yazarsak yaklaşık bir rasyonel sayı karşılığı bulabiliriz: 1,4142, 1,41421, 1,414213, vb. Ancak ne kadar ondalık basamak kullanırsak kullanalım, bu yine de yaklaşık bir değer olacaktır; daha fazla basamak eklemek gerekecektir. Hiçbir sonlu ondalık sayı, hiçbir zaman $\sqrt{2}$'ye eşit olamaz.

$\sqrt{2}$, yukarıdaki üçgenin hipotenüsünün uzunluğu olduğundan böyle bir sayının varlığından eminiz. Fakat rasyonel sayıların sayı sistemine uymamaktadır.

Bunun gibi birçok sayı vardır: $\sqrt{3}$ veya küpkök 2 gibi. Bu sayıları rasyonel sayılara eklemek için sistemli bir yol geliştirmek durumundayız. Rasyonel sayıları bir bardak çay olarak düşünün. Çayı sade olarak içebileceğimiz gibi aldığımız tadı iyileştirmek için şeker, süt, bal ya da çeşitli baharatlar karıştırabiliriz. İşte bu ilaveleri, $\sqrt{2}$ ya da $\sqrt{3}$ gibi sayılara benzetebiliriz.

$\sqrt{2}$ karıştırmayı deneyelim. Bu, içeceğimiz bir bardak çaya bir küp şeker atmak gibidir. Yani rasyonel sayılara $\sqrt{2}$ atıp ne tür bir sayı sistemi elde edeceğimize bakalım. Kuşkusuz, bu yeni sayı sistemi içindeki sayıları çarpabilmek isteriz, dolayısıyla rasyonel sayıların ve $\sqrt{2}$'nin çarpımları olan bütün sayıları dahil etmemiz gerekir. Bunların gösterimi $\frac{k}{l}\sqrt{2}$'dir. Bu yüzden sayı sistemimiz $\frac{m}{n}$ biçimindeki bütün kesirleri (bunlar rasyonel sayılardır) ve $\frac{k}{l}\sqrt{2}$ biçimindeki tüm sayıları içermelidir. Bunları birbirleriyle toplayabilmeyi de istediğimizden

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{l}\sqrt{2}$$

toplamlarını da dahil etmeliyiz.

Bu biçimdeki tüm sayılardan oluşan topluluk "kendi kendine yeter" (self-contained) yani onların üzerinde bütün basit işlemleri (toplama, çıkarma, çarpma ve bölme) gerçekleştirebiliriz ve bulunan sonuç da

aynı türden bir sayı olacaktır.[3] Bu bizim, içine atılan şekerin tamamen erimiş olduğu bir bardak çayımızdır.

Bu yeni sayı sisteminin rasyonel sayıların sahip olmadığı gizli bir özelliği olduğu anlaşılıyor. Bu özellik, sayıların büyülü dünyasına girmemizi sağlayacak kapı olacak: Bu sayı sisteminin simetrileri vardır.

Burada "simetri" ile kastettiğim, hangi sayı ile başlarsak başlayalım ona yeni bir sayı atayan bir kuraldır. Diğer bir deyişle, verilen bir simetri, her bir sayıyı yine aynı sayı sisteminden başka bir sayıya dönüştürür. Simetrinin her bir sayının bir başka sayıya "gitmesini" sağlayan bir kural olduğunu söyler. Bu kuralın toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleriyle uyumlu olması gerekir. Sayı sisteminin simetrilerine neden bu kadar özen göstermemiz gerektiği henüz tam net değil. Ancak bana biraz daha tahammül edebilirseniz sebebini yakında anlayacaksınız.

Sayı sistemimizin her sayıyı yine kendine götüren kural olan özdeş simetrisi vardır. Bu, bir masa 0 derece döndürüldüğünde tüm noktaların kendine gitmesine benzetilebilir.

Sayı sistemimizin pek alışık olmadığımız türden bir simetriye sahip olduğu anlaşılmıştır. Bunun ne olduğunu açıklamak için, $\sqrt{2}$'nin $x^2 = 2$ denkleminin bir çözümü olduğunu gözlemleyelim. Gerçekten de $\sqrt{2}$'yi x'in yerine koyduğumuzda eşitlik sağlanır. Ancak bu denklemin aslında iki çözümü vardır: Bir tanesi $\sqrt{2}$ iken, diğeri $-\sqrt{2}$'dir. Aslında yeni sayı sistemimizi oluşturduğumuzda her ikisini de rasyonel sayılara ekledik. Bu iki çözümü birbirine göndererek, bu sayı sisteminin simetrisini elde ederiz.*

Bu ilişkiyi çay bardağı benzetmesi ile daha açık bir biçimde gösterebilmek için, ufak bir değişiklik yapalım. Bir bardak çaya bir adet beyaz şeker veya bir adet esmer şeker atıp karıştırdığımızı

---

* Burada ve aşağıda, negatif sayıları göstermek için kısa çizgi yerine eksi işareti (tire) kullandım. Bu, standart matematiksel notasyona uygundur. Aslında bu ikisi arasında hiçbir fark yok, çünkü $-N = 0-N$'dir.

farz edelim. Bunların ilki $\sqrt{2}$, ikincisi de $-\sqrt{2}$ gibidir. Hangi şekeri kullanırsak kullanalım, aynı çayı elde ederiz. Benzer şekilde $\sqrt{2}$ ve $-\sqrt{2}$'yi birbirlerinin yerine kullanmak da sayı sistemimizin simetrisi olacaktır.

Bu değiş tokuşta rasyonel sayılar değişmeden kalır.[4] Bu sebeple, $\frac{m}{n} + \frac{k}{l}\sqrt{2}$ sayısı, $\frac{m}{n} - \frac{k}{l}\sqrt{2}$ sayısına gider. Başka bir şekilde ifade edersek diğer kısımlara dokunmadan sadece $\sqrt{2}$'nin önündeki işareti değiştiririz.[5]

Gördüğünüz üzere yeni sayı sistemimiz bir kelebek gibi: $\frac{m}{n} + \frac{k}{l}\sqrt{2}$ sayıları kelebeğin pullarına ve $\sqrt{2}$ ile $-\sqrt{2}$'nin yerini değiştirerek elde edilen simetri de kanatlarını birbirinin yerine geçiren kelebeğin simetrisine benzer.

Daha genel olarak, x değişkeninin $x^2 = 2$ dışındaki diğer denklemlerini de ele alabiliriz; örneğin, üçüncü dereceden $x^3-x+1=0$ denklemi. Bu tür bir denklemin çözümleri rasyonel sayı değilse (yukarıdaki denklemlerde olduğu gibi) çözümleri rasyonel sayılara ekleyebiliriz. Ek olarak, bu tür birçok denklemin çözümlerini de rasyonel sayılara bir kerede ekleyebiliriz. Bu şekilde, birçok farklı sayı sistemi ya da matematikçilerin deyimiyle *sayı cisimleri* (number fields) elde ederiz. Bu terimdeki "cisim" sözcüğü, bu sayı sisteminin toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinde kapalı olduğunu ifade eder.

$\sqrt{2}$ ekleyerek elde ettiğimiz sayı cismi gibi genel sayı cisimleri de bu işlemlerle uyumlu simetrilere sahiptir. Verilen bir sayı cisminin simetrileri, tıpkı geometrik cisimlerde olduğu gibi, birbiri ardına (birbirleri ile birleştirilerek) uygulanabilir. Bu yüzden bu simetrilerin bir grup oluşturması da şaşırtıcı değildir. Bu gruba, Fransız matematikçi Évariste Galois'ya atfen sayı cisminin *Galois grubu*[6] denir.



Matematikçilere dair anlatılan hikâyeler arasında, en duygu dolu ve etkileyici olanlardan biri de Galois'nın hikâyesidir. Bu dâhi çocuk, çok genç yaşlarda çığır açan buluşlar yaptı ve yirmi yaşında bir düelloda hayatını kaybetti. 31 Mayıs 1832 tarihinde yaptığı bu düellonun sebebine dair farklı görüşler öne sürüldü: Kimileri işin içinde bir kadın olduğunu söylerken, kimileri de politik faaliyetlerine bağlı olduğunu dile getirdi. Kuşkusuz Galois politik görüşlerini tavizsiz ifade ediyordu ve o kısacık hayatında çok kişiyi sinirlendirmeyi başarmıştı.

Tam ölmeden önce, gecenin bir vakti, mumlarla aydınlanan odasında kendini kaybedercesine yazarak, sayıların simetrilerine dair fikirlerini özetleyen taslak metni tamamladı. Bu aslında, yaptığı göz kamaştırıcı keşifleri bizimle paylaştığı ve tüm insanlığa yazılmış bir aşk mektubuydu. Gerçekten de Galois'nın keşfettiği ve günümüzde onun adıyla anılan bu simetri grupları, tıpkı Mısır Piramitleri ya da Babil'in Asma Bahçeleri gibi dünya harikalarından birisidir. Tek farkı, onları bulmak için başka bir kıtaya seyahat etmek ya da zaman içinde yolculuk yapmak zorunda değiliz. Her nerede olursak olalım, onları parmak uçlarımızda bulabiliriz. Bizi cezbeden de sadece güzellikleri değil, gerçek dünya uygulamaları için barındırdıkları yüksek potansiyeldir.

Yazık ki Galois zamanının çok ötesindeydi. Fikirleri, çağdaşlarının ilk seferde anlayamayacağı kadar radikaldi. Makaleleri, Fransız

Bilimler Akademisi tarafından iki kez reddedildi ve çalışmasının basılarak diğer matematikçilerin olurunu alması neredeyse elli yıl sürdü. Buna rağmen, yaptığı çalışma günümüzde modern matematiğin önemli köşe taşlarından biri olarak görülür.

Galois, geometriden sezgisel olarak aşina olduğumuz simetri fikrini sayı teorisinin ön planına çıkardı. Dahası, simetrinin büyüleyici gücünü de gösterdi.

Galois'dan önce matematikçiler, polinom denklemler adı verilen $x^2 = 2$ ve $x^3 - x + 1 = 0$ gibi denklemlerin çözümü için formüller keşfetmeye odaklanmışlardı. Galois'nın ölümünün ardından iki yüz yıl geçmiş olmasına rağmen, maalesef günümüzde okullarda öğretilmeye çalışılan da hâlâ budur. Örneğin, katsayıları a, b, ve c olan aşağıdaki gibi ikinci dereceden genel bir denklemin çözümü için bir formül ezberlemek zorundayız.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Bu formülü, pek hoş olmayan anıları çağrıştırmasına sebep olmamak için burada vermeyeceğim. Şimdilik bilmemiz gereken tek şey, karekök almayı gerektirdiği.

Katsayıları a, b, c ve d olan ve küpkök içeren aşağıdaki gibi üçüncü dereceden genel bir denklem için benzer ama daha karmaşık bir formül vardır:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Polinom (çokterimli) denklemlerin radikallerinin (karekök, küpkök, vb) değerlerini bulma işlemi, denklemin derecesi büyüdükçe hızla karmaşıklaşır.

İkinci dereceden denklemlerin çözümü için kullanılan genel formül, dokuzuncu yüzyılda yaşayan İranlı matematikçi El Harezmi tarafından biliniyordu. ("Cebir" kelimesinin kökeni, kitabının baş-

lığında kullandığı "el-cebr" kelimesine dayanır.) Üçüncü ve dördüncü dereceden denklemlerin çözümü için kullanılan formüller ise on altıncı yüzyılın ilk yarısında keşfedildi. Doğal olarak sıradaki hedef, beşinci dereceden denklemlerdi. Galois'dan önce, 300 yıl boyunca birçok matematikçi umutsuz bir biçimde çözümü verecek formülleri bulmaya çalıştı ama bir işe yaramadı. Galois, sordukları sorunun yanlış olduğunu fark etti ve bu denklemin çözümlerini rasyonel sayılara ekleyerek elde edilen sayı cisimlerinin simetri gruplarına odaklanmamız gerektiğini dile getirdi; bu kavram günümüzde Galois grubu olarak bilinmektedir.

Galois gruplarının tanımlanmasının çözüm için net bir formül yazmaktan daha kolay bir yol olduğu anlaşılıyor. Çözümün ne olduğunu bilmeden bile bu gruplar hakkında anlamlı şeyler söylenebilir ve bunlara dayanarak önemli çıkarımlarda bulunulabilir. Aslında Galois, radikallerin (karekök, küpkök, vb) çözümleri için bir formülün ancak ve ancak karşılık geldiği Galois grubunun basit yapıda olması koşuluyla var olabileceğini göstermeyi başarabildi; günümüzde matematikçiler bu tür bir gruba *çözülebilir grup* (solvable group) derler. İkinci, üçüncü ve dördüncü dereceden denklemler için Galois grupları her zaman çözülebilir niteliktedir. Bu yüzden, bu denklemlerin çözümlerinin radikaller ile yazılabilmesi de mümkündür. Ancak Galois, beşinci dereceden (ya da daha üst dereceden) tipik bir denklemin simetri gruplarının çözümsüz olduğunu gösterdi. Bu şu anlama geliyor: Bu denklemlerin radikaller açısından çözümlerini bulmak için bir formül yok.[7]

Bu ispatın ayrıntılarına girmeyeceğim ama bu grupların neye benzediklerini kafanızda canlandırmak için Galois gruplarının birkaç örneğini ele alalım. $x^2 = 2$ denklemi için Galois grubunu yukarıda tanımladık. Bu denklemin rasyonel sayılara eklediğimiz iki çözümü vardı: $\sqrt{2}$ ve $-\sqrt{2}$. Ortaya çıkan sayı cisminin Galois grubu[8] iki eleman içerir: özdeş ve $\sqrt{2}$ ile $-\sqrt{2}$'nin yer değiştirmesi ile elde edilen simetri.

Sıradaki örneğimiz için yukarıda yazılan üçüncü dereceden denklemi ele alalım ve katsayılarının rasyonel sayılar olup, üç çözümünün de irrasyonel sayı olduğunu varsayalım. Böylece bu çözümleri rasyonel sayılara ekleyerek yeni bir sayı cismi oluştururuz. Bunu bir bardak çaya üç farklı katkı maddesi eklemeye benzetebiliriz: bir küp şeker, bir damla süt ya da bir kaşık dolusu bal gibi. Bu sayı cisminin (katkıların karıştırıldığı çay bardağı) herhangi bir simetrisi altında, üçüncü dereceden denklem değişmeyecektir çünkü katsayıları simetri tarafından sabit korunan rasyonel sayılardır. Bu yüzden, üçüncü dereceden denklemin her bir çözümü (üç katkı maddesinden biri) kaçınılmaz olarak başka bir çözüme gidecektir. Bu gözlem sayesinde, bu sayı cisminin simetrilerinin Galois gruplarını bu üç çözümün permütasyonları cinsinden tanımlamak mümkündür. Bu işlemin ana noktası, bu tanımı çözümler için herhangi bir formül yazmadan elde etmiş olmamızdır.[9]

Benzer şekilde, rastgele seçilmiş bir polinom denkleminin tüm çözümlerini rasyonel sayılara ekleyerek elde edilen sayı cisminin simetrilerinin Galois grubu da bu çözümlerin permütasyonları cinsinden tanımlanabilir (*n*'inci dereceden bir polinom denkleminin her biri farklı olan ve rasyonel sayı olmayan *n* adet çözümü vardır). Bu şekilde, çözümlerini katsayılar cinsinden ifade etmeden denkleme dair birçok çıkarımda bulunabiliriz.[10]

Galois'nın çalışması, matematiksel içgörünün gücüne dair harika bir örnektir. Galois, polinom denklemlerin çözümü için bir formül bulma problemini anlaşılageldiği biçimde çözmedi. Problemin *şifresini kırdı*! Problemi yeniden formüle etti, büktü, eğdi ve ona tamamen farklı bir açıdan baktı. Onun parlak içgörüsü, insanların sayılara ve denklemlere dair düşünce biçimlerini sonsuza dek değiştirdi.

Ondan 150 yıl sonra, Langlands bu fikirleri daha da ileriye taşıdı. 1967 yılında, Galois grupları teorisi ile matematiğin farklı bir alanı olan harmonik analizi bir araya getiren devrim niteliğindeki kavrayışlar ortaya çıkardı. Birbirinden ışık yılı kadar uzak görünen

bu iki alan arasında yakın bir ilişki olduğu ortaya çıktı. O sırada otuzlu yaşlarının başında olan Langlands, seçkin matematikçilerden André Weil'e yazdığı bir mektupta fikirlerini özetledi. O dönem bu mektubun kopyaları matematikçiler arasında yaygın olarak dolaştı.[11] Mektubun başındaki not, konuyu hafife aldığını göstermesi açısından önemlidir:[12]

> Profesör Weil, yanınıza gelmem ve yüz yüze konuşmamız için yaptığınız davete karşılık olarak size bu mektubu yazıyorum. Yazdıktan sonra içerisinde emin olduğum pek fazla ifade olmadığını fark ettim. Bunu tamamen dayanaksız bir görüş şeklinde okumak isterseniz minnettar olurum; eğer yapmak istemezseniz eminim ki yakınınızda boş bir çöp kutusu vardır.

Mektubun devamında yazanlar, matematik hakkında düşündüklerimizi sonsuza kadar değiştiren, çığır açan bir teorinin başlangıcıydı. Langlands Programı bu şekilde doğdu.

Birkaç nesil boyunca matematikçiler hayatlarını Langlands'ın ortaya koyduğu problemleri çözmeye adadılar. Onları bu kadar etkileyen şey neydi? Cevabını bir sonraki bölümde bulacaksınız.

8. Bölüm:

Sihirli Sayılar

Simetrilerden ilk olarak 2. Bölüm'de bahsetmiş ve $SU(3)$ isimli grubun gösteriminin temel parçacıkların davranışlarını idare ettiğini görmüştük. Langlands Programı da bir grubun gösterimi üzerine odaklanır ama bu grup, bir önceki bölümde gördüğümüz türden bir sayı cisminin simetrilerinin Galois grubudur. Neticede bu gösterimlerin bir sayı cisminin sayılara dair gerekli tüm bilgiyi içeren "kaynak kodu"nu oluşturdukları anlaşıldı.

Langlands'ın müthiş fikri şuydu: Bu bilgiyi, tamamen farklı bir yapıya sahip olan cisimlerden çıkarabiliriz. Bu cisimler, harmonik analiz adı verilen ve matematiğin farklı bir alanında çalışılan otomorfik fonksiyonlardır. Harmonik analizin kökeni, frekansları birbirinin katı olan temel ses dalgaları anlamına gelen harmonikler üzerine sürdürülen çalışmalarda yatar. Buna göre, genel bir ses dalgası harmoniklerin üst üste binmesidir (superposition), tıpkı bir senfoninin sesinin farklı enstrümanlardan çıkan notalara karşılık gelen harmoniklerin üst üste binmesi olduğu gibi. Bu fikir matematik alanında, verilen bir fonksiyonun, sinüs ve kosinüs benzeri aşina olduğumuz trigonometrik fonksiyonlar gibi, harmoniklerin

fonksiyonların üst üste binmesi olarak ifade edilmesi anlamına gelir. Otomorfik fonksiyonlar, aşina olduğumuz bu harmoniklerin biraz daha karmaşık versiyonlarıdır. Bu otomorfik fonksiyonlarla hesaplamalar yapmak için güçlü analitik yöntemler vardır. Langlands'ın şaşırtan içgörüsü ise, bu fonksiyonları sayı teorisindeki çok daha zorlu sorular hakkında daha fazla şey öğrenmek için kullanabileceğimiz yönündeydi. Bu sayede, sayıların gizli harmonisini buluruz.

Önsöz'de matematiğin temel işlevlerinden birinin bilgilerin düzenlenmesi ya da Langlands'ın ifade ettiği biçimiyle "görünen kaostan bir düzen yaratmak"[1] olduğunu yazdım. Langlands'ın fikri gerçekten de çok güçlüydü çünkü sayı teorisinden gelen kaotik görünümlü verilerin simetri ve harmoni dolu düzgün kalıplar şeklinde düzenlenmesine yardım ediyordu.

Matematiğin farklı alanlarını kıtalar gibi düşünürsek sayı teorisi Kuzey Amerika iken, harmonik analiz Avrupa gibidir. Zaman içerisinde kıtalar arası yolculuk yapmanın süresi gittikçe kısaldı. Gemiyle günler süren yolculuklar, uçakla birkaç saat alıyor. Fakat Kuzey Amerika'daki herhangi bir yerden Avrupa'da istediğiniz bir yere anında gitmenize imkân tanıyan yeni bir teknolojinin geliştirildiğini hayal edin. Bu, Langlands'ın keşfettiği bağlantılara denk düşecektir.

Şimdi bu nefes kesici bağlantılardan 6. Bölüm'de değindiğimiz Fermat'nın Son Teoremi ile yakından ilişkili olan birisini tanımlayacağım.

Fermat'nın Son Teoremi'nin ifadesi, yanıltıcı olabilecek kadar basittir. Teoriye göre, eğer n değeri 2'den büyükse,

$$x^n + y^n = z^n$$

denkleminin çözümünü verecek x, y ve z doğal sayıları yoktur.

Daha önce de yazdığım gibi, bu sonuç 350 yıldan daha uzun bir zaman önce, 1637 yılında, Fransız matematikçi Pierre Fermat tara-

fından tahmin edilmişti. Okumakta olduğu eski bir kitabın kenar boşluğuna, bu ifadenin "gerçekten şahane" bir ispatını bulduğunu ama "kenar boşluğunun bunun için çok dar" olduğunu belirten bir not yazmıştı. Bunun, on yedinci yüzyıla özgü Twitter tarzı bir ispat olduğunu söyleyebiliriz: "Bu teoremin şahane bir ispatını buldum ama maalesef buraya yazamayacağım çünkü yüz kırk karakterden daha uzun" —üzgünüm, yer kalmadı.

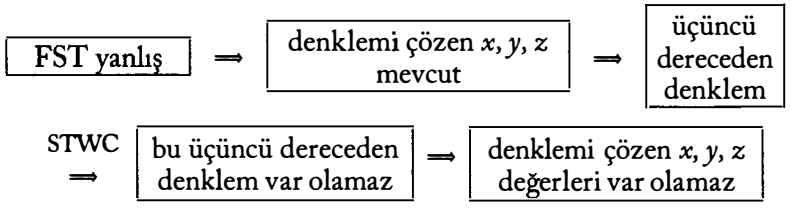
Fermat'nın yanılgıya düştüğünden pek şüphe edilmez. Gerçek ispatın bulunması 350 yıldan fazla sürdü ve inanılmayacak kadar karmaşık bir ispat ortaya çıktı. Burada iki ana adım var: Birincisi, Ken Ribet 1986 yılında Fermat'nın Son Teoremi'nin Shimura-Taniyama-Weil sanısının (kestirim) devamı niteliğinde olduğunu gösterdi.

(Sanırım, matematiksel sanının doğru olması beklenen ama henüz bir ispatı bulunmayan bir ifade olduğunu söylememde fayda var. İspat bulunduğunda, sanı teorem olur.[2])

Ken Ribet şunu gösterdi: Eğer Fermat'nın denklemini çözen x, y ve z doğal sayıları varsa bu sayılar kullanılarak, Shimura-Taniyama-Weil sanısının dışarıda bıraktığı bir özelliği taşıyan üçüncü dereceden belirli bir denklem kurulabilir (aşağıda bu denklemin ve bahsedilen özelliğin ne olduğunu açıklayacağım). Eğer Shimura-Taniyama-Weil sanısının doğru olduğunu biliyorsak o zaman bu denklem var olamaz. Bu yüzden, Fermat'nın denklemini çözen x, y, z değerleri de var olamaz.[3]

Burada bir dakika mola verip, bu iddianın mantığı üzerinde bir kez daha duralım. Fermat'nın Son Teoremi'ni ispatlamak için, onun yanlış olduğunu varsayıyoruz; yani, Fermat'nın denklemini sağlayacak x, y ve z doğal sayılarının var olduğunu farz ediyoruz. Daha sonra, bu sayıları istenmeyen belirli bir özellik taşıdığı ortaya çıkan üçüncü dereceden bir denklem ile ilişkilendiriyoruz. Shimura-Taniyama-Weil sanısı bize böyle bir denklemin *var olamayacağını* söylüyor. Fakat o hâlde bu x, y, z sayıları da var olamaz. Bu nedenle, Fermat'nın denkleminin çözümleri olamaz. Dolayısıyla Fermat'nın

Son Teoremi doğrudur! Bu ispatın akış şeması aşağıda verilmiştir ("Fermat'nın Son Teoremi" FST ve "Shimura-Taniyama-Weil sanısı" da STWC biçiminde kısaltılmıştır):



Bu tür ispatlara *olmayana ergi* (proof by contradiction) denir. Bu yöntemi kullanırken, kanıtlamaya çalıştığımız şeyin zıddı olan bir ifade ile başlarız (bizim örneğimizde bu, ispatlamaya çalıştığımızın tersi olan, Fermat'nın denklemini çözen x, y, z doğal sayılarının var olduğu yönündeki ifadedir). Bir çıkarımlar zinciri içinde, yanlış olduğu kanıtlanabilen bir ifadeye ulaşırsak (bizim örneğimizde bu, Shimura-Taniyama-Weil sanısıyla engellenen üçüncü dereceden bir denklemin var olduğu) başlangıçtaki ifadenin yanlış olduğu sonucuna varırız. Dolayısıyla, ispatlamaya çalıştığımız ifade (Fermat'nın Son Teoremi) doğrudur.

Fermat'nın Son Teoremi'nin doğruluğunu ortaya koymak için bundan sonra yapmamız gereken, Shimura-Taniyama-Weil sanısının doğruluğunu ispatlamaktır. Bu anlaşıldığında (1986 yılında Ribet'in çalışması ile) araştırmalar, Shimura-Taniyama-Weil sanısının ispatına yönelmişti.

Yıllar içerisinde çok sayıda ispat öne sürüldü ama hemen sonrasında yapılan analizler bu ispatların çeşitli hatalar ya da boşluklar içerdiğini ortaya koydu. 1993 yılında, Andrew Wiles sanıyı ispatladığını iddia etti ama birkaç ay içinde onun ispatında da bir eksiklik bulunduğu anlaşıldı. Bir süre, onun ispatının da içinde hiçbir zaman kapatılamayan boşluklar bulunan diğer ünlü "ispat olmayanlar" ile birlikte anılacağı düşünüldü.

Oysa şans yüzümüze güldü ve Wiles, yine bir matematikçi olan Richard Taylor'un yardımıyla bir yıl içerisinde boşluğu kapatabildi. İkili ispatı birlikte tamamladı.[4] Wiles, Fermat'nın Son Teoremi ile ilgili harika bir belgeselde, bu ânı aktarırken duygulanır. Başından geçenin ne kadar stresli bir tecrübe olduğu, ancak hayal edilebilir.

Görüldüğü üzere, Shimura-Taniyama-Weil sanısı, Fermat'nın Son Teoremi'nin ispatında önemli bir sonuçtur. Bununla beraber, Langlands Programı'nın özel bir durumu olarak da görülebilir. Zira Langlands Programı'nın öngördüğü beklenmedik bağlantıların mükemmel bir biçimde gösterilmesini sağlar.

Shimura-Taniyama-Weil sanısı, belirli denklemlere dair bir ifadedir. Matematiğin büyük bir kısmı aslında denklemlerin çözümü ile ilgilidir. Verilen bir denklemin yine verilen bir tanım kümesinde çözümünün olup olmadığını bilmek isteriz; eğer varsa acaba bir tanesini bulabilir miyiz? Eğer birden çok çözümü varsa kaç tane olabilir? Neden bazı denklemlerin çözümü varken, diğerlerinin yok?

Bir önceki bölümde, $x^2 = 2$ gibi tek değişkenli polinom denklemlerden bahsettik. Fermat'nın Son Teoremi üç değişkenli bir denklem üzerinedir: $x^n + y^n = z^n$. Shimura-Taniyama-Weil sanısı ise aşağıda bir örneği verilen, iki değişkenli bir cebirsel denklem sınıfı üzerinedir.

$$y^2 + y = x^3 - x^2.$$

Bu denklemin çözümü, sol tarafını sağ tarafına eşitleyen x, y sayı çiftidir.

Peki, x ve y'nin ne tür sayılar olmasını istiyoruz? Birden fazla seçeneğimiz var. Bir olasılık, x ve y'nin doğal sayı ya da tam sayı olduklarını söylemektir. Bir diğer olasılık da rasyonel sayılar de-

mektir. x ve y'nin gerçel sayı (real number) ve hatta karmaşık sayı (complex number) olduğu sonuçları da arayabiliriz —bu olasılığa bir sonraki bölümde daha ayrıntılı olarak değineceğiz.

Daha az açıkça görülen ama en az diğerleri kadar önemli bir seçenek daha olduğu anlaşılıyor: Sabit bir N doğal sayısı için, "mod N" aritmetiğinde x ve y sayılarını değerlendirmek. Bu, denklemin sağ ve sol taraflarını N'e bölünebilen bir değere eşitleyen x ve y tam sayılarını bulmaya çalışmak anlamına geliyor.*

Örneğin, $N = 5$ için (mod N) çözümleri arayalım. Bunların bir tanesi oldukça barizdir: $x = 0$ ve $y = 0$. Bu kadar bariz olmayan üç tane daha çözümü var: $x = 0$ ve $y = 4$, mod 5 aritmetiğinde bir çözümdür çünkü sol tarafı 20'ye ve sağ tarafı da 0'a eşitler. Sol ve sağ taraflar arasındaki fark 20 olup 5'e bölünür. Bu, mod 5 aritmetiğinde denklemin çözümlerinden biridir. Benzer şekilde, $x = 1$, $y = 0$ ile $x = 1$, $y = 4$ sayı çiftleri de mod 5 aritmetiğindeki diğer çözümlerdir.

Bu tür aritmetik işlemlere, 2. Bölüm'de bir dairenin dönme hareketi gruplarını incelerken de değindik. Orada, açıların toplanması işleminin "mod 360" olduğunu gördük. Yani eğer iki açının toplamı 360 dereceyi geçiyorsa toplamdan 360'ı çıkartarak sonucun 0 ile 360 arasında olmasını sağlarız. Örneğin, 450-360=90 olduğu için, 90 ve 450 derecelik dönme hareketleri aynıdır.

Modüler aritmetik ile saat kullanımında da karşılaşırız. Eğer çalışmaya sabah saat 10'da başlıyor ve sekiz saat çalışıyorsak, iş çıkış saatimiz kaç olur? Pek tabii ki, 10+8=18 olduğundan çıkış saatimizin 18 olduğunu söylemek gayet doğal olmalı. Fransa gibi saatlerin 0-24 aralığındaki sayılar hâlinde yazıldığı yerlerde, saati bu şekilde ifade etmek gayet iyidir (gerçi o kadar da iyi değil, çünkü Fransa'da günlük çalışma 7 saat ile sınırlı). Ama bizler ABD'de, işten öğleden sonra 6'da çıktığımızı söyleriz. 18'den 6'ya nasıl geçtik? 18'den 12'yi çıkarttık: 18-12=6.

---

* N sayısına göre modüler aritmetiği yani N ile bölümlerden kalan sayıların aritmetiğini "mod N aritmetiği" olarak isimlendirebiliriz.—ed.n.

Öyleyse, saat hesaplarında da açı hesaplarındaki mantığı kullanıyoruz: İlkinde (mod 360), ikincisinde (mod 12).

Benzer şekilde, herhangi bir N doğal sayısı için, mod N aritmetiğinde toplama işlemi yapabiliriz. 0 ile N-1 arasındaki tüm ardışık tam sayıların kümesini ele alalım,

$$\{0, 1, 2, \ldots, N\text{-}2, N\text{-}1\}.$$

$N = 12$ ise bu küme, mümkün olan saat değerlerinin kümesi olur. Genel olarak, 12'nin rolünü N sayısı oynar çünkü bizi tekrar 0'a götüren 12 değil, N'dir.

Yukarıda gösterilen sayı kümesinde toplama işlemini, tıpkı saatlerde olduğu gibi tanımlıyoruz. Bu kümeden herhangi iki sayı verildiğinde onları toplar ve eğer sonuç N'den büyükse aynı kümeden bir sayı elde etmek için sonuçtan N'yi çıkarırız. Bu işlem, söz konusu kümeyi bir grup hâline getirir. Özdeş eleman 0'dır: Bu sayıyı bir diğerine eklediğimizde, hiçbir şey değişmez. Diğer bir deyişle, $n + 0 = n$ eşitliği sağlanmaktadır. Kümemizdeki herhangi bir n sayısının "toplamsal ters elemanı" $N - n$'dir, çünkü $n + (N - n) = N$ olup, kurallarımıza göre 0'a eşittir.

$N = 3$ örneğini inceleyelim. Bu durumda elimizdeki küme {0, 1, 2} olup, toplama işleminde mod 3'tür. Bu sistem için, aşağıdaki gibi bir örnek yazabiliriz:

$$2 + 2 = 1 \pmod 3$$

Örnekte, $2 + 2 = 4$ iken, $4 = 3 + 1$ olduğu için 4 sayısı mod 3 aritmetiğinde 1'e eşittir.

Bu yüzden, eğer birisi size emin olduğu bir gerçeklikten bahsederken "2 artı 2, eşittir 4" derse, artık ona, "Aslına bakarsan, bu her zaman doğru değil," diyebilirsiniz (isterseniz yüzünüze küçümser bir gülümseme de kondurabilirsiniz). Söylediğinizi açıklamanız gerekirse de şöyle devam edebilirsiniz: "Toplama işlemini mod 3 aritmetiğinde yaparsanız 2 artı 2, 1'e eşit olur."

Yukarıdaki kümeden iki sayıyı çarpabiliriz de. Sonuç 0 ile N - 1 arasında olmayabilir ama bu aralıkta çarpma işleminin sonucu ile arasındaki fark N'e bölünebilen tek bir sayı olacaktır. Bununla birlikte genel olarak, {1, 2,..., N - 1} kümesi çarpma işlemine göre bir grup değildir. Özdeş eleman, 1 sayısıdır ama her elemanın mod N aritmetiğinde yapılan çarpma işleminde ters elemanı yoktur. Bu durum, sadece ve sadece N *asal sayı* olduğunda yani kendisinden ve 1'den başka bir doğal sayıya bölünmediğinde gerçekleşir.[5]

İlk birkaç asal sayı olarak 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... örnek verilebilir. (1'i listenin dışında tutmak alışılagelmiş bir durumdur.) 2'nin haricindeki çift sayılar asal olamazlar çünkü 2'ye de bölünebilirler. Ayrıca 9 da asal değildir çünkü 3'e bölünebilir. Aslında sonsuz miktarda asal sayı vardır. Bir asal sayının ne kadar büyük olduğunun bir önemi yoktur çünkü her zaman daha büyük bir başka asal sayı bulunur.[6] Asal sayılar bölünemez olduklarından doğal sayılar dünyasının temel parçacıklarıdırlar; aslında diğer tüm doğal sayılar, asal sayıların çarpımı olarak tek bir şekilde yazılabilir. Örneğin: $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Bir asal sayı seçelim ve alışılageldiği üzere p ile gösterelim. Ardından 0'dan p - 1'e kadar olan tüm ardışık tam sayıları içeren bir kümeyi ele alalım:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, p - 2, p - 1\}.$$

Bu küme üzerinde iki işlemi değerlendirelim: mod p aritmetiğinde toplama ve çarpma işlemleri.

Yukarıda da gördüğümüz üzere bu küme, mod p aritmetiğinde toplama işlemine göre bir gruptur. Daha da dikkat çekici nokta, 0 sayısını ortadan kaldırıp, 1 ile p - 1 arasındaki ardışık tam sayıların kümesini ele aldığımızda mod p aritmetiğinde çarpma işlemine göre bir grup elde etmemizdir: {1, 2, ..., p - 1}. Küme elemanlarından 1 sayısı çarpma işleminde özdeş elemandır (bu açık) yani 1 ile p - 1 arasındaki herhangi bir doğal sayının çarpma işleminde ters elemanı olduğunu ileri sürüyorum.[7]

Örneğin, eğer $p = 5$ alırsak,

$$2 \cdot 3 = 1 \pmod 5$$

veya

$$4 \cdot 4 = 1 \pmod 5$$

olduğunu buluruz ki mod 5 aritmetiğinde mod 2'nin çarpma işleminde ters elemanı 3 iken, 4'ün çarpma işleminde ters elemanı kendisidir. Bunun genel olarak doğru olduğu anlaşılıyor.[8]

Gündelik hayatımızda tam sayılara ve kesir sayılara alışığız. Bazen de $\sqrt{2}$ gibi sayıları kullanırız. Ancak şu anda, tamamen farklı yapıda bir sayı sistemini keşfetmiş bulunuyoruz: p asal sayı olmak üzere, mod p aritmetiğinde toplama ve çarpma işlemlerinin yapılabildiği $\{0, 1, 2, ..., p - 1\}$ sayılarının sonlu kümesi. Bu yapıya, p elemanlı *sonlu cisim* denir. Bu sonlu cisimler, sayıların dünyasında önemli bir takımada oluşturur ama maalesef çoğumuza kimse bu sayıların varlığından bahsetmemiştir.

Bu sayı sistemi, alışkın olduğumuz sayı sistemlerinden (rasyonel sayılar gibi) çok farklı gözükmesine rağmen, aynı dikkat çekici özelliklere sahiptir: Toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerine göre kapalıdırlar.[9] Dolayısıyla, rasyonel sayılarla yapabildiğimiz tüm işlemleri daha ezoterik görünen bu sonlu cisimlerle de yapabiliriz.

Aslına bakarsanız sonlu cisimler, başta kriptografi olmak üzere önemli alanlarda uygulandıkları için artık eskisi kadar ezoterik değiller. Çevrim içi alışveriş yaparken kredi kartı numaramızı girdiğimizde bu sayı n'nin asal sayı olduğu modüler aritmetik kullanılarak şifrelenmektedir. Şifreleme yapılırken, yukarıda gördüklerimize oldukça benzeyen denklemler kullanılır. (RSA şifreleme algoritmasının tanımını, 14. Bölüm'ün 7. sonnotunda bulabilirsiniz.)

Yukarıda değindiğimiz üçüncü dereceden

$$y^2 + y = x^3 - x^2$$

denkleme geri dönelim ve çeşitli p asal sayıları için denklemin mod p aritmetiğindeki çözümlerini arayalım. Örneğin, yukarıda denklemin mod 5 aritmetiğinde 4 çözümü olduğunu gördük. Bu noktada, $p = 5$ için mod p aritmetiğindeki çözümlerin p'nin başka asal sayı değerleri aldığındaki (söz gelimi $p = 7$ ya da $p = 11$) çözümler olmayabileceğini unutmayın. Görüldüğü üzere, bu çözümler aritmetik işlemin hangi p asal sayısı için yapıldığına bağlıdır.

Şimdi, şöyle bir soru sorabiliriz: Seçtiğimiz p için mod p aritmetiğinde bu denklemin çözümlerinin sayısı p'ye nasıl bağlı olur? Küçük p değerleri için, çözümleri doğrudan sayıp (bir bilgisayardan da faydalanılabilir) küçük bir tablo oluşturabiliriz.

Matematikçiler, bu tür bir denklemin mod p aritmetiğinde çözüm sayısının aşağı yukarı p'ye eşit olduğunu bir süredir biliyorlar. Muhtemel çözüm sayısı (p diyebiliriz) ile gerçek çözüm sayısı arasındaki farkı yani "açığı" a_p ile gösterelim. Bu durumda, yukarıdaki denklemin mod p aritmetiğindeki çözüm sayısı $p - a_p$'ye eşittir. Verilen bir p değerine bağlı olarak, a_p değeri pozitif veya negatif olabilir. Örneğin yukarıda $p = 5$ değeri için 4 tane çözüm olduğunu bulduk. Bu durumda, $4 = 5 - 1$ olduğundan, $a_5 = 1$ değerini elde ederiz.

Küçük asal sayılar için a_p değerini bilgisayarda bulabiliriz. Rastgele gibi görünüyorlar. Bu değerleri hesaplayabileceğimiz herhangi bir doğal formül veya kural yokmuş gibi duruyor. İşin kötü tarafı, hesaplama çok hızlı bir biçimde karmaşık bir hâl alıyor.

Peki ya size a_p sayılarını bir kerede verecek basit bir kuralın bulunduğunu söylesem ne derdiniz?

Bu sayıları verecek basit bir "kural" ile tam olarak ne kastettiğimi merak ediyorsanız işe daha aşina olduğumuz bir sayı dizisi olan Fibonacci sayıları ile başlayalım:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

İsmini, 1202 yılında yayımladığı, tavşanların (aşağısı kurtarmazdı) çiftleşmesine dair bir problemi ele aldığı kitabında yer vererek tanın-

malarını sağlayan İtalyan matematikçiden alan Fibonacci sayıları, doğada yaygın olarak karşımıza çıkar. Çiçeklerin taç yapraklarının yerleşiminden ananasların yüzeyindeki desene kadar. Ayrıca, hisse senedi alım satımlarının teknik analizinde kullanılan "Fibonacci Düzeltme/Geri Çekilme Seviyeleri" (Fibonacci Retracement) gibi çeşitli uygulamaları da bulunur.

Fibonacci sayıları şu şekilde tanımlanır: İlk iki sayı 1'e eşit; bundan sonraki her sayı, kendisinden önceki iki Fibonacci sayısının toplamına eşit olan sayı dizisi. Örnek olarak, 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, 5 = 3 + 2 vb verilebilir. Eğer *n*'inci Fibonacci sayısını F_n biçiminde gösterirsek, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ ve

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad n > 2$$

yazabiliriz. Prensip olarak, bu kural ile herhangi bir *n* değeri için *n*'inci Fibonacci sayısını bulabiliriz. Ancak bunu yapabilmek için, ilk önce 1 ile *n* -1 arasındaki *i* için tüm F_i Fibonacci sayılarını bulmak zorundayız.

Bununla birlikte, söz konusu sayıların aşağıda gösterilen yöntem ile de oluşturulabileceği ortaya açıkmıştır. Şu diziyi ele alalım:

$$q + q(q + q^2) + q(q + q^2)^2 + q(q + q^2)^3 + q(q + q^2)^4 + \ldots$$

Sözel olarak ifade etmemiz gerekirse, *q* yardımcı değişkenini (auxiliary variable), $(q + q^2)$ ifadesinin tüm kuvvetlerinin toplamı ile çarpıyoruz. Parantezleri açtığımızda, aşağıda ilk birkaç terimini gördüğümüz sonsuz diziyi elde ederiz:

$$q + q^2 + 2q^3 + 3q^4 + 5q^5 + 8q^6 + 13q^7 + \ldots$$

Örnek olarak, q^3 ile hesaplayalım. Sadece, q, $q(q + q^2)$ ve $q(q + q^2)^2$ içinde olur. (Gerçekten de $q(q + q^2)^3$ gibi tanımlayıcı toplamda karşımıza çıkan diğer tüm ifadeler, q'nun üçten büyük kuvvetlerini içerecektir.) Bu üç terimden ilkinde q^3 yer almazken, diğer ikisinde birer tane q^3 bulunuyor. Toplamları da $2q^3$ ediyor. Dizinin diğer terimlerini de benzer biçimde elde ederiz.

Dizinin ilk terimlerini analiz ederken, 1 ile 7 arasındaki n değerleri için, q^n'nin önündeki katsayının n'inci Fibonacci sayısı F_n olduğunu gördük. Örneğin, $13q^7$ terimi için ve $F_7 = 13$'tür. Bunun tüm n değerleri için doğru olduğu görülmüştür. Bu yüzden matematikçiler bu sonsuz seriye Fibonacci sayılarının *üretici fonksiyonu* (generating function) derler.

Bu fevkalade fonksiyon, n'inci Fibonacci sayısını önce gelen Fibonacci sayılarına başvurmadan hesaplamayı mümkün kılacak etkin bir formül bulmak için kullanılabilir.[10] Hesaplama ile ilgili yönleri bir tarafa bıraksak bile, bu üretici fonksiyonun sağladığı artı değeri takdir edebiliriz. Kendisini referans alan özyineli prosedür (recursive procedure) yerine, üretici fonksiyon Fibonacci sayılarının tamamını bir kerede görür.

Üçüncü dereceden denklemin p'nin asal sayı olduğu mod p aritmetiğinde çözümlerinin sayısını belirlerken kullandığımız a_p sayılarına geri dönelim. Bu sayıları, Fibonacci sayılarının benzeri olarak düşünelim (a_p sayılarının p asal sayılarıyla, Fibonacci sayılarınınsa tüm n doğal sayılarıyla gösterildiği gerçeğini yok sayalım).

Bu sayıları üretebilecek bir kuralın var olduğuna inanmak gerçekten güç. Ne var ki Alman matematikçi Martin Eichler 1954 yılında bir tane buldu.[11] Konuyu biraz daha açmak için, aşağıdaki üretici fonksiyonu ele alalım:

$$q(1 - q)^2 (1 - q^{11})^2 (1 - q^2)^2 (1 - q^{22})^2 (1 - q^3)^2 (1 - q^{33})^2 (1 - q^4)^2 (1 - q^{44})^2 \ldots$$

Bu fonksiyon sözel olarak şöyle ifade edilebilir: $n = 1, 2, 3, \ldots$ olmak üzere; a teriminin n ve $11n$ şeklinde sıralanan sayıların listesini göstermesi kaydıyla, $(1 - q^a)^2$ biçimindeki çarpanların çarpımının q katıdır. Standart kurallara uyarak parantezleri açalım:

$$(1 - q)^2 = 1 - 2q + q^2, \qquad (1 - q^{11})^2 = 1 - 2q^{11} + q^{22}, \ldots$$

ve tüm çarpanları çarpalım. Terimleri bir araya getirdiğimizde, aşağıdaki gibi başlayan sonsuz bir toplam elde ederiz:

$$q - 2q^2 - q^3 + 2q^4 + q^5 + 2q^6 - 2q^7 - 2q^9 - 2q^{10} + q^{11} - 2q^{12} + 4q^{13} + \ldots$$

Sondaki üç nokta, kuvveti 13'ten büyük olan terimleri ifade eder. Bu sayı dizisi sonsuz olmakla birlikte, her bir katsayısı net olarak tanımlanmıştır çünkü yukarıdaki çarpımdaki birçok çarpan tarafından sonlu olarak belirlenmiştir. q^m terimlerinin önündeki katsayıyı b_m ile gösterirsek şunu elde ederiz: $b_1 = 1$, $b_2 = -2$, $b_3 = -1$, $b_4 = 2$, $b_5 = 1$, vb. Bunları elle veya bilgisayar yardımıyla kolayca hesaplayabiliriz.

Eichler hayranlık uyandıran bir sezgi ile tüm p asal sayıları için b_p katsayısının a_p katsayısına eşit olduğunu göstermiştir. Diğer bir deyişle, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$, $a_5 = b_5$, $a_7 = b_7$, vb.

Bu tespiti, $p = 5$ değeri ile sınayalım. Bunun için, q^5 teriminin önündeki katsayının $b_5 = 1$ olduğunu bulduğumuz üretici fonksiyona bakalım. Öte yandan, üçüncü dereceden denklemimizin $p = 5$ için mod p aritmetiğinde 4 çözümü olduğunu daha önceden bulmuştuk. Dolayısıyla, $a_5 = 5 - 4 = 1$ olup gerçekten de $a_5 = b_5$'tir.

Sonsuz derecede karmaşık gözüken bir problemden yola çıkmıştık. Mod f aritmetiğinde üçüncü dereceden

$$y^2 + y = x^3 - x^2$$

denkleminin, tüm p asal sayıları için çözümlerinin sayısını bulmaya çalışıyorduk. Şu anda, bu problemin çözümüne dair tüm bilgileri tek bir satıra sığdırmış bulunuyoruz:

$$q(1-q)^2(1-q^{11})^2(1-q^2)^2(1-q^{22})^2(1-q^3)^2(1-q^{33})^2(1-q^4)^2(1-q^{44})^2\ldots$$

Bu tek satır, (p tüm asal sayılar) mod p aritmetiğindeki üçüncü dereceden denklemin çözümlerinin sayısına dair tüm bilgileri içeren gizli bir koddur.

Üçüncü dereceden denklemi karmaşık bir biyolojik organizma, çözümlerini de bu organizmanın çeşitli özellikleri olarak düşünmek faydalı bir benzetme olacaktır. Biliyoruz ki bu özelliklerin hepsi DNA molekülünde kodlanmıştır. Benzer şekilde, üçüncü dereceden denklemimizin tüm karmaşıklığının da bu denklemin DNA'sı olarak görebileceğimiz bir üretici fonksiyonda kodlanmış olduğu anlaşılmaktadır. Dahası, bu fonksiyon basit bir kural ile tanımlanmıştır.

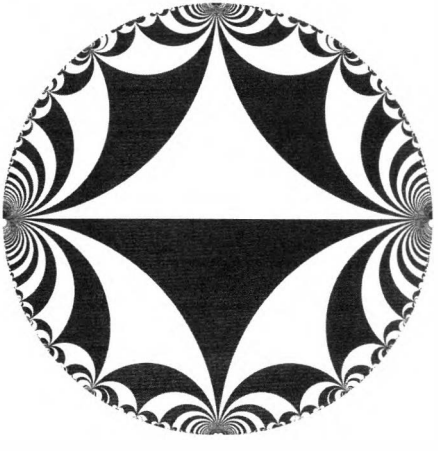
Daha şaşırtıcı olan bir başka şey ise, q mutlak değeri 1'den küçük olan bir sayı ise yukarıdaki sonsuz toplam iyi tanımlanmış bir sayıya yaklaşır. Bu şekilde, q cinsinden bir fonksiyon elde ederiz ve bu fonksiyon aşina olduğumuz sinüs ve cosinüs fonksiyonlarının periyodik olması gibi çok önemli bir özelliğe sahiptir.

$sin(x)$ biçiminde gösterdiğimiz sinüs fonksiyonunun periyodu 2π'dir yani $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ deriz. Dahası, $sin(x + 4\pi) = sin(x)$ eşitliği vardır ve daha genel olarak herhangi bir n tam sayı değeri için $sin(x + 2\pi n) = sin(x)$ deriz. Bunu şöyle de düşünebiliriz: Her n tam sayısı çizginin bir simetrisini oluşturur yani çizgi üzerindeki her x noktası $x + 2\pi n$'e kayar. Dolayısıyla, tüm tam sayılardan oluşan grup, çizginin simetrilerinin grubu olur. Sinüs fonksiyonunun periyodik olması, bu fonksiyonun bu grup altında değişmediği anlamına gelir.

Benzer şekilde, yukarıda gördüğümüz q değişkeninin Eichler üretici fonksiyonunun da belirli bir simetri grubu altında değişme-

diği anlaşılıyor. Bunu sağlamak için, q değişkeninin gerçel sayı değil karmaşık sayı olması gerekmektedir (karmaşık sayıları bir sonraki bölümde göreceğiz). Bu yüzden, q değerini sinüs fonksiyonundaki gibi çizgi üzerinde bir nokta olarak değil, karmaşık düzlem üzerindeki birim dairenin (unit disc) içinde bir nokta olarak görebiliriz. Simetri özelliği de benzer şekildedir: Bu daire üzerinde bir simetriler grubu vardır ve fonksiyonumuz da bu grup altında değişmezlik özelliği gösterir.[12] Bu şekilde değişmezlik özelliği gösteren fonksiyonlara *modüler form* (modular form) ismi verilir.

Dairenin bu simetri grubu oldukça zengindir. Bahsettiğimiz şeyin ne olduğuna dair fikir edinmek için, aşağıdaki sonsuz sayıda üçgene bölünmüş dairenin resmine bir bakalım.[13]



Simetriler bu üçgenleri birbiriyle değiştirerek daireyi etkiler. Aslında, herhangi iki üçgen için, yer değiştirmelerini sağlayan bir simetri mevcuttur. Dairenin bu simetrileri oldukça karmaşık olmakla beraber tam sayılar grubu çizgiye etki ettiğinde, simetrilerinin $[2\pi m,\ 2\pi(m+1)]$ aralıklarında hareket etme biçimine benzetilebilir. Sinüs fonksiyonu bu simetriler altında değişmezlik özelliği gösterirken, Eichler üretici fonksiyonu da dairenin simetrileri altında değişmezlik gösterir.

Bu bölümün başında da belirttiğim üzere, sinüs fonksiyonu çizginin harmonik analizinde kullanılan "harmoniğin" (temel dalga) en basit örneğidir. Benzer şekilde, Eichler fonksiyonu diğer modüler formlarla birlikte birim dairenin harmonik analizinde karşımıza çıkan harmoniklerdir.

Eichler'in hayranlık uyandıran içgörüsü, p=asal sayı olmak kaydıyla mod p aritmetiğindeki üçüncü dereceden denklemin çözümlerinin rastgele gibi görünen sayısının tek bir üretici fonksiyondan geldiğini fark etmekti. Söz konusu fonksiyon, o sayılar arasında gizli bir uyum ve düzen olduğunu açığa çıkaran mükemmel bir simetriye riayet eder. Benzer şekilde, sanki bir kara büyü çarpmış gibi, Langlands Programı da sayılar, simetriler ve denklemlerden narin bir kilim dokuyarak, daha önce erişilememiş bilgileri düzgün örüntüler içinde organize eder.

Kitabın başında matematikten ilk bahsettiğimde, matematiksel bir sonucun "güzel" veya "şık" olmasıyla ne kastettiğimi merak etmiş olabilirsiniz. Kastettiğim işte buydu. Bu ileri düzeyde soyut kavramların bu kadar zarif bir uyum ile bir araya gelmeleri, tamamen akıl almaz bir durumdur. Adeta perde kaldırılmış ve bizden özenle gizlenen gerçekliği bir an için görmüşüz gibi, yüzeyin altına gizlenmiş zengin ve gizemli bir şeyi işaret eder. Bunlar, modern matematiğin ve modern dünyanın harikalarıdır.

İçsel bir güzelliğe sahip olmanın ve matematiğin birbirinden çok uzak görünen alanları arasında hayret verici bir bağlantı kurmasının yanı sıra bu sonucun herhangi bir pratik uygulamasının bulunup bulunmadığı sorusu da akıllara gelebilir. Bu, yerinde bir sorudur. Şu anda, benim bildiğim herhangi bir uygulama yok. Bununla birlikte, yukarıda gördüğümüz türden p elemanlı sonlu cisimler üzerindeki üçüncü dereceden denklemler (eliptik eğrileri ortaya çıkaran), kriptografide yaygın olarak kullanılmaktadır.[14] Bu yüzden, Eichler'in bulduğu sonucun benzerleri de bir gün kriptografi algoritmaları kadar güçlü ve yaygın uygulama alanları bulursa hiç şaşırmam.

Shimura-Taniyama-Weil sanısı, Eichler'in sonucunun bir genellemesidir. Yukarıda gördüğümüze benzeyen üçüncü dereceden *herhangi* bir denklem (bazı basit koşullara tabi olan) için, p asal sayı olmak kaydıyla mod p aritmetiğindeki çözümlerinin sayısının modüler formun katsayıları olduğunu ifade etmektedir. Dahası, üçüncü dereceden denklemler ile belirli türdeki modüler formlar arasında bire bir eşleme söz konusudur.

Burada, "bire bir eşleme" ile ne kastediyorum? Beş adet tükenmez kalem ile beş adet kurşun kalemimiz olduğunu varsayalım. Tükenmez kalemlerin her birini kurşun kalemlerden biri ile, her bir tükenmez kalem sadece tek bir kurşun kalem ile eşleşecek şekilde eşleyebiliriz. Buna bire bir eşleme denir.

Bunu yapmanın birçok farklı yolu vardır. Bizim bire bir eşlememizde, her bir tükenmez kalemin eşleştiği kurşun kalemle aynı uzunlukta olduğunu varsayalım. Bu şartlar altında, kalem uzunluğuna "sabit" ismini vereceğiz ve bizim eşlememizin bu "sabit"i koruduğunu söyleyeceğiz. Eğer tüm tükenmez kalemler farklı uzunluğa sahip ise bire bir eşleme sadece bu özellikle belirlenecektir.

Şimdi, STW sanısında, bir taraftaki cisimler yukarıda gördüğümüze benzer üçüncü dereceden denklemlerdir. Bunlar bizim tükenmez kalemlerimiz olup, her biri için a_p sayıları onlara bağlanmış sabitler olacak. (Bunu kalem uzunluğu gibi düşünebilirsiniz fakat burada tek bir sabit değil, p asal sayılarının tanımladığı topluluğun tamamı söz konusudur.)

Eşlemenin diğer tarafındaki cisimler ise modüler formlardır. Bunlar bizim kurşun kalemlerimiz olup, her biri için b_p katsayıları onlara bağlanmış sabitler olacak (kurşun kalemin uzunluğu gibi).

STW sanısı, bu cisimler arasında bu sabitleri koruyan bire bir bir eşleme bulunduğunu söyler:

Üçüncü dereceden denklemler $\{a_p$ çözümlerin sayıları$\}$	$\longleftrightarrow$	modüler formlar $\{b_p$ katsayıları$\}$

Bunu şu şekilde ifade edebiliriz: Herhangi bir üçüncü dereceden denklem için tüm p asal sayıları için $a_p = b_p$ koşulunu ve tersini sağlayan bir modüler form bulunur.[15]

Şimdi, STW sanısı ile Fermat'nın Son Teoremi arasındaki bağlantıyı açıklayabilirim: Fermat denkleminin bir çözümünden yola çıkarak üçüncü dereceden belirli bir denklem oluşturabiliriz.[16] Bununla birlikte, Ken Ribet, p asal sayı olmak kaydıyla mod p aritmetiğindeki bu üçüncü dereceden denklemlerin çözümlerinin sayısının var olması, STW sanısı tarafından şarta bağlanan bir modüler formun katsayıları olamayacağını göstermiştir. Bu sanı ispatlandığında, böyle bir üçüncü dereceden denklemin olamayacağı sonucuna varırız*. Bu yüzden, Fermat denkleminin çözümü yoktur.

Shimura-Taniyama-Weil sanısı, hayret uyandıran bir sonuçtur, çünkü a_p sayıları p asal sayı olmak kaydıyla mod p aritmetiğindeki bir denklemin çözümünün incelenmesinden ortaya çıkar; modüler formun katsayıları olan b_p sayıları ise harmonik analiz dünyasından gelir. Bu iki dünya, birbirlerinden ışık yılı kadar uzak görünse de, ikisinin tek ve aynı şeyi tanımladıkları ortaya çıkmıştır.

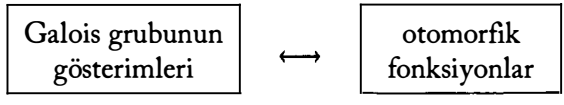
Shimura-Taniyama-Weil sanısı, Langlands Programı'nın özel bir durumunun yeniden düzenlenmiş hâli olabilir. Bunun yapmak için, Shimura-Taniyama-Weil sanısında ortaya çıkan üçüncü dereceden denklemlerin her birinin yerine Galois grubunun belirli bir iki boyutlu gösterimini koyarız. Bu gösterim, doğal olarak üçüncü dereceden denklemden elde edilir ve a_p sayıları (üçüncü dereceden denklemden ziyade) bu gösterime doğrudan bağlanabilir. Dolayısıyla bu sanı, Galois grubunun iki boyutlu gösterimleri ile modüler formlar arasındaki ilişki olarak ifade edilebilir.

(İkinci Bölüm'de; bir grubun iki boyutlu gösterimlerinin bu grubun her bir elemanına iki boyutlu uzayın (yani düzlemin) bir

* Shimura-Taniyama-Weil sanısı ispatlanmıştır ve dolayısıyla artık bir teoremdir, ancak adını veren tarihi şahsiyetlerden dolayı hâlâ sanı denmektedir.—ed.n.

simetrisini atayan bir kural olduğunu görmüştük. Örnek olarak, çember grubunun iki boyutlu gösterimi üzerinde durmuştuk.)

Daha da genel olarak ifade etmek gerekirse, Langlands Programı'nın sanıları, hiç beklenmedik ve derinlikli bir biçimde Galois grubunun n-boyutlu gösterimleri (Shimura-Taniyama-Weil sanısındaki üçüncü dereceden denklemlere karşılık gelen iki boyutlu gösterimleri genelleştirirler) ile *otomorfik fonksiyonlar* (Shimura-Taniyama-Weil sanısındaki modüler formları genelleştirirler) adındaki yapılar arasında bağlantı kurarlar:



Bu sanıların doğruluğundan pek şüphe edilmese de, son 45 yılda birkaç nesil matematikçinin yoğun çabalarına rağmen çoğu henüz ispatlanamamıştır.

Bir kişinin bu tür sanıları ilk olarak nasıl ortaya çıkarabildiğini merak ediyor olabilirsiniz.

Bu tamamen matematiksel sezginin doğası ile alakalı bir sorudur. Daha önce kimsenin göremediği örüntü ve bağlantıları görebilmek, kolayca edinilebilecek bir beceri değildir. Çoğunlukla, aylar, hatta belki yıllarca çok çalışmanın ürünüdür. Yeni bir olgunun ya da teorinin ipuçları yavaş yavaş görünmeye başlar ve ilk başta buna kendiniz de inanmazsınız ama sonra "Ya doğruysa?" dersiniz. Örnek hesaplar yaparak fikrinizi test etmeye çalışırsınız. Bazen bu hesaplar çok zor olur ve ağır formül yığınları arasında yolunuzu bulmanız gerekir. Hata yapma ihtimaliniz çok yüksektir, ilk seferde işe yaramazsa tekrar tekrar deneyerek yeniden yapmaya çalışırsınız.

Muhtemelen, günün (ay veya yıl da olabilir) sonunda, başlangıçtaki fikrinizin yanlış olduğunu ve başka bir şey denemeniz gerektiğini

fark edersiniz. Bunlar, hüsran ve çaresizlik dolu anlardır. Çok fazla zamanın boşa gittiğini ve elinizde gösterecek hiçbir şey olmadığını hissedersiniz. Bunu hazmetmek zordur ama asla pes edemezsiniz. Yazı tahtasının başına geri döner, daha fazla veriyi analiz eder, önceki hatalarınızdan öğrendiklerinizle beraber daha iyi bir fikir ortaya çıkarmaya çalışırsınız ve nadiren de olsa bazen bir anda fikriniz işe yarar. Sörf yapabilmek için netice alamadan uğraşıp durduğunuz bir günün sonunda, nihayet bir dalga yakalamak gibidir: Üzerinde ayağa kalkıp, mümkün olduğunca uzun gitmeye çalışırsınız. Öyle anlarda, hayal gücünüzü serbest bırakmanız ve dalganın sizi alıp götürmesine müsaade etmeniz gerekir. Fikir başlangıçta ne kadar çılgınca gözüküyor olursa olsun.

Shimura-Taniyama-Weil sanısının ifadesi, başlangıçta yaratıcılarına da çılgınca görünmüş olmalı. Aksi mümkün mü? Evet, sanının kökleri, Eichler'in yukarıda ele aldığımız çalışmaları gibi (bunlar daha sonra Shimura tarafından genelleştirildi) önceki sonuçlara uzanıyordu; örneğin üçüncü dereceden *bazı* denklemler için, mod p aritmetiğindeki çözümlerin sayısının modüler formun katsayılarında kayıtlı olduğunu gösterdiler. Ancak bunun üçüncü dereceden *tüm* denklemler için geçerli olduğu fikri, o zamanlar büsbütün sıradışı görünmüş olmalı. Hiçbir kanıta dayanmayan bu inanç, ilk olarak Japon matematikçi Yutaka Taniyama tarafından bir soru şeklinde ortaya kondu. Taniyama, 1955 yılı Eylül ayında Tokyo'da gerçekleştirilen Uluslararası Cebirsel Sayı Teorisi Sempozyumu'nda konuyu gündeme getirmişti.

Hep merak etmişimdir: Taniyama'yı bu fikrin saçma değil de gerçek olduğuna *inandıran* neydi? Fikrini uluorta açıklama cesaretini veren neydi?

Bu soruların cevabını hiçbir zaman öğrenemeyeceğiz. Maalesef Taniyama, büyük keşfinden kısa bir süre sonra, Kasım 1958'de intihar etti. Henüz 31 yaşındaydı. Evlenmeyi planladığı kadının da arkasında şu notu bırakarak canına kıyması, trajediyi daha da büyüttü:

> Nereye gidersek gidelim, asla ayrılmayacağımıza dair birbirimize söz verdik. Şimdi o gitti ve ben de ona kavuşmak için gitmek zorundayım.

Sanı, Taniyama'nın dostu ve iş arkadaşı olan bir diğer Japon matematikçi Goro Shimura tarafından daha kesin bir hâle getirildi. Shimura, kariyerinin büyük bir kısmında Princeton Üniversitesi'nde çalıştı ve bugün de emekli öğretim üyesi olarak hâlâ orada görevli. Matematiğe çoğu Langland Programı ile alakalı çok kıymetli katkılar yapmıştır ve bu alandaki birçok temel kavram ("Eichler-Shimura kongrüans bağıntıları" (congruence relations) ve "Shimura varyasyonları" gibi) onun adını taşımaktadır.

Shimura, Taniyama hakkında yazdığı özenli denemesinde, şu dikkat çekici yorumda bulunmuştur:[18]

> Hiçbir şekilde dikkatsiz bir tip olmamakla birlikte, çok hata yapmak gibi özel bir yeteneği vardı ve bu hataların çoğu da genellikle doğru yöndeydi. Bunun için ona özenir ve beyhude bir şekilde onu taklit etmeye çalışırdım ama güzel hatalar yapmak bana hep çok zor gelirdi.

Shimura'ya göre, Taniyama Eylül 1955'te Tokyo'da gerçekleştirilen sempozyumda "problemini ifade ederken çok dikkatli değildi".[19] Bazı düzeltmeler yapılması gerekiyordu. Ancak yine de devrim niteliğindeki bu sezgi, bizleri yirminci yüzyılın matematik alanındaki en kayda değer başarılardan birine götürdü.

İsmi sanıda geçen üçüncü kişi ise, daha önce de bahsettiğimiz André Weil'dir. Kendisi, yirminci yüzyılın matematik devlerinden birisidir. Parlak zekâsı kadar huysuzluğuyla da tanınan Weil, Fransa'da doğmuş ve İkinci Dünya Savaşı esnasında Amerika Birleşik Devletleri'ne gelmişti. Çeşitli Amerikan üniversitelerinde akademik görevlerde bulunduktan sonra, Princeton'daki İleri

Araştırmalar Enstitüsü'ne yerleşmiş ve 1998 yılında, 92 yaşında ölene kadar da burada kalmıştır.



André Weil, 1981. Fotoğraf: Herman Landshoff. Kaynak: Shelby White ve Leon Levy Arşiv Merkezi, İleri Araştırmalar Enstitüsü, Princeton, NJ.

Weil'in, Langlands Programı'na özel bir ilgisi vardı. Bunun sebebi, Robert Langlands'ın fikirlerini ilk olarak formüle ettiği meşhur mektubu ona göndermesi ya da Shimura-Taniyama-Weil sanısı değildi. Langlands Programı en iyi André Weil'in kız kardeşine yolladığı bir mektupta ana hatlarını çizdiği matematiğin "büyük resmi" prizmasından bakılarak görülür. Bu konuyu, bir sonraki bölümde ele alacağız. Bu, Langlands Programı'nı geometri dünyasına taşırken bizim sıçrama taşımız olacak.

9. Bölüm:

Reşid Taşı

André Weil, savaş sırasında askerlik görevini yapmayı reddettiği için, 1940 yılında Fransa'da tutuklandı. *The Economist*'te yayınlanan ölüm ilanında şöyle deniyordu:[1]

> "Fedakârlık karşısında yolundan sapmış bir eşitlik fikri" ülkenin seçkin genç bilim insanlarının kıyımına yol açtığında Birinci Dünya Savaşı'nın Fransa'da matematiğe verdiği ağır hasar... [Weil'i] derinden sarsmıştı. Bunun etkisiyle, sadece kendisi için değil tüm uygarlık adına bir görevi olduğuna, hayatını matematiğe adaması gerektiğine inandı. Aslında, konudan sapmasına izin vermesinin bir günah olduğunu ileri sürdü. Başkaları, "ya herkes senin gibi davranırsa..." diye itiraz ettiklerinde, bu olasılığın onu dikkate almak zorunda hissetmediği kadar mantıksız göründüğünü söyleyerek cevap verdi.

Weil hapisteyken, kız kardeşi ünlü felsefeci ve hümanist Simone Weil'e bir mektup yazdı. Matematiğin "büyük resmini" nasıl gördüğünü gayet basit ifadelerle (felsefecilerin dahi anlayabileceği şekilde —şaka yapıyorum!) açıklamaya çalıştığı bu mektup, önemli

bir belge niteliğindedir. Bu sayede, tüm matematikçilerin feyz alabileceği şahane bir örnek ortaya koydu. Bazen, belki de önde gelen matematikçilerin bazılarını hapse atıp düşüncelerini tıpkı Weil'in yaptığı gibi anlaşılabilir şekilde ifade etmeye zorlamamız gerektiğini yönünde takılırım insanlara.

Weil mektubunda benzerliğin matematikteki rolüne değiniyor ve bunu kendisini en çok ilgilendiren, sayı teorisi ile geometri arasındaki benzerlikle gösteriyordu.

Bu benzerlik, Langlands Programı'nın gelişimi açısından çok önemli olduğunu kanıtladı. Daha önce de tartıştığımız üzere, Langlands Programı'nın kökleri sayı teorisine uzanır. Langlands, sayı teorisinin zorlu sorularının (p asal sayı olmak kaydıyla mod p aritmetiğindeki denklemlerin çözümlerinin sayılması gibi) harmonik analiz yöntemleri (daha belirli olarak otomorfik fonksiyonların incelenmesi) kullanılarak çözülebileceğini varsayıyordu. Bu heyecan vericidir çünkü ilk olarak, daha önce zorlu gibi görünen problemleri çözmek için bize yeni bir yol sunar. İkinci olarak ise matematiğin farklı alanları arasındaki derin ve temel bağlantılara işaret eder. Çok doğal olarak, burada gerçekten neler olup bittiğini bilmek istiyoruz: Bu gizli bağlantıların var olma sebebi ne olabilir? Hâlen daha tam olarak kavrayabilmiş değiliz. Shimura-Taniyama-Weil sanısının çözülmesi bile çok uzun zaman aldı. Kaldı ki STW sanısı, genel Langlands varsayımlarının sadece özel bir hâlidir. Henüz ispatlanmamış yüzlerce, hatta binlerce benzer ifade bulunmaktadır.

Öyleyse bu zor sanılara karşı nasıl bir yaklaşım sergilemeliyiz? Olası yollardan bir tanesi, sıkı çalışmaya devam edip, yeni fikir ve içgörüler ortaya koymayı denemektir. Bu bir süredir yapılıyor ve önemli ilerlemeler kaydedildi. Diğer olasılık ise Langlands Programı'nın kapsamını genişletmeye çalışmaktır. Sayı teorisi ve harmonik analizdeki bazı temel yapılara ve bunların arasındaki bağlantılara işaret ettiğinden, matematiğin diğer alanları arasında da benzer yapılar ve bağlantılar bulunabilir.

Yapılması gerekenin de bu olduğu ortaya çıkmıştır. Geometri gibi matematiğin farklı alanlarında ve hatta kuantum fiziğinde de aynı gizemli örüntüler gözlenebileceği zamanla fark edildi. Biz bu örüntülere dair bir şey öğrendiğimizde, bunların başka alanlardaki anlamlarına dair ipuçları elde ederiz. Langlands Programı'nın, matematiğin Büyük Birleşim Teorisi olduğunu daha önce belirtmiştim. Burada, Langlands Programı'nın bazı evrensel olgulara ve matematiğin farklı alanlarında bu olgular arasındaki bağlantılara işaret ettiğini kastediyorum. Ben bunun matematiğin gerçekte neyle ilgili olduğunu Langlands varsayımlarının çok ötesinde anlamanın yolunu açacağına inanıyorum.

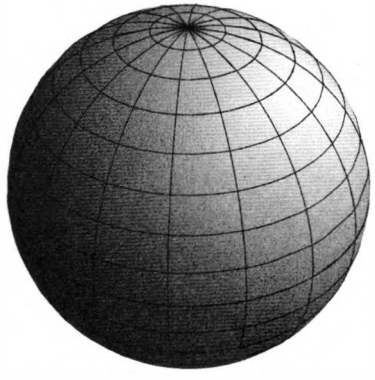
Langlands Programı günümüzde çok geniş bir konudur. Sayı teorisi, harmonik analiz, geometri, gösterim teorisi, matematiksel fizik gibi farklı alanlarda çalışan geniş bir camia bulunmaktadır. Çok farklı konular üzerine çalışıyor olsalar da hepsi de benzer olguları gözlemliyorlar. Bu olgular da bize tıpkı dev bir yapbozun parçaları gibi birbirlerinden oldukça uzak olan bu alanların birbirlerine nasıl bağlı olduklarını anlamamızı sağlayacak ipuçları sunuyor.

Langlands Programı'na giriş noktam, ileride ayrıntılı olarak anlatacağım Kac-Moody cebirleri üzerine yaptığım çalışmalar oldu. Ancak Langlands Programı hakkında daha çok bilgi sahibi oldukça matematik içerisinde o denli sık yer almasından daha da etkilendim.

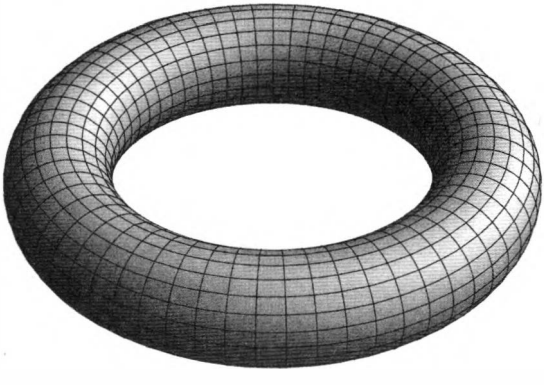
Matematiğin farklı alanlarını birer lisan olarak düşünün. Elimizde bu lisanlarda aynı anlama geldiğini düşündüğümüz cümleler var. Bunları yanyana koyuyoruz ve matematiğin farklı alanları arasında çeviri yapmamızı mümkün kılan bir sözlüğü yavaş yavaş oluşturmaya başlıyoruz. André Weil, sayı teorisi ile geometri arasındaki bağlantıların anlaşılması için uygun bir çerçeve sundu; buna modern matematiğin bir tür "Reşid Taşı" diyebiliriz.

Bir tarafta sayı teorisinin nesneleri var: rasyonel sayılar ve bir önceki bölümde ele aldığımız diğer sayı cisimleri ($\sqrt{2}$ ekleyerek elde ettiklerimiz ve onların Galois grupları gibi).

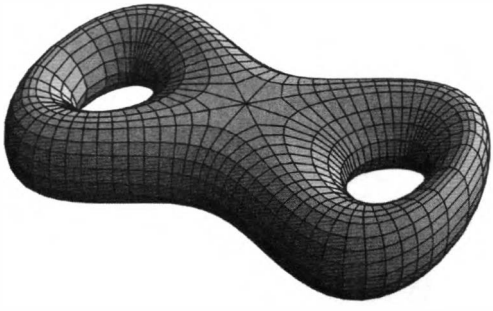
Diğer tarafta ise, Riemann ismiyle anılan yüzeyler var. Bunun en basit örneği küredir.[2]



Verebileceğimiz bir diğer örnek ise, simidin dış yüzeyidir (torus). Simidin *dış yüzeyini* ele aldığımızı ve iç kısmı ile ilgilenmediğimizi vurgulamak isterim.



Ele alabileceğimiz bir diğer örnek ise, aşağıdaki resimde gösterilen ve bir tür Danimarka böreğini (ya da bir krakerin dış yüzeyini) andıran şekildir.



Simidin tek bir "deliği" varken, Danimarka böreğinin iki "deliği" vardır. Ayrıca $n = 3, 4, 5$ olmak üzere, n değeri kadar deliğe sahip yüzeyler de bulunur. Matematikçiler delik sayısına Riemann yüzeyinin *cinsi* ismini verirler.* Bu ifade, on dokuzuncu yüzyılda yaşamış Alman matematikçi Bernhard Riemann'a atfen kullanılmaktadır. Riemann'ın çalışmaları, matematikte bazı önemli yollar açmıştır. Riemann'ın eğri yüzeyler teorisi (günümüzde Riemann geometrisi olarak anılmaktadır) Einstein'ın genel görelilik teorisinin köşe taşıdır. Einstein'ın denklemleri, yerçekimi kuvvetini uzay-zamanın eğriliğini ifade eden Riemann tensörü cinsinden açıklar.

İlk bakışta, sayı teorisi ile Riemann yüzeyleri arasında herhangi bir ortak nokta yokmuş gibi görünür. Fakat birçok benzerlikleri olduğu anlaşılmıştır. Buradaki kilit nokta, ikisi arasında bir başka cisim sınıfı olmasıdır.

Bunu anlayabilmek için, Riemann yüzeylerinin cebirsel bir denklemle tanımlanabildiklerini anlamamız gerekiyor. Örnek olarak aşağıdaki gibi yine üçüncü dereceden bir denklemi ele alalım:

$$y^2 + y = x^3 - x^2.$$

* Editörüm, evinin yakınındaki bir barda yapılan krakerlerin cinsinin 3 olduğunu söylüyor (lezzetlilermiş).

Daha önce de değindiğimiz üzere, böyle bir denklemin çözümünden bahsederken hangi sayı sistemine ait olduklarını belirtmemiz gerekir. Bu noktada birçok seçenek söz konusudur ve farklı seçenekler farklı matematiksel teorilere yol açar.

Bir önceki bölümde, asal sayı modundaki çözümleri ele aldık ve bu, teorilerin sadece bir tanesidir. Ancak *karmaşık sayılar* için de çözümler arayabiliriz. Bu da farklı bir teoridir ve Riemann yüzeylerini gündeme getirir.

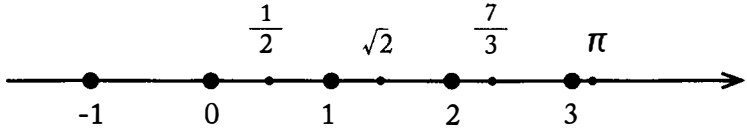
İnsanlar genellikle karmaşık sayılara sanki inanılmaz derecede zor cisimlermiş gibi gizemli denilebilecek nitelikler atfederler. İşin aslı, bir önceki bölümde 2'nin karekökünü anlamaya çalışırken değindiğimiz sayılardan daha karmaşık değillerdir.

Açıklayayım. Bir önceki bölümde, rasyonel sayılara $x^2 = 2$ denkleminin iki çözümünü ($\sqrt{2}$ ve $-\sqrt{2}$) ekledik. Şimdiyse, $x^2 = 2$ denklemi yerine $x^2 = -1$ denklemini ele alalım. Bir öncekinden daha mı karmaşık gözüküyor? Hayır. Rasyonel sayılar kümesinde bir çözümü yok ama bundan korkacak değiliz. Bu denklemin iki çözümünü rasyonel sayılara ekleyelim. Onları $\sqrt{-1}$ ve $-\sqrt{-1}$ olarak ifade edelim. Bu değerler, $x^2 = -1$ denklemini çözerler; şöyle ki:

$$\sqrt{-1}^2 = -1, \qquad (-\sqrt{-1})^2 = -1.$$

Bir önceki örnekle arasında sadece ufak bir fark var. $\sqrt{2}$ sayısı, rasyonel sayı değil ancak bir *gerçel* sayıdır; dolayısıyla onu rasyonel sayılara ekleyerek gerçel sayılar âleminden çıkmayız.

Gerçel sayıları geometrik olarak aşağıdaki gibi düşünebiliriz. Bir çizgi çizelim ve üzerine 0 ve 1 sayılarını gösteren iki nokta koyalım. Sonra 1'in sağında, 0 ile 1 arasındakine eşit uzunluktaki yere bir nokta koyalım ve bu nokta 2'yi göstersin. Diğer tüm tam sayıları benzer şekilde gösterelim. Daha sonra, tam sayıları gösteren noktalar arasındaki aralıkları bölerek rasyonel sayıları işaretleyelim. Örneğin $\frac{1}{2}$ sayısı 0 ile 1'in tam ortasıdır; $\frac{7}{3}$ sayısı 2 ile 3 arasındaki mesafenin üçte biridir vs. Bu durumda, gerçel sayılar sezgisel olarak bu çizgi üzerindeki bütün noktalarla bire bir eşleme hâlindedir.[3]



Hatırlarsanız, $\sqrt{2}$ sayısıyla dik kenarlarının uzunluğu 1'e eşit olan dik üçgenin hipotenüsünün uzunluğu olarak karşılaşmıştık. Dolayısıyla, gerçel sayılar çizgisi üzerinde $\sqrt{2}$'yi işaretlemek için, 0'ın sağında 0'a uzaklığı bu hipotenüsün uzunluğuna eşit noktayı buluruz. Benzer şekilde, bu çizgi üzerinde, çapı 1 olan bir çemberin çevre uzunluğuna karşılık gelen π'yi de işaretleyebiliriz.[4]

Öte yandan, $x^2 = -1$ denkleminin ne rasyonel sayılar ne de gerçel sayılar arasında bir çözümü vardır. Aslında herhangi bir gerçel sayının karesi ya pozitif ya da 0 olmalıdır; yani -1'e eşit olamaz. Dolayısıyla, $\sqrt{2}$ ve $-\sqrt{2}$'den farklı olarak, $\sqrt{-1}$ ve $-\sqrt{-1}$ sayıları gerçel sayılar değildir. Peki ya nedirler? Aynı süreci izleyip, onları da tıpkı $\sqrt{2}$ ve $-\sqrt{2}$ sayılarını gösterdiğimiz şekilde gösteririz. Bu yeni sayılarla aritmetik yapmak için de aynı kuralları kullanırız.

Daha önce nasıl kanıtlamaya çalıştığımızı bir hatırlayalım: $x^2 = 2$ denkleminin rasyonel sayılar arasında bir çözümü olmadığını fark ettik. Bu yüzden, bu denklemin iki çözümünü yarattık, bunlara $\sqrt{2}$ ve $-\sqrt{2}$ dedik. Ardından, bunları rasyonel sayılara ekleyerek yeni bir sayısal sistem oluşturduk (ve adını "sayı cismi" koyduk). Benzer şekilde, $x^2 = -1$ denklemini ele alalım ve bunun da rasyonel sayılar arasında çözümü olmadığını hemen not düşelim. Bu durumda, bu denklemin iki çözümünü *yaratalım,* bunları $\sqrt{-1}$ ve $-\sqrt{-1}$ olarak gösterelim ve rasyonel sayılara ekleyelim. Gördüğünüz gibi, tamamen aynı prosedür! Yeni sayısal sistemin $\sqrt{2}$'li eski sayısal sistemimizden daha karmaşık bir şey olduğunu neden düşünelim ki?

Sebebi tamamen psikolojik: $\sqrt{2}$'yi, bir dik üçgenin kenarlarından birisinin uzunluğu olarak gösterebiliyorken, $\sqrt{-1}$ için bu kadar bariz bir gösterim bulunmamaktadır. Ancak $\sqrt{-1}$ sayısını cebirsel olarak en az $\sqrt{2}$ kadar etkin bir biçimde maniple edebiliriz.

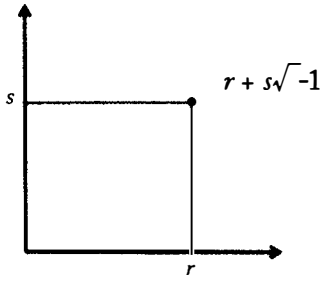
$\sqrt{-1}$'i rasyonel sayılara ekleyerek elde ettiğimiz yeni sayısal sistemin elemanlarına karmaşık sayılar denir. Bu sayıların her birini, r ve s rasyonel sayı olmak üzere, şu şekilde yazabiliriz:

$$r + s\sqrt{-1}.$$

Bu formülü, $\sqrt{2}$ ekleyerek elde ettiğimiz sayısal sistemin genel elemanlarını ifade eden, 108. sayfadaki formül ile karşılaştırın. Bu biçimdeki herhangi iki sayıyı toplamak için r-kısımları ile s-kısımlarını ayrı ayrı toplarız. Ayrıca, parantezleri açarak ve $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = -1$ gerçeğinden hareketle, bu türden iki sayıyı çarpabiliriz. Benzer şekilde, bu sayıları çıkarabilir veya bölebiliriz.

Son olarak, yukarıdaki formülde r ve s sayılarının rastgele gerçel sayılar (yani sadece rasyonel sayılar değil) olmalarına izin vererek, karmaşık sayılar tanımını genişletebiliriz. Bu durumda en genel karmaşık sayıları elde ederiz. Burada, $\sqrt{-1}$'in genellikle i harfi (İngilizce'de "sanal" anlamına gelen "imaginary" kelimesinden hareketle) ile gösterildiğini de belirtelim. Fakat ben, bu sayının cebirsel anlamını vurgulayabilmek adına bunu yapmamayı tercih ediyorum: Bu sayı gerçekten de sadece -1'in karekökü dür; ne daha fazlası ne de daha azıdır. En az 2'nin karekökü kadar somuttur; gizemli bir tarafı yoktur.

Bu sayıların ne kadar somut olduğunu onları geometrik olarak göstererek anlayabiliriz. Gerçel sayılar bir çizginin noktaları şeklinde geometrik olarak gösterilebilirken, karmaşık sayılar bir düzlemin noktaları şeklinde gösterilebilir. Şöyle ki, $r + s\sqrt{-1}$ karmaşık sayısını, düzlem üzerinde koordinatları r ve s olan bir nokta olarak gösteririz:[5]



Üçüncü dereceden

$$y^2 + y = x^3 - x^2$$

denklemimize geri dönelim ve karmaşık sayılar olan x ile y çözümlerini bulmaya çalışalım.

Bu tür çözümlerin oluşturduğu kümenin tam olarak yukarıda çizimini gördüğümüz simidin dış yüzeyindeki (torus) noktalarının meydana getirdiği küme olması dikkat çekicidir. Diğer bir deyişle, simidin dış yüzeyi üzerindeki noktaların her biri, yukarıdaki üçüncü dereceden denklemi çözen sadece tek bir x, y karmaşık sayı çiftine karşılık gelebilir ve bunun tersi de doğrudur.[6]

Karmaşık sayılar üzerine daha önce hiç kafa yormadıysanız bu aşamada kafanız karışmaya başlamış olabilir. Bu çok doğal bir durum. Tek bir karmaşık sayıyı anlamak bile yeterince zorken, bazı denklemlerin çözümünü veren bir karmaşık sayı çiftinin kafanızı karıştırması gayet normaldir. Bu çiftlerin hepsinin simidin dış yüzeyindeki noktalarla bire bir eşleme hâlinde olması, çok bariz olarak gözlemlenebilecek bir olgu değildir. Bu yüzden, bunun nasıl mümkün olduğunu göremiyorsanız endişelenmeyin. Aslına bakarsanız birçok profesyonel matematikçi, bu şaşırtıcı ve bariz olmayan sonucu ispat etmekte zorlanır.[7]

Cebirsel denklemlerin çözümlerinin geometrik şekiller meydana getirebildiğine ikna olabilmek için daha basit bir duruma bakalım: Karmaşık sayılar yerine gerçel sayılar üzerinden bulunan çözümler. Örneğin,

$$x^2 + y^2 = 1$$

denklemini ele alalım ve bulduğumuz çözümleri bir düzlem üzerinde koordinatları x ve y olan noktalar şeklinde işaretleyelim. Bu eşitliğin tüm çözümlerinden oluşan küme, merkezi orijinde bulunan ve yarıçap uzunluğu 1 olan çemberdir. Benzer şekilde, iki *gerçel* değerli değişkenden (x ve y) oluşan diğer cebirsel denklemlerin çözümleri bu düzlem üzerinde bir eğri meydana getirir.

