Teo grünberg

sembolik mantık el kitabı 2

METU PRESS

Millî Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığının **04.06.2001** tarih ve **6333** sayılı yazısı ile Orta Öğretim Kurumları öğretmen ve öğrencileri için **on yıl** süre ile tavsiye edilmiştir.

SEMBOLİK MANTIK EL KİTABI

II. CİLT
ÖZEL MANTIK SİSTEMLERİ

Teo GRÜNBERG

METU
PRESS

ODTÜ Geliştirme Vakfı
Yayıncılık ve İletişim A.Ş. - **METU PRESS** -
Yayınları.

© Tüm yayın hakları ODTÜ Geliştirme Vakfı Yayıncılık ve İletişim A.Ş.'nindir. Yayıncının izni olmaksızın, hiçbir biçimde ve hiçbir yolla, bu kitabın içeriğinin hiçbir bölümü ya da tümü yeniden üretilemez ve dağıtılamaz.

Birinci Baskı : Kasım 2000

Dizgi-Sayfa Mizanpajı : Leyla ALP

Kapak Tasarım : Burcu GÜNDÜZ

Baskı: Mert Matbaası

ODTÜ Geliştirme Vakfı
Yayıncılık ve İletişim A.Ş.- **METU PRESS**-
İnönü Bulvarı, ODTÜ Yerleşkesi
06531 ANKARA
Tlf : 0(312) 210 38 70 - 210 38 73
Faks : 0(312) 210 15 49
http : //metupress.com.tr
E-Posta : metupres@tr.net

ISBN : 975-7064-31-9 (Tk. No)
975-7064-32-7 (1. Cilt)
975-7064-33-5 (2. Cilt)
975-7064-34-3 (3. Cilt)

ÖNSÖZ

Modern sembolik mantık dersleri 1967 yılından bu yana lise ve üniversitelerimizde yaygınlaşarak okutulmaktadır. Bu alanda şimdiye dek yedi tane ders kitabı yazdım. Ancak, sembolik mantık hızla gelişmekte ve uygulamaları artmaktadır.

Üç ciltlik Sembolik Mantık El Kitabı'nı çeşitli mantık sistemlerini ve uygulamalarını geniş bir okuyucu kitlesine, özellikle lise öğretmenleri ile üniversite ve lise öğrencilerine tanıtmak amacıyla hazırladım.

Birinci ciltte temel mantığı oluşturan Önermeler Mantığı ile Niceleme Mantığı (Yüklemler Mantığı); ikinci ciltte Özdeşlik Mantığı, Varlık Mantığı, Kiplikler Mantığı, Bilgi Mantığı, Çok Değerli Mantık, Ödev Mantığı, Sorular Mantığı, Zaman Mantığı ve Koşullular Mantığı'nı ele aldım. Üçüncü ciltte ise, sembolik mantığın uygulamaları olarak Eleştirel Düşünme ve Akılcı Tartışma, Klasik (Geleneksel) Mantık, Kümeler Kuramı, Otomatikleşmiş Teorem İspatlaması, Olasılık Kuramının Mantıksal Temelleri, Matematiğin Mantıksal Temelleri, Doğa Bilimlerinin Mantıksal Temelleri, Sembolleştirme ve son olarak Mantık Felsefesi konularını ele aldım.

Kitabın temize çekilmesinde emeğini esirgemeyen eşim Rahel Grünberg'e teşekkür borçluyum.

Ayrıca birinci cildin düzeltmelerini yapan İskender Taşdelen'e, ikinci cildin düzeltmelerini yapan ve bütün yapıtın terimler dizinini hazırlayan Besim Karakadılar'a ve üçüncü cildin düzeltmelerini yapan M. Cem Kamözüt'e büyük yardımlarından dolayı candan teşekkür ederim.

Teo GRÜNBERG

Bu yapıtı beni felsefe ve mantığa yöneltmiş olan çok sevgili dostum, örnek insan Hüseyin Batuhan'a ithaf ediyorum.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLİK MANTIK EL KİTABI
İKİNCİ CİLT: ÖZEL MANTIK SİSTEMLERİ

3. ÖZDEŞLİK MANTIĞI 1
3.1 Sembolleştirme 1
3.1.1 Özdeşlikler 1
3.1.2 n'li İşlem-İşareti Temsilcileri ve Terimler 4
3.1.3 Tekil Tamdeyimler 7
3.1.4 Genel Tamdeyimler 10
3.2 Yorumlama 12
3.2.1 Tekil Önermelerin Yorumlanması 12
3.2.2 Genel Önermelerin Yorumlanması 14
3.2.3 Doğruluk Değeri Hesaplaması 16
3.2.4 Özdeşlik Mantığı Yasaları 18
3.3 Çözümleyici Çizelge Yöntemi 20
3.3.1 Tekil Önermelerin Çözümleyici Çizelgesi 20
3.3.2 Genel Önermelerin Çözümleyici Çizelgesi 23
3.3.3 Çözümleyici Çizelge ile Doğrulayıcı Yorumlama Belirlenmesi ..27
3.3.4 Çözümleyici Çizelge ile Doğruluk Değeri Hesaplaması 31
3.4 Türetim Yöntemi 35
4. VARLIK MANTIĞI 39
4.1 Sembolleştirme 39
4.1.1 Varlık Önermeleri ve Tekil Önermeler 39
4.1.2 Genel Önermeler 41
4.2 Yorumlama 43
4.2.1 Tekil Önermelerin Yorumlanması 43
4.2.2 Genel Önermelerin Yorumlanması 45
4.3 Varlık Mantığı Yasaları 47
4.4 Çözümleyici Çizelge Yöntemi 49

4.4.1 Çözümleyici Çizelge ile Denetleme 49
4.4.2 Çözümleyici Çizelge ile Doğrulayıcı Yorumlama Belirlemesi 53
4.4.3 Çözümleyici Çizelge ile Doğruluk Değeri Hesaplaması 57
5. KİPLİKLER MANTIĞI 62
5.1 Kiplikli Önermeler Mantığı 62
5.1.1 Sembolleştirme 62
5.1.1.1 Kiplik Önermeleri 62
5.1.1.2 Bileşik Önermeler 65
5.1.2 Yorumlama 66
5.1.2.1 Kiplik Önermelerinin Yorumlanması 66
5.1.2.2 Bileşik Önermelerin Yorumlanması 70
5.1.3 Çözümleyici Çizelge 73
5.1.3.1 Çözümleyici Çizelge ile Doğruluk Değeri Hesaplaması 73
5.1.3.2 Çözümleyici Çizelge ile Doğrulayıcı Yorumlama Belirlemesi 79
5.1.3.3 Çözümleyici Çizelge ile Denetleme 84
5.1.4 Almaşıklık Bağıntılı Yorumlama ve Normal Sistemler 88
5.1.4.1 Bağıntılar 88
5.1.4.2 Almaşıklık Bağıntılı Yorumlamalar 96
5.1.4.3 Normal Sistemler 101
5.1.5 K Sistemi 104
5.1.5.1 K Sistemi Yasaları 104
5.1.5.2 Çözümleyici Çizelge ile Doğruluk Değeri Hesaplaması 107
5.1.5.3 Çözümleyici Çizelge ile Yorumlama Belirlemesi 111
5.1.5.4 K Sisteminde Çözümleyici Çizelge ile Denetleme 119
5.1.6 D Sistemi 122
5.1.7 Ver Sistemi 127
5.1.7.1 Doğruluk Değeri Hesaplaması 127
5.1.7.2 Doğrulayıcı Yorumlama Belirlemesi 129
5.1.7.3 Denetleme 131
5.1.8 Triv Sistemi 134
5.1.8.1 Doğruluk Değeri Hesaplaması 134
5.1.8.2 Doğrulayıcı Yorumlama Belirlemesi 135
5.1.8.3 Denetleme 138

5.1.9 T Sistemi 140
5.1.9.1 Çözümleyici Çizelge ile Doğruluk Değeri Hesaplaması 140
5.1.9.2 Çözümleyici Çizelge ile Doğrulayıcı Yorumlama Belirlemesi 143
5.1.9.3 Çözümleyici Çizelge ile Denetleme 145
5.1.10 B Sistemi 147
5.1.11. S4 Sistemi 152
5.1.11.1 Çözümleyici Çizelge 152
5.1.11.2 S4 Sisteminin Kiplikleri 155
5.1.12 S5 Sistemi 159
5.1.12.1 Çözümleyici Çizelge 159
5.1.12.2 S5 Sisteminin Kiplikleri 162
5.1.13 Normal Olmayan Sistemler 164
5.1.13.1 Normal Olmayan Yorumlamalar 164
5.1.13.2 Normal Olmayan Mantık Sistemleri 167
5.1.13.3 $E2^0$ Düzgün Sistemi 169
5.1.13.4 $S2^0$ Yarı-Düzgün Sistemi 174
5.1.14 Gerektirme ve Karşılıklı-Gerektirme Eklemleri 177
5.2 Kiplikli Niceleme Mantığı 180
5.2.1 Değişmez Evrenli Kiplikli Niceleme Mantığı 180
5.2.1.1 Sembolleştirme 180
5.2.1.2 Yorumlama 182
5.2.1.3 Çözümleyici Çizelge ile Doğruluk Değeri Hesaplaması 183
5.2.1.4 Çözümleyici Çizelge ile Doğrulayıcı Yorumlama Belirlemeleri 186
5.2.1.5 Çözümleyici Çizelge ile Denetleme 192
5.2.2 Yuvalanmış Değişen Evrenli Kiplikli Niceleme Mantığı 196
5.2.2.1 Değişen Evrenli Yorumlamalar 196
5.2.2.2 Çözümleyici Çizelge ile Doğruluk Değeri Hesaplaması 197
5.2.2.3 Çözümleyici Çizelge ile Doğrulayıcı Yorumlama Belirlemesi 200
5.2.2.4 Çözümleyici Çizelge ile Denetleme 202
5.2.3 Değişen Evrenli Kiplikli Niceleme Mantığı 205
5.2.4 Kiplikli Değişmezlerin Nesnel ve Sözel Kullanılışları 208
5.3 Kiplikli Özdeşlik ve Varlık Mantığı 211
5.3.1 Katı Terimli Kiplikli Varlık Mantığı 211

5.3.1.1 Yorumlama 211
5.3.1.2 Çözümleyici Çizelge ile Doğruluk Değeri Hesaplaması 213
5.3.1.3 Çözümleyici Çizelge ile Doğrulayıcı Yorumlama Belirlemesi 215
5.3.1.4 Çözümleyici Çizelge ile Denetleme 218
5.3.2 Esnek Terimli Kiplikli Varlık Mantığı 220
5.3.2.1 Esnek Terimler: Betimlemeler 220
5.3.2.2 Çözümleyici Çizelge 225
5.3.3 Kavramsal Niceleyicili Kiplikli Varlık Mantığı 231
6. BİLGİ MANTIĞI 235
6.1 Bilgisel Önermeler Mantığı 235
6.1.1 Sembolleştirme ve Bilme Türleri 235
6.1.2 Bilginin Tanımlanması 239
6.1.3 Doğruluk Kavramı 242
6.1.3.1 "Doğru"nun Çeşitli Kullanılışları 242
6.1.3.2 Anlam Bilimsel Doğruluk Kavramı 246
6.1.4 Yorumlama 247
6.1.5 Çözümleyici Çizelge ile Doğruluk Değeri Hesaplaması 250
6.1.6 Çözümleyici Çizelge ile Doğrulayıcı Yorumlama Belirlemesi 254
6.1.7 Bilgisel Önermeler Mantığı Yasaları ve Çözümleyici Çizelge İle Denetleme 259
6.1.8 Bilgisel Sorunlar ve Çözüm Önerileri 265
6.1.8.1 Bilginin Kişiler Arası iletişimi 265
6.1.8.2 Moore Çatışkısı 268
6.1.8.3 Kanısal Tutarsızlık, Kanısal Geçerlilik ve Kanısal İçerme 269
6.1.8.4 Bilgisel Tutarsızlık ve Bilgisel İçerme 270
6.1.8.5 Bilgi ile Kanı Arasındaki Farklar 272
6.1.8.6 Yanılma Sorunu 274
6.1.8.7 "Bildiğini bilme" Sorunu 275
6.1.8.8 "Kandığına kanma" Sorunu 276
6.1.9 Bilinme Değişmezi 277
6.2 Bilgisel Varlık Mantığı 278
6.2.1 Yorumlama 278
6.2.2 Ne, ne zaman, nerede olduğunu bilme 284

6.2.3 Özdeşlerin Değiş Tokuşu Kuralı 285
6.2.4 Saydam ve Saydamsız Konumlar 288
6.2.5 Bilgisel Değişmezlerin Nesnel Kullanılışı ve Tikel Niceleyiciye Giriş Kuralı 290
6.2.6 Kimin Olduğunu Bilme 292
6.2.7 Bilgisel Tümel Önermeler ve Bilgisel Varlık Mantığı Yasaları....294
7. ÇOK DEĞERLİ MANTIK 295
7.1 Çok Değerli Mantık Sistemleri: Doğruluk Değerleri ve Yorumlamalar ..295
7.2 Üç Değerli Lukasiewicz Sistemi 295
7.2.1 Beş Temel Eklem 295
7.2.2 Geçerlilik, Tutarlılık, İçerme ve Eşdeğerlik 297
7.2.3 İlâve Eklemler....302
7.2.4 n-Değerli ve Sonsuz Değerli Lukasiewicz Sistemleri 304
7.3 Üç Değerli Reichenbach Sistemi 305
7.4 Üç Değerli Bochwar Sistemi 308
8. ÖDEV MANTIĞI 313
8.1 Sembolleştirme 313
8.2 Birli Ödevsel Mantık Sistemleri 316
8.2.1 Yorumlama 316
8.2.2 Çözümleyici Çizelge ile Doğrulayıcı Yorumlama Belirlemesi ..319
8.2.3 Çözümleyici Çizelge ile Denetleme 321
8.3 Birli Ödevsel Mantık Sistemlerinin Kiplik Mantığı Sistemlerine İndirgenmesi....323
8.4 Ödev Mantığı Paradoksları 326
8.4.1 Alf Ross Paradoksu 326
8.4.2 Koşullu Ödev Paradoksu....327
8.4.3 Ödeve Aykırı Buyruk Paradoksu 329
9. SORULAR MANTIĞI....332
9.1 İstek-Önermesi ve Erek-Önermesi 332
9.2 Öndayanak 334
9.3 Tekli Seçenek Soruları 336
9.4 Tümlü Seçenek Soruları....339
9.5 Tekli Kimlik Soruları 340

9.6 Tümlü Kimlik Soruları 343
9.7 Tekli Seçenek Sorularının Tam-Yanıtları 344
9.8 Tümlü Seçenek Sorularının Tam-Yanıtları 346
9.9 Tekli Kimlik Sorularının Tam-Yanıtları 348
9.10 Tümlü Kimlik Sorularının Tam-Yanıtları 349
9.11 Çoklu Kimlik Soruları 350
10. ZAMAN MANTIĞI 353
10.1 Sembolleştirme ve Yorumlama 353
10.1.1 Sembolleştirme ve Zaman Çekimi Değişmezleri 353
10.1.2 Yorumlama ve Doğruluk Değeri Hesaplaması 356
10.2 Zaman Mantığı Sistemleri 361
10.2.1 ZM_0 Zaman Mantığı Sistemi 361
10.2.2 ZM_1 Zaman Mantığı Sistemi 364
10.2.3 ZM_2 Zaman Mantığı Sistemi 365
10.2.4 ZM_3 Zaman Mantığı Sistemi 368
10.2.5 ZM_4 Şimdiki Zaman Değişmezli Zaman Mantığı Sistemi 369
11. KOŞULLULAR MANTIĞI 374
11.1 Koşul Eklemleri ve Koşullu Önerme Türleri 374
11.2 Bildiri Kipinden Koşullular 376
11.2.1 Bildiri Kipinden Koşulluların Eşdeğerlik Savı 376
11.2.2 Bildiri Kipinden Koşulluların Paradoksları 378
11.2.3 Bildiri Kipinden Koşulluların İleri Sürülebilme Derecesi 380
11.2.4 Adams Eşitliğinin Gerekçeleri 381
11.3 Dilek Kipinden Koşullular 382
11.3.1 Sembolleştirme 382
11.3.2 Stalnaker Kuramı 385
11.3.2.1 Yorumlama 385
11.3.2.2 C2 Koşullular Mantığı Sistemi 387
11.3.3 Lewis Kuramı 390
11.3.3.1 Yorumlama 390
11.3.3.2 VC Sistemi 394
Kaynakça 395
Dizin 399

BİRİNCİ VE ÜÇÜNCÜ CİLTLERİN ANA BAŞLIKLARI

BİRİNCİ CİLT: TEMEL MANTIK

1. ÖNERMELER MANTIĞI
2. NİCELEME MANTIĞI

ÜÇÜNCÜ CİLT: SEMBOLİK MANTIĞIN UYGULAMALARI

12. MANTIĞIN ELEŞTİREL DÜŞÜNME VE AKILCI TARTIŞMAYA UYGULANMASI
13. KLASİK (GELENEKSEL) MANTIĞIN SEMBOLİK MANTIKLA ÇÖZÜMLENMESİ
14. KÜMELER KURAMI
15. OTOMATİKLEŞMİŞ TEOREM İSPATLAMASI
16. OLASILIK KAVRAMLARININ MANTIKSAL TEMELLERİ
17. MATEMATİĞİN MANTIKSAL TEMELLERİ
18. DOĞA BİLİMLERİNİN MANTIKSAL TEMELLERİ
19. SEMBOLLEŞTİRME
20. MANTIK FELSEFESİ

CİLT II: ÖZEL MANTIK SİSTEMLERİ

3. ÖZDEŞLİK MANTIĞI

3.1 Sembolleştirme

3.1.1 Özdeşlikler

"Özdeş" (veya aynı anlamına gelen "eşit" ile "aynı") sözcüğü *özdeşlik* (veya eşitlik) değişmezi denilen bir mantık değişmezini dile getirir. Bu değişmez "=" işaretiyle gösterilir. "=" işareti bir ikili yüklemdir. Nitekim "a" ile "b" birer ad temsilcisi olduğundan

(1) a = b

bir önermedir. (1) önermesi bir atomsal önermedir. Nitekim "=" işareti bir ikili yüklem olarak en başa da yazılabilir. O zaman da (1) önermesi

(2) =(a, b)

biçiminde dile getirilir. (2)'nin ise atomsal önerme olduğu açıktır. (1) veya (2), "*a* ile *b* özdeştir" veya "*a* ile *b* eşittir" biçiminde okunur. (1) veya (2)'ye *özdeşlik önermesi* veya kısaca *özdeşlik* denir. "Özdeşlik" yerine "eşitlik" de kullanılır.

Günlük dilde ve bilim dilinde özdeşlik niteliğinde olan tümceler vardır. Örneğin

(3) Ankara Türkiye'nin başkentidir

tümcesi

(4) Ankara = Türkiye'nin başkenti

anlamına gelen bir özdeşlik sayılabilir. Burada "Ankara" ile "Türkiye'nin başkenti" ad işlevindedir.

Öte yandan

(4) İki artı iki dört eder

tümcesi de matematik dilinde

(5) 2 + 2 = 4

özdeşliği ile dile getirilir. Burada "2 + 2" ile "4" birer ad niteliğindedir.

"=" yüklemi niceleme mantığında bir mantık değişmezi sayılmaz. Dolayısıyla içinde "=" yüklemi geçen bir önerme veya çıkarım, niceleme mantığında sembolleştirildiği zaman "=" yerine bir ikili yüklem temsilcisi konulur. Böylece günlük dilde veya bilim dilinde geçerli olan ve özdeşliğe dayanan bazı çıkarımların niceleme mantığındaki sembolik karşılıkları geçersiz olur. Örneğin

27 = 20 + 7, 27 tek sayıdır, o halde 20 + 7 tek sayıdır çıkarımı

(6) (27: a, 20 + 7 : b, tek sayıdır: F, =: G)

sembolleştirme biçimi gereği

(7) Gab, Fa ∴ Fb

biçiminde sembolleştirildi. Oysa (7) geçersizdir. Nitekim (7)'nin geçersiz kılıcı kümesi olan

(8) {Gab, Fa, ~Fb}

kümesinin

(9) (E: {a, b}; Gab, Fa)

gibi bir doğrulayıcı yorumlaması vardır.

Günlük dilden örnek olarak

(10) Kızılırmak Türkiye'nin en büyük ırmağıdır; Kızılırmak Karadeniz'e akar; o halde Türkiye'nin en büyük ırmağı Karadeniz'e akar.

çıkarımını göz önüne alalım. Bu çıkarım

(11) Kızılırmak = Türkiye'nin en büyük ırmağı; Kızılırmak Karadeniz'e akar; o halde Türkiye'nin en büyük ırmağı Karadeniz'e akar

biçimini alır. (11) çıkarımının sembolik karşılığı

(12) (Kızılırmak: a, Türkiye'nin en büyük ırmağı: b, Karadeniz'e kara: F, = : G)

sembolleştirme biçimi gereği gene (7) çıkarımıdır. Oysa (10) ile (11)'in geçerli olmasına karşın (7) geçersizdir.

Böylece niceleme mantığının özdeşliğe dayanan çıkarımların geçerliliğini denetlemeye yetmediği ortaya çıkar.

Özdeşlik mantığı, niceleme mantığının mantık değişmezlerine özdeşlik değişmezini ve bu yeni değişmeze ilişkin denetleme kurallarını katarak özdeşliğe dayanan çıkarımların da denetlemesini sağlayan bir mantık sistemidir.

Özdeşlik mantığında sembolleştirme yapılırken, "=" işareti bir mantık değişmezi olduğundan, onun yerine bir yüklem temsilcisi konulmaz. Buna göre (6) çıkarımının sembolleştirme biçimi

(13) (27: a, 20 + 7: b, tek sayıdır: F)

biçimini, (11)'in sembolleştirme biçimi de

(14) (Kızılırmak: a, Türkiye'nin en büyük ırmağı: b, Karadeniz'e akar: F)

biçiminde olup (6) ile (11) çıkarımlarının ortak sembolik karşılığı

(15) a = b, Fa ∴ Fb

olur. İleride göreceğimiz gibi, (15) çıkarımı özdeşlik mantığında geçerlidir. (15)'in geçerli olduğu, özdeşlik mantığının denetleme kurallarına dayanarak denetlenebilir. Özdeşlik mantığının denetleme yöntemleri (niceleme mantığında olduğu gibi) çözümleyici çizelge ile türetim yöntemleridir.

Özdeşliklerin sembolleştirilmesine örnek olarak

(16) Ali'nin en büyük kardeşi Behçet'in babasıdır

tümcesini

(Ali'nin en büyük kardeşi: a, Behçet'in babası: b)

sembolleştirme bçimine göre sembolleştirelim. Elde edilen sembolik karşılık

(17) a = b

biçimindedir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki tümceleri verilen sembolleştirme biçimleri gereği birer özdeşlik biçiminde sembolleştiriniz.

1. Behice Ali'nin annesidir.

   (Ali'nin annesi: a, Behice: b)

2. $5 = 7 - 2$

   (5: a, $7 - 2$: b)

3. Türkiye'nin başkenti Ankara'dır.

   (Ankara: a, Türkiye'nin başkenti: b)

3.1.2 n-li İşlem İşareti Temsilcileri ve Terimler

Matematik dilinde kullanılan "+", "x" gibi işaretlere işlem işareti denir. "+" (artı) ile "x" (çarpı) işaretleri ikili işlem işareti, bir sayının önündeki "–" (eksi işareti ise birli işlem işaretidir.) Genel olarak bir *n-li işlem işareti,* n tane addan bir karmaşık ad (veya tekil terim) oluşturan söz demektir. Özdeşlik mantığı dilinde n-li işlem işaretleri *n-li işlem işareti temsilcisi* denilen f^n, g^n, h^n gibi harflerle sembolleştirilir.

Tekil terimler veya kısaca *terimler* adlar, değişkenler ve bunların işlem işaretleriyle birleştirilmesinden oluşan sözlerdir. Adlar ve değişkenler *basit terimler,* içinde işlem işareti geçen terimler ise *karmaşık terimler*dir. Örneğin "0", "1", "2", ... gibi sayı adları ile "x", "y", "z" gibi değişkenler basit terimler, içinde "+" işlem işareti geçen

(1) $2 + 3$

terimi karmaşık terimdir.

Değişkenler ile içinde değişken geçen karmaşık terimlere *açık terim,* veya içinde değişken geçmeyen terimlere ise *kapalı terim* veya kısaca *terim* denir. ("Terim'i genellikle "kapalı terim" anlamında kullanacağız.) Örneğin (1) bir (kapalı) terim,

(2) $x + 3$

bir açık terimdir.

Sembolik dilin basit kapalı terimleri a, b, c, ... gibi ad temsilcileri basit açık terimleri x, y, z, ... gibi değişkenlerdir. Karmaşık terimler ise basit terimlerin işlem işareti temsilcileri ile birleştirilmesinden oluşur. Örneğin

(3) xf^2a

sembolik dile ait bir karmaşık açık terimdir. İçinde "x" değişkeni geçtiğinden dolayı açık, içinde f^2 işlem işareti temsilcisi geçtiğinden dolayı da karmaşık terimdir.

İmdi (3) yani "xf^2a", matematik diline ait (2) teriminin

(4) $(2: a, +: f^2)$

sembolleştirme biçimi gereği *sembolik karşılığı*dır.

Örnek olarak

(5) $1 - Cosx$

teriminin

(6) $(1: a, -: f^2, cos: g^1)$

sembolleştirme biçimi gereği sembolik karşılığını bulalım. Bu terim

(7) af^2g^1x

biçimindedir. (7) bir karmaşık açık terimdir.

Başka bir örnek olarak

(8) $(-2) + 3$

teriminin

(9) $(2: a, 3: b, -: f^1, +: g^2)$

sembolleştirme biçimi gereği sembolik karşılığını bulalım. Dikkat edilirse (8) teriminde geçen "–" (eksi) işlem işareti ikili işlem işareti değil, birli işlem işareti durumundadır. Bu nedenle "–" yi f^1 işlem işareti temsilcisiyle sembolleştirdik. Buna göre (8)'in sembolik karşılığı

(10) $(f^1a)\ g^2b$

dir.

Günlük dilde de işlem işareti işlevinde olan sözler vardır. Örneğin

(11) Ali'nin babası

"Ali" adı ile "nin babası"ndan oluşan bir karmaşık terim sayılabilir. O zaman "nin babası" sözünün, "Ali" adından (11) gibi bir terim oluşturduğunu

söyleyebiliriz. Dolayısıyla "nin babası" sözü bir birli işlem işareti sayılmalıdır. (11) teriminin sembolik karşılığı

(12) (Ali: a, "nin babası": f^1)

sembolleştirme biçimi gereği

(13) f^1a

dır. Öte yandan

(14) Fenerbahçe-Galatasaray maçı

terimi, "Fenerbahçe" ve "Galatasaray" adlarıyla, ikili işlem işareti durumundaki "maçı" sözünden oluşuyor. Buna göre (14) teriminin sembolik karşılığı

(15) (Fenerbahçe: a, Galatasaray: b, maçı: f^1)

sembolleştirme biçimi gereği

(16) af^2b

veya

(17) f^2ab

dir.

Sembolik dilin terimlerini sözeden dilde t, t_1, ..., t_n, ... gibi terim değişkenleri ile gösteriyoruz. Buna göre her karmaşık terim, f^n bir n-li işlem işareti temsilcisi ve t_1, ..., t_n n tane terim olmak üzere

(18) $f^n\ t_1 \ldots t_n$

biçimindedir. Ancak n = 2 durumunda "$f^2t_1t_2$" yerine "$t_1f^2t_2$" gibi de yazılabilir.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki terimlerin verilen sembolleştirme biçimleri gereği sembolik karşılıklarını bulunuz.

1. Ali'nin baba annesi
   (Ali: a, babası: f^1, annesi: g^1)

2. $(2 \times 5) - 1$

   $(2: a, 5: b, 1: c, x: f^2, -: g^2)$

3. $(3 + x) - y$

   $(3: a, +: f^2, -: g^2)$

II. Aşağıdaki terimlerin basit veya karmaşık, açık veya kapalı olduklarını belirtiniz.

1. c
2. y
3. cf^2y
4. $(f^1c)\ g^2y$
5. $(f^1a)\ g^2\ (h^1x)$

3.1.3 Tekil Tamdeyimler

F bir n-li yüklem temsilcisi ve t_1, ..., t_n n tane terim olduğunda,

(1) $Ft_1, \ldots t_n$

biçimindeki söze *atomsal tamdeyim* diyoruz. n = 0 sınır durumunda sıfırlı "F" yüklemi tek başına p gibi bir önerme temsilcisi sayılır. Niceleme mantığının atomsal tamdeyimleri, özdeşlik mantığının tamdeyimlerinin özel hali sayılmalıdır. Niceleme mantğında t_1, ..., t_n hep basit terim olur, özdeşlik mantığında ise t_1, ..., t_n basit olduğu gibi karmaşık terim de olabilir. Örneğin

(2) Fab

(3) Fax

(4) F(ga)b

(5) F(gx)b

atomsal tamdeyimlerdir. (2) le (3)'ün terimleri basit terimlerdir. (4) ile (5)'te ise karmaşık terimler geçiyor. (2) ile (4) kapalı atomsal deyimler, (3) ile (5)'te açık atomsal tamdeyimlerdir. Nitekim (2) ile (4)'te değişken geçmiyor, (3) ile (5)'te ise değişken geçiyor.

Özdeşlik mantığında (1) biçimindeki atomsal tamdeyimlerden başka bir de

(6) $t_1 = t_2$

biçimindeki atomsal tamdeyimler bulunur. Bunlara "özdeşlik" dediğimizi daha önce belirtmiştik.

Örneğin

(7) $a = b$

basit terimli (yani bütün terimleri basit olan) kapalı bir özdeşlik

(8) $a = x$

ve

(9) $x = y$

basit terimli açık birer özdeşlik,

(10) $a = f^1b$

karmaşık terimli (yani en az bir karmaşık terimi olan) kapalı bir özdeşlik,

(11) $a = f^1x$

karmaşık terimli açık bir özdeşliktir.

Matematik dilinin denklemleri, (6) biçimindeki karmaşık terimli açık atomsal deyimler olarak sembolleştirilebilir. Örneğin

(12) $x + 3 = 0$

denkleminin sembolik karşılığı

(13) $(0: a, 3: b, +: f^2)$

sembolleştirme biçimi gereği

(14) $xf^2b = a$

dır.

Başka bir örnek olarak

(15) $2x - 6 = 0$

denkleminin sembolik karşılığı

(16) (0: a, 2: b, 6: c, x: f^2, –: g^2)

sembolleştirme biçimi gereği

(17) (bf^2x) g^2c = a

dır. Nitekim "2x", "2xx"in kısaltmasıdır.

İmdi (1) ile (6) biçimindeki atomsal tamdeyimlerin önerme eklemleriyle birleştirilmesinden *bileşik tekil tamdeyimler* oluşturulur. Örneğin

(18) $a = f^1b \rightarrow G^2ax$

açık, bileşik, tekil, karmaşık terimli tamdeyim niteliğindedir. Öte yandan

(19) $a = b \rightarrow p$

kapalı, bileşik, basit terimli tamdeyim niteliğindedir.

Örnek olarak

(20) $[2 = -(-2)] \rightarrow [3 = -(-3)]$

tümcesinin sembolik karşılığını

(21) (2: a, 3: b, –: f^1)

sembolleştirme biçimi gereği bulalım. Bu da

(22) $[a= f^1(f^1a)] \rightarrow [b = f^1(f^1b)]$

biçiminde bir kapalı bileşik tamdeyimdir.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki tümcelerin verilen sembolleştirme biçimleri gereği sembolik karşılıklarını bulunuz.

1. Ali'nin babası Behçet'in de babasıdır.
   (Ali: a, Behçet: b, "nin babası": f^1)
2. Ali'nin anne annesi Behice'dir.
   (Ali: a, Behice: b, nin annesi: f^1)
3. 2 + 3 tek sayıdır.
   (2: a, 3: b, +: f^2, tek sayıdır: G)

4. $x < 3 \rightarrow x + 1 < 3 + 1$
   (1: a, 3: b, +: f^2, <:G)
5. $x = y + 1 \rightarrow x < y$
   (1: a, +: f^2, <: G)

II. Aşağıdaki tamdeyimlerin açık veya kapalı, atomsal veya bileşik, basit terimli veya karmaşık terimli olduklarını belirtiniz.

1. $x < y$
2. $x < a$
3. $(a = xf^2b) \rightarrow (p \vee q)$
4. $(b < x) \leftrightarrow (bf^2a < g^1x)$
5. $af^2(g^1b) = (h^1a)\, f^2x$

3.1.4 Genel Tamdeyimler

İçinde niceliyici geçen tamdeyimler *genel* tamdeyimler'dir. İçinde "=" özdeşlik yüklemi geçen genel önermelere örnek olarak

(1) $\forall x(x = x)$

(2) $\forall x \forall y(x = y \rightarrow y = x)$

(3) $\forall x \forall y \forall z[(x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z]$

önermelerini göz önüne alalım. Bu üç önerme "=" özdeşlik yükleminin üç önemli özelliğini dile getirir. (1) önermesi *özdeşlik ilkesinin* bir biçimidir. (1) ilkesi her şeyin kendiyle özdeş olduğunu dile getirir. (2) önermesi özdeşliğin *bakışım* özelliğini dile getirir. Buna göre x, y ile özdeş ise y de x ile özdeştir. (3) önermesi de özdeşliğin *geçişlilik* özelliğini dile getirir. (3)'e göre x y ile özdeş, y de z ile özdeş ise, x z ile özdeş olur. (1), (2), (3)'ün geçerli olduğunu ilerde gerek çözümleyici çizelge ile, gerekse türetimle gösterebileceğiz.

Özdeşliğe dayalı genel önermelerin sembolleştirilmesine örnek olarak

(4) Aynı bireyle özdeş olan bireyler özdeştir tümcesini sembolleştirelim. Aynı birey x olup, x le özdeş olan bireyler y ile z olsun. O zaman (4)

$\forall x \forall y \forall z[(y = x \wedge z = x) \rightarrow y = z]$

biçiminde sembolleştirilir.

Başka bir örnek olarak

(5) Özdeş tamsayıların ardılları da özdeştir tümcesinin

(6) (Ardıl: f^1, tamsayıdır: G)

sembolleştirme biçimine göre sembolik karşılığını yazalım. Bu sembolik karşılık

(7) $\forall x \forall y[(Gx \wedge Gy \wedge x = y) \rightarrow f^1x = f^1y]$

biçimindedir. Nitekim (5) şöyle de dile getirilebilir: x ile y tam sayılar olup birbirleriyle özdeş olursa, x'in ardılı ile y'nin ardılı özdeş olur.

Sonuncu örnek olarak

(8) Her insanın babası vardır.

tümcesinin sembolik karşılığını

(9) ("nın babası": f^1, insandır: G)

sembolleştirme biçimi gereği bulalım. İmdi (8) tümcesi

(10) Her x için, x insan ise öyle bir y vardır ki y, x'in babasıdır.

anlamına gelir. (10) ise

(11) $\forall x$[x insandır $\rightarrow \exists y$(y, x'in babasıdır)]

biçimine dönüştürülebilir. (11)'in sembolik karşılığı (9) gereği şöyledir.

(12) $\forall x[(Gx \rightarrow \exists y(y = f^1x)]$

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki tümcelerin verilen sembolleştirme biçimleri gereği genel önermeler olan sembolik karşılıklarını bulalım.

1. $\forall x(x = 3) \rightarrow (x + 1 = 3 + 1)$
   (1: a, 3: b, +: f^2)
2. $\forall x(x = 3 \rightarrow x$ tek sayıdır)
   (3: a, teksayıdır: F)
3. $\exists x(x + 3) = 0 \rightarrow \exists x(x < 0)$
   (0: a, 3: b, +: f^2, <: G)

3.2 Yorumlama

3.2.1 Tekil Önermelerin Yorumlanması

Önce basit terimli tekil önermelerin, sonra da karmaşık terimli tekil önermelerin yorumlanmasını inceleyeceğiz. Daha sonra genel önermelerin yorumlanmasını ele alacağız.

İmdi basit terimli önermeler

(1) $Fa_1 \ldots a_n$ $(n \geq 0)$

veya

(2) $a = b$

ya da

(3) $a = a$

biçimindedir. "a = a" bütün yorumlamalarda doğrudur. Bu nedenle yorumlamalarda yer almasına gerek yoktur. Öte yandan "a = b" tutarsız değildir. Nitekim farklı adlar aynı bireyi adlandırabilir. Dolayısıyla "a = b" nin yanlışlayıcı yorumlaması olduğu gibi, doğrulayıcı yorumlaması da vardır. Buna göre "a = b" doğru değerini aldığı yorumlamalarda yer alabilmelidir. Böylece özdeşlik mantığının yorumlamalarında "a = b" gibi basit terimli özdeşliklerin yer alması gerekecektir.

Öte yandan karmaşık terimli tekil önermelerin yorumlanmasında özdeşliklere de yer vermemiz gerekecektir. Örneğin

(4) $f^1a = b$

tekil önermesinin bir yorumlamasını bulalım. (4)'te a ile b geçtiğinden E evreni *a* ile *b*'den oluşur. f^1'in kaplamsal anlamı ise f^1a ile f^1b'nin değerleriyle belirlenir. E = {a, b} olduğunda, $f^1a = b$ olup $f^1b = a$ veya $f^1b = b$ olmaldır. Dolayısıyla (4)'ü doğrulayan iki farklı yorumlama vardır. Biri

(5) (E: {a, b}; $f^1a = b$, $f^1b = a$},

öbürü de

(6) (E: {a, b}; $f^1a = b$, $f^1b = b$)

dir. (5) ile (6), (4)'ün doğrulayıcı yorumlamalarıdır.

Genel olarak f^n gibi bir n-li işlem işaretini E= $\{a_1, ..., a_n\}$ gibi bir evrende yorumlamak için $f^n a_1, ..., f^n a_n$'lerin değerlerini belirleyen

(7) $f^n a_1 = a_{i_1}, ..., f^n a_n = a_{i_n}$

biçimindeki özdeşliklerin yorumlamada yer alması gerekir.

İkinci örnek olarak

(8) $f^1 a = g^1 b$

karmaşık terimli tekil önermeyi yorumlayalım. (8)'de a ile b adları geçtiğinden E = {a, b} olur. Buna göre f^1 ile g^1 işlem işaretlerini isteğimize bağlı bir seçimle

(9) $f^1 a = a, f^1 b = b, g^1 a = a, g^1 b = a$

biçiminde yorumlayalım. İsteğimize bağlı olmayan $f^1 a$ ile $g^1 b$'nin (8) gereği aynı değeri almasıdır. $f^1 a = a$'yı seçtikten sonra $g^1 b$'ye istediğiniz değeri değil, yalnız *a* değerini verebiliriz. Öte yandan $f^1 a$'ya isteğimize bağlı olarak *b* değerini verseydik, $f^1 b$'ye de *b* değerini vermemiz gerekecekti. (9) seçimine dayanarak (8)'in yorumlaması

(10) (E: {a, b}; $f^1 a = a, f^1 b = b, g^1 a = a, g^1 b = a$)

biçimini alır.

f^2 gibi bir ikili işlem işaretini E = $\{a_1, ..., a_1\}$ evreninde yorumlamak için

(11) $f^2 a_1 a_1 = a_{i_1}, f^2 a_1 a_2 = a_{i_2}, ..., f^2 a_n a_n = a_{i_{n^2}}$

biçimindeki özdeşliklerin yorumlamada yer alması gerekir. Üçüncü örnek olarak

(12) $f^2 ab = b$

karmaşık terimli tekil önermesinin bir yorumlamasını bulalım. E = {a, b} olup yorumlama şöyle olabilir.

(13) (E: {a, b}; $f^2 aa = a, f^2 ab = b, f^2 ba = a, f^2 bb = a$)

Zorunlu olan $f^2 ab = b$ dışındaki durumlarda, değer olarak hep a'yı seçtik.

Dördüncü örnek olarak

(14) $f^2ab = g^1a$

nın bir yorumlamasını bulalım.

(15) (E: {a, b}; $g^1a = a$, $g^1b = a$, $f^2aa = a$, $f^2ab = a$, $f^2ba = a$, $f^2bb = a$)

Beşinci örnek olarak

(16) $G(f^2aa) \wedge Fb$

karmaşık terimli bileşik tekil önermesinin bir yorumlamasını bulalım. (16)'nın doğru olması için hem "$G(f^2aa)$" hem "Fb" doğru olmalıdır.

Buna göre

(17) (E: {a, b}; $f^2aa = a$, $f^2ab = a$, $f^2ba = a$, $f^2bb = a$, Ga, Fb)

bir doğrulayıcı yorumlamadır. Nitekim $f^2aa = a$'yı seçtikten sonra Ga'ya Doğru değerini verdik. Böylece "$G(f^2aa)$"nın Doğru değerini almasını sağladık. Aynı biçimde "Fb"ye de Doğru değerini verdik.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki tekil önermelerin birer doğrulayıcı yorumlamasını bulunuz.

1. $F(g^1a)$
2. $g^1a = b$
3. $g^1a = f^1a$
4. $F(g^1a, f^1a)$
5. $Fa \rightarrow (g^1a = f^1b)$

3.2.2 Genel Önermelerin Yorumlanması

(1) $\forall xA(x)$

biçimindeki bir tümel önermenin E evrenli bir yorumlamada doğru olması A(x)'in E evrenindeki bütün özellemelerinin doğru olması,

(2) $\exists xA(x)$

biçimindeki bir tikel önermenin doğru olması A(x)'in E evrenindeki en az bir özellemesinin doğru olması demektir. Örneğin

(3) $\forall x[(F(g^1x) \rightarrow Hx]$

önermesi

(E: {a, b}; $g^1a = a$, $g^1b = a$, Fa, Ha, Hb)

yorumlamasında doğru olur.

İkinci bir örnek olarak

(4) $\sim\forall x[Fx = G(f^1x)]$

genel önermesinin varsa doğrulayıcı yorumlamasını bulalım. Hiçbir ad (4)'te geçmediğinden E = {a} olmak üzere yorumlamayı

(5) (E: {a}, $f^1a = a$, Fa)

biçiminde seçiyoruz. Şimdi (5)'i sınayalım. (4),

(6) $\exists x\sim[Fx \rightarrow G(f^1x)]$

ile eşdeğerdir. (4)'ün doğru olması için

(7) $\sim[Fx \rightarrow G(f^1x)]$

nin en az bir özellemesi doğru olmalıdır. İmdi

(8) $\sim[Fa \rightarrow G(f^1a)]$

özellemesi (5) yorumlamasında doğrudur. Nitekim $f^1a = a$ olduğundan, (7)

(9) $\sim(Fa \rightarrow Ga)$

biçimini alır. Oysa Fa doğru Ga ise yanlıştır. O halde (9) doğru olup (8) özellemesi de doğru olur. Dolayısıyla (6) doğru olup (4)'de doğrudur.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki genel önermelerin birer doğrulayıcı yorumlamasını bulunuz

1. $\forall x(f^1x = x)$
2. $\exists x\sim(f^1x = a)$
3. $\forall x(f^1x = g^1x)$
4. $\exists xF(f^1x) \rightarrow Fa$
5. $\sim\exists x(Fx \wedge Gx) \rightarrow a = b$

3.2.3 Doğruluk Değeri Hesaplaması

Bir tekil veya genel önermenin verilen bir yorumlamadaki doğruluk değerinin hesaplamasını ilerde çözümleyici çizelge yöntemiyle yapacağız. Şimdilik doğruluk değeri hesaplama işlemlerini yalnız kolay örneklerde yapacağız.

Örnek olarak

(1) $\exists x(f^1x = g^1x)$

önermesinin doğruluk değerini

(2) $(E: \{a\}; f^1a = a, g^1a = a)$

yorumlamasınıda hesaplayalım. Bu amaçla (1)'in E evrenindeki

(3) $f^1a = g^1a$

özellemesine bakarız. Bu özelleme (2) gereği

(4) $a = a$

ya dönüşür. (4) doğru olduğundan, (3) ve dolayısıyla (1) doğrudur.

İkinci örnek olarak

(5) $\forall x(f^1x = a) \wedge Gb$

nin doğruluk değerini

(6) $(E: \{a, b\}; f^1a = b, f^2b = a, Gb)$

yorumlamasında hesaplayalım. (5)'in birinci bileşeni olan

(7) $\forall x(f^1x = a)$

nın özellemeleri

(8) $f^1a = a$

ile

(9) $f^1b = b$

dir. (8), (6) gereği

(10) $b = a$

ya, (9) ise (6) gereği

(11) $a = b$

ye indirgenir. Oysa (10) ile (11) yanlış olduğundan (8) ve (9) yanlış olur. Dolayısıyla (7) yanlış olur. O zaman (5)'de yanlış olur.

Üçüncü örnek olarak

(12) $\sim\forall xF(g^2xa) \wedge p$

önermesinin

(13) $(E: \{a, b\}; g^2aa = a, g^2ab = b, g^2ba = a, g^2bb = b, Fb, p)$

yorumlamasındaki doğruluk değerini hesaplayalım.

(12)'nin birinci bileşeni

(14) $\exists x\sim F(g^2xa)$

ile eşdeğerdir. "$\sim F(g^2xa)$"nın özellemeleri

(15) $\sim F(g^2aa)$

ile

(16) $\sim F(g^2ba)$

dır. $g^2aa = a$ ve $g^2ba = a$ olduğundan (15) ve (16)

(17) $\sim Fa$

ya dönüşür. Oysa Fa yanlış olduğundan (17) doğrudur. O halde (15) ile (16) ve dolayısıyla (14) doğrudur. p'de doğru olduğundan (12) doğrudur.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin verilen yorumlamalardaki doğruluk değerini hesaplayınız.

1. $\exists xF(g^1x)$
   $(E: \{a\}; g^1a = a, Fa)$
2. $\forall x(f^1x = g^1a)$
   $(E: \{a, b\}; f^1a = b, f^1b = b, g^1a = a, g^1b = b)$

3. $\exists xF(g^1x) \wedge Fb$
   (E: {a, b}; $g^1a = q$, $g^1b = b$, Fb)
4. $\forall xF(g^1x) \rightarrow Fb$
   (E: {a, b}; $g^1a = b$, $g^1b = b$, Fa)
5. $\sim q \wedge \exists xG(f^2x\ b)$
   (E: {a, b}; $f^2aa = a$, $f^2ab = b$, $f^2ba = b$, $f^2bb = a$, Ga, q)

3.2.4 Özdeşlik Mantığı Yasaları

Özdeşlik mantığı yasaları önemli sayılan bazı geçerli önermeler ve bazı doğru içermeler ve eşdeğerliklerdir. Başlıca yasaları aşağıda gösteriyoruz.

1. $\forall x(x = x)$ (Özdeşlik ilkesi)
2. $\forall x\forall y(x = y \rightarrow y = x)$ (Özdeşliğin bakışım özelliği)
3. $\forall x\forall y[(x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z]$ (Özdeşliğin geçişlilik özelliği)
4. $\forall x\forall y\forall z[(y = x \wedge z = x) \rightarrow y = z]$
5. $a = a$
6. $a = b \models b = a$
7. $a = b, b = c \models a = c$
8. $b = a, c = a \models b = c$
9. $a = b \models Fa \leftrightarrow Fb$ (Leibniz'in özdeşliğin ayırdedilmezliği ilkesi)
10. $t_1 = t'_1 \models t_2 = t'_2$ (Euklides aksiyomu)

Burada t_1 ile t'_1 herhangi iki terim, t_2 de t'_1'i içine alan bir terimdir. t'_2, t'_2'de t_1 yerine t'_1'nün bir veya daha çok geçişi yerine t'_1'nün konulmasıyla elde edilen terimdir. 10. yasanın üç örneği aşağıda gösterilmiştir.

10'. $a = f^1b \models g^2aa = g^2(f^1b, a)$

10". $a = f^1b \models g^2aa = g^2(f^1b, f^1b)$

10"'. $a = f^1b \models g^2\ aa = g^2(a, f^1b)$

11. $a = b \models f^1a = f^1b$

12. $t_1 = t_2, A \models B$ (Özdeşlerin yer değiştirmesi ilkesi)

Burada A, içinde t_1 geçen bir önerme ve B, A'da t_1'in bir veya daha çok geçişi yerine t_2'nin konulmasıyla elde edilen bir önermedir.

13. $Fa \equiv \forall y(x = a \rightarrow Fx)$

14. $Fa \equiv \exists x(x = a \wedge Fx)$

15. $\forall x(Fx \wedge x = y) \equiv \forall y(Fy \wedge x = y)$

16. $a = b \equiv \forall x(x = a \leftrightarrow x = b)$

17. $a = b \equiv \exists x \exists y(x = a \wedge y = b)$

18. $Fab \equiv \forall x \forall y[(x = a \wedge y = b) \rightarrow Fxy]$

19. $Fab \equiv \exists x \exists y(x = a \wedge y = b \wedge Fxy)$

Tanım: $\exists!xFx \equiv \exists x\, Fx \wedge \forall x\, \forall y\, [(Fx \wedge Fy) \rightarrow x = y]$

$\exists!xFx$, "tam bir şey F'dir"i dile getirir. "$\exists xFx$" "en az bir şey F'dir.", "$\forall x\, \forall y\, [(Fx \wedge Fy) \rightarrow x = y]$" de "en çok bir şey F'dir."i dile getirir. "Tam bir şey F'dir", "en az bir şey F'dir ve en çok bir şey F'dir" anlamına gelir.

20. $\exists!xFx \equiv \exists x\, [Fx \wedge \forall y\, (Fy \rightarrow x = y)]$

21. $\exists!xFx \equiv \exists y\, \forall x\, (Fx \leftrightarrow x = y)$

22. $\exists x\, [Fx \wedge \forall y\, (Fy \rightarrow x = y)] \equiv \exists y\, \forall x\, (Fx \leftrightarrow x = y)$

23. $\exists x\, x = a$

24. $\exists y\, \forall x\, (x = a \leftrightarrow x = y)$

25. $\sim\exists y\, \forall x\, (\sim x = x \leftrightarrow x = y)$

26. $\forall x\, (fx = gx) \rightarrow [\exists xF(fx) \leftrightarrow \exists xF\, (gx)]$

27. $\forall x\, [(fx = fy) \rightarrow (x = y)], \forall x\, [(gx = gy) \rightarrow (x = y)] \models \forall x\, [(fgx = fgy) \rightarrow x = y]$

Burada sıraladığımız yasaların geçerli olduğunu, gerek çözümleyici çizelge yöntemi, gerekse türetim yöntemi ile denetleyebiliriz.

3.3 Çözümleyici Çizelge Yöntemi

3.3.1 Tekil Önermelerin Çözümleyici Çizelgesi

Niceleme mantığında çözümleyici çizelge yöntemi aşağıda belirtilen yeni kuralın eklenmesiyle özdeşlik mantığında da kullanılabilir.

(i) Kendiyle Özdeşliği değilleme Kuralı

Çözümleyici çizelgenin bir yolunda ~(t = t) biçiminde bir satır geçerse yol kapalı sayılır ve altına "X" işareti konulur.

(ii) Özdeşlerin yer değiştirmesi kuralı

A bir önerme ve t_1, t_2 iki (kapalı) terim olsun. Çözümleyici çizelgenin açık yolunda A ile $t_1 = t_2$ önermeleri bulunup, $A[t_2 // t_1]$, A'da t_1'in bir veya daha çok geçişi yerine t_2'nin konulmasıyla elde edilen bir önerme ise, $A[t_2 // t_1]$ önermesi açık yola eklenebilir. Eğer t_1 A'da hiç geçmiyorsa, $A[t_2 // t_1] = A$ olur.

Bu kural

(1) 1. A

1. $t_1 = t_2$

$A [t // t_1]$ (1)

biçiminde dile getirilir. Aynı adım sayısı hem A hem $t_1 = t_2$'nin önüne yazılır. Kaynak sayısı da A $[t_2 // t_1]$'in ardına yazılır.

(i) ile (ii) kurallarının eklenmesiyle elde edilen çözümleyici çizelge yöntemini önce özdeşlik mantığının tekil önermelerine, sonra da genel önermelerine uygulayacağız.

Birinci örnek olarak

(1) a = a

nın geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim. Bu amaçla (1)'in değillemesinin çözümleyici çizelgesini kuruyoruz.

(2) ~(a = a) (B.Ö.)
X

(2) çizelgesindeki yol (i) kuralı gereği kapalıdır. Demek ki (1) geçerlidir.

İkinci örnek olarak

(3) Fa, a = b ∴ Fb

çıkarımının geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim Bu çizelge özdeşlerin yer değiştirmesi kuralına dayanarak

(4) 1. Fa (B.Ö.)
2. a = b (B.Ö.)
~Fb (B.Ö.)
Fb (1)
X

biçiminde olur. Burada A önermesi "Fa", t_1 terimi "a" ve t_2 terimi de "b" biçimindedir. Buna göre

(5) $A[t_2 // t_1]$ = Fa [b // a] = Fb

olur. 1. adımda "Fa" ile "a = b"den Fa [b // a], yani "Fb"yi elde ettik. (2) çözümleyici çizelgesi kapalı olduğundan, (1) çıkarımı geçerlidir.

Üçüncü örnek olarak

(6) (a = b) → (b = a)

önermesinin geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(7) 1. ~[(a = b) → (b = a)]
2. a = b
2. ~(b = a) (1)
~(b = b) (2)
X

Önce (6)'nın değillemesini yazdık ve çözümledik. 2. adımda ise "a = b" özdeşliğine dayanarak "~(b = a)" önermesinde geçen "a"nın yerine "b" koyduk ((ii) kuralı gereği). Böylece "~(b = b) önermesini elde ettik. Bu son önermeden dolayı (1) kuralı gereği yolun altına "X" işareti koyduk.

Dördüncü örnek olarak

(8) a = b, b = c ∴ a = c

çıkarımının geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(9) 1. $a = b$ (B.Ö.)
$b = c$ (B.Ö.)
1. $\sim(a = c)$ (B.Ö.)
$\sim(b = c)$ (1)
X

1. adımda "a = b" özdeşliği gereği "~(a = c)" önemesinde "a" yerine "b" koyarsak "~(b = c)" önermesini elde ettik. Böylece yol kapandı. (9) çizelgesi kapalı olduğundan (8) çıkarımı geçerlidir.

Beşinci örnek olarak

(10) $(a = b) \rightarrow (f^1a = f^1b)$

önermesinin geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(11) 1. $\sim[a = b \rightarrow (f^1a = f^1b)]$
2. $a = b$ (1)
2. $\sim(f^1a = f^1b)$ (1)
$\sim(f^1b = f^1b)$ (2)
X

2. adımda "a = b" özdeşliği gereği "$\sim(f^1a = f^1b)$" önermesinde "a" yerine "b" koyarsak "$\sim(f^1b = f^1b)$"yi elde ettik. Oysa "~(f'b = f'b)", "~(t = t)" biçimindedir. O halde yol (ii) kuralı gereği kapatılmalıdır. (11) çizelgesi kapalı olduğundan (10) önermesi geçerlidir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin ve çıkarımların geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

1. $a = b$, Faa $\therefore$ Fab
2. $a = b$, Faa $\therefore$ Fba
3. $a = b$, Faa $\therefore$ Fbb
4. $[(f^1a = g^1b) \wedge G(f^1a)] \rightarrow G(g^1b)]$
5. $g^1a = b \rightarrow [f^2(b, g^1a) = f^2(g^1a, b)]$

3.3.2 Genel Önermelerin Çözümleyici Çizelgesi

Genel önermelerin çözümleyici çizelgesine örnek olarak

(1) $\forall x(x = x)$

tümel önermesinin geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

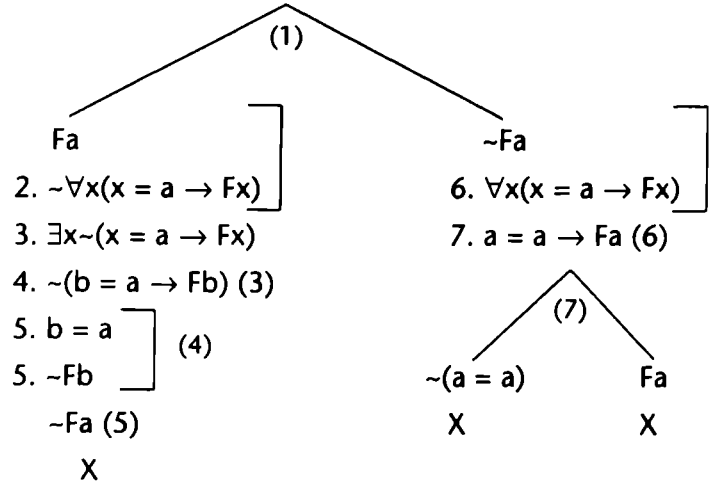
(2) 1. $\sim\forall x(x = x)$
2. $\exists x\sim(x = x)$
$\sim(a = a)$ (2)
X

İkinci bir örnek olarak

(3) $Fa \leftrightarrow \forall x(x = a \rightarrow Fx)$

önermesinin geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(4) 1. $\sim[Fa \leftrightarrow \forall x(x = a \rightarrow Fx)]$ (B.Ö.)



çizelge kapalı olduğundan (3) önermesi geçerlidir.

Üçüncü örnek olarak

(5) $\forall x(fx = gx) \therefore [\exists xF(fx) \leftrightarrow \exists xF(gx)]$

çıkarımının geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(6) 8. $\forall x(fx = gx)$ (B.Ö.)

1. $[\exists xF(fx) \leftrightarrow \exists xF(gx)]$ (B.Ö.)

(1)

4. $\exists xF(fx)$
2. $\sim\exists xF(gx)$
6. $\forall x\sim F(gx)$ (2)
9. $F(fa)$ (4)
$\sim F(ga)$ (6)
9. $fa = ga$ (8)
$F(ga)$ (9)
X

3. $\sim\exists F(fx)$
5. $\exists xF(gx)$
7. $\forall x\sim F(fx)$ (3)
$F(ga)$ (5)
10. $\sim Fa(fa)$ (7)
10. $fa = ga$ (8)
$\sim Fa(ga)$ (10)
X

(6) çizelgesi kapalı olduğundan (5) çıkarımı geçerlidir.

Dördüncü örnek olarak

(7) $[\exists xFx \wedge \forall x\forall y[(Fx \wedge Fy) \rightarrow x = y]] \therefore \exists y\forall x(Fx \leftrightarrow x = y)$

çıkarımının geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(8) 1. $\exists xFx \wedge \forall x\forall y[(Fx \wedge Fy) \rightarrow x = y]$ (B.Ö.)

2. $\sim\exists y\forall x(Fx \leftrightarrow x = y)$ (B.Ö.)

3. $\exists xFx$ (1)

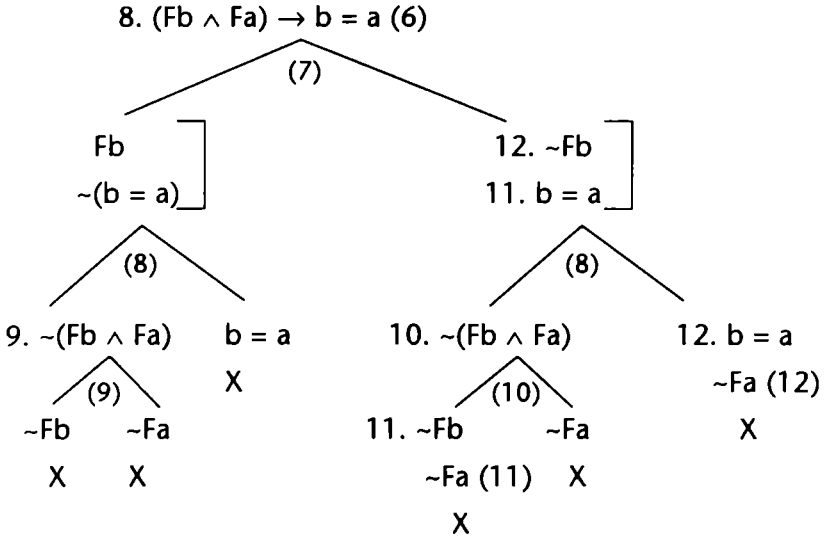
6. $\forall x\forall y[(Fx \wedge Fy) \rightarrow x = y]$

4. $\forall y\exists x\sim(Fx \leftrightarrow x = y)$ (2)

Fa (3)

5. $\exists x\sim(Fx \leftrightarrow x = a)$ (4)

7. $\sim(Fb \leftrightarrow b = a)$ (5)



(8) çözümleyici çizelgesi kapalı olduğundan (7) çıkarımı geçerlidir. Dikkat edilirse (8) çizelgesinde 2. adımda niceleyici değillemesi kuralını iki kez uyguladık. 6. adımda da tümel özelleme kuralını iki kez uyguladık.

Beşinci örnek olarak

(8) $\exists y \forall x(Fx \leftrightarrow x = y) \therefore \exists x Fx \wedge \forall x \forall y[(Fx \wedge Fy) \rightarrow x = y]$

çıkarımının geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(9) 1.$\exists y \forall x(Fx \leftrightarrow x = y)$ (B.Ö.)

2. $\sim[\exists x Fx \wedge \forall x \forall y[(Fx \wedge Fy) \rightarrow x = y]]$ (B.Ö.)

12, 11, 8. $\forall x(Fx \leftrightarrow x = a)$ (1)

(2)

3. $\sim\exists x Fx$

10. $\forall x \sim Fx$ (3)

9. $Fa \leftrightarrow a = a$ (8)

(9)

Fa
a = a
~Fa (10)
X

~Fa
~(a = a)
X

4. $\sim\forall x \forall y[(Fx \wedge Fy) \rightarrow x = y]$

5. $\exists x \exists y \sim[(Fx \wedge Fy) \rightarrow x = y]$ (4)

6. $\sim[(Fb \wedge Fc) \rightarrow b = c]$ (5)

7. $Fb \wedge Fc$
$\sim(b = c)$ (6)

Fb
Fc (7)

$Fa \leftrightarrow a = a$ (8)

13. Fb ↔ b = a (11)
14. Fc ↔ c = a (12)

(13)

Fb | ~Fb

15. b = a | 16. ~(b = a)

X

(14)

Fc | ~Fc

15. c = a | ~(c = a)

b = c (15) X

X

Altıncı örnek olarak

(10) $\forall x[\exists y[Fy \wedge (x = gy)] \rightarrow Fx] \leftrightarrow \forall x[Fx \rightarrow F(gx)]$

önermesinin geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(11) 1. $\sim[\forall x[\exists y[Fy \wedge (x = gy)] \rightarrow Fx] \leftrightarrow \forall x[Fx \rightarrow F(gx)]]$

(1)

10. $\forall x[\exists y[Fy \wedge (x = gy)] \rightarrow Fx]$
2. $\sim\forall x[Fx \rightarrow F(gx)]$
4. $\exists x\sim[Fx \rightarrow F(gx)]$ (2)
5. $\sim[Fa \rightarrow F(ga)]$ (4)

Fa
~F(ga) (5)

11. $\exists y[Fy \wedge (ga = gy)] \rightarrow F(ga)$ (10)

(11)

12. $\sim\exists y[Fy \wedge (ga=gy)]$ F(ga)
13. $\forall y\sim[Fy\wedge(ga=gy)]$ (12) X
14. $\sim[Fa \wedge (ga = ga)]$ (13)

(14)

~Fa ~(ga = ga)

X X

3. $\sim\forall x[\exists y[Fy\wedge(x = gy \rightarrow Fx)]$
15. $\forall x[Fx \rightarrow F(gx)]$
6. $\exists x\sim[\exists y[Fy \wedge (x = gy)] \rightarrow Fx]$ (3)
7. $\sim[\exists y[Fy \wedge (a = gy)] \rightarrow Fa]$ (6)
8. $\exists y[Fy \wedge (a = gy)]$ (7)
~Fa
9. Fb ∧ (a = gb) (8)

Fb
17. a = gb (9)

16. Fb → F(gb) (15)

(15)

17. ~Fb 16. F(gb)

X Fa (16)

X

ALIŞTIRMALAR

§ 3.2'deki mantık yasalarından henüz denetlenmemiş olanları çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

3.3.3 Çözümleyici Çizelge ile Doğrulayıcı Yorumlama Belirlemesi

Niceleme mantığında olduğu gibi, özdeşlik mantığında da sonlu açık yollu çözümleyici çizelgeye dayanarak doğrulayıcı yorumlama belirlenebilir. Örnek olarak

(1) a = b

önermesinin çözümleyici çizelgesine dayanarak (varsa) bir doğrulayıcı yorumlamasını bulalım. İmdi "a" ile "b" farklı bireylerin adı olsaydı "a = b" her zaman yanlış olacaktı. O zaman (1)'in doğrulayıcı yorumlaması olmazdı. Daha önce belirttiğimiz gibi oysa iki farklı ad zorunlu olarak farklı bireylerin adı değildir, aynı bireyin de adı olabilirler. Örneğin "Sabah yıldızı" ile "Akşam yıldızı" aynı gök cismini, Venüs gezegenini adlandırıyor. Dolayısıyla

(2) Sabah yıldızı = Akşam yıldızı

doğru bir önermedir. (2) önermesi ise

(3) (Sabah yıldızı: a, Akşam yıldızı: b)

sembolleştirme biçimi gereği (1)'in sembolik karşılığıdır.

İmdi (2) önermesi doğru olduğundan tutarlıdır. Tutarlı olan bir günlük dil önermesinin her sembolik karşılığı tutarlı olmalıdır. (Nitekim bir günlük dil önermesinin bir sembolik karşılığı tutarsız ise bu önerme de tutarsızdır.) O halde (2)'nin her sembolik karşılığı tutarlı olmalıdır. Dolayısıyla (1) önermesi tutarlı olup doğrulayıcı yorumlaması olmalıdır.

(1) önermesinin doğruluk çizelgesi (1)'in kendisiyle özdeştir. Bu çizelgede bulunan tek yol açık olup "a = b" atomsal önermesinden oluşur. Bu açık yol bir doğrulayıcı yorumlama belirler. Belirlenen yorumlamanın evreni {a, b} biçiminde değil tek öğeli bir evren olmalıdır. Evren iki öğeli {a, b} evreni olsaydı "a" *a*'nın adı ve "b" *b*'nin adı olup "a = b" yanlış olacaktı. O halde evren {a} gibi tek öğeli bir evren olmak zorundadır. O zaman "a" *a*'nın adı

olduğu gibi, "b"de *a*'nın adı olur. Böylece "a = b" öyle bir yorumlamada doğru olur. Buna göre (1)'in çözümleyici çizelgesinin belirlediği yorumlama

(4) (E: {a}; a = b)

biçimindedir.

Genel olarak bir çözümleyici çizelgenin açık yolunda "a = b" gibi basit terimli bir özdeşliğin geçmesi, bu açık yolun belirlediği doğrulayıcı yorumlamanın evreninin öğe sayısını düşürür. Nitekim "a" ile "b" adları iki değil bir tek bireyin adı olup *a* evrenin öğesi ise "b"de "a"nın öğesi sayılır.

İkinci örnek olarak

(5) ~(a = b)

önermesinin çözümleyici çizelgesini kurup varsa bir doğrulayıcı yorumlamasını bulalım. (5)'in doğru olması için "a = b"nin yalnız olması gerekir. Bunun için de "a" ile "b" adlarının farklı bireyleri adlandırılmalıdır. Buna göre evren en azından iki bireyi kapsamalıdır. Böylece evreni {a, b} olarak seçebiliriz. Buna göre

(6) (E: {a, b})

(5) önermesinin bir doğrulayıcı yorumlaması olur. Dikkat edilirse "a = b" atomsal önermesi yanlış olduğundan (6)'da yer alamaz.

Üçüncü örnek olarak

(7) $f^1a = b$

önermesinin çözümleyici çizelgesini kurup bir doğrulayıcı yorumlamasını bulalım. (7)'nin çözümleyici çizelgesi yine kendisiyle özdeştir. Evren olarak E={a, b}'yi seçebiliriz. O zaman "f^1"in kaplamsal anlamı ya

(8) $f^1a = b, f^1b = a$

ya da

(9) $f^1a = b, f^1b = b$

biçiminde olur. Söz gelişi (8)'i seçelim. O zaman (7)'nin doğrulayıcı yorumlaması

(10) (E: {a, b}, $f^1a = b$, $f^1b = a$)

biçiminde olur. "$f^1a = b$" atomsal önermesi (10)'de yer aldığından (10) gereği D değerini alır. Dolayısıyla (10) gerçekten (7)'nin bir doğrulayıcı yorumlamasıdır. Dikkat edilirse "a = b" (10)'da yer almadığından dolayı yanlıştır.

Dördüncü örnek olarak

(11) $f^1a = g^1b$

önermesinin çözümleyici çizelgesini kurup bir doğrulayıcı yorumlamasını arayalım. Gene (11)'in çözümleyici çizelgesi (11)'in kendisidir. Tek yol açık olduğundan (11) önermesinin doğrulayıcı yorumlaması vardır. (11) çözümleyici çizelgesinin belirlediği mümkün doğrulayıcı yorumlamalarda f^1a ile g^1b'nin ya ikisinin a'ya ya da ikisinin b'ye eşit olmak gerekir. Buna göre

(12) (E: {a, b}; $f^1a = a$, $f^1b = a$, $g^1a = a$, $g^1b = a$)

yı (11)'in doğrulayıcı yorumlaması olarak seçebiliriz.

Beşinci örnek olarak

(13) $f^1a = g^1b \wedge Fg^1a \wedge G(a, f^1b)$

önermesinin çözümleyici çizelgesini kurup, varsa bir doğrulayıcı yorumlamasını bulalım.

(14) 1. $f^1a = g^1b \wedge F(g^1a) \wedge \sim G(a, f^1b)$ (B.Ö.)

$f^1a = g^1b$	(1)
$F(g^1a)$	
$\sim G(a, f^1b)$	

Çizelge açık olduğundan (13)'ün doğrulayıcı yorumlaması vardır. Ancak doğrulayıcı yorumlama açık yoldaki bütün atomsal önermelerden oluşmuyor. Doğrulayıcı yorumlamada yer alan önermeler basit bileşenli atomsal önermeler ya da $f^1a = b$ biçimindeki özdeşlikler olmalıdır. Buna göre (13)'ün doğrulayıcı yorumlaması olarak

(15) (E: {a, b}, $f^1a = a$, $f^1b = a$, $g^1a = a$, $g^1b = a$, Fa)

yı seçebiliriz. Dikkat edilirse, (13) önermesi (15) yorumlamasında doğrudur.

Nitekim $f^1a = g^1b = a$ dır. "$f^1a = a$" ile "$g^1b = a$" (15)'de yer aldığından doğrudur. "~G(a, f^1b)'de "~Gaa" ya indirgenir. "Gaa" (15)'de yer almadığından yanlıştır. Dolayısıyla "~Gaa" doğrudur. O halde "~G(a, f^1b)" de doğrudur. Böylece (13)'ün (15)'te doğru olduğunu görüyoruz.

Altıncı örnek olarak

(16) $\exists x(f^1x = g^1x) \wedge \forall xH(f^1x) \wedge \exists xFxa$

önermesinin çözümleyici çizelgesini kurup varsa bir doğrulayıcı yorumlamasını bulalım.

(17) 1. $\exists x(f^1x = g^1x) \wedge \forall xH(f^1x) \wedge \exists xFxa$ (B.Ö.)

2. $\exists x(f^1x = g^1x)$ ┐
6,5, 4. $\forall xH(f^1x)$ ├ (1)
3. $\exists xFxa$ ┘

$f^1b = g^1b$ (2)

Fca (3)

$H(f^1a)$ (4)

$H(f^1b)$ (5)

$H(f^1c)$ (6)

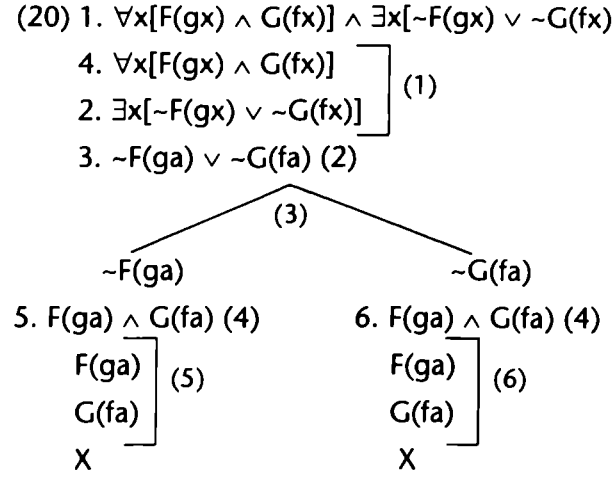
(17)'nin açık yolu olduğundan (16)'nın doğrulayıcı yorumlaması vardır. Bu yorumlama olarak aşağıdakini seçebiliriz.

(18) (E: {a, b, c}; $f^1(a)=a$, $f^1(b) = a$, $f^1(c) = a$, $g^1(a) = a$, $g^1(b) = a$, $g^1(c)=a$, Fca, Ha).

Yedinci örnek olarak

(19) $\forall x[F(gx) \wedge G(Fx)] \wedge \exists x[\sim F(gx) \vee \sim G(fx)]$

önermesinin çözümleyici çizelgesini kurup, varsa bir doğrulayıcı yorumlamasını bulalım.



çizelge kapalı olduğundan (19)'un doğrulayıcı yorumlaması yoktur.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin doğrulayıcı çözümlemesini kurup varsa bir doğrulayıcı yorumlamasını bulunuz.

1. $b = c$
2. $\sim(b = c)$
3. $g^1(b = c)$
4. $g^1(b) = h^1(c)$
5. $g^1(b) = h^1(c) \rightarrow [F(g^1a) \vee Gb]$
6. $\exists x[F(g^1x) \wedge Gx]$
7. $\exists x(f^1x = g^2xa)$
8. $\forall x(f^1a = g^1x) \wedge Fa$
9. $\exists x(Fx \wedge G(f^1x) \rightarrow (f^1a = b)$
10. $\forall x[\sim Fx \rightarrow G(h^1a)] \wedge \exists x[\sim Fx \wedge \sim G(h^1a)]$

3.3.4 Çözümleyici Çizelge ile Doğruluk Değeri Hesaplaması

Özdeşlik mantığında tıpkı niceleme mantığında olduğu gibi önermelerin verilen bir yorumlamadaki doğruluk değerini çözümleyici çizelgeye dayanarak hesaplayabiliriz.

Örnek olarak

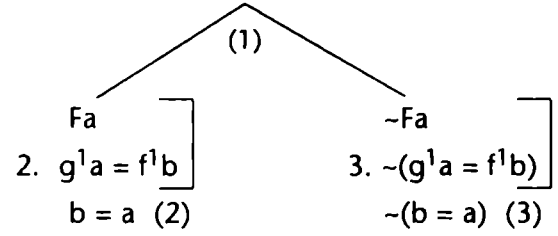
(1) $Fa \leftrightarrow (g^1a = f^1b)$

önermesinin

(2) (E: {a, b}; $f^1a = b$, $f^1b = a$, $g^1a = b$, $g^1b = b$, Fa)

yorumlamasındaki doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile hesaplayalım. Bu amaçla (1)'in (2)'ye dayanan *çözümleyici çizelgesi*'ni kuruyoruz.

(3) 1. $Fa \leftrightarrow (g^1a = f^1b)$ (B.Ö.)



(3) çizelgesini kurmak için 2. adımda (2) yorumlaması gereği "g^1a" yerine özdeşi olan "b"yi, "f^1b" yerine de özdeşi olan "a"yı koyduk. (3)'te iki açık yol vardır. Basit terimli atomsal önermeler ile bu türlü önermelerin değillemelerine *temel önerme* diyeceğiz. Bir açık yolun doğru olması bu yolda bulunan bir tür temel önermelerin doğru olması demektir. İmdi (3) çizelgesinin birinci açık yolundaki temel önermeler "Fa" ile "b = a", ikinci açık yoldaki temel önermeler "~Fa" ile "~(b = a)"dır. (2) doğrulayıcı yorumlaması gereği "Fa" doğru, "b = a" ise yanlıştır. İkinci yolda da "~Fa" yanlış ve "~(b = a) doğrudur. Böylece her iki açık yol yanlış olup başlangıç önermesi olan (1) önermesi (2) yorumlamasında yanlıştır.

İkinci örnek olarak

(4) $F(g^2ab) \wedge (f^1a = g^2aa)$

önermesinin

(5) (E: {a, b}; $f^1a = a$, $f^1b = b$, $g^2aa = a$, $g^2ab = b$, $g^2ba = a$, $g^2bb = b$, Fb)

yorumlamasında doğruluk değerini hesaplayalım. Bu amaçla (4)'ün (5)'e dayanan çözümleyici çizelgesini kuruyoruz.

(6) 1. $F(g^2ab) \wedge (f^1a = g^2aa)$ (B.Ö.)
2. $F(g^2ab)$ (1)
3. $f^1a = g^2aa$
Fb (2)
$a = a$ (3)

(6) çizelgesini kurarken (5) gereği 2. adımda "g^2ab"yerine özdeşi "b"yi koyduk. 3. adımda da "f^1a" yerine özdeşi "a"yı ve "g^2aa" yerine de özdeşi "a"yı koyduk. (6) çizelgesinin tek açık yolunda bulunan "Fb" temel önermesi ile "a = a" temel önermesi de doğrudur. O halde (6)'nın başlangıç önermesi olan (4) önermesi (5) yorumlamasında doğrudur.

Genel önermelere gelince, sonlu evrenli herhangi bir yorumlamada bu önermelerin doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile hesaplayabiliriz. Birinci örnek olarak

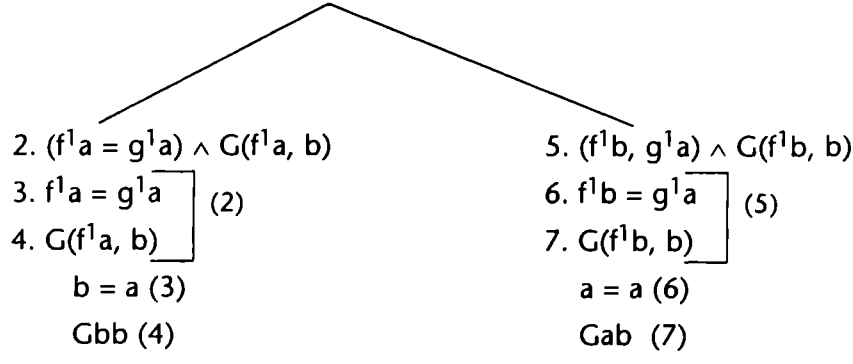
(7) $\exists x[(f^1x = g^1a) \wedge G(f^1x, b)]$

genel önermesinin

(8) $(E: \{a, b\}; f^1a = b, f^1b = a, g^1a = a, g^1b = b, Gaa, Gba)$

yorumlamasında çözümleyici çizelge ile doğruluk değerini hesaplayalım. Bu amaçla (7)'nin (8)'e dayanan çözümleyici çizelgesini kuruyoruz.

(9) 1. $\exists x[(f^1x = g^1a) \wedge G(f^1x, b)]$



Dikkat edilirse, 1. adımda $E = \{a_1, ..., a_n\}$ evrenindeki

(10) $\exists xA(x)$



tikel özelleme kuralını kullandık. (9)'un açık yolu vardır. (8) gereği "b = a" ve "Gbb" temel önermeleri yanlıştır. O halde birinci açık yol yanlıştır. İkinci açık yolda ise "a = a" doğru ama "Gab" yanlıştır. Demek ki ikinci yol da yanlıştır. Dolayısıyla (9)'un başlangıç önermesi olan (7), (8) yorumlamasında yanlıştır.

İkinci örnek olarak

(11) $\exists x \forall y F(f^1x, f^1y) \wedge \forall x\,[F(f^1x, g^1x) \wedge (x = a)]$

önermesinin

(12) (E: {a, b}, $f^1a = a$, $f^1b = b$, $g^1a = b$, $g^1b = a$, Faa, Fba)

yorumlamasında çözümleyici çizelge ile doğruluk değerini hesaplayalım. Bu amaçla (11)'in (12)'ye dayanan çözümleyici çizelgesini kuruyoruz.

(13) 1. $\exists x \forall y F(f^1x, f^1y) \wedge \forall x[F(f^1x, g^1x) \wedge (x = a)]$ (B.Ö.)
7. $\exists x \forall y F(f^1x, f^1y)$
2. $\forall x[F(f^1x, g^1x) \wedge x = a]$ (1)
3. $F(f^1a, g^1a) \wedge a = a$
4. $F(f^1b, g^1b) \wedge b = a$ (2)
5. $F(f^1a, g^1a)$
$a = a$ (3)
6. $F(f^1b, g^1b)$
$b = a$ (4)
Fab (5)
Fba (6)
(7)

8. $\forall y\, F(f^1a, f^1y)$	9. $\forall y\, F(f^1b, f^1y)$
9. $F(f^1a, f^1a)$ (8)	11. $F(f^1b, f^1a)$ (9)
10. $F(f^1a, f^1b)$	12. $F(f^1b, f^1b)$
Faa (9)	Fba (11)
Fab (10)	Fbb (12)

(13) çizelgesinde 8. ve 9. adımda E: $\{a_1, ..., a_n\}$ evrenindeki

(14) $\forall xA(x)$

$$\left.\begin{array}{l} A(a_1) \\ \vdots \\ A(a_n) \end{array}\right] (1)$$

tümel özelleme kuralını kullandık. (13) çizelgesinin her iki açık yolunda yanlış olan "a = b" satırı bulunuyor. Bu nedenle her iki açık yol yanlış olup (13)'ün başlangıç önermesi olan (11), (12) yorumlamasında yanlıştır.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin verilen yorumlamaya dayanan çözümleyici çizelge ile o yorumlamadaki doğruluk değerini hesaplayınız.

1. $a = b \rightarrow (f^1a = g^1b)$
   (E: {a, b}, $f^1a = a$, $f^1b = b$, $g^1a = b$, $g^1b = a$)
2. $(a = f^1b) \wedge (g^2ab = f^1a)$
   (E: {a, b}, $f^1a = a$, $f^1b = a$, $g^2aa = a$, $g^2ab = b$, $g^2ba = b$, $g^2bb = a$)
3. $\exists x(f^1a = g^1x) \rightarrow \forall xF(g^1x)$
   (E: {a, b}, $f^1a = a$, $g^1a = a$, Fa)
4. $\forall y[Fx \rightarrow G(f^1x)] \wedge Fa$
   (E: {a, b}, $f^1a = b$, $f^1b = a$, Fa, Gb)
5. $\forall x[Fx \rightarrow \forall y[G(f^1y) \wedge x = y]]$
   (E: {a, b}, $f^1a = a$, $f^1b = b$, Fb, Ga)

3.4 Türetim Yöntemi

Niceleme mantığındaki türetim yöntemi iki kuralı eklemekle özdeşlik mantığına uygulanabilir.

(i) Kendiyle özdeşliği ekleme kuralı

Türetim çizelgesine t = t biçiminde bir satır eklenebilir. Bu kuralı (K.Ö.) işaretiyle gösteriyoruz.

(ii) Özdeşlerin yer değiştirmesi kuralı

Türetim çizelgesinde A ile $t_1 = t_2$ biçiminde iki önerme geçiyorsa (çerçeve içinde satırlar veya önünde çizilmemiş Gös. işareti olan satırlar olmamak koşuluyla), A'dan t_1'in bir veya daha çok geçişi yerine t_2 koymakla elde edilen B gibi bir önerme yeni bir satır olarak eklenebilir. B önermesini $A[t_1//t_2]$ biçiminde dile getiriyoruz. (Eğer t_1, A'nın içinde hiç geçmiyorsa B, A ile özdeş olur. O zaman (ii) kuralı tekrarlama kuralına indirgenir.) Bu kuralı (Ö.Y.) işaretiyle gösteriyoruz.

Örnek olarak.

(1) $Fa, a = b \therefore Fb$

çıkarımının geçerli olduğunu bir türetimle denetleyelim.

(2)

1.	~~Gös.~~ Fb	
2.	Fa	(Ön.)
3.	a = b	(Ön.)
4.	Fb	(2, 3, Ö.Y.)

Görüldüğü gibi 4'üncü satırın ardına gerekçe olarak (2, 3, Ö.Y.) yazdık. 2 ile 3 kaynak no.'larıdır. Ö.Y. ise türetme işleminde kullanılan kuralı gösteriyor. Bu türetime dayanarak (1)'in geçerli olduğunu söyleyebiliriz.

İkinci örnek olarak

(3) $Fa \leftrightarrow \exists x[(x = a) \wedge Fa]$

önermesinin geçerli olduğunu bir türetimle denetleyelim.

(4)

1.	~~Gös.~~ $Fa \leftrightarrow \exists x(x = a \wedge Fx)$	
2.	~~Gös.~~ $Fa \rightarrow \exists x(x = a \wedge Fx)$	
3.	Fa	(Var.)
4.	a = a	(K.Ö.)
5.	$a = a \wedge Fa$	(3, 4, $\wedge$g)
6.	$\exists x(x = a \wedge Fx)$	(5, $\exists$g)

7.	~~Gös.~~ $\exists x(x = a \wedge Fx) \rightarrow Fa$	
8.	$\exists x(x = a \wedge Fx)$	(Var.)
9.	$b = a \wedge Fb$	(8, $\exists$ç)
10.	$b = a$	(9, $\wedge$ç)
11.	Fb	(9, $\wedge$ç)
12.	Fa	(10, 11, Ö.Y.)
13.	$Fa \leftrightarrow \exists x(x = a \wedge Fa)$	(2, 7, $\wedge$g)

Üçüncü örnek olarak

(5) $\exists xFx, \forall x\forall y[(Fx \wedge Fy) \rightarrow x = y] \therefore \exists x[Fx \wedge \forall y(Fy \rightarrow x = y)]$ çıkarımının geçerli olduğunu bir türetimle denetleyelim.

(6) 1.	~~Gös.~~ $\exists x[Fx \wedge \forall y[Fy \rightarrow (x = y)]]$	
2.	$\exists xFx$	(Ön.)
3.	$\forall x\forall y[(Fx \wedge Fy) \rightarrow (x = y)]$	(Ön.)
4.	Fa	(2, $\exists$ç)
5.	~~Gös.~~ $\forall y[(Fy \rightarrow (a = y)]$	
6.	~~Gös.~~ $Fb \rightarrow (a = b)$	
7.	Fb	(Var.)
8.	$(Fa \wedge Fb) \rightarrow (a = b)$	(3, $\forall$ç)
9.	$Fa \wedge Fb$	(4, 7, $\wedge$g)
10.	$a = b$	(8, 9, $\rightarrow$ç)
11.	$Fa \wedge \forall y[Fy \rightarrow (a = y)]$	(4, 5, $\wedge$g)
12.	$\exists x[Fx \wedge \forall y[Fx \rightarrow (x = y)]]$	(11, $\exists$g)

Dördüncü örnek olarak

(7) $\exists x[Fx \wedge \forall y(Fy \rightarrow x = y)] \therefore \exists Fx \wedge \forall x\forall y[(Fx \wedge Fy) \rightarrow (x = y)$ çıkarımının geçerli olduğunu bir türetimle denetleyelim.

(8)

1.	~~Gös.~~ $\exists xFx \wedge \forall x\forall y[(Fx \wedge Fy) \rightarrow (x = y)]$	
2.	$\exists x[Fx \wedge \forall y[Fy \rightarrow (x = y)]$	(Ön.)
3.	$Fa \wedge \forall y[Fy \rightarrow (a = y)]$	(2, $\exists$ç)
4.	Fa	(3, $\wedge$ç)
5.	$\forall y[Fy \rightarrow (a = y)]$	(3, $\wedge$ç)
6.	$\exists xFx$	(4, $\exists$g)
7.	~~Gös.~~ $\forall x\forall y[(Fx \wedge Fy) \rightarrow (x = y)]$	
8.	$\sim\forall x\forall y[(Fx \wedge Fy) \rightarrow (x = y)]$	(Var.)
9.	$\exists x\exists y\sim[(Fx \wedge Fy) \rightarrow (x = y)]$	(8, N.D.)
10.	$\sim[(Fb \wedge Fc) \rightarrow (b = c)]$	(9, $\exists$ç)
11.	$(Fb \wedge Fc) \wedge \sim(b = c)$	(10, E.D. $\therefore \sim(p\rightarrow q)\equiv(p\wedge \sim q)$)
12.	$Fb \wedge Fc$	(11, $\wedge$ç)
13.	$\sim(b = c)$	(11, $\wedge$ç)
14.	Fb	(12, $\wedge$ç)
15.	Fc	(12, $\wedge$ç)
16.	$Fd \wedge \forall y[Fy \rightarrow (d = y)]$	(2, $\exists$ç)
17.	Fd	(16, $\wedge$ç)
18.	$\forall y[Fy \rightarrow (d = y)]$	(16, $\wedge$ç)
19.	$Fb \rightarrow (d = b)$	(18, $\forall$ç)
20.	$Fc \rightarrow (d = c)$	(18, $\forall$ç)
21.	$d = b$	(14, 19 $\rightarrow$ç)
22.	$d = c$	(15, 20 $\rightarrow$ç)
23.	$b = c$	(21, 22, Ö.Y.)
24.	$\exists xFx \wedge \forall x\forall y[(Fx \wedge Fy) \rightarrow (x = y)]$	(6, 7, $\wedge$g)

ALIŞTIRMALAR

§ 3.2'deki mantık yasalarından henüz denetlenmemiş olanları türetimle denetleyiniz.

4. VARLIK MANTIĞI

4.1 Sembolleştirme

4.1.1 Varlık Önermeleri ve Tekil Önermeler

"Var" sözcüğü söz gelişi

(1) Esmer insanlar vardır.

önermesinde bir kümenin (esmer insanlar kümesinin) öğelerinin var olduğunu dile getirir. Buna karşılık

(2) Everest dağı vardır.

önermesinde belli bir nesnenin (bireyin) var olduğu dile getirilir. (1) önermesinin sembolik karşılığı

(İnsandır: F, Esmerdir: G)

sembolleştirme biçimi gereği

(3) $\exists x(Fx \wedge Gx)$

biçimindedir. Öte yandan (2) önermesi

(4) (Everest dağı: a)

sembolleştirme biçimi gereği

(5) *a* vardır.

biçiminde sembolleştirilir. (5) önermesinde "vardır" sözcüğü yeni bir mantık değişmezi işlevindedir. Bu mantık değişmezine *varlık değişmezi* denir. Varlık değişmezi "E!" işaretiyle gösterilir. Buna göre (2) önermesinin sembolik karşılığı

(6) E!a

biçimindedir. "E!" değişmezi *a* gibi bir adla birlikte bir tekil önerme oluşturur. Dolayısıyla "E!" bir birli yüklemdir. İmdi (3) tekil önermesinin ana eklemi olmadığından bir atomsal önermedir. Varlık değişmezini özdeşlik mantığına yeni bir mantık değişmezi olarak katmakla *özdeşlik ve varlık mantığı* veya kısaca *varlık mantığı* denilen bir mantık sistemi oluşur. Buna göre varlık

mantığının mantık değişmezleri şöyle sıralanabilir. Beş temel önerme eklemi ("~", "∧", "∨", "→", "↔"), iki niceleme işareti ("∀", "∃"), özdeşlik işareti ("=") ve varlık işareti ("E!"). Varlık mantığının sembolik dilinde mantık değimezleri dışında yalnız F, G, H, ... gibi n-li yüklem temsilcileri ile a, b, c, .. gibi ad temsilcilerinin bulunduğunu, ama f^n, g^n, h^n, ... gibi n-li işlem işareti temsilcilerinin bulunmadığını kabul ediyoruz. (İşlem işareti temsilcileri konuyu fazla zorlaştırırdı).

Varlık önermelerinin gerek doğru gerekse yanlış örnekleri vardır. Örneğin sözü geçen (2) varlık önermesi doğrudur.

(7) Sokrates vardı

anlamına gelen

(8) E!(Sokrates)

varlık önermesi de doğrudur. Öte yandan

(9) Zeus vardır.

anlamına gelen

(10) E!(Zeus)

varlık önermesi yanlıştır.

Aralarında varlık önermeleri de bulunan atomsal önermelerin önerme eklemleri ile birleştirilmesinden bileşik tekil önermeler oluşur. Örneğin

(11) Anka kuşu yoktur (Anka kuşu var değildir)

anlamına gelen

(12) ~E!(Anka kuşu)

bir bileşik tekil önermedir.

(13) E!(Sokrates) → Sokrates filozoftur

da bir bileşik tekil önermesidir. (11)'in sembolik karşılığı

(14) (Anka kuşu: a)

sembolleştirme biçimi gereği

(15) ~E!a,

ve (13)'ün sembolik karşılığı

(16) (Sokrates: a, filozoftur: F)

sembolleştirme biçimi gereği

(17) E!a → Fa

dır.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki tekil önermelerin verilen sembolleştirme biçimleri gereği sembolik karşılıklarını bulunuz.

1. Etna yanardağı vardır.
   (Etna yanardağı: a)
2. Merih gezegeni vardır.
   (Merih gezegeni: a)
3. Kaf dağı yoktur.
   (Kaf dağı: a)
4. Kaf dağı varsa erişilmezdir.
   (Kaf dağı: a, erişilmezdir: F)
5. Etna yanardağı varsa, yanardağlar vardır.
   (Etna yanardağı: a, yanardağdır: F)

4.1.2 Genel Önermeler

İçinde varlık işareti geçen genel önermelere örnek olarak

(1) Her şey vardır.

anlamına gelen

(2) ∀xE!x

ile

(3) Bir şey vardır (en az bir şey vardır)

anlamına gelen

(4) $\exists xE!x$

önermelerini gösterebiliriz. Her iki önerme de doğrudur. Nitekim bağlı değişkenlerin değerleri hep var olan bireylerdir. (2) önermesi var olan bireylerden oluşan evrenin bütün öğelerinin var olduğunu dile getirir. Dolayısıyla doğrudur. (4) önermesi ise var olan bireylerden oluşan evrenin en az bir öğesinin var olduğunu dile getirir. Dolayısıyla (4) önermesi de doğrudur. Doğru olduğunu göreceğimiz başka bir genel önerme

(5) $E!a \leftrightarrow \exists x(x = a)$

önermesidir. Bu önerme *a*'nın var olmasının gerekli ve yeterli koşulunun *a* ile özdeş olan bireyin varlığı olduğunu dile getirir. (5) önermesi

(6) (a: Sokrates)

sembolleştirme biçimi gereği

(7) $E!(\text{Sokrates}) \leftrightarrow \exists x(x = \text{Sokrates})$

önermesinin sembolik karşılığıdır.

(8) $\exists xFx \leftrightarrow \exists x(E!x \wedge Fx)$

genel önermesinin de doğru olduğunu göreceğiz. Yanlış olan bir genel önerme ise

(9) $\forall xE!x \rightarrow E!(\text{Anka kuşu})$

önermesidir. Nitekim "$\forall xE!x$" doğru ama "$E!(\text{Anka kuşu})$" yanlıştır. (7)'nin yanlış olması varlık mantığında tümel özelleme kuralının geçersizliğini gösterir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki genel önermelerin verilen sembolleştirme biçimleri gereği sembolik karşılığını bulunuz.

1. Ağrı dağı varsa yüksek dağlar vardır.
   (Ağrı dağı: a, dağdır: F, yüksektir: G)
2. Anka kuşu yoksa ölümsüz kuşlar yoktur.
   (Anka kuşu: a, kuştur: F, ölümsüzdür: G)
3. $\exists x(E!x \wedge x \text{ kuştur}) \rightarrow \exists x(x \text{ kuştur})$
   (kuştur: F)

4.2 Yorumlama

4.2.1 Tekil Önermelerin Yorumlanması

Niceleme mantığı ve özdeşlik mantığında her ad varolan bir bireyin adıdır. O zaman da "Anka kuşu" gibi var olan bir bireyi göstermeyen adlar kullanılamaz. Her iki mantık sisteminde,

(1) Anka kuşu yoktur.

gibi bir önermeye bile yer yoktur. İşte var olmayan birey adlarını kullanabilen bir mantık sistemi olan varlık mantığı kurulmuştur. Niceleme mantığı ile özdeşlik mantığında

(2) *a* vardır.

önermesi bütün yorumlamalarda doğrudur. Nitekim her yorumlamada "a" adı var olan bir bireyi gösterir. (1) önermesi geçerli olduğundan "vardır" yüklemine gereksinme yoktur. Öte yandan varlık mantığında (1) önermesi bazı yorumlamalarda doğru, bazılarında ise yanlıştır. Dolayısıyla (2) önermesi geçersiz ama tutarlıdır. Dolayısıyla "vardır" yüklemi işlevsiz değildir. Böyle bir yükleme gerçekten gereksinme vardır.

