sembolik mantık el kitabı

1

temel mantık

teo grünberg

METU PRESS

SEMBOLİK MANTIK EL KİTABI

I. CİLT
TEMEL MANTIK

Teo GRÜNBERG

METU
PRESS

ODTÜ Geliştirme Vakfı
Yayıncılık ve İletişim A.Ş. - **METU PRESS** -
Yayınları.

© Tüm yayın hakları ODTÜ Geliştirme Vakfı Yayıncılık ve İletişim A.Ş.'nindir. Yayıncının izni olmaksızın, hiçbir biçimde ve hiçbir yolla, bu kitabın içeriğinin hiçbir bölümü ya da tümü yeniden üretilemez ve dağıtılamaz.

Birinci Baskı : Kasım 2000

Dizgi-Sayfa Mizanpajı : Leyla ALP

Kapak Tasarım : Burcu GÜNDÜZ

Baskı: Mert Matbaası

ODTÜ Geliştirme Vakfı
Yayıncılık ve İletişim A.Ş.- **METU PRESS-**
İnönü Bulvarı, ODTÜ Yerleşkesi
06531 ANKARA
Tlf : 0(312) 210 38 70 - 210 38 73
Faks : 0(312) 210 15 49
http : //metupress.com.tr
E-Posta : metupres@tr.net

ISBN : 975-7064-31-9 (Tk. No)
975-7064-32-7 (1. Cilt)
975-7064-33-5 (2. Cilt)
975-7064-34-3 (3. Cilt)

ÖNSÖZ

Modern sembolik mantık dersleri 1967 yılından bu yana lise ve üniversitelerimizde yaygınlaşarak okutulmaktadır. Bu alanda şimdiye dek yedi tane ders kitabı yazdım. Ancak, sembolik mantık hızla gelişmekte ve uygulamaları artmaktadır.

Üç ciltlik Sembolik Mantık El Kitabı'nı çeşitli mantık sistemlerini ve uygulamalarını geniş bir okuyucu kitlesine, özellikle lise öğretmenleri ile üniversite ve lise öğrencilerine tanıtmak amacıyla hazırladım.

Birinci ciltte temel mantığı oluşturan Önermeler Mantığı ile Niceleme Mantığı (Yüklemler Mantığı); ikinci ciltte Özdeşlik Mantığı, Varlık Mantığı, Kiplikler Mantığı, Bilgi Mantığı, Çok Değerli Mantık, Ödev Mantığı, Sorular Mantığı, Zaman Mantığı ve Koşullular Mantığı'nı ele aldım. Üçüncü ciltte ise, sembolik mantığın uygulamaları olarak Eleştirel Düşünme ve Akılcı Tartışma, Klasik (Geleneksel) Mantık, Kümeler Kuramı, Otomatikleşmiş Teorem İspatlaması, Olasılık Kuramının Mantıksal Temelleri, Matematiğin Mantıksal Temelleri, Doğa Bilimlerinin Mantıksal Temelleri, Sembolleştirme ve son olarak Mantık Felsefesi konularını ele aldım.

Kitabın temize çekilmesinde emeğini esirgemeyen eşim Rahel Grünberg'e teşekkür borçluyum.

Ayrıca birinci cildin düzeltmelerini yapan İskender Taşdelen'e, ikinci cildin düzeltmelerini yapan ve bütün yapıtın terimler dizinini hazırlayan Besim Karakadılar'a ve üçüncü cildin düzeltmelerini yapan M. Cem Kamözüt'e büyük yardımlarından dolayı candan teşekkür ederim.

Teo GRÜNBERG

Bu yapıtı beni felsefe ve mantığa yöneltmiş olan çok sevgili dostum, örnek insan Hüseyin Batuhan'a ithaf ediyorum.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLİK MANTIK EL KİTABI
BİRİNCİ CİLT: TEMEL MANTIK

0. GİRİŞ 1

0.1 Mantık Nedir? 1

0.2 Önerme ve Çıkarım 2

0.3 Sembolleştirme 4

0.4 Yorumlama 5

0.5 Günlük Dil Çıkarımlarının Geçerliliği 7

0.6 Mantık Sistemleri 10

1. ÖNERMELER MANTIĞI 11

1.1 Önerme Eklemleri 11

1.1.1 Değilleme Eklemi 11

1.1.2 Tümel-Evetleme Eklemi 12

1.1.3 Tikel-Evetleme Eklemi 15

1.1.4 Koşul Eklemi 18

1.1.5 Karşılıklı-Koşul Eklemi 23

1.1.6 Bileşik önermeler, Ana Eklem ve Ana Bileşenler 24

1.1.7 Parantezli ve Parantezsiz Yazılış Biçimleri 26

1.1.8 Doğruluk Değeri Hesaplaması 28

1.1.9 Önerme Eklemlerinin Sistematik Sınıflaması 30

1.2 Karma Doğruluk Çizelgesi Yöntemi 35

1.3 Önermeler Mantığı Yasaları 43

1.4 Çözümleyici Çizelge Yöntemi 51

1.4.1 Tümel-Evetlemenin Çözümleme Kuralı 52

1.4.2 Tikel Evetlemenin Çözümleme Kuralı 58

1.4.3 Tümel -Evetlemenin Değillemesi ve Tikel-Evetlemenin Değillemesinin Çözümleme Kuralları 63

1.4.4 Koşullu ve Koşulun Değillemesinin Çözümleme Kuralları....68
1.4.5 Karşılıklı-Koşullunun ve Karşılıklı-Koşullunun Değillemesinin Çözümleme Kuralları 70
1.4.6 Çözümleyici Çizelge ile Geçerlilik, Tutarlılık, Eşdeğerlik ve İçerme Denetlemesi 74
1.4.7 Çözümleyici Çizelge ile Doğruluk Değeri Hesaplaması ..80
1.4.8 Çözümleyici Çizelge ile Tikel-Evetlemeli Yasal Biçimin ve Tam-Yasal Biçiminin Bulunması 83
1.4.9 Çözümleyici Çizelge İkilisi ile Tümel-Evetlemeli Yasal Biçim ve Tam-Yasal Biçimin Bulunması 89
1.4.10 İkililik 93
1.4.11 Çözümleyici Çizelge ve Çözümleyici Çizelge İkilisiyle Verilen Bir Önermenin İkilisinin Bulunması 100
1.4.12 İkililik İlkeleri 102
1.5 Türetim Yöntemi 106
1.5.1 Dolaysız Türetimler 106
1.5.1.1 Koşulludan Çıkış Kuralı ve Türetim Çizelgesi 106
1.5.1.2 Koşulludan Devirmeli Çıkış Kuralı 118
1.5.2 Koşulluya Giriş Türetimi 121
1.5.2.1 Yalın Koşulluya Giriş Türetimi 121
1.5.2.2 Karmaşık Koşulluya Giriş Türetimi 126
1.5.2.3 Tekrarlama Kuralı 131
1.5.2.4 Mantıksal Teoremler 136
1.5.3 Dolaylı Türetim 140
1.5.3.1 Yalın Dolaylı Türetim 140
1.5.3.2 Karmaşık Türetim 146
1.5.4 Salt Türetim Biçimleri 150
1.5.4.1 Dolaylı Açışlı ve Dolaysız Kapanışlı Türetim 150
1.5.4.2 Koşullu Açışlı ve Koşullu Kapanışlı Türetim 151
1.5.4.3 Dolaylı Açışlı ve Dolaylı Kapanışlı Türetim 153
1.5.5 Karma Türetim Biçimleri 156
1.5.5.1 Dolaylı Açışlı ve Koşullu Kapanışlı Türetim 156
1.5.5.2 Koşullu Açışlı ve Dolaysız Kapanışlı Türetim 157

1.5.5.3 Dolaysız Açışlı ve Dolaysız Kapanışlı Türetim 159
1.5.5.4 Dolaylı Açışlı ve Dolaysız Kapanışlı Türetim 160
1.5.5.5 Dolaylı Açışlı ve Koşullu Kapanışlı Türetim 160
1.5.5.6 Koşullu Açışlı ve Dolaylı Kapanışlı Türetim 162
1.5.6 Türetim işleminin Tanımı.....165
1.5.7 Mantıksal Teoremler 168
1.5.8 Tümel-Evetlemeden Çıkış ve Tümel Evetlemeye Giriş Kuralları 170
1.5.9 Karşılıklı-Koşullu Evetlemeden Çıkış ve Karşılıklı-Koşullu Evetlemeye Giriş Kuralları 177
1.5.10 Tikel-Evetlemeden Çıkış ve Tikel-Evetlemeye Giriş Kuralları 181
1.5.11 Türetilmiş Türetme Kuralları 186
1.5.11.1 Türetilmiş Koşulluya Giriş Kuralları 186
1.5.11.2 Türetilmiş Şıkları Ayırma Kuralları.....189
1.5.12 Türetim İşlemine İlişkin Pratik Öğütler.....192
2. NİCELEME MANTIĞI 195
2.1 Sembolleştirme 195
2.1.1 Tekil önermeler 195
2.1.1.1 Atomsal Önermeler 195
2.1.1.2 Bileşik Tekil Önermeler.....198
2.1.2 Açık önermeler 200
2.1.3 Genel Önermeler 203
2.1.3.1 Tümel Önermeler 204
2.1.3.2 Tikel Önermeler.....206
2.1.3.3 Bileşik Genel Önermeler 207
2.1.4 Tamdeyimler.....209
2.1.4.1 Tamdeyim Türleri, Bağlı ve Bağsız Değişken Geçişleri ..209
2.1.4.2 Yuvalanmış Tamdeyimler 211
2.1.4.3 Boş Niceleyici Geçişleri 213
2.1.4.4 Yerine-Koyma ve Özellemeler 215
2.1.4.5 Tamdeyimlerin Sınıflanması 216
2.1.4.6 Bağlı Değişken Değiştirmesi.....218

2.2 Yorumlama 220
2.2.1 Tekil Önermelerin Yorumlanması 220
2.2.2 Tekil Birli Açık Önermelerin Yorumlanması ve Gerçeklenmesi 221
2.2.3 Yuvalanmamış Genel Önermelerin Yorumlanması 233
2.2.3.1 Tümel Önermelerin Yorumlanması 234
2.2.3.2 Tikel Önermelerin Yorumlanması 238
2.2.3.3 Bileşik Önermelerin Yorumlanması 240
2.2.4 Yuvalanmış Genel Önermelerin Yorumlanması 245
2.3 Niceleme Mantığı Yasaları ve İkililik 247
2.4 Çözümleyici Çizelge Yöntemi 253
2.4.1 Tekil Önermelerin Çözümleyici Çizelgesi 253
2.4.2 Yuvalanmamış Genel Önermelerin Çözümleyici Çizelgesi 256
2.4.2.1 Tümel Önermelerin Çözümleyici Çizelgesi 256
2.4.2.2 Tikel Önermelerin Çözümleyici Çizelgesi 260
2.4.2.3 Bileşik Genel Önermelerin Çözümleyici Çizelgesi 263
2.4.2.4 Çözümleyici Çizelge ile Doğruluk Değeri Hesaplaması 268
2.4.3 Çözümleyici Çizelge ile Geçerlilik Denetlemesi 271
2.4.3.1 Yuvalanmamış Genel Önermelerin Geçerlilik Denetlemesi 271
2.4.3.2 Yuvalanmış Genel Önermelerin Geçerlilik Denetlemesi 274
2.4.3.3 Eşdeğerliklerin ve İçermelerin Denetlenmesi 279
2.4.3.4 Birli Yüklemli Niceleme Mantığının Karar-Verme Yöntemi 281
2.5 Türetim Yöntemi 287
2.5.1 Niceleyici Değilleme Kuralları 287
2.5.2 Tümel Niceleyiciden Çıkış Kuralı 289
2.5.3 Tikel Niceleyiciye Giriş Kuralı 290
2.5.4 Tikel Niceleyiciden Çıkış Kuralı 293
2.5.5 Tümel Niceleyiciye Giriş Türetimi 294
2.5.6 Yuvalanmış Genel Önermeli Türetimler 298
2.5.7 Kısaltılmış Türetimler 301
2.5.7.1 Eşdeğerlerin Değiştokuşu Kuralı 301
2.5.7.2 Bağlı Değişken Değiştirmesi Kuralı 306
2.5.7.3 Türetim İşlemine İlişkin Pratik Öğütler 307
Kaynakça 311
Dizin 315

İKİNCİ VE ÜÇÜNCÜ CİLTLERİN ANA BAŞLIKLARI

İKİNCİ CİLT: ÖZEL MANTIK SİSTEMLERİ

3. ÖZDEŞLİK MANTIĞI
4. VARLIK MANTIĞI
5. KİPLİKLER MANTIĞI
6. BİLGİ MANTIĞI
7. ÇOK DEĞERLİ MANTIK
8. ÖDEV MANTIĞI
9. SORULAR MANTIĞI
10. ZAMAN MANTIĞI
11. KOŞULLULAR MANTIĞI

ÜÇÜNCÜ CİLT: SEMBOLİK MANTIĞIN UYGULAMALARI

12. MANTIĞIN ELEŞTİREL DÜŞÜNME VE AKILCI TARTIŞMAYA UYGULANMASI
13. KLASİK (GELENEKSEL) MANTIĞIN SEMBOLİK MANTIKLA ÇÖZÜMLENMESİ
14. KÜMELER KURAMI
15. OTOMATİKLEŞMİŞ TEOREM İSPATLAMASI
16. OLASILIK KAVRAMLARININ MANTIKSAL TEMELLERİ
17. MATEMATİĞİN MANTIKSAL TEMELLERİ
18. DOĞA BİLİMLERİNİN MANTIKSAL TEMELLERİ
19. SEMBOLLEŞTİRME
20. MANTIK FELSEFESİ

0. GİRİŞ

0.1 Mantık Nedir?

Günlük hayatta sözleri veya davranışları birbirine uymayan, birbirini tutmayan insanları mantıksızlıkla suçlarız. Buna karşılık düşünceleri uyumlu olarak birbirine bağlayan, sözleri birbirini tutan, davranışlarında ve kararlarında akla uygun yolu seçen kişileri mantıklı diye överiz.

Genellikle mantık, doğru düşünmenin yöntemi veya doğru düşünmenin kurallarını konu edinen bilim olarak tanımlanır. Bu bağlamda düşünme, akıl yürütme anlamına gelir. Akıl yürütme (muhakeme, usavurma), öncül denilen bir veya daha çok sayıda yargıdan sonuç denilen bir yargının elde edilmesi işlemidir. Yargı, doğru veya yanlış bir düşünce (iddia, sav) demektir. Akıl yürütmenin *doğru* olması, öncüllerin doğru olması durumunda sonucun da doğru olması demektir. (Yani "doğru" akıl yürütme, "doğruya götüren" anlamındadır.)

Yargı, "önerme" denilen bir sözle dile getirilir. Buna göre, *önerme*, bir yargıyı dile getiren ve doğru veya yanlış olabilen bir sözdür. Günlük dil önermeleri genellikle bildiri kipinden tümceler durumundadır. Başka kiplerden olan cümleler (sorular, dilekler, buyruklar vb.) önerme olmadığı gibi, tümce olmayan sözler de bir yargıyı veya iddiayı dile getirmedikleri durumlarda önerme sayılmazlar. Akıl yürütme, *çıkarım* denilen bir önerme dizisi ile dile getirilir. Akıl-yürütmenin öncüllerini dile getiren önermeler çıkarımın *öncül önermeleri* veya *öncüller*, sonucu dile getiren önerme de çıkarımın *sonuç önermesi* veya *sonuç*'udur. Bir çıkarımın tüm öncüllerinin doğru olması, zorunlu ve kesin olarak sonucu da doğru kılarsa, çıkarıma *geçerli* denir. Geçerli bir çıkarım doğru olan bir akıl yürütmeyi dile getirir.

Mantık, bilgilerimizi elde etmek için kullandığımız araçlardan biridir. Herhangi bir bilgiyi elde etmek için bir önermenin doğruluğunun *haklı gösterilmesi* yani bu önermenin kabul edilmesini halkı gösteren gerekçelerin ortaya konulması gerekir. Böyle bir haklı gösterme ya başka bilgilere; yani önceden haklı gösterilmiş önermelere dayanır, ya da başka hiç bir bilgiye dayanmaz. Birinci halde haklı göstermenin *dolaylı*, ikinci halde ise *dolaysız* olduğunu

söyleriz. Örneğin belli bir maddenin içinde bakır bulunup bulunmadığını araştıran bir kimyacıyı göz önüne alalım. Bu kimyacı maddeyi toz haline getirerek aleve tutar. Alevin yeşilleşmesi halinde maddenin içinde bakır olduğu sonucuna varılır. "Alev yeşilleşti" önermesinin doğruluğu, başka hiç bir bilgiye başvurmadan gözlem ile dolaysız olarak gösterilir. Bu önermenin ifade ettiği bilginin - alevin yeşilleştiği olgusunun bilgisinin kazanılmasında başvurulan aracın mantık olmadığı meydandadır. Böyle bir bilgi salt deney veya gözlem aracıyla elde edilmiştir. Öte yandan sözü geçen maddenin içinde bakır kullandığı olgusunun bilinmesi, dolaysız olarak değil dolaylı olarak "bu alev yeşilleşti" ile "alevi yeşilleştiren maddenin içinde bakır bulunur" önermelerinin doğruluğuna dayanan bir çıkarım yoluyla haklı gösterilir. İşte bu son durumdaki haklı göstermede mantık aracına başvuruluyor. Buna göre mantığın, bilgilerimizin çıkarım yoluyla yani dolaylı olarak haklı gösterilmesini sağlayan bir yol veya yöntem olduğunu da söyleyebiliriz. Mantık, doğrudan doğruya çıkarım süreçleri ile değil, yalnızca çıkarımların geçerliliği ile ilgilenir. Çıkarım sürecinden oluşan düşünme mantığın değil, deneysel bir bilim dalı olan bilgi psikolojisi'nin konusuna girer.

Çıkarımların geçerliliğini amaçlayan mantığın ikinci bir işlevi de herhangi bir metni ve söylemi oluşturan önermelerin birbiriyle uyumlu veya tutarlı olmasını sağlamaktır. Metnin veya söylenenlerin uyumlu ve tutarlı olması, bunların bütünleşmesine yol açarak anlamlarını sağlamlaştırır.

Sonuç olarak *mantık*, çıkarımların geçerliliği ile önerme kümelerinin tutarlılığını denetleyen (ortaya koyan) yöntem veya geçerlilik ile tutarsızlığı belirleyen kuralları konu edinen bilim olarak tanımlanabilir.

0.2 Önerme ve Çıkarım

Önermenin bir yargıyı dile getiren doğru veya yanlış olan bir söz oduğunu daha önce belirtmiştik. Doğru ile Yanlış'a **doğruluk değerleri** denir. Bazı mantıkçılar doğru ile yanlış'ın dışında ("belirsiz" gibi) değişik doğruluk değerleri de kabul etmişlerdir. Ama mantıkçıların çoğu doğruluk değerlerinin doğru ile yanlış'tan ibaret olduğu görüşünü taşırlar. Biz de bu konuda çoğunluğa katılıyoruz.

Önermeleri A, B, C, ... gibi büyük harflerle gösteriyoruz. Buna göre n sayıda öncülü olan bir çıkarımı

(1) A_1, ..., A_n o halde B

biçiminde dile getirebiliriz. Burada A_1, ..., A_n öncül önermeleri veya kısaca öncüller, B ise sonuç önermesi veya kısaca sonuç'tur. "O halde" (veya aynı anlama gelen "dolayısıyla", bundan ötürü vb.), "$\therefore$" işareti ile gösterilir. Buna göre (1) çıkarımını

(2) A_1, ..., $A_n \therefore B$

biçiminde gösteririz. (2) çıkarımı

(3)
$$\begin{array}{l} A_1 \\ \vdots \\ A_n \\ \hline B \end{array}$$

biçiminde dile getirilir.

Örnek olarak:

(1) İçinde bakır bulunan bütün cisimler toz halinde aleve tutulursa (tutulur ise) alev yeşilleşir; bu cisim toz haline getirilip aleve tutuldu ve alev yeşilleşti, o halde bu cismin içinde bakır vardır önerme dizisi bir çıkarımı oluşturur.

İkinci bir çıkarım örneği olarak

(2) Ahmet Ankara'ya gidecek veya (Ahmet'in) annesi İstanbul'a gelecek; oysa Ahmet Ankara'ya gitmeyecek (gidecek değil); o halde Ahmet'in annesi İstanbul'a gelecek

önerme dizisini gösterebiliriz.

Gerek (1) gerekse (2) çıkarımları geçerlidir. Çıkarımların geçerliliği yalnızca içlerinde geçen "bütün", "ise", "veya", "değil" gibi bazı sözcüklerin anlamına bağlı olup geri kalan sözlerin anlamından büsbütün bağımsızdır. Nitekim bu sözler yerine aynı türden değişik birer söz konulursa çıkarımların geçerliliği değişmez.

Çıkarımların geçerliliğinin ve önerme kümelerinin tutarlılığının dayandığı sözcüklere *mantık değişmezleri* denir. Bir çıkarımda geçen mantık değişmezleri çıkarımın mantıksal biçimini belirler. Çıkarımın geçerliliğinin yalnız mantıksal biçimine bağlı olmasından dolayı, geçerliliğin biçimsel (formel) bir özellik olduğu söylenir. Bu nedenle geçerlilikte ilgisinden dolayı mantığın kendisine de *biçimsel mantık* denir. Gerek çıkarımların geçerliliğinin, gerekse önerme kümelerinin tutarlılığının, yalnızca içlerinde geçen mantık değişmezlerine dayandığını göreceğiz. Buna göre (biçimsel) mantık bilimini mantıksal değişmezlerin bilimi sayabiliriz.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki sözlerden hangileri **önerme**'dir?

1. Ali İstanbul'a gidecek mi?
2. Ali keşke İstanbul'a gitse!
3. Ali İstanbul'a gitseydi iyileşecekti.
4. Ali İstanbul'a gitti.
5. Ali Istanbul'a git!
6. $2 > 3$
7. $2 + 3$
8. H_2O
9. $Na_2CO_3 + 2HCl \rightarrow Nacl + H_2O + CO_2$
10. "H_2O" bir önerme değildir.

0.3 Sembolleştirme

Modern Mantık, günlük dil veya bilim dilindeki çıkarımların mantıksal biçimini gün ışığına çıkarmayı amaçlar. Bu amaçla çıkarımlarda, mantık değişmezleri dışındaki sözlerin yerine bu sözlerin türlerine uygun semboller konulur. Bu işleme *sembolleştirme* denilir. Elde edilen sembolik çıkarıma, verilen *çıkarımın sembolik karşılığı* diyoruz. Biz günlük dil önermesinin sembolleştirilmesi sonucunda elde edilen sembolik önermeye de ilk *önermenin sembolik karşılığı* diyoruz. Bir çıkarımı sembolleştirerek çıkarımın mantıksal biçimi açı-

ğa çıkarılır. Modern mantık, sembolleştirmeyi ön plana çıkardığından dolayı *sembolik mantık* olarak da adlandırılır. Sembolleştirilmiş önermelerin ait olduğu dile *sembolik dil* denir. Sembolik dillerin incelenmesi de sembolik mantığın başlıca konularından biridir.

Sembolik bir çıkarımın öncülleri ile sonucu birer sembolik önerme olduğundan, doğruluk değerinden yoksundurlar.

Örnek olarak (2) çıkarımını sembolleştirelim. Bu çıkarımda mantık değişmezleri dışında "Ahmet Ankara'ya gidecek" ile "Ahmet'in annesi İstanbul'a gidecek" sözleri geçmektedir. Bu sözler birer önermedir. İlerde göstereceğimiz gibi önerme türünden sözler *p, q, r* gibi temsilci harflerle sembolleştirilir. Buna göre "Ahmet Ankara'ya gidecek" sözü yerine *"p"*, "Ahmet'in annesi İstanbul'a gelecek" sözü yerine *"q"*, "o halde" sözü yerine de "$\therefore$" işaretini koyarsak, (2) çıkarımı,

(3) p veya q; p değil $\therefore$ q

biçiminde sembolleştirilebilir. (3), bir sembolik çıkarımdır. Öncülleri ("p veya q" ile "p değil") ve sonucu (*q*) doğruluk değeri olmayan birer sembolik önermedir.

Bundan böyle sürekli olarak sembolik önerme ve çıkarımlardan söz edeceğiz. Bu nedenle "sembolik" nitelemesini durmadan tekrarlamak zorunda kalmamak amacıyla "sembolik önerme" ve "sembolik çıkarım" yerine kısaca "önerme" ve "çıkarım" diyeceğiz.

0.4 Yorumlama

Bir (sembolik) önermeyi **yorumlama** bu önermenin belli bir doğruluk değeri taşımasını sağlayacak biçimde önermede geçen sembollere belli bir anlam verilmesi işlemi demektir. Her sembole verilen anlam sembolün *kaplam*'ı veya *kaplamsal* anlam'ı olmalıdır. Bir önerme temsilcisine verilecek kaplamsal anlam belli bir doğruluk değerinden ibarettir. Bu nedenle p_1, ..., p_n gibi n tane önerme temsilcisine birer kaplamsal anlam verilmesine, bu önerme temsilcilerinin bir *değerleme*'si denir. Buna göre sembolleri önerme temsilcilerinden ibaret olan bir önermenin yorumlanması, önermede geçen tüm

önerme temsilcilerinin belli bir değerlendirmesinden başka bir şey değildir. Örneğin "p veya q" önermesi verildiğinde, *p*'ye doğru *q*'ya da yanlış değerini veren bir değerleme bu önermenin bir yorumlamasını oluşturur. Böyle bir yorumlamada "p veya q" önermesi doğru değerini kazanır. (Nitekim ilerde göreceğimiz gibi, "p veya q" biçimindeki bir önerme p doğru ve q yanlış ise doğru değerini alır.)

Bir sembolik çıkarımın yorumlanması, bu çıkarımı oluşturan öncül ile sonuç önermelerinin yorumlanması demektir. Bir önerme veya çıkarımın yorumlanmasında, aynı sembolün önerme veya çıkarımdaki tüm geçişlerine aynı kaplamsal anlam'ın verilmesi gerekir. Örneğin, içinde p önerme temsilcisinin geçtiği bir çıkarımı yorumlamak için *p*'nin çıkarımdaki her geçişine aynı doğruluk değerinin verilmesi gerekir. Örneğin 0.3'de geçen

(1) p veya q; p değil $\therefore$ q

çıkarımını yorumlayalım. Söz gelişi *p*'nin her iki geçişine doğru değerini, *q*'nun da her iki geçişine yanlış değerini verelim. Böylece oluşan değerleme (1) çıkarımının bir yorumlamasıdır.

Bir önermeye doğru değerini veren yorumlamaya *doğrulayıcı yorumlama* (veya model), yanlış değerini veren yorumlamayada *yanlışlayıcı yorumlama* (veya ters-model) denir.

Örneğin "p veya p değil" önermesinin geçerli olduğunu "p veya q değil" in de tutarlı olduğunu göreceğiz.

$A_1, \ldots A_n$ önermelerinden oluşan $\{A_1, \ldots A_n\}$ kümesinin her öğesini doğru kılan bir yorumlamaya da *kümenin doğrulayıcı yorumlaması* denir.

$\{A_1, \ldots A_n\}$ kümesinin en az bir doğrulayıcı yorumlaması varsa bu kümeye *tutarlı küme* denir. Tutarlı olmayan yani doğrulayıcı yorumlaması olmayan kümeye de *tutarsız küme* denir.

$A_1, \ldots A_n \therefore$ B biçiminde bir çıkarım verildiğinde, $A_1 \ldots A_n$ öncüllerinin her birini doğru kılan bütün yorumlamalar B sonucunu da doğru kılarsa, verilen çıkarımın geçerli olduğu söylenir.

$A_1, \ldots, A_n \therefore$ B çıkarımının geçerli olmasının gerekli ve yeterli koşulu,

(2) {A_1, ..., A_n, B-değil}

önermeler kümesinin tutarsız olması, yani doğrulayıcı yorumlamasının olmamasıdır. Nitekim (2)'nin doğrulayıcı yorumlaması varsa böyle bir yorumlamada A_1, ..., A_n, B-değil doğru olurlar. Dolayısıyla A_1, ..., A_n doğru ama B yanlış olur. O zaman da A_1, ..., A_n'yi doğru kılan her yorumlama B yi de doğru kılmayıp A_1, ..., A_n $\therefore$ B geçersiz olur. Tersine A_1, ..., A_n $\therefore$ B geçersiz ise, A_1, ..., A_n'yi doğru kılan her yorumlama B'yi doğru kılmaz, dolayısıyla A_1, ..., A_n'yi doğru kılıp B'yi yanlış kılan bir yorumlama vardır. Böyle bir yorumlama ise A_1, ..., A_n, B-değil önermelerinin bir doğrulayıcı yorumlamasıdır.

(2) kümesine, A_1, ..., A_n $\therefore$ B'nin *geçersiz kılıcı kümesi*, (2)'nin her doğrulayıcı yorumlamasına da (2)'nin bir *geçersiz kılıcı yorumlama*'sı diyoruz. Örnek olarak (1) çıkarımının geçersiz kılıcı kümesi

(3) {p veya q, p-değil, q-değil}

kümesidir. Ancak (3) kümesinin doğrulayıcı yorumlaması olmadığını göreceğiz. Dolayısıyla (1)'in geçersiz kılıcı yorumlaması olmayıp (1) geçerlidir.

Geçerli olmayan önerme ve çıkarımlara *geçersiz*, tutarlı olmayan önermelere *tutarsız* denir. Aynı önerme hem tutarlı hem de geçersiz olabilir. Öte yandan geçerli olan her önerme tutarlı ve tutarsız olan her önerme geçersizdir. Nitekim her yorumlamada doğru olan önerme en az bir yorumlamada da doğru olur. Her yorumlamada yanlış olan önerme de en az bir yorumlamada yanlış olur. Buna göre her önermenin ya (i) geçerli ve tutarlı, ya (ii) geçersiz ve tutarlı ya da (iii) geçersiz ve tutarsız olduğunu söyleyebiliriz.

0.5 Günlük Dil Çıkarımlarının Geçerliliği

Bir günlük dil çıkarımının veya bilim diline ait bir çıkarımın geçerli olmasını, verilen çıkarımın öncüllerinin doğru olması durumunda sonucun da doğru olması biçiminde dile getirmiştik. Böyle bir tanım denemesi yeterince aydınlık ve işlemsel değildir. Ancak bu tanım denemesine dayanarak şöyle bir ilke elde ederiz.

(1) Bütün öncülleri doğru, ama sonucu yanlış olan bir günlük dil çıkarımı geçersizdir. Böyle bir çıkarıma *düpedüz geçersiz* diyoruz. Örneğin günlük dile ait

(2) Kar beyaz olur $\therefore$ kömür sarıdır.

Çıkarımının öncülü doğru sonucu da yanlış olduğundan düpedüz geçersizdir. Aynı biçimde matematik diline ait

(3) $2 < 4,\ 4 < 6 \therefore 6 < 4$

çıkarımı, her iki öncülü doğru ama sonucu yanlış olduğundan, düpedüz geçersizdir.

Genel olarak günlük dil çıkarımlarını veya bilim diline ait çıkarımları, öncül ve sonuçlarının doğruluk değerine bakarak aşağıdaki dört türe ayırıyoruz.

(4) **Günlük dil çıkarımının türü**	**Öncüller**	**Sonuç**
1. ?	Tümü doğru	Doğru
2. Düpedüz geçersiz	Tümü doğru	Yanlış
3. ?	Tümü doğru değil (en az biri yanlış)	Doğru
4. ?	Tümü doğru değil (en az biri yanlış)	Yanlış

Bu dört türden ancak 2'ncisinin (yani düpedüz geçersiz olanların) yalnızca öncüllerin ve sonucun doğruluk değerine bakarak geçersizliğini saptayabiliriz. 1'inci, 3'üncü ve 4'üncü türden olanların ise geçerli veya geçersiz olduğuna bu yolla karar veremiyoruz. Bunu aşağıdaki örneklerle açık olarak görebiliriz.

(5)

Günlük dil çıkarım türü	Geçerli çıkarıma Örnek	Geçersiz çıkarıma örnek
1. ?	Kar beyazdır ∴ Kar beyazdır D ∴ D	Kar beyazdır ∴ Kömür siyahtır D ∴ D
2. Düpedüz geçersiz	X	Kar beyazdır ∴ Kömür sarıdır D ∴ Y
3. ?	Kar beyazdır ve kömür sarıdır ∴ kar beyazdır Y ∴ D	Kömür sarıdır ∴ Kar beyazdır Y ∴ D
4. ?	Kömür sarıdır ∴ Kömür sarıdır Y ∴ Y	Kömür sarıdır ∴ Kar yeşildir Y ∴ Y

Nitekim (5) çizelgesinde 1'inci 3'üncü ve 4'üncü türden günlük dil çıkarımlarının gerek geçerli, gerekse geçersiz olan örnekleri vardır. Buna karşılık 2'nci türden olanlara -(1) ilkesi gereği -geçerli örnekler bulunamaz. Bu örneklerin ışığında (5) çizelgesini

(6)

Öncüller	Sonuç	Günlük dil çıkarımı
Tümü doğru	Doğru	Geçerli de olabilir, geçersiz de.
Tümü doğru	Yanlış	Geçersiz (düpedüz geçersiz).
Tümü doğru değil (en az) biri yanlış	Doğru	Geçerli de olabilir, geçersiz de.
Tümü doğru değil (en az biri yanlış)	Yanlış	Geçerli olabilir, geçersiz de.

biçiminde genişletebiliriz.

Yukarıdaki (6) çizelgesinden de anlaşılacağı gibi, günlük dil çıkarımlarının geçerliliğinin yalnızca öncüllerle sonucun doğruluk değerine dayanarak bir tanımını yapamıyoruz. Bunun yerine sembolleştirmeyi de işe katarak aşağıdaki genel tanımı veriyoruz.

(7) Bir günlük dil çıkarımının *geçerli* olması, en az bir sembolik karşılığının (yani sembolleştirme sonucunda elde edilen çıkarımın) geçerli olması demektir.

Dikkat edilirse (7) tanımı günlük dil çıkarımlarının geçerliliğini sembolik çıkarımların geçerliliğine indirgemektedir. Bu son kavramı ilerdeki bölümlerde ayrıntılı olarak inceleyeceğiz.

0.6 MANTIK SİSTEMLERİ

Belli bir takım mantık değişmezlerinin anlamı gereği geçerli olan çıkarımları ve önermeleri denetlemeye yarayan kurallar sistemine *mantık sistemi (mantık dizgesi)* denir. Bir çıkarımın, önermenin veya önerme kümesinin *denetlenmesi,* bunların geçerlilik veya tutarsızlığının belli bir takım kurallar yardımıyla ortaya konulması demektir. Sembolik mantığın en önemli işleri geçerlilik ile tutarsızlığın denetlenmesidir. Örnek olarak "değil", "ve", "veya", "ise" gibi önerme eklemi denilen mantık değişmezlerinin anlamı gereği geçerli olan çıkarımları denetleyen mantık sistemine *önerme eklemleri mantığı* veya kısaca *önermeler mantığı* denir.

Önermeler mantığının mantıksal değişmezlerine niceleme işaretleri denilen "her" (veya "bütün") ile "bazı" sözcüklerini katarsak *niceleme mantığı* denilen bir mantık sistemi elde edilir. Gerek önermeler mantığı gerekse niceleme mantığının iki değerli olduğunu kabul ediyoruz. İki sistem bir arada *temel mantık* olarak adlandırılır. Temel mantığın ötesinde değişik sistemler vardır. Bu sistemler ya çok değerli mantık sistemleridir, ya da temel mantığın iki değerliliğini bozmadan yeni mantık değişmezlerinin katılmasıyla oluşan sistemlerdir. Temel mantığa "özdeş" mantık değişmezini katmakla elde edilen sisteme *özdeşlik mantığı* "var" mantık değişmezini katmakla elde edilen sisteme *varlık mantığı,* "zorunlu" ve "mümkün" mantık değişmezlerini katmakla elde edilen sisteme de *kiplik mantığı* denir.

1. ÖNERMELER MANTIĞI

(İki değerli) *önermeler mantığı*'nı, yalnızca önerme eklemlerinin anlamı gereği geçerli olan çıkarım ve önermeleri denetleyen kural sistemi olarak tanımlıyoruz. Bu bölümde önce önerme eklemlerini ayrıntılı olarak inceleyeceğiz, sonra da karma doğruluk çizelgesi yöntemi, çözümleyici çizelge yöntemi ve türetim yöntemi olmak üzere üç ayrı denetleme yöntemini ele alacağız.

1.1. Önerme Eklemleri

1.1.1 Değilleme Eklemi

Günlük dile ait

(1) Ahmet İstanbul'a gitmeyecek

tümcesini (yani günlük dil önermesini) göz önüne alalım. (1), "p-değil" biçiminde olan

(2) Ahmet İstanbul'a gidecek değil.

anlamına gelir. "Değil" yerine "~" işareti kullanılır. Bu işaret önermenin önüne yazılır. Böylece (1),

(3) ~p

biçiminde sembolleştirilir. "~" işareti, *değilleme eklemi* denilen önerme eklemini dile getirir. A herhangi bir önerme olduğunda

(4) ~A

bir bileşik önerme'dir. (4)'e *değilleme önermesi* veya kısaca *değilleme* denir. A'ya da değillemenin *bileşen*'i denir.

(3) yani ~p değillemesini yorumlamak için p önerme temsilcisine belli bir doğruluk değeri verilir. p'ye Doğru değeri verilirse (söz gelişi "kar beyazdır" anlamı verilirse) (3) yanlış değerini alır. p'ye Yanlış değeri verilirse (söz gelişi "kar sarıdır" anlamı verilirse), (3) Doğru değerini alır. Doğru'yu D işaretiyle, yanlışı da Y işaretiyle gösterelim. O zaman p'ye D değerini verdiğimizde ~p'nin Y değerini aldığını, p'ye Y değerini verdiğimizde de ~p'nin D değerini aldığını söyleyebiliriz. Demek ki, ~p değillemesinin aldığı doğruluk değeri p

bileşenine verilen doğruluk değerinin bir fonksiyonudur. Bu nedenle "~" ekleminin *doğruluk fonksiyonu* durumunda bir önerme eklemi olduğu söylenir. Gerek p'ye verilen değer, gerekse ~p'nin aldığı değer D ile Y değerlerinden biri olduğundan, "~" eklemine *iki değerli* doğruluk fonksiyonu denir. "~" nin aldığı doğruluk değerleri "~" ekleminin *doğruluk çizelgesi* denilen aşağıdaki çizelge ile gösterilir.

(5)

p	~p
D	Y
Y	D

soldaki sütunda p'nin iki değerlemesi (yani p'ye D değerini veren değerleme ile p'ye Y değerini veren değerleme) belirtilmiştir. Sağ sütunda ise "~p" nin her değerleme için aldığı değer aynı hizada belirtilmiştir.

"~" gibi doğruluk fonksiyonu durumunda olan önerme eklemlerinin yanı sıra doğruluk fonkiyonu durumunda olan "zorunlu" ve "mümkün" sözcükler ile dile getirilen önerme eklemleri vardır. Bunları ilerde kiplikler mantığı çerçevesi içinde inceleyeceğiz.

"$\tilde{}$" eklemine, bir tek önermeden bileşik bir önermeyi oluşturdğundan dolayı *birlik önerme* eklemi denir. Birden çok sayıda önermeden bileşik bir önerme oluşturan önerme eklemleri de vardır. Bu sonuncu eklemlere *çoklu önerme eklemi,* iki önermeden bileşik bir önerme oluşturanlara da *ikili önerme eklemi* denir. İkili önerme eklemlerini aşağıda inceliyoruz.

1.1.2 Tümel-Evetleme Eklemi

Günlük dile ait

(1) Ahmet İstanbul'a gidecek ve Behçet İzmir'den dönecek.

tümcesini

(2) p ve q

biçiminde sembolleştirebiliriz. "Ve" sözcüğü yerine "$\wedge$" işareti kullanılır. Bu işaret iki önermenin arasına yazılır. Buna göre (1),

(3) $p \wedge q$

biçiminde sembolleştirilir. "$\wedge$" işareti, *tümel-evetleme eklemi* denilen önerme eklemini dile getirir. A ile B herhangi iki önerme olduğunda

(4) $A \wedge B$

bir bileşik önermedir. (4)'e *tümel-evetleme önermesi* veya kısaca *tümel-evetleme* denir. A ile B önermeleri de (4)'ün bileşenleridir. "$\wedge$" eklemi, iki önermeden bir bileşik önermeyi oluşturduğu zaman ikili eklemdir. Ancak günlük dilde "ve" sözcüğü ikiden çok sayıda tümceyi de birleştirebilmektedir. Örneğin

(5) Ali İstanbul'a gidecek, Behçet İzmir'e gidecek ve Cevdet Adana'dan dönecek

tümcesi

(6) p ve q ve r

yani

(7) $p \wedge q \wedge r$

biçiminde sembolleştirilir. Burada "$\wedge$" tümel-evetleme eklemi üçlü eklem durumundadır. Genel olarak $A_1, \ldots, A_n$ n tane önerme olduğunda

(8) $A_1, \wedge \ldots \wedge A_n$ $(n \geq 2)$

Bir n-li *tümel-evetleme*'dir. $A_1, \wedge \ldots \wedge A_n$ önermeleri (8)'in ana bileşenleri olup $A_1, \wedge \ldots \wedge A_n$'leri birleştiren "$\wedge$" işaretinin her geçişi de ana eklem durumundadır.

Tümel evetleme eklemi genellikle doğruluk fonksiyonu durumunda bir eklemdir. Yani

(9) $p_1, \wedge \ldots \wedge p_n$ $(n \geq 2)$

önermesinin yorumlanması halinde aldığı doğruluk değeri $p_1, \wedge \ldots \wedge p_n$ önerme temsilcilerine verilen doğruluk değerlerinin bir fonksiyonudur. (9)'un D değerini alması için $p_1, \wedge \ldots \wedge p_n$'nin tümü D değerini almayıp bazıları Y değerini alırsa, (9) Y değerini alır. Buna göre ikili ve üçlü tümel-evetlemenin doğruluk çizelgeleri şöyle olur.

(10)

p	q	p ∧ q
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	Y

(11)

p	q	r	p ∧ q ∧ r
D	D	D	D
D	D	Y	Y
D	Y	D	Y
D	Y	Y	Y
Y	D	D	Y
Y	Y	D	Y
Y	Y	Y	Y

Örneğin (1) tümcesinin doğru olması ancak "Ahmet İstanbul'a gidecek" ile "Behçet İzmir'den dönecek" bileşenlerinin doğru olması durumunda gerçekleşir. Aynı biçimde (5)'in doğru olması için her üç ana bileşen de doğru olmalıdır.

Günlük dilde "ve" ekleminin doğruluk fonksiyonu durumunda olmayan kullanışları da vardır. Örneğin

(12) Ahmet yemeğini yedi ve uykuya daldı

tümcesini göz önüne alalım. (12)'nin asıl anlamı

(13) Ahmet yemeğini yedi ve bundan sonra uykuya daldı'dır.

(12)'nin D değeri alması için ana bileşenlerin doğru olması gerekli olmakla birlikte yeterli değildir. Nitekim Ahmet uykuya daldıktan sonra bir süre sonra uyanıp yemeğini yerse (12), her iki ana bileşenin doğru olmalarına karşın, yanlış olur. Buna göre (12)'nin doğruluk çizelgesi (10) biçiminde olmayıp

(14)

p	q	p ∧ q
D	D	D, Y
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	Y

biçiminde olur. Demek ki "ve" eklemi (12) bağlamında doğruluk fonksiyonu durumunda olmayan bir eklemdir.

"Ve" sözcüğünün günlük dilde önerme eklemi olmayan kullanışları da vardır. Örneğin

(15) Ali ve Behçet arkadaştırlar.

tümcesinde "ve" sözcüğü iki önermeyi değil iki sözcüğü birbirine eklemekte olup önerme eklemi değildir. Nitekim (15),

(16) Ali arkadaştır ve Behçet arkadaştır

anlamına gelmez. Öte yandan (15)'e benzeyen

(17) İstanbul ve İzmir Adana'dan büyüktür

tümcesi

(18) İstanbul Adana'dan büyüktür ve İzmir Adana'dan büyüktür

anlamına geldiğinden dolayı (17)'de geçen "ve" sözcüğü gerçekten bir önerme eklemi durumundadır.

Önermeler mantığında "$\wedge$" eklemi, anlamı (10) ile (11) doğruluk çizelgeleriyle belirlenen doğruluk fonksiyonu durumunda bir önerme eklemi olarak ele alınır.

1.1.3 Tikel-Evetleme Eklemi

Günlük dile ait

(1) Ali İstanbul'a veya İzmir'e gidecek

tümcesi

(2) p veya q

biçiminde sembolleştirilebilir. "Veya" sözcüğü yerine "$\vee$" işareti kullanılır. Bu işaret iki önermenin arasına yazılır. Buna göre (1),

(3) $p \vee q$

biçiminde sembolleştirilir. "$\vee$" işareti, *tikel-evetleme eklemi* denilen önerme eklemini dile getirir. A ile B herhangi iki önerme olduğunda,

(4) $A \vee B$

bir bileşik önermedir. (4)'e *tikel-evetleme önermesi* veya kısaca *tikel-evetleme* denir.

Günlük dilde "veya" sözcüğü ikiden çok sayıda tümceyi de birleştirebilmektedir. Örneğin

(5) Ali İstanbul'a, İzmir'e veya Adana'ya gidecek

tümcesi

(6) p veya q veya r

yani

(7) $p \vee q \vee r$

biçiminde sembolleştirilebilir. Burada "$\vee$" tikel-evetleme eklemi üçlü eklem durumundadır. Genel olarak A_1, ..., A_n n tane önerme olduğunda,

(8) $A_1, \vee \ldots \vee A_n$ $(n \geq 2)$

bir *n-li tikel-evetleme*'dir. A_1, ..., A_n önermeleri (8)'in ana bileşenleri olup "$\vee$" işaretinin her geçişi de ana eklem durumundadır.

Tikel-evetleme eklemi genellikle doğruluk fonksiyonu durumunda bir eklemdir. Yani

(9) $p_1, \vee \ldots \vee p_n$ $(n \geq 2)$

önermesinin yorumlanması halinde aldığı doğruluk değeri p_1, ..., p_n temsilci harflerine verilen doğruluk değerlerinin bir fonksiyonudur. (9)'un D değerini alması için p_1, ..., p_n önerme temsilcilerinden en az birine D değerini vermek gerekir. Eğer p_1, ..., p_n önerme temsilcilerinin tümüne Y değeri verilirse (8)'de Y değerini alır. Buna göre $p \vee q$ ile $p \vee q \vee r$ tikel-evetlemelerinin doğruluk çizelgeleri aşağıdaki biçimi alırlar.

(10)

p	q	$p \vee q$
D	D	D
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

(11)

p	q	r	$p \vee q \vee r$
D	D	D	D
D	D	Y	D
D	Y	D	D
D	Y	Y	D
Y	D	D	D
Y	Y	D	D
Y	Y	Y	Y

Dikkat edilirse (1)'in Ali'nin hem İstanbul'a hem İzmir'e gitmesi halinde de doğru olduğunu kabul ediyoruz. Yani (1)'i

(12) Ali İstanbul'a veya İzmir'e ya da her ikisine gidecek

anlamında kullandığımızı varsayıyoruz. Ancak günlük dilde "veya" eklemi değişik bir anlamda da kullanılır. Örneğin

(13) Yarın İstanbul'a veya İzmir'e gideceğim

tümcesi iki kentten birine gideceğimi dile getirebilir. O zaman (13)'ün doğruluk çizelgesi, (10) biçiminde değil

(14)

p	q	p veya q
D	D	Y
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

biçiminde olur. Nitekim yarın hem İstanbul'a hem İzmir'e gidersem (13) iddiası yanlışlanmış olur. "Veya" eklemi, (10) değil de (14) doğruluk çizelgesi anlamında kullanıldığı zaman *ayrıklık eklemi* adını alır. Bu eklem "↓" işaretiyle gösterilir. Ayrıklık eklemini Türkçe'de "veya" yerine "ya...ya" sözüyle dile getirmek uygun olur. Buna göre (13) yerine,

(15) Yarın ya İstanbul'a ya İzmir'e gideceğim

tümcesini kullanabiliriz. (15)'in bir ayrıklık önermesi olduğu şüphe götürmez.

"Veya" sözcüğü günlük dilde doğruluk fonksiyonu durumunda olmayan bir önerme eklemi olarak da kullanılır. Örneğin

(16) Hasta ameliyat olacak veya kısa sürede ölecek

tümcesinin doğruluk çizelgesi

(17)

p q	p veya q
D D	D, Y
D Y	D, Y
Y D	D, Y
Y Y	Y

biçimindedir. (17)'yi şöyle açıklayabiliriz. (i) Hastanın hastalığı gerçek olup ameliyat sonucunda iyileşir ama kısa sürede trafik kazasından ölürse p, q ile "p veya q"nun üçü de D değerini alır. Ama hasta ameliyata karşın hastalığından ötürü kısa sürede ölürse p ile q D değerini, "p veya q" Y değerini alır. Nitekim (13)'den hastanın ancak ameliyat sayesinde iyileşeceği anlaşılıyor. (ii) Hasta ameliyat olup ameliyatın sonucu olarak sağ kalırsa p D değerini, q Y değerini, "p veya q" D değerini alır. Ama hastanın hastalığı gerçek olmayıp ameliyattan sonra ömrünü sürdürürse p D değerini, q Y değerini, "p veya q" Y değerini alır. (iii) Hasta ameliyat olmayıp kısa bir sürede hastalığından ötürü ölürse p Y değerini, q D değerini, "p veya q" D değerini alır. Ama hasta ameliyat olmayıp kısa sürede bir trafik kazasından ölürse p Y değerini, q D değerini, "p veya q" Y değerini alır. (iv) Hasta ameliyat olmayıp ömrünü sürdürürse p, q, "p veya q" nun üçü de Y değerini alır.

Önermeler mantığında "$\vee$" tikel-evetleme eklemi, anlamı (10) ve (11) gibi doğruluk çizelgeleriyle belirlenen doğruluk fonksiyonu durumunda bir önerme eklemi olarak ele alınır.

1.1.4 Koşul Eklemi

Günlük dile ait

(1) Ali İstanbul'a giderse (gider ise) Behçet Ankara'ya gelecek

tümcesi

(2) p ise q

biçiminde sembolleştirilebilir. "İse" sözcüğü yerine "$\rightarrow$" işareti kullanılır. Bu işaret iki önermenin arasına yazılır. Buna göre (1),

(3) $p \rightarrow q$

biçiminde sembolleştirilir. "$\rightarrow$" işareti, *koşul eklemi* denilen önerme eklemini dile getirir. A ile B herhangi iki önerme olduğunda

(4) $A \rightarrow B$

bir bileşik önermedir. (4)'e *koşullu önerme* veya kısaca *koşullu* denir. A'ya koşullunun *ön-bileşen*'i, B'ye de *ard-bileşen*'i denir. "$\rightarrow$" eklemi, iki bileşenden bir bileşik önermeyi oluşturduğundan dolayı ikili eklemdir.

Önermeler mantığında koşul eklemi doğruluk fonksiyonu durumunda bir eklem sayılır. Bu eklemin doğruluk çizelgesi

(5)

p q	p → q
D D	D
D Y	Y
Y D	D
Y Y	D

biçimindedir. (5) doğruluk çizelgesini şöyle açıklayabiliriz.

1'inci satır: Ayırma ve *Modus Ponens* kuralı olarak adlandırılan

(6) $p \rightarrow q, p \therefore q$

çıkarımı geçerlidir. Çıkarımın geçerliliği "$\rightarrow$" koşul ekleminin anlamından kaynaklanıyor. Dolayısıyla "$\rightarrow$" nin doğruluk çizelgesi (6) çıkarımının geçerliliğini sağlamalıdır. (6) çıkarımı geçerli olduğunda, $p \rightarrow q$ ile p'ye D değerini verirsek, q D değerini alır. $p \rightarrow q$'nun doğruluk değeri p ile q'nun doğruluk değerlerinin bir fonksiyonudur. Bu fonksiyon f olsun. A gibi bir önermenin aldığı doğruluk değerini d(A) biçiminde gösterelim. O zaman $d(p \rightarrow q) = f[d(p), d(q)]$ olur. (6) çıkarımının geçerliliğine dayanarak, $d(p \rightarrow q) = D$ ve $d(p) = D$'den $d(q) = D$ elde edilir. Dolayısıyla $f[D, d(q)] = D$ ise, $d(q) = D$ olur. O halde $f(D, D) = D$'dir. Demek ki, p ile q'ya D değeri verilirse, $p \rightarrow q$ D değerini alır. Böylece doğruluk çizelgesinin 1'inci satırının D D D biçiminde olduğu ortaya çıkar.

2'nci satır: Bir koşullunun doğruluğunu ileri sürmek ön-bileşenin doğru olması durumunda ard-bileşenin de doğru olacağını ileri sürmek demektir.

Buna göre ön-bileşen doğru ama ard-bileşen yanlış olursa, koşullu doğru olmayıp yanlış olur. Dolayısıyla doğruluk çizelgsinin 2'nci satırı D Y Y biçimini alır.

3'üncü ve 4'üncü satırlar: Son iki satır için aşağıdaki 4 şık vardır:

1'inci şık

p	q	
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	Y

2'nci şık

p	q	
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	D

3'üncü şık

p	q	
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	Y

4'üncü şık

p	q	
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	D

1'inci şık: "$\wedge$" tümel-evetleme ekleminin doğruluk çizelgesidir. "$\rightarrow$" nin anlamı "$\wedge$" den farklı olduğundan 1'inci şık elenmiş olur.

2'nci şık: "$\rightarrow$" nin anlamın gereğince, $p \rightarrow q$ ile $q \rightarrow p$ farklı doğruluk değerleri almaları gerekir. Oysa 2'nci şıktaki doğruluk çizelgesi "$\rightarrow$" ye ait olsaydı,

p	q	p → q
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	D

p	q	q → p
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	D

doğruluk çizelgeleri kurulacaktı. Böylece $p \rightarrow q$ ile $q \rightarrow p$, p ile q'nun bütün değerlemelerinde aynı değeri alacaklardı. Dolayısıyla 2'nci şık da elenmiş olur.

3'üncü şık: Eğer "→" nin doğruluk çizelgesi 3'üncü şıktaki çizelge olsaydı p→q'nun doğruluk değeri p'nin doğruluk değerinden bağımsız olup yalnızca q'nun doğruluk değerine bağlı olurdu. Nitekim bu çizelgeye dayanarak d(p → q) = d(q) yazabiliriz. Oysa "→" anlamı gereğince p → q'nun değeri hem p'nin hem de q'nun değerine bağlı olmalıdır. Böylece 3'üncü şık da elenmiş olur.

Sonuç olarak 1'inci, 2'nci ve 3'üncü şıkların elenmesiyle yalnız 4'üncü şıkkın geri kaldığını söyleyebiliriz. 4'üncü şıktaki doğruluk çizelgesi önermeler mantığında "→" eklemi için öngörülen çizelgesi ile özdeştir. Böylece (5) doğruluk çizelgesinin haklılığını göstermiş olduk.

Günlük dilde koşullu önermeler, ön bileşenlerinin yanlış olduğu durumlarda doğruluk değerinden yoksundur. Dolayısıyla ön bileşenlerinin yanlışlığı bilinen bir koşullu, (doğruluk değerinden yoksun olduğundan) anlamsız olup evetlenemez. Öte yandan ard-bileşeninin doğruluğu bilinen

(6) Sokrates insan ise ölümlüdür

gibi bir koşulluyu evetleyemeyiz. Onun yerine

(7) Sokrates insan olduğundan ölümlüdür.

türünden bir önermeyi evetleriz. Günlük dilde, ard-bileşenin doğruluğunu bildiğimiz bir koşullunun yerine, ya ard-bileşeni doğrudan evetleriz ya da ard-bileşenin doğruluğunun gerekçesini belirtmek amacıyla (7) türünden bir önermeyi evetleriz. (7) yerine

(8) Sokrates insandır, çünkü ölümlüdür

biçimindeki bir önermeyi de evetlemek mümkündür.

Ard-bileşeninin yanlışlığını bildiğimiz koşulluları (yalan hali bir yana) evetleyemeyeceğimiz meydandadır. Böylece günlük dilde koşulluları, ancak ön-bileşenin ve ard-bileşenin doğruluk değerini bilmediğimiz durumlarda evetlediğimizi söyleyebiliriz.

Günlük dilde bazı koşullular *dilek-şart önermesi* sayılmalıdır. Örneğin dilek-şart önermesi niteliğinde olan

(9) *Ahmet Ankara'ya gitseydi annesi çok sevinirdi.*

koşullusu, ön bileşeni yanlış olması durumunda da doğru olabilir. Dilek-şart eklemi "ise" yerine "olsaydı" sözcüğü ile dile getirilir. Buna göre "p olsaydı q" biçimindeki bir dilek-şart önermesinin doğruluk çizelgesi şöyle olur:

(10)

p	q	p olsaydı q
D	D	D, Y
D	Y	Y
Y	D	D, Y
Y	Y	D, Y

"İse" sözcüğü *evrik koşul eklemi* denilen bir eklemi de dile getirebilir. Örneğin

(11) *Ahmet İstanbul'a gidecek, eğer Behçet Ankara'ya gelirse (gelir ise)*

evrik tümcesini göz önüne alalım. (11),

(12) *Behçet Ankara'ya gelirse, Ahmet İstanbul'a gidecek*

anlamına gelir. Genel olarak

(13) p eğer q ise

olarak sembolleştirilebilen bir tümce

(14) q ise p

biçimine çevrilebilir. "İse" sözcüğü (13)'de *evrik koşul eklemi*'ni dile getirir. Bu eklem "←" işaretiyle gösterilir. Buna göre (11)'i (12)'ye çevirmeden, doğrudan

(15) p ← q

biçiminde sembolleştirebiliriz. "p ← q" nun doğruluk çizelgesi "q ← p" ninki ile özdeştir. Dolayısıyla "←" ekleminin doğruluk çizelgesinin

(16)

p	q	p ← q
D	D	D
D	Y	D
Y	D	Y
Y	Y	D

biçiminde olduğunu söyleyebiliriz. "←" eklemine "→" ekleminin *evrik*'i denir.

1.1.5 Karşılıklı - Koşul Eklemi

Günlük dilde

(1) $(p \rightarrow q) \wedge (p \leftarrow q)$

biçiminde sembolleştirilebilen tümceler yerine "ancak ve ancak ... ise" sözüyle dile getirilen tümceler de kullanılır. Örneğin

(2) Ahmet ancak ve ancak çalışırsa sınıfını geçer.

(3) p ancak $\vee$ ancak q ise

biçiminde sembolleştirilebilir. "Ancak ve ancak ... ise" sözü "$\leftrightarrow$" işaretiyle gösterilir. Bu işareti, *karşılıklı-koşul* denilen önerme eklemini dile getirir. Buna göre (1),

(4) $p \leftrightarrow q$

biçiminde sembolleştirilir. Genel olarak A ile B iki önerme olduğunda

(5) $A \leftrightarrow B$

ye *karşılıklı - koşullu önerme* veya kısaca *karşılıklı-koşullu* denir. A ile B (5)'in bileşenleridir.

"$\leftrightarrow$" karşılıklı koşul ekleminin doğruluk çizelgesi, $(p \rightarrow q) \wedge (p \leftarrow q)$'nun doğruluk çizelgesiyle özdeş olan

(6)

p	q	$p \leftrightarrow q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	D

çizelgesidir. Buna göre "$\leftrightarrow$" in doğruluk fonksiyonu durumunda olan ikili bir eklem olduğunu söyleyebiliriz. Önermeler mantığında kullanılan karşılıklı koşul eklemi (6) çizelgesiyle dile getirilen eklemdir.

Günlük dilde, karşılıklı - koşul eklemi

(7) Ahmet iyileşecekti, ancak ve ancak bu ilacı içerse

gibi tümcelerde doğruluk fonkisoyun durumunda olmayan bir eklem olarak kullanılır.

1.1.6 Bileşik Önermeler, Ana eklem ve Ana bileşenler

Önermeler mantığının sembolik dilinin önermeleri, p, q, r ... önerme temsilcileriyle ~, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ önerme eklemlerinden oluşur. Bu beş eklem sembolik dilin temel *eklemleri*dir. Diğer eklemler bu beş temel eklem türünden tanımlanabilir. Önerme temsilcilerine *atomsal önerme* de denir. Atomsal olmayan her önermeye *bileşik önerme* denir. "önerme" şöyle tanımlanır.

(i) Her önerme temsilcisi (yani her atomsal önerme) bir önermedir.

(ii) A bir önerme ise ~A bir önermedir.

(iii) A ile B önerme ise, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$ ve $A \leftrightarrow B$ birer önermedir.

Örneğin p ile q, (i) kuralı gereği birer önerme olduğuna göre (ii) kuralı gereği ~p bir önermedir. O zaman da (iii) kuralı gereği $\sim p \rightarrow q$'da bir önermedir.

Beş temel eklemi yardımıyla oluşan her bileşik önerme şu beş biçimden birindedir. (i) ~A, (ii) $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$, (iii) $A_1 \vee \ldots \vee A_n$, (iv) $A \rightarrow B$, (v) $A \leftrightarrow B$. Her bileşik önermede birden çok sayıda farklı eklem geçtiği gibi aynı eklemin birden çok sayıda geçişi olabilir. Örneğin ~~p'de "~" in iki geçişi vardır. İmdi her bileşik önermede *ana eklem* denilen bir eklemin bir veya daha çok geçişi vardır. (i)'in ana eklemi A'nın önündeki "~" in geçişi, (ii)'nin ana eklemleri $A_1, \ldots, A_n$'nin aralarındaki "$\wedge$" nin geçişleri, (iii)'nin ana eklemleri gene $A_1, \ldots, A_n$'nin aralarındaki "$\vee$"nin geçişleri (iv)'un ana eklemi A ile B arasındaki "$\rightarrow$" nın geçişi ve (v)'in ana eklemi A ile B arasındaki "$\leftrightarrow$" nin geçişidir. Ana eklemin bağladığı bileşenlere verilen önermenin *ana bileşenler*'i denir. Bir önermenin *bileşenler*'i ise önermenin ana bileşenleri, ana bileşenlerinin ana bileşenleri, anabileşenlerinin ana bileşenlerinin ana bileşenleri, vb. dir. Örneğin

(1) ~~p

nin ana eklemi "~" in birinci geçişi, ana bileşeni ise ana eklemden sonra gelen "~p" dir.

(2) $\sim\sim p \wedge (q \wedge r)$

nin ana eklemi "$\wedge$" nin yalnız ilk geçişi olup, ana bileşenleri ana eklemin so-

lundaki "~~p" ile sağındaki "q ∧ r" dir. Bu nedenle (2)'deki "∧" nin ikinci geçişi, ana eklem olmayan bir eklem geçişidir. (2)'nin bileşenleri ise ~~p, q ∧ r, ~p, p, q, r'dir. Öte yandan,

(3) (~p ∨ q) ∨ (p ∨ q) ∨ (q → r)

1 2 3 4

önermesinin ana eklemleri "∨" nin ikinci ve dördüncü geçişleri olup, ana bileşenleri "~p ∨ q", "p ∨ r" ile "q → r" dir. "∨" nin birinci ile üçüncü geçişi ise ana eklem olmayan eklem geçişleridir. (3)'ün altına "∨" nin geçişlerinin sıralarını yazdık.

Bir önermenin ana bileşenlerinin altını ⌊_____⌋ biçimindeki bir çizgi ile çizerek belirteceğiz. O zaman da altı çizilmemiş işaret veya işaretler ana eklem durumundadır. Örneğin (3)'ün ana bileşenlerinin altını çizerek

(4) ⌊(~p ∨ q)⌋ ∨ ⌊(p ∨ r)⌋ ∨ ⌊(q → r)⌋

elde edilir. Böylece "∨" birinci ile üçüncü geçişlerinin ana eklem olmadığı açıkça ortaya çıkar. (3)'ün tüm bileşenleri

~p ∨ q, p ∨ r, q → r, ~p, p, q, r'dir.

Sonuncu örnek olarak

(5) [~p → ~[(p ∨ q) → r)] ↔ (p ∧ ~q)

nun ana bileşenlerinin altını çizerek ana eklemi ortaya çıkaralım. Sonra da (5)'in tüm bileşenlerini belirtelim.

(6) ⌊[~p → ~[(p ∨ q) → r)]⌋ ↔ ⌊(p ∧ ~q)⌋

Yukarıdaki (6)'ya bakarak ana eklemin "↔", ana bileşenlerinin de "~p → ~[(p ∨ q) → r]" ile "(p ∧ ~q)" olduğunu görüyoruz. (6)'nın tüm bileşenleri, bu iki ana bileşenden başka ~p, ~[(p ∨ q) → r], (p ∧ ~q), p, (p ∨ q) → r, p ∨ q, r, ~q, q'dan ibarettir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin ana bileşenlerinin altını çizerek ana eklemi ortaya çıkarınız.

1. $\sim\sim\sim(p \wedge \sim q)$
2. $p \wedge (q \wedge r)$
3. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
4. $p \wedge (q \wedge r) \wedge (p \vee r)$
5. $(p \vee q) \vee (q \vee r) \vee (q \rightarrow r)$
6. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$
7. $(p \vee q) \leftrightarrow [(q \vee r) \leftrightarrow (p \vee r)]$
8. $p \wedge (q \wedge \sim r) \wedge (\sim p \wedge \sim r) \wedge (\sim p \vee \sim q)$
9. $(\sim\sim p \rightarrow (q \vee \sim r)) \rightarrow \sim(p \vee \sim r)$
10. $[(p \rightarrow \sim q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)] \vee (p \rightarrow \sim r)$

1.1.7 Parantezli ve Parantezsiz Yazı Biçimleri

Dikkat edilirse

(1) $(p \rightarrow q) \vee r$

ile

(2) $p \rightarrow (q \vee r)$

birbirinden farklı tam deyimlerdir. Fark ancak parantezler kullanmakla belli olmaktadır. Parantezler kullanılmasaydı

(3) $p \rightarrow q \vee r$

gibi çokanlamlı bir önerme ortaya çıkardı. Bu nedenle $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$ ve $A \leftrightarrow B$ biçimindeki önermeleri, bileşen olarak geçtikleri zaman, parantezler içine alıp $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ biçiminde dile getiriyoruz. Böyle bir yazılış biçimine *parantezli yazılış biçimi* denir.

Öte yandan ikili önerme eklemi, bileşenlerin arasına yazılacak yerde iki bileşenin önüne yazılırsa, parantezlerin kullanılmasına gerek kalmaz. Böyle bir yazılış biçimine de *parantezsiz yazılış biçimi* denir. Parantezsiz yazılış biçiminde $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$ ve $A \leftrightarrow B$ biçimindeki önermeler

(4) $\wedge AB$

(5) $\vee AB$

(6) $\rightarrow AB$

(7) $\leftrightarrow AB$

biçiminde yazılır.

Buna göre (1) önermesi

(8) $\vee\rightarrow pqr$

biçiminde, (2) önermesi ise

(9) $\rightarrow p\vee qr$

biçiminde (parantezsiz olarak) yazılır.

Başka bir örnek olarak

(10) $\sim[p \vee (\sim q \leftrightarrow r)]$

önermesini parantezli yazılış biçiminden parantezsiz yazılış biçimine çevirelim.

(11) $\sim\vee p\leftrightarrow\sim qr$

Parantezsiz yazılış biçiminde genellikle "~" yerine "N" "$\wedge$" yerine K", "$\vee$" yerine "A", "$\rightarrow$" yerine "C" ve "$\leftrightarrow$" yerine "E" yazılır. Buna göre (8) önermesi

(12) ACpqr

biçiminde, (9) önermesi

(13) CpAqr

biçiminde, (11) önermesi de

(14) NApENqr

biçiminde yazılır.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermeleri parantezli yazılış biçiminden parantezsiz yazılış biçimine dönüştürünüz. ("~" yerine "N", "$\wedge$" yerine "K", "$\vee$" yerine "A", "$\rightarrow$" yerine "C" ve "$\leftrightarrow$" yerine "E" koyunuz.)

1. $p\wedge(q\vee r)$
2. $(\sim p\wedge q)\vee r$
3. $\sim(p\rightarrow\sim q)\wedge r$
4. $(p\wedge q)\rightarrow\sim r$
5. $\sim(p\rightarrow\sim q)\wedge p$

1.1.8 Doğruluk Değeri Hesaplaması

Bir önermede geçen önermeye temsilcilerine birer doğruluk değerinin verilmesi işlemine *değerleme* (veya *yorumlama*) denildiğini daha önce belirtmiştik. A gibi bir önermede geçen önerme temsilcileri p_1, ..., p_n olduğunda, bunlara verilen doğruluk değerleri $d(p_1)$, ..., $d(p_n)$ olsun. O zaman değerlemeyi

(1) $(p_1:d(p_1), \ldots, p_n:d(p_n))$

biçiminde gösterebiliriz. Örneğin

(2) $p \rightarrow \sim q$

önermesini göz önüne alalım. p'ye D, q'ya Y değerini verelim. Bu değerlemeyi (1)'e uygun olarak

(3) (p:D, q:Y)

biçiminde gösteririz.

A gibi bir önermede geçen bütün önerme temsilcilerinin belli bir değerlemesi verildiğinde, A'nın bir değerlemede olduğu doğruluk değeri tek bir

biçimde saptanabilir. Bu saptama işlemine *doğruluk değeri hesaplaması* diyoruz.

Örneğin (2) önermesinin (3) değerlemesinde aldığı doğruluk değeri şöyle hesaplanabilir:

(4) 1. $P \rightarrow \sim q$ (verilen önerme)

2. $D \rightarrow \sim Y$ (verilen değerler)

3. $D \rightarrow D$

4. D

Daha karmaşık bir örnek olarak

(5) $(p \vee \sim q) \leftrightarrow (p \rightarrow r)$

önermesinin

(6) (p : Y, q : D, r : D)

değerlendirmesinde doğruluk değerini hesaplayalım:

(7) 1. $(p \vee \sim q) \leftrightarrow (p \rightarrow r)$ (verilen önerme)

2. $(Y \vee \sim D) \leftrightarrow (Y \rightarrow D)$ (verilen değerler)

3. $(Y \vee Y) \leftrightarrow (Y \rightarrow D)$

4. $Y \leftrightarrow D$

5. Y

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki önermelerin verilen değerlemelerde doğruluk değerini hesaplayınız.

1. $p \rightarrow q$, (p : D)

2. $q \vee \sim p$, (p : D, q : D)

3. $(q \rightarrow p) \rightarrow r$, (p : Y, q : D, r : D)

4. $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee r)$, (p : Y; q : D, r : D)

5. $[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$, (p : Y, q : Y, r : Y)

II. Aşağıdaki günlük dil veya bilim diline ait çıkarımların öncülleri ile sonuçlarının doğruluk değerini hesaplayınız. Bu hesaplamaya dayanarak sözü geçen çıkarımlardan düpedüz geçersiz olanlarını belirtiniz. (Bkz. § 0.5)

1. $2 = 1 + 1 \therefore 1 > 2$
2. $1 < 2, 2 < 7 \therefore 7 < 1$
3. $1 = 2 \wedge 2 = 3 \therefore 1 = 3$
4. $1 = 2 \vee 2 < 3 \therefore 1 = 3$
5. $1 = 2 \leftrightarrow 2 > 1 \therefore 3 < 1$
6. Merih bir gezegendir ∴ Dünya bir gezegen değildir.
7. Kar sarı ise kömür sarıdır ∴ Karın rengi beyaz değildir.
8. "1 + 1 = 3" yanlıştır ∴ 32 + 3 = 5" doğrudur.
9. "1 + 3 = 3 → 3 + 1 = 3" doğrudur ∴ "1 < 2" yanlıştır.
10. "1 < 2 ∴ 2 < 1" çıkarımının öncülü doğru, sonucu yanlıştır ∴ "2 = 2 ∴ 1 = 23 çıkarımı geçerlidir.

1.1.9 Önerme Eklemlerinin Sistematik Sınıflaması

İki değerli doğruluk foksiyonu durumunda olan bütün önerme eklemleri sonlu sayıda olup şöyle sınıflandırılabilirler. n tane önermeden bileşik bir önerme oluşturan bir önerme eklemine *n-li önerme eklemi* denir. e bir n-li önerme eklemi ise, eklemi en öne yazarak $ep_1 \ldots p_n$ biçiminde bir bileşik önerme kurabiliriz. e n-li ekleminin doğruluk çizelgesi, $ep_1 \ldots p_n$ önermesinin doğruluk çizelgesi demektir. $p_1, \ldots, p_n$ önerme temsilcilerinin tam 2^n tane farklı değerlemesi vardır. $ep_1 \ldots p_n$'in 1'inci değerlemedeki değeri d_1, 2'nci değerlemedeki değeri d_2, ..., 2^n'nci değerlemedeki değeri de d_{2^n} olsun. O zaman doğruluk çizelgesi

$p_1 \cdots$	p_{n-2}	p_{n-1}	p_n	$ep_1 \cdots p_n$
D ...	D	D	D	d_1
D ...	D	D	Y	d_2
D ...	D	Y	D	d_3
D ...	D	Y	Y	d_4
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
Y	D	D	D	d_{2n-1}
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
Y	Y	Y	Y	d_{2^n+1}

biçimindedir. Çizelgenin solunda p_1, ..., p_n'in değerlemeleri sıralanmıştır. p_n'nin altındaki sütunda D ile Y değerleri sıra ile yazılmıştır. p_{r-1}'in altındaki sütunda diğer D ile Y sıra ile yazılmış, ve soldan sağa gidildiğinde D ile Y'nin alt alta yazılan sayısı ikişer kat artmaktadır. P_1'in altındaki sütunda 2^{n-1} D ile 2^{n-1} Y yazılmıştır. $ep_1 \ldots p_n$ altındaki sütun ise D ile Y'nin herhangi bir ortalamasından oluşabilir. D ile Y'den oluşan 2^n uzunluğundaki tüm sıralamaların sayısı $2^{(2^n)}$'ye eşittir. Her sıralama belli bir önerme eklemine karşılıktır. Demek ki 2 değerli doğruluk fonksiyonu durumunda n-li önerme eklemlerinin sayısı $2^{(2^n)}$ dır. m = 2 için $2^{(2^n)} = 2^{(2^2)} = 2^4 = 16$ olduğundan 16 tane 2-li eklem, m = 1 için $2^{(2^n)} = 2^{(2^1)} = 2^2 = 4$ olduğunan 4 tane 1-li eklem, hatta m = 0 için $2^{(2^0)} = 2^1 = 2$ olduğundan, 2 tane 0-li eklem vardır. *0-lı önerme ekleme*, sıfır sayıda önermeden, yani tek başına bir önerme oluşturan eklem demektir. 0-lı eklem tek başına bir önermedir. Bunlardan biri tek başına doğru olan ve T işaretiyle gösterilen önerme ile hep yanlış olan ve $\perp$ işaretiyle gönderilen önermedir.

Sayısı 4 olan birli eklemleri sırasıyla e_1^1, e_2^1, e_3^1, e_4^1 biçiminde gösterelim. O zaman

(1)

p	e_1p	e_2p	e_3p	e_np
D	D	D	Y	Y
Y	D	Y	D	Y

biçiminde bir karma doğruluk çizelgesi elde edilir. Sağ taraftaki her sütun bir birli eklemin doğruluk çizelgesini oluşturmaya yarar. Dikkat edilirse, e^1_3 p'nin altındaki sütun "~" ekleminin doğruluk çizelgesini oluşturur. Dolayısiyle e^1_3 "~" eklemiyle özdeştir. e^1_2 eklemine *birli evetleme eklemi*, e^1_1 eklemine *birli totoloji eklemi*, e^1_m eklemine de birli *çelişiklik eklemi* diyoruz.

Bu 4 eklemi şöyle sıralayabiliriz.

e^1	Birli önerme eklemi	e^1p
e^1_1	Birli totoloji eklemi T^1	T^1p
e^1_2	Birli evetleme eklemi E^1	E^1p
e^1_3	Birli değilleme eklemi D^1	D^1P (veya ~p)
e^1_4	Birli çelişişlik eklemi $\perp^1$	$\perp^1p$

Burada T^1, E^1 D^1 ve $\perp^1$ eklemlerini şöyle tanımlıyoruz. $T^1p \equiv T$, $E^1p \equiv p$, $D^1p \equiv \sim p$, $\perp^1p \equiv \perp$ tanımlama işareti olarak daha sonra göreceğimiz "≡" eş-değerlik işaretini kullanıyoruz. (Bkz. § 1.2)

Öte yandan sayısı 16 olan ikili eklemleri sırasıyla e^2_1, e^2_2, ..., e^2_{16} ile gösterip aşağıdaki karma doğruluk çizelgesini oluşturabiliriz.

(2) p q	e_1^2pq	e_2^2pq	e_3^2pq	e_4^2pq	e_5^2pq	e_6^2pq	e_7^2pq	e_8^2pq	e_9^2pq	e_{10}^2pq	e_{11}^2pq	e_{12}^2pq	e_{13}^2pq	e_{14}^2pq	e_{15}^2pq	e_{16}^2pq
D D	D	D	D	D	D	D	D	D	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
D Y	D	D	D	D	Y	Y	Y	Y	D	D	D	D	Y	Y	Y	Y
Y D	D	D	Y	Y	D	D	Y	Y	D	D	Y	Y	D	D	Y	Y
Y Y	D	Y	D	Y	D	Y	D	Y	D	Y	D	Y	D	Y	D	Y

e^2	İkili Önerme eklemi	e^2pq
e^2_1	İkili totoloji eklemi	$p\ T^2\ q$
e^2_2	(İkili) tekel evetleme eklemi	$p \vee q$
e^2_3	Evrik koşul eklemi	$p \leftarrow q$
e^2_4	Birinci bileşeni evetleme eklemi	$p\ E^2_1\ q$
e^2_5	Koşul eklemi	$p \rightarrow q$
e^2_6	İkinci bileşeni evetleme eklemi	$p\ E^2_2\ q$
e^2_7	Karşılıklı-koşul eklemi	$p \leftrightarrow q$
e^2_8	Tümel-evetleme eklemi	$p \wedge q$
e^2_9	İkili çelişirlik eklemi	$p\ \perp^2\ p$
e^2_{10}	(İkili) tümel değilleme eklemi	$p \downarrow q$
e^2_{11}	Evrik koşulum değillemesi	$p \not\leftarrow q$
e^2_{12}	Birinci bileşeni değilleme eklemi	$p\ D^2_1\ q$
e^2_{13}	Koşul değillemesi eklemi	$p \mapsto q$
e^2_{14}	İkinci bileşeni değilleme eklemi	$p\ D^2_2\ q$
e^2_{15}	Ayrıklık eklemi	$p \not\leftrightarrow q$
e^2_{16}	Bağdaşmazlık eklemi	$p \uparrow q$

Burada geçen T^2, E^2_1, E^2_2, D^2_1, D^2_2 ikili eklemlerini şöyle tanımlıyoruz.

$p\ T^2\ q \equiv T$, $p\ E^2_1\ q \equiv p$, $p\ E^2_2\ q \equiv q$, $p\ D^2_1\ q \equiv \sim p$, $p\ D^2_2\ q \equiv \sim q$, $p\ \perp^2\ q \equiv \perp$.

Dikkat edilirse e^2_{16} pq, e^2_{15}pq, ..., e^2_9pq önermeleri, sırasıyla e^2_1pq, e^2_2pq, ..., e^2_8pq önermelerinin değillemesi durumundadır. Nitekim ikincilerinin doğruluk değerleri birincilerinin doğruluk değerlerinin tersidir. Bu nedenle e^2_9pq, ..., e^2_{16}pq önermeleri tamamıyla yeni fonksiyonlar belirtmeyip e^2_1pq,...,e^2_8pq önermeleriyle belirtilen fonksiyonlardan elde edilmiş sayılabilirler.

1.2 Karma Doğruluk Çizelgesi Yöntemi

Bir önermenin geçerli olmasının bütün yorumlamalarda doğru olması anlamına geldiğini, bir önerme kümesinin tutarlı olmasının da en az bir doğrulayıcı yorumlamasının olması anlamına geldiğini daha önce belirtmiştik. Önermeler mantığında bir önermenin yorumlaması, bu önermenin içinde geçen bütün önerme temsilcilerinin belli bir değerlemesi demektir. Buna göre önermeler mantığında bir önermenin *geçerli* olması, içinde geçen bütün önerme temsilcilerinin tüm değerlemelerinde D değerini alması demektir. Önermeler mantığında geçerli olan önermelere *totoloji* de denir. Geçerli olmayan önerme *geçersiz*'dir. Geçersiz bir önerme en az bir değerlemede Y değerini alır. Bir önerme kümesinin *tutarlı* olması ise en az bir değerlemede kümenin bütün üyelerinin D değerini alması demektir. Tutarlı olmayan bir kümeye *tutarsız* küme denir. Tutarsız kümenin tüm öğeleri hiçbir değerlemede bir arada D değerini alamazlar. A gibi bir önermenin tutarlı veya tutarsız olması {A} birim kümesinin tutarlı ya da tutarsız olması demektir. Önermeler mantığında tutarsız olan önermelere *çelişme* de denir. Bir çıkarımın *geçerli* olması çıkarımın geçersiz kılıcı kümesinin tutarsız olmasıyla tanımlanır.

Önermeler mantığında herhangi bir önermenin veya çıkarımın geçerli veya geçersiz, bir önerme kümesinin de tutarlı veya tutarsız olduğunu ortaya koyan karar-verme (ve dolayısıyla denetleme) yöntemleri vardır. En basit karar-verme yöntemi *karma doğruluk çizelgesi* yöntemidir. Bu yönteme göre sınanan önerme veya önermelerin tüm bileşenlerinin (en basitinden en karmaşığına kadar) doğruluk çizelgeleri bir tek karma çizelge biçiminde kurulur. Verilen önermenin altındaki sütun yalnız D'den kurulu ise önermenin geçerli olduğu, yoksa geçersiz olduğu ortaya çıkar. Verilen önerme kümesinin tüm öğelerinin bir arada D değerini aldığı bir değerleme varsa kümenin tutarlı olduğu yoksa tutarsız olduğu anlaşılır. Örneğin

(1) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

önermesinin geçerli olduğunu aşağıdaki karma doğruluk çizelgesiyle denetleyebiliriz.

(2)

p q	q → p	p → (q → p)
D D	D	D
D Y	D	D
Y D	Y	D
Y Y	D	D

Daha karmaşık bir örnek olarak

(3) $[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \rightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r]$

önermesinin geçerli olduğunu aşağıdaki karma doğruluk çizelgesiyle denetleyebiliriz.

(4)

p q r	p→q	(p→q)→r	p∧q	(p∧q)→r	[(p→q→r)]→[(p∧q)→r]
D D D	D	D	D	D	D
D D Y	D	Y	D	Y	D
D Y D	Y	D	Y	D	D
D Y Y	Y	D	Y	D	D
Y D D	D	D	Y	D	D
Y D Y	D	Y	Y	D	D
Y Y D	D	D	Y	D	D
Y Y Y	D	Y	Y	D	D

Şimdi de aşağıdaki önermenin geçersiz olduğunu gösterelim.

(5) $(\sim p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge q)$

(6)

p q	~p	~p→q	p∧q	(~p→q)→p∧q
D D	Y	D	D	D
D Y	Y	D	Y	Y
Y D	D	D	Y	Y
Y Y	D	Y	Y	D

Son sütunda Y değeri bulunduğundan (5) önermesi geçersizdir.

Tutarlılıkla ilgili bir örnek olarak

(7) {p ∧ q, ~p ∨ q, p ∨ ~q}

önerme kümesinin tutarlı olup olmadığını araştıralım.

(8)

p q	~p	~q	p∧q	~p∨q	p∨~q
D D	Y	Y	D	D	D
D Y	Y	D	Y	Y	D
Y D	D	Y	Y	D	Y
Y Y	D	D	Y	D	D

Görüldüğü gibi (8) karma doğruluk çizelgesenin birinci satırında kümenin öğeleri olan üç önermenin altında hep D değeri geçmektedir. Dolayısıyla (7) önerme kümesi tutarlıdır.

Son bir örnek olarak aşağıdaki kümenin tutarsız olduğunu gösterelim.

(9) {p ∧ q, ~p ∨ ~q}

(10)

p q	~p	~q	p∧q	~p∨~q
D D	Y	Y	D	Y
D Y	Y	D	Y	D
Y D	D	Y	Y	D
Y Y	D	D	Y	D

Hiçbir satırda kümenin öğeleri olan önermelerin altında hep D değeri olmadığından dolayı (9) kümesi tutarsızdır.

Çıkarımlara ilişkin örnek olarak

(11) $P \vee q,\ p \rightarrow r\ \ q \rightarrow r \therefore r$

çıkarımının geçerli olup olmadığını bulalım. Bu amaçla (11)'in geçersiz kılıcı kümesi olan

(12) $\{p \vee q,\ p \rightarrow r,\ q \rightarrow r,\ \sim r\}$

kümesinin aşağıdaki karma doğruluk çizelgesini kurarız.

(13)

p q r	p∨q	p→r	q→r	~r
D D D	D	D	D	Y
D D Y	D	Y	Y	D
D Y D	D	D	D	Y
D Y Y	D	Y	D	D
Y D D	D	D	D	Y
Y D Y	D	D	Y	D
Y Y D	Y	D	D	Y
Y Y Y	Y	D	D	D

Dikkat edilirse (13)'ün hiçbir satırında küme öğelerinin altında hep D işareti geçmiyor. Dolayısıyla (12) kümesi tutarsızdır. Bu nedenle (11) çıkarımı geçerlidir.

Geçersiz bir çıkarıma örnek olarak

(14) $p \rightarrow q,\ q \therefore p$

yi göz önüne alalım (14)'ün geçersiz kılıcı kümesi

(15) $\{p \rightarrow q,\ q,\ \sim p\}$

dir. (15)'in karma doğruluk çizelgesi de

(16)

p q	p→q	q	~p
D D	D	D	Y
D Y	Y	Y	Y
Y D	D	D	D
Y Y	D	Y	D

(15) kümesinin her üç öğesinin doğruluk değerlerini yanyana yazabilmek amacıyla 9'un diğer sütununu çizelgenin sağ tarafında tekrarladık, üçüncü satırda küme öğelerinin altındaki değerler hep D olduğundan (15)'in tutarlı, dolayısıyla (14)'ün geçersiz olduğu anlaşılır.

A ile B herhangi iki önerme olduğunda A ile B'de geçen tüm önerme temsilcilerinin her değerlemesinde A'nın aldığı değer ile B'nin aldığı değer birbirine eşitse, A ile B'nin *eşdeğer önermeler* olduğu söylenebilir. A ile B'nin eşdeğer olduğu

(17) $A \equiv B$

biçiminde gösterilir. " ≡ " işareti eşdeğerlik bağıntısını dile getirir. A ile B'nin eşdeğer olmasının gerekli ve yeterli koşulu,

(18) $A \leftrightarrow B$

karşılıklı koşullusunun geçerli olmasıdır. Buna göre A ile B'nin eşdeğer olup olmadığının A ile B'nin karma doğruluk çizelgesiyle karara bağlanabileceği gibi, $A \leftrightarrow B$'nin çizelgesiyle de karara bağlanabilir. Örneğin

(19) $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

eşdeğerliğinin doğru olduğunu ya

(20)

p q	~p	p→q	~p∨q
D D	Y	D	D
D Y	Y	Y	Y
Y D	D	D	D
Y Y	D	D	D

çizelgesiyle, ya da

(21)

p q	~p	p→q	~p∨q	(p→q)↔(~p∨q)
D D	Y	D	D	D
D Y	Y	Y	Y	D
Y D	D	D	D	D
Y Y	D	D	D	D

çizelgesiyle denetleyebiliriz. (20) çizelgesinde her dört satırda p → q ile ~p∨q aynı değeri almaktadır. (21) çizelgesinde ise son sütunda hep D değeri geçmektedir. Böylece her iki çizelgeden (19) eşdeğerliğinin doğru olduğunu görüyoruz.

A_1, ..., A_n, B gibi önermeler verildiğinde bu önermelerde geçen bütün önerme temsilcilerinin değerlemelerini göz önüne alalım. Eğer A_1, ..., A_n'nin herbirini doğru kılan her değerleme B'yi de doğru kılarsa "A_1, ..., A_n önermeleri B'yi *içeriyor*" denir ve

(22) $A_1, \ldots, A_n \models B$

biçimimde yazılır. " $\models$ " işareti içerme bağıntısını dile getirir. Dikkat edilirse A ile B birbirini içerirse, yani hem A $\models$ B hem B $\models$ A olursa, o zaman A ile B eşdeğer olur, yani A ≡ B elde edilir. Buna göre eşdeğerliliğin karşılıklı içerme olduğunu s öyleyebiliriz. A $\models$ B'nin gerekli ve yeterli koşulu A → B'nin geçerli olmasıdır. Buna göre A $\models$ B'nin doğru olup olmadığını ortaya koymak için ya A ile B'nin karma doğruluk çizelgesini, ya da A → B'nin karma doğruluk çizelgesini kurarız. Örneğin

(23) $(p \leftrightarrow q) \models p \rightarrow q$

nun doğru olup olmadığını, ya

(24)

p q	p↔q	p→q
D D	Y	D
D Y	Y	Y
Y D	Y	D
Y Y	D	D

çizelgesiyle ya da

(25)

p q	p↔q	p→q	(p→q)→(p→q)
D D	D	D	D
D Y	Y	Y	D
Y D	Y	D	D
Y Y	D	D	D

çizelgesiyle gösterilebilir. (24) çizelgesinde $p \leftrightarrow q$'nun altında D'nin bulunduğu her satırda, $p \rightarrow q$'nun altında olan D vardır. Böylece (23)'ün doğru olduğu anlaşılır. (25) çizelgesindeki son sutün ise hep D'den oluşuyor. Bundan da (23)'ün doğru olduğu ortaya çıkar. $A_1, \ldots, A_n \models B$ içermesinin doğruluğunun gerekli ve yeterli koşulu $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ çıkarımının geçerli olmasıdır. Böylece doğru içermeler ile geçerli çıkarımlar arasında bire bir karşılık vardır. Örneğin yukardaki (11) çıkarımı doğru olduğundan

(26) $p \vee q,\ p \rightarrow r,\ q \rightarrow r \models r$

içermesi doğrudur. (26)'nın doğruluğu, (13) karma doğruluk çizelgesiyle denetlenir.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki önermelerin geçerli olup olmadığını karma doğruluk çizelgesine dayanarak bulunuz.

1. p
2. $p \rightarrow q$
3. $p \vee \sim q$
4. $p \rightarrow (p \vee q)$
5. $p \rightarrow (p \wedge q)$
6. $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
7. $\sim(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
8. $\sim(p \wedge q) \rightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
9. $[(p \vee q) \rightarrow r] \rightarrow [(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)]$
10. $[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)]$

II. Aşağıdaki önermelerin ve önerme kümelerinin tutarlı olup olmadığını karma doğruluk çizelgesine dayanarak bulunuz.

1. $\{p \vee q, \sim p, \sim q\}$
2. $\{p \rightarrow q , q \rightarrow p\}$
3. $\{p, p \rightarrow q, q \rightarrow r, \sim r\}$
4. $\{p \rightarrow q, q \vee r, p \rightarrow \sim r\}$
5. $\{p \vee q, q \vee r, \sim p \wedge \sim r\}$
6. $p \rightarrow q$
7. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
8. $\sim(p \leftarrow q) \vee r$
9. $p \leftarrow (q \rightarrow r)$
10. $\sim[q \vee \sim(p \rightarrow q)] \vee (p \wedge q)$

III. Aşağıdaki çıkarımların geçerli olup olmadığını karma doğruluk çizelgesine dayanarak bulunuz.

1. $p \rightarrow q, p \therefore q$
2. $p \vee q, \sim p \therefore q$
3. $p \rightarrow q, q \therefore p$
4. $p \rightarrow \sim q, p \therefore \sim p$
5. $p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r \therefore p \wedge r$

IV. Aşağıdaki eşdeğerliklerin doğru olup olmadığını karma doğruluk çizelgesine dayanarak bulunuz.

1. $p \rightarrow p \equiv p$
2. $p \wedge q \equiv \sim(\sim p \wedge q)$
3. $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$
4. $(p \rightarrow q) \rightarrow r \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r)$
5. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow p \equiv q$

V. Aşağıdaki içermelerin doğru olup olmadığını karma doğruluk çizelgesiyle bulunuz.

1. $p \models p$
2. $p \vee q \models p \wedge q$
3. $p \wedge q \models p \vee q$
4. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \models q \vee r$
5. $p \vee q, p \vee r \models q \wedge r$

1.3 Önermeler Mantığı Yasaları

Geleneksel (klasik) mantıkla *özdeşlik ilkesi, çelişmezlik ilkesi* ve *üçüncü halin olmazlığı ilkesi* olmak üzere üç temel mantık yasası kabul edilirdi. Modern mantıkta ise, bu üç ilkenin, sayısı pek çok, hatta sonsuz olan, çeşitli mantık yasaları arasında yer aldığını göreceğiz. Önermeler mantığı yasaları önemli sayılan totolojiler eşdeğerlikler ve içermelerden ibarettir. Özdeşlik ilkesi (önermeler mantığında)

(1) $p \rightarrow p$

nin, çelişmezlik ilkesi

(2) $\sim(p \wedge \sim p)$

nin, üçüncü halin olmazlığı ilkesi de

(3) $p \vee \sim p$

nin birer totoloji olmasıyla dile getirilir. (1), (2), (3) ilkeleri günlük dilde sırasıyla

(4) Sokrates insan ise Sokrates insandır,

(5) Sokrates hem insan hem insan olmayan değildir,

ve

(6) Sokrates insandır veya Sokrates insan değildir.

gibi tümcelerle örneklendirilebilir. (1), (2) ve (3)'ün geçerliliği, birer karma doğruluk çizelgesiyle kolaylıkla denetlenebilir.

Önermeler mantığının totolojli biçimindeki ana eklemlerine göre şu dört türe ayrılırlar: 1) Değillemeler (ana eklemi "~" olan yasalar), 2) tikel evetlemeler (ana eklemi "$\vee$" olan yasalar), 3) Koşullular (ana eklemi "$\rightarrow$" olan yasalar) 4) karşılıklı-koşullular (ana eklemi "$\leftrightarrow$" olan yasalar). Tümel evetleme biçimindeki yasalar ise pratikte hiç kullanılmaz. Nitekim $A_1 \wedge A_2$ veya genel olarak $A_1 \wedge ... \wedge A_n$'nin yasa olması A_1, ..., A_n'nin her birinin yasa olmasına indirgenir. O zaman da $A_1 \wedge ... \wedge A_n$ bileşik yasası yerine tek tek A_1, ..., A_n yasaları kullanılır. Değilleme ile tikel-evetleme türünden yasalar çok nadirdir. Yasalar ezici çoğunlukla koşullu ve karşılıklı-koşullu türündendir.

Koşullu yasalar içerme biçiminde, karşılıklı koşullu yasalar da eşdeğerlik biçiminde de dile getirilirler. Biz de öyle yapacağız. Bütün yasaları karma doğruluk çizelgesiyle denetleyebiliriz. Başka yasaları aşağıda sınıflandırıyoruz.

(ℓ) Değilleme türünden yasalar

1. $\sim(p \wedge \sim p)$ (çelişmezlik ilkesi)

2. $\sim(p_1 \wedge \sim p_1 \wedge p_2 \wedge \sim p_2 \wedge \ldots p_n \wedge \sim p_n)$

(ℵ) Tikel-evetleme türünden yasalar

1. $p \vee \sim p$ (üçüncü halin olmazlığı ilkesi)

2. $p_1 \vee \sim p_1 \vee p_2 \vee \sim p_2 \vee \ldots \vee p_n \vee \sim p_n$

3. $(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

4. $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)$

e bir ikili önerme eklemi olduğunda, e eklemine

$p \; e \; p \equiv p$

olursa (yani p e p ile p birbirine eşdeğer olursa), *denkgüçlü,*

$p \; e \; q \equiv q \; e \; p$

olursa *yer değiştirici,*

$(p \; e \; q) \; e \; r \equiv p$

olursa *ortaklaştırıcı* denir.

Ayrıca e_1 ve e_2 iki ikili eklem olduğunda

$p \; e_1 \; (q \; e_2 r) \equiv (p \; e_1 \; q) \; e_2 \; (p \; e_1 \; r)$

veya $(q \; e_2 \; r) \; e_1 \; p \equiv (q \; e_1 \; p) \; e_2 \; (r \; e_1 \; p)$

olursa, e_1 ekleminin e_2 üzerine *dağıtıcılık* özelliği olduğu,

$p \; e_1 \; (q \; e_2 r) \models (p e_1 q) \; e_2 \; (p e_1 r)$

veya $(p \; e_1 \; q) \; e_2 \; (p \; e_1 \; r) \models p \; e_1 \; (q \; e_2 \; r)$

olursa e_1 ekleminin e_2 üzerine *tek yönlü dağıtıcılık* özelliği olduğu söylenir

(*iii*) **Eşdeğerlik ve içerme türünden yasalar**

a) Denk güçlülük yasaları

1. $p \wedge p \equiv p$ ("$\wedge$" in denkgüçlülüğü)

2. $p \vee p \equiv p$ ("$\vee$" nin denkgüçlülüğü)

b) Yer değiştiricilik yasaları

3. $p \wedge q \equiv q \wedge p$ ("$\wedge$"nin yer değiştiriciliği)

4. $p \vee q \equiv q \vee p$ ("$\vee$"nin yer değiştiriciliği)

5. $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$ ($\leftrightarrow$ in yer değiştiriciliği)

c) Ortaklaştırıcılık yasaları

6. $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ ("$\wedge$"nin ortaklaştırıcılığı)

7. $(p \vee q) \vee r \equiv (p \vee q) \vee r$ ("$\vee$"nin ortaklaştırıcılığı)

8. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \equiv p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$ ("$\leftrightarrow$"nin ortaklaştırıcılığı)

d) Dağıtıcılık ve tek-yönlü dağıtıcılık yasaları

1. $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge (p \wedge r)$ ("$\wedge$" nin "$\wedge$" üzerine dağıtılıcılığı)

2. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ("$\wedge$" nin "$\vee$" üzerine dağıtıcılığı)

3. $p \wedge (q \rightarrow r) \models (p \wedge q) \rightarrow (p \wedge r)$ ("$\wedge$"nin "$\rightarrow$" üzerine tek yönlü dağıtıcılığı)

4. $p \wedge (q \leftrightarrow r) \models (p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge r)$ ("$\wedge$" nin "$\leftrightarrow$" üzerine tek yönlü dağıtıcılığı)

5. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ ("$\vee$"nin "$\wedge$" üzerine dağıtılıcılığı)

6. $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \vee (p \vee r)$ ("$\vee$" nin "$\vee$" üzerine dağıtılıcılığı)

7. $p \vee (q \rightarrow r) \models (p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$ ("$\vee$" nin "$\rightarrow$" üzerine tek yönlü dağıtıcılığı)

8. $p \vee (q \leftrightarrow r) \models (p \vee q) \leftrightarrow (p \vee r)$ ("$\vee$" nin "$\leftrightarrow$" üzerine tek yönlü dağıtıcılığı)

9. $p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ ("$\rightarrow$" nin "$\wedge$" üzerine dağıtıcılığı)

10. $p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ ("$\rightarrow$" nin "$\vee$" üzerine dağıtıcılığı)

11. $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$ ("$\rightarrow$" nin "$\rightarrow$" üzerine dağıtıcılığı)

12. $p \rightarrow (q \leftrightarrow r) \equiv (p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow r)$ ("$\rightarrow$" nin "$\leftrightarrow$" üzerine dağıtcılığı)

13. $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \models (p \wedge q) \rightarrow r$ ("$\rightarrow$" nin "$\wedge$" üzerine tek yönlü dağıtıcılığı)

14. $(p \vee q) \rightarrow r \models (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$ ("$\rightarrow$" nin "$\vee$" üzerine tek yönlü dağıtıcılığı)

15. $(p \rightarrow q) \rightarrow r \models (p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r)$ ("$\rightarrow$" nin "$\rightarrow$" üzerine tek yönlü dağıtıcılığı)

16. $(p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow r) \models p \leftrightarrow (q \wedge r)$ ("$\leftrightarrow$" nin "$\wedge$" üzerine tek yönlü dağıtıcılığı)

17. $p \leftrightarrow (q \vee r) \models (p \leftrightarrow q) \vee (p \leftrightarrow r)$ ("$\leftrightarrow$" nin "$\vee$" üzerine tek yönlü dağıtıcılığı)

18. $p \leftrightarrow (q \rightarrow r) \models (p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \leftrightarrow r)$ ("$\leftrightarrow$" nin "$\rightarrow$" üzerine tek yönlü dağıtıcılığı)

e) Çeşitli yasalar

1. $\sim\sim p \equiv p$ (çifte değilleme)

2. $\underbrace{\sim\cdots\sim}_{m} p \equiv \begin{cases} \sim p, \text{ eğer m tek sayı ise} \\ p, \text{ eğer m çift sayı ise} \end{cases}$ (genelleşmiş değilleme yasası)

3. $p \rightarrow q,\ q \rightarrow r \models p \rightarrow r$ ("$\rightarrow$" nin geçişliliği)

4. $p \leftrightarrow q,\ q \leftrightarrow r \models p \leftrightarrow r$ ("$\leftrightarrow$" nin geçişliliği)

5. $\sim p \models p \rightarrow q$ (önbileşenin değillemesi)

6. $q \models p \rightarrow q$ (asal bileşenin evetlenmesi)

7. $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$ (giriş ve çıkış)

8. $p \rightarrow q \models (r \wedge p) \rightarrow (r \wedge q)$ (çarpma)

9. $p \rightarrow q \models (r \vee p) \rightarrow (r \vee q)$ (toplama)

10. $p \leftrightarrow q \models (r \wedge p) \leftrightarrow (r \wedge q)$ (çarpma)

11. $p \leftrightarrow q \models (r \vee p) \leftrightarrow (r \vee q)$ (toplama)

12. $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$ (devirme)

13. $p \models [(p \rightarrow q) \rightarrow q]$ (evetleme)

14. $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \models p$ (Peirce yasası)

15. $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)] \models (p \wedge r) \leftrightarrow (q \wedge s)$ (Leibniz teoremi)

16. $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
17. $p \rightarrow q \equiv \sim(p \wedge \sim q)$

} ("$\rightarrow$" in elenmesi)

18. $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
19. $p \leftrightarrow q \equiv (p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$

} ("$\leftrightarrow$" in elenmesi)

f) Açılma Yasaları

1. $p \equiv p \vee (p \wedge q)$

2. $p \equiv p \wedge (p \vee q)$

3. $p \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$

4. $p \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$

g) Genleşme Yasaları

1. $p \wedge q \equiv p \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

2. $p \vee q \equiv q \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

3. $p \rightarrow q \equiv p \leftrightarrow (p \wedge q)$

4. $p \rightarrow q \equiv q \leftrightarrow (p \vee q)$

h) Bileşik önermelerin değillemesi yasaları

1. $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
2. $\sim(p_1 \wedge \ldots \wedge p_n) \equiv \sim p_1 \vee \ldots \vee \sim p_n$
3. $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
4. $\sim(p_1 \vee \ldots \vee p_n) \equiv \sim p_1 \wedge \ldots \wedge \sim p_n$

} De Morgan yasaları

5. $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ (koşullunun değillemesi)

6. $\sim(p \leftrightarrow q) \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$ (karşılıklı koşullunun değillemesi)

7. $\sim A(p_1, \ldots p_n \sim, \wedge, \vee) \equiv A(\sim p_1, \ldots, \sim p_n, \vee, \wedge)$ (Shannon yasası)

A önermesi "$\wedge$", "$\vee$", "$\sim$" eklemleriyle $p_1, \ldots, p_m$ önerme temsilcilerinden oluşmuş bir önerme olduğunda, A'nın değillemesi, A'nın içinde $p_1, \ldots, p_n$ yerine sırasıyla $\sim p_1, \ldots, \sim p_n$ konulması ve "$\wedge$" ile "$\vee$" nin değiş tokuşu sonucunda elde edilen önermeyle eşdeğerdir.

ı) Türetim Yasaları (Türetim Kuralları)

Aşağıdaki yasalar, ilerde göreceğimiz "türetim" denilen denetleme yönteminin kurallarını oluşturan içermelerdir. Bu yasalar nerme temsilcileri yerine A, B, C, ... gibi önerme değişkenleri ile dile getirilmiştir. İçinde A, B, C gibi önerme değişkenleri bulunan bir tümceye *önerme kalıbı* denir. A, B, C harflerinin kendileri de atomsal önerme kalıplarıdır. Bileşik önerme kalıpları, önerme değişkenleri ile önerme eklemlerinden oluşurlar. Örneğin $\sim A$, $A \wedge B$, $A \rightarrow B$ ve $A \leftrightarrow B$ birer bileşik önerme kalıbıdır. Önerme kalıpları, incelenen mantık sisteminin sembolik diline değil, bu sembolik dilden söz etmek için kullanılan bir *sözeden dil* (meta-dil)'e ait bir sözdür. Bir önerme kalıbında geçen A, B, C, ... gibi önerme değişkenleri yerine bunların değeri olan sembolik dile ait önermeler koyarak önerme kalıbı sembolik dile ait belli bir önermeye dönüşür. Böyle bir önermeye verilen önerme kalıbının bir *örnekleme*'si denir. Örneğin $A \wedge B$ önerme kalıbında A yerine $p \rightarrow q$, B yerine de "$\sim q$" önermesini koyarsak önerme kalıbı "$(p \rightarrow q) \wedge \sim q$" önermesine dönüşür. Bir önerme kalıbının tüm örneklemeleri geçerli önermeler ise önerme kalıbına *geçerli önerme kalıbı* denir. Önerme kalıplarından oluşan bir çıkarım içirme veya eşdeğerliğe çıkarım kalıbı *içerme kalıbı* veya *eşdeğerlik kalıbı* diyoruz. Bir çıkarım içerme veya eşdeğerlik kalıbında önerme değişkenleri yerine birer önerme koymakla belli bir çıkarım, içerme veya eşdeğerlik kalıbında önerme değişkenleri yerine birer önerme koymakla belli bir çıkarım, içerme veya eşdeğerlik elde edilir. Böyle bir çıkarım içerme veya eşdeğerliğe verilen kalıbın örneklemesi denir. Başlıca türetim yasaları şunlardır:

1. $A, B \models A \wedge B$ ("$\wedge$" nin girişi kuralı)

2. $A \wedge B \models A$
3. $A \wedge B \models A$

} ("$\wedge$" nin çıkışı kuralı)

4. $B \models A \vee B$ ("$\vee$" nin girişi kuralı)

5. $A \vee B, \sim A \models B$
6. $A \vee B, \sim A \models B$

("$\vee$" nin çıkışı kuralı)

7. $A \rightarrow B, A \models B$ (Ayırma veya Modus Ponens kuralı)

8. $A \rightarrow B, \sim B \models \sim A$ (Modus Tollens kuralı)

9. $A \rightarrow \sim A \equiv \sim A$
10. $\sim A \rightarrow A \equiv A$
11. $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \sim B) \equiv \sim A$

(olmayana ergi)

12. $A \rightarrow C, B \rightarrow C, A \vee B \models C$ (yapıcı ikilem)

13. $A \rightarrow B, A \rightarrow C, \sim B \vee \sim C \models \sim A$ (yıkıcı ikilem)

14. $A \rightarrow B, C \rightarrow D, A \vee C \models B \vee D$ (yapıcı ikilem)

15. $A \rightarrow B, C \rightarrow D, \sim B \vee \sim D \models \sim A \vee \sim C$ (yıkıcı ikilem)

f) Önerme eklemlerinin indirgemesi

"$\sim$", "$\wedge$", "$\vee$", "$\rightarrow$", "$\leftrightarrow$" temel eklemlerini, bunlardan sadece ikisi türünden tanımlamak mümkündür. Bu amaçla seçilecek iki eklemden biri hep "$\sim$" olmalıdır. Öbür eklem "$\wedge$", "$\vee$" ya da "$\rightarrow$" olabildiği halde "$\leftrightarrow$" olamaz. ("$\wedge$" ekleminin sadece "$\sim$" ile "$\leftrightarrow$" eklemi türünden tanımlanamayacağı ispatlanmıştır.) Buna göre sözü geçen beş temel eklem ya "$\sim$" ile "$\wedge$", ya "$\sim$" ile "$\vee$" ya da "$\sim$" ile "$\rightarrow$" türünden tanımlanabilmekte ve dolayısıyla bu eklem çiftlerinden birine indirgenebilmektedir. İndirgemeyi ilk yapan mantıkçıların adı kullanılarak, önerme eklemlerini "$\sim$" ile "$\wedge$" ye indirgeyen sisteme Brentano veya Quine sistemi) "$\sim$" ile "$\vee$" ye indirgeyen sisteme Whitehead-Russell veya Hilbert-Ackerman sistemi, "$\sim$" ile "$\rightarrow$" ye indirgeyen sisteme de Frege veya Lukasiewics sistemi denir.

Eklemleri "$\sim$" ile "$\wedge$" ye indirgeme yasaları

1. $A \vee B \equiv \sim(\sim A \wedge \sim B)$

2. $A \rightarrow B \equiv \sim(A \wedge \sim B)$

3. $A \leftrightarrow B \equiv \sim(A \wedge \sim B) \wedge \sim(B \wedge \sim A)$

Eklemleri "~" ile "$\vee$" ye indirgeme yasaları

4. $A \wedge B \equiv \sim(\sim A \vee \sim B)$

5. $A \rightarrow B \equiv \sim A \vee B$

6. $A \leftrightarrow B \equiv \sim(\sim A \vee \sim B) \vee \sim(A \vee B)$

Eklemleri "~" ile "$\rightarrow$"ya indirgeme yasaları

7. $A \wedge B \equiv \sim(A \rightarrow \sim B)$

8. $A \vee B \equiv \sim A \rightarrow B$

9. $A \leftrightarrow B \equiv [(A \rightarrow B) \rightarrow \sim(B \rightarrow A)]$

Geri kalan bütün eklemler beş temel eklem türünden tanımlanabilir. Örnek olarak aşağıdaki eklemlerin temel beş ekleme indirgeme yasalarını belirtiyoruz.

10. $A \uparrow B \equiv \sim(A \vee B)$

11. $A \downarrow B \equiv \sim(A \wedge B)$

12. $A \leftarrow B \equiv B \rightarrow A$

13. $A \mapsto B \equiv \sim(A \rightarrow B)$

14. $A \not\leftarrow B \equiv \sim(B \rightarrow A)$

Öte yandan beş temel eklemi yalnız $\downarrow$ türünden ya da yalnız $\uparrow$ türünden tanımlamak mümkündür. "$\uparrow$" ye ve "$\downarrow$" ye indirgeme yasalarını aşağıda belirtiyoruz.

16. $\sim A \equiv A \uparrow A$

17. $A \wedge B \equiv (A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B)$

18. $A \vee B \equiv (A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B)$

19. $\sim A \equiv (A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)$

20. $A \wedge B \equiv (A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)$

21. $A \vee B \equiv (A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B)$

Çifte değilleme yasası ("~~p≡p") gereği, ~~A biçimindeki bir bileşik önermeyi, eşdeğeri olan A biçiminde kısaltabiliriz. Bundan böyle bu kısaltmayı hep yapacağız. Ayrıca genelleşmiş değilleme yasası uyarınca, önünde n tane "~" işareti geçen $\overbrace{\sim\cdots\sim}^{m}$ A biçimindeki bir önermeyi n tek sayı ise ~A biçiminde, m çift sayı ise A biçiminde kısaltacağız.

ALIŞTIRMALAR

§1.3'deki yasaları, karma doğruluk çizelgesi yöntemiyle denetleyiniz.

1.4 Çözümleyici Çizelge Yöntemi

Karma doğruluk çizelgesi, önerme temsilcilerinin sayısının artmasıyla son derece güçleşir. Nitekim denetlenen önerme, önerme kümesi veya çıkarımda geçen önerme temsilcileri p_1, ..., p_n ise, çizelgedeki değerlemelerin sayısı 2^n olur. Oysa n büyüyünce 2^n sayısı çok hızlı artar. Dolayısıyla karma doğruluk çizelgesi yönteminin pratik yararı ortadan kalkar. Ayrıca bu yöntem yalnız iki ve üç değerli önermeler mantığında kullanılabilmektedir. Bu nedenle öbür mantık sistemlerinde de kullanılabilen daha etkin yöntemlere gereksinme vardır. Bu Bölüm'de önermeler mantığının en etkin ve kolay denetleme ve karar-verme yöntemi olan çözümleyici çizelge yöntemimi ayrıntılı olarak inceleyeğiz.

Çözümleyici çizelgenin ana işlevi, verilen bir veya daha çok sayıda önermenin tutarlı olup olmadığını ortaya koymaktır. Bu amaçla verilen önermeler başlangıç önermeleri olarak alt alta satırları halinde yazılır. Çizelgenin öbür satırları ise üstteki satırlardan çözümleme işlemi ile elde edilir. Çözümleme işleme "temel önermeler" elde edilene kadar süren bir işlemdir. *Temel önermeler* ise p, q, r, ... gibi önerme temsilcileri ile bunların değillemesi olan "~p", "~q", "~r", ... den ibarettir. p ile ~p temel önermelerine *eşlik* diyoruz. Temel önermeler, içinde geçtikleri bileşik önermelerin *temel bileşenler*'idir. Örneğin

(1) $\sim[(\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim q \rightarrow p) \wedge (\sim p \leftrightarrow r)$

önermesinin temel bileşenleri p, ~p, ~q, r'dir. Herhangi bir temel önermenin

değillemesi, onun eşleniği ile eşdeğerdir. Nitekim p'nin değillemesi "~p" dir. ~p'nin değillemesi ise "~~p" dir. Çifte değilleme yasası gereği ~~p ≡ p olduğundan, ~~p'yi p biçiminde kısaltırız.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki bileşik önermelerin temel bileşenlerini bulunuz.

1. $\sim(\sim p \vee q)$
2. $p \leftrightarrow \sim[(p \leftrightarrow (q \wedge \sim r)]$
3. $\sim p \rightarrow [\sim(p \rightarrow (q \rightarrow \sim r)]$
4. $\sim p \rightarrow [(\sim q \rightarrow r) \rightarrow p]$
5. $(q \wedge \sim r) \leftrightarrow \sim[(\sim p \vee \sim p)]$

1.4.1 Tümel Evetlemenin Çözümleme Kuralı

(1) $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$

herhangi bir tümel-evetleme olduğunda (1)'i çözümleme, (1)'in altına sırasıyla $A_1, \ldots, A_n$ bileşenlerini yazma işlemi demektir. Bu işlemi de tümel *evetlemenin çözümlemesinin kuralı* dediğimiz aşağıdaki kuralla belirtiyoruz.

(2) 1. $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{array}\right] (1)$$

çözümleme ile elde edilen $A_1, \ldots, A_n$ bileşenlerini,] biçimindeki dikey bir çizgi ile bağlıyoruz. Tümel evetlemenin önüne işlem adımını belirten *adım sayısı* (adım numarası) olarak 1 sayısını yazıyoruz. Dikey çizginin ardına $A_1, \ldots, A_n$'in kaynağını belirten *kaynak sayısı* (kaynak numarası) olarak gene 1 sayısını parantez arasında yazıyoruz. n = 2 halinde (2) kuralı

(3) 1. $A \wedge B$

$$\left.\begin{array}{l} A \\ B \end{array}\right] (1)$$

biçimini alır. Örneğin

(4) $\sim p \wedge q \wedge \sim r$

önermesini (2) kuralı gereği çözümlersek

(5) 1. $\sim p \wedge q \wedge \sim r$ (B.Ö.)

$$\left.\begin{array}{l}\sim p \\ q \\ \sim r\end{array}\right] (1)$$

çizelgesi elde edilir. (5) çizelgesi, başlangıç önermesi durumunda olan (4) önermesinin çözümleyici çizelgesidir. Başlangıç önermesinin ardına parantez içinde B.Ö. kısaltmasını yazıyoruz.

İkinci bir örnek olarak

(6) $(\sim p \wedge q) \wedge q$

önermesinin çözümleyici çizelgesini kuralım. Bu amaçla önce (6) satırını yazarız. Sonra (3) kuralı gereği (6)'nın ana bileşenleri olan $\sim p \wedge q$ ile q önermelerini alt alta yazıp

(7) 1. $(\sim p \wedge q) \wedge q$ (B.Ö.)

$$\left.\begin{array}{l}\sim p \wedge q \\ q\end{array}\right] (1)$$

çizelgesini kurarız. Ancak ikinci satır bir temel önerme değildir. Çözümleyici çizelgeyi kurmak için çözümleme işlemine temel önermeler ortaya çıkana kadar devam edilir. Dolayısıyla ikinci adım, olarak ikinci satıra (3) kuralını uygulayarak

(8) 1. $(\sim p \wedge q) \wedge q$ (B.Ö.)

$$\left.\begin{array}{l}2.\ \sim p \wedge q \\ \quad q\end{array}\right] (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\sim p \\ q\end{array}\right] (2)$$

çizelgesini elde ederiz. (8) çizelgesinde geçen bütün tümel evetlemeler (ilk iki satır) çözümlenmiş olup çözümlenmemiş önermeler ise (son üç satır)

temel önerme durumundadır. (8), (7)'nin çözümleyici çizelgesidir. Temel önermeler çözümlenemez. İlerde göreceğimiz gibi temel önermeler dışındaki tüm önermeler belli birer çözümleme kuralı gereğince çözümlenebilir.

Bir önerme kümesinin çözümleyici çizelgesini kurmak için öğeleri alt alta başlangıç önermesi olarak yazıp çözümleme işlemini yaparız. Örneğin

(9) $\{\sim p \wedge q,\ q \wedge r,\ \sim p \wedge r\}$

kümesinin çözümleyici çizelgesi

(10) 1. $\sim p \wedge q$ (B.Ö.)

2. $q \wedge r$ (B.Ö.)

3. $\sim p \wedge r$ (B.Ö.)

$$\left.\begin{matrix}\sim p \\ q\end{matrix}\right] (1)$$

$$\left.\begin{matrix}q \\ r\end{matrix}\right] (2)$$

$$\left.\begin{matrix}\sim p \\ r\end{matrix}\right] (3)$$

biçimindedir. Önce kümenin üç öğesini alt alta yazıp herbirinin ardına BÖ işaretini koyduk. Sonra 1'inci adımda $\sim p \wedge q$ önermesini, 2'nci adımda $q \wedge r$ önermesini, 3'üncü adımda da $\sim p \wedge r$ önermesini çözümledik. Böylece çözümlenmemiş olarak yalnızca temel önermeler kalıyor.

Bir önerme veya önerme kümesinin çözümleyici çizelgesine bakarak önerme veya kümenin bir doğrulayıcı yorumlaması bulunabilir. Nitekim başlangıç önermesi veya önermeleri hep D değerini alırsa, alttaki önermeler ve dolayısıyla alttaki temel önermeler de hep D değerinde olur. Yerine, çizelgede alt alta bulunan bütün temel önermeler D değerini alırsa, üstteki satırlar ve dolayısıyla en üstteki başlangıç önermesi veya önermeleri de D değerini alır. Nitekim (2) kuralı doğruluğu korur. Yani kuralın ilk satırı D değerini alırsa alttaki tüm satırlar da D değerini alırlar. Tersine alttaki satırların tümü D değerini alırsa en üstteki satır da D değerini alır. Böylece

alt alta geçen bütün temel önermelere D değerini verirsek başlangıç önermesi veya önermelerinin bir doğrulayıcı yorumlaması elde edilir. Bu amaçla p gibi bir (atomsal) temel önermeye D değerini veririz. Öte yandan "~p" biçiminde bir (bileşik) temel önermeye D değerini vermek için p'nin kendisine Y değerini vermek gerekir. Böylece tüm temel önermelerine D değerini vermiş oluruz. Böyle bir işlemle elde edilen değerleme çözümleyici çizelgenin başlangıç önermesi veya önermelerinin bir doğrulayıcı yorumlamasıdır.

Sözü geçen (4) önermesinin bir doğrulayıcı yorumlamasını elde etmek için (5) çözümleyici çizelgesinde alt alta geçen "~p", "q", "~r" temel önermelerini göz önüne alırız. Bunlara D değerini vermek için p'ye Y değeri, q'ya D değeri ve r'ye Y değerini vermek gerekir. Böylece elde edilen

(11) (p : Y, q : D, r : Y)

değerlemesi (4)'ün bir doğrulayıcı yorumlaması olur. Bunu sınamak için (4) önermesinin (11) değerlemesinde aldığı değeri hesaplayalım.

(13) 1. $\sim p \wedge q \wedge \sim r$

2. $\sim Y \wedge D \wedge \sim Y$

3. $D \wedge D \wedge D$

4. D

Görüldüğü gibi (4) önermesi gerçekten (11) değerlemesinde D değerini almaktadır.

İkinci bir örnek olarak (9) önerme kümesinin bir doğrulayıcı yorumlamasını bulalım. Bu amaçla (10) çözümleyici çizelgesinde alt alta geçen ~p, q, r temel önermelerine D değerini vermek üzere

(13) (p : Y, q : D, r : D)

değerlemesini oluştururuz. (Tekrarlanan temel önermeler göz önünde tutulmaz.) (13), (9) önerme kümesinin bir yorumlamasıdır. Bunu aşağıdaki doğruluk değeri hesabıyla sıralayabiliriz.

(14) (i) $\sim p \wedge q$ (ii) $q \wedge r$ (iii) $\sim p \wedge r$

$\sim Y \wedge D$ $D \wedge D$ $\sim Y \wedge D$

$D \wedge D$ D $D \wedge D$

D D

Bir çözümleyici çizelgede alt alta geçen önermeler arasında A ile ~A biçiminde bir çift geçerse, alt alta geçen önermeler dizisinin bütün ögelerinin D değerini alması imkânsız olur. Nitekim A ile ~A'dan birisi D değerini alırsa öbürü Y değerini alır. Bu durumdaki önerme dizisine *çelişmeli* önerme dizisi diyeceğiz. Böyle bir dizinin altına çelişmeli olduğunu belirtmek amacıyla ("X") işaretini koyacağız. Çelişmeli diziye *kapalı yol,* çelişmeli olmayan diziye ise *açık yol* diyeceğiz. Kapalı yolu olan çözümleyici çizelgeye örnek olarak,

(15) $\{\sim p, (q \wedge r), p \wedge r\}$

önerme kümesinin çözümleyici çizelgesini kuralım.

(16) ~p (B.Ö.)

1. $q \wedge r$ (B.Ö.)

2. $p \wedge r$ (B. Ö.)

q
r] (1)

p
r] (2)

X

Görüldüğü gibi 1'inci satır 6'ncı satırın değillemesi durumundadır. Bu nedenle önermeler dizisinin altına kapalı yol olduğunu belirtmek amacıyla yolun sonuna "X" işareti konulur.

Başka bir örnek olarak

(17) $(p \wedge \sim q) \wedge (q \wedge \sim r)$

önermesinin doğrulayıcı yorumlamasının olup olmadığını çözümleyici

çizelge ile arayalım. (yol açıksa doğrulayıcı yorumlama vardır, yol kapalı ise doğrulayıcı yorumlama yoktur.)

(18) 1. $(p \wedge \sim q) \wedge (q \wedge \sim r)$ (B. Ö.)

2. $p \wedge \sim q$] (1)
3. $q \wedge \sim r$]

p]
$\sim q$] (2)

q]
$\sim r$] (3)
X

(18) çizelgesine bakarak (yolun kapalı olmasından dolayı) (17)'nin doğrulayıcı yorumlaması olmadığını söyleyebiliriz.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki önermelerin çözümleyici çizelgesini kurunuz.

1. $\sim p \wedge \sim q$
2. $(\sim p \wedge r) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$
3. $(p \wedge \sim r) \wedge (q \wedge \sim r) \wedge (p \wedge q)$
4. $p \wedge \sim r \wedge \sim p$
5. $(p \wedge \sim r) \wedge (\sim p \wedge q)$
6. $\{p, q \wedge r\}$
7. $\{\sim p, p \wedge q\}$
8. $\{\sim p, \sim p \wedge q, q \wedge \sim r\}$
9. $\{\sim p \wedge (q \wedge \sim r), \sim q \wedge r, \sim p \wedge r\}$
10. $\{(p \wedge q) \wedge \sim r, (\sim p \wedge \sim r) \wedge (\sim p \wedge q)\}$

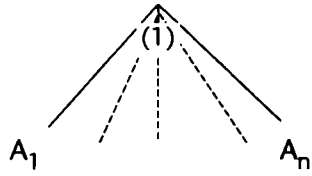
II. Yukarıdaki önerme veya önerme kümelerinin hangisinin doğrulayıcı yorumlaması olduğunu belirtiniz. Varsa doğrulayıcı yorumlama bulup sınayınız.

1.4.2 Tikel Evetlemenin Çözümleme Kuralı

(1) $A_1 \vee \ldots \vee A_n$

biçimindeki bir tikel-evetlemeyi çözümleme, (1)'in altına çatal açarak yan yana $A_1, \ldots, A_n$ bileşenlerini sırasıyla yazma işlemidir. (1) önermesi ile altına gelen $A_1, \ldots, A_n$ önermelerinden her biri arasına bir çizgi çekilir. Buna göre tikel-evetlemenin çözümleme kuralı

(2) 1. $A_1 \vee \ldots \vee A_n$



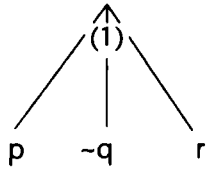
biçiminde dile getirilir. Kaynak sayısı, $A_1, \vee \ldots \vee A_n$ ile $A_1, \ldots, A_n$'leri birleştiren çizgilerin kesişen noktası altına parantez arasına yazılır.

Şimdi (2) kuralına dayanarak

(3) $p \vee \sim q \vee r$

önermesinin doğrulayıcı çizelgesi aşağıdaki biçimde olur.

(4) 1. $p \vee \sim q \vee r$ (B.Ö.)



Bu çizelgede alt alta yazılmış üç ayrı önerme dizisi vardır; (i) $p \vee \sim q \vee r$, p dizisi (ii) $p \vee \sim q \vee r$, ~q dizisi, (iii) $p \vee \sim q \vee r$, r dizisi. Bu dizilerden her biri ayrı bir **yol** sayılır. Bu yollardan hiçbiri çelişmeli değildir. Dolayısıyla her üç yolun açık olduğunu söyleyebiliriz. Şimdi açık yollardan her birine dayanarak başlangıç önermesinin ayrı bir doğrulayıcı yorumlama bulunabilir. (i) yolunda tek temel önerme p olduğundan (p : D), (ii) yolunda tek temel önerme ~q olduğundan (q : Y), (iii) yolunda da tek temel önerme r olduğundan (r : D) değerlemesi elde edilir. Ancak (i)'de q ile r (ii)'de p ile r, (iii)'te de p ile q eksik-

tir. Eksik önerme temsilcileri istediğimiz değeri alabilirler. Söz gelişi bunlara hep Y değerini verelim. O zaman (i) için (p : D, q : Y, r : Y) (ii) için (p: Y, q : Y, r : Y), (iii) için (p : Y, q : Y, r : D) değerlemeleri bulunur. Bunları sınarsak,

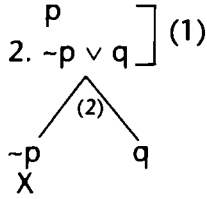
(i)	(ii)	(iii)
$p \vee \sim q \vee r$	$p \vee \sim q \vee r$	$p \vee \sim q \vee r$
$D \vee Y \vee Y$	$Y \vee \sim Y \vee Y$	$Y \vee \sim Y \vee D$
$D \vee D \vee Y$	$Y \vee D \vee Y$	$Y \vee D \vee D$
D	D	D

Değişik bir örnek olarak tümel evetlemenin ve tikel-evetlemenin çözümleme kuralları gereği

(5) $p \wedge (\sim p \vee q)$

Önermesinin çözümleyici çizelgesini kuralım.

(6) 1. $p \wedge (\sim p \vee q)$ (B.Ö.)



Görüldüğü gibi (6) çizelgesinde biri kapalı biri açık olmak üzere iki yol vardır. Birinci (soldaki) yol kapalı (dolayısıyla çelişmeli bir önerme dizisi) olduğundan, bu yola dayanarak bir doğrulayıcı yorumlama bulunamaz. Ama ikinci (sağdaki) yol açık olduğundan, bu yola dayanarak bir doğrulayıcı yorumlama bulunabilir. Bu açık yoldaki temel önermeler p ile q'dur. Dolayısıyla (p: D, q: D) değerlemesi (5) önermesinin bir doğrulayıcı yorumlamasıdır.

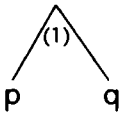
Başka bir örnek olarak

(7) $\{p \vee q, r \vee s\}$

önerme kümesinin çözümleyici çizelgesini kurup, varsa doğrulayıcı yorumlamasını bulalım. 1'inci adımda

(8) 1. $p \vee q$ (B.Ö.)

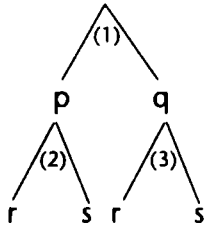
$r \vee s$ (B.Ö.)



çizelgesi elde edilir. (8) çizelgesinde iki ayrı yol vardır. 2'nci adımda $r \vee s$ önermesini çözümlerken (8) çizelgesinde her iki yolun altında çatal açarak r ile s yazılmalıdır. Böylece (8),

(8) 1. $p \vee q$ (B.Ö.)

2. $r \vee s$ (B.Ö.)



biçimine dönüşür. Dört açık yoldan oluşan (9), (7)'nin çözümleyici çizelgesidir. Her yolda eksik önerme temsilcileri bulunuyor. 1'inci yolda q ile s, 2'nci yolda q ile r, 3'üncü yolda p ile s, 4'üncü yolda da p ile r eksiktir. Eksik temsilci harflerine gene Y değerini verirsek sırasıyla (p : D, q : Y, r : D, s : Y), (p :D, q : Y, r : Y, s : D), (p : Y, q : D, r : D, s : Y) ve (p : Y, q : D, r : D, s : Y) değerlemelerini elde ederiz.

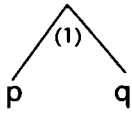
Daha başka bir örnek olarak

(10) $\{p \vee q, r \wedge s\}$

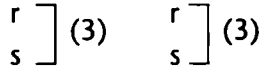
önerme kümesinin çözümleyici çizelgesini kuralım. Eğer $p \vee q$ ile $r \wedge s$ önermelerini sırasıyla çözümlersek

(11) 1. $p \vee q$ (B.Ö.)

2. $r \wedge s$ (B.Ö.)



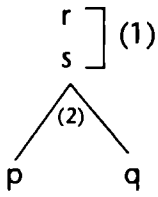
3. $r \wedge s$ (2) 3. $r \wedge s$



çözümleyici çizelgesini elde ederiz. Ancak tümel-evetleme olan ikinci satırı tikel evetleme olan birinci satırdan önce çözümlersek (11)'den daha kısa olan

(12) 2. $p \vee q$ (B.Ö.)

1. $r \wedge s$ (B.Ö.)



çözümleyici çizelge elde edilir. Kısa bir çizelge uzun olanına tercih edilir. Bu nedenle çözümleyici çizelgeyi kurarken aşağıdaki öncelik kuralına uyacağız.

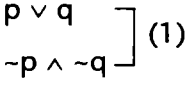
Öncelik kuralı: Aynı bir yol üzerinde hem tümel-evetleme hem tikel-evetleme geçiyorsa, tümel-evetleme her zaman öncelikle çözümlenmelidir.

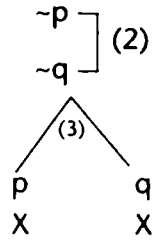
Sonuncu örnek olarak

(13) $(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$

Önermesinin çözümleyici çizelgesini kuralım.

(14) 1. $(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$ (B.Ö.)





Görüldüğü gibi (14)'ün iki yolu bulunup her ikisi de çelişmeli olduğundan kapalıdır. Demek ki (14)'ün hiç açık yolu yoktur. Hiçbir açık yolu olmayan bir çözümleyici çizelgesi *kapalı,* en az bir açık yolu alanına *açık* denir. Böylece (13) önermesinin (14) çözümleyici çizelgesinin kapalı olduğunu söyleyebiliriz. Kapalı bir çözümleyici çizelgeye dayanarak hiçbir doğrulayıcı yorumlama bulunamaz. Nitekim kapalı çözümleyici çizelgesi olan bir önerme veya önerme kümesinin hiçbir doğrulayıcı yorumlaması yoktur.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki önerme ve önerme kümelerinin çözümleyici çizelgesini kurup açık veya kapalı olduğunu belirtiniz.

1. $\sim p \vee \sim q$
2. $(\sim p \vee \sim q) \vee r$
3. $\sim p \vee (\sim q \wedge r)$
4. $(p \wedge q) \vee \sim r$
5. $[\sim p \wedge (\sim q \vee \sim r)] \vee (p \wedge \sim r)$
6. $\{p \vee q, q \vee r, p \vee \sim r\}$
7. $\{p \vee \sim q, q \wedge r, \sim p \vee r\}$
8. $\{p \wedge \sim q, (p \vee \sim q \vee \sim r)\}$
9. $\{p \vee q \vee \sim r, p \wedge \sim q, \sim p \wedge q\}$
10. $\{p \vee q \vee r, q \vee \sim r \vee s, \sim p \wedge \sim s\}$

1.4.3 Tümel-Evetlemenin Değillemesi ve Tikel-Evetlemenin Değillemesinin Çözümleme Kuralları

Tümel-evetleme ile tikel-evetlemenin çözümleme kurallarına *temel çözümleme kuralları* diyoruz. Bu iki kurala dayanarak öbür türden olan önermelerin çözümleme kuralları türetilebilir.

§1.3'deki genelleşmiş De Morgan yasasını dile getiren

(1) $\sim(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \equiv \sim A_1 \vee \ldots \vee \sim A_n$

eşdeğerliği gereği

(2) $\sim(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$

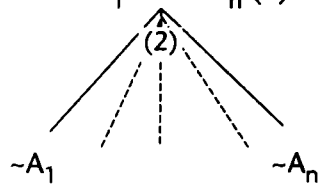
biçiminde değillenmiş bir tümel evetlemeyi

(3) $\sim A_1 \vee \ldots \vee \sim A_n$

tikel evetlemesine dönüştürülebiliriz. Dolayısıyla (1) biçimindeki bir önermeyi

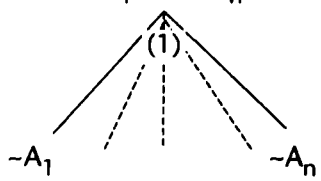
(4) 1. $\sim(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$

2. $\sim A_1 \vee \ldots \vee \sim A_n$ (1)



biçiminde çözümleyebiliriz. İkinci satırı atlarsak, (4)'ü

(5) 1. $\sim(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$



biçimine dönüştürebiliriz. (5)'e *tümel-evetlemenin değillemesinin çözümleme kuralı* diyoruz. Nitekim (5)'e dayanarak (2) biçiminde bir önermeyi çözümlemek mümkün olmaktadır. (5), *türetilmiş* bir çözümleme kuralıdır. Örneğin:

(6) ~(p ∨ ~q ∨ ~r)

önermesinin (5) kuralı gereği

(7) 1. ~(p ∨ ~q ∨ ~r) (B.Ö.)

~p
q
r] (1)

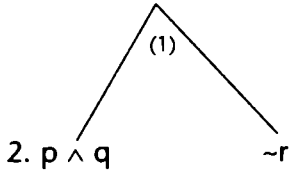
çözümleyici çizelgesini elde ederiz.

İkinci örnek olarak

(8) ~[~(p ∧ q) ∧ r]

önermesinin çözümleyici çizelgesini kuralım.

(9) 1. ~[~(p ∧ q) ∧ r] (B.Ö.)



p
q] (2)

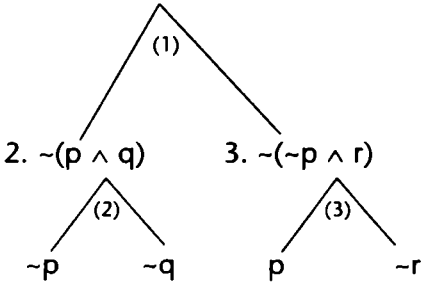
1'inci adımda (5) kuralı gereği p ∧ q ile ~p bileşenlerini çatal açarak yan yana yazdık. (Dikkat edilirse, p ∧ q, ~~(p ∧ q)'nun kısaltması olarak elde edilmiştir.) 2'nci adımda ise p ∧ q'nun altına p ile q'yu yazdık.

Üçüncü örnek olarak

(10) ~[(p ∧ q) ∧ (~p ∧ r)]

önermesinin çözümleyici çizelgesini kuralım.

(11) 1. ~[(p ∧ q) ∨ (~p ∧ r)] (B.Ö.)



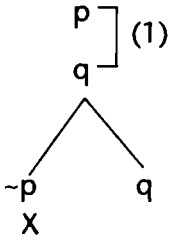
Dördüncü örnek olarak

(12) {~(~p ∨ ~q), ~p ∨ q}

önerme kümesinin çözümleyici çizelgesini kuralım.

2. ~(~p ∨ ~q) (B.Ö.)

1. ~p ∨ q (B.Ö.)



Sonuncu örnek olarak

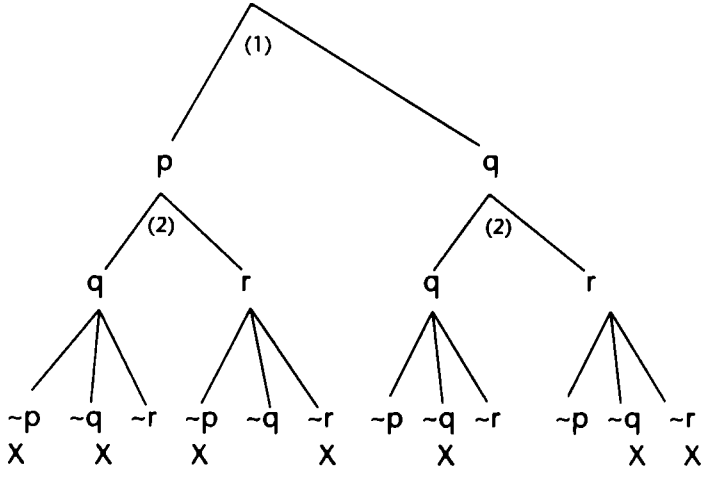
(13) {p ∨ q, q ∨ r, ~(p ∧ q ∧ r)}

önerme kümesinin çözümleyici çizelgesini kuralım.

(14) 1. p ∨ q (B.Ö.)

2. q ∨ r (B.Ö.)

3. ~(p ∧ q ∧ r) (B.Ö.)



§1.3'deki genelleşmiş De Morgan yasasını dile getiren

(15) $\sim(A_1 \vee \ldots \vee A_n) \equiv \sim A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$

eşdeğerliği gereği,

(16) $\sim(A_1 \vee \ldots \vee A_n)$

biçiminde değillenmiş bir tikel-evetlemeyi

(17) $\sim A_1 \wedge \ldots \wedge \sim An$

biçimindeki tümel-evetlemeye dönüştürebiliriz.

Dolayısıyla (15) biçimindeki bir önermeyi

(18) 1. $\sim(A_1 \vee \ldots \vee A_n)$

2. $\sim A_1 \wedge \ldots \wedge \sim A_n$

$\sim A_1$
.
.
.
$\sim A_n$ (2)

biçiminde çözümleyebiliriz. İkinci satırı atlarsak, (18)'i

(19) 1. $\sim(A_1 \vee \ldots \vee A_n)$

$\sim A_1$
.
.
.
$\sim A_n$ (1)

biçimine dönüştürebiliriz. (19)'a *tikel-evetlemenin değillemesinin çözümleme kuralı* diyoruz. (19) türetilmiş bir çözümleme kuralıdır.

Örneğin

(20) $\sim(p \vee \sim q \vee r)$

önermesinin çözümleyici çizelgesini kurarak

(21) 1. $\sim(p \vee \sim q \vee r)$ (B.Ö.)

2. $\sim p$
3. q (1)
4. $\sim r$

elde edilir.

İkinci bir örnek olarak

(22) $\{\sim(p \vee \sim q \vee r),\ p \vee \sim(q \wedge \sim r)\}$

önerme kümesinin çözümleyici çizelgesini kuralım.

(23) 1. $\sim(p \vee \sim q \vee r)$ (B.Ö.)

2. $p \vee \sim(q \wedge \sim r)$ (B.Ö.)

$\sim p$
q (1)
$\sim r$

(2)

p X

3. $\sim(q \wedge \sim r)$

(2)

$\sim q$ X r X

Görüldüğü gibi (23) kapalıdır. Dolayısıyla (22)'nin doğrulayıcı yorumlaması yoktur.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki önerme ve önerme kümelerinin çözümleyici çizelgesini kurup açık veya kapalı olduğunu belirtiniz.

1. $\sim[p \wedge (q \wedge \sim r)]$

2. $\sim[p \wedge (q \vee \sim r)]$

3. $\{p \wedge \sim q, \sim(p \vee r), \sim(q \wedge \sim r)\}$

4. $\{\sim[p \wedge \sim(q \wedge \sim r)], \sim(q \wedge r)\}$

5. $\{\sim[(\sim p \wedge q) \wedge \sim r], [q \wedge \sim(p \wedge s)], s\}$

II. Yukarıdaki önerme ve önerme kümelerinin varsa doğrulayıcı yorumlamasını bulunuz.

1.4.4 Koşullu ve Koşullunun Değillemesinin Çözümleme Kuralları

§1.3'deki "$\rightarrow$"nin elenmesi yasasını dile getiren

(1) $A \rightarrow B \equiv \sim A \vee B$

eşdeğerliği gereği

(2) $A \rightarrow B$

biçimindeki bir koşulluyu

(3) $\sim A \vee B$

biçimine dönüştürebiliriz. Buna göre $A \rightarrow B$ biçmindeki bir önermeyi

(4) 1. $A \rightarrow B$

2. $\sim A \vee B$

(2)

$\sim A$ $\quad$ B

biçiminde çözümleyebiliriz. (4) çizelgesini de, ikinci satırı atlayarak

(5) 1. $A \rightarrow B$

(1)

$\sim A$ $\quad$ B

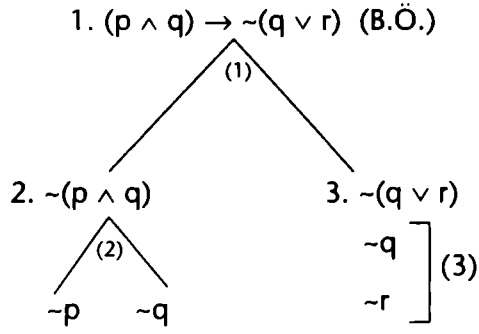
biçimine çevirebiliriz. (5)'e *koşullunun çözümleme* kuralı diyoruz. (5), türetilmiş bir çözümleme kuralıdır.

Örneğin (5)'e dayanarak

(6) $(p \wedge q) \rightarrow \sim(q \vee r)$

önermesinin çözümleyici çizelgesini kuralım.

(7)



§1.3'deki koşullunun değillemesi yasasını dile getiren

(8) $\sim(A \rightarrow B) \equiv A \wedge \sim B$

eşdeğerliği gereği

(9) $\sim(A \rightarrow B)$

önermesi

(10) $A \wedge \sim B$

biçimine çevrilebilir. Buna göre (9) biçimindeki bir önermeyi

(11) 1. $\sim(A \rightarrow B)$

2. $A \wedge \sim B$

$\left.\begin{matrix} A \\ \sim B \end{matrix}\right\}$ (2)

biçiminde çözümleyebiliriz. İkinci satırı atlarsak (11)'i

(12) 1. $\sim(A \rightarrow B)$

$\left.\begin{matrix} A \\ \sim B \end{matrix}\right\}$ (1)

biçimine çevirebiliriz. (12)'ye *koşullunun değillemesinin çözümleme kuralı* diyoruz. (12), türetilmiş bir çözümleme kuralıdır.

Örneğin

(13) $\sim[(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge \sim r)]$

önermesinin (12) kuralına dayanarak çözümleyici çizelgesini kuralım.

(14) 1. $\sim[(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge \sim r)]$ (B.Ö.)

2. $p \wedge q$ ⎫ (1)
3. $\sim(q \wedge \sim r)$ ⎭

p ⎫ (2)
q ⎭

(3)

~q | r
X

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki önerme ve önerme kümelerinin çözümleyici çizelgesini kurunuz ve açık veya kapalı olduğunu belirtiniz.

1. $(p \wedge q) \rightarrow r$
2. $[\sim(p \vee \sim q) \rightarrow r] \rightarrow (p \wedge q)$
3. $\sim(p \rightarrow r) \rightarrow q$
4. $\{\sim(p \rightarrow \sim r) \wedge \sim(q \rightarrow s),\ p \rightarrow (q \wedge \sim s)\}$
5. $\{p \rightarrow (q \wedge s),\ \sim q \rightarrow (p \rightarrow s),\ \sim p \rightarrow \sim q\}$

1.4.5 Karşılıklı-Koşullunun ve Karşılıklı-Koşullunun Değillemesinin Çözümleme Kuralları

§1.3'teki "$\leftrightarrow$" nin elenmesi yasasını dile getiren

(1) $A \leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\sim A \wedge \sim B)$

eşdeğerliği gereği

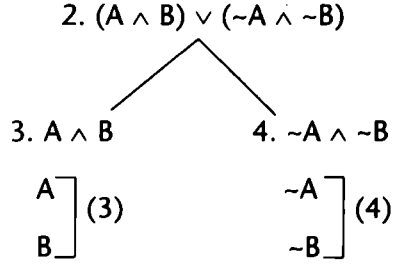
(2) $A \leftrightarrow B$

önermesi

(3) $(A \wedge B) \vee (\sim A \wedge \sim B)$

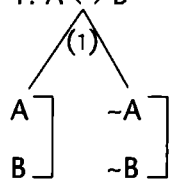
ye dönüşür. Buna göre (2) biçimindeki bir önermeyi

(4) 1. $A \rightarrow B$



biçimine çevirebiliriz. Ara satırları atlarsak, (4)'ü

(5) 1. $A \leftrightarrow B$

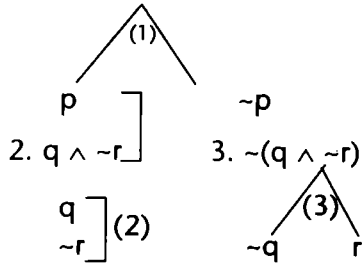


biçimine çevirebiliriz. (5)'e *karşılıklı-koşullunun çözümleme kuralı* denir. (5), türetilmiş bir çözümleme kuralıdır. Örneğin

(6) $p \leftrightarrow (q \wedge \sim r)$

önermesinin (5)'e dayanarak çözümleyici çizelgesini kuralım.

(7) 1. $p \leftrightarrow (q \wedge \sim r)$ (B.Ö.)



§1.3'deki karşılıklı koşullunun değillemesi yasasını dile getiren

(8) $\sim(A \leftrightarrow B) \equiv (A \wedge \sim B) \vee (\sim A \wedge B)$

eşdeğerliği gereği

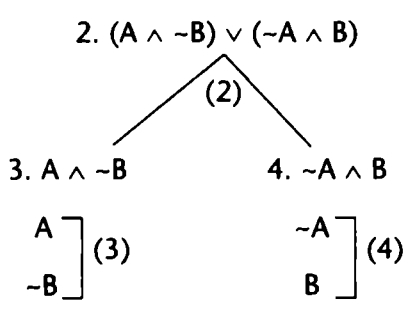
(9) $\sim(A \leftrightarrow B)$

önermesini

(10) $(A \wedge \sim B) \vee (\sim A \wedge B)$

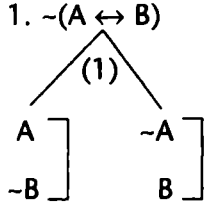
biçimine çevirebiliriz. Buna göre (9) biçiminde bir önerme

(11)



biçiminde çözümlenir. Ara satırları atarak (11)'i

(12)



çizelgesine çevirebiliriz. (12)'ye karşılıklı-koşullunun değillemesinin çözümleme kuralı diyoruz. (12) türetilmiş bir çözümleme kuralıdır.

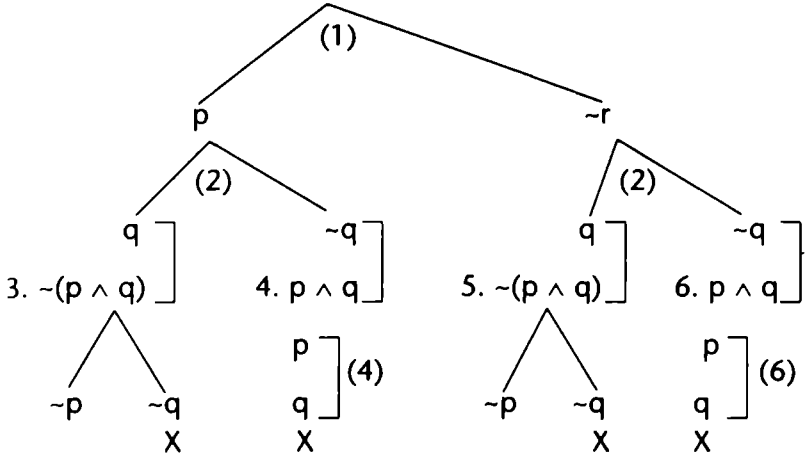
Örneğin

(13) $\{p \vee \sim r, \sim[(q \leftrightarrow (p \wedge q)]\}$

önerme kümesinin çözümleyici çizelgesini kuralım.

(14) 1. $p \vee \sim r$

2. $\sim[q \leftrightarrow (p \wedge q)]$



Şimdi temel önerme olmayan ve beş temel eklem yardımıyla oluşturulan her önerme ("~" ekleminin birden çok sayıda geçiş sayısı 1 veya 0'a indirgendikten sonra şu sekiz önerme türündendir: $A \wedge B$, $A \vee B$, $\sim(A \wedge B)$, $\sim(A \vee B)$, $A \rightarrow B$, $\sim(A \rightarrow B)$, $A \leftrightarrow B$, $\sim(A \leftrightarrow B)$. Temel önermeler ise çözümlenemez. Buna göre yukarıda verilen 2 temel çözümleme kuralı ile 6 türetilmiş çözümleme kuralının çözümlenebilen tüm önermeleri çözümlemeye yettiğini söyleyebiliriz. Demek ki bu 8 çözümleme kuralına dayanarak önermeler mantığında herhangi bir önermenin çözümleyici çizelgesini kurmamız mümkündür.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki önermeler ve önerme kümelerinin çözümleyici çizelgesini kurup açık veya kapalı olduğunu belirtiniz.

1. $(p \leftrightarrow q) \vee (q \leftrightarrow r)$
2. $\sim[(p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$
3. $\sim[(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)]$
4. $\sim(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow r)$

5. $\sim[(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)]$

6. $\{p \leftrightarrow q, q \rightarrow r, p \wedge \sim r\}$

7. $\{p \leftrightarrow q, q \rightarrow r, p \vee r\}$

8. $\{p \leftrightarrow q, q \leftrightarrow r, p \rightarrow r\}$

9. $\{\sim(p \leftrightarrow r), \sim(q \leftrightarrow \sim r)\}$

10. $\{\sim(p \vee q), \sim(p \leftrightarrow r), q \leftrightarrow \sim r\}$

II. Yukarıdaki önerme ve önerme kümelerinin varsa doğrulayıcı yorumlamasını bulunuz.

1.4.6 Çözümleyici Çizelge ile Geçerlilik, Tutarlılık, Eşdeğerlik ve İçerme'yi Denetleme

Çözümleyici çizelge, önermeler mantığında bir denetleme yöntemi, hatta bir karar-verme yöntemidir. Bu yönteme dayanarak herhangi bir önerme, önerme kümesi, eşdeğerlik veya içermenin geçerli, tutarlı veya doğru olup olmadığını saptayabiliriz.

(i) A gibi bir önermenin geçerli olup olmadığını saptamak için $\sim A$ önermesinin çözümleyici çizelgesi kurulur. Bu çizelge kapalı ise çizelgenin başlangıç önermesinin doğrulayıcı yorumlaması olamaz. Dolayısıyla başlangıç önermesi olan $\sim A$ önermesi tutarsız olur. O zaman da A önermesinin kendisi geçerli olur. Eğer çizelge açık ise $\sim A$'nın doğrulayıcı yorumlaması olup $\sim A$ tutarlı olur. O zaman A'nın kendisi geçersiz olur. $\sim A$'nın doğrulayıcı yorumlaması A'nın yanlışlayıcı yorumlaması olur.

Örnek olarak

(1) $\sim[p \rightarrow (q \vee r)] \rightarrow (p \wedge \sim q \wedge \sim r)$

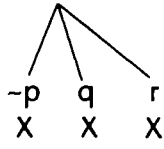
önermesinin geçerli olup olmadığını çözümleyici çizelgesini kurarak denetleyelim. Bu amaçla (1)'in değillemesinin çözümleyici çizelgesini kuruyoruz.

(2) 1. $\sim[\sim[p \to (q \vee r)] \to (p \wedge \sim q \wedge \sim r)]$ (B.Ö.)

2. $\sim[p \to (q \vee r)]$ ┐
4. $\sim(p \wedge \sim q \wedge \sim r)$ ┘ (1)

p ┐
3. $\sim(q \vee r)$ ┘ (2)

$\sim q$ ┐
$\sim r$ ┘ (3)



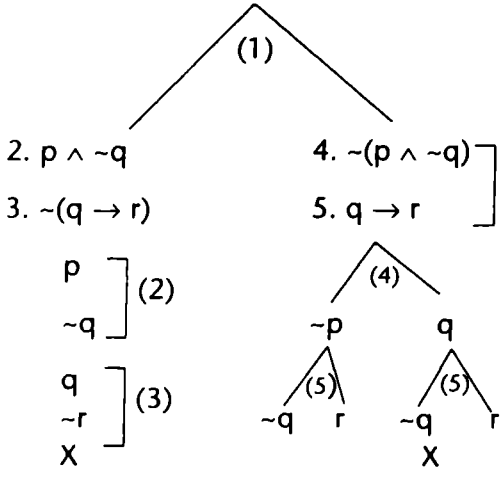
Görüldüğü gibi çizelge kapalı olup başlangıç önermesinin doğrulayıcı yorumlaması yoktur. O halde başlangıç önermesi tutarsız olup (1) önermesi geçerlidir.

İkinci bir örnek olarak

(3) $(p \wedge \sim q) \leftrightarrow (\sim q \to r)$

önermesinin geçerli olup olmadığını araştırıp geçersiz ise yanlışlayıcı yorumlamasını bulalım. Bu amaçla (3)'ün değillemesinin çözümleyici çizelgesini kuruyoruz.

(4) 1. $\sim[(p \wedge \sim q) \leftrightarrow (q \to r)]$ (B.Ö.)



Bu çizelge açık olduğundan (3) geçersizdir. (4)'ün açık olan ikinci yolu gereği (p : Y, q : Y, r : Y) değerlemesini saptayabiliriz. (Burada yolda eksik olan r'ye Y değerini verdik.) Bu değerleme (4)'ün başlangıç önermesinin bir doğrulayıcı yorumlaması olup (3) önermesini bir yanlışlayıcı yorumlamasıdır

(ii) $\{A_1, ..., A_n\}$ gibi bir önerme kümesinin tutarlı olup olmadığını saptamak için bu kümenin çözümleyici çizelgesini kurarız. Çizelge kapalı ise $A_1, ..., A_n$ başlangıç önermelerinin (ortak) doğrulayıcı yorumlaması olmayıp küme tutarsız olur. Eğer çizelge açık ise kümenin doğrulayıcı yorumlaması olup küme tutarlı olur.

Örneğin

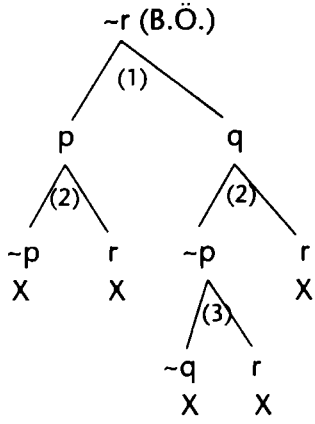
(5) $\{p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r, \sim r\}$

kümesinin tutarlı olup olmadığını bulalım. Bu amaçla kümenin çözümleyici çizelgesini kuruyoruz.

(6) 1. $p \vee q$ (B.Ö.)

2. $p \rightarrow r$ (B.Ö.)

3. $q \rightarrow r$ (B. Ö.)



Çizelge kapalı olduğundan başlangıç önermelerinin (ortak) yorumlayıcı çizelgesi yoktur. Dolayısıyla küme tutarsızdır.

(iii) $A_1, ..., A_n \therefore B$ gibi bir çıkarımın geçerli olup olmadığını saptamak için $\{A_1, ..., A_n \sim B\}$ geçersiz kılıcı kümenin çözümleyici çizelgesi kurulur. Bu çizelge kapalı ise geçersiz kılıcı kümenin doğrulayıcı yorumlaması yoktur. O zaman da çıkarımın geçersiz kılıcı yorumu olmayıp çıkarım geçerli olur. Eğer çözümleyici çizelge açık ise geçersiz kılıcı kümenin doğrulayıcı yorumlaması olur. Bu da çıkarımın geçersiz kılıcı yorumu demektir. Geçersiz kılıcı yorumu olan çıkarım ise geçersizdir.

Örneğin

(7) $p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r \therefore r$

çıkarımın geçerli olup olmadığını bulalım. Bu çıkarımın geçersiz kılıcı kümesi (5)'dir. Oysa (5)'in çözümleyici çizelgesi olan (6) kapalıdır. Demek ki (5)'in doğrulayıcı yorumlaması yoktur. Dolayısıyla (5)'in geçersiz kılıcı yorumlaması olmayıp (5) geçerlidir.

Başka bir örnek olarak

(8) $p \rightarrow q, q \therefore p$

çıkarımın geçerli olup olmadığını araştırıp, geçersiz ise geçersiz kılıcı yorumunu bulalım. Bu amaçla (8)'in geçersiz kılıcı kümesi olan

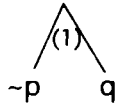
(9) $\{p \rightarrow q, q, \sim p\}$

nin çözümleyici çizelgesini kuralım.

(10) 1. $p \rightarrow q$ (B.Ö.)

q (B.Ö.)

$\sim p$ (B. Ö.)



Bu çizelge açık olduğundan (8) çıkarımı geçersizdir. (10)'un açık olan birinci yolu gereği (p : Y, q : D) değerlemesi saptanır. Bu değerleme ise başlangıç önermelerinin ve dolayısıyla (9) kümesinin doğrulayıcı yorumlamasıdır. Bundan dolayı bu değerleme (8) çıkarımının bir geçersiz kılıcı yorumlamasıdır.

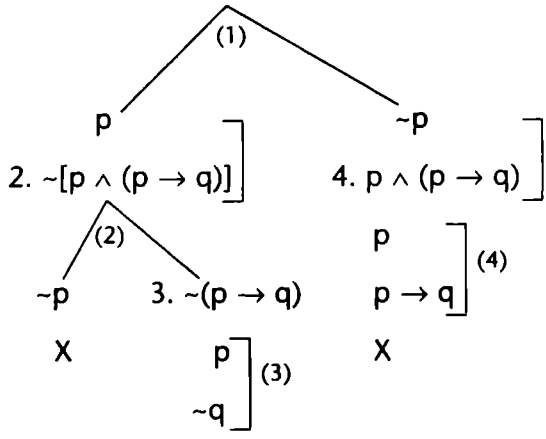
(iv) A≡B gibi bir eşdeğerliğin doğru olup olmadığını bulmak için $A \leftrightarrow B$ karşılıklı-koşulunun geçerli olup olmadığını bakarız. Bu amaçla da $\sim(A \leftrightarrow B)$'nin çözümleyici çizelgesini kurarız. Çizelge kapalı ise eşdeğerlik doğru, açık ise eşdeğerlik yanlış olur.

Örneğin

(11) $p \equiv p \wedge (p \rightarrow q)$

eşdeğerliğinin doğru olup olmadığını bulalım. Bu amaçla , "$p \rightarrow [p \wedge (p \rightarrow q)]$" önermesinin değillemesinin çözümleyici çizelgesini kuruyoruz.

(12) 1. $\sim[p \leftrightarrow [p \wedge (p \rightarrow q)]]$ (B.Ö.)



Çizelge açık olduğundan başlangıç önermesinin doğrulayıcı yorumlaması vardır. Dolayısıyla bu önerme tutarlı olup değillemesi geçersizdir. Dolayısıyla (5) eşdeğerliği yanlıştır.

(v) $A_1, \ldots, A_n \models B$ gibi bir içermenin doğru olup olmadığını saptamak için $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ çıkarımının geçerli olup olmadığını bakarız. Dolayısıyla $\{A_1, \ldots, A_n, \sim B\}$ geçersiz kılıcı kümesinin çözümleyici çizelgesi kurulur. Çizelge kapalı ise içerme doğru, açık ise içerme yanlıştır.

Örneğin

(3) $p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r \models r$

içermenin doğru olup olmadığını bulalım. (13)'ün karşılığı olan çıkarım (7)'dir. (7)'nin ise geçerli olduğunu görmüştük. Demek ki (13) içermesi doğrudur.

ALIŞTIRMALAR

I. §1.3'deki yasaları çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

II. Aşağıdaki önermelerin geçerli olup olmadığını çözümleyici çizelge ile araştırıp geçersiz olanlar için birer yanlışlayıcı yorumlama bulunuz.

1. $\sim p \rightarrow (q \rightarrow r)$
2. $(\sim p \leftrightarrow q) \rightarrow r$
3. $p \vee \sim(q \leftrightarrow r)$
4. $(p \wedge \sim q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow r)$
5. $[p \rightarrow q\ (q \rightarrow r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r]$

III. Aşağıdaki önerme kümelerinin tutarlı olup olmadığını araştırıp tutarlı olanlar için birer doğrulayıcı yorumlama bulunuz.

1. $\{p \vee q, \sim p, \sim q\}$
2. $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r, p \rightarrow r\}$
3. $\{p \leftrightarrow q, q \leftrightarrow r, p \wedge q \wedge r\}$
4. $\{(p \vee q) \rightarrow r, p \wedge \sim r, q \wedge \sim r\}$
5. $\{\sim(p \rightarrow q), \sim(q \leftrightarrow r), \sim(p \leftrightarrow r)\}$

IV. Aşağıdaki eşdeğerliklerin doğru olup olmadığını bulunuz.

1. $p \wedge \sim q \equiv p \leftrightarrow q$
2. $(q \wedge \sim r) \vee (\sim q \wedge r) \equiv q \leftrightarrow r$
3. $\sim[(p \wedge q) \rightarrow r] \equiv p \wedge q \wedge \sim r$
4. $p \leftrightarrow (q \rightarrow r) \equiv (\sim p \vee \sim q) \wedge r$
5. $p \vee \sim(q \rightarrow r) \equiv p \leftrightarrow (r \rightarrow \sim p)$

V. Aşağıdaki içermelerin doğru olup olmadığını bulunuz.

1. $p, q \models p \wedge q$

2. $p \vee \sim q, q \rightarrow r \models p \rightarrow r$

3. $p \leftrightarrow \sim q \models \sim(p \leftrightarrow q)$

4. $(p \rightarrow q) \wedge (q \vee r), p \rightarrow \sim r \models p \rightarrow r$

5. $p \rightarrow q, q \rightarrow r, r \rightarrow s \models \sim s \rightarrow \sim p$

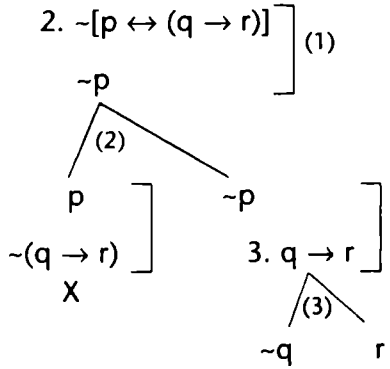
1.4.7 Çözümleyici Çizelge ile Doğruluk Değeri Hesaplaması

Herhangi bir çözümleyici çizelgenin her açık yolu, bu yolu oluşturan önermelerin tümel-evetlemesi sayılır. Ancak açık yolun yalnızca temel önermelerinin tümünün doğru olması, yoldaki öbür önermeleri de doğru kılar. Bu nedenle açık yolu, yalnız yoldaki temel önermelerin tümel-evetlemesi de sayabiliriz. Örneğin

(1) $\sim[p \leftrightarrow (q \rightarrow r)] \wedge \sim p$

nin çözümleyici çizelgesini kuralım.

(2) 1. $\sim[p \leftrightarrow (q \rightarrow r] \wedge \sim p$ (B.Ö.)



Görüldüğü gibi (2) çözümleyici çizelgesinin iki açık yolu vardır. Birincisi

(3) $\sim[p \leftrightarrow (q \rightarrow r)] \wedge \sim p, \sim[p \leftrightarrow (q \rightarrow r)], \sim p, \sim p, q \rightarrow r, \sim q$

dizisinden ikincisi de

(4) $\sim[p \leftrightarrow (q \rightarrow r)] \wedge \sim p, \sim[p \leftrightarrow (q \rightarrow r)], \sim p, \sim p, q \rightarrow r, r$

dizilerinden oluşmaktadır. (3)'ün temel önermeleri

(5) $\sim p, \sim q,$

(4)'ün temel önermeleri de

(6) $\sim p, r$

dir. (5) temel önermelerinin belirlediği değerleme, (2)'nin başlangıç önermesini de kapsayan (3) dizisinin oluşturduğu önermeler kümesinin doğrulayıcı yorumlamasıdır. Nitekim (5)'in belirlediği bir değerleme

(7) (p : Y, q : Y, r : Y)

dir. (Bu değerlemede eksik olan r'ye Y değerini verdik. Sözü geçen (7) değerlemesinde, (4) dizisini oluşturan her önerme D değerini alır. Nitekim aşağıdaki doğruluk hesaplamalarını yapabiliriz.

(8)

(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)
$\sim[p\leftrightarrow(q\rightarrow r)]\wedge\sim p$	$\sim[p\leftrightarrow(q\rightarrow r)]$	$\sim p$	$q \rightarrow r$	$\sim q$
$\sim[Y\leftrightarrow(Y\rightarrow Y)]\wedge\sim Y$	$\sim[Y\leftrightarrow(Y\rightarrow Y)]$	$\sim Y$	$Y\rightarrow Y$	$\sim Y$
$\sim[Y\leftrightarrow D]\wedge D$	$\sim[Y \wedge D]$	D	D	D
$\sim Y \wedge D$	$\sim Y$			
D	D			

(5) temel önermelerinin tümü doğru olduğundan, (4) önermelerinin tümü de doğrudur.

Buna göre her açık yolu, bu yoldaki temel önermelerinin tümel-evetlemesine indirgeyeceğiz. Böylece bir açık yoldaki bütün temel önermeler doğru ise yolun *doğru* olduğunu, yoksa yanlış olduğunu söyleyeceğiz.

Öte yandan çözümleyici çizelgenin tümünü, çizelgenin açık yollarının tikel-evetlemesine indirgeyebiliriz. Nitekim aynı bir çizelgede farklı yolların oluşması önünde sonunda tikel-evetlemenin çözümlemesine dayanır. Çözümlenen önerme, çözümleme sonucu olan ve farklı yollarda bulunan önermelerin tikel-evetlemesidir. Şimdi çözümleyici çizelgeyi, açık yollarının tikel-evetlemesine indirgediğimize göre, açık yollardan en az birinin doğru olması

durumunda çizelgenin *doğru* olduğunu, yoksa *yanlış* olduğunu söyleyeceğiz. Buna göre çizelgenin yanlış olması tüm açık yolların yanlış olmasına bağlı oluyor.

Şimdi bir çözümleyici çizelgenin doğru olmasının gerekli ve yeterli koşulu, başlangıç önermesi veya önermelerinin doğru olmasıdır. Nitekim çizelgenin doğruluğu en az bir açık yolunun doğru olması demektir. Başlangıç önermesi veya önermeleri ise her açık yol üzerindedir. Dolayısıyla doğru olan açık bir yol varsa, başlangıç önermesi veya önermeleri de doğru olur.

Yukarıdaki açıklamalara dayanarak, herhangi bir önermenin verilen bir değerlemedeki doğruluk değerini şöyle hesaplayabiliriz.

(i) Verilen önermenin doğruluk çizelgesini kurarız.

(ii) Çizelgenin açık veya kapalı olduğuna bakarız. Eğer çizelge kapalı ise başlangıç önermesi tutarsız olup tüm değerlemelerde Y değerini alır. Dolayısıyla çizelge kapalı ise önermenin doğruluk değeri Y olur.

(iii) Çizelgede açık yol varsa, açık yollardan birini seçeriz. Seçilen açık yolun temel önermelerini saptarız.

(iv) Saptanan temel önermelerin verilen değerlemedeki doğruluk değerlerini ortaya koyarız.

(v) Saptanan temel önermelerin tümü D değerini almışsa, seçilen açık yol doğru olur. O zaman da çizelgenin kendisi de doğru olup verilen önerme D değerini alır.

(vi) Saptanan temel önermelerin en az biri Y değerini almışsa, seçilen açık yol yanlış olur. O zaman diğer açık yolların doğruluk değerini de araştırmamız gerekir. Eğer doğru olan bir açık yol varsa önerme D değerini alır. Eğer tüm açık yollar yanlış ise, önerme Y değerini alır.

Örneğin (1) önermesinin

(9) (p : D, q : Y, r : Y)

değerlemesindeki doğruluk değerini hesaplayalım. Bu amaçla (1)'in (2) çözümleyici çizelgesine bakarız. Çizelgede iki açık yol vardır. Bu yollardan birincisini seçelim. Bu yoldaki temel önermeler "~p", "~q" dur. (9) değerlemesinde "~p" Y değerini, "~q" ise D değerini alır. Buna göre birinci açık yolun verilen değerlemede yanlış olduğunu söyleyebiliriz. O halde ikinci açık yolu ele alalım. Bu yoldaki temel önermeler "~p", "r" dir. Verilen değerlemede her ikisi Y değerini alır. O halde ikinci yol da yanlıştır. Demek ki (1) önermesi verilen değerlemede Y değerini alıyor.

Dikkat edilirse bir önermenin doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile hesaplamak, doğruluk çizelgeleriyle hesaplamaktan daha kısa değildir. Ancak ilerde göreceğimiz gibi doğruluk değerinin çözümleyici çizelge ile hesaplama yöntemini niceleme mantığında da kullanacağız.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin verilen değerlemedeki doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile hesaplayınız.

Önerme	Değerleme
1. $p \leftrightarrow (q \rightarrow \sim r)$	(p : D, q : D, r : Y)
2. $\sim p \leftrightarrow [\sim r \rightarrow (q \vee r)]$	(p : Y, q : Y, r : D)
3. $[\sim q \rightarrow (p \wedge q)] \rightarrow (q \wedge \sim r)$	(p : Y, q : D, r : D)
4. $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \wedge (\sim p \rightarrow s)$	(p : Y, q : D, r : Y, s: Y)
5. $r \rightarrow [(p \vee \sim s) \rightarrow (q \wedge r)]$	(p : D, q : Y, r : Y, s : D)

1.4.8 Çözümleyici Çizelge ile Tikel-Evetlemeli Yasal Biçimin ve Tam-Yasal Biçimin Bulunması

Çözümleyici çizelgenin açık yollarının tikel-evetlemesine, her açık yolu da yoldaki temel önermelerin tümel-evetlemesine indirgenebildiğini görmüştük. Temel önermelerin tümel evetlemesinden oluşan önermelerin tikel evetlemesine *tikel-evetlemeli yasal biçim* denir. Örneğin

(1) $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim r) \vee (q \wedge r)$

tikel-evetlemeli bir yasal biçimdir. Nitekim (1) önermesi bir tikel-evetleme olup her bileşeni temel önermelerin tümel evetlemesidir. İkinci bir örnek olarak

(2) $(p \wedge \sim q) \vee \sim p$

tikel-evetlemesini göz önüne alalım. (2)'nin birinci bileşeni iki bileşenli bir tümel evetlemedir. İkinci bileşenini ise tek bileşenli bir tümel evetleme sayıyoruz.

(3) $A_1 \wedge ... \wedge A_n$

tümel evetlemesi ile

(4) $A_1 \vee ... \vee A_n$

tikel-evetlemesini ele aldığımızda n = 1 durumunu da kabul ederek *tek bileşenli* tümel-evetlemelerin ve tikel-evetlemelerin varlığını kabul ediyoruz. Buna göre gerek (2), gerekse

(5) $p \wedge \sim q$

birer tikel-evetlemeli yasal biçimdir. (2)'nin ikinci bileşeni tek bileşenli tümel-evetleme, (5)'in kendisi ise tek bileşenli bir tikel-evetlemedir.

"p" ya da "~p" gibi bir temel önerme de bir tikel-evetlemeli yasal biçimdir. Nitekim temel önerme, her bileşeni tek bileşenli bir tümel evetlemeden oluşan tek bileşenli bir tikel-evetleme sayılabilir.

(6) $(p \wedge \sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (q \wedge \sim r)$

gibi bir önermeyi bir tikel-evetlemeli yasal biçim saymayız. Nitekim $p \wedge \sim p \wedge q$ önermesi tutarsızdır. O zaman da (6) önermesi

(7) $(\sim p \wedge q) \vee (q \wedge \sim r)$

ile eşdeğer olduğundan (6)'yı (7)'ye indirgeriz. (7) ise gerçekten bir tikel-evetlemeli yasal biçimdir. Böylece tikel-evetlemeli yasal biçimlerin tüm ana bileşenlerinin tutarlı olmasını sağlarız. O zaman da tikel-evetlemeli yasal biçimin tümü de tutarlı olur. Doğrulayıcı yorumlama bulmak için herhangi

bir ana bileşen seçip ana bileşende geçen her temsilci harfle değillenmemiş bir temel önermeye aitse D değerini, değillenmiş bir temel önermeye aitse Y değerini veririz. Örneğin (7)'nin doğrulayıcı yorumlaması, birinci ana bileşenini seçtiğimizde (p : Y, q : D) biçiminde, ikinci ana bileşeni seçtiğimizde (q : D, r : Y) biçiminde olur.

Her çözümleyici çizelge, belli bir tikel-evetlemeli yasal biçimi belirler. Bu amaçla her açık yoldaki temel önermelerin tümel evetlemesi oluşturulur. Sonra da bu tümel-evetlemelerin tikel-evetlemesini elde ederiz. Örneğin

(8) $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

önermesinin çözümleyici çizelgesini kuralım.

(9) 1. $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ (B.Ö.)



2. $\sim(p \rightarrow q)$ r

p
~q (2)

Birinci açık yoldaki temel önermeler "p" ile "~q", ikinci açık yoldaki temel önerme "r" dir. Buna göre çizelgenin belirlediği tikel-evetlemeli yasal biçimin

(10) $(p \wedge \sim q) \vee r$

biçiminde olduğunu söyleyebiliriz.

Dikkat edilirse §1.4.7'deki (2) çözümleyici çizelgesi

(11) $(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge r)$

tikel-evetlemeli yasal biçimi belirler.

Şimdi A gibi bir önermenin çözümleyici çizelgesinin belirlediği tikel-evetlemeli yasal biçim A ile eşdeğerdir. Bu nedenle belirlenen yasal biçime, *A önermesinin tikel-evetlemeli yasal biçimi* denir. Buna göre verilen bir önermenin tikel-evetlemeli yasal biçimini bulmak için bu önermenin çözümleyi-

ci çizelgesini kurup çizelgenin belirlediği tikel-evetlemeli yasal biçimi oluştururuz.

Her bileşeni aynı temsilci harflerden oluşan bir tikel-evetlemeli yasal biçime *tikel-evetlemeli tam yasal biçim* denir. Örneğin (8) ve (9) tam yasal biçim niteliğinde değildir. Öte yandan

(12) $(\sim p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \sim q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim r)$

bir tikel-evetlemeli tam-yasal biçimdir.

Verilen bir önermenin tikel-evetlemeli tam-yasal biçimini elde etmek için önce önermenin çözümleyici çizelgesini kurarız. Sonra da her açık yolun altına varsa eksik temsilci harf ile değillemesinin tikel-evetlemesini yazarız. Örneğin belli bir açık yolda p eksikse, bu yolun altına $p \vee \sim p$ tikel evetlemesi yazılır. $p \vee \sim p$ bir totoloji olduğundan çözümleyici çizelgede açık bir yola eklenebilir. Ondan sonra da çözümleme işlemi tamamlanana kadar sürdürülür. Elde edilen yeni çözümleyici çizelgenin belirlediği yasal biçim, tikel-evetlemeli tam yasal biçimdir. Tam olmayan bir tikel-evetlemeli yasal biçimi tam yasal biçime çevirmek için verilen yasal biçimin çözümleyici çizelgesini kurup eksikleri ekleriz. Örneğin (7)'yi tikel-evetlemeli tam yasal biçime çevirelim. Bu amaçla (7)'nin çözümleyici çizelgesini kuralım.

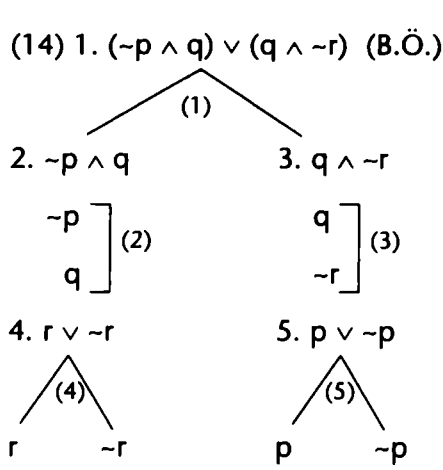
(13) 1. $(\sim p \wedge q) \vee (q \wedge \sim r)$ (B.Ö.)

(1)

2. $\sim p \wedge q$ 3. $q \wedge \sim r$

$\sim p$, q (2) q, $\sim r$ (3)

Birinci açık yolda eksik olan r'ye karşılık "$r \vee \sim r$" yi, ikinci açık yolda eksik olan p'ye karşılık "$p \vee \sim p$" yi ekleyelim. Böylece (13)'den



elde edilir. (14) çizelgesi de aşağıdaki tikel-evetlemeli tam yasal biçim belirler:

(15) (~p ∧ q ∧ r) ∨ (~p ∧ q ∧ ~r) ∨ (p ∧ q ∧ ~r) ∨ (~p ∧ q ∧ ~r)

(15) in ikinci ile dördüncü ana bileşeni özdeş olduğundan

(16) (~p ∧ q ∧ r) ∨ (~p ∧ q ∧ ~r) ∨ (p ∧ q ∧ ~r)

biçiminde kısaltılır. Her ana bileşende temel önermeler alfabetik sıraya göre sıraladık.

Her tikel-evetlemeli yasal biçim tutarlı olduğundan tutarsız önermelerin tikel-evetlemeli yasal biçimi (dolayısıyla da tam yasal biçimi) yoktur. Nitekim tutarsız bir önermenin çözümleyici çizelgesi kapalıdır. Kapalı bir çözümleyici çizelge ise hiçbir tikel-evetlemeli yasal biçimi belirlemez.

Bir önermenin tikel-evetlemeli tam-yasal biçimi, bu önermenin tüm doğrulayıcı yorumlamalarını belirler. Nitekim tam-yasal biçimin her ana bileşeni önermede geçen tüm temsilci harflerin bir değerlemesini belirler. Bu değerlemeler önermeyi doğru kılar, dolayısıyla önermenin doğruluk çizelgesinde önermeyi doğru kılan değerlemelerle özdeştirler. Örneğin (7)'nin doğruluk çizelgesini kuralım.

(17)	p q r	(~p ∧ q) ∨ (q ∧ ~r)
1.	D D D	Y
2.	D D Y	D
3.	D Y D	Y
4.	D Y Y	Y
5.	Y D D	D
6.	Y D Y	D
7.	Y Y D	Y
8.	Y Y Y	Y

(15)'nin belirlediği değerlemeler, önermeyi doğru kılan 2'nci, 5'inci ve 6'ncı değerlemelerdir. Geri kalan değerlemeler önermeyi yanlış kılar. Dolayısıyla (16) tikel-evetlemeli tam-yasal biçimine dayanarak (17) doğruluk çizelgesini kurabiliriz. Bu amaçla tam-yasal biçimin belirlediği değerlemelerin hizasında önermenin altına D değerini, öteki değerlemelerin hizasına ise Y değerini yazarız. Elde edilen çizelge (7)'nin doğruluk çizelgesi olan (17)'dir.

Dikkat edilirse (17) doğruluk çizelgesine dayanarak (16) tikel-evetlemeli tam yasal biçimi bulabiliriz. Bu amaçla (17)'de önermeyi doğru kılan değerlemelerin karşılığı olan ana-bileşenleri oluştururuz. Bu karşılığı aşağıda gösteriyoruz.

Değerleme	Tikel-evetlemeli tam-yasal biçiminin ana bileşeni
1. D D D	p ∧ q ∧ r
2. D D Y	p ∧ q ∧ ~r
3. D Y D	p ∧~q ∧ r
4. D Y Y	p ∧ ~q ∧ ~r
5. Y D D	~p ∧ q ∧ r
6. Y D Y	~p ∧ q ∧ ~r
7. Y Y D	~p ∧ ~q ∧ r
8. Y Y Y	~p ∧ ~q ∧ ~r

Böylece (17)'ye dayanarak (15)'i elde ederiz. Tutarsız bir önermenin tikel-evetlemeli tam-yasal biçimi yoktur, doğruluk çizelgesinde de önerme tüm değerlemeler için Y değerini alır.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki önermelerin çözümleyici çizelgesine dayanarak varsa tikel-evetlemeli yasal biçimini bulunuz.

1. $\sim p \leftrightarrow (p \rightarrow q)$
2. $(\sim p \leftrightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$
3. $\sim[\sim r \rightarrow (p \rightarrow \sim r)]$
4. $[(\sim p \wedge q) \leftrightarrow r] \rightarrow p$
5. $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow p$

II. Yukarıdaki önermelerin varsa tikel-evetlemeli tam-yasal biçimini bulunuz.

1.4.9 Çözümleyici Çizelge İkilisi ile Tümel-Evetlemeli Yasal Biçim ile Tümel-Evetlemeli Tam-Yasal Biçimin Bulunması

Bundan böyle "Tikel-Evetlemeli Yasal Biçim" terimini "$\vee$Y" işaretiyle, "Tikel-Evetlemeli Tam-Yasal Biçimi" terimini de "$\vee$TY" işaretiyle kısaltacağız. Şimdi de ikinci türden bir yasal biçim tanımlayacağız. Buna *Tümel-Evetlemeli Yasal Biçim* diyor ve "$\wedge$Y" işaretiyle kısaltıyoruz.

> $\wedge$Y, her ana bileşeni temel önermelerin bir tikel-evetlemesi olan bir tümel-evetleme'dir.

(1) $(p \vee \sim q \vee \sim r) \wedge (\sim q \vee r) \wedge (p \vee \sim r)$

bir $\wedge$Y'dir. Nitekim her ana bileşeni bir tikel-evetleme olan bir tümel-evetlemedir. Her ana bileşenin ana bileşenleri ise temel önermelerdir. Öte yandan

(2) $(p \vee \sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee r) \wedge (p \vee \sim r)$

bir $\wedge$Y değildir. Nitekim $p \vee \sim p \vee q$ geçerli olup (2) önermesi

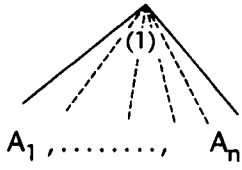
(3) $(\sim q \vee r) \wedge (p \vee \sim r)$

ile eşdeğerdir. Yani (2)'yi (3)'e indirgeyebiliriz. Buna göre $\wedge$Y'nin her ana

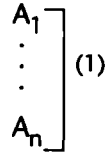
bileşenini geçersiz olmalıdır. O zaman da ∧Y'nin kendisi geçersiz olur. Yanlışlayıcı yorumlamasını bulmak için herhangi bir ana bileşenini seçeriz. Buna temsilci harflere, içinde geçtikleri temel önermeleri yanlış kılacak değerler veririz. Örneğin (1)'in birinci ana bileşenini seçip p'ye Y, q'ya D ve r'ye D değerini verirsek, "p∨~q∨~r" ana bileşeni Y değerini alır. O zaman da (1) önermesi söz konusu değerlemede Y değerini alır. Böylece (1)'in geçersiz olduğunu görüyoruz.

Şimdi herhangi bir önermenin ∧Y'sini (yani o önerme ile eşdeğer olan bir ∧Y'yi) bulmak için *çözümleyici çizelge ikilisi* veya *düal çözümleyici çizelge* denilen yeni bir çözümleyici çizelge tanımlayacağız. Yeni çizelgenin temel çözümleme kuralları şöyledir.

1. $1.\ A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$

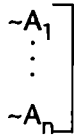


(2) $1.\ A_1 \vee \ldots \vee A_n$



Dikkat edilirse çözümleme biçimleri değiş tokuş edilmiştir. Türetilmiş çözümleme kuralları ise şöyledir.

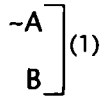
(3) $1.\ \sim(A_1 \wedge \ldots \wedge A_n)$



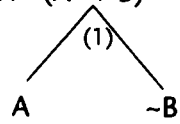
(4) $1.\ \sim(A_1 \vee \ldots \vee A_n)$



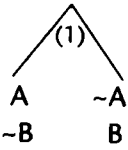
(5) $1.\ A \rightarrow B$



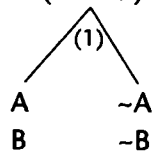
(6) $1.\ \sim(A \rightarrow B)$



(7) $1.\ A \leftrightarrow B$



(8) $1.\ \sim(A \leftrightarrow B)$



Gene (3), (4), (5), (6), (7) ve (8) çizelgeleri, (1) ve (2)'den elde edilmiştir.

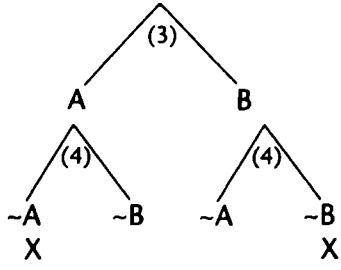
(7) ile (8) kurallarını, (1) ve (2) temel kurallarına dayanarak şöyle açıklayabiliriz.

(9) 1. $A \leftrightarrow B$

2. $(A \wedge B) \vee (\sim A \wedge \sim B)$ (1)

3. $A \wedge B$ ⎤ (2)

4. $\sim A \wedge \sim B$ ⎦



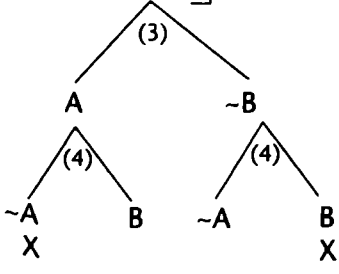
(9) çizelgesi, ara satırları atlarsak (7) biçimine indirgenir.

(10) 1. $\sim(A \leftrightarrow B)$

2. $(A \wedge \sim B) \vee (\sim A \wedge B)$ (1)

3. $A \wedge \sim B$ ⎤ (2)

4. $\sim A \wedge B$ ⎦



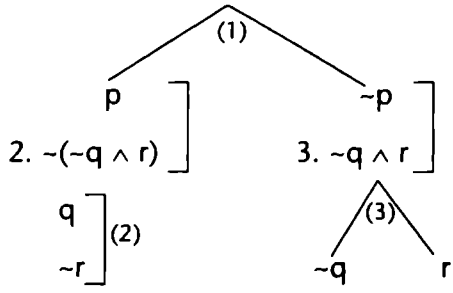
(10) çizelgesi, ara satırları atlarsak, (8) biçimine indirgenir.

Örneğin

(11) $p \leftrightarrow (\sim q \wedge r)$

önermesinin çözümleyici çizelge ikilisini kuralım.

(12) 1. $p \leftrightarrow (\sim q \wedge r)$ (B.Ö.)



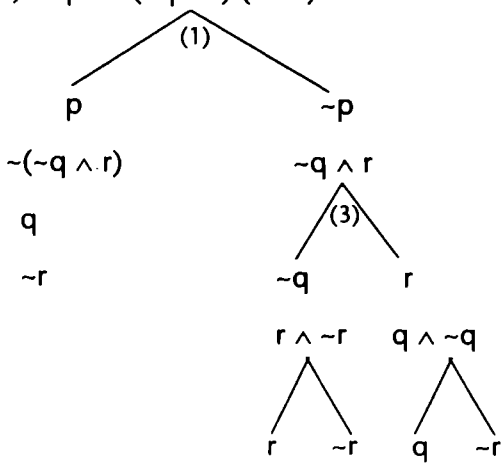
Her açık yol, üzerindeki temel önermelerin tikel-evetlemesi sayılır. Çizelgenin kendisi de yolların tümel-evetlemesi sayılır. Buna göre çözümleyici çizelgenin ikilisi belli bir $\wedge$Y belirler. Örneğin (12)'nin belirlediği $\wedge$Y:

(13) $(p \vee q \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee r)$

dir. (13), (11) ile eşdeğer olduğundan, (13)'ün (11) önermesinin $\wedge$Y'si olduğunu söyleriz.

Bütün ana bileşenleri aynı temsilci harflerinden oluşan $\wedge$Y'ye *tümel-evetlemeli tam-yasal biçim* veya kısaca $\wedge$TY diyoruz. Bir $\wedge$Y'yi $\wedge$TY'ye dönüştürmek için $\wedge$Y'yi belirleyen çözümleyici çizelge ikilisinin açık yollarının altına eksik harfleri şöyle katarız: p eksik ise $p \wedge \sim p$, q eksik ise $q \wedge \sim q$, vb. eklenir. Örneğin (13)'ü $\wedge$TY'ye çevirlim. Bu amaçla (12)'yi

(14) 1. $p \leftrightarrow (\sim q \wedge r)$ (B.Ö.)



biçimine çevirebiliriz. (14) ise aşağıdaki $\wedge$TY'yi belirler.

$(p \vee q \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee r) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee \sim r) \wedge (\sim p \wedge q \wedge r)$ geçerli önermelerin $\wedge$Y'si özel olarak $\wedge$TY'si yoktur.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki önermelerin çözümleyici çizelge ikilisini kurunuz.

1. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
2. $(p \vee q) \rightarrow r$
3. $\sim[(p \wedge q) \wedge \sim p]$
4. $\sim[p \leftrightarrow (q \vee r)$
5. $(p \vee \sim q) \rightarrow \sim(q \rightarrow r)$

II. Yukardaki önermelerin sonra $\wedge$Y'sini bulunuz.

III. Yukarıdaki önermelerin sonra $\wedge$TY'sini bulunuz.

1.4.10 İkililik

A ile B iki önerme olduğundan $p_1, \ldots, p_m$ önerme temsilcileri A ile B'nin önerme temsilcilerinin birleşimi olsun. A ile B'nin $p_1, \ldots, p_m$'nin değerlemelerine dayalı doğruluk çizelgesini kuralım. Böylece

(1)

$p_1 \cdots p_m$	A
D ... D	d_1 (A)
D ... Y	d_2 (A)
⋮ ⋮ ⋮	⋮
Y ... Y	d_2m(A)

(2)

$p_1 \cdots p_m$	B
D ... D	d_1(B)
D ... Y	d_2(B)
⋮ ⋮ ⋮	⋮
Y ... Y	d_2m (B)

biçimindeki çizelgeleri elde ederiz. (2) çizelgesinde satırların sırasını tersine çevirerek

(3)

$p_1 \dots p_m$	B
Y ... Y	d_2 m(B)
⋮ ⋮ ⋮	⋮
D ... Y	d_2 (B)
D ... D	d_1 (B)

çizelgesini elde ederiz. Şimdi (3) doğruluk çizelgesi, (1) doğruluk çizelgesinde geçen tüm D ile Y işaretlerinin tersine çevrilmesiyle (yani her D yerine Y, her Y yerine D konulmasıyla elde edilen çizelgeyle özdeş ise B önermesine A önermesinin bir *ikili*'si (veya *düal*'i) diyor ve bunu kısaca $\mathfrak{d}$(B, A) biçiminde dile getiriyoruz. "$\mathfrak{d}$", B ile a arasındaki bir bağıntıyı dile getirmektedir.

Örneğin "$p \wedge q$" önermesi "$p \vee q$" nun bir ikilisidir. Nitekim "$p \wedge q$" nun doğruluk çizelgesi olan

(4)

p q	$p \wedge q$
D D	D
D Y	Y
Y D	Y
Y Y	Y

çizelgesinde D ile Y'leri değiş tokuşuyla elde edilen çizelge

(5)

p q	$p \vee q$
Y Y	Y
Y D	D
D Y	D
D D	D

$p \vee q$'nun doğruluk çizelgesinin aşağıdan yukarıya dizilişiyle elde edilen çizelgedir. O halde

(6) $\mathfrak{d}(p \vee q, p \wedge q)$

doğrudur.

Genel olarak B, A'nın bir ikilisi olsun. $p_1, \dots, p_n$, A ile B'de geçen önerme

temsilcilerinin birleşimi olduğunda, A ile B'yi $A(p_1, ..., p_n)$ ve $B(p_1, ..., p_n)$ biçiminde dile getirelim. O zaman

(4) $\mathfrak{a}(A, B)$ ancak ve ancak $A(p_1, ..., p_n) \equiv \sim B(\sim p_1, ..., \sim p_n)$

elde edilir. Nitekim $\sim B(\sim p_1, ..., \sim p_n)$'nin doğruluk çizelgesi, $A(p_1, ..., p_n)$'nin doğruluk çizelgesinde D ile Y'nin değiş tokuşuyla elde edilir. Örneğin $\mathfrak{a}(p \vee q, p \wedge q)$, $p \vee q \equiv \sim(\sim p \wedge \sim q)$ anlamına gelir. (4)'ü, A ile B önermeleri arasındaki ikililik bağıntısının ("$\mathfrak{a}$" nın) tanımı sayıyoruz. Örneğin "$p \wedge q$" nun (4) gereği ikilisi $\sim(\sim p \wedge \sim q)$ ile eşdeğer bir önermedir. Gerçekten $p \wedge q$'nun ikilisi olan $p \vee q$, $\sim(\sim p \wedge \sim q)$ ile eşdeğerdir.

$\mathfrak{a}$ ikililik bağıntısının başlıca özelliklerini şöyle dile getirebiliriz. (4) tanımına dayanarak $\sim A(\sim p_1, ..., \sim p_n)$ önermesini $A(p_1, ..., p_n)$ önermesinin bir ikilisi olduğu sonucuna varıyoruz. Nitekim $\mathfrak{a}[\sim A(\sim p_1,...,\sim p_n), A(p_1,...,p_n)]$ önermesi, (4) tanımı gereği $\sim A(\sim p_1,...,\sim p_n) \equiv \sim A(\sim p_1, ...,\sim p_n)$ anlamına geliyor. Bu son eşdeğerlik doğru olduğundan $\mathfrak{a}[\sim A(\sim p_1,...,\sim p_n), A(p_1,...,p_n)]$, olur.

(5) $\mathfrak{a}(B, A)$ ise, $\mathfrak{a}(A, B)$ ikililiğin bakışımlılığı)

(6) $\mathfrak{a}(B, A)$ ise $\mathfrak{a}(C, B)$ ise, $C \equiv A$ (bir önermenin ikilisinin ikilisi o önermeyle eşdeğerdir.)

(5)'i şöyle ispatlarız. $B(p_1, ..., p_n)$, $A(p_1, ..., p_n)$'nin ikilisi olsun. O zaman $B(p_1, ..., p_n) \equiv \sim A(\sim p_1, ..., \sim p_n)$ olur. $p_1, ..., p_n$ yerine $\sim p_1, ..., \sim p_n$ konulursa eşdeğerlik bozulmaz. Dolayısıyla $B(\sim p_1,...,\sim p_n) \equiv \sim A(\sim\sim p_1, ..., \sim\sim p_n)$ yani $B(\sim p_1, ..., \sim p_n) \equiv \sim A(p_1, ..., p_n)$ olur. Bundan da $\sim B(\sim p_1, ..., \sim p_n) \equiv \sim\sim A(p_1, ..., p_n)$ yani $A(p_1, ..., p_n) \equiv \sim B(\sim p_1, ..., \sim p_n)$ olur. Bu $\mathfrak{a}(A, B)$ demektir. Örneğin $\mathfrak{a}(p \vee q, p \wedge q)$'den $\mathfrak{a}(p \wedge q, p \vee q)$ elde edilir. (6)'yı da şöyle ispatlayabiliriz. $\mathfrak{a}(B, A)$ ve $\mathfrak{a}(C, B)$ olsun. O zaman $B(p_1, ..., p_n) \equiv \sim A(\sim p_1, ..., \sim p_n)$ ve $C(p_1, ..., p_n) \equiv \sim B(\sim p_1, ..., p_n)$ olur. O halde $C(p_1, ..., p_n) \equiv \sim B(\sim p_1, ..., \sim p_n) \equiv \sim\sim A(\sim\sim p_1, ..., \sim\sim p_n) \equiv A(p_1, ..., p_n)$ olur. Örneğin $\mathfrak{a}(p \vee q, p \wedge q)$ ve $\mathfrak{a}[\sim(\sim p \wedge \sim q), p \wedge q]$'dur. (6)'ya uygun olarak da $\sim(\sim p \wedge \sim q) \equiv p \vee q$'dur.

Genellikle $\mathfrak{a}(B, A)$ ise B, A'dan farklıdır, hatta B, A ile eşdeğer değildir. Ancak kendi ikilisi olan önermeler vardır. Bunlara "kendiyle-ikili önerme diyoruz.

(7) A *kendiyle -ikili*'dir ancak ve ancak $\mathcal{K}(A, A)$ ise

Bütün temel önermeler (ve yalnız temel önermeler) kendiyle-ikilidir. Nitekim A(p) bir temel önerme olsun. O zaman A(p) ya p'dir ya da ~p'dir. Birinci halde ~A(~p), ~~p dolayısıyla p ile eşdeğerdir. İkinci halde ~A(~p), ~~~p dolayısıyla ~p ile eşdeğerdir. Her iki halde ~A(~p), A ile eşdeğer olup $\mathcal{K}(A, A)$ olur.

Eğer $B(p_1, ..., p_n)$, $A(\sim p_1, ..., \sim p_n)$ ile eşdeğer ise B ye A'nın *ters ikilisi* veya *kontra düal*'i denir.

Bunu da $T_{\mathcal{K}}(B, A)$ biçiminde dile getireceğiz.

(8) $T_{\mathcal{K}}(B(p_1, ..., p_n), A(p_1, ..., p_n)$ ancak ve ancak

$B(p_1, ..., p_n) \equiv A(\sim p_1, ..., \sim p_n)$ ise.

(8)'i $T_{\mathcal{K}}$'in tanımı sayıyoruz. Örneğin $\sim p \wedge \sim q$, $p \wedge q$'nun, $\sim p \vee \sim q$'da $p \vee q$'nun ters ikilisidir. $T_{\mathcal{K}}$ ile $\mathcal{K}$ bağlantıları arasında aşağıdaki ilişkiler vardır.

(9) $T_{\mathcal{K}}(B, A)$ ancak ve ancak $\mathcal{K}(\sim B, A)$ ise.

(10) $\mathcal{K}(B, A)$ ancak ve ancak $T_{\mathcal{K}}(\sim B, A)$ ise.

Örneğin $\sim p \wedge \sim q$, $p \wedge q$'nun ters ikilisidir. (9)'a uygun olarak da $(\sim(\sim p \wedge \sim q)$, $p \wedge q$'nun ikilisidir.

Her temel önermenin ters ikilisi önermenin değillemesi ile eşdeğerdir. Nitekim "p" nin gerçek ters ikilisi gerekse değillemesi "~p" dir. Aynı biçimde "~p" nin gerek ters ikilisi gerekse değillemesi "~~p" dir.

Genellikle bir önermenin ters ikilisi, önerme ile eşdeğer değildir. Ama istismarlar da vardır. Örneğin "$p \leftrightarrow q$" önermesinin bir ters ikilisi "$\sim p \leftrightarrow \sim q$" önermesidir. Oysa $p \leftrightarrow q \equiv \sim p \leftrightarrow \sim q$. O zaman da "$p \leftrightarrow q$" önermesi "$p \leftrightarrow q$" nun bir ters ikilisi olur.

$T_{\mathcal{K}}(A, A)$ koşulunu yerine getiren bir A önermesine *kendiyle ters-ikili* diyoruz.

Örneğin sözü geçen "$p \leftrightarrow q$" önermesi kendiyle ters-ikilidir.

İçinde yalnız "~", "$\wedge$", "$\vee$" eklemleri geçen bir önermenin bir ikilisi, "$\wedge$"

le "$\vee$" nin değiş tokuşu ile elde edilir. Örneğin "$p \wedge q$" nun ikilisi, "$\wedge$" yerine "$\vee$" nin konulmasıyla elde edilen "$p \vee q$" önermesidir. Daha karmaşık bir örnek olarak

(11) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

önermesini ele alalım. (11)'in bir ikilisi, (11)'de "$\wedge$" ile "$\vee$" nin değiş tokuşuyla elde edilen

(12) $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$

önermesidir. Nitekim (4) tanımına dayanarak (11)'in bir ikilisinin

(13) $\sim[(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim r)]$

biçiminde olduğunu söyleyebiliriz. Oysa (13), (12) ile eşdeğerdir. Genel olarak $A(p_1, ..., p_n)$ yalnız "$\sim$", "$\wedge$", "$\vee$" $p_1, ... p_n$'den oluşan bir önerme ise ve B önermesi, A'dan "$\wedge$" ile "$\vee$" nin değiş tokuşuyla elde edilen önerme ise §1.3'deki Shannon yasası gereğince

(14) $\sim A(\sim p_1, ..., \sim p_n) \equiv B$

olur. Örneğin A önermesi (11) olsun. O zaman B önermesi (12) olur. $\sim A(\sim p_1, ..., \sim p_m)$ önermesi de

(15) $\sim[(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge \sim r)]$

olur. (15) önermesine ise Shannon yasasını uygulayıp

$(\sim\sim p \vee \sim\sim q) \wedge (\sim\sim p \vee \sim\sim r)$

önermesini, dolayısıyla da (12) önermesini elde ederiz.

Şimdiye kadar yapılan açıklamalara dayanarak verilen bir önermenin üç ayrı yöntemle bir ikilisini elde edebiliyoruz. Bu üç yöntemi sistematik olarak şöyle dile getirebiliriz.

1'inci yöntem

Verilen A önermesinin içinde geçen temsilci harflerine göre doğruluk çizelgesini kurarız. Sonra da çizelgede D ile Y harflerini değiş tokuş ederiz. Elde edilen yeni doğruluk çizelgesi belli bir $\vee$TY belirler. Bu $\vee$TY, A'nın bir ikilisidir. Örneğin

(16) $p \leftrightarrow (p \vee q)$

önermesinin doğruluk çizelgesine dayanarak bir ikilisini bulalım. (16)'nın doğruluk çizelgesi şöyledir.

(17)

p q	$p \leftrightarrow (p \vee q)$
D D	D
D Y	D
Y D	Y
Y Y	D

(17) çizelgesine D ile Y'leri değiş tokuş edersek

(18)

p q	
Y Y	Y
Y D	Y
D Y	D
D D	Y

doğruluk çizelgesini elde ederiz. (18) ise

(19) $p \wedge \sim q$

$\vee$TY'sini belirler. Demek ki (19), (16)'nın bir ikilisidir.

2'nci yöntem

İçinde geçen önerme temsilcileri $p_1, \ldots, p_n$ olan $A(p_1, \ldots, p_n)$ gibi bir önermenin bir ikilisi,

(20) $\sim A(\sim p_1, \ldots, \sim p_n)$

biçimindeki önermedir. Nitekim $\mathscr{A}[\sim A(\sim p_1, \ldots, p_n, A], \mathscr{A}$ bağıntısının tanımının dolaysız bir sonucudur.

Örneğin

(21) $\sim[\sim(p \vee \sim r) \leftrightarrow \sim[q \rightarrow \sim(r \vee s)]] \vee (q \wedge \sim s)$

önermesinin bir ikilisi

(22) $\sim[\sim(\sim p \vee r) \leftrightarrow \sim[\sim q \rightarrow \sim(\sim r \vee \sim s)]] \vee (\sim q \vee s)]$,

önermesidir.

Burada $\sim\sim r$ yerine r, $\sim\sim s$ yerine s yazdık.

3'üncü yöntem

A herhangi bir önerme olduğunda, varsa "$\rightarrow$" ile "$\leftrightarrow$" eklemlerini aşağıdaki yasalar gereği eleriz.

(23) $A \rightarrow B \equiv \sim A \vee B$

(24) $\sim(A \rightarrow B) \equiv A \wedge \sim B$

(25) $A \leftrightarrow B \equiv (A \wedge B) \vee (\sim A \wedge \sim B)$

(26) $\sim(A \leftrightarrow B) \equiv (A \wedge \sim B) \vee (\sim A \wedge B)$

Ondan sonra elde edilen önermede "$\wedge$" ile "$\vee$" eklemlerini değiş tokuş ederiz. Böylece elde edilen önerme verilen A önermesinin bir ikilisidir. Örneğin

(27) $\sim[p \rightarrow \sim(q \leftrightarrow r)]$

önermesinin bir ikilisini bulalım. Önce "$\rightarrow$" ile "$\leftrightarrow$" yi eliyoruz.

$\sim[p \rightarrow \sim(q \leftrightarrow r)] \equiv p \wedge \sim\sim(q \leftrightarrow r) \equiv p \wedge (q \leftrightarrow r) \equiv p \wedge [(p \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim r)]$.

Sonuncu önermede "$\wedge$" ile "$\vee$" yi değiş tokuş edelim. Elde edilen

(28) $p \vee [(q \vee r) \wedge (\sim q \vee \sim r)]$

önermesi verilen (27) önermesinin bir ikilisidir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin üç ayrı yönteme göre bir ikilisini bulunuz.

1. $\sim(q \leftrightarrow \sim r)$

2. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

3. $\sim[p \leftrightarrow (q \wedge \sim r)]$

4. $p \rightarrow [q \vee (p \vee \sim r)]$

5. $\sim(p \vee \sim r) \rightarrow [p \rightarrow (q \vee r)]$

1.4.11 Çözümleyici Çizelge ve Çözümleyici Çizelge İkilisiyle Verilen Bir Önermenin İkilisinin Bulunması

Çözümleyici çizelge ikilisinde, "$\wedge$" ile "$\vee$" nin çözümleme kurallarında çözümleme biçimleri değiş tokuş edilmiştir. Bu nedenle yeni çizelgeye birincisinin "ikili"si diyoruz. Her iki türden çözümleyici çizelge, verilen bir önermenin ikilisini elde etmeye yarayan yeni birer yöntem sağlamaktadır.

4'üncü yöntem

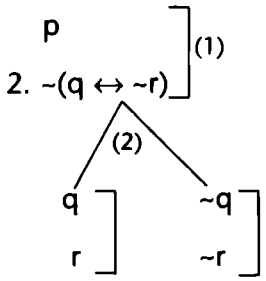
Verilen A gibi bir önermenin bir ikilisini bulmak için A'nın çözümleyici çizelgesini kurarız. Elde edilen çözümleyici çizelgede her açık yolda bulunan temel önermelerin tikel-evetlemesi oluşturulur. Sonra da bu tikel-evetlemelerin tümel evetlemesi elde edilir. Bu tümel evetleme bir $\wedge$Y'dir. Söz konusu $\wedge$Y ise verilen A önermesinin bir ikilisidir. Nitekim bu $\wedge$Y, A'nın çözümleyici çizelgesinin belirlediği $\vee$Y'nin (üçüncü yöntem gereği) ikilisidir. Oysa $\vee$Y, A ile eşdeğerdir. Dolayısıyla $\wedge$Y, A'nın ikilisidir.

Örneğin

(1) $\sim[p \rightarrow (q \leftrightarrow \sim r)]$

önermesinin $\wedge$Y biçimindeki bir ikilisini bulalım. Bu amaçla (1)'in çözümleyici çizelgesini kuralım.

(2) 1. $\sim[p \rightarrow (q \leftrightarrow \sim r)]$ (B.Ö.)



Bu çizelgede iki açık yol vardır. Birinci açık yoldaki temel önermelerin tikel evetlemesi "$p \vee q \vee r$", ikinci açık yoldaki temel önermelerin tikel evetlemesi de "$p \vee \sim q \vee \sim r$" dir. Bu iki tikel-evetlemenin tümel evetlemesi

(3) $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \sim q \vee \sim r)$

dir. (3) önermesi bir $\wedge$Y'dir. Bu özel örnekte $\wedge$Y aynı zamanda bir $\wedge$TY'dir. Ancak başka örneklerde aynı $\wedge$TY değil, yalnızca $\wedge$Y bulunur. İmdi (3), verilen (1) önermesinin $\wedge$Y biçimindeki bir ikilisidir.

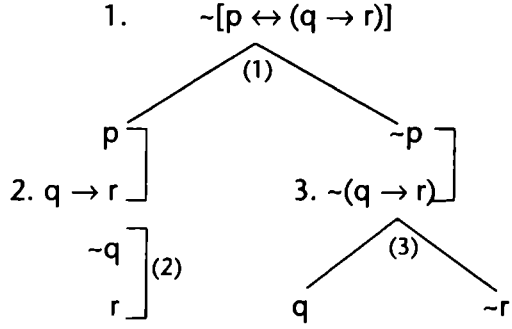
5'inci Yöntem:

Verilen bir önermenin $\vee$Y biçimindeki bir ikilisini bulmak için önermenin çözümleyici çizelge ikilisini kurarız. Sonra çizelgedeki her açık yolda bulunan temel önermelerin tümel-evetlemesini oluştururuz. Bu tümel evetlemelerin tikel-evetlemesi bir $\vee$Y'dir. Bu $\vee$Y ise verilen bir önermenin bir ikilisidir. Nitekim $\vee$Y çözümleyicisi çizelge ikilisinin belirlediği $\wedge$Y'nin üçüncü yöntem gereği bir ikilisidir. $\wedge$Y ise verilen önerme ile eşdeğerdir. O halde $\vee$Y, verilen önermenin ikilisidir. Örneğin

(4) $\sim[p \leftrightarrow (q \rightarrow r)]$

önermesinin $\vee$ biçimindeki bir ikilisini bulalım. Bu amaçla (4)'ün çözümleyici çizelge ikilisini kuralım.

(5)



(5) çizelgesinde üç açık yol vardır. Birinci açık yoldaki temel önermelerin tümel-evetlemesi $p \wedge \sim q \wedge r$, ikinci açık yoldaki temel önermelerin tümel-evetlemesi $\sim p \wedge q$, üçüncü açık yoldaki temel önermelerin tümel-evetlemesi $\sim p \wedge \sim r$'dir. Bu üç tümel-evetlemenin tikel evetlemesi de

(6) $(p \wedge \sim q \wedge r) \vee (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim r)$

dir. (6) ise $\vee$TY olmayan bir $\vee$Y'dir. (6) önermesi, verilen (4) önermesinin $\vee$Y biçiminde bir ikilisidir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin 4'üncü yöntem gereği $\wedge Y$ biçiminde ve 5'inci yöntem gereği $\vee Y$ biçiminde birer ikilisini bulunuz.

1. $p \rightarrow (q \vee r)$

2. $\sim[p \leftrightarrow (q \wedge \sim r)]$

3. $q \vee \sim[(p \wedge \sim q \wedge r) \rightarrow p]$

4. $q \vee [(r \vee s) \rightarrow p]$

5. $\sim[q \rightarrow (p \vee s)] \wedge (q \vee r \vee \sim s)$

1.4.1 İkililik İlkeleri

ikililiğe dayanarak verilen totoloji, çelişme, içerme ve eşdeğerliklerden yeni birtakım totoloji, çelişme, içerme ve eşdeğerliklerin elde edilmesi mümkündür. Bunun için ikililik (düalite) ilkeleri" denilen aşağıdaki ilkelerden yararlanılır.

(1) *Genel İkililik ilkesi:* A bir önerme ve A*, A'nın bir ikilisi olduğunda, A geçerli ise A* tutarsız olup ~A* geçerli olur. Örneğin "$p \vee \sim p$" geçerlidir. Bu önermenin bir ikilisi "$p \wedge \sim p$" önermesidir. (1) ilkesi gereği, "$p \vee \sim p$" geçerli olduğundan "$p \wedge \sim p$" tutarsız, dolayısıyla "$\sim(p \wedge \sim p)$" geçerlidir.

(1) ilkesini şöyle ispatlayabiliriz. A bir önerme ve A*, A'nın bir ikilisi olduğunda, A veya A*'da geçen önerme temsilcileri $p_1, \ldots, p_n$ olsun. O zaman A'yı $A(p_1, \ldots, p_n)$ biçiminde dile getiririz. Böylece $A(p_1, \ldots, p_n)$ olur. İmdi $A(p_1, \ldots, p_n)$ geçerli olsun. O zaman $\sim A^*(\sim p_1, \ldots, \sim p_n)$ geçerli, dolayısıyla da $A^*(\sim p_1, \ldots, \sim p_n)$ tutarsız olur. Bu tutarsızlık $\sim p_1, \ldots, \sim p_n$ yerine $p_1, \ldots, p_n$'nin konulmasıyla bozulmaz. Bundan dolayı $A^*(p_1, \ldots, p_n)$'de tutarsız olur.

(2) *İçerme İçin Özel İkililik İlkesi:* A ile B iki önerme, A*, A'nın ve B*, B'nin bir ikilisi olduğunda, (i) $A \rightarrow B$ geçerli ise $B^* \rightarrow A^*$ geçerli olur. (ii) $A \models B$ ise, $B^* \models A^*$ olur.

(2)'yi şöyle ispatlayabiliriz. (i) $A \rightarrow B$ geçerli olup A*, A'nın B*'de B'nin bir

ikilisi olsun. $A \rightarrow B \equiv \sim A \vee B$'nin 3'üncü yönteme göre ikilisi $\sim A^* \wedge B^*$ biçimindedir. (1) ilkesi gereği $\sim(\sim A^* \wedge B^*)$ önermesi geçerlidir. Oysa $\sim(\sim A^* \wedge B^*) \equiv A^* \vee \sim B^* \equiv \sim B^* \vee A^* \equiv B^* \rightarrow A^*$. O halde $B^* \rightarrow A^*$ geçerlidir. (ii) $A \models B$ olsun. $A \rightarrow B$ geçerli olup $B^* \rightarrow A^*$'da geçerli olur. Dolayısıyla $B^* \models A^*$ elde edilir.

Örneğin "$(p \wedge q) \rightarrow p$" geçerlidir. p'nin bir ikilisi p, "$p \wedge q$" nun bir ikilisi de "$p \vee q$"dur. O halde (2) ilkesi gereği "$p \rightarrow (p \vee q)$" geçerlidir.

(3) *Eşdeğerlik ilkesi İçin Özel İkililik İlkesi:* A ile B iki önerme, A*, A'nın B*, B'nin bir ikilisi olduğunda $A \equiv B$ ise $A^* \equiv B^*$ olur.

(3)'ü şöyle ispatlarız. $A \equiv B$ olup A*, A ve B*, B'nin bir ikilisi olsun. $A \equiv B$ olduğundan $A \models B$ ve $B \models A$ olur. (2) ilkesi gereğince $A \models B$'den $B^* \models A^*$ ve B A'dan $A^* \models B^*$ elde edilir. Oysa $A^* \models B^*$ ile $B^* \models A^*$ dan $A^* \models B^*$ çıkar.

Örneğin "$\wedge$" nin "$\vee$"nin üzerine dağıtıcılığı yasasını dile getiren

(4) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

eşdeğerliğini göz önüne alalım. 3'üncü yöntem gereğince "$p \wedge (q \vee r)$" nin ikilisi "$p \vee (q \wedge r)$", "$(p \wedge q) \vee (q \wedge r)$" nin ikilisi de "$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$" dir. Böylece (3) ilkesi uyarınca doğru olan

(5) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

eşdeğerliği elde edilir. (5) ise "$\vee$" nin "$\wedge$" üzerine dağıtıcılığı yasasını dile getirir.

Görüldüğü gibi ikilik ilkelerine dayanarak daha önce elde edilen yasalarda yeni yasalar türetilebilmektedir. Daha önce ispatlanmış yasalardan ikililik ilkeleri gereği türetilen yeni yasaları ayrıca ispatlamaya gerek yoktur. Böylece ikililik kavramının sağladığı büyük yarar ortaya çıkmış olur. İkililik kavramı yalnız önermelere değil, önerme eklemlerine de uygulanır.

(6) e ve e* iki tane n-li eklem ($\sim \geq 0$) olduğunda $e^* p_1, \ldots, p_n \equiv \sim e \sim p_1, \ldots, \sim p_n$ ise, e* eklemini e ekleminin *ikili*'si (düal'i) denir.

e ikili eklem ise (6),

(6') $pe^* q \equiv \sim pe \sim q$

biçimini alır. (6) tanımına göre e'nin doğruluk çizelgesinde D ile Y'nin değiş tokuşuyla elde edilen çizelge, e*'nin doğruluk çizelgesi olur. Dolayısıyla e gibi (doğruluk fonksiyonu durumunda olan) her eklemin e* gibi bir tek ikilisi vardır.

Örneğin "$\wedge$" nin ikilisi "$\vee$" dir. Nitekim

(10) $p \vee q \equiv \sim p \wedge \sim q$

doğrudur.

e*, e'nin ikilisi ise e, e*'ın ikilisi olur. e'nin ikilisinin ikilisi ise e'nin kendisiyle özdeştir. Sıfırlı, birli ve ikili eklemlerin ikililerini gösteren bir çizelgeyi aşağıda gösteriyoruz.

(11) *Sıfırlı eklemler*

e	$T\ \bot$
e*	$\bot\ T$

(12) *Birli eklemler*

e	$T'\ E'\ D'\ \bot'$
e*	$\bot'\ E'\ D'\ T'$

(13) *İkili eklemler*

e	T^2	$\vee$	$\leftarrow$	E_1^2	$\rightarrow$	E_2^2	$\leftrightarrow$	$\wedge$	$\bot^2$	$\downarrow$	$\nleftrightarrow$	D_1^2	$\mapsto$	D_2^2	$\not\leftrightarrow$	$\uparrow$
e*	$\bot^2$	$\wedge$	$\not\rightarrow$	E_1^2	$\not\leftarrow$	E_2^2	$\not\leftrightarrow$	$\vee$	T^2	$\uparrow$	$\rightarrow$	D_1^2	$\leftarrow$	D_2^2	$\leftrightarrow$	$\downarrow$

Bir eklemin ikilisi bu eklemle özdeş olabilir. e* = e ise e eklemine *kendiyle-ikili eklem* diyoruz. Kendiyle ikili birli eklemler E_2^1 ve "~" (yani D^1)'dir. Kendiyle ikili ikili eklemler ise E_1^2, E_2^2, D_1^2, D_2^2 eklemleridir. Sıfırlı eklemler kendiyle ikili değildir.

Tüm eklemlerin ikilisi tanımlandığına göre herhangi bir önermenin ikilisini elde etmek için aşağıdaki 6'ncı yöntem ortaya çıkar.

6'ncı Yöntem:

A herhangi bir önerme olduğunda A'nın bir ikilisini bulmak için A'da geçen her eklemin yerine ikilisi konur. Elde edilen yeni önerme verilen önermenin bir ikilisidir. Daha önce ele alınan 3'üncü yöntem 6'ncı yöntemin özel bir halidir. Örneğin "$p \rightarrow q$" nun ikilisi "$p \leftarrow q$" dur.

(14) $(p \vee q) \rightarrow r \models p \rightarrow r$

doğru olan içermesinden (2) ilkesi gereği yeni bir içerme türetelim. 6'ncı yöntem gereği "$(p \vee q) \rightarrow r$" nin ikilisi "$(p \vee q) \nleftarrow r$", "$p \rightarrow r$" nin ikilisi de "$p \nleftarrow r$" dir. Böylece (14) önermesinde (2) ilkesi gereği

(15) $p \nleftarrow r \models (p \wedge p) \nleftarrow r$

içermesini türetebiliriz.

Sonuncu bir örnek olarak temel beş eklemden başka eklemler kapsayan aşağıdaki önermenin 6'ncı yöntem gereği ikilisini bulalım.

(16) $E^1 (q \rightarrow p) \nleftrightarrow [pT^2q \nleftarrow (q \downarrow \sim r)]$

(16)'nın ikilisini bulmak için her eklemin yerine ikilisini koyarız. Böylece aşağıdaki önermeyi elde ederiz.

(17) $E^1 (q \nleftarrow p) \leftrightarrow [p \perp^2 q \rightarrow (q \uparrow \sim r)]$

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki yasalardan ikililik ilkeleri gereği yeni birer yasa türetiniz.

1. $p \vee q \equiv q \vee p$
2. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \equiv p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$
3. $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$
4. $p \wedge (q \rightarrow r) \models (p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge r)$
5. $p \vee (q \rightarrow r) \models (p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$
6. $p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$
7. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$

8. $(p \vee q) \rightarrow r \models (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$

9. $p \vee q \equiv q \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

10. $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

II. Aşağıdaki önermelerin 6'ncı yöntemle birer ikilisini bulunuz.

1. $\sim[p \nleftrightarrow (q \rightarrow r)] \vee \sim p$

2. $\sim[p \nleftrightarrow (q \downarrow \sim r)]$

3. $\sim[p\ E_2^2\ q \rightarrow \sim(\perp \vee \sim p\ T^2 q)]$

4. $(p \nleftrightarrow E^1 \sim r) \leftrightarrow (\perp \vee T^1 q)$

5. $\sim[p \downarrow (q \uparrow \sim p)] \leftrightarrow (T \nleftrightarrow r)$

1.5 TÜRETİM YÖNTEMİ

Önermeler mantığında denetleme yöntemi olarak *türetim yöntemi* denilen bir yöntem de yaygın olarak kullanılmaktadır. Türetim yöntemi, bir karar verme yöntemi olmayıp yalnızca çıkarımların ve önermelerin geçerliliğini denetlemeye yarayan bir yöntemdir. Bu yöntem genişletilerek niceleme mantığında da kullanılır.

Türetim, bir çıkarımın geçerli olduğunu göstermek için çıkarımın sonucunu belli birtakım türetme kuralları yardımıyla öncüllerden elde edilmesi işlemi demektir. *Bir türetme kuralı* ise türetim işleminde kullanılan geçerli bir çıkarım kalıbından başka birşey değildir. Türetimler "dolaysız", "koşulluya giriş" ve "dolaylı türetimler" olmak üzere üç türe ayrılırlar. Bu üç türden türetimi sırayla inceleyeceğiz.

1.5.1 Dolaysız Türetimler:

1.5.1.1 Koşulluya Giriş Kuralı ve Türetim Çizelgesi

Türetimlerde en yaygın olarak kullanılan türetme kuralı "Modus ponens" veya "Ayırma Kuralı" da denilen

$A \rightarrow B, B \therefore B$

geçerli çıkarım kalıbıdır. Bu kalıba (türetme kuralı olarak) *koşulludan çıkış kuralı* denir. Bu kuralı "→ç" işaretiyle gösteriyoruz. Bu kuralı

$$\frac{A \rightarrow B,\ A}{B} \quad (\rightarrow ç)$$

biçiminde dile getiriyoruz. Amacımız verilen bir çıkarımın *geçerli* olduğunu gösteren türetim işlemini ayrıntılarıyla açıklamaktadır. İmdi her türetim işlemi, *türetim çizelgesi* dediğimiz bir çizelgeyi *adım adım* kurmak yoluyla yapılır. Bir türetim çizelgesi, alt alta yazılan belli birtakım *satır*lar'dan oluşur. (Türetim çizelgesinin yapısı türetim biçimine göre değişir. Oysa çeşitli *türetim biçimleri* vardır. Biz şimdi en basit türetim biçimi olan *dolaysız türetim*'i göz önünde tutuyoruz. İlerde sırası gelince öbür türetim biçimlerini de inceleyeceğiz.)

İmdi türetim işleminin adımları *açış adımı, ara adımlar, kapanış adımı* olmak üzere üç öbeğe ayrılır.

(i) *Açış adımı:*

Açış adımı dediğimiz birinci adım olarak çizelgenin aşağıda gösterilen biçimdeki birinci satırı yazılır.

Gös. B

Burada B önermesi, verilen çıkarımın sonucudur. Bu önermenin önüne "Göster" sözcüğünün kısaltması anlamında "Gös." işareti konulmuştur. B önermesi, *sonuç olduğu gösterilmek istenen önerme*'dir. Bu satıra üretimin *ana satır*'ı diyoruz. Ana satırın önüne 1. sıra No.'su konur. Ana satırın altındaki satırlara türetimin *yardımcı satırları* diyoruz.

(ii) *Ara adımlar:*

Ara adımlar, açış adımı (yani birinci adım) ile kapanış adımı (yani son adım) arasındaki adımlardır. Her ara adımda *bir* tek satır yazıldığı gibi satırın altındaki her satırın yazılışı bir ara adımdır. İmdi ilk ara adımlarda, çıkarımın öncülleri alt alta gelen satırlar halinde yazılır. Her satırın önüne sıra No.'su, ardına da *gerekçe* olarak "öncül sözcüğünün kısaltması olan (Ön.) işareti konur. Sonraki adımlarda ise birtakım *yeni* satırlar elde edilir. Her yeni satır, ön-

ceki satırlardan belli bir türetme kuralı yardımıyla türetilmiş olan bir *önerme*'den ibarettir. Satırın sıra No.'su önermenin önüne, gerekçe de ardına yazılır. Gerekçe olan türetme kuralının işareti konur. Yeni bir satır türetmek için, yalnız çıkarımın öncülleri durumunda olan satırları değil, bir de önceden türetilmiş olan yeni satırları da *öncül* olarak kullanabiliriz. Buna karşılık ("Gös." işaretiyle başlayan) 1. satırı, yeni bir satır türetmek için öncül olarak kullanamayız. (Yoksa B gibi bir önermeyi B'nin kendisinden türetmiş oluruz. Bu da mantığa aykırı bir döngüdür.) Buna göre, yeni bir satırdan önce gelen 1. satırın dışındaki bütün satırlara bu yeni satırın *öncül satırları* diyoruz. Yeni bir satır türetirken, bu satırın öncül satırlarındaki önermelerden öncül olarak yararlanmaya her zaman hakkımız vardır. Ara adımlar, sonuç olduğu gösterilmek istenilen B önermesinin elde edilmesiyle sona erer. Böylece sonuncu ara adım olarak B önermesini yazarız. Yani *sonuncu satırdaki önerme, sonuç olduğu gösterilmek istenilen önerme olmalıdır.* O zaman da çizelge

(1)

1.	Gös. B		
2.	A_1	...	(Ön.)
3.	A_2	...	(Ön.)
.	.		.
.	.		.
.	.		.
n + 1	A_n		(Ön.)
.	.		.
.	.		.
.	.		.
m.	B		(gerekçe)

biçiminde olur. Dikkat edilirse, *1. satırın (yani ana satırın) altındaki bütün yardımcı satırları* (yani A_1, A_2, ..., A_n, ... B önermelerini) *1. satırın biraz sağında başlamak üzere hep aynı hizada yazıyoruz.* (Böylece kapanış adımında yapılacak *çerçeveleme* dediğimiz işlemin düzgün olması sağlanır.

(iii) *Kapanış adımı:*

Kapanış adımı, türetim işleminin başarıyla sonuçlandığını belirtir. Başarıyla sonuçlanmış bir türetimde sonuç olduğu gösterilmek istenilen B önermesi herhangi başka bir türetimin öncülü olarak kullanılabilir. (Nitekim B öner-

mesi artık *sonuç olduğu gösterilmiş olan* bir önerme durumundadır.) Bunu belirtmek için de 1. satırda B'nin önündeki "Gös." işaretini (*silinme veya karalama* anlamında) ortasından çizerek "Gös.3'yi "~~Gös.~~" biçimine dönüştürürüz. Öte yandan *1. satırın altındaki yardımcı satırların* (yani A_1, A_2, ..., A_n, ... B önermelerinin) görevi, B'nin sonuç olarak çıktığını göstermekten ibarettir. Görevleri bittikten sonra (B'yi bir yana bırakırsak) bu satırları başka bir türetimin öncülleri olarak kullanamayız. İşte türetim bittiğinde, 1. satırın altındaki satırların görevinin bittiğini ve başka bir türetimde öncül olarak kullanılamayacağını belirtmek amacıyla bu yardımcı satırları (*silinme* anlamında) çerçeveleriz. Böyle bir *silme ve çerçeveleme*'ye *kapanış* diyoruz. Kapanış adımıyla (1) çizelgesi

(1')

1.	Gös. B	
2.	A_1	...(Ön.)
3.	A_2	...(Ön.)
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n + 1	A_n...	(Ön.)
.	.	(gerekçe)
.	.	.
.	.	.
m.	B	(gerekçe)

biçimindeki eksiksiz bir *türetim çizelgesi*'ne dönüşür. Türetim işlemi de burada sona erer.

Genel olarak bir çıkarımın *geçerli* olduğunu göstermek için (1') biçimindeki (veya ileride göreceğimiz öbür biçimlerde olan) bir türetim çizelgesi kurmağa çalışırız. Eğer böyle bir *çizelgeyi* gerçekten de *kurabilirsek* verilen *çıkarımın geçerliliği belli olur.* Buna karşılık verilen *çıkarım geçersiz ise,* bu çıkarımın karşılığı olan (1') gibi bir *türetim çizelgesi kurulamaz.*

Şimdi genel olarak tanımladığımız türetim işlemini somut örneklerle açıklamak isteriz.

Örnek 1:

(2) $p \rightarrow q, p \therefore q$

çıkarımının geçerli olduğunu (→ç) türetme kuralına dayanan bir türetimle gösterelim.

Türetim:

(i) *Açış adımı* (yani *birinci adım*) olarak verilen çıkarımın sonucu olan q önermesini 1. satırda yazıp önüne "Gös." işaretini koyarız. (Satırın önüne de sıra No.'sunu yazarız.) Böylece çizelge

1. Gös. q

biçiminde başlar.

(ii) *Ara adımlar:*

İkinci adım olarak çıkarımın $p \rightarrow q$ öncülünü, 2. satırda (başı 1. satırın başının *biraz sağında* olmak üzere) yazarız. Satırın önüne sıra No.'su, ardına da gerekçe olarak (Ön.) işaretini de koyarız. Böylece çizelge

1. Gös. q
2. $p \rightarrow q$ ... (Ön.)

biçimini alır.

Üçüncü adım olarak çıkarımın p öncülünü 3. satırda (*üstteki satırın hizasında* başlamak üzere) yazarız. Gene satırın önüne sıra No.'sunu ardına da (Ön.) işaretini koyarız. Böylece çizelge

1. Gös. q
2. $p \rightarrow q$ ... (Ön.)
3. p ... (Ön.)

biçimini alır.

Üçüncü adımın sonunda çıkarımın bütün öncüllerini çizelgeye geçirmiş oluyoruz. Ancak sonuç olduğu gösterilmek istenilen q önermesinin, çizelgenin 1. satırının altındaki hiçbir satıra ait olmadığını görüyoruz. Dolayısıyla dördüncü bir adımda yeni bir satır türetmemiz gerekecektir.

Dördüncü adım olarak da 2. ile 3. satırlardan (→ç) türetme kuralı gereği türetilebilen q önermesini 4. satırda (üstteki önermenin hizasında başlamak üzere) yazarız.

Önermenin önüne sıra No.'sunu, ardına da gerekçe olarak 2. ile 3. satırlardan (→ç) kuralı gereği türetildiğini gösteren (2, 3, →ç) işaretlerini koyarız. (2. ile 3. satırlar yeni 4. satırın *öncül-satırları* (yani bu satırdan önce gelen 1. satırın dışında kalan satırlar) olduğundan, 4. satırdaki q önermesini 2. ile 3. satırlardan türetmeğe hakkımız vardır. Öte yandan q'nun 2. satırdaki p → q önermesiyle 3. satırdaki p önermesinden (→ç) kuralı gereği türetilebildiğini şöyle açıklıyoruz. (→ç) kuralındaki A önermesi p, B önermesi de q olsun. Oysa (→ç) kuralı gereği A → B ile A'dan B'yi türetmeğe hakkımız vardır. O halde p → q ile p'den q'yu (→ç) kuralı gereği türetmeğe hakkımız vardır. Dördüncü adımın sonunda çizelge

1. Gös. q
2. p → q ... (Ön.)
3. p ... (Ön.)
4. q ...(2, 3, →ç)

biçimini alır.

Dikkat edilirse, 4. satırdaki önerme *sonuç olduğu gösterilmek istenilen q* önermesinden başka bir şey değildir. Dolayısıyla 4. satır çizelgenin son satırı olmalıdır. Türetim işleminin başarıyla sonuçlandığını göstermek için de kapanış adımına geçeriz.

(iii) *Kapanış adımı* (*Beşinci adım*) olarak 1. satırdaki "Gös." işaretini ortasından çizerek "~~Gös.~~" biçimine dönüştürür, bir de bu satırın altındaki 2., 3., 4. satırları çerçeveleriz. Böylece çizelge, 4. adımın sonunda

1. ~~Gös.~~ q
2. p → q ... (Ön.)
3. p ... (Ön.)
4. q ... (2, 3, →ç)

biçiminde eksiksiz bir *türetim çizelgesi* haline girer. Bu türetim çizelgesine dayanarak da verilen (2) çıkarımının *geçerli* olduğunu göstermiş oluyoruz.

Örnek 2:

(3) p, q → r ∴ p

çıkarımın geçerli olduğunu bir türetimle gösterelim.

(i) *Açış Adımı* (birinci adım) olarak 1. satırı yazarız.

1. Gös. p

(ii) *Ara adımlar:*

İkinci adım olarak çıkarımın p öncülünü 2. satırda yazarız.

1. Gös. p
2. p ... (Ön.)

Üçüncü adım olarak çıkarımın q → r öncülünü yazarız.

1. Gös. p
2. p ... ... (Ön.)
3. q → r ..... (Ön.)

İmdi yeni bir satır türetmeğe çalışmadan önce sonuç olduğu gösterilmek istenilen p önermesinin 1. satırdan başka bir satırdaki önerme olup olmadığına bakmalıyız. Oysa p'nin 2. satırdaki önerme olduğunu görüyoruz. O halde yeni bir satır türetmek gerekmiyor. (Hatta 3. satırın hiçbir görevi olmadığını göz önünde tutarak bu satırı yazmadan da kapanış adımına geçebiliriz.)

(iii) *Kapanış adımı* olarak "Gös." işaretini çizip birinci satırın altındaki satırları çerçeveleriz. Böylece, ara adımların sayısının 2 veya 1 olmasına bakarak,

1. ~~Gös.~~ p
2. p ... (Ön.)
3. q → r ... (Ön.)

veya

1. ~~Gös.~~ p
2. p ... (Ön.)

biçiminde birer türetim çizelgesi elde edilir.

Genel olarak, (Örnek 2'de olduğu gibi) bir *çıkarımın sonucu* bu çıkarımın *öncüllerinden biri ise,* çıkarım *geçerli* olur. Dolayısıyla böyle bir çıkarımın geçerliliğini bir türetim ile göstermek gereği yoktur. Buna göre örnek 2'deki çıkarımın geçerli olduğunu hiçbir türetim yapmadan da biliriz.

Örnek 3:

(4) $p \rightarrow (q \rightarrow r), p \therefore q \rightarrow r$

çıkarımın geçerli olduğunu aşağıdaki türetim çizelgesini kurmakla gösteririz.

1. ~~Gös.~~ $q \rightarrow r$
2. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ ... (Ön.)
3. p ... (Ön.)
4. $q \rightarrow r$ ... (2, 3, →ç)

Örnek 4:

$p \rightarrow q, q \rightarrow r, p \therefore r$ çıkarımının geçerli olduğunu (→ç) kuralına dayanan bir türetimle gösterelim.

Türetim işlemi burada önceki örneklerinden daha karmaşık olduğundan, işlemi adım adım açıklıyoruz.

(i) *Açış adımı:*

Birinci adım

1. Gös. r

(ii) *Ara adımlar:*

İkinci adım 1. Gös. r

2. $p \rightarrow q$ ... (Ön.)

Üçüncü adım

1. Gösr. r
2. $p \rightarrow q$ ... (Ön.)
3. $q \rightarrow r$ ... (Ön.)

Dördüncü adım

1. Gös. r
2. $p \rightarrow q$ ... (Ön.)
3. $q \rightarrow r$ ... (Ön.)
4. p ... (Ön.)

Bu adımın sonunda çıkarımın bütün öncüllerini çizelgeye geçirmiş oluyoruz. Ancak sonuç olduğu gösterilmek istenilen r önermesi, 1. satırın altındaki hiç bir satırın önermesi değildir. Dolayısıyla yeni bir satır türetmemiz gerekecektir.

Amacımız bir 5. satır türetmektir. 5. satırın öncül-satırları ise 2., 3. ve 4. satırlardır. Oysa 2. satırdaki $p \rightarrow q$ önermesiyle 4. satırdaki p önermesinden ($\rightarrow$ç)·kuralı gereği q önermesini türetebiliriz. İşte bu türetmeyi yaparak 5. satıra q önermesini yazıp gerekçe olarak (2, 4, $\rightarrow$ç) işaretlerini koyarız. Böylece çizelge beşinci adımın sonunda aşağıdaki biçimi alır.

Beşinci adım

1. Gös. r
2. $p \rightarrow q$ ... (Ön.)
3. $q \rightarrow r$ ... (Ön.)
4. p ... (Ön.)
5. q ... (2, 4, $\rightarrow$ç)

Beşinci adımın sonunda elde edilen çizelgede de 1. satırın altındaki hiçbir satırın önermesi r değildir. O halde yeni bir satır daha türetmeliyiz. Böyle bir 6. satırı da bu satırın öncül-satırları arasında olan 3. ile 5. satırlardan

türetiriz. Nitekim 3. satırdaki q → r önermesiyle 5. satırdaki q önermesinden (→ç) kuralı gereği r önermesini türetebiliriz. Buna göre r önermesini 6. satıra yazıp gerekçe olarak (3, 5, →ç) işaretlerini koyarız. Böylece altıncı adımın sonunda çizelge aşağıdaki biçimi alır.

Altıncı adım

1.	Gös. r	
2.	p → q	... (Ön.)
3.	q → r	... (Ön.)
4.	p	... (Ön.)
5.	q	... (2, 4, →ç)
6.	r	... (3, 5, →ç)

İmdi altıncı adımın sonundaki çizelgede, *sonuç olduğu gösterilmek istenilen r* önermesinin, sonuncu (yani 5.) satırdaki önerme olduğunu görüyoruz. O halde türetim başarıyla sona ermiştir. Kapanış adımına geçebiliriz.

(iii) *Kapanış adımı:* (yedinci adım)

Bu son adımla istenilen türetim çizelgesi elde edilir. Verilen çıkarımın geçerliliğini gösteren bu türetim çizelgesi* aşağıdadır.

Yedinci adım

1.	~~Gös.~~ r	
2.	p →q	... (Ön.)
3.	q → r	... (Ön.)
4.	p	... (Ön.)
5.	q	... (2, 4, →ç)
6.	r	... (3, 5, →ç)

Dikkat edilirse, örnek 1 ile örnek 2'deki çıkarımların sonucu, (→ç) türetme kuralının *bir* tek uygulamasıyla türetmemize karşılık, Örnek 4'deki çıkarı-

* Türetim işlemiyle türetim çizelgesi arasındaki ayrımın teorik bir önemi vardır. Pratikte ise bu iki kavramın ayırdedilmesi genellikle gereksizdir. Bundan böyle işlem ile çizelge ayrımının önemsiz olduğu bütün hallerde 'türetim' sözcüğünü gerek *türetim işlemi* gerekse *türetim çizelgesi* anlamında kullanacağız.

mın sonucunu türetme kuralının ancak iki ayrı uygulamasıyla türetebildik. Genel olarak, sonucu öncüllerinden bir tek türetim kuralının bir tek uygulamasıyla türetebilen çıkarımlara *basit geçerli çıkarım,* sonucu öncüllerinden ancak bir türetme kuralının birden çok sayıda uygulamasıyla ya da birden çok sayıda türetme kuralı yardımıyla türetilebilen çıkarımlara da *karmaşık geçerli çıkarımlar* diyoruz. Buna göre örnek 1 ile örnek 3'deki çıkarımlar basit geçerli, örnek 4'deki çıkarım ise karmaşık geçerli'dir. (Örnek 2'deki çıkarım da basit geçerlidir. Nitekim bu çıkarımın sonucu, öncüllerinden ileride göreceğimiz, *tekrarlama* kuralı yardımıyla türetilebilir.)

İmdi örnek 4'teki karmaşık geçerli çıkarımın türetimini, herbiri bir basit geçerli çıkarım durumunda olan iki halkalı bir zincir sayabiliriz. Böyle bir *"basit geçerli çıkarımlar zinciri"*ni aşağıda gösteriyoruz:

$[p \rightarrow q, p \therefore q] ; [q \rightarrow r, q \therefore r]$

Son halkanın sonucu, türetimde sonuç olduğu gösterilen önermedir. Birinci halkanın öncülleri türetimin öncülleridir. Son halkanın öncüllerinden biri gene türetimin bir öncülü olup öbürü önceki halkanın sonucundan ibarettir.

Genel olarak her dolaysız türetim'e karşılık bir *basit geçerli çıkarımlar zinciri* vardır, şöyle ki:

(i) Zincirin her halkası bir *basit geçerli çıkarım* (yani sonucu öncüllerinden bir tek çıkarım kuralının bir tek uygulaması ile elde edilebilen bir veya iki öncüllü bir çıkarım) dır.

(ii) Zincirin son halkasının sonucu türetimin sonucudur.

(iii) Zincirin belli bir halkasında öncül olarak geçen bir önerme, ya türetimin bir öncülüdür, ya da söz konusu halkadan önce gelen bir halkanın sonucudur.

Örnek 5:

$p \rightarrow (q \rightarrow r), p, q \therefore r$ çıkarımının geçerli olduğunu bir türetimle gösterip bu türetimin karşılığı olan *basit geçerli çıkarımlar zinciri*'ni kuralım.

Türetim:

1.	~~Gös.~~ r	
2.	p → (q → r)	... (Ön.)
3.	p	... (Ön.)
4.	q	... (Ön.)
5.	q → r	... (2, 3, →ç)
6.	r	... (4, 5, →ç)

Basit geçerli çıkarımlar zinciri

[p → (q → r), p ∴ q → r] ; [q → r, q ∴ r]

Örnek 6:

p → (q → r), p, p → q ∴ r çıkarımının geçerli olduğunu bir türetimle gösterip bu türetimin karşılığı olan basit geçerli çıkarımlar zincirini kuralım.

Türetim:

1.	~~Gös.~~ r	
2.	p → (q → r)	... (Ön.)
3.	p	... (Ön.)
4.	p → q	... (Ön.)
5.	q → r	... (2, 3, →ç)
6.	q	... (3, 4, →ç)
7.	r	... (5, 6, →ç)

Basit geçerli çıkarımlar zinciri:

[p → (q → r), p ∴ q → r] ; [p → q, p ∴ q] ; [q → r, q ∴ r]

Üç halkalı olan bu zincirin son halkasının sonucu, türetimde sonuç olduğu gösterilen r önermesidir. Halkaların öncülleri ise ya türetimin öncülleridir, ya da önce gelen bir halkanın sonucudur.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki çıkarımların geçerli olduğunu (→ç) kuralına dayanan bir türetimle gösteriniz:

1. $p, p \rightarrow q, q \rightarrow r, r \rightarrow s \therefore s$

2. $q \rightarrow (r \rightarrow s), p, (r \rightarrow s) \rightarrow (p \rightarrow s), p \rightarrow q \therefore s$

3. $p, r, p \rightarrow [q \rightarrow (p \rightarrow s)], r \rightarrow q \therefore s$

4. $q, p \rightarrow [r \rightarrow (s \rightarrow q)], p \rightarrow r, q \rightarrow q \therefore s \rightarrow q$

5. $p \rightarrow (p \rightarrow q), p, (p \rightarrow q) \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)], q \therefore r$

1.5.1.2 Koşulludan Devirmeli Çıkış Kuralı

(1) $A \rightarrow B, \sim B \therefore \sim A$

(2) $\sim A \rightarrow B, \sim B \therefore A$

(3) $A \rightarrow \sim B, B \therefore \sim A$

(4) $\sim A \rightarrow \sim B, B \therefore A$

biçimindeki çıkarımlar geçerlidir. Sözü geçen çıkarımları ('→' ile '~' eklemlerini tanımlamağa yarayan) bir çıkarım kuralına dayandıracağız. Şimdi böyle bir çıkarım kuralını dile getirmeğe çalışacağız.

~A gibi bir değillenmiş önermeyi değillemekle ~~A biçimindeki çifte değilenmiş bir önerme elde ederiz. Başka bir deyimle ~A'nın değillemesi ~~A'dır. Bu önermeyi ise A biçiminde kısaltırız. Buna göre A önermesini ~~A'nın bir kısaltması sayıyoruz. O halde A önermesine ~A önermesinin *"kısaltılmış değillemesi"* diyebiliriz. ~A'nın kısaltılmış değillemesini dğ(~A) biçiminde gösterelim. Örneğin,

$dğ(\sim p) = p$

$dğ[\sim(p \rightarrow q)] = (p \rightarrow q)$

$dğ(\sim\sim p) = \sim p$

$dğ\sim\sim(p \rightarrow q) = \sim(p \rightarrow q)$

Öte yandan A, başka bir önermenin değillemesi olmayan bir önerme olsun. O zaman A'nın değillemesi olan ~A'nın önündeki '~' sembollerinin sayısını azaltmak mümkün değildir. Bu durumda

dğ(A) = ~A

yazacağız. Örneğin

dğ(p) = ~p

dğ(p → q) = ~(p → q)

dğ(~p → q) = ~(~p → q)

Bu açıklamalara dayanarak *dğ(A)* deyiminin genel tanımını şöyle dile getirebiliriz:

(5)

dğ(A) = ~A, eğer A bir değilleme önermesi değilse

B, eğer A = ~B ise.

'dğ' işareti yardımıyla (1) biçimindeki bütün çıkarımların geçerliliğini göstermeğe yarayan bir tek çıkarım kuralını dile getirebiliriz. Bu çıkarım kuralına *"koşuludan devirmeli çıkış"* kuralı deyip (→dç) işaretiyle gösteriyoruz. Kuralı şöyle dile getiriyoruz.

(6)

$$\frac{A \rightarrow B,\ dğ(B)}{dğ(A)}\ (\rightarrow dç)$$

Yani A → B ile dğ (B) biçimindeki öncüllerden dğ(A) biçimindeki önermeyi sonuç olarak türetmeğe her zaman hakkımız vardır.

Şimdi de (→dç) kuralıyla daha önce gördüğümüz öbür çıkarım kurallarına dayanarak yapılabilen türetimleri örneklerle açıklayacağız.

Örnek 1:

~p → ~q, q ∴ p çıkarımının geçerli olduğunu yalnız (→dç) kuralına dayanarak gösterelim.

1. ~~Gös.~~ p

2.	~p → ~ q	... (Ön.)
3.	q	... (Ön.)
4.	p	... (2, 3, →dç)

Dikkat edilirse q = dğ(~q), p = dğ(~p). O halde 2. ile 3. satırlardan (→dç) gereği q önermesini türetebiliriz. O halde verilen çıkarım gene bir basit geçerli çıkarımdır.

Örnek 2:

~p → ~(q → ~r), q → ~r, p → (s → ~t) ∴ s → ~t çıkarımının geçerli olduğunu yalnız (→ç) ile (→dç) kurallarına dayanan bir türetimle gösteriniz.

Ayrıca bu türetimin karşılığı olan basit geçerli çıkarımlar zincirini de kurunuz.

Türetim:

1. ~~Gös.~~ s → ~t

2.	~p → ~(q → ~r)	... (Ön.)
3.	q → ~r	... (Ön.)
4.	p → (s → ~t)	... (Ön.)
5.	p	... (2, 3, →dç)
6.	s → ~t	... (4, 5, →ç)

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki çıkarımların geçerli olduğunu yalnız (→ç) ile (→dç) kurallarına dayanan birer türetimle gösteriniz:

1. p → q, q → r, r → s, ~s ∴ ~p

2. q → p, ~q → (r → s), (r → s) → ~(q → p) ∴ p

3. p → p, ~p → r, ~q, r → (s → t) ∴ s → t

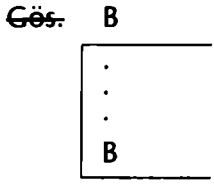
4. p → ~q, q, ~p → (~r → s), t → ~(~r → s) ∴ ~t

5. p → q, p, ~r → ~q, s → ~r, ~s → (p → ~r) ∴ p → ~r

1.5.2 Koşulluya Giriş Türetimi

1.5.2.1 Yalın Koşulluya Giriş Türetimi

Şimdiye kadar yalnız



biçimindeki *dolaysız türetimler*'i gördük. Oysa birçok geçerli çıkarımın geçerliliğini göstermek için daha başka türlü türetim biçimlerine başvurmak gerekecektir. Örneğin geçerli oduğu şüphe götürmeyen

(1) $p \rightarrow q,\ q \rightarrow r \therefore p \rightarrow r$

çıkarımının geçerliliğini ((→ç) ile (→dç) kurallarına dayanan) bir dolaysız türetimle gösteremeyiz.

İmdi (1) çıkarımının sonucu bir koşullu'dur. Genel olarak sonucu bir koşullu olan

(2) $A_1, \ldots, A_n \therefore B_1 \rightarrow B_2$

biçimindeki herhangi bir geçerli çıkarımın geçerli olduğunu göstermek için B_2 ardbileşenini B_1 ön-bileşeniyle $A_1, \ldots, A_n$ öncüllerinden türetmek yetiyor. Nitekim B_1, öncülünden ($A_1, \ldots, A_n$ gibi başka öncüllerin de yardımıyla) B_2 sonucunu çıkarmakla, B_1'in doğru olması halinde ($A_1, \ldots, A_n$ öncüllerinin de doğru olması koşuluyla) B_2'nin de doğru olduğunu öne sürme hakkını kazanmış oluyoruz. Oysa bu da ($A_1, \ldots, A_n$ öncüllerinin doğru olması halinde) B_1 ise B_2 önermesinin doğruluğunu öne sürme hakkında başka bir şey değildir. O halde

(3) $B_1, A_1, \ldots, A_n \therefore B_2$

çıkarımının geçerliliğine dayanarak (2) çıkarımının da geçerli olduğunu söyleyebiliriz.

Buna göre $B_1 \rightarrow B_2$ sonucunu göstermek için $A_1, \ldots, A_n$ öncüllerinin yanısıra bir de B_1 ön-bileşenini bir *ek-öncül* olarak kullanabileceğiz. B_1 ek-

öncülüne *varsayım* diyoruz. Nitekim $B_1 \rightarrow B_2$ biçimindeki koşullunun sonuç olduğunu göstermek için B_1 ön-bileşenini varsayarak bundan (ve A_1, ..., A_n öncüllerinden) B_2 ön-bileşenini ard-bileşenini türetmeye çalışacağız.

Yukarıdaki açıklamalara göre (2) biçimindeki bir çıkarımın geçerliliğini göstermek için (3) çıkarımının karşılığı olan

(3')

1.	~~Gös.~~ B_2	
2.	B_1	... (Ön.)
3.	A_1	... (Ön.)
	.	
	.	
	.	
n+2	A_n	... (Ön.)
.	.	
.	.	
.	.	
m.	B_2	

gibi bir *dolaysız türetim* yapabiliriz. Ancak asıl amacımız (3) çıkarımının değil de (2) çıkarımının geçerliliğini göstermek olduğundan, (3') dolaysız türetimi yerine (2) çıkarımının geçerliliğini doğrudan doğruya gösteren başka bir türetim biçimine başvuracağız. Bu yeni türetim biçimine de *koşulluya giriş türetimi* diyoruz. Nitekim koşulluya giriş türetimiyle $B_1 \rightarrow B_2$ gibi bir koşullunun sonuç olduğunu göstermek için B_1'den B_2'yi türetmeğe çalışırız. Yani B_1'den B_2'yi türetmek yoluyla $B_1 \rightarrow B_2$ gibi bir koşullunun ortaya çıkmasını veya başka bir deyimle *giriş*'ini sağlarız.

İmdi koşulluya giriş türetimi *iki açış adımı,* herhangi bir sayıda olabilen ara adımları, bir de kapanış adımından oluşur.

(i) *Açış adımları:*

Birinci açış adımı olarak *sonuç olduğu gösterilmek istenilen* $B_1 \rightarrow B_2$ koşullusu yazılıp önüne 'Gös.' işareti konur. Böylece 1. satırı elde etmiş oluyoruz. Dolaysız türetimde olduğu gibi koşulluya giriş türetimi halinde de 1. satıra *ana-satır,* 1. satırın altındaki satırlara ise *yardımcı satırlar* diyoruz.

İkinci açış adımı olarak ta B_1 önermesi (yani 1. satırdaki koşullunun *ön-bileşeni*) 2. satırda yazılır. (Gerek 2. satırdaki önermenin gerekse daha sonra gelen satırlardaki önermelerin – çerçevelemenin düzgün olmasını sağlamak amacıyla – *1. satırdaki önermenin biraz sağından başlamak üzere aynı hizada* yazılmasına dikkat edilmelidir.)

(ii) *Ara adımlar:*

Ara adımlar dolaysız türetimde olduğu gibidir. Ancak *sonuncu adım* olarak, sonuç olarak gösterimek istenilen $B_1 \rightarrow B_2$ önermesi yerine bunun *ard-bileşeni* olan B_2 önermesini *sonuncu satır*'da yazarız. Bu ard-önermenin elde edimesiyle koşulluya giriş türetimi başarıya erişir. O zaman da kapanış adımına geçeriz.

(iii) *Kapanış adımı:*

Kapanış Adımı da dolaysız türetimde olduğu gibidir. Yani, 1. satırdaki 'Gös.' işaretinin (silinme veya karalanma anlamında) ortasından çizilerek '~~Gös.~~'e dönüştürülmesi, bir de 1. satırın altındaki satırların (silinme anlamında) çerçevelenmesinden ibarettir. Ancak (yukarıda belirttiğimiz gibi) kapanış adımına geçilebilmesi, son satırdaki önermenin $B_1 \rightarrow B_2$'den değil de B_2'den ibaret olmasına bağlıdır.

Böylece (2) çıkarımının geçerliliğini gösteren *koşulluya giriş türetimi* (kapanış adımının sonunda)

(2')

1.	~~Gös.~~ $B_1 \rightarrow B_2$	
2.	B_1	... (Var.)
3.	A_1	... (Ön.)
4.	A_2	... (Ön.)
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n+2	A_n	... (Ön.)
.	.	.
.	.	.
.	.	.
m.	B_2	... (gerekçe)

biçiminde olur.

Örnek 1:

Yukarıda sözü geçen (1) çıkarımının geçerli olduğunu yalnız (→ç), (→dç), (Tk) kurallarına dayanan bir türetimle gösterelim.

Verilen çıkarımın sonucu bir koşulludur. Bir koşullunun sonuç olduğunu göstermenin en iyi yolu çoğu zaman koşulluya giriş türetimidir. Bu bakımdan, sonucu bir koşulludan ibaret olan çıkarımların geçerliliğini bundan böyle genellikle koşulluya giriş türetimiyle göstermeğe çalışacağız. Bu *pratik öğüt*'e uyarak, verilen (2') çıkarımının geçerli olduğunu aşağıdaki koşulluya giriş türetimiyle gösteriyoruz.

1.	~~Gös.~~ p→r	
2.	p	... (Var.)
3.	p→q	... (Ön.)
4.	q→r	... (Ön.)
5.	q	... (2, 3, →ç)
6.	r	... (4, 5, →ç)

Açış adımları olarak p → r koşullusunu 1. satırda, p ön-bileşenini de 2. satırda (varsayım olması gerekçesiyle) yazıyoruz. 3. ile 4. satırlara ise çıkarımın öncüllerini geçiriyoruz. 5. ile 6. satırda türettiğimiz q ie r önermelerini yazıyoruz. İmdi 6. satırdaki r önermesi, sonuç olduğu gösterilmek istenilen p → r koşullusunun *ard-bileşeni*'dir. Buna dayanarak koşulluya giriş türetiminin kapanış adımına geçebiliyoruz.

Örnek 2:

$\overline{p} \rightarrow q$, $q \rightarrow \overline{r}$, $\overline{r} \rightarrow \overline{s}$, $\overline{s} \rightarrow t \therefore \overline{p} \rightarrow t$ çıkarımının geçerli olduğunu (→ç) kuralına dayanan bir türetimle gösterelim.

1. ~~Gös.~~ $\overline{p} \rightarrow t$

2.	$\overline{p}$	... (Var.)
3.	$\overline{p} \rightarrow q$	... (Ön.)
4.	$q \rightarrow \overline{r}$	... (Ön.)
5.	$\overline{r} \rightarrow \overline{s}$	... (Ön.)
6.	$\overline{s} \rightarrow t$	... (Ön.)
7.	q	... (2, 3, →ç)
8.	$\overline{r}$	... (~~3, 4~~, →ç)
9.	$\overline{s}$	... (5, 8, →ç)
10.	t	... (6, 9, →ç)

Örnek 3:

$s \rightarrow r$, $\overline{s} \rightarrow p$, $p \rightarrow q$, $r \rightarrow t \therefore \overline{q} \rightarrow t$ çıkarımının geçerli olduğunu (→ç) ile (→dç) kurallarına dayanan bir türetimle gösterelim.

1. ~~Gös.~~ $\overline{q} \rightarrow t$

2.	$\overline{q}$	... (Var.)
3.	$s \rightarrow r$	... (Ön.)
4.	$\overline{s} \rightarrow p$	... (Ön.)
5.	$p \rightarrow q$	... (Ön.)
6.	$r \rightarrow t$	... (Ön.)
7.	$\overline{p}$	... (2, 5, →dç)
8.	s	... (4, 7, →dç)
9.	r	... (3, 8, →ç)
10.	t	... (6, 9, →ç)

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki çıkarımların geçerli olduğunu yalnız (→ç) ile (→dç) kurallarına dayanan bir türetimle gösteriniz:

1. $p \rightarrow q,\ r \rightarrow \overline{q} \ \therefore\ r \rightarrow p$

2. $p \rightarrow (q \rightarrow r),\ s \rightarrow p,\ q \ \therefore\ s \rightarrow r$

3. $\overline{p},\ \overline{r} \rightarrow q,\ \overline{s} \rightarrow p \ \therefore\ (r \rightarrow \overline{s}) \rightarrow q$

4. $p \ \therefore\ (p \rightarrow q) \rightarrow q$

5. $q \rightarrow \overline{r},\ \overline{p} \rightarrow r \ \therefore\ \overline{p} \rightarrow \overline{q}$

1.5.2.2 Karmaşık Koşulluya Giriş Türetimi

Şimdiye kadar incelediğimiz (gerek dolaysız gerekse koşulluya giriş biçimindeki) bütün türetimler, bir ana-satırla belli sayıda yardımcı satırlardan kurulu *yalın türetim*'lerdir. Ancak birçok geçerli çıkarımın geçerliliğini göstermek için *İç içe türetim*'lerden oluşan *karmaşık türetim*'lere başvurmak gerekecektir. Karmaşık türetimleri aşağıdaki örneklerle açıklıyoruz.

Örnek 1:

$p \rightarrow q \ \therefore\ p \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow r]$ çıkarımının geçerli olduğunu yalnız (→ç), (→dç), (Tk) kurallarına dayanan bir türetimle gösterelim. Koşulluya giriş türetimini uygulayarak ilk önce

1.	Gös. $p \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow r]$	
2.	p	... (Var.)
3.	$p \rightarrow q$	... (Ön.)
4.	q	... (2, 3, →ç)

satırlarını elde ederiz. Ancak 4. satırda durakladık. Türetimi sonuna kadar getirmek için şöyle bir akıl yürütme yapmalıyız: Amacımız $(q \rightarrow r) \rightarrow r$ önermesini elde etmektir. Oysa bu önermeyi türetemiyoruz. O zaman da önermeyi *yardımcı türetim* diyeceğimiz başka bir türetime dayanarak elde etmeğe çalışmalıyız. Böylece 5. satırda yardımcı türetime başlamak gerekecek. Buna göre

1. Gös. $p \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow r]$
2. p ... (Var.)
3. $p \rightarrow q$ ... (Ön.)
4. q ... (2, 3, →ç)
5. Gös. $(q \rightarrow r) \rightarrow r$

gibi bir çizelge elde ederiz. 5. satır, yardımcı türetimin ana-satırıdır. Bu satırın altına da yardımcı türetimin *yardımcı satırları*'nı (*ana-satırın biraz sağından başlamak üzere hep aynı hizada*) yazacağız. İmdi yardımcı türetimle sonuç olduğu gösterilmek istenilen $(q \rightarrow r) \rightarrow r$ önermesi bir *koşullu*'dur. Dolayısıyla pratik öğüde uyarak yardımcı türetimi de koşulluya giriş türetimi biçiminde yapacağız. Buna göre $q \rightarrow r$ ön-bileşenini ana-satırın altına varsayım olarak yazalım. Böylece çizelge

1. Gös. $p \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow r]$
2. p ... (Var.)
3. $p \rightarrow q$ ... (Ön.)
4. q ... (2, 3, →ç)
5. Gös. $(q \rightarrow r) \rightarrow r$
6. $q \rightarrow r$ ... (Var.)

biçimini alır. 6. satır, yardımcı türetiminin ilk yardımcı satırıdır.

İmdi yardımcı türetimin öbür yardımcı satırlarını türetmek için 5. satırın üstündeki 2.-4. satırlardan da öncül-satır olarak yararlanabiliriz. Nitekim 5. satırda başlayan yardımcı türetimin amacı bu önermenin üstteki 2.-4. satırların sonucu olduğunu göstermekten ibarettir. Buna göre yardımcı türetimin ikinci yardımcı satırı olarak 4. ile 5. satırlardan türetilebilen r önermesini yazacağız. Böylece çizelge

1. Gös. $p \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow r]$
2. p ... (Var.)
3. $p \rightarrow q$ ... (Ön.)

4. q ... (2, 3, →ç)

5. Gös. (q → r) → r

6. q → r ... (Var.)

7. r ... (4, 6, →ç)

biçimini alır.

Dikkat edilirse 7. satırdaki r önermesini, (→ç) kuralı gereği 4. ile 6. satırlardan türetebildiğimiz gibi, aynı kuralla 5. satırda geçen (q → r)→ r ile 6. satırdaki q → r'de türetilebilirdi. Ancak 4. ile 6. satırlardan her ikisinin 7. satırın öncül-satırları olmasına karşılık, *5. satır 7. satırın bir öncül satırı değildir.* Yani 7. satırı türetmek için *çizilmemiş* 'Gös.' ile başlayan 5. satırı öncül olarak kullanmaya hakkımız yoktur. Yoksa 7. satırdaki önermenin sonuç olduğunu göstermek için gene bu önermeden yararlanmış olurduk. Genel olarak *çizilmemiş 'Gös.' ile başlayan bir satır, sonraki satırların öncül-satırı olamaz,* yani *sonraki satırları türetmek için kullanılamaz.* (Ancak ileride göreceğimiz gibi *çizilmiş* 'Gös.' işaretiyle başlayan bir satırın öncül-önermesi olması mümkündür.

İmdi 7. satırdaki r önermesi, yardımcı türetimde sonuç olduğu gösterilmek istenilen (q → r) → r önermesinin ard-bileşenidir. Dolayısıyla koşulluya giriş biçiminde olan bu yardımcı türetimin *kapanış*'ını yapabiliriz. Söz konusu yardımcı türetimin ana-satırı 5. satır, yardımcı satırları da 6. ile 7. satırlardır. Buna göre yardımcı türetimin *kapanış* adımı olarak 5. satırdaki 'Gös.' işaretini çizip '~~Gös.~~'e dönüştürür, bir de 6. ile 7. satırları çerçeveleriz. Böylece çizelge

1. Gös. p → [(q → r) → r]

2. p ... (Var.)

3. p → q ... (Ön.)

4. q ... (2, 3, →ç)

5. ~~Gös.~~ (q → r) → r

6. | q → r | ... (Var.)

7. | r | ... (4, 6, →ç)

biçimini alır.

Daha önce belirttiğimiz gibi gerek 'Gös.' işaretinin ortasından çizilmesi, gerekse yardımcı satırların çerçevelenmesi *silinme* anlamına gelir. Dolayısıyla yukarıdaki çizelge

1. Gös. $p \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow r]$
2. p ... (Var.)
3. $p \rightarrow q$ ... (Ön.)
4. q ... (2, 3, →ç)
5. $(q \rightarrow r) \rightarrow r$

biçiminde sayılmalıdır. (Nitekim 5. satırdaki çizilmiş '~~Gös.~~' işaretinin ve çerçevelenmiş olan 6. ile 7. satırların tümünün *silinmiş* olduğunu kabul ediyoruz.) 1.-5. satırlardan oluşan bu türetime, karmaşık türetimin *ana-türetim*'i diyoruz. Gördüğümüz gibi, söz konusu ana türetim koşulluya giriş biçimindedir. 1. satırda sonuç olduğu gösterilmek istenilen önermenin ön-bileşeni 2. satırda varsayım olarak yazılmış, ard-bileşeni ise 5. satırda türetilmiştir. O halde ana türetimin kapanışını yapmağa hakkımız vardır. Böylece karmaşık türetimin sonuçlanmış biçimi şöyle olur:

1. ~~Gös.~~ $p \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow r]$
2. p ... (Var.)
3. $p \rightarrow q$ ... (Ön.)
4. q ... (2, 3, →ç)
5. ~~Gös.~~ $(q \rightarrow r) \rightarrow r$
6. $q \rightarrow r$ ... (Var.)
7. r ... (4, 6, →ç)

Genel olarak her *karmaşık türetim*, bir *ana-türetim* ile bir veya daha çok sayıda *yardımcı türetim*'den kuruludur. Gerek ana türetim, gerekse yardımcı türetimler, bir ana-satır ile bir veya daha çok sayıda yardımcı satırdan oluşur. Ana-türetimin ana-satırı, karmaşık türetimin 1. satırıdır. Yardımcı türetimlerin ana-satırları ise karmaşık türetimin yardımcı satırları arasında yer alırlar.

Karmaşık bir türetimin ana-türetimi hep *yalın* bir türetimdir. Buna karşılık yardımcı türetimler *yalın* olduğu gibi *karmaşık* türetim niteliğinde de olabilir. İleride yardımcı türetimleri de karmaşık olan karmaşık türetimlerle de karşılaşacağız. Dikkat edilirse, yukarıdaki karmaşık türetim bir ana-türetim ile yalın bir yardımcı türetimden oluşmuştur.

Örnek 2:

$q \rightarrow r \therefore (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$ çıkarımının geçerli olduğunu yalnız (→ç) ile (→dç) kurallarına dayanan bir türetimle gösterelim.

1.	~~Gös.~~ $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$	
2.	$p \rightarrow q$	... (Var.)
3.	$q \rightarrow r$	... (Ön.)
4.	~~Gös.~~ $p \rightarrow r$	
5.	p	... (Var.)
6.	q	... (2,5, →ç)
7.	r	... (3, 6, →ç)

Örnek 3:

$p \rightarrow (q \rightarrow r) \therefore (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$ çıkarımının geçerli olduğunu yalnız (→ç) ile (→dç) kurallarına dayanan bir türetimle gösterelim.

1.	~~Gös.~~ $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$	
2.	$p \rightarrow q$	... (Var.)
3.	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	... (Ön.)
4.	~~Gös.~~ $p \rightarrow r$	
5.	p	... (Var.)
6.	q	... (2,5, →ç)
7.	$q \rightarrow r$	... (3,5, →ç)
8.	r	... (6, 7, →ç)

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki çıkarımların geçerli olduğunu (→ç) ile (→dç) kurallarına dayanan bir türetimle gösteriniz:

1. $p \rightarrow (q \rightarrow r),\ p \rightarrow (r \rightarrow s) \therefore p \rightarrow (q \rightarrow s)$

2. $p \rightarrow q \therefore (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$

3. $p, q \rightarrow r \therefore q \rightarrow (p \rightarrow r)$

4. $p \rightarrow (q \rightarrow r) \therefore q \rightarrow (p \rightarrow r)$

5. $p, \bar{s} \rightarrow \bar{p} \therefore (p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow s)$

1.5.2.3. Tekrarlama Kuralı

Örnek 1:

$q \therefore r \rightarrow (p \rightarrow q)$ çıkarımının geçerli olduğunu bir türetimle göstermeğe çalışalım,

1.	Gös. $r \rightarrow (p \rightarrow q)$	
2.	r	... (Var.)
3.	q	... (Ön.)
4.	Gös. $p \rightarrow q$	
5.	p	... (Var.)

Burada durduk. Türetimi tamamlayabilmek için 5. satırdan sonra q önermesini türetmek gerekir. Gerçi q önermesi 3. satırda geçiyor. Ama buraya kadar gördüğümüz çıkarım kurallarından hiç biri daha önce geçen bir satırın tekrarlanmasını sağlamıyor. İşte şimdi böyle bir türetme kuralını göreceğiz. *"Tekrarlama kuralı"* dediğimiz ve 'Tk' işaretiyle gösterdiğimiz bu yeni türetme kuralını

$$\frac{A}{A} \text{ (Tk)}$$

biçiminde gösteriyoruz. Bu kuralın dayanağı olan

(1^1) A ∴ A

biçimindeki bütün çıkarımların geçerli olduğu apaçıktır.*

Şimdi de (Tk.) kuralını yukarıda sözü geçen türetime uygulayalım. O zaman da türetimi şöyle tamamlayabiliriz:

1. Gös. $r \rightarrow (p \rightarrow q)$
2. | r ... (Var.)
3. | q ... (Ön.)
4. | ~~Gös.~~ $p \rightarrow q$
5. | | p ... (Var.)
6. | | q ... (2, Tk.)

6. satırı, 2. satırı (Tk.) kuralı gereği tekrarlamakla elde ettik. Ancak verilen bir satırı (Tk.) kuralı gereği tekrarlayabilmek için bu satırın önünde çizilmemiş olan bir 'Gös.' işaretinin bulunmaması gerekir.

Genel olarak belli bir n. satırdan önce gelen m. satırın (Tk.) kuralı gereği n. satırda tekrarlanabilmesi için n. satır doldurulmadan önce *m. satır, n. satırın bir öncül-satırı olmalıdır.* Çizilmemiş 'Gös.' işaretiyle başlayan bir satırı (Tk.) kuralı gereği tekrarlayabilseydik

$A_1, \ldots, A_n$ ∴ B

biçiminde herhangi bir (geçerli veya geçersiz) çıkarımın geçerli olduğu

1. Gös. B
2. | B ... (1, Tk.)

gibi bir sözde türetimle gösterilebilirdi. Oysa *2. satır doldurulmadan önce* 1. satırdaki 'Gös.' işareti *çizilmemiş* olduğundan, 1. satır 2. satırın bir *öncül-satırı* değildir. Dolayısıyla 1. satırı (Tk.) gereği 2. satırda tekrarlamağa hakkımız yoktur.

---

* Ancak (1^1) biçimindeki çıkarımların geçerli olduğunu (Tk) kuralına *dayanmayan*

1. Gös. A
2. | A ... (Ön.)

gibi bir dolaysız türetimle gösterebiliriz. Bununla birlikte (1^1) biçimindeki çıkarımların geçerliliğinin aslında (Tk) kuralına dayanan A ∴ A türünden tek-halkalı bir basit çıkarımlar zinciriyle de gösterebiliriz.

Örnek 2:

p, $p \rightarrow q \therefore s \rightarrow [r \rightarrow (p \rightarrow q)]$ çıkarımının geçerli olduğunu yalnız (→ç), (→dç), (Tk.) kurallarına dayanan bir türetimle gösterelim.

1.	~~Gös.~~ $s \rightarrow [r \rightarrow (p \rightarrow q)]$	
2.	s	... (Var.)
3.	p	... (Ön.)
4.	$p \rightarrow q$	... (Ön.)
5.	~~Gös.~~ $r \rightarrow (p \rightarrow q)$	
6.	r	... (Var.)
7.	$p \rightarrow q$	... (4, Tk.)

Örnek 3:

$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r) \therefore p \rightarrow (q \rightarrow r)$ çıkarımının geçerli olduğunu yalnız (→ç), (→dç), (Tk.) kurallarına dayanan bir türetimle göstermeye çalışalım.

1.	Gös. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$	
2.	p	... (Var.)
3.	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$	... (Ön.)
4.	Gös. $q \rightarrow r$	
5.	q	... (Var.)

Burada durduk. Türetimi tamamlayabilmek için şöyle düşünmemiz gerekecektir: 6. satırın öncül-satırları 2., 3. ve 5. satırlardır. Bu üç satırın ön-bileşeni olan $p \rightarrow q$ önermesini bir yardımcı türetimle 5. satırdan yararlanarak gösterebiliriz. O zaman da türetimi şöyle tamamlayabiliriz:

1.	Gös. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$	
2.	p	... (Var.)
3.	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$	... (Ön.)
4.	~~Gös.~~ $(q \rightarrow r)$	
5.	q	... (Var.)
6.	~~Gös.~~ $p \rightarrow q$	
7.	p	... (Var.)
8.	q	... (5, Tk.)
9.	$p \rightarrow r$	... (3,6, →ç)
10.	r	... (2, 9, →ç)

Elde edilen türetim oldukça karmaşıktır. Bu karmaşık türetimden yararlanarak çok önemli *"öncül-satır"* kavramını daha iyi açıklayabiliriz. Bu amaçla söz konusu türetimdeki satırların öncül satırlarını saptamaya çalışalım. İlk önce 'Gös.' ile başlayan satırların öncül-satırlarından söz edilemeyeceğini göz önünde tutmalıyız. Nitekim belli bir satırın öncül-satırları, bu satırı belli bir çıkarım kuralı gereği türetmek için kullanılabilen önceki satırlar demektir. Oysa 'Gös.' ile başlayan bir satır önceki satırlardan türetilemez. Nitekim böyle bir satırı önceki satırlardan (doğrudan doğruya) türetebilseydik önüne 'Gös.' işaretini koymak gerekmeyecekti.

Öte andan çizilmemiş (yani silinmemiş sayılan) 'Gös.' işaretiyle başlayan bir satırın ('Gös.' işareti çizilmediği sürece) öncül-satır olamayacağını daha önce belirtmiştik. Ayrıca çerçevelenmiş (yani silinmemiş sayılan) bir satır da *öncül-satır olamaz.* Buna göre bir türetimin belli bir satırının alttaki bir satırın *öncül-satırı* olmasının gerekli ve yeterli koşulu, alttaki satır doldurulmadan önceki durumda üstteki satırın önünde *'Gös.' işaretinin* ya hiç bulunmaması ya da çizilmiş *'Gös.' işaretinin bulunması,* bir de çerçevelenmemiş olmasıdır. Bu gerekli ve yeterli koşul, *'öncül-satır'* teriminin tanımıdır.

Bu tanıma dayanarak söz konusu türetimin tek tek satırlarının öncül-satırlarını aşağıda gösteriyoruz:

1. Gös. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
2. p
3. $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$

Çizelge

1. Gös. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
2. .....satırın öncül-satırları: Yok.

---

1. Gös. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
2. p
3. .....satırın öncül-satırları: 2. satır.

---

1. Gös. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
2. p

3. $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$
4. Gös. $q \rightarrow r$
5. .....satırın öncül-satırları: 2., 3. satırlar.

---

1. Gös. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
2. p
3. $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$
4. Gös. $q \rightarrow r$
5. q
6. Gös. $p \rightarrow q$
7. .....satırın öncül-satırları: 2., 3., 5. satırlar.

---

1. Gös. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
2. p
3. $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$
4. Gös. $q \rightarrow r$
5. q
6. Gös. $p \rightarrow q$
7. p
8. .....satırın öncül-satırları: 2., 3., 5., 7. satırlar.

---

1. Gös. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
2. p
3. $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$
4. Gös. $q \rightarrow r$
5. q
6. ~~Gös.~~ $p \rightarrow q$
7. | p
8. | q
9. .....satırın öncül-satırları: 2., 3., 5., 6. satırlar.

Dikkat edilirse bu son durumda 6. satırın önündeki 'Gös.' işareti çizilmiş olduğundan 9. satırın öncül-satırı olabiliyor. Buna karşılık 7. ile 8. satırlar (silinme anlamına gelen) çerçeve içine alındıklarından dolayı 9. satırın öncül-satırı olamıyorlar.

1. Gös. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
2. p
3. $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$
4. Gös. $q \rightarrow r$
5. q
6. ~~Gös.~~ $p \rightarrow q$
7. $\boxed{p}$
8. $\boxed{q}$
9. $p \rightarrow r$
10. .....satırın öncül-satırları: 2., 3., 5., 6., 9. satırlar.

Buna göre 10. satırdaki r önermesini bu satırın ön-satırları olan 2. ile 9. satırlardan türetebilmemize karşılık aynı r önermesini 7. ie 9. satırlardan türetmeğe hakkımız yoktur. Nitekim 7. satır, 10. satırın öncül-satırı değildir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki çıkarımların geçerli olduğunu yalnız (→ç), (→dç), (Tk.) kurallarına dayanan bir türetimle gösteriniz:

1. $p, \overline{q} \therefore r \rightarrow (p \rightarrow \overline{q})$
2. $r \rightarrow \overline{q} \therefore s \rightarrow [\overline{q} \rightarrow (p \rightarrow r)]$

1.5.2.4. Mantıksal Teoremler

Herhangi bir çıkarım

(1) $A_1, ..., A_n \therefore B$

biçiminde olduğuna göre n sayısının (yani öncüllerinin sayısının) *en küçük* değerinin ne olduğunu soralım. Bu sayının 1 değerini alabildiğini (yani tek

öncüllü çıkarımların olduğunu) daha önce görmüştük. O halde n sayısının 1'den daha küçük olup olamadığını araştıralım. İmdi bir çıkarımın öncül sayısının 1'den de daha küçük olması bu sayının *sıfır olması*, yani çıkarımın hiç bir öncülü olmaması demektir. Böyle bir çıkarım ise

(2) $\therefore$ B

biçimindedir. Yani çıkarım öncülsüz olan bir sonuçtan ibarettir.

Öncül sayısı sıfıra eşit olan (2) biçimindeki çıkarımlara *"öncülsüz çıkarım"* diyelim. Böyle bir öncülsüz çıkarımın varolması B gibi bir önermenin hiç bir öncüle dayanmadan türetilebilmesine bağlıdır. Oysa bu nitelikte olan sınırsız sayıda önermeler bulunduğunu göreceğiz.

Hiç bir öncüle dayanmayarak türetilebilen önermelere *mantıksal teorem* denir. B önermesi mantıksal bir teorem ise, $\therefore$B öncülsüz çıkarımın geçerli olduğunu göstermeğe yarayan bir türetime B'nin ispatı denir. Bir teoremi *ispatlamak* onun bir ispatını yapmaktır. Türetim yönteminin uygun olması, mantıksal teoremler ile geçerli önermelerin özdeşliğidir.

Önerme temsilcileriyle yalnız '$\rightarrow$' ile '~' eklemlerinden kurulu olan bazı önemli mantıksal teoremleri aşağıda gösteriyoruz.

T.1 $p \rightarrow p$

T.2 $q \rightarrow (p \rightarrow q)$

T.3 $p \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow q]$

T.4 $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$

T.5 $(q \rightarrow r) \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$

T.6 $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$

T.7 $[(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)] \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

T.8 $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [q \rightarrow (p \rightarrow r)]$

T.9 $[p \rightarrow (p \rightarrow q)] \rightarrow (p \rightarrow q)]$

T.10 $\sim\sim p \rightarrow p$

T.11 $p \rightarrow \sim\sim p$

T.12 $(p \rightarrow q) \rightarrow (\bar{q} \rightarrow \bar{p})$

T.13 $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow \bar{p})$

T. 14 $(\bar{p} \rightarrow q) \rightarrow (\bar{q} \rightarrow p)$

T.15 $(\bar{p} \rightarrow \bar{q}) \rightarrow (q \rightarrow p)$

Hiçbir mantıksal teoremi dolaysız türetimle ispatlayamayız. Buna karşılık koşulluya giriş türetimi yoluyla bazı mantıksal teoremleri ispatlayabiliriz. Bu durum koşulluya giriş türetiminin dolaysız türetime göre bir üstünlüğü sayılabilir. Yukarıdaki T.1 - T.15 teoremleri hep koşulluya giriş türetimiyle ispatlanabilir. İlerde böyle bir türetimle ispatlanamayan mantıksal teoremlerle karşılaşacağız.

Şimdi de mantıksal teoremlerin ispatlanmasını örneklerle açıklayalım.

Örnek 1:

T.1 teoremini bir türetim yardımıyla ispatlayalım.

1. Gös. $p \rightarrow p$
2. $\boxed{p}$ ... (Var.)

1. satırda gösterilmek istenilen önerme bir koşullu olduğuna göre bir varsayımlı koşulluya giriş türetimine giriştik. Varsayım olarak ön-bileşeni 2. satır olarak yazdık. Türetimi tamamlamak için ard-bileşeni türetmek gerekiyor. Oysa ard-bileşeni ile ön-bileşen birbirinin aynıdır. (Her ikisi de p önermesinden ibarettir.) O halde ikinci satırı varsayım olarak yazmakla türetmek istediğimiz satırı da elde etmiş oluyoruz. Buna göre türetim iki satırdan ibaret olup

$\therefore p \rightarrow p$

öncülsüz çıkarımın geçerli olduğunu göstermeğe yetiyor. Bu türetim aynı zamanda $p \rightarrow p$ sembolik önermesinin bir *ispatı* durumundadır. Böylece $p \rightarrow p$ gibi bir önermenin hiç bir öncüle dayanmadan türetilebildiğini görüyoruz.

Örnek 2:

T.2 teoremini ispatlayalım.

1.	~~Gös.~~ $q \rightarrow (p \rightarrow q)$	
2.	q	... (Var.)
3.	~~Gös.~~ $p \rightarrow q$	
4.	p	... (Var.)
5.	q	... (2, Tk.)

1. satırda gösterilmek istenilen önerme bir koşullu olduğuna göre 2. satırda koşullunun ön-bileşenini varsayım olarak yazdık. 3. satırda ard-bileşeni göstermek için bir yardımcı türetime başladık. 3. satırda göstermek istediğimiz koşullunun ard-bileşeni (yani q önermesi) 2. satırda geçtiğini göz önünde tutarak yardımcı türetimi bir koşulluya giriş türetimi biçiminde yapabildik.

Örnek 3:

1.	Gös. $(p \rightarrow q) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)]$	
2.	$p \rightarrow q$	... (Var.)
3.	~~Gös.~~ $(q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$	
4.	$q \rightarrow r$	... (Var.)
5.	~~Gös.~~ $p \rightarrow r$	
6.	p	... (Var.)
7.	q	... (2, 6, →ç)
8.	r	... (4, 7, →ç)

Örnek 4:

T.9 teoreminin bir türetim yardımıyla ispatlayalım.

1.	~~Gös.~~ $[p \rightarrow (p \rightarrow q)] \rightarrow (p \rightarrow q)$	
2.	$p \rightarrow (p \rightarrow q)$	... (Var.)
3.	~~Gös.~~ $p \rightarrow q$	
4.	p	... (Var.)
5.	$p \rightarrow q$	... (2, 4, →ç)
6.	q	... (4, 5, →ç)

Örnek 5:

T.10 teoremini bir türetim yardımıyla ispatlayalım.

1. ~~Gös.~~ $\sim\sim p \rightarrow p$
2. | $\sim\sim p$ ... (Var.)
3. | p ... (2, $\sim\sim$ç)

Örnek 6:

T.12 teoremini bir türetim yardımıyla ispatlayalım.

1. ~~Gös.~~ $(p \rightarrow q) \rightarrow (\bar{q} \rightarrow \bar{p})$
2. | $p \rightarrow q$ ... (Var.)
3. | ~~Gös.~~ $\bar{q} \rightarrow \bar{p}$
4. | | $\bar{q}$ ... (Var.)
5. | | $\bar{p}$ ... (2, 4, $\rightarrow$dç)

ALIŞTIRMALAR

T.3, T.5 - T.11, T.13 - T.15 teoremlerini bir türetim yardımıyla ispatlayınız.

1.5.3 Dolaylı Türetim:

1.5.3.1 Yalın Dolaylı Türetim

Örnek 1:

$p \rightarrow q, p \rightarrow \bar{q} \therefore \bar{p}$ çıkarımının geçerli olduğunu bir türetimle gösterelim.

Sonuç bir koşullu olmadığından bir koşulluya giriş türetimi yapamıyoruz. Bir dolaysız türetim yapmaya çalışırsak

1. Gös. $\bar{p}$
2. $p \rightarrow q$ ... (Ön.)
3. $p \rightarrow \bar{q}$ ... (Ön.)

gibi üç satır elde ettikten sonra türetimi tamamlamadan durmak zorunda kalırız. O halde çıkmazdan kurtulmak için yeni bir türetim biçimine başvurmak gerecektir. Bu yeni türetim biçimini ortaya koyabilmek için verilen çıkarımın niçin geçerli olduğunu sezgisel olarak açıklayalım.

Çıkarımın sonucu $\bar{p}$ önermesidir. Bu önerme yanlış olsaydı p önermesi doğru olurdu. İmdi p doğru ise $p \rightarrow q$ öncülünden dolayı (→ç) gereği q doğru olur, $p \rightarrow \bar{q}$ öncülünden dolayı da (→ç) gereği $\bar{q}$ olur. Oysa hem q hem q doğru olamaz. ($\bar{q}$'in doğru olması q'nün yanlış olması demektir. Böylece hem q'nün hem $\bar{q}$'in doğru olması, q'nün hem doğru hem yanlış olması demektir. Böyle bir durum ise olamaz.) İmdi hem q hem $\bar{q}$ doğru olmadığından p önermesi de doğru olamaz. Dolayısıyla p yanlış olup $\bar{p}$ *doğru*'dur.

Özet olarak $\bar{p}$ sonucunu göstermek için $\bar{p}$'nin kısaltılmış değillemesi olan p önermesini *varsayım* olarak, $p \rightarrow q$ ile $p \rightarrow \bar{q}$ öncüllerinden (biri öbürünün değillemesi olan) q ile $\bar{q}$ önermelerini türettik. Biri öbürünün değillemesi olan (yani C ile ~C biçiminde olan) iki önermeye *çelişik önermeler* denir. Böylece varsayımla öncüllerden çelişik önermeler türettiğimizi söyleyebiliriz. İşte p varsayımından q ile $\bar{q}$ gibi çelişik önermeler türettiğimize göre $\bar{p}$ sonucunu göstermiş oluyoruz. Böyle bir türetime de *dolaylı türetim* denir.

Genel olarak

$A_1, \ldots, A_n \therefore B$

biçiminde geçerli bir çıkarımın geçerli olduğunu gösteren bir *dolaylı türetim*

(1)

1.	~~Gös.~~ B	
2.	dğ(B)	... (Var.)
3.	A_1	... (Ön.)
.	.	
.	.	
.	.	
n + 3.	A_n	... (Ön.)
.	.	
.	.	
.	.	
m.	C	
.	.	
.	.	
.	.	
k.	D	(C ile D çelişik önermelerdir)

biçimindedir. C = ~D veya D = ~C.

Dolaylı türetimin *açış adımları,* 1. ile 2. satırların yazılması demektir. 1. satır dolaylı türetimin *ana-satır*'ı, 1. satırın altındaki satırlar ise *yardımcı satırlar*'dır. *Ara adımlar,* 2. satırın altındaki satırların yazılması anlamına gelir. *Kapanış adımı* olarak da ana-satırdaki 'Gös.' işareti ortasından çizilerek yardımcı satırlar çerçevelenir.

Bütün türetim biçimlerinde olduğu gibi çıkarımın sonucu B önermesi 1. satırda yazılır. 2. satırda B'nin kısaltılmış değillemesi dğ(B) önermesi *varsayım* olarak yazılır. Gerekçe olarak (Var.) işareti konur. Bu iki satırın yazılmasına *dolaylı türetimin açış adımları* diyoruz. *Birinci açış adımı olarak sonuç olduğu gösterilmek istenilen önerme,* ikinci açış adımı olarak da *dolaylı türetimin varsayımı* üstteki önermenin biraz sağında başlamak üzere yazılır. Sonra A_1, ..., A_n öncülleri alt alta yazılır. Ondan sonra da eldeki çıkarım kurallarına dayanarak C ile D gibi iki çelişik önerme türetilmeğe çalışılır. İki çelişik önerme (veya kısaca bir *çelişme*) türetilir türetilmez türetim tamamlanmış olur. O zaman da 1. satırdaki 'Gös.' işareti *silinme* anlamında çizilip altındaki satırlar gene silinme anlamında çerçeve içine alınır.

Buna göre Örnek 1'deki çıkarımın geçerliliğini aşağıdaki dolaylı türetimle gösterebiliriz.

1. Gös. $\bar{p}$

2.	p	... (Var.)
3.	$p \rightarrow q$	... (Ön.)
4.	$p \rightarrow \bar{q}$	... (Ön.)
5.	q	... (2, 3, →ç)
6.	$\bar{q}$	... (2, 4, →ç)

Görüldüğü gibi q ile $\bar{q}$ gibi bir çelişme türetilince dolaylı türetim tamamlanmış olur.

Örnek 2:

$\bar{p} \rightarrow p \therefore$ p çıkarımının geçerli olduğunu bir türetimle gösterelim.

Sonuç bir koşullu olmadığından ya bir dolaysız türetime ya da bir dolaylı türetime başvurmak gerekecektir. Dolaysız türetime girişirsek

1. Gös. p
2. $\bar{p} \rightarrow p$ ... (Ön.)

satırlarını yazdıktan sonra durmak zorunda kalırız. O halde dolaylı türetime başvurmalıyız. Böylece

(2)

1. Gös. p
2. $\bar{p}$ ... (Var.)
3. $\bar{p} \rightarrow p$ ... (Ön.)
4. p ... (2, 3, →ç)

satırlarını elde ederiz. (2) türetimi, (1) biçiminde olmakla birlikte 2. satırı (Tk.) çıkarım kuralı gereği tekrarlayarak (1) biçiminde olan bir türetim halinde genişletilebilir.

(3)

1. Gös. p

2.	$\bar{p}$	... (Var.)
3.	$\bar{p} \rightarrow p$	... (Ön.)
4.	p	... (2, 3, →ç)
5.	$\bar{p}$	... (2, Tk.)

İmdi (2) türetiminde de 2. ile 4. satırlar bir çelişmeyi oluştururlar. Ancak (1) biçimindeki türetimlerde çelişme bütünüyle varsayımdan sonra gelir. Oysa (2) türetiminde çelişmenin bir öğesi ($\bar{p}$ önermesi) varsayımın kendisidir. Bununla birlikte (Tk.) çıkarım kuralı yardımıyla (2)'yi (1) biçiminde olan (3) türetimi halinde genişletilebildiğini göz önünde tutarak (2) türetimini de yeterli sayacağız. Böylece (2)'yi

(2')

1.	~~Gös.~~ p	
2.	$\bar{p}$	... (Var.)
3.	$\bar{p} \rightarrow p$	... (Ön.)
4.	p	... (2, 3, →ç)

verilen çıkarım geçerliliğini gösteren en uygun türetim olarak kabul ediyoruz.

Dikkat edilirse (2') türetimi

(1')

1.	Gös. B	
2.	dğ(B)	... (Var.)
3.	A_1	... (Ön.)
.	.	
.	.	
.	.	
n + 3.	A_n	... (Ön.)
.	.	
.	.	
.	.	
m.	B	

biçimindedir.

1. satırın altında 2. ile m. satırlar çelişik olduğundan (1')'nü de $A_1,...,A_n \therefore B$ çıkarımının geçerli olduğunu gösteren bir dolaylı türetim sayıyoruz. (1')'nün yeterliliği, (Tk.) çıkarım kuralına dayanarak (1) biçiminde olan

(1")

1.	~~Gös.~~ B	
2.	dğ(B)	... (Var.)
3.	A_1	... (Ön.)
.	.	
.	.	
.	.	
n + 3.	A_n	... (Ön.)
.	.	
.	.	
.	.	
m.	B	
m + 1.	dğ(B)	... (2, Tk.)

bir dolaylı türetim halinde genişletilme olanağına dayanır.

Örnek 3:

$p \rightarrow q,\ \bar{p} \rightarrow r,\ \bar{q} \rightarrow \bar{r}\ \therefore$ q çıkarımının geçerli olduğunu bir türetimle gösterelim.

1.	~~Gös.~~ q	
2.	$\bar{q}$	... (Var.)
3.	$p \rightarrow q$	... (Ön.)
4.	$\bar{p} \rightarrow r$	... (Ön.)
5.	$\bar{q} \rightarrow \bar{r}$	... (Ön.)
6.	$\bar{p}$	... (2, 3, →dç)
7.	r	... (3, 4, →ç)
8.	q	... (5, 7, →dç)

Çıkarımın sonucu bir koşullu olmadığından (dolaysız türetim de burada işe yaramadığından) bir dolaylı türetim yaptık. Bu türetim (1') biçimindedir.

Örnek 4:

$\bar{q}, \bar{p} \rightarrow r, \bar{q} \rightarrow \bar{r}\ \therefore \sim(p \rightarrow q)$ çıkarımının geçerli olduğunu bir türetimle gösterelim.

Sonuç bir değilleme önermesidir. O halde koşulluya giriş türetimi yapamayız. Dolaysız türetim burada işe yaramaz. Dolaysız türetim çok seyrek hallerde sonuç verdiğinden, genellikle koşulluya giriş türetimine veya dolaylı türetime başvurmamız öğütlenir. Burada koşulluya giriş türetimi uygulanamadığından dolaylı türetime başvurmamız gerekiyor.

1.	~~Gös.~~ $\sim(p \rightarrow q)$	
2.	$p \rightarrow q$	... (Var.)
3.	$\bar{q}$	... (Ön.)
4.	$\bar{p} \rightarrow r$	... (Ön.)
5.	$\bar{q} \rightarrow \bar{r}$	... (Ön.)
6.	$\bar{r}$	... (3, 5, →dç)
7.	p	... (4, 6, →ç)
8.	q	... (2, 7, →dç)

Bu türetim (1) biçiminde bir dolaylı türetimdir. 3. ile 8. satırlar bir çelişme durumundadır.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki çıkarımların geçerli olduğunu bir türetimle gösteriniz:

1. $p, \bar{q} \therefore \sim(p \rightarrow q)$
2. $(p \rightarrow \bar{q}) \rightarrow \sim(p \rightarrow \bar{q}) \therefore \sim(p \rightarrow \bar{q})$
3. $p \rightarrow q, \bar{p} \rightarrow q \therefore q$
4. $r \rightarrow \bar{p}, s \rightarrow r, s \rightarrow p, \bar{q} \therefore \sim(q \rightarrow s)$

1.5.3.2 Karmaşık Türetim

Örnek 1:

$p \rightarrow q, p \rightarrow \bar{q} \therefore r \rightarrow \bar{p}$ çıkarımının geçerli olduğunu bir türetimle gösterelim.

1. ~~Gös.~~ $r \rightarrow \overline{p}$
2. | r . ... (Var.)
3. | $p \rightarrow q$ ... (Ön.)
4. | $p \rightarrow \overline{q}$ ... (Ön.)
5. | ~~Gös.~~ $\overline{p}$
6. | | p ... (Var.)
7. | | q ... (3, 6, →ç)
8. | | $\overline{q}$ ... (4, 6, →ç)

Çıkarımın sonucu bir koşullu olduğundan bir koşulluya giriş türetimiyle başlıyoruz. Ancak ilk 4. satırı yazdıktan sonra bir yardımcı türetime başvurmadan yeni bir adım atamıyoruz. Amacımız $\overline{p}$ önermesini türetmektir. Bu önerme bir koşullu olmadığından dolaylı türetime başvurduk. Böylece 5. - 8. satırlardan kurulu olan bir *yardımcı* dolaylı türetimi elde ettik. Bu yardımcı türetimle $\overline{p}$'yi göstermiş olduğumuzdan ana türetim de tamamlanmış oluyor.

Örnek 2:

$\overline{p} \therefore p \rightarrow q$ çıkarımının geçerli olduğunu bir türetimle gösterelim.

1. ~~Gös.~~ $p \rightarrow q$
2. | p ... (Var.)
3. | $\overline{p}$ ... (Ön.)
4. | ~~Gös.~~ q
5. | | $\overline{q}$ ... (Var.)
6. | | p ... (2, Tk.)
7. | | $\overline{p}$ ... (3, Tk.)

Örnek 3:

$q \rightarrow t$, $p \rightarrow \overline{r}$, $r \rightarrow q$, $t \rightarrow p \therefore r \rightarrow s$ çıkarımının geçerli olduğunu bir türetimle gösterelim.

1.	~~Gös.~~ $r \rightarrow s$	
2.	r	... (Var.)
3.	$q \rightarrow t$	... (Ön.)
4.	$p \rightarrow \overline{r}$	... (Ön.)
5.	$r \rightarrow q$	... (Ön.)
6.	$t \rightarrow p$	... (Ön.)
7.	$\overline{p}$	... (2, 4, →dç)
8.	$\overline{t}$	... (6, 7, →dç)
9.	$\overline{q}$	... (3, 8, →dç)
10.	$\overline{r}$	... (5, 9, →dç)
11.	q	(2, 5, →ç)
12.	~~Gös.~~ s	
13.	$\overline{s}$	... (Var.)
14.	r	... (2, Tk.)
15.	$\overline{r}$	... (10, Tk.)

Sonuç bir koşullu olduğundan koşulluