Teo grünberg

sembolik mantık el kitabı 3

METU PRESS

Millî Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığının **04.06.2001** tarih ve **6333** sayılı yazısı ile Orta Öğretim Kurumları öğretmen ve öğrencileri için **on yıl** süre ile tavsiye edilmiştir.

SEMBOLİK MANTIK EL KİTABI

III. CİLT
SEMBOLİK MANTIĞIN UYGULAMALARI

Teo GRÜNBERG

METU
PRESS

ODTÜ Geliştirme Vakfı
Yayıncılık ve İletişim A.Ş. - **METU PRESS** -
Yayınları.

© Tüm yayın hakları ODTÜ Geliştirme Vakfı Yayıncılık ve İletişim A.Ş.'nindir. Yayıncının izni olmaksızın, hiçbir biçimde ve hiçbir yolla, bu kitabın içeriğinin hiçbir bölümü ya da tümü yeniden üretilemez ve dağıtılamaz.

Birinci Baskı : Kasım 2000

Dizgi-Sayfa Mizanpajı : Leyla ALP

Kapak Tasarım : Burcu GÜNDÜZ

Baskı: Mert Matbaası

ODTÜ Geliştirme Vakfı
Yayıncılık ve İletişim A.Ş.- **METU PRESS-**
İnönü Bulvarı, ODTÜ Yerleşkesi
06531 ANKARA
Tlf : 0(312) 210 38 70 - 210 38 73
Faks : 0(312) 210 15 49
http : //metupress.com.tr
E-Posta : metupres@tr.net

ISBN : 975-7064-31-9 (Tk. No)
975-7064-32-7 (1. Cilt)
975-7064-33-5 (2. Cilt)
975-7064-34-3 (3. Cilt)

ÖNSÖZ

Modern sembolik mantık dersleri 1967 yılından bu yana lise ve üniversitelerimizde yaygınlaşarak okutulmaktadır. Bu alanda şimdiye dek yedi tane ders kitabı yazdım. Ancak, sembolik mantık hızla gelişmekte ve uygulamaları artmaktadır.

Üç ciltlik Sembolik Mantık El Kitabı'nı çeşitli mantık sistemlerini ve uygulamalarını geniş bir okuyucu kitlesine, özellikle lise öğretmenleri ile üniversite ve lise öğrencilerine tanıtmak amacıyla hazırladım.

Birinci ciltte temel mantığı oluşturan Önermeler Mantığı ile Niceleme Mantığı (Yüklemler Mantığı); ikinci ciltte Özdeşlik Mantığı, Varlık Mantığı, Kiplikler Mantığı, Bilgi Mantığı, Çok Değerli Mantık, Ödev Mantığı, Sorular Mantığı, Zaman Mantığı ve Koşullular Mantığı'nı ele aldım. Üçüncü ciltte ise, sembolik mantığın uygulamaları olarak Eleştirel Düşünme ve Akılcı Tartışma, Klasik (Geleneksel) Mantık, Kümeler Kuramı, Otomatikleşmiş Teorem İspatlaması, Olasılık Kuramının Mantıksal Temelleri, Matematiğin Mantıksal Temelleri, Doğa Bilimlerinin Mantıksal Temelleri, Sembolleştirme ve son olarak Mantık Felsefesi konularını ele aldım.

Kitabın temize çekilmesinde emeğini esirgemeyen eşim Rahel Grünberg'e teşekkür borçluyum.

Ayrıca birinci cildin düzeltmelerini yapan İskender Taşdelen'e, ikinci cildin düzeltmelerini yapan ve bütün yapıtın terimler dizinini hazırlayan Besim Karakadılar'a ve üçüncü cildin düzeltmelerini yapan M. Cem Kamözüt'e büyük yardımlarından dolayı candan teşekkür ederim.

Teo GRÜNBERG

Bu yapıtı beni felsefe ve mantığa yöneltmiş olan çok sevgili dostum, örnek insan Hüseyin Batuhan'a ithaf ediyorum.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLİK MANTIK EL KİTABI
ÜÇÜNCÜ CİLT: SEMBOLİK MANTIĞIN UYGULAMALARI

12. MANTIĞIN ELEŞTİREL DÜŞÜNME VE AKILCI TARTIŞMAYA UYGULANMASI 1
12.1 Tartışma Kavramı 1
12.1.1 Eleştirel Düşünme ve Akılcı Tartışma 1
12.1.2 Akıl Yürütme ve Soruşturma Kuralları, Tanımlayıcı ve Stratejik Kurallar 1
12.1.3 Tartışma Çizelgesi 3
12.2 Soruşturma Adımları 8
12.2.1 Soruşturma Adımlarının Tanımlayıcı Kuralları 8
12.2.2 Belirsiz Yanıtlı Tartışmaların Tanımlayıcı Kuralları 12
12.2.3 Soruşturma Adımlarının Stratejik Kuralları 13
12.3 Soruşturmanın Mantıksal Biçimi: Gözlem ve Deney 14
12.4 Tanımlama Adımları 16
12.5 Tartışma ve Açıklama 20
12.6 Tartışma Çözümlemesi ve Değerlendirmesi 21
12.7 Akıl Yürütme ve Soruşturma Adımlarına İlişkin Yanılgılar 23
13. KLASİK (GELENEKSEL) MANTIĞIN SEMBOLİK MANTIKLA ÇÖZÜMLENMESİ 27
13.1 Terimler 27
13.1.1 Terim Türleri 27
13.1.1.1 Genel Terimler ile Tekil Terimler 27
13.1.1.2 Distribütiv ve Kollektif Terimler 30
13.1.1.3 Somut ve Soyut Terimler 31
13.1.1.4 Olumlu ve Olumsuz Terimler 32
13.1.2 Terimler Arası İlişkiler 33
13.2 Önermeler 34
13.2.1 Önerme Türleri 34
13.2.1.1 Basit Önermeler: Özne-Yüklem Önermeleri 34

13.2.1.2 Kiplikli Basit Önermeler 37
13.2.1.3 Bileşik Önermeler 38
13.2.2 Önermeler Arası İlişkiler 39
13.2.2.1 Karşı Olum Yasaları 39
13.2.2.2 Dolaysız Çıkarım Yasaları 40
13.3 Tasımlar 43
13.3.1 Tasım Yasaları 43
13.3.2 Özne-Yüklem Önermeleri Mantığı Yasalarının Aksiyomlaştırılması 48
13.4 Özne-Yüklem Önermeleri Mantığının Niceleme Mantığına İndirgenmesi 57
14. KÜMELER KURAMI 65
14.1 Birinci Düzey Kümeleri 65
14.1.1 Evren, Öğe ve Boş Küme 65
14.1.2 Küme işlemleri 68
14.1.2.1 Kesişim, Birleşim, Fark ve Tümleyen 68
14.1.2.2 Evren ve Boş Küme ile Yapılan Küme İşlemleri 70
14.1.3 Kümeler Arasındaki Bağıntılar 72
14.1.4 Boole Öbekleri Kuramı 75
14.1.4.1 Boole Terimleri 75
14.1.4.2 Atomsal Boole Önermeleri 77
14.1.4.3 Bileşik Boole Önermeleri 82
14.1.4.4 Genel İkililik ilkesi 85
14.2 Genel Kümeler Kuramı 87
14.2.1 Öbeklenim 88
14.2.2 Genel Kümeler Kuramının Aksiyom Sistemi 92
14.2.3 Öbekler Arasında Bağıntılar 93
14.2.4 Evrensel Öbek ve Boş Küme 94
14.2.5 Kesişim, Birleşim, Fark ve Bakışımlı Fark 95
14.2.6 Tümleyen Öbeği, Birim Öbeği ve Sıralanmamış n-liler 96
14.2.7 Güç Öbeği, Birleşim Öbeği ve Kesişim Öbeği 99
14.2.8 Kümeler ve Öz Öbekler 101
14.2.9 Bağıntılar 106
14.2.9.1 Sıralanmış İkililer ve Sıralanmış n-liler 106

14.2.9.2 Bağıntı ve Bağıntı Öbeklenimleri 109
14.2.9.3 Bağıntı Türleri 110
14.2.9.4 Bağıntı İşlemleri 115
14.2.9.5 Bağıntı Bileşmesi 117
14.2.9.6 Denklik Bağıntıları 120
14.2.10 Fonksiyonlar 121
14.2.10.1 Çoğa-bir, bire-çok ve bire-bir bağıntılar, Fonksiyon'un Tanımlanması 121
14.2.10.2 Fonksiyon Türleri 123
14.2.10.3 Ters Fonksiyon ve Fonksiyonların Bileşmesi 126
14.2.10.4 İmge Fonksiyonu 127
15. OTOMATİKLEŞMİŞ TEOREM İSPATLAMASI 128
15.1 Kuram ve Teoremler 128
15.2 Önermeler Mantığında Otomatikleşmiş İspatlama 133
15.2.1 Te-tik'li Yasal Biçime ve Te-tümlü Yasal Biçime Dönüştürme 133
15.2.2 Önermeler Mantığında Çözülüm Yöntemi 138
15.2.2.1 Dolaylı Çözülüm İspatı 138
15.2.2.2 Çözümlemeli Çözülüm İspatı 142
15.3 Niceleme Mantığında Otomatikleşmiş İspatlama 147
15.3.1 Preneks Yasal Biçime Dönüştürme 147
15.3.2 Skolem Yasal Biçime Dönüştürme 150
15.3.3 Niceleme Mantığının Te-tik'li Yasal Biçimleri 152
15.3.4 Herbrand Yorumlamaları ve Herbrand Evreni 153
15.3.5 Yerine Koymalar 156
15.3.6 Özdeşleştirme Algoritması 159
15.3.7 Niceleme Mantığında Çözülüm Çizelgesi 162
15.3.8 Niceleme Mantığında Çözümleyici Çözülüm Çizelgesi 166
15.3.9 Niceleme Mantığında Skolem Fonksiyonu Çözümleyici Çizelge 168
16. OLASILIK KAVRAMLARININ MANTIKSAL TEMELLERİ 170
16.1 Olasılık Kavramı 170
16.1.1 Sınıflayıcı Olasılık, Karşılaştırmalı Olasılık ve Nicel Olasılık 170
16.1.2 Koşullu Olasılık 172

16.1.3 Bilgisel Olasılık ve Fiziksel Olasılık 172
16.2 Fiziksel Nicel Olasılık ve Sıklık Yorumu 174
16.2.1 Rasgele Sonuçlu Deneyler ve Sıklık 174
16.2.2 Aksiyomatik Olasılık Kuramı 178
16.3 Önermeler Mantığında Nicel Olasılık 180
16.3.1 Önermeler Mantığında Aksiyomatik Olasılık Kuramı 180
16.3.2 Önermeler Mantığında Aksiyomatik Olasılık Kuramının Başlıca Teoremleri 185
16.3.3 Koşullu Olasılık 188
16.3.4 Olasılıkların Hesaplanması 191
16.3.5 Olasılıkça Bağımsızlık 195
16.4 Bilgisel Nicel Olasılık 199
16.4.1 Olasılıklı Çıkarımlar 199
16.4.2 Olasılık ve Dengeli Bahse Tutuşma 202
16.4.3 Uyumlu Bahis Sistemleri 205
16.5 Sınıflayıcı ve Karşılaştırmalı Olasılık 207
16.5.1 Olasılık Eklemleri ve İkililik 207
16.5.2 Karşılaştırmalı Olasılığın Aksiyomatik Kuramı 210
17. MATEMATİĞİN MANTIKSAL TEMELLERİ 212
17.1 Matematiğin Konusu ve Yöntemi 212
17.2 Sayılar 213
17.2.1 Doğal Sayılar 213
17.2.2 Sıral Sayılar 217
17.2.3 Sayal Sayılar 223
17.3 Yapılar 226
17.4 Tanımlama ve İspatlama 229
17.4.1 Tanımlama Yöntemleri 229
17.4.2 İspatlama Yöntemleri 232
17.5 Matematik Kuramlarının Aksiyomlaştırılması 236
18. DOĞA BİLİMLERİNİN MANTIKSAL TEMELLERİ 241
18.1 Gözlem ve Deney 241
18.1.1 Gözlem 241
18.1.2 Gözlem Terimleri ve Kuramsal Terimler 243
18.1.3 Deney 245

18.2 Bilimsel Kavramlar 246
18.2.1 Nitel ve Sınıflayıcı Kavramlar 246
18.2.2 Karşılaştırmalı Kavramlar 247
18.2.3 Nicel Kavramlar 249
18.2.3.1 Yaygın Niceliklerin Temel Ölçümü 250
18.2.3.2 Yeğin Niceliklerin Türetilmiş Ölçümü 253
18.2.3.3 Sıralayıcı Nicelikler 255
18.2.4 Yatkınlık Terimleri ve Kuramsal Terimler 256
18.3 Bilimsel Kuramlar 261
18.3.1 Önerme Biçiminde Kuramlar 261
18.3.1.1 Mantıkça Kapalı Önerme Kümeleri 261
18.3.1.2 Yasal Önermeler 263
18.3.1.3 İdeal Yasalar 265
18.3.1.4 Bilimsel Kuramların Yorumlanması 267
18.3.2 Önerme Biçiminde Olmayan Kuramlar 269
18.4 Bilimsel Pekiştirme 270
18.4.1 Nitel Pekiştirme 270
18.4.1.1 Nicod Yöntemi 270
18.4.1.2 Hempel Yöntemi 275
18.4.1.3 Glymour Yöntemi 279
18.4.1.4 Varsayımlı Dedüktif Yöntem 282
18.4.1.5 Nitel Pekiştirmenin Paradoksları 283
18.4.2 Nicel Pekiştirme 285
18.4.2.1 Bayes Yöntemi 285
18.5 Bilimsel Açıklama 288
18.5.1 "Niye" ve "Nasıl" Soruları. Açıklama Gerektiren Sorular ve Pekiştirme Gerektiren Sorular 288
18.5.2 Dedüktif Yasal Açıklama 289
18.5.3 İstatistiksel Açıklama ve Tümevarımlı Açıklama 292
18.5.4 İstatistiksel İlgiye Dayanan Nedensel Açıklama 293
19. SEMBOLLEŞTİRME 295
19.1 Önermeler Mantığı Dilinde Sembolleştirme 295
19.1.1 Sembolleştirme ve Standart Biçime Dönüştürme 295
19.1.2 Önermeler Mantığı Dilinde Sembolleştirme 297
19.1.2.1 Değillemenin Sembolleştirilmesi 297

19.1.2.2 Tümel-Evetlemenin Sembolleştirilmesi 298
19.1.2.3 Tikel-Evetlemenin Sembolleştirilmesi 300
19.1.2.4 Koşullunun Sembolleştirilmesi 305
19.1.2.5 Karşılıklı-Koşullunun Sembolleştirilmesi 309
19.2 Niceleme Mantığı Dilinde Sembolleştirme 310
19.2.1 Tekil Önermeler 310
19.2.2 Tümel Önermeler ve Eşdeğerleri 312
19.2.3 Tikel Önermeler ve Eşdeğerleri 316
19.2.4 Genel Önermeler 319
19.2.4.1 Birli Niceleme Mantığında Yuvalanmamış Önermelerin Sembolleştirilmesi 319
19.2.4.2 Çoklu Niceleme Mantığında Yuvalanmış Önermelerin Sembolleştirilmesi 324
19.3 Özdeşlik Mantığında Sembolleştirme 326
19.3.1 İstisna Bildiren Tümceler 326
19.3.2 En Üstünlük Bildiren Tümceler 328
19.3.3 Sayısal Tümceler 329
19.3.4 Tekil Betimlemeli Tümceler 334
20. MANTIK FELSEFESİ 337
20.1 Mantık Felsefesinin Konusu 337
20.1.1 Özel Bilimlerin Felsefesi 337
20.1.2 Mantık Felsefesi 338
20.2 Mantık Felsefesinin Sorunları 339
20.2.1 Mantığın Temel Kavramları 339
20.2.1.1 Mantık Nedir? 339
20.2.1.2 Önermeler 341
20.2.1.3 Önsel, Çözümsel Önermeler 342
20.2.1.4 Çıkarımların Geçerliliği 344
20.2.1.5 Geçerlik ve Mantık Değişmezleri 346
20.2.1.6 Doğruluk Değerleri ve Varlık 350
20.2.1.7 Denetleme, Eksiksizlik ve Karar-verilebilirlik 351
20.2.2 Mantık İlkeleri 352
20.2.3 Bilim Felsefesi Nasıl Mümkündür? 353
Kaynakça 356
Dizin 360

BİRİNCİ VE İKİNCİ CİLTLERİN ANA BAŞLIKLARI

BİRİNCİ CİLT: TEMEL MANTIK

1. ÖNERMELER MANTIĞI

2. NİCELEME MANTIĞI

İKİNCİ CİLT: ÖZEL MANTIK SİSTEMLERİ

3. ÖZDEŞLİK MANTIĞI

4. VARLIK MANTIĞI

5. KİPLİKLER MANTIĞI

6. BİLGİ MANTIĞI

7. ÇOK DEĞERLİ MANTIK

8. ÖDEV MANTIĞI

9. SORULAR MANTIĞI

10. ZAMAN MANTIĞI

11. KOŞULLULAR MANTIĞI

CİLT III: MODERN MANTIĞIN UYGULAMALARI

12. MANTIĞIN ELEŞTİREL DÜŞÜNME VE AKILCI TARTIŞMAYA UYGULANMASI

12.1 TARTIŞMA KAVRAMI

12.1.1 Eleştirel Düşünme ve Akılcı Tartışma

Bilgi edinme süreci doğruya erişme ve yanlıştan kaçınmaya dayanır. *Eleştirel düşünme* yanlıştan kaçınmayı amaçlayan düşünme biçimidir. *Yapıcı eleştiride* bulunan kişi, kendisinin veya başkalarının ileri sürdüğü önermeleri kabul etmeden önce doğru olup olmadıklarını denetleyip yanlış çıkanlarını reddeder.

Eleştirel düşünme kişinin kendi kendini eleştirmesi biçiminde gerçekleşebildiği gibi, kişiler arası tartışmalarda da ortaya çıkabilir. *Tartışma,* iki veya daha çok kişinin belli bir konuda farklı görüşler savunup birbirlerini eleştirmeleri demektir. Herhangi bir tartışma, genellikle belli bir konu ile ilgili bir sorudan kaynaklanır. Soruyu cevaplamaya çalışan farklı kişilerin birbiriyle bağdaşmayan yanıtlar vermeleri durumunda bu soru ile ilgili bir tartışma çıkar.

Akılcı tartışma, tartışmacıların doğruya erişmeyi ve yanlıştan kaçınmayı amaçladıkları tartışma demektir. Bu durumda kendi görüşüne yapılan eleştirilerin doğru olduğunu gören tartışmacı görüşünden vazgeçer. Ayrıca tartışmacı, karşı görüşe yaptığı eleştirilerin haksız olduğunu görürse o görüşe karşı çıkmaktan vazgeçer.

Mantığın eleştirel düşünmeye ve akılcı tartışmaya uygulanmasına *soruşturmalı akıl yürütme* ve *tartışma* yöntemi diyoruz.

12.1.2 Akıl Yürütme ve Soruşturma Kuralları, Tanımlayıcı ve Stratejik Kurallar

Her tartışmada *akıl yürütme* ile *soruşturma* olmak üzere iki boyut veya etken vardır. Her etkenin kuralları ise *tanımlayıcı kurallar* ve *stratejik kurallar* olmak üzere ikiye ayrılır. Buna göre tartışma kurallarını aşağıda gösterildiği biçimde dörde ayırıyoruz.

1. Tanımlayıcı akıl yürütme kuralları:

Bunlar tartışmada kullanılan mantık sistemlerinin kurallarıdır. Örneğin çözümleyici çizelgenin çözümleme kuralları bu türdendir.

2. Stratejik akıl yürütme kuralları:

Bunlar mantık sistemlerinin kurallarının kullanılışı ile ilgili kurallardır. Örneğin önermeler mantığının çözümleyici çizelgesinde alt alta kurallarının çatal açma kurallarına göre önceliği olduğunu belirten kural bu türlüdür.

3. Tanımlayıcı soruşturma kuralları:

Bunlar "soruşturma" yani soru sorma etkinliğinin yasaya uygunluğunu sağlayan kurallardır. Bu kurallar sorular mantığında temellendirilir. Örneğin bir soruyu sormadan önce öndayanağının doğruluğunun bilinmesi gerektiğini belirten kural bu türlüdür.

4. Stratejik soruşturma kuralları:

Bunlar tanımlayıcı soruşturma kurallarının kullanılışı ile ilgili kurallardır. Örneğin bir tartışmada "p∨q" biçimindeki bir önermenin kabul edildiği bir durumda "p∨q"yü öndayanak sayıp ?(p, q) sorusunun sorulmasının uygun olduğunu bildiren stratejik kural bu türden bir kuraldır.

Tanımlayıcı kurallar ile stratejik kurallar arasındaki ayrımı şöyle açıklayabiliriz: Tartışma, *soruşturmacı* dediğimiz bir kişi ile yanıtlayan arasında geçen bir *oyun* sayılabilir. Yanıtlayan doğa olabilir. Nitekim gözlem ve deney, soruşturmacının doğaya soru sorması anlamına gelir. Gerçekten gözlem ve deneyin sonucu sorulan soruya verilen yanıt olarak ele alınabilir. Oyun bir dizi adımdan oluşur. *Tanımlayıcı kurallar,* hangi hareket türlerinin oyuna uygun olduğunu belirler. Ancak oyunu tanımlayıcı kurallara uygun oynamak oyunun iyi oynandığını göstermez. Örneğin satranç oyununun kurallarını bilmek iyi satranç oynamak için gerekli olmakla birlikte asla yeterli değildir. İşte *stratejik kurallar* (veya *stratejik ilkeler*), bir oyunun nasıl *iyi* oynandığını belirleyen kurallardır. Bu kurallar belli durumlarda hangi hareketlerin başarılı olacağını ortaya koyarlar. Stratejik kuralları öğrenmek ve uygulamak tanımlayıcı kuralları öğrenmek ve uygulamaktan çok daha zordur. Kişi çok kez stratejik kuralları tam bilinçli olmaksızın uygular.

"Tartışma"yı akılcı tartışma anlamında soruşturmacı ile yanıtlayıcı arasında oynanan bir oyun saydığımızı söylemiştik. Soruşturmacı bir yandan yanıtlayıcıya sorular sorar, öbür yandan da bu sorulardan akıl yürütme yoluyla sonuçlar çıkarır. Yanıtlayıcı soruşturmacının bilgi kaynağıdır. Sorulara yanıt olarak verilen bilgiler sağlam veya şüpheli olabilir. Soruşturmacı aldığı yanıtların sağlamlılık derecesini değerlendirmelidir. Bilimsel tartışmalarda asıl yanıtlayıcı doğadır. Nitekim bilim adamlarının bilgi kaynağı önünde sonunda doğa olmalıdır. Doğayı soruşturma gözlem ve deney yoluyla yapılır. Ancak tek bilgi kaynağı doğa değildir. Bilgi kaynağı (yani yanıtlayan) mahkemedeki tanıklar gibi başka insanlar olabilir.

12.1.3 Tartışma Çizelgesi

En basit tartışma, bir tek soruşturmacı ile bir tek yanıtlayıcı arasında oynanan bir oyun biçimindedir. Yanıtlayıcının yanıtlarının hep doğru olduğunu ve soruşturmacının bunu bildiğini kabul ediyoruz. Buna göre tartışma bir tartışma (veya soruşturma) *oyunu* biçimindedir. Oyun "adım" denilen evrelerden oluşur. Bu evreler, akıl yürütme adımları (veya mantıksal çıkarım adımları) ile soruşturma adımlarına ayrılır. Oyunun adımları bir çözümleyici çizelge biçiminde dile getirilir. Bu çözümleyici çizelgeye *tartışma çizelgesi* denir.

Tartışma çizelgesinin başlangıç önermeleri *ilk öncülleri,* ile *son sonuç*'un değillemesinden oluşur. Başlangıç önermeleri, soruşturmacının güvendiği önermeler olmalıdır. Örneğin soruşturmacı bir bilim adamı ise başlangıç önermelerinin bazıları bilim adamının dayandığı bilimsel kuram olabilir. Öte yandan sonuç araştırmacının önünde sonunda doğru olduğunu göstermek istediği bir önermedir. Soruşturmacı bu amacına erişmek için çeşitli soruşturma ve akıl yürütme adımlarını gerçekleştirir. Yanıtlayıcı ise soruşturmacının sorularını yanıtlar. Soruşturmacı başlangıç önermelerinden çözümleyici çizelge kuralları gereği yeni satırlar elde eder. Bu arada gerekli gördüğü bir sorunun öndayanağı tartışma çizelgesinin bir açık yolunda yer alırsa, soruşturmacı bu soruyu sorar. Alınan yanıt sözü geçen açık yola eklenir. Tartışma çizelgesi kapanırsa soruşturmacı amacına erişir. Yani son sonucun doğru olduğu gösterilmiş olur. Bu da soruşturmacının soruşturma oyununu *kazanması*

demektir. Ancak soruşturmacının oyununu gerçekten kazanmış olması için bir yandan ilk öncüllerin, öbür yandan da yanıtlayanın verdiği yanıtların doğru olması gereklidir. Bunların şüpheli olması soruşturmacının kazancını da şüpheli kılar.

Tartışma çizelgesi kapatılamazsa soruşturmacı oyunu kaybettiğini kabul eder, ya da yeni sorular sorarak veya ilk öncülleri değiştirerek oyunu devam ettirir.

Bir tartışmanın başlıca soruşturma ve akıl yürütme adımlarının ortaya konulması ve sıralanması işlemine *tartışma çözümlemesi* denir.

Tartışma çözümlemesi, tartışma çizelgesinin kurulmasını ve adımların değerlendirilebilmesini sağlar. Böylece her adımın eleştirilmesi mümkün olur.

Bir tartışmanın adımlarının gerek tanımlayıcı gerekse stratejik kurallarına uygun olup olmadığını ve tartışma çizelgesinin kapanıp kapanmadığını denetleme işlemine *tartışma değerlendirmesi* denir.

Tartışma çizelgesini kurmak için aşağıdaki soruların yanıtlanması gerekir.

1. Tartışma oyununun oyuncuları kimlerdir? Soruşturmacı kimdir? Yanıtlayıcı kimdir?
2. Başlangıç durumu nedir? Yani ilk öncüller ile son sonuç nelerdir?
3. Tartışmanın farklı adımları nelerdir?
4. Hangi adımlar birer soruya yanıttır, hangileri de mantıksal çıkarım sonucudur?
5. Her soruşturma adımı hangi sorunun yanıtıdır? Yanıtın kaynağı nedir?
6. Tartışma çizelgesi kapanıyor mu?

Örnek olarak Conan Doyle'nin ("Konan Doyl" diye okunur) polis romanlarının kahramanı olan Sherlock Holmes ("Şerlok Holms" diye okunur) adlı dedektifin çözdüğü bir sorunu ele alalım. Ünlü bir yarış atı gece yarısı ahırdan çalınmıştır. Atın bakıcısı da kaybolmuştur. Holmes çevresine, memuruna şu dört soruyu sorar.

1'inci soru: Ahırda o gece bir bekçi köpeği var mıydı?

Yanıt: Evet, ahırda o gece bir bekçi köpeği vardı.

2'nci soru: Ahırdaki bir bekçi köpeği o gece hiç havladı mı?

Yanıt: Hayır, bekçi köpeği o gece hiç havlamadı.

3'üncü soru: Herhangi bir bekçi köpeğinin gece yarısı, kendisine hiç havlamadığı kişi kimdir?

Yanıt: Herhangi bir bekçi köpeğinin gece yarısı, kendisine hiç havlamadığı kişi köpeğin kendi sahibidir.

4'üncü soru: Bekçi köpeğinin sahibi kimdir?

Yanıt: Her kim ki bekçi köpeğinin sahibidir; o at bakıcısıdır.

Holmes bu yanıtlara dayanarak yarış atını çalan hırsızın aynı zamanda köpeğin sahibi olan at bakıcısı olduğu sonucunu çıkarır. Şimdi bu çözümlemeye dayanarak bir tartışma çizelgesi kuruyoruz.

Bu amaçla aşağıdaki sembolleştirme biçimini kullanıyoruz.

(1) Kx: x bir bekçi köpeğidir, Ax: x o gece ahırda idi, Hxy: x, y'ye o gece havladı, Sxy: x, y'nin sahibidir, a: at, b: at bakıcısı, c: yarış atını çalan hırsız.

Buna göre aşağıdaki tartışma çizelgesini kurabiliriz.

İlk öncül

(2) Ahırda o gece bir bekçi köpeği var mıydı? sorusuna yanıt olan

(3) Ahırda o gece bir bekçi köpeği vardı.

önermesidir. (3) önermesinin (1) sembolleştirme biçimi sembolik karşılığı

(4) $\exists x(Kx \wedge Ax)$

dir. İlk önce bir sorunun yanıtı olduğundan ardına "(B.Ö)" değil, "(S.Y)" işaretini koyuyoruz.

Son sonuç

(5) Yarış atını çalan hırsız at bakıcısıdır.

önermesidir. (5)'in sembolik karşılığı (1) gereği

(6) $c = b$

dir. Buna son sonucun değillemesi olan

(7) $\sim(c = b)$

önermesini ikinci satır olarak yazıp ardına "(B.Ö.)" işaretini koyuyoruz.

İkinci öncül olarak

(8) Ahırdaki bekçi köpeklerinden herhangi biri o gece hırsıza havladı mı?

sorusunun yanıtı olan

(9) Ahırdaki bekçi köpeklerinden herhangi biri o gece hırsıza havlamadı.

önermesinin (1) gereği sembolik karşılığını yazıyoruz. Bu da

(10) $\forall x[(Kx \wedge Ax) \rightarrow \sim Hxc]$

biçimindedir. (10)'un ardına "(S.Y.)" işaretini koyuyoruz.

Üçüncü öncül olarak

(11) Bir bekçi köpeğinin, kendisine gece havlamadığı kişi kimdir?

sorusunun yanıtı olan

(12) Bir bekçi köpeğinin gece havlamadığı kişi kendi sahibidir.

önermesinin (1) gereği sembolik karşılığını yazıyoruz. Bu da

(13) $\forall x \forall y[(Ky \wedge \sim Hyx) \rightarrow Sxy]$

biçimindedir. (13)'ün ardına "(S.Y)" işaretini koyuyoruz.

Dördüncü (ve son) öncül olarak

(14) a'nın (yani söz konusu bekçi köpeğinin) sahibi kimdir?

sorusunun yanıtı olan

(15) Her kim ki a'nın sahibidir, o at bakıcısıdır.

önermesinin (1) gereği sembolik karşılığıdır. Bu da

(16) $\forall x(Sxa \rightarrow x = b)$

biçimindedir. (16)'nın ardına "(S.Y)" işaretini koyuyoruz.

Buna göre tartışma çizelgesi şu biçimde olur.

1. $\exists x(Kx \wedge Ax)$ (S.Y.)
   $\sim(c = b)$ (B.Ö.)
2. $Ka \wedge Aa$ (1)
   Ka
   Aa
   (2)
3. $\forall x[(Kx \wedge Ax) \rightarrow \sim Hxc]$ (S.Y.)
4. $(Ka \wedge Aa) \rightarrow \sim Hac$ (3)

(4)

5. $\sim(Ka \wedge Aa)$ $\sim Hac$

(5)

$\sim Ka$ X $\sim Aa$ X

6. $\forall x \forall y[(Ky \wedge \sim Hyx) \rightarrow Sxy]$ (S.Y.)
7. $\forall y[(Ky \wedge \sim Hyc) \rightarrow Scy]$ (6)
8. $(Ka \wedge \sim Hac) \rightarrow Sca$ (7)

(8)

9. $\sim(Ka \wedge \sim Hac)$ Sca

(9)

$\sim Ka$ X Hac X

10. $\forall x(Sxa \rightarrow x=b)$ (S.Y.)
11. $Sca \rightarrow c = b$ (10)

(11)

$\sim Sca$ X $c = b$ X

Bir tartışmanın birden çok sayıda son sonucu olabilir. Bu durumda her son sonuç için ayrı bir tartışma çizelgesi kurulur. Eğer bütün bu tartışma çizelgeleri kapalı ise, soruşturmacı tartışma oyununu kazanmış olur.

Tartışma oyunlarının akıl yürütme (yani mantıksal çıkarım) kuralları çözümleyici çizelge kurallarına indirgenebilir. Dolayısıyla bu kuralları bildiğimi-

zi kabul edebiliriz. Bundan sonraki bölümde soruşturma adımları ve bu adımlarla ilgili tanımlayıcı ve stratejik kuralları inceleyeceğiz.

12.2 SORUŞTURMA ADIMLARI

12.2.1 Soruşturma Adımlarının Tanımlayıcı Kuralları

Her soru bir bilgi isteğidir. Örneğin öndayanağı

(1) $p_1 \vee \ldots \vee p_n$

olan

(2) $?_m^{tüm}(p_1, \ldots, p_n)$

biçimindeki soruya alınan

(3) $\{p_{i_1}, \ldots, p_{i_m}\}$, $1 \leq m \leq n$

yanıtı, $m < n$ olduğundan n sayıda seçeneği k sayısına indirger. Böylece belirsizlik azalır. Belirsizliğin azalması ise bilgi (bilgi, enformasyon) demektir.

Sorular, *ana soru* ile birden çok olabilen işlemsel sorulara ayrılır. Ana sorunun yanıtı soruşturma oyununun son sonucunu belirler. Öte yandan işlemsel soruların yanıtları tartışma çizelgesini kapatabilmek için gerekli olan öncülleri sağlamak için gereklidir. Ana soru "büyük" soru, işlemsel sorular "küçük" sorulardır. Örneğin Sherlock Holmes ve yarış atı hırsızı ile ilgili tartışma oyununun ana sorusu "yarış atını çalan hırsız kimdir?" sorusudur. Oyunun son sonucu da "yarış atını çalan hırsız at bakıcısıdır" önermesidir. Bu önerme ise ana sorunun tam-yanıtıdır.

Birçok tartışmada eksik öncüller bulunur. Bunlar bilindiği için dile getirilmemiş öncüllerdir. Tartışma çizelgesini kusursuz olarak kurabilmek için bu eksik öncüller uygun işlemsel soruların yanıtı olarak sağlanmalıdır.

Karmaşık tartışma oyunları vardır. Bunlardan birden çok sayıda tartışma çizelgesinden oluşan çizelgeler zinciri ile dile getirilir. Böyle bir zincirde önceki tartışma çizelgesinin son sonucu çizelge kapatıldıktan sonra sonraki çizelgelerin öncülü olarak yer alır.

Öte yandan bir tartışma oyununun bazı işlemsel soruları daha düşük düzeyde olan başka tartışma oyunlarının ana sorunu işlevinde olabilir.

Soruşturma adımlarının tanımlayıcı kurallarını aşağıda gösteriyoruz.

Kural 1: Bir soruşturma çizelgesinde $A_1 \vee ... \vee A_i \vee ... \vee A_n$ satırı bir tek açık yolda geçerse soruşturmacı $?_n^{tek}$ $(A_1,..., A_i, ..., A_n)$ sorusunu sorup, A_i tam-yanıtını aldığında, A_i önermesini açık yola ekleyebilir. Buna göre açık yol şöyle uzatılabilir.

1. $A_1 \vee ... \vee A_i \vee ... \vee A_n$
2. A_i (1, S.Y.)

Dikkat edilirse birinci satırdaki $A_1 \vee ... \vee A_i \vee ... \vee A_n$ öndayanak olduğnudan sorunun sorulması yerindedir.

Kural 1'in bir aşağıdaki değişik biçimi kullanılabilir.

Kural 1': Bir tartışma çizelgesinde $A_1 \vee ... \vee A_n$ satırı bir açık yolda geçerse, soruşturmacı $?_n^{tüm}$ $(A_1,...,A_n)$ sorusunu sorup, $\{A_{i_1},...,A_{i_j}\}$ $(1 \leq i_1, ..., i_j \leq n)$ tam yanıtını aldığında $A_{i_1},...,A_{i_n}$ önermelerini alt alta açık yola ekleyebilir. Yani çizelge böyle uzatılabilir.

1. $A_1 \vee ... \vee A_n$
2. A_{i_1}
   $\vdots$ (1, S.Y.)
   $j+1$ A_{i_j}

$A_1 \vee ... \vee A_n$ öndayanak olduğundan, sorunun sorulması yerindedir.

Kural 2: Bir tartışma çizelgesinde $\exists x A(x)$ satırı bir açık yolda geçerse, S ile gösterdiğimiz soruşturmacı $?_{tek}$ $xA(x)$ sorusunu sorup, *a* tam-yanıtını alırsa, ayrıca açık yolda $\exists x B_s(x = a)$ önermesi de bulunursa, A(a) önermesi açık yola eklenebilir. Yani açık yol şöyle yazılabilir.

1. $\exists x A(x)$
1. $\exists x B_s(x = a)$

   A(a) (1, S.Y.)

$\exists x A(x)$ öndayanak olduğundan sorunun sorulması yerindedir.

Kural 2' : Bir tartışma çizelgesinde $\exists xA(x)$ satırı bir açık yolda geçerse, S ile gösterdiğimiz soruşturmacı $?_{tüm}\ xA(x)$ sorusunu sorup, $\{a_1,...,a_n\}$ tam-yanıtını alırsa, ayrıca açık yolda $\exists xB_s(x = a_1)$, ..., $\exists xB_s(x = a_n)$ önermeleri de bulunursa, $A(a_1)$, ..., $A(a_n)$ önermeleri açık yola eklenebilir. Yani açık yol şöyle uzatılabilir.

1. $\exists xA(x)$

1. $\exists xB_s(x = a_1)$

⋮

1. $\exists xB_s(x = a_n)$

$A(a_1)$
⋮
$A(a_n)$ (1, S.Y.)

$\exists x\ A(x)$ öndayanak olduğundan sorunun sorulması yerindedir.

Örnek olarak ilk öncülleri

(4) $\exists x(Fx \vee Gx)$

(5) $\exists xB_s(x = a)$

(6) $Ga \rightarrow Ha$,

ve son sonucu

(7) Ha

olan bir tartışma oyununu göz önüne alalım. "S" soruşturmacıyı gösteriyor. Yanıtlayıcıya uygun sorular sorulup alınacak yanıtlara göre bu oyunun tartışma çizelgesi kapatılabilir. Yanıtlayıcının çizelgeyi kapatmak için gerekli olan yanıtları verdiğini kabul ediyoruz. Bu durumda tartışma çizelgesi şöyle olur.

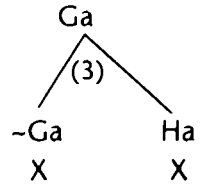
1. $\exists x(Fx \vee Gx)$ (B.Ö.)

1. $\exists xB_s(x = a)$ (B.Ö.)

3. $Ga \rightarrow Ha$ (B.Ö.)

$\neg Ha$ (B.Ö.)

2. $Fa \vee Ga$ (1.S.Y.)



1. adımda soruşturmacı (4) öndayanağına dayanarak

(8) $?_{tek}\ x\ (Fx \vee Gx)$

sorusunu soruyor. Yanıtlayıcı tam-yanıt olarak "a" adını bildiriyor. (4) ve (5) öncüllerinden dolayı bu tam-yanıt yerindedir. Dolayısıyla soruşturmacı 1. adımda kural 2 gereği söz konusu tam-yanıta dayanan "Fa∨Ga" önermesini açık yola ekliyor. 2. adımda soruşturmacı "Fa∨Ga"nın öndayanak olduğu

(9) $?^{tek}\ (Fa, Ga)$

sorusunu sorup, "Ga" tam yanıtını alıyor. "Fa∨Ga" öndayanağından dolayı bu tam-yanıt yerindedir. Dolayısıyla soruşturmacı "Ga" tam-yanıtını açık yola ekliyor. Böylece tartışma çizelgesi kapatılıyor.

ALIŞTIRMALAR

İlk öncülleri ve son sonucu aşağıda verilen tartışmaların kapalı tartışma çizelgesini uygun sorular ve uygun yanıtlara dayanarak kurunuz. "S" soruşturmacıyı gösteriyor.

1. İlk öncüller: $\exists x(Fax \rightarrow Gx)$

$\exists x{\sim}Gx$

$\exists x B_s(x = a)$

Son sonuç: $\exists x{\sim}Fax$

2. İlk öncüller: $\forall x \exists y{\sim}(Fxy \vee Fyx)$

$\forall x \forall y[({\sim}Fxy \wedge {\sim}Fyx) \rightarrow Gxy]$

$\exists x B_s(x = b)$

Son sonuç: Gab

12.2.2 Belirsiz Yanıtlı Tartışmaların Tanımlayıcı Kuralları

Buraya kadar tartışma oyunlarında ilk öncüllerin ve yanıtlayıcıdan alınan yanıtların doğru olduğunu kabul etmiştik. Oysa gerçek tartışmalarda gerek ilk öncüller, gerekse sorulara verilen yanıtlar doğru olmayabilir. Böylece doğruluğu *şüpheli* olan öncüller ve yanıtları göz önünde tutmak gerekir. Yanıtlarının doğruluğu şüpheli olan sorulara *belirsiz yanıtlı soru,* doğruluğu şüpheli öncüller ile belirsiz yanıtlı sorulara dayalı tartışmalara da *belirsiz yanıtlı tartışma* diyoruz. Belirsiz yanıtlı tartışma oyunlarının tanıtıcı kurallarını aşağıda gösteriyoruz. Bu kurallar soruşturma adımlarıyla ilgili tanımlayıcı kurallar olduğundan önceki iki kuralın devamı sayılmalıdır.

Kural 3: Tartışma oyununun herhangi bir evresinde soruşturmacı tartışma çizelgesinde bir öncülü veya yanıtı şüpheli sayarak köşeli parantez içine alabilir.

Kural 4: Bir tartışma çizelgesinde köşeli parantez içine alınan bir satırdan elde edilen bütün satırlarda köşeli parantez içine alınmalıdır. (Nitekim şüpheli bir satırdan türetilen her satır şüphelidir.)

Kural 5: Bir tartışma çizelgesinde köşeli parantez içine alınan bir satır istenirse çizelgenin işlemleri için kullanmayabilir. (Özellikle kapatma için kullanılmayabilir.)

Kural 6: Tartışma oyununun herhangi bir evresinde soruşturmacı tartışma çizelgesinin köşeli parantez içindeki bir satırının artık şüpheli olmadığı kanısına vardığında köşeli parantezleri kaldırabilir. Bu kaldırma işlemi, köşeli parantezleri "E", "∃" biçiminde çizmekle gerçekleştirilir.

Kural 7: Bir tartışma çizelgesi kapatıldığı zaman soruşturmacı kapatmaya yol açan çelişmenin en az bir öğesini köşeli parantez içine alarak son sonucu kabul etmekten vazgeçebilir. Bu işlem son sonucun şüpheli sayılması durumunda gerçekleştirilir.

Dikkat edilirse kural 3 gereği ilk öncüller bile köşeli parantez içine alınabilir. Nitekim herhangi bir tartışmada ilk öncüllerin doğruluğu şüphe konusu olabilir. Şüpheli duruma düşen öncülleri köşeli parantez içine alma, yani gereğinde tartışma adımlarında kullanmama kararı *eleştirel düşünme*'nin gereğidir.

12.2.3 Soruşturma Adımlarının Stratejik Kuralları

Tanımlayıcı kurallar tartışma adımları için gerekli olan koşulları dile getirir. Stratejik kurallar ise başarı sağlamanın yöntemini ortaya koyar. Stratejik kurallar yasaya uygun bir tartışma için gerekli değildir, ama stratejik kurallara uyulması başarıya götürebilir.

Başlıca stratejik kuralları aşağıda gösteriyoruz.

1. İlk öncüller ve soru yanıtları kümesi tutarsız ise tartışma çizelgesi kapanır. Ama bu kapanma son sonucun doğruluğunu göstermez. Bu durumda ilk öncüllerin veya yanıtların bazıları köşeli parantez içine alınmalıdır. Böylece ilk öncüller ve yanıtlar kümesinin tutarlılığının sağlanması umulur.

2. Farklı yanıtlayıcılardan hatta aynı yanıtlayıcıdan çelişkili yanıtlar alındığında veya yanıtlayıcının güvensiz olması durumunda yanıtın köşeli parantez içine alınması yerinde olur.

3. Belli bir tartışma çizelgesinde köşeli parantez içine alınan öncül veya yanıt, başka (yardımcı) bir tartışma çizelgesinin son sonucu olarak denetlenebilir. Böylece şüpheli öncül veya yanıtın güvenilirliği artırılmış olur.

4. Yanlış bir yanıttaki yanılgı rasgele veya sistematik olabilir. Rasgele yanılgı, soruyu tekrarlamakla ortadan kaldırılabilir. Sistematik yanılgıda ise yanılgı hep sürecektir. Dolayısıyla sistematik yanılgılı bir yanıtla karşılaşıldığında, son sonucu bu yanıtı kullanmayan bir tartışma çizelgesi ile denetlemeye çalışılmalıdır.

5. Yanıtlayıcının güvenilirliğini değerlendirmek için şu yollara başvurulabilir.

5.1 Yanıtlayıcının yanıtları başka yanıtlayıcıların yanıtlarıyla uyum içinde ise güvenirlilik artar.

5.2 Yanıtlayıcının yanıtları birbiriyle tutarlı ise, güvenirlilik artar.

12.3 SORUŞTURMANIN MANTIKSAL BİÇİMİ: GÖZLEM VE DENEY

Bilimdeki tartışmalarda soruşturmacının bilim adamı, yanıtlayıcının doğa, soruların gözlem ve deney biçiminde olduğunu daha önce belirtmiştik. Şimdi doğaya sorulan sorular olarak gözlem ve deneyin mantıksal yapısını ele alıyoruz. Bu mantıksal yapı hakkında klasik ve modern olmak üzere iki ayrı görüş vardır.

Yaygın klasik görüş açısından *gözlem*,

(1) $?_2^{tek}$ (Ga, ~Ga)

biçiminde dile getirilebilen bir sorudur. "Ga" atomsal önermesi ile bunun değillemesi olan "~Ga" önermesi birer *gözlem önermesi*'dir. Örneğin "bu yeşildir", "bu yeşil değildir", "burada yağmur yağıyor", "burada yağmur yağmıyor", "bu cismin ağırlığı 2 kg'dır" ve "bu cismin ağırlığı 2 kg değildir" önermeleri gözlem önermeleridir. Bilim adamı gözlem yaparak (1) sorusunun karşılığı olan yanıtı doğadan alır. Yani gözlem sonucu "Ga" ise doğanın yanıtının "Ga" olduğunu, gözlem sonucu "~Ga" ise doğanın yanıtının "~Ga" olduğunu söyleriz. Örneğin a gibi bir cismin rengine bakarak yeşil olduğunu görürsem gözlem sonucu "a yeşildir" gözlem önermesi olur. Buna göre doğanın yanıtının da "a yeşildir" olduğunu söyleriz.

Öte yandan *deney* a gibi bir cismin veya sistemin, "Fa" gözlem önermesiyle dile getirilen belli bir koşulda, G özelliğini taşıyıp taşımadığının gözlemle saptanması işlemi demektir. Bu amaçla bilim adamı söz konusu a cismini (veya sistemini) belli bir biçimde hazırlayarak,

(2) $?_2^{tek}$ (Fa, ~Fa)

sorusuna olumlu yanıt (yani "Fa" yanıtını) alınmasını sağlamaya çalışır. Eğer hazırlama işlemi başarılı ise, bilim adamı (2) sorusuna karşılık "Fa" yanıtını elde eder. Bu olumlu yanıtı aldıktan sonra, bilim adamı bu kez (1) sorusunu sorar. "Ga" yanıtını alırsa deney sonucu "Ga", "~Ga" yanıtını alırsa deney sonucu "~Ga" olur.

Finlandiya'lı mantıkçı ve felsefeci Hintikka'nın son yıllarda geliştirdiği mo-

dern görüş açısından *deneysel soruşturma* denilen deney türü yoluyla deney sonucu olarak genel önermeler hatta tümel önermeler elde edilir.

Örnek olarak fizikteki Ohm yasasını ortaya koymağa yarayan deneysel soruşturmayı ele alalım. Elektrik iletken olan bir telin iki ucuna bir elektrik üretici yoluyla belli bir gerilim (potansiyel farkı) uygularız. V gerilimi (yani potansiyel farkını), I'da akım şiddetini gösteren değişkenler olduğunda

(3) A (V, I)

biçimindeki açık önermenin

(4) iletken telin iki ucu arasındaki gerilim (potansiyel farkı) V volttur. İletkenden geçen akım şiddeti I amperdir.

anlamına geldiğini kabul edelim. O zaman

(5) ?fA[V, f(V)]

biçimindeki soru, bağımlı değişken olan V'nin bağımsız değişken olan I'ya hangi f fonksiyonu ile bağlı olduğunu sorar. (5) sorusunun amaç önermesi

(6) $\exists bB_S \forall xA[V, f(V)]$

biçimindedir. "S", soruşturmacıyı gösteriyor. (5) sorusunun öndayanağı ise

(7) $\forall x \exists yA(V, I)$

önermesidir. Ayrıca soruşturmacının f fonksiyonunun hangi fonksiyon olduğunu bildiğini dile getiren

(8) $\exists gB_S(b = g)$

önermesi de doğru olmalıdır. (Burada "b" ile "g" değerleri birli fonksiyonlar olan değişkenlerdir.) Dikkat edilirse (7) ile (8), (6)'yı içerir. Bilindiği gibi (5) sorusunun yanıtı olan b fonksiyonu

(9) $f(V) = \frac{1}{R} V$

biçiminde belirlenir. Nitekim ohm yasası

(10) $I = \frac{1}{R} V$

biçiminde dile getirilebilir. Buna göre f fonksiyonu (I) sorusunun yanıtı

olduğunda, söz konusu deneysel soruşturmanın sonucunu, yani doğadan alınan yanıtı

(11) $\forall V \exists I\ [A(V, I) \wedge I = f(V)]$

yani

(12) $\forall V \exists I\ [A(V, I) \wedge (I = \frac{1}{R} V)]$

biçimindeki önerme ile de dile getirebiliriz.

12.4 TANIMLAMA ADIMLARI

Her tanımlama, bir sözcüğün anlamının ne olduğunun sorulmasına karşılık verilen bir yanıt olarak ele alınabilir. Bir tartışmanın herhangi bir evresinde soruşturmacı böyle bir soruyu sorarak aldığı yanıtı tartışma çizelgesinin bir açık yoluna ekleyebilir. Böyle bir adıma *tanımlama adımı* diyoruz. Tanımlama adımlarına ilişkin tanımlayıcı kural şöyledir.

Tanımlama adımlarına ilişkin tanımlayıcı kural: Bir tartışmanın herhangi bir evresinde tartışma çizelgesinin açık yoluna yeni bir sözcüğün veya yeni bir sembolün tanımı eklenebilir. Böyle bir tanımın ardına "(T)" işaretini koyarız.

Yüklem ve işlem işaretlerinin tanımı şöyle yapılır.

(i) "F" yeni bir n-li yüklem ve $A(x_1,..., x_n)$ içinde $x_1,..., x_n$'den başka bağsız değişken ile "F" yüklemi geçmeyen bir n-li açık önerme olduğunda,

(1) $\forall x_1 ... \forall x_n\ [Fx_1 ... x_n \leftrightarrow A(x_1,...,x_n)]$

önermesi "F" n-li yükleminin bir tanımıdır.

(ii) "f" bir n-li işlem işareti ve $A(x_1,...,x_n, x_{n+1})$ içinde $x_1,...,x_{n+1}$'den başka bağsız değişken ile "f" n-li işlem işareti geçmeyen bir n+1'li açık önerme olduğunda,

(2) $\forall x_1 ... \forall x_n\ \exists_{n+1}\ A(x_1,...,x_n, x_{n+1})$

(3) $\forall x_1 ... \forall x_n\ \forall x_{n+1}\ \forall x_{n+2}\ [A(x_1,...,x_n, x_{n+1}) \wedge (A\ (x_1,...,x_n, x_{n+2}) \rightarrow (x_{n+1} = x_{n+2})]$

koşulları yerine gelirse,

(4) $\forall x_1 ... \forall x_n \forall x_{n+1} [(f x_1 ... x_n = x_{n+1}) \leftrightarrow A(x_1, ..., x_n, x_{n+1})]$

önermesi f n-li işlem işaretinin tanımıdır.

Özel olarak n = 0 olursa f sıfırlı işlem işareti bir ad'a indirgenir. Nitekim bir sıfırlı işlem işareti sıfır sayıda addan bir ad oluşturan bir işlem işaretidir. O halde her ad bir sıfırlı işlem işareti sayılabilir. Buna göre a gibi bir adı sıfırlı işlem işareti sayarak şöyle tanımlarız.

A(x), içinde x'den başka bağsız değişken ve a adı geçmeyen bir birli açık önerme olduğunda

(5) $\exists x A(x)$

(6) $\forall x \forall y [[A(x) \wedge A(y)] \rightarrow x = y]$

koşulları yerine gelirse

(7) $\forall x [(a = x) \leftrightarrow A(x)]$

önermesi a adını tanımlar.

Örneğin "Avrasyalı" birli yüklemini şöyle tanımlarız.

(8) $\forall x$[x Avrasyalıdır $\leftrightarrow$ (x Avrupalıdır $\vee$ x Asyalıdır)].

Öte yandan reel sayılarda "kare" birli işlem işaretini şöyle tanımlıyoruz.

(9) $\forall x \exists y [(\chi \times \chi) = y]$

(10) $\forall x \forall y \forall z [[(\chi \times \chi) = y \wedge (\chi \times \chi) = z] \rightarrow y = z]$

koşulları yerine gelmiştir. O halde "kare" fonksiynunu dile getiren "^{2}" işlem işareti

(11) $\forall x [x^2 = y \leftrightarrow [(\chi \times \chi) = y]]$

önermesiyle tanımlanmıştır.

Ad tanımına örnek olarak doğal sayılar kuramında "1" sayı adının tanımını ele alıyoruz. "1" sayı adının tanımı "0" sayı adı ile "Ard" ardıl birli işlem işareti yardımıyla yapılır. Bir doğal sayının ardılı bir sonraki doğal sayıdır denebilir. Yani Ard (0) = 1, Ard (1) = 2, ..., Ard (n) = n + 1'dir. Buna göre

(12) $\exists x Ard(0) = x$

(13) $\forall x \forall y[[Ard(0) = x \wedge Ard(0) = y] \rightarrow x = y]$

koşulları yerine gelmiştir. Dolayısıyla "1" sayı adı şöyle tanımlanabilir.

(14) $\forall x[(1 = x) \leftrightarrow Ard(0) = x]$

Dikkat edilirse, "1" adı doğrudan doğruya

(15) $1 = Ard(0)$

olarak da tanımlanabilir.

Bir tartışma çizelgesinde bir işlem işareti veya adın tanımını bir açık yola tanımlama adımı olarak ekleyebilmek için tanımlama koşullarının daha önce aynı açık yolda yer alması gerekir. Bu koşulların açık yolda bulunmaması durmunda işlem işareti veya adın tanımını eklemek bir yanılgı olur.

Tanımlama adımlı tartışmalara örnek olarak ilk öncülleri

(16) Behice Ayhan'ın çocuğudur ve Ayhan erkektir.

(17) Ayhan yetmiş yaşındadır.

ve son sonucu

(18) Behice'nin babası yetmiş yaşındadır.

olan tartışma çizelgesini tanımlama işlemine dayanarak kuralım. Bu amaçla "nın babasıdır" birli işlem işaretinin tanımını kullanıyoruz. Böylece aşağıdaki tartışma çizelgesi elde edilir.

(Behice Ayhan'ın çocuğudur)$\wedge$(Ayhan erkektir) (B.Ö.)

6. Ayhan yetmiş yaşındadır. (B.Ö.)

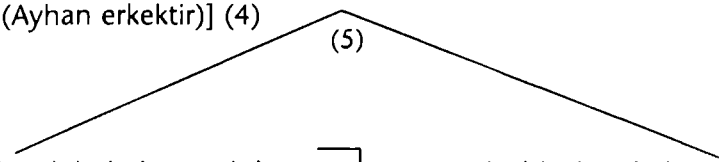
~(Behice'nin babası yetmiş yaşındadır.) (B.Ö.)

3.1. $\forall x \exists y[(x, y'nin çocuğudur) \wedge (y erkektir)]$ (S.Y.)

3.2. $\forall x \forall y \forall z[[(x, y'nin çocuğudur) \wedge (y erkektir) \wedge (x, z'nin çocuğudur) \wedge (z erkektir)] \rightarrow (y = z)]$ (S.Y.)

4. $\forall x \forall y[(x'in babası = y) \leftrightarrow [(x, y'nin çocuğudur) \wedge (y erkektir)]]$ (3.T)

5. (Behice'nin babası= Ayhan)↔[(Behice Ayhan'ın çocuğudur) ∧ (Ayhan erkektir)] (4)



6. Behice'nin babası = Ayhan
(Behice, Ayhan'ın çocuğudur) ∧ (Ayhan erkektir)
Behice'nin babası yetmiş yaşındadır
X

~(Behice'nin babası = Ayhan)
~[(Behice, Ayhan'ın çocuğudur)∧ (Ayhan erkektir)]
X

Görüldüğü gibi tartışma çizelgesi kapanıyor. Dolayısıyla son sonuç ilk öncüllerden elde edilmiş oluyor. Bu arada 1. ve 2. adımlarda soru yanıtı olarak açık yola iki satır ekledik. Bu satırlardan birincisi "herkesin en az bir babası vardır" anlamına geliyor. İkincisi ise "herkesin en çok bir babası vardır" anlamına geliyor.

Öte yandan 3. adımda söz konusu iki satıra dayanarak "nın babası" birli işlem işaretinin tanımını açık yola ekledik. Bu ekleme bir tanımlama adımıdır. Bu nedenle eklenen tanımlayıcı önermenin ardına "(T)" işaretini koyduk.

ALIŞTIRMA

İlk öncülleri ve son sonucu belirtilmiş aşağıdaki tartışmanın gerekli soruşturma ve tanımlama adımlarına dayanarak tartışma çizelgesini kurunuz.

İlk öncüller:

1. Behçet Ayhan'ın çocuğudur.
2. Cevdet Ayhan'ın çocuğudur.
3. Ayhan erkektir.
4. Behçet ile Cevdet birbiriyle iyi geçiniyor.

Son sonuç:

Birbiriyle iyi geçinen kardeşler vardır.

Tanımlama adımı olarak, "nın kardeşidir" ikili yükleminin ∀x∀y (x, y'nin kardeşidir ↔ ∃z (x, z'nin çocuğudur ∧ y, z'nin çocuğudur)] tanımını açık yola ekleyiniz.

12.5 TARTIŞMA VE AÇIKLAMA

Bilimsel açıklama "niçin"li soruların yanıtı sayılabilir. Dolayısıyla bilimsel açıklama ile ilgili tartışmalar, "niçin"li sorulara dayanan adımları kapsayan tartışma oyunları olarak ele alınabilir.

Örnek olarak

(1) Oto radyatörü niçin kırıldı?

sorusunu ele alalım. Bu soru

(2) Oto radyatörünün kırılmasının hangi mümkün nedeni vardır?

biçimine dönüştürülebilir. Oysa (2) sorusu

(3) $?_{tek}$ x [(x, oto radyatörünün kırılmasının bir mümkün nedeni) $\wedge$E!x]

biçimindedir. İmdi (1) sorusunun amaç önermesi

(4) $\exists xK_S$ [(x, oto radyatörünün kırılmasının mümkün nedenidir)$\wedge$E!x]

dir. S, soruşturmacıdır. (3) sorusunun öndayanağı ise

(5) $\exists$x [(x, oto radyatörünün kırılmasının bir mümkün nedenidir)$\wedge$E!x]

dir. Yanıt da

(6) Çünkü sıcaklık donma noktasının altına indi

biçiminde olabilir. Yanıt olay adı olarak ele alındığında

(7) Sıcaklığın donma noktasının altına inmesi olayı

biçimindedir. Dikkat edilirse

(8) $\exists xK_S$ (sıcaklığın donma noktasının altına inmesi olayı = x),

(9) K_S [sıcaklığın donma noktasının altına inmesi olayı, oto radyatörünün kırılmasının bir mümkün nedenidir]

ve

(10) K_I (sıcaklık, donma noktasının altına indi)

veya

(11) K_1 (sıcaklığın donma noktası altına inmesi olayı gerçekleşti.)

yani

(12) K_1 [E! (sıcaklığın donma noktası altına inmesi olayı)]

önermeleri bir arada (4) amaç önermesini içerir. (8), (9) ve (12) birlikte "sıcaklığın donma noktasının altına inmesi olayı"nın (1) veya (2) sorusunun doğru tam-yanıtı olmasının gerekli ve yeterli koşulunu oluşturuyor.

İmdi (9) veya (10) ya da (11) önermesi açıklama için gerekli olan *başlangıç koşulu*'nu dile getirir. (9) önermesi ise bir doğa yasasını dile getirir.

12.6 TARTIŞMA ÇÖZÜMLEMESİ VE DEĞERLENDİRMESİ

Herhangi bir tartışmayı bir tartışma çizelgesi biçiminde dile getirebilmek için tartışmayı oluşturan öğeler ortaya konulmalıdır. *Tartışma çözümlemesi,* tartışmayı bir tartışma çizelgesi biçiminde dile getirmek için yapılan çözümleme demektir. Tartışma çözümlemesi belli bir takım soruların yanıtlaması biçiminde yapılabilir. Bu soruların başlıcalarını aşağıda sıralıyoruz.

1. Son sonuç ve ana soru nedir?
2. İlk öncüller nelerdir?

2.1 Soruşturmacı hangi adımlarda verilen bilgileri (satırı köşeli parantez içine alarak) şüpheli saymıştır?

2.2 Araştırmacı, belli bir ilkel öncülün köşeli parantez içine alınmasının sonraki satırları nasıl etkilediğini hesaba kattı mı?

2.3 Soruşturmacı şüpheli sayılan bir ilkel öncülü güvenilir hale getirmek için gerekli çarelere başvuruyor mu?

3. Tartışma çizelgesinin adımları nelerdir?

Genellikle son sonuç ile ilk öncüller kolaylıkla belirlenir. Ancak soruşturma adımlarında geçen yanıtların ve bunlara ilişkin satırların ortaya konulması zor olabilir. Bu yanıtlar tartışma çizelgesinin örtük (yani belirtik olmayan) adımlarıdır. Tartışma çözümlemesinin önemli görevi örtük adımların belirtik hale getirilmesidir.

3.1 Tartışmanın hangi adımları örtüktür: Bu örtük adımlar nasıl belirtik hale getirilebilir.

3.2 Soruşturmacı, tartışmanın hangi adımında daha düşük düzeyde olan bir alt - tartışmaya dayanır?

4. Tartışmanın hangi adımları soruşturma adımlarıdır?

4.1 Her soruşturma adımının karşılığı olan soru nedir?

4.2 Sorunun sorulduğu yanıtlayıcı (yani bilgi kaynağı) kimdir?

4.3 Sorunun öndayanağı nedir? Bu öndayanak tartışmanın hangi adımında yer alıyor?

4.4 Yanıt tam-yanıt mıdır? Yanıtı tam-yanıt kılan nelerdir?

4.5 Soruşturmacı hangi soruşturma adımlarında (öyle adımlar varsa) yanıtları köşeli parantez içine alarak şüpheli saymıştır?

4.6 Soruşturmacı şüpheli soruşturma adımlarını köşeli parantez içine almakla sonraki satırları nasıl etkilediğini hesaba kattı mı?

4.7 Soruşturmacı, köşeli parantez içine alınan bir satırın dile getirdiği adımın güvenirliliğini sağlamak için bir işlemde bulundu mu?

5. Hangi adımlar mantıksal çıkarım adımlarıdır? Hangi mantık kuralları bu adımları haklı gösterir?

Çözümlemesi yapılmış olan bir tartışmanın son sonucunun haklı gösterilmiş olup olmadığını değerlendirmek mümkün olur. Tartışmanın değerlendirilmesi iki ayrı bakımdan yapılır. Birinci bakımdan tartışma çizelgesinin adımlarının tanımlayıcı kurallara uyup uymadığı değerlendirilir. İkinci bakımdan ise tartışmanın bir bütün olarak stratejik kurallar gereği başarılı olup olmadığı değerlendirilir.

Tartışma değerlendirmesi aşağıdaki soruların yanıtına dayanır.

I. *Tartışmanın adımlarının tanımlayıcı kurallara uygunluğu açısından değerlendirme*

1. Tartışma çizelgesi kapandı mı?

2. Akıl yürütme adımları mantık kurallarına uygun mu?

3. Soruşturma adımları sorular mantığı kurallarına uygun mudur? Özellikle bir sorunun yanıtını bir açık yola eklemeden önce sorunun öndayanağının açık yolda daha önce yer alması sağlanmış mıdır?

4. Tanımlama adımları tanımlama kurallarına uygun mudur?

II. *Tartışmanın başarısının stratejik kurallara uygunluk bakımından değerlendirilmesi?*

5. Şüpheli öncüller ve şüpheli yanıtlar sorunu tartışmada nasıl ele alınmıştır.

6. Tartışmanın değerlendirmesi olumsuz çıkmışsa, tartışmayı düzeltecek stratejiler bulunabilir mi?

7. Başarılı bir tartışmanın son sonucundan daha kuvvetli bir sonuca ulaşmak mümkün müdür?

8. Tartışma adımları daha kısa, daha açık bir hale getirilebilir mi?

Sonuç olarak "tartışma" ile "çıkarım" kavramları arasındaki ilişkiyi göz önüne alalım. Tartışmanın amacı ilk öncüllere dayanarak son sonucun doğruluğunun haklı gösterilmesidir. Dolayısıyla her tartışmayı bir çıkarım veya çıkarım zinciri sayabiliriz. Tartışmada geçen çıkarımların öncülleri, soruşturma adımlarında elde edilen yanıtlar veya tanımlama adımlarında varılan tanımlar olabilir. Tartışmanın başarılı olması tartışmada geçen her çıkarımın geçerli olması, ayrıca öncüllerin ve yanıtların doğru olması demektir.

12.7 AKIL YÜRÜTME VE SORUŞTURMA ADIMLARINA İLİŞKİN YANILGILAR

Tartışmalarda ortaya çıkan yanılgılar, ya akıl yürütme adımlarına ya da soruşturma adımlarına ilişkindir. Başlıca yanılgıları aşağıda gösteriyoruz.

I. *Akıl yürütme adımlarına ilişkin başlıca yanılgılar*

1. Günlük dildeki "veya" eklemine ilişkin yanılgı:

"Veya" eklemi günlük dilde tikel evetleme eklemi anlamında veya ayrıklık eklemi anlamında kullanılabilir. Tikel evetleme anlamındaki kullanılışı

"ve/veya" biçiminde, aykırılık anlamındaki kullanılışı da "ya...ya" biçiminde dile getirilebiliriz. Belli bir bağlamda geçen "veya" sözcüğünün anlamını yanlış kavramak bir yanılgıdır. Örneğin

(1) Ali yarın Mersin'e veya Adana'ya gidecek, Ali yarın Mersin'e gidecek, o halde Ali yarın Adana'ya gitmeyecek.

çıkarımı "veya" tikel evetleme eklemi anlamında alınırsa geçersiz, ayrıklık eklemi anlamında alınırsa geçerlidir. İmdi biri öbürüne çıkarımın iki öncülünü bildirse ve "veya"sözcüğünü bu bağlamda tikel evetleme anlamında kullandığında, dinleyici "veya"yı ayrıklık eklemi olarak yorumlayarak verilen öncüllerden "Ali yarın Adana'ya gitmeyecek" sonucunu çıkarırsa bir yanılgıya düşmüş olur.

2. Koşullara İlişkin Üç Olağan Yanılgı

(2) $p \rightarrow q, p \therefore q$

ile

(3) $p \rightarrow q, \sim q \therefore \sim p$

çıkarımları geçerlidir. (2)'ye Modus Ponens, (3)'e de Modus Tollens denir. Buna karşılık aşağıdaki çıkarım biçimleri geçersizdir. Bunların yapılması birer yanılgıdır.

(4) $p \rightarrow q, \sim p \therefore \sim q$

(4) geçersiz çıkarımının yapılmasına *ön bileşeni değilleme yanılgısı* denir.

(5) $p \rightarrow q, q \therefore p$

(5) geçersiz çıkarımının yapılmasına *ard bileşeni evetleme yanılgısı* denir.

(6) $p \rightarrow q \therefore q \rightarrow p$

(6) çıkarımının yapılmasına *evirme yanılgısı* denir.

II. *Soruşturma Adımlarına İlişkin Başlıca Yanılgılar*

Akıl yürütme ile ilgili yanılgılara *yanılgılar* denir. Buna karşılık soruşturma adımlarına ilişkin yanılgılara *içerikli yanılgılar* denir.

1. Savın kanıtsanması yanılgısı

Bu yanılgı bir çıkarım veya tartışmada, haklı gösterilmek istenen bir sonuçtan daha çok tartışmalı olan bir öncülün kullanılması demektir. Savın kanıtsanması ana soruyu (büyük soruyu) zamanından önce yanıtlamaya çalışmamız durumunda ortaya çıkar. Genellikle ana soruyu yanıtlamak için bir sürü işlemsel soru sorulup bunların yanıtları beklenir. İşlemsel soruları sormadan doğrudan doğruya ana soruyu sormak savın kanıtsanması yanılgısının bir biçimidir. Örnek olarak üniversite matematik dersinin sınavında öğrenci zor ana sorularının sorulmasını bekler. Bu durumda öğrencinin sorunun yanıtını öğretim üyesine sormaya kalkışması savın kanıtsanması olur. Oysa sınavda beklenen öğrencinin ana sorulara ilişkin işlemsel soruları çözmesi bunların çözümüne dayanarak ana soruyu yanıtlamasıdır.

2. Döngülü akıl yürütme yanılgısı

p gibi bir önermeyi

(7) q ∴ p

q önermesini

(8) r ∴ q

çıkarımı ile ve r önermesini de

(9) p ∴ r

çıkarımı ile haklı göstermeye çalışmaya *döngülü akıl yürütme* denir. Bu çıkarımlar zincirinde biçimsel yanılgı yoktur. Ancak bu çıkarımlar zincirinin hiç bir yararı da yoktur. Nitekim soruşturmacı p, q, r önermelerinin doğru olduğunu önceden biliyorsa sözü geçen çıkarımlara gerek yoktur. Buna karşılık soruşturmacı p, q, r önermelerinin doğru olduğunu önceden bilmiyorsa çıkarımlar zinciri de bunu sağlayamaz. Dolayısıyla bu çıkarımlar işlevsizdir. Her iki halde de çıkarımlar zinciri yararsızdır.

3. Soruların çokluğu yanılgısı

Herhangi bir soruyu sormadan önce o sorunun öndayanağının doğru olduğu bilinmelidir. Öndayanağının doğruluğu bilinmeyen bir sorunun sorul-

masına *soruların çokluğu yanılgısı* denir. Örnek olarak a kişisinin b ile c gibi dürüstlüğü bilinen iki kişiye

(10) "b hırsızdır" ile "c hırsızdır" önermelerinden hangisi doğrudur?

sorusunun sorulması son derece yersizdir. Nitekim (10) sorusunun öndayanağı

(11) *b* hırsızdır veya *c* hırsızdır

önermesidir. Bu önerme örneğimizde yanlış olduğundan (10) sorusunun sorulması soruşturma adımlarının tanımlayıcı kurallarına aykırıdır.

4. Yasaya aykırı yetke (otorite)'ye başvurma yanılgısı

Herhangi bir konuda uzman olan kişilere güvenebiliriz. Ancak belli bir alanda yetke sayılan kişilerden başka bir alana ait bir soruyu yanıtlamasını istemek bir yanılgıdır. Buna *yasaya aykırı yetkeye başvurma yanılgısı* denir. Örneğin siyasal görüşümüzü, beğendiğimiz bir sinema oyuncusunun siyasal görüşüne dayandırmak bir yanılgı olur.

5. Bilgisizliğe dayanan sonuç yanılgısı

Bir şeyin olmadığının bilinmemesine dayanarak bu şeyin olduğu sonucunu çıkarmaya *bilgisizliğe dayanan sonuç yanılgısı* denir. Bu yanılgı geçersiz olan

(12) $\sim B_s \sim p \therefore B_s p$

çıkarımı ile dile getirilebilir. Örnek olarak "uçan daire" denilen kimliği belirlenmemiş uçan cisimlerin (UFO'ların) varlığının bilgisini, uçan dairelerin olmadığının kesin kanıtının olmamasına dayandırmak bu türlü bir yanılgıdır. "p", "uçan daireler vardır" önermesini temsil edip, "S" bir soruşturmacıyı gösterdiğinde,

(13) $\sim B_S \sim p$

önermesi doğru sayılabilir. Nitekim

(14) $B_s \sim p$

yanlıştır. "Uçan daireler yoktur" önermesinin kesin kanıtı yoktur. Ancak doğ-

ru olan (13) öncülünden "S, uçan dairelerin var olduğunu bilir" anlamına gelen

(15) B_Sp

önermesini sonuç olarak çıkarmak bir yanılgıdır. (13)'ün doğru olmasına karşın (15)'in yanlış olması mümkündür.

6. Sonradan gelen olayı sonuç sayma yanılgısı

O_1 ve O_2 iki olay türü olduğunda, eğer O_2 türünden bir olay O_1 türünden bir olaydan sonra ortaya çıkarsa O_1'i O_2'nin nedeni (yani O_2'yi O_1'in sonucu) saymak genellikle bir yanılgıdır. Bu yanılgı iki türlü olabilir.

(i) O_1 ile O_2 arasındaki bağlaşıklık (korelasyon) derecesi düşüktür. Yani O_2 türünden bir olay bazan O_1 türünden bir olaydan sonra gerçekleşmekle birlikte, çok kez bu olmuyor.

(ii) O_1 ile O_2 arasındaki bağlaşıklık derecesi yüksektir, yani O_2 türünden bir olay çok kez O_1 türünden bir olaydan sonra gerçekleşir. Ancak O_1 gene de O_2'nin nedeni değildir.

13. KLASİK (GELENEKSEL) MANTIĞIN SEMBOLİK MANTIKLA ÇÖZÜMLENMESİ

13.1 TERİMLER

13.1.1 Terim Türleri

13.1.1.1 Genel Terimler ile Tekil Terimler

Klasik veya *geleneksel mantık,* Aristo'nun kurduğu ve daha sonraları Hegara ve Stoa okullarının ve ortaçağ filozoflarının geliştirdiği mantık sistemidir. Bu mantık sisteminde kavramları ifade eden *"terimler"* bir araya gelip yargıları ifade eden *"önermeleri"* oluşturur. Önermeler de bir araya gelerek akıl yürütmeleri ifade eden *"çıkarımları"* oluşturur. Çıkarımlar arasında en önemli olanlar da *"kıyaslar"*dır.

Kavram, bir nesnenin zihindeki tasarımıdır. Bu nesne ya bir küme veya bir sınıf, ya da bir bireydir. Kavramın dille ifadesine *terim* denir. Burada "küme" ile "sınıf" sözcüklerini aynı anlamda kullanıyoruz.

Terim ifade ettiği kavramın karşılığı olan nesneyi *gösterir* (veya başka bir deyimle terim nesneye delâlet eder). Örneğin "insan" teriminin gösterdiği nesne insan sınıfı, "Sokrates" teriminin gösterdiği nesne ise bir birey olan Sokrates'tir. Gösterilen nesne bir sınıf olduğunda, terimi niceleme mantığı anlamındaki bir *birli yüklem* sayıyoruz. Bu terimlere *genel terim* (veya *tümel terim*) denir. Buna karşılık bir bireyi gösteren terim *tekil terim* sayılır. Genel terimleri "F", "G", "H", ... gibi (birli) yüklem temsilcileri ile, tikel terimleri de "a", "b", "c", ... gibi ad temsilcileri ile temsil ediyoruz. "a", "b", "c", ..., "F", "G", "H",... sembolik sözü edilen dile aittir. Herhangi bir dilin (sembolik dilin, günlük dilin veya bilim dilinin) tekil terimlerini t, t_1, t_2, ... tekil terim değişkenleri ile, genel terimleri T, T_1, T_2, ... genel terim değişkenleri ile, önermeleri de A, B, C,... önerme değişkenleri ile gösteriyoruz. Bütün bu değişkenler sözeden dile aittir.

Her tekil terim bir nesnenin adıdır. Bu nesne var olabilir veya olmayabilir. t tekil terimi var olan bir nesnenin adı ise E!t önermesi doğru olur. t tekil terimi var olmayan bir nesnenin adı ise E!t önermesi yanlış olur. Örneğin

(1) E!(Ağrı dağı)

önermesi doğru,

(2) E!(Kaf dağı)

önermesi ise yanlıştır.

T bir genel terim olduğunda, T(x) bir atomsal birli açık önermedir. T teriminin *kaplamı* T(x)'i gerçekleyen nesnelerin kümesidir. T'nin kaplamını

(3) kp(T)

biçiminde gösteriyoruz. Örneğin

(4) kp("İnsan")

bütün insanların kümesi;

(5) kp("doğal sayı")

ise {0, 1, 2, 3, ...} kümesidir. Bir tekil terimin kaplamı bu terimin adlandırdığı nesnedir. Örneğin "Sokrates" tekil teriminin kaplamı birey olarak Sokrates'tir.

İmdi T bir genel terim , t'de bir tekil terim olduğunda

(6) T(t)

önermesi doğru ise t'nin adlandırdığı nesne T'nin kaplamının bir öğesi olur. T genel teriminin kp(T)'ye ait her nesneye *uygulandığını* söyleriz. Dolayısıyla (6) doğru ise T genel terimi t'nin adlandırdığı nesneye uygulanır. Örneğin

(7) Sokrates insandır.

doğru olduğundan

(8) Sokrates $\in$ kp("İnsan")

olur. Dolayısıyla "İnsan" genel terimi, "Sokrates"in adlandırdığı nesneye, yani Sokrates'e uygulanır. T genel terimi bir nesneye uygulanırsa, T'nin ifade ettiği kavramın bir nesnede *gerçekleştiği* söylenir.

T bir genel terim olduğunda, T'nin kaplamını oluşturan nesnelerin ortak özelliklerinin topluluğuna T'nin *içlemi* denir. Örneğin "insan" teriminin içlemi rasyonel olma ve hayvan olma özellikleridir. Kaplam ile içlem ters orantılıdır. Kaplam genişleyince içlem daralır, kaplam daralınca içlem genişler. Örneğin "beyaz derili insan" teriminin kaplamı "insan" teriminin kaplamından daha dardır. Oysa ilk terimin içlemi beyaz derili olma, rasyonel olma ve hayvan olma özelliklerinden oluştuğundan, "insan" teriminin içleminden daha geniştir.

Bir genel terimin kaplamı boş olmadığı gibi, boş da olabilir. Hiçbir nesneye uygulanamayan bir genel terimin kaplamı boştur. Yani { } kümesine eşittir. En az bir nesneye uygulanabilen bir genel terimin kaplamı ise boş değildir. T genel teriminin kaplamının boş olmamasının gerekli ve yeterli koşulu

(9) $\exists x T(x)$

önermesinin doğru olmasıdır. Örneğin "insan" genel teriminin kaplamı boş değildir, nitekim

(10) $\exists x$(x insandır)

önermesi doğrudur. Öte yandan T teriminin kaplamının boş olmasının gerekli ve yeterli koşulu

(11) $\sim\exists xT(x)$

veya (11)'in eşdeğeri olan

(12) $\forall x\sim T(x)$

önermesinin doğru olmasıdır. Örneğin "yuvarlak kare" genel terimi boştur. Nitekim

(13) $\sim\exists x$(x bir yuvarlak karedir)

önermesi doğrudur.

Var olmayan bir nesneyi adlandıran ("Anka kuşu" gibi) bir tekil terimin veya boş bir kaplamı olan ("yuvarlak kare" gibi) bir genel terimin karşılığı olan kavramın gerçekliği yoktur. Ama böyle bir kavramın yine de *neliği* (mahiyeti) olduğu söylenir. Nelik kavramın zihindeki tasarımıdır. Gerçekliği olmayan "Anka kuşu" veya "yuvarlak kare"nin zihinde bir tasarımı olduğunu kabul edebiliriz.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki terimleri genel terim ve tekil terim olarak ayırınız.

1. Kuş
2. Anka kuşu
3. Deve kuşu
4. Dağ
5. 2/5

13.1.1.2 Distribütif ve Kollektif Terimler

Her genel terimin kaplamı bir sınıftır. Bu sınıf, terimin uygulandığı nesnelerin kümesidir. Genel terimin uygulandığı nesne bir birey olabildiği gibi bir sınıfda olabilir. Sınıflara uygulanan genel terimlere *kollektif (ortaklaştırıcı) terim,* bireylere uygulanan genel terimlere de *distribütif (dağıtıcı) terim* denir. Buna göre ortaklaştırıcı terimin ifade ettiği kavram kümelerde gerçeklenir, buna karşılık dağıtıcı terimin ifade ettiği kavram bireylerde gerçekleşir. Örne-

ğin "sürü", "orman" kollektif terimler, "insan", "öğrenci", "üye", "asker", "işçi" distribütif terimlerdir. Görüldüğü gibi insan sınıfının her öğesine distribütif olan "insan" terimini uygulayabiliriz. Oysa kollektif olan "sürü" terimini sürünün öğelerine uygulayamayız. Nitekim insan sınıfının öğeleri "insan" teriminin kaplamına aittir. Bir sürünün öğeleri ise "sürü" teriminin kaplamına ait değildir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki terimleri "kollektif" ve "distribütif" olarak ayırınız.

1. Kedi
2. Takım
3. Sporcu
4. Ağaç
5. Orman

13.1.1.3 Somut ve Soyut Terimler

Bir nesneyi gösteren genel terimlere *somut terim,* bir nesnenin özelliğini gösteren tekil terimlere *soyut terim* denir. Örneğin "insan" genel terimi insan gibi bir nesneyi gösterdiğinden somut terimdir. "İnsanlık" ise "insan" genel teriminden türetilen bir tekil terimdir. "İnsanlık" tekil terimi, insanın özelliği olan insanlığın adıdır. "İnsanlık", somut "insan" genel teriminin karşılığı olan soyut tekil terimdir.

Genel olarak T bir somut genel terim olduğunda "T lik", T'nin karşılığı olan soyut tekil terimdir. "T lik", T genel teriminin gösterdiği nesnenin özelliğinin adıdır. Örneğin "mavilik", somut genel terim olan "mavi"nin karşılığı olan soyut tekil terimdir. Mavinin özelliği olan maviliğin adıdır.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki somut genel terimlerin karşılığı olan soyut tekil terimleri belirtiniz.

1. Beyaz
2. Koşan
3. Genç
4. Yaşlı
5. Kardeş

13.1.1.4 Olumlu ve Olumsuz Terimler

Herhangi bir genel terime, "olmayan" son ekini ekleyerek bu terimin *olumsuz*'u denilen yeni bir terim elde edilebilir. Örneğin "insan" genel teriminden olumsuzu olan "insan olmayan" genel terimi elde edilir. "Olmayan" gibi bir nitelemeden yoksun olan terimlere *olumlu* (veya *pozitif*) *terim*, böyle bir nitelemesi olan terimlere de *olumsuz* (veya *negatif*) *terim* denir. Örneğin "yürüyen" olumlu terim "yürümeyen" ise olumsuz terimdir.

Genel olarak T herhangi bir genel terim olduğunda "T olmayan" T'nin karşılığı olan olumsuz genel terimdir. "T olmayan" olumsuz genel terimini "$\overline{T}$" biçiminde gösteriyoruz. Tepedeki "—" işareti *olumsuzlama değişmezi* denilen yeni bir mantık değişmezidir. Bu değişmez bir genel terime uygulandığında yeni bir genel terim oluşturur.

Olumsuzlama değişmezi ard arda bir genel terime uygulanabilir. Ancak

(1) $\overline{\overline{T}}$

genel terimi T ile aynı anlama gelir. Nitekim "T olmayan olmayan" genel terimi T anlamına gelir. Dolayısıyla T'nin tepesindeki olumsuzlama işaretlerinin sayısı çift ise verilen genel terim T'ye indirgenir; işaretlerin sayısı tek ise verilen genel terim $\overline{T}$'a indirgenir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki genel terimleri olumlu ve olumsuz olarak ayırınız. Olumlu olanların karşılığı olan olumsuz terimleri belirtiniz.

1. Beyaz
2. Kedi
3. Konuşmayan
4. Tamsayı
5. Hava olmayan

13.1.2 Terimler Arası İlişkiler

Klasik mantıkta bireyler *tür* denilen doğal sınıflara ayrılmıştır. Bir tür başka bir türün alt kümesi ise, ikinci türe birinci türün *cins*'i denir. Bir türün cinsleri arasında en dar olanına o türün *yakın cins*'i denir. Cinsi olan her türün bir tek yakın cinsi olduğu kabul edilir. Ayrıca herhangi bir türü, yakın cinsine ait öbür türlerden ayıran *türel ayırım* denilen bir tek türün de bulunduğu kabul edilir. Örneğin insan bir tür olup yakın cinsi hayvan'dır. İnsan türünü öbür hayvan türlerinden ayıran türel ayırım akıllı (yani akıl sahibi) olmadır.

Bir türün *tanım*'ı yakın cins ile türel ayırımın bir araya gelmesinden oluşur. Örneğin insan türü, akıllı hayvan olarak tanımlanır. Akıllı hayvan, akıllı türü ile hayvan türünün kesişiminden oluşan bir türdür. Görüldüğü gibi herhangi bir tür ile bu türün tanımı olan tür özdeştir. Örneğin insan türü ile akıllı hayvan türü özdeştir.

Her tür, bir genel terimin gösterdiği nesnedir. Başka bir deyişle her tür, bir genel terimin kaplamıdır. Genel terimler arasındaki ilişkiler, bu terimlerin kaplamları olan türler arasındaki ilişkilerdir. İmdi, T_1 ile T_2 tür gösteren herhangi iki terim olduğunda $kp(T_1)$ ile $kp(T_2)$ arasında aşağıdaki beş farklı ilişki olabilir.

1. $kp(T_1) = kp(T_2)$

Örnek: T_1: Dört kenarlı çokgen; T_2: Dört açık çokgen

2. $kp(T_1) \subsetneq kp(T_2)$

Örnek: T_1: Dörtgen, T_2: Çokgen

3. $kp(T_2) \subsetneq kp(T_1)$

Örnek: T_1: kapalı şekil, T_2: Çokgen

4. $kp(T_1) \cap kp(T_2) \neq \{\ \}$, $kp(T_1) \not\subseteq kp(T_2)$, $kp(T_2) \not\subseteq kp(T_1)$

Örnek: T_1: kedi; T_2: siyah

5. $kp(T_1) \cap kp(T_2) = \{\ \}$

Örnek: T_1: insan; T_2: taş

Dikkat edilirse $kp(T_2)$, $kp(T_1)$'in cinsi ise $kp(T_1) \subsetneq kp(T_2)$ olur; $kp(T_2)$, $kp(T_1)$'in türü ise $kp(T_2) \subsetneq kp(T_1)$ olur; $kp(T_2)$, $kp(T_1)$'in tanımı ise $kp(T_2) = kp(T_1)$ olur.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki terim çiftlerindeki terimler arası ilişkiyi belirtiniz.

1. İnsan, Beyaz derili
2. Omurgalı, Balık
3. Balık, Memeli
4. Altın, Bakır
5. Metal, Demir

13.2 ÖNERMELER

13.2.1 Önerme Türleri

13.2.1.1 Basit Önermeler: Özne-Yüklem Önermeleri

Önerme, iki veya daha çok terimden oluşan doğru veya yanlış olan bir sözdür. Önerme, iki veya daha çok kavramdan oluşan bir edim olan bir *yargı*'yı dile getirir.

Önermeler "basit" ve "bileşik" olmak üzere ikiye ayrılır. *Bileşik* önerme iki veya daha çok önermeden oluşan bir önerme; *basit* önerme, iki veya daha çok önermeye bölünemeyen önermedir. Kipliksiz basit önermelere *özne-yüklem önermesi* veya *kategorik önerme* denir. Özne-yüklem önermesi, birine *özne*, öbürüne de *yüklem* denilen iki terimden oluşur. Özne durumundaki terimi "S" ile, yüklem durumundaki terimi de "P" ile gösteriyoruz. "P" her zaman bir genel terimdir. "S" ise genellikle bir genel terim olmakla birlikte tekil terim de olabilir. Özne-yüklem önermeleri,

(1) Bütün S'ler P'dir.

biçiminde *tümel-evetleyici* (veya *tümel olumlu*) önermeler,

(2) Hiçbir S, P değildir.

biçiminde *tümel-değilleyici* (veya *tümel olumsuz*) önermeler,

(3) Bazı S'ler P'dir.

biçiminde *tikel-evetleyici* (veya *tikel olumlu*) önermeler

ve

(4) Bazı S'ler P değildir.

biçiminde *tikel-değilleyici* (veya *tikel olumsuz*) önermelere ayrılır. S bir tekil terim olduğunda

(5) S, P'dir.

biçimindeki önerme klasik mantıkta (1) biçiminde bir tümel-evetleyici önerme,

(6) S, P değildir.

önermesi de (2) biçiminde bir tümel-değilleyici önerme sayılır. İmdi (1) önermesi,

(1') SaP

veya **A** biçiminde, (2) önermesi,

(2') SeP

veya **E** biçiminde, (3) önermesi,

(3′) SiP

veya **İ** biçiminde, (4) önermesi de

(4′) SoP

veya **O** biçiminde kısaltılır. "a", "e", "i" ve "o" işaretleri, iki terimden birer önerme oluşturan yeni mantık değişmezlerini gösterir. Bu türlü değişmezlere *ikili terim eklemi* diyoruz. "a" değişmezine *tümel evetleyici eklem*, "b" değişmezine *tümel değilleyici eklem*, "i" değişmezine *tikel evetleyici eklem* ve "o" değişmezine *tikel değilleyici eklem* diyoruz.

(1) – (4) özne yüklem önermelerini niceleme mantığı çerçevesinde sırasıyla

(1″) $\forall x(Sx \rightarrow Px)$

(2″) $\forall x(Sx \rightarrow \sim Px)$

(3″) $\exists x(Sx \wedge Px)$

(4″) $\exists x(Sx \wedge \sim Px)$

biçiminde dile getirebiliriz. (1″) – (4″) önermelerinde P gibi S de bir genel terim, yani bir birli yüklem olmalıdır. Eğer S bir tekil terim ise (5) önermesi

(5′) P(S)

biçiminde ve (6) önermesi de

(6′) ~P(S)

biçiminde dile getirilir.

Örneğin

(7) Bütün insanlar ölümlüdür

önermesi tümel-evetleyici,

(8) Hiçbir insan ölümsüz değildir

önermesi tümel-değilleyici,

(9) Bazı insanlar filozoftur

önermesi tikel-evetleyici ve

(10) Bazı insanlar filozof değildir

önermesi tikel-değilleyicidir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki özne-yüklem önermelerinin türlerini belirtiniz.

1. Bazı omurgalılar memelidir.
2. Bütün memeliler omurgalıdır.
3. Bazı omurgalılar memeli değildir.
4. Hiçbir memeli omurgasız değildir.

13.2.1.2 Kiplikli Basit Önermeler

Kiplikli önermeler karmaşık önermelerdir. Nitekim verilen bir kiplikli önermede kipliğin etki alanı verilen önermenin bir bölümüdür. Klasik mantıkta kipliğin etki alanına *diktum* denir. "Mümkün", "zorunlu", "olumsal" ve "imkânsız" olmak üzere dört kiplik bir de bunların olumsuzu olan "mümkün değil", "zorunlu değil", "olumsal değil" ve "imkânsız değil" kiplikleri vardır. Diktum önermesi de olumlu veya olumsuz olabilir. Buna göre 16 tane farklı kiplikli önerme vardır. Bunları aşağıdaki çizelgede sıralıyoruz.

(1)

1. p mümkündür	9. p-değil mümkündür
2. p zorunludur	10. p-değil zorunludur
3. p olumsaldır	11. p-değil olumsaldır
4. p imkânsızdır.	12. p-değil imkânsızdır.
5. p mümkün değildir.	13. p-değil mümkün değildir.
6. p zorunlu değildir.	14. p-değil zorunlu değildir.
7. p olumsal değildir.	15. p-değil olumsal değildir.
8. p imkânsız değildir.	16. p-değil imkânsız değildir.

Kiplikler mantığında "p mümkündür" "◇p", "p zorunludur" "□p", "p olumsaldır" "◇p∧~□p" ve "p imkânsızdır" "~◇p" biçiminde gösterilir. Buna göre (1) çizelgesindeki 16 kiplikli önerme aşağıdaki 6 önermeye indirgenebilir.

(2) 1. □p

2. ~□p

3. □~p

4. ~□~p

5. ~□p ∧ ~□~p

6. □p ∨ □~p

Örneğin "p olumsaldır" önermesi "~□p ∧ ~□~p" ile eşdeğer olup "p olumsal değildir" önermesi "□p ∨ □~p" ile eşdeğerdir.

ALIŞTIRMALAR

§13.2.1.2'de (1) çizelgesindeki 16 önermelerden (henüz indirgenmeyen) her birinin (2) çizelgesinde geçen 6·önermeden biriyle eşdeğer olduğunu gösteriniz.

13.2.1.3 Bileşik Önermeler

Aristo mantığında ele alınan bileşik önermeler çok sınırlıdır. Bunların başlıcaları koşullu önermeler ile tikel evetleme önermeleridir. Megaralı ve Stoacı mantıkçılar önermeler mantığının iki değerli doğruluk fonksiyonu durumundaki ("p → q" biçimindeki) koşullu önermeye *Philon koşullusu* demiştir. (Philon-Filon diye okunur - Megara okuluna ait bir mantıkçıdır.) Chrysippos ("Krisipos" diye okunur.) adlı Stoacı mantıkçı kipliksel gerektirme anlamındaki doğruluk fonksiyonu durumunda olmayan koşullu önermeyi ortaya koymuştur. Bu koşullu "p < q", yani "□(p → q)" biçimindedir.

Stoacılar "p ∨q" anlamındaki tikel-evetleme ile p ←|→ q anlamındaki ayrıklığı da ortaya koyup aralarındaki farkı belirtmişlerdir. Ayrıca doğruluk fonk-

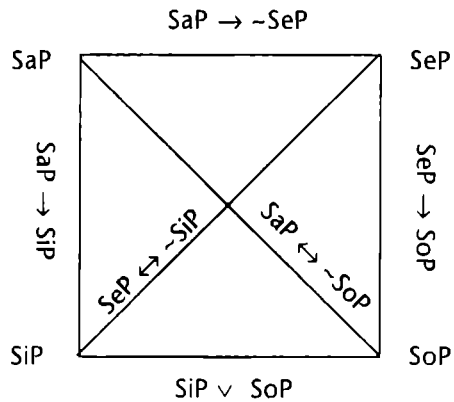
siyonu durumunda olmayan tikel-evetleme önermelerini ortaya koymuşlardır.

13.2.2 Önermeler Arası İlişkiler

13.2.2.1 Karşı Olum Yasaları

Özne-yüklem önermelerinin temel önerme eklemleriyle birleştirilmesinden elde edilen geçerli önermeler özne-yüklem önermeleri arasındaki ilişkileri dile getirir. Bu geçerli önermelere *önermeler arası ilişki yasaları* denir. Ayrıca öncülleri ve sonucu özne-yüklem önermesi olan çıkarımların geçerliliğini dile getiren ve *tasım (kıyas) yasaları* denilen yasalar da vardır. Önermeler arası ilişki yasaları ile tasım yasaları *özne-yüklem önermeleri mantığının yasaları*'nı oluşturur. Toplam 56 yasayı ortaya koyacağız. Bu yasaları (1)–(56) olarak numaralıyoruz. Önermeler arası ilişki yasaları, *karşı olum yasaları* ve *dolaysız çıkarım* yasalarına ayrılır. Dolaysız çıkarım A ile B birer özne yüklem önermesi olduğnuda A ∴ B biçimindeki geçerli bir çıkarımdır. Geçerli A → B önermesi de bu çıkarımın karşılığı olan dolaysız çıkarım yasasıdır.

Karşı olum yasalarına, aşağıdaki kare biçimindeki çizelge ile dile getirilebildiğinden, *mantıksal kare yasaları* da denir.



(Şekil 1)

Karşı olum veya mantıksal kare yasaları şunlardır.

i. Karşıtlık:

(1) SaP → ~SeP (SaP↓SeP)

SaP ile SeP önermelerine birbirinin *"karşıt"*ı denir. Karşıtlar aynı zamanda doğru olamaz, ama aynı zamanda yanlış olabilirler.

ii. Alt-Karşıtlık:

(2) SiP ∨ SoP

SiP ile SoP önermelerine birbirinin*"alt-karşıt"*ı denir. Alt-karşıtlar aynı zamanda doğru olabilirler, ama aynı zamanda yanlış olamazlar.

iii. Altıklık:

(3) SaP → SiP

(4) SeP → SoP

SaP doğru ise, SiP'te doğru olur. SeP doğru ise, SoP'ta doğru olur. Ama tersi gerekli değildir.

iv. Çelişiklik:

(5) SaP ↔ ~SoP (Sap←I→SoP)

(6) SeP ↔ ~SiP (SeP←I→SiP)

Bir yandan SaP ile SoP, öbür yandan SeP ile SiP'e birbirlerinin *"çelişiği"* denir. Çelişik önermelerin biri doğru ise, öbürü yanlış olur; her ikisi birden ne doğru olabilir, ne de yanlış.