Özdeşlik mantığında var olan bir bireyi göstermeyen "Anka kuşu", "Kaf dağı" "Zeus" gibi adlara kaplamsal anlam vermek amacıyla, var olmayan *mümkün bireyler*'e başvurulur. Her var olan birey bir mümkün bireydir. Ama Anka kuşu gibi var olmayan mümkün bireylerden söz ederiz. Bunlara *salt mümkün bireyler* diyeceğiz. Buna göre yalnız var olan bireylerden oluşan *iç evren* ile salt mümkün bireylerden oluşan *dış evren* ayrımını yaparız. İç evreni "$E_{iç}$" işareti, dış evreni de "$E_{dış}$" işaretiyle gösteriyoruz. $E_{iç}$ var olan bireylerin kümesi ve $E_{dış}$ salt mümkün nesnelerin kümesidir. $E_{iç} \cup E_{dış}$ birleşim kümesi, bütün mümkün bireylerin (yani hem var olan bireyler hem salt mümkün bireylerin) kümesidir. $E_{iç}$ ile $E_{dış}$ ayrık kümelerdir. Yani kesişimleri boştur. $E_{iç} \cap E_{dış} = \{\ \}$. $E_{iç} \cup E_{dış}$ birleşim kümesine *evren* diyoruz. Evreni gene "E" işaretiyle gösteriyoruz. Buna göre $E = E_{iç} \cup E_{dış}$ olur.

(3) E!a

varlık önermesinin yorumlamaları

(4) ($E_{iç}$: {a_1, ..., a_n}; $E_{dış}$: {b_n, ..., b_e})

biçimindedir. Burada a_1, ..., a_n varolan bireyler, b_1, ..., b_n ise salt mümkün bireylerdir. O zaman da

(5) E = {a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_e}

olur. Bütün yorumlamalarda $E_{iç}$ boş değildir. Yani $E_{iç} \neq \{\ \}$. Eğer $E_{dış} = \{\ \}$ ise (yani $E_{dış}$ boş ise) bütün varlık önermeleri doğru olur.

"E!a" önermesi, $a \in E_{iç}$ ise doğru, $a \notin E_{iç}$ ise yanlıştır.

Örneği belli bir yorumlamada "a" Ağrı dağı "b" Everest dağı, "c" Kaf dağı ve "d" Anka kuşu olup, $E_{iç}$ = {a, b}, $E_{dış}$ = {c, d} olsun. Buna göre yorumlama

(6) ($E_{iç}$ {a, b}, $E_{dış}$ = {c, d})

biçiminde olur. (3) önermesi (6) yorumlamasında doğrudur. Nitekim $a \in E_{iç}$ olduğundan *a*'nın var olması gerekir. Dolayısıyla (3) doğrudur.

Başka bir örnek olarak

(7) (~E!a $\wedge$ Fa) $\rightarrow$ Ga

önermesinin

(8) ($E_{iç}$ = {b, c}; $E_{dış}$ = {a}; Fa, Ga)

yorumlamasında doğruluk değerini bulalım. $a \notin E_{iç}$ olduğundan "E!a" yanlış dolayısıyla da "~E!a" doğrudur. "Fa" ile "Ga"nın her ikisi de yorumlamada yer aldığından dolayı doğrudur. O halde (7) önermesi (8) yorumlamasında doğrudur.

Son örnek olarak

(9) (E!a $\wedge$ ~(a = b)] $\rightarrow$ E!b

önermesinin

(10) ($E_{iç}$ = {a, c}; $E_{dış}$ = {b})

yorumlamasında doğruluk değerini bulalım. $a \in E_{iç}$ olduğundan, "E!a" doğru, $b \notin E_{iç}$ olduğundan, "E!b" yanlıştır. "a = b" (10)'da yer almadığından do-

layı "a = b" yanlış, dolayısıyla da "~(a = b) doğrudur. O halde 9 önermesi (10) yorumlamasında yanlıştır. $a \in E_{iç}$ ve $b \in E_{dış}$ olduğundan "a = b" doğru olamazdı. Nitekim $E_{iç}$ ve $E_{dış}$ ayrıktır.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki tekil önermelerin verilen yorumlamalardaki doğruluk değerini bulunuz.

1. $E!a \leftrightarrow Fa$

   ($E_{iç}$: {a, b}, $E_{dış}$: {c}, Fb, Fc)
2. $Fab \rightarrow [(a = b) \wedge E!a]$

   ($E_{iç}$: {a, c}, $E_{dış}$: {b}, Fab, Fbc)
3. $(E!b \wedge E!c) \wedge [(Fa \rightarrow (b = c)]$

   ($E_{iç}$ = {a}, $E_{dış}$ = {c}, a = b, Fc)

(11) $a = a$

biçimindeki kendiyle özdeşlikler her yorumlamada, ister $a \in E_{iç}$ olsun, ister $a \in E_{dış}$ olsun, doğrudur. Bu nedenle yorumlamalarda "a = a" biçimindeki özdeşliklere yer vermemiz gereksizdir.

4.2.2 Genel Önermelerin Yorumlanması

İç evreni $E_{iç} = \{a_1, ..., a_n\}$ olan bir yorumlamada $\forall xA(x)$ tümel önermesinin doğru olması A(x)'in $E_{iç}$'deki bitim özellemelerinin yani $A(a_1)$, ..., $A(a_n)$'nin tümünün doğru olması demektir. Aynı biçimde $\exists xA(x)$'in doğru olması A(x)'in $E_{iç}$'deki en az bir özellemesinin, yani $A(a_1)$, ..., $A(a_n)$'nin en az birinin doğru olması demektir. Örnek olarak

(1) $\forall xE!x$

tümel önermesi

(2) ($E_{iç}$: {a, b}; $E_{dış}$: {c, d})

yorumlamasında doğrudur. Nitekim E!x'in $E_{iç}$'deki özellemeleri olan

(3) E!a

ile

(4) E!b

nin ikisi de (2) yorumlamasında doğrudur.

İkinci bir örnek olarak

(5) $\exists xFx \wedge \exists x(E!x \wedge \sim Fx)$

genel önermesinin

(6) ($E_{iç}$: {a, b}; $E_{dış}$: {c}; Fa, Fc)

yorumlamasında doğruluk değerini bulalım. "Fa" (6)'da yer aldığından "$\exists xFx$" doğrudur. (5)'in ikinci bileşeninin $E_{iç}$'deki özellemeleri

(7) $E!a \wedge \sim Fa$

ile

(8) $E!b \wedge \sim Fb$

dir. (6) yorumlamasında "~Fa" yanlış ama ("Fb" (6)'da yer almadığından dolayı) "~Fb" doğrudur. $b \in E_{iç}$ olduğundan dolayı da "E!b" doğrudur. O halde (8) doğrudur. Dolayısıyla (5) önermesi (6) yorumlamasında doğrudur.

Üçüncü örnek olarak

(9) $E!a \wedge \forall x(Fx \rightarrow x = a) \wedge c = d$

önermesinin

(10) ($E_{iç}$: {a, b}; $E_{dış}$: {c}; c = d, Fb, Fc)

yorumlamasında doğruluk değerini bulalım. $a \in E_{iç}$ olduğundan "E!a" doğrudur. "c = d", (10)'da yer aldığından "c = d"de doğrudur. Ortadaki bileşenin $E_{iç}$'deki özellemeleri ise

(11) $Fa \rightarrow (a = a)$

ile

(12) $Fb \rightarrow (b = a)$

dır. "a = a" bütün yorumlamalarda doğrudur. O halde (11) doğrudur. Öte yandan "Fb" (10)'da yer aldığından doğrudur. "b = a" ise (10)'da yer almadığından dolayı yanlıştır. O halde (12) yanlıştır. Dolayısıyla ortadaki bileşen olan

(13) $\forall x[Fx \rightarrow (x = a)]$

önermesi (10)'da yanlıştır. O halde (9), (10) yorumlamasında yanlıştır.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki genel önermelerin verilen yorumlamalardaki doğruluk değerini bulunuz.

1. $(E!\ b \wedge (b = c) \rightarrow \exists x(E!\ x \wedge Fx)$
   $(E_{iç} = \{b\}, E_{dış}: \{a\}, Fb, Fc)$
2. $\forall x(Fx \rightarrow E!x) \wedge \exists xFx$
   $(E_{iç} = \{a, b\}, E_{dış} = \{c\}, Fa, Fc)$
3. $\exists x\forall y[Fxy \rightarrow [E!\ x \wedge (x = a)]$
   $(E_{iç} = \{a, b\}; E_{dış}: \{c\}, Fac, Fbb)$

4.3 Varlık Mantığı Yasaları

Varlık mantığı, özdeşlik mantığının sınırlandırılmasıyla elde edilebilir. Nitekim

Varlık mantığında geçerli olan her önerme aynı zamanda özdeşlik mantığında da geçerlidir Ama tersi doğru değildir. Özdeşlik mantığında geçerli olan bazı önermeler varlık mantığında geçersizdir.

Örneğin özdeşlik mantığında geçerli olan

(1) $\forall x(x = a) \rightarrow (b = a)$

önermesi varlık mantığında geçersizdir. Nitekim

(2) $(E_{iç}: \{a\}; E_{dış}: \{b\})$

yorumlamasını göz önüne alalım. "b = a" önermesi (3)'te yer almadığından yanlıştır. Kaldı ki $a \in E_{iç}$ ve $b \in E_{dış}$ olduğunda $E_{iç} \cap E_{dış} = \{\ \}$ olması nedeniyle "b = a" doğru olamaz. Öte yandan "$\forall x(x = a)$", $E_{iç}$'deki tek özellemesi doğru olan "a = a" önermesidir. Böylece (1)'in (2) yorumlamasında yanlış olduğunu görüyoruz.

Genel olarak özdeşlik mantığının geçerli önermeleri ile varlık mantığının önermeleri arasındaki bağıntı aşağıdaki ilke ile belirlenir.

(i) A, içinde $a_1, ..., a_n$ ad temsilcileri geçip hiçbir işlem işareti temsilcisi geçmeyen bir önerme olduğunda, A özdeşlik mantığında geçerli olur ancak ve ancak $(E!a_1 \wedge ... \wedge E!a_n) \rightarrow A$ önermesi varlık mantığında geçerli olursa.

Örneğin A önermesi sözü geçen (1) önermesi olsun. (1) önermesi özdeşlik mantığında geçerlidir. Dolayısıyla yukardaki (i) ilkesi gereği,

(3) $(E!a \wedge E!b) \rightarrow [\forall x(x = a) \rightarrow b = a]$

veya eşdeğeri

(4) $[\forall x(x = a) \wedge E!a \wedge E!b] \rightarrow b = a$

önermesi varlık mantığında geçerlidir.

(i) ilkesinden n = 1 sınır durumu için aşağıdaki ilke elde edilir.

(ii) A, içinde ad temsilcisi ile işlem işareti temsilcisi geçmeyen bir önerme olduğunda A özdeşlik mantığında geçerli olur ancak ve ancak A varlık mantığında geçerli olursa.

Örneğin

(5) $\forall x \forall y \forall z[[(x = y) \wedge (y = z)] \rightarrow (x = z)]$

önermesi ad temsilcisi ve işlem işareti geçmeyen özdeşlik mantığında geçerli olan bir önermedir. (ii) ilkesi gereği (5), varlık mantığında da geçerlidir.

Varlık mantığının yasaları, önemli sayılan bazı gerçek önermeler ile doğru eşdeğerlikler ve içermelerdir. Başlıca yasaları aşağıda sıralıyoruz.

1. $(a = a)$ (kendiyle özdeşlik)
2. $A, a = b \models A(b//a)$ (özdeşlerin yer değiştirmesi)
3. $\forall x E!x$
4. $\exists x E!x$
5. $\forall x A, E!a \models A\ (a/x)$ (tümel özelleme)
6. $A\ (a/x)\ E!a \models \exists x a$
7. $\forall y[\forall x A(x) \rightarrow A(y)]$
8. $E!a, \forall x(E!x \rightarrow x = a) \models \forall x(E!x \leftrightarrow x = a)$

9. $\forall x(E!x \rightarrow Fx) \leftrightarrow \forall xFx$

10. $\exists x(E!x \wedge Fx) \leftrightarrow \exists xFx$

11. $E!a \leftrightarrow \exists x(E!x \wedge x = a)$

12. $\exists x(E!x \wedge x = a) \leftrightarrow \exists x(x = a)$

13. $E!a \leftrightarrow \exists x(x = a)$ ("E"!"nin tanımı)

14. $E!a \therefore \forall x[(x = a) \rightarrow Fx] \rightarrow Fa$

15. $E!a \therefore \forall x[(x = a) \rightarrow Fx] \rightarrow \exists x[(x = a) \wedge Fx]$

16. $E!a \therefore \exists x(x = a \wedge Fx) \vee \exists x(x = a \wedge \sim Fx)$

17. $E!a \therefore \forall x[Fx \leftrightarrow (x = a)] \rightarrow [Fa \wedge \forall x[Fx \rightarrow (x= a)]$

18. $\exists x\forall y(y = a \rightarrow y = x)$

4.4 Çözümleyici Çizelge Yöntemi

4.4.1 Çözümleyici Çizelge ile Denetleme

Özdeşlik mantığının çözümleyici çizelge kurallarından tümel özelleme ile tikel özelleme kurallarında aşağıdaki değişiklikler yapılarak varlık mantığına uygulanabilen bir denetleme yöntemi elde edilebilir.

(1) Sınırlandırılmış Tümel Özelleme Kuralı

1. $\forall xA$

1. $E!a$

   $A\ (a/x)$ (1)

Her dalda ancak bir tek kez uygulanabilir.

(2) Sınırlandırılmış Tikel Özelleme Kuralı

1. $\exists xA$

   $A\ (a/x)$
   $E!a$ (1)

a yeni bir ad olmalıdır.

Bu sınırlandırılmış kurallarla özdeşlik mantığında geçerli olan bazı önerme ve çıkarımların geçerli olduğu gösterilemez. Bunlar da varlık mantığında geçersizdir. Örneğin

(3) $\forall x(x = a) \therefore b = a$

çıkarımının varlık mantığındaki çözümleyici çizelgesini kuralım.

$\forall x(x = a)$ (B.Ö.)

$\sim(b = a)$ (B.Ö.)

çizelgede (1) kuralını uygulamak mümkün değildir. Nitekim "E!b" öncülü yoktur. Ancak "E!b" öncülü olsaydı (1) kuralı gereği "b = a" elde edip çizelge kapanırdı. Nitekim

(4) $\forall x(x = a), E!b \therefore b = a$

çıkarım (varlık mantığında) geçerlidir. (4)'ün çözümleyici çizelgesi

(5) 1. $\forall x(x = a)$ (B.Ö.)

1. E!b (B.Ö.)

$\sim(b = a)$ (B.Ö.)

$b = a$ (1)

X

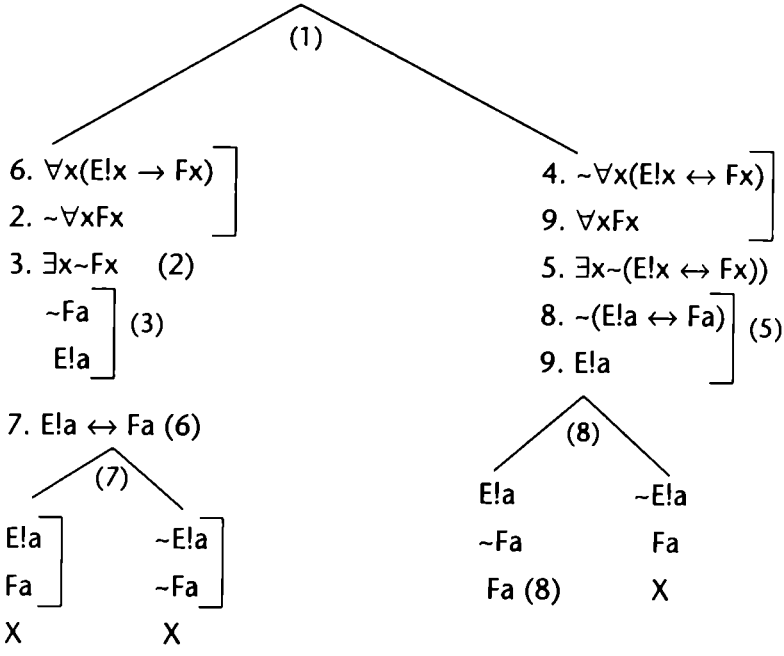
biçimindedir. Görüldüğü gibi 1 sayısını adım sayısı olarak ilk iki satırın önüne koyduk. Dördüncü satırın ardına da 1'i kaynak sayısı olarak koyduk.

ikinci örnek olarak

(6) $\forall x(E!x \leftrightarrow Fx) \leftrightarrow \forall xFx$

önermesinin geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(7) 1. ~[∀x(E!x ↔ Fx) ↔ ∀xFx]

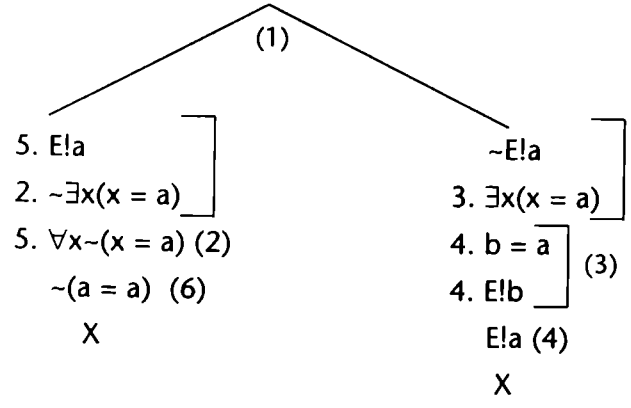


Üçüncü örnek olarak

(8) E!a ↔ ∃x(x = a)

önermesinin geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(9) 1. ~[E!a ↔ ∃x(x = a)]



Dördüncü örnek olarak

(10) E!a, Fa ∨ ~Fa ∴ ∃x[(x = a) ∧ Fx)] ∨ ~∃x[(x = a) ∧ ~Fx]

çıkarımının geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(11) 8,5. E!a (B.Ö.)

4. Fa ∨ ~Fa (B.Ö.)

1. ~[∃x[(x = a) ∧ Fx] ∨ ∃x[(x = a) ∧ ~Fx]] (B.Ö.)

2. ~∃x[(x = a) ∧ Fa] (1)

3. ~∃x[(x = a) ∧ ~Fa] (1)

5. ∀x~[(x = a) ∧ Fa] (2)

8. ∀x~[(x = a) ∧ ~Fa] (3)

(4)

Fa ~Fa

6. ~[(a = a) ∧ Fa] (5)

(6)

~(a = a) ~Fa

X X

7. ~[(a = a) ∧ Fa] (5)

(7)

~(a = a) ~Fa

X X

9. ~[(a = a) ∧ ~Fa] (8)

(9)

~(a = a) Fa

X X

Beşinci örnek olarak

(12) ∃x~(Fx ∧ ~Fx)

önermesinin geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim. Bu amaçla (12)'nin değillemesinin çözümleyici çizelgesini kuruyoruz.

(13) 1. ~∃x~(Fx ∧ ~Fx) (B.Ö.)

∀x(Fx ∧ ~Fx) (1)

çözümleyici çizelgesini elde ederiz. Ancak "E!a" biçiminde bir varlık önermesi bulunmadığından "∀x(Fx ∧ ~Fx)" tümel önermesine sınırlandırılmış

tümel özelleme kuralını uygulayamıyoruz. Böylece (12)'de açık yol kalıyor. Oysa "$\forall x\ (Fx \wedge \sim Fx)$" tutarsız görünüyor. İşte böyle bir sorunu çözmek için *özel tümel özelleme kuralı* dediğimiz aşağıdaki kuralı kullanacağız.

(14) 1. $\forall xA$

$A(a/x)$
$E!a$ (1)

a yeni olmalı ve daha önce hiçbir varlık önermesi geçmemelidir.

Bu kuralı şöyle açıklayabiliriz. İç evren boş olmadığından, açık yolda daha önce bulunmayan *a* gibi bir adı, iç evrenin bir öğesinin adı olarak seçmemiz mümkündür.

İmdi özel tümel özelleme kuralını kullanarak, (12)'nin çözümleyici çizelgesi (13) yerine aşağıdaki biçimde olur.

(15) 1. $\sim\exists x\sim(Fx \wedge \sim Fx)$ (B.Ö.)
2. $\forall x(Fx \wedge \sim Fx)$ (1)
3. $Fa \wedge \sim Fa$ (2)
$E!a$
Fa (3)
$\sim Fa$
X

(15) çizelgesi kapalı olduğundan (12) önermesi geçerlidir.

ALIŞTIRMALAR

§ 4.3'deki yasalardan henüz denetlenmemiş olanları çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

4.4.2 Çözümleyici Çizelge ile Doğrulayıcı Yorumlama Belirlemesi

Özdeşlik mantığında olduğu gibi, varlık mantığında da sonlu açık yollu çözümleyici çizelgeye dayanarak doğrulayıcı yorumlama belirlenebilir. Örnek olarak

(1) E!a

önermesinin (varsa) bir doğrulayıcı yorumlamasını bulalım. (1)'in çözümleyici çizelgesi kendisidir. Bu çizelgenin açık yolu olduğundan (1)'in doğrulayıcı yorumlaması vardır. Doğrulayıcı yorumlama için iç evreni $E_{iç} = \{a\}$ olarak seçeriz. $E_{dış} = \{\ \}$ olabilir. Böylece (1)'in doğrulayıcı yorumlaması

(2) $(E_{iç}: \{a\}; E_{dış}: \{\ \})$

olarak seçelibilir. $a \in E_{iç}$ olduğundan (1), (2)'de doğrudur.

İkinci örnek olarak

(3) $\forall xFx \wedge \sim Fa$

önermesinin çözümleyici çizelgesine dayanarak varsa bir doğrulayıcı yorumlamasını bulalım.

(4) 1. $\forall xFx \wedge \sim Fa$ (B.Ö.)
$\forall xFx$
$\sim Fa$

İmdi yorumlamanın iç evreni $E_{iç}$ olduğundan ya $a \in E_{iç}$ ya da $a \notin E_{iç}$ olur. Oysa $a \in E_{iç}$ ise "E!a" doğru olup "$\forall xFx$"den "Fa" elde edilir. O zaman da çizelge kapalı olup doğrulayıcı yorumlama belirlenemez. O halde $a \notin E_{iç}$ olmalı. O zaman da $E_{dış} = \{a\}$, $E_{iç} = \{b\}$ olur. Buna göre "Fb", "Fx"in tek özellemesi olup doğru olmalıdır. O halde "Fb" yorumlamada yer almalıdır. Dolayısıyla çözümleyici çizelge şöyle tamamlanır.

(5) 1. $\forall xFx \wedge \sim Fa$ (B.Ö.)
2. $\forall xFx$ (1)
$\sim Fa$
Fb (2)
E!b

(5) çizelgesini kurarken 2. adımda "$\forall xFx$" tümel önermesinden "Fb" özellemesi ile "E!b" varlık önermesini elde ettik. Bu işleme izin veren özel tümel özelleme kurallıdır. Bu yeni kural gereği çözümleyici çizelgenin açık yolunda $\forall xA$ biçimindeki bir tümel önermeye sınırlandırılmış tümel özelleme kuralı uygulanamıyorsa, aynı yol üzerinde daha önce geçmeyen *a* gibi bir ad seçilir ve A (a/x) ile E!a önermeleri alt alta yazılarak yola eklenir. (5) çizelgesinin açık

yolunun belirlediği doğrulayıcı yorumlama

(6) $(E_{iç}: \{b\}, E_{dış}: \{a\}, Fb)$

biçimindedir. Nitekim açık yolda "E!b" atomsal önermesi bulunduğundan dolayı "E!b" doğru olup $b \in E_{iç}$ olur. Öte yandan "E!a" açık yolda geçmediğinden $a \in E_{dış}$ olur. "Fb" açık yolda geçtiğinden yorumlamada yer alıyor. (6) yorumlamasını sınamak için (3) önermesinin (6)'daki doğruluk değerini saptayalım. "Fa", (6)'da yer almadığından yanlış olup "~Fa" doğrudur. "$\forall$xFx"in $E_{iç}$'deki tek özellemesi "Fb" dir. "Fb", (6)'da yer aldığından doğrudur. O halde (3), (6) yorumlamasında doğrudur.

Üçüncü örnek olarak

(7) $\exists x[(x = a) \wedge Fx] \vee \exists x[(x = a) \wedge \sim Fx]$

önermesinin çözümleyici çizelgesine dayanarak varsa bir geçersiz kılıcı yorumlamasını (yani geçersiz kılıcı kümenin doğrulayıcı yorumlamasını) bulalım. Bu amaçla (7)'nin geçersiz kılıcı kümesi olan

(8) $\sim[\exists x[(x = a) \wedge Fa] \vee \exists x[(x = a) \wedge \sim Fa]]$

in çözümleyici çizelgesini kuralım.

(9)
1. $\sim[\exists x[(x = a) \wedge Fa] \vee \exists x[(x = a) \wedge \sim Fa]]$ (B.Ö.)
2. $\sim\exists x[(x = a) \wedge Fa]$ (1)
3. $\sim\exists x[(x = a) \wedge \sim Fa]$ (1)
4. $\forall x\sim[(x = a) \wedge Fa]$ (2)
5. $\forall x\sim[(x = a) \wedge \sim Fa]$ (3)
6. $\sim[(b = a) \wedge Fa]$ (4)
   E!b
7. $\sim[(c = a) \wedge \sim Fa]$ (5)
   E!c

(6)

$\sim(c = a)$		$\sim Fa$	
(7)		(7)	
$\sim(c = a)$	Fa	$\sim(c = a)$	Fa
			X

Görüldüğü gibi (9) çizelgesinin üç açık yolu vardır. Birinci açık yoldaki temel önermeler "E!b", ~(c = a)'dır. Buna göre birinci açık yolun belirlediği doğrulayıcı yorumlama

(10) ($E_{iç}$: {c}, $E_{dış}$: {a})

biçimindedir. "E!c" açık yolda bulunduğundan b ∈ $E_{iç}$, "E!a" açık yolda bulunmadığından dolayı da a ∈ $E_{dış}$'dır. (10), (9) kümesinin doğrulayıcı yorumlamasıdır. (8) ise (7) çıkarımının geçersiz kılıcı kümesidir. Dolayısıyla (10), (7) çıkarımının geçersiz kılıcı yorumlamasıdır. O halde (7) çıkarımı geçersizdir.

Dördüncü örnek olarak

(11) E!a ∧ Faa ∧ ~∃xFax

önermesinin çözümleyici çizelgesine dayanarak, varsa doğrulayıcı yorumlamasını bulalım.

(12) 1. E!a ∧ Faa ∧ ~∃xFax (B.Ö.)
3. E!a
Faa (1)
2. ~∃xFax
3. ∀x~Fax (2)
~Faa
X

(12) çözümleyici çizelgesi kapalı olduğundan (11) önermesinin doğrulayıcı yorumlaması yoktur.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin ve çıkarımların geçersiz kılıcı kümelerinin çözümleyici çizelgesine dayanarak, varsa doğrulayıcı yorumlamasını bulunuz.

1. E!a ∧ ∃xFx
2. E!a ∧ ∀x(x = b)
3. ∀x[(x = a) → Fx] ∧ ~Fa

4. $\forall x[(x = a) \rightarrow Fx] \wedge \sim\exists x[(x = a) \wedge Fx]$

5. $\forall x[Fx \leftrightarrow (x = a)] \wedge \sim[Fa \wedge \forall x\,[Fx \rightarrow (x = a)]]$

4.4.3 Çözümleyici Çizelge ile Doğruluk Değeri Hesaplaması

Özdeşlik mantığında olduğu gibi varlık mantığında da önermelerin doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile hesaplayabiliriz.

Örnek olarak

(1) E!a

nın

(2) ($E_{iç}$: {a, b}; $E_{dış}$: {c, d})

yorumlamasında doğruluk değerini hesaplayalım. (1)'in çözümleyici çizelgesi kendisidir. $a \in E_{iç}$ olduğundan (1), (2) yorumlamasında doğrudur.

İkinci örnek olarak

(3) $E!a \wedge Fa \wedge \sim Ga$

önermesinin

(4) ($E_{iç}$: {b, a}; $E_{dış}$: {c}; Fa, Gb)

yorumlamasındaki doğruluk değerini çözümleyici çizelgeye dayanarak hesaplayalım.

(5) 1. $E!a \wedge Fa \wedge \sim Ga$ (B.Ö.)

$$\left.\begin{array}{l} E!a \\ Fa \\ \sim Ga \end{array}\right] (1)$$

Açık yoldaki temel önermeler "E!a" "Fa" ve "~Ga" dır. (4) yorumlamasında her üçü de doğrudur. O halde (3) önermesi (4) yorumlamasında doğrudur.

Üçüncü örnek olarak

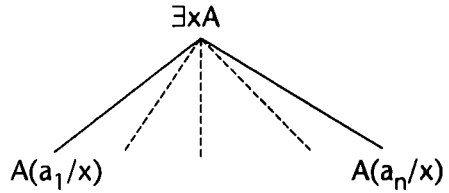
(6) $\exists x(x = a)$

önermesini

(7) ($E_{iç}$: {b, c}; $E_{dış}$: {a})

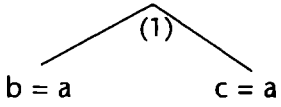
yorumlamasındaki doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile hesaplayalım. Burada uygulayacağımız $E_{iç}$ evrenine ilişkin tikel özelleme kuralı şöyle dile getirilir.

(8) $E_{iç} = \{a_1, ..., a_n\}$ ise



İmdi (6)'nın çözümleyici çizelgesi (8) kuralı gereği şöyledir.

(9) 1. ∃x(x = a) (B.Ö.)



(9) çizelgesinde iki açık yol vardır. Birinci açık yoldaki "b = a" temel önermesi yanlıştır. İkinci açık yoldaki "c = a" temel önermesi de yanlıştır. Her iki açık yol da yanlış olduğnudan başlangıç önermesi yanlıştır. O halde (6) önermesi (7) yorumlamasında yanlıştır.

Dikkat edilirse "E!a" ile "∃x(x = a)" eşdeğerdir.

(10) E!a ≡ ∃x(x = a)

Nitekim

(11) E!a ↔ ∃x(x = a)

önermesinin geçerli olduğunu daha önce denetlemiştik. (10) eşdeğerliği "E!" varlık değişmezinin "∃" ile "=" işaretleri türünden tanımı sayılır. Gerçekten "E!a" ile "∃x (x = a)" aynı koşullarda doğru olurlar. Her ikisi ancak ve ancak a ∈ $E_{iç}$ ise doğru olurlar, a ∉ $E_{iç}$ ise yanlış olurlar.

Üçüncü örnek olarak

(12) ∀x(E!x ↔ Fx)

önermesinin

(13) ($E_{iç}$: {a, b}; $E_{dış}$: {c}, Fa, Fc)

yorumlamasında değerini çözümleyici çizelge ile hesaplayalım. Bu amaçla aşağıdaki *$E_{iç}$'teki tümel özelleme kuralı*'nı kullanacağız.

(14) Eiç = $\{a_1, ..., a_n\}$ ise

1. $\forall x\, A$
   $A\,(a_1/x)$
   .
   .
   .
   $A\,(a_n/x)$ (1)

Bu kurala dayanan çözümleyici çizelge ise şöyledir.

(15) 1. $\forall x(E!x \leftrightarrow Fx)$ (B.Ö.)
2. $E!a \leftrightarrow Fa$
3. $E!b \leftrightarrow Fb$ (1)

(2)

E!a	~E!a
Fa	~Fa

(3) (3)

E!b	~E!b	E!b	~E!b
Fb	~Fb	Fb	~Fb

(13) yorumlamasında "E!a", "E!b" ve "Fa" doğru ama "Fb" yanlıştır. O halde birinci açık yol yanlıştır. İkinci açık yolda "~E!b" yanlış olduğundan bu yol da yanlıştır. Üçüncü ve dördüncü açık yollarda "~Fa" yanlış olduğundan başlangıç önermesi de yanlıştır. O halde (12) önermesi (13) yorumlamasında yanlıştır.

Dördüncü örnek olarak

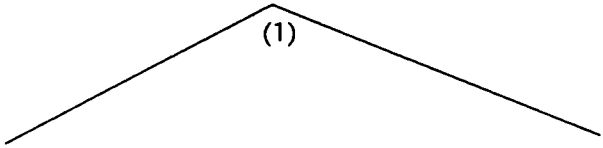
(16) $\exists x \forall y[[E!x \wedge (x = y)] \rightarrow E!y]$

önermesinin

(17) $(E_{iç} = \{a, b\}, E_{dış} = \{c, d\})$

yorumlamasında doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile hesaplayalım.

(18) 1. $\exists x \forall y[E!x \wedge (x = y)] \rightarrow E!y]$ (B.Ö.)



2. $\forall y[[E!a \wedge (a = y)] \rightarrow E!y]$

$[E!a \wedge (a = a)] \rightarrow E!a$

$[E!a \wedge (a = b)] \rightarrow E!b$ (2)

3. $\forall y[[E!b \wedge (b = y)] \rightarrow E!y]$

$[E!b \wedge (b = a)] \rightarrow E!a$

$[E!b \wedge (b = b)] \rightarrow E!b$ (3)

(17) yorumlaması gereği "E!a" ile "E!b" doğru olduğundan her iki açık yoldaki önermeler doğrudur. Dolayısıyla (16) önermesi (17) yorumlamasında doğrudur.

Beşinci örnek olarak

(19) $\forall x(E!x \leftrightarrow Fax) \wedge \exists xGxa$

önermesinin

(20) $(E_{iç}: \{a, c\}; E_{dış}: \{b\}; a = d, Faa, Gab, Gad)$

yorumlamasında doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile hesaplayalım.

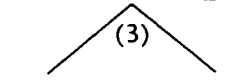
(21) 1. $\forall x(E!x \leftrightarrow Fdx) \wedge \exists xGxd$

2. $\forall x(E!x \leftrightarrow Fdx)$ (1)

3. $\exists xGxd$

$E!a \leftrightarrow Fda$

$E!c \leftrightarrow Fdc$ (2)



"E!a" ile "E!c" doğrudur. "Fda" önermesi ise (20) yorumlamasında yer almıyor. Ancak "a = d" (20)'de yer aldığından dolayı "Fda" önermesi "Faa"ya indirgenir. "Faa" ise (20)'de yer aldığından doğrudur. O halde "Fda" da doğrudur. Dolayısıyla "E!a $\leftrightarrow$ Fda" doğrudur. Öte yandan "Fdc" veya aynı anlama gelen "Fac" (20)'de yer almıyor. Dolayısıyla "Fdc" yanlış olup "E!c $\leftrightarrow$ Fdc" yanlış olur. Dolayısıyla (21) çizelgesinin iki açık yolu yanlıştır. Dolayısıyla (19) önermesi (20) yorumlamasında yanlıştır.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin verilen yorumlamada doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile hesaplayınız.

1. $\sim$E!b

   ($E_{iç}$: {a, c}; $E_{dış}$: {b})
2. E!a $\leftrightarrow$ (Fb $\vee$ Gc)

   ($E_{iç}$: {a, c}; $E_{dış}$: {b}; Fa, Fb, Gb)
3. $\forall$x (E!x $\rightarrow$ E!a)

   ($E_{iç}$: {a, b}, $E_{dış}$: {c})
4. $\exists$x [x = a $\wedge$ (Fx $\rightarrow$ E!x)]

   ($E_{iç}$: {a, b}; $E_{dış}$: {c}; Fb, Fc)
5. $\forall$x [x = c $\rightarrow$ $\exists$y (Fx $\wedge$ E!y)]

   ($E_{iç}$: {a, b}; $E_{dış}$: {c}, a = d, Fb, Fd)

5. KİPLİKLER MANTIĞI

5.1 KİPLİKLİ ÖNERMELER MANTIĞI

5.1.1 Sembolleştirme

5.1.1.1 Kiplik Önermeleri

Günlük dilde önermenin kipliğini belirten "zorunlu" ve "mümkün" sözcüklerini kullanırız. "Zorunlu" sözcüğü "mantıkça zorunlu" anlamında kullanıldığı durumlarda *zorunluluk değişmezi* denilen bir mantık değişmezi işlevindedir. Zorunluluk değişmezi *zorunluluk işareti* denilen "□" işaretiyle gösterilir. Aynı biçimde "mümkün" sözcüğü "mantıkça mümkün" anlamında kullanıldığı durumlarda *imkân değişmezi* (veya *olanaklılık değişmezi*) denilen bir mantık değişmezi işlevindedir. İmkân değişmezi *imkân işareti* denilen "◇" işaretiyle gösterilir. "□" ile "◇" verilen bir önermenin önüne konularak yeni bir önerme oluştururlar. Bu nedenle "□" ile "◇" birli önerme eklemleridir. Örneğin

(1) Kömürün sarı olması mümkündür.

(2) Her üçgenin üç kenarının olması zorunludur.

önermeleri sırasıyla

(3) ◇(kömür sarıdır)

(4) □(her üçgenin üç kenarı vardır.)

biçiminde dile getirilebilir. (3) önermesi

(5) (kömür sarıdır: p)

sembolleştirme biçimi gereği

(6) ◇p

biçiminde, (4) önermesi de

(7) □p

biçiminde sembolleştirilir.

A herhangi bir önerme olduğunda □A ile ◇B biçimindeki önermelere *kiplik önermeleri* denir. □A biçimindeki önermelere *zorunluluk önermeleri*, ◇B biçimindeki önermelere de *imkân önermeleri* denir.

Önermeler mantığının mantık değişmezlerine "□" zorunluluk değişmezi ile "◇" imkân değişmezini eklemekle elde edilen mantık sistemine *kiplikli önermeler mantığı* denir.

Kiplik değişmezleri öbür mantık sistemlerine de katılarak çeşitli kiplik mantıkları oluşturulur. Kiplik değişmezlerinin niceleme mantığına eklenmesiyle *kiplikli niceleme mantığı*, özdeşlik mantığına eklenmesiyle *kiplikli özdeşlik mantığı* ve varlık mantığına eklenmesiyle *kiplikli varlık mantığı* elde edilir. Bu bölümde kiplikli önermeler mantığını inceleyip sonraki bölümlerde öbür kiplik mantık sistemlerini ele alacağız. Kiplikli önermeler mantığını incelerken "kiplikli önermeler mantığı" yerine kısaca *kiplik mantığı* diyeceğiz.

İmdi A önermeler mantığına ait herhangi bir basit veya bileşik önerme olduğunda

(8) □A

ile

(9) ◇A

kiplik önermeleridir. A önermesine kiplik önermesinin *etki alanı* denir. Örneğin

(10) □(p → q)

ile

(11) ◇(p → q)

birer kiplik önermesidir. "p → q" önermesi de (10) ile (11)'in etki alanıdır.

Kiplik önermelerinin atomsal olmayan *basit önermeler* olduğunu kabul ediyoruz. Nitekim bu önermelerin temel önerme eklemi olan ana eklemleri yoktur. Gerçi "□" ile "◇"de birer önerme eklemidir. Ancak bu eklemlerin doğruluk fonksiyonu durumunda olmadığını ilerde göreceğiz. Dolayısıyla "□" (8)'in "◇" de (9)'un ana eklemi olmakla birlikte, gene de (8) ile (9)'un

doğruluk fonksiyonu durumunda olan ana eklemi yoktur. Bu nedenle (8) ile (9)'u birer basit önerme sayıyoruz.

Günlük dilde zorunluluk ile imkân değişmezleri çeşitli biçimlerde dile getirilir. Örneğin

(12) Ali İstanbul'a gitmelidir.

önermesi

(13) □(Ali İstanbul'a gidecek.)

anlamına gelir. Öte yandan

(14) Ali İstanbul'a gidebilir.

önermesi de

(15) ◇(Ali İstanbul'a gidecek.)

anlamına gelir.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki tümcelerden kiplik önermesi olanları belirtiniz.

1. Her dikdörtgenin dört açısı olmalıdır.
2. Her beşgenin beş kenarı vardır.
3. Yarın kar yağabilir.
4. Bir metre yüz santimetredir.

II. Aşağıdaki önermelerin verilen sembolleştirme biçimleri gereği sembolik karşılıklarını bulunuz.

1. İki artı ikinin dört etmesi zorunludur.
   (İki artı iki: p)
2. Bir metre yüz santimetreye eşit olmalıdır.
   (Bir metre yüz santimetreye eşittir: p)
3. Kar siyah olabilir.
   (Kar siyahtır: p)

5.1.1.2 Bileşik Önermeler

Basit önermeler olan kiplik önermeleri önerme eklemleriyle birleştirilip *bileşik önermeler* oluşturulur. "Önerme eklemi" terimini, başka biçimde belirtilmediği zaman doğruluk fonksiyonu durumunda olan beş temel eklem ($\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) için kullanıyoruz.

Örneğin

(1) $\Box p \rightarrow q$

(2) $\sim\Box p \rightarrow \Diamond\sim p$

(3) $(\Diamond p \vee \Diamond q) \leftrightarrow \Diamond(p \vee q)$

(içinde kiplik işareti geçen) bileşik önermelerdir. (1) ile (2)'nin ana eklemi "$\rightarrow$", (3)'ün ana ekleminde "$\leftrightarrow$" dir.

Günlük dilde de içinde kiplik değişmezleri geçen bileşik önermeler kullanılır. Örneğin

(4) Ali İstanbul'a gitmek zorunda ise otobüs biletini almalıdır.

tümcesi

(5) (Ali İstanbul'a gidecek: p, Ali Otobüs biletini alacak: q)

sembolleştirme biçimi gereği

(6) $\Box p \rightarrow \Box q$

biçiminde sembolleştirilir.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki tümceleri verilen sembolleştirme biçimleri gereği birer bileşik önerme olarak sembolleştiriniz.

1. 9 zorunlu olarak 7'den büyüktür.
   (9 > 7: p)
2. Zorunlu olarak, eğer Akşam yıldızında hayat varsa, Akşam yıldızında hayat vardır.
   (Akşam yıldızında hayat vardır: p)

3. Gezegenlerin sayısı 7'den büyük olabilir.

   (Gezegenlerin sayısı 7'den büyüktür.)

4. Zorunlu olarak, eğer Akşam yıldızında hayat varsa Sabah yıldızında hayat vardır.

   (Akşam yıldızında hayat vardır: p, Akşam yıldızında hayat vardır: q)

II. Aşağıdaki önermelerin basit veya bileşik olduklarını belirtiniz.

1. $\sim p$
2. $\sim\Diamond p$
3. $\Box[p \rightarrow (q \vee r)]$
4. $\Box(p \wedge q)$
5. $\sim(\Box p \wedge q)$

5.1.2 Yorumlama

5.1.2.1 Kiplik Önermelerinin Yorumlanması

Kiplik mantığında *gerçek dünya* dışında tasarlanabilen farklı *mümkün dünyalar*'dan söz edilir. Her mümkün dünya, gerçek dünyadan bazı özellikler bakımından farklıdır. Söz gelişi gerçek dünyada kar beyaz iken mümkün dünyaların birinde kar sarıdır. Ancak hiçbir mümkün dünyada imkânsız durumlar ortaya çıkmaz. Örneğin hiçbir mümkün dünyada hem yuvarlak hem kare olan şekiller yoktur. İmdi herhangi bir yorumlama verildiğinde, $\Box$A ile $\Diamond$A'nın doğruluk değeri A'nın doğruluk değerine bağlıdır. Ancak bağıntı oldukça karmaşıktır. Bu bağıntıyı mümkün dünyalar yardımıyla şöyle dile getirebiliriz.

(i) $\Box$A'nın gerçek dünyada doğru olması, A'nın bütün mümkün dünyalarda doğru olması demektir.

(ii) $\Diamond$A'nın gerçek dünyada doğru olması, A'nın en az bir mümkün dünyada doğru olması demektir.

(iii) Bir önermenin (mutlak) doğruluk değeri, önermelerin gerçek dünyadaki doğruluk değeri demektir.

Gerçek dünya mümkün dünyalardan biri sayılır. Dolayısıyla $\Box$A gerçek dünyada doğru ise, A önermesi de gerçek dünyada doğru olur. (i) ile (ii)

kurallarının sonucu olarak "□" ile "◇" doğruluk fonksiyonu durumunda olmayan birli önerme eklemleridir. Bunu açıklamak amacıyla p yerine günlük dile ait çeşitli önermeler seçip aşağıdaki çizelgeyi kuralım.

(1)

p olarak seçilen örnek	p	□p	◇p
1. Kar beyazdır	D	Y	D
2. Kar beyazdır veya kar beyaz değildir.	D	D	D
3. Kar beyaz değildir.	Y	Y	D
4. Kar beyazdır ve kar beyaz değildir.	Y	Y	Y

(1) çizelgesine göre "□p", p'nin değeri D değerini aldığı örneklerden birinde Y değerini, öbüründe ise D değerini alıyor. Dolayısıyla "□p"nin doğruluk değeri p'nin doğruluk değerince tek biçimde belirlenmiş değildir. O halde "□p"nin doğruluk değeri p'nin doğruluk değerinin bir fonksiyonu olamaz. Dolayısıyla "□" doğruluk fonksiyonu durumunda bir önerme eklemi değildir. Öte yandan "◇p", p'nin Y değerini aldığı örneklerden birinde D değerini öbüründe ise Y değerini alıyor. O halde "◇p" nin doğruluk değeri de p'nin doğruluk değerinin fonksiyonu olamaz. Dolayısıyla "◇" doğruluk fonksiyonu durumunda bir önerme eklemi değildir. (1) çizelgesine göre "□p" ile "◇p" nin doğruluk çizelgeleri şöyle olur.

(2)

p	□p
D	D, Y
Y	Y

(3)

p	◇p
D	D
Y	D,Y

(2) ile (3) doğruluk çizelgelerini (i) ile (ii) kurallarıyla şöyle açıklayabiliriz. p

önermesi gerçek dünyada doğru ise, p bütün mümkün dünyalarda doğru olur ya da olmaz. "□p" de birinci şıkta doğru, ikinci şıkta ise yanlış olur. Dolayısıyla p doğru ise "□p" duruma göre ya doğru ya da yanlış olur. Öte yandan gerçek dünyada yanlış ise p'ya başka bir mümkün dünyada doğru olur ya da bütün mümkün dünyalarda yanlış olur. "◇p", birinci şıkta doğru, ikinci şıkta ise yanlış olur. Dolayısıyla p yanlış ise "◇p" duruma göre doğru veya yanlış olur.

İmdi "□A" veya "◇A" gibi bir kiplik önermesini yorumlamak için A'nın içinde geçen p_1, ..., p_n önerme temsilcilerine her mümkün dünyada ayrı ayrı doğruluk değerleri vermek gerekir. Dolayısıyla yorumlama, mümkün dünyalar kümesi ile her mümkün dünya için ayrı bir değerlemeden oluşur. *Mümkün dünyalar kümesi*'ni *M* ile *M*'nin öğeleri olan mümkün dünyaları da m_0, m_1, m_2, m_3, ... ile gösteriyoruz. Bütün yorumlamalarda m_0 gerçek dünyayı gösterir.

Örnek olarak

(4) $\Box(p \rightarrow q)$

kiplik önermesinin bir yorumlamasını belirtelim. Mümkün dünyalar kümesi $M = \{m_0, m_1, m_2\}$ olsun. O zaman yorumlamada M'nin yanısıra, p ile q'nun sırasıyla m_0'da, m_1'de ve m_2'deki değerlemeleri yer almalıdır. Her değerlemeyi (niceleme mantığında olduğu gibi) yalnız D değeri verilen önerme temsilcilerinin sıralanmasıyla dile getiriyoruz. Buna göre (4)'ün yorumlamasını şöyle dile getiriyoruz.

(5) $(M: \{m_0, m_1, m_2\}; m_0: q; m_1: p; m_2: p, q)$.

m_0'daki değerleme m_0: q, m1'deki değerleme m_1: p, m_2'deki değerleme de m_2: p, q'dur. m_0: q değerlemesi p'ye Y, q'ya ise D değeri verildiğini; m_1: p değerlemesi p'ye D, q'ya ise Y değeri verildiğini, m_2:p, q değerlemesi hem p'ye hem q'ya D değeri verildiğini belirtiyor. Değerlemeler arasına noktalı virgül (;) koyuyoruz. Mümkün dünyalar kümesinin ardına da noktalı virgül koyuyoruz.

(5) yorumlamasına dayanarak (4) önermesinin doğruluk değerini saptayabiliriz. Nitekim (i) ilkesi gereği (4) zorunluluk önermesinin doğru olması

etki alanının bütün mümkün dünyalarda doğru olması demektir. Buna göre "p → q" etki alanının her mümkün dünyadaki doğruluk değerini hesaplıyoruz.

(6)

m_0	m_1	m_2
p → q	p → q	p → q
Y → D	D → Y	D → D
D	Y	D

(6) hesaplamalarına göre m_1'de "p → q" Y değerini alıyor. Dolayısıyla "p → q" bütün mümkün dünyalarda doğru değildir. O halde (4) önermesi verilen (5) yorumlamasında yanlıştır.

İkinci örnek olarak

(7) ◇(p → q)

imkân önermesinin (5) yorumlamasında doğruluk değerini bulalım. (6) hesaplamalarına baktığımızda "p → q" etki alanının gerek m_0'da gerekse m_2'de D değerini aldığını görüyoruz. Dolayısıyla (7) önermesi (5) yorumlamasında doğrudur.

Üçüncü örnek olarak

(8) ◇~[p → (q ∨ r)]

imkân önermesinin

(9) (M: {m_0, m_1}; m_0: ; m_1: p, r)

yorumlamasında doğruluk değerini bulalım. Bu amaçla (8)'in etki alanının m_0 ve m_1 mümkün dünyalarındaki doğruluk değerlerini hesaplıyoruz. ("m_0: işaretinden sonra hiçbir önermenin yer almaması *p, q, r*'ye m_0'da Y değerinin verildiğini gösterir.)

(10)

m_0	m_1
~[p → (q ∨ r)]	~[p → (q ∨ r)]
~[Y → (Y ∨ Y)]	~[D → (Y ∨ D)]
~(Y → Y)	~(D → D)
~D	~D
Y	Y

Etki alanı her iki mümkün dünyada yanlış olduğundan (8) önermesi (9) yorumlamasında yanlıştır.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki kiplik önermelerinin verilen yorumlamada doğruluk değerini bulunuz.

1. $\Box(p \wedge q)$

   (M: $\{m_0, m_1\}$; m_0: p, q; m_1:}

   Dikkat edilirse üstteki yorumlamada m_1: işaretinden sonra hiçbir önerme temsilcisi yer almıyor. Bunun anlamı, m_1 mümkün dünyasında hem p'ye hem de q'ya Yanlış değerinin verilmesidir.

2. $\Diamond(p \wedge \sim q)$

   (M: $\{m_0, m_1\}$; m_0: q; m_1: p, q)

3. $\Box[(p \wedge q) \rightarrow r]$

   (M: $\{m_0, m_1\}$; m_0: p; m_1: p, q, r)

4. $\Box\sim[p \rightarrow (q \wedge r)]$

   (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; m_0: q, r; m_1:; m_2:)

5. $\Diamond[a \leftrightarrow (p \vee \sim q)]$

   (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; m_1: ; m_2: p, q; d_3: r)

5.1.2.2 Bileşik Önermelerin Yorumlanması

Kiplik önermeleri için tanımladığımız yorumlamalar bileşik önermelerin de yorumlamasıdır. Nitekim herhangi bir bileşik önermenin doğruluk değeri bu türlü bir yorumlamada tek bir biçimde belirlenir. Örneğin

(1) $\Box p \rightarrow q$

bileşik önermesinin

(2) (M: $\{m_0, m_1\}$; m_0: p; m_1: p, q)

yorumlamasında doğruluk değerini bulalım. p, m_0 ile m_1 mümkün dünyalarında doğru olduğundan □p doğrudur. Öte yandan q önermesi m_0'da yanlış, m_1'de ise doğrudur. (1) önermesinin doğruluk değeri, gerçek dünyadaki doğruluk değeri olduğundan dolayı q'yu yanlış sayıyoruz. O halde (1) önermesi de (2) yorumlamasında yanlıştır.

Bileşik önermeler olan değillenmiş kiplik önermeleri atomsal olan kiplik önermelerine indirgenebilir. Nitekim

(3) $\sim\Box p \equiv \Diamond\sim p$

ile

(4) $\sim\Diamond p \equiv \Box\sim p$

eşdeğerlikleri doğrudur.

(3) eşdeğerliğinin doğruluğunu şöyle gösterebiliriz. "□p"nin doğru olması, p'nin bütün mümkün dünyalarda doğru olması demektir. Dolayısıyla "~□p"nin doğru olması, p'nin en az bir mümkün dünyada yanlış olması anlamına gelir. Bu ise "~p"nin en azından bir mümkün dünyada doğru olması demektir. O zaman "◇~p" doğru olur. O halde (3) doğrudur.

(4) eşdeğerliğinin doğruluğunu şöyle gösterebiliriz. "◇p"nin doğru olması, p'nin en az bir mümkün dünyada doğru olması demektir. Dolayısıyla "~◇p"nin doğru oması p'nin hiçbir mümkün dünyada doğru olmaması, yani bütün mümkün dünyalarda yanlış olması demektir. Bu ise "~p"nin bütün mümkün dünyalarda doğru olması demektir. O zaman da "□~p" doğru olur. O halde (4) doğrudur.

(3) eşdeğerliğine dayanarak

(5) $\sim\Box p \therefore \Diamond\sim p$

çıkarımının geçerli olduğunu, (4) eşdeğerliğine dayanarak da

(6) $\sim\Diamond p \therefore \Box\sim p$

çıkarımının geçerli olduğunu söyleyebiliriz. İmdi (5) ile (6) çıkarımlarının geçerli olması, *kiplikleri değilleme kuralları* denilen kuralları dile getirir. Bu iki kuralı ilerde kiplik mantığının çözümleyici çizelgesini kurmak için kul-

lanacağız. Kiplik değillemesi kurallarına dayanarak ~□A biçimindeki değillenmiş kiplik önermeleri ◇~A biçimindeki bir kiplik önermesine, ~◇A biçimindeki kiplik önermelerine de □~A biçimindeki bir kiplik önermesine indirgeyebiliriz. Örneğin

(7) ~□(p → q)

değillenmiş kiplik önermesini, ilgili kiplik değilleme kuralına dayanarak bir kiplik önermesine indirgeyelim. Elde edilen kiplik önermesi

(8) ◇~(p → q)

dur.

İkinci bir örnek olarak

(9) ~◇(p ∧ q)

değillenmiş kiplik önermesini, ilgili kiplik değilleme kuralına dayanarak bir kiplik önermesini indirgeyelim. Elde edilen kiplik önermesi

(10) □~(p ∧ q)

dur.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki bileşik önermelerin verilen yorumlamadaki doğruluk değerini bulunuz.

1. ◇p → p
   (M: {m_0, m_1}; m_0: p; m_1:)
2. □p ∧ □q
   (M: {m_0, m_1}; m_0: q; m_1: p)
3. □(p ∧ q) ∧ ~p
   (M: {m_0, m_1, m_2}; m_0: p; m_1: q; m_2:)
4. ◇p → □(q ∧ r)
   (M: {m_0, m_1}; m_0: p; m_1: p, q}
5. p ∧ □(p ∧ q) ∧ ◇r
   (M: {m_0, m_1, m_2}; m_0:; m_1: p, q; m_2: q)

II. Aşağıdaki değillenmiş kiplik önermeleri kiplik değilleme kurallarına dayanarak birer kiplik önermesine indirgeyiniz.

1. $\sim\Box(p \wedge \sim q)$
2. $\sim\Diamond[p \rightarrow (q \vee r)]$
3. $\sim\Diamond\sim[p \rightarrow (q \wedge \sim r)]$

5.1.3 Çözümleyici Çizelge

5.1.3.1 Çözümleyici Çizelge ile Doğruluk Değeri Hesaplaması

Önermelerin verilen bir yorumlamadaki doğruluk değerini hesaplamak için kiplik mantığında da çözümleyici çizelge kullanabiliriz. Bu amaçla önermeler mantığında kullandığımız çözümleyici çizelgede bazı değişiklikler yapıp bazı yeni kurallar ekliyoruz.

Kiplik mantığının çözümleyci çizelgesinde her satırın önüne *önek* denilen köşeli parantez içinde bir işaret koyuyoruz. Bir satırın öneki, o satırdaki önermeye ilişkin olan mümkün dünyayı gösterir. Başlangıç önermesinin öneki hep gerçek dünyayı gösterir. Bu nedenle çözümleyici çizelgenin başlanıç satırının önüne önek olarak köşeli parantez içinde dünyayı gösteren "m_0" işareti konulur. Çözümleyici çizelgede geçen değillenmiş kiplik önermeleri kiplik değilleme kurallarına dayanarak birer kiplik önermesine indirgenebilir. Örneğin

(1) $\sim\Diamond(p \rightarrow q)$

önermesinin

(2) $(M: \{m_0, m_1\}; m_0: p; m_1: q)$

yorumlamasında doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile hesaplayalım. Bu amaçla şöyle bir çizelge kurarız.

(3) 1. $[m_0] \sim\Diamond(p \rightarrow q)$ (B.Ö.)

$[m_0] \Box\sim(p \rightarrow q)$ (1)

Önek, köşeli parantez içine alınmıştır. 1'inci adımda başlangıç önermesini ilgili kiplik değilleme kuralı gereği ikinci satırdaki kiplik önermesine indirgedik. İkinci satırın öneki de gerçek dünyayı gösteriyor. (3) çizelgesi

tamamlanmış değildir. Çözümleme işlemi, temel önermeler elde edilene kadar sürdürülmelidir. Kiplik mantığının temel önermeleri, önermeler mantığında olduğu gibi p, q, r, ... önerme temsilcileri ile ~p, ~q, ~r biçimindeki değillemelerdir.

İmdi (3) çizelgesindeki ikinci satırı çözümlemek için "zorunluğun elenmesi kuralı" denilen aşağıdaki kuralı kullanırız.

(4) *Zorunluğun verilen yorumlamada elenmesi kuralı:* Verilen yorumlamanın M mümkün dünyalar kümesi $\{m_0, m_1, ..., m_i, ..., m_n\}$ biçiminde ise ve çözümleyici çizelgenin açık yolunda $[m_i]\Box A$ biçiminde bir satır geçerse yol aşağıda gösterilen biçimde uzatılır.

1. $[m_i]\Box A$

$$\begin{array}{|l} [m_0]A \\ [m_1]A \\ \quad \vdots \\ [m_n]\,A \end{array}$$

Nitekim $\Box A$, m_i'de doğru olsa, A bütün mümkün dünyalarda, yani m_0, m_1, ..., m_n'de doğru olurdu.

Verilen örnekte $M = \{m_0, m_1\}$ olduğundan, (3) çizelgesini (4) kuralına dayanarak aşağıdaki çizelge biçiminde uzatabiliriz.

(5) 1. $[m_0] \sim\Diamond(p \rightarrow q)$ (B.Ö.)

2. $[m_0] \Box\sim(p \rightarrow q)$ (1)

$$\begin{array}{|l} [m_0] \sim(p \rightarrow q) \\ [m_1] \sim(p \rightarrow q) \end{array} \quad (2)$$

Henüz temel bileşenler elde edilmediğinden (5) çizelgesini koşulun değillemesi kuralı gereği aşağıdaki çizelgeye dönüştürürüz.

(6) 1. $[m_0]\ {\sim}\Diamond(p \rightarrow q)$ (B.Ö.)

2. $[m_0]\ \Box{\sim}(p \rightarrow q)$

3. $[m_0]\ {\sim}(p \rightarrow q)$ (2)

4. $[m_1]\ {\sim}(p \rightarrow q)$

$[m_0]\ p$

$[m_0]\ {\sim}q$ (3)

$[m_1]\ p$

$[m_1]\ {\sim}q$ (4)

İşte (6) çizelgesi (1) önermesinin (2) *yorumlamasına dayanan çözümleyici çizelgesi*'dir. Çizelgedeki önekleri şöyle açıklıyoruz. Her satırdaki önek, o satırda yer alan önermenin önekin gösterdiği mümkün dünyada doğru olduğu varsayımını dile getirir. Başlangıç önermesi m_0'da doğru ise ikinci satırdaki önerme de aynı mümkün dünyada doğru olur (Kiplik değilleme kuralı gereği). Üçüncü satırın önekinin $[m_0]$ ve dördüncü satırın önekinin $[m_1]$ olması zorunluluğun elenmesi kuralının sonucudur. İmdi üçüncü satırdaki önerme m_0'da doğru olsa, koşullunun değillemesi kuralı gereği beşinci ve altıncı satırlardaki önermeler de m_0'da doğru olur. Dolayısıyla bu iki satırın öneki $[m_0]$'dır. Aynı biçimde dördüncü satırdaki önerme m_1'de doğru olsa, koşullunun değillemesi kuralı gereği yedinci ve sekizinci satırlardaki önermeler m_1'de doğru olur. Bu nedenle son satırların öneki m_1'dir.

İşte (6) çizelgesi, (1) önermesinin (2) *yorumlamasına dayanan çözümleyici çizelge*'sidir. (6)'nın bir tek yolu vardır. Bu yolda geçen temel önermelerin öneklerini göz önünde tutmalıyız. Önekiyle birlikte ele alınan bir temel önermeye *önekli temel* önerme diyoruz. Önekli temel önermeler "$[m_i]p$" veya "$[m_i]{\sim}p$" biçimindedir. İmdi (6)'nın açık yolundaki *önekli temel önermeler dizisi*

(7) $[m_0]p, [m_0]{\sim}q, [m_1]p, [m_1]{\sim}q$

dur.

(8) $[m_i]p, [m_i]{\sim}p$

biçiminde (aynı önekli olan) önekli önermeler çiftine *çelişmeli çift* diyoruz. İçinde çelişmeli çift geçen önekli temel önermeler dizisine de *çelişmeli önekli temel önermeler* dizisi diyoruz. Çözümleyici çizelgenin bir yolundaki önekli temel önermeler bir çelişmeli temel önermeler dizisi oluşturursa o yol kapalı olur. Ayrıca A bir temel önerme olmayıp yolda

(9) $[m_i]A, [m_i]\sim A$

biçiminde bir çift satır geçiyorsa, yolun kapalı olduğunu kabul ederiz. (9)'a *çelişmeli çift,* yola da *çelişmeli yol* diyoruz.

Dikkat edilirse yukardaki (7) dizisi çelişmeli değildir. (6) çizelgesinin tek yolunda da çelişmeli çift yoktur. Dolayısıyla (6) açıktır.

İkinci örnek olarak

(10) $\Diamond(p \wedge \sim q)$

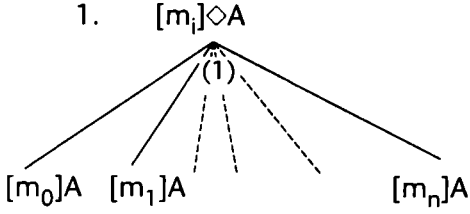
önermesinin

(11) $(M: \{m_0, m_1\}; m_0: q; m_1: p)$

yorumlamasındaki doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile hesaplayalım. (10) gibi $\Diamond A$ biçimindeki imkân önermelerini çözümlemek için imkânın elenmesi kuralı denilen aşağıdaki kuralı kullanırız.

(12) *İmkânın verilen yorumlamada elenmesi kuralı:*

Yorumlamanın M mümkün dünyalar kümesi $\{m_0, m_1, ..., m_i, ..., m_n\}$ biçiminde ise ve çözümleyici çizelgenin açık yolunda $[m_i]\Diamond A$ biçiminde bir satır geçerse, açık yol aşağıdaki biçimde uzatılır.



Nitekim $\Diamond A$, m_i'de doğru olsa, *A* en az bir mümkün dünyada, yani ya m_0'da, ya m_1'de, ..., ya m_n'de doğru olur. Bu durumu çatal açma ile dile getiriyoruz. Verilen örnekte $M = \{m_0, m_1\}$ olduğundan (10) çözümleyici çizelgesi

(12) kuralı gereği şöyledir.

(13) 1. $[m_0]\ \Diamond(p \wedge \sim q)$

(1)

2. $[m_0]\ p \wedge \sim q$

$[m_0]\ p$

$[m_0]\sim q$ (2)

3. $[m_1]\ p \wedge \sim q$

$[m_1]\ p$

$[m_1]\sim q$ (3)

Çizelgede iki yol vardır. Her iki yol da çelişmesiz olup açıktır. Dolayısıyla (13) çizelgesi açıktır. Verilen (11) yorumlaması gereği birinci yolda "$[m_0]p$" yanlış ve "$[m_0]\sim q$" yanlıştır. İkinci yolda "$[m_1]p$" doğru ve "$[m_1]\sim q$" doğrudur. O halde ikinci yol doğru olup (10) önermesi (11) yorumlamasında doğrudur.

Üçüncü örnek olarak

(14) $\sim\Diamond(p \wedge q) \wedge \Box(p \wedge q)$

önermesinin

(15) $(M: \{m_0, m_1\};\ m_0: p;\ m_1: q)$

yorumlamasında doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile hesaplayalım. Bu amaçla aşağıdaki çözümleyici çizelgeyi kuruyoruz.

(16) 1. $[m_0] \sim\Diamond(p \wedge q) \wedge \Box(p \wedge q)$ (B.Ö.)

2. $[m_0] \sim\Diamond(p \wedge q)$

3. $[m_0] \Box(p \wedge q)$ (1)

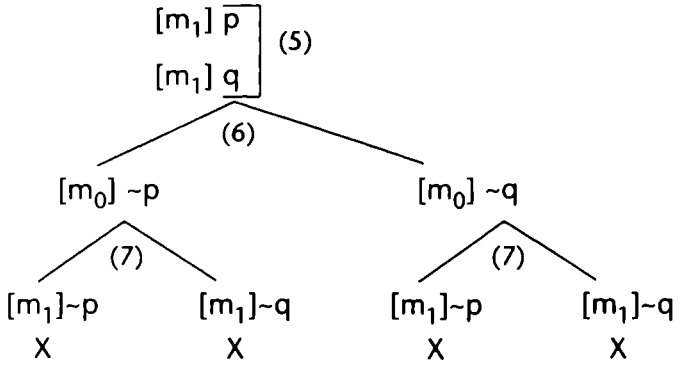
4. $[m_0] \Box\sim(p \wedge q)$ (2)

$[m_0]\ p \wedge q$ (3)

5. $[m_1]\ p \wedge q$

6. $[m_0] \sim(p \wedge q)$

7. $[m_1] \sim(p \wedge q)$ (4)



(16) çizelgesinin dört yolu vardır. Her yolda çelişmeli çift olduğundan bu yollar kapalıdır. Dolayısıyla (16) çizelgesi kapalıdır. O halde (14) önermesi (15) yorumlamasında yanlıştır.

Dördüncü örnek olarak

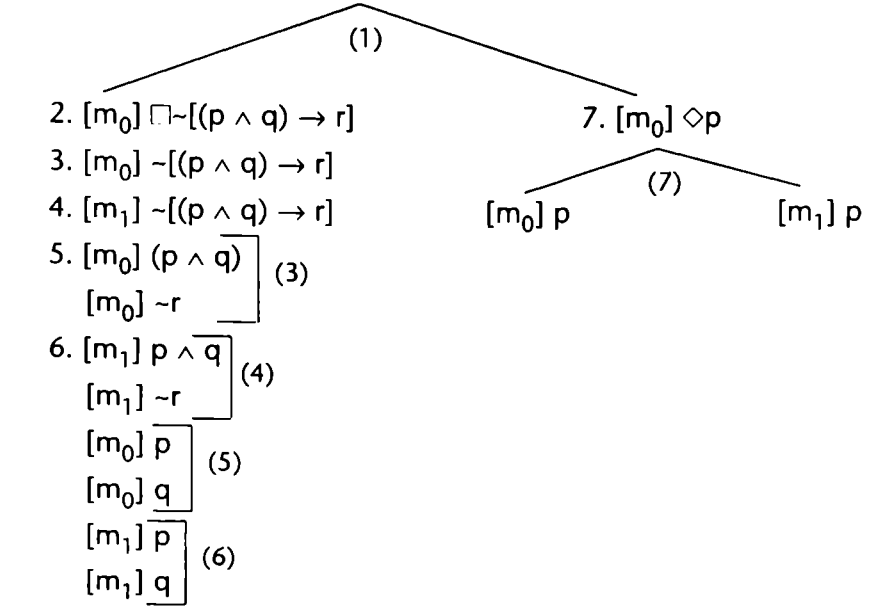
(17) $\sim\Diamond[(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow \Diamond p$

önermesinin

(18) (M: $\{m_0, m_1\}$; m_0: p; m_1: q, r)

yorumlamasında doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile hesaplayınız.

(19) 1. $[m_0] \sim\Diamond[(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow \Diamond p$ (B.Ö.)



(19) çizelgesinin üç açık yolu vardır. İkinci açık yolda "$[m_0]p$" (18) yorumlaması gereği doğrudur. O halde (17) önermesi (18) yorumlamasında doğrudur.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin verilen yorumlamadaki doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile hesaplayınız.

1. $\Box(q \rightarrow r)$
   (M: $\{m_0, m_1\}$; m_0: q; m_1: q, r)
2. $\Diamond[p \wedge (q \rightarrow r)]$
   (M: $\{m_0, m_1\}$, m_0: q, m_1:)
3. $\sim\Box\sim[p \rightarrow (q \vee r)]$
   (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; m_0: p, m_1: p, m_2: r)
4. $\Box(p \wedge q) \leftrightarrow \Diamond\sim p$
   (M: $\{m_0, m_1\}$: m_0: q, m_1:)
5. $\sim\Diamond(p \rightarrow \sim q) \rightarrow \sim\Diamond(q \wedge \sim r)$
   (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; m_0: p; m_1: q; m_2: p, r)

5.1.3.2 Çözümleyici Çizelge ile Doğrulayıcı Yorumlama Belirlemesi

Kiplikler mantığında da çözümleyici çizelgenin her açık yolu başlangıç önermesinin bir doğrulayıcı yorumlamasını belirler. Kiplikler mantığında doğrulayıcı yorumlama belirleyen çözümleyici çizelgenin satırları önekli önermelerdir. Ancak doğrulayıcı yorumlamayı belirlerken, önceden bir yorumlama verilmediğinden dolayı önekler herhangi bir yorumlamaya bağlı değildir. Nitekim önekler şöyle saptanır. Başlangıç önermesinin öneki hep [0]'dır. Bu önek gerçek evreni gösterir. Öbür önekler *k* bir pozitif tam sayı olmak üzere [*k*] biçimindedir. [*k*] belirtilmeyen bir mümkün dünyayı gösterir. Çözümleyici çizelgede değillenmiş kiplik önermelerini çözümlemek için gene kiplik değilleme kuralları kullanılır. Öte yandan kiplik önermelerini çözümlemek için "Zorunluluğu eleme kuralı" ve "imkânı eleme kuralı" kullanılır. Ancak bu iki kural burada §5.1.3.1'deki biçimlerinden farklıdır. Bu iki kuralın yeni biçimi şöyle dile getirilir.

Zorunluluğun Elenmesi Kuralı

(1) $\Box A$ biçimindeki bir önerme çözümleyici çizelgenin açık yolundan geçerse, açık yol aşağıdaki biçimde uzatılabilir.

1. $[k_1]\ \Box A$

2. $[k_2]$ A (1)

Burada k_1 ve k_2 herhangi eşit veya farklı doğal sayılardır. Eğer k_2 aynı yolda bulunan önceki bir satırın önekinde geçiyorsa, $[k_2]$A satırının eklenmesi zorunludur.

(2) İmkânın Elenmesi Kuralı

1. $[k_1]\ \Diamond A$

$[k_2]$ A (1)

Burada k_2 aynı yolda bulunan önceki bir satırda geçmeyen yeni bir doğal sayı olmalıdır.

(1) ile (2) kuralları arka arkaya uygulandığı zaman (2) kuralının önceliği vardır. (2) kuralı hep (1) kuralından sonra uygulanmalıdır.

Örnek olarak

(3) $\Box(p \rightarrow q)$

nun varsa bir doğrulayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile bulalım.

(4) 1. [0] $\Box(p \rightarrow q)$

2. [0] $p \rightarrow q$ (1)

(2)

[0] ~p [0] q

(4) çizelgesinin iki açık yolu vardır. Her açık yolun temel önermeleri başlangıç önermesinin bir doğrulayıcı yorumlamasını belirler. Açık yolda eksik olan önerme temsilcilerine istenilen doğruluk değeri verilebilir. Kısalık amacıyla, eksik olan önerme temsilcilerine hep Y değerini vereceğiz. Böylece eksik önerme temsilcileri yorumlamada yer almayacaktır. Açık yoldaki önekler,

aranan yorumlamanın mümkün dünyalarını oluşturur. [0] öneki hep gerçek dünyayı gösterir. (4) çizelgesinin her iki açık yolunda tek geçen önek [0]'dır. Bundan dolayı her iki yorumlamanın M evreni {[0]} biçiminde olur. Birinci açık yolda "~p" temel önermesi geçtiğinden, p Y değeri alıp yorumlamada yer almaz. Dolayısıyla birinci açık yolun belirlediği yorumlama

(5) (M: {[0]}; [0]:)

biçiminde olur. [0] yerine m_0 koyabiliriz. O zaman (5),

(6) (M: {m_0}; m_0:)

biçimine dönüşür.

Öte yandan ikinci açık yolun belirlediği yorumlama

(7) (M: {[0]}; [0]: q)

dur. [0] yerine m_0 koyarsak, (7)'yi

(8) (M: {m_0}; m_0: q)

ya dönüştürürüz.

İkinci örnek olarak

(9) $\Diamond(p \wedge q)$

önermesinin varsa bir doğrulayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile bulalım.

(10) 1. [0] $\Diamond(p \wedge q)$ (B.Ö.)

2. [1] $p \wedge q$

$\left.\begin{array}{l} [1]\ p \\ [1]\ q \end{array}\right\}$ (2)

Dikkat edilirse 1'inci adımda imkânın elenmesi kuralını uygulayıp "[1] p ∧ q" biçimindeki bir satır elde ettik. Nitekim [0] öneki daha önce uzun yolda geçtiği için [1] gibi değişik bir önek seçtik. [1] yerine [2], [3], ... de seçilebilirdik. [1] seçmemizin nedeni 1 sayısının 0'dan sonra hemen gelen sayı olmasıdır. İkinci satırın önekinin [0] olarak seçilmesi imkânın elenmesi

kuralınca önlenmiştir. İmdi (10) çizelgesinin bir tek açık yolu vardır. Bu açık yolun belirlediği yorumlama

(11) (M: {[0], [1]}; [0]:; [1]: p, q)

dur. (Gene eksik olan önerme temsilcilerine Y değeri verildiğini kabul ediyoruz. Bundan sonra hep öyle yapacağız. (11)'de [0] yerine m_0 ve [1] yerine m_1 koyarsak (11)'i

(12) (M: $\{m_0, m_1\}$; m_0: ; m_1: p, q)

biçimine dönüştürürüz.

Üçüncü örnek olarak

(13) $\Box(p \wedge q) \wedge \Diamond r \wedge \Diamond \sim r$

önermesinin varsa doğrulayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile bulalım.

(14) 1. [0] $\Box(p \wedge q) \wedge \Diamond r \wedge \Diamond \sim r$ (B.Ö.)

4. [0] $p \wedge q$
2. [0] $\Diamond r$ (1)
3. [0] $\Diamond \sim r$

[1] r (2)

[2] ~r (3)

5. [0] $p \wedge q$
6. [1] $p \wedge q$ (4)
7. [2] $p \wedge q$

[0] p
[0] q (5)

[1] p
[1] q (6)

[2] p
[2] q (7)

(14)'ün bir tek açık yolu vardır. Bu açık yolun belirlediği doğrulayıcı yorumlama

(15) (M: {[0], [1], [2]}; [0]: p, q; [1]: p, q, r; [2] p, q)

veya [0], [1], [2] yerine sırasıyla m_0, m_1, m_2 koyduğumuzda

(16) (M: {m_0, m_1, m_2}; m_0: p, q; m_1: p, q, r; m_2: p, q) biçimindedir.

Dördüncü örnek olarak

(17) $\Diamond(p \vee q) \wedge \Box(\sim p \wedge \sim q)$

önermesi varsa doğrulayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile bulalım.

(18) 1. [0] $\Diamond(p \wedge q) \wedge \Box(\sim p \wedge \sim q)$ (B.Ö.)
2. [0] $\Diamond(p \wedge q)$ (1)
3. [0] $\Box(\sim p \wedge \sim q)$
4. [1] $p \wedge q$ (2)
5. [0] $\sim p \wedge \sim q$ (3)
6. [1] $\sim p \wedge \sim q$

[1] p (4)
[1] q

[0] ~p (5)
[0] ~q

[1] ~p (6)
[1] ~q

X

Yol kapalıdır. Nitekim "[1]p" ile "[1]~p" bir çelişmeli çift oluşturuyor. O halde (18) çizelgesi ile kapalıdır. Dolayısıyla (17)'nin doğrulayıcı yorumlaması yoktur.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin doğrulayıcı yorumlamalarını çözümleyici çizelge ile bulunuz.

1. $\sim\Box(p \leftrightarrow q)$

2. $\sim\Diamond(p \wedge q \wedge r)$

3. $\Box(p \rightarrow \sim q) \wedge \sim\Box q$

4. $\Diamond(p \wedge \sim q) \rightarrow \Box\sim r$

5. $\Box(p \rightarrow q) \wedge \Box p \wedge \Diamond\sim q$

5.1.3.3 Çözümleyici Çizelge İle Denetleme

Kiplik mantığında bir önermenin veya çıkarımın geçerli olduğunu denetlemek için önermenin değillemesinin ve çıkarımın geçersiz kılıcı kümesinin çözümleyici çizelgesini kurarız. Çözümleyici çizelge kapalı ise önerme veya çıkarımın geçerli olduğu ortaya çıkar.

İmdi denetleme için kullanılan çözümleyici çizelge, doğrulayıcı yorumlamayı aramak için kullanılan çözümleyici çizelgedir. Kurulan çizelge kapalı ise doğrulayıcı yorumlama yoktur. O zaman da başlangıç önermesi veya önermeleri tutarsız olur. Dolayısıyla denetlenen önerme veya çıkarımın geçerli olduğu anlaşılır. Çözümleyici çizelge zorunluluğun elenmesi kuralını uygularken, yolda daha önce geçen bütün öneklerle işlem yapmak zorunda değiliz. Eğer yolu bazı önekleri kullanmadan kapatabilirsek bu önekleri kallanmayabiliriz.

Örnek olarak

(1) $\Box p \rightarrow p$

önermesinin geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(2) 1. [0] $\sim(\Box p \rightarrow p)$ (B.Ö.)

2. [0] $\Box p$
[0] $\sim p$ (1)

[0] p (2)

X

(2) çizelgesi kapalı olduğundan (1) önermesi geçerlidir.

İkinci örnek olarak

(3) $\Box(p \rightarrow q), \Box p \therefore \Box q$

çıkarımının geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(4) 3. [0] $\Box(p \rightarrow q)$ (B.Ö.)
4. [0] $\Box p$ (B.Ö.)
1. [0] $\sim\Box q$ (B.Ö.)
2. [0] $\Diamond\sim q$ (1)
[1] $\sim q$ (2)
5. [1] $p \rightarrow q$ (3)
[1] p (4)

(5)

[1] $\sim p$ X [1] q X

Görüldüğü gibi 3. adımda "$\Box(p \rightarrow q)$" önermesini zorunluluğun elenmesi kuralını uygularken yalnız [1] önekini kullandık. Nitekim bütün yolları kapatabildik. Böylece [0] önekini kullanmaya gerek olmadığını görüyoruz. (4) çizelgesi kapalı olduğundan (3) çıkarımı geçerlidir.

Üçüncü örnek olarak

(5) $\Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$

önermesinin geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(6) 1. [0] $\sim[\Box(p \wedge q) \leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)]$

(1)

8. [0] $\Box(p \wedge q)$
3. [0] $\sim(\Box p \wedge \Box q)$

(3)

4. [0] $\sim\Box p$ 5. [0] $\sim\Box q$

2. [0] $\sim\Box(p \wedge q)$
12. [0] $\Box p \wedge \Box q$
11. [0] $\Diamond\sim(p \wedge q)$ (2)
15. [1] $\sim(p \wedge q)$ (11)

6. [0] ◇~p (4) 7. [0] ◇~q (5) 13. [0] □p (12)

[1] ~p (6) [1] ~q (7) 14. [0] □q

9. [1] p ∧ q (8) 10. [1] p ∧ q (8) [1] p (13)

[1] p (9) [1] p (10) [1] q (14)

[1] q (15)

X X [1] ~p [1] ~q

X X

çözümleyici çizelge kapalı olduğundan (5) önermesi geçerlidir.

Dördüncü örnek olarak

(7) □p → □□p

önermesinin geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(8) 1. [0] ~(□p → □□p)

6. [0] □p (1)

2. [0] ~□□p

3. [0] ◇~ □p (2)

4. [0] ◇◇~p (3)

5. [1] ◇~p (4)

[2] ~p (5)

[2] p (6)

X

(8) çözümleyici çizelgesi kapalı olduğundan (7) önermesi geçerlidir. Dikkat edilirse (7) önermesinde □'nin arka arkaya iki geçişi vardır.

Bir kiplik değişmezinin etki alanında bir kiplik değişmezi geçerse bu kiplik değişmezlerinin *yuvalanmış kiplik değişmezleri* olduklarını söyleriz. İçinde yuvalanmış kiplik değişmezleri geçen bir önermeye de *yuvalanmış kiplikli önerme* diyoruz.

Demek ki (7) önermesi yuvalanmış kiplikli bir önermedir.

Beşinci örnek olarak gene yuvalanmış kiplikli olan

(9) $p \rightarrow \Box\Diamond p$

önermesinin geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(10) 1. [0] $\sim(p \rightarrow \Box\Diamond p)$

[0] p
2. [0] $\sim\Box\Diamond p$ (1)

3. [0] $\Diamond\Box\sim p$ (2)

4. [1] $\Box\sim p$ (3)

[0] $\sim p$ (4)

X

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin ve çıkarımların geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

1. $(\Box p \vee \Box q) \rightarrow \Box(p \vee q)$
2. $\Box p \leftrightarrow \sim\Diamond\sim p$
3. $\Diamond(p \vee q) \leftrightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q)$
4. $\Diamond(p \wedge q) \therefore (\Diamond p \wedge \Diamond q)$
5. $\Box p \therefore \Diamond p$
6. $\Diamond\Diamond p \therefore \Diamond p$
7. $\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$
8. $\Diamond p \therefore \Box\Diamond p$
9. $\Box(p \vee \Box q) \leftrightarrow (\Box p \vee \Box q)$
10. $\Diamond(p \vee \Box q) \leftrightarrow (\Diamond p \vee \Box q)$

5.1.4 Almaşıklık Bağıntılı Yorumlama ve Normal Sistemler

5.1.4.1 Bağıntılar

Kiplik mantığında yorumlamanın biçimi değiştirilerek çeşitli kiplik mantığı sistemleri kurulur. Yorumlamada yapılan başlıca değişiklik, "almaşıklık bağıntısı" denilen bir bağıntının yorumlamaya katılmasıdır. Almaşıklık bağıntısını açıklamak için önce "bağıntı" kavramını inceleyeceğiz.

M (mümkün dünyalar kümesi gibi) boş olmayan bir küme olsun. m_1 ve m_2 M'nin iki farklı öğesi olduğunda ($m_1 \in M$ ve $m_2 \in M$),

(1) $\{m_1, m_2\} = \{m_2, m_1\}$

olur. Yani iki öğeden oluşan bir kümede öğelerin sırasının değişmesi kümeyi değiştirmez. Bu nedenle $\{m_1, m_2\}$ gibi iki öğeli bir kümeye *sıralanmamış ikili* denir.

Öte yandan

(2) $<m_1, m_2>$

biçiminde dile getirilmiş *sıralanmış ikili* denilen nesneler de vardır. (2)'nin özelliği aşağıda belirtilmiştir.

(3) $m_1 \neq m_2 \rightarrow [(m_1, m_2) \neq (m_2, m_1)]$

sıralanmış ikili bir küme olarak

(4) $<m_1, m_2> = \{\{m_1\}, \{m_1, m_2\}\}$

biçiminde tanımlanır.

Örnek olarak 2 ile 3 sayılarından oluşan {2, 3} sıralanmamış ikilisi ile <2,3> sıralanmış ikilisini gözönüne alalım. {2, 3} ile {3, 2} aynı kümedir. Ama <2,3> ile <3, 2> farklıdır. Sıralanmış ikilileri (4) tanımıyla açıklarsak

(5) $<2, 3> = \{\{2\}, \{2, 3\}\}$

(6) $<3, 2> = \{\{3\}, \{3, 2\}\} = \{\{3\}, \{2, 3\}\}$

olur. Dikkat edilirse (5) ile (6) kümelerinin ikinci öğeleri aynı olmakla birlikte birinci öğeleri farklıdır. (5)'in birinci öğesi {2}, (6)'nın birinci öğesi {3}'dür. Oysa {2} ≠ {3}'dür. O halde

(7) $<2, 3> \neq <3, 2>$.

$<m_1, m_2>$ bir sıralanmış ikili olduğunda, m_1'e sıralanmış ikilinin *ön üyesi*, m_2'ye de *ard üye*'si diyoruz. m_1 ile m_2 sıralanmış ikilinin *üyeler*'idir.

Bir kümenin öğe sayısı sonlu ise (yani öğe sayısı belli bir doğal sayı ise) kümeye *sonlu küme* denir. (Burada yalnız sonlu kümeleri göz önüne alacağız.)

N ile M gibi iki kümeyi ele alalım.

(8) $L = \{\ell_1, ..., \ell_k\}$

ve

(9) $M = \{m_1, ..., m_n\}$

olsun. Ön üyesi L'ye ait, ard üyesi de M'ye ait olan sıralanmış ikililerin

(10) $\{<\ell_1, m_1>, <\ell_1, m_2>, ..., <\ell_k, m_n>\}$

kümesi (daha önce belirttiğimiz gibi) L ile M'nin *kartezyen çarpımı* denir ve *L X M* biçiminde gösterilir.

O halde

(11) $LXM = \{<\ell_1, m_1>, <\ell_1, m_2>, ..., <\ell_1, m_1>, <\ell_2, m_1>, ..., <\ell_k, m_n>\}$

Örneğin

(12) $L = \{\ell_1, \ell_2\}$

ve

(13) $M = \{m_1, m_2, m_3\}$

olsun. O zaman

(14) $LXM = \{<\ell_1, m_1>, <\ell_1, m_2>, <\ell_1, m_3>, <\ell_2, m_1>, <\ell_2, m_2>, <\ell_2, m_3>\}$

elde edilir.

L ile M farklı veya eşit kümeler olduğunda, $\mathcal{B}$, LXM'nin alt kümesi olsun, yani $\mathcal{B} \subseteq$ LXM olsun. $\mathcal{B}$'ye (L kümesinden M kümesine olan) bir *bağıntı* denir. Eğer $\mathcal{B} \subseteq$ MXM ise (yani L = M ise), $\mathcal{B}$'ye *M kümesi üzerinde bağıntı* denir.

Bir bağıntının ön üyelerinin kümesine bağıntının *ön alanı*, ard üyelerinin kümesine de bağıntının *ard alanı* denir. Bağıntının tüm üyelerinin kümesine ise bağıntının *alan*'ı denir. B bir bağıntı ise bağıntının alanını $A\mathcal{l}(\mathcal{B})$ olarak gösteriyoruz.

Örnek olarak

(15) $M = \{m_0, m_1, m_2\}$

ve

(16) $\mathcal{B} = \{<m_0, m_1>, <m_0, m_2> <m_1, m_1>\}$

olsun. O zaman $\mathcal{B} \subseteq MXM$ olup $\mathcal{B}$, M kümesi üzerinde bir bağıntı sayılır. $\mathcal{B}$ bağıntısının ön alanı $\{m_0, m_1\}$ ard alanı $\{m_1, m_2\}$, alanı da $\{m_0, m_1, m_2\}$'dir.

Bağıntının alanına ait nesneleri x, y, z, ... değişkenleriyle gösteriyoruz. $<x,y> \in \mathcal{B}$ yerine kısaca $x\mathcal{B}y$ yazılır Yani:

(17) $x\mathcal{B}y \leftrightarrow <x, y> \in \mathcal{B}$.

Bağıntıların başlıca özellikleri şöyledir.

x, y, z, ... değişkenlerinin değer alanı $\mathcal{B}$ bağıntısının alanı olduğunda:

1. $\mathcal{B}$ *yansımalı* (refleksif)dır, ancak ve ancak $\forall x\ (x\mathcal{B}x)$ ise
2. $\mathcal{B}$ *yansımasız* (irrefleksif)dır, ancak ve ancak $\forall x\ (\sim x\mathcal{B}x)$ ise
3. $\mathcal{B}$ *bakışımlı* (simetrik)dir, ancak ve ancak $\forall x \forall y\ (x\mathcal{B}y \rightarrow y\mathcal{B}x)$ ise
4. $\mathcal{B}$ *bakışımsız* (asimetrik)dır, ancak ve ancak $\forall x \forall y\ (x\mathcal{B}y \rightarrow \sim y\mathcal{B}x)$ ise
5. $\mathcal{B}$ *ters-bakışımlı* (antisimetrik)dır, ancak ve ancak $\forall x \forall y[(x \neq y) \wedge x\mathcal{B}y] \rightarrow y\mathcal{B}x]$ ise
6. $\mathcal{B}$ *geçişli* (transitif)dir ancak ve ancak $\forall x \forall y \forall z\ [(x\mathcal{B}y \wedge y\mathcal{B}z) \rightarrow x\mathcal{B}z]$ ise
7. $\mathcal{B}$ *geçişsiz* (intransitif)dir ancak ve ancak $\forall x \forall y \forall z\ [(x\mathcal{B}y \wedge y\mathcal{B}z) \rightarrow \sim x\mathcal{B}z)]$ ise
8. $\mathcal{B}$ *bağlaşık*'dır ancak ve ancak $\forall x \forall y[(x \neq y) \rightarrow (x\mathcal{B}y \vee y\mathcal{B}x)]$
9. $\mathcal{B}$ *tam bağlaşık*'dır ancak ve ancak $\forall x \forall y[x\mathcal{B}y \vee y\mathcal{B}x]$ ise

Yukardaki özellikleri örneklerle açıklayalım.

1. ***Özdeşlik*** (=) bağıntısı yansımalıdır. Her birey kendiyle özdeştir. "$\forall x(x=x)$" doğrudur. İkinci bir örnek olarak

(18) $B = \{<m_0, m_0>, <m_0, m_1>, <m_1, m_1>\}$

yansımalı bir bağıntıdır. Nitekim $A\ell(\mathcal{B}) = \{m_0, m_1\}$ olup $m_0 \mathcal{B} m_0$ ve $m_1 \mathcal{B} m_1$ doğrudur, çünkü $<m_0, m_0> \in \mathcal{B}$ ve $<m_1, m_1> \in \mathcal{B}$.

2. ***Baba-çocuk*** bağıntısı yansımasızdır. Nitekim hiç kimse kendi babası değildir. Başka bir örnek olarak

(19) $\mathcal{B} = \{<m_0, m_1> <m_1, m_2> <m_2, m_0>\}$

yansımasız bir bağıntıdır. Nitekim $m_0 \mathcal{B} m_0$, $m_1 \mathcal{B} m_1$ ve $m_2 \mathcal{B} m_2$ yanlıştır.

3. Kardeşlik bağıntısı bakışımlıdır. x, y'nin kardeşi ise y de x'in kardeşi olur. Başka bir örnek olarak

(20) $\mathcal{B} = \{<m_0, m_1> <m_1, m_0>, <m_0, m_2> <m_2, m_0>\}$

bağıntısı bakışımlıdır. Nitekim $x \mathcal{B} y$ olunca $y \mathcal{B} x$'de oluyor.

4. ***Baba-çocuk*** bağıntısı bakışımsızdır. x, y'nin babası ise, y x'in babası olamaz. Başka bir örnek olarak

(21) $\mathcal{B} = \{<m_0, m_1>, <m_1, m_2>\}$

bağıntısı bakışımsızdır. Nitekim $x \mathcal{B} y$ olursa $y \mathcal{B} x$ olmuyor. Her bakışımsız bağıntı aynı zamanda yansımasız olur.

5. "$\leq$" ile "$\subseteq$" bağıntıları ters bakışımlıdır. $x \neq y$ ve $x \leq y$ ise $\sim(y \leq x)$, $x \neq y$ ve $x \subseteq y$ ise $\sim(y \subseteq x)$ olur. Başka bir örnek olarak

(22) $\mathcal{B} = \{<m_0, m_0>, <m_0, m_1>\}$

bağıntısı bakışımsız olmamasına karşın ters bakışımlıdır. Ters bakışımlı bağıntılar yansımasız olmayabilir. Bazı bağıntılar ne bakışımlı, ne bakışımsız ne de ters bakışımlıdır. Örneğin kızkardeşlik bağıntısı öyledir.

6. "$<$", "$\leq$", "$\subseteq$" bağıntıları geçişlidir. Başka bir örnek olarak

(23) $\mathcal{B} = \{<m_0, m_1> <m_1, m_2> <m_0, m_2>\}$

bağıntısı geçişlidir.

7. Baba-çocuk bağıntısı geçişsizdir. x y'nin babası ve y z'nin babası ise x z'nin babası olamaz. Başka bir örnek olarak

(24) $\mathcal{B} = \{<m_0, m_1>, <m_1, m_2>\}$

bağıntısı geçişsizdir. Nitekim $m_0 \mathcal{B} m_1$, ve $m_1 \mathcal{B} m_2$'nin doğru olmasına karşın $m_0 \mathcal{B} m_2$ yanlıştır. Her geçişsiz bağnıtı yansımasızdır.

8. < ("küçük") bağıntısı bağlaşık ama tam bağlaşık değildir. Nitekim x ile y farklı sayılar ise $x < y$ veya $y < x$ olur. Ama x ile y eşit ise ne $x < y$ ne de $y<x$ olur. O halde "<" bağlaşıktır, ama tam bağlaşık değildir. Başka bir örnek olarak

(25) $\mathcal{B} = \{<m_0, m_1>, <m_1, m_0>\}$

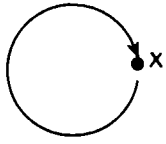
bağıntısı tam bağlaşık olmamakla birlikte bağlaşıktır.

9. "≤" ("küçük veya eşit") bağıntısı tam bağlaşıktır. x ile y herhangi farklı veya eşit sayılar ise $x \leq y$ veya $y \leq x$ olur. Başka bir örnek olarak

(26) $\mathcal{B} = \{<m_0, m_1>, <m_1, m_0>, <m_0, m_0>, <m_1, m_1>\}$

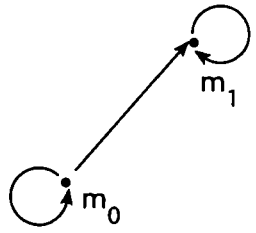
bağıntısı tam bağlaşıktır. Her tam bağlaşık bağıntı aynı zamanda bağlaşıktır, ama her bağdaşık bağıntı tam bağlaşık değildir.