Karmaşık sayılar, bir anlamda, gerçel sayıların çiftleridir (gerçekten de her karmaşık sayı bir gerçel sayı çifti tarafından belirlenir). Dolayısıyla, *karmaşık* değerli değişkenlerden (x ve y) oluşan bir cebirsel denklemin çözümlerinin bir Riemann yüzeyi oluşturması hiç de şaşırtıcı değildir. (Bir eğri tek boyutlu, bir Riemann yüzeyiyse iki boyutludur. Ayrıntısını 10. Bölüm'de inceleyeceğiz.)

Bu tür denklemlerin gerçel ve karmaşık sayı çözümlerine ek olarak, bu denklemlerin (p asal sayı olmak kaydıyla) {0 ,1, 2, ..., p-2, p-1} sonlu cismi içinde değerler alan x, y çözümlerini de bulmaya çalışabiliriz. Bunun anlamı şudur: x ve y'yi yukarıdaki üçüncü dereceden denklemlere yerleştirdiğimizde sağ ve sol taraflar, p'nin tam sayı katlarına kadar birbirine eşit olan tam sayılar olacaktır. Bu bize matematikçilerin "sonlu cisim üzerindeki eğri" adını verdikleri bir nesne verir. Tabii ki bunlar gerçek eğriler değildir. Terminolojinin bu şekilde olması, gerçel sayılar içinde çözümler aradığımızda düzlem üzerinde eğriler elde etmemizden kaynaklanır.[9]

Weil güçlü sezgisi ile buradaki en temel öğenin yukarıdaki üçüncü dereceden denklem gibi cebirsel denklem olduğunu görmüştür. İçinde denklemin çözümünü bulmaya çalıştığımız tanım kümesinin seçimine bağlı olarak, aynı denklem ya bir yüzey ya bir eğri ya da nokta demeti meydana getirir. Bunlar tanımlanamayan bir varlığın (yani denklemin kendisi), *avatarlar*ından başka bir şey değildir; tıpkı Hinduizm inancında, Vişnu'nun on adet avatarı ya da enkarnasyonu olduğu gibi. André Weil de kız kardeşine yazdığı mektupta, rastlantısal bir şekilde *Bhagavad Gita*'yı hatırlatmıştı.[10] Hinduizm'in bu kutsal kitabının Vişnu'nun avatarları öğretisini ilk

kez ortaya koyduğuna inanılmaktadır.[11] Weil, iki teori arasındaki benzerliğin ipucunun somut bilgi birikimine dönüştüğünde neler olduğunu şiirsel bir üslupla yazmış:[12]

> İki teori gitti, yarattıkları sorunlar ve birbirleri üzerindeki hoş yansımaları, sinsi okşayışları, açıklanamaz çekişmeleri gitti; yazık, elimizde sadece büyüleyici güzelliği bizi daha fazla heyecanlandıramayacak tek bir teori kaldı. Hiçbir şey, bu yasak ilişkilerden daha bereketli olamaz; hiçbir şey erbabına daha fazla haz veremez... Keyif yanılsamadan ve duyuların tutuşmasından geliyor; yanılsama ortadan kalktığında ve bilgi birikimi kazanıldığında umursamaz oluruz; birliğe kavuşuruz; *Gita*'da bu etkiye dair kolay anlaşılabilen bazı dizeler var. Ama biz cebirsel fonksiyonlara geri dönelim.

Sonlu cisimler Riemann yüzeyleri ile eğriler arasındaki ilişki artık daha net olmalı: Her ikisi de aynı tür denklemlerden geliyor ama biz çözümlerini farklı tanım kümelerinde (sonlu cisimlerde ya da karmaşık sayılarda) arıyoruz. Öte yandan, Weil'in mektubunda belirttiği biçimiyle "sayı teorisine ait herhangi bir iddia ya da sonuç", sonlu cisimler üzerindeki eğrilere "kelime kelime tercüme edilebilir".[13] Bu nedenle Weil'e göre, sonlu cisimler üzerindeki eğriler, sayı teorisi ile Riemann yüzeyleri arasında aracılık eden cisimlerdir.

Böylelikle, sayı teorisi ile Riemann yüzeyleri arasında bir köprü ya da Weil'in ifade ettiği biçimiyle bir "demiryolu makası" buluruz. Diğer bir deyişle, üç adet paralel rayımız ya da sütunumuz bulunuyor:

Sayı Teorisi *Sonlu Cisimler Üzerindeki Eğriler* *Riemann Yüzeyleri*

Weil bundan şu şekilde faydalanmak istemişti: Üç sütundaki ifadelerden birisini alın ve onu diğer sütunlardaki ifadelere tercüme edin. Kız kardeşine şöyle yazmıştı: [14]

> Yaptığım çalışma üç dilli bir metnin şifrelerini çözmekten ibaret; üç sütunun her birinde tamamen farklı parçalar var; bu üç dilin her biri hakkında biraz fikir sahibiyim ama aynı zamanda bir sütun ile diğeri arasında hiçbir şeyin beni önceden hazırlamadığı büyük anlam farklılıkları olduğunun da farkındayım. Üzerinde çalıştığım birkaç yıl boyunca, sözlüğün ufak tefek parçalarını bulabildim.

Weil, kendi Reşid taşının en muhteşem uygulamalarından birini bulmak için ilerledi. Günümüzde biz buna Weil sanıları diyoruz. Bu sanıların ispatı[15], yirminci yüzyılın ikinci yarısında, matematiğin gelişimini ciddi miktarda körüklemiştir.

Langlands Programı'na geri dönelim. Langlands'ın asıl fikirleri, Weil'in Reşid taşının sol sütunuyla yani sayı teorisi ile alakalıydı. Langlands, sayı teorisinde çalışılan cisimler olan sayı cisimlerinin Galois gruplarının gösterimlerini harmonik analizdeki (sayı teorisinden ve Reşid taşının diğer sütunlarından çok uzak bir alan) cisimler olan otomorfik fonksiyonlarla ilişkilendirdi. Şimdi, Galois gruplarının yerine Weil'in Reşit taşının orta ve sağ sütunlarındaki bazı cisimleri koyarsak bu tür bir bağıntının yine de bulunup bulunamayacağını sorabiliriz.

Langlands'ın bağıntısını orta sütuna tercüme etmek makul derecede kolay bir işlemdir çünkü gerekli bileşenlerin hepsi hâlihazırda var. Bunun için, sayı cisimlerinin Galois gruplarının yerine sonlu cisimler üzerindeki eğrilere uygun Galois gruplarını koymamız gerekir. Ayrıca harmonik analizin uygun otomorfik fonksiyonları inceleyen bir kolu da bulunuyor. Langlands ilk çalışmasında, Galois gruplarının otomorfik fonksiyonların gösterimlerini orta sütunla ilişkilendirdi.

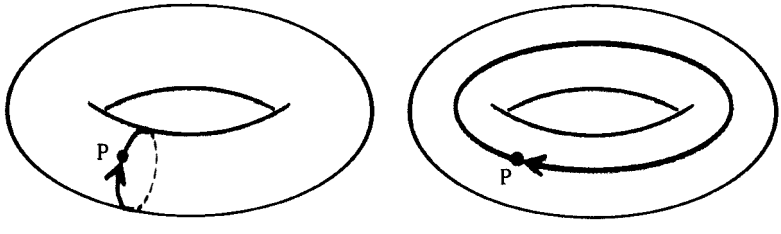
Öte yandan, bu bağıntıyı Reşid taşının sağ sütununa nasıl tercüme edebileceğimiz hiç belli değil. Bunu yapmak için, Riemann yüzeyleri teorisindeki Galois gruplarının ve otomorfik fonksiyonların geometrik benzerlerini bulmamız gerekiyor. Langlands bu fikirlerini ilk kez formüle ettiğinde, ilki biliniyordu ama ikincisi büyük

bir gizemdi. Uygun kavramın aranmasına parlak Rus matematikçi Vladimir Drinfeld'in öncü çalışmalarıyla başlandı ve bulunması 1980'lere kadar sürdü. Langlands bağıntısının Reşid taşının üçüncü sütununa tercüme edilmesi de bu sayede mümkün oldu.

İlk olarak, Galois grubunun geometrik benzeri ile başlayalım. Bu yapıya, Riemann yüzeyinin *temel grubu* denir.

Temel grup, geometrik şekillerin en dikkat çekici (Riemann yüzeyi üzerindeki "delik"lerin sayısı gibi) özelliklerine odaklanır ve topolojiinin matematiksel alanının en önemli kavramlarından biridir.

Örnek olarak bir simidin dış yüzeyini (torus) ele alalım. Üzerinde P ile göstereceğimiz bir nokta seçelim ve başladığı ve bittiği yer bu nokta olan kapalı yolları inceleyelim. Aşağıdaki resimde bu tür iki yol gösterilmiştir.



Benzer şekilde, verilen herhangi bir Riemann yüzeyinin temel grubu da bu Riemann yüzeyi üzerinde aynı sabit p noktasında başlayan ve biten bu tür kapalı yollardan oluşur.[16]

P noktasında başlayıp biten iki yol ile aşağıdaki gibi bir başka yol oluştururuz: Önce birinci yolun üzerinden, ardından da ikinci yol üzerinden gideriz. Bu şekilde yine P noktasında başlayıp biten yeni bir yol elde etmiş oluruz. Kapalı yollarla yapılan bu "toplama işleminin" bir grubun 2. Bölüm'de listelediğimiz tüm özellikleri sağladığı görülüyor. Böylece bu yolların gerçekten de bir grup oluşturduklarını buluyoruz.[17]

Temel gruplardaki yolların toplanması kuralının, 5. Bölüm'de gördüğümüz n örgü gruplarında örgülerin toplanması kuralına benzediği-

ni fark etmiş olabilirsiniz. Bu tesadüfi bir durum değildir. 5. Bölüm'de açıkladığımız gibi, n-ipli örgüler, düzlem üzerindeki n tane ayrı noktadan oluşan toplulukların uzayı üzerindeki yollar olarak görülebilir. Aslında B_n örgü grubu, tam manasıyla bu uzayın temel grubudur.[18]

Yukarıdaki resimde gösterilen simidin dış yüzeyi üzerindeki iki yolun birbirleri ile yer değiştirebilecekleri anlaşılmıştır. Diğer bir deyişle, onları olası iki sırada toplamak bize temel grubun aynı elemanını verir.[19] Bu yüzden, simidin dış yüzeyinin temel grubunun en genel elemanını elde etmek için birinci yolu M defa ve ikinci yolu da N defa katederiz. Burada M ve N değerleri tam sayı olup, negatif değer almaları durumunda birinci yolu $-M$ ve ikinci yolu da $-N$ defa ters yönde katederiz. Bu iki temel yol birbiri ile yer değiştirebildiklerinden, bu yolları hangi sıra ile takip ettiğimizin bir önemi yoktur; sonuç yine aynı olacaktır.

Diğer Riemann yüzeyleri için, temel grubun yapısı daha karmaşıktır.[20] Farklı yollar birbiri ile yer değiştiremeyebilir. Bu, 5. Bölüm'de gördüğümüz ikiden fazla ipe sahip olan ve birbiriyle yer değiştiremeyen örgülere benzer.

Galois grupları ile temel gruplar arasında ciddi benzerlikler olduğu bir süredir biliniyor.[21] Bu durum, ilk sorumuza bir açıklama getiriyor: Weil'in Reşid taşının sağ sütununda bulunan Galois grubunun benzeri nedir? Riemann yüzeyinin temel grubudur.

Bundan sonraki soru ise otomorfik fonksiyonların uygun benzerlerinin yani Langlands bağıntısının diğer tarafında yer alan cisimlerin bulunmasıdır. Burada bir kuantum sıçraması yapmak durumundayız. O eski güzel fonksiyonlarımız burada yetersiz kalıyor. Bu fonksiyonların modern matematiğin daha karmaşık cisimlerinden olan ve 14. Bölüm'de ayrıntılı olarak göreceğimiz *demetler* (sheaves) ile yer değiştirmeleri gerekmektedir.

Bu değişikliğin yapılması, Vladimir Drinfeld tarafından 1980'li yıllarda önerildi. Drinfeld, Langlands Programı'nın sonlu cisimler

üzerindeki eğriler ve Riemann yüzeyleri ile ilgili olan orta ve sağ sütunlara uygulanan yeni bir formülasyonunu ortaya koydu. Bu formülasyon günümüzde geometrik Langlands Programı olarak anılmaktadır. Daha açık ifade etmek gerekirse Drinfeld otomorfik fonksiyonların Weil'in Reşid taşının sağ sütunu için uygun olan benzerlerini buldu.

Drinfeld ile 1990 yılının ilkbaharında Harvard Üniversitesi'nde tanıştım. Benim Langlands Programı'na olan ilgimi artırmakla kalmadı, programın geliştirilmesinde yer almam gerektiğini de söyledi. Onu bu teklifi yapmaya iten, geometrik Langlands Programı ile Moskova'da öğrenciyken yaptığım çalışma arasında bir bağlantı kurmasıydı. Bu çalışmanın bulguları, Drinfeld'in yeni yaklaşımında önemli yer tutuyordu ve bu da benim matematik hayatımı şekillendirdi: O andan itibaren yaptığım araştırmalarda, Langlands Programı belirleyici rol oynadı.

Moskova'ya geri dönelim ve örgü grupları hakkındaki ilk makalemi bitirdikten sonra nereye gitmiş olduğuma bir bakalım.

10. Bölüm:

İlmiğin Parçası Olmak

1986 sonbaharında Moskova'da, Kerosinka'daki eğitimimin üçüncü yılına başlıyordum. Örgü grupları üzerine olan makalem bitip kabul edildiğinde, Fuchs'un benim için bir sorusu vardı: "Şimdi ne yapmak istiyorsun?"

Başka bir problem çözmek istedim. Fuchs eski öğrencilerinden Boris Feigin ile birlikte "Lie cebiri"nin gösterimleri üzerine çalışıyordu. Fuchs, bunun çok sayıda çözülmemiş problem içeren ve kuantum fiziği ile de yakından alakalı bir alan olduğunu söyledi.

Kuşkusuz ilgimi çekti. Evgeny Evgenievich beni matematiğe "çevirmiş" olmasına ve matematiğe bayılmama rağmen, çocukluğumdan beri fiziğe karşı duyduğum ilgi devam etmekteydi. Matematik ve kuantum fiziği dünyalarının bir araya gelebilecek olması, beni heyecanlandırıyordu.

Fuchs bana Feigin'in ile birlikte yazdıkları seksen sayfalık bir araştırma makalesini verirken şöyle dedi:

"İlk başta sana Lie cebiri ile ilgili bir ders kitabı vermeyi düşündüm ama sonra bu makaleyi doğrudan vermemek için bir sebep bulamadım."

Makaleyi özenle sırt çantama yerleştirdim. O sıralar henüz yayınlanmamıştı ve fotokopicilerdeki Sovyet yetkililerinin (Soljenitzin kitapları ya da *Doktor Zhivago* gibi yasaklı edebi eserlerin basılmasından korkuyorlardı) sıkı kontrolleri nedeniyle dünya üzerinde sadece birkaç kopyası mevcuttu. Çok az insan o makaleyi görebilmişti. Feigin daha sonra söz konusu makaleyi baştan sona okuyan tek kişi olabileceğimi söyleyerek espri yaptı.

Makale İngilizce olarak yazılmıştı ve Amerika Birleşik Devletleri'ndeki bir akademik yayınevinin seçkilerinden birinde yer alacağı düşünülüyordu. Ne var ki yayıncı süreci yönetemedi ve kitabın basımı yaklaşık on beş yıl kadar gecikti. Bu zaman zarfında sonuçların çoğu başka yerlerde yeniden üretildi ve bu yüzden de ortaya çıktığında pek okunmadı. Ancak makale yine de meşhur oldu ve Feigin ile Fuchs hak ettikleri değeri sonunda gördüler. Literatürde, makalelerine çokça atıfta bulunulmaktadır ("Moskova Önbaskısı" şeklinde). Hatta Lie cebirinin bu makalede ele aldıkları yeni gösterimlerine atıfta bulunmak için "Feigin-Fuchs gösterimleri" diye yeni bir terim uyduruldu.

Makaleyi okumaya başladığımda, aklıma düşen ilk soru şu oldu: "Lie cebiri" gibi tuhaf bir isme sahip olan bu cisimler nedir? Fuchs'un bana verdiği makale, daha önce hiç çalışmadığım konularda belli bir seviyede bilgi birikimine sahip olunduğunu varsayıyordu. Bu yüzden bir kitabevine gittim ve Lie cebiri ile ilgili bulabildiğim bütün kitapları satın aldım. Bulamadıklarımı da Kerosinka'daki kütüphaneden ödünç aldım. Tüm bu kitapları Feigin ve Fuchs'un yazdıkları makale ile paralel olarak okuyordum. Bu tecrübe, öğrenme şeklimi biçimlendirdi. Ondan beridir asla tek bir kaynakla yetinmem; ulaşılabilir tüm kaynakları edinmeye ve onları bir solukta okumaya çalışırım.

Size Lie cebirlerinin ne olduğunu açıklayabilmek için, ilk olarak "Lie gruplarını" anlatmalıyım. Her ikisi de ismini onları keşfeden

Norveçli matematikçi Sophus Lie'den (Li şeklinde okunur) almıştır.

Hayvan türlerinin bir araya gelerek Hayvan Krallığı'nı oluşturması gibi, matematiksel kavramlar da Matematik Krallığı'nı oluştururlar: Birbirlerine bağlıdırlar, bir araya gelerek alt-aileleri ve aileleri oluştururlar ve genellikle iki farklı kavram eşleşir ve yavruları olur.

Grup kavramı güzel bir örnektir. Grupları, Hayvan Krallığı'nda ya da Animalya'da bir sınıf oluşturan kuşların (kuşgiller sınıfı diyelim) benzerleri olarak düşünelim. Bu sınıf 23 takıma ayrılır; her bir takım ise familyalara ve bunlar da cinslere ayrılır. Örneğin, Afrika balık kartalı, gündüz yırtıcı kuşları (Accipitriformes) takımından; atmacagiller familyasından (Accipitridae) Deniz Kartalı (Haliaeetus) cinsine aittir (bu isimlerle karşılaştırınca "Lie grubu" hiç de entresan bir isim sayılmaz). Benzer şekilde, gruplar geniş bir matematiksel kavram sınıfı oluştururlar ve bu sınıfın içinde de farklı "takımlar", "aileler" ve "cinsler" bulunur.

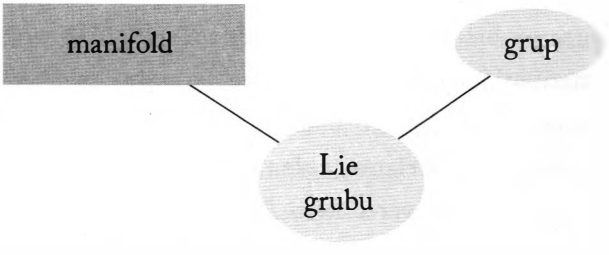
Sonlu sayıda birçok elemanı olan tüm grupları içeren bir sonlu gruplar takımını örnek verebiliriz. 2. Bölüm'de gördüğümüz kare masanın simetriler grubunun dört elemanı bulunduğundan, sonlu bir gruptur. Benzer şekilde, rasyonel sayılara bir polinom denkleminin çözümleri eklenerek elde edilen sayı cisminin Galois grubu da sonlu bir gruptur (örneğin, ikinci dereceden denklemlerde grup iki elemanlıdır). Sonlu gruplar sınıfı da Galois grupları ailesi gibi ailelere bölünür. Diğer bir aile de çeşitli kristallerin simetrilerinin grupları olan kristalografik gruplar içerir.

Sonsuz gruplar da bir başka takımı oluşturur. Örneğin, tam sayı grupları ve 5. Bölüm'de gördüğümüz her bir sabit $n = 2, 3, 4, \ldots$ değeri için B_n örgü grupları da sonsuzdur (B_n, n ipli örgüler içerir; sonsuz sayıda bu tür örgü bulunur). Bir çember üzerindeki tüm noktalardan oluşan yuvarlak masanın dönme grupları da sonsuz bir gruptur.

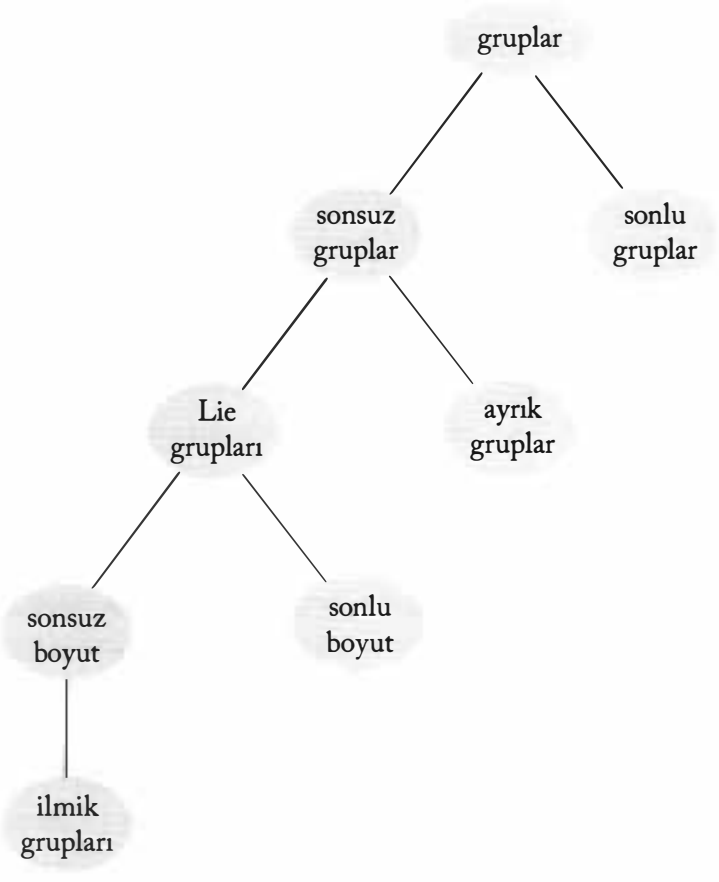
Tam sayı grupları ile çember grubu arasında önemli bir fark vardır. Tam sayılar grubu ayrıktır; yani elemanları bir araya gelerek,

doğal anlamda sürekli bir geometrik şekil oluşturmazlar. Bir tam sayıdan diğerine aralıksız olarak gidemeyiz, birinden diğerine atlamamız gerekir. Halbuki dönme açısını 0 ile 360 arasında aralıksız olarak değiştirebiliriz. Ayrıca bu açılar bir araya gelerek geometrik bir şekil oluştururlar: çember. Matematikçiler bu tür şekillere *manifold* adını verirler.

Tam sayılar grubu ve örgü grupları, Matematik Krallığı'nın ayrık sonsuz gruplar ailesine mensuptur. Çember grubu ise bir başka aileye, Lie grupları ailesine mensupturlar. Basitçe ifade etmek gerekirse Lie grubu, elemanları bir manifoldun noktaları olan gruptur. Bu yüzden bu kavram, iki matematiksel kavramın (grup ve manifold) evliliğinden doğan çocuktur.

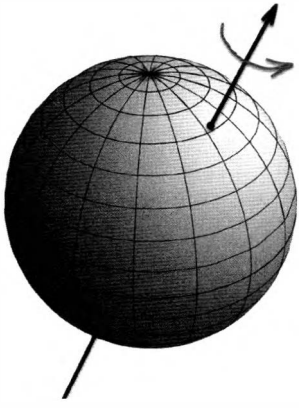


Aşağıdaki şekilde, bu bölümde ele alacağımız, gruplarla alakalı kavramların soyağacı görülmektedir (bu kavramların bir kısmını henüz görmedik ama bu bölüm bitmeden tanışmış olacaksınız).



Doğada karşımıza çıkan simetrilerin çoğu Lie grupları ile açıklanır; bu nedenle de üzerlerinde çalışmalar yapılması çok önemlidir. Örneğin 2. Bölüm'de ele aldığımız, temel parçacıkların sınıflandırılmasında kullanılan $SU(3)$ grubu, bir Lie grubudur.

Lie gruplarına verilebilecek bir diğer örnek ise bir kürenin dönme hareketlerinin grubudur. Yuvarlak bir masanın dönüş açısı ile belirlenir. Ancak küre örneğinde daha fazla serbestlik söz konusudur: Dönme açısı ile birlikte ekseni de tanımlamak zorundayız. Bu durum aşağıdaki şekilde gösterilmiştir. Eksen, kürenin merkezinden geçen herhangi bir çizgi olabilir.



Matematikte kürenin dönme hareketlerinin grubunun bir adı vardır: 3-boyutlu uzayın özel dikey (ortogonal) grubu ya da yaygın olarak kullanılan kısaltması ile $SO(3)$ olarak bilinirler. Kürenin simetrilerini kürenin gömülü olduğu üç boyutlu uzayın dönüşümleri olarak düşünebiliriz. Bu dönüşümler ortogonaldir; yani bütün mesafeleri korurlar.[1] Bu bize, 2. Bölüm'de ortaya koyulan $SO(3)$ grubunun üç boyutlu gösterimini verir.

Benzer şekilde, yukarıda ele aldığımız yuvarlak masanın dönme hareketlerinin grubunun adı da $SO(2)$'dir; bu dönme hareketleri, 2 boyutlu düzlemin özel ortogonal dönüşümleridir. Böylece, $SO(2)$ grubunun iki boyutlu gösterimini elde ederiz.

$SO(2)$ ve $SO(3)$ grupları sadece birer grup olmayıp, aynı zamanda birer manifolddurlar (yani geometrik şekildirler). $SO(2)$ grubu, aynı zamanda bir manifold olan çemberdir. Bu durumda $SO(2)$, hem grup hem de manifolddur. İşte bu nedenle bir Lie grubu olduğunu söyleriz. Benzer şekilde, $SO(3)$ grubunun elemanları bir başka manifoldun noktalarıdır ama bunu akılda canlandırmak biraz daha zordur. (Bu manifoldun küre *olmadığını* unutmayın.) Hatırlarsanız, küreninin her dönme hareketi, eksen ve dönme açısıyla belirlenir. Burada, kürenin her bir noktasının bu noktayı kürenin merkezi ile birleştiren çizgi olan bir dönme ekseni meydana getirdiğini görebiliriz. Ayrıca, dönme açısı ile çemberin üzerindeki bir nokta aynı

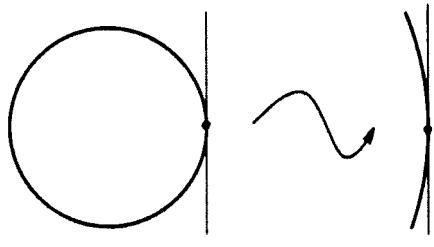
şeylerdir. Dolayısıyla, $SO(3)$ grubunun bir elemanı, kürenin bir noktası (dönme eksenini tanımlar) ile çemberin bir noktası (dönme açısını tanımlar) ile belirlenir.

Belki de daha basit bir soru ile başlamalıyız: $SO(3)$ kaç boyutludur? Bu soruyu cevaplayabilmek için, boyut kavramını daha sistematik bir biçimde ele almalıyız. 2. Bölüm'de, etrafımızdaki dünyanın üç boyutlu olduğunu belirtmiştik. Bu da demek oluyor ki uzaydaki bir noktanın konumunu belirtmek için, üç sayıyı ya da diğer bir deyişle koordinatı (x, y, z) belirtmemiz gerekir. Öte yandan bir düzlem iki boyutludur: Üzerindeki bir konum iki koordinatla (x, y) belirtilir. Çizgi ise bir boyutludur: Tek bir koordinatı (x) vardır.

Peki, bir çember kaç boyutludur? Çemberin iki boyutlu olduğunu söylemek baştan çıkarıcıdır çünkü onu genellikle bir düzlem üzerinde çizeriz ve düzlem de iki boyutludur. Çember üzerindeki her bir nokta düzlemin bir noktası olarak görüldüğünde, iki koordinat ile tanımlanır. Fakat belli bir geometrik cismin (çember gibi) boyutunun matematiksel tanımı, üzerinde herhangi bir konumu işaretlemek için *bu cisim üzerinde* ihtiyacımız olan bağımsız koordinatların sayısıdır. Bu sayının cismin gömülü olduğu ortamın (düzlem gibi) boyutu ile hiçbir alakası yoktur. Aslına bakarsanız bir çember üç boyutlu uzaya (parmağa takılı bir yüzüğü düşünün) ya da daha fazla boyutlu bir uzaya da gömülebilir. Belli bir çember için önemli olan, üzerindeki bir noktanın konumunun adına açı dediğimiz tek bir sayı ile tanımlanabiliyor olmasıdır. Bu, çember üzerindeki tek koordinattır. İşte bu nedenle, çemberin tek boyutlu olduğunu söyleriz.

Pek tabii ki açıdan bahsedebilmek için, çember üzerinde 0 açısına karşılık gelen bir referans noktası seçmemiz gerekir. Benzer şekilde, çizgi üzerindeki her bir noktaya bir x koordinatı vermek için, üzerinde x=0'a karşılık gelen bir referans noktası seçmemiz gerekir. Verilen bir cisim üzerinde birçok farklı biçimde bir koordinat sistemi kurabiliriz. Fakat bu koordinat sistemlerinin her birinin koordinat *sayısı* aynı olacaktır ve bu sayıya bu cismin *boyutu* adı verilir.

Çember üzerindeki bir noktaya zum yapıp noktanın etrafını daha da daraltarak incelersek çemberin bükümü de ortadan kaybolur. Çember üzerindeki bir noktanın yakın komşusu ile aynı konumda çembere teğet olan doğrunun üzerindeki aynı noktanın yakın komşusu arasında pratik açıdan herhangi bir fark yoktur; bu, söz konusu noktanın yanındaki çembere en yakın doğrudur. Bu da bize çember ile doğrunun boyutlarının aynı olduğu gösterir.[2]



Bir noktaya zum yaptığımızda, çember ve teğet çizgi gittikçe birbirlerine daha yakın görünürler.

Benzer şekilde, küre de üç boyutlu bir uzaya gömülüdür ama yapısal olarak iki boyutludur. Aslında küre üzerinde iki bağımsız koordinat vardır: enlem ve boylam. Bu kavramları küreye yakın bir şekle sahip olan Yeryüzü üzerinde konum belirtirken kullandığımız için iyi biliyoruz. Yukarıdaki resimde gördüğümüz küre üzerindeki ağ, sabit enlem ve boylam değerlerine karşılık gelen "paraleller" ve "meridyenler"den meydana gelmiştir. Küre üzerinde iki koordinat olduğu gerçeği, bize onun iki boyutlu olduğunu söyler.

Peki ya $SO(3)$ Lie grubu için ne diyebiliriz? $SO(3)$'ün her noktası, kürenin bir dönme hareketidir, dolayısıyla üç koordinatlıdır: Dönme ekseni (eksenin küreyi deldiği nokta ile belirtilebilir) iki koordinat ile tanımlanırken, dönme açısı üçüncü koordinatı oluşturur. Bu yüzden, $SO(3)$ grubu üç boyutludur.

Üçten fazla boyuta sahip bir Lie grubu ya da herhangi bir manifold düşünmek, çok zor olabilir. Beynimiz, sadece üç boyuta kadar olan geometrik şekilleri ya da manifoldları aklımızda canlandıra-

bileceğimiz bir yapıya sahiptir. Mekân ve zamanın bileşimini dört boyutlu hayal etmekte bile zorlanırız: Zamanı (dördüncü boyutu oluşturur), mekânsal boyutun dengi olarak algılayamayız. Bu durumda, daha fazla boyut için ne diyeceğiz? Beş, altı ya da yüz boyutlu manifoldları nasıl analiz edebiliriz?

Bunun hakkında düşünmek için şöyle bir benzetmeden faydalanabiliriz: Sanatsal çalışmalar bize, üç boyutlu nesnelerin iki boyutlu gösterimlerini sunar. Sanatçılar, bu nesnelerin iki boyutlu izdüşümlerini tual üzerine çizerler ve çizimlerine derinlik hissi (üçüncü boyut) katmak için de perspektif tekniğini kullanırlar. Benzer şekilde, dört boyutlu cisimleri üç boyutlu izdüşümlerini analiz ederek hayal edebiliriz.

Dördüncü boyutu hayal etmenin daha etkili bir diğer yol ise, dört boyutlu bir cismi, üç boyutlu "dilim"lerinin bir topluluğu olarak düşünmektir. Bu, üç boyutlu bir cisim olan bir somun ekmeği iki boyutlu olduğunu düşündürecek kadar ince dilimlere bölmeye benzer.

Eğer dördüncü boyut zamanı temsil ediyorsa, bu durumda bu dört boyutlu "dilimleme" fotoğrafçılık olarak bilinir. Aslında hareket halindeki bir insanın şipşak fotoğrafını çektiğimizde, dört boyutlu uzay-zamandaki o insanı temsil eden dört boyutlu bir cismin üç boyutlu dilimini elde ederiz (daha sonra bu dilimin iki boyutlu düzlem üzerine izdüşümü alınır). Art arda bir dizi fotoğraf çektiğimizde, bu tür dilimlerin bir topluluğunu elde ederiz. Bu resimleri gözümüzün önünde hızla hareket ettirirsek söz konusu hareketi görebiliriz. Bu aslında sinema teknolojisinin ardındaki basit ilkedir.

Bir insanın hareket ettiği kanısını uyandırmak için, resimleri yan yana da koyabiliriz. Yirminci yüzyılın başlarında, sanatçılar bu fikirle ilgilendiler ve onu çizimlerine dördüncü boyutu dahil ederek dinamik hâle getirmenin bir yolu olarak kullandılar. Bu yöndeki köşe taşlarından biri de Marcel Duchamp'ın 1912 tarihli *Merdivenden İnen Çıplak* resmidir. (*Nude Descending a Staircase, No.2*)



Einstein'in uzay ve zamanın birbirinden ayrılamayacağını gösteren görelilik teorisinin yaklaşık olarak aynı zamanda ortaya çıkmış olması ilginçtir. Bu teori, dört boyutlu uzay zamanın sürekliliği olgusunun fizik çalışmalarında ön plana alınmasını sağlamıştır. Buna paralel olarak, Henri Poincaré gibi matematikçiler de daha çok boyutlu geometrinin gizemli dünyasında derinlere iniyor ve Öklid paradigmasını aşma yolunda ilerliyorlardı.

Duchamp, Öklid-dışı geometriden olduğu kadar dördüncü boyut fikrinden de etkilenmişti. Ünlü ressam E. P. Jouffret'nin özellikle Poincaré'nin çığır açan fikirlerine yer veren *Elementary Treatise on Four-Dimensional Geometry and Introduction to the Geometry of n Dimensions* isimli kitabını okurken şöyle bir not düşmüş:[3]

> Dört boyutlu bir şeklin bizim uzamımıza düşen gölgesi üç boyutludur (bakınız Jouffret – Geom. of 4-dim., sayfa 186, son 3 satır) ... mimarların evlerin her bir katı için plan çizerken kullandıkları yönteme benzer şekilde, 4-boyutlu bir şekil (katlarının her birinde) üç boyutlu kesitlerle gösterilebilir. Bu farklı katlar, dördüncü boyut sayesinde birbirlerine bağlanacaktır.

Sanat tarihçisi Linda Dalrymple Henderson,[4] durumu şöyle açıklıyor: "Duchamp, uzun zamandır kabul gören 'gerçekler'le çelişen yeni geometrilere dair, ezber bozan bir şey bulmuştu." Henderson, Duchamp'ın ve çağının diğer sanatçılarının dördüncü boyuta gösterdikleri ilginin soyut sanatın doğmasına yol açan etkenlerden biri olduğunu yazar.

Böylece, matematik sanatı bilgilendirmiştir; sanatçıların saklı kalan boyutları görmelerini sağlamış ve dünyamız hakkındaki bazı derin gerçekleri baştan çıkarıcı estetik bir formda ortaya çıkarabilmeleri için esin kaynağı olmuştur. Yarattıkları modern sanat çalışmaları, ortak bilincimizi etkileyerek gerçeklik algımızın gelişmesine yardımcı olmuştur. Bu da arkadan gelen matematikçi neslini etkilemiştir. Bilim felsefecisi Gerald Holton, bu durumu güçlü bir biçimde açıklar:[5]

> Aslına bakarsanız bir kültürü canlı tutan, tüm bileşenleri arasındaki etkileşimdir. Kültürün ilerleyişi, tüm farklı bileşenlerinin yeni bir mücevher oluşturmak için bir araya gelebildiği simyayla ilgili bir süreçtir. Bu nokta, Poincaré ve Duchamp'ın benimle ve birbirleriyle hemfikir olduklarını ve ikisinin, kendilerine has farklı biçimlerde çok sevdikleri o hiper-uzayın bir yerinde, şimdiye dek kesinlikle karşılaştıklarını hayal ediyorum.

Matematik, geometrinin vücuda büründüğü tüm hâlleri, şekilleri ve formları algılamamızı mümkün kılar. Bizler ilgili cisimleri görsel olarak kafamızda canlandırsak da canlandıramasak da matematik tüm boyutlarda eşit derecede geçerli evrensel bir dildir ve kısıtlı görsel hayal gücümüzün ötesine gitmemizi sağlar. Öyle ki Charles Darwin matematiğin bizlere "fazladan bir duyu" bağışladığını yazmıştır.[6]

Örneğin bizler dört boyutlu bir uzayı hayal edemiyor olsak da matematiksel olarak gerçeğe dönüştürebiliriz. Üç boyutlu uzayda bulunan noktaları (x, y, z) biçiminde gösterdiğimiz gibi, dört boyut-

lu uzayda bulunan noktaları da sayı dörtlüleri (x, y, z, t) biçiminde gösterebiliriz. Yine aynı şekilde, n herhangi bir doğal sayı olmak kaydıyla, $-n$ boyutlu düz bir uzayda bulunan noktaları n-li sayılar olarak görebiliriz (bunları 2. Bölüm'de ele aldığımız üzere, bir hesap tablosunun satırlarıyla aynı şekilde analiz edebiliriz).

Bahsi geçen uzaylara neden düz dediğimizi açıklamam gerekebilir. Bir çizgi açıkça düzdür ve bir düzlem için de aynısını söyleyebiliriz. Fakat, üç boyutlu uzayın düz olduğunu düşünmemiz gerektiği bu kadar açık değildir. (Küre veya simidin dış yüzeyi gibi üç boyutlu uzay içerisine gömülmüş çeşitli bükümlü manifoldları kastetmediğime dikkat ediniz. Burada, üç boyutlu uzayın kendisinden bahsediyorum.) Üç boyutlu uzayın düz olmasının sebebi, eğriliğinin olmamasıdır. Eğriliğin tam matematiksel tanımı Riemann yüzeylerinin yaratıcısı Bernhard Riemann tarafından yapılmıştır ve bazı kritik noktaları içerir; öncelikli hedeflerimize teğet geçtiği için burada fazla ayrıntıya girmeyeceğiz. Üç boyutlu uzayın düz olması üzerine düşünmenin güzel bir yolu, birbirlerine dik üç koordinat ekseninden oluştuğunu görmektir. Tıpkı bir düzlemin birbirine dik iki koordinat ekseninden oluşması gibi. Benzer şekilde, n adet birbirine dik koordinat ekseninden oluşan n-boyutlu bir uzayın da eğriliği yoktur ve bu yüzden düzdür.

Fizikçiler yüzyıllardır, düz bir üç boyutlu uzayda yaşadığımızı düşünmüşlerdir ama Önsöz bölümünde de değindiğimiz üzere, Einstein genel görelilik teorisinde yerçekiminin uzayın eğrilmesine yol açtığını göstermiştir (bu eğrilik az olduğu için gündelik hayatımızda onu fark edemiyoruz ama bu değer 0'a eşit değildir). Dolayısıyla, yaşadığımız uzay aslında eğri bir üç boyutlu manifold örneğidir.

Bu bizi şu soruyu sormaya itiyor: Bir eğri uzay, daha çok boyutlu düz bir uzaya gömülmeksizin (kürenin düz bir üç boyutlu uzaya gömülmesi gibi) tek başına nasıl var olabilir? Yaşadığımız uzayın düz olduğunu düşünmeye alıştığımızdan, gündelik hayatımızda

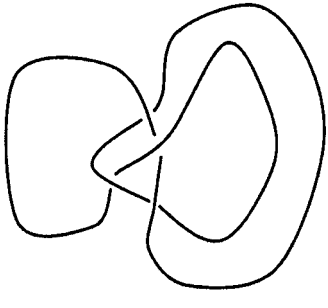
eğri şekiller sadece o düz uzayın sınırları içerisinde ortaya çıkıyormuş gibi görünürler. Ancak bu bir yanlış anlama, dar gerçeklik algımızın yarattığı yapay bir olgudur. Buradaki ironi ise öncelikle yaşadığımız uzayın düz olmamasıdır! Matematik bize bu tuzaktan kurtulmak için bir yol sunuyor: Riemann'ın gösterdiği üzere, eğri uzaylar, onları içeren bir düz uzay olmaksızın, doğaları itibarıyla kendiliklerinden mevcutturlar. Böyle bir uzayı tanımlamak için ihtiyacımız olan şey, bu uzayda yer alan iki nokta arasındaki mesafeyi ölçmemizi sağlayacak bir kuraldır (bu kuralın belli doğal özellikleri karşılaması gerekir); matematikçiler buna *metrik* adını veriyor. Riemann'ın ortaya attığı metrik ve eğrilik tensörü (curvature tensor) matematiksel kavramları Einstein'ın genel görelilik teorisinin köşe taşlarıdır.[7]

Eğri şekiller ya da manifoldlar, rastlantısal olarak yüksek boyutlara sahip olabilir. Hatırlarsak, çember bir düzlem üzerindeki verilen bir noktadan eşit uzaklıktaki noktalar kümesi olarak tanımlanır (ya da MGU'daki sınav gözetmenimin vurguladığı üzere, bu türdeki *tüm* noktaların kümesi!). Benzer şekilde, bir küre de üç boyutlu uzayda verilen bir noktadan eşit uzaklıktaki tüm noktaların kümesidir. Bu durumda, bir kürenin daha yüksek boyutlu bir benzerini (kimileri buna hiperküre diyor), n-boyutlu uzayda verilen bir noktadan eşit uzaklıktaki noktalar kümesi olarak tanımlayabiliriz. Bu koşul bize n tane koordinat olması kısıtlamasını getiriyor. Bu yüzden, n-boyutlu uzay içerisindeki bir hiperkürenin boyutu $(n-1)$'dir. Daha da ileri giderek, bu hiperkürenin dönme hareketlerinin Lie grubunu inceleyebiliriz.[8] Bunlar $SO(n)$ olarak gösterilir.

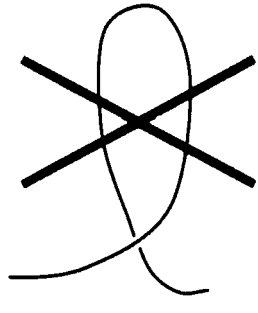
Matematik Krallığı'nda grupların sınıflandırılması açısından bakarsak Lie grupları ailesi iki cinse ayrılır: sonlu-boyutlu Lie grupları (çember ve $SO(3)$ grupları gibi) ve sonsuz-boyutlu Lie grupları. Her sonlu-boyutlu Lie grubunun da sonsuz sayıda çok elemanı olmasından dolayı sonsuz olduğuna dikkat edin. Örneğin çember grubunun sonsuz sayıda çok elemanı (çember üzerindeki noktalar) vardır.

Ancak elemanlarının hepsi tek bir koordinatla (açı) tanımlanabildiği için tek boyutludur. Sonsuz-boyutlu bir Lie grubunun elemanlarını tanımlamak içinse sonsuz sayıda koordinata ihtiyacımız vardır. Bu tür bir "çifte sonsuzluk" kavramını akılda canlandırmak gerçekten zordur. Ancak doğada bu tür gruplar ortaya çıktığı için, bunları da incelememiz gerek. Şimdi örnek olarak, *ilmik grubu* olarak bilinen sonsuz-boyutlu bir Lie grubunu tanımlayacağım.

İlmik gruplarını açıklamak için, ilk olarak üç boyutlu uzaydaki ilmikleri ele alalım. Basitçe ifade etmek gerekirse ilmik, kapalı bir eğridir (aşağıdaki sol tarafta gösterilen gibi). Bunları, örgü gruplarından bahsederken görmüştük (ve "düğüm" adını vermiştik).[9] Aşağıda sağ tarafta gösterilen gibi kapalı olmayan eğrilerin ilmik olarak değerlendirilmediğini vurgulamak istiyorum.



ilmik



ilmik *değil*

Benzer şekilde, ilmikleri, herhangi bir M manifoldunun içindekileri (kapalı ilmikleri kastediyorum) de ele alabiliriz. Tüm bu ilmiklerin uzayına, M'nin ilmik uzayı adı verilir.

17. Bölüm'de daha ayrıntılı olarak ele alacağımız üzere, bu ilmikler, sicim teorisinde önemli bir yer tutmaktadırlar. Geleneksel kuantum fiziğinde, temel cisimler, elektron ve kuarklar gibi temel parçacıklardır. Herhangi bir içsel yapı barındırmayan bu nesneleri noktaya benzetebiliriz; bu yüzden, sıfır boyutludurlar. Sicim teorisinde, doğanın temel cisimlerinin tek boyutlu sicimler olduğu varsayılır.[10] Kapalı sicim, M manifoldu (uzay-zaman) içine gömülü

bir ilmikten ibarettir. İlmik uzaylarının sicim teorisinin dayanak noktası olmasının sebebi de budur.

Şimdi, $SO(3)$ Lie grubunun ilmik uzayını ele alalım. Bu grubun elemanları, $SO(3)$ içindeki ilmiklerdir. Bu ilmiklerden birini yakından inceleyelim. Öncelikle, yukarıdaki resimde gösterilen ilmiğe benzer. Gerçekten de $SO(3)$ üç boyutludur ve bu nedenle küçük ölçekte üç boyutlu düz uzay gibi gözükmektedir. İkincisi, bu ilmik üzerindeki her bir nokta, $SO(3)$'ün elemanıdır; yani kürenin dönme hareketidir. Bu yüzden, ilmiğimiz karmaşık bir cisimdir: Kürenin dönme hareketlerinin oluşturduğu tek parametreli bir topluluktur. Bu tür iki ilmik verildiğinde, kürenin ilgili dönme hareketlerini düzenleyerek bir üçüncüsünü üretebiliriz. Dolayısıyla $SO(3)$'ün ilmik uzayı bir grup hâline gelir. Biz buna $SO(3)$'ün ilmik grubu adını veriyoruz.[11] Bu, sonsuz boyutlu Lie grubunun güzel bir örneğidir: Gerçekten de sonlu sayıda koordinatlar kullanarak bu gurubun elemanlarını tanımlayamayız.[12]

Diğer herhangi bir Lie grubunun ilmik grubu (örneğin hiperkürenin dönme hareketlerinin $SO(n)$ grubu) da sonsuz-boyutlu bir Lie grubudur. Bu ilmik grupları, sicim teorisinde simetri grupları olarak karşımıza çıkar.

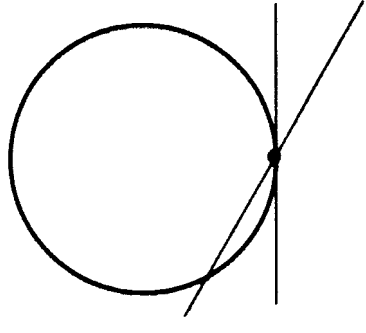
Feigin ve Fuchs'un üzerinde çalıştığım makaleleriyle ilgili ikinci kavram, Lie cebiri kavramıydı. Her bir Lie cebiri, bir anlamda verilen bir Lie grubunun basitleştirilmiş hâlidir.

"Lie cebiri" terimi, mecburen kafa karışıklığı yaratıyor olabilir. "Cebir" kelimesini duyduğumuzda, ikinci dereceden denklemleri çözmek gibi, lisede gördüğümüz şeyler aklımıza gelir. Halbuki burada, "cebir" kelimesi farklı bir yan anlamda kullanılıyor: Belirli özellikleri olan matematiksel cisimleri ifade eden ve bölünmeden kullanılan "Lie cebiri" teriminin parçası. İsminin hissettirdiği anlama rağmen, bu cisimler bütün cebirler sınıfı içinde, Lie gruplarının bütün gruplar sınıfı içinde oluşturduğu gibi aile oluşturmazlar.

Ama takılmaya gerek yok, bu terminoloji tutarsızlığıyla yaşamak zorundayız.

Lie cebirinin ne olduğunu açıklayabilmek için, sizlere ilk önce *teğet uzay* kavramını açıklamalıyım. Endişelenmeyin, konudan sapmayacağız; kalkülüsün ana fikirlerinden biri olan ve eğri şekillerin doğrusal ya da düz olanlara yaklaştırılmasını ifade eden "doğrusallaştırma"yı (linearization) takip ediyoruz.

Örneğin bir çembere verilen bir noktadaki teğet uzay, bu noktadan geçen tüm çizgiler arasında çembere en yakın olan çizgidir. Yukarıda çemberin boyutunu ele alırken bununla karşılaşmıştık. Teğet çizgi, bu özel noktada çembere çok hafifçe değerken noktadan geçen diğer tüm çizgiler, resimde gösterildiği gibi, çemberi başka bir noktada da keser.



Aynı şekilde, eğri (yani tek boyutlu bir manifold) bir teğet çizgiyle verilen bir noktaya yaklaştırılabilir. 1637 yılında yayınlanan *Géométrie* isimli kitabında bu teğet çizgileri hesaplamak için etkili bir yöntem tanımlayan René Descartes, şöyle yazmıştı:[13] "Şunu rahatlıkla söyleyebilirim ki bu problem sadece geometrinin benim bildiğim en yararlı ve en genel problemi değil; aynı zamanda, benim de çözümünü bilmeyi en çok arzuladığım problemdir." Benzer şekilde bir küre de teğet bir düzlemle verilen bir noktaya yaklaştırılabilir. Bir basketbol topunu düşünelim: Yere koyduğumuzda,

zemine tek bir noktada temas eder ve zemin topun bu noktadaki teğet düzlemi olur.[14] n-boyutlu bir manifoldda verilen bir noktaya n-boyutlu düz bir uzay ile yaklaştırılabilir.

Bu durumda, her Lie grubu üzerinde grubun özdeşlik (birim) elemanı olan özel bir nokta vardır. Lie grubunun teğet uzayını bu noktadan alırız. İşte karşınızda bu Lie grubunun Lie cebiri! Dolayısıyla, her Lie grubunun küçük kız kardeşi olarak görebileceğimiz kendi Lie cebiri vardır.[15]

Örneğin çember grubu bir Lie grubudur ve bu grubun özdeşlik elemanı, bu çember [16] üzerinde 0 dereceye karşılık gelen verilen bir noktadır. Dolayısıyla, bu noktadan geçen teğet çizgi, çember grubunun Lie cebiridir. Maalesef, $SO(3)$ grubunun ve teğet uzayının resmini çizemiyoruz çünkü her ikisi de üç boyutlu. Fakat teğet uzayları tanımlayan matematiksel teori, tüm boyutlarda aynı derecede iyi çalışacak şekilde kurulmuştur. Nasıl işlediklerini aklımızda canlandırabilmek için, onları tek ya da iki boyutlu örnekler (çember ya da küre gibi) üzerinde modelleyebiliriz. Bu şekilde, daha az boyutlu manifoldları daha yüksek boyutlu manifoldların metaforları olarak kullanmış oluruz. Ancak bunu yapmak zorunda değiliz; matematiğin dili, kısıtlı görsel sezgilerimizin ötesine geçmemizi sağlar. Matematiksel olarak, n-boyutlu bir Lie grubunun Lie cebiri, vektör uzayı olarak da bilinen n-boyutlu bir düz uzaydır.[17]

Dahası var. Bir Lie grubu üzerindeki çarpma işleminin Lie cebirinde mümkün kıldığı bir işlem daha vardır: Lie cebirinin verilen herhangi iki elemanı ile bir üçüncüsüni oluşturabiliriz. Bu işlemin özelliklerini tanımlamak, bir Lie grubundaki çarpma işleminin özelliklerini tanımlamaktan daha zordur ve şu an için bunlar bize gerekli değil.[18] Üç boyutlu uzayda *çapraz çarpım* işlemi vektör kalkülüs çalışmış olan okurların aşina olabileceği bir örnektir.[19] Eğer bu işlemi gördüyseniz garip görünen özelliklerini merak etmiş olabilirsiniz. Ne olduğunu tahmin edin. Bu işlem aslında üç boyutlu uzayı Lie cebirine dönüştürmektedir!

Bunun aslında $SO(3)$ Lie grubunun Lie cebiri olduğu anlaşılıyor. Yani ezoterik görünümlü çapraz çarpım işlemi, kürenin dönme hareketlerinin bileşimi kuralından mirastır.

Üzerinde yapılan işlem bu kadar garip görünüyorsa, Lie cebirleri ile neden ilgilendiğimizi merak ediyor olabilirsiniz. Neden Lie grupları değil? İlgimizin asıl sebebi, genellikle eğri olan (çember gibi) bir Lie grubunun aksine, Lie cebiri düz uzaydır (çizgi, düzlem, vb). Bu özellik, Lie cebirlerinin incelenmesini Lie gruplarının incelenmesinden daha basit hâle getirmektedir.

Örneğin, ilmik gruplarının Lie cebirlerinden bahsedebiliriz.[20] İlmik gruplarının basitleştirilmiş hâli olarak düşünmemiz gereken bu Lie cebirlerine *Kac-Moody cebirleri* adı verilmiştir. İsmini, Victor Kac (Rusya' doğdu, ABD'ye göç etti ve şu anda MIT'de öğretim üyesi) ile Robert Moody'den (İngiltere'de doğdu, Kanada'ya göç etti ve şimdilerde University of Alberta'da öğretim üyesi) alır. Kac ve Moody, 1968 yılında birbirlerinden ayrı olarak bu Lie cebirlerini araştırmaya başlamışlardır. O gün bu gündür, Kac-Moody cebirleri teorisi, matematiğin en hızlı büyüyen ve ateşli alanlarından birisi olmuştur.[21]

Bir sonraki araştırma projemin konusu olarak Fuchs bana bu Kac-Moody cebirlerini önermişti. Konuyu öğrenmeye başladığımda, kendi kendime bir şey yapabilecek hâle gelinceye kadar çok çalışmam gerektiğimi fark ettim. Bununla beraber, konu çok ilgimi çekmişti.

Fuchs, Moskova'nın kuzeydoğu bölgesinde, evime giden trene binebileceğim istasyonlardan birinin yakınlarında oturuyordu. Her cuma, hafta sonunu geçirmek üzere eve gidiyordum. Bu yüzden Fuchs, her cuma öğleden sonra saat 5'te evinde buluşmamızı ve görüşmemizin ardından evime giden trene binmemi önerdi. Onunla genellikle yaklaşık üç saat kadar çalışır (bu arada bana akşam yemeği de yedirirdi) ve ardından son treni yakalardım; gece yarısına doğru da evde olurdum. Bu buluşmalar, matematik eğitimimde çok

önemli bir rol oynadı. 1986 yılı güz dönemimde her hafta bu buluşmaları gerçekleştirdik ve 1987 bahar döneminde de devam ettik.

Feigin ve Fuchs'un uzun makalesini tamamen okuyup, kendi araştırma projeme başlayabileceğimi hissetmem, Şubat 1987'yi buldu. Bu arada, sadece Rusça değil başka dillerde de kitap ve dergilerin bulunduğu (bunların önemli bir kısmı Kerosinka'nın kütüphanesinde de vardı) devasa bir arşiv olan Moskova Bilim Kütüphanesi'ne giriş hakkı elde ettim. Kac-Moody cebirleri ve ilgili konular hakkında makale bulmak için düzinelerce matematik dergisini incelemek amacıyla bu kütüphaneye düzenli olarak gitmeye başladım.

Kac-Moody cebirlerinin benim gözümde yüksek bir cazibeye sahip olan kuantum fiziği uygulamaları hakkında bilgi edinmeye de ayrıca hevesliydim. Yukarıda belirttiğim üzere, Kac-Moody cebirleri sicim teorisinde önemli bir rol oynamaktadır ama iki boyutlu kuantum fiziği modellerinin simetrileri olarak da karşımıza çıkarlar. Bizler üç boyutlu bir uzayda yaşıyoruz ve bu yüzden dünyamızı tanımlayan gerçekçi modellerin de üç boyutlu olması gerekiyor. Eğer zamanı da eklersek dört boyuta çıkarız. Ancak matematiksel açıdan, başka boyutlardaki dünyaları tanımlayan modeller kurup onları analiz etmemizi engelleyen hiçbir şey yok. Üçten az boyutlu modeller daha basittir ve onları çözme şansımız da daha yüksektir. Daha sonra, üç ve dört boyutlu daha karmaşık modellerle başa çıkabilmek için, bu basit modellerden öğrendiklerimizi kullanabiliriz.

Bu aslında, fiziksel dünyamıza doğrudan uygulanamayabilecek ama gerçekçi modellerin dikkat çekici özelliklerinden bazılarını taşıyan farklı boyutlardaki modelleri incelemek anlamına gelen ve "matematiksel fizik" ismiyle bilinen çalışma alanının ana fikirlerinden biridir.

Bu az boyutlu modellerin bazılarının gerçek dünya uygulamaları da mevcuttur. Örneğin, çok ince bir metal tabakası iki boyutlu bir sistem olarak görülebilir ve dolayısıyla bir iki boyutlu model olarak etkin bir şekilde tanımlanabilir. Bunun yaygın olarak bilinen bir

örneği, iki boyutlu kafes yapısının düğümlerinde yer alan birbirleriyle etkileşimli parçacıkların Ising modelidir. Tam çözümü Lars Onsager tarafından bulunan Ising modeli, ferromanyetizma (kendiliğinden mıknatıslanma) olgusuna ışık tutmuştur. Onsager'in hesaplarının merkezinde, bu modelin gizli bir simetrisi vardı. Bu bize simetrinin fiziksel sistemleri anlamamızda harikulade bir rol üstlendiğini bir kez daha gösteriyor. Bu simetrinin Kac-Moody cebirlerinin yakın akrabalarından biri olan ve Virasoro ismiyle bilinen cebir tarafından tanımlandığı çok geçmeden anlaşıldı.[22] (Aslında, Feigin ve Fuchs'un incelemekte olduğum makalelerinin ana konusu da Virasoro cebiriydi.) Simetrileri Kac-Moody cebirleriyle düzgün biçimde tanımlanan bu tür modeller, oldukça geniş bir sınıf oluşturmaktadır. Bu modelleri anlayabilmek için Kac-Moody cebirlerinin matematiksel teorisini bilmek şarttır.[23]

Kerosinka'nın kütüphanesi, *Referativny Zhurnal* isimli (Referanslar Dergisi) bir yayına üyeydi. Bu aylık dergi, tüm dillerde çıkan yeni makalelerin konulara göre düzenlenmiş kısa özetlerini ve kısa bir değerlendirmesini içeriyordu. Bu dergiyi düzenli olarak okumaya başladım ve kısa sürede ne kadar değerli bir kaynak olduğunu anladım. Her ay matematik makaleleri ile ilgili yeni bir cilt gelir ve ben de ilgili bölümleri tarayarak ilginç bir şeyler bulmaya çalışırdım. Eğer ilgimi çeken bir şey bulursam künyesini not eder ve Moskova Bilim Kütüphanesi'ne bir sonraki gidişimde alırdım. Bu şekilde birçok ilginç şey keşfettim.

Bir gün, *Referativny Zhurnal* dergisinin sayfalarını çevirirken, Japon matematikçi Minoru Wakimoto'nun bir makalesine dair bir değerlendirme yazısına rastladım. Makale, yakından takip ettiğim *Communications in Mathematical Physics* isimli dergide yayınlanmıştı. Değerlendirme yazısı çok fazla bilgi vermiyordu ama makalenin başlığı, kürenin dönme hareketi grupları $SO(3)$ ile ilişkili olan Kac-Moody cebirine atıfta bulunuyordu. Bu yüz-

den makalenin künyesini kaydettim ve Bilim Kütüphanesi'ne bir sonraki gidişimde okudum.

Yazar makalede, $SO(3)$ ile ilişkili Kac-Moody cebirinin yeni gerçekleşimlerini kurmuştu. Bunların neler olduğuna dair fikir vermek için kuantum fiziğinin dilini kullanacağım (Kac-Moody cebirleri kuantum fiziği modellerinin simetrisini tanımladığı için burada uygundur). Temel parçacıklar arasındaki etkileşimi tanımlayan modeller gibi, gerçekçi kuantum teorileri de oldukça karmaşıktır. Bununla birlikte, etkileşimin neredeyse hiç söz konusu olmadığı daha basit, idealleştirilmiş, "serbest alan modelleri" oluşturmak mümkündür. Bu tür modellerde, kuantum alanları birbirlerinden "bağımsız" olduğu için bu ismi almışlardır.[24] Bu tür serbest alan modellerinin birinin içinde, karmaşık ve bu yüzden daha ilginç kuantum modeliyle karşılaşmak gayet olasıdır. Bu, karmaşık modelleri bileşenlerine ayırıp çözümlememize ve başka türlü mümkün olmayan hesapları yapmamıza olanak tanır. Sonuç olarak, bu tür gerçekleşimler oldukça faydalı olmuştur. Bununla birlikte, simetri olarak Kac-Moody cebirlerine sahip olan kuantum modelleri için bu tür serbest alan gerçekleşimlerinin bilinen örnekleri oldukça dar çerçeveli olmuştu.

Wakimoto'nın makalesini okurken, sonucun $SO(3)$ ile ilişkili ve en basit Kac-Moody cebirinde mümkün olan en geniş serbest alan gerçekleşimi olarak yorumlanabileceğini fark ettim. Bu sonucun önemini anladım ve beni şu konu hakkında düşünmeye sevk etti: Bu gerçekleşim nereden geliyordu? Bunu diğer Kac-Moody cebirlerine genellemenin bir yolu var mıydı? Kendimi bu sorularla uğraşmaya hazır hissettim.

Bu güzel çalışmayı görüp potansiyelini fark ettiğimde hissettiğim heyecanı nasıl tanımlayacağımı bilemiyorum. Uzun bir yolculuğun ardından birdenbire karşınıza çıkıveren dağın tepesi gibi olduğunu söyleyebilirim. Nefesinizi tutup o büyülü güzelliği içinize aldığınızda söyleyebileceğiniz tek şey "Vay canına!" olur. Bu, ilhamın geldiği

andır. Henüz zirveye ulaşmadınız, karşınıza çıkacak engellerden bihabersiniz ama cazibesi karşı konulamaz ve siz kendinizi şimdiden zirvede hayal ediyorsunuz. Artık onu fethetmek sizin işiniz. Peki, acaba bunu başaracak güç ve dayanıklılığa sahip misiniz?

11. Bölüm:

Zirvenin Fethi

Yaz geldiğinde, bulgularımı Fuchs ile paylaşmak için hazırdım. Wakimoto'nun makalesinden benim kadar etkileneceğini biliyordum. Kendisi ile görüşmek üzere sayfiye evine gittiğimde, küçük bir sorunumuz olduğunu söyledi: Beraber çalışmalar yaptığı eski öğrencisi Boris Feigin ile bana yanlışlıkla aynı gün için randevu vermişti—yanlışlıkla olduğunu söyledi ama ben inanmadım (Fuchs çok sonraları, bunu kasten yapmış olduğunu kabul etti).

Fuchs birkaç ay önce beni Feigin ile tanıştırmıştı. Gelfand'ın seminerlerinin birinden hemen önceydi; örgü grupları hakkındaki makalemi henüz bitirmiş ve Feigin ile Fuchs'un yazısını okumaya başlamıştım. Fuchs'un teşviki ile Feigin'den başka neler okumam gerektiği yönünde tavsiyelerde bulunmasını rica ettim. Boris Lvovich (ona öyle hitap ediyordum), henüz otuz üç yaşında olmasına rağmen Moskova matematik camiasının en büyük yıldızlarından biriydi. Kot pantolon ve iyice yıpranmış spor ayakkabılar giyen, oldukça utangaç biriydi. Gözlerini çevreleyen geniş kalın gözlükleri vardı ve görüşmemizin büyük kısmında göz temasından kaçmak için yere bakmıştı. Kuşkusuz ben de utangaçtım ve kendimden pek

emin sayılmazdım: Ben henüz yolun başında bir öğrenci, o ise ünlü bir matematikçiydi. Dolayısıyla, pek de hoş bir karşılaşma olduğu söylenemezdi. Fakat bir ara gözlerini yerden kaldırıp yatıştırıcı bir gülümseme ile bana baktı ve o an tüm buzlar eridi. Samimi nezaketini hissedebiliyordum.

Ne var ki, Feigin'in ilk tavsiyesi beni ürküttü: Landau ve Lifshitz'in *Statistical Physics* kitabını okumam gerektiğini söyledi. Bu beklentinin o sırada bana tam anlamıyla ürkütücü görünmesinin bir nedeni, kitabın büyüklüğü ve ağırlığı itibarıyla okullarda hepimize zorunlu olarak okutulan Komunist Parti tarihi ile ilgili ders kitabına benzemesiydi.

Feigin, bunun sıkı bir tavsiye olduğunu savunuyordu; bu gerçekten de önemli bir kitaptır ve nitekim yaptığım araştırma ileride tam olarak o alana yöneldi (yine de utanarak itiraf ediyorum ki kitabı hâlâ okumadım). Ama bu fikir o zamanlar kulağıma pek hoş gelmedi ve belki de bu yüzden ilk görüşmemizde bir yere varamadık. Doğruyu söylemek gerekirse, Fuchs'un yazlığında görüştüğümüz güne kadar Feigin ile olan hukukum, Gelfand'ın seminerlerinde karşılaştığımızda "Merhaba" demenin ötesine gitmedi.

Yazlığa vardıktan kısa bir süre süre sonra, Feigin'in camın önünde bisikletinin parçalarını sökmekle uğraştığını fark ettim. Selamlaşma ve ufak bir sohbetin ardından mutfaktaki yuvarlak masanın etrafına oturduk ve Fuchs bana "Yeni bir şeyler var mı bakalım?" diye sordu.

"Aslına bakarsanız evet... Japon matematikçi Wakimoto'nun ilginç bir makalesini buldum."

"Hımmm..." Fuchs Feigin'e döndü: "Bunu biliyor muydun?"

Feigin hayır anlamında başını sallayınca, Fuchs bana "Genellikle her şeyi bilir ... ama bu makaleyi görmemiş olması iyi —böylece, söylediklerini dinlemek onun için de ilginç olacak," dedi.

İkiliye, Wakimoto'nun çalışmasını anlatmaya koyuldum. Beklendiği üzere, her ikisi de çok ilgi gösterdi. Feigin ile matematiksel kavramları derinlemesine tartışma fırsatını ilk kez yakalıyor-

dum ve hemen o an uyuştuğumuzu hissettim. Dikkatle dinliyor ve tam yerinde sorular soruyordu. Bulduklarımın önemini kavramıştı; sakin ve rahat tavrını korumakla beraber heyecanlanmış görünüyordu. Fuchs olan biteni izliyordu ve Feigin ile birbirimizi daha iyi tanımamız için yaptığı gizli planın bu kadar iyi gitmesine sevindiğinden eminim. Gerçekten de harika bir sohbetti. Önemli bir şeye yaklaşmakta olduğumu hissediyordum.

Fuchs da benzer bir hissiyattaymış gibi görünüyordu. Ayrılırken bana "İyi iş çıkardın. Bunun senin makalen olmasını isterdim ama artık bunu bir sonraki aşamaya taşımaya hazır olduğunu düşünüyorum," dedi.

Eve döndüm ve Wakimoto'nun makalesinde ortaya konan sorular üzerinde çalışmaya devam ettim. Wakimoto, formüllerine dair hiçbir açıklama vermemişti. Adli bir soruşturma yürütürcesine formüllerin ardındaki büyük resmin izlerini bulmaya çalışıyordum.

Birkaç gün sonra, resim belirmeye başladı. Yurttaki odamda turlarken, anlık bir içgörü ile Wakimoto'nun formüllerinin geometriden geldiğini fark ettim. Bu şaşırtıcı bir keşifti çünkü Wakimoto'nun yaklaşımı tamamen cebirseldi; geometriye dair hiçbir ipucu yoktu.

Bu geometrik yorumumu açıklayabilmek için, kürenin ve onun ilmik grubunun simetrilerinin $SO(3)$ Lie grubuna geri dönelim. Bir önceki bölümde de açıklandığı üzere, $SO(3)$'ün ilmik grubunun bir elemanı, $SO(3)$'ün elemanlarının bir toplamıdır; ilmiğin her bir noktası $SO(3)$'ün bir elemanına karşılık gelir. $SO(3)$'ün bu elemanlarının her biri küreye belirli bir dönme hareketiyle etki eder. Bu ise, $SO(3)$'ün ilmik grubunun her bir elemanının kürenin ilmik uzayının bir simetrisini meydana getirdiği anlamına gelir.[1]

Bu bilgiyi, $SO(3)$ ile ilişkili Kac-Moody cebirinin bir gösterimini elde etmek üzere kullanabileceğimi fark ettim. Bu yine de bize Wakimoto'nun formüllerini vermez. Bu yüzden, formülleri oldukça radikal bir biçimde yeniden düzenlememiz gerekir. Bunu, bir ceketi ters yüz etmeye benzetebiliriz. Tüm ceketler ters yüz edilebilir ama

genellikle giysi kullanılamaz bir hâl alır —bu şekilde toplum içine çıkamayız. Ancak her iki tarafı da giyilebilen ceketler var. Aynı şey Wakimoto'nun formülleri için de geçerliydi.

Kazandığım bu yeni bakış açısıyla, Wakimoto'nun formüllerini hemen daha karmaşık yapıya sahip olan diğer Kac-Moody cebirlerine genellemeye çalıştım. Geometrik olan ilk aşamada, tıpkı $SO(3)$'te olduğu gibi başarılı oldum ama formülleri "ters yüz" etmeye çalışırken kafam karıştı. Ortaya çıkan matematiğin bir anlamı yoktu. Formüllerle oynamaya çalıştım ama problemin üstesinden gelecek yolu bir türlü bulamadım. Gayet gerçekçi bir olasılık olan, bu yapının sadece $SO(3)$ için işe yarayıp daha genel Kac-Moody cebirleri için işe yaramadığını değerlendirmek zorunda kaldım. Problemin bir çözümü olup olamadığından emin olmanın bir yolu yoktu ve olsa dahi elimizdeki yöntemlerle elde edilip edilemeyeceği belli değildi. Elimden geldiği kadar çok çalışmalı ve en iyi sonucu elde etmeyi ummalıydım.

Bir hafta geçti ve Fuchs ile tekrar buluşmanın zamanı gelip çattı. Ona yaptığım hesaplardan bahsetmeyi ve tavsiyelerini almayı planlıyordum. Yazlığa vardığımda Fuchs, karısının bazı ıvır zıvır işleri halletmek üzere Moskova'ya gitmek zorunda kaldığını ve kendisinin de iki küçük kızıyla ilgilenmesi gerektiğini söyledi.

"Ama" dedi ve devam etti, "Feigin dün buradaydı, geçen hafta bize anlattıklarından çok etkilenmiş. Neden onu ziyaret etmiyorsun; evi buraya sadece on beş dakikalık mesafede. Ona, seni yollayacağımı söyledim yani seni bekliyor."

Bana yolu tarif etti ve Feigin'in yazlık evine gittim.

Feigin, gerçekten de bekliyordu. Beni sıcak bir biçimde karşıladı, cana yakın eşi Inna ve üç çocuğu (isimleri Roma ve Zhenya olan, sekiz ve on yaşlarında, yerinde duramayan iki erkek çocuğu ve iki yaşındaki sevimli kızları Lisa) ile tanıştırdı. O an, ilerleyen yıllarda bu güzel aile ile çok yakın olacağımızın farkında değildim.

Feigin'in eşi bize çay ile kek ikram etti ve terasa oturduk. Güzel bir yaz ikindi vaktiydi; güneş ışınları yapraklarla bezeli ağaçların

arasından fışkırıyor, kuşlar cıvıldaşıyordu; şiir gibi bir kır ortamıydı. Fakat pek tabii ki sohbet hemen Wakimoto'nun oluşturduğu yapıya geldi.

Feigin'in de konu hakkında düşündüğü ve görüşlerinin benzer doğrultuda olduğu anlaşılıyordu. Sohbetimizin başında esasen birbirimizin cümlelerini tamamlıyorduk. Çok güzel bir duyguydu: O beni tamamen anlıyor, ben de onu anlıyordum.

Yapıyı diğer Kac-Moody cebirlerine genellerken çuvalladığımı söyleyerek söze başladım. Feigin beni dikkatle dinledi ve bir süre sessizce oturup, konu hakkında düşündükten sonra, gözümden kaçan bir noktaya dikkatimi çekti. Wakimoto'nun yapısını genelleştirirken kürenin uygun bir genellemesini — $SO(3)$'ün simetriler ile etki ettiği bir manifold— bulmamız gerekiyordu. $SO(3)$ söz konusu olduğunda, bu pratik olan tek seçenektir. Diğer gruplar içinse birden fazla seçenek bulunuyor. Yaptığım hesaplarda, kürenin doğal genellemelerinin izdüşümsel uzaylar (projective spaces) olduğunu kabul etmiştim ama aslında böyle bir zorunluluk söz konusu değildi. Bir yere varamamış olmam, uzaylar seçimimin yetersiz olmasından kaynaklanıyor olabilirdi.

Yukarıda da açıkladığım gibi, her şey göz önünde bulundurulduğunda, formülleri "ters yüz" etmem gerekiyordu. Tüm yapı, sonunda ortaya çıkacak formüllerin hâlâ geçerli olması gibi mucizevi bir beklentiye dayanmaktaydı. En basit $SO(3)$ grubu için, Wakimoto'nun durumunda da olan buydu. Benim yaptığım hesaplar, izdüşümsel uzaylar için bunun geçerli olmadığını gösteriyordu ama bu, daha iyi bir yapının bulunamayacağı anlamına gelmiyordu. Feigin, bayrak manifoldlarını (flag manifolds) denememi önerdi.[2]

$SO(3)$ grubu için bayrak manifoldu küredir; bu yüzden diğer gruplar için bu uzaylar, kürenin doğal ikameleri olarak görülebilirler. Bununla beraber bayrak manifoldları, izdüşümsel uzaylardan daha zengin ve çok yönlüdürler. Bu yüzden, Wakimoto'nun yapısının bir benzerinin onlar için işe yarıyor olması mümkündü.

Hava kararmış, eve gitme vakti gelmişti. Bir sonraki hafta tekrar buluşmayı kararlaştırdıktan sonra Feigin'in ailesi ile vedalaştım ve tren istasyonuna geri döndüm.

Eve dönüş yolunda, açık camlarından içeri ılık yaz havası dolarken boş vagonda problem hakkında düşünmekten kendimi alıkoyamıyordum. Problemi hemen oracıkta halletmeliydim. Bir kalem ve not defteri çıkartıp, en basit bayrak manifoldu için formülleri yazmaya koyuldum. Kesik kesik ve yüksek sesler çıkartan eski tren, bir ileri bir geri sallıyor ve kalemi düzgün tutmamı zorlaştırıyordu; bu yüzden de yazdığım formüller karman çormandı. Yazdıklarımı zor okuyordum ama bu karmaşanın ortasında beliren bir örüntü vardı. Sonuç alamadan uğraştığım ve geçen hafta tüm zamanımı tüketen izdüşümsel uzaylarla karşılaştırdığımızda, bayrak manifoldları için işler daha iyi gidiyordu.

Birkaç satır hesap daha, ve... Evreka! İşe yarıyordu. "Ters yüz" edilen formüller, Wakimoto'nun çalışmasındaki kadar iyi işliyordu. Yapı gayet güzel bir biçimde genelleşti. Mutluluktan kendimden geçtim: Dikkate değer bir sonuçtu. Yapmıştım, Kac-Moody cebirlerinin, yeni serbest-alan gerçekleşimlerini bulmuştum!

Ertesi sabah hesaplarımı dikkatle gözden geçirdim. Her şey çözülmüştü. Feigin'in yazlık evinde telefon yoktu; bu yüzden onu arayıp, yeni keşiflerimi anlatamazdım. Onları bir mektup biçiminde yazdım ve sonraki hafta buluştuğumuzda ona yeni sonuçları anlattım.

Beraber çalışmaya bu şekilde başladık. Benim öğretmenim, akıl hocam, danışmanım ve arkadaşım oldu. Başlarda ona eski moda Rus tarzı olan ve baba adını da içeren Boris Lvovich şeklinde hitap ediyordum ama sonradan daha gayriresmî olan Borya'yı kullanmam için ısrar etti.

Öğretmenlerim konusunda oldukça şanslıydım. Evgeny Evgenievich bana matematiğin güzelliğini gösterdi ve ona âşık ol-

mamı sağladı. Ayrıca, temel konuları öğrenmeme yardımcı oldu. Fuchs, MGU'ya giriş sınavı felaketinden sonra beni kurtardı ve kararsız kaldığım matematik kariyerime hızlı bir başlangıç yapmamı sağladı. Becerilerime güvenmemi sağlayan ilk ciddi matematik projemde rehberlik etti ve matematik ile fiziğin çakıştığı ilginç bir araştırma alanına yönelmemi sağladı. Sonunda birinci lige çıkmak için hazırdım. Borya, yolculuğumun bu aşamasında, hayal edilebileceğim en iyi danışman olduğunu gösterdi. Matematik kariyerim olağanüstü bir hıza kavuşuyor gibiydi.

Borya Feigin, hiç kuşkusuz, neslinin tüm dünyadaki en özgün matematikçilerinden biridir, en derin matematik algısına sahip bir vizyonerdir. Modern matematiğin büyülü güzellikler ve müthiş bir uyumla dolu harikalar dünyasına girmemi sağladı ve orada ilerlememi için bana yol gösterdi.

Bugün artık kendi öğrencilerim var ve Borya'nın (ve daha önce Evgeny Evgenievich ile Fuchs'un) benim için yaptıklarının değerini daha iyi anlıyorum. Öğretmen olmak zor zanaat! Birçok açıdan, çocuk sahibi olmaya benzediğini zannediyorum. Hiçbir şey beklemeden, çok fazla fedakârlıkta bulunmanız gerekir. Tabii ki mükafatları da çok büyük olabilir. Ancak öğrencilerinize hangi yönü işaret edeceğinize, onlara ne zaman yardım eli uzatacağınıza ve onları ne zaman derin sulara salıp, kendi başlarına yüzmeyi öğrenmelerine fırsat vereceğinize nasıl karar verirsiniz? Bu bir sanat. Hiç kimse bunu nasıl yapabileceğinizi size öğretemez.

Borya bana ve bir matematikçi olarak kaydettiğim ilerlemeye çok özen gösterdi. Hiçbir zaman ne yapmam gerektiğini söylemedi ama onunla konuşmak ve ondan bir şeyler öğrenmek, bana her zaman bir yön hissi verdi. Artık her nasıl yapıyorduysa, bir sonraki adımda ne yapmak istediğimi bildiğimden emin olmamı sağlayabiliyordu. O benim yanımda olunca doğru yolda olduğuma daima inandım. Onun hocam olması, benim için büyük bir şanstı.

1987 güz dönemi başlıyordu, artık Kerosinka'daki dördüncü yılımdı. On dokuz yaşındaydım ve hayatım hiç olmadığı kadar heyecan doluydu. Yurtta kalmaya devam ediyor, arkadaşlarımla dışarı çıkıyor ve âşık oluyordum... Bir yandan da çalışmalarımı sürdürüyordum. O zamana kadar, derslere pek girmeyip, sınavlara kendim hazırlanıyordum (genellikle sınava birkaç gün kala). Yine de tam A alıyordum – B aldığım tek ders Marksist Ekonomi Politik'ti (ne kadar utanç verici).

Zamanımın ve enerjimin büyük kısmını alan Borya'yla sürdürdüğümüz matematik çalışmalarını, "ikinci bir hayatım" olduğunu çoğu insandan gizliyordum.

Borya ile genellikle haftada iki kez buluşuyorduk. Asıl olarak Katı Hal Fiziği Enstitüsü'nde çalışıyordu ama orada pek işi olmuyordu ve haftada bir kez görünmesi yetiyordu. Diğer günler, annesinin kendi evine on dakikalık yürüme mesafesindeki dairesinde çalışıyordu. Bu ev, Kerosinka'ya ve yurduma da yakındı. Çoğunlukla orada buluşuyorduk. Sabah erkenden ya da öğleden hemen sonra giderdim ve bazen tüm günümüzü alacak şekilde projemiz üzerinde çalışırdık. Borya'nın annesi akşam işten dönünce yemeğimizi hazırlardı ve saat dokuz gibi Borya'yla birlikte çıkardık.

Borya ile yaptığımız ilk iş, bulgularımızın kısa bir özetini yazıp, *Russian Mathematical Surveys* dergisine yollamak oldu. Makalemiz, matematik dergileri için kısa sayılabilecek bir sürede, bir yıl içinde yayınlandı.[3] Bunu hallettikten sonra projemizi daha da geliştirmeye koyulduk. Ortaya koyduğumuz yapı güçlüydü ve birçok yeni araştırma alanı açıyordu. Bulgularımızı Kac-Moody cebirlerinin gösterimlerini daha iyi anlayabilmek amacıyla kullanıyorduk. Çalışmamız iki boyutlu kuantum modellerinin serbest alan gerçekleşimlerini geliştirmemizi de sağladı. Bu, söz konusu modellerde daha önce ulaşılamayan hesapları yapabilmemize imkân tanıdı ve kısa süre içerisinde fizikçilerin çalışmamıza ilgi duymasına sebep oldu.

Bunlar heyecan dolu günlerdi. Borya ile buluşmadığımız günler kendim çalışıyordum —hafta içleri Moskova'da, hafta sonları ise evde. Bilim Kütüphanesi'ne gitmeye ve yakından ilgisi olan konularda giderek daha fazla kitap ve makaleyi bir solukta okumaya devam ediyordum. Bu yayınları yaşıyor, yiyor ve içiyordum. Bu güzel paralel evrene geçmiş gibiydim ve orada kalıp, bu rüyanın daha da derinine inmek istiyordum. Her yeni keşif ve her yeni fikirle bu büyülü dünya gittikçe daha fazla benim evim oluyordu.

1988 güzüne geldiğimizde ise Kerosinka'daki beşinci ve sonuncu yılıma başladım ve gerçek hayata geri çekildim. Gelecek hakkında düşünmeye başlamanın zamanı gelmişti. Sınıfımda zirvede olmama rağmen başarı şansım pek iç açıcı sayılmazdı. Lisansüstü eğitim alabileceğim okullarda ve lisans mezunlarının girebileceği iyi işlerde anti-Semitizm hâkimdi. Moskova'da oturma iznimin (*propiska*) olmaması işleri daha da zorlaştırıyordu. Kıyamet günü yaklaşıyordu.

12. Bölüm:

Bilgi Birikimi Ağacı

Akademik kariyer sahibi olmama asla izin verilmeyeceğini bilmeme rağmen matematik çalışmalarımı sürdürdüm. Mark Saul bir yazısında[1] bu konuya değindi (benden adımın kısaltması olan "Edik" diye bahsederek):

> Edik ve diğerlerini akıntıya karşı yüzen somon balıkları gibi devam etmeye iten neydi? Üniversitede maruz kaldıkları ayrımcılığın profesyonel hayatlarında da devam edeceğine dair her türlü gösterge mevcuttu. Hâl böyleyken, matematikte kariyer yapmak için neden bu kadar yoğun biçimde ve bu tür garipliklere göğüs gererek hazırlanıyorlardı ki?

Entelektüel uğraşın verdiği katıksız haz ve tutkudan başka beklediğim hiçbir şey yoktu. Hayatımı matematiğe adamak istememin tek sebebi onunla uğraşmaktan hoşlanıyor olmamdı.

Sovyet döneminin ruhsuz hayatında, tutkulu gençler enerjilerini iş hayatına aktaramıyorlardı; ekonomik sistemde özel sektör yoktu. Aksine sıkı bir devlet kontrolü hâkimdi. Benzer şekilde, komunist ideoloji beşeri bilimler, ekonomi bilimi ve sosyal bilimler alanındaki

entelektüel uğraşları kontrol altında tutuyordu. Bu alanlardaki tüm kitaplar ve bilimsel makaleler Marks, Engels veya Lenin'den alıntılarla başlamak ve konuya ilişkin Marksist bakış açısını desteklemek zorundaydı. Yabancı bir felsefeye dair makale yazabilmenin tek yolu, mesela makaleyi filozofların "gerici burjuva görüşlerini" kınayan bir metin olarak takdim etmekti. Bu sıkı kurallara uymayanlar suçlanır ve eziyete maruz kalırdı. Aynı şey sanat, müzik, edebiyat ve sinema için de geçerliydi. Sovyet toplumunu, politikalarını ya da yaşam tarzını eleştirdiği —ya da sadece "sosyalist gerçekçilik" ölçütlerinden saptığı— ancak dolaylı olarak düşünülebilecek her şey tez elden sansürlenirdi. Kendi sanatsal görüşlerini takip etmeye cüret eden yazar, besteci veya yönetmenler yasaklanır ve yaptıkları çalışmalar ya rafa kaldırılır ya da yok edilirdi.

Bilimin birçok alanına da parti çizgisi hâkimdi. Örneğin genetik bilimi uzun yıllar yasaklıydı çünkü bulgularının Marksizm öğretileri ile çelişki içinde olduğu düşünülüyordu. Dil bilimi için de durum aynıydı: Kendisini bu alanda (diğer pek çokları gibi) uzman sayan Stalin, *On Certain Questions of Linguistics* (Bazı Dilbilim Sorunları Üzerine) isimli yüz kızartıcı denemeyi yazdıktan sonra, bu geniş çalışma alanı büyük ölçüde anlamsız olan bu tezin yorumlanmasına indirgendi. Bu yolu izlemeyen kişiler baskıya maruz kalıyordu.

Böyle bir ortamda matematik ve teorik fizik, özgürlüğün yeşerdiği birer vaha gibiydi. Komünist apparatçikler hayatın her alanını kontrol etmek istiyor olsalar da bu alanlar onların anlayamayacağı kadar soyut ve zordu. Stalin bile matematik hakkında herhangi bir görüş bildirmeye hiçbir zaman cüret etmedi. Öte yandan Sovyet liderler, anlaşılması güç ve ezoterik görünen bu alanların nükleer silah geliştirmek için önemli olduğunu kavradılar ve bu yüzden de söz konusu alanları "karıştırmak" istemediler. Sonuç olarak, atom bombası projesinde çalışan matematikçilere ve fizikçilere (çoğunun gönülsüz olduğunu söyleyebilirim) müsamaha gösteriliyordu, hatta Büyük Birader bazılarına gayet iyi davranıyordu.

Dolayısıyla, matematik bir yandan soyut ve ucuzdu, diğer yandan Sovyet liderlerinin çok önem verdiği alanlara —özellikle rejimin ayakta durmasını sağlayan savunma gibi— da fayda sağlıyordu. Matematikçilerin araştırmalarını yapmalarına büyük oranda izin verilmesinin ve diğer alanlarda uygulanan sınırlamalara maruz kalmamalarının (daha önce bahsettiğim "99'ların Mektubu"nda olduğu gibi burunlarını politikaya sokmadıkları müddetçe) sebebi buydu.

Birçok yetenekli gencin uzmanlık olarak matematiği seçme sebebinin bu olduğunu zannediyorum. Entelektüel uğraşlarını özgürce sürdürebilecekleri yegâne alan buydu.

Matematiğe tutkuyla bağlı ve ondan çok keyif alıyor olsam da, bir işe ihtiyacım vardı. Bu yüzden, Borya ile gizli olarak yürüttüğüm asıl matematik çalışmalarıma paralel olarak, Kerosinka'da bir miktar "resmi" araştırma yapmam gerekiyordu.