13.2.2.2 Dolaysız Çıkarım Yasaları

Klasik mantığın basit önerme kalıpları ("–" çizgisi "a", "e", "i" veya "o" sembolerinden herhangi birinin yerini tuttuğunda) "S-P", "S-$\bar{P}$", "$\bar{S}$-P"; "$\bar{S}$-$\bar{P}$", "P-S", "P-$\bar{S}$", "$\bar{P}$-S" ve "$\bar{P}$-$\bar{S}$" biçimindedir. "S-P" biçiminde olanlara (yani "SaP", "SeP", "SiP" ve "SoP" kalıplarına) "S" ile "P"den kurulu *"temel-kalıplar"*, öbürlerine *"temel-olmayan kalıplar"* denir. Temel olmayan kalıplar, temel kalıplardan *"çevirme"*, *"döndürme"* ve *"ters döndürme"* denilen bir takım dönüştürmeler yardımıyla elde edilebilirler.

"*Çevirme*", "S-P" gibi bir temel kalıbın "$\overline{S}$-$\overline{P}$" biçimine dönüştürülmesidir. Böyle bir dönüştürmeye "*tam-çevirme*" de diyebiliriz. Nitekim "tam çevirme"nin yanı sıra bir de "*yarı-çevirmeler*" vardır. Yarı-çevirmeler, "S-P"yi "S-$\overline{P}$"ye dönüştüren "*ard-çevirme*" ile "S-P"yi "$\overline{S}$-P"ye dönüştüren "*ön-çevirme*" biçimlerinde olur. "$\overline{S}$-$\overline{P}$"ye "S-P"nin *çevriği* (veya tam-çevriği), "S-$\overline{P}$"ye *ard-çevriği*, "$\overline{S}$-P"ye de *ön-çevriği* diyoruz.

"Döndürme" "S-P"nin "P-S"ye dönüştürülmesidir. "P-S" ye "S-P" nin *döndürmesi* denir.

"*Devirme* veya *ters döndürme*" "S-P" nin "$\overline{P}$-$\overline{S}$" ye dönüştürülmesidir. Böyle bir dönüştürmeye "*tam-devirme*" de denir. Nitekim tam-devirmenin yanı sıra bir de "*yarı-devirmeler*" vardır. Bunlar "S-P"yi "P-$\overline{S}$" ye dönüştüren "*ard-devirme*" ile "S-P" yi "$\overline{P}$-S"ye dönüştüren "*ön-devirme*" biçimlerinde olur. "$\overline{P}$-$\overline{S}$", "S-P" nin *devriği* (veya tam-devriği), "P- $\overline{S}$" *ard-devriği*, "$\overline{P}$-S"de *ön-devriği*'dir.

İşte, dolaysız çıkarım yasaları verilen bir temel-kalıbın mantıkça içerdiği, veya mantıkça eşdeğer olduğu çevrik, döndürme ve devrikleri belirleyen yasalardır. Bu yasaları aşağıda gösteriyoruz:

I. Geçerli Çevirmeler

(i) "SaP"ın Çevrikleri:

(7) SaP $\rightarrow$ $\overline{S}$i$\overline{P}$ (tam-çevirme)

(8) SaP $\leftrightarrow$ Se$\overline{P}$ (ard-çevirme)

(9) SaP $\rightarrow$ So$\overline{P}$ (ard-çevirme + altıklık)

(10) SaP $\rightarrow$ $\overline{S}$oP (ön-çevirme)

(ii) SeP'in Çevrikleri:

(11) SeP $\rightarrow$ $\overline{S}$o$\overline{P}$ (tam-çevirme)

(12) SeP $\leftrightarrow$ Sa$\overline{P}$ (ard-çevirme)

(13) SeP $\rightarrow$ Si$\overline{P}$ (ard-çevirme + altıklık)

(14) SeP $\rightarrow$ $\overline{S}$iP (ön-çevirme)

(iii) SiP'in Çevrikleri:

(15) SiP $\leftrightarrow$ $\overline{\text{So}}\text{P}$ (ard-çevirme)

(iv) SoP'un çevrikleri:

(16) SoP $\leftrightarrow$ $\overline{\text{Si}}\text{P}$ (ard-çevirme)

II. Geçerli Döndürmeler (Evirmeler)

(i) SaP'ın Döndürmeleri

(17) SaP $\rightarrow$ PiS (döndürme)

(ii) SeP'in Döndürmeleri

(18) SeP $\leftrightarrow$ PeS (döndürme)

(19) Sep $\rightarrow$ PoS (döndürme + altıklık)

(iii) SiP'in Döndürmeleri

(20) SiP $\leftrightarrow$ PiS (evirme)

(iv) SoP'un Döndürmeleri

Yoktur.

III. Geçerli Devirmeler (Ters Döndürmeler):

(i) SaP'ın Devrikleri:

(21) SaP $\leftrightarrow$ $\overline{\text{P}}\text{a}\overline{\text{S}}$ (tam-devirme)

(22) SaP $\rightarrow$ $\overline{\text{Pi}}\,\overline{\text{S}}$ (tam-devirme + altıklık)

(23) SaP $\rightarrow$ Po$\overline{\text{S}}$ (ard-devirme)

(24) SaP $\leftrightarrow$ $\overline{\text{P}}$eS (ön-devirme)

(25) SaP $\rightarrow$ $\overline{\text{P}}$oS (ön-devirme + altıklık)

(ii) SeP'in Devrikleri:

(26) SeP $\rightarrow$ $\overline{\text{P}}\text{o}\overline{\text{S}}$ (tam-devirme)

(27) SeP $\leftrightarrow$ Pa$\overline{\text{S}}$ (ard-devirme)

(28) SeP → Pi$\bar{S}$ (ard-devirme + altıklık)

(29) SeP → $\bar{P}$iS (ön-devirme)

(iii) SiP'in Devrikleri:

(30) SiP ↔ Po$\bar{S}$ (ard-devirme)

(iv) SoP'un Devrikleri:

(31) SoP ↔ $\bar{P}$o$\bar{S}$ (tam-devirme)

(32) SoP ↔ $\bar{P}$iS (ön-devirme)

13.3 TASIMLAR

13.3.1 Tasım Yasaları

Kategorik Tasım'lar (kıyaslar) kategorik özne-yüklem önermelerinden kurulu *iki öncüllü* çıkarımlar ("dolaylı çıkarımlar") dır. (Aristoteles'in kendisi, tasımları çıkarımlar olarak değil, "p∧q→r" biçiminde koşullu önermeler şeklinde yorumlamıştı. Ama ondan sonra gelen mantıkçılar tasımları hep çıkarımlar şeklinde ele almışlardır.)

Herhangi bir tasımın sonucunu "S-P" biçiminde gösteriyoruz. "–" çizgisi, "a", "e", "i", "o" sembollerinden herhangi birinin yerini tutmaktadır. "S" sonucun *"özne"*sini "P" ise *"yüklem"*ini temsil eder. Sonucun öznesi durumunda olan terime *"küçük-terim"*, yüklemi durumunda olan terime de *"büyük-terim"* denir. Buna göre, "S" tasımın küçük terimini, "P"de büyük-terimini temsil ediyor demektir.

Öncüllerden biri küçük-terimi, öbürü de büyük-terimi içine alır. Küçük terimi içine alan öncüle *"küçük-öncül"*, büyük terimi içine alan öncüle *"büyük-öncül"* denir. Büyük-öncülle küçük-öncülün ortak bir terimleri de vardır. Bu ortak terime *"orta-terim"* denir. Orta terimi "M" ile temsil ediyoruz. Böylece büyük öncülün "P" ile "M"den, küçük-öncülün ise "S" ile "M"den kurulu olduğunu söyleyebiliriz.

İmdi herhangi bir tasımda, büyük-terimin yerine "P" terim-temsilcisini, küçük-terimin yerine "S" terim-temsilcisini, orta-terimin yerine de "M"

terim-temsilcisini koymakla elde edilen çıkarım kalıbına bir *"tasım biçimi"* denir. "Tasım biçimi" deyimi yerine "tasım-kalıbı" deyimini de kullanacağız. Mümkün olan bütün tasım-kalıpları, *"tasım-şekilleri"* denilen dört öbeğe ayrılırlar. Bunlardan her birini aşağıda gösteriyoruz.

M – P	P – M	M – P	P – M
S – M	S – M	M – S	M – S
S – P	S – P	S – P	S – P
(Şekil I)	(Şekil II)	(Şekil III)	(Şekil IV)

Görüldüğü gibi her "Şekil"de "–" ile temsil edilen üç boşluk vardır. Bu boşluklar "a", "e", "i", "o" sembolleriyle doldurulmalıdır. Dört nesnenin üçer-üçer tekrarlı bileşimlerinin sayısı $4^3 = 64$ olduğuna göre, her tasım şeklinin tam 64 tane ayrı biçimi olduğunu görüyoruz. Toplam 4 tane ayrı tasım şekli olduğuna göre de, bütün tasım biçimlerinin veya tasım-kalıplarının sayısının $4 \times 64 = 256$ olduğu sonucuna varıyoruz. Belli bir şeklin herhangi bir biçimini, büyük-öncülün, küçük-öncülün ve sonucun türünü belirten işaretler (yani "A", "E", "İ", "O" harfleri) yardımıyla gösterebiliriz.

İmdi, mümkün olan 256 tane tasım biçimi arasından 24 tanesinin *geçerli* olduğu, ötekilerinin ise geçersiz olduğu gösterilmiştir. Geçerli olan 24 tane tasım biçimini aşağıya sıralıyoruz.

Şekil I	AAA,	AAİ,	EAE,	EAO,	Aİİ,	EİO
Şekil II :	EAE,	EAO,	AEE,	AEO,	EİO,	AOO
Şekil III :	AAİ,	İAİ,	Aİİ,	EAO,	OAO,	EİO
Şekil IV :	AAİ,	AEE,	AEO,	İAİ,	EAO,	EİO

Sözü geçen bu 24 tane tasım biçimlerinden her biri şu şekilde adlandırılır.

Şekil I : BARBARA, BARBARİ, CELARENT, CELARONT, DARİİ, FERİO

Şekil II : CESARE, CESARO, CAMESTRES, CAMESTROP, FESTİNO, BAROCO

Şekil III : DARAPTİ, DİSAMİS, DATİSİ, FELAPTON, BOCARDO, FERİSON

Şekil IV : BRAMANTİP, CAMENES, CAMENOP, DİMARİS, FESAPO, FRESİSON

Örnekler:

Şekil I (BARBARA)	:	Bütün dörtgenler çokgendir.	MaP
		Bütün kareler dörtgendir.	SaM
		Bütün kareler çokgendir.	SaP
Şekil II (CESARE)	:	Hiçbir üçgen dörtgen değildir.	PeM
		Bütün kareler dörtgendir.	SaM
		Hiçbir kare üçgen değildir.	SeP
Şekil III (DARAPTİ)	:	Bütün kareler dörtgendir.	MaP
		Bütün kareler çokgendir.	MaS
		Bazı çokgenler dörtgendir.	SiP
Şekil IV (BRAMANTİP)	:	Bütün kareler dörtgendir.	PaM
		Bütün dörtgenler çokgendir.	Mas
		Bazı çokgenler karedir.	SiP

İmdi sözü geçen 24 tane geçerli tasım biçimleri arasından 15 tanesinin şöyle bir özelliği vardır: Her tümel önerme, altığı olan tikel önermeyi gerektirir. *A* önermesi, altığı olan *I* önermesini gerektirir. *E* önermesi de altığı olan *O* önermesini gerektirir. Ama tersi doğru değildir. Bu bakımdan "SaP" biçimindeki bir önermenin "SiP"ten, "SeP" biçimindeki bir önermenin de "SoP"dan daha *"güçlü"* olduğu, buna karşılık, "SiP"in "SaP"tan, "SoP"un ise "SeP"ten daha *zayıf* olduğu söylenir. İmdi bir tasımda sonucun yerine daha zayıf bir önermenin konulması, veya öncüllerden birinin yerine daha güçlü bir önermenin konulması, tasımın geçerliliğini değiştirmez. Buna göre, sonucu tümel olan geçerli bir tasım biçiminde, sonucun yerine altığını koy-

makla elde edilen (geçerli) tasım biçimine, ilk biçimin "*zayıflatılmış*" biçimi denir. Öte yandan, öncülü bir tikel olan geçerli bir tasım biçiminde, bu öncülün yerine altıklık karşılığı olan tümel önermeyi koymakla elde edilen (geçerli) tasım biçimine, ilk biçimin "*güçlendirilmiş*" biçimi denir. Aynı bir tasım biçimi aynı zamanda belli bir tasım biçiminin zayıflatılmış biçimi, başka bir tasım biçiminin de güçlendirilmiş biçimi olabilir. İşte *başka bir tasım biçiminin ne zayıflatılmış biçimi, ne de güçlendirilmiş biçimi olmayan* (bağımsız) tasım biçimlerinin sayısı 15'dir. Bu tasım biçimleri şunlardır:

Şekil I : AAA, EAE, AİI, EİO

Şekil II EAE, AEE, EİO, AOO

Şekil III : İAI, AİI, OAO, EİO

Şekil IV : AEE, İAI, EİO

Bu 15 tasım biçimini şartlı-kalıplar olarak da şöyle dile getirebiliriz:

Şekil I:

(33) MaP $\wedge$ SaM $\rightarrow$ SaP (BARBARA)

(34) MeP $\wedge$ SaM $\rightarrow$ SeP (CELARENT)

(35) MaP $\wedge$ SiM $\rightarrow$ SiP (DARİİ)

(36) MeP $\wedge$ SiM $\rightarrow$ SoP (FERİO)

Şekil II:

(37) PeM $\wedge$ SaM $\rightarrow$ SeP (CESARE)

(38) PaM $\wedge$ SeM $\rightarrow$ SeP (CAMESTRES)

(39) PeM $\wedge$ SiM $\rightarrow$ SoP (FESTİNO)

(40) PaM $\wedge$ SoM $\rightarrow$ SoP (BAROCO)

Şekil III:

(41) MiP $\wedge$ MaS $\rightarrow$ SiP (DİSAMİS)

(42) MaP $\wedge$ MiS $\rightarrow$ SiP (DATİSİ)

(43) MoP $\wedge$ MaS $\rightarrow$ SoP (BOCARDO)

(44) MeP $\wedge$ MiS $\rightarrow$ SoP (FERİSON)

Şekil IV:

(45) PaM $\wedge$ MeS $\rightarrow$ SeP (CAMENES)

(46) PiM $\wedge$ MaS $\rightarrow$ SiP (DİMARİS)

(47) PeM $\wedge$ MiS $\rightarrow$ SoP (FRESİSON)

Geri kalan 9 tane geçerli tasım biçimleri de şunlardır:

Şekil I:

(48) MaP $\wedge$ SaM $\rightarrow$ SiP (BARBARİ)

BARBARİ tasımı, BARBARA'nın *zayıflatılmış* biçimi (SaP $\rightarrow$ SiP), DARİİ'nin de *güçlendirilmiş* biçimidir (SaM $\rightarrow$ SiM).

(49) MeP $\wedge$ SaM $\rightarrow$ SoP (CELARONT)

CELARONT tasımı, CELARENT'in *zayıflatılmış* biçimi (SeP$\rightarrow$SoP), FERİO'nun da *güçlendirilmiş* biçimidir (SaM $\rightarrow$ SiM).

Şekil II:

(50) PeM $\wedge$ SaM $\rightarrow$ SoP (CESARO)

CESARO tasımı, CESARE'nin *zayıflatılmış* biçimi (SeP$\rightarrow$SoP), FESTİNO'nun da *güçlendirilmiş* biçimidir (SaM $\rightarrow$ SoM).

(51) PaM $\wedge$ SeM $\rightarrow$ SoP (CAMESTROP)

CAMESTROP tasımı, CAMESTRES'in *zayıflatılmış* biçimi (SeP$\rightarrow$SoP), BAROCO'nun da *güçlendirilmiş* biçimidir (SeM $\rightarrow$ SoM).

Şekil III:

(52) MaP $\wedge$ MaS $\rightarrow$ SiP (DARAPTİ)

DARAPTİ tasımı, gerek DİSAMİS'in (MaP$\rightarrow$MiP), gerekse DATİSİ'nin (MaS$\rightarrow$MiS) *güçlendirilmiş* biçimidir.

(53) MeP $\wedge$ MaS $\rightarrow$ SoP (FELAPTON)

FELAPTON tasımı, gerek BOCARDO'nun (MeP$\rightarrow$MoP), gerekse FERİSON'un (MaS$\rightarrow$MiS) *güçlendirilmiş* biçimidir.

Şekil IV:

(54) $PaM \wedge MaS \rightarrow SiP$ (BRAMANTİP)

BRAMANTİP tasımı, DİMARİS'in *güçlendirilmiş* biçimidir ($PaM \rightarrow PiM$).

(55) $PaM \wedge MeS \rightarrow SoP$ (CAMENOP)

CAMENOP tasımı, CAMENES'in *zayıflatılmış* biçimidir ($SeP \rightarrow SoP$).

(56) $PeM \wedge MaS \rightarrow SoP$ (FESAPO)

FESAPO tasımı, FRESİSON'un *güçlendirilmiş* biçimidir ($MaS \rightarrow MiS$).

Çokkez geçerli tasım biçimlerinin sayısının 19 olduğu söylenir. Bu 19 tane geçerli tasım biçimleri, sözü geçen 15 tane bağımsız tasım biçimleri ((33)-(47)) ile, başka bir biçiminin *zayıflatılmış* biçimi *olmayan* (52), (53), (54) ve (56) biçimlerinden ibarettir.

13.3.2 Özne Yüklem Önermeleri Mantığı Yasalarının Aksiyomlaştırılması

Klasik "kategorik önermeler" mantığının bütün yasalarını (yani daha önce sözünü ettiğimiz 56 yasayı) şu dört aksiyom ile üç tanımdan türetmek mümkündür:

*Aksiyomlar:**

(Ak. 1) $SaP \rightarrow \sim Sa\overline{P}$

(Ak. 2) $SaP \leftrightarrow \overline{P}a\overline{S}$

(Ak. 3) $SaM \wedge MaP \rightarrow SaP$

(Ak. 4) $Sa\overline{\overline{P}} \leftrightarrow SaP$

Tanımları:

(Tn. 1) $SeP =_{Dk} Sa\overline{P}$

(Tn. 2) $SiP =_{Dk} \sim Sa\overline{P}$

(Tn. 3) $SoP =_{Dk} \sim SaP$

---

* Geçerli olan "SaS" kalıbı, bu dört aksiyomdan türetilemediğinden, beşinci bir aksiyom ("*özdeşlik aksiyomu*")dur.

Gerek aksiyomların, gerekse tanımların her biri belli klasik bir yasayı dile getirmektedir. Aksiyom ve tanımların haklı gösterilmesi de ancak bunların daha önce (sezgisel olarak) kabul edilen bir takım yasa veya önermeleri dile getirdiklerini göstermek suretiyle mümkündür. İşte (Tn. 1) tanımı daha önce sözünü ettiğimiz (12) yasasını dile getirir. (Tn. 2) tanımı ise (Tn. 1) tanımıyla (6) yasasının bir sonucudur. (Tn. 3) tanımı da doğrudan doğruya (5) yasasını dile getirir.

Aksiyomlara gelince: (Ak. 1) aksiyomu, (Tn. 1) tanımıyla (1) *karşıtlık* yasasından, veya (Tn. 2) tanımıyla (3) *altıklık* yasasından türetilebilir. Bu bakımdan (Ak. 1)'e *"karşıtlık aksiyomu"* ya da *"altıklık aksiyomu"* diyebiliriz.

(Ak. 2) aksiyomu (21) *"devirme"* yasasından başka bir şey değildir. Bu bakımdan (Ak. 2)'ye *"devirme aksiyomu"* diyeceğiz.

(Ak. 3) ise (33) BARBARA tasım biçimini dile getirmektedir. Bu aksiyoma da *"Barbara aksiyomu"* veya *"tümel-evetleme işaretinin geçişlilik aksiyomu"* diyeceğiz.

(Ak. 4) sezgisel olarak apaçıktır. *"Bütün S'ler P-olmayan olmayandır"* biçimindeki bir deyimin *"Bütün S'ler P'dir"* deyimiyle anlamdaş olduğu meydandadır. (Ak. 4)'e *"çifte olumsuzluk aksiyomu"* diyeceğiz.

İmdi, özne-yüklem önermeleri mantığının yasalarını, bu aksiyom ve tanımlar yardımıyla kanıtlamak için, ilk önce aşağıdaki teoremleri kanıtlamak faydalı olur:

Teorem I: $\overline{\overline{S}}aP \leftrightarrow SaP$

Kanıt: (Ak. 2)'de "S" yerine "$\overline{\overline{S}}$" koyalım. O zaman

$$\overline{\overline{S}}aP \leftrightarrow \overline{P}a\overline{\overline{S}}$$

elde edilir. Oysa (Ak. 4) gereği

$$\overline{P}a\overline{\overline{S}} \leftrightarrow \overline{P}a\overline{S}$$

ayrıca (Ak.2) gereği

$$\overline{P}a\overline{S} \leftrightarrow SaP \text{ olur.}$$

Yukarıdaki üç karşılıklı koşulludan

$$\overline{\overline{S}}aP \leftrightarrow SaP$$

elde edilir. (İ.K.)*

Teorem II: $SaP \leftrightarrow Pa\overline{S}$

Kanıt: (Ak.2)'de "P" yerine "$\overline{P}$" koyalım. O zaman

$$Sa\overline{P} \leftrightarrow \overline{\overline{P}}a\overline{S}$$

elde edilir. Oysa Teorem I gereği

$$\overline{\overline{P}}a\overline{S} \leftrightarrow Pa\overline{S}$$

dir. Teorem II bu iki karşılıklı koşullunun dolaysız bir sonucudur. (İ.K.)

Teorem III: $\overline{S}aP \leftrightarrow \overline{P}aS$

Kanıt: (Ak. 2)'de "S" yerine "$\overline{S}$" koyalım. O zaman

$$\overline{S}aP \leftrightarrow \overline{P}a\overline{\overline{S}}$$

elde edilir. Bu karşılıklı koşullu da (Ak. 4) gereği

$$\overline{S}aP \leftrightarrow \overline{P}aS$$

ye dönüştürülür. (İ.K.)

Teorem IV: $SaP \rightarrow \sim\overline{S}aP$

Kanıt: (Ak. 1)'de "S" yerine "$\overline{P}$", "P" yerine de "$\overline{S}$" koyalım. O zaman

$$\overline{P}a\overline{S} \rightarrow \sim\overline{P}a\overline{\overline{S}}$$

tam-deyimini elde ederiz. Bu tam-deyim ise (Ak. 4) gereği

$$\overline{P}a\overline{S} \rightarrow \sim\overline{P}aS$$

biçimine dönüşür. Bu da (Ak. 2) gereği

$$SaP \rightarrow \sim\overline{P}aS$$

biçimine dönüştürülebilir. Bu son tam-deyim de Teorem III gereği

$$SaP \rightarrow \sim\overline{S}aP$$

biçimine dönüştürülür. (İ.K.)

---

* "İ.K." deyimi "*İşte kanıtlandı!*" nın kısaltmasıdır.

Şimdi söz konusu 56 tane yasanın kanıtlanmasına geçelim. Başvuracağımız yöntem şöyle olacaktır: Kanıtlamak istediğimiz tam-deyimi (Tn. 1)-(Tn. 3) tanımları gereği salt *tümel-evetleyici* kalıplardan kurulu bir tam-deyime dönüştürürüz. Böylece elde edilen tam-deyimin önünde sonunda önermeler mantığının bir yasası (bir *totoloji*) veya özne-yüklem önermeleri mantığının bir aksiyomu ya da önceden kanıtlanmış olan bir teoremi olduğunu göstereceğiz.

Kanıt (1): (1) tam-deyimi, (Tn. 1) gereği (Ak. 1)'e dönüştürülür. (İ.K.)

Kanıt (2): (2) tam-deyimi, (Tn. 2) ve (Tn. 3) gereği

$$\sim SaP \vee \sim Sa\bar{P}$$

biçimine, bu da "$\bar{p} \vee \bar{q} \leftrightarrow q \rightarrow \bar{p}$" gereği (Ak. 1)'e dönüştürülebilir. (İ.K.)

Kanıt (3): (3) tam-deyimi, (Tn. 2) gereği (Ak. 1)'e dönüştürülebilir. (İ.K.)

Kanıt (4): (4) tam-deyimi, (Tn. 2) ve (Tn. 3) gereği

$$Sa\bar{P} \rightarrow \sim SaP$$

ye dönüşür. Bu da "$(p \rightarrow \bar{q}) \leftrightarrow (q \rightarrow \bar{p})$" gereği (Ak. 1)'e dönüştürülebilir. (İ.K.)

Kanıt (5): (5) tam-deyimi, (Tn. 3) gereği

$$SaP \leftrightarrow \sim\sim SaP$$

biçimine, bu da (çifte değilleme yasası gereği) "$p \leftrightarrow p$" özdeşlik ilkesinin bir yerine-koyma örneğine dönüştürülebilir. (İ.K.)

Kanıt (6): (6) tam-deyimi, (Tn. 1) ve (Tn. 2) gereği

$$Sa\bar{P} \leftrightarrow \sim\sim Sa\bar{P}$$

biçimine dönüşür. Bu da özdeşliğe indirgenir. (İ.K.)

Kanıt (7): (7) tam-deyimi, (Tn. 2) gereği

$$SaP \rightarrow \sim\bar{S}\, a\bar{\bar{P}}$$

biçimine dönüşür. Bu da (Ak. 4) gereği Teorem IV'e indirgenir. (İ.K.)

Kanıt (8): (8) tam-deyimi, (Tn. 1) gereği

$$SaP \leftrightarrow Sa\overline{\overline{P}}$$

ye dönüşür. Bu da (Ak. 4) gereği özdeşliğe indirgenir. (İ.K.)

Kanıt (9): (9) tam-deyimi, (8)'den altıklık bağıntısı yardımıyla türetilir. Söz konusu altıklık

$$Se\overline{P} \rightarrow So\overline{P}$$

ile dile getirilir. Bu tam-deyim ise (4)'te "P" yerine "$\overline{P}$" koymakla kanıtlanır. (İ.K.)

Kanıt (10): (10) tam-deyimi, (Tn. 3) gereği Teorem IV'e dönüşür. (İ.K.)

Kanıt (11): (11) tam-deyimi, (Tn. 1) ve (Tn. 3) gereği

$$Sa\overline{P} \rightarrow \sim\overline{Sa\overline{P}}$$

biçimine dönüşür. Bu deyim ise Teorem IV'te "P" yerine "$\overline{P}$" koymakla türetilebilir. (İ.K.)

Kanıt (12): (12) tam-deyimi, (Tn. 1) gereği özdeşliğe indirgenir. (İ.K.)

Kanıt (13): (13) tam-deyimi, (12)'den altıklık gereği türetilir. (İ.K.)

Kanıt (14): (14) tam-deyimi, (Tn. 1) ve (Tn. 2) gereği

$$Sa\overline{P} \rightarrow \sim\overline{Sa\overline{P}}$$

biçimine dönüşür. Böylece Teorem IV elde edilmiş olur. (İ.K.)

Kanıt (15): (15) tam-deyimi, (Tn. 2) ve (Tn. 3) gereği özdeşliğe dönüşür. (İ.K.)

Kanıt (16): (16) tam-deyimi, (Tn. 3) ile (Tn. 2) gereği

$$\sim SaP \leftrightarrow \sim Sa\overline{\overline{P}}$$

biçimine, bu da (Ak. 4) gereği özdeşliğe dönüşür. (İ.K.)

Kanıt (17): (17) tam-deyimi, tanım gereği

$$SaP \rightarrow \sim Pa\overline{S}$$

biçimine dönüşür. Bu da Teorem II gereği (Ak. 1)'e dönüşür. (İ.K.)

Kanıt (18): (18) tam-deyimi, tanım gereği Teorem II'ye dönüşür. (İ.K.)

Kanıt (19): (19) tam-deyimi, (18)'den altıklık gereği türetilir. (İ.K.)

Kanıt (20): (20) tam-deyimi, tanım gereği

$$\sim SaP \leftrightarrow \sim Pa\bar{S}$$

deyimine dönüşür. Bu ise Teorem II ile eşdeğerdir. (İ.K.)

Kanıt (21): (21) tam-deyimi, (Ak. 2)'den başka bir şey değildir. (İ.K.)

Kanıt (22): (22) tam-deyimi, (21)'den altıklık gereği türetilir. (İ.K.)

Kanıt (23): (23) tam-deyimi, tanım gereği

$$SaP \rightarrow \sim Pa\bar{S}$$

biçimine dönüşür. Bu son tam-deyim ise Teorem II gereği

$$SaP \rightarrow \sim Sa\bar{P}$$

ye, yani (Ak. 1)'e dönüştürülebilir. (İ.K.)

Kanıt (24): (24) tam-deyimi, tanım gereği (Ak. 2)'ye dönüşür. (İ.K.)

Kanıt (25): (25) tam-deyimi, (24)'ten altıklık gereği türetilir. (İ.K.)

Kanıt (26): (26) tam-deyimi, tanımlar gereği

$$Sa\bar{P} \rightarrow \sim \bar{P}a\bar{S}$$

biçimine dönüşür. Bu son deyim de (Ak. 2) gereği

$$Sa\bar{P} \rightarrow \sim SaP$$

biçimine, bu da "$p \rightarrow \bar{q} \leftrightarrow q \rightarrow \bar{p}$" gereği

$$SaP \rightarrow \sim Sa\bar{P}$$

biçimine, yani (Ak. 1)'e dönüşür. (İ.K.)

Kanıt (27): (27) tam-deyimi, tanım gereği Teorem II'ye dönüşür. (İ.K.)

Kanıt (28): (28) tam-deyimi, (27)'den altıklık gereği türetilir. (İ.K.)

Kanıt (29): (29) tam-deyimi, tanımlar gereği

$$Sa\bar{P} \rightarrow \sim \bar{P}a\bar{S}$$

ye dönüşür. Bu da (Ak. 2) ve "$p \rightarrow \bar{q} \leftrightarrow q \rightarrow \bar{p}$" gereği (Ak. 1)'e dönüşür. (İ.K.)

Kanıt (30): (30) tam-deyimi, tanımlar gereği

$$\sim SaP \rightarrow \sim Pa\bar{S}$$

ye dönüşür. Bu ise Teorem II'ye dönüştürülebilir. (İ.K.)

Kanıt (31): (31) tam-deyimi, tanım gereği

$$\sim SaP \leftrightarrow \sim \bar{P}a\bar{S}$$

biçimine dönüşür. Bu ise (Ak. 2) gereği özdeşliğe indirgenir. (İ.K.)

Kanıt (32): (32) tam-deyimi, tanımlar gereği

$$\sim SaP \leftrightarrow \sim \bar{P}a\bar{S}$$

biçimine, bu da (Ak. 2) gereği özdeşliğe dönüşür. (İ.K.)

Kanıt (33): (33) tam-deyimi, (Ak. 3)'ü dile getirir. (İ.K.)

Kanıt (34): (34) tam-deyimi, tanım gereği

$$Ma\bar{P} \wedge SaM \rightarrow Sa\bar{P}$$

biçimine, bu da

$$SaM \wedge Ma\bar{P} \rightarrow Sa\bar{P}$$

biçimine dönüşür. Bu son deyim ise (Ak. 3)'ün bir yerine-koyma örneğidir. (İ.K.)

Kanıt (35): (35) tam-deyimi, tanım gereği

$$MaP \wedge \sim Sa\bar{M} \rightarrow \sim Sa\bar{P}$$

biçimine dönüşür. Bu son deyim ise "$(pq \rightarrow r) = [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$" giriş-çıkış yasası gereği

$$MaP \rightarrow (\sim Sa\bar{M} \rightarrow \sim Sa\bar{P})$$

biçimine, bu da "$(\bar{p} \rightarrow \bar{q}) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$" totolojisi gereği,

$$MaP \rightarrow (Sa\bar{P} \rightarrow Sa\bar{M})$$

ye dönüşür. Bu son tam-deyim giriş-çıkış yasası gereği

$$MaP \wedge Sa\overline{P} \rightarrow Sa\overline{M}$$

ye dönüşür. Bu deyim ise birlikte evetlemenin yer-değiştiriciliği ile (Ak. 2) gereği

$$Sa\overline{P} \wedge \overline{P}a\overline{M} \rightarrow Sa\overline{M}$$

biçimine dönüşür. Bu da (Ak. 3)'ün bir yerine-koyma örneğidir. (İ.K.)

Kanıt (36): (36) tam-deyimi, tanımlar gereği

$$Ma\overline{P} \wedge \sim Sa\overline{M} \rightarrow \sim SaP$$

biçimine dönüşür. Bu deyim ise

$$Ma\overline{P} \rightarrow (\sim Sa\overline{M} \rightarrow \sim SaP)$$

ye, bu da

$$Ma\overline{P} \rightarrow (SaP \rightarrow Sa\overline{M})$$

ye, en sonda da

$$Ma\overline{P} \wedge SaP \rightarrow Sa\overline{M}$$

biçimine dönüşür. Bu deyim de birlikte-evetlemenin yer-değiştiriciliği ile Teorem II gereği

$$SaP \wedge Pa\overline{M} \rightarrow Sa\overline{M}$$

ye dönüşür. Bu son deyim (Ak. 3)'ün bir yerine-koyma örneğidir. (İ.K.)

Kanıt (37): (37) tam-deyimi, tanım gereği "$Pa\overline{M} \wedge SaM \rightarrow Sa\overline{P}$" ye dönüşür. Bu da Teorem II ile birlikte-evetlemenin yer-değiştiriciliği gereği "$SaM \wedge Ma\overline{P} \rightarrow Sa\overline{P}$"ye dönüşür. (Ak. 3)! (İ.K.)

Kanıt (38): (38) tam-deyimi, tanım gereği "$PaM \wedge Sa\overline{M} \rightarrow Sa\overline{P}$" ye dönüşür. Bu da birlikte-evetlemenin yer-değiştiriciliği ile (Ak. 2) gereği "$Sa\overline{M} \wedge \overline{M}aP \rightarrow Sa\overline{P}$" ye dönüşür. (Ak. 3)! (İ.K.)

Kanıt (39): (39) tam-deyimi, sırasıyla "$Pa\overline{M} \wedge \sim Sa\overline{M} \rightarrow \sim SaP$", "$Pa\overline{M} \rightarrow (\sim Sa\overline{M} \rightarrow \sim SaP)$", "$Pa\overline{M} \rightarrow (SaP \rightarrow Sa\overline{M})$", "$Pa\overline{M} \wedge SaP \rightarrow Sa\overline{M}$", "$SaP \wedge Pa\overline{M} \rightarrow Sa\overline{M}$"ye dönüştürülür. (Ak. 3)! (İ.K.)

Kanıt (40): (40) tam-deyimi, sırasıyla "$PaM \wedge \sim SaM \rightarrow \sim SaP$", "$PaM \rightarrow (\sim SaM \rightarrow \sim SaP)$", "$PaM \rightarrow (SaP \rightarrow SaM)$", "$PaM \wedge SaP \rightarrow SaM$", "$SaP \wedge PaM \rightarrow SaM$"ye dönüştürülür. (Ak. 3)! (İ.K.)

Kanıt (41): (41) tam-deyimi, sırasıyla "~MaP̄ ∧ MaS → SaP̄", "MaS → (~MaP̄ → ~SaP̄)", "MaS → (SaP̄ → MaP̄)", "MaS ∧ SaP̄ → MaP̄"ye dönüştürülür. (Ak. 3)! (İ.K.)

Kanıt (42): (42) tam-deyimi, sırasıyla "MaP ∧ ~MaS̄ → ~SaP̄", "MaP→ (~MaS̄ → ~SaP̄)", "MaP → (SaP̄ → MaS̄)", "MaP ∧ SaP̄ → MaS̄"ye dönüştürülür. Bu son deyim ise Teorem II gereği "MaP ∧ PaS̄ → MaS̄"ye dönüştürülür. (Ak. 3)! (İ.K.)

Kanıt (43): (43) tam-deyimi sırasıya "~MaP ∧ MaS → ~SaP", "MaS → (~MaP → ~SaP)", "MaS → (SaP → MaP)", "MaS ∧ SaP → MaP" ya dönüştürülür. (Ak. 3)! (İ.K.)

Kanıt (44): (44) tam-deyimi sırasıyla "MaP̄ ∧ ~MaS̄ → ~SaP", "MaP̄ → (~MaS̄ → ~SaP)", "MaP̄ → (SaP → MaS̄)", "MaP̄ ∧ SaP → MaS̄"ye dönüşür. Bu son deyim de (Ak. 2) gereği "MaP̄ ∧ PaS̄ → MaS̄"ye dönüşür. (Ak. 3)! (İ.K.)

Kanıt (45): (45) tam-deyimi ilk önce "PaM ∧ MaS̄ → SaP̄"ye dönüştürülür. Bu deyim ise Teorem II gereği "PaM ∧ MaS̄ → PaS̄"ye dönüşür. (Ak. 3)! (İ.K.)

Kanıt (46): (46) tam-deyimi sırasıyla "~PaM̄ ∧ MaS → ~SaP̄", "MaS→ (~PaM̄ → ~SaP̄)", "MaS → (SaP̄ → PaM̄)", "MaS ∧ SaP̄ → PaM̄"ye dönüştürülür. Bu son deyim ise Teorem II gereği "MaS ∧ SaP̄ → MaP̄"ye dönüşür. (Ak. 3)! (İ.K.)

Kanıt (47): (47) tam-deyimi sırasıyla "PaM̄ ∧ ~MaS̄ → ~SaP", "PaM̄ → (~MaS̄ → ~SaP)", "PaM̄ → (SaP → MaS̄)", "PaM̄ ∧ SaP → MaS̄", "SaP ∧ PaM̄ → MaS̄"ye dönüştürülür. Bu son deyim de Teorem II gereği "SaP ∧ PaM̄ → SaM̄"ye dönüşür. (Ak. 3)! (İ.K.)

Kanıt (48)-(56): (48)-(56) tam-deyimleri, daha önce kanıtladığımız bazı tasımların "*zayıflatılması*" veya "*güçlendirilmesi*" sonucunda türetilebilir. Bunun ne şekilde yapıldığını daha önce göstermiştik.

13.4 ÖZNE-YÜKLEM ÖNERMELERİ MANTIĞININ NİCELEME MANTIĞINA İNDİRGENMESİ

Geçen bölümde *A, E, İ, O* özne-yüklem önermelerinin mantık yapılarının niceleme mantığının çerçevesi içinde şöyle dile getirilebildiğini göstermiştik.

(1) A: $\forall x(Sx \rightarrow Px)$

E: $\forall x(Sx \rightarrow \sim Px)$

İ: $\exists x(Sx \wedge Px)$

O: $\exists x(Sx \wedge \sim Px)$

Burada "*Sx*" deyimini "*x, S'dir*", "*Px*" deyimini de "*x, P'dir*" anlamında kullanıyoruz.

İmdi *A, E, İ, O* veya başka bir deyimle, "*SaP*", "*SeP*", "*SiP*" ve "*SoP*" önermelerini niceleme mantığı çerçevesi içinde bu şekilde yorumlamakla, özne-yüklem önermeleri mantığı yasalarının niceleme mantığı açısından geçerli kalıplara dönüşeceklerini düşünebiliriz. Böyle bir dönüştürme klasik özne-yüklem önermeleri mantığının bir "denetlemesi" sayılabilir: Niceleme mantığındaki karşılıkları geçerli olan klasik yasalar haklı gösterilmiş olurlar. Karşılıkları geçersiz olanların ise (eğer öyleleri varsa) yasaya - aykırılığı anlaşılır.

İmdi, klasik mantığın yasalarını bu yoldan denetlemek için, bütün bu yasaları teker teker niceleme mantığına ait birer kalıba dönüştürerek, bu kalıplardan her birinin niceleme mantığı açısından geçerli olup olmadığını denetlemek gerekli değildir. Nitekim söz konusu 56 yasayı, geçen kısımda sözü edilen dört aksiyom ile üç tanımdan türetmek mümkündür. Dolayısıyla bu aksiyom ve tanımları niceleme mantığına ait birer kalıba dönüştürüp sadece bu kalıpların geçerli olup olmadığını denetlemek yeter. Eğer aksiyom ve tanımların karşılıkları olan kalıpların niceleme mantığında geçerli olduğunu gösterirsek, o zaman söz konusu 56 yasanın, herbirinin de yasaya-uygunluğunu göstermiş oluruz.

İşte bu durumu göz önünde tutarak, söz konusu aksiyom ve tanımları niceleme mantığının *dili*ne çevirelim. İlkin (1) yorumuna dayanarak, şu çeviri kurallarını elde ediyoruz:

(2) $SaP =_{Dk} \forall x(Sx \rightarrow Px)$

(3) $SeP =_{Dk} \forall x(Sx \rightarrow \sim Px)$

(4) $SiP =_{Dk} \exists x(Sx \wedge Px)$

(5) $SoP =_{Dk} \exists x(Sx \wedge \sim Px)$

(6) $Sa\overline{P} =_{Dk} \forall x(Sx \rightarrow \sim Px)$

(7) $\overline{Sa}P =_{Dk} \forall x(\sim Sx \rightarrow Px)$

(2)–(7) çeviri-kuralları, tanımlama veya kısaltma kuralları durumundadır. Bu kurallara dayanarak, özne-yüklem önermeleri mantığına ait herhangi bir "tam-deyim"i (yani bir önerme veya kalıbı) niceleme mantığı diline çevirebiliriz. Başka bir deyimle, özne-yüklem önermeleri mantığına ait her tamdeyimi, niceleme mantığına ait belli bir tam-deyimin "kısaltması" sayabiliriz.

Şimdi, (2)–(7) kuralları gereği önceki aksiyom ve tanımları şöyle dile getirebiliriz:

(8) $\forall x(Sx \rightarrow Px) \rightarrow \sim\forall x(Sx \rightarrow \sim Px)$ (Ak. 1)

(9) $\forall x(Sx \rightarrow Px) \leftrightarrow \forall x(\sim Px \rightarrow \sim Sx)$ (Ak. 2)

(10) $[\forall x(Sx \rightarrow Mx) \wedge \forall x(Mx \rightarrow Px)] \rightarrow \forall x(Sx \rightarrow Px)$ (Ak. 3)

(11) $\forall x(Sx \rightarrow \sim\sim Px) \leftrightarrow \forall x(Sx \rightarrow Px)$ (Ak. 4)

(12) $\forall x(Sx \rightarrow \sim Px) \leftrightarrow \forall x(Sx \rightarrow \sim Px)$ (Tn. 1)

(13) $\exists x(Sx \wedge Px) \leftrightarrow \sim\forall x(Sx \rightarrow \sim Px)$ (Tn. 2)

(14) $\exists x(Sx \wedge \sim Px) \leftrightarrow \sim\forall x(Sx \rightarrow Px)$ (Tn. 3)

İşte, özne-yüklem önermeleri mantığının (niceleme mantığı açısından) yasaya-uygunluğu, (8)-(14) kalıplarının geçerli olup olmamasına bağlıdır. O halde bu kalıpları teker teker inceleyelim:

İlk önce (Tn. 1) – (Tn. 3) tanımlarının karşılığı olan kalıpları ele alalım. (12) *kalıbı* "$p \leftrightarrow p$" biçimindedir. Şu halde *geçerli* olduğu meydandadır. (13) ile (14)'ün de *geçerli* olduğunu geçen kısımda gördük. Nitekim bir yandan "$\sim\forall x(Sx \rightarrow Px)$"in "$\exists x(Sx \wedge \sim Px)$" biçimine, öbür yandan da "$\sim\exists x(Sx \wedge Px)$"in "$\forall x(Sx \rightarrow \sim Px)$" biçimine dönüştürülebildiğini göstermiştik. Birinci

dönüştürme, doğrudan doğruya (14) *kalıbının geçerli* olduğunu gösterir. İkinci dönüştürmeye dayanarak da "$(\bar{p} \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow \bar{q})$" totolojisini göz önünde tutarak), 13 *kalıbının geçerli* olduğu anlaşılır.

Şimdi de aksiyomların karşılığı olan (8)-(11) kalıplarını inceleyelim. (9) *kalıbının* "$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\bar{q} \rightarrow \bar{p})$" totolojisi gereği, (11) *kalıbının da* çifte-değilleme yasası gereği *geçerli* olduğu meydandadır. (10)'un *geçerli* olduğunu da ilerde göreceğiz.

Öte yandan, (8) *kalıbının geçersiz* olduğunu göstereceğiz. Nitekim, "S" olarak hiçbir nesneye uygulanmayan (yani kaplamı boş olan) bir yüklem, söz gelişi "*yuvarlak-kare*" genel terimini seçelim. O zaman "P" hangi (1-li) yüklem olursa olsun, "$\forall x(Sx \rightarrow Px)$" önürmesi *doğru* değerini alır. Çünkü "Sx" (yani "*x bir yuvarlak-karedir*") açık önermesi "x"in bütün değerleri için *yanlış* olduğundan, "$Sx \rightarrow Px$" her değer için *doğru* olur. Oysa "x" in her değeri için "Sx" *yanlış* olduğundan, "$Sx \wedge Px$" de her değer için *yanlış* değerini alır. Dolayısıyla "$\exists x(Sx \wedge Px)$" önermesi de *yanlış* olur. "$\forall x(Sx \rightarrow Px)$" doğru, "$\exists x(Sx \wedge Px)$" de yanlış olduğundan

(15) $\forall x(Sx \rightarrow Px) \rightarrow \exists x(Sx \wedge Px)$

deyiminin tüm olarak *yanlış* değerini aldığını görüyoruz. Şu halde (15) kalıbının (belli bir yorumu, yanlış değerini aldığından), *geçersiz* olduğunu kanıtladık. Oysa (15) kalıbıyla (8) kalıbı eşdeğerdir. Nitekim "$\exists x(Sx \wedge Px)$" ile "$\sim\forall x(Sx \rightarrow \sim Px)$" eşdeğerdir. Şu halde (8) kalıbının *geçersiz* olduğunu görüyoruz. (İ.K.)

Böylece, özne-yüklem önermeleri mantığının temelinde olan dört aksiyom ile üç tanımdan sadece (Ak. 1)'*in geçersiz* olduğu, öteki aksiyom ve tanımların geçerli olduğu sonucuna varıyoruz. Buna göre, özne-yüklem önermeleri mantığının bütün yasalarını, (Ak. 1)'e dayanıp dayanmadıklarına bakarak iki öbeğe ayırabiliriz:

1'inci Öbek Yasaları: Bu yasalar (Ak. 1)'e dayanmaksızın kanıtlanabilen yasalardır. Bunların tümü niceleme mantığı açısından *geçerli yasalardır.*

2'nci Öbek Yasaları: Bu yasalar, (Ak. 1)'e dayanmaksızın kanıtlanması olanaksız olan yasalardır. Bunları niceleme mantığı açısından *geçersiz* veya *yasaya-aykırı* saymak zorundayız. 2'nci öbek yasalarını da geçerli saymakta

direnirsek, *A, E, I, O* önermelerini (1) biçiminde yorumlamaktan vazgeçmemiz gerekecek. Oysa bu yorum, "tek doğru yorum" olmamakla birlikte, akla en yakın olanıdır. Her durumda, hem (1) yorumunu benimsemek, hem de 2'nci öbek yasalarını geçerli saymak mantıkça olanaksızdır.

Modern mantıkçılar, başlangıçta (1) yorumunu "doğru" sayıp klasik Aristoteles mantığının sözü geçen 2'nci öbek yasalarını geçersiz saymak yoluna gitmişlerdi. Günümüzde ise (1) yorumunun "tek doğru yorum" olduğu görüşünden vazgeçmek eğilimi vardır. Bu yorum "en elverişlisi" olmakla birlikte, isteyenler klasik mantık yasalarının tümünü geçerli kılacak başka bir yorum bulabilirler.

Şimdi 1'inci öbek ile 2'nci öbek yasalarını belirlemeğe çalışalım. Bu amaçla vermiş olduğumuz kanıtları gözden geçirmek gerekir. İmdi söz konusu kanıtlarda dört tane yardımcı teoreme başvurmuştuk. Oysa bu dört teoremden yalnızca ilk üçünün kanıtlanması (Ak. 1)'den bağımsızdır. Teorem IV'ün kanıtı ise (Ak. 1)'e dayanmaktadır. Şu halde, 56 tane yasadan hangilerinin 1'inci öbekten, hangilerinin 2'nci öbekten olduğunu belirlemek için, kanıtlarında (Ak. 1) ile Teorem IV'ün geçip geçmediğini araştırmak gerekecek. İşte, böyle bir araştırma sonucunda 56 yasanın aşağıdaki şekilde 1'inci ve 2'nci öbeğe ayrıldığı görülür.

1'inci Öbek Yasaları:

a. Mantıksal-Kare Yasaları: (5) ve (6) (çelişiklik yasaları) olmak üzere iki yasa.

b. Dolaysız-Çıkarım Yasaları: (8), (12), (15), (16), (18), (20), (21), (24), (27), (30), (31) ve (32) olmak üzere *oniki* yasa. Dikkat edilirse, bu oniki yasa, dolaysız-çıkarım yasaları arasından bütün ve yalnız *karşılıklı-koşullu* olanlarını kapsamaktadır. Bu yasalara, *"karşılıklı-koşullu yasalar"*, geri kalan (14) tane yasaya da (hep koşullu kalıplar durumunda olmalarına bakarak) *koşullu yasalar* diyeceğiz.

c. Özne-Yüklem Tasımı Yasaları: (33) - (47) olmak üzere *onbeş* yasa. Bu onbeş tasım biçimi, *ne zayıflatılmış ne de güçlendirilmiş biçimlerinden* ibarettir.

Böylece, 1'inci öbek yasalarının sayısının 2 + 12 + 15 = 29 olduğunu görüyoruz. Bunlar bütün *karşılıklı-koşullu yasaları* (2 tane çelişiklik yasası + 12

tane karşılıklı - koşullu dolaysız çıkarım yasası) ile 15 tane *ne zayıflatılmış ne de güçlendirilmiş tasım biçimlerinden* ibarettir.

2'nci Öbek Yasaları:

a. Mantıksal-Kare Yasaları: (1), (2), (3) ve (4) olmak üzere *dört* yasa. Bunların tümü "koşullu-yasalar" durumundadır.

b. Dolaysız-Çıkarım Yasaları: (7), (9), (10), (11), (13), (14), (17), (19), (22), (23), (25), (26), (28) ve (29) olmak üzere *ondört* yasa. Bunların da tümü "*koşullu-yasalar*"dır.

c. Özne-Yüklem Tasımı Yasaları: (48)-(56) olmak üzere *dokuz* yasa. Bunların tümü zayıflatılmış veya güçlendirilmiş tasım biçimleri durumundadır.

Böylece 2'nci öbek yasalarının sayısının 4 + 14 + 9 = 27 olduğunu görüyoruz. Bu yasalar, bir yol bütün *koşullu* mantıksal-kare yasaları ile dolaysız-çıkarım yasalarından, bir de *zayıflatılmış* veya *güçlendirilmiş tasım* biçimlerinden ibarettir. Bütün bu kalıpların niceleme mantığında geçersiz olduğu kanıtlanabilir.

Klasik özne-yüklem önermeleri mantığının 6 mantıksal kare yasası, 26 dolaysız-çıkarım (çevirme, döndürme ve devirme) yasası ve 24 tasım yasası olmak üzere 56 geçerli yasa tanıdığını görmüştük. Niceleme mantığı bakımından ise bunlardan yalnızca 29 tanesi (1'inci öbek yasaları) geçerli olup geri kalan 27'si (2'nci öbek yasaları) geçersizdir.

İmdi, mümkün olan mantıksal-kare bağıntılarının sayısı 6 olmakla birlikte, mümkün olan dolaysız-çıkarımların sayısı 26'yı, mümkün olan tasım biçimlerinin sayısı da 24'ü bir hayli aşmaktadır. Mümkün olan bütün tasım biçimlerinin sayısının 256 olduğunu görmüştük. Mümkün olan bütün dolaysız-çıkarımların sayısını ise şöyle hesaplayabiliriz: Her tümel kalıp (yani S-P biçmindeki kalıp) tam-çevirme, ard-çevirme, ön-çevirme, döndürme, tam-devirme, ard-devirme ve ön-devirme olmak üzere tam 7 ayrı biçimde dönüştürülebilir. Her dönüştürmenin ise *a, e, i, o* olmak üzere 4 ayrı biçimi vardır. Temel-kalıpların sayısı da 4 olduğuna göre, mümkün olan bütün dolaysız-çıkarımların (yani çevirme, döndürme ve devirmelerin) sayısının 4 x 7 x 4 = 112 olduğunu görüyoruz.

Buna göre, klasik mantığın geçersiz saydığı 112–26 = 86 dolaysız-çıkarım ile, 256 – 24 = 232 tasım biçiminden bazılarının niceleme mantığı çerçevesi içinde geçerli olup olmadığı sorusuyla karşılaşırız. İşte bu soruya olumsuz yanıt verilebilir. Söz konusu 86 dolaysız-çıkarımın ve 232 tasım biçiminin niceleme mantığında da *geçersiz* olduğu gösterilebilir. Böylece, sadece *1'inci öbek yasalarının, niceleme mantığı bakımından geçerli özne-yüklem önerme yasaları olduğu* sonucuna varıyoruz.

2'nci öbek yasalarına gelince, bunlar niceleme mantığı açısından *geçersiz* olmakla birlikte, gene de bazı koşullar altında geçerlidir. Yani *K* belli bir 2'nci öbek yasası olduğunda, K tek başına geçersiz olmakla birlikte *Ş → A* gibi belli bir geçerli koşullu-kalıp meydana getirebiliriz. Ş kalıbı K kalıbının *"geçerlilik koşulu"*dur. Şimdi, çeşitli 2'nci öbek yasalarının Ş geçerlilik koşulunu ortaya çıkarmaya çalışalım.

İlk önce mantıksal-kare yasalarını ele alalım. Bu yasalardan sadece çelişiklik yasaları 1'inci öbekten olup öbürleri (yani *karşıtlık, alt-karşıtlık ve altıklık* yasaları) hep 2'nci öbektendir.

Biz şimdi, karşıtlık, alt-karşıtlık ve altıklık bağıntılarının hangi koşullar altında geçerli olduğunu araştırmak istiyoruz. İmdi, bütün bu bağıntılardan her birinin "SaP → SiP" altıklık bağıntısıyla eşdeğer olduğunu gösterebiliriz.

Karşıtlık: "SaP → ~SeP" kalıbı "SeP" ile "SiP"in çelişikliği dolayısıyla "SaP → SiP"e çevrilir.

Alt-Karşıtlık: "SiP ∨ SoP" kalıbı "SaP" ile "SoP"un çelişikliğinden (ve birlikte-evetlemenin yer-değiştiriciliğinden) dolayı "~SaP ∨ SiP"e dolayısıyla "SaP → SiP"e çevrilir.

Altıklık: "SeP → SoP" kalıbı her iki çelişiklik bağıntısı dolayısıyla "~SiP → ~SaP" biçimine, bu da "SaP → SiP"e çevrilir.

Şu halde, "SaP → SiP"ın geçerlilik şartı, aynı zamanda bütün öbür 2'nci öbekten mantıksal-kare yasalarının da geçerlilik şartı oluyor. İmdi, "SaP→SiP", niceleme mantığında (15) kalıbıyla dile getirilir. Bu kalıbın ise "S"nin hiç bir nesneye uygulanmaması halinde geçersiz olduğunu görmüştük. "S"nin hiç bir nesneye uygulanmaması

(16) ∃xSx

in *yanlış* olması demektir. Şimdi (16)'nın *doğru* olması halinde, (15)'in de doğru olup olmadığını araştıralım. Bu amaçla

(17) $\exists xSx \rightarrow [\forall x(Sx \rightarrow Px) \rightarrow \exists x(Sx \wedge Px)]$

kalıbını, veya bununla eşdeğer olan

(18) $[\exists xSx \wedge \forall x(Sx \rightarrow Px)] \rightarrow \exists x(Sx \wedge Px)$

kalıbını incelemek gerekir. İmdi (18) kalıbının *geçerli* olduğunu gösterebiliriz. Nitekim "$\exists xSx \wedge \forall x(Sx \rightarrow Px)$" *doğru* ise, bir yandan "$\exists xSx$"in doğruluğundan dolayı "S"nin uygulandığı bir x vardır; öbür yandan ise "$\forall x(Sx \rightarrow Px)$"in doğruluğundan dolayı "S"nin uygulandığı her nesneye "P" de uygulanacağından, "P" söz konusu x nesnesine de uygulanır. Şu halde x gibi öyle bir nesne vardır ki, gerek "S" gerekse "P", x'e uygulanır. Başka bir deyimle "$\exists x(Sx \wedge Px)$" doğru olur. Şu halde (18) kalıbı geçerlidir. (İ.K.) Dolayısıyla (18) ile eşdeğer olan (17)'de *geçerlidir.*

İmdi (17) kalıbının geçerli olması, (16) koşulunun "$SaP \rightarrow SiP$" altıklığının yeterli koşulu olması demektir. Oysa, aynı koşulun *gerekli* olduğunu da söyleyebiliriz. Nitekim bu koşulun yerine gelmemesi, yani (17)'nin *yanlış* olması halinde, "$SaP \rightarrow SiP$" altıklığının geçersiz olduğunu görmüştük. Sonuç olarak, (16) koşulunun, karşıtlık, alt-karşıtlık ve altıklık yasalarının (yani 2'nci öbek mantıksal-kare yasalarının) *gerekli ve yeterli geçerlilik* koşulu olduğunu görüyoruz.

Örneğin, "S" olarak "*yuvarlak-kare*" terimini alalım. O zaman

$\exists x$ (x bir yuvarlak-karedir)

yanlış olduğundan, geçerlilik koşulu yerine gelmemiş olur. İşte böyle bir durumda, "çelişiklik"ten başka bütün mantıksal-kare bağıntıları geçersizdir.

Bunu doğrudan doğruya şöyle gösterebiliriz:

A: Bütün yuvarlak-kareler dörtgendir.

gibi bir tümel-evetleyici önerme

$\forall x$ (x bir yuvarlak-karedir $\rightarrow$ x dörtgendir)

anlamına gelip "*x bir yuvarlak-karedir*" açık önermesi "x"in bütün değerleri için yanlış olduğundan, tüm olarak "*doğru*" bir önermedir.

E: Hiç bir yuvarlak-kare dörtgen değildir.

tümel-değilleyici önermesi

$$\forall x \text{ (x bir yuvarlak-karedir} \rightarrow \text{x dörtgen değildir.)}$$

anlamına geldiğinden "*doğru*"dur.

İ: Bazı yuvarlak-kareler dörtgendir.

tikel-evetleyici önermesi

$$\exists x \text{ (x bir yuvarlak-karedir} \wedge \text{x bir dörtgendir)}$$

anlamına geldiğinden "*yanlış*"dır.

O: Bazı yuvarlak-kareler dörtgen değildir

tikel-değilleyici önermesi de

$$\exists x \text{ (x bir yuvarlak-karedir} \wedge \text{x bir dörtgen değildir)}$$

anlamına geldiğinden "*yanlış*"tır.

İmdi, gerek *A*, gerekse *E* doğru olduğundan, "$A \rightarrow \sim E$" yanlıştır. Şu halde "*karşıtlık*" geçersizdir. Öte yandan, *A* doğru, *İ* yanlış olduğundan, "$A \rightarrow İ$" yanlıştır. Aynı şekilde, *E* doğru, *O* yanlış olduğundan, "$E \rightarrow O$" da yanlıştır. Her iki *altıklık* bağıntısı da bu durumda geçersizdir. Son olarak, hem *İ* hem *O* yanlış olduğundan, "$İ \vee O$" yanlıştır. Şu halde *alt-karşıtlık* bağıntısı da bu durumda geçersizdir. Buna karşılık "S" nin yerine (16) geçerlilik koşulunu yerine getiren bir terimi (örneğin, "*yuvarlak masa*" terimi) koyarsak, bütün bu bağıntılar mutlaka geçerli olur.

İmdi, (16) şartı yalnız 2'nci öbek mantıksal-kare yasalarının değil, başka 2'nci öbek yasalarının da geçerlilik koşulu durumundadır. Bununla birlikte, (16) koşulu *bütün* 2'nci öbek yasalarının geçerlilik koşulu değildir. Buna göre, 2'nci öbek yasalarını geçerlilik koşullarına bakarak, çeşitli alt-öbeklere ayırabiliriz:

(i) Geçerlilik koşulu "∃xSx" olan 2'nci öbek yasaları:

Mantıksal-Kare Yasaları: (1), (2), (3), (4) olmak üzere *dört* yasa.

Dolaysız-Çıkarımlar: (9), (13), (17), (23), (26) ve (29) olmak üzere *altı* yasa.

Tasımlar: Beş zayıflatılmış tasım biçimi: (48) barbari, (49) celaront, (50) cesaro, (51) camestrop ve (55) camenop.

(ii) Geçerlilik koşulu "∃xPx" olan 2'nci öbek yasaları:

Dolaysız-Çıkarımlar: (11), (14), (19) ve (28) olmak üzere *dört* yasa.

Tasım: Bir güçlendirilmiş tasım biçimi: (54) bramantip.

(iii) Geçerlilik koşulu "∃xPx" olan 2'nci öbek yasaları:

Dolaysız-Çıkarımlar: (7), (10), (22) ve (25) olmak üzere *dört* yasa.

(iv) Geçerlilik koşulu "∃xMx" olan 2'nci öbek yasaları:

Tasımlar: Üç güçlendirilmiş tasım biçimi: (52) darapti, (53) felapton ve (56) fesapo.

14. KÜMELER KURAMI

14.1 BİRİNCİ DÜZEY KÜMELERİ

14.1.1 Evren, Öğe ve Boş Küme

Her incelemede belli bir takım bireylerden söz ederiz. Bu nesnelerin bütününe *konuşma evreni* veya kısaca *evren* denir. Evreni "E" işaretiyle gösteriyoruz. Yalnız bireylerden oluşan kümelere *birinci düzey küme* denir. E evreni de kendine ait bütün kümeleri içine alan bir kümedir. Bu en büyük kümeye *evrensel küme* denir. E evrenine ait bireyleri "x", "y", "z", ... nesne değişkenleriyle, E evrenine ait kümeleri de "X", "Y", "Z", ... küme değişkenleri ile gösteriyoruz. Ayrıca belli bireyleri "a", "b", "c",... birey adları ile, belli kümeleri de "K", "L", "M",... küme adları ile gösteriyoruz.

Bundan böyle başka biçimde belirtilmediği durumlarda "birey" ve "küme" sözcüklerini "E evrenine ait birey" ve "E evrenine ait küme" anlamında kullanacağız. İmdi a bir birey ve *K* bir küme olduğunda a bireyi *K* kümesini oluşturan nesnelerden biri ise a bireyinin *K* kümesinin *öğe*'si olduğu söylenip

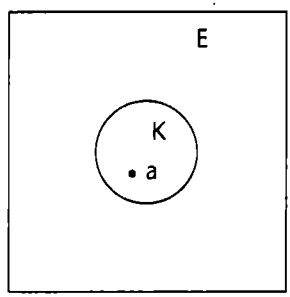
(1) $a \in K$

yazılır. "$\in$" işareti, *öğelik bağıntısı* denilen bir bağıntıyı dile getiren bir ikili yüklemdir. "$\in$" bir ikili yüklemdir, çünkü "a" ile "K" adlarından (1) önermesini oluşturur. (1) yerine

(1') $\in$ (a, K)

da yazabiliriz.

E evrenini bir dikdörtgen ve E'ye ait bireyleri bu dikdörtgenin içindeki noktalarla temsil edebiliriz. O zaman K gibi bir kümeyi dikdörtgenin içindeki bir daire ile temsil ederiz. Örneğin Şekil 1, a bireyinin E evrenine ait K kümesinin öğesi olduğunu gösterir.



(Şekil 1)

Sonlu sayıda $a_1,...,a_n$ bireylerinden oluşan küme

(2) $\{a_1,...,a_n\}$

biçiminde gösterilir. Ayrıca

(3) $a_1, a_2, a_3, ...$

sonsuz sayıda bireyden oluşan bir dizi ise, bu dizideki bireylerden oluşan küme

(4) $\{a_1, a_2, a_3, ...\}$

biçiminde gösterilir. Örneğin

(5) {0, 1, 2}

0, 1, 2 sayılarından oluşan sonlu küme,

(6) {0, 1, 2, 3, ...}

de bütün doğal sayılardan oluşan sonsuz kümedir.

Hiçbir öğesi olmayan bir kümenin varlığı kabul edilir. Bu kümeye *boş küme* denir. Boş küme

(7) $\{\ \}$

veya

(8) $\varnothing$

biçiminde gösterilir. E evreni en büyük küme olduğu gibi, $\varnothing$ boş kümesi de en küçük kümedir. Kümeleri içinde bireyler bulunabilen kutular olarak düşünebiliriz. O zaman boş küme içi boş kutu olur.

a gibi tek bir öğesi olan

(9) $\{a\}$

biçimindeki kümeye *a'nın birim kümesi* denir. (9) kümesine mutlak olarak da bir *birim kümesi* denir.

(10) $a \in \{a\}$

doğrudur.

a ve *b* gibi iki farklı bireyden oluşan

(11) $\{a, b\}$

kümesine *sıralanmamış çift* denir. Nitekim (11) kümesindeki a ile b bireylerini sırası değişirse küme değişmez.

(12) $\{a, b\} = \{b, a\}$

doğrudur.

(13) $a \in \{a, b\} \wedge b \in \{a, b\}$

doğrudur.

n farklı bireyden oluşan (2) kümesine de *sıralanmamış n-li* denir. (2) kümesinin öğelerinin sırasını değiştirirsek küme değişmez.

Örneğin

(14) $\{a, b, c\} = \{b, a, c\} = \{a, c, b\} = \{c, a, b\} = \{c, b, a\} = \{b, c, a\}$

doğrudur.

Öte yandan

(15) $(a = b) \rightarrow \{a, b\} = \{a\} = \{b\}$

önermesi de doğrudur. Yani a ile b aynı birey ise, {a, b} kümesi {a}'ya veya {b}'ye indirgenir.

14.1.2 Küme İşlemleri

14.1.2.1 Kesişim, Birleşim, Fark ve Tümleyen

K ve L birer küme olduğunda K ile L kümelerinin her ikisinin de öğesi olan bireylerin kümesine K ile L'nin *kesişimi* denir ve

(1) $K \cap L$

biçiminde gösterilir.

"$\cap$" işareti, *kesişim işlemi* denilen bir küme işlemini gösterir. "$\cap$" bir ikili işlem işaretidir. Nitekim "$\cap$" işareti "K" ile "L" küme adlarından "$K \cap L$" küme adını oluşturur. Örneğin

(2) $\{Ali, Behçet, Cevdet\} \cap \{Behçet, Dursun\} = \{Behçet\}$,

(3) $\{2, 3, 5\} \cap \{3, 5, 6\} = \{3, 5\}$.

K ile L kümelerinin ortak öğesi yoksa

(4) $K \cap L = \varnothing$

olur.

Örneğin

(5) $\{2, 3, 5\} \cap \{1, 4, 6\} = \varnothing$

K ve L birer küme olduğunda K ile L kümelerinden birine veya öbürüne ya da her ikisine ait öğelerin kümesine K ile L'nin *birleşimi* denir ve

(6) $K \cup L$

biçiminde gösterilir.

"$\cup$" işareti *birleşim işlemi* denilen bir küme işlemini gösterir. "$\cup$" bir ikili işlem işaretidir.

(7) {Ali, Behçet} ∪ {Behçet, Cevdet, Dursun} = {Ali, Behçet, Cevdet, Dursun}.

(8) {2, 3, 5} ∪ {3, 5, 7, 9} = {2, 3, 5, 7, 9}.

K ile L birer küme olduğunda, K'ya ait olup L'ye ait olmayan öğelerin kümesine K ile L'nin *farkı* denir, bu küme

(9) K – L

biçiminde gösterilir. "–" işareti *fark işlemi* denilen bir küme işlemini gösterir. "–", bir ikili işlem işaretidir. Örneğin

(10) {1, 2, 3} – {2, 3} = {1}

(11) {1, 2, 3} – {2, 3, 5} = {1}

(12) {1, 2, 3} – {4, 5} = {1, 2, 3}

K, E evrenine ait bir küme olduğunda, E evrenine ait olan ama K kümesine ait olmayan öğelerin kümesine, K kümesinin *tümleyeni* denir, bu küme

(13) K'

biçiminde gösterilir.

"'" işareti *tümleyen işlemi* denilen bir küme işlemini gösterir. "'" bir birli işlem işaretidir. Nitekim "K" küme adından "K'" küme adını oluşturuyor. Örneğin

(14) E = {0, 1, 2, 3, 4, 5}

olduğunda

(15) {0, 2, 4}' = {1, 3, 5}

(16) {2, 3, 4, 5}' = {0, 1}

Dikkat edilirse kesişim ile birleşim işlemlerini yapmak için E evreninin öğelerinin bilinmesi gerekmez. Oysa tümleyen işlemini yapabilmek için E evreninin öğelerini bilmemiz gerekir.

Verilen kümelere küme işlerini uygulayarak yeni kümeler elde edilir. Örneğin

$E = \{a, b, c, d, e\}$

$K = \{b, c\}$

$L = \{c, d, e\}$

$M = \{a, d\}$

olduğunda:

(17) $(K' \cup L') - (L \cap M') = (\{b, c\}' \cup \{c, d, e\}') - (\{c, d, e\} \cap \{a, d\}') =$

$(\{a, d, e\} \cup \{a, b\}) - (\{c, d, e\} \cap \{b, c, e\}) =$

$\{a, b, d, e\} - \{c, e\} = \{a, b, d\}$

elde edilir.

ALIŞTIRMALAR

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$K = \{1, 2, 3\}$

$L = \{2, 4, 6\}$

$M = \{1, 5\}$

. olduğunda aşağıdaki küme işlemlerinden elde edilen kümeleri bulunuz.

1. $K' \cup (L - M)$
2. $K' \cap M'$
3. $(K - M)' \cap L$
4. $(K' \cup M) - (K \cap L)$
5. $(K' \cap M)' \cap (L - M')$

14.1.2.2 Evren ve Boş Küme ile Yapılan Küme İşlemleri

E evreni ve $\varnothing$ boş kümesi ile yapılan küme işlemleri aşağıdaki yasalara uyar.

1. $K \cap \varnothing = \varnothing \cap K = \varnothing$
2. $K \cup \varnothing = \varnothing \cup K = K$
3. $K \cap E = E \cap K = K$

4. $K \cup E = E \cup K = E$

5. $K - E = \varnothing$

6. $E - K = K'$

7. $K - \varnothing = K$

8. $\varnothing - K = \varnothing$

9. $E' = \varnothing$

10. $\varnothing' = E$

Örneğin

(1) $E = \{a, b, c, d\}$

olduğunda

(2) $\{a, b, c\} \cap \varnothing = \varnothing$

(3) $\{a, b, c\} \cup \varnothing = \{a, b, c\}$

(4) $\{a, b, c\} \cap E = \{a, b, c\}$

(5) $\{a, b, c\} \cup E = E = \{a, b, c, d\}$

(6) $\{a, b, c\} - E = \varnothing$

(7) $E - \{a, b, c\} = \{a, b, c\}' = \{d\}$

(8) $\varnothing - \{a, b, c\} = \varnothing$

(9) $\{a, b, c\} - \varnothing = \{a, b, c\}$

elde edilir.

İkinci örnek olarak

(10) $(\{a, b\}' \cap E) - (\{b, c, d\} \cap \varnothing)$

işleminden elde edilen kümeyi bulalım.

(11) $\{a, b\}' \cap E = \{a, b\}'$,

$\{b, c, d\} \cap \varnothing = \varnothing$

O halde $(\{a, b\}' \cap E) - (\{b, c, d\} \cap \varnothing) = \{a, b\}' - \varnothing = \{a, b\}' = \{c, d\}$.

ALIŞTIRMALAR

$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$K = \{2, 3, 4\}$

$L = \{3, 4, 5\}$

$M = \{2, 5\}$

olduğunda, aşağıdaki işlemlerden elde edilen kümeleri bulunuz.

1. $E \cap (K \cup L')$
2. $\varnothing \cup (K' \cap M)$
3. $[\varnothing - (K - L)] \cap E$
4. $[(M \cap K) \cup E] - \varnothing'$
5. $[(L' - \varnothing) \cap E] \cup E'$

14.1.3 Kümeler Arasındaki Bağıntılar

K ve L birer küme olduğunda K kümesinin her öğesi L kümesinin de öğesi ise, K kümesinin L kümesinin *içinde olduğu* veya başka bir deyişle K'nın, L'nin *alt kümesi* olduğu söylenir. K, L'nin alt kümesi ise

(1) $K \subseteq L$

yazılır. "$\subseteq$" işareti *içinde olma* veya *alt kümelik* denilen bir bağıntıyı gösterir. "$\subseteq$" işareti bir ikili yüklemdir.

Örnek olarak

(2) {Ali, Behçet} $\subseteq$ {Ali, Behçet, Cevdet}.

Nitekim (2)'de ki ilk kümenin her öğesi ikinci kümenin de bir öğesidir.

Her küme kendi alt kümesidir. Yani

(3) $K \subseteq K$

Nitekim K'nın her öğesi gene K'nın öğesidir.

$K \subseteq L$ ve $L \subseteq K$ olursa K ile L'nin öğeleri aynı olur. Öğeleri aynı olan kümeler özdeştir. O halde

(4) $[(K \subseteq L) \wedge (L \subseteq K)] \equiv K = L$

elde edilir.

$K \subseteq L$ fakat $\sim(K = L)$ ise K kümesinin L kümesinin *öz alt küme*'si olduğu söylenir,

(5) $K \subset L$

yazılır. "$\subset$" işareti *öz alt kümelik bağıntısı*'nı dile getiren bir ikili yüklemdir.

(6) {Ali, Behçet} $\subset$ {Ali, Behçet, Cevdet}.

Nitekim (6)'da birinci kümenin her öğesi ikinci kümenin öğesidir. Fakat iki küme özdeş değildir.

Alt kümelik yansımalı, ters-bakışımlı ve geçişli bir bağıntıdır. Nitekim her K, L, M için:

(7) $K \subseteq K$

(8) $[(K \subseteq L) \wedge \sim(K = L)] \rightarrow \sim(L \subseteq K)$

(9) $[(K \subseteq L) \wedge (L \subseteq M)] \rightarrow (K \subseteq M)$

önermeleri doğrudur.

Öz alt kümelik ise yansımasız, bakışımsız ve geçişli bir bağıntıdır. Nitekim her K, L, M için:

(10) $\sim(K \subset K)$

(11) $\sim[K \subset L \rightarrow \sim(K \subsetneq K)]$

(12) $[(K \subset L) \wedge (L \subset M)] \rightarrow (K \subset M)$.

Özdeşlik de yansımalı, bakışımlı ve geçişli bir bağıntıdır. Nitekim her K, L, M için

(13) $K = K$

(14) $(K = L) \rightarrow (L = K)$

(15) $[(K = L) \wedge (L = M)] \rightarrow (K = M)$

Daha önce belirttiğimiz gibi öğeleri aynı olan kümeler özdeştir. Örneğin

(16) $\{2, 1 - 1\} = \{3 - 1, 0\}$

Nitekim $2 = 3 - 1$ ve $1 - 1 = 0$. Dolayısıyla (16)'daki iki kümenin öğeleri aynı olup kümeler özdeş olur. Öte yandan

(17) $\{2, 1 + 1, 3 - 1\} = \{2\}$

Nitekim $2 = 1 + 1 = 3 - 1$ olduğundan "2", "1+1" ve "3–1" aynı sayıyı gösterir.

"$\subseteq$" alt kümelik işareti yardımıyla *üst kümelik bağıntısı*'nı dile getiren "$\supseteq$" ikili işlem işareti tanımlanır.

(18) $X \supseteq Y \equiv Y \subseteq X$

$X \supseteq Y$ olduğunda, X'in Y'nin *üst küme*'si olduğu söylenir.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki eşitlik ve eşitsizliklerden doğru olanlarını belirtiniz.

1. $\{1\} = \{2 - 1\}$
2. $\{2\} = \{1 + 1\}$
3. $\{2 + 3, 5 - 2\} \neq \{3, 5\}$
4. $\{2 + 3, 6 - 1, 2\} = \{2, 5\}$
5. $\{1 + 2, 3) \neq \{3\}$

II. Aşağıdaki alt kümelik ve öz alt kümelik önermelerinden doğru olanlarını belirtiniz.

1. $\{a, b, c\} \subseteq \{a, b, c\}$
2. $\{1, 2\} \subsetneq \{3, 4\}$
3. $\{2, 3, 5\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
4. $\{2 - 1, 3 + 1\} \subsetneq \{1, 4, 5\}$
5. $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, d\}$

14.1.4 Boole Öbekleri Kuramı

14.1.4.1 Boole Terimleri

"X", "Y", "Z", ... birinci düzey kümeleri gösteren küme değişkenleri olduğunda *Boole terimleri* denilen küme terimleri şöyle tanımlanır: ("Boole" adı "Bul" diye okunur.)

(i) "E" ile "∅" küme adları ile "X", "Y", "Z", ... küme değişkenleri *atomsal Boole terimleri*'dir.

(ii) Her atomsal Boole terimi bir Boole terimidir.

(iii) T bir Boole terimi ise T' bir Boole terimidir.

(iv) T_1, T_2 birer Boole terimi ise, $T_1 \cap T_2$ ve $T_1 \cup T_2$, Boole terimleridir.

(v) Bütün Boole terimleri (i) – (iv) kuralları ile belirlenmiştir.

(vi) Atomsal olmayan bir Boole terimine *bileşik Boole terimi* denir.

(vii) Boole terimlerin gösterdiği kümelere *Boole öbekleri* denir.

Örneğin

(1) $[X' \cap (\varnothing \cup Y)] \cap E$

bir bileşik Boole terimidir.

Fark işlemi

(2) $X - Y = X \cap Y'$

biçiminde $\cap$ ile ' işlemleri türünden tanımlanabilir. Böylece içinde "–" fark işareti geçen küme terimlerinden bu işaret elenebilir. Örneğin

(3) $(X \cap Y') - (\varnothing \cup Z) = (X \cap Y') \cap (\varnothing \cup Z)'$.

"∅" ile "E" küme adları sıfırlı işlem işareti sayılabilir. Nitekim bu işaretlerden her biri sıfır sayıda küme adından bir küme adını oluşturur. "∅", "E" sıfırlı işlem işaretleri "'" birli işlem işareti ve "$\cap$", "$\cup$" ikili işlem işaretlerine *Boole İşlem İşaretleri* denir. Her Boole işlem işaretinin bir ikilisi vardır. Nitekim "∅" ile "E" birbirinin ikilisi, "$\cap$" ile "$\cup$" da birbirinin ikilisidir. "'" ise kendisinin ikilisidir.

Verilen bir terimin ikilisini bulmanın iki farklı yöntemi vardır.

Birinci yöntem: Boole teriminde geçen her küme değişkenine tümleyen işlemi uygulanır, bir de terimin bütününe tümleyen işlemi uygulanırsa verilen terimin bir *ikili*'si elde edilir.

İkinci yöntem: Bir Boole teriminde geçen her küme işlemi yerine ikilisi konulursa verilen terimin bir *ikili*'si elde edilir.

Bir Boole teriminin birinci ve ikinci yöntemle elde edilen ikilileri birbiriyle özdeştir.

Örneğin (1) Boole teriminin birinci yönteme göre ikilisi

(4) $[[X'' \cap (\varnothing \cup Y')] \cap E]'$

veya

(5) $X'' = X$

geçerli olduğundan

(6) $[[X \cap (\varnothing \cup Y')] \cap E]'$

dır. Öte yandan (1) Boole teriminin ikinci yönteme göre ikilisi

(7) $[X' \cup (E \cap Y)] \cup \varnothing$

dır. İmdi $E' = \varnothing$ ve $\varnothing' = E'$dir. Ayrıca

(8) $(X \cap Y)' = X' \cup Y'$

(9) $(X \cup Y)' = X' \cap Y'$

geçerlidir. Dolayısıyla

(10) $[[X \cap (\varnothing \cup Y')] \cap E]' = [X \cap (\varnothing \cup Y')]' \cup E' = [X' \cup (\varnothing \cup Y')'] \cup \varnothing = [X' \cup (E \cap Y)] \cap \varnothing.$

Böylece (1)'in iki yönteme göre de elde edilen ikililerinin özdeş olduğunu görüyoruz.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki Boole terimlerinin birinci ve ikinci yönteme göre ikililerini bulunuz.

1. $E \cap (X \cup Y)$

2. $X \cap (Y \cup \varnothing)'$
3. $X' \cup (X \cup E')$
4. $(X \cap Y')' \cap (Y \cup \varnothing)$
5. $[X \cap (Y' \cup E')] \cup (\varnothing \cup X)'$

14.1.4.2 Atomsal Boole Önermeleri

T_1 ve T_2 Boole terimleri olduğunda

(1) $T_1 \subseteq T_2$

ve

(2) $T_1 = T_2$

biçimindeki önermelere *atomsal Boole önermesi* denir.

İçinde "X_1", ..., "X_n"den başka küme değişkeni geçmeyen T gibi bir terimi $T(X_1,...,X_n)$ biçiminde gösteririz. $X_1,...X_n$, (1) veya (2)'de geçen bütün küme değişkenleri olduğunda (1)

(1') $T_1 (X_1,...,X_n) \subseteq T_2 (X_1,...,X_n)$

ve (2)

(2') $T_1 (X_1,...,X_n) = T_2 (X_1,...,X_n)$

biçiminde gösterilir.

(1') veya (2') atomsal Boole önermesinde E olarak herhangi bir küme seçip, "X_1", ..., "X_n" değişkenlerinin değerleri olarak bu kümenin birer alt kümesi seçildiğinde (1') veya (2') hep doğru olursa, (1') veya (2') atomsal Boole önermesinin geçerli olduğu söylenir.

Geçerli Boole önermeleri *Boole öbekleri kuramı* denilen bir kuramı oluşturur. Geçerli olan Boole önermelerinin önemlileri *Boole öbekleri kuramı yasaları*'dır. Atomsal önerme biçimindeki başlıca yasaları aşağıda gösteriyoruz.

a. *Denkgüçlülük yasaları*

1. $X \cap X = X$
2. $X \cup X = X$

b. *Yer Değiştirme Yasaları*

1. $X \cap Y = Y \cap X$

2. $X \cup Y = Y \cup X$

c. *Ortaklaştırıcılık Yasaları*

1. $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$

2. $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$

d. *Dağıtıcılık Yasaları*

1. $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

2. $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$

e. *Yalınlaştırma Yasaları*

1. $X \cup \varnothing = X$

2. $X \cup E = E$

3. $X \cap \varnothing = \varnothing$

4. $X \cap E = X$

5. $X \cap X' = \varnothing$

6. $X \cup X' = E$

f. *Çift Tümleme Yasası*

$X'' = X$

g. *De Morgan Yasaları*

1. $(X \cap Y)' = X' \cup Y'$

2. $(X \cup Y)' = X' \cap Y'$

h. *Shannon Yasası*

$[T(X_1,...,X_n, \varnothing, E, \cap, \cup)]' = T(X_1',...,X_n', E, \varnothing, \cup, \cap)$

yani T teriminin tümleyeni, T içinde ki "X_1",...,"X_n"lere tümleyenin uygulanması ve "$\varnothing$" ile "E" ve "$\cap$" ile "$\cup$"nun birbiriyle değiş tokuş edilmesiyle elde edilir.

I. Alt Kümelik Yasaları

1. $\varnothing \subseteq X$

2. $X \subseteq X$

3. $X \subseteq E$

4. $X \cap Y \subseteq X$

5. $X \subseteq X \cup Y$

Atomsal Boole önermelerine aşağıdaki *ikililik* ilkeleri uygulanır.

T_1'in bir ikilisi T_1^* ve T_2'nin bir ikilisi T_2^* olduğunda:

(i) $T_1 \subseteq T_2$ geçerlidir ancak ve ancak $T_2^* \subseteq T_1^*$ geçerli ise

(ii) $T_1 = T_2$ geçerlidir ancak ve ancak $T_1^* = T_2^*$ geçerli ise,

Bu ikililik ilkelerine dayanarak her atomsal yasadan yeni bir yasa türetilebilir.

Örneğin denkgüçlülük, yer değiştirme, ortaklaştırıcılık ve dağıtıcılık yasalarından her biri öbüründen ikililik ilkesi gereği elde edilebilir.

Her atomsal Boole önermesinin önermeler mantığında bir karşılığı vardır. Bir eşitliğin karşılığı bir koşullu, alt kümelik önermesi karşılığı da bir karşılıklı-koşulludur. Eşitlik geçerlidir, ancak ve ancak karşılığı olan koşullu geçerli ise. Alt kümelik önermesi de geçerlidir ancak ve ancak karşılığı olan karşılıklı, koşullu geçerli ise.

Atomsal Boole önermelerinin, önermeler mantığındaki karşılığı şöyle belirlenir:

(3) $x \in X \cap Y$ ancak ve ancak $x \in X \wedge y \in Y$ ise

(4) $x \in X \cup Y$ ancak ve ancak $x \in X \vee y \in Y$ ise

(5) $x \in X'$ ancak ve ancak $\sim(x \in X)$ ise

(6) $x \in E$ ancak ve ancak T ise

(7) $x \in \varnothing$ ancak ve ancak $\perp$ ise

Nitekim $x \in X \cap Y$, x bireyinin hem X'in hem Y'nin öğesi olması, yani x bireyinin X'in öğesi ve x bireyinin Y'nin öğesi olması demektir. O halde (3)

doğrudur. $x \in X \cup Y$, x bireyinin X'in öğesi veya Y'nin öğesi olması demektir. O halde (4) doğrudur. x bireyinin X' nün öğesi olması, x bireyinin X'in öğesi olmaması demektir. O halde (5) doğrudur. $x \in E$ hep doğru olduğundan T ile, $x \in \varnothing$ hep yanlış olduğundan $\perp$ ile eşdeğerdir. O halde (6) ve (7)'de doğrudur.

Öte yandan

(8) $X = Y$ ancak ve ancak $\forall x\ (x \in X \leftrightarrow x \in Y)$

(9) $X \subseteq Y$ ancak ve ancak $\forall x\ (x \in X \rightarrow x \in Y)$.

Nitekim $X = Y$, X ile Y'nin öğelerinin aynı olması demektir. O halde (8) doğrudur. $X \subseteq Y$ ise X'in her öğesinin Y'nin öğesi olması demektir. O halde (9) da doğrudur.

Buna göre (1') ve (2') önermelerini sırasıyla

(1") $\forall x\ [x \in T_1\ (X_1,...,X_n) \rightarrow x \in T_2\ (X_1,...,X_n)]$

ve

(2") $\forall x\ [x \in T_1\ (X_1,...,X_n) \leftrightarrow x \in T_2\ (X_1,...,X_n)]$

biçimlerine çevirebiliriz. $x \in T_1\ (x_1,...,x_n)$ ile $x \in T_2\ (X_1,...,X_n)$ tam deyimlerini (3) – (7)'ye dayanarak "$x \in X_i$", "T" ve "$\perp$" den oluşan birer önermeye dönüştürürüz. Sonra da "$\forall x$" tümel niceleyicisini kaldırıp, "$x \in X_i$" yerine "p_i" koyarız. (i = 1, ..., n). Böylece (1') ile (2') sırasıyla

(1"') $T_1\ (p_1,...,p_n) \rightarrow T_2\ (p_1,...,p_n)$

ve

(2"') $T_1\ (p_1,...p_n) \leftrightarrow T_2\ (p_1,...,p_n)$

önermelerine dönüştürülür. (1"') koşullusuna (1) *alt kümelik önermesinin önermeler mantığında karşılığı*, (2"') karşılıklı koşullusuna da (2) *eşitliğinin önermeler mantığında karşılığı* diyoruz.

Örneğin

(10) $X \cup Y \subseteq Z$

alt kümelik önermesinin önermeler mantığında karşılığı:

(11) $(p \vee q) \rightarrow r$

dir. Nitekim (10) önermesi (9) gereği

(12) $\forall x\ [x \in (X \cup Y) \rightarrow x \in Z]$

ye dönüşür. (12)'de (4) gereği

(13) $\forall x\ [(x \in X \vee x \in Y) \rightarrow x \in Z]$

biçimine dönüşür. "$x \in X$" yerine "p", "$x \in Y$" yerine "q" ve "$x \in Z$" yerine "r" koyup "$\forall x$"i kaldırarak (11)'i elde ederiz.

İkinci bir örnek olarak

(14) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

eşitliğinin önermeler mantığında karşılığını bulalım. Bu karşılık

(15) $[p \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

dir. İmdi (14)'ün Boole öbekleri mantığında geçerli olmasının gerekli ve yeterli koşulu, (15)'in önermeler mantığında geçerli olmasıdır. Nitekim (15) önermeler mantığında geçerlidir. O halde (14)'de Boole öbekleri mantığında geçerlidir. Oysa (11) önermesi geçersiz olduğundan (10) önermesi de geçersizdir.

Üçüncü örnek olarak

(16) $(E \cap X')' = \varnothing \cup X$

önermesinin önermeler mantığında karşılığını bulalım. Bu karşılık

(17) $\sim(T \wedge \sim p) \leftrightarrow (\bot \vee p)$

önermesidir. "$T \wedge \sim p$" bileşeni "$\sim p$" ile eşdeğer "$\bot \vee p$" bileşeni de "p" ile eşdeğerdir. Nitekim içinde "T" ile "$\bot$" geçen önermeleri aşağıdaki önermeler mantığı yasalarına göre indirgeyebiliriz.

(18) $T \wedge p \equiv p$

(19) $\bot \vee p \equiv p$

(20) $T \vee p \equiv T$

(21) $\bot \wedge p \equiv \bot$

(22) $T \rightarrow p \equiv p$

(23) $p \rightarrow T \equiv T$

(24) $\bot \rightarrow p \equiv T$

(25) $p \rightarrow \bot \equiv \sim p$

(26) $p \leftrightarrow T \equiv p$ (29) $\sim\perp \equiv T$

(27) $p \leftrightarrow \perp \equiv \sim p$ (30) $\sim(\sim p) \leftrightarrow p$

(28) $\sim T \equiv \perp$

$p \rightarrow p$ önermeler mantığında geçerli olduğu için (16) eşitliği de Boole öbekleri mantığında da geçerlidir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki atomsal Boole önermelerinin önermeler mantığında ki karşılıklarını bulunuz. Karşılıkları önermeler mantığında geçerli olanları belirtiniz.

1. $X \subseteq X \cup Z$
2. $E \subseteq E \cup \varnothing$
3. $X = Y \cup (Z \cap X)$
4. $X' \subseteq Y \cap (Z \cap E)$
5. $(X \cup Y)' = (X \cap Z) \cup Y$

14.1.4.3 Bileşik Boole Önermeleri

Atomsal Boole önermeleri temel önerme eklemleri ile birleştirilip *bileşik Boole önermeleri* oluşturulur. Basit veya bileşik Boole önermelerine *Boole önermesi* denir.

Örneğin

(1) $(X \subseteq Y) \rightarrow [X \subseteq (Y \cup Z)]$

bir bileşik Boole önermesidir.

Her Boole önermesi birli niceleme mantığına ait bir önermeye dönüştürülebilir. Bu son önermeye *Boole önermesinin birli niceleme mantığında karşılığı* denir. $A(X_1,...,X_n)$, içinde "$X_1,...,X_n$" den başka küme değişkeni geçmeyen bir Boole önermesi olsun. Bu önermedeki atamsol bileşenleri §13.1.4.2'deki (3) – (9) kurallarına göre indirgeyelim. Sonra da "$x \in X_i$" ($i = 1,...,x$) yerine "$F_i x$" koyalım. Böylece elde edilen önerme Boole önermesinin birli niceleme mantığındaki karşılığıdır.

Örnek olarak (1) Boole önermesinin birli niceleme mantığındaki karşılığını bulalım. (1) önermesini, sözü geçen (3) – (9) kurallarını uygulayarak,

(2) $\forall x(x \in X \rightarrow x \in Y) \rightarrow \forall x[x \in X \rightarrow (x \in Y \vee x \in Z)]$

biçiminde indirgeriz. Sonra da "$x \in X$" yerine "Fx", "$x \in Y$" yerine "Gx" ve "$x \in Z$" yerine "Hx" koyalım. Böylece (1),

(3) $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow \forall x[Fx \rightarrow (Gx \vee Hx)]$

biçimine dönüşür. (3) önermesi, (1) Boole önermesinin birli niceleme mantığında karşılığıdır.

> Bir Boole önermesinin Boole öbekleri kuramında geçerli olmasının gerekli ve yeterli koşulu, birli niceleme mantığında karşılığının, birli niceleme mantığında geçerli olmasıdır.

Örneğin (3) birli niceleme mantığında geçerlidir. Dolayısıyla (1) önermesi Boole öbekleri kuramında geçerlidir.

İkinci örnek olarak

(4) $E \subseteq (X \cap Y') \leftrightarrow [(E = X) \vee (Y = \varnothing)]$

Boole önermesinin birli niceleme mantığında karşılığını bulalım. Bu karşılık

(5) $\forall x[T \rightarrow (Fx \wedge \sim Gx)] \leftrightarrow [\forall x(T \leftrightarrow Fx) \vee \forall x(Gx \leftrightarrow \bot)]$

biçimindedir. (4) önermesi

(6) $\forall x(Fx \wedge \sim Gx) \leftrightarrow (\forall xFx \vee \forall x\sim Gx)$

biçimine indirgenir. (6) birli niceleme mantığında geçersizdir. Dolayısıyla (4) Boole öbekleri mantığında geçersizdir.

Üçüncü örnek olarak

(7) $X \subseteq X \cup Y$

atomsal Boole önermesinin birli niceleme mantığında karşılığını bulalım. Bu karşılık

(8) $\forall x[Fx \rightarrow (Fx \vee Gx)]$

dır. (8) birli niceleme mantığında geçerli olduğundan (7) önermesi Boole öbekleri mantığında geçerlidir.

Geçerli atomsal ve bileşik Boole önermelerinin en önemlileri *Boole öbekleri mantığı yasaları*'nı oluşturur. Başlıca bileşik yasaları aşağıda gösteriyoruz.

1. $(X = Y) \rightarrow (Y = X)$
2. $[(X = Y) \wedge (Y = Z)] \rightarrow (X = Z)$
3. $[(X \subseteq Y) \wedge \sim(X = Y)] \rightarrow \sim(Y \subseteq X)$
4. $[(X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq Z)] \rightarrow (X \subseteq Z)$
5. $[X \subseteq (Y \wedge Z)] \leftrightarrow (X \subseteq Y) \wedge (X \subseteq Z)$
6. $[(X \cup Y) \subseteq Z] \leftrightarrow [(X \subseteq Z) \wedge (Y \subseteq Z)]$
7. $(X \subseteq Y) \rightarrow [(X \cap Z) \subseteq (Y \cap Z)]$
8. $(X \subseteq Y) \rightarrow [(X \cup Z) \subseteq (Y \cup Z)]$
9. $(X \subseteq Y) \leftrightarrow (Y' \subseteq X')$
10. $(X = Y) \leftrightarrow (X' = Y')$
11. $(X = Y) \leftrightarrow [(X \subseteq Y) \wedge (Y \subseteq X)]$
12. $(X \subseteq Y) \leftrightarrow (X' \cup Y = E)$
13. $(X \subseteq Y) \leftrightarrow (X \cap Y' = \varnothing)$
14. $(X \subseteq Y) \leftrightarrow (X = X \cap Y)$
15. $(X \subseteq Y) \leftrightarrow (Y = X \cup Y)$

ALIŞTIRMALAR

Yukarıdaki 1-15 yasalarının birli niceleme mantığında karşılıklarını bulunuz. Her karşılığın birli niceleme mantığında geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

14.1.4.4 Genel İkililik İlkesi

Boole öbekleri kuramında "′", "∩", "∪" işlem işaretleri yardımıyla "–" işleminden başka bazı işlemler de tanımlanabilir. Burada *bakışımlı fark* denilen küme işlemini dile getiren "$\overset{\bullet}{+}$" ikili işlem işaretini *küme çarpımı* denilen küme işlemini dile getiren "$\overset{\bullet}{\times}$" ikili işlem işaretini ve *fark ikilisi* denilen ikili küme işlemini dile getiren "$-_*$" ikili işlem işaretini tanımlıyoruz.

(1) $X \overset{\bullet}{+} Y = [(X \cap Y') \cup (X' \cap Y)]$

(2) $X \overset{\bullet}{\times} Y = [(X \cap Y) \cup (X' \cap Y')]$

(3) $X -_* Y = X \cup Y'$

"$\overset{\bullet}{+}$" ile "$\overset{\bullet}{\times}$" işlem işaretleri birbirinin ikilisidir. Nitekim "$(X \cap Y') \cup (X' \cap Y)$" nin birinci yönteme göre ikilisi

(4) $(X \cup Y') \cap (X' \cup Y)$

dir. Oysa

(5) $(X \cup Y') \cap (X' \cup Y) = (X \cap X') \cup (X \cap Y) \cup (Y' \cap X') \cup (Y' \cap Y) =$
$\varnothing \cup (X \cap Y) \cup (X' \cap Y') \cup \varnothing = (X \cap Y) \cup (X' \cap Y').$

Öte yandan "–" ile "$-_*$" işlem işaretleri birbirinin ikilisidir. Nitekim

(6) $(X - Y) = X \cap Y'$

Oysa "$X \cap Y'$" nün ikilisi "$X \cup Y'$" dır. Dikkat edilirse

(7) $X -_* Y = (Y - X)'$.

Nitekim

(8) $(Y - X)' = (Y \cap X')' = Y' \cup X = X \cup Y'$.

İmdi içinde Boole işlemleri denilen "$\varnothing$", "E", "′", "∩", "∪", "–", "$-_*$" "$\overset{\bullet}{+}$" ve "$\overset{\bullet}{\times}$" işlem işaretleri geçen bir Boole teriminin bir ikilisi, bu terimde geçen her işlem işareti yerine işaretin ikilisini koymakla elde edilir. Bu yol, ikinci yöntemin genelleştirilmesi anlamına gelir. Örneğin

(9) $[X' \cap (Y' \overset{\bullet}{+} Z)] \cup [E \cup (X \cap \varnothing)]$

Boole teriminin genelleştirilmiş ikinci yönteme göre ikilisi

(10) $[X' \cup (Y' \underset{\bullet}{\times} Z)] \cap [\varnothing \cap (X \cup E)]$

dır.

Buna göre aşağıdaki *genel ikililik* ilkesini elde ederiz.

(i) Verilen bir Boole önermesinde her Boole işlemi yerine ikilisini koyup, "$\subseteq$" yerine "$\supseteq$" koymakla elde edilen önermeye, verilen önermenin ikililik karşılığı diyoruz.

(ii) Bir Boole önermesinin geçerli olmasının gerekli ve yeterli koşulu, ikililik karşılığının geçerli olmasıdır.

Örneğin

(11) $(X \subseteq Y) \leftrightarrow (X = X \cap Y)$

bileşik Boole önermesinin ikililik karşılığı

(12) $(X \supseteq Y) \leftrightarrow (X = X \cup Y)$

yani

(13) $(Y \subseteq X) \leftrightarrow (X = X \cup Y)$

önermesidir. (12) geçerli olduğundan (13)'de geçerlidir.

Yeni tanımladığımız "$\underset{\bullet}{+}$" ve "$\underset{\bullet}{\times}$" işlem işaretlerine ilişkin başlıca yasaları aşağıda gösteriyoruz.

1. $X \underset{\bullet}{+} Y = (X \underset{\bullet}{\times} Y)'$

2. $X \underset{\bullet}{\times} Y = (X \underset{\bullet}{+} Y)'$

3. $X \underset{\bullet}{+} Y = (X - Y) \cup (Y - X)$

4. $(X \underset{\bullet}{+} Y)' = X' \underset{\bullet}{+} Y$

5. $(X \underset{\bullet}{+} Y)' = X \underset{\bullet}{+} Y'$

ALIŞTIRMALAR

§ 14.1.4.3'deki bileşik Boole yasalarının ikililik karşılıklarını bulunuz.

14.2 GENEL KÜMELER KURAMI

Şimdiye kadar yalnız birinci düzey kümelerini, yani her öğesi birey olan kümeleri inceledik. Oysa öğesi birey değil de küme olan kümeler de vardır. Bu türlü kümeleri de konu edinen kurama *genel kümeler kuramı* denir.

Genel kümeler kuramında her türlü topluluğa *öbek* denir. Kümeler ise özel öbeklerdir. Nitekim:

(i) *küme,* bir öbeğin öğesi olan bir öbek demektir.

(ii) Her öğesi birey olan öbeğe *birinci düzey öbeği* denir.

(iii) Her öğesi birey veya birinci düzey öbeği olup, en az bir öğesi birinci düzey öbeği olan öbeğe *ikinci düzey öbeği* denir.

(iv) Her öğesi birey veya $m < n$ olmak üzere m'inci düzey öbeği olup, en az bir öğesi $n - 1$'inci düzey öbeği olan bir öbeğe *n'inci düzey öbeği* denir.

Örneğin doğal sayıları birey olarak kabul edersek

(1) $\{0, 2, 4\}$

birinci düzey öbeği,

(2) $\{0, \{0, 2, 4\}, 5\}$

ikinci düzey öbeği

(3) $\{\{0, \{0, 2, 4\}, 5\}\}$

üçüncü düzey öbeğidir.

Dikkat edilirse aşağıdaki önermeler doğrudur:

(4) $0 \in \{0, 2, 4\}$

(5) $0 \in \{0, \{0, 2, 4\}, 5\}$

(6) $2 \notin \{0, \{0, 2, 4\}, 5\}$

(7) $\{0, 2, 4\} \in \{0, \{0, 2, 4\}, 5\}$

(8) $\{0, 2, 4\} \notin \{\{0, \{0, 2, 4\}, 5\}\}$

(9) $\{0, \{0, 2, 4\}, 5\} \in \{\{0, \{0, 2, 4\}, 5\}\}$

(10) $\{0\} \notin \{0\}$

(11) $0 \in \{0\}$

(12) $\{0, 2, 4\} \notin \{0, 2, 4\}$

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki önermelerden doğru olanlarını belirtiniz.

1. $1 \notin \{1\}$
2. $\{1\} \in \{1\}$
3. $1 \in \{\{1\}\}$
4. $1 \in \{1, \{1\}, \{\{1\}\}\}$
5. $\{2, 3, 4\} \notin \{\{1, 2, 3, 4\}, \{2, 3, 4, 5\}\}$

II. Aşağıdaki öbeklerin düzeyini belirtiniz.

1. $\{\{1, 2, 3\}\}$
2. $\{0, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 5\}\}$
3. $\{\{\{0\}\}\}$
4. $\{\{\{0\}, \{1, 2\}\}\}$
5. $\{\{\{0, \{1, 2\}\}, \{\{1\}, \{2, 3\}\}\}, 0\}$

14.2.1 Öbeklenim

A(x) bir birli açık önerme olduğunda, A(x)'i gerçekleyen "x" değişkeninin değerleri bir öbek oluşturur. Bu öbek

(1) $\{x: A(x)\}$

biçimindeki bir tekil terim ile gösterilir. (1) biçimindeki bir tekil terime *öbeklenim* diyoruz. (1) öbeklenimi oluşturmak için kullanılan

(2) $\{.. : ...\}$

değişmezine de öbekleyici diyoruz. (2), "...olan..ler" anlamına gelir. Nitekim

(1) tekil terimi, "*A(x) olan x'ler*" diye okunabilir.

Örnek olarak

(3) $\{x: x \text{ doğal sayıdır} \wedge x < 3\}$

öbeklenimi

(4) $\{0, 1, 2\}$

öbeğini gösterir. Nitekim

(5) "x doğal sayıdır $\wedge$ $x < 3$"

birli açık önermesini gerçekleyen bütün nesneler 0, 1, 2'den ibarettir.

a bir ad olduğunda

(6) $a \in \{x: A(x)\} \leftrightarrow A(a)$

nın geçerli olduğu sanılabilir. Ancak (6) önerme kalıbı Russel paradoksu denilen güçlüğe yol açar. Nitekim

(7) $R = \{x: \sim(x \in x)\}$

eşitliğine dayanarak "R" ile gösterilen *Russel öbeği*'ni tanımlayalım. O zaman

(8) $R \in R \leftrightarrow R \in \{x: \sim(x \in x)\}$

elde edilir. (6) önerme kalıbında A(x) yerine "$\sim(x \in x)$" ve *a* yerine "R" koyduğumuzda

(9) $R \in \{x: \sim(x \in x)\} \leftrightarrow \sim(R \in R)$

elde edilir. (8) ve (9)'dan

(10) $R \in R \leftrightarrow \sim(R \in R)$

elde edilir. (10) ise bir çelişme, yani önermeler mantığında tutarsız olan bir önermedir. Dolayısıyla (6) önerme kalıbı genel öbekler kuramında geçerli olamaz.

Russel paradoksunu engellemek için aralarında üç değerli mantığa başvurma da bulunan çeşitli çözüm yolları önerilmiştir. Burada çözüm yolu olarak (6) önerme kalıbı yerine

(11) $a \in \{x: A(x)\} \leftrightarrow [\exists y(a \in y) \wedge A(a)]$

önerme kalıbını genel kümeler kuramının aksiyom kalıbı olarak seçilecektir.

Dikkat edilirse (6) yerine (11) seçilirse artık (10) önermesini türetemeyiz. Nitekim (11)'de "A(x)" yerine "~(x ∈ x)" ve "a" yerine "R" koyarsak

(12) $R \in \{x: \sim(x \in x)\} \leftrightarrow \exists y(R \in y) \wedge \sim(R \in R)$

elde edilir. (8) ile (12)'den ise (10) elde edilemeyip, yalnızca

(13) $R \in R \leftrightarrow [\exists y(R \in y) \wedge \sim(R \in R)]$

elde edilir.

İmdi (13) önermesi

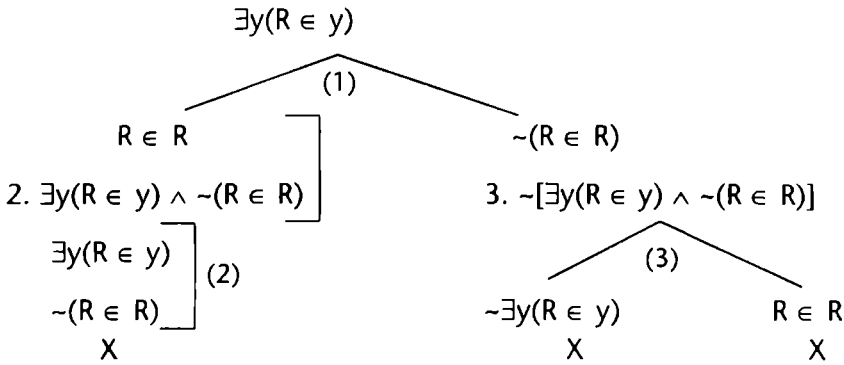
(14) $\sim\exists y(R \in y)$

önermesini içerir. Yani

(15) $R \in R \leftrightarrow [\exists y(R \in y) \wedge \sim(R \in R)] \therefore \sim\exists y(R \in y)$

geçerlidir. Bunu aşağıdaki çözümleyici çizelge ile denetliyoruz.

(16)



Küme, başka bir öbeğin öğesi olan öbek anlamına geldiğinden, (14)'ün sonucu olarak R'nin küme olmayan bir öbek olduğu sonucuna varırız. Böylece genel öbekler kuramında küme olmayan bir öbeğin bulunduğu ortaya çıkar. Küme olmayan bir öbeğe *öz öbek* denir. Böylece öbekleri, kümeler ile öz öbekler olmak üzere iki ayrı türe ayırıyoruz.

Genel kümeler kuramının konusu olan nesneler "x", "y", "z", ... değişkenlerinin değerleridir. Bu nesneler *bireyler* ve *öbekler* olmak üzere ikiye ayrılır. Öbekler de kümeler ve öz öbekler olmak üzere ikiye ayrılır.

Her bireyin en az bir öbeğin öğesi olduğu bir aksiyom olarak kabul edilir.

Buna göre doğal sayılar bireyler olarak kabul edilirse sözü geçen (3) öbekleminin gerçekten {0, 1, 2} öbeğini gösterdiği şöyle ispatlanır. (5) birli açık önermesini gerçekleyen bütün nesneler 0, 1 ve 2'dir. Oysa (11) gereği

(17) $0 \in \{x\text{: (x doğal sayıdır)} \wedge x < 3\} \leftrightarrow [\exists y(0 \in y) \wedge \text{(0 doğal sayıdır)} \wedge 0 < 3]$

(18) $1 \in \{x\text{: (x doğal sayıdır)} \wedge x < 3\} \leftrightarrow [\exists y(1 \in y) \wedge \text{(1 doğal sayıdır)} \wedge 1 < 3]$

(19) $2 \in \{x\text{: (x doğal sayıdır)} \wedge x < 3\} \leftrightarrow [\exists y(2 \in y) \wedge \text{(2 doğal sayıdır)} \wedge 2 < 3]$

elde edilir. 0, 1, 2 birey olduğundan "$\exists y(0 \in y)$", "$\exists y(1 \in y)$" ve "$\exists y(2 \in y)$" doğrudur. O halde (17), (18) ve (19)'dan sırasıyla

(20) $0 \in \{x\text{: x doğal sayıdır} \wedge x < 3\}$

(21) $1 \in \{x\text{: x doğal sayıdır} \wedge x < 3\}$

(22) $2 \in \{x\text{: x doğal sayıdır} \wedge x < 3\}$

elde edilir. Demek ki

(23) $\{x\text{: x doğal sayıdır} \wedge x < 3\} = \{0, 1, 2\}$.

{x: A(x)} öbekleniminde geçen A(x)'i hiçbir değer gerçeklemezse bu öbeklenim boş öbek'i gösterir. Boş öbek de "$\varnothing$" olarak gösterilir. Örneğin $\{x\text{: x doğal sayıdır} \wedge x > 3 \wedge x < 4\} = \varnothing$.

ALIŞTIRMALAR

Doğal sayıları birer birey kabul ederek aşağıdaki öbeklenimlerin gösterdiği öbeği bulunuz.

1. $\{x\text{: x doğal sayıdır} \wedge x \leq 3\}$
2. $\{x\text{: x doğal sayıdır} \wedge x \leq 3 \wedge x > 0\}$
3. $\{x\text{: x doğal sayıdır} \wedge x \leq 5 \wedge x > 3\}$
4. $\{x\text{: x doğal sayıdır} \wedge x < 5 \wedge x > 4\}$

14.2.2 Genel Kümeler Kuramının Aksiyom Sistemi

Genel kümeler kuramının dili özdeşlik mantığının dilidir. Ancak yüklem temsilcileri ve işlem işareti temsilcileri yerine *mantıksal olmayan değişmezler* denilen belli bazı adlar, yüklemler ve işlem işaretleri yer alır. Bu değişmezler de *ilkel değişmezler ve tanımlanmış değişmezler* olmak üzere ikiye ayrılır.

İlkel değişmezler şunlardır:

(i) "*Bireydir*" anlamına gelen "Br" birli yüklemi

(ii) *Ögelik bağıntısı*'nı dile getiren "$\in$" ikili yüklemi

(iii) Öbekleyici: {.. : ...}.

t_1 ve t_2 terimler olduğunda, "$\sim(t_1 \in t_2)$" yerine kısaca "$t_1 \notin t_2$" yazıyoruz.

Tanım 1: $\forall x[\ddot{O}b(x) \leftrightarrow \sim Br(x)]$

Tanılmanan "Öb" işareti "Öbektir" anlamına gelen bir birli yüklemdir. Sırası geldiğinde ilkel değişmezler yardımıyla çeşitli değişmezler tanımlayacağız. Aksiyomları da sırası geldikçe tek tek ortaya koyacağız. Şimdilik şu iki aksiyomu belirtiyoruz.

A1: *Kaplamsallık Aksiyomu*

$\forall x \forall y[[\ddot{O}b(x) \wedge \ddot{O}b(y) \wedge \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)] \rightarrow (x = y)]$

Bu aksiyom öğeleri aynı olan öbeklerin özdeş olduğunu dile getirir. Bir öbeğin kaplamı kendi öğelerin topluluğu demektir. O halde A1 gereği her öbek kendi kaplamı ile özdeştir. Bu özelliğe *kaplamsallık* özelliği denir. A1 aksiyomu öbeklerin kaplamsal nesneler olduğunu dile getirir.

A2: *Öbekleme aksiyom kalıbı*

$\forall z[z \in \{x: A(x)\} \leftrightarrow [\exists y(z \in y) \wedge A(z)]]$.

§ 14.2.1'deki (11)'e dayanan A2 önerme kalıbının her yerine-koyma örneği bir aksiyomdur. Yani A(x) yerine belli bir birli açık önermeyi koymakla belli bir aksiyom elde edilir. Bu aksiyomlardan her birine bir *öbekleme aksiyomu* denir. Örneğin A(x) yerine "$\sim(x \in x)$" koyarsak

(1) $\forall z[z \in \{x: \sim(x \in x)\} \leftrightarrow [\exists y(z \in y) \wedge \sim(x \in x)]]$

öbeklenim aksiyomu elde edilir.

A3: *Birey aksiyomu*

$\forall x[Br(x) \rightarrow [\sim\exists y(y \in x) \wedge \exists y(x \in y)]]$

Bu aksiyom, bireyin öğesinin olmadığını ama en az bir öbeğin öğesi olduğunu dile getirir.

Tanım 2: $\forall x[Öğ(x) \leftrightarrow \exists y(x \in y)]$

"Öğ(x)"i, "x öğedir" diye okuyoruz.

Tanım 3: $\forall x[Küme(x) \leftrightarrow [Öb(x) \wedge Öğ(x)]]$

"Küme(x)"i, "x kümedir" diye okuyoruz.

Buna göre

(2) $\forall x[Öğ(x) \leftrightarrow [Br(x) \vee Küme(x)]]$

elde edilir. Yani öğe olan ya birey ya kümedir.

Tanım 2'den yararlanarak A2'yi şöyle dile getirebiliriz.

A2' $\forall z[z \in \{x: A(x)\} \leftrightarrow Öğ(z) \wedge A(z)]$

Genel kümeler kuramının teoremleri aksiyom ve tanımların içerdiği önermelerdir. Aksiyom ve Teoremler $A_1,...,A_n$ önermelerinden ibaret olduğunda, B önermesinin bir teorem olması

(3) $A_1,...,A_n \therefore B$

çıkarımının özdeşlik mantığında geçerli olması demektir.

14.2.3 Öbekler Arasında Bağıntılar

Genel kümeler kuramında "$\subseteq$" ikili yüklemiyle gösterilen *alt öbeklik bağıntısı* ancak öbekler arasında bulunabilir. Dolayısıyla "$\subseteq$" yükleminin tanımı koşullu bir tanım durumundadır. Bu koşullu tanım şöyledir.

Tanım 4: $\forall x\forall y[[Öb(x) \wedge Öb(y)] \rightarrow [(x \subseteq y) \leftrightarrow \forall z(z \in x \rightarrow z \in y)]]$

Tanım 4'ün koşulu "$Öb(x) \wedge Öb(y)$" ile dile getirilmiştir. Tanım 4'den ve A1'den

(1) $\forall x\forall y[[Öb(x) \wedge Öb(y) \wedge (x \subseteq y) \wedge (y \subseteq x)] \rightarrow (x = y)]$

ve

(2) $\forall x \forall y\ [\ddot{O}b(x) \wedge \ddot{O}b(y) \rightarrow [(x = y) \leftrightarrow \forall z\ (z \in x \leftrightarrow z \in y)]]$

elde edilir.

Tanım 5: $\forall x \forall y\ [\ddot{O}b(x) \wedge \ddot{O}b(y) \rightarrow [(x \subset y) \leftrightarrow [x \subseteq y \wedge \sim(x = y)]]]$

Tanım 6: $\forall x \forall y\ [\ddot{O}b(x) \wedge \ddot{O}b(y) \rightarrow [(x \supseteq y) \leftrightarrow (y \subseteq x)]]$

Tanım 7: $\forall x \forall y\ [[\ddot{O}b(x) \wedge \ddot{O}b(y)] \rightarrow [(x \supset y) \rightarrow (y \underset{\neq}{\subseteq} x)]]$

14.2.4 Evrensel Öbek ve Boş Küme

Önce sıfırlı işlem olan boş öbeği ve evrensel öbeği tanımlıyoruz. Boş öbeği yine "$\varnothing$" ile gösteriyoruz. Evrensel öbeği ise "$\mathcal{E}$" işareti ile gösteriyoruz. Evrensel öbek, "E" ile gösterdiğimiz evrensel kümeden farklıdır. Evrensel küme, bireylerin öbeğidir.

Tanım 8: $E = \{x: Br(x)\}$

Tanım 9: $\mathcal{E} = \{x: x = x\}$

Nitekim "x = x" birli açık önermesi'ni her nesne gerçekler.

$\mathcal{E}$ öbeği, yani *evrensel öbek,* bütün bireylerin ve bütün kümelerin öbeğidir. Ama bütün öbeklerin öbeği değildir. Nitekim a bir birey ise A3 gereği a Öğ(a) olur. A2′ gereği de

(1) $a \in \mathcal{E} \leftrightarrow [\ddot{O}ğ(a) \wedge a = a]$

dolayısıyla

(1′) $a \in \mathcal{E} \leftrightarrow \ddot{O}ğ(a)$

O halde a bir birey ise $a \in \mathcal{E}$ doğrudur. Öte yandan bir küme ise tanım 3 gereği Öğ(a) elde edilir. O halde a bir küme ise (2) doğru olup $a \in \mathcal{E}$'de doğru olur. Buna karşılık a, *R* (Russell öbeği) gibi bir öz öbek ise $a \notin \mathcal{E}$ olur. Nitekim "x bir öz öbektir" ifadesini "Özö(x)" ile gösterirsek "Özö(x)" şöyle tanımlanır.

Tanım 10: $\forall x\ [\ddot{O}zö(x) \leftrightarrow [\ddot{O}b(x) \wedge \sim\ddot{O}ğ(x)]]$

O halde a bir öz öbek ise Öğ(a) yanlış olduğundan (2) önermesinden $a \notin \mathcal{E}$ elde edilir.

A4 *bireyler öbeği aksiyomu:* E bir kümedir.

A4 gereği E bir küme olduğundan E bir öğedir. Dolayısıyla

(2) $E \in \mathcal{E}$

doğrudur.

Tanım 11: $\varnothing = \{x: \sim(x = x)\}$

Nitekim "$\sim(x = x)$" birli açık önermesini hiçbir nesne gerçeklemez.

A5: *Boş öbek aksiyomu:*

$\varnothing$ bir kümedir.

A5'den dolayı boş öbeğe boş küme de diyebiliyoruz.

14.2.5 Kesişim, Birleşim, Fark ve Bakışımlı Fark

İkili küme işlemleri olarak *kesişim, birleşim, fark* ve *bakışımlı fark*'ı tanımlıyoruz. Bu işlemler sırasıyla "$\cap$", "$\cup$", "$-$" ve "$+$" işlem işaretleriyle gösterilir.

Tanım 12: $\forall x \forall y[(x \cap y) = \{z: z \in x \wedge z \in y\}]$

Tanım 13: $\forall x \forall y[(x \cup y) = \{z: z \in x \vee z \in y\}]$

Tanım 14: $\forall x \forall y[(x - y) = \{z: z \in x \wedge \sim(z \in y)\}]$

Tanım 15: $\forall x \forall y[(x \dot{+} y) = \{z: [z \in x \wedge \sim(z \in y)] \vee [\sim(z \in x) \wedge z \in y]\}]$

Bu tanımlara dayanarak aşağıdaki teoremler ispatlanabilir.

(1) $a \in (b \cap c) \leftrightarrow (a \in b \wedge a \in c)$

(2) $a \in (b \cup c) \leftrightarrow (a \in b \vee a \in c)$

(3) $a \in (b - c) \leftrightarrow [a \in b \wedge \sim(a \in c)]$

(4) $a \in (b \dot{+} c) \leftrightarrow [[a \in b \wedge \sim(a \in c)] \vee [\sim(a \in b) \wedge a \in c]]$

(1) ve (2)'ye dayanarak b veya c birey olduğunda $b \cap c$ ile $b \cup c$ boş kümeye eşit olur diyebiliriz. Öte yandan (3)'e dayanarak b'nin birey olması durumunda $b - c$'nin boş kümeye eşit olduğunu, b ve c'nin birey olması durumunda da $b + c$'nin boş kümeye eşit olduğunu söyleyebiliriz. Nitekim b birey ise $c \in b$ hep yanlış olur.

14.2.6 Tümleyen Öbeği, Birim Öbeği ve Sıralanmamış n-liler

Tümleyen öbeği'ni birinci düzey kümesinin E evrenine göre tümleyenlerinden ayırt etmeliyiz. Bu nedenle *a* gibi bir öbeğin tümleyen öbeği'ni "–*a*" biçiminde gösteriyoruz. (Böylece "–" işaretini bir yandan ikili fark işlemi, öbür yandan birli tümleyen öbeği işareti olarak kullanıyoruz.)

Tanım 16: $-a = \{x: \sim(x \in a)\}$

Dikkat edilirse –a öbeği a'nın öğesi olmayan bütün bireyleri ve kümeleri kapsar.

Tek öğesi *a* olan öbeğe, *a'nın birim öbeği* denir. Bu öbek "{*a*}" biçiminde gösterilir.

Tanım 17: $\forall x\ [\{x\} = \{z: (x \in \mathcal{E}) \rightarrow (z = x)\}]$

İmdi a bir öğe ise, {a}'nın tek öğesi a'dır.

Ama a bir öz öbek ise $\{a\} = \mathcal{E}$ olur.

Nitekim $x \in \mathcal{E}$, Öğ(x) anlamına gelir. Dolayısıyla

(1) $\{a\} = \{z: \text{Öğ}(a) \rightarrow (z = a)\}$

elde edilir. O halde A2' gereği,

(2) $a \in \{a\} \leftrightarrow \text{Öğ}(a) \wedge [\text{Öğ}(a) \rightarrow (a = a)]$

elde edilir. İmdi a bir öğe ise, (2) karşılıklı koşullusunun ikinci bileşeni doğru olur. Dolayısıyla $a \in \{a\}$ olur. O halde

(3) $\text{Öğ}(a) \rightarrow a \in \{a\}$

Öte yandan b, a'dan farklı bir öğe ise

(4) $b \in \{a\} \leftrightarrow \text{Öğ}(b) \wedge [\text{Öğ}(a) \rightarrow b = a]$

elde edilir. Oysa (4) karşılıklı koşullusunun ikinci bileşeni yanlıştır. O halde $b \notin \{a\}$. Dolayısıyla a bir öğe ise a ve yalnız a, {a} birim öbeğinin öğesidir.

Öte yandan *a* bir öz öbek ve b herhangi bir öğe ise $b \neq a$ olur. Ancak bu durumda (4) karşılıklı koşullusunun ikinci bileşeni doğru olur. (Nitekim "Öğ(b)" doğru ama "Öğ(a)" yanlıştır. O halde b = a yanlış olduğundan "Öğ(a) → (b = a)" doğrudur.) Buna göre

(5) Özö(a) $\rightarrow$ {a} = $\mathcal{E}$

elde edilir.

Tanım 18: (i) $\{a_1, a_2\} = \{a_1\} \cup \{a_2\}$

(ii) $\{a_1,...,a_{n-1},a_n\} = \{a_1,...,a_{n-1}\} \cup \{a_n\}$, $n \geq 2$

$\{a_1,a_2\}$ öbeğine *sıralanmamış ikili* veya *sıralanmamış çift* denir. $\{a_1,...,a_n\}$ öbeğine de *sıralanmamış n-li* denir. Sıralanmamış n-linin öğe sayısı *n*'dir.

(6) {{a}, {a, b}}

bir sıralanmamış ikili,

(7) {a, {a}, {a, b}}

bir sıralanmamış üçlüdür. (6) öbeğinin 2 öğesi (7) öbeğinin de 3 öğesi vardır. Başka bir örnek olarak

(8) {∅, {∅}}

bir sıralanmış ikili,

(9) {∅, {∅}, {∅, {∅}}}

bir sıralanmış üçlüdür. (8) öbeğinin iki öğesi (9) öbeğinin üç öğesi vardır.

A6. *Birim Öbeği Aksiyomu:*

$\forall x$ [Öğ(x) $\rightarrow$ Küme {x}].

A5 ve A6 aksiyomlarına dayanarak

(10) [Öğ(a_1) $\wedge ... \wedge$ Öğ(a_n)] $\rightarrow$ Küme $\{a_1,...,a_n\}$

elde edilir.

ALIŞTIRMALAR

Doğal sayılar birey olduğunda:

I. Aşağıdaki öbeklerin öğe sayısını belirtiniz.

1. {{2, 1}, {1, 2}, {1, 3 – 1}, {1, 2}}
2. {{2, 2}, {1 + 1, 3 – 1}}
3. {1, {1}}
4. {{{2, 1 + 1}, {2, 3 – 1}}, 2}

5. $\{\{1, \{1\}\}, \{\{1\}\}, \{\{\{1\}\}\}\}$
6. $\{\{1, 2\}\}$
7. $\{\{2\}\}$
8. $\{\{\{2\}\}, 2\}$

II. Aşağıdaki eşitlik veya eşitsizliklerden doğru olanlarını belirtiniz.

1. $1 = \{1\}$
2. $\{1\} = \{\{1\}\}$
3. $\{1, 2\} = \{2, 2 - 1\}$
4. $\{\{1\}\} = \{\{1\}, \{3 - 2, 4 - 3, 5 - 4\}\}$
5. $\{\{1\}\} \neq \{\varnothing, \{1\}\}$

III. Aşağıdaki önermelerden doğru olanlarını belirtiniz.

1. a) $1 \in \{1, 2\}$
   b) $1 \subseteq \{1, 2\}$
2. a) $\{1\} \in \{1, 2\}$
   b) $\{1\} \subseteq \{1, 2\}$
3. a) $\{1\} \in \{1\}$
   b) $\{1\} \subseteq \{1\}$
4. a) $1 \in \{1, \{1\}\}$
   b) $1 \subseteq \{1, \{1\}\}$
5. a) $\{1, \{1\}\} \in \{1, \{1\}, \{1, \{1\}\}\}$
   b) $\{1, \{1\}\} \subseteq \{1, \{1\}, \{1, \{1\}\}\}$

IV. Aşağıdaki önermelerden doğru olanları belirtiniz.

1. $\{1\} \subset \{\{1\}\}$
2. $\{1\} \subset \{1, \{1\}\}$
3. $\{1\} \subset \{1, 2, \{1, 2\}\}$
4. $\{0, \{0\}\} \subset \{1 - 1, \{0\}\}$
5. $\{1\} \subset \{1\}$
6. $\{1\} \subset \{\varnothing, 1\}$
7. $\{\{0\}, \{0, 1\}, \{\{0, 1\}\}\} \subset \{0, 1, \{0, 1\}, \{\{0, 1\}\}\}$

14.2.7 Güç Öbeği, Birleşim Öbeği ve Kesişim Öbeği

Verilen bir öbeğin, küme olan öbeklerinin öbeğine o öbeğin *güç öbeği* denir. *a* bir öbek ise, a'nın güç öbeği "Ga" biçiminde gösterilir. "G" ye güç öbeği işareti denir. "G" bir birli işlem işaretidir.

Tanım 19: $\forall x\,[Öb(x) \rightarrow [Gx = \{z: küme(z) \wedge (z \subseteq x)\}]]$

A7: Güç Öbeği Aksiyomu

$\forall x\,[küme\,(x) \rightarrow küme\,(Gx)]$

Tanım 19'dan aşağıdaki teorem elde edilir.

(1) $Öb(a) \rightarrow [b \in Ga \leftrightarrow [küme(b) \wedge (b \subseteq a)]]$

Örnek olarak

(2) $G\varnothing = \{\varnothing\}$

(3) $G\{\varnothing\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

(4) $G\{1, 2\} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

(5) $G\{1, 2, 3\} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

Dikkat edilirse a bir küme ise,

(6) $\varnothing \in Ga$

(7) $a \in Ga$

önermeleri doğru olur.

Bir öbekler öbeğinin öğesi olan öbeklerin öğelerinin öbeğine, bu öbekler öbeğinin *birleşim öbeği* denir. *a* herhangi bir nesne olduğunda *a*'nın birleşim öbeği "$\cup a$" biçiminde gösterilir. "$\cup$" bir birli işlem işareti olup *birleşim öbeği işlemi*'ni dile getirir.

Tanım 20: $\forall x[\cup x = \{z: \exists y(y \in x \wedge z \in y)\}]$

A8: *Birleşim Öbeği Aksiyomu:*

$\forall x[küme\,(x) \rightarrow küme(\cup x)]$

Örnek olarak aşağıdaki eşitlikleri inceleyiniz.

(8) $\cup \{\{1, 2\}, \{2, 3, 4\}, \{5\}\} = \{1, 2\} \cup \{2, 3, 4\} \cup \{5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(9) $\cup \{\{1, 2\}, \{2, 3, \{4\}\}, \{5\}\} = \{1, 2\} \cup \{2, 3, \{4\}\} \cup \{5\} = \{1, 2, 3, \{4\}, 5\}$

Tanım (20)'den

(10) $c \in \cup a \leftrightarrow \exists y\ (y \in a \wedge c \in y)$

elde edilir.

Bir öbekler öbeğinin öğesi olan öbeklerin ortak öğelerinin öbeğine, öbekler öbeğinin *kesişim öbeği* denir. a herhangi bir nesne olduğunda a'nın kesişim öbeği "$\cap a$" biçiminde gösterilir. "$\cap$" bir birli işlem işareti olup, kesişim öbeği işlemi'ni dile getirir.

Tanım 21: $\forall x\ [\cap x = \{z: \forall y\ (y \in x \rightarrow z \in y)\}]$

Tanım 21'den

(10') $c \in \cap a \leftrightarrow \forall y\ (y \in a \rightarrow c \in y)$

elde edilir.

Örnek olarak

(11) $\cap \{\{1, 2\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 5\}\} = \{1, 2\} \cap \{2, 3, 4\} \cap \{1, 5\} = \varnothing$

(12) $\cap \{\{1, 2\}, \{2, 3, \{4\}\}, \{2\}\} = \{1, 2\} \cap \{2, 3, \{4\}\} \cap \{2\} = \{2\}$

Dikkat edilirse

$a = \{a_1,...,a_n\}$ ise

(13) $\cup a = \cup\{a_1,...,a_n\} = a_1 \cup ... \cup a_n$

ve

(14) $\cap a = \cap\{a_1,...,a_n\} = a_1 \cap ... \cap a_n$

elde edilir.

Tanım 22: $Öb(a) \cap Öb(b) \rightarrow$ [(a ile b ayrık'tır) $\leftrightarrow a \cap b = \varnothing$]

Tanım 23: a'nın *boş kesişimi vardır* $\leftrightarrow \cap a = \varnothing$

Örneğin (11)'de geçen

(15) {{1, 2}, {2, 3, 4}, {1, 5}}

kümesinin boş kesişimi vardır. Ama (15)'in öğelerinden herhangi ikisi ayrık değildir.

Aşağıdaki önermeler teoremdir.

(16) $\cup\varnothing = \varnothing$

(17) $\cap\varnothing = \mathcal{E}$

(18) $\cap\mathcal{E} = \varnothing$

(19) $\cup\mathcal{E} = \mathcal{E}$

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki güç öbeklerinin öğelerinin öbeğini bulunuz.

1. G {1, 2 – 1}
2. G {1, {1}}
3. G {0, {1}, {{2}}}
4. G {1, {2, 3}, {4 – 1}, 1 + 2}, {1 + 1, 5}}
5. G {{1, 2, 3}, {2, 3, 4}}

II. Aşağıdaki birleşim öbeklerinin öğelerinin öbeğini bulunuz.

1. $\cup$ {{1, 2, 3}, {2, 3, 4}, 5}
2. $\cup$ {{1, 2}, {2, 3, 4}, ∅}
3. $\cup$ {1, 2, 3, {4}, 5}
4. $\cup$ {4}
5. $\cup$ {{4}}

14.2.8 Kümeler ve Öz Öbekler

Buraya kadar gördüğümüz aksiyomlar ile yeni bir aksiyomu aşağıda sıralıyoruz.

A1. $\forall x \forall y\ [\forall z\ (z \in x \leftrightarrow z \in y \rightarrow x = y]$ (kaplamsallık aksiyomu)

A2. $\forall z[z \in \{x: A(x)\} \leftrightarrow [\exists y(z \in y) \wedge A(z)]]$ (öbekleme aksiyom kalıbı)

A3. $\forall z[Br(x) \rightarrow [\sim\exists y(y \in x) \wedge \exists y(x \in y)]]$ (Birey aksiyomu)

A4. E bir kümedir. (Bireyler öbeği aksiyomu)

A5. $\varnothing$ bir kümedir. (Boş öbek aksiyomu)

A6. $\forall x[\ddot{O}\breve{g}(x) \rightarrow$ küme$(x)]$ (Birim öbeği aksiyomu)

A7. $\forall x[$küme$(x) \rightarrow$ küme$(Gx)]$ (Güç öbeği aksiyomu)

A8. $\forall x[$küme$(x) \rightarrow$ küme$(\cup x)]$ (Birleşim öbeği aksiyomu)

A9. $\forall x \forall y[[$küme$(x) \wedge y \subseteq x] \rightarrow$ küme$(y)]$ (alt küme aksiyomu)

Görüldüğü gibi A4–A9 aksiyomları bir öbeğin küme olduğunu belirler. A4 ile A5 mutfak olarak birer öbeğin küme olduğunu belirler, öbür aksiyomlar ise bir öbeğin küme olduğunu koşullu olarak belirler.

Dikkat edilirse A5,

(1) $\exists x$küme(x)

önermesi ile eşdeğerdir. Nitekim bir yandan A5 önermesi (1) önermesini özdeşlik mantığında içerir. ((1), A5'den tikel genelleme veya tikel niceleyiciye giriş denilen kuralla elde edilir.) Öte yandan a herhangi bir öbek olduğunda,

(2) $\varnothing \subseteq a$

bir teoremdir. (1), (2), A9 önermeleri ise A5 önermesini özdeşlik mantığında içerir.

(3) (1), (2), A9 $\therefore$ A5

çıkarımının geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetliyelim.

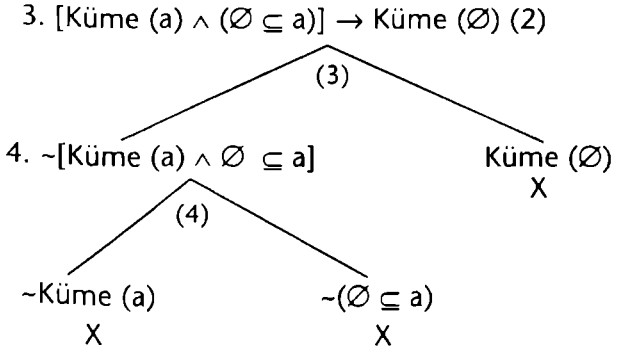
(3') 1. $\exists x$Küme (x)(B.Ö.)

2. $\forall x \forall y[[$Küme$(x) \wedge (y \subseteq x)] \rightarrow$ Küme$(y)]$ (B.Ö.)

$\sim$Küme$(\varnothing)$ (B.Ö.)

Küme(a) (1)

$\varnothing \subseteq a$ (B.Ö.)



A9'dan bir de şu teoremleri elde ederiz.

(10) $\forall x \forall y[[\ddot{O}z\ddot{o}(y) \wedge y \subseteq x] \rightarrow \ddot{O}z\ddot{o}(x)]$

(11) $\forall x \forall y[[K\ddot{u}me(x) \wedge (y = x)] \rightarrow K\ddot{u}me(y)]$

$\forall x \forall y[(y \subseteq x) \rightarrow [K\ddot{u}me(x) \rightarrow K\ddot{u}me(y)]]$

$\forall x \forall y[(y \subseteq x) \rightarrow [\sim K\ddot{u}me(y) \rightarrow \sim K\ddot{u}me(x)]]$

$\forall x \forall y[(y \subseteq x) \rightarrow [\ddot{O}z\ddot{o}(y) \rightarrow \ddot{O}z\ddot{o}(x)]]$

$\forall x \forall y[[\ddot{O}z\ddot{o}(y) \wedge (y \subset x)] \rightarrow \ddot{O}z\ddot{o}(x)]$

Başka bir önemli teorem

(12) Özö $\mathcal{E}$

dır. Bunu göstermek için önce

(13) $\forall x[\ddot{O}b(x) \rightarrow x \subseteq \mathcal{E}]$

ın teorem olduğunu gösterelim. (13),

(14) $\forall x\,[\ddot{O}b(x) \rightarrow \forall z\,(z \in x \rightarrow z \in \mathcal{E})]$

ile eşdeğerdir. $z \in x$ ise Öğ (z)'i içerir. Oysa Öğ (z) ise $z \in \mathcal{E}$ olur. O halde $\forall z\,(z \in x \rightarrow z \in \mathcal{E})$ doğru olup (14)'de doğru olur. İmdi §14.2.2'de gördüğümüz R Russell öbeği bir öbektir. Yani "Öb (R)" doğrudur. O halde (13) gereği "$R \subseteq \mathcal{E}$" doğrudur. Oysa R bir öz öbektir. A9 gereği $\mathcal{E}$ bir küme olsaydı, R öbeği de bir küme olacaktı. R bir küme olmadığına göre $\mathcal{E}$ öbeği de bir küme olamaz. O halde $\mathcal{E}$ öbeği bir öz öbektir.

Önemli bir teorem

(15) $\forall x \forall y[[\text{küme}(x) \wedge \text{küme}(y)] \rightarrow \text{küme}(x \cup y)]$

dır. Bunu göstermek için küme (a) ve küme (b) olmak üzere c = {a, b} öbeğini ele alalım.

(16) $\cup \{a, b\} = a \cup b$

Oysa, birleşim kümesi aksiyomu gereği küme {a, b}'dır. O halde (16) gereği küme $(a \cup b)$ elde edilir.

Önemli teoremler arasında

(17) $\forall x \forall y[[\text{küme}(x) \wedge \text{küme}(y)] \rightarrow \text{küme}(x \cap y)]$

(18) $\forall x[\text{küme}(x) \rightarrow \text{küme}(\cap x)]$

bulunur. İmdi küme (a) olursa,

(19) $\cap a \subseteq a$

bir teoremdir. Küme (a)'dan A9 gereği küme $(\cap a)$ elde edilir. (17) ise (18)'den elde edilir. Nitekim

(20) $\cap \{a, b\} = a \cap b$

Başka bir teorem

(21) $\forall x[\text{Küme}(x) \rightarrow \text{Özö}(-x)]$

(21)'i şöyle gösteriyoruz: a bir küme olduğunda –a bir küme olsaydı $a \cup -a$ bir küme olacaktı. Oysa $a \cup -a = \mathcal{E}$'dur. $\mathcal{E}$ öz öbek olduğundan – a öz öbek olmalıdır.

Şimdi de

(22) $\{a_1,...,a_n\}$

sıralanmamış n–lisinin hangi koşullarda küme, hangi koşullarda öz öbek olduğunu araştıralım.

(23) $[\text{Öğ}(a_1) \wedge ... \wedge \text{Öğ}(a_n)] \leftrightarrow \text{Küme}\ \{a_1,...,a_n\}$

Nitekim $a_1,...,a_n$ öğe ise $\{a_1\},...,\{a_n\}$ birer küme olup $\{a_1\}\cup...\cup\{a_n\}$, dolayısıyla $\{a_1,...,a_n\}$ küme olur. Öte yandan $a_1,...,a_i,...,a_n$'lerden biri olan a_i öz öbek ise $\{a_i\} = \mathcal{E}$ olur. O zaman da

(24) $\{a_1,...,a_i,...,a_n\} = \{a_1\}\cup...\cup \mathcal{E} \cup...\cup \{a_n\} = \mathcal{E}$

elde edilir. O halde $a_1,...,a_n$'lerden biri öz öbek ise $\{a_1,...,a_n\} = \mathcal{E}$ olup $\{a_1,...,a_n\}$ öz öbek olur. Örneğin doğal sayılar birey sayıldığında

(25) {0, 1, 2}

bir küme,

(26) $\{0, 1, \mathcal{E}\}$

ve

(27) {0, 1, R}

ise öz öbektir.

(28) $\{0, 1, \{R, \mathcal{E}\}, 2\}$

öbeği de öz öbektir. Nitekim $\{R, \mathcal{E}\} = \mathcal{E}$'dir. Dolayısıyla (28) $\mathcal{E}$ ile özdeştir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki öbekleri küme ve öz öbek olarak ayırınız. (Doğal sayıları birey olarak kabul ediyoruz.)

1. {1, 2, 5, 105}
2. $\{\mathcal{E}, 2, 5, 105\}$
3. $\{\mathcal{E}, R\}$
4. $\{\mathcal{E}, 1, 2, 3, R\}$
5. $\{1, 2, \{3, \mathcal{E}\}, 5\}$
6. $-\{1, 2, 3\}$
7. $-\{\mathcal{E}\}$
8. $-\{R\}$
9. $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, \mathcal{E}\}$
10. $\{1, 2, 3, \mathcal{E}\} \cap \{2, 3\}$

14.2.9 Bağıntılar

14.2.9.1 Sıralanmış İkililer ve Sıralanmış n-liler

Genel kümeler kuramında *sıralanmış ikili* sıralanmamış ikiliye indirgenebilir. a ile b herhangi iki nesne olduğunda a ile b'nin sıralanmış ikilisi "(a, b)" veya "<a, b>" biçiminde gösterilir. Burada "<a, b>" yazılış biçimini kullanacağız. Sıralanmış ikilinin başlıca özelliği şudur:

(1) $\langle a, b\rangle \neq \langle b, a\rangle$,

yani

(2) $\sim[\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle]$

Tanım 24. $\forall x \forall y[\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}]$

x'e <x, y>'nin *ön üyesi*, y'ye de <x, y>'nin *ard üye*'si denir.

Bu tanıma göre <a, b> gibi sıralanmış ikili, {{a}, {a, b}} sıralanmamış ikilisine indirgenir.

Örneğin

(3) $\langle 1, 3\rangle = \{\{1\}, \{1, 3\}\}$

(4) $\langle 1, \{3\}\rangle = \{\{1\}, \{1, \{3\}\}\}$

(5) $\langle\{1, 2\}, 3\rangle = \{\{\{1, 2\}\}, \{\{1, 2\}, 3\}\}$

(6) $\langle\langle 1, 2\rangle, 3\rangle = \{\{\langle 1, 2\rangle\}, \{\langle 1, 2\rangle, 3\}\}$

Tanım 24'ten aşağıdaki önemli teoremler elde edilir.

(7) $[\text{Öğ}(a) \wedge \text{Öğ}(b) \wedge \text{Öğ}(c) \wedge \text{Öğ}(d)] \rightarrow [\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \leftrightarrow [(a = c) \wedge (b = d)]]$

(8) $[\text{Öğ}(a) \wedge \text{Öğ}(b)] \leftrightarrow \text{Küme}(\langle a, b\rangle)$

(9) $[\text{Özö}(a) \vee \text{Özö}(b)] \rightarrow (\langle a, b\rangle = \mathcal{E})$

a gibi bir nesnenin bir sıralanmış ikili olduğunu "Sİ(a)" biçiminde gösteriyoruz.

Tanım 25: $\forall x[\text{Sİ}(x) = \exists y \exists z(x = \langle y, z\rangle)]$

Dikkat edilirse $\mathcal{E} = <\mathcal{E}, \mathcal{E}>$. Dolayısıyla Sl($\mathcal{E}$) doğrudur.

Tanım 26: $\{<x, y>: A(x, y)\} = \{z: \exists x \exists y[z = <x, y> \wedge A(x, y)]\}$

Örnek olarak

(10) $\{<x, y>: x$ doğal sayıdır $\wedge$ y doğal sayıdır $\wedge\ x < 2 \wedge y < 2\} = \{<0, 0>, <0, 1>, <1, 0>, <1, 1>\}$

Tanım 26'dan şu teoremler elde edilir.

(11) $\forall z[z \in \{<x, y>: A(x, y)\} \leftrightarrow [\ddot{O}\check{g}(z) \wedge \exists x \exists y[z = <x, y> \wedge A(x, y)]]]$

(12) $\forall x \forall v[<u, v> \in \{<x, y>: A(x, y)\} \leftrightarrow [\ddot{O}\check{g}(u) \wedge \ddot{O}\check{g}(v) \wedge A(u, v)]]$

"X" ikili işlem işaretiyle gösterilen *kartezyen çarpım* işlemi şöyle tanımlanır.

Tanım 27: $\forall x \forall y[[\ddot{O}b(x) \wedge \ddot{O}b(y)] \rightarrow [xXy = \{<u, v>: u \in x \wedge v \in y\}]]$

Örneğin $a = \{0, 1\}$, $b = \{1, 2\}$ olduğunda

(13) $a\ X\ b = \{<0, 1> <0, 2> <1, 1>, <1, 2>\}$

elde edilir.

Tanım 28: $\forall x[\ddot{O}b(x) \rightarrow x^2 = x\ X\ x]$,

$$\forall x[\ddot{O}b(x) \rightarrow x^n = \underbrace{x\ X \ldots X\ x}_{(n)}]$$

a^2'ye a'nın kartezyen karesi, a^n'ye de a'nın n'inci kartezyen kuvveti denir.

Tanım 28'den şu teoremler elde edilir.

(14) $\forall x \forall v[<u, v> \in a^2 \leftrightarrow (u \in a \wedge v \in a)]$

(15) $\varnothing^2 = \varnothing$

(16) $\forall u \forall v[<u, v> \in \mathcal{E}^2 \leftrightarrow [\ddot{O}\check{g}(u) \wedge \ddot{O}\check{g}(v)]]$

Tanım 27'den de şu teoremler elde edilir.

(17) $a\ X\ (b \cap c) = (a\ X\ b) \cap (a\ X\ c)$

(18) $a\ X\ (b \cup c) = (a\ X\ b) \cup (a\ X\ c)$

(19) $a\ X\ (b - c) = (a\ X\ b) - (a\ X\ c)$

(20) $b \subseteq c \rightarrow (a \times b \subseteq a \times c)$

(21) $a \times b = \emptyset \leftrightarrow a = \emptyset \times b = \emptyset$

$n > 2$ için *sıralanmış n-li*'yi şöyle tanımlarız.

Tanım 29: $\langle a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \rangle = \langle \ldots \langle \langle a_1, a_2 \rangle, a_3 \rangle, \ldots, a_n \rangle$

Örneğin

(22) $\langle a, b, c \rangle = \langle \langle a, b \rangle, c \rangle$

(23) $\langle a, b, c, d \rangle = \langle \langle \langle a, b, c \rangle, d \rangle$

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki sıralanmış çiftleri sıralanmamış çiftlere indirgeyiniz.

1. $\langle a, \{b, c\} \rangle$
2. $\langle \{a, b\}, \{b, c\} \rangle$
3. $\langle \{\emptyset, c, d\}, \{1, \emptyset\} \rangle$
4. $\langle \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset\} \rangle$
5. $\langle \{\{\emptyset\}, \emptyset\}, \{1, \emptyset\} \rangle$

II. Aşağıdaki kartezyen çarpımları ve kartezyen kuvvetleri bulunuz.

1. $\{1\}^3$
2. $\{\{1\}\}^2$
3. $\{\emptyset, 1\} \times \{2, \{\emptyset\}\}$
4. $\{\{1\}, 2\}^2 \times \{\{3\}, 4\}$
5. $\{\{1, \{1, 2\}\}, \{1, 2\}\} \times \{\langle 1, 2, 2 \rangle\}$
6. $\emptyset^2$
7. $\{\emptyset\}^2$
8. $(G\emptyset)^2$
9. $\{1, 2\} \cap \{2, 3\}^2$
10. $(\{1, 2\} \cap \{2, 3\}) \times \{(1, 2) \cup \{2, 3\}\}$

14.2.9.2 Bağıntı ve Bağıntı Öbeklenimleri

Her öğesi bir sıralanmış ikili olan bir öbeğe *bağıntı* denir. "a bağıntıdır" ifadesini "Bğ(a)" olarak kısaltıyoruz. "Bğ" birli yüklemini de şöyle tanımlıyoruz:

Tanım 30: $\forall x[Bğ(x) \leftrightarrow \forall y[y \in x \rightarrow Sİ(y)]]$

$\varnothing$ en küçük bağıntı $\mathcal{E}^2$'de en büyük bağıntıdır. Bağıntıları "B", "B_1", "B_2",... biçiminde gösteriyoruz. Dolayısıyla her B bağıntısı için

(1) $\varnothing \subseteq B \subseteq \mathcal{E}^2$

yazabiliriz. $<a, b> \in B$ olduğu kısaca a B b biçiminde dile getirilir. Yani

(2) $<a, b> \in B \equiv a\ B\ b$

Öbekleri de "K", "L",... "K_1", "L_1"..., "K_2", "L_2"... harfleriyle göstereceğiz.

Aşağıdaki önermeler teoremdir.

(3) $\forall x[(Bğ(x) \leftrightarrow x \subseteq \mathcal{E}^2]$

(4) $\forall x \forall y[[Bğ(x) \wedge Bğ(x \cup y)]]$

(5) $Bğ\{<x, y>: A(x, y)\}$

yani A(x, y) bir ikili açık önerme ise $\{<x, y>: A(x, y)\}$ her zaman bir bağıntıyı gösterir.

(6) $\{<x, y>: A(x, y)\}$

ye bir *bağıntı öbeklenimi* diyoruz. Örneğin

(7) $\{<x, y>: (x \text{ doğal sayıdır}) \wedge (y \text{ doğal sayıdır}) \wedge x < 3 \wedge y \leq 1 \wedge x > y\}$

bağıntı öbeklenimi

(8) $\{<1, 0>, <2, 0> <2, 1>\}$

bağıntısını gösteririz.

İkinci örnek olarak

(9) $\{<x, y>: x \text{ doğal sayıdır} \wedge y \text{ doğal sayıdır} \wedge x = y\}$

bağıntı öbeklenimi

(10) $\{<0, 0>, <1, 1>, <2, 2>,..., <n, n>,...\}$

bağıntısını gösterir.

Üçüncü örnek olarak

(10) {<x, y>: x doğal sayıdır ∧ y doğal sayıdır ∧ x < y}

bağıntı öbeklenimi

(11) {<0, 1>, <0, 2>,...,<1, 2>, <1, 3>,...}

bağıntısını gösterir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki bağıntı öbeklenimlerinin gösterdiği bağıntıları bulunuz.

1. {<x, y>: x doğal sayıdır ∧ y doğal sayıdır ∧ 1< x ∧ y ≤ 5 ∧ x = y}
2. {<x, y>: x doğal sayıdır ∧ y doğal sayıdır ∧ 1 ≤ x ∧ y ≤ 5 ∧ x ≠ y}
3. {<x, y>: x doğal sayıdır ∧ y doğal sayıdır ∧ 1 ≤ x ≤ 5 ∧ 2 ≤ y ≤ 4 ∧ x < y}
4. {<x, y>: x doğal sayıdır ∧ x çift sayıdır ∧ y tek sayıdır ∧ x < y}

14.2.9.3 Bağıntı Türleri

B_1 ile B_2 bağıntılar olduğunda, $B_1 \subseteq B_2$ ise B_1'e B_2'nin bir alt bağıntısı denir. Örneğin

(1) {<1, 2>, <2, 3>}

bağıntısı

(2) {<1, 2>, <2, 3>, <1, 3>}

bağıntısının bir alt bağıntısıdır.

İkinci bir örnek olarak

(3) {<x, y>: x doğal sayıdır ∧ y doğal sayıdır ∧ 1 ≤ x ≤ 4 ∧ 1 ≤ y ≤ 4 ∧ x < y}

bağıntısı

(4) {<x, y>: x doğal sayıdır ∧ y doğal sayıdır ∧ 1 ≤ x ≤ 4 ∧ 1 ≤ y ≤ 4 ∧ x ≤ y}

bağıntısının alt bağıntısıdır.

Her kartezyen çarpım bir bağıntıdır. Özelde her kartezyen kare de bir bağıntıdır. Bir kartezyen çarpım veya kartezyen karenin her alt kümesi bir bağıntıdır. Örneğin

(5) $\{\langle x, y\rangle : x \text{ doğal sayıdır} \wedge y \text{ doğal sayıdır} \wedge x < y\}$

bağıntısı, $N = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (yani N, doğal sayılar kümesi) olmak üzere N^2'nin bir alt bağıntısıdır.

Bağıntılar küme olan bağıntılar ile öz öbek olan bağıntılar olmak üzere ikiye ayrılır. Örneğin $\mathcal{E}^2$ bağıntısı öz öbek olan bir bağıntıdır. $\mathcal{E}^2$'ye *evrensel bağıntı* denir. Her bağıntı evrensel bağıntının alt bağıntısıdır.

$B \subseteq K \times L$ olduğunda

(6) $\langle K, L, B\rangle$

sıralanmış üçlüsüne *K'dan L'ye bağıntı* denir.

(7) $\langle K, L, (K \times L) - B\rangle$

ya K'dan L'ye bağıntının *tümleyen bağıntı*'sı denir. Örneğin

(8) $\langle\{1, 2\}, \{a, b\}, \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, b\rangle\}\rangle$

{1, 2}'den {a, b}'ye bir bağıntıdır. Bunun tümleyen bağıntısı da

(9) $\langle\langle 1, 2\rangle, \langle a, b\rangle, \{\langle 2, a\rangle \langle 1, b\rangle\}\rangle$

dır.

$B \subseteq K^2$ olduğunda,

(10) $\langle K, B\rangle$

sıralanmış ikilisine K kümesinde bağıntı denir. (10)'un *tümleyen bağıntısı*

(11) $\langle K, K^2 - B\rangle$

dır. Örneğin

(12) $\langle\{1, 2\}, \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle\}\rangle$

{1, 2} kümesinde bir bağıntıdır. (12)'nin tümleyen bağıntısı

(13) $\langle\{1, 2\}, \{\langle 2, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}\rangle$

dir.

Her öğesi <a, a> biçiminde olan bağıntılara *özdeşlik bağıntısı* denir. Örneğin

(14) {<1, 1>, <2, 2>, <4, 4>, <8, 8>}

bir özdeşlik bağıntısıdır. Genel olarak

(15) {<x, x>: A(x)}

biçimindeki öbeklenim bir özdeşlik bağıntısını gösterir. Örneğin

(16) {<x, x>: x doğal sayıdır. $\wedge$ x < 3}

öbeklenimi

(17) {<0, 0>, <1, 1>, <2, 2>}

özdeşlik bağıntısını gösterir.

(18) {<x, x>: x $\in$ K}

bağıntısına da K kümesinde özdeşlik bağıntısı denir. Örneğin {1, 2, 3} kümesindeki özdeşlik bağıntısı

(19) {<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>}

dır.

(20) {<x, y>: x $\in$ K $\wedge$ y $\in$ K $\wedge$ x $\in$ y}

biçimindeki bir öbeklenimin gösterdiği bağıntıya *K öbeğinde öğelik bağıntısı* denir. Örneğin

(21) {1, 2, 3, {1}, {1, 2}, {2, 3}}

kümesinde öğelik bağıntısı

(22) {<1, {1}>, <1, {1, 2}>, <2, {1, 2}>, <2, {2, 3}>, <3, {2, 3}>}

dür. Öte yandan

(23) {1, 2, 3, {{1}, {5}}, {{5}, {6}}, {7}}

kümesinde öğelik bağıntısı $\varnothing$ ile özdeştir.

(24) {<x, y>: x $\in$ K $\wedge$ y $\in$ K $\wedge$ x $\subseteq$ y}

biçimindeki bir öbeklenimin gösterdiği bağıntıya K kümesinde *alt kümelik bağıntısı* denir.

Örneğin

(25) $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

kümesinde alt kümelik bağıntısı

(26) $\{<\{1, 2\}, \{1, 2\}>, <\{2, 3\}, \{2, 3\}>, <\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}>, <\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}>, <\{2, 3\}, \{1, 2, 3\}>\}$

(27) $\{<x, y>: x \in K \wedge y \in K \wedge x \subset y\}$

biçimindeki bir öbeklenimin gösterdiği bağıntıya K kümesinde *öz alt kümelik bağıntısı* denir. Örneğin (25) kümesinde öz alt kümesi bağıntısı

(28) $\{<\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}>, <\{2, 3\}, \{1, 2, 3\}>\}$

dür.

(29) $\{<x_1,...,x_n>: A(x_1,...,x_n)\}$; $n \geq 2$: *n-li bağıntı öbeklenimi*

(30) $\{y: \exists x_1 ... \exists x_n\ [y = <x_1,...,x_n> \wedge A(x_1,...,x_n)]\}$

biçiminde tanımlanır. (29) öbeklenimi sıralanmış n–lilerden oluşan bir öbeği gösterir. Böyle bir öbeğe ise *n-li bağıntı* denir. Buna göre "bağıntı" tek başına ikili bağıntı demektir. Öte yandan

(31) $\{<1\ 2, 3>, <2, 2, 2>, <0, 0, 1>, <1, 1, 3>\}$

bir üçlü bağıntıdır.

(32) $\{<x, y, z>: x \in \{1, 2, 3\} \wedge y \in \{1, 2, 3\} \wedge z \in \{1, 2, 3\} \wedge x + y = z\}$

üçlü bağıntı öbeklenimi

(33) $\{<1, 1, 2>, <1, 2, 3>, <2, 1, 3>\}$

bağıntısını gösterir. Dikkat edilirse (33) üçlü bağıntısı

(34) $\{<<1, 1>, 2>, <<1, 2>, 3>, <<2, 1>, 3>\}$

ikili bağıntısına indirgenir. Genel olarak her n-li bağıntı ($n \geq 2$) bir ikili bağıntıya yani düpedüz bir bağıntıya indirgenebilir. Nitekim her sıralanmış n-li tanım gereği bir sıralanmış ikili ile özdeştir.

(35) $<a_1,...,a_{n-1}, a_n> = <<a_1,...,a_{n-1}>, a_n>$

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki kümelerde özdeşlik bağıntılarını bulunuz.

1. $\{1, 2, \{1\}, \{\{1, 2\}\}\}$
2. $\{\varnothing, 1, 2, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}, 1, 2\}\}$
3. $\{1, 2, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{\{2, 3\}\}\}$
4. $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
5. $\{1, 2, \{1, 2\}, \{\{1, 2\}\}, \{\{\{1, 2\}\}\}\}$

II. Aşağıdaki kümelerde alt kümelik bağıntılarını bulunuz.

1. $\{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
2. $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{1, 2\}\}$
3. $\{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$
4. $\{\{1\}, \{1, 2\}, \{\{1, 2\}\}, \{\{1\}, \{1, 2\}\}\}$

III. Aşağıdaki kümelerde öz alt kümelik bağıntılarını bulunuz.

1. $\{\{1\}, \{2\}, \{1, 2, 3\}\}$
2. $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{1, 2\}\}$
3. $\{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$
4. $\{\{1\}, \{1, 2\}, \{\{1, 2\}\}, \{\{1\}, \{1, 2\}\}\}$

IV. Aşağıdaki n–li bağıntı öbeklerinin gösterdiği n–li bağıntıları bulunuz.

1. $\{\langle x, y\rangle : x \in \{1, 2, 3\} \wedge y \in \{1, 2, 3\} \wedge x + 3 = y\}$
2. $\{\langle x, y\rangle : x \in \{1, 2, 3\} \wedge y \in \{1, 2, 3\} \wedge z \in \{1, 2, 3\} \wedge x + y = z\}$
3. $\{\langle x, y, z\rangle : x \in \{1, 2, 3\} \wedge y \in \{1, 2, 3\} \wedge z \in \{1, 2, 3\} \wedge x - y = z\}$
4. $\{\langle x, y, z, w\rangle : x \in \{1, 2, 3\} \wedge y \in \{1, 2, 3\} \wedge z \in \{1, 2, 3\} \wedge$
   $w \in \{1, 2, 3\} \wedge x + y = z + w\}$

14.2.9.4 Bağıntı İşlemleri

Bu bölümde bağıntılara uygulanan çeşitli birli ve ikili işlemler tanımlayacağız.

Tanım 31:

1. Önal(B) = {x: $\exists$y (xBy)}

2. Ardal(B) = {y: $\exists$x (x By)}

3. Al(B) = Önal(B) $\cup$ Ardal(B)

Önal(B), B'nin *ön alan*'ı; Ardal(B); B'nin *ard alan*'ı, Al(B)'de B'nin *alan*'ıdır. "Önal", "Ardal" ve "Al" birli işlem işaretleridir.

Örneğin B bağıntısı

(1) {<1, 2>, <2, 3>, <1, 5>}

olduğunda

(2) Önal(B) = {1, 2}

(3) Ardal(B) = {2, 3, 5}

(4) Al(B) = {1, 2, 3, 5}

olur.

Tanım 32:

B $\upharpoonright$ K = B $\cap$ (K X $\mathcal{E}$)

B $\upharpoonright$ K, B bağıntısının K öbeğine *sınırlanma*'sıdır. Örneğin (1) bağıntısının {1} kümesine sınırlaması

(5) {<1, 2>, <1, 5>}

bağıntısıdır. (5)'i bulmak için (1) bağıntısında ön üyesi 1 olan sınırlanmış ikilileri seçtik.

Tanım 32'den aşağıdaki teoremler elde edilir.

(6) B $\upharpoonright$ K = B $\cap$ [K x ardal (B)]

(7) Önal (B $\upharpoonright$ K) = K $\cap$ Önal (B)

(8) K $\subseteq$ L $\rightarrow$ (B $\upharpoonright$ K $\subseteq$ B $\upharpoonright$ L)

(9) $B \vdash (K \cap L) = (B \vdash K) \cap (B \vdash L)$

(10) $B \vdash (K \cup L) = (B \vdash K) \cup (B \vdash L)$

(11) $B \vdash (K - L) = (B \vdash K) - (B \vdash L)$

(12) Küme (B) $\rightarrow$ Küme (B $\vdash$ K)

Tanım 33:

$\breve{B} = \{<y, x>: xBy\}$

$\breve{B}$ bağıntısına, B bağıntısının *evrik bağıntısı* denir. Örneğin (1) bağıntısının evriği

(13) $\{<2, 1>, <3, 2>, <5, 1>\}$

bağıntısıdır. (13), (1)'deki her öğede ön üye ile ard üyenin yer değiştirmesi ile elde edilir.

Tanım 33'den şu teoremler elde edilir.

(14) $\breve{\breve{B}} = B$

(15) $\widetilde{B_1 \cap B_2} = \breve{B}_1 \cap \breve{B}_2$

(16) $\widetilde{B_1 \cup B_2} = \breve{B}_1 \cup \breve{B}_2$

(17) $\widetilde{B_1 - B_2} = \breve{B}_1 - \breve{B}_2$

Tanım 34:

B"K = Ardal (B $\vdash$ K)

B"K'ya K öbeğinin B bağıntısına göre *imge*'si denir. Örneğin {1, 2, 3} öbeğinin (13) bağıntısına göre imgesi {1, 2} öbeğidir. Nitekim bu örnekte B $\vdash$ K = {<2, 1>, <3, 2>} olup, Ard (B $\vdash$ K) = {1, 2}'dir.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki bağıntı öbeklenimlerinin gösterdiği bağıntılarının ön alanlarını, ard alanlarını, alanlarını ve evrik bağıntılarını bulunuz.

1. $\{<x, y>: x \in \{1, 2, 3\} \wedge y \in \{1, 2, 3\} \wedge x + 3 = y\}$

2. $\{<x, y>: x \in \{0, 1, 2\} \wedge y \in \{0, 1\} \wedge x < y\}$

3. $\{<x, y>: x \in \{1, 2\} \wedge y = \{2, 3\} \wedge x \geq y\}$

II. Aşağıdaki bağıntıların, verilen öbeklere sınırlamalarını bulunuz.

1. $\{<1, 2>, <3, 4>, <2, 5>\} \upharpoonright \{1, 5, 7\}$

2. $\{<2, 3>, <2, 2>, <3, 4>, <3, 2>\} \upharpoonright \{2, 3\}$

3. $\{<1, 2>, <2, 3>\} \upharpoonright \varnothing$

4. $\{<2, 3>, <2, 2>, <3, 4>\} \upharpoonright \{1, 2, 3\}$

5. $\{<a, b>, <b, c>, <b, b>, <c, d>\} \upharpoonright \{a, c, e\}$

III. $B = \{<1, 2>, <a, 3>, <3, c>, <2, b>\}$ ve $K = \{1, a, b\}$ olduğunda B"K'yı bulunuz.

14.2.9.5 Bağıntı Bileşmesi

Tanım 35:

$B_1/B_2 = \{<x, y>: \exists y\ (xB_1z \wedge zB_2y)\}$ B_1/B_2 bağıntısına B_1 ile B_2'nin *bağıntı bileşmesi* denir. "/" bir ikili işlem işareti olup bağıntı bileşmesi işlemini dile getirir.

Örnek olarak

(1) $\{<1, 2>, <2, 3>\} / \{<2, 4>, <3,5>\} = \{<1, 4>, <2, 5>\}$

(2) $\{<1, 2>, <1, 3>, <2, 3>\}/\{<2, 1>, <3, 1>, <3, 2>\} = \{<1, 1>, <1, 2>, <2, 1>, <2, 2>\}$

(3) $\{<1, 2>, <1, 3>, <2, 3>\}/\{<1, 2>, <2, 2>, <3, 3>\} = \{<1, 2>, <1, 3>, <2, 3>\}$

Genel olarak $<a, b> \in B_1$ ve $<b, c> \in B_2$ ise $<a, c> \in B_1/B_2$ olur. B_1/B_2'nin öğeleri de buna göre elde edilir.

Tanım 35'den aşağıdaki teoremler elde edilir.

(4) $x\ (B_1/B_2)\ y \leftrightarrow \exists z\ (xB_1z \wedge zB_2y)$

(5) $(B_1/B_2) / B_3 = B_1 / (B_2/B_3)$

(6) $B_1/B_2 \subseteq Al\ (B_1)\ X\ Ardal\ (B_2)$

(7) $B_1/(B_2 \cup B_3) = (B_1/B_2) \cup (B_1/B_3)$

(8) $B_1/(B_2 \cap B_3) \subseteq (B_1/B_2) \cap (B_1/B_3)$

(9) $(B_1/B_2) - (B_1/B_3) \subseteq B_1/(B_2 - B_3)$

"/", "∪" "∩" bağıntı işlemleri yardımıyla akrabalık bağıntılarını tanımlayabiliriz. Örneğin Ç "çocuk" bağıntısını göstersin. Buna göre "aÇb", "a, b'nin çocuğudur." anlamına gelir. Ayrıca *Erk*, erkekler öbeğini göstersin. O zaman "Ebeveyin" bağıntısı şöyle tanımlanır.

(10) a, b'nin ebeveynidir ≡ bÇa

O halde

(11) Ebeveyin = $\breve{Ç}$

elde edilir. Yani "ebeveyin" bağıntısı "çocuk" bağıntısının evrik bağıntısıdır.

(12) a, b'nin babasıdır ≡ a, b'nin ebeveynidir ∧ a erkektir.

Dolayısıyla, "Baba" bağıntısı şöyle tanımlanabilir.

(13) Baba = $\breve{Ç} \upharpoonright$ Erk

Nitekim "baba", "erkek ebeveyin" demektir.

(14) a, b'nin annesidir ≡ a, b'nin ebeveynidir ∧ a erkek değildir

olduğundan "Anne" bağıntısı şöyle tanımlanabilir.

(15) Anne = $\breve{Ç} \upharpoonright -$ Erk

(16) a, b'nin kardeşidir ≡ ∃x (a Ç x ∧ b Ç x)

doğrudur. Oysa

(17) ∃x(a Ç x ∧ b Ç x) ≡ ∃x(a Ç x ∧ x $\breve{Ç}$ b) ≡ a(Ç/$\breve{Ç}$)b

O halde "kardeş" bağıntısı şöyle tanımlanabilir:

(18) Kardeş = Ç/$\breve{Ç}$

Buna göre

(19) Erkek kardeş = (Ç/$\breve{Ç}$) $\upharpoonright$ Erk

(20) Kız kardeş = (Ç/$\breve{\text{Ç}}$) ⊢– Erk

tanımları elde edilir.

(21) a, b'nin torunudur ≡ ∃x (aÇx ∧ xÇb)

olduğundan "torun" bağıntısı şöyle tanımlanır.

(22) Torun ≡ Ç/ Ç

(23) a, b'nin amcasıdır ≡ ∃x (a, x'in erkek kardeşidir ∧ x, b'nin babasıdır)

Dolayısıyla "amca" şöyle tanımlanır:

(24) [(Ç/$\breve{\text{Ç}}$) ⊢ Erk] / (Ç ⊢ Erk)

(25) a, b'nin dayısıdır ≡ ∃x (a, x'in erkek kardeşidir ∧ x, b'nin annesidir)

olduğundan, "dayı" şöyle tanımlanır.

(26) [(Ç/$\breve{\text{Ç}}$) ⊢ Erk] / ($\overbrace{\breve{\text{Ç}} \vdash - \text{Erk}}$)

ALIŞTIRMALAR

I. B_1 = {<1, 2>, <1, 3>, <3, 1>, <3, 4>}

ve

B_2 = {<2, 4>, <4, 1>, <3, 2>, <3, 1>, <4, 3>}

olduğunda

1. B_1/B_2
2. B_2/B_1
3. $\breve{B}_1$ / $\breve{B}_2$
4. $\breve{B}_2$ / $\breve{B}_1$

bağıntı bileşmelerini bulunuz.

II. "Çocuk" ("Ç") bağıntısı ile "Erkek" ("Erk") öbeği yardımıyla aşağıdaki akrabalık bağıntılarını tanımlayınız.

1. Teyze
2. Hala

3. Babaanne
4. Anneanne
5. Babanın babası
6. Annenin babası

14.2.9.6 Denklik Bağıntıları

K bir küme ve B, K^2'nin alt öbeği olan bir bağıntı olduğunda

(i) $\forall x(x \in K \rightarrow xBx)$ (B K'da)

(ii) $\forall x \forall y(xBy \rightarrow yBx)$ (B bakışımlıdır)

(iii) $\forall x \forall y \forall z[(xBy \wedge yBz) \rightarrow xBz]$ (B geçişlidir)

doğru ise, B'nin K öbeğinde bir *denklik bağıntısı* olduğu söylenir.

Örneğin

(1) {<1,1>, <1,2>, <2,1>, <2,2>, <3,4>, <3,3>, <4, 4>, <4, 3>, <5, 5>, <6, 6>}

bağıntısı {1, 2, 3, 4, 5, 6} öbeğinde bir denklik bağıntısıdır.

B bir denklik bağıntısı ve $a \in Al(B)$ olduğunda

(2) {x: xBa}

öbeğine B bağıntısının bir denklik öbeği denir. Bu denklik öbeği

(3) $[a]_B$

biçiminde de gösterilir. a öğesine (3) denklik öbeğinin bir temsilcisi denir.

(4) $aBb \leftrightarrow [a]_B = [b]_B$

doğrudur. Örneğin (1) denklik bağıntısının denklik öbeklerinin öbeği

(5) {{1, 2}, {3, 4}, {5}, {6}}

dır. K öbeğinde, B denklik bağıntısının denklik öbeklerinin öbeği

(6) K/B

biçiminde gösterilir. (6)'ya B denklik bağıntısının K öbeğindeki *bölüm öbeği* denir. K/B öbeğine K öbeğinin B denklik bağıntısı gereği bir *bölümleme*'si de denir.

(7) $K/B = \{K_1,...,K_n\}$

olduğunda,

(8) $K_i \cap K_j = \emptyset$ (i, j, = 1,..., n, $i \neq j$)

(9) $K_1 \cup K_2 \cup ... \cup K_n = K$

(10) $K_i = [a_i]_B$, i = 1, ...n

olur.

K öbeğinde özdeşlik bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntıyı $B_=$ ile gösterelim.

(11) $K = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$

olduğunda

(12) $K/B_= = \{\{a_1\}, \{a_2\},...,\{a_n\}\}$

elde edilir. Yani denklik öbekleri hep birim öbekleridir.

(13) $[a_i]_{B_=} = \{a_i\}$, i = 1,...,n

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki denklik bağıntılarının bölüm öbeklerini bulunuz.

1. {<a, a>, <b, b>, <c, 1>, <c, c>, <1, 1>, <1, c>}
2. {<a, b>, <b, a>, <a, a>, <b, b>}
3. {<a, a>, <c, c>, <c, b>, <b, c>, <b, b>, <d, d>}

14.2.10 Fonksiyonlar

14.2.10.1 Çoğa-bir, bire-çok ve bire-bir Bağıntılar, 'Fonksiyon'un Tanımlanması

Matematiğin en temel kavramlarından biri olan "fonksiyon" özel bir bağıntı türüdür.

Tanım 36:

B bir bağıntı olduğunda;

(i) $\forall x \forall y \forall z[(xBy \wedge xBz) \rightarrow y = z]$

olursa, B'ye *çoğa-bir bağıntı* denir.

(ii) $\forall x \forall y \forall z[(xBz \wedge yBz) \rightarrow x = y]$

olursa, B'ye *bire-çok bağıntı* denir.

(iii) B bağıntısı hem bire-çok hem çoğa-bir ise, B'ye *bire-bir* bağıntı denir.

Tanım 37: Çoğa bir bağıntıya *fonksiyon* denir. Fonksiyonları "f", "g", "h",... harfleriyle gösteriyoruz. f bir fonksiyon ise "afb" veya "$<a, b> \in f$" yerine "f(a) = b" yazılır. "f(a)"ya *f fonksiyonunun a için değeri*" denir.

Önal(f)'ye yani $\{x: \exists y [f(x) = y]\}$ öbeğine f fonksiyonunun *tanım alanı*, Ardal(f)'ye yani $\{y: \exists x [f(x) = y]\}$ öbeğine f fonksiyonunun *değer alanı* da denir.

Örneğin

(1) $\{<1, 2>, <2, 2>\}$

bire-çok olmayan çoğa-bir bağıntı, dolayısıyla bir bire-çok olmayan fonksiyondur.

(2) $\{<2, 2>, <2, 3>\}$

çoğa-bir olmayan bire-çok bir bağıntıdır. Dolayısıyla bir fonksiyon değildir.

(3) $\{<1, 2>, <2, 3>\}$

hem çoğa-bir hem bire-çok, yani bire-bir olan bir bağıntı, dolayısıyla bire-bir bir fonksiyondur. (1) ve (2) fonksiyonlarının tanım alanı {1, 2} öbeğidir. (1) fonksiyonunun değer alanı {2}, (3) fonksiyonunun değer alanı ise {2, 3}'dür.

Bir fonksiyonun tanım alanı ile değer alanının birleşimine *fonksiyon alanı* denir.

(4) (f fonksiyondur $\wedge$ $g \subseteq f$) $\rightarrow$ g fonksiyondur.

(5) (f fonksiyondur $\wedge$ g fonksiyondur) $\rightarrow$ [$(f \cap g)$ fonksiyondur.]

Ancak f ile g fonksiyon olup $(f \cup g)$ fonksiyon olmayabilir. Örneğin

(6) {<1, 2>, <2, 3>, <3, 4>}

ile

(7) {<3, 5>, <6, 7>}

birer fonksiyondur. Ama (6) ile (7)'nin birleşimi olan

(8) {<1, 2>, <2, 3>, <3, 4>, <3, 5>, <6, 7>}

bağıntısı, çoğa-bir olmadığından bir fonksiyon değildir. Ancak

(9) [f fonksiyondur $\wedge$ g fonksiyondur $\wedge$ Önal (f) $\cap$ Önal (g) = $\varnothing$] $\rightarrow$ (f$\cup$g) fonksiyondur]

doğrudur.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki bağıntılardan fonksiyon olanlarını belirtiniz. Her fonksiyonun tanım alanını ve değer alanını bulunuz.

1. {<1, 2>, <2, 1>, <3, 3>}
2. {<{1}, {2}>, <{1, 2}, {3}>, <{1, 5}, {2, 7}>}
3. {<x, y>: x doğal sayısıdır $\wedge$ y = x + 1}
4. {<x, y>: x doğal sayıdır $\wedge$ y = x^2}
5. {<x, y>: x $\in$ {1, 2, 3} $\wedge$ y $\in$ {1, 2, 3} $\wedge$ y = x^2}

14.2.10.2 Fonksiyon Türleri

K ve L iki öbek ve f bir fonksiyon olduğunda, Önal(f) = K ve Ardal(f) $\subseteq$ L ise <K, f, L> sıralanmış üçlüsünde "*K'dan L'ye* fonksiyon" denir. Bu da

(1) f: K $\rightarrow$ L

veya

(2) $K \xrightarrow{f} L$

biçiminde dile getirilir.

Eğer Önal(f) $\subseteq$ K ve Ardal(f) $\subseteq$ L ise <K, f, L>'ye *K'dan L'ye kısmî fonksiyon* denir. Örneğin

(3) <{1, 2, 3}, {<1, 4>, <2, 5>, <3, 7>}, {3, 5, 7, 8, 9}>

{1, 2, 3}'den {3, 5, 7, 8, 9}'a bir fonksiyondur. Öte yandan

(4) <{1, 2, 3}, {<1, 3>, <2, 7>}, {2, 3, 5, 7}>

{1, 2, 3}'den {2, 3, 5, 7}'ye bir kısmî fonksiyondur.

f bire-bir fonksiyon ise f: K $\rightarrow$ L'ye de bire-bir denir. Ardal(f) = L ise f: K$\rightarrow$L'nin K'dan L *üstüne* fonksiyon olduğu söylenir. Eğer f bire-bir olup Ardal(f) = L olursa f: K$\rightarrow$ L'ye *tameşleme* denir.

Örneğin

(5) <{1, 2, 3}, {<1, 2>, <2, 3>, <3, 5>}, {2, 3, 4, 5}>

{1, 2, 3}'den {2, 3, 4, 5}'e bire-bir bir fonksiyondur.

(6) <{1, 2, 3}, {<1, 2>, <2, 3>, <3, 2>}, {2, 3}>

{1, 2, 3}'den {2, 3}'ün üstüne bir fonksiyondur.

(7) <{1, 2, 3}, {<1, 2>, <2, 3>, <3, 5>}, {2, 3, 5}>

{1, 2, 3}'den {2, 3, 5}'e bir tameşlemedir.

f bir fonksiyon ve $K_1,...,K_n$ öbekler olduğunda, Önal(f) $\subseteq K_1 X ... X K_n$ ise f'ye $K_1,...,K_n$ öbekleri üzerinde bir *n-li fonksiyon* denir.

Örnek olarak K_1 = {1, 2}, K_2 = {{1}} ve f = {<1, {1}, 5>, <2, {1}, 7>} olduğunda, f fonksiyonu K_1 ve K_2 üzerinde bir ikili fonksiyondur. Nitekim

(8) f= {<1, {1}, 5>, <2, {1}, 7)} = {<<1, {1}>, 5>, <<2, {1}>, 7>}, Önal(f)= {<1, {1}>, <2, {1}>} = {1, 2} X {{1}} = K_1 X K_2

K bir öbek ve f bir fonksiyon olduğunda Önal(f) $\subseteq K^n$ olursa f'ye K üzerinde *n-li fonksiyon* denir.

Örnek olarak K = {1, 2} ve f

(9) {<1, 1, 1, 5>, <1, 1, 2, 7>, <1, 2, 1, 7>, <1, 2, 2, 5>, <2, 1, 1, 7>, <2, 1, 2, 7>, <2, 2, 1, 5>, <2, 2, 2, 7>}

olduğunda, f fonksiyonu K üzerinde bir üçlü fonksiyondur.

f fonksiyonu K üzerinde bir n-li fonksiyon olup, Ardal(f) $\subseteq$ K olursa, f'nin K üzerinde bir *n-li işlem* olduğu söylenir.

Örnek olarak f fonksiyonu

(10) $\{\langle x, y, z\rangle$: x doğal sayıdır $\wedge$ y doğal sayıdır $\wedge$ x + y = z$\}$

ile tanımlanırsa f fonksiyonu doğal sayılar kümesi üzerinde bir ikili işlem olur.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki bağıntılardan hangileri K'dan L'ye bir kısmî fonksiyon belirler? Bu kısmî fonksiyonlardan fonksiyon olanlarını belirtiniz.

1. B = $\{\langle 1, 5\rangle, \langle 1, 6\rangle, \langle 2, 6\rangle, \langle 2, 7\rangle\}$, K = $\{1, 2\}$, L = $\{5, 6, 7\}$
2. B = $\{\langle 1, 6\rangle\}$, K = $\{1, 2\}$, L = $\{5, 6, 7\}$
3. B = $\{\langle 1, 6\rangle, \langle 2, 7\rangle\}$, K = $\{1, 2\}$, L = $\{5, 6, 7\}$

II. Aşağıdaki fonksiyonlardan hangilerinin bire-bir fonksiyon, üstüne fonksiyon veya tameşleme olduğunu bulunuz.

1. f = $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 5\rangle\}$, K = $\{1, 2, 3, 4\}$, L = $\{2, 3, 5\}$
2. f = $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 5\rangle\}$, K = $\{1, 2, 3\}$, L = $\{1, 2, 3, 4\}$
3. f = $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 5\rangle\}$, K = $\{1, 2, 3\}$, L = $\{2, 3, 5\}$
4. f = $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$, K = $\{1, 2, 3\}$, L = $\{2, 3\}$

III. Aşağıdaki bağıntılardan hangileri $\{1, \{1\}\}$ öbeğinde ikili fonksiyondur?

1. $\{\langle 1, \{1\}\rangle, \langle\{1\}, 1\rangle\}$
2. $\{\langle 1, \{1\}, 5\rangle, \langle\{1\}, 1, 7\rangle$
3. $\{\langle 1, 1, 1\rangle, \langle 1, \{1\}, 1\rangle, \langle\{1\}, 1, 1\rangle, \langle\{1\}, \{1\}, 1\rangle\}$
4. $\{\langle 1, 1, 6\rangle, \langle 1, \{1\}, 8\rangle, \langle\{1\}, 1, 6\rangle\}$
5. $\{\langle 1, 1, 6\rangle, \langle 1, \{1\}, 8\rangle, \langle\{1\}, 1, 6\rangle, \langle\{1\}, \{1\}, 6\rangle\}$

IV. Aşağıdaki bağıntılardan hangileri $\{1, 2\}$ öbeğinde ikili işlemdir?

1. $\{\langle x, y, z\rangle$: x $\in \{1, 2\} \wedge$ y $\in \{1, 2\} \wedge$ x + y = z$\}$

2. $\{<x, y, z>: x \in \{1, 2\} \wedge y \in \{1, 2\} \wedge z \in \{1, 2\} \wedge x + y = z\}$

3. $\{<x, y, z>: x \in \{1, 2\} \wedge y \in \{1, 2\} \wedge x - y = z\}$

4. $\{<x, y, z>: x \in \{1, 2\} \wedge y \in \{1, 2\} \wedge z \in \{1, 2\} \wedge x - y = z\}$

14.2.10.3 Ters Fonksiyon ve Fonksiyonların Bileşmesi

f bir fonksiyon olduğunda f' de bir fonksiyon ise f' ne f fonksiyonunun *ters fonksiyonu* denir. f nin ters fonksiyonu f' biçiminde gösterilir. f gibi bir fonksiyonun ters fonksiyon olmasının gerekli ve yeterli koşulu f nin bire-bir fonksiyon olmasıdır.

Örneğin bire-bir olan

(1) $\{<1, 2>, <2, 3>, <3, 5>\}$

fonksiyonunun ters fonksiyonu

(2) $<2, 1>, <3, 2>, <5, 3>$

dür.

(3) f bire-bir fonksiyon olup $a \in$ Önal(f) olursa, $f^{-1}f(a) = a$ olur.

(4) f bire-bir fonksiyon ve $b \in$ Ard(f)olursa, $f(f^{-1}\ b) = b$ olur.

f ve g fonksiyonlar olup Önal(g) = Ardal(f) olursa, f/g bağıntı bileşmesi bir fonksiyon olur. f/g'nin tanım alanı Önal(f), değer alanı da Ard(g)'dir. f/g fonksiyonuna f ile g'nin *fonksiyon bileşmesi* denir ve gof biçiminde gösterilir.

(5) $\forall x\ [x \in$ Önal(f) $\rightarrow$ (gof)x = g(f(x))]

Bu nedenle f/g fonksiyonunu gof biçiminde dile getiriyoruz. "o", ikili işlem işareti olup fonksiyon bileşmesi işlemini dile getirir.

Örnek olarak f= $\{<1, 2>, <2, 3>, <3, 1>\}$ ve g = $\{<1, 5>, <2, 6>, <3, 7>\}$ olduğunda, Ardal(f) = Önal(g) olur. Dolayısıyla gof fonksiyonu vardır.

(6) gof = $\{<1, 6>, <2, 7>, <3, 5>\}$

ikinci örnek olarak

(7) $f = \{<1, 1, 1>, <1, 2, 1>, <2, 1, 2>, <2, 2, 1>\}$

(8) $g = \{<1, 5>, <2, 7>\}$

fonksiyonlarını ele alalım. Görüldüğü gibi

(9) Ardal(f) = Önal(g) = {1, 2}

Buna göre

(10) $gof = \{<1, 1, 5>, <1, 2, 5>, <2, 1, 7>, <2, 2, 5>\}$

olur.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki fonksiyonların ters fonksiyonu olanları belirtiniz ve ters fonksiyonu bulunuz.

1. $\{<1, 2>, <2, 1>\}$
2. $\{<1, 2>, <2, 3>, <3, 4>\}$
3. $\{<x, y>: x \in \{1, 2, 3\} \wedge y \in \{1, 2, 3\} \wedge y = x^2\}$

II. Aşağıdaki fonksiyon çiftlerinin fonksiyon bileşmesi olanlarını belirtiniz ve fonksiyon bileşmesini bulunuz.

1. $\{<1, 2>, <2, 1>\}, \{<1, 2>\}$
2. $\{<x, y>: x$ doğal sayıdır $\wedge$ y doğal sayıdır $\wedge\ y^2 = x\}$, $\{<x, y>: x$ doğal sayıdır $\wedge\ x = y\}$
3. $\{<x, y, z>: x \in \{1, 2, 3\} \wedge y \in \{1, 2, 3\} \wedge z \in \{1, 2, 3\} \wedge x + y = z\}$, $\{<2, 5>, <3, 7>\}$

14.2.10.4 İmge Fonksiyonu

f, K'dan L'ye bir fonksiyon olduğunda, GK'dan GL'ye olan f'nin imge fonksiyonu f" şöyle tanımlanır.

$M \subseteq K$ olduğunda, $f''\ M = Ard\ (f \restriction M) = \{y: \exists x\ [x \in M \wedge f(x) = y]\}$

f"M yerine f(M) de yazılır. Örnek olarak

(1) f= {<1, 2, 3>, <2, 1, 1>}, K = {<1, 2>, <2, 1>}, L = {1, 2, 3}

olduğunda

(2) f"∅ = ∅

(3) f"{<1, 2>} = {3}

(4) f"{<1, 2>, <2, 1>} = f"K = {1, 3}

elde edilir.

A 10 Yerine Koyma Aksiyomu

f bir fonksiyon, K ⊆ Önal(f) ve K bir küme ise, f"K bir küme olur.

15. OTOMATİKLEŞMİŞ TEOREM İSPATLAMASI

15.1 KURAM VE TEOREMLER

Her bilim veya bilgi dalının belli bir dili vardır. Bu dilin mantık değişmezleri dışındaki değişmezlerine dilin *özel değişmezleri* denir. Özel değişmezler bilgi dalının ele aldığı özel konuya ilişkin değişmezlerdir. Örneğin matematik dilinin özel değişmezleri arasında "0", "1", "2" gibi sayı adları, "+" "." gibi işlem işaretleri, "<", ">" gibi yüklemler, kimya dilinin özel değişmezleri arasında "H", "C", "O" ... gibi element adları bulunur.

Belli bir mantık sistemine dayanan dillerin mantık değişmezleri ve değişkenleri ortaktır; yalnız özel değişmezler dilden dile değişir. Böylece S gibi bir mantık sistemine dayanan diller özel değişmezleri ile birbirinden ayrılır.

Belli bir mantık sistemine dayanan bir dile ait bir önerme veya çıkarım o dili belirler. Bu dil, önerme veya çıkarımda geçen özel değişmezlerin belirlediği dildir.

Örnek olarak niceleme mantığına dayanan bir dile ait olan

(1) ∀x[(Fx ∧ Gx) → Hx], Fa, Ga ∴ Ha

çıkarımının belirlediği dili bulalım. İmdi niceleme mantığına dayanan bir di-

lin özel değişmezleri mantık değişmezleri dışındaki değişkenler olduğuna göre yüklemler ile adlardan oluşur. Buna göre (1) çıkarımının belirlediği niceleme mantığına dayanan dil

(2) "F", "G", "H", "a"

özel değişmezlerinin belirlediği daldır. "F", "G", "H", "a" özel değişmezler olduğundan temsilci harfler olmayıp, belli bir anlamı olan sözcüklerin kısaltmasıdır. Örneğin *F* "düşünen", *G* "canlı", *H* "ölümlü" ve *a* "Aristo" anlamına gelebilir. Buna göre "F", "G", "H" yüklem temsilcileri değil düpedüz yüklemlerdir. Aynı biçimde "*a*" bir ad temsilcisi değil düpedüz bir addır.

İmdi matematik, fizik gibi gelişmiş bilgi dallarında doğru olan veya doğru sayılan önermeler ile bu önermelerin mantıkça içerdiği önermelerin tümüne bir kuram (teori) denir. Genellikle kurama ait bazı önermeler seçilip bunlara *aksiyom* denir. Aksiyomların dilin mantığı gereği kuramın bütün önermelerini içermesi beklenir. Kuramın bütün önermelerini içeren aksiyomlar kümesine *eksiksiz* aksiyom kümesi denir.

(3) $\{A_1,..., A_i, ..., A_n\} \models A_i$

önermesi her mantık sisteminde geçerlidir. Dolayısıyla her aksiyom kümesi kendi öğelerini (yani tek tek aksiyomları) içerir. Aksiyom kümesinin eksiksiz olmasından başka *tutarlı* ve *bağımsız* olması beklenir.

(4) $\{A_1, ..., A_i, ..., A_n\}$

gibi bir önermeler kümesinin *bağımsız* olması, bu kümenin hiçbir öğesinin geri kalan öğeler tarafından içerilmemesi demektir. Yani (4)'ün bağımsız olması 1 ile n arasındaki her *i* sayısı için

(5) $\{A_1,..., A_{i-1}, A_{i+1}, ..., A_n\}$

kümesinin A_i önermesini içermemesi demektir. n = 2 özel durumunda

(6) {A, B}

kümesinin bağımsız olması A'nın B'yi ve B'nin A'yı içermemesi demektir.

Aksiyom kümesinin mantıkça içerdiği her önermeye bir *teorem* denir.

Her aksiyom kümesi kendi öğelerini içerdiğinden dolayı aksiyomlar teorem sayılmalıdır. Ancak teoremler sonsuz sayıda aksiyomlar ise sınırlı sayıdadır. Her aksiyom teorem olmakla birlikte, her teorem aksiyom değildir.

Belli bir mantık sistemine dayanan bir dile ait aksiyomlar kümesinden türetilebilen teoremlerin istenildiğinde bir bilgisayar programıyla dile getirilebilen bir mantık yöntemiyle ispatlanmasına *otomatikleşmiş teorem ispatlaması* denir.

Burada önermeler mantığına, niceleme mantığına ve özdeşlik mantığına dayanan dillere ait aksiyom kümelerinden elde edilen teoremlere ilişkin otomatikleşmiş teorem ispatlama yöntemlerini inceleyeceğiz.

Aksiyomlar kümesine *aksiyom sistemi* de denir. Bir aksiyom sistemi eksiksiz ise, aksiyom sisteminden elde edilebilen bütün teoremlerin kümesine *aksiyomatik kuram* denir. Otomatikleşmiş teorem ispatlaması aksiyomatik kuramlara uygulanır.

K ile bir aksiyomatik kuramı, D ile dili ve A ile aksiyom sistemini (yani aksiyomlar kümesini) göstereceğiz. Örnek olarak K önermeler mantığına ait bir aksiyomatik kuram olsun. Böyle bir kuramın dilinin özel değişmezleri (sıfırlı yüklemler olan) p, q, r,... gibi önerme harfleridir. Buna göre D dili ve A aksiyom sistemi şöyle olsun:

(7) D: p, q, r

(8) A: $(p \wedge q) \rightarrow r$, p, q

Bu durumda K kuramı <D, A> sıralanmış ikilisiyle belirlenir. Her aksiyom bir teorem olduğuna göre "$(p \wedge q) \rightarrow r$", "p", "q" birer teoremdir.

Öte yandan

(9) $A \therefore r$

çıkarımı önermeler mantığında geçerlidir. Demek ki A kümesi r önermesini içeriyor. O halde r önermesi K kuramının bir teoremidir. Genel olarak herhangi bir aksiyomatik kuramın her teoremi, öncülleri aksiyom sisteminden oluşan geçerli bir çıkarımın sonucudur. Böylece bir önermenin teorem olduğunu gösterme işi, bir çıkarımın geçerliliğini denetleme işlemine indirgenir.

İmdi çözümleyici çizelge gibi çeşitli denetleme yöntemleri birer *algoritma* niteliğindedir. *Algoritma* bir bilgisayar programı ile dile getirilebilen bir yöntem demektir. Bu türlü yöntemlere *otomatikleşmiş yöntem* diyoruz. Otomatikleşmiş teorem ispatlaması, çıkarımların algoritma ile yani otomatikleşmiş yöntemle denetlenmesine dayanır.

İkinci örnek olarak niceleme mantığına dayanan K gibi bir kuramın dilini ve aksiyom sistemini belirleyelim.

(10) D: F, G, H, a

(F, G, H birli yüklemlerdir.)

(11) A: $\forall x[(Fx \wedge Gx) \rightarrow Hx]$, Fa, Ga

"Ha" önermesinin D ile A'nın belirlediği aksiyomatik kuramın teoremi olduğunu ispatlayalım. Bu amaçla

(12) $\forall x[(Fx \wedge Gx) \rightarrow Hx]$, Fa, Ga $\therefore$ Ha

çıkarımının geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetliyoruz.

(13) 1. $\forall x[(Fx \wedge Gx)] \rightarrow Hx]$ (B.Ö.)

Fa (B.Ö.)

Ga (B.Ö.)

$\sim$Ha (B.Ö.)

2. $(Fa \wedge Ga) \rightarrow Ha$ (1)

(2)

3. $\sim(Fa \wedge Ga)$ Ha

X

(3)

$\sim$Fa $\sim$Ga

X X

(13) çizelgesi kapalı olduğundan (12) geçerlidir. Dolayısıyla "Ha" bir teoremdir.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki önermelerin verilen aksiyomatik kuramın teoremleri oldukları-nı ispatlayınız.

D: p, q, r

A: $(p \rightarrow q) \rightarrow r$, $p \wedge q$

Teoremler

1. $(p \wedge q) \rightarrow r$
2. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
3. $q \rightarrow r$
4. p
5. q
6. r

II. Aşağıdaki önermelerin verilen aksiyomatik kuramın teoremleri oldukları-nı ispatlayınız.

Aksiyomatik kuram:

D: F, G, H (F, G, H birli yüklemlerdir) a, b, c

A: $\forall x\,[Fx \rightarrow (Gx \vee Hx)]$, Fa, ~Ha, Fb, ~Gb, ~Hc, ~Gc

Teoremler

1. $Ga \vee Ha$
2. Ga
3. ~Fc
4. Hb
5. $\sim[(Ga \wedge Hb) \rightarrow Fc]$

III. Aşağıdaki önermelerin verilen aksiyomatik kuramın teoremleri oldukları-nı ispatlayınız.

D: F, G, H, J (F, G, H, J birli yüklemlerdir), a, b, c

A: $\forall x\,(Fx \rightarrow Gx)$, $\forall x\,[Gx \rightarrow [Hx \wedge Jx)]$, Fa, ~Hb, ~Gc

1. Ha

2. ~Fc
3. ~Gb
4. Ja $\vee$ Hb
5. ~(Ja $\rightarrow$ Fc)

15.2 ÖNERMELER MANTIĞINDA OTOMATİKLEŞMİŞ İSPATLAMA

15.2.1 Te-tikli Yasal Biçime ve Te-tümlü Yasal Biçime Dönüştürme

Önermeler mantığına dayanan kuramların teoremlerinin otomatikleşmiş ispatlamasının bir biçimi çözümleyici çizelge ile denetleme yöntemidir. Ancak en yaygın olarak kullanılan otomatikleşmiş ispatlama *çözülüm yöntemi* denilen bir yöntemdir. Bu yöntem ise genellikle ispatlanan önermenin değillemesinin çevrilmesini gerektirir. $\wedge$y'ye dönüştürme işlemi de bir algoritmaya dayanan otomatikleşmiş bir işlemdir. Şimdi bu işlemi inceleyelim.

Çözülüm yönteminde $\wedge$y'lerin ana bileşenlerinin çok önemli işlevi vardır. Bu nedenle *temel* önermelerin *tikel* evetlemesi olan bu türlü önermelere özel bir ad verip *te-tik* diyoruz. Öte yandan *temel* önermelerin *tümel*-evetlemesi niteleğinde olan $\vee$y'lerin ana bileşenlerine *te-tüm* diyoruz. Buna göre $\wedge$y'ye *tek-tik*'li *yasal biçim*, $\vee$y'ye ise *te-tüm'lü yasal biçim* diyeceğiz.

Şimdi herhangi bir önermeyi *tek-tik*'li yasal biçime ve *te-tüm'lü* yasal biçime çeviren algoritmayı göstereceğiz.

Bu amaçla

(1) $A_1 \vee \ldots \vee A_n$, $n \geq 0$

biçimindeki n bileşenli tikel-evetlemeyi

(2) $[A_1,\ldots,A_n]$

biçiminde gösteriyoruz. n bileşenli tikel-evetlemenin $n \geq 0$ için tanımlandığını kabul ediyoruz. $n = 1$ olduğunda (2) önermesi A_1 önermesine indirgenir. $n = 0$ durumunda ise (2) önermesinin hep yanlış olan "$\perp$" önermesine indirgendiğini gösterelim. (2)'nin doğru olmasının gerekli ve yeterli koşulu şöyledir.

(3) $[A_1,...,A_n]$ doğrudur, ancak ve ancak $\exists A_i$ ($A_i \in \{A_1,...,A_n\} \wedge A_i$ doğrudur)

O halde n = 0 durumunda (3),

(4) [ ] doğrudur, ancak ve ancak $\exists A_i$ ($A_i \in \{\ \} \wedge A_i$ doğrudur)

elde edilir. Oysa "$A_i \in \{\ \}$" önermesi yanlış olduğundan $\exists A_i$ ($A_i \in \{\ \} \wedge A_i$ doğrudur)" önermesi de yanlıştır. O halde "[ ] doğrudur" önermesi de yanlıştır. Dolayısıyla

(5) [ ] $\equiv \perp$

doğrudur. O halde "[ ]" nın "$\perp$" önermesine indirgendiğini görüyoruz.

Öte yandan

(6) $A_1 \wedge ... \wedge A_n$, $n \geq 0$

biçimindeki n bileşenli tümel-evetlemeyi

(7) $\langle A_1,...,A_n \rangle$

biçiminde gösteriyoruz. (7) önermesi n = 1 ise A_1 önermesine, n = 0 ise T önermesine indirgenir. Nitekim

(8) $\langle A_1,...,A_n \rangle$ doğrudur, ancak ve ancak $\forall A_i[A_i \in \{A_1,...,A_n\} \rightarrow A_i$ doğrudur]

Oysa n = o durumunda (8),

(9) $\langle A_1,...,A_n \rangle$ doğrudur, ancak ve ancak $\forall A_i$ [$A_i \in \{\ \} \rightarrow A_i$ doğrudur]

biçimini alır. Oysa "$A_i \in \{\ \}$" yanlış olduğundan "$\forall A_i$ [$A_i \in \{\ \} \rightarrow A_i$ doğrudur]" önermesi doğrudur. Dolayısıyla

(10) $\langle\ \rangle \equiv T$

doğrudur.

Herhangi bir önermeyi te-tik'li veya te-tüm'lü yasal biçime dönüştürme algoritmasında kullanılan, önermeler mantığı dilinde p, q, r,... gibi önerme harfleri ve "T", "$\perp$", "~", "$\wedge$", "$\vee$", "$\rightarrow$" önerme eklemleri bulunur. "$\leftrightarrow$" karşılıklı-koşul eklemi

(11) $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

biçiminde tanımlanır. Dolayısıyla içinde "↔" nın geçtiği bir önermeden "↔" eklemi (11) tanımına dayanarak elenmelidir. T ve ⊥'yi de temel önerme sayıyoruz.

Te-tik'li yasal biçimine dönüştürme algoritması aşağıdaki çizelgelerle belirlenen α ve β türünden önermelere işlem uygulamaya dayanır.

α	α_1	α_2
$A \wedge B$	A	B
$\sim(A \vee B)$	~A	~B
$\sim(A \rightarrow B)$	A	~B

β	β_1	β_2
$A \vee B$	A	B
$\sim(A \wedge B)$	~A	~B
$A \rightarrow B$	~A	B

İmdi A (içinde "↔" eklemi geçmeyen) bir önerme olsun. <[A]> önermesiyle başlayan ve alt alta yazılan satırlardan oluşan bir çizelge kurulur. Her satırın önerme sıra numarası yazılır. Böylece <[A]> satırının önüne "1" işareti konulur. n. satırın

n. <..., [..., B, ...], ...>

biçiminde olduğunu kabul edelim. Eğer n. satırda temel önerme olmayan B gibi bir önerme geçmiyorsa, n. satır te-tik'li yasal biçim olup işlem tamamlanmış olur. O halde B'nin temel önerme olmadığını kabul edelim. O zaman B önermesi ya ~T, ~⊥, ~~C, ya da α veya β biçimindedir. ~T, ⊥'ye; ~⊥, T'ye; ve ~~C'de C'ye indirgenir. Eğer B önermesi β türünden ise, B yerine β_1, β_2 dizisini koyarız. Eğer B önermesi α türünden ise, [..., B, ...] yerine

[..., β_1 ...], [..., β_2, ...]

dizisi konulur.

Örneğin

(12) $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge r)$

önermesini algoritma ile te-tik'li yasal biçime dönüştürelim. Bu amaçla "↔" eklemini (11) tanımı gereği eliyoruz. Böylece (12)

(13) $[(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge r)] \wedge [(q \wedge r) \rightarrow (p \wedge q)]$

ya indirgeniyor. Buna göre algoritmayı kullanarak aşağıdaki satırlar sütunun elde ederiz. 1. satırın önüne "(B.Ö.)" işaretini koyarız.

(14) 1. $<[((p \wedge q) \rightarrow (q \wedge r)) \wedge ((q \wedge r) \rightarrow (p \wedge q))]>$ (B.Ö.)

2. $<[(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge r)], [(q \wedge r) \rightarrow (p \wedge q)]$ (1, α)

3. $<[\sim(p \wedge q), (q \wedge r)], [(q \wedge r) \rightarrow (p \wedge q)]>$ (2, β)

4. $<[\sim p, \sim q, (q \wedge r)], [(q \wedge r) \rightarrow (p \wedge q)]>$ (3, β)

5. $<[\sim p, \sim q, q], [\sim p, \sim q, r], [(q \wedge r) \rightarrow (p \wedge q)]>$ (4, α)

6. $<[\sim p, \sim q, q], [\sim p, \sim q, r], [\sim(q \wedge r), (p \wedge q)]>$ (5, β)

7. $<[\sim p, \sim q, q], [\sim p, \sim q, r], [\sim q, \sim r, (p \wedge q)]>$ (6, β)

8. $<[\sim p, \sim q, q], [\sim p, \sim q, r], [\sim q, \sim r, p]\ [\sim q, \sim r, q]>$ (7, α)

1. satırın ardına B.Ö. yazdığımız gibi, sonraki satırların ardına kaynak numarası olarak türetildiği satırın sıra numarası ve kullanılan kural (α veya β) yazılmıştır. 8. satırda elde edilen sonuç önermesi te-tik olan çok bileşenli bir tümel-evetlemedir. Ancak 8. satırda birinci ile dördüncü ana bileşende "~q" ile "q" temel önermeleri bir arada geçiyor. Oysa ←YB'lerde bu türlü ana bileşenler yoktur. Nitekim bir ∧∨B'nin aynı ana bileşeninde aynı temel önerme tekrarlı olarak geçiyorsa birden çok geçişleri bir tek geçişe indirgenir. Bir temel önerme ile değillemesi aynı ana bileşende geçiyorsa, bu ana bileşen T'ye indirgenir. T ise bir ∧YB ana bileşeni olarak elenir. Te-tik'li yasal biçimlerde ise aynı temel önermenin tekrarlandığı veya temel önerme ile değillemesinin geçtiği ana bileşenlerin varlığını kabul ediyoruz. Aynı durumu te-tümlü yasal biçimler için de kabul ediyoruz.

A gibi herhangi bir önermeyi te-tümlü yasal biçime dönüştüren algoritma, [<A>] biçimindeki satırla başlayan satırlar sütunundan oluşan bir çizelgeye dayanır. Bu çizelgenin n. satırının

n. [..., <..., B, ...>, ...]

biçiminde olduğunu kabul edelim. Eğer n. satırda temel önerme olmayan B gibi bir önerme geçmiyorsa, n. satır te-tümlü yasal biçim olup işlem tamam-

lanmış olur. O halde B'nin temel önerme olmadığını kabul edelim. O zaman B önermesi ya ~T, ~⊥, ~~C, ya da α veya β biçimindedir. ~T, ⊥'ye; ~⊥, T'ye; ~~C'de C'ye indirgenir. Eğer B önermesi α türünden ise, B yerine α_1, α_2 dizisini koyarız. Eğer B önermesi β türünden ise, <..., B, ...> yerine

<..., β_1, ...>, <..., β_2, ...>

dizisi konulur.

Örnek olarak

(15) $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

önermesini te-tümlü yasal biçime dönüştürelim.

(16) 1. [<(p → q) → r>] (B.Ö.)

2. [<~(p → q), <r>] (1, β)

3. [<p, ~q>, <r>] (2, α)

Son olarak

(17) $p \vee \sim p$

önermesinin te-tümlü ve te-tik'li yasal biçimini bulalım.

Te-tikli yasal biçime dönüştürme

1. <[p ∨ ~p]> (B.Ö.)

2. <[p, ~p]> (1, β)

Te-tümlü yasal biçime dönüştürme

1. [<p ∨ ~p>] (B.Ö.)

2. [<p>, <~p>] (1, β)

T ile ⊥ önermelerini, p, q, r, ..., ~p, ~q, ~r, ... önermelerine ek olarak temel önerme sayıyoruz. Ancak ~T ile ~⊥ temel önerme değildir. Nitekim temel önerme çözümlenemez veya indirgenemez önerme demektir. Oysa ~T önermesi ⊥'ye, ~⊥ önermesi T'ye indirgenir. Buna göre

(18) $p \vee T \vee \bot \vee q$

bir te-tik,

(19) $p \wedge T \wedge \perp \wedge q$

de bir te-tümdür. Buna karşılık

(20) $p \vee T \vee \sim\perp \vee q$

bir te-tik değildir.

(21) $p \wedge T \wedge \sim\perp \wedge q$

da bir te-tüm değildir.

Dikkat edilirse $\perp$ ile eşdeğer olan [ ] önermesi bir te-tik (sıfır bileşenli te-tik)dir. Buna *boş te-tik* denir. < > önermesine de *boş te-tüm* denir. Boş te-tüm T ile eşdeğerdir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermeleri te-tik'li yasal biçime ve te-tümlü yasal biçime dönüştürünüz.

1. $p \wedge \sim p$
2. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
3. $[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \rightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r]$
4. $[(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow r]$
5. $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$

15.2.2 Önermeler Mantığında Çözülüm Yöntemi

15.2.2.1 Dolaylı Çözülüm İspatı

Önermeler mantığında çözülüm yöntemi önermeler mantığı diline ait herhangi bir geçerli önermenin (yani *totoloji*'nin) değillemesinden önünde sonunda boş te-tikin elde edilmesini sağlayan otomatikleşmiş bir yöntemdir. Burada yöntemi önceden te-tik'li yasal biçime dönüştürülmüş önermelere uyguluyoruz. Bu yöntemi şöyle dile getirebiliriz.

(i) A ve B iki te-tik olduğunda A'da p ve B'de ~p gibi bir önerme harfi geçsin. A'dan p'nin bütün geçişlerini ve B'den ~p'nin bütün geçiş-

lerini kaldıralım. A'da ve B'de geri kalan bütün temel önermelerin oluşturduğu te-tik C olsun. C te-tik'ine A ile B te-tiklerinin p önerme harfi üzerine çözülüm'ü denir.

(ii) A içinde $\perp$ geçen bir te-tik olduğunda, A'dan $\perp$'nin bütün geçişlerinin kaldırılmasıyla elde edilen B te-tikine A te-tikinin *trival çözülüm*'ü denir.

Örneğin

(1) [p, q, q, r]

ile

(2) [~q, ~r, s]

te-tik'lerini göz önüne alalım. (1)'de q'nun iki geçişi, (2)'de ise ~q'nun bir geçişi vardır. Bunları kaldırarak (1)'den [p, r], (2)'den de [~r, s] elde edilir. Bunları da bir araya getirirsek

(3) [p, r, ~r, s]

te-tik'ini elde ederiz. (3), (1) ile (2) te-tik'lerinin q önerme harfi üzerine çözülümüdür. Öte yandan

(4) [$\perp$, p, q, $\perp$, r, T]

te-tik'inde $\perp$'nin iki geçişi vardır. Bunları kaldırarak

(5) [p, q, r, T]

te-tik'i elde edilir. (5), (4) te-tik'inin trival çözülümüdür.

Çözülüm veya trival çözülümün elde edilmesi için izin veren kurala çözülüm kuralı denir. Buna göre çözülüm kuralını şöyle dile getirebiliriz.

(i) C te-tik'i A ile B te-tik'lerinin p önerme harfi üzerine bir çözülüm ise C, A ile B'den türetilebilir.

(ii) C te-tik'i A te-tik'inin trival çözülümü ise, C, A'dan türetilebilir.

Çözülüm kuralının geçerliliği aşağıdaki çıkarımın geçerliliği ile denetlenir.

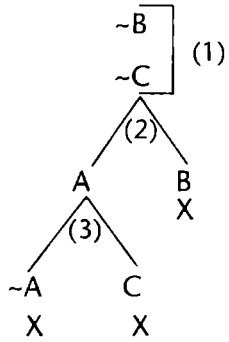
(6) $A \vee B, \sim A \vee C \therefore B \vee C$

(6) çıkarımının geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile gösteriyoruz.

(7) 2. $A \vee B$ (B.Ö.)

3. $\sim A \vee C$ (B.Ö.)

1. $\sim(B \vee C)$ (B.Ö.)



Çözülüm kuralına dayanarak önermeler mantığı diline ait herhangi bir geçerli önermenin (totolojinin) geçerli olduğu aşağıda belirtildiği biçimde denetlenir. Böyle bir denetlemeye *çözülüm ispatlaması* denir.

A, önermeler mantığı diline ait bir önerme ve $<B_1,...,B_n>$, ~A önermesinin te-tikli yasal biçimi olduğunda, A'nın geçerli olmasının gerekli ve yeterli koşulu, $B_1,...,B_n$ te-tiklerine çözülüm kuralının sonlu sayıda uygulanması sonucunda boş te-tikin, yani [ ]'in türetilebilmesidir. Bu işlemi dile getiren çizelgeye *çözülüm çizelgesi* denir. Çözülüm çizelgesinde [ ] bulunursa çizelgeye *kapalı* denir. Kapalı çözülüm çizelgesi, verilen A önermesinin bir çözülüm ispatıdır.

O halde bir önermenin geçerli olmasının gerekli ve yeterli koşulu, bu önermenin değillemesinin te-tikli yasal biçiminin kapalı çözülüm çizelgesi olması yani dolaylı çözülüm ispatı olmasıdır. Örnek olarak geçerli olan

(8) $(p \wedge q) \rightarrow p$

önermesinin çözülüm ispatını yapalım. Önce (8)'in değillemesini te-tik'li yasal biçime dönüştürelim.

(9) 1. $<[\sim((p \wedge q) \rightarrow p)]>$ (B.Ö.)

2. $<[p \wedge q], [\sim p]>$ (1, α)

3. $<[p], [q], [\sim p]>$ (2, α)

Buna göre (8)'in te-tik'li yasal biçimi

(10) <[p], [q], [~p]>

O halde (8) önermesinin çözülüm ispatı ise şöyledir.

(11) 1. [p] (B.Ö.)

2. [q] (B.Ö.)

3. [~p] (B.Ö.)

4. [ ] (1, 3, Ç)

(11) çizelgesi, (8) önermesinin değillemesinin çözülüm çizelgesidir. İspatlanan önermenin değillemesinin te-tik'li yasal biçiminin ana bileşenleri olan te-tik'ler (11)'in *başlangıç önermeleri*'dir. Bunların ardına "(B.Ö.)" işaretini koyuyoruz. Her satırın önüne sıra numarasını yazıyoruz. Başlangıç önermesi olmayan satırların ardına türetildikleri satırların sıra numaralarını yazıyoruz. Ayrıca çözülüm kuralına dayanarak türetildiklerini belirtmek amacıyla "Ç" işaretini koyuyoruz.

İkinci örnek olarak geçerli olan

(12) $p \rightarrow (p \wedge T)$

önermesinin çözülüm ispatını yapalım. Bu amaçla (12)'nin değillemesini önce te-tik'li yasal biçime dönüştürüyoruz.

(13) 1. $<[\sim((p \rightarrow (p \wedge T))]>$ (B.Ö.)

2. $<[p], [\sim(p \wedge T)]>$ (1, α)

3. $<[p], [\sim p, \sim T]>$ (2, β)

4. $<[p], [\sim p, \bot]>$ (3, ~T)

Buna göre (12)'nin değillemesinin yasal biçimi

(14) $<[p], [\sim p, \bot]>$

olur. Dikkat edilirse (13) çizelgesinin 4. satırının dayandığı kuralı belirtmek için "~T" işaretini koyduk. İmdi (14) elde edildikten sonra aşağıdaki çözülüm ispatı çizelgesi kurulur.

(15) 1. [p] (B.Ö.)

2. [~p, ⊥] (B.Ö.)

3. [~p] (2, Ç)

4. [ ] (1, 3, Ç)

3. adımda 2. satırdaki te-tikin trivial çözülümünü elde ettik. 4. adımda ise 2. ve 3. satırdaki te-tiklerin çözümü olan boş te-tiki elde ettik. Boş te-tik elde edildiğinden dolayı (12)'nin ispatı tamamlanmış oldu.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki geçerli önermelerin (yani totolojilerin) çözülüm ispatını yapınız.

1. $p \vee \sim p$
2. $\sim(p \wedge \sim p)$
3. $(p \wedge T) \vee (\sim p \wedge T)$
4. $q \rightarrow (p \rightarrow q)$
5. $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
6. $[p \rightarrow (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)]$
7. $[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)]$
8. $[(p \vee q) \rightarrow r] \leftrightarrow [(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)]$
9. $[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \rightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r]$
10. $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$

15.2.2.2 Çözümlemeli Çözülüm İspatı

Önermeler mantığında geçerli olan bir önermenin değillemesinin önceden te-tik'li yasal biçime dönüştürülmesini gerektirmeyen bir çözülüm ispatı yöntemi geliştirilmiştir. Buna *çözümlemeli çözülüm ispatı* diyoruz. Bu yönteme göre A gibi geçerli bir önermeyi ispatlamak için başlangıç önermesi [~A] olan yeni türden bir çözülüm çizelgesi kurulur. Bu çizelgeye *çözümle-*

meli çözülüm çizelgesi diyoruz. Bu çizelge bir yandan çözümleme kuralları öbür yandan çözülüm kurallarına dayanarak kurulur. *Çözümleme kuralları* şöyledir.

α çözümleme kuralı:

n. [..., α, ...]

$$\left.\begin{array}{l}[..., \alpha_1, ...] \\ [..., \alpha_2, ...]\end{array}\right] (n, \alpha)$$

β çözümleme kuralı:

n. [..., β, ...]

[..., β_1, β_2, ...] (n, β)

α çözümleme kuralı gereği, çizelgenin n. satırı [..., α, ...] biçiminde bir tikel evetleme ise, [..., α_1, ...] ile [..., α_2, ...] biçiminde iki yeni satır çizelgeye eklenir. Kaynak numarası olarak da "(n, α)" işaretini koyuyoruz. β çözümleme kuralı gereği ise n. satır [..., β, ...] biçiminde ise [..., β_1, β_2, ...] biçiminde yeni bir satır elde edilir. Örneğin α çözümleme kuralı gereği

(1) 1. [p, ~(p → q), ~q]

önermesinden

$$\left.\begin{array}{ll}(2) & 2.\ [p, p, \sim q] \\ & 3.\ [p, \sim q, \sim q]\end{array}\right] (1, \alpha)$$

elde edilir.

(3) 1. [p, q∨r, ~q]

dan ise

(4) 2. [p, q, r, ~q] (1, β)

elde edilir.

Çözülüm Kuralı

(i) A_1 ile A_2 çok bileşenli tikel evetlemeler olduğunda A_1'in bir ana bileşeni B, A_2'nin bir ana bileşenide ~B olsun. A_1'den B ana bileşeninin bütün geçişlerini, A_2'den de ~B ana bileşeninin bütün geçişle-

rini kaldıralım. A_1 ve A_2'de geri kalan ana bileşenlerinin bir araya gelmesinden oluşan çok bileşenli tikel evetleme C olsun. C'ye A_1 ile A_2'nin *B üzerine çözülüm*'ü denir.

(ii) A, ana bileşenlerinden biri $\perp$ olan çok-bileşenli bir tikel-evetlemesi olsun. A'dan $\perp$ ana bileşeninin bütün geçişlerinin kaldırılmasıyla elde edilen önerme C olsun. C'ye A'nın *trivial çözülüm*'ü denir.

(i') A_1 ile A_2 çok bileşenli-tikel-evetlemelerinden A_1 ile A_2'nin B üzerine çözülümü türetilebilir.

(ii') A çok bileşenli tikel evetlemesinden A'nın trivial çözülümü türetilebilir.

Örnek olarak

(5) $[p, q \rightarrow r, \sim q]$

ile

(6) $[\sim(q \rightarrow r), \sim(q \rightarrow r), p \wedge \sim r]$

önermelerinden çözülüm kuralları gereği

(7) $[p, \sim q, p \wedge \sim r]$

önermesi türetilebilir. Nitekim (7) önermesi (5) ile (6)'nın $q \rightarrow r$ önermesi üzerine çözülümüdür. Öte yandan

(8) $[p, \sim q, \perp, p \rightarrow r, \perp, T]$

önermesinden çözülüm kuralı gereği

(9) $[p, \sim q, p \rightarrow r, T]$

önermesi türetilebilir. Nitekim (9), (8)'in trivial çözülümüdür.

Örnek olarak geçerli olan

(10) $(p \wedge q) \rightarrow p$

önermesinin çözümlemeli çözülüm ispatını yapalım.

(11) 1. [~((p ∧ q) → p)] (B.Ö.)

2. [p ∧ q]
3. [~p] (1, α)

4. [p]
5. [q] (2, α)

6. [ ] (3, 4, Ç)

(11) kapalı bir çözümlemeli çözülüm çizelgesidir. (11)'in başlangıç önermesi de (10) önermesinin değillemesidir. O halde (10) önermesi geçerlidir.

Karmaşık bir örnek olarak geçerli olan

(12) ((p ∧ q) ∨ (r → s)) → ((p ∨ (r → s) ∧ (q ∨ (r → s)))

önermesinin çözümlemeli çözülüm ispatını yapalım.

(13) 1. [~(((p∧q) ∨ (r→s))→((p∨(r→s) ∧ (q ∨ (r →s)))))] (B.Ö.)

2. [(p ∧ q) ∨ (r → s)]
3. [~(p ∨ (r → s) ∧ (q ∨ (r → s)))] (1, α)

4. [p ∧ q, r → s] (2, β)

5. [p, r → s]
6. [q, r → s] (4, α)

7. [~(p ∨ (r → s)), ~(q ∨ (r → s))] (3, β)

8. [~p, ~(q ∨ (r → s))]
9. [~(r → s), ~(q ∨ (r → s))] (7, α)

10. [~p, ~q]
11. [~p, ~(r → s)] (8, α)

12. [~(r → s), ~q]
13. [~(r → s), ~(r → s)] (9, α)

14. [p, ~q] (5, 12, Ç)

15. [~q, ~q] (10, 14, Ç)

16. [r → s] (6, 15, Ç)

17. [ ] (13, 16, Ç)

(13) çizelgesi kapalı olduğundan (12) önermesi geçerlidir.

Genel olarak K, aksiyom sistemi A olan bir kuram olduğunda, B gibi bir teoremi ispatlamak için

(14) $A \therefore B$

veya $A_1, \ldots, A_n \in A$ olmak üzere

(15) $A_1, \ldots, A_n \therefore B$

biçiminde bir çıkarımın geçerliliğini denetlemek gerekir. Bu amaçla (15)'in geçersiz kılıcı kümesi olan

(16) $A_1, \ldots, A_n, \sim B$

kümesinin tutarlılığını denetlemeliyiz. Bu amaçla başlangıç önermeleri $A_1, \ldots, A_n, \sim B$ olan bir çözümleyici çözülüm çizelgesi konulur. (16)'nın tutarsız olmasının gerekli ve yeterli koşulu, bu çizelgenin kapalı olmasıdır.

Örneğin

(17) $p \rightarrow q, q \rightarrow r \therefore p \rightarrow r$

çıkarımının geçerli olduğunu sözü geçen yöntemle ispatlayalım. Bu amaçla aşağıdaki çözümleyici çözülüm çizelgesini kuruyoruz.

(18)

1.	$[p \rightarrow q]$	(B.Ö.)
2.	$[q \rightarrow r]$	(B.Ö.)
3.	$[\sim(p \rightarrow r)]$	(B.Ö.)
4.	$[\sim p, q]$	(1, β)
5.	$[\sim q, r]$	(2, β)
6.	$[p]$	(3, α)
7.	$[\sim r]$	
8.	$[q]$	(4, 6, Ç)
9.	$[\sim q]$	(5, 7, Ç)
10.	$[\ ]$	(8, 9, Ç)

Dikkat edilirse başlangıç önermelerini köşeli parantez içine aldık. Böylece başlangıç önermelerinin te-tik olmasını sağladık.

ALIŞTIRMALAR

§ 15.2.2.1'in sonundaki alıştırmaların konusu olan geçerli önermelerin çözümlemeli çözülüm ispatını yapınız.

15.3 NİCELE MANTIĞINDA OTOMATİKLEŞMİŞ İSPATLAMA

15.3.1 Preneks Yasal Biçime Dönüştürme

Niceleme mantığı diline ait geçerli bir önermenin geçerliliğini otomatikleşmiş ispatlama yöntemiyle denetlemek için verilen önermenin değillemesini "preneks yasal biçim" denilen bir biçime dönüştürmek gerekir.

N_i, $\forall$ veya $\exists$; A'da herhangi bir tamdeyim olduğunda;

(1) $N_1\ x_1 \ldots N_n\ x_n\ (A)$

tamdeyimine *preneks yasal biçim* denir.

$N_1x_1 \ldots N_n\ x_n$'e *önek*, A tamdeyimine de *etki alanı* denir.

Örneğin

(2) $\forall x \exists y \exists z\ (Fxy \rightarrow \sim Gyzw)$

açık tamdeyim olan bir preneks yasal biçim,

(3) $\forall x \exists y \exists z \forall w\ (Fxy \rightarrow \sim Gyzw)$

ise kapalı tamdeyim olan bir preneks yasal biçimdir. Dikkat edilirse (1) veya (2)'de parantezler kaldırılırsa, önerme preneks normal biçim olmaz.

Niceleme mantığı diline ait olup içinde en az bir niceleyici geçen her tamdeyim bir preneks yasal biçim ile eşdeğerdir.

Verilen bir tamdeyimi preneks yasal biçime dönüştürmek için her niceleyicinin farklı bir değişkene bağlı olmasını sağlayacak biçimde bağlı değişken değiştirmesi yapılır. Böyle bir tamdeyime de *ayrık bağlı değişkenli tamdeyim* denir.

Örneğin

(4) $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow (\forall xFx \rightarrow \forall xGx)$

önermesini bağlı değişken değiştirmesi yoluyla

(5) $\forall x_1(Fx_1 \rightarrow Gx_1) \rightarrow (\forall x_2Fx_2 \rightarrow \forall x_3Gx_3)$

ayrık bağlı değişkenli tamdeyime dönüştürebiliriz. Bağlı değişken değiştirmesi yalnız bağlı değişkenlere uygulanabilir. Bağsız değişkenler ise aynen kalır.

Ayrık bağlı değişkenli bir tamdeyimi preneks yasal biçime dönüştürmek için önce "$\leftrightarrow$" eklemini tanımı gereği eleriz. Sonra "$\rightarrow$" eklemini

(6) $A \rightarrow B \equiv \sim A \vee B$

ve

(7) $\sim(A \rightarrow B) \equiv A \wedge \sim B$

eşdeğerlikleri gereği eleriz. Elde edilen tamdeyimde geçen "~" değilleme işaretini, niceleme değilleme kuralları ve De Morgan yasaları gereği, yalnız atomsal tamdeyimlere uygulanacak biçimde içeriye doğru iteriz. Bu türlü tamdeyimlere, indirgenmiş tamdeyim denir.

Örneğin

(8) $\sim\forall xFx \rightarrow \sim(\exists x\forall y\sim Gxy \vee \sim\forall zFz)$

tamdeyimini indirgenmiş biçime dönüştürelim.

(9) 1. $\forall xFx \vee \sim(\exists x\forall y\ \sim Gxy \vee \sim\forall zFz)$

2. $\forall xFx \vee (\sim\exists x\forall y\sim Gxy \wedge \forall zFz)$

3. $\forall xFx \vee (\forall x\exists yGxy \wedge \forall zFz)$

Görüldüğü gibi (8)'in indirgenmiş biçimi

(10) $\forall xFx \vee (\forall x\exists yGxy \wedge \forall zFz)$

önermesidir. Şimdi (10) önermesini preneks yasal biçime dönüştürelim. Bu amaçla (10)'u ayrık bağlı değişkenli bir önermeye çevirelim.

Böylece

(11) $\forall x_1 F x_1 \vee (\forall x_2 \exists y_1\ G x_2 y_1 \wedge \forall z_1 F z_1)$

önermesini elde ederiz. (11)'de her bağlı değişkenin altına 1, 2, ... gibi bir sayı koyduk.

İmdi (11) gibi ayrık bağlı değişkenli bir tamdeyimi preneks yasal biçime dönüştürmek için

(12) $p \wedge \forall x A(x) \equiv \forall x(p \wedge A(x))$

(13) $p \wedge \exists x A(x) \equiv \exists x(p \wedge A(x))$

(14) $p \vee \forall x A(x) \equiv \forall x(p \vee A(x))$

(15) $p \vee \exists x A(x) \equiv \exists x(p \vee A(x))$

eşdeğerlikleri kullanılır. Bu eşdeğerliklere dayanarak indirgenmiş biçimde ve bağlı değişkenleri ayrık olan bir tamdeyimde geçen bütün niceleyiciler aynı sırada tamdeyimin önüne alınabilir. Böylece tamdeyim preneks yasal biçime çevrilmiş olur. Örneğin (11) tamdeyiminden

(16) $\forall x_1 \forall x_2 \exists y_1 \forall z_1 [F x_1 \vee (G x_2 y_1 \wedge F z_1)]$

preneks yasal biçimi elde edilir.

İkinci örnek olarak

(17) $\exists x \forall y \sim F x y v \leftrightarrow A z G z$

tamdeyimini preneks yasal biçime dönüştürelim. Önce (17)'yi indirgenmiş biçime çevirelim.

1. $\exists x \forall y \sim F x y v \leftrightarrow \forall z G z$
2. $(\exists x \forall y \sim F x y v \wedge \forall z G z) \vee (\sim \exists x \forall y \sim F x y v \wedge \sim \forall z G z)$
3. $(\exists x \forall y \sim F x y v \wedge \forall z G z) \vee (\forall x \exists y F x y v \wedge \exists z \sim G z)$

Sonra da indirgenmiş biçimdeki tam deyimi, bağlı değişkenleri ayrık olan bir tamdeyime çevirelim.

4. $(\exists x_1 \forall y_1 \sim F x_1 y_1 v \wedge \forall z_1 G z_1) \vee (\forall x_2 \exists y_2 F x_2 y_2 v \wedge \exists z_2 \sim G z_2)$

Şimdi de bütün niceleyicileri sıralarını bozmadan öne alalım. Böylece aşağıdaki preneks yasal biçim elde edilir.

5. $\exists x_1 \forall y_1 \forall z_1 \forall x_2 \exists y_2 \exists z_2 [(\sim F x_1 y_1 v \wedge G z_1) \vee (F x_2 y_2 v \wedge \sim G z_2)]$

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki tamdeyimleri preneks yasal biçime dönüştürünüz.

1. $(\exists xFx \wedge \forall xGx) \rightarrow \sim\forall xGx$
2. $Fxy \vee ((\exists xGx \rightarrow \forall yFyx) \rightarrow \forall y\exists zFzyx)$
3. $\sim\forall x[Fx \rightarrow \exists y(Gy \wedge Hyx)] \vee \exists y(Gy \wedge \forall x(Fx \rightarrow Hyx))$
4. $\forall x\forall y(\exists z(Fxz \wedge Fyz)) \rightarrow \exists vGxyv$
5. $\forall x\forall y(\exists zFxyz \wedge (\exists uGxu \rightarrow \exists vGyv))$

15.3.2 Skolem Yasal Biçimine Dönüştürme

Preneks yasal biçimdeki bir tamdeyimin etki alanı niceleyiciden yoksun bir tamdeyimdir. Bu tamdeyim $Ft_1...t_n$ $(n \geq 0)$ biçimindeki atomsal önermelerden oluşan bir bileşik önermedir. Dolayısıyla etki alanını $\wedge$YB'ye dönüştürebiliriz.

Örneğin

(1) $\exists x_1\forall z_1\exists x_2\forall y_1\forall y_2(Fx_1y_1 \vee (\sim Gz_1 \wedge Hx_2y_2))$

preneks yasal biçiminin etki alanını $\wedge$YB'ye dönüştürelim.

(2) $\exists x_1\forall z_1\exists x_2\forall y_1\forall y_2((Fx_1y_1 \vee Gz_1) \wedge (Fx_1y_1 \vee Hx_2y_2))$

İmdi (2) gibi etki alanı $\wedge$YB olan bir preneks yasal biçiminin tikel niceleyicilerini elemek mümkündür. Bu amaçla preneks yasal biçiminin en soldaki tikel niceleyici geçişi kaldırılır ve bu tikel niceleyiciye bağlı değişkenin etki alanındaki geçişleri yerine ya bir ad ya da bir işlem işareti konulur. Eğer kaldırılan tikel niceleyicinin solunda hiçbir tümel niceleyici geçmiyorsa bir ad konulur, eğer tam n tane tümel niceleyici geçiyorsa bir n-li işlem işareti ile sözü geçen tümel niceleyicilere bağlı olan n tane değişken konulur. Gerek adın gerekse işlem işaretinin yeni olması, yani etki alanında daha önce geçmemesi gerekir. Aynı işlem soldan sağa doğru her tikel niceleyici için yapılır. Böylece bütün tikel niceleyiciler kaldırılmış olur. Söz konusu işlem işaretlerine *Skolem* fonksiyonu sembolü denir. Adlar sıfırlı işlem işareti sayıldığından söz konusu adlar da Skolem fonksiyonu sembolü durumundadır. Elde edilen

yeni preneks yasal biçimine *Skolem yasal* biçimi denir. Dikkat edilirse Skolem yasal biçimi bütün niceleyicileri (varsa) tümel niceleyici olan bir preneks yasal biçimidir.

Örnek olarak (2) preneks yasal biçimini Skolem yasal biçimine çevirelim. Bu da

(3) $\forall z_1 \forall y_1 \forall y_2((Fa_1y_1 \vee Gz_1) \wedge (Fa_1y_1 \vee H(fz_1, y_2)))$

biçimindedir. "$\exists x_1$" niceleyisini kaldırıp, "x_1"in bütün geçişleri yerine *a* adını (yani sıfırlı Skolem fonksiyon sembolünü) koyduk. Sonra "$\exists x_2$" niceleyicisini kaldırıp "x_2"nin bütün geçişleri yerine "fz_1" koyduk. "f" birli skolem fonksiyon sembolüdür. "z_1" değişkeni "$\exists x_2$" de önce geçen "$\forall z_1$" tümel niceleyicisine bağlı değişkendir.

İkinci örnek olarak

(4) $\forall x_1 \forall x_2 \exists y_1 \exists y_2 \forall x_3 \exists z_1 F(x_1, x_2, y_1, y_2, x_3, z_1)$

önermesini Skolem yasal biçimine çevirelim. Böylece

(5) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 F(x_1, x_2, fx_1x_2, gx_1x_2, x_3, hx_1x_2x_3)$

elde edilir. (5)'i elde etmek için "$\exists y_1$" niceleyicisini kaldırıp, "y_1" yerine "fx_1x_2" koyduk. Sonra da "$\exists y_2$" yi kaldırıp, "y_2" yerine "gx_1x_2" koyduk. Nitekim "$\exists y_2$" den önceki tümel niceleyiciler "$\forall x_1$" ile "$\forall x_2$" dir. Ancak "f" daha önce geçtiğinden "g" gibi yeni bir işlem işaretini seçtik. En sonda "$\exists z_1$"i kaldırıp "z_1" yerine "$hx_1x_2x_3$" koyduk. Nitekim "$\exists z_1$" den önce geçen tümel niceleyicilere bağlı değişkenler "x_1", "x_2", "x_3" dür.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki preneks yasal biçimlerini Skolem yasal biçimine dönüştürünüz.

1. $\exists x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 \exists x_3((Fx_1y_1 \vee \sim Gx_2x_3y_2) \wedge (\sim Gax_1y_2 \vee Hx_3))$
2. $\exists x_1 \forall y_1 \exists z_1 \exists z_2 \forall x_2(p \vee Fx_1x_2 \vee Gy_1z_1z_2 \vee Hy_1)$
3. $\forall x_2 \exists y_1 \exists y_2 \forall x_1 \forall x_3 \exists z_1((Fax_1y_1z_1 \vee Gbx_2y_2z_1) \wedge Fx_3y_1y_2z_1)$

15.3.3 Niceleme Mantığının Te-tik'li Yasal Biçimleri

Skolem yasal biçimleri genel olarak

(1) $\forall x_1 \ldots \forall x_n (A)$

biçimindedir. Etki alanı olan A tamdeyimi bir $\wedge$YB'dir. Dolayısıyla A; $B_1 \wedge \ldots \wedge B_k$ biçiminde çok bileşenli bir tümel evetlemedir. O halde (1):

(2) $\forall x_1 \ldots \forall x_n (B_1 \wedge \ldots \wedge B_k)$

biçimindedir. Oysa (2)

(3) $\forall x_1 \ldots \forall x_n (B_1) \wedge \ldots \wedge \forall x_1 \ldots \forall x_n (B_k)$

biçimindedir. $B_1,\ldots,B_k$ tamdeyimleri temel tamdeyimlerin tikel-evetlemeleri durumundadır. $Ft_1 \ldots t_n$ ile $\sim Ft_1 \ldots t_n$ biçimindeki tamdeyimlere bundan böyle *temel tamdeyim* diyeceğiz. Dolayısıyla $B_1,\ldots,B_k$ niceleme mantığına ait te-tik'lerdir. Buna göre

(4) $\langle B_1,\ldots,B_k \rangle$

tamdeyimi niceleme mantığının *te-tik'li yasal biçimi* sayılabilir. Nitekim (4), $B_1,\ldots,B_k$ te-tik'lerinin çok-bileşenli tümel-evetlemesidir. Niceleme mantığında otomatikleşmiş ispatlamada (4) te-tik'li yasal biçimi (3) önermesinin yerini tutar. (4)'e (3)'ün *karşılığı* olan te-tik'li yasal biçim diyoruz. Örnek olarak

(5) $\forall z_1 \forall y_1 \forall y_2 ((Fay_1 \vee \sim Gz_1) \wedge (Fay_1 \vee H(fz_1, y_2)))$

Skolem yasal biçiminin karşılığı olan te-tik'li yasal biçimi bulalım. Bu da

(6) $\langle [Fay_1, \sim Gz_1], [Fay_1, H(fz_1, y_2)] \rangle$

dir.

ALIŞTIRMALAR

§15.3.2'nin sonundaki alıştırmalarda istenilen Skolem yasal biçimlerinin karşılıkları olan te-tik'li yasal biçimleri bulunuz.

15.3.4 Herbrand Yorumlamaları ve Herbrand Evreni

(i) A gibi niceleme mantığı diline ait bir önermenin geçerli olmasının gerekli ve yeterli koşulu, ~A önermesinin Skolem yasal biçiminin tutarsız olmasıdır.

(ii) Bir skolem yasal biçiminin tutarsız olmasının gerekli ve yeterli koşulu, karşılığı olan te-tik'li yasal biçimin her yorumlamada gerçeklenemez olmasıdır.

(iii) Bir te-tik'li yasal biçimin her yorumlamada gerçeklenemez olmasının gerekli ve yeterli koşulu, te-tik'li yasal biçimine "Herbrand yorumlaması" denilen türden yorumlamalar yapıldığında gerçeklenemez olmasıdır.

(iv) Bir te-tik'li yasal biçimin bir *Herbrand yorumlaması* şöyle tanımlanır:

1. Yorumlamanın E evreni, te-tik'li yasal biçimde geçen adlar ve işlem işaretlerinden oluşan kapalı tekil terimlerin kümesidir. E evrenine te-tik'li yasal biçimin *Herbrand evreni* denir.

2. f, te-tik'li yasal biçimde geçen bir n–li işlem işareti ve $t_1,...,t_n$ E evrenine ait tekil terimler olduğunda, $ft_1,...,t_n$ tekil teriminin gösterdiği birey kendisidir.

Herbrand evrenine ait bireylere taban terimler denir. Örneğin

(1) $<[Fay_1, \sim Gz_1], [Fay_1, H(fz_1, y_2)]>$

te-tik'li yasal biçiminin Herbrand evreni

(2) {a, faa, f(a, faa), f(faa, a), f(faa, faa), f(f(faa, a), a), ...}

biçimindedir.

Bir Herbrand yorumlamasında, Herbrand evreninden başka bir de doğru olan atomsal önermeler yer alır. Atomsal önermeler te-tik'li yasal biçimde geçen yüklemler ve taban terimlerinden oluşur.

(3) F(a, faa)

ile

(4) G(f(a, faa))

bir Herbrand yorumlamasında geçebilen atomsal önermelerdir. Her atomsal önerme dizisi ayrı bir Herbrand yorumlamasını belirler.

Atomsal önermeler ve değillemeleri temel önermelerdir. Temel önermelerin çok bileşenli tikel evetlemelerine *taban te-tik'leri* denir. *Taban te-tik'leri* kapalı te-tik'lerdir. İçinde bağsız değişken geçen te-tik'ler de vardır. Örneğin Skolem yasal biçimlerinin te-tik'li yasal biçimlerinde geçen te-tik'ler taban te-tikleri değildir. Örnek olarak

(5) [F(a, faa), ~G(f (faa))]

bir taban te-tik'i,

(6) [F(a, fax), ~G(f (fxa))]

taban te-tik'i olmayan bir te-tik'tir. B, bir te-tik olduğunda, B'de geçen bağsız değişkenler yerine Herbrand evrenine ait birer tekil terim koymakla elde edilen önermeye B'nin bir *taban yerine-koyma örneği* denir.

Örnek olarak (6) te-tik'inin bir taban yerine-koyma örneği

(7) [F(a, f(a, faa)), ~G(f (f (faa, a)))]

dır. Nitekim (6)'da geçen "x" değişkeninin her iki geçişi yerine "faa" koyduk.

İkinci örnek olarak

(8) [$F(x_1, fay_1)$, ~$G(x_2, a)$]

te-tik'inin bir taban yerine koyma örneği

(9) [F(a, f(a, faa)), ~G(faa, a)]

dır. Dikkat edilirse (8) te-tik'inde, "x_1" yerine "a", "y_1" ile "x_2" yerine de "faa" koyduk.

Bir taban te-tik'inin ana bileşenleri olan her tamdeyime *taban temel* tamdeyimi denir.

Bir temel tamdeyim, atomsal tamdeyim veya atomsal tamdeyimin değillemesidir. Her taban temel tamdeyimi bir temel tamdeyimin taban yerine koyma örneğidir. Yani verilen temel tamdeyimin değişkenleri yerine Herb-

rand evrenine ait tekil terimler koymakla bir taban temel tamdeyimi elde edilir. Örneğin

(10) ~G(x_2, a)

bir temel tamdeyimdir. "x_2" yerine Herbrand evrenine ait "faa" tekil terimini koymakla

(11) ~G(faa, a)

taban temel tamdeyimi elde edilir.

(v) <B_1,..., B_i,..., B_n> gibi bir te-tikli yasal biçimin y gibi bir Herbrand yorumlamasında gerçeklenemez olmasının gerekli ve yeterli koşulu, B_i gibi bir te-tik'in B_i' gibi bir taban yerine koyma örneğinin y yorumunda yanlış olması demektir.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki te-tik'li yasal biçimlerin Herbrand evrenine ait beşer tekil terim (yani taban terimi) gösteriniz.

1. <[~F(b, fx_1), F(a, gy_1)], [G(a, x_2)]>
2. <[~G(fa), F(gx_1), G(hx_2)], [Fa, G(f(gx_2))]>
3. <[F(a, fax_1), ~G(gy_1), H(a, b)]>

II. Yukarıdaki te-tikli yasal biçimlerde geçen te-tik'lerin ikişer taban yerine-koyma örneğini bulunuz.

Herbrand teoremi: Bir te-tik'li yasal biçimin her yorumlamada gerçeklenemez olmasının gerekli ve yeterli koşulu, te-tik'li yasal biçimde geçen bazı te-tik'lerin sonlu sayıda taban yerine-koyma örneklerinin kümesinin önermeler mantığında tutarsız olmasıdır.

Herbrand teoremine göre, niceleme mantığı diline ait bir önermenin geçerli olmasının denetlenmesi, önermeler mantığında sonlu sayıda taban te-tik'inin tutarsızlığının denetlenmesine indirgenir. Bu teorem, niceleme mantığında otomatikleşmiş ispatlamanın temel dayanağıdır.

Örneğin

(12) <[Px, ~P(fa)]>

te-tik'li yasal biçimi göz önüne alalım. (12) tutarsızdır. Herbrand teoremine göre (12)'de geçen te-tik'in sonlu sayıda taban yerine-koyma örneklerinin kümesi önermeler mantığında tutarsızdır. Bu ise

(13) {[P(fa), ~P(fa)]}

birim kümesidir. (13) apaçık olarak önermeler mantığında tutarsızdır.

İkinci örnek olarak gene tutarsız olan

(14) <[~Fx, G(fx, x)], [F(gb)], [~Gyz]>

te-tik'li yasal biçimi göz önüne alalım. (14)'de geçen te-tik'lerin sonlu sayıda taban yerine-koyma örneklerinin bir kümesi şöyledir:

(15) {[~F(gb), G(f(gb), gb)], [F(gb)], [~G(f(gb), gb)]}

dir. (15) kümesi önermeler mantığında tutarsızdır. Bunu aşağıdaki çözülüm çizelgesi ile gösteriyoruz.

(16) 1. [~F(gb), G(f (gb), gb)] (B.Ö.)
2. [F(gb)] (B.Ö.)
3. [~G(f(gb), gb)] (B.Ö.)
4. [G(f(gb), gb)] (1, 2, Ç)
5. [ ] (3, 4, Ç)

15.3.5 Yerine-koymalar

Herbrand teoremine göre otomatikleşmiş ispatlama, türetilebilen sonlu sayıda taban te-tik'inin bir arada önermeler mantığında tutarsız olduğunu göstermeye dayanır. Dolayısıyla verilen te-tik'lerden, bunların taban yerine koyma örnekleri olan taban te-tik'lerin türetilmesinin çok büyük önemi vardır. Şimdi te-tik kümelerinin taban yerine-koyma örneklerinin elde edilmesi işlemini inceleyeceğiz. Bu işlem bir yerine koyma işlemi olduğundan yerine koymaları sistematik olarak incelemek gerekiyor.

$x_1,...,x_n$ n tane farklı değişken, $t_1,...,t_n$ n tane (farklı veya aynı) tekil terim ve $t_1 \neq x_1,...,t_n \neq x_n$ olduğunda

(1) $f(x_1,...,x_n)\ \{t_1/x_1,...,t_n/x_n\}$

biçiminde dile getirilen işleme bir *yerine-koyma* denir. Eğer, $t_1,...,t_n$ *taban terimleri* ise, (1) yerine-koyma işlemine *taban yerine-koyma işlemi* denir. (1) yerine koyma işlemi, içinde $x_1,...,x_n$ geçen bir terim veya tamdeyime veya bunların bir kümesine uygulanırsa x_1 yerine $t_1,...,x_n$ yerine t_n koyulur. n = 1 durumunda {t/x} yerine (t/x) de yazılır.

Örnek olarak

(2) f(a, fax) {a/x} = f(a, faa)

(3) F(f(a, fax)) {a/x} = F(f(a, faa))

(4) {F(fa, fax), ~Gby} {a/x, b/y} = {F(fa, faa), ~Gbb}

(5) F(fyx, fax) {a/x, x/y, y/z} = F(fxa, faa)

Dikkat edilirse (5)'de x değişkeninin her iki geçişi yerine *a* koyduk. y'nin tek geçişi yerine x koyduk. Sol taraftaki tamdeyimde z olmadığından z yerine y koyma işlemi yapılamıyor. $t_i \neq x_i$ koşulundan dolayı,

(6) {x/x}

veya

(7) {x/x, a/y}

bir yerine koyma sayılmaz. {a/x} ve {ga/x} bir taban yerine koyması olmasına karşılık, {a/x, x/y, y/z} bir taban yerine koyma işlemi değildir.

Yerine koyma işlemlerini σ, τ, λ, μ, ... gibi küçük Grek harfleriyle gösteriyoruz. σ bir yerine koyma ve T bir tekil terim veya tamdeyim olduğunda Tσ tekil terim veya tamdeyimine bir *yerine koyma örneği* denir. σ bir taban yerine koyma işlemi ise, Tσ'ya *taban yerine koyma örneği* denir. Örneğin bir te-tik'e bir taban-yerine-koyma işlemini uygulayarak te-tik'in taban yerine-koyma örneği elde edilir. Söz gelişi

(8) $[Fax_1, \sim G(faa, x_2)]$

te-tik'ine $\{a/x_1, faa/x_2\}$ taban yerine-koyma işlemini uygularsak,

(9) [Faa, ~G(faa, faa)]

taban yerine-koyma örneği elde edilir. Ancak te-tik'in taban yerine-koyma örneğini elde etmek için kullanılan taban yerine-koyma işleminin te-tik'teki her değişken için tanımlanmış olması gerekir. Örneğin (8) te-tik'ine x_2 için tanımlanmamış $\{a/x_1\}$ taban yerine-koyma işlemini uygularsak, taban te-tik'i olmayan

(10) [Faa, ~G(faa, x_2)]

te-tik'i elde edilir. (10) te-tik'i (9)'un yerine-koyma örneği olmakla birlikte, taban yerine-koyma örneği değildir.

{ } ile gösterilen boş küme bir yerine-koyma işlemi sayılır ve Grek ε harfiyle gösterilir. $\mathcal{E}$'a *boş yerine-koyma işlemi* denir. T herhangi bir tekil terim veya tamdeyim veya bunların bir kümesi ise

(11) $T\mathcal{E} = T$

elde edilir. Örneğin

(12) [Fax_1, ~G(faa, x_2)] ε = [Fax_1, ~G(faa, x_2)]

$\sigma = \{t_1/x_1,...,t_n/x_n\}$ ve $T = \{t_1'/y_1,...,t_n'/y_n\}$ iki yerine koyma olduğunda

(13) $\{t_1T_1/x_1,...,t_n\ T/x_n,\ t_1'/y_1,...,t_n'/y_n\}$

yerine-koymasına σ ile T'in bileşmesi denilir ve σoT ile gösterilir. Eğer $t_i\lambda_i=x_i$ ise $t_i\ \lambda_i/x_i$ kaldırılır. Ayrıca $y_1 \in \{x_1,...,x_n\}$ olursa t_j'/y_j kaldırılır.

Örneğin

(13) $\sigma = \{t_1/x_1,\ t_2/x_2\} = \{fy/x,\ z/y\}$

(14) $T = \{t_1'/y_1,\ t_2'/y_2,\ t_3'/y_3\} = \{a/x,\ b/y,\ y/z\}$

olduğunda σoT olarak

(15) $\{t_1\ T/x_1,\ t_2\ T/x_2,\ t_1'/y_1,\ t_2'/y_2,\ t_3'/y_3\}$ = {fb/x, y/y, a/x, b/y, y/z}

elde edilir. $t_2T = x_2$ olduğundan t_2T/x_2 kaldırılmalıdır. Ayrıca $y_1, y_2 \in \{x_1, x_2\}$ olduğundan, t_1'/y_1 ile t_2'/y_2 yani a/x ile b/y'de kaldırılmalıdır. Böylece

(16) $\sigma o T = \{fb/x, y/z\}$

elde edilir.

(17) $(\sigma oT)o\theta = \sigma o(T \circ \theta)$

(18) $\mathcal{E}o\sigma = \sigma o\mathcal{E} = \sigma$

olduğu gösterilebilir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki yerine-koyma işlemlerini yapınız.

1. $Fax \{a/x\}$
2. $Fax \{a/x, b/y\}$
3. $(Fax)\ \mathcal{E}$
4. $[Fax_1, \sim G(a, fx_2), \sim H(b, gy_1)]\ \{a/x_1, fa/x_2, gb/y_1\}$
5. $f(a, fxyaz, y, gyz)\ \{y/x, x/y\}$

15.3.6 Özdeşleştirme Algoritması

(1) $\{T_1,...,T_n\}$

tekil terimler veya tamdeyimlerden oluşan bir küme olduğunda,

(2) $T_1\sigma = ... = T_n\sigma$

olursa, σ yerine-koymasına (1) kümesinin bir *özdeşleştirici*'si denir. (1) kümesinin özdeşleştiricisi varsa, bu kümeye özdeşleştirilebilir denir.

Örnek olarak

(3) $\{Fay, F(x, fb)\}$

tamdeyimler kümesi özdeşterlirilebilir. Nitekim bu kümenin

(4) $\{a/x, fb/y\}$

gibi bir özdeşleştiricisi vardır. Gerçekten

(5) Fay {a/x, fb/y} = F(x, fb) {a/x, fb/y}

doğrudur.

σ yerine-koyması $\{T_1,...,T_n\}$ kümesinin bir özdeşleştircisi olduğunda, bu kümenin T gibi özdeşleştiricisi T = σ koşulunu yerine getirirse, σ'nın kümenin *en genel* bir özdeşleştiricisi olduğu söylenir.

K, tamdeyimlerden veya tekil terimlerden oluşan sonlu bir küme olduğunda, eğer K özdeşleştirilebilir ise bunu sağlayan en genel bir özdeşleştiriciyi elde etmeye yarayan ve *özdeşleştirme algoritması* denilen bir algoritma vardır. Bu algoritma şöyle belirlenir. Tamdeyimlere ve tekil terimlere *deyim* diyeceğiz.

K içinde ilk özdeş olmayan alt deyimlerin kümesine *K* kümesinin *uyumsuzluk kümesi* denir. Örneğin

(6) K = {F(x, fyz), Fxa, F(x, g(hx))}

olsun. O zaman K'nın uyumsuzluk kümesini U ile gösterirsek,

(7) U = {fyz, a, g(hx)}

olur. Buna göre özdeşleştirme algoritmasını şöyle dile getirebiliriz.

Özdeşleştirme Algoritması

1. adım: k = 0, K_k = K, σ_k = Ɛ olsun.

2. adım: K_k bir birim kümesi ise işlem tamamlanmış olup, σ_k, K için en genel bir özdeşleştirici olur. Yoksa K_k'nın U_k uyumsuzluk kümesi bulunur.

3. adım: Eğer U_k'nın öğeleri arasında x_k gibi bir değişken ve t_k gibi bir tekil terim varsa ve x_k, t_k içinde geçmiyorsa 4. adıma geçilir, yoksa işlem bitip, K'nın özdeşleştirilemediği ortaya çıkar.

4. adım: $\sigma_{k+1} = \sigma_k$ o $\{t_k/x_k\}$, $K_{k+1} = K_0\ \sigma_{k+1}$ ve $K_{k+1} = K_k\{t_k/x_k\}$ olsun.

5. adım: k + 1 sayısı için 2. adıma geçilir.

Örnek olarak

(8) K = {F(a, x, f(gy)), F(z, fz, fa)}

tamdeyimler kümesi için özdeşleştirme algoritmasını uygulayarak en genel bir özdeşleştiriciyi arayalım.

1. $\sigma_0 = \varepsilon$, $K_0 = K$. K_0 birim kümesi olmadığından σ_0, K için en genel bir özdeşleştirici değildir.

2. Uyumsuzluk kümesi $U_0 = \{a, z\}$. U_0 içindeki x_0 yani z değişkeni t_0 yani a teriminde geçmiyor.

3. $\sigma_1 = \sigma_0 \circ \{t_0/x_0\} = \sigma_0 \circ \{a/z\} = \{a/z\}$

$K_1 = K_0 \{t_0/x_0\} = \{F(a, x, f(gy)), F(z, fz, fa)\} \{a/z\}$

$= \{F(a, x, f(gy)), F(a, fa, fa)\}$

4. K_1 bir birim kümesi değildir. O halde K_1 içinde U_1 gibi bir uyumsuzluk kümesi vardır.

$U_1 = \{x, fa\}$

5. U_1 içindeki x_1 yani x değişkeni, t_1 yani fa tekil teriminde geçmiyor.

6. $\sigma_2 = \sigma_1 \circ \{t_1/x_1\} = \{a/z\} \circ \{fa/x\} = \{a/z, fa/x\}$,

$K_2 = K_1 \{t_1/x_1\} = K_1 \{fa/x\}$

$= \{F(a, x, f(gy)), F(a, fa, fa)\} \{fa/x\}$

$= \{F(a, fa, f(gy)), F(a, fa, fa)\}$

7. K_2 bir birim kümesi değildir. Dolayısıyla U_2 gibi bir uyumsuzluk kümesi vardır. $U_2 = \{f(gy), fa\}$. U_2 içinde x_2 yani fa değişkeni t_2 yani f(gy) teriminde geçmiyor.

8. $\sigma_3 = \sigma_2 \circ \{t_2/x_2\} = \{a/z, fa/x\} \circ \{gy/a\} = \{a/z, fa/x, gy/a\}$

$K_3 = K_2 \{t_2/x_2\} = K_2 \{gy/a\}$

$= \{F(a, fa, f(gy)), F(a, fa, fa)\} \{gy/a\}$

$= \{F(a, fa, f(gy)), F(a, fa, f(gy)\}$

$= \{F(a, fa, f(gy))\}$

9. K_3 bir birim kümesidir. O halde $\sigma_3 = \{a/z, fa/x, gy/a\}$ K kümesi için en genel bir özdeşleştiricidir. Böylece K kümesinin özdeşleştirilebilir olduğu ortaya çıkar.

İkinci örnek olarak

(9) {Fx, Fg (a, x)}

kümesini ele alalım. Uyumsuzluk kümesi U_0 = {x, g(a, x)}'dir. Ancak x değişkeni, g(a, x) tekil teriminde geçtiği için {g(a, x)/x} yerine koyması kullanılamaz. Bu nedenle (9)'un özdeşleştiricisi yoktur.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki kümelerin özdeşleştirilebilir olup olmadıklarını saptayınız. Özdeşleştirilebilir olanların en genel özdeşleştiricisini bulunuz.

1. {Fa, Fb}
2. {Gax, Gaa}
3. {F(a, x, fx), Q (a, y, y)}
4. {Fxyz, G(u, h(v, v), u)}
5. {$F(x_1, gx_1, x_2, h(x_1, x_2), x_3, k(x_1, x_2, x_3))$,
   $F(y_1, y_2, j(y_2), y_3, f(y_2, y_3), y_u)$}

15.3.7 Niceleme Mantığında Çözülüm Çizelgesi

Daha önce belirttiğimiz gibi niceleme mantığında A gibi geçerli bir önermeyi ispatlamak için, ~A'nın skolem yasal biçiminin karşılığı te-tik'li yasal biçimi oluşturan te-tik'ler kümesinin çözülüm çizelgesi kurulur. Herbrand teoremi gereği te-tik'lerin taban yerine koyma örneklerini eklemekle kapalı bir çözülüm çizelgesi elde edilir. Söz konusu taban yerine koyma örneklerini, özdeşleştirme algoritması gereği bulunan özdeşleştiricilerin uygulanması sonucunda elde ederiz. Bu amaçla aşağıdaki iki kuralı kullanırız.

Niceleme mantığının çözülüm kuralı:

$[A_1, B_1, ..., B_n]$ ile $[A_2, C_1, ..., C_n]$ iki te-tik olduğunda, eğer σ yerine koyması $\{A_1, \sim A_2\}$ kümesinin en genel bir özdeşleştiricisi ise, sözü geçen iki te-tik'ten $[B_1\sigma, ..., B_n\sigma, C_1\sigma, ..., C_n\sigma]$ biçimindeki te-tik türetilebilir.

Bu kuralı şöyle haklı gösteririz. $A_1\sigma = \sim A_2\sigma$. O halde $[A_1\sigma, B_1\sigma, ..., B_n\sigma]$ ile $[A_2\sigma, C_1\sigma, ..., C_n\sigma]$'dan, önermeler mantığındaki çözülüm kuralı gereği $[B_1\sigma, ..., B_n\sigma, C_1\sigma, ..., C_n\sigma]$ her te-tik'ten herhangi bir yerine koyma örneğini türetebiliriz. Nitekim skolem standart biçiminde te-tik'ler tümel niceleyicilerin etkisindedir. Buna göre $[A_1, B_1, ..., B_n]$'den $[A_1\sigma, B_1\sigma, ..., B_n\sigma]$, $[A_2, C_1, ..., C_n]$'den de $[A_2\sigma, C_1\sigma, ..., C_n\sigma]$ türetilebilir.

Çözülüm kuralından başka bir de aşağıdaki *çarpan kuralı* denilen kurala gereksinme vardır.

Çarpan Kuralı

$[A, B, C_1, ..., C_n]$ bir te-tik olduğunda, σ yerine-koyması $\{A, B\}$ kümesinin en genel özdeşleştiricisi ise; sözü geçen te-tik'ten $[A\sigma, C_1\sigma, ..., C_n\sigma]$ te-tik'i türetilebilir.

Bu kuralı da şöyle haklı gösteriyoruz. $[A, B, C_1, ..., C_n]$'den önce $[A\sigma, B\sigma, C_1\sigma, ..., C_n\sigma]$'yi türetiriz. Oysa $A\sigma = B\sigma$ olduğundan, $[A\sigma, B\sigma, C_1\sigma, ..., C_n\sigma]$ te-tik'i $[A\sigma, C_1\sigma, ..., C_n\sigma]$'ye indirgenir.

Örnek olarak

(1) {[Fx, Fy], [~Fa, ~Fv]}

te-tik'ler kümesinin kapalı çözülüm çizelgesini kuralım.

(2)
1. [Fx, Fy] (B.Ö.)
2. [~Fu, ~Fv] (B.Ö.)
3. [Fx] (1, Çrp)
4. [~Fu] (2, Çrp)
5. [ ] (3, 4, Ç)

3. adımda, {x/y} yerine koymasını 2. satıra uygulayarak önce [Fx, Fx] te-tik'ini elde ettik. Bunu [Fx]'e indirgedik. 3. satırın ardına çarpan kuralı gereği olduğunu belirtmek amacıyla "Çrp" işaretini koyduk. 4. adımda da 3. satıra {u/v} yerine koyma işlemini yaparak çarpan kuralını uyguladık. 5. adımda ise 3. ile 4. satırlara {x/u} yerine koyması işlemini uyguladık. Böylece elde edilen [Fx] ile [~Fx]'den [ ]'yi elde ettik. 5. satırın çözülüm kuralı gereği elde edildiğini belirtmek amacıyla, bu satırın ardına "Ç" işaretini koyduk.

İmdi bazı durumlarda $\{T_1, T_2\}$ gibi bir deyimler kümesinin iki öğesinde ortak değişmezlerin geçmesinden dolayı özdeşleştirme imkânsız olur.

Örneğin

(3) $\{Fx, F(fx)\}$

kümesini özdeşleştiremeyiz. Nitekim $\{fx/x\}$ yerine-koymasını göz önüne alalım.

(4) $Fx\ \{fx/x\} = F(fx)$

(5) $F(fx)\ \{fx/x\} = F(f(fx))$

Böylece $\{fx/x\}$ (3) kümesinin bir özdeşleştiricisi olamaz.

Oysa

(6) $\{Fx, Fy\}$

kümesi özdeşleştirilebilir. Nitekim $\{x/y\}$, (6)'nın en genel bir özdeşleştiricisidir.

Genel olarak $\{T_1, T_2\}$ kümesinin iki öğesinde ortak değişmezlerin geçmesinden dolayı özdeşleştirme yapılamazsa, T_1 ile T_2'den birine *değişken değiştirici yerine-koyma* denilen bir yerine-koyma işlemini uygulayarak T_1 ile T_2'nin değişkenlerini birbirinden ayırabiliriz. T_1 ile T_2 deyimlerinin değişken değiştirici yerine koyması, T_1 ile T_2'nin ortak değişmezlerini T_1 ile T_2'de geçmeyen değişkenlere dönüştüren bir yerine-koymadır. Örneğin (3) kümesinin ortak değişkeni x olduğundan, (3)'ün bir değişken değiştirici yerine koyması $\{y/x\}$'dir. (3)'ün öğelerinden birine, söz gelişi "Fx"e bu yerine koymayı uygulayalım. Böylece (3) kümesi

(7) $\{Fy, F(fx)\}$

biçimine dönüşür. (7) kümesinin ise $\{fx/y\}$ gibi en genel bir özdeşleştiricisi vardır.

İkinci örnek olarak

(8) $\{[Fx, Gy], [F(fx), Gy]\}$

kümesini özdeşleştirmek amacıyla öğelerinden birine bir değişken değiştirici yerine-koyma uygulayalım. Böyle bir yerine koyma

(9) {z/x, v/y}

olabilir. (9) yerine koymasını [Fx, Gy]'e uygularsak, (8) kümesi

(10) {[Fz, Gv], [F(fx), Gy]}

biçimini alır. (10)'un en genel bir özdeşleştiricisi ise

(11) {fx/z, y/v}

dir.

Bundan böyle çözülüm çizelgelerinin kurulmasında gereğinde değişken değiştirici yerine koymalar kullanacağız.

Karmaşık bir örnek olarak aşağıdaki çözülüm çizelgesini kuruyoruz.

1. [F(x, y, f(x, y))] (B.Ö.)
2. [~Fxyu, ~Fyzv, ~Fxvw, Fuzw] (B.Ö.)
3. [~Fxyu, ~Fyzv, ~Fxzw, Fxvw] (B.Ö.)
4. [Feyy] (B.Ö.)
5. [F(gy, y, e)] (B.Ö.)
6. [~F(x, hx, hx), ~F(kx, z, x)] (B.Ö.)
7. [~F(ke, z, e)] (4, 6.1, Ç)
8. [~F(x, y, ke), ~Fyzv, ~Fxve] (2.4, 7, Ç)
9. [~F(gv, y, ke), ~Fyzv] (5, 8.3, Ç)
10. [~F(gv, e, ke)] (4, 9.2, Ç)
11. [~F(gv, y, u), ~Fyze, ~F(gv, z, ke)] (3.4, 10, Ç)
12. [~F(e, y, e), ~F(y, ke, e)] (4, 11.3, Ç)
13. [~F(e, g(ke), e)] (5, 12.2, Ç)
14. [ ] (5, 13, Ç)

Her satırdaki te-tik'in öğelerini satır numarasının ondalığı olarak gösteriyoruz. Örneğin 6. satırın birinci öğesini yani ~F(x, hx, hx) temel tamdeyimini 6.1 ile gösteriyoruz. Uyguladığımız değişken değiştirici yerine-koymaları, öz-

deşleştiricileri ve elde edilen yerine-koyma örneklerini kullanılan tamdeyimleri sıra numarasıyla aşağıdaki çizelgede belirtiyoruz. Değişken değiştirici yerine koymayı η harfiyle en genel özdeşleştiriciye de σ ile gösteriyoruz.

7. satır özdeşterilen önermeler: 4, 6a; ortak değişken yoktur.

$\eta = \mathcal{E}$ (yani η kullanılmadı)

σ = {g(ke)/y, g(ke)/v}

F(g (g(ke)))

Özdeşleştirme sonucu: F(g(g(ke)), g(ke), e)

15.3.8 Niceleme Mantığında Çözümleyici Çözülüm Çizelgesi

Herhangi bir önerme kümesinin tutarsız olduğunu gösteren çözümleyici çözülüm çizelgesi, çözülüm kuralı ve çarpan kuralından başka, daha önce sözü edilen α ve β kuralları ile aşağıdaki ɣ ve δ kurallarına dayanır.

(1) ɣ *kuralı*

1. ɣ

2. ɣ (v) (1)

Burada ɣ, ∀xA biçiminde bir tümel tamdeyim ve ɣ(x), A(v/x) tamdeyimidir.

(2) *δ kuralı*

1. δ

2. δ ($fy_1 \ldots y_n$) (1) ($n \geq 0$)

Burada δ, ∃xA biçiminde bir tikel tamdeyim, $\delta(fy_1 \ldots y_n)$ de $A(fy_1 \ldots y_n/x)$ tamdeyimidir. f, önceki satırlarda geçmeyen bir n-li işlem işareti, $y_1, \ldots, y_n$'de daha önceki satırlarda geçen bağsız değişkenlerdir. n = 0 sınır durumunda f yerine *a* gibi önceki satırlarda geçmeyen bir ad kullanılır.

Geçerli bir önermenin otomatikleşmiş ispatını yapmak için, bu önermenin değillemesinin başlangıç önermesi olduğu çözümleyici çözülüm çizelgesi kurulur. Örnek olarak

(3) $\exists w \forall x F(x, w, fxw) \rightarrow \exists w \forall x \exists y Fxwy$

önermesinin ispatını dile getiren çözümleyici çözülüm çizelgesini kuralım. Bu çizelgenin başlangıç önermesi (3)'ün değillemesinden oluşan te-tik'tir.

(4) 1. $[\sim(\exists w \forall x F(x, w, fxw) \rightarrow \exists w \forall x \exists y Fxwy)]$ (B.Ö.)

2. $[\exists w \forall x F(x, w, fxw)]$
3. $[\sim \exists w \forall x \exists y Fxwy]$ (1, α)

4. $[\forall w \exists x \forall y \sim Fxwy]$ (3)

5. $[\forall x F(x, a, fxa)]$ (2, δ)

6. $[\exists x \forall y \sim Fxv_1y]$ (4, δ)

7. $[\forall y \sim F(gv_1, v_1, y)]$ (6, δ)

8. $[F(v_2, a, fv_2a)]$ (5, ϰ)

9. $[\sim F(gv_1, v_1, v_3)]$ (7, ϰ)

10. $[F(ga, a, f(ga, a))]$ (8, σ)

11. $[\sim F(ga, a, f(ga, a))]$ (9, σ)

12. [ ] (10, 11, Ç)

$\sigma = \{a/v_1, ga/v_2, f(ga, a)/v_3\}$ olmak üzere, 10. satır 8. satırdan σ yerine koymasını uygulayarak türetilmiştir. 11. satır da 9. satırdan aynı σ yerine koymasını uygulayarak türetilmiştir. 12. satır ise 10. ve 11. satırlardan çözülüm kuralıyla elde edilmiştir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki geçerli önermeleri çözümleyici çözülüm çizelgesiyle ispatlayınız.

1. $\exists x(Fx \rightarrow \forall x Fx)$
2. $\forall x \forall y(Fx \wedge Fy) \rightarrow \exists x \exists y(Fx \vee Fy)$
3. $\forall x \forall y(Fx \wedge Fy) \rightarrow \forall x \forall y(Fx \vee Fy)$
4. $\forall x \exists y \forall z \exists x(Fxy \vee \sim Fwz)$

15.3.9 Niceleme Mantığında Skolem Fonksiyonlu Çözümleyici Çizelge

Çözümleyici çizelge'nin de bir otomatikleşmiş ispatlama yöntemi olduğunu daha önce belirtmiştik. Ancak tümel özelleme kuralının aynı yolda geçen bütün tekil terimlere uygulanması işlemi çok uzatır. Bu nedenle *Skolem fonksiyonlu çözümleyici çizelge* denilen yeni bir çizelge geliştirilmiştir. Bu çizelgedeki tümel özelleme ile tikel özelleme kuralları çözümleyici çözülüm çizelgesinde kullanılan ɣ kuralı ile δ kuralının aynısıdır.

Tümel özelleme kuralı:

1. ∀xA

2. A(v/x)

v, aynı yolda önceki satırlarda geçmeyen bir değişkendir.

Tikel özelleme kuralı:

1. ∃xA

2. $A(fv_1...v_n)$

f_1 aynı yolda önceki satırlarda geçmeyen yeni bir n-li işlem işaretidir. $v_1,...v_n$ de önceki satırlarda geçen bütün bağsız değişkenlerdir. Tikel özelleme kuralının, tümel özelleme kuralına göre önceliği vardır. Çizelgeyi kapatmak için yerine-koyma işlemleri uygulanır. Örnek olarak geçerli olan

(1) ∃x∀yFxy → ∀y∃xFxy

önermesini Skolem fonksiyonlu çözümleyici çizelge ile ispatlayalım.

(2) 1. ~(∃x∀yFxy → ∀y∃xFxy) (B.Ö.)

3. ∃x∀yFxy
2. ~∀y∃xFxy
(1)

4. ∃y∀x~Fxy (2)

5. ∀yFay (3)

6. ∀x~Fxb (4)

7. Fav_1 (5)

8. $\sim Fv_2b$ (6)

Fab (7, σ)

$\sim$Fab (8, σ)

X

σ = {b/v_1, a/v_2} olmak üzere, 8. adımdan sonra σ'yı "Fav_1"e ve son adımda σ'yı "$\sim Fv_2b$"ye uyguladık. Elde edilen yerine-koyma örnekleri çelişik olduğundan çözümleyici çizelgeyi kapatabildik. Görüldüğü gibi σ yerine koyması, {Fav_1, Fv_2b} kümesinin en genel yerine koyma özdeşleştricisidir.

İkinci örnek olarak geçerli olan

(3) $\exists w \forall x\, F(x, w, fxw) \rightarrow \exists w \forall x \exists y Fxwy$

önermesini Skolem fonksiyonlu çözümleyici çizelgesiyle ispatlayalım.

(4) 1. $\sim(\exists w \forall x F(x, w, fxw) \rightarrow \exists w \forall x \exists y Fxwy)$ (B.Ö.)

3. $\exists w \forall x F(x, w, fxw)$ ┐ (1)

2. $\sim \exists w \forall x \exists y Fxwy$ ┘

4. $\forall w \exists x \forall y \sim Fxwy$ (2)

6. $\forall x F(x, a, fxa)$ (3)

5. $\exists x \forall y \sim Fxv_1y$ (4)

7. $\forall y \sim F(gv_1, v_1, y)$ (5)

8. $F(v_2, a, fv_2a)$ (6)

9. $\sim F(gv_1, v_1, v_3)$ (7)

F(ga, a, f(ga, a)) (8, σ)

$\sim$F(ga, a, f(ga, a)) (9, σ)

X

σ = {a/v_1, ga/v_2, $f(ga, a)/v_3$}'dür. σ yerine koyması

(5) {$F(v_2, a, fv_2\, a)$, $F(gv_1, v_1, v_3)$}

kümesinin en genel özdeşleştiricisidir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki geçerli önermeleri Skolem fonksiyonlu çözümleyici çizelge ile ispatlayınız.

1. $\exists x(Fx \rightarrow \forall xFx)$
2. $\forall x\forall y(Fx \wedge Fy) \rightarrow \exists x\exists y(Fx \vee Fy)$
3. $\forall x\forall y(Fx \wedge Fy) \rightarrow \forall x\forall y(Fx \vee Fy)$
4. $\forall x\exists y\forall z\exists w(Fxy \vee \sim Fwz)$

16. OLASILIK KAVRAMLARININ MANTIKSAL TEMELLERİ

16.1 OLASILIK KAVRAMI

16.1.1 Sınıflayıcı Olasılık, Karşılaştırmalı Olasılık ve Nicel Olasılık

Olasılık, akıl yüretmede, bilimde ve pratik hayatta çok önemli işlevi olan bir kavramdır. Günlük dilde "olasılık" sözcüğü çeşitli bağlamlarda kullanılır.

. Örneğin:

(1) Yarın yağmur yağacağı olasıdır

ve

(2) Yarın yağmur yağacağı, kar yağacağından daha olasıdır

tümcelerini ele alalım.

(3) (Yarın yağmur yağacak: p, yarın kar yağacak: q)

sembolleştirme biçimi gereği, (1) ile (2)'yi sırasıyla

(1') p olacağı olasıdır

ve

(2') p olacağı, q olacağından daha olasıdır

biçiminde sembolleştiririz.

Öte yandan

(4) "Yarın yağmur yağacaktır" önermesinin olasılığı 0.80'dir.

tümcesi sözeden dile aittir. Nesnel dile ait olan

Yarın yağmur yağacaktır

önermesini sözeden dile ait A gibi bir önerme adı ve 0.80'i α gibi bir sayı adı ile gösterirsek, (4) tümcesinin

(4') A'nın olasılığı 0.80'dir.

biçiminde olduğunu söyleyebiliriz.

İmdi (1'), (2'), (4') önermelerini sırasıyla

(1") $\mathcal{O}p$

(2") $p > q$

ve

(3") $Ol(A) = \alpha$

biçiminde gösteririz. "$\mathcal{O}$" işareti bir birli önerme eklemidir. Nitekim $\mathcal{O}$, p önermesinden "$\mathcal{O}p$" önermesini oluşturur. ">" işareti de iki önermeden bir önerme oluşturduğundan bir ikili önerme eklemidir. Öte yandan "Ol" işareti sözden dile ait bir birli işlem işaretidir. Bu işaret bir birli fonksiyonu gösterir. Bu fonksiyon her önermeye karşılık bir reel sayı belirler. "Ol" işareti "nın olasılığı" anlamına gelir. (1")'deki "$\mathcal{O}$" işareti (2")'deki ">" işareti ve (4")'deki "Ol" işareti üç ayrı türden olasılık değişmezini dile getirir. (1")'deki olasılık değişmezi *sınıflayıcı olasılık* kavramına, (2")'deki olasılık değişmezi *karşılaştırmalı* (veya *nitel*) *olasılık* kavramına (4")'deki olasılık değişmezi de *nicel olasılık* kavramına ilişkindir.

Olasılık değişmezi yalnız önermelere değil olaylara da uygulanır. Örneğin

(5) Hilesiz bir zarın 6 gelmesi olasılığı 1/6'dır.

önermesinde olasılık değişmezi bir olaya ilişkindir.

16.1.2 Koşullu Olasılık

(1) Hava kara bulutlu olduğuna göre yağmur yağacağı olasıdır.

(2) Hava kara bulutlu olduğuna göre yağmur yağacağı hava soğuk olduğuna göre kar yağacağından daha olasıdır.

(3) Hava kara bulutlu olduğuna göre, yağmur yağacağının olasılığı 0.80'dir.

önermelerini göz önüne alalım. Bu önermeleri

(4) (Hava kara bulutludur: p, yağmur yağacak: q hava soğuktur: r, kar yağacak: s, 0.80: a)

sembolleştirme biçimi gereği sırasıyla

(1') p olduğuna göre q olasılıdır

(2') p olduğuna göre q, r olduğuna göre s'den daha olasıdır

(3') p olduğuna göre q'nun olasılığı a'dır

biçiminde sembolleştiririz. (2') önermesi

(2") $q/p > s/r$

biçiminde, (3') önermesi de

(3") $Ol(p, q) = a$

veya

(3"') $Ol(q/p) = a$

biçiminde dile getirilir. (1'), (2") ve (3") veya (3"') önermelerinin *koşullu olasılık*'a ilişkin olduğu söylenir. (1')'indeki olasılık değişmezi, sınıflayıcı koşullu olasılığa, (2")'ndeki olasılık değişmezi, karşılaştırmalı koşullu olasılığa ve (3") veya (3"')'deki olasılık değişmezi nicel koşullu olasılığa ilişkindir. Koşullu olmayan olasılığa, *mutlak olasılık* denir.

16.1.3 Bilgisel Olasılık ve Fiziksel Olasılık

Olasılık ya bir kişinin bilgi veya kanısına ya da fiziksel bir duruma ilişkindir. Bu bakımdan özce farklı iki olasılık kavramı olduğunu söyleyebiliriz. Bu

iki kavramdan her biri sınıflayıcı, karşılaştırmalı veya nicel biçimde dile getirilebilir.

Örnek olarak

(1) Eldeki meteorolojik bilgilere göre yarın yağmur yağacağı olasıdır

önermesi sınıflayıcı bilgisel koşullu olasılığa ilişkindir. (1) önermesi eldeki meteorolojik bilgilere sahip herhangi bir rasyonel insanın varacağı kanıyı dile getirir.

(2) Eldeki meteorolojik bilgilere göre yarın yağmur yağacağı, yarın kar yağacağından daha olasıdır

önermesi de karşılaştırmalı bilgisel koşullu olasılığa ilişkindir. Dikkat edilirse (2) önermesi

(2') Eldeki meteorolojik bilgilere göre yarın yağmur yağacağı, eldeki meteorolojik bilglere göre yarın kar yağacağından daha olasıdır.

önermesinin kısaltılmışı

(3) Eldeki meteoroloik bilgilere göre yarın yağmur yağacağının olasılığı 0.80'dir.

önermesi ise nicel bilgisel koşullu olasılığa ilişkindir.

Öte yandan a, 0 ile 1 arasında bir reel sayı olduğunda

(4) Bir radyum atomunun bir yılda parçalanması olasıdır

(5) Bir radyum atomunun bir yılda parçalanması bir uranyum atomunun bir yılda parçalanmasından daha olasıdır

(6) Bir radyum atomunun bir yılda parçalanması olasılığı a'dır.

önermeleri fiziksel olasılığa ilişkindir. (4) önermesi sınıflayıcı fiziksel olasılığa, (5) önermesi karşılaştırmalı fiziksel olasılığa ve (6) önermesi nicel fiziksel olasılığa ilişkindir. Fiziksel olasılığa ilişkin önermelerde bir önermenin değil de bir olayın olasılığı söz konusudur. Böylece (4), (5), (6) önermelerinde olasılık, bir radyum atomunun parçalanması olayına ilişkindir.

Fiziksel olasılık koşullu da olabilir. Örneğin

(7) Hilesiz bir zarın çift gelmesi durumunda, 2 gelmesi olasılığı 1/3'dür.

önermesi fiziksel koşullu olasılığa ilişkindir. Öte yandan bilgisel olasılık mutlak da olabilir. Örneğin

(8) Yarın yağmur yağması olasılıdır

önermesi fiziksel bir sistemin durumu, yani hava durumu hakkında bir önerme olarak fiziksel olasılığa ilişkindir. Öte yandan

(9) Yarın yağmur yağacağı olasılıdır

önermesi bir fiziksel sistemin durumu hakkında bir bilgi veya kanıyı dile getirdiği ölçüde bir bilgisel olasılığa ilişkindir.

Genel olarak her fiziksel olasılığa ilişkin önermeye karşılık bu fiziksel olasılığın bilgisini dile getiren bilgisel olasılığa ilişkin bir önerme vardır. Örneğin

(10) Yarın yağmur yağma olasılığı 0.80'dir.

hava durumu hakkında fiziksel bir olasılığa ilişkin bir önerme sayılabilir. O zaman da bunun karşılığı olan

(10') Yarın yağmur yağması olasılığının tahmin edilen değeri 0.80'dir.

bilgisel olasılığa ilişkin bir önermedir.

16.2 FİZİKSEL NİCEL OLASILIK VE SIKLIK YORUMU

16.2.1 Rasgele Sonuçlu Deneyler ve Sıklık

Fiziksel nicel olasılık, genellikle göreli sıklık olarak yorumlanır. Şimdi bu yorumu açıklıyoruz. Fiziksel olasılık aynı koşullar altında tekrarlanabilen *deneyler* ile ilgilidir. Oysa bazı deneyler aynı koşullar altında tekrarlandığında hep aynı sonucu verir. Bunlara *belirli sonuçlu deney* denir. Belirli-sonuçlu deneylere örnek olarak bir elektrik düğmesine basmakla ampulün yanması, doldurulmuş bir tabancanın tetiğinin çekilmesiyle ateş alması, direnci R ohm olan bir elektrik devresine V voltluk bir pil takmakla $I = V/R$ amperlik bir akım şiddetinin ölçülmesini gösterebiliriz.

Öte yandan bazı deneyler aynı koşullar altında tekrarlandığında farklı sonuçlar verebilir. Bunlara da *rasgele-sonuçlu deney* diyoruz. Rasgele-sonuçlu

bir deneyin önceden hangi sonucu vereceğini (kesin olarak) kestiremeyiz. Ancak mümkün olan *bütün* sonuçları önceden ve kesinlikle bilebiliriz. Belirli-sonuçlu deneyin bir tek mümkün sonucu olmasına karşılık, rasgele sonuçlu bir deneyin birden çok sayıda farklı sonucu vardır. Bu sonuçların kümesine *mümkün deney sonuçları uzayı* denir. Bunu Ω ile gösteriyoruz. Mümkün bir deney sonucunun gerçekleşmesi gözlem yolu ile saptanabilen bir olaydır. Rasgele-sonuçlu deneylere örnek olarak aşağıda belirtilen deneyleri inceleyelim.

1. deney: Yazı-Tura Oyunu

Parayı atmanın iki ayrı olası sonucu vardır. Bunlar "yazı gelmesi" veya kısaca Y ve "tura gelmesi" veya kısaca T'dir. Buna göre mümkün deney-sonuçları uzayı $\Omega = \{Y, T\}$ olur. Deneyi yapmadan önce hangi sonucun elde edileceğini kestiremeyiz. Ancak bu sonucun Ω'nın bir öğesi (yani Y veya T) olacağını önceden biliriz.

2. deney: Tekrarlı Yazı-Tura Oyunu

Bir paranın n kez arka arkaya atılmasından ibaret olan deneyde $n = 2$ durumunda $\Omega = \{<Y, Y>, <Y, T>, <T, Y>, <T, T>\}$ olur. Dikkat edilirse Ω'nın her öğesi bir sıralanmış ikilidir. Kısalık amacıyla $\Omega = \{YY, YT, TY, TT\}$ yazıyoruz. Sıralanmış ikilinin birinci üyesi ilk atımın sonucu, ikinci üyesi de ikinci atımın sonucudur. Tekrarlı yazı-tura oyununda paranın n kez atılmasını, aynı deneyin n kez tekrarlanması olarak değil, bir tek deney olarak sayıyoruz.

3. deney: Zar Oyunu

Bir tek zarın bir kez atılmasından ibaret olan deneyde $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olur. Zarın bir tarafının daha ağır olması (yani hileli olması) durumu değiştirmez.

4. deney: Radyoaktif Bir Cismin Çıkardığı Taneciklerin Sayısı

α - ışınları yayan *m* kütlesinde radyoaktif bir cismin bir saniyede yaydığı α- taneciklerini saymaktan ibaret olan deneyde, N radyoaktif kütlenin atomlarının toplam sayısı olduğunda $\Omega = \{0, 1, 2, ..., N\}$'dir. (Her atomun parçalandığında tam bir adet α- taneciğinin yayınlandığını kabul ediyoruz.)

İmdi belli bir deneyin sonucunun Ö gibi belli gözlenebilir özelliği olup olmadığı sorusunu yanıtlamak istiyoruz. Ω sayısına ait mümkün sonuçların Ö özelliğini taşıyıp taşımadığını önceden bildiğimizi kabul ediyoruz. Dolayısıyla

(1) $\{x: x \in \Omega \wedge x, \text{Ö özelliğini taşır}\}$

öbekleniminin öğelerini bildiğimizi söyleyebiliriz. (1)'in gösterdiği kümeyi $K_{Ö}$ veya kısaca K ile gösteriyoruz.

Buna göre

(2) x sonucunun Ö özelliği var mıdır?

sorusu

(3) $x \in K_{Ö}$?

sorusuna indirgenir.

Tersine Ω'nin K gibi her alt kümesi deney sonuçlarının bir özelliğini, K'nın öğesi olma özelliğini dile getirir. Bundan böyle sonuçların özelliklerinden söz edecek yerde sonuç kümelerinden söz edeceğiz.

İmdi K bir sonuç kümesi olduğunda deney sonucunun K'ya ait olup olmadığını yanıtlamak için (yani deney sonucunun K'nın karşılığı olan bir özelliği taşıyıp taşımadığını saptamak için) deneyi n kez (ön görülen aynı koşullarda) tekrarlayıp deney sonuçlarının dizisini buluruz. Elde edilen deney sonuçlar dizisi

(4) $x_1, x_2, \ldots, x_n$

olsun. Örneğin bir zarı 18 kez atalım. Elde edilen sonuç dizisi

(5) 5, 4, 4, 1, 2, 1, 6, 6, 5, 3, 3, 1, 6, 5, 4, 6, 2, 2

biçiminde olsun. Dikkat edilirse bu dizide 1, 2, 4, 5 sonuçları üçer kez, 3 sonucu iki kez ve 6 sonucu dört kez geçmektedir. Bu durumda söz gelişi çift sayı gelme özelliğinin durumunu araştıralım. Bu özelliğin karşılığı olan küme K = {2, 4, 6} kümesidir. S_K^n (5) dizisinde geçen K kümesinin öğe sayısı olsun. 2 sonucu üç kez, 4 sonucu üç kez ve 6 sonucu dört kez geçtiğinden, $S_K^n = 3 + 3 + 4 = 10$ elde edilir. S_K^n /n oranına K kümesinin öğelerinin (5) dizisinde *göreli sıklık*'ı denir. Bu da f_K^n ile gösterilir. O halde:

(6) $f_K^n = S_K^n / n$.

Buna göre örneğimizde $f_K^n = 10/18$'dir.

$K \subseteq \Omega$ olduğundan, f_K^n göreli sıklığı n ile birlikte değişebilir. Ancak n sayısı artınca, f_K^n daki değişimler gittikçe azalırsa, f_K^n bir limit değere yaklaşır. f_K^n nın limit değerine (öyle bir değer varsa) K kümesinin ve dolayısıyla zarın çift sayı gelmesi olasılığının veya *olasılık derecesi* denir. Bu olasılığı Ol(K) ile gösteriyoruz. Ol(K), K kümesinin fiziksel olasılığıdır.

(7) $Ol(k) = \lim_{n\to\infty} f_K^n = \lim_{n\to\infty} S_K^n / n$

elde edilir. K kümesine olay da denir. Fiziksel olasılık bir olayın gerçekleşme olasılığıdır. K bir olay olduğunda K olayının gerçekleşmesi deney sonucunun K'nın öğesi olması demektir.

f_K^n göreli sıklığı hep 0 ile 1 arasındadır. Eğer (4) sonuçlar dizisinde K'nın hiçbir öğesi geçmezse $f_K^n = 0$ olur. Tersine (4) dizisinin her öğesi K'nın öğesi ise $f_K^n = 1$ olur. Belirli sonuçlu deneyde sonucun birim kümesinin göreli sıklığı her n için 1'e eşittir. O halde bu birim kümesinin olasılığı da 1'dir.

Her öğesi Ω'ya ait birim kümelerine *basit olay,* Ω'nın birden çok öğeli alt kümelerine de bileşik olay denir. Örneğin zar oyununda 2 gelmesi olayı bir basit olaydır. Nitekim bu olay {2} kümesi ile dile getirilir. Buna karşılık çift sayı gelmesi olayı {2, 4, 6} kümesi ile dile getirildiğinden bir bileşik olaydır. $\varnothing$ olayı ne basit ne de bileşiktir. Hiçbir deney sonucu $\varnothing$ kümesine ait olmadığından $\varnothing$'ye ait olasılıkça *imkânsız* olay denir. Öte yandan her deney sonucu Ω'ya ait olduğundan Ω'ya *kesin olay* denir.

Her bileşik olay bazı basit olayların birleşimine eşittir. Nitekim

(8) $K = \{W_1, W_2, ..., W_n\}$

olsun. O zaman

(9) $K = \{W_1\} \cup \{W_2\} \cup ... \cup \{W_n\}$

olur. Örneğin zar oyununda çift sayı gelme özelliğinin dile getiren {2, 4, 6} kümesi $\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$'ya eşittir.

ALIŞTIRMALAR

İki tekrarlı yazı-tura oyununun 12 kez tekrarlanmasından elde edilen sıralanmış ikililer dizisi TH, HH, TT, HT, TH, TH, HH, TT, TT, TH, HH, HT olsun. K = {HH, HT, TH} olduğunda aşağıdaki göreli sıklıkları hesaplayınız.

1. f_{HH}^{12}
2. f_{HT}^{12}
3. f_{TH}^{12}
4. f_{K}^{12}

16.2.2 Aksiyomatik Olasılık Kuramı

§16.2.1'de tanımlanan Ol birli işlem işareti *olasılık fonksiyonu* veya *olasılık ölçüsü* denilen bir fonksiyonu tanımlar. Fonksiyonun tanım alanı GΩ, yani Ω deney sonuçları uzayının güç kümesidir. Fonksiyonun değer alanı ise 0 ile 1 arasındaki reel sayılar kümesidir.

(1) $Ol(K) = \lim_{n\to\infty} f_K^n$

tanımından Ol'un şu üç özelliği taşıdığı ortaya çıkar.

(i) $(K \subseteq \Omega \rightarrow Ol(K) \geq 0)$

(ii) $Ol(\Omega) = 1$

(iii) $[(K \subseteq \Omega \wedge L \subseteq \Omega \wedge K \cap L = \varnothing \rightarrow Ol(K \cup L) = Ol(K) + Ol(L)]$

Nitekim her n pozitif tam sayısı için

(i') $f_K^n \geq 0$

(ii') $f_\Omega^n = 1$

(iii') $K \cap L = \varnothing \rightarrow f_{K\cup L}^n = f_K^n + f_L^n$

olur.

(i)'i şöyle haklı gösteriyoruz: $f_K^n = S_K^n / n$. n bir pozitif tamsayı ve S_K^n bir doğal sayıdır. $S_K^n = 0$ ise $f_K^n = 0$ olur. $S_K^n \neq 0$ ise $S_K^n > 0$ olup $S_K^n / n > 0$ olur. O halde $S_K^n / n \geq 0$. Dolayısıyla $f_K^n \geq 0$.

(ii)'yi şöyle haklı gösteriyoruz: $f^n_\Omega = S^n_\Omega /n$. Oysa $S^n_\Omega = n$. Nitekim deney sonuçları dizisinin her öğesi Ω'ya aittir. O halde $f^n_\Omega = S^n_\Omega /n = n/n = 1$ olur.

(iii)'yi şöyle haklı gösteriyoruz. $K \cap L = \varnothing$ olsun. $f^n_{K\cup L} = S^n_{K\cup L}/n$. $K \cap L = \varnothing$ ise K ile L ayrık olup deney sonuçlarındaki K'ya ait öğelerle L'ye ait öğeler ayrık kümeler oluşturur. O halde $S^n_{K\cup L} = S^n_K + S^n_L$. Dolayısıyla $f^n_{K\cup L} = S^n_{K\cup L}/n = (S^n_K + S^n_L)/n = S^n_K/n + S^n_L/n = f^n_K + f^n_L$ olur.

İmdi (i), (ii), (iii) önermeleri olasılık değişmezini ve onun dile getirdiği olasılık fonksiyonunun konu edilen kuramının aksiyom sistemini oluşturur. Bu aksiyom sisteminin belirlediği kurama *aksiyomatik olasılık kuramı* denir. (i), (ii), (iii) aksiyomlarına *Kolmogorov aksiyomları* denir. (iii) aksiyomuna da *toplama aksiyomu* denir.

(i), (ii), (iii) aksiyomlarından oluşan Kolmogorov aksiyom sistemi soyut olarak şöyle belirlenebilir. Ω boş olmayan herhangi sonlu bir küme, GΩ Ω'nın güç kümesi, Ol da Ol: GΩ → [0, 1] biçiminde bir fonksiyon olsun. [0, 1], 0 ile 1 arasında bütün reel sayıların kümesidir.

(2) $[0, 1] = \{x: x \text{ bir reel sayıdır} \wedge 0 \leq x \wedge x \geq 1\}$.

Eğer Ol fonksiyonu (i), (ii), (iii) Kolmogorov aksiyomlarına uyuyorsa

(3) $\langle \Omega, G\Omega, Ol \rangle$

sıralanmış üçlüsüne bir *olasılık uzayı* denir. Ω kümesine *örneklem uzayı* denir. (Mümkün sonuçlar uzayı, soyut örneklem uzayının özel bir fiziksel yorumudur.)

Burada yalnız sonlu örneklem uzaylarını göz önüne alacağız. Sonsuz örneklem uzayları durumunda olasılık uzayı tanımı ve (iii) Kolmogorov aksiyomu şöyle değişir.

Ω boş olmayan herhangi bir küme olduğunda $A \subseteq G\Omega$ olsun. Eğer

1. $\Omega \in A$

2. $X \in A \rightarrow X' \in A$

3. $X_1, X_2, X_3, ..., \in A \rightarrow \cup \{X_1, X_2, X_3, ...\} \in A$

olursa A'ya Ω'nın bir *σ-alanı (sigma alanı)* denir.

Ol, Ol: $A \rightarrow [0, 1]$ biçiminde bir fonksiyon ise, yani $X \in A$ olduğunda Ol(X), 0 ile 1 arasında bir reel sayı ise Ol aşağıdaki dört aksiyoma uyarsa

$<\Omega, A, Ol>$

sıralanmış üçlüsüne bir olasılık uzayı denir.

(i') $(X \in A \rightarrow Ol(X) \geq 0)$

(ii') $Ol(\Omega) = 1$

(iii') $(X \in A \wedge Y \in A \wedge X \cap Y = \varnothing \rightarrow Ol(X \cup Y) = Ol(X) + Ol(Y)$

(iv) $X_1, X_2, X_3, ..., \in A$ ve $X_i \cap X_y = \varnothing$ $(i, j = 1, 2, 3, ..., i \neq j)$ ise,

$$Ol \cup \{X_1, X_2, X_3, ...\} = \sum_{i=1}^{\infty} Ol(X_i)$$

$$(\sum_{i=1}^{\infty} Ol(X_i) = Ol(x_1) + Ol(X_2) + Ol(X_3 + ...)$$

Ω örneklem uzayını rasgele-sonuçlu deneylere ilişkin deney sonuçları uzayı olarak ve Ol olasılık fonksiyonunu göreli sıklık limiti olarak yorumlamakla soyut olasılık uzayının bir fiziksel yorumlamasını yaptık.

Ω sonsuz ise, $G\Omega$ genellikle Ω'nın bir σ- alanı değildir. Dolayısıyla Ω ise $<\Omega, G\Omega, Ol>$ bir olasılık uzayı olmayabilir. Oysa Ω sonlu ise $G\Omega$ her zaman bir σ-alanı olur. Böylece Ω sonlu olduğunda $<\Omega, G\Omega, Ol>$ sıralanmış üçlüsünü olasılık uzayı olarak kabul edebiliyoruz.

16.3 ÖNERMELER MANTIĞINDA NİCEL OLASILIK

16.3.1 Önermeler Mantığında Aksiyomatik Olasılık Kuramı

Önermeler mantığına dayanan belli bir dili göz önüne alalım. Bu dilde $p_1, ..., p_n$ gibi n tane atomsal önerme harfi ve beş temel önerme eklemi ile T ile $\perp$ sıfırlı önerme eklemlerinin bulunduğunu kabul ediyoruz. Önerme

harfleri belli bazı yüklemlerden ve adlardan oluşan atomsal önermelerin kısaltması olabilir. Örneğin p, Fa'nın q'da Fb'nin kısaltması olsun. Böylece atomsal önermeleri p ile q olan bir dil elde ederiz. Bu dili D_2 ile gösteriyoruz. Genel olarak n tane atomsal önermeye dayanan dili D_n ile gösteriyoruz.

D_n dilinin *te-tüm*'lerini, yani temel önermelerden oluşan tümel-evetlemelerini göz önüne alalım. Bir te-tümde aynı önerme harfi birden çok kez geçebilir. Örneğin

(1) $p \wedge q \wedge p$

ile

(2) $p \wedge q \wedge \sim p$

te-tümlerinde p iki kez geçiyor. (1) te-tümü

(3) $p \wedge q$

ya, (2) te-tüm'ü ise $\perp$'ya indirgenebilir. *İndirgenmiş te-tüm* içindeki her önerme harfinin yalnız bir kez geçtiği te-tüm demektir. Örneğin (3) bir indirgenmiş te-tümdür. D_n dilinde n tane atomsal önerme vardır. Dolayısıyla D_n dilindeki en uzun indirgenmiş te-tüm tam n tane temel önermeden oluşur. En uzun indirgenmiş te-tüme *durum betimlemesi* denir. Örneğin D_2 dilinin durum betimlemeleri

(4) $p \wedge q$, $p \wedge \sim q$, $\sim p \wedge q$, $\sim p \wedge \sim q$

indirgenmiş te-tümleridir.

İmdi farklı durum betimlemelerinin tikel-evetlemesine *tikel-evetlemeli tam yasal biçim* veya kısaca *VTY* diyoruz.

(5) $(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$

Önermesi D_2 dilinin bir VTY'sidir.

Her önerme bir tek VTY ile eşdeğerdir. Öte yandan D_n dilinin önermeleri arasındaki "$\equiv$" işaretinin gösterdiği eşdeğerlik bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Nitekim

(6) $A \equiv A$ ("$\equiv$" yansımalıdır)

(7) $A \equiv B \rightarrow B \equiv A$ ("$\equiv$" bakışımlıdır)

(8) $(A \equiv B \wedge B \equiv C) \rightarrow A \equiv C$ ("$\equiv$" geçişlidir)

Dolayısıyla D_n, D_n dilindeki önermelerin kümesini gösterirse, "$\equiv$" nın D_n kümesinde bir denklik bağıntısı olduğunu söyleyebiliriz. O halde eşdeğerlik bağıntısı D_n kümesini denklik öbeklerine böler. Her denklik öbeğinin temsilcisi olarak bir ΛTY seçebiliriz. Nitekim farklı ΛTY'ler eşdeğer değildir. Eşdeğer önermelerin ise aynı bir ΛTY'si vardır. A önermesinin temsil ettiği denklik öbeği $[A]_{\equiv}$ dir.

(9) $[A]_{\equiv} = \{B: A \equiv B\}$

A, D diline ait herhangi bir önerme olduğunda, VTY(A), A'nın VTY'si olsun. O zaman

(9') $[A]_{\equiv} = [VTY(A)]_{\equiv}$

elde edilir. Yani A ile eşdeğer olan önermelerin kümesi, VTY(A) ile eşdeğer olan önermelerin kümesiyle özdeştir.

VTY(A)'nın ana bileşenlerinin oluşturduğu kümeyi kü(A) olarak gösteriyoruz. kü(A), durum betimlemelerinden oluşan bir kümedir. Dikkat edilirse $[A]_{\equiv}$ denklik öbekleri ile kü(A) arasında bire-bir karşılık vardır. Nitekim A ile B iki önerme olduğunda A ile B'ya eşdeğerdir ya da değil. Eğer A ile B eşdeğerse $[A]_{\equiv} = [B]_{\equiv}$ ve kü(A) = kü(B) olur. Eğer A ile B eşdeğer değilse $[A]_{\equiv} \neq [B]_{\equiv}$ ve kü(A) ≠ kü(B) olur.

(10) kü(A) = kü[VTY(A)]

D gibi bir dilin bütün durum betimlemelerinin kümesini Ω ile gösteriyoruz. O zaman

(10') kü (T) = Ω

elde edilir. Nitekim Ω'nın bütün öğelerinin tikel evetlemesi bir totolojidir. Her totoloji ise T ile eşdeğerdir. Eşdeğer önermelerin aynı VTY'si vardır. O halde T'nin VTY'si Ω'nın bütün öğelerinin tikel evetlemesidir. Dolayısıyla kü(T) = Ω, öte yandan

(11) kü(⊥) = ∅

Nitekim her tutarsız önerme $\perp$ ile eşdeğerdir. Tutarsız önermenin VTY'si boştur. O halde $\perp$'nin VTY'si de boştur. Dolayısıyla kü($\perp$) = $\varnothing$.

(12) $A \models B \rightarrow$ kü(A) $\subseteq$ kü(B)

Nitekim

(13) $(A \models B) \leftrightarrow (VTY(A) \models VTY(B))$

(14) $(VTY(A) \models VTY(B)) \leftrightarrow$ kü(A) $\subseteq$ kü(B)

(15) kü(A$\wedge$B) = kü(A) $\cap$ kü(B)

Nitekim

(16) kü(VTY (A$\wedge$B)) = kü(VTY(A)) $\cap$ kü(VTY(B))

(17) kü(A$\vee$B) = kü(A) $\cup$ kü(B)

Nitekim

(18) kü(VTY(A$\vee$B)) = kü(VTY(A) $\cup$ kü(VTY (B))

İmdi D gibi önermeler mantığına dayanan bir dildeki Ω durum betimlemeleri kümesini örneklenim uzayı sayarak

(19) <Ω, GΩ, Ol*>

biçiminde bir olasılık uzayı kurabiliriz. GΩ kümesinin her öğesi Ω'nın bir alt kümesi, yani durum betimlemelerinin bir kümesidir.

A, D dilinin herhangi bir önermesi olduğunda kü(A) $\subseteq \Omega$'dır. Dolayısıyla kü(A) $\in$ GΩ. O halde kü(A)'nın Ol*(A) gibi belli bir olasılığı vardır. Amacımız A önermesinin belli bir olasılığı olmasını sağlamaktır. Bu amaçla A'nın olasılığı olan Ol(A)'yı şöyle tanımlarız.

(20) Ol(A) = Ol*(kü(A))

(20) tanımına dayanarak D dilinin her önermesinin olasılık derecesi tanımlanmış olur. Öte yandan X $\subseteq$ GΩ olduğunda, X kümesinin karşılığı olan D diline ait bir önerme vardır. Bu önerme X'i oluşturan durum betimlemelerinin tikel evetlemesidir. Bu ise bir ΛTY'dir. Bu ΛTY'ye X kümesinin belirlediği ΛTY diyor ve ΛTY(X) olarak gösteriyoruz. (20) tanımı gereği

(21) Ol(ΛTY(X)) = Ol*(X)

elde edilir. Nitekim (20) gereği

(22) Ol(ΛTY(X)) = Ol*(kü(ΛTY(X))).

Oysa

(23) kü(ΛTY(X)) = X

doğrudur. Örneğin D_2 dilinde

(24) Ω = {p∧q, p∧~q, ~p∧q, ~p∧~q}

dur. İmdi

(25) X = {p∧q, ~p∧q, ~p∧~q}

olsun. O zaman

(26) ΛTY(X) = (p∧q)∨(~p∧q)∨(~p∧~q),

(27) kü(VTY(X)) = {p∧q, ~p∧q, ~p∧~q}

elde edilir.

(20) tanımı gereği Ol fonksiyonu Kolmogorov aksiyomlarının benzeri olan şu üç aksiyoma uyar.

(Ai) Ol(A) ≥ 0

A geçerli ise, Ol(A) = 1

(Aii) Ol(T) = 1

(Aiii) A∧B tutarsız ise, Ol(A∨B) = Ol(A) + Ol(B)

(Ai)'i şöyle haklı gösteriyoruz: (20) tanımı gereği, Ol(A) = Ol*(kü(A)). Oysa kü(A) ∈ GΩ. <Ω, GΩ, Ol*> bir olasılık uzayı olduğundan Kolmogorov aksiyomlarına uyar. O halde Ol*(kü(A)) ≥ 0. Dolayısıyla Ol(A) ≥ 0.

(Aii)'yi şöyle haklı gösteriyoruz: A geçerli olsun. Ol(A) = Ol*(kü(A)). Oysa kü(A) = Ω. Nitekim bir totolojinin VTY'nin ana bileşenleri, bütün durum betimlemelerinden oluşur. O halde kü(T)=Ω'dır.

(Aiii)'yi şöyle haklı gösteriyoruz. $A \wedge B$ tutarsız olsun. O zaman kü$(A \wedge B) = \varnothing$ olur, çünkü VTY$(A \wedge B) = \varnothing$. O halde $<\Omega, G\Omega, Ol^*>$ olasılık uzayı olduğundan,

(28) $Ol^*(kü(A) \cup kü(B)) = Ol^*(kü(A)) + Ol^*(kü(B))$

elde edilir. Oysa $Ol^*(kü(A)) \vee Ol^*(kü(B)) = Ol^*(kü(A \vee B))$ $Ol(A \vee B)$ $Ol^*(kü(A)) = Ol(A)$ ve $Ol^*(kü(B)) = Ol(B)$. O halde $Ol(A \vee B) = Ol(A) + Ol(B)$ elde edilir.

16.3.2 Önermeler Mantığında Aksiyomatik Olasılık Kuramının Başlıca Teoremleri

Ol olasılık fonksiyonuna ilişkin teoremleri Ol(A)'yı $Ol^*(kü(A))$'ya indirgemeden, doğrudan doğruya Ol'a ilişkin Kolmogorov aksiyomlarından türeteceğiz.

T1 $Ol(\sim A) = 1 - Ol(A)$

İspat: $A \wedge \sim A$ tutarsızdır. O halde (Aiii) aksiyomu gereği. $Ol(A \vee \sim A) = Ol(A) + Ol\sim(A)$. Oysa $A \vee \sim A$ geçerlidir. O halde A2 gereği $Ol(A \vee \sim A) = 1$. O halde $1 = Ol(A) + Ol(\sim A)$. Dolayısıyla $Ol(\sim A) = 1 - Ol(A)$,

T2 A tutarsız ise $Ol(A) = 0$

İspat: A tutarsız olsun. O zaman ~A geçerli olur. O halde Aii gereği $Ol(\sim A) = 1$. T2 gereği $Ol(\sim A) = 1 - Ol(A)$. O halde $Ol(A) = 1 - Ol(\sim A) = 1 - 1 = 0$ olur.

T3 $0 \leq Ol(A) \leq 1$

Ai gereği $0 \leq Ol(A)$. O halde yalnız $Ol(A) \leq 1$ olduğunu göstermeliyiz. Yine Ai gereği $Ol(\sim A) \geq 0$. O halde T1 gereği $1 - Ol(A) \geq 0$. Dolayısıyla $Ol(A) \leq 1$ elde edilir.

T4 $A \models B$ ise $Ol(A) \leq Ol(B)$

İspatı: $A \models B$ ise $A \rightarrow B$ geçerlidir. Oysa $A \rightarrow B \equiv \sim A \vee B \equiv \sim(A \wedge \sim B)$. O halde $\sim(A \wedge \sim B)$ geçerli olup $A \wedge \sim B$ tutarsızdır. O zaman da Aiii gereği $Ol(A \vee \sim B) = Ol(A) + Ol(\sim B)$ olur. T1 gereği de $Ol(A \vee \sim B) = Ol(A) + 1 - Ol(B)$ elde edilir. T3 gereği $Ol(A \vee \sim B) \leq 1$. O halde $Ol(A) + 1 - Ol(B) \leq 1$. Dolayısıyla $Ol(A) - Ol(B) \leq 0$. O halde $Ol(A) \leq Ol(B)$.

T5. $A \equiv B$ ise, $Ol(A) = Ol(B)$

İspat: $A \equiv B$ ancak ve ancak $A \models B$ ve $B \models A$. T4 gereği $A \models B$ ise $Ol(A) \leq Ol(B)$. $B \models A$ ise $Ol(B) \leq Ol(A)$. O halde $Ol(A) = Ol(B)$.

T6. $A_1,..., A_n$ verildiğinde $A_i \wedge A_j$ $(i \neq j)$ tutarsız ise $Ol(A_1 \vee ... \vee A_n) = Ol(A_1) + ... + Ol(A_n)$.

İspat: Teorem, Aiii gereği $n = 2$ durumu için doğrudur. O halde n sayısı için doğru olduğunu kabul edip $n + 1$ için de doğru olduğunu gösterelim. B, $A_1 \vee ... \vee A_n$ iken $B \wedge A_{n+1}$ tutarsız olsun. O halde Aiii gereği $Ol(B \vee A_{n+1}) = Ol(B) + Ol(A_{n+1})$. Oysa $Ol(B) = Ol(A_1) + ... + Ol(A_n)$. O halde $Ol(A_1 \vee ... \vee A_n \vee A_{n+1}) = Ol(A_1) + ... + Ol(A_n) + Ol(A_{n+1})$.

T7. (*Genel toplama yasası*) $Ol(A \vee B) = Ol(A) + Ol(B) - Ol(A \wedge B)$

İspat: $A \vee B = (A \wedge B) \vee (A \wedge \sim B) \vee (\sim A \wedge B)$. Oysa bu üç ana bileşen ikişer ikişer tutarsızdır. O halde T5 ve T6 gereği $Ol(A \vee B) = Ol(A \wedge B) + Ol(A \wedge \sim B) + Ol(\sim A \wedge B)$ olur. İmdi $A \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge \sim B)$, $B \equiv (A \wedge B) \vee (\sim A \wedge B)$. Aiii gereği $Ol(A) = Ol(A \wedge B) + Ol(A \wedge \sim B)$ ve $Ol(B) = Ol(A \wedge B) + Ol(\sim A \wedge B)$ elde edilir. (Nitekim $A \wedge B$ ile $A \wedge \sim B$ ve $A \wedge B$ ile $\sim A \wedge B$ tutarsızdır.)

O halde

(1) $Ol(A \wedge \sim B) = Ol(A) - Ol(A \wedge B)$

(2) $Ol(\sim A \wedge B) = Ol(B) - Ol(A \wedge B)$

elde edilir. Buna göre

$$Ol(A \vee B) = Ol(A \wedge B) + Ol(A \wedge \sim B) + Ol(\sim A \wedge B) = Ol(A \wedge B) + Ol(A) - Ol(A \wedge B) + Ol(B) - Ol(A \wedge B) = Ol(A) + Ol(B) - Ol(A \wedge B)$$

sonucuna varılır.

T8. *Genelleşmiş genel toplama teoremi*

$$Ol(A_1 \vee ... \vee A_n) = \sum_{i=1}^{n} Ol(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} Ol(A_i \wedge A_j) + ... +$$

$$(-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} Ol(A_{i_1} \wedge ... \wedge A_{i_k}) + ... + (-1)^{n+1} Ol(A_1 \wedge ... \wedge A_n).$$

Örneğin

(3) $Ol(A \vee B \vee C) = Ol(A) + Ol(B) + Ol(C) - Ol(A \wedge B) - Ol(B \wedge C) - Ol(A \wedge C) + Ol(A \wedge B \wedge C)$.

T9. $Ol(A) = 0$ ise, $Ol(A \wedge B) = 0$

İspat: $A \wedge B \models A$. O halde T4 gereği $Ol(A \wedge B) \leq Ol(A)$. $Ol(A) = 0$ ise $Ol(A \wedge B) \leq 0$ olur. Oysa Ai gereği $Ol(A \wedge B) \geq 0$. $Ol(A \wedge B) = 0$ elde edilir.

T10. $Ol(A) = 1$ ise, $Ol(A \wedge B) = Ol(B)$

İspat: $Ol(A) = 1$ olsun. O zaman $Ol(\sim A) = 0$ olup, T9 gereği $Ol(\sim A \wedge B) = 0$ olur. T7'nin ispatında belirttiğimiz gibi, $Ol(\sim A \wedge B) = Ol(B) - Ol(A \wedge B) = 0$. O halde $Ol(A \wedge B) = Ol(B)$ elde edilir.

T11. $Ol(A_1 \wedge ... \wedge A_n) \neq 0 \rightarrow [Ol(A_1) \neq 0 \wedge ... \wedge Ol(A_n) \neq 0]$

İspat: T9 gereği $[Ol(A_1) = 0 \vee ... \vee Ol(A_n) = 0] \rightarrow Ol(A_1 \wedge ... \wedge A_n) = 0$ elde edilir. O halde $\sim[Ol(A_1 \wedge ... \wedge A_n) = 0] \rightarrow \sim[Ol(A_1) = 0 \wedge ... \wedge Ol(A_n) = 0]$ ve dolayısıyla $Ol(A_1 \wedge ... \wedge A_n) \neq 0 \rightarrow Ol(A_1) \neq 0 \wedge ... \wedge Ol(A_n) \neq 0$ elde edilir.

$Ol(A) = 1$ veya $Ol(A) = 0$ olduğunda, içinde A bileşeninin geçtiği B(A) biçimindeki bir önermenin olasılığı şöyle hesaplanır.

(i) $Ol(A) = 1 \rightarrow [Ol(B(A)) = Ol(B(T))]$

(ii) $Ol(A) = 0 \rightarrow [Ol(B(A)) = Ol(B(\bot))]$

İspat: B önermesinin, A'ya göre bir VY'sini bulalım. O zaman $B \equiv (A \wedge C) \vee (\sim A \wedge D)$ biçiminde bir eşdeğerlik elde edilir. Örneğin B,

(4) $[(p \leftrightarrow \sim q) \vee p] \rightarrow [(p \leftrightarrow \sim q) \wedge p \wedge q]$

ve A önermesi $p \leftrightarrow \sim q$ olsun. O zaman (4),

(5) $(A \vee p) \rightarrow (A \wedge p \wedge q)$

biçiminde olur. (5)'in A'ya göre bir VY'sini bulup B'yi dönüştürelim.

(6) $\sim(A \vee p) \vee (A \wedge p \wedge q) \equiv (\sim A \wedge \sim p) \vee (A \wedge p \wedge q) \equiv [A \wedge (p \wedge q)] \vee [(\sim A) \wedge (\sim p)]$

İmdi $(A \wedge C)$ ile $(\sim A \wedge D)$ tutarsız olduğundan, Aiii gereği

$Ol(B) = Ol(A \wedge C) + Ol(\sim A \wedge D)$

elde edilir. Eğer Ol(A) = 0 ise Ol(~A)= 1 olur. O zaman T9 gereği Ol(A∧C)=0 ve T10 gereği Ol(~A∧D) = Ol(D) olur. Dolayısıyla

Ol(B) = Ol(D)

elde edilir. Öte yandan eğer Ol(A) = 1 ise Ol(~A) = 0 olur. O zaman T9 gereği Ol(~A∧D) = 0 ve T10 gereği Ol(A∧C) = Ol(C) olur. Dolayısıyla

Ol(B) = Ol(C)

elde edilir.

İmdi Ol(A) = 0 durumunda

B(⊥) = (⊥∧C) ∨ (~⊥∧D) ≡ ⊥∨(T∧D) ≡ D elde edilir. O halde Ol(B) = Ol(B(⊥)) olur.

Öte yandan Ol(A) = 1 ise B(T)=(T∧C)∨(~T∧D) ≡ C∨(⊥∧D)≡C elde edilir. Dolayısıyla Ol(B(T)) = Ol(C) olur.

16.3.3 Koşullu Olasılık

(1) B olduğunda A'nın olasılığı a'dır.

biçimindeki koşullu nicel olasılık önermesi

(2) Ol(A/B) = a

veya

(3) Ol(B, A) = a

biçiminde dile getirilir. Burada (2) yazılış biçimini kullanacağız. Ol(A/B)'ye *A önermesinin B'ye göre koşullu olasılığı* denir. "Ol(/)" işareti, *koşullu olasılık fonksiyonunu* gösteren bir ikili işlem işaretidir.

İmdi Ol(A/B) şöyle tanımlanır.

(4) Ol(A/B) = Ol(A∧B) / Ol(B), Ol(B) > 0

Dikkat edilirse Ol(A∧B)/Ol(B)'nin belli bir reel sayıyı dile getirmesi için Ol(B)>0 olmalı. Ol(B) = 0 ise Ol(A/B) tanımlı değildir. Yani Ol(B) = 0 durumunda Ol(A/B)'nin değeri belirsizdir. (4) tanımına dayanarak koşullu olasılığa ilişkin aşağıdaki teoremler ispatlanabilir.

T12. Ol(B) ≠ 0 ise, Ol(A/B) ≥ 0

İspat: Ol(A/B) = Ol(A∧B) / Ol(B) ve Ol(B) > 0 Ai gereği Ol(A∧B) ≥ 0. O halde Ol(A∧B)/Ol(B) ≥ 0.

T13. A geçerli ve Ol(B) > 0 ise, Ol(A/B) = 1.

İspat: Ol(A/B) = Ol(A∧B)/Ol(B). A geçerli olduğundan Ol(A) = 1. O halde T9 gereği Ol(A∧B) = Ol(B). Dolayısıyla Ol(A∧B)/Ol(B) = 1.

T14. $A_1 \wedge A_2$ tutarsız ve Ol(B) > 0 ise, $Ol(A_1 \vee A_2/B) = Ol(A_1/B)+Ol(A_2/B)$.

İspat: $A_1 \wedge A_2$ tutarsız ve Ol(B) > 0 olsun. $(A_1 \wedge B) \wedge (A_2 \wedge B)$ tutarsızdır. O halde Aiii gereği $Ol((A_1 \wedge B) \vee (A_2 \wedge B)) = Ol(A_1 \wedge B)+Ol(A_2 \wedge B)$. Dolayısıyla $Ol((A_1 \vee A_2)/B) = Ol((A_1 \vee A_2) \wedge B) / Ol(B) = Ol((A_1 \wedge B) \vee (A_2 \wedge B)) / Ol(B) = [Ol(A_1 \wedge B) + Ol(A_2 \wedge B)] / Ol(B) = Ol(A_1 \wedge B)/ Ol(B) + Ol(A_2 \wedge B)/Ol(B) = Ol(A_1/B) + Ol(A_2/B)$.

İmdi B, önermeler mantığı dilinin seçilmiş belli bir önermesi olsun. O zaman Ol_B gibi bir fonksiyonu

(5) $Ol_B(A) = Ol(A/B)$

biçiminde tanımlayarak Ol yerine geçen yeni bir olasılık fonksiyonu veya olasılık ölçüsü olarak kullanabiliriz. Niteim T12, T13, T14 gereği Ol_B fonksiyonu Kolmogorov aksiyomlarına uyar. Ol olasılık fonksiyonu yerine Ol_B gibi yeni bir olasılık fonksiyonunun ortaya konulmasına koşullandırma denir. Ol fonksiyonuna ilişkin her teorem için Ol_B'ye ilişkin bir teorem vardır. Örneğin T1'e karşılık $Ol_B(\sim A) = 1 - Ol_B(A)$ teoremi vardır.

Koşullandırılmış olasılığın bazı önemli özellikleri aşağıdaki teoremlerle belirlenmiştir.

T15 $Ol(A) \neq 0 \rightarrow Ol(A/A) = 1$

İspat: Ol(A) ≠ 0 olsun. Ol(A/A) = Ol(A∧A)/Ol(A) = Ol(A)/Ol(A) = 1

T16. B geçerli ise Ol(A/B) = Ol(A).

İspat: B geçerli olsun. O zaman Ol(B) = 1 ve A∧B ≡ A olur. O zaman Ol(A/B) = Ol(A∧B) / Ol(B) = Ol(A) / Ol(B) = Ol(A) / 1 = Ol(A) olur.

T17. *Genel Çarpım Teoremi:* Ol(B) ≠ 0 ise, Ol(A∧B) = Ol(A/B) Ol(B)

İspat: Ol(A/B) = Ol(A∧B)/Ol(B)'den Ol(A∧B) = Ol(A/B) Ol(B) elde edilir.

T18. *Genelleşmemiş Genel Çarpım Teoremi*

(a) $Ol(A_1 \wedge ... \wedge A_{n-1}) \neq 0$ ise, $Ol(A_1 \wedge ... \wedge A_n) = Ol(A_1) \cdot Ol(A_2/A_1) ... Ol(A_i/A_1 \wedge ... \wedge A_{i-1}) ... Ol(A_n/A_1 \wedge ... \wedge A_{n-1})$

(b) $Ol(A_2 \wedge ... \wedge A_n) \neq 0$ ise, $Ol(A_1 \wedge ... \wedge A_n) = Ol(A_1/A_2 \wedge ... \wedge A_n) ... Ol(A_i/A_{i+1} \wedge ... \wedge A_n) .... Ol(A_n)$.

İspat:

(a) şıkkı: T11 gereği, $Ol(A_1 \wedge ... \wedge A_{n-1}) \neq 0$ ise, $Ol(A_1) \neq 0$, $Ol(A_1 \wedge A_2) \neq 0$, ..., $Ol(A_1 \wedge ... \wedge A_i) \neq 0$, ..., $Ol(A_1 \wedge ... \wedge A_{n-2}) \neq 0$.

O halde teoremdeki bütün koşullu olasılıklar tanımlanmış olur.

(b) şıkkı: $Ol(A_2 \wedge ... \wedge A_n) \neq 0$ ise, teoremdeki bütün koşullu olasılıklar tanımlanmış olur.

Örnek olarak n = 3 durumu şöyle olur:

(a) $Ol(A \wedge B) \neq 0$ ise, $Ol(A \wedge B \wedge C) = Ol(A) \cdot Ol(B/A) \cdot Ol(C/A \wedge B)$

(b) $Ol(B \wedge C) \neq 0$ ise, $Ol(A \wedge B \wedge C) = Ol(A/B \wedge C) \cdot Ol(B/C) \cdot Ol(C)$.

T19. *Bayes Teoremi: Birinci Biçim*

$Ol(B/A) = [Ol(A/B) \cdot Ol(B)] / Ol(A)$

İspat: T17 gereği, $Ol(A \wedge B) = Ol(A/B)\ Ol(B)$ ve $Ol(B \wedge A) = Ol(B/A) \cdot Ol(A)$. $Ol(A/B)\ Ol(B) = Ol(B/A) \cdot Ol(A)$. O halde $Ol(B/A) = [Ol(A/B) \cdot Ol(B)] / Ol(A)$.

T20. *Bayes Teoremi: İkinci Biçim*

$Ol(B_1 \vee ... \vee B_n) = 0$ ve $Ol(B_i \wedge B_j) = 0$ $(i \neq j)$ ise,

$$Ol(B_i/A) = \frac{Ol(A/B_i)\ Ol(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} [Ol(A/B_i)\ Ol(B_i)]}$$

İspat: T19 gereği

$$Ol(B_i/A) = \frac{Ol(A/B_i)\ .\ Ol(B_i)}{Ol(A)}$$

elde edilir. Öte yandan $Ol(B_1 \vee ... \vee B_n) = 0$ olduğunda, $Ol(A)=Ol[A \wedge (B_1 \vee ... \vee B_n)]$ $= Ol[(A \wedge B_1) \vee ... \vee (A \wedge B_n)]$ elde edilir. $Ol(B_i \wedge B_j) = 0$ olduğundan $Ol[(A \wedge B_i) \wedge (A \wedge B_j)] = 0$ $(i \neq j)$ olur. O zaman T8 genelleşmiş genel toplama yasası gereği

$$Ol[(A \wedge B_1) \vee ... \vee (A \wedge B_n)] = Ol(A \wedge B_1) + ... + Ol(A \wedge B_n) = Ol(A/B_1)\, Ol(B_1) + ... +$$

$$Ol(A/B_n)\, Ol(B_n) = \sum_{i=1}^{n} [Ol(A/B_i) \cdot Ol(B_i)]$$

elde edilir.

Bayes teoreminin ikinci biçimine *ters olasılık* teoremi veya *nedenlerin olasılığı teoremi* denir. Nitekim her B_i'yi A'nın bir mümkün nedeni sayarsak, $Ol(B_i/A)$ olasılığı, A etkisi gerçekleştiğinde B_i'nin neden olma olasılığını belirler.

16.3.4 Olasılıkların Hesaplanması

Önermeler mantığında, olasılığın aksiyom ve teoremleri yardımıyla bazı önermelerin olasılığı verildiğinde bütün öteki önermelerin olasılığını hesaplayabiliriz. Özellikle bütün durum betimlerinin olasılıkları verilmişse, bunlara dayanarak herhangi bir önermenin olasılığını hesaplayabiliriz. D_n dilinin (yani T ile $\perp$ dışındaki atomsal önermeleri $p_1,...,p_n$ olan dilin) durum betimlemeleri $B_1,...,B_{2^n}$ olsun. A herhangi bir önerme olduğunda A'nın VTY'si

(1) $B_{i_j} \vee ... \vee B_{i_k}$

biçimindedir. Oysa

(2) $i \neq j$ için $B_i \wedge B_j$ tutarsızdır.

O halde genelleşmiş genel toplama yasası gereği

(3) $Ol(B_{i_1} \vee ... \vee B_{i_k}) = Ol(B_{i_1}) + ... + Ol(B_{i_k})$

elde edilir.

(4) $Ol(B_1),..., Ol(B_{2^n})$

olasılıklarına *taban olasılıkları* diyelim. Bu taban olasılıklarına dayanarak

(5) $Ol(A) = Ol(B_{i_1}) +...+ Ol(B_{i_k})$

eşitliği gereği Ol(A)'yı hesaplayabiliriz. Taban olasılıkları bağımsız değildir. Nitekim

(6) $B_1 \vee ... \vee B_{2^n}$

VTY'si bir totolojidir. Dolayısıyla

(7) $Ol(B_1) +...+ Ol(B_{2^n}) = 1$

elde edilir. Dolayısıyla söz gelişi

(8) $1 - Ol(B_{2^n}) = Ol(B_1) +...+ Ol(B_{2^n-1})$

elde edilir. Geriye kalan 2^n-1 tane taban olasılığı birbirinden bağımsız olmakla birlikte gene de (7) koşuluna uymalıdırlar. Örneğin D_1 dilinde taban olasılıkları

(9) Ol(p), Ol(~p)

biçiminde, D_2 dilinde ise taban olasılıkları

(10) $Ol(p \wedge q)$, $Ol(p \wedge \sim q)$, $Ol(\sim p \wedge q)$, $Ol(\sim p \wedge \sim q)$

biçimindedir. D_1 dilinde Ol(p) = 0.7 olsun. O zaman Ol(~p) = 1– Ol(p) = 1–0.7 = 0.3 olur. D_1 diline ait herhangi bir önermeyi Ol(p) = 0.7 taban olasılığına dayanarak hesap edebiliriz. D_1 diline ait önerme, içinde p önerme harfinden başka önerme harfi geçmeyen bir önerme demektir. Söz gelişi

(11) $(p \rightarrow \sim p) \vee \sim p$

nin olasılığını hesaplayalım. Bu amaçla (11)'i VTY'e dönüştürüyoruz.

(12) $(p \rightarrow \sim p) \vee \sim p \equiv (\sim p \vee \sim p) \vee \sim p \equiv \sim p$

Böylece Ol(~p) = 1 – Ol(p) = 1 – 0.7 = 0.3 elde edilir.

İkinci örnek olarak D_2 dilinde

(13) $Ol(p \wedge q) = 0.1$, $Ol(p \wedge \sim q) = 0,2$, $Ol(\sim p \wedge q) = 0.3$

olsun. Buna göre D_2 diline ait

(14) $p \rightarrow (q \rightarrow \sim p)$

önermesinin olasılığını hesaplayalım. Bu amaçla (14)'ü VTY'ye dönüştürüyoruz.

(15) $p\rightarrow(q\rightarrow\sim p) \equiv \sim p\vee\sim q\vee\sim p \equiv \sim p\vee\sim q$

$\equiv [\sim p\wedge(q\vee\sim q)] \vee [(p\vee\sim p) \wedge \sim q] \equiv (\sim p\wedge q) \vee (\sim p\wedge\sim q) \vee (p\wedge\sim q) \vee (\sim p\wedge\sim q) \equiv (\sim p\wedge q) \vee (\sim p\wedge\sim q) \vee (p\wedge\sim q)$

$Ol(\sim p\wedge\sim q) = 1 - (0.1 + 0.2 + 0.3) = 1 - 0.6 = 0.4$ olduğundan

$Ol[p\rightarrow(q\rightarrow\sim p)] = Ol(\sim p\wedge q) + Ol(\sim p\wedge\sim q) + Ol(p\wedge\sim q)$

$= 0.3 + 0.4 + 0.2 = 0.9$

Çok kez taban olasılıkları yerine atomsal önermelerin olasılıkları veri olarak bilinir. Ancak D_n dilinde $Ol(p_1),...,Ol(p_n)$'nin tümünün bilinmesi, $p_1,...,p_n$'den oluşan bütün önermelerin olasılığının hesaplanması için yeterli değildir. Bunun için

(16) $Ol(p_{i_1}\wedge...\wedge p_{i_k}),\ 1\leq i_1,...,i_k \leq n$

biçimindeki bütün olasılıkların da bilinmesi gerekir. Örneğin D_1 dili için bu veriler

(17) $Ol(p)$

D_2 dili için

(18) $Ol(p), Ol(q), Ol(p\wedge q),$

D_3 dili için

(19) $Ol(p), Ol(q), Ol(r), Ol(p\wedge q), Ol(q\wedge r), Ol(p\wedge r), Ol(p\wedge q\wedge r)$

dir.

(16) biçimindeki olasılıkların değerleri bazı koşullara bağlıdır.

$p\wedge q \nvdash p$ ve $p\wedge q \models q$ olduğundan,

(20) $Ol(p\wedge q) \leq Ol(p), Ol(p\wedge q) \leq Ol(q)$

elde edilir. Öte yandan

$Ol(p \vee q) = Ol(p) + Ol(q) - Ol(p \wedge q)$

ve $Ol(p \vee q) \leq 1$ olduğundan,

$Ol(p) + Ol(q) - Ol(p \wedge q) \leq 1$

ve dolayısıyla

(21) $Ol(p \wedge q) \geq Ol(p) + Ol(q) - 1$

elde edilir.

İmdi (16) biçimindeki olasılıklar verildiğinde, verilen herhangi bir önermenin olasılığını hesaplamak için şöyle davranılır.

(i) Verilen önermeyi en kısa bir VTY'ye dönüştürürüz.

(ii) Elde edilen VTY'nin olasılığına genelleşmiş genel toplama yasasını uygularız.

(iii) Bazı bileşenleri değillenmiş olan te-tümlerin olasılığını

(22) $Ol[A \wedge (\sim p)] = Ol(A) - Ol(A \wedge p)$

kurallarına göre değillenmiş bileşeni olmayan te-tümlerin olasılığına indirgeriz.

(iv) Son olarak elde edilen değillenmiş bileşeni olmayan te-tümlerin olasılığını verilen olasılıklara dayanarak saptarız.

Örnek olarak D_2 diline ait

(23) $p \leftrightarrow \sim q$

önermesinin olasılığını

(24) $Ol(p) = 0.2$, $Ol(q) = 0.1$, $Ol(p \wedge q) = 0.1$

verilerine dayanarak hesaplayalım.

Önce (23)'ü VTY'ye dönüştürüyoruz.

(25) $p \leftrightarrow \sim q \equiv (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$

Sonra elde edilen VTY'yenin olasılığına genel toplama yasasını uyguluyoruz.

(26) $Ol[(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)] = Ol(p \wedge \sim q) + Ol(\sim p \wedge q)$

Sonra da değillenmiş bileşenleri eliyoruz.

(27) $Ol(p \wedge \sim q) = Ol(p) - Ol(p \wedge q)$

(28) $Ol(\sim p \wedge q) = Ol(q) - Ol(p \wedge q)$

Son olarak elde edilen değillenmiş bileşeni olmayan te-tümlerin olasılığını verilere dayanarak hesaplıyoruz.

(29) $Ol(p \leftrightarrow \sim q) = Ol(p) - Ol(p \wedge q) + Ol(q) - Ol(p \wedge q)$

$= Ol(p) + Ol(q) - 2Ol(p \wedge q) = 0.2 + 0.1 - (2 \times 0.1)$

$= 0.3 - 0.2 = 0.1$

Böylece $Ol(p \leftrightarrow \sim q) = 0.1$ elde edilir.

ALIŞTIRMALAR

1. $Ol(p) = 0.5$ olduğunda, $p \leftrightarrow \sim p$ önermesinin olasılığını hesaplayınız.
2. $Ol(p \wedge q) = 0.1$, $Ol(p \wedge \sim q) = 0.2$, $Ol(\sim p \wedge \sim q) = 0.1$ olduğunda, $(p \wedge \sim q) \rightarrow (\sim p \vee q)$ önermesinin olasılığını hesaplayınız.
3. $Ol(p) = Ol(q) = 0.6$, $Ol(p \wedge q) = 0.2$ olduğunda, $(\sim p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge q)$ önermesinin olasılığını hesaplayınız. Verilen olasılık değerlerinin uygun olduğunu gösteriniz.

16.3.5 Olasılıkça Bağımsızlık

(1) $A_1,...,A_n$ n tane farklı önerme olduğunda $1 \leq i_1 < i_k \leq n$ ise, $Ol(A_{i_j} \wedge ... \wedge A_{i_k}) = Ol(A_{i_1}) . ... . Ol(A_{i_n})$ olursa, $A_1,...,A_n$ önermelerinin *olasılıkça bağımsız* olduğu söylenir ve $Bğms_n (A_1,...,A_n)$ yazılır. Örneğin

(2) $Bğms_2 (A, B)$ ancak ve ancak, $Ol(A \wedge B) = Ol(A) \cdot Ol(B)$ ise

(3) $Bğms_3 (A, B, C)$ ancak ve ancak $[Ol(A \wedge B) = Ol(A) \cdot Ol(B)]$

$\wedge [Ol(A \wedge C) = Ol(A) \cdot Ol(C)] \wedge [Ol(B \wedge C) = Ol(B) \cdot Ol(C)]$

$\wedge [Ol(A \wedge B \wedge C) = Ol(A) \cdot Ol(B) \cdot Ol(C)]$ ise

T21. $Bğms_2$ (A, B) ise, $Bğms_2$ (A, ~B)

İspat: $Bğms_2$ (A, B) olsun. O zaman $Ol(A \wedge B) = Ol(A) \cdot Ol(B)$ olur. $Ol(A \wedge \sim B) = Ol(A) - Ol(A \wedge B)$. O halde $Ol(A \wedge \sim B) = Ol(A) - Ol(A) \cdot Ol(B) = Ol(A)[1 - Ol(B)] = Ol(A) \cdot Ol(\sim B)$. Böylece $Bğms_2$ (A, ~B) elde edilir.

T22 $[Ol(A) = 0 \vee Ol(A) = 1 \vee Ol(B) = 0 \vee Ol(B) = 1] \rightarrow Bğms_2$ (A, B)

İspat: Bu teorem

(4) $[Ol(A) = 0 \rightarrow Bğms_2 (A, B)] \wedge [Ol(A) = 1 \rightarrow Bğms_2 (A, B)]$
$\wedge [Ol(B) = 0 \rightarrow Bğms_2 (A, B)] \wedge [Ol(B) = 1 \rightarrow Bğms_2 (A, B)]$

ile eşdeğerdir. İmdi

(5) $Ol(A) = 0 \rightarrow Bğms_2$ (A, B)

doğrudur. Nitekim T9 gereği $Ol(A) = 0$ ise $Ol(A \wedge B) = 0 = 0 \times Ol(B) = Ol(A)\ Ol(B)$ elde edilir.

(6) $Ol(A) = 1 \rightarrow Bğms_2$ (A, B)

doğrudur. Nitekim T10 gereği $Ol(A) = 1$ ise $Ol(A \wedge B) = Ol(B) = 1 \times Ol(B) = Ol(A)\ Ol(B)$ elde edilir.

Benzer biçimde

(7) $Ol(B) = 0 \rightarrow Bğms_2$ (A, B)

ve

(8) $Ol(B) = 1 \rightarrow Bğms_2$ (A, B)

olduğu gösterilebilir.

(9) $Bğms_2$ (A, B) ve $Ol(A) \neq 0$ ve $Ol(A) \neq 1$ ve $Ol(B) \neq 0$ ve $Ol(B) \neq 1$ olduğunda, A ile B'nin *özce olasılıkça bağımsız* olduğu söylenir.

A ile B özce olasılıkça bağımsız ise,

(10) $Ol(A/B) = Ol(A)$

ve

(11) $Ol(B/A) = Ol(B)$

olur. Nitekim $Ol(A) \neq 0$ ve $Ol(B) \neq 0$ olduğundan $Ol(A/B)$ ile $Ol(B/A)$ tanımlanmıştır.

A ile B'nin *mantıkça bağımsız*, veya kısaca *bağımsız* olması A'nın B'yi ve B'nin A'yı mantıkça içermemesi demektir.

A ile B'nin *mantıkça tam bağımsız* veya kısaca tam bağımsız olması, A ile B'nin bağımsız olması, ayrıca A'nın ~B'yi ve B'nin ~A'yı içermemesi demektir. A ile B tam bağımsız ise {A, B} kümesi tutarlı olur.

T23. A ile B özce olasılıkça bağımsız ise, A ile B mantıkça tam bağımsız olur.

İspat: A ile B'nin mantıkça tam bağımsız olmadığını kabul edelim. O zaman $A \models B$ veya $A \models \sim B$ veya $B \models A$ veya $B \models \sim A$ olur. Her dört şıkkı sıra ile ele alıyoruz.

(12) $[A \models B \wedge Bğms_2 (A, B)] \rightarrow [Ol(A) = 0 \vee Ol(B) = 1]$

Nitekim $A \models B$ ve $Bğms_2 (A, B)$ olduğunu kabul edelim. O zaman $A \wedge B \equiv A$ ve $Ol(A \wedge B) = Ol(A)$ $Ol(B)=Ol(A)$. O halde $Ol(A) \neq 0$ ise $Ol(B)=Ol(A)/Ol(A)=1$ olur. Yani $Ol(A) = 0 \vee Ol(B) = 1$ elde edilir.

(13) $[A \models \sim B \wedge Bğms_2 (A, B)] \rightarrow [Ol(A) = 0 \vee Ol(B) = 0]$

Nitekim T21 gereği $Bğsm_2 (A, B) \rightarrow Bğms_2 (A, \sim B)$. O zaman (12)'den

(14) $[A \models \sim B \wedge Bğms_2 (A, \sim B)] \rightarrow [Ol(A) = 0 \vee Ol(\sim B) = 1]$

elde edilir. $Ol(\sim B) = 1$, $Ol(B) = 0$ anlamına geldiğinden ve $Bğms_2 (A, \sim B)$ yerine $Bğms_2 (A, B)$ koyabileceğimizden dolayı, (14)'den (13)'ü elde ederiz.

(15) $[B \models A \wedge Bğms_2 (A, B)] \rightarrow [Ol(A) = 1 \vee Ol(B) = 0]$

ile

(16) $[B \models \sim A \wedge Bğms_2 (A, B)] \rightarrow [Ol(A) = 0 \vee Ol(B) = 0]$

önermelerini de benzer biçimde gösterebiliriz.

T23'ün sonucu olarak, A ile B'nin mantıkça bağımlı olmaları durumunda $Bğms_2 (A, B)$ olursa, A ile B'nin özce olasılıkça bağımsız olamayacağını söyleyebiliriz.

T24. $Bğms_n (A_1,...,A_n) \rightarrow Bğms_n (\pm A_1,..., \pm A_n)$

Burada $\pm A_i$ (i = 1,...,n) A_i veya $\sim A_i$'yi gösteriyor.

İspat: n = 2 durumunda teorem

(17) $Bğms_2 (A_1, A_2) \rightarrow Bğms_2 (\pm A_1, \pm A_2)$

biçimini alır. (17) ise

(18) $Bğms_2 (A_1, A_2) \rightarrow Bğms_2 (A_1, A_2)$

(19) $Bğms_2 (A_1, A_2) \rightarrow Bğms_2 (A_1, \sim A_2)$

(20) $Bğms_2 (A_1, A_2) \rightarrow Bğms_2 (\sim A_1, A_2)$

(21) $Bğms_2 (A_1, A_2) \rightarrow Bğms_2 (\sim A_1, \sim A_2)$

önermelerine karşılık gelir.

(18) bir totolojidir. (19) ve (20) ise T21 gereği doğrudur. (21)'i ise şöyle gösteriyoruz. T21 gereği, $Bğms_2 (A_1, A_2) \rightarrow Bğsm_2 (A_1, \sim A_2)$ ve $Bğms_2 (A_1, \sim A_2) \rightarrow Bğms_2 (\sim A_1, \sim A_2)$ elde edilir. Dikkat edilirse

(22) $Bğms_2 (A, B) \leftrightarrow Bğms_2 (B, A)$

doğrudur. Bu nedenle T21'den $Bğms_2 (A_1, \sim A_2) \rightarrow Bğms_2 (\sim A_2, A_1)$ elde edilmiştir. İspatı tamamlamak için T24'ün bir n sayısı için doğru olduğunu kabul ederek, n+1 için de doğru olduğunu gösteririz.

İmdi D_n dilinde $Ol(P_1),..., Ol(P_n)$ veriler olarak bilindiğinde, $Bğms_n (p_1,...,p_n)$ olursa, $p_1,...,p_n$'den oluşan herhangi bir önermenin olasılığı hesaplanabilir. Nitekim verilen önermeyi VTY'ye dönüştürelim. VTY'nin olasılığı ise ana bileşenleri olan te-tüm'lerin olasılığının toplamına eşittir. $Bğms_n (p_1,...,p_n)$ olduğundan, T24 gereği

(23) $Ol(\pm p_1 \wedge ... \wedge \pm p_n) = Ol(\pm p_1) . ... . Ol(\pm p_n)$

elde edilir. Dolayısıyla her te-tüm'ün olasılığı, ana bileşenlerinin olasılığının çarpımına eşittir. Oysa Ol(p) veri olup, $Ol(\sim p_i) = 1 - Ol(p_i)$'dir.

Örnek olarak D_3 dilinde Ol(p) = 0.1, Ol(q) = 0.2, Ol(r) = 0.6 olsun. Buna göre $Bğms_3 (p, q, r)$ olduğu durumda

(24) $p \leftrightarrow (q \wedge \sim r)$

önermesinin olasılığını hesaplayalım. Bu amaçla (24)'ü VTY'ye dönüştürelim.

$p \leftrightarrow (q \wedge \sim r) \equiv p \wedge (q \wedge \sim r) \vee \sim p \wedge \sim(q \wedge \sim r) \equiv (p \wedge q \wedge \sim r) \vee \sim p \wedge (\sim q \vee r)$

$\equiv (p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge r) \equiv (p \wedge q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r)$

$\vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r) \equiv (p \wedge q \wedge \sim r)$

$\vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r) \vee (\sim p \wedge q \wedge r)$

Buna göre

(25) $Ol[p \leftrightarrow (q \wedge \sim r)] = Ol(p)\ Ol(q)\ Ol(\sim r) + Ol(\sim p)\ Ol(\sim q)\ Ol(r) + Ol(\sim p)\ Ol(\sim q)\ Ol(\sim r) + Ol(\sim p)\ Ol(q)\ Ol(r) =$

$(0.1x0.2x0.4) + (0.9x0.8x0.6) + (0.9x0.8x0.4) + (0.9x0.2x0.6)$.

$0.008 + 0.432 + 0.288 + 0.108 = 0.836$

elde edilir.

ALIŞTIRMALAR

D_2 dilinde $Ol(p) = 0.3$ ve $Ol(q) = 0.5$ olduğunda $Bğms_2$ (p, q) durumunda aşağıdaki önermelerin olasılığını hesaplayınız.

1. $p \rightarrow q$
2. $p \wedge (\sim p \rightarrow q)$
3. $(\sim p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$
4. $\sim p \rightarrow (p \vee \sim q)$
5. $(\sim p \wedge q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

16.4 BİLGİSEL NİCEL OLASILIK

16.4.1 Olasılıklı Çıkarımlar

Akıl yürütme çıkarımlarla gerçekleşir. Tümdengelimli mantık, çıkarımların geçerliliğinin kurallarını ortaya koyar. Ancak tümdengelimli mantık bakımından geçersiz olmakla birlikte *tümevarım* bakımından *sağlam* veya *güvenilir* olan çıkarımlar vardır. Örneğin

(1) Ali bir insandır, Ali yüz yaşındadır, Ali romatizmalıdır, o halde Ali iki dakikada bir kilometrelik yolu koşamayacak.

Bu çıkarım mantıkça geçerli değildir. Ama tümevarım bakımından sağlam veya güvenilir bir çıkarımdır. Nitekim bu çıkarımın öncülleri doğru olduğunda, sonucun da doğru olma olasılığı çok yüksek, yani 1'e çok yakındır.

Genel olarak

(2) $A_1,...,A_n : B$

herhangi bir çıkarım olduğunda,

(3) $Ol(B/A_1 \wedge ... \wedge A_n)$

koşullu olasılığına (2) çıkarımının tümevarımlı *sağlamlık* (veya *güvenilirlik*) derecesi denir. Bu olasılık bir *bilgisel olasılık*'tır. Bilgisel olasılık, rasyonel inanılabilirlik derecesi demektir. (3) sağlamlık derecesinin tanımlanmış olmasının gerekli ve yeterli koşulu

(4) $Ol(A_1 \wedge ... \wedge A_n) \neq 0$

olmasıdır. A1, A2, A3 Kolmogorov aksiyomlarına dayanan Ol olasılık fonksiyonu durumunda A gibi herhangi bir önerme için

(5) Ol(A)=0 ancak ve ancak A tutarsız ise.

Nitekim, A tutarsız ise Ol(A)=0 olur. Öte yandan A tutarlı ise A'nın boş olmayan VTY'si vardır. Ol(A) ise VTY'nin ana bileşenleri olan durum betimlemelerinin olasılığının toplamına eşittir. Durum betimlemeleri ise Ω örneklem uzayının öğeleri olup olasılıkları sıfırdan büyüktür.

Buna göre (3) sağlamlık derecesinin tanımlanmış olmasının gerekli ve yeterli koşulunun

(6) $\{A_1,...,A_n\}$

kümesinin tutarlı olması olduğunu söyleyebiliriz. İmdi (6) koşulu yerine geldiğinde

(7) $A_1,...,A_n \models B$

olsun. O zaman

(8) $Ol(B/A_1 \wedge ... \wedge A_n) = 1$

olur. Nitekim (7) olursa

(9) $A_1 \wedge ... \wedge A_n \wedge B \equiv A_1 \wedge ... \wedge A_n$

elde edilir. (6) tutarlı olduğundan $Ol(A_1 \wedge ... \wedge A_n) \neq 0$ olup, $Ol(B/A_1 \wedge ... \wedge A_n)$ tanımlanmış olur. Böylece

$Ol(B/ A_1 \wedge ... \wedge A_n) = Ol(A_1 \wedge ... \wedge A_n \wedge B) / Ol(A_1 \wedge ... \wedge A_n) =$

$Ol(A_1 \wedge ... \wedge A_n)/ Ol(A_1 \wedge ... \wedge A_n) = 1$

elde edilir.

Öte yandan (7) yanlışsa, yani $A_1,...,A_n$ öncülleri B sonucunu mantıkça içermezse, (9)'da yanlış olur. Bu durumda

$Ol(A_1 \wedge ... \wedge A_n \wedge B) \neq Ol(A_1 \wedge ... \wedge A_n)$

olur. Nitekim $A_1 \wedge ... \wedge A_n \wedge B \models A_1 \wedge ... \wedge A_n$ olduğunda $kü(A_1 \wedge ... \wedge A_n \wedge B) \subseteq kü(A_1 \wedge ... \wedge A_n)$ olur. Ancak $A_1 \wedge ... \wedge A_n \wedge B$ ile $A_1 \wedge ... \wedge A_n$ eşdeğer olmadığında alt kümelik bağıntısı öz alt kümelik bağıntısı olur. O zaman

$Ol(A_1 \wedge ... \wedge A_n \wedge B) < Ol(A_1 \wedge ... \wedge A_n)$ dolayısıyla $Ol(B/A_1 \wedge ... \wedge A_n) < 1$ olur. Böylece

(10) $A_1,...,A_n \models B$ ancak ve ancak $Ol(B/A_1,...,A_n) = 1$ ise elde edilir. Ayrıca

(11) $A_1,...,A_n \models \sim B$ ancak ve ancak $Ol(B/A_1,...,A_n) = 0$ ise de doğrudur.

Nitekim (10) gereği $A_1,...,A_n \models \sim B$ ancak ve ancak $Ol(\sim B / A_1 \wedge ... \wedge A_n) = 1$ ise

Oysa $Ol(\sim B/ A_1 \wedge ... \wedge A_n) = 1$ ancak ve ancak $Ol(B/A_1 \wedge ... \wedge A_n) = 0$ ise. Böylece (11) elde edilir.

Eğer $Ol(B/A_1 \wedge ... \wedge A_n) = 1$ ise, (2) çıkarımına *kesin sonuçlu,* yoksa *kesin olmayan sonuçlu çıkarım* denir. Buna göre ancak mantıkça geçerli olan çıkarımlar kesin sonuçludur. Kesin olmayan sonuçlu çıkarımlara olasılıklı çıkarım veya *tümevarımlı çıkarım* denir. *Sağlam tümevarımlı çıkarım* sağlamlık derecesi 1'den farklı ama 1'e yakın olan geçersiz çıkarım demektir.

Çıkarımların sağlamlık derecesinin bir bilgisel olasılık olduğunu söylemiştik. Böyle bir bilgisel olasılığa *tümevarımlı olasılık* da denir. Öte yandan tek

tek önermelerin, özellikle çıkarımların öncüllerinin ve sonucun da bilgisel olasılığı vardır. Bir önermenin bilgisel olasılığı bilgi sahibi kişiye ve zamana bağlı olarak değişebilir. Nitekim bir kişinin bilgisi değişince belli bir önermeye karşı olan rasyonel inanılabilirlik derecesi değişebilir.

16.4.2 Olasılık ve Dengeli Bahse Tutuşma

Bir kişinin A gibi bir önermeye verdiği bilgisel olasılık o kişinin bu önermeye olan rasyonel inanılabilirlik derecesidir. Rasyonel inanılabilirlik derecesi ise A önermesi üzerine kişinin tutuştuğu bir bahiste ortaya konulan değerlere dayanarak hesaplanabilir.

A gibi bir önerme üzerine *bahis tutuşma* veya kısaca *bahis,* bahis tutuşan kişinin A önermesi doğru ise a değerinde para alması ve A önermesi yanlış ise b değerinde para vermesi (ödemesi) durumudur. b/a oranına *bahis oranı* denir. Böyle bir bahis aşağıdaki *bahis çizelgesi* ile dile getirilir.

(1)

A'nın doğruluk değeri	Ödenen değer
D	+a
Y	–b

a ile b değerindeki paralara *ortaya konulan değerler* ve a + b toplamına da *toplam değer* denir. a pozitif bir reel sayı ise +a bir kazanç, b'de pozitif bir reel sayı ise –b bir kayıpdır. Ancak a negatif bir reel sayı ise, +a (yani alınan para) bir kazanç değil bir kayıptır. Tersine b negatif bir reel sayı ise, –b (yani verilen para) bir kayıp değil bir kazanç olur.

Örneğin A: "Yarın yağmur yağacak" önermesi

ve b/a bahis oranı 4/1 ("dörde bir") olsun. Örneğin b = 40.000 lira ve a = 10.000 lira. Böyle bir bahse tutuşan kişi yarın yağmur yağarsa 40.000 lira alır (kazanır) ve yarın yağmur yağmazsa 10.000 lira verir (kaybeder).

İmdi (1) bahis çizelgesiyle dile getirilen bahis ve

(2)

B'nin doğruluk değeri	Ödenen değer
D	+ c
Y	– d

bahis çizelgesiyle dile getirilen bahsin *toplam*'ı

(3)

Doğruluk değerleri		Ödenen değer
A	B	
D	D	a + c
D	Y	a – d
Y	D	c – b
Y	Y	–(b + d)

çizelgesi ile dile getirilen düzen demektir.

Eğer A ile B önermeleri bir arada tutarsız ise (yani A∧B tutarsız ise (3) çizelgesindeki 1. satır boş kalır. Nitekim A ile B birlikte D değerini alamaz. O zaman (3) çizelgesi

(4)

Doğruluk değerleri		Ödenen değer
A	B	
D	Y	a – d
Y	D	c – b
Y	Y	– (b + d)

biçimine indirgenir. İmdi a – d = c – b, yani

(5) a + b = c + d

olsun. Bu da A üzerine bahsin toplam değeri (a + b) ile B üzerine bahsin toplam değerinin (c + d) birbiriyle eşit olması demektir. Bu durumda bahse tutuşan kişi A∨B önermesi doğru ise a – d (yani c – b) değerini kazanır ve A∨B onermesi yanlış ise b + a değerini kaybeder. O halde (4) çizelgesi (5) koşulunun doğru olması durumunda A∨B önermesi üzerine bir bahsin çizelgesi sayılır. Nitekim (4) çizelgesinden

(5)

Doğruluk değeri $A \vee B$	Ödenen değer
D	a – d
Y	– (b + a)

bahis çizelgesini elde ederiz.

İmdi (1) bahis çizelgesinin dile getirdiği bahse tutuşan kişinin bu eylemden *beklediği değer*

(6) $(+a)\ Ol(A) + (-b)\ Ol(\sim A)$

biçiminde tanımlanır. Bahse tutuşan kişi, beklenen değer sıfırdan büyükse *kazançlı,* beklenen değer sıfırdan küçükse *kayıplı* sayılır. Beklenen değer tam sıfıra eşitse bahse tutuşan kişi ne kazançlı ne kayıplı olur. Bu durumda bahsin *dengeli* olduğu söylenir. Bahis dengeli ise

$$(+a)\ Ol(A) + (-b)\ Ol(\sim A) = a\ Ol(A) - b[1 - Ol(A)]$$

$$= a\ Ol(A) - b + b\ Ol(A) = (a + b)\ Ol(A) - b = 0$$

olur. Böylece

(7) $Ol(A) = b/(a + b)$

elde edilir.

$b/(a + b)$ değerine *bahis bölümü* denir.

O halde bir önerme üzerine bir bahsin dengeli olmasının gerekli ve yeterli koşulu, olasılığın bahis bölümüne eşit olmasıdır.

Dengeli bahis durumunda

(8) $Ol(A)\ /Ol(\sim A) = b/a$

Nitekim dengeli bahiste

(9) $a\ Ol(A) - bOl(\sim A) = 0$

olur. Böylece (8) elde edilir.

Öte yandan (7)'den,

(10) $b/(a + b) = (b/a)\ /\ [(a/a) + (b/a)] = (b/a)\ /\ [1 + (b/a)]$

olduğunu görerek,

(11) Ol(A) = (b/a) / [1 + (b/a)]

elde edilir. Böylece olasılık ile bahis oranı arasında bir bağıntı kurulmuş olur.

Örneğin "yarın yağmur yağacak" önermesi üzerine 4/1 (dörde bir) bahis oranıyla dengeli bir bahse tutuşulduğunu kabul edelim. O zaman bu önermeye verdiğim olasılık derecesi

(12) (4/1) / [1 + (4/1)] = 4/(1 + 4) = 4/5 = 0.80

olur.

ALIŞTIRMALAR

I. Bir önerme üzerine dengeli bahislerde ortaya konulan a ve b değerleri aşağıda belirtilmiştir. Bu değerlere göre bahse tutuşan kişilerin söz konusu önermeye verdikleri bilgisel olasılık derecelerini hesaplayınız.

1. a = 30000 lira, b = 20000 lira
2. a = 50000 lira, b = 10000 lira
3. a = 100000 lira, b = 90000 lira

II. Bir önerme üzerine dengeli bahislerdeki b/a bahis oranları aşağıda belirtilmiştir. Bu oranlara göre bahse tutuşan kişilerin söz konusu önermeye verdikleri bilgisel olasılık derecelerini hesaplayınız.

1. b/a = 8/1
2. b/a = 10/3
3. b/a = 15/4

16.4.3 Uyumlu Bahis Sistemleri

Bahis tutuşma eyleminin beklenen değeri olasılık yerine Kolmogorov aksiyomlarına uymayabilen bir inanma derecesi ile hesaplanabilir. Böyle bir inanma derecesini İ gibi bir *inanma* fonksiyonu ile gösterelim. O zaman A gibi bir önermenin inanma derecesi İ(A) olur. Buna göre A üzerine a ve b değerlerine dayanan bir bahis tutuşma eyleminin beklenen değeri

(1) $a\mathfrak{l}(A) - b\mathfrak{l}(\sim A)$

olur. Bahis tutuşma eylemine

(2) $\mathfrak{l}(A) = b/(a + b)$

olduğu durumda *dengeli bahis* denir. Bu anlamda dengeli olan bahiste beklenen değerin sıfır olduğu kabul edilir. O zaman

(3) $a\mathfrak{l}(A) - b\mathfrak{l}(\sim A) = a[b/(a + b)] - b\mathfrak{l}(\sim A) = 0$

olur. Buradan

(4) $\mathfrak{l}(\sim A) = a/(a + b) = 1 - b/(a + b) = 1 - \mathfrak{l}(A)$

elde edilir.

Bahis sistemi, bir dizi dengeli bahis sonucunda bahse tutuşan kişinin hep kaybetmesine yol açarsa bahis sistemine *uyumsuz* denir. Buna göre *uyumlu bahis sistemi* bahse tutuşan kişinin bir dizi bahis sonucunda hep kaybetmesine yol açmayan bir bahis sistemi demektir.

İmdi uyumlu bahis sistemlerinin şu iki temel özelliği vardır.

(i) Dayandığı inanma fonksiyonu bir olasılık ölçüsü olan (yani Kolmogorov aksiyomlarına uyan bir fonksiyon olan) bahis sistemi uyumludur.

(ii) Dayandığı inanma derecesi bir olasılık ölçüsü olmayan her bahis sistemi uyumsuzdur.

Dolayısıyla bütün ve yalnız uyumlu olan bahis sistemlerinin dayandığı inanma derecesinin bir olasılık derecesi olduğunu söyleyebiliriz. Böylece bilgisel olasılığın uyumlu bahis sistemlerine özgü bir inanma dercesi olduğunu söyleyerek, bilgisel olasılığın Kolmogorov aksiyomlarına uyduğunu savunabiliriz.

Sözü geçen (ii) özelliğini aşağıdaki örneklerle haklı gösteriyoruz.

Birinci örnek olarak inanma derecesi sıfırdan küçük olan bir durumu ele alıyoruz. Söz gelişi A önermesinin inanma derecesi $\mathfrak{l}(A) = -0.10$ olsun. O zaman

Doğruluk değeri A	Ödenen değer
D	- 110000
Y	- 10000

bahis çizelgesi ile dile getirilen bahsi gözönüne alabiliriz. Bu durumda a = –110000 lira ve b = 10000 lira. O halde b/(a + b) = 10000/ (–110000 + 10000) = 10000/ - 100000 = –0.10. Bahse tutuşan kişi A doğru ise –110000 lira alır yani 110000 lira kaybeder; A yanlış ise 10000 lira verir. Her iki halde de kaybeder.

İkinci örnekte A∨~A gibi bir totolojinin inanma derecesinin 1'den büyük olduğunu kabul ediyoruz. Sözgelişi a = –5000 lira ve b = 10000 lira olsun. O zaman İ(A∨~A) = b/(a + b) = 10000/(–5000 + 10000) = 10000/5000 = 2 olur. Bahse tutuşan kişi A∨~A hep doğru olduğundan –5000 lira alıyor, yani 5000 lira kaybediyor.

Üçüncü örnek olarak İ(A∨~A) < 1 olsun. Söz gelişi a = –25000 lira ve b = –75000 lira olsun. O zaman İ(A∨~A) = b/(a+ b) = –75000/(–75000–25000) = –75000/–100000 = 0.75 olur. Bahse tutuşan kişi, A∨~A hep doğru olduğundan, –25000 lira alır, yani 25000 lira kaybeder.

16.5 SINIFLAYICI VE KARŞILAŞTIRMALI OLASILIK

16.5.1 Olasılık Eklemleri ve İkililik

Buraya kadar hep nicel olasılığı inceledik. Şimdi de nicel olasılıktan daha temel olan sınıflayıcı ve karşılaştırmalı olasılığı inceleyeceğiz. Gerek sınıflayıcı olasılık gerekse karşılaştırmalı olasılık birer önerme eklemi ile dile getirilir.

(1) p olduğu olasıdır

veya kısaca

(2) $\mathcal{O}$p

önermesinde $\mathcal{O}$ işareti doğruluk fonksiyonu durumunda olmayan bir birli önerme eklemidir. Nitekim "p" önerme temsilcisi "yarın yağmur yağacak" önermesini temsil ettiğinde "$\mathcal{O}$p"nin doğru veya yanlış olması yarın yağmur

yağması halinde de, yağmur yağmaması halinde de mümkündür. Dolayısıyla "$\mathcal{O}$p"nin doğruluk çizelgesi şöyledir.

(3)

p	$\mathcal{O}$p
D	D, Y
Y	D, Y

öte yandan (3) 9 olduğuna göre p olasıdır, veya kısaca

(4) p/q

önermesinde "/" işareti doğruluk fonksiyonu durumunda olmayan bir ikili eklemdir. Bütünlü eklemlere ve bu eklemler yardımıyla

(5) p olduğu, q olduğundan daha az olası değildir

veya kısaca

(6) $p \geq q$

önermesinde "≥" işareti doğruluk fonksiyonu durumunda olmayan bir ikili önerme eklemidir.

(7) q olduğuna göre p olduğu, s olduğuna göre r olduğundan daha az olası değildir.

veya kısaca

(8) $p/q \geq r/s$

önermesinde "/ ≥ /" işareti doğruluk fonksiyonu durumunda olmayan bir dörtlü önerme eklemidir. Tanımlanabilen önerme eklemlerine *olasılık eklemleri* diyoruz.

İkili (mutlak) olasılık eklemi dörtlü (koşullu) olasılık eklemiyle şöyle tanımlanabilir.

(9) $p \geq q \equiv p/T \geq q/T$

"≥" ikili olasılık eklemi yardımıyla aşağıdaki olasılık eklemleri tanımlanır.

(10) $p \leq q \equiv q \geq p$

"$p \leq q$", "p olduğu q olduğundan daha olası değildir" anlamına gelir.

(11) $p > q \equiv \sim(p \leq q)$

"$p > q$", "p olduğu q olduğundan daha olasıdır" anlamına gelir.

(12) $p < q \equiv \sim(p \geq q)$

"$p < q$", "p olduğu q olduğundan daha az olasıdır" anlamına gelir.

(13) $p \approx q \equiv (p \geq q) \wedge (p \leq q)$

"$p \approx q$", "p ile q aynı ölçüde olasıdır" anlamına gelir.

(14) $\mathcal{O}p \equiv p > \sim p$

Böylece sınıflayıcı olasılık eklemi olan "$\mathcal{O}$", karşılaştırmalı olasılık eklemi olan "$>$" yardımıyla tanımlanmış olur.

(15) $\bar{\mathcal{O}}p \equiv p < \sim p$

"$\bar{\mathcal{O}}p$", "p *olasısızdır*" anlamına gelir.

İkililik yardımıyla da yeni olasılık eklemleri tanımlanır. e_n herhangi bir n-li eklem olduğunda, e_n ekleminin *ikili*'si olan e_n^* n-li eklemi

(16) $e_n^* p_1 \ldots p_n \equiv \sim e_n \sim p_1 \ldots \sim p_n$

biçiminde tanımlanır. Buna göre her n-li olasılık ekleminin gene n-li olasılık eklemi olan bir n-li önerme ekleminin bulunduğunu söyleyebiliriz. Sözü geçen olasılık eklemlerinin ikilisini aşağıda tanımlıyoruz.

(17) $p \geq^* q \equiv \sim(\sim p p \geq \sim q) \equiv \sim p < \sim q$

(18) $p \leq^* q \equiv \sim(\sim p \leq \sim q) \equiv \sim p > \sim q$

(19) $p >^* q \equiv \sim(\sim p > \sim q) \equiv \sim p \leq \sim q$

(20) $p <^* q \equiv \sim(\sim p < \sim q) \equiv \sim p \geq \sim q$

(21) $p \approx^* q \equiv \sim(\sim p \approx \sim q) \equiv \sim(\sim p \geq \sim q \wedge \sim p \leq \sim q)$

$\equiv \sim(\sim p \geq \sim q) \vee \sim(\sim p \geq \sim\ q) \equiv \sim p < \sim q \vee \sim p > \sim q$

(22) $\mathcal{O}^* p \equiv \sim\mathcal{O}p \equiv \sim(\sim p > \sim\sim p) \equiv \sim(\sim p > p) \equiv \sim(p < \sim p) \equiv \sim\bar{\mathcal{O}}p$

O halde "$\mathcal{O}^* p$", "p olduğu olasısız değildir" anlamına gelir.

16.5.2 Karşılaştırmalı Olasılığın Aksiyomatik Kuramı

İlkel önerme eklemleri

(i) beş temel eklem: $\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

(ii) sıfırlı eklemler: $T, \bot$

(iii) kiplik eklemleri: mantıksal zorunluk eklemi $\Box$, mantıksal imkân eklemi $\Diamond$

(iv) olasılık eklemi: $\geq$

olan ve p, q, r ... önerme temsilcilerini kapsayan sembolik bir dili göz önüne alalım. (i), (ii), (iii) mantık değişmezleri, (iv) ise özel değişmezdir. Böyle bir dilde yalnız karşılaştırmalı olasılık eklemleri değil, bir de sınıflayıcı olasılık eklemleri tanımlandığını §16.5.1'de görmüştük. Dolayısıyla bu dilde dile getireceğimiz karşılaştırmalı olasılık kuramı aynı zamanda sınıflayıcı olasılığın da kuramı sayılabilir.

İmdi karşılaştırmalı olasılık kuramının aksiyom sistemini aşağıda gösteriyoruz.

Aksiyomlar:

1. *Aksiyom:* $(p \geq q) \vee (q \geq p)$
   (karşılaştırabilme aksiyomu)
2. *Aksiyom:* $(p \geq q) \leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \geq (\sim p \wedge q)]$
3. *Aksiyom:* $p \geq \bot$
4. *Aksiyom:* $[(p \geq q) \wedge \Box(r \rightarrow q)] \rightarrow (p \geq r)$
5. *Aksiyom:* $[(p \geq q) \wedge (q \geq r)] \rightarrow (p \geq r)]$
   (Geçişlilik aksiyomu)
6. Her totoloji bir aksiyomdur.
7. $\Box p \rightarrow \Diamond p$
8. $\Box p \rightarrow p$
9. $\Box p \rightarrow \Box\Box p$
10. $\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$

Çıkarım Kuralları:

1. Yerine koyma örneği: $\vdash A(p)$ ise, $\vdash A(B)$.

A(p) içinde p önerme temsilcilerinin geçtiği bir önerme, A(B)'de A(p)'de p yerine B önermesini koymakla elde edilen önermedir.

2. Modus Ponens Kuralı: $\vdash A$ ve $\vdash A \to B$ ise, $\vdash B$.

3. Zorunluluk kuralı: $\vdash A$ ise $\vdash \Box A$.

("$\vdash A$", "A teoremdir" anlamına gelir.)

Bu aksiyom sistemine göre, kuram S5 kiplik mantığı sistemine dayanıyor.

Sözü geçen aksiyom sisteminden türetilebilen başlıca teoremleri aşağıda gösteriyoruz.

(1) $p > p$

(2) $p = p$

(3) $(p \geq p) \leftrightarrow (p > q \vee p \approx q)$

(4) $(p \geq q) \leftrightarrow \sim q \geq \sim p$

(5) $\Box(p \to q) \to p \geq q$

(6) $p > q \leftrightarrow (p \wedge \sim q) > (\sim p \wedge q)$

(7) $[(p > q) \wedge \Box(r \to q) \to p > r$

(8) $\sim M\bot$

(9) $Mp \wedge L(p \to q) \to Mq$

(10) $\Box p \to Lp$

(11) $(p \approx q \wedge q \approx r) \to p \approx r$

(12) $(p > q \wedge q > r) \to (p > r)$

(13) $Lp \to (p > \sim p)$

(14) $\Box p \to (p > \sim p)$

(15) $p \leq T$

(16) $Lp \leftrightarrow p \approx T$

(16) şöyle ispatlanır

$Lp \equiv M^*p \equiv \sim M \sim p \equiv \sim(\sim p > \bot) \equiv \sim p \leq \bot \equiv \sim\bot \leq \sim\sim p \equiv T \leq p.$

Ancak (15) teoremi gereği $p \leq T$. O halde

$Lp \leftrightarrow p \approx T$

elde edilir.

17. MATEMATİĞİN MANTIKSAL TEMELLERİ

17.1 MATEMATİĞİN KONUSU ve YÖNTEMİ

Matematik sayılar, şekiller ve soyut yapıların özelliklerini incelemeyi ve bu nesneler hakkında zorunlu önermeler ortaya koymayı amaçlayan bilimdir. Matematiğin konu edindiği bazı nesneler ve nesne sistemleri başka düşünme alanları ve doğa bilimlerinden kaynaklanır. Nitekim doğa bilimlerinin incelediği cansız ve canlı sistemlerin bazı özellikleri soyutlanarak matematiğin konusu olabiliyor. Doğa bilimlerinde bu sistemler hakkında gerçek dünyada doğru olan olumsal (yani ne imkânsız ne de zorunlu olan) önermeler ortaya koyma amacı güdülürken, matematikte bu sistemlerin yalnız yapısal özelliklerini dile getiren zorunlu önermeler üretmek istenir.

Matematiğin konusu olan nesneler genellikle tek tek değil nesne kümeleri ve nesne sistemleri olarak incelenir. Bu bakımdan "küme" veya "öbek" kavramı matematiğin her alanında ortaya çıkar. Üstelik çok kez matematiksel nesneler birer küme biçiminde çözümlenebilir. Hatta en basit matematiksel bir nesne olan her doğal sayı, yapıtaşı boş küme olan bir küme olarak tanımlanmıştır. Böylece matematiğin konusunun son çözümlemede kümeler veya daha genel olarak öbekler olduğunu söyleyebiliriz.

Matematiğin yöntemi ise matematiksel doğruları az sayıda tanım ve aksiyomlardan dedüktif çıkarımlar yoluyla türetme işlemidir. Böyle bir işlem ise mantığın alanına girer. O halde matematiğin yönteminin (dedüktif) mantık olduğunu söyleyebiliriz.

Bir aksiyom sisteminde geçerli dedüktif çıkarımlarla türetilen önermelere aksiyom sisteminin *teoremler*'i, teoremlerin türetilme işlemine de ispat denir. Bir aksiyom sistemi aksiyomlar (veya portular), tanımlar ve ispatlama için gerekli çıkarım kurallarından oluşur. Matematikte yalnız aksiyomlar ile tanımlar açık olarak belirtilir. Çıkarım kuralları (yani ispatlama kuralları) ayrıca belirtilmeyip önceden bilindikleri varsayılır. Nitekim çıkarım kuralları mantık kuralları arasında yer alırlar. Aksiyom sistemlerinin çok önemli öğelerinden tanımlar birtakım kurallara uymak zorundadır. Bu kurallar da matematikte açık olarak belirtilmeyip önceden bilindikleri varsayılır. Tanımlama kuralları da mantık kuralları arasında yer alırlar.

Matematikteki ispatlar hep *kısaltılmış ispat* biçimindedir. Bu kısaltılmış ispatların karşılığı geçerli bir ispat olduğunu ancak mantık yardımıyla bulabiliriz. Ancak kısaltılmış ispatı mantıkla denetleyebilmek için ispatın ait olduğu matematik dilini sembolleştirip sembolik matematik dilini kurmamız gerekir. Matematikçinin ortaya koyduğu kısaltılmış ispat sembolik matematik dilinde kısaltılmamış bir ispat biçimine dönüştürülür. Bu ispatın gerçek bir ispat olup olmadığı mantık kurallarına dayanarak sınanır. Bu sınama otomatikleşmiş teorem ispatlama yöntemleriyle de yapılabilir. Matematikçinin kısaltılmış ispatının uygun olması, sembolik matematik dilindeki karşılığı olan kısaltılmamış ispatın mantık bakımından uygun olmasına bağlıdır. Böylece mantık, matematiğin denetlenmesini sağlar.

(1) $A_1,...,A_n$

bir aksiyom sisteminin tanım ve aksiyomları ve B bir teorem ise,

(2) $A_1,...,A_n \therefore B$

çıkarımı mantık bakımından geçerli olmalıdır. Dolayısıyla matematikçinin kısaltılmış ispatı, önünde sonunda B'nin $A_1,...,A_n$'den nasıl türetilebildiğini tam ve eksiksiz bir biçimde gösteren bir ispata çevrilebilmelidir.

ALIŞTIRMALAR

Küme olarak çözümlenebilen matematiksel nesnelere üç farklı örnek gösteriniz.

17.2 SAYILAR

17.2.1 Doğal Sayılar

Doğal sayılar

(1) {0, 1, 2, 3, ..., n, n + 1,...}

öbeğinin öğeleridir. Bu (1) öbeğine *doğal sayılar sistemi* de denir. Doğal sayılar küçükten büyüğe doğru sıralanmıştır. 0, en küçük doğal sayıdır. Ancak en büyük doğal sayı yoktur. Nitekim her doğal sayıdan büyük olan bir doğal sayı vardır. Doğal sayıları n, m, i, j, k, l değişkenleri ile gösteriyoruz. Doğal sayılar öbeğini de N ile gösteriyoruz.

n bir doğal sayı ise, n'den hemen sonra gelen doğal sayıya n sayısının *ardıl*'ı denir ve bu sayı

(2) An

biçiminde gösterilir. "A" bir birli işlev işaretidir. Bir ad olan "0" değişmezine ard arda "A" birli işlev işaretini uygulayarak bütün doğal sayıları türetebiliriz.

Böylece doğal sayılar dizisini

(3) {0, A0, AA0, AAA0, ..., AAA ... A0, ...}

biçiminde dile getirebiliriz.

Doğal sayılar arasındaki "küçüktür" sıralama bağıntısını "<" işaretiyle dile getiriyoruz.

(4) $m < n$

Önermesi m doğal sayısı n doğal sayısından küçüktür anlamına geliyor. "<" bir ikili yüklemdir. Doğal sayılara toplama ve çarpma işlemleri uygulanır. "m+n" m ile n doğal sayılarının *toplam*'ı ve $m \cdot n$, m ile n doğal sayılarının *çarpımı*dır. "+" ile "·" ikili işlem işaretidir. "0", "A", "<", "+", "·" değişmezlerine *özel değişmezler* denir. Bunlar doğal sayılara özgüdür. Bu özel değişmezler ile özdeşlik mantığının mantık değişmezleri ($\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists, =$) ve bireysel değişkenlerinden ($x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots$) oluşan dile *doğal sayılar dili* veya *aritmetik dili* denir. Bu dili D_N olarak gösteriyoruz. Bu dil bir *uygulamalı özdeşlik mantığı* dilidir. Bir uygulamalı mantık dili bir mantık dilinin ad, yüklem ve işlev işareti sembolleri yerine özel değişmezlerin konulmasıyla elde edilen bir dildir. Aynı mantık sistemine dayalı farklı uygulamalı mantık dillerinin mantık değişmezleri ve değişkenleri ortak olup yalnız özel değişmezleri bakımından farklıdırlar.

Doğal sayılar kuramı veya başka bir deyişle *aritmetik,* doğal sayılar dilinin doğru olan önermelerinin kümesi demektir. İmdi doğal sayılar kuramının doğru önermelerinin teorem olarak ispatlanabilmesi için doğal sayılar kuramı çerçevesi içinde bir aksiyom sistemi kurulmalıdır. Özdeşlik mantığına dayanan öyle bir aksiyom sistemini aşağıda gösteriyoruz.

A1 $\forall x\sim(Ax = 0)$

A2 $\forall x\forall y[(A_n = A_y) \rightarrow (x = y)]$

A3 $\forall x(x + 0 = x)$

A4 $\forall x[x + Ay = A(x + y)]$

A5 $\forall x[(x \cdot 0) = 0]$

A6 $\forall x[(x \cdot Ay) = (x \cdot y) + x]$

A7 $\forall x\sim(x < 0)$

A8 $\forall x[(x < Ay) \leftrightarrow [(x < y) \vee (x = y)]]$

A9 $[B(0) \wedge \forall x[B(x) \rightarrow B(Ax)]] \rightarrow \forall xB(x)$

B(x) bir birli açık önermeyi gösterir. "x" ve "y" değişkenlerinin değer alanı N doğal sayılar öbeğidir.

A9'a tümevarım aksiyom kalıbı denir. Bu kalıbın her örneği ayrı bir aksiyomdur. A9'un örneklerine *tümevarım aksiyomları* denir. B(x) olarak seçilen her birli açık önerme belli bir tümevarım aksiyomunu belirler. Örneğin B(x) olarak "Fx" seçilirse A9'dan

(5) $[Fo \wedge \forall x[Fx \rightarrow F(Ax)]] \rightarrow \forall xFx$

tümevarım aksiyomu elde edilir. Eğer B(x) olarak "$Fx \rightarrow Gx$" seçilirse A9'dan

(6) $[(Fx \rightarrow Gx) \wedge \forall x[(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow [F(Ax) \rightarrow G(Ax)]]] \rightarrow \forall x(Fx \rightarrow Gx)$

tümevarım aksiyomu elde edilir.

A3 ile A4 aksiyomları "+" toplama işleminin tanımı sayılabilir. Aynı biçimde A5 ile A6 aksiyomları da "." çarpma işleminin tanımı sayılabilir. Böyle bir tanımlama biçimine, ilerde göreceğimiz gibi *rekürsif tanım* denir.

A1–A9 aksiyomları özdeşlik mantığı gereği D_N diline ait önermeler içerir. İçerilen önermelerin kümesi mantıkça kapalı bir önerme kümesi dolayısıyla bir kuramdır. A1–A9 aksiyomlarının içerdiği önermelerden oluşan kurama *Peano* aritmetiği denir. Ancak Peano aritmetiği, tüm aritmetiğin, yani doğal sayılar kuramının tümü değil, ancak bir bölümüdür.

Doğal sayılar birer öbek olarak da tanımlanabilir. Bu tanımlamanın genel biçimi şöyledir. (Bu tanımlama bir rekürsif tanımdır.)

(7) $0 = \varnothing$

(8) $An = n \cup \{n\}$

Buna göre

(9) $1 = A0 = A\varnothing = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$

(10) $2 = AA0 = A1 = A\{\varnothing\} = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

elde edilir.

Dikkat edilirse 0, 1 ve 2 sayılarının tanımlarında hiçbir birey (yani öbek olmayan nesne) geçmemektedir. Bu öbeklerin biricik yapıtaşı boş öbektir. Bu türlü öbeklere *salt öbek* denir. Buna göre her doğal sayının bir salt öbek olarak tanımlanabildiğini söyleyebiliriz.

Doğal sayılar bir de şöyle tanımlanabilir.

(11) $0 = \varnothing$

(12) $An = \{n\}$

Buna göre doğal sayılar öbeği

(13) $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}\}, ..., \{... \{\{\varnothing\}\} ...\}, ...\}$

biçimini alır.

O halde n gibi bir doğal sayının bir öbek olarak tanımlanması, sayının öbekle özdeş olması anlamına gelmez. Böyle bir tanımlama özdeşleştirme değil, çözümleme, indirgeme veya temsil etme anlamına gelir. Buna göre $\varnothing$ boş kümesi, 0 doğal sayısı ile özdeş olmayıp onu temsil eder, onun bir temsilcisi olduğunu söyleyebiliriz. Bir doğal sayının birden çok temsilcisi olabilir. Örneğin 2 doğal sayısının $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ ve $\{\{\varnothing\}\}$ olmak üzere iki farklı temsilcisinin olduğunu gördük.

Bir doğal sayıyı temsil etmeyen salt öbekler de vardır.

Örneğin

(14) $\{\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$

hiçbir doğal sayının temsilcisi olmayan bir salt öbektir. N doğal sayılar sistemine dayanarak Z tamsayılar sistemi, Q rasyonel sayılar sistemi, R reel sayılar sistemi ve C kompleks sayılar sistemi tanımlanır.

ALIŞTIRMALAR

1. A9 aksiyom kalıbından üç farklı tümevarım aksiyomu türetiniz.
2. 3, 4 ve 5 doğal sayılarını birer salt öbek olarak tanımlayınız.
3. Hiçbir doğal sayıyı tanımlamayan üç farklı salt öbek gösteriniz.

17.2.2 Sıral Sayılar

3. bölümde kümeler kuramı çerçevesi içinde matematiğin en önemli kavramları arasında yer alan "bağıntı" ve "fonksiyon"ların birer öbek (veya küme) olarak tanımlanabildiklerini gördük. §17.2.1'de doğal sayıların da öbeklere indirgenebildiğini gördük. Şimdi sayıları doğal sayıları da kapsayan "sıral sayı" denilen sayılar açısından ele alacağız.

Sıral sayıları tanımlamak için önce "iyice sıralama" denilen bu sıralama türünü tanımlamak gerekir.

Tanım 1: K bir öbek ve B bir bağıntı olduğunda, a nesnesi K öbeğinin bir *B-minimal öğesidir* ancak ve ancak $a \in K \wedge \forall x\,(x \in K \rightarrow \sim xBa)$ ise,

Tanım 2: B bağıntısı *K öbeğinde bağlaşıktır* ancak ve ancak $\forall x \forall y\,[(x \in K \wedge y \in K \wedge x \neq y) \rightarrow (xBy \vee yBx)]$

Tanım 3: B bağıntısı K öbeğini *iyice sıralar* ancak ve ancak B bağıntısı K öbeğinde bağlaşıktır ve $\forall L(L \subseteq K \wedge L \neq \varnothing \rightarrow$ L'nin bir B-minimal öğesi vardır).

Tanım 2'ye göre aşağıdaki özellikler ispatlanır.

(1) B bağıntısı K öbeğini iyice sıralarsa, B bağıntısı K öbeğinde bakışımsız ve geçişlidir.

B bağıntısı bakışımsız, geçişli ve bağlaşık olduğundan bir tam sıralama bağıntısıdır.

Tanım 4: a nesnesi K kümesinin bir *B-birinci öğesi*'dir ancak ve ancak $a \in K \wedge \forall x\,[(x \in K \wedge x \neq a) \rightarrow aBx]$ ise,

Tanım 5: b nesnesi a nesnesinin *B-ardılı*'dır ancak ve ancak $aBb \wedge \forall x[aBx \rightarrow (x = b \vee bBx)]$

(2) B bağıntısı K öbeğini iyice sıralarsa, K'nın tam bir B-birinci öğesi olur.

Tanım 6: a nesnesi K öbeğinin bir *B-sonuncu öğesi*'dir ancak ve ancak $a \in K \wedge \forall x\,[(x \in K \wedge a \neq x) \rightarrow xBa]$

(3) B bağıntısı K öbeğini iyice sıralıyorsa, $Al(B) \subseteq K$ ise ve a nesnesi K öbeğinin bir B sonuncu öğesi değilse, a'nın tam bir B–ardılı vardır.

Tanım 7: Bir bağıntı tarafından iyice sıralanmış olan bir öbeğe *iyice sıralanmış* öbek denir. İyice sıralanmış öbekleri aşağıdaki örneklerle açıklayalım.

Birinci örnek olarak

(4) {0, 1, 2, 3,...}

doğal sayılar öbeğini ele alalım. "<" bağıntısı bu öbeği iyce sıralar. Nitekim "<" bağıntısı N öbeğinde bağlaşıktır: $m \neq n \rightarrow (m < n \vee n < m)$. Ayrıca her doğal sayı öbeğinin en küçük olan bir öğesi vardır.

İkinci örnek olarak doğal sayıları büyükten küçüğe doğru tersine sıralayalım. O zaman

(5) {..., 3, 2, 1, 0}

biçiminde bir dizi elde ederiz. Bu dizinin bir ilk öğesi yani en solda olan bir öğesi yoktur. O halde ">" bağıntısı N öbeğini iyice sıralamaz.

Üçüncü örnek olarak rasyonel sayılar öbeğini ele alalım. Bu öbek "<" bağıntısı ile tam sıralanmış olup iyice sıralanmış değildir. Nitekim rasyonel sayıların öbeğinin ilk öğesi yoktur.

"İyice sıralama" kavramına dayanarak "sıral sayı" kavramı şöyle açıklanabilir.

(6) Sıral sayılar, iyice sıralanmış bir kümenin öğelerinin sırasını belirten sayılardır.

İleride bu açıklamayı biçimsel bir tanımlamaya çevireceğiz. Özel olarak doğal sayılar gibi, sıral sayılar da belli öbeklerle (kümelerle) temsil edilirler. Bir sıral sayıyı iyice sıralanmış bir küme temsil eder.

Tanım 8: K öbeği *eksiksizdir* ancak ve ancak $\forall x(x \in K \rightarrow x \subseteq K)$ ise.

Örneğin

(7) $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$

öbeği eksiksizdir.

(8) $\varnothing \subseteq \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$

$\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$

$\{\{\varnothing\}\} \subseteq \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$

Tanım 9: K öbeği $\in$ - *bağlaşıktır* ancak ve ancak $\forall x \forall y\ [(x \in K \wedge y \in K \wedge x \neq y) \rightarrow (x \in y \vee y \in x)]$ ise.

Örneğin (7) öbeği $\in$-bağlaşık değildir. Nitekim $\varnothing \notin \{\{\varnothing\}\}$ ve $\{\{\varnothing\}\} \notin \varnothing$. Öte yandan

(9) $\{\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$

öbeği $\in$-bağlaşık olup eksiksiz değildir. Nitekim $\{\varnothing\} \in \{\{\varnothing\}\}$ doğru ama $\{\varnothing\} \subseteq \{\{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$ yanlıştır.

Hem $\in$-bağlaşık hem de eksiksiz olan öbekler vardır. Bu öbekler sıral sayıları temsil edip sıral sayılarla özdeşleştirilir.

Tanım 10: K *sıral* bir öbektir ancak ve ancak K $\in$-bağlaşık ve eksiksiz olan bir öbek ise.

Tanım 11. sıral olan bir öbek küme ise, bu öbeğe *sıral sayı* denir. Örneğin sırasıyla 0, 1, 2 doğal sayılarını temsil eden ve birer küme olan

(10) $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

öbekleri sıral sayılardır. (9) öbeği eksiksiz olmadığından dolayı ve (7) öbeği $\in$-bağlaşık olmadığından dolayı sıral sayı değildir.

a bir sıral sayı ise, $a \cup \{a\}$ öbeği de bir sıral sayıdır.

Tanım 12: a bir sıral sayı ise $a \cup \{a\}$ öbeğine a'nın *ardılı* denir ve Aa olarak gösterilir.

"Sıral sayı" kavramını daha geniş bir alana uygulamak için 3. bölümde kümeler kuramında ele aldığımız 10 aksiyoma ek olarak şu iki yeni aksiyoma gereksinim vardır.

Aksiyom 11. Sonsuzluk Aksiyomu

$\exists x[\text{Küme}(x) \wedge \varnothing \in x \wedge \forall y(y \in x \rightarrow Ay \in x)]$

Aksiyom 12. Düzgünlük Aksiyomu

$\forall x[x \neq \varnothing \rightarrow \exists y(y \in x \wedge x \cap y = \varnothing)]$

Dikkat edilirse Aksiyom 11'den

(11) $\exists x(\varnothing \in x)$

önermesi türetilir. Bu ise

(12) $\varnothing$ bir kümedir.

anlamına gelir. (12) önermesi 3. bölümdeki Aksiyom 5 ile özdeştir. Böylece Aksiyom 5, Aksiyom 11'in bir sonucu olup kaldırılabilir.

Öte yandan Aksiyom 11'den

(13) $\forall x \sim(x \in x)$

(14) $\forall x \forall y \sim(x \in y \wedge y \in x)$

elde edilir.

Sıral sayıların ve genel olarak sıral öbeklerin aşağıdaki özellikleri vardır.

(15) Her sıral öbek "$\in$" bağıntısı tarafından iyice sıralanmıştır.

(16) K ve L sıral öbekler olduğunda $K \subseteq L \vee L \subset K$.

(17) K ve L sıral öbekler olduğunda $K \neq L \rightarrow (K \in L \vee L \in K)$.

(18) Bir sıral öbeğin her öğesi bir sıral öbektir.

Bütün sıral sayıların (yani küme olan sıral öbeklerin) öbeği bir sıral öbektir. Bu sıral öbek S olsun. S bir küme olsaydı $S \in S$ olurdu. Oysa (13) gereği

bu imkânsızdır. O halde sıral sayıların öbeği (küme olmayan) bir öz öbektir. S öz öbeğinin bütün öğeleri sıral sayılar olup S öbeği küme olmayan biricik sıral öbektir.

(19) Her sıral öbek ya S ile özdeştir ya da S öbeğinin öğesidir.

Dikkat edilirse

(20) $S \cup \{S\}$

öbeği bir sıral öbek değildir. Nitekim $\in$-bağlaşık değildir. Buna karşılık (11)'de belirtildiği gibi $a \in S$ ise "$a \cup \{a\}$" bir sıral sayıdır. Bu sıral sayı a sıral sayısının ardılı olup "Aa" olarak gösterilir.

(21) $\forall (x \subseteq S \rightarrow \cup x$ bir sıral öbektir)

yani sıral öbeklerden oluşan bir öbeğin birleşimi de bir sıral öbektir.

(22) a bir sıral öbek olduğunda,

$$\sim\exists x(x \text{ sıral öbektir} \wedge a \in x \wedge a \in Ax)$$

yani bir sıral öbek ile ardılı arasında hiçbir sıral öbek bulunmaz.

(23) K bir sıral sayı olduğunda $\cup AK = K$.

Örneğin $\cup A\varnothing = \varnothing$, $\cup A\{\varnothing\} = \{\varnothing\}$, $\cup A\{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$,... .

(24) K ve L sıral sayılar olduğunda,

$$AK = AL \rightarrow K = L$$

Doğal sayılar özel sıral sayılardır. Doğal sayıları öbür sıral sayılardan şöyle ayırt edebiliriz.

(25) Doğal sayılar $\in$ bağıntısı tarafından iyice sıralanmış olan sıral sayılardır.

Bu tanımdan doğal sayılara ait bütün aksiyomlar türetilebilir.

Şimdi sonlu ile sonsuz öbekleri birbirinden ayırt edelim. Bu amaçla aşağıdaki tanımdan yararlanılır.

Tanım 13: K ile L öbekler olduğunda, K ile L arasında bir tam eşleme varsa, K ile L'nin *eşsayılı* olduğu söylenir. Bu durumda $K \approx L$ yazılır. "$\approx$" bir eşdeğerlik bağıntısı, yani yansımalı, bakışımlı ve geçişli bir bağıntıdır.

Tanım 13'e dayanarak bir öbeğin sonlu olması şöyle tanımlanır.

Tanım 14: K öbeği *sonlu*'dur ancak ve ancak
$\exists x$ (x bir doğal sayıdır $\wedge$ K $\approx$ x).

Sonsuz öbek ise sonlu olmayan öbek demektir. $\varnothing$ bir küme olduğundan bütün doğal sayılar birer kümedir.

(26) $\forall x$ (x sonlu bir öbektir $\rightarrow$ x bir kümedir)

(27) $\forall x \forall y$ [(x sonlu bir öbektir $\wedge$ y $\subseteq$ x) $\rightarrow$ y sonlu bir öbektir]

(28) $\forall x \forall y$ [(x sonlu bir öbektir $\wedge$ y sonlu bir öbektir) $\rightarrow$ x $\cup$ y sonlu bir öbektir]

Tanım 15: ω = {x: x bir doğal sayıdır}

Bu tanıma göre

(29) ω = N

dir. Nitekim doğal sayılar öbeğini N ile göstermiştik. "ω" işareti N doğal sayılar öbeğinin bir sıral öbek olduğunu belirtmek için kullanılır.

(30) ω bir kümedir.

Bu sonuç aksiyom 11 yani sonsuzluk aksiyomundan elde edilir.

(31) ω bir sıral sayıdır.

Sıral sayılar $\in$ bağıntısı tarafından iyice sıralanmıştır. Bu nedenle a ve b iki sıral sayı olduğunda "a $\in$ b" yerine a < b yazabiliriz. Başka bir deyimle sıral sayılar arasında "<" bağıntısını şöyle tanımlarız.

Tanım 16: (a bir sıral sayıdır $\wedge$ b bir sıral sayıdır) $\rightarrow$ a < b $\leftrightarrow$ a $\in$ b.

ω en küçük sonsuz sıral sayıdır. Ancak ω'den farklı (ω'dan büyük) olan sonsuz sıral sayılar da vardır. ω'nun ardılı olan Aω, yani $\omega \cup \{\omega\}$, ω'den büyük olan sonsuz sıral sayıdır. Bu sıral sayı

(32) {0, 1, 2, 3, ..., ω}

biçiminde bir kümedir. Aω sıral sayısı ω + 1 biçiminde, AAω sıral sayısı ω+2, AAAω sıral sayısı ω + 3,... biçiminde yazılır. Dikkat edilirse ω + 2 sıral sayısı

biçimindedir.

Sıral sayılar α, β, γ gibi küçük grek harfleriyle gösterilir.

Tanım 17: α bir limit *sıral sayısı*'dır ancak ve ancak α bir sıral sayıdır $\wedge$ $\neg\exists B(\alpha = AB)$.

Örneğin ω bir limit sıral sayı $\omega + 1$, $\omega + 2$,... ise öyle değildir.

Hiçbir doğal sayı da limit sıral sayısı değildir.

1. α bir limit sıral sayısıdır $\rightarrow \cup\alpha = \alpha$.
2. (α bir sıral sayıdır $\wedge$ α bir limit sıral sayısı değildir) $\rightarrow \cup\alpha = \alpha$'nın en büyük öğesi.

Örneğin

(34) $\cup\omega = \omega$

(35) $\cup(n + 1) = n$

(36) $\cup(\omega + 1) = \omega$

ALIŞTIRMALAR

1. $\in$-bağlaşık olmayan eksiksiz öbeklere üç farklı örnek gösteriniz.
2. Eksiksiz olmayan $\in$ bağlaşık öbeklere üç farklı örnek bulunuz.
3. $\omega + 3$ (yani AAAω) sıral sayısının karşılığı olan kümeyi gösteriniz.

17.2.3 Sayal Sayılar

Bir kümenin ne kadar çok öğesi olduğunu belirten sayı o kümenin *sayal sayısı*'dır. Sayal sayıların belli bazı sıral sayılar olarak tanımlanabildiğini aşağıda göreceğiz. Daha önce "sayal sayı" kavramı için gerekli açıklamaları yapıyoruz.

Tanım 1: K kümesinin sayal sayısı L kümesinin sayal sayısından küçüktür veya o sayıya eşittir yani kısaca $K \leq L$ ancak ve ancak $\exists x(x \subseteq L \wedge K \approx x)$ ise.

"≤" bağıntısının aşağıdaki özellikleri vardır.

(1) $K \approx L \rightarrow K \leq L$

(2) $K \subseteq L \rightarrow K \leq L$

(3) $(K \leq L \wedge L \leq M) \rightarrow (K \subseteq M)$ ("≤" geçişlidir)

(4) [küme (K) $\wedge$ $K \leq L \wedge L \leq K] \rightarrow K \approx L$

"≤" bağıntısı ters bakışımlı değildir. Yani

(5) Küme (K) $\wedge$ Küme (L) $\wedge$ $K \neq L \wedge K \leq L \wedge L \leq M$ mümkündür.

Tanım 2: $K < L$ ancak ve ancak $K \leq L \wedge \sim(L \leq K)$. "<" bağıntısının aşağıdaki özellikleri vardır.

(6) $\sim(K < K)$ ("<" yansımasızdır)

(7) $K < L \rightarrow \sim(L < K)$ ("<" bakışımsızdır)

(8) $(K < L \wedge L < M) \rightarrow (K < L)$ ("<" geçişlidir)

Tanım 3: Bir *başlangıç sayal sayısı,* daha küçük bir sıral sayı ile eşsayılı olmayan bir sıral sayı demektir.

Örneğin her sonlu sıral yani doğal sayı, birer başlangıç sıral sayısıdır. Nitekim hiçbir doğal sayı ondan daha küçük olan bir doğal sayı ile eşsayılı değildir. Öte yandan ω sıral sayısı da bir başlangıç sıral sayısıdır. Nitekim ω'den küçük olan sıral sayılar sonlu sayılardır. ω ise hiçbir sonlu sıral sayı ile eşsayılı değildir. Buna karşılık $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3$,... sıral sayıları birer başlangıç sıral sayısı değildir. Çünkü

(9) $\omega + 1 \approx \omega$, $\omega + 2 \approx \omega$, $\omega + 3 \approx \omega$,...

Örneğin $\omega + 1 \approx \omega$ olduğunu göstermek için $\omega + 1$ kümesinden ω kümesine olan f gibi bir tam eşlemeyi şöyle tanımlarız.

(10) $f(\omega) = 0$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$,..., $f(n) = f(n + 1)$,...

yukarıdaki açıklamalara dayanarak "sayal sayı" kavramını şöyle tanımlarız.

Tanım 4: α bir *sayal sayı*'dır ancak ve ancak α bir sıral sayıdır $\wedge$ $\forall x[x \in \alpha \rightarrow \sim(x \approx \alpha)]$ ise. O halde bütün doğal sayılar birer sayal sayıdır. ω sıral sayısı da bir sayal sayıdır, ama $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\omega + 3$,... sıral sayıları sayal sayı değildir.

Sayal sayıların aşağıdaki özellikleri vardır.

(11) $\forall x$ [x sayal sayıdır $\rightarrow \exists y$ (y sayal sayıdır $\wedge$ x $\in$ y)]

(12) α ve β sayal sayılar olduğunda $\alpha < \beta$, $\beta < \alpha$, $\alpha = \beta$ önermelerinden biri ve yalnız biri doğrudur.

Tanım 5: α sonlu ötesi bir sayal sayıdır. ancak ve ancak α bir sayal sayıdır ve $\omega \leq \alpha$ ise. En küçük sonlu ötesi sayal sayı ω'dır.

Sayal sayıları açıklamak için aşağıdaki yeni aksiyom kullanılır. Bu aksiyomu dile getirmek için şu tanımdan yararlanılır.

Tanım 6: K bir öbekler öbeği olduğunda, f fonksiyonu K üzerine bir *seçme fonksiyonu*'dur ancak ve ancak Önal (f) = K $\wedge$ $\forall$x [(x $\in$ K $\wedge$ x $\neq \varnothing$) $\rightarrow$ f(x) $\in$ x] ise.

Örneğin a ve b bireyler olduğunda

K = {$\varnothing$, {a, b, $\varnothing$}, {a}, {$\varnothing$, {$\varnothing$}}, {{$\varnothing$}}}

Önal (f) = K ve f($\varnothing$) = a, f({a, b, $\varnothing$}) = a,

f({a}) = a, f({$\varnothing$, {$\varnothing$}}) = {$\varnothing$}, f({{$\varnothing$}}) = {$\varnothing$} olsun.

O zaman f fonksiyonu K öbeği üzerine bir seçme fonksiyonu o!...

Aksiyom 12: Seçme Aksiyomu:

K herhangi bir kümeler kümesi olduğunda, K üzerine en az bir seçme fonksiyonu vardır.

Seçme aksiyomu ile eşdeğer olan bircok farklı önerme vardır. Bunların bazılarını aşağıda gösteriyoruz.

(13) B herhangi bir bağıntı ise, öyle bir f fonksiyonu vardır ki f $\subseteq$ B ve Önal (f) = Önal (B).

(14) Her K kümesi için öyle bir α sıral sayısı vardır ki α = K.

(15) Her küme iyice sıralanabilir, yani K bir küme olduğunda, öyle bir R bağıntısı vardır ki K kümesi R bağıntısı tarafından iyice sıralanır.

(16) K ve L kümeler olduğunda, K < L, L < K ve K $\approx$ L önermelerinden biri ve yalnız biri doğrudur.

Sayal sayılar "≤" bağıntısı tarafından tam sıralanır. Yani "≤" bağıntısı sayal sayılar öbeğinde yansımalı, ters bakışımlı, geçişli ve bağlaşıktır.

K herhangi bir küme olduğunda $K \approx \omega$ olursa, K kümesine *sayılabilir sonsuz* küme denir. $K \leq \omega$ ise K kümesine *sayılabilir* küme denir.

Cantor teoremi: K herhangi bir küme olduğunda:

(17) $K < GK$.

O halde K sayılabilir sonsuz bir küme ise, GK da sonsuz bir kümedir. Ama cantor teoremi gereği GK sayılabilir sonsuz değildir.

Sayılabilir sonsuz olmayan sonsuz kümelere *sayılamaz sonsuz* küme denir.

Örneğin ω doğal sayılar kümesi sayılabilir sonsuz bir küme, reel sayılar kümesi ise sayılamaz sonsuz bir kümedir. Nitekim $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi olduğunda

(18) $\mathbb{R} \approx G\omega$

olduğu gösterilebilir.

1.7.3 YAPILAR

Daha önce doğal sayıların salt kümelere (yani içinde birey geçmeyen kümelere) indirgenebildiğini görmüştük. Tamsayılar, rasyonel sayılar, reel sayılar ve kompleks sayılar da yapıtaşları doğal sayılar olan kümelere indirgenebilir. Böylece matematiğin başlıca dalları arasında yer alan aritmetik, sayısal cebir ve analiz, küme kuramına indirgenir.

Öte yandan matematiğin önemli dalları arasında yer alan soyut cebir, soyut topoloji ve soyut geometri sayılar gibi belli matematiksel nesneleri ve bunlardan oluşan kümeleri değil, belirsiz nesnelerden oluşan soyut yapıları inceler. Bir *soyut yapı* veya kısaca bir *yapı*, belirsiz yani birtakım nesnelerden oluşan belli bir biçimdeki bir küme demektir. Her yapı bir aksiyom sistemi yardımıyla belirlenir. Yapının özellikleri ise aksiyom sisteminden mantık yoluyla türetilen teoremlerle dile getirilir. Bunu soyut cebirde bir örnekle açıklayalım.

Bir *monoid*

(1) <K, o, e>

biçiminde bir sıralanmış üçlüdür. K, belirsiz nesnelerden oluşan bir kümedir. o, önalanı KXK ve ardalanı K olan bir fonksiyon (yani ikili işlem)dir. x ve y ∈ K olduğunda o fonksiyonun x ve y için değeri, xoy biçiminde gösterilir. e, K'nın seçilmiş belli bir öğesidir. K, o, e aşağıdaki aksiyomlara uyar. (Değişkenlerin değer alanı K kümesidir.)

Aksiyom 1: $\forall x \forall y \forall z[(xoy)oz = xo(yoz)]$

("o" ortak karıştırıcıdır)

Aksiyom 2: $\forall x(xoe = eox = x)$

"o" fonksiyonuna *çarpım,* e nesnesine de *birim öğe* denir.

Teorem: $\forall x(xoe' = e'ox = x) \rightarrow e = e'$

İspat:

$\forall x(xoe' = e'ox = x)$ olduğunu varsayalım. O zaman "x" yerine e koyunca eoe' = e'oe = e elde edilir.

Öte yandan Aksiyom 2'de "x" yerine "e'" koyalım. O zaman e'oe=eoe'=e' elde edilir. O halde

eoe' = e'oe = e = e'

türetilir. Böylece e = e' elde edilir.

Her yapı kendisiyle aynı biçimde olan yapılarla birlikte "kategori" denilen bir matematiksel nesneyi oluşturur. Kategoriler özel yapılardır. Ancak "soyut" dediğimiz yapılar belirsiz nesnelerden oluşan kümeler belirsiz nesneler sayılmalıdır. Bir kategoriyi oluşturan özel yapı, belli biçimdeki soyut yapıların bütününü kapsadığından artık belirsiz değildir. Bu nedenle kategorilerin *belirli* öbekler olduğunu söyleyebiliriz. İmdi "kategori" kavramı şöyle tanımlanır.

K gibi bir *kategori*

(2) <N, M, o>

biçiminde bir sıralanmış üçlüdür. N öbeğine *K nesneleri* öbeği, M öbeğine de *K – morfizmleri* öbeği denir. "o", ön alanı M x M ve ard alanı M olan bir fonksiyon (yani işlem)dir. "o" işlemine *birleşme* işlemi denir. Her K-nesnesi bir küme ve her K-morfizmi bir fonksiyondur. M, N, o aşağıdaki aksiyomlara uyar. (N öbeğinin öğelerini a, b, c ile M öbeğinin öğelerini de α, β, γ, ... ile gösteriyoruz.

Aksiyom 1: Her $a \in M$ ve $b \in N$ için Hom(a, b) ile gösterilen M'nin bir alt öbeği vardır. Yani

$$Hom(a, b) \subseteq M.$$

Her $\alpha \in M$ için bir tek Hom(a, b)'nin öğesidir. Bu durumda α, $\alpha : a \rightarrow b$ biçiminde bir fonksiyondur. Buna göre

(3) $\alpha \in Hom(a, b)$

yerine

(4) $\alpha : a \rightarrow b$

yazılır.

Aksiyom 2: $\alpha \in Hom(a, b)$ ve $\beta \in Hom(b, c)$ ise, $\alpha \circ \beta \in Hom(a, c)$. $\alpha\circ\beta$ yerine kısaca $\alpha\beta$ yazılır. $\alpha\beta$, α ile β'nın bileşmesi veya çarpımıdır.

Aksiyom 3: $\alpha \in Hom(a, b)$, $\beta \in Hom(b, c)$ ve $\gamma \in Hom(a, c)$ ise, $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ ("o" işlemi ortaklaştırıcıdır.)

Aksiyom 4: Her $a \in N$ için öyle bir $\varepsilon_a \in Hom(a, a)$ vardır ki her $\alpha_{ba} \in Hom(b, a)$ ve $\beta_{ac} \in Hom(a, c)$ için

$$\alpha_{ba}\,\varepsilon_a = \alpha_{ba} \quad \text{ve} \quad \varepsilon_a\,\beta_{ac} = \beta_{ac}.$$

ε_a'ya a'nın belirlediği *özdeşlik morfizmi* denir. ε_a özdeşlik morfizmi $\varepsilon_a : a \rightarrow a$ biçiminde bir fonksiyondur. Her a bir tek ε_a özdeşlik morfizmini belirler. Nitekim $\varepsilon_a' \in Hom(a, a)$ bir özdeşlik morfizmi olsun. O zaman Aksiyom 4 gereği

$$\varepsilon_a'\,\varepsilon_a = \varepsilon'_a \text{ ve } \varepsilon_a'\,\varepsilon_a = \varepsilon_a$$

elde edilir. O halde $\varepsilon_a = \varepsilon'_a$ elde edilir.

Örnek olarak *monoidler kategorisi*'ni ele alalım. Kategorinin nesneler öbeği, monoidler öbeğidir. Kategorinin morfizmler öbeği ise monoidler arasındaki hom morfizmler öbeğidir. $<K_1, o_1, e_1>$ gibi bir monoidden $<K_2, o_2, e_2>$ gibi bir monoide bir *homomorfizm,* aşağıdaki koşulları yerine getiren $f:K_1 \rightarrow K_2$ biçiminde bir fonksiyon demektir.

(i) $f(o_1) = o_2$

(ii) $\forall x \forall y\ [f(xo_1y) = f(x)\ o_2\ f(y)]$.

Monoidler kategorisi genellikle "monoidler ve aralarındaki homomorfizmler kategorisi" biçiminde adlandırılır.

17.4 TANIMLAMA VE İSPATLAMA

17.4.1 Tanımlama Yöntemleri

Bir dilde bulunmayan yeni bir ad, yüklem veya işlem işaretini dilde bulunan bazı değişmezler yardımıyla tanımlayabiliriz.

a gibi yeni ad değişmezlerini dört farklı biçimde tanımlayabiliriz.

1. t, içinde a geçmeyen bir tekil terim olduğunda, a gibi bir yeni adı

(1) $a = t$

eşitliğiyle tanımlayabiliriz.

Örneğin doğal sayılar kuramında "1" sayı adı

(2) $1 = A0$

eşitliğiyle tanımlanır. Burada "0" bir ad, "A" bir birli işlem işareti, "A0" ise bir tekil terimdir.

2. B(x) içinde a geçmeyen bir birli açık önerme olduğunda

(3) $\exists!xB(x)$

yani

(4) $\exists xB(x) \wedge \forall x \forall y[[B(x) \wedge B(y)] \rightarrow x = y]$

ise, a adı

(5) $\forall x\,[a = x \leftrightarrow B(x)]$

koşuluyla tanımlanır. Örneğin

(6) $\exists!x\,(2x - 3 = 0)$

koşulu yerine geldiğinden "3/2" rasyonel sayı adını

(7) $\forall x\,(3/2 = x \leftrightarrow 2x - 3 = 0)$

koşuluyla tanımlayabiliriz.

3. a bir öbek adı ise, a adını bir öbeklenim yoluyla, yani

(8) $a = \{x: B(x)\}$

biçiminde tanımlayabiliriz. B(x) içinde a geçmeyen bir birli açık önermedir. Örneğin boş öbek ($\varnothing$)

(9) $\varnothing = \{x: \sim(x = x)\}$

biçiminde tanımlanır.

4. a adını bir tekil betimleme yardımıyla tanımlayabiliriz. B(x),

(10) $\exists!x\,B(x)$

koşulunu yerine getiren ve içinde "a" geçmeyen bir birli açık önerme olduğunda a adı

(11) $a = \iota x\,B(x)$

biçiminde tanımlanır. Örneğin (6) koşulu yerine geldiğinde "3/2" rasyonel sayı adı

(12) $3/2 = \iota x(2x - 3 = 0)$

biçiminde tanımlanabilir.

Yüklem değişmezlerini ise şöyle tanımlarız. F yeni bir yüklem ve $B(x_1,...,x_n)$, içinde F'nin geçmediği bir n-li açık önerme olduğunda)

(13) $\forall x_1...\forall x_n[Fx_1...x_n \leftrightarrow B(x_1,...,x_n)]$

"F"nin bir tanımdır. Örneğin "çift doğal sayıdır" birli yüklemini

(14) $\forall x[x \text{ bir çift doğal sayıdır} \leftrightarrow x \in N \wedge \exists y(y \in N \wedge x = 2y)]$

("N", doğal sayılar kümesini gösterir.)

İkinci örnek olarak doğal sayılar arasında "<" ikili yüklemini tanımlayalım.

(15) $\forall x \forall y[x < y \leftrightarrow x \in N \wedge y \in N \wedge \exists z(z \in N \wedge z \neq 0 \wedge x + z = y)]$

(13) biçimindeki tanımının sağ tarafındaki açık önermede yani $Fx_1...x_n$'de geçmeyen bağsız değişken geçişi bulunmamalıdır. Yoksa bir çelişki ortaya çıkabilir. Örneğin

(16) $\forall x \forall y(Fx \leftrightarrow x \in N \wedge y \in N \wedge x < y)$

önermesini "F" birli yükleminin bir tanımı sayamayız. Nitekim (16)'dan

(17) $F(2) \leftrightarrow (2 \in N \wedge 3 \in N \wedge 2 < 3)$

ile

(18) $F(2) \leftrightarrow (2 \in N \wedge 1 \in N \wedge 2 < 1)$

önermeleri türetilebilir. Oysa (17)'nin sağ bileşeni doğru, (18)'in sağ bileşeni ise yanlıştır. Dolayısıyla "F(2)" önermesi (16) tanımı gereği hem doğru hem yanlıştır. Bu ise bir çelişkidir. O halde (16) önermesi "F"nin gerçek bir tanımı sayılamaz.

İşlem işaretlerini de şöyle tanımlayabiliriz. f, yeni bir n-li işlem işareti ve $B(x_1...x_n, y)$ içinde "f" geçmeyen bir (n+1)'li açık önerme olsun.

(19) $\forall x_1...\forall x_n \exists!y\ B(x_1,...,x_n, y)$

koşulu yerine gelirse,

(20) $\forall x_1...\forall x_n \forall y\ [fx_1...x_n = y \leftrightarrow B(x_1,...,x_n, y)]$

önermesi "f"nin bir tanımıdır. Örneğin doğal sayılarda "kare" fonksiyonu şöyle tanımlanır.

(21) $\forall x \exists!y\ [(x \times x) = y]$

olduğundan

(22) $\forall x \forall y\ [x^2 = y \leftrightarrow (x \times x) = y]$

Doğal sayılar kuramı dilinde işlem işaretlerinin değişik bir tanımlama yöntemi "rekürsif tanımlama" denilen yöntemdir. Doğal sayılar kuramı dilinde, "f" gibi bir (n+1)'li işlem işaretinin rekürsif tanımı

(23) $\forall x_1 ... \forall x_n [f(x_1,...,x_n, 0) = g(x_1,...,x_n)]$

(24) $\forall x_1 ... \forall x_n \forall y [f(x_1,...,x_n, Ay) = h[x_1,...,x_n, y, g(x_1,...,x_n)]]$

biçimindedir. Örneğin

(25) $n! = 1 \cdot 2 \ldots (n - 1) \cdot n$

biçiminde tanımlanan faktöriyel (!) fonksiyonunu dile getiren "!" birli işlem işareti rekürsif olarak şöyle tanımlanır.

(26) $0! = 1$

(27) $\forall x[(Ax)! = x \cdot x!]$

İkinci örnek olarak doğal sayılar kuramı dilinde üstel fonksiyonu dile getiren ikili işlem işaretini

(28) $\forall x(x^0 = 1)$

(29) $\forall x \forall y(x^{Ay} = x \cdot x^y)$

biçiminde rekürsif olarak tanımlarız.

ALIŞTIRMALAR

Üç ad; üç yüklem ve üç işlem işaretinin tanımını yapınız.

17.4.2 İspatlama Yöntemleri

Matematikte ispat bir önermenin teorem olduğunu gösteren işlemdir. Bir teoremin ispatı, teoremin aksiyom sisteminden (yani tanım ve aksiyomlarından) geçerli bir çıkarımın sonucu olarak türetilebildiğini gösterir. İspatta kullanılan çıkarımın öncülleri tanım ve aksiyomlar ile daha önce ispatlanmış teoremlerdir. Mantıkça geçerli önermeler de *mantık teoremleri* sayılıp öncül olarak kullanılabilir. Çeşitli ispat yöntemlerinden en önemli beş yöntemi gözden geçirelim.

Birinci Yöntem: Doğrudan İspat

Öncüllerden mantık kuralları gereği yeni önermeler türetmeye dayanan yönteme *doğrudan ispat* yöntemi denir. Örneğin doğal sayılar kuramında

(1) $m < n \rightarrow m < An$

teoreminin doğrudan ispatı aşağıdaki türetimle yapılabilir.

(2) 1. ~~Gös~~ $m < n \rightarrow m < An$

2. $\overline{m < An \leftrightarrow (m < n \vee m = n)}$ (Aksiyom 8)

3. $m < n \rightarrow (m < n \vee m = n)$ (totoloji)

4. $\underline{m < n \rightarrow m < An}$ (2, 3 eşdeğerlerin değiş tokuşu).

İkinci Yöntem: Koşullandırma Yoluyla İspat

$B_1 \rightarrow B_2$ biçiminde bir koşullu önermenin $A_1,...,A_n$ öncüllerine dayanarak *koşullandırma* yoluyla ispatlanması, B_1'in ek öncül olduğu

(3) $A_1,...,A_n, B_1 \therefore B_2$

çıkarımının denetlenmesi demektir. B_1'e *koşullandırma öncülü* denir. Örnek olarak (1) teoreminin koşullandırma yoluyla ispatını yapalım. Bu ispat bir koşullu türetim ile dile getirilebilir.

(4) 1. ~~Gös~~ $m < n \rightarrow m < An$

2. $\overline{m < n}$ (Var)

3. $m < n \rightarrow (m < n \vee m = n)$ (totoloji)

4. $m < An \leftrightarrow (m < n \vee m = n)$ (Aksiyom 8)

5. $m < n \vee m = n$ (2, 4, $\rightarrow$Ç)

6. $\underline{m < An}$ (4, 5, eşdeğerlerin değiş tokuşu)

Üçüncü Yöntem: Dolaylı İspat (Olmayana Ergi Yöntemi)

B gibi herhangi bir önermenin $A_1,...,A_n$ öncüllerine dayanarak dolaylı olarak (veya olmayana ergi yöntemiyle) ispatlanması $\{A_1,...,A_n, \sim B\}$ önermeler kümesinin tutarsızlığının denetlenmesi demektir. Örneğin (1) teoreminin dolaylı ispatını bir dolaylı türetim biçiminde dile getirelim.

(5) 1. ~~Gös~~ $m < n \rightarrow m < An$

2. $\neg(m < n \rightarrow m < An)$ (Var.)
3. $m < n$ (2'den)
4. $\neg(m < An)$ (2'den)
5. $m < n \rightarrow (m < n \vee m = n)$ (totoloji)
6. $m < n \vee m = n$ (3, 5, $\rightarrow$ Ç)
7. $m < An \leftrightarrow (m < n \vee m = n)$ (Aksiyom 8)
8. $m < An$ (6, 7, eşdeğerlerin değiş tokuşu)

Dördüncü Yöntem: Tümevarımlı İspat

Bütün doğal sayıların belli bir özelliği olduğunu dile getiren tümel önermelerin doğal sayılar kuramı çerçevesinde ispatlanması için tümevarım aksiyom kalıbından yararlanılır. Böyle bir ispata da *tümevarımlı ispat* denir. İspatta $\forall x\ B(x)$ önermesini ispatlamak için birinci adımda $x = 0$ durumunda $B(0)$ önermesi ispatlanır. İkinci adımda da $x = n$ durumunda $B(n)$ öncül sayılarak $B(n + 1)$ önermesi $B(n)$ önermesinden türetilir. Örneğin

(6) $\forall x\ [\neg(x = 0) \rightarrow 0 < x]$

teoreminin tümevarımlı ispatını yapalım.

(i) *x = 0 durumu:*

(7) $\neg(0 = 0) \rightarrow 0 < 0$

önermesi özdeşlik mantığında geçerlidir. Nitekim (7)'nin değillemesinin çözümleyici çizelgesi kapalıdır.

(8) 1. $\neg[\neg(0 = 0) \rightarrow 0 < 0]$

2. $\neg(0 = 0)$

3. $\neg(0 < 0)$
X

(ii) *x = n durumu:*

(9) $\neg(n = 0) \rightarrow 0 < n$

önermesini öncül sayarak, (9)'dan

(10) $\sim(An = 0) \rightarrow 0 < An$

önermesini türetmeliyiz. Bunu aşağıdaki türetimle yapıyoruz.

(11) 1. ~~Gös~~ $[\sim(n = 0) \rightarrow 0 < n] \rightarrow [\sim(An = 0) \rightarrow 0 < An]$

2. $\sim(n = 0) \rightarrow 0 < n$ (Var.)
3. $0 < An \leftrightarrow (n = 0 \vee 0 < n)$ (Aksiyom 8)
4. ~~Gös~~ $\sim(An = 0) \rightarrow 0 < An$
5. $\sim(An = 0)$ (Var.)
6. $n = 0 \vee 0 < n$ (2'den)
7. $0 < An$ (3, 6, eşdeğerlerin değiş tokuşu)

Beşinci Yöntem: Aksine Örnek Verme Yoluyla İspat

$\sim\forall x\ B(x)$ biçiminde bir tümel önerme değillemesinin *aksine örnek verme* yoluyla ispatlanması, a bir tekil terim olduğunda, $\sim B(a)$ önermesinin ispatlanması demektir. Örneğin

(12) $\sim\forall x\ x > 0$

önermesini doğal sayılar kuramında aksine örnek verme yoluyla ispatlayalım. Bu amaçla "x" yerine "0" tekil terimini koyalım. Böylece

(13) $\sim(0 > 0)$

önermesi elde edilir. Oysa (13) önermesi Aksiyom 7 gereği doğrudur. Böylece (12) ispatlanmış olur.

ALIŞTIRMALAR

Beş türlü ispat yöntemine birer örnek veriniz.

17.5 MATEMATİK KURAMLARININ AKSİYOMLAŞTIRILMASI

Daha önce belirttiğimiz gibi birden farklı olan iki türlü matematik kuramı vardır. Birinci türden matematik kuramlarının konusu sayıları ve sayı öbekleri ve salt (yani bireysiz) öbekler gibi belirli matematiksel nesnelerdir. Bu türlü nesneler aritmetik, sayısal cebir ve analizde incelenir. Bu kuramlar mantıkça kapalı olan doğru önerme kümeleri olarak aksiyomlardan bağımsız olarak vardır. Aksiyomlardan önce varolan bu türlü kuramlar sonradan aksiyomlaştırılabilir. Yani birer aksiyomatik sistem biçimine dönüştürülür. Üstelik ilerde belirteceğimiz gibi genellikle matematiksel kuramları "eksiksiz" olarak aksiyomlaştırmak, yani bütün doğru önermeleri türetecek güçte bir aksiyom sistemi kurmak, mümkün değildir.

İkinci türden matematiksel kuramlar soyut cebir, topoloji ve geometride incelenen soyut yapıları konu edinen kuramlardır. Bu kuramlar aksiyomlardan bağımsız var olamazlar. Doğru olan teoremleri aksiyomlardan türemiş olmalıdır. Teoremler, aksiyomlardan bağımsız olarak doğruluk değerinden yoksundur. Nitekim bu türlü kuramları tanımlayan, aksiyomlardır. Aksiyomlar olmadan kuram tanımlanmış olmadığından var olamaz. Dolayısıyla aksiyomlarda bağımsız olarak teoremlerin doğruluk değeri olamaz. Daha doğrusu dilin önermeleri arasında "teorem" ile "teorem olmayan önerme" ayrımını yapamayız.

Örneğin soyut geometride

(1) Bir üçgenin üç iç açısının toplamı 180°'dir.

Önermesi kullanılan aksiyomlardan bağımsız olarak ne doğru ne yanlıştır. (1) önermesinin Euklides aksiyom sisteminde doğru, Lobachewski ve Riemann aksiyom sistemlerinde ise yanlış olması şu anlama gelir. Öncülleri Euklides geometrisinin aksiyomları ve sonucu (1) olan çıkarım geçerli, öncülleri Lobachewski geometrisinin veya Riemann geometrisinin aksiyomları ve sonucu (1) olan çıkarım geçerli değildir.

Şimdi aksiyomlardan bağımsız olarak varolabilen kuramları ele alıp bunların nasıl aksiyomlaştırıldıklarını inceleyelim. Matematik tarihinde bu türlü kuramların aksiyom sistemi kulanılmadan incelenebildiklerini görüyoruz. Ak-

siyomlaştırma işlemi (mantığa dayalı) belli bir takım kurallara bağlıdır. Bu kurallardan başlıcalarını aşağıda belirtiyoruz. (Tanımların aksiyomlar arasında yer aldığını kabul ediyoruz.)

1. Seçilen aksiyomlar *bağımsız* olmalı, yani hiçbir aksiyom geçerli bir çıkarımla öbürlerinden sonuç olarak türetilememelidir. Nitekim bazı aksiyomlar sonuç olarak türetilebilseydi bunlar ispatlanmış teorem olup aksiyom sayılmayacaklardı. Bu kural aksiyom sayısının en düşük düzeyde tutulmasını sağlıyor.

2. Aksiyomlar ya *sonlu* sayıda olmalı, ya da sonsuz sayıda oldukları durumda sonlu sayıda aksiyom kalıbı ile dile getirilebilmelidir. Yoksa kullanılamayıp işlevlerini yitirirler.

3. Aksiyom sistemi *sağlam* olmalı, yani aksiyom sisteminden türetilebilen bütün teoremler doğru önermeler olmalıdır. Bu kural çok önemlidir. Nitekim aksiyom sistemi sağlam değilse teoremler yanlış olabilir.

4. Aksiyomlar kümesi *tutarlı* olmalıdır. Nitekim tutarsız aksiyom kümesinden A ile ~A gibi çelişik önermeler teorem olarak türetilebilir. O zaman teoremlerden en az biri yanlış olur. Dolayısıyla tutarsız aksiyom sistemi sağlam değildir. Ayrıca tutarsız bir aksiyom kümesinden dilin bütün önermeleri teorem olarak türetilir. Her önerme teorem olunca "teorem" kavramı işlevini yitirir.

5. Aksiyom sisteminin *eksiksiz* olması, yani doğru olan her önermenin teorem olarak ispatlanabilmesi bir ideal olarak istenir. Oysa Gödel 1931'de bu idealin doğal sayılar kuramını kapsayan hiçbir matematik kuramı için gerçekleşemeyeceğini göstermiştir. (Birinci Gödel teoremi) Dolayısıyla eksiksiz aksiyom sistemi idealinden vazgeçmek gerekiyor. Üstelik Gödel 1931'de doğal sayılar kuramını kapsayan bir matematiksel kuramın tutarlı olması durumunda bu kurama dayanarak tutarlı olduğunun ispatlanamayacağını göstermiştir. (İkinci Gödel teoremi) Böylece bir kuramın tutarlılığının ispatının da gerçekleşemeyecek bir ideal olduğu anlaşılmıştır.

Birinci Gödel Teoremi matematikte doğruluk ile ispatlanabilirliğin örtüşmeyen kavramlar olduğunu göstermiştir. Nitekim bu teoreme göre ispatlanamayan doğru önermeler vardır.

Birinci Gödel Teoreminin ispatının genel biçimi şöyledir:

M, doğal sayılar kuramını kapsayan bir matematik kuramı olduğunda:

1. $\mathcal{S}$, M kuramının diline ait *sözler* kümesi

2. $\mathcal{O}$, M kuramının diline ait *önermeler* kümesi

3. $\mathcal{O}_{isp}$, M kuramının diline ait *ispatlanabilir* önermeler kümesi

4. $\mathcal{O}_{çür}$, M kuramının diline ait *çürütülebilir* önermeler kümesi

5. $\mathcal{B}$, M kuramının diline ait birli açık önermeler kümesi

6. $\mathcal{S}$, $\mathcal{S} \times N \rightarrow \mathcal{S}$ biçiminde bir fonksiyon

7. $\mathcal{O}_{doğr}$, M kuramı diline ait *doğru* önermeler (yani M kuramını oluşturan önermeler) kümesi

olsun. (Bir önerme çürütülebilirdir ancak ve ancak bir önermenin değillemesi ispatlanabilirse.)

$\mathcal{S}$'nin öğelerini S, S_1, S_2,...; $\mathcal{O}$'nün öğelerini C, C_1, C_2,...; $\mathcal{B}$'nin öğelerini B, B_1, B_2, ..., $\mathcal{S}$ (S, n)'yi S(n) biçiminde gösteriyoruz. $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{S}$, $\mathcal{O}_{isp} \subseteq \mathcal{O}$, $\mathcal{O}_{çür} \subseteq \mathcal{O}$, $\mathcal{O}_{doğr} \subseteq \mathcal{O}$. $B \in \mathcal{B}$ olduğunda, $\mathcal{S}$ (B, n) = B(n) ve $Y(n) \in \mathcal{O}$ olur. B(n) önermesi B yükleminin *n* sayısı için doğru olduğunu dile getirir.

(1) $\{n: B(n) \in \mathcal{O}_{doğr}\}$

kümesine, B yükleminin M kuramında *adlandırdığı* sayı kümesi denir. Sayı kümelerini K, K_1, K_2,... biçiminde gösteriyoruz. Buna göre K kümesi B'nin M kuramında adlandırdığı sayı kümesidir ancak ve ancak

(2) $\forall x\ (n \in K \leftrightarrow B(n) \in \mathcal{O}_{doğr})$

ise.

M kuramı dilinin sözlerinin kümesi olan $\mathcal{S}$ kümesi sıralanabilir sonsuz bir kümedir. Oysa doğal sayı kümelerinin kümesi Cantor teoremi gereği sıralanamaz sonsuzdur. $\mathcal{S}$ kümesinin alt kümesi olan $\mathcal{B}$ birli yüklemler kümesi de sıralanabilir sonsuzdur. Dolayısıyla adlandırılabilen doğal sayı kümelerinin kümesi de sıralanabilir sonsuzdur. Bu nedenle adlandırılamayan doğal sayı kümeleri vardır.

Şimdi aşağıdaki kavramları tanımlayalım.

$\mathcal{O}_{isp} \subseteq \mathcal{O}_{dğr}$ ve $\mathcal{O}_{çür} \cap \mathcal{O}_{dğr} = \varnothing$ ise, M kuramı *sağlam*'dır.

N doğal sayılar kümesi olduğunda, g: $\mathcal{S} \rightarrow$ N biçiminde bir tameşlemeyi göz önüne alalım. O zaman S $\in \mathcal{S}$ olduğunda g(S) $\in$ N olup g(S) doğalsayısına S sözünün *Gödel sayısı* denir. n $\in$ N olduğunda S_n Gödel sayısı n olan sözdür. Yani

(3) $S_n = \eta S\,[g(S) = n]$.

$S_n(n)$ sözüne S_n sözünün *köşegenleşmesi* denir. $S_n \in \mathcal{S}$ ise, S_n bir önerme olup,

(4) $S_n(n)$ doğrudur $\leftrightarrow$ S_n yüklemi kendi Gödel sayısı olan n sayısı için doğrudur.

önermesi elde edilir.

Köşegen fonksiyonu denilen d: N $\rightarrow$ N biçimindeki d fonksiyonu şöyle tanımlanır:

(5) $d(n) = g[S_n(n)]$

K herhangi bir doğal sayı kümesi olduğunda, K* kümesi şöyle tanımlanır:

(6) $K^* = \{n: d(n) \in K\}$

İmdi

(7) $I = \{g(c): C \in \mathcal{O}_{isp}\}$

ve K herhangi bir doğal sayı kümesi olduğunda

(8) $K' = N - K$

olsun.

O zaman aşağıdaki teorem ispatlanabilir.

Gödel-Tarski Teoremi: Eğer I'* doğal sayılar kümesi M kuramında adlandırılabilirse ve M kuramı sağlamsa, K kuramında ispatlanamayan bir doğru önerme vardır, yani $\mathcal{O}_{dğr} - \mathcal{O}_{isp} \neq \varnothing$.

Aşağıdaki üç koşulun yerine geldiği gösterilebilir.

G1 Koşulu: K doğal sayılar kümesi M kuramında adlandırılabilirse, K* kümesi de M kuramında adlandırılabilir.

G2 Koşulu: K doğal sayılar kümesi M kuramında adlandırılabilirse, K' kümesi de M kuramında adlandırılabilir.

G3 Koşulu: İ doğal sayılar kümesi M kuramında adlandırılabilir.

M kuramı G1, G2, G3 koşullarını yerine getirirse, İ'* doğal sayılar kümesi M kuramında adlandırılabilir.

(9) S_n sözü K doğal sayılar kümesi için bir *Gödel Önermesi*'dir ancak ve ancak $S_n \in \ddot{\mathcal{O}} \wedge [(S_n \in \ddot{\mathcal{O}}_{\text{dğr}} \wedge \sim(n \in K)) \vee (S_n \notin \ddot{\mathcal{O}}_{\text{dğr}} \wedge \sim(n \notin K))]$

O halde

(10) S_n, K için bir Gödel önermesidir ancak ve ancak

$S_n \in \ddot{\mathcal{O}} \wedge (S_n \in \ddot{\mathcal{O}}_{\text{dğr}} \leftrightarrow n \in K)$ ise.

Köşegen Teoremi: K* kümesi M kuramında adlandırılabilirse, K kümesi için bir Gödel önermesi vardır.

(11) M kuramı G1 koşulunu yerine getirir ve K kümesi M kuramında adlandırılabilirse, K kümesi için bir Gödel önermesi vardır.

İmdi

(12) $D = \{g(C): C \in \ddot{\mathcal{O}}_{\text{dğr}}\}$

olsun. O zaman aşağıdaki teorem ispatlanabilir.

Tarski Teoremi:

1. D'*, doğal sayılar kümesi M kuramında adlandırılamaz.
2. M kuramı G1 koşulunu yerine getirirse, D' kümesi M kuramında adlandırılamaz.
3. M kuramı G1 ve G3 koşullarını yerine getirirse, D kümesi M kuramında adlandırılamaz.

Gerek ispatlanabilir önermelere, gerekse çürütülebilir önermelere *belirlenir önerme* denir. İspatlanamayan ve çürütülemeyen önermelere ise *belirlenemez önerme* denir.

İspatlanamayan doğru önermeleri olan bir kurama *eksikli kuram* denir.

Birinci Gödel Teoremi

(i) l'^* doğal sayılar kümesi, doğal sayılar kuramını kapsayan her matematik kuramında adlandırılabilir.

(ii) M kuramı sağlam ve l'^* doğal sayılar kümesi M kuramında adlandırılabilirse, M kuramı eksiklidir.

O halde doğal sayılar kuramını kapsayan her sağlam matematik kuramı eksiklidir.

18. DOĞA BİLİMLERİNİN MANTIKSAL TEMELLERİ

18.1 GÖZLEM VE DENEY

18.1.1 Gözlem

Temel ve uygulamalı doğa bilimleri, konu edindikleri canlı veya cansız sistemler hakkında gerçek dünyada doğru olan olumsal (yani ne zorunlu ne de imkânsız) önermeleri ortaya koymayı amaçlayan (fizik, kimya, biyoloji, mühendislik ve tıp gibi) bilimlerdir. Doğada var olan belli bir türden sistemler hakkında ileri sürülen önermeler kümesi bir *bilimsel kuram* oluşturur. Matematik kuramlarının denetlenmesi bütünüyle mantığa bağlıdır. Oysa doğaya ilişkin bilimsel kuramları oluşturan önermeleri denetlemek için hem mantığa hem de gözlem ve deneye gereksinme vardır. Mantık ile gözlem ve deneye dayanan yöntem *bilimsel yöntem*'dir. Bilimsel yöntem, mantığın doğa bilimlerine önemli bir uygulamasıdır. Ancak mantık doğa bilimlerinin mantıksal temellerini ortaya koymak için de gereklidir. Bir bilim dalının *mantıksal temelleri,* temel kavramları ve işlemleri, yasaları ve kuramları, pekiştirmeleri ve açıklamaları ve bütün bunların değişim sürecinin mantıksal yapısı demektir. Gerek tek tek bilim dallarının, gerekse doğa bilimlerinin bir bütün olarak

mantıksal temellerinin ortaya konulması *bilim felsefesi*'nin önemli bir işlevidir. Bu konuya burada mantığın uygulaması olduğu ölçüde yer veriyoruz.

Bilimsel etkinliğin (i) kuramların kuruluşu (ii) kuram ve yasaların pekiştirilmesi ve (iii) kuramların açıklama ve öndeyi amacıyla kullanılması olmak üzere başlıca üç evresi vardır. Bilimsel yöntem her üç evrede etken olmakla birlikte, özellikle pekiştirme evresinde önemli bir yer alır. Nitekim pekiştirme, bilimsel yönteme dayanan denetleme demektir. Bu üç evreyi ilerdeki bölümlerde inceleyeceğiz. Şimdi ise bilimsel yöntemin temelinde olan gözlem ve deneyi inceliyoruz.

Gözlem: Çıplak duyu organlarıyla veya duyu organlarının gücünü artıran aletlerle olup biten doğa olaylarının ve nesnelerin varlığı ile nitelik veya niceliğini bilimsel titizlikle saptama işlemi demektir.

Çıplak duyu organlarıyla yapılan gözleme *dolaysız gözlem,* mikroskop ve teleskop gibi gözlem aletiyle güçlendirilmiş duyu organlarıyla yapılan gözleme *dolaylı gözlem* denir.

Bu ayrımlara göre doğa bilimlerinin konusu olan nesneler üçe ayrılır. (i) dolaysız gözlemle saptanabilen nesneler, (ii) yalnız dolaylı gözlemle saptanabilen nesneler, (iii) ne dolaysız ne de dolaylı gözlemle saptanamayan nesneler. Üçüncü türden nesnelere gözlemlenemeyen nesneler denir. Birinci ve ikinci türden nesnelere *gözlemlenebilir* nesneler denir. Bilim ve gözlem aletlerinin gelişmesi sonucunda gözlemlenemeyen nesneler, gözlenebilir nesneler durumuna geçebilir.

Gözlem *gerçeğe uygun* olabildiği gibi *yanılgılı* da olabilir. Nitekim gözlem ne denli titizlikle yapılırsa yapılsın beklenmeyen bozucu nedenlerden dolayı gerçeğe aykırı sonuç verebilir. Bu durumda gözlemin tekrarlanmasıyla yanılgının giderilmesine çalışılır.

Bilim dilinde kullanılan terimler "gözlemsel" ve "kuramsal" olmak üzere ikiye ayrılır. *Gözlemsel terimler* gözlenebilir nesneler ile gözlemle saptanabilen nitelik ve nicelikleri (veya gözlenebilir özellik ve bağıntıları) dile getirir. Örneğin "ağaç", "araba", "kedi" gözlemlenebilir nesneler "mavi" ve "tatlı" gözlemlenebilir nitelikler, "65 kg ağırlığında", "1 metre 80 santimetre bo-

yunda" gözlemlenebilir nicelikleri dile getiren gözlem terimleridir. "üstündedir", "yanındadır" terimleri ise gözlemlenebilen bağıntılar dile getiren gözlem terimleridir. Bu örnekler dolaysız gözleme ilişkindir. Yalnız dolaylı gözlemle gözlemlenebilen nesnelere örnek olarak "hücre" ve "bakteri"yi gösterebiliriz. Hiç olmazsa şimdilik gözlemlenemeyen nesnelere örnek olarak da fiziğin bölünmeyen taneciklerinden olan "kuark"ı gösterebiliriz.

Niceliklerin gözlemle saptanmasına *ölçme* denir.

Gelişmiş bilimlerde niceliklerin çok önemli işlevi olduğundan ölçmenin bilimsel yöntemdeki işlevi çok büyüktür.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki nesne ve nitelikleri "dolaysız gözlemlenebilir", "dolaylı gözlemlenebilir" ve "gözlemlenemez" olmak üzere sınıflandırınız.

1. Elektron
2. Proton
3. Nötron
4. Atom Çekirdeği
5. Atom
6. Molekül
7. Mikrop
8. Masa
9. Gezegen
10. Yıldız

18.1.2 Gözlem Terimleri ve Kuramsal Terimler

Gözlem terimleri, gözlemlenebilen nesneleri, olayları, nitelikleri ve nicelikleri, özellikleri ve bağıntıları dile getiren terimler demektir.

Dolaysız gözleme ilişkin bütün terimler gözlem terimi sayılır. Örneğin "ağaç", "kedi", "mavi", "tatlı", "yanında" gözlem terimleridir.

Gözlemlenemeyen nesneleri, olayları, nitelik ve nicelikleri, özellik ve bağıntıları dile getiren terimlere *kuramsal terimler* denir.

Yalnız gözlem terimlerinden oluşan tekil önermelere *gözlem önermeleri*, içinde en az bir kuramsal terim geçen önermelere de *kuramsal önerme* denir.

Temel önerme biçimindeki gözlem önermeleri

(1) $Fa_1...a_n$

veya

(2) $\sim Fa_1...a_n$

biçiminde olup, Gerek $a_1,...,a_n$ tekil terimleri gerekse F n-li yüklemi (veya genel terimi) bir gözlem terimidir. Örneğin

(3) bu kedi siyahtır

ile

(4) bu kedi beyaz değildir

temel önerme biçiminde gözlem önermeleridir. Nitekim "kedi" ile "siyah" birer gözlem terimidir. Bir nesnenin kedi olup olmadığı veya siyah olup olmadığı dolaysız gözlemle saptanabilir.

Niceliklerin ölçülmesine ilişkin önermeler ise f bir n-li işlem işareti olmak üzere

(5) $f(a_1,...,a_n) = \alpha$

biçimindedir. Burada $a_1,...,a_n$ doğaya ait nesneler, α ise bir reel sayı gösterir. Örneğin

(6) $f(a) = \alpha$

"a cisminin santimetre olarak uzunluğu α'ya eşittir" anlamına gelebilir. Öte yandan

(7) $f(a, b) = \alpha$

"a taneciği ile b taneciği arasındaki santimetre olarak uzaklık α'ya eşittir" an-

lamına gelebilir. Genel olarak (5) biçimindeki önermelere *ölçme önermesi* denir.

(5) biçimindeki bir ölçme önermesi, $a_1,...,a_n$, f bir gözlem terimi olması durumunda bir gözlem önermesi veya bir gözlemsel ölçme önermesi olur. Eğer $a_1,...,a_n$ veya f terimlerinde en az biri kuramsal terim ise (5) önermesi bir kuramsal önerme (veya bir kuramsal ölçme önermesi) olur.

Gözlem önermelerinin doğru olup olmadığı gözlemle, ölçme önermelerinin doğru olup olmadığı da ölçme ile saptanır. Buna karşılık kuramsal önermelerin ve kuramsal ölçme önermelerinin doğru olup olmadığı tek başına gözlemle-dolaylı gözlemle bile-saptanamaz. Ayrıca içinde ilgili kuramsal terimlerin geçtiği bir yasa veya kurama dayanmak gereği vardır. Örneğin "kuvvet" bir kuramsal terim (bir kuramsal nicelik terimi) dir. Bir cisme uygulanan kuvveti ölçmek için Hooke yasası denilen bir fizik yasasından yararlanabilinir. Yasaya göre bir cisme uygulanan kuvvet bu cisme bağlı bir yaylı telin uzaması ile orantılıdır. Böylece telin uzaması ölçülerek kuvvet hesaplanabilir. Bu hesaplama ise Hooke yasasına dayanır.

Genellikle gözlem ve ölçme aletleri belli birtakım yasa veya kuramlara dayanır. Bu nedenle dolaylı gözleme ilişkin terimlerin bir çoğu gözlem terimi değil, kuramsal terim sayılmalıdır. Nitekim içinde bu türlü terimler geçen önermelerin doğruluk değerini isaptamak için gözlem veya ölçmenin yanısıra yasa veya kuramlara başvurmak da gerekir. Oysa içinde yalnız gözlem terimleri geçen gözlem önermelerinin doğruluk değerini saptamak için tek başına gözlem yeterlidir.

18.1.3 Deney

Daha önce belirttiğimiz gibi:

deney a gibi bir cismin veya fiziksel sistemin "Fa" biçimindeki bir gözlem önermesiyle dile getirilen belli bir koşulda, G özelliğini taşıyıp taşımadığının gözlemle saptanması işlemi demektir.

Bu amaçla deneyci söz konusu cisim veya sistemi belli bir biçimde hazırlar. Bu hazırlama işlemi sonucunda *deney koşulu* denilen "Fa" önermesi doğ-

ru olur. "Fa"nın doğruluğu ise deneyci tarafından gözlemle saptanır. Deney koşulunun yerine gelmesinden sonra deneyci yeni bir gözlemle *deney sonucu* denilen Ga ile ~Ga önermelerinden hangisinin doğru olduğunu saptar. Çok kez deneyci iki mümkün almaşık sonuçtan birini bekler. Bu da *beklenen deney sonucu*'dur. Beklenen sonucu olan deneyde beklenen deney sonucu gerçekleşirse deney *başarılı,* yoksa başarısız olur.

Örnek olarak gene Ohm yasası ile ilgili deneyi ele alalım. Bu örnekte, deney başarılı ise deney koşulu "Elektrik devresinin gerilimi iki katına yükseldi", deney sonucu da "Elektrik devresinin akım şiddeti iki katına yükseldi" biçiminde olabilir.

İkinci bir örnek olarak "Bütün metaller ısınınca genleşir" yasası ile ilgili deneyi ele alalım. Deney başarılı ise koşulu "Bu metal parçası sıtılmıştır", deney sonucu da "Bu metal parçası genleşmiştir" biçiminde olur.

18.2 BİLİMSEL KAVRAMLAR

18.2.1 Nitel veya Sınıflayıcı Kavramlar

Bilimsel kavramlar (i) nitel veya *sınıflayıcı* (ii) *karşılaştırmalı* ve (iii) nicel olmak üzere üç öbeğe ayrılır. Önce "sınıflayıcı" veya "nitel" denilen kavramları inceliyoruz. Bu kavramlar "insan", "ağaç", "mavi", "tatlı" gibi terimlerle dile getirilen ve doğal nesne türlerine ve niteliklerine ilişkin kavramlardır. Her nitel kavram bu kavramın uygulandığı nesnelerin öbeğini belirler. Bu öbeğe kavramın (veya kavramın dile getirdiği terimin) *kaplamı* denir. K bir kavram ise K'nın kaplamını kp(K) olarak gösteriyoruz. Örneğin kp(insan), insanlar öbeğidir.

K_1 ve K_2 iki nitel kavram olduğunda

(1) $kp(K_1) \subset kp(K_2)$

olursa, K_1'in K_2'nin *alt kavram*'ı, K_2'nin de K_1'in *üst-kavram*'ı olduğu söylenir.

İmdi ε evrensel kavram diyeceğimiz bir nitel kavram ve $K_1,...,K_n$ nitel kavramları da ε'nin alt -kavramları olduğunda

(2) $kp(K_i) \cap kp(K_j) = \varnothing$; i, j = 1,..., n ve $i \neq j$ ise

(3) $kp(K_1) \cup ... \cup kp(K_n) = kp(\varepsilon)$

koşulları yerine gelirse $\{K_1,...,K_n\}$ kavram öbeğine bir kavram ailesi ve $\{kp(K_1),...,kp(K_n)\}$ öbekler öbeğine bir sınıflama denir. Dikkat edilirse sınıflama bir bölümlemedir. (2) ve (3) koşulları tanım gereği doğru olabildiği gibi doğa yasaları olan deneysel doğrular da olabilir. Örneğin n = 2 olup

(3) $\forall x\ [x \in kp(K_2) \leftrightarrow [x \in kp(\varepsilon) \wedge x \notin kp(K_1)]]$

tanımından ise

(2') $kp(K_1) \cap kp(K_2) = \varnothing$

ve

(3') $kp(K_1) \cup kp(K_2) = kp(\varepsilon)$

türetilir. Öte yandan biyolojide omurgalılar dalının memeliler, kuşlar, balıklar, kurbağalar ve sürüngenler sınıflarına ayrılması bir doğa yasasını dile getiren bir deneysel gerçektir.

Biyolojide farklı düzeylerde zincirleme sınıflamalar yapılır. Böylece piramit biçiminde bir sınıflama oluşur. Canlılar evreni bitki ve hayvanlara bölündükten sonra bitkiler ve hayvanlar sırasıyla dallara, sınıflara, takımlara, familyalara, cinslere ve türlere bölünür.

K gibi bir sınıflayıcı kavramın a gibi bir nesneye uygulanıp uygulanmadığı (yani $a \in kp(K)$ olup olmadığı) bir gözlem veya deney sonucunda saptanır.

ALIŞTIRMALAR

Üç farklı kavram ailesi ve sınıflama örneğini bulunuz.

18.2.2 Karşılaştırmalı Kavramlar

Karşılaştırmalı kavramlar, "daha hafif", "daha ağır", "daha kısa", "daha uzun" "daha soğuk", "daha sıcak" gibi bağıntılardır. Bu türlü bağıntılar genel olarak "<" ile gösteriyoruz. "<" bağıntısına da *öncelik bağıntısı* diyoruz. "a < b" önermesi doğru olduğunda a nesnesi önce gelen, b nesnesi ise son-

ra gelen oluyor. Örneğin a, b'den hafif ise, "daha hafif" bağıntısı bakımından a önce gelen b ise sonra gelendir.

a, b'den önce gelmez ve b, a'dan önce gelmezse a ile b *farksız* olurlar. Örneğin a, b'den hafif olmaz ve b, a'dan hafif olmazsa a ile b "ağırlıkça farksız" nesneler olur. a ile b'nin farksız olduğunu "$a \approx b$" biçiminde dile getiriyoruz. "$\approx$" ile dile getirilen *farksızlık bağıntısını* şöyle tanımlarız:

(1) $a \approx b$ ancak ve ancak $\sim(a < b) \wedge \sim(b < a)$ ise.

"$<$" ile "$\approx$" bağıntılarının alanı aynıdır. Bu alan, aralarında "$<$" veya "$\approx$" bağıntısının bulunduğu nesnelerin evreni sayılır. Dolayısıyla niceleyicilerin değer alanı bağıntıların ortak alanıyla özdeştir.

İmdi "$<$" bağıntısı evrenin her öğesi için yansımasız, bakışımsız ve geçişlidir. Yani,

(2) $\forall x \sim(x < x)$ ("$<$" yansımasızdır)

(3) $\forall x \forall y[x < y \rightarrow \sim(y < x)]$ ("$<$" bakışımsızdır)

(4) $\forall x \forall y \forall z[(x < y \wedge y < z) \rightarrow (x < z)]$ ("$<$" geçişlidir)

Öte yandan "$\approx$" bağıntısı bir eşdeğerlik bağıntısıdır. Yani "$\approx$" yansımalı, bakışımlı ve geçişlidir.

(5) $\forall x(x \approx x)$ ("$\approx$" yansımalıdır)

(6) $\forall x \forall y(x \approx y \rightarrow y \approx x)$ ("$\approx$" bakışımlıdır)

(7) $\forall x \forall y \forall z[(x \approx y \wedge y \approx z) \rightarrow (x \approx z)$ ("x" geçişlidir)

Ayrıca (1) tanımından

(8) $\forall x \forall y(x \approx y \vee x < y \vee y < x)$

elde edilir.

"$<$" ile "$\approx$" bağıntılarına dayanarak "$\leq$" bağıntısını şöyle tanımlarız.

(9) $a \leq b$ ancak ve ancak $a < b \vee a \approx b$ ise.

"$a \leq b$", "a, b'den önce gelir veya farksızdır" anlamına gelir.

"$\leq$" bağıntısı yansımalı, geçişli ve bağlaşıktır.

(10) $\forall x(x \leq x)$ ("$\leq$" yansımalıdır)

(11) $\forall x \forall y \forall z[(x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z]$ ("$\leq$" geçişlidir)

(12) $\forall x \forall y(x \leq y \vee y \leq x)$ ("$\leq$" bağlaşıktır)

"$\leq$" bağıntısına dayanarak "$\approx$" ile "$<$" bağıntıları şöyle tanımlanır.

(13) $a \approx b$ ancak ve ancak $a \leq b \wedge b \leq a$ ise.

(14) $a < b$ ancak ve ancak $a \leq b \wedge \sim(b \leq a)$ ise.

O zaman

(15) $a < b$ ancak ve ancak $a \leq b \wedge \sim(a \approx b)$ ise.

elde edilir.

E evreninde "$<$" ile "$\approx$" bağıntılarıyla belirlenen sisteme bir *karşılaştırma sistemi* diyoruz. Bu sistemi $<E, <, \approx>$ biçiminde gösteriyoruz.

a ile *b* nesneleri arasında $<$, $\leq$ ile $\approx$ bağıntılarının bulunup bulunmadığı gözlem veya deney ile saptanır. Örneğin *a*'nın *b*'den hafif olduğu *a* ile *b* cisimlerini bir terazinin kefelerine koyup hangi kefenin yukarı çıktığını hangisinin aşağı indiğini gözlemekle saptanır. *a* cisminin bulunduğu kefe yukarı çıkar, *b* cisminin bulunduğu kefe aşağı inerse *a* cisminin *b* cisminden hafif olduğu ortaya çıkar.

ALIŞTIRMALAR

1. "Daha kısa" bağıntısının nasıl saptandığını açıklayınız.
2. a ile b iki cisim olduğunda "a, b'den kısa değildir ve b, a'dan kısa değildir" koşulu hangi bağıntıyı belirler?

18.2.3 Nicel Kavramlar

"Uzunluk", "ağırlık", "sıcaklık" gibi terimlerin dile getirdiği kavramlara *nicel kavramlar* veya *nicelikler* denir. Nicelikler *yaygın nicelikler* ve *yeğin nicelikler* olmak üzere ikiye ayrılır. Örneğin uzunluk, hacim, ağırlık yaygın nicelikler, sıcaklık derecesi ise yeğin bir niceliktir.

Bir niceliğin değerlerinin belli bir yöntemle saptanmasına *nicelik ölçümü* veya kısaca *ölçüm* denir. Ölçümler "temel ölçüm" ve "türetilmiş ölçüm" olmak üzere ikiye ayrılır. *Temel ölçüm,* niceliğin değerinin başka niceleyicilerin değerlerin bağımsız olarak ölçülmesi demektir. *Türetilmiş ölçüm* ise niceliğin değerinin başlıca niceliklere bağlı olarak saptanması demektir. Aynı niceliğin birden çok sayıda farklı temel ölçümleri olduğu gibi ayrıca türetilmiş ölçümleri de olabilir. Örneğin kütlenin, uzunluğun zaman süresinin temel ölçümleri vardır. Öte yandan yoğunluğun ve sıcaklığın türetilmiş ölçümü vardır. Buna göre bir cismin yoğunluğu cismin kütlesinin hacmine bölünmesiyle hesaplanır. Sıcaklık ise uzunluğa (civalı termometrede civa sütununun yüksekliğine) dayanarak belirlenir.

18.2.3.1 Yaygın Niceliklerin Temel Ölçümü

Yaygın niceliklerin temel ölçümü için *birleştirme işlemi* denilen ve "o" işareti ile gösterilen bir ikili işlem kullanılır. Örneğin a ile b iki cisim olduğunda a ile b'nin toplam ağırlığını ölçmek için a ile b cisimlerini bir arada terazinin aynı kefesine koyarız. Öte yandan a ile b gibi iki çubuğun toplam uzunluğunu ölçmek için a ile b çubuklarını uç uca dizeriz.

Her iki işlem de birleştirme işlemi örnekleridir. a ile b'nin birleştirilmesinden ortaya çıkan cisim aob olarak gösterilir. Böylece a ile b cisimlerinin aynı kefede bir araya gelmesiyle oluşan birleşik cisim veya a ile b çubuklarının uç uca dizilmesiyle oluşan birleşik cisim aob cismidir.

Yaygın niceliklerin temel ölçümü için bir de *ölçüm fonksiyonu* denilen $f:E \rightarrow R$ biçiminde bir fonksiyona gerek vardır. (R reel sayılar kümesidir.) Örneğin ağırlık ölçümü için her cismin ağırlığını belirleyen ağırlık fonksiyonu, uzunluk ölçümünde de çubuk biçiminde cisimlerin uzunluğunu belirleyen uzunluk fonksiyonu kullanılır.

Yaygın niceliğe ilişkin ölçüm sistemi, $<E, <, \approx>$ bir karşılaştırma sistemi olmak üzere

$<E, <, \approx, o, k, f>$

biçiminde olan ve aşağıdaki özellikleri taşıyan sıralanmış bir altılı olarak tanımlanır.

(1) o, E evreninde bir birleştirme işlemidir. o'nün ön-alanı E X E ard alanı da E'nin bir alt öbeğidir.

(2) k, *ölçü birimi* denilen E evreninin uzlaşımla seçilmiş bir öğesidir.

(3) f, ön-alanı E, ard-alanı reel sayılar kümesi olan bir fonksiyondur. f'ye *ölçü fonksiyonu* denir. $a \in E$ olduğunda f(a), a'nın ölçüsüdür.

(4) $a \approx b \leftrightarrow f(a) = f(b)$

(5) $a < b \leftrightarrow f(a) < f(b)$

(6) f(aob) = f(a) + f(b)

(7) f(k) = 1 (uzlaşım gereği)

Örneğin ağırlık ölçümünde k, bir gram ağırlığında bir cisim veya bir kilogram ağırlığında bir cisim olabilir. Birinci durumda gr ölçeği, ikinci durumda kg ölçeği elde edilir.

"o" birleştirme işleminin aşağıda gösterilen özellikleri olduğu gösterilebilir.

(8) $aob \approx boa$ (yer değiştirme özelliği)

Nitekim f(aob) = f(a) + f(b) = f(b) + f(a) = f(boa). İmdi (4) gereği f(aob) = f(boa) $\leftrightarrow$ $aob \approx boa$ elde edilir. Böylece (8)'in doğru olduğu görülür.

(9) $ao(boc) \approx (aob)oc$ (ortaklaştırıcılık özelliği)

(10) $(d \approx a \wedge b \approx c) \rightarrow dob \approx aoc$

Nitekim $d \approx a$ ve $b \approx c$ olsun. O zaman (4) gereği f(d) = f(a) ve f(b) = f(c) olur. Dolayısıyla f(d) + f(b) = f(a) + f(c) olur. O halde (6) gereği f(dob) = f(aoc) elde edilir. Bundan (4) gereği $dob \approx aoc$ çıkar.

(11) $(d \approx a \wedge b < c) \rightarrow (dob < aoc)$

(12) $(d < a \wedge b < c) \rightarrow (dob < aoc)$

Şimdi de "eşölçülebilirlik" denilen yeni bir kavramı tanımlıyoruz.

E evrenine ait a nesnesi k birim nesnesi ile "≈" ve "o"ya dayanarak *eşölçülebilir*'dir ancak ve ancak aşağıdaki koşullar yerine gelirse:

E evrenine ait $b_1,...,b_n$ gibi n tane öyle nesne vardır ki

(i) $b_i \approx b_j$, i, j = 1, ..., n

(ii) $l \leq n$ olduğunda, $b_1 o b_2 o \ldots o b_l \approx k$

(iii) $s \leq n$ olduğunda, $b_1 o\, b_2 o \ldots o b_s \approx a$.

(13) $f(b_1 o b_2 o \ldots o b_l) = f(b_1) + f(b_2) + \ldots + f(b_l)$

(14) $f(b_1 o b_2 o \ldots o b_s) = f(b_1) + f(b_2) + \ldots + f(b_s)$

olur. (i)'den dolayı

(15) $f(b_1) = f(b_2) = \ldots = f(b_n)$

O halde

(16) $f(b_1 o b_2 o \ldots o b_l) = f(b_1) + f(b_2) + \ldots + f(b_l) = f(k) = lf(b_1)$

(17) $f(b_1 o b_2 o \ldots o b_s) = f(b_1) + f(b_2) + \ldots + f(b_s) = f(a) = sf(b_1)$.

(16) ve (17)'den

(18) $f(a) = (s/l)\, f(k)$

elde edilir. Oysa f(k) = 1 o halde

(19) $f(a) = s/l$

Demek ki a nesnesi k birim nesnesi ile eşölçülebilir ise, a'nın ölçüsü s/l gibi bir rasyonel sayıdır.

Dikkat edilirse hiçbir ölçü işlemi rasyonel olmayan bir ölçü değeri veremez. Dolayısıyla E evrenine ait bütün nesnelerin seçilen k birim nesnesiyle eş ölçülebilir olduğu varsayımı gözlem ve deneyle yanlışlanamaz. Gene de böyle bir varsayımı kabul etmek sakıncalıdır. Nitekim yaygın bir niceliğin bütün değerlerinin rasyonel sayılar olması durumunda bütün reel sayıları ön gören matematiksel analiz kullanılamaz. Bu da doğa bilimi için çok sakıncalı olur. Ancak pratikte, ölçülen bir yaygın niceliğin ölçü birimi ile yine de eşölçülebilir olup, elde edilen ölçme değeri hep bir rasyonel sayıdır. Buna göre yaygın niceliklerin irrasyonel değerleri hiçbir zaman ölçülemeyen (ancak hesaplanabilen) değerlerdir.

f(a), a gibi bir nesnenin ölçüsü (sözgelişi a'nın ağırlığı) ise, r herhangi bir pozitif reel sayı olduğunda, rf(a) sayısı da a'nın ölçüsüdür. (sözgelişi ağırlığıdır.) Böyle bir durum ölçü birimi değişmesi sonucunda olur. Örneğin ölçü birimi 1 kg ise, 1 gr'lık ölçü birimine geçmekle ilk ölçü 1000 reel sayısı ile çarpılır.

Öte yandan f(a) / f(b) oranı ölçü birimine bağlı değildir. Nitekim rf(a) / rf(b) = f(a) / f(b). Bu nedenle yaygın niceliklerin temel ölçümünün *oran ölçeği* olduğu söylenir.

ALIŞTIRMALAR

1. §18.2.3.1'deki (9), (11), (12) özelliklerinin varolduğunu ispatlayınız.
2. Yaygın nicelikler olan uzunluğun ve zamanın temel ölçümlerinde kullanılan "o" birleştirme işlemlerini tanımlayınız.

18.2.3.2 Yeğin Niceliklerin Türetilmiş Ölçümü

Yeğin niceliklere örnek olarak nicel sıcaklık kavramını (sıcaklık derecesini) gösterebiliriz. Yeğin niceliklerin ölçümünde "o" birleştirme işlemi yoktur ancak bu ölçüm de <E, <, ≈> gibi bir karşılaştırma sistemine dayanır. Buna göre yeğin niceliğin *temel ölçüm sistemi* aşağıdaki koşulları yerine getiren

Ö, *ölçek nesneleri* denilen E evrenine ait belli bazı nesnelerin kümesi olmak üzere

$$<E, <, \approx, Ö_o, Ö_1, f, B>$$

biçiminde sıralanmış bir yedilidir.

(1) E, belli bir durumda (sözgelişi belli sıcaklık derecelerinde) olan nesnelerden oluşan bir kümedir.

(2) (E, <, ≈) bir karşılaştırma sistemidir.

(3) $Ö_o$ belli bir durumda (örneğin sıfır Celsius derece sıcaklıkta) olan belli türden nesnelerden (Örneğin su örneklerinden) oluşan bir kümedir.

(4) $\ddot{O}_1$ belli başka bir durumda (örneğin 100 Celsius derece sıcaklıkta) olan aynı türden nesnelerden (su örneklerinden) oluşan bir kümedir.

(5) f, $f: E \rightarrow R$ biçiminde bir fonksiyondur. f'ye ölçme fonksiyonu ve $a \in E$ olduğunda f(a)'ya a'nın ölçüsü denir.

(6) $a \approx b$ ancak ve ancak $f(a) = f(b)$ ise

(7) $a < b$ ancak ve ancak $f(a) < f(b)$ ise

(8) $\forall x\ (x \in \ddot{O}_o \rightarrow f(x) = 0)$

(9) $\forall x\ (x \in \ddot{O}_1 \rightarrow f(x) = r_1)$

(Örneğin Celsius sıcaklık derecesi durumunda $r_1 = 100$, Fahrenheit derecesi durumunda $r_1 = 212$'dir. Her iki halde de $\ddot{O}_1$ normal koşullarda kaynayan su örneklerinden oluşur.)

(10) B, $B \subseteq E$ olacak biçimde bir dörtlü bağıntıdır. Sıcaklık ölçümünde B(a, b, c, d) civalı termometre ile şöyle saptanır. Termometrenin civa haznesi a, b, c, d nesneleri ile sırasıyla temas ettiğinde civa sütunu yükseklikleri sırasıyla h_a, h_b, h_c, h_d olursa,

$$B(a, b, c, d) \leftrightarrow |h_a - h_b| = |h_c - h_a|$$

olur. (r bir reel sayı olduğunda, |r|, r'nin mutlak değeridir.

$r \geq 0$ ise, $|r| = r$ olur. $r < 0$ ise $|r| = -r$ olur.)

Sıcaklık derecesi gibi yeğin niceliklerin ölçeğine *aralık ölçeği* denir. f(a), a nın yeğin nicelik ölçüsü ise r bir pozitif reel sayı ve r' herhangi bir reel sayı ise rf(a) + r' de a'nın ölçüsü olur. Ölçek nesnel kümelerinin değiştirilmesi veya r ile r' sayılarını değiştirmekle bir ölçüden öbürüne geçilir. Örneğin a'nın Celsius sıcaklık derecesi f(a) Fahrenheit sıcaklık derecesi de f'(a) olsun. O zaman

$$f'(a) = rf(a) + r'$$

olur. r ile r' yü ise şöyle hesaplarız. a_o normal koşullarda donan bir su örneği a_1 ise normal koşullarda kaynayan bir su örneği olsun. O zaman $f(a_o) = 0$, $f(a_1) = 100$, $f'(a_o) = 32$ ve $f'(a_1) = 212$ olur. O halde $f'(a_o) = rf(a_o) + r' = r'$ olur. Buradan $r' = f(a_o) = 32$ hesaplanır. Öte yandan $f'(a_1) - f'(a_o) = r[f(a_1) - f(a_0)]$ olduğundan

$r = [f'(a_1) - f'(a_o)] / [f(a_1) - f(a_o)] = (212-32) /(100-0) = 180/100 = 9/5$

elde edilir. O halde

$f'(a) = [(9/5) \times f(a)] + 32$

sonucuna varırız.

Reoumur ölçüsünde ise suyun donma derecesi (Celsius ölçüsünde olduğu gibi) 0 olup, suyun kaynama derecesi 80'dir.

ALIŞTIRMALAR

1. f(a), a nesnesinin Fahrenheit derecesi ve f'(a) a nesnesinin Celsius derecesi olduğunda, f'(a)'yı f(a)'ya dayanarak hesaplayınız.
2. f(a), a nesnesinin Celsius derecesi ve f'(a), a nesnesinin Reaumur derecesi olduğunda, f'(a)'yı f(a)'ya dayanarak hesaplayınız.

18.2.3.3 Sıralayıcı Nicelikler

Bir *sıralama sistemi,*

$<E, <, \approx, f>$

biçiminde olan ve aşağıdaki koşulları yerine getiren bir sıralanmış dörtlüdür.

(1) $<E, <, \approx>$ bir karşılaştırma sistemidir.

(2) $f, f: E \rightarrow R$ biçiminde bir fonksiyondur $a \in E$ olduğunda f(a)'ya a'nın ölçüsü denir.

(3) $a \approx b$ ancak ve ancak $f(a) = f(b)$ ise.

(4) $a < b$ ancak ve ancak $f(a) < f(b)$ ise.

Böyle sıralama sistemi bir *sıralayıcı nicelik* dile getirir. f(a), a'nın ölçüsü ise g de $g: R \rightarrow R$ biçiminde bir tekdüzeli fonksiyon ise g(f(a))'da a'nın ölçüsü olur. (g'nin tekdüzeli olması her x, y için $x \leq y$ ise $g(x) \leq g(y)$ veya her x, y için $x \geq y$ ise $g(x) \geq g(y)$ olması demektir.) Böyle bir duruma *sıralama ölçeği* denir.

Örneğin cisimlerin sertlik derecesi bir sıralayıcı nicelik olup sıralama ölçeğine dayanır. $f(a) > f(b)$ ise a'nın b'den daha sert olduğu söylenir. Ama a'nın b'den ne denli daha sert olduğu söylenemez.

18.2.4 Yatkınlık Terimleri ve Kuramsal Terimler

Gerek günlük dilde gerek bilim dilinde kullanılan birçok terim *yatkınlık terimleri*'dir. Bu terimler genellikle "bilir" soneki olan "çözülebilir", "kırılabilir", "genleşebilir", "yırtılabilir" gibi sözcükler ile bunların karşıtı olan ve "maz" veya "mez" soneki olan "çözülemez", "kırılamaz", "genleşemez", "yırtılamaz" gibi sözcükler biçimindedir. Bu terimler bir yatkınlığı dile getirir. Bir nesnenin belli bir *yatkınlığı,* belli bir uyaran karşısında belli bir biçimde tepkide bulunma gücü demektir. Örneğin tuzun suda çözünebilme yatkınlığı, tuzun suya daldırıldığı zaman çözünmeye uğraması demektir.

"Bilir" gibi bir soneki olmayan birçok sözcükte yatkınlık terimi sayılabilir. Örneğin "zeki" bir yatkınlık terimidir. Nitekim zeki bir insan belli koşullarda zekâsını kullandığını gösteren davranışlarda bulunan kişidir. Bilimde "sıcaklık derecesi", "elektrik akımı yeğinliği" gibi terimler de yatkınlık terimleridir. Nitekim belli bir sıcaklık derecesi olan bir cisme bir civalı termometrenin hazinesi değdirilirse civa sütunu belli bir yere kadar yükselir, belli yeğinlikte bir elektrik akımı geçen bir iletken tele dönebilen mıknatıslı iğne yaklaştırılırsa iğne belli bir sapma gösterir.

Yatkınlık anlık veya sürekli olabilir. Anlık yatkınlık t gibi bir anla sınırlıdır. Sürekli yatkınlık ise her zaman veya hiç olmazsa uzunca bir süre için gerçekleşir. "Yt" bir anlık yatkınlık terimi ise

(1) Yt (x, t)

(1') x nesnesinin t anında Yt yatkınlığı vardır.

anlamına gelir. Buna karşılık "Yt" bir sürekli yatkınlık terimi ise

(2) Yt (x)

(2') x nesnesinin Yt yatkınlığı vardır.

anlamına gelir. Zamanın belirtilmemesi yatkınlığın her zaman var olduğunu gösterir.

İmdi

(3) U (x, t)

(3') x nesnesi t anında U biçiminde uyarılıyor

anlamına ve

(4) T(n, t)

(4') x nesnesi t anında T biçiminde tepki veriyor

anlamına gelsin. O zaman "Yt" gibi bir anlık yatkınlık teriminin

(5) $\forall x \forall t\ [Yt\ (x, t) \leftrightarrow [U(x, t) \rightarrow T(x, t)]]$

biçiminde, "Yt" gibi bir sürekli yatkınlık teriminin de

(6) $\forall x\ [Yt(x) \leftrightarrow \forall t\ [U\ (x, t) \rightarrow T\ (x, t)]]$

biçiminde tanımlanabildiği sanılabilir. (5) tanımına göre x nesnesi t anında U biçiminde uyarılıyorsa; t anında T tepkisinde bulunursa Yt yatkınlığına sahiptir, bulunmuyorsa sahip değildir. Aynı biçimde (6) tanımına göre x nesnesi U biçiminde uyarılıyorsa; T tepkisinde bulunursa Yt yatkınlığına sahiptir, bulunmuyorsa sahip değildir. Bu durumda (5) ile (6) tanımları uygundur. Ancak x nesnesi U biçiminde uyarılmıyorsa (5) ile (6) tanımları uygun olmaktan çıkar. Nitekim bu son durumda x nesnesi hep Yt yatkınlığı taşır. Örneğin x bir demir parçası "Yt" de suda çözünebilirlik yatkınlığı olsun. "U" suya batırma, "T" suda çözünmeyi dile getirsin. O zaman x bir demir parçası olup; t anında suya batırılmazsa (5) gereği x suda çözünebilir sayılmalıdır. Öte yandan x demir parçası hiçbir zaman suya daldırılmazsa (6) gereği x suda çözünebilir sayılmalıdır. Bu durum kabul edilemeyeceğinden dolayı (5) ile (6) tanımları geçersizdir.

Geçersiz olduğunu gördüğümüz (5) tanımı yerine

(5") $\forall x \forall t\ [U(x, t) \rightarrow [Yt(x, t) \leftrightarrow T(x, t)]]$

önermesi ve (6) tanımı yerine

(6") $\forall x \forall t [U(x, t) \rightarrow [Yt(x) \leftrightarrow T(x, t)]]$

önermesi kullanılır. (5") ile (6")'ye *indirgeme önermeleri* denir. Bir indirgeme önermesi bir tanım değildir. Nitekim (5") ile (6") ye dayanarak "Yt" yatkınlık terimini elemek mümkün değildir. İndirgeme önermeleri yatkınlık terimlerinin anlamını hiç olmazsa kısmen belirleyen aksiyomlar niteliğindedir. İn-

dirgeme önermeleri de x uyarılmayan bir nesne olması durumunda x'in Yt yatkınlığını taşıyıp taşımadığını belirtmez. Ancak uyarılan nesnelerin Yt yatkınlığını taşıyıp taşımadığını belirtir.

Yatkınlık terimleri gözlem terimi değildir. Nitekim bir nesnenin bir yatkınlığa sahip olması ancak uyarıldığı zaman belli bir tepkide bulunmasıyla ortaya çıkar. Buna karşılık uyarmayı dile getiren U terimi tepkiyi dile getiren T terimi genellikle birer gözlem terimidir. İndirgeme önermeleri gözlem terimi olmayan bir yatkınlığın anlamını gözlem terimlerine dayanarak (kısmen) belirtmek için kullanılır. Dikkat edilirse gözlem terimleri yardımıyla tanımlanabilen bir terim de gözlem terimi sayılmalıdır. Ancak yatkınlık terimlerini gözlem terimleri ile tanımlamak mümkün değildir. Nitekim (5) ile (6) tanım denemelerinin geçersiz olduğunu daha önce görmüştük. Gözlem terimleri türünden tanımlanamadıklarından dolayı, yatkınlık terimleri kuramsal terimler sayılmalıdır.

(5") indirgeme önermesinden mantıkça geçerli olmayan hiçbir gözlem önermesi türetilemez. Buna karşılık (6") indirgeme önermesi

(7) $[U(a, t_1) \wedge U(a, t_2)] \rightarrow [T(a, t_1) \rightarrow T(a, t_2)]$

gözlem önermesini içerir. U ile T gözlem terimleri olduğundan $U(a, t_1)$, $U(a, t_2)$, $T(a, t_1)$ ve $T(a, t_2)$ atomsal gözlem önermeleridir. Bu atomsal önermelerden temel eklemler yardımıyla oluşturulan (7) önermesi de gene bir gözlem önermesidir.

(7) gözlem önermesi gözlemle doğrulandığı sürece (6") indirgeme önermesi pekiştirilmiş olur. Ancak (7) önermesi gözlemle yanlışlanırsa (6") indirgeme önermesinin de yanlış olduğu anlaşılır. Dolayısıyla böyle bir durumda (6") kaldırılmalı veya değiştirilmelidir.

Dikkat edilirse

(8) $\forall x \forall t \sim U(x, t)$

önermesi doğru olursa, (5") ve (6") indirgeme önermelerinin etki alanı "x" ve "t" değişkenlerinin bütün değerleri için doğru olur. O zaman da (5") ile (6") söz konusu yatkınlığı taşıyan nesneleri bu yatkınlığı taşımayan nesnelerden ayırt etmeye yaramaz. Dolayısıyla (5") ile (6") indirgeme önermelerinin işlevlerini yerine getirmesi için (8)'in yanlış olması gerekir.

Aynı yatkınlık terimi için birden çok sayıda indirgeme önermesi ortaya konulabilir. Bu indirgeme önermeleri

(9) $\forall x \forall t\ [U_i\ (x, t) \rightarrow [Yt\ (x, t) \leftrightarrow T_i\ (x, t)]]$, $i = 1,...,n$

veya

(10) $\forall x \forall t\ [U_i\ (x, t) \rightarrow [Yt(x) \leftrightarrow T_i(x, t)]]$, $i = 1,...,n$

biçiminde olur. n tane farklı indirgeme önermesine dayanarak "Yt" teriminin dile getirdiği yatkınlık

(11) $kp(U_1) \cup kp(U_2) \cup ... \cup kp(U_n)$

kümesinin öğeleri için belirlenmiştir. Nitekim a_j herhangi bir nesne, t_k herhangi bir an olduğunda

(12) $<a_j, t_k> \in kp(U_1) \cup kp(U_2) \cup ... \cup kp(U_n)$

olursa,

(13) $<a_j, t_k> \in kp(U_i)$ $\quad (1 \leq i \leq n)$

elde edilir. O zaman da $U_i(a_j, t_k)$ doğru olup a_j nesnesinin t_k anında "Yt" ile dile getirilen yatkınlığı taşıyıp taşımadığı ilgili indirgeme önermesiyle belirlenmiş olur. Böylece indirgeme önermelerini çoğaltarak yatkınlığın belirli olduğu alanın genişletilebildiğini görüyoruz.

Gerek (9) önermeleri gerekse (10) önermeleri

(14) $\forall x \forall t\ [(U_i(x, t) \wedge U_j(x, t) \rightarrow (T_i(x, t) \leftrightarrow T_j(x, t)]$ $i, j = 1,...,n$

gözlem önermelerini içerir. (9) veya (10) indirgeme önermelerinin tümünün doğru olabilmesi için (14) önermelerinden her biri doğru olmalıdır.

Yatkınlık terimlerinin anlamını açıklamak için bir de *tek yanlı indirgeme önermeleri* kullanılır. Bunlar anlık yatkınlık terimleri için

(15) $\forall x \forall t\ [U(x, t) \rightarrow [T(x, t) \rightarrow Yt(x, t)]$

(16) $\forall x \forall t\ [U'(x, t) \rightarrow [T'(x, t) \rightarrow \sim Yt(x, t)]]$

biçimindeki önermeler ve sürekli yatkınlık terimleri için

(17) $\forall x \forall t\ [U(x, t) \rightarrow [T(x, t) \rightarrow Yt(x)]$

(18) $\forall x \forall t\ [U'(x, t) \rightarrow [T'(x, t) \rightarrow \sim Yt(x)]$

biçimindeki önermeleridir. Gerek (15) ile (16) önerme çiftine gerekse (17) ile (18) önerme çiftine *indirgeme çifti* denir. Her indirgeme çifti iki tane tek yanlı indirgeme önermesinden oluşuyor. Buna karşılık (5") ile (6") biçimindeki indirgeme önermelerine *iki yanlı indirgeme önermesi* denir.

(15) ile (16) ve (17) ile (18) indirgeme çiftlerinin işlevlerini yapabilmeleri için

(19) $\forall x \forall t\ \sim[(U(x, t) \wedge T(x, t)) \vee (U'(x, t) \wedge T'(x, t))]$

önermesi doğru olmamalıdır.

(15) ile (16) ve (17) ile (18) indirgeme çiftleri aşağıdaki gözlem önermesini içerir.

(20) $\forall x\ [(U(x,t) \wedge U'(x, t)) \rightarrow (T(x, t) \rightarrow \sim T'(x, t))]$.

Her iki yanlı indirgeme önermesi bir indirgeme çiftinin özel halidir. Nitekim "U(x, t)" "U'(x, t)" ile "~T(x, t)" de "T'(x, t)" ile eşdeğer olunca (15), (16) indirgeme çifti

(21) $\forall x \forall t\ [U(x, t) \rightarrow [T(x, t) \rightarrow Yt(x, t)]]$

(22) $\forall x \forall t\ [U(x, t) \rightarrow [\sim T(x, t) \rightarrow \sim Yt(x, t)]$

biçimine ve (17), (18) indirgeme çifti

(23) $\forall x \forall t\ [U(x, t) \rightarrow [T(x, t) \rightarrow Yt(x)]]$

(24) $\forall x \forall t\ [U(x, t) \rightarrow [\sim T(x, t) \rightarrow \sim Yt(x)]]$

biçimine çevrilir. Oysa (21) ile (22)'nin tümel-evetlemesi (5") iki yanlı indirgeme önermesiyle ve (23) ile (24)'ün tümel-evetlemesi (6") iki yanlı indirgeme önermesiyle eşdeğerdir.

"U(x, t)" ile "U'(x, t)" açık önermelerinin *eşdeğer* olması

(25) $\forall x \forall t\ [U(x, t) \leftrightarrow U'(x, t)]$

tümel önermesinin doğru olması demektir. Aynı biçimde "~T(x, t)" ile "T'(x, t)" nin eşdeğer olması

(26) $\forall x \forall t\ [\sim T(x, t) \leftrightarrow T'(x, t)]$

nın doğru olması demektir.

ALIŞTIRMALAR

Üç tane farklı yatkınlık terimine ilişkin iki yanlı yatkınlık önermelerindeki U uyarı terimini ve T tepki terimini belirtiniz.

18.3 BİLİMSEL KURAMLAR

18.3.1 Önerme Biçiminde Kuramlar

18.3.1.1 Mantıkça Kapalı Önerme Kümeleri

Kuram, en genel anlamında mantıkça kapalı bir önerme kümesi demektir. Mantıkça kapalı önerme kümelerini de şöyle tanımlıyoruz: K herhangi bir önerme kümesi olduğunda

(1) $\{A: K \models A\}$

kümesine K önerme kümesinin *sonuç kümesi* denir. Bu küme

(2) $Sn(K)$

biçiminde gösterilir.

K önerme kümesinin *mantıkça kapalı* olması,

(3) $Sn(K) = K$

olması demektir.

"Sn", sonuç işlemi denilen bir birli işlemi dile getirir. "Sn" işleminin şu üç özelliği vardır.

(4) $K \subseteq Sn(K)$

(5) $K_1 \subseteq K_2 \rightarrow Sn(K_1) \subseteq Sn(K_2)$

(6) $Sn(Sn(K)) \subseteq Sn(K)$

(4) ve (6)'dan

(7) $Sn\,(Sn(K)) = Sn(K)$

elde edilir. (7)'ye göre, K herhangi bir önerme kümesi olduğunda Sn(K) kümesi mantıkça kapalıdır. Tersine tanım gereği her mantıkça kapalı önerme kümesi Sn(K) biçimindedir. Nitekim K mantıkça kapalı olduğundan K=Sn(K) olur.

K kümesinin mantıkça kapalı olmasının gerekli ve yeterli koşulu

(8) $\forall A(K \models A \rightarrow A \in K)$

dır.

Sn(∅) önerme kümesi mantıkça geçerli önermelerin kümesidir. D diline ait önermelerin kümesini gene D ile gösterelim. O zaman D kümesi de mantıkça kapalıdır. Nitekim

(9) $Sn(D) = D$

Ancak D kümesi tutarsızdır. Nitekim K kümesinin tutarlı olması

(10) $\forall A\,[K \models A \rightarrow \sim(K \models \sim A)]$

biçiminde tanımlanabilir. Oysa

(11) $\forall A\,[D \models A \rightarrow \sim(D \models \sim A)]$

yanlıştır. Nitekim $D \models A$ ise $A \in D$ ve $(\sim A) \in D$ olur. Dolayısıyla $D \models \sim A$ olur.

D'den farklı olan, yani D'nin öz alt kümesi olan her mantıkça kapalı küme tutarlıdır.

$K_0 \subset K$ olduğunda, eğer

(12) $K = Sn\,(K_0)$

olursa, K_0 önerme kümesinin K'nın bir *aksiyom kümesi* olduğu söylenir.

Mantıkça kapalı kümeler sonsuzdur. Aksiyom kümesi ise çoğu zaman sonlu olur. Böylece sonlu sayıda aksiyomdan "teorem" denilen sonsuz sayıda sonuç önermesi elde edilir. Dolayısıyla sonlu sayıda aksiyom sonsuz sayıda önermeden oluşan mantıkça kapalı önerme kümesini belirler.

Örnek olarak klasik tanecikler mekaniği kuramının üç aksiyomdan oluşan aksiyom sistemini gösterelim. Bu aksiyomlara sırasıyla Newton'un birinci,

ikinci ve üçüncü yasası denir. "X", "Y", "Z" harflerini, değer alanı tanecikler; t harfini de değer alanı zaman anları olan değişkenler olarak kullanıyoruz. $s(\vec{x}, t)$ ise x taneciğinin t zaman anındaki yerini ((x, y, z) koordinatlarına göre) gösteriyor. Buna göre $s(\vec{x}, t)$ bir uzay vektörüdür. K(X, t), X taneciğine t anında uygulanan tüm kuvvetlerin bileşkesi olsun. m(X), X taneciğinin kütlesini gösteriyor. "X bir taneciktir"i Tnc(X) ve "t bir zaman anıdır"ı da Zmn(t) biçiminde kısaltıyoruz. Taneciklerin noktasal olduğunu varsayıyoruz. Buna göre X gibi bir taneciğin t anındaki yeri üç tane reel sayıdan oluşan $s(\vec{x}, t)$ vektörü ile belirtilir. $s(\vec{x}, t)$ vektörünün t'ye göre ikinci türevinin, yani $\frac{d^2 s(\vec{x}, t)}{dt^2}$ nin t'nin bütün değerleri için tanımlanmış olduğunu varsayıyoruz.

Bu açıklamalara dayanarak klasik tanecik mekaniği kuramının üç aksiyomunu şöyle dile getirebiliriz. ($s(\vec{x}, t)$, K(X, t) ve K(X, y, t) vektörel büyüklüklerdir.)

Newton'un birinci yasası:

$$\forall X \forall t\, [[Tnc(X) \wedge Zmn(t) \wedge K(X, t) = 0] \rightarrow \frac{d^2 s(\vec{x}, t)}{dt^2} = 0]$$

Newton'un ikinci yasası:

$$\forall X \forall t [[Tnc(X) \wedge Zmn(t)] \rightarrow K(X, t) = m(X) \frac{d^2 s(\vec{x}, t)}{dt^2}]$$

Newton'un üçüncü yasası:

$$\forall X \forall Y \forall t\, [Tnc(X) \wedge Tnc(Y) \wedge Zmn(t) \rightarrow K(X, Y, t) = -K(Y, X, t)]$$

Üçüncü yasada geçen "K(X, Y, t)", X taneciği üzerine Y taneciğinin t anında uyguladığı kuvveti gösteriyor. Buna göre "K(Y, X, t)", Y taneciği üzerine X taneciğinin t anında uyguladığı kuvveti gösteriyor.

18.3.1.2 Yasal Önermeler

Bilimsel kuramlar doğal nesnelere ilişkin kuramlardır. Bir bilimsel kuramın aksiyomları ise birer doğa yasası niteliğindedir. Bir *doğa yasası,* doğal nesneler veya olaylar arasında değişmez bir bağıntıyı dile getiren doğru bir önermedir. Doğa yasası olan önermeler belli bir biçimdedir. Doğa yasası olabilecek biçimdeki bir önermeye de *yasal önerme* denir. Yasal önermeler aşağıdaki özellikleri taşırlar.

(i) Yasal önermelerin birçoğu

(1) $\forall x\,(Fx \rightarrow Gx)$

veya genel olarak

(2) $\forall x_1 \ldots \forall x_n\,(Fx_1 \ldots x_n \rightarrow Gx_1 \ldots x_n)$

biçiminde tümel önermelerdir. Örneğin §18.3.1.1'deki Newton'un üç yasası (2) biçimindedir. Ancak başka biçimde, özellikle hem tümel niceleyiciyi hem tikel niceleyiciyi kapsayan yasal önermeler de vardır. Örneğin

(ii) Doğal önermelerdeki bağlı değişken veya değişkenlerin değer alanı (yani evren) genellikle sonsuz veya hiç olmazsa belirsiz sayıdadır. Örneğin Newton yasalarının değer alanı sonsuzdur. Nitekim sonsuz sayıda farklı tanecik tasarlanabilir.

Değer alanı sonlu olan bir tümel önerme genellikle bir yasayı dile getirmez. Örneğin

(3) S sepetinde t_1 anında bulunan bütün elmalar kırmızıdır.

yasal önerme değildir. (3) bir doğa yasasını dile getiremez.

(iii) Yasal önermeler belli bir doğal nesneye veya olaya ilişkin değildir. Örneğin (3) önermesi S gibi belli bir sepetin t_1 gibi belli bir andaki durumuna ilişkindir. Ama (3) yasal önerme değildir. Görüldüğü gibi Newton'un her üç yasası da herhangi bir belli taneciğe, yere veya zamana ilişkin değildir.

(iv) Yasal önermelerde geçen yüklemlerin anlamı, belli bir doğal nesne veya olaya ilişkin değildir. Örneğin "S sepetinde t_1 anında bulunan elma" yükleminin anlamı S nesnesine ve t_1 zaman anına bağlıdır. Dolayısıyla (3) önermesinde geçen bu yüklem bir yasal önermede yer alamaz.

(v) Yasal önermeler dilek koşul önermelerine veya olana aykırı önermelerle doğru olurlar. Örneğin Newton'un birinci yasası doğru ise,

(4) X taneciği üzerine t_1 anında uygulanan tüm kuvvetlerin bileşkesi sıfıra eşit olsa (olsaydı) $\dfrac{d^2\, s(\vec{x}, t_2)}{dt^2}$ in değeri sıfır olur (olurdu).

dilek koşul (veya olana aykırı) önerme de doğru olur. (dikkat edilirse X'i t_1 anında etkileyen kuvvetlerin bileşkesi sıfırdan farklı olabilir.)

Buna karşılık (3) önermesi doğru olsa bile

(5) e elması, S sepetinde t_1 anında bulunursa (bulunsaydı), e kırmızı olurdu (olurdu)

önermesi yanlıştır.

Nitekim e kırmızı elma değil de yeşil elma ise, S sepetinde t_1 anında bulunması rengini hiç de kırmızıya çevirmez.

(vi) Yasal önermeler bir olayı açıklamaya yarar. Örneğin bir taneciğin t_1 anındaki ivmesinin sıfır olması, onu o anda etkileyen tüm kuvvetlerin bileşkesinin sıfır olmasıyla açıklanır. Oysa bir elmanın t_1 anında kırmızı olması asla S sepetinde t_1 anında bulunmasıyla açıklanamaz.

ALIŞTIRMALAR

1. Üç tane yasal önerme örneği veriniz.
2. Üç tane yasal önerme olmayan tümel önerme örneği veriniz.

18.3.1.3 İdeal Yasalar

Bilimsel yasalar çokkez ideal kavramlara ilişkindir. İdeal kavramların gerçek dünyada tam karşılığı olan doğal nesneler yoktur. İdeal kavramlar ancak *yaklaşık* olarak gerçek nesnelere uygulanabilir. Örneğin fizik biliminde kullanılan geometrik doğru ve daire kavramları, anlık hız, sürtünmesiz düzlem, tam boşluk, sonsuz derecede yavaşlatılmış genleşme, tam esneklik, noktasal kütle v.b. ideal kavramlardır.

İmdi

(1) $\forall x\,(Fx \rightarrow Gx)$

bir yasal önerme olduğunda "F" yüklemi bir ideal kavramı dile getirirse, "Fx" açık önermesi doğal nesnelerden oluşan bir evrene ait hiçbir nesne tarafından gerçeklenmez. O zaman da "$Fx \rightarrow Gx$" açık önermesini böyle bir evrene ait her nesne gerçekler. Dolayısıyla (1) önermesi doğru olur. Bu

durumda (1)'in *boş olarak doğru* olduğu söylenir. Boş olarak doğru olan bir önerme hiçbir gözlem veya deneyle yanlışlanamaz.

Örneğin Newton'un her üç yasası noktasal kütlelere ilişkindir. Bir noktasal kütle bir noktadan oluşan ve sonlu kütlesi olan bir tanecik demektir. Oysa hiçbir gerçek tanecik bir tek noktadan oluşamaz. Dolayısıyla "noktasal kütle" bir ideal kavramdır. Gittikçe küçülen değişmez kütleli taneciklerden oluşan bir dizinin limiti olarak tasarlanabilir. Ancak limit gerçek bir doğal nesne değil, ideal bir nesnedir. Newton yasalarının koşul önermesinde geçen "Tnc(X)" açık önermesi, aslında "X bir noktasal kütleden olşan bir taneciktir" anlamına gelir. Dolayısıyla "Tnc(X)" açık önermesi hiçbir doğal nesne tarafından gerçeklenemez. Bu nedenle Newton'un üç yasası da boş olarak doğrudur. Aynı durum bilim yasalarının çoğu için söz konusudur. Bu güçlüğün çözümü ise "yaklaşıklık" kavramına başvurmaya dayanır. "$\approx\uparrow$Fx",

(2) "x nesnesi gittikçe daha çok F olmaya yaklaşıyor"

ve "$\approx\uparrow$G",

(3) "x nesnesi gittikçe daha çok G olmaya yaklaşıyor"

anlamına gelsin. O zaman

(4) $\forall x\ (\approx\uparrow Fx \rightarrow \approx\uparrow Gx)$

önermesi

(5) Her x için, x gittikçe daha çok F olmaya yaklaşırsa, x gittikçe daha çok G olmaya yaklaşır

anlamına gelir. Oysa (5) önermesi boş olarak doğru değildir. Nitekim "x nesnesi gittikçe F olmaya yaklaşıyor" açık önermesi gerçek bir nesne tarafından gerçeklenebilir. Bir nesnenin öyle bir özelliği olup olmadığı gözlem veya deneyle saptanabilir. İşte (5) önermesi (1) gibi boş olarak doğru olan bir önermenin anlamını dile getirir. Böylece boş olarak doğru olan önermelerin yol açtığı güçlük giderilmiş olur. Yani (1) biçimindeki ideal yasanın aslında (5) anlamına geldiğini kabul ediyoruz.

İdeal yasaları boş olarak doğru olan birer önerme olmak durumundan kurtarmak için bu yasaların ilişkin olduğu ideal nesneleri birer varlık olarak

kabul etmek gerekir. Başka bir deyişle bilimde gerçek doğal nesnelerin yanı sıra ideal nesnelerin de bulunduğunu kabul ediyoruz. Örneğin noktasal kütleleri birer ideal varlık sayıyoruz. O zaman Newton'un yasaları bu ideal varlıklar hakkında önermeler olarak (boş olarak doğru olmadan) *doğru* değerini alabilirler.

ALIŞTIRMALAR

İdeal nesnelere ilişkin ve boş olarak doğru olan 3 farklı doğa yasası belirtiniz.

18.3.1.4 Bilimsel Kuramların Yorumlanması

Mantık sistemlerinde önermelerin yorumlanması kaplamsaldır. Yani önermede geçen terimlerin kaplamları isteğe bağlı bir biçimde belirlenmektedir. Buna karşılık bilimsel kuramların yorumlanması içlemseldir. Yorumlanan kuramda geçen terimlerin kaplamlarını oluşturan nesneleri tek tek ortaya koymak mümkün değildir. Bunun yerine her terimin içlemi bu terimin anlamını belirten bir söz yardımıyla ortaya konulur. Örneğin psikolojiye ait aşağıdaki bilimsel kuramı göz önüne alalım. Kuramı şu üç aksiyomla dile getiriyoruz.

(A1) $\forall x\,[(\dot{I}(x) \wedge B(x)] \rightarrow \ddot{G}(x)]$

(A2) $\forall x\,[(\dot{I}(x) \wedge B(x)) \rightarrow Yk(x)]$

(A3) $\forall x\,[\dot{I}(x) \wedge [[Yk(x) \rightarrow S(x)] \rightarrow \ddot{G}(x)]$

Bu üç aksiyomu aşağıdaki işlemsel yorumlama ile şöyle yorumluyoruz.

(1) $\dot{I}(x)$: x insandır.

(2) $B(x)$: x kişisinin duyguları bastırılmıştır.

(3) $\ddot{G}(x)$: x kişisinde gizil saldırganlık vardır.

(4) $Yk(x)$: x kişisinde yoksunluk durumu vardır.

(5) $S(x)$: x kişisinde belirgin saldırganlık vardır.

İnsanlar kümesi yorumlamanın evrenini oluşturuyor. Bu nedenle "x" değiş-

keninin değer alanı olarak insanlar kümesini seçebiliriz. O zaman da kuramın aksiyomları aşağıdaki biçimde yalınlaştırılabilir.

(A1') $\forall x\ [B(x) \rightarrow \ddot{G}(x)]$

(A2') $\forall x\ [B(x) \rightarrow Yk(x)]$

(A3') $\forall x\ [[Yk(x) \rightarrow S(x)] \rightarrow \ddot{G}(x)]$

(A1'), "duyguları bastırılan her kişide örtük saldırganlık vardır"; (A2'), duyguları bastırılmış kişiler yoksunluk durumunda olan kişilerdir"; (A3') "yoksunluk durumundaki kişiler saldırgan olurlarsa, gizil saldırgandırlar" anlamına gelir.

Bu kuramda "İ" (İnsan) "Yk" (yoksun durumda) ile "S" (belirgin olarak saldırgan) gözlem terimleri, "$\ddot{G}$" (gizil saldırgan) ile "B" (duyguları bastırılmış) kuramsal terimlerdir.

Gözlem terimlerinin kuramdan bağımsız belli birer anlamı olduğunu kabul ediyoruz. Ama "gizil saldırgan" ile "duyguları bastırılmış" gibi kuramsal terimlerin belirtilmesi için kurama başvurmak gerekir. Kuramı bilmeden kuramda geçen kuramsal terimleri tam olarak anlamak mümkün değildir. Bu özellik kuramsal terimleri gözlemsel terimlerden ayırır.

Kuramda incelenen nesneler bütün özellikleriyle birlikte varolan somut nesneler değil, birçok özelliklerinden soyutlanmış nesnelerdir. Ancak kuramda geçen özellikler göz önünde tutulur, geri kalan özelliklerin tümü ise soyutlanır. Nesnelerin kendileri de gerçek dünyada var olmayan nesnelerdir. Kuramların incelediği soyutlanmış ve/veya idealleştirilmiş nesnelere *doğal sistemler* denir. Örneğin sözü geçen psikoloji kuramında incelenen nesneler somut insanlar değil kuramda geçmeyen her türlü özellikten soyutlanmış psikolojik "tipler"dir.

Newton mekaniği kuramının ve genel olarak fizik kuramlarının konusu olan nesneler de *fiziksel sistemler* denilen doğal sistemlerdir. Ancak doğal sistemler gerçek dünyada varolmamakla birlikte bunlara yaklaşık olarak benzeyen doğal nesneler vardır. Bilimsel kuramlar ise konuları doğal sistemlere yaklaşık olarak benzeyen doğal nesnelere uygulanabildikleri ölçüde doğru sayılırlar.

ALIŞTIRMALAR

3 tane farklı fiziksel sistem örneği veriniz.

18.3.2 Önerme Biçiminde Olmayan Kuramlar

Buraya kadar bilimsel kuramları önerme kümeleri olarak ele aldık. Oysa bilim felsefesinde bilimsel kuramlar önerme biçiminde olmayan yapılar olarak da tasarlanırlar. Bunu şöyle açıklıyoruz. $A(T_1,...,T_n)$, içinde $T_1,...,T_n$ terimlerinin geçtiği bir kuramın aksiyomlarının tümel-evetlemesi olsun. O zaman

(1) $F(X) \leftrightarrow \exists Y_1...\exists Y_n\ [X = <Y_1,...,Y_n> \wedge A(Y_1,...,Y_n)]$

önermesiyle "F" gibi bir birli yüklem tanımlayabiliriz. "F" yüklemine *kuram yüklemi* diyoruz. F kuram yükleminin uygulandığı nesneler, yani "F(x)" açık önermesini gerçekleyen "X" değişkeninin değerleri, belli bir yapısı olan kümelerdir. Bu kümelere kuramın aksiyomlarının tümel-evetlemesi olan

(2) $A(T_1,...,T_n)$

önermesinin *model*'leri diyoruz.

"T_i" gibi bir terimin yerine koyduğmuz "Y" değişkeninin değerleri T_i'nin türüne göre değişir. "T_i" bir n-li yüklem ise "Y"nin değerleri n-li bağıntılar, "T_i" bir n-li işlev ise "Y" nin değerleri n-li fonksiyonlar ve "T_i" bir tekil terim ise "Y"nin değerleri bireylerdir.

Örneğin §18.3.1.4'de kuramın (A1') (A2') (A3') aksiyomlarının tümel evetlemesi

(3) $\forall x\ [[B(x) \rightarrow \ddot{G}(x)]] \wedge \forall x\ [[B(x) \rightarrow Yk(x)]] \wedge \forall x\ [[Yk(x) \rightarrow S(x)] \rightarrow \ddot{G}x]$

dir. Bu ise

(3') $\forall x\ [[B(x) \rightarrow \ddot{G}(x)] \wedge [B(x) \rightarrow Yk(x)] \wedge [[Yk(x) \rightarrow S(x)] \rightarrow \ddot{G}(x)]$

ile eşdeğerdir. (3')'nün karşılığı olan "F" kuram yüklemi şöyle tanımlanır. "B" yerine "Y_1", "$\ddot{G}$" yerine "Y_2", "Yk" yerine "Y_3" ve "S" yerine "Y_4" koyuyoruz.

(4) $F(x) \leftrightarrow \exists Y_1\, \exists Y_2\, \exists Y_3\, \exists Y_4\, [X = \langle Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\rangle \wedge \forall x\, [(x \in Y_1 \rightarrow x \in Y_2) \wedge (x \in Y_1 \rightarrow x \in Y_3) \wedge [[x \in Y_3 \rightarrow x \in Y_4] \rightarrow x \in Y_2]]]$.

Dikkat edilirse "B" yerine "Y_1" koyduğumuzda "B(x)" yerine "$Y_1(x)$" değil "$x \in Y_1$" yazmak gerekiyor. Nitekim "Y_1" in değerleri 1-li bağıntılar yani birey kümeleridir. Aynı durum "$\ddot{G}x$" "Yk(x)" ve "Y(x)" için de söz konusudur.

İmdi (4) ile tanımlanan kuram yükleminin modelleri $\langle Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\rangle$ biçimindeki sıralanmış dörtlülerdir. Bu dörtlülerin yapısı (4) önermesiyle belirlenmiştir. Verilen aksiyom sisteminin belirlediği kuram önerme biçiminde olmayan bu modeler tarafından da temsil edilir. Yani her kuram bir yönden mantıkça kapalı bir önerme kümesiyle, bir de kuramın karşılığı olan kuram yükleminin (önerme biçiminde olmayan) modelleri ile temsil edilir.

ALIŞTIRMALAR

§18.3.1.1'deki Newton tanecik mekaniği kuramının karşılığı olan kuram yüklemini tanımlayınız.

18.4 BİLİMSEL PEKİŞTİRME

18.4.1 Nitel Pekiştirme

18.4.1.1 Nicod Yöntemi

(1) $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$

biçiminde bir yasal önermeyi göz önüne alalım. Bu önermenin doğru olup olmadığını sınamak veya denetlemek için deneye başvurulur. Böyle bir deneyin deney koşulu "Fa" biçiminde, deney sonucu ise başarı durumunda "Ga", başarısızlık durumunda "~Ga" biçimindedir.

(2) $Fa \wedge Ga$

önermesine (1) tümel yasal önermesinin bir *olumlu örneği*,

(3) $Fa \wedge \sim Ga$

önermesine ise (1)'in bir *olumsuz örneği* denir.

(1) önermesi bir yasal önerme olduğunda "x" değişkeninin değer alanı genellikle sonsuz veya sınırsızdır. Bu nedenle (1) gibi bir yasal önermeyi doğrulayamayız, yani doğru olduğunu kesin olarak saptayamayız. Bunun yerine başarılı deneylerle pekiştirebiliriz.

Bir tümel yasal önermeyi *pekiştirme,* yapılan bir deney sonucunda bu önermenin bir olumlu örneğini ortaya koyma işlemi demektir.

Örneğin bir tümel yasal önerme olan

(4) Bütün kargalar siyahtır

(5) *a* bir kargadır ve *a* siyahtır

olumlu örneğine dayanarak pekiştirilir.

Öte yandan (1) önermesi, yapılan bir deney sonucunda bir olumsuz örneği ortaya çıkarsa "*çürütülmüş*" olur.

Bir tümel yasal önermeyi *çürütme,* yapılan bir deney sonucunda bu önermenin bir olumsuz örneğini ortaya koyma işlemi demektir.

Örneğin (4) önermesi

(6) *b* bir kargadır ve *b* siyah değildir.

olumsuz örneğine dayanarak çürütülebilirdi.

(1) biçimindeki bir tümel yasal önermenin olumlu örnekle pekiştirilmesi ve olumsuz örnekle çürütülmesini sağlayan yönteme *Nicod* (Niko) *Yöntemi* denir. Nicod yönteminin sağladığı pekiştirme ve çürütme nicel değil *nitel*'dir. Nitekim bu ölçütle bir önermenin ne kadar pekiştirildiği veya ne kadar çürütülebildiği ortaya çıkmaz. Yalnızca pekiştirilip pekiştirilmediği veya çürütülüp çürütülmediği saptanır. Dolayısıyla pekiştirme ve çürütme birer nitelik durumundadır. İlerde "pekiştirme derecesi" denilen nicel pekiştirme kavramını ele alacağız. Şimdilik Nicod ölçütünün arka arkaya *n* kez uygulanmasıyla hep olumlu örnekler elde edildiği durumlarda pekiştirme derecesinin arttığını söyleyebiliriz. Nitekim (1) önermesini deneyle n kez denetleyerek

(7) $Fa_1 \wedge Ga_1$, $Fa_2 \wedge Ga_2$,..., $Fa_n \wedge Ga_n$

olumlu sonuçlarını elde ettiğimizi kabul edelim. n sayısı büyüyünce bu olumlu örneklerin sağladığı pekiştirme derecesinin büyüdüğünü söyleyebiliriz. Ancak

(8) $Fa_i \wedge \sim Ga_i$

biçiminde olumsuz bir örnek ortaya çıkarsa (1) tümel yasal önermesi çürütülmüş olur. Nitekim

(9) $Fa_i \wedge \sim Ga_i \therefore \sim \forall x(Fx \rightarrow Gx)$

çıkarımı geçerlidir. Yani (8) olumsuz örneği doğru ise (1) önermesi yanlış olur. Dolayısıyla çürütme bir yanlışlama niteliğindedir. Oysa n sayısı ne kadar büyük olursa olsun (7) olumlu örneklerinin yol açtığı nicel pekiştirme derecesinin büyüklüğü kesin doğrulama sayılamaz. Nitekim kesin doğrulama için n sayısı sonsuza erişmelidir. Oysa yapılabilen deney sayısı olan n hep sonlu bir sayı olup hiçbir zaman sonsuza erişemez.

Pekiştirilmek istenilen bir yasal önermeye *varsayım* (veya *hipotez*) denir. Bir varsayımı pekiştirmek için başvurulan gözlem önermesine veya gözlem önermelerine *deneysel kanıt* denir. Deneysel kanıt pekiştiren önermedir.

Çürütmenin kaynağı olan tekil gözlem önermesine de *deneysel karşı kanıt* denir.

Nicod yönteminde deneysel kanıt pekiştirilen varsayımın olumlu örneğidir.

Deneysel kanıt veya deneysel kanıtlara dayanarak bir varsayımı pekiştirme işlemine *tümevarım* denir.

Tümevarımlı çıkarım, öncülü n sayıda deneysel kanıt ve sonucu bir tümel varsayım olan bir çıkarım demektir. Böyle bir çıkarımda sonuç kesinlik değil ancak *olasılık* kazanabilir. Bu olasılık varsayımın kazandığı pekiştirme derecesine eşittir. Tümevarımlı çıkarımda sonuç önermenin içeriği öncül önermelerinin içeriğini aşar.

Örneğin

(10) $Fa_1 \wedge Ga_1, \ldots, Fa_n \wedge Ga_n \therefore$ Olasılıkla $\forall x\,(Fx \rightarrow Gx)$

bir tümevarımlı çıkarımdır. Öncüller, F olan yalnız $a_1,...,a_n$ nesnelerinin G olduğunu dile getirir. Oysa sonuç F olan bütün nesnelerin (yani $a_1,...,a_n$'in dışındaki nesnelerinde) G olduğunu dile getirir. Bu nedenle (10) gibi tümevarımlı çıkarımlarda kullanılan tümevarım yöntemine *büyültücü tümevarım* veya *bilimsel tümevarım* denir. Ayrıca çıkarımın öncüllerinin taşıdığı bilginin, sonucu kesin olarak bilmek için yetersiz olmasından ötürü, tümevarım yöntemine bir de *eksik tümevarım* denir.

Bilim felsefecilerinin bir bölümü eksik tümevarımın temel yasal önermelerin pekiştirilmesini sağlayabilecek akılcı bir yöntem olmadığını savunmuşlardır. Bu görüşte olanlar tümevarımlı çıkarımın sonucunun olasılığı bile olmadığını dolayısıyla böyle bir çıkarımın bilimsel sayılamayacağını ileri sürmüşlerdir. Onlara göre tümevarımlı çıkarımlar bilgiye değil yalnızca sanıya yol açabilirler. Nitekim sanılarımızın kaynağı geniş ölçüde tümevarımdır.

İmdi "büyültücü" veya "eksik" denilen tümevarımın, pekiştirme için elverişsiz olsa bile, *bilimsel buluş*, yani yeni varsayımların ortaya konulmasında önemli bir işlevi vardır. Nitekim böyle bir tümevarım işlemiyle tekil gözlem önermelerinden tümel varsayımlara geçme olanağı vardır.

Eksik tümevarımın andırış veya *tekil tümevarım* denilen bir biçimi oluştuğu henüz bilinmeyen bir olayın önceden kestirimini (tahminini) yapmaya yarayabilir. Örneğin

(11) $Fa_1 \wedge Ga_1,..., Fa_n \wedge Ga_n, Fb \therefore$ Olasılıkla Gb

bir andırış veya tümevarımlı çıkarımdır. Öncüllerin bilgisine dayanarak Gb sonucunun kestirimini yapmaya yarar.

(10) çıkarımında F olan nesnelerin tümü $a_1,...,a_n$'den ibaret olduğu durumlarda, yani

(12) $\forall x\,[Gx \leftrightarrow (x = a_1 \vee ... \vee x = a_n)]$

koşulunun yerine geldiği durumlarda, (10) çıkarımı

(13) $\forall x\,[Fx \leftrightarrow (x = a_1 \vee ... \vee x = a_n)], Ga_1,..., Ga_n \therefore \forall x(Fx \rightarrow Gx)$

biçimine dönüşür. (13) ise özdeşlik mantığında geçerli olan bir çıkarımdır. (13) çıkarımında kullanılan tümevarım biçimine tam *tümevarım* denir. Ancak

tam tümevarım, tümevarım yöntemine değil, dedüktif mantık yöntemine dayanır. Örneğin

(14) Haftanın bütün günleri Pazartesi, Salı, Çarşamba, Perşembe, Cuma, Cumartesi ve Pazar'dır; Pazartesi, Salı, Çarşamba, Perşembe, Cuma, Cumartesi ve Pazar yirmidört saattir; o halde haftanın her günü yirmidört saatttir.

tam tümevarıma dayanan bir çıkarımdır. "Pazartesi", "Salı", "Çarşamba", "Perşembe", "Cuma", "Cumartesi" ve "Pazar" gün adlarını sırasıyla $a_1,...,a_7$ olarak kısaltalım. Ayrıca "haftanın bir günüdür"ü "F" ile, "yirmidört saat sürelidir"i "G" ile kısaltalım. O zaman (14) çıkarımı (13) biçiminde sembolleştirilebilir.

Nicod yöntemi tümevarımın klasik biçimidir. İlerde başka türlü tümevarım biçimleri ile karşılaşacağız.

Nicod yöntemi ancak (1) biçiminde tümel önermelerin pekiştirilmesi için kullanılabilir. İçinde tikel niceleyici bulunan önermeler için kullanılamaz. Ayrıca pekiştirilen varsayımın bütün terimlerinin gözlem terimi olması gerekir. Nitekim F ile G terimlerinden en az biri kuramsal terim ise "Fa∧Ga" önermesi bir gözlem önermesi olmaz. O zaman da bu önerme bir deneysel kanıt sayılamazdı. Dolayısıyla Nicod yöntemi kuramsal varsayımların yani içinde kuramsal terim geçen varsayımların pekiştirilmesi için kullanılamaz. Bu nedenlerden ötürü Nicod yöntemi yerine başka türlü tümevarım biçimleri geliştirilmiştir. Bunları sonraki bölümlerde göreceğiz.

ALIŞTIRMALAR

Nicod yöntemi ile üç tane farklı yasal önermeyi pekiştiren olumlu örnekler gösteriniz.

18.4.1.2 Hempel Yöntemi

Hempel Yöntemi, Nicod yöntemini her biçimdeki yasal önermeyi pekiştirmek amacıyla geliştirmiştir.

Hempel yönteminde deneysel kanıt, herhangi bir tekil gözlem önermesidir. Yani atomsal gözlem önermeleri ile bu önermelerin temel eklemlerle birleşmesinden oluşan bileşik önermeler deneysel kanıt olabilir.

Hempel yöntemi niceleme mantığı diline ait bir önermenin belli bir evrende *açılım*'ı kavramına dayanır.

E = $\{a_1,...,a_n\}$ olduğunda A gibi bir önermenin E evreninde *açılım*'ı aşağıdaki iki kuralı A önermesinin bileşenlerine uygulamakla elde edilen önerme demektir.

(i) $\forall xB(x)$ biçimindeki her bileşenin yerine $B(a_1)\wedge...\wedge B(a_n)$ konulur.

(ii) $\exists xC(x)$ biçimindeki her bileşenin yerine $C(a_1)\vee...\vee C(a_n)$ konulur.

(1) $\forall xFx$

önermesinin {a, b} biçiminde bir evrendeki açılımını bulalım. (i) kuralını uygulayarak

(1') $Fa\wedge Fb$

elde edilir.

İkinci örnek olarak

(2) $\exists xGx$

in {a, b, c} evrenindeki açılımını bulalım. (ii) kuralını uygulayarak

(3) $Ga\vee Gb\vee Gc$

elde edilir.

Üçüncü örnek olarak

(4) $\forall x\exists yFxy$

önermesinin {a, b} evrenindeki açılımını bulalım. Önce (i) kuralını uygulayarak

(5) $\exists yFay \wedge \exists yFby$

elde edilir. Sonra (5) önermesine ard arda (ii) kuralını uygulayarak

(6) $(Faa \vee Fab) \wedge (Fba \vee Fbb)$

elde edilir. (6) önermesi (4)'ün {a, b} evreninde açılımıdır.

Dördüncü örnek olarak

(7) $\exists x(Fx \rightarrow \exists y \forall z Gxyz)$

önermesinin {a, b} evreninde açılımını bulalım. Önce (ii) kuralını (7)'nin bütününe uygulayarak

(8) $(Fa \rightarrow \exists y \forall z Gayz) \vee (Fb \rightarrow \exists y \forall z Gbyz)$

elde edilir. Sonra (ii) kuralını içerdeki bileşenlere uygulayarak

(9) $[Fa \rightarrow (\forall zGaaz \vee \forall zGabz)] \vee [Fb \rightarrow (\forall zGbaz \vee \forall zGbbz)]$

elde edilir. En sonda (i) kuralını içerdeki bileşenlere uygulayarak

(10) $[Fa \rightarrow [(Gaaa \wedge Gaab) \vee (Gaba \wedge Gabb)] \vee$

$[Fb \rightarrow [(Gbaa \wedge Gbab) \vee (Gbba \wedge Gbbb)]]$

elde edilir. (10) önermesi (7)'nin {a, b} evreninde açılımıdır.

D içinde $a_1,...,a_n$ adları geçen bir deneysel kanıt (yani tekil gözlemsel önerme) ve V herhangi biçimde bir varsayım olduğunda, D'nin V'yi *dolaysız pekiştirmesi* D'nin, V'nin $\{a_1,...,a_n\}$ evrenindeki açılımını niceleme mantığı gereği içermesi demektir. D deneysel kanıtında geçen adların kümesine *D'nin evreni* denir. Bu evreni E_D ve V varsayımının E_D evreninde açılımını $Açl_{E_D}(V)$ biçiminde gösteriyoruz. O zaman

(11) D, V'yi dolaysız pekiştirir ancak ve ancak $D \models Açl_{E_D}(V)$

elde edilir.

Hempel yönteminde dolaysız pekiştirme böyle tanımlandıktan sonra "pekiştirme" kavramı şöyle tanımlanır.

D deneysel kanıtı V varsayımını pekiştirir ancak ve ancak ya D, V'yi dolaysız pekiştirir ya da $A_1,...,A_n$ gibi öyle önermeler vardır ki D kanıtı

$A_1,...,A_n$ önermelerinden herbirini dolaysız kanıtlar ve $\{A_1,...,A_n\} \models V$.

Nicod yöntemi Hempel yönteminin özel bir durumudur. Nitekim

(12) $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$

biçiminde bir varsayımı ve

(13) $Fa \wedge Ga$

biçiminde bir deneysel kanıtı göz önüne alalım. O zaman deneysel kanıtın evreni {a} olup varsayımın bu evrende açılımı

(14) $Fa \rightarrow Ga$

olur. Oysa

(15) $Fa \wedge Ga \models Fa \rightarrow Ga$

O halde (13) deneysel kanıtı (12) varsayımını Hempel yöntemine göre dolaysız kanıtlar. Demek ki Hempel yöntemi, Nicod yönteminin bir genelleştirilmesidir.

(16) $\forall x \exists y Fxy$

biçiminde bir varsayım Nicod yöntemi ile pekiştirilemez. Oysa Hempel yöntemi gereği

(17) $Fab \wedge Fba$

biçiminde bir deneysel kanıt (16)'yı dolaysız pekiştirir. Nitekim (17)'nin evreni {a, b} olup (16)'nın {a, b} evreninde açılım

(18) $(Faa \vee Fab) \wedge (Fba \vee Fbb)$

dır. (18) ise

(19) $(Faa \wedge Fba) \vee (Faa \wedge Fbb) \vee (Fab \wedge Fba) \vee (Fab \wedge Fbb)$

ile eşdeğerdir. İmdi (17) önermesi (19)'u içerir. O halde (17) deneysel kanıtı (16) varsayımını dolaysız pekiştiriyor.

Hempel yönteminde çürütme şöyle tanımlanır. D bir tekil gözlem önermesi olduğunda, D önermesi V varsayımını *çürütür* ancak ve ancak D önermesi ~V varsayımını (Hempel yöntemi gereği) pekiştirirse. (Yani D önermesi deneysel karşı kanıtsa.)

Örneğin (12) önermesinin değillemesi

(20) $\exists x(Fx \wedge \sim Gx)$

ile eşdeğerdir.

(21) $Fa \wedge \sim Ga$

tekil gözlem önermesi (12) önermesini çürütür. Nitekim (21) önermesi (20) varsayımını dolaysız pekiştirir. Bunu şöyle gösteriyoruz. (21) deneysel kanıtının evreni {a}'dır. (20) varsayımının {a} evreninde açılımı (21)'dir ve (21) kendisini içerir. Dolayısıyla (21) deneysel kanıtı (20) varsayımının (21)'in evrenindeki açılımını içeriyor. O halde (21), (20)'yi dolaysız pekiştiriyor.

Öte yandan (16) varsayımının değillemesi

(22) $\exists x \forall y \sim Fxy$

biçimindedir. (22)'nin {a, b} evreninde açılımı

(23) $(\sim Faa \wedge \sim Fab) \vee (\sim Fba \wedge \sim Fbb)$

dır. Buna göre

(24) $\sim Faa \wedge \sim Fab$

tekil gözlem önermesinin (16) varsayımını çürüttüğünü söyleyebiliriz. Nitekim (24) önermesi, (16)'nın değillemesinin (24)'ün evreni olan {a, b} kümesindeki açılımını içeriyor.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki önermelerin verilen evrendeki açılımını bulunuz.

1. $\forall x(Fx \wedge Gx)$, E: {a}
2. $\forall x(Fx \wedge Gx)$, E: {a, b}
3. $\forall xFx \rightarrow \exists xGx$, E: {a, b, c}
4. $\exists x \exists y(Fxy \vee Gyx)$, E: {a, b}
5. $\exists x \forall y(Fx \rightarrow Gy) \wedge \forall x \forall yHxy$, E: {a, b}

II. Aşağıdaki varsayımları Hempel yöntemi gereği, dolaysız pekiştiren deneysel kanıtları bulunuz.

1. $\forall x[(Fx \wedge Gx) \rightarrow Hx]$
2. $\exists x(Fx \wedge Gx)$
3. $\forall x(Fx \rightarrow \exists yGxy)$

Hempel yöntemi her biçimdeki mantıksal yapıdaki varsayıma uygulanmakla birlikte kuramsal varsayımlara uygulanamaz. Nitekim deneysel kanıtın terimleri pekiştirilen varsayımın terimleridir. Eğer varsayımda kuramsal terim geçerse bu terim deneysel kanıtta da geçebilir. Oysa deneysel kanıt bir gözlem önermesi olmalıdır. Dolayısıyla deneysel kanıtta kuramsal terim geçemez. Nitel pekiştirmeyi kuramsal varsayıma uygulamak için Hempel yönteminin yapısını değiştirmek gerekir. Bunu sağlayan bir yöntemi bir sonraki bölümde göreceğiz.

18.4.1.3 Glymour Yöntemi

"F" bir terim, söz gelişi bir n-li kuramsal yüklem ve $a_1,...,a_n$ n tane ad olduğunda

(1) $Fa_1...a_n$

ile

(2) $\sim Fa_1...a_n$

temel önermelerine "F" teriminin bir *değer*'i denir. İmdi "F" bir gözlem terimi ise "F"nin değerlerinin doğruluk değerinin saptanması gözleme dayanır. Oysa "F" bir kuramsal terim ise, "F"nin değerlerin doğruluk değerini salt gözlemle saptamak mümkün değildir. Bu durumda "F"nin değerini bir gözlem önermesi ile içinde "F"nin geçtiği kuramsal önermelerden türetebiliriz. Böylece "F" kuramsal teriminin değerini hesaplamış oluruz. Örneğin "G" bir kuramsal birli yüklem olsun. "G"nin "Ga" değerini, "Ha" gibi bir gözlem önermesiyle "G"yi kapsayan "$\forall x(Hx \rightarrow Gx)$" varsayımından türetebiliriz.

Glymour yönteminde V gibi bir varsayımı pekiştirmek için eldeki D deneysel kanıtı ile içinde V'nin de geçebildiği K gibi bir kuramdan V'nin bir ve-

ya daha çok sayıda değeri türetilir. Eğer türetilen değer veya değerlerin tümel-evetlemesi V'nin, D'nin evrenindeki açılımını içerirse; D, V'yi K kuramına göre pekiştirmiş olur. Ayrıca evreni D deneysel kanıtının evreniyle özdeş olan D' gibi bir tekil gözlem önermesinden ve K kuramından türetilen bir değerin, V'nin değillemesinin D' önermesinin evrenindeki açılımını içermesi gerekir.

Örneğin "U" ile "T" gözlem terimi "F" kuramsal terim olduğunda,

(1) $Uat_1 \wedge Uat_2 \wedge Tat_1 \wedge Tat_2$

deneysel kanıtı,

(2) $\forall x \forall t\, [Uxt \rightarrow (Fx \leftrightarrow Txt)]$

varsayımını ve (2) varsayımını kapsayan

(3) $Sn(\forall x \forall t\, [Uxt \rightarrow (Fx \leftrightarrow Txt)])$

kuramını göz önüne alalım. (1)'i "D" ile, (2)'yi "V" ile ve (3)'ü "K" ile gösteriyoruz. İmdi

(4) $D, K \models Uat_2 \wedge Tat_2 \wedge Fa$

içermesi doğrudur. Öte yandan (1) deneysel kanıtı yerine D' ile gösterdiğimiz aşağıdaki deneysel karşı kanıtı gözönüne alalım.

(5) $Uat_1 \wedge Uat_2 \wedge Tat_1 \wedge \sim Tat_2$

O zaman da

(6) $D', K \models Uat_2 \wedge \sim Tat_2 \wedge Fa$

içermesi doğrudur. Oysa

(7) $Uat_2 \wedge Tat_2 \wedge Fa \models Uat_2 \rightarrow (Fa \leftrightarrow Tat_2)$

ve

(8) $Uat_2 \wedge \sim Tat_2 \wedge Fa \models \sim[Uat_2 \rightarrow (Fa \leftrightarrow Tat_2)]$

içermeleri doğrudur. İmdi (7) içermesinin sağ yanı V varsayımının $\{a, t_2\}$ evrenindeki açılımı ve (8) içermesinin sağ yanı ~V varsayımının $\{a, t_2\}$ evrenindeki açılımıdır. O halde D deneysel kanıtı V varsayımını K kuramına göre (Glymour yöntemi gereği) pekiştiriyor.

İkinci örnekte D deneysel kanıtı, V varsayımı ve K kuramı sırasıyla aşağıda gösterildiği gibi olsun.

D: $Uat_1 \wedge U'at_2 \wedge Tat_1 \wedge T'at_2$

V: $\forall x\,(Fx \rightarrow Gx)$

K: $Sn\{\forall x\,(Fx \rightarrow Gx), \forall x\forall t[Uxt \rightarrow (Fx \leftrightarrow Txt)], \forall x\forall t[U'xt \rightarrow (Gx \leftrightarrow T'xt)]\}$

Bu durumda

(9) $D, K \models Fa$

ile

(10) $D, K \models Ga$

içermeleri doğrudur. Oysa "$Fa \wedge Ga$", V varsayımının {a} evrenindeki açılımı olan

(11) $Fa \rightarrow Ga$

önermesini içerir. Öte yandan D'

(12) $Uat_1 \wedge U'at_2 \wedge Tat_1 \wedge \sim T'at_2$

deneysel karşı kanıtını göz önüne alalım. O zaman

(13) $D', K \models Fa$

(14) $D', K \models \sim Ga$

içermeleri doğru olur. Oysa "$Fa \wedge \sim Ga$", V varsayımının değillemesinin {a} evrenindeki açılımını içerir.

"Kendi kendini pekiştirme" olarak da adlandırılabilen Glymour yöntemi eleştirilerle karşılaşmış ve bunların etkisinde çeşitli değişimlere uğramıştır. Bu konudaki tartışmalar hâlâ sürmektedir.

ALIŞTIRMALAR

D: Fa

V: $\forall xGx$

K: $Sn\{\forall xGx, \forall x(Gx \leftrightarrow Fx)\}$

durumunda D'nin V varsayımını K kuramına göre (Glymour yöntemi gereği) pekiştirdiğini gösteriniz.

18.4.1.4 Varsayımlı Dedüktif Yöntem

(1) Bütün metaller ısıtılınca genleşirler.

tümel yasal önermesini içine alan

(2) a bir metal parçasıdır ve a ısıtılıyor, bütün metaller ısıtılınca genleşirler, o halde a genleşiyor.

çıkarımını göz önüne alalım. "metaldir" birli yüklemini "F", "ısıtılıyor" birli yüklemini "G" ve "genleşiyor" birli yüklemini "H" ile gösteriyoruz. O zaman (2) çıkarımı

(3) $Fa \wedge Ga, \forall x[(Fx \wedge Gx) \rightarrow Hx] \therefore Ha$

biçiminde sembolleştirilir. Burada "Fa∧Ga" ile "Ha" birer gözlem önermesidir. "Fa∧Ga"nın gözleme dayanarak önceden doğru olduğunun bilindiğini, buna karşılık "Ha"nın doğru olup olmadığının henüz gözlemle saptanmadığını kabul edelim. O zaman (3) çıkarımı "Ha" gözlem önermesi konusunda bir *kestirim* (veya tahmin) yapılmasını sağlar. Eğer kestirim doğru çıkarsa, yani ilerde gözlemle "Ha"nın doğru olduğu saptanırsa

(4) $\forall x[(Fx \wedge Gx) \rightarrow Hx]$

yani

(5) Bütün metaller ısıtılınca genleşir

varsayımının doğruluğuna olan güven artar, yani bu varsayım pekiştirilir. Buna karşılık kestirim yanlış çıkarsa, yani gözlemle "Ha"nın yanlış olduğu saptanırsa varsayıma güven sarsılıp bu varsayım çürütülmüş olur.

Genel olarak V bir varsayım, D_1 doğruluğu gözlemle saptanmış bir gözlem önermesi ve D_2 doğruluğu henüz saptanmamış bir gözlem önermesi olduğunda

(6) $D_1, V \therefore D_2$

biçiminde bir geçerli çıkarım V varsayımının ya pekiştirilmesini ya da çürütülmesini sağlar. Nitekim D_2 bir kestirimi dile getirir. Bu kestirim doğru çıkarsa V varsayımı pekiştirilmiş olur, kestirim yanlış çıkarsa varsayım çürütülmüş olur. Böyle bir pekiştirme ve çürütme yöntemine *varsayımlı dedüktif yöntem*

denir. Bu yöntem nitel pekiştirmeye yol açar. Ancak işlem n kez tekrarlanır ve her defasında kestirim doğru çıkarsa pekiştirme derecesi artar. Bu ise nicel pekiştirmenin konusudur.

Çoğukez varsayımlı dedüktif yöntemde birden çok sayıda varsayıma başvurmak gerekir. O zaman da (6) yerine aşağıdaki biçimde bir çıkarım kullanmak gerekir.

(7) $D_1, V_1,..., V_n, V \therefore D_2$

(7) çıkarımında V *denetlenen varsayım,* $V_1,...,V_n$ ise *yardımcı varsayımlar*'dır. (7) çıkarımı geçerli olmalı buna karşılık

(8) $D_1, V_1,...,V_n \therefore D_2$

çıkarımı geçersiz olmalı. Böylece D_2 sonucunun V varsayımı olmadan türetilemeyeceği ortaya çıkar. (8) geçersiz olmasaydı, (7) çıkarımının geçerliliğine dayanarak V varsayımı ne pekiştirilebilir ne de çürütülebilir.

Klasik tümevarım (büyültücü veya eksik tümevarım) yönteminde varsayım bir tümevarımlı çıkarımın sonucu olarak pekiştirilir. Oysa varsayımlı dedüktif yöntemde tümevarımlı çıkarım değil, dedüktif çıkarım yapılır. Ancak bu son yöntemde de varsayımın pekiştirilmesi dedüktif bir işlem sayılamaz. Nitekim varsayımlı dedüktif yöntemde türetilen kestirimin doğru çıkması, varsayımın doğruluğunun kabulünü zorunlu kılmaz. Varsayımın doğruluğunun kabulü gene tümevarıma dayanır. Bu nedenle varsayımlı dedüktif yöntemi de bir tümevarım yöntemi saymalıyız.

ALIŞTIRMALAR

Varsayımlı dedüktif yönteme bilimlerden üç farklı örnek veriniz.

18.4.1.5 Nitel Pekiştirmenin Paradoksları

Nitel pekiştirme yöntemleri, yani Nicod, Hempel ve Glymour yöntemleri ile varsayımlı dedüktif yöntem aşağıda ortaya konulan paradokslarla karşılaşır.

(1) $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$

(2) $\forall x(\sim Gx \rightarrow \sim Fx)$

(3) $\forall x[(Fx \vee \sim Fx) \rightarrow (\sim Fx \vee Gx)]$

varsayımları birbiriyle eşdeğerdir. "F"yi "kargadır", "G" yi de "siyahtır" olarak yorumlayalım. O zaman (1) varsayımı "bütün kargalar siyahtır" anlamına gelir.

İmdi Nicod yöntemine göre

(1') $Fa \wedge Ga$

(1) varsayımının olumlu örneği,

(2') $\sim Gb \wedge \sim Fb$

(2) varsayımının olumlu örneği ve

(3') $(Fc \vee \sim Fc) \rightarrow (\sim Fc \vee Gc)$

(3) varsayımının olumlu örneğidir. İmdi (2')

(2") $\sim Fb \wedge \sim Gb$

ve (3')

(3") $\sim Fc \vee Gc$

ile eşdeğerdir.

İmdi *eşdeğerlik koşulu* denilen aşağıdaki koşulu gözönüne alalım.

D gözlem önermesi V varsayımını pekiştirirse, ve D' ≡ D ile V' ≡ V olursa, D' önermesi V' önermesini pekiştirir.

Eşdeğerlik koşulu pekiştirme kavramının tanımının uygunluğunun bir koşulu olarak ortaya konulmuştur. İşte eşdeğerlik koşuluna dayanarak Nicod yöntemi gereği (2") önermesi (1) varsayımını pekiştirir. Ayrıca (3") önermesi de (1) varsayımını pekiştirir. İmdi b nesnesi beyaz bir ayakkabı olabilir. O zaman da (2") önermesi doğru olup (1) varsayımını, yani "bütün kargalar siyahtır" önermesini pekiştirir. Bu durum ise son derece paradoksaldır. Öte yandan C nesnesi karga olmayan herhangi bir nesne ise veya C nesnesi siyah olan herhangi bir nesne ise (3") önermesi doğru olup gene "bütün kargalar siyahtır" önermesini pekiştirir. Bu durum da paradoksaldır.

Dikkat edilirse sözü geçen paradokslar yalnız Nicod yönteminde değil diğer nicel pekiştirme yöntemlerinde de ortaya çıkar. Hempel yönteminde (2") önermesi (1)'in {b} evreninde açılımını içerir, (3") önermesi de (1)'in {c} evreninde açılımını içerir. Glymour yöntemine gelince (1) önermesi bu yöntem gereği şöyle pekiştirilebilir.

D: $\sim Fb \wedge \sim Gb$

V: $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$

K: Sn (∅)

D': $Fb \wedge \sim Gb$

D, K $\models$ $\sim Fb \wedge \sim Gb \models$ V'nin {b} evreninde açılımı

D', K $\models$ $Fb \wedge \sim Gb \models$ ~V'nin {b} evreninde açılımı

Son olarak varsayımlı dedüktif yönteminde (1) varsayımı aşağıdaki geçerli çıkarımla pekiştirilebilir.

(5) $\sim Gb, \forall x\,(Fx \rightarrow Gx) \therefore \sim Fb$

Böylece (2") önermesinin doğru olmasına dayanarak (1) varsayımı varsayımlı dedüktif yöntem gereği de pekiştirilmiş olur.

18.4.2 Nicel Pekiştirme

Bir varsayımın nicel olarak pekiştirilmesi, 0 ile 1 arasında bir pekiştirme derecesinin saptanması demektir. D eldeki deneysel kanıt, V ise bir varsayım olduğunda V'nin D'ye göre *pekiştirme derecesi* V'nin D'ye göre bilgisel olasılık derecesi demektir. Daha doğrusu B ile gösterdiğimiz arka düzlem bilgisini de göz önüne alırsak V'nin D'ye ve B'ye göre pekiştirme derecesi, V'nin $D \wedge B$'ye göre koşullu (bilgisel) olasılığı, yani

(1) Ol $(V / B \wedge D)$

olarak tanımlanır. Burada "Ol" bilgisel olasılığı dile getiriyor.

18.4.2.1 Bayes Yöntemi

İmdi pekiştirme derecesinin Bayes teoremine göre belirlenmesi yöntemine *Bayes yöntemi* denir. Bayes yöntemi nicel pekiştirmenin temel yöntemidir. Bayes teoreminin birinci biçimine göre

$$(1)\quad Ol(V/D\wedge B) = \frac{Ol(V/B)\ Ol(D/V\wedge B)}{Ol(D/B)}$$

elde edilir. Bayes teoreminin ikinci biçimine göre de

$$(2)\quad Ol(V_i/D\wedge B) = \frac{Ol(V_i/B)\ Ol(D/V_i\wedge B)}{\sum^{n} Ol(V_j/B)\ Ol(D/V_j\wedge B)}$$

elde edilir. İkinci biçimde

$$(3)\quad Ol(V_1/B) +\ldots+ Ol(V_n/B) = 1$$

ve

$$(4)\quad Ol(V_i/V_j\wedge B) = 0\ i \neq j \text{ ve } i, j = 1,\ldots,n$$

olmalıdır.

n = 2 özel durumunda V_1 olarak V ve V_2 olarak ~V önermesini seçebiliriz. O zaman (3) eşitliği aşağıdaki biçime dönüşür.

$$(5)\quad Ol(V/D\wedge B) = \frac{Ol(V/B)\cdot Ol(D/V\wedge B)}{Ol(V/B)\ Ol(D/V\wedge B) + Ol(\sim V/B)\ Ol(D/\sim V\wedge B)}$$

$$= \frac{Ol(V/B)\cdot Ol(D/V\wedge B)}{Ol(V/B)\cdot Ol(D/V\wedge B) + [1- Ol(V/B)]\ Ol(D/\sim V\wedge B)}$$

(5) Bayes teoreminin *üçüncü biçimi*'dir.

Ol(V/D∧B)'ye *sonsal olasılık,* Ol(V/B)'ye ise önsel olasılık denir. Sonsal olasılık ile önsel olasılığın farkına dayanarak Bayes yöntemi gereği bir nitel olasılık şöyle tanımlanabilir.

> D deneysel kanıtı V varsayımını B düzlem bilgisine göre pekiştirir ancak ve ancak Ol(V/D∧B) – Ol(V/B) > 0 ise. D, V'yi B'ye göre çürütür ancak ve ancak Ol(V/D∧B) – Ol(V/B) < 0 ise.

Bayes yönteminde yasal önermelerin önsel olasılığının 0'dan büyük ve 1'den küçük olduğu kabul edilir. Yani yasal önerme biçiminde olan hiçbir varsayımın kesin olarak yanlış veya kesin olarak doğru olmadığı düşünülür.

O zaman da

(6) $Ol(V/D\wedge B) > Ol(V/B)$ ancak ve ancak $Ol(D/V\wedge B) > Ol(D/\sim V\wedge B)$

elde edilir. Bunu şöyle kanıtlıyoruz. $Ol(V/B) = \theta$, $Ol(D/V\wedge B) = \theta_1$ ve $Ol(D/\sim V\wedge B) = \theta_2$ olsun. O zaman Bayes teoreminin ikinci biçimi gereği

(7) $Ol(V/D\wedge B) > Ol(V/B) \equiv$

$$\frac{Ol(V/B) \cdot Ol(D/V\wedge B)}{Ol(V/B) \cdot Ol(D/V\wedge B) + [1- Ol(V/B)] \cdot Ol(D/\sim V\wedge B)} > Ol(V/B) \equiv$$

$$\frac{\theta\ \theta_1}{\theta\ \theta_1 + (1-\theta)\,\theta_2} > \theta \equiv$$

($\theta > 0$ olduğundan)

$$\frac{\theta_1}{\theta\ \theta_1 + (1-\theta)\,\theta_2} > 1 \equiv$$

$\theta_1 - \theta\ \theta_1 > (1-\theta)\,\theta_2 \equiv$

$\theta_1\,(1-\theta) > (1-\theta)\,\theta_2 \equiv$

$\theta_1 > \theta_2$ ($1-\theta > 0$ olduğundan)

Dolayısıyla

(8) D, V'yi B'ye göre pekiştirir ancak ve ancak

$Ol(D/V\wedge B) > Ol(D/\sim V\wedge B)$

sonucunu elde ederiz.

İmdi Bayesci nitel pekiştirme öbür nitel pekiştirme yöntemlerinin karşılaştığı nitel pekiştirmenin paradokslarıyla karşılaşmaz. Bunu şöyle gösterebiliriz.

(9) $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$

biçiminde bir tümel yasal varsayımı göz önüne alalım. Söz gelişi (9)'u

(10) Bütün kargalar siyahtır

ın sembolik karşılığı sayabiliriz.

(9) varsayımının deneysel kanıtının (Nicod yönteminde olduğu gibi)

(11) Fa∧Ga

olduğunu kabul ediyoruz.

O zaman B gerçekçi bir arka düzlem bilgisi olduğunda

(12) Ol[∀x (Fx → Gx) / Fa∧Ga∧B] > Ol[∀x(Fx → Gx)/~Fb∧~Gb∧B]

olduğu gösterilebilir.

18.5 BİLİMSEL AÇIKLAMA

18.5.1 "Niye" ve "Nasıl" Soruları. Açıklama Gerektiren Sorular ve Pekiştirme Gerektiren Sorular

Açıklama, gerçekleşen bir olguyu anlaı ,. sağlayan işlemdir. Bilimsel açıklama, bilime dayanarak yapılan açıklamadır. Pekiştirilmiş varsayımların yani bilimsel yasaların en önemli işlevi bilimsel açıklamadır.

Bilimsel açıklama, genellikle

(1) Niye p?

veya

(2) Niye p olmuştur?

biçimindeki "niye" soruların yanıtı olarak yapılır. Ancak açıklama bazı durumlarda

(3) Nasıl p?

ya da

(4) Nasıl p olmuştur?

biçimindeki "nasıl" önermelerinin yanıtı olarak da yapılabilir.

Yanıtı bir açıklama dile getiren soruya *açıklama öngören soru* denir. Örneğin

(5) Niye gezegenlerin yörüngesi elips biçimindedir?

sorusu açıklama öngören "niye" sorusudur. Buna karşılık

(6) Hırsız ceza evinden nasıl kaçmıştır?

sorusu açıklama öngören "nasıl" sorusudur.

Bilimsel açıklama, bilimsel pekiştirmeden kesinlikle ayırt edilmelidir. Pekiştirme

(7) Niye p olduğu kanısında olmak gerekir?

biçiminde bir "niye" sorusunun yanıtıyla dile getirilebilir. Böylece açıklama öngören "niye" sorularını pekiştirme öngören "niye" sorularından ayırt etmeliyiz. (7) biçimindeki bir sorunun yanıtı p olduğunu pekiştiren deneysel kanıtlardan oluşur.

ALIŞTIRMALAR

1. Açıklama öngören "niye" sorularına üç farklı örnek veriniz.
2. Açıklama öngören "nasıl" sorularına üç farklı örnek veriniz.

18.5.2 Dedüktif Yasal Açıklama

Açıklama, açıklayan önermeler dizisi ve açıklanan önerme olmak üzere iki bileşenden oluşur. Açıklanan önerme, açıklanmak istenilen tekil veya genel olguyu dile getirir. Tekil olguya ilişkin açıklanan önerme, belli bir olayın belli bir yer ve zamanda oluştuğunu dile getirir. Genel olguya ilişkin açıklanan önerme bir bilimsel yasayı dile getirir. Yani açıklanan şey tek bir olay veya bir yasa olabilir.

Açıklayan önerme ise çeşitli biçimlerde olabilir. Açıklamalar, özellikle açıklanan önerme dizisinin biçimine göre çeşitli türlere ayrılır. Bu türlerden en yaygın olanı "dedüktif yasal açıklama" denilen açıklama türüdür.

Deduktif yasal açıklama aşağıdaki dört koşulu yerine getiren açıklama biçimidir.

(i) $A_1,...,A_n$ açıklayan önermeler dizisi, B ise açıklanan önerme olduğunda $A_1,...,A_n \therefore B$ çıkarımı geçerli olmalıdır.

(ii) Açıklayan önermelerde en az bir bilimsel yasa geçmelidir. Yasa çıka-

rıldığı zaman geriye kalan çıkarım geçersiz olmalıdır.

(iii) Açıklayan önermeler, açıklanan önermeden bağımsız olarak sınanabilir olmalıdır.

(iv) Açıklayan önermeler dizisini oluşturan her önerme doğru olmalıdır.

Buna göre bir olayın açıklanması

(1) $g_1,...,g_m, y_1,...,y_n \therefore \mathcal{O}$

biçiminde geçerli bir çıkarımla dile getirilir. Burada $g_1,...,g_m$ başlangıç koşulları denilen m tane gözlem önermesi, $y_1,...,y_n$ n tane yasa ve $\mathcal{O}$ bir olguyu dile getiren bir gözlem önermesidir. Eğer yasalar bir kuramın aksiyomlarını kapsıyorsa ve/veya yasalarda kuramsal terimler geçiyorsa açıklamaya kuramsal açıklama denir.

Örneğin m = 2 ve n = 2 olduğunda,

g_1: bu ipin yapısı yps'dir

g_2: bu ipe 2 kg'lık bir ağırlık asılmıştır

y_1: Her x ipi ve her y yapısı için, eğer x ipi y yapısında ise, öyle bir z ağırlığı vardır ki x'e z'den büyük bir ağırlık asılırsa x kopar (z'ye x'in özgül kopma ağırlığı denir)

y_2: Her x ipi için, eğer x ipinin yapısı yps ise x'in özgül kopma ağırlığı 1 kg'dır

$\mathcal{O}$: bu ip kopmuştur

biçiminde dile getirilen açıklamayı göz önüne alalım. Dikkat edilirse

(2) $g_1, g_2, y_1, y_2 \therefore O$

(3) 2 kg'lık ağırlık 1 kg'lık ağırlıktan büyüktür

biçimindeki matematiksel önermesini de hesaba katmakla geçerlidir. O halde (2) çıkarımı bir dedüktif yasal açıklama örneğidir (y_1 ile y_2 yasal önermelerinin doğru olduğunu yani birer yasa dile getirdiğini kabul ediyoruz. Aynı biçimde g_1 ile g_2 gözlem önermelerin de doğru olduğunu kabul ediyoruz.) O zaman da (2) çıkarımı geçerli olduğundan $\mathcal{O}$ gözlem önermesi de açıklanmış olur.

Açıklanan $\mathcal{O}$ önermesi gerçekleşmiş bir olguyu dile getirdiğinden hep doğru olmalıdır. Gerçekleşen olgu tekil veya genel olabilir. $\mathcal{O}$'nun dile getirdiği genel olgu bir yasa niteliğinde olabilir. O zaman da $\mathcal{O}$'nun kendisi bir yasa niteliğinde olur. Örneğin $\mathcal{O}$, gezegenlerin yörüngesinin bir elips olduğunu dile getiren birinci Kepler yasası olsun. O zaman $\mathcal{O}$ yasasını Newton'un ikinci yasası ile Newton'un genel çekim yasasından (hiçbir başlangıç koşuluna başvurmaksızın) geçerli bir çıkarımla türetebiliriz. Böylece Kepler'in birinci yasasının dedüktif yasal açıklamasını yapmış oluruz.

Bir açıklamının öncüllerinde kullanılan yasalar da kuramsal terim geçerse (özellikle bu yasalar arasında bir kuramın aksiyomları geçerse) açıklamaya *kuramsal açıklama* denir. Örneğin Kepler'in birinci yasasının sözü geçen açıklaması bir kuramsal açıklamadır. Bu açıklamanın öncülleri olarak kullanılan yasalarda kütle ve kuvvet gibi kuramsal terimler geçmektedir.

Dedüktif yasal açıklamanın çok önemli olan şöyle bir özelliği vardır. Eğer ilgili bilim adamı $\mathcal{O}$ sonuç önermesinin doğru olduğunu, çıkarımı yaptığı anda bilmezse (ama öncüllerin doğruluğunu bilirse), o bilim adamı $\mathcal{O}$ önermesinin dile getirdiği olgu veya olay hakkında bir *kestirim*'de bulunmuş olur. Bu kestirim yanlış çıkarsa, bilim adamının çıkarımın öncüllerini yeniden gözden geçirmesi gerekir. Eğer $g_1,...,g_n$ gözlem önermeleri güvenilir ise, $y_1,...,y_n$ yasal önermelerinden en az birinin çürütülmüş olması gerekir. Öte yandan kestirim doğru ise, kestirimde kullanılan yasal önermeler varsayımlı dedüktif yöntem gereği daha da pekiştirilmiş olur. Böylece bir yandan bilimsel açıklama işlemi öbür yandan da kestirim ve varsayımlı dedüktif yöntem gereği pekiştirme ve çürütme işlemleri arasında bir *yapısal özdeşlik* bulunduğu ortaya çıkar. Eğer ilgili bilim adamı çıkarımı yaparken $\mathcal{O}$ sonuç önermesinin doğru olduğunu bilirse çıkarım bir bilimsel açıklama niteliğinde olur. Buna karşılık bilim adamı çıkarımı yaparken henüz $\mathcal{O}$'nun doğru olup olmadığını bilmezse aynı çıkarım bir açıklamaya değil bir kestirime yol açar. Kestirim ise varsayımlı dedüktif yöntem gereği pekiştirme ya da çürütme ile sonuçlanır.

Buraya kadar incelediğimiz kavramlara dayanarak bilimsel süreci toplu olarak ele alıp çözümlemek durumuna geldik.

Bilim adamları gözlem ve deneyden esinlenerek eksik tümevarım yöntemiyle bazı önermeleri varsayım olarak ortaya koyarlar. Bu işleme *bilimsel buluş* denir. Bulunan varsayımlar denetlenmeli yani pekiştirilmeli veya çürütülmelidir. En yaygın bilimsel denetleme yöntemi varsayımlı dedüktif yöntemdir. Bu yönteme göre eldeki gözlem önermeleri ve varsayımlardan geçerli çıkarımlara dayanarak kestirimler yapılır. Kestirimler gözlem ve deneyle doğru çıkarsa kestirimleri yapmak için kullanılan varsayımlar pekiştirilmiş olur, kestirimler yanlış çıkarsa varsayımlar çürütülmüş olur. Pekiştirilmiş varsayımlar bilimsel yasa sayılır. Birbiriyle ilişkili yasalar ise bir bilimsel kuramın aksiyomları sayılır. Yasalar ve kuramlar ise bir yandan yeni kestirimler yapmak için öbür yandan bilimsel açıklamalar yapmak için kullanılır. Kestirimler ise kullanılan yasa ve kuramların daha da pekiştirilmesine ya da tam tersine çürütülmesine yol açar. Çürütülmüş varsayımların ve kuramların yerine yeni varsayımlar ve kuramlar ortaya konur. Pekiştirilen varsayımlar ve kuramlar ise açıklamalar ve denetlemeler için kullanılır. Bilimsel süreç böylece süregider.

ALIŞTIRMALAR

Dedüktif yasal açıklamaya üç farklı örnek gösteriniz.

18.5.3 İstatiksel Açıklama ve Tümevarımlı Açıklama

Buraya kadar göz önünde tuttuğumuz tümel bilimsel yasaların yanısıra "istatistiksel yasalar" denilen değişik türden yasalar da bilimde kullanılmaktadır.

Bir *istatistik yasa* veya varsayım

(1) F'lerin belli bir oranı G'dir

biçiminde bir önerme ile dile getirilir. Örneğin

(2) Yatmadan biraz önce dört fincan kahve içenlerin %90'ı uykusuzluk çeker.

bir istatiksel varsayımdır.

Dedüktif yasal açıklamada en az bir tümel yasa yerine bir istatistiksel yasa konulursa *dedüktif istatistiksel açıklama* denilen bir açıklama türü elde edilir.

Ayrıca geçerli bir çıkarım yerine tümevarımlı bir çıkarımla yetinilirse *tümevarımlı istatistiksel* açıklama denilen bir açıklama türü elde edilir. Örneğin

D: Ali yatmadan önce dört fincan kahve içmiştir.

Y: Yatmadan önce dört fincan kahve içenlerin %90'ı uykusuzluk çeker.

$\mathcal{C}$: Ali uykusuzluk çeker.

(3) D, Y, o halde %90 olasılıkla $\mathcal{C}$ çıkarımını göz önüne alalım. Dikkat edilirse

(4) D, Y $\therefore$ $\mathcal{C}$

çıkarımı geçersizdir. Nitekim D ile Y öncülleri $\mathcal{C}$ sonucunu içermez. Ama (4) yüksek olasılığı (0.90) olan tümevarımlı bir çıkarımdır. (4) çıkarımı istatistiksel tümevarımlı bir çıkarım örneğidir.

İkinci örnek olarak aşağıdaki durumu göz önüne alalım.

(5) D: Ali'de streptokok iltihabı vardı.

Y: Streptokok iltihabı hallerinin pek çoğu penisilinle giderilir.

$\mathcal{C}$: Ali'nin streptokok iltihabı penisilinle giderilebilir.

Bu durumda

(6) D, Y o halde büyük olasılık $\mathcal{C}$

tümevarımlı çıkarımı istatistiksel tümevarımlı bir açıklamadır. Açıklayan önerme dizisi, D, Y olup açıklanan önerme $\mathcal{C}$'dir.

ALIŞTIRMALAR

İstatistiksel tümevarımlı açıklamaya üç farklı örnek veriniz.

18.5.4 İstatistiksel İlgiye Dayanan Nedensel Açıklama

Örnek olarak, B öbeği belli bir bölgede yaşayan insanlar öbeği, E öbeği B bölgesinde kalp hastası olan insanların öbeği, N_1 sigara içenler öbeği; N_2 kandaki kolestrol düzeyi 300'den yüksek olan insanlar öbeği ve N_3 aşırı şişman olan insanların öbeği olsun. N_1, N_2, N_3 öbeklerinin tanımlayıcı özellik-

leri E öbeğinin tanımlayıcı özelliğinin mümkün nedenleri sayılabilir. Böylece N_1, N_2, N_3 ile E arasında neden-etki bağıntısı olabildiğini söyleyebiliriz. İmdi

(1) $Ol(E/B)$

olasılığına E öbeğinin *önsel olasılığı,*

(2) 1. $Ol(E/B \cap N_1, \cap N_2 \cap N_3)$

2. $Ol(E/B \cap N_1, \cap N_2 \cap N_3')$

⋮

8. $Ol(E/B \cap N_1' \cap N_2' \cap N_3')$

olasılıklarına da E öbeğinin *sonsal olasılıkları* denir. N_1' sigara içmeyenler öbeği, N_2' kandaki kolesterol düzeyi 300'den yüksek olmayan insanların öbeği ve N_3' aşırı şişman olmayan insanların öbeğidir.

İmdi

(3) $Ali \in B \cap N_1 \cap N_2 \cap N_3$

doğru olsun. O zaman (1), (2), (3) önermeleri bir arada

(4) $Ali \in E$

önermesinin dile getirdiği olgunun bir açıklaması sayılabilir. Böyle bir açıklamayı sağlayan, sonsal olasılıkların en az birinin önsel olasılıktan büyük olmasıdır. Örneğin

(5) $Ol(E/B \cap N_1 \cap N_2 \cap N_3) > Ol(E/B)$

doğru olabilir. Bu durumda $N_1 \cap N_2 \cap N_3$'ün E ile *istatistiksel olarak ilgili* olduğu söylenir. $N_1 \cap N_2 \cap N_3$'ün tanımlayıcı özelliği E'nin tanımlayıcı özelliğinin nedeni sayılabilir. (1), (2), (3) önermeleri açıklayan önermeler dizisini, (4) önermesi de açıklanan önermeyi oluşturur. Böyle bir açıklamaya *istatistiksel ilgi biçiminde nedensel açıklama* denir.

ALIŞTIRMALAR

İstatistiksel ilgi biçiminde nedensel açıklamaya üç farklı örnek gösteriniz.

19. SEMBOLLEŞTİRME

19.1 ÖNERMELER MANTIĞI DİLİNDE SEMBOLLEŞTİRME

19.1.1 Sembolleştirme ve Standart Biçime Dönüştürme

Günlük dile ait bir (bildirisel) tümceyi *sembolleştirme tümcede geçen bazı sözlerin özellikle de özel* değişmezlerin yerine birer temsilci harf koyma işlemidir. Geriye mantık değişmezleri kalır. Bunlar da birer işaret ile gösterilir. Buna göre sembolleştirme işlemi için tümcelerde geçen bazı belli sözler özellikle de özel değişmezler ile mantık değişmezlerin açık olarak belli olması ve aralarındaki ayrımın kesin olarak yapılabilmesi gerekir. Oysa günlük dildeki tümcelerde geçen özel değişmezler ile mantık değişmezleri hiç de açık olarak belli değildir. Üstelik özel değişmezler ile mantık değişmezleri arasındaki sınır kesin olarak çizilmiş değildir.

Günlük dilde aynı işlevde olan, söz gelişi aynı önerme eklemi anlamında olan birçok sözcük ve söz vardır. Bu bakımdan günlük dil çok zengindir. Mantığın sembolik dilleri ise günlük dil ile karşılaştırılırsa çok daha yalın ve fakirdir. Günlük dilin zenginliği ve karmaşıklığından dolayı çıkarımları denetlemek son derece zor hatta bazen imkânsızdır. Sembolleştirme denetleme için zorunludur.

Sembolleştirme, günlük dilin zenginliği ve karmaşıklığından dolayı bazen oldukça zordur. Sembolleştirme için verilen tümcede günlük dil sözcükleri arasında hangilerinin özel değişmez, hangilerinin mantık değişmezi olduğunu ve hangilerinin hangi işlevi gördüğünü saptamak gerekir. Ancak verilen bir tümcede geçen her sözcük veya sözün mantıksal işlevinin tek bir biçimde açık olarak belli olması için tümcenin biçimi değiştirilip yeni bir biçime dönüştürülmesi gerekebilir. Dönüştürme sonucunda elde edilen yeni biçimdeki tümcenin standart biçimde olduğunu söyleyeceğiz. Bir tümceyi standart biçime dönüştürme işlemine *mantıksal çözümleme* diyoruz. Nitekim standart biçimde olan bir tümcenin mantıksal yapısı gün ışığına çıkmıştır. Bu tümceden geçen her sözcük veya sözün mantıksal işlevi apaçık bellidir. Standart biçimde olan bir tümcenin dile getirdiği önerme, yani tümcenin anlamı saydamdır, yani bir bakışta görülmektedir. Oysa günlük dil tümcelerinin

anlamı çok kez örtüktür. Örtük olan anlamı gün ışığına çıkarmak, yani saydam duruma getirmek için mantıksal çözümleme gerekir.

Bazı tümcelerin birden çok sayıda farklı standart biçimi vardır.

Mantıksal çözümleme sonucunda standart biçime dönüştürülmüş bir tümceyi sembolleştirmek çok kolaydır. Nitekim standart biçimdeki tümcede geçen her sözcük veya sözün mantıksal işlevi açık olarak belli olduğundan, her özel değişmezin yerine işlevine uygun temsilci harf ve her mantık değişmezinin yerine karşılığı olan işaret konur. Dikkat edilirse sembolleştirmenin gerektirdiği yerine koyma işlemini standart biçime dönüştürülmemiş bir tümceye uygulamak mümkün değildir. Nitekim böyle bir tümcede geçen sözcük veya sözlerin mantıksal işlevi açık olarak belli değildir. Dolayısıyla hangi sözcük veya sözün yerine hangi türden temsilci harfin veya işaretin konulacağı tam olarak bilinemez.

Örnek olarak

(1) Ali koşmayacak

tümcesini mantıksal çözümleme ile standart biçime dönüştürelim. Bu tümcenin bir değilleme olduğunu anlıyoruz. Değilleme eklemi "ma" iç eki ile dile getirilmiştir. Değilleme ekleminin etkilediği ana bileşen aslında

(2) Ali koşacak

dır. Oysa (2) tümcesi (1) tümcesinde geçmiyor. Standart biçimde ise gerek değilleme ekleminin karşılığı, gerek (2) kümesi gün ışığına çıkmalıdır. İşte bu nedenle (1)'in standart biçimi

(3) Ali koşacak değil

biçimindedir. İkinci örnek olarak

(4) Ali Fransaya veya Japonyaya gidecek

tümcesini ele alalım. Bunun bir tikel-evetleme olduğunu anlıyoruz. Buna göre (4)'ün standart biçimi

(5) Ali Fransaya gidecek veya Ali Japonyaya gidecek

biçimindedir.

19.1.2 Önermeler Mantığı Dilinde Sembolleştirme

19.1.2.1 Değillemenin Sembolleştirilmesi

Türkçede değilleme eklemi gerek "değil" sözcüğüyle gerekse başka biçimlerde dile getirilir. Değilleme eklemi anlamında "değil"den başka başlıca "me" ve benzeri eklemler ile "yok", "öyle dursun" "olduğu doğru değil" "olduğu varit değil", "olduğu yanlış" sözleri aşağıdaki örneklerde olduğu gibi kullanılmaktadır.

(1) Ali evli *değil* (dir).

(2) Ali gel*me*yecek.

(3) Evde ekmek *yok.*

(4) Aşırı çalışmak *şöyle dursun,* işini hiç yapmıyor.

(5) Bütün insanların filozof olduğu doğru değildir.

(6) Bütün insanların filozof olduğu varit değildir.

(7) Bütün insanların filozof olduğu yanlıştır.

(1)-(7) tümceleri önermeler mantığı dilinde "~p" biçiminde sembolleştirilir. Bunlardan (1) ile (5)-(7) standart biçimde olup öbürleri standart biçimde değildir.

(8) Ali ne Adıyaman'a ne Balıkesir'e gidecek

tümcesinin standart biçimi

(8') Ali Adıyaman'a gidecek değil ve Ali Balıkesir'e gidecek değil

dir. (8') ise "~p $\wedge$ ~q" biçiminde sembolleştirilir. Bazen değilleme eklemi bu anlama gelen hiçbir sözcük veya eklemi kullanmadan da dile getirilebilir. Örneğin

(9) Ali'nin sağlık durumu düzeleceğine her gün daha kötüye gidiyor.

tümcesi bir değillemedir. Nitekim bu tümcenin standart biçimi

(10) Ali'nin sağlık durumu düzeliyor değil ve Ali'nin sağlık durumu her gün daha kötüye gidiyor

biçimindedir. (10)'un sembolik karşılığı

(11) (Ali'nin sağlık durumu düzeliyor: p, Ali'nin sağlık durumu her gün daha kötüye gidiyor: q)

sembolleştirme biçimi gereği

(12) $\sim p \wedge q$

biçimindedir.

Sonuç olarak değillemenin standart biçiminin genel olarak "değil" sözcüğü olmayıp "olduğu doğru değil" veya "olduğu varit değil" sözüyle dile getirildiğini söyleyebiliriz.

Karmaşık tümcelerin standart biçiminde değilleme eklemini "olduğu doğru değildir" sözüyle değil, değillenecek tümceyi parantez içine alıp önüne "değil" sözcüğünü koyarak göstereceğiz. Örneğin (5) tümcesini

(13) değil (bütün insanlar filozoftur)

biçiminde dile getireceğiz.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki tümcelerin değillemesini standart biçime dönüştürünüz.

1. Ali evlendi.
2. Bazı insanlar filozoftur.
3. Hiçbir insan filozof değildir.

19.1.2.2 Tümel-Evetlemenin Sembolleştirilmesi

Türkçede tümel-evetleme eklemi aşağıdaki örneklerde olduğu gibi başlıca "ve", "de...de", "hem...hem", "ama", "rağmen" (veya "karşın"), "ise de", "birlikte", "ki", "–ip" sözleriyle dile getirilir.

(1) Ali Adıyaman'a *ve* Balıkesir'e gidecek.

(2) Ali *hem* Adıyaman'a *hem* Balıkesir'e gidecek.

(3) Ali Adıyaman'a da Balıkesir'e de gidecek.

(4) Ali Adapazar'a gidecek *ama* Balıkesir'e gitmeyecek.

(5) Ali çirkin olmasına *rağmen* ilgi çekicidir.

(6) Hava biraz ısınmış olmakla *birlikte* iyi giyinmeli.

(7) Ali çok uğraştı *ise de* başaramadı.

(8) Daha yeni dönmüştü *ki* komşusu ziyaretine geldi.

(9) Ali eve *gelip* hemen yattı.

(10) Ali eve geldi, sonra yattı.

(1)-(10) kümeleri "p∧q" biçiminde sembolleştirilebilir. Virgül, noktalı virgül ve nokta da çok kez tümel evetleme eklemi anlamında kullanılır.

Bazen *"olduğu halde"* sözü tümel-evetleme eklemi anlamında kullanılır. Örneğin

(11) Ali yeni evine taşınmış *olduğu halde* henüz yerleşemedi.

ve

(12) Ali yeni evine taşındığı halde henüz yerleşmedi.

(13) Ali yeni evine taşındı ve Ali henüz (yeni evine) yerleşmedi.

tümcesidir.

Bundan böyle sembolleştirme amacıyla önerme temsilcisi olarak temsil edilen bileşende geçen bir sözcüğün baş harfini büyük harf biçiminde kullanacağız. Bu amaçla söz konusu baş harfin altını çizeceğiz. Örneğin (1) tümcesinin birinci alt bileşeninde geçen Adıyaman sözcüğünün baş harfiyle Balıkesir sözcüğünün baş harfinin altını çiziyoruz. Buna göre "Ali A̲dıyaman'a gidecek" bileşenini "A"; "Ali B̲alıkesir'e gidecek" bileşenini "B" önerme temsilcileriyle temsil edeceğiz. (1) tümcesinin standart biçimi

(1') Ali Adıyaman'a gidecek ve Ali Balıkesir'e gidecek

tir. Buna göre (1')'nün ve dolayısıyla (1)'in sembolik karşılığı

(1") A∧B

dir.

ALIŞTIRMALAR

I. İçinde tümel-evetleme eklemi ve bazen de değilleme eklemi geçen aşağıdak tümceleri standart biçime dönüştürünüz.

1. Ali kızkardeşini azarladı, ama o ağlamadı.
2. Ali kızkardeşini yaramazlık yapmasına rağmen azarlamadı.
3. Ali'nin gürültü yapmasına rağmen kızkardeşini azarladığı doğru değildir.
4. Ali'nin koşmadığının yanlış olduğu varit değildir.

II. Yukardaki tümceleri standart biçimlerine uygun olarak önermeler mantığı dilinde sembolleştiriniz. Altı çizili harfler büyük harf olarak temsilci harf olarak kullanılacak.

19.1.2.3 Tikel-Evetlemenin Sembolleştirilmesi

Türkçede tikel-evetleme eklemi anlamında aşağıdaki örneklerde olduğu başlıca "veya", "yahut", "ya...ya da", "yoksa", "meğer ki" sözleri kullanılır.

(1) Ali Adıyaman'a *veya* Balıkesir'e gidecek.

(2) Ali Adıyaman'a *yahut* Balıkesir'e gidecek.

(3) Ali ya Adıyaman'a ya da Balıkesir'e gidecek.

veya kısaca

(3') Ali Adıyaman'a ya da Balıkesir'e gidecek.

(4) Ali Adıyaman'a yoksa Balıkesir'e gidecek.

(5) Ali Adıyaman'a gidecek meğer ki behçet Ankara'ya gelsin.

yalnız (1) tümcesinin standart biçimde olduğunu kabul ediyoruz.

(4)'ün bir tikel-evetleme olduğunu şöyle açıklıyoruz.

(6) p yoksa q

biçimindeki bir önerme

(7) p değilse q

yani

(8) $\sim p \rightarrow q$

anlamına gelir. Oysa (8) önermesi

(9) $p \vee q$

ile eşdeğerdir. O halde (6) ile (9) eşdeğerdir. Buna göre (4) tümcesinin standart biçimlerinden birinin (1) olduğunu görüyoruz. Ancak

(10) Ali Adıyaman'a gitmeyecekse Ali Balıkesir'e gidecek.

tümcesinin (4)'ün bir standart biçimi sayıldığını belirtmek gerekir.

Öte yandan (5) tümcesinin de bir tikel-evetleme olduğunu şöyle açıklıyoruz. (5) tümcesi

(11) p meğer ki q

biçimindedir. Oysa (11) önermesi

(12) p eğer q değilse

anlamına gelir. İlerde göreceğimiz gibi (12) önermesi

(13) q değil ise p

yani

(14) $\sim q \rightarrow p$

anlamına gelir. (14) önermesi

(14') $p \vee q$

ile eşdeğer olduğundan (5)'in standart biçimlerinden birinin (1) olduğunu söyleyebiliriz. Öbür standart biçimi

(15) Behçet Ankara'ya gelmezse Ali Adıyaman'a gidecek

tümcesidir.

"Daha olmazsa" sözü de aşağıdaki örnekte olduğu gibi "yoksa" anlamında dolayısıyla bir tikel-evetleme eklemi işlevinde kullanılır.

(16) Ali gelecek yıl ilkokula daha olmazsa ana okuluna gidecek.

"Sıkı tikel-evetleme" diye adlandıran ayrıklık eklemi türkçede "ya...ya" sözü ile dile getirilir. Örneğin

(17) Belediye başkanlığına *ya* Ahmet *ya* Behçet seçilecek

tümcesinin sembolik karşılığı

(18) (Belediye başkanlığına Ahmet seçilecek: A, Belediye başkanlığına Behçet seçilek: B)

sembolleştirme biçimi gereği "p∨q" değil,

(19) p ↮ q

ayrıklık önermesidir. Nitekim bir tek Belediye başkanı seçileceğine göre (17) tümcesinin her iki bileşeninin doğru olabileceği bir durum düşünülemez. Dolayısıyla (17) bir tikel-evetleme değil bir ayrıklık sayılmalıdır. (17) ayrıklığının standart biçimi

(17') ya Ahmet belediye başkanlığına seçilecek ya Behçet belediye başkanlığına seçilek

tümcesidir.

(20) Ali'nin evine döndüğü halde yatmadığı doğru değildir.

tümcesini standart biçime dönüştürelim. Ana eklem "doğru değildir" sözüyle dile getirilen değilleme eklemidir. Buna göre ilk adımda (20)'yi

(21) ~(Ali evine döndüğü halde yatmadı)

biçimine dönüştürürüz. (21)'in ana bileşeni bir tümel-evetlemedir. O halde (21)'i

(22) ~[(Ali evine döndü) ∧ (Ali yatmadı)]

biçimine, (22) tümcesini de

(23) ~[(Ali evine döndü) ∧ ~(Ali yattı)]

biçimine çevirirız. (23), (20)'nin standart biçimidir. Buna göre (20) tümcesinin

(24) (Ali evine döndü: E, Ali yattı: A)

sembolleştirme biçimi gereği sembolik karşılığı

(25) ~(E ∧ ~A)

dır.

İkinci bir örnek olarak

(26) Eve hemen dönmelisin; yoksa ya gecikip yemeksiz kalırsın ya da artıkları yersin

tümcesini standart biçimine dönüştüreceğiz. (26)'yı önce

(27) Eve hemen dönmelisin ∨ (ya gecikip yemeksiz kalırsın ya da artıkları yersin)

biçimine çevirir. (27) ise

(28) Eve hemen dönmelisin ∨ [(gecikip yemeksiz kalırsın) ∨ (artıkları yersin)]

biçimine, (28)'de

(29) Eve hemen dönmelisin ∨ [[(gecikirsin) ∧ (yemeksiz kalırsın)] ∨ (artıkları yersin)]

biçimine çevrilir. (29) tümcesi (26)'nın standart biçimidir. Buna göre (26)'nın sembolik karşılığı

(30) (Eve hemen dönmelisin: E, gecikirsin: G, yemeksiz kalırsın: K, artıkları yersin: A)

sembolleştirme biçimi gereği

(31) E ∨ [(G∧K) ∨ A]

dır.

Üçüncü olarak

(32) Eve hemen dönmelisin; yoksa gecikip ya yemeksiz kalırsın ya da artıkları yersin.

tümcesini standart biçime dönüştürelim:

(33) Eve hemen dönmelisin veya [gecikirsin ve [(yemeksiz kalırsın veya artıkları yersin)]]

Dikkat edilirse "ya...ya da" sözünde "ya" sözcüğünün ilk geçişi bir tikel-evetlemenin birinci bileşeninin başlangıcını belirtir, "ya da" sözü de ikinci bileşenin başlangıcını belirtir. Buna göre "ya"nın birinci geçişi bir ön parantez işlevindedir. (32) tümcesinde ön parantez işlevindeki "ya" sözcüğü

(34) yemeksiz kalırsın ya da artıkları yersin

bileşeninin önünde olduğundan bu bileşen bütünüyle bir çift parantez içine alınmalıdır.

Öte yandan (26) tümcesinde ön parantez işlevindeki "ya" sözcüğü

(35) gecikip yemeksiz kalırsın ya da artıkları yersin

bileşiminin önünde geçtiğinden dolayı bu bileşeni bir çift parantez içine aldık. Böylece (26) tümcesini (27) biçimine dönüştürdük. Genel olarak bir tikel evetlemenin başlangıcı kendiliğinden belli olduğu durumlarda "ya...ya da" yerine tek başına "ya da" kullanılır. Bu durumda "veya" da kullanılabilir.

ALIŞTIRMALAR

I. İçinde tikel-evetleme veya ayrıklık eklemi ile bazen de değilleme ve tümel-evetleme eklemleri geçen aşağıdaki tümceleri standart biçime dönüştürünüz.

1. Ali arabayı bizden habersiz almış, yoksa biri arabayı çalmış olacak ve biz de durumu sigorta acentesine bildirmeliyiz.
2. Hava kentimizde daha da kirlenecek meğer ki evlerde ve fabrikalarda doğal gaz kullanılsın.
3. Ya dağa tırmanıp piknik yapacaksın ya deniz kıyısına gidip balık tutacaksın.

II. Yukardaki tümceleri (altı çizili harfleri-büyük harf biçiminde-önerme temsilcisi sayarak) standart biçimlerine uygun olarak sembolleştiriniz.

19.1.2.4 Koşullunun Sembolleştirilmesi

Günlük dilde koşullular doğruluk fonksiyonu durumunda olanlar ile öyle olmayanlara ayrılır. Biz burada yalnız doğruluk fonksiyon durumunda olan koşulluları inceliyoruz. "Koşullu" terimini bundan böyle de yalnız doğruluk fonksiyonu durumunda olanlar için kullanıyoruz.

İmdi Türkçede koşulluları

(1) Eğer p ise q

veya kısaca

(1′) p ise q

biçiminde olan koşullular

(2) p eğer q ise

biçiminde olan koşullular olmak üzere ikiye ayırıyoruz. Birinci türden koşullular

(1″) $p \rightarrow q$

biçiminde sembolleştirilir. (1″) önermesinde, p önermesi q önermesinin *yeterli koşul*'u, q önermesi de p önermesinin *gerekli koşul*'udur.

İkinci türden koşullular

(2′) Eğer q ise p

anlamına gelirler. Dolayısıyla ikinci türden koşullular

(3) $q \rightarrow p$

biçiminde sembolleştirilir. Buna göre birinci tür bir koşullunun standart biçiminde verilen koşullunun ön bileşeni ile ard bileşeninin yerleri korunur, ikinci türden bir koşullunun standart biçiminde verilen koşullunun ön bileşeni ile ard bileşeninin yerleri değiş tokuş edilir. Örneğin

(4) Yangın çıkarsa itfaiye gelir

birinci türden bir koşulludur. Bu koşullu standart biçimdedir. Öte yandan

(5) İtfaiye gelir eğer yangın çıkarsa

ikinci türden bir koşulludur. Bu koşullu (5) ile eşdeğerdir. (5) koşullusunun standart biçimi de (4) tümcesidir.

Birinci türden koşullularda "eğer...ise" veya "ise" sözleri yerine başlıca aşağıdaki örneklerde olduğu gibi "takdirde", "halinde" (veya "durumunda"), "yeter ki", "olduğunda" "yol açar", "gerektirir", "yeterli koşul" sözleri kullanılır.

(i) Ali çalıştığı *takdirde* sınıfını geçer.

(ii) Yangın çıkması *halinde* itfaiye gelir.

(iii) *Yeter ki* başarılı olasın, seni ödüllendireceğim.

(iv) Başarılı *olduğunda* seni öldüllendireceğim.

(v) Yağmur yağması yolun ıslanmasını *gerektirir.*

(vi) Yağmur yağması yolun ıslanmasının *yeterli koşul*'udur.

Bazı durumlarda birinci türden koşullular "ancak" veya "yalnız" sözcüğü ile dile getirilir. Örneğin

(vii) Bu gaz hidrojendir *ancak* atom ağırlığı 1 ise

ile

(viii) Bu gaz hidrojendir *yalnız* atom ağırlığı 1 ise

(6) Bu gaz hidrojen ise bu gazın atom ağırlığı 1'dir.

biçimindedir.

Birinci türden koşullular "gerekli koşul" veya "yeterli koşul" sözleriyle de dile getirilebilir. Örneğin

(7) Bu gazın hidrojen olmasının *gerekli koşul*'u atom ağırlığının 1 olmasıdır.

ile

(8) Bu gazın hidrojen olması, atom ağırlığının 1 olmasının yeterli koşuludur.

tümcelerinin standart biçimi (6)'dır.

(2) biçimindeki ikinci türden koşullu tümcelerin özelliği "eğer" sözcüğünün tümcenin ard bileşeninin önüne gelmesidir. Oysa standart biçimde "eğer" sözcüğü ön bileşenin önüne gelir. Dolayısıyla ikinci türden koşullu standart biçime dönüştürülürken bileşenleri değiş tokuş edilip ard bileşeni ön bileşen durumuna getirilir. "Eğer" sözcüğü aslında standart biçimde ön bileşen olması gereken bileşenin açık olarak belli olmaması durumlarında kullanılmalıdır. Böyle bir durumun en aşırı örneği ikinci türden koşullulardır. "Eğer" sözcüğü karmaşık tümcelerde koşullu biçiminde olan bileşenlerin başlangıcını gösterip bir ön parantez durumundadır. Örneğin

(9) Ali Balıkesir'e gittiğinde eğer Behçet'i görürse kitabı ona verecek.

tümcesinin standart biçimi

(10) Ali Balıkesir'e gidecek → (Ali Behçet'i görecek → Ali kitabı Behçet'e verecek.)

biçimindedir. Buna karşılık

(11) Ali Balıkesir'e gittiğinde Behçet'i görürse kitabı ona verecek.

tümcesinin standart biçimi tam olarak belli değildir; gene (10) olabildiği gibi

(12) (Ali Balıkesir'e gidecek → Ali Behçet'i görecek) → Ali kitabı Behçet'e verecek.

biçiminde de olabilir. Böylece (11)'in çok anlamlı ama (9)'un tek anlamlı olduğunu görüyoruz. Genellikle bir tümcede geçen bir koşullunun ön bileşeninin yeri açık olarak bilinemezse "eğer" sözcüğü kullanılmalı, ama bu açık olarak bilinirse, "eğer" sözcüğünün kullanılmasına gerek yoktur. Böylece fazla karmaşık olmayan birinci türden koşullularda "eğer" sözcüğü kullanılmaz.

"Eğer" sözcüğünün işlevini "yeter ki" sözü de görür. Nitekim

(13) yeter ki p, q

ile

(13') q, yeter ki p

eşdeğer olup her ikisi de "p ise q" anlamına gelir.

Öte yandan ikinci türden koşullular çok kez ön bileşenin ard bileşeninin gerekli koşulu olduğunu dile getirir. Nitekim bu koşulluları (2), yani "p eğer q ise" biçiminde dile getirebildiğimiz gibi

(14) Ancak p ise q

biçiminde de dile getirebiliriz.

Bazen (14) yerine aynı anlama gelen

(14') q için p gerek

biçimindeki bir tümce de kullanılır. (2), (14) ve (14') tümcelerinden her biri

(15) p, q'nun gerekli koşuludur

anlamına gelir. Nitekim "ancak" sözcüğü bir koşullunun standart biçimindeki hep ard bileşeninin önünde bulunur. Dolayısıyla "ancak" sözcüğü bir koşullunun ard bileşeninin başlangıcını işaret eder. Örneğin

(16) Bu gazın atom ağırlığı 1'dir eğer bu gaz hidrojen ise

ile

(16') Bu gazın atom ağırlığı ancak 1 ise bu gaz hidrojendir

tümceleri ortak standart biçimi (6) olan ikinci türden koşullulardır. Dikkat edilirse (16') tümcesi

(16'')Ancak bu gazın atom ağırlığı 1 ise bu gaz hidrojendir

anlamına gelir.

İkinci türden koşulluları bileşenlerinin yerini değiş tokuş ederek "p $\rightarrow$ q" biçiminde sembolleştirebildiğimiz gibi bileşenlerinin yerlerini koruyarak "q $\leftarrow$ p" biçiminde de sembolleştirebiliriz.

Sonuç olarak birinci türden koşullularda ön bileşenin yeterli koşul, ard bileşenin de gerekli koşul işlevinde olduğunu; ikinci türden koşullularda ise ön bileşenin gerekli koşul, ard bileşenin de yeterli koşul işlevinde olduğunu söyleyebiliriz.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki birinci veya ikinci türden koşullular kapsayan tümceleri standart biçime dönüştürünüz.

1. Akşam kar yağacak, yeter ki soğuk hava devam etsin.
2. Mum güneşe bırakılırsa erir ve etrafa yayılır.
3. Hastalık ancak zamanında önlem alınırsa çabuk geçer.
4. Yarın kar yağıp ekin filizlenmişse ürün zarar görecek.

II. Yukardaki koşulluları (altı çizilen harfleri önerme temsilcisi sayarak) standart biçimlerine uygun olarak sembolleştiriniz.

19.1.2.5 Karşılıklı-Koşullunun Sembolleştirilmesi

Günlük dilde karşılıklı-koşullular

(1) p ancak ve ancak q ise

(2) p ancak ve eğer q ise

(3) p, q'nun gerekli ve yeterli koşuludur

(4) p ise q ve q ise p .

(5) p ancak q ise ve p eğer q ise

(6) p, q'nun yeterli koşuludur, ve q, p'nin yeterli koşuludur

(7) p'nin tek koşulu q'dur

gibi değişik biçimlerde dile getirilebilir. (1) biçimini karşılıklı-koşullunun standart biçimi sayıyoruz.

Örneğin

(8) Turnusol kâğıdı bir sıvıya batırılınca kırmızı olur ancak ve ancak bu sıvı asit ise

standart biçimde bir karşılıklı-koşulludur.

Karmaşık bir örnek olarak

(9) Eğer Ali bekârdır ancak ve ancak evli değilse, o zaman ancak bekâr değilse eşi vardır.

tümcesinin

(10) (Ali bekârdır: B, Ali evlidir: E, Ali'nin eşi vardır: V)

sembolleştirme biçimi gereği sembolik karşılığını bulalım:

(11) $(B \leftrightarrow \sim E) \rightarrow (E \rightarrow \sim B)$.

Dikkat edilirse "o zaman" sözü karmaşık durumlarda bir koşullunun ard bileşeninin başlangıcını işaret eder. (9) tümcesinde "o zaman" sözcüğü "E→~B" biçimindeki ard koşulun başlangıcını işaret ediyor.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki tümceleri (altı çizilen harfleri önerme temsilcisi sayarak) sembolleştiriniz.

1. Ali ancak ve ancak çok çalışarak sınıfını geçebilir.
2. Hava kirlenmesinden kurtulmanın tek koşulu dumansız yakıt kullanmaktır.
3. Eğer Ali'nin ancak evli değilse eşi varsa ve o ancak ve ancak evli olmadığı takdirde bekâr ise, o zaman bekâr değildir eğer eşi varsa.

19.2 NİCELEME MANTIĞI DİLİNDE SEMBOLLEŞTİRME

19.2.1 Tekil Önermeler

Bir tekil önermeyi dile getiren bir tümceyi niceleme mantığında sembolleştirmek için önce verilen tümceyi önermeler mantığı gereği standart biçime dönüştürünüz. Standart biçim, önerme eklemleriyle birleştirilen atomsal önermeler dile getiren tümcelerden oluşur. Bu tümceler birer n-li yüklem ile n tane addan oluşur. Böyle bir tümceyi niceleme mantığında sembolleştirmek için n-li yüklem yerine yüklemi dile getiren sözün başlangıç harfi - *büyük* harf olarak - yüklem temsilcisi sayılır. Bir yüklem temsilcisi aynı yüklemin her geçişinin yerine konulur. Yüklemin uygulandığı her ad yerine, adın baş-

langıç harfi - küçük harf olarak - ad temsilcisi niteliğiyle konulur. Sembolleştirilen sözcükte geçen farklı yüklemlerin veya farklı adların baş harfleri aynı ise ad temsilcisi olarak sonraki harfler seçilir.

Örneğin

(1) Sokrates insandır

tümcesi

(2) (Sokrates: s, İnsandır: I)

(2') s, I'dir.

biçimine dönüştürülür. (2') ise

(3) Is

veya

(4) I(s)

biçimine çevrilir. (4) önermesi (1) tümcesinin sembolik karşılığıdır.

Bileşik bir önermeyi dile getiren bir tümceye örnek olarak

(5) Eve hemen dönmelisin; yoksa gecikip ya yemeksiz kalırsın ya da artıkları yersin

tümcesini niceleme mantığında sembolleştirelim. Bu amaçla önce (5) tümcesini standart biçime dönüştürüyoruz.

(6) Sen eve hemen dönmelisin veya [sen gecikirsin ve [sen yemeksiz kalırsın veya sen artıkları yersin]].

(6) tümcesi

(7) (Sen: s, eve hemen dönmelisin: E, gecikirsin: G, yemeksiz kalırsın: K, artıkları yersin: A)

sembolleştirme biçimi gereği

(8) $Es \vee [Gs \wedge (Ks \vee As)]$

biçiminde sembolleştirilir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki tümceleri niceleme mantığında sembolleştiriniz.

1. Ali Behçet'in arkadaşıdır.
2. Belediye başkanlığına ya Ali ya Behçet seçilecek.
3. Ali Bekâr ise evli değildir.

19.2.2 Tümel Önermeler ve Eşdeğerleri

$\forall xFx$ biçimindeki tümel önerme, Türkçede

(1) Her şey F'dir.

(2) Her x için x F'dir.

(3) Herhangi bir x için x F'dir.

(4) Herhangi bir şey F'dir.

(5) Bütün x'ler F'dir.

(6) Herkes F'dir.

gibi değişik biçimlerde dile getirilebilir. (6) biçimi "x"in değer alanı yalnız insanlardan oluştuğu zaman kullanılır. (5) tümcesi

(6') Her insan F'dir.

anlamına gelir.

(6') tümcesi ise

(6") $\forall x$(x bir insandır $\rightarrow$ x F'dir.)

biçimindedir.

Klasik mantığın tümel olumlu önermeleri ile tümel olumsuz önermeleri sırasıyla

(7) $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$

ve

(8) $\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$

biçiminde sembolleştirilir.

(7) biçiminde sembolleştirilen tümce

(7') Her F, G'dir.

veya

(7") Bütün F'ler G'dir.

biçiminde dile getirilir. (8) biçiminde sembolleştirilen tümce ise

(8') Hiçbir F, G değildir.

biçiminde dile getirilir.

(9) $\forall x \sim Fx$

biçiminde sembolleştirilen tümce de

(9') Hiçbir şey F değildir.

biçiminde dile getirilir. (9) önermesi

(9") $\sim \exists xFx$

ile eşdeğerdir. (9") ise

(10) F olan şey yoktur.

biçimindeki tümce ile dile getirilir. Örneğin

(11) Yuvarlak kare olan bir şey yoktur

(10) biçiminde bir tümcedir. (10) tümcesi yerine

(12) Bazı şeylerin F olduğu doğru değildir

tümcesi kullanılır. Örneğin

(13) $\sim \exists x$(x canlıdır)

tümcesini

(14) Bazı şeylerin canlı olduğu doğru değildir

biçiminde dile getirebiliriz. Öte yandan

(15) $\sim\exists x\sim Fx$

biçimindeki bir tümceyi

(16) F olmayan şey yoktur

veya

(17) Bazı şeylerin F olmadığı doğru değildir

biçiminde dile getiririz. Örneğin

(18) $\sim\exists x\sim$(x canlıdır)

tümcesi

(19) Bazı şeylerin canlı olmadığı doğru değildir

anlamındadır.

"x" değişkeninin değer alanı yalnız insanlardan oluştuğu durumlarda (9) önermesi

(20) Kimse F değildir.

biçiminde dile getirilir. Örneğin

(21) Kimse akılsız değildir

tümcesi (20) biçimindedir. (21),

(22) $\sim\exists x$(x insandır $\wedge$ x akılsızdır)

anlamına gelir. (22) ise

(23) $\forall x$[x insandır $\rightarrow \sim$(x akılsızdır)]

ile eşdeğerdir.

Genel olarak

(24) $\forall xA(x)$

biçiminde sembolleştirilen tümcenin niceleme mantığında standart biçiminin

(25) Her x için A(x)

olduğunu kabul ediyoruz. Örneğin

(26) Bütün insanlar ölümlüdür

tümcesinin (niceleme mantığında) standart biçimi

(26') Her x için (x insan ise x ölümlüdür)

tümcesidir.

"Kimi" sözcüğü "kimi nesne" bağlamında insan olmayan nesnelere ilişkin bir tikel niceleyici olarak da kullanılır. Örneğin

(27) kimi nesne tatlıdır

tümcesi "bazı nesneler tatlıdır" anlamına gelir.

Standart biçime dönüştürülmüş tümcede özel değişmez olarak yüklemler ve bazen ad değişmezleri bulunur. Sembolleştirmenin yapılması için her yüklem yerine ayrı bir yüklem temsilcisi ve her ad için ayrı bir ad temsilcisinin konulması gerekir. Örneğin "İnsandır" yüklemini "İ" yüklem temsilcisi ve "ölümlüdür" yüklemini "Ö" yüklem temsilcisi ile temsil ederiz. Böylece (26') ve dolayısıyla (26) tümcesi

(28) Her x için (x İ'dir $\rightarrow$ x Ö'dür)

yani

(29) $\forall x(\text{İ}x \rightarrow \text{Ö}x)$

biçiminde sembolleştirilir.

"Bütün" sözcüğünün "*dağıtıcı*" ve "*toplayıcı*" olan iki ayrı kullanışı vardır. Örneğin

(30) Bu asansördeki bütün insanların ağırlığı 120 kiloyu geçiyor.

tümcesi çok anlamlıdır. Nitekim (30) tümcesi ya

(31) Bu asansördeki *her* insanın ağırlığı 120 kiloyu geçiyor.

anlamında, ya da

(32) Bu asansördeki *bütün* insanların ağırlığının *toplamı* 120 kiloyu geçiyor.

anlamında kullanılabilir.

"Bütün" tümel niceleyicisinin (31) anlamındaki kullanılışına *dağıtıcı* (distribütif) kullanış, (32) anlamındaki kullanılışına ise *toplayıcı* (kollektif) kullanılış denir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki tümceleri niceleme mantığında sembolleştiriniz.

1. Hiçbir insan taş değildir.
2. Boşlukta hiçbir şey yaşıyamaz.
3. Bütün omurgalı hayvanlar omurgalıdır.
4. Omurgalı olmayan memeli hayvan yoktur.

19.2.3 Tikel Önermeler ve Eşdeğerleri

(1) $\exists xFx$

biçimindeki tikel önerme Türkçede,

(2) Öyle bir x vardır ki x F dir.

(3) Bazı x'ler F dir.

(4) Bazı şeyler F dir.

(5) F olan bir şey vardır.

(6) Kimi F dir.

(6) biçimi "x"in değer alanı yalnız insanlardan oluştuğu zaman kullanılır. (6) tümcesi

(6') Bazı insanlar F dir.

anlamına gelir. (6') tümcesi ise

(6") $\exists x$ (x insandır $\wedge$ x F dir.)

biçimindedir.

Klasik mantığın tikel olumlu önermeleri ile tikel olumsuz önermeleri sırasıyla

(7) $\exists x(Fx \wedge Gx)$

ile

(8) $\exists x(Fx \wedge \sim Gx)$

biçiminde sembolleştirilir. (7) biçiminde sembolleştirilen tümce

(7') Bazı F'ler G'dir.

ve (8) ile sembolleştirilen tümce

(8') Bazı F'ler G değildir.

biçiminde dile getirilir.

(9) $\exists x \sim Fx$

biçiminde sembolleştirilen tümce ise

(10) F olmayan bir şey vardır

tümcesi veya

(11) F olmayan şeyler vardır

biçiminde dile getirilir. Örneğin

(12) Canlı olmayan şeyler vardır

(11) biçiminde bir tümcedir.

"x" değişkeninin değer alanı yalnız insanlardan oluştuğu durumlarda (9) önermesi,

(13) Kimi F değildir

biçiminde dile getirilir. Örneğin

(14) Kimi zengin değildir

tümcesi

(15) Bazı insanlar zengin değildir

anlamına gelir.

"Kimi" ile "herkes" ve "kimse"ye *kişi* niceleyicileri diyoruz. Bu niceleyiciler yalnız kişilere yani insanlara uygulanır. Bu nedenle kişi niceleyicileri geçen

tümceleri sembolleştirilirken örtük olarak "insan" yüklemi açık olarak dile getirilir. Böylece, daha önce belirttiğimiz gibi,

(16) Herkes F dir

tümcesi

(17) Her insan F dir

biçimine ve

(18) Kimse F değildir

tümcesi

(19) Hiçbir insan F değildir

biçimine dönüştürülür.

(20) Kimi F dir.

tümcesi de

(21) Bazı insanlar F dir.

biçimine dönüştürülür.

Genel olarak

(22) $\exists xA(x)$

biçiminde sembolleştirilen tümcenin niceleme mantığındaki biçiminin

(23) Öyle bir x vardır ki A(x)

olduğunu kabul ediyoruz. Örneğin

(24) Bazı insanlar filozoftur

tümcesinin (niceleme mantığında) standart biçimi

(25) Öyle bir x vardır ki (x insandır ve x filozoftur)

tümcesidir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki tümceleri niceleme mantığında sembolleştiriniz.

1. Ülkemizde iyi hekimler vardır.
2. Kimi öğrenci çok başarılıdır.
3. Bazı hayvanlar omurgalıdır.

19.2.4 Genel Önermeler

19.2.4.1 Birli Niceleme Mantığında Yuvalanmamış Önermelerin Sembolleştirilmesi

Birli niceleme mantığı, çoklu yüklem, yani birli olmayan yüklemi kapsamayan önermelere ilişkin olan niceleme mantığı dalıdır. Çoklu yüklem kapsamayan önermelere *birli önermeler* diyoruz. Şimdi genel birli önermeler dile getiren tümcelerin sembolleştirilmesini ele alıyoruz.

Birinci örnek olarak

(1) Hiçbir değerli elmas çizik veya donuk değildir

tümcesini önce standart biçime çevirelim sonra da (birli niceleme mantığında) sembolleştirelim. (1) tümcesinde "değerlidir", "elmastır", "çiziktir" ve "donuktur" birli yüklemleri geçiyor. İlk üçünü, baş harfleri değişik olduğundan başlangıç harfleriyle (büyük harf olarak) temsil edeceğiz. Ancak sonuncu yüklemi (başlangıç harfi birinci yüklemdekiyle aynı olduğundan) ikinci harfiyle (yani "O" harfiyle) temsil edeceğiz. İmdi (1) tümcesi sırasıyla

(2) Her x için (x değerli elmas ise x çizik veya donuk değildir)

(3) Her x için [(x değerlidir ve x elmastır) ise (x çizik veya donuk değildir)]

(4) Her x için [(x değerlidir ve x elmastır) ise değil (x çiziktir veya x donuktur)]

yoluyla (4) standart biçimine dönüştürülür. (4)'deki özel değişmezler yerine yüklem temsilcileri mantık değişmezleri yerine de işaretlerini koyarak (1)'in sembolik karşılığı olarak

(5) $\forall x[(Dx \wedge Ex) \rightarrow \sim(Çx \vee Ox)]$

önermesi elde edilir.

İkinci örnek olarak

(6) Her kedi veya köpek bir fareyi kovalar

tümcesini birli yüklemler mantığında standart biçimine dönüştürüp sembolleştirelim. (6) tümcesi önce

(7) Her x için, x kedi veya köpek ise x bir fareyi kovalar

tümcesine dönüşür. "Bir fareyi kovalar" sözü bir bütün olarak bir birli yüklemdir. Ancak

(8) x bir fareyi kovalar

(9) Öyle bir y vardır ki, y bir faredir ve y x'i kovalar

biçiminde çözümlenebilir. (9)'da "faredir" birli yüklemi ile "kovalar" ikili yüklemi geçiyor. Ancak biz (6)'yı birli yüklemler mantığında çözümlemek istediğimizden (8)'i çözümleyecek yerde "bir fareyi kovalar" sözünün bir bütün olarak bir birli yüklem olduğunu kabul edeceğiz. Buna göre (7) tümcesini

(7') Her x için [(x bir kedidir veya x bir köpektir) ise (x bir fareyi kovalar)]

biçimine dönüştüreceğiz. (7') tümcesi (6)'nın birli yüklemler mantığında standart biçimidir. "kedidir" birli yüklemini "K" ile, "köpektir" birli yüklemini "Ö" ile ve "bir fareyi kovalar" birli yüklemini "B" harfiyle temsil ettiğimizde, (6) şöyle sembolleştirilir:

(6') $\forall x[(Kx \vee Öx) \rightarrow Bx]$

Bazı tümcelerde "yalnız" veya "ancak" sözcüğü bir birli yüklemin önünde geçer. Genel olarak

(10) Yalnız F'ler G'dir

veya

(11) Ancak F'ler G'dir

biçimindeki tümceler

(12) Her G, F dir

ile eşdeğerdir. Örneğin

(13) Yalnız insanlar akıllı canlılardır.

veya

(14) Ancak insanlar akıllı canlıdır

tümceleri

(15) Bütün akıllı canlılar insandır

anlamına gelir.

Öte yandan

(16) Yalnız parlak elmaslar süs eşyasıdır

veya

(17) Ancak parlak elmaslar süs eşyasıdır

doğal olarak

(18) Bütün süs eşyaları parlak elmastır

anlamına değil,

(19) Süs eşyası olan bütün elmaslar parlaktır

anlamına gelir.

"Süs eşyasıdır" yüklemini "S" ile "elmas" yüklemini "E" ile ve "parlaktır" yüklemini "P" ile temsil edersek (16) ile (17)'yi

(20) $\forall x[(Sx \wedge Ex) \rightarrow Px]$

biçiminde sembolleştiririz.

"Her şey" ile "herhangi bir şey" sözlerinin ikisi de tümel niceleyici anlamında kullanılır. Ancak bunların bazı bağlamlarda çok farklı işlevleri vardır.

(21) Her şey F ise p

ile

(22) Herhangi bir şey F ise p

biçimindeki tümceleri ele alalım. (21) tümcesi

(23) $\forall xFx \rightarrow p$

biçiminde, (22) tümcesi ise

(24) $\forall x(Fx \rightarrow p)$

ile eşdeğerdir. (24) ise

(25) $\exists xFx \rightarrow p$

ile eşdeğerdir. O halde (21) tümcesi (23) anlamına gelirken, (22) tümcesi (25) anlamına gelir. Demek ki "herhangi bir şey" sözü (22) bağlamında tümel niceleyici değil tikel niceleyici işlevindedir. Örneğin (21) biçiminde olan

(26) Her şey sıvı ise bu sıvıdır

tümcesi

(27) $\forall x(x \text{ sıvıdır}) \rightarrow$ bu sıvıdır

anlamına, (22) biçiminde olan

(28) Herhangi bir şey sıvı ise bu sıvıdır

tümcesi

(29) $\exists x(x \text{ sıvıdır}) \rightarrow$ bu sıvıdır

anlamına gelir.

Genellikle "her şey" tümel niceleyicisinin etki alanı mümkün olduğu kadar kısa, "herhangi bir şey" tümel niceleyicisinin etki alanı ise mümkün olduğu kadar uzun olur. Böylece (21) tümcesinde ((23)'den anlaşıldığı gibi) "her şey"in etki alanı yalnız "Fx"dir. Bu da mümkün olan en kısa etki alanıdır. Öte yandan (22) tümcesinde ((24'den anlaşılacağı gibi) "herhangi bir şey"in etki alanı "$Fx \rightarrow p$" açık önermesinin tümüdür. Bu da mümkün olan en uzun etki alanıdır.

Şimdi "her" ile "herhangi bir" tümel niceleyicilerini tümel olumsuz özne-yüklem önermelerine uygulayalım. Böylece

(30) Her F, G değildir

ile

(31) Herhangi bir F, G değildir

tümcelerini elde ederiz. Bunların mantıksal yapısı çok farklıdır. "Her F"nin etki alanı mümkün olduğu kadar kısa, "herhangi bir F"nin etki alanı ise mümkün olduğu kadar uzundur. Buna göre (30) tümcesi

(32) $\sim\forall x(Fx \rightarrow Gx)$

anlamına, (31) ise

(33) $\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$

anlamına gelir. (32),

(34) $\exists x(Fx \wedge \sim Gx)$

ile eşdeğerdir. (34) önermesi

(35) G olmayan F'ler vardır.

biçiminde de dile getirilebilir. (35)'in (30) ile anlamdaş olduğu kolayca anlaşılır.

Örneğin

(36) Her insan filozof değildir

tümcesi

(37) Filozof olmayan insanlar vardır

anlamına gelip doğrudur. Oysa

(38) Herhangi bir insan filozof değildir

tümcesi

(39) Hiçbir insan filozof değildir

anlamına gelip yanlıştır.

Son olarak bileşik genel önerme biçiminde olan tümcelerin sembolleştirilmesine örnek verelim. Bu amaçla

(40) Eğer hayvanat bahçesindeki bütün kaplanlar yavru olup hayvanat bahçesinde bulunan bazı kaplanlar evcil ise, o zaman bazı yavru kaplanlar evcildir.

tümcesini birli niceleme mantığında sembolleştirelim.

(41) (Hayvanat bahçesindedir: H, kaplandır: K, Yavrudur: Y, Evcildir: E)

sembolleştirme biçimi gereği, (40)'ın sembolik karşılığı

(42) $[\forall x\,[(Hx \wedge Kx) \rightarrow Yx] \wedge \exists x\,(Hx \wedge Kx \wedge Ex)] \rightarrow \exists x\,(Yx \wedge Kx \wedge Ex)$.

19.2.4.2 Çoklu Niceleme Mantığında Yuvalanmış Önermelerin Sembolleştirilmesi

Bu bölümde çoklu yüklemler ve yuvalanmış niceleyiciler kapsayan tümceleri sembolleştiriyoruz. Birinci örnek olarak

(1) Herkes birini sever

tümcesini niceleme mantığında sembolleştirelim. "Herkes" sözcüğü "her kişi" veya "her insan" anlamına gelir. Bu nedenle (1)'i önce

(2) Her x için, x bir kişi ise x birini sever

biçimine dönüştürürüz. "Birini sever" bir bütün olarak bir birli yüklemdir. Ancak

(3) x birini sever

çözümlenerek

(4) Öyle bir y vardır ki, y bir kişidir ve x y'yi sever

biçimine çevrilir. Nitekim

(5) Biri F'dir

tümcesi

(6) Kimi F'dir

yani

(7) Öyle bir x vardır ki, x bir kişidir ve x F'dir

anlamına gelir. Buna göre (1) tümcesi

(8) $\forall x[x$ bir kişidir $\rightarrow \exists y$ (y bir kişidir $\wedge$ x y'yi sever)]

biçimine dönüşür. (8)'in sembolik karşılığı

(9) (Kişidir: K, Sever: S)

sembolleştirme biçimi gereği

(10) $\forall x[Kx \rightarrow \exists y(Ky \wedge Sxy)]$

önermesidir.

İkinci örnek olarak

(11) Kendini seven herkes birini sever

tümcesini sembolleştirelim. (11)'in (9) sembolleştirme biçimi gereği sembolik karşılığı

(12) $\forall x[(Kx \wedge Sxx) \rightarrow \exists y(Ky \wedge Sxy)]$

dir.

Şimdi de

(13) Ali her köpeği sever

(14) Ali herhangi bir köpeği sever

(15) Ali her köpeği sevmez

ve

(16) Ali herhangi bir köpeği sevmez

tümcelerini sembolleştirelim. Bu tümcelerde "Ali" adı, birli "köpektir" ve ikili "sever" yüklemleri geçiyor. Buna göre

(17) (Ali: a, köpektir: K, sever: S)

sembolleştirme biçimini saptıyoruz. (17) sembolleştirme biçimi gereği (13) ile (14)'ün ortak sembolik karşılığı

(18) $\forall x$ Sax

dir. Buna karşılık (14) ile (15)'in sembolik karşılığı farklıdır. (15)'in sembolik karşılığı ("her"in etki alanının mümkün olduğu kadar kısa olması nedeniyle)

(19) $\sim\forall x(Kx \rightarrow Sax)$

ve dolayısıyla

(20) $\exists x(Kx \wedge \sim Sax)$

dir. Buna karşılık (16)'nın sembolik karşılığı ("herhangi bir"in etki alanının mümkün olduğu kadar uzun olması nedeniyle)

(21) $\forall x(Kx \rightarrow \sim Sax)$

dir.

Dikkat edilirse (20),

(22) Ali'nin sevmediği bir köpek vardır

ın sembolik karşılığıdır. (22)'nin (15) ile anlamdaş olduğu kolaylıkla anlaşılır.

19.3 ÖZDEŞLİK MANTIĞINDA SEMBOLLEŞTİRME

19.3.1 İstisna Bildiren Tümceler

Genel duruma istisna oluşturan özel durumlar bildiren tümcelere *istisna bildiren tümceler* denir. Bu tümceler ancak özdeşlik mantığında sembolleştirilebilir. Örneğin

(1) Ali Behçet'ten başka herkesten uzun boyludur.

tümcesi istisna bildiren bir tümcedir. Bu tümcenin

(2) (Ali: a, Behçet: b, Kişidir: K, daha uzun boyludur: U)

sembolleştirme biçimi gereği özdeşlik mantığında sembolik karşılığı

(3) $\forall x[(Kx \wedge x \neq b) \rightarrow Uax]$

dir. Nitekim (1) tümcesi

(4) Behçet'ten farklı olan her kişiye göre Ali daha uzun boyludur

anlamına gelir. (4) ise (3) biçiminde sembolleştirilir.

İkinci örnek olarak

(5) Yalnız Ali Behice'yi sever

tümcesini ele alalım. (5) istisna bildiren bir tümcedir. Bu tümce

(6) (Ali: a, Behice: b, Kişidir: K, sever: S)

sembolleştirme biçimi gereği

(7) $Sab \wedge \forall x[(Kx \wedge x \neq a) \rightarrow \sim Sxb)]$

dir. Nitekim (5) tümcesi bir yandan Ali'nin Behice'yi sevdiğini, öbür yandan ise Ali'den farklı hiçbir kişinin Behice'yi sevmediğini dile getirir.

Üçüncü örnek olarak istisna bildiren bir tümcenin değillemesi olan

(8) Ali, Behice'yi seven tek kişi değildir

tümcesini özdeşlik mantığında sembolleştirelim. (8) tümcesi

(9) Ali, Behice'yi seven tek kişidir

tümcesinin değillemesidir. (9) ise

(10) Ali Behice'yi sever ve Ali'den başka kimse Behice'yi sevmez

anlamına gelir. (10) tümcesinin sembolik karşılığı

(11) (Ali: a, Behice: b, kişidir: K, sever: S)

sembolleştirme biçimi gereği

(12) $Sab \wedge \forall x(x \neq a \rightarrow \sim Sxb)$

dir. (8)'in (11) gereği sembolik karşılığı (12)'nin değillemesi, yani

(13) $\sim[Sab \wedge \forall x(x \neq a \rightarrow \sim Sxb)]$

veya eşdeğeri olan

(14) $\sim Sab \vee \exists x(x \neq a \wedge Sxb)$

dir. (14) önermesi

(15) Ali Behice'yi sevmez veya Ali'den başka biri Behice'yi sever

tümcesinin sembolik karşılığıdır. O halde (8) tümcesi (15) anlamına gelir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki istisna bildiren tümceleri özdeşlik mantığında sembolleştiriniz.

1. Ali'den başka herkes Behçet'i sever.
2. Ali'yi yalnız Behçet sevmez.
3. Ali kendinden başka herkesten nefret eden tek kişidir.

19.3.2 En Üstünlük Bildiren Tümceler

"En akıllı", "en uzun", "en genç" gibi nitelemeleri dile getiren tümcelere *en üstünlük bildiren tümce* denir. Örnek olarak en üstünlük bildiren

(1) Ali sınıfın en çalışkan öğrencisidir

tümcesini özdeşlik mantığında sembolleştirelim. (1)'in sembolik karşılığı

(2) (Ali: a, sınıfın öğrencisidir: S, daha çalışkandır: Ç)

sembolleştirme biçimi gereği

(3) $Sa \wedge \forall x[(Sx \wedge x \neq a) \rightarrow Çax]$

dır.

İkinci örnek olarak en üstünlük bildiren bir tümcenin değillemesi

(4) Ali sınıfın en çalışkan öğrencisi değildir

tümcesini özdeşlik mantığında sembolleştirelim. (4)'ün (2) sembolleştirme biçimi gereği sembolik karşılığı

(5) $\sim[Sa \wedge \forall x[(Sx \wedge x \neq a) \rightarrow Çax]]$

yani

(6) $\sim Sa \vee \exists x(Sx \wedge x \neq a \wedge \sim Çax)$

dir.

Üçüncü örnek olarak *nicelenmiş* en üstünlük bildiren bir tümce olan

(7) Ali sınıfın en çalışkan öğrencilerinden biridir

tümcesini sembolleştirelim. (7)'nin (2) sembolleştirme biçimi gereği sembolik karşılığı

(8) $Sa \wedge \forall x(Sx \rightarrow \sim Çxa)$

dır.

Son olarak

(9) Ali sınıfın en çalışkan öğrencilerinden biri değildir

tümcesini sembolleştirelim. (9)'un (2) sembolleştirme biçimi sembolik karşılığı

(10) $\sim[Sa \wedge \forall x(Sx \rightarrow \sim Çxa)]$

yani

(11) $\sim Sa \vee \exists x(Sx \wedge Çxa)$

olur.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki en üstünlük veya en nitelenmiş en üstünlük bildiren tümceleri özdeşlik mantığında sembolleştiriniz.

1. Ali bu kentin en zenginidir.
2. Ali bu kentin en zengini değildir.
3. Ali bu kentin en zenginlerinden biridir.
4. Ali bu kentin en zenginlerinden biri değildir.
5. Ali sınıfın en çalışkan öğrencisidir ama en uzun boylu olanı değildir.

19.3.3 Sayısal Tümceler

Sayısal tümceler aşağıda gösterilen biçimlerde olan sayısal özelliklere ilişkin tümcelerdir.

(i) En az n F vardır. $(n \geq 1)$

(ii) En çok n F vardır. $(n \geq 1)$

(iii) n'den az F vardır. $(n \geq 1)$

(iv) n'den çok F vardır. $(n \geq 1)$

(v) Tam n F vardır. $(n \geq 1)$

(vi) n F vardır. $(n \geq 1)$

Örneğin

(1) Sınıfta en az iki çalışkan öğrenci vardır.

(2) Ali'nin en çok 32 dişi vardır.

(3) Güneşin 10'dan az gezegeni vardır.

(4) Kentte birden çok otel vardır.

(5) Hem çift hem asal olan tam bir doğal sayı vardır.

(6) 12 ay vardır.

sırasıyla (i)-(vi) biçimlerinde olan tümcelerdir.

(i) biçimindeki tümceler n = 1 durumunda

(i-1) $\exists x Fx$

biçiminde ve $n \geq 2$ durumunda

(i-2) $\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n (Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge \ldots \wedge Fx_n \wedge (x_1 \neq x_2 \neq \ldots \neq x_n))$*

biçiminde özdeşlik mantığında sembolleştirilir.

(ii) biçimindeki tümceler

(ii') değil (en az n+1 F vardır)

anlamına gelir (ii').

(ii") $\sim\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_{n+1} (Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge \ldots \wedge Fx_{n+1} \wedge (x_1 \neq x_2 \neq \ldots \neq x_{n+1}))$

ile eşdeğerdir.

n = 1 durumunda

(7) En çok bir F vardır

tümcesi

---

* Bu ve benzeri sembolleştirmelerde "≠" ikili yüklemini bu yüklemin geçişlilik özelliği varmış gibi kullandık. Örnek olarak, $(x_1 \neq x_2 \neq x_3)$ gibi bir ifadeyle anlatmak istediğimiz $((x_1 \neq x_2) \wedge (x_2 \neq x_3) \wedge (x_1 \neq x_3))$ olduğudur.

(8) $\forall x_1 \forall x_2[(Fx_1 \wedge Fx_2) \rightarrow x_1 = x_2]$

anlamına, n = 2 durumunda da

(9) En çok iki F vardır

tümcesi

(10) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3[(Fx_1 \wedge Fx_2 \wedge Fx_3) \rightarrow (x_1 = x_2 \vee x_2 = x_3 \vee x_1 = x_3)]$

anlamına gelir.

(iii) biçimindeki tümceler,

(iii') En az n F yoktur.

veya

(iii") $\sim\exists x_1 ... \exists x_n(Fx_1 \wedge ... \wedge Fx_n \wedge (x_1 \neq x_2 \neq ... \neq x_n))$

anlamına gelir.

n = 1 durumunda (iii)

(11) En az bir F yoktur.

biçimini alır. (11) ise

(12) $\sim\exists xFx$

veya

(13) $\forall x\sim Fx$

anlamına gelir.

(iv) biçimindeki tümceler

(iv') En çok n F yoktur

anlamına ve dolayısıyla

(iv") En az n+1 F vardır

anlamına, yani

(iv"') $\exists x_1 ... \exists x_{n+1}(Fx_1 \wedge ... \wedge Fx_{n+1} \wedge (x_1 \neq x_2 \neq ... \neq x_{n+1}))$

anlamına gelir.

Görüldüğü gibi (ii), (iii) ve (iv) biçimindeki tümceler (i) biçimine dayanarak tanımlanabilir. Nitekim "en çok n F vardır", "en az n+1 F yoktur" anlamına, "n'den az F vardır", "en az n F yoktur" anlamına ve "n'den çok F vardır", "en az n+1 F vardır" anlamına gelir.

(v) biçimindeki tümceler ile aynı anlama gelen (vi) biçimindeki tümceler

(v') En az n F vardır ve en çok n F vardır

anlamına dolayısıyla

(v") $\exists x_1 \ldots \exists x_n(Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_n \wedge (x_1 \neq x_2 \neq \ldots \neq x_n)) \wedge \sim\exists x_1 \ldots \exists x_{n+1}(Fx_1 \wedge \ldots \wedge Fx_{n+1} \wedge (x_1 \neq x_2 \neq \ldots \neq x_{n+1}))$

anlamına gelir. Örneğin

(14) Tam bir F vardır

tümcesi

(15) $\exists xFx \wedge \forall x\forall y[(Fx \wedge Fy) \rightarrow x = y]$

anlamına gelir. (15) önermesi ise özdeşlik mantığında denetlendiği gibi

(16) $\exists x[Fx \wedge \forall y(Fy \rightarrow x = y)]$

ile eşdeğerdir. (16) ise

(17) $\exists y\forall x(Fx \leftrightarrow x = y)$

ile eşdeğerdir. Örneğin (5) tümcesi

(18) $\exists y\forall x[(x$ doğal sayıdır $\wedge$ x çifttir $\wedge$ x asaldır$) \leftrightarrow x = y]$

biçimine dönüştürülebilir. (14) yerine

(15') $\exists!xFx$

de yazılır. "$\exists!x$" niceleyicisi "öyle bir tek x vardır ki" biçiminde dile getirilir.

"Sayısal tümce" teriminin anlamını genişleterek (i) – (vi)'ya dayanarak oluşturulan bütün tümcelere sayısal tümce diyoruz. Örneğin

(19) Tam bir asal çift sayı vardır o da 2'dir

tümcesi

(20) $\exists y[\forall x\ (x \text{ asal çift sayıdır} \leftrightarrow x = y) \wedge y = 2]$

biçimine dönüştürülebilir. Genel olarak

(21) Tam bir F vardır o da G'dir

tümcesi

(22) $\exists y[\forall x(Fx \leftrightarrow x = y) \wedge Gy]$

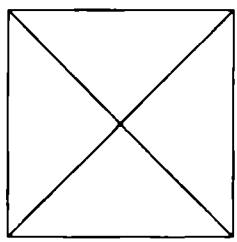
biçiminde sembolleştirilir. (21)'i bir de

(23) $\exists!xFx \wedge \forall x(Fx \rightarrow Gx)$

biçimine dönüştürebiliriz. (21) tümcesi (geniş anlamda) bir sayısal tümcedir.

Sayısal önermeler klasik mantığın mantıksal karesinin karşı olum yasalarına benzeyen yasalara uyarlar. Sayısal önermelere ilişkin mantıksal kare aşağıda gösterilmiştir.

I. n'den çok F vardır. II. n'den az F vardır.



III. En az n F vardır. IV. En çok n F vardır.

I ile II karşıt, III ile IV alt karşıt, I ile IV çelişik, II ile III çelişik, III, I'in altığı ve IV, II'nin altığıdır. Yani aşağıdaki önermeler özdeşlik mantığında geçerlidir.

(24) n'den çok F vardır $\rightarrow$ ~(n'den az F vardır)

(25) En az n F vardır $\vee$ En çok n F vardır.

(26) n'den çok F vardır $\leftrightarrow$ ~(En çok n F vardır)

(27) n'den az F vardır $\leftrightarrow$ ~(En az n F vardır)

(28) n'den çok F vardır $\rightarrow$ (En az n F vardır)

(29) n'den az F vardır $\rightarrow$ En çok n F vardır

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki sayısal tümceleri özdeşlik mantığında sembolleştiriniz.

1. Ali'nin en az iki kitabı vardır.
2. En çok bir başkan vardır.
3. Ali'nin en az iki kardeşi ve en çok üç kardeşi vardır.
4. Kurulun ikiden çok üyesi varsa bunlardan biri başkan olur.

19.3.4 Tekil Betimlemeli Tümceler

Tekil betimlemeler ve kısaca betimlemeler

(1) $\iota x A(x)$

biçimindedir. (1), "A(x)'i gerçekleyen tek x" olarak okunur.

Betimleme değişmezi denilen "ι" işareti özdeşlik mantığına eklenerek *betimlemeli özdeşlik mantığı* elde edilir. Betimlemeli özdeşlik mantığında

(2) $G(\iota x Fx) \equiv \exists y\,[\forall x\,(Fx \leftrightarrow x = y) \wedge Gy] \vee [\sim\exists y\,\forall x\,(Fx \leftrightarrow x = y) \wedge G(\iota z \sim z = z)]$

eşdeğerliği doğrudur. (2) Eşdeğerliğine dayanarak içinde bir betimleme geçen her önerme, içinde betimleme geçmeyen ve özdeşlik mantığı diline ait bir önermeye dönüştürülebilir.

(3) $\exists y\,\forall x\,(Fx \leftrightarrow x = y)$

önermesine (1) betimlemesinin *biriciklik koşulu* denir. Bu koşul "Fx" açık önermesinin bir tek birey tarafından gerçeklediğini dile getirir. Nitekim

(4) $\exists! x\,Fx \equiv \exists y \forall x\,(Fx \leftrightarrow x = y)$

(3) koşulu yerine gelmezse (1) betimlemesi

(5) $\iota z \sim z = z$

betimlemesiyle özdeş olur. Yani

(6) $\sim\exists y\,\forall x\,(Fx \leftrightarrow x = y) \leftrightarrow (\iota x Fx = \iota z \sim z = z)$

elde edilir. (5) betimlemesi uzlaşımla isteğe bağlı olarak seçilen bir bireyi gösterir. Örneğin dilde "sıfır" adı varsa (5) betimlemesi sıfır sayısını gösterir. O zaman da "G" yüklemi sıfır'ın bir özelliğini dile getirirse

(7) $G(\iota z \sim z = z)$

doğru olur, eğer "G" yüklemi sıfır'ın bir özelliğini dile getirmezse (7) yanlış olur.

Şimdi içinde betimlemeler geçen tümcelerin betimlemeli özdeşlik mantığında sembolleştirilmesini ele alıyoruz. Birinci örnek olarak

(1) Ali kendisini seven tek kişiyi sever

tümcesini sembolleştirelim. (1)'in sembolik karşılığı

(2) (Ali: a, Kişidir: K, sever: S)

sembolleştirme biçimi gereği

(3) $S[a, \iota x (Kx \wedge Sax)]$

dır. Nitekim

(4) $\iota x(Kx \wedge Sax)$

betimleri

(5) Ali'nin sevdiği tek kişidir

anlamına gelir. Buna göre (3),

(6) Ali, Ali'nin sevdiği tek kişiyi sever

tümcesinin ve dolayısıyla (1)'in sembolik karşılığıdır

İkinci örnek olarak

(7) Sınavın en zor sorusu hiç kimse tarafından çözülmemiştir

tümcesini ele alalım. Sembolleştirme biçimi olarak

(8) (x bir kişidir: Kx, x bir sınav sorusudur: Sx, x, y'den zordur: Zxy, x, y tarafından çözülmüştür: Çyx)

biçimini seçiyoruz. İkili yüklemler bakımından kolaylık sağladığı için, (8) sembolleştirme biçiminde bağsız değişkenler kullandık.)

(9) En zor sınav sorusu

tekil teriminin (8) sembolleştirme biçimi gereği sembolik karşılığı

(10) $\iota x\,[Sx \wedge \forall y\,[(Sy \wedge y \neq x) \rightarrow Zxy]]$

dir. Buna göre (7) tümcesinin (8) gereği sembolik karşılığı

(11) $\forall x\,[Kx \rightarrow \sim Çx\,[\iota x\,[Sx \wedge \forall y\,[(Sy \wedge y \neq x) \rightarrow Zxy]]]]$

dır.

Üçüncü örnek olarak

(12) En büyük pozitif tamsayı yoktur

tümcesini sembolleştirelim.

(13) (Bxy: x y'den büyüktür, Px: x pozitiftir, Tx: x bir tamsayıdır)

sembolleştirme biçimi gereği

(14) En büyük pozitif tamsayı

tekil terimi

(15) $\iota x\,[Tx \wedge Px \wedge \forall y\,[(Ty \wedge Py \wedge y \neq x) \rightarrow Bxy]]$

biçiminde sembolleştirilir. Öte yandan "a" herhangi bir tekil terim olduğunda

(16) a yoktur

tümcesi

(17) a var değildir

anlamına gelir.

(18) a vardır

tümcesi ise (varlık mantığında gösterildiği gibi)

(19) $\exists x\,(x = a)$

biçiminde sembolleştirilir. O halde (16)

(20) $\sim\exists x\,(x = a)$

biçiminde sembolleştirilir. Buna göre (12)'nin (13) sembolleştirme biçimi gereği karşılığı

(21) $\sim\exists y\,[y = \iota x\,[Tx \wedge Px \wedge \forall y\,[(Ty \wedge Py \wedge y \neq x) \rightarrow Bxy]]]$

dır.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki tümceleri betimlemeli özdeşlik mantığında sembolleştiriniz.

1. Reşat Nuri Güntekin Çalıkuşu'nun yazarıdır.
2. Çalıkuşu'nun yazarı Yaprak Dökümü'nün yazarıdır.
3. İlk Babil Kralı ilk Asur Kralından önce yaşamıştır.
4. Biricik asal çift doğal sayı üçten küçüktür.
5. Ali'nin en küçük çocuğu kızdır.

20. MANTIK FELSEFESİ

20.1 MANTIK FELSEFESİNİN KONUSU

20.1.1 Özel Bilimlerin Felsefesi

Her özel bilimin bir bilim felsefesi bulunduğu gibi, bağımsız bir bilim dalı olarak mantığın da bir bilim felsefesi, yani *mantık felsefesi* olmalıdır. Amacımız mantık felsefesinin belli başlı sorunlarını kısaca ortaya koymaktır. Ancak daha önce genel olarak bilim felsefesine ve özel olarak mantık felsefesine niye gereksinme olduğunu araştırmakta yarar vardır.

Herhangi bir bilim dalında o bilime özgü terimleri kapsayan birtakım önermelerin doğruluğu ileri sürülür. Kullanılan terimlerin anlamı aydınlatılır, ileri sürülen önermelerin de doğruluğu temellendirilir. Ancak bir terimin anlamını aydınlatmak için anlamı daha önce aydınlatılmış olan başka terimlere ve bir önermenin doğruluğunu temellendirmek için doğruluğu daha önce temellendirilmiş başka önermelere gerek vardır. Kısır döngü veya durmadan gerilemeye düşmemek için anlamı sezgisel olarak apaçık olan ilkel öner-

meler, yani *ilkeler*'e başvurmak kaçınılmaz bir zorunluluktur. Nitekim çeşitli bilim dallarında ilgili bilim adamları topluluğunun, üzerinde anlaştıkları birtakım temel kavramları ve ilkeleri paylaştıklarını ve tüm bilimsel çalışmalarını bu ortaklaşa kabul ettikleri temel kavram ve ilkelere dayandırdıklarını gözlemliyoruz. Thomas Kuhn'a göre bilimi bilim yapan ayırt edici bir özellik, bilim adamları topluluğunun temel kavramlar ve ilkeler üzerine anlaşmalarıdır. Ancak bu türlü anlaşmalar süresiz değildir. Kuhn'un *olağan bilim* dediği süreç ile sınırlanmıştır. Nitekim bilimsel etkinlikler ne denli başarılı olurlarsa olsunlar gene de birtakım aykırılıkların (anomaliler) ortaya çıktığını görüyoruz. Bu durumda normal bilim süreci bir bunalım dönemine dönüşüp bilim adamları topluluğunda temel kavramlar ve ilkeler üzerindeki anlaşma ve görüş birliği zayıflayarak yerini gittikçe artan anlaşmazlık ve çatışmalara bırakır. Kuhn'un *olağandışı bilim* dediği bu süreçte bilim adamları topluluğunda eskiler ile uyuşmayan yeni temel kavramlar ve ilkeler (yani yeni bir paradigma) ortaya konulur. Temel kavramlar ve ilkeler olağan bilimin yöntemleriyle değerlendirilemediğinden, eski ile yeni paradigmalar arası seçim olağan bilimde yapılamaz. Bu aşamada bilim ile felsefe ve genellikle serbest kurgu (spekülasyon) arasındaki sınır kalkmıştır. İşte belli bir bilim dalına özgü bilim felsefesinin işlevi, bilimin yöntemleriyle değerlendirilemeyen temel kavramları ve ilkeleri inceleyip seçenekler arasında akla uygun seçimler yapılabilmesini sağlamaktır.

20.1.2 Mantık Felsefesi

Genel olarak bilim felsefesi hakkında söylediklerimize dayanarak mantık felsefesinin amacının mantık biliminin temel kavramlarını aydınlatmak ve ilkelerini temellendirmek olduğunu söyleyebiliriz. Ancak tüm ilgililerin görüş birliğini sağlayacak tek çözümler beklememek gerektiğini akıldan çıkarmamak gerekir.

Mantık felsefesinin belli başlı sorunlarını ortaya koymak için mantık biliminin en önemli temel kavramlarını ve ilkelerini belirtmeliyiz. Mantık kabaca doğru düşünmenin bilimidir. Düşünmenin kendisini psikoloji inceler, mantık ise yalnızca düşünmenin doğruluğunun veya daha belirgin olarak, düşünmenin en önemli süreci olan akıl yürütmenin geçerlilik kurallarını or-

taya koymayı amaçlar. Çağdaş sembolik mantıkta bu geçerlilik kuralları çeşitli matematiksel sistemler olarak dile getirilmiştir. Tıpkı Euclides, Lobatchevski ve Riemann geometri sistemleri gibi, birbiriyle bağdaşmayan matematiksel mantık sistemleri kurulmuştur. Ancak bir matematik dalı haline gelen günümüzün mantık bilimi çerçevesi içinde rakip mantık sistemlerini değerlendirip bunlar arasında akılcı bir seçim yapmak olanaksızdır. İşte böyle bir işlem ancak karşılaştırılan rakip sistemlerin dışına çıkarak mantık felsefesi açısından yapılabilir. Bu amaçla her düşünür doğru düşünme ve geçerli akıl yürütme hakkındaki kişisel sezgileriyle önerilen rakip mantık sistemleri arasında bir karşılaştırma yaparak hangisinin sezgilerine daha uygun olduğunu araştırır ve böylece birin seçer. Ancak ayrı düşünürlerin sezgileri birbiriyle uyuşmayabildiğinden dolayı, rakip mantık sistemler seçebilirler. Mantık felsefesinde tanık olduğumuz bu çelişkili seçimleri doğal karşılamak gerekir.

Mantığın başlıca ilkelerine gelince, bunlar özdeşlik, çelişkisizlik ve üçüncü şıkkın olmazlığı ilkeleridir. *Mantık ilkeleri* denilen bu ilkeler mantık felsefesinde tartışma konusu olmaktadır.

20.2 MANTIK FELSEFESİNİN SORUNLARI

20.2.1 Mantığın Temel Kavramları

20.2.1.1 Mantık Nedir?

Mantık felsefesinin en önemli sorunlarından "mantık nedir?" sorusuyla ilgilenelim. *Mantık,* doğru düşünmenin yöntemi veya doğru düşünmenin kurallarını konu edinen bilim olarak tanımlanır. Doğru düşünmenin kuralları ise akıl yürütmeyi dile getiren çıkarımların geçerliliğini belirleyen kurallardır. Buna göre mantık bir bakımdan bir *yöntem* bir bakımdan da bir *bilim*'dir. Mantık bir yöntem olarak öbür bilimlere yardımcı olarak uygulanır. Buna karşılık mantık bir bilim olarak ele alındığında öbür bilimlerden bağımsız sayılır.

Bütün bilimler yöntem olarak mantığı kullanır. Mantığın tek yöntemi mantıktır. Doğa bilimlerinin yöntemi ise deneysel yöntem ile mantıktan oluşur. Bazı mantıkçılar mantığı "dedüktif mantık" (tümdengelimli mantık) ile "*tümevarımlı mantık*" olmak üzere ikiye ayırır.

Dedüktif mantık kesin sonuçlu çıkarımlara dayanan mantık dalı, *tümevarımlı* mantık ise olasılı sonuçlu çıkarımlara dayanan mantık dalıdır.

Burada "mantık" terimini tek başına hep dedüktif mantık anlamında kullanıyoruz. Tümevarımlı mantığı ise yalnız mantığın olasılık kuramı ve doğa bilimlerinin mantıksal yapısına uygulamasında ele alıyoruz.

Dikkat edilirse matematikte kullanılan "tümevarım yöntemi" denilen yöntem aslında salt dedüktif mantığa dayalı bir yöntemdir. Olasılık kuramı da salt dedüktif mantığa dayalı bir bilim dalıdır. (Ancak olasılık kavramı olasılı yani tümevarımlı çıkarımlara uygulanır.) Doğa bilimlerinde kullanılan gelişmiş tümevarımlı yöntem olan varsayımlı dedüktif yöntem salt tümevarımlı bir yöntem olmayıp dedüktif mantığa da dayalıdır. Böylece dedüktif mantığın tümevarımlı mantıkta da kullanıldığını söyleyebiliriz. Bu nedenle dedüktif mantık temel mantıktır. Tümevarımlı mantık ise mantığın olasılı çıkarımlara uygulanmasıdır.

İmdi doğru düşünme ve geçerli akıl yürütmenin kurallarıyla ilgili sezgisel kavramlarımız modern mantıkta matematiksel sistemler halinde dile getirilmiştir. Böylece kurulan en basit mantık sistemleri iki değerli önermeler mantığı olmuştur. Öbür mantık sistemleri ise bu iki sistemin ya genişletilmiş biçimidir ya da bunlarla bağdaşmayan rakip sistemlerdir. Örneğin özdeşlik mantığı, kiplik mantığı ve bilgi mantığı önermeler mantığı ile niceleme mantığının genişletilmiş biçimleridir. Buna karşılık varlık mantığı ve çok değerli mantık önermeler mantığı ve niceleme mantığı ile rakip olan sistemlerdir.

Rakip mantık sistemleri birbiriyle bağdaşmayan sezgilerin ürünüdür. Buna karşılık bir sistemin genişlemesi dayandığı sezgilerle bağdaşabilir. Mantık felsefesi açısından rakip sistemler arasında bir seçim yapmak gerekirken, sistemin genişlemesi durumunda eski sistem yeni sistem ile birlikte (onun bir bölümü olarak) varlığını sürdürebilir. Örneğin Aristo'nun tasımlar mantığı birli niceleme mantığının özel bir bölümü olarak geçerliliğini koruyabilmiştir. Buna karşılık iki değerli önermeler mantığı ile ikiden çok değerli önermeler mantığı sistemleri rakip mantık sistemleridir. Bunlardan birini öbürlerine yeğlemek gerekir. Genel olarak birbiriyle bağdaşmayan mantık sistemlerinden yalnız birinin tek geçerli sistem olarak seçilmesini öngören yaklaşıma

tekçi mantık felsefesi denir. Buna karşılık farklı düşünme alanlarında apayrı mantık kurallarının geçerli olduğunu, dolayısıyla birbiriyle bağdaşmayan birden çok mantık sisteminden herbirinin yasaya uygun bir uygulama alanı olduğunu savunan görüşe *çoğulcu mantık felsefesi* denir. O zaman da tekçi ile çoğulcu mantık felsefesi görüşleri arasında bir seçim yapmak gerekir. Biz burada çoğulcu mantık felsefesi görüşünü benimsiyoruz.

20.2.1.2 Önermeler

Düşünme birimleri olan yargılar bildirsel tümcelerle dile getirilir. Günlük dil tümcelerden oluşur. Bildirisel tümceler kullanıldıkları bağlamdan bağımsız olarak belirsiz veya çok anlamlılık taşırlar. Belirsizlik taşıyan bir tümcenin doğruluk değeri yoktur, çok anlamlılık taşıyan bir tümce ise hem doğru hem yanlıştır. Örneğin

(1) Yağmur yağıyor

tümcesi ne doğru ne yanlıştır. Ancak belli bir yer ve zamanda kullandığımızda belli bir doğruluk değeri olur. O halde "yağmur yağıyor" tümcesi bağlamdan bağımsız olarak belirsizlik taşıyor.

Öte yandan

(2) Ali keman çalar

"çalar" sözcüğünün taşıyabildiği ayrı anlamdan dolayı çok anlamlıdır. Nitekim "keman çalmak" sözünün keman kullanmak ile "keman hırsızlığını yapmak" gibi apayrı iki farklı anlamı vardır. "Ali" bir kemancının adı ise, "(2) tümcesi "çalar" sözcüğünün birinci anlamı gereği doğru, ikinci anlamı gereği ise yanlıştır.

Mantıkta belirsizlik ve çok anlamlılıktan kurtulmak için bildirsel tümce yerine onun karşılığı olan tek ve belirli anlamlı önerme kullanılır. Önermenin tek bir doğruluk değeri vardır. Örneğin (1) tümcesi belli bir yer ve zamanda kullanıldığında bir önermeyi dile getirir. Bu önermenin belli bir tek doğruluk değeri vardır. Önermenin ilişkin olduğu yer ve zamanda yağmur yağıyorsa önerme doğrudur. Yoksa yanlıştır. Öte yandan (2) tümcesi

(3) Ali keman kullanıyor

ile

(4) Ali keman hırsızlığı yapıyor

biçiminde dile getirilebilen iki ayrı önermeyi dile getirir. Bu önermelerin belirlenmesi için "Ali" sözcüğünün kimin adı olduğu da belirlenmelidir. O zaman da (3) ile (4) önermelerinden her birinin doğruluk değeri belli olur. "Ali" dürüst bir kemancının adı olduğunda (3) doğru ve (4) yanlıştır.

ALIŞTIRMALAR

Üç farklı belirsizlik ve üç farklı çok anlamlılık örneğini gösteriniz.

20.2.1.3 Önsel, Zorunlu, Çözümsel Önermeler

Doğru olduğu gözlem ve deneye başvurmadan saptanabilen bir önermeye *önsel önerme* (veya a priori önerme), doğru olduğu ancak gözlem ve deneye başvurarak saptanabilen bir önermeye de *sonsal önerme* (veya a posteriori önerme) denir. Örneğin yağmur yağan bir yer ve zamanda öne sürülen

(1) Yağmur yağıyor

önermesi sonsaldır. Öte yandan

(2) Hiçbir bekâr evli değildir.

ile

(3) Ali bekârdır veya Ali bekâr değildir

önermeleri önseldir. Her ikisinin de doğru olduğunu gözlem ve deneye başvurmadan saptıyoruz.

Bütün mümkün dünyalarda doğru olan önermeye *mantıkça zorunlu* önerme denir. Önsel önermeler mantıkça zorunludur, mantıkça zorunlu önermeler de önseldir.

Bir önermenin doğru olduğu yalnız onu oluşturan terimlerin anlamına dayanarak saptanabilirse bu önermeye *çözümsel* (veya analitik) denir. Değil-

lemesi çözümsel olan önermelere *çelişik* denir. Ne çözümsel ne çelişik olan önermelere de *bireşimsel* veya (sentetik) denir. Örneğin (2) ile (3) çözümsel önermeler bunların değillemesi de çelişik önermelerdir. (1) önermesi ise bireşimseldir. Her çözümsel önerme önsel ve mantıkça zorunludur. Öte yandan her önsel önermenin çözümsel olup olmadığı tartışma konusu olmuştur. Kant'a göre bireşimsel önsel önermeler vardır. Kant aritmetik ile geometrinin doğrularının bireşimsel önsel önermeler olduklarını savunmuştu. Örneğin Kant'a göre

(4) $7 + 5 = 12$

aritmetik doğrusu bireşimsel önseldir. Buna karşılık Frege ve Russel'e göre matematiğin doğru önermeleri önseldir. Biz burada bütün önsel önermelerin çözümsel olduğunu, dolayısıyla önsel önermeler kümesi, mantıkça zorunlu önermeler kümesi ve çözümsel önermeler kümesinin birbiriyle özdeş olduğunu kabul ediyoruz. Buna göre çözümsel önermeleri şöyle sınıflayabiliriz.

(i) Mantıkça doğru önermeler

Bu türlü önermeler geçerli bir sembolik çıkarımın yerine koyma örneği durumundadır. Örneğin (3) önermesi mantıkça doğrudur.

(ii) Matematik doğruları

Bu türlü önermeler bir matematik kuramının önermeleridir. Örneğin (4) bir matematik doğrusudur.

(iii) Mantıkça doğru veya matematik doğrusu olmayan çözümsel önermeler

Örneğin (2) önermesi ve

(5) Hiçbir cismin yüzeyi bütünüyle hem kırmızı hem yeşil değildir.

önermesi bu türdendir. (Bazı filozoflar matematik önermeleri ve (5) gibi önermelerin çözümsel değil, bireşimsel önsel önermeler olduğunu savunmuştur.)

Çözümsel önermeler *mantıkça doğru önermeler* ile mantıkça doğru olmayan önermeler olmak üzere ikiye ayrılır. Örneğin (3) önermesi mantıkça

doğru, (2) önermesi ise mantıkça doğru olmayan çözümsel bir önermedir. Mantıkça doğru önermeler geçerli bir sembolik önermenin yerine koyma örneğidir. Örneğin mantıkça doğru olan (3) önermesi geçerli

(6) $p \vee \sim p$

sembolik önermesinin bir yerine koyma örneğidir.

ALIŞTIRMALAR

Çözümsel, çelişik ve bireşimsel önermelere üçer örnek veriniz.

20.2.1.4 Çıkarımların Geçerliliği

n-li çıkarım, n sayıda *öncül* denilen önerme ile sonuç denilen bir önermeden oluşur.

$A_1,...,A_n$, B önermeler olduğunda *dedüktif* (tümdengelimli) çıkarım

(1) $A_1,...,A_n \therefore B$

biçiminde, *tümevarımlı* (olasılı) çıkarım da

(2) $A_1,...,A_n \therefore$ Olasılıkla B

biçimindedir. "Çıkarım" terimini tek başına "dedüktif çıkarım" anlamında kullanıyoruz.

n = 0 sınır durumunda (1) çıkarımı

(3) $\therefore B$

biçimini alır. (3) çıkarımına *öncülsüz çıkarım* diyoruz. Öncülsüz çıkarımın geçerli olması sonucun tek başına geçerli olması demektir.

İmdi

(4) Ali bekârdır $\therefore$ Ali bekârdır veya Ali kumraldır

ile

(5) Ali bekârdır $\therefore$ Ali evli değildir

çıkarımlarını göz önüne alalım. Her iki çıkarımda tam güvenilirdir. Yani ön-

cül doğru ise sonuç kesinlikle doğrudur. Ancak aralarında önemli bir fark vardır. (4) çıkarımı

(6) (Ali bekârdır: p, Ali kumraldır: q)

sembolleştirme biçimi gereği

(7) $p \therefore p \vee q$

biçiminde sembolleştirilir. Oysa (5) çıkarımı önermeler mantığında

(8) (Ali bekârdır: p, Ali evlidir: r)

sembolleştirme biçimi gereği

(9) $p \therefore \sim r$

biçiminde sembolleştirilir. Niceleme mantığında ise

(10) (Ali: a, bekârdır: F, evlidir: G)

sembolleştirme biçimi gereği

(11) $Fa \therefore \sim Ga$

biçiminde sembolleştirilir. (7) sembolik çıkarımı geçerli, (9) ile (11) sembolik çıkarımları geçersizdir.

İmdi günlük dildeki (4) çıkarımı, geçerli olan (7) sembolik çıkarımının yerine koyma örneğidir. Bu nedenle (4)'ün geçerli olduğunu söyleyebiliriz. Buna karşılık günlük dildeki (5) çıkarımı, hiçbir geçerli sembolik çıkarımın bir yerine koyma örneği değildir. Bu nedenle (5) çıkarımını (mantıkça) geçersiz saymalıyız. Oysa (5) çıkarımı tam güvenilir bir çıkarımdır. Öncülü doğru olduğu durumlarda sonucun doğru olduğunu kesinlikle söyleyebiliriz. Nitekim

(12) Ali bekârdır $\rightarrow$ ~(Ali evlidir)

önermesi önsel, mantıkça zorunlu ve çözümsel bir önermedir. Ama (12) önermesi mantıkça doğru değildir.

Genel olarak (1) biçiminde bir çıkarım verildiğinde

(13) $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B$

çıkarımı çözümsel ise, (1) çıkarımına *çözümsel çıkarım* diyoruz. Eğer (1) çıkarımı geçerli ise (13) önermesi mantıkça doğru olur, (1) çıkarımı geçerli de-

ğilse (13) önermesi mantıkça doğru olmaz. Buna göre çözümsel çıkarımları geçerli çıkarımlar ile geçersiz çözümsel çıkarımlara ayırırız. Örneğin (5) çıkarımı geçersiz çözümsel olan bir çıkarımdır.

Dikkat edilirse (5) gibi tam güvenilir bir çıkarım için "geçersiz" terimini "*mantıkça* geçersiz" anlamında kullanıyoruz. (5) çıkarımının (mantıkça) geçersiz olması, sonucun öncülden mantık kurallarına dayanarak türetilememesinden kaynaklanır.

ALIŞTIRMALAR

Geçersiz çözümsel çıkarımlara üç farklı örnek gösteriniz.

20.2.1.5 Geçerlilik ve Mantık Değişmezleri

Bir mantık sisteminde geçerlilik, bu sistemdeki mantık değişmezlerine bağlıdır. Nitekim:

Bir *özel değişmez*, mantık değişmezi olmayan değişmez demektir.

Bir çıkarımın *sembolik karşılığı*, bu çıkarımda geçen özel değişmezlerin yerine birer temsilci harfin konulmasıyla elde edilen sembolik çıkarım demektir.

Bir çıkarımın *geçerli* olması, bu çıkarımın en az bir sembolik karşılığının geçerli olması demektir.

$A_1,...,A_n \therefore$ B biçimindeki bir çıkarımın, belli bir mantık sisteminde geçerli olması, o mantık sistemine ait y gibi herhangi bir yorumlama için,

$A_1,...,A_n$ öncüllerinin y yorumlamasında doğru olduğu durumlarda B sonucunun da y yorumlamasında doğru olması demektir.

Bir sembolik çıkarım, önerme, ad, yüklem, işlem işareti gibi özel değişmez temsilcileri ile mantık değişmezlerinden oluşur. Her mantık sisteminin kendine özgü mantık değişmezleri vardır. Örneğin önermeler mantığının mantık değişmezleri, iki değerli doğruluk fonksiyonu durumundaki önerme eklemleri, niceleme mantığının mantık değişmezleri, önermeler mantığının mantık değişmezleri ile niceleme işaretleridir. Her mantık sisteminin tanımında sisteme ait olan mantık değişmezleri belirtilir. Ancak mantık değişmezle-

rinin genel bir tanımı, bütün mantıkçılarca kabul edilmiş ayırt edici özellikleri henüz ortaya konulmuş değildir. Biz burada bir öneri olarak mantık değişmezlerinin bir ayırt edici ölçütünü dile getiriyoruz. Önerdiğimiz ayırt edici ölçüt mantık değişmezlerinin seçimini dilin çözümsel çıkarımlarına dayandırıyor.

Önerdiğimiz ayırt edici ölçütü şöyle açıklıyoruz. Bir *yorumlanmış dil*

$<\Delta, \ddot{\mathcal{O}}, \mathcal{Y}, y_0, \mathbf{Kr}, \vdash_{\overline{çz}}, M>$

biçiminde bir sıralanmış 7-lidir. Δ dilin değişmezlerinin kümesi, $\ddot{\mathcal{O}}$ dilin önermelerinin kümesi, $\mathcal{Y}$ dilin mümkün yorumlamalarının kümesi, y_0 olağan yorumlama, **Kr** *koruma bağıntısı* dediğimiz bir bağıntı, $\vdash_{\overline{çz}}$ *çözümsel içerme bağıntısı* ve M dilin mantıksal değişmezlerinin kümesidir.

Kullandığımız söz eden dile ait değişkenleri aşağıdaki çizelgede gösteriyoruz.

	Δ	$\ddot{\mathcal{O}}$	$\mathcal{Y}$
Öğeler	δ	A, B	a, b, y_0
Alt kümeler	Γ	K, L	y_Γ

Bu çizelgeye göre δ değişkeni Δ'nın öğeleri olan değişmezleri, Γ değişkeni Δ nın alt kümelerini, A, B değişkenleri $\ddot{\mathcal{O}}$'nün öğesi olan önermeleri, K, L değişkenleri $\ddot{\mathcal{O}}$'nün alt kümelerini a, b, y_0 değişkenleri $\mathcal{Y}$'nin öğesi olan yorumlamaları ve y_Γ değişkeni $\mathcal{Y}$'nin bir alt kümesini gösterir.

Buna göre $y\mathbf{Kr}\Gamma, y$ yorumlamasının Γ alt kümesine ait değişmezlerin anlamını koruduğunu dile getirir. Öte yandan $K\vdash_{\overline{çz}} A$,

$K \therefore A$

çıkarımın çözümsel olduğunu dile getirir. Bu durumda K önermeler kümesinin A önermesini *çözümsel olarak içerdiğini* söyleriz. Buna göre A gibi bir önermenin çözümsel olmasının gerekli ve yeterli koşulu

$\varnothing \vdash_{\overline{çz}} A$

dır. Yorumlanmış dilin aşağıda belirtilen bazı aksiyomlara uyduğunu kabul ediyoruz.

Aksiyom 1: $(\mathbf{aKr}\Gamma_1 \wedge \Gamma_2 \subseteq \Gamma_1) \rightarrow \mathbf{aKr}\Gamma_2$

Nitekim a yorumlaması Γ_1'e ait değişmezinin anlamını korursa, Γ_1 in alt kümesine ait her değişmezin anlamını korur.

Kr bağıntısı yardımıyla Γ'nın bütün öğelerinin anlamını koruyan yorumlamaların kümesi olan $\mathcal{Y}_\Gamma$'yı şöyle tanımlıyoruz.

Tanım 1: $\mathcal{Y}_\Gamma = \{a: \mathbf{aKr}\Gamma\}$

$\mathcal{Y}_\Gamma$'ya dayanarak "$\models_\Gamma$" ile gösterdiğimiz *Γ-içerme* bağıntısını tanımlıyoruz.

Tanım 2: K, A'yı *Γ-içerir* ancak ve ancak $\forall\mathcal{Y}[\mathcal{Y} \in \mathcal{Y}_\Gamma \wedge \forall B(B \in K \wedge B\mathcal{Y}'\text{de doğrudur})] \rightarrow A\mathcal{Y}'\text{de doğrudur}]$

Tanım 3: A önermesi Γ-doğrudur ancak ve ancak $\varnothing \models_\Gamma A$.

Aksiyom 2: $K \vdash_{\text{çz}} A \rightarrow K \models_\iota A$.

Aksiyom 3: ι* Kr ℓ

Yukardaki aksiyom ve tanımlardan aşağıdaki sonuçlar türetilir.

(1) $\forall\Gamma_1 \forall\Gamma_2 (\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \rightarrow \mathcal{Y}_{\Gamma_2} \subseteq \mathcal{Y}_{\Gamma_1})$

(2). $\forall\Gamma (\mathcal{Y}^* \in \mathcal{Y}_\Gamma)$

(3) $\forall_{\Gamma 1} \forall\Gamma_2 (\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \models_{\Gamma_1} \rightarrow \subseteq \models_{\Gamma_2})$

(4) $\forall\Gamma \forall\Gamma_2 [(\Gamma \subseteq \Gamma_2 \wedge A\Gamma_1\text{-doğrudur}) \rightarrow A\Gamma_2\text{-doğrudur}]$

(5) $\forall A\forall\Gamma (A\Gamma\text{-doğrudur} \rightarrow A\ \Delta\ \text{doğrudur})$

(6) $\forall A\forall\Gamma (A\Gamma\text{-doğrdur} \rightarrow A\ \Delta\ \text{- doğrudur})$

Tanım 4: Γ *çözümsellik üreticisidir* veya kısaca Çü(Γ) ancak ve ancak $\forall K\forall A(K \models_\Gamma A \rightarrow K \vdash_{\text{çz}} A)$ ise.

Aksiyom 4: Çü(M)

Nitekim Çü(M)

(7) $\forall K\forall A\ (K \models_M A \rightarrow K \vdash_{\text{çz}} A)$

anlamına gelir. $K \models_M A$ ise K'nın A'yı mantıkça içerdiğini dile getirir. Yani $K \models_M A$, $K \models A$ anlamına gelir. Oysa $K \models A$ doğru ise $K \vdash_{\text{çz}} A$'da doğru olur.

Tanım 5: Γ *etkin*'dir ve kısaca Et(Γ) ancak ve ancak

$\forall \wp\ [\wp \in \Gamma \rightarrow \exists K\ \forall A\ (K \models_{\Gamma} A \wedge K \models_{\overline{\Gamma(\wp)}} \sim A)]$ ise

Tanım 6: Γ tam etkin'dir veya kısaca Tet(Γ) ancak ve ancak

$\forall \Gamma'\ (\Gamma' \subseteq \Gamma \rightarrow Et(\Gamma'))$

Aksiyom 5: Tet(M)

c bir doğal nesne olduğunda, c'nin kapladığı uzay-zaman bölgesinin koordinatlarının kümesi k_c olsun. k_c, K<x, y, z, t> biçiminde sıralanmış dörtlülerin bir kümesidir. x, y, z uzay-zaman bölgesindeki bir noktanın uzay koordinatları, t ise aynı noktanın zaman koordinatıdır. $k_c[t]$,

(8) $k_c\ [t] = \{<x, y, z>: <x, y, z, t> \in k_c\}$

ile tanımlandığında, $k_c[t]$ c nesnesinin t anındaki durumunu belirler. Gerek k_c gerekse $k_c[t]$ biçimindeki değişmezler mantıksaldır. Bunların kümesini K ile gösterelim. K kümesine *yardımcı mantıksal değişmezler* kümesi diyoruz. K yardımıyla önerdiğimiz mantıksal değişmezlerin ayırt edici ölçütünü şöyle dile getirebiliriz.

(9) $\forall \Gamma\ [\Gamma \subseteq M \leftrightarrow [Çü\ (\Gamma \cup K) \wedge Tet(\Gamma)]$.

Bu ölçüte göre temel önerme eklemlerinin M kümesinin öğesi (yani mantık değişmezi) olduğu, buna karşılık "mavidir" ile "daha ağırdır" gibi yüklemlerin M kümesinin öğesi (yani mantık değişmezi) olmadığı gösterilebilir.

Her mantık sistemi kendi mantık değişmezleri tarafından tek bir biçimde belirlenmiştir. Nitekim verilen mantık değişmezlerinin olağan anlamı, sisteme ait olan sembolik dilin mümkün yorumlamalarının kümesi ile belirlenmiştir. Her mümkün yorumlama ise yorumlanmış önermelerin doğruluk değerini saptar. Böylece hangi çıkarımların geçerli, hangilerinin geçersiz olduğu belirlenir. Bu da mantık sisteminin belirtilmesi demektir.

Verilen bir mantık sisteminin mantık değişmezlerinin anlamını koruyarak yeni mantık değişmezleri eklemekle genişlemiş bir sistem elde edilir. İlk sistemde geçerli olan her çıkarım genişlemiş sistemde de geçerlidir. Ama genişlemiş sistemde geçerli olan bir çıkarım ilk sistemde geçersiz olabilir. Böy-

le bir sistemi genişletmek hem mantık değişmezlerinin hem de geçerli çıkarımların çoğalmasına yol açar. Örnek olarak özdeşlik mantığı, niceleme mantığının mantık değişmezlerine "=" özdeşlik değişmezinin eklemesiyle oluşan genişlemiş mantık sistemidir.

Öte yandan bir mantık sisteminin mantık değişmezlerinin olağan anlamını değiştirilirse, yani sistemin sembolik dilinin mümkün yorumlamalar kümesinde bir değişiklik yapılırsa, mantık değişmezlerinin anlamı değişir. O zaman da mantık değişmezleri aynı olan birbiriyle bağdaşmayan iki mantık sistemi elde edilir. Örnek olarak iki değerli önermeler mantığı ile üç değerli önermeler mantığı, mantık değişmezleri aynı olan birbiriyle bağdaşmayan sistemlerdir.

"Mantık değişmezi" kavramıyla ilgili başlıca mantık felsefesi sorunu, mantık değişmezlerinin tüm değişmezler kümesi içinde seçilmesini sağlayan ayırt edici bir ölçütün ortaya konulmasıdır. Daha önce belirtiğimiz gibi günümüze dek mantık değişmezleri yalnızca tek tek sıralamakla yetinilmiştir. Ortak özellikleri, onları mantık değişmezi kılan öz nitelikleri pek az incelenmiştir. Hatta (Alfred Tarski gibi) bazı mantıkçılar mantık değişmezleri ile özel değişmezler arasında hiçbir öz ayrım olmadığını ve bu ayrımın az çok keyfe bağlı olduğunu bile ileri sürmüşlerdir. Biz ise mantık değişmezleri ile özel değişmezler arasında çok önemli bir ayrım olduğunu savunuyoruz.

20.2.1.6 Doğruluk Değerleri ve Varlık

Çıkarımların geçerliliği önünde sonunda önermelerin belli yorumlamalardaki doğruluk değerine davanır. "Doğruluk değeri" kavramı ise birtakım mantık felsefesi sorunlarına yol açar. "Doğru" ve "yanlış" dan başka doğruluk değerinin bulunup bulunmaması sorunu, doğru bir önermenin karşılığında varlık alanına ait bir olgunun bulunup bulunmaması sorunu, salt akıl yoluyla önsel olarak bilinebilen doğruluk ile ancak gözlem ve deneyle bilinen sonsal doğruluk arasında bir öz ayrımın olup olmaması sorunu gibi.

Birinci sorun *iki değerli* mantık ile *çok değerli* mantıklar arasında seçim, ikinci sorun *realist doğruluk* anlayışı ile *anti-realist doğruluk* anlayışı arasındaki seçim, üçüncü sorun önsel sonsal ve çözümsel-bireşimsel ayrımlarıyla ilgi-

lidir. Dördüncü bir sorun bir önermenin *mantıkça doğru* olmasıyla ilgilidir. Günlük dil veya bilim diline ait bir önermenin mantıkça doğru olması geçerli sembolik bir önermenin yerine koyma örneği olması demektir. Sorun mantıkça doğru olan önermelerin karşılığı olan olgularla ilgilidir. Realist görüşe göre her mantıkça doğru önermenin karşılığı olarak soyut bir olgu vardır. Anti-realist görüşte ise böyle soyut durumlar kabul edilmez.

20.2.1.7 Denetleme, Eksiksizlik ve Karar-Verilebilirlik

Mantığın en önemli işlemi denetlemedir. Yöntem olarak mantık denetleme işlemlerinden oluşur. *Denetleme,* bir önermenin geçerli veya tutarsız olduğunu ya da bir çıkarımın geçerli olduğunu gösteren bir yöntemdir. $A \equiv B$ gibi bir eşdeğerliği denetlemek için $A \leftrightarrow B$ karşılıklı koşullu önermesinin geçerliliği denetlenir. $A_1,...,A_n \models B$ gibi bir içermeyi denetlemek için de $A_1,...,A_n \therefore B$ çıkarımının geçerliliği denetlenir. Bir önermenin geçersizliği ve bir önerme kümesinin tutarlılığı denetlenemez. Geçersizlik ancak bir yanlışlayıcı yorumlama, tutarlılık da bu yanlışlayıcı yorumlama bulunarak gösterilebilir.

En yetkin denetleme biçimi *çözümleyici çizelge* yöntemidir. Bu yönteme göre $\{A_1,...,A_n\}$ önermesinin tutarsız olduğu, başlangıç önermeleri $A_1,...,A_n$ olan kapalı bir çözümleyici çizelge kurularak ispatlanır. $A_1,...,A_n \therefore B$ çıkarımının geçerli olduğu başlangıç önermeleri $A_1,...,A_n$, $\sim B$ olan kapalı bir çözümleyici çizelge kurularak ispatlanır. A önermesinin geçerli olduğu da başlangıç önermesi $\sim A$ olan kapalı bir çözümleyici çizelgesi kurarak ispatlanır.

Her mantık sistemi, o sistemin mantık değişmezlerinin olağan anlamını koruyan yorumlamalar kümesiyle belirlenir. Sistemin denetleme yöntemi bütün ve yalnız geçerli önerme ve çıkarımların geçerli olduğunu göstermeli. Bir denetleme yöntemi gereği geçerli olarak belirlenen her önerme ve çıkarım gerçekten geçerli ise denetleme yöntemine sağlam denir. Gerçekten geçerli olan önerme ve çıkarımların geçerli olduğunu ortaya koyan denetleme yöntemine de *eksiksiz* denir. Bir denetleme yönteminin başarılı olmasının gerekli ve yeterli koşulu sağlam ve eksiksiz olmasıdır. Çözümleyici çizelge uygulandığı mantık sistemlerinde sağlam ve eksiksizdir. Çözümleyici çi-

zelge yönteminin sağlam olması, kapalı çözümleyici çizelgenin başlangıç önermeleri kümesinin tutarsız olmasına dayanır. Nitekim bir tek başlangıç önermesi varsa bu önerme tutarsız olduğundan değillemesi geçerli olur. Çözümleyici çizelge yönteminin eksiksiz olması, tutarlı olan sonlu bir önerme kümesi verildiğinde, başlangıç önermeleri bu kümenin öğelerinden oluşan kapalı bir çözümleyici çizelgenin bulunmasına dayanır.

Bazı mantık sistemlerinin, örneğin önermeler mantığının ve birli niceleme mantığının *karar-verme yöntemi* vardır. Buna *karar-verilebilir* mantık sistemleri denir. Karar-verme yöntemi herhangi bir önermenin geçerli veya geçersiz, tutarlı veya tutarsız, bir çıkarımın da geçerli veya geçersiz olduğuna karar vermeye yarayan bir yöntemidir. Mantık sistemlerinin çoğunluğu *karar-verilemez* sistemlerdir. Özellikle niceleme mantığı bir bütün olarak karar-verilemez bir sistemdir.

Sözeden mantık (meta-mantık) denilen mantık dalının işlevi çeşitli mantık sistemlerinin denetleme ve karar-verme yöntemlerinin bulunup bulunmadığını araştırma ve bulunduğu durumlarda bu yöntemleri ortaya koymaktır.

20.2.2 Mantık İlkeleri

Özdeşlik ilkesi, yüklemler mantığında geçerli olan "her F, F dir" ya da eşitlik mantığında geçerli "a, a ile özdeştir" (a=a) önermeleri ile dile getirilebilir. Ancak her iki geçerli önermenin temelinde dilin tek anlamlılığı ilkesi bulunur: "Her değişmez ayrı geçişlerinde hep aynı anlamı taşır". Eğer "F"nin iki geçişinin anlamları aynı olmasaydı "her F, F dir" geçersiz olurdu. Aynı biçimde "a"nın her iki geçişinin aynı anlamları olmasaydı "a, a ile özdeştir"de geçersiz olurdu. Bu nedenle özdeşlik ilkesine "tek-anlamlılık ilkesi" denilmesi uygun olur. Bu ilkeyle ilgili mantık felsefesi sorunları, mantık sistemlerinde kullanılan tüm değişmezlerin anlamının tüm geçişlerinde aynı olmasının gerekip gerekmediği sorununa dayanır. Aynı olması gerekirse, anlamı pragmatik bağlama bağlı "ben", "sen", "bu", "o", "önce", "şimdi", "sonra" gibi değişmezlere yer verilmemelidir. Oysa son zamanlarda bu türlü değişmezlere yer veren pragmatik mantık sistemleri kurulmuş ve böylece tek-anlamlılık ilkesi çiğnenmiştir.

Çelişkisizlik ilkesi önermeler mantığında geçerli olan "(p ve p-değil) değil" ile dile getirilebilir. Ancak bu sembolik önermeyi geçerli kılan daha derin bir ilke "*tutarlılık ilkesi*" vardır. Tutarlılık ilkesi kabul edilebilir mantık sistemlerinin tutarlı olması gerektiğini, yani hiç bir önermenin hem doğru hem yanlış değerini aynı zamanda almaması gerektiğini dile getirir. Bu ilkeyi daha genel olarak her önermenin belli bir yorumda en çok bir doğruluk değeri olduğu biçiminde dile getirebiliriz. Dikkat edilirse böyle bir tutarsızlık ilkesi ikiden çok doğruluk değerini dışlamadığı gibi, bazı önermelerin hiç bir doğruluk değerini taşımamasını da engellememektedir. Önerme eklemlerinin anlamının doğruluk çizelgeleri ile belirlenmesinin temelinde tutarsızlık ilkesi bulunur. (Nitekim aynı önermenin birden çok sayıda doğruluk değeri olsaydı alışılagelmiş doğruluk çizelgeleri kurulamazdı). Tutarsızlık ilkesine aykırı olan "para-tutarsız" denilen mantık sistemleri kurulmuştur. Bu türlü sistemlerin kabul edilip edilemeyeceği ve kabul edildiği takdirde hangi önermelerin hem doğru hem yanlış sayılabileceği, çelişkisizlik ilkesiyle ilgili sorunlar oluşturur.

"Üçüncü Halin Olmazlığı" (veya Üçüncü Halin İmkânsızlığı) ilkesi önermeler mantığında geçerli olan "p veya p-değil" ile dile getirilir. Ancak önermenin geçerliliği, doğruluk değerlerinin yalnız "doğru" ile "yanlış"tan ibaret olması, yani üçüncü bir doğruluk değerinin bulunmamasına dayanır. Bu son ilkeye "*iki-değerlilik ilkesi*" denir, (tutarlılık ilkesi gibi) alışılagelen doğruluk çizelgelerini temellendirir. Ancak iki değerlilik ilkesine aykırı olan mantık sistemleri vardır. İkiden çok değerli mantık sistemlerinde "p veya p-değil" ilkesi geçersizdir.

İki değerlilik ilkesine uyan sistemler ile uymayanlar arasındaki çeşitli seçimler iki değerlilik ilkesiyle ilgili mantık felsefesi sorunlarıdır.

20.2.3 Bilim Felsefesi Nasıl Mümkündür?

Mantık biliminde çözülemeyen sorunların mantık felsefesinde ve genel olarak herhangi bir bilim dalında çözümsüz kalan bir sorunun bu bilim dalını konu edinen özel bilim felsefesinde nasıl çözülebileceğini sormamız gerekir. Özellikle de mantık biliminin olağan sorun çözme etkinlikleri metodolo-

jik kurallara bağlı olup ortaya çıkan olağan sorunlara tek çözümler sağlamaktadırlar.

Ancak olağandışı bilim sorunları veya bilim felsefesi sorunları olağan bilimin çerçevesi içinde çözülemez. Nitekim çözüm olağan bilimin sorun çözme kurallarına dayanır. Oysaki söz konusu sorunlar kullanılagelen kuralların dayandığı temel kavramlar ve ilkeler ile bunlarla bağdaşmayan değişik temel kavramlar ve ilkeler arasında bir seçim niteliğinde olduğundan kurallar yenilerin seçilmesini imkansız kılacaktır.

Bu durumda rakip temel kavram ve ilke sistemleri arasındaki seçimin bunları benimseyen kişi veya toplumların öznel sezgi, inanç ve beğenilerine dayandığı sanılabilir. Bu görüşü paylaşan düşünürler vardır. Ama biz (Kuhn'u izleyerek), ayrı kişi ve toplumların farklı seçimler yapabilmesine karşın, tarafların gene de (olağan bilimde olduğu gibi) akıl ve mantığa, özellikle de tutarlılık ilkesine uygun çıkarımlarla görüşlerini savunmaları gerektiği görüşündeyiz. Buna göre belli temel kavramlar ve ilkeleri akılcı bir sistem çerçevesinde savunabilmek için sistemin *tutarlı* bir önerme kümesi niteliğinde olması gerekir. Dikkat edilirse tutarlı bir önerme kümesi yeni önermeler eklemekle tutarsız bir kümeye çevrilebilir. Dolayısıyla herhangi bir sistemin kalıcı olarak tutarlı olup olmadığını saptamak için sistem dışındaki önermeleri de gözönünde tutmak gerekir. İşte gerek olağandışı bilimin gerekse bilim felsefesinin sorunlarının önemli bir özelliği, bunların çözümü için bilim dalının kendi önermeleri ile sınırlı kalmayıp ilgililerin tüm bilgilerinin hesaba katılması, dolayısıyla çok geniş, evrensel, disipliner-arası bir bakışa dayanılması zorunluluğudur.

Ancak tartışan taraflar, birbiriyle uyuşmayan çıkış noktaları olduğundan, birbiriyle bağdaşmayan ama her biri tutarlı olan çözümlere varabilirler. Tek çözüme varmanın koşulu, olağan bilimde olduğu gibi tartışan tarafların aynı bir paradigmayı, yani ortak temel kavramlar ve ilkelerden kaynaklanan aynı bir sorun çözme yöntemini paylaşmalarıdır. Olağandışı bilim ile bilim felsefesi sorunları için böyle bir koşulun gerçekleşmesi bu türlü sorunların özü gereği imkansızdır. Dolayısıyla bu sorunların her biri akıl ve mantığa uygun olan ama birbiriyle bağdaşmayan birçok çözümü olması kaçınılmazdır.

Şimdiye kadar olağandışı bilim sorunları ile bilim felsefesi sorunları arasındaki benzerlikleri vurguladık. En sonda ise aralarındaki ayırt edici özelliği belirtmek gerekir. Olağandışı bilim süreci, genellikle çatışan paradigmalardan birinin bilim adamları topluluğunca benimsenip yeni bir olağan bilim sürecinin tek paradigması durumuna gelmesiyle sona erer. Böylece olağandışı bilim sorunlarına verilmiş olan akılcı çözümlerden biri tarihsel bir gerçek olarak diğerlerine yeğlenmiş olur. Bu tek çözüm ise yeni olağan bilimin temel kavramları veya ilkeleri arasında yer alır. Oysa bilim felsefesinde, yeni olağan bilimde paradigma olarak benimsenmiş bir çözümün değerlendirilmesi sürdürülüp ret edilen eski çözüme göre üstün olup olmadığı araştırılabilir, ret edilen çözümün benimsenenden üstün (yani daha tutarlı) olduğu gösterilebilir.

KAYNAKÇA

CİLT I: ÖNERMELER MANTIĞI

Batuhan, Hüseyin ve Teo Grünberg: Modern Mantık (Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen ve Edebiyat Fakültesi Yayın. No: 17, Ankara 1984)

Grünberg, Teo: Symbolic Logic Vol. I (Orta Doğu Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayın No: 16, Ankara, 1972)

Grünberg, Teo: Sembolik Mantık I: Önermeler Mantığı (İ.Ü. Edebiyat Fakültesi Yayınları No: 1300., İstanbul 1960)

Grünberg, Teo ve Adnan Onart, Hüseyin Batuhan: Modern Mantık ve Uygulamaları (Milli Eğitim Bakanlığı, İstanbul 1976)

CİLT I.2. NİCELEME MANTIĞI

Batuhan, Hüseyin ve Teo Grünberg: Modern Mantık (Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen ve Edebiyat Fakültesi Yayın. No: 19, Ankara 1984)

Grünberg, Teo: Symbolic Logic Vol I (Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen ve Edebiyat Fakültesi Yayın. No: 16, Ankara 1972)

Grünberg, Teo: Symbolic Logic Vol II (Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen ve Edebiyat Fakültesi Yayın. No: 16, Ankara 1970)

Kalish, D. ve R. Montague: Logic Techniques of Formal Reasoning (Harcourt, Brace & World 1964)

Smullyan, R. M. First-Order Logic (Springer Verlag, 1968)

CİLT II.3 ÖZDEŞLİK MANTIĞI

Jeffrey, R: Formal Logic its Scope and Limits (Mcgraw-Hill, 1967)

Kalish, D. ve R. Montague: Logic: Techniques of Formal Reasoning (Harcourt, Brace & World, 1964)

CİLT II. 4 VARLIK MANTIĞI

Lambert, K ve Bas. C. Van Fraassen: Derivation and Counterexample (Dickenson, 1972)

CİLT II.5 KİPLİK MANTIĞI

Hughes, G.E ve J.M. Cresswell: an Introduction to Modal Logic (Methuen, 1968)

Hughes, G.E ve J.M. Cresswell: A New Introduction to Modal Logic (Routledge, 1996)

Kommymayk, K.: Introductory Modal Logic (University of Notre Dame Press, 1986)

Cilt II. 6. BİLGİ MANTIĞI

Hintikka, J. Knowledge and Belief (Cornell University Press, 1962)

Carlson, L. "Quantified Hintikka-Style Epistemic Logic" Synthese 74 (1988) 223-262

CİLT II.7 ÇOK DEĞERLİ MANTIK

Ackermann, R.: Introduction to Many-Valued Logics (Routledge and Kegan Paul, 1967)

CİLT II.8 ÖDEV MANTIĞI

Hilpimen, R. (ed.): Deontic Logic: Introductory and Systematic Readings (D. Reidel, 1971)

CİLT II.9 SORULAR MANTIĞI

Hintikka, J.: The Semantics of Questions and the Question of Semantics (Acta Philosophica Fennica Vol. 28, No: 4, North-Holland 1976)

CİLT II. 10 ZAMAN MANTIĞI

Van Benthem J.J.A.K.: The Logic of Time (D. Reidel, 1983)

CİLT II. 11 KOŞULLAR MANTIĞI

Harper, W. L. ve R. Stalmaker, G. Pearce (eds): IFS: Conditionals, Belief, Decision Chance and Time (D. Reidel, 1981)

Jackson, F.: Conditionals (Blacwell, 1987)

Lewis, D.K.: Counterfactuals (Harward University Press, 1973)

Nute, D.: Topics in Conditional Logic (D. Reidel 1980)

CİLT III. 12. MANTIĞIN ELEŞTİREL DÜŞÜNME VE AKILCI TARTIŞMAYA UYGULANMASI

Hintikka J.: The Semantics of Questions and the Question of Semantics (Acta Philosophica Fennica Vol. 28 No: 4, Nort-Holland 1976)

Hintikka, J ve Bachman, J.: WHAT IF...? Towards Excellence in Reasoning (Mayfield Pub. Com. 1991)

CİLT III. 13. KLASİK (GELENEKSEL) MANTIĞIN SEMBOLİK MANTIKLA ÇÖZÜMLENMESİ

Batuhan, Hüseyin ve Teo Grünberg: Modern Mantık (Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen ve Edebiyat Fakültesi Yayın. No: 17, Ankara 1984)

Öner, Necati: Klasik Mantık 6. Baskı, (A.Ü. İlahiyat Fakültesi Yayınları, Ankara 1991)

CİLT III. 14 KÜMELER KURAMI

Batuhan, Hüseyin ve Teo Grünberg: Modern Mantık (Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen ve Edebiyat Fakültesi Yayın. No: 17, Ankara 1976)

Zemman, E.J.: Introduction to Axiomatic Set Theory (Routledge and Kegan Paul, 1968)

Suppes, P.: Axiomatic Set Theory (D. Von Nosthand 1965)

CİLT III. 15. OTOMATİKLEŞMİŞ TEOREM İSPATLAMASI

Chang, C. ve R. C. Lee: Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving (Academic Press, 1973)

Filting, M.: First-Order Logic and Automated Theorem Proving (Springer - Verlag, 1990)

CİLT III. 16. OLASILIK KURAMININ MANTIKSAL TEMELLERİ

Batuhan, Hüseyin ve Teo Grünberg: Modern Mantık (Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen ve Edebiyat Fakültesi Yayın No: 17, Ankara 1984)

Kutlusoy Erkanlı, Zekiye: Logics - Philosophical Analysis of Comparative Probability (Yüksek Lisans Tezi, ODTÜ, 1985)

Skyrms, B.: Choice and Chance. An Introduction to Inductive Logic (Dickenson, 1966)

CİLT III. 17. MATEMATİĞİN MANTIKSAL TEMELLERİ

Beth, E.W.: The Foundations of Mathematics (North-Holland, 1968)

Samullyan, R.M.: Gödel's Incompleteness Theorems (Oxford U.P., 1992)

Suppes, P.: Axiomatic Set Theory (D.Van Northand, 1965)

CİLT III. 18 DOĞA BİLİMLERİNİN MANTIKSAL TEMELLERİ

Carnap, R.: Philosophical Foundations of Physics (Basic Boks. 1966)

Popper, K.R.: The Logic of Scientific Discovery (Hutchinson, 1959)

Salmon, M.et al.: Introduction to the Philosophy of Science (Prentice-Hall 1992)

Toulmin, S: The Philosophy of Science. An Introduction (Harper and Brothess, 1960)

CİLT III. 19 GÜNLÜK DİLİN SEMBOLLEŞTİRİLMESİ

Batuhan, Hüseyin Teo Grünberg ve Adnan Onart, Modern Mantık ve Uygulamaları (Millî Eğitim Bakanlığı, İstanbul 1976)

Tapscott, B.L.: Elementary Applied Symbolic Logic (Prentice-Hall,1976)

CİLT III. 20 MANTIK FELSEFESİ

Grünberg, Teo: "Mantık Felsefesi", Felsefe Dünyası, Türk Felsefe Derneği Yayın. Sayı 2 (1991) 8-14.

Haack, S.: Philosophy of Logics (Cambridge U.P., 1978)

TERİMLER DİZİNİ (3. CİLT)

A

açıklama öngören soru 288
akılcı tartışma 1
aksiyomatik olasılık kuramı 179
alt küme 72-73
atomsal Boole önermesi 77

B

bağıntı bileşmesi 117
bakışımlı fark 95
Bayes Yöntemi 285
belirsiz yanıtlı tartışma 12
bileşik Boole önermesi 82
bilgisel nicel olasılık 199
bilimsel açıklama 288-295
bilimsel kuram 261
bilimsel pekiştirme 270-288
bire-bir bağıntı 122
bire-çok bağıntı 122
birim öbeği 96
birleşim 68
birleşim öbeği 99
Boole öbeği 75
Boole terimi 75
boş küme 67

Ç

çoğa bir bağıntı 122
çözülüm yöntemi 138

D

dedüktif yasal açıklama 289-290
denetleme 351
deney 245
denklik bağıntısı 120
distribütif terim 30
doğal sayı 213

E

eleştirel düşünme 1
en-üstünlük bildiren cümle 328
evren 65

F

fark 68
fiziksel nicel olasılık 174
fonksiyon 122
fonksiyonların bileşmesi 126

G

genel kümeler kuramı 87
Glymour Yöntemi 279
gözlem 242
güç öbeği 99

H

Herbrand Evreni 153
Herbrand Yorumlaması 153
Hempel Yöntemi 275

I

ideal yasa 265
imge fonksiyon 127-128
ispat 232
istatistiksel açıklama 292-293
istatistiksel ilgi biçiminde nedensel açıklama 294

K

karşı olum yasası 39
karşılaştırmalı kavram 247
kesişim 68
kesişim öbeği 100
kiplikli basit önerme 37
klasik (geleneksel) mantık 27
kollektif terim 30
koşullu olasılık 172
kuram 261
kuramsal terim 244
küme 101
küme işlemi 68

M

mantık 339
mantık felsefesi 338
mantık ilkesi 352-353
mantıkça kapalı önerme kümesi 261

N

n'inci düzey öbeği 87
nicel kavram 249
nicel olasılık 171
nicel pekiştirme 285
Nicod Yöntemi 270
nitel kavram 246

O

olasılık kavramı 170-171
olasılıkça bağımsızlık 195
olasılıklı çıkarım 199-201
olumlu terim 32
olumsuz terim 32

Ö

öbeklenim 88
önerme 34
önerme biçiminde kuram 261
önerme biçiminde olmayan kuram 269
önermeler arası ilişki yasası 39
öz öbek 101
özdeşleştirme algoritması 160
özne-yüklem öermesi (basit-önerme) 35

P

Preneks Yasal Biçimi 147
rasgele sonuçlu deney 174

R

Russel öbeği 89, 90
Russel Paradoksu 89

S

sayal sayı 223-224
sayısal tümce 329
sembolleştirme 295
sınıflayıcı olasılık 171, 207
sıral sayı 217
sıralayıcı nicelik 255
sıralanmış ikili 106
Skolem Yasal Biçimi 150
somut terim 31
soyut terim 31

T

tanım 229-232
tanımlama adımı 16
tartışma çizelgesi 3
tartışma çözümlemesi 21
tasım 43

tasım biçimi 43-44
Te-tik'li Yasal Biçim 133
Te-tüm'lü Yasal Biçim 133
tekil betimlemeli tümce 334
tekil terim 28
ters fonksiyon 126
tikel evetlemeli tam-yasal biçim 181
tümevarım 272
tümevarımlı açıklama 292
tümleyen 69
tümleyen öbeği 96

V

varsayımlı dedüktif yöntem 282-283

Y

yanılgı 23
yapı 226
yasal önerme 263
yatkınlık terimi 256



1927 yılında İstanbul'da doğan Teo Grünberg, 1950 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Kimya Mühendisliği Bölümü'nden mezun olmuş, 1964 yılında aynı Üniversite'nin Edebiyat Fakültesi Felsefe Bölümü'nden doktora derecesini alarak, 1970 yılında Doçent, 1979 yılında da Profesör olmuştur.

1962-66 yıllarında İstanbul Üniversitesi Felsefe Bölümü'nde konferansçı ve uzman olarak çalışan Prof. Dr. Grünberg, 1966-82 yıllarında Orta Doğu Teknik Üniversitesi (ODTÜ) Beşeri İlimler Bölümü'nde görev yapmış, 1982-83 yıllarında Sosyoloji Bölümü Başkanlığı, 1983-94 yıllarında kurulması için öncülük ettiği Felsefe Bölümü'nün Başkanlığı ile Sistematik Felsefe ve Mantık Anabilim Dalı Başkanlığı görevlerini yürütmüş, 1994 yılından itibaren de emekli olarak ODTÜ Felsefe Bölümü'ndeki derslerine devam etmiştir. Prof. Dr. Grünberg, ODTÜ'deki görevlerine ek olarak, 1968-79 yıllarında Ankara Üniversitesi Dil ve Tarih-Coğrafya Fakültesi Felsefe Bölümü'nde, 1989-90 yıllarında da Bilkent Üniversitesi Mühendislik Fakültesi'nde görev almıştır.

Prof. Dr. Teo Grünberg, 1967 yılında Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Dairesi lise modern mantık reform komisyonu üyesi, 1967-76 yıllarında lise felsefe öğretmenlerine hizmet içi modern mantık yaz kursları öğretim üyesi olarak görev yapmıştır. 1990-91 yıllarında Talim ve Terbiye Dairesi lise mantık ve felsefe dersleri müfredat komisyonu üyeliği görevlerinde de bulunmuştur.

Mantığa dayalı argümantatif (ya da analitik) düşünme geleneğinin felsefe eğitim ve araştırmaları içinde vazgeçilmez bir öğe olması yönünde çaba gösteren Prof. Dr. Teo Grünberg'in bir bölümü uluslararası dergilerde yayınlanmış 35'i aşkın makale ve bildirisi ile 15 kitabı bulunmaktadır.

Modern Mantığı Türkiye'de Üniversite ve Lise eğitimi düzeyinde kabul ettirip yaygınlaştırması, çok sayıda eleman yetiştirerek bu alanın ülkemizde kurumsallaşmasında ve gelişiminde belirleyici hizmetleri nedeniyle Prof. Dr. Grünberg'e 1998 yılında Türkiye Bilimler Akademisi Hizmet Ödülü verilmiştir.

975-7064-34-3

15.00 YTL
KDV DAHİL

ISBN 975-7064-31-9 (Tk. No)
975-7064-34-3 (3. Cilt)