Sonlu bağıntıları (yani alanları sonlu küme olan bağıntılar) *çizge* (graf) ile temsil edebiliriz. $\mathcal{B}$ bir sonlu bağıntı olduğunda $A\ell(\mathcal{B})$'ya ait her öğe düzlemde farklı bir nokta ile gösterilir. $x \mathcal{B} y$ doğru ise x'i gösteren nokta ile y'yi gösteren nokta arasında yönü x noktasından y noktasına doğru olan bir ok çizilir. Eğer $x \mathcal{B} y$ ile $y \mathcal{B} x$ birlikte doğru ise, x ile y noktaları arasında iki yönlü "↔" biçiminde bir ok çizilir. Eğer $x \mathcal{B} x$ doğru ise, x noktasından geçen



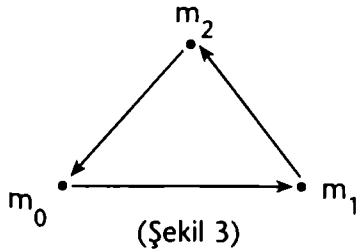
(Şekil 1)

biçiminde oklu bir çember çizilir. Örneğin yansımalı (18) bağıntısının çizgesi



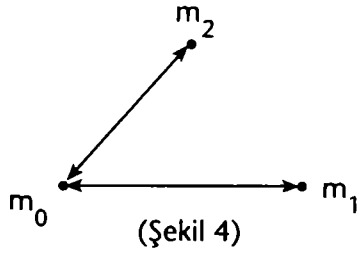
(Şekil 2)

biçiminde, yansımasız (19) bağıntısının çizgesi



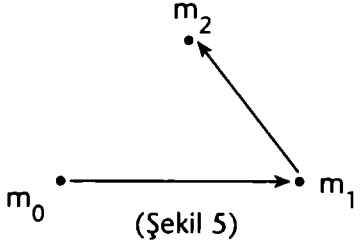
(Şekil 3)

biçiminde, bakışımlı (20) bağıntısının çizgesi



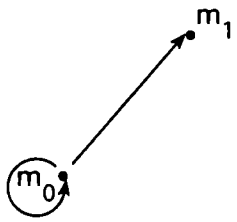
(Şekil 4)

biçiminde, bakışımsız (21) bağıntısının çizgesi



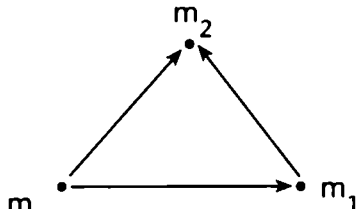
(Şekil 5)

biçiminde, ters bakışımlı (22) bağıntısının çizgesi



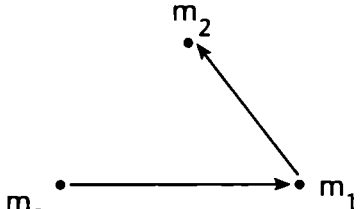
(Şekil 6)

biçiminde, geçişli (23) bağıntısı



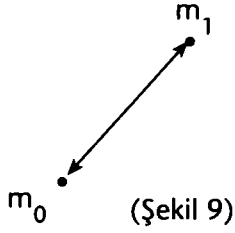
(Şekil 7)

biçiminde, (24) geçişsiz bağıntısı



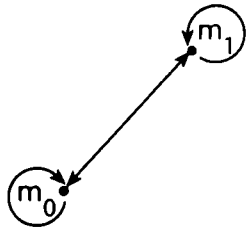
(Şekil 8)

biçiminde, (25) bağlaşık bağıntısı



(Şekil 9)

biçiminde ve (26) tam bağlaşık bağıntısı



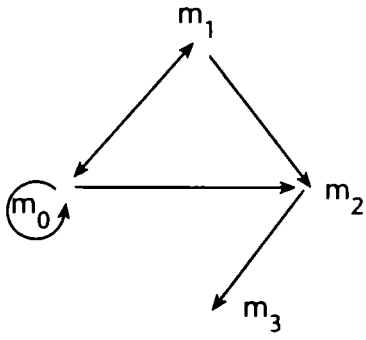
(Şekil 10)

biçimindedir.

Dikkat edilirse, bir bağıntı sözünü ettiğimiz dokuz özellikten hiçbirini taşımayabilir. Örneğin

(27) $\mathcal{B} = \{<m_0, m_1>, <m_1, m_2>, <m_2, m_3>, <m_0, m_0>, <m_0, m_2>, <m_1, m_0>\}$

üremesi gerçekten sözü geçen dokuz özellikten hiçbirini taşımıyor. Bu bağıntının çizgesi şöyledir.



(Şekil 11)

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki bağıntıların ön alan, ard alan ve alan'ını bulunuz.

1. {<a, b>, <b, c>, <a, a>}
2. {<1, 2>, <3, 4>, <1, 1>, <2, 1>}
3. {<A, B>, <B, C>}

II. Aşağıdaki bağıntıların çizgelerini çiziniz.

1. $\mathcal{B} = \{<a, b>, <b, c>, <a, c>\}$
2. $\mathcal{B} = \{<m_1, m_2>, <m_2, m_3>\}$
3. $\mathcal{B} = \{<m_1, m_1>, <m_2, m_2>, <m_3, m_3>\}$
4. $\mathcal{B} = \{<A, B>, <B, A>, <A, A>\}$
5. $\mathcal{B} = \{<a, m>, <m, \ell>, <\ell, b>, <\ell, \ell>\}$

III. Yukarıdaki bağıntıların özelliklerini (yansımalı, yansımasız, bakışımlı, bakışımsız, ters bakışımlı geçişli, geçişsiz, bağlaşık ve tam bağlaşık) belirtiniz.

5.1.4.2 Almaşıklık Bağıntılı Yorumlamalar

Kipler mantığında, mümkün dünyalar kümesi M olan yorumlamaya M üzerinde bir $\mathcal{B}$ bağıntısı katılır. $\mathcal{B}$ bağıntısına *almaşıklık bağıntısı* (veya *erişilebilirlik* bağıntısı) denilir. Böylece elde edilen yorumlamaya *almaşıklık bağıntılı yorumlama* veya *normal yorumlama* diyoruz.

Almaşıklık bağıntılı yorumlamalar, almaşıklık bağıntısının özelliklerine göre çeşitli türlere ayrılır. Böylece almaşıklık bağıntısı yansımalı, bakışımlı veya geçişli olan yorumlamaları ayırt ederiz. Her almaşıklık bağıntısı türü ayrı bir kiplik mantığı sistemini belirler. Bu sistemlere normal *kiplik mantığı sistemleri* veya kısaca *normal sistemler* denir. (İlerde normal olmayan kiplik mantığı sistemlerini de göreceğiz.

Almaşıklık bağıntılı yorumlamaları örnekle açıklamak amacıyla

(1) $\Box(p \rightarrow q)$

önermesinin bir yorumlamasını gösteriyoruz. (Bundan böyle yorumlamayı hep almaşıklık bağıntılı yorumlama anlamında kullancağız.)

(2) $(M: \{m_0, m_1\}; \mathcal{B}: \{<m_0, m_1>, <m_1, m_1>\}; m_0: p, m_1: p, q)$

Sözü geçen (2) yorumlamasına bakarak

(3) $m_0 \mathfrak{B} m_1$, $m_1 \mathfrak{B} m_1$

olduğu söylenebilir.

$x \mathfrak{B} y$ olduğunda, y ard üyesinin x ön üyesinin bir *almaşık*'ı olduğu söylenir.

Buna göre (2) yorumlaması gereği, m_0'ın tek almaşığının m_1, m_1'in (tek) almaşığının da m_1'in kendisi olduğunu söyleyebiliriz.

imdi (1) zorunluluk önermesinin (2) yorumlamasında doğru olması, "□"nin etki alanı olan "$p \rightarrow q$" önermesinin hem m_0 hem m_1'de değil, yalnızca m_0'ın almaşığı olan m_1'de doğru olması yetiyor. Nitekim almaşıklık bağıntılı yorumlamalar durumunda:

(i) □A biçiminde bir zorunluluk önermesinin bir yorumlamada m gibi bir mümkün dünyada doğru olması, *A*'nın *m*'nin bütün almaşıklarında doğru olması demektir.

(ii) ◇A biçiminde imkân önermesinin bir yorumlamada m gibi bir mümkün dünyada doğru olması, A'nın m'nin en az bir almaşığında doğru olması demektir.

(iii) Bir önermenin verilen bir yorumlamada (mutlak olarak) doğru olması, bu önermenin m_0 gerçek dünyasında doğru olması demektir.

Şimdi (i) ilkesi gereği (1) önermesinin doğruluk değerini bulalım. (iii) ilkesi gereği "□(p → q)"nun (mutlak olarak) doğru olması, "□(p → q)"nun m_0'da doğru olması demektir. (i) ilkesi gereği de "□(p → q)"nun m_0'da doğru olması "p → q"nun m_0'ın (tek) almaşığı olan m_1'de doğru olması demektir. "p → q"nun m_1'deki doğruluk değeri hesaplaması şöyledir.

(4) $\dfrac{m_1}{p \rightarrow q}$

$D \rightarrow D$

D

Demek ki "$p \rightarrow q$" m_1'de doğrudur. O halde (1) önermesi (2) yorumlamasında doğrudur.

İkinci bir örnek olarak

(5) $\Diamond(p \wedge q)$

önermesinin

(6) (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_0>, <m_0, m_1>, <m_1, m_2>\}$; m_0: p; m_1: ; m_2: p)

yorumlamasındaki doğruluk değerini bulalım. Görüldüğü gibi (6) gereği m_0'ın almaşıkları m_0 ile m_1'dir. O halde (ii) ilkesi gereği "$\Diamond(p \wedge q)$"nun m_0'da doğru olması, "$p \wedge q$"nun m_0 ile m_1 mümkün dünyalarının en az birinde doğru olması demektir. İmdi "$p \wedge q$"nun m_0 ile m_1'deki doğruluk değeri hesaplamaları şöyledir.

(7)

m_0	m_1
$p \rightarrow q$	$p \rightarrow q$
$D \rightarrow Y$	$Y \rightarrow Y$
Y	D

Demek ki "$p \wedge q$" m_1'de doğrudur. O halde (5) önermesi (6) yorumlamasında doğrudur.

Üçüncü örnek olarak (1) gibi bir zorunluluk önermesinin, gerçek dünyanın hiçbir almaşığı olmadığı

(8) (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_1, m_1>\}$; m_0: p; m_1: q)

gibi bir yorumlamadaki doğruluk değerini bulalım.

Hiçbir almaşığı olmayan bir mümkün dünyaya çıkmaz denir.

İşte (8) yorumlamasında m_0 gerçek dünyası bir çıkmazdır. Çünkü hiçbir almaşığı yoktur. Önermelerin bir çıkmazdaki doğruluk değeri aşağıdaki ilkelere göre belirlenir.

(iv) $\Box$A biçiminde bir zorunluluk önermesi çıkmazı durumunda olan *m* gibi bir mümkün dünyada hep doğru olur.

(v) $\Diamond A$ biçiminde bir imkân önermesi çıkmaz durumunda olan *m* gibi bir mümkün dünyada hep yanlış olur.

Nitekim daha önce sözünü ettiğimiz (i) ile (ii) ilkeleri şöyle dile getirelebilir.

(i') $\Box A$ *m* mümkün dünyasında doğrudur, ancak ve ancak $\forall m(m\mathcal{B}m' \rightarrow A$, m'de doğrudur).

(ii') $\Diamond A$ *m* mümkün dünyasında doğrudur, ancak ve ancak $\exists m'$ ($m\mathcal{B}m' \wedge A$, m'de doğrudur).

İmdi m bir çıkmaz ise $m\mathcal{B}m'$ her m' için yanlış olur. O zaman her m' için, "$m\mathcal{B}m' \rightarrow$ A, m'de doğrudur" önermesi doğru, "$m\mathcal{B}m' \wedge$ A, m"de doğrudur" önermesi ise yanlış olur.

Böylece (1) zorunluluk önermesinin (iii) ilkesi gereği (8) yorumlamasında doğru olduğunu söyleyebiliriz. Öte yandan (5) imkân önermesinin aynı (8) yorumlamasında (v) ilkesi gereği yanlış olduğunu görüyoruz.

Üçüncü örnek olarak

(9) $\Box \Diamond(p \wedge \sim q)$

önermesinin çıkmazı olan

(10) (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; $\mathcal{B}$: $\{<m_0, m_1>, <m_2, m_2>\}$; m_0: p; m_1: q; m_2: p)

yorumlamasında doğruluk değerini bulalım. (9)'un doğru olması, "$\Diamond(p \wedge \sim q)$" nun m_0'ın almaşığı olan m_1'de doğru olması demektir. Oysa m_1 bir çıkmazdır. Dolayısıyla "$\Diamond(p \wedge \sim q)$" (v) ilkesi gereği m_1'de yanlıştır. O halde (9) önermesi (10) yorumlamasında yanlıştır.

Dördüncü örnek olarak

(11) $\Diamond(p \wedge \Box q)$

önermesinin

(12) (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; B: $\{<m_0, m_0>, <m_0, m_1>, <m_1, m_2>, <m_2, m_2>\}$; m_0: p; m_1: q; m_2:)

yorumlamasındaki doğruluk değerini bulalım.

(11)'in m_0'da doğru olması, "$p \wedge \Box q$"nun m_0'ın almaşıkları olan m_0 ile m_1'in en az birinde doğru olması demektir. p, m_0'da doğru m_1'de ise yanlıştır. O halde "$p \wedge \Box q$" m_1'de yanlıştır. "$\Box q$" nun m_0'da doğru olması, "q"nun m_0'ın almaşığı olan m_0 ve m_1'de doğru olması demektir. Oysa q, m_0'da yanlıştır. O halde "$\Box q$" m_0'da yanlış olup "$p \wedge \Box q$" da m_0'da yanlıştır. Dolayısıyla (11) önermesi (12) yorumlamasında yanlıştır. Görüldüğü gibi önermelerin verilen yorumlamalardaki doğruluk değerinin hesaplanması çözümleyici çizelgesiz yapıldığında oldukça karmaşık olabiliyor. İlerde almaşıklık bağıntılı yorumlamalarda doğruluk değerinin çözümleyici çizelge ile hesaplanmasını göreceğiz.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin verilen yorumlamadaki doğruluk değerini hesaplayınız.

1. $\Box(q \rightarrow r)$

   (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{B}$: $\{<m_0, m_0>, <m_1, m_1>\}$; m_0: q; m_1: r)

2. $\Diamond(\sim p \vee r)$

   (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{B}$: $\{<m_0, m_1>, <m_1, m_1>\}$; m_0:; m_1: p, r)

3. $\Box(p \vee q) \wedge q$

   (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; $\mathcal{B}$: $\{<m_0, m_1>, <m_0, m_2>, <m_2, m_2>\}$; m_0: q; m_1:)

4. $\Box[p \vee \sim(\Box q \wedge q)]$

   (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; $\mathcal{B}$: $\{<m_1, m_1>, <m_1, m_2>\}$; m_0: p; m_1: q)

5. $\Diamond\Box(p \wedge q)$

   (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; $\mathcal{B}$: $\{<m_0, m_1>, <m_1, m_1>, <m_1, m_2>\}$; m_0: q, m_1: p, q)

5.1.4.3 Normal Sistemler

§5.1.4.2'de tanımladığımız normal yorumlamaların belirlediği normal sistemlerle ilgili aşağıdaki tanımları yapıyoruz.

S, normal yorumlamalardan oluşan bir küme olduğunda,

(i) S kümesinin öğesi olan her yorumlamada doğru olan bir önermeye *S-geçerli önerme,* S'nin öğesi olan yorumlamalara da *S'ye ait yorumlama* denir.

(ii) S-geçerli önermelerin kümesine *S-sistemi* denir. S-geçerli önermelere, *S sisteminde geçerli önerme* de denir.

(iii) S-sistemlerinin tümüne *normal kiplik mantığı* sistemleri veya kısaca *normal sistemler* denir.

Normal yorumlama yerine kısca "yorumlama" diyeceğiz.

S yorumlamalardan oluşan herhangi bir küme olduğunda, S daralınca S kümesinin belirlediği sistemi genişler. Nitekim, S_1 ile S_2 yorumlamalardan oluşan iki küme olduğunda S_2, S_1'in alt kümesi ise, S_1 sistemi S_2 sisteminin alt sistemi olur.

Sözü geçen ilişkiyi şöyle ispatlayabiliriz. S_2, S_1'in alt kümesi, A'da herhangi bir önerme olsun.

1. Eğer *A* önermesi S_1-geçerli ise yani S_1 kümesine ait her yorumlamada doğru ise, S_1'in alt kümesi olan S_2'nin de öğesi olan her yorumlamada doğru olup S_1-geçerli olur. Dolayısıyla A önermesi S_1-geçerli ise S_2-geçerli de olur.

2. Eğer A önermesi S_1-geçerli değilse, A, S_1'e ait en az bir önermede yanlış olur. S_2 kümesi A'nın yanlış olduğu yorumlamaları kapsamazsa A önermesi S_2'ye ait bütün yorumlamalarda doğru olup S_2-geçerli olur. Yani S_1-geçerli olmayan bir önerme S_2-geçerli olur. O halde S_2 sistemi S_1 sisteminden daha geniş olur.

Tüm (normal) yorumlamaların kümesi *K* ile gösterilir. O zaman *K*'nın belirlediği K sistemi en dar sistem olur. Nitekim K sistemi bütün normal sistemlerin alt sistemidir. S belli bazı özellikleri olan yorumlamaların kümesi

olsun. O zaman S, K'nın alt kümesi olup K sistemi S sisteminin alt sistemi olur. K-geçerli olan her önerme aynı zamanda S-geçerlidir. Ama K-geçerli olmayan S-geçerli önermeler de vardır.

Yorumlamalardan oluşan S kümesi ile S'nin belirlediği S sistemi arasındaki ilişkiyi aşağıdaki örneklerle açıklıyoruz. Farklı yorumlamaları y_1, y_2, y_3 ile gösteriyoruz. K kümesi $\{y_1, y_2, y_3\}$ olsun. y_1, y_2 ve y_3'ün tümünde doğru olan önermeler de A ile B olsun. Öte yandan C_1 önermesinin y_1 ile y_2'de doğru olup y_3'de yanlış olduğunu, C_2 önermesinin ise y_2 ile y_3'de doğru olup y_1'de yanlış olduğunu, ayrıca $S_1 = \{y_1, y_2\}$ ve $S_2 = \{y_2, y_3\}$ olduğunu kabul edelim. O zaman K sistemi {A, B}, S_1 sistemi $\{A, B, C_1\}$ ve S_2 sistemi $\{A, B, C_2\}$ olur. Gerek $\{y_1, y_2\}$ gerekse $\{y_1, y_3\}$, $\{y_1, y_2, y_3\}$'ün alt kümesi, yani birer daralmasıdır. $\{y_1, y_2\}$'nin belirlediği sistem $\{A, B, C_1\}$, $\{y_1, y_3\}$'ün belirlediği sistem de $\{A, B, C_2\}$'dir. Görüldüğü gibi $\{A, B, C_1\}$ ile $\{A, B, C_2\}$ sistemleri $\{y_1, y_2, y_3\}$'ün belirledği {A, B} sisteminden daha geniştir.

Farklı önermelerin K'nın öğesi olan yorumlamalardaki doğruluk değerlerine *doğruluk değerleri çizelgesi* dediğimiz bir çizelge ile belirtebiliriz.

	y_1	y_2	y_3
A	D	D	D
B	D	D	D
C_1	D	D	Y
C_2	Y	D	D

Yorumlamalardan oluşan her küme bir normal sistem belirlediğine göre boş küme (yani hiç bir yorumlamayı kapsamayan küme)de bir normal sistemi belirler. Bu normal sistem kiplik mantığı dilinin bütün önermelerinden oluşur. Nitekim bütün önermelerin ortak doğrulayıcı yorumlaması yoktur. Örneğin A ile ~A hiçbir yorumlamada birlikte doğru olamazlar. Bu nedenle

Kiplik mantığı dilinin bütün önermelerinde oluşan normal sisteme *tutarsız normal sistem* denir. Tutarsız normal sistem dışındaki her normal sisteme de *tutarlı normal sistem* denir.

K sistemi, S gibi her normal sistemin alt kümesidir. Her S sistemi de tutarsız normal sistemin alt kümesidir. Bu nedenle K en dar (veya en küçük) normal sistem, tutarsız normal sistem ise en geniş (veya en büyük) normal sistemdir.

S gibi bir normal sistemden daha geniş olan tutarlı bir normal sistem yoksa, S sistemine *maksimal normal sistem* denir.

İlerde göreceğimiz gibi tam iki tane farklı maksimal normal sistem vardır. Bunlardan birine *Ver* sistemi öbürüne de *Triv* sistemi denir. K sistemi her iki maksimal sistemin alt kümesidir. Bundan sonraki bölümlerde önce K sistemini sonra da en önemli olan öteki normal sistemleri inceleyeceğiz. En önemli normal sistemleri aşağıda belirtiyoruz.

1. *K sistemi:* K, bütün (normal) yorumlamaların kümesidir.
2. *D sistemi:* D, almaşıklık bağlantısı çıkmazsız olan bütün yorumlamaların kümesidir.
3. *T sistemi:* T, almaşıklık bağıntısı yansımalı olan yorumlamalar kümesidir.
4. *B sistemi: B,* almaşıklık bağıntısı yansımalı ve bakışımlı olan yorumlamalar kümesidir.
5. *S4 sistemi:* S4 almaşıklık bağıntısı yansımalı ve geçişli olan yorumlamalar kümesidir.
6. *S5 sistemi:* S5, almaşıklık bağıntısı yansımalı, bakışımlı ve geçişli olan yorumlamalar kümesidir.

ALIŞTIRMALAR

K = $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ olduğunda aşağıdaki yorumlama kümelerinin verilen doğruluk değeri çizelgesine göre belirlediği sistemi belirtiniz.

A, B, C, A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4 farklı önermelerdir.

1. $S_1 = \{y_1, y_3\}$,

	y_1	y_2	y_3	y_4
A	D	Y	Y	D
B	D	Y	D	Y
C	D	D	D	D

2. $S_2 = \{y_1, y_3, y_4\}$,

	y_1	y_2	y_3	y_4
A_1	Y	D	D	D
A_2	D	D	D	D
A_3	Y	D	D	D
A_4	D	Y	D	D

3. $S_3 = \{y_2, y_4\}$,

	y_1	y_2	y_3	y_4
A_1	Y	D	D	Y
A_2	D	D	Y	D
A_3	Y	Y	D	D
A_4	Y	D	D	D

5.1.5 K sistemi

5.1.5.1 K Sistemi Yasaları

K sisteminde geçerli olan önermeler (yani K-geçerli önermeler) ile doğru olan eşdeğerlikler ve içermelerden önemli sayılanlar *K sistemi yasaları*'dır. Bu yasalardan en önemli olanları aşağıda gösteriyoruz.

(i) K-geçerli önermeler, eşdeğerlikler ve içermeler

1. $\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$ ("$\Box$"nin "$\rightarrow$" geçerli tek yönlü dağıtıcılığı)

Bu önermeye **K** aksiyomu veya kısaca **K** denir.

2. $\Box(p \wedge q) \equiv (\Box p \wedge \Box q)$ ("$\Box$"nin "$\wedge$" üzerine dağıtıcılığı)
3. $\Diamond(p \vee q) \equiv (\Diamond p \vee \Diamond q)$ ("$\Diamond$"nin "$\vee$" üzerine dağıtıcılığı)
4. $\Box p \equiv \sim\Diamond\sim p$ ("$\Box$"in "$\Diamond$" türünden tanımı)

5. $\Diamond p \equiv \sim\Box\sim p$ ("$\Diamond$"in "$\Box$" türünden tanımı)

4. ve 5. yasalar, "$\Box$" ile "$\Diamond$" kiplik değişmezlerinden yalnız birinin yettiğini, herbirinin öbürü türünde tanımlanabildiğini gösterir.

6. $\Diamond(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\Box p \rightarrow \Diamond q)$

7. $\Diamond(p \wedge q) \models \Diamond p \rightarrow \Diamond q$ ("$\Diamond$" nün "$\wedge$" üzerine tek yönlü dağıtıcılığı)

8. $\Box(p \vee q) \rightarrow (\Box p \vee \Diamond q)$

(ii) Türetme Kuralları

Türetme kuralları, bazı önerme kalıplarının geçerli olması koşuluyla başka önerme kalıplarının da geçerli olduğunu dile getirir.

1. Her totoloji K-geçerlidir.

2. A önermesi $A(p_1, ..., p_n)$ biçiminde olup A K-geçerli ise, $A(p_1, ..., p_n)$'de p_1 yerine B_1, ..., p_n yerine B_n koymakla elde edilen $A(B_1, ..., B_n)$ önermesi de K-geçerli olur.

3. A K-geçerli ve $A \rightarrow B$ K-geçerli ise, B K-geçerli olur.

4. C(A), içinde A önermesi geçen bir önerme, ve C(B), C'de A'nın bir veya daha çok geçişi yerine B'nin konulmasıyla elde edilen önerme olduğunda, $A \equiv B$ ise $C(A) \equiv C(B)$ olur.

5. A K-geçerli ise, $\Box A$ K-geçerli olur.

6. $A \rightarrow B$ K-geçerli ise, $\Box A \rightarrow \Box B$ K-geçerli olur.

7. $A \leftrightarrow B$ K-geçerli ise, $\Box A \leftrightarrow \Box B$ K-geçerli olur.

8. $A \rightarrow B$ K-geçerli ise $\Diamond A \rightarrow \Diamond B$ K-geçerli olur.

9. $A_1, ..., A_n \models B$ ise, $\Box A_1, ..., \Box A_n \models \Box B$ olur.

2. kuralı örnekle açıklamak için 1. kuralı gereği geçerli olan

(1) $p \rightarrow (p \vee q)$

totolojisini ele alalım. "p"nin her geçişi yerine "$\Box p$", "q"nun da her geçişi yerine $\Diamond p$ koyarsak

(2) $\Box p \rightarrow (\Box p \vee \Diamond q)$

önermesi elde edilir. (2) önermesi 2. kural gereği K-geçerlidir.

4. kuralı örnekle açıklamak için

(3) $\Box[p \rightarrow \sim(q \rightarrow r)] \rightarrow \sim(q \rightarrow r)$

önermesini ele alalım.

(4) $\sim(q \rightarrow r) \equiv q \wedge \sim r$

olduğundan 4. kural gereği, (3)'te "$\sim(q \rightarrow r)$"nin bir geçişi yerine eşdeğeri olan "$q \wedge \sim r$" koymakla elde edilen önerme (3) ile eşdeğerdir. Yani;

(5) $\Box[p \rightarrow \sim(q \rightarrow r)] \rightarrow \sim(q \rightarrow r) \equiv \Box[p \rightarrow \sim(q \rightarrow r)] \rightarrow (q \wedge \sim r)$

Gene 4. kural gereği (1)'de "$\sim(q \rightarrow r)$"nin her iki geçişi yerine eşdeğeri olan "$q \wedge \sim r$" koyarsak

(6) $\Box[p \rightarrow \sim(q \rightarrow r)] \rightarrow \sim(q \rightarrow r) \equiv \Box[p \rightarrow (q \wedge \sim r)] \rightarrow (q \wedge \sim r)$

eşdeğerliği elde edilir.

Yukardaki yasalarda geçen eşdeğerlikler ve içermeler K sistemine ilişkindir. Genel olarak S herhangi bir mantık sistemi olduğunda S sisteminde eşdeğerlik "$\overset{S}{\equiv}$" ile, S sisteminde içerme de "$\overset{S}{\models}$" ile gösterilir. "$\overset{S}{\equiv}$" ile "$\overset{S}{\models}$" şöyle tanımlanır.

y herhangi bir yorumlama olduğunda A gibi bir önermenin y'deki doğruluk değeri dy (A) olsun. O zaman: A ile B iki önerme olduğunda

(1) $A \overset{S}{\equiv} B$ ancak ve ancak $\forall y$ [(y, s'ye aittir $\rightarrow$ [dy(A) = dy(B)]]

(2) $A_1, \ldots, A_n \overset{S}{\models} B$ ancak ve ancak $\forall y$ [[y, s'ye aittir $\wedge$ $dy(A_1) = D \wedge \ldots \wedge dy(A_n) = D] \rightarrow dy(B) = D]$

Eşdeğerlik ve içerme'nin ait olduğu S sistemi bağlamdan dolayı belli olursa "$\overset{S}{\equiv}$" yerine "$\equiv$", "$\overset{S}{\models}$" yerine de "$\models$" yazılır. Biz de yukardaki yasalarda "$\overset{K}{\equiv}$" yerine "$\equiv$", "$\overset{K}{\models}$" yerine de "$\models$" yazdık.

5.1.5.2 Çözümleyici Çizelge ile Doğruluk Değeri Hesaplaması

Çözümleyici çizelge, almaşıklık bağıntılı yorumlamalar durumunda da uygulanabilir. Ancak zorunluluğun elenmesi ile imkânın elenmesi kuralında bazı değişiklikler yapılır. K sisteminde zorunluluğun elenmesi kuralı ile imkânın elenmesi kuralını aşağıda gösteriyoruz.

(i) Zorunluluğun verilen yorumlamada elenmesi kuralı

Verilen yorumlamada m_i gibi bir mümkün dünyadaki almaşıklar m_1, ..., m_n ise ($m \geq 0$), bir yorumlamaya dayanan çözümleyici çizelgenin bir açık yolunda bulunan "$[m_i] \Box A$ " biçimindeki bir satırı aşağıda gösterilen biçimde uzatabiliriz.

1. $[m_i] \Box A$

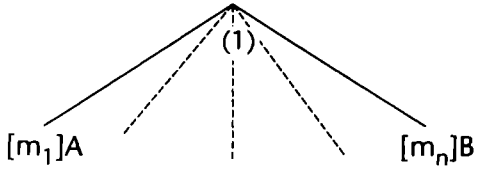
$[m_1] A$
$\vdots$ (1)
$[m_n] A$

$n = 0$ sınır durumunda m_i mümkün dünyası almaşıksız olduğundan bir çıkmazdır. Bu durumda $\Box A$ verilen yorumlamada doğru olur. Bunu belirtmek için, mi'nin çıkmazı olduğu durumlarda "$[m_i] \Box A$" satırının ardına "ç" işaretini ekleriz.

(ii) İmkânın verilen yorumlamada elenmesi kuralı

Verilen yorumlamada m_i gibi bir mümkün dünyanın almaşıkları m_1, ..., m_n ise ($n \geq 0$), bu yorumlamaya dayanan çözümleyici çizelgenin bir açık yolunda bulunan "$[m_i] \Diamond A$" biçimindeki bir satırı $n > 0$ durumunda aşağıda gösterilen biçimde uzatabiliriz.

1. $[m_i] \Diamond A$



n = 0 sınır durumunda ise m_i çıkmaz olup, $\Diamond A$ m_i'de yanlış olur. O zaman "$\sim\Diamond A$" m_i'de doğru olur. Dolayısıyla $m_n = 0$ durumunda açık yol şöyle uzatılır.

1. $[m_i] \Diamond A$

   $[m_i] \sim\Diamond A$ (1,ç)

İkinci satırın ardına çıkmazın sonucu olduğunu belirtmek için "ç" işaretini koyuyoruz.

Bu iki kurala dayanan çözümleyici çizelgeyi örneklerle açıklıyoruz.

Birinci örnek olarak

(1) $\Box(p \rightarrow q)$

önermesinin

(2) (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_0>, <m_0, m_1>, <m_1, m_1>\}$; m_0: p; m_1: q)

yorumlamasında doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile hesaplayalım.

(1) önermesinin (2) yorumlamasına dayanan çözümleyici çizelge (i) kuralı gereği şöyledir.

(3) 1. $[m_0] \Box(p \rightarrow q)$ (B.Ö.)

2. $[m_0]\ p \rightarrow q$ (1)

3. $[m_1]\ p \rightarrow q$ (1)

(2)

$[m_0]\sim p$ $[m_0]q$

(3) (3)

$[m_1]\sim p$ $[m_1]q$ $[m_1]\sim p$ $[m_1]q$

1. adımda m_0'un almaşıkları m_0 ile m_1 olduğundan (i) kuralı gereği "$[m_0]p\rightarrow q$" ile "$[m_1]\ p \rightarrow q$" satırlarını elde ettik. Birinci açık yoldaki önekli temel önermeler dizisi

(4) $[m_0]\sim p, [m_1]\sim p$

dir. (2) yorumlaması gereği "$[m_0]\sim p$" yanlış, "$[m_1]\sim p$" ise doğrudur. Nitekim yorumlama gereği "p" m_0'da doğru m_1'de ise yanlıştır. O halde "$\sim p$" m_0'da yanlış olduğundan "$[m_0]\sim p$" önekli önerme de yanlış olur. Öte yandan "p" m_1'de yanlış olduğundan "$\sim p$" m_1'de doğru olup "$[m_1]\sim p$" önekli önermesi de doğrudur. Dolayısıyla (4) dizisi yanlış olup başlangıç önermesi de yanlış olur. O halde (1) önermesi (2) yorumlamasında yanlıştır.

İkinci örnek olarak

(5) $\Diamond\Box p \wedge \Box q$

önermesinin

(6) (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_1>, <m_0, m_2>, <m_2, m_1>, <m_1, m_2>\}$; m_0:; m_1:; m_2: q)

yorumlamasında doğruluk değerinin bu yorumlamaya dayanan çözümleyici çizelge ile hesaplayalım.

(7) 1. $[m_0] \Diamond\Box p \wedge \Box q$ (B.Ö.)

3. $[m_0] \Diamond\Box p$
2. $[m_0] \Box q$ (1)

$[m_1]$ q
$[m_2]$ q (2)

(3)

4. $[m_1] \Box p$ 5. $[m_2] \Box p$

$[m_2]$ p (4) $[m_1]$ p (5)

(7) çizelgesinde iki açık yol vardır. Birinci yolun önekli temel önermeler dizisi

(8) $[m_1]$ q, $[m_2]$ p

dir. (6) yorumlaması gereği "$[m_1]q$" yanlış, "$[m_2]q$" doğru, "$[m_2]p$" de yanlıştır. Dolayısıyla (5) önermesi (6) yorumlamasında yanlıştır.

Dördüncü örnek olarak

(9) $\Box(p \wedge \Diamond q)$

önermesinin doğruluk değerini

(10) (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; $\mathcal{B}$: $\{<m_0, m_1>, <m_2, m_0>\}$; m_0: p, m_1: q)

yorumlamasında, bu yorumlamaya dayanan çözümleyici çizelge ile hesaplayalım.

(11) 1. $[m_0] \Box(p \wedge \Diamond q)$

2. $[m_1]\ p \wedge \Diamond q$ (1)

$[m_1]\ p$

3. $[m_1]\ \Diamond q$ (2)

4. $[m_1] \sim\Diamond q$ (3, ç)

X

Dikkat edilirse 3. adımda m_1 çıkmaz olduğundan "$[m_1] \sim\Diamond q$" satırını elde ettik. Bu satırın ardına m_1'in çıkmaz olduğunu belirtmek için "ç" işaretini koyduk. Bu nedenle "$\Diamond q$", m_1'de yanlış olup "$[m_1] \sim\Diamond p$" satırı doğrudur.

(11) çizelgesi kapalı olduğundan (9) önermesi (10) yorumlamasında yanlıştır.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin verilen yorumlamada doğruluk değerini o yorumlamaya dayanan çözümleyici çizelge ile hesaplayınız.

1. $p \wedge \Box q$

   (M: $\{m_0, m_1\}$: $\mathcal{B}$: $\{<m_0, m_1>, <m_1, m_0>\}$; m_0: p; m_1: p, q)

2. $\Diamond p \rightarrow \Box(p \vee q)$

   (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{B}$: $\{<m_1, m_0>, <m_1, m_1>\}$; m_0: p; m_1: q)

3. $\Box(p \wedge r) \rightarrow \Diamond(q \wedge \sim r)$

   (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; $\mathcal{B}$: $\{<m_0, m_1>, <m_0, m_2>, <m_1, m_2>\}$; m_0: q; m_1: r; m_2:)

4. $\Diamond p \leftrightarrow \Box(q \wedge r)$

   (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_1>, <m_0, m_2>, <m_2, m_1>\}$; m_0: p, m_1:; m_2: q)

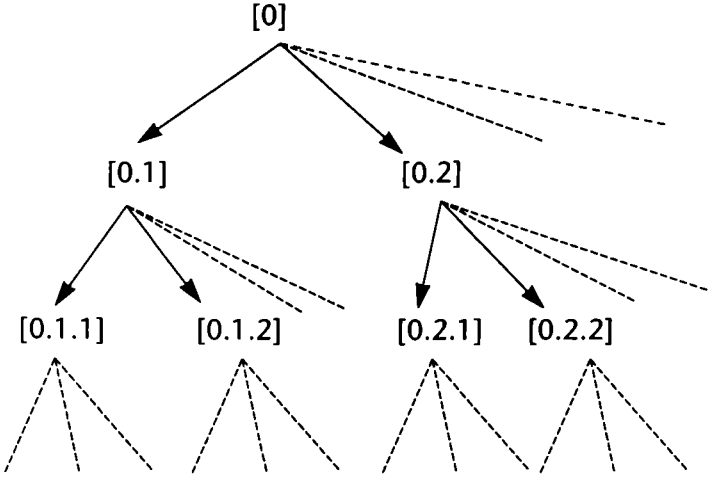
5. $\Diamond\Box p \wedge \Box(q \wedge \sim r)$

   (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_2>, <m_2, m_0>, <m_2, m_1>\}$; m_0: q; m_1:; m_2: p, q)

5.1.5.3 Çözümleyici Çizelge ile Yorumlama Belirlemesi

K sisteminde, almaşıklık bağıntılı yorumlama belirleyen çözümleyici çizelgenin satırlarında birer mümkün dünyayı gösteren önekler tam sayı dizileri biçimindedir. Gerçek dünya gene [0] öneki ile gösterilir. Gerçek dünyanın almaşıklarını [0.1], [0.2], [0.3], ... biçiminde, almaşıkların almaşıklarını [0.1.1], [0.1.2], [0.1.3], ..., [0.2.1], [0.2.2], [0.2.3], ..., [0.3.1], [0.3.2], [0.3.3], ... biçiminde v.b. biçimde gösteririz. Buna göre k_1, sıfır ve k_2, k_3, .., k_n'de pozitif tamsayılar olduğunda, herhangi bir mümkün dünyayı [k_1, k_2, ... k_n] biçiminde gösteririz.

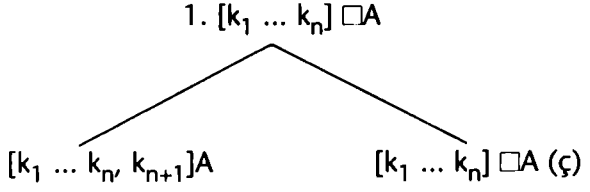
Çözümleyici çizelgenin açık olan bir yolunda geçen önekler o açık yolun belirlediği yorumlamanın mümkün dünyalar kümesini oluşturur. Almaşıklık bağıntısı ise bu önekler arasındaki doğal bağıntıdır. Bu doğal bağıntıyı aşağıdaki ağaç biçimindeki çizge ile dile getiriyoruz.



Bu türlü önekler yardımıyla K sisteminin yorumlamalarını belirleyen çözümleyici çizelgelerde kullanılan zorunluluğu eleme kuralı ile imkânı eleme kuralı şöyle dile getirilir.

(i) Zorunluluğun Elenmesi Kuralı

"$[k_1 \ldots k_n] \Box A$" ($m \geq 0$) biçiminde bir satır çözümleyici çizelgenin açık yolunda geçerse, açık yol aşağıdaki biçimde uzatılabilir.

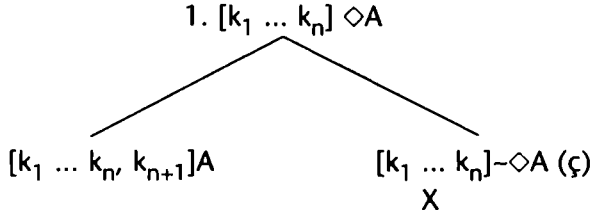


sağdaki (ç) işareti "$[k_1 \ldots k_n] \Box A$"nın doğru olduğunu gösterir. Eğer $[k_1 \ldots k_n, k_{n+1}]$ aynı yolda bulunan önceki bir satırın öneki ise, soldaki satırın eklenmesi zorunludur. O zaman da aşağıdaki satır hiç yazılmaz.

Açılan çatal, iki şıkkın bulunmasından ötürüdür. Birinci şıkta $[k_1 \ldots k_n]$ çıkmaz değildir, dolayısıyla $[k_1 \ldots k_n, k_{n+1}]$ gibi bir almaşığı vardır. İkinci şıkta $[k_1 \ldots k_n]$ çıkmaz olup almaşığı yoktur. İkinci şıkta $[k_1 \ldots k_n] \Box A$ satırı doğrudur. Dikkat edilirse $n = 0$ sınır durumunda $[k_1 \ldots k_n]$ öneki gerçek dünyayı gösteren [0] önekine indirgenir.

(ii) İmkânın Elenmesi Kuralı

"$[k_1 \ldots k_n] \Diamond A$" ($n \geq 0$) biçiminde bir satır çözümleyici çizelgenin açık yolunda geçerse, açık yol aşağıdaki biçimde uzatılabilir.



$[k_1 \ldots k_n, k_{n+1}]$, aynı yolda önceki hiç bir satırın öneki olmamalıdır.

Dikkat edilirse (ii) kuralında çatalın sağ yanı kapalı yol olduğundan işlevsizdir. Bu nedenle (ii) kuralını şöyle kısaltabiliriz.

(ii') Kısaltılmış İmkânın Elenmesi Kuralı

"$[k_1...k_n] \Diamond A$" ($n \geq 0$) biçiminde bir satır çözümleyici çizelgenin açık yolunda geçerse, açık yol aşağıdaki biçimde uzatılabilir.

$$1.\ [k_1...k_n] \Diamond A$$

$$[k_1...k_n, k_{n+1}]\ A\ (1)$$

$[k_1...k_n, k_{n+1}]$, aynı yolda önceki hiçbir satırın öneki olmamalıdır.

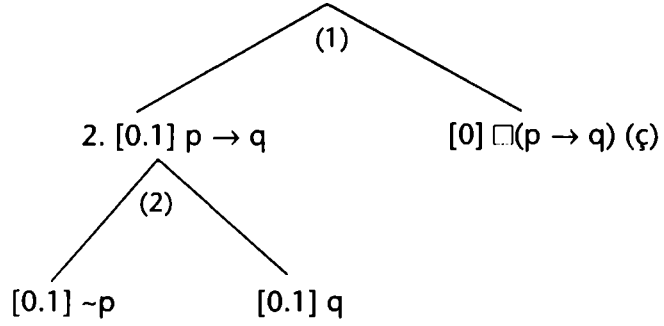
Bundan böyle (ii) yerine hep (ii') kuralını kullanacağız. (ii') kuralının (i) kuralına göre hep önceliği vardır. (ii') kuralı kullanılmadan (i) kuralını kullanmamak gerekir.

Örnek olarak

(1) $\Box(p \rightarrow q)$

önermesinin çözümleyici çizelgesine dayanarak ((i) kuralı yardımıyla) varsa bir doğrulayıcı yorumlamasını bulalım.

(2) 1. $[0]\ \Box(p \rightarrow q)$ (B.Ö.)



Bir açık yolun belirlediği yorumlamanın mümkün dünyalar kümesinin öğeleri açık yoldaki öneklerdir. (2)'nin üç açık yolu vardır. Birinci ile ikinci açık yolun belirlediği yorumlamalarda $M = \{[0], [0.1]\}$ olur. Üçüncü açık yolun belirlediği yorumlamalarda ise $M = \{[0]\}$. Bir açık yolun belirlediği $\mathcal{B}$ almaşıklık bağıntısı ise öneklerin arasındaki doğal bağıntıdır. Şöyleki

$<[k_1...k_n], [k_1...k_{n+1}]> \in \mathcal{B}$ olur.

Doğrulayıcı yorumlamadaki değerlemeler ise daha önce belirtildiği gibidir. Buna göre birinci açık yolun belirlediği yorumlama

(3) (M: {[0], [0.1]}; $\mathcal{B}$: {<[0], [0.1]>}; [0]:; [0.1]:)

biçimindedir.

Üçüncü yolun belirlediği yorumlama ise

(4) (M: {[0]}; $\mathcal{B}$: { }; [0]:)

dır. İstenilirse "[0]" yerine m_0, "[0.1]" yerine de m_1, koyabiliriz. O zaman (3) yorumlaması

(3') (M: {m_0, m_1}; $\mathcal{B}$: {<m_0, m_1>}; m_0:; m_1:)

biçimini, (4) yorumlaması da

(4') (M: {m_0}; $\mathcal{B}$: { }; m_0:)

biçimini alır.

İkinci örnek olarak

(5) $\Box p \rightarrow \Diamond p$

önermesinin K sisteminde geçersiz olduğunu bir yanlışlayıcı yorumlamasını bularak gösterelim. (5) önermesinin yanlışlayıcı yorumlaması (5)'in değillemesinin doğrulayıcı yorumlamasıdır. O halde (5)'in değillemesinin (varsa) doğrulayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile gösterelim.

(5') 1. [0]~($\Box p \rightarrow \Diamond p$) (B.Ö.)

4. [0] $\Box$p
2. [0]~$\Diamond$p
(1)

3. [0] $\Box$~p (2)

(4)

[0.1] p | [0] $\Box$p (ç)

[0.1]~p (3) | [0] $\Box$~p (3, ç)

X

(5') çizelgesinin iki yolundan biri kapalı biri de açıktır. Açık yolun belirlediği doğrulayıcı yorumlama

(6) (M: {[0]}; $\mathcal{R}$: { }; [0]:)

veya [0] yerine m_0 koyarsak

(6') (M: {m_0}; $\mathcal{R}$: { }; m_0:)

dir. (6) veya (6'), (5')'nün başlangıç önermesinin doğrulayıcı yorumlaması olup (5) önermesinin bir yanlışlayıcı yorumlamasıdır. O halde (5) K sisteminde geçersizdir. Dikkat edilirse, almaşıklık bağıntısında çıkmaz vardır. İlerde göreceğimiz gibi (5) önermesi, tüm çıkmazsız yorumlamalarda doğrudur. (5) önermesinin (6) veya (6')'nde yanlış olduğunu sınamak için (5')'nün açık yoluna bakalım. Bu yolda önekli temel önerme yoktur. Ancak "[ ] □p" ile "[ ] □~p" satırlarının doğru olduğunu biliyoruz. Böyle bir açık yol tüm olarak doğru olur. Dolayısıyla başlangıç önermesi de doğrudur. O halde başlangıç önermesinin değillemesi olan (5) önermesi (6) veya (6')'nde yanlıştır.

Üçüncü örnek olarak

(7) □p → p

nin K sisteminde geçersiz olduğunu göstermek için (7)'nin değillemesinin (varsa) doğrulayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile bulalım.

(7') 1. [0] ~(□p → p) (B.Ö.)

2. [0] □p
   [0]~p (1)
   [0.1] p (2)

(7') çizelgesinin tek açık yolu vardır. Bu yolun belirlediği doğrulayıcı yorumlama

(8) (M: {[0], [0.1]}; $\mathcal{R}$: {<[0], [0.1]>}; [0]:; [0.1]: p)

veya [0] yerine m_0 ve [0.1] yerine m_1 koyarsak

(8') (M: {m_0, m_1}; $\mathcal{R}$: {<m_0, m_1>}; m_0:; m_1: p)

dir. (7) önermesi (8) ve (8') yorumlamasında yanlıştır. Dikkat edilirse B bağıntısı yansımalı değildir. (8) önermesi ise ilerde göreceğimiz gibi tüm yansımalı yorumlamalarda doğrudur.

Dördüncü örnek olarak

(9) $\Box p \rightarrow \Box\Box p$

önermesinin K sisteminde geçersiz olduğunu göstermek için (9)'un değillemesinin (varsa) doğrulayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile bulalım.

(10) 1. [0] ~($\Box p \rightarrow \Box\Box p$) (B.Ö.)

6. [0] $\Box p$
2. [0] ~$\Box\Box p$ (1)

3. [0] $\Diamond\sim\Box p$ (2)

4. [0] $\Diamond\Diamond\sim p$ (3)

5. [0.1] $\Diamond\sim p$ (4)

[0.1.1] ~p (5)

[0.1] p (6)

(10) çizelgesinde açık yol olduğundan başlangıç önermesinin yorumlaması vardır. Açık yolun belirlediği yorumlama

(11) (M: {[0], [0.1], [0.1.1]}; $\mathcal{B}$: {<[0], [0.1]>, <[0.1], [0.1.1]>}; [0]:; [0.1]: p; [0.1.1]:)

biçiminde veya "[0]" yerine m_0, "[0.1]" yerine m_1, "[0.1.1]" yerine m_2 koyarsak

(11') (M: {m_0, m_1, m_2}; $\mathcal{B}$: {<m_0, m_1>, <m_1, m_2>}; m_0:; m_1: p; m_2:)

biçimindedir. (9) önermesi (11) veya (11')'de yanlış olduğundan geçersizdir. Dikkat edilirse B bağıntısı geçişli değildir. Sözü geçen (9) önermesi ise ilerde göreceğimiz gibi tüm geçişli yorumlamalarda doğrudur.

Beşinci örnek olarak

(12) $p \rightarrow \Box\Diamond p$

önermesinin K sisteminde geçersiz olduğunu göstermek için (12)'nin değillemesini (varsa) doğrulayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile bulalım.

(13) 1. [0] $\sim(p \rightarrow \Box\Diamond p)$ (B.Ö)

[0] p
2. [0] $\sim\Box\Diamond p$ (1)

3. [0] $\Diamond\sim\Diamond p$ (2)

4. [0] $\Diamond\Box\sim p$ (3)

5. [0.1] $\Box\sim p$ (4)

[0.1.1] $\sim p$ (5)

(13'ün) tek açık yolu vardır. Bu yolun belirlediği yorumlama

(14) (M: {[0], [0.1], [0.1.1]}; $\mathcal{B}$: {<[0], [0.1]>, <[0.1], [0.1.1]>}; [0]: p; [0.1]:; [0.1.1]:)

veya [0] yerine m_0, [0.1] yerine m_1 ve [0.1.1] yerine m_2 koyarsak

(14') (M: {m_0, m_1, m_2}; $\mathcal{B}$: {<m_0, m_1>, <m_1, m_2>}; m_0: p; m_1:; m_2:)

dir. (13) önermesi (14) veya (14')'de yanlıştır. Dolayısıyla (13) geçersizdir. (14) veya (14') yorumlamasındaki $\mathcal{B}$ geçersizdir. (12) önermesi ise tüm geçişli yorumlamalarda doğrudur.

Altıncı örnek olarak

(15) $\Box p \wedge \Diamond q \wedge \Diamond r$

önermesinin varsa doğrulayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile bulalım:

(16) 1. [0] $\Box p \wedge \Diamond q \wedge \Diamond r$

4. [0] $\Box p$
2. [0] $\Diamond q$ (1)
3. [0] $\Diamond r$

[0.1] q (2)

[0.2] r (3)

[0.1] p
[0.2] p (4)

(16) çizelgesindeki tek açık yolun belirlediği doğrulayıcı yorumlama

(17) (M: {[0], [0.1], [0.2]}; $\mathcal{R}$: {<[0], [0.1]>, <[0], [0.2]>}; [0]:; [0.1]: p, q; [0.2]: p, r)

veya [0] yerine m_0, "[0.1]" yerine m_1 ve "[0.2]" yerine m_2 konursa

(18) (M:{m_0, m_1, m_2};$\mathcal{R}$:{<m_0, m_1>, <m_0, m_2>}; m_0:; m_1: p, q; m_2:p, r)

dır. (15) önermesi, (17) veya (18) yorumlamasında doğrudur.

Yedinci örnek olarak

(19) $\Diamond(p \rightarrow p)$

önermesinin K sisteminde geçersiz olduğunu göstermek için (15)'in değillemesinin (varsa) doğrulayıcı yorumlamasını bulalım.

(20) 1. [0] $\sim\Diamond(p \rightarrow p)$

2. [0] $\Box\sim(p \rightarrow p)$

(2)

3. [0.1] $\sim(p \rightarrow p)$ [0] $\sim(p \rightarrow p)$ (ç)

[0.1] p

[0.1] ~p

X

(20) açık olduğundan başlangıç önermesinin doğrulayıcı yorumlaması vardır. Açık yolun belirlediği doğrulayıcı yorumlama

(21) (M: {[0]}; $\mathcal{R}$: { }; [0]:)

veya [0] yerine m_0 koyarsak

(21') (M: {m_0}; $\mathcal{R}$: { }; m_0:)

dır. Genel olarak $\Diamond$A biçiminde hiçbir önerme K sisteminde geçerli değildir. Nitekim $\sim\Diamond$A'nın çözümleyici çizelgesi

(22) 1. [0] ~◇A

2. [0] □~A (1)



[0.1] ~A [0] □~A (ç)

⋮

biçimindedir. En sağdaki yol açık kalır. Bu yol açık yol ise başlangıç önermesinin doğrulayıcı yorumlaması olarak (21) veya (21')'yü belirler.

5.1.5.4 Çözümleyici Çizelge ile Denetleme

Doğrulayıcı yorumlama aramak için kullanılan çözümleyici çizelge kapalı olunca, başlangıç önermesinin değillemesinin geçerli olduğu ortaya çıkar. Dolayısıyla aynı çözümleyici çizelge geçerliliği denetlemeye de yarar. Ancak denetleme için kurulan çözümleyici çizelgede zorunluluğun elenmesi kuralını uygularken, yolda daha önce geçen bütün öneklerle işlem yapmak zorunda değiliz. Eğer yolu bazı önekleri kullanmadan kapatabilirsek bu önekleri kullanmayabiliriz.

Örnek olarak

(1) □(p → q) ∴ (□p → □q)

çıkarımın K sisteminde geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim. Bu amaçla başlangıç önermeleri "□(p → q)" ile "~(□p → □q)" olan çözümleyici çizelgeyi kurarız.

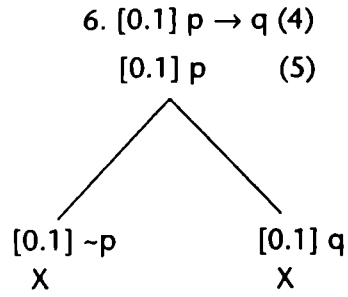
(2) 4. [0] □(p → q) (B.Ö.)

1. [0] ~(□p → □q)

5. [0] □p
2. [0] ~□q (1)

3. [0] ◇~q (2)

[0.1] ~q (3)



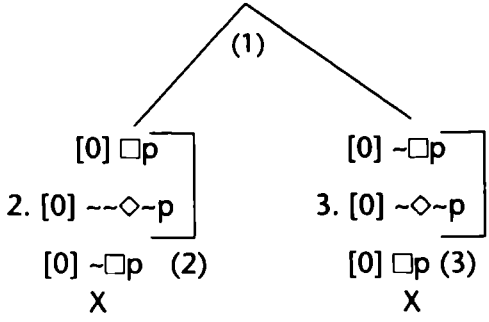
Dikkat edilirse, 5. ve 6. adımlarda zorunluluğun elenmesi kuralını uygularken çıkmaz durumunu göz önüne almadık. Bunun nedeni [0.1] önekinin aynı yoldaki önceki satırlarda geçmesidir. Nitekim [0.1] bir satırda geçmesi [0] ile gösterilen mümkün dünyanın [0.1] ile gösterilen bir almaşığı olduğunu, dolayısıyla [0]'ın gösterdiği mümkün dünyanın çıkmaz olduğunu gösterir.

İkinci örnek olarak

(3) $\Box p \leftrightarrow \sim\Diamond\sim p$

önermesinin K sisteminde geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(4) 1. [0] ~(□p ↔ ~◇~p) (B.Ö.)

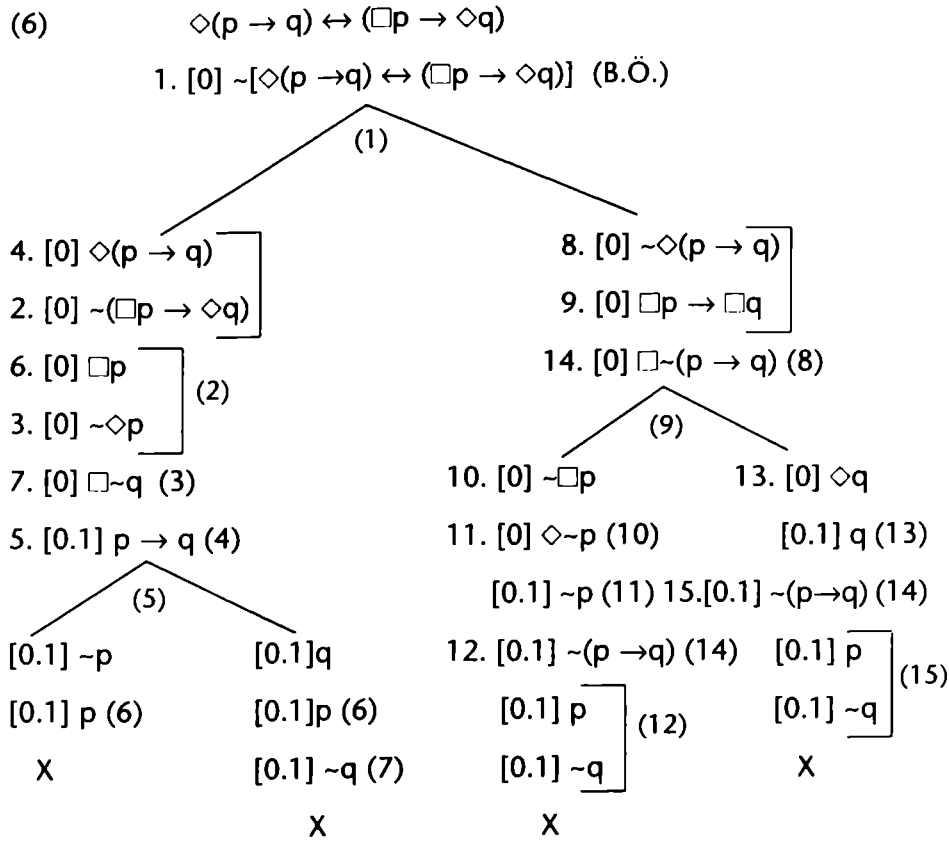


(4) çizelgesi kapalı olduğundan (3) önermesi geçerlidir.

Üçüncü örnek olarak

(5) $\Diamond(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\Box p \rightarrow \Diamond q)$

önermesinin K sisteminde geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.



(6) çizelgesi kapalı olduğundan (5) önermesi geçerlidir.

ALIŞTIRMALAR

I. §5.1.5.1'de gösterilen K sistemi yasalarından henüz denetlenmeyen olanların çözümleyici çizelge ile denetleyiniz. (Daha önce açıkladığımız gibi A ≡ B gibi bir eşdeğerliği denetlemek için A ↔ B önermesinin geçerli olduğunu denetleyiniz. A_1, ..., $A_n \models$ B gibi bir içermeyi denetlemek için A_1, .., A_n ∴ B çıkarımının geçerli olduğunu denetleyiniz.

II. Aşağıdaki önermelerin ve çıkarımların K sisteminde geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

1. [□(p →q), □(q → r)] ∴ □(p → r)
2. □(p → q) → (◇p → ◇q)

3. $\Box(p \rightarrow q), \Diamond(p \wedge r) \therefore \Diamond(q \wedge r)$

4. $\Diamond(p \rightarrow p) \rightarrow (\Box q \rightarrow \Diamond q)$

5. $(\Box p \wedge \Diamond q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$

5.1.6 D Sistemi

K sisteminin yorumlamalarında çıkmaz olabilir. Çıkmazsız yorumlamalar kümesi ise *D sistemi* denilen bir sistemi belirler. Buna göre:

Çıkmazsız yorumlamalar kümesi *D* ile gösterilir. Her çıkmazsız yorumlamada doğru olan önermelerin kümesi de *D sistemidir.* Her çıkmazsız yorumlamada doğru olan önermeler *D-geçerli önermeler* veya *D sisteminde geçerli* olan önermelerdir.

Bir yorumlamanın $\mathcal{B}$ almaşıklık bağıntısının çıkmazsız olduğu

(1) $\forall m \exists m'(m \mathcal{B} m')$

biçiminde dile getirebiliriz. (1), her mümkün dünyanın bir almaşığı olduğunu dile getirir.

Almaşıksız bağıntısı çıkmazsız olan yorumlamalara dizisel yorumlamalar denir.

Böylece D-geçerli önermelerin dizisel yorumlamalarda doğru olan önermeler olduğunu söyleyebiliriz.

D sisteminin başlıca yasalarını aşağıda gösteriyoruz.

(İ) Geçerli Önermeler

1. $\Box p \rightarrow \Diamond p$

Bu önermeye D aksiyomu veya kısaca **D** denir.

2. $\Diamond(p \rightarrow p)$

(ii) Koşullu-geçerli yasalar

1. $\Diamond A$ D-geçerli ise, *A* D-geçerli olur.

2. $\Box A$ D-geçerli ise, *A* D-geçerli olur.

D sisteminde doğruluk değeri hesaplaması, doğrulayıcı yorumlama belirlemesi ve denetleme için kullanılan çözümleyici çizelgelerin dayandığı zorunluluğun ve imkânın elenmesi kuralları, bu kuralların K sistemindeki karşılıklarında çıkmazla ilgili eklemin kaldırılmasıyla elde edilir.

Buna göre doğrulayıcı yorumlamayı belirleme için kullanılan çözümleyici çizelgenin dayandığı zorunluluğun ve imkânın elenmesi kuralları D sisteminde şöyle olur.

Zorunluluğun elenmesi kuralı

(i) 1. $[k_1...k_n] \Box A$

$[k_1...k_n \cdot k_{n+1}] A$ (1)

$(k_1...k_n \cdot k_{n+1})$ aynı yolda önceki bir satırın öneki ise, ikinci satırın yola eklenmesi zorunludur.

(ii) ***İmkânın Elenmesi Kuralı***

1. $[k_1...k_n] \Diamond A$

2. $[k_1...k_n \cdot k_{n+1}] A$ (1)

$(k_1...k_n \cdot k_{n+1})$ öneki, aynı yolda önceki bir satırda geçmemelidir.

Görüldüğü gibi K sisteminde çıkmazla ilgili şık yukardaki kurallarda yoktur.

Örnek olarak

(1) $\Box(p \rightarrow q)$

önermesinin dizisel, yani çıkmazsız olan

(2) $(M: \{m_0, m_1\}; \mathcal{R}: \{<m_0, m_1>, <m_1, m_0>\}; m_0: p, m_1: q)$

yorumlamasında doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile bulalım.

(3) 1. $[m_0] \Box(p \rightarrow q)$

2. $[m_1] p \rightarrow q$

(2)

$[m_1] \sim p$ $\qquad$ $[m_1] q$

Birinci açık yolda "$[m_1]$ ~p" önekli temel önerme yanlıştır. İkinci açık yolda ise "$[m_1]$ q" önekli temel önerme doğrudur. Dolayısıyla (1) önermesi verilen yorumlamada doğrudur.

Doğrulayıcı yorumlama bulmaya örnek olarak

(4) $\Box p \rightarrow p$

önermesinin *D* sisteminde geçersiz olduğunu göstermek için (4)'ün değillemesinin (varsa) doğrulayıcı yorumlamasını belirleyen çözümleyici çizelgeyi kuralım.

(5) 1. [0] ~($\Box p \rightarrow p$)
2. [0] $\Box p$
[0] ~p (2)
[0.1] p (2)

(5) çizelgesinde açık yol olduğundan doğrulayıcı yorumlama vardır. Bu açık yolun belirlediği doğrulayıcı yorumlama

(6) (M: {[0]}; $\mathcal{R}$: {<[0], [0.1]>}; [0]:; [0.1]: p)

dır. (6) yorumlamanın almaşıklık bağıntısı çıkmazsızdır. Dolayısıyla (4) dizisel bir yorumlama, yani D sistemine ait bir yorumlamadır.

Başka örnek olarak

(7) $\Box p \rightarrow \Box\Box p$

önermesinin D sisteminde geçersiz olduğunu göstermek için (7)'nin değillemesinin (varsa) doğrulayıcı yorumlamasını belirleyen çözümleyici çizelge kuralım.

(8) 1. [0] ~($\Box p \rightarrow \Box\Box p$)
6. [0] $\Box p$
2. [0] ~$\Box\Box p$ (1)
3. [0] $\Diamond\sim\Box p$ (2)
4. [0] $\Diamond\Diamond\sim p$ (3)

5. [0.1] $\Diamond\sim p$ (4)

[0.1.1] $\sim p$ (5)

[0.1] p (6)

(8) çözümleyici çizelgesinin açık yolunun belirlediği doğrulayıcı yorumlama

(9) (M: {[0], [0.1], [0.1.1]}; $\mathcal{B}$: {<[0], [0.1]>, <[0.1], [0.1.1]>}; [0]:; [0.1]: p:; [0.1.1]:)

veya [0] yerine m_0, [0.1] yerine m_1, ve [0.1.1] yerine m_2 koyarsak,

(9') (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; $\mathcal{B}$: $\{<m_0, m_1>, <m_1, m_2>\}$; m_0:; m_1: p; m_2:)

dir. (9) ve (9')'nün $\mathcal{B}$ almaşıklık bağıntısı çıkmazsızdır.

Denetlemeye örnek olarak

(10) $\Box p \rightarrow \Diamond p$

önermesinin geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile gösterelim. Bu amaçla (10)'un değillemesinin çözümleyici çizelgesini kuruyoruz.

(11) 1. [0] $\sim(\Box p \rightarrow \Diamond p)$

3. [0] $\Box p$
2. [0] $\sim\Diamond p$ (1)

4. [0] $\Box\sim p$ (2)

[0.1] p (3)

[0.1] $\sim p$ (4)

X

(11) çizelgesi kapalı olduğundan (10) önermesi D sisteminde geçerlidir.

A totoloji olduğunda,

(12) $\Diamond A$

biçimindeki bütün önermeler D sisteminde geçerlidir. Nitekim (10) önermesinin çözümleyici çizelgesi aşağıdaki biçimdedir.

(13) 1. [0] ~◇A

2. [0] □~A

[0.1] ~A



Nitekim A totoloji olduğundan ~A'nın çözümleyici çizelgesi kapalıdır.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki önermelerin verilen D sistemine ait yorumlamalardaki doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile hesaplayınız.

1. $p \rightarrow \Box(p \vee q)$

   (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_1>, <m_1, m_1>\}$; m_0: p; m_1: q)

2. $\Diamond(p \wedge \sim q) \wedge \Box p$

   (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_1>, <m_0, m_2>, <m_2, m_2>\}$; m_0: p, m_1:)

3. $\Diamond[p \wedge \Box(q \vee r)]$

   (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_2>, <m_2, m_0>, <m_2, m_1>, <m_1, m_1>\}$; m_0:; m_1:p, q; m_2: q)

II. Aşağıdaki önermelerin çözümleyici çizelge ile D sistemine ait birer doğrulayıcı yorumlamasını bulunuz.

1. $\Diamond p \wedge \Box\Diamond p$
2. $p \wedge \sim\Box\Diamond p$
3. $\Diamond p \wedge \sim\Box\Diamond p$

III. Aşağıdaki önermelerin D sisteminde geçrli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

1. $\Diamond(p \rightarrow p)$
2. $\Diamond[(p \wedge q) \rightarrow p]$
3. $\Diamond[[(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow r]]$

5.1.7 Ver Sistemi

5.1.7.1 Doğruluk Değeri Hesaplaması

Almaşıklık bağıntısı boş olan, yani her mümkün dünyası çıkmaz olan yorumlamalar *Ver* olarak gösterilir. *Ver* kümesinin belirlediği normal sistem *Ver Sistemi*'dir.

Ver'e ait yorumlamaların genel biçimi şöyledir:

(1) $(M: \{m_0, m_1, ...\}; \mathcal{B}: \{\ \}; m_0:...; m_1:...)$

Herhangi bir önermenin (1) yorumlamasında doğruluk değerini hesaplamak için çözümleyici çizelgede kullanılan zorunluluğun ve imkânın elenmesi kuralları (1) yorumlaması gereği şöyle olur.

(2) ***Zorunluluğun Elenmesi Kuralı***

1. $[m_i]\ \Box A$

$[m_i]\ \Box A\ (1,ç)$

(3) İmkânın Elenmesi Kuralı

1. $[m_i]\ \Diamond A$

$[m_i]\ \sim\Diamond A\ (1, ç)$

X

Buna göre $\Box A$ biçimindeki bütün zorunluluk önermeleri *Ver*'e ait her yorumlamada doğru olup, $\Diamond A$ biçimindeki bütün imkân önermeleri *Ver*'e ait her yorumlamada yanlıştır.

Örnek olarak

(4) $[(\Box(p \wedge q) \rightarrow \Diamond(q \leftrightarrow r)] \wedge \Box(q \rightarrow \sim r)$

önermesinin *Ver*'e ait bir yorumlama olan

(5) $(M: \{m_0, m_1\}; \mathcal{B}: \{\ \}; m_0: p, m_1: q, r)$

yorumlamasında doğruluk değerini hesaplayalım. Bu amaçla (4)'ün çözümleyici çizelgesini kuruyoruz.

(6) 1. $[m_0]\ [\Box(p \wedge q) \rightarrow \Diamond(q \leftrightarrow r)] \wedge \Box\,(q \rightarrow \sim r)$

3. $[m_0]\ \Box(p \wedge q) \rightarrow \Diamond(q \leftrightarrow r)$ (1)

2. $[m_0]\ \Box(q \rightarrow \sim r)$

$[m_0]\ \Box(q \rightarrow \sim r)$ (2, ç)

(3)

4. $[m_0]\ \sim\Box(p \wedge q)$ 6. $[m_0]\ \Diamond(q \leftrightarrow r)$

5. $[m_0]\ \Diamond\sim(p \wedge q)$ $[m_0]\sim\Diamond(q \leftrightarrow r)$ (6, ç)

X

$[m_0]\ \sim\Diamond\sim(p \wedge q)$ (5, ç)

X

çözümleyici çizelge kapalı olduğundan (4) verilen yorumlamada, hatta Ver'e ait her yorumlamada yanlıştır. Bu sonucu çözümleyici çizelgeyi kurmaksızın önceleyebilirdik. Nitekim Ver'e ait her yorumlamada $\Box A$ doğru, $\Diamond A$ ise yanlıştır. Dolayısıyla (4) önermesinin doğruluk değerini aşağıdaki doğruluk hesaplamasıyla bulabilirdik.

(7) $[\Box(p \wedge q) \rightarrow \Diamond(q \leftrightarrow r)] \wedge \Box(q \rightarrow \sim r)$

$(D \rightarrow Y) \wedge D$

$Y \wedge D$

Y

İkinci örnek olarak

(8) $\Box\Diamond[(p \wedge q) \rightarrow p] \leftrightarrow [q \wedge \Box(\sim p \rightarrow q)]$

önermesinin *Ver'e* ait

(9) $(M: \{m_0, m_1, m_2\};\ \mathcal{R}: \{\ \};\ m_0: p, q;\ m_1: q;\ m_2:)$

yorumlamasında doğruluk değeri hesaplamasıyla yapıyoruz.

(10) $\Box\Diamond[(p \wedge q) \rightarrow p] \leftrightarrow [q \wedge \Box(\sim p \rightarrow q)]$

$D \leftrightarrow (D \wedge D)$

$D \leftrightarrow D$

D

Dikkat edilirse hiçbir kiplik değişmezinin etki alanında olmayan "q" önermesine D değerini verdik. Nitekim "q", (9) yorumlamasında m_0'ın değerlemesinde yer alıyor. Verdiğimiz doğruluk değerleri hep m_0'daki değerlerdir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin verilen Ver'e ait yorumlamadaki doğruluk değerini hesaplayınız.

1. $p \rightarrow \Box(q \wedge \sim r)$

   (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{B}$: { }; m_0: q; m_1: r)

2. $[p \wedge \Diamond(p \wedge q)] \rightarrow (q \rightarrow \Box p)$

   (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{B}$: { }; m_0: q, r; m_1: p)

3. $\Box p \leftrightarrow [\sim\Diamond(p \rightarrow r) \wedge q]$

   (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; $\mathcal{B}$: { }; m_0: p; m_1: q; m_2: p, q, r)

5.1.7.2 Doğrulayıcı Yorumlama Belirlemesi

Doğrulayıcı yorumlama belirlemesi için çözümleyici çizelgede kullanılan zorunluluğun ve imkânın elenmesi kuralları da Ver sisteminde şöylledir.

Zorunluluğun Elenmesi Kuralı

1. [0] $\Box A$

   [0] $\Box A$ (1, ç)

İmkanın Elenmesi Kuralı

1. [0] $\Diamond A$

   [0] $\sim\Diamond A$ (1, ç)
   X

Ver'e ait her yorumlamada $\Box A$ hep doğru ve $\Diamond A$ hep yanlış olduğundan varolan bir önermenin doğrulayıcı yorumlamasını bulmadan önce $\Box A$ biçimindeki bileşenlerin yerine T önermesi (yani T sıfırlı eklemi) ve $\Diamond A$ biçimindeki bileşenlerin yerine $\perp$ önermesini (yani $\perp$ sıfırlı eklemini) koyarız. Sonra

elde edilen yeni önermenin bir çözümleyici çizelgeye dayanarak doğrulayıcı yorumlamasını ararız.

Örneğin

(3) $[q \wedge \Box(p \rightarrow r)] \leftrightarrow (p \rightarrow \Diamond q)$

önermesinin Ver'e ait bir doğrulayıcı yorumlamasını arayalım. Bu amaçla (3) önermesinde $\Box(p \rightarrow r)$ yerine T ve $\Diamond q$ yerine $\perp$ koyarız.

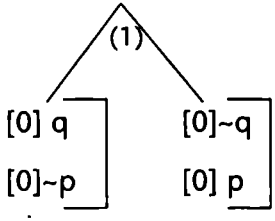
(4) $(q \wedge T) \leftrightarrow (p \rightarrow \perp)$

biçimine dönüşürüz. Sonra (4) önermesinin eşdeğeri olan

(5) $q \leftrightarrow \sim p$

önermesine dönüştürürüz. En son da (5)'in doğruluk çizelgesini kurarız.

(6) 1. $[0]\ q \leftrightarrow \sim p$



(6) çizelgesinin birinci açık yoluna bakarak

(7) $(M: \{m_0\};\ \mathcal{R}: \{\ \};\ m_0: q)$

yorumlamasını buluruz. (7), (3)'ün bir doğrulayıcı yorumlamasıdır.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin Ver sisteminde varsa birer doğrulayıcı yorumlamasını bulunuz.

1. $p \rightarrow \Box q$
2. $\sim[p \wedge \Diamond(p \rightarrow r)]$
3. $\Box p \wedge (q \rightarrow \Diamond r)$
4. $\sim\Diamond(p \rightarrow q) \rightarrow [(\Box p) \wedge q]$
5. $[p \rightarrow (q \wedge \Box p)] \wedge (q \wedge \Diamond r)$

5.1.7.3 Denetleme

Doğrulayıcı yorumlamayı belirleyen çözümleyici çizelgede kullanılan zorunluluğun ve imkânın elenmesi kuralları denetlemede de aynen kullanılır. Örneğin

(1) $\Box(p \wedge \sim p)$

önermesinin Ver sisteminde geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim. Bu amaçla (1)'in değillemesinin çözümleyici çizelgesini kuruyoruz.

(2) 1. [0] $\sim\Box (p \wedge \sim p)$ (B.Ö.)

2. [0] $\Diamond\sim(p \wedge \sim p)$ (1)

[0] $\sim\Diamond\sim(p \wedge \sim p)$ (2, ç)

X

Genel olarak A herhangi bir önerme olduğunda

(3) $\Box A$

önermesinin Ver sisteminde geçerli olduğunu aşağıdaki çözümleyici çizelge ile denetliyoruz.

(4) 1. [0] $\sim\Box A$

2. [0] $\Diamond\sim A$ (1)

[0] $\sim\Diamond\sim A$ (2, ç)

X

Genel olarak Ver sisteminde geçerli olan herhangi bir önermeyi denetlemek için $\Box A$ biçimindeki bileşenlerin yerine "T", $\Diamond A$ biçimindeki bileşenlerin yerine de "$\perp$" konulur. Elde edilen önermenin değillemesinin çözümleyici çizelgesi kurulur. Bu çizelge kapalı ise verilen önerme geçerlidir.

Örnek olarak

(5) $p \rightarrow \Box q$

önermesinin *Ver* sisteminde geçerli olduğunu denetleyelim. Bu amaçla "$\Box q$" bileşeni yerine "T" koyarız. Böylece

(6) $p \rightarrow T$

önermesi elde edilir. Sonra (6)'nın değillemesinin çözümleyici çizelgesini kuruyoruz.

(1) 1. $\sim(p \rightarrow T)$

$\Box p$

2. [0] $\sim T$

[0]$\perp$ (2)

X

(7) çözümleyici çizelgesinin tek yolunu kapalı sayıyoruz. Nitekim yolda bulunan "$\perp$" temel önermesi her mümkün dünyada yanlıştır. Özdeşlik mantığında "$\sim(a = a)$" önermesi gibi, "$\perp$" önermesi bir yolda bulunması o yolun kapalı olmasının bir nedenidir.

İkinci örnek olarak

(8) $[p \wedge \Diamond(q \rightarrow r)] \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

önermesinin Ver sisteminde geçerli olduğunu denetleyelim. Bu amaçla "$\Diamond(q \rightarrow r)$" bileşeni yerine "$\perp$" koyup

(9) $(p \wedge \perp) \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

önermesini elde ederiz. (9)'un değillemesinin çözümleyici çizelgesi şöyledir.

(10) 1. [0] $\sim[(p \wedge \perp) \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]]$

2. [0] $p \wedge \perp$

[0] $\sim[p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

p
$\perp$ (2)

X

(10) çizelgesi kapalı olduğundan (9) önermesi Ver sisteminde geçerlidir.

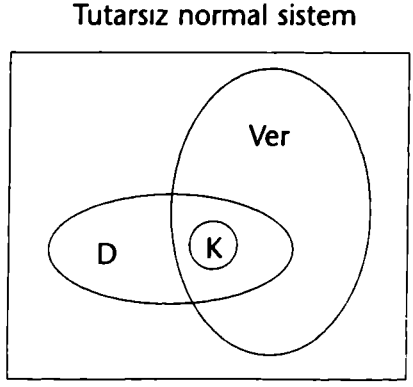
Ver sisteminde $\Box A$ biçimindeki bütün zorunluluk önermeleri geçerlidir. "$\Box p$" önermesine Ver aksiyomu veya kısaca **Ver** denir.

(i) Ver sistemi bir maksimal normal sistemdir. Ver sistemi ile tutarsız normal sistem arasında hiçbir başka normal sistem yoktur. *Ver* sisteminden geniş olan tek normal sistem tutarsız normal sistemdir.

(ii) Ver sisteminin alt kümesi olmayan her tutarlı normal sistem *D* sistemini içine alır.

(iii) *D* sistemi *Ver* sisteminin alt kümesi değildir.

Aşağıdaki şekilde K, D, Ver ve tutarsız normal küme arasındaki ilişkileri gösteriyoruz.



(Şekil 1)

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin *Ver* sisteminde geçerli olduğunu denetleyiniz.

1. $\Box[p \rightarrow (q \rightarrow r)]$
2. $\sim\Diamond(q \wedge r)$
3. $(p \wedge q) \rightarrow (r \vee \Box p)$
4. $[r \wedge \Diamond(p \wedge q)] \rightarrow (p \rightarrow q)$

5.1.8 Triv Sistemi

5.1.8.1 Doğruluk değeri hesaplaması

Almaşıklık bağıntısı

(1) $\{<m_0, m_0>, <m_1, m_1>, <m_2, m_2>, \ldots <m_n, m_n>\}$

biçiminde olan yorumlamaların kümesini *Triv* ile gösteriyoruz. Bu yorumlamaların belirlediği normal sistem de *Triv sistemi*'dir.

Herhangi bir önermenin *Triv*'e ait bir yorumlamadaki doğruluk değerini hesaplamak için başvurulan çözümleyici çizelgede kullanılan zorunluluğun ve imkânın elenmesi kuralları şöyledir.

(1) Zorunluluğun elenmesi kuralı

1. $[m_i] \Box A$

   $[m_i]$ A (1)

(2) İmkânın elenmesi kuralı

1. $[m_i] \Diamond A$

   $[m_i]$ A (1)

Bu iki kural gereği Triv'e ait her yorumlamada

(3) $\Box A$ önermesi m_i mümkün dünyasında doğrudur ancak ve ancak A m_0'da doğru ise.

(4) $\Diamond A$ önermesi m_i mümkün dünyasında doğrudur ancak ve ancak A m_0'da doğru ise.

Bu nedenle herhangi bir önermenin doğruluk değerini hesaplamak için önceden bu önermede geçen bütün kiplik değişmezlerini kaldırabiliriz. Örneğin

(5) $\sim\Diamond p \leftrightarrow \Diamond\Box(\sim q \vee \Diamond r)$

önermesinin Triv'e ait olan

(6) $(M: \{m_0, m_1\}; \mathcal{B}: \{<m_0, m_0>, <m_1, m_1>\}; m_0: p, m_1: q, r)$

yorumlamasında doğruluk değerini bulalım. Bu amaçla önce (5)'in kiplik değişmezlerini kaldırarak (5)'i

(7) $\sim p \leftrightarrow (\sim q \vee r)$

önermesine dönüştürürüz. Sonra da (7)'nin m_0'daki doğruluk değerini hesaplarız. Bunu doğrudan doğruya ya da çözümleyici çizelge ile yaparız. Birinci durumda

(8)
$$\begin{array}{r} m_0 \\ \hline \sim p \leftrightarrow (\sim q \vee r) \\ \sim D \leftrightarrow (\sim Y \vee Y) \\ Y \leftrightarrow (D \vee Y) \\ Y \leftrightarrow D \\ Y \end{array}$$

hesaplaması elde edilir. Buna göre (5) önermesinin (6) yorumlamasında yanlış olduğunu söyleyebiliriz.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin Triv'e ait verilen yorumlamadaki doğruluk değerini hesaplayınız.

1. $\Box(p \wedge q)$

   $(M: \{m_0, m_1\}; \mathcal{R}: \{<m_0, m_0>, <m_1, m_1>\}; m_0: p; m_1: p, q)$

2. $\sim\Box p \leftrightarrow (p \wedge \Diamond p)$

   $(M: \{m_0, m_1, m_2\}; \mathcal{R}: \{<m_0, m_0>, <m_1, m_1>, <m_1, m_1>\}; m_0:; m_1:q, m_2: r)$

3. $\Box\Diamond(p \rightarrow q) \rightarrow \Diamond\Box(q \rightarrow p)$

   $(M: \{m_0, m_1, m_2\}; \mathcal{R}: \{<m_0, m_0>, <m_1, m_1>, <m_2, m_2>\}; m_0: p; m_1:p; m_2: q)$

5.1.8.2 Doğrulayıcı Yorumlama Belirlemesi

Bir önermenin Ver'e ait bir doğrulayıcı yorumlamasını bulmak için başvurulan çözümleyici çizelgenin dayandığı zorunluluğun ve imkânın elenmesi kuralları şöyledir.

(1) Zorunluluğun elenmesi kuralı ($n \geq 0$)

1. $[k_1 \ldots k_n] \Box A$

$[k_1 \ldots k_n] A$ (1)

(2) İmkânın elenmesi kuralı ($n \geq 0$)

1. $[k_1 \ldots k_n] \Diamond A$

$[k_1 \ldots k_n] A$ (1)

Bu kurallara danayarak $\Box A$ ile $\Diamond A$'nın Ver'e ait doğrulayıcı yorumlamasının (varsa) A'nın doğrulayıcı yorumlaması oduğunu söyleyebiliriz. O halde herhangi bir önermenin doğrulayıcı yorumlamasını bulmak için önce önermede geçen bütün kiplik değişmezlerini kaldırmalıyız. Sonra da geri kalan kipliksiz önermenin doğrulayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile ararız. Örneğin

(3) $\Box(p \rightarrow q) \wedge \Diamond(q \rightarrow r)$

in varsa Triv'e ait bir doğrulayıcı yorumlamasını bulalım. Bu amaçla önce (3)'ü

(4) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$

önermesine indirgeriz. Sonra da (4)'ün doğrulayıcı yorumlamasını kurarız.

(5) 1. $[0] (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$

2. $[0] p \rightarrow q$
3. $[0] q \rightarrow r$ (1)

(2)

$[0]{\sim}p$ $[0]q$

(3) (3)

$[0]{\sim}q$ $[0]r$ $[0]{\sim}q$ $[0]r$

X

(8) çizelgesinin açık yolu olduğundan (5)'in doğrulayıcı yorumlaması vardır. Birinci açık yolun belirlediği Triv'e ait doğrulayıcı yorumlama şöyledir:

(6) $(M: \{m_0\}; \mathcal{R}: \{<m_0, m_0>\}; m_0:)$

İkinci örnek olarak

(7) $[\Box p \rightarrow (\Diamond p \rightarrow \Box r)] \wedge \Diamond(p \wedge q) \wedge \Diamond \sim r$

önermesinin varsa *Triv*'e ait bir doğrulayıcı yorumlamasını bulalım. Önce (7)'deki kiplik değişmezlerini kaldırıyoruz. Böylece

(8) $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \wedge (p \wedge q) \wedge \sim r$

önermesini elde ediyoruz. Sonra da (8)'in çözümleyici çizelgesini kuruyoruz.

(9) 1. $[m_0]\ [p \rightarrow (q \rightarrow r)] \wedge (p \wedge q) \wedge \sim r$

3. $[m_0]\ p \rightarrow (q \rightarrow r)$

2. $[m_0]\ p \wedge q$ (1)

$[m_0]\ \sim r$

$[m_0]\ p$

$[m_0]\ q$ (2)

(3)

$[m_0]\ \sim p$ X

4. $[m_0]\ q \rightarrow r$

(4)

$[m_0] \sim q$ X

$[m_0] r$ X

(9) çizelgesi kapalı olduğundan (8) önermesini Triv'e ait doğrulayıcı yorumlaması yoktur.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin varsa *Triv*'e ait bir doğrulayıcı yorumlamasını bulunuz.

1. $p \rightarrow \Box(p \wedge q)$

2. $\sim p \vee \Box(p \rightarrow q)$

3. $\Box q \wedge \Box(p \wedge \sim q)$

4. $(\sim p \wedge \Box q) \vee \Box(p \rightarrow r)$

5. $\Box\Diamond(p \wedge q) \wedge \Diamond\Box(q \vee r)$

5.1.8.3 Denetleme

Denetleme için kullanılan çözümleyici çizelgenin dayandığı zorunluluğun ve imkânın elenmesi kuralları doğrulayıcı yorumlama belirlemesinde kullanılan kuralların aynısıdır. Dolayısıyla bir önermenin Triv sisteminde geçerli olduğunu denetlemek için önceki önermedeki bütün kiplik değişmezlerini kaldırırız. Sonra da elde edilen kipliksiz önermenin geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleriz. Örneğin

(1) $(\Diamond p \wedge \Box q) \vee \Diamond\sim p \vee \sim\Box q$

önermesinin *Triv* sisteminde geçerli olduğunu denetleyelim. Bu amaçla (1) önermesinde geçen kiplik değişmezlerini kaldırarak (1)'i

(2) $(p \wedge q) \vee \sim p \vee \sim q$

önermesine dönüştürürüz. Sonra da (2)'nin değillemesinin çözümleyici çizelgesini kurarız.

(3) 1. [0] $\sim[(p \wedge q) \vee \sim p \vee \sim q]$

2. [0] $\sim(p \wedge q)$ (1)

[0] p

[0] q

(2)

[0] $\sim p$ X

[0] $\sim q$ X

(3) çizelgesi kapalı olduğundan (2) önermesi *Triv* sisteminde geçerlidir. $\Box A \leftrightarrow A$ ile $\Diamond A \leftrightarrow B$ biçimindeki önermeler *Triv* sisteminde geçerlidir. "$\Box p \rightarrow p$" önermesine de *Triv* aksiyomu ve kısaca **Triv** denir.

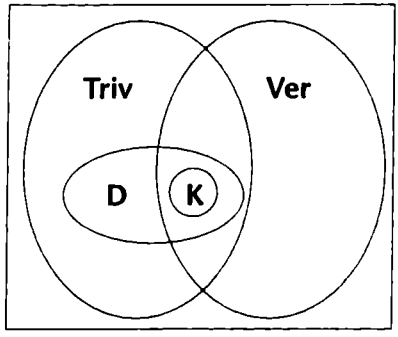
Triv sisteminin başlıca özellikleri şunlardır.

(i) *Triv* sistemi maksimal bir normal sistemdir.

(ii) *D* sistemini içine alan her normal sistem *Triv* sisteminin alt kümesidir.

(iii) Tutarlı olan her normal sistem *Triv* sistemi veya *Ver* sisteminin alt kümesidir. *K* gibi bazı tutarlı normal sistemler hem *Triv*'in hem *Ver*'in alt kümesidir.

Tutarsız normal sistem ile *Ver, Triv, D* ve *K* sistemleri arasındaki ilişkileri aşağıdaki şekil'de gösteriyoruz.



(Şekil 1)

K sistemi, *Triv*'in en küçük alt sistemidir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin *Triv* sisteminde geçerli olduğunu denetleyiniz.

1. $\Diamond p \leftrightarrow \Box p$
2. $\sim(\Diamond p \wedge \Diamond \sim p)$
3. $\Diamond\Box q \rightarrow (\Diamond p \rightarrow \Diamond q)$
4. $\Box\Box(p \wedge q) \rightarrow (\Diamond p \vee \Box q)$
5. $[(\Diamond p \rightarrow \Box q) \wedge (\Diamond p \rightarrow \Box r)] \rightarrow \Diamond(p \rightarrow r)$

5.1.9 T Sistemi

5.1.9.1 Çözümleyici Çizelge ile Doğruluk Değeri Hesaplaması

Almaşıklık bağıntısı yansımalı olan yorumlamalar kümesini T ile gösteriyoruz. Bu yorumlamaların belirlediği normal mantık sistemine de *T sistemi* denir.

Yansımalı olan her almaşıklık bağıntısı çıkmazsızdır. Dolayısıyla T sistemi D sistemini içine alır.

Bir önermenin T sistemine ait bir yorumlamada doğruluk değerini hesaplamak için başvurulan çözümleyici çizelgenin dayandığı zorunluluğun ve imkânın elenmesi kuralları D sistemindeki kuralların aynısıdır. Ancak kuralların birinci satırındaki önekin gösterdiği mümkün dünyanın almaşıkları arasında kendisi de vardır. Buna göre söz konusu kurallar şöyle dile getirilir.

(1) Zorunluluğun elenmesi kuralı

Çözümleyici çizelgenin açık yolunda $[m_i]\ \Box A$ biçimindeki bir satır geçer ve m_i'nin almaşıkları $m_1, \ldots, m_i, \ldots, m_n$ ise, yol aşağıdaki biçimde uzatılır.

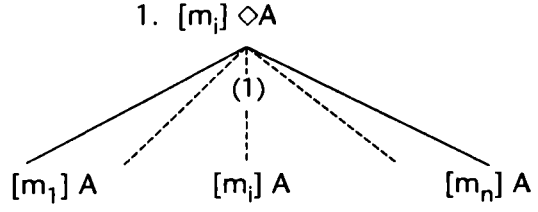
T sisteminde verilen yorumlamaya dayanan zorunluluğun elenmesi kuralı

1. $[m_i]\ \Box A$

$$\left.\begin{array}{l}[m_1]\ A\\ \vdots\\ [m_i]\ A\\ \vdots\\ [m_n]\ A\end{array}\right\}\ (1)$$

(2) İmkânın Elenmesi Kuralı

Çözümleyici çizelgenin açık yolundaki $[m_i]\ \Diamond A$ biçimindeki bir satır geçer ve m_i'nin almaşıkları $m_1, \ldots, m_i, \ldots, m_n$ ise, yol aşağıdaki biçimde uzatılır.



Örnek olarak

(3) $p \wedge \Box(p \rightarrow q)$

önermesinin T'ye ait

(4) $(M: \{m_0, m_1\}; \{<m_0, m_0>, <m_0, m_1>, <m_1, m_1>\}; m_0: p, m_1: q)$

yorumlamasında doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile hesaplayalım.

(5) 1. $[m_0]\ p \wedge \Box(p \rightarrow q)$

$[m_0]\ p$

2. $[m_0]\ \Box(p \rightarrow q)$ (1)

3. $[m_0]\ p \rightarrow q$

4. $[m_1]\ p \rightarrow q$ (2)

(3)

$[m_0]\ \sim p$ X

$[m_0]\ q$

(4)

$[m_1] \sim p$

$[m_1] q$

Her iki açık yol (4) yorumlamasında yanlıştır. Nitekim $[m_0]q$ yanlıştır. O hâlde (3) önermesi (4) yorumlamasında yanlıştır.

İkinci örnek olarak

(6) $\Box[p \wedge \Diamond(q \wedge r)]$

önermesinin

(7) $(M: \{m_0, m_1, m_2\}; \mathcal{R}: \{<m_0, m_0>, <m_0, m_2>, <m_1, m_1>, <m_2, m_2>\}; m_0: p; m_1: q, m_2: r)$

yorumlamasında doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile bulalım.

(8) 1. $[m_0]\ \Box[p \wedge \Diamond(q \wedge r)]$ (B.Ö.)

2. $[m_0]\ p \wedge \Diamond(q \wedge r)$
3. $[m_2]\ p \wedge \Diamond(q \wedge r)$ (1)

$[m_0]\ p$
4. $[m_0]\ \Diamond(q \wedge r)$ (2)

$[m_2]\ p$
7. $[m_2]\ \Diamond(q \wedge r)$ (3)

(4)

5. $[m_0]\ q \wedge r$
$[m_0]\ q$
$[m_0]\ r$ (5)

6. $[m_2]\ q \wedge r$
$[m_2]\ q$
$[m_2]\ r$ (6)

7. $[m_2]\ q \wedge r$
$[m_2]\ q$
$[m_2]\ r$ (7)

8. $[m_2]\ q \wedge r$
$[m_2]\ q$
$[m_2]\ r$ (8)

Dikkat edilirse (7) yorumlamasında $[m_2]p$ yanlıştır. O halde (8)'in iki açık yolu yanlıştır. O halde (6) önermesi (7) yorumlamasında yanlıştır.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin verilen T'ye ait yorumlamalardaki doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile hesaplayınız.

1. $p \rightarrow \Diamond(p \rightarrow q)$

   (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_0>, <m_1, m_1>\}$; m_0: p, m_1: q)

2. $\Diamond q \leftrightarrow \Box p$

   (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_0>, <m_0, m_1>, <m_1, m_1>\}$; m_0:; m_1: p, q)

3. $\Box\Diamond(p \vee q) \wedge \Diamond(q \wedge r)$

   (M: $<m_0, m_1, m_2>$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_0>, <m_0, m_1>, <m_1, m_1>, <m_1, m_2>, <m_2, m_2>\}$; m_0:; m_1:; m_2:)

5.1.9.2 Çözümleyici Çizelge ile Doğrulayıcı Yorumlama Belirlemesi

Bir önermenin T sistemine ait bir yorumlamasını (varsa) bulmak için başvurulan çözümleyici çizelgenin dayandığı zorunluluğun ve imkânın elenmesi kuralları D sistemindeki kuralların aynıdır. Ancak T sisteminde aşağıdaki ek kural da kullanılır.

(1) T sistemine özgü zorunluluğun elenmesi kuralı

1. $[k_1...k_n]\ \Box A$

$[k_1...k_n]\ A\ (1, T)$

İkinci satırın ardına kaynak sayısından sonra, T sistemine özgü bir kuralın kullanıldığını belirtmek amacıyla T işaretini koyuyoruz. Dikkat edilirse (1) kuralı *Triv* sisteminde kullanılan zorunluluğun elenmesi kuralıyla özdeştir. Ancak T sisteminde bir de D sistemine ait zorunluluğun elenmesi kuralı da kullanılır. T sisteminde doğrulayıcı yorumlama bulma amacıyla kullanılan ve D sistemine ait olan kurallar şöyledir.

Zorunluluğun elenmesi kuralı

(2) 1. $[k_1...k_n]\ \Box A$

$[k_1...k_n \cdot k_{n+1}]\ A\ (1)$

$[k_1...k_n \cdot k_{n+1}]$ öneki aynı yolda önceki satırlarda geçerse ikinci satırın yazılması zorunlu olur.

(3) İmkânın elenmesi kuralı

1. $[k_1...k_n]\ \Diamond A$

$[k_1...k_n \cdot k_{n+1}]\ A\ (1)$

$[k_1...k_n \cdot k_{n+1}]$ öneki aynı yolda önceki satırların hiçbirinde geçmemelidir.

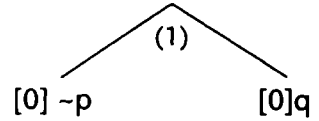
Örnek olarak

(4) $\Box(p \rightarrow q)$

önermesinin varsa T'ye ait bir doğrulayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile bulalım.

(5) 1. [0] □(p → q) (B.Ö.)

2. [0] p → q (1, T)



(5) çizelgesi açık olduğundan (4)'ün doğrulayıcı yorumlaması vardır. Birinci açık yolun belirlediği doğrulayıcı yorumlama

(6) (M: $\{m_0\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_0>\}$; m_0:)

İkinci örnek olarak

(7) □(p → q) ∧ ◇p ∧ ◇q

önermesinin varsa T'ye ait bir doğrulayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile bulalım.

(8) 1. [0] □(p → q) ∧ ◇p ∧ ◇q (B.Ö.)

4. [0] □(p → q)
2. [0] ◇p
3. [0] ◇q

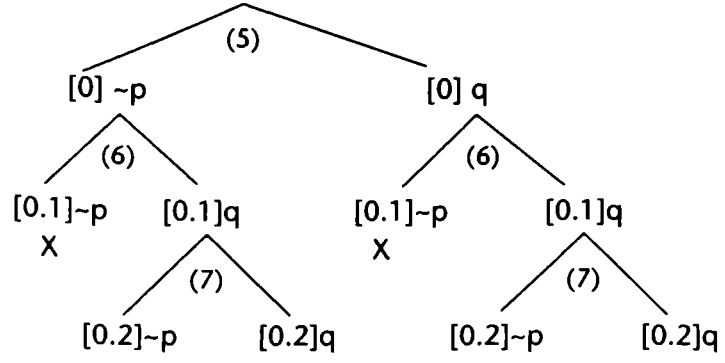
(1)

[0.1] p (2)

[0.2] q (3)

5. [0] p → q
6. [0.1] p → q
7. [0.2] p → q

(4, T)



(8) çizelgesinde açık yol olduğundan (7)'nin doğrulayıcı yorumlaması vardır. Birinci açık yolun belirlediği T'ye ait doğrulayıcı yorumlama şöyledir.

(9) (M: {[0], [0.1], [0.2]}; $\mathcal{R}$: {<[0] [0]> <[0] [0.1]> <[0] [0.2]>, <[0.1], [0.1]> <[0.2], [0.2]>}; [0]:; [0.1]: p, q; [0.2]: q)

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin varsa T'ye ait bir doğrulayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile bulunuz.

1. $\Box(p \wedge r) \rightarrow p$
2. $\Diamond(p \vee q) \wedge \Box q$
3. $\sim\Box(p \rightarrow q) \vee \Diamond q$
4. $\Box(p \vee q) \wedge \Box(p \wedge r)$

5.1.9.3 Çözümleyici Çizelge ile Denetleme

T sisteminde denetleme için kullanılan çözümleyici çizelgenin dayandığı zorunluluğun ve imkânın elenmesi kuralları, doğrulayıcı yorumlama belirleme için kullanılan kuralların aynısıdır. Ancak zorunluğun elenmesi kuralını aynı yolda geçen her önek için uygulanması zorunlu değildir.

Örnek olarak

(1) $\Box p \therefore p$

çıkarımın T sisteminde geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim. Bu amaçla (1)'in geçersiz kılıcı kümesinin çözümleyici çizelgesini kuruyoruz.

(2) 1. [0] $\Box p$ (B.Ö.)
[0] $\sim p$ (B.Ö.)
[0] p (1, T)
X

(2) çizelgesi kapalı olduğundan (1) T sisteminde geçerlidir. Geçerli olan "$\Box p \rightarrow p$" önermesine T aksiyomu veya kısaca **T** denir.

İkinci örnek olarak

(3) $\Diamond(p \rightarrow \Box p)$

önermesinin T sisteminde geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(4) 1. [0]~$\Diamond(p \rightarrow \Box p)$ (B.Ö.)
2. [0] $\Box$~$(p \rightarrow \Box p)$ (1)
3. [0] ~$(p \rightarrow \Box p)$ (2, T)
4. [0] p / [0] ~$\Box p$ (3)
5. [0] $\Diamond$~p (4)
[0.1] ~p (5)
6. [0.1] ~$(p \rightarrow \Box p)$ (2)
[0.1] p / [0.1] ~$\Box p$ (6)
X

(4) çizelgesi kapalı olduğundan (3) önermesi geçerlidir.

T sistemi, K ile D sistemlerini içine alır. Bu nedenle K sisteminde geçerli olan önermelerde D sisteminde geçerli olan bütün önermeler T sisteminde de geçerlidir. Ama tersi doğru değildir. Örneğin (1) ile (3) önermeleri T'de geçerli olup K ile D'de geçerli değildir.

Daha önce sözünü ettiğimiz

(5) $\Diamond$A geçerli ise, A geçerlidir.

biçimindeki D sistemine ait kural T sisteminin bir kuralı değildir. Nitekim (5), T sisteminin kuralı olsaydı, "$(\Diamond p \rightarrow \Box p)$" T sisteminde geçerli olduğundan, "$p \rightarrow \Box p$" T sisteminde geçersizdir. Bunu göstermek için bu önermenin değillemesinin bir doğrulayıcı yorumlamasını belirleyen çözümleyici çizelgeyi kuruyoruz.

(6) 1. [0]~(p → □p)

[0] p
2. [0]~□p (1)

3. [0] ◇~p (2)

[0.1]~p (3)

(6) çizelgesi açık olduğundan başlangıç önermesi'nin doğrulayıcı yorumlaması vardır. Açık yolun belirlediği yorumlama

(7) (M: {[0], [0.1]}; $\mathcal{R}$: {<[0], [0]>, <[0], [0.1]>, <[0.1], [0.1]>}; [0]: p, [0.1]:)

dir. (7) yorumlaması "~(p → □p)"nin T'ye ait bir doğrulayıcı yorumlaması olduğundan "p → □p"nin yanlışlayıcı yorumlamasıdır. O halde "p →□p" T sisteminde geçersizdir. Dolayısıyla (5) kuralı, T sisteminin kuralı olamaz. D sisteminin öteki kuralları ise T sisteminin de kurallarıdır.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin ve çıkarımların T sisteminde geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

1. p → ◇p
2. □□p ∴ p
3. (p ∧ q) → ~□(~p ∨ ~q)
4. ◇◇(p → q) ∴ p ∧ ~q
5. ◇p → ◇◇p

5.1.10 B Sistemi

Almaşıklık bağıntısı hem yansımalı hem bakışımlı olan yorumlamalar kümesini *B* ile gösteriyoruz. Bu yorumlamaların belirlediği normal mantık sistemine de *B sistemi* denir.

B sisteminde bir önermenin verilen yorumlamada doğruluk değeri hesaplamasında başvurulan çözümleyici çizelgenin dayandığı zorunluluğun ve

imkânın elenmesi kuralları T sisteminin kurallarının aynısıdır. Ancak B sisteminde m_i gibi bir mümkün dünyanın bir almaşığı m_j gibi bir mümkün dünya ise, $m_j \mathcal{B} m_i$ olur.

Öte yandan doğrulayıcı yorumlama belirlemesinde ve denetlemede başvurulan çözümleyici çizelgenin dayandığı zorunluluğun ve imkânın elenmesi kuralları da T sisteminin kurallarının aynısıdır. Ancak B sisteminde aşağıdaki ek kural da kullanılır.

B sistemine özgü zorunluluğun eleme kuralı

1. $[k_1 ... k_n\ k_{n+1}]\ A$

   $[k_1 ... k_n]\ A$ (1, B)

Nitekim B sisteminde $\mathcal{B}$ bakışımlı olduğundan, $[k_1 ... k_n] \mathcal{B} [k_1 ... k_n\ k_{n+1}]$ olduğu gibi, $[k_1 ... k_n\ k_{n+1}] \mathcal{B} [k_1 ... k_n]$ de doğrudur.

Örnek olarak

(1) $\Diamond\Box(p \wedge q)$

önermesinin B'ye ait

(2) $(M: \{m_0, m_1, m_2\}; B: \{\langle m_0, m_0\rangle, \langle m_0, m_1\rangle, \langle m_1, m_0\rangle, \langle m_1, m_1\rangle, \langle m_2, m_2\rangle\}; m_0: p; m_1: p, q)$

yorumlamasında doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile hesaplayalım.

(3) 1. $[m_0] \Diamond\Box(p \wedge q)$ (B.Ö.)

(1)

2. $[m_0] \Box(p \wedge q)$
3. $[m_0]\ p \wedge q$ (2)
4. $[m_1]\ p \wedge q$
   $[m_0]\ p$
   $[m_0]\ q$ (3)
   $[m_1]\ p$
   $[m_1]\ q$ (4)

5. $[m_1] \Box(p \wedge q)$
6. $[m_1]\ p \wedge q$ (5)
   $[m_1]\ p$
   $[m_1]\ q$ (6)

Birinci açık yolda "$[m_0]q$" yanlıştır. O halde bu yol yanlıştır. İkinci açık yolda ise $[m_1]p$ ve $[m_1]q$ doğrudur. Dolayısıyla ikinci açık yol doğrudur. O halde (1) önermesi (2) yorumlamasında doğrudur.

İkinci örnek olarak

(4) $\sim(\Box p \rightarrow \Box\Box p)$

önermesinin varsa B'ye ait bir doğrulayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile bulalım.

(5)
1. $[0]\sim(\Box p \rightarrow \Box\Box p)$ (B.Ö.)
7. $[0]\ \Box p$ ┐ (1)
2. $[0]\ \sim\Box\Box p$ ┘
3. $[0]\ \Diamond\sim\Box p$ (2)
4. $[0]\ \Diamond\Diamond\sim p$ (3)
5. $[0.1]\ \Diamond\sim p$ (4)
6. $[0.1.1]\ \sim p$ (5)

$[0]\ p$ ┐ (7)
$[0.1]\ p$ ┘

(5) çizelgesini belirlediği B'ye ait doğrulayıcı yorumlama, "[0]" yerine m_0 "[0.1]" yerine m_1 ve "[0.1.1]" yerine m_2 koyarsak aşağıdaki biçimde olur.

(6) $(M: \{m_0, m_1, m_2\}; \mathcal{R}: \{<m_0, m_0>, <m_0, m_1>, <m_1, m_2>, <m_1, m_1>, <m_2, m_2>, <m_1, m_0>, <m_2, m_1>\}; m_0: p; m_1: p; m_2:)$

Üçüncü örnek olarak

(7) $\Box p \rightarrow \Box\Diamond p$

önermesinin B sisteminde geçersiz olduğun göstermek için (7)'nin değillemesinin B'ye ait bir doğrulayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile bulalım.

(8) 1. [0] ~(◇p → □◇p)

[0] ◇p
2. [0] ~□◇p (1)

3. [0] ◇~◇p (2)

4. [0] ◇□~p (3)

5. [0.1] □~p (4)

[0] ~p
[0.1] ~p (5)

Açık yolun belirlediği yorumlama "[0]" yerine m_0 ve "[0.1]" yerine m_1 konulduğunda aşağıdaki biçimdedir.

(9) (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_0>, <m_0, m_1>, <m_1, m_0>, <m_1, m_1>\}$; m_0:; m_1:).

Dördüncü örnek olarak B aksiyomu veya kısaca **B** olarak gösterilen

(10) p → □◇p

önermesinin B sisteminde geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim. Bu amaçla (10)'un değillemesinin çözümleyici çizelgesini kuruyoruz.

(11) 1. [0] ~(p → □◇p)

[0] p
2. [0] ~□◇p (1)

3. [0] ◇~◇p (2)

4. [0] ◇ □~p (3)

5. [0.1] □~p (4)

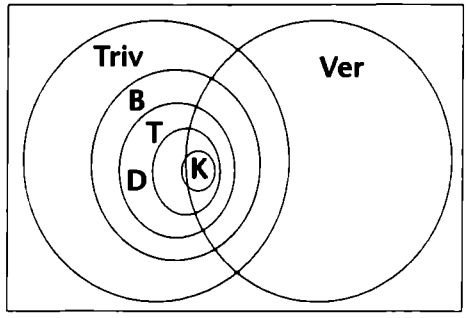
[0]~p (5, B)
X

B sistemine ait olup T sistemine ait olmayan bir kural aşağıda gösterilmiştir.

(12) ◇A → B önermesi B sisteminde geçerli ise

A → □B önermesi B sisteminde geçerli olur.

Şimdiye kadar incelediğimiz normal sistemler arasındaki ilişkileri aşağıdaki şekil'de gösteriyoruz.



(Şekil 1)

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki önermelerin verilen B'ye ait yorumlamadaki doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

1. $p \wedge \Diamond q$

   (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{R}$:$\{<m_0, m_0>, <m_1, m_1>\}$; m_0: p, m_1: q)

2. $\sim p \wedge \Diamond\Diamond(q \wedge r)$

   (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; B: $\{<m_0, m_0>, <m_0, m_2>, <m_2, m_0>, <m_1, m_1>, <m_2, m_2>\}$; m_0: q; m_1: p, r)

3. $\Box r \rightarrow \Diamond\Box(p \vee q)$

   (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_0>, <m_0, m_1>, <m_1, m_0>, <m_1, m_1>, <m_2, m_2>\}$; m_0; m_1:; m_2: p, q, r)

II. Aşağıdaki önermelerin çözümleyici çizelge ile varsa B'ye ait doğrulayıcı yorumlamasını bulunuz.

1. $\Box(p \rightarrow q)$
2. $\Diamond(p \wedge \sim q) \wedge \Diamond r$
3. $\Box[p \rightarrow \Diamond(q \wedge r)]$

III. Aşağıdaki önermelerin B sisteminde geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

1. $\Box\Diamond p \rightarrow p$
2. $(p \wedge q) \rightarrow \Diamond\Box(\sim p \vee \sim q)$
3. $\Diamond\Box\Diamond p \rightarrow \Diamond p$

5.1.11 S4 Sistemi

5.1.11.1 Çözümleyici Çizelge

Almaşıklık bağıntısı yansımalı ve geçişli olan yorumlamalar kümesini S4 ile gösteriyoruz. Bu yorumlamaların belirttiği normal sisteme S4 sistemi denir.

Buna göre S4 sistemi T sistemini ve dolayısıyla D ve K sistemlerini içine alır.

S4 sisteminde doğrulayıcı yorumlama belirlemesi ve denetleme için başvurulan çözümleyici çizelgenin dayandığı zorunluluğun ve imkânın elenmesi kuralları T sistemindeki kuralların aynısıdır. Ancak S4 sisteminde aşağıdaki ek kural da kullanılır.

(1) S4 sistemine özgü zorunluluğun elenmesi kuralı

1. $[k_1 ... k_n]$ $\Box A$

   $[k_1 ... k_n\ k_{n+1}\ k_{n+2}]$ A (1)

Örnek olarak

(2) $\Box(p \rightarrow q)$

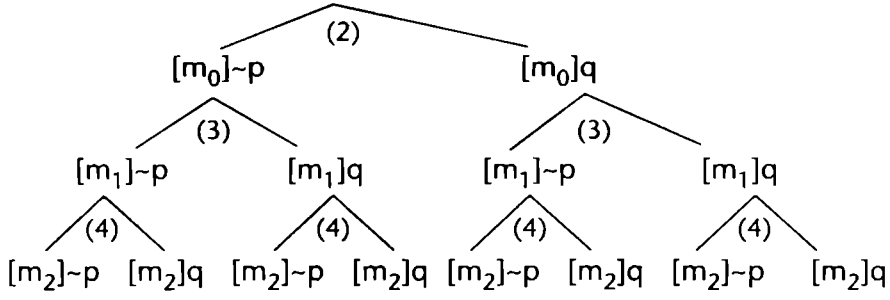
önermesini S4'e ait

(3) (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_0>, <m_0, m_1>, <m_0, m_2>, <m_1, m_1>, <m_2, m_2>\}$; m_0: p, m_1: q, m_2:)

yorumlamasında doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile hesaplayalım.

(4)

1. $[m_0]\ \Box(p \rightarrow q)$ (B.Ö.)
2. $[m_0]\ p \rightarrow q$
3. $[m_1]\ p \rightarrow q$ (1)
4. $[m_2]\ p \rightarrow q$



"$[m_0]\sim p$" ve "$[m_0]q$" yanlış olduğundan bütün açık yollar yanlıştır. Dolayısıyla (2) önermesi (3) yorumlamasında yanlıştır.

İkinci örnek olarak

(5) $\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$

önermesinin S4 sisteminde geçersiz olduğunu göstermek için (5)'in değillemesinin S4'e ait doğrulayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile bulalım.

(6) 1. [0] $\sim(\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p)$ (B.Ö.)
4. [0] $\Diamond p$
2. [0] $\sim\Box\Diamond p$ (1)
3. [0] $\Diamond\sim\Diamond p$ (2)
5. [0] $\Diamond\Box\sim p$ (3)
[0.1] p (4)
6. [0.2] $\Box\sim p$ (5)
[0.2] $\sim p$ (6)

(6)'nın tek açık yolun belirlediği S4'e ait yorumlama şöyledir. "[0]" yerine m_0 "[0.1]" yerine m_1"[0.2]" yerine m_2 koyuyoruz.

(7) $(M: \{m_0, m_1, m_2\}; \mathcal{R}: \{<m_0, m_1> <m_0, m_2>, <m_0, m_0>, <m_2, m_2>\}; m_0:; m_1: p, m_2:)$.

Üçüncü örnek olarak

(8) $\Box p \rightarrow \Box\Box p$

önermesinin S4 sisteminde geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(9) 1. [0] $\sim(\Box p \rightarrow \Box\Box p)$ (B.Ö.)
6. [0] $\Box p$
2. [0] $\sim\Box\Box p$ (1)
3. [0] $\Diamond\sim\Box p$ (2)
4. [0] $\Diamond\Diamond\sim p$ (3)
5. [0.1] $\Diamond\sim p$ (4)
[0.1.1] $\sim p$ (5)
[0.1.1] p (6, S4)
X

Geçerli olan (8) önermesine S4 aksiyomu veya kısaca **(S4)** denir.

S4 sisteminin (8) dışındaki başlıca yasalarını aşağıda gösteriyoruz.

(10) $\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$

(11) $\Box r \equiv \Box\Box p$

(12) $\Diamond r \equiv \Diamond\Diamond p$

(13) $\Diamond\Box p \rightarrow \Diamond p$

(14) $\Box\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond\Box\Diamond p$

(15) $\Box\Diamond p \leftrightarrow \Box\Diamond\Box\Diamond p$

(16) $\Diamond\Box p \leftrightarrow \Diamond\Box\Diamond\Box p$

Örneğin (14) önermesinin S4 sisteminde geçerli olduğunu göstermek için (14)'ün değillemesinin çözümleyici çizelgesini kuruyoruz.

(17) 1. [0] $\sim(\Box\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond\Box\Diamond p)$

6. [0] $\Box\Diamond p$ ⎤ (1)
2. [0] $\sim\Box\Diamond\Box\Diamond p$ ⎦

3. [0] $\Diamond\Box\Diamond\Box\sim p$ (2)

4. [0.1] $\Box\Diamond\Box\sim p$ (3)

5. [0.1] $\Diamond\Box\sim p$ (4, T)

8. [0.1.1] $\Box\sim p$ (5)

7. [0.1.1] $\Diamond p$ (6, S4)

[0.1.1.1] p (7)

[0.1.1.1]~p (8)

X

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki önermelerin S4'e ait verilen yorumlamadaki doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile hesaplayınız.

1. $\Diamond(p \rightarrow q)$

(M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_0>, <m_0, m_1>, <m_1, m_1>, <m_1, m_2>, <m_0, m_2>, <m_2, m_2>\}$; m_0: p, m_1: q)

2. $\Box p \wedge \sim\Diamond(p \vee q)$

   $(M: \{m_0, m_1, m_2\}; \mathcal{R}: \{<m_0, m_0>, <m_0, m_2>, <m_2, m_1>, <m_1, m_1>, <m_2, m_2>\}; m_0:; m_1: p, q)$

3. $\Diamond(p \wedge r) \wedge \Box(q \rightarrow r)$

   $(M: \{m_0, m_1, m_2\}; \mathcal{R}: \{<m_0, m_0>, <m_0, m_1>, <m_1, m_2>, <m_0, m_2>, <m_1, m_1>, <m_2, m_2>\}; m_0:; p, q, r)$

II. Aşağıdaki önermelerin S4'e ait varsa bir doğrulayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile bulunuz.

1. $\Box(p \vee q)$
2. $\sim(\Diamond(p \vee q) \rightarrow \Box p)$
3. $\Diamond(p \rightarrow q) \wedge \Box(q \wedge r)$

III. §5.1.11.1'deki S4 sistemine ait yasalardan henüz denetlenmemiş olanları çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

5.1.11.2 S4 Sisteminin Kiplikleri

n sayıda ($n \geq 0$) "~" "□", "◇" önerme eklemlerinden oluşan bir diziye *kiplik* denir. n sayısına kipliğin uzunluğu denir. n = 0 sınır durumunda 0 uzunluğundaki kiplik "—" işaretiyle gösterilir.

Örnek olarak "—" 0 uzunluğunda, "~", "□", "◇" 1 uzunluğunda, "~□", "□~", "◇□", ... 2 uzunluğunda "~□◇", "□~◇", ... 3 uzunluğunda kiplikler-dir.

Bir kiplikte "~" eklemi ya hiç geçmezse veya kipliğin en başında geçerse kipliğe *yasal kiplik* denir. Her kiplik, kiplik değilleme yasalarına dayanarak yasal bir kipliğe dönüştürülebilir.

Kiplikleri söz eden dilde K, K_1, K_2, ... *kiplik değişkenleri* ile gösteriyoruz.

Her *A* önermesi için $K_1 A \overset{S}{\equiv} K_2 A$ ise, K_1 ile K_2 kipliklerinin S sisteminde *eş-değer* olduğunu söyleriz.

Buna göre her kipliğin kiplik değilleme kuralları gereği bir yasal kipliğe S sisteminde eşdeğer olduğunu söyleyebiliriz.

Örneğin

(1) $\sim\Box\Diamond\Diamond\sim\Box$

kipliğine eşdeğeri olan yasal kipliğe çevirelim. Bu amaçla A gibi herhangi bir önermeyi gözönüne alalım.

(2) $\sim\Box\Diamond\Diamond\sim\Box A \equiv \sim\Box\Diamond\sim \Box\Box A \equiv \sim\Box\sim\sim\Box\Box\Box A \equiv \Box\Box\Box\Box A$

Demek ki (1) kipliği

(3) $\Box\Box\Box\Box A$

yasal kipliği ile eşdeğerdir. Dönüştürmeleri

(4) $\sim\Box A \overset{S4}{\equiv} \Diamond\sim A$

ile

(5) $\sim\Diamond A \overset{S4}{\equiv} \Box\sim A$

kiplik değilleme yasalarına göre yapıyoruz. Bundan böyle her kipliğin bir yasal kipliğe çevrildiğini kabul edip "kiplik" terimi hep yasal kiplik anlamında kullanacağız.

Başında "~" eklemi geçmeyen kipliğe *evetleyici kiplik*, başında "~" eklemi geçmeyen kipliğe *değilleyici kiplik* denir.

Örneğin

(6) $\Box\Diamond\Diamond\Box$

evetleyici bir kiplik,

(7) $\sim\Diamond\Box\Diamond\Diamond\Box$

ise değilleyici bir kipliktir. Boş kiplikte "~" eklemi geçmediğinden dolayı, boş kiplik evetleyici bir kipliktir.

İçinde birden çok sayıda kiplik değişmezi geçen bir kipliğe *tekrarlı kiplik* denir.

Örneğin "$\sim\Box\Box$", "$\sim\Diamond\Box$ ", "$\Box\Diamond$", "$\sim\Box\Diamond\Box$", "$\sim\Box\Diamond\Box$" tekrarlı kipliklerdir.

K_1 ve K_2 S sisteminde eşdeğer olan kiplikler olduğunda, K_2'nin uzunluğu K_1'in uzunluğundan küçük ise K_2 kipliğinin S sisteminde K_2 kipliğine *indirgendiği* söylenir.

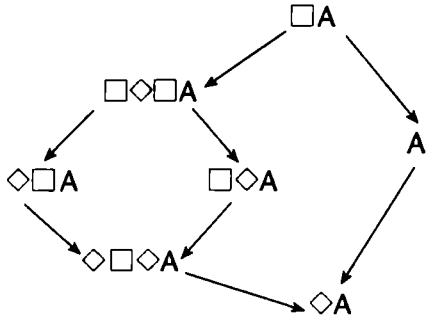
S4 sisteminde bütün kiplikler sonlu sayıda belli bazı kipliklere indirgenir. Nitekim, S4 sisteminde her kiplik S4'ün temel kiplikleri denilen aşağıdaki 14 kiplikten biriyle eşdeğerdir.

(i) —,(ii) □, (iii) ◇, (iv) □◇, (v) ◇□, (vi) □◇□, (vii) ◇□◇,

(i') ~,(ii')~□, (iii')~◇, (iv')~□◇, (v')~◇□, (vi')~□◇□, (vii')~◇□◇,

Her A önermesi için $K_1A \models^{S} K_2A$ ise, K_1 kipliğinin S sisteminde K_2 kipliğini içerdiği söylenir. Bunu da $K_1 \rightarrow K_2$ biçiminde dile getiriyoruz.

S4 sisteminde temel 7 evetleyici kiplik arasındaki içerme ilişkileri aşağıdaki şekil'de gösterilmiştir.



(Şekil 1)

Temel kipliklere indirgeme, kiplik değilleme yasaları ve

(8) $\Box\Box p \overset{S4}{\equiv} \Box p$

ile

(9) $\Diamond\Diamond p \overset{S4}{\equiv} \Diamond p$

eşdeğerliklerine dayanır.

Örnek olarak

(10) "□□◇"

kipliğini temel kipliklerden birine indirgeyelim. (8) eşdeğerliği gereği

□□◇A ≡ □◇A

o halde (10) kipliği, temel kiplik olan

(11) □◇

kipliğine indirgenir.

Başka bir örnek olarak yasal kiplik olmayan

(12) □◇~

kipliğini bir temel kipliğe indirgeyelim (4) ve (5) eşdeğerlikleri gereği "□◇~A" biçimindeki bir önerme

(13) ~◇□A

ya dönüştürülür. O halde (12) kipliği

(14) ~◇□

temel kipliğine indirgenir.

Üçüncü örnek olarak yasal kiplik olmayan

(15) ◇□□◇◇~

kipliğini bir temel kipliğe indirgeyelim. Önce (4), (5) eşdeğerliklerine dayanarak (15)'i

(16) ~□◇◇□□

yasal kipliğine dönüştürürüz. Sonra (8) ve (9) eşdeğerliklerine dayanarak (16)'yı

(17) ~□◇□

kipliğine indirgeriz.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki kiplikleri birer yasal kipliğe dönüştürünüz.

1. $\Diamond\sim\Box\sim$
2. $\sim\Box\Diamond\sim$
3. $\sim\Box\Diamond\sim\Box$
4. $\Diamond\Diamond\sim\Box$
5. $\Box\Diamond\Diamond\sim$

II. Aşağıdaki yasal kiplikleri birer temel kipliğe indirgeyiniz.

1. $\Box\Box$
2. $\Diamond\Box\Box$
3. $\sim\Box\Diamond\Diamond$
4. $\sim\Diamond\Box\Box\Diamond\Diamond$
5. $\Box\Diamond\Diamond\Diamond\Box\Box$

5.1.12 S5 Sistemi

5.1.12.1 Çözümleyici Çizelge

Almaşıklık bağıntısı yansımalı, bakışımlı ve geçişli olan yorumlamalar kümesini S5 ile gösteriyoruz. Bu yorumlamaların belirlediği mantık sistemine *S5 sistemi* denir.

Özel hal olarak, bütün mümkün dünyaların birbirinin almaşığı olduğu bir bağıntıyı göz önüne alalım. Böyle bir $\mathcal{B}$ bağıntısı

$\mathcal{B} = M \times M$

koşulunu yerine getirir. Böyle bir B bağıntısı yansımalı, bakışımlı ve geçişli olduğundan S5'e ait bir yorumlamanın almaşıklık bağıntısı durumundadır.

İmdi §5.1.2'de incelediğimiz yorumlamaların almaşıklık bağıntısının M X M biçiminde olduğunu kabul edebiliriz. Böylece §5.1.2'de incelediği-

miz kiplik mantığı sisteminin, S5 sistemi olduğunu söyleyebiliriz. O zaman da S5'in çözümleyici çizelgesinin gerek doğruluk değeri hesaplanması, gerek doğrulayıcı yorumlamada belirlenen ve gerek denetleme durumlarında 15.1.2'deki çözümleyici çizelgenin aynısı olduğunu söyleyebiliriz.

S5 sisteminin başlıca yasalarını aşağıda gösteriyoruz.

(1) $\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$

(1) önermesine S5 aksiyomu veya kısaca **S5** denir.

(2) $\Diamond\Box p \rightarrow \Box p$

(3) $\Box\Diamond p \leftrightarrow \Diamond p$

(4) $\Diamond\Box p \leftrightarrow \Box p$

(5) $\Box(p \vee \Box q) \leftrightarrow (\Box p \vee \Box q)$

(6) $\Box(p \vee \Diamond q) \leftrightarrow (\Box p \vee \Diamond q)$

(7) $\Diamond(p \wedge \Diamond q) \leftrightarrow (\Diamond p \wedge \Diamond q)$

(8) $\Diamond(p \wedge \Box q) \leftrightarrow (\Diamond p \wedge \Box q)$

Örnek olarak (1) önermesinin S5 sisteminde geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim. Bu amaçla (1)'in değillemesinin çözümleyici çizelgesini §5.1.2'deki kurallara dayanarak kuruyoruz.

(9)

1.	[0] $\sim(\Diamond p \wedge \Box\Diamond p)$	
2.	[0] $\Diamond p$	(1)
3.	[0] $\sim\Box\Diamond p$	(1)
4.	[0] $\Diamond\Box\sim p$	(3)
	[1] p	(2)
5.	[2] $\Box\sim p$	(4)
	[1] $\sim p$	(5)
	X	

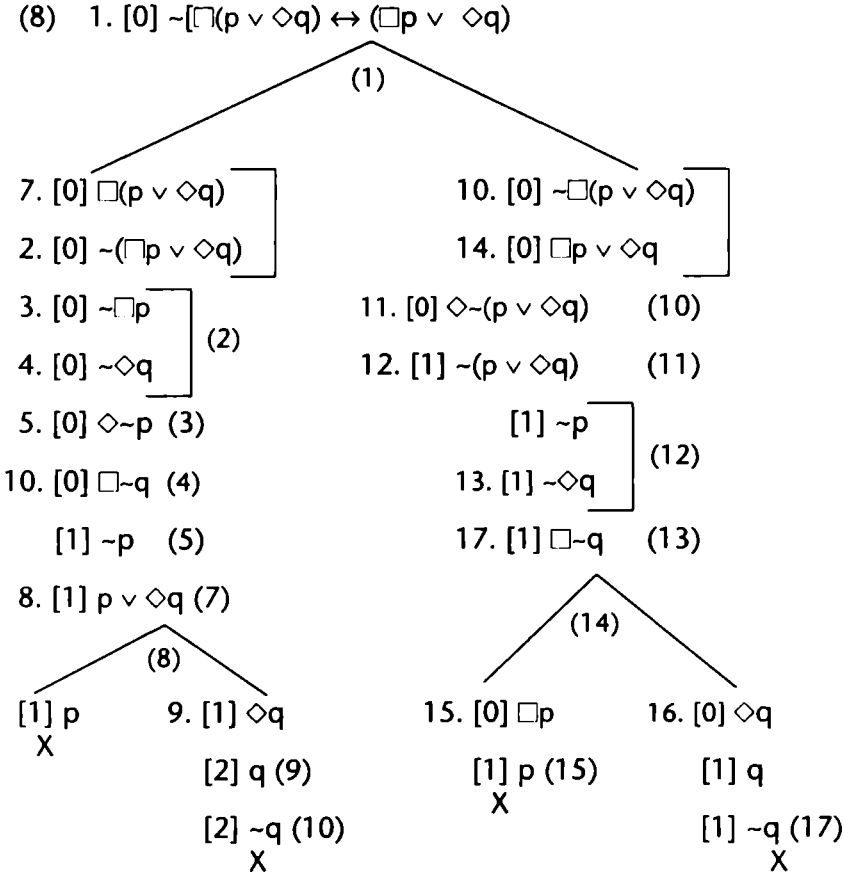
Dikkat edilirse 5'nci adımda tümel özelleme kuralına dayanarak "[2] $\Box\sim p$" satırından "[1] $\sim p$" satırını elde ettik. Nitekim S5 sisteminde her mümkün

dünya her mümkün dünyanın almaşığıdır. Dolayısıyla "[2]"nin gösterdiği mümkün dünya "[1]"in gösterdiği mümkün dünyanın almaşığıdır.

İkinci örnek olarak (6) eşdeğerliğini denetleyelim. Bu amaçla

(7) $\sim[\Box(p \vee \Diamond q) \leftrightarrow (\Box p \vee \Diamond q)]$

önermesinin S5'teki çözümleyici çizelgesini kuruyoruz.



ALIŞTIRMALAR

S5 sistemine ait §5.1.12.1'deki yasalardan henüz denetlenmemiş olanları çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

5.1.12.2 S5 Sisteminin Kiplikleri

S5 sisteminde her kiplik *S5'in temel kiplikleri* dediğimiz aşağıdaki 6 kipliğe indirgenir.

(1) (i) —, (ii) □ , (iii) ◇ ,

(i) ~, (ii) □ , (iii) ~◇.

Yasal kiplik olan veya olmayan herhangi bir kipliği bir temel kipliğe indirgemek için

(2) ~□A $\overset{S5}{\equiv}$ ◇~A

(3) ~◇A $\overset{S5}{\equiv}$ □~A

(4) □□A $\overset{S5}{\equiv}$ □A

(5) ◇◇A $\overset{S5}{\equiv}$ ◇A

(6) ◇□A $\overset{S5}{\equiv}$ □A

(7) □◇A $\overset{S5}{\equiv}$ ◇A

eşdeğerliklerini kullanırız.

Örnek olarak

(8) □~◇ □~◇

kipliğini S5'e ait bir temel kipliğe indirgeyelim. Önce (2), (3) eşdeğerliklerine dayanarak (8)'i yasal kiplik olan

(9) □□◇◇

kipliğine çevririz. Sonra (9)'u (4)-(7) eşdeğerlikleri gereği S5'in kipliği olan "◇"e indirgeriz. Dikkat edilirse "◇", (9) evetleyici yasal kipliğinin sonucu eklemidir.

Değilleyici yasal kipliklerin en baştaki eklem ile en sondaki eklemden oluşan kipliğe indirgenir. Örneğin

(10) ~□□◇◇

değilleyici yasal kiplik "~◇" kipliğine indirgenir. Genel olarak

S5 sisteminde her evetleyici yasal kiplik en sondaki ekleme indirgenir, her değilleyici yasal kiplik de en baştaki eklem ile en sondaki eklemden oluşan kipliğe indirgenir.

Kipliklerin indirgemesi sonucunda S5 sistemindeki her önerme tekrarlı kipliği olmayan eşdeğer bir önermeye çevrilebilir. Örneğin

(11) $\sim[\Box\Diamond(p \rightarrow \Box q) \vee \Diamond\Box\Box\sim(q \vee r)]$

önermesini tekrarlı kipliği olmayan eşdeğer bir önermeye çevirelim. Önce (11)'deki yasal kiplik olmayan "$\Diamond\Box\Box\sim$" kipliğini "$\sim\Box\Diamond\Diamond$" yasal kipliğine dönüştürüyoruz. Böylece (11)'den

(12) $\sim[\Box\Diamond(p \rightarrow \Box q) \vee \sim\Box\Diamond\Diamond(q \vee r)]$

önermesi elde edilir. (12) önermesi

(13) $\sim[\Diamond(p \rightarrow \Box q) \vee \sim\Diamond(q \vee r)]$

ye indirgenir. (13)'te ise tekrarlı (yani ard arda geçen) kiplik değişmezleri yoktur.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki kiplikleri S5 sisteminde birer temel kipliğe indirgeyiniz.

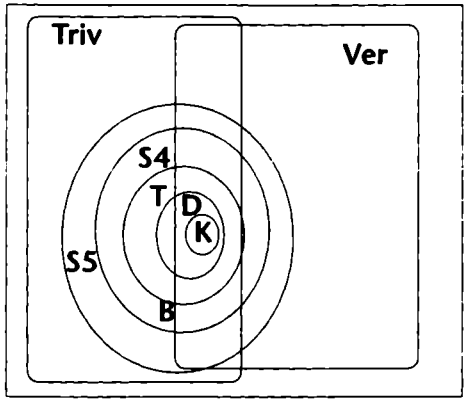
1. $\Box\Diamond\Box$
2. $\sim\Box\Diamond\Box\Box$
3. $\Box\sim\Diamond\Box\Diamond$

II. Aşağıdaki önermeler, S5 sisteminde eşdeğeri olan ve tekrarlı kipliği olmayan birer önermeye çeviriniz.

1. $\sim\Box\Box(p \rightarrow \Box\Diamond q)$
2. $\sim\Diamond\Diamond(q \rightarrow r) \leftrightarrow \Box\Diamond\Box(p \vee \Box q)$
3. $\Box\Box(p \vee \Diamond q) \leftrightarrow \sim\Box\Diamond p$
4. $\Box\Diamond\sim(p \wedge \Box q) \rightarrow \Diamond\Box\Diamond(p \rightarrow q)$
5. $\Box\sim\Diamond\sim(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim\Diamond\Box(p \vee \sim r)$

Buraya kadar incelediğimiz normal kiplik mantığı sistemleri arasındaki ilişkiyi aşağıdaki şekil'de dile getiriyoruz.

Tutarsız normal sistem



(Şekil 1)

5.1.13 Normal Olmayan Sistemler

5.1.13.1 Normal Olmayan Yorumlamalar

Buraya kadar incelediğimiz almaşıklık bağıntılı yorumlamalar'a *normal* yorumlamalar denir. Şimdi de *normal olmayan acayip dünyalı yorumlamaları* inceleyeceğiz. Bu yeni türden yorumlamaların M mümkün dünyalar kümesi *normal mümkün dünyalar kümesi* N ile *acayip mümkün dünyalar* kümesi M_A'ya bölünmüştür.

(1) $M = N \cup M_A$

(2) $N \cap M_A = \varnothing$

Yani N ile M_A'nın bileşimi M'ye eşit olup N ile M_A'nın kesişimi boştur. N'nin öğelerine *normal mümkün dünya* ve kısaca *normal dünya,* M_A'nın öğelerine de *acayip mümkün* dünya veya kısaca *acayip dünya* denir.

(3) Her acayip dünya bir normal dünyanın almaşığıdır. Her acayip dünya bir çıkmazdır. Yani hiçbir acayip dünyanın almaşığı yoktur.

Kiplik önermelerinin acayip dünyalı bir yorumlamadaki doğruluk değeri şöyle tanımlanır. Bundan böyle "yorumlama"yı hep normal olmayan yorumlama anlamında kullanacağız.

(4) Verilen bir yorumlamada, □A biçimindeki bir önerme *m* mümkün dünyasında doğrudur, ancak ve ancak (i) $m \in N$ ve (ii) A önermesi *m*'nin her almaşığında doğru ise.

(5) Verilen bir yorumlamada ◇A biçimindeki bir önerme *m* mümkün dünyasında doğrudur, ancak ve ancak (i) $m \in N$ ve A önermesi m'nin en az bir almaşığında doğru veya (ii) $m \rightarrow N_A$ ise.

Herhangi bir acayip dünyada (4)'e göre □A yanlıştır, 5'e göre de ◇A doğrudur.

(4) ve (5)'ten şu sonuçlar elde edilir.

(6) Verilen bir yorumlamada □A *m* mümkün dünyasında yanlıştır, ancak ve ancak (i) $m \in N$ ve A önermesi m'nin en az bir almaşığında yanlıştır veya (ii) $m \in N_A$ ise.

(7) Verilen bir yorumlamada ◇A *m* mümkün dünyasında yanlıştır ancak ve ancak (i) $m \in N$ ve (ii) A önermesi *m*'nin her almaşığında yanlış ise.

Yorumlamaları dile getirirken M mümkün dünyalar kümesi ile N normal dünyalar kümesi belirtilir. M_A acayip dünyalar kümesi aşağıdaki gösterilen fark biçiminde tanımlanır.

(8) $M_A = M - N$.

(9) Örnek olarak □□(p → q)

önermesinin

(10) M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; N: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_1>, <m_0, m_2>, <m_1, m_2>\}$; m_0: p; m_1: p, q, m_2: p, q)

yorumlamasında doğruluk değerini bulalım. m_0 gerçek dünyası bir normal dünyadır. Nitekim $m_0 \in N$. O halde (9)'un m_0'da doğru olması □(p → q) nun m_1 ve m_2'de doğru olması demektir. m_1 bir normal dünyadır. O halde □(p → q)'nun m_1'de doğru olması "p → q"nun m_2'de doğru olması demektir. Kipliksiz önermeleri acayip dünyalardaki doğruluk değerleri normal dünyalardakinin aynısıdır. Buna göre "p → q"nun m_2'de doğru

olduğunu söyleyebiliriz. Öte yandan m_2 bir acayip dünya olduğunda "$\Box(p \rightarrow q)$" m_2'de yanlıştır. O halde (9) önermesi (10) yorumlamasında yanlıştır.

(11) $\Box\Box(p \rightarrow p)$

önermesinin aynı (10) yorumlamasındaki doğruluk değerini bulalım. $\Box(p \rightarrow q)$nin m_0'da doğru olması için $\Box(p \rightarrow p)$ hem m_1'de hem m_2'de doğru olmalıdır. Oysa m_2 bir acayip dünya olduğundan "$\Box(p \rightarrow p)$" m_2'de yanlıştır. O halde (11) önermesi de (10)'da yanlıştır.

Üçüncü örnek olarak

(12) $\Diamond \Diamond(p \wedge q)$

önermesini (10) yorumlamasındaki doğruluk değerini bulalım. (12)'nin m_0'da doğru olması "$\Diamond(p \wedge q)$"nun m_1 veya m_2'de doğru olması demektir. Nitekim m_0 bir normal dünyadır. m_2 bir acayip dünya olduğundan "$\Box(p \wedge q)$" m_2'de doğrudur. O halde (12), (10) yorumlamasında doğrudur.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin aşağıda verilen (normal olmayan) yorumlamadaki doğruluk değerini bulunuz.

1. $\Box[p \rightarrow (q \wedge r)]$
2. $\Box\Box[p \vee (q \wedge r)]$
3. $\Diamond[r \wedge \Box(q \wedge r)]$
4. $\Box r \wedge \Box\Diamond(p \wedge q)$
5. $\sim \Box\Diamond[p \leftrightarrow (q \vee r)]$

   (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; N: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_1>, <m_0, m_2>, <m_1, m_2>\}$; m_0: p, m_1: q, r; m_1: p, q)

5.1.13.2 Normal Olmayan Mantık Sistemleri

Belli bir takım özelliği olan normal yorumlamalardan oluşan her küme *normal olmayan* bir mantık sistemini belirler. Sistem, kümenin öğesi olan her yorumlamada doğru olan önermelerin kümesidir. Normal olmayan yorumlamaların taşıyabileceği başlıca özellikler şunlardır.

(Dzs_N) N'de *dizisellik özelliği:* N'nın her öğesinin bir almaşığı vardır. Yani N'nin hiçbir öğesi çıkmaz değildir.

(Yns_N) N'de *yansıma özelliği:*

$$\forall m(m \in N_N \rightarrow m\mathcal{B}m)$$

($Bkş_N$) N'de *bakışımlılık özelliği*

$$\forall m \forall m'[(m \in N_N \wedge m' \in N_N \leftrightarrow m\mathcal{B}m') \rightarrow m'\mathcal{B}m]$$

($Gçş_N$) N'de *geçişlilik özelliği:*

$$\forall m \forall m' \forall m''[m \in N_N \wedge m' \in N_N \wedge m'' \in N_N \wedge m\mathcal{B}m' \wedge m'\mathcal{B}m'') \rightarrow m\mathcal{B}m'']$$

(YNr_N) *Yarı normallik özelliği:*

$$N = M$$

Normal sistemler, normallik özelliğini taşıyan yarı normal yorumlamaların belirlediği sistemler sayılabilir.

(Ac) *Acayiplik özelliği:* $N = \{\ \}$ (Her mümkün dünya acayiptir.)

(YAc) *Yarı acayiplik özelliği:* $N \neq M$ (En az bir acayip dünya vardır.)

En genel yorumlama, sözü geçen 8 özellikten hiçbirini taşımayan yorumlamadır. Bu yorumlamaların tümünün kümesini $E2^0$ olarak gösteriyoruz. Bu yorumlamaların belirttiği en dar normal olmayan mantık sistemine, $E2^0$ sistemi denir. Öbür normal olmayan sistemler $E2^0$ sistemini içine alırlar.

Normal olmayan mantık sistemlerini *düzgün sistemler* ile *yarı düzgün sistemler*'e ayırıyoruz.

Düzgün mantık sistemleri	Yorumlamaların özelliği
1. $E2^0$	–
2. E2	Yns_N
3. $E3^0$	$Gçs_N$
4. E3	Yns_N, $Gçs_N$
5. $E6^0$	YAc_N
6. E6	YAc, Yns_N
7. $E7^0$	YAc_N, $Gçş_N$
8. E7	YAc_N, Yns_N, $Gçş_N$
9. E^+	Ac_N

(YNr_N) yarı-normallik özelliği olan yorumlama kümelerinin belirlediği normal-olmayan sistemlere *yarı-düzgün sistemler* denir. Yarı-düzgün sistemler S harfiyle gösterilir.

Yarı-düzgün sistemlerin en önemlilerini aşağıda gösteriyoruz.

Yarı-düzgün mantık sistemleri	Yorumlamaların özelliği
$S2^0$ ($E2^0$'ın karşılığı)	YNr_N
S2 (E2' " ")	YNr_N, Yns_N
$S3^0$($E3^0$ " ")	YNr_N, $Gçş_N$
S3 (E3 " ")	YNr_N, Yns_N, $Gçş_N$
S3.5	YNr_N, Yns_N, $Bkş_N$, $Gçş_N$
$S6^0$ ($E6^0$' " ")	YNr_N, YAc_N
$S7^0$ ($E7^0$' " ")	YNr_N, YAc_N, $Gçş_N$
S7 (E7 " ")	YNr_N, YAc_N, Yns_N, $Gçş_N$
S9	YNr_N, YAc_N, Yns_N, $Bkş_N$, $Gçş_N$

Yarı-düzgün olmayan herhangi bir mantık sistemini belirleyen yorumlamalara YNr_N özelliği verilirse, bu yorumlamalar verilen sistemin karşılığı olan bir yarı-düzgün sistemi belirlerler.

A önermesi, En biçiminde yarı-düzgün olmayan bir sistemde geçerli ise, □A önermesi *En* sisteminin karşılığı olan *Sn* yarı-düzgün sisteminde geçerli olur.

Örnek olarak

(1) $p \rightarrow p$

totolojisi, her totoloji gibi $E2^0$ sisteminde geçerlidir. Buna göre

(2) $\Box(p \rightarrow p)$

önermesinin de $E2^0$'ın karşılığı olan $S2^0$ yarı-düzgün sisteminde geçerli olduğunu gösterelim. $S2^0$'ye ait yorumlamaları Nr_N özelliğini taşır. Yani bütün bu yorumlamalarda $m_0 \in N$ olur. İmdi (2) önermesinin doğru olması m_0 gerçek dünyada doğru olması demektir. m_0 normal bir dünya olduğundan (2)'nin m_0'da doğru olması,

(3) $p \rightarrow p$

nin m_0'ın almaşığı olan her mümkün dünyada doğru olması demektir. Eğer m_0 çıkmaz ise (2), m_0'da doğru olur. Eğer m_0 çıkmaz değilse, (3) m_0'ın bütün almaşıklarında doğru olur. Her iki şıkta (2) önermesi m_0'da doğrudur. O halde (2) önermesi YNr_N özelliğini yerine getiren bütün yorumlamalarda doğrudur.

Dikkat edilirse YNr_N özelliği taşımayan bir yorumlamada (2) önermesi m_0'da yanlıştır. Nitekim YNr_N özelliğini taşımayan bir yorumlamada $m_0 \notin N$ olur. O zaman m_0 acayip bir dünya olup (2) önermesi m_0'da yanlış olur.

5.1.13.3 $E2^0$ Düzgün Sistemi

Bütün normal olmayan sistemlerin alt kümesi olan $E2^0$ sistemini daha yakından inceleyelim. $E2^0$ sisteminin şu özellikleri vardır.

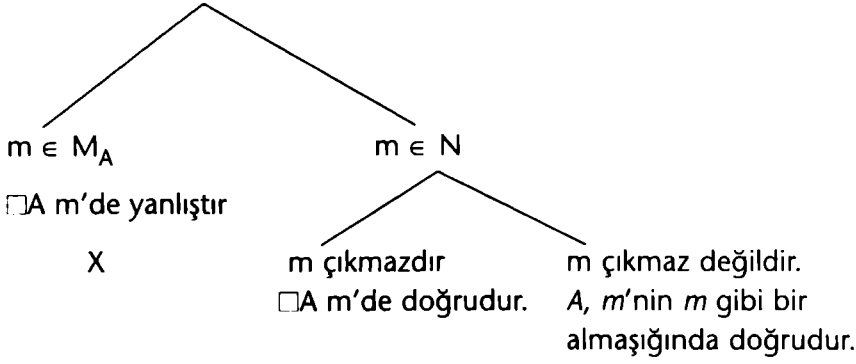
(i) Her totoloji $E2^0$ sisteminde geçerlidir.

(ii) **K** önermesi $E2^0$ sisteminde geçerlidir.

(iii) $A \rightarrow B$ önermesi $E2^0$ sisteminde geçerli ise $\Box A \rightarrow \Box B$ önermesi de $E2^0$ sisteminde geçerli olur. (Düzgünlük kuralı)

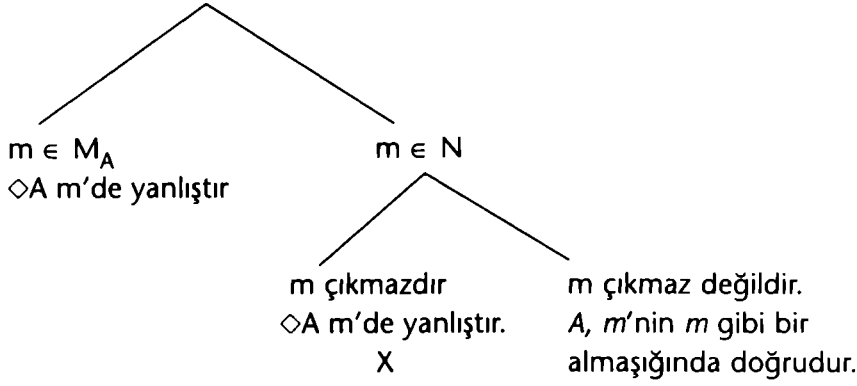
Bu özelliklere değinmeden önce $E2^0$ sisteminin çözümleyici çizelgesinin dayandığı zorunluluğun ve imkânın elenmesi kurallarını ortaya koyuyoruz. □A ile ◇A'nın *m* gibi bir mümkün dünyada doğru olması durumunda aşağıdaki çizelgeler ortaya çıkar.

(1) □A m'de doğrudur.



O halde □A'nın doğruluğundan, A'nın bir almaşıktaki doğruluğunu çıkaramayız.

(2) ◇A m'de doğrudur.



Gene ◇A'nın doğruluğunda A'nın bir almaşıktaki doğruluğunu çıkaramayız.

Öte yandan □A ile ◇B biçimindeki iki önerme birlikte *m* gibi bir mümkün dünyada doğru ise, m çıkmaz olmayan bir mümkün dünya olur. (Nitekim m acayip olsaydı □A yanlış olurdu. m çıkmaz niteliğinde normal bir dünya olsaydı ◇B yanlış olurdu.) O zaman $E2^0$ sistemine özgü aşağıdaki kuralı elde ederiz.

(3) *$E2^0$'a özgü zorunluluğun ve imkânın birlikte elenmesi kuralı*

1. $[k_1...k_n] \Box A$

1. $[k_1...k_n] \Diamond B$

$$\left.\begin{array}{l}[k_1...k_n\ k_{n+1}]\ A \\ [k_1...k_n\ kn{+}1]\ B\end{array}\right] (1, E2^0)$$

$[k_1...k_n\ k_{n+1}]$ öneki önceki hiçbir satırda geçmemelidir.

Zorunluluğun ve imkânın değillemesi kuralları $S2^0$ sisteminde de uygulanır. Ayrıca aşağıdaki sınırlandırılmış zorunluluğun elenmesi kuralı $S2^0$ sisteminde kullanılabilir.

Sınırlandırılmış zorunluluğun elenmesi kuralı

1. $[k_1...k_n\ k_{n+1}]\ B$

1. $[k_1...k_n] \Box A$

$[k_1...k_n\ k_{n+1}]\ A\ (1)$

$[k_1...k_n\ k_{n+1}]$ önekinin aynı yolda önceki bir satırda geçmesi $[k_1...k_n]$'nin bir almaşığı olduğunu gösterir. O zaman da $[k_1...k_n]$ önekinin gösterdiği mümkün dünya acayip dünya olmadığı gibi çıkmaz niteliğinde normal bir dünya da olamaz. Bu durumda $[k_1...k_n]$'nin gösterdiği dünya bir normal dünya olup $[k_1...k_n, k_{n+1}]$'in gösterdiği dünya birincisinin almaşığı olur.

Sözü geçen (i) ilkesi gereği her totoloji $E2^0$ sisteminde geçerlidir. Nitekim $E2^0$ sisteminde kipliksiz önermelerin çözümleyici çizelgesi önermeler mantığındaki çizelgenin aynısıdır. Yalnız her önermenin önünde [0] öneki vardır.

(3) kuralına dayanarak **K** önermesinin $E2^0$ sisteminde geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile gösterebiliriz. Bu amaçla **K**'nın değillemesinin çözümleyici çizelgesini kuruyoruz. (**K** önermesi için sayfa 104'e bakınız).

(4) 1. [0] ~[□(p → q) → (□p → □q)]

4. [0] □(p → q)
2. [0] ~(□p → □q) (1)

4. [0] □p
3. [0] ~□q (2)

4. [0] ◇~q (3)

5. [0.1] p → q
[0.1] p
[0.1] ~q (4, $E2^0$)

(5)

[0.1] ~p [0.1] q
X X

(4) çizelgesi kapalı olduğundan **K** önermesi $E2^0$ sisteminde geçerlidir.

Şimdi sözü geçen (iii) koşullu geçerli yasayı ispatlayalım. A → B önermesi $E2^0$ sisteminde geçerli olsun. O zaman

(5) 1. [0] ~(A →B)

[0] A
[0] ~B (1)

X X X

biçiminde kapalı bir çözümleyici çizelge vardır.

Şimdi "□A → □B"nin $E2^0$ sisteminde geçerli olduğunu göstermek için bu önermenin değillemesinin çözümleyici çizelgesini kuralım.

(6) 1. [0] ~(□A → □B)

3. [0] □A
2. [0] ~□B
(1)

3. [0] ◇~B

[0.1] A
[0.1] ~B
(3, S2^0)

(5) çözümleyici çizelge kapalı olduğunda (6) çözümleyici çizelgesi de kapalı olur.

İkinci örnek olan

(7) [p → (p ∨ q)] → (□p → □(p ∨ q))

önermesinin E2^0 sisteminde geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(8) 1. [0] ~[(p → (p ∨ q)] → [□p → □(p ∨ q)]]

[0] p → (p ∨ q)

2. [0] ~[□p → □(p ∨ q)]

4. [0] □p
3. [0] ~□(p ∨ q)
(2)

4. [0] ◇~(p ∨ q) (3)

[0.1] p
5. [0.1] ~(p ∨ q)
(4)

[0.1] ~p
[0.1] ~q
X
(5)

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin ve çıkarımların $E2^0$ sisteminde geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

1. $p \rightarrow (q \rightarrow p) \rightarrow [\Box p \rightarrow \Box(q \rightarrow p)]$

2. $[(p \rightarrow q) \rightarrow q] \rightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r] \therefore \Box[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \rightarrow \Box[(p \rightarrow q) \rightarrow r]$

3. $[p \rightarrow (p \vee q) \rightarrow [\Box p \rightarrow \Box(p \vee q)]] \therefore [\Box[p \rightarrow (p \vee q) \rightarrow \Box(\Box p \rightarrow \Box(p \vee q)]]$

5.1.13.4 $S2^0$ Yarı-Düzgün Sistemi

$S2^0$ sistemi, YNr_N özelliğini taşıyan (normal olmayan) yorumlamaların belirlediği normal olmayan mantık sistemidir. $S2^0$ sisteminin başlıca özellikleri şunlardır.

(i) K önermesi $S2^0$ sisteminde geçerlidir.

(ii) A'ya bir totoloji ya da **K** biçiminde bir önerme ise, $\Box A$, $S2^0$ sisteminde geçerli olur.

(iii) $\Box(A \rightarrow B)$ $S2^0$ sisteminde geçerli ise, $\Box(\Box A \rightarrow \Box B)$ $S2^0$ sisteminde geçerli olur. (Becker kuralı)

$S2^0$ sisteminde doğrulayıcı yorumlama belirlemesi ve denetleme için kullanılan çözümleyici çizelgenin dayandığı zorunluk ve imkânın elenmesi kuralları $E2^0$'daki kuralların aynısıdır. Ancak $S2^0$'da aşağıdaki ek kural da kullanılır.

$S2^0$ Sistemine özgü imkânın elenmesi kuralı

(1) 1. [0] $\Diamond A$

(1)

[0.1] A [0] $\sim\Diamond A$ (ç)

X

Nitekim [0] önekinin gösterdiği gerçek dünya $S2^0$ sistemi durumunda bir normal dünyadır. O zaman bu dünya ya bir çıkmaz olmayıp [0.1] gibi bir almaşığında A önermesi doğru olur, ya da bu dünya bir çıkmaz olup $\sim\Diamond A$

önermesi aynı dünyada doğru olur. Ancak (1) kuralı yalnız [0] öneki için kullanılabilir; $[k_1...k_n]$ gibi herhangi bir örnek için kullanılamaz. Nitekim [0] dışındaki önekler acayip bir dünyayı gösterebilirler.

Dikkat edilirse (1) kuralı

$S2^0$ sistemine özgü imkânın elenmesi kuralı

(2) 1. [0] $\Diamond A$

[0.1] A (1)

biçiminde kısaltılabilir.

(i) özelliğini ispatlamak için **K**'nın değillemesinin çözümleyici çizelgesini kurmalıyız. Bu çizelge $E2^0$ sisteminde kurduğumuz kapalı çizelgenin aynısıdır. O halde **K**, $E2^0$'da da geçerlidir.

(ii) özelliğini ispatlamak için önce A'nın bir totoloji olduğunu kabul edip "$\sim\Box A$"nın çözümleyici çizelgesini kuruyoruz.

(3) 1. [0] $\sim\Box A$ (B.Ö.)

2. [0] $\Diamond\sim A$ (1)

[0.1] $\sim A$ (2)

"$\sim A$" bir totolojinin değillemesi olduğundan "[0.1] A" satırının altındaki çizelge kapalı olur. Dolayısıyla $\Box A$ $S2^0$'da geçerli olur.

Şimdi de $\Box$**K** önermesinin değillemesinin çözümleyici çizelgesini kuralım.

(4) 1. [0] $\sim\Box[\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$ (B.Ö.)

2. [0] $\Diamond\sim[\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)$ (1)

[0.1] $\sim[\Box(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Box q)]$ (2)

K, $S2^0$'da geçerli olduğundan bu çözümleyici çizelge kapalı olur.

(iii) özelliğini ispatlamak için "$\Box(A \rightarrow B)$"nin $S2^0$'da geçerli olduğunu varsayalım. Buna göre "$\Box(\Box A \rightarrow \Box B)$"nin değillemesinin çözümleyici çizelgesini kuruyoruz.

(5) 1. [0] ~□(□A → □B) (B.Ö.)

2. [0] ◇~(□A → □B) (1)

3. [0.1] ~(□A → □B) (2)

5. [0.1] □A
4. [0.1] ~□B
(3)

5. [0.1] ◇~B (4)

[0.1.1] A
[0.1.1]~B
(5)

Öte yandan "□(A → B)"nin geçerli olduğunu varsaydığımız için, bu önermenin değillemesinin çözümleyici çizelgesi şöyle olur.

(6) 1. [0] ~□(A → B) (B.Ö.)

2. [0] ◇~(A → B) (1)

3. [0.1] ~(A → B) (2)

[0.1] A
[0.1] ~B
(3)

.
.
.

(6) çizelgesi kapalı olmalıdır. Dolayısıyla (5) çizelgesi de kapalı olur.

Örnek olarak

(7) (p ∧ q) → p

bir totoloji olduğundan (ii) gereği

(8) □[(p ∧ q) → p]

S2^0'da geçerlidir. O zaman da (iii) gereği

(9) □[□(p ∧ q) → □p]

S2^0'da geçerli olur. (9)'un S2^0'da geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(10) 1. [0] ~□[□(p ∧ q) → □p]

2. [0] ◇~[□(p ∧ q) → □p]

3. [0.1] ~[□(p ∧ q) → □p] (2)

5. [0.1] □(p ∧ q)

4. [0.1] ~□p (3)

5. [0.1] ◇~p (4)

6. [0.1.1] p ∧ q

[0.1.1] ~p (5)

[0.1.1] p

[0.1.1] q (6)

X

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin $S2^0$ sisteminde geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

1. □[□p → □(p ∨ q)]
2. □[□(p ∧(p ∨ q)] → □p]
3. □[□[p ∧ (~p ∨ q)] → □(p ∨ q)]

5.1.14 Gerektirme ve Karşılıklı Gerektirme Eklemleri

Doğruluk fonksiyonu durumunda olan koşul ve karşılıklı-koşul eklemlerin yanısıra doğruluk fonksiyonu olmayan koşul ve karşılıklı-koşul eklemleri de vardır. Koşul ekleminin doğruluk fonksiyonu olmayan karşılığına *gerektirme eklemi,* karşılıklı-koşul ekleminin karşılığına da *karşılıklı-gerektirme* eklemi denir. Gerektirme eklemi, "≺" işareti ile, karşılıklı-gerektirme eklem de "≻≺" işareti ile gösterilir. "≺" ile "≻≺" doğruluk fonksiyonu durumunda olmayan ikili önerme eklemleridir.

(1) A ≺ B

önermesi

(1') A, B'yı gerektirir.

biçiminde,

(2) $A \succ\!\prec B$

de

(2') A ile B birbirini gerektirir.

biçiminde dile getirilir. (1) biçimindeki bir önermeye *gerektirme önermesi* veya kısaca *gerektirme* (2) biçimindeki önermelere de *karşılıklı-gerektirme önermesi* veya kısaca *karşılıklı - gerektirme* denir.

(3) Ocak ayının başında kar yağması Yılbaşı'nın karlı geçmesini gerektirir.

önermesinin sembolik karşılığı

(4) (Ocak başında kar yağacak: p,)

(Yılbaşı karlı geçecek: q)

sembolleştirme biçimi gereği

(5) $p \prec q$

biçimindeki gerektirmedir.

İmdi (1) biçimindeki gerektirmeler

(6) $A \prec B \equiv \Box(A \rightarrow B)$

ve (2) biçimindeki karşılıklı-gerektirmeler

(7) $A \succ\!\prec B \equiv \Box(A \rightarrow B) \wedge \Box(B \rightarrow A)$

biçiminde tanımlanır. (6) ve (7) eşdeğerliklerine dayanarak herhangi bir önermede geçen "$\prec$" ile "$\succ\!\prec$" işaretleri elenebilir. Örneğin

(8) $(p \prec \Box q) \rightarrow [(p \succ\!\prec r) \vee (p < \Box q)]$

önermesinden "$\prec$" ile "$\succ\!\prec$" işaretlerini (6) ile (7) eşdeğerliklerine dayanarak eleyelim.

(9) $\Box(p \rightarrow \Box q) \rightarrow [(\Box(p \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow p)] \vee \Box(p \rightarrow \Box q)]$.

Dikkat edilirse (8) önermesi

(10) Ocak ayının başında kar yağarsa, yılbaşında da kar yağması gerekir.

biçiminde dile getirilebilir. Ancak (10) önermesinin sembolik karşılığı (4) sembolleştirme biçimi gereği (5) yani

(11) $\Box(p \rightarrow q)$

dur.

(12) $p \rightarrow \Box q$

ise kesinlikle (10)'un sembolik karşılığı olamaz.

"$\prec$" ve "$\succcurlyeq$" işaretleri $S2^0$ sembolik sisteminde (6) ve (7) eşdeğerlikleri ile tanımlandığında aşağıdaki önermeler $S2^0$ sisteminde geçerli olur.

(13) $p \prec p$

(14) $(\sim p \prec q) \succcurlyeq (\sim q \prec p)$

(15) $[(p \wedge q) \prec r] \succcurlyeq [(p \wedge \sim r) \prec \sim q]$

(16) $(p \prec q) \prec (p \rightarrow q)$

(17) $[p \wedge (p \rightarrow q)] \prec q$

(18) $\Box p \succcurlyeq (\sim p \prec p)$

(19) $[(p \wedge q) \prec r] \succcurlyeq [p \prec (q \rightarrow r)]$

(20) $\Box p \rightarrow (q \prec p)$

(21) $\sim\Box p \rightarrow (p \prec q)$

(22) $\Diamond p \prec \Diamond(p \vee q)$

(23) $\Box(p \wedge q) \prec \Box p$

(24) $\Box p \prec (q \prec p)$

(25) $\sim\Box p \prec (p \prec q)$

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerden "$\prec$" ile "$\succ\!\!\prec$" işaretlerini eleyiniz.

1. $\Box p \prec q$
2. $\Diamond(p \prec q) \rightarrow \Box(q \prec r)$
3. $\Box(p \succ\!\!\prec q) \leftrightarrow \Diamond(p \prec r)$
4. $[\sim\Box p \prec \Diamond(q \wedge r)] \rightarrow (p \succ\!\!\prec \sim q)$
5. $[\Diamond(p \prec q) \prec r] \leftrightarrow \Box(\sim p \succ\!\!\prec q)$

5.2 KİPLİKLİ NİCELEME MANTIĞI

5.2.1 Değişmez Evrenli Kiplikli Niceleme Mantığı

5.2.1.1 Sembolleştirme

Kiplikli Niceleme Mantığı, niceleme mantığında kiplik değişmezlerinin eklenmesiyle oluşan çeşitli mantık sistemlerinden oluşur. Biz burada *değişmez evrenli kiplikli niceleme mantığı* ile *değişen evrenli kiplikli niceleme mantığı* olmak üzere iki türlü kiplikli niceleme mantığı sistemlerini inceleyeceğiz.

Örnek olarak

(1) Zorunlu olarak her insan ölümlüdür

önermesinin

(2) (İnsandır: F, ölümlüdür: G)

sembolleştirme biçimi gereği sembolik karşılığını bulalım. Bu da

(3) $\Box\forall x(Fx \rightarrow Gx)$

biçimindedir. Öte yandan

(4) Her x için, zorunlu olarak x insan ise x ölümlüdür.

önermesini gene (2) sembolleştirme biçimi sembolik karşılığı

(5) $\forall x\,\Box(Fx \rightarrow Gx)$

(4) ile (5) önermeleri arasındaki ilişkiyi ilerde inceleyeceğiz.

İkinci bir örnek olarak

(6) Zorunlu olarak 7 tamsayısından büyük olan bir tamsayı vardır.

ile

(7) 7 tamsayısından zorunlu olarak daha büyük olan bir tamsayı vardır.

Bu iki önermenin

(8) (7: a, Tamsayıdır: F, G: "dan büyüktür")

sembolleştirme biçimi gereği sembolik karşılıkları sırasıyla

(9) $\Box\exists x(Fx \wedge Gyx)$

ile

(10) $\exists x\Box(Fx \wedge Gyx)$

dir.

Üçüncü örnek olarak

(11) Hiçbir tamsayı kendinden büyük olamaz.

önermesinin gene (8) sembolleştirme biçimi gereği sembolik karşılığını bulalım.

(12) $\sim\Diamond\exists x(Fx \wedge Gxx)$.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki tümcelerin verilen sembolleştirme biçimi gereği sembolik karşılığını bulunuz.

1. Hiçbir insan ölümsüz olamaz.
   (İnsandır: F, ölümsüzdür: G)
2. Hiçbir tamsayı sıfırdan küçük olamaz
   (Sıfır: a, Tamsayıdır: F; "dan küçüktür": G)
3. Zorunlu olarak her tamsayı çift sayı veya tek sayıdır.
   (Tamsayıdır: F, çift sayıdır: G, Tek sayıdır: H)

5.2.1.2 Yorumlama

Değişmez evrenli yorumlama, M mümkün dünyalar kümesi, B almaşıklık bağıntısı, E evreni ve her mümkün dünya için birer değerlemeden oluşur. Her değerleme bir mümkün dünya ile o mümkün dünyada D değeri verilmiş olan atomsal önermelerden oluşur. E evreninin öğelerine *mümkün bireyler* denir.

Örnek olarak

(1) $\Box\forall xFx$

önermesinin

(2) (M: $\{<m_0, m_1>\}$; $\mathfrak{B}$: $\{<m_0, m_1>\}$; E: {a, b}; m_0: Fa; m_1: Fb)

yorumlamasında doğruluk değerini bulalım. Bundan böyle "yorumlama"yı değişmez evrenli yorumlama anlamında kullanacağız. İmdi her yorumlama belli bir normal sisteme bağlıdır. Başka biçimde belirtilmediği durumlarda yorumlamanın K sistemine bağlı olduğunu kabul ediyoruz.

Sözü geçen (1) önermesinin (2)'de doğru olması,

(3) $\forall xFx$

önermesinin m_0'ın her almaşığında doğru olması demektir. Oysa m_0'ın tek almaşığı m_1'dir. (3)'ün m_1'de doğru olması (3)'ün E evrenindeki her özellemesinin m_1'de doğru olması demektir. (3)'ün E'deki özellemeleri "Fa" ile "Fb" dir. (2) yorumlamasında "Fa" m_1'de yanlış "Fb" de m_1'de doğrudur. Dolayısıyla (3) önermesi m_1'de yanlıştır. O halde (1), (2)'de yanlıştır.

İkinci örnek olarak

(4) $\exists x\Diamond(Fx \wedge Gx)$

önermesinin

(5) (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathfrak{B}$: $\{<m_0, m_0>, <m_0, m_1>, <m_1, m_1>, <m_1, m_2>\}$; E: {a, b}; m_0: Fa, Ga; m_1:; m_2: Fa, Fb, Gb)

yorumlamasında doğruluk değerini bulalım. (4)'ün m_0'da doğru olması

(6) $\Diamond(Fx \wedge Gx)$

ın E evrenindeki en az bir özellemesinin m_0'da doğru olması demektir. İmdi (6)'nın m_0'daki özellemeleri

(7) $\Diamond(Fa \wedge Ga)$

(8) $\Diamond(Fb \wedge Gb)$

dır. (7)'nin m_0'da doğru olması

(9) $Fa \wedge Ga$

nın m_0'ın en az bir almaşığında doğru olması demektir. Oysa (9) m_0'ın m_0 almaşığında doğrudur. O halde (6)'nın (7) özellemesi doğrudur. Dolayısıyla (4) önermesi (5)'de doğrudur.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin verilen yorumlamada doğruluk değerini bulunuz.

1. $\Box\forall x(Fx \rightarrow Gx)$

   (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_1> <m_1, m_1>\}$; E: {a, b}; m_0: Fa; m_1: Gb)

2. $\forall x\Diamond Fx$

   (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_1>\}$; E: {a, b}; m_0: Fa, Fb; m_1: Fb)

3. $\exists x\Box(Fx \vee Gx)$

   (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_1>, <m_0, m_2>\}$; E: {a, b}; m_0: Fa, Gb; m_1: Fb, Ga)

5.2.1.3 Çözümleyici çizelge ile Doğruluk Değeri Hesaplaması

Değişmez evrenli yorumlamalarda doğruluk değeri hesaplaması için kullanılan çözümleyici çizelgenin kuralları, niceleme mantığındaki kurallar ile kiplik mantığındaki kuralların biraraya gelmesinden oluşur.

Verilen E evrenindeki tümel özelleme ve tikel özelleme kuralları şöyledir:

E evrenindeki tümel özelleme kuralı

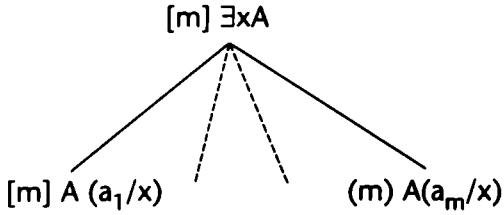
$E = \{a_1, ..., a_n\}$ olduğunda:

1. [m] $\forall xA$

[m] A (a/x)
:
[m] A (a_m/x) (1)

E evreninde tikel özelleme kuralı

E = {a_1, ..., a_n} olduğunda:



Örnek olarak

(1) $\Box(\forall xFx \rightarrow p)$

önermesinin

(2) (M: {m_0, m_1, m_2}; $\mathcal{R}$: {<m_0, m_1>, <m_0, m_2>, <m_1, m_2>}; E: {a, b}; m_0: Fa; m_1: p; m_2: Fb)

yorumlamasında doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile hesaplayalım.

(3) 1. [m_0] $\Box(\forall xFx \wedge \sim p)$
2. [m_1] $\forall xFx \wedge \sim p$
3. [m_2] $\forall xFx \wedge \sim p$ (1)
4. [m_1] $\forall xFx$
[m_1] $\sim p$ (2)
5. [m_2] $\forall x$ Fx
[m_2] $\sim p$ (3)
[m_1] Fa
[m_1] Fb (4)
[m_2] Fa
[m_2] Fb (5)

(3)'ün tek açık yolundaki *önekli temel önermeler*, atomsal önermeler ile atomsal önermelerin değillemesidir. Kiplikli önermeler mantığında olduğu gibi, önekli temel önerme doğrudur, ancak ve ancak önerme önekin gösterdiği mümkün dünyada yorumlama gereği doğru ise. Bir açık yol doğrudur, ancak ve ancak yoldaki bütün önekli temel önermeler doğru ise. Başlangıç önermesi de doğrudur, ancak ve ancak en az bir açık yol doğru ise. Buna göre "$[m_1]$ ~p" önekli temel önerme yanlış olduğundan açık yol yanlıştır. Çizelgede tek açık yol bulunduğundan (1) önermesi (2) yorumlamasında yanlıştır.

İkinci örnek olarak

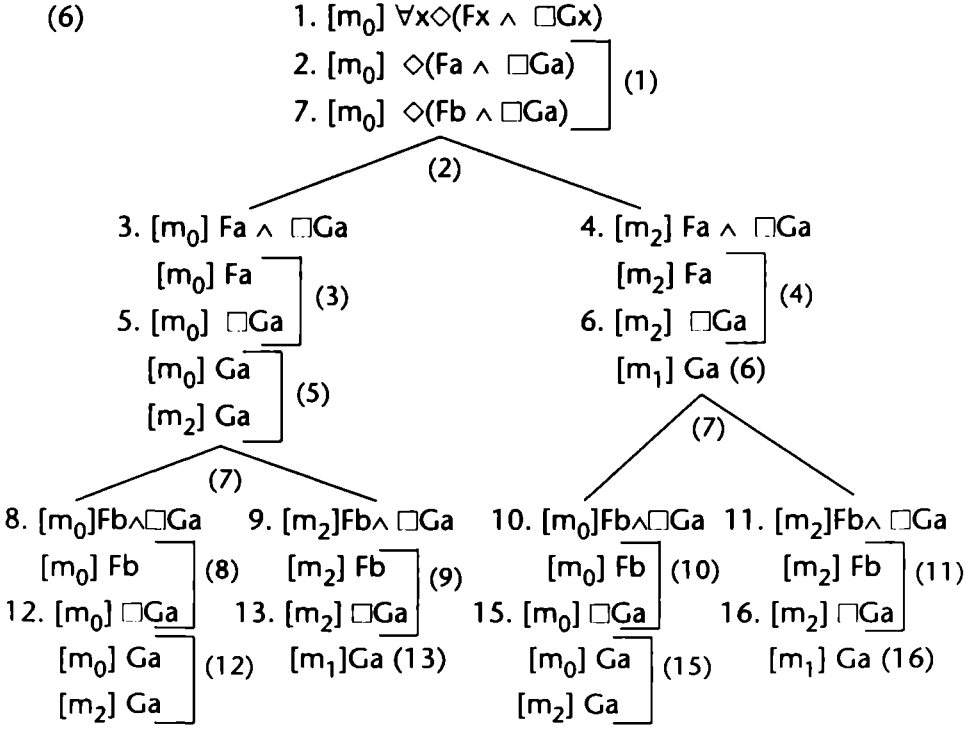
(4) $\forall x \Diamond (Fx \wedge \Box Gx)$

önermesinin

(5) (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_0>, <m_0, m_2>, <m_2, m_1>\}$; E: {a, b}; m_0: Fb, m_1: Gb, m_2:)

yorumlamasında doğruluk değerini hesaplayalım.

(6)



"[m_0]Fa" satırı yanlış olup ilk iki açık yol yanlıştır. Öte yandan [m_2]Fa" satırı da yanlış olup son iki açık yol yanlıştır. O halde (4) önermesi (5) yorumlamasında yanlıştır.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin verilen yorumlamada doğruluk çizelgesi ile doğruluk değerini hesaplayınız.

1. $\Box(p \wedge \forall xFx)$

   (M: {m_0, m_1}; $\mathcal{R}$: {<m_0, m_1>}; E: {a}; m_0: Fa; m_1:)

2. $\sim\Box(Fa \rightarrow \forall xGx)$

   (M: {m_0, m_1, m_2}; $\mathcal{R}$: {<m_0, m_0>, <m_0, m_1> <m_1, m_2>}; E: {a, b}; m_0: Fa; m_1: Gb, m_2: Fb)

3. $\forall x\Box(Fx \rightarrow \Diamond Gx)$

   (M: {m_0, m_1, m_2}; $\mathcal{R}$: {<m_0, m_1>, <m_0, m_2>, <m_1, m_1>, <m_2, m_2>}; E: {a, b}; m_0:; m_1:; Fa, Ga)

4. $\sim(\exists x \Box Fx \rightarrow \Box\exists xFx)$

   (M: {m_0, m_1, m_2}; $\mathcal{R}$: {<m_0, m_1>, <m_0, m_2>}; E: {a, b}; m_0:; m_1:Fa, m_2: Fb)

5.2.1.4 Çözümleyici Çizelge ile Doğrulayıcı Yorumlama Belirlemesi

Doğrulayıcı yorumlama belirlemesi için kullandığımız çözümleyici çizelgenin dayandığı tümel özelleme ve tikel özelleme kuralları şöyledir.

Tümel özelleme kuralı

1. [k_1...k_n] $\forall xA$

   [k_1...k_n...k_{n+1}] A(1)

(k_1...k_n...k_{n+1}) öneki aynı yolda önceki satırlarda geçerse ikinci satırın yapılması zorunludur.

Tikel özelleme kuralı

1. $[k_1...k_n]$ $\forall xA$

   $[k_1...k_n.k_{n+1}]$ A (1)

$(k_1...k_n.k_{n+1})$ öneki aynı yolda önceki hiçbir satırda geçmemelidir.

Örnek olarak

(1) $\forall x\Box Fx$

önermesinin varsa bir doğrulayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile bulalım.

(2) 1. [0] $\forall x\Box Fx$

   [0] $\Box Fa$

   [0.1] Fa

Tek açık yolda tek bir temel önerme vardır. O da "Fa"dır. Buna göre açık yolun belirlediği doğrulayıcı yorumlama şöyle olur. "[0]" yerine m_0, "[0.1]" yerine m_1 koyuyoruz.

(3) (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_1>\}$; E: {a}; m_0:; m_1: Fa)

E evreni açık yoldaki temel önermelerde geçen adlardan oluşur. Tek ad "a" olduğundan E = {a} dır. "Fa"nın öneki "[0.1]" olduğundan m_1'de "Fa"ya D değeri verilip "Fa" m_1'ın ardında yer alıyor.

İkinci örnek olarak

(4) $\Diamond\forall xFx \wedge \exists x\Box Gx$

önermesinin varsa doğrulayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile bulalım.

(4') 1. [0] $\Diamond\forall xFx \wedge \exists x\Box Gx$

   2. [0] $\Diamond\forall xFx$ ⎫ (1)

   3. [0] $\exists x\Box Gx$ ⎭

   4. [0.1] $\forall xFx$ (2)

   5. [0.1] $\Box Ga$ (3)

   [0.1] Fa (4)

   [0.1] Ga (5)

(4)'ün tek açık yolunun belirlediği doğrulayıcı yorumlama, [0] yerine m_0, [0.1] yerine m_1 koyduğumuzda

(5) (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{B}$:; $\{<m_0, m_1>\}$; E: {a}; m_0:; m_1: Fa, Ga)

dır.

Üçüncü örnek olarak

(6) $\exists x \Box Fx \wedge \Box \exists x Gx$

önermesinin varsa doğrulayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile bulalım.

(7) 1. [0] $\exists x \Box Fx \wedge \Box \exists x Gx$

2. [0] $\exists x \Box Fx$ ⎫
3. [0] $\Box \exists x Gx$ ⎭ (1)

5. [0] $\Box Fa$ (2)

4. [0.1] $\exists x Gx$ (3)

[0.1] Gb (4)

[0.1] Fa (5)

çizelgesinin tek açık yolunu belirlediği doğrulayıcı yorumlama, "[0]" yerine m_0 ve "[0.1]" yerine m_1 konulduğunda,

(7') (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{B}$: $\{<m_0, m_1>\}$; E: {a, b}; m_0:; m_1: Fa, Gb)

dir.

Dördüncü örnek

(8) $\exists x \exists y \Diamond (Fx \wedge \forall z Gxyz)$

önermesinin varsa doğrulayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile bulalım.

(9) 1. [0] $\exists x \exists y \Diamond (Fxy \wedge \forall z Gxyz)$

2. [0] $\exists y \Diamond (Fay \wedge \forall z Gayz)$ (1)

3. [0] $\Diamond (Fab \wedge \forall z Gabz)$ (2)

4. [0.1] Fab ∧ ∀zGabz (3)

[0.1] Fab
6, 5. [0.1] ∀zGabz (4)

[0.1] Gaba (5)

[0.1] Gabb (6)

(9)'un tek açık yolunun belirlediği doğrulayıcı yorumlama, "[0]" yerine m_0 ve "[0.1]" yerine m_1 konulduğunda,

(10) (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathfrak{R}$: $\{<m_0, m_1>\}$; E: {a, b}; m_0:; m_1: Fab, Gaba, Gabb)

dir.

Beşinci örnek olarak

(11) ~(∀x□Fx → □∀xFx)

önermesinin varsa doğrulayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile bulalım.

(12) 1. [0] ~(∀x□Fx → □∀xFx)

5. [0] ∀x□Fx
2. [0] ~□∀xFx (1)

3. [0] ◇∃x~Fx (2)

4. [0.1] ∃x~Fx (3)

[0.1] ~Fa (4)

6. [0] □Fa (5)

[0.1] Fa (6)

X

(12) çizelgesi kapalı olduğundan (11)'in doğrulayıcı yorumlaması yoktur.

Altıncı örnek olarak

(13) ~(□∃xFx → ∃x□Fx)

önermesinin varsa doğrulayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile bulalım.

(14) 1. [0] ~(□∃xFx → ∃x□Fx)

...12,7,3. [0] □∃xFx
2. [0] ~∃x□Fx (1)

9, 5. [0] ∀x◇~Fx (2)

4. [0.1] ∃xFx (3)

[0.1] Fa (4)

6. [0] ◇~Fa (5)

[0.2] ~Fa (6)

8. [0.2] ∃xFx (7)

[0.2] Fb (8)

10. [0] ◇~Fb (9)

[0.3] ~Fb (10)

[0.3] ∃xFx (11)

.
.
.

Görüldüğü gibi (14) çözümleyici çizelgesinin sonsuz bir yolu vardır. Ancak (13) tutarlıdır. Nitekim (13) önermesi

(15) (M: {m_0, m_1, m_2}, $\mathcal{R}$: {<m_0, m_1>, <m_0, m_2>}; E: {a, b}; m_0:; m_1:Fa; m_2: Fb)

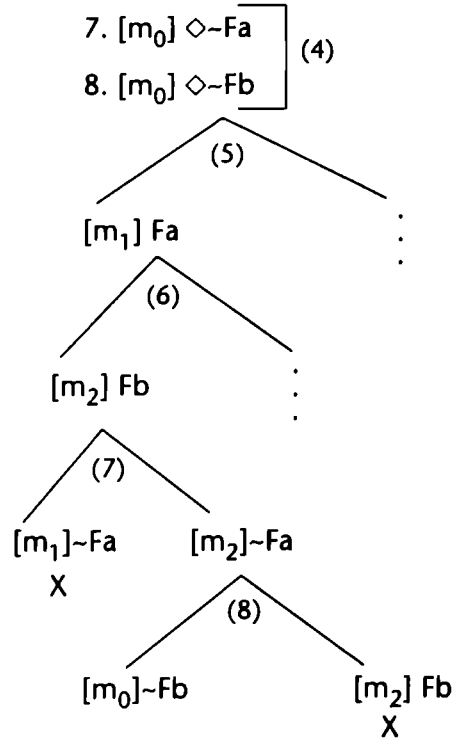
yorumlamasında doğrudur. Bu amaçla (13)'ün (15)'deki doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile hesaplayalım.

(16) 1. [m_0] ~(□∃xFx → ∃x□Fx)

3. [m_0] □∃xFx
2. [m_0] ~∃x□Fx (1)

4. [m_0] ∀x◇~Fx (2)

5. [m_1] ∃xFx
6. [m_2] ∃xFx (3)



Açık kalan yoldaki önekli temel önermeler dizisi

(17) $[m_1]$ Fa, $[m_2]$ Fb, $[m_2]$ ~Fa, $[m_0]$ ~Fb

dir. (17) dizisindeki her önekli temel önerme (15) yorumlamasında doğrudur. O halde (13) önermesinin (15) yorumlamasında doğru olduğunu sınamış olduk.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin varsa doğrulayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile bulunuz.

1. $\exists x \Box Fx$
2. $\forall x \Box Fx \wedge \Diamond Gx$
3. $\Box \forall x \Box Fx$
4. $\exists x \forall y \Box (Fx \wedge Gx)$
5. $\sim(\Box \forall x Fx \rightarrow \forall x \Box Fx)$

5.2.1.5 Çözümleyici Çizelge ile Denetleme ve İkililik

Denetleme için kullanılan çözümleyici çizelgenin kuralları, doğrulayıcı yorumlama belirleme kurallarının aynısıdır. Ancak zorunluluğun elenmesi ile tümel özelleme kuralları uygulanması zorunlu olmayıp ancak yol kapatmada yararlı olduğu ölçüde gereklidir.

Gerek kiplikli önermeler mantığında gerekse kiplikli niceleme mantığında ikilik kavramı uygulanabilir.

(1) $\Box p \equiv \sim\Diamond\sim p$

ile

(2) $\Diamond p \equiv \sim\Box\sim p$

eşdeğerliklerinden dolayı "$\Box$" ile "$\Diamond$" birbirinin ikilisi olan mantık değişmezleridir. O zaman da

(3) $\mathcal{C}(\Box p, \Diamond p)$

ile

(4) $\mathcal{C}(\Diamond p, \Box p)$

bağıntıları doğru olur. "$\forall$" ile "$\exists$"nin de birbirinin ikilisi olduğunu göz önünde tutarak, kiplikli niceleme mantığının bir önermesinin ikilisi şöyle elde edilir.

1'inci yöntem: Verilen önermede geçen her yüklem temsilcisinin önünde "~" işareti konulup önermenin tümü değillenir.

2'nci yöntem: Verilen önermede geçen her mantık değişmezi (önerme eklemi, niceleme işareti ve kiplik değişmezi) yerine ikilisi konulur.

Örneğin

(5) $\sim\forall x\Box[p \rightarrow (\forall x\exists y \sim Fxy \wedge \Diamond\exists xGx)]$

önermesinin 1'inci ve 2'nci yöntem gereği ikilisini bulalım. (5)'in 1'inci yöntem gereği ikilisi

(6) $\sim\sim\forall x\Box[\sim p \rightarrow (\forall x\exists y\sim\sim Fxy \wedge \Diamond\exists x\sim Gx)$

veya kısaca

(7) $\forall x\Box[\sim p \rightarrow (\forall x\exists yFxy \wedge \Diamond\exists x\sim Gx)$

dir. Öte yandan (5)'in 2'nci yöntem gereği ikilisi

(8) $\sim\exists x\Diamond[p \rightarrow (\exists x\forall y\sim Fxy \wedge \Box\forall xGx)]$

dir.

İkililik ilkeleri gereği kiplik mantığına ait her yasanın bir ikilisi elde edilir.

Örneğin

(9) $\forall x\Box Fx \rightarrow \Box\forall xFx$

önermesi değişmezi evrenli kiplikli niceleme mantığında geçerli olup bu mantık sisteminin bir yasasıdır. Bu önermeye *Barcan tamdeyimi* veya kısaca *BT* denir. İkililik ilkesi gereği (9) yasasından

(10) $\Diamond\exists xFx \rightarrow \exists x\Diamond Fx$

yasası elde edilir. Nitekim (9) koşullusunun ard-bileşeninin 2'nci yöntem gereği ikilisi "$\Diamond\exists xFx$", ön-bileşeninin 2'nci yöntem gereği ikilisi "$\Box\forall xFx$"dir.

Değişmez evrenli kiplikli niceleme mantığının başlıca yasalarını aşağıda gösteriyoruz.

1. $\forall x\Box Fx \rightarrow \Box\forall xFx$ (Barcan tamdeyimi: BT)
2. $\Box\forall xFx \rightarrow \forall x\Box Fx$ (Barcan tamdeyimi evriği: BTE)
3. $\Diamond\forall xFx \rightarrow \forall x\,\Box Fx$ (Buridan tamdeyimi)
4. $\Diamond\exists xFx \rightarrow \exists x\Diamond Fx$ (BT'nin ikililik ilkesi karşılığı)
5. $\exists x\Diamond Fx \rightarrow \Diamond\exists xFx$ (BTE'nin ikililik ilkesi karşılığı)
6. $\exists x\Box\, Fx \rightarrow \Box\exists xFx$ (Buridan tamdeyiminin ikililik ilkesi karşılığı)

Örnek olarak BTE yasasını çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(11) 1. [0] ~(□∀xFx → ∀x□Fx)

5. [0] □∀xFx
2. [0] ~∀x□Fx
(1)

3. [0] ∀x◇~Fx (2)

4. [0] ◇~Fa (3)

[0.1] ~Fa (4)

6. [0.1] ∀xFx (5)

[0.1] Fa (6)

X

İkinci örnek olarak Buridan tamdeyiminin ikililik ilkesi karşılığı olan yasayı çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(12) 1. [0] ~(∃x□Fx → □∃xFx)

3. [0] ∃x□Fx
2. [0] ~□∃xFx
(1)

4. [0] ◇∀x~Fx (2)

5. [0] □Fa (3)

6. [0.1] ∀x~Fx (4)

[0.1] Fa (5)

[0.1]~Fa (6)

X

Mantık sistemi K değil de S5 olursa zorunluluğun ve imkânın elenmesi kuralları aşağıdaki biçimde olur.

(13) S5 sisteminde zorunluluğun elenmesi kuralı

1. $[k_1]$ □A

$[k_2]$ A (1)

S5 sisteminde imkânın elenmesi kuralı

1. $[k_1]$ □A

$[k_2]$ A (1)

$[k_2]$ öneki aynı yolda önceki hiçbir önermede geçmemelidir.

Örnek olarak

(14) $\forall x(\Diamond Fx \rightarrow \Box\Diamond Fx)$

önermesinin S5 sistemli niceleme mantığında geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(15) 1. [0] $\sim\forall x(\Diamond Fx \rightarrow \Box\Diamond Fx)$
2. [0] $\exists x\sim(\Diamond Fx \rightarrow \Box\Diamond Fx)$
3. [0] $\sim(\Diamond Fa \rightarrow \Box\Diamond Fa)$
5. [0] $\Diamond Fa$
4. [0] $\sim\Box\Diamond Fa$ (3)
6. [0] $\Diamond\Box\sim Fa$ (4)
[1] Fa (5)
7. [2] $\Box\sim Fa$ (6)
[1] $\sim Fa$ (7)
X

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki önermelerin 1'inci ve 2'nci yöntemler gereği ikililerini bulunuz.

1. $\forall x\Box\Diamond Fx$
2. $\sim\exists x\forall y\Box Fxy \vee \sim\Diamond\forall x\sim Fx$
3. $\Box\forall x\Diamond\exists y\Box\forall z(Fxy \wedge \Diamond\sim Gz)$

II. §5.2.1.5'deki yasalardan henüz denetlenmemiş olanları çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

III. Aşağıdaki önermelerin S5 sisteminde geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

1. $\forall x(\Box Fx \rightarrow Fx)$
2. $\forall x(Fx \rightarrow \Box\Diamond Fx)$
3. $\forall x(\Box Fx \rightarrow \Box\Box Fx)$
4. $\forall x(\Diamond\Box\Diamond Fx \rightarrow \Box Fx)$

5.2.2 Yuvalanmış Değişen Evrenli Kiplikli Niceleme Mantığı

5.2.2.1 Değişen Evrenli Yorumlamalar

Her mümkün dünya için ayrı bir evrenin olduğu yorumlamalar tanımlanmıştır. Bu türlü yorumlamalara *değişen evrenli yorumlamalar* denir. m gibi bir mümkün dünyaya ait evren E_m ile gösterilir. E_m'ye *m'ye ait evren* denir. Bu evrenlerin birleşimi E ile gösterilir. E'ye yorumlamanın *evren*'i denir. E'nin öğelerine de *mümkün bireyler* denir. Eğer

(1) $\forall m \forall m'(m \mathcal{B} m' \rightarrow E_m \subseteq E_{m'})$

koşulu yerine gelirse, yorumlamaya *yuvalanmış değişen evrenli yorumlama* denir. Bu türlü yorumlamaların belirlediği niceleme mantığı sistemlerine *yuvalanmış değişen evrenli kiplik mantığı sistemi* denir. Bu sistem dayandığı normal mantık sistemine göre K, D, T, B, S4, S5 gibi alt sistemlere ayrılır.

Örnek olarak

(1) $\forall x \Box Fx$

önermesinin

(2) (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{B}$: $\{<m_0, m_1>\}$; E: {a, b, c}, E_{m_0}: {a, b}, E_{m_1}: {a, b, c}; m_0: Fa, m_1: Fb, Fc)

yorumlaması yuvalanmış değişen evrenli bir yorumlamadır. Görüldüğü gibi $m_0 B m_1$ olup $E_{m_0} \subseteq E_{m_1}$ oluyor. İmdi (1) önermesinin (2) yorumlamasında m_0'da doğru olması "$\Box Fx$" açık önermesinin m_0'a ait evrendeki özellemelerinin doğru olması demektir. Bu özellemeler ise

(3) $\Box Fa$

(4) $\Box Fb$

dir. "$\Box Fa$"nın m_0'da doğru olması "Fa"nın m_0'ın almaşığı olan m_1'de doğru olması demektir. Oysa "Fa" m_1'de yanlıştır. O halde $\Box Fa$ m_0'da yanlış olup (1) önermesi (2) yorumlamasında yanlıştır.

İkinci örnek olarak

(5) $\Box \forall x Fx$

önermesinin (2) yorumlamasında doğruluk değerini bulalım. (3)'ün m_0'da doğru olması "$\forall xFx$"in m_0'ın almaşığı olan m_1'de doğru olması demektir. "$\forall xFx$"in m_1'de doğru olması ise "Fx"in E_{m_1} evrenindeki özellemelerinin doğru olması demektir. Bu özellemeler ise "Fa", "Fb", "Fc" dir. "Fa" m_1'de yanlış olduğundan "$\forall xFx$" yanlış olup (3) önermesi (2) yorumlamasında yanlış olur.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin verilen yorumlamadaki doğruluk değerini bulunuz.

1. $\Diamond\forall xFx$

   (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_1>\}$; E_1: {a}; E_2:{a, b}; m_0: Fa; m_1:)

2. $\exists x\Diamond(Fx \wedge Gx)$

   (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_1>, <m_1, m_0>\}$; E_1: {A}; E_2: {a, b}; m_0: Fa, Ga; m_1: Fb)

3. $\exists x\Box(Fx \vee Gx)$

   (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_0>, <m_0, m_1>\}$; E: {a, b}; E_1: {a}; E_2: {a, b}; m_0: ; m_1: Fa; m_1: Gb; m_2:)

5.2.2.2 Çözümleyici Çizelge ile Doğruluk Değeri Hesaplaması

Yuvalanmış değişen evrenli kiplikli niceleme mantığında doğruluk değeri hesaplaması için kullanılan çözümleyici çizelgenin kuralları değişmez evrenli kiplikli niceleme mantığındakilerin aynısıdır ancak tümel özelleme ile tikel özelleme kuralları aşağıdaki biçimde değiştirilmiştir.

(1) *E_m evreninde tümel-özelleme kuralı*

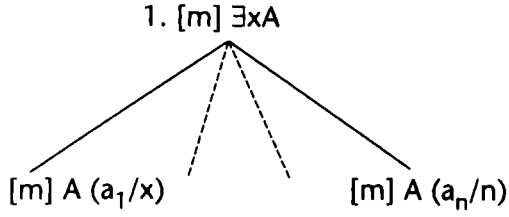
$E_m = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ise:

1. [m] $\forall xA$

   [m] $A\,[a_1/x]$
   . .
   . .
   . .
   [m] $A\,(a_n/n)$ (n)

(2) *E_m evreninde tikel-özelleme kuralı*

$E_m = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ise:



Örnek olarak

(3) $\exists x \Diamond (Fx \vee Gx)$

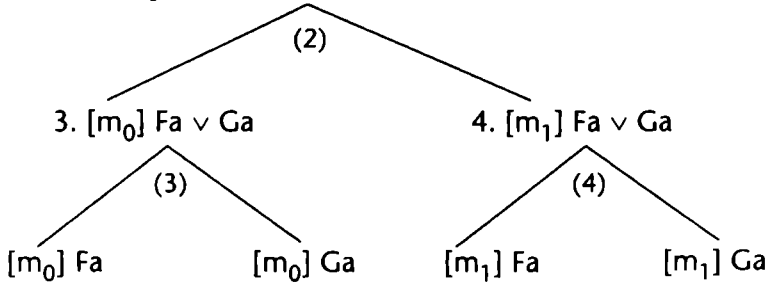
önermesinin

(4) (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_0>, <m_0, m_1>\}$; E: {a, b}; E_{m_1}: {a, b}; m_0: Fa, Gb; m_1:)

yorumlamasında doğruluk değerini hesaplayalım.

(5) 1. $[m_0] \exists x \Diamond (Fx \vee Gx)$ (B.Ö.)

2. $[m_0] \Diamond (Fa \vee Ga)$ (1)



Birinci açık yol doğrudur. Dolayısıyla (3) önermesi (5) yorumlamasında doğrudur.

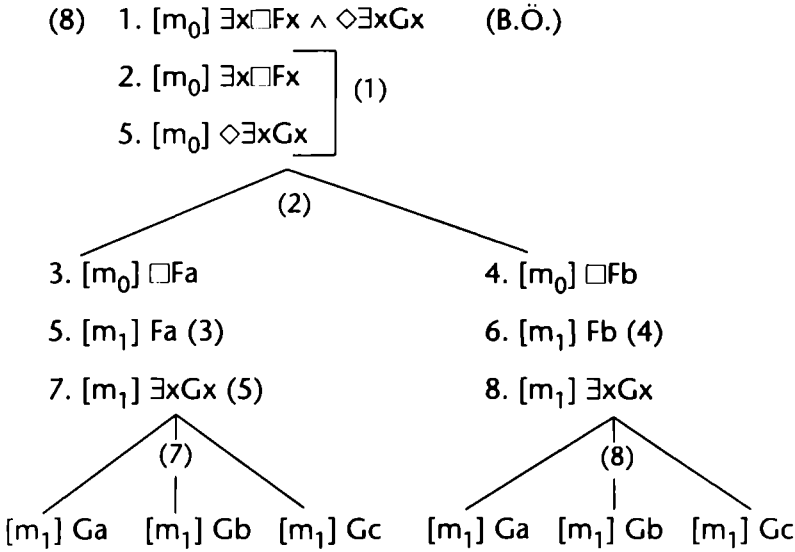
İkinci örnek olarak

(6) $\exists x \Box Fx \wedge \Diamond \exists x Gx$

önermesinin

(7) (M: $\{<m_0, m_1, m_2>\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_1>, <m_1, m_2>\}$; E: {a, b, c}; Em_0: {a, b}, E_{m_1}: {a, b, c}; E_{m_2}: {a, b, c}; m_0: Fa, Gb; m_1: Fb; m_2:Ga)

yorumlamasında doğruluk değerini hesaplayalım.



"[m_1]Fa" yanlış olduğundan ilk üç açık yol yanlıştır. Son üç yolda "[m_1] Fb" doğrudur. Ancak "[m_1]Ga", "[m_1]Gb" ve "[m_1]Gc" yanlış olduğundan bu yollar da yanlıştır. O halde (6) önermesi (7) yorumlamasında yanlıştır.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermeleri verilen yorumlamada doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile bulunuz.

1. $\Diamond\forall x(Fx \rightarrow Gx)$

   (M: {m_0, m_1}: $\mathcal{R}$: {<m_0, m_1>}; E: {a, b}; E_{m_0}: {a}, E_{m_1}: {a, b}; m_0: Fa; m_1: Gb)

2. $\forall x\Box Fx \wedge \exists x\Diamond Gx$

   (M: {m_0, m_1}; $\mathcal{R}$: {<m_0, m_1>}; E: {a, b, c}; E_{m_0}: {a, b}; E_{m_1}: {a, b, c}; m_0: Fa, Gb; m_1: Ga; m_2:)

3. $\forall x(\Box Fx \rightarrow \Diamond Gx)$

   (M: {m_0, m_1}; $\mathcal{R}$: {<m_0, m_1>, <m_1, m_2>}; E: {a, b}; E_{m_0}: {a, b}; E_{m_1}: {a, b}; E_{m_2}: {a, b, c}; m_0: Fa; m_1: Fb; m_2: Gb)

5.2.2.3 Çözümleyici Çizelge ile Doğrulayıcı Yorumlama Belirlemesi

Değişen evrenli yorumlamaların bulunması için kullanılan çözümleyici çizelgede geçen her adın bir göstergesi vardır. Bu gösterge de bir önektir. Böylece çözümleyici çizelgede geçen adlar

(1) $a_{[0]}$, $b_{[0]}$,..., $a_{[0.1]}$, $b_{[0.1]}$,...$a_{[0.1.1]}$, $b_{[0.1.1]}$,...

biçimindedir. $a_{[k_1...k_n]}$ adı, $E_{[k_1...k_n]}$ evrenine ait bir bireyi adlandırır. Buna göre tümel özelleme ile tikel özelleme kuralları şöyledir.

(2) Genel tümel özelleme kuralı

1. $[k_1...k_n]$ $\forall xA(x)$

$[k_1...k_n]$ $A(a_{[k_1...k_n]})$ (1)

Nitekim $a_{[k_1...k_n]} \in E_{[k_1...k_n]}$ olduğundan, $A(a_{[k_1...k_n]})$ önermesi A(x)'in $E_{[k_1...k_n]}$ evrenindeki bir özellemesidir. O halde $\forall xA(x)$ $[k_1...k_n]$'de doğru ise, $A(a_{[k_1...k_n]})$ de $[k_1...k_n]$'de doğru olur.

(3) *$n \geq 1$ durumunda değişen evrenli sistem için özel tümel özelleme kuralı*

$[k_1...k_{n-1}]$ adı aynı yolda önceki bir satırda geçiyorsa:

1. $[k_1...k_n]$ $\forall xA(x)$

$[k_1...k_n]$ $A(a_{[k_1...k_{n-1}]})$ (1)

Nitekim $[k_1...k_n] \in E_{[k_1...k_n]}$, $[k_1...k_{n-1}] \subseteq [k_1...k_n]$ olduğundan $E_{[k_1...k_{n-1}]} \subseteq E_{[k_1...k_n]}$ olur. Dolayısıyla $[k_1...k_{n-1}] \in E_{[k_1...k_n]}$ olur. O halde $A(a_{[k_1...k_{n-1}]})$ önermesi A(x)'in $E_{[k_1...k_n]}$ evreninde bir özellemesidir. Dolayısıyla $\forall x(Ax)$ $[k_1...k_n]$'de doğru ise, $A(a_{[k_1...k_{n-1}]}$ önermesi $[k_1...k_n]$'de doğru olur.

(4) *Tikel özelleme kuralı*

1. $[k_1...k_n]$ $\exists xA$

$[k_1...k_n]$ $A(a_{[k_1...k_n]})$ (1)

Örnek olarak BT Barcan tamdeyimi'nin değişen yuvalanmış evrenli sistemde geçersiz olduğunu göstermek için BT'nin değillemesi olan

(5) $\sim(\forall x\Box Fx \rightarrow \Box\forall xFx)$

önermesinin bir doğrulayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile bulalım.

(6) 1. [0] $\sim(\forall x\Box Fx \rightarrow \Box\forall xFx)$

5. [0] $\forall x\Box Fx$ ⎫
2. [0] $\sim\Box\forall xFx$ ⎭ (1)

3. [0] $\Diamond\exists x\sim Fx$ (2)

4. [0.1] $\exists x\sim Fx$ (3)

[0.1] $\sim F(a_{[0.1]})$ (4)

6. [0] $\Box F(a_{[0]})$ (5)

[0.1] $F(a_{[0]})$ (6)

(6)'nın tek açık yolunun belirlediği doğrulayıcı yorumlama, "[0]" yerine m_0 ve "[0.1]" yerine m_1 konulduğunda

(7) (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_1>\}$; E: $\{a_{m_0}, a_{m_1}\}$; E_{m_0}: $\{a_{m_0}\}$; E_{m_1}: $\{a_{m_0}, a_{m_1}\}$; m_0:; m_1: Fa_{m_0})

dır. E_{m_0} evrenin öğeleri olarak m_0 yani [0] göstergesi olan her adı alıyoruz. Bu da yalnız $a_{[m_0]}$ adıdır. Öte yandan E_{m_1} evreninin öğeleri olarak m_1 yani [0.1] göstergesi olan adları ile m_0 yani [0] göstergesi olan adları alıyoruz. Nitekim $m_0\mathcal{R}m_1$ olup $E_{m_0} \subseteq E_{m_1}$ olur. Böylece $E_{m_1} = \{a_{m_0}, a_{m_1}\}$ elde ettik.

İkinci örnek olarak

(8) $\Diamond\exists x\Box\forall yFxy$

önermesinin varsa bir doğrulayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile bulalım.

(9) 1. [0] $\Diamond\exists x\Box\forall yFxy$ (B.Ö.)

2. [0.1] $\exists x\Box\forall yFxy$ (1)

3. $[0.1]\ \Box\forall y F(a_{[0.1]}, y)$ (2)

4. $[0.1.1]\ \forall y F(a_{[0.1]}, y)$ (3)

$[0.1.1]\ F(a_{[0.1]}, a_{[0.1]})$ (4)

Dikkat edilirse 4. adımda (3) özel tümel özelleme kuralını uyguladık. Nitekim [0.1] öneki önceki bir satırda geçiyor. (8) çizelgesinin tek açık yolunun belirlediği yorumlama şöyledir. "[0]" yerine m_0, "[0.1]" yerine m_1, "[0.1.1]" yerine m_2 koyuyoruz.

(10) $(M: \{m_0, m_1, m_2\}; \mathcal{R}: \{<m_0, m_1>, <m_1, m_2>\}; E: \{a_{m_0}, a_{m_1}, a_{m_2}\}$
$E_{m_0}: \{a_{m_0}\}; E_{m_1}: \{a_{m_1}\}; E_{m_2}: \{a_{m_0}, a_{m_1}\}; m_0::; m_1::; m_2: F(a_{m_1}, a_{m_1}))$.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin varsa doğrulayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile bulunuz.

1. $\exists x\Box(Fx \wedge Gx)$
2. $\Box\forall x(Fx \rightarrow Gx) \wedge \Diamond\exists xFx$
3. $\Box\exists x\Diamond\forall y(Fxy \wedge Gx)$

5.2.2.4 Çözümleyici Çizelge ile Denetleme

Değişmez evrenli yorumlamalar yuvalanmış değişen evrenli yorumlamaların özel hali sayılabilir. Bu nedenle ikincilerin belirlediği sistem birincilerin belirlediği sistemin bir alt sistemi olur. Dolayısıyla yuvalanmış değişen evrenli kiplikli niceleme mantığının yasaları, değişmez evrenli kiplikli mantığın yasalarının bir bölümünden oluşur. Bunların en önemlilerini aşağıda gösteriyoruz.

1. $\Box\forall xFx \rightarrow \forall x\Box Fx$ (Barcan tamdeyimi evriği: BTE)
2. $\Diamond\forall xFx \rightarrow \forall x\Diamond Fx$ (Buridan tamdeyimi)
3. $\exists x\Diamond Fx \rightarrow \Diamond\exists xFx$ (BTE'nin ikililik ilkesi karşılığı)
4. $\exists x\Box Fx \rightarrow \Box\exists xFx$ (Buridan tamdeyiminin ikililik ilkesi karşılığı)

Örnek olarak BTE'nin geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(1) 1. [0] ~(□∀xFx → ∀x□Fx) (B.Ö.)

5. [0] □∀xFx
2. [0] ~∀x□ Fx (1)

3. [0] ∃x◇~Fx (2)

4. [0] ◇~$Fa_{[0]}$ (3)

[0.1] ~$Fa_{[0]}$ (4)

6. [0.1] ∀xFx (5)

[0.1] $Fa_{[0]}$ (6)
X

Dikkat edilirse 6. adımda özel tümel özelleme kuralını uygulayarak aynı yolda önce geçen $a_{[0]}$ adını kullandık. (1) çizelgesi kapalı olduğundan BTE geçerlidir.

İkinci örnek olarak Buridan tamdeyiminin geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(2) 1. [0] ~(◇∀xFx → ∀x◇Fx) (B.Ö.)

4. [0] ◇∀xFx
2. [0] ~∀x◇Fx (1)

3. [0] ∃x□~Fx (2)

6. [0] □~$Fa_{[0]}$ (3)

5. [0.1] ∀xFx (4)

[0.1] $Fa_{[0]}$ (5)

[0.1]~$Fa_{[a]}$ (6)
X

Üçüncü örnek olarak

(3) ~[∃x◇∀y(Fxy ∧ □~Fyy) ∧ ◇∀z□Fzz]

tamdeyiminin almaşıklık bağıntısı bakışımlı olan yorumlamaların belirlediği sistemde geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim. Bu sistemde denetleme için kullanılan çözümleyici çizelge B sistemine özgü olan aşağıdaki zorunluluğun elenmesi kuralına dayanır.

(4) *B sistemine özgü zorunluluğun elenmesi kuralı*

1. $[k_1...k_n \,.\, k_{n+1}]\ \Box A$

$[k_1...k_n]\ A$ (1, B)

Buna göre aşağıdaki çözümleyici çizelgeyi kuruyoruz.

(5)

1. $[0]\ \exists x \Diamond \forall y(Fxy \wedge \Box \sim Fyy) \wedge \Diamond \forall z \Box Fzz$
3. $[0]\ \exists x \Diamond \forall y\ (Fxy \wedge \Box \sim Fyy)$ (1)
2. $[0]\ \Diamond \forall z \Box Fzz$
3. $[0.1]\ \forall z \Box Fzz$ (2)
4. $[0]\ \Diamond \forall y(Fa_{[0]}y \wedge \Box \sim Fyy)$ (3)
5. $[0.2]\ \forall y\ (Fa_{[0]}y \wedge \Box \sim Fyy)$ (4)
6. $[0.2]\ F(a_{[0]}, a_{[0]}) \wedge \Box \sim F(a_{[0]}, a_{[0]})$ (5)

$[0.2]\ F(a_{[0]}, a_{[0]})$

7. $[0.2]\ \Box \sim F(a_{[0]}, a_{[0]})$ (6)

$[0]\ \sim F(a_{[0]}, a_{[0]})$ (7, bakışımlı)

9. $[0.1]\ \Box F(a_{[0]}, a_{[0]})$ (3)

$[0]\ F(a_{[0]}, a_{[0]})$ (9, bakışımlı)

X

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin yuvalanmış değişen evrenli kiplikli niceleme mantığında geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

1. $\exists x \Diamond Fx \rightarrow \Diamond \exists x Fx$
2. $\exists x \Box Fx \rightarrow \Box \exists x Fx$
3. $\sim \exists x \Diamond Fx \rightarrow \forall x \Box \sim Fx$
4. $\sim \forall x \Box Fx \leftrightarrow \exists x \Diamond \sim Fx$
5. $\sim \exists x \Box Fx \leftrightarrow \forall x \Diamond \sim Fx$

5.2.3 Değişen Evrenli Kiplikli Niceleme Mantığı

Yuvalanmış değişen evrenli yorumlamalardan

(1) $\forall m \forall m'(m \mathcal{R} m' \rightarrow Em \subseteq Em')$

koşulunu kaldırırsak salt *değişen evrenli yorumlamalar* elde ederiz. Bunların belirlediği sistem *değişen evrenli kiplikli niceleme mantığı*'dır. Bu sistemde doğrulayıcı yorumlama belirleme ve denetleme için kullanılan çözümleyici çizelgenin dayandığı tümel özelleme ve tikel özelleme kuralları şöyledir:

(1) *Tümel özelleme kuralı*

1. $[k_1 \ldots k_n] \forall x A(x)$

$[k_1 \ldots k_n] A(a_{[k_1 \ldots k_n]})$ (1)

(2) *Tikel özelleme kuralı*

1. $[k_1 \ldots k_n] \exists x A(x)$

$[k_1 \ldots k_n] A(a_{[k_1 \ldots k_n]})$

$a_{[k_1 \ldots k_n]}$ adı aynı yolda öneki hiçbir satırda geçmemelidir.

Bu mantık sisteminde yuvalanmamış evrenli kiplikli niceleme mantığında geçerli olan önermelerin bir çoğu (özellikle BTE ile Buridan Tamdeyimi) geçersizdir.

Örnek olarak BTE'nin değişen evrenli kiplikli niceleme mantığında geçersiz olduğunu göstermek için BTE'nin değillemesinin doğrulayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile bulalım.

(3) 1. [0] ~(□∀xFx → ∀x□Fx) (B.Ö.)

5. [0] □∀xFx
2. [0] ~∀x□Fx (1)

3. [0] ∃x◇~Fx (2)

4. [0] ◇~$Fa_{[0]}$ (3)

[0.1] ~$Fa_{[0]}$ (4)

6. [0.1] ∀xFx (5)

[0.1] $Fa_{[0.1]}$ (6)

(3)'ün açık yolunun belirlediği yorumlama, "[0]" yerine m_0 ve "[0.1]" yerine m_1 konulduğunda,

(4) (M: {m_0, m_1}; $\mathcal{B}$: {<m_0, m_1>}; E: {a_{m_0}, a_{m_1}}; E_{m_0}: {a_{m_0}}; E_{m_1}: {a_{m_0}, a_{m_1}}; m_0:; m_1: Fa_{m_1})

Denetlemeye örnek olarak

(4) ◇∀x□Fx → ◇∀xFx

önermesinin değişen evrenli T kiplikli niceleme mantığında geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim. Bu amaçla T sistemine özgün aşağıdaki zorunluluğun elenmesi kuralını kullanacağız.

(5) *T sistemine özgü zorunluluğun elenmesi kuralı*

1. [k_1...k_n] □A

[k_1...k_n] A (1, T)

İmdi (4)'ün geçerliliğini denetlemek için (4)'ün değillemesinin çözümleyici çizelgesini kuruyoruz.

1. [0] ~(◇∀x□Fx → ◇∀xFx) (B.Ö.)

3. [0] ◇∀x□Fx
2. [0] ~◇∀xFx (1)

4. [0] □∃x~Fx (2)

6. [0.1] $\forall x\Box Fx$ (3)

5. [0.1] $\exists x{\sim}Fx$ (4)

[0.1] $\sim Fa_{[0.1]}$ (5)

7. [0.1] $\Box Fa_{[0.1]}$ (6)

[0.1] $Fa_{[0.1]}$ (7, T)

X

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki önermelerin verilen değişen evrenli yorumlamadaki doğruluk değerini hesaplayınız.

1. $\exists x\Box(Fx \wedge Gx)$

   (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_1>\}$; E: $\{a_{m_0}, a_{m_1}, a_{m_2}\}$, E_{m_0}: $\{a_{m_0}, a_{m_1}\}$; E_{m_1}: $\{a_{m_0}, a_{m_1}\}$; m_0: Fa_{m_0}, m_1: Ga_{m_1})

2. $\forall x\Box\exists yFxy$

   (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_1>, <m_1, m_2>\}$; E: $\{a_{m_0}, a_{m_1}, a_{m_2}\}$; E_{m_0}: $\{a_{m_0}, a_{m_1}\}$; E_{m_1}: $\{a_{m_1}, a_{m_2}\}$; E_{m_2}: $\{a_{m_0}, a_{m_2}\}$; m_0:, m_1:; m_2:)

3. $\Box\forall x\Diamond\exists y(Fx \wedge Gy)$

   (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_1>, <m_1, m_2>$: E: $\{a_{m_0}, a_{m_1}, a_{m_2}\}$; E_{m_0}: $\{a_{m_0}\}$; E_{m_1}: $\{a_{m_1}\}$; E_{m_2}: $\{a_{m_2}\}$; m_0: Fa_{m_0}; m_1: Ga_{m_1}; m_2: Fa_{m_1}, Ga_{m_2})

II. Aşağıdaki önermelerin varsa değişen evrenli doğrulayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile bulunuz.

1. $\forall x\Box(Fx \rightarrow Gx)$

2. $\Diamond\exists x(Fx \wedge Gx)$

3. $\Diamond\exists xFx \wedge \forall x{\sim}Gx$

III. Aşağıdaki önermelerin değişen evrenli kiplik niceleme mantığında geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

1. $\forall x\Box(Fx \vee {\sim}Fx)$

2. $\Diamond\forall x\Diamond(Fx \rightarrow Fx)$

3. $\forall x[\Box(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow (\Box Fx \rightarrow \Box Gx)]$

4. $\forall x(\Box Fx \rightarrow Fx)$, T sisteminde

5. $\forall x(\Box Fx \rightarrow \Box\Box Fx)$, S4 sisteminde

6. $\forall x(Fx \rightarrow \Box\Diamond Fx)$, B sisteminde

7. $\forall x(\Diamond Fx \rightarrow \Box\Diamond Fx)$, S5 sisteminde

5.2.4 Kiplikli Değişmezlerin Nesnel ve Sözel Kullanılışları

Barcan Tamdeyiminin ön-bileşeni ile ard bileşeninde "$\Box$" kiplik değişmezi iki farklı biçimde kullanılır. Ön-bileşen olan $\forall x\Box Fx$ önermesinde "$\Box$"nin etki alanı "Fx" açık önermesidir. Dolayısıyla "x"in bağsız geçişi "$\Box$" kiplik değişmezinin etki alanına giriyor. Öte yandan BT'nin ard-bileşeni olan "$\Box\forall xFx$" önermesinde "$\Box$" kiplik değişmezinin etki alanı "$\forall xFx$" önermesidir. O zaman da "$\Box$"nin etki alanında hiçbir değişkenin bağsız geçişi yoktur. Genel olarak:

> "$\Box$" veya "$\Diamond$" kiplik değişmezinin etki alanında "x" gibi bir değişkenin bağsız geçişi veya "*a*" gibi bir ad temsilcisinin geçişi varsa kiplik değişmezinin *nesnel kullanılış*'ı olduğu söylenir. Eğer "$\Box$" veya "$\Diamond$" kiplik değişmezinin etki alanında hiçbir bağsız değişken veya ad temsilcisi geçmiyorsa kiplik değişmezinin *sözel kullanılış*'ı olduğu söylenir.
>
> Bir önermede bir kiplik değişmezinin etki alanında bağsız değişken veya ad temsilcisi geçiyorsa önermeye *nesnel kullanışlı* önerme denir. Eğer bir önermede hiçbir kiplik değişmezinin etki alanında bir bağsız değişken veya bir ad temsilcisi geçmezse önermeye *sözel kullanışlı* önerme denir.

Örneğin BT'nin önbileşeninde "$\Box$" kiplik değişmezi nesnel kullanılışta olup önbileşenin kendisi nesnel kullanışlı bir önermedir. BT'nin ard-bileşeninde ise "$\Box$" kiplik değişmezi sözel kullanılışta olup ard-bileşenin kendisi sözel kullanışlı bir önermedir.

İkinci bir örnek olarak

(1) $\Diamond Fa$

önermesinde "◇" kiplik değişmezi nesnel kullanılıştadır. (1) önermesi de normal kullanışlı bir önermedir.

Üçüncü örnek olarak

(2) $\Box\forall x\Box(Fx \rightarrow Gx)$

önermesini gözönüne alalım. (2)'de "□"in birinci geçişi sözel kullanılışta, ikinci geçişi ise nesnel kullanılıştadır. (2) önermesinin kendisi ise nesnel kullanılışlı bir önermedir. Nitekim önermede etki alanında bir bağsız değişken geçen bir kiplik değişmezi vardır.

A sözel kullanışlı bir önerme ve S bir mantık sistemi olduğunda $B \overset{S}{\equiv} A$ olursa A'nın *S sisteminde ortak olarak sözel kullanışlı* bir önerme olduğu söylenir.

Örneğin

(1) $\Diamond\forall x(Fx \wedge Gx) \wedge \forall x\Box(Fx \rightarrow Fx)$

kiplikli niceleme mantığın her sisteminde

(2) $\Diamond\forall x(Fx \wedge Gx)$

ile eşdeğerdir. Bundan dolayı (1) kiplikli niceleme mantığı sistemlerinde ortak olarak sözel kullanışlı bir önermedir.

"□" veya "◇" kiplik değişmezinin nesnel kullanılışında kiplik değişmezini A(x) veya A(a) biçiminde bir etki alanı vardır.

(i) "□Fa" gibi bir önerme doğru olduğunda, *a* bireyinin *özü bakımından* veya *özlü olarak* F olduğu, F'nin *a*'nın *özlük*'ü olduğu söylenir. "Fa" doğru ama "□Fa" yanlış olursa a bireyinin *ilineksel* olarak F olduğu, F'nin a'nın ilinek'i olduğu söylenir. Bu durumda a bireyinin "Fx" açık önermesini *özlü* olarak gerçeklediğini söyleriz.

(ii) $\forall x\Box A(x)$ *m* gibi bir mümkün evrende doğru olduğunda, E_m evreninin her öğesinin A(x) açık önermesini *özlü* olarak gerçekler.

Örneğin Sokrates özü bakımından insan veya akıllı (akıl sahibi)dir. Ama Sokrates'in beyaz derili olması ilinekseldir. Bir su örneğinin özü bakımından H_2O yapısındadır. Ama aynı örneğin belli bir zamanda belli bir yerde olması veya belli bir sıcaklık derecesi olması ilinekseldir.

Örnek olarak

(3) $Fa \wedge \Box Fa \wedge \forall x \Box Fx$

önermesinin

(4) (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; $\mathcal{B}$: $\{<m_0, m_1>, <m_0, m_2>\}$; E: {a, b, c}; E_{m_0}: {a, b}, E_{m_1}: {a, c}; E_{m_2}: {b, c}; m_0: Fc; m_1: Fa, Fb, Fc; m_2: Fa, Fb)

yorumlamasını göz önüne alalım.

"Fa" önermesi (4) yorumlamasında doğru olduğundan a bireyi ya ilimiksel ya da özlü olarak F olur. Buna karar vermek için " □Fa"nın verilen yorumlamada doğru olup olmadığına bakmalıyız. İmdi " □Fa"nın m_0'da doğru olması için "Fa" m_1 ile m_2 almaşıklarında doğru olmalıdır. Gerçekten "Fa" hem m_1 hem de m_2'de doğru olmalıdır. Gerçekten de "Fa" hem m_1 hem m_2'de doğrudur. O halde a özlü olarak F'dir. En sonda "∀x□Fx" önermesinin verilen (4) yorumlamasındaki doğruluk değerini bulmak için çözümleyici çizelgesini kuralım.

(5) 1. $[m_0] \forall x \Box Fx$ (B.Ö.)
2. $[m_0] \Box Fa$ (1)
3. $[m_0] \Box Fb$
$[m_1] Fa$ (2)
$[m_2] Fa$
$[m_1] Fb$ (3)
$[m_2] Fb$

(5) çizelgesinin tek açık yolundaki bütün önekli temel önermeler doğrudur. Bu nedenle "∀x□Fx" (4) yorumlamasında doğrudur. O halde E_{m_0} evreninin her öğesi "Fx" açık önermesini özlü olarak gerçekler.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki önermelerin nesnel kullanışlı veya sözel kullanışlı olduklarını belirtiniz. Ayrıca bu önermelerde geçen kiplik değişmezlerinin nesnel kullanılışta ve sözel kullanılışta olduklarını belirtiniz.

1. $\exists x \Box Fx$
2. $\exists x \Box (Fx \rightarrow \Diamond Gx)$
3. $\Box \forall x \Box \exists y\ (Fx \rightarrow \Box Gy) \rightarrow \Box \exists x Fx$
4. $\Box \forall x\ (Fx \rightarrow Gx)$
5. $\Box \exists x\ (Fx \wedge Gx) \wedge \Diamond \Box \forall y\ (Fy \rightarrow Gy)$

II. "Fb" önermesinin,

(M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_0>, <m_0, m_1>\}$; E: $\{a, b, c\}$; E_{m_0}: $\{a, b\}$; E_{m_1}: $\{a, c\}$; E_{m_2}: $\{a, b, c\}$; m_0: Fa; m_1: Fb; m_2: Fa, Fc)

yorumlaması gereği, b bireyininin ilineksel veya özlü olarak F olup olmadığını bulunuz.

5.3 KİPLİKLİ ÖZDEŞLİK VE VARLIK MANTIĞI

5.3.1 Katı Terimli Kiplikli Varlık Mantığı

5.3.1.1 Yorumlama

Özdeşlik mantığını da içine alan varlık mantığına "$\Box$" ile "$\Diamond$" kiplik niceleyicilerinin mantık değişmezlerini ekleyerek *kiplikli özdeşlik* ve *varlık mantığı* veya kısaca *kiplikli varlık mantığı* elde edilir. Kiplikli varlık mantığı, kiplikli niceleme mantığına özdeşlik değişmezi ("=") ile varlık değişmezi ("E!")nin eklenmesiyle de elde edilebilir. İmdi kiplikli niceleme mantığında, her adın değişen evrenli yorumlamalardaki farklı mümkün dünyalarda aynı bireyi adlandırdığını kabul etmiştik. Genel olarak:

> Değişen evrenli bir yorumlamada her mümkün dünyada aynı bireyi adlandıran bir terime *katı terim* denir. Farklı mümkün dünyalarda farklı bireyleri adlandırabilen terimlere de *emek terim* denir.

Bu bölümde katı terimli varlık mantığı sistemlerini, sonraki bölümlerde ise esnek terimli varlık mantığı sistemlerini inceleyeceğiz. Salt varlık mantığında olduğu gibi, kiplikli niceleme mantığının sembolik dilinde de "f", "g", "h" gibi işlem işareti temsilcilerinin bulunmadığını kabul ediyoruz.

İmdi kiplikli varlık mantığında

(1) E!a

gibi bir varlık önermesinin verilen bir yorumlamada *m* gibi bir mümkün dünyada doğru olması, a bireyinin E_m evreninin öğesi olması, yani

(2) $a \in E_m$

olması demektir. (2) doğru ise

(3) a bireyi *m* mümkün dünyasında vardır diyoruz. O zaman da E_m evreninin, *m* mümkün dünyasında var olan mümkün bireylerin kümesi olduğunu söyleyebiliriz.

Katı terimli kiplikli varlık mantığının yorumlamaları aşağıdakilerden oluşur.

i. Mümkün dünyalar kümesi: M. (M, kümesinin bir öğesi m_0 gerçek dünyasıdır.)

ii. Almaşıklık bağıntısı: $\mathcal{B}$

iii. Dış evren: E. (E, mümkün bireylerin kümesidir.)

iv. Her $m \in M$ için m'de varolan bireylerin evreni: E_m. ($E_m \subseteq E$)

v. Her $m \in M$ için m'deki değerleme olarak $Fa_1...a_n$ ve a = b biçimindeki atomsal önermeler. (Değerleme boş da olabilir.)

Örnek olarak

(1) $\forall x\Box[(a = x) \rightarrow (E!x \wedge Fx)]$

önermesinin

(2) (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{B}$: $\{<m_0, m_1>\}$; E: {a, b, c}; E_m: {a}; E_{m_1}: {a}; m_0:; m_1: Fa)

yorumlamasında doğruluk değerini bulalım. (1)'in m_0'da doğru olması etki alanının

(3) $\Box[(a = a) \rightarrow (E!a \wedge Fa)]$

özellemesinin m_0'da doğru olması demektir. (3)'ün m_0'da doğru olması ise

(4) $(a = a) \rightarrow (E!a \wedge Fa)$

önermesini m_1'de doğru olması demektir. a = a her mümkün dünyada olduğu gibi m_1'de doğrudur. $a \in E_{m_1}$ olduğundan E!a m_1'de doğrudur. "Fa" m_1'in değerlemesinde yer aldığından m_1'de doğrudur. O halde (4) m_1'de doğrudur. Dolayısıyla (3) önermesi m_0'da doğrudur. O halde (1) önermesi (2) yorumlamasında doğrudur.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin verilen yorumlamadaki doğruluk değerini bulunuz.

1. $\exists x\Box(E!x \wedge Fx)$

   (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{B}$: $\{<m_0, m_1>\}$; E: {a, b, c}; E_{m_0}: {a}; E_{m_1}: {a, b}; m_0: Fa; m_1: Fb)

2. $\Box\forall x(x = 0)$

   (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{B}$: $\{<m_0, m_1>\}$; E: {a, b, c}; E_{m_0}: {a, b}; E_{m_1}: {b}; m_0: Fb; m_1: Fa, Fb)

3. $\Diamond\forall x(x = a \wedge E!a)$

   (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; $\mathcal{B}$: $\{<m_0, m_1>, <m_0, m_2>\}$; E: {a, b, c}; E_{m_0}: {b}; E_{m_1}: {a}; m_0: Fb; m_1:; m_2: Fa, Fc)

5.3.1.2 Çözümleyici Çizelge ile Doğruluk Değeri Hesaplaması

Katı terimli kiplikli varlık mantığında doğruluk değeri hesaplaması için kullanılan çözümleyici çizelgenin kuralları, kiplikli niceleme mantığı ile özdeşlik ve varlık mantığındaki kuralların bileşimidir.

Örneğin

(1) $\exists x\Diamond[E!x \wedge (x = a)]$

önermesinin

(2) (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_1>\}$; E: {a, b, c}; E_{m_0}: {a, b}; E_{m_1}: {a})

yorumlamasında doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile hesaplayınız. Terimler (adlar) katı olduğunda yorumlamada "a = b" gibi bir özdeşlik ya hiç yer almamalı veya bütün değerlemelerde yer almalıdır.

(3) 1. $[m_0]\ \exists x \Diamond [E!x \wedge (x = a)]$ (B.Ö.)

(1)

2. $[m_0]\ \Diamond [E!a \wedge (a = a)]$

3. $[m_1]\ E!a \wedge (a = a)$

$[m_1]\ E!a$

$[m_1]\ a = a$ (3)

4. $[m_0]\ \Diamond [E!b \wedge (b = a)]$

5. $[m_1]\ E!b \wedge (b = a)$ (4)

$[m_1]\ E!b$

$[m_1]\ b = a$ (5)

(3) çizelgesinin iki açık yolu vardır. Birinci açık yolda $a \in E_{m_1}$ olduğundan $[m_1]$ E!a önekli temel önermesi doğrudur. "$[m_1]$ a = a" önekli temel önermesi de doğru olduğundan birinci açık yol doğrudur. O halde (1) önermesi (2) yorumlamasında doğrudur.

İkinci örnek olarak

(4) $\Box \exists x[E!a \wedge [Fx \rightarrow \sim(x = d)]]$

önermesinin

(5) (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_1>\}$; E: {a, b, c}; E_{m_0}: {a, b}; E_{m_1}: {a}; m_0: a = d; m_1: a = d, Fa)

yorumlamasında doğruluk değerini hesaplayalım.

(6) 1. $[m_0]\Box \exists x[E!a \wedge [Fx \rightarrow \sim(x = d)]]$

2. $[m_1]\ \exists x[E!a \wedge [Fx \rightarrow \sim(x = d)]]$

3. $[m_1]\ E!a \wedge [Fa \rightarrow \sim(a = d)]$ (2)

$[m_1]\ E!a$

4. $[m_1]\ Fa \rightarrow \sim(a = d)$ (3)

(4)

$[m_1]\ \sim Fa$ $\qquad$ $[m_1]\ \sim(a = d)$

(6) çizelgesinde iki açık yol vardır. "$[m_1]$ E!a" önekli temel önerme doğrudur. Birinci açık yoldaki "$[m_1]$ ~Fa" ile ikinci açık yoldaki "$[m_1]$ ~(a = d)" de yanlış olduğundan her iki açık yol yanlıştır. O halde (4) önermesi (5) yorumlamasında yanlıştır.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin verilen yorumlamadaki doğruluk değerini hesaplayınız.

1. $\exists x \Diamond (E!x \wedge Fx)$

   (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_1>\}$; E: {a, b, c}; E_{m_0}: {a, b}; E_{m_1}: {b}; m_0: Fa; m_1: Fb)

2. $\forall x \Box [x = a \vee (E!x \wedge Fx)]$

   (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_1> <m_1, m_2>\}$; E: {a, b, c}; E_{m_0}: {a, b}; E_{m_1}: {a}; E_{m_2}: {b}; m_0:; Fa; m_1: Fb; m_2: Fa, Fb)

3. $\exists x \Diamond (Fx \wedge \Box E!x)$

   (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_1> <m_0, m_2>\}$; E: {a, b, c}; E_{m_0}: {a, b}; E_{m_1}: {a, b}; E_{m_2}: {a}; m_0: Fa; m_1: Fb; m_2: Fa, Fb)

5.3.1.3 Çözümleyici Çizelge ile Doğrulayıcı Yorumlama Belirlemesi

Katı terimli kiplikli özdeşlik ve varlık mantığında kullanılan çözümleyici çizelgenin başlıca kurallarını aşağıda gösteriyoruz.

(1) *Kendiyle özdeşliği değilleme kuralı*

$$\begin{array}{l} \vdots \\ [k_1 \ldots k_n]\ \sim(a = a) \\ \qquad X \end{array}$$

(2) *Özdeşlerin yer değiştirmesi kuralı*

1. $[k_1 \ldots k_n]$ A
2. $[k_1 \ldots k_n]$ a = b

   $[k_1 \ldots k_n]$ A [b//a] (1)

(3) *Sınırlandırılmış tümel özelleme kuralı*

1. $[k_1...k_n]\ \forall xA$

1. $[k_1...k_n]$ E!a

$A(a/x)$ (1)

(4) *Sınırlandırılmış tikel özelleme kuralı*

1. $[k_1...k_n]\ \exists xA$

$[k_1...k_n]\ A(a/x)$

$[k_1...k_n]$ E!a (1)

a, aynı yolda önceki bir satırda hiç geçmemelidir.

(5) *Sınırlandırılmış özel tümel özelleme kuralı*

1. $[k_1...k_n]\ \forall xA$

$[k_1...k_n]\ A(a/x)$

$[k_1...k_n]$ E!a (1)

. *a*, aynı yolda önceki hiçbir satırda geçmemelidir.

(5) kuralına

(6) $\forall xFx \rightarrow \exists xFx$

önermesinin değillemesinin doğrulayıcı yorumlaması olmadığını göstermek için, yani (6)'nın geçerli olduğunu denetlemek için gereksinme vardır. Nitekim (6)'nın değillemesinin çözümleyici çizelgesi şöyledir.

(7) 1. [0] $\sim(\forall xFx \rightarrow \exists xFx)$

2. [0] $\forall xFx$

3. [0] $\sim\exists xFx$ (1)

4. [0] $\forall x\sim Fx$ (3)

[0] Fa

4. [0] E!a (2)

[0] $\sim$Fa (4)

X

Örnek olarak

(8) $\forall x\Box(x = a \rightarrow E!x)$

önermesinin varsa doğrulayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile bulalım.

(9) 1. [0] $\forall x\Box(x = a \rightarrow E!x)$
2. [0] $\Box(a = a \rightarrow E!a)$ (1)
[0] E!a
3. [0.1] $a = a \rightarrow E!a$ (2)

(3)

[0.1] ~(a = a) [0]E!a
X

(9) çizelgesinin tek açık yolu aşağıdaki doğrulayıcı yorumlamayı belirliyor. "[0]" yerine m_0, "[0.1]" yerine de m_1 koyuyoruz.

(10) (M: $\{m_0, m_1\}$; B: $\{<m_0, m_1>\}$; E: {a}; E_{m_0}: {a}; E_{m_1}: {a})

İkinci örnek olarak

(11) $\exists x\exists y\Diamond[Fxy \wedge \sim(x = y) \wedge \Box E!x \wedge \Box E!y)$

önermesini varsa doğrulayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile bulalım.

(12) 1. [0] $\exists x\exists y\Diamond[Fxy \wedge \sim(x = y) \wedge \Box E!x \wedge \Box E!y]$
2. [0] $\Diamond[Fab \wedge \sim(a = b) \wedge \Box E!a \wedge \Box E!b]$ (1)
[0] E!a
[0] E!b
3. [0.1] $Fab \wedge \sim(a = b) \wedge \Box E!a \wedge \Box E!b$ (2)
[0.1] Fab
[0.1] ~(a = b)
4. [0.1] $\Box E!a$ (3)
5. [0.1] $\Box E!b$
[0.1.1] E!a (4)
[0.1.1] E!b (5)

(12) çizelgesinin tek açık yolu aşağıdaki doğrulayıcı yorumlamayı belirliyor. "[0]" yerine m_0, "[0.1]" yerine m_1 ve "[0.1.1]" yerine m_2 koyuyoruz.

(13) (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_1>, <m_1, m_2>\}$; E: {a, b}; E_{m_0}:{a, b}; E_{m_1}: {a, b}; E_{m_2}: {a, b}; m_0:; m_1: Fab; m_2:)

"E!a" ile "E!b" m_0 evreninde doğru olduğundan E_{m_0}: {a, b} elde edilir. Gene "E!a" ile "E!b" m_2 evreninde doğru olduğundan E_{m_2}: {a, b} elde edilir. E_{m_1} evreni için herhangi bir E_{m_1} evrenini boş olmamak koşuluyla istediğimiz gibi seçebiliriz. Biz de E_{m_1} evrenini isteğe bağlı olarak {a, b} olarak belirledik.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin varsa doğrulayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile bulunuz.

1. $\Diamond\exists x(Fx \rightarrow E!x)$
2. $\Box\exists x\exists y(x = y \wedge E!x)$
3. $E!a \wedge \exists x\Diamond\forall y(Fx \rightarrow Gy)$

5.3.1.4 Çözümleyici Çizelge ile Denetleme

Katı terimli kiplikli varlık mantığında doğrulayıcı yorumlama belirlemesi için kullanılan çözümleyici çizelge denetleme için de kullanılır. Örneğin

(1) $\forall x\forall y[x = y \rightarrow \Box(x = y)]$

önermesinin geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile

(2) 1. [0] $\sim\forall x\forall y[(x = y) \rightarrow \Box(x = y)]$ (B.Ö.)
2. [0] $\exists x\exists y\sim[x = y \rightarrow \Box(x = y)]$
3. [0] $\sim[a = b \rightarrow \Box(a = b)]$
[0] E!a
[0] E!b
(2)
5. [0] a = b
4. [0] $\sim\Box(a = b)$
(3)

5. [0] □(a = a) (ispatlanabilir)

[0] a = b (5)

X

Çözümleyici çizelgede açık bir yolun sonuna (yukarıdaki gibi) geçerliliği denetlenmiş olan herhangi bir önerme eklenebilir. Şimdi

(3) □(a = a)

önermesinin katı terimli kiplikli varlık mantığında geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(4) 1. [0] ~□(a = a) (B.Ö.)

2. [0] □~(a = a)

[0.1] ~(a = a) (2)

[0.1] E!a

X

İkinci örnek olarak

□∀xFx, □E!a ∴ □Fa

çıkarımının geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

3. [0] □∀xFx (B.Ö.)

4. [0] □E!a (B.Ö.)

1. [0] ~□Fa (B.Ö.)

2. [0] ◇~Fa (1)

[0.1] ~Fa (2)

5. [0.1] ∀xFx (3)

5. [0.1] E!a (4)

[0.1] Fa (5)

X

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin ve çıkarımların katı terimli kiplikli varlık mantığında geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

1. $\Box\forall x(x = x)$

2. $\forall x\forall y\forall z\Box[[(x = y) \wedge (y = z)] \rightarrow (x = z)]$

3. $\Box\forall x(Fx \rightarrow Gx), \Box E!a, \Box Fa \therefore \Box Ga$

5.3.2 Esnek Terimli Kiplikli Varlık Mantığı

5.3.2.1 Esnek Terimler: Betimlemeler

Esnek terimler, farklı mümkün dünyalarda farklı bireyler gösteren terimlerdir. Başlıca esnek terimler

(1) Güneşin gezegenlerinin sayısı

veya

(2) Elektrik ampulünün mucidi

gibi *tekil betimleme* veya kısaca *betimleme* denilen karmaşık terimlerdir. Güneşin gezegenlerinin sayısı gerçek dünyada bir olgu olarak 9'dur. Ancak bu sayının 9 olması zorunlu değildir. Değişik bir sayı da olabilirdi. Dolayısıyla bu sayı mümkün bir dünyada farklı olabilirdi. Aynı biçimde elektrik ampulünü Edison değil de başka biri icat edebilirdi. Dolayısıyla mümkün dünyaların birinde elektrik ampulünün mucidi başka bir kişi olabilirdi.

Betimlemelerin mantıksal yapısını açıklayabilmek için

(3) x, güneşin gezegenlerinin sayısıdır

ile

(4) x, elektrik ampulünü icat etmiştir

birli açık önermelerini göz önüne alalım. 9 tamsayısı, (3) açık önermesini gerçek dünyada gerçekleyen tek bireydir. Edison da (3) açık önermesini gerçek dünyada gerçekleyen tek bireydir. O halde (1) betimlemesi (3) açık önermesini, (2) betimlemesi de (4) açık önermesini gerçekleyen tek bireyi

gösterdiğini söyleyebiliriz. Genel olarak her betimleme belli bir birli açık önermeyi gerçekleyen tek bireyi gösterir.

(i) A(x) bir birli açık önerme ve a bir birey olduğunda, A(a) önermesi *m* mümkün dünyasında doğru olursa, a'nın A(x) açık önermesini *m* mümkün dünyasında gerçeklediğini söyleriz.

(ii) Her betimleme, "A(x) açık önermesini gerçek dünyada gerçekleyen tek birey" biçiminde dile getirilebilir. Böyle bir betimleme de

ηxA(x)

biçiminde kısaltılır. "η" işareti betimleme değişmezi denilen bir mantık değişmezini gösterir.

(iii) ηxA(x) betimlemesinin *m* mümkün dünyasında gösterdiği (veya betimlediği) birey, A(x) birli açık önermesini *m* mümkün dünyasında gerçekleyen tek bireydir.

Buna göre (1) betimlemesi

(5) ηx(x gezegenlerin sayısıdır)

(2) betimlemesi

(6) ηx(x elektrik ampulünü icat etmiştir.)

biçiminde dile getirilir.

Dikkat edilirse (5) ile (6)'nın

(7) (Gezegenlerin sayısıdır: F)

ile

(8) (Elektrik ampulünü icat etmiştir: F)

sembolleştirme biçimleri gereği sembolik karşılığı

(9) ηxFx

dir.

A(x) açık önermesini farklı mümkün dünyalarda farklı bireyler gerçekleyebilir. O zaman da ηxA(x) betimlemesinin farklı mümkün dünya-

larda gösterdiği bireyler farklı olabilir. Dolayısıyla ηxA(x) gibi bir betimleme esnek terim olabilir. Örneğin (2) veya bunların karşılıkları olan (5) ile (6) betimlemeleri esnek terimlerdir. "η" betimleme işareti "x" gibi bir değişkenden oluşan "ηx" dizisine bir *betimleyici* denir. ηx biçimindeki bir betimlemede A(x) açık önermesine "ηx" betimleycisinin *etki alanı* denir. Her betimleme bir betimleyici ile onun etki alanı olan bir açık önermeden oluşur. "η xA(x)" gibi bir betimlemede "x"'in "ηxA(x)" içindeki bütün geçişleri "η" betimleyicisinin etkisindedir.

> Bir betimleyicisinin etkisinde olan bir değişkenin geçişlerine (bir niceleyicinin etkisinde olan değişken geçişleri gibi) *bağlı geçiş*' denir.

Örneğin (9) betimlemesinde "x" değişkeninin iki bazlı geçişi vardır. Öte yandan

(10) ηxFxy

betimlemesinde "x" değişkeninin iki bağlı geçişi yanısıra "y" değişkeninin bir bağsız geçişi de vardır. Genel olarak:

> Bir niceleyici veya bir betimleyicinin etkisinde olan bir değişken geçişine *bağlı değişken geçişi* denir. Hiçbir niceleyici veya betimleyicinin etkisinde olmayan bir değişken geçişine *bağsız değişken geçişi* denir.

Örneğin

(11) □∃y[Gx → (ηxFxyz)]

tamdeyiminde "x"in birinci geçişi bağsız, ikinci ve üçüncü geçişi ise bağlıdır. y birinci ve ikinci geçişi de bağlıdır. z'nin tek geçişi ise bağsızdır.

İmdi esnek terimli, yani betimlemeli kiplikli varlık mantığının yorumlamaları katı terimli kiplikli mantığındakilerin aynısıdır. Ancak içinde bir betimleme geçen bir önermenin m gibi bir mümkün dünyadaki doğruluk değerini saptayabilmek için, betimleme yerine betimlemenin etki alanı olan açık önermeyi m'de gerçekleyen bireyin adı konulmalıdır. Örneğin

(12) G(ηxFx)

önermesinin

(13) (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_1>\}$; E: {a, b, c}; E_{m_0}: {a, b}; E_{m_1}: {a}; m_0: Fa, Ga; m_1: Fb, Ga)

yorumlamasındaki doğruluk değerini bulalım. Bu amaçla "Fx" açık önermesini m_0 dünyasında gerçekleyen tek bireyi varsa saptamak veya yoksa olmadığını ortaya koymak gerekir. Bunun için "Fx"in E_{m_0}'daki özellemelerine bakmalıyız. Bu özellemeler ise "Fa" ile "Fb" dir. Bunlarda "Fa" doğru "Fb" ise yanlıştır. O halde "Fx"i m_0 evreninde gerçekleyen bir ve bir tek birey vardır. O da a'dır. O halde (12)'nin m_0'daki doğruluk değerini bulmak için "ηxFx" betimlemesi yerine a adını koymalıyız. Böylece "Gx" önermesini elde ederiz. "Ga" önermesi ise m_0 evreninde doğrudur. O halde (12) önermesi (13) yorumlamasında doğrudur. Öte yandan "Fx"in E_{m_1}'deki özellemeleri "Fa" ile "Fb"dir. Bunlardan "Fb" doğru ise "Fa" ise yanlıştır. O halde "Fx'i m_1'de gerçekleyen tek birey *b*'dir. Böylece "ηxFx" betimlemesinin esnek bir terim olduğunu, m_0'da a'yı m_1'de ise b'yi gösterdiğini söyleyebiliriz.

İkinci örnek olarak

(14) $\Diamond G(\eta x Fx)$

önermesinin

(15) (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_1>$; E: {a, b, c}; E_{m_0}: {a}; E_{m_1}: {a, b}; m_0: Fa, Fb, Ga; m_1: Ga, Gb)

yorumlamasında doğruluk değerini bulalım. (14)'ün m_0'da doğru olması "G(ηxFx)"in m_1'de doğru olması demektir. "Fx" açık önermesinin E_{m_1} evrenindeki özellemeleri "Fa" ile "Fb"dir. Oysa her ikisi m_1'de yanlıştır. O halde "Fx"i m_1 mümkün dünyasında gerçekleyen hiçbir birey yoktur. İşte böyle bir durumda isteğimize bağlı bir uzlaşım gereği "ηxFx"in hiçbir mümkün dünyada var olmayan bir bireyi, yani

(16) $E - (E_{m_0} \cup E_{m_1})$

kümesine ait bir bireyi gösterir. Bizim örneğimizde

(17) $E - (E_{m_0} E_{m_1}) = \{a, b, c\} - (\{a\} \cup \{a, b\} = \{a, b, c\} - \{a, b\} = \{c\}$

olur. O halde "ηxFx"in m_1 mümkün dünyasında *c* bireyini gösterdiğini kabul ediyoruz. Oysa "Gc" m_1'de yanlıştır. O halde "G(ηxFx)" m_1'de yanlıştır. Dolayısıyla (14) önermesi (15) yorumlamasında yanlıştır. Genel olarak:

> A(x) açık önermesini *m* mümkün dünyasında hiçbir birey gerçeklemezse veya birden çok sayıda gerçeklerse, ηxA(x) betimlemesi hiçbir mümkün dünyada varolmayan bir bireyi, yani
>
> $E - (E_{m_0} \cup E_{m_1} \cup E_{m_2} \cup ...)$
>
> kümesine ait bir bireyi gösterir.

Üçüncü örnek olarak

(18) ∃y□G(ηxFxy)

önermesinin

(19) (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_1>\}$; E: {a, b, c}; E_{m_0}: {a}; E_{m_1}: {a, b}; m_0: Faa; Fba; Ga; m_1: Faa, Fba, Ga, Gb, Gc)

yorumlamasında doğruluk değerini bulalım. (18)'in m_0'da doğru olması

(20) □G(ηxFxa)

nın m_0'da doğru olması demektir. (20)'nin m_0'da doğru olması

(21) G(ηxFxa)

nın m_1'de doğru olması demektir. "ηxFxa"nın gösterdiği bireyi bulmak için "Fxa"nın E_{m_1}'deki özellemelerine bakıyoruz. Bu özellemeler ise "Faa" ile "Fba" dır. Her iki özellemesi m_1'de doğrudur. Dolayısıyla G(ηxFxa), uzlaşım gereği

(22) $E - (E_{m_0} \cup E_{m_1}) = \{a, b, c\} - (\{a\} \cup \{a \cup b\}) = \{a, b, c\} - \{a, b\} = \{c\}$

olduğundan *c*'yi gösterir. "Gc" doğru olduğundan (18) önermesi (19) yorumlamasında doğrudur.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki tamdeyimlerde bağlı ve bağsız değişken geçişlerini belirtiniz.

1. $\forall x[G(\eta yFy) \rightarrow \Box Hx]$
2. $\exists x[G(\eta yFyx) \leftrightarrow \Diamond H(\eta xGx)]$
3. $\exists x[Fxy \rightarrow \Diamond \forall yG(\eta xHx)]$

II. Aşağıdaki önermelerin verilen yorumlamada doğruluk değerini bulunuz.

1. $\Diamond F(\eta xGx)$

   (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_1>\}$; E: {a, b}; E_{m_0}: {a}; E_{m_1}: {a}; m_0: Fa, Ga; m_1: Fa, Gc)

2. $\exists y\Box[F(\eta xGx) \wedge Fy]$

   (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_1>, <m_1, m_0>\}$; E: {a, b, c}; E_{m_0}: {a}; E_{m_1}: {a, b}; m_0: Fa, Ga; m_1: FcGb)

3. $\Diamond \exists y[G(\eta xFx) \wedge \sim Fy]$

   (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_1>, <m_1, m_0>\}$; E: {a, b, c}; E_{m_0}: {a}; E_{m_1}: {a, b}; m_0: Fa; m_1: Fa, Fc, Ga)

5.3.2.2 Çözümleyici Çizelge

Esnek terimli, yani betimlemeli kiplikli niceleme mantığında doğruluk değeri hesaplaması için çözümleyici çizelgeyi kullanabiliriz. O zaman da çözümlemede ortaya çıkan betimlemelerin etki alanı olan açık önermelerin ilgili evrendeki özellemlerin doğruluk değerini ayrı çözümleyici çizelgelerle hesaplarız. Bu hesaplamalar sonucunda her betimlemeyi ilgili mümkün dünyada gerçekleyen tek birey saptanır.

Örnek olarak

(1) $\exists yF(\eta x(Gxy \rightarrow \Box Hx)]$

önermesinin

(2) (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_1>\}$; E: {a, b, c}; E_{m_0}: {a}; E_{m_1}: {b}; m_0: Fa; m_1: Gab, Gbb, Ha)

yorumlamasındaki doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile hesaplayalım.

(3) 1. $[m_0]\ \exists yF(\iota x(Gxy \rightarrow \Box Hx))$

$[m_0]\ F(\iota x(Gxa \rightarrow \Box Hx))$ (1)

(3) çizelgesinin açık yolunda

(4) $\iota x(Gxa \rightarrow \Box Hx)$

betimlemesi geçiyor. Dolayısıyla (4)'ün etki alanının m_0'daki özellemesinin doğruluk çizelgesini kuruyoruz.

(5) 1. $[m_0]\ Gaa \rightarrow \Box Ha$

(1)

$[m_0]\ \sim Gaa$ 2. $[m_0]\ \Box Ha$

$[m_1]\ Ha$ (2)

Hem "$[m_0]\ \sim Gaa$" hem "$[m_1]\ Ha$" doğrudur. Dolayısıyla her iki yol doğru olup başlangıç önermesi de doğrudur. O halde a, (4) betimlemesinin etki alanını m_0'da gerçekleyen tek bireydir. Dolayısıyla (4) yerine a koyabiliriz. Buna göre (3) çizelgesi şöyle tamamlanır.

(6) 1. $[m_0]\ \exists yF[\iota x(Gxy \rightarrow \Box Hx)]$

2. $[m_0]\ F[\iota x(Gxa \rightarrow \Box Hx)]$

$[m_0]\ Fa$ (2)

"$[m_0]\ Fa$" doğru olduğundan (1) önermesi (7) yorumlamasında doğrudur.

Doğrulayıcı yorumlama belirleme ve denetleme için kullanılan çözümleyici çizelgenin dayandığı değiştirilmiş kurallar şöyledir.

(7) *Özdeşlerin sınırlandırılmış yer değiştirmesi kuralı*

1. $[k_1 \ldots k_n]\ A$

1. $[k_1 \ldots k_n]\ t_1 = t_2$

$[k_1 \ldots k_n]\ A\ [t_2\ //\ t_1]$

A'da değiştirilen a geçişleri, hiçbir kiplik değişmezinin etki alanında geçmemelidir. (t_1 ile t_2, basit veya karmaşık terimler, yani adlar veya betimlemeler olabilir.)

S4 sistemi için sınırlandırılmış tümel özelleme kuralı

(8) 1. $[k_1...k_n]\ \forall xA(x)$

1. $[k_1...k_n]\ \exists x\Box(x = t)$

$[k_1...k_n]\ A(t)$ (1)

t herhangi bir ad veya bir betimleme olabilir.

Örnek olarak

(9) $\eta xFx = a, \Box Ga \therefore \Box G(\eta xFx)$

çıkarımının esnek terimli kiplikli varlık mantığında geçersiz olduğunu göstermek için, bu çıkarımın geçersiz kılıcı kümesinin çözümleyici çizelge ile bir doğrulayıcı yorumlamasını bulalım.

(10) 1. [0] $\eta xFx = a$ (B.Ö.)

4. [0] $\Box Ga$ (B.Ö.)

2. [0] $\sim\Box G(\eta xFx)$ (B.Ö.)

3. [0] $\Diamond\sim G(\eta xFx)$ (2)

5. [0.1] $\sim G(\eta xFx)$ (3)

[0.1] Ga (4)

[0.1] ~Gb (5)

[0] Fa

[0.1] Fb

"ηxFx"in [0]'da a'yı göstermesi için "[0]Fa" satırını ekledik. "ηxFx"in [0.1]'deki b'yi göstermesi için de [0.1]Fb satırını ekledik. (10) çizelgesinin açık yolunun belirlediği yorumlama şöyledir. "[0]" yerine m_0, "[0.1]" yerine m_1 koyuyoruz.

(11) M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathfrak{B}$: $\{<m_0, m_1>\}$; E: {a, b}; E_{m_0}: {a}; E_{m_1}: {b}; m_0: Fa, m_1: Ga, Fb).

(11)'in (10)'un başlangıç önermelerinin doğrulayıcı yorumlaması olduğunu sınamak için

(12) $\eta xFx = a \wedge \Box Ga \wedge \sim \Box G(\eta xFx)$

in (9) yorumlamasında doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile hesaplayalım.

(13) 1. $[m_0]$ $\eta Fx = a \wedge \eta \Box Ga \wedge \sim \Box G (\eta xFx)$ (B.Ö.)
5. $[m_0]$ $\eta xFx = a$ ┐
4. $[m_0]$ $\Box Ga$ (1)
2. $[m_0]$ $\sim \Box G(\eta xFx)$ ┘
3. $[m_0]$ $\Diamond \sim G(\eta xFx)$ (2)
6. $[m_1]$ $\sim G(\eta xFx)$ (3)
$[m_1]$ Ga (4)
$[m_0]$ a = a (5)
$[m_1]$ ~Gb (6)
$[m_0]$ Fa (5)
$[m_1]$ Fb (6)

Tek açık yoldaki önekli temel önermeler dizisi

(14) $[m_1]$ Ga, $[m_0]$ a = a, $[m_1]$, ~Gb, $[m_0]$ Fa, $[m_1]$ Fb

dir. Bu dizinin bütün üyeleri doğrudur. O halde (13) başlangıç önermesi (11) yorumlamasında doğrudur.

Bazı mantıkçılar, kiplikli özdeşlik ve varlık mantığına karşı çıkmak amacıyla, düpedüz geçersiz olan aşağıdaki çıkarımın kiplikli niceleme mantığında geçerli sayıldığını öne sürmüşlerdir.

(15) Güneşin gezegenlerinin sayısı 9'a eşittir. Zorunlu olarak 9, 7'den büyüktür; o halde zorunlu olarak güneşin gezegenlerinin sayısı 7'den büyüktür.

Bu çıkarımın sembolik karşılığı

(16) (9:a, güneşin gezegenleri'nin sayısıdır: F, 7'den büyüktür: G)

sembolleştirme biçimi gereği (9)'dur. Oysa (9) çıkarımının esnek terimli kiplikli özdeşlik ve varlık mantığında geçersiz olduğunu ispatladık. Ancak (15) çıkarımını kiplikli niceleme mantığına karşı çıkmak amacıyla öne süren mantıkçılar, katı terimli kiplikli özdeşlik ve varlık mantığında kullanılan özdeşlerin yer değiştirmesi kuralına dayanarak gerek (15)'i gerekse (9)'u geçerli saymışlardır. (15)'in düpedüz geçersiz olduğu yadsınamaz. Nitekim (15)'in her iki öncülü doğru ama sonucu yanlıştır. Güneşin gezegenlerinin sayısı hiç de zorunlu olarak 9'a eşit değildir, 9'dan farklı da olabilirdi. Bu sayı mümkün dünyaların birinde 9'dan farklıdır. Esnek terimli mantıkta özdeşlerin yer değiştirmesi kuralı kullanılamaz. Onun yerine geçen (7) özdeşlerin sınırlandırılmış yer değiştirmesi kuralı gereği (9) ile (15) çıkarımları artık geçerli değildir. Böylece kiplikli özdeşlik ve varlık mantığına yapılmış olan itiraz esnek terimli mantığa dayanarak kaldırılmıştır.

Esnek terimli kiplikli özdeşlik ve varlık mantığının başlıca yasalarını aşağıda gösteriyoruz.

(17) $\Box(t_1 = t_2), A \models A\,[t_2 \,//\, t_1]$

(18) $\forall xA, \exists x\Box(x = t) \models A\,(t/x)$

(19) $\forall x(E!x \rightarrow A) \rightarrow \forall xA$

(20) $\exists xE!x$

(21) $E!(\eta xAx) \rightarrow \exists xA(x) \wedge \forall x\forall y\,[(A(x) \wedge A(y)] \rightarrow x = y]$

(22) $\forall y[\forall x[A(x) \leftrightarrow (x = y)] \rightarrow [y = \eta xA(x)]]$

(23) $\forall x\forall y[(x = y) \rightarrow \Box(x = y)]$

(24) $\forall x\forall y[\Diamond(x = y) \rightarrow (x = y)]$

(25) $E!(\eta xFx) \rightarrow F(\eta xFx)$

(26) $\forall y[(y = \eta xFx) \leftrightarrow [Fy \wedge \forall x[Fx \leftrightarrow (x = y)]]]$

(27) $\Box\exists x\exists y\Box(x = y)$

Örnek olarak (21)'in özel hali olan

(28) □(a=ηxFx), □Ga ∴ □G(ηxFx)

çıkarımın geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(29) 3. [0] □(a=ηxFx) (B.Ö.)

4. [0] □Ga (B.Ö.)

1. [0] ~□(ηxFx) (B.Ö.)

2. [0] ◇~G(ηxFx) (1)

[0.1] ~G(η xFx) (2)

5. [0.1] (a=ηxFx) (3)

5. [0.1] Ga (4)

[0.1] G(η xFx) (5)

X

Dikkat edilirse 5. adımda "Ga" önermesinin bir kiplik değişmezinin etki alanında olmamasına dayanarak özdeşlerin sınırlandırılmış yer değiştirmesi kuralını uyguladık. Böylece de "G(ηxFx)"i elde ettik.

İkinci örnek olarak (23) önermesinin geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(30) 1. [0] ~∀x∀y[□(x = y) → (x = y)] (B.Ö.)

2. [0] ∃x∃y~[□(x = y) → (x = y)] (1)

3. [0] ~[□(a = b) → (a = b)] (2)

4. [0] □(a = b)
[0] ~(a = b) (3)

5. [0.1] a = b (4)

[0] a = b (5)

X

5. adımda "[0.1] a= b" satırına dayanarak "[0]a = b" satırını yazdık. Nitekim

a ile b adları esnek mantık sisteminde bile katı terimlerdir. Yani her mümkün dünyada aynı bireyi gösterirler. Dolayısıyla a ile b bir mümkün dünyada özdeş olunca her mümkün dünyada özdeş olurlar.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki önermelerin verilen yorumlamada doğruluk değerini hesaplayınız.

1. $\exists x \Box E!x$

   (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{B}$: $\{<m_0, m_1>\}$; E: {a, b, c}; E_{m_0}: {a, b}; E_{m_1}: {b})

2. $\Diamond G[\eta x(Fx \wedge E!x)]$

   (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{B}$: $\{<m_0, m_1>, <m_1, m_0>\}$; E: {a, b, c}; E_{m_0}: {a}; E_{m_1}: {a, b}; m_0: Fa, Fb; m_1: Fc)

3. $\forall y \Box[y = \eta x(Gx \wedge Hx)]$

   (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{B}$: $\{<m_0, m_1>, <m_0, m_1>, <m_1, m_0>\}$; E: {a, b, c}; E_{m_0}: {a, b}; E_{m_1}: {a}; m_0: Ha, m_1: Gb, Hc)

5.3.3 Kavramsal Niceleyicili Kiplikli Varlık Mantığı

Buraya kadar incelediğimiz kiplikli niceleme, özdeşlik ve varlık mantıklarında niceleyiciler evrenin öğesi olan bireylere, yani nesnelere ilişkindir. Bu türlü niceleyicilere ise *nesnel niceleyici* denir. Bu nedenle incelediğimiz kiplikli niceleme, özdeşlik ve varlık mantıklarına *nesnel niceleyicili mantık sistemleri* denir. Şimdi ise evrenin öğelerine değil bireysel kavramlar denilen fonksiyonlara ilişkin niceleyicilere dayanan *kavramsal kiplikli varlık mantığı*'nı inceleyeceğiz.

Verilen bir yorumlamada M mümkün dünyalar kümesi, E'de evren olsun. M X E kartezyen çarpımının her alt kümesi bir bağıntıdır.

$f \subseteq M \times E$ olduğunda,

(1) $\forall m \forall a \forall b\ [(m \in M \wedge a \in E \wedge b \in E \wedge fa \wedge mfb \rightarrow a = b]$

koşulu yerine getirilirse f bağıntısına *çoğa-bir bağıntı* denir. Fonksiyon,

çoğa-bir bağıntı olarak tanımlanabilir. İmdi f, M X E'nin alt kümesi durumunda bir bağıntı olduğunda, f çoğa-bir bağıntı bir fonksiyon ise, f fonksiyonuna bir *bireysel kavram* denir. m ∈ M ve a ∈ E olduğunda, mfa yerine f(m) = a yazılır.

Kavramsal niceleyicili kiplik varlık mantığındaki yorumlamalarda M mümkün dünyalar kümesi, B almaşıklık bağıntısı, E, E_{m_0}, E_{m_1}, ... evrenleri ve mümkün dünyalardaki değerlemelerden başka bir de M X E'nin alt kümelerinden oluşan bir bireysel kavram kümesi de yer alır. Bu kümeyi, F olarak, F'nin öğelerini de f_1, f_2, f_3,... olarak gösteriyoruz. f_1, f_2, f_3,... M X E kartezyen çarpımının alt kümesi olan fonksiyonlar, yani bireysel kavramlardır. Bu fonksiyonlar f(m) ∈ E_m koşulunu yerine getirmelidir. F kümesinin işlevi "∀xA(x)", "∃xA(x)" ve "E!a" biçimindeki önermelerin m gibi bir mümkün dünyadaki doğruluk değerinin saptanmasında ortaya çıkar. Buna göre:

(i) ∀xA(x) biçimindeki bir önermenin *m* gibi bir mümkün dünyada doğru olması F kümesine ait her f fonksiyonu için A[f(m)] önermesinin *m*'de doğru olması demektir.

(ii) ∃xA(x) biçimindeki bir önermenin *m* gibi bir mümkün dünyada doğru olması, F kümesine ait en az bir fonksiyonu için A[f(m)] önermesinin *m*'da doğru olması demektir.

(iii) "E!a" biçimindeki bir önermenin *m* gibi bir mümkün dünyada doğru olması, en az bir f fonksiyonu için f(m) = a olması demektir.

Örneğin

(2) ∃x□(x = a)

önermesinin

(3) (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{B}$: $\{\langle m_0, m_1\rangle \langle m_0, m_1\rangle \langle m_1, m_1\rangle\}$; E: {a, b}, E_{m_0}: {a, b}; E_{m_1}: {a}; F: $\{\{\langle m_0, a\rangle, \langle m_1, b\rangle\}, \{\langle m_0, b\rangle, \langle m_1, a\rangle\}\}$

yorumlamasında doğruluk değerini bulalım. $\{\langle m_0, a\rangle, \langle m_1, b\rangle\}$ ile $\{\langle m_0, b\rangle, \langle m_1, a\rangle\}$ birer fonksiyondur. Bu fonksiyonlar bireysel kavramlardır. Birin-

cinin f_1 ile ikincisini de f_2 ile gösteriyoruz. $f_1(m_0) = a$, $f_1(m_1) = b$, $f_2(m_0) = b \times f_2(m_1) = a$'dır.

İmdi (2) önermesinin m_0'da doğru olması

(4) $\Box(f_1(m_0) = a)$

veya

(5) $\Box(f_2(m_0) = a)$

nın m_0'da doğru olması demektir. $f_1(m_0) = a$, $f_2(m_0) = b$'dir. Dolayısıyla (4) önermesi

(6) $\Box(a = a)$

(5) önermesi de

(7) $\Box(b = a)$

ya indirgenir. (6) önermesi m_0'da doğrudur. Dolayısıyla (4) doğrudur. O halde (2) önermesi (3) yorumlamasında doğrudur.

İkinci örnek olarak

(8) $\forall x \Box Fx$

önermesinin

(9) $(M: \{m_0, m_1\}; \mathcal{R}: \{<m_0, m_0>, m_0, m_1>, <m_1, m_1>\}; E: \{a, b\}; E_{m_0}: \{a\}; E_m: \{b\}; F: \{\{<m_0, b>, <m_1, b>\}; \{<m_0, a; m_1, b>\}\}; m_0: Fa; m_1: Fb)$

yorumlamasında doğruluk değerini bulalım. F'nin ilk öğesini f_1 ile, ikinci öğesini de f_2 ile gösteriyoruz.

İmdi (8)'in m_0'da doğru olması

(10) $\Box Ff_1(m_0)$

ve

(11) $\Box Ff_2(m_0)$

ın m_0'da doğru olması demektir. (10),

(12) $\Box Fb$

ye, (11)'de

(13) $\Box Fa$

ya indirgenir. (12)'nin m_0'da doğru olması, "Fb"nin m_0'ın m_0 ve m_1 almaşıklarında doğru olması demektir. Oysa "Fb" m_0'da yanlıştır. O halde (8) önermesi (9) yorumlamasında yanlıştır.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin verilen yorumlamadaki doğruluk değerini bulunuz.

1. $\exists x(x = a)$
2. $\forall x \Diamond (x = a)$
3. $E!b$
4. $\forall x \Box (Fx \wedge E!a)$
5. $\Diamond \exists x Fx \rightarrow E!a$

Yorumlama:

(M: $\{<m_0, m_1>$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_0>, <m_0, m_1>, <m_1, m_1>\}$; E: {a, b}; E_{m_0}: {a, b}; E_{m_1}: {b}; F: $\{\{<m_0, a>, <m_0, b>\}, \{<m_0, b, < m_1, b>\}$; m_0: Fa, m_1: Fa, Fb).

6. BİLGİ MANTIĞI

6.1 BİLGİSEL ÖNERMELER MANTIĞI

6.1.1 Sembolleştirme ve Bilme Türleri

"Bilgi" veya "bilme" ve bunlarla yakından ilgili olan "kanı" ve "haklı gösterme" terimlerine *bilgisel değişmezler* denir. Birer mantık değişmezi olan bu değişmezleri önermeler mantığına ekleyerek *bilgisel önermeler mantığı*, niceleme, özdeşlik veya varlık mantığına ekleyerek de *bilgisel niceleme, özdeşlik* ve *varlık mantıkları* elde edilir.

İmdi "bilmek" sözcüğünün (eyleminin) dört ayrı kullanılışı vardır.

(i) *Bilme'nin "olduğunu bilme" anlamındaki kullanılışı*

(1) Ali, Farabi'nin büyük bir filozof olduğunu biliyor.

veya

(2) Ali biliyor ki Farabi büyük bir filozoftur.

tümcelerini göz önüne alalım. Bu iki tümce aynı gelir. (1) tümcesinde

(3) Ali... olduğunu biliyor.

sözü, (2) önermesinde de

(4) "Ali biliyor ki"

sözü bir birli önerme eklemi sayılmalıdır. Nitekim (3)'deki boşluğu

(5) Farabi büyük bir filozoftur

önermesini koyarak (1) önermesini, (4)'ün ardına da (5) önermesini yazarak (2) önermesini elde ediyoruz. Anlamdaş olan (3) ile (4)'ü

(6) B_{Ali}

işaretiyle gösteriyoruz. Buna göre (1) ve (2)'yi

(7) B_{Ali} (Farabi büyük bir filozoftur.)

biçiminde dile getiriyoruz. (6), "bilme değişmezi" dediğimiz yeni türden bir mantık değişmezini dile getirir. (7)'nin sembolik karşılığı

(8) (Ali: a, Farabi büyük bir filozoftur: p)

sembolleştirme biçimi gereği

(9) B_ap

dir. (9)'a bir *bilme önermesi* diyoruz. Genel olarak *A* herhangi bir sembolik önerme olduğunda

(10) B_aA

bir bilme önermesidir. "a" bilen kişinin adı, "B_a" *bilme değişmezi, A* ise "B_a" bilme değişmezinin *etki alanı*'dır. (10) biçimindeki önermeler atomsal olmayan basit önermelerdir. Örneğin

(11) $B_a(p \rightarrow q)$

ile

(12) B_aB_bp

basit bilme önermeleridir.

Dikkat edilirse (1) veya (2) gibi bir bilme önermesinin doğru olması için bilen kişinin, yani Ali'nin (5) tümcesini (yani "Farabi büyük bir filozoftur" tümcesini) kullanması gerekmez. Bunu daha iyi açıklamak için Türkçe bilmeyen John adlı bir İngilizle ilgili

(13) John biliyor ki Farabî büyük bir filozoftur

bilme önermesini göz önüne alalım. Türkçe bilmeyen John (5) tümcesini kullanmadan Farabi'nin büyük bir filozof olduğunu bilebilir.

Bilme önermeleri *yargısal tavır önermesi* denilen önermelerin bir türüdür.

(14) a, p olduğu kanısındadır.

(15) a, p olmasını istiyor.

(16) a, p olmasını buyuruyor.

(17) a, p olup olmadığını soruyor.

biçimindeki önermeler de yargısal tavır önermesidir. Bu türlü önermelerin ortak özelliği, a kişisinin p önermesinin dile getirdiği önermenin karşısında takındığı bir "tavır"ı ortaya koymalarıdır.

(ii) *"Bilme"nin iş-bilme anlamında kullanılışı*

(18) Ali bisiklete binmesini biliyor.

tümcesi

(19) a / işini yapmasını biliyor.

biçimindedir. "a" bilen kişiyi, "İ"de yapılması bilinen eylem türü veya "iş"i gösteriyor.

(20) a ... yapmasını biliyor.

önerme oluşturan bir işlem işaretini dile getirir. Bu işlem işareti bir işin adından bir önermeyi oluşturur.

Dikkat edilirse (19) biçimindeki bir önermedeki "biliyor" sözcüğü, bir önermenin (veya yargının) doğruluğunun bilinmesi anlamına gelmez. Nitekim bilinen bir önermenin doğrulayıcı değil, bir işin yapılmasıdır. Böyle bir önerme bilen kişinin belli bir beceri'sini veya *"yatkınlık"*ını dile getirir. Bu nedenle (19) biçimindeki önermelere *yatkınlık önermesi* denir.

(iii) *"Bilme"nin bir "konuyu bilme" anlamındaki kullanılışı*

(21) Ben şu andaki yaşantımı biliyorum.

(22) Ali Japonya'yı bilir.

(23) Ali kuantum teorisini bilir.

(24) Ali matematik bilir.

önermesinde bilme, bir konunun bilinmesi anlamındadır. Bu önermeleri

(25) a, b'yi biliyor.

biçiminde sembolleştirebiliriz. "a" bilen kişinin adını, "b" ise bilinen konunun adını temsil ediyor. Ayrıca F bir birli yüklem temsilcisi olduğunda,

(26) a, F'leri biliyor.

önermesi ya

(27) a bazı F'leri biliyor.

ya da

(28) a bütün F'leri biliyor.

anlamına gelir. (27),

(29) $\exists x(Fx \wedge a, x'i \text{ biliyor})$

biçiminde, (28) ise

(30) $\forall x(Fx \rightarrow a, x'i \text{ biliyor})$

biçiminde dile getirilebilir. Örneğin

(31) Ali güneşin gezegenlerini biliyor.

önermesi Ali'nin bazı veya bütün gezegenlerini bildiğini dile getirir.

Dikkat edilirse (25) önermesinde "biliyor" sözcüğü a ile b gibi iki addan bir önermeyi oluşturuyor. Dolayısıyla (25) önermesinde "biliyor" bir ikili yüklem durumundadır. Bu yüklem *konuyu bilme* veya *tanıma* (veya tanışma) denilen bir bağıntıyı dile getirir. Nitekim bu anlamdaki "biliyor" yerine "tanıyor" sözcüğü kullanılabilir. Örneğin (22) önermesi yerine

(32) Ali Japonya'yı tanıyor.

diyebiliriz.

(iv) *"Bilme"nin soru karşılığı olarak kullanılışı*

(33) Ali bu kitabın *kimin* yazdığını *biliyor.*

(34) Ali bu kitabın *niçin* yazıldığını *biliyor.*

(35) Ali bu kitabın *nasıl* yazıldığını *biliyor.*

(36) Ali bu kitabın *ne zaman* yazıldığını *biliyor.*

(37) Ali bu kitabın *nerede* yazıldığını *biliyor.*

gibi tümcelerde geçen "biliyor" sözcüğü bir sorunun karşılığını vermek için kullanılmaktadır. Nitekim bu tümcelerin her biri sırasıyla "bu kitabı *kim* yazdı?", bu kitap *niçin* yazıldı?", "bu kitap nasıl yazıldı?", "bu kitap ne zaman yazıldı?" ve "bu kitap nerede yazıldı?" sorularının karşılığı durumundadır. Bundan dolayı "biliyor" sözcüğünün bu son kullanılışına *soru karşılığı kullanılış* diyoruz. Ancak bu dördüncü kullanılışı ikinci kullanılışa yani iş bilme'ye

indirgeyebiliriz. Nitekim Ali'ye sorulan soru S ise, S sorusunun karşılığını

(38) Ali S sorusunu doğru olarak cevaplandırmasını biliyor.

biçimine dönüştürebiliriz. (38) tümcesinde ise "biliyor" sözcüğü iş bilme anlamında kullanılıyor.

Sonuç olarak "bilme"nin dört değil, birbirine indirgenemeyen üç ayrı kullanılışı olduğunu görüyoruz. Bunlar "olduğunu bilme", "iş bilme ve bir konuyu bilme" (veya "tanıma")'dan ibarettir. Bundan böyle "bilme yalnız olduğunu bilme" anlamında kullanacağız.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki tümcelerde geçen "bilme"nin türünü belirtiniz.

1. Fizik bilirim.
2. Yüzmeyi bilirim.
3. 2 + 2 = 4 olduğunu bilirim.
4. Ali'yi bilirim.

6.1.2 Bilginin Tanımlanması

"Bilgi" sözcüğünü somut veya soyut bir nesnenin adı olarak değil, bilme eylemi anlamında kullanacağız. "p" önermesinin a kişisi için bir bilgiyi dile getirmesi, a'nın p olduğunu bilmesi demektir.

Daha önce belirttiğimiz gibi "B_a" bilme değişmezi doğruluk fonksiyonu durumunda olmayan bir birli önerme eklemidir. Nitekim her insan bazı doğru önermelerin doğru olduğunu bilir, ama birçok doğru önermenin doğru olduğunu bilmez. Örneğin Amerika'yı keşfeden Kristof Kolomb keşfettiği kıtanın Hindistan olduğunu sanıyordu. Öte yandan yanlış bir önermeyi bilmek imkânsızdır. Nitekim *a*'nın p olduğunu bilmesi, *a*'nın p'nin *doğru* olduğunu bilmesi demektir. Dolayısıyla p yanlış ise, "B_ap" önermesi de yanlış olur. O halde "B_ap" bilme önermesinin doğruluk çizelgesi aşağıdaki biçimdedir.

(1)

p	$B_a p$
D	D, Y
Y	Y

Birinci şıktaki p'ye doğru değeri verildiğinde "$B_a p$" doğru da yanlış da olabilir.

(1) doğruluk çizelgesine dayanarak

(2) $B_a p \rightarrow p$

"p"ye verilen her doğruluk değeri için doğru olduğunu söyleyebiliriz. Nitekim "$B_a p$" doğru ise "p" doğru olur. "$B_a p$" yanlış ise "p" doğru da yanlış da olabilir. Her iki durumda (2) doğrudur. (2)'ye dayanarak bilinen bir önermenin doğru olması gerektiğini görüyoruz. Başka bir deyimle doğruluk bilginin gerekli koşuludur. Doğruluk olmadan ("olduğunu bilme" anlamında) bilgi olamaz.

a kişisinin p olduğunu bilmesinin ikinci gerekli koşulu a'nın p olduğu *kanısında* olmak, yani a'nın p olduğunu *kabul* etmesidir. *Kanı,* bilinenin bir gerekli koşuludur. Eğer a, p olduğu kanısında değilse, p doğru olsa bile p olduğunu bilemez.

(3) *a,* p olduğu kanısındadır.

önermesini

(5) $K_a p$

biçiminde dile getiriyoruz. Örneğin

(6) Ali, Farabi'nin büyük bir filozof olduğu kanısındadır.

önermesinin sembolik karşılığı

(7) (Ali: a, Farabi büyük bir filozoftur: p)

sembolleştirme biçimi gereği (5)'dir.

(8) $B_a p \rightarrow K_a p$

önermesinin "p"ye verilen bütün değerler için doğru olduğunu kabul ediyoruz. "K_ap" da doğruluk fonksiyonu olmayan bir birli önerme eklemidir. K_ap'nin doğruluk çizelgesi

(9)

p	K_ap
D	D, Y
Y	D, Y

dir. Nitekim hem doğru hem yanlış bir önermenin doğru olduğu kanısında olabiliriz. *Yanılgı,* yanlış bir önermenin doğru olduğunun veya doğru bir önermenin yanlış olduğunun kanısına varmak demektir. Oysa insanoğlu yanılgıya düşebilir. Öte yandan doğru bir önermeyi bilmediğimiz gibi, doğru olduğu kanısında da olmayabiliriz.

a'nın, p olduğunu bilmesinin üçüncü gerekli koşulu a'nın p olduğunu *haklı göstermesidir* a, p olduğu kanısında olup p gerçekten doğru olsa bile eğer a, p olduğunu haklı gösteremezse, a p olduğunu biemez. Örneğin fal doğru çıksa bile bilgi değildir. Çünkü falın doğru çıkacağının haklılığı gösterilemez.

(10) a, p olduğunu haklı gösteriyor.

önermesini

(11) H_ap

biçiminde dile getiriyoruz. "H_a"ya *haklılık değişmezi* diyoruz. "H_a" doğruluk fonksiyonu olmayan bir birli önerme eklemidir. Doğruluk çizelgesi "K_ap"nın gibi

(12)

p	H_ap
D	D,Y
Y	D,Y

biçimindedir. Doğru bir önerme haklı gösterilebilir veya gösterilemez. Yanlış bir önerme genellikle haklı gösterilemez, ama yalancı tanıklar veya duyu adlanmaları durumlarında olduğu gibi geçici olarak da olsa haklı gösterilebilir.

(13) $B_ap \rightarrow H_ap$

önermesi "p"ye verilen bütün doğruluk değerleri için doğrudur.

İmdi bilginin üç koşulunu bir araya getirerek "bilme"nin aşağıdaki tanımını (hiç olmazsa şimdilik) yapabiliriz.)

(14) $B_a p \equiv (p \wedge K_a p \wedge H_a p)$.

Buna göre a'nın p olduğunu bilmesi, (i) p'nin doğru olması, (ii) a'nın p olduğu kanısında olması, ve (iii) a'nın p olduğunun haklı göstermesi demektir.

6.1.3 Doğruluk Kavramı

6.1.3.1 "Doğru"nun Çeşitli Kullanılışları

"Doğru" sözcüğünün türkçede çeşitli kullanılışları vardır. Ad olarak "doğru çizgi" veya "doğru önerme" anlamında, sıfat olarak da eylem ve davranışa ya da kanılara, yargılara ve önermelere uygulanır. Eylem ve davranışlar için kullanılması halinde "haklı" veya "yasaya uygun" anlamına gelir; kanılara, yargılara ve önermelere uygulandığı zaman da "gerçeğe uygun" anlamına gelir. Bundan böyle "doğru"yu yalnız son anlamında yani "gerçeğe uygun" anlamında olarak kullanacağız.

İmdi

(1) Kar'ın beyaz olduğu doğrudur.

gibi bir önermede

(2) olduğu doğrudur.

sözü doğruluk fonksiyonu durumunda bir birli önerme eklemidir. Nitekim (1)'in sembolik karşılığı

(3) (Kar beyazdır: p)

sembolleştirme biçimi gereği

(4) p olduğu doğrudur.

biçimindedir. (4) önermesinde, önerme eklemi uygulandığı önermenin ardına yazılıyor. (4) önermesinin doğruluk çizelgesi şöyledir.

(5)

p	p olduğu doğrudur
D	D
Y	Y

(5) çizelgesi §1.1.9'da gördüğümüz E^1 birli evetleme ekleminin doğruluk çizelgesidir. Dolayısıyla "olduğu doğrudur" sözünün "E^1" eklemini dile getirdiğini söyleyebiliriz. Buna göre (4) önermesini

(4') E^1p

biçiminde dile getirebiliriz. İmdi

(5) doğruluk çizelgesine dayanarak

(6) p olduğu doğrudur ≡ p

veya

(7) $E^1p \equiv p$

eşdeğerliği elde edilir. (6) eşdeğerliğine dayanarak

(8) $B_ap \equiv B_a$(p olduğu doğrudur)

ve

(9) $K_ap \equiv K_a$(p olduğu doğrudur)

eşdeğerlikleri de elde edilir. Demek ki a'nın p olduğunu bilmesi, a'nın p olduğunun doğru olduğunu bilmesi demektir. Aynı biçimde a'nın p olduğu kanısında olması, a'nın p olduğunun doğru olduğu kanısında olması demektir.

"Doğru" sözcüğü, bir de sözedilen dile ait bir önermeye uygulanan bir yüklem olarak kullanılır. D sözedilen dil, Ö'de D diline ait bir önerme olsun. O zaman

(10) Ö önermesi D dilinde doğrudur

önermesi D dilinden sözeden bir önerme olur. Bu önerme söz edilen D diline değil, sözeden dile aittir. Örneğin Ö önermesi Türkçeye ait

(11) Kar beyazdır.

önermesi olsun. O zaman (10),

(12) "Kar beyazdır" önermesi Türkçede doğrudur.

biçimini alır. Dikkat edilirse (12) önermesinde (11) önermesi tırnak içine alınmıştır. Yoksa (12) bozuk bir tümce olurdu. Bir de şu özellemeyi göz önüne alalım.

(13) Kar'ın beyaz olduğu Türkçede doğrudur.

(13) önermesi sözedilen dile ait olup "Türkçede" nitelemesi gereksizdir. Yani (13)'ü

(14) Kar'ın beyaz olduğu doğrudur.

biçimine çevirebiliriz. (14)'te ise "doğrudur" bir birli yüklem olmayıp "olduğu beyazdır" sözü bir birli önerme eklemidir. Ama (11) önermesi tırnak içine alındığında sözeden dile ait (12) önermesinde "Türkçede doğrudur" sözü sözeden dile ait bir birli yüklemdir. (12) önermesinin sözeden dile ait olması, "Kar beyazdır"ın tırnak içine alınmasından anlaşılır. Nitekim sözedilen dile ait herhangi bir sözü tırnak içine almakla, bu sözün sözeden dile ait bir adını oluştururuz. Sözeden dile ait bir adı kapsayan bir önerme ise sözeden dile aittir. (12) önermesinin ait olduğu sözeden dil sözedilen dil gibi Türkçedir. Ancak sözedilen dil ile sözeden dilin farklı doğal dillerde olması sağlanabilir. Örneğin sözedilen dili İngilizce olarak seçelim. O zaman da İngilizcede "kar beyazdır" anlamına gelen

(15) Snow is white.

önermesini göz önüne alalım. (15) önermesi yardımıyla sözeden dil olan Türkçede

(16) "Snow is white" İngilizce'de doğrudur.

önermesini kurabiliriz. (16) önermesi gerçekten doğrudur. Nitekim İngilizce'de "snow is white" tümcesi Türkçe "kar beyazdır" tümcesi ile anlamdaştır. "Kar beyazdır" Türkçede doğru olduğuna göre, "snow is white" de İngilizce'de doğrudur.

Dikkat edilirse (16) önermesinde "İngilizce" nitelemesini kaldırmak mümkün değildir. Nitekim bu nitelemeyi kaldırmakla elde edilen

(17) "Snow is white" doğrudur

anlamlı ve doğru bir önerme sayılamaz. Buna karşılık sözeden dil ile sözedilen dil aynı olduğu (12) önermesinden "Türkçe" nitelemesini kaldırabiliriz. Gerçekten bu nitelemeyi kaldırmakla elde edilen

(18) "kar beyazdır" doğrudur

önermesi anlamlı ve doğru bir önermedir.

"Doğru" sözcüğünün karşıtı olan "*yanlış*" sözcüğünün geçtiği "olduğu yanlıştır" sözü

(19) Bütün insanların filozof olduğu yanlıştır

gibi bir önermede sözedilen dile ait doğruluk fonksiyonu durumunda bir birli önerme eklemidir.

(20) p olduğu yanlıştır

önermesinin doğruluk çizelgesi

(21)

p	p olduğu yanlıştır
D	Y
Y	D

biçimindedir. (19) çizelgesi değilleme ekleminin doğruluk çizelgesidir. Dolayısıyla "olduğu yanlıştır" sözünün değilleme eklemini dile getirdiğini söyleyebiliriz. Bu sözü kullanmadan (17) önermesini ancak

(22) (bütün insanlar filozoftur) değil

gibi sözeden dile ait bir önermede birli yüklem olarak kullanılabilir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki kümelerde geçen "doğru" sözcüğünün kullanılış biçimini belirtiniz.

1. Delikanlı öyle doğruymuşki, boyuna yükselmiş.
2. Haber doğru çıktı.
3. Ali'nin İstanbul'a gideceği doğrudur.
4. "Kar beyazdır" doğrudur ancak ve ancak kar beyaz ise.

6.1.3.2 Anlambilimsel Doğruluk Kavramı

Anlambilim belli bir dile ait olan çeşitli türden sözcük ve sözlerin anlamını konu edinen bilimdir. İnceleme konusu olan dil sözedilen dil, inceleme için kullanılan dil ise sözeden dildir. Bir önermenin belli bir doğruluk değeri taşıması, yani doğru veya yanlış olması anlamına bağlıdır. Bu nedenle Doğru ile Yanlış, anlambilimsel kavramlar sayılır. Sözden dile ait "doğrudur" ile "yanlıştır" birli yüklemlerinin işleri uygulandıkları önermeye belli bir doğruluk değerini vermektir. Dolayısıyla bu iki yüklemin anlambilimsel doğruluk ve yanlışlık kavramlarını dile getirdiğini söyleyebiliriz.

İmdi

(1) "Kar beyazdır" Türkçede doğrudur ancak ve ancak Kar beyazdır.

önermesini göz önüne alalım. §6.1.3.1'de belirttiğimiz gibi "Türkçede" nitelemesini kaldırmak mümkündür. Böylece (1) önermesi

(2) "Kar beyazdır" doğrudur ancak ve ancak kar beyazdır.

biçiminde kısaltılabilir. (1) ile (2)'yi sembolleştirmek amacıyla

(3) ("Kar beyazdır": Ö, kar beyazdır: p)

sembolleştirme biçimini ortaya koyalım. "Kar beyazdır" tırnak içinde alınınca sözedilen dile ait olan "kar beyazdır" önermesinin sözeden dile ait olan bir adını oluşturur. İşte bu adı "Ö" ad temsilcisi ile temsil ediyoruz. Öte yandan "kar beyazdır" sözünü önerme olarak "p" önerme temsilcisi ile temsil ediyoruz. Gerek "Ö" ad temsilcisinin gerekse "p" önerme temsilcisinin bu bağlamda sözeden dile ait olduğunu belirtmeliyiz. Sözü geçen (3) sembolleştirme gereği (1) önermesi

(4) Ö türkçede doğrudur $\leftrightarrow$ p

biçiminde sembolleştirilir. "Ancak ve ancak... ise" yerine $\leftrightarrow$ işaretini koyduk. "Türkçede" yerine "D dilinde" sözünü koyarsak (4),

(5) Ö, D dilinde doğrudur $\leftrightarrow$ p

biçimini alır. "Ö" D diline ait bir önermenin adını, "p" de aynı önermenin kendisini temsil ettiğinde, (5) önerme kalıbının bütün yerine koyma örnek-

leri doğrudur. (1) önermesi de (5)'in bir yerine koyma örneğidir. (5)'in yerine koyma örnekleri bir arada "D dilinde doğrudur" birli yüklemin dile getirdiği anlambilimsel doğruluk kavramının anlamını belirler. Bu nedenle (5) önerme kalıbına *anlambilimsel doğruluk kavramının uygunluk koşulu* denir.

"D dilinde yanlıştır" birli yüklemi

(6) Ö, D dilinde yanlıştır $\leftrightarrow$ Ö, D dilinde doğru değildir.

biçiminde tanımlanabilir. (5) ile (6)'ya dayanarak sözden dilde

(7) Ö önermesi D dilinde doğrudur veya Ö önermesi D dilinde yanlıştır.

biçiminde dile getirilebilen üçüncü halin olmazlığı ilkesini ispatlayabiliriz. Nitekim önermeler mantığı gereği

(8) $p \vee \sim p$

bir totolojidir. (5) gereği

(9) $p \equiv$ (Ö, D dilinde doğrudur),

(5) ve (6) gereği de

(10) $(\sim p) \equiv$ (Ö, D dilinde yanlıştır)

elde edilir. Dolayısıyla (8), (9) ve (10)'dan (7) elde edilir.

6.1.4 Yorumlama

B_aA biçimindeki bilme önermeleri ile K_aA biçimindeki kanı önermelerinin yorumlanması zorunluluk önermelerinin yorumlanmasına benzer. B_aA ile K_aA'nın beli bir mümkün dünyada belli birer doğruluk değeri olduğu, (mutlak) doğruluk değerinin de m_0 gerçek dünyadaki doğruluk değeri olduğu kabul edilir. *Bilgisel yorumlamada M* mümkün dünyalar kümesinin yanı sıra, B^{blg} *bilgisel almaşıklık bağıntısı* ile B^{kn} *kanısal almaşıklık bağıntısı*'nın bulunduğu da kabul edilir.

(i) $m_1 \not{B}^{blg} m_1$ olursa, m_2'ye m_1'in *bilgisel almaşığı* denir.

(ii) $m_1 \not{B}^{kn} m_2$ olursa, m_2'ye m_1'in *kanısal almaşığı* denir.

(iii) B_aA biçimindeki bir önermenin *m* mümkün dünyasında doğru olması, *A* önermesinin m'nin bütün bilgisel almaşıklarında doğru olması demektir.

(iv) K_aA biçimindeki bir önermenin *m* mümkün dünyasında doğru olması, A önermesinin m'nin bütün kanısal almaşıklarında doğru olması demektir.

(v) $\mathcal{B}_a^{blg}$ yansımalı ve geçişli bir bağıntıdır. $\mathcal{B}_a^{blg} \subseteq M \times M$

(vi) $\mathcal{B}_a$ dizgisel (çıkmazsız) ve geçişli bir bağnıtıdır. $\mathcal{B}^{kn} \subseteq M \times M$

(vii) $B_a^{kn} \subseteq B_a^{blg}$ yani

$\forall m_1 \forall m_2 (m_1 \mathcal{B}_a^{kn} m_2 \rightarrow m_1 \mathcal{B}_a^{blg} m_2)$.

Örnek olarak

(1) önermesinin $B_ap \rightarrow K_ap$

(2) $(M: \{m_0, m_1\}, \mathcal{B}_a^{blg}: \{<m_0, m_0>, <m_0, m_1>, <m_1, m_1>\}; \mathcal{B}_a^{kn}: \{<m_0, m_1>, <m_1, m_1>\}; m_0: p, m_1:)$

yorumlamasında doğruluk değerini bulalım. Dikkat edilirse (1) yorumlamasındaki $\mathcal{B}^{blg}$ ile $\mathcal{B}^{kn}$ bağıntıları sözü geçen (v), (vi) ve (vii) koşullarını yerine getirmektedir. Nitekim $\mathcal{B}^{blg}$ yansımalı ve geçişli, $\mathcal{B}^{kn}$ de dizgisel (yani çıkmazsız) ve geçişlidir. Ayrıca $\mathcal{B}^{kn}$, $\mathcal{B}^{blg}$'nin alt kümesidir. İmdi (1) önermesinin doğru olması m_0'da doğru olması demektir. "B_ap"nin m_0'da doğru olması "p" önermesinin m_0'ın bilgisel almaşıkları olan m_0 ve m_1'de doğru olması demektir. Oysa p, m_0'da doğru m_1'de ise yanlıştır. O halde "B_ap" m_0'da yanlış olup (1) önermesi m_0'da doğrudur. Dolayısıyla (1) önermesi (2) yorumlamasında doğrudur.

İkinci örnek olarak

(3) $\sim B_a \sim p \wedge \sim K_a \sim p$

önermesinin (2) yorumlamasında doğruluk değerini bulalım. "$\sim B_a \sim p$"nin m_0'da doğru olması "$B_a \sim p$"nin m_0'da yanlış olması demektir. "$B_a \sim p$"nin m_0'da yanlış olması "$\sim p$"nin m_0 ile m_1'den en az birinde yanlış olması demektir. Bu da "p"nin m_0 ile m_1'den en az birinde doğru olması demektir.

Oysa "p" m_0'da doğrudur. O halde "$B_a{\sim}p$" m_0'da yanlış olup "$\sim B_a{\sim}p$" m_0'da doğrudur. "$\sim K_a{\sim}p$"nin m_0'da doğru olması "$\sim p$"nin m_0'ın tek kanısal almaşığı olan m_1'de doğru olması, dolayısıyla "p"nin m_1'de yanlış olması demektir. "p" ise m_1'de yanlıştır. O halde "$K_a{\sim}p$" m_1'de yanlış olup "$\sim K_a{\sim}p$" m_0'da doğrudur. O halde (3) önermesi (2) yorumlamasında doğrudur.

(4) $\sim B_a{\sim}A$

biçimindeki önermeler

(5) B_a^*A

biçiminde,

(6) $\sim K_a{\sim}A$

biçimindeki önermeler de

(7) K_a^*A

biçiminde kısaltılır. B_a^*, B_a'nın ikilisi olan bir mantık değişmezi, K_a^*'da K_a'nın ikilisi olan bir mantık değişmezidir. "B_a" ile "K_a" değişmezleri "□" zorunluluk değişmezinin karşılıklarıdır. "B_a^*" ile "K_a^*" değişmezleri ve "◇" imkân değişmezinin karşılıklarıdır. Böylece *a* gibi her ad için B_a, B_a^*, K_a, K_a^* gibi dört ayrı *bilgisel değişmez* bulunduğunu görüyoruz. Yalnız B_a ile B_a türünden tanımlanabilen B_a^*'ya değil, K_a ile K_a^*'ya da (geniş anlamda) bilgisel değişmezler diyoruz. B_a bilme değişmezi, B_a^* bilme değişmezi ikilisidir. B_a ile B_a^* değişmezleri S4 kiplik mantığı sistemi ve dolayısıyla K, D ve T sistemlerinin yasalarına uyarlar.

B_a^*A ile K^*A biçimindeki önermelerin verilen bir yorumlamadaki doğruluk değeri şöyle belirlenir.

(viii) B_a^*A biçimindeki bir önermenin *m* mümkün dünyasında doğru olması, A önermesinin m'nin bütün bilgisel almaşıklarında doğru olması demektir.

(ix) K_a^*A biçimindeki bir önermenin m mümkün dünyasında doğru olması, A önermesinin *m* nin bütün kanısal almaşıklarında doğru olması demektir.

Örnek olarak

(8) $B_a^* p \wedge K_a^* q$

önermesinin

(9) (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; $\mathcal{B}_a^{blg}$: $\{<m_0, m_0>, <m_0, m_2>, <m_2, m_2>, <m_2, m_1>, <m_1, m_1>, <m_0, m_1>\}$; $\mathcal{B}_a^{kn}$: $\{<m_0, m_2>, <m_2, m_1>, <m_0, m_1>, <m_1, m_1>,\}$; m_0: p; m_1: p, q; m_2:)

yorumlamasında doğruluk değerini bulalım. B_a^* p'nın m_0'da doğru olması, "p"nin m_0'ın bilgisel almaşıkları olan m_0, m_1 ve m_2'de doğru olması demektir. Oysa "p" m_2'de yanlıştır. O halde "B_a^*p" m_0'da yanlıştır. Dolayısıyla (8) önermesi (9) yorumlamasında yanlıştır.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin verilen tek yorumlamadaki doğruluk değerini bulunuz.

1. $B_a(p \rightarrow q)$
2. $B_a p \wedge \sim K_a^* q$
3. $\sim(B_a^* p \vee q)$
4. $B_a^*(p \vee q) \wedge K_a p$
5. $\sim(K_a p \rightarrow B_a^* q)$

Yorumlama:

(M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; $\mathcal{B}_a^{blg}$:$\{<m_0, m_0>, <m_0, m_1>, <m_1, m_2>, <m_0, m_2>, <m_2, m_2>\}$; $\mathcal{B}_a^{kn}$: $\{<m_0, m_1>, <m_1, m_2>, <m_2, m_2>, <m_2, m_2>$; m_0: p; m_1: q; m_2: p, q).

6.1.5 Çözümleyici Çizelge ile Doğruluk Değeri Hesaplaması

Bilgisel önermeler mantığında bir önermenin verilen yorumlamadaki doğruluk değerini kiplikli önermeler mantığında kullanılan doğruluk çizelgesinin benzeri ile hesaplayabiliriz. Bu amaçla aşağıdaki kuralları kullanırız.

(i) *Bilgisel değişmezlerin değillemesi kuralları*

1. $[m] \sim B_a p$ — $[m] B_a^* \sim p$ (1)

1. $[m] \sim B_a^* p$ — $[m] B_a \sim p$ (1)

1. $[m] \sim K_a p$ — $[m] K_a^* \sim p$ (1)

1. $[m] \sim K_a^* p$ — $[m] K_a \sim p$ (1)

(ii) *B_a bilme değişmezinin verilen yorumlamada elenmesi kuralı:*

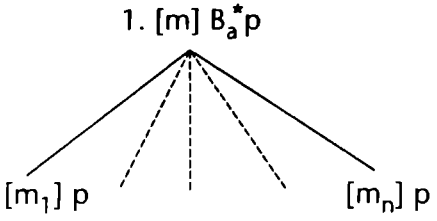
m'nin bilgisel almaşıkları $m_1, \ldots, m_n$ ise:

1. $[m] \sim B_a p$

$$\left.\begin{array}{l} [m_1]\ p \\ \vdots \\ [m_n]\ p \end{array}\right] (1)$$

(iii) *B* bilme değişmezi ikilisinin verilen yorumlamada elenmesi kuralı:*

m'nin bilgisel almaşıkları m_1, m, m_n ise:



(iv) *K_a kanı değişmezinin verilen yorumlamada elenmesi kuralı:*

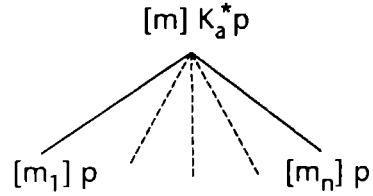
m'nin kanısal almaşıkları $m_1, \ldots, m_n$ ise:

1. $[m] K_a p$

$$\left.\begin{array}{l} [m_1]\ p \\ \vdots \\ [m_n]\ p \end{array}\right] (1)$$

(v) *K_a^* kanı değişmezi ikilisinin verilen yorumlamada elenmesi kuralı*

m'nin kanısal almaşıkları $m_1,...,m_n$ ise:



Örnek olarak

(1) $B_a(p \rightarrow q)$

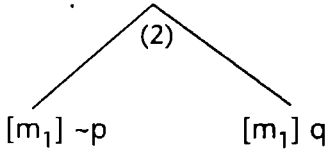
önermesinin

(2) (M:{m_0, m_1}; B_a^{blg}:{<m_0, m_0>, <m_0, m_1>, <m_1, m_1>}; m_0:p, m_1: q)

yorumlamasında doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile hesaplayalım. (1) önermesinde K_a ile K_a^* geçmediğinden (2) yorumlamasında B_a^{kn} bağıntısına yer vermedik.

(3) 1. [m_0] B_a (p → q) (B.Ö.)

2. [m_1] p → q (1)



"[m_1] ~p" yanlış "[m_1] q" ise doğrudur. O halde ikinci açık yol doğru olduğundan, (1) önermesi (2) yorumlamasında doğrudur.

İkinci örnek olarak

(4) ~($B_aB_bp \rightarrow B_ap$)

önermesinin

(5) (M: {m_0, m_1, m_2}; $\mathcal{B}_a^{blg}$: {<m_0, m_0>, <m_0, m_1>, <m_1, m_1>, <m_1, m_2>, <m_0, m_2>, <m_2, m_2>}; $\mathcal{B}_b^{blg}$: {<m_0, m_0>, <m_0, m_2>, <m_2, m_2>, <m_2, m_1>, <m_0, m_1>, <m_1, m_1>}; m_0: p, m_1:, m_2: p)

yorumlamasında doğruluk değerini bulunuz.

(6) 1. $[m_0]\ \sim(B_aB_bp \rightarrow B_ap)$ (B.Ö.)

3. $[m_0]\ B_aB_bp$
2. $[m_0]\ \sim B_ap$ (1)

7. $[m_0]\ B_a^*\sim p$ (2)

4. $[m_0]\ B_bp$
5. $[m_1]\ B_bp$ (3)
6. $[m_2]\ B_bp$

$[m_0]\ p$
$[m_1]\ p$ (4)
$[m_2]\ p$

$[m_1]\ \overline{p}$
$[m_2]\ p$ (5)

$[m_2]\ p$ (6)

(7)

$[m_0]\ \sim p$ X $[m_1]\ \sim p$ X $[m_2]\ \sim p$ X

(6) çizelgesi kapalı olduğundan, (4) önermesi (5) yorumlamasında (ve her yorumlamada) yanlıştır.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin verilen tek yorumlamadaki doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile hesaplayalım.

1. $K_ap \wedge B_aq$
2. $\sim K_a(p \rightarrow q) \wedge B_a^*p$
3. $K_a^*(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

4. $K_a K_b^* p \wedge \sim B_b q$

5. $K_a(p \rightarrow B_b q)$

Yorumlama:

$\{M: \{m_0, m_1, m_2\}; \mathcal{B}_a^{blg}: \{<m_0, m_0>, <m_0, m_1>, <m_1, m_1>, <m_1, m_2>, <m_0, m_2>, <m_2, m_2>\}; \mathcal{B}_a^{kn}: \{<m_0, m_1>, <m_1, m_2>, <m_0, m_2>, <m_2, m_2>\}; \mathcal{B}_b^{blg}: \{<m_0, m_0>, <m_0, m_2>, <m_2, m_1>, <m_1, m_1>, <m_2, m_2>, <m_0, m_1>\}; \mathcal{B}_b^{kn}: \{<m_0, m_2>, <m_2, m_1>, <m_0, m_1>, <m_1, m_1>\}; m_0: p; m_1: q; m_2: p, q\}$.

6.1.6 Çözümleyici Çizelge ile Doğrulayıcı Yorumlama Belirlemesi

Bilgisel önermeler mantığında verilen bir önermenin (varsa) doğrulayıcı yorumlaması, kiplikli önermeler mantığında kullanılan çözümleyici çizelgenin benzeri ile belirlenebilir. Bu çözümleyici çizelgenin başlıca kurallarını aşağıda gösteriyoruz.

(i) *Bilgisel değişmezlerin değilleme kuralları:*

1. $[k_1...k_n] \sim B_a A$
   $[k_1...k_n] B_a^* \sim A$ (1)

1. $[k_1...k_n] \sim B_a^* A$
   $[k_1...k_n] B_a \sim A$ (1)

1. $[k_1...k_n] \sim K_a A$
   $[k_1...k_n] K_a^* \sim A$ (1)

1. $[k_1...k_n] \sim K^* A$
   $[k_1...k_n] K_a \sim A$ (1)

(ii) *B_a^*'nın elenmesi kuralı*

1. $[k_1...k_n] B_a^* A$
   $[k_1...k_{n+1}] A$ (1)

"$[k_1...k_n\ k_{n+1}]$" öneki aynı yolda önceki hiçbir satırda geçmemelidir.

(iii) *K_a^*'nın elenmesi kuralı*

1. $[k_1...k_n] K_a^* A$
   $[k_1...k_n\ k_{n+1}] A$ (1)

"$[k_1...k_n\ k_{n+1}]$" öneki aynı yolda önceki hiçbir satırda geçmemelidir.

(iv) *B_a'nın elenmesinin genel kuralı*

1. $[k_1...k_n]\ B_a^*A$

$[k_1...\ k_n\ k_{n+1}]\ A$ (1)

"$[k_1...k_n\ k_{n+1}]$" aynı yolda önceki satırlarda geçiyorsa ikinci satırın yazılması zorunludur.

(v) *Ka'nın elenmesinin genel kuralı*

1. $[k_1...k_n]\ K_a^*A$

$[k_1...k_n\ k_{n+1}]\ A$ (1)

"$[k_1...k_n\ k_{n+1}]$" aynı yolda önceki satırlarda geçiyorsa ikinci satırın yazılması zorunludur.

(vi) *B_a'nın elenmesinin özel kuralları $\mathfrak{B}_a^{blg}$'nin yansıma özelliğine dayanan kural:*

1. $[k_1...k_n]\ B_a^*A$

$[k_1...k_n]\ A$ (1)

B_a^{blg}'nin geçişlilik özelliğine dayanan kural:

1. $[k_1...k_n]\ B_a^*A$

$[k_1...k_n\ k_{n+1}\ k_{n+2}]\ A$ (1)

B_a^{kn}'nin dizisel ve geçişli olduğunu daha önce belirtmiştik. Bazı mantıkçılara göre B_a^{kn} bir de *Euklides özelliği* denilen aşağıdaki özelliği de taşır:

(1) $\forall m_1 \forall m_2 \forall m_3[(m_1 \mathfrak{B}_a^{kn}\ m_2 \wedge m_1 \mathfrak{B}_a^{kn}\ m_3) \rightarrow m_2 \mathfrak{B}_a^{kn} m_3]$.

Dikkat edilirse (1)'den

(2) $\forall m_1 \forall m_2 \forall m_3[(m_1 \mathfrak{B}_a^{kn} m_2 \wedge m_1 \mathfrak{B}_a^{kn} m_3) \rightarrow (m_1 \mathfrak{B}^{kn} m_2 \wedge m_2 \mathfrak{B}^{kn} m_1 \wedge m_1 \mathfrak{B}^{kn} m_1 \wedge m_2 \mathfrak{B}^{kn} m_2)]$

elde edilir.

Buna göre K_a'nın elenmesinin özel kuralları şöyle olur.

(vii) *K_a'nın elenmesinin özel kuralları*

B_a^{kn}'nin geçişliliğine dayanan özel kural:

1. $[k_1...k_n]\ K_aA$

$[k_1...k_n\ k_{n+1}\ k_{n+2}]\ A$ (1)

B_a^{kn}'nin Euklides özelliğine dayanan özel kural:

1. $[k_1...k_n]\ K_aA$

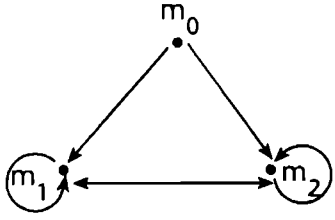
$[k_1'...k_{n'}']\ A$ (1)

"$[k_1'...k_{n'}']$" aynı yolda önceki satırlarda geçen ve "$[k_1...k_n]$"den farklı olan bir örnektir.

Örnek olarak

(3) $\{<m_0, m_1>, <m_0, m_2>, <m_1, m_2>, <m_2, m_1>, <m_1, m_1>, <m_2, m_2>\}$

bağıntısı dizisel, geçişli ve Euklides özelliğini taşıyan bir bağıntıdır. Dolayısıyla Euklides özelliğini taşıyan B_a^{kn} gibi bir kanısal almaşıklık bağıntısı olarak seçilebilir. (3)'ün çizgesi



(Şekil 1)

biçimindedir.

Örnek olarak

(1) $\sim(K_aK_ap \rightarrow K_ap)$

önermesinin varsa bir doğrulayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile bulalım.

(2) 1. [0] $\sim(K_aK_ap \rightarrow K_ap)$ (B.Ö.)

6, 4. [0] K_aK_ap (1)

2. [0] $\sim K_ap$

3. [0] $K_a^*\sim p$ (2)

[0.1]$\sim p$ (3)

5. [0.1] K_ap (4)

[0.1.1] p (5)

7. [0.1.1] K_ap (6)

[0.1.1] p

Dikkat edilirse B_a^{kn} yansımalı olduğundan dolayı "[0.1] K_ap" satırından "[0.1] p" satırını elde edemeyiz. 7. adımda "[0.1.1] K_ap" satırından "[0.1.1] p" satırını elde ettik. Yoksa "[0.1.1] p" satırını elde ederdik. O zaman da 8. adımda "[0]K_aK_ap" satırından "[0.1.1.1] K_ap" elde edilirdi. Bu da durmadan sonsuza kadar süren adımlara yol açacaktı. (2) çizelgesinin tek açık yolunun belirlediği yorumlama şöyledir: "[0]" yerine m_0, "[0.1]" yerine m_1 ve "[0.1.1]" yerine m_2 koyuyoruz.

(3) (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; $\mathcal{B}_a^{kn}$: $\{<m_0, m_1>, <m_1, m_2>, <m_0, m_2>, <m_2, m_2>\}$; m_0:; m_1:; m_2: p)

İkinci örnek olarak

(4) $\sim(K_a^*p \rightarrow K_aK_a^*p)$

önermesinin varsa bir doğrulayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile bulalım. Eğer B_a^{kn} bağıntısı Euklides özelliğini taşırsa (4)'ün doğrulayıcı yorumlaması yoktur.

(5) 1. [0] $\sim(K_a^*p \rightarrow K_aK_a^*p)$ (B.Ö.)

3. [0] K_a^*p (1)

2. [0] $\sim K_aK_a^*p$

4. [0] $K_a^*K_a\sim p$ (2)

5. [0.1] p (3)

6. [0.2] $K_a\sim p$ (4)

[0.1]$\sim p$ (6)

X

Dikkat edilirse 6. adımda $\mathfrak{B}_a^{kn}$ bağıntısının Euklides özelliğini taşıdığını varsayarak 6. adımda "[0.2] $K_a{\sim}p$" satırından "[0.1] $\sim p$" satırını elde ettik. Böylece çizelge kapandı. Dolayısıyla (4)'ün bu durumda doğrulayıcı yorumlaması olmadığını görüyoruz. Öte yandan $\mathfrak{B}_a^{kn}$ bağıntısı Euklides özelliğini taşımazsa, (5) kapalı çizelgesi yerine aşağıdaki açık çizelge elde edilir.

(6) 1. [0] $\sim(K_a^*p \rightarrow K_aK_a^*p)$
3. [0] K_a^*p
2. [0] $\sim K_aK_a^*p$ (1)
4. [0] $K_a^*K_a{\sim}p$ (2)
[0.1] p (3)
5. [0.2] $K_a{\sim}p$ (4)
[0.2] $\sim p$ (5)

(6) çizelgesinin tek açık yolu aşağıdaki doğrulayıcı yorumlamayı belirliyor. "[0]" yerine m_0, "[0.1]" yerine m_1 ve "[0.2]" yerine m_2 koyuyoruz.

(7) (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; $\mathfrak{B}_a^{kn}$: $\{\langle m_0, m_1\rangle, \langle m_0, m_2\rangle, \langle m_1, m_1\rangle, \langle m_2, m_2\rangle\}$; m_0:; m_1:p; m_2:).

Üçüncü örnek olarak

(8) $\sim(K_ap \rightarrow K_aB_ap)$

önermesinin varsa bir doğrulayıcı yorumlamasını bulalım.

(9) 1. [0] $\sim(K_ap \rightarrow K_aB_ap)$
5. [0] K_ap
2. [0] $\sim K_aB_ap$ (1)
3. [0] $K_a^*B_a^*{\sim}p$ (2)
4. [0.1] $B_a^*{\sim}p$
[0.1.1] $\sim p$ (4)
[0.1] p (5)

Dikkat edilirse

(10) [0] $\mathfrak{B}_a^{kn}$ [0.1]

(11) [0.1] $\mathfrak{B}_a^{blg}$ [0.1.1]

yazılabilir. Oysa $B_a^{kn} \subseteq B_a^{blg}$. Dolayısıyla (10)'dan

(12) [0] $\mathfrak{B}_a^{blg}$ [0.1]

elde edilir. $\mathfrak{B}_a^{blg}$ geçişli olduğundan (11) ile (12)'den

(13) [0] $\mathfrak{B}_a^{blg}$ [0.1.1]

elde edilir. Ancak (13), "[0] $K_a p$" satırından "[0.1.1] p"yi elde etmemizi sağlamaz. Dolayısıyla 5. adımda "[0] $K_a p$"den ancak "[0.1] p"yi elde edebiliriz. İmdi (9) çizelgesinin tek açık yolu aşağıdaki doğrulayıcı yorumlamayı belirler. "[0]" yerine m_0, "[0.1]" yerine m_1, "[0.1.1]" yerine de m_2 koyuyoruz.

(10) (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; $\mathfrak{B}_a^{blg}$: $\{<m_0, m_1>, <m_1, m_2>, <m_0, m_0>, <m_1, m_1>, <m_2, m_2>, <m_0, m_2>\}$; $\mathfrak{B}_a^{kn}$: $\{<m_0, m_1>, <m_1, m_1>\}$; m_0:; m_1: p; m_2:).

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin varsa doğrulayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile bulunuz.

1. $B_a(p \rightarrow q)$
2. $\sim(K_a p \rightarrow B_a B_a^* p)$
3. $K_a(K_a p \wedge \sim p)$
4. $\sim(K_a p \rightarrow B_a K_a p)$
5. $\sim(K_a B_a p \rightarrow K_a p)$
6. $K_b(p \wedge \sim K_a p)$

6.1.7 Bilgisel Önermeler Mantığı Yasaları ve Çözümleyici Çizelge ile Denetleme

Bilgisel mantığın yasaları üç öbeğe ayrılabilir. Birinci öbek yalnız bilme değişmezleri ve bunların ikilisine (yani B_a, B_b,..., B_a^*, B_b^*, ... ye) dayanan yasalardan oluşur. İkinci öbek yalnız kanı değişmezleri ile bunların ikilisine (yani K_a, K_b, ..., K_a^*, K_b^*, ... ye) dayanan yasalardan oluşur. Üçüncü öbek ise her

iki türlü değişmeze dayanan yasalardan oluşur. 1'inci öbek yasalarına salt bilgisel yasalar, 2'nci öbek yasalarına salt kanısal yasalar, 3'üncü öbek yasalarında da karma bilgisel-kanısal yasalar diyoruz. Bu yasaların başlıcalarını aşağıda gösteriyoruz.

1'inci öbek: Salt bilgisel yasalar

Bu yasalar tek kişiye (*a*'ya) ilişkin yasalar ile birden çok sayıda kişiye (*a, b, ...*) ilişkin yasalar olmak üzere iki alt öbeğe ayırabiliriz.

1'inci alt öbek: Tek kişiye ilişkin salt bilgisel yasalar

Bu yasalar S4 kiplik mantığı sisteminin yasalarında "L" yerine "B_a" ve "M" yerine "B_a^*" koymakla elde edilen yasalardır.

S4 sisteminin yasaları K sisteminin, D sisteminin ve T sisteminin yasalarının yanısıra S4'e özgü yasaları, yani K, D ve T'nin yasası olmayan S4'e ait yasalardan oluşur. Bu yasaların başlıcalarını aşağıda gösteriyoruz.

(i) *K sistemi yasaları*

1. $B_a(p \rightarrow q) \rightarrow (B_ap \rightarrow B_aq)$

2. $B_a(p \wedge q) \leftrightarrow (B_ap \wedge B_aq)$

3. $B_a^*(p \vee q) \leftrightarrow (B_a^*p \vee B_a^*q)$

4. A bir totoloji olduğunda, B_aA.

(ii) *D sistemi yasaları*

1. $B_ap \rightarrow B_a^*p$

2. $\sim(B_ap \wedge B_a\sim p)$

3. *A* bir totoloji olduğunda, B_a^*A.

(iii) *T sistemi yasaları*

1. $B_ap \rightarrow p$

2. $p \rightarrow B_a^*p$

(iv) *S4 sistemine özgü yasalar (geçişliliğin sonucu olan yasalar)*

1. $B_ap \rightarrow B_aB_ap$

2. $B_a^* B_a^* p \rightarrow B_a^* p$

3. $B_a p \leftrightarrow B_a B_a p$

4. $B_a^* B_a^* p \leftrightarrow B_a^* p$

5. $B_a^* B_a B_a^* p \rightarrow B_a^* p$

6. $B_a B_a^* p \leftrightarrow B_a B_a^* B_a B_a^* p$

7. $B_a^* B_a p \leftrightarrow B_a^* B_a B_a^* B_a p$

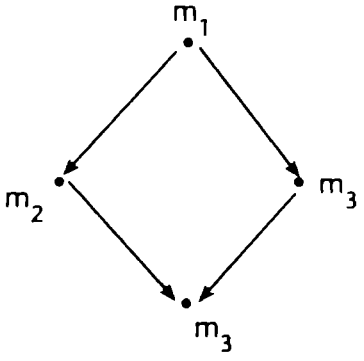
8. $\sim B_a(p \wedge \sim B_a p)$

9. $\sim B_a(p \wedge \sim B_a p \wedge \sim B_a \sim p)$

Bazı mantıkçılara göre B_a^{blg} bağıntısı *yakınsaklık* denilen aşağıdaki özelliği taşır.

(1) $\forall m_1 \forall m_2 \forall m_3 \exists m_4 [(m_1 \mathcal{B}_a^{blg} m_2 \wedge m_1 \mathcal{B}_a^{blg} m_3) \rightarrow (m_2 \mathcal{B}_a^{blg} m_4 \wedge m_2 \mathcal{B}_a^{blg} m_4)]$.

Bu türlü bir almaşıklık bağıntısının çizgesinde



(Şekil 1)

biçiminde bölümler vardır. Eğer $\mathcal{B}_a^{blg}$ bilgisel almaşıklık bağıntısı yakınsaklık özelliğini taşırsa

(2) $B_a^* B_a p \rightarrow B_a B_a^* p$

önermesi salt bilgisel bir yasa olur. Nitekim yakınsaklık özelliği aşağıdaki kurala yol açar.

(3) *B_a'nın elenmesinin yakınsaklığa dayanan özel kuralı*

1. $[k_1 ... k_n\ k_{n+1}]\ B_aA$

1. $[k_1 ... k_n\ k_{n+1}]\ B_aB$

$$\left.\begin{array}{l}[k_1 ... k_n\ k_{n+1}\ k_{n+2}]\ A\\ [k_1 ... k_n\ k_{n+1}\ k_{n+2}]\ B\end{array}\right] (1)$$

(3) kuralı'na dayanarak (2)'nin geçerli olduğunu aşağıdaki çözümleyici çizelge ile denetleyebiliriz.

(4) 1. $[0]\ \sim(B_a^*B_ap) \rightarrow B_aB_a^*p)$ (B.Ö.)

$$\left.\begin{array}{l}3.\ [0]\ B_a^*B_ab\\ 2.\ [0]\ \sim B_aB_a^*p\end{array}\right] (1)$$

3. $[0]\ B_a^*B_a\sim p$ (2)

4. $[0.1]\ B_ap$ (3)

4. $[0.1.1]\ B_a\sim p$ (3)

$$\left.\begin{array}{l}[0.1.1]\ p\\ [0.1.1]\ \sim p\\ \quad X\end{array}\right] (4)$$

Görüldüğü gibi 4. adımda "$[0.1]\ B_ap$" ile "$[0.2]\ B_a\sim p$" satırlarına (3) kuralını uygulayarak "$[0.1.1]\ p$" ve "$[0.1.1]\ \sim p$" satırlarını elde ettik.

2'nci alt öbek: Birden çok kişiye ilişkin salt bilgisel yasalar

1. $B_aB_bp \rightarrow B_ap$

2. $B_b(B_ap \rightarrow B_bp)$

3. $\sim B_b(B_ap \wedge \sim B_bp)$

2'nci öbek: Salt kanısal yasalar

B_a^{kn} bağıntısı dizisel ve geçişlidir, ama yansımalı değildir. Bu nedenle salt kanısal yasalar arasında K ile D sisteminin yasaları ve geçişliliğin sonucu olan yasalar yer alır.

(i) *K sistemi yasaları*

1. $K_a(p \rightarrow q)\ (K_ap \rightarrow K_aq)$

2. $K_a(p \wedge q) \leftrightarrow (K_ap \wedge K_aq)$

3. $K_a^*(p \vee q) \leftrightarrow (K_a^*p \vee K_a^*q)$

4. A bir totoloji olduğunda, K_aA

(ii) *D sistemi yasaları*

1. $K_ap \rightarrow K_a^*p$

2. $\sim(K_ap \wedge K_a\sim p)$

3. A bir totoloji olduğunda, K_a^*A

(iii) *Geçişliliğin sonucu olan yasalar*

1. $K_ap \rightarrow K_aK_ap$

2. $K_a^*K_a^*p \rightarrow K_a^*p$

3. $\sim K_a(p \wedge \sim K_ap)$

4. $\sim K_a(K_aK_ap \wedge \sim K_ap)$

5. $\sim K_a(K_ap \wedge \sim p)$

3'üncü öbek: Karma bilgisel-kanısal yasalar

1. $B_ap \rightarrow K_ap$

2. $B_ap \rightarrow K_aB_ap$

3. $K_aB_ap \rightarrow K_ap$

4. $\sim B_a(p \wedge \sim K_ap)$

5. $\sim K_a(B_ap \wedge \sim B_aK_ap)$

Örnek olarak "$K_aB_ap \rightarrow K_ap$" yasasını çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(5) 1. [0] $\sim[K_aB_ap \rightarrow K_ap)$ (B.Ö.)

4. [0] K_aB_ap
2. [0] $\sim K_ap$ (1)

3. [0] $K_a^*\sim p$ (2)

[0.1] $\sim p$ (3)

5. [0.1] B_ap (4)

[0.1] p (5)

X

5. adımda $\mathfrak{B}^{blg}$ bağıntısının yansıma özelliğine dayanan özel kural yardımıyla "[0.1] B_ap satırından "[0.1] p" satırını elde ettik. Çizelge kapalı olduğundan (B.Ö.) tutarsız olup "$K_aB_ap \rightarrow K_ap$" önermesi geçerlidir.

İkinci örnek olarak "$\sim B_a(p \wedge \sim B_ap)$" yasasını çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(6) 5, 1. [0] $B_a(p \wedge \sim B_ap)$

2. [0.1] $p \wedge \sim B_ap$ (1)

[0.1] p
3. [0.1] $\sim B_ap$ (2)

4. [0.1] $B_a^*\sim p$ (3)

[0.1.1] $\sim p$ (4)

6. [0.1.1] $p \wedge \sim B_ap$ (5)

[0.1.1] p
[0.1.1] $\sim B_ap$ (6)

X

Üçüncü örnek olarak "$\sim K_a(B_ap \wedge \sim B_aK_ap)$" yasasını çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(7) 1. [0] $K_a(B_ap \wedge \sim B_aK_ap)$

2. [0.1] $B_ap \wedge \sim B_aK_ap$ $[0]\mathfrak{B}^{kn}[0.1]$

6. [0.1] B_ap
3. [0.1] $\sim B_aK_ap$ (2)

4. [0.1] $B_a^*K_a^*{\sim}p$ (3)

5. [0.1.1] $K_a^*{\sim}p$ (4) $[0.1]\mathcal{B}^{blg}[0.1.1]$

[0.1.1.1] $\sim p$ (5) $[0.1.1]\mathcal{B}^{kn}[0.1.1.1]$

[0.1.1.1] p (6) $[0.1]\mathcal{B}^{blg}[0.1.1.1]$

Dikkat edilirse $\mathcal{B}_a^{kn} \subseteq \mathcal{B}_a^{blg}$ olduğundan, $[0.1.1]\mathcal{B}^{kn}[0.1.1.1]$'den $[0.1.1]\mathcal{B}^{blg}[0.1.1.1]$ elde edilir. O zaman da B^{blg}'nin geçişliliğinden dolayı $[0.1]\mathcal{B}^{blg}[0.1.1.1]$ elde edilir. Dolayısıyla 6. adımda "$[0.1]\ B_ap$"den "[0.1.1.] p"yi elde edebildik.

ALIŞTIRMALAR

§6.1.7'deki bilgisel önermeler mantığı yasalarından henüz denetlenmemiş olanları çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

6.1.8 Bilgisel Sorunlar ve Çözüm Önerileri

Bilgisel mantık, bilgi ve kanı ile ilgili "bilgisel" denilen sorunların açık seçik bir biçimde dile getirilmesini ve çok kez bu sorunlara uygun çözüm önerilerinin geliştirilmesini sağlar.

Bilgisel önermeler mantığında dile getirilebilen başlıca bilgisel sorunları ve bunlara ilişkin çözüm örneklerini aşağıda göstereceğiz.

6.1.8.1 Bilginin Kişiler Arası İletişimi

a ile *b* birbirleriyle iletişimde olan iki kişi olduğunda a'nın b'nin bildiği bir şeyi nasıl bileceğini araştıralım. *b* kişisi p olduğunu bilsin. Yani B_bp olsun. B_bp ise B_ap'yi içermez. Nitekim

(1) $B_bp \rightarrow B_ap$

koşullusu geçersizdir. Bunu göstermek için (1)'in değillemesinin bir doğrulayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile bulalım.

(2) 1. [0] $\sim(B_bp \rightarrow B_ap)$ (B.Ö.)

4. [0] B_bp

2. [0]$\sim B_ap$ (1)

3. [0] $B_a^*{\sim}p$ (2)
[0.1] $\sim p$ (3)
[0.2] p (4)

Dikkat edilirse

(3) $[0]\mathcal{B}_a^{blg}[0.1]$

ve

(4) $[0]\mathcal{B}_b^{blg}[0.1]$

yazılabilir. Dolayısıyla (2) çizelgesinin tek açık yolun belirlediği doğrulayıcı yorumlaması şöyledir. "[0]" yerine m_0 ve "[0.1]" yerine m_1 ve "[0.2]" yerine m_2 koyuyoruz.

(5) $(M: \{m_0, m_1, m_2\}; \mathcal{B}_a^{blg}: \{<m_0, m_1>, <m_0, m_0>, <m_1, m_1>\}; m_0:; m_1:; m_2: p)$.

(5), (2) çözümleyici çizelgesinin başlangıç önermesinin doğrulayıcı yorumlaması, (1)'in de yanlışlayıcı yorumlamasıdır. O halde "$B_bp \therefore B_ap$" çıkarımı geçersiz, "$B_bp \models B_ap$" içermesi de yanlıştır. Demek ki B_bp, B_ap'yi içermez.

Öte yandan *a* kişisi *b* kişisinin davranışını gözlemleyerek b'nin a'yı bildiği kanısına varabilir. O zaman da

(6) K_aB_bp

olur. Ancak (6)'da B_ap'yi içermez. Nitekim

(7) $K_aB_bp \rightarrow B_ap$

koşullusunun geçersiz olduğunu aşağıdaki çözümleyici çizelge ile gösteriyoruz.

(8) 1. [0] $\sim[K_aB_bp \rightarrow B_ap)$ (B.Ö.)
4. [0] K_aB_bp
2. [0] $\sim B_ap$ (1)
3. [0] $B_a^*{\sim}p$ (2)
[0.1] $\sim p$ (3)

5. [0.1] $B_b p$ (4)
[0.1.1] p (5)

Burada

(9) $[0]\mathcal{B}_a^{kn}[0.1]$

ve

(10) $[0.1]\mathcal{B}_a^{blg}[0.1.1]$

dur. Buna göre (8) çizelgesinin tek açık yolun belirlediği yorumlama şöyledir. "[0]" yerine m_0, "[0.1]" yerine m_1 ve "[0.1.1]" yerine m_2 koyuyoruz.

(11) (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; $\mathcal{B}_a^{kn}$: $\{<m_0, m_1>\}$ B_b^{blg}: $\{<m_0, m_1>, <m_1, m_2>, <m_0, m_0>, <m_1, m_1>, <m_2, m_2>, <m_0, m_2>\}$; m_0:; m_1:; m_2: p).

(11), (8) çizelgesinin başlangıç önermesinin doğrulayıcı yorumlaması ve (7)'nin bir yanlışlayıcı yorumlamasıdır. Dolayısıyla (7) geçersiz olup "$K_a B_b p$", "$K_a p$"yi içermez.

Öte yandan *b* kişisi *a* kişisinin p olduğunu bildiğini bilebilir. Bir toplumun üyeleri kendi bilim adamlarına ve genel olarak uzman kişilere güvenip bunların bilgi sahibi olduklarını bilebilirler. Bizim örneğimizde

(12) $K_a K_b p$

olur. İşte (12) önermesi daha önce ispatladığımız gibi "$K_a p$"yi içerir. Yani

(13) $K_a K_b p \rightarrow K_a p$

geçerlidir. Böylece bilgi b kişisinden a kişisine iletilmiş olur. Genel olarak bilim adamları ve uzman kişilerin bilgi sahibi olduklarına güvenerek bunların bilgilerini bir anlamda paylaşmış oluruz.

Dikkat edilirse bir bilim adamının veya uzman kişisine güvenmek gerekçesiz bir inanç değildir. Tam tersine bu güven sağlam gerekçelere, belgelere, kanıtlara dayanmalıdır. O zaman kanı bilgi haline dönüşür. Sonuç olarak $B_b p$'den $K_a B_a p$'ye, $K_a B_b p$'den $B_a B_b p$'ye ve $B_a B_b p$'den $B_a p$'ye geçilir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıda belirtilen durumların hangileri $B_c(p \rightarrow q)$ önermesini içerir?

1. $B_a(p \rightarrow q)$
2. $B_aB_a(p \rightarrow q)$
3. $K_aB_a(p \rightarrow q)$
4. $K_cB_a(p \rightarrow q)$
5. $B_cB_a(p \rightarrow q)$

6.1.8.2 Moore Çatışkısı (Paradoksu)

(1) p, ama p olduğu kanısında değilim.

Önermesi İngiliz filozofu G.E.Moore tarafından ortaya konulmuş paradoksal bir önermedir. Nitekim p'yi içtenlikle öne süren bir kişiden p olduğu kanısında olmasını bekleriz. p'yi öne sürmekle p'ye olan kanısını dile getiren bir kişi nasıl olur da p olduğu kanısında olmadığını öne sürebilir? (1) önermesi "ben" adlı yerine *a* koyarsak,

(2) $p \wedge \sim K_ap$

biçiminde dile getirilebilir. (2) önermesi ise tutarlıdır. (2)'nin doğrulayıcı yorumlaması olduğunu çözümleyici çizelge ile gösterebiliriz. (2) tutarlı olduğundan (1) önermesi de tutarlıdır.

Bilgisel mantığı ilk olarak ortaya koyan mantıkçılardan biri olan Finli J. Hintikka, Moore paradoksuna şöyle bir çözüm önermiştir. (1) veya (2) önermesi gerçekten tutarlıdır, ama

(3) $K_a(p \wedge \sim K_ap)$

önermesi tutarsız olup

(4) $\sim K_a(p \wedge \sim K_ap)$

geçerlidir. (4)'ün geçerli olduğunu daha önce ispatlamıştık. Geçerli bir önermenin değillemesinin doğru olduğu kanısında bulunamayız. Dolayısıyla (1) önermesini (tutarlı olmasına karşın) içtenlikle öne süremeyiz.

Dikkat edilirse (1) önermesine benzeyen

(2) p, ama o p olduğu kanısında değildir.

önermesi paradoksal değildir. Eğer, "o" adılı yerine *b* koyarsak (2) önermesi

(3) $p \wedge K_b p$

biçimini alır. *a*, "ben" adılı yerine alındığında,

(4) $K_a(p \wedge \sim K_b p)$

önermesi tutarlı olur. Dolayısıyla benim, (2) önermesinin doğru olduğu kanısında olmam doğal sayılır. Ama benim (1) önermesinin doğru olduğu kanısında olmam paradoksaldır. İki kullanılış arasındaki fark, (4) önermesinin tutarlı, ama (3) önermesinin tutarsız olmasından ötürüdür.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin tutarlı olduğunu çözümleyici çizelge ile birer doğruluk yorumlamasını bularak gösteriniz.

1. $p \wedge \sim K_a p$
2. $K_a(p \wedge \sim K_b p)$

6.1.8.3 Kanısal Tutarsızlık, Kanısal Geçerlilik ve Kanısal İçerme

Moore paradoksuna çözüm olarak §6.1.8.2'deki çözüm önerisini genelleştirerek aşağıdaki tanımı yapıyoruz.

a kişisi, $A_1, \ldots, A_n$ önermelerini öne sürdüğünde,

(1) $K_a(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$

önermesi tutarsız ise, $\{A_1, \ldots, A_n\}$ önermeler kümesinin *a kişisi için kanısal tutarsız* olduğunu söyleriz.

Örneğin Moore'un paradoksal önermesinin bileşenlerinin kümesi

(2) $\{p, \sim K_a p\}$

kanısal-tutarsızdır. Nitekim "$K_a(p \wedge \sim K_a p)$" tutarsızdır. Eğer (1) önermesi tutarsız ise, *a* kişisinin $A_1, \ldots, A_n$ önermelerini bir arada öne sürmesi paradok-

saldır. Moore paradoksunun çözümü, {p, ~Kap} önermeler kümesinin *a* kişisi için kanısal-geçersiz olduğunu göstermeğe dayanıyor.

{A_1, ~B} önermeler kümesi a kişisi için kanısal-tutarsız ise, a kişisi için A önermesinin B önermesini *kanısal olarak içerdiği* söylenir ve A $\models^{kn}_{a}$ B yazılır.

Örneğin

(3) $p \models^{kn}_{a} K_a p$

dir. Yani p önermesi "$K_a p$" önermesini a kişisi için kanısal olarak içerir. Nitekim "$K_a(p \wedge \sim K_a p)$" tutarsızdır.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki önerme kümelerini tutarlı ama kanısal-tutarsız olduğunu çözümleyici çizelge ile gösteriniz.

1. {p, $\sim K_a K_a p$}
2. {$p \rightarrow q$, $\sim K_a(p \rightarrow q)$}
3. {$p \rightarrow q$, $\sim K_a K_a(p \rightarrow q)$}

II. Aşağıdaki kanısal-içermelerin doğru olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

1. $p \wedge q \models^{kn}_{a} K_a(p \wedge q)$
2. $p \vee q \models^{kn}_{a} K_a \sim(\sim p \wedge \sim q)$
3. $p \vee q \models^{kn}_{a} K_a(\sim p \rightarrow q)$

6.1.8.4 Bilgisel Tutarsızlık ve Bilgisel İçerme

Moore'un paradoksal önermesinin bilgisel karşılığı olan

(1) p ama p olup olmadığını bilmiyorum

önermesi paradoksal olmamakla birlikte gene de aykırı görünüştedir.

İmdi "ben" adılı a ile gösterildiğinde, (1) önermesi

(2) $p \wedge \sim B_a p \wedge \sim B_a \sim p$

biçiminde dile getirilebilir. Nitekim "p olup olmadığını bilmiyorum", "p olduğunu bilmiyorum ve p olmadığını bilmiyorum" anlamına gelir. İmdi

(3) $B_a(p \wedge \sim B_a p \wedge \sim B_a \sim p)$

önermesi tutarsızdır.

a kişisi $A_1, \ldots, A_n$ önermelerini öne sürdüğünde

(4) $B_a(A_1, \ldots, \wedge \ldots \wedge A_n)$

önermesi tutarsız ise, $\{A_1, \ldots, A_n\}$ önermeler kümesinin a kişisi için *bilgisel-tutarsız* olduğunu söyleriz.

Sözü geçen (3) önermesi tutarsız olduğundan

(5) $\{p, \sim B_a p, \sim B_a \sim p\}$

önermeler kümesinin a kişisi için bilgisel tutarsız olduğunu söyleyebiliriz.

Ayrıca

(6) $B_a(p \wedge \sim B_a p)$

önermesi de tutarsızdır. Dolayısıyla

(7) $\{p, \sim B_a p\}$

önermeler kümesi a kişisi için bilgisel-tutarsızdır.

$\{A, \sim B\}$ önermeler kümesi a kişisi için bilgisel-tutarsız ise, A'nın B'yi *bilgisel olarak içerdiğini* söyler ve $A \overset{\text{blg}}{\underset{a}{\models}} B$ yazarız.

Örneğin

(8) $p \overset{\text{blg}}{\underset{a}{\models}} B_a p$

(9) $p \overset{\text{blg}}{\underset{a}{\models}} (B_a p \vee B_a \sim p)$

Nitekim (6) ile (3) tutarsız önermelerdir.

(10) O, p olduğunu biliyor, ama ben bunu bilmiyorum.

önermesinde de bir aykırılık vardır. Nitekim önermenin sembolik karşılığı

(11) (o: a, ben: b)

sembolleştirme biçimi gereği

(12) $B_a p \wedge \sim B_b p$

dir. Oysa

(13) $\{B_a p, \sim B_b p\}$

önermeler kümesi a kişisi için bilgisel-tutarsızdır. Nitekim

(14) $B_a(B_a p \wedge \sim B_b p)$

önermesi tutarsızdır. Başka bir deyimle

(15) $B_a p \overset{\text{bilg}}{\underset{a}{\vdash}} B_b p$

yani onu bilmesi, benim bilmemi de bilgisel olarak içerir. Böylece bilginin kişiler-arası iletişiminin bir bilgisel içerme olarak açıklanmış olur.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önerme kümelerinin tutarlı ama bilgisel-tutarsız olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

1. $\{\dot{p}, \sim B_a p\}$
2. $\{p, \sim B_a p, \sim B_a \sim p\}$
3. $\{B_a p, \sim B_b p\}$

6.1.8.5 Bilgi ile Kanı Arasındaki Farklar

Yukarıdaki kavramlara dayanarak bilgi ile kanı arasındaki bazı önemli farkları açıklayabiliriz.

1'inci fark: Birbirine benzeyen

(1) $B_a(p \wedge \sim K_a p)$

ile

(2) $K_a(p \wedge \sim B_a p)$

önermelerinden birincisi tutarsız, ikincisi ise tutarlıdır. (2)'nin doğru tutarlı olduğunu şöyle açıklayabiliriz. p geleceğe ait beklenilen bir olay dile getirsin. Söz gelişi p, kara bulutlu bir havada yağmur yağacağını dile getirebilir. Ben evin içindeyken yağmurun başladığını düşüneyim. O zaman p doğrudur ama ben p'nin doğru olduğunu bilmiyorum. Bu durumda daha önce kara bulutlu havayı gözlemenin sonucu olarak, yağmur yağdı ama benim bunu bilmediğim kanısında olabilirim.

Öte yandan

(3) $K_a p \wedge \sim B_a p$

ile

(4) $p \wedge \sim B_a p$

önermesini karşılaştıralım. (3) önermesinde hiçbir aykırılık yoktur. Bir şeyi bilmeden bu şeyin olduğu kanısında olabiliriz. Nitekim

(5) $\{K_a p, \sim B_a p\}$

önerme kümesi bilgisel-tutarsız değildir. Buna karşılık

(6) $\{p, \sim B_a p\}$

önerme kümesinin bilgisel-tutarsız olduğunu daha önce belirtmiştik.

"$K_a p$" önermesi $B_a K_a p$ önermesini içermez, yani

(7) $K_a p \not\models B_a K_a p$

yanlıştır. Ancak

(8) $K_a p \models^{blg} B_a K_a p$

doğrudur.

ALIŞTIRMALAR

1. $B_a(p \wedge \sim K_a p)$

önermesinin tutarsız olduğunu çözümleyici çizelge ile gösteriniz.

2. $(K_a p \wedge \sim B_a p)$

önermesinin tutarlı olduğunu çözümleyici çizelge ile bir doğrulayıcı yorumlamasını bularak gösteriniz.

3. $\{K_a p, \sim B_a p\}$

önerme kümesinin bilgisel-tutarsız olmadığını çözümleyici çizelge ile gösteriniz.

4. $K_a p \models B_a K_a p$'nin yanlış, $K_a p \overset{\text{bilg}}{\models} B_a K_a p$'nin doğru olduğunu çözümleyici çizelge ile gösteriniz.

8.1.8.6 Yanılma Sorunu

a "ben" adılı yerini tuttuğunda

(1) $K_a p \wedge B_a^* \sim p$

önermesi

(2) p olduğu kanısındayım ama yanılabilirim anlamına gelir. Nitekim "$B_a^* \sim p$", "$\sim B_a p$" ile eşdeğerdir. p olduğunu bilmiyorsam, p hakkında yanılabilirim.

İmdi (1) önermesi *a* kişisi için ve bilgisel-tutarsız ne de kanısal-tutarsızdır. Ancak (1)'e benzeyen

(3) $K_a p \wedge K_a^* \sim p$

önermesi tutarsız,

(4) $p \wedge K_a^* \sim p$

a kişisi için hem bilgisel-tutarsız hem kanısal tutarsız,

(5) $p \wedge B_a^* \sim p$

önermesi de bilgisel-tutarsızdır.

ALIŞTIRMALAR

1. $K_a p \wedge B_a^* \sim p$

önermesinin ne bilgisel-tutarsız ne de kanısal-tutarsız olmadığını çözümleyici çizelge ile gösteriniz.

2. $K_a p \wedge K_a^* \sim P$

önermesinin tutarsız olduğunu gösteriniz.

3. $K_a p \wedge K_a^* \sim p$

önermesinin hem bilgisel-tutarsız hem kanısal-tutarsız olduğunu çözümleyici çizelge ile gösteriniz.

4. $p \wedge B_a^* \sim p$

önermesinin bilgisel-tutarsız olduğunu çözümleyici çizelge ile gösteriniz.

6.1.8.7 "Bildiğini bilme" sorunu

Bilme değişmezini kapsayan bazı tümceler doğal, bazıları ise doğal değildir. Örneğin

(1) p olduğunu bildiğimi biliyorum

önermesi acayip sayılabilir. Buna karşılık

(2) O, p olduğunu bildiğini biliyor

doğal bir tümcedir. (1)'in anlamı yeterince açık değidir. Ancak incelediğimiz bilgisel mantık çerçevesinde (1),

(3) $B_a B_a p$

anlamına gelip

(4) $B_a p$

ile eşdeğerdir. Yani

(5) $B_a B_a p \equiv B_a p$

"Bildiğini bilme" sorunu çok eskiye gider. Platon ve Aristo "bildiğini bilme"yi "bilme"ye indirgemiştir. Orta çağda da özellikle İbn Rüşt de "bildiğini bilme"yi "bilmeye" indirgemiştir.

"$B_a B_a p$"nin bir anlamı da a'nın p olduğunu bildiğinden *emin* olmasıdır. "$B_a B_a p$"nin başka bir anlamı da a'nın p olduğunu bildiğinin *farkına varma*'sıdır. Bu son iki anlamda (5) eşdeğerliği yanlıştır. Ancak "$B_a B_a p$"

bağlamında her iki "B_a" değişmezinin geçişi "bilme" anlamında alınırsa (5) eşdeğerliği doğruluğunu korur.

6.1.8.8 "Kandığına kanma" sorunu

a'nın *p* olduğuna kanması durumunda, p olduğuna kandığı kanısında olur. Gerçekten

(1) $K_ap \models K_aK_ap$

içermesi doğrudur.

Öte yandan "K_aK_ap" önermesi "K_ap"yi içermez.

Nitekim

(2) $K_aK_ap \wedge \sim K_ap$

tutarlıdır. Ancak

(3) $K_aK_ap \overset{kn}{\models_a} K_ap$

doğrudur. Yani

(4) $K_a(K_aK_ap \wedge \sim K_ap)$

tutarsızdır.

ALIŞTIRMALAR

1. $K_ap \models K_aK_ap$

içermesinin doğru olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

2. $K_aK_ap \wedge \sim K_ap$

önermesinin tutarlı olduğunu çözümleyici çizelge ile bir doğrulayıcı yorumlamasını bularak gösteriniz.

3. $K_aK_ap \overset{kn}{\models} K_ap$

olduğunu çözümleyici çizelge ile gösteriniz.

6.1.9 Bilinme Değişmezi

(1) Binlerce matematik teoremi biliniyor

tümcesi

(2) p olduğu biliniyor

biçimindedir. "Biliniyor" sözcüğü *bilinme değişmezi* dediğimiz bir mantık değişmezini dile getirir. Bu değişmezi "Bn" işareti ile gösteriyoruz. "Bn" bir birli önerme eklemidir. Buna göre (2) biçimindeki tümceleri

(3) Bn(p)

biçiminde temsil ediyoruz.

İmdi (1) tümcesi hiçbir belli kişinin ("bilen"in) söz konusu binlerce teoremi bildiğini dile getirmez. Nitekim gerçekte bazı matematikçiler bazı teoremleri bilir, başka matematikçiler ise başka teoremleri bilir.

(4) $Bn(p) \rightarrow \exists x K_x p$

nin geçersiz olduğunu göreceğiz.

"Bn" bilinme değişmezinin anlamı aşağıdaki ilkelerle belirlenir.

(5) $\exists x B_x p \rightarrow Bn(p)$

(6) $\exists x \exists y [B_x p \wedge B_y p \wedge B_x B_y q \wedge B_y B_x p) \rightarrow Bn(p \wedge q)$

İmdi (4)'ün geçersiz olduğunu göstermek amacıyla

(7) $B_a p \wedge \sim B_a q$

(8) $B_b q \wedge \sim B_b p$

(9) $B_a B_b q$

(10) $B_b B_a p$

olduğunu kabul edelim. (7)-(10)'dan

(11) $\exists x \exists y (B_x p \wedge B_y p \wedge B_x B_y q \wedge B_y B_x p)$

elde edilir. O zaman da (6) ile (9)'dan

(12) $Bn(p \wedge q)$

elde edilir. Öte yandan bir yorumlamanın evreni olarak "x" ile "y" değişkenlerinin a ile b'den başka değerleri olmadığını düşünelim. O zaman (5)'den

(13) $\sim B_a(p \wedge q)$

ve (6)'dan

(14) $\sim B_b(p \wedge q)$

elde edilir. Evren {a, b} olduğunda, (13) ile (14)'den

(15) $\sim \exists x B_x (p \wedge q)$

elde edilir. O halde (10)'un doğru olmasına karşın (13)'ün yanlış olabildiğini görüyoruz. Dolayısıyla (4) önermesinin geçersiz olduğunu bir yorumlama ile göstermiş oluyoruz.

6.2 Bilgisel Varlık Mantığı

6.2.1 Yorumlama

Niceleme, özdeşlik veya varlık mantığına B_a, K_a, B_a^*, K_a^*, B_b, K_b, B_b^*, K_b^*, ... bilgisel değişmezleri ekleyerek *bilgisel niceleme, özdeşlik* ve *varlık* mantıkları elde edilir. Biz burada doğrudan doğruya bilgisel varlık mantığını inceleyeceğiz.

Bilgisel varlık mantığında ad temsilcilerini iki öbeğe ayırıyoruz. Birinci öbekte yer alan a, b, c... harfleri bilgi ve kanı sahibi olabilen kişi adlarını temsil eder. Bu harflere kişisel *ad temsilcileri* diyoruz. Kişisel ad temsilcileri bilgisel değişmezlerinin alt göstergesi olarak kullanılabilirler. İkinci öbekte yer alan i, j, k, ... harfleri bilgi ve kanı sahibi olamıyan insan-dışı birey adlarını temsil eder. Bu harflere *kişisel- olmayan ad temsilcileri diyoruz.* Bunları bilgisel değişmezlerin alt göstergesi olamazlar.

Varlık mantığında olduğu gibi, bilgisel varlık mantığında da

(1) $E!a \equiv \exists x\ (x = a)$

yani a'nın varolması, $\exists x\ (x = a)$ anlamına gelir.

Burada incelediğimiz bilgisel varlık mantığında bilgisel değişmez olarak yalnız B_a ile B_a^*'nın bulunduğunu kabul edeceğiz. O zaman bilgisel varlık

mantığının yorumlamalarının aynısı olur. "B_a", "□"nin ve "B*" da "◇"nin yerini tutar. Buna göre her yorumlama M mümkün dünyalar kümesi B^{blg} bilgisel almaşıklık bağıntısı, E evreni ile E_{m_0}, E_{m_1}, ... mümkün dünyalarda varolan bireylerin evrenleri, F bireysel kavramlar kümesi ve m_0, m_1, ... mümkün dünyalarındaki değerlemelerden oluşur.

$f \in F$, $m \in M$ ve $a \in E$ olduğunda

(i) $f(m) \in Em$

(ii) $\forall a \exists m \exists f[f(m) = a]$

(iii) $\forall f_1 \forall f_2[\exists m[f_1(m) = f_2(m)] \rightarrow f_1 = f_2]$

koşullarının yerine geldiğini kabul ediyoruz.

(iv) $\forall xA(x)$'in m'de doğru olması, her $f \in F$ için A[f(m)]'in m'de doğru olması demektir.

(v) $\exists xA(x)$'in m'de doğru olması, en az bir $f \in F$ için A[f(m)]'in m'de doğru olması demektir.

(vi) E!a'nin m'de doğru olması $\exists x(x = a)$'nın m'de doğru olması demektir.

İmdi:

Birinci örnek olarak

(2) $\exists x(x = b)$

önermesinin

(3) $(M: \{m_0, m_1\}; \mathcal{B}^{blg}: \{<m_0, m_0>, <m_0, m_1>, <m_1, m_1>\}; E:\{a, b, c\}; E_{m_0}: \{a, b\}; E_{m_1}: \{b, c\}; F: \{\{<m_0, a>, <m_1, b>\}, \{<m_0, b>, <m_1, c>\}\})$

yorumlamasında doğruluk değerini bulalım. Dikkat edilirse (3) yorumlaması (i), (ii), (iii) koşullarını yerine getiriyor.

F'nin birinci öğesini f_1 ile, ikinci öğesini de f_2 ile gösteriyoruz. (2)'nin m_0'da doğru olması (v) gereği

(4) $f_1(m_0) = b$

veya

(4') $f_2(m_0) = b$

nin m_0'da doğru olması demektir. Oysa (4)

(5) $a = b$,

(4') de

(6) $b = b$

ye indirgenir. (6) doğru olduğundan (4)'de doğrudur. O halde (2) önermesi (3) yorumlamasında doğrudur.

İkinci örnek olarak

(7) $B_a\exists x(x = b)$

önermesinin (3) yorumlamasında doğruluk değerini bulalım.

(8) $\exists x(x = b)$

nin m_0'ın m_0 ve m_1 bilgisel almaşıklarında doğru olması demektir. (8)'in m_0'da doğru olduğunu görmüştük. O halde (8)'in m_1'deki doğruluk değerini araştıralım. $f_1(m_1) = b$ olduğundan, (8) önermesi m_1'de doğrudur. O halde (7), (3)'de doğrudur.

Üçüncü örnek olarak

(9) $\exists xB_a(x = b)$

önermesinin (3) yorumlamasında doğruluk değerini bulalım. (9)'un m_0'da doğru olması

(10) $B_a[f_1(m_0) = b]$

ile

(11) $B_a[f_2(m_0) = b]$

den en az birinin m_0'da doğru olması demektir. (10) önermesi

(12) $B_a(a = b)$

ye, (11) önermesi de

(13) $B_a(b = b)$

ye indirgenir. (13) doğrudur. Nitekim b = b hem m_0'da hem m_1'de doğrudur. O halde (9) önermesi de (3) yorumlamasında doğrudur.

Dördüncü örnek olarak

(14) $E!b \wedge \exists x[Fx \wedge B_a^*(x = a)]$

(15) (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{B}^{blg}$: $\{<m_0, m_0>, <m_0, m_1>, <m_1, m_1>\}$; E: {a, b, c}; E_{m_0}: {a, b}; E_{m_1}: {b, c}; F: $\{\{<m_0, a>, <m, b>\}; \{<m_0, b>, <m, c>\}$; m_0: F_a; m_1: Fa, Fc)

yorumlamasında doğruluk değerini bulalım. F'nin birinci öğesini f_1, ikinci öğesini f_2 ile gösteriyoruz. E!a'nın m_0'da doğru olması "$\exists x(x = b)$"nin m_0'da doğru olması demektir. $f_2(m_0) = b$ olduğundan "$\exists x(x = b)$" m_0'da doğrudur. "$\exists x[Fx \wedge B_a^*(x = a)]$" önermesinin m_0'da doğru olması

(16) $F[f_1(m_0)] \wedge B_a^*[f_1(m_0) = a]$

ile

(17) $F[f_2(m_0)] \wedge B_a^*[b_2(m_0) = a]$

dan en az birinin doğru olması demektir (16),

(18) $Fa \wedge B_a^*(a = a)$

ya, (17)'de

(19) $Fb \wedge B_a^*(b = a)$

ya indirgenir. "Fa" m_0'da doğru, $B_a^*(a = a)$'da m_0'da doğrudur. O halde (18) m_0'da doğrudur. Dolayısıyla (14), (15)'de doğrudur.

Yukardaki örneklerde doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile şöyle hesaplayabiliriz.

Birinci örnek:

1. $[m_0]\ \exists x(x = b)$ (B.Ö.)

(1)

2. $[m_0]\ f_1(m_0) = b$

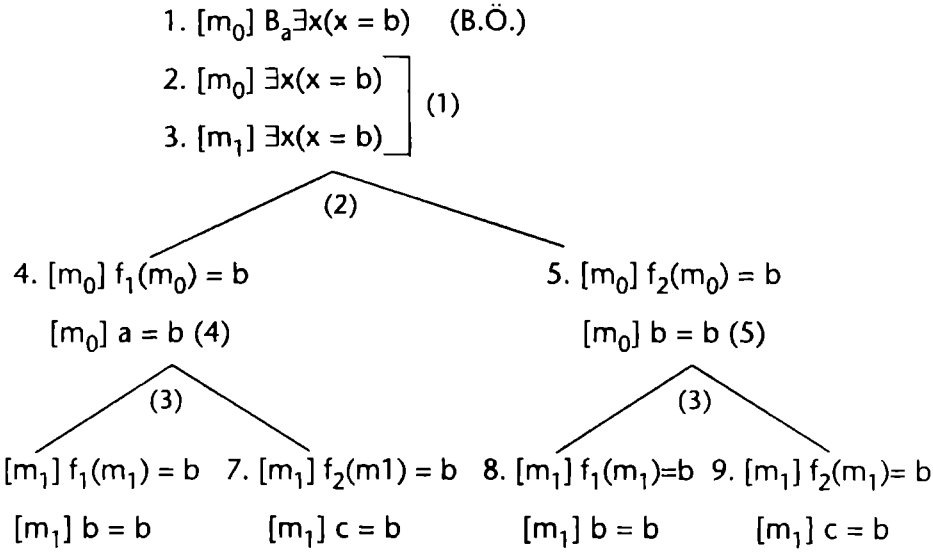
$[m_0]\ a = b$ (2)

3. $[m_0]\ f_2(m_0) = b$

$[m_0]\ b = b$ (3)

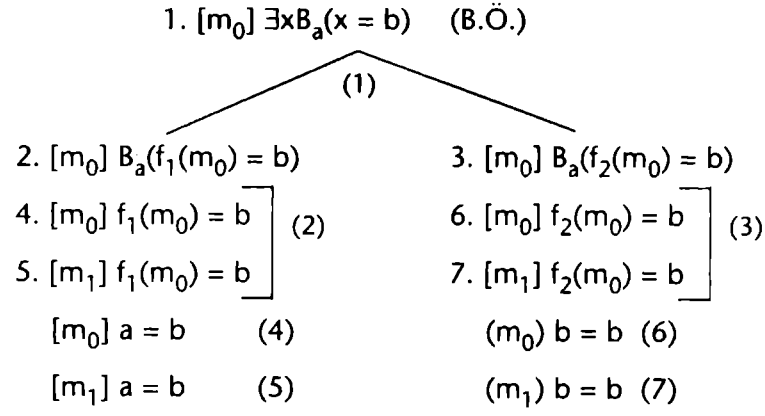
Birinci açık yolda son satır yanlış olduğundan bu yol yanlıştır. İkinci açık yolda son satır doğru olduğundan bu yol doğrudur. O halde başlangıç önermesi verilen yorumlamada doğrudur.

İkinci örnek



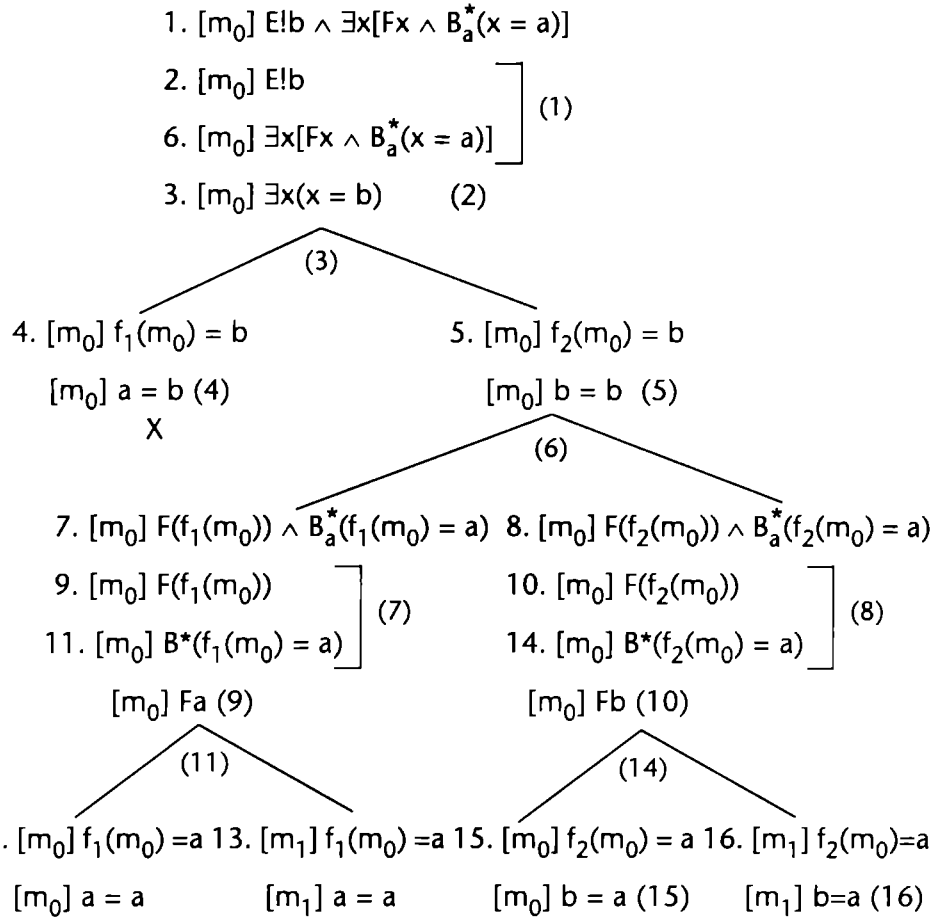
Dikkat edilirse üçüncü yol doğrudur. Bu nedenle başlangıç önermesi verilen yorumlamada doğrudur.

Üçüncü örnek



İkinci yol doğru olup, başlangıç önermesi verilen yorumlamada doğrudur.

Dördüncü örnek



Birinci ve ikinci yol doğrudur. O halde başlangıç önermesi verilen yorumlamada doğrudur.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin verilen §6.2.1'deki (15) yorumlamadaki doğruluk değerini bulunuz.

1. $B^*_a \exists x Fx$
2. $\forall x B^*_a \forall x \sim Fx$
3. $\exists x B_a(x = x)$

4. $B_a \forall x(Fx \rightarrow Gx)$

5. $\forall x[(x = a) \vee B_a Fx]$

6.2.2 Ne, ne zaman, nerede olduğunu bilme

A(x) bir birli açık önerme olduğunda, x'in değerleri kişiler (insanlar) ise,

(1) a kişisi neyin (veya kimin), A(x) olduğunu bilir

önermesi

(2) $\exists x B_a A(x)$

biçiminde dile getirilir. Örneğin

(3) Ali, kimin kapıyı çaldığını bilir

önermesi

(4) $\exists x B_{Ali}$(x kapıyı çaldı)

biçimine dönüştürülebilir.

Öte yandan "Z(x)", "x bir zaman anı", "y(x)" de "x bir yer" anlamına gelsin. Buna göre

(5) *a* kişisi ne zaman A(x) olduğunu bilir

önermesi

(6) $\exists x[Zx \wedge B_a A(x)]$

biçiminde,

(7) a kişisi nerede A(x) olduğunu bilir önermesi

de

(8) $\exists x[y(x) \wedge B_a A(x)]$

biçiminde dile getirilebilir. Örneğin

(9) Ali; Güneşin ne zaman doğduğunu bilir

önermesi

(10) $\exists x[Zx \wedge B_{Ali}(\text{Güneş x anında doğar})]$

biçimine çevrilebilir. Öte yandan

(11) Ali Anıtkabir'in nerede olduğunu bilir

önermesi

(12) $\exists x[Yx \wedge B_{Ali}(\text{Anıtkabir x yerindedir})]$

biçimine çevrilebilir.

6.2.3 Özdeşlerin Değiş Tokuşu Kuralı

Özdeşlerin Değiş Tokuş kuralı sınırsız olarak bilgisel varlık mantığında kullanılamaz.

Örneğin

(1) Sabah yıldızı, Akşam yıldızıdır; Ali sabah yıldızının Sabah yıldızı olduğunu bilir; o halde Ali, Sabah yıldızının Akşam yıldızı olduğunu bilir.

çıkarımı düpedüz geçersiz olabilir. Nitekim Ali Sabah yıldızı ile Akşam yıldızının aynı gök cismi olduğunu bilmezse, (1) çıkarımının iki öncülü doğru olup sonucu yanlış olur. Oysa (1) çıkarımının sembolik karşılığı

(2) (Ali: a, Sabah yıldızı: b, Akşam yıldızı: c) sembolleştirme biçimi gereği

(3) $b = c, B_a(b = b) \therefore B_a(b = c)$

biçimindedir. Dikkat edilirse "$B_a(b = c)$" sonucu, "$B_a(b = b)$" öncülünde ("b = c" öncülüne dayanarak) "b" yerine "c"nin konulmasıyla elde edilebilir. (1) düpedüz geçersiz olduğundan (3) geçersizdir. Dolayısıyla özdeşlerin değiş tokuşu kuralı sınırsız olarak bilgisel varlık mantığında kullanılamaz.

(3) çıkarımının geçersiz olduğunu (3)'ün

(4) $\{b = c, B_a(b = b), \sim B_a(b = c)\}$

geçersiz kılıcı kümesinin bir doğrulayıcı yorumlamasını bularak gösterebiliriz. Bu amaçla aşağıdaki çözümleyici çizelgeyi kuruyoruz.

(5) 1. [0] b = c (B. Ö.)

2. [0] B_a(b = b) (B. Ö.)

3. [0] ~B_a(b = c) (B.Ö.)

4. [0] B_a^* ~(b = c)

5. [0.1] ~(b = c)

(5) çizelgesinin tek açık yolunun belirlediği doğrulayıcı yorumlama şöyledir. "[0]" yerine m_0 "[0.1]" yerine de m_1 koyuyoruz.

(6) (M: {m_0, m_1}; $\mathfrak{F}^{bilg}$: {<m_0, m_1>, <m_0, m_0>, <m_1, m_1>}; E: {a, b, c}; E_{m_0}: {a, b}; E_{m_1}: {a, b, c}; m_0: b = c; m_1:)

Dikkat edilirse "[0] b = c" satırından dolayı bile c'den yalnız biri E_{m_0}'ın öğesi sayılmış, ayrıca "b = c" önermesi m_0'ın değerlemesinde yer almıştır. Öte yandan "[0.1] ~(b = c)" satırından dolayı b ile c'nin ikisi de E_{m_1}'in öğesi sayılıp "b = c" önermesi m_1'in değerlemesinde yer almıyor. Bunun mümkün olması adların *esnek* olmasına bağlıdır. Özellikle "c" adı m_0 dünyasında "b" adının gösterdiği bireyin adlandırmasına karşın, m_1 dünyasında "b" adının gösterdiği bireyden farklı olan bir bireyi gösteriyor. O halde (6) yorumlamasında "c" adı esnektir. Bilgisel varlık mantığında "a", "b", "c", ... "i", "j", "k" gibi adların esnek olabileceğini kabul ediyoruz. Adların esnekliğinden dolayı m gibi bir mümkün dünyada doğru olan "a = b" gibi bir özdeşlik önermesi m' gibi başka bir mümkün dünyada yanlış olabilir.

Bilgisel varlık mantığında aşağıdaki özdeşlerin sınırlandırılmış değiş tokuş ilkesi kullanılır.

(i) *Özdeşlerin sınırlandırılmış değiş tokuşu kuralı*

A bir atomsal önerme olduğunda:

1. [k_1...k_n] a = b

1. [k_1...k_n] A

[k_1...k_n] A [b // a]

(i) kuralı yerine aşağıdaki kural da kullanılabilir.

(ii) A önermesinde a adı hiçbir bilgisel değişmezin etki alanında değilse:

1. $[k_1...k_n]$ a = b

2. $[k_1...k_n]$ A

3. $[k_1...k_n]$ A [b // a]

Örneğin (1) gereği aynı mümkün dünyada "Faa" ile "a = b" den "Fab" elde edilebilir. (ii) gereği ise aynı mümkün dünyada "$\forall$xFxa $\wedge$ B_b(a = b)" ile "a=b"den "$\forall$xFxb $\wedge$ B_b(a = b)" elde edilebilir.

(i) ile (ii) kurallarından başka bir de aşağıdaki özdeşlerin değiş tokuş kuralları kullanılabilir.

(iii) 1. $[k_1...k_n]$ a = b

1. $[k_1...k_n]$ B_aA

$[k_1...k_n]$ B_b A (1)

(iv) 1. $[k_1...k_n]$ a = b

1. $[k_1...k_n]$ B_a^* A

$[k_1...k_n]$ B_b^* A (1)

(v) A, içinde B_a ile B_a^*'dan başka bilgisel değişmez geçmeyen bir önerme olduğunda,

1. $[k_1...k_n]$ B_a(b = c)

1. $[k_1...k_n]$ A

$[k_1...k_n]$ A [c // b] (1)

ALIŞTIRMALAR

1. Sabah yıldızı, Akşam yıldızıdır; Ali, sabah yıldızının bir gezegen olduğunu bilir; o halde Ali Akşam yıldızının da bir gezegen olduğunu bilir.

çıkarımının sembolik karşılığını

(Ali: a, Sabah yıldızı: b, Akşam yıldızı: c, bir gezegendir: F) sembolleştirme biçimi gereği bulunuz.

2. Yukardaki 1. soruda bulunması istenilen sembolik çıkarımın geçersiz olduğunu gösteriniz. Bu amaçla sembolik çıkarımın geçersiz kılıcı kümesinin bir doğrulayıcı yorumlamasını bulunuz.

6.2.4 Saydam ve Saydamsız Konumlar

a adının A gibi bir önermedeki belli bir geçişine özdeşlerin değiş tokuşu kuralı sınırsız olarak uygulanabilirse *a*'nın bu geçişinin *saydam konum*'da olduğu söylenir. Eğer özdeşler değiş tokuşu *a*'nın bu geçişine (sınırsız olarak) uygulanmazsa *a*'nın geçişinin *saydamsız konum*'da olduğu söylenir. Örneğin bilgisel değişmezlerin (veya kiplik değişmezlerinin) hiç geçmediği bir önermede *a* adının her geçişi saydam konumundadır. Buna karşılık *a* adının bir bilgisel değişmezin (veya kiplik değişmezinin) etki alanındaki bir geçişi bir saydamsız konum oluşturur. Örneğin §6.2.3'ün alıştırmalar'ının konusu olan

(1) Sabah yıldızı, Akşam yıldızıdır; Ali, Sabah yıldızının bir gezegen olduğunu bilir. O halde Ali Akşam yıldızının da bir gezegen olduğunu bilir.

çıkarımında "sabah yıldızı" adının birinci öncüldeki geçişi saydam konumda, ikinci öncüldeki geçişi ise saydamsız konumdadır.

İmdi (1) çıkarımı

(2) Sabah yıldızı = Akşam yıldızı, B_{Ali} (sabah yıldızı bir gezegendir) $\therefore$ B_{Ali} (Akşam yıldızı bir gezegendir.)

biçiminde dile getirelibilir. Ali'nin Sabah yıldızının bir gezegen olduğunu bildiğini fakat Akşam yıldızının sabah yıldızı ile özdeş olduğunu bilmediğini, üstelik Akşam yıldızının bir sabit yıldız olduğunu sandığını kabul edelim. Buna göre yapılacak yorumlamada m_0 gerçek dünyasının m_1 gibi bir bilgisel almaşığında "Sabah yıldızı" ile "Akşam yıldızı" adları farklı bireyler gösterir. Bunu açıklamak için önce (2)'nin sembolik karşılığının

(3) (Ali: a, Sabah yıldızı: b, Akşam yıldızı: c, bir gezegendir: F)

sembolleştirme biçimi gereği bulalım. Sembolik karşılık

(4) $c = b, B_aFb \therefore B_aFc$

dir. (4) geçersizdir. (4)'ün geçersiz olduğunu göstermek için

(5) $\{c = b, B_aFb, \sim B_aFc\}$

geçersiz kılıcı kümesinin çözümleyici çizelgesini kurup bir doğrulayıcı yorumlamasını bulalım.

(6) [0] c = b (B.Ö.)

3. [0] B_aFb (B.Ö.)

1. [0] ~B_aFc (B.Ö.)

2. [0] B_a^*~Fc (3)

[0.1] ~Fc (2)

[0] Fb

[0.1] Fb

(6) çizelgesinin tek açık yolunun belirlediği doğrulayıcı yorumlama şöyledir. "[0]" yerine m_0, "[0.1]" yerine m_1 koyuyoruz.

(7) (M: $\{m_0, m_1\}$; $\mathcal{B}^{bilg}$: $\{<m_0, m_0>, <m_0, m_1>, <m_1, m_1>\}$; E: {a, b, c}; E_{m_0}: {c, b}, E_{m_0}: {a, b, c}; m_0: c = b, Fb; m_1: Fb).

Görüldüğü gibi "b" ("Sabah yıldızı") ile "c" ("Akşam yıldızı") m_0'da aynı bireyi gösteriyor. Nitekim "b = c" önermesi m_0'da doğrudur. Oysa m_1'de "b" ile "c" iki farklı bireyi gösteriyor. "b = c" m_1'de yanlıştır.

Dikkat edilirse (5) çıkarımının birinci öncülünde "b" ile "c"nin bu geçişleri bir bilgisel değişmezinin etki alanında değildir. Buna karşılık "b"nin ikinci öncülde geçişi ile "c"nin sonuçta geçişi saydamsız konumdadır. Nitekim bu son geçişler B_a bilgisel değişmezinin etki alanındadır. Öte yandan a adının B_a bilgisel değişmezindeki geçişi saydamdır. Nitekim 6.2.3'teki (iii) ve (iv) kuralları gereği, özdeşlerin yer değiştirmesi B_a ile B_a^*'daki adına uygulanabilir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerde ad geçişlerinin saydam konumda veya saydamsız konumda olduklarını belirtiniz.

1. Yunus Emre bir Anadolu ozanıdır.

2. Ömer Hayyam hem şair hem matematikçidir.

3. Yunus Emre Türkiye sınırları içinde gömülmüş olabilir.

4. Ali, Biruni'nin bir Türk bilgini olduğu bilir.

6.2.5 Bilgisel Değişmezlerin Nesnel Kullanılışı ve Tikel Niceleyiciye Giriş Kuralı

(1) Ali Türkiye'de bir Cumhurbaşkanı bulunduğunu biliyor.

ile

(2) Ali Türkiye Cumhurbaşkanının kim olduğunu biliyor.

önermelerini göz önüne alalım. (1) önermesi

(3) $B_{Ali}\exists x$(Türkiye'nin Cumhurbaşkanı = x)

biçiminde, (2) önermesi ise

(4) $\exists xB_{Ali}$(Türkiye'nin Cumhurbaşkanı = x)

biçiminde dile getirilebilir. Dikkat edilirse B_{Ali} bilgisel değişmezi (bir kiplik değişmezinin benzeri olarak) (3) önermesinde *sözel* kullanılışta, (4) önermesinde ise *nesnel* kullanılışta geçiyor. (Bkz. §5.2.4)

Sözel kullanılış sorumsuz olmakla birlikte nesnel kullanılış bazı sorunlara yol açar. Örnek olarak B_a'nın nesnel kullanılışta geçtiği

(5) Ali, Behçet'in kim olduğunu bilir

önermesi ile

(6) Ali, Behçet'in Behçet olduğunu bilir

önermesini göz önüne alalım. (5) ile (6)'nın sembolik karşılıkları

(7) (Ali: a, Behçet: b)

sembolleştirme biçimi gereği sırasıyla

(8) $\exists xB_a(b = x)$

ile

(9) $B_a(b = b)$

dir.

İmdi niceleme mantığının türetim yönteminde kullanılan

(10) $\dfrac{A\ (a/x)}{\exists xA}$

biçimindeki *tikel niceleyiciye giriş* kuralı'nı (9) önermesine uygulayarak (9)'dan (8) önermesini elde edebiliriz. Yani bu kurala göre

(11) $B_a(b = b) \therefore \exists xB_a(x = b)$

çıkarımı geçerli olur. Oysa (11) geçerli değildir. Nitekim Ali, Behçet'in kim olduğunu bilmemesi durumunda da Behçet'in Behçet olduğunu bilir. Yani (11)'in öncülü doğru ama sonucu yanlış değerini alabilir. (11)'in geçersiz olduğunu bir de

(12) $\{B_a(b = b), \sim\exists xB_a(x = b)\}$

geçersiz kılıcı kümesinin bir doğrulayıcı yorumlamasını bularak gösterelim. Bu amaçla aşağıdaki çözümleyici çizelgeyi kuruyoruz.

(13) 5. [0] $B_a(b = b)$ (B.Ö.)

1. [0] $\sim\exists xB_a(x = b)$ (B.Ö.)

2. [0] $\forall x\sim B_a(x = b)$ (1)

3. [0] $\forall xB_a^*\sim(x = b)$ (2)

4. [0] $B_a^*\sim[f([0]) = b]$ (3)

[0.1] $\sim[f[0] = b]$ (4)

[0.1] $b = b$ (5)

(13) çizelgesinin tek açık yoluna dayanarak şöyle bir doğrulayıcı yorumlama belirlenebilir. "[0]" yerine m_0, "[0.1]" yerine de m_1 koyuyoruz.

(14) $(M: \{m_0, m_1\}; \mathcal{B}_a^{blg}: \{<m_0, m_0>, <m_0, m_1>, <m_1, m_1>\}; E: \{a, b, c\},$
$E_{m_0}: \{a, b\}, E_{m_1}: \{a, c\}, F: \{\{<m_0, a>, <m_1 a>\}, \{<m_0, b>, <m_1, c\}).$

F'nin birinci öğesi f_1, ikinci öğesi de f_2 olsun. Görüldüğü gibi $f_1(m_0) = a$, $f_1(m_1) = a$, $f_2(m_0) = b$ ve $f_2(m_1) = c$'dir. Dolayısıyla m_1 mümkün dünyasında her $f \in F$ için, $f(m_0) \neq b$'dir. Dolayısıyla [0.1] $\sim f[0] = b$" satırı f ne olursa olsun doğrudur.

Sonuç olarak tikel niceleyiciye giriş kuralının *a* gibi bir adın saydamsız geçişlerine sınırsız olarak uygulanmadığını söyleyebiliriz. Bunun yerine aşağıdaki sınırlandırılmış tikel niceleyiciye giriş kuralını kullanabiliriz.

$$(15)\ \frac{\exists x B_b(a = x),\ A(a/x)}{\exists x A}$$

A önermesinde B_b ile B_b^*'den başka bilgisel değişmez geçmediğini kabul ediyoruz.

Öte yandan tümel niceleyiciden çıkış tikel niceleyiciden çıkış kuralları bilgisel varlık mantığında geçersiz olup aşağıdaki sınırlandırılmış biçimleri kullanılabilir.

$$(16)\ \frac{\exists y B_b(a = y),\ \forall x A}{A(a/x)}$$

$$(17)\ \frac{\exists x A}{\begin{array}{l}A(a/x)\\ \exists y B_b\ (a = y)\end{array}}$$

a adının yeni olması gerekir.

(16) ile (17) kurallarında A önermesinde B ile B_b^*'den başka bilgisel değişmez geçmediğini kabul ediyoruz.

6.2.6 Kimin olduğunu bilme

(1) $\exists x B_a(b = x)$

biçimindeki önerme

(2) a kişisi b'nin kim olduğunu bilir anlamına gelir. Bu türlü önermelerin bilgisel varlık mantığında çok önemli işleri vardır. Nitekim "kim olduğunu bilme"yi dile getiren bu türlü önermeler sınırlandırılmış tikel özellemeye giriş, tümel niceleyiciden çıkış ve tikel niceleyiciden çıkış kurallarında geçerler.

İmdi (1)'in doğru olmasının gerekli koşulu *a* kişisinin

(3) b kimdir?

sorusunun bir doğru yanıtını bilmesi, bu yanıtın doğru olduğunu da bilmesidir. Ancak bu koşul yeterli değildir.

(4) $B_a(b = c)$

gibi bir önerme de (4) için yeterli bir koşul değildir. Nitekim (4), (1)'i içermez. Ancak

(5) $B_a(b = c), \exists x B_a(c = x) \models \exists x B_a(b = x)$

içermesi doğrudur. Dolayısıyla (4) önermesi

(6) $\exists x B_a(c = x)$

ile birlikte (1)'in yeterli koşulunu oluştururlar.

Genel olarak

(7) $\exists x B_a A(x)$

biçimindeki bir önermenin yeterli koşulu

(8) $\exists x B_a(b = x), B_a A(b) \models \exists x B_a A(x)$

içermesi ile dile getirilir.

(9) $\exists x B_a(b = x), B_a Fb \therefore \exists x B_a Fx$

çıkarımının geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile gösterelim.

(10) 2. [0] $\exists x B_a(b = x)$ (B.Ö.)
6. [0] $B_a Fb$ (B.Ö.)
1. [0] $\sim\exists x B_a Fx$ (B.Ö.)
3. [0] $\forall x B_a^* \sim Fx$ (1)
5. [0] $B_a\ (b = f[0])$ (2)
4. [0] $B_a^* \sim F(f[0])$ (3)
[0.1] $\sim F(f[0])$ (4)
7. [0.1] $b = f[0]$ (5)
7. [0.1] Fb (6)
[0.1] $F(f[0])$ (7)
X

6.2.7 Bilgisel Tümel Önermeler ve Bilgisel Varlık Mantığı Yasaları

İçinde bilgisel değişmezler geçen tümel önermelere *bilgisel tümel önerme* diyoruz. Başlıca bilgisel tümel önermeleri aşağıda gösteriyoruz.

(1) a kişisi A(b) olduğunu biliyor

tümcesi iki farklı biçimde dile getirilebilir.

(2) $B_aA(b)$

(3) $\forall x[(x = b) \rightarrow B_aA(x)]$

Dikkat edilirse *b* adı (2) önermesinde saydamsız konumda, (3) önermesinde ise saydam konumdadır.

(2) ile (3) eşdeğer değildir. Ancak (2) ile (3) tümel genelleme yoluyla elde edilen

(4) $\forall xB_aA(x)$

(5) $\forall y\forall x[(x = y) \rightarrow B_aA(x)]$

önermeler birbiriyle eşdeğerdir.

(6) Her şeyin (herkesin) F olduğu a tarafından bilinir.

gibi önermelerdir. (6) önermesi

(7) $\forall x\exists y[(y = x) \wedge B_aFy]$

biçiminde dile getirilebilir.

Bilgisel Varlık Mantığının bazı önemli yasalarını aşağıda gösteriyoruz.

(1) $\exists xB_aA \rightarrow B_a\exists xA$ (A'da B_a ve B_a^*'dan başka bilgisel değişmez geçmemelidir.)

(2) $B_a\forall xA \rightarrow \forall xB_aA$ (A'da B_a B_a^*'dan başka bilgisel değişmez geçmemelidir.)

(3) $B_a[\forall x\exists y[(y = x) \wedge B_aA(y)] \rightarrow B_a\forall xA(x)]$

7. ÇOK DEĞERLİ MANTIK

7.1 Çok Değerli Mantık Sistemleri, Doğruluk Değerleri ve Yorumlamalar

Buraya kadar incelediğimiz mantık sistemlerinde her önermenin doğru veya yanlış olduğu kabul edilir. Ancak günlük dil ve bilim diline ait bazı önermelerin özellikle gelecek zamandaki olaylara ilişkin önermeler ile taneciklerin hareketine ilişkin önermelerin doğru veya yanlış olmadığı, bu önermelerin doğruluk değerinin "Belirsiz" denilen üçüncü bir değer olduğu öne sürülmüştür. Doğru ile yanlış'tan başka doğruluk değerlerini kabul eden mantık sistemlerine *çok değerli mantık sistemleri* denir. Biz burada yalnız önerme temsilcileri ile önerme eklemlerinden oluşan ve ikiden çok doğruluk değeri taşıyan önermelere ilişkin *çok değerli önermeler mantığı*'nı incelemekle yetineceğiz. Bundan böyle "çok değerli mantık" ve "çok değerli mantık sistemi" terimlerini hep "çok değerli önermeler mantığı" ve "çok değerli önermeler mantığı sistemi" anlamında kullanacağız.

İmdi her çok değerli mantık sistemi ikiden çok sayıda öğesi olan *doğruluk değerleri kümesi* ile çok değerli doğruluk fonksiyonu durumunda "~", "$\wedge$", "$\vee$", "$\rightarrow$", "$\leftrightarrow$" temel önerme eklemlerinin *doğruluk çizelgeleri* tarafından belirlenir.

İçinde p_1, ..., p_n önerme temsilcileri geçen bir önerme veya önermeler kümesinin belli birçok değerli mantık sisteminde *yorumlanması*, p_1, ... p_n'e mantık sisteminin doğruluk değerleri kümesine ait birer doğruluk değerinin verilmesi demektir.

7.2 Üç değerli Lukasiewicz Sistemi

7.2.1 Beş Temel Eklem

Polonyalı mantıkçı Lukasiewicz ("Vukasyeviç" diye okunur), gelecek zamandaki olaylara ilişkin önermelerin şimdilik doğruluk değerinin doğru veya yanlış olmayıp, *Belirsiz* olduğunu ileri sürmüştür. Bu görüşünü şöyle savunmuştu: Gelecek yılın 31 Aralık gününde Varşova'da olacağım" önermesi şimdi doğru ise o tarihte Varşova'da olması zorunlu olurdu. Oysa bu

zorunlu değildir. O halde önerme doğru olamaz. Öte yandan önerme şimdi yanlış olsaydı o tarihte Varşova'da olması imkânsız olurdu. Oysa bu imkânsız da değildir. O halde önerme şimdi ne doğru ne de yanlıştır. Bu savunmaya kiplik mantığı çerçevesinde şöyle bir itirazda bulunulmuştur.

İmdi

(1) Gelecek yılın 31 Aralık gününde Varşova'da olacağım önermesi A olsun. O zaman Lukasiewicz'in savunması

(2) A şimdi doğrudur $\rightarrow \Box A, \sim \Box A \therefore \sim$(A şimdi doğrudur)

biçiminde dile getirilebilir. Oysa (2) çıkarımının

(3) A şimdi doğrudur $\rightarrow \Box A$

öncülü yanlıştır. Doğru olan

(4) $\Box$(A şimdi doğrudur $\rightarrow$ A)

önermesidir. Oysa (2) çıkarımının yanlış olan (3) öncülü yerine doğru olan (4) öncülünü koyarsak, elde edilen

(5) $\Box$(A şimdi doğrudur $\rightarrow$ A), $\sim\Box A \therefore \sim$(A şimdi doğrudur)

çıkarımı geçersiz olur. Böylece

(6) ~(A şimdi doğrudur)

yani

(7) A şimdi doğru değildir

sonucu elde edilemez.

Böylece gelecek zamandaki olaylara ilişkin önermelerin doğru veya yanlış olmadıkları iddiası çürütülmüş olur. Ancak Lukasiewicz'in kurmuş olduğu çeşitli çok değerli mantık sistemleri gene de önemlerini koruyorlar. Nitekim doğru veya yanlış olmayıp doğruluk değeri belirsiz olan bazı önermeler vardır. Örneğin fizikte kuvantum teorisine göre taneciklerin hareketine ilişkin önermelerin doğruluk değeri belirsizdir.

İmdi *Üç Değerli Lukasiewicz sistemi* denilen mantık sisteminde doğruluk değerleri kümesi

(8) (D, Y, B)

dir. "D", *Doğru*'yu, "Y" *Yanlış*'ı ve "B" *Belirsiz*'i gösterir. "Belirsiz" yerine "Yansız" veya "Mümkün" terimleri de kullanılmıştır. Öte yandan sistemin "~", "$\wedge$", "$\vee$", "$\rightarrow$", "$\leftrightarrow$" eklemlerinin doğruluk çizelgeleri şöyledir.

(9)

p	~p
D	Y
B	B
Y	D

(10)

p q	p $\wedge$ q	p $\vee$ q	p $\Rightarrow$ q	p $\leftrightarrow$ q
D D	D	D	D	D
D B	B	D	B	B
D Y	Y	D	Y	Y
B D	B	D	D	B
B B	B	B	D	D
B Y	Y	B	B	B
Y D	Y	D	D	Y
Y B	Y	B	D	B
Y Y	Y	Y	D	D

Doğruluk değerleri D, Y, B yerine 1, 0, Y_2 biçiminde de gösterilir. Y_2'nin 0'dan büyük, 1'den küçük olduğuna bakarak D en büyük, Y en küçük, B'de orta değer sayılır. Buna göre "p $\wedge$ q" nun değeri, "p" ile "q"nun değerlerinin en küçüğü, "p $\vee$ q"nun değeri de, "p" ile "q"nun değerlerinin en büyüğü olur.

7.2.2 Geçerlilik, Tutarlılık, İçerme ve Eşdeğerlik

İki değerli mantık sistemlerinde önermeler "geçerli", "tutarsız" ve "geçersiz ama tutarlı" olmak üzere üç farklı türe ayrılırlar. Çok değerli mantıkta ise önermeleri aşağıdaki beş farklı türe ayırabiliriz.

i. *Geçerli önermeler:* Bunlar bütün yorumlamalarda doğru olan "hep doğru" önermelerdir. Bu önermelere *çok değerli totoloji* de denir. Üç değerli Lukasiewicz mantık sisteminin totolojileri iki değerli totolojiler, yani iki değerli önermeler mantığında geçerli olan önermelerdir. Örneğin "p $\Rightarrow$ p" üç değerli bir totoloji olduğu gibi iki değerli de olan bir totolojidir. "p $\Rightarrow$ p" nin geçerli olduğunu aşağıdaki karma doğruluk çizelgesi ile gösterebiliriz.

(1)

p	p ⇒ p	p ⇒ p
D	D ⇒ D	D
B	B ⇒ B	D
Y	Y ⇒ Y	D

Üç değerli totolojilerin hep iki değerli totoloji olmasına karşın, aşağıda göreceğimiz gibi üç değerli totoloji olmayan iki değerli totolojiler vardır.

(ii) *Geçerli olmayan yarı-geçerli önermeler:* Hiçbir yorumlamada yanlış olmayan önermelere *yarı-geçerli* önerme diyoruz. Bunlar da geçerli önermeler ile geçerli olmayan yarı-geçerli önermelere ayrılırlar. Örneğin üçüncü halin olmazlığı ilkesini dile getiren

(2) $p \vee \sim p$

önermesi ve çelişmezlik ilkesini dile getiren

(3) $\sim(p \wedge \sim p)$

önermesi geçerli olmayan yarı-geçerli önermelerdir. Aşağıdaki karma doğruluk çizelgesi ile gösteriyoruz.

(5)

p	~p	p ∨ ~p
D	Y	D
B	B	B
Y	D	D

(6)

p	~p	p ∧ ~p	~(p ∧ ~p)
D	Y	Y	D
B	B	B	B
Y	D	Y	D

Bu türlü önermeler bazı yorumlamalarda doğru, bazılarında ise belirsizdir.

(iii) *Geçersiz ve tutarlı önermeler:* En az bir yorumlamada doğru olan bir önermeye *tutarlı,* yanlış olana da geçersiz diyoruz. Hem geçersiz hem tutarlı olan önermeler bazı yorumlamalarda doğru bazı yorumlamalarda yanlış olurlar. Başka yorumlamalarda da belirsiz olabilirler. İki değerli mantığın geçersiz ama tutarlı olan önermeleri bu türdendir. Örneğin

(7) $p \vee \sim q$

önermesi gerek iki değerli gerekse üç değerli mantıkta geçersiz ve tutarlıdır.

(iv) *Tutarsız olmayan yarı-tutarsız önermeler:* Hiçbir yorumlamada doğru olmayan önermelere *yarı - tutarsız* önerme diyoruz. Bunlar da tutarsız (yani hep yanlış olan) önermeler ile tutarsız olmayan yarı-tutarsız önermelere ayrılırlar. (ii')'nci türden önermelerin değillemesi (iv)'üncü türdendir. Örneğin

(8) $\sim(p \vee \sim p)$

ile

(9) $p \wedge \sim p$

önermeleri tutarsız olmayan yarı-tutarsız önermelerdir. Bunu aşağıdaki karma doğruluk çizelgeleri ile gösteriyoruz.

(10)

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$	$\sim(p \vee \sim p)$
D	Y	D	Y
B	B	B	B
Y	D	D	Y

(11)

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
D	Y	Y
B	B	B
Y	D	Y

(v) *Tutarsız önermeler:* Bunlar her yorumlamada yanlış olan "hep yanlış" önermelerdir. Örneğin

(12) $\sim(p \rightarrow p)$

önermesi tutarsızdır.

(13)

p	$p \rightarrow p$	$\sim(p \rightarrow p)$
D	D	Y
B	D	Y
Y	D	Y

Bir önerme kümesinin *tutarlı* olması, en az bir yorumlamada kümenin her öğesinin bir arada doğru olması demektir. Önerme kümesinin tutarsız olması, hiçbir yorumlamada kümenin bütün öğelerinin doğru olmaması demektir. Buna göre bir önerme kümesinin tutarsız olması, her yorumlamada kümenin bir öğesinin doğrudan farklı bir doğruluk değerini alması demektir.

(14) $A_1,..., A_n \therefore B$

çıkarımının geçerli olması, $A_1,..., A_n$'ın tümünün doğru kılan her yorumlamanın B'yi de doğru kılması demektir. O zaman da

(15) $A_1,..., A_n \models B$

içermesi doğru olur. Nitekim (15)'in doğru olması (14)'ün geçerli olması demektir.

Örneğin

(16) $\sim(p \vee q) \models \sim p$

içermesi doğrudur.

Bunu aşağıdaki karma doğruluk çizelgesi ile gösteriyoruz.

(17)

p	q	~p	p ∨ q	~(p ∨ q)
D	D	Y	D	Y
D	B	Y	D	Y
D	Y	Y	D	Y
B	D	B	D	Y
B	B	B	B	B
B	Y	B	B	B
Y	D	D	D	Y
Y	B	D	B	B
Y	Y	D	Y	D

Görüldüğü gibi son satırda ~(p ∨ q)'nun ve ~p'nin altında D geçiyor. Öbür satırlarda ~(p ∨ q)'nun altında D geçmiyor. Üç değerli Lukasiewicz sisteminde geçerli olan ve beş temel eklemden başka eklem kapsamayan

bütün önermeler iki değerli mantıkta birer totolojidir. Üç değerli Lukasiewicz mantık sisteminde geçerli olup bu sistemin yasaları olan bazı önermeleri aşağıda gösteriyoruz.

1. $p \leftrightarrow p$
2. $p \leftrightarrow \sim\sim p$
3. $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
4. $\sim(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
5. $[p \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
6. $[p \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$
7. $(\sim p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow p)$
8. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$
9. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$

Örneğin (2) yasasını karma çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(18)

p	~p	~~p	p ↔~~p
D	Y	D	D
B	B	B	D
Y	D	Y	D

Son sütunda denetlenen önerme altındaki sütunda hep D geçtiğinden bu önerme geçerlidir.

ALIŞTIRMALAR

§7.2.2'deki üç değerli Lukasiewicz sisteminin yasalarında henüz denetlenmemiş olanları karma doğruluk çizelgesi ile denetleyiniz.

7.2.3 İlâve Eklemler

Üç değerli Lukasiewicz mantık sisteminin beş temel eklemi türünden üç değerli doğruluk fonksiyonu durumundaki bütün eklemleri tanımlamak mümkün değildir. Özellikle

(1)

p	Sl(p)
D	B
B	B
Y	B

doğruluk çizelgesi ile tanımlanan ve *Slupecki eklemi* olarak adlandırılan birli önerme eklemi "~", "$\wedge$", "$\vee$", "$\rightarrow$" ve "$\leftrightarrow$" eklemleri türünden tanımlanamaz.

Öte yandan "~", "$\rightarrow$" ve "Sl" eklemleri üç değerli doğruluk fonksiyonu durumunda bütün önerme eklemlerini tanımlamaya yetiyor. Özellikle "$\vee$" ile "$\wedge$" eklemleri şöyle tanımlanabilir.

(2) $p \vee q \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow q$

(3) $p \wedge q \equiv \sim(\sim p \vee \sim q)$

Temel eklemler türünde tanımlanabilen bazı önemli eklemler şunlardır.

(4) $bl(p) \equiv p \leftrightarrow \sim p$

(5) $mk(p) \equiv \sim p \rightarrow p$

(6) $zr(p) \equiv \sim(p \rightarrow \sim p)$

(7) $p \rightarrow_3 q \equiv p \rightarrow (p \rightarrow q)$

bl (p) önermesinin özelliği yalnız p'nin B değerini alması durumunda doğru olmasıdır. Bu nedenle bu ekleme *belirsizlik eklemi* denir. "bl" ekleminin doğruluk çizelgesi şöyledir.

(8)

p	bl(p)
D	Y
B	D
Y	Y

"mk" ile "zr" eklemlerinin doğruluk çizelgeleri sırasıyla şöyledir.

(9)

p	mk(p)
D	D
B	D
Y	Y

(10)

p	zr(p)
D	D
B	Y
Y	Y

(11)

p	q	$p \rightarrow_3 q$
D	D	D
D	B	B
D	Y	Y
B	D	D
B	B	D
B	Y	D
Y	D	D
Y	B	D
Y	Y	D

"zr" eklemi

(12) $zr(p) \equiv \sim mk(\sim p)$

biçiminde tanımlanabilir. "mk"ya imkân eklemi, "zr"ye de zorunluluk eklemi denilmiştir. Dikkat edilirse bu iki eklem üç değerli doğruluk fonksiyonu durumunda önerme eklemleridir. Oysa "$\Diamond$" ile "$\Box$" değişmezleri doğruluk fonksiyonu durumunda olmayan (iki değerli) önerme eklemleridir. "$\rightarrow_3$" ikili eklemine *üç değerli özel koşul eklemi* diyoruz.

ALIŞTIRMALAR

§7.2.3'de tanımlanan "bl", "mk", "zr" ve "$\rightarrow_3$" eklemlerinin ortaya konulan doğruluk çizelgelerini karma doğruluk çizelgeleri yardımıyla haklı gösteriniz.

7.2.4 n Değerli ve Sonsuz Değerli Lukasiewicz Sistemleri

Lukasiewicz, üç değerli mantığını sonlu n sayıda değerler hatta sonsuz sayıda değer için genelleştirmiştir. Bu türlü mantık sistemlerinin yorumlamalarındaki doğruluk değerleri kümesi (aralarında 0 ve 1'in de bulunduğu 0 ile 1 arasındaki) bütün reel sayılardan oluşur. Öte yandan "~" ile "$\rightarrow$" eklemleri şöyle tanımlanıyor.

Herhangi bir yorumlamada "p" önerme temsilcisine verilen doğruluk değeri d(p) olduğunda:

(1) $d(\sim p) = 1 - d(p)$

(2) $d(p \rightarrow q) = \begin{cases} 1, \text{ eğer } d(p) \leq d(q) \text{ ise} \\ [1 - d(p)] + d(q), \text{ eğer } d(q) < d(p) \text{ ise,} \end{cases}$

Öbür temel eklemler ise "~" ile "$\rightarrow$" türünden şöyle tanımlanıyor.

(3) $p \vee q \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow q$

(4) $p \wedge q \equiv \sim(\sim p \vee \sim q)$

(5) $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Sonsuz değerli Lukasiewicz mantık sisteminin bazı yasalarını aşağıda gösteriyoruz.

(6) $p \rightarrow (p \rightarrow q)$

(7) $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$

(8) $(\sim p \rightarrow \sim q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

(9) $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

Çok değerli Lukasiewicz mantık sistemlerinde "~" eklemlerinin genel tanımına dayanarak dört değerli "~" ile "$\rightarrow$" eklemlerini doğruluk çizelgeleri şöyle olur.

Doğruluk değeri kümesi {1, 2/3, 1/3, 0}'dır.

(10)

p	~p
1	0
2/3	1/3
1/3	2/3
0	1

(11)

p	q	p → q
1	1	1
1	2/3	2/3
1	1/3	1/3
1	0	0
2/3	1	1
2/3	2/3	1
2/3	1/3	2/3
2/3	0	1/3
1/3	1	1
1/3	2/3	1
1/3	1/3	1
1/3	0	2/3
0	1	1
0	2/3	1
0	1/3	1
0	0	1

7.3 Üç Değerli Reichenbach Sistemi

Alman filozof H. Reichenbach ("Reyşenbah" diye okunur) fiziğin kuvantum teorisi için üç değerli Lukasiewicz mantık sisteminin geliştirilmiş biçimi olan bir mantık sistemini önermiştir. Kuvantum mekaniğinin Heisenberg belirsizlik ilkesi gereği bir taneciğin belli bir zaman anındaki konumu (yer koordinatları) kesin olarak ölçülünce, aynı taneciğin o andaki momentumu (yani kütle ile hızının çarpımı)nın değeri belirsiz olur. Dolayısıyla bu

taneciğin momentumunun belli bir değer taşıdığını dile getiren önermenin doğruluk değeri ne doğru ne de yanlış olabilir. Reichenbach'a göre böyle bir önermenin doğruluk değeri Doğru ile Yanlış'tan farklı olan Belirsiz değeri olur.

Genel olarak belli bir niceliğin bir tanecik için belli bir anda taşıdığı değer o anda ölçülmüyorsa niceliğin bu tanecik için belli bir değeri olduğunu dile getiren önermenin doğruluk değeri Belirsiz'dir. Buna göre fiziksel niceliklerin tanecikler için aldıkları değerlere ilişkin önermelerin mantığı iki değerli değil üç değerlidir. Bu üç değerli mantığın yorumlamalarındaki doğruluk değerleri kümesi üç değerli Lukasiewicz mantık sisteminde olduğu gibi {D, Y, B} kümesidir. Üç değerli doğruluk fonksiyonu durumundaki temel önerme eklemleri ("~", "$\wedge$", "$\vee$", "$\rightarrow$", "$\leftrightarrow$") nin doğruluk çizelgeleri de üç değerli Lukasiewicz mantık sistemindekiler ile özdeştir. Ancak üç değerli Reichenbach mantık sisteminde bir de aşağıdaki ilâve eklemler vardır. Bu eklemleri aşağıda gösteriyoruz.

Birli Eklemler

Dönüşümlü değilleme eklemi "$\urcorner$" işaretiyle, *tam değilleme eklemi* de tepede yazılan "$^-$" işaretiyle gösterilir. Bunların doğruluk çizelgeleri şöyledir.

(1)

p	$\urcorner$ p	$\overline{p}$
D	B	B
B	Y	D
Y	D	D

"$\urcorner$ p"nin değeri, "p"nin değerinin bir sonrakidir. "$\overline{p}$ " nin değeri ise "p"nin değeri dışındaki iki değerden büyük olanıdır.

İkili Eklemler

Almaşık koşul eklemi "$\Rightarrow$" işaretiyle, *yarı-koşul eklemi* "$\Rightarrow$" işaretiyle gösterilir. *Almaşık karşılıklı-koşul* eklemi de "$\Leftrightarrow$" işaretiyle gösterilir. Bu üç eklemin doğruluk çizelgeleri şöyledir. ("$\wedge$" ile "$\vee$" eklemlerinin doğruluk çizelgeleri Lukasiewicz sistemindekilerle özdeştir.)

(1)

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \ni q$	$p \Leftrightarrow q$
D	D	D	D	D
D	B	Y	B	Y
D	Y	Y	Y	Y
B	D	D	B	Y
B	B	D	B	D
B	Y	D	B	Y
Y	D	D	B	Y
Y	B	D	B	Y
Y	Y	D	B	D

Üç değerli Reichenbach sisteminin başlıca yasalarını aşağıda gösteriyoruz.

1. $p \rightarrow p$ (özdeşlik)
2. $p \leftrightarrow \sim\sim p$ (çifte değilleme)
3. $p \leftrightarrow \urcorner\urcorner\urcorner p$ (üçlü değilleme)
4. $\overline{p} \leftrightarrow \overline{\overline{\overline{p}}}$
5. $\overline{p} \leftrightarrow (\urcorner p \vee \urcorner\urcorner p)$
6. $p \vee \urcorner p \vee \urcorner\urcorner p$ (dördüncü halin olmazlığı)
7. $p \vee \overline{p}$
8. $\overline{p \wedge \overline{p}}$
9. $\overline{p} \wedge \overline{\urcorner p}$
10. $\overline{p \wedge \sim p}$

(Çelişmezlik)

11. $\urcorner(p \wedge q) \leftrightarrow (\urcorner p \vee \urcorner q)$
12. $\urcorner(p \vee q) \leftrightarrow (\urcorner p \wedge \urcorner q)$

(De Morgan)

13. $[p \wedge (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$
14. $[p \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

(Dağıtıcılık)

15. $(\neg p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow p)$
16. $(\overline{p} \Rightarrow q) \leftrightarrow (\overline{q} \Rightarrow p)$ } (Devirme)
17. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

18. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$

19. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \wedge (\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim q \Rightarrow \sim p)]$

20. $(p \Rightarrow q) \leftrightarrow \neg\sim(\overline{p} \vee q)$

21. $(p \rightarrow \overline{q}) \rightarrow \overline{p}$

22. $(p \Rightarrow \overline{p}) \Rightarrow \overline{p}$

Örnek olarak 22. yasayı karma doğruluk çizelgesi ile denetleyelim.

(2)

p	$\overline{p}$	$p \Rightarrow \overline{p}$	$(p \Rightarrow \overline{p}) \Rightarrow \overline{p}$
D	B	Y	D
D	D	D	D
Y	D	D	D

Son sütunda denetlenen önermenin altında hep D olduğundan bu önerme geçerlidir.

ALIŞTIRMALAR

§7.3'deki yasalardan henüz denetlenmemiş olanları karma doğruluk çizelgesi ile denetleyiniz.

7.4 Üç Değerli Bochwar Sistemi

Rus mantıkçı Bochwar ("Boçvar" diye okunur) paradoksal önermelere doğruluk değeri olarak Doğru ve Yanlış yerine Anlamsız veya Belirsiz denilen üçüncü bir doğruluk değerinin verilmesini öneriyor. Bu üçüncü doğruluk değeri de "B" ile gösteriyoruz. Buna göre *üç değerli Bochwar sistemi*'nin yorumlamalarının doğruluk kümesi {D, B, Y} biçimindedir. Üç değerli doğruluk fonksiyonu durumundaki "~", "$\wedge$", "$\rightarrow$", "$\leftrightarrow$" temel eklemlerinin doğruluk çizelgesi ise şöyledir.

(1)

p	~p
D	Y
B	B
Y	D

(2)

p	q	p ∧ q	p ∨ q	p → q	p ↔ q
D	D	D	D	D	D
D	B	B	B	B	B
D	Y	Y	D	Y	Y
B	D	B	B	B	B
B	B	B	B	B	B
B	Y	B	B	B	B
Y	D	Y	D	D	Y
Y	B	Y	B	B	B
Y	Y	Y	Y	D	D

Dikkat edilirse her satırda, p veya q'nun altında B değeri geçiyorsa, bileşik önermenin altında da B değeri bulunuyor.

(1) ile (2) doğruluk çizelgesi gereği hiçbir önerme totoloji değildir. Yani hiçbir önerme bütün yorumlamalarda doğru olamaz. Totolojilere yer vermek amacıyla *öne sürme eklemi* denilen "Ö" gibi bir birli eklem ilâve edilmiştir. "Ö" ekleminin doğruluk çizelgesi şöyledir.

(3)

p	Ö
D	D
B	Y
Y	Y

$A(p_1,..., p_n)$ içinde "p_1", ..., "p_n" önerme temsilcileri geçen bir önerme olduğunda

(4) $\ddot{O}A(p_1,..., p_n) \equiv A(\ddot{O}p_1,..., \ddot{O}p_n)$

elde edilir.

"Ö" eklemi yardımıyla her temel ekleme karşılık birer *dış eklem* tanımlanır. *Dış değilleme* eklemi "$\sim_d$", *dış tümel evetleme eklemi* "$\wedge_d$", *dış tikel evetleme eklemi* "$\vee$", *dış koşul eklemi* "$\rightarrow$" ve *dış karşılıklı - koşullu eklem* de "$\leftrightarrow_d$" ile gösterilir. Bu yeni eklemler şöyle tanımlanır.

(5) $\sim_d p \equiv \sim\ddot{O}p$

(6) $p \wedge_d p \equiv \ddot{O}p \wedge \ddot{O}q$

(7) $p \vee_d p \equiv \ddot{O}p \vee \ddot{O}q$

(8) $p \rightarrow_d q \equiv \ddot{O}p \rightarrow \ddot{O}q$

(9) $p \leftrightarrow_d q \equiv \ddot{O}p \leftrightarrow \ddot{O}q$

Buna göre beş dış eklemin doğruluk çizelgesi şöyle olur.

(10)

p	$\sim_d p$
D	Y
B	D
Y	D

(11)

p	q	$p \wedge_d q$	$p \vee_d q$	$p \rightarrow_d q$	$p \leftrightarrow_d q$
D	D	D	D	D	D
D	B	Y	D	Y	Y
D	Y	Y	D	Y	Y
B	D	Y	D	D	Y
B	B	Y	Y	D	D
B	Y	Y	Y	D	D
Y	D	Y	D	D	Y
Y	B	Y	Y	D	D
Y	Y	Y	Y	D	D

Buna göre $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ eklemlerine iç eklemler (*iç değilleme eklemi, iç tümel-evetleme eklemi, iç tikel-evetleme eklemi, iç koşul eklemi* ve *iç karşılıklı-koşul eklemi*) denir.

İç eklemden başka hiçbir eklemi olmayan önermeler totoloji olamaz. Ama dış eklemler kapsayan totolojiler vardır. İki değerli mantığın totolojilerinde geçen eklemler yerine karşılıkları olan dış eklemler koyarak üç değerli Bochwar sistemine ait birer totoloji elde edilir. Örneğin iki değerli mantığın

(12) $p \vee \sim p$

totolojisinde "$\vee$" yerine "$\vee_d$", "$\sim$" yerine de "$\sim_d$" koymakla elde edilen

(13) $p \vee_d \sim_d p$

önermesini göz önüne alalım. Bu önermenin aşağıdaki karma doğruluk çizelgesi ile bir totoloji olduğunu gösteriyoruz.

(14)

p	$\sim_d p$	$p \vee_d \sim_d p$
D	Y	D
B	D	D
Y	D	D

İmdi mantıksal paradokslara yol açan paradoksal önermelerde iç eklemler kullanarak bu paradoksal önermelerin doğru veya yanlış değeri almamalarını sağlarız. Örnek olarak Russel paradoksu denilen ünlü mantıksal paradoksu göz önüne alalım.

Kümeler kuramında, A(x) herhangi bir birli açık önerme olduğunda

(15) $\{x: A(x)\}$,

A(x) açık önermesini gerçekleyen nesnelerin (bireylerin veya kümelerin) kümesini gösterir. Buna göre a herhangi bir birey veya küme ise

(16) $a \in \{x: A(x)\} \leftrightarrow A(a)$

elde edilir. Nitekim $a \in \{x: A(x)\}$ olması, a'nın A(x) birli açık önermesini gerçeklemesi, dolayısıyla A(a) olması demektir.

İmdi A(x) yerine

(17) $\sim(x \in x)$

birli açık önermesini alalım. Russell, daha sonra Rossell kümesi denilen ve R ile gösterilen bir kümeyi şöyle tanımlamıştı.

(18) $R = \{x: \sim(x \in x)\}$

İmdi R kümesi ya R'nin öğesidir, ya da değildir. Birinci şıkta

(19) $R \in R \leftrightarrow R \in \{x: \sim(x \in x)\}$

olur. Oysa (16) gereği

(20) $R \in \{x: \sim(x \in x)\} \leftrightarrow \sim(R \in R)$

olur. (19) ve (20)'den

(21) $R \in R \leftrightarrow \sim(R \in R)$

gibi bir gelişme elde edilir. İkinci şıkta ise

(22) $\sim(R \in R) \leftrightarrow \sim[R \in \{x: \sim(x \in x)\}]$

olur. Gene (16) gereği

(23) $\sim[R \in \{x: \sim(x \in x)] \leftrightarrow \sim\sim(R \in R)$,

dolayısıyla

(24) $\sim[R \in \{x: \sim(x \in x)\}] \leftrightarrow R \in R$

elde edilir. (23) ile (24)'den

(25) $\sim(R \in R) \leftrightarrow (R \in R)$

elde edilir. Bu da bir çelişmedir. O halde ister $R \in R$, ister $\sim(R \in R)$ olsun, her iki şıkta bir çelişme ortaya çıkıyor. (21) ile (25) paradoksal önermelerdir. Bu çıkmaza *Russel paradoksu* veya *Russell çatışkısı* denilmiştir. Buna çeşitli çözüm yolları önerilmiştir. Üç değerli Bochwar sistemi çözümlerden biridir. Nitekim bu sisteme göre (21) ve (25) önermelerinde geçen "~" ile "↔" eklemleri iç eklemlerdir. Dolayısıyla "$R \in R$" önermesine B doğruluk değeri verilirse (21) ile (25) paradoksal önermeler de B değerini alırlar. Dolayısıyla çelişme olmaktan çıkarlar.

Öte yandan "~" ile "↔" iç eklemlerin yerine "$\sim_d$" ile "$\leftrightarrow_d$" dış eklemlerinin kullanırsak Russell paradoksu gene ortaya çıkar. Nitekim R' kümesini

(26) $R' = \{x: \sim_d(x \in x)\}$

biçiminde kullanırsak,

(27) $R' \in R' \leftrightarrow_d \sim_d(R' \in R')$

ile

(28) $\sim_d(R' \in R') \leftrightarrow_d \sim(R' \in R')$

paradoksal önermeleri elde ederiz. (27) ile (28) önermeleri ise, $R' \in R'$ önermesi hangi doğruluk değeri alırsa alsın, birer çelişmedir. ("$R' \in R'$" B değerini alsa bile, (27) ve (28) gene Y değerini alır.) Russel paradoksunun ortaya çıkmamasının çaresi iç eklemlerle yetinip öne sürme eklemi ile dış eklemleri saf dışı etmektir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin karma doğruluk çizelgesi ile doğruluk değerlerini üç değerli Bochwar sistemine göre hazırlayınız.

1. $p \wedge \sim p$
2. $p \wedge_d \sim_d p$
3. $p \vee \sim p$
4. $(p \wedge q) \rightarrow p$
5. $(p \wedge_d q) \rightarrow_d q$

8. ÖDEV MANTIĞI

8.1 SEMBOLLEŞTİRME

"Ödev", "izin" ve "yasak" gibi bazı sözcükler insan davranışlarını düzenleyen ahlâk, hukuk ve din gibi kural sistemlerine ait kavramlar gösterir. Bu türlü kural sistemleri neyin gerekli, izinli veya yasak olduğunu belirler. Örnek olarak

(1) Yoksullara yardım etmemiz bir ödevdir.

veya aynı anlama gelen

(2) Yoksullara yardım etmemiz gereklidir.

veya

(3) Yoksullara yardım etmeliyiz.

önermeleri

(4) (Yoksullara yardım ederiz: p)

sembolleştirme biçimi gereği

(5) p olmasını sağlamak ödevdir.

veya

(6) p yapmak ödevdir.

biçiminde sembolleştiririz. (5) önermesi ise

(5′) $\ddot{O}p$

biçiminde kısaltılır. "$\ddot{O}$" işareti, *ödev değişmezi* denilen yeni bir mantık değişmezini gösterir.

Genel olarak A herhangi bir önerme olduğunda

(7) $\ddot{O}A$

ya *ödev önermesi* denir.

"$\ddot{O}$" ödev değişmezine dayanarak *izin değişmezi* denilen ve "$\dot{I}$" işaretiyle gösterilen mantık değişmezi ile *yasak değişmezi* denilen ve "$\not{Y}$" işaretiyle gösterilen mantık değişmezi şöyle tanımlanır.

(8) $\dot{I}p \equiv \sim\ddot{O}\sim p$

(9) $\mathcal{Y}p \equiv \ddot{O}\sim p$

"$\dot{I}p$" önermesi

(10) p olmasına izin vardır.

ya da

(11) p yapmak izinlidir

biçiminde, "$\mathcal{Y}p$" önermesi de

(12) p olmamalıdır.

ya da

(13) p yapmak yasaktır.

biçiminde dile getirilebilir. (8) ile (9) tanımlarını şöyle haklı gösterebiliriz. Eğer (~p) yapmak yani p yapmamak ödev değilse, p yapılabilir. O halde p izinlidir. Öte yandan (~p) yapmak yani p yapmamak ödevse, p yapılmamalıdır. Bu da "p yasaktır" demektir.

Dikkat edilirse (8) ile (9) tanımlarından

(14) $\dot{I}p \equiv \sim p$

elde edilir. Gerçekten izinli olmayan yasak demektir. (14)'ten devirme yasası gereği

(15) $\dot{I}p \equiv \sim\mathcal{Y}p$

elde edilir. Gerçekten yasak olmayan izinli demektir. Örneğin trafik yasaları gereği

(16) Kırmızı ışıkta kavşaktan geçmek yasaktır,

(17) Yeşil ışıkta kavşaktan geçmek gerekli değil ama izinlidir.

önermeleri doğrudur.

(18) (kırmızı ışıkta kavşaktan geçilir: p,

yeşil ışıkta kavşaktan geçilir: q)

sembolleştirme biçimi gereği (16),

(19) $\mathcal{Y}p$

biçiminde, (17) ise

(20) $\sim\ddot{O}q \wedge \dot{I}q$

biçiminde sembolleştirilir.

"$\ddot{O}$" ile "$\ddot{O}$" türünden tanımlanabilen "$\dot{I}$" ve "$\mathcal{Y}$" mantık değişmezlerine *ödevsel değişmezler* denir. A herhangi bir önerme olduğunda $\ddot{O}$A, $\dot{I}$A ve $\mathcal{Y}$A'ya *ödevsel önermeler* diyoruz. Bunlar atomsal olmayan basit önermelerdir. Önermeler mantığı veya niceleme mantığı gibi bir mantık sistemine ödevsel değişmezlerin eklenmesiyle elde edilen mantık sistemlerine *ödev mantığı* sistemleri veya *ödevsel mantık* sistemleri denir. Biz burada *ödevsel önermeler mantığı* sistemlerini, yani ödevsel değişmezlerin önermeler mantığına eklenmesiyle elde edilen çeşitli mantık sistemlerini inceleyeceğiz.

Ödevsel değişmezler doğruluk fonksiyonu durumunda olmayan birli önerme eklemleridir. Bu eklem "□" ve "◇" kiplik değişmezlerine benziyor. Özellikle "$\ddot{O}$" ödev değişmezi "□" zorunluluk değişmezinin benzeri ve "$\dot{I}$" izin değişmezi "◇" imkân değişmezinin benzeridir. Nitekim ödev, normatif zorunluluk, izin de normatif imkân demektir. Buna göre ödev mantığının yapısı kiplik mantığının yapısına benzediğini söyleyebiliriz.

Ödev mantığının önemli bir konusu *koşullu ödev* (veya yükümlülük) denilen kavramdır. Örneğin

(21) Ali asker olunca üniforma giymelidir.

önermesi bir koşullu ödevi veya yükümlülüğü dile getirir. İmdi (21)'in sembolleştirilmesi tartışmalı bir konudur. Nitekim (21)'in sembolik karşılığı

(22) (Ali asker olacak: p, Ali üniforma giyecek: q)

sembolleştirme biçimi gereği

(23) $p \rightarrow \ddot{O}q$

veya

(24) $\ddot{O}(p \rightarrow q)$

ya da

(25) $p\ \ddot{O}p$

olabilir. Burada "$\ddot{O}$" ikili önerme eklem durumunda olan ve koşullu *ödev değişmezi* veya ikili ödev değişmezi denilen yeni bir mantık değişmezidir. (22)'nin en doğru sembolleştirilmesinin (25) olduğu kabul edilir. Daha önce gördüğümüz birli önerme eklemi durumunda olan "$\ddot{O}$" değişmezine *birli ödev* değişmezi veya *koşulsuz ödev değişmezi* de denir.

"$\ddot{O}$" ikili ödev değişmezine dayanarak *koşullu izin değişmezi* denilen "$\dot{I}$" ile *koşullu yasak değişmezi* denilen "$\ddot{Y}$" değişmezi şöyle tanımlanır.

(26) $p\ \dot{I}\ q \equiv \sim(p\ \ddot{O} \sim q)$

(27) $p\ \dot{I}\ q \equiv p\ \ddot{O} \sim q$

"$\ddot{O}$", "$\dot{I}$", "$\ddot{Y}$" değişmezlerine *ikili* (veya *koşullu*) *ödevsel değişmezler,* "$\ddot{O}$", "$\dot{I}$", "$\ddot{Y}$" ye ise *birli* (veya *koşulsuz*) *ödevsel değişmezler* denir. Birli ödevsel değişmezlere ilişkin mantık sistemlerine *birli ödevsel sistemler,* ikili ödevsel değişmezlere ilişkin mantık sistemlerine de *ikili ödevsel sistemler* denir.

8.2 BİRLİ ÖDEVSEL MANTIK SİSTEMLERİ

8.2.1 Yorumlama

İnceleyeğimiz birli ödevsel mantık sistemlerinin ortak sembolik dili, "p", "q", "r"... önerme temsilcileri, "~", "$\wedge$", "$\vee$", "$\rightarrow$", "$\leftrightarrow$" temel önerme eklemleri "T" ile "$\perp$" sıfırlı önerme eklemleri ve "$\ddot{O}$", "$\dot{I}$", "$\ddot{Y}$" birli ödevsel değişmezlerinden oluşur. Bu dile ait önermelerin yorumlamaları kipliksel önermeler mantığındakilerin aynısıdır. Buna göre her yorumlama, M mümkün dünyalar kümesi, $B^{öd}$ *ödevsel* almaşıklık bağıntısı ve M'nin her öğesi için birer değerlemeden oluşur. Ödevsel önermelerin doğruluğu ise şöyle tanımlanır:

(i) $\ddot{O}A$, *m* mümkün dünyasında doğrudur, ancak ve ancak A, m'nin her ödevsel almaşığında doğru ise

(ii) $\dot{I}A$, *m* mümkün dünyasında doğrudur, ancak ve ancak A, m'nin en az bir ödevsel almaşığında doğru ise

(iii) $\mathcal{Y}A$, *m* mümkün dünyasında doğrudur, ancak ve ancak A *m*'nin her ödevsel almaşığında yanlış ise (Nitekim $\mathcal{Y}A$, $\ddot{O}\sim A$ anlamına gelir.)

Ödev mantığında *m*'nin almaşıklarına *ideal dünyalar* denir. Nitekim $\ddot{O}A$ *m* gibi bir mümkün dünyada doğru ise, A önermesi m'nin her almaşığında doğru olur. Dolayısıyla her almaşık dünya, almaşığı olduğu dünyadaki ödevlerin gerçek olduğu dünya ise normatif anlamda ideal bir dünyadır.

$\mathcal{B}$ ödevsel almaşık bağıntısı aşağıdaki beş özelliği taşıyabilir.

(i) $\mathcal{B}$ diziseldir: $\forall w \exists w'(w \mathcal{B} w')$

(ii) $\mathcal{B}$ geçişlidir: $\forall w \forall w' \forall w''[(w \mathcal{B} w' \wedge w' \mathcal{B} w'') \rightarrow w \mathcal{B} w'']$

(iii) $\mathcal{B}$'nin Euklides özelliği vardır: $\forall w' \forall w''[(w \mathcal{B} w' \wedge w \mathcal{B} w'') \rightarrow w' B w'']$

(iv) $\mathcal{B}$ yarı-yansımalıdır: $\forall w \forall w'(w \mathcal{B} w' \rightarrow w' \mathcal{B} w')$

(v) $\mathcal{B}$ yarı-bakışımlıdır: $\forall w \forall w' \forall w''[w \mathcal{B} w' \rightarrow (w' \mathcal{B} w'' \rightarrow w'' \mathcal{B} w')]$

Ödevsel almaşıklık bağıntısının (i) - (v) özelliklerine dayanarak aşağıdaki on farklı ödevsel mantık sistemini belirler.

1. *ÖK sistemi:* Bütün yorumlamaların $\mathcal{B}$ için hiçbir özellik öngörülmeksizin belirlediği sistemdir.
2. *ÖT sistemi:* Yarı-geçişli almaşıklık bağıntılı yorumlamaların belirlediği sistemdir.
3. *ÖS4 sistemi:* Geçişli ve yarı-yansımalı ödevsel almaşıklı bağıntılı yorumlamaların belirlediği sistemdir.
4. *ÖB sistemi:* Yarı-bakışımlı ve yarı-yansımalı ödevsel almaşıklık bağıntılı yorumlamların belirlediği sistemdir.
5. *ÖS5 sistemi:* Euklides özelliğini taşıyan geçişli almaşıklık bağıntılı yorumlamaların belirlediği sistemdir.
6. $\ddot{O}K^+$: Dizisel ödevsel almaşıklı yorumlamaların belirlediği sistemdir.
7. $\ddot{O}T^+$: Dizisel ve yarı-yansımalı ödevsel almaşıklık bağıntılı yorumlamaların belirlediği sistemdir.

8. $\ddot{O}S4^{+}$: Dizisel, geçişli ve yarı-yansımalı ödevsel almaşıklık bağıntılı yorumlamaların belirlediği sistemdir.

9. $\ddot{O}B^{+}$: Dizisel, yarı-bakışımlı ve yarı-yansımalı ödevsel almaşıklık bağıntılı yorumlamaların belirlediği sistemdir.

10. $\ddot{O}S5^{+}$: Dizisel, Euklides özelliği olan geçişli ödevsel almaşıklık bağıntılı yorumlamaların belirlediği sistemdir.

Bu son sistemden her biri aşağıdaki biçimlerdeki gösterilen önermelerden bazılarını içine alır. Bu önermeler ilgili sistemin aksiyomlarıdır.

A0. Ödevler mantığı diline ait bütün totolojiler

A1. $\dot{I}A \rightarrow \sim\ddot{O}\sim A$

A2. $\ddot{O}(A \rightarrow B) \rightarrow (\ddot{O}A \rightarrow \ddot{O}B)$

A3. $\ddot{O}A \rightarrow \dot{I}A$ ((ii) özelliğinin karşılığı)

A4. $\ddot{O}A \rightarrow \ddot{O}\ddot{O}A$ (Özelliğinin karşılığı)

A5. $\dot{I}\ddot{O}A \rightarrow \ddot{O}A$ ((iii) özelliğinin karşılığı)

A6. $\ddot{O}(\ddot{O}A \rightarrow A)$ ((iv) özelliğinin karşılığı)

A7. $\ddot{O}(\dot{I}\ddot{O}A \rightarrow A)$ ((v) özelliğinin karşılığı)

1. ÖK sisteminin aksiyomları, A0, A1, A2'dir.

2. ÖT sisteminin aksiyomları, A0, A1, A2, A6'dir.

3. ÖS4 sisteminin aksiyomları, A0, A1, A2, A4, A6'dır.

4. ÖB sisteminin aksiyomları, A0, A1, A2, A6, A7'dir.

5. ÖS5 sisteminin aksiyomları, A0, A1, A2, A4, A5'dir.

6. $\ddot{O}K^{+}$ sisteminin aksiyomları ÖK'nin aksiyomları ve A3'dür.

7. $\ddot{O}T^{+}$ sisteminin aksiyomları ÖT'nin aksiyomları ve A3'dür.

8. $\ddot{O}S4^{+}$ sisteminin aksiyomları ÖS4'ün aksiyomları ve A3'dür.

9. $\ddot{O}B^{+}$ sisteminin aksiyomları ÖB'nin aksiyomları ve A3'dür.

10. $\ddot{O}S5^{+}$ sisteminin aksiyomları ÖS5'in aksiyomları ve A3'dür.

Bir mantık sisteminin aksiyomları, sistemin bütün yasalarının (yani sistemde geçerli olan önermelerin) türetilebildiği belli bazı yasalardır. ÖS5 ile ÖS5$^+$ sistemlerinde A6 ile A7 önermeleri bu sisteminin aksiyomlarından türetilebilir.

8.2.2 Çözümleyici Çizelge ile Doğrulayıcı Yorumlama Belirlemesi

"*Ö*" değişmezi "□" değişmezinin ve "*İ*" değişmezi "◇" değişmezinin benzeri olduğundan ödevsel mantık sistemlerinin doğrulayıcı çizelgesi bu sistemlerin karşılığı olan kiplik mantığı sistemlerindekilerin aynısıdır. Ancak bazı durumlarda doğrulayıcı yorumlama belirlemesinde kullanılan çözümleyici çizelgenin zorunluluğun elenmesi kuralı aşağıda gösterildiği biçimde değiştirilmelidir.

(i) Yarı - Yansımalı ödevsel almaşıklık bağıntısına özgü Ö'nün elenmesi kuralı:

$[k_1...k_n]$ [0]'dan farklı olursa,

1. $[k_1...k_n]$ *Ö*A

$[k_1...k_n]$ A (1)

(ii) Yarı-bakışımlı ödevsel almaşıklık bağıntısına özgü Ö'nün elenmesi kuralı:

$[k_1...k_n]$, [0]'dan farklı olursa,

1. $[k_1...k_n\ k_{n+1}]$ *Ö*A

$[k_1...k_n]$ A (1)

Euklides özelliği olan ödevsel almaşıklık bağıntısına özgü zorunluluğun elenmesi kuralı ise şöyledir:

1. $[k_1...k_n]$ *Ö*A

$[k_1'...k_n']$ A (1)

Örnek olarak

(1) *Ö*p → *İ*p

önermesinin ÖK sisteminde geçersiz olduğunu çözümleyici çizelge ile gösterelim. Bu amaçla (1)'in değillemesinin doğrulayıcı yorumlamasını aşağıdaki ÖK sistemine özgü çözümleyici çizelge ile buluyoruz.

(2) 1. [0] ~(Öp → *i*p) (B.Ö.)
3. [0] Öp
2. [0] ~*i*p (1)
4. [0] Ö~p (2)

(3)

[0.1] p | [0] Öp (ç)
[0.1] ~p (4) | [0] Öp (4, ç)
X

((2) çizelgesini daha kolay izleyebilmek için sayfa 112'deki (i) kuralına bakınız.)

(2) çizelgesi şöyle bir doğrulayıcı yorumlamayı belirler. "[0]" yerine m_0 koyuyoruz.

(3) (M: {[m_0]}; ℬ: { }; m_0:)

(3), (2)'nin başlangıç önermesinin doğrulayıcı yorumlaması olduğundan (1)'in yanlışlayıcı yorumlamasıdır. O halde (1), ÖK sisteminde geçersizdir.

İkinci örnek olarak

(4) Ö(Öp → p)

önermesinin ÖK$^+$ sisteminde geçersiz olduğunu çözümleyici çizelge ile gösterelim. Bu amaçla (4)'ün değillemesinin doğrulayıcı yorumlamasını ÖK$^+$ sistemine özgü çözümleyici çizelge ile buluyoruz.

(5) 1. [0] ~Ö(Öp → p) (B.Ö.)
2. [0] *i*~(Öp → p) (1)
3. [0.1] ~(Öp → p) (2)
4. [0.1] Öp
[0.1] ~p (3)
[0.1.1] p (4)

(5) çizelgesinin tek açık yolu şöyle bir doğrulayıcı yorumlamayı belirler. "[0]" yerine m_0, "[0.1]" yerine m_1, [0.1.1] yerine de m_2 koyarız.

(6) (M: $\{m_0, m_1, m_2\}$; $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_1>, <m_1, m_2>, <m_1, m_2>\}$; m_0:; m_1:; m_2: p).

(6), (5)'in başlangıç önermesinin doğrulayıcı yorumlaması olduğundan (4)'ün yanlışlayıcı yorumlamasıdır. O halde (4), ÖK^+ sisteminde geçersizdir.

ALIŞTIRMALAR

1. $\ddot{O}p \rightarrow \ddot{O}\ddot{O}p$

önermesinin ÖT^+ sisteminde geçersiz olduğunu çözümleyici çizelge ile gösteriniz.

2. $i\ddot{O}p \rightarrow \ddot{O}p$

önermesinin ÖS4^+ sisteminde geçersiz olduğunu çözümleyici çizelge ile gösteriniz.

3. $\ddot{O}(i\ddot{O}p \rightarrow p)$

önermesinin ÖT^+ sisteminde geçersiz olduğunu çözümleyici çizelge ile gösteriniz.

8.2.3 Çözümleyici Çizelge İle Denetleme

Çözümleyici çizelge ile 8.2.1'de sözünü ettiğimiz on ödevsel mantık sisteminde denetleme için kullanılan çözümleyici çizelgenin kuralları §8.2.2'deki belirtilen kurallardır. Örnek olarak

(1) $i\ddot{O}p \rightarrow \ddot{O}p$

önermesinin ÖS5 sisteminde geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim. ÖS5 sisteminin yorumlamalarının ödevsel almaşıklık bağıntısının Euklides özelliği vardır. Dolayısıyla (1)'in değillemesinin çözümleyici çizelgesi şöyledir.

(2) 1. [0] $\sim(i\ddot{O}p \rightarrow \ddot{O}p)$ (B.Ö.)

4. [0] $i\ddot{O}p$

2. [0] $\sim\ddot{O}p$ (1)

3. [0] i~p (2)

[0.1] ~p (3)

5. [0.2] $\ddot{O}$p (4)

[0.1] p (5)

X

5. adımda Euklides özelliğine özgü $\ddot{O}$'nün elenmesi kuralını kullandık. (2) kapalı olduğundan (1), ÖS5 sisteminde geçerlidir.

İkinci örnek olan

(3) $\ddot{O}(\ddot{O}p \rightarrow p)$

önermeinin ÖT sisteminde geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(4) 1. [0] ~$\ddot{O}(\ddot{O}p \rightarrow p)$ (B.Ö.)

2. [0] i~$(\ddot{O}p \rightarrow p)$ (1)

(2)

3. [0.1] ~$(\ddot{O}p \rightarrow p)$ (2) [0] i~$(\ddot{O}p \rightarrow p)$ (çk)

X

4. [0.1] $\ddot{O}$p

[0.1] ~p (3)

[0.1] p (4)

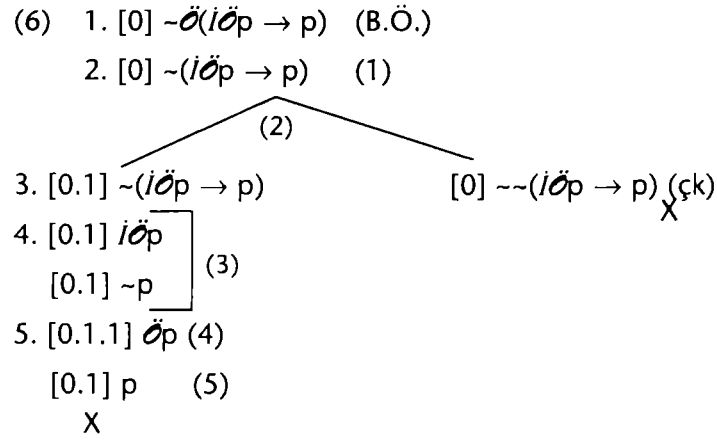
X

(4) çizelgesi kapalı olduğundan (3), $\ddot{O}$ sisteminde geçerlidir. Dikkat edilirse 4. adımda, yarı-yansıma özelliğine göre zorunluluğun elenmesi kuralını uyguladık.

Üçüncü örnek olarak

(5) $\ddot{O}(i\ddot{O}p \rightarrow p)$

önermesinin ÖB sisteminde geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.



5. adımda yarı-bakışımlık özelliğine özgü zorunluluğun elenmesi kuralını uyguladık. (6) kapalı olduğundan (5), ÖB sisteminde geçerlidir.

ALIŞTIRMALAR

1. $\ddot{O}(p \to q) \to (\ddot{O}p \to \ddot{O}q)$

önermesinin ÖK sisteminde geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

2. $\dot{I}p \leftrightarrow \sim\ddot{O}\sim p$

önermesinin $ÖK^+$ sisteminde geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

3. $\ddot{O}p \to \ddot{O}\ddot{O}p$

önermesinin ÖS4 sisteminde geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

8.3 BİRLİ ÖDEVSEL MANTIK SİSTEMLERİNİN KİPLİK MANTIĞI SİSTEMLERİNE İNDİRGENMESİ

İndirgemede kullandığımız kiplik mantığı sistemlerinin yorumlamasında, U uygunluk önermesinin karşılığı olarak M mümkün dünyalar kümesinin bir alt kümesi yer alır. Bu alt kümeye *uygun* veya (ideal) mümkün dünyalar denir. Bu alt kümeyi "Uyg" işaretiyle gösteriyoruz. Uyg $\subseteq$ M. Bu türlü yorumlamalara *Uygunluk Yorumlaması* diyoruz. U uygunluk önermesinin bir yorumlamanın m mümkün dünyasında doğru olması şöyle tanımlanır.

(1) U uygunluk önermesi m mümkün dünyasında doğrudur, ancak ve ancak m ∈ Uyg ise.

Bu türlü yorumlamaların $\mathcal{B}$ almaşık bağıntısı ise aşağıda belirtilen özellikleri taşıyabilir.

(i) $\mathcal{B}^U$ Uyg kümesinde diziseldir: $\forall m \exists m'(m' \in Uyg \rightarrow m\mathcal{B}^U m')$

(ii) $\mathcal{B}^U$ geçişlidir: $\forall m \forall m' \forall m''[(m\mathcal{B}^U m' \wedge m'\mathcal{B}^U m'') \rightarrow m\mathcal{B}^U m'']$

(iii) $\mathcal{B}^U$'nun Euklides özelliği vardır: $\forall m \forall m' \forall m''[(m\mathcal{B}^U m' \wedge m\mathcal{B}^U m'') \rightarrow m'\mathcal{B}^U m'']$

(iv) $\mathcal{B}^U$ yansımalıdır: $\forall m(m\mathcal{B}^U m)$

(v) $\mathcal{B}^U$ bakışımlıdır: $\forall m \forall m'(m\mathcal{B}^U m' \rightarrow m'\mathcal{B}^U m)$

Bu özelliklere göre uygunluk yorumlamaları sınıflarının belirlediği mantık sistemlerini şöyle sınıflıyoruz:

1. K_u *sistemi:* Yorumlamalarda sınırlama yoktur.
2. T_u *sistemi:* $\mathcal{B}^U$ yansımalıdır.
3. $S4_u$ *sistemi:* $\mathcal{B}^U$ geçişli ve yansımalıdır.
4. B_u *sistemi:* $\mathcal{B}^U$ bakışımlı ve yansımalıdır.
5. $S5_u$ *sistemi:* $\mathcal{B}^U$'nun Euklides özelliği olup bakışımlıdır.
6. K_u^+ *sistemi:* $\mathcal{B}^U$ Uyg kümesinde diziseldir.
7. T_u^+ *sistemi:* $\mathcal{B}^U$ Uyg kümesinde dizisel olup yansımalıdır.
8. $S4_u^+$ *sistemi:* $\mathcal{B}^U$ Uyg kümesinde dizisel olup geçişli ve yansımalıdır.
9. B_u^+ *sistemi:* B^U Uyg kümesinde dizisel olup bakışımlı ve yansımalıdır.
10. $S5_u^+$ *sistemi:* $\mathcal{B}^U$ Uyg kümesinde diziseldir, ayrıca Euklides özelliği olup bakışımlıdır.

Bu sistemlere *uygunluk sistemleri* diyoruz.

Bu on sistemden her biri aşağıda gösterilen biçimlerdeki önermelerden bazılarını içine alır. Bu önermeler ilgili sistemin aksiyomlarıdır.

B0 Bütün totolojiler

B1 $\Diamond A \leftrightarrow \sim\Box\sim A$

B2 $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

B3 $\Diamond U$ ((ii) özelliğinin karşılığı)

B4 $\Box A \rightarrow \Box\Box A$ ((ii) özelliğinin karşılığı)

B5 $\Diamond\Box A \rightarrow \Box A$ ((iii) özelliğinin karşılığı)

B6 $\Box A \rightarrow A$ ((iv) özelliğinin karşılığı)

B7 $\Diamond\Box A \rightarrow A$ ((v) özelliğinin karşılığı)

1. K_u sisteminin aksiyomları B_0, B_1, B_2'dir.
2. T_u sisteminin aksiyomları B_0, B_1, B_2, B_6'dır.
3. $S4_u$ sisteminin aksiyomları B_0, B_1, B_2, B_4, B_6'dır.
4. B_u sisteminin aksiyomları B_0, B_1, B_2, B_6, B_7'dır.
5. $S5_u$ sisteminin aksiyomları B_0, B_1, B_2, B_5, B_6'dır.
6. K_u^+ sisteminin aksiyomları B_0, B_1, B_2, B_3'dür.
7. T_u^+ sisteminin aksiyomları B_0, B_1, B_2, B_3, B_6'dır.
8. $S4_u^+$ sisteminin aksiyomları B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, B_6'dır.
9. B_u^+ sisteminin aksiyomları B_0, B_1, B_2, B_3, B_6, B_7'dır.
10. $S5_u^+$ sisteminin aksiyomları B_0, B_1, B_2, B_3, B_5, B_6'dır.

$S5_u$ ile $S5_u^+$ sistemlerinde B4 ve B7 aksiyomlarından türetilebilir.

§8.2.1'de tanımlanan on farklı birli ödevsel mantık sistemleri $\dot{I}_1$,..., $\dot{I}_i$,..., $\dot{I}_{10}$ ve yukarıda tanımlanan uygunluk sistemleri $\dot{I}_1^u$, ..., $\dot{I}_i^u$,..., $\dot{I}_{10}$ olsun. $\dot{I}_i^u$ nun $\dot{I}_i$'nin karşılığı olduğunu kabul ediyoruz. A ödevsel mantığının diline ait herhangi bir önerme olduğunda f gibi bir çeviri fonksiyonunu şöyle tanımlıyoruz.

1. $f(p) = p$
2. $f(T) = T$
3. $f(\perp) = \perp$
4. $f(\sim A) = \sim f(A)$

5. $f(A \wedge B) = f(A) \wedge f(B)$, $f(A \vee B) = f(A) \vee f(B)$, $f(A \rightarrow B) = f(A) \rightarrow f(B)$, $f(A \leftrightarrow B) = f(A) \leftrightarrow f(B)$
6. $f(\ddot{O}A) = \Box[U \rightarrow f(A)]$
7. $f(\dot{I}A) = \Diamond[U \wedge f(A)]$

O zaman şöyle bir sonuç elde edilir.

Ödevsel mantık sistemlerinin diline ait her A önermesi için, A önermesi $\dot{I}$ sistemine aitse, $\mathcal{Y}(A)$ önermesi $\dot{I}_i^u$ sistemine ait olur.

8.4 ÖDEV MANTIĞI PARADOKSLARI

8.4.1 Alf Ross Paradoksu

Ödev mantığının, içinde ödevsel değişmezler geçen bazı önerme ve çıkarımların yol açtığı paradokslara çare bulması beklenir. Şimdi bu paradoksların en önemlilerini ve önerilen çözümleri inceleyeğiz. İlk ele alacağım ve *Alf Ross Paradoksu* olarak adlandırılan paradoksu aşağıdaki çıkarıma ilişkindir.

(1) Mektubu postalaman gerekir, o halde mektubu postalaman veya yakman gerekir.

Bu çıkarım sezgisel olarak geçersizdir. Dolayısıyla

(2) Mektubu postalaman gerekirse, mektubu postalaman veya yakman gerekir.

önermesi de sezgisel olarak geçersiz olur. (2)'nin sembolik karşılığı

(3) (Mektubu postalarsın: p, mektubu yakarsın: q)

sembolleştirme gereği

(4) $\ddot{O}p \rightarrow \ddot{O}(p \vee q)$

dır. İmdi (4), §8.2.1'de tanımlanan bütün birli ödevsel mantık sistemlerinde geçerlidir. Bu çözümleyici ile en zayıf olan ÖK sisteminde denetleyelim.

(5) 1. [0] ~[Öp → Ö(p ∨ q)] (B.Ö.)

5. [0] Öp
2. [0] ~Ö(p ∨ q) (1)

3. [0] *i*~(p ∨ q) (2)

4. [0.1] ~(p ∨ q) (3)

[0.1] ~p
[0.1] ~q (4)

[0.1] p (5)

X

Bu paradoks aslında

(6) p ∴ p ∨ q

biçimindeki çıkarımların paradoksal olmasından kaynaklanır. Nitekim günlük dilde

(7) p ∨ q

biçimindeki bir önerme p'nin ve q'nun doğruluk değerleri bilinmediği durumlarda evetlenir. Oysa (6) çıkarımının öncülünde p'nin doğruluğu öne sürülüyor. Dolayısıyla p'nin doğruluğu bilindiğine göre artık (7) evetlenemez. Bu nedenle (6) mantıkça geçerli olmakla birlikte sezgisel olarak geçerli olduğu kabul edilemez. Ancak mantık açısından (7)'nin geçerli olduğunu kabul etmek zorundayız. Aynı biçimde sezgisel olarak geçersiz sayılan (1) çıkarımının mantıkça geçerli olduğunu kabul etmeliyiz. Böylece Alf Ross paradoksu çözülmüş olur.

8.4.2 Koşullu Ödev Paradoksu

Koşullu Ödev'e ilişkin olan paradoksal önermeler ortaya konulmuştur. Bunları aşağıda gösteriyoruz.

(1) Söz vermediğimde, söz verirsem sözümü tutmalıyım.

(2) Sözümü tutmam gerektiğinde, söz verirsem sözümü tutmalıyım.

(3) Söz vermememem gerektiğinde, söz vermek sözümü tutmamı gerektirir.

(4) Sözümü tutmak gerektiğinde, söz vermem sözümü tutmamı gerektirir.

önermeleri sezgisel olarak geçersizdir. Bu dört önermenin sembolik karşılıkları

(5) (sözü veririm: p, sözümü tutarım: q)

gereği sırasıyla

(6) $\sim p \rightarrow (p \rightarrow \ddot{O}q)$

(7) $\ddot{O}q \rightarrow (p \rightarrow \ddot{O}q)$

(8) $\ddot{O}\sim p \rightarrow \ddot{O}(p \rightarrow q)$

(9) $\ddot{O}q \rightarrow \ddot{O}(p \rightarrow q)$

dur. (6) – (9) önermeleri birli ödevsel mantık sistemlerinin her birinde geçerlidir. Dikkat edilirse (1)–(9) önermeleri hep "koşullu ödev" ile ilgilidir. Koşullu ödev kavramını ise daha önce belirtildiği gibi

(10) $\ddot{O}(p \rightarrow q)$

veya

(11) $p \rightarrow \ddot{O}q$

biçiminde değil, "ikili ödev değişmezi" yardımıyla

(12) $p \ddot{O} q$

biçiminde dile getireceğiz. O zaman da koşullu ödev paradoksu çözüme kavuşur.

ALIŞTIRMALAR

§8.4.2'deki (6) - (9) önermelerinin geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

8.4.3 Ödeve Aykırı Buyruk Paradoksu

Ödeve aykırı buyruk paradoksu, aşağıdaki önermeler kümesine bağlıdır.

I. Söz vermemem gerekir.

II. Söz vermemem söz tutmamamı gerektirir.

III. Söz vermem sözümü tutmamı gerektirir.

IV. Söz veririm.

K = {I, II, III, IV} olsun. K kümesi sezgisel olarak tutarlı ve bağımlıdır. K'nın *bağımsız* olması, I, II, III, IV önermelerinden hiç birinin öbür üçü tarafından içerilmemesi demektir.

İmdi I-IV önermeleri

(1) (Söz veririm: p, sözümü tutarım: q)

sembolleştirme biçimi gereği üç farklı biçimde sembolleştirilebilir.

(a) biçimi

(a) Ia $\ddot{O}\sim p$

IIa $\ddot{O}(\sim p \rightarrow \sim q)$

IIIa $\ddot{O}(p \rightarrow q)$

IVa p

(b) biçimi

Ib $\ddot{O}\sim p$

IIb $\sim p \rightarrow \ddot{O}\sim p$

IIIb $p \rightarrow \ddot{O}q$

IVb p

(c) biçimi

Ic $\ddot{O}\sim p$

IIc $\ddot{O}(\sim p \rightarrow \sim q)$

IIIc $p \rightarrow \ddot{O}q$

IVc p

İmdi birli ödevsel mantık sistemlerinin her birine göre:

(a) Ia, IIIa'yı içerir. Dolayısıyla Ia, IIa, IVa'da IIIa'yı içerir. O halde {Ia, IIa, IIIa, IVa} kümesi bağımsız değildir.

(b) IVb, IIb'yi içerir. Dolayısıyla Ib, IIIb, IVb'de IIb'yi içerir. O halde {Ib, IIb, IIIb, IVb} bağımsız değildir.

(c) Birli ödevsel mantık sistemlerinden "+" işaretini taşıyanlara göre {Ic, IIc, IIIc, IVc} tutarsızdır. {I, II, III, IV} kümesinin tutarlı ve bağımsız olmasına karşılık sembolleştirilmiş önerme kümelerinin bağımsız ve tutarlı olmaması *ödeve aykırı buyruk paradoksu* denilen bir paradoksa yol açar.

Örnek olarak Ia önermesinin IIIa önermesini ÖK sisteminde içerdiğini çözümleyici çizelge ile denetleyelim. İmdi Ia'nın IIIa'yı içermesi,

(2) $\ddot{O}{\sim}p \therefore \ddot{O}(p \rightarrow q)$

çıkarımının ÖK sisteminde geçerli olması demektir. Bunu denetlemek için (2)'nin geçersiz kılıcı kümesinin ÖK sistemine özgü çözümleyici çizelgesini kuruyoruz.

(3) 4. [0] $\ddot{O}{\sim}p$ (B.Ö.)

1. [0] $\sim\ddot{O}(p \rightarrow q)$ (B.Ö.)

2. [0] $\dot{I}\sim(p \rightarrow q)$ (1)

(2)

3. [0.1] $\sim(p \rightarrow q)$ [0] $\sim\dot{I}(p \rightarrow q)$ (çk)

X

[0.1] p

[0.1] ~q (3)

[0.1] ~p (4)

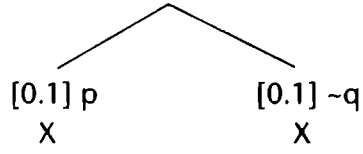
X

İkinci örnek olarak {Ic, IIc, IIIc, IVc} kümesinin ÖK$^+$ sistemine göre tutarsız olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim. Ic ile IIc ÖK$^+$ sistemine göre Ö~q'yu içerir. Nitekim

(3) $\ddot{O}\sim p, \ddot{O}(\sim p \rightarrow \sim q) \therefore \ddot{O}(\sim q)$

çıkarımı ÖK$^+$ sisteminde geçerlidir. Bunu aşağıdaki kapalı çözümleyici çizelge ile gösteriyoruz.

(4) 3. [0] $\ddot{O}\sim p$ (B.Ö.)
4. [0] $\ddot{O}(\sim p \rightarrow \sim q)$ (B.Ö.)
1. [0] $\sim\ddot{O}\sim q$ (B.Ö.)
2. [0] iq (1)
[0.1] q (2)
[0.1] ~p (3)
[0.1] ~p → ~q (4)



Öte yandan IIIc ile IVc ÖK$^+$ sistemine göre $\ddot{O}$q'yu içerir. Nitekim

(5) $p \rightarrow \ddot{O}q, p \therefore \ddot{O}q$

çıkarımı (Modus ponens kural gereği) geçerlidir. O halde hem $\ddot{O}(\sim q)$ hem $\ddot{O}q$, {Ic, IIc, IIIc, IVc} tarafından içeriliyor. Oysa

(6) $\{\ddot{O}\sim q, \ddot{O}q\}$

kümesi ÖK$^+$ sistemine göre tutarsızdır. Bunu aşağıdaki kapalı çözümleyici çizelge ile gösteriyoruz.

(7) 1. [0] $\ddot{O}\sim q$ (B.Ö.)
2. [0] $\ddot{O}q$ (B.Ö.)
[0.1] ~q (1)
[0.1] q (2)
X

O halde {Ic, IIc, IIIc, IVc} kümesi tutarsızdır.

Öte yandan {I, II, III, IV} önermeleri $\ddot{O}$ ikili ödev değişmezi (koşullu ödev değişmezi) yardımıyla gene (1) sembolleştirme biçimi gereği aşağıdaki iki farklı biçimde sembolleştirilebilir.

(d) biçimi

Id. $\ddot{O}$~p

IId. $\ddot{O}(\sim p \rightarrow \sim q)$

IIId. p $\ddot{O}$ q

IVd. p

(e) biçimi

Ie. $\ddot{O}$~p

IIe. ~p $\ddot{O}$ ~q

IIIe. p $\ddot{O}$ q

IVe. p

{Id, IId, IIId, IVd} ile {Ie, IIe, IIIe, IVd} kümeleri ikili ödevsel mantık sistemlerinde (tıpkı {I, II, III, IV} kümesi gibi) tutarlı ve bağımsızdır. Böylece paradoks ortadan kalkmış olur. İkili ödevsel mantık sistemleri son derece karmaşık olduğundan bunları burada inceleyemeyeceğiz.

9. SORULAR MANTIĞI

9.1 İSTEK-ÖNERMESİ ve AMAÇ-ÖNERMESİ

Buraya kadar yalnız önerme işlerinde olan yani doğru veya yanlış olabilen tümceleri inceledik. Şimdi önerme olmayan ve bir *soru* dile getiren *soru tümceleri*'ni inceleyeceğiz.

"Soru" kavramını incelemek amacıyla herhangi bir soruyu gözönüne alalım. *a* soruyu soran kişi olduğunda, *a* kişisi soruyu sormakla belli bir konuda bilgi sağlamak ister. Gerçi sınav soruları sorunun değil, sorulanın bilgisine yönelmiştir. Ancak sınav sorusunun ereğinin, soran kişiye sorulan kişinin bilgisi hakkında bilgi sağlamak olduğunu söyleyebiliriz.

a kişisinin sorduğu bir soru aracılığıyla belli bir bilgi durumuna erişme isteğini dile getiren önermeye, sorunun *istek-önermesi* diyoruz.

Böyle bir istek bir buyruk veya dilek niteliğindedir. Sorunun istek-önermesi, "a ister ki" sözü ile başlayan bir tümce biçiminde dile getirilir. Örnek olarak a gibi bir kişinin sorduğu

(1) Trafik düzensizliği sürücülerden kaynaklanıyor mu?

sorusunun istek önermesini ve bu önermenin yapısını ortaya koymaya çalışalım. Bu amaçla

(2) (Trafik düzensizliği sürücülerden kaynaklanıyor: p)

sembolleştirme biçimine göre (1) sorusunu

(3) p doğru mudur?

biçiminde sembolleştirelim. a kişisi (3) gibi bir soruyu sormakla p'nin doğru olup olmadığını, dolayısıyla p ile $\overline{p}$ önermelerinden hangisinin doğru olduğunu bilmek ister. Dolayısıyla (3) sorusunun istek önermesini, bilgi mantığında kullanılan "B_a" bilme değişmezi yardımıyla

(4) a ister ki $(B_a p \vee B_a \sim p)$

biçiminde dile getirebiliriz. O halde (1) sorusunun istek önermesi şöyledir.

(5) a ister ki, trafik düzensizliğinin sürücülerden kaynaklandığını veya kaynaklanmadığını bilsin.

Bir sorunun istek önermesinde "ister ki" sözünün etki alanını oluşturan önermeye soru'nun *amaç önermesi* denir.

Buna göre (3) sorusunun amaç önermesinin

(6) $B_a p \vee B_a \sim p$

önermesi olduğunu söyleyebiliriz. Nitekim (6), (4) istek önermesindeki "a ister ki" sözünün etki alanını oluşturuyor. O halde (1) sorusunun amaç önermesi şöyledir.

(7) a kişisi trafik düzensizliğinin sürücülerden kaynaklanıp kaynaklanmadığını bilir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki soruları verilen sembolleştirme biçimi gereği sembolleştiriniz. Ayrıca soruların istek önermesini ve amaç önermesini gösteriniz.

1. Yarın yağmur yağacak mı? (Yarın yağmur yağacak: p)
2. Ali İstanbul'a gidecek mi? (Ali İstanbul'a gidecek: p)
3. Balıklar omurgalı mıdır? (Balıklar omurgalıdır: p)

9.2 ÖNDAYANAK

Bir sorunun erek önermesinde bilme değişmezinin kaldırılmasıyla elde edilen önermeye verilen soru'nun *öndayanak*'ı denir.

Örnek olarak

(1) Ali bu yaz Alanya'ya mı Bodrum'a mı gidecek?

önermesinin öndayanağını bulmaya çalışalım. Bu amaçla (1) sorusunu

(2) (Ali bu yaz Alanya'ya gidecek: p, Ali bu yaz Bodrum'a gidecek: q)

sembolleştirme biçimi gereği

(3) p ile q önermelerinden hangisi doğrudur?

biçiminde sembolleştiriyoruz. (3) sorusunun istek önermesi (soruyu soran a kişisi olduğunda)

(4) a ister ki $(B_a p \vee B_a q)$

dur. Buna göre (3)'ün amaç önermesi

(5) $(B_a p \vee B_a q)$

olur. Nitekim a kişisi (3) sorusuyla p olduğunu veya q olduğunu bilmek ister. (3)'ün öndayanağı ise (5) amaç önermesinde "B_a" bilme değişmezinin kaldırılmasıyla elde edilen

(6) $(p \vee q)$

önermesidir. O halde (1) önermesinin öndayanağı şöyledir.

(7) Ali bu yaz Antalya'ya veya Bodrum'a gidecektir.

(6) öndayanak önermesi yanlış ise yani hem p hem q yanlış ise, (5) amaç önermesi de yanlış olur. Nitekim

(8) $B_a p \rightarrow p$

ve

(9) $B_a q \rightarrow q$

geçerli olduğundan, p ile q'nun yanlış olması (5)'in de yanlış olmasına yol açar. O halde (6) öndayanak önermesinin yanlış olması, (3) sorusunu soran kişinin amacına erişmesini imkânsız kılar. Dolayısıyla (6) öndayanak önermesinin doğru olmaması durumunda (3) sorusunun sorulması yersizdir. a kişisi buna karşın (3) sorusunu *b* gibi bir kişiye sorarsa, *b*'nin vereceği yanıt

(10) a yanılıyor, çünkü $\sim(p \vee q)$

biçiminde bir suçlama olabilir. Nitekim *b* kişisinin (10) biçimindeki yanıtıyla a kişisinin $\sim(p \vee q)$'nun doğru olduğunu bilmemekle, ya da bunu biliyorsa, uygun veya yerinde soru sormasını bilmemekle suçlamış olur.

Genel olarak bir sorunun öndayanağı, o sorunun yerindeliğinin gerekli ve yeterli koşuludur. Buna göre bir soru'nun öndayanağının olması *yerinde* olması demektir. *Yersiz* bir soru öndayanağı yanlış olan bir sorudur. Bir soru'nun erek önermesi, soru'nun öndayanağını içerir. Nitekim

(11) $(B_a p \vee B_a q) \models (p \vee q)$

içermesinin doğru olduğunu görmüştük. (p ile q yanlış ise $B_a p$ ile $B_a q$'da yanlış olur. Dolayısıyla $B_a p$ veya $B_a q$ doğru ise, $p \vee q$ doğru olmalıdır.)

(12) p doğru mudur?

biçimindeki bir sorunun erek önermesinin

(13) $B_a p \vee B_a \sim p$

biçiminde olduğunu görmüştük. Dolayısıyla (12) sorusunun öndayanağı

(14) $p \vee \sim p$

önermesidir. (14) ise bir totoloji olduğundan hep doğrudur. Dolayısıyla (12) gibi sorulara *öndayanaksız soru* denir.

"p doğru mudur?" biçimindeki sorulara (yanıtlar "evet" ile "hayır" olduğundan *evet-hayır* sorusu denir.)

Evet-hayır sorları öndayanaksız sorulardır.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin istek önermesini, amaç önermesini ve öndayanağını bulunuz.

1. Ali sınıfını geçecek mi?
2. Yarın hava yağmurlu mu karlı mı olacak?
3. Trafik düzensizliği sürücülerden mi araçlardan mı kaynaklanıyor?

9.3 TEKLİ SEÇENEK SORULARI

(1) $p_1,..., p_n$ önermelerinden hangisi doğrudur?

biçimindeki sorulara *tekli seçenek sorusu* denir.

Nitekim (1) biçimindeki bir soru, seçenekler durumundaki $p_1,..., p_n$ önermeleri arasında doğru olan tek bir seçeneğin seçilmesini ön görüyor. Örnek olarak

(2) Trafik düzensizliği sürücülerden mi, araçlardan mı, yollardan mı kaynaklanıyor?

sorusu n = 3 durumu için bir tekli seçenek sorusudur. (2) sorusunun sembolik karşılığı

(3) (Trafik düzensizliği sürücülerden kaynaklanıyor: p, trafik düzensizliği araçlardan kaynaklanıyor: q, trafik üzensizliği yollardan kaynaklanıyor: r)

sembolleştirme biçimi gereği

(2') p, q, r önermelerinden hangisi doğrudur?

biçimindedir. (1) biçimindeki sorular

(4) $?_n^{tek}(p_1,..., p_n)$

biçiminde gösterilir. "$?_n^{tek}$" işareti, *n-li tekli seçenek sorusu* değişmezi denilen yeni bir mantık değişmezidir. Buna göre (2") sorusu

(2") $?_3^{tek}(p, q, r)$

biçiminde kısaltılır.

(4) biçimindeki tekli seçenek sorularının istek önermesi (soran kişi a olduğunda)

(5) a ister ki $(B_ap_1 \vee ... \vee B_ap_n)$

biçiminde, amaç önermesi

(6) $B_ap_1 \vee ... \vee B_ap_n$

biçiminde, öndayanak da

(7) $p_1 \vee ... \vee p_n$

biçimindedir.

(1) biçimindeki bir sorunun öndayanağını belirtik hale getirmek amacıyla, bu soruyu

(8) $p_1 \vee ... \vee p_n$ önermesi doğru olduğuna göre, p_1..., p_n önermelerinden hangisi doğrudur?

biçimine dönüştere bili riz. a kişisinin sorduğu (8) sorusunun istek önermesi

(9) $p_1 \vee ... \vee p_n$ olduğuna göre, *a* ister ki $(B_ap_1 \vee ... \vee B_ap_n)$ biçimindedir.

(8) gibi bir soru'nun $\sim(p_1 \vee ... \vee p_n)$ durumunda sorulmaması gerektiği açıktır. Böyle bir durumda soruyu sormak yersizdir.

(8) sorusu

(10) q olduğuna göre, p_1,..., p_n önermesinden hangisi doğrudur;

sorusunun bir özel durumu olur. (10)'un kendisi de

(11) q_1,..., q_m olduğuna göre, p_1,...,p_n önermelerinden hangisi doğrudur.

sorusunun bir özel durumudur. (11) türünden bir soruyu "$?_{m/n}^{tek}$" işareti yardımıyla

(12) $?^{tek}_{m/n}\ (q_1,...,q_n / p_1,...,p_n)$

biçiminde dile getiririz. "$?_{m/n}$" işareti *m / n göreli* soru *değişmezi*'ni dile getirir. (12) biçimindeki sorulara *m/n göreli tekli seçenek sorusu* diyoruz. Dikkat edilirse (8) sorusu,

(13) $(p_1 \vee ... \vee p_n / p_1,...,p_n)$

biçiminde dile getirilebilir. Böylece (4) sorusunun (13) biçimine çevrilebildiğini söyleyebiliriz.

Göreli tekli seçenek sorusuna örnek olarak

(14) Ali tatile çıktığına göre, Alanya'ya mı Bodrum'a mı gidecek?

sorusunu göz önüne alalım. Bu sorunun sembolik karşılığı

(15) (Ali tatile çıktı: p, Ali Alanya'ya gidecek: q, Ali Bodrum'a gidecek: r)

sembolleştirme biçimi gereği

(16) $?_{1/2}\ (p/q, r)$

dır.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki tekli seçenek sorularının öndayanaklarını bulup göreli soru biçimine dönüştürünüz.

1. Ali pazartesi mi, salı mı gelecek?
2. Bu sayı tek mi, çift mi?
3. Orası köy mü, kasaba mı?

II. Aşağıdaki göreli tekli seçenek sorularını verilen sembolleştirme biçimleri gereği sembolik karşılıklarını bulunuz.

1. Ali hasta olduğuna göre, iki gün mü üç gün mü yatacak? (Ali hastadır: p, Ali iki gün yatacak: q, Ali üç gün yatacak: r)
2. Ali seyahat edeceğine göre, İstanbul'a mı İzmir'e mi gidecek? (Ali seyahat edecek: p, Ali İstanbul'a gidecek: q, Ali İzmir'e gidecek: r)
3. Ali kalktığına göre kahvaltı mı edecek yoksa doğrudan doğruya işine mi gidecek? (Ali kalktı: p, Ali kahvaltı edecek: q, Ali doğrudan doğruya işine gidecek: r)

9.4 TÜMLÜ SEÇENEK SORULARI

(1) $p_1,...,p_n$ önermelerinden hangileri doğrudur?

biçimindeki bir soruyla $p_1,...,p_n$ önermelerinden doğru olanların tümünün seçilmesi istenir. Çoğul "hangileri" sözcüğünün kullanılması bunu gösterir. (Oysa §9.1.3'deki tekil "hangi" sözcüğünün kullanılmasıyla $p_1,...,p_n$ önermeleri arasından doğru olanlarından herhangi birinin seçilmesi istenir.) Bu nedenle (1) biçimindeki sorulara *tümlü seçenek sorusu* denir. Bu biçimdeki soruları

(2) $?_n^{\text{tüm}}(p_1,...,p_n)$

biçiminde dile getiriyoruz. "$?_n^{\text{tüm}}$" işareti, *n-li tümlü seçneek sorusu değişmezi* denilen yeni bir mantık değişmezidir. Örneğin

(3) Trafik düzensizliği sürücüler, araçlar ve yollardan oluşan mümkün nedenlerin hangilerinden kaynaklanıyor?

sorusu

(4) (Trafik düzensizliği sürücülerden kaynaklanıyor: p, Trafik düzensizliği araçlardan kaynaklanıyor: q, Trafik düzensizliği yollardan kaynaklanıyor: r)

sembolleştirme biçimi gereği

(5) $?_n^{\text{tüm}}(p, q, r)$

biçiminde sembolleştirilebilir.

İmdi (2) sorusunu soran a kişisi, p_1, ..., p_n önermelerinden doğru olanların bilgisini amaçlıyor. Eğer p_1 doğru ise *a* kişisi B_ap_1 olmasını, eğer p_2 doğru ise B_ap_2 olmasını, ..., eğer p_n doğru ise B_ap_n olmasını ister. O halde a kişisi (2)'yi sormakla

(6) $(p_1 \rightarrow B_ap_1) \wedge (p_2 \rightarrow B_ap_n) \wedge ... \wedge (p_n \rightarrow B_ap_n)$

olmasını ister. O halde (1) veya (2) sorusunun amaç önermesi (6) olup istek önermesi

(7) a ister ki $[(p_1 \rightarrow B_ap_1) \wedge (p_2 \rightarrow B_ap_n) \wedge ... \wedge (p_n \rightarrow B_ap_n)]$

olur.

Öte yandan (2) sorusunun öndayanağı (6) önermesinde "B_a" nın kaldırılmasıyla elde edilemez. Nitekim (6)'da "B_a"nın kaldırılmasıyla elde edilen önerme

(8) $(p_1 \rightarrow p_1) \wedge (p_2 \rightarrow p_2) \wedge \ldots \wedge (p_n \rightarrow p_n)$

totolojisidir. (8) ise (2)'nin öndayanağı olamaz. (2) sorusunun gerçek öndayanağı

(9) $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$

önermesidir. Nitekim (9) yanlış ise (2) sorusunu sormak yersiz olur. (9) önermesi (2) sorusunun yerindeliğinin gerekli ve yeterli koşuludur. Buna göre (3) sorusunun öndayanağı

(10) Trafik düzensizliği sürücülerden veya araçlardan veya yollardan kaynaklanıyor.

önermesidir. Ancak "veya"nın (10) önermesinde doğruluk değeri fonksiyonu durumunda olan "ve/ya" anlamına gelen tenek eklem anlamında olduğunu belirtmek gerek. Dikkat edilirse (6) amaç önermesi (9) öndayanağını içermez.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki tümlü seçenek önermelerinin istek önermesini, amaç önermesini ve öndayanağını belirtiniz.

1. Ali, İzmir, Manisa, Aydın kentlerinin hangilerini ziyaret edecek?
2. 0, 1, 2 sayılarından hangileri çift sayıdır?
3. Pakistan, Bangladeş, Hindistan ülkelerinin hangilerine seyahat edeceksiniz?

9.5 TEKLİ KİMLİK SORULARI

A(x) bir birli açık önerme olduğunda

(1) x'in hangi değeri A(x)'i gerçekler?

biçimindeki bir soruya *tekli kimlik sorusu* denir. (1) tekli kimlik sorusunu

(2) $?_{tek}x\ A(x)$

biçiminde gösteriyoruz. "$?_{tek}$" işareti, *tekli kimlik sorusu değişmezi* denilen yeni tek bir mantık değişmezini dile getirir. Örnek olarak

(3) Hangi tamsayı $2x - 6 = 0$ denkleminin köküdür?

sorusu

(4) $?_{tek}\ x(x \text{ tamsayıdır} \wedge 2x - 6 = 0)$

biçiminde dile getirelebilir.

Dikkat edilirse (1) sorusunda "x'in hangi değeri", tek bir değere ilişkindir. Nitekim (1) gibi bir soru bir tek yanıtı öngörür.

İmdi a gibi bir kişinin (2) sorusunu sormakla, A(x) birli açık önermesini gerçekleyen x'in değerini bilmek, yani bu değerin kimliğini tanımak ister. a kişisinin A(x) birli açık önermesini gerçekleyen x'in değerini bilmesi,

(5) $\exists xB_aA(x)$

biçiminde dile getirilir. O halde (2) sorusunun amaç önermesi (5) olup, istek önermesi

(6) a ister ki $\exists xB_aA(x)$

olur. Öte yandan (2) sorusunun öndayanağı

(7) $\exists xA(x)$

tir. Nitekim (7) yanlış olsa, x'in hangi değerinin A(x)'in gerçeklediğini sormak yersiz olur. Örnek olarak (4) sorusunun amaç önermesi

(8) $\exists xB_a(x \text{ tamsayıdır} \wedge 2x - 6 = 0)$

öndayanağı da

(9) $\exists x(x \text{ tamsayıdır} \wedge 2x - 6 = 0)$

dır.

(2) sorusunun (7) öndayanak önermesi yanlışsa, alınacak yanıt "x'in hiçbir değeri A(x) birli açık önermesini gerçeklemez" biçiminde olur. Böyle bir yanıt ise soru sorana bir suçlamadır.

Dikkat edilirse (2) sorusunun (7) öndayanağı, (5) amaç önermesinde "B_a"yı kaldırmakla elde edilir. Ayrıca (5) amaç önermesi (7) öndayanağını içerir.

Tekli kimlik sorularına ikinci örnek olarak

(10) Ali İstanbul'un hangi ilçesine gidecek?

sorusunu ele alalım. Bu soru

(10') $?_{tek}$ x(x İstanbul'un bir ilçesidir $\wedge$ Ali x ilçesine gidecektir)

biçiminde dile getirilebilir. (10') tekli kimlik sorusunun istek önermesi (a soran kişi olduğunda)

(11) a ister ki $\exists x B_a$(x İstanbul'un ilçesidir $\wedge$ Ali x ilçesine gidecektir)

biçiminde, amaç önermesi

(12) $\exists x B_a$(x İstanbul'un ilçesidir $\wedge$ Ali x ilçesine gidecektir)

biçiminde, öndayanağı da

(13) $\exists x$(x İstanbul'un ilçesidir $\wedge$ Ali x ilçesine gidecektir)

biçimindedir.

Dikkat edilirse "kim" ile başlayan sorular genellikle (2) biçiminde tekli kimlik sorularıdır. Örneğin

(14) Kim burada oturuyor?

sorusu

(15) Hangi insan burada oturuyor?

anlamına gelir. Dolayısıyla (14) sorusu

(16) $?_{tek}$ x (x insandır $\wedge$ x burada oturuyor)

biçiminde dile getirilebilir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki tekli kimlik sorularının istek önermesini, amaç önermesini ve öndayanağını belirtiniz.

1. Hangi rasyonel sayı $2x + 3 = 0$ denkleminin köküdür?
2. Hangi büyük göl Doğu Anadolu'da bulunur?
3. Hangi çay Marmara denizine dökülür?
4. Kim bu kitabı yazdı?

9.6 TÜMLÜ KİMLİK SORULARI

A(x) bir birli açık önerme olduğunda,

(1) x'in hangi değerleri A(x)'i gerçekler?

biçimindeki sorulara *tümlü kimlik sorusu* denir. (1) sorusu

(2) $?_{\text{tüm}}x\ A(x)$

biçiminde dile getirilir. "$?_{\text{tüm}}$" işareti, tümlü kimlik sorusunu değişmezi denilen yeni bir mantık değişmezini dile getirir. (1) sorusunda "hangi değerler?" sözü A(x)'i gerçekleyen x'in değerlerine ilişkindir.

Örnek olarak

(3) Hangi tamsayılar için $x \geq 2$ ve $x \leq 5$ olur?

sorusunu

(4) $?_{\text{tüm}}\ x(x \text{ tamsayıdır} \wedge x \geq 2 \wedge x \leq 5)$

biçiminde dile getirebiliriz.

İmdi (2) tümlü kimlik sorusunun istek önermesi (soran kişi a olduğunda)

(5) a isterki $\forall x[A(x) \rightarrow B_a A(x)]$

biçiminde, amaç önermesi

(6) $\forall x[A(x) \rightarrow B_a A(x)]$

biçiminde, öndayanak da

(7) $\exists x A(x)$

tir. Tıpkı tümlü seçenek sorularında olduğu gibi tümlü kimlik sorularının öndayanağı amaç önermesinde "B_a"nın kaldırılmasıyla elde edilemez. Üstelik amaç önermesi öndayanağı içermez. Ayrıca tümlü kimlik sorusunun öndayanağı, karşılığı olan tekli kimlik sorusunun öndayanağı ile özdeş olur.

Tümlü kimlik sorularına ikinci örnek olarak

(8) Hangi ırmaklar Karadenize dökülür?

sorusunu ele alalım. Bu soru

(9) $?_{tüm}$ x(x bir ırmaktır $\wedge$ x ırmağı Karadenize dökülür)

biçiminde dile getirelebilir. (9)'un istek önermesi (soran kişi a olduğunda)

(10) a ister ki $\forall x[(x \text{ bir ırmaktır} \wedge x \text{ Karadenize dökülür}) \rightarrow B_a(x \text{ bir ırmaktır} \wedge x \text{ Karadenize dökülür})]$.

amaç önermesi

(11) $\forall x[(x \text{ bir ırmaktır} \wedge x \text{ Karadenize dökülür}) \rightarrow B_a(x \text{ bir ırmaktır} \wedge x \text{ Karadenize dökülür})]$, öndayanak da

(12) $\exists x(x \text{ bir ırmaktır} \wedge x \text{ Karadenize dökülür})$

dür.

ALIŞTIRMALAR

1. Hangi reel sayılar $2x^2 - 5 = 0$ denkleminin kökleridir?
2. Hangi tamsayılar için $2x + 5 > 0$ olur?
3. Türkiye'nin hangi nehirleri vardır?

9.7 TEKLİ SEÇENEK SORULARININ TAM-YANITLARI

a kişisi *b* kişisine bir soru sorduğunda, *b* kişisi soruya tepki olarak çeşitli yanıtlarda bulunabilir. Sorular mantığının bir işlevi, sorulara verilen mümkün yanıtlar arasında uygun olanları belirlemektir. Uygun yanıtlar, yalnız yerinde sorulara karşılıktır. Yerinde sorular da uygun yanıtı olan sorulardır. Bütünüyle

uygun olan yanıtlara "tam-yanıt" denir. Tam-yanıtlar olanaklı yanıtlardır; doğru olduğu gibi yanlış da olabilirler. Soruyu soran kişi doğru tam-yanıt olsa bile yanılan doğruluğunu bilmeyebilir. "Tam-yanıt" şöyle tanımlanabilir:

> a kişisinin sorduğu bir soruya verilen bir yanıtın *tam-yanıt* olması *a* kişisinin bu yanıtın doğru olduğunu bilmesinin amaç önermesini içermesi demektir.

(1) $?_n^{tek}(p_1,...,p_n)$

biçimindeki bir tekli seçenek sorusunun tam-yanıtları $p_1,...,p_n$ önermeleridir. Nitekim (1)'in amaç önermesi

(2) $B_a p_1 \vee ... \vee B_a p_n$

olup,

(3) $B_a p_i \models (B_a p_1 \vee ... \vee B_a p_n)$, i = 1, ..., n

içermeleri doğrudur.

Öte yandan yersiz soruya verilecek "$\sim(p_1 \vee ... \vee p_n)$" yanıtı tam-yanıt değildir. Nitekim bu önerme (2) amaç önermesini içermez.

(1) biçimindeki bir tekli seçenek sorusu sorulduğunda, $p_1,...,p_n$ önermelerinden birinden çoğu doğru ise ve soruyu yanıtlayan *b* kişisi bu durumu bilirse, tam yanıtların yalnız birini "örneğin (veya 'meselâ')" diyerek verilebilir. Örnek olarak

(4) Trafik düzensizliği sürücülerden mi, araçlardan mı, yollardan mı kaynaklanıyor?

sorusunun tam yanıtları

(5) Trafik düzensizliği sürücülerden kaynaklanıyor,

(6) Trafik düzensizliği araçlardan kaynaklanıyor,

(7) Trafik düzensizliği yollardan kaynaklanıyor

önermeleridir. Bu tam yanıtlardan üçü de doğrudur. Yanıtlayan kişi bunu bilirse, sorunun biçiminden dolayı (5), (6), (7) önermelerinden yalnız birini tam-yanıt olarak vermesi yerindedir. Yanıtlayan isterse tam-yanıtının başında "örneğin" diyebilir.

(8) $?^{tek}_{m/n}\ (p_1,...p_m/q_1,...,q_n)$

biçimindeki m/n göreli tekli seçenek sorusunun tam-yanıtları

(9) $p_1,...,p_m$ olduğuna göre, q_i $(i = 1,..., n)$

önermeleridir. Bazı tam-yanıtlarda "olduğuna göre" diyecek yerde "olmasına karşın" denilmesi yerinde olur. Örneğin

(10) Yağmur yağdığına göre, sel olur mu?

sorusunun tam-yanıtları

(11) Yağmur yağdığına göre, sel olur

ile

(12) Yağmur yağmasına karşın, sel olmaz

önermeleridir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki tekli seçenek sorularının tam-yanıtlarını belirtiniz.

1. Ali pazartesi mi, salı mı gelecek?
2. Ali Erzurum'a gidecek mi?
3. Bu sayı tek mi, çift mi?
4. Bu sayı tamsayı olduğuna göre, tek midir, çift midir?

9.8 TÜMLÜ SEÇENEK SORULARININ TAM-YANITLARI

(1) $?^{tüm}_{n}\ (p_1,...,p_n)$

biçimindeki bir tümlü seçenek sorusunun tam-yanıtları $\{p_1,...p_n\}$ kümesinin boş olmayan bütün alt-kümeleridir. Nitekim $\{p_{i_1},...,p_{i_j}\}$, $\{p_1,...,p_n\}$'in bir alt kümesi ve

(2) $\{p_{k_1},...,p_{k_n}\} = \{p_1,...,p_n\} - \{p_{i_1},...,p_{i_j}\}$

olsun. (1) biçimindeki soruyu soran a kişisinin $p_1,...,p_n$ önermeleri arasında $p_{i_1},...,p_{i_j}$ önermelerinin ve yalnız bunların doğru olduğunu bilmesi

(3) $B_a p_{i_1} \wedge ... \wedge B_a p_{i_j} \wedge B_a \sim p_{k_1} \wedge ... \wedge B_a \sim p_{k_n}$

önermesiyle dile getirilir.

İmdi (1) sorusunun amaç önermesi

(4) $(p_1 \rightarrow B_a p_1) \wedge ... \wedge (p_n \rightarrow B_a p_n)$

dir. Oysa (3) önermesi (4) önermesini içerir. O halde $\{p_1,...,p_n\}$'in her alt kümesini oluşturan önermelerin bilgisi amaç önermesini içeriyor. Dolayısıyla her alt küme bir tam-yanıt sayılmalıdır.

Örnek olarak

(5) 0 ile 1 sayılarından hangileri çift sayıdır?

tümlü seçenek sorusunun tam-yanıtları

(6) {0 çift sayıdır}

(7) {1 çift sayıdır}

(8) {0 çift sayıdır, 1 çift sayıdır}

önerme kümeleridir. Dikkat edilirse tam-yanıt kümeleri doğru önermeler de yanlış önermeler de kapsayabilir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki tümlü seçenek önermelerinin tam-yanıtlarını belirtiniz.

1. Ali İzmir ile Manisa kentlerinden hangilerine gidecektir?
2. 1 ile 1/2 sayılarından hangileri rasyoneldir.
3. Trafik düzensizliği sürücüler ile araçlardan oluşan mümkün nedenlerin hangilerinden kaynaklanıyor?

9.9 TEKLİ KİMLİK SORULARININ TAM-YANITLARI

(1) $?_{tek}\ xA(x)$

biçimindeki bir tekli kimlik sorusunun tam-yanıtları ya A(x) birli açık önermesinin A(c) biçimindeki yerine-koyma örnekleri, ya da bir yerine-koyma örneklerini oluşturmaya yarayan *c* gibi tekil terimlerdir. *c* gibi bir tekil terim "x" değişkeninin bir değerini gösterir. Burada tam-yanıtların tekil terimler olduğunu kabul edeceğiz. *c* tekil terimi (1) sorusunun tam-yanıtı olduğunda, A(c) önermesine *c tam-yanıtının karşılığı* diyeceğiz.

İmdi "x"in yerine konulabilen her *c* tekil-terimi (1) sorusunun tam-yanıtı değildir. Böyle olması için *c*'nin karşılığı olan A(c) önermesinin soran *a* kişisi tarafından bilinmesi, (1)'in amaç önermesi olan

(2) $\exists x B_a A(x)$

önermesini içermesi gerekir. Oysa $B_a A(c)$ önermesi genellikle (2) önermesini içermez. Ancak

(3) $B_a A(c) \wedge \exists x B_a (c = x)$

önermesi (2) amaç önermesini içerir. Buna göre c gibi bir tekil terimin (1) tekli kimlik sorusunun tam-yanıt olmasının gerekli ve yeterli koşulunun

(4) $\exists x B_a (c = x)$

Örneğin a kişisinin sorduğu

(5) Kim burada oturuyor?

sorusunun yanıtı "Ali" ise, bu yanıtın bir tam-yanıt olması için

(6) $\exists x B_a (Ali = x)$

önermesi doğru olmalıdır. (6) önermesi

(7) a kişisi Ali'nin kim olduğunu biliyor

anlamına gelir.

Tekli kimlik sorularının tam-yanıtları doğru olduğu gibi yanlış da olabilir. (2) biçimindeki bir sorunun tam yanıtı *c* olduğunda, *c*'nin doğru tam-yanıt olması, A(c) önermesinin doğru olması, *c*'nin *yanlış* tam-yanıt olması da A(c) önermesinin yanlış olması demektir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki tekli kimlik sorularının birer tam-yanıtını veriniz. Verilen tam-yanıtın gerekli ve yeterli koşulunu dile getiriniz. Verilen tam-yanıtın doğru veya yanlış olduğunu belirtiniz.

1. $?_{tek}\ x\ (x \text{ tamsayıdır} \wedge 3x + 7 = 0)$
2. $?_{tek}\ (x \text{ bir dağdır} \wedge x \text{ Doğu Anadoludadır})$

9.10 TÜMLÜ KİMLİK SORULARININ TAM-YANITLARI

(1) $?_{tüm}\ x\ A(x)$

biçiminde bir tümlü kimlik sorusunun tam-yanıtları tekil terim kümeleridir. *Doğru tam-yanıtlar* da A(x) birli açık önermesini gerçekleyen tekil terimlerden oluşan tekil terim kümeleridir.

K kümesi genellikle sonludur. O zaman $K = \{c_1,...,c_n\}$ olur. K'nci bir tam yanıt olmasının gerekli ve yeterli koşulu

(2) $B_a[A(c_1) \wedge ... \wedge A(c_n)]$

önermesinin, (1) sorusunun amaç önermesi olan

(3) $\forall x[A(x) \rightarrow B_aA(x)]$

önermesini içermesidir. Oysa (2) önermesi (3) önermesini içermez. Buna karşılık

(4) $B_a[A(c_1) \wedge...\wedge A(c_n)] \wedge \exists xB_a(c_1 = x) \wedge...\wedge \exists xB_a(c_n = x)$

önermesi (3) amaç önermesini içerir. Buna göre $K = \{c_1,...,c_n\}$ kümesinin (1) sorusuna tam-yanıt olmasının gerekli ve yeterli koşulunun

(5) $\exists xB_a(c_1 = x) \wedge...\wedge \exists xB_a(c_n = x)$

olduğunu söyleyebiliriz.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki tümlü kimlik sorularının birer tam-yanıtını veriniz. Verilen tam-yanıtın gerekli ve yeterli koşulunu dile getiriniz. Tam-yanıtın doğru veya yanlış olduğunu belirtiniz.

1. $?_{tüm}$ x(x doğal sayıdır $\wedge$ x $\geq$ 1 $\wedge$ x $\leq$ 2)
2. $?_{tüm}$ x(x doğal sayıdır $\wedge$ x < 2)

9.11 ÇOKLU KİMLİK SORULARI

Birden çok sayıda soru değişmezi geçen kimlik sorularına *çoklu kimlik sorusu* denir. Örnek olarak

(1) Ali nerede neyi satın aldı?

sorusunda "hangi yerde" anlamına gelen "nerede" ile "hangi nesne" anlamına gelen "neyi" gibi iki soru değişmezi geçiyor. Her iki soru değişmezi tekli kimlik soru değişmezi durumundadır. Buna göre (1)'in sorusu

(2) Ali hangi yerde hangi nesneyi satın aldı?

biçiminde dile getirilebilir. (1) veya (2)'nin amaç önermesi, soruyu soran a kişisi olduğunda,

(3) $\exists x \exists y B_a$(Ali x yerinde y nesnesini satın aldı)

biçimindedir.

İkinci örnek olarak

(4) Ali nerelerde neleri satın aldı?

sorusunu gözönüne alalım. Bu soru

(5) Ali hangi yerlerde hangi nesneleri satın aldı?

anlamına gelir. Dolayısıyla çoklu tümlü kimlik sorusudur. (4) veya (5)'in amaç önermesi, soruyu soran a kişisi olduğunda,

(6) $\forall x \forall y$ [(Ali x yerinde y nesnesini satın aldı $\rightarrow$ B_a(Ali x yerinde y nesnesini satın aldı)]

biçimindedir.

Üçüncü örnek olarak

(7) Ali nerelerde neyi satın aldı?

sorusunu ele alalım. Bu soru

(8) Ali hangi yerlerde hangi nesneyi satın aldı?

anlamına gelir. Dolayısıyla çoklu karma tekli ve tümlü kimlik sorusudur. (7) veya (8)'in amaç önermesi, soran kişi a olduğunda,

(9) $\exists y \forall x[(\text{Ali x yerinde y nesnesini satın aldı}) \rightarrow B_a(\text{Ali x yerinde y nesnesini satın aldı})]$

biçimindedir.

Sözü geçen soruların tam yanıtlarına gelince, (4) sorusunun tam yanıtları, önerme biçiminde dile getirildiğinde

(10) Ali c_1 yerinde c_2 nesnesini satın aldı

biçimindedir. (4) sorusunun tam-yanıtı

(11) Ali c_1 yerinde d_1 nesnesini, c_2 yerinde d_2 nesnesini,..., c_n yerinde d_n nesnesini satın aldı.

biçimindedir. (7) sorusunun tam-yanıtı

(12) Ali $c_1,...,c_n$ yerlerinde d nesnesini satın aldı

biçimindedir.

İmdi (1) veya (2) sorusu, A(x, y) bir ikili açık önerme olduğunda

(13) $?_{tek}\ x\ ?_{tek}\ y\ A\ (x, y)$

biçiminde dile getirilebilir. (13) sorusu

(14) Hangi x ile hangi y A(x, y)'i gerçekler?

anlamına gelir. c ile d tekil terimlerden oluşan (c, d) sıralanmış ikilisinin A(x, y)'yi gerçeklemesi A(c, d) önermesinin doğru olması demektir. A(x, y) önermesi de A(x, y)'de x'in bağsız geçişleri yerine c ve y'nin bağsız geçişleri yerine d koymakla elde edilen önermedir. (13) sorusunun amaç önermesi, soran kişi a olduğunda,

(15) $\exists x \exists y B_a A(x, y)$

ise öndayanağı

(16) $\exists x \exists y A(x, y)$

dir.

Öte yandan (4) veya (5) sorusu

(17) $?_{tüm}\ x\ ?_{tüm}\ y\ A(x, y)$

biçimindedir. (17) sorusu

(18) Hangi x'ler ve hangi y'ler A(x, y)'yi gerçekler?

anlamına gelir. (17)'nin amaç önermesi

(19) $\forall x \forall y\ [A(x, y) \rightarrow B_a A(x, y)]$

ve öndayanağı (16)'dır.

(7) veya (8) sorusu da

(20) ?tüm x ?tek y A(x, y)

biçimindedir. (20)'nin amaç önermesi, soran kişi a olduğunda,

(21) $\exists y \forall x [A(x, y) \rightarrow B_a A(x, y)]$

ve öndayanağı (16)'dır.

10. ZAMAN MANTIĞI

10.1 SEMBOLLEŞTİRME VE YORUMLAMA

10.1.1 Sembolleştirme ve Zaman Çekimi Değişmezleri

Zaman mantığı, (iki değerli) önermeler mantığına *zaman çekimi değişmezleri* denilen doğruluk fonksiyonu durumunda olmayan bazı birli önerme eklemlerinin eklenmesiyle elde edilen bir mantık sistemidir. Bu yeni değişmezlere dayanarak eylemlerin "geçmiş zaman" ve "gelecek zaman" gibi zaman çekimleri dile getirilir.

Zaman mantığı dilinin atomsal önermelerinin hep şimdiki zamanda olduğunu kabul ediyoruz. Buna göre q herhangi bir atomsal önerme olduğunda q

(1) q oluyor.

anlamına gelir. Yani q'da geçen eylem sözcüğü hep şimdiki zaman çekiminde olur. Örneğin q önermesi

(2) Yağmur yağıyor

veya

(3) Ali koşuyor

tümcelerini dile getirebilir. Ama geçmiş zaman çekiminde olan

(4) Yağmur yağdı

(5) Ali koştu

ya da gelecek zaman çekiminde olan

(6) Yağmur yağacak

(7) Ali koşacak

biçimlerindeki tümceleri dile getiremeyecek. (3) ve (4) biçimindeki tümceleri

(8) q oldu

biçiminde, (5) ve (6) biçimindeki tümceleri de

(9) q olacak

biçiminde temsil ediyoruz. İmdi zaman çekimleri değişmezleri yardımıyla (1) önermesi (7) veya (8) biçimine dönüştürülür. *F*, gelecek zaman çekimi değişmezi olup

(10) Fq

önermesi (8) anlamına, yani "q olacak" anlamına gelir. Öte yandan *P*, geçmiş zaman çekimi değişmezi olup,

(11) *P*q

önermesi, (8) anlamına, yani "q oldu" anlamına gelir. Örneğin

(12) F(yağmur yağıyor)

tümcesi (6) anlamına

(13) P(yağmur yağıyor)

tümcesi de (4) anlamına gelir.

F ile P değişmezleri yardımıyla şu tanımlar yapılır.

(14) Gq ≡ ~F~q

(15) Hq ≡ ~P~q

İmdi

(16) Gq

önermesi

(17) q olagelecektir

anlamına

(18) Hq

ise

(19) q olagelmiştir.

anlamına gelir. Bu nedenle *G* değişmezine *sürekli gelecek zaman çekimi değişmezi,* H değişmezine de sürekli geçmiş zaman çekimi değişmezi denir.

F ile G çiftine *gelecek zaman çekimi değişmezleri,* P ile H çiftine de *geçmiş zaman çekimi değişmezleri* diyoruz.

Örnek olarak

(20) G(Ali koşuyor)

tümcesi

(21) Ali sürekli koşacak

anlamına,

(22) H(Ali koşuyor)

da

(23) Ali sürekli koştu

anlamına gelir.

F, P, G, H değişmezleri ile önerme temsilcilerinden oluşan önermelere (sembolik) *zaman çekimli önermeler* diyoruz.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki tümcelerin verilen sembolleştirme biçimine uygun sembolik karşılığını bulunuz.

1. Ali Japonya'ya seyahat edecek.

   (Ali Japonya'ya seyahat ediyor: q)

2. Ali Adıyaman'a giderse Behçet'i görecek

   (Ali Adıyaman'a gidiyor: q, Ali Behçet'i görüyor: r)

3. Ali Japonya'dan döndü, Amerika'ya gidecek.

   (Ali Japonya'dan dönüyor: q, Ali Amerika'ya gidiyor: r)

10.1.2 Yorumlama ve Doğruluk Değeri Hesaplaması

Zaman çekimi değişmezleri, kiplik değişmezlerine benzer. Daha açık olarak F ile P değişmezleri ◇ imkân değişmezine, G ile H değişmezleri de □ zorunluluk değişmezine benzer. Bu benzerlik zaman çekimi değişmezlerinin yorumlamasında ortaya çıkar.

Zaman çekimli önermelerin *yorumlama*'sında, mümkün dünyalar kümesinin benzeri olan *zaman anları kümesi,* bu kümenin seçilmiş bir öğesi olup gerçek dünyanın benzeri olan *şimdiki zaman* anı ve zaman anlarına ilişkin *değerlemeler* yer alır. Belli bir ana ilişkin değerleme yorumlanan önermede geçen her bir önerme temsilcisi belli bir doğruluk değeri verir. Mümkün zamanlar kümesini Z ile, tek tek zaman anlarını z ile gösteriyoruz. Şimdiki zamanı hep z_0 ile gösteriyoruz. z gibi bir zaman anına ilişkin değerleme, q gibi bir önerme temsilcisi D ve Y doğruluk değerini verir. Yorumlama da almaşıklık bağıntısının benzeri olan *gelecek zaman'a ilişkin almaşıklık bağıntısı ile geçmiş zaman'a ilişkin almaşıklık bağıntısı* bulunur. Birinci bağıntı *zaman sonralığı* bağıntısı, ikinci bağıntı ise *zaman önceliği* bağıntısıdır. Zaman sonralığı bağnıtısı $\mathcal{B}^{sn}$ ile, zaman önceliği bağıntısını da $\mathcal{B}^{ön}$ ile gösteriyoruz. $z\mathcal{B}^{sn}z'$ önermesi "z anından sonra z' anı gelir." (Yani "z' anı z anından sonra gelir" anlamına gelir. Aynı biçimde $z\ \mathcal{B}^{ön}z'$ önermesi, "z anından önce z' anı gelir" yani "z' anı z anından önce gelir" anlamına gelir. $\mathcal{B}^{sn}$ ile $\mathcal{B}^{ön}$ birbirinin tersidir. Yani

(1) $\forall z_1 \forall z_2 (z_1 \mathcal{B}^{ön} z_2 \leftrightarrow z_2 \mathcal{B}^{sn} z_1)$

doğrudur. Nitekim z_1 anının z_2 anından önce gelmesi, z_2 anının z_1 anından sonra gelmesi anlamına gelir. Dolayısıyla yorumlamanın saptanması için her iki bağıntıyı değil, yalnız birinin verilmesi yetiyor. Biz hep $\mathcal{B}^{sn}$ bağıntısının yorumlamada verildiğini $\mathcal{B}^{ön}$ bağıntısının ise (1) yardımıyla tanımladığını kabul ediyoruz.

$\mathcal{B}^{sn}$ bağıntısı çeşitli özellikler taşıyabilir. $\mathcal{B}^{sn}$ almaşıklık bağıntısının özelliklerine bağlı olarak çeşitli zaman mantıkları belirlenir.

Zaman çekimi değişmezlerinin anlamı aşağıdaki kurallarla belirlenir.

Herhangi bir yorumlamada:

(i) Fq önermesi z anında doğrudur ancak ve ancak $\exists z'(z\mathcal{B}^{sn}z' \wedge q$ önermesi z' anında doğrudur) ise,

(ii) Pq önermesi z anında doğrudur ancak ve ancak $\exists z'(z\mathcal{B}^{ön}z' \wedge q$ önermesi z' anında doğrudur) ise.

(iii) Gq önermesi z anında doğrudur ancak ve ancak $\forall z'(z\mathcal{B}^{sn}z' \rightarrow q$ önermesi z anında doğrudur) ise.

(iv) Hq önermesi z anında doğrudur ancak ve ancak $\forall z \forall z'(z\mathcal{B}^{ön}z' \leftrightarrow z' < z)$

elde edilir. Nitekim önce gelen zaman anını gösteren reel sayı sonra gelen zaman anını gösteren reel sayıdan küçük olur. ">" bağıntısı reel sayılar arasındaki "büyük" bağıntısının, "<" bağıntısı da reel sayılar arasındaki "küçük" bağıntısını gösterir.

Örnek olarak

(4) $Hq \wedge Fr$

önermesinin

(5) $(Z: \{z_0, z_1\}; \mathcal{B}^{sn}: \{<z_0, z_1>\}, z_0: q, z_1: q, r)$

yorumlamasında doğruluk değerini hesaplayalım.

Önce $\mathcal{B}^{ön}$ bağıntısını belirleyelim. $\mathcal{B}^{ön}$, $\mathcal{B}^{n}$'nin tersi olduğuna göre:

$\mathcal{B}^{ön} = \{<z_1, z_0>\}$

elde edilir. Buna göre z_1'den önce gelen tek an z_0'dır. $\mathcal{B}^{sn} = \{z_0, z_1\}$ olduğundan, z_0'dan sonra gelen tek an z_1'dir. İmdi Hq'nun z_0'da doğru olması q'nun z_0'dan önce gelen anda doğru olması demektir. Ama z_0'dan önce gelen an yoktur. z_0 anı $\mathcal{B}^{ön}$ bağıntısının bir çıkmazıdır. Oysa:

(v) z_1, $\mathcal{B}^{sn}$ bağıntısının bir çıkmazı ise, Fq z_1'de hep yanlış ve Gq z_1'de hep doğrudur.

(vi) z_0, $\mathcal{B}^{ön}$ bağıntısının bir çıkmazı ise, Pq z_0'da hep yanlış ve Hq z_0'da hep doğrudur.

Buna göre örneğimizde Hq önermesi z_0 anında doğrudur. Öte yandan Fr önermesinin z_0'da doğru olması p'nin z_0'dan sonra gelen tek an olan z_1'de doğru olması demektir. r ise z_1'de doğrudur. O halde Fr'de doğrudur. Dolayısıyla (4) önermesi (5) yorumlamasında doğrudur.

Verilen bir önermenin belli bir yorumlamadaki doğruluk değerini kipler mantığındaki çizelgenin benzeri olan bir çözümleyici çizelge ile hesaplayabiliriz. Bu çizelgenin dayandığı kuralları aşağıda gösteriyoruz.

(i) *Zaman Çekimi Değişmezlerini Değillemesi Kuralları*

A herhangi bir önerme olduğunda:

1. ~FA	1. ~GA	1. PA	1. ~HA
G~A(1)	F~A(1)	H~A(1)	P~A(1)

(ii) *F'nin elenmesi kuralı:*

z anından sonra gelen anlar $z_1,\ldots,z_n$ olduğunda;

1. [z] FA

(1)

$[z_1]$ A ... $[z_n]$ A

z çıkmaz ise, FA z'de yanlıştır.

(iii) *G'nin elenmesi kuralı:*

z anından sonra gelen anlar $z_1,\ldots,z_n$ olduğunda:

1. [z] Ga

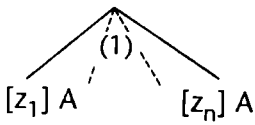
$$\begin{bmatrix} [z_1]\ A \\ \vdots \\ [z_n]\ A \end{bmatrix} \quad (1)$$

z çıkmaz ise, GA z'de doğrudur.

(iv) *P'nin elenmesi kuralı:*

z anından önce gelen anlar $z_1,...,z_n$ olduğunda:

1. [z] PA



z çıkmaz ise, PA z'de yanlıştır.

(v) *H'nın elenmesi kuralı*

z anından önce gelen anlar $z_1,...,z_n$ olduğunda:

1. [z] HA

$$\begin{bmatrix} [z_1]\ A \\ \vdots \\ [z_n]\ A \end{bmatrix} (1)$$

z çıkmaz ise, HA z'de doğrudur.

Örnek olarak

(6) $\sim(p \rightarrow GPq)$

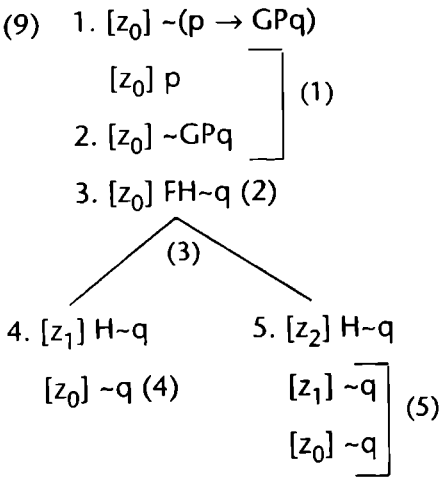
önermesinin

(7) $(Z: \{z_0, z_1, z_2\}, \mathcal{R}^{sn}: \{<z_0, z_1>, <z_1, z_2>, <z_0, z_2>\}, z_0: q, z_1: , z_2: p)$

yorumlamasında doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile hesaplayalım. Önce $\mathcal{R}^{ön}$'ü buluyoruz.

(8) $\mathcal{R}^{ön} = \{<z_1, z_0>, <z_2, z_1>, <z_2, z_0>\}$.

Buna göre çözümleyici çizelge şöyle olur.



(9) çizelgesinde iki açık yol vardır. Birinci açık yoldaki önekli temel önermeler $[z_0]$ ~q, ikinci açık yoldakiler ise $[z_0]$ p, $[z_0]$ ~q, $[z_1]$ ~q'dur. Birinci yolda $[z_0]$ p yanlış olduğundan bu yol yanlıştır. İkinci yolda ise $[z_0]$ p yanlış olduğundan bu yol da yanlıştır. O halde (6) önermesi (7) yorumlamasında yanlıştır.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki zaman çekimli önermelerin verilen yorumlamadaki doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile hesaplayınız.

1. $Pp \wedge Hq$

   $(Z: \{z_0, z_1\}; \mathcal{B}^{sn}: \{<z_0, z_1>\}; z_0:, z_1: p, q)$

2. $\sim(PFq \rightarrow \sim Hp)$

   $(Z: \{z_0, z_1, z_2\}; \mathcal{B}^{sn}: \{<z_0, z_1>, <z_1, z_2>\}; z_0: p, z_1: q, z_2:)$

3. $\sim(PGp \rightarrow GHq)$

   $(Z: \{z_0, z_1, z_2\}; \mathcal{B}^{sn}: \{<z_0, z_1>, <z_1, z_2>, <z_0, z_2>\}; z_0: p, q, z_1: p, z_2: q)$

10.2 ZAMAN MANTIĞI SİSTEMLERİ

10.2.1 ZM_0 Zaman Mantığı Sistemi

Almaşıklık bağıntısı Z x Z kartezyen çarpımının herhangi bir alt kümesi olan yorumlamaların kümesinin belirlediği mantık sistemine *minimal zaman mantığı sistemleri* denir. ZM_0 olarak gösterilir. ZM_0 sistemi kiplik mantığındaki K sisteminin zaman mantığında benzeridir.

Bir önermede F ile P'nin bir de G ile H'nin birbiriyle değiş tokuş edilmesiyle elde edilen önermenin verilen önermenin eşlenek'i olduğu söylenir. B önermesi A önermesinin eşlenek'i ise, A önermesiyle B önermesinin eşleniği olur. Bir önermenin eşleniğin eşleniği kendisiyle özdeştir. Örneğin

(1) $PFp \rightarrow GHq$

önermesinin eşleniği

(2) $FPp \rightarrow HGq$

dur. (2)'nin eşleniği de (1)'dir. (1)'in eşleniğinin eşleniği, yani (2)'nin eşleniği gene (1)'dir. Bir zaman mantığı sisteminde, özelikle ZM_0'da geçerli olan her önermenin eşleniği de geçerli olur.

ZM_0 mantık sisteminin aksiyomlarını aşağıda gösteriyoruz.

(A0.1) $G(p \rightarrow q) \rightarrow (Gp \rightarrow Gq)$

(A0.2) $H(p \rightarrow q) \rightarrow (Hp \rightarrow Hq)$

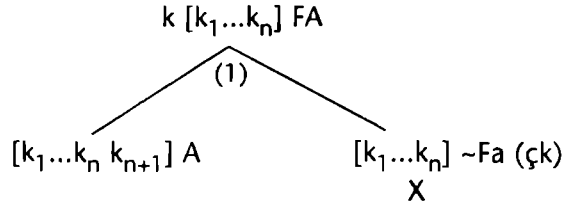
(A0.3) $p \rightarrow GPp$

(A0.4) $p \rightarrow HFp$

(A0.1) ile (A0.2) ve (A0.3) ile (A0.4) birbirinin eşleniğidir.

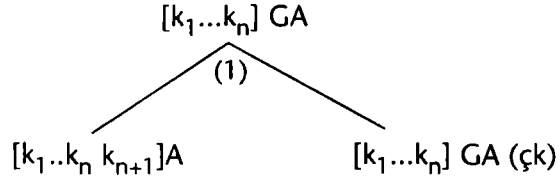
ZM_0 mantık sisteminde geçerli olan önermelere (özellikle aksiyomlara) denetlemek için K sisteminde kullanılan çözümleyici çizelgenin benzerini kullanabiliriz. Bu çözümleyici sisteme ilişkin zaman çekimi değişmezlerini eleme kurallarını aşağıda gösteriyoruz.

(i) *F'nin elenmesi kuralı:*

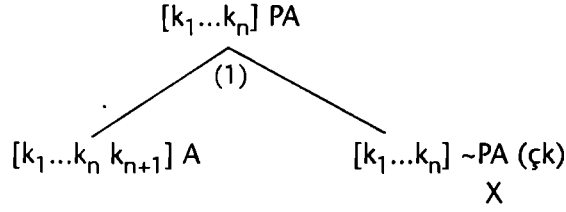


$[k_1...k_{n+1}]$ A aynı yolda daha önce geçmemelidir. çk işareti $[k_1...k_n]$ önekinin bir çıkmazı gösterdiğini belirtir.

(ii) *G'nin elenmesi kuralı:*

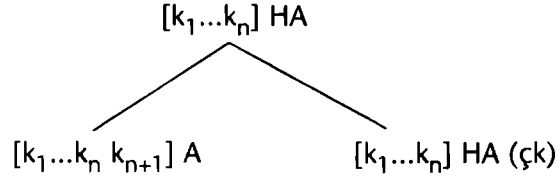


(iii) *P'nin elenmesi kuralı:*



$[k_1...k_n\ k_{n+1}]$ aynı yolda daha önce geçmemelidir.

(iv) *H'nın elenmesi kuralı*



Bu kurallara dayanarak (A0.3) aksiyomunun ZM_0 sisteminde geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(3) 1. [0] ~(p → GPp)

[0] p
2. [0] ~GPp (1)

3. [0] FH~p (2)

(3)

4. [0.1] H~p [0]~FH~p (çk)
X

[0]~p
X

Zaman mantığının çizelgesine özgü 4. adımı şöyle açıklıyoruz. 3. adımda elde edilen [0.1] öneki ile [0] öneki arasında [0]$\mathfrak{Z}^{sn}$[0.1] bağıntısı vardır. Bundan da [0.1]$\mathfrak{Z}^{\ddot{o}n}$[0] elde edilir. Oysa 4. adımdan H'nın elenmesi kuralını uygulamak için [0.1]'den önce gelen bir zaman anına gerek vardır. İşte [0] anı [0.1] anından önce geliyor. Dolayısıyla [0.1] H~p'den [0]~p'yi elde ettik.

İkinci örnek olarak (A0.4) aksiyomunun ZM_0 sisteminde geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(4) 1. [0] ~(p → HFp)

[0] p
2. [0] ~HFp (1)

3. [0] GP~p (2)

4. [0.1] P~p (3)

[0] ~p (4)

X

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin ZM_0 sisteminde geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

1. $G(p \rightarrow q) \rightarrow (Gp \rightarrow Gq)$
2. $H(p \rightarrow q) \rightarrow (Hp \rightarrow Hq)$
3. $(GPp \wedge Fq) \rightarrow F(Pp \wedge q)$
4. $(p \wedge Fq) \rightarrow F(Pp \wedge q)$

10.2.2 ZM_1 Zaman Mantığı Sistemi

Çifte dizimsel, yansımasız, bakışımsız ve geçişli olan almaşıklık bağıntısı olan yorumlamalar kümesinin belirlediği mantık sistemini ZM_1 ile gösteriyoruz. Sistemin *çift dizimsel* olduğunu şöyle tanımlıyoruz. Bu sisteme özgü aksiyomları aşağıda gösteriyoruz.

(A1.1) $Gp \rightarrow GGp$ (A1.3) $Gp \rightarrow Fp$

(A1.2) $Hp \rightarrow HHp$ (A1.4) $Hp \rightarrow Pp$

ZM_0 sisteminin teoremlerinin kümesi ZM_1 sisteminin teoremlerinin kümesinin alt kümesidir. Yani ZM_0'ın her teoremi ZM_1'in de teoremidir. Bu nedenle ZM_0'ın her aksiyomu ZM_1'in de aksiyomudur.

ZM_1 mantık sisteminin çözümleyici çizelgesinde ZM_0 çizelgesinin kurallarından başka bir de almaşıklık bağıntısının geçişliliğine dayanan aşağıdaki kurallar kullanılır.

ZM_1 sistemine özgü G'nin elenmesi kuralı:

(3) 1. $[k_1 \ldots k_n]$ GA

$[k_1 \ldots k_{n+2}]$ A(1)

ZM_1 sistemine özgü H'nın elenmesi kuralı

1. $[k_1 \ldots k_n]$ HA

$[k_1 \ldots k_{n+2}]$ A(1)

Örnek olarak (A1.1) aksiyomunun ZM_1 sisteminde geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(4) 1. [0] ~(Gp → GGp)

5. [0] Gp
2. [0] ~GGp (1)

3. [0] FF~p (2)

4. [0.1] F~p (3)

[0.1.1] ~p (4)

[0.1.1] p (5)

X

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin ZM_1 sisteminde geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

1. Hp → HHp
2. FFp → Fp
3. PPp → Pp
4. Gp → Fp
5. Hp → Pp
6. (Pp ∨ p ∨ Fp) → PFp
7. GHp → (Hp ∧ p ∧ Gp)
8. HGp → (Hp ∧ p ∧ Gp)

10.2.3 ZM_2 Zaman Mantığı Sistemi

Çifte dizimsel, bakışımsız, geçişli ve bağlaşık almaşık bağıntısı olan yorumlar kümesinin belirlediği mantık sistemini ZM_2 ile gösteriyoruz. ZM_2'nin teoremleri ZM_1'in dolayısıyla da ZM_0'ın teoremlerini kapsıyor. ZM_2'ye özgü aksiyomları aşağıda gösteriyoruz.

(A2.1) (Fp ∧ Fq) → [F(p ∧ Fq) ∨ F(p ∧ q) ∨ F(Fp ∧ q)]

(A2.2) (Pp ∧ pq) → [P(p ∧ pq) ∨ P(p ∧ q) ∨ P(Pp ∧q)].

(A2.1) aksiyomunun geçerli olduğunu aşağıdaki çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(1) 1. [0] ~(Fp ∧Fq) → [F(P ∧ Fq) ∨ F(p ∧ q) ∨ F(Fp ∧ q)]]
2. [0] Fp ∧ Fq
3. [0] ~[F(p ∧ Fq) ∨ F(p ∧ q) ∨ F(Fp ∧ q)]
7. [0] Fp
8. [0] Fq (2)
4. [0] ~F(p ∧ Fq)
5. [0] ~F(p ∧ q) (3)
6. [0] ~F(Fp ∧ q)
9. [0] G~(p ∧ Fq) (4)
10. [0] G~(p ∧ q) (5)
11. [0] G~(Fp ∧ q) (6)
[0.1] p (7)
[0.2] q (8)
12. [0.1] ~(p ∧ Fq) (9)
15. [0.1] ~(p ∧ q) (10)
17. [0.2] ~(Fp ∧ q) (11)

(12)

[0.1] ~p
X

13. [0.1] ~Fq
14. [0.1] G~q (13)
[0.2] ~q (14)
X

ZM_2 sisteminde

(1) $F(Pp \rightarrow (Pp \vee p \vee Fp)$

önermesi geçerlidir. (1)'in geçerli olduğunu aşağıdaki çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(2)

1. [0] ~[FPp → (Pp ∨ p ∨ Fp)]
3. [0] FPp
2. [0] ~(Pp ∨ p ∨ Fp) (1)

[0] ~Pp
[0] ~p
[0] ~Fp (2)

4. [0.1] Pp (3)

[0] p (4)

ALIŞTIRMALAR

I. §10.2.3'teki (A2.2) aksiyomunun ZM_2 sisteminde geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

II. Aşağıdaki önermelerin ZM_2 sisteminde geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

1. $PFp \rightarrow (Pp \vee p \vee Fp)$
2. $[Hp \wedge p \wedge Gp) \rightarrow GHp$
3. $(Hp \wedge p \wedge Gp) \rightarrow HGp$

10.2.4 ZM_3 Zaman Mantığı Sistemi

$\mathcal{B}$ herhangi bir bağıntı olduğunda,

(1) $\forall Z_1 \forall Z_2 \exists Z_3 [z_1 \mathcal{B} z_2 \rightarrow (z_1 \mathcal{B} z_3 \wedge z_3 \mathcal{B} z_1)]$

olursa $\mathcal{B}$ bağıntısının yoğun olduğu söylenir.

$\mathcal{B}$ bağıntısı yoğun ise $\mathcal{B}$'nin tersi olan $\breve{\mathcal{B}}$ bağıntısı da yoğun olur. Bunu şöyle ispatlayabiliriz:

(2) 1. $\mathcal{B}$ yoğun bir bağıntıdır.

2. $\forall z_1 \forall z_2 \exists z_3 [z_1 \mathcal{B} z_2 \rightarrow (z_1 \mathcal{B} z_3 \vee z_3 \mathcal{B} z_2)]$

3. $\forall z_1 \forall z_2 \exists z_3 [z_2 \mathcal{B} z_1 \rightarrow (z_3 \mathcal{B} z_1 \vee z_2 \mathcal{B} z_3)]$

4. $\forall z_2 \forall z_1 \exists z_3 [z_2 \mathcal{B} z_1 \rightarrow (z_2 \mathcal{B} z_3 \vee z_3 \mathcal{B} z_1)]$

5. $\forall z_1 \forall z_2 \exists z_3 [z_1 \mathcal{B} z_2 \rightarrow (z_1 \mathcal{B} z_3 \vee z_3 \mathcal{B} z_2)]$

4. satırdan 5. satıra geçmek için bağlı değişken değişmesi yaptık; daha açık olarak z_1 yerine z_2 ve z_2 yerine z_1 koyduk.

Almaşıklık bağıntısı çift dizimsel, yansımasız, bakışımsız, geçişli bağlaşık ve yoğun olan yorumlamalar kümesinin belirlediği zaman mantığı sistemini ZM_3 olarak gösteriyoruz. $\mathcal{B}^{sn}$ yoğun olduğundan $\mathcal{B}^{\ddot{o}n}$'de yoğun olur.

ZM_3'e özgün aksiyonlar aşağıdadır.

A(3.1) $Fp \rightarrow FFp$

A(3.2) $Pp \rightarrow PPp$

Örnek olarak (A3.1) aksiyomunun ZM_3 sisteminde geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(3) 1. [0] ~(Fp → FFp)

3. [0] Fp
2. [0] ~FFp (1)

4. [0] GG~p (2)

[0.1] p (3) $[0]\mathcal{B}^{sn}[0.1]$

5. [0.2] G~p (4) $[0]\mathfrak{R}^{sn}[0.2] \wedge [0.2]\mathfrak{R}^{sn}[0.1]$

[0.1] ~p (5) $[0]\mathfrak{R}^{sn}$ [0.1]

X

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin ZM_3 sisteminde geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

1. $Pp \rightarrow PPp$
2. $GGp \rightarrow Gp$
3. $HHp \rightarrow Hp$

10.2.5 ZM_4 Şimdiki Zaman Değişmezli Zaman Mantığı Sistemi

Bazı günlük dil tümcelerinde şimdiki zaman çekimini dile getiren "şimdi" sözcüğü geçer. Örneğin

(1) Şimdi fırtına kopuyor.

(2) Şimdi fırtına kopacaktır.

(3) Şimdiden sonra fırtına kopacaktır.

(4) Şimdiden önce fırtına kopmuştur.

tümcelerini göz önüne alalım. "Şimdi" sözcüğünü *şimdiki zaman değişmezi* dediğimiz "J birli önerme eklemiyle dile getiriyoruz. Buna göre (1)-(4) tümcelerini sırasıyla şöyle dile getirebiliriz.

(1) J (fırtına kopuyor)

(2) EJ (fırtına kopuyor)

(3) JF (fırtına kopuyor)

(4) JP (fırtına kopuyor)

"J" değişmezini ZM_3 zaman mantığı sistemine ekleyerek elde edilen sisteme *şimdiki zaman değişmezli zaman mantığı sistemi* diyoruz. Bu sistemi

ZM_4 olarak gösteriyoruz. "J" değişmezinin anlamı aşağıdaki kural yardımıyla belirlenir.

(i) JA önermesinin verilen bir yorumlamada z zaman anında doğru olması, A önermesinin z_0 başlangıç anında doğru olması demektir.

"J" değişmezinin en önemli özellikleri aşağıdaki önermelerin geçerli olmasıyla dile getirilir.

(5) $JA \leftrightarrow A$

(6) $\sim JA \leftrightarrow J\sim A$

(7) $J(A \wedge B) \leftrightarrow (JA \wedge JB)$

Ancak

(9) $G(JA \leftrightarrow A)$

ile

(10) $H(JA \leftrightarrow A)$

önermeleri geçersizdir. Buna göre

(11) A teorem ise GA teoremdir.

ile

(12) A teorem ise HA teoremdir.

biçiminde dile getirilen gerektirme kuralı ZM_4 sisteminde doğru değildir. Oysa (11) ile (12) ZM_1, ZM_2 ve ZM_3 sistemlerinde doğrudur.

(11)'in yanlış olduğunu göstermek amacıyla

(13) $G(Jp \leftrightarrow p)$

önermesinin bir yanlışlayıcı yorumlamasını çözümleyici çizelge ile bulalım. Bunun için

(14) $\sim G(Jp \leftrightarrow p)$

nin doğrulayıcı yorumlamasını bulmalıyız.

(15) 1. [0] ~G(Jp ↔ p)

2. [0] F~(Jp ↔ p)

3. [0.1] ~(Jp ↔ p)

(3)

5. [0.1] Jp

[0.1]~p

[0] p (5)

4. [0.1] ~Jp

[0.1] p

6. [0.1]J ~p (4)

[0] ~p (6)

5. adımda "[0.1] Jp"den "[0] p"elde ettik. Nitekim Jp'nin [0.1]'de doğru olması p'nin şimdiki zaman anında yani [0]'da doğru olması demektir. Aynı biçimde 6. adımda "[0.1] J~p"den "[0] ~p"yi elde ettik. (15) çizelgesinin iki açık yolu vardır. Birinci açık yolun belirlediği yorumlamayı aşağıda gösteriyoruz.

(16) (Z: {[0], [0.1]}; B^{sn}: {<[0], [0.1]>}; [0]: p; [0.1]:)

(16) yorumlaması (15) önermesinin yanlışlayıcı yorumlamasıdır.

İmdi içine "J"nin de geçebildiği A gibi herhangi bir önerme içinde "J"nin geçmediği A* gibi bir önerme ile ZM_4 sisteminde eşdeğerdir. A* önermesine, A önermesine *"J"den arınmış* karşılığı diyoruz. A* önermesini bulmak için A önermesini önce A'nın *indirgenmiş biçimi* denilen İnd(A) gibi bir önermeye geçirmeliyiz. İnd(A) önermesi A ile eşdeğer olan ve "F", "P", "G", "H"nin etki alanında "J"nin geçmediği bir önerme demektir. İnd(A) önermesi aşağıdaki kurallara dayanarak saptanır.

(i) İnd(p) = p

(ii) İnd(~A) = ~İnd(A)

(iii) İnd(JA) = Jİnd(A)

(iv) İnd(A e B) = İnd(A) e İnd(B), (e ikili eklemi ∧, ∨, →, ↔ eklemlerinden herhangi biridir.) E birli eklemi F, P, G, H değişmezlerinden biri olduğunda, İnd(EA) önermesi şöyle belirlenir. Eğer A içinde J

geçmiyorsa İnd(EA) = E[İnd(A)] elde edilir. Eğer A içinde J geçiyorsa A önermesi önce tikel-evetlemeli yasal biçime dönüştürülür. Sonra da aşağıdaki eşdeğerlik kullanılır.

(v) $E[(JA \wedge B) \vee C] \equiv [JA \wedge E(B \vee C)] \vee (\sim JA \wedge EC)$

Böylece "J" değişmezi "E" değişmezinin etki alanının dışına çıkarılır.

Buna göre A herhangi bir önerme olduğunda A^- önermesi, A önermesindeki "J"nin bütün geçişlerinin kaldırılmasıyla elde edilen önerme olsun. O zaman

(vi) $A^* = [İnd(A)]^-$

elde edilir.

Örneğin

(17) $(Jp \wedge p) \rightarrow G[p \wedge (Jq \vee r)]$

önermesinin "J"den arınmış karşılığını bulalım. Bunun için (17)'yi indirgenmiş biçime çevirmeliyiz. Bu amaçla "$p \wedge (Jq \vee r)$" önermesini tikel evetlemeli yasal biçime yani "$(p \wedge Jq) \vee (p \wedge r)$" veya eşdeğeri olan "$(Jq \wedge p) \vee (p \wedge r)$" biçimine çevirirız. Sonra ($\vee$) eşdeğerliliğini

(18) $\dot{G}[(Jq \wedge p) \vee (p \wedge r)]$

önermesine uygulayarak, (18)'in eşdeğeri olan

(19) $[Jq \wedge G[p \vee (p \wedge r)] \vee [\sim Jq \wedge G(p \wedge r)]$

önermesini buluruz. Böylece (17) önermesi indirgenmiş biçimde olan

(20) $(Jp \wedge r) \rightarrow [[Jp \wedge G[p \vee (p \wedge r)]] \vee [\sim Jq \wedge G(p \wedge r)]]$

önermesine çevirebiliriz. (20) önermesinde "J"nin bütün geçişlerini kaldırarak (20)'den

(21) $(p \wedge r) \rightarrow [[q \wedge G[p \vee (p \wedge r)]] \vee [\sim q \wedge G(p \wedge r)]]$

önermesi elde edilir. (21) önermesi, (17)'nin "J"den arınmış karşılığıdır.

İkinci örnek olarak

(22) GJp

önermesinin "J"den arınmış karşılığını bulalım. (v) eşdeğerliliğini "Jp"ye uygulayabilmek için "Jp"yi eşdeğeri olan

(23) $(Jp \wedge T) \vee \bot$

ye dönüştürüyoruz.

(24) $G[(Jp \wedge T) \vee \bot]$

nin (v) eşdeğerliği gereği eşdeğeri

(25) $(Jp \wedge G(T \vee \bot) \vee (\sim Jp \wedge G\bot)$

önermesidir. İmdi ZM_4 sisteminde B^{sn} dizimsel (dolayısıyla da çıkmazsız) olduğundan, E eklemi G, F, H, P olduğunda

(26) $ET \equiv T$

(27) $E\bot \equiv \bot$

olur. Dolayısıyla

(28) $[Jp \wedge G(T \vee \bot)] \vee (\sim Jp \wedge G\bot) \equiv (Jp \wedge GT) \vee (\sim Jp \wedge \bot) \equiv (Jp \wedge T) \vee \bot \equiv Jp \wedge T \equiv Jp.$

O halde

(29) $GJp \equiv Jp$

olup

(30) $İnd(GJp) = Jp$

elde edilir. O da

(31) p

önermesidir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin "J"den arınmış karşılıklarını bulunuz.

1. $[Jp \wedge G(p \rightarrow q)] \rightarrow Jq$
2. $Jp \wedge G(Jq \vee r)$
3. $[p \rightarrow J(q \vee r)] \wedge H[p \rightarrow J(q \vee r)]$

11. KOŞULLULAR MANTIĞI

11.1 KOŞUL EKLEMLERİ VE KOŞULLU ÖNERME TÜRLERİ

(1) A ise B

(2) A olduysa B olacaktır.

(3) A oluyorsa B olacaktır.

(4) A olsa B olur.

(5) A olsaydı B olurdu.

biçimindeki tümcelere *koşullu önerme* veya kısaca *koşullu* denir. "e" bir ikili önerme eklemi olduğundan (1) – (5) önermeleri

(6) A e B

biçiminde dile getirilebilir. "e" eklemine bir *koşul eklemi* denir.

Sırasıyla (1) – (3) biçimlerinde olan

(1′) Ali geliyor ise Behçet gidiyor.

(2′) Oswald Kennedy'yi öldürmediyse başkası öldürmüştür.

ve

(3′) Kennedy'yi Oswald öldürmüyorsa başkası öldürecektir.

gibi tümcelere *bildiri kipinden koşullu* denir. Bu koşulluları oluşturan koşul eklemine *bildiri koşul eklemi* denir ve "⇒" işaretiyle gösterilir.

Öte yandan sırasıyla (4) ve (5) biçimlerinde olan

(4′) Oswald Kennedy'yi öldürmese başkası öldürür.

ve

(5′) Oswald Kennedy'yi öldürmeseydi başkası öldürürdü.

Ayrıca (4) – (5) biçimlerinde olan

(4′) Kennedy'yi Oswald öldürmese başkası öldürür.

ve

(5) (Kennedy'yi Oswald öldürmeseydi başkası öldürürdü)

gibi tümcelere *dilek kipinden koşullu* veya olana aykırı koşullu denir. Bu koşulluları oluşturan koşul eklemine *dilek koşul eklemi* denir ve ">" işaretiyle gösterilir.

Öte yandan

(7) A olsa B olabilirdi.

tümcesi

(7') $\sim(A > \sim B)$

biçiminde tanımlanabilir.

(8) A, B olsa bile A

tümcesi de

(8') $A \wedge (B > A)$

biçiminde tanımlanabilir.

İki değerli doğruluk fonksiyonu durumundaki "$\rightarrow$" koşul eklemiyle oluşturulan

(9) $A \rightarrow B$

koşullusunun

(10) $A \Rightarrow B$

ile çok yakın bir ilişkide olduğunu ilerde göreceğiz.

"e" gibi bir ikili önerme ekleminin bir koşul eklemi olmasının gerekli ve yeterli koşullarını aşağıda gösteriyoruz.

(i) A e B önermesi B önermesini içermiyor.

(ii) A e B, $A \models B$

Gerçekten

(11) değil $(A \Rightarrow B \models B)$

(12) $A \Rightarrow B, A \models B$

(13) değil $(A > B \models B)$

(14) $A > B, A \models B$

doğrudur. Örneğin (5') tümcesi

(15) Kennedy'yi Oswald'dan başkası öldürürdü

tümcesini içermez. Öte yandan (5') ile

(16) Kennedy'yi Oswald öldürmedi

tümceleri bir arada (15)'i içerir.

(17) $A < B \equiv \Box(A \rightarrow B)$

ile tanımlanan "<" gerektirme eklemi de doğruluk fonksiyonu durumunda olan bir koşul eklemidir. Ancak bu bölümde gerektirme eklemini incelemeyeceğiz.

ALIŞTIRMALAR

§11.1'deki (1) – (5), (7) – (8) biçimindeki koşulları günlük dildeki tümcelerle örnekleyiniz.

11.2 BİLDİRİ KİPİNDEN KOŞULLULAR

11.2.1 Bildiri Kipinden Koşulluların Eşdeğerlik Savı

(1) $A \rightarrow B$

önermesi §11.1'deki (i) ile (ii) koşullularını yerine getirir. Bu anlamda (1) önermesi gerçekten bir koşullu'dur.

İmdi

(1) A e B

herhangi bir koşullu olduğunda

(2) A e $B \models A \rightarrow B$

doğrudur. Nitekim (2) yanlış olsaydı "A e B" doğru ve "$A \rightarrow B$" yanlış olurdu. "$A \rightarrow B$" yanlış olunca A doğru ve B yanlış olur. Oysa §11.1'deki (ii) koşulu

(3) $A \text{ e } B, A \models B$

biçimindedir. (3) koşuluna göre "A e B" ve "A" doğru olduğundan "B" yanlış değil doğrudur. Demek ki (2) içermesi doğrudur.

(2) içermesi, "$\rightarrow$" ekleminin en zayıf koşul eklemi olduğunu dile getirir. (2) içermesinde "e" yerine bildiri koşul eklemini yani "$\Rightarrow$" işaretini koyarsak,

(3) $A \Rightarrow B \models A \rightarrow B$

içermesini elde ederiz.

Öte yandan

(4) $C \vee B \models \sim C \Rightarrow B$

içermesi de doğrudur. Örneğin

(5) Bu işi Ali veya Behçet yapmıştır. $\models$ Bu işi Ali yapmamışsa Behçet yapmıştır.

içermesi sezgisel olarak doğrudur. İmdi (4) içermesinde C yerine "~A" koyarsak gene doğru olan

(6) $\sim A \vee B \models \sim\sim A \Rightarrow B$

içermesi elde edilir. (6) içermesinde "~~A" yerine "A" koyabiliriz. Böylece

(7) $\sim A \vee B \models A \Rightarrow B$

elde edilir. Oysa

(8) $\sim A \vee B \equiv A \rightarrow B$

eşdeğerliliği doğrudur. (7) ve (8)'den

(9) $A \rightarrow B \models A \Rightarrow B$

elde edilir. Oysa (3) ve (9)'dan

(10) $A \Rightarrow B \equiv A \rightarrow B$

eşdeğerliği elde edilir. Böylece "$A \Rightarrow B$" ile "$A \rightarrow B$" nun birbiriyle eşdeğer olduğu ortaya çıkar. Bu eşdeğerliğe *bildiri kipinden koşulluların eşdeğerlik savı* denir. Mantıkçıların çoğu bu savı kabul etmekle birlikte bazıları bu savı ka-

bul etmezler. Bu savı kabul etmeyen mantıkçılara göre bildiri kipinden koşulluların doğruluk değeri yoktur. Ayrıca bu koşullular bir bileşik önermenin bileşiği olamazlar. Biz ise mantıkçıların çoğunluğuna katılarak eşdeğerlik savını kabul ediyoruz. Bildiri kipinden koşulluların

(17) $(A \Rightarrow B) \wedge C$

(18) $(A \Rightarrow B) \rightarrow (C \Rightarrow A)$

gibi bileşik önermelerin bileşeni olabileceğini de kabul ediyoruz.

ALIŞTIRMALAR

Bildiri kipinden koşulluların bileşen olarak geçtiği beş farklı tümce kurunuz.

11.2.2 Bildiri Kipinden Koşulluların Paradoksları

Bildiri kipinden koşullular bazı paradokslara yol açarlar. Bu paradokslar geçerli bir çıkarımda "$A \rightarrow B$" biçimindeki bazı bileşenlerin "$A \Rightarrow B$" ile değiştirildiğinde ilk bakışta geçersiz olan bir çıkarımın ortaya çıkmasıyla ortaya çıkar. Paradoksa yol açan belli başlı geçerli çıkarımları aşağıda gösteriyoruz.

(1) $\sim A \therefore A \rightarrow B$

(2) $B \therefore A \rightarrow B$

(3) $A \rightarrow B \therefore \sim B \rightarrow \sim A$ (devirme)

(4) $A \rightarrow B, B \rightarrow C \therefore A \rightarrow C$ ("$\rightarrow$"un geçişliliği)

(5) $A \rightarrow B \therefore (A \wedge C) \rightarrow B$ (tek düzelilik)

(1) – (5) geçerli çıkarımlarında geçen bazı bileşenlerde "$\rightarrow$" koşul eklemi yerine "$\Rightarrow$" koşul ekleminin yani bildiri koşul eklemini koyarsak sırasıyla

(1′) $\sim A \therefore A \Rightarrow B$

(2′) $B \therefore A \Rightarrow B$

(3′) $A \Rightarrow B \therefore \sim B \Rightarrow \sim A$

(4′) $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \therefore A \Rightarrow C$

(5′) $A \Rightarrow B \therefore (A \wedge C) \Rightarrow B$

çıkarımları elde edilir. Oysa (1′) – (5′) çıkarımları aşağıdaki örneklerine bakarak geçersiz görünüyor

(1″) Yağmur yağmayacak ∴ Yağmur yağarsa maç yapılmayacak

ilk bakışta geçersizdir. Nitekim (1″) geçerli olsaydı, (1′) gereği

(1‴) Yağmur yağmayacak ∴ Yağmur yağarsa maç yapılacak

çıkarımı da geçerli olurdu. Oysa (1″) ile (1‴) nin aynı zamanda geçerli olması saçma görünüyor.

(2″) Yarın yağmur yağacak ∴ Yarın hava bulutsuz olursa yağmur yağacak.

İlk bakışta geçersizdir. Nitekim yarın yağmur yağacağına ne denli inanırsak inanılan çıkarımın sonucunu kabul edemeyiz.

(3′) Yağmur yağarsa kuvvetli yağacak ∴ Yağmur kuvvetli yağarsa yağmur yağmayacak.

çıkarımı ilk bakışta geçersizdir. Nitekim öncülü ileri sürdüğümüz bir durumda sonucu kabul etmeyiz.

(4′) Çiğ koparsa yer karlı olur, yer karlı olursa kayak yaparım ∴ Çiğ koparsa kayak yaparım.

çıkarımı ilk bakışta geçersizdir. Nitekim öncülleri ileri sürdüğümüz bir durumda sonucu kabul etmeyiz.

(5′) Yağmur yağarsa çiftçiler sevinir ∴ Yağmur yağıp sel basarsa çiftçiler sevinir.

İlk bakışta geçersizdir. Nitekim öncülü ileri sürdüğümüz bir durumda sonucu kabul etmeyiz.

11.2.3 Bildiri Kipinden Koşulluların İleri Sürülebilme Derecesi

Bildiri kipinden koşulluların anlamı yalnız taşıdıkları doğruluk değeri ile değil, bir de *ileri sürülebilme derecesi* denilen bir etkene dayanarak belirlenir. Özellikle ön bileşenin atomsal önermelerin beş temel eklem ($\sim, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$) ve "$\Rightarrow$" bildiri koşul eklemi yardımıyla birleşmesinden oluşan önermelerin dilini göz önüne alalım. Bu dile ait olup içinde "$\Rightarrow$" geçmeyen A gibi bir önermenin (tümcesinin) ileri sürülebilme derecesi A'nın bilgisel olasılık derecesidir. Bunu da $\mathcal{Oe}(A)$ olarak gösteriyoruz. Ancak A ve B içinde "$\Rightarrow$" ın geçmediği önermeler olduğunda $A \Rightarrow B$ bildiri kipinden koşullunun ileri sürülebilme derecesi $\mathcal{Oe}(A \Rightarrow B)$'den farklıdır.

(1) $\mathcal{Oe}(A \Rightarrow B) = \mathcal{Oe}[\sim(A \wedge \sim B)] = 1 - \mathcal{Oe}(A \wedge \sim B)$ Eğer $\mathcal{Oe}(B) \neq 0$ ise

(2) $\mathcal{Oe}(A \Rightarrow B) = \mathcal{Oe}(B \,/\, A) + \mathcal{Oe}(\sim A \,.\, [\mathcal{Oe}(\sim B \wedge A) \,/\, \mathcal{Oe}(A)]$ elde edilir. Nitekim (1) ve (2)'den

(3) $1 - \mathcal{Oe}[\sim B \wedge A) = \mathcal{Oe}(B \,/\, A) + \mathcal{Oe}(\sim A) \,.\, \mathcal{Oe}(\sim B \,/\, A)$

$1 = \mathcal{Oe}(\sim B \wedge A) + \mathcal{Oe}(B \,/\, A) + \mathcal{Oe}(\sim A) \,.\, \mathcal{Oe}(\sim B/\, A)$

$1 = \mathcal{Oe}(\sim B \wedge A) + \mathcal{Oe}(B \,/\, A) + [1 - \mathcal{Oe}(A) \,.\, \mathcal{Oe}(\sim B \,/\, A)$

$1 = \mathcal{Oe}(\sim B \wedge A) + [\mathcal{O}\,(B \,/\, A) + \mathcal{Oe}(\sim B \,/\, A)] - \mathcal{Oe}(A) \,.\, \mathcal{Oe}(\sim B \,/\, A)$

$1 = \mathcal{Oe}(\sim B \wedge A) + 1 - \mathcal{Oe}(\sim B \wedge A)$

$1 = 1$

elde edilir. O halde $\mathcal{Oe}(B) \neq 0$ ise (2) doğrudur.

İmdi ~A'nın doğruluğunu kabul ettiğimize göre $A \Rightarrow B$ koşullusunu ileri sürmemiz *boş* bir ileri sürme biçimidir. Böyle bir ileri sürme aldatıcıdır. Nitekim $A \Rightarrow B$'yi ileri sürdüğümüzü duyan A ile B arasında bir bağıntı olduğunu sanabilir. $A \Rightarrow B$'yi ileri sürmenin boşluğunun ölçüsü $\mathcal{Oe}(\sim A)$'dır. $A \Rightarrow B$ koşullusunun, ileri sürülebilme derecesi, $\mathcal{Oe}(A \Rightarrow B)$'den boşluk derecesi olan $\mathcal{Oe}(\sim A)$'yı düşürmek gerekir.

Genel olarak C_1 gibi bir önermeyi kabul etmemiz nedeniyle C_2 gibi bir önermeyi ileri sürersek $\mathcal{Oe}(\sim C_2 \,/\, \sim C_1)$ olasılığı yüksek olur. Dolayısıyla ~A önermesini kabul etmemiz nedeniyle $A \Rightarrow B$'yi ileri sürersek $\mathcal{Oe}[\sim(A \Rightarrow B) \,/$

~~(A)], yani $\mathcal{O}\ell(\sim B \wedge A) / \mathcal{O}\ell(A)$ yüksek olur. İşte bu nedenle $\mathcal{O}\ell(\sim A)$'yı bir de $\mathcal{O}\ell(\sim B \wedge A) / \mathcal{O}\ell(A)$ ile çarparak $\mathcal{O}\ell(A \Rightarrow B)$'den çıkarmamız gerekir. Buna göre A gibi bir önermenin ileri sürülebilme derecesini İ(A) olarak gösterirsek

(4) $\text{İ}(A \Rightarrow B) = \mathcal{O}\ell(A \Rightarrow B) - \mathcal{O}\ell(\sim A) \,.\, [\mathcal{O}\ell(\sim B \wedge A) / \mathcal{O}\ell(A)]$

elde edilir. Oysa (2) gereği (4)'ten

(5) $\text{İ}(A \Rightarrow B) = \mathcal{O}\ell(B/A), \mathcal{O}\ell(A) \neq O.$

elde edilir. Böylece A ⇒ B bildiri kipinden koşulluları ileri sürülebilme derecesi belirlenmiş olur.

Dikkat edilirse $\text{İ}(A \Rightarrow B)$, $\mathcal{O}\ell(A) = O$ durumunda tanımlanmış değildir. Özellikle A tutarsız ise $\mathcal{O}\ell(A) = 0$ olup $\text{İ}(A \Rightarrow B)$ belirsiz olur. Bu son durumda A ⇒ B gene de ileri sürülebilir. (5) eşitliği ilk olarak Ernest Adams tarafından ortaya konulmuştur. Bu nedenle (5) eşitliğine *Adams Eşitliği* denir.

11.2.4 Adams Eşitliğinin Gerekçeleri

(1) $\text{İ}(A \Rightarrow B) = \mathcal{O}\ell(B / A), \mathcal{O}\ell(A) \neq 0$

Adams Eşitliğini kabul etmemiz için güçlü gerekçeler vardır. Bu gerekçelerin başlıcalarını aşağıda gösteriyoruz.

Birinci gerekçe: Koşullular mantığı alanında uzman olan mantıkçıların ezici çoğunluğu Adams eşitliğini benimsemiştir.

İkinci gerekçe: İleri sürülebilme derecesi yüksek olan pek çok bildiri kipinden koşullu örneğinde ön bileşenin ard bileşene göre koşullu (bilgisel) olasılığı da yüksektir. İleri sürülebilme derecesi düşük olunca koşullu olasılık da düşük olur.

(2) Güneş doğarsa aydınlık olur.

tümcesinin ileri sürülebilme derecesi yüksektir. Aynı zamanda

(3) $\mathcal{O}\ell$(Aydınlık oluyor / Güneş doğuyor)

koşullu olasılığı da yüksektir. Öte yandan

(4) Ali binanın dördüncü katından yere atlarsa ölmez.

tümcesinin ileri sürülebilme derecesi düşüktür.

(5) $\mathcal{O}\ell$(Ali ölmedi / Ali binanın dördüncü katından yere atladı)

koşullu olasılığı da düşüktür.

Üçüncü gerekçe

(6) $A \Rightarrow B$

ile

(7) $A \Rightarrow \sim B$

koşullular çiftini göz önüne alalım. Bu iki koşulluyu bir arada ileri süremeyiz. Örneğin

(8) Yağmur yağarsa maç yapılacak.

ile

(9) Yağmur yağarsa maç yapılmayacak.

koşulluları aynı zamanda ileri süremeyiz. Adams eşitliği bunu şöyle açıklar.

(10) $\dot{I}(A \Rightarrow B) = \mathcal{O}\ell(B/A)$, $\dot{I}(A \Rightarrow \sim B) = \mathcal{O}\ell(\sim B/A)$, $\mathcal{O}\ell(\sim B/A) = 1 - \mathcal{O}\ell(B/A)$, o halde $\dot{I}(A \Rightarrow \sim B) = 1 - \dot{I}(A \Rightarrow B)$.

Dolayısıyla $\dot{I}(A \Rightarrow B)$ ne denli yüksek olursa, $\dot{I}(A \Rightarrow \sim B)$ o denli düşük olur. Böylece iki koşullu birden ileri sürülemez. Ancak bir istisna vardır. O da A'nın tutarsız olması durumudur. O zaman hem (6) hem (7) aynı zamanda ileri sürülebilir. Nitekim bu eşitlik A'nın tutarsızlığı durumunda $\dot{I}(A \Rightarrow B)$ ile $\dot{I}(A \Rightarrow \sim B)$'nin değerini belirsiz bırakıyor.

11.3 DİLEK KİPİNDEN KOŞULLULAR

11.3.1 Sembolleştirme

">" dilek koşul eklemi doğruluk fonksiyonu durumunda olmayan bir ikili eklemdir. Örneğin

(1) Fenerbahçe takımı bir gol daha atsaydı lig şampiyonu olacaktı.

dilek kipinden koşullusunu ele alalım. Bu koşullunun bileşenleri

(2) Fenerbahçe takımı bir gol daha attı

ile

(3) Fenerbahçe takımı lig şampiyonu oldu

tümceleridir. (1) koşullusu ancak (2) ile (3) tümcelerinin yanlış olduğu durumlarda ileri sürülür. (2) ile (3) yanlış ise, (1) doğru da yanlış da olabilir. Eğer lig şampiyonluğu için gerçekten bir tek gol'eksikse (1) doğru olur. Ama lig şampiyonluğu için bir gol daha atılması yetmeyebilir. Bu son durumda (1) yanlış olur.

İmdi (1) koşullusu

(1') (Fenerbahçe takımı bir gol daha attı) > (Fenerbahçe takımı lig şampiyonu oldu)

biçimindedir. Buna göre ">" dilek koşul ekleminin doğruluk fonksiyonu durumunda olmadığını görüyoruz.

Genel olarak

(4) $A > B$

ile gösterilen

(5) A olsaydı B olacaktı.

dilek kipinden koşullu önerme A ön-bileşeninin yanlış olduğu durumlarda ileri sürülür. Bu nedenle dilek kipinden koşullulara *olana aykırı koşullu* da denir. Dikkat edilirse

(6) A olsa B olur.

veya

(7) A olsa B olacak.

biçimindeki dilek kipinden koşullular A ön-bileşeninin gerek doğru gerekse yanlış olduğu durumlarda ileri sürülür.

Dilek kipinden koşullular aşağıdaki üç özelliği taşımaz.

(8) $(A > B \wedge B > C) \rightarrow (A > C)$ (geçişlilik)

(9) $(A > B) \rightarrow (\sim B > \sim A)$ (devirme)

(10) $(A > B) \rightarrow [(A \wedge C) > B]$ (tek düzelilik)

Örneğin

(8′) [(Ali gitseydi Behçet gelirdi) ∧(Behçet gelseydi Ali gitmezdi)] → (Ali gitseydi Ali gitmezdi)

tümcesi yanlıştır olabilir. Özellikle Ali'nin yalnızca Behçet'i getirmek amacıyla yola çıkması durumunda yanlış olur. Aynı durumda

(9′) (Ali gitseydi Behçet gelirdi) → (Behçet gelmeseydi Ali gitmezdi)

yanlıştır. Nitekim

(11) Behçet gelmeseydi Ali giderdi.

doğru. Dolayısıyla

(12) Behçet gelmeseydi Ali gitmezdi.

yanlıştır.

Son olarak

(10′) (Uçağın soldaki motoru dursaydı pilot mecburi iniş yapardı) → (Uçağın hem soldaki motoru hem sağdaki motoru dursaydı pilot mecburi iniş yapardı)

tümcesi yanlıştır. Nitekim uçağın her iki motoru durduğunda uçak düşer, dolayısıyla pilot mecburi iniş bile yapamaz.

ALIŞTIRMALAR

1. Dilek kipinden koşulluların geçişlilik özelliğini taşımadığını gösteren üç farklı örnek bulunuz.
2. Dilek kipinden koşulluların devirme özelliğini taşımadığını gösteren üç farklı örnek bulunuz.
3. Dilek kipinden koşulluların tek düzelik özelliğini taşımadığını gösteren üç farklı örnek bulunuz.

11.3.2 Stalnaker Kuramı

11.3.2.1 Yorumlama

Stalnaker adlı mantıkçı dilek kipinden koşulluların kipler mantığındaki kullanılanlara benzer bir yorumlama biçimini koymuştur. Bu yorumlama atomsal önermeler, beş temel eklem (~, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$), T ile $\perp$ eklemleri ve > dilek koşul eklemi yardımıyla oluşturulan önermelerin dili için kullanılır. Bu dili D ile gösteriyoruz. D diline ait önermelerin kümesini de D ile gösteriyoruz. D diline ait bir önermenin yorumlaması M mümkün dünyalar kümesi m_0 gerçek dünyası, B almaşıklık bağıntısı, her m mümkün dünyası için atomsal önermelerin bir değerlemesinden ve s seçme fonksiyonundan oluşur. $m_0 \in M$, $B \subseteq M \times M$, B yansımalıdır. s fonksiyonu 1: $D \times M \rightarrow M$ biçiminde olup m Bs(A, m)'dir. s fonksiyonu bazen tanımlanmış değildir. "m mümkün dünyasında doğru" yüklemi şöyle tanımlanır.

(i) p atomsal önerme ise, p m'de doğrudur ancak ve ancak p yorumlamada m'nin değerlemesinde yer alırsa

(ii) T her m'de doğrudur, $\perp$ her m'de yanlıştır.

(iii) ~A m'de doğrudur ancak ve ancak A m'de doğru değilse

(iv) 1. $A \wedge B$ m'de doğrudur ancak ve ancak A m'de doğru ve B m'de doğru ise

2. $A \vee B$ m'de doğrudur ancak ve ancak A m'de doğru veya B m'de doğru ise

3. $A \rightarrow B$ m'de doğrudur ancak ve ancak A doğru değil veya B doğru ise

4. $A \leftrightarrow B$ m'de doğrudur ancak ve ancak hem A hem B doğru veya hem A hem B doğru değilse

(v) A > B m'de doğrudur ancak ve ancak B s(A, m)'de doğru veya s(A,m) tanımlanmamış ise

(vi) A, s(A, m)'de doğrudur.

(vii) s(A, m) tanımlanmamış ise

$\forall m'(mBm' \rightarrow$ A m'de doğru değildir.)

(viii) A m'de doğru ise s(A, m) = m olur.

(ix) B s(A, m)'de doğru ve A s(B, m)'de doğru ise, s(A, m) = s(B, m) olur.

(x) A verilen yorumlamada doğrudur ancak ve ancak A m_0'da doğru ise.

Örnek olarak "p" gibi bir tek atomsal önermesi olan D dilinde

(1) $p > \sim p$

önermesinin bir yorumlamada doğruluk değerini bulalım.

D dilinde birbirinden bağımsız tam 4 önerme türü vardır.

(i) p ile eşdeğer önermeler

(ii) ~p ile eşdeğer olan önermeler

(iii) T ile eşdeğer olan önermeler

(iv) $\perp$ ile eşdeğer olan önermeler

Buna göre s(A, m)'yi yalnızca s(p, m), s(~p, m), s(T, m) ve s($\perp$, m) için belirlemek yeter. Nitekim A ≡ B ise s(A, m) = s(B, m) olur.

Şimdi yorumlamayı şöyle belirliyoruz.

(2) (M: $\{m_0, m_1\}$, $\mathcal{R}$: $\{<m_0, m_0>, <m_0, m_1>, <m_1, m_1>\}$, m_0: p; m_1:; S: $\{<p, m_0, m_0>, <\sim p, m_0, m_1>, <\sim p, m_1, m_1>, <T, m_0, m_0>, <T_1, m_1, m_1>\}$)

S fonksiyonu $\perp$, m_0 ve $\perp$, m_1 değerleri için tanımlanmamıştır. Ayrıca p ve m_1 değerleri için de tanımlanmamıştır.

Dikkat edilirse

(3) $s(A, m) \neq s(\sim A, m)$

Nitekim A s(A, m)'*de ve* ~A s(~A, m)'de doğrudur. Dolayısıyla s(A, m) = s(~A, m) olsaydı, A ile ~A aynı mümkün dünyada doğru olurdu. Bu ise imkânsızdır. O halde (3) doğrudur.

s fonksiyonu p ve m_1 değerleri için tanımlanmamıştır. Tanımlanmış

olsaydı $s(p, m_1) = m_0$ veya $s(p, m_1) = m_1$ olurdu. $s(p, m_1) = m_0$ olsa $m_1 B m_0$ olur. Oysa $m_1 B m_0$ yanlıştır. Öte yandan $s(p, m_1) = m_1$ olsa p önermesi m_1'de doğru olur. Oysa p önermesi m_1'de yanlıştır. O halde $s(p, m_1) \neq m_0$ ve $s(p, m_1) \neq m_1$ olur. Dolayısıyla $s(p, m_1)$ tanımlanmamıştır.

Şimdi (1)'in (2) yorumlamasında doğruluk değerini hesaplayalım. (1)'in bu yorumlamada m_0'da doğru olması

(i) ~p'nin $s(p, m_0)$'da doğru olması

veya

(ii) $s(p, m_0)$'ın tanımlanmamış olması demektir.

imdi $s(p, m_0) = m_0$ olduğundan $s(p, m_0)$ tanımlanmamış değildir. Öte yandan ~p s_0'da yanlıştır. O halde ~p, $s(p, m_0)$'da doğru değildir. O halde (1) önermesi m_0'da verilen (2) yorumlamasında yanlıştır. Dolayısıyla (1), (2)'de yanlıştır.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin §11.3.2.1'deki (2) yorumlamasında doğruluk değerini hesaplayınız.

1. $p > p$
2. $\sim p > p$
3. $(p \wedge \sim p) > p$
4. $p > (p \vee \sim p)$

11.3.2.2 C2 Koşullular Mantığı Sistemi

§11.3.2.1'deki yorumlamaların belirlediği mantık sistemi Stalnaker tarafından C2 olarak gösterilmiştir. C2, dilek kipinden koşullular hakkında bir mantık sistemidir. C2 sisteminde "$\Box$", "$\Diamond$" ve "$\gtrapprox$" değişmezleri sırasıyla şöyle tanımlanır.

(1) $\Box A$ ancak ve ancak $\sim A > A$ ise

(2) $\Diamond A$ ancak ve ancak $\sim(A > \sim A)$ ise

(3) $A \gtrsim B$ ancak ve ancak $(A > B) \wedge (B > A)$ ise.

Dikkat edilirse

(4) $\sim A > A$ m'de doğrudur ancak ve ancak A s(~A, m)'de doğru veya s(~A, m) tanımlanmamış ise.

İmdi s(~A, m) = m' olsun. O zaman m$\not B$M' olup ~A m''nde doğru yani A m''de yanlış olur. Oysa A m''de doğrudur. O halde s(~A, m) tanımlanmamış olmalıdır. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

(5) $\Box A$ m'de doğrudur ancak ve ancak s(~A, m) tanımlanmamış ise.

İmdi s(~A, m) tanımlanmamış ise (mBm' olduğunda) ~A m''nde doğru değildir. Dolayısıyla mBm' olduğunda Am''de doğrudur. Yani $\Box A$ m'de doğrudur ancak ve ancak A m'nin her almaşığında doğru ise.

C2 sisteminin aksiyom kalıplarını aşağıda gösteriyoruz.

(A1) Her totoloji bir aksiyomdur.

(A2) $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

(A3) $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (A > B)$

(A4) $\Diamond A \rightarrow [(A > B) \rightarrow \sim(A > \sim B)]$

(A5) $[A > (B \vee C)] \rightarrow [(A > B) \vee (A > C)]$

(A6) $(A > B) \rightarrow (A \rightarrow B)$

(A7) $A \gtrsim B \rightarrow [A > C) \rightarrow (B > C)]$

C2'nin çıkarım kuralları da şunlardır.

Modus Ponens kuralı: A ile $A \rightarrow B$ teorem ise, B teoremdir.

Gerektirme kuralı: A teorem ise $\Box A$ teoremdir.

C2 sisteminde ">" eklemi geçişlilik, devirme ve tek düzelilik özelliklerini taşımaz. $\Diamond A$ doğru ise

(1) $\sim(A > B) \equiv A > \sim B$

doğrudur. Örneğin

(2) Ali gelseydi Behçet gidecekti.

koşullusunu ele alalım.

(3) ◇Ali geldi.

doğrudur. O halde (2)'nin değillemesi

(4) Ali gelseydi Behçet gitmeyecekti.

tümcesidir.

C2 sisteminin başlıca teoremlerini aşağıda gösteriyoruz.

(5) $A > A$

(6) $(\sim A \rightarrow A) \rightarrow (B > A)$

(7) $(A > B) \wedge (B > A) \rightarrow [(A > C) \leftrightarrow (B > C)]$

(8) $[(A > B) \wedge \sim(A > \sim C)] \rightarrow [(A \wedge C) > B)$

(9) $(A > B) \vee (A > \sim B)$

(10) $(A \wedge B) \rightarrow (A > B)$

(A1) – (A7) aksiyomları ve (5) – (9) teoremleri Stalnaker'in tanımladığı yorumlamalarda geçerlidir.

Örnek olarak (5) teoreminin geçerli olduğunu gösterelim. $A > A$'nın m_0'da doğru olması A'nın $s(A, m_0)$'da doğru olması demektir. Oysa Stalnaker yorumlamalarının tanımı gereği A her zaman $s(A, m_0)$'da doğrudur. O halde $A > A$ m_0'da doğrudur.

İkinci bir örnek olarak (A6) aksiyom kalıbının geçerli olduğunu gösterelim. $A > B$ m_0'da doğru olsun. O zaman B $s(A, m_0)$'da doğrudur veya $s(A, m_0)$ tanımlanmamıştır. Şimdi $A \rightarrow B$'nin m_0'da doğru olduğunu gösterelim. A m_0'da doğru ise $s(A, m_0) = m_0$ olur. Oysa B $s(A, m_0)$'da doğrudur. O halde B m_0'da doğrudur. O halde $A \rightarrow B$ m_0'da doğrudur. Öte yandan $s(A, m_0)$ tanımlanmamış olsun. Bu durumda $A \rightarrow B$'nin m_0'daki doğruluk değerini bulalım. $s(A, m_0)$ tanımlanmamış olduğundan ($m_0 \not\in m_0$ olduğuna göre) A m_0'da doğru değildir. O halde $A \rightarrow B$ m_0'da doğrudur.

ALIŞTIRMALAR

§11.3.2.2'deki aksiyom kalıpları ve teoremlerinden henüz denetlenmemiş olanların geçerli olduğunu gösteriniz.

11.3.3 Lewis Kuramı

11.3.3.1 Yorumlama

Stalnaker kuramında geçerli olan

(1) $(A > B) \vee (A > \sim B)$

önermesine itiraz yapılmıştır. (1) önermesine *koşullu üçüncü halin olmazlığı* denir. Oysa (1) geçersizdir.

Örneğin

(2) (Ali gitseydi Behçet gelecekti) $\vee$ (Ali gitseydi Behçet gelmeyecekti)

tümcesi yanlış olabilir. Nitekim Ali ile Behçet'in iki kardeş olduğunu Ali'nin evde kaldığını Behçet'in ise evin dışında olduğunu düşünelim. Ali'nin gitmesiyle Behçet'in gelmesi arasında hiçbir ilişki yoktur.

(3) Ali gitseydi Behçet gelecekti.

ile

(4) Ali gitseydi Behçet gelmeyecekti.

aynı zamanda yanlış olur. Bu durumda (2) yanlış olur.

Lewis adlı mantıkçı dilek kipinden koşulluların öyle bir yorumlama biçimini geliştirmiştir ki, bu yorumlamaların belirlediği sistemde koşullu üçüncü halin olmazlığı geçersiz oluyor, ama Stalnaker'in C2 sisteminin öbür teoremleri geçerli oluyor. Lewis sistemindeki yorumlamalar da hem m mümkün dünyası için bir küreler sistemi belirleniyor. Her küre ise mümkün dünyalardan oluşan bir kümedir. m mümkün dünyasının karşılığı olan küreler kümesi K(m) olarak gösterilir.

K, $K: M \rightarrow \mathcal{G}M$ biçiminde bir fonksiyondur. Her $m \in M$ için $K(m) \in \mathcal{G}M$ dir. ($\mathcal{G}M$, m'nin güç kümesi, yani M'nin alt kümelerinin kümesidir.) K'ya

küreler kümesi fonksiyonu denir. Buna göre bir yorumlama, M mümkün dünyalar kümesi, K küreler sistemi fonksiyonu ve her $m \in M$ için birer değerlemeden oluşur. K küreler sistemi fonksiyonu şu özellikleri taşır.

(i) $K \in K_m$ ise, $K \neq \varnothing$

(ii) $\{m\} \in K_m$

(iii) $K_1 \in K_m$ ve $K_2 \in K_m$ ise, $K_1 \subseteq K_2$ veya $K_2 \subseteq K_1$

(iv) $K_m' \subseteq K_m$ ise, $\cup K_m' \in K_m$

(v) $K_m' \subseteq K_m$ ve $K_m' \neq \varnothing$ ise, $\cap K_m' \in K_m$

$K \in K_m$ olursa, K'ya *m çevresinde bir küre* denir. m çevresinde bir küre, m'ye en az belli bir dereceye kadar benzeyen mümkün dünyalardan oluşur. m çevresinde farklı küreler için söz konusu benzeme derecesi de farklıdır. Küre ne denli küçükse, benzeme derecesi de o denli büyük olur. $K \in K_m$, $m_1 \in K$ ve $m_2 \notin K$ olursa, m_1 dünyasının m dünyasına benzerlik derecesi m_2'nin m'ye benzerlik derecesinden büyük olur. Tersine $K \subseteq$ M'ye benzerlik derecesi M – K'ya ait bir dünyanın m'ye olan benzerlik derecesinden büyük olsun. O zaman K, m'nin çevresinde bir küre olur.

Dikkat edilirse K, m'nin çevresinde bir küre ise $m \in K$ olur. Nitekim K, m çevresinde bir küre ise $K \in K_m$ olur. Öte yandan $\{m\} \in K_m$ ve $\{m\} \subseteq K$ veya $K \subseteq \{m\}$'dir. $\{m\} \subseteq K$ ise $m \in K$ olur. $K \subseteq \{m\}$ ise $K \neq \varnothing$ olduğundan $K = \{m\}$ olur. Dolayısıyla gene $m \in K$ elde edilir.

"m dünyasında doğru" yüklemi A > B'den başka önermeler için Stalnaker kuramında olduğu gibi tanımlanır. A > B'nin m'de doğru olması ise şöyle tanımlanır.

A > B önermesi m mümkün dünyasında doğrudur ancak ve ancak

(i) $\forall m' \forall K[(Am'\text{'de doğrudur} \wedge K \in K_m) \rightarrow m' \notin K]$

veya

(ii) $\exists K[K \in K_m \wedge \exists m' (Am'\text{'de doğrudur} \wedge m' \in K) \wedge \forall m''[m'' \in K \rightarrow (A \rightarrow B)\ m''\text{'de doğrudur}]]$ ise.

İmdi [ ] fonksiyonunu

(3) [A] = {m: A m'de doğrudur}

biçiminde tanımlayalım. O zaman da (A > B)'nin m'de doğruluğunun tanımını şöyle kısaltabiliriz.

(4) A > B m'de doğrudur ancak ve ancak

(i) $\forall K(K \in K_m \rightarrow K \cap [A] = \varnothing)$

veya $\exists K[K \in K_m \wedge K \cap [A] \neq \varnothing \wedge K \cap [A] \subseteq [B]]$.

Bu yorumlamaların belirlediği mantık sistemine VC denir.

Örneğin

(5) p > ~p

önermesinin

(6) (M: $\{m_0, m_1\}$; K: $\{<m_0, \{\{m_0\}, \{m_0, m_1\}\}>, <m_1, \{\{m_1\}\}>\}$; m_0: p; m_1:)

İmdi [p] = $\{m_0\}$, [~p] = $\{m_1\}$, $K_{m_0} = \{\{m_0\}, \{m_0, m_1\}\}$. Buna göre $[p] \cap \{m_0\} \neq \varnothing$. O halde (i) koşulu yerine gelmiyor. Öte yandan K_m'nin $\{m_0\}$ ve $\{m_0, m_1\}$ olmak üzere iki öğesi olduğuna göre her birinin (ii) koşulunu yerine getirip getirmediğini araştıralım.

$\{m_0\} \in K_{m_0} \wedge \{m_0\} \cap [p] \neq \varnothing \wedge \{m_0\} \cap [p] \not\subseteq [\sim p]$

$\{m_0, m_1\} \in K_{m_0} \wedge \{m_0, m_1\} \cap [p] \neq \varnothing \wedge \{m_0, m_1\} \cap [p] \subseteq [\sim p]$

O halde (5) m_0'da yanlıştır. Dolayısıyla (5) verilen (6) yorumlamasında yanlıştır.

A > B biçimindeki bir dilek kipinden koşullu, A tutarsız ise doğrudur. Bu bazı durumlarda sakıncalı olabilir. A'nın tutarsız olması durumunda A > B'nin yanlış olduğunu söylemek için değişik türden bir dilek koşul eklemi kullanılır. O zaman da ">" yerine "$\Box\rightarrow$" işareti ve yeni dilek koşul eklemi yerine "$\Box\Rightarrow$" işareti kullanılır. "$\Box\rightarrow$"nın anlamı ">"in aynısıdır. "$\Box\Rightarrow$"ın anlamı ise şöyle belirlenir.

(7) A $\Box\Rightarrow$ B m mümkün dünyasında doğrudur ancak ve ancak

$\exists K(K \in K_m \wedge K \cap [A] \neq \varnothing \wedge K \cap [A] \subseteq [B])$.

Eğer $K \cap [A] = \varnothing$ olursa $A \mathbin{\Box\!\!\Rightarrow} B$ m'de yanlış olur. Oysa A tutarsız ise $K \cap [A] = \varnothing$ olur. O halde A tutarsız ise $A \mathbin{\Box\!\!\Rightarrow} B$ her mümkün dünyada yanlış olur.

(8) A olsaydı B olabilir.

biçimindeki bir dilek kipinden koşullu

(9) $A \mathbin{\Diamond\!\!\rightarrow} B$

biçiminde dile getirilir. Örneğin

(10) Ali gelseydi Behçet gidebilecekti.

tümcesi (9) biçimindedir.

"$\Box\!\!\rightarrow$" ile "$\Diamond\!\!\rightarrow$" dilek koşul eklemleri birbiri türünden şöyle tanımlanabilir.

(10) $A \mathbin{\Diamond\!\!\rightarrow} B \equiv \sim(A \mathbin{\Box\!\!\rightarrow} \sim B)$

(11) $A \mathbin{\Box\!\!\rightarrow} B \equiv \sim(A \mathbin{\Diamond\!\!\rightarrow} \sim B)$

"$\Box\!\!\Rightarrow$" ekleminin karşılığı olan "$\Diamond\!\!\Rightarrow$" eklemi de şöyle tanımlanır?

(12) $A \mathbin{\Diamond\!\!\Rightarrow} B \equiv \sim(A \mathbin{\Box\!\!\Rightarrow} \sim B)$.

"$\Box\!\!\Rightarrow$" eklemi ise "$\Diamond\!\!\Rightarrow$" türünden şöyle tanımlanabilir.

(13) $A \mathbin{\Box\!\!\Rightarrow} B \equiv \sim(A \mathbin{\Diamond\!\!\Rightarrow} \sim B)$

"$\Box$" ile "$\Diamond$" kiplik eklemleri ise "$\Box\!\!\Rightarrow$" türünden şöyle tanımlanır.

(14) $\Box A \equiv (\sim A) \mathbin{\Box\!\!\rightarrow} \bot$

(15) $\Diamond A \equiv A \mathbin{\Diamond\!\!\rightarrow} T$

O zaman

(16) $\Box A$ m'de doğrudur ancak ve ancak $\cup K \subseteq [A]$ ise

(17) $\Diamond A$ m'de doğrudur ancak ve ancak $[A] \cap \cup K \neq \varnothing$ ise.

elde edilir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin §11.3.3.1'deki (6) yorumlamasında doğruluk değerini hesaplayınız.

1. $p > p$
2. $\sim p > p$
3. $(p \wedge \sim p) > p$
4. $p > (p \vee \sim p)$
5. $p \rightarrow (\sim p > p)$

11.3.3.2 VC Koşullu Mantığı Sistemi

Lewis kuramının yorumlamalarının belirlediği mantık sistemi VC koşullular mantığı sistemidir. VC'nin aksiyom sistemi şöyledir.

Aksiyom Kalıpları:

(A1) $A > A$

(A2) $(A > B) \rightarrow (A \rightarrow B)$

(A3) $(\sim A > A) \rightarrow (B > A)$

(A4) $[(A > B) \wedge (B > A)] \rightarrow [(A > c) \leftrightarrow (B > C)]$

(A5) $[(A > B) \wedge \sim(A > \sim C)] \rightarrow [(A \wedge C) > B]$

(A6) $(A \wedge B) \rightarrow (A > B)$

Çıkarım Kuralları:

(i) Modus ponens kuralı

(ii) Gerektirme kuralı

Örnek olarak (A1)'in geçerli olduğunu gösterelim. $\forall K(K \in K_{m_0} \rightarrow [A] \cap K = \varnothing$ olursa $K > K$ m'da doğru olur. O halde $\exists K(K \in K_{m_0} \wedge [A] \cap K \neq \varnothing)$ olsun. O zaman $K \in K_{m_0} \wedge K \cap [A] \neq \varnothing \wedge K \cap [A] \subseteq [A]$ doğru olur. Bu durumda $K > K$ m_0'da doğru olur.

ALIŞTIRMALAR

§11.3.3.2'deki (A2) – (A6) aksiyom kalıplarının geçerli olduğunu gösteriniz.

KAYNAKÇA

CİLT I: ÖNERMELER MANTIĞI

Batuhan, Hüseyin ve Teo Grünberg: Modern Mantık (Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen ve Edebiyat Fakültesi Yayın. No: 17, Ankara 1984)

Grünberg, Teo: Symbolic Logic Vol. I (Orta Doğu Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayın No: 16, Ankara, 1972)

Grünberg, Teo: Sembolik Mantık I: Önermeler Mantığı (İ.Ü. Edebiyat Fakültesi Yayınları No: 1300., İstanbul 1960)

Grünberg, Teo ve Adnan Onart, Hüseyin Batuhan: Modern Mantık ve Uygulamaları (Milli Eğitim Bakanlığı, İstanbul 1976)

CİLT I.2. NİCELEME MANTIĞI

Batuhan, Hüseyin ve Teo Grünberg: Modern Mantık (Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen ve Edebiyat Fakültesi Yayın. No: 19, Ankara 1984)

Grünberg, Teo: Symbolic Logic Vol I (Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen ve Edebiyat Fakültesi Yayın. No: 16, Ankara 1972)

Grünberg, Teo: Symbolic Logic Vol II (Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen ve Edebiyat Fakültesi Yayın. No: 16, Ankara 1970)

Kalish, D. ve R. Montague: Logic Techniques of Formal Reasoning (Harcourt, Brace & World 1964)

Smullyan, R. M. First-Order Logic (Springer Verlag, 1968)

CİLT II.3 ÖZDEŞLİK MANTIĞI

Jeffrey, R: Formal Logic its Scope and Limits (Mcgraw-Hill, 1967)

Kalish, D. ve R. Montague: Logic: Techniques of Formal Reasoning (Harcourt, Brace & World, 1964)

CİLT II. 4 VARLIK MANTIĞI

Lambert, K ve Bas. C. Van Fraassen: Derivation and Counterexample (Dickenson, 1972)

CİLT II.5 KİPLİK MANTIĞI

Hughes, G.E ve J.M. Cresswell: an Introduction to Modal Logic (Methuen, 1968)

Hughes, G.E ve J.M. Cresswell: A New Introduction to Modal Logic (Routledge, 1996)

Kommymayk, K.: Introductory Modal Logic (University of Notre Dame Press, 1986)

Cilt II. 6. BİLGİ MANTIĞI

Hintikka, J. Knowledge and Belief (Cornell University Press, 1962)

Carlson, L. "Quantified Hintikka-Style Epistemic Logic" Synthese 74 (1988) 223-262

CİLT II.7 ÇOK DEĞERLİ MANTIK

Ackermann, R.: Introduction to Many-Valued Logics (Routledge and Kegan Paul, 1967)

CİLT II.8 ÖDEV MANTIĞI

Hilpimen, R. (ed.): Deontic Logic: Introductory and Systematic Readings (D. Reidel, 1971)

CİLT II.9 SORULAR MANTIĞI

Hintikka, J.: The Semantics of Questions and the Question of Semantics (Acta Philosophica Fennica Vol. 28, No: 4, North-Holland 1976)

CİLT II. 10 ZAMAN MANTIĞI

Van Benthem J.J.A.K.: The Logic of Time (D. Reidel, 1983)

CİLT II. 11 KOŞULLAR MANTIĞI

Harper, W. L. ve R. Stalmaker, G. Pearce (eds): IFS: Conditionals, Belief, Decision Chance and Time (D. Reidel, 1981)

Jackson, F.: Conditionals (Blacwell, 1987)

Lewis, D.K.: Counterfactuals (Harward University Press, 1973)

Nute, D.: Topics in Conditional Logic (D. Reidel 1980)

CİLT III. 12. MANTIĞIN ELEŞTİREL DÜŞÜNME VE AKILCI TARTIŞMAYA UYGULANMASI

Hintikka J.: The Semantics of Questions and the Question of Semantics (Acta Philosophica Fennica Vol. 28 No: 4, Nort-Holland 1976)

Hintikka, J ve Bachman, J.: WHAT IF...? Towards Excellence in Reasoning (Mayfield Pub. Com. 1991)

CİLT III. 13. KLASİK (GELENEKSEL) MANTIĞIN SEMBOLİK MANTIKLA ÇÖZÜMLENMESİ

Batuhan, Hüseyin ve Teo Grünberg: Modern Mantık (Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen ve Edebiyat Fakültesi Yayın. No: 17, Ankara 1984)

Öner, Necati: Klasik Mantık 6. Baskı, (A.Ü. İlahiyat Fakültesi Yayınları, Ankara 1991)

CİLT III. 14 KÜMELER KURAMI

Batuhan, Hüseyin ve Teo Grünberg: Modern Mantık (Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen ve Edebiyat Fakültesi Yayın. No: 17, Ankara 1976)

Zemman, E.J.: Introduction to Axiomatic Set Theory (Routledge and Kegan Paul, 1968)

Suppes, P.: Axiomatic Set Theory (D. Von Nosthand 1965)

CİLT III. 15. OTOMATİKLEŞMİŞ TEOREM İSPATLAMASI

Chang, C. ve R. C. Lee: Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving (Academic Press, 1973)

Filting, M.: First-Order Logic and Automated Theorem Proving (Springer - Verlag, 1990)

CİLT III. 16. OLASILIK KURAMININ MANTIKSAL TEMELLERİ

Batuhan, Hüseyin ve Teo Grünberg: Modern Mantık (Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen ve Edebiyat Fakültesi Yayın No: 17, Ankara 1984)

Kutlusoy Erkanlı, Zekiye: Logics - Philosophical Analysis of Comparative Probability (Yüksek Lisans Tezi, ODTÜ, 1985)

Skyrms, B.: Choice and Chance. An Introduction to Inductive Logic (Dickenson, 1966)

CİLT III. 17. MATEMATİĞİN MANTIKSAL TEMELLERİ

Beth, E.W.: The Foundations of Mathematics (North-Holland, 1968)

Samullyan, R.M.: Gödel's Incompleteness Theorems (Oxford U.P., 1992)

Suppes, P.: Axiomatic Set Theory (D.Van Northand, 1965)

CİLT III. 18 DOĞA BİLİMLERİNİN MANTIKSAL TEMELLERİ

Carnap, R.: Philosophical Foundations of Physics (Basic Boks. 1966)

Popper, K.R.: The Logic of Scientific Discovery (Hutchinson, 1959)

Salmon, M.et al.: Introduction to the Philosophy of Science (Prentice-Hall 1992)

Toulmin, S: The Philosophy of Science. An Introduction (Harper and Brothess, 1960)

CİLT III. 19 GÜNLÜK DİLİN SEMBOLLEŞTİRİLMESİ

Batuhan, Hüseyin Teo Grünberg ve Adnan Onart, Modern Mantık ve Uygulamaları (Millî Eğitim Bakanlığı, İstanbul 1976)

Tapscott, B.L.: Elementary Applied Symbolic Logic (Prentice-Hall,1976)

CİLT III. 20 MANTIK FELSEFESİ

Grünberg, Teo: "Mantık Felsefesi", Felsefe Dünyası, Türk Felsefe Derneği Yayın. Sayı 2 (1991) 8-14.

Haack, S.: Philosophy of Logics (Cambridge U.P., 1978)

TERİMLER DİZİNİ (2. CİLT)

A

Adams Eşitliği 381
Alf Ross Paradoksu 326-327
almaşıklık bağıntılı yorumlama 96
anlam-bilimsel doğruluk kavramı 246

B

B sistemi 103-147
bağıntı 88-90
bağlı değişken geçişi 222
bağsız değişken geçişi 222
betimleme 221
bildiğini bilme (sorunu) 275
bildiri kipinden koşullu 376-378
bilgi mantığı 235
bilgisel içerme 271
bilgisel tutarsızlık 271
bilgisel tümel önerme 294
bilinme değişmezi 277

C, Ç

C2 koşullular mantığı sistemi 387
çok değerli mantık 295

D

D sistemi 103, 122
değişen evrenli kiplikli niceleme mantığı 205
dilek kipinden koşullu 382-383
doğru 242

E

E2" düzgün sistemi 169
esnek terim 220
esnek terimli kiplikli varlık mantığı 220-224
istek önermesi 333

K

K sistemi 101-103
kandığına kanma (sorunu) 276
karşılıklı gerektirme eklemi 177
kavramsal niceleyicili kiplikli varlık mantığı 231
kiplikler varlığı 63
kiplikli niceleme mantığı 180
koşullu ödev paradoksu 327-328
koşullular mantığı 374
maksimal normal sistem 103
  Triv Sistemi 134, 151
  Ver Sistemi 127, 151

N

n-değerli Lukasiewicz sistemi 304
n-li işlem işareti 4
n-li işlem işareti temsilcisi 4
normal olmayan mantık sistemi 167
  düzgün sistem 167, 168
  yarı-düzgün sistem 167, 168
normal sistem 101-103

Ö

ödev mantığı 313-316
ödevsel mantık sistemi 315-317
ödev mantığı paradoksu 326
  Alf Ross Paradoksu 326-327
  Koşullu Ödev Paradoksu 327-328
  Ödeve aykırı buyruk paradoksu 329-332
öndayanak 334

özdeşlik değişmezi 1
özdeşlik mantığı 1
özdeşlerin yer değiştirmesi 20

S

S4 Sistemi 103, 152
S5 Sistemi 103, 159
S2° yarı düzgün sistemi 174
Saydam konum 288
Saydamsız konum 288
sonsuz değerli Lukasiewicz sistemi 304

T

T sistemi 103, 140
tekli kimlik sorusu 340
tekli seçenek sorusu 336
terim 4
Triv sistemi 134
tutarlı normal sistem 102
tutarsız normal sistem 102
tümlü kimlik sorusu 343
tümlü seçenek sorusu 339
Üç değerli Bochwar sistemi 308
Üç değerli Lukasiewicz Sistemi 295
Üç değerli Reichenbach sistemi 305

V

varlık mantığı 39
VC sistemi 394
Ver sistemi 127

Y

yanılma sorunu 274
yuvalanmış değişen evrenli kiplikli niceleme mantığı 196

Z

Zaman mantığı 353
ZM_4 şimdiki zaman değişmezli zaman mantığı sistemi 369
ZM_0 zaman mantığı sistemi 361
ZM_1 zaman mantığı sistemi 364
ZM_2 zaman mantığı sistemi 365
ZM_3 zaman mantığı sistemi 368



1927 yılında İstanbul'da doğan Teo Grünberg, 1950 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Kimya Mühendisliği Bölümü'nden mezun olmuş, 1964 yılında aynı Üniversite'nin Edebiyat Fakültesi Felsefe Bölümü'nden doktora derecesini alarak, 1970 yılında Doçent, 1979 yılında da Profesör olmuştur.

1962-66 yıllarında İstanbul Üniversitesi Felsefe Bölümü'nde konferansçı ve uzman olarak çalışan Prof. Dr. Grünberg, 1966-82 yıllarında Orta Doğu Teknik Üniversitesi (ODTÜ) Beşeri İlimler Bölümü'nde görev yapmış, 1982-83 yıllarında Sosyoloji Bölümü Başkanlığı, 1983-94 yıllarında kurulması için öncülük ettiği Felsefe Bölümü'nün Başkanlığı ile Sistematik Felsefe ve Mantık Anabilim Dalı Başkanlığı görevlerini yürütmüş, 1994 yılından itibaren de emekli olarak ODTÜ Felsefe Bölümü'ndeki derslerine devam etmiştir. Prof. Dr. Grünberg, ODTÜ'deki görevlerine ek olarak, 1968-79 yıllarında Ankara Üniversitesi Dil ve Tarih-Coğrafya Fakültesi Felsefe Bölümü'nde, 1989-90 yıllarında da Bilkent Üniversitesi Mühendislik Fakültesi'nde görev almıştır.

Prof. Dr. Teo Grünberg, 1967 yılında Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Dairesi lise modern mantık reform komisyonu üyesi, 1967-76 yıllarında lise felsefe öğretmenlerine hizmet içi modern mantık yaz kursları öğretim üyesi olarak görev yapmıştır. 1990-91 yıllarında Talim ve Terbiye Dairesi lise mantık ve felsefe dersleri müfredat komisyonu üyeliği görevlerinde de bulunmuştur.

Mantığa dayalı argümantatif (ya da analitik) düşünme geleneğinin felsefe eğitim ve araştırmaları içinde vazgeçilmez bir öğe olması yönünde çaba gösteren Prof. Dr. Teo Grünberg'in bir bölümü uluslararası dergilerde yayınlanmış 35'i aşkın makale ve bildirisi ile 15 kitabı bulunmaktadır.

Modern Mantığı Türkiye'de Üniversite ve Lise eğitimi düzeyinde kabul ettirip yaygınlaştırması, çok sayıda eleman yetiştirerek bu alanın ülkemizde kurumsallaşmasında ve gelişiminde belirleyici hizmetleri nedeniyle Prof. Dr. Grünberg'e 1998 yılında Türkiye Bilimler Akademisi Hizmet Ödülü verilmiştir.

15.00 YTL
KDV DAHİL

975-7064-33-5

ISBN 975-7064-31-9 (Tk. No)
975-7064-33-5 (2. Cilt)