Kerosinka'daki danışmanım, Uygulamalı Matematik Bölümü'nün öğretim üyelerinden biri olan ve fakültenin en karizmatik ve saygıdeğer üyeleri arasında yer alan Yakov Isaevich Khurgin idi. Gelfand'ın eski öğrencilerinden olan Yakov Isaevich, o sıralar altmışlı yaşlarının sonlarında olmakla beraber en havalı öğretmenlerimizden biriydi. Dersleri ilgi çekici bir biçimde işlemesine ve sahip olduğu mizah duygusuna bağlı olarak, en yüksek öğrenci katılımı onun derslerinde olurdu. Üçüncü yılımdan itibaren derslerin çoğunu asmama rağmen, olasılık teorisi ve istatistik üzerine verdiği derslere her zaman katılmaya çalışırdım. Onunla çalışmaya üçüncü yılımda başladım.

Yakov Isaevich, bana karşı çok nazikti. Bana iyi davranılmasını sağlamaya çalışır ve ne zaman yardıma ihtiyacım olsa hep yanımda olurdu. Örneğin yurtta bazı sorunlarım olduğunda müdahale etmek için yetkisini kullandı. Yakov Isaevich "işleri nasıl yürüteceğini" çözmüş akıllı bir adamdı: Yahudi olmasına rağmen, tam zamanlı öğretim üyesi ve petrol aramadan ilaç sektörüne kadar çeşitli

alanlarda çalışmalar yapan laboratuvarın başı olarak, Kerosinka'da prestijli bir konumu vardı.

Öte yandan, uzman olmayanlar için yazdığı birtakım çok satan matematik kitabı ile matematiğin popülerleşmesini de sağlıyordu. Bu kitaplar arasından *So What?* adındakini bilhassa severim. Bu, Yakov Isaevich'in bilim insanları, mühendisler ve doktorlarla işbirliğini anlatan bir kitaptır. Onlarla olan diyalogları üzerinden ilginç matematiksel kavramları (bunlar çoğunlukla uzmanlık alanı olan olasılık ve istatistiğe dairdi) ve bunların uygulamalarını anlaşılır ve eğlenceli bir biçimde anlatır. Kitabın başlığı, bir matematikçinin gerçek hayattaki problemlere yaklaşımındaki merak duygusunu yansıtmayı amaçlıyor. Bu kitaplar ve matematiksel kavramları halkın anlamasını sağlama yönündeki hevesi beni çok etkilemiştir.

Yakov Isaevich uzun yıllar başta ürologlar olmak üzere tıp doktorlarıyla birlikte çalıştı. Bu motivasyonunun ardında şahsi bir sebep vardı. *Mekh-Mat*'a kayıt olduğu sırada, İkinci Dünya Savaşı'nda ön saflarda görevlendirilmiş ve o buz gibi siperlerde ciddi bir böbrek hastalığına yakalanmıştı. Aslında şanslı sayılırdı çünkü bu sayede hastaneye kaldırılmış ve hayatı kurtulmuştu; orduda beraber olduğu birçok sınıf arkadaşı cephede hayatını kaybetmişti. Bununla beraber, o tarihten itibaren böbrek problemleri ile uğraşması gerekti. Sovyetler Birliği'nde ilaç ücretsizdi ama sağlık hizmetlerinin kalitesi düşüktü. İyi tedavi olabilmek için bir doktorla şahsi bağlantınızın olması ya da rüşvet teklif edebilmeniz gerekiyordu. Yakov Isaevich ise çok az insanın teklif edebileceği başka bir şeye sahipti: matematikteki uzmanlığı. Bunu Moskova'daki en iyi ürologlarla arkadaş olmak için kullandı.

Bu onun için harika bir anlaşmaydı çünkü böbrekleri ne zaman sorun çıkarsa Moskova'nın en iyi hastanelerinde, en yetkin ürologlardan en güzel tedaviyi görüyordu. Bu, doktorlar için de iyi bir anlaşmaydı çünkü Yakov Isaevich ellerindeki verileri analiz etmelerine yardımcı oluyordu ki bu sayede bazen ilginç ve önce-

den bilinmeyen olgulara ulaşıyorlardı. Yakov Isaevich, doktorların düşünce tarzının, belli hastaları analiz etmek ve vaka bazında kararlar almak için uygun olduğunu söylerdi. Fakat bu durum bazen büyük resme odaklanmalarını, genel örüntüleri ve ilkeleri bulmaya çalışmalarını engelliyordu. Matematikçilerin işe yaradıkları nokta burasıydı çünkü bizlerin düşünce yapısı tamamen farklıdır: Biz bu tür genel örüntüleri görmek ve analiz etmek üzere yetiştiririz. Yakov Isaevich'in doktor arkadaşları bunun kıymetini biliyordu.

Öğrencisi olunca, Yakov Isaevich beni tıp projelerine dahil etti. Onunla çalıştığım iki buçuk yıl boyunca, üroloji alanında üç proje geliştirdik. Bulgularımız üç genç doktora öğrencisi tarafından doktora tezlerinde kullanıldı. (Rusya'da tıp alanında yüksek lisanstan sonra gelen ve özgün bir tıp araştırması hakkında tez yazmanın zorunlu olduğu doktora seviyesinde bir derece daha vardı.) Tıp dergilerinde çıkan birkaç yayının ortak yazarlarından biri oldum ve bir patentin de hak sahipleri arasında yer aldım.

İlk projenin başlangıcını daha dünmüş gibi hatırlıyorum. Yakov Isaevich ile birlikte Moskova'nın en iyi hekimlerinden birinin oğlu olan genç ürolog Alexei Velikonov'u ziyarete gittik. Yakov Isaevich, kendisinden oğluna yardım etmesini isteyen baba Velikanov'un eski arkadaşı (ve hastası) idi. Alexei bize, prostat adenomu (yaşlı erkeklerde sıklıkla karşılaşılan iyi huylu bir tümör) alınan yaklaşık yüz kadar hastadan toplanan çeşitli verilerle dolu kocaman bir kâğıt gösterdi. Veriler, ameliyat öncesi ve sonrasına ait kan basıncı ve diğer test sonuçları gibi çeşitli özellikler içeriyordu. Bu verilerden hareketle ameliyatın hangi durumlarda daha başarılı olduğuna dair sonuca ulaşmayı ve böylece tümörün ne zaman alınacağına ilişkin bir dizi tavsiyede bulunabilmeyi umuyordu.

Alexei Velikanov'un bu verilerin analizi için yardıma ihtiyacı vardı ve bizim yapabileceğimizi umut ediyordu. Daha sonra öğreneceğim üzere, bu tipik bir durumdu. Doktorlar, mühendisler ve diğer mesleklerden insanlar, matematikçilerin toplamış oldukla-

rı her türlü veriden hızla sonuçlar elde etmelerini sağlayan sihirli bir sopaya sahip olmalarını bekler sıklıkla. Bu tabii ki sadece bir hayaldir. Bazı güçlü istatistiksel analiz yöntemleri biliyoruz ama bunlar genellikle uygulanamaz çünkü ya veriler kesin değildir ya da farklı türden veriler vardır: Bir kısmı nesnel iken diğer kısmı öznel (örneğin hastanın kendisini nasıl "hissettiği") ya da bir kısmı nicel (kalp basıncı ya da kalp atış hızı gibi) ve bir kısmı da nitel (belli sorulara verilen "evet" ya da "hayır" cevapları gibi) olabilir. Homojen olmayan bu verileri istatistiksel bir formülde kullanmak, tamamen imkânsız değilse bile oldukça zordur.

Öte yandan doğru soruları sormak, bazı durumlarda kimi verilerin alakasız olduğunu ve onları bir kenara ayrılmaları gerektiğini fark etmeyi sağlayabilir. Şahsi tecrübem, doktorların topladıkları verilerin yaklaşık olarak sadece yüzde 10 veya 15'ini tanı koymada veya tedavide kullanıldığı yönündedir ama onlara sorsanız bunu size asla doğrudan söyleyemezler. Tamamının gerekli olduğunda diretir ve tüm bu bilgiyi dikkate alacakları senaryo veya ona benzer bir şeyi önünüze koyarlar. Bu vakaların çoğunda, verilerin büyük kısmını göz ardı edip az sayıdaki birkaç temel kritere göre karar verdiklerine ikna olmaları için biraz zaman gerekir.

Elbette, sadece verileri bazı istatistiksel programlara girerek cevapların bulunabildiği sorularla karşılaştığımız da oluyordu. Bu tür projeler üzerinde çalışırken şunu fark ettim: Biz matematikçilerin doktorlara sağladığı fayda, bu istatistik programlarını biliyor olmaktan çok (bunun zor olduğu pek söylenemez, hemen herkes öğrenebilir) doğru soruları kurgulayabilmek ve sonrasında da cevap elde edebilmek için nesnel ve yansız analiz yapabilme becerimizden kaynaklanıyordu. Matematikçiler gibi düşünecek biçimde yetiştirilmeyenlerin işine yarayan, asıl bu "matematiksel kafa yapısı"dır.

Bu yaklaşım, ilk projemde alakasız verileri ayıklayıp, kalan parametreler arasında birtakım bariz olmayan bağlantılar ya da korelasyonlar bulabilmemize yardımcı oldu. Pek kolay olmadı ve birkaç

ayımızı aldı ama sonuçtan memnunduk. Bulgularımızı anlatan ortak bir makale yazdık ve Alexei bunları doktora tezinde kullandı. Yakov Isaevich ve ben, yine bir Kerosinka öğrencisi ve yakın arkadaşım olup bu projede de çalışan Alexander Lifshitz ile birlikte, tez savunmasına davet edildik.

Tez savunması esnasında, doktorlardan biri bu sonuçlara ulaşmak için kullanılan bilgisayar programının ismini sorduğunda, Yakov İsaevich'in "isimleri Edward ve Alexander," diye cevap verdiğini hatırlıyorum. Söylediği doğruydu: Bilgisayar kullanmamıştık, onun yerine tüm hesapları elle ya da basit bir hesap makinası ile yapmıştık. İşin püf noktası hesaplamalar değil (bu işin kolay yanıydı), doğru soruları sormaktı. Savunmada yer alan üst düzey cerrahlardan biri, matematiğin tıp için bu kadar faydalı olduğunun ortaya konmasını çok etkileyici bulduğunu ve belki gelecek yıllarda daha da faydalı olacağını belirtti. Çalışmamız tıp camiasından olumlu tepkiler aldı ve Yakov Isaevich bu durumdan hoşnuttu.

Bu proje biter bitmez, Yakov Isaevich benden böbrek tümörü ile ilgili bir başka üroloji projesinde (başka bir doktora tezi için) çalışmamı istedi. O projeyi de başarıyla tamamladım.

Çalıştığım üçüncü ve son tıp projesi, benim için en ilginç olanıydı. Tezi için verilerinin analizine ihtiyacı olan genç doktor Sergei Arutyunyan ile harika bir uyum yakaladık. Bağışıklık sistemleri nakledilen böbrekleri kabul etmeyen hastalar üzerine çalışıyordu. Bu tür durumlarda doktorun uzun erimli sonuçları olan, böbreğin kalması ya da alınması yönündeki bir kararı hızla vermesi gerekir: Eğer böbreği tutarlarsa hasta ölebilir; öte yandan, böbreği alırlarsa hastanın bir başka böbreğe ihtiyacı olacaktır ki bulunması çok zor olabilir.

Sergei, nicel ultrason tanılarına dayanarak, istatistiksel olarak hangi tavsiyenin en uygun olduğunu göstermenin bir yolunu arıyordu. Bu alanda epeyce deneyim sahibiydi ve çok miktarda veri toplamıştı. Benden bu verileri analiz edip, diğer doktorların da

karar almak için faydalanabilecekleri anlamlı ve nesnel kriterleri belirlemesinde ona yardımcı olmamı umuyordu. Bana söylediğine göre, daha önce bunu kimse yapamamıştı; doktorların çoğu bunun imkânsız olduğunu düşünüyor ve kendi *ad hoc* yaklaşımlarına güvenmeyi tercih ediyordu.

Verileri gözden geçirdim. Bir önceki projemizde olduğu gibi, her bir hasta için ölçülen yaklaşık kırk tane farklı parametre vardı. Düzenli buluşmalarımızda Sergei'ye yerinde sorular yönelterek bu verilerin hangilerinin alakalı, hangilerinin alakasız olduğunu kavramaya çalışıyordum. Ancak bu zor bir işti. Diğer doktorlar gibi o da, belirli vakalara dayanan cevaplar veriyordu ki bu da pek yardımcı olmuyordu.

Farklı bir yaklaşım kullanmaya karar verdim. Şöyle düşündüm: "Bu adam bu tür kararları her gün veriyor ve bunu çok iyi yaptığı da ortada. 'Sergei olmayı' öğrenebilsem nasıl olur? Problemin tıbbi yönüne dair pek bir şey bilmesem de karar verme sürecini takip ederek metodolojisini öğrenmeye çalışabilir ve sonra da bu bilgi birikiminden hareketle bir kurallar dizisi ortaya koyabilirim."

Bir tür oyun oynamayı önerdim.[2] Sergei yaklaşık 270 hastadan veri toplamıştı. Rastgele 30 hastanın verilerini seçtim ve diğerlerini bir kenara koydum. Rastgele seçilen bu hastaların geçmiş bilgilerini elime alacaktım ve ofisin karşı köşesinde oturan Sergei'nin hasta hakkında sorduğu soruları dosyalarına bakarak cevaplayacaktım. Buradaki amacım, sorularının ardındaki şablonu kavramaktı (soruların anlamını onun kadar bilmiyor olmama rağmen). Örneğin bazen farklı sorular ya da aynı soruları farklı sırada soruyordu. Bu tür durumlarda, "Geçen sefer bunu sormamıştın. Şimdi neden soruyorsun?" diye araya giriyordum.

O ise şöyle açıklıyordu: "Çünkü o son hastanın böbrek büyüklüğü şöyle şöyleydi ve bu durum bu senaryoyu devre dışı bıraktı. Oysa şu anki hasta için böbrek büyüklüğü şöyle şöyle ve bu senaryo gayet olası."

Tüm bunları not alıyor ve mümkün olduğunca içselleştirmeye çalışıyordum. Aradan çok yıllar geçmiş olmasına rağmen o ânın resmi hâlâ aklımda: Sergei ofisinin köşesindeki sandalyede düşüncelere dalmış bir hâlde oturuyor, sigarasını tüttürüyordu (tiryakiydi). Onun düşünme şeklini çözümlemeye çalışmak, benim için çok heyecan vericiydi —bir nevi, bir yapbozun temel parçalarını anlamak için onu bozmaya benziyordu.

Sergei'nin cevapları bana oldukça değerli bilgiler verdi. Genellikle üç ya da dört sorudan fazlasına gerek kalmadan tanıyı koyardı. Ben de bu tanıyı hastaya gerçekte ne olduğu bilgisi ile karşılaştırıyordum. Sergei'nin tanıları her zaman isabetliydi.

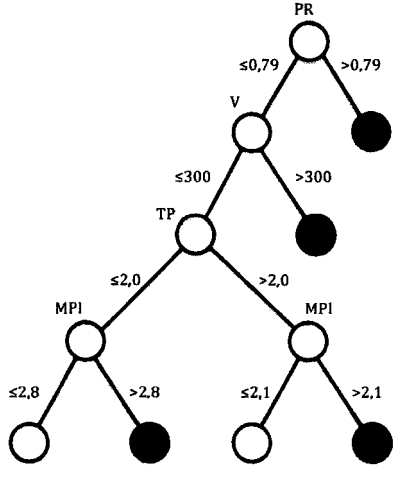
Birkaç düzine kadar vakanın ardından ben de, onu sorgularken öğrendiğim bir dizi basit kurala uyarak tanı koyabilmeye başladım. Yarım düzine kadar hastadan sonra, artık ben de sonucu onun kadar iyi tahmin eder hâle geldim. Aslında işleyen basit bir algoritma vardı ve Sergei çoğu vakada bunu takip ediyordu.

Tabii ki algoritmanın işe yaramadığı az sayıda vaka her zaman oluyordu. Bir kişi hastaların yüzde doksan-doksan beşi için etkili ve hızlı bir şekilde teşhis koyabilirse bu büyük bir başarıdır. Sergei'nin dediğine göre, ultrasonla tanı alanı üzerine mevcut literatürde bu türde bir başarı yoktu.

"Oyunumuzu" tamamladıktan sonra, aşağıda karar ağacı olarak çizdiğim basit algoritmayı çıkardım. Ağacın her bir düğümünden çıkan ve alttaki düğümlere uzanan iki dal bulunur. Birinci düğümdeki belirli bir soruya verilen cevap, kullanıcının sonraki iki olası daldan hangisine gitmesi gerektiğini belirler. Örneğin ilk soru, nakledilen organın içindeki kan damarının periferik direç (PD) endeksine ilişkindir. Bu, Sergei'in yaptığı araştırmada kendisinin öne sürdüğü bir parametreydi. Eğer bu endeksin değeri 0,79'dan büyükse vücudun böbreği kabul etmeme ve hastanın acil cerrahi müdaheleye ihtiyaç duyma olasılığı yüksektir. Bu durumda, sağdaki siyah düğüme gideriz. Aksi durumda ise soldaki düğüme gidip

bir sonraki soruyu sorarız: Böbreğin hacmi (v) nedir? Ve bu şekilde devam eder. Dolayısıyla her hastanın verisi, bu ağaç üzerinde belirli bir yol ortaya koyar. Ağaç dört-beş adımın ardından sonlanmaktadır (kalan iki parametrenin, TP ve MPI, şu an bizim için bir önemi bulunmuyor). Şekilde gösterildiği üzere, son düğümler verilen kararı içermektedir: Siyah düğüm "operasyon yapılacak" anlamına gelirken, beyaz düğüm "operasyon yapılmayacak" demektir.

Bir kenara koyduğum dosyalardaki yaklaşık 240 hastaya ait veriler için de algoritmayı işlettim. Ciddi bir uyuşma söz konusu idi. Vakaların yaklaşık yüzde 95'inde, doğru bir tanı konulabiliyordu.



Algoritma, karar veren doktorun düşünce sürecinin başlıca noktalarını basit biçimde tanımlıyor ve hastanın durumunu tanımlayan parametrelerden hangilerinin tanıyla en fazla ilişkili olduğunu gösteriyordu. Başlangıçta elimizde olan yaklaşık kırk parametrelik listeye rağmen sadece dört parametre bu özelliği taşıyordu. Örneğin algoritma, Sergei'nin getirdiği ve böbreklerdeki kan akışını ölçen periferik direnç endeksinin önemini ortaya koydu. Bu parametrenin, karar verme aşamasında bu kadar önemli rol oynaması bile başlı başına önemli bir keşifti. Tüm bu bulgular, bu alanda daha ileride

yapılacak araştırmalarda kullanılabilirdi. Başka doktorlar algoritmayı hastalarına uygulayabilir, test edebilir ve belki daha da etkili olmasına yardım etmek için ince ayarlar yapabilirlerdi.

Bunun hakkında, Sergei'in doktora tezinin temelini oluşturacak bir makale yazdık ve bir patent başvurusunda bulunduk. Başvurumuz bir yıl sonra onaylandı.

Yakov Isaevich ile yaptığım işten gurur duyuyordum; o da benden. İyi bir ilişkimiz olmasına rağmen, "diğer" matematik hayatımı (Fuchs ve Feigin ile yaptığım çalışma vs) ondan ve diğer birçok insandan yine de gizli tutuyordum. Uygulamalı matematik eşim, soyut matematik ise gizli aşkım gibiydi.

Buna rağmen, bir iş bulma vakti gelip çattığında Yakov Isaevich beni Kerosinka'daki laboratuvarına asistan olarak işe almayı deneyebileceğini söyledi. Bu bana bir yıl sonra doktora öğrencisi olma imkânı da sağlayacak ve yakın gelecekteki iş hayatım için önüme temiz bir yol açacaktı. Gayet iyi bir plan gibi gözükmekle birlikte birçok engel vardı; özellikle de ben Kerosinka'ya başvurmadan önce babamın uyarıldığı üzere, anti-Semitizm ile tekrar karşılaşacaktım.

Pek tabii ki Yakov Isaevich bunun farkındaydı. Onlarca yıldır Kerosinka'daydı ve işlerin nasıl yürüdüğünü biliyordu. Aslında kendisi bizzat Rektör Vinogradov tarafından işe alınmıştı ve ona çok saygı duyuyordu.

Benim başvurumla ilgili sorular ise Vinogradov tarafından değil, orta kademedeki bürokratlar tarafından ele alınacaktı ve bu adamlar, soyadı Yahudiliği çağrıştıran kişilere tüm kapıları kapattıklarından emin olacaktı ama Yakov Isaevich sistemi nasıl işleteceğini biliyordu. Kerosinka'daki son yılımın bahar döneminin başlarında iş sorunum öncelikli hâle geldiğinde, beni laboratuvarında göreve alan bir mektup yazdı. Mektubu evrak çantasına koyarak yanında taşıdı. Zira Vinogradov ile benim hakkımda özel olarak konuşabilme şansını yakaladığında, hazırlıklı olmak istiyordu.

İşte o fırsat kısa bir süre içinde karşısına çıktı. Bir gün Kerosinka'ya girerken Vinogradov ile çarpışmış. Onu gördüğüne sevinen Vinogradov, "Yakov Isaevich, nasılsın?" diye sormuş.

Yakov Isaevich ise suratını asarak (iyi bir aktör olabilirdi), "Çok fena," diye cevaplamış.

"Ne oldu?"

"Eskiden laboratuvarımda iyi işler çıkarıyorduk ama artık yapamayız, olmuyor. Yeni yetenekler alamıyorum. Bu sene mezun olacak harika bir öğrencim var ama onu işe alamıyorum."

Tahminimce, Vinogradov ona patronun kim olduğunu göstermek istemiş —ki Yakov Isaevich'in istediği de buydu— ve "Endişelenme, bu konuyla ilgileneceğim," demiş.

Bu söz üzerine Yakov Isaevich başvuru kâğıdımı çıkarmış, Vinogradov'un da imzalamaktan başka çaresi kalmamış.

Normalde bu mektubun Vinogradov'un masasına ulaşana kadar bir düzine insan tarafından imzalanması gerekirdi: yerel Komsomol* Örgütü'nün ve Komünist Parti'nin şefleri, diğer her türden bürokratlar. Bu kişiler, işin olmasını engelleyecek şekilde süreci durdurmanın bir yolunu mutlaka bulurlardı. Oysa şimdi, Vinogradov'un imzası çoktan alınmıştı! Bundan sonra ne yapabilirlerdi ki? Patron oydu ve onun isteklerini geri çeviremezlerdi. Dişlerini gıcırdatacak ve bir süre oyalayacak ama sonunda pes edip imzalayacaklardı. Altta Vinogradov'un imzasını fark ettiklerinde yüzlerinin aldığı şekli görmeliydiniz! Yakov Isaevich sistemi zekice alt etmişti.

* Leninist Genç Komünistler Birliği.

13. Bölüm:

Harvard'ın Daveti

Tüm bu o stres ve belirsizliğin ortasında, Mart 1989'da, Amerika Birleşik Devletleri'nden Harvard Üniversitesi'nin antetli kâğıdına yazılmış bir mektup geldi.

> Sayın Dr. Frenkel,
>
> Matematik Bölümü'nün tavsiyesi üzerine sizi 1989 yılı Güz Dönemi'nde Harvard Prize Fellowship ile Harvard Üniversitesi'ni ziyaret etmeye davet etmek isterim.
>
> Saygılarımla,
>
> Derek Bok
>
> Harvard Üniversitesi Rektörü

Harvard Üniversitesi'ni daha önce duymuştum ama itiraf etmeliyim ki o zamanlar akademik dünyadaki öneminin pek farkında değildim. Yine de çok mutluydum. Amerika'ya burs kazanarak davet edilmiş olmayı büyük bir onur olarak görüyordum. Üniversitenin rektörü bana bizzat yazmıştı! Üstelik henüz lisans derecemi bile almamışken (o sıralar Kerosinka'daki son dönemimdi) bana "Doktor" diye hitap etmişti.

Bu nasıl olmuştu? Borya ile yaptığımız çalışma duyulmaya başlamıştı. İlk kısa makalemiz yayınlanmıştı ve daha uzun üç tanesi de (hepsi İngilizceydi) bitmek üzereydi. İsveçli fizikçi Lars Brink, Moskova ziyaretinde bu makalelerin bir tanesini editörlüğünü yaptığı bir kitap için istemişti. Makalemizi kitaba dahil etmesi için ona verdik ve yaklaşık yirmi kopyasını çıkartıp, yurt dışında bu konu ile ilgilenebilecek matematikçi ve fizikçilere yollamasını rica etmiştik. Bu kişilerin adreslerini Moskova Bilim Kütüphanesi'ndeki yayınlanmış makalelerden bulmuş ve Lars'a bir liste şeklinde vermiştim. Bizim bu kopyaları yollamamızın ne kadar zor olacağını bildiğinden, gayet nazik bir biçimde bize yardım etmeyi kabul etmişti. Makale, kısmen kuantum fiziği uygulamaları dolayısıyla, yaygın olarak bilinir hâle gelmişti.

Tüm bunlar internet kullanımının yaygınlaşmasından yıllar önce oluyordu ama bilimsel literatürün yayılma sistemi gayet etkindi: Yazarlar, makaleleri yayınlanmadan önce yazılı özetlerini (bunlara ön baskı deniliyordu) dağıtırdı. Makaleyi alanlar onu çoğaltır, çalışma arkadaşlarına ve üniversite kütüphanelerine iletirdi. Lars Brink'in makalemizi yolladığı yaklaşık yirmi kişi de öyle yapmış olmalıydı.

O sıralar Sovyetler Birliği'nde büyük değişiklikler oluyordu: Mikhail Gorbaçov tarafından başlatılan *prestroyka* dönemiydi. Bunun sonuçlarından biri de, halkın yurt dışına daha özgür bir şekilde seyahat etmesine izin verilmesi oldu. Daha önce de Feigin ve Fuchs gibi matematikçiler, Batı'da konferanslara katılmak ve üniversiteleri ziyaret etmek üzere davet edilmişti ama yurt dışı gezileri tamamen hükümetin kontrolü altındaydı. Başka bir ülkeye giriş vizesi almadan önce, Sovyetler Birliği'nden ayrılabilmeyi sağlayan çıkış vizesinin temin edilmesi gerekiyordu. İnsanların geri dönmeyebileceğinden korkulduğu için, bu vize çok az kişiye verilirdi (gerçekten de çıkış vizesi alabilenlerin çoğu geri dönmedi). Neredeyse tüm başvurular, genellikle yalan yanlış sebeplerle geri çevriliyordu. Fuchs bir keresinde bana çıkış vizesi için son denemesini yıllarca önce yaptığını söylemişti.

Ancak 1988 güzünde birdenbire, aralarında Gelfand'ın da bulunduğu birçok kişinin yurt dışı seyahati yapmasına izin verildi. Bu kişilerden bir diğeri, Borya'nın arkadaşlarından yetenekli ve genç matematikçi Sasha Beilinson'du; daha önce ortak yayın yaptığı, birkaç yıl önce göç edip Harvard'da öğretim görevlisi olan Joseph Bernstein'ı ziyaret etmek üzere Amerika Birleşik Devletleri'ne gitti.

Bu zaman zarfında Batılı bilim insanları da değişimlerin gelmekte olduğunu fark ettiler ve bunu Sovyetler Birliği'nden bilim insanlarını davet etmek için fırsat bildiler. O sıralarda Harvard Matematik Bölümü'nün başkanı olan ünlü matematiksel fizikçi Arthur Jaffe de bunlardan biriydi. Yetenekli genç Rus matematikçiler için yeni bir konuk pozisyonu açmaya karar verdi. Harvard'dan onur derecesi almış olan Gelfand'ın 1988 güzündeki ziyaretinde, Jaffe ondan bu programa fon ve destek sağlaması için Gelfand'ın şahsen tanıdığı Rektör Derek Bok'u ikna etmesini rica etti. (Bu fonun bir kısmı, daha sonraları Clay Matematik Enstitüsü'nü kuracak olan Landon Clay tarafından sağlanıyordu.) Jaffe bu desteğe Harvard Prize Fellowship adını koydu.

Program için gerekli hazırlıklar tamamlandığında sıra kimlerin davet edileceğine karar vermeye geldi ve Jaffe bunun için birçok matematikçinin fikrini aldı. Anlaşılan, benim adım da birkaç kişi (Beilinson da dahil olmak üzere) tarafından zikredilmişti ve bu sayede ödülün ilk dört adayı arasından ben seçildim.

Rektör Bok'un mektubunun hemen ardından Jaffe'nin kendisinden, işin şartlarını açıklayan uzunca bir mektup daha geldi. Üç ile beş ay arası bir süre için gidebiliyordum; konuk öğretim üyesi olarak davet edilmiştim ama çalışmalarım hakkında vereceğim birkaç konferans dışında herhangi bir resmi sorumluluğum yoktu; Harvard seyahat, konaklama ve gündelik masraflarımı karşılayacaktı. Kısacası, Sovyetler'den çıkış vizesi hariç hemen her şeyi karşılıyorlardı. Neyse ki, gayet şaşırtıcı bir biçimde, çıkış vizesini bir ay içerisinde aldım.

Arthur Jaffe mektubunda, Ağustos'un sonuna doğru gelip Ocak ayının sonuna kadar kalabileceğimi yazmıştı ama ben üç ay kalmayı seçtim; bu, mektupta belirtilen kalabileceğim en kısa süreydi. Neden? Amerika Birleşik Devletleri'ne göç etme niyetim yoktu, geri dönmeyi planlıyordum. Bunun yanı sıra Yakov Isaevich'in o kadar uğraşarak sağladığı iş imkânına sırt çevirmiş olmaktan dolayı da kendimi suçlu hissediyordum.

Çıkış vizemi almamın ardından ziyaretin gerçekleşmesi kesinleştiğinde, Yakov Isaevich'e itirafta bulunup "müfredat dışı faaliyetlerimden" (Feigin ile yaptığım çalışmaları ve Harvard'ın daveti) bahsetmem gerekti. Doğal olarak çok şaşırdı. Tüm enerjimi onunla sürdürdüğüm tıp projelerine ayırdığımdan emindi. İlk tepkisi epey olumsuz oldu:

"Peki sen Harvard'a gidersen laboratuvarımda kim çalışacak?" diye sordu.

Bu noktada, beni evlerinde her zaman sıcak bir biçimde karşılamış olan, Yakov Isaevich'in eşi Tamara Alekseevna imdadıma yetişti:

"Yasha, saçmalıyorsun. Çocuk Harvard'a davet edilmiş. Bu harika bir haber! Kesinlikle gitmeli ve geri döndüğünde seninle çalışmaya devam eder."

Yakov Isaevich gönülsüzce kabul etti.

Yaz ayları hızlıca geçti ve gidiş vaktim, 15 Eylül 1989 gelip çattı. Moskova'dan New York JFK Havalimanı'na ve oradan da Boston'a uçtum. Jaffe beni havalimanında karşılayamadı ama bir yüksek lisans öğrencisini beni almak üzere yollamıştı. Matematik Bölümü'nün birkaç gün sonra gelecek olan Harvard Prize Fellowship'in diğer kazananı Nicolai Reshetikhin ve benim için kiraladığı, iki yatak odalı daireye götürüldüm. Ev, Botanik Bahçesi'nin içinde, Harvard'a ait bir konut sitesinde yer alıyordu ve Harvard Yard'a on dakikadan az yürüme mesafesindeydi. Her şey değişik ve ilginç görünüyordu.

Gecenin geç saatlerinde eve vardım. Jet-lag olmuş bir hâlde hemen yattım. Ertesi sabah yakınlardaki bir manava gittim ve bir

şeyler aldım. Eve döndüğümde salata yapmaya koyuldum ama tuz olmadığını fark ettim ve salatayı tuzsuz yedim.

Tam bitirdiğim esnada kapı çaldı. Gelen, Arthur Jaffe idi. Arabasıyla şehirde küçük bir tur atmayı teklif etti. Doğrusu çok havalıydı; yirmi bir yaşında bir genç, Harvard Matematik Bölümü Başkanı'nın kullandığı arabayla şehir turu atacaktı. Harvard Yard'ı, Charles Nehri'ni, güzel kiliseleri ve Boston şehir merkezindeki gökdelenleri gördüm. Güzel bir hava vardı. Şehirden çok etkilenmiştim.

İki saatlik bir gezinin ardından geri dönerken Arthur'a tuz almam gerektiğini söyleyince, "Sorun değil, yakınlardaki bir süpermarkete uğrarız," dedi.

Beni Porter Meydanı'ndaki Star Market'e götürdü ve arabada bekleyeceğini söyledi.

İlk defa bir süpermarkette bulunuyordum ve benim için ürkütücü bir tecrübeydi. O sıralar Rusya'da gıda sıkıntısı vardı. Memleketim Kolomna'da sadece ekmek, süt ve patates gibi temel sebzeler satın alınabiliyordu. Daha fazlası için Moskova'ya gitmeniz gerekiyordu ki orada bile olsa olsa düşük kaliteli İtalyan sucuğu ile peynir bulunabiliyordu. Moskova'dan geldiğim her hafta sonu ailem için biraz yiyecek getiriyordum. Süpermarkette her türden yiyecek ile dolu art arda koridorları görmek gerçekten inanılmazdı.

"Burada aradığın şeyi nasıl bulabilirsin ki?" diye düşündüm. Tuz arayarak koridorlarda yürümeye başladım ama nafile. Süpermarketteki ürün bolluğundan biraz sersemledim sanırım; her nasılsa tepedeki işaretleri bile fark etmemiştim. Süpermarket çalışanlarından birine, "Tuz nerede?" diye sordum ama dediklerinden tek kelime anlamadım. İngilizcem matematik dersi vermek için yeterince iyiydi ama gündelik konuşma dili tecrübem hiç yoktu. Ağır Boston aksanı da anlamayı hiç kolaylaştırmıyordu.

Aradan yarım saat geçmiş ve devasa bir labirente benzeyen Star Market'in içinde kaybolduğum için gerçekten umutsuzluğa kapılmaya başlamıştım. Sonunda, içinde sarımsak-tuz karışımı olan bir

paket gördüm. "Bu da olur," dedim kendi kendime, "derhal çık buradan." Ödemeyi yaptım ve dükkândan çıktım. Zavallı Arthur endişelenmiş —bu çocuk kırk beş dakikadır içeride ne yapıyordu ki?— ve beni aramaya başlamıştı.

"Kapitalizmin bolluğunda kendimi kaybetmiş olduğumu" düşündüm.

Amerika'ya uyum sağlamaya başlıyordum.

Harvard Prize Fellowship ile güz döneminde gelecek diğer iki kişi, kaldığım daireyi paylaştığım Nicolai Reshetikhin (benden bir hafta sonra geldi) ile Boris Tsygan* idi. Her ikisi de benden on yaş büyüktü ve hâlihazırda matematiğe çığır açıcı katkılarda bulunmuş kişilerdi. Çalışmalarından haberdardım ama onlarla şahsen tanışmamıştım. O ilk dönem boyunca aramızda bir bağ oluştu ve ömür boyu sürecek bir dostluğun temelini attık.

Nicolai ya da çoğu kişinin sıcakkanlılığı dolayısıyla yakıştırdığı ismiyle Kolya, St. Petersburg'luydu. Basit grupların genellenmiş hâli olan kuantum gruplarını bulanlardan biri olarak ün salmıştı. Daha kesin ifade etmek gerekirse, kuantum grupları Lie gruplarının (daha önce değindiğimiz matematiksel cisimler) birtakım deformasyonlarıdır ve günümüzde matematik ve fiziğin birçok alanında Lie grupları kadar yaygın olarak karşımıza çıkarlar. Örneğin Kolya ile bir diğer matematikçi Vladimir Turaev, bunları düğümler ve üç boyutlu manifoldlar için sabitler oluşturmakta kullandılar.

Borya Tsygan, hocam Boris Feigin ile uzun süredir birlikte çalışıyordu. Aslen Ukrayna'nın Kiev kentinden olan Tsygan'ın okuldan mezun olduğunda, daha sonradan "değişmeli-olmayan geometri" alanında çığır açan bir fikri vardı. Diğer Yahudi matematikçiler gibi onun da lisansüstü eğitim alması engellenmişti. Bu yüzden, üniversiteden mezun olduktan sonra, tüm gününü Kiev'deki bir

* Harvard Prize Fellowship'i kazanan dördüncü kişi, Vera Serganova baharda geldi.

ağır makine tesisinde gürültülü makinalar içinde geçirerek çalışmak zorunda kalmıştı ama pek mükemmel olmayan bu şartlar altında bile keşfini yaptı.

İnsanlar genellikle matematikçilerin steril bir ortamda köhne bir ofiste boş boş oturup bir bilgisayar ekranına ya da tavana bakarak, çalıştıklarını zannederler. Oysa en iyi fikirlerin bazıları, onları hiç beklemediğiniz bir anda, muhtemelen sinir bozucu sanayi gürültüsü arasında gelir.

Harvard Yard'da yürüyüp tuğla binaların eski moda mimarisini, Harvard'ın heykelini ve eski kiliselerin çan kulelerini inceleyerek ister istemez eskilere dayanan bilgi birikimi uğraşı geleneği ve sonu gelmez keşfetme tutkusu ile bu mekânın özgünlüğünü hissediyordum.

Harvard'ın Matematik Bölümü, Harvard Yard'ın hemen dışındaki modern bir görünüme sahip olan Bilim Merkezi'nin içinde yer alıyordu. Cambridge'e (Massachusetts) iniş yapmış ve orada kalmaya karar vermiş dev bir uzay gemisine benziyordu. Matematik Bölümü, bu binanın üç katına yayılmıştı. Binanın içinde ofisler, kahve makinaları ve rahat koltuklarla dolu ortak alanlar ile yan yanaydı. Ayrıca, iyi tasarlanmış bir kurum içi matematik kütüphanesi ve hatta bir de pinpon masası vardı. Tüm bunlar insana kendini evdeymiş gibi hissettiren bir ortam yaratıyordu ve burada gece yarısında bile çalışan, kütüphanede okuma yapan, koridorlarda sinirli sinirli volta atan, hararetli sohbetlere katılan ve bir kısmı da sadece kanepe üstünde şekerleme yapan genç ya da yaşlı insanlar bulmak mümkündü... Bu mekândan hiç ayrılmayacakmışsınız gibi bir hisse kapılıyordunuz (ve görünüşe göre bazıları hiç ayrılmıyordu).

Bölüm, başka okullarla karşılaştırıldığında oldukça küçüktü: Fakülte, sayıları on beşi geçmeyen tam zamanlı öğretim üyeleri ile üç yıllık öğretmen pozisyonu olan yaklaşık on kadar doktorasını bitirmiş kişiden oluşuyordu. Ben katıldığımda kadroda Joseph Bernstein, Raoul Bott, Dick Gross, Heisuke Hironaka, David Kazhdan, Barry

Mazur, John Tate ve Shing-Tung Yau gibi zamanımızın en büyük matematikçilerinden bazıları vardı. Onlarla tanışmak ve onlardan bir şeyler öğrenmek, hayatta insanın eline bir kere geçebilecek bir fırsattı. O sıralar atmışlı yaşlarının sonunda olan, kır saçlı, dost canlısı ve karizmatik dev adam Raoul Bott'la güzel anılarım oldu. Bir keresinde beni koridorun kenarına çekmiş ve gür sesiyle "Nasıl gidiyor delikanlı?" diye sormuştu.

Orta katta ise her birinin kendisine ait küçük bölmesi bulunan otuz kadar yüksek lisans öğrencisi vardı.

Üç Rus —Kolya, Borya ve ben— olarak, herkes tarafından gayet sıcak bir biçimde karşılandık. İzleyen yıllarda Amerikan üniversitelerine akacak Rus bilim insanı dalgasının öncüleri olmamızla birlikte, o günlerde Sovyetler Birliği'nden ziyaretçi gelmesi henüz oldukça sıra dışı bir durumdu. Cambridge'de geçen yaklaşık bir haftanın ardından, artık kendimi tamamen oradan biri gibi hissediyordum. Her şey gayet doğal ve güzel görünüyordu. Kendime en hippisinden bir kot pantolon ve bir Sony Walkman satın aldım (hatırlarsanız 1989 yılındaydık!), taktığım kulaklıktan en klas parçaları dinleyerek etrafta turluyordum. Tanımayan biri için, 21 yaşındaki tipik bir öğrenciye benziyordum. Hâlâ istediğim düzeyde İngilizce konuşamıyordum. İngilizcemi geliştirebilmek için her gün *The New York Times* alıp, elimde sözlükle (sonradan bazılarının İngilizcenin en gizemli kelimeleri olduklarını anladığım kelimeleri çözümlemeye çalışarak) en az bir saat okuyordum. Gece geç saatlerde televizyon izlemenin de müptelası oldum.

Favorim, David Letterman'ın şovuydu (o zamanlar NBC'de 00:35'te başlardı). İlk izlediğimde bir kelime dahi anlamadım ama yine de bunun *benim* şovum olduğu açıkça ortadaydı; konuğun dediklerini anladığımda, şov gerçekten hoşuma gidecekti. Bu bana fazladan motivasyon kazandırdı. Şovu her gece inatla izliyordum ve yavaş yavaş şakaları, içeriği ve arka planı anlamaya başladım. Amerikan popüler kültürünü bu şekilde keşfediyor ve her şeyi yalayıp

yutuyordum. Erken yatmam gereken bazı geceler, şovu video kasete kaydediyor ve sabah kahvaltı yaparken izliyordum. *The Letterman Show*, benim için dini ritüel gibi bir şey olmuştu.

Benim ve burs alan diğerlerinin resmi herhangi bir zorunluluğu bulunmamasına rağmen, projelerimiz üzerinde çalışmak, insanlarla sohbet etmek ve düzenlenen çok sayıdaki seminere katılmak üzere bölüme her gün geliyorduk. En çok sohbet ettiğim iki öğretim üyesi, Rus göçmenleri olan Joseph Bernstein ile David Kazhdan idi. Bu iki yakın arkadaş, Gelfand'ın eski öğrencileri ve çok iyi matematikçilerdi fakat birbirinden bu kadar farklı iki kişiliği hayal dahi edemezdiniz.

Joseph, sessiz ve alçak gönüllüydü. Bir soru sorarsanız, sizi sessizce dinler, bir süre düşünür ve genellikle de cevabı bilemediğini söylerdi ama yine de konu hakkında neler düşündüğünü ifade ederdi. Açıklamaları kristal berraklığında ve gerçekçiydi; çoğunlukla da bilmediğini iddia ettiği cevabı açıklardı. Her seferinde, tüm bunları anlamak için dahi olmanız gerekmediği hissine kapılmanızı sağlardı ki bu, gelecek vaad eden genç bir matematikçi için harika bir duygudur.

David ise bir dinamoydu: Son derece kurnaz, hazır cevap ve hızlıydı. Ansiklopedik bilgi hazinesi, gösterişi sevmesi ve ara sıra sergilediği sabırsızlığıyla hocası Gelfand'ı andırıyordu. Seminerlerde, eğer konuşmacının konuyu iyi açıklayamadığını düşünürse, karatahtaya gidip, konuşmacının elinden tebeşiri kapar ve kendisi devam ederdi —tabii, eğer konu ilgisini çektiyse. Aksi hâlde sızıverirdi. Bir soruya "bilmiyorum" cevabını verdiğini çok nadiren işitirdiniz; gerçekten de neredeyse her şeyi bilirdi. Zaman içerisinde onunla uzun sohbetlerimiz oldu ve ondan çok şey öğrendim. Daha sonra ortak bir projede işbirliği yaptık ve bu benim için çok faydalı bir deneyim oldu.

Harvard'daki ikinci haftamda, çok önemli biriyle daha karşılaştım. Cambridge'de, Harvard'la karşılaştırıldığında daha az bilinen ve genellikle isminin kısaltmasıyla anılan başka bir okul daha

vardır: MIT. Tabii ki şaka yapıyorum! Harvard ile MIT arasında her daim bir miktar rekabet olmuştur ama aslında iki matematik bölümü hep yakın ilişki içindedir. Bir Harvard öğrencisinin danışmanının MIT'den bir öğretim üyesi olması ya da bunun tam tersi, hiç de garip bir durum değildir. Her iki okulun öğrencileri de diğer okulun açtığı derslere katılır.

Borya Feigin'in beraber makaleler de yayınladığı arkadaşı Sasha Beilinson, MIT'ye öğretim üyesi olarak atanmıştı ve ben de orada verdiği derslere katılıyordum. İlk derste birisi bana birkaç sıra ötede oturan kırklı yaşlarının ortasındaki yakışıklı bir adamı işaret etti. "Şu adam, Victor Kac". Vay canına! O adam, yıllardır eserleri üzerinde çalıştığım Kac-Moody cebirlerinin ve daha birçok şeyin yaratıcısıydı.

Dersten sonra bizi tanıştırdılar. Victor bana samimi davrandı ve çalışmalarım hakkında daha fazla bilgi edinmek istediğini söyledi. Bana haftalık seminerinde konuşmamı önerdiğinde çok heyecanlandım. Sonunda art arda üç cuma günü, seminerlerinde konuşma yaptım. Bunlar, İngilizce verdiğim ilk seminerlerdi ve üstesinden gelebildiğimi zannediyorum: Katılım yüksekti, insanlar ilgili görünüyorlardı ve çokça soru aldım.

Victor beni kanatlarının altına aldı. Genellikle MIT'deki ferah ofisinde buluşup, matematik hakkında konuşuyorduk ve beni sık sık akşam yemeği için evine davet ediyordu. Daha sonraları, birçok projede beraber çalıştık.

Cambridge'e gelişimden yaklaşık bir ay sonra, Borya Feigin de oraya geldi. Sasha Beilinson, iki aylık bir süre MIT'nin konuğu olması için ona bir davetiye yollamıştı. Borya'nın Cambridge'e gelmesine sevinmiştim: Hem hocamdı hem de aramız çok iyiydi. Devam eden bir dizi matematik projemiz vardı ve bunlar üzerine çalışmak için harika bir fırsat yakalamıştık. Onun gelişinin benim hayatımı büyük bir çalkantıya sürükleyeceğini başta kestirememiştim.

Batı'ya açılan kapıların aralandığı ve matematikçilerin serbestçe seyahat edip, Amerika Birleşik Devletleri'ndeki veya başka yerlerdeki üniversitelere konuk olabilecekleri haberi Moskovalı matematikçiler arasında hızla yayıldı. Birçok insan bu fırsattan yararlanıp temelli olarak Amerika'ya taşındı. Çeşitli üniversitelere başvurular yollamaya, ABD'deki meslektaşlarına telefon açarak onlara iş aradıklarını söylemeye başladılar. Bu "serbestlik" politikasının ne kadar süreceğini kimse bilmediğinden (çoğu kişi birkaç ay sonra sınırların tekrar kapanacağını düşünüyordu), bu durum Moskova'da bir nevi çılgınlık hâli yarattı. Tüm sohbetler aynı soruya bağlanıyordu: "En iyi nasıl çıkarız?"

Başka türlü olması mümkün müydü ki? Bu insanların çoğu, Sovyetler Birliği'ndeki anti-Semitizm ve diğer engellerle başa çıkmak zorunda bırakılmışlardı. Akademik dünyada iş bulamıyor ve matematik ile ikinci iş olarak ilgilenmeleri gerekiyordu. Ayrıca, Sovyetler Birliği'ndeki matematik camiası çok güçlü olmakla beraber, dünyanın geri kalanından büyük ölçüde yalıtılmış hâldeydi. Profesyonel gelişim için Batı'da, Sovyetler Birliği'nde bulunmayan harika fırsatlar vardı. Yurt dışında daha iyi bir hayat fırsatı sunulduğunda, bu insanların onları dışlayan ve sevdikleri alanda çalışmalarını engelleyen ülkelerine sadık kalmaları nasıl beklenebilirdi ki?

Borya Feigin ABD'ye geldiğinde, büyük "beyin göçünün" yaklaşmakta olduğunu ve bunu hiçbir şeyin durduramayacağını gördü. Gıda kıtlığının her yere yayıldığı ve politik durumun giderek daha da istikrarsızlaştığı Rusya'da, ekonomi dağılıyordu. Amerika'da daha yüksek bir yaşam standardı ve her açıdan bir bolluk vardı; akademisyenlerin hayatı da çok rahat görünüyordu. Tezat çok büyüktü. Tüm bunları birinci elden tecrübe eden bir kişi, Sovyetler Birliği'ne geri dönmeye nasıl ikna edilebilirdi ki? Rusya'nın en üst seviyedeki matematikçilerinin ezici çoğunluğunun —daha doğrusu iş bulabilen herkesin— göç etmesi kaçınılmaz görünüyordu ve bu çok çabuk olacaktı.

Borya, tüm hayatı boyunca anti-Semitizmle mücadele etmek zorunda kalmış olmasına ve Sovyetler Birliği'ndeki durumu gayet iyi bilmesine rağmen, yine de Moskova'ya geri dönme niyetindeydi. Lisans eğitimi için Moskova Üniversitesi'ne kabul edilmişti (başvurduğu 1969 yılında bazı Yahudi öğrenciler hâlâ kabul ediliyordu) ama doktora yapmasına müsaade edilmemişti. Doktorasını alabilmek için, bir taşra şehri olan Yaroslavl'daki bir üniversiteye kaydolması gerekmişti. Daha sonra, Katı Hâl Fiziği Enstitüsü'nde bir pozisyona yerleşene kadar, iş bulmakta oldukça zorlanmıştı. Borya tüm bunlara rağmen, bu kaçış seferberliğinden rahatsız oluyordu. Büyük bir değişim yaşayan Rusya'yı batan bir gemiden kaçan fareler gibi böyle *en masse** terk etmeyi ahlaki açıdan doğru bulmuyordu.

Borya, o şanlı Moskova Matematik Okulu'nun yakında kapanacak olmasına çok üzülüyordu. Uzun yıllar aralarında yaşadığı, birbirine sıkı sıkıya bağlı matematik camiası, gözlerinin önünde buharlaşıyordu. Yakında, hayatının en büyük tutkusu olan, arkadaşları ve meslektaşları ile matematik yapma uğraşından mahrum kalmış bir hâlde Moskova'da yapayalnız kalacağını biliyordu.

Doğal olarak bu durum, Borya ile sohbetlerimizin ana konusuydu. Geri dönmem ve Batı'ya kaçmaya çalışanları ele geçirdiğini düşündüğü toplumsal histeriye yenik düşmemem için beni ikna etmeye çalışıyordu. Ayrıca, ABD'de iyi bir matematikçi olamayabileceğim yönünde de endişeleri vardı. Ona göre, Amerika'daki "tüketim toplumu" kişinin motivasyonunu ve çalışma etiğini yok edebilirdi.

"Bak, sen yetenekli birisin," diyordu bana, "ama bunun daha da geliştirilmesi gerek. Tıpkı Moskova'da çalıştığın gibi sıkı çalışmak zorundasın. Ancak bu şekilde potansiyelini gerçekleştirebilirsin. Burada, Amerika'da, bu imkânsız. Dikkatini dağıtacak ve seni ayartacak çok fazla şey var. Buradaki hayat, sadece keyfiyet,

* kitleler hâlinde.—ed.n.

eğlence ve anlık tatminlerden ibaret. Burada çalışmalarına nasıl odaklanabilirsin ki?"

Ona katılmıyordum; en azından bütün söylediklerine. Matematikle uğraşmak için güçlü bir motivasyona sahip olduğumu biliyordum. Öte yandan, ben henüz yirmi bir yaşındaydım, benden on beş yaş büyük Borya ise akıl hocamdı. Bir matematikçi olarak başardığım her şeyi ona borçluydum. Sözleri beni düşündürdü —ya haklıysa?

Harvard'ın teklifi hayatımın dönüm noktası oldu. Çok değil daha beş yıl önce MGU giriş sınavında elenmiştim ve matematikçi olma hayalim telafisi olmayacak bir biçimde yıkılır gibi olmuştu. Harvard'a gidişim ise kendimi ispat etmemi sağlamıştı; aradan geçen beş yıl boyunca Moskova'da sürdürdüğüm sıkı çalışmanın bir mükafatıydı bu. Ancak ben devam etmek ve yeni keşifler yapmak istiyordum. Olabileceğim en iyi matematikçi hâline gelmek istiyordum. Harvard'ın davetini uzun bir yolculuğun bir adımı olarak gördüm. Bu bir avanstı: Arthur Jaffe ve diğerleri bana inanmış ve bu şansı vermişlerdi. Onları hayal kırıklığına uğratamazdım.

Cambridge'de, ellerinden gelen her konuda beni teşvik eden ve yardımcı olan Victor Kac gibi harika matematikçilerin desteğine sahip olma şansına eriştim. Öte yandan bazı arkadaşlarımın beni kıskandığını da hissediyordum: Bu adama bu kadar şey neden bu kadar hızlı bir biçimde veriliyor? Bunu hak etmek için ne yaptı? Ben ise kendimi verdiğim sözü tutmak, ilk matematik çalışmalarımın şans eseri olmadığını ve matematikte daha iyi, daha büyük şeyler yapabileceğimi herkese ispatlamak zorunda hissediyordum.

Matematikçiler, tıpkı tüm diğer insanlar gibi, küçük gruplar hâlinde toplanıp kimin ne olduğu hakkında dedikodu yaparlar. Harvard'da bulunduğum kısa süre içinde ben de, erken tükenen dehâlar hakkında yeterince hikâye duymuştum. Bu insanlara dair hiç de affedici olmayan yorumlar işitiyordum: "Şunu şunu hatırlıyor

musun? İlk çalışmaları çok iyiydi. Ama son üç yıl içinde o kadar önemli hiçbir şey yapamadı. Ne kadar utanç verici?" gibi...

Üç yıl içinde benim hakkımda da bunları söylemelerinden korktuğum için, kendimi sürekli bir üretme ve başarma baskısı altında hissediyordum.

Bu arada Sovyetler Birliği'ndeki ekonomik durum hızla kötüye gidiyordu ve genel durum oldukça belirsizdi. Tüm bunları içeriden gözlemleyen ve Sovyetler Birliği'nde bir geleceğim olmadığına inanan annem ve babam, beni düzenli bir biçimde arayarak geri dön*memem* konusunda ısrar ediyordu. O günlerde Sovyetler Birliği'nden ABD'yi aramak oldukça zor (ve pahalı) idi. Annem ve babam, ev telefonlarının dinlenmesinden korkuyor ve bu yüzden Moskova'daki merkezi postahaneye gidip oradan telefon açıyordu. Bu yolculuk, onların neredeyse bütün gününe mal oluyordu. Yine de, çok özlemiş olmalarına rağmen beni Amerika'da kalmaya ikna etmek için ellerinden geleni yapmaya kararlıydılar. Benim için en doğrusunun bu olduğundan kesinlikle emindiler.

Borya da benim için neyin iyi olacağına kafa yoruyordu ama tutumunu daha çok ahlaki değerler belirliyordu. O, akıntıya karşı duruyordu ve bu yüzden ona saygı duyuyordum. Ancak bunu Moskova'daki görece rahat durumuna borçlu olduğunu da kabul etmek zorundaydım (bu da yakında değişecek ve ailesinin geçimini sağlamak için yılın birkaç ayını yurt dışında —genellikle Japonya'da— geçirmesi gerekecekti). Benim durumum ise tamamen farklıydı: Moskova'da kalacak bir yerim yoktu ve *propiskam* da (orada kalma hakkım) geçiciydi. Yakoc Isaevich bana Kerosinka'da geçici bir asistanlık işi sağlamıştı sağlamasına ama bu işten alacağım düşük maaş ile Moskova'da ancak bir oda kiralayabilirdim. Anti-Semitizm dolayısıyla bir lisansüstü eğitim kurumuna kaydolma sürecim çetin bir savaşa dönüşebilirdi ve gelecekteki iş olasılıklarım daha da umutsuz görünüyordu.

Kasım'ın sonunda Arthur Jaffe beni ofisine çağırdı ve Harvard'da kalacağım süreyi Mayıs'ın sonuna kadar uzatmayı teklif etti. Çabuk

karar vermem gerekiyordu ama ben iki arada bir derede kalmıştım. Boston'daki hayat tarzım hoşuma gidiyordu. Olmam gereken yerin burası olduğunu hissediyordum. Harvard ve MIT'nin bulunduğu Cambridge, matematiğin önde gelen merkezlerinden biriydi. Dünyanın en zeki beyinlerinin bir kısmı buradaydı; kapılarını çalıp onlara soru yöneltebilir ve onlardan bir şeyler öğrenebilirdim. Hepsi birbirinden heyecan verici keşfin yapılır yapılmaz anlatıldığı birçok seminer de düzenlenmekteydi. Etrafımda son derece zeki öğrenciler vardı. Burası, gelecek vadeden genç bir matematikçinin hayal edebileceği en cazip ortamdı. Daha önceleri Moskova da böyleydi ama artık bu özelliğini yitirmişti.

Ne var ki evden ilk kez bu kadar uzun süre uzak kalıyordum. Ailemi ve arkadaşlarımı özlemiştim. Cambridge'de kendimi en yakın hissettiğim kişi olan hocam Borya ise kararlaştırdığımız üzere Aralık'ta geri dönmem gerektiği konusunda son derece katıydı.

Her sabah, ne yapacağımı düşünmekten yılmış bir hâlde uyanıyorum. Şimdi dönüp bakınca, üzerinde çok düşünülmesi gerekmeyen bir kararmış gibi duruyor. Ancak aynı anda çatışan çok sayıda farklı etken, bu kararı vermeyi zora sokuyordu. Sonunda, bazı ızdırap dolu görüşmelerin ardından anne ve babamın tavsiyesine uyarak kalmaya karar verdim ve bunu Jaffe'ye bildirdim. Arkadaşlarım Reshetikhin ve Tsygan da aynı yolu izlediler.

Borya bu karardan hiç de memnun olmadı ve onu hayal kırıklığına uğrattığımı hissettim. Aralık ayının ortalarında Logan Havalimanı'nda onu Moskova'ya uğurlarken, ortama üzüntü ve korkunç bir belirsizlik hâkimdi. İkimiz de gelecekte bizi nelerin beklediğini bilemiyorduk; yakın bir zamanda tekrar bir araya gelip gelmeyeceğimizi bilemediğimiz gibi. Borya'nın sözünü dinlememiştim. Bununla birlikte, korkularının gerçeğe dönüşmesinden de endişe ediyordum.

14. Bölüm:

Bilgeliğin Demetlerini Örmek

Bahar dönemi ile birlikte Harvard'a daha fazla sayıda ziyaretçi geldi; bunlardan biri olan Vladimir Drinfel, araştırmamın yönünü ve birçok açıdan da matematik kariyerimi değiştirdi. Tüm bunlar da Langlands Programı yüzünden oldu.

Drinfeld'in adını önceden duymuştum. O zamanlar henüz otuz altı yaşında olmasına rağmen bir efsane olmuştu bile. Tanışmamızdan altı ay sonra, matematik alanındaki en saygın ödüllerden biri olan ve birçok kimse tarafından Nobel ile eş görülen Fields Madalyası'na layık görüldü.

Drinfeld ilk makalesini on yedi yaşında yayınlamıştı ve yirmi yaşına geldiğinde Langlands Programı'nda çığır açmış bulunuyordu. Aslen Ukrayna'nın Kharkov şehrindendi; 1970'lerin başında Moskova Üniversitesi'nde okumuş olan babası, tanınmış matematik profesörlerindendi. (Yahudiler o dönemlerde de MGU'dan kabul almakta zorlanıyordu fakat yine de bir kısmı kabul ediliyordu.) Drinfeld MGU'dan lisans derecesini aldığında, yaptığı bir çalışmaya bağlı olarak dünya çapında bir üne sahipti ve bir Yahudi öğrenci için hiç beklenmedik bir biçimde yüksek lisansa kabul edildi.

Danışmanı, dünyanın en sıra dışı ve etkin matematikçilerinden biri olan Yuri Ivanovich Manin'di.

Ne var ki Drinfeld dahi anti-Semitizm'den tamamen kurtulabilmiş değildi. Doktorasını aldıktan sonra Moskova'da iş bulamamış ve Ural Dağları'nda yer alan endüstri şehri Ufa'daki bir taşra üniversitesinde üç yılını geçirmek zorunda kalmıştı. Drinfeld'in Ufa'ya gitme konusunda gönülsüz olmasının önemli sebeplerinden biri de, bu şehirde onun ilgilendiği alanda çalışan bir matematikçi bulunmamasıydı. Ancak Ufa'da kaldığı süre neticesinde, yerel matematikçilerden Vladimir Sokolov ile birlikte, kendi ilgi alanının çok uzağındaki bir konu olan tümüyle integrallenebilen (completely integrable) sistemler teorisi hakkında önemli bir eser yazdı. Geliştirdikleri tümüyle integrallenebilen sistemler günümüzde Drinfeld-Sokolov sistemleri adıyla anılmaktadır. Drinfeld, Ufa'daki üç yılın ardından memleketindeki Kharkov Düşük Sıcaklıklar Fiziği Enstitüsü'nde bir iş bulabildi. Bu, görece daha rahat bir işti ve ailesine yakın bir yerde ikamet edebilmesini sağlıyordu ama yine de Moskova'da yoğunlaşan ve kısmen de St. Petersburg'da bulunan Sovyet matematik topluluğuna uzaktı.

Bütün bunlara rağmen, tek başına çalışmak zorunda kalan Drinfeld, matematik ve fiziğin çeşitli alanlarında olağanüstü sonuçlar üretmeyi sürdürdü. Langlands Programı içinde önemli varsayımları ispat etmesinin ve Sokolov ile birlikte tümüyle integrallenebilen sistemler teorisinde yeni bir bölüm açmasının yanı sıra kuantum gruplarının genel teorisini (ilk olarak Kolya Reshetikhin ve çalışma arkadaşları tarafından ortaya konmuştu) ve başka birçok şey geliştirdi. Sunduğu katkılar çok geniş bir alana yayılıyordu.

Drinfeld'in Moskova'da çalışmasını sağlayacak girişimlerde bulunuldu. Örneğin, fizikçi Alexander Belavin'in Drinfeld'i Moskova yakınlarındaki Landau Teorik Fizik Enstitüsü'ne getirmeye çalıştığını duydum. Bunu başarabilme olasılığını artırmak için, Belavin ve Drinfeld, o aralar birçok fizikçinin ilgilendiği "klasik Yang-

Baxter denkleminin" çözümlerinin sınıflandırılması gibi önemli bir problemi beraber çözdüler. İlgili makaleleri, Gelfand'ın *Functional Analysis and Applications* dergisinde yayınlandı ve büyük övgü aldı (bu çalışmanın Gelfand'ın yayımladığı en uzun makale olduğunu sanıyorum ki bu, makalenin önemi hakkında çok şey ifade eder). Drinfeld'i matematiğin birçok alanında devrim yaratan kuantum grupları teorisine yönelten de bu çalışma oldu. Ancak ne yazık ki onu işe almak için yapılan bu planların hiçbiri işe yaramadı. Anti-Semitizm ile Drinfeld'in Moskova için *propiska*sının bulunmaması felaket bir bileşimdi. Drinfeld Kharkov'da kaldı ve Moskova'yı nadiren ziyaret edebildi.

Drinfeld, 1990 baharında konuk olarak Harvard'a davet edildi ve bu benim için de büyük bir şans oldu. Ocak ayının sonuna doğru geldi. Ona dair tüm efsaneleri duyduğumdan, başta biraz gözüm korktu ama son derece iyi ve kibar biri olduğunu gördük. Sözlerini dikkatle tartarak sakin sakin konuşan Drinfeld'in matematiğe dair söyledikleri tam bir duruluk abidesiydi. Bir şeyleri açıklarken, sanki o olmadan tek başınıza tam olarak anlama ihtimaliniz olmayan büyük bir gizemi açıklıyormuş gibi kendini yücelterek yapmaya çalışmazdı (ismini vermeyeceğim bazı meslektaşlarımız maalesef böyledir). Aksine, anlatacaklarını mümkün olan en basit ve açık biçimde dile getirirdi; öyle ki size bir şeyler açıkladığında, o konuyu uzun zamandır biliyormuşsunuz gibi hissederdiniz.



Tüm bunlar bir yana, Drinfeld bana hemen Feigin ile yaptığım çalışmayla yakından ilgilendiğini ve onu Langlands Programı ile alakalı yeni projesinde kullanmak istediğini söyledi.

Dokuzuncu Bölüm'de gördüğümüz, André Weil'in Reşid Taşı'nın üç sütununu hatırlayalım:

Sayı Teorisi *Sonlu Cisimler Üzerindeki Eğriler* *Riemann Yüzeyleri*

Langlands Programı aslen sol ve orta sütunlar arasında (sayı teorisi ve sonlu cisimler üzerindeki eğriler) geliştirilmişti. Langlands Programı'nın ardında yatan fikir, Galois grupları ve otomorfik fonksiyonların gösterimleri arasında bir ilişki kurmaktı. Galois grubu kavramı, Reşid Taşı'nın sol ve orta sütunları için oldukça anlamlıdır ve matematiğin farklı bir konusu olan harmonik analiz alanında bulunabilecek uygun otomorfik fonksiyonlar vardır.

Drinfeld'in yaptığı çalışmaya kadar, sağ sütun (Riemann yüzeyleri teorisi) için Langlands Programı'nın bir benzerinin olup olmadığı net değildi. Riemann yüzeylerini dahil etme çabaları 1980'lerin başında Drinfeld'in çalışması ile karşımıza çıkmaya başladı ve onu Fransız matematikçi Gérard Laumon takip etti. Bu iki matematikçi,

Langlands Programı'nda, André Weil'in Reşid Taşı'nın orta ve sağ sütunlarının her ikisi için de anlamlı olacak bir geometrik yeniden düzenleme yapmanın mümkün olduğunu fark ettiler.

Langlands Programı, Reşid Taşı'nın sol ve orta sütunlarında, Galois grupları ve otomorfik fonksiyonlar ile bir bağıntı kurar. Burada ortaya çıkan sorun ise Galois grupları ile otomorfik fonksiyonların Riemann yüzeylerinin geometri teorisi içinde doğru benzerlerini bulmaktır. Geometri teorisinde Galois grubunun rolünü Riemann yüzeyinin temel grubunun oynadığını 9. Bölüm'de görmüştük. Ama otomorfik fonksiyonların geometrik benzerlerini sorgulamadık.

Doğru geometrik benzerlerin fonksiyonlar değil, matematikçilerin *demetler* (sheaves) adını verdiği yapılar olduğu ortaya çıktı.

Bunların ne anlama geldiğini açıklamak için biraz sayılardan bahsedelim. Doğal sayılar 1, 2, 3, ... gibi sayılardır ve çok farklı kullanımları mevcuttur. Bunlardan biri de boyutların ölçülmesidir. Onuncu Bölüm'de değindiğimiz üzere, bir doğru tek boyutlu ve bir düzlem iki boyulu olup, her bir n doğal sayısı için de bir n-boyutlu düz uzay (flat space) bulunur ve buna vektör uzayı denir.[1] Bu aşamada, sayıların vektör uzayları ile yer değiştirdiği bir dünya hayal edelim; örneğin 1 sayısı yerine bir doğru, 2 sayısı yerine bir düzlem, vb gelmiş olsun.

Bu yeni dünyada, toplama işleminin yerini matematikçilerin vektör uzayların direkt toplamı adını verdikleri işlem alır. Her biri kendi koordinat sistemine sahip olan iki vektör uzayı verildiğinde, bu iki vektör uzayın koordinatlarını birleştiren yeni bir tanesini yaratırız; bu yüzden bu yeni vektör uzayının boyutu, iki boyutun toplamı olur. Örneğin doğrunun bir, düzlemin ise iki koordinatı vardır. Bunları birleştirdiğimizde üç koordinatlı bir vektör uzayı elde ederiz. Ortaya çıkan bu uzay, üç boyutludur.

Vektör uzayında, doğal sayıların çarpma işleminin yerine başka bir işlem geçer: İki vektör uzayı verildiğinde, bunların tensör çarpı-

mı (tensor product) adı verilen bir üçüncüsünü oluştururuz. Tensör çarpımının ayrıntılı tanımına burada yer veremeyeceğim; şimdilik, m ve n boyutlu iki vektör uzayıyla başladığımızda tensör çarpımının $m.n$ boyutlu olacağının bilinmesi yeterlidir.

Dolayısıyla, vektör uzaylarındaki işlemler, doğal sayılardaki toplama ve çarpma işlemlerinin benzerleridir. Bununla birlikte, vektör uzaylarının bu paralel dünyası, doğal sayıların dünyasından çok daha zengindir! Bir sayının içsel yapısı yoktur. Örneğin, 3 sayısını tek başına ele alırsak simetrisi yoktur ama üç boyutlu uzayın vardır. $SO(3)$ Lie grubunun herhangi bir elemanının üç boyutlu uzayın bir döndürme hareketine neden olduğunu görmüştük. 3 sayısı 3-boyutlu uzayın sadece bir gölgesi olup bu uzayın sadece bir özelliğini yansıtır: boyutluluk. Ancak bu sayı, vektör uzaylarının simetrileri gibi diğer özelliklerine gerçek değerlerini veremez.

Modern matematikte, sayıların vektör uzayları olarak vücut buldukları yeni bir dünya yaratırız. Bunların her birinin zengin ve tatmin edici bir özel hayatı vardır ve aralarında sadece toplama ve çarpmaya indirgenemeyecek daha anlamlı bir ilişki bulunur. Gerçekten de 1'i 2'den sadece bir şekilde çıkarabiliriz. Oysa bir yüzeye bir çizgiyi birçok farklı şekilde gömebiliriz.

Vektör uzayları küme oluşturan doğal sayılardan farklı olarak, matematikçilerin kategori adını verdikleri daha karmaşık bir yapı oluştururlar. Bir kategoride, vektör uzayları gibi "cisimlerin" yanı sıra bir cisimden herhangi bir diğer cisme "morfizmalar" (morphisms) da bulunur.[2] Örneğin, verilen bir kategori içinde, bir cisimden kendisine olan morfizmalar, aslında cismin bu kategoride mümkün olan simetrileridir. Dolayısıyla kategorilerin dili, sadece bu cisimlerin neden oluştuklarına değil, aynı zamanda birbirleriyle nasıl etkileşim içinde olduklarına da odaklanabilmemizi sağlar. Bu yüzden, kategorilerin matematiksel teorisinin özellikle bilgisayar bilimine iyi uyarlanabildiği anlaşılmıştır.[3] Haskell gibi fonksiyonel programlama dillerinin geliştirilmesi, son zamanlardaki sayısız uy-

gulamalardan sadece biridir.[4] Yeni nesil bilgisayarların küme teorisi yerine kategori teorisi üzerine kurulacak olması kaçınılmazdır ve kategoriler, biz farkında olalım ya da olmayalım gündelik hayatımıza girecekler.

Kümelerden kategorilere paradigma kayması, aynı zamanda modern matematiğin de itici güçlerinden birisidir. Buna *kategorizasyon* adı verilir. Aslına bakarsanız, aşina olduğumuz kavramların daha üst bir seviyeye evrildiği yeni bir dünya yaratıyoruz. Örneğin, sayıların yerini vektör uzayları alıyor. Bir sonraki soru ise, bu yeni dünyada fonksiyonların yerini neyin alacağıdır.

Bu soruyu cevaplamak için fonksiyon kavramını hatırlayalım. Küre, çember veya simidin dış yüzeyi (torus) gibi bir geometrik şekle sahip olduğumuzu farz edelim ve buna S ismini verelim. Daha önce de değindiğimiz üzere, matematikçiler bu tür şekillere manifold ismini vermektedir. S manifoldundaki bir f fonksiyonu, S'deki her bir s noktasına f fonksiyonunun s noktasındaki değeri denen bir sayı atayan kuraldır. Bu sayıyı $f(s)$ şeklinde gösteririz.

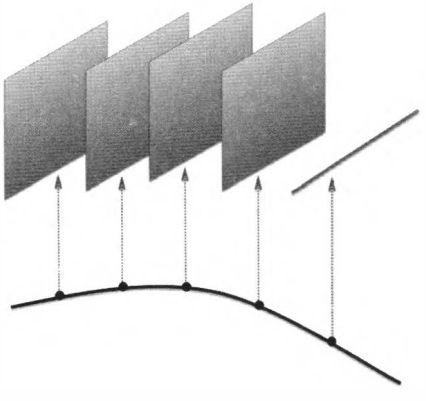
Fonksiyona bir örnek olarak sıcaklığı düşünebiliriz, bu durumda S manifoldumuz içinde yaşadığımız üç boyutlu uzay olur. Her bir s noktasında, bir sayı olan sıcaklığı ölçeriz. Bu şekilde, her bir noktaya bir sayı atayan bir kural elde ederiz. Benzer şekilde, barometrik basınç da bize bir fonksiyon verir.

Daha soyut bir örnek verebilmek için, S'yi bir çember olarak seçelim. Çember üzerindeki her bir nokta, belli bir açı değeri ile belirlenir ve daha önce yaptığımız gibi buna yine φ diyelim. f sinüs fonksiyonu olsun. Bu durumda, bu fonksiyonun çember üzerindeki φ açısına karşılık gelen noktadaki değeri $sin(\varphi)$ olur. Örneğin, eğer φ = 30 derece (derece yerine radyan cinsinden ifade edersek $\pi/6$) ise sinüs fonksiyonunun değeri 1/2'dir. Eğer φ = 60 derece ($\pi/3$) ise fonksiyonun değeri $\sqrt{3}/2$ olur, vb.

Şimdi, sayıların yerine vektör uzaylarını koyabiliriz. Bu durumda bir fonksiyon, S manifoldu üzerindeki her bir s noktasına bir sayı

yerine bir vektör uzayı atayan bir kural hâline gelecektir. Bu tür kurallara *demet* (sheaf) denir. Eğer bir demeti F sembolü ile gösterirsek, bir s noktasına atanan vektör uzayını da $F(s)$ ile gösteririz.

Öyleyse, fonksiyonlar ile demetler arasındaki fark, manifoldumuzun her bir noktasına ne atadığımızla ilişkilidir: Fonksiyonlarda noktalara sayı atarken, demetlerde vektör uzayı atarız. Verilen bir demette, bu vektör uzayları farklı s noktaları için farklı boyutlarda olabilir. Örneğin aşağıdaki resimde, bu vektör uzaylarının çoğu düzlemken (iki boyutlu vektör uzayı), bir tanesi çizgidir (tek boyutlu vektör uzayı). Vektör uzayları sayıların kategorizasyonu olduğu gibi, demetler de fonksiyonların kategorizasyonudur.



Kitabımızın sınırlarını aşmakla beraber, bir demet aslında manifoldumuzun noktalarına atanan vektör uzaylarından oluşan ayrık bir topluluktan daha fazlasıdır. Verilen bir demetin farklı noktalarındaki liflerinin birtakım kesin kurallarla birbirlerine bağlı olmaları gerekir.[5]

Bu aşamada bizi ilgilendiren, fonksiyonlar ile demetler arasında, büyük Fransız matematikçi Alexander Grothendieck tarafından keşfedilen derin bir benzerlik olduğudur.

Grothendieck'in modern matematiğe eşsiz denebilecek bir etkisi olmuştur. Yirminci yüzyılın ikinci yarısının en önemli matematik-

çisinin kim olduğunu sorarsanız birçok matematikçi hiç tereddüt etmeden Grothendieck diyecektir. Modern cebirsel geometriyi neredeyse tek başına yaratmakla kalmamış, matematiği nasıl bir bütün olarak düşündüğümüzü de değiştirmiştir. Langlands Programı'nın geometrik yeniden düzenlemesini yaparken kullandığımız fonksiyonlar ve demetler arası sözlük, Grothendieck'in çalışmasına özgü derin içgörünün harika bir örneğidir.

Size Grothendieck'in fikrini kısaca anlatabilmek için, 8. Bölüm'de gördüğümüz sonlu cisim kavramına tekrar değineceğim. Her bir p asal sayısı için, p elemanlı bir sonlu cisim bulunur: {0, 1, 2 ,..., p-1}. Daha önce de değindiğimiz üzere, bu p adet eleman, rasyonel ve gerçel sayılardaki benzer işlemlerle aynı kurallara uyan, mod p aritmetiğinde toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri ile bir sayı sistemi meydana getirirler.

Bu sayı sisteminin özel bir noktası vardır. {0, 1, 2, ..., p-1} sonlu cisminin herhangi bir elemanını seçip p'inci kuvvetini aldığımızda —daha önce gördüğümüz mod p aritmetiği anlamında— yine aynı sayıyı elde ederiz. Diğer bir deyişle,

$$a^p = a \pmod{p}$$

Bu formül, Fermat'nın Son Teoremi'ni ortaya atan matematikçi Pierre Fermat tarafından ispatlandı. Diğerinden farklı olarak yukarıdaki formulün ispatı oldukça kolaydır. Bir kitabın kenar boşluğuna dahi sığabilir. Ben onu bu kitabın arkasındaki notlar kısmına koydum.[6] Bu sonucu Fermat'nın Son Teoremi'nden (bazen Fermat'nın Büyük Teoremi olarak da anılır) ayırmak için, Fermat'nın Küçük Teoremi adı verilmiştir.

Örnek olarak $p = 5$ durumunu ele alalım. Bu durumda sonlu cismimiz {0, 1, 2, 3, 4} olacaktır. Her birinin beşinci kuvvetini alalım. Kuşkusuz, 0'ın herhangi bir kuvveti 0 ve 1'in herhangi bir kuvveti de 1 olduğundan, bunlar için şaşılacak bir durum yok. Sıradan

gidelim ve 2'nin beşinci kuvvetini alalım: 32 elde ederiz. Bununla beraber 32=2+5.6 olduğundan bu sayı mod 5 aritmetiğinde 2'ye eşittir —vadettiğimiz üzere yine 2'yi elde ettik. 3'ün beşinci kuvvetini alalım: 243 elde ederiz ve bu 3+5.48'e eşit olduğundan, mod 5 aritmetiğinde 3'e eşittir. Yine başladığımız sayıya geri döndük. Son olarak aynı işlemleri 4 ile deneyelim: beşinci kuvveti 1024'tür ki mod 5 aritmetiğinde 4'e eşittir. Bingo! mod 3 aritmetiğinde $a^3 = a$ ve mod 7 aritmetiğinde $a^7 = a$'yı da kontrol etmenizi tavsiye ederim (daha büyük asal sayılarda Fermat'nın Küçük Teoremi'ni doğrulamak için hesap makinasına ihtiyaç duyabilirsiniz).

Dikkate değer bir başka nokta da benzer bir denklemin çevrim içi bankacılıkta yaygın olarak kullanılan RSA şifreleme algoritmasının temelini oluşturuyor olmasıdır.[7]

$a^p = a$ formülü harika bir keşiften daha fazlasıdır; sayıların p'inci kuvvetini alma işleminin yani a'yı a^p'ye yollamanın sonlu cismin Galois grubunun bir elemanı olduğu anlamına gelmektedir. Buna Frobenius simetrisi ya da kısaca *Frobenius* denir. p elemanlı sonlu cismin Galois grubunun bu Frobenius sayesinde meydana geldiği anlaşılmıştır.[8]

Grothendieck'in fikrine geri dönelim. Weil'in Reşid Taşı'nın orta sütunu ile başladık. Daha sonra sonlu cisimler üzerindeki eğriler ve sonlu cisimler üzerindeki daha genel manifoldları çalışacağız. Bu manifoldlar, 9. Bölüm'de bahsettiğimiz,

$$y^2 + y = x^3 - x^2$$

gibi polinom denklemler sistemleriyle tanımlanırlar.

Bu tür bir manifold üzerinde bir demetimiz olduğunu varsayalım. Bu, manifoldun her bir noktasına bir vektör uzayı atayan bir kuraldır ama aslında daha fazla yapı söz konusudur. Demet kavramı, manifoldumuzun üzerinde tanımlı olduğu sayı sisteminin herhangi bir simetrisinin —ki bizim örneğimizde bu bir sonlu cisimdir— bu

vektör uzayının simetrisini meydana getireceği biçimde tanımlanmıştır. Özellikle de sonlu cismin Galois grubunun bir elemanı olan Frobenius, zorunlu olarak bu vektör uzayının simetrisini meydana getirmektedir.

Geldiğimiz noktada, eğer elimizde bir vektör uzayının simetrisi varsa bundan bir sayı üretebiliriz. Bunu yapmak için standart bir yöntem mevcuttur. Örneğin, eğer vektör uzayımız bir çizgi ise bu uzayın Frobenius'tan elde ettiğimiz simetrisi bize bir genişleme (dilation) verecektir: Her bir z elemanı, bir A sayısı için Az'ye dönüştürülecektir. Dolayısıyla, bu simetriye atadığımız sayı sadece A'dır. Birden fazla boyuta sahip vektör uzayları içinse simetrinin izi (trace of the symmetry) denen yapıyı kullanırız.[9] $F(s)$ uzayı üzerindeki Frobenius'un izini alarak s noktasına bir sayı atarız.

En basit durum, Frobenius'un vektör uzayı üzerinde özdeşlik simetrisi işlevi görmesidir. Dolayısıyla, izi vektör uzayın boyutuna eşittir. Öyleyse böyle bir durumda, Frobenius'un izini aldığımızda, bir vektör uzayına boyutunu atarız. Frobenius özdeşlik değilse bu yapı, bir vektör uzayına doğal sayı olma zorunluluğu bulunmayan daha genel bir sayı atar.

Sonuç olarak, {0, 1, 2, ..., p-1} sonlu cismi üzerinde bir S manifolduna sahipsek (Weil'in Reşid Taşı'nın orta sütunundaysak olduğu gibi) ve S üzerinde bir F demetimiz varsa S'de bulunan her bir s noktasına bir sayı atayabiliriz. Bu bize S üzerinde bir fonksiyon verir. Böylece, Weil'in Reşid Taşı'nın orta sütununda, demetlerden fonksiyonlara geçişin bir yolu olduğunu görürüz.

Grothendieck buna "demetlerden fonksiyonlara sözlüğü" adını vermişti. Ancak bu garip bir sözlüktür. Yukarıdaki işlem dizisine dayanarak, demetlerden fonksiyonlara bir geçiş elde etmiş oluruz. Dahası, demetlerdeki basit işlemler fonksiyonlardaki basit işlemlere paraleldir. Örneğin, iki vektör uzayının direk toplamına benzer biçimde tanımlanan iki demetin doğrudan toplamını alma işlemi, iki fonksiyonun toplamını alma işlemine paraleldir.

Öte yandan, fonksiyonlardan demetlere geri dönmenin basit bir yolu yoktur.[10] Bu işlemi tüm fonksiyonlar için değil sadece bazıları için yapabileceğimiz anlaşılmıştır. Fakat eğer yapabilirsek bu demet, fonksiyonda bulunmayan birçok ilave bilgiye sahip olacaktır. Bu bilgi daha sonra fonksiyonun kalbine ulaşmak için kullanılabilir. Dikkat çeken bir gerçek ise, Langlands Programı'nda (Weil'in Reşid Taşı'nın ikinci sütununda) karşımıza çıkan fonksiyonların çoğunun demetlerden gelmesidir.

Matematikçiler matematiğin temel kavramlarından biri olan fonksiyonlar üzerinde yüzyıllar boyunca çalıştılar. Fonksiyon, sıcaklık ya da barometrik basınç üzerine düşünürken içgüdüsel olarak kavrayabileceğimiz bir kavramdır. Fakat insanlar Grothendieck'ten önce, sonlu cisimler üzerindeki manifoldlar (sonlu cisimler üzerindeki eğriler gibi) bağlamında fonksiyonların ötesine geçerek demetlerle çalışabileceğimizi fark etmemişlerdi.

Dilerseniz fonksiyonları eski matematiğe, demetleri ise modern matematiğe ait kavramlar olarak görebilirsiniz. Grothendieck demetlerin birçok açıdan daha temel olduklarını gösterdi; o eski güzel fonksiyonlar, demetlerin sadece gölgesidir.

Bu keşif, yirminci yüzyılın ikinci yarısında matematik alanında kaydedilen ilerlemeyi büyük ölçüde tetikledi. Sebebi ise, daha çok yapıya sahip olan demetlerin daha hayati ve kullanışlı cisimler olmasıdır. Örneğin demetler simetriye sahip olabilirler. Eğer bir fonksiyonu bir demete yükseltirsek bu simetrilerden istifade edebilir ve böylece fonksiyonları kullanarak öğrenebileceklerimizden daha fazlasını öğrenebiliriz.

Bizim için özellikle kritik olan nokta, demetlerin Weil'in Reşid Taşı'nın hem orta hem de sağ sütununda bir anlam ifade etmesidir. Bu, Langlands Programı'nı orta sütundan sağ sütuna taşımak için bir yol açar.

Reşid Taşı'nın sağ sütununda, karmaşık sayılar kümesinde tanımlı manifoldları ele alırız. Örnek olarak küre veya simidin dış

yüzeyi gibi Riemann yüzeylerine bakarız. Bu şartlar altında, Weil'in Reşid Taşı'nın sol ve orta sütunlarında karşımıza çıkan otomorfik fonksiyonlar, pek anlamlı değildir. Fakat demetlerin anlamı vardır. Bu yüzden, orta sütunda fonksiyonların yerine demetleri koyduğumuzda (bunu Grothendieck'in sözlüğü sayesinde yapabiliyoruz), Weil'in Reşid Taşı'nın orta ve sağ sütunları arasındaki benzerliği yeniden yakalarız.

Özetlersek: Weil'in Reşid Taşı'nda orta sütundan sağ sütuna geçerken, Langlands Programı'nca öngörülen ilişkinin her iki tarafında da düzenlemeler yapmamız gerekir. Galois grubu ve otomorfik fonksiyon kavramlarının Riemann yüzeyleri geometrisinde doğrudan bir karşılığı bulunmamasının sebebi de budur. Dokuzuncu Bölüm'de açıkladığımız üzere, Galois grubu kendi benzerini bir Riemann yüzeyinin temel grubunda bulmaktadır. Ayrıca Grothendieck sözlüğünü kullanırız ve otomorfik fonksiyonlar yerine onların özelliklerinin benzerini sağlayan ve otomorfik demetler dediğimiz demetleri ele alırız.

Bu durum, Reşid Taşı'nın üç sütununu içeren aşağıdaki şemada gösterilmiştir ve her sütunda bulunan iki satırda, o sütuna özel Langlands bağıntısının iki tarafındaki cisimlerin ismi yer almaktadır.

Sayı Teorisi	*Sonlu Cisim Üzerindeki Eğriler*	*Riemann Yüzeyleri*
Galois grubu	Galois grubu	temel grup
otomorfik fonksiyonlar	otomorfik fonksiyonlar veya otomorfik demetler	otomorfik demetler

Sıradaki soru, bu otomorfik demetlerin nasıl inşa edileceğidir. Bunun çok zor bir soru olduğu anlaşıldı. 1980'lerin başında Drinfeld, bu türden ilk yapıyı en basit hâliyle (Pierre Deligne'in yayımlanmamış eski bir makalesinden hareket ederek) önerdi. Drinfeld'in fikirleri birkaç yıl sonra Gérard Laumon tarafından daha da geliştirildi.

Drinfeld ile buluştuğumuzda bana otomorfik demetleri oluşturmak için son derece farklı yeni bir yöntem bulduğunu söyledi. Bununla birlikte, tasarladığı yeni yapı, Kac-Moody cebirleri üzerine Feigin ile yaptığım çalışmadan türetebileceğimi düşündüğü belirli bir varsayıma bağlıydı. İnanamıyordum: Yapmış olduğum çalışma, Langlands Programı'nda bir işe yarayabilirdi.

Langlands Programı ile alakalı birşey yapabilme şansı yakalamış olmak, program hakkında bilinen her şeyi öğrenmek için beni heveslendirdi. O bahar, hemen her gün Drinfeld'in Harvard'daki ofisine gittim ve Langlands Programı'na dair sabırla cevapladığı sorularımla onu bunalttım. O da bana, Feigin ile yaptığım çalışmaya dair sorular soruyordu çünkü bu çalışmanın ayrıntıları, üzerinde çalıştığı şey açısından çok önemliydi. Günün geri kalanını Harvard'ın kütüphanesinde Langlands Programı hakkında bulabildiğim her şeyi bir çırpıda okuyarak geçiriyordum. Konu o kadar cezbediciydi ki bir an önce sabah olsun da Langlands Programı'nın derinliklerine girebileyim diye, her gece mümkün olduğunca hızlı uykuya dalmaya çalışıyordum. Hayatımın en önemli projelerinden birine girişmek üzere olduğumu biliyordum.

Bahar döneminin sonuna doğru, beni Moskova Üniversitesi giriş sınavında yaşadığım kafkaesk tecrübeye geri götüren başka bir şey oldu.

Bir gün Victor Kac, Cambridge'deki evimden beni aradı ve birisinin Moskova Üniversitesi Başkanı (ya da kendi deyişiyle Rektörü) Antony Logunov'u seminer vermek üzere MIT Fizik Bölümü'ne davet ettiğini söyledi. Kac ve iş arkadaşlarının pek çoğu MIT'nin MGU'ya giriş sınavlarında Yahudi öğrencilere uygulanan ayrımcılığın doğrudan sorumlusu olan adama öyle bir imkân tanımasına çok öfkelenmişti. Kac ve diğerleri onun yaptıklarının bir suç, dolayısıyla davetin de bir skandal olduğunu düşünüyordu.

Logunov çok güçlü bir adamdı: Sadece MGU'nun Başkanı değil, aynı zamanda Yüksek Enerji Fiziği Enstitüsü'nün Direktörü, SSCB

Komünist Partisi'nin Merkez Komitesi'nin üyesi ve daha fazlasıydı. Peki ama MIT'den biri onu niye davet etsindi? Kac ve bazı iş arkadaşları, gerekçesi ne olursa olsun, bu duruma itiraz etti ve hem davetin hem de seminerin iptalini istediler. Bir dizi görüşmenin ardından uzlaşı sağlandı: Logunov gelecek ve seminerini verecekti ama seminerden sonra MGU'daki durumun ele alınacağı bir açık oturum düzenlenecekti. Böylece insanlar Logunov'u ayrımcılıkla yüzleştirme şansına kavuşacaklardı. Köy meclisi toplantısı gibi bir şey olacaktı.

Doğal olarak Kac, Logunov'un liderliğindeki MGU'da neler olup bittiğinin ilk elden kanıtı olarak hikâyemi anlatmak üzere toplantıya katılmamı rica etti. Bunu yapıp yapmamam gerektiği konusunda çekincelerim vardı. Her şeyi kaydeden "asistanların" Logunov'a eşlik edeceğinden emindim. Hatırlatmak isterim, bu olaylar Mayıs 1990'da, Sovyetler Birliği'nin çöküşünü başlatan Ağustos 1991'deki başarısız *darbe girişiminden* bir yıldan biraz daha uzun bir süre önce oluyordu. Bu arada ben de yaz için eve dönmek üzereydim. Logunov gibi yüksek rütbeli bir Sovyet yetkilisine çok az bile olsa rahatsız edici bir şey söylersem başımı belaya sokabilirdim. En azından, Sovyetler Birliği'nden ayrılıp Harvard'a dönmemi engelleyebilirlerdi. Yine de Kac'ın ricasını geri çeviremezdim. Bu toplantıda tanıklık yapmamın ne kadar önemli olduğunun farkındaydım; bu yüzden Victor'a geleceğimi ve eğer gerekirse başımdan geçenleri anlatabileceğimi söyledim. Kac kaygılarımı gidermeye çalıştı.

"Endişelenme Edik; eğer bunun için seni hapse atarlarsa seni çıkartmak için elimden geleni yapacağım."

Yaklaşan etkinliğe dair söylenti hızla yayıldı ve salon Logunov'un semineri için doldu. İnsanlar, yapılacak konuşmadan bir şeyler öğrenmek için gelmemişlerdi. Herkes Logunov'un kariyerini Einstein'ın görelilik teorisini çürütmeye adamış (nedenini merak ediyorum) zayıf bir fizikçi olduğunu biliyordu. Beklendiği üzere, kendisinin "yeni" yerçekimi teorisi üzerine olan konuşması içerik yönünden za-

yıftı. Ancak birçok açıdan da oldukça garipti. Öncelikle, Logunov İngilizce konuşmadı ve semineri Rusça verdi. Sözleri, İngilizceyi kusursuz konuşan, siyah kravat ve takım elbise giymiş, uzun boylu bir adam tarafından eşzamanlı olarak tercüme edildi. Alnına büyük harflerle irice "KGB" yazılmış gibiydi. Klonu (*The Matrix* filmindeki gibi) dinleyenler arasında etrafına bakınarak oturuyordu.

Logunov'u MIT'de ağırlayanlardan biri, konuşmadan önce onu oldukça tuhaf bir biçimde tanıttı. Logunov ve başka birkaç kişi tarafından yazılmış ve on yıl önce yayımlanmış İngilizce bir makalenin ilk sayfasının slaytını gösterdi. Sanırım amacı, Logunov'un tamamen ahmak olmadığını ve aslında itibarının hakemli dergilerde çıkan bazı yayınlarından kaynaklandığını göstermekti. Bir kişinin bu şekilde tanıtıldığını daha önce hiç görmemiştim. Logunov'un MIT'ye bilimsel dehasından ötürü davet edilmediği ortadaydı.

Kac, itham edici bazı belgelerin fotokopilerini dinleyicilere dağıtmış olmasına rağmen, konferans esnasında protesto olmadı. Belgelerden biri, Yahudi soyadı taşıyan bir bilim kurulu üyesinin on yıl öncesine ait not dökümüydü. Tüm derslerden A almış olmasına rağmen, MGU'daki son yılında "akademik başarısızlık" gerekçesiyle kovulmuştu. Not dökümüne eklenen kısa bir not, bu öğrencinin özel olarak görevlendirilen ajanlar tarafından Moskova Sinagogu'nda yakalandığı konusunda okuyucuyu bilgilendiriyordu.

Seminerden sonra insanlar başka bir odaya geçip, büyük bir dikdörtgen masanın etrafına oturdu. Logunov, bir tarafta masanın ucuna yakın bir yere, tercümanlık yapan sivil giyimli iki "asistan"ın nezaretinde oturmuştu; Kac ve Logunov'u suçlayan diğerleriyse masanın tam karşısındaydılar. Ben ve birkaç arkadaşım masanın Logunov'un tarafındaki diğer ucuna sessizce oturduk, bu yüzden bize hiç dikkat etmedi.

Sözü Kac ve beraberindekiler açtı ve Yahudi öğrencilerin MGU'ya kabul edilmediklerine dair birçok hikâye duymuş olduklarını söylediler. Logunov'a Moskova Üniversitesi Rektörü olarak

bu konudaki yorumlarını sordular. Pek tabii ki, her şeyi kesin bir biçimde reddetti. Bir ara, sivil giyimli adamlardan biri İngilizce olarak, "Biliyorsunuz ki Profesör Logunov oldukça alçak gönüllü birisidir; bu yüzden size bunlardan asla bahsetmeyecektir ama ben söyleyeceğim: Aslında kendisi birçok Yahudi öğrenciye kariyerinde yardımcı olmuştur," dedi.

Sonra, sivil giyimli diğer adam, Kac ve diğerlerine "Sizler ya buradan kaybolun ya da susun. Eğer konuşmak istediğiniz somut vakalar varsa onları belirtin. Eğer yoksa Profesör Logunov çok yoğun ve ilgilenmesi gereken başka şeyler var," dedi.

Bu söz üzerine Kac, beklendiği üzere, "Aslında, size bahsetmek istediğimiz somut bir vaka var," dedi ve eliyle beni işaret etti.

Ayağa kalktım. Logunov ve endişeleri yüzlerinden okunan "asistanları" dahil herkes bana döndü. Logunov'la karşı karşıyaydık.

Logunov Rusça olarak "Çok ilginç," dedi —bu sözü, herkesin anlayabilmesi için İngilizceye çevrildi— ve asistanlarına sessizce fakat benim duyabileceğim şekilde "Adını almayı unutmayın," dedi.

Biraz korkunç bir an olduğunu söylemek zorundayım ama geri dönüşü yoktu. Kendimi tanıttım ve "Altı yıl önce *Mekh-Mat* giriş sınavlarında elendim," dedim.

Sonra, sınavlarda başıma gelenleri kısaca anlattım. Odayı sessizlik kapladı. Bu, Logunov'un politikasının mağdurlarından birinin "somut" bir görgü tanığı ifadesiydi ve bunların olduğunu hiçbir şekilde inkar edemezdi. İki asistan zararın daha da büyümesini önlemek için araya girdi.

"Demek MGU'ya giremedin. Peki ondan sonra nereye başvurdun?" diye sordu birisi.

"Petrol ve Gaz Enstitüsü'ne gittim," dedim.

Asistan, "Kerosinka'ya gitmiş" diye Logunov'a tercüme etti ve o da *evet* anlamında hızla başını salladı —pek tabii ki oranın benim gibi öğrencilerin Moskova'da kabul edilebileceği nadir yerlerden biri olduğunu biliyordu.

"Peki," diye devam etti asistan, "belki de Petrol ve Gaz Enstitüsü'ndeki rekabet, MGU'daki kadar sıkı değildi. Birine girip diğerine girememenin sebebi belki de budur?"

Hiç de böyle değildi: *Mekh-Mat*'ta, benim gibi ayrımcılık uygulananları bir kenara koyarsak diğerleri arasında çok az bir rekabet yaşandığını biliyordum. Dört sınavın birinden B ve üçünden C almanın girebilmek için yeterli olduğunu duymuştum. Aksine, Kerosinka'daki giriş sınavlarında rekabet oldukça yoğundu. Bu noktada Kac söze girdi: "Edward daha öğrenciyken, matematik alanında çığır açan bir çalışma yaptı ve MGU'da elenmesinin ardından daha beş yıl bile geçmeden, yirmi bir yaşında, Harvard'a misafir öğretim üyesi olarak davet edildi. Harvard'daki pozisyon için olan rekabetin de MGU giriş sınavındakinden daha az olduğunu mu iddia edeceksiniz?"

Uzun bir sessizlik oldu. Sonra Logunov birden hareketlendi.

"Buna çok üzüldüm!" diye gürledi. "Bu genç adamın elenmesinden sorumlu olanları araştırıp cezalandıracağım. MGU'da bu tür şeylerin olmasına izin vermeyeceğim!"

Birkaç dakika daha böyle konuşmaya devam etti.

Buna kim ne diyebilirdi ki? Masadaki hiç kimse, Logunov'un celallenişinin samimiyetine ve gerçekten bir şey yapacağına inanmadı. Logunov çok zekiydi. Bir duruma dair yapmacık üzüntüsünü sergileyerek, daha büyük bir konuyu savuşturuyordu: Bizzat Rektör'ün kendisini de içeren MGU üst yönetiminin açıkça onayladığı, özenle düzenlenmiş ayrımcılık politikası neticesinde daha başka binlerce öğrenci başarısızlığa mahkûm edilmişti.

O toplantıda bu vakaları bir bir ortaya döküp, *Mekh-Mat*'a giriş sınavlarında yoğun bir anti-Semitizm politikası güdüldüğünü ispatlayamazdık. Bir yandan bana bu sıkıntıları çektiren kişi ile doğrudan yüzleşebilmenin ve astları tarafından gerçekten de haksızlığa uğratılmış olduğumu kabul etmek zorunda bırakmış olmanın tatminini yaşarken, bir yandan da hepimiz biliyorduk ki asıl soru cevapsız kalmıştı.

Logunov'un ziyaretini kuşatan bu olumsuz propagandanın bariz biçimde etkisinde kalan ev sahipleri, bunu olabildiğince hızlı bir şekilde sona erdirmek istiyordu. Toplantıyı sonlandırdılar ve Logunov'u alıp ortadan kayboldular. Bir daha da davet edilmedi.

15. Bölüm:

Narin Bir Dans

1990 yılının güz mevsiminde, Harvard'da doktora öğrencisi oldum; misafir öğretim üyesinden daha kalıcı bir konuma geçmek için bunu yapmam gerekiyordu. Joseph Bernstein resmi danışmanım olmayı kabul etti. O zamana kadar, bir doktora tezi için gerekli olan materyalden fazlasını toplamıştım ve Arthur Jaffe, doktoramı bir yıl içinde alabilmem için Dekanı standart bir uygulama olan iki yıllık kayıt zorunluluğunu kaldırmaya ikna etti. Bu sayede, öğretim üyeliğinden doktora öğrenciliğine "düşüşüm" çok uzun sürmedi.

Nitekim, doktora tezimi o yıl içinde tamamladığım yeni bir proje hakkında yazdım. Her şey bahar aylarında Drinfeld ile Langlands Programı üzerine yaptığımız tartışmalarla başladı. Burada bu sohbetlerin bir tanesini, senaryo şeklinde veriyorum.

AÇILIŞ:

DRINFELD'İN HARVARD'DAKİ OFİSİ

DRINFELD kara tahtanın önünde dolanıyor. Sandalyede otu-

ran EDWARD notlar alıyor. Yanındaki masanın üstünde bir çay fincanı duruyor.

DRINFELD

Demek ki Shimura-Taniyama-Weil sanısı, bize üçüncü dereceden denklemlerle modüler formlar arasında bir bağlantı veriyor ama Langlands bunun daha da ötesine gitti. Modüler formların rolünü Lie grubunun otomorfik gösterimlerinin üstlendiği daha genel bir ilişki tasarladı.

EDWARD

Otomorfik gösterim nedir?

DRINFELD

(uzun bir duraklamanın ardından)

Şu an için tam tanımının bir önemi yok. Her neyse bir kitaptan okuyabilirsin. Önemli olan, bir G Lie grubunun gösterimi olması. Örneğin, bir kürenin dönme hareketlerinin $SO(3)$ grubu gibi.

EDWARD

Tamam. Peki bu otomorfik gösterimler neyle ilgili?

DRINFELD

Evet, en önemli kısım burası: Langlands bunların bir başka Lie grubundaki Galois grubunun gösterimleri ile ilgili olmaları gerektiğini tahmin etti.[1]

EDWARD

Anladım. Bu Lie grubunun aynı *G* grubu olmadığını söylemek istiyorsun.

DRINFELD

Kesinlikle hayır! O, bir başka Lie grubu ve buna *G*'nin Langlands dual grubu denir.

DRINFELD kara tahtaya ${}^{L}G$ sembolünü yazar.

EDWARD

Buradaki *L*, Langlands anlamına mı geliyor?

DRINFELD

(Tebessümle)

Aslında Langlands'ın asıl niyeti, *L*-fonksiyonlarını anlayabilmekti; bu yüzden bu gruba *L*-grubu adını verdi...

EDWARD

Bakalım bunu anlamış mıyım. Her bir *G* Lie grubu için ${}^{L}G$ adında başka bir Lie grubu bulunuyor, doğru mu?

DRINFELD

Evet ve bu, Langlands bağıntısında ortaya çıkıyor. Şematik gösterimi de şöyle.

DRINFELD karatahtaya bir şema çizer:[2]

${}^{L}G$'deki Galois grubunun gösterimi	$\longleftrightarrow$	G grubunun otomorfik gösterimi

EDWARD

Bunu anlamadım ... en azından şimdilik. Sana daha basit bir soru sorayım: *SO*(3)'ün Langlands dual grubu nedir, söyleyebilir misin?

DRINFELD

Çok kolay: *SO*(3)'ün çift katlısı. Hiç bardak oyunu gördün mü?

EDWARD

Bardak oyunu mu? Evet evet, hatırladım...

SAHNE:

HARVARD YÜKSEK LİSANS ÖĞRENCİLERİNİN KATILDIĞI BİR EV PARTİSİ

Yirmili yaşlarının ortasında yaklaşık bir düzine öğrenci sohbet edip, bira ve şarap içiyor. EDWARD, bir öğrenci ile konuşuyor.

ÖĞRENCİ

İşte şöyle yapılıyor.

ÖĞRENCİ şarap dolu bir plastik bardak alır ve sağ avcunu açarak üstüne koyar. Daha sonra avcunu ve kolunu (aşağıdaki bir dizi fotoğrafta gösterildiği gibi) döndürmeye başlar. Bir tam turun (360 derece) ardından kolu ters dönmüştür. Bardağı ağzı yukarı gelecek şekilde tutarak döndürmeye devam eder ve bir tam tur daha yapar —sürpriz!— ve bardak, başlangıçtaki düz konumuna geri döner.[3]

BİR BAŞKA ÖĞRENCİ

Filipinlilerin bunu iki elle yaptıkları geleneksel bir şarap dansları olduğunu duymuştum.[4]

İki bardak bira kapar ve ikisini de aynı anda döndürmeye çalışır ama kolları sallanır ve her iki bardaktaki birayı da hemen döker. Herkes güler.

SAHNE:

TEKRAR DRİNFELD'İN OFİSİ

DRINFELD

Oyun, $SO(3)$ grubu üzerinde basit olmayan kapalı bir yol bulunduğunu gösteriyor fakat bu yolu iki kez kat edersek basit bir yol elde ederiz.[5]

EDWARD

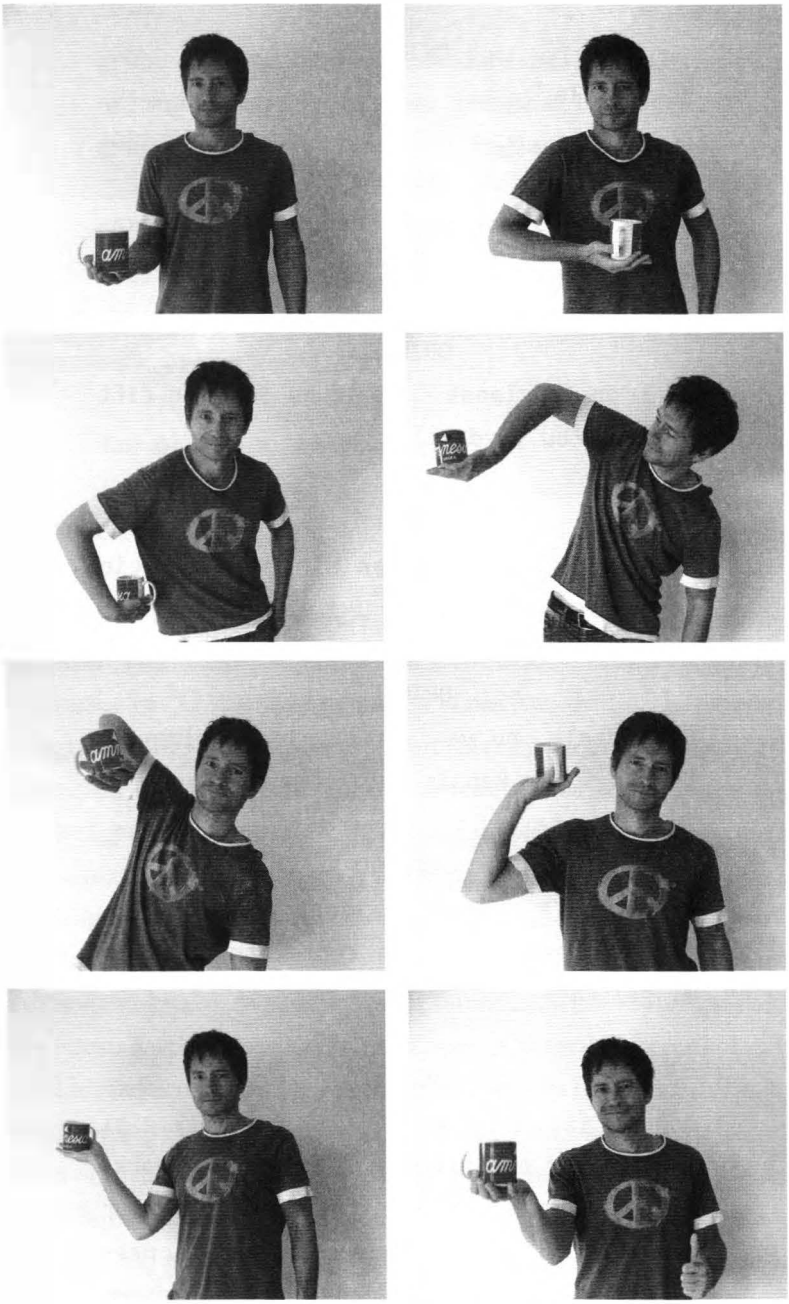
Tamam, anladım. Bardağa ilk tam turunu yaptırdığında kolun ters dönüyor. Bu da adeta $SO(3)$ üzerindeki basit olmayan bir yola benziyor.

Masadan bir bardak çay alır ve ilk çevirme hareketini yapar.

EDWARD

İkinci dönüşün kolu daha da bükeceğini zannedersin. Hâlbuki ikinci dönüş kolun bükümünü yok eder.

EDWARD hareketi tamamlar.



Bardak oyunu (soldan sağa ve yukarıdan aşağıya takip edin)
Fotoğraf: Andrea Young

DRINFELD

Kesinlikle.[6]

EDWARD

Bunun Langlands dual grubu ile ne alakası var?

DRINFELD

SO(3)'ün Langlands dual grubu *SO*(3)'ün çift katlısı, bu yüzden…

EDWARD

Bu yüzden, *SO*(3)'ün her bir elemanı için Langlands dual grubunun iki elemanı bulunur.

DRINFELD

Bu nedenle, bu yeni grubun basit olmayan[7] herhangi bir kapalı yolu olmayacak.

EDWARD

Dolayısıyla, Langlands dual grubuna geçmek, bu saçma bükümden kurtulmak anlamına mı geliyor?

DRINFELD

Doğru.[8] İlk bakışta, bu küçük bir fark gibi gözükebilir ama aslında, elektron ve kuarklar gibi maddenin yapı taşları ile bunlar arasında etkileşimi taşıyan foton gibi parçacıklar arasındaki davranış farkına benzeyen büyük etkileri vardır. Daha genel Lie gruplarında, grup ile onun Langlands dual

grubu arasındaki fark çok daha belirgindir. Aslına bakarsan birçok durumda iki dual grup arasında belirgin bir bağlantı yoktur.

EDWARD

Dual grup, Langlands bağıntısında neden karşımıza çıkıyor? Adeta bir sihir...

DRINFELD

Tam olarak bilemiyoruz.

EKRAN KARARIR

Langlands dualitesi (duality), Lie grupları arasında ikili bir ilişki kurar: Her bir G Lie grubu için Langlands dual Lie grubu bir ${}^{L}G$ vardır ve ${}^{L}G$ 'nin dual grubu da G'nin kendisidir.[9] Langlands Programı'nın, iki farklı türde cismi (biri sayı teorisinden, diğeri harmonik analizden) ilişkilendirmesi yeterince hayret vericidir ama iki dual grubun (G ve ${}^{L}G$) bu bağıntının iki tarafında ortaya çıkması akıl almaz bir olgudur (bkz. s. 232'deki şema).

Langlands Programı'nın matematik dünyasının farklı kıtalarını birbirine bağladığını söylemiştik. Bu benzetme üzerinden devam edersek, bu kıtalar Avrupa ve Kuzey Amerika olsun ve Avrupa'daki her insanı Kuzey Amerika'daki bir insan ile ve tersi de geçerli olacak şekilde eşleştirmek için bir yolumuz var. Hatta bu bağlantı dahilinde, kilo, boy ve yaş gibi çeşitli özelliklerin kusursuz biçimde eşleştiğini fakat cinsiyetlerin zıt olduğunu yani erkeklerin kadınlarla ve kadınların da erkeklerle eşleşmiş olduklarını varsayalım. Söz konusu bu eşleşme, Lie grubu ile onun Langlands dual grubunun Langlands Programı'nda öngörülen bağıntı altında değiş tokuş etmesine benzer.

Aslına bakarsanız bu değiş tokuş, Langlands Programı'nın en gizemli yönüdür. Dual grupların nasıl ortaya çıktığını açıklayan

çeşitli mekanizmalar biliyoruz bunun *nedeni*ni henüz anlayabilmiş değiliz. Bu noktadaki bilgi eksikliği, Langlands Programı sayesinde açığa çıkan bulguları matematiğin diğer alanlarına (Weil'in Reşid Taşı aracılığıyla) ve bir sonraki bölümde göreceğimiz üzere kuantum fiziğine yayma çabamızın sebeplerinden biridir. Langlands dual grubunun ortaya çıktığı daha fazla örnek bulmayı istiyor ve bunun da neden olduğuna ve ne anlama geldiğine dair ipuçları vereceğini umuyoruz.

Şimdi, Weil'in Reşid Taşı'nın, Riemann yüzeyleri ile alakalı olan sağ sütununa odaklanalım. Bir önceki bölümde saptadığımız üzere (bkz. s. 223'teki şema), Langlands bağıntısının bu sütunda rol oynayan versiyonunda, G Lie grubu ile ilişkili otomorfik fonksiyonların (ya da otomorfik gösterimler) rolünü "otomorfik demetler" canlandırır. Bu otomorfik demetlerin bir X Riemann yüzeyi ve G grubuna eklemlenmiş belirli bir uzay üzerinde "yaşadıkları" anlaşılıyor ki bu uzaya X üzerindeki G-destelerinin moduli uzayı (moduli space) adı verilir. Bunun ne olduğu şu an bizim için önemli değil.[10] Bağıntının diğer tarafında, Galois grubu rolünü 9. Bölüm'de gördüğümüz gibi bu Riemann yüzeyinin temel grubu oynamaktadır. Sayfa 232'deki şemadan hareketle, geometrik Langlands bağıntısının (geometrik Langlands Eşlemesi olarak da bilinir) aşağıdaki gibi bir şematik görünüme sahip olması gerektiğini söyleyebiliriz:

X'in ${}^{L}G$'deki temel grubunun gösterimleri	$\longleftrightarrow$	X üzerindeki G-destelerinin moduli uzayı üzerindeki otomorfik demetler

Bu, ${}^{L}G$'deki temel grubun her bir gösterimini her bir otomorfik demet ile ilişkilendirmemiz gerektiği anlamına geliyor. Drinfeld'in bunun nasıl yapılacağına dair oldukça yeni bir fikri vardı.

AÇILIŞ:

DRINFELD'İN OFİSİ

DRINFELD

O hâlde, bu otomorfik demetleri oluşturmanın sistematik bir yolunu bulmalıyız. Ben, Kac-Moody cebirlerinin gösterimlerinin bu işin üstesinden gelebileceğini düşünüyorum.

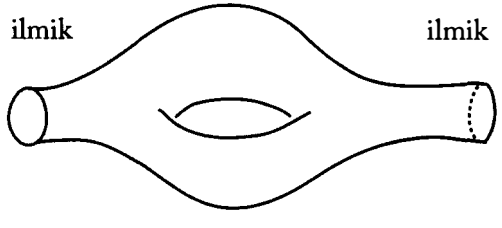
EDWARD

Neden o?

DRINFELD

Şu anda Riemann yüzeyleri dünyasındayız. Bu tür bir yüzeyin, ilmiklerden oluşan bir sınırı olabilir.

DRINFELD tahtaya bir resim çizer.

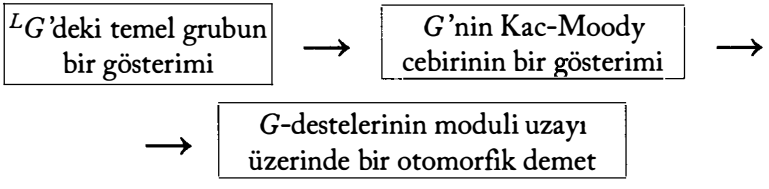


DRINFELD

Riemann yüzeyindeki ilmikler bize ilmik grupları ve dolayısıyla da Kac-Moody cebirleri için bir bağlantı sağlıyor. Bu bağlantıyı kullanarak, Kac-Moody cebirinin gösterimlerini Riemann yüzeyimizin üzerindeki *G*-destelerinin moduli uzayı üzerindeki de-

metlere dönüştürebiliriz. Şimdilik ayrıntıları geçelim. Şemayla gösterecek olursak, bunun şu şekilde işlemesini bekliyorum.

Kara tahtaya bir diyagram çizer.



DRINFELD

İkinci okta sıkıntı yok. Asıl soru, ilk okun nasıl oluşturulacağı. Feigin bana Kac-Moody cebirlerinin gösterimleri üzerine yaptığın çalışmadan bahsetti. Bence onu burada kullanabilirsin.

EDWARD

Bu durumda, *G*'nin Kac-Moody cebirinin gösterimi, ^{L}G Langlands dual grubu hakkında bir şekilde "bilgi sahibi" olmalı.

DRINFELD

Doğru.

EDWARD

Bu nasıl mümkün olur?

DRINFELD

Bu da senin payına düşen soru.

EKRAN KARARIR.

Sanırım kendimi *The Matrix* filminde Morpheus ile konuşan Neo gibi hissetmiştim. Heyecan verici ve biraz da ürkütücü idi. Bu alanda gerçekten yeni bir şey söyleyebilecek miydim?

Bu problemi nasıl ele aldığımı açıklayabilmek için, bir Riemann yüzeyinin temel grubunun gösterimlerinin oluşturulmasında kullanılan etkili bir yöntemden bahsetmeliyim. Bunu diferansiyel denklemler kullanarak yaparız.

Diferansiyel denklem, bir fonksiyon ile onun türevlerini ilişkilendiren denklemdir. Örnek olarak düz bir yolda ilerleyen arabayı ele alalım. Yolun tek bir koordinatı var; bunu x ile gösterelim. Arabanın zaman dilimi içerisinde bir t anındaki konumu $x(t)$ fonksiyonu ile gösterilir. Örneğin, $x(t) = t^2$ olabilir.

Aracın hızı, kısa bir zaman aralığında (Δt) alınan yolun bu süreye oranıdır:

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Eğer araç sabit hızla hareket ediyor olsaydı hangi Δt zaman aralığını seçtiğimizin bir önemi olmayacaktı. Ama eğer araç hızını değiştiriyorsa daha küçük bir Δt, aracın t anındaki hızına dair daha doğru bir kestirimde bulunmamızı sağlar. O andaki hızın kesin, anlık değerini belirlemek için, bu oranın Δt 0'a giderkenki limitini alırız. Bu limit $x(t)$'nin türevidir ve $x'(t)$ şeklinde gösterilir.

Örneğin, $x(t) = t^2$ ise bu durumda $x'(t) = 2t$ olur; daha genel bir biçimde ifade edersek eğer $x(t) = t^n$ ise, $x'(t) = nt^{n-1}$ olur. Bu formülleri türetmek zor olmasa da şu an bizim için şart değil.

Birçok doğa yasası diferansiyel denklemler yani fonksiyonları ve bunların türevlerini içeren denklemler biçiminde ifade edilebilir. Örneğin bir sonraki bölümde üzerinde duracağımız, Maxwell'in elektromanyetizmayı tanımlayan denklemleri ile Einstein'ın yer çekimi kuvvetini tanımlayan denklemleri birer diferansiyel denklemdir. Aslına bakarsanız matematiksel modellerin çoğu (fizik, bi-

yoloji, kimya veya finansal pazarlar) diferansiyel denklemler içerir. Bileşik faizin nasıl hesaplanacağı gibi bireysel finansmana ilişkin en basit sorular dahi bizi hemen diferansiyel denklemlere götürür.

Bir diferansiyel denklem örneğini aşağıda görebilirsiniz:

$$x'(t) = \frac{2x(t)}{t}.$$

Bu denklemin çözümü, $x(t) = t^2$ fonksiyonudur. Gerçekten de, elimizdeki $x'(t) = 2t$ ve $2x(t)/t = 2t^2/t = 2t$ ifadelerinden hareketle, $x(t) = t^2$ ifadesini denklemin sol ve sağ taraflarına yerleştirdiğimizde aynı ifadeyi elde ederiz: $2t$. Dahası, bu eşitliğin tüm çözümlerinin $x(t) = Ct^2$ biçiminde olduğu görülmektedir. Buradaki C terimi, t'den bağımsız bir gerçel sayıdır (C, İngilizce "constant" ifadesinden gelmektedir). Örneğin, $x(t) = 5t^2$ bir çözümdür.

Benzer şekilde,

$$x'(t) = \frac{nx(t)}{t}$$

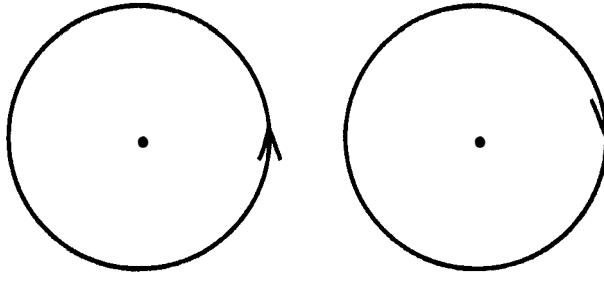
diferansiyel denkleminin çözümlerini de $x(t) = Ct^n$ formülü verir. Buradaki C terimi, herhangi bir gerçel sayıdır.

n'nin negatif tam sayı olmasının hiçbir mahsuru yoktur. Denklem ve $x(t) = Ct^n$ formülü anlamını korumaya devam eder fakat bu formül artık $t = 0$'da tanımlı olamayacaktır. Bu yüzden $t = 0$'ı değerlendirmelerimizin dışında tutuyoruz. Bu kabulü yaptıktan sonra, n, herhangi bir rasyonel sayı veya herhangi bir gerçel sayı olabilir.

Şimdi bir adım daha atalım: Bu diferansiyel denklemin orijinal formülasyonunda t'yi zaman olarak gördüğümüz için, onun gerçel sayı olduğunu varsaydık. Fakat şimdi t, $r + s\sqrt{-1}$ biçiminde bir karmaşık sayı olsun (r ve s birer gerçel sayı). Dokuzuncu Bölüm'de değindiğimiz üzere (bkz. s. 146'daki resim), karmaşık sayılar düzlem üzerinde koordinatları r ve s olan bir nokta olarak gösterilebilir. t'yi

karmaşık sayı yapmamızla birlikte, $x(t)$ de fiilen düzlem üzerinde bir fonksiyon hâline gelir. Ve tabii ki bu düzlemin bir noktası eksik. $x(t)$'nin bu düzlemin merkezi olan $t = 0$ noktasında (her iki koordinatın —r ve s— sıfıra eşit olduğu noktada) tanımlı olmayabileceğini kabul ettiğimizden, $x(t)$ gerçekten de bir nokta —merkez— hariç olmak kaydıyla bu düzlem üzerinde tanımlıdır.

Şimdi de oyuna temel grubu dahil edeceğiz. Dokuzuncu Bölüm'de gördüğümüz üzere, temel grubun elemanları kapalı yollardır (close paths). Düzlemin temel grubunu bir noktanın eksik olduğu hâliyle ele alalım. Bu durumda, tüm kapalı yolların bir "dolanım sayısı" (winding number) olacaktır: Bu sayı, yolun eksik nokta etrafında kaç kez dolandığını belirtir. Eğer yol saat yönünün tersine gidiyorsa bu sayıyı pozitif işaretle, eğer saat yönünde gidiyorsa da negatif işaretle kullanırız.[11] Dolanım sayısı +1 ve -1 olan kapalı yollar aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Dolanım Sayısı +1 Dolanım Sayısı -1

Kendi etrafında iki kez dolanan ve başlangıç noktasına dönmek için kendini kesen bir yolun dolanım sayısı +2 ya da -2 olacaktır ve daha karmaşık yollar için de benzer şekilde numaralandırma yapılır.

Diferansiyel denklemimize geri dönelim:

$$x'(t) = \frac{nx(t)}{t}.$$

Bu denklemde, n bu eşitlikteki herhangi bir gerçel sayıdır ve şimdi t karmaşık sayı değerleri alıyor. Bu denklemin çözümü $x(t) = t^n$ şeklindedir ama burada bir sürpriz var: Eğer n bir tam sayı değilse çözümü düzlem üzerindeki bir kapalı yol üzerinde hesaplayıp aynı noktaya geri döndüğümüzde, çözümün bitiş noktasındaki değeri ile başlangıç noktasındaki değeri aynı olmak zorunda değildir. Bir karmaşık sayı ile çarpılmış hâli olacaktır. Bu durumda, çözümün bu yol boyunca *monodromi*ye (monodromy) uğradığını söyleriz.

Bir tam çember yaptığımızda bir şeyin değişeceğini söylemek, mantıksız ve hatta kendi ile çelişkili görünebilir. Ancak bu tamamen bir tam çember yapmakla ne kastettiğimize bağlıdır. Uzaydaki konumumuzda olduğu gibi, bir kapalı yolu kat edip *belli* bir özellik açısından aynı noktaya geri dönüyor olabiliriz. Ancak diğer özellikler pekala değişmiş olabilir.

Bunu bir örnekle açıklayalım. Rick, 14 Mart 2010 tarihinde bir akşam yemeği partisinde Ilsa ile tanışıyor ve hemen o an ona âşık oluyor. Ilsa önce Rick'e pek aldırış etmiyor ama yine de onunla buluşmayı kabul ediyor. Ardından bir randevu, bir randevu daha... Ilsa da Rick'ten hoşlanmaya başlıyor; nedeni ise Rick'in neşeli ve zeki olması, ona iyi davranması. Tahmin edeceğiniz üzere, daha sonra Ilsa da âşık oluyor ve hatta Facebook durumunu "İlişkisi var"a çeviriyor; Rick de aynısını yapıyor. Zaman hızla geçiyor ve ilk buluştukları tarihin birinci yıl dönümü olan 14 Mart gelip çatıyor. Takvim açısından bakarsak —sadece ay ve güne dikkat edip yılı yok sayarsak— Rick ve Ilsa bir tam çember yapmış oldular. Ancak bazı şeyler değişti. Tanıştıkları gün Rick âşık olmuş ama Ilsa olmamıştı. Bir yıl sonra ise durum farklı, artık birbirlerine eşit derecede âşık olabilirler ya da belki Ilsa sırılsıklam âşık iken Rick için durumun şöyle böyle olduğu söylenebilir. Rick artık Ilsa'ya âşık olmayıp, gizlice bir başkası ile görüşüyor da olabilir. Bilmiyoruz. Bizim için önemli olan, onlar takvimde aynı güne, 14 Mart'a geri dönmüş olmalarına rağmen, birbirlerine olan aşklarının epeyce değişmiş olabileceğidir.

Bu noktada babam bana, bu örneğin kafa karıştırıcı olabileceğini söylüyor. Zira Rick ile Ilsa'nın zaman içinde aynı noktaya geri döndüklerini —imkânsız bir şey— ileri sürer gibi göründüğünü düşünüyor. Oysa ben belli özelliklere odaklanıyorum; bilhassa da ay ve güne. Bu açıdan bakınca, 14 Mart 2010'dan 14 Mart 2011'e gitmek, tam manasıyla bir çember yapmaktır.

Bunun yerine, uzay içerisindeki bir kapalı yolu ele almak daha iyi olabilir. Bunun için, Rick ve Ilsa beraberlerken, bir dünya turuna çıktıklarını düşünelim. Seyahat boyunca ilişkileri evriliyor ve uzayda aynı noktaya —memleketlerine— geri döndüklerinde, birbirlerine olan aşkları da değişmiş olabilir.

İlk durumda, zaman içinde (ay ve gün takviminde demek daha doğru olur) bir kapalı yolumuz varken, ikinci durumda uzayda bir kapalı yolumuz var. Ancak sonuçlar aynı: Bir ilişki kapalı bir yol boyunca değişebilir. Her iki senaryo da aşkın monodromisi diyebileceğimiz bir olguyu gösteriyor.

Matematiksel olarak, Rick'in Ilsa'ya olan aşkını x ve Ilsa'nın Rick'e olan aşkını da y ile gösterebiliriz. Bu durumda, ilişkilerinin her ândaki durumunu düzlem üzerinde (x, y) koordinatlarına sahip bir nokta ile gösterebiliriz. Örneğin ilk senaryoda, ilk tanıştıkları gün (1, 0) noktası idi. Sonra, kapalı bir yol üzerinde (uzay veya zamanda) hareket ettikçe noktanın konumu değişti. Böylelikle, ilişkilerinin gelişimi x, y düzlemindeki bir gidimizi (trajectory) ile gösterebilir. Daha basit ifade etmek gerekirse monodromi, bu gidimizinin ilk ve son noktaları arasındaki farktır.

Daha az romantik bir örnek verelim. Daire şeklinde bir merdivene tırmandığınızı ve bir tam tur atmış olduğunuzu düşünün. Konumunuzun zemin üzerindeki izdüşümü söz konusu olduğunda, bir tam çember yaptınız. Ancak bir diğer özellik —yüksekliğiniz— değişti, bir üst kata çıktınız. Bu da bir monodromidir. Bu durumu ilk örneğimiz ile ilişkilendirebiliriz çünkü takvim de spiral gibidir: Yılın 365 günü zemindeki çembere benzerken, yıl yüksekliğe

benzetilebilir. Dolayısıyla, 14 Mart 2010 gibi verili bir tarihten bir sonraki yılın yine aynı gününe gitmek, merdiven çıkmaya benzer.

Diferansiyel denklemimizin çözümüne geri dönelim. Bir düzlem üzerindeki kapalı yol, zemin üzerindeki izdüşümünüzün kapalı yolu gibidir. Çözümün değeri de merdivendeki konumunuzun yüksekliği gibidir. Bu şekilde baktığımızda, bir tam dönüş yaptığımızda çözümün değerinin ilk değerden farklı olması, sürpriz olmayacaktır.

Bu iki değerin oranını aldığımızda, çözümün bu yoldaki monodromisini elde ederiz. Buradan haraketle bu monodromiyi çember grubunun bir elemanı olarak yorumlayabiliriz.[12] Bunu göstermek için, baston şeklindeki bir şekeri simit şeklini alacak biçimde büktüğünüzü hayal edin. Ardından da şeker üzerindeki kırmızı burguyu takip edin. Şeker üzerinde hareket etmek, düzlemimiz üzerindeki bir kapalı yolu takip etmek gibidir ve burgu, çözümümüze karşılık gelir. Şeker üzerinde bir tam çember çizdiğinizde, burgu genellikle başlangıç noktasından farklı bir noktaya varacaktır. Bu fark, çözümümüzün monodromisi gibidir. Şekerin belli bir açı ile döndürülmesine karşılık gelir.

12. sonnotta gösterilen hesaplama, dolanım sayısı +1 olan kapalı yol boyunca monodrominin çember grubunun $360n$ derecelik dönme hareketine karşılık gelen elemanı olduğunu göstermektedir. (Örneğin $n = 1/6$ ise bu yola $360/6 = 60$ derecelik dönme hareketi atarız.) Benzer şekilde, dolanım sayısı w olan yol boyunca monodromi $360wn$ derecelik dönme hareketidir.

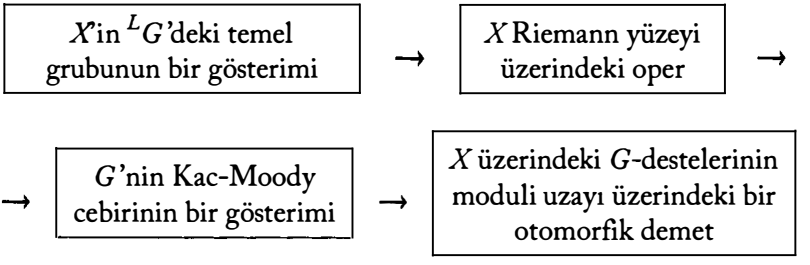
Buradan çıkan sonuç: Bir noktası eksik olan düzlemde farklı yollar üzerindeki monodromiler, temel grubunun çember grubundaki gösterimini meydana getirir.[13] Daha genel olarak, herhangi bir Riemann yüzeyinin (büyük olasılıkla, örneğimizde olduğu gibi bazı noktaları eksik olan) temel grubunun gösterimlerini bu yüzey üzerinde tanımlı diferansiyel denklemlerin monodromisini hesaplayarak oluşturabiliriz. Bu denklemler daha karmaşık olacaktır ama lokalde (yüzey üzerinde bulunan bir nokta etrafındaki dar çevre

içinde) hepsi yukarıdakine benzer. Daha da karmaşık denklemlerin monodromisini kullanarak, verilen bir Riemann yüzeyinin çember grubundan farklı Lie gruplarındaki temel grubunun gösterimlerini de benzer şekilde oluşturabiliriz. Örneğin, temel grubun *SO(3)* grubundaki gösterimlerini oluşturabiliriz.

Önüme çıkan probleme geri dönelim: *G* Lie grubu ile başlıyoruz ve ilgili Kac-Moody cebirini alıyoruz. Drinfeld'in varsayımı, bu Kac-Moody cebirinin gösterimleri ile temel grubun ${}^{L}G$ Langlands dual grubundaki gösterimleri arasında bir bağlantı bulunmasını gerektiriyordu.

İlk adım, temel grubun gösterimlerinin yerine monodromisi ${}^{L}G$'de değerler alan uygun diferansiyel denklemler koymaktır. Bu, soruyu daha cebirsel hâle getirir ve dolayısıyla da Kac-Moody cebirleri dünyasına yaklaştırır. Burada kullanılabilecek diferansiyel denklem türleri (özellikle de yukarıdaki gibi bir noktası eksik düzlem durumunda), Drinfeld Ufa'ya "sürüldüğünde", Drinfeld ve Sokolov tarafından ortaya konmuştu. Daha sonra Beilinson ve Drinfeld bu çalışmayı gelişigüzel Riemann yüzeyleri için genellediler ve ortaya çıkan diferansiyel denklemlere "oper"ler adını verdiler. "Oper" terimi "operatör" teriminden türetilmişti ama aynı zamanda mizahi bir anlam da taşıyordu çünkü Rusça'da polis memurları için kullanılan, "aynasız" gibi argo bir ifadedir.

Tezimde, Moskova'da Borya ile yaptığımız çalışmaya dayanarak parametreleri ${}^{L}G$ Langlands dual grubu ile ilişkili operler ile ifade edilen *G*'nin Kac-Moody cebirinin gösterimlerini oluşturabildim. İkisi arasında bir bağlantı bulunması, bir nevi mucizeydi: *G* ile ilişkili Kac-Moody cebiri, Drinfeld'in tahmin etmiş olduğu üzere tuhaf bir biçimde ${}^{L}G$ Langlands dual grubundan haberdardı. Bu, planının aşağıdaki şemaya göre işlemesini sağladı:[14]



Bu sonuç için bulduğum ispat, teknik açıdan oldukça kapsamlıydı. Langlands dual grubunun *nasıl* ortaya çıktığını açıklayabilmiştim ama üstünden yirmi yıldan uzun bir süre geçmiş olmasına rağmen, *neden* ortaya çıktığı bugün bile benim için gizemini koruyor. Problemi çözdüm ama sonuç olarak bir şeyin hiç yoktan ortaya çıkıverdiği hissine kapılmak son derece hoşnutsuzluk uyandıran bir durum. Bu yüzden, bundan sonraki araştırmalarım kısmen daha eksiksiz bir açıklama bulma çabasına yönelik oldu.

Bu süreç genellikle şöyle işler: Birileri bir teoremi ispatlar, diğerleri onu doğrular, yeni bulgulara dayanarak o alanda yeni gelişmeler sağlanır ama ne anlama geldiğini tam olarak kavramak yıllar veya onlarca yıl alabilir. Ben cevabı bulamasam bile meşalenin onu enninde sonunda çözecek olan yeni matematikçi nesillerine geçeceğini biliyordum ama tabii ki konunun özüne kendim inmeyi çok isterim.

Daha sonra, Beilinson ve Drinfeld, geometrik Langlands bağıntısına dair kurdukları güzel yapılarında (bkz. s. 238: Weil'in Reşid Taşı'nın sağ sütunu) tezimdeki teoremi kullandılar. Yaptıkları muhteşem çalışma, konuya dair bir sürü taze düşünce ve içgörü sunarak ve kapsamını daha da genişleterek Langlands Programı'nda yeni bir bölümün başlangıcı oldu.

Bu alanda yapmış olduğum araştırmayı (bir kısmını Borya ve bir kısmını da Dennis Gaitsgory ile işbirliği yaparak), daha sonra Cambridge Universtiy Press tarafından yayınlanan *Langlands Correspondence for Loop Groups* isimli kitabımda özetleyerek anlattım.[15] Kitap, Borya'nın yazlık evinden gece treniyle evime dönerken Kac-Moody cebirlerinin serbest alan gerçekleşimi için ilk formülleri

yazdıktan tam yirmi yıl sonra, 2007'de yayımlandı. Bu hesaplama —o sırada çok az bilgim vardı— Langlands Programı'na yapacağım uzun yolculuğu başlattı.

Kitabın girişine özdeyiş olarak, E.E. Cummings'in en sevdiğim şiirlerinden biri olan, 1931'de yazdığı şu mısraları seçtim:

Boş çember şekilleri hafifçe
Cebirin kibri içinde sallanarak battı
İçerisinde döne döne matematik işlemleriyle çarpışırken

Langlands Programı'nda ulaşmaya çalıştığımız şey bana şiirsel bir metafor gibi görünüyor: Geometri, cebir ve aritmetiğin (yani sayı teorisi) bir araya gelişi. Çağdaş bir simya.

Beilinson ve Drinfeld'in çalışması, uzun süredir çözülemeyen bazı problemleri çözdü ama daha fazla sorunun da ortaya çıkmasına sebep oldu. Matematikte işler böyledir: Her yeni sonuç, bilinmeyeni saran örtüyü aşağı indirir ama bu şekilde bilinir hâle gelen şey, cevaplar içermez —sormayı bilmediğimiz sorular, keşfedebileceğimizi bilmediğimiz yollar içerir. Bu yüzden, her keşif bizi yeni sıçramalar yapmaya iter ve bilgi birikimi arayışımızda bizi asla tatmin etmez.

Mayıs 1991'de, Harvard'da mezuniyet törenine katıldım. Benim için ayrıca özel bir andı çünkü açılış konuşmasını, Sovyetler Birliği'ndeki *perestroika*'nın mimarlarından biri olan Eduard Shevardnadze yapacaktı. Baltık cumhuriyetlerindeki şiddete karşı çıkıp, ortaya çıkmakta olan diktatörlüğe karşı uyarıda bulunarak Dışişleri Bakanlığı'ndan daha yeni istifa etmişti.

Çalkantılı günlerdi. Yaklaşmakta olan hengameden haberimiz yoktu: O yılın Ağustos ayında gerçekleşen *coup d'état**, ardından Sovyetler Birliği'nin dağılışı, ekonomik reform sürecinde çoğu insanın katlanmak zorunda kaldığı çok büyük zorlukları,

* hükümet darbesi—ed.n.

Shevardnadze'nin anavatanı Gürcistan'ın başı olarak yapacağı şaibeli işleri tahmin edemedik. Ancak güneşin Harvard Yard'ı kuşattığı o aydınlık gün, benim ve milyonlarca hemşehrimin komünist rejimden kurtulmasına yardım eden bu adama "teşekkür etmek" istedim.

Konuşmasından sonra yanına gittim ve Harvard'dan doktoramı yeni aldığımı, *perestroika* olmasaydı bunun asla mümkün olamayacağını söyledim. Gülümsedi ve sempatik Gürcü aksanıyla Rusça "Bunu duyduğuma sevindim. İşinde başarılı olmanı dilerim," dedi. Biraz bekledikten sonra, gerçek bir Gürcü gibi "ve özel hayatında da mutluluklar dilerim," diye ekledi.

Ertesi sabah İtalya'ya uçtum. Victor Kac, İtalyan meslektaşı Corrado De Concini ile Pisa'da organize ettikleri bir konferansa beni de davet etmişti. Pisa'dan başka bir toplantıya katılmak üzere Korsika Adası'na ve oradan da Japonya'nın Kyoto şehrinde düzenlenen bir konferansa gittim. Bu konferanslar, Kac-Moody cebirleri ve bunların kuantum fiziğindeki uygulamaları ile ilgilenen fizikçileri ve matematikçileri bir araya getiriyordu. Yeni tamamladığım çalışmam hakkında konuşma yaptım. Katılımcıların çoğu Langlands Programı'nı ilk defa duyuyordu ve ilgilerini çekmiş gibi duruyorlardı. O günleri tekrar düşününce, o zamandan bu zamana ne kadar çok şeyin değişmiş olduğuna şaşırıyorum. Langlands Programı günümüzde modern matematiğin köşe taşlarından biri olarak addediliyor ve farklı disiplinlerce de yaygın olarak biliniyor.

Dünyanın farklı yerlerine gitme fırsatı elime ilk kez geçmişti. Bir yandan farklı kültürleri keşfediyor, bir yandan da ortak dilimiz olan matematiğin bizi nasıl bir araya getirdiğini idrak ediyordum. Her şey yeni ve heyecan vericiydi; dünya, sonsuz olasılıkların bir araya geldiği bir kaleydoskoptu.

16. Bölüm:

Kuantum Dualitesi

Langlands Programı'nın sayı teorisinden sonlu cisim üzerindeki eğrilere, oradan da Riemann yüzeylerine kadar matematiğin farklı alanlarında ses getirdiğini gördük. Kac-Moody cebirlerinin gösterimleri bile karışıma dahil oldu. Langlands Programı'nın merceğinden baktığımızda matematiğin birbirinden ayrı bu alanlarında aynı örüntüleri, aynı olguları gözlemleriz. Kendilerini farklı biçimlerde açığa vururlar ama bazı ortak özellikler (Langlands dual grubunun ortaya çıkması gibi) her zaman fark edilebilir. Tüm matematiğe temel teşkil eden gizemli bir yapıya —kaynak kod diyebiliriz— işaret ederler. Bu açıdan bakınca, Langlands Programı'nın matematiğin Büyük Birleşik Teorisi olduğunu söyleyebiliriz.

Matematiğin okullarda gördüğümüz en yaygın ve soyut kavramlarına da değindik: eğilmiş, bükülmüş ve bazen de parçalara ayrılmış sayılar, fonksiyonlar, denklemler. Çoğunun önceden göründüğü kadar temel nitelikte olmadığı anlaşıldı. Modern matematikte, daha derin ve çok yönlü kavram ve fikirler vardır: vektör uzayları, simetri grupları, asal sayılara göre modüler aritmetik, demetler. Dolayısıyla matematik, gördüklerimizden çok daha fazlası-

na sahiptir ve daha önce göremediklerimizi görmemizi sağlayan da Langlands Programı olmuştur. Şu ana kadar, saklı gerçekliği sadece görür gibi olduk. Şimdiyse kırık bir mozaik ile karşı karşıya olan bir arkeolog gibi, toplayabildiğimiz delillerden hareketle parçaları bir araya getirmeye çalışıyoruz. Yapbozun her bir yeni parçası bize gizemi ortadan kaldıracak yeni içgörüler, yeni araçlar sunuyor. Ve her seferinde, ortaya çıkan resmin tükenmez gibi görünen zenginliği karşısında gözlerimiz kamaşıyor.

Bu büyülü dünyaya gireceğim noktayı, Kac-Moody cebiri üzerine yaptığım çalışmayı Drinfeld, Langlands Programı'na bağladığında buldum. Bu konunun genişliği ve matematiğin her alanında var olması beni o zamandan beri cezbeder. Programın bu kitapta değinilen çeşitli alanları hakkında daha çok şey öğrenmek benim için olmazsa olmaz bir hâle geldi ve o tarihten itibaren çalışmalarımın çoğunu ya Langlands Programı üzerine ya da ondan herhangi bir şekilde ilham alarak yapıyorum. Bu durum beni matematiğin farklı kıtalarını dolaşmaya, faklı kültürleri ve dilleri öğrenmeye zorladı.

Birçok seyyah gibi benim de gördüklerim karşısında şaşkınlık duymamam mümkün değildi. Şimdi de bu süprizlerin en büyüğüne gelmiş bulunuyoruz: Langlands Programı'nın kuantum fiziği ile ayrılmaz bir ilişki içinde olduğu ortaya çıkmıştır. Matematikte olduğu gibi fizikte de kilit nokta dualitedir.

Fizikte dualite peşinde olmak biraz garip görünebilir ama bu bir bakıma hepimizin aşina olduğu bir kavramdır. Elektrik ve manyetizmayı ele alalım. Bu iki kuvvet çok farklı gibi görünmelerine rağmen aslında elektromanyetizma adı verilen tek bir matematiksel teori ile tanımlanırlar. Bu teori, elektrik ve manyetizma kuvvetlerinin yer değiştirebilmesini sağlayan gizli bir dualite içerir. (Aşağıda aytıntılı olarak ele alacağız.) 1970'li yıllarda, fizikçiler bu dualiteyi "değişmeli olmayan" ayar teorileri (non-abelian gauge theories) adı altında genellemeye çalıştılar. Bunlar, nükleer kuvvetleri tanımlayan teorilerdir: Kuarkları proton, nötron ve diğer temel parçacıklar

içinde tutan "güçlü" kuvvetler ve radyoaktif bozunma gibi olaylardan sorumlu olan "zayıf" kuvvetlerdir.

Tüm ayar teorilerinin merkezinde, *ayar grubu* (gauge group) adı verilen bir Lie grubu bulunur. Elektromanyetizma, bir bakıma en basit ayar teorisidir ve buradaki ayar grubu, eski dostlarımızdan çember grubudur (herhangi bir yuvarlak nesnenin dönme hareketlerinin grubu). Bu, bir değişmeli (commutative/abelian) gruptur yani herhangi iki elemanının çarpımı, çarpma işleminin hangi sırada gerçekleştiğine bağlı değildir: $a \cdot b = b \cdot a$. Öte yandan, güçlü ve zayıf etkileşim teorilerinde, ilgili ayar grupları değişmeli olmayan (non-commutative/non-abelian) gruptur yani ayar grubunda $a \cdot b \neq b \cdot a$ eşitsizliği geçerlidir. Bu yüzden bunlara, değişmeli olmayan (non-commutative/non-abelian) ayar teorileri adını veriyoruz.

1970'lere gelindiğinde fizikçiler, değişmeli olmayan (non-commutative/non-abelian) ayar teorileri içerisinde elektromanyetik dualitenin bir benzerini buldular ama işin içinde sürpriz bir şaşırtmaca vardı. Ayar grubu G olan bir ayar teorisi ile başlarsak dual teorinin farklı bir ayar grubuna sahip olan bir başka ayar teorisi olacağı anlaşıldı. İşte bu grubun Langlands Programı'nın kilit bileşenlerinden biri olan ${}^{L}G$ Langlands dual grubundan başka birşey olmadığı ortaya çıktı.

Bunu şu şekilde düşünebilirsiniz: Matematik ve fizik, sözgelimi Dünya ve Mars gibi iki farklı gezegendir. Dünya'da farklı kıtalar arasında bir ilişki keşfediyoruz. Bu ilişkiye bağlı olarak, Avrupa'daki her insan, bir Kuzey Amerikalı ile eşleşiyor, boyları, kiloları ve yaşları aynı. Fakat farklı cinsiyetlere sahipler (bunu, bir Lie grubunu kendisinin Langlands duali olan Lie grubu ile yer değiştirmesine benzetebiliriz). Daha sonra bir gün, Mars'tan bir konuk geliyor ve bize Mars'taki kıtalar arasında da bir ilişki keşfettiklerini söylüyor. Kıtaların birindeki her Marslının, diğer bir kıtadaki Marslı ile eşleştirilebildiği anlaşılıyor; öyle ki boyları, ağırlıkları ve yaşları aynı ama ... cinsiyetleri farklı (Marslıların tıpkı bizim gibi iki cinsiye-

te sahip olduklarını kim biliyordu?) Duyduklarımıza inanıyoruz: Dünya'da sahip olduğumuz ilişki ile onların Mars'ta sahip oldukları ilişki, bir şekilde bağlantılı gibi görünüyor. Ama neden?

Benzer şekilde, Langlands dual grubu hem matematikte hem de fizikte karşımıza çıktığından, matematikteki Langlands Programı ile fizikte elektromanyetik dualite arasında bir bağlantı olması gerektiğini varsaymak da gayet doğaldır. Fakat yaklaşık otuz yıldır bunu kimse bulamadı.

Bu soruyu zaman içerisinde Edward Witten ile birçok kez tartıştım. Princeton'daki İleri Araştırmalar Enstitüsü'nde profesör olan Witten, yaşayan en büyük teorik fizikçilerden biri olarak kabul edilir. Hayret uyandıran özelliklerinden biri kuantum fiziğinin en karmaşık araçlarını soyut matematikte dudak uçuklatan keşifler ve varsayımlar yapmak için kullanma becerisidir. Yaptığı çalışmalar nesillerdir matematikçilere ilham vermektedir ve Witten matematiğin en prestijli ödüllerinden biri olan Fields Madalyası'nı kazanan ilk fizikçi olmuştur.



Kuantum dualitesi ve Langlands Programı arasındaki muhtemel bağlantıyı merak eden Witten, zaman zaman bana bununla ilgili sorular yöneltirdi. Bu konu hakkında, o Harvard veya MIT'ye geldiğinde benim Harvard'daki odamda ya da ben Princeton'a gittiğimde onun odasında tartışırdık. Tartışmalar her zaman ufuk açısı

oluyordu ama pek mesafe kat edemiyorduk. Bazı temel bileşenlerin eksik olduğu ve keşfedilmeyi beklediği aşikârdı.

Bu konuda hiç beklenmedik bir yerden yardım gördük.

Mayıs 2003'te Roma'da gerçekleşen bir konferans esnasında[1], eski arkadaşım ve meslektaşım Kari Vilonen'den bir e-posta aldım. Aslen Finlandiyalı olan Kari, tanıdığım en sıcakkanlı matematikçilerden biridir. Harvard'a ilk geldiğimde, daha sonradan eşi olan Martina ile birlikte beni Red Sox'un mücadele ettiği bir beyzbol play-off müsabakasını izlemek üzere Boston'daki bir taraftar barına götürmüştü. Red Sox kaybetmiş olsa da benim için hiç unutamayacağım bir deneyimdi. O günden sonra dost olduk ve zaman içerisinde Langlands Programı kapsamında birçok ortak makale yazdık (bir diğer matematikçi Dennis Gaitsgory ile birlikte). Langlands bağıntısının önemli bir durumunu beraber ispat ettik.

Kari (o sıralar Northwestern Üniversitesi'nde öğretim üyesiydi) yolladığı bir e-postada, Langlands Programı'ndaki araştırmamızı desteklemek üzere bize ödenek vermek isteyen DARPA'dan bir yetkilinin kendisi ile irtibata geçtiğini yazıyordu.

Defense Advanced Research Projects Agency'nin (İleri Savunma Araştırmaları Projeleri Ajansı) kısaltması olan DARPA, ABD Savunma Bakanlığı'nın araştırma birimiydi. 1958 yılında, *Sputnik*'in fırlatılmasının ardından Birleşik Devletler'de bilim ve teknolojiyi ilerletmek ve *Sputnik*'in örnek teşkil ettiği türden teknolojik sürprizleri önlemek amacıyla kurulmuştu.

Aşağıdaki paragrafı DARPA'nın internet sitesinde okudum:[2]

> Ajans bu hedefi gerçekleştirmek için, hem temel araştırma aracılığıyla bilgi birikimini geliştirmek hem de uygulamalı araştırma yoluyla inovatif teknolojiler yaratmak maksadıyla multidisipliner yaklaşımları uygulamak üzere farklı alanlardaki çalışanlara güvenmektedir. DARPA'nın bilimsel araştırmaları, labovatuvar ça-

> lışmalarından tam ölçekli teknolojik işleyişlerin oluşturulmasına kadar uzanır... İnovasyon alanında Savunma Bakanlığı'nın ana makinası olan DARPA, zaman açısından sonlu fakat devrim niteliğinde uzun süreli değişim yaratan projeler yürütür.

Yıllar içinde, DARPA uygulamalı matematik ve bilgisayar bilimi alanlarında çeşitli projelere fon sağladı: örneğin internetin atası olan ARPANET'in yaratılmasından sorumlu idi. Ancak bildiğim kadarıyla daha önce soyut matematik alanında hiçbir projeyi desteklememişlerdi. Langlands Programı dahilindeki bir araştırmayı neden desteklemek istiyor olabilirlerdi?

Kuramsal ve soyut görünen bu alanın doğrudan uygulamaları yoktu. Bununla birlikte temel bilimsel araştırmaların, tüm teknolojik ilerlemelerin temelini teşkil ettiğinin ayırdında olmamız gerekiyor. Sıklıkla, matematik ve fizikteki en soyut ve anlaşılması güç gibi gözüken keşifler daha sonradan bugün artık gündelik hayatımızda kullandığımız inovasyonlara yol açmıştır. Örneğin asal sayılarla modüler aritmetiği düşünün! Onu ilk gördüğümüzde, bunun gibi bir şeyin gerçek dünyada herhangi bir uygulamasının imkânsız olduğunu düşündürecek kadar soyut gelir. Aslında, İngiliz matematikçi G. H. Hardy'nin ünlü sözünde belirttiği üzere "ileri matematiğin büyük bir kısmı hiçbir işe yaramaz".[3] Ama bu espri üstüne kaldı: Sayı teorisindeki (kendisinin uzmanlık alanıdır) ezoterik görünümlü birçok bulgu, günümüzde çok sayıda yerde, mesela internet bankacılığında karşımıza çıkıyor. Çevrim içi satın alma işlemi yaptığımızda, mod N aritmetiği devreye girer (14. Bölüm'ün 7. sonnutunda verilen, RSA şifreleme algoritmasının tanımına bakınız). Bir matematiksel formülün ya da bir fikri pratikte uygulamanın potansiyeli hakkında asla önyargılı olmamalıyız.

Tarih bize tüm muhteşem teknolojik buluşların evvelinde, genellikle onlarca yıl önce, soyut araştırmada kaydedilen ilerlemeler olduğunu gösterir. Bu yüzden, temel bilime sağlanan desteği kısıtlarsak ilerlememizi ve gücümüzü de kısıtlarız.

Bunun başka bir boyutu daha var: Toplum olarak, büyük ölçüde bilimsel araştırma ve yeniliklerimizle tanımlanırız. Bu, kültürümüzün ve refahımızın önemli bir kısmını teşkil eder. O dönemin en büyük parçacık hızlandırıcısının yaratıldığı Fermi Ulusal Laboratuvarı'nın ilk müdürü olan Robert Wilson, 1969 yılında Atom Enerjisi Ortak Komite Kongresi'ne verdiği demeçte konuya bir açıklama getirdi. Bu multi-milyon dolarlık makinanın ülke güvenliğine bir karkısı olup olmayacağı yönündeki bir soruya şöyle cevap vermişti:[4]

> Gelişen bir teknolojinin uzun erimli bakış açısıyla bakarsak bu olası. Ancak bunun yanı sıra şunlarla da ilgisi var: İyi ressamlar, iyi heykeltraşlar, büyük şairler miyiz? Ülkemizde saygı gösterdiğimiz ve onur duyduğumuz her şeyi kastediyorum. Bu açıdan bakarsak bu yeni bilgi birikimi, onurumuz ve ülkemizle alakalıdır fakat yurdumuzu savunmaya değer kılmanın dışında, onu savunmakla doğrudan bir ilişkisi yoktur.

2001'den 2009'a kadar, Darpa'nın müdürlüğünü yapan Anthony Tether, temel araştırmaların öneminin farkındaydı. Program yöneticilerini soyut matematik alanında iyi bir proje bulmaları için zorluyordu. Müdürlerden biri olan Doug Cochran, bu çağrıyı ciddiye aldı. Ulusal Bilim Vakfı'nda (National Sicence Foundation-NSF), Ben Mann adında bir arkadaşı vardı. Topoloji alanında uzman olan Ben, akademik görevinden ayrılmış ve NSF'in Matematik Bilimleri Bölümü'nde program yöneticisi olarak çalışmak üzere Washington'a gelmişti.

Doug soyut matematik alanında uygun bir proje önermesini istediğinde, Ben'in aklına Langlands Programı gelmiş. Ben, kendi uzmanlık alanı olmamasına rağmen, NSF'ye yapılan burs başvurularından konunun önemini kavramıştı. Projelerin niteliği ve aynı fikirlerin matematiğin birbirinden uzak disiplinlerine nüfuz etmiş olması onu çok etkiledi.

Bu yüzden Ben Doug'a DARPA'nın Langlands Programı kapsamında yapılan bir araştırmayı desteklemesi tavsiyesinde bulunmuştu. Kari, ben ve iki tane daha matematikçi ile irtibata geçip Doug'un DARPA'nın müdürüne sunabileceği bir taslak metin hazırlanmamızı istemelerinin sebebi de buydu. Eğer müdür onaylarsa bu alanda araştırma yürütmek amacıyla multi-milyonluk bir ödenek sağlanması bekleniyordu.

Samimi olmak gerekirse, ilk başta biraz tereddüt ettik. Bu alışılmadık bir durumdu: Bildiğimiz matematikçilerin hiçbiri daha önce bu büyüklükte bir ödenek almamıştı. Genelde matematikçiler, NSF'ten görece olarak daha küçük olan bireysel ödenekler alıyorlardı (küçük bir seyahat ücreti, lisansüstü öğrencilere sağlanan destekler ve belki bir miktar yaz dönemi desteği). Burada bizim yapmamız gereken, düzinelerce matematikçinin yapacağı çalışmaları koordine ederek çok geniş bir araştırma alanında uyumlu bir çaba gösterilmesini sağlamaktı. Ödenek çok büyük olduğundan, kamuoyunun ilgisi de büyük olacak ve muhtemelen de diğer meslektaşlarımızın bir miktar şüphe ve kıskançlık duymalarına sebep olacaktık. Bu proje ile kayda değer bir ilerleme sağlayamazsak alay konusu olacağımızın ve böyle bir başarısızlığın DARPA'nın soyut matematik alanında başka önemli projelere kaynak sağlamaya kapıları kapatmasına yol açabileceğinin farkındaydık.

Tüm kaygılarımıza rağmen Langlands Programı'nda bir etkimiz olsun istiyorduk. Öte yandan, matematik araştırmalarına sağlanan desteklerde hâkim olan geleneksel, muhafazakar şablonun yerine gelecek vadeden bir alana büyük bir kaynak aktarımının konması fikri de cazip ve heyecan verici görünüyordu. Basitçe ifade etmek gerekirse, hayır diyemedik.

Sıradaki soru: Projede neye odaklanmalıydık? Gördüğünüz üzere Langlands Programı çok yönlü ve matematiğin birçok farklı alanına uygun bir çalışmadır. Bu genel başlık altında yarım düzine kadar

taslak kolaylıkla hazırlanabilirdi. Bir seçim yapmalıydık ve biz de en büyük gizem olduğunu düşündüğümüz noktaya odaklanmaya karar verdik: Langlands Programı ile kuantum fiziğindeki dualiteler arasındaki olası bağlantı.

Bir hafta sonra Doug, DARPA'nın müdürüne hazırladığımız taslağın bir sunumunu yaptı ve her açıdan başarılı oldu. Müdür, üç yıl boyunca bu programın desteklenmesi için multi-milyon dolarlık bütçeyi onayladı. Bu, bilebildiğimiz kadarıyla, o zamana kadar soyut matematik alanında bir araştırmaya hibe edilen en yüksek tutardı. Beklentiler bariz biçimde yüksekti. Büyük bir heyecan ve aynı zamanda da kaygı dolu bir andı.

Neyse ki Ben Mann, projemizden sorumlu program yöneticisi olarak NSF'ten DARPA'ya geçti. Daha ilk toplantılarımızda, onun bu iş için biçilmiş kaftan olduğu belli oldu. Bir yüksek risk/yüksek ödül projesini üstlenecek, onu gerçekleştirmek üzere doğru insanları bulacak ve fikirlerini sonuna kadar geliştirmelerine yardımcı olacak vizyon ve cesarete sahipti. Bulaşıcı iyimserliği de etrafındaki herkese enerji veriyordu. Dümene Ben'in geçmiş olması bizim için büyük bir şanstı. Onun rehberliği ve desteği olmasaydı yaptıklarımızın bir kısmını dahi beceremezdik.

İşin ilk adımı olarak, Edward Witten'a aldığımız ödenekten bahseden ve bize katılmak isteyip istemeyeceğini soran bir e-posta yolladım. Witten'ın fizik ve matematikteki konumu dikkate alındığında, onu da aramıza almak zorundaydık. Ama ne yazık ki Witten'ın ilk cevabı çekimserdi. Ödeneği aldığımız için bizi tebrik ediyor ama üzerinde çalıştığı çok sayıda proje bulunduğunu ve kendisinin katılımını beklemememiz gerektiğini de açıkça belirtiyordu.

Ancak talih kuşu bir kez daha omzumuza kondu: değişmeli olmayan (non-commutative/non-abelian) ayar teorisinde elektromanyetik dualiteyi keşfeden fizikçilerden biri olan Peter Goddard, o sıralar Princeton'daki İleri Araştırmalar Enstitüsü'nün müdürü

olmak üzereydi. Son araştırması, Kac-Moody cebirlerinin gösterim teorisi ile alakalı şeyler üzerineydi ve bu yüzden kendisi ile çeşitli konferanslarda karşılaşmıştık.

Bu karşılaşmalardan bir tanesini hiç unutmuyorum. 1991 yılının Ağustos ayıydı ve Japonya'daki Kyoto Üniversitesi'nde matematik ve kuantum fiziği üzerine düzenlenen büyük bir çalıştaydaydık. Çalıştayın ortasında, Sovyetler Birliği'nde gerçekleşen *coup d'état*'ya dair endişe verici haberler aldık. Otoriter rejimin yeniden iktidara geldiği ve *perestroika*'nın sunduğu sınırlı özgürlüklerin kısıtlandığı izlenimi edinmiştik. Bu, sınırların tekrar kapatılabileceği anlamına geliyordu ki bu yüzden uzun yıllar ailemi görememe ihtimalim oldukça yüksekti. Annem ve babam derhal beni aradılar ve eğer böyle bir şey olursa onlar için endişelenmememi ve hiçbir durumda Rusya'ya geri dönmeye çalışmamamı söylediler. Birbirimize hoşçakal derken kendimizi en kötü ihtimale hazırlıyorduk. Yakın bir zaman zarfında birbirimizle telefonda görüşüp görüşemeyeceğimiz dahi belli değildi.

Çalkantılı günlerdi. Bir gece, yakın arkadaşım fizikçi Fedya Smirnov ile konuk evlerinden birinin salonunda Japon televizyonunu izleyip, Moskova'da neler olup bittiğini anlamaya çalışıyorduk. Binadaki herkes derin uykuda gibi görünüyordu. Derken, sabaha karşı saat üç sularında, Peter Goddard elinde bir şişe Glenfiddich marka viski ile salona girdi. Son haberleri sordu ve hep beraber birer içki aldık. Daha sonra Goddard yatağına geri döndü ama şişeyi almamız konusunda diretti —destek olmak adına güzel bir jestti.

Ertesi gün *coup d'état*'nın bertaraf edilmesi bizi epey ferahlattı. Borya Feigin (o da bu konferansa katılmıştı) ile birlikte gülen yüzlerle kollarımızı havada savururken çekilmiş bir fotoğrafımız, Japonya'nın önde gelen gazetelerinden biri olan *Yomiuri*'nin ilk sayfasında çıktı.

Peter'a yolladığım e-postada kendisine bu anıyı hatırlattım ve DARPA'dan aldığımız ödenekten bahsettim. Kendisine İleri Araştırmalar Enstitüsü'nde fizikçi ve matematikçilerin Langlands Programı ve fizikteki dualite hakkında tartışmalarını sağlayacak bir

buluşma düzenlemeyi ve bilmeceyi birlikte çözebileceğimiz ortak bir zemin bulmaya çalışmayı önerdim.

Peter, dileyebileceğimiz en iyi yanıtı verdi ve buluşmayı düzenlemek için tam desteğini sundu.

Enstitü bu tür bir buluşma için harika bir mekândı. 1930 yılında bağımsız bir araştırma ve düşünce merkezi olarak kurulmuş, o zamandan bu yana da Albert Einstein (ömrünün son yirmi yılını burada geçirmişti), André Weil, John von Neumann, Kurt Gödel ve başka birçok meşhur bilim insanını ağırlamıştı. Mevcut kadrosu da aynı şekilde etkileyicidir: 1972 yılından bu yana burada öğretim üyesi olan (şu anda emekli) Robert Langlands ve Edward Witten bu kadroya dahildir. Diğer iki fizikçi Nathan Seiberg ve Juan Maldacena kuantum fiziğiyle yakından alakalı alanlarda çalışırken, aralarında Pierre Deligne ve Robert MacPherson'ın da bulunduğu birtakım matematikçiler Langlands Programı ile bağlantılı konularda araştırmalarını sürdürüyor.

Goddard ile sürdürdüğüm e-posta trafiği, 2003 yılı Aralık ayının başlarında bir araştırma toplantısının planlanması ile neticelendi. Ben Mann, Kari Vilonen ile ben Princeton'a gidiyorduk, Goddard da katılacağına dair söz verdi. Witten, Seiberg ve MacPherson'ın yanı sıra DARPA projesini Kari ve benimle birlikte yürütecek olan, Princeton'dan diğer bir matematikçiyi, Mark Goresky'yi de davet ettik (Langlands, Maldacena ve Deligne'yi de davet etmiştik ama seyahat planlarının uymaması dolayısıyla katılamadılar).

Toplantı, Enstitü yemekhanesinin yanındaki konferans salonunda saat on birde başlayacaktı. Ben ve Kari ile birlikte, toplantıdan on beş dakika önce oradaydık. Başka kimse yoktu. Odanın içinde gergin bir hâlde dolanırken düşünmeden edemiyordum: "Acaba Witten gelecek mi?" Katılacağını bildirmeyen tek davetli oydu.

Toplantının başlamasına beş dakika kala kapı açıldı. Gelen Witten'dı! O an, tüm bunların neticesinde ortaya güzel bir şey çıkacağını anlamıştım.

Birkaç dakika sonra, diğer katılımcılar da geldi. Büyük bir masanın etrafında oturduk. Tipik selamlaşmalar ve kısa bir sohbetin ardından bir sessizlik oldu; tüm gözler bana döndü.

"Katıldığınız için hepinize teşekkür ederim," diyerek başladım. "Langlands Programı ile elektromanyetik dualitenin ortak bir şey paylaştığı bir süredir biliniyor. Fakat çeşitli teşebbüslere rağmen tam olarak ne olup bittiğini anlamak bizi aştı. Kanımca, bu gizemi aşmanın vakti geldi. Ve artık gerekli kaynağa sahibiz zira bu alandaki araştırmaları desteklemek amacıyla DARPA'dan cömert bir ödenek aldık."

Masada oturanlar kafalarını sallıyordu. Peter Goddard, "İzleyeceğimiz yola dair ne gibi bir öneriniz var?" diye sordu.

Toplantıdan önce Kari ve Ben ile birlikte farklı senaryoları gözden geçirmiştik; yani iyi hazırlanmıştım.

"Enstitüde bir buluşma ayarlamayı öneriyorum. İlgili alanlarda çalışan fizikçileri davet edelim ve matematikçi olarak bizlerin Langlands Programı'ndaki mevcut bilgi birikimini anlatacağı dersler düzenleyelim. Daha sonra birlikte kuantum fiziği ile olası bağlantılar hakkında tartışırız."

O an tüm gözler, kuantum fiziği alanında aramızdaki en yetkin kişi olan Witten'a döndü. Tepkisi çok önemliydi.

Witten uzun ve heybetli fiziğiyle yüksek entelektüel gücü temsil eder ki bu, bazılarının ondan çekinmesine yola açar. Konuşurken, ifadeleri kesin ve hatasızdır; alt edilemeyecek bir mantığın ürünü gibi gözükürler. Vereceği cevabı tartmak üzere duraksamaktan asla çekinmez. Bu tür durumlarda, gözlerini kapar ve başını öne eğer. O an yapmakta olduğu da buydu.

Hepimiz sabırla bekliyorduk. Bir dakikadan daha kısa bir süre geçmiş olmalı ama benim için sonsuzluk gibiydi. Witten sonunda, "İyi bir fikir gibi duruyor. Buluşma için aklınızdan geçen tarihler nedir?" dedi.

Ben ve Kari ile birbirimize bakmadan edemedik. Witten aramıza katılmıştı ve bu bizim için büyük bir zaferdi.

Kısa bir görüş alışverişinin ardından hepimiz için uygun olan tarihi bulduk: 8-10 Mart 2004. Neden sonra birisi, katılımcıların ve konuşmacıların kimler olacağını sordu. Birkaç isim söyledik ve son hâlini e-posta ile bildirmeye ve davetiyeleri en kısa sürede yollamaya karar kıldık. Böylece toplantı sonlandı. On beş dakikadan fazla sürmedi.

Sanırım söylemeye gerek yok, Ben ve Kari ile çok mutlu olmuştuk. Witten, buluşmanın organize edilmesine yardımcı olacağına (bu hiç kuşkusuz davetlilerin gözünde büyük bir cazibe olacaktı) ve kendisinin de aktif olarak katılacağına dair söz verdi. Enstitü mensubu olan, konuyla ilgili diğer fizikçi ve matematikçilerle birlikte Langlands'ın da katılmasını umuyorduk. İlk hedefimize ulaşmıştık.

Birkaç gün içerisinde katılımcı listesini tamamladık ve bir hafta sonra davetiyeler yollandı. Davet mektubunda şunlar yazıyordu:

> Bu mektubu size, 8-10 Mart 2004 tarihleri arasında İleri Araştırmalar Enstitüsü'nde düzenlenecek olan Langlands Programı ve Fizik konulu gayriresmî çalıştaya davet etmek amacıyla yazıyoruz. Söz konusu çalıştay, geometrik Langlands Programı ile Kuantum Alan Teorisi arasındaki olası bağlantıları araştırmak amacıyla, program dahilinde kaydedilen son gelişmeleri fizikçilere tanıtmayı hedeflemektedir. Matematikçilerin vereceği giriş niteliğinde dersler düzenlemeyi planlıyoruz ve sohbet niteliğinde tartışmalar için de bolca zaman ayrılacak. Bu çalıştay, DARPA'nın sağladığı ödenekle desteklenmektedir.

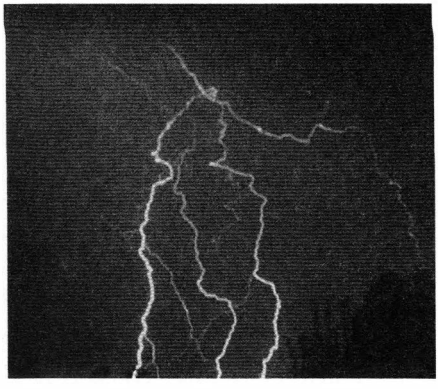
Bu tür konferansların normalde elli ile yüz arasında katılımcısı olur. Genellikle konuşmacılar konuşur ve herkes kibar bir şekilde onları dinler. Konuşmanın sonunda belki birkaç katılımcı soru sorar ve bir iki tanesi de oturumun ardından konuşmacının peşine düşer. Biz kafamızda tamamen farklı bir şey canlandırdık: Tipik bir konferanstan ziyade bir beyin fırtınasına benzeyen dinamik bir

etkinlik. Bu yüzden, yaklaşık yirmi kişinin katılacağı küçük bir toplantı düzenlemek istedik. Bu tür bir düzenin, katılımcılar arasındaki etkileşimi ve serbest sohbeti teşvik etmesini bekliyorduk.

Kasım 2003'te Chicago Üniversitesi'nde bu formattaki ilk toplantımızı yapmıştık. Drinfeld ve birkaç yıl önce Chicago Üniversitesi'nde profesörlüğe yükselen Beilinson'ın da aralarında bulunduğu az sayıda matematikçi davet edilmişti. Başarılı bir toplantı olmuş ve bu düzenin işe yaradığını ispatlamıştı.

Kari, Mark Goresky ve benden başka sonradan Austin'deki Texas Üniversitesi'nde öğretim görevlisi olan ilk doktora öğrencim David Ben-Zvi'nin konuşma yapmasına karar verdik. Elimizdeki materyali her birini aramızdan birinin anlatacağı dört parçaya ayırdık. Sunumlarımızda Langlands Programı'nın ardında yatan temel fikirleri, konu ile alakası olmayan fizikçilere aktarmamız gerekiyordu. Kolay bir iş değildi.

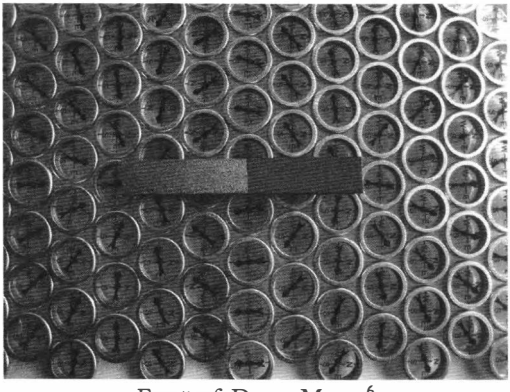
Konferansa hazırlanırken elektromanyetik dualite hakkında daha fazla şey öğrenmek istedim. Elektrik ve manyetik kuvvetlere hepimiz aşinayız. Elektrik kuvveti, yüklerin aynı veya ters işaretli olmasına bağlı olarak, elektrik yüklü nesnelerin birbirlerini itmesini veya çekmesini sağlayan etkendir. Örneğin, bir elektron negatif elektrik yüküne sahipken, proton pozitif (zıt değerde) elektrik yüküne sahiptir. Aralarındaki çekim kuvveti, elektronun atom çekirdeği etrafında dönmesini sağlar. Elektrik kuvvetleri, elektrik alanı denilen şeyi yaratır. Nemli ve soğuk havanın bir elektrik alanı içerisindeki hareketiyle ortaya çıkan yıldırım düşmesi esnasında şahit olduğumuz şey de budur.



Fotoğraf: Shane Lear. NOAA Fotoğraf Arşivi

Manyetik kuvvetin farklı bir kökeni vardır. Bu, mıknatıslar veya hareket halindeki elektrik yüklü parçacıklar tarafından yaratılan kuvvettir. Bir mıknatısın iki kutbu vardır: kuzey ve güney. İki mıknatısı zıt kutupları birbirine bakacak şekilde yerleştirdiğimizde birbirlerini çekerler, eş kutuplar ise birbirlerini iter. Yerküre devasa bir mıknatıstır ve mıknatıs kullanırken, onun uyguladığı manyetik kuvvetten faydalanırız. Aşağıda yer alan resimde de açıkça görüldüğü üzere, tüm mıknatıslar manyetik bir alan yaratır.

İngiliz fizikçi James Clark Maxwell, 1860'lı yıllarda, elektrik ve manyetik alanlar için harika bir teori geliştirmiştir. Maxwell, söz konusu alanları günümüzde onun adını taşıyan bir diferansiyel denklemler sistemiyle tanımlamıştır. Bunların uzun ve karmaşık denklemler olduğunu düşünebilirsiniz ama aslına bakarsanız oldukça basittirler: Sadece dört tane olup, şaşırtıcı derecede simetrik görünürler. Vakum (yani hiçbir maddenin bulunmadığı) ortamlarda geçerli teoriyi ele alır ve elektrik alan ile manyetik alanı yer değiştirirsek denklem sistemimiz değişmeyecektir.[5] Diğer bir deyişle, iki alanın birbiriyle yer değiştirmesi, denklemlerin simetrisidir. Buna elektromanyetik dualite adı verilir ve elektrik ile manyetik alan arasındaki ilişkinin simetrik olduğu anlamına gelir: Her biri diğerini aynı biçimde etkiler.



Fotoğraf: Dayna Mason[6]

Burada, Maxwell'in güzel denklemleri, *klasik* elektromanyetizmayı tanımlar; şöyle ki teori uzun mesafe ve düşük enerjilerde tam olarak işe yarar. Ancak iki alanın kısa mesafeler ve yüksek enerjilerdeki davranışları, *kuantum* elektomanyetizma teorisi ile tanımlanır. Kuantum teorisine göre, bu alanlar, diğer parçacıklarla etkileşen temel parçacıklar —fotonlar— tarafından taşınmaktadır. Bu teori, kuantum alan teorisi adı altında ele alınır.

Anlam karmaşasını önlemek amacıyla, "kuantum alan teorisi" teriminin iki farklı yan anlam taşıdığının altını çizmek isterim: Geniş anlamda temel parçacıkların davranışlarını ve etkileşimlerini tanımlayan matematiksel dili ifade ederken bu tür bir davranışın belli bir modelini de ifade ediyor olabilir —örneğin, kuantum elektromanyetizması bu anlamda, bir kuantum alan teorisidir. Ben söz konusu terimi çoğunlukla bu ikinci anlamıyla kullanacağım.

Bu tür herhangi bir teoride (ya da modelde), bazı parçacıklar (elektron ve kuarklar gibi) maddenin yapı taşları iken, bazıları da (fotonlar gibi) kuvvet kanallarıdır. Her parçacık çeşitli özelliklere sahiptir: kütle ve elektrik yükü gibi bazıları daha fazla bilinir, "spin" gibi daha az bilinenleri de vardır. Bu durumda, belli bir kuantum alan teorisi, bunları birbirine bağlamanın bir tarifidir.

Aslına bakarsanız, "tarif" terimi işe yarar bir benzerliği işaret etmektedir: Kuantum alan teorisini bir tür yemek tarifi gibi düşü-

nün. Bu durumda, pişireceğimiz yemeğe kattığımız malzemeleri parçacıklara benzetebiliriz ve bunları karıştırma biçimimiz de parçacıklar arası etkileşim gibidir.

Örnek olarak, memleketimde yılın her döneminde pişirilen favori yemeklerden biri olan borç (*borscht)* isimli Rus çorbasının tarifine bir bakalım. Bu çorbayı —tabii ki— en güzel annem pişirir. Nasıl bir şey olduğunu aşağıdaki resimde görebilirsiniz (babamın kadrajından).



Tabii, annemin tarifini saklı tutmak zorundayım. Burada, internetten bulduğum bir tarife yer vereceğim:

8 bardak bulyon (et ya da sebze)
½ kilo dilimlenmiş kemikli incik
1 adet iri soğan
4 adet pancar kökü (soyulmuş)
4 havuç (soyulmuş)
1 adet rustik patates
2 kase dilimlenmiş lahana
¾ bardak kıyılmış taze dereotu
3 yemek kaşığı kırmızı üzüm sirkesi
1 bardak ekşi krema
Tuz
Karabiber

Bu listeyi kuantum alan teorimizin "içindeki parçacıklar" olarak düşünün. Bu bağlamda dualite ne anlama geliyor olabilir? Basitçe ifade etmek gerekirse, bazı malzemeleri ("parçacıklar") içindekilerin toplamı aynı kalacak şekilde birbirleri ile değiştirmek anlamına geliyor.

Böyle bir dualitenin nasıl işleyeceğini şöyle örneklendirebiliriz:

pancar kökü → havuç
havuç → pancar kökü
soğan→ patates
patates → soğan
tuz → karabiber
karabiber → tuz

Dualite dahilinde, diğer tüm malzemeler değişmeden kalır; yani,

bulyon → bulyon
incik → incik
vb.

Değiştirdiğimiz malzemelerin miktarı aynı kaldığından, sonuçta yine aynı tarifi elde ederiz. Dualitenin anlamı işte budur.

Öte yandan eğer pancar kökü ile patatesi yer değiştirseydik farklı bir tarif ortaya çıkardı: Dört patates ve bir pancar kökünden oluşan bir tarif olurdu. Bunu denemedim ama bence tadı korkunç olur.

Bu örnek, bir tarifin simetrisinin yemek hakkında bir şeyler öğrenebileceğimiz nadide özelliklerden biri olduğunu açık biçimde gösteriyor olmalı. Pancar ve havuçların sonucu etkilemeden yer değiştirebiliyor olması, borç çorbamızda ikisi arasındaki dengenin iyi kurulmuş olduğunu gösterir.

Kuantum elektromanyetiğine geri gönelim. Bu teoride dualite bulunduğunu söylemek, parçacıkları aynı teoriyi elde edecek şekilde birbiriyle değiştirmenin bir yolu olduğu anlamına gelir.

Elektromanyetik dualite kapsamında, bütün "elektrik objelerin" "manyetik objeler" hâline gelmesini ve aynı zamanda bunun tam tersinin de gerçekleşebilmesini bekleriz. Dolayısıyla, örneğin bir elektron (çorbamızdaki pancar köküne benzetilebilir) elektrik yükü taşır, bu yüzden de manyetik yük taşıyan bir parçacık (havuca benzetilebilir) ile yer değiştirebilir olmalıdır.

Böyle bir parçacığın var olması, gündelik hayat deneyimlerimize ters düşer: Bir mıknatısın her zaman için iki kutbu vardır ve birbirlerinden ayrılamazlar! Bir mıktası ikiye bölersek, yine iki kutbu olan iki mıknatıs elde ederiz.

Öte yandan, manyetik monopol adı verilen manyetik yüklü bir temel parçacığın var olması fizikçiler tarafından kavramsallaştırılmıştır; ilk adımı, 1931 yılında, kuantum fiziğinin kurucularından Paul Dirac atmıştır. Dirac, monopolün (matematikçilerin manyetik alanın "tekilliği" [singularity] diyebileceği şey) bulunduğu yerde manyetik alana tuhaf bir şeyin olmasına izin verirsek onun da manyetik yük taşıyacağını göstermiştir.

Ne yazık ki manyetik monopoller deneysel olarak keşfedilebilmiş değil; dolayısıyla, doğada var olup olmadıklarını henüz bilemiyoruz. Eğer yoklarsa doğada kuantum seviyesinde tam manasıyla bir elektromanyetik dualite yoktur.

Konunun uzmanları bu noktada henüz bir karara varabilmiş değil ama bizler yine de doğaya mümkün olduğunca benzeyen ve elektromanyetik dualite sergileyen bir kuantum alan teorisi kurmaya çalışabiliriz. Yemek benzetmemize geri dönecek olursak dualitelere sahip yeni teoriler "uydurmaya" çalışabiliriz. Bildiğimiz tarifin malzemelerini ve bunların miktarını değiştirebilir, bazılarını çıkarabilir, başkalarını ekleyebiliriz, vb. Bu tür bir "deneysel aşçılık" bizi çeşitli sonuçlara götürebilir. Bu hayali yemekleri illa da "yemek" istemeyebiliriz. Yenilebilir olsun olmasın, bunların hayali mutfağımızdaki özellikleri üzerinde çalışmaya değer —yenilebilir yemekler hakkında bize ipuçları verebilirler (yani madde evrenimizi tanımlayabilirler).

Bu tür deneme-yanılma ile "model geliştirme" yoluyla kuantum fiziği alanında onlarca yıldır ilerleme kaydedilmektedir. Simetri de bu modellerin oluşturulmasında kullanılan önemli bir yol gösterici ilkedir. Bir model ne kadar simetrik olursa, o kadar kolay analiz edilir.

Bu noktada, fermiyonlar ve bozonlar olmak üzere iki tür temel parçacık bulunduğunu belirtmenin önemli olduğunu düşünüyorum. Birinciler, maddenin (elektron, kuark, vb) yapı taşlarıyken ikinciler kuvvet taşıyan parçacıklardır (fotonlar gibi). Kısa bir süre önce, Cenevre'deki Büyük Hadron Çarpıştırıcısı'nda keşfedilen bulunması zor Higgs parçacığı da bir bozondur.

İki parçacık türü arasında temel bir fark vardır. İki fermiyon aynı anda aynı konumda bulunamazken, herhangi bir sayıda bozon bulunabilir. Davranışları son derece farklı olduğundan, fizikçiler uzun süre bir kuantum alan teorisinin her türlü simetrisinin fermiyon ve bozon kısımları arasında bir ayrımı koruması gerektiğini kabul ettiler —yani doğa bunların birbirine karışmasını engelliyordu. Fakat 1970'lerin ortalarında, birkaç fizikçi çılgınca gözüken bir fikir ileri sürdüler: Bozonların fermiyonlarla yer değiştireceği yeni bir tür simetri mümkündü. Adını da *süpersimetri* koydular.

Kuantum mekaniğinin yaratıcılarından Niels Bohr'un Wolfgang Pauli'ye söylediği ünlü sözde olduğu gibi, "Teorinizin çılgınca olduğu konusunda hepimiz mutabıkız. Bizi ikiye ayıran soru, teorinin doğru olma şansı olacak kadar çılgın olup olmadığı."

Süpersimetri olgusunun doğada bir karşılığı olup olmadığını henüz bilmiyoruz ama fikir gittikçe popülerleşiyor. Bunun sebebi ise geleneksel kuantum alan teorisini sıkıntıya sokan meselelerin birçoğunun süpersimetrinin dahil olması ile ortadan kalkmasıdır. Süpersimetrik teoriler genellikle daha şıktır ve daha kolay analiz edilirler.

Kuantum elektromanyetizması süpersimetrik değildir ama süpersimetrik genişlemeleri bulunur. Daha fazla parçacık (hem bo-

son hem de fermiyon) ekliyoruz, öyle ki sonuçta ortaya çıkan teori süpersimetri oluyor.

Fizikçiler, özellikle elektromanyetizmanın olası süpersimetri miktarı en yüksek olan genişlemesi üzerinde durmaktadır. Bu genişletilmiş teoride elektromanyetik dualitenin gerçekten de sağlandığını gösterdiler.

Özetlemek gerekirse gerçek dünyada elektromanyetik dualitenin bir biçiminin var olup olmadığını bilmiyoruz. Öte yandan, teorinin idealize edilmiş, süpersimetrik genişlemesinde elektromanyetik dualite açık biçimde görülmektedir.

Bu dualitenin henüz değinmediğimiz önemli bir yönü daha bulunuyor. Elektromanyetizmanın kuantum alan teorisinin bir parametresi var: elektronun elektrik yükü. Negatif bir değer olduğundan $-e$ biçiminde yazarız ve $e = 1.602 \times 10^{-19}$ kulondur (Coulomb). Bu oldukça küçük bir değer. Elektromanyetizmanın en yüksek süpersimetriye sahip genişlemesinin de benzer bir parametresi vardır ve o da e ile gösterilir. Eğer elektromanyetik dualiteyi uygular ve bütün elektrik objeleri manyetik objelerle yer değiştirirsek elektronun yükünün e değil, bunun tersi —yani $1/e$— olduğu bir teori elde ederiz.

Eğer e küçükse, $1/e$ büyüktür. Dolayısıyla, küçük elektron yüküne sahip (dünyamızda olduğu gibi) bir teoriden yola çıkmamız durumunda, dual teorimiz büyük bir elektron yüküne sahip olacaktır.

Bu oldukça şaşırtıcı! Çorba benzetmemize göre, e'nin çorbanın sıcaklığı olduğunu farz edin. Bu durumda dualite, havuç ve pancar kökü gibi iki malzemenin yerini değiştirdiğimizde, soğuk borç çorbamızın ansızın sıcak hâle geleceği anlamını taşır.

e'nin bu şekilde tersini almak, aslında elektromanyetik dualitenin geniş kapsamlı sonuçları olan kilit özelliklerinden biridir. Kuantum alan teorisinin kurulduğu yöntemde, e gibi parametrelerin sadece küçük değerleri için iyi bir çözümümüz var. Parametrenin büyük değerlerinde, teorinin anlamlı olduğunu önsel olarak dahi bilmiyoruz. Elektromanyetik dualite bize bunun sadece anlamlı oldu-

ğunu değil, parametrenin küçük değerleri için geçerli olan teoriyle eş olduğunu da söylemektedir. Bu ise parametrenin tüm değerleri için teoriyi tanımlama şansımız olduğu anlamına gelir. Bu dualite türünün kuantum fiziğinin kutsal kâsesi olarak görülmesinin sebebi de işte budur.

Bir sonraki sorumuz, kuantum alan teorisinde, elektromanyetizma ve onun süpersimetrik genişlemeleri haricinde elektromanyetik dualitenin bulunup bulunmadığıdır.

Elektrik ve manyetik kuvvetler haricinde, doğanın bilinen üç kuvveti daha vardır. Hepimizin bildiği ve değerinin farkında olduğu yerçekimi kuvveti ile daha basit isimlere sahip olan iki nükleer kuvvet: güçlü ve zayıf. Güçlü nükleer kuvvet, kuarkları proton ve nötron gibi temel parçacıkların içinde tutar. Zayıf nükleer kuvvet ise atom ve temel parçacıkların maruz kaldıkları çeşitli dönüşümlerden sorumludur (söz gelimi elektron ya da nötrino salınımı demek olan atomların beta bozunumu veya yıldızların gücünü sağlayan hidrojen füzyonu gibi).

Bu kuvvetler birbirlerinden oldukça farklı görünürler. Ancak elektromanyetik, zayıf ve güçlü kuvvet teorilerinin ortak bir noktaları bulunduğu ortaya çıkmıştır. Bunlara ayar teorileri ya da — haklarında çığır açan bir makale yazan iki fizikçi, Chen Ning Yang ve Robert Mills'e atfen— Yang-Mills teorileri adı verilmiştir. Bu bölümün başında da belirttiğim üzere, ayar teorisinin ayar grubu adında bir simetri grubu vardır. Bu, 10. Bölüm'de bahsettiğimiz bir kavram olan Lie grubudur. Elektromanyetizma teorisinin ayar grubu, bu kitabın en başında tanıttığım çember grubudur ($SO(2)$ya da $U(1)$ olarak da bilinir). Bu, en basit Lie grubudur ve değişmelidir (commutative/abelian). Kürenin dönme hareketlerinin $SO(3)$ grubu gibi çoğu Lie grubunun değişmeli olmadığını (non-commutative/non-abelian) biliyoruz. Yang ve Mills, çember grubunun yerine değişmeli olmayan bir grup koyarak elektromanyetizmanın bir

genellemesini oluşturmayı düşündüler. Değişmeli olmayan ayar gruplarına sahip ayar teorilerinin zayıf ve güçlü nükleer kuvvetleri tam olarak tanımlayabildiği görüldü.

Zayıf kuvvet teorisinin ayar grubu $SU(2)$ adlı gruptur. SO(3)'ün Langlands dual grubudur ve iki katı büyüklüğündedir (15. Bölüm'de bundan bahsetmiştik). Güçlü nükleer kuvvetin ayar grubunun adı ise $SU(3)$'tür.[7]

Dolayısıyla ayar teorileri, doğanın dört temel kuvvetinden üçünü tanımlayan evrensel bir biçimcilik sağlar (elektrik ve manyetik kuvvetleri elektromanyetizmanın bir kuvvetinin parçaları olarak sayıyoruz). İlerleyen yıllarda, bunların üç ayrı teori değil bir bütünün parçaları olduğu anlaşıldı: Bu üç kuvveti farklı parçalar olarak içeren, genellikle Standart Model adıyla anılan tek bir teori vardır. Bu yüzden de "*birleşik teori*" dediğimiz şeydir —Einstein ömrünün son otuz yılı boyunca, bir başarı kaydedememişti (o dönemde sadece iki kuvvetin biliniyor olduğunu unutmayalım: elektromanyetizma ve yer çekimi).

Matematikteki birleşiklik fikrinin önemi hakkında uzun uzadıya konuşmuştuk. Örneğin Langlands Programı, farklı matematik disiplinlerindeki geniş olgular yelpazesini benzer terimlerle tanımlaması açısından bir birleşik teoridir. Olabildiğince az sayıda ilkeden bir birleşik teori oluşturma fikri, özellikle fizikte çekicidir ve bunun sebebi de gayet açık. Evrenin içsel işleyişini en eksiksiz biçimde anlamaya çalışıyor ve nihai teorinin —eğer varsa— basit ve şık olmasını umuyoruz.

Basit ve şık olması, kolay olacağı anlamına gelmiyor. Örneğin Maxwell'in denklemleri oldukça derindir ve ne anlama geldiklerini kavramak için bir miktar çaba gerekir. Öte yandan, elektrik ve manyetik kuvvetlere dair hakikati en ekonomik biçimde açıklamak anlamında basittirler. Ayrıca şıktırlar. Einstein'ın yerçekimi kuvveti denklemleri ile Yang ve Mills tarafından bulunan değişmeli olmayan (non-commutative/non-abelian) ayar teorisi

denklemleri de böyledir. Bir birleşik teori tüm bunları, farklı enstrümanlardan çıkan seslerin harmanlandığı bir senfoni gibi, bir araya getirebilmelidir.

Standart Model bu yönde bir adımdır ve deneysel olarak onaylanması (yakın zamanda keşfedilen Higgs bozonunu da içine alan) önemli bir başarıydı. Buna rağmen bir sebepten ötürü bu, evrenin nihai yasası değildir: Anlaşılması en zor kuvvet olduğu ispatlanmış olan yerçekimi kuvvetini kapsamamaktadır. Einstein'ın genel görelilik teorisi, yerçekimini klasik yaklaşımla yani büyük mesafelerde anlamamızı mümkün kılıyor. Fakat elimizde, çok kısa mesafeler için yerçekimi kuvvetini tanımlayacak, deneysel olarak sınanabilir bir kuantum teorisi yok. Doğanın diğer üç kuvvetine odaklansak bile Standart Model yine de birçok soruyu cevapsız bırakıyor ve astronomların gözlemlediği büyük madde yığınlarını ("karanlık madde" olarak bilinirler) açıklayamıyor. Dolayısıyla Standart Model, nihai senfoninin sadece kısmi bir taslağıdır.

Aşikâr olan bir şey var: Nihai senfoninin son ölçüsü matematik dilinde yazılacak. Aslında, Yang ve Mills, değişmeli olmayan (noncommutative/non-abelian) ayar teorilerini tanıtan ünlü makalelerini yazdıktan sonra, fizikçiler büyük bir şaşkınlıkla bu teoriler için gerekli matematiksel biçimciliğin matematikçiler tarafından fiziğe herhangi bir referans vermeksizin onlarca yıl önce geliştirilmiş olduğunu fark ettiler. Nobel Ödülü kazanma yolunda ilerleyen Yang, şaşkınlığını şu şekilde dile getiriyordu:[8]

> [Bu] sadece keyif değildi. Daha fazla, daha derin bir şey vardı: Neticede, fiziksel dünyanın yapısının kökleri sadece mantık ve biçimin güzelliğine uzanan düşüncelerden geliştirilmiş derin matematiksel kavramlara sıkı sıkıya bağlı olduğunu bulmaktan daha gizemli, daha şaşırtıcı ne olabilir ki?

Albert Einstein'a "En nihayetinde, deneyimden bağımsız insan düşüncesinin bir ürünü olan matematik, nasıl oluyor da gerçekliğin

nesnelerine bu kadar hayranlık uyandırıcı biçimde uygun olabiliyor?" sorusu yöneltildiğinde o da aynı merak duygusunu ifade etmişti.[9]

Yang ve Mills'in doğanın kuvvetlerini tanımlamak için kullandıkları kavramlar, matematikte daha önce ortaya çıkmıştı çünkü bu kavramlar, matematikçilerin doğanın kuvvetlerinin içsel mantığını takip ederek geliştirdikleri geometri paradigmasının içerisinde de asli birer unsurdu. Bu, Nobel ödüllü bir başka fizikçi olan Eugene Wigner'in "matematiğin, doğa bilimlerindeki açıklanamaz etkinliği" dediği olgunun güzel bir örneğidir.[10] Bilim insanları yüzyıllardır bu "etkililikten" istifade ediyor olsalar da kökleri hâlen daha pek anlaşılabilmiş değildir. Matematiksel hakikatlerin nesnel olarak ve hem fiziksel dünyadan hem de insan beyninden bağımsız bir biçimde var oldukları görülmektedir. Matematiksel fikirler dünyası, fiziksel gerçeklik ve bilinç arasındaki derin bağlantıların daha da araştırılması gerektiğine şüphe yoktur. (Bu konuya 18. Bölüm'de daha ayrıntılı değineceğiz.)

Standart Model'in ötesine gidebilmek için yeni fikirlere de ihtiyacımız var. Bu fikirlerden biri de süpersimetridir. Evrenimizde var olup olmadığı büyük bir tartışma konusudur. Henüz izi bulunabilmiş değil. Deney, teorinin nihai yargıcıdır; dolayısıyla süpersimetri deneysel olarak ispatlanana kadar, ne kadar güzel ve cazip bir fikir olursa olsun, teorik bir yapı olarak kalacaktır. Bununla birlikte, süpersimetrinin gerçek dünyada gerçekleşmediği ortaya çıksa bile kuantum fiziğinin yeni modellerini inşa etmek için kullanılabilecek uygun matematiksel araçlar sağlamaktadır. Bu modeller, gerçek dünyanın fiziğini yöneten modellerden çok uzak değildir ama daha fazla yüksek simetri sergiledikleri için analizleri daha kolaydır. Bu teorilerden öğrendiklerimizin, süpersimetri var olsun ya da olmasın, evrenimizin gerçekçi teorileri ile bir bağlantısı olacağını umut ediyoruz.

Tıpkı elektromanyetizma teorisi gibi, değişmeli olmayan (noncommutative/non-abelian) ayar teorileri de, maksimal süpersimetrik

uzantılara sahiptir. Bu süpersimetrik teoriler, hem bozon hem de fermiyon olmak üzere daha çok sayıda parçacığı aralarında mümkün olan en kusursuz dengeye ulaşmak amacıyla karışıma katarak elde edilir. Bu durumda doğal olarak şu sorulabilir: Bu teoriler elektromanyetik dualite ile bir benzerlik taşıyorlar mı?

Fizikçi Claus Montonen ve David Olive, 70'li yılların sonlarında bu soru ile uğraştılar.[11] Jean Nuyts ve David Olive, Peter Goddard'ın (daha sonraları İleri Araştırmalar Enstitüsü'nün müdürü olacaktı) daha önce yapmış olduğu bir çalışmayı[12] geliştirerek şaşırtıcı bir sonuca ulaştılar: Evet, değişmeli olmayan (non-commutative/non-abelian) süpersimetrik ayar teorilerinde elektromanyetik dualite vardı ama bu teoriler elektromanyetizmde olduğu gibi, genellikle kendinden dual değillerdi. Yukarıda değindiğimiz üzere, elektromanyetizmada tüm elektrikli objelerin yerine manyetik objeler koyarsak ve bunun tam tersini yaparsak ters elektron yüküne sahip yine aynı teoriyi elde ederiz. Fakat aynı şeyi G ayar grubuna sahip aynı genel süpersimetrik ayar teorisine uyguladığımızda, *farklı* bir teori elde edeceğimiz anlaşıldı. Bu hâlâ bir tür ayar teorisi olmakla birlikte farklı bir ayar grubuna sahiptir (ayrıca, elektron yüküne benzeyen, tersine çevrilmiş bir parametresi vardır).

Peki, dual teorideki ayar grubu ne olacak? Bunun, G grubunun Langlands dual grubu olan ${}^{L}G$ olduğu anlaşılmıştır.

Goddard, Nuyts ve Olive bunu G ayar grubuna sahip ayar teorisindeki elektrik ve manyetik yüklerin ayrıntılı analizini gerçekleştirerek keşfettiler. Ayar grubu çember grubu olan ayar teorisinde yani elektromanyetizmada, her iki yükün değeri de tam sayıdır. Bunların yerini değiştirdiğimizde, bir tam sayı kümesinin yerine bir başka tam sayı kümesi gelir. Dolayısıyla teori aynı şekilde kalır. Fakat Goddard, Nuts ve Olive, genel bir ayar teorisinde, elektrik ve manyetik yüklerin iki farklı kümede değer aldıklarını gösterdiler. Adlarına S_e ve S_m diyebileceğimiz bu yükleri, G ayar grubu cinsinden ifade edebiliriz (bunun tam olarak nasıl olduğu şu an için önemli değil).[13]

Elektomanyetik dualite dahilinde, S_e'nin S_m ve S_m'nin de S_e hâline geldiği görülmüştür. Bu şartlar altında gündeme gelen soru şudur: S_e'nin S_m'nin önceden G için, S_m'nin de S_e'nin önceden G için aldığı değere sahip olduğu bir başka G' grubu var mı? (Bu soruya verilecek cevap, G ve G' tarafından belirlenen bazı ek verilerle de uyumlu olmak zorundadır.) Böyle bir G' grubunun var olup olmadığı açık değil ama bu üç bilim adamı var olduğunu gösterdiler ve basit bir yapı ortaya koydular. O günlerde, G''nin on yıl kadar önce Langlands tarafından tamamen farklı bir amaçla da olsa oluşturulduğunu henüz bilmiyorlardı. *Bu* G' grubu, ${}^LG$ Langlands dual grubundan başka bir şey değildi.

Elektromanyetik dualitenin matematikçilerin tamamen farklı bir bağlamda keşfettikleri aynı Langlands dual grubuna götürme nedeni, Princeton'daki buluşmada ele alacağımız büyük soruydu.

17. Bölüm:

Gizli Bağlantıların Ortaya Çıkarılışı

New York City'den yaklaşık bir saatlik tren yolculuğu ile gidilen Princeton, kuzeydoğuya özgü banliyö kasabalarından biri gibidir. Bilim camiasında kısaca *enstitü* olarak bilinen İleri Araştırmalar Enstitüsü, Princeton'un eteklerinde, kelimenin tam manasıyla ormanın içindedir. Etrafı sessiz ve pitoresktir: Küçük göletlerin içinde yüzen ördekler, durgun sularda yansıyan ağaçlar... 1950'leri andıran iki ya da üç katlı tuğla bina kümelerinden oluşan enstitü, entelektüel bir güç yayar. İnsan Einstein ve diğer devlerin arşınladığı sakin koridorlarda ve ana kütüphanede dolanarak zengin tarihin tadını çıkarmaktan kendini alıkoyamaz.

2004 yılının Mart ayındaki buluşmamızı işte burada yaptık. Aradaki kısa süreye rağmen, Aralık'ta yolladığımız davetiyelere verilen tepki genellikle olumlu yönde olmuştu. Yaklaşık yirmi katılımcı vardı —bu yüzden toplantıyı açarken katılımcıların sırayla kendilerini tanıtmalarını istedim. Kendimi çimdiklemek istiyordum: Witten ve Langlands orada, yakınımda oturuyorlardı. Peter Goddard ve Matematik Okulu ile Doğa Bilimleri Okulu'ndan birçok mestektaşları da gelmişti. Montonen-Olive ve Goddard-Nuyts-

Olive makalelerinin ortak yazarı David Olive de oradaydı. Tabii Ben Mann da bizimleydi.

Her şey plana uygun olarak ilerledi. Esasen bu kitapta okumakta olduğunuz hikâyenin üstünden gidiyorduk: Langlands Programı'nın sayı teorisi ve harmonik analize uzanan kökenleri, sonlu cisimler üzerindeki eğrilere ve ardından da Riemann yüzeylerine geçiş. Beilinson-Drinfeld yapısını ve Kac-Moody cebiri üzerine Feigin ile yaptığım çalışma ile bunun iki boyutlu kuantum alan teorileriyle bağlantılarını açıklamak için de biraz zaman harcadık.

Sıradan bir konferanstan farklı olarak konuşmacılar ile dinleyiciler arasında çok fazla alışveriş oluyordu. Tartışmaların seminer odasından kantine ve oradan tekrar geri taşındığı yoğun bir toplantıydı.

Witten en başından itibaren büyük ilgi gösterdi. Ön sırada oturuyor, dikkatle dinliyor ve ikide bir konuşmacıların ilgisini çeken sorular soruyordu. Üçüncü günün sabahında bana "Öğleden sonra konuşmak istiyorum; sanırım peşinde olduğumuz şeye dair bir fikrim var," dedi.

Witten, öğle yemeğinden sonra, iki konu arasındaki olası bir bağlantının ana hatlarını anlattı. Bu, matematik ve fiziği birbirine bağlayan yeni bir teorinin doğuşuydu. O ve çalışma arkadaşları ile birlikte birçok kişi, o tarihten beri bu yeni teorinin peşindeler.

Önceden değindiğimiz üzere, André Weil'in Reşid Taşı'nın üçüncü sütunundaki Langlands Programı'nın geometrik versiyonunun ekseninde Riemann yüzeyleri vardır. Bu yüzeylerin hepsi iki boyutludur. Örneğin, 10. Bölüm'de bahsettiğimiz üzere, en basit Riemann yüzeyi olan kürenin iki koordinatı vardır: enlem ve boylam. İki boyutlu olmasının sebebi de budur. Diğer tüm Riemann yüzeyleri de iki boyutludur çünkü her bir noktanın yakın çevresi iki boyutlu bir düzlemin bir parçası gibi görünür; bu yüzden de iki bağımsız eksen ile tanımlanabilir.

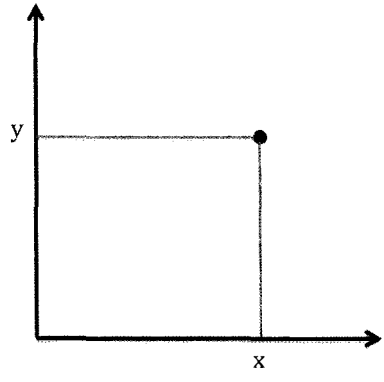
Öte yandan, elektromanyetik dualitenin gözlendiği ayar teorileri dört boyutlu uzay-zamanda tanımlanmıştır. Witten, ikisini birbirine

bağlayabilmek için, dört boyutlu ayar teorisini dörtten iki boyuta düşürecek "boyut indirgeme"yi uygulayarak başladı.

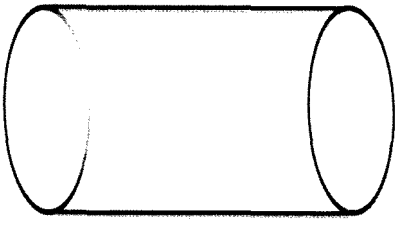
Aslında boyut indirgeme, fizikte kullanılan standart bir araçtır: Verilen bir fiziksel maddeyi tahmin ederken serbestlik derecelerinden bazılarına odaklanır ve bir kısmını ihmal ederiz. Örneğin, bir uçak içinde uçmakta olduğumuzu ve koridorda ayakta duran bir kabin görevlisinin size bir bardak su uzattığını düşünün. İşi kolaylaştırmak adına, kabin görevlisinin elinin uçağın hareketine dik olduğunu varsayalım. Bardağın hızının iki bileşeni vardır: Birincisi uçağın hızı iken ikincisi size bardağı uzatan kabin görevlisinin elinin hızıdır. Fakat birincisi ikincisinden çok daha büyüktür; dolayısıyla, yerdeki sabit bir gözlemcinin bakış açısıyla bardağın havadaki hareketini tanımlamamız gerekirse hızın ikinci bileşinini rahatlıkla ihmal edebilir ve basitçe, bardağın uçakla aynı hızda hareket ettiğini söyleyebiliriz. Böylelikle hızın iki bileşenini içeren iki boyutlu problemi, baskın olan bileşeni içeren tek boyutlu bir probleme indirgeyebiliriz.

Ele aldığımız bağlamda, boyut indirgeme şu şekilde gerçekleşir: İki tane Riemann yüzeyinin çarpımı olan bir geometrik şekli (ya da manifold) ele alırız. Burada "çarpım" ifadesi ile, koordinatları bu yüzeylerin her birinin koordinatlarının bir araya getirilmesi ile oluşturulan yeni bir geormetrik şeklin ele alındığı kastedilmektedir.

Daha basit bir örnek olarak iki doğrunun çarpımını ele alalım. Her doğrunun bir koordinatı olduğundan, çarpımın iki bağımsız koordinatı olacaktır. Dolayısıyla ortaya bir düzlem çıkar: Düzlem üzerindeki her bir nokta bir koordinat çifti ile gösterilir. Bunlar, iki çizginin bir araya getirilen koordinatlarıdır.



Benzer şekilde, bir doğru ile bir çemberin çarpımı da bir silindiridir. Bunun da biri dairesel, diğeri de doğrusal olmak üzere iki koordinatı vardır.



Çarpım yaptığımızda boyutlar toplanır. Ele aldığımız örneklerde, başlangıçtaki nesnelerin her ikisi de tek boyutluydu ve çarpımları iki boyutlu oldu. Bir başka örnek: Bir doğru ile bir düzlemin çarpımı üç boyutlu uzayıdır. Boyutu da 1+2=3'tür.

Benzer şekilde, iki Riemann yüzeyinin çarpımının boyutu da söz konusu yüzeylerin boyutlarının toplamıdır; yani, 2+2 ile elde edilen 4. Bir Riemann yüzeyinin resmini çizebiliriz (bazılarını daha önce görmüştük) ama dört boyutlu bir manifold çizemeyiz. Bu yüzden, aklımızda rahatlıkla canlandırabileceğimiz daha az boyutlu şekiller için kullandığımız metodlarla dört boyutlu manifoldu matematiksel olarak inceleyebiliriz. Bunu yapabiliyor olmamız, 10. Bölüm'de de belirttiğimiz gibi, matematiksel soyutlamanın gücünün güzel bir göstergesidir.

Şimdi, iki Riemann yüzeyinden birinin (X) diğerinden (Σ) çok daha küçük olduğunu varsayalım. Bu durumda, etkin serbestlik derecesi Σ üzerinde yoğunlaşır ve bizler Σ üzerindeki bir teori vasıtasıyla iki yüzeyin çarpımına ilişkin dört boyutlu teoriyi yaklaşık olarak tanımlayabilir hâle geliriz. Fizikçiler bu yapıya "etkin teori" adını verirler. Bu durumda, söz konusu teori iki boyutlu olacaktır. Şeklini korumak kaydıyla X'i küçültmek üzere yeniden boyutlandırdıkça, bu yaklaştırma işlemi daha da iyi hâle gelecektir (bu etkin teorinin hâlâ X'in şekline bağlı olduğuna dikkat ediniz). Böylelikle, X ve Σ çarpımına ilişkin dört boyutlu süpersimetrik ayar teorisinden Σ üzerinden tanımlı iki boyutlu bir teoriye geçeriz.

Bu teorinin doğasına dair ayrıntılı bir değerlendirmeye girmeden önce, kuantum alan teorisi ile genel olarak ne kastettiğimize değinelim. Bir örnek vermek gerekirse, elektromanyetizmada üç boyutlu uzaydaki elektrik ve manyetik alanları inceleriz. Matematikçiler bunların her birine vektör alanı ismini verirler. Rüzgârın hız dağılımını tanımlayan vektör alanı faydalı bir benzetmedir: Uzaydaki her bir noktada, rüzgâr belli bir yönde eser ve belli bir kuvvete sahiptir. Bunu göstermek içinse, bu noktaya iliştirilen, ucunda ok işareti bulunan yönlendirilmiş bir doğru parçası kullanılır ve matematikçiler de buna vektör derler. Uzaydaki tüm noktalara iliştirilen bu vektörler topluluğuna vektör alanı denir. Hava durumu haritalarında, rüzgârların vektör alanı şeklinde gösterildiğini hepimiz görmüşüzdür.

Benzer şekilde, 266. sayfadaki resimde de görülebileceği üzere, verilen bir manyetik alanın da uzayın her bir noktasında belli bir yönü ve şiddeti vardır. Dolayısıyla o da bir vektör alanıdır. Diğer bir deyişle, üç boyutlu uzayımızın her bir noktasına bir vektör atayan bir kuralımız var. Pek de şaşırmayacağınız üzere, matematikçiler bu tür bir kurala üç boyutlu uzaydan üç boyutlu vektör uzayına geçiş "fonksiyonu" adını vermiştir. Eğer verilen bir manyetik alanın zaman içinde nasıl değiştiğini takip edersek dört boyutlu uzay-zamandan

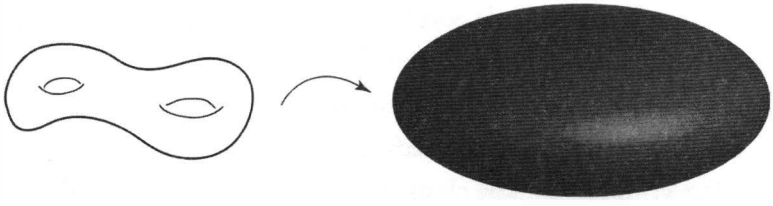
üç boyutlu vektör uzayına geçiş fonksiyonunu elde ederiz. (Bu, televizyonda hava durumu haritasının zamanla değişiminin izlenmesine benzetilebilir.) Benzer şekilde, zaman içinde değişen herhangi bir verilen elektrik alan da dört boyutlu uzay-zamandan üç boyutlu uzaya geçiş fonksiyonu olarak tanımlanabilir. Elektromanyetizma, bu iki fonksiyonu tanımlayan bir matematiksel teoridir.

Klasik elektromanyetizma teorisinde, sadece ve sadece, Maxwell denklemlerinin çözümünü ele alan fonksiyonlarla ilgileniriz. Bunun aksine kuantum teorisinde, *bütün* fonksiyonları inceleriz. Aslında, kuantum alan teorisindeki her türlü hesaplama, tüm olası fonksiyonların toplamını içerir, ancak her fonksiyonun bir ağırlığı vardır, yani her biri belli bir çarpan ile çarpılır. Bu çarpanlar, Maxwell denklemlerinin çözümleriyle alakalı fonksiyonları baskın kılacak şekilde tanımlanmıştır fakat diğer fonksiyonlara da katkı sağlar.

Uzay-zamandan çeşitli vektör uzaylarına geçiş fonksiyonları, başka birçok kuantum alan teorilerinde de karşımıza çıkar (değişmeli olmayan (non-commutative/non-abelian) ayar teorileri gibi) fakat kuantum alan teorilerinin tamamı vektörlere dayanmaz. Kuantum alan teorilerinin *sigma modeller* adında bir sınıfı vardır. Bu sınıfta, uzay-zamandan eğri yüzeyli geometrik şekle ya da manifolda geçiş fonksiyonlarını ele alırız. Bu manifolda hedef manifold adı verilir. Söz gelimi, bir küre olabilir. Sigma modelleri ilk olarak dört boyutlu uzay-zaman durumunda incelenmiş olmalarına rağmen, böyle bir model, uzay-zamanı herhangi bir boyuttaki manifold olarak aldığımızda da anlam ifade edecektir. Dolayısıyla, her türlü hedef manifold seçimi ve her türlü uzay-zaman manifoldu için bir sigma modeli vardır. Örneğin, uzay-zaman olarak iki boyutlu bir Riemann yüzeyini ve hedef manifold olarak da $SO(3)$ Lie grubunu seçebiliriz. Bu durumda, ilgili sigma modeli Riemann yüzeyinden $SO(3)$'e geçiş fonksiyonlarını tanımlayacaktır.

Aşağıdaki resim bu tür bir fonksiyon içermektedir: Sol tarafta bir Riemann yüzeyi, sağ tarafta ise hedef manifold yer alıyor ve

aradaki ok da ikisi arasındaki fonksiyonu temsil ediyor. Söz konusu fonksiyon, Riemann yüzeyindeki her bir noktaya hedef manifoldun bir noktasını atayan bir kuraldır.



Klasik sigma modelinde hareket denklemlerini çözen, uzay-zamandan hedef manifolda geçiş fonksiyonlarını ele alırız (elektromanyetizmanın Maxwell denklemlerinin benzerleri); bu fonksiyonlara harmonik adı verilir. Kuantum sigma modelinde ise ilgilenilen tüm nicelikler (korelasyon fonksiyonları gibi), her biri belli bir ağırlığa (yani belli bir çarpana) sahip olan tüm olası fonksiyonlar toplanarak hesaplanır.

Sorumuza geri dönelim: X'i çok küçük olacak şekilde yeniden ölçeklendirirken; $\Sigma \times X$ üzerindeki G ayar grubuna sahip dört boyutlu süpersimetrik ayar teorisinin boyut indirgemesini, hangi iki boyutlu kuantum alan teorisi tanımlar? Bunu sağlayacak teorinin, Σ'dan orijinal ayar teorisinin X Reimann yüzeyi ile G ayar grubu tarafından tanımlanan belli bir M hedef manifolduna geçiş fonksiyonlarının sigma modelinin süpersimetrik genişlemesi olduğu anlaşılmıştır. Kullandığımız gösterim bunu yansıtmalı; bu yüzden $M(X, G)$ şeklinde belirteceğiz.[1]

Grup teorisinde olduğu gibi (2. Bölüm'e bakınız), fizikçiler bu manifoldları tesadüfen bulduklarında, matematikçilerin o noktaya daha önce ulaşmış olduklarını keşfettiler. Aslında bu manifoldların bir adı vardı: 1980'lerin ortasında bu uzayları tanıtan ve üzerlerinde çalışan Oxford Üniversitesi öğretim üyelerinden İngiliz matematikçi Nigel Hitchin'in ardından, *Hitchin moduli uzayları* ismiyle bilinir olmuştu. Fizikçilerin bu uzaylarla (dört boyutlu ayar teorisinin boyut indirgemesini yaptığımızda ortaya çıkarlar) ilgilenme nedeni gayet

açık olmasına rağmen, matematikçilerin ilgi duymasının sebebi bu kadar bariz değildir.

Neyse ki Nigel Hitchin keşfinin tarihçesini ayrıntılı olarak vermiştir[7] ve bu gerçekten de matematik ile fizik arasındaki hassas etkileşimin harika bir örneğini teşkil eder. 1970'lerin sonuna doğru, Hitchin ve Drinfeld ile Michael Atiyah ve Yuri Manin adında başka iki matematikçi, fizikçilerin ayar teorileri üzerinde çalışırken buldukları instanton denklemleri üzerinde çalıştılar. Bu instanton denklemleri dört boyutlu düz uzay-zamanda yazıldılar. Hitchin hemen akabinde, instanton denklemlerin dört boyuttan üç boyuta indirgenmesi ile elde edilen ve düz üç boyutlu uzaydaki diferansiyel denklemler olan monopol denklemler üzerinde çalıştı. Bunlar, fizik açısından bakıldığında ilgi çekiciydi ve merak uyandıran bir matematiksel yapıları vardı.

O dönemde, instanton denklemleri dörtten iki boyuta indirgeyerek elde edilen diferansiyel denklemlere bakmak doğaldı. Ama ne yazık ki fizikçiler, bu denklemlerin düz iki boyutlu uzay (yani düzlem) üzerinde bariz olmayan hiçbir çözümlerinin bulunmadığını gözlemlediler ve bu yüzden de denklemlerin peşine daha fazla düşmediler. Fakat Hitchin'in içgörüsü, bu denklemlerin simit ya da pretzelin (bir tür çubuk kraker şekli) dış yüzeyi gibi herhangi bir *eğri* Riemann yüzeyi üzerine yazılabileceği yönündeydi. Fizikçiler bu noktayı ıskalamıştı çünkü o zamanlar (1980'lerin başı) bu tür eğri yüzeyler üzerindeki kuantum alan teorisi ile özel olarak ilgilenmiyorlardı. Fakat Hitchin, bu yüzeyler üzerindeki çözümlerin matematiksel açıdan oldukça zengin olduklarını gördü. Ayar grubunun G olması durumda, Hitchin kendisinin $M(X, G)$ moduli uzayını, bu denklemlerin X Riemann yüzeyi üzerindeki çözümleri olarak ortaya koydu.* Hitchin bunun, özellikle o zamanlar çok az

* Bu konuda Hitchin Alman şair Goethe'den şu alıntıyı yapıyor: "Matematikçiler Fransız adamlar gibidir: Onlara ne söylerseniz söyleyin kendi dillerine çevirirler ve ansızın o söz tamamen farklı bir şey olur."

sayıda örneği bilinen "hiper-Kähler metrik" özelliğine sahip olması açısından, kayda değer bir manifold olduğunu fark etti. Diğer matematikçiler de onun izinden yürüdü.

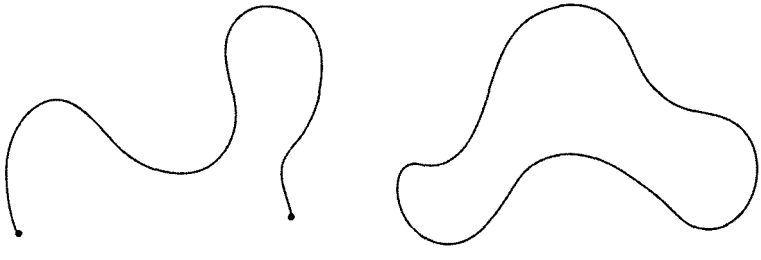
Yaklaşık on yıl kadar sonra, fizikçiler bu manifoldların kuantum fiziğindeki önemini anlamaya başladılar fakat bu ilginin Witten ve çalışma arkadaşlarının şu anda anlattığım çalışmalarından önce tam manasıyla karşılığını bulduğu söylenemez. (İlk olarak André Weil'in Reşid Taşı'nın sağ sütununda ortaya çıkan Hitchin moduli uzaylarının, yakın zamanda Langlands Programı'nda orta sütunda da —burada Riemann yüzeylerinin rolünü sonlu cisimler üzerindeki eğriler oynar— uygulama alanları bulduğunu belirtmek ayrıca ilgi çekici olabilir.[3]

Matematik ve fizik arasındaki etkileşim, her iki tarafın da diğerinden yararlandığı ve onu etkilediği iki yönlü bir süreçtir. Farklı zamanlarda belirli bir fikrin geliştirilmesi sürecinde bunlardan biri, diğerinin odağında sapma yaratacak şekilde öne çıkabilir. Fakat bir bütün olarak düşündüğümüzde, her ikisi de karşılıklı etkileşimin bereketli döngüsünde birbirlerini beslemektedir.

Şimdi hem matematikçilerin hem de fizikçilerin içgörüleri ile donanmış hâlde, elektromanyetik dualiteyi G ayar grubunu içeren dört boyutlu ayar teorisine uygulayalım. Böylece, G'nin Langlands dual grubu olan ${}^{L}G$ ayar grubuna sahip ayar teorisini elde ederiz. (Hatırlayacak olursanız, bu dualiteyi iki kez uyguladığımızda, başlangıçtaki orijinal G grubuna geri dönüyorduk. Diğer bir deyişle, ${}^{L}G$'nin Langlands dual grubu, G'nin kendisidir.) Bu durumda, G ve ${}^{L}G$ ile ilişkili, Σ üzerindeki iki boyutlu etkin sigma modelleri de birbirine eşit ya da dual olacaktır. Sigma modelleri için bu türden dualiteye *ayna simetrisi* adı verilir. Sigma modellerinin birinde, Σ'dan G'ye karşılık gelen $M(X, {}^{L}G)$ Hitchin moduli uzayına geçiş fonksiyonlarını ele alırken; diğerinde, Σ'dan ${}^{L}G$'ye karşılık gelen $M(X, {}^{L}G)$ Hitchin moduli uzayına geçiş fonksiyonlarını ele alırız.

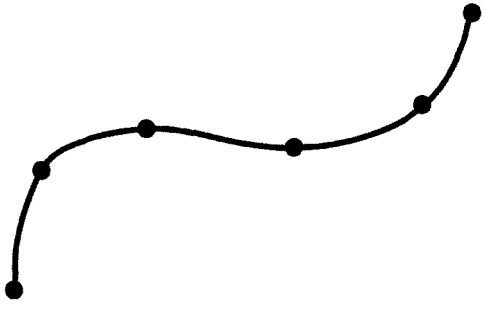
İki Hitchin moduli uzayının ve bunların sigma modellerinin *a priori* olarak birbirleri ile alakaları yoktur; dolayısıyla aralarındaki ayna simetrisi, dört boyutlu orijinal ayar teorilerinin elektromanyetik dualitesi olarak şaşırtıcıdır.

Fizikçilerin bu tür iki boyutlu sigma modellere duydukları ilgi, kısmen bunların sicim teorisinde oynadıkları önemli rolden kaynaklanmaktadır. Onuncu Bölüm'de değindiğim üzere, sicim teorisi, doğanın temel nesnelerinin noktasal temel parçacıklar değil (içsel geometrisi olmayan ve bu yüzden sıfır boyutlu olan parçacıklar); sicim adı verilen, açık ya da kapalı olabilen, tek boyutlu olarak genişletilmiş nesnelerden oluştuğu çıkarımında bulunmaktadır. Açık sicimlerin iki bitiş noktası bulunurken, kapalı olanlar 10. Bölüm'de karşılaştıklarımıza benzeyen küçük birer ilmiktir.

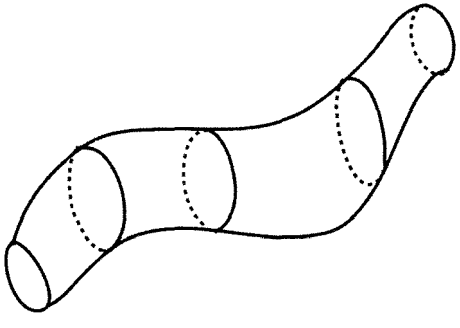


Sicim teorisinin ardında yatan fikir, bu minik sicimlerin uzay-zaman içerisinde hareket ettiklerinde yaptıkları titreşimlerin temel parçacıkları ve bunların arasındaki kuvvetleri meydana getirdiği varsayımına dayanır.

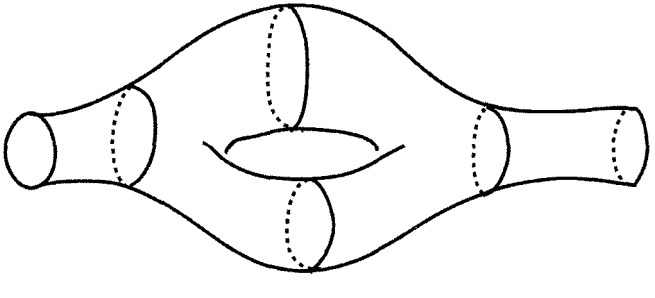
Sigma modellerinin sicim teorisine girişi, sicimlerin nasıl hareket ettiğini ele aldığımızda başlar. Standart fizikte, noktasal bir parçacık uzayda hareket ettiğinde gidimizi tek boyutlu bir yoldur. Parçacığın zaman içinde farklı anlardaki konumları, bu yol üzerindeki noktalarla gösterilir.



Fakat eğer kapalı bir sicim hareket ederse hareketi iki boyutlu bir yüzeyi tarar. Bu durumda, sicimin zaman içerisinde belli bir andaki konumu, bu yüzey üzerindeki bir ilmik olacaktır.



Sicimler birbirleriyle de etkileşebilirler: Bir sicim, iki ya da daha fazla parçaya ayrılabilir ve bu parçalar aşağıdaki resimde gösterildiği gibi tekrar bir araya gelebilir. Bu bize herhangi bir sayıda "delik" (ve sınır çemberi) içeren daha genel bir Riemann yüzeyi verir. Buna sicimin evren tabakası (worldsheet) adı verilir.



Böyle bir gidimizi, S uzay-zamanına gömülü bir Σ Riemann yüzeyi ve dolayısıyla da Σ'dan S'ye giden bir fonksiyon ile gösterilebilir. Bunlar, tam olarak, S hedef manifoldu ile Σ üzerindeki sigma modelinde karşımıza çıkan türden fonksiyonlardır. Fakat tam bu noktada her şey ters yüz oluyor: S uzay-zamanı artık bu sigma modelinin hedef manifoldudur; yani elektromanyetizma teorisi gibi klasik kuantum alan teorilerinin aksine, fonksiyonların kaynağı değil fonksiyonların alıcısıdır.

Sicim teorisinin ortaya koyduğu fikir, bu sigma modellerinde hesaplamalar yaparak *ve* tüm olası Σ Riemann yüzeylerindeki (yani sabit bir S uzay-zamanında yayılan sicimlerin tüm olası yollarındaki)[4] sonuçları toplayarak, S uzay-zamanında gözlemlediğimiz fiziğin yeniden üretilebileceğidir.

Ne yazık ki ortaya çıkan teori bazı ciddi problemlerle karşı karşıya (özellikle Einstein'ın görelilik teorisince var olması mümkün olmayan, "takiyon" adındaki ışıktan hızlı temel parçacıkların var olmasına olanak tanıyor olması, başlı başına önemli bir sorundur). Sicim teorisinin süpersimetrik bir genişlemesini ele aldığımızda durum hızla toparlanıyor. Bu şekilde elde ettiğimiz teorinin adı ise *süpersicim teorisi*dir. Ama yine de bir sorun var: Süpersicim teorisinin matematiksel olarak tutarlı olabilmesi için S uzay-zamanımızın on boyutlu olması gerekir. Bu durum ise sadece dört (üç uzay ve bir zaman) boyuta sahip olduğunu gözlemlediğimiz uzay ile çelişki arz etmektedir.

Öte yandan, yaşadığımız dünya gerçekten de gözlemlediğimiz dört boyutlu uzay-zaman ile mevcut araçları kullanarak göremeyeceğimiz kadar küçük altı boyutlu minik bir M manifoldunun yukarıda açıkladığımız manada bir çarpımıdır. Eğer böyleyse daha önce tartıştığımız boyut indirgemeye (dört boyuttan iki boyuta) benzer bir durumda oluruz: On boyutlu teori, dört boyutlu etkin bir teoriye yol açar. Bu etkin teorinin evrenimizi tanımlaması ve özellikle de Standart Model yanında kuantum yerçekimi teorisini içermesi

umuluyor. Süpersicim teorisinin son yıllarda bu kadar yaygın biçimde çalışılıyor olmasının sebebi, doğanın bilinen tüm kuvvetlerinin birleştirilmesi olasılığını bu şekilde vadediyor olmasıdır.[5]

Fakat bir problemimiz var: Söz konusu *M*, hangi altı boyutlu manifold acaba?

Bunun ne kadar göz korkutucu bir problem olduğunu göstermek için, şöyle bir kabul yapalım: Süpersicim teorisi on yerine altı boyutta matematiksel olarak tutarlı olsun. O zaman elimizde fazladan sadece iki boyut olur ve bizim de sadece iki boyutlu bir *M* manifoldu bulmamız gerekir. Bu durumda, çok fazla seçeneğimiz olmayacaktır: *M*, türüyle yani "delik" sayısıyla nitelenen bir Riemann yüzeyi olmak zorunda kalacaktır. Dahası, teorinin işlemesi için bu *M*'nin bazı ilave özellikleri de karşılaması gerekir: Örneğin, Calabi-You manifoldu olmalıdır (manifolda bu isim, bu tür uzayları matematiksel olarak ilk kez çalışan —fizikçilerin konuyla ilgilenmeye başlamasından önce olduğunu söyleyebilirim— iki matematikçi, Eugenio Calabi ve Shing-Tung Yau'ya atfen verilmiştir)[6]. Bu özelliği taşıyan tek Riemann yüzeyi simidin dış yüzeyidir. Dolayısıyla, eğer *M* iki boyutlu olsaydı onu belirleyebilirdik —simidin dış yüzeyi olması gerekirdi.[7] Fakat *M*'nin boyutu büyüdükçe, olasılıkların sayısı da artar. Eğer *M* altı boyutluysa yapılan bazı hesaplara göre 10^{500} gibi hayal dahi edilemeyecek kadar büyük bir sayıda seçeneğimiz olacaktı. Evrenimizde bu altı boyutlu manifoldların hangisi gerçekleşir ve bunu deneysel olarak nasıl doğrulayabiliriz? Bu, sicim teorisinin hâlâ cevapsız olan kilit sorularından biridir.[8]

Her durumda, bu tartışma neticesinde sigma modellerinin süpersicim teorisinde kritik bir rol oynadıkları ve aslında ayna simetrilerinin bizi süpersicim teorisindeki bir dualiteye götürebileceği anlaşılmalıdır.[9] Sigma modellerinin sicim teorisi dışında da birçok uygulaması vardır. Fizikçiler onları ayrıntılı olarak inceliyorlar ve bu çalışmalar sadece *M* hedef manifoldu altı boyutlu olan sigma modelleriyle kısıtlı değil.[10]

Witten, 2004'teki konferansımızda konuşurken, iki ayar teorisinin (ayar grupları G ve ${}^{L}G$ olan) elektromanyetik dualitesini iki sigma modelinin (hedefleri G ve ${}^{L}G$ Langlands dual grupları ile ilişkilendirilmiş Hitchin modüler uzayları olan) ayna simetrisine indirgemek için, ilk olarak boyut indirgeme tekniğini (dört boyuttan iki boyuta) uyguladı. Ardından da bir soru yöneltti: Bu ayna simetrisini Langlands Programı'na bağlayabilir miyiz?

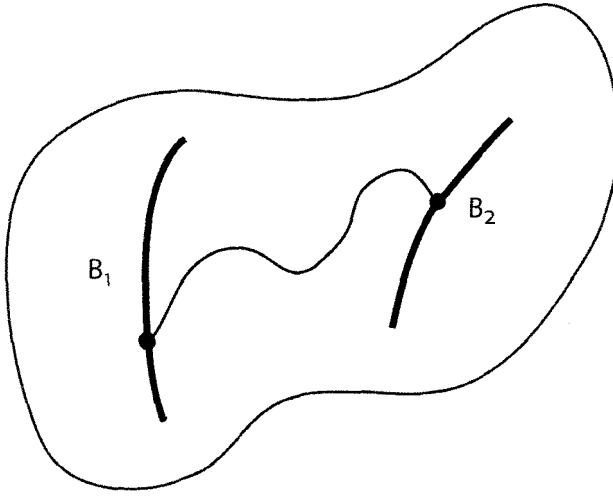
Önerdiği yanıt büyüleyiciydi. Genellikle kuantum alan teorisinde, parçacıkların etkileşimini tanımlayan korelasyon fonksiyonları üzerinde çalışırız. Örneğin böyle bir fonksiyon, belirli bir parçacığın başka iki parçacığın çarpışmasından ortaya çıkma olasılığını tanımlamak için kullanılabilir. Bununla birlikte, kuantum alan teorisinin biçimciliğinin çok daha fazla yönlü olduğu anlaşılmıştır: Teoride, bu fonksiyonlara ilaveten 14. Bölüm'de Grottendieck'in sözlüğü ile bağlantılı olarak değindiğimiz "demetlere" benzeyen, hemen göze çarpmayan daha farklı cisimler de vardır. Bu cisimler, "D-zar" (D-brane) ya da kısaca "zar" başlığı altında incelenir.

Zarların ortaya çıkışı süpersicim teorisi ile olmuştur ve "membran" kelimesinin kısaltmasıdır. Açık sicimlerin M hedef manifoldu üzerindeki hareketlerini değerlendirirken, doğal olarak ortaya çıkar. Bir açık sicimin iki ucunun konumlarını tanımlamanın en kolay yolu, uç noktalardan birinin M'nin belli bir altkümesine (B_1), diğerinin de başka bir alt kümeye (B_2) dahil olması koşulunu koymaktır. Bu durum aşağıdaki şekilde gösterilmiştir: İnce eğri, uç noktalarından biri B_1 ve diğeri B_2 üzerinde bulunan açık sicimi temsil ediyor.

Bu sayede, B_1 ve B_2 altkümeleri (ya da daha doğru bir ifadeyle alt manifoldları), süpersicim teorisine ve ilgili sigma modeline dahil olurlar. Bu altkümeler, bu teorilerde meydana gelen genel zarların prototipleridir.[11]

İki sigma modeli arasındaki ayna simetrisi, bu sigma modellerindeki zarlar arasında bir ilişkiye yol açar. Bu ilişkinin varlığı ilk olarak 1990'ların ortalarında matematikçi Maxim Kontsevich

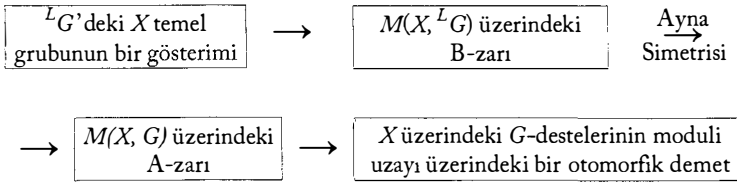
tarafından, "homolojik ayna simetrisi" adı altında ortaya kondu ve özellikle son on yıldır fizikiçiler ve matematikçiler tarafından yoğun olarak incelenmektedir.



Witten'ın Princeton'da yaptığı konuşmanın ana fikri, Langlands bağıntısının denginin bu homolojik ayna simetrisi olması gerektiği yönündeydi.

Bu noktada, sigma modellerinin "A-modeli" ve "B-modeli" olmak üzere iki çeşidinin bulunduğunu belirtmemiz gerekiyor. Ele aldığımız iki sigma modeli aslında birbirlerinden farklıdır: Eğer A-modeli hedef manifoldu Hitchin moduli uzayı olan $M(X, G)$ ise hedef manifoldu $M(X, {}^LG)$ olan da B-modelidir. Buna bağlı olarak, iki teorideki zarlar da sırasıyla "A-zarları" ve "B-zarları" adını alırlar. Ayna simetrisinde, $M(X, G)$'deki her A-zarı için $M(X, {}^LG)$ üzerinde bir B-zarı ve bunun tersi olmalıdır.[12]

Geometrik Langlands bağıntısını kurmak için, ${}^LG$'deki X temel grubunun her bir gösterimini bir otomorfik demet ile ilişkilendirmemiz gerekir. Witten'ın, ayna simetrisini kullanarak bunun oluşturulabileceğini nasıl ortaya koyduğu aşağıdaki şemada kabaca tarif edilmiştir.



Geride açıklama gerektiren birçok nokta bırakmış olsa da Witten'ın konuşması çığır açıcıydı: Elektromanyetik dualite ve Langlands Programı arasında bir bağlantı kurmanın açık bir yolunu göstermişti. Öte yandan bu konuşma, modern matematik dünyasına matematikçilerin üzerinde düşünmedikleri (geometrik Langlands ile bağlantı kurmadan) birçok yeni fikirler getirdi: zar kategorileri, Hitchin moduli uzaylarının Langlands Programı'nda oynadığı özel rol ve A-zarları ile otomorfik demetler arasındaki bağlantı. Bu bağlantı öte yandan, fizikçilerin de kuantum fiziğine dair bilgilerini geliştirmek için matematiksel fikir ve içgörüleri kullanmalarını sağladı.

Sonraki iki yıl boyunca Witten, Caltech'ten Rus asıllı fizikçi Anton Kapustin ile birlikte, önerisinin ayrıntıları üzerinde çalıştı. Bu konudaki makaleleri[13] (230 sayfa uzunluğundaydı) Nisan 2006'da gün yüzüne çıktı ve hem fizik hem de matematik camiasında büyük yankı uyandırdı. Söz konusu makaleden alınan aşağıdaki giriş paragrafı, bu kitapta ele aldığımız kavramların büyük bir kısmını tanımlıyor:

> Sayı cisimleri için Langlands Programı, sayı teorisindeki birçok klasik ve çağdaş bulguyu birleştiren ve oldukça geniş bir araştırma alanıdır. Programın aynı zamanda birçok ünlü çalışmanın da konusu olan sonlu cisim üzerindeki eğriler için bir benzeri mevcuttur. Buna ek olarak, Langlands Programı'nın eğriler için büyük ölçüde geliştirilen bir de geometrik versiyonu bulunuyor, bu versiyon hem p özelliğine sahip bir cisim üzerindeki eğrileri hem de sıradan karmaşık Riemann yüzeylerini kapsıyor... Bu makalede,

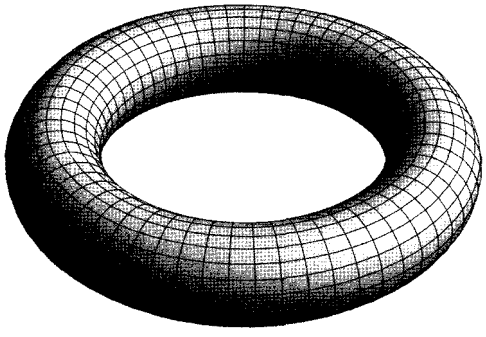
> karmaşık Riemann yüzeyleri için geometrik Langlands Programı üzerinde duruyoruz. Amacımız, bu programın kuantum alan teorisinin bir bölümü olarak nasıl anlaşılabileceğini göstermektir. Langlands Programı'na dair bilgi sahibi olunmadığı kabul edilmiştir; buna karşılık, süpersimetrik ayar teorileri, elektrik-manyetik dualite, sigma modelleri, ayna simetrisi, zarlar ve topolojik alan teorisine dair bilgi sahibi olunduğu varsayılmıştır. Makalenin konusu, bilindik bu fiziksel bileşenler doğru probleme uygulandığında, geometrik Langlands Programı'nın kendiliğinden ortaya çıktığını göstermektir.

Kapustin ve Witten, giriş bölümünün ilerleyen kısımlarında, araştırmalarının başlangıç noktasının İleri Araştırmalar Enstitüsü'ndeki toplantımız (bilhassa da eski öğrencim David Ben-Zvi'nin yaptığı konuşma) olduğunu kabul ediyorlardı.

Kapustin ve Witten, makalenin asıl kısmında, Witten'ın Princeton buluşmasında formüle ettiği fikirleri geliştiriyordu. Özellikle de bu tabloda karşımıza çıkan A-zarları ile B-zarlarının yapısını, aralarındaki ayna simetrisini ve A-zarları ile otomorfik demetler arasındaki bağlantıyı açıklıyordu.

Ulaşmış oldukları sonuçları açıklamaya ayna simetrisinin basit bir örneği ile başlayalım. Kapustin ve Witten'ın çalışmasındaki ayna simetrisi, Hitchin moduli uzayları ve ilgili sigma modelleri arasındadır. Fakat şimdi bu moduli uzaylardan birinin yerine simidin iki boyutlu bir dış yüzeyini koyalım.

Bu tür bir simidin dış yüzeyi, iki çemberin çarpımı olarak görülebilir. Gerçekten de resimdeki kafes yapısı, simidin dış yüzeyinin boncuktan yapılmış kolye şeklinde olduğunu açıkça göstermektedir.

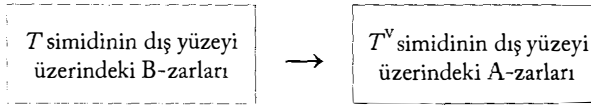


Burada boncukların rolünü kafesteki dikey çemberler, boncukların dizildiği zincirin rolünü simidin dış yüzeyinin ortasından gittiğini düşünebileceğimiz bir yatay çember üstlenir. Bir matematikçi bu kolyenin "lif"leri boncuk ve "taban"ı da zincir olan bir "lifleme" (fibration) olduğunu söyleyebilir. Aynı benzetmeden hareketle, simidin dış yüzeyi, lifleri gibi tabanı da çember olan bir liflemedir.

Taban çemberin (zincir) yarıçapına R_1 ve lif çemberlerin (boncuk) yarıçapına da R_2 diyelim. Bu durumda ayna dual manifoldun da simidin dış yüzeyi olacağı anlaşılır. Ancak yarıçapları $1/R_1$ ve R_2 olan çemberlerin çarpımı olacaktır. Yarıçapın tersinin alınmış olması, elektromanyetik dualitede elektrik yükünün tersinin alınmasına benzer.

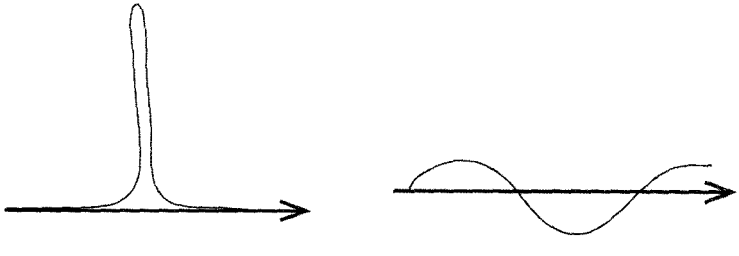
Dolayısıyla, geldiğimiz noktada iki adet ayna dual simidimiz bulunuyor —yarıçapları R_1 ve R_2 olana T; yarıçapları $1/R_1$ ve R_2 olana da $T^{\vee}$ adını verelim. Eğer T'deki taban çember büyükse (yani R_1 daha büyükse), $T^{\vee}$'deki taban çemberin küçük olacağına ($1/R_1$'in küçülmesine bağlı olarak) ve bunun tersinin de doğru olacağına dikkat ediniz. "Büyük" ve "küçük" arasındaki bu tür geçiş, kuantum fiziğindeki tüm dualitelerde tipik olarak karşımıza çıkar.

Şimdi de T üzerindeki B-zarları ile $T^{\vee}$ üzerindeki A-zarları inceleyelim. Bunlar ayna simetrisi altında eşleşirler ve bu ilişki tam olarak anlaşılmıştır (bazen "T-dualitesi" adıyla anılır; buradaki T, simiti (torus) ifade eder).[14]



T simidinin dış yüzeyi üzerindeki B-zarlarının tipik bir örneği, sıfır-zarı adıyla anılır ve T'nin herhangi bir p noktasında yoğunlaşmıştır. Bunun aksine, $T^\vee$ üzerindeki dual A-zarlarının ise $T^\vee$ simidinin dış yüzeyi boyunca "yayıldığı" anlaşılmıştır. Burada "yayılma" ile ne kastettiğimizi açıklamamız gerekiyor. Bizi konudan uzaklaştıracak çok fazla ayrıntıya girmeden şunu söyleyebiliriz: $T^\vee$ üzerindeki bu A-zarları, $T^\vee$ simidinin dış yüzeyinin ilave bir yapı (çember grubundaki temel grubunun bir gösterimi) ile donatılmış hâlidir (15. Bölüm'de ele aldıklarımızın benzeri). Bu gösterim, T üzerindeki az önce bahsi geçen orijinal p noktasının konumu ile belirlenmektedir; öyle ki aslında T üzerindeki sıfır-zarı ile $T^\vee$ üzerine "yayılmış" A-zarları arasında bire bir eşleme vardır.

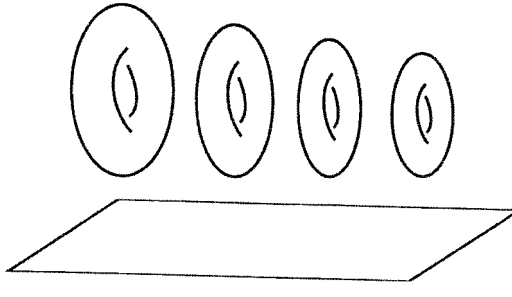
Bu olgu, sinyal işlemede yaygın biçimde kullanılan Fourier dönüşümü altında meydana gelen duruma benzer. Zaman içerisinde belli bir anda yoğunlaşan bir sinyale Fourier dönüşümü uygularsak dalgaya benzeyen bir sinyal elde ederiz. Bu sinyal, aşağıdaki resimde gösterildiği üzere, zamanı temsil eden doğru üzerinde "yayılmıştır".



Fourier dönüşümü, başka birçok türden sinyale de uygulanabilir ve ilk sinyali tekrar elde etmemizi sağlayan bir ters dönüşüm mevcuttur. Karmaşık sinyaller genellikle basit olanlara dönüştürülür ve Fourier dönüşümünü uygulamalarda faydalı kılan da budur. Benzer şekilde, ayna simetrisi altında, bir simidin dış yüzeyi üzerindeki

karmaşık zarlar da diğerinin üzerindeki daha basit zarlara karşılık gelmektedir ve bunun tersi de doğrudur.

Simidin dış yüzeyine özgü bu ayna simetrisinin iki Hitchin moduli uzayının üzerinde bulunan zarlar arasındaki ayna simetrisini tanımlamak için kullanılabileceği görülmüştür. Bu noktada, söz konusu moduli uzayların bizzat Hitchin tarafından tanımlanan önemli bir özelliğini kullanmamız gerekir. Şöyle ki Hitchin moduli uzayı bir liflemedir. Liflemenin tabanı bir vektör uzayı olup, lifleri simidin dış yüzeyidir. Bu da demek oluyor ki tüm uzay, her biri tabandaki bir noktaya karşılık gelen simidin dış yüzeylerinin bir topluluğudur. En basit durumda, hem taban hem de simidin dış yüzeyinin lifleri iki boyutludur ve lifleme aşağıdaki gibi bir görünüm arz eder (tabanın farklı noktalarındaki liflerin boyutlarının farklı olabileceğine dikkat edin):



Hitchin liflemesini halka şeklinde bir kutu çörek olarak düşünebiliriz; bir farkla ki çörekler sadece karton kutunun tabanındaki bir nokta dizisine değil, tabandaki *tüm* noktalara iliştirilmiştir. Dolayısıyla sonsuz sayıda çöreğimiz vardır —tam Homer Simpson'a göre!

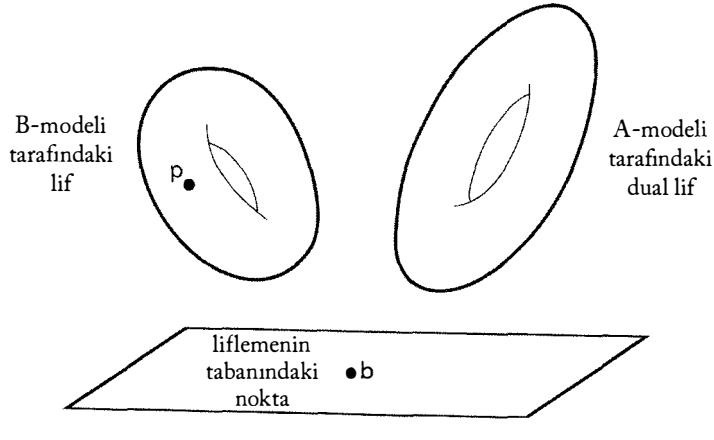
Langlands dual grubu ile ilişkili ayna dual Hitchin moduli uzayının da aynı taban üzerindeki bir çörek/simit liflemesi olduğu tespit edilmiştir. ("Çörekler. Yapamayacakları bir şey var mı ki?") Bu şu anlama gelir: Bu tabandaki her bir noktanın üzerinde iki adet simidin dış yüzeyi lifimiz vardır ve bunların bir tanesi A-modeli tarafındaki Hitchin moduli uzayında, diğeri B-modeli tarafında-

ki Hitchin moduli uzayındadır. Dahası bu iki simidin dış yüzeyi, yukarıda anlatılan manada (eğer birinin yarıçapları R_1 ve R_2 ise diğerinin yarıçapları $1/R_1$ ve R_2 olur), birbirlerinin ayna dualidir.

Bu gözlem, simidin dış yüzeyi şeklindeki dual lifler arasındaki ayna simetrisini kullanarak iki dual Hitchin moduli uzayı arasındaki lif açısından ayna simetrisi üzerine çalışma fırsatı verir.

Örneğin *p*, $M(X, {}^LG)$ Hitchin moduli uzayının üzerindeki bir nokta olsun. Bu noktada yoğunlaşan sıfır-zarını ele alalım. Bu durumda, $M(X, G)$ üzerindeki ayna dual A-zarı ne olur?

p noktası, tabanda yer alan bir *b* noktası üzerindeki $M(X, {}^LG)$'nin lifi olan bir simidin dış yüzeyine aittir (aşağıdaki resimde sol tarafta, B-modelinin yanında yer alan simidin dış yüzeyi). Aynı *b* noktası üzerinde $M(X, G)$'nin lifi olan dual simidin dış yüzeyini ele alalım (resimde sağ tarafta, A-modelinin yanında yer alan simidin dış yüzeyi). Aramakta olduğumuz $M(X, G)$ üzerindeki dual A-zarı, bu dual simidin dış yüzeyi üzerinde "yayılan" A-zarı olacaktır. Bu zar, iki simidin dış yüzeyi arasındaki ayna simetrisi altında elde ettiğimiz ile dual zarın aynısı olacaktır.

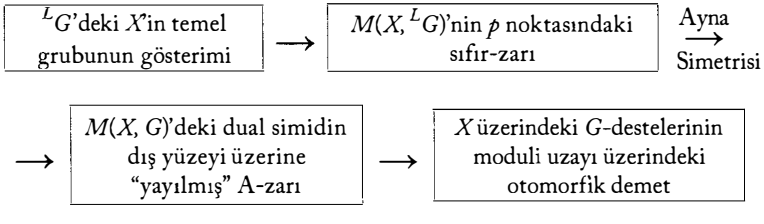


Ayna simetrisinin bu türden tanımı —simidin dış yüzeyi şeklindeki dual liflemeyi kullanan— daha önce Andrew Strominger

Shing-Tung Yau ve Eric Zaslow tarafından daha genel bir durumda önerilmişti. Söz konusu önerme, günümüzde SYZ varsayımı ya da SYZ mekanizması olaran anılmaktadır.[15] Bu güçlü bir fikir: Dual simidin dış yüzeylerinin ayna simetrisi oldukça iyi anlaşılabilmişken, genel manifoldlar için (Hitchin moduli uzayları gibi) ayna simetrisi hâlâ oldukça gizemli görünmektedir. Dolayısıyla bunu simidin dış yüzeyinin durumuna indirgeyerek epey yol kat edebiliriz. Tabii bunu uygulayabilmek için iki ayna dual manifoldu aynı taban üzerindeki simit şeklindeki dual liflemeler olarak göstermemiz gerekir (bu liflemeler de belli şartları sağlamak zorundadır). Neyse ki Hitchin moduli uzaylarında bu tür liflemelere sahibiz ve bu sayede SYZ mekanizmasını işletebiliyoruz. (Genellikle simidin dış yüzeyindeki liflerin boyutu ikiden büyüktür fakat ortaya çıkan manzara benzer niteliktedir.[16])

Şimdi bu ayna simetrisini kullanarak Langlands bağıntısını oluşturacağız. İlk olarak, $M(X, {}^{L}G)$ Hitchin moduli uzayının noktalarının ${}^{L}G$'deki X Riemann yüzeyinin temel grubunun gösterimleri ile tamamen aynı olduğu anlaşılmıştır (bu bölümün 1. sonnotuna bakınız). Bu noktada yoğunlaşan sıfır-zarını alalım. SYZ mekanizmasına göre, dual A-zarı, dual simidin dış yüzeyi (tabandaki aynı nokta üzerinde bulunan dual Hitchin moduli uzayında bulunan lif) üzerine "yayılacaktır."

Kapustin ve Witten, bu A-zarlarını ayrıntılı olarak tanımlamakla kalmayıp, bunları geometrik Langlands bağıntısının otomorfik demetlerine nasıl dönüştüreceğimizi de açıkladılar. Bu durumda, Langlands bağıntısına aşağıdaki akış şemasını takip ederek ulaşılabilir:



Bu yapının bir temel bileşeni de, ortaya çıkan ara cisimlerdir: A-zarları. Kapustin ve Witten, Langlands bağıntısının iki adımda inşa edilebileceğini iddia ettiler: İlk olarak ayna simetrisi yardımıyla A-zarını oluşturdular; ardından da bu A-zarından bir otomorfik demet meydana getirdiler. Şu ana kadar sadece ilk adım olan ayna simetrisini ele aldık. Fakat ikinci aşama da oldukça ilginçtir. Aslına bakarsanız A-zarları ile otomorfik demetler arasındaki bağlantı, Kapustin ve Witten'ın çığır açan bir içgörüsüdür; onların bu çalışmalarından önce, bu tür bir bağlantının var olduğu bilinmiyordu. Bununla birlikte, Kapustin ve Witten, çok daha genel bir durumda da benzer bir bağlantının bulunduğunu iddia ettiler. Bu dikkat çekici fikir, matematik alanında birçok araştırmayı tetiklemiştir.

Bu anlattıklarım, babamın ifadesiyle oldukça ağır: Hitchin moduli uzaylarımız, ayna simetrimiz, A-zarlarımız, B-zarlarımız, otomorfik demetlerimiz var. Tüm bunları takip ederken bile insanın başı ağrıyabilir. İnanın bana uzmanlar arasında dahi bu yapının tüm bileşenlerini basit ayrıntılarına kadar bilen çok az insan vardır. Sizden bunların hepsini öğrenmenizi beklemiyorum. Bunun yerine, bu cisimler arasındaki mantıksal bağlantıları belirtmek ve bunlar üzerine çalışan bilim insanlarının yaratım sürecini göstermek istiyorum: Onları yönlendiren nedir; birbirlerinden nasıl öğreniyorlar; edindikleri bilgi birikimi ile kritik soruları kavrayışımızı nasıl ileriye taşıyorlar?

Bununla birlikte, yükümüzü hafifletmek adına, Weil'in Reşid Taşı'nın sütunlarını incelerken ele aldığımız cisimler arasındaki benzerlikleri ve kuantum fiziği ile alakalı ilave sütunu gösteren bir şemaya yer vermek istiyorum. Bu, 223. sayfadaki şemanın genişletilmiş hâlidir. (Weil'in Reşid Taşı'nın sol ve orta sütununda bulunan cisimler ciddi derecede benzerlik gösterdiğinden bu iki sütunu birleştirdim.)

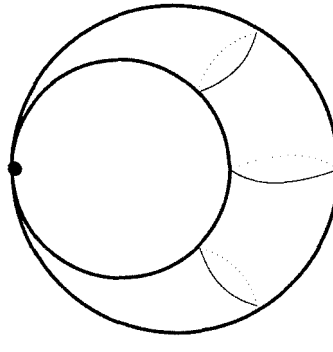
Sayı Teorisi ve Eğriler/ sonlu cisimler	*X Riemann yüzeyi*	*Kuantum Fiziği*
Langlands bağıntısı	Geometrik Langlands bağıntısı	Elektromanyetik dual ayna simetrisi
Galois grubu	X'in temel grubu	X'in temel grubu
Galois grubunun ${}^{L}G$'deki gösterimi	Temel grubun ${}^{L}G$'deki gösterimi	$M({}^{L}G,X)$ üzerindeki sıfır-zarı
Otomorfik fonksiyon	Otomorfik demet	$M(G,X)$ üzerindeki A-zarı

Babam bu şemaya baktı ve şu soruyu sordu: Kapustin ve Witten, Langlands Programı'nı nasıl geliştirdiler? Bu, hiç kuşkusuz önemli bir soru. Öncelikle, Langlands Programı'nı ayna simetrisine ve elektromanyetik dualiteye bağlamak, kuantum fiziğinin bu alanlarının güçlü donanımını kullanarak Langlands Programı'nda yeni ilerlemeler kaydetmemizi sağlıyor. Buna karşılık, Langlands Programı'nın fiziğe nakledilen fikirleri de fizikçileri elektromanyetik dualiteye dair daha önce hiç sormadıkları soruları sormaya teşvik etti. Bu daha şimdiden bazı büyüleyici keşiflere yol açmıştır. İkinci olarak, A-zarlarının dilinin Langlands Programı'na da başarılı bir biçimde uyarlanabileceği anlaşılmıştır. Bu A-zarlarının çoğu, karmaşıklığı ile kötü bir üne sahip olan otomorfik demetlerden daha basit bir yapıya sahiptir. Dolayısıyla, A-zarlarının dilini kullanarak Langlands Programı'nın gizemlerinden bazıları aydınlatılabilir.

Bu yeni dilin nasıl uygulanabileceğine dair somut bir örnek göstermek istiyorum. Bu yüzden size daha sonra Witten ile yaptığımız ve 2007 yılında tamamlanan çalışmamızdan[18] bahsedeyim. Ne yaptığımızı açıklamak için, şu ana kadar göz ardı ettiğim bir problemi anlatmam gerekiyor. Yukarıdaki tartışmada, iki Hitchin moduli uzayında karşımıza çıkan liflerin alışık olduğumuz türden düzgün birer simidin dış yüzeyi şeklinde (yukarıdaki resimlerde gösterildiği üzere kusursuz şekle sahip çörekler de diyebiliriz) ol-

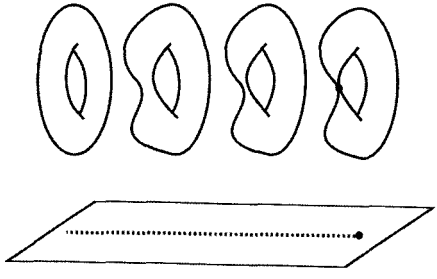
duğunu varsaydım. Aslında bu, sadece liflerin çoğunluğu için geçerlidir. Farklı görünümlü bazı özel lifler de vardır: Bunlar düzgün simidin dış yüzeylerinin bozulmuş hâlleridir. Eğer bozulma yoksa SYZ mekanizması bize iki Hitchin moduli uzayının zarları arasındaki ayna simetrisinin tam bir tanımını verir. Fakat bozuk simidin dış yüzeylerinin mevcut olması, bu ayna simetrisini ciddi biçimde karmaşıklaştırır. Aslında ayna simetrisinin en ilginç ve karmaşık kısmı, bu bozuk simidin dış yüzeyleri üzerinde "yaşayan" zarların başına gelenlerdir.

Kapustin ve Witten makalelerinde ayna simetrisini sadece düzgün simidin dış yüzeyleri ile kısıtlı tuttular. Bu yüzden bozuk simidin dış yüzeyi konusu açıkta kalmıştı. Witten ile yazdığımız makalede, aşağıdaki resimde gösterilen bir tarafı sıkıştırılmış simit örneğinde olduğu gibi, "orbifold tekillikler" (orbifold singularities) adı verilen, en basit şekilde bozulmaya uğramış simidin dış yüzeyi örneğinde ne olduğunu anlattık.



Aslına bakarsanız bu resim, X Riemann yüzeyinin kendisinin bir simidin dış yüzeyi ve ${}^{L}G$ grubunun da $SO(3)$ olduğu durumda karşımıza çıkan bozuk lifin şeklini göstermektedir (resim, doğrudan Witten ile yaptığımız çalışmadan alınmıştır). Bu durumda, Hitchin liflemesinin tabanı bir düzlemdir. Bu düzlem üzerinde, üç özel nokta hariç tüm noktalar için lifler, sıradan düzgün simidin dış

yüzeyleridir. Dolayısıyla bu üç nokta dışında, Hitchin liflemesi bir düzgün simidin dış yüzeyi şeklindeki/çörek ailesinden ibarettir. Ama bu üç özel noktanın yakınlarında tabanda verilen bir yol üstündeki noktaların üzerinde yer alan lifler takip ettiğimiz simitsel lifin/çöreğin "boyun" kısımları aşağıdaki resimde gösterildiği gibi çöker.



Sanki, Homer Simpson içinde sonsuz sayıda çörek olan bir kutu bulunca o kadar heyecanlanmış ki yanlışlıkla üzerine basıp birkaçını ezmiş gibidir. (Homer için üzülmenize gerek yok; hâlâ sonsuz sayıda, şekli hiç bozulmamış çörek kalmış olmalı.)

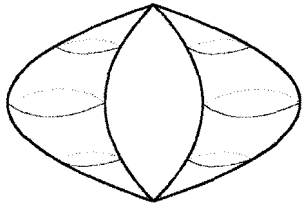
Tabandaki işaretli noktaya (tabandaki üç özel noktadan biri) yaklaştıkça, lifteki simidin dış yüzeyinin boynu, işaretli noktada tamamen çökünceye kadar giderek incelir. Yukarıdaki resimde, işaretli noktadaki lif farklı bir açıyla gösterilmiştir. Bu artık bir simidin dış yüzeyi değildir; adını "bozuk" simidin dış yüzeyi koyabiliriz.

Cevabını aradığımız soru, Hitchin moduli uzayı üzerindeki sıfır-zarı, bozuk simidin dış yüzeyi yukarıdaki resimde işaretli olana benzeyen ve boyun kısmının çöktüğü özel noktasına yaklaştığında ne olacağıdır. Matematikçiler buna "orbifold tekillik" adını veriyor.

Bu noktanın ilave bir simetri grubu olduğu anlaşılmıştır. Yukarıda gösterilen örnekte, bu ilave simetri grubu kelebeğin simetri grubunun aynısıdır. Diğer bir deyişle, özdeşlik elemanın yanı sıra kelebeğin kanat çırpışına karşılık gelen bir eleman daha içerir. Bu, söz konusu noktada, bir değil iki farklı sıfır-zarının yoğunlaşmış olduğu anlamına gelir. Bu durumda ise şu soruyla karşı karşıya kalıyoruz:

Ayna dual Hitchin moduli uzayındaki ilgili iki A-zarı ne olacak? (Burada G'nin $SO(3)$'ün Langlands dual grubu olan SU(2) grubu olduğuna dikkat ediniz.)

Witten ile yazdığımız makalede açıkladığımız üzere, Hitchin liflemesinin tabanındaki üç özel noktanın her birinde, ayna dual tarafındaki bozuk simidin dış yüzeyi şuna benzeyecektir (resim makalemizden alınmıştır):



Hitchin liflemesinde bir önceki resme benzer bir şekil ortaya çıkmıştır; fakat bu sefer tabandaki özel noktalardan birine yaklaştıkça simidin lif üzerindeki boyun kısmı iki yerde gittikçe incelmekte ve tabandaki özel noktaya ulaşıldığında her ikisinde de boyun çökmektedir.

Söz konusu bozuk lif bir öncekinden oldukça farklıdır çünkü bu sefer simidin dış yüzeyi bir değil iki noktadan çökmektedir. Dolayısıyla bu bozuk simidin dış yüzeyinin iki parçası bulunur. Matematikçiler bunlara bileşenler (components) adını verir. Geldiğimiz bu noktada artık sorumuzu cevaplayabiliriz: Aradığımız iki A-zarı (birinci bozuk simidin dış yüzeyi tekil noktasında yoğunlaşan iki sıfır-zarın ayna duali), dual bozuk simidin dış yüzeyi iki bileşeninin her biri üzerine "yayılan" A-zarlarıdır.

Bu, genelde olanın bir prototipidir. İki Hitchin moduli uzayına aynı taban üzerindeki liflemeler olarak baktığımızda, her iki tarafta da bozuk lifler olacaktır. Fakat bozulma mekanizmaları farklıdır: Eğer B-model tarafında içsel simetri grubuna sahip (yukarıdaki örnekteki kelebek grubu gibi) bir orbifold tekillik varsa A-model tarafındaki lif, birkaç bileşen (yukarıdaki resimdeki iki bileşen gibi)

içerecektir. Bu bileşenlerin, B-model tarafında simetri grubundaki bileşen sayısı kadar olduğu tespit edilmiştir. Bu ise tekil noktalarda yoğunlaşan sıfır-zarların bu farklı bileşenler üzerinde "yayılan" A-zarları ile tam olarak eşleştiğini açık bir biçimde göstermektedir.

Witten ile yazdığımız makalede bu olguyu ayrıntılı olarak analiz ettik. Gayet ilginç bir biçimde, bu bizi sadece Riemann yüzeylerine dair geometrik Langlands Programı için değil, sonlu cisimler üzerindeki eğriler hakkındaki Weil'in Reşid Taşı'nın orta sütunu için de yeni içgörülere götürdü. Bu durum, bir alandaki (kuantum fiziği) fikir ve içgörülerin, Langlands Programı'nın köklerine giden yol boyunca nasıl geriye doğru yayıldığını gösteren güzel bir örnektir.

Bu bağlantıların gücü işte burada yatıyor. Artık Weil'in Reşid Taşı'nda üç değil, dört sütunumuz var: Dördüncüsü kuantum fiziği için. Bu dördüncü sütunda yeni bir şey keşfettiğimizde, diğer üç sütunda benzer sonuçların ne olması gerektiğine bakarız ve bu da yeni fikirlerle içgörülerin kaynağı olabilir.

Witten ile bu proje üzerinde çalışmaya 2007 yılı Nisan ayında Princeton'daki Enstitü'nün konuğu olduğum sırada başladık ve makaleyi 31 Ekim Cadılar Bayramı'nda bitirdik. (Tarihten eminim çünkü projeyi internet üzerinden yolladıktan sonra, Cadılar Bayramı'nı kutlamak için verilen bir partiye gittim.) Bu yedi ay boyunca Enstitü'ye, her biri yaklaşık bir haftalığına olmak üzere, üç defa gittim. Her gün, Witten'ın konforlu odasında çalıştık. Bu sürelerin haricinde farklı yerlerdeydik. Ben o günlerde zamanımı Berkeley ve Paris arasında bölüştürüyordum ve Rio de Janeiro'daki bir matematik enstitüsünde de birkaç hafta geçirdim. Ama nerede bulunduğumun bir önemi yoktu. Çalışan bir internet bağlantısına sahip olduğum müddetçe etkili bir şekilde ortak çalışma yapabiliyorduk. En yoğun çalıştığımız dönemlerde, günde ondan fazla e-posta alışverişi yapıyor, sorular üzerine düşünüyor, makalenin taslaklarını paylaşıyorduk, vb. İsimlerimiz aynı olduğundan, e-postalarımız

arasında bir tür ayna simetrisi vardı: Hepsi de "Sevgili Edward" şeklinde başlıyor ve "En iyi dileklerimle, Edward" diye bitiyordu.

Bu ortak çalışma bana Witten'ı yakından gözlemleme olanağı verdi. Hem entelektüel gücünden hem de çalışma ahlakından etkilenmiştim. Üzerinde çalışılacak problemi seçerken çok düşündüğünü sezinledim. Kitapta bu konuya daha önce değinmiştim: Çözülmesi 350 yıl sürebilecek problemler vardır, dolayısıyla verilen bir problemin önemini makul bir sürede başarıya ulaşma olasılığını iyi kestirmek gerekir. Witten'ın bu konuda harika bir sezgisinin ve iyi bir beğenisinin olduğunu düşünüyorum. Problemi bir kez seçtikten sonra, durmadan onun peşinden gider; tıpkı *Tetikçinin Gecesi* (Collateral) filminde Tom Cruise'un canlandırdığı karakter gibi. Titiz, sistemli ve ardında yarım iş bırakmayan bir tarzı vardır. Herkes gibi bazen onun da kafası bulanır ve aklı karışır ama her zaman yolunu bulur. Onunla çalışmak birçok seviyede ilham verici oldu ve bana çok şey kazandırdı.

Langlands Programı ile elektromanyetik dualite arasındaki arayüz üzerine yaptığımız araştırma kısa süre içinde oldukça aktif bir araştırma alanı hâline gelen güncel bir konu oldu. Bu süreçte, Santa Barbara'daki Kavli Teorik Fizik Enstitüsü'nde her yıl organize ettiğimiz konferansların önemli bir rolü oldu. Enstitü'nün müdürü olan Nobel Ödüllü David Gross, önemli destekçimizdi.

2009 yılı Haziran ayında, *Séminaire Bourbaki*'de bu son gelişmeler hakkında bir konuşma yapmam istendi. Bu, dünyanın en uzun soluklu seminerlerinden biri olup matematik camiasında çok saygı duyulan bir etkinliktir. Çok sayıda matematikçi, Paris'teki Henri Poincaré Enstitüsü'nde düzenlenen ve yılda üç kez bir hafta boyunca devam eden toplantılara katılırdı. Bu seminer, İkinci Dünya Savaşı'ndan hemen sonra, kendilerine *Assaciation des collaborateurs de Nicholas Bourbaki* takma adını veren bir grup genç ve azimli matematikçi tarafından düzenlenmeye başlanmıştı. Matematiğin

temellerini, Georg Cantor'un 19. yüzyılın sonlarında öne sürdüğü küme teorisine dayanan yeni bir katı standarda göre baştan yazmak düşüncesi ile yola çıkmışlardı. Sadece kısmi bir başarı elde edebildiler ama matematiğe etkileri büyük oldu. André Weil kurucu üyelerindendi ve zaman içerisinde Alexander Grothendieck de önemli bir rol oynadı.

Séminaire Bourbaki, matematikteki en ilgi çekici gelişmeler hakkında bildiriler sunmak amacıyla düzenlenir. Konuları ve konuşmacıları seçen gizli komite, kurulduğu günden beri üyelerin elli yaşından genç olması kuralına sadık kalmıştır. Anlaşılan o ki, Bourbaki hareketinin kurucuları, sürekli olarak taze kana ihtiyaç duyulacağına inanıyorlardı ve söz konusu kural da bu amaca yeterince hizmet ediyor. Komite konuşmacıları davet eder ve verecekleri dersleri daha önce yazılı olarak hazırladıklarından emin olur. Bu notların kopyaları seminerde dinleyicilere dağıtılır. Bu seminerde konuşma yapmak kıvanç duyulası bir şey olduğundan, konuşmacılar bu talebe riayet ederler.

Seminerimin başlığı "Ayar Teorisi ve Langlands Dualitesi" idi.[19] Konuşmam daha teknik olmasına ve çok sayıda formül ve matematik terminolojisi içermesine rağmen, temelde bu kitapta anlattığım hikâyeyi takip ettim. André Weil'in Reşid Taşı ile başladım ve tıpkı burada yaptığım gibi üç sütununa da kısaca değindim. Weil, Bourbaki ekibinin kurucularından biri olduğu için seminerde onun fikirlerine değinmenin oldukça yerinde olacağını düşündüm. Ardından, Langlands Programı ile elektromanyetik dualiteyi birbirine bağlayan en yeni gelişmeler üzerinde durdum.

Seminer konuşmam iyi karşılandı. Bourbaki'nin önemli üyelerinden biri ve kendi alanında bir efsane olan Jean-Pierre Serre'i ön sırada gördüğümde çok mutlu oldum. Konuşmamdan sonra yanıma geldi. Yerinde birkaç teknik sorudan sonra, bir gözlemde bulundu.

"Kuantum fiziğinin Weil'in Reşid Taşı'nın dördüncü sütunu olması fikrini ilginç buldum" dedi ve devam etti: "Biliyorsun, André

Weil'in fiziğe özel bir merakı yoktu ama eğer bugün burada olsaydı, bence kuantum fiziğinin bu hikâyede önemli bir rol oynadığı konusunda aynı görüşte olurdu."

Bu, bir kişinin duyabileceği en güzel iltifattı.

Son birkaç yıl içerisinde Langlands Programı kapsamında, Weil'in Reşid Taşı'nın tüm sütunlarında birçok ilerleme kaydedildi. Langlands Programı'nın derin gizemini tam olarak kavrayabilmenin henüz çok uzağındayız ama belli olan bir şey var: Langlands Programı, zamanın sınavından geçti. Bizi, matematik ve fiziğin en temel sorularından bazılarına götürmüş olduğunu bugün daha iyi görüyoruz.

Bu fikirler bugün de, yaklaşık elli yıl önce Langlands'ın Weil'e mektubunda yazdığı zamanki kadar can alıcı. Önümüzdeki elli yılda tüm cevapları bulup bulamayacağımızı bilmiyorum ama gelecek elli yılın en az geçmiş elli yıl kadar ilginç olacağından kimsenin şüphesi yok. Belki de bu kitabın okurlarından bazıları, bu büyüleyici projeye katkıda bulunma fırsatını yakalayacaklar.

Bu kitabın odağında Langlands Programı bulunuyordu. Programın modern matematiğe güzel bir panaromik bakış sağladığını zannediyorum: derin kavramsal yapısı, çığır açan içgörüleri, kışkırtıcı varsayımları, derin teoremleri ve farklı alanlar arasındaki beklenmedik bağlantıları. Langlands Programı ayrıca, matematik ve fizik arasındaki iç içe geçmiş bağlantıları ve bu iki konu arasında gerçekleşen ve birbirlerini zenginleştiren diyaloğu da gözler önüne seriyor. Böylelikle Langlands Programı, 2. Bölüm'de gördüğümüz matematiksel teorilerin dört niteliğini de karşılıyor: evrensellik, nesnellik, kalıcılık ve fiziksel dünyaya uygunluk.

Hiç kuşkusuz, matematiğin ilgi çekici başka alanları da var. Bunların bir kısmını uzman olmayanlar için de açıklayan eserler mevcut ama bir kısmı için bu olanak söz konusu değil. Henry David

Thoreau'nun da yazdığı gibi[20], "Matematiğin şiirini duyduk ama henüz çok az bir kısmı okundu." Thoreau bunları 150 yıl önce yazmış olmasına rağmen, ne yazık ki bu sözler bugün de geçerli; yani biz matematikçilerin alanımızın gücünü ve güzelliğini daha geniş bir kesime ulaştırmak için daha iyi işler çıkarmamız gerekiyor. Bununla birlikte, Langlands Programı hikâyesinin okuyucunun matematiğe duyduğu merakı artıracağını ve daha fazlasını öğrenme arzusunu tetikleyeceğini umuyorum.

18. Bölüm:

Aşkın Formülünün Peşinde

2008 yılında, henüz yeni kurulmuş olan ve Fondation Sciences Mathématiques de Paris tarafından ödüle layık görülen *Chaire d'Excellence*'ın misafiri olarak, araştırma yapmak ve ders vermek üzere Paris'e davet edildim.

Paris, dünyada matematiğin önemli merkezlerinden biridir, aynı zamanda sinemanın da başkentidir. Orada bulunduğum dönemde, matematiğe dair bir film yapma hevesine kapıldım. Popüler filmlerde matematikçiler genellikle akıl hastalığının sınırlarına dayanmış, tuhaf ve sosyal açıdan uyumsuz kişiler olarak canlandırılır. Bu durum da, gerçeklikten oldukça uzak bir biçimde matematiğin sıkıcı ve soğuk bir alan olduğu kabulünü güçlendiriyor. Kim kendisi için hiçbir işe yaramayacağı düşünülen bir işle meşgul olduğu böylesi bir hayatı arzu eder ki?

Aralık 2008'de Berkeley'e geri döndüğümde, sanatsal enerjimi yönlendirme isteği içerisindeydim. Komşum Thomas Farber harika bir yazardır ve UC Berkeley'de yaratıcı yazarlık eğitimi veriyor. Ona, bir yazar ve bir matematikçi hakkında beraber senaryo yazmayı düşünüp düşünmeyeceğini sordum. Tom fikri sevdi ve Fransa'nın

güneyindeki bir sahilde çekmeyi önerdi. Filmin şu şekilde başlamasına karar kıldık: Güzel güneşli bir günde, bir yazar ve bir matematikçi, plajdaki kafenin bahçesinde yan yana duran masalarda oturuyorlar. Etraflarındaki güzelliğin tadını çıkarırken birbirlerine bakıyor ve konuşmaya başlıyorlar. Ya sonra?

Yazmaya başladık. Matematikçi ve fizikçilerle yaptığım ortak çalışmalara benzer bir süreç işliyordu. Farklı yönleri de vardı tabii ki: Karakterlerin iç dünyasını ve duygularını tanımlayacak doğru kelimeleri bulmak, hikâyenin özüne inmek gibi. Genel çerçeve alışkın olduğumdan daha akışkan ve sınırsızdı. Ayrıca, çok saygı ve hayranlık duyduğum bir yazarla ters düşüyordum. Neyse ki Tom, kendi isteklerini dayatmadı ve beni dengi gibi görerek yazarlık becerilerimi geliştirmeme müsaade etti. Beni matematik dünyasına yönlendiren akıl hocalarım gibi Tom da yazarlık dünyasına girmeme yardımcı oldu; bunun için ona hep minnettar kalacağım.

Bir sohbet esnasında matematikçi yazara "iki-beden probleminden" bahseder. Bu ifade, bir yıldız ile bir gezegen gibi (bunlara etki eden diğer tüm kuvvetleri yok sayıyoruz) sadece birbirleri ile etkileşen iki nesneye atıfta bulunur. Aralarındaki etkileşim kuvvetini bildiğimizde, geleceğe doğru gidimizlerinin doğru biçimde tahmin etmemizi sağlayacak basit bir matematiksel formül vardır. İki insan bedeninin —iki sevgili ya da iki arkadaş— etkileşiminden ne kadar da farklı. Bunlar için iki-beden probleminin bir çözümü olsa bile, tek değildir.

Senaryomuz, gerçek dünya ile soyutlama dünyası arasındaki çatışma hakkındaydı: Yazar olan Richard bu çatışmayı edebiyat ve sanat dünyasında yaşarken, matematikçi Phillip bilim ve matematik dünyasında yaşıyordu. Her iki adam da kendi soyut düzlemlerinde rahattır ama bu, gerçek dünyadaki davranış biçimlerini nasıl etkilemektedir? Phillip, uzman olduğu matematiksel gerçeklik ile uzman olmadığı insan gerçekliği arasındaki ikiliği kabullenmeye çalışıyor. Hayatın problemlerine matematik problemleri ile aynı biçimde yaklaşmanın her zaman işe yaramadığını öğreniyor.

Tom ile merak ettiğimiz şeylerden biri de şuydu: Bu iki adamın hikâyeleri sayesinde, sanat ve bilim —C.O. Snow'un tabiriyle[1] "iki kültür"— arasındaki farklılıkları ve benzerlikleri de görebilir miydik? Aslında film, metaforik olarak aynı karakterin iki yönü olarak okunabilir; buna isterseniz beynin sol ve sağ yarısı da denebilir. Sürekli bir rekabet içerisinde olmakla beraber, birbirlerini bilgilendiriyorlar da, bir akılda iki kültür birlikte var oluyor.

Senaryomuzda karakterler birbirlerine geçmiş ilişkilerini anlatırlar: bulunan ve kaybedilen aşklar, kalp kırıklıkları. Gün içinde birçok kadınla da tanışırlar; bu sayede, iki adamın uzmanlık alanlarına duydukları tutkuyu kadınları etkilemenin bir yolu olarak kullandıklarını görürüz. Birçok ortak ilgi alanları da vardır ama filmin sonunda beklenmedik bir sonuca evrilecek olan bir çatışma, yavaş yavaş kendini hissettirmektedir.

Senaryonun adını *İki Beden Problemi* (The Two-Body Problem) koyduk ve kitap olarak yayımladık.[2] Senaryonun oyuna dönüştürülmüş hâli, ödüllü yönetmen Barbara Oliver tarafından Berkeley'deki bir tiyatroda sahnelendi. İlk sanatsal girişimimdi ve izleyenlerin gösterdiği tepki ile hem şaşırdım hem de mutlu oldum. Mesela çoğu kişi senaryoda matematikçinin başından geçen her şeyi benim otobiyografim olarak gördü. *İki Beden Problemi*'ni yazarken kuşkusuz birçok gerçek hayat deneyimim katkı sağladı. Örneğin, Paris'te bir Rus kız arkadaşım olmuştu ve senaryoya Phillip'in kız arkadaşı olan Natalia'nın birçok özelliğine o ilham verdi. Senaryodaki bazı sahneler benim, bazıları da Tom'un deneyimlerinden alındı. Ancak bir yazar olarak sizi en çok sürükleyen şey, iddialı karakterler ve hoşlanılacak bir hikâye yaratmaktır. Tom ile beraber ne anlatmak istediğimize karar verdikten sonra, karakterleri belli bir yönde şekillendirmemiz gerekti. O gerçek hayat deneyimleri, o kadar süslendi ve çarpıtıldı ki bizim olmaktan çıktılar. *İki Beden Problemi*'nin kahramanları, sanatın gerekliliklerine uygun biçimde kendi kişiliklerine sahip oldular.

İki Beden Problemi'ni uzun metraj film yapmamıza yardımcı olacak bir yapımcı aramaya başladığımızda, görece küçük ölçekli bir sinema projesi yapmanın daha faydalı olabileceği aklıma geldi. Nisan 2009'da *Chaire d'Excellence*'ıma devam etmek üzere Paris'e geri döndüğümde, arkadaşım matematikçi Pierre Schapira beni genç ve yetenekli bir yönetmen olan Reine Graves ile tanıştırdı. Eski bir model olan Reine, daha önce birkaç özgün ve cesur kısa film yönetmişti (bunlardan biri tanesi, Paris'te düzenlenen Sansürlü Filmler Festivali'nde Pasolini Ödülü'nü kazanmıştı). Pierre'in ayarladığı bir öğle yemeğinde, Riene'e fikrimi kısaca anlattım. Matematik hakkında bir kısa film üzerine beraber çalışmayı önerdim ve fikir Reine'in hoşuna gitti. Reine, aylar sonra sorulduğunda, matematiğin gerçek tutkunun bulunduğu son birkaç alandan biri olduğunu hissettiğini söyledi.[3]

Fikirler ortaya çıkmaya başladığında, insan vücudu üzerine matematik formüllerinden oluşan dövmeler çizerek oluşturmuş olduğum (dijital ortamda) resimleri Reine'e gösterdim. Reine bunları beğendi ve formül dövmesi içeren bir film yapmaya karar verdik.

Dövme, bir sanat biçimi olarak Japonya'da doğmuştur. Daha önce çok kez Japonya'yı ziyaret etmiş (yazlarını Kyoto Üniversite'sinde geçiren Feigin ile çalışmak için) ve Japon kültüründen oldukça etkilenmiştim. Tahmin edileceği üzere, ilham almak için Reine ile Japon sinemasına yöneldik. Bunlardan biri, önemli Japon yazarlarından Yukio Mishima'ya ait olan ve kendisinin bir kısa öyküsünden uyarlanan *Rite of Love and Death* idi. Mishima filmi kendisi yönetmiş ve oynamıştı.

Film siyah-beyaz çekilmişti ve Japon Noh tiyatrosuna özgü sade bir sahnede geçmektedir. Filmde diyalog yoktur fakat arkadan Wagner'in *Tristan ve Isolde* operası çalar. İki karakter vardır: Kraliyet Muhafızları'nın genç bir memuru olan Teğmen Takeyama ve eşi Reiko. Memurun arkadaşları başarısız bir *coup d'état*'ya kalkışır (film burada, Şubat 1936'da gerçekleşen ve Mishima'nın Japon

tarihi üzerinde çarpıcı bir etkisi olduğunu düşündüğü gerçek bir olaya atıfta bulunur). Teğmene darbenin faillerini infaz etme emri verilir ama o, yakın arkadaşları olduğu için gerçekleştiremez. Fakat kralın emrine uymamazlık da edemez. Tek çıkış yolu, *seppuku* (veya *harakiri*) yani intihardır.

Sadece yirmi dokuz dakika uzunluğunda olmasına rağmen, film beni derinden etkiledi. Mishima'nın bakış açısındaki gücü ve duruluğu hissedebiliyordum. Sunumu etkileyici, sade ve hata affetmezdi. Fikirlerini beğenmeyenler olabilir (ve açıkçası aşk ve ölüm arasında kurduğu sıkı bağ benim de pek ilgimi çekmiyor) ama yazarın bu kadar güçlü ve ilkeli oluşuna büyük saygı duyuyorum.

Mishima'nın filmi sinemanın alışılmış teamüllerine ters düşüyordu: Sessizdi, "bölümler" arasında sonraki bölümde ne olacağını açıklayan yazılı metin vardı. Teatraldi: Sahneler harekete çok az yer verilerek dikkatle canlandırılıyordu. Fakat alttan alttan işleyen bir his beni sardı (Mishima'nın kendi ölümü ile filmindeki ölüm arasındaki tuhaf benzerliği henüz bilmiyordum).

Filmin bana bu kadar uymasının sebebi belki de Reine ile matematiği daha önce hiç anlatılmadığı biçimde anlatan, sıradışı bir film yaratmaya çalışıyor oluşumuzdu. Mishima'nın istediğimiz estetik çerçeveyi ve dili yaratmış olduğunu hissediyordum. Reine'i aradım.

"Mishima'nın filmini izledim, büyüleyici buldum. Bunun gibi bir film yapmalıyız."

"Tamam ama ne hakkında olacak?" diye sordu.

Kelimeler birden ağzımdan dökülmeye başladı. Her şey bir kristal kadar berraktı.

"Matematikçinin biri aşkın formülünü bulur ama hemen akabinde formülün diğer tarafını keşfeder: İyilik için olduğu gibi kötülük için de kullanılabilir. Yanlış ellere düşmesini önlemek için formülü gizlemesi gerektiğini fark eder ve formülü âşık olduğu kadının vücuduna dövme olarak işlemeye karar verir."

"Kulağa hoş geliyor. Sence adını ne koyalım?"

"Hımmm. Şuna ne dersin: *Rites of Love and Math* (Aşkın ve Matematiğin Ayinleri)."

Filmin anahatları bu şekilde ortaya çıkmış oldu.

Filmi, bir matematiksel formülün şiir, resim ya da müzik parçası gibi güzel olabileceğini gösteren bir alegori olarak düşünüyorduk. Aklımızdan geçen; beyne değil sezgilere ve içgüdüye hitap etmesiydi. İzleyenlerin önce *anlamalarını* değil *hissetmelerini* sağlamalıydı. Matematiğin insani ruhsal bileşenlerini vurgulamanın, izleyicinin merakını uyandıracağını düşünüyorduk.

Matematik ve bilim genellikle soğuk ve steril gösterilir. Aslında, matematikte yeni bir şeyler yaratma süreci tutkulu bir uğraş, derin bir kişisel deneyimdir; tıpkı sanat ve müzikteki yaratımlar gibi. Aşk ve kendini adamayla birlikte, kişinin bilinmeyenle ve kendisiyle mücadele etmesini gerektirir ve bu da güçlü hislerin ortaya çıkmasına yol açar. Keşfettiğiniz formüller ise gerçekten de teninizin altına işler; tıpkı filmde yapılan dövmeler gibi.

Filmimizde bir matematikçi "aşkın formülünü" keşfeder. Kuşkusuz bu bir metafor: Bizler, her şeyi bilmek adına sürekli olarak bütüncül bir kavrayışa, nihai bir duruluğa ulaşmaya çalışırız. Gerçek dünyada ise kısmi bilgi ve kavrayış ile yetinmek zorundayız. Peki, ya birisi nihai Hakikat'i bulabilseydi; bu, doğru matematiksel bir formül ile açıklanabilseydi? İşte bu, aşkın formülü olurdu.

Henry David Thoreau bunu gayet güzel bir biçimde ifade etmiş:[4]

> Herhangi bir hakikatin en belirgin ve güzel ifadesi, eninde sonunda matematiksel bir form olmak zorundadır. Aritmetiğin olduğu gibi, ahlak felsefesinin kurallarını da mümkün olduğunca basitleştirmeliyiz; öyle ki her ikisi de tek bir formülle ifade edilebilir olsun.

Tek bir formül her şeyi açıklamak için yeterince güçlü olamasa bile, matematiksel formüller hakikatin, insan türünün bildiği en saf, en çok yönlü ve en ekonomik ifadeleridir. Heveslerden ve modadan etkilenmemiş, zamansız ve değerli bilgi birikimini aktarırlar

ve onlarla temasa geçen herkese aynı anlamı verirler. Açıkladıkları hakikatler gerekli hakikatlerdir; gerçekliğin insanlığa zaman ve uzayda rehberlik eden sabit yol göstericileridirler.

Elektromanyetik dalgaların varlığını ispatlayan ve soyadı günümüzde frekansın birimi olarak kullanılan Heinrich Hertz, duyduğu hayranlığı şu şekilde açıklıyordu:[5] "Bu matematiksel formüllerin bağımsız bir varoluşa ve kendi zekâlarına sahip oldukları bizlerden ve hatta onları keşfedenlerden daha akıllı oldukları hissinden kurtulmak mümkün değil."

Hertz bu duygularında yalnız değil. Matematikle uğraşanların çoğu, matematiksel formüllerin ve fikirlerin ayrı bir dünyaya ait olduklarına inanırlar. Robert Langlands matematiğin, genellikle imalarla, matematiğin temel kavramlardan ibaret kalmadan, bizlerden bağımsız olarak var olduğunu ileri süren bir kelimeyle karşımıza çıktığını yazmıştı. Langlands'a göre bu, "güvenmesi zor bir nosyondur ama profesyonel bir matematikçinin onsuz yapması da zordur."[6] Aynı olgu, "[matematikçilerin] icat etmedikleri, alçakgönüllülük ve fedakârlıkla keşfettikleri Düşüncelerin Platonik Dünyası'nda bir yerlerde yükselen büyük Matematik Kalesi'nin imgeleminden"[7] bahseden bir diğer büyük matematikçi, Yuri Manin (Drinfeld'in danışmanı) tarafından da dile getirilmişti.

Bu bakış açısına göre, Galois grupları, Fransız dâhi tarafından *icat edilmeyip, keşfedildiler*. Bu kavram, Galois keşfedene kadar, matamatiğin ideal dünyasının büyülü bahçelerinde bir yerlerde bulunmayı bekliyordu. Galois'nın makaleleri kaybolsa ve Galois'ya keşfi için gerçekten hak ettiği itibar verilmeseydi de aynı gruplar bir başkası tarafından keşfedilirdi.

Bunu, insanın emek verdiği diğer alanlarda yapılan keşiflerle karşılaştıralım: Eğer Steve Jobs Apple'a geri dönmeseydi iPod, iPhone ve iPad'leri hiç bilemeyecektik. Başka teknolojik keşifler yapılabilirdi ama aynı unsurların başkaları tarafından bulunmasını beklemenin bir manası yok. Bunun aksine, matematiksel doğrular kaçınılmazdır.

Matematiksel kavramların ve fikirlerin yaşadığı dünya, matematiksel varlıkların bizim rasyonel etkinliklerimizden bağımsız olduğunu ilk olarak öne süren Yunan filozof Platon'a ithafen, matematiğin Platonik dünyası olarak anılmaktadır.[8] Saygı duyulan matematiksel fizikçilerden Roger Penrose, *The Road to Reality* (Gerçeğin Yolları) isimli kitabında, matematiğin Platonik dünyasına ait matematiksel savlar için şöyle yazmıştır: "Bunlar tam manasıyla nesnel olan doğrulardır. Bir matematiksel savın Platonik varoluşa sahip olduğunu söylemek, sadece onun nesnel anlamda doğru olduğunu söylemektir." Benzer şekilde, matematiksel kavramlar da "Platonik varoluşa sahiptir, çünkü nesnel kavramlardır."[9]

Tıpkı Penrose gibi ben de matematiğin Platonik dünyasının hem fiziksel hem de akli dünyadan ayrı olduğunu düşünüyorum. Örnek olarak Fermat'nın Son Teoremi'ni ele alalım. Penrose kitabında, retorik olarak sorar: "Fermat'nın savının, Fermat onu fiilen ortaya koymadan çok daha önce de, her daim doğru olduğu görüşünü mü benimsiyoruz? Yoksa bu savın doğruluğu, insan matematikçiler topluluğunun öznel standartlarının ne olduğuna bağlı, tamamen kültürel bir durum mudur?"[10] Meşhur *olmayana ergi* (reductio ad absurdum) geleneğine sırtını dayayan Penrose, öznel yoruma sarılmanın bizi hızla beşeri etkinliğin matematiksel bilgi birikiminden bağımsız olduğunu vurgulayan "bariz biçimde absürd" savlara götürdüğünü göstermiştir.

Yaptığı çalışmalarla —özellikle de meşhur eksiklik (incompleteness) teoremi ile— matematiksel mantıkta devrim yaratan Kurt Gödel, bu görüşün en inatçı savunucularındandı. Matematiksel kavramların "ne yaratabileceğimiz ne de değiştirebileceğimiz, sadece ve sadece sezinleyip tanımlayabileceğiniz, kendilerine özgü nesnel bir gerçeklik meydana getirdiklerini"[11] ifade etmiştir. Diğer bir deyişle, "matematik, insan aklının hem eylemlerinden hem de temayüllerinden bağımsız olarak var olan ve insan aklı tarafından sadece algılanabilen (muhtemelen de çok eksik olarak algılanan) duyusal olmayan bir gerçeklik tanımlar."[12]

Matematiğin Platonik dünyası, fiziksel gerçeklikte de bağımsız olarak var olur. Örneğin, 16. Bölüm'de değindiğimiz üzere, ayar teorileri teçhizatı ilk olarak matematikçiler tarafından ve fiziği hesaba katılmadan geliştirilmiştir. Gerçekten de bu modellerin sadece üç tanesinin doğanın bilinen kuvvetlerini (elektromanyetik, zayıf ve güçlü) tanımladığı ortaya çıkmıştır. *Her türlü* Lie grubu için bir ayar teorisi olmasına rağmen, bu modeller üç özel Lie grubuna (sırasıyla çember grubu, $SU(2)$, $SU(3)$) karşılık gelmektedir. Lie grupları ile ilişkilendirilmiş, bu üçünün haricindeki ayar teorileri matematiksel açıdan kusursuz görünmekle beraber, gerçek dünya ile aralarında bilinen bir bağlantı bulunmamaktadır. Dahası, doğada süpersimetri bulunamamış ve muhtemelen de zaten olmamasına rağmen, bu ayar teorilerinin matematiksel olarak analiz edebileceğimiz süpersimetrik genişlemelerinden bahsetmiştik. Benzer modeller, dörtten farklı sayıda boyuta sahip bir uzay-zamanda da matematiksel olarak anlamlıdır. Herhangi bir fiziksel gerçeklik ile doğrudan ilişkisi bulunmayan zengin matematiksel teorilerin başka birçok örneği vardır.

Roger Penrose, *Shadows of the Mind* isimli kitabında üçgenden bahseder: fiziksel dünya, akli dünya ve matematiğin Platonik dünyası.[13] Üçü de birbirinden farklı ama sıkı biçimde iç içe geçmiş hâldedir. Birbirlerine nasıl bağlandıklarını henüz tam olarak anlayabilmiş değiliz ama ortada olan birşey var: Her biri hayatımızı derin bir biçimde etkilemektedir. Bununla beraber, fiziksel ve akli dünyaların önemini herkes anlarken, birçoğumuz matematik dünyasına karşı gayet hoşnut bir biçimde kayıtsız kalırız. Bu saklı gerçekliğin farkına varıp, atıl gücünü kullandığımızda; toplumumuzun Endüstri Devrimi seviyesinde bir atılım yapmasına yol açacağına inanıyorum.

Bana göre, matematik dünyasındaki sınırsız olasılıkların kaynağı, matematiksel bilgi birikiminin nesnelliğidir. Bu nitelik matematiği insanlığın tüm diğer uğraşlarından ayırmaktadır. Bu niteliğin ar-

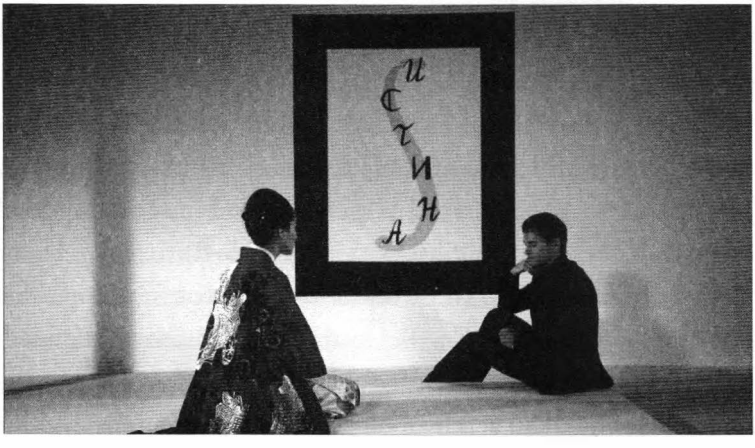
dında yatanların anlaşılmasının fiziksel gerçeklik, bilinç ve bu ikisi arasındaki karşılıklı ilişkiye dair en derin gizemleri aydınlatacağına inanıyorum. Diğer bir deyişle, matematiğin Platonik dünyasına yaklaştıkça, etrafımızdaki dünyayı ve onun içindeki yerimizi anlamak için daha fazla güce sahip olacağız.

Neyse ki hiçbir şey bizi bu Platonik gerçekliğin daha da derinlerine inmekten ve onu hayatlarımıza dahil etmekten alıkoyamaz. Gerçekten üzerinde durulması gereken nokta, matematiğin içsel demokrasisidir: Fiziksel ve akli dünyaların bazı kısımları, farklı insanlarca farklı biçimde algılanabilir veya yorumlanabilir ya da bazılarımız için erişilebilir dahi olmayabilir ancak matematiksel kavramlar ve denklemler aynı biçimde algılanır ve hepimize *eşit* derecede aittir. Matematiksel bilgi üzerinde kimsenin bir tekeli olamaz; kimse bir matematiksel formülün ya da fikrin kendi buluşu olduğunu iddia edemez; kimse bir formülün patentini alamaz! Söz gelimi, Albert Einstein $E = mc^2$ formülünün patentini alamazdı. Bunun sebebi, bir matemetiksel formülün (eğer doğruysa) evrene dair ebedi bir hakikati açıklıyor olmasıdır. Bu yüzden kimse sahiplik iddiasında bulunamaz; matematiksel formüller paylaşmak için bizimdir."[14] Zengin ya da fakir, siyah ya da beyaz, genç ya da yaşlı, kimse bu formülleri bizden alamaz. Bu dünyada hiçbir şey bu kadar engin ve şık ve yine de hepimize açık değildir.

Rites of Love and Math'ın sade dekorunun merkezinde, Mishima'dan esinlenerek seçtiğimiz, duvara asılı büyük bir kaligrafi tablosu yer aldı. Mishima'nın filmindeki kaligrafide, samimiyet anlamına gelen *shisei* kelimesi yazılıydı; zira film, samimiyet ve onur üzerineydi. Bizim filmimiz ise hakikat üzerindeydi, bu yüzden kaligrafi tablosunda "hakikat" yazması gerektiğini düşündük ve Japonca yerine Rusça olmasına karar verdik.

"Hakikat" kelimesinin Rusça'da iki karşılığı bulunur: Daha yaygın olarak bilinen *pravda*, haberler gibi gerçeklere dayalı hakikati

ifade eder (bu yüzden SSCB Komunist Partisi'nin resmi gazetesinin adı olarak seçilmiştir). Diğeri, *istina*, daha derin, felsefi bir hakikati ifade eder. Örneğin bir yuvarlak masanın simetri grubunun çember olduğunu belirten ifade *pravda* iken, Langlands Programı için kullanılabilecek ifade (ispatlanan durumlar için) *istina*'dır. Tahmin edileceği üzere, filmde matematikçinin kendini adadığı hakikat *istina*'dır.



Filmimizde, matematiksel bilgi birikiminin ahlaki yönü üzerinde düşünmek istedik: Çok güçlü bir formülün bir başka yüzü olabilir ve bu kötülük için kullanılabilir. Yirminci yüzyılın başında, atomun yapısını anlamaya çalışan bir grup teorik fizikçiyi düşünün. Saf ve soylu bir bilimsel çaba olduğunu düşündükleri şey, yanlışlıkla onları atomik enerjinin keşfine yöneltti. Bize birçok güzel şeyin yanı sıra ölüm ve yıkım da getirdi. Benzer şekilde, bilgi birikimi arayışımızın bir parçası olarak keşfettiğimiz matematiksel formüller de zararlı çıkabilir. Bilim insanları, fikirlerinin peşinden gitmekte özgür olmalıdır ama keşfettiğimiz formüllerin kötülük uğruna kullanılmasını önlemek için mümkün olan ne varsa yapmanın da bizim sorumluluğumuz olduğuna inanıyorum. Filmimizdeki matematikçinin, formülün kötü ellere düşmesini önlemek için ölüme hazırla-

nıyor olmasının sebebi de budur. Dövme, onun formülü gizlemek ve aynı zamanda da kurtulmasını sağlamak için bulduğu yoldur.

Hiç dövmem olmadığından, nasıl yapıldığını öğrenmem gerekiyordu. Günümüzde dövmeler makine ile yapılıyor ama geçmişte (Japonya'da) bambu çubukları ile işleniyormuş —daha uzun ve acılı bir süreçle. Japonya'da eski tekniği kullanan dövme salonları bulmanın hâlâ mümkün olduğunu duydum. Filmde biz de bu tekniği kullandık.



"Aşkın formülü" rolünü hangi formülün oynaması gerektiği büyük bir sorundu. Yeterince karmaşık (ne de olsa aşkın formülü) ve estetik açıdan da hoşa gitmeliydi. Matematiksel bir formülün biçimi kadar içeriği ile de güzel olabileceğini anlatmak istiyorduk. Ayrıca, ben bunun *bana ait* bir formül olmasını istiyordum.

Aşkın formülü için "oyuncu" ararken şununla karşılaştım:

$$\int_{\mathbb{CP}^1} \omega F(qz, \overline{q}\overline{z}) = \sum_{m,\overline{m}=0}^{\infty} \oint_{|z|<\epsilon^{-1}} \omega_{z\overline{z}}\, z^m \overline{z}^{\overline{m}} dz d\overline{z} \cdot \frac{q^m \overline{q}^{\overline{m}}}{m!\overline{m}!} \partial_z^m \partial_{\overline{z}}^{\overline{m}} F \Big|_{z=0}$$

$$+ q\overline{q} \sum_{m,\overline{m}=0}^{\infty} \frac{q^m \overline{q}^{\overline{m}}}{m!\overline{m}!} \partial_w^m \partial_{\overline{w}}^{\overline{m}} \omega_{w\overline{w}} \Big|_{w=0} \cdot \oint_{|w|<q^{-1}\epsilon^{-1}} F\, w^m \overline{w}^{\overline{m}} dw d\overline{w}.$$

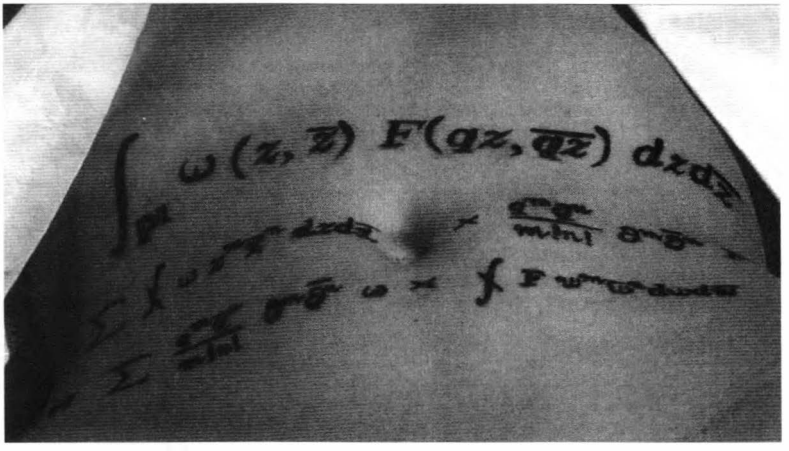
Bu formül, iki yakın arkadaşım Andrey Losev ve Nikita Nekrasov ile 2006 yılında yazdığımız yüz sayfa uzunluğundaki *Instantons Beyond Topological Theory I* makalesindeki 5.7 nolu formüldür.[15]

Bu denklem, onu bir karatahtaya yazıp, anlamını açıklamaya çalıştığım bir film çekecek olsak, muhtemelen çoğu kişinin salondan ayrılmasına sebep olacak kadar ürkütücüydü. Ama onu dövme şeklinde görmek, tamamen farklı bir etkiye yol açtı. Gerçekten de herkesin teninin altına işledi: Herkes ne anlama geldiğini bilmek istiyordu.

Peki bu formül ne anlama geliyor? Makalemiz, "instantonlar" (dikkat çekici özelliklere sahip alan konfigürasyonları) içeren kuantum alan teorilerine dair yeni bir yaklaşım hakkında yazdığımız bir dizinin ilk bölümüydü. Kuantum alan teorileri temel parçacıklar arasındaki etkileşimi doğru bir biçimde açıklıyor olsa da henüz pek anlaşılmayan birçok önemli olgu var. Örneğin, Standart Model'e göre, proton ve nötronların her biri, birbirinden ayrılamayan üç kuarktan oluşur. Bu olgu fizikte "hapsetme" (confinement) adıyla anılır. Henüz düzgün bir teorik açıklaması bulunmuyor ve birçok fizikçi instantonların bu gizemi çözecek anahtarı taşıdıklarına inanıyor. Bununla birlikte, kuantum alan teorilerine yönelik geleneksel yaklaşıma göre, instantonların elde edilmesi çok zordur.

Kuantum alan teorilerine, instantonların güçlü etkilerini daha iyi anlamamıza yardımcı olacağını umduğumuz yeni bir yaklaşım getirdik. Yukarıdaki formül, teorilerimizin birinde korelasyon fonksiyonunu hesaplamamızı sağlayan iki yol arasındaki şaşırtıcı özdeşliği ifade ediyor.[16] Formülü keşfettiğimizde, kısa bir süre sonra aşkın formülü rolüne aday olacağını hiç bilmiyorduk, aklımdan dahi geçmemişti.

Özel efekt sanatçımız Oriane Giraud formülü sevdi ama bir dövme için fazla karmaşık buldu. Formülü sadeleştirdim ve filmimizde şöyle kullandık:



Filmdeki dövme sahnesi, matematiksel araştırma yapmanın taşıdığı tutkuyu canlandırma amacını taşıyordu. Matematikçi dövmeyi yaptığı süre boyunca kendini dünyaya tamamen kapatıyordu. Formül onun için gerçekten de bir ölüm kalım meselesi hâline gelmişti.

Bu sahneyi çekmek oldukça uzun sürdü. Mariko'yu oynayan aktris Kayshonne Insixieng May ve benim için hem psikolojik hem de fiziksel açıdan çok yorucu oldu. Bu sahneyi çekimlerin son gününde gece yarısına doğru bitirdik. Her şeyin üstesinden birlikte geldikten sonra bu, yaklaşık otuz kişilik ekibimiz için duygu dolu bir an oldu.

Filmin galası Nisan 2010'da, Foundation Sciences Mathématiques de Paris sponsorluğunda, Paris'in en iyi salonlarından biri olan Max Linder Panorama sahnesinde gerçekleşti. Başarılı oldu. Hemen akabinde, film hakkında ilk yazılar çıkmaya başladı. *Le Monde*, "baş döndürücü bir kısa film" dediği *Rites of Love and Math*'in "matematiğin alışık olmadığımız romantik bakışını sunduğunu" yazdı.[17] *New Scientist* ise şöyle yazmıştı:[18]

> Filmi seyretmek güzel... Eğer Frenkel'in amacı daha çok insanı matematiğe çekmekse, yaptığı bu güzel iş için kendisini tebrik edebilir. Aslen Frenkel'in kuantum alan teorisi üzerine 2006 yı-

> lında yayımladığı "Instantons beyond topological theory I" başlıklı makalede geçen bir denklemin kısaltılmış hâli olan aşkın formülü, kısa zaman içerisinde muhtemelen başka türlü erişemeyeceği kadar geniş bir izleyici kitlesi tarafından görülecek —hatta belki de anlaşılacak— gibi duruyor.

Ünlü Fransız dergisi *Tangente Sup*'un[19] ifadeleriyle film, "matematiğin sanat ve şiirin mutlak karşıtı olduğunu düşünenlerin ilgisini çekecekti". Yazıya eklenen bir kutucukta, Hervé Lehning şöyle yazmıştı:

> Edward Frenkel'in matematiksel araştırmalarında simetri ve dualite önemli bir yer tutuyor. Bunlar, sayı teorisi ile belirli grupların gösterimleri arasında bir bağ kurmaya çalışan Langlands Programı ile ilişkili kavramlar. Son derece soyut olan bu konunun aslında uygulamaları da var; örneğin kriptografi. Dualite fikri Edward Frenkel için bu kadar önemli ise filmin adının da işaret ettiği gibi, aşk ve matematik arasında bir dualite görüp görmediği sorulabilir. Bu soruya verdiği cevap gayet açık. Ona göre, matematiksel araştırma, adeta bir aşk hikâyesi.

Film o günden bu yana Fransa, İspanya ile California'da; Paris, Kyoto, Madrid, Santa Barbara, Bilbao ve Venedik'te film festivallerinde gösterildi. Gösterimler ve ardından gelen şöhret, bana "iki kültür" arasındaki bazı farkları görme olanağı sundu. İlk başlarda bu bana kültür şoku gibi geldi. Matematik uğraşım sadece çok az sayıda insan tarafından tam olarak anlaşılabilir; bu sayı başlangıçta, tüm dünyada bir düzineyi geçmez. Dahası, her bir matematiksel formül nesnel bir hakikati gösterdiğinden, özü itibarıyla o doğruyu yorumlamanın tek bir yolu vardır. Bu yüzden, yaptığım matematiksel çalışma, onu okuyan herkes tarafından aynı şekilde algılanır. Bunun aksine filmimiz, geniş bir izleyici kitlesine ulaşmayı hedefliyordu: Binlerce kişiye gösterildi ve pek tabii ki herkes kendince yorumladı.

Ben bu deneyimden izleyicinin her zaman sanatsal projenin bir parçası olduğunu öğrendim; neticede her şey izleyicinin gözünde olup bitiyor. Yaratıcının izleyicilerinin algısı üzerinde hiçbir gücü yok. Öte yandan bundan faydalanmak da mümkün, çünkü görüşlerimizi paylaştığımızda hepimiz zenginleşiriz.

Filmimizde, bir sanatçının hissiyatıyla matematik hakkında konuşarak iki kültürün sentezini yaratmayı denedik. Filmin başında Mariko Matematikçi'ye bir aşk mektubu yazıyor.[20] Filmin sonunda Matematikçi'nin formülün dövmesini yapması ise onun cevap verme biçimi: Onun için formül, aşkının bir ifadesi. Bir şiir ile aynı tutku ve duygusal yükü taşıyabilir; bu yüzden, matematik ve şiir arasındaki paralelliği göstermek için bu yolu uygun bulduk. Matematikçi için yaratıcılığının, tutkusunun ve hayal gücünün ürünü olan bu formül, aşkın bir hediyesi. Adeta Mariko'ya bir aşk mektubu yazmak gibi —ölümünden hemen önce denklemleri yazan genç Galois'yı hatırlayın.

Peki ama kadın kim? Kafamızda canlandırdığımız mistik dünyada o, Matematiksel Hakikat'in vücut bulmuş hâli (adının, Japonca'da "hakikat" anlamına gelen Mariko olmasının ve duvara asılı resmin üzerinde *istina* kelimesinin işlenmiş olmasının sebebi de bu). Matematikçi'nin ona duyduğu aşk, uğruna kendini adadığı Matematik ve Hakikat'e duyduğu aşkı temsil ediyor. Ama kadın hayatta kalmalı ve sanki çocuklarıymış gibi Matematikçi'nin formülünü taşımalı. Matematiksel Hakikat ölümsüzdür.

Matematik aşkın dili olabilir mi? Bazı izleyiciler "aşkın formülü" fikrinden huzursuz oldu. Örneğin, filmi izleyen biri bana, "Mantık ve duygular her zaman anlaşamaz. Bu yüzden aşkın gözü kör diyoruz. Bu durumda aşkın formülü nasıl işleyebilir ki?" Gerçekten de, his dünyamız ve duygularımız çoğu kez bize mantıksız görünür (bilişsel bilimciler size bu bariz mantıksızlığın bazı yönlerinin matematik kullanılarak tanımlanabileceğini söyleyecek olsalar da).

Dolayısıyla, aşkı tanımlayacak ve açıklayacak bir formülün var olabileceğine inanmıyorum. Aşk ve matematik arasındaki bir bağlantıdan bahsederken, aşkın matematiğe indirgenebileceğini kastetmiyorum. Daha ziyade, matematiğin çoğumuzun fark ettiğinden çok daha fazlasını sunduğunu söylüyorum. Diğerlerinin yanında, matematik bize birbirimizi ve etrafımızı sarmalayan dünyayı sevmemiz için mantık ve ilave bir kapasite sunar. Bir matematiksel formül aşkı açıklamaz ama aşkın yükünü taşıyabilir.

Şair Norma Farber'in yazdığı üzere,[21]

Beni tembel âşık yapma...
Beni durumdan duruma taşı.

Matematik bizi "durumdan duruma" taşır ve onun derin, büyük ölçüde kullanılmamış ruhani işlevi de burada saklıdır.

Albert Einstein bu konuda şunları yazmış:[22] "Bilimle ciddi olarak ilgilenen herkes, bir ruhun kainatın yasalarında kendini dışa vurduğuna inanır—o, kişinin ruhuna bariz biçimde baskın gelen ve karşısında en sıkı gücümüzün dahi kendini zayıf hissettiği bir ruhtur." Isaac Newton ise bu konudaki hislerini şöyle dile getirmiştir:[23] "Kendimi, hiç keşfedilmemiş koca bir gerçeklik okyanusu önümde uzanırken, kumsalda oynayarak mevcut an içinde oyalanırken, pürüzsüz bir çakıl taşı ya da olağandan daha sevimli bir kabuk bulan ufak bir çocuk gibi görüyorum."

Bir gün hepimizin bu saklı gerçekliğin farkına varacağımızı hayal ediyorum. Belki o zaman farklılıklarımızı bir kenara bırakıp, bizleri birleştiren derin hakikatlere odaklanabiliriz. Böylece hepimiz, birlikte keşfettiğimiz, paylaştığımız ve üzerine titrediğimiz bu büyüleyici güzelliğin ve uyumun şaşkınlığı içinde kumsalda oynayan çocuklar gibi olabiliriz.

Son Söz

Uçağım Boston'daki Logan Havalimanı'na iniyor. Tarih Ocak 2012. Aldığım davet üzerine, Amerikan Matematik Cemiyeti (AMS) 2012 yılı Seminer Dersleri'ni vermek üzere, AMS ve Amerika Matematik Vakfı'nın Yıllık Ortak Buluşması'na gidiyorum. Bu dersler 1896'dan beri her yıl veriliyor. Geçmiş konuşmacıların ve yaptıkları konuşmaların konularını içeren listeye bakmak, geçen yüzyılın matematik tarihinin üzerinden geçmek gibidir: John von Neumann, Shiing-Shen Chern, Michael Atiyah, Raoul Bott, Robert Langlands, Edward Witten ve başka birçok büyük matematikçi. Bu geleneğin bir parçası olmuş olmaktan büyük kıvanç ve onur duyuyorum.

Boston'a geri dönmek, hatıraları gün yüzüne çıkarıyor. Logan'a ilk inişim, Harvard'a geldiğim 1989 Eylül'ündeydi —sanki ünlü filmin ismini uyarlamak üzere gelmiştim: *Rusya'dan Matematikle.* O sıralar yirmi bir yaşındaydım; ne umacağımı, nelerle karşılaşacağımı bilmiyordum. Üç ay sonra, o çalkantılı dönemde hızla büyümüş bir hâlde, Moskova'ya dönmekte olan ve bir daha görüp göremeyeceğimi bilemediğim akıl hocam Boris Feigin'i yolcu etmek üzere Logan'a bir kere daha gitmiştim. Neyse ki, matematik alanında yaptığımız işbirliği ve arkadaşlığımız devam edip daha da pekişti.

Harvard'da beklediğimden çok daha uzun süre kaldım: Bir sonraki yıl Harvard'lılar Cemiyeti bursunu kazanıp doktoramı

almış ve sonrasında da Harvard'da doçent olmuştum. Boston'a ayak basışımdan beş yıl sonra, Logan'da bu sefer bana katılıp Amerika'ya yerleşmek üzere gelen annem, babam ve kız kardeşimin ailesinin gelmesini heyecanla bekliyordum. Onlar, o günden beri Boston civarında yaşıyorlar ama ben, Berkeley'deki University of California geri çeviremeyeceğim bir teklif yapınca 1997 yılında oradan ayrıldım.

Boston'u ailemi görmek için düzenli olarak ziyaret ediyorum. Ortak Matematik Buluşması'nın düzenlendiği Hynes Convention Center ailemin oturduğu yerin birkaç sokak ötesinde olduğu için, ilk kez beni iş başında görme şansları olacak. Bu deneyimi ailemle paylaşabilecek olmak ne güzel bir hediye. "Evine hoş geldin!"

Ortak Buluşma'nın yedi binden fazla kayıtlı katılımcısı var; bu yüzden muhtemelen matematikçilerin bir araya geldiği en büyük toplantı. Bunların birçoğu, devasa bir salonda düzenlenen dersimi dinlemeye geldi. Anne ve babam, kız kardeşim ve yeğenim ön sıradalar. Derslerim, Robert Langlands ve Ngô Bao Châu ile yaptığımız en son ortak çalışma üzerine. Üç yıllık ortak bir çalışmanın ve Langlands Programı'nın sunduğu fikirleri biraz daha ileriye taşımamızın ürünü.[1]

Dinleyicilere, "Langland Programı'na dair bir film yapsak nasıl olur?" diye soruyorum. "Böyle bir durumda, tüm senaristlerin soracağı üzere, şu tür sorulara hazırlıklı olmalısınız: Neye dair olacak? Karakterler kim? Filmin konusu ne olacak? Sorunlar nedir ve nasıl çözülecekler?"

Dinleyicilerin bir kısmı gülüyor. André Weil ve onun Reşid Taşı'ndan bahsediyorum. Matematik dünyasının farklı kıtaları boyunca, aralarındaki gizemli bağlantıları sorgulayarak yolculuğumuza devam ediyoruz.

Kumandaya her tıkladığımda, dört devasa ekrana yansıtılan sunumumun bir sonraki slaytına geçiyoruz. Her bir slayt, hiç bitmeyen bilgi birikimi arayışımızda atılan küçük bir adımı tanımlıyor.

Hakikat ve güzelliğe dair ebedi ve ezeli sorular üzerinde düşünüyoruz. Matematik —o büyülü saklı evren— hakkında daha fazla şey öğrendikçe, ne kadar az şey bildiğimizi ve önümüzde ne kadar çok şey olduğunu daha iyi anlıyoruz. Yolculuğumuz devam ediyor.

Robert Langlands'tan Türk Okurlarına Mektup

Türkiye ve Türklerin yaşamımda nasıl ve neden önemli olduğunu başka yerlerde önceden anlattım. Nedenler Türkiye kadar kendimle de ilgilidir. Ailemin Kanada dışı dünyayla ilişkileri olmadı. Almanya'dan Amerika'ya Devrim'den evvel gelmiş ve Kral'a Sadık Ordu'da bir onbaşı olduğundan savaştan sonra Kanada'ya göç eden bir ata bir yanda, atalarımın hepsi İngiltere veya İrlanda'dan göç etmişti ve ana babamın yaşadığımız kasabanın dışında ilgileri yoktu. İkinci Dünya Savaşı sırasında bile öyle olmuş.

Ama ben on beş yaşındayken orta okulda başlıca on dokuzuncu ile yirminci yüzyıllardaki İngiliz edebiyatı ile tanıştırıldım. Ondan sonra henüz on yedi yaşına gelmeden üniversite sınavına girdim. Başka yerde anlattığım gibi ben, okulda değil ama tanıdığım ve sosyalizm tarafından etkilenmiş bir adam sayesinde, Ernst Trattner ve yazdığı "The story of the world's great thinkers" adlı bir kitaptan Hutton, Einstein, Darwin, Marx gibi bilimde önemli olan bilginler ile keşiflerinden haberdar oldum. Tabii ki otuzlu ile kırklı yıllarda Marx bugün olduğundan çok daha önemli bir şahsiyet idi. Ben de her hâlükârda 1953 yılında üniversiteye başladığımda bir âlim,

Fransızca *savant** denilen şey olmak istiyordum. Bilimler konusunda bilgisizdim ama benim için matematik kolay olduğundan matematikçi olayım dedim. Bana 1954 yılında tavsiye veren hoca, "O zaman farklı yabancı dilleri öğrenmeniz gerekir, Fransızca, Almanca, Rusça, İtalyanca bile," dedi. Öyle olsun diye ilk olarak Fransızca kurs gördüm, ondan sonra yazın Almancayı kendim öğrendim. Veya öyle zannettim. İkinci yılda beğendiğim ve Rus müziğini çok seven bir kadın hocadan gene biraz Rusça öğrendim. Tabii ki o Rus devriminden sonra göç etmişti ve eski devrimden evvelki edebiyatı çok seviyordu. Ondan sonra üniversitedeki son yılımda ikinci Rusça kursumu gördüm. Öyle kaldı 1965 yılına kadar. Gerçekten hiçbir yabancı dil konuşamıyordum ama Princeton'a geldiğimde benim için çok önemli olan Alman matematikçiler Carl Ludwig Siegel ile Erich Hecke'nin yazılarını ve Paris'te yayımlanmış Séminaire Cartan veya Séminaire Chevalley gibi seminerleri yeterli seviyede okuyabiliyordum.

Bu yıllarda matematiğe en önemli katkım Eisenstein serilerinin genel teorisi oldu. Onu 1964 yılında bitirdim, fakat sonraki yılda gerçekten hoşnut edici katkım yoktu. Özellikle iki bağlanmış alanlarda, yani o zamanda var olmayan genel otomorfik L-fonksiyonlar veya Artin'in sanısına ait alanlarda aradığım fikirleri bulamamıştım. Matematikten vazgeçeyim mi diye düşünüyordum. Princeton'daki o zaman kaldığımız kısa ara sokakta, bir yıl kadar Princeton'a gelmiş bir Türk iktisatçı Orhan Türkay ile ailesi komşumuz oldu. Tabii ki anneler ile çocukları çabucak tanıştılar. Orhan Bey kendisi sonradan Türkiye'de çok kullanılan, mikro iktisat teorisi hakkında kitaplarını yazdı. Maalesef şimdi vefat etmiştir. Tesadüf olarak ben ailem ile 1964/65 dönemini Berkeley'de geçirdim. O da Amerika'daki ikinci yılı için oraya gitti. Biz zaman zaman orada görüşüyorduk. O şevkli bir fotografçı idi ve evimizde çocuklarımız ile onun en büyük oğlunun çok sevdiğimiz fotoğrafı var. Onunla konuşup ilerlemediğimi

* Langlands burada kelimenin özellikle "farklı alanlarda bilgi sahibi olmak" anlamına vurgu yapmıştır.—e. n.

anlatarak belki araştırmadan vazgeçip bir defa dünyaya bakayım diye düşündüğümü anlattım. O hemen "Neden Türkiye'ye gelmiyorsun?" diye karşılık verdi. Ben ise, konu o kadar ciddi olmadığından lafı değiştirdim. Birkaç ay sonra, ben Princeton'a o Türkiye'ye dönmüş olduğumuzda, konuşmamızı hatırlayarak ona yazdım.

Ben böylece 1967 sonbaharda Ankara'ya Orta Doğu'ya geldim. Havaalanında o bizi bekliyordu ve ilk günler bize çok yardım etti. Mesela Çankaya'da, kısa zaman sonra Yeşilyurt sokaktaki arkadaşı ve daha önce ODTÜ'nün rektörü olan Seha Meray'ın dairesinin tam yanında bir daire buldu. Seha Bey'in ailesi eşime çocuklarımıza çok yardım etti. Ziyaretimizin sırasında eşim hasta oldu. Hastalığından sonra ona çok yardım eden Gülsüm Hanım Türkiye'de olduğumuz zamanda bizim için önemli kişi oldu. Maalesef Türkiye'den ayrıldığımız zaman, aşağıda anlattığım gibi Türkçem henüz çok zayıftı, ailesiyle, yani Gülsüm Hanım kendisi okumamış olduğundan okulda olan oğluyla, haberleşemiyorduk. O zamandaki Türkiye'de yaşam sık sık çok zor olabiliyordu ama haberleşmeyince durumunun nasıl olduğunu biz de bilemediğimizden ona gerekli şekilde yardım edemiyorduk. Bu kendimi affetmediğim bir ihmaldir.

Arkasından, Orhan Bey'e yazdığımdan sonra, Princeton'dan ayrıldığımızdan evvel, fakat araştırmadan vazgeçtiğimden sonra Princeton'da hem Türkçe öğrenmeye başlayıp hem de Rusçaya gene döndüm. Rusça hocam gene hoşuma giden göç etmiş bir kadın oldu. İsmi Valentina Tschebatorioff-Bill idi. Ama bu defa, çok yıl sonra onun kardeşinin yazdığı "Russia, My Native Land: A U.S. Engineer Reminisces and Looks at the Present" adlı bir kitapta, ikisinin İstanbul'dan geçip Avrupa'da yaşadıklarını ve sonunda Amerika'ya geldiklerini öğrendim. Hem babası Porphyry Grigorievich Chebotarev kazak ordusunda subay olmuş hem de kardeşi Gregory P. Tschebotarioff.

Öyle bir hazırlayıcı yaşam hoşuma gitti. Araştırmadan vazgeçince fazla boş zamanım vardı ve eğlenmek için Eisenstein serileri

üzerine birkaç hesap yaptım. Yani 1964 yılında yazdığım makalede kullanmadığım adelik şekilde olan Eisenstein serisinin sabit terimini hesaplamaya giriştim. Hesaplayıp düşününce birkaç ay evvel arayıp da bulamadığım kavramları buldum ve André Weil'e durumu başka yerde yayımlanmış bir mektupta yazdım. Bu mektup Türkiye ile doğrudan bağlı olmadığından burada söz konusu değil. O bu mektubu anlamadı fakat beni yaptığı bir seminere davet etti. Aslında bu seminerde o ünlü Hecke'nin teorisini ikinci dereceden olan bir cebirsel cisme genellemek istiyordu yani $Q(\sqrt{\alpha})$, belki her sonlu derece olan cebirsel cisme bile. Cismin sonsuz yerlerinin gerçel olduğunda bunun nasıl yapılacağını anlıyordu, fakat karmaşık sonsuz yeri bulunursa çözemediği zorluklar vardı. Tabii ki ben bu teori üzerinde aylar boyunca devamlı düşünüp taşındığımdan problemi hemen çözebildim. Birisi Princeton'da, ikincisi Ankara'da yazılmış ona gönderdiğim iki mektupta çözümü anlattım.*

Jacquet ile yazdığımız kitapta farklı çözümü kullandık fakat ben ilk verdiğim adi diferansiyel denklemlere ait olan çözümü tercih ediyorum.

İkinci L-fonksiyonlara ait kitap yazıldığında meydana atılan bir problem de varmış, yerel ε çarpanının varlığı. Cahit Arf'ın benim ODTÜ'ye gelişimle bildiğim kadar ilişkisi olmadığı hâlde matematik bölümünde odalarımız yan yana oldu. Fakat zannediyorum ki o ilk aylarda beni fark etmedi. Sonradan o zamandaki araştırmasını bana anlattı. Helmut Hasse ile doktora yapmıştı. Onunla tanıştığım zaman hâlâ fonksiyon cisimlerini araştırmak ve abelyen olmayan sınıf cisim teorisini geliştirmek istiyordu. Benimle konuşunca fikirlerini anlattı. Ben ise ona yerel ε çarpanına ait ne kanıtlamak istediğimi anlattım. Bildiğim kadarıyla savaş süresince bile Hasse ile alakayı kesmemiş olduğundan Hasse'nin 1954'te yayınlattığı makalesini *Artinsche Fuhrer, Artinsche L-Funktionen und Gauss'sche Summen über endlich algebraischen Zahlkörpern* bana verebildi.

* http://publications.ias.edu/sites/default/files/langlands-weil2-ps_0.pdf

http://publications.ias.edu/rpl/section/22 web sayfasında anlattığım gibi bu makale sayesinde ε çarpanının varoluşunu göstermeye başlayabildim. Varlık dört önsavın bir sonucudur. Onlardan üçü oldukça kolay. Dördüncünün ispatı çok zor. Bernhard Dwork bu ispatı bulmuş oldu fakat yazık ki o kadar uzun ve o kadar zor olduğundan yayımlamamış ve bugüne kadar hiç kimse, en azından hiçbir yetkili matematikçi Princeton Üniversitesi kütüphanesinde bulunan kâğıtlarını dikkatle gözden geçirmemiş. Bence yerel cisimler ile yerel Galois grupları hakkında eksik kavrayışımız otomorf formların genel kuramının gelişimine önemli bir manidir. Büyük ihtimalle Dwork'ın ispatında bu gruplara ait önemli bilgi bulunur. Maalesef genç matematikçiler onu dikkatle gözden geçirmeye teşvik edilmez. Deligne varlık için sade bir global kanıt buldu. Bu kanıt sayesinde biz varlıktan faydalanabiliriz fakat çarpan yerel nesne olduğundan yerel ispat bulmak gerektir. Dwork sayesinde ve biraz da benim sayemde, öyle bir ispat var fakat daha kısa daha kolay kavradığımız bir ispat gerek. Hem Serre hem de Deligne Dwork'ın araştırmasının önemini takdir etmiyorlar. Serre için çarpanın varoluşu "peu de chose"dur; Deligne'e göre yerel ispatı yayımlanmadığından o yoktur. Onların sebepleri belki açıktır.

Ankara'da yalnız araştırma değil hocalık da yaptım. Sınıfta en azından Amerika'ya gidip lisansüstü eğitim yapan dört öğrenci vardı: Yılmaz Akyıldız, Şafak Alpay, Aydın Aytuna, Cihan Saçlıoğlu. Hepsi hemen değilse bile sonra Türkiye'ye dönüp, oradaki eğitime çok katkıda bulunuyorlar.

Beşinci hatırladığım bir öğrenci de vardı. Bence aralarında en iyisiydi. İsmi Mükremin Neşeli. Onu benimle Yale'e getirmek istiyordum. Onu davet ettim fakat o Türkiye'de kalmak istiyordu. İlk olarak iktisat ilmi okumak istiyordu ama o zaman çok tehlikeli olan siyasete çekilmiş. Sonunda cesedi bir suyun kenarında bulunmuş. Bana anlatıldığına göre "Otopsi raporunda kemiklerinin kırık olduğundan büyük ihtimalle köprüden denize atıldığı sanılıyor. Kimin

atmış olabileceği belli değil, polis de olabilir, ülkücü denilen sağcı bir grup tarafından da olabilir."

ODTÜ'de olduğum zaman Gündüz İkeda Ankara'ya gelip bir seminer verdi, belki kışta belki ilkbaharda. Seminerden sonra konusundan biraz bahsettik. O zaman İzmir'de profesördü. Hem Arf hem de beni İzmir'e davet etti. Bu benim için önemli bir olay oldu. Türkiye'ye giderek Türkçe öğrenmek istiyordum fakat çabuk farkına vardığım gibi İngilizce kullanan ODTÜ Türkçe öğrenmek için uygun bir yer değildi. Ayrıca o zamanda dil çabuk değişiyordu. Dolayısıyla iyi sözlükler yoktu, herhalde benimkiler iyi değilmiş. Ben dolmuşlarda, bakkalda mümkün olduğu kadar Türkçe konuşup öğreniyordum. Özellikle bakkalda Bosna Hersek'ten göçmüş olan bir adam vardı. Onunla konuşmak güzeldi.

Türkçem çok zayıf olmasına rağmen İzmir'de seminer okuyarak Türkçe konuşmak istiyordum. İzmir'e gidişimden evvel konuşmamı ezberleyerek evde eşime sundum. Tabii ki o zaman bugün gibi değil. Bugün genç matematikçiler için İngilizce (Amerikanca) öğrenmek matematik öğrenmekten daha önemlidir. Herhalde bana öyle gibi geliyor! O zamanda İzmir'de matematik okuyup fakat İngilizce konuşmayan gençler, konuşmamdan sonra etrafımda toplanarak benimle Türkçe konuşmak istiyordu. Maalesef dediklerini ben hiç anlamadım. Çok utanıyordum. Ondan sonra bir adada yedik. İsmi Cengiz olan bir matematikçiyle konuşup sigara içtik. Ertesi gün Arf'la Ankara'ya dönüşümüzden evvel şehirde dolaşıp bir kaleye çıktım. Hangisine artık bilmiyorum. Orada herhalde Karadenizli olan bir gemiciyle konuşup gene sigara içtim. O kadar Türkçe konuşabiliyordum, fazla değil.

Tam sonunda ailemle Büyükada'da tatil günleri olarak bir hafta kaldığımız bir yana Türkiye'de yolculuk yapmadım. Buna rağmen ben dışarıdan ne isteyip ne beklediğimi ilk defa olarak Türkiye'de öğrendim. İki yıl sonra, 1970'te, Almanya'daki Bonn'a davet edilmiştim. Ailemle oraya gidişimden evvel birkaç hafta Almanca öğrenimi

gördüm, geldiğimden hemen sonra Almanca konuşarak seminerler verdim, öğrencilerle öğretmenlerle daima Almanca konuşuyordum. Tabii ki ilk olarak konuşmaktan daha çok dinliyordum, fakat bir kaç aydan sonra gerçekten konuşuyordum ve yavaş yavaş bugüne kadar takdir ettiğim Alman edebiyatı, Alman tarihi ile tanıştım. Özellikle sonradan Thomas Mann'ın bazı romanlarını iki üç defa okudum. Bazı tarihçileri de beğeniyorum fakat onlara şu ana kadar yeterli zaman vermedim. Ondan sonra yavaş yavaş hem Fransa'da hem de Quebec'te yetmişlerde ile seksenlerde hem Fransız edebiyatı ve tarihi ile hem de onlar kadar sayıca çok olmayan fakat benim için önemli olan Fransız Kanadalı yazılarla da tanıştım.

Fakat başka bir şey var. Anlatayım. Bugün herkes İngilizce konuşmak ister, Rus matematikçiler, Fransız matematikçiler, dünyada adeta her matematikçi, İstanbullu sokak çocukları da. Hem Türkiye'de bazı üniversitelerde Türkçe konuşarak ders veya seminer vermek yasak değilse de bu teşvik edilmez, hem de Almanya'da bazı enstitülerde Almanca konusunda durum aynıdır. Yetmişli yıllarda, altmışlı yıllarda bugünkü kadar aşırı değilmiş ama o zamanda bile terbiyeye göre Amerikalılar mevcut ise İngilizce konuşuluyormuş. Ben Amerikalı değil Kanadalıyım fakat Avrupalılar için aramızda fark yok. Bir defa Bonn'da bir akşam eğlentide geç vakitte birisi keyifle, "Die Amis sind weg. Wir sınd unter uns. Wir dürfen deutsch reden" dedi. Yani ben ile eşim Almanlar olarak sayılıyorduk o zaman. Özellikle Almanya'da ama zaman zaman başka yerde de yabancılığım sık sık fark edilmez. Öyle oldu herhalde. Bugün her yerde İngilizce konuşmak isteyen aptallar var. Benim için, yolculuk etmek binalara dağlara bakmak değil mümkün olduğu kadar yabancı dil ve yabancı yaşamı benimseyerek kendi yaşamımdan kaçmaktır. Fakat hep de değil; yaşamıma ait bazı şeyleri terk etmek istemem, ailem veya mesleğim. Ama öyle kurtulmak bugün zor. Dünyanın her ıssız yerlerinde bile anadilinin yabancı için kibar olmadığını zannedip İngilizce konuşan yapışkan kimselere rastlarsın. Üniversitelerde çok

daha fazla var. Fakat dikkat edersen dünyada anadilini seven kişileri matematikçiler arasında bile hâlâ bulabilirsin. Türkiye'de hevhulma ilaç olarak kullanılıyor, Amerika'da başka bitki örtüsünün gelişmesini engeller. Belki İngilizce/Amerikanca aynıdır. Kendi yurdunun dışında faydalı değil, zararlıdır. Geçmişte Almanya'da, Fransa'da, Rusya'da, İtalya'da yere göre farklı olan matematik geliştirilmiş, herkes kendi fikirlerine göre. Bugün herkes öbürünü takip etmek ister. Türkiye'de sonuç başkadır. Benim öğrencilerim Amerika'dan Türkiye'ye döndü. Bugün farkında olduğum kadar Amerika'ya giden matematikçiler orada kalıyor. Yurdu, anadilini özlemiyorlar.

Kendim Türkiye'ye gelince çok talihli oldum. 1967'de öğrencimken, bugün Türkiye'de önemli fizikçi olan Cihan Saçlıoğlu'na 1980 Bonn'da rastlayıp, ondan sonra onu profesör olduğum Institute for Advanced Study'ye davet ettiğim hâlde, bu yıllarda Türkiye'yi âdeta unutuyordum. İlk defa 1999 İstanbul'daki Feza Gürsey Enstitüsü ile ODTÜ'de izleme heyetinin üyesi olarak birkaç gün için oraya döndüm. Türkçe gene dinleyince hasret çektim, sık sık dönüp Fransa'da, Almanya'da yaptığım gibi dili öğrenmek istiyordum. Bu memleketlerde yaptığım gibi Cihan Bey ile o zaman Yıldız Teknik Üniversitesinde profesör olan Meral Tosun bana yardım edince ilk olarak bu üniversitede birkaç seminer verdim. Başka ülkelerde tarif ettiğim tecrübemin sayesinde bu defa Türkçe gene ve daha iyi öğrenebiliyordum, halkla da biraz tanıştım, dostlar buldum. Tabii ki Türkçem istediğim kadar iyi olamaz. Daha yaşlı oldum, Princeton'da işim vardı ama gene Türk tarihi ve Türk edebiyatıyla tanışarak meşrutiyet yılları, Türk iktisat tarihi, özellikle devrim ve savaş yıllarını az da olsa anlamaya başlıyorum. Tabii ki alfabenin ıslahı, dil ıslahı nedeniyle Osmanlı edebiyatı ile tarihi benim için erişilmez. Fakat Yahya Kemal Beyatlı veya Ahmet Hamdi Tanpınar gibi Osmanlı ile Cumhuriyet dönemi arası yazarlar faydalıdır. Tanpınar'ın hem konularını hem de üslubunu beğeniyorum. Ama ilk olarak "Suyu arayan adam" adlı otobiyografisini keşfettiğim

ve şimdi okuduğum Şevket Süreyya Aydemir'in tarihi kitapları yirminci yüzyıldaki Türkiye'yi anlamak için bana çok faydalıdır. Ben biraz onun gibi tarihçi olmamama rağmen tarihi anlamak için uğraşıyorum. Tabii ki anlattığı tarih kendi tarafından yaşanmış, ayrıca çok sayıda belge inceleyerek şahsiyetler ile hadiseleri esaslı şekilde tanımış, ama her şeyden önce kendi dünyasını kendisi için anlamaya uğraşan bir kişi.

Elbette Türkiye'de matematikçilerin arasında çok sevip takdir ettiğim matematikçilerle, bazen aileleriyle tanışıp kendi kimliğimden kaçarak memleketle içerisinden tanıştım. Fakat şimdi rastladığım iki kişinin en güzel sözlerini hatırlamak isterim. İlk olarak, bir gece eşimle Beşiktaş'tan Kadıköy'e vapur ile gitmek istemiştik. İskeleye geç gelince hemen Beyoğlu'na gitmek istedik. Taksiye binerek istediğimizi anlattım. Yolda konuşurken sürücü bana "Abi, Amerika'da uzun zaman kaldın!" dedi. Ondan birkaç yıl evvel tek başıma İstanbul'dayken İzmir ile Efes'i ziyaret etmek istedim. Selçuk'ta bir otelde kalıyordum. Sabah sokaklarda dolaşıyordum. Sokakta oynayan yedi/sekiz yaşında küçük bir kızla konuştum. Nereden geldiğimi filan anlattım. Birkaç dakika konuşmamızdan sonra bana, "bir Kanadalı için iyi Türkçe konuşuyorsun," dedi. Güzel bir iltifat oldu, haysiyet, öz güven ve ruh zengini bir kız. Çok Avrupalı matematikçi, çok işadamı için iyi bir misal olur.

Esasen Türkiye ile doğrudan ilgili olmamasına rağmen bir konu daha var. Anlattığım gibi Türkiye'ye gittiğimde Rusça öğrenmekten geçici olarak vazgeçtim. Bence biraz da olsa konuştuğum diğer dillerin arasında, İngilizce, Fransızca, Almanca, Türkçe, Rusça en güzelidir. Fakat yapısı zor. Onu iyi okuyabilirim fakat konuşabilirsem bile iyi denilemez. Daha eski olan edebiyat ve Tolstoy gibi yazarlar var ama yirminci yüzyıldaki yazarları da seviyorum, mesela Mihail Şolohov'un yazdığı *Ve Durgun Akardı Don*, Boris Pasternak'ın yazdıkları, ve Vasily Grossman'ın Türkçesinin var olup olmadığı bilmediğim Жизнь и Судьба. Şolohov'un romanını Türkiye'ye git-

memden evvel satın aldım, fakat ancak üç yıl evvel okumaya başlayıp çok uzun olduğundan iki yıl sonra bitirdim.

Maalesef Rusya'yı yalnız tek bir defa, iki/üç hafta için ziyaret ettim. Türkiye'ye ilk geldiğim zaman ailemle Kafkasya'dan geçmeyi düşünüyordum ama çabuk vazgeçtim. Zannediyorum ki bugün de Rusya'dan Türkiye'ye dolaysız geçmek zor olur!

Yaşlıyım. O kadar zamanım olmayabilir. Buna rağmen belki gelecekte Trabzon'dan kalkıp Karadeniz'den geçerek vapurla Rostovna-Donu gelebilirim. Ondan sonra Moskova'ya trenle geçmek şüphesiz mümkündür.

Robert Langlands

Teşekkür

Bu kitapta anlattığım araştırmaların bazılarına sundukları katkılardan dolayı DARPA ve Ulusal Bilim Vakfı'na teşekkür ederim. Kitabı, UC Berkeley'deki Miller Temel Bilimsel Araştırmalar Enstitüsü'nde bir Miller Profesör'ü iken tamamladım.

Editörüm T. J. Kelleher ve Basic Books'taki proje editörüm Melissa Veronesi'ye, sağladıkları uzman yol göstericilikten dolayı teşekkür ederim.

Kitap üzerinde çalışırken, Sara Bershtel, Robert Brazell, David Eisenbud, Marc Gerald, Masako King, Susan Rabiner, Sasha Raskin, Philibert Schogt, Margit Schwab, Eric Weinstein ve David Yezzi ile yaptığım oldukça faydalı sohbetlerden yararlandım.

Alex Freedland, Ben Glass, Claude Levesque, Kayvan Mashayekh ve Corinne Trang'e, farklı aşamalarda kitabın bölümlerini okudukları ve faydalı tavsiyelerde bulundukları için teşekkür ederim. Andrea Young'a 15. Bölüm'de kullanılan bardak oyunu resimlerini çektiği için müteşekkirim.

Çeşitli içgörülerini ve uzman tavsiyelerini paylaştığı için Thomas Farber'a ve kitabın müsveddelerini okuyup, birçok noktada açıklamalarımı geliştirmemi sağlayan derinlemesine sorular soran Marie Levek'e özel teşekkürlerimi sunarım. Babam Vladimir Frenkel, kitabın birçok taslağını okudu ve sağladığı geri bildirimler paha biçilemez.

Öğretmenlerime, akıl hocalarıma ve bu yolculukta bana yardımcı olan diğer herkese olan borcumun anlattığım hikâyeden anlaşıldığını umuyorum.

Hepsinin ötesinde, sevgi ve destekleri başardığım her şeyi mümkün kılan anne ve babama, Lidia ve Vladimir Frenkel'e şükranlarımı sunarım. Bu kitabı onlara adıyorum.

Notlar

Giriş

1. Edward Frenkel, *Don't Let Economists and Politicians Hack Your Math*, Slate, 8 Şubat 2013, http://slate.me/128ygaM.

1. Bölüm: Gizemli Yaratık

1. Görselin tüm hakları Physics World'e aittir. (http://www.hk-phy.org/index2.html)
2. Görsellerin tüm hakları Arpad Horvath'a aittir.

2. Bölüm: Simetrinin Özü

1. Bu metinde, "bir cismin simetrisi" ifadesi ile cismi değişikliğe uğratmayan belirli dönüşümleri kastediyoruz; bir masanın döndürülmesi gibi. "Bir cismin simetrisi" ifadesini, bir cismin simetrik olması özelliğini belirtmek için kullanmıyoruz.
2. Saat yönüne dönme hareketini kullanırsak yine aynı dönme hareketleri kümesini elde ederiz: Saat yönünde 90 derecelik dönme hareketi ile saat yönünün tersine 270 derecelik dönme hareketleri aynıdır, vb. Matematikçiler geleneksel olarak, genellikle saat yönünün tersine

gerçekleştirilen dönme hareketlerini kullanırlar fakat bu sadece bir tercih meselesidir.

3. Bu biraz gereksiz görünebilir ama burada amacımız ukalalık yapmak değil. Tutarlı olabilmek için onu da dahil etmeliyiz. Simetrinin cismimizi değişikliğe uğratmayan her türlü dönüşüm olduğunu söyledik ve özdeşlik de bu tür bir dönüşümdür.

   Karışıklıkları önlemek için, bu metinde verilen bir simetrinin sadece nihai sonucunu dikkate aldığımızı vurgulamak istiyorum. Süreç içerisinde cisme ne yaptığımızın bir önemi yok; bizi sadece tüm noktaların nihai konumları ilgilendiriyor. Örneğin masayı 360 derece dördürürsek masanın tüm noktaları başlangıçtaki yerlerine döner. Bizim için 360 derecelik dönme hareketinin dönmenin gerçekleşmediği durumla aynı simetriye sahip olmasının sebebi budur. Aynı sebepten ötürü, saat yönünün tersine 90 derecelik dönme hareketi ile saat yönünde 270 derecelik dönme hareketi de aynıdır. Farklı bir örnek olarak, masayı zemin üzerinde belli bir yönde üç metre ileri kaydırıp, sonra yine üç metre geri kaydırdığımızı ya da masayı başka bir odaya götürüp geri getirdiğimizi düşünelim. Masa tamamen aynı noktaya geri geldiği ve tüm noktalar başlangıçtaki konumlarına geri döndüğü müddetçe bu, özdeş simetri ile aynı simetri olarak değerlendirilecektir.

4. Simetrilerin bileşiminin sağladığı, ***birleşimlilik*** (associativity) adı verilen önemli bir özellik bulunur. Üç simetri verilsin (S, S′ ve S″); bunların bileşiminin iki farklı sırada $(SoS')oS''$ ve $So(S'oS'')$ oluşturulması aynı sonucu verir. Bu özellik, grubun formel tanımına ilave aksiyom olarak dahil edilir. Ele aldığımız gruplar için bu özellik açık biçimde karşılandığından, kitabın ana bölümünde buna değinmedik.

5. Bir kare masanın simetrileri üzerine konuşurken, dört simetriyi masanın dört köşesi ile tanımlamak işimize yaramıştı. Bununla birlikte, böyle bir tanımlama, köşelerden birinin —özdeş simetriyi gösterenin— seçilmesine dayanır. Bu seçim bir kez yapıldıktan sonra, gerçekten de her bir simetriyi seçilen köşenin bu simetri ile dönüştürüleceği köşe üzerinden tanımlayabiliriz. Buradaki sıkıntı, özdeş simetriyi göster-

mek için farklı bir köşeyi seçersek farklı bir tanımlama elde edecek olmamızdır. Bu yüzden, masanın simetrileri ile masanın noktaları arasında ayrım yapmakta fayda vardır.

6. Bakınız: Sean Carroll, *The Particle at the End of the Universe: How the Hunt for the Higgs Boson Leads Us to the Edge of a New World*, Dutton, 2012.
7. Matematikçi Felix Klein, şekillerin simetri özelliklerince belirlendiği fikrini 1872 yılında oldukça yankı uyandırann Erlangen Programı'nın çıkış noktası olarak kullandı. Burada, herhangi bir geometrinin öne çıkan özelliklerinin bir simetri grubu tarafından belirlendiğini açıkladı. Örneğin Öklid geometrisinde, simetri grubu, Öklid uzayının mesafeleri koruyan tüm dönüşümlerinden oluşur. Bu dönüşümler, dönme ve öteleme hareketlerinin bileşimidirler. Öklid-dışı geometriler ise başka simetri gruplarına karşılık gelmektedir. Bu, olası geometrileri, ilgili simetri grupları üzerinden sınıflandırmamızı mümkün kılar.
8. Bu, matematiksel ifadelerin hiçbir yönünün yoruma açık olmadığı anlamına gelmez; örneğin belirli bir ifadenin ne kadar önemli olduğu, ne kadar yaygın bir biçimde uygulanabileceği, matematiğin gelişimi açısından ne kadar önemli olabileceği gibi sorular tartışmaya açık olabilir. Fakat eğer ifade mantıksal açıdan tutarlı ise ifadenin *anlamı* —tam olarak ne söylediği— yoruma açık değildir. (İfadenin oluşturulduğu aksiyom sistemi seçildikten sonra, ifadenin mantıksal tutarlılığı da yoruma açık değildir.)
9. Her bir dönme hareketi de yuvarlak cisimlerin (yuvarlak masa gibi) bir simetrisini meydana getirir. Dolayısıyla prensip olarak, düzlem yerine yuvarlak masanın simetrileri ile oluşturulan dönme hareketleri grubunun gösteriminden de bahsedilebilir. Bununla birlikte, "gösterim" terimi matematikte özellikle verilen bir grubun n-boyutlu uzayın simetrilerini meydana getirdiği durumu ifade etmek için kullanılır. Bu simetrilerin matematikçilerin doğrusal dönüşüm (linear transformation) adını verdikleri şey olması gerekir; bu kavram, 14. Bölüm'ün 2. sonnotunda açıklanmıştır.

10. Dönme hareketleri grubunun herhangi bir g elemanı için, n-boyutlu uzayın ilgi simetrisini S_g ile gösterelim. Bu, herhangi bir g için doğrusal dönüşüm olmalı ve aşağıdaki özellikleri karşılamalıdır: İlk olarak, grubun elemanı olan herhangi bir g ve h çifti için, $S_g \cdot h$ simetrisi, S_g ve S_h simetrilerinin bileşkesine eşit olmalıdır; ikinci olarak, grubun özdeş elemanına karşılık gelen simetri, düzlemin özdeş simetrisi olmalıdır.
11. Daha sonra, adları "tılsım", "üst" ve "alt"olan üç kuarkın ve bunların karşı kuarklarının olduğu keşfedildi.

3. Bölüm: Beşinci Problem

1. Marina Rosha'da da küçük bir yarı-resmi sinagog daha vardı. *Perestroika*'dan sonra Moskova ve başka şehirlerde daha fazla sinagog ve Yahudi cemaatinin toplanabileceği merkezlerin açılmasıyla durum biraz düzeldi.
2. Mark Saul, *Kerosinka: An episode in the history of Soviet mathematics*, Notices of the American Mathematical Society, Cilt 46, Kasım 1999, s. 1217-1220. Esere şu adresten çevrim içi ulaşılabilir: http://www.ams.org/notices/199910/fea-saul.pdf.
3. George G. Szpiro, *Bella Abramovna Subbotovskaya and the "Jewish People's University,"* Notices of the American Mathematical Society, Cilt 54, Kasım 2007, s. 1326–1330. Esere şu adresten çevrim içi ulaşılabilir: http://www.ams.org/notices/200710/tx071001326p.pdf.
4. Alexander Shen, *Entrance examinations to the Mekh-Mat*, Mathematical Intelligencer, Cilt 16, No 4, 1994, s. 6-10'daki makalesinde, MGU'ya giriş sınavlarında Yahudi öğrencilere sorulan bazı soruların bir listesini veriyor. Bu makale, M. Shifman (ed.), *You Failed Your Math Test, Comrade Einstein* (World Scientific, 2005) isimli kitapta de yer alıyor. (Esere şu adresten çevrim içi ulaşılabilir: http://www.ftpi.umn.edu/shifman/ComradeEinstein.pdf). Bu kitaptaki MGU'ya başvurularla ilgili başka makalelere de göz atabilirsiniz; I. Vardi ve A. Vershik'in yazdıklarını özellikle tavsiye edebilirim.

T. Khovanova ve A. Radul'un *Jewish Problems* isimli eserinde, derlenmiş başka bir soru listesi bulabilirsiniz. Esere şu adresten çevrim içi ulaşılabilir: http://arxiv.org/abs/1110.1556.

5. George G. Szpiro, a.g.e.

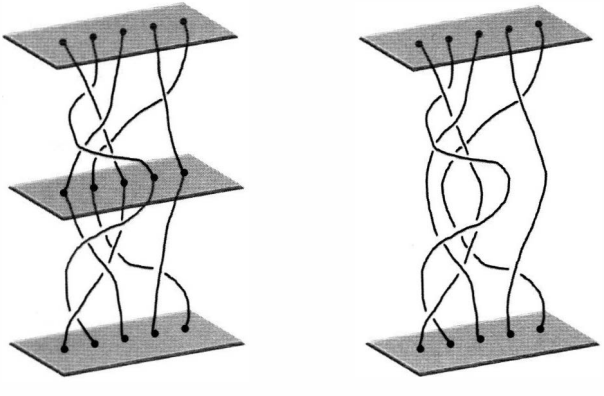
4. Bölüm: Kerosinka

1. Mark Saul, a.g.e.

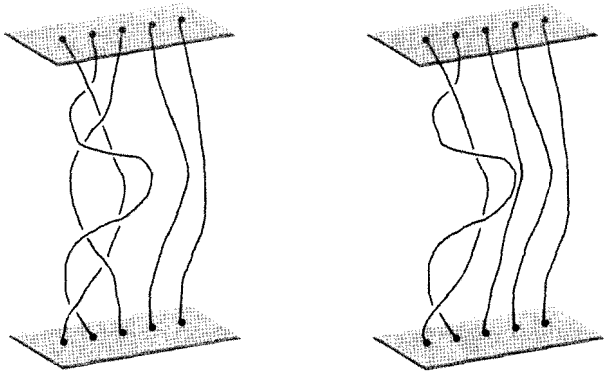
5. Bölüm: Çözümün İpuçları

1. Jewish People's University'nin (Yahudi Halkı Üniversitesi) hikâyesi ve Bella Muchnik Subbotovskaya'ın nasıl öldüğü, D.B. Fuchs ve diğer yazarların makalelerinin toplandığı şu eserde bulunabilir: M. Shifman (ed.), *You Failed Your Math Test, Comrade Einstein*, World Scientific, 2005.

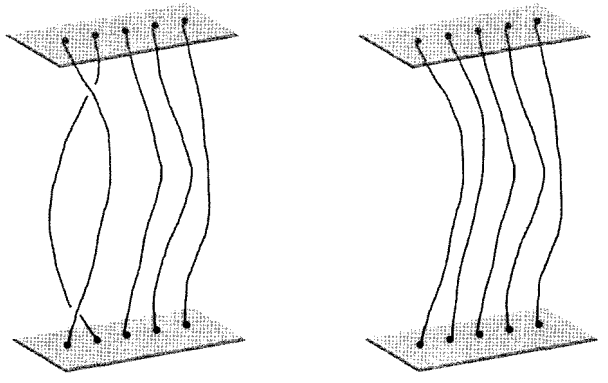
   Ayrıca bakınız: George G. Szpiro, a.g.e.
2. Eğer özdeş örgüyü diğer örgünün üzerine koyar ve aradaki plakaları yok edersek ipleri kısalttığımızda baştaki örgüyü elde ederiz. Bu, bir *b* örgüsünün özdeş örgü ile toplamının aynı *b* örgüsü olduğu anlamına gelir.
3. Bir örgü ile ayna simetrisinin toplamını aşağıdaki şekilde görebilirsiniz:



Yukarıdaki resimde sağ tarafta görülen örgüde, en sağ "çivi"de başlayıp biten ipi sağa çekelim. Bu bize aşağıdaki şemada sol tarafta gösterilen örgüyü verir. Aynı şeyi bu örgünün üçüncü çivide başlayıp biten ip için de yapalım. Bu da bize aşağıdaki şemada sağ tarafta gösterilen örgüyü verir.



Bir sonraki adımda, ikinci çivide başlayıp biten ipi sola çekelim. Ortaya çıkan örgüde, birinci ve ikinci ipler arasında bir üst üste gelme görüntüsü karşımıza çıkar. Ancak bu bir yanılsama: İkinci ipi sağa çektiğimizde bundan kurtuluruz. Bu hareketler aşağıdaki resimde gösterilmiştir. Ortaya çıkan örgü, aşağıdaki resimde sağ tarafta gösterilmiş olup, yukarıda gördüğümüz özdeş örgüden başka bir şey değildir. Daha kesin söylemek gerekirse özdeş örgüyü elde etmek için, ipleri düzleştirmemiz gerekiyor ki kurallarımız da buna müsaade ediyor (örgünün başlangıçtaki ile aynı uzunlukta olabilmesi için ipleri kısaltmamız da gerekiyor). Hiçbir aşamada ipleri kesip tekrar bağlamadığımıza ya da bir diğerinin üzerinden geçmesine müsaade etmediğimize dikkat edin.



4. Bu, "tanım" ve "teorem" arasında farkı ele almak için güzel bir fırsat. İkinci Bölüm'de grubun tanımını vermiştik. Hatırlarsak grup, belli bir işlemin (şartlara göre bileşim, toplama ya da çarpım isimleri ile anılabilir) gerçekleştirilebildiği ve şu özellikleri (ya da aksiyomları) sağlayan bir kümedir: Kümede bir özdeş eleman vardır (2. Bölüm'de açıklandığı anlamda); kümedeki her elemanın tersi vardır ve işlem —2. Bölüm'ün 4. sonnotunda açıklanan— birleşimlilik (associativity) özelliğini karşılamalıdır. Bu *tanımı* bir kez verdiğimizde, grup kavramı ilk ve son kez belirlenir. Üzerinde herhangi bir değişiklik yapamayız.

   Bu durumda, bir küme verildiğinde ona bir grubun yapısını vermeye çalışabiliriz. Bunun için, bir işlem oluşturup, bu işlemin yukarıda verilen özellikleri karşıladığını göstermemiz gerekir. Bu bölümde, n ipli tüm örgülerin kümesini kullanıyoruz (ana metinde açıkladığımız üzere, ipleri kesip birleştirerek elde edilen örgüleri belirliyoruz) ve bu tür iki örgünün ana metinde tanımlanan kurala göre toplama işlemini oluşturuyoruz. Bu durumda kullandığımız *teorem*, bu işlemin yukarıdaki tüm özellikleri karşıladığı yönündeki ifadedir. Bu teoremin ispatı, bu özelliklerin doğrudan doğrulanmasından oluşur. İlk iki özelliği kontrol etmiş bulunuyoruz (yukarıda yer alan ikinci ve üçüncü sonnotlarda sırasıyla görülebilir) ve son özellik (birleşimlilik) iki örgünün toplama işleminin oluşturulmasından otomatik olarak elde edilebilir.

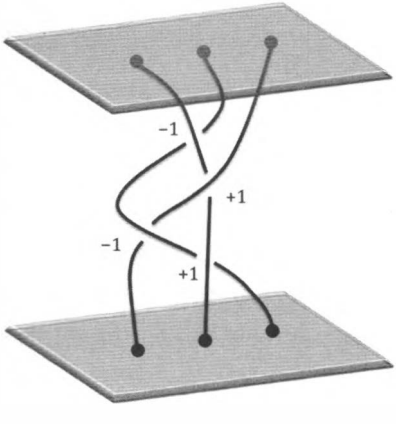
5. Kurallarımızdan birine bağlı olarak, ipin kendi etrafında dolanmasına müsaade edilmediğinden, elimizdeki tek ipin üst plakadaki tek çividen doğruca alt plakadaki çiviye gitmesinden başka seçeneğimiz bulunmuyor. Tabii ki dolambaçlı dağ yolu veya kıvrımlı bir yol gibi karmaşık bir güzergâh da izleyebilirdi ama eğer gerekirse onu kısaltarak ipin doğrudan aşağıya inmesini sağlayabiliriz. Diğer bir deyişle, B_1 grubu tek bir elemandan oluşur ve o da özdeş elemandır (bu eleman aynı zamanda kendi tersi ve kendisi ile toplamının sonucudur.
6. Matematik jargonunda, "B_2 örgü grubunun tam sayılar grubu ile izomorf olduğunu" söyleriz. Bu, iki grup arasında bire bir eşleme olduğu anlamına gelir —yani her bir örgüye üst üste binme sayısı atanır— ve böylece örgülerin toplamı (yukarıda tanımladığımız anlamda) tam sayıların toplamına karşılık gelir. Gerçekten de iki örgüyü üst üste koyduğumuzda yeni bir örgü elde ederiz ve bu yeni örgüde üst üste binme sayısı baştaki iki örgüye atanan bu sayıların toplamına eşittir. Ayrıca, iplerin hiç üst üste binmediği özdeş örgü 0 tam sayısına, bir örgünün tersini almak ise bir tam sayının negatifini almaya karşılık gelir.
7. Bakınız: David Garber, "Braid group cryptography", *Braids: Introductory Lectures on Braids, Configurations and Their Applications*, Ed. A. Jon Berrick, s. 329-403, World Scientific 2010. Esere şu adresten çevrim içi ulaşılabilir: http://arxiv.org/pdf/0711.3941v2.pdf.
8. Bakınız: örneğin, Graham P. Collins, "Computing with Quantum Knots", Scientific American, Nisan 2006, s. 57–63.
9. De Witt Sumners, Claus Ernst, Sylvia J. Spengler ve Nicholas R. Cozzarelli, "Analysis of the mechanism of DNA recombination using tangles", Quarterly Reviews of Biophysics, Cilt 28, Ağustos 1995, s. 253–313.

   Mariel Vazquez ve De Witt Sumners, "Tangle analysis of Gin recombination", Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Cilt 136, 2004, s. 565–582.
10. Daha doğru bir biçimde ifade etmek gerekirse (9. Bölüm'de değineceğiz), B_n örgü grubu, bir düzlem üzerinde bulunan sırasız n ayrık nokta

uzayının *temel grubu*dur. Burada, *n*'inci dereceden polinom cinsinden, bir düzlem üzerindeki *n* sırasız ayrık noktanın oluşturduğu toplulukların faydalı bir yorumunu görüyoruz. a_0 ve a_1 karmaşık sayılar olmak üzere ikinci dereceden monik bir polinom (monic polynomial) olan $x^2 + a_1x + a_0$'ı ele alalım (burada "monik" ifadesi, *x*'in en yüksek kuvvetine sahip terimin, yani x^2 teriminin önündeki katsayının 1'e eşit olduğu anlamına gelir). Polinomun karmaşık sayılar olan iki kökü vardır ve bu iki kök tersine, benzersiz bir biçimde ikinci dereceden bir monik polinomu belirler. Karmaşık sayılar düzlem üzerindeki noktalar olarak gösterilebildiğinden (bkz. 9. Bölüm), iki ayrık kökü olan ikinci dereceden monik polinom da düzlem üzerindeki ayrık noktalar çifti ile aynıdır.

Benzer şekilde, *n* ayrık karmaşık kökü olan *n*'inci dereceden bir monik polinom olan $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ polinomu da düzlem üzerindeki *n* ayrık noktanın —kökleri— topluluğu ile aynıdır. Kökleri $1,2,3,\ldots,n$ olan bu türden bir polinom seçelim: $(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$. Bu türden polinomların oluşturduğu (seçtiğimiz $(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$ ile başlayıp biten) uzaydaki bir yol da her ipin belli bir noktanın gidimizi olduğu *n* ipli bir örgü olarak görselleştirilebilir. Bu durumda, B_n örgü grubunun ayrık köklü *n*'inci dereceden polinomların uzayının temel grubu olduğunu buluruz (bkz. 14. Bölüm).

11. Soldan aşağıya inen ip sağdan aşağıya inen ipin altına giriyorsa iki ip arasındaki her bir üst üste gelişe +1 değeri, tersi durumda da -1 atanır. Şu örgüyü ele alalım:



İp çiftlerinin üst üste gelmesiyle oluşan bu sayıları (+1 ve -1) toplarsak verilen bir örgünün toplam üst üste gelme sayısını elde ederiz. Eğer ipleri kesip birleştirirsek her zaman +1 üst üste gelme sayısı kadar -1 üst üste gelme sayısını ekler ya da çıkarırız ve böylece toplam üst üste gelme sayısı sabit kalır. Bu, toplam üst üste gelme sayısının *iyi-tanımlanmış* (well-defined) olduğunu gösterir: Örgüyü kesip birleştirdiğimizde değişmez.

12. İki örgünün toplanması ile elde edilen bir örgünün toplam üst üste binme sayısının bu iki örgünün üst üste binme sayılarının toplamına eşit olduğunu unutmayın. Dolayısıyla toplam üst üste binme sayıları 0 olan iki örgünün toplamı, yine toplam üst üste binme sayısı 0 olan bir örgü olacaktır. B'_n değişmeli altgrubu bu türdeki bütün örgülerden oluşur. Bu bakımdan B_n örgü grubunun maksimal değişmeli olmayan (maximal non-commutative/non-abelian) kısmıdır.

13. Betti sayıları kavramı, geometrik şekillerin belirgin özellikleri üzerine çalışan matematik dalı olan topolojide ortaya çıkmıştır. Çember ya da küre gibi verilen bir geometrik şeklin Betti sayıları, her bir sayının 0 ya da bir doğal sayı olduğu bir sayı dizisi (b_0, b_1, b_2,...) oluşturur. Örneğin çizgi ya da düzlem gibi düz bir uzay için, $b_0=1$ olup, diğer tüm Betti sayıları 0'a eşittir. Genel olarak b_0, geometrik şeklin bağlı bileşenlerinin sayısıdır. Çember için $b_0=1$ ve $b_1=1$ olup, diğer tüm Betti sayıları 0'dır. Birinci Betti sayısı olan b_1'in 1'e eşit olması, bariz olmayan tek boyutlu bir parçanın var olduğunu yansıtır. Küre için, $b_0=1$, $b_1=0$, $b_2=1$ olup, diğer tüm Betti sayıları 0'a eşittir. Burada b_2, bariz olmayan iki boyutlu bir parçanın varlığını yansıtır.

B_n örgü grubunun Betti sayıları, n ayrık köklü n'inci dereceden monik polinomlar uzayının Betti sayıları olarak tanımlanır. B'_n değişmeli altgrubunun Betti sayıları, yakın bağlantılı bir uzayın Betti sayılarıdır. Bu uzay, n ayrık köklü ve n'inci dereceden bütün monik polinomlardan oluşur ve ayrıca diskriminantları (tüm kök çiftleri arasındaki farkın çarpımının karesi) sıfır olmayan sabit bir değer alır

(örneğin bu değerin 1 olduğunu söyleyebiliriz). Örneğin, $x^2+a_1x+a_0$ polinomunun diskriminantı $a_1^2 - 4a_0$'a eşittir ve tüm n değerleri için benzer bir formül vardır.

Tanıma göre, bir polinomun diskriminantının 0'a eşit olması, ancak ve ancak çokkatlı köklere (multiple roots) sahip olması hâlinde mümkündür. Dolayısıyla, diskriminant bize n ayrık köklü n'inci dereceden bütün monik polinomların uzayından sıfır noktası bulunmayan karmaşık düzleme geçişin fonksiyonunu verir. Böylece, bu uzayın başlangıç noktası olmayan karmaşık düzlem üzerindeki "lifleme"sini elde ederiz. B_n'in Betti sayıları tüm uzayın topolojisini yansıtırken, B'_n'in Betti sayıları bu liflerin herhangi birinin (topolojik olarak hepsi aynıdır) topolojisini yansıtır. Varchenko'yu bana bu problemi vermeye iten asıl etken, liflerin topolojisini anlama arzusuydu. Betti sayıları ile ilgili kavramlar olan homoloji (homology) ve kohomoloji (cohomology) üzerine daha fazla bilgi edinmek için, aşağıda verilen giriş niteliğindeki ders kitaplarına başvurabilirsiniz:

William Fulton, *Algebraic Topology: A First Course*, Springer, 1995.

Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2001.

6. Bölüm: Acemi Matematikçi

1. Kenar boşluğuna bu notu düşen Fermat'nın blöf yaptığını düşünenler var. Ben böyle düşünmüyorum; bence samimi olarak bir hata yaptı. Ne olursa olsun, ona şükran borçluyuz —kenar boşluğuna düştüğü küçük not ile matematiğin gelişimine olumlu yönde bir etkisi oldu.
2. Daha kesin olarak söylemek gerekirse şunu kanıtladım: n'nin tüm d bölenleri için, $q=n(d-2)/d$ olmak üzere, q'üncü Betti sayısı ϕ(d)'ye eşit olup, n-1'in tüm d bölenleri için, $q=(n-1)(d-2)/d$ olmak üzere, q'üncü Betti sayısı $\phi(d)$'ye eşittir. B'_n'in diğer tüm Betti sayıları 0'a eşittir.
3. 1985 yılında Mikhail Gorbaçov iktidara geldi ve hemen ardından *perestroika* politikasını uygulamaya koydu. Bildiğim kadarıyla, *Mekh-*

Mat'ın giriş sınavlarında Yahudi öğrencilerin karşılaştığı benimkine benzer sistematik ayrımcılık uygulamaları 1990 yılında sona erdi.

4. S. Zdravkovska ve P. Duren, *Golden Years of Moscow Mathematics*, American Mathematical Society, 1993, s. 221.
5. Matematikçi Yuly Ilyashenko, Polit.ru isimli internet sitesinde 28 Temmuz 2009 tarihinde yayınlanan *The black 20 years at Mekh-Mat* (Mekh-Mat'ın 20 kara yılı) isimli mülakatında bu olayın *Mekh-Mat*'taki anti-Semitik politikaların oluşumunda hızlandırıcı rol üstlendiğini iddia etmiştir: http://www.polit.ru/article/2009/07/28/ilyashenko2.
6. Soru, n cinsinden bir Riemann yüzeyi elde edebilmek için $4n$ kenarlı düzgün bir çokgenin kenarlarının, ikişerli olarak kaç farklı biçimde yapıştırılabileceğinin bulunmasını istiyordu. Dokuzuncu Bölüm'de, çokgenin ters kenarlarını tanımladığımızda, bunu yapmanın bir yolunu göreceğiz.
7. Edward Frenkel, "Cohomology of the commutator subgroup of the braid group", Functional Analysis and Applications, Cilt 22, 1988, s. 248–250.

7. Bölüm: Büyük Birleşik Teori

1. Mathematics Newsletter için Robert Langlands ile yapılan röportaj, University of British Columbia. Röportajın tamamına şu linkten ulaşabilirsiniz: http://www.math.ubc.ca/Dept/Newsletters/Robert_Langlands_interview_2010.pdf.
2. $\sqrt{2} = m/n$ eşitliğini sağlayan iki doğal sayı (m ve n) olduğunu varsayalım. Genelliği kaybetmeksizin, m ve n sayılarının aralarında asal olduğunu varsayalım; diğer bir deyişle 1'den başka hiçbir doğal sayıya aynı anda bölünemez olsunlar. Aksi hâlde, $m=dm'$ ve $n=dn'$ ile birlikte $\sqrt{2} = m'/n'$ olurdu. Gerekmesi durumunda bu işlemi, aralarında asal iki sayı elde edene kadar tekrar edebiliriz.

   Neticede, m ve n sayılarının aralarında asal ve $\sqrt{2} = m/n$ olduğunu varsayalım. Formülün her iki tarafının da karesini aldığımızda,

$2 = m^2/n^2$ eşitliğini elde ederiz: Her iki tarafı da n^2 ile çarptığımızda $m^2=2n^2$ olur. Bu, m'nin çift olduğunu ifade eder; aksi durumda m^2'nin tek olması gerekirdi ki bu da formül ile çelişki arz ederdi.

Eğer m çift ise, herhangi bir p doğal sayısı için, $m=2p$ olur. Bunu bir önceki formüle yerleştirirsek $4p^2=2n^2$ ve dolayısıyla da $n^2 = 2p^2$ olur. Fakat bu durumda, tıpkı m için olduğu gibi, n'nin de çift olması gerekir. Bu durumda m ve n'nin her ikisinin de çift olması gerekir ki bu durum iki sayının aralarında asal olmasına dair kabulümüzle çelişir. Dolayısıyla, bu tür iki m ve n sayısı var olamaz.

Bu, "olmayana ergi"nin güzel bir örneğidir. İspatlamaya çalıştığımızın tersi bir ifade ile başladık (örneğimizde ispatlamaya çalıştığımız ifadenin tersi olan, $\sqrt{2}$'nin rasyonel sayı olduğu ifadesiyle başladık). Eğer bu yanlış bir ifadeyse (örneğimizde hem m hem de n'nin aralarında asal olduğunu kabul etmiş olmamıza rağmen, her ikisinin de çift olduğunun anlaşılması) başlangıçtaki ifademizin de yanlış olduğunu anlarız. Dolayısıyla, ispatlamaya çalıştığımız ifade (yani $\sqrt{2}$'nin rasyonel sayı olmadığı) doğrudur. Bu yöntemi, 8. Bölüm'de tekrar kullanacağız: İlk olarak Fermat'nın Son Teoremi'nin ispatını tartışırken ve ardından da 6. sonnotta, Öklid'in sonsuz sayıda asal sayı bulunduğuna dair ispatını ele alırken.

3. Örnek olarak, şu iki sayıyı çarpalım: $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$ ve $3 - \sqrt{2}$. Parantezleri açarsak:

$$\left(\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)(3-\sqrt{2})=\frac{1}{2}\cdot 3-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{2}\cdot 3-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}.$$

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$ olduğundan, terimleri topladığımızda aşağıdaki cevabı elde ederiz:

$$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}+3\sqrt{2}-2=-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\sqrt{2}.$$

Bu, aynı biçimde bir rakam olup, yeni sayı sistemimize dahildir.

4. Biz sayı sistemimizin sadece şu özelliklere sahip simetrilerini değer lendiriyoruz: toplama ve çarpma işlemlerinin gerçekleştirilebildiğ ve 0'ın 0'a, 1'in 1'e, toplamsal ters elemanının toplamsal ters elemana çarpımsal ters elemanın çarpımsal ters elemana gittiği simetriler. Faka eğer 1 1'e gidiyorsa 2=1+1 de 1+1=2'ye gitmelidir. Benzer şekilde, tüm doğal sayılar ile onların negatifleri ve çarpımsal ters elemanları da korunmalıdır. Bu yüzden, tüm doğal sayılar, bu tür simetrilerle korunur.
5. Bu simetrinin toplama, çıkarma, çarpma ve bölme ile gerçekten uyumlu olup olmadığını sınamak kolaydır. Bunu toplama işlemi için yapalım. Yeni sayı sistemimizdeki iki farklı sayıyı ele alalım:

$$x + y\sqrt{2} \quad \text{ve} \quad x' + y'\sqrt{2}$$

Burada x, y, x' y', rasyonel sayıdır. Şimdi bunları toplayalım:

$$(x + y\sqrt{2})+(x' + y'\sqrt{2})=(x +x')+(y+y')\sqrt{2}.$$

Simetrimizi her birine uygulayabiliriz ve şunu elde ederiz:

$$x - y\sqrt{2} \quad \text{ve} \quad x' - y'\sqrt{2}$$

Şimdi de bunları toplayalım:

$$(x-y\sqrt{2})+(x'-y'\sqrt{2})=(x +x')-(y+y')\sqrt{2}.$$

Elde ettiğimiz sayının simetrimizi ilk toplamımıza uygulayarak elde ettiğimiz sayıya eşit olduğunu gördük:

$$(x +x')+(y+y')\sqrt{2} \quad \longmapsto \quad (x +x')-(y+y')\sqrt{2}.$$

Diğer bir deyişle, simetriyi bu iki sayının her ikisine ayrı ayrı uygulayabilir ve sonra toplayabiliriz. Diğer yandan, ilk önce sayıları toplayıp, ardından da simetriyi uygulayabiliriz. Sonuç aynı olacaktır. Simetrimizin toplama işlemi ile *uyumlu* olduğunu söylediğimizde kastettiğimiz budur. Benzer şekilde, simetrimizin çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri ile uyumluluğunu da kontrol edebilirsiniz.

6. Rasyonel sayılara $\sqrt{2}$ ekleyerek elde ettiğimiz sayı cismi örneğinde Galois grubu iki simetriden oluşur: özdeş simetri ve $\sqrt{2}$ ile $-\sqrt{2}$'nin yer değiştirmesi ile elde edilen simetri. Özdeş simetriyi I ile, $\sqrt{2}$ ve $-\sqrt{2}$'nin yer değiştirmesi ile elde edilen simetriyi de S ile gösterelim. Bu simetrilerin bileşimini açık bir biçimde yazalım:

$$I \circ I = I, \qquad I \circ S = S, \qquad S \circ I = S$$

ve en ilginci:

$$S \circ S = I.$$

Gerçekten de eğer $\sqrt{2}$ ile $-\sqrt{2}$'nin yerini değiştirir ve bunu bir kez daha tekrarlarsak net sonuç özdeşlik olacaktır:

$$x+y\sqrt{2} \;\mapsto\; x-y\sqrt{2} \;\mapsto\; x-(-y\sqrt{2})=x+y\sqrt{2}.$$

Böylece, bu sayı cisminin Galois grubunu tamamen tanımlamış bulunuyoruz: İki elemandan (I ve S) oluşuyor ve bileşimlerini de yukarıdaki formüllerle elde ediyoruz.

7. Birkaç sene önce, Niels Henrik Abel, (Joseph-Louis Lagrange ve Paolo Ruffini'nin de önemli katkılarıyla) radikaller içinde çözülemeyecek beşinci dereceden bir denklem bulunduğunu göstermişti. Bununla birlikte, Galois'nın ispatı daha genel ve daha kavramsaldı. Galois grupları ve polinom denklemleri çözmenin zengin geçmişi hakkında daha fazlası için şu esere bakabilirsiniz: Mario Livio, *The Equation That Couldn't Be Solved*, Simon & Schuster, 2005.
8. Genellemek için, katsayıları (a, b, c) rasyonel sayı olan ikinci dereceden $ax^2+bx+c=0$ denklemini ele alalım. Denklemin çözümlerini (x_1 ve x_2) aşağıda verilen formüllerle bulabiliriz:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{ve} \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Eğer b^2-4ac diskriminantı bir rasyonel sayının karesi değilse bu çözümler rasyonel sayı olmaz. Bu yüzden, eğer x_1 ve x_2'yi rasyonel sayılara eklersek yeni bir sayı cismi elde ederiz. Bu sayı cisminin simetrilerinin grubu da iki elemandan oluşur: özdeş eleman ile x_1 ve x_2 çözümlerini yer değiştiren simetri. Diğer bir deyişle, bu simetri $\sqrt{b^2-4ac}$ ve $-\sqrt{b^2-4ac}$ terimlerinin yerini değiştirir.

Bununla birlikte, bu Galois grubunu tanımlamak için ayrıntılı formüller yazmamıza gerek yok. Gerçekten de polinomun derecesi iki

olduğu için, iki çözümü olduğunu biliyoruz, o hâlde bunları x_1 ve x_2 şeklinde gösterelim. Bu durumda şu denklemi elde deriz:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Parantezleri açarsak, $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ denklemini elde ederiz ve düzenlersek $x_2=-\frac{b}{a}-x_1$ olur. Ayrıca, bu denklemin çözümü x_1 olduğundan $(x_1)^2=-\frac{c+bx_1}{a}$ denklemine de sahibiz. Dolayısıyla, eğer disktiminant bir rasyonel sayının karesi değilse, x_1 ve x_2'yi rasyonel sayılara ekleyerek elde ettiğimiz sayı cismi, —α ve β rasyonel sayılar olmak üzere— $\alpha+\beta x_1$ biçimindeki tüm sayılardan oluşur. x_1 ve x_2'nin yer değiştirdiği simetriye göre, $\alpha+\beta x_1$ sayısı

$$\alpha+\beta x_2=\left(\alpha-\beta\frac{b}{a}\right)-\beta x_1$$

sayısına gider. Bu simetri, toplama ve diğer işlemlerle uyumludur çünkü hem x_1 hem de x_2, rasyonel katsayıları olan aynı denklemi çözer. Bu sayı cisminin Galois grubunun özdeş elemanı ile birlikte x_1 ve x_2'nin yer değiştirmesini sağlayan simetriden oluştuğunu görüyoruz. Bu zamana kadar, x_1 ve x_2'nin a, b ve c cinsinden nasıl ifade edildiğine dair hiçbir bilgi kullanmadığımızı bir kere daha vurgulamak isterim.

9. Bu noktayı göstermek için, örnek olarak $x^3=2$ denklemini ele alalım. Çözümlerinden biri, 2'nin küpkökü olan, $\sqrt[3]{2}$'dir. Karmaşık sayı olan iki çözümü daha vardır: $\sqrt[3]{2}w$ ve $\sqrt[3]{2}w^2$. Bu ifadelerdeki w teriminin açılımı şudur:

$$w=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}$$

(Dokuzuncu Bölüm'de işlediğimiz karmaşık sayılar konusuna göz atabilirsiniz.) Bu üç çözümü içeren en küçük sayı cismi, bunların karelerini ($\sqrt[3]{4}=(\sqrt[3]{2})^2$, $\sqrt[3]{4}w$ ve $\sqrt[3]{4}w^2$ —ki küpleri 2'ye eşittir) ve oranlarını da (w ve w^2) içermelidir. Bu sayı cismini oluşturmak için, görünüşe göre rasyonel sayılara sekiz sayı daha eklememiz gerekiyor.

Öte yandan, elimizdeki

$$1+w+w^2 = 0$$

denklemi, w^2'yi 1 ve w cinsinden ifade edebilmemizi sağlıyor:

$$w^2 = -1-w.$$

Bu durumda elimizde şu denklemler de vardır:

$$\sqrt[3]{2}w^2 = -\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}w, \qquad \sqrt[3]{4}w^2 = -\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{4}w.$$

Dolayısıyla, sayı cismimizi elde etmek için, rasyonel sayılara beş sayı eklememiz yeterli: w, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2}w$, $\sqrt[3]{4}$ ve $\sqrt[3]{4}w$. Bu yüzden, bu sayı cisminin $x^3 = 2$ denkleminin ayrıştırma cismi (splitting field) adıyla da bilinen bir genel elemanı altı terimin kombinasyonu şeklinde olacaktır: bir rasyonel sayı artı bir rasyonel sayı çarpı w artı bir rasyonel sayı çarpı $\sqrt[3]{2}$, vb. Bunu elemanları iki terimli olan (bir rasyonel sayı artı bir rasyonel sayı çarpı $\sqrt{2}$) $x^2 = 2$ denkleminin ayrıştırma cismi ile karşılaştırın.

Yukarıda gördüğümüz üzere, $x^2 = 2$ denkleminin ayrıştırma cisminin Galois grubunun elemanları, bu denklemin iki çözümünün ($\sqrt{2}$ ve $-\sqrt{2}$) sırasını değiştirir. Bu türde iki permütasyon vardır: bu iki çözümü yer değiştiren ve özdeş eleman.

Benzer şekilde, katsayıları rasyonel sayı olan diğer her türlü denklem için, onun ayrıştırma cismini çözümlerinin hepsini rasyonel sayılarla ekleyerek elde edilen cisim olarak tanımlarız. Yukarıdaki 4. sonnotta yer alan sava dayanarak, bu sayı cisminin toplama ve çarpma işlemleri ile uyumlu olan her türlü simetrisi rasyonel sayıları korur. Dolayısıyla bu tür bir simetri altında, denklemin herhangi bir çözümü, bir diğer çözüme gitmelidir. Bu yüzden, bu çözümlerin bir permütasyonunu elde ederiz. $x^3 = 2$ denkleminde, yukarıda verilen üç çözüm söz konusudur. Her permütasyonda, birinci olan $\sqrt[3]{2}$ üç çözümden herhangi birine; ikinci olan $\sqrt[3]{2}w$ kalan iki çözümden birine ve üçüncü çözüm olan $\sqrt[3]{2}w^2$ de kalan bir çözüme gider (tersinin olabilmesi için permütasyon bire bir olmalıdır). Bu durumda, bu üç çözümün $3 \cdot 2 = 6$ permütasyonu vardır. Bu permütasyonlar bir grup oluşturur ve bu

grubun $x^3 = 2$ denkleminin ayrıştırma cisminin Galois grubunun bire bir eşlemesi olduğu görülmüştür. Böylece, çözümlerin permütasyonu üzerinden Galois grubunun açık bir tanımını elde etmiş bulunuyoruz.

Yukarıdaki hesaplamalarda, denklemin çözümü için açık formüller kullandık. Katsayıları rasyonel sayı olan üçüncü dereceden herhangi bir denklem için de benzer bir sav geliştirilebilir ve çözümleri için katsayılar cinsinden bir formüle de ihtiyacımız yoktur. Çözüm şudur: Denklemin çözümlerini x_1, x_2 ve x_3 şeklinde gösterelim ve hepsinin irrasyonel olduğunu varsayalım. Bununla birlikte,

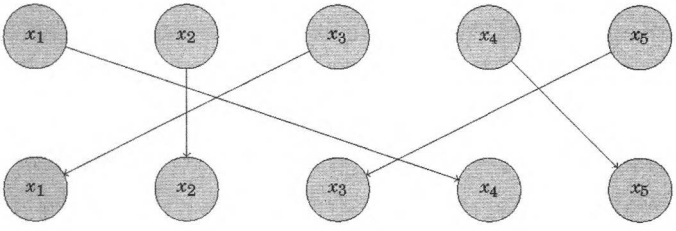
$$(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$$

şeklinde tanımlanan denklemin diskriminantının her zaman bir rasyonel sayı olduğunu kolayca görürüz.

Eğer diskriminantın karakökü rasyonel sayı değilse bu denklemin ayrıştırma cisminin Galois grubu, bu çözümlerin tüm permütasyonlarının grubudur (bu durumda altı elemandan oluşur). Eğer diskriminantın karekökü bir rasyonel sayı ise Galois grubu üç permütasyondan oluşur: özdeş eleman, $x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3 \mapsto x_1$ devirli permütasyon (cyclic permutation) ve tersi.

10. Örneğin, beş çözümü bulunan tipik bir beşinci dereceden denklem (yani $n = 5$ olan) için Galois grubu, bu beş sayının tüm permütasyonlarından oluşan gruptur. Permütasyon, bu sayıların karşılıklı olarak bire bir değiştirilmesidir; bir örneğini aşağıdaki resimde görebilirsiniz.

Böyle bir permütasyonda, x_1 çözümü beş çözümden herhangi birine (kendisi dahil) gidebileceği için beş seçeneğimiz var; bu durumda, x_2 kalan dört çözümden birine gider; x_3, kalan üç çözümden birine gider, vb. Böylece, hepsini birlikte düşünürsek $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ permütasyon bulunur ki bu, Galois grubunun da 120 elemanı bulunduğu anlamına gelir.



(n elemanlı bir kümenin permütasyonlarının grubu —n harf üzerindeki simetri grubu olarak da bilinir—, $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots 2 \cdot 1$ elemandan oluşur.) İkinci, üçüncü ve dördüncü dereceden denklemlerin Galois grubundan farklı olarak, bu çözülebilir (solvable) bir grup değildir. Bu yüzden, Galois'nın savına göre, beşinci dereceden genel denklemlerin çözümlerini radikaller (karekök, küpkök, vb) cinsinden ifade edemeyiz.

11. Buna Princeton'daki İleri Araştırmalar Enstitüsü'nün internet sitesinden ulaşabilirsiniz: http://publications.ias.edu/sites/default/files/weil1.pdf.
12. İleri Araştırmalar Enstitüsü'nün Dijital Arşiv'indeki resimden alınmıştır: http://cdm.itg.ias.edu/cdm/compoundobject/collection/coll12/id/1682/rec/1.

8. Bölüm: Sihirli Sayılar

1. Robert Langlands, "Is there beauty in mathematical theories?", *The Many Faces of Beauty*, Ed. Vittorio Hösle, University of Notre Dame Press, 2013, esere şu adresten ulaşılabilir: http://publications.ias.edu/sites/default/files/ND.pdf.
2. Sanılar hakkında daha fazla bilgi edinebilmek için şu kapsamlı makaleye göz atabilirsiniz: Barry Mazur, "Conjecture", Synthèse, Cilt 111, 1997, s. 197–210.
3. Fermat'nın Son Teoremi'nin geçmişi hakkında daha fazla bilgi edinmek için şu eseri inceleyebilirsiniz: Simon Singh'in *Fermat's Enigma: The Epic Quest to Solve the World's Greatest Mathematical Problem*, Anchor, 1998.

4. Bakınız: Andrew Wiles, "Modular elliptic curves and Fermat's last theorem", Annals of Mathematics, Cilt 141, 1995, s. 443–551; Richard Taylor ve Andrew Wiles, "Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras", Annals of Mathematics, Cilt 141, 1995, s. 553–572.

   Shimura-Taniyama-Weil sanısını en tipik (yarı-dengeli (semi-stable) adı verilen) durum için ispatladılar ve bunun Fermat'nın Son Teoremi'ni ispatlamak için yeterli olduğu görüldü. Birkaç yıl sonra, sanının geri kalan durumları C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond ve R. Taylor tarafından ispatlandı.

   Artık ispatlanmış olduğu için, Shimura-Taniyama-Weil sanısını bir teorem olarak anmak daha uygun olur. Aslında, artık çoğu matematikçi onu "modülerite teoremi" (modularity theorem) ismiyle anıyor. Fakat eski alışkanlıkları sona erdirmek zor ve benim gibi bazı kişiler hâlâ eski ismi kullanıyor. İronik olarak, Fermat'nın Son Teoremi aslında bir sanı olmasına rağmen, teorem olarak anılır. Kuşkusuz bu, Fermat'nın ispat bulduğu yönündeki iddiasına saygıdan tercih edilmiş olmalı.

5. Eğer N asal sayı değilse 1 ile N-1 arasındaki iki x ve y doğal sayısı için $N = xy$ yazabilirdik. Bu durumda, x'in mod N aritmetiğinde çarpımsal ters elemanı olmazdı. Diğer bir deyişle, 1 ile N-1 arasında

$$xz = 1 \pmod{N}$$

   eşitliğini sağlayacak bir z doğal sayısı yoktur. Gerçekten de eğer bu eşitlik sağlanmış olsaydı, her iki tarafı y ile çarparak şunu elde ederdik:

$$xyz = y \pmod{N}$$

   Fakat $xy = N$ olduğundan, sol taraf N_z'dir ve bu, y'nin N'ye bölüneceği anlamına gelir. Fakat bu durumda y, 1 ile N-1 arasında olamaz.

6. Öklid'e atfedilen ispat şu şekilde devam eder: Bu bölümde daha önce, Fermat'nın Son Teoremi'nin ispatını ele alırken kullanmış olduğumuz "olmayana ergi" (proof by contradiction) yöntemini uygularız.

   Sonlu sayıda asal sayı bulunduğunu varsayalım: $p_1, p_2, \ldots, p_N$. Çarpımlarına 1 ekleyerek elde ettiğimiz A sayısını ele alalım; yani $A = p_1 p_2 \ldots p_N + 1$ olsun. Bunun bir asal sayı olduğunu iddia ediyorum.

Bunu çelişkiden faydalanarak ispat edeceğiz: Eğer bir asal sayı değilse 1 ve kendisinden başka bir doğal sayı tarafından bölünebilir. Bu durumda, A'nın asal sayılardan birine (p_i olsun) bölünebilir olması gerekir. Fakat A, p_i'ye bölünebiliyorsa o zaman mod p_i aritmetiğinde $A = 0$ olurdu; halbuki A'nın tanımına göre, mod p_i aritmetiğinde $A = 1$.

Bir çelişkiye ulaşmış bulunuyoruz. Bu, A'nın 1 ve kendisinden başka herhangi bir doğal sayıya bölünemeyeceği anlamına gelir. Bu durumda, A'nın kendisi bir asal sayıdır.

Fakat, A'nın $p_1, p_2, \ldots, p_N$'in herhangi birinden büyük olduğu belli olduğuna göre bu, "$p_1, p_2, \ldots, p_N$ sadece asal sayıdır" şeklindeki varsayımımızla çelişki arz eder. Bu durumda, sonlu sayıda asal sayı bulunduğu yönünde başlangıçta yaptığımız kabül yanlıştır. Dolayısıyla, sonsuz sayıda asal sayı vardır.

7. Bunu biraz daha açıklayalım: Belirli bir sayı sisteminde, bir a sayısının çarpımsal tersi, $a \cdot b = 1$ eşitliğini sağlayan b sayısıdır. Dolayısıyla, örneğin rasyonel sayıların sayı sisteminde $\frac{3}{4}$'ün çarpımsal tersi $\frac{4}{3}$'tür. İncelemekte olduğumuz sayı sisteminde, 1 ile p-1 arasındaki bir a doğal sayısının tersi, bir başka doğal sayı olan b olup, aşağıdaki şartı sağlar:

$$a \cdot b = 1 \pmod{p}$$

Hangi numerik sistemi ele alırsak alalım, toplamsal özdeş eleman olan 0 sayısının çarpımsal tersi yoktur. Onu hariç tutmamızın sebebi budur.

8. İşte ispatı. p asal sayı olmak üzere, 1 ile p-1 arasındaki bir a doğal sayısını alalım. a sayısını bu aralıktaki tüm diğer b sayıları ile çarpalım ve mod p aritmetiğinde sonucu bulalım. İki sütunlu bir tablo oluşturalım: İlk sütunda b sayısı, ikinci sütunda da mod p aritmetiğinde a·b yer alsın.

Örneğin, eğer $p = 5$ ve $a = 2$ ise, şöyle bir tablo karşımıza çıkar:

1	2
2	4
3	1
4	3

1, 2, 3, 4 sayılarının her birinin sağ sütunda sadece bir kez karşımıza çıktığını görüyoruz. 2 ile çarptığımızda yine aynı sayı kümesini elde ederiz ama sıraları belirli bir biçimde değişir. Örneğin, 1 sayısı üçüncü satırda gözükmektedir. Bu, 3 ile 2'yi çarptığımızda, mod 5 aritmetiğinde 1 sayısını elde ettiğimiz anlamına gelir. Diğer bir deyişle, mod 5 aritmetiğinde 2'nin tersi 3'tür.

Bu olgu genelde geçerlidir: Herhangi bir p asal sayısı ve 1, 2, ..., p-1 listesindeki herhangi bir a sayısı için yukarıdaki gibi bir tablo oluşturursak 1, 2, ..., p-1 sayılarının her biri sağ sütunda sadece bir kez gözükecektir.

Bunu yine "olmayana ergi" yöntemini kullanarak ispatlayalım: Böyle bir durumun olmadığını varsayalım. Bu durumda, 1, 2, ..., p-1 kümesindeki sayılardan biri (n olsun), sağ sütunda en az iki kez karşımıza çıkmalıdır. Bu ise 1, 2, ..., p-1 kümesinden iki sayının (c_1 ve c_2 diyelim ve $c_1 > c_2$ olsun) şu koşulu sağlaması gerekir:

$$a \cdot c_1 = a \cdot c_2 = n \qquad (\text{mod } p).$$

Fakat bu durumda,

$$a \cdot c_1 - a \cdot c_2 = a \cdot (c_1 - c_2) = 0 \qquad (\text{mod } p)$$

olur. Buradaki son formül, $a \cdot (c_1 - c_2)$'nin p ile bölünebilir olduğu anlamına gelir. Fakat bu imkânsızdır çünkü p bir asal sayıdır ve hem a hem de $c_1 - c_2$, $\{1, 2, ..., p-1\}$ kümesinde yer almaktadır.

Tablomuzun sağ sütununda, 1, 2, ..., p-1 sayılarının her birinin sadece bir kere karşımıza çıkacağı sonucuna varırız. Fakat bu sayılardan tam olarak p-1 tane bulunduğu ve tablomuzda aynı sayıda (p-1) satır olduğu için, bunu mümkün kılan tek yol, her bir sayının sadece bir kere yer almasıdır. Ancak bu durumda, 1 sayısının sağ sütunda olması ve sadece bir kere yer alması gerekir. Sol sütunda yer alan ilgili sayı b olsun. Fakat bu durumda,

$$a \cdot b = 1 \qquad (\text{mod } p)$$

olur.

Böylece ispatımız tamamlanmış oldu.

9. Örneğin, 5 elemanlı sonlu cisimde 4'ü 3'e bölebiliriz:

$$4/3=4\cdot 3^{-1}=4\cdot 2=8 \pmod 5$$
$$=3 \pmod 5$$

(Burada 2'nin mod 5 aritmetiğinde 3'ün çarpımsal tersi olduğu gerçeğinden hareket ettik.)

10. Mutlak değeri 1'den küçük olan herhangi bir a sayısı için şu denklemin geçerli olması durumunu inceleyelim:

$$1+a+a^2+a^3+a^4+\ldots=\frac{1}{1-a}.$$

Bunu, her iki tarafı $1-a$ ile çarparak ispatlamak gayet kolaydır. Bu özdeş elemanı kullanarak ve a yerine $(q+q^2)$ koyarak, Fibonacci sayıları için üretici fonksiyonu yeniden yazabiliriz:

$$q\,(1+(q+q^2)+(q+q^2)^2+(q+q^2)^3+\ldots)$$

ve bu

$$\frac{q}{1-q-q^2}$$

ifadesine eşit olacaktır. Ardından, $1-q-q^2$'yi doğrusal çarpanlarına ayırırsak şu ifadeyi elde ederiz:

$$\frac{q}{1-q-q^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,q\right)^{-1}-\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\,q\right)^{-1}\right)$$

Yukarıdaki özdeşliği, $a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}q$ ile tekrar kullanacak olursak üretici fonksiyonumuzda q^n teriminin önündeki katsayının (F_n)

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

olduğunu buluruz. Böylece, n'inci Fibonacci sayısı için daha öncekilerden bağımsız kapalı bir formül elde etmiş bulunuyoruz.

Formülde karşımıza çıkan $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sayısına *altın oran* (golden ratio) adı verilir. Yukarıdaki formülden faydalanarak, n değeri büyüdükçe,

F_n / F_{n-1} oranının altın orana yaklaştığı görülebilir. Altın oran ve Fibonacci sayılarına dair daha fazla bilgi için bkz. Mario Livio, *The Golden Ratio*, Broadway, 2003.

11. Burada, şu eserdeki anlatımdan faydalandım: Richard Taylor, "Modular arithmetic: driven by inherent beauty and human curiosity", The Letter of the Institute for Advanced Study, Yaz 2012, s. 6–8. Değerli yorumlarından ötürü Ken Ribet'e teşekkür ederim. André Weil'in kitabına (*Dirichlet Series and Automorphic Forms*, Springer-Verlag, 1971) göre, bu ünitede ele aldığımız üçüncü dereceden denklemler, Robert Fricke'nin ardından John Tate tarafından ortaya konmuştur.
12. Bu grup, $SL_2(\mathbb{Z})$ adı verilen grubun "kongrüans altgrupları"ndan (congruence subgroups) biridir. Söz konusu grup, tam sayılı katsayılara sahip 2x2 matrislerden oluşur ve determinantı 1'dir. Yani, $ad-bc=1$ koşulunu sağlayan,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

biçimindeki tam sayı dizileridir. Matrislerin çarpımı standart bir formülle bulunur:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

Bu noktada; sanal kısımları pozitif olan bir τ karmaşık sayısı için, birim dairenin içindeki herhangi bir q karmaşık sayısının $e^{2\pi\tau\sqrt{-1}}$ biçiminde yazılabildiğini belirtelim, burada y>0'dır (15. Bölüm'ün 12. sonnotuna bakınız). q sayısı, τ tarafından belirlenir ve bunun tersi de doğrudur. Dolayısıyla, $SL_2(\mathbb{Z})$ grubunun q üzerindeki etkisini τ üzerinde karşılık gelen etkisini kullanarak tanımlayabiliriz. τ üzerindeki etkisini şu formül verir:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

$SL_2(\mathbb{Z})$ grubu (daha açık ifade etmek gerekirse, I özdeş matrisini ve $-I$ matrisini içeren iki elemanlı altgrup ile bölümü), Öklid olmayan

belirli bir metrik ile donatılmış dairenin (Poincaré daire modeli olarak da bilinir) simetrilerinin grubudur. Fonksiyonumuz, "ağırlığı 2" olan bir modüler formdur. Bu şu anlama gelir: Eğer kongrüans altgrubunun daire üzerindeki etkisini $(c\tau+d)^2$ çarpanı ile çarparak düzeltirsek, fonksiyonumuz $SL_2(\mathbb{Z})$ kongrüans altgrubunun daire üzerinde yukarıda verilen etkisi altında değişmeden kalır.

Örneğin, şu makaleyi inceleyebilirsiniz: Henri Darmon, "A proof of the full Shimura–Taniyama–Weil conjecture is announced", Notices of the American Mathematical Society, Cilt 46, Aralık 1999, s. 1397-1401. Esere şu adresten ulaşılabilir: http://www.ams.org/notices/199911/comm-darmon.pdf.

13. Bu resim, Lars Madsen tarafından yapılmıştır ve kendisinin izni ile yayımlanmıştır. Ian Agol'e bu resmi bana gösterdiği ve yaptığımız faydalı tartışmalar için teşekkür ederim.
14. Örneğin, bakınız: Neal Koblitz, *Elliptic Curves in Cryptography*, Mathematics of Computation, Cilt 49, 1987, s. 203–209;
I. Blake, G. Seroussi ve N. Smart, *Elliptic Curves in Cryptography*, Cambridge University Press, 1999.
15. Bu, bazı sonlu sayıda p asal sayıları hariç genellikle doğrudur. Üçüncü dereceden denkleme ve modüler forma eklenen bir çift değişmez vardır ki bunlara sırasıyla şef (conductor) ve seviye (level) adı verilir ve bu değişmezler bu eşleme altında da korunurlar. Örneğin ele aldığımız üçüncü dereceden denklemde, her ikisi de 11'e eşittir. Burada gördüğümüz her modüler formun sıfır sabit terimi bulunduğunu belirtmek isterim; q'nun önündeki b_1 katsayısı 1'e eşittir ve $n>1$ için tüm diğer b_n katsayıları da mod b_p aritmetiğinde karşılık geldikleri p asal sayıları tarafından belirlenir.
16. Yani eğer a, b ve c, n tek asal sayı iken Fermat denklemini $(a^n+b^n=c^n)$ çözüyorsa, —Yves Hellegouarch ve Gerhard Frey'i takip ederek— üçüncü dereceden

$$y^2 = x(x-a^n)(x+b^n)$$

denklemini ele alalım. Ken Ribet (Frey'in bir tavsiyesine uyarak ve

Jean-Piere Serre'in ulaştığı bazı kısmi sonuçlarından hareketle), bu denklemin Shimura-Taniyama-Weil sanısını sağlayamadığını ispat etti. n=4 durumuyla birlikte (ki aslında Fermat tarafından ispatlanmıştı) bu, Fermat'nın Son Teoremi'ni ima etmektedir. Gerçekten de $n>2$ koşulunu sağlayan herhangi bir tam sayı; m 4'e eşit ya da tek asal sayı olmak üzere, $n=mk$ biçiminde yazılabilir. Dolayısıyla, bu tür m değerleri için Fermat'nın denkleminin çözümünün bulunmuyor oluşu, tüm $n>2$ değerleri için de bulunmadığı anlamına gelmektedir.

17. Goro Shimura, "Yutaka Taniyama and his time. Very personal recollections", Bulletin of London Mathematical Society, Cilt 21, 1989, s. 193.
18. A.g.e., s. 190.
19. Sanının zengin tarihine dair bilgi edinmek için şu eserin 1302-1303'üncü sayfalarındaki dipnota bakınız: Serge Lang, "Some history of the Shimura–Taniyama conjecture", Notices of the American Mathematical Society, Cilt 42, 1995, s. 1301–1307. Esere çevrim içi ulaşmak için: http://www.ams.org/notices/199511/forum.pdf.

9. Bölüm: Reşid Taşı

1. *The Economist*, 20 Ağustos 1998, s. 70.
2. Bu kitapta kullanılan Riemann yüzeyi resimleri, Stan Wagon'un nezaket göstererek sağladığı kod kullanılarak, *Mathematika®* yazılımı ile oluşturulmuştur. Ayrıntılar için Wagon'un kitabını inceleyebilirsiniz: Stan Wagon, *Mathematica® in Action: Problem Solving Through Visualization and Computation*, Springer-Verlag, 2010.
3. Bu tam bir tanım sayılmaz ama gerçel sayılar için doğru bir algı sağlayabilir. Eksiksiz bir tanım için, tüm gerçel sayıları rasyonel sayıların yakınsayan bir dizisinin limiti olarak düşünmeliyiz (Cauchy dizisi olarak da bilinir); örneğin, $\sqrt{2}$'nin sonsuz ondalık açılımının kısaltılması, bu tür bir dizi oluşturur.
4. Bunu yapmak için, çember üzerinde bir noktayı işaretleyin ve çemberi çizgi üzerindeki 0 noktasına dokunacak şekilde çizginin üzerine

koyun. Daha sonra, çember üzerindeki işaretli nokta tekrar çizgiye değene kadar çemberi sağa yuvarlayın (bunun için çemberin bir tam tur atması gerekir). Çember ve çizgi arasındaki bu temas noktası, π'ye karşılık gelen nokta olacaktır.

5. Karmaşık sayıların (ve diğer sayı sistemlerinin) geometrisi, şu eserde güzel bir biçimde açıklanmıştır: Barry Mazur, *Imagining Numbers*, Picador, 2004.
6. Daha açık söylemek gerekirse simidin yüzeyini bir nokta eksik olarak oluşturduk. Bu nokta, x ve y'nin sonsuza gittiği "sonsuz çözüme" karşılık gelmektedir.
7. g cinsinden bir Riemann yüzeyi elde etmek için, denklemin sağ tarafına x'in 2g+1'inci dereceden bir polinomunu koymalıyız.
8. Cebir ile geometri arasındaki bağlantı, René Descartes'ın ilk olarak, 1637'de basılan *Discours de la Méthode* isimli kitabının eklerinden biri olan *La Geométrie*'de yer verdiği eşsiz bir içgörüsüydü. Descartes'ın yöntemi hakkında E.T. Bell şunları yazmıştı: *"Yönteminin asıl gücü şimdi anlaşılıyor. İstenilen ya da önerilen herhangi bir karmaşıklık derecesindeki denklemlerle başlıyor ve bunların cebirsel ve analitik özelliklerini geometrik olarak yorumluyoruz... Bundan böyle cebir ve analiz, 'uzay' ve onun 'geometri'sinin haritasız denizlerinde bizim kılavuzlarımız."* (E.T. Bell, *Men of Mathematics*, Touchstone, 1986, s. 54.) Bununla birlikte, Descartes'ın yöntemi gerçel sayılardaki denklemlerin çözümüne uygulanırken, bizim bu bölümde sonlu cisimler ve karmaşık sayılardaki çözümlerle ilgilendiğimize dikkat edin.
9. Örneğin 5. Bölüm'de, üçüncü dereceden $y^2+y= x^3-x^2$ denkleminin mod 5 aritmetiğinde dört çözümü olduğunu gördük. Dolayısıyla, basitçe ifade etmek gerekirse 5 elemanın sonlu cismi üzerinde buna karşılık gelen eğrinin dört noktası vardır. Ama aslında daha fazla yapı bulunur çünkü 5 elemanlı sonlu cismin çeşitli genişlemelerindeki değerlere sahip çözümleri de değerlendirebiliriz; örneğin 14. Bölüm'ün 8. sonnotunda ele aldığımız $x^2= 2$ denkleminin çözümlerini ekleyerek elde edilen alan gibi. Bu genişletilmiş cisimlerin n = 2, 3, 4, ..., için 5^n

elemanı vardır ve böylece bu sonlu cisimlerdeki değerlerin çözümleri için bir hiyerarşi elde etmiş oluruz.

Üçüncü dereceden denklemlere karşılık gelen eğrilere "eliptik eğriler" (elliptic curves) adı verilir.

10. *The Bhagavad-Gita*, "Krishna's Counsel in Time of War", İngilizceye çeviren: Barbara Stoler Miller, Bantam Classic, 1986.

Weil'in, 1930'ların başında Hindistan'da iki yıl geçirdiğini ve Hindu dininden etkilendiğini itiraf etmesi ilginçtir.

11. Örneğin, bakınız: Noel Sheth, *Hindu Avatāra and Christian Incarnation: A comparison*, Philosophy East and West, Cilt 52, No. 1, s. 98–125.
12. André Weil, *Collected Papers*, Cilt 1, Springer-Verlag, 1979, s. 251 (yazarın çevirisi).
13. A.g.e., s. 253. Bunun ardında yatan fikir, sonlu cisim üzerindeki bir eğri verildiğinde, üzerindeki rasyonel fonksiyonlar adı verilen yapıları değerlendirmekti. Bu fonksiyonlar, iki polinomun oranıdır. (Bu tür bir fonksiyonun eğrinin paydadaki polinomun sıfır olduğu her noktasında bir "kutup" —yani değeri tanımsız bir nokta— bulunur.) Verilen bir eğri üzerindeki tüm rasyonel fonksiyonların kümesinin rasyonel sayılar kümesindeki ya da 8. Bölüm'de ele aldıklarımıza benzeyen daha genel sayı cisimlerindeki özelliklerine benzediği görülmüştür.

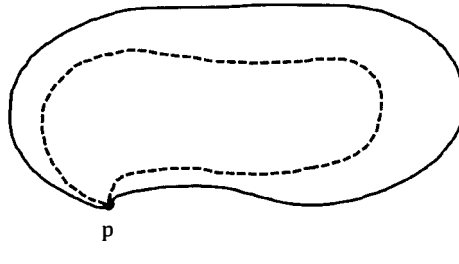
Bu noktayı biraz daha açık hâle getirmek için, Riemann yüzeyleri üzerindeki rasyonel fonksiyonları ele alalım; benzerlik hâlâ geçerli olacaktır. Örneğin bir küreyi ele alalım. Stereografik izdüşümü kullanarak, küreyi bir nokta ile karmaşık düzlemin bir birleşimi olarak görebiliriz (ekstra noktanın sonsuzu gösterdiğini düşünebiliriz). Karmaşık düzlem üzerindeki koordinatı $t = r + s\sqrt{-1}$ ile gösterelim. Bu durumda, katsayıları karmaşık sayı olan her bir $P(t)$ polinomu, düzlem üzerindeki bir fonksiyondur. Bu polinomlar, sayı teorisinde gördüğümüz tam sayıların bir benzeridir. Küre üzerindeki bir rasyonel fonksiyon, ortak çarpanı olmayan iki polinomun oranıdır: $P(t)/Q(t)$. Bu rasyonel fonksiyonlar, ortak çarpanı olmayan tam sayıların m/n biçimindeki oranı olan rasyonel sayıların bir benzeridir. Aynı şekilde, daha genel

bir Riemann yüzeyi üzerindeki rasyonel fonksiyonlar da, daha genel bir sayı cisminin elemanlarının benzeridir.

Bu benzetmenin gücü şunda yatmaktadır: Sayı cisimleri hakkındaki sonuçların çoğu için, sonlu cisimler üzerindeki eğrilerdeki rasyonel fonksiyonlar için geçerli benzer sonuçlar bulunur ve bunun tersi de doğrudur. Bazen bunlardan biri için belirli bir ifadeye odaklanmak ve/veya onu ispatlamak daha kolaydır. Bu durumda, benzerlik bize benzer bir ifadenin doğru olup olamayacağını söyleyebilir. Bu, Weil ve diğer matematikçilerin yeni bulgular üretmek için kullandığı araçlardan biri olmuştur.

14. A.g.e., s. 253. Burada, Notices of the American Mathematical Society, Cilt 52, 2005, s. 340'da yayımlanan Martin H. Krieger çevirisini kullanıyorum.
15. Bernard Dwork, Alexander Grothendieck ve Pierre Deligne tarafından ispatlanan üç tane Weil varsayımı vardı.
16. Bu tanımda bir laf kalabalığı var. Bunu açıklamak için, aşağıdaki resimde gösterilen, düzlem üzerinde yer alan ve biri düz diğeri kesikli çizgilerle gösterilen iki yolu ele alalım. Bunlardan birinin kırılmadan ve süreklilik arz edecek şekilde diğerinin biçimini alabileceği açıkça görülüyor. Bu şekilde diğerine dönüşebilen iki kapalı yolun eşit olduğunu kabul etmek makul ve ekonomiktir. Eğer bunu yaparsak gruptaki eleman sayısını ciddi biçimde azaltırız.

Bu kural aslında 5. Bölüm'de örgü gruplarının tanımında kullandığımız kurala benzemektedir. Orada da ipleri kesip birleştirmeden bir diğerine dönüştürülebilen eşit iki örgüden bahsetmiştik.

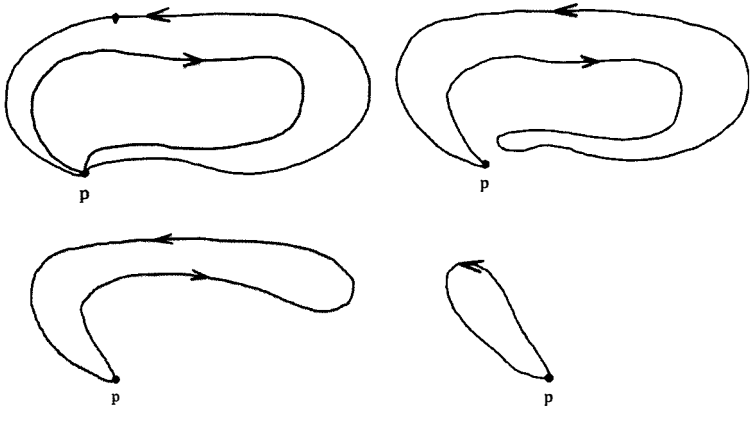


Böylece, Riemann yüzeyimizin temel grubunu, elemanları P noktasında başlayan ve biten kapalı yollar olan grup olarak tanımlarız; buradaki ilave şart da biri diğerine sürekli bir şekilde dönüştürülebilen yolları eşitlememizdir.

Eğer Riemann yüzeyimiz bağlantılı ise —ki bizim başından beri kabul ettiğimiz durum budur— P referans noktasını seçmeye gerek kalmaz: Farklı P referans noktalarına atanan temel gruplar, birbirleri ile bire bir eşleme hâlinde olacaktır (daha kesin ifade etmek gerekirse birbirlerine "izomorfik" olacaklardır).

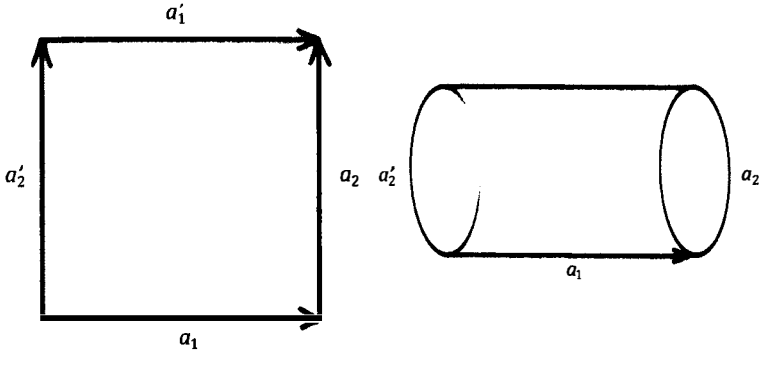
17. Özdeş eleman, "sabit yol" (constant path) olacaktır. İşaretli P noktasını asla terk etmez. Aslında her bir kapalı yolu bir parçacığın aynı P noktasında başlayıp biten gidimizi olarak düşünmek öğretici olabilir. Sabit yol, parçacığın P noktasında kalan gidimizidir. Herhangi bir yola sabit yol eklendiğinde, ana metinde izah edildiği anlamda, başlangıçtaki yola geri döneriz.

Verilen bir yolun ters yolu aynı yol olacaktır ama ters yönde uzanır. Tersi olup olmadığını kontrol etmek için bir yolu tersi ile toplayalım. Aynı rotayı iki kere fakat ters doğrultularda kat eden yeni bir yol elde ederiz. Bu yeni "çifte" yolu, süreklilik arz edecek biçimde sabit yola dönüştürebiliriz. İlk olarak, iki yoldan birini hafifçe çekeriz. Ortaya çıkan yol, aşağıdaki resimlerde gösterildiği üzere, bir noktada büzülebilir.



18. Alternatif olarak, 5. Bölüm'ün 10. sonnotunda değindiğimiz üzere, B_n örgü grubu, n ayrık köklü n'inci dereceden monik polinomların uzayının temel grubu olarak görülebilir. Referans noktası olarak P'yi, kökleri 1,2, ..., n olan $(x\text{-}1)(x\text{-}2)...(x\text{-}n)$ polinomunu seçiyoruz. (Polinomun kökleri, örgümüzün "çivi"leridir.)
19. İki yolun birbirleri ile yer değiştirdiğini görmek için, simidin dış yüzeyinin karenin (dört köşeli çokgen) ters kenarlarını yapıştırarak elde edilebileceğini gözleyelim. İki yatay kenarı (a_1 ve a'_1) birbirine yapıştırdığımızda, bir silindir elde ederiz.

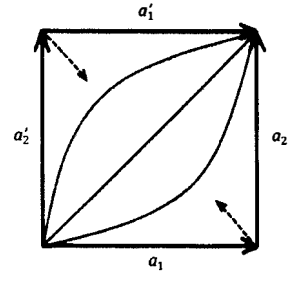
    Silindirin karşı uçlarındaki (ilk yapıştırmadan sonra karenin diğer iki dik kenarının (a_2 ve a'_2) olduğu yer) çemberleri birbirine yapıştırdığımızda, simidin dış yüzeyini elde ederiz. Bu durumda, a_1 ve a_2 kenarlarının simidin dış yüzeyi üzerindeki iki bağımsız kapalı yol hâline geldiğini görüyoruz. Simidin dış yüzeyi üzerinde, dört köşenin her birinin aynı noktayı temsil ettiğine ve böylece bu iki yolun kapalı hâle geldiğine dikkat edin (simidin dış yüzeyi üzerinde aynı P noktasında başlayıp biter). Ayrıca, $a_1 = a'_1$ çünkü onları birbirlerine yapıştırdık ve benzer sebeple, $a_2 = a'_2$.



Kare üzerinde önce a_1 ve sonra a_2 yollarını gidersek bu, bizi bir köşeden çaprazındaki köşeye götürecektir. Ortaya çıkan yol $a_1 + a_2$'dir. Ama bu köşeler arasında farklı bir yol üzerinden de gidebiliriz: önce a'_2 ve sonra a'_1 (a_1 ile aynıdır). Ortaya çıkan yol $a'_2 + a'_1$ yoludur. Karenin

karşılıklı kenarları yapıştırınca, a'_1 kenarı a_1 kenarı hâline gelirken, a'_2 kenarı da a_2 hâline gelir. Bu yüzden, $a'_2 + a'_1 = a_2 + a_1$.

Hem $a_1 + a_2$ hem de $a_2 + a_1$'in köşegen yolu (zıt köşeleri birbirine bağlayan düz çizgi) hâline dönüştürülebileceğini gözlemleyebiliriz. Bu işlem aşağıdaki şekilde gösterilmiştir (kesikli çizgiler, her iki yolun da nasıl dönüştürüldüğünü göstermektedir).



Bu, $a_1 + a_2$ ve $a_2 + a_1$ yollarının simidin dış yüzeyinin temel grubunda aynı elemanını meydana getirdiği anlamına gelir.

$$a_1 + a_2 = a_2 + a_1$$

olduğunu ispatlamış bulunuyoruz.

Bu, simidin dış yüzeyinin temel grubunun basit bir yapıda olduğu anlamına gelir: Elemanlarını $M \cdot a_1 + N \cdot a_2$ biçiminde ifade edebiliriz. Buradaki a_1 ve a_2, ana metnin 150. sayfasındaki resimde gösterilen simidin dış yüzeyi üzerinde yer alan iki çemberdir. M ve N değerleri de birer tam sayıdır. Temel grupta gerçekleşen toplama işlemi, bu ifadelerin olağan toplama işlemi ile örtüşmektedir.

20. Cinsi (genus) pozitif g (yani g adet deliği) olan Riemann yüzeyinin temel grubunu tanımlamanın en kolay yolu yine onu bir çokgenin karşılıklı kenarlarını yapıştırarak elde edilebileceğimizin farkına varmaktır ki bu durumda $4g$ köşesi olacaktır. Örnek olarak, bir oktagonun (sekiz köşeli çokgen) karşılıklı kenarlarını birbirine yapıştıralım. Bu durumda, karşılıklı dört kenar vardır ve her çiftteki kenarları tanımlarız. Bu yapıştırma işleminin sonucunu hayal etmek, simidin dış yüzeyi örneğindekinden daha zordur ama cinsi iki olan bir Riemann yüzeyi (Danimarka çöreğinin yüzeyi) elde edileceği biliniyor.

Bu, simidin dış yüzeyinin temel grubunu tanımlamak için kullandığımız yolla aynı şekilde genel bir Riemann yüzeyinin temel grubunu tanımlamak için de kullanılabilir. Simidin dış yüzeyi örneğinde olduğu gibi, çokgenin ardışık $2g$ kenarı boyunca yolları izleyerek, cinsi g olan Riemann yüzeyinin temel grubunda $2g$ adet eleman oluşturuyoruz. (Kalan $2g$ adet kenarın her biri, bunlardan biri tarafından tanımlanacaktır.) Bunları $a_1, a_2, ..., a_{2g}$ biçiminde gösterelim. Bunlar Riemann yüzeyimizin temel grubunu üreteceklerdir; öyle ki bu grubun elemanlarından herhangi biri, bunları toplayarak (muhtemelen birkaç defa) elde edilebilecektir. Örneğin $g=2$ için şu elemanımız bulunuyor: $a_3+2a_1+3a_2+a_3$. (Fakat bunu $2a_3+2a_1+3a_2$ biçiminde yazamayacağımıza dikkat edin; zira a_3, a_2 ve a_1 ile yer değiştiremez; bu yüzden en sağ tarafta yer alan a_3'ü sola taşıyamayız.)

Simidin dış yüzeyi örneğindekine benzer biçimde, çokgenimizin karşılıklı kenarlarını iki farklı biçimde bağlayan yolu ifade ederek, simidin dış yüzeyi örneğindeki değişmelilik (commutativity) bağıntısını genelleyen bir bağıntı elde ederiz:

$$a_1+a_2+_+a_{2g-1}+a_{2g}=a_{2g}+a_{2g-1}+_+a_2+a_1.$$

Bu aslında, bu elemanlar arasındaki tek bağıntıdır, dolayısıyla temel grubun kısa bir tanımını elde ederiz: $a_1, a_2, ..., a_{2g}$ tarafından oluşturulur ve yukarıdaki bağıntıya tabidir.

21. Bunu daha iyi açıklayabilmek için, yukarıda 13. sonnotta gördüğümüz anlamda, Riemann yüzeyimizdeki tüm rasyonel fonksiyonları ele alalım. Bunlar rasyonel sayılara benzer. İlgili Galois grubu, $x^2=2$ gibi bir polinom denkleminin çözümlerinin rasyonel sayılara eklenmesiyle elde edilen sayı cisminin simetri grubu olarak tanımlanır. Benzer şekilde, polinom denklemlerinin çözümlerini X Riemann yüzeyi üzerindeki rasyonel fonksiyonlara ekleyebiliriz. Bunu yaptığımızda, X'in "örtme"si (covering) olan bir başka X' Riemann yüzeyi üzerinde rasyonel fonksiyonlar elde edeceğimiz anlaşılmıştır; bu ise, sonlu liflere sahip $X' \to X$ fonksiyonumuzun bulunduğu anlamına gelir. Bu durumda Galois

grubu, X'in tüm noktalarını olduğu gibi bırakan X''in simetrilerinden oluşur. Diğer bir deyişle bu simetriler, $X' \to X$ fonksiyonunun lifleri boyunca etkilidirler.

Bu noktada, X Riemann yüzeyi üzerinde X'in bir P noktasında başlayıp biten kapalı bir yol alırsak P üzerindeki lifte yer alan X''in her bir noktasını alıp, bu yol boyunca takip edebiliriz. Eğer geri gelecek olursak P üzerindeki lifin genellikle farklı bir noktasına varırız; dolayısıyla, bu lifin bir dönüşümünü elde etmiş oluruz. Bu, 15. Bölüm'de daha ayrıntılı olarak göreceğimiz monodromi (monodromy) olgusudur. Lifin bu dönüşümü bizi Galois grubunun bir elemanına götürebilir. Böylece, temel grup ile Galois grubu arasında bir bağlantı elde etmiş oluruz.

10. Bölüm: İlmiğin Parçası Olmak

1. Buradaki "özel" kelimesi, yönlerini koruyan ortogonal dönüşümleri ifade etmektedir (bunlar tam olarak kürenin dönme hareketlerine karşılık gelir). Yönünü korumayan (ve bu yüzden de $SO(3)$'e ait olmayan) ortogonal dönüşüme, koordinat düzlemlerinin birine göre yansıma durumu örnek verilebilir. $SO(3)$ grubu, 2. Bölüm'de kuarklarla bağlantılı olarak değindiğimiz $SU(3)$ grubu (3-boyutlu uzayın özel üniter grubu) ile yakından ilişkilidir. $SU(3)$ grubu, $SO(3)$ grubuna benzer biçimde tanımlanır; *gerçel* 3-boyutlu uzayın yerine *karmaşık* 3-boyutlu uzayı koyarız.
2. Çemberin tek boyutlu olduğunu görmenin bir diğer yolu, 9. Bölüm'de değindiğimiz üzere, $x^2 + y^2 = 1$ denkleminin gerçel çözümlerinin kümesi olarak düşünülebileceğini hatırlamaktır. Dolayısıyla çember, düzlem üzerinde bir denklem ile kısıtlanan noktaların kümesidir. Bu yüzden, çemberin boyutu, düzlemin boyutundan (2) denklemlerin sayısının (1) çıkartılması ile bulunur ve bire eşittir.
3. Bu kısa metnin Duchamp'ın notlarının yer aldığı *À l'Infinitif* isimli kitaptan alıntılandığı şu eserde belirtilmiştir: Gerald Holton, "Henri

Poincaré, Marcel Duchamp and innovation in science and art", Leonardo, Cilt 34, 2001, s. 130.

4. Linda Dalrymple Henderson, *The Fourth Dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art*, MIT Press, 2013, s. 493.
5. Gerald Holton, a.g.e, s. 134.
6. Charles Darwin, *Autobiographies*, Penguin Classics, 2002, s. 30.
7. Daha fazla ayrıntı için, bakınız örneğin: Shing-Tung Yau ve Steve Nadis, *The Shape of Inner Space*, Basic Books, 2010.
8. Bu grubun boyutunun $n(n-1)/2$'ye eşit olduğu ortaya çıkmıştır. Diğer bir deyişle, bu grubun bir elemanını tanımlamak için, $n(n-1)/2$ bağımsız koordinata ihtiyacımız vardır (ana metinde gördüğümüz üzere, $n=3$ olduğunda $3(3-1)/2=3$ koordinata ihtiyaç duyarız).
9. Matematiksel açıdan, her ilmik çemberden üç boyutlu uzaya giden belli bir "fonksiyonun" görüntüsü olarak düşünülebilir. Yani, çember üzerindeki her bir φ noktasına üç boyutlu uzaydaki $f(\varphi)$ noktasını atayan bir kural olarak görülebilir. Biz sadece "pürüzsüz" fonksiyonları ele alıyoruz. Basitçe ifade etmek gerekirse bu, ilmiğin keskin açıları ve köşeleri bulunmadığı anlamına gelir ki ana metindeki resimde gösterilen de bu türden bir ilmiktir.

   Daha genel ifade etmek gerekirse, S manifoldundan M manifolduna giden bir fonksiyon, S'deki her bir s noktasına M'de yer alan ve s'in görüntüsü (image) adı verilen noktayı atayan bir kuraldır.
10. Örneğin bakınız: Brian Greene, *The Elegant Universe*, Vintage Books, 2003.
11. Daha açık ifade etmek gerekirse, $SO(3)$'teki bir ilmik, $SO(3)$'ün φ açısı (çember üzerindeki bir koordinat) ile belirlenen elemanlarının $\{f(\varphi)\}$ topluluğudur. $\{g(\varphi)\}$ topluluğu olan ikinci bir ilmik verilsin ve her φ için iki dönme hareketini birleştirerek $f(\varphi) \circ g(\varphi)$ oluşturalım. Bu durumda, $SO(3)$'te başka bir ilmik olan $\{f(\varphi) \circ g(\varphi)\}$ topluluğunu elde ederiz. Böylece, $SO(3)$'teki her bir ilmik çifti ile üçüncü bir ilmik üretiriz. Bu işlem, ilmik grubundaki çarpma işleminin kuralıdır. İlmik grubunun özdeş elemanı, $SO(3)$'ün özdeş elemanı üzerinde yoğunlaşan ilmiktir; yani $f(\varphi)$,

tüm φ değerleri için $SO(3)$'ün özdeş elemanıdır. $\{f(\varphi)\}$ ilmiğinin tersi, $\{f(\varphi)^{-1}\}$ ilmiğidir. Gruba dair tüm aksiyomların karşılandığı kolaylıkla görülebilir. Dolayısıyla, $SO(3)$'ün ilmik uzayı gerçekten de bir gruptur.

12. Bunu görebilmek için, daha basit bir örnek olarak düzlemin ilmik uzayını ele alalım. Düzlemin iki koordinatı vardır: x ve y. Dolayısıyla, düzlemdeki bir ilmik, $x(\varphi)$ ve $y(\varphi)$ koordinatlı düzlem üzerinde her biri 0 ile 360 arasındaki φ açısını kapsayan noktaların topluluğu ile aynıdır. (Örneğin, $x(\varphi) = cos(\varphi)$ ve $y(\varphi) = sin(\varphi)$ formülleri belirli bir ilmiği tanımlar: yarıçapı 1 olan ve merkezi orjinde bulunan bir çember.) Dolayısıyla böyle bir ilmiği belirtebilmek için, her bir φ açısı için bir çift olmak üzere sonsuz miktarda sayı çifti $(x(\varphi), y(\varphi))$ içeren bir topluluğu belirtmemiz gerekir. Düzlemin ilmik uzayının sonsuz boyutlu olmasının sebebi budur. Aynı sebepten ötürü, herhangi bir sonlu boyutlu manifoldun ilmik uzayı da sonsuz boyutludur.
13. Şuradan alıntılanmıştır: R. E. Langer, "René Descartes", The American Mathematical Monthly, Cilt 44, No. 8, Ekim 1937, s. 508.
14. Teğet düzlem, bu noktadan geçen tüm düzlemler arasında küreye en yakın olanıdır. Küreye sadece bu tek noktada dokunur; öyle ki düzlemi çok az bile oynatsak (küre üzerindeki aynı sabit noktadan geçme özelliğini koruyacak şekilde), küreye daha fazla noktada temas eden bir düzlem elde ederiz.
15. Tanımı gereği, verilen bir Lie grubunun Lie cebiri, düz uzaydır (bir çizgi, düzlem, vb). Bu düz uzay Lie grubuna, Lie grubunun özdeş elemanına karşılık gelen noktadan geçen tüm diğer düz uzaylardan daha yakın olan uzaydır.
16. Genel bir çemberin özel bir noktası yoktur. Ama *çember grubu*nun vardır: Bu, grubun özdeş elemanı yani çember üzerindeki özel bir noktadır. Bir çemberi grup yapabilmek için bu noktanın belirlenmesi gerekir.
17. Vektör uzayının daha ayrıntılı bir tanımına burada yer verebiliriz:

    n-boyutlu düz bir uzayda bir koordinat sistemi seçtikten sonra, bu uzayın noktalarını gerçel sayılardan oluşan n-liler $(x_1, x_2, ..., x_n)$ olarak tanımlayabiliriz; burada x_i sayıları noktanın koordinatlarını göster-

mektedir. Ayrıca, tüm koordinatların 0'a eşit olduğu özel bir (0,0,...,0) noktası bulunur. Bu nokta başlangıç noktasıdır.

Bu uzayda sabit bir $(x_1, x_2, ..., x_n)$ nokta seçelim. Uzayımızda bulunan herhangi bir nokta olan $(z_1, z_2, ..., z_n)$'i $(z_1+x_1, z_2+x_2, ..., z_n+x_n)$'e gönderen bir simetri tanımlayalım. Geometrik olarak bu simetriyi n-boyutlu uzayımızın başlangıç noktası ile $(x_1, x_2, ..., x_n)$ noktasını birleştiren yönlü aralık doğrultusunda bir kayma olarak düşünebiliriz. Bu simetriye *vektör* adı verilir ve genellikle bu yönlü aralık ile gösterilir. Bu vektörü $\langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$ biçiminde gösterelim. n-boyutlu düz uzayın noktaları ile vektörler arasında bire bir eşleme bulunur. Bu yüzden, sabit koordinat sistemine sahip bir düz uzay, vektörler uzayı olarak düşünülebilir. Bu yüzden ona *vektör uzayı* deriz.

Noktalar yerine vektörler üzerinden düşünmek, vektörlerde iki doğal işlem olmasından dolayı avantaj sağlar. Bunlardan birincisi, bir vektör uzayını bir grup yapan, vektörleri toplama işlemidir. İkinci Bölüm'de açıklandığı üzere, simetriler birleştirilebilir ve bu yüzden de bir grup oluştururlar. Bir önceki paragrafta tanımlanan kayma simetrilerinin (shift symmetries) bileşimi bize vektörleri toplama işlemine dair şu kuralı verir:

$$\langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle + \langle y_1, y_2, ..., y_n \rangle = \langle y_1+x_1, y_2+x_2, ..., y_n+x_n \rangle$$

Vektörlerden oluşan grubun özdeş elemanı $\langle 0,0,...,0 \rangle$'dır. $\langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$ vektörünün toplamsal tersi $\langle -x_1, -x_2, ..., -x_n \rangle$'dir.

Doğal işlemlerden ikincisi, vektörlerin gerçel sayılarla çarpılması işlemidir. Bir $\langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$ vektörünün gerçel k sayısı ile çarpımı, $\langle kx_1, kx_2, ..., kx_n \rangle$ vektörünü verir.

Dolayısıyla bir vektör uzayı iki yapıyı barındırır: toplama (grup olma özelliklerini karşılar) ve sayılar ile çarpılabilme. Bu yapılar doğal özellikleri karşılamak zorundadır.

Bu durumda, herhangi bir teğet uzay bir vektör uzayıdır ve bu yüzden her türlü Lie cebiri de bir vektör uzayıdır.

Yukarıda tanımlanan, gerçel sayılar üzerindeki vektör uzayı olgusudur. Gerçekten de, vektörlerin koordinatları gerçel sayılardır ve

vektörleri gerçel sayılarla çarpabiliriz. Bu tanımda, gerçel sayıların yerine karmaşık sayılar koyarsak karmaşık sayılar üzerindeki vektör uzayı kavramını elde ederiz.

18. Lie cebirinde yapılan işlemler genellikle köşeli parantez ile gösterilir; dolayısıyla, eğer $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ Lie cebirinde (bir önceki sonnotta anlatıldığı üzere bir vektör uzayıdır) iki vektörü gösteriyorsa bu işlemin üzerlerindeki sonucu $[\vec{a},\vec{b}]$ ile gösterilir. Bu işlem şu özellikleri taşır: $[\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{b},\vec{a}]$; $[\vec{a}+\vec{b},c]=[\vec{a},c]+[\vec{b},c]$; k herhangi bir sayı olmak üzere $[k\vec{a},\vec{b}]=k[\vec{a},\vec{b}]$ ve Jacobi özdeşliği adı verilen şu özellik:
$$[[\vec{a},\vec{b}],\vec{c}]+[[\vec{b},\vec{c}],\vec{a}]+[[\vec{c},\vec{a}],\vec{b}]=0$$
19. Üç boyutlu uzayda bulunan $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin çapraz çarpımı $\vec{a}\times\vec{b}$ biçiminde gösterilir, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin bulunduğu düzleme diktir ve uzunluğu, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin boylarının arasındaki açının sinüsü ile çarpımına eşittir. Ayrıca, $\vec{a}$, $\vec{b}$ ve $\vec{a}\times\vec{b}$ vektör üçlüsünün yönü pozitiftir (bu olguyu sağ el kuralı ile de ifade edebiliriz).
20. Örneğin, $SO(3)$ Lie grubunun Lie cebiri, üç boyutlu vektör uzayıdır. Dolayısıyla, $SO(3)$'ün ilmik grubunun Lie cebiri, bu üç boyutlu uzaydaki tüm ilmiklerden oluşur. Üç boyutlu uzayda çapraz çarpım, bu ilmikler üzerinde bir Lie cebiri yapısı verir. Dolayısıyla, iki ilmik verildiğinde bir üçüncüsünü üretiriz ancak ne olduğunu kelimelerle tanımlamak pek kolay değildir.
21. Daha açık ifade etmek gerekirse Kac-Moody cebiri, bir ilmik grubunun Lie cebirinin bir boyutlu uzay kadar genişlemesidir. Daha ayrıntılı bilgi edinmek için şu esere bakabilirsiniz: Victor Kac, *Infinite-dimensional Lie Algebras*, Üçüncü Baskı, Cambridge University Press, 1990.
22. Virasoro cebiri simetrili modellere konform alan teorileri (conformal) adı verilir ve ilk kez Rus fizikçiler Alexander Belavin, Alexander Polyakov ve Alexander Zamolodchikov tarafından 1984 yılında ortaya konmuşlardır. Yaptıkları ufuk açıcı çalışma, Feigin ve Fuchs'un yanı sıra Victor Kac'ın çalışmalarıyla elde edilen bulgulara dayanmaktadır.
23. Bunların en iyi bilineni Wess–Zumino–Witten modelidir. Daha ayrıntılı bilgi edinmek için şu esere bakabilirsiniz: Edward Frenkel ve

David Ben-Zvi, *Vertex Algebras*, İkinci Baskı, American Mathematical Society, 2004.

24. Kuantum alanlarının daha önceki bölümlerde gördüğümüz "sayı cisimleri" ve "sonlu cisimler" ile bir alakası yoktur. Bu, karmaşık matematik terminolojisinin bir diğer örneğidir ama diğer dillerde böyle bir karışıklık yoktur: Örneğin Fransızcada, kuantum alanları için "champs" ve sayı cisimleri ve sonlu cisimler için "corps" ifadeleri kullanılır.

11. Bölüm: Zirvenin Fethi

1. Yapıyı daha açık hâle getirelim: $SO(3)$'ün ilmik grubunun bir elemanını alalım ve bu da $SO(3)$'ün φ açısı (çember üzerindeki bir koordinat) ile belirlenen elemanlarının bir topluluğu $\{g(\varphi)\}$ olsun. Öte yandan, kürenin ilmik uzayının bir elemanı, kürenin φ ile belirlenen noktalarının bir topluluğu $\{f(\varphi)\}$ olsun. Bu tür iki $\{g(\varphi)\}$ ve $\{f(\varphi)\}$ verildiğinde, kürenin ilmik uzayının bir diğer elemanını $\{g(\varphi)[f(\varphi)]\}$ topluluğu biçiminde elde ederiz. Bu, her bir φ değeri için bağımsız olarak kürenin $f(\varphi)$ noktasına $g(\varphi)$ dönme hareketi uyguladığımız anlamına gelir. Böylece $SO(3)$'ün ilmik grubunun her bir elemanının kürenin ilmik uzayının simetrisini meydana getirdiğini görürüz.
2. Bayrak (flag) manifoldun bir noktası bir topluluktur: sabit n-boyutlu uzayda bir çizgi, bu çizgiyi içeren bir düzlem, bu düzlemi içeren bir üç-boyutlu uzay, vb. ve hepsini içeren bir (n-1) boyutlu hiper uzay.

   Bunu, ilk incelediğim izdüşümsel uzaylarla karşılaştıralım: İzdüşümsel uzayın bir noktası, n-boyutlu uzaydaki çizgiden başka bir şey değildir.

   En basit durum olan $n = 2$'de, sabit uzayımız iki boyutludur ve sahip olduğumuz tek seçenek bir çizgidir (sadece tek bir düzlem vardır: uzayın kendisi). Bu durumda bayrak manifold izdüşümsel uzay ile aynıdır ve küre ile çakıştığı anlaşılmıştır. Burada karmaşık uzaydaki (gerçel uzay değil) çizgileri, düzlemleri vs ile n-boyutlu sabit uzayımızın başlangıç noktasından geçenleri ele aldığımızı belirtmekte fayda var.

Bir sonraki örneğimiz $n = 3$ olsun; yani üç boyutlu bir uzaya sahip olalım. Bu durumda izdüşümsel uzay, bu üç boyutlu uzayda yer alan tüm çizgileri içerir ama bayrak manifold çiftlerden oluşur: bir çizgi ve onu içeren bir düzlem (sadece tek bir üç-boyutlu uzay var). Bu durumda, izdüşümsel uzay ile bayrak manifold arasında bir fark vardır. Çizgiyi bayrağın direği ve düzlemi de bayrağın bez kısmı olarak düşünebilirsiniz. Bu yüzden adı "bayrak manifold"dur.

3. Boris Feigin ve Edward Frenkel, "A family of representations of affine Lie algebras", Russian Mathematical Surveys, Cilt 43, No. 5, 1988, s. 221–222.

12. Bölüm: Bilgi Birikimi Ağacı

1. Mark Saul, "Kerosinka: An episode in the history of Soviet mathematics", Notices of the American Mathematical Society, Cilt 46, Kasım 1999, s. 1217–1220.
2. Daha sonradan, kalp doktorları ile işbirliği yapan Gelfand'ın (ürologlarla işbirliği yapan Yakov Isaevich ile aynı sebepten), bu yöntemi tıbbi araştırmalara da başarıyla uyguladığını öğrendim.

14. Bölüm: Bilgeliğin Demetlerini Örmek

1. Vektör uzaylarının tam tanımı, 10. Bölüm'ün 17. sonnotunda verilmişti.
2. Vektör uzaylarının kategorisi durumunda, V_1 vektör uzayından V_2 vektör uzayına olan morfizmalara V_1'den V_2'ye doğrusal dönüşüm (linear transformation) adı verilir. Bunlar V_1'den V_2'ye f fonksiyonları olup, şu özellikleri taşırlar: V_1'deki herhangi iki $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörü için, $f(\vec{a} + \vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$'dir; V_1 'deki herhangi bir $\vec{a}$ vektörü ve k sayısı içinse $f(k \cdot \vec{a}) = k \cdot f(\vec{a})$'dır. Ayrıca belirtilebilecek bir nokta da, verilen bir V vektör uzayından uzayın kendine olan morfizmalar, V'den kendine olan doğrusal dönüşümlerdir. V'nin simetri grupları, tersi olan bu morfizmalardan oluşur.

3. Şu eser incelenebilir: Benjamin C. Pierce, *Basic Category Theory for Computer Scientists*, MIT Press, 1991.
   Joseph Goguen, "A categorical manifesto", Mathematical Structures in Computer Science, Cilt 1, 1991, s. 49–67.
   Steve Awodey, *Category Theory*, Oxford University Press, 2010.
4. Şu eser incelenebilir: http://www.haskell.org/haskellwiki/Category_theory ve buradaki referanslar.
5. Şu eser incelenebilir: Masaki Kashiwara ve Pierre Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Springer-Verlag, 2010.
6. Eğer grup teorisi bakış açısıyla bakarsak asal sayılara göre modüler aritmetiğin bu şaşırtıcı özelliğinin basit bir açıklaması vardır. Sonlu cismin sıfır olmayan elemanlarını düşünelim: 1, 2, ..., p-1. Bunlar, çarpma işlemine göre bir grup oluştururlar. Gerçekten de, çarpma işlemine göre özdeş eleman 1 sayısıdır: Herhangi bir a elemanını 1 ile çarparsak yine a'yı elde ederiz. Ayrıca 8. Bölüm'ün 8. sonnotunda açıklandığı üzere, tüm elemanların tersi vardır: {1, 2, ..., p-1}'deki herhangi bir a elemanı için, mod p aritmetiğinde $a \cdot b = 1$ koşulunu sağlayan bir b elemanı bulunur.

   Bu grubun p-1 elemanı var. N elemanlı *her türlü* sonlu G grubu için geçerli genel bir kural vardır: Bu grubun her a elemanının N'inci kuvveti özdeş elemana (1 ile göstereceğiz) eşittir,

$$a^N = 1.$$

   Bunu ispatlamak için, G grubundaki şu elemanları inceleyelim: $1, a, a^2, \ldots$. G grubu sonlu olduğu için, bu elemanlar ayrık olamaz. Tekrarlamalar olmak zorundadır. k, a^k'yı 1'e ya da $j = 1, \ldots, k\text{-}1$ için a^j'ye eşitleyen en küçük doğal sayı olsun. İkinci durumu ele alalım. a^{-1}, $a \cdot a^{-1} = 1$ koşulunu sağlayacak şekilde, a'nın tersini gösteriyor olsun ve onun j'inci kuvvetini alalım: $a^k = a^j$ denkleminin her iki tarafını da sağdan $(a^{-1})^j$ ile çarpalım. $a \cdot a^{-1}$ ile her karşılaştığımızda yerine 1 koyalım. 1 ile çarpmak sonucu değiştirmediğinden, 1'i çarpımdan her zaman çıkarabiliriz. Böylece, her bir a^{-1}'in a'lardan birini elediğini görürüz. Bu durumda, sol taraf a^{k-j}'ye ve sağ taraf da 1'e eşit olacaktır yani $a^{k-j} = 1$'i

elde ederiz. Fakat k-j, k'den küçüktür ve bu bizim k seçimimizle çelişki arz eder. Dolayısıyla listemizdeki ilk tekrar $a^k = 1$ biçiminde olmalıdır. Böylece, $1, a, a^2, ..., a^{k-1}$ elemanlarının hepsi ayrık olur. Bu ise söz konusu elemanların k elemanlı bir grup oluşturduğu anlamına gelir: $\{1, a, a^2, ..., a^{k-1}\}$. Bu, başlangıçtaki N elemanlı G grubumuzun bir alt grubu ve aynı zamanda G'nin elemanlarının bir alt kümesidir. Öyle ki G'nin elemanlarının söz konusu alt kümesinin herhangi iki elemanının çarpımı yine bu alt kümenin bir elemanını verir; bu alt küme G'nin özdeş elemanını ve içindeki elemanların her birinin tersini de içerir.

Bu noktada, herhangi bir altgrubun elemanlarının sayısının, her zaman için, grubun elemanlarının sayısını böleceği bilinir. Bu ifadeye Lagrange teoremi adı verilir. İspatını size bırakıyorum (ya da isterseniz Google'a başvurun).

Langrange teoremini k elemanlı $\{1, a, a^2, ..., a^{k-1}\}$ altgrubuna uygularsak k'nin G grubunun elemanlarının sayısı olan N'yi bölmesi gerektiğini buluruz. Dolayısıyla, bir m doğal sayısı için $N=km$'dir. Ancak $a^k = 1$ olduğu için, ispatlamak istediğimiz şu denklemi elde ederiz:

$$a^N = (a^k)\cdot(a^k)\cdot ... \cdot(a^k) = 1\cdot 1\cdot ... \cdot 1 = 1$$

Çarpma işlemi üzerinden, $\{1, 2, ..., p\text{-}1\}$ grubuna geri dönelim. p-1 elemanı var. Bu bizim G grubumuz ve dolayısıyla N, p-1'e eşittir. Genel sonucu bu duruma uyguladığımızda, $\{1, 2, ..., p\text{-}1\}$'deki tüm a değerleri için mod p aritmetiğinde a^{p-1}'i elde ederiz. Devamında,

$$a^p = a\cdot a^{p-1} = a\cdot 1 = a \pmod p.$$

En sonda elde ettiğimiz formülün, bir r tam sayısı için x-y= rp iken,

$$x = y \pmod p$$

olmak şartıyla tüm a tam sayıları için geçerli olduğunu kolaylıkla söyleyebiliriz.

Bu, Fermat'nın küçük teoreminin ifadesidir. Fermat bundan ilk kez, bir arkadaşına yolladığı bir mektupta bahseder. "Sana ispatını yollamak isterdim ama korkarım çok uzun."

7. Bu noktaya kadar, p asal sayılı modüler aritmetik işlemlerini ele aldık. Fakat n herhangi bir doğal sayı olmak kaydıyla, mod n aritmetiği için

Fermat'nın küçük teoremine benzer bir ifade bulunduğu anlaşılmıştır. Bunu açıklamak için, 6. Bölüm'de örgü grupları ile bağlantılı olarak değindiğimiz ϕ Euler fonksiyonunu hatırlatmam gerekiyor. (Örgü grubu projemde, örgü gruplarının Betti sayılarının bu fonksiyon cinsinden ifade edildiğini bulmuştum.) $\phi(n)$'in, 1 ile n-1 arasındaki doğal sayıların, n ile aralarında asal olanlarının sayısı olduğunu hatırlayalım; yani n ile ortak böleni (1'den başka) bulunmayan sayılar. Örneğin, eğer n asal sayı ise 1 ile n-1 arasındaki tüm sayılar n ile aralarında asaldır ve bu durumda $\phi(n) = n$-1 olur.

Bir önceki sonnotta ispatladığımız $a^{p-1} = 1 \pmod{p}$ formülünün benzeri şöyledir:

$$a^{\phi(n)} = 1 \qquad (\text{mod } n).$$

Bu formül, herhangi bir n doğal sayısı ve n ile aralarında asal olan herhangi bir a doğal sayısı için geçerlidir. Daha önce izlediğimiz yolla tamamen aynı biçimde ispatlanır: 1 ile n-1 arasında, n ile aralarında asal olan tüm doğal sayıların kümesini alırız. Bunlardan $\phi(n)$ adet bulunur. Bunların çarpma işlemine göre bir grup meydana getirdiklerini rahatlıkla görebiliriz. Böylece, Lagrange teoreminden faydalanarak bu grubun herhangi bir elemanının $\phi(n)$'inci kuvveti özdeş elemana eşittir.

Örnek olarak, n'in iki asal sayının çarpımı olması durumunu ele alalım. Yani p ve q iki ayrık asal sayı olmak üzere, $n = pq$ olsun. Bu durumda, n ile aralarında asal olmayan sayılar ya p ile ya da q ile bölünebilir olacaktır. İlki, $i = 1, \ldots, q$-1 için (bunlardan q-1 tane vardır) pi biçimindedir; ikincisi ise $j = 1, \ldots, p$-1 için (bunlardan p-1 tane vardır) qj biçimindedir. Böylece şunu buluruz:

$$\phi(n) = (n\text{-}1)\text{-}(q\text{-}1)\text{-}(p\text{-}1) = (p\text{-}1)\,(q\text{-}1).$$

Bu durumda, p ve q ile bölünemeyen herhangi bir a doğal sayısı için aşağıdaki denklemi bulabiliriz:

$$a^{(p-1)(q-1)} = 1 \qquad (\text{mod } pq).$$

Bu noktada, herhangi bir a doğal sayısı ve m tam sayısı için formülün doğru olduğunu rahatlıkla görebiliriz:

$$a^{1+m(p-1)(q-1)} = a \pmod{pq}.$$

Bu denklem, en yaygın kullanılan şifreleme algoritmalarından birinin, RSA algoritmasının temelidir (RSA ismi 1977 yılında onu tanımlayan Ron Rivest, Adi Shamir ve Leonard Adleman'ın soyadlarından türetilmiştir). Buna göre, iki asal sayı (p ve q) seçilir (bunları üretecek çok sayıda algoritma bulunur), n de bunların çarpımıdır. n açıklanırken, p ve q asal sayıları gizli tutulur. Bir sonraki adımda, $(p-1)(q-1)$ ile aralarında asal olan bir e sayısı seçeriz. Bu sayı da açıklanır.

Şifreleme işlemi herhangi bir a sayısını (kredi kartı numarası gibi) mod n aritmetiğinde a^e'ye dönüştürür:

$$a \mapsto b = a^e \pmod{n}.$$

a^e'den tekrar a'yı elde etmenin etkin bir yolunun bulunduğu ortaya çıkmıştır. Şöyle ki 1 ile $(p-1)(q-1)$ arasında şu özellikleri sağlayan bir d sayısı buluruz:

$$de = 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$$

Diğer bir deyişle, bir m doğal sayısı için

$$de = 1+m(p-1)(q-1).$$

Yukarıdaki formüle göre şöyle devam ederiz:

$$\begin{aligned} a^{de} \pmod{n} &= a^{1+m(p-1)(q-1)} \pmod{n} \\ &= a \pmod{n}. \end{aligned}$$

Dolayısıyla, $b = a^e$ verildiğinde, başlangıçtaki a sayısını şu şekilde elde edebiliriz:

$$b \mapsto b^d \pmod{n}.$$

Şöyle özetleyebiliriz: n ve e sayılarını açıklıyoruz ama d'yi gizli tutuyoruz. Şifreleme şu formülle yapılıyor:

$$a \mapsto b = a^e \pmod{n}.$$

Bunu herkes yapabilir çünkü e ve n herkes tarafından biliniyor.

Şifreyi şu formülle çözebiliriz:

$$b \mapsto b^d \pmod{n}.$$

Bu eşitliği a^e'ye uygularsak başlangıçtaki a sayısını elde ederiz. Fakat bu işlemi, sadece d'yi bilenler yapabilir.

Bunun güzel bir şifreleme yöntemi olmasının sebebi, kodlanan sayıları yeniden oluşturmamızı sağlayan d değerini bulmak için, $(p-1)(q-1)$ değerini biliyor olmamız gerekmesidir. Fakat bunun için de n'in iki asal böleni olan p ve q değerlerini bilmemiz gerekir. Bu değerler saklı tutulur. Yeterince büyük n değerleri için, bilinen asal çarpanlara ayırma yöntemleriyle p ve q'yu bulmak, güçlü bir bilgisayar ağı desteğiyle bile aylar sürebilir. Örneğin, 2009 yılında bir grup araştırmacı yüzlerce paralel bilgisayar kullanarak, 232 basamaklı bir sayıyı iki yılda çarpanlarına ayırabildi (bakınız: http://eprint.iacr.org/2010/006.pdf). Fakat eğer biri doğal sayıları asal çarpanlarına ayırmanın etkili bir yolunu bulabilirse (örneğin bir kuantum bilgisayar kullanarak) bu şifreleme yöntemini kırmanın bir yolunu bulabilir. Sayıları asal çarpanlarına ayırmak için bu kadar çok araştırma yapılmasının sebebi budur.

8. Rasyonel sayılar söz konusu olduğunda, $x^2 = 2$ biçimindeki denklemlerin rasyonel sayılar arasında çözümlerinin bulunamayabileceğini görmüştük ve bu durumda $\sqrt{2}$ ve $-\sqrt{2}$ gibi çözümler ekleyerek yeni bir sayı sistemi oluşturabiliyorduk. Ayrıca, $\sqrt{2}$ ve $-\sqrt{2}$'nin yer değiştirebilirliğinin de bu sayı sisteminin simetrisini meydana getirdiğini görmüştük.

Benzer şekilde, $x^2 = 2$ ya da $x^3 - x = 1$ gibi değişkeni x olan polinom denklemleri de $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ sonlu cismindeki denklemler olarak değerlendirebiliriz. Bu durumda, bu denklemin söz konusu x sonlu cisim içinde çözülüp çözülemeyeceğini sorabiliriz. Eğer bir çözümü yoksa $\sqrt{2}$ ve $-\sqrt{2}$'yi rasyonel sayılara eklediğimiz gibi, çözümleri bu sonlu cisme ekleyebiliriz. Böylece yeni sonlu cisimler yaratırız.

Örneğin, eğer $p = 7$ ise, $x^2 = 2$ denkleminin 3 ve 4 olmak üzere iki çözümü vardır, çünkü

$$3^2 = 9 = 2 \pmod 7 \quad \text{ve} \quad 4^2 = 16 = 2 \pmod 7.$$

4'ün mod 7 aritmetiğinde -3 olduğuna dikkat ediniz; çünkü $3+4=0 \pmod 7$. Bu durumda, $x^2 = 2$ denkleminin iki çözümü birbirlerinin negatifidir; tıpkı $\sqrt{2}$ ve $-\sqrt{2}$'nin birbirlerinin negatifi olması gibi. Bu pek de şaşırtıcı bir durum değil: $x^2 = 2$ denkleminin iki çözümü

her zaman için birbirinin negatifi olacaktır, çünkü eğer $a^2 = 2$ ise $(-a)^2 = (-1)^2 a^2 = 2$'dir. Bunun anlamı şudur: Eğer $p \neq 2$ ise sonlu cismin kareleri aynı sayıya eşit olan iki elemanı daima olacaktır ve bunlar da birbirinin negatifi olacaktır (eğer $p \neq 2$ ise p mecburen tek olur ve bu durumda $-a$ ile a birbirine eşit olamaz; aksi takdirde p'nin $2a$'ya eşit olması gerekirdi). Dolayısıyla, $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ sonlu cismin 0'a eşit olmayan elemanlarının sadece yarısı bir sayının karesidir.

(Ünlü Gauss karşıtlıklılık yasası, mod p aritmetiğinde hangi n sayılarının bir sayının karesi olup, hangilerinin olmadığını tanımlar. Bu konu kitabımızın sınırlarını aşıyor ama şunu söyleyebiliriz: Cevap sadece mod $4n$ aritmetiğinde p'nin değerine bağlıdır. Örnek vermek gerekirse $n = 2$'nin $p = 7$ olmak kaydıyla mod p aritmetiğinde bir sayının karesine karşılık geldiğini biliyoruz. Bu durumda $4n = 8$'dir. Bu yüzden, söz konusu sayı (p herhangi bir asal sayı) mod p aritmetiğinde karedir ve bu da mod 8 için 7'ye eşittir; ne kadar büyük olduğunun bir önemi yoktur. Bu oldukça şaşırtıcı bir sonuç!)

Eğer $p = 5$ ise mod 5 aritmetiğinde $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 4$ ve $4^2 = 1$ olur. Bu yüzden, 1 ve 4 mod 5 aritmetiğinde bir sayının karesi iken, 2 ve 3 değildir. Dikkat edecek olursak $x^2 = 2$ denkleminin, rasyonel sayılarda olduğu gibi, $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ sonlu cisminde bir çözümü yoktur. Bu yüzden, $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ sonlu cismi $x^2 = 2$'nin çözümlerini eklemek suretiyle genişleterek yeni bir sayı sistemi yaratabiliriz. Bu çözümleri bir kere daha $\sqrt{2}$ ve $-\sqrt{2}$ olarak gösterelim (fakat bunların daha önce rasyonel sayılara eklediklerimizle aynı sayılar olmadığını unutmayalım).

a ve b sayılarının $\{0, 1, 2, 3, 4\}$'ün elemanları olduğu, aşağıdaki biçimde sayılar içeren yeni bir sonlu cisim elde etmiş bulunuyoruz:

$$a + b\sqrt{2}$$

0, 1, 2, 3 ya da 4 değerlerini alabilen iki adet (a ve b) parametremiz olduğundan, yeni sayı sistemimiz $5 \cdot 5 = 25$ eleman içerir. Genellersek: $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ cisminin herhangi bir sonlu genişlemesinin bir m doğal sayısı için p^m elemanı vardır.

Bu noktada, tek değişkenli tüm polinom denklemlerinin bütün çözümlerini $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ sonlu cismine eklediğimizi varsayalım. Böylece, sonlu cismin *cebirsel kapanışı* (algebraic closure) adı verilen yeni bir sayı sistemi elde ederiz. Başlangıçtaki sonlu cismin p elemanı vardı. Cebirsel kapanışın ise sonsuz sayıda eleman içerdiği anlaşılmıştır. Bu aşamada önümüze gelen soru, cebirsel kapanışın Galois grubunun ne olacağıdır. Bunlar, bu cebirsel kapanışın toplama ve çıkarma işlemlerini koruyan ve p elemanlarının başlangıçtaki cisminin elemanlarını kendilerine yollayan simetrileridir.

Eğer rasyonel sayı cisimleriyle başlar ve onun cebirsel kapanışını alırsak ilgili Galois grubu çok karmaşık olur. Aslına bakarsanız Langlands Programı, bu Galois grubunu ve gösterimlerini harmonik analiz üzerinden tanımlamak için oluşturulmuştu.

Bunun aksine, $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ sonlu cisminin cebirsel kapanışının Galois grubunun oldukça basit olduğu görülmüştür. Öyle ki bunlardan bir tanesini zaten biliyoruz, p'inci kuvvete yükseltme işlemi olan Frobenius: $a \mapsto a^p$. Fermat'nın küçük teoremine göre, Frobenius başlangıçtaki p elemanlı sonlu cismin tüm elemanlarını ve bunlara ilaveten cebirsel kapanış içerisinde toplama ve çıkarma işlemlerini de korur:

$$(a+b)^p = a^p + b^p, \qquad (ab)^p = a^p b^p.$$

Bu yüzden Frobenius, sonlu cismin cebirsel kapanışının Galois grubuna aittir.

Frobenius'u F ile gösterelim. Bariz bir biçimde, Frobenius'un F^n kuvvetindeki herhangi bir tam sayı da Galois grubunun elemanıdır. Örneğin F^2, p^2'inci kuvvete yükseltme işlemidir: $a \mapsto a^{p^2} = (a^p)^p$. F^n simetrileri (buradaki n tüm tam sayı değerlerini kapsar), Galois grubunun André Weil'e atfen Weil grubu olarak adlandırılan altgrubunu oluşturur. Galois grubunun kendisi, Weil grubunun tamlaması (completion) adıyla bilinir; F'in tam sayı katlarına ilaveten, n sonsuza giderken F^n'nin bazı limitlerini de eleman olarak içerir. Ancak uygun anlamıyla, Frobenius Galois grubunu üretir.

Frobenius'un sonlu cismin cebirsel kapanışının elemanlarına nasıl etki ettiğinin bir örneğini burada görebiliriz. $p=5$ ve yukarıda gördüğümüz (a ve b'nin 0, 1, 2, 3 ya da 4 olduğu)

$$a + b\sqrt{2}$$

formuna sahip cebirsel kapanışın elemanlarını ele alalım. Bu sayı sistemi, $\sqrt{2}$ ve $-\sqrt{2}$'nin yer değiştirdiği simetriye sahiptir:

$$a + b\sqrt{2} \quad \mapsto \quad a - b\sqrt{2}$$

ve rasyonel sayılara $\sqrt{2}$'yi eklediğimizde ortaya çıkan yapıya paraleldir. Şaşırtıcı olan (ve rasyonel sayılarla benzerlik arz etmeyen) ise bu ters yüz simetrinin Frobenius'a eşit olmasıdır. Gerçekten de $\sqrt{2}$'ye Frobenius uygulamak, onu beşinci kuvvete yükseltmek anlamına gelir:

$$(\sqrt{2})^5 = (\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 4 \cdot \sqrt{2} = -\sqrt{2}.$$

Zira, mod 5 aritmetiğinde $4 = -1$'dir. Buna bağlı olarak, $p = 5$ için Frobenius $a + b\sqrt{2}$'yi $a - b\sqrt{2}$'ye gönderir. Bu durum tüm p asal sayıları için geçerlidir, öyle ki $x^2 = 2$ denkleminin $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ sonlu cisminde çözümü yoktur.

9. n-boyutlu bir vektör uzayının simetrisi, daha doğru adıyla doğrusal dönüşüm (linear transformation), bir matris biçiminde gösterilebilir. Matris; n vektör uzayın boyutu iken ve i ile j 1'den n'ye giderken, a_{ij} sayılarının kare dizisidir. Bu durumda iz (trace), matrisin köşegen elemanlarının —i 1'den n'e giderken, tüm a_{ii}'lerin— toplamıdır.
10. Şimdiki bağlamda geriye dönmek, manifoldumuzdaki tüm s noktaları için Frobenius'un lif üzerinde s'deki izi f'in s'deki izine eşit olacak şekilde, verilen bir f fonksiyonu için bir demet bulmamız anlamına gelir. Verilen herhangi bir sayı, bir vektör uzayın simetrisinin izi olarak gerçeklenebilir. Zor olan, bu vektör uzaylarını bir demetin özelliklerini sağlayan tutarlı bir topluluk olarak bir araya getirebilmektir.

15. Bölüm: Narin Bir Dans

1. Bir H grubundaki Galois grubunun gösterimi, Galois grubunun her bir elemanına H'nin bir elemanını atayan bir kuraldır. Gösterimin şu

kuralı karşılaması gerekir: Eğer a ve b Galois grubunun iki elemanıysa ve $f(a)$ ve $f(b)$ onlara karşılık gelen H elemanları ise Galois grubundaki ab çarpımına H'deki $f(a)f(b)$ çarpımı atanmalıdır. Buna verilebilecek daha uygun bir isim, Galois grubundan H'ye *homomorfizma*'dır.

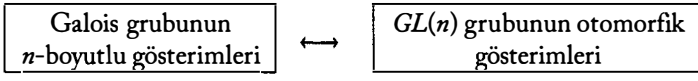
2. Bunu daha açık hâle getirmek için, 10. Bölüm'ün 17. sonnotunda gördüğümüz n-boyutlu vektör uzayı kavramını hatırlayalım. 2. Bölüm'de değindiğimiz üzere, verilen bir grubun n-boyutlu gösterimi, n-boyutlu bir vektör uzayının S_g simetrisini bu grubun her bir g elemanına atayan bir kuraldır. Bu kural şu özelliği karşılamalıdır: Grubun herhangi iki elemanı (g ve h) ile gruptaki çarpımları (gh) için S_{gh} simetrisi, S_g ve S_h'ın bileşimine eşittir. Ayrıca, her bir g elemanı için, $S_g(\vec{a}+\vec{b}) = S_g(\vec{a}) + S_g(\vec{b})$ özelliğinin ve herhangi iki $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörü ile bir k sayısı için $S_g(k\cdot\vec{a}) = k\cdot S_g(\vec{a})$ özelliğinin de karşılanması gerekir. (Bu tür simetrilere doğrusal dönüşüm (linear transformation) adı verilir; 14. Bölüm'ün 2. sonnotuna bakınız.)

n-boyutlu bir vektör uzayın tüm tersinir (invertible) doğrusal dönüşümlerinin grubuna genel doğrusal grup (general linear group) adı verilir ve $GL(n)$ ile gösterilir. Dolayısıyla, bir önceki paragrafta verilen tanıma göre verilen bir Γ gubunun n-boyutlu gösterimi, Γ'nın $GL(n)$'deki gösterimi ile aynıdır (ya da, Γ'dan $GL(n)$'ye homomorfizmadır; 1. sonnota bakınız).

Örneğin 10. Bölüm'de, $SO(3)$ grubunun üç boyutlu bir gösteriminden bahsetmiştik. $SO(3)$ grubunun her bir elemanı, kürenin bir dönme hareketine karşılık gelir ve biz bunlara küreyi içeren üç boyutlu vektör uzayın karşılık gelen dönme hareketini atarız (bu işlemin bir doğrusal dönüşüm olduğu görülmüştür). Bu bize $SO(3)$'ün $GL(3)$'teki gösterimini (ya da $SO(3)$'ten $GL(3)$'e homomorfizma) verir. Sezgilerimizden hareketle, bir dönme hareketinin üç boyutlu vektör uzayda, bu uzaydaki tüm vektörleri bir başka vektöre döndürerek "etki ettiğini" düşünebiliriz.

Langlands bağıntısının bir tarafında (Langlands eşlemesi olarak da bilinir) Galois grubunun n-boyutlu gösterimini ele alırız. Diğer

tarafında ise gerçel sayılar üzerinde değil "adèle" adı verilen yapılar üzerindeki n-boyutlu vektör uzayın simetrilerinin bir başka $GL(n)$ grubunun otomorfik gösterimi adı verilen otomorfik fonksiyonlar bulunur. Bunların neler olduğu açıklamaya çalışmayacağım ama aşağıdaki şema, Langlands bağıntısının nasıl bir şey olduğunu gösteriyor:



Örneğin Galois grubunun iki boyutlu gösterimleri 9. Bölüm'de gördüğümüz modüler formlar ile oluşturulabilen, $GL(2)$ grubunun otomorfik gösterimleri ile ilişkilidir.

Bu bağıntının bir genellemesi, $GL(n)$ grubunun yerine daha genel bir Lie grubunun yerleştirilmesi ile elde edilir. Bu durumda bağıntının sağ tarafında, $GL(n)$ yerine G'nin otomorfik gösterimleri yer alır. Sol tarafta ise $GL(n)$ (ya da Galois grubundan ${}^LG$'ye olan homomorfizmalar) yerine ${}^LG$ Langlands dual grubundaki Galois grubunun gösterimleri yer alır. Daha fazla ayrıntı için, araştırma makalemi inceleyebilirsiniz: Edward Frenkel, "Lectures on the Langlands Program and conformal field theory", *Frontiers in Number Theory, Physics and Geometry II* içinde, Ed. P. Cartier ve diğerleri, s. 387–536, Springer-Verlag, 2007. Esere şu adresten çevrim içi olarak ulaşabilirsiniz: http://arxiv.org/pdf/hep-th/0512172.pdf.

3. Şu adresteki videoyu izleyebilirsiniz: http://www.youtube.com/watch?v=CYBqIRM8GiY.
4. Bu dansın adı Binasuan'dır. Örnek için şu videoyu izleyebilirsiniz: http://www.youtube.com/watch?v=N2TOOz_eaTY.
5. Bu yolun nasıl oluşturulacağını görmek ve bu yolu iki kez katettiğimizde neden bariz bir yol elde edeceğimizi görmek için şu esere bakılabilir: Louis H. Kaufmann, *Knots and Physics*, Üçüncü Baskı, s. 419–420, World Scientific, 2001.
6. Diğer bir deyişle, $SO(3)$'ün temel grubu iki eleman içerir: İlki özdeş eleman ve diğeri de karesi özdeş elemanı veren bu yol.

7. Bu grubun matematiksel adı $SU(2)$'dir. İki boyutlu karmaşık vektör uzayının "özel bileşik" (special unitary) dönüşümlerini içerir. Bu grup, 2. Bölüm'de kuarklarla alakalı olarak değindiğimiz $SU(3)$ grubunun (üç boyutlu karmaşık vektör uzayının özel bileşik dönüşümlerini içeren grubun) kuzenidir.
8. Daha açık ifade etmek gerekirse, $SO(3)$ grubundan $SU(2)$ grubuna oluşturduğumuz kapalı yolu kaldırarak (bu, kupanın ilk tam turuna karşılık gelmektedir), $SU(2)$'nin farklı noktalarında başlayıp biten (her iki noktanın da $SO(3)$ üzerindeki izdüşümü aynı noktadır) ve bu yüzden $SU(2)$'de kapalı olmayan bir yol elde ederiz.
9. Genelde, bu ilişki daha karmaşıktır ama konuları kolaylaştırmak için bu kitapta dual grubun dualinin grubun kendisi olduğunu varsayacağız.
10. Bir Riemann yüzeyi üzerindeki temel G-demeti (ya da G-demeti); tüm lifler G grubunun "karmaşıklaşma"sının (comlexification) birer kopyası olacak şekilde Riemann yüzeyi üzerinde bir liflemedir (grubun tanımında gerçel sayılar yerine karmaşık sayılar konarak tanımlanır). G-demetlerinin moduli uzayının X üzerindeki noktaları (daha doğru adı yığındır), X üzerindeki G-demetlerinin eşdeğer sınıflarıdır.

    Bu kitapta, açıklamaları basitleştirmek için, Lie grubu ile karmaşıklaşmalarını birbirinden ayırmıyoruz.
11. Temel grupta, birbirine dönüşebilen herhangi iki kapalı yolu eşitleriz. Bir düzlem üzerinde, eksik nokta etrafında dolanmayan herhangi bir kapalı yol bir noktada daraltılabildiği için temel grubun basit olmayan elemanları, bu nokta etrafında dolanan o kapalı yollardır (bunlar daraltılamaz çünkü düzlemden eksiltilen nokta bunu engeller).

    Aynı dolanım sayısına sahip herhangi iki kapalı yolun bir diğerine dönüştürülebileceğini rahatlıkla anlayabiliriz. Dolayısıyla bir noktası eksik düzlemin temel grubu, tam sayılar grubundan başka bir şey değildir. Bu değerlendirmenin 5. Bölüm'de iki ipli örgü grubuna dair yaptığımız — aynı şeyi tam sayılar grubu için de bulmuştuk— değerlendirmeyi andırdığına dikkat edin. Bu bir tesadüf değil, çünkü düzlem üzerindeki ayrık nokta çiftlerinin uzayı, topolojik olarak, bir noktası eksik düzlem ile eşdir.

12. Monodraminin çember grubu içerisinde değerler alması, Euler'in formülü ile ilişkilidir:

$$e^{\theta\sqrt{-1}} = cos(\theta) + sin(\theta)\sqrt{-1}.$$

Diğer bir deyişle, karmaşık $e^{\theta\sqrt{-1}}$ sayısı, birim çember üzerinde radyan cinsinden ölçülen θ açısına karşılık gelen nokta ile gösterilir. Hatırlarsak, 2π radyan 360 dereceye eşittir (bu açı değeri çemberin bir tam dönüşüne karşılık gelir). Dolayısıyla, radyan cinsinden ölçülen θ açısı, $360 \cdot \theta / 2\pi$ derecelik açıdır.

Bu formülün özel bir durumu, Richard Feynmann'ın "matematiğin tamamı içinde en ilgi çekici, adeta hayret uyandıran formüllerden biridir" dediği, $\theta = \pi$ için

$$e^{\pi\sqrt{-1}} = -1$$

durumudur. Formül, Yoko Ogawa'nın, 2009 yılında Picador Yayınevi'nden çıkan *The Housekeeper and the Professor* (Profesör ve Hizmetçi) romanında önemli bir rol üstlenir. Daha az önemli olmayan diğer bir özel durum ise şudur: $e^{2\pi\sqrt{-1}} = 1$.

Bu, üzerinde diferansiyel denklemimizin çözümünün tanımlı olduğu, t koordinatlı karmaşık düzlemdeki birim çemberin, θ'nın 0 ile 2π arasında değerler aldığı, $t = e^{\theta\sqrt{-1}}$ biçimindeki tüm noktalardan oluştuğu anlamına gelir. Birim çember üzerinde saat yönünün tersine hareket ettikçe, θ açısının 0'dan 2π'ye artmasına izin vererek (radyan cinsinden), $t = e^{\theta\sqrt{-1}}$ noktalarında çözümümüz olan $x(t) = t^n$'in değerlerini hesaplarız. Bir tam çevrim yapmak, θ'yı 2π'ye eşitler. Dolayısıyla çözümümüzün ilgili değerini bulmak için, $t = e^{2\pi\sqrt{-1}}$ değerini t^n'de yerine koymamız gerekir. Böylece, $e^{2\pi n\sqrt{-1}}$ sonucunu elde ederiz. Bununla birlikte çözümün başlangıçtaki değeri, $t = 1$ değerini t^n'e yerleştirerek bulunur ve 1 elde edilir. Dolayısıyla, birim çember üzerinde saat yönünün tersine giden yol üzerinde hareket ettiğimizde, çözümümüz $e^{2\pi n\sqrt{-1}}$ ile çarpılacaktır ve bu, bu yol üzerindeki monodramidir.

Bu $e^{2\pi n\sqrt{-1}}$ monodramisi, bir *başka* karmaşık düzlem üzerindeki birim çember üzerinde yer alan bir nokta ile gösterilebilen bir karmaşık sayıdır. O nokta, $2\pi n$ radyanlık ya da göstermek istediğimiz

$360n$'lik açıya karşılık gelir. Aslında, herhangi bir z karmaşık sayısını $e^{2\pi n\sqrt{-1}}$ ile çarpmak, geometrik olarak düzlem üzerinde z'ye karşılık gelen noktayı $360n$ döndürmek anlamına gelir. Eğer n bir tam sayı ise $e^{2\pi n\sqrt{-1}} = 1$ sonucunu elde ederiz ve bu monodrami olmadığını gösterir ama eğer n tam sayı değilse basit olmayan bir monodrami elde ederiz.

Kafa karışıklığından kaçınmak için, burada iki adet farklı karmaşık düzlemimiz olduğunu vurgulamak istiyorum: Bir tanesi, çözümümüzün üzerinde tanımlı olduğu karmaşık düzlem olan "t-düzlemi"dir; diğeri ise üzerinde monodramiyi gösterdiğimiz düzlem olup t-düzlemi ile bir alakası yoktur.

Özetlersek, t-düzlemi üzerinde dolanım sayısı +1 olan kapalı yol boyunca çözümümüzün monodramisinin bir başka birim çemberin bir noktası olduğu çıkarımını yaptık. Benzer şekilde, eğer yolun dolanım sayısı w ise bu yol boyunca monodrami $e^{2\pi wn\sqrt{-1}}$ olur ve bu da $2\pi wn$ radyanlık (ya da $360wn$ derecelik) dönme hareketine karşılık gelir. Dolayısıyla monodrami, çember grubundaki temel grubun bir gösterimini meydana getirmektedir. Bu gösterimde, bir noktası olmayan t-düzlemi üzerinde yer alan ve dolanım sayısı w olan yol, $360wn$ derecelik dönme hareketine gider.

13. Düzlemden bir noktayı, başlangıç noktasını çıkarmamız oldukça önemlidir. Aksi hâlde, düzlemdeki herhangi bir yol çökertilebilirdi ve temel grup bariz hâle gelirdi ve bu durumda monodromi mümkün olmazdı. Çözümümüzden (t^n) bu noktayı çıkarmak zorunda kalırız çünkü eğer n bir doğal sayı ya da 0 değilse çözümümüz başlangıç noktasında tanımsızdır (bu durumda monodrami bulunmaz).
14. Daha açık söylemek gerekirse ${}^LG$'deki temel grubun tüm gösterimleri operatörlerle elde edilemez ve bu şemada biz kendimizi elde edilebilenlerle sınırlı tutuyoruz. Diğer gösterimleri için soru hâlâ açık.
15. Edward Frenkel, *Langlands Correspondence for Loop Groups*, Cambridge University Press, 2007. Esere, çevrim içi olarak şu adresten ulaşabilirsiniz: http://math.berkeley.edu/~frenkel.

16. Bölüm: Kuantum Dualitesi

1. 1991 ile 2003 arasında ne olduğunu merak ediyor olabilirsiniz. Bu kitapta ana amacım, sizlere oldukça ilgi çekici bulduğum Langlands Programı'nın çeşitli yönleriyle bu alanda gerçekleşen ve benim de dahil olma şansını yakaladığım keşiflerin nasıl yapıldığından bahsetmek. Sizlere bugüne kadarki tüm hayatımı anlatmaya çalışmıyorum. Ama eğer merak ediyorsanız bu zaman zarfında ailemi Rusya'dan Amerika Birleşik Devletleri'ne getirdim; batıya, California eyaletindeki Berkeley'e taşındım; aşkı buldum ve kaybettim; evlendim ve boşandım; birkaç doktora öğrencisi yetiştirdim; dünyanın farklı yerlerine gittim ve dersler verdim; bir kitap ve onlarca araştırma makalesi yayınladım. Hâlâ Langlands Programı'nın farklı alanlardaki gizemlerini çözmeye çalışıyorum: geometriden tümüyle integrallenebilen sistemlere, kuantum gruplarından fiziğe. Yolculuğumun bu kısmını, bir başka kitap için saklayacağım.
2. Bakınız: http://www.darpa.mil/Our_Work.
3. G. H. Hardy, *A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press, 2009, s. 135.
4. R.R. Wilson'nın Kongre Demeci, 17 Nisan 1969, şu adresten alıntı: http://history.fnal.gov/testimony.html.
5. Maxwell'in vakum ortamındaki denklemleri şu şekildedir:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Burada $\vec{E}$ elektrik alanını ve $\vec{B}$ manyetik alanı göstermektedir (formülleri basitleştirmek için, ışık hızının 1'e eşit olduğu bir birim sistemi seçiyoruz). Eğer

$$\vec{E} \mapsto \vec{B} \quad \text{ve} \quad \vec{B} \mapsto -\vec{E}$$

yapacak olursak, soldaki denklemler sağdakilerin ve sağdakiler de soldakilerin yerini alır. Bu durumda, her iki denklem de değişir ama denklemler sistemi korunur.

6. Dayna Mason'ın Flickr sayfasını ziyaret edebilirsiniz: http://www.flickr.com/photos/daynoir.
7. Bu $SU(3)$ ayar grubu, 2. Bölüm'de ele aldığımız, Gell-Mann ve diğerleri tarafından temel parçacıkları sınıflandırmak için kullanılan ve "çeşni grubu" (flavor group) adıyla bilinen diğer $SU(3)$ grubu ile karıştırılmamalı. $SU(3)$ ayar grubu, "renk" adı verilen kuarklarla aynı özellikleri taşır. Her bir kuarkın üç farklı rengi bulunabileceği anlaşılmıştır ve $SU(3)$ ayar grubu bu renklerin değiştirilmesinden sorumludur. Bu yüzden, kuarkların etkileşimini tanımlayan ayar teorisinin adı kuantum kromodinamiği (quantum chromodynamics) olmuştur. David Gross, David Politzer ve Frank Wilczek, kuarkların gizemli davranışının açıklanmasına yardım eden ve kuantum kromodinamiğinde (ve diğer değişmeli olmayan (non-commutative/non-abelian) ayar teorilerinde) asimptotik özgürlük (asympthotic freedom) adı verilen çığır açıcı keşifleri dolayısıyla Nobel Ödülü ile onurlandırıldılar.
8. D.Z. Zhang, C.N. "Yang and contemporary mathematicians", Mathematical Intelligencer, Cilt 15, No. 4, 1993, s. 13–21.
9. Albert Einstein, "Geometry and Experience", Berlin'deki Prusya Bilim Akademisi'ne sesleniyor, 27 Ocak 1921. Çevirisi şu kitapta yer alıyor: G. Jeffrey ve W. Perrett, *Geometry and Experience in Sidelights on Relativity*, Methuen, 1923.
10. Eugene Wigner, "The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences", Communications on Pure and Applied Mathematics, Cilt 13, 1960, s. 1–14.
11. C. Montonen ve D. Olive, "Magnetic monopoles as gauge particles?", Physics Letters B, Cilt 72, 1977, s. 117–120.
12. P. Goddard, J. Nuyts ve D. Olive, "Gauge theories and magnetic charge", Nuclear Physics B, Cilt 125, 1977, s. 1–28.
13. S_e, G maksimal simidin dış yüzeyinin tek boyutlu karmaşık gösterimlerinin kümesiyken, S_m G simidin dış yüzeyinin temel grubudur. Eğer G, çember grubu ise onun maksimal simidin dış yüzeyi çember

grubunun kendisidir ve bu iki kümenin her biri, tam sayılar kümesi ile bire bir eşlemedir.

17. Bölüm: Gizli Bağlantıların Ortaya Çıkarılışı

1. $M(X, G)$ uzayı farklı biçimlerde tanımlanabilir; örneğin, ilk kez Hitchin tarafından çalışılan X üzerindeki diferansiyel denklem sisteminin çözümlerinin uzayı (daha fazla ayrıntı için, aşağıda 19. sonnotta verilen makaleye bakabilirsiniz). Bize bu kitapta yardımcı olabilecek tanım ise şudur: $M(X, G)$, S Riemann yüzeyinin temel grubunun gösterimlerinin G grubunun karmaşıklaşmasındaki moduli uzayıdır (15. Bölüm'ün 10. sonnotuna bakınız). Bu, böyle bir gösterimin $M(X, G)$'nin tüm noktalarına atandığı anlamına gelir.
2. Hitchin'in Fields Enstitüsü'ndeki ders videosunu izleyebilirsiniz: http://www.fields.utoronto.ca/video-archive/2012/10/108-690.
3. Burada, Langlands Programı'nın "temel yardımcı önermesi"nin ispatı üzerine Ngô Bao Châu'nun yapmış olduğu son çalışmaya atıfta bulunuyorum. Örnek olarak, şu araştırma makalesine bakabilirsiniz: David Nadler, "The geometric nature of the fundamental lemma", Bulletin of the American Mathematical Society, Cilt 49, 2012, s. 1–50.
4. Hatırlayacak olursanız, sigma modelinde her şey, sabit bir Σ Riemann yüzeyinden S hedef manifolduna giden tüm fonksiyonlar üzerinden toplanması ile hesaplanıyordu. Sicim teorisinde bir adım daha öteye gidiyoruz: Sabit bir Σ'dan S'e giden tüm fonksiyonlar üzerinden alınan toplama ilaveten, normalde sigma modelinde yaptığımız üzere, tüm olası Σ Riemann yüzeyleri üzerinde de toplama yapıyoruz (bu işlem boyunca hedef S manifold sabit kalır —bu bizim uzay-zamanımızdır). Özellikle, rastgele bir cinse sahip Riemann yüzeyleri üzerinde toplama yapıyoruz.
5. Süpersicim teorisi hakkında daha fazla bilgi edinmek için: Brian Greene, *The Elegant Universe*, Vintage Books, 2003; *The Fabric of the Cosmos: Space, Time, and the Texture of Reality*, Vintage Books, 2005.

6. Calabi-Yau manifoldları ve süpersicim teorisindeki rolleri hakkında daha fazla bilgi edinmek için: Shing-Tung Yau ve Steve Nadis, *The Shape of Inner Space*, Basic Books, 2010, Bölüm 6.
7. Simidin dış yüzeyinin de iki sürekli parametresi bulunur: Bu bölümde değindiğimiz R_1 ve R_2, yarıçapları; ancak buradaki tartışmanın amacına uygun olarak konumuzun dışında tutacağız.
8. Son zamanlarda etkin bir biçimde tartışılan önermelerden biri, bu manifoldların her birinin kendi fiziksel yasaları olan kendi evrenlerini meydana getirdiği fikridir. Bu daha sonra antropik ilkenin bir versiyonu ile birleşti: Bulunduğumuz evren, bilinçli yaşamı mümkün kılan fiziksel yasalara el verdiği için bunlar arasından seçildi ("Neden bizim evrenimiz bu biçimde?" sorusu da bu yüzden sorulabildi). Bununla birlikte, "sicim teorisi alanı" ya da "çoklu evren" olarak ünlenen bu fikir, hem bilim hem de felsefe çevrelerinde büyük bir şüpheyle karşılanmaktadır.
9. Kuantum alan teorisinin farklı boyutlardaki birçok ilginç özelliği, bu teorileri süpersicim teorisi ile ilişkilendirerek, boyut indirgemeyi (dimensional reduction) kullanarak veya zarlar üzerinde çalışarak keşfedildi ya da aydınlatıldı. Bir anlamda supersicim teorisi, kuantum alan teorilerini (çoğunlukla süpersimetrik) üretmek ya da analiz etmek üzere bir fabrika gibi kullanıldı. Örneğin bu şekilde, dört boyutlu süpersimetrik ayar teorisinin elektromanyetik dualitesine dair güzel bir yorum elde edilebilir. Dolayısıyla, süpersicim teorisinin evrenimizin fiziğini tanımlayıp tanımlayamayacağını henüz bilememize (ve henüz süpersicim teorisinin ne olduğunu tam olarak anlayamamamıza) rağmen, kuantum alan teorisine dair birçok güçlü içgörü sağladı. Matematikte de bir dizi ilerlemeye yol açtı.
10. $M(X,G)$ Hitchin moduli uzayının boyutu, G grubunun boyutu (^LG'nin boyutu ile aynıdır) ile (g-1)'in çarpımına eşittir; buradaki g, X Riemann yüzeyinin cinsini gösterir.
11. Zarlar hakkında daha fazla bilgi için: Lisa Randall, *Warped Passages: Unraveling the Mysteries of the Universe's Hidden Dimensions*, Harper Perennial, 2006; özellikle de IV. Bölüm.

12. Daha açık ifade etmek gerekirse, $M(X, G)$ üzerindeki A-zarları, 14. Bölüm'de gördüğümüz bir kavram olan kategoriye ait bir cisimdir. $M(X, {}^{L}G)$ üzerindeki B-zarları ise başka bir kategorinin cismidir. Homolojik ayna simetrisi ifadesi, bu iki kategorinin birbirine eşit olduğunu ifade eder.
13. Anton Kapustin ve Edward Witten, "Electric-magnetic duality and the geometric Langlands Program", Communications in Number Theory and Physics, Cilt 1, 2007, s. 1–236.
14. T-dualitesi hakkında daha fazla bilgi edinmek için: 6. sonnotta atıfta bulunulan, Yau ve Nadis'in kitabında 7. Bölüm'e bakabilirsiniz.
15. SYZ sanısı hakkında daha fazla bilgi edinmek için: 6. sonnotta atıfta bulunulan, Yau ve Nadis'in kitabının 7. Bölüm'üne bakabilirsiniz.
16. Daha açık ifade etmek gerekirse, her lif, n çift doğal sayı olmak üzere, n dairenin çarpımıdır ve dolayısıyla iki boyutlu bir simidin dış yüzeyinin n-boyutlu benzeridir. Hitchin liflemesinin tabanının boyutunun ve her bir simidin dış yüzeyi lifinin boyutunun birbirine eşit olduğuna dikkat ediniz.
17. 15. Bölüm'de, otomorfik demetlerin Kac-Moody cebirlerinin gösterimlerinden elde edildiği farklı bir yapıyı ele almıştık. Beklendiği üzere bu iki yapı ilişkilidir ama bu satırların yazıldığı esnada bu ilişki hâlâ bilinmiyordu.
18. Edward Frenkel ve Edward Witten, "Geometric endoscopy and mirror symmetry", Communications in Number Theory and Physics, Cilt 2, 2008, s. 113–283. Esere şu adresten ulaşabilirsiniz: http://arxiv.org/pdf/0710.5939.pdf.
19. Edward Frenkel, "Gauge theory and Langlands duality", Astérisque, Cilt 332, 2010, s. 369–403. Esere şu adresten ulaşabilirsiniz: http://arxiv.org/pdf/0906.2747.pdf.
20. Henry David Thoreau, *A Week on the Concord and Merrimack Rivers*, Penguin Classics, 1998, s. 291.

18. Bölüm: Aşkın Formülünün Peşinde

1. C.P. Snow, *The Two Cultures*, Cambridge University Press, 1998.
2. Thomas Farber ve Edward Frenkel, *The Two-Body Problem*, Andrea Young Arts, 2012. Ayrıntılar için bakınız: http://thetwobodyproblem.com/.
3. Michael Harris, "Further investigations of the mind–body problem", yayınlacak kitaptan bir bölüm. Esere şu adresten çevrim içi olarak ulaşılabilir: http://www.math.jussieu.fr/~harris/MindBody.pdf.
4. Henry David Thoreau, *A Week on the Concord and Merrimack Rivers*, Penguin Classics, 1998, s. 291.
5. E.T. Bell, *Men of Mathematics*, Touchstone, 1986, s. 16.
6. Robert Langlands, "Is there beauty in mathematical theories?". Şu eserin içinde *The Many Faces of Beauty*, ed. Vittorio Hösle, University of Notre Dame Press, 2013. Esere şu adresten ulaşılabilir: http://publications.ias.edu/sites/default/files/ND.pdf.
7. Yuri I. Manin, *Mathematics as Metaphor: Selected Essays*, American Mathematical Society, 2007, s. 4.
8. Felsefeciler matematiğin ontolojisini yüzyıllardır tartışıyor. Bu kitapta savunduğum bakış açısı genellikle matematiksel Platonizm ismiyle anılır. Farklı türde Platonizmler olduğunu ve matematiğe dair başka felsefi yorumların bulunduğunu bilmenizde fayda var. Örneğin: Mark Balaguer, "Mathematical Platonism". Şu eserin içinde: *Proof and Other Dilemmas: Mathematics and Philosophy*, ed. Bonnie Gold ve Roger Simons, Mathematics Association of America, s. 179–204 ve bu kaynaktaki referanslar.
9. Roger Penrose, *The Road to Reality*, Vintage Books, 2004, s. 15.
10. A.g.e., s. 13–14.
11. Kurt Gödel, *Collected Works*, Cilt 3, Oxford University Press, 1995, s. 320.
12. A.g.e., s. 323.
13. Roger Penrose, *Shadows of the Mind*, Oxford University Press, 1994, Kısım 8.47.

14. *Gottschalk v. Benson* kararının esası, 409 U.S. (1972), Amerika Birleşik Devletleri Yüce Divan kararı (divan toplantısından öncesine ait alıntıdır): "Bilimsel gerçek ya da onun matematiksel izahı, patenti alınabilecek bir keşif değildir... Bir ilke, soyut haliyle, temel bir hakikat; bir asıl sebep; bir güdüdür; bunların patenti alınamaz; kimse bunlar üzerinde ayrıcalıklı hak talep edemez... Doğanın o ana kadar bilinmeyen bir olgusunu keşfeden kimse, hukukun ona tanıdığı bir tekel hakkına sahip olduğunu iddia edemez."
15. Edward Frenkel, Andrey Losev ve Nikita Nekrasov, "Instantons beyond topological theory I", Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, Cilt 10, 2011, s. 463–565; makalede, *Rites of Love and Math*'de "aşkın formula" rolünü oynayan 5.7'inci formülü açıklayan bir dipnot bulunuyor.
16. Küre üzerinde süpersimetrik kuantum mekanik modeli (burada $\mathbb{P}^1$ ile gösterilen) ile F ve w ile gösterilen iki ölçülebilir olgunun korelasyon fonksiyonunu değerlendiriyoruz. Bu korelasyon fonksiyonu, teorimizde, formülün sol tarafında karşımıza çıkan integral biçiminde tanımlanıyor. Bununla birlikte teorimiz, buna dair farklı bir açıklama tahmininde de bulunuyor: Sağ tarafta karşımıza çıkan "ara hâl"ler üzerinde bir toplam. Teorimizin tutarlılığının sağlanması için, iki tarafın birbirine eşit olması gerekiyor. Gerçekten de öyleler; formülümüzün bize söylediği bu.
17. *Le Monde Magazine*, 10 Nisan 2010, s. 64.
18. Laura Spinney, "Erotic equations: Love meets mathematics on film", New Scientist, 13 Nisan 2010. Esere şu adresten çevrim içi olarak ulaşabilirsiniz: http://ritesofloveandmath.com.
19. Hervé Lehning, "La dualité entre l'amour et les maths", Tangente Sup, Cilt 55, Mayıs-Haziran 2010, s. 6–8. Esere şu adresten çevrim içi olarak ulaşabilirsiniz: http://ritesofloveandmath.com.
20. Yirminci yüzyılın ilk yarısının büyük Rus şairi Anna Akhmatova'nın *To the Many* isimli şiirini kullandık.
21. Norma Farber, *A Desperate Thing*, The Plowshare Press Incorporated,

1973, s. 21.

22. Einstein'ın Phyllis Wright'a mektubu, 24 Ocak 1936. Şu eserden alıntıdır: Walter Isaacson, *Einstein: His Life and Universe*, Simon & Schuster, 2007, s. 388.
23. David Brewster, *Memoirs of the Life, Writings, and Discoveries of Sir Isaac Newton*, Cilt 2, Adamant Media Corporation, 2001 (Thomas Constable and Co. tarafından yayımlanan 1855 baskısının yeni baskısı), s. 407.

Son Söz

1. Edward Frenkel, Robert Langlands ve Ngô Bao Châu, "Formule des Traces et Fonctorialité: le Début d'un Programme", Annales des Sciences Mathématiques du Québec 34 (2010), s. 199–243. Esere şu adresten çevrim içi olarak ulaşabilirsiniz: http://arxiv.org/pdf/1003.4578.pdf.

   Edward Frenkel, "Langlands Program, trace formulas, and their geometrization", Bulletin of AMS, Cilt 50 (2013), s. 1–55. Esere şu adresten çevrim içi olarak ulaşabilirsiniz: http://arxiv.org/pdf/1202.2110.pdf.

Terimler Sözlüğü

Asal sayı (Prime number): Kendisi ve 1'den başka hiçbir doğal sayıya bölünmeyen doğal sayı.

Ayar grubu (Gauge group): Verilen bir ayar teorisinde karşımıza çıkan ve özellikle o teorideki parçacıklar ile bunlar arasındaki etkileşimi tanımlayan Lie grubu.

Ayar Teorisi (Gauge theory): Belirli cisimleri ve bunlar arasındaki etkileşimleri tanımlayan belirli türde bir fiziksel model. Ayar grubu adı verilen her türlü Lie grubu için böyle bir teori (ya da model) vardır.

Bileşim (Composition) (iki simetrinin meydana getirdiği)**:** Verilen bir cismin kendisinin iki simetrisini art arda uygulayarak elde edilen simetrisi.

Boyut (Dimension): Verilen bir cismin noktalarını tanımlamak için gerekli koordinat sayısı. Örneğin, bir çizgi ile bir çember tek boyutlu iken, bir düzlem ve bir küre iki boyutludur.

Çember (Circle): Bir düzlem üzerindeki bir noktadan eşit uzaklıktaki tüm noktaların kümesi biçiminde tanımlanabilecek manifold.

Çember grubu: Bir yuvarlak masa gibi herhangi bir yuvarlak cismin dönme hareketlerinin grubu. Özel bir noktası (bu grubun özdeş elemanı) olan çember. Çember grubu, Lie grubunun en basit örneğidir.

Değişmeli grup (Abelian/commutative group): Herhangi iki elemanının birbiriyle çarpımının sonucu, çarpım işleminin hangi sırayla yapıldığına bağlı olmayan grup. Örneğin, çember grubu.

Değişmeli olmayan grup (Non-abelian /non-commutative group): İki elemanının çarpımı genellikle, elemanların hangi sıra ile çarpıldığına bağlı olan grup. Örneğin: $SO(3)$ grubu.

Demet (Sheaf): Verilen bir manifoldun tüm noktalarına bazı doğal özellikleri karşılayacak biçimde bir vektör uzayı atayan kural.

Doğal sayı (Natural number): 1 sayısı ya da 1'i kendisi ile çok kez toplayarak elde edilen herhangi bir sayı.

Dualite: İki model (ya da teori) arasında parametrelerin ve cisimlerin kurallarla belirlenmiş bir şekilde yer değiştirmesiyle meydana gelen eşitlik.

Eşleme (Correspondence): İki farklı türden cisim arasındaki ilişki ya da bir türden cisimleri diğer türden cisimlere atayan kural. Örneğin, bire bir eşleme.

Fermat'nın Son Teoremi: 2'den büyük herhangi n doğal sayısı için, $x^n + y^n = z^n$ koşuluna uyacak x, y, z doğal sayılarının bulunmadığını belirten ifade.

Fonksiyon (Function): Verilen bir kümenin ya da manifoldun her bir noktasına bir sayı atayan kural.

Fonksiyon (Map, mapping) (bir M kümesinden (ya da manifoldundan) diğer bir Nkümesine (ya da manifolduna)): N'nin bir noktasını M'nin her bir noktasına atayan bir kural.

Galois grubu: Bir sayı cisminin toplama ve çarpma işlemlerini sağlayan simetrilerinin grubu.

Gösterim (Representation) (grup gösterimi): Bir vektör uzayın simetrisini bazı doğal özellikleri karşılayacak şekilde verilen bir grubun tüm elemanlarına atayan kural. Daha genel olarak, bir G grubunun bir başka H grubu içindeki gösterimi, H'nin bir elemanını G'nin her bir elemanına bazı doğal özellikleri karşılayacak biçimde atayan kuraldır.

Grup: Bir elemanını, herhangi bir eleman çiftine atayan bir işleme sahip olan küme. (Bu işlem bileşim, toplama ya da çarpma gibi farklı isimlerle anılır. Örneğin, toplama işlemi ile oluşan tüm tam sayıların kümesi.) Bu işlem şu özellikleri karşılamalıdır: özdeş elemanın olması, her elemanın tersinin var olması ve birleşimlilik (associativity) özelliği.

Harmonik analiz: Fonksiyonların harmonikler cinsinden ayrılmasını (sinüs ve cosinüs fonksiyonları gibi) incelemeye odaklanan matematik dalı.

Hitchin moduli uzayı: Noktaları verilen bir Lie grubundaki verilen bir Riemann yüzeyinin temel grubunun gösterimleri olan uzay (ya da manifold).

İlmik (Loop): Kapalı eğri; örneğin çember.

Kac-Moody cebiri: Verilen bir Lie grubunun ilmik grubunun fazladan bir çizgi ile genişletilmiş Lie cebiri.

Karmaşık sayı (Complex number): a ve b iki gerçel sayı olmak üzere, $a + b\sqrt{-1}$ biçimindeki sayı.

Kategori: Herhangi bir cisim çifti arasında "cisim"ler ve "morfizma"lardan oluşan cebirsel yapı. Örneğin vektör uzayları ve bir manifold üzerindeki demetler de birer kategori oluştururlar.

Kuantum alan teorisi (Quantum field theory): Bu terim iki durumdan birine karşılık gelebilir. İlk olarak, kuantum parçacıklarının ve alanlarının etkileşim modellerini çalışan fizik dalı olabilir. İkincisi, bu türden *özel* bir model olabilir.

Küme (Set): Verilen bir N doğal sayısı için $\{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$ kümesinde olduğu gibi, bir cisimler topluluğudur.

Küre (Sphere): Düz bir üç boyutlu uzayda, verilen bir noktaya eşit uzaklıktaki tüm noktaların kümesi biçiminde tanımlanabilecek manifold.

Langlands bağıntısı (Langlands relation) (ya da Langlands eşlemesi): Bir otomorfik fonksiyonu (ya da otomorfik gösterimi) bir Galois grubu gösterimine atayan kural.

Langlands dual grubu: Herhangi verilen bir G Lie grubuna belli bir yöntem ile atanan Lie grubu. ${}^{L}G$ biçiminde gösterilir.

Lie cebiri (Lie algebra): Bir Lie grubuna özdeş elemanına karşılık gelen noktadan teğet olan uzay.

Lie grubu: Aynı zamanda bir manifold da olan grup; öyle ki gruptaki işlem pürüzsüz bir fonksiyon meydana getirir.

Lifleme (Fibration): M ve B adında iki manifoldumuz ve M'den B'ye bir fonksiyonumuz olsun. B'deki herhangi bir nokta için M'den fonksi-

yonumuz altında bu noktaya gönderilen noktalar kümemiz vardır ve bu küme bu nokta üzerindeki "lif" olarak adlandırılır. Eğer bu liflerin hepsi birbiriyle eşlenebilirse, M'ye B "tabanı" üzerindeki lifleme (ya da lif demeti) denir (ve B'deki her noktanın öyle bir U komşusu vardır ki U'nun M'deki öngörüntüsü (preimage) U ve bir lifin çarpımıyla eşlenebilir).

Manifold: Çember, küre ya da çörek yüzeyi gibi pürüzsüz bir geometrik şekil.

Modüler form: Dairenin simetrilerinin oluşturduğu grubun altgrubundaki (modüler grup adı verilir) özel dönüşümleri sağlayan birim daire üzerindeki fonksiyon.

Otomorfik demet: Weil'in Reşid Taşı'nın sağ sütunundaki geometrik Langlands bağıntısında otomorfik fonksiyonun yerini alan demet.

Otomorfik fonksiyon: Harmonik analizde karşılaşılan belirli türde bir fonksiyon.

Polinom (tek değişkenli): x'in bir değişken ve a_n, a_n, ..., a_1, a_0'ın sayı olduğu, $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ biçimindeki ifade. Çok değişkenli polinomlar da benzer biçimde tanımlanır.

Polinom denklem: P'nin tek veya çok değişkenli bir polinom olduğu, $P=0$ biçimindeki denklem.

Sayı cismi (Number field): Katsayıları rasyonel sayı olan tek değişkenli sonlu sayıda polinomların tüm çözümlerinin rasyonel sayılara eklenmesiyle elde edilen sayı sistemi.

Shimura-Taniyama-Weil sanısı: Üçüncü dereceden denklemlerle belirli özellikleri sağlayan modüler formlar arasında bire bir eşleme olduğunu belirten ifade. Bu eşlemede, üçüncü dereceden denklemin mod asal sayı aritmetiğindeki çözümlerinin sayısı, modüler formun katsayılarına eşittir.

Simetri: Verilen bir cismin şekil ve konum gibi özelliklerini koruyan dönüşüm.

$SO(3)$**:** Kürenin dönme hareketlerinin grubu.

Sonlu cisim (Finite field): p bir asal sayı olmak üzere, 0 ve p-1 arasındaki doğal sayıların kümesi ya da tek değişkenli polinom denklemin çözümleri eklenerek elde edilen genişletilmişi.

Sonlu cisim üzerindeki eğri: İki değişkenli bir cebirsel denklemin p elemanlı sonlu cisim içinde değerler alan tüm çözümlerinden ve bunun genişletilmelerinden oluşan cebirsel cisim.

Süpersimetri: Kuantum alan teorisinde, bozon ve fermiyonların yerini değiştiren bir tür simetri.

Tam sayı (Integer): Ya bir doğal sayı, ya 0 ya da bir doğal sayının negatifi olan sayı.

Temel grup: Verilen bir manifold üzerindeki verilen bir noktada başlayan ve biten tüm sürekli kapalı yolların oluşturduğu grup.

Teori: Cisimler arası ilişkileri tanımlayan belirli bir model ($SO(3)$ ayar grubuna sahip ayar teorisi gibi) ya da matematik veya fiziğin belli bir dalı (sayı teorisi gibi).

Üçüncü dereceden denklem (Qubic equation): $P(y)$ ikinci dereceden ve $Q(x)$ üçüncü dereceden polinom olmak üzere, $P(y) = Q(x)$ biçimindeki denklem. Örneğin, kitapta ayrıntılı olarak üzerinde durduğumuz $y^2 + y = x^3 - x^2$ denklemi.

Vektör uzayı (Vector space): Verilen bir n-boyutlu düz uzayda, doğal özellikleri karşılayan, vektörlerin toplamı ve vektörlerin sayılarla çarpımı işlemlerini barındıran tüm vektörlerin kümesi.

Dizin

3-boyutlu baskı, 18, 44
A-zarı, 292-293, 298-301, 304, 400
altın oran, 365-366
asal sayı, 123, 124-125, 129-130, 143, 146, 219-220, 362-363, 367, 383, 385, 390, 404, 407, 408
asimetri, 42-43
Atiyah, Michael, 285, 327
atom, 27, 320
avatar, 147
ayar grubu (gauge group), 253, 272, 276, 284, 285, 291, 318, 397, 404,
  değişmeli (abelian/commutative), 253
  değişmeli olmayan (non-abelian/non commutative), 253
ayar teorisi (gauge theory), 253, 259, 272, 273, 276, 279, 282, 284, 285, 291, 318, 397, 404
  değişmeli olmayan (non-abelian/non commutative), 253, 275
ayna simetri, 286-287, 290, 291, 294, 296-300, 400
ayrıştırma cismi (splitting field), 359, 360
B-zarı, 292-293, 294, 295-296, 300, 400
bardak oyunu, 233, 235, 392
bayrak manifold, 179
Beilinson, Alexander, 198, 205, 248-249
Ben-Zvi, David, 264, 294
benzerlik, 139, 142, 148, 151, 218, 370-371
benzetim, 19
Bernstein, Joseph, 198, 202, 204, 230
Betti sayısı, 84, 86, 352-353
Bhagavad-Gita, 147
bileşim, 26, 345, 349, 404, 405
  dönme hareketlerinin, 37, 40
  örgülerin, 77, 78
  simetrilerin, 38, 41, 344, 345, 356-357, 391

bire bir eşleme, bkz. eşleme, bire bir
Bohr, Niels, 270
borç çorbası, 267
Bott, Raoul, 202-203, 327
boyut indirgeme, 280, 284, 289, 291, 399
boyut, 17, 46, 47, 159-165, 168, 169, 215, 221, 279, 280, 289, 404
Büyük Hadron Çarpıştırıcısı, 43, 49, 270
Cantor, Georg, 20, 307
çapraz çarpım, 169-170, 380
cebirsel kapanış, 389, 390
çember grubu, 40-41, 43, 45-46, 76, 134, 155-156, 165, 169, 246, 253, 272, 276, 296, 318, 394-395, 404
çember, 39, 56, 61, 147, 159-160, 165, 168, 169, 217, 281, 294-295, 394-395, 404, 407
Chern, Shiing-Shen, 327
Cummings, E.E., 249
DARPA, 255, 256
Darwin, Charles, 17, 163
De Concini, Corrado, 250
Deligne, Pierre, 223, 261, 371
demet (sheaf), 152, 218-223, 390, 405
  otomorfik, 223, 238, 240, 248, 292-293, 300-301
denklem 120
  üçüncü dereceden, 120, 124-125, 127-128, 131-132, 133, 142, 146, 366, 370, 408
  diferansiyel, bkz. diferansiyel denklem
  polinom, bkz. polinom denklem
Descartes, René, 44, 168, 369
diferansiyel denklem, 241
Dirac, Paul, 269
doğal sayı, 80, 87-88, 107, 117-121, 123, 215-216, 388, 404, 405, 406, 408
doğrusal dönüşüm, 345, 346, 382, 390, 391
Drinfeld, Vladimir, 94, 150-152, 211-214, 223-224, 230-237, 239-240, 248-249
dualite, 252, 268, 324, 405
  elektromanyetik, 265, 268-271, 276, 277, 286, 290-291, 293, 295, 301, 306, 389-390254, 259, 262, 264, 287, 307
Duchamp, Marcel, 161, 162-163
düz uzay, bkz. vektör uzayı
eğrilik, 164
Eichler, Martin, 127
Einstein, Albert, 16-17, 19, 49, 106, 142, 162-165, 261, 273, 274, 278, 319, 326
elektromanyetizma
  klasik 266, 283, 284
  kuantum 266, 268, 270-271, 284, 318
eliptik eğri, 131, 370
Enzerberger, Hans Magnus, 15

Esenin-Volpin, Alexander, 95
eşleme 26, 405
bire bir, 81, 132, 143, 146, 296, 350, 379, 398, 405, 407
Euler fonksiyonu, 91, 385
Euler, Leonhard, 91, 394
Farber, thomas, 310, 311
Feigin, Boris, 175-180, 205-206, 210, 224, 327
Fermat'nın küçük teoremi, 219, 384, 389
Fermat'nın Son Teoremi, 19, 87, 88, 118-120, 133, 317, 361-362, 368, 405
Fibonacci sayıları, 125, 365
fonksiyon (map), 282-284, 289, 353, 375-376, 377, 382, 398, 405, 406-407
fonksiyon, 116-117, 216-217, 221, 241, 405
rasyonel fonksiyon, 370-371, 375
Frobenius simetrisi, 220, 389, 390
Fuchs, Dmitry Borisovich, 73-75, 84-85, 92, 102, 103, 153, 154, 170-171, 175, 181
Galilei, Galileo, 16
Galois, Évariste, 110-111, 325, 357
Galois grubu, 110-111, 116, 133, 134, 140, 149, 151, 155, 214, 215, 220-221, 223, 231, 232, 238, 301, 316, 356-357, 358, 375-376, 390-391, 392, 405
sonlu cismin, 220-221, 389
Gelfand, Israel Moiseevich, 19, 51, 92, 93, 95-102, 198
Gelfand'ın semineri, 92-101, 175
Gell-Mann, Murray, 28, 29, 30, 33, 47-48, 49
gerçel sayı, 143-147, 368-369, 378-379
Goddard, Peter, 260-262, 276, 278-279
Goresky, Mark, 261, 264
Gödel, Kurt, 261, 317
görelilik teorisi, 17, 142, 162-265, 274
gösterim, 26, 45-48, 116, 154, 158, 390, 397, 405
2-boyutlu, 45, 133-134, 158
Galois grubunun, 133, 149, 214, 389-392
Kac-Moody cebirinin, 177, 182, 239, 240, 247-248
otomorfik, 231, 238, 392
temel grupların, 238, 240-241, 246, 247, 292-293, 296, 299, 301, 395, 398
Graves, Reine, 313, 314
Gross, David, 306, 397
Grothendieck, Alexander, 157, 158, 160, 226, 263
grup, 32, 39-43, 47, 106, 121-122, 153-158, 366, 383-384, 387, 405
çözülebilir (solvable), 113, 361
değişmeli (abelian/commutative), 81-82, 404
değişmeli olmayan (non-

abelian/non commutative), 81-82, 405
permütasyonların, 361
sonlu-boyutlu, 157
sonlu, 157
sonsuz-boyutlu, 157
sonsuz, 157
güçlü kuvvet, 253, 272, 318
hadron, 30- 45, 48, 49
Hardy, G. H., 256
Harvard Üniversitesi, 23, 152, 196, 200, 208, 213, 249
hedef manifold, 283, 284, 289, 290-291
Higgs bozonu, 43, 270
Hitchin liflemesi, 297, 303-304
Hitchin moduli uzayı, 284, 285-286, 291, 292, 297, 301-302, 303-304, 398, 399-350, 406
Hitchin, Nigel, 284, 285
İleri Araştırmalar Enstitüsü, 19, 106, 136-137, 254, 259, 260, 278
ilmik, 26, 166, 167, 177, 239, 287, 288, 377, 380, 406
ilmik grubu, 157, 166, 167, 177, 239, 248, 377, 381
ilmik uzayı, 166, 167, 377, 381
instanton, 285, 321-322
Jaffe, Arthur, 198, 200, 208
Joyce, James, 28
Kac-Moody cebiri, 140, 170-174, 177-178, 180, 182, 205, 224, 239, 240, 247-249, 251-252, 260, 380, 400, 406
Kac, Victor, 170, 205, 208, 224, 225, 250
Kapustin, Anton, 293, 299-300
karmaşık sayı, 130, 143-147, 222, 243, 351, 358, 380, 393, 406
kategori, 217, 406
kategorizasyon, 217-218
Kazakov, Vladimir, 98
Kazhdan, David, 202, 204
kesir, bkz. rasyonel sayı
Khurgin, Yakov, Isaevich, 186-190, 193, 194
Kirillov, Alexander, Alexandrovich, 70
Kontsevich, Maxim, 291-292
korelasyon fonksiyonu, 284, 291, 322, 402
kriptografi, 76, 127, 131, 324, 350, 367
kuantum alan teorisi, 266, 268, 269-270, 271-272, 282, 283, 289, 291, 322, 323, 399, 406, 408
kuantum bilgisayar, 82, 387
kuantum elektromanyetizma, bkz. manyetizma, kuantum
kuantum fiziği, 19, 27, 33, 45, 98, 140, 153, 166, 171, 173, 238, 250, 252, 262, 270, 275, 293, 295, 301, 305
kuantum grupları, 201, 212
kuark, 28, 29, 32-34, 45, 48, 49, 252, 266, 270

küme, 36, 39, 41, 122, 123, 146, 147, 349, 405, 406-407
küre, 98, 157-160, 164-170, 177, 179, 279, 283, 352, 370, 402, 406, 407
Langlands bağıntısı, 26, 134, 149, 150, 215, 223, 232, 238, 248, 292, 299-300, 391, 405, 406
Langlands dual grubu, 232, 233, 236, 237, 240, 247, 253, 276-277, 286, 297, 406
Langlands eşleşmesi, bkz. Langlands bağıntısı
Langlands Programı, 248-249, 251-252, 262, 279, 293-294, 301, 303, 308, 309, 324, 328
Langlands, Robert, 19, 104-105, 114-115, 116, 261, 278, 316, 327, 328, 354
Laumon, Gérard, 214, 223
Letterman, David, 203
Lie cebiri, 167, 169-170, 378, 379, 380, 406
Lie grubu,154-158, 177, 231-232, 237-238, 253, 272, 318, 406
  sonlu-boyutlu, 165
  sonsuz-boyutlu, 165, 166
Lie, Sophus, 155
lifleme, 295, 297, 353, 393, 406-407
  simidin dış yüzeyi üzerindeki, 295, 296
Logunov, Aantoly, 224-229
Losev, Andey, 322
MacPherson, Robert, 261
Makh-Mat, 51, 52, 69, 70, 85, 94, 227, 228, 346, 353-354
manifold, 26, 156, 158, 160-161, 164-166, 169, 179, 217, 218, 220-221, 283-284, 290, 377, 406, 407
Manin, Yuri Ivanovich, 212, 285, 316
Mann, Ben, 257, 259, 261
Maxwell denklemleri, 241, 265, 266, 273, 283-284, 396
Maxwell, James Clerc, 265
Mazur, Barry, 203-204
MGU, bkz. Moskova Üniversitesi
Mills, Robert, 272
Mishima, Yukio, 314, 315, 319
mod N, 121-124, 219, 256, 362, 363, 385
modüler aritmetik, bkz. mod *N*
modüler form, 130-133, 135, 231, 367, 392, 407
monodromi, 244-247, 376, 395
Moody, Robert, 170
Moskova Üniversitesi, 22-23, 51, 55, 59, 66, 224, 266-267, 346
Mucknik Subbotovskaya, Bella, 74
Ne'eman, Yuval, 30
Nekrasov, Nikita, 221-222
Newton, Isaac, 326
Ngô, Bao Châu, 328, 398
nötron, 28, 29, 30, 48, 253-254
oper, 247-248
otomorfik fonksiyon, 116-117, 134, 149, 214-215, 223-224, 301, 392, 406, 407

Öklid, 362
Öklid-dışı geometri, 162, 345
örgü grubu, 75-85, 350
özdeş simetri, bkz. simetri, özdeş
Pauli, Wolfrang, 30, 270
Penrose, Roger, 317, 318
Petrov, Evgeny Evgenievich, 31-33, 35, 50, 181
Poincaré, Henri, 162
polinom, 351, 352-353, 370, 373, 407, 408
polinom denklem, 112, 113, 120, 357, 358-359, 375, 407
beşinci dereceden, 113, 357, 360
dördüncü dereceden, 113, 357
sonlu cisim üzerinde, 387, 389, 408
üçüncü dereceden, 360, 408
proton, 28, 29-30, 48, 252
rasyonel sayı, 107-110, 113-114, 140, 355, 359-360, 370-371, 375, 387, 390, 407
Reshetikhin, Nicolai, 199, 201, 212
Reşid taşı, 4, 98, 104, 105, 154, 159-161, 173, 222, 225, 227, 283
Ribet, Ken, 88, 118, 133, 367-368
Riemann, Bernhard, 17, 142, 164-165
Riemann yüzeyi, 22, 141-143, 147-152, 214, 223, 238, 239, 241, 246-247, 279, 281-282, 285-286, 288-289, 293-294, 299, 301, 368, 369, 370-371, 372, 374-376, 393, 398, 406
Rites of Love and Math, 24, 315, 319, 323, 402
RSA algoritması, 91, 125, 256, 386
sanı, 118
sayı cismi, 110, 113, 114, 144, 149, 356, 357, 358, 370-371, 375, 405, 407
Séminaire Bourbaki, 307
serbest alan gerçekleşimi, 173, 180, 182, 249
serbest alan modeli, 173
Serre, Jean-Pierre, 307, 368
Shevarnadze, Eduard, 249, 250
Shimura, Goro, 136
Shimura-Taniyama-Weil sanısı, 88, 118-120, 132-137, 231, 362, 368, 407
sıfır-zarı, 296, 298, 299, 301, 303, 304
sicim teorisi, 166-167, 171, 287-289
sigma modeli, 283-287, 290, 291, 292
simetri, 34-39, 41, 45, 106, 109-114, 129, 130, 171, 172, 216, 265, 268, 324, 343, 344, 345, 346, 356-359, 379, 390, 407
identical, 37, 39, 356
ters, 38, 39
simetri grubu, 33, 45, 111, 129-130, 167, 272, 305
simetrinin kırılması, 43
simidin dış yüzeyi (torus), 141, 146, 118, 119, 290, 294-295, 296, 298, 299, 373, 374-375, 400
ayna dual, 295
bozuk, 302, 303-304

Simpson, Homer, 297, 303
SO(2) grubu, 272, 304, 318, 393
SO(3) grubu, 158-160, 167, 169-170, 173-174, 177-179, 216, 231, 233-234, 236, 247, 272-273, 302, 304, 376, 377, 380, 391, 392-393, 405, 407, 408
sonlu cisim, 124, 131, 147, 148, 214, 219, 220-221, 223, 301, 381, 387-388, 408
sonlu cisim üzerindeki eğri, 147-150, 214, 222, 223, 293, 301, 366, 367, 408
süpersimetri, 270, 271, 275, 318, 408
T-dualitesi, 295
tam sayı, 80, 81, 107, 350, 408
Taniyama, Yutaka, 135
tanım, 339
Taylor, Richard, 120
teğet çizgi, 168, 169
teğet düzlem, 168
teğet uzay, 168, 169, 378, 406
temel grup, 150, 151, 223, 238, 240-243, 246-247, 248, 292-293, 296, 301, 351, 373, 374, 392-395, 408
temel yardımcı önerme, 398
teorem, 349
teori, 26, 408
ters simetri, bkz. simetri ters
Thoreau, Henri David, 309, 315
topoloji, 33, 150, 352
Tsygan, Boris, 201
üretici fonksiyon, 127, 128, 131
Van Gogh, Vincent, 18- 28
Varchenko, Alexander Nikolaevich, 73
vektör, 169, 268-270, 408
vektör alanı, 282-283
vektör uzayı, 169, 215-218, 220-221, 282-283, 378-382, 390, 405, 406, 408
Vilonen, Kari, 255, 261, 263
Virasoro cebri, 172, 380
von Neumann, John, 261, 327
Wakimoto, Minoru, 172
Weil, André, 115, 137, 138, 147, 148, 261, 305
Weil grubu, 389
Weil, Simone, 138
Wigner, Eugene, 275
Wiles, Andrew, 88, 119, 120
Witten, Edward, 254, 259-262, 278, 279, 291-294, 299-300, 305, 306, 327, 400
Yang-Mills teorisi, bkz. ayar teorisi
Yang, Chen Ning, 272, 273
Yau, Shing-Tung, 203, 290, 299, 399
Zagier, Don, 98, 99
zar, 291-292
zayıf kuvvet, 253, 272-273, 318
Zweig, George, 48

Sanat dersi aldınız ve size bir çitin nasıl boyanacağını öğrettiler ama van Gogh ya da Picasso'nun resimlerini hiç göstermediler mi? Ne yazık ki matematik de işte böyle öğretiliyor ve bu yüzden de çoğumuz için boyanın kurumasını izlemenin entelektüel karşılığı hâline geliyor.
Aşk ve Matematik'te, ünlü matematikçi Edward Frenkel, matematiğin daha önce hiç görmediğimiz, bir sanat eserinin güzelliği ve zarafetiyle dolu bir yönünü ortaya koyuyor. Frenkel, matematiğin evrenin akışına yön verdiğini, şekillerinin ve eğrilerinin arkasına saklandığını, küçük atomlardan en büyük yıldızlara kadar her şeyin dizginlerini elinde tuttuğunu yazıyor. *Aşk ve Matematik*, hayatımızı zenginleştirmek, dünyayı ve içindeki yerimizi daha iyi anlamak, matematiğin gizli sihirli evrenini keşfetmek için bir davet.

"Bir matematikçinin mücadelelerinin, sevinçlerinin ve tutkularının müthiş bir anlatımı..."
Barry Mazur, Harvard Üniversitesi ve *Imagining Numbers* kitabının yazarı

"Modern matematiğin en heyecan verici fikirlerinden bazıları üzerine tutkuyla yazılmış bu akıcı kitabı güzelliğin meraklı âşıklarına şiddetle tavsiye ederim."
David Gross, Fizik dalında Nobel Ödülü sahibi

"Bu kitap, Edward Frenkel'in Sovyetler Birliği döneminde Moskova'ya yakın bir kasabada başlayan ve Harvard üzerinden California Üniversitesi'ne uzanan matematik-fizik serüveni. Hem hayatın içinden hem de akademik dünyadan geçen bir yol hikâyesi. Bu yolda kimlere rastlamıyoruz ki. Özellikle de matematiğin farklı konularını birleştiren Langlands Programı'nın kurucusu, benim de 1967-1968 yıllarında Orta Doğu Teknik Üniversitesi'nde hocam olmuş, yaşayan en büyük matematikçilerden Robert Langlands. Hocamın kitabın Türkçe baskısı için Türkçe olarak yazdığı ve kitabın sonunda yer alan mektubunun da, André Weil'e yazdığı tarihi mektuplar gibi zaman içinde çok konuşulacağına inanıyorum. Bu kitabı okumak için matematik bilmenize gerek yok ama dikkat edin, Nassim Nicholas Taleb'in de dediği gibi, sonunda matematikçi olmak isteyebilirsiniz..."
Yılmaz Akyıldız

Edward Frenkel, Berkeley'deki California Üniversitesi'nde matematik profesörüdür. American Academy of Arts ve Sciences üyesi ve Hermann Weyl Ödülü sahibidir. Birçok ülkede çok satanlar listesine giren kitabı *"Aşk ve Matematik"* 14 dilde yayınlandı ve Euler Book Prize gibi çeşitli ödüllere layık görüldü.

facebook.com/palomayayinevi
twitter.com/palomakitap



ISBN 978-605-9200-04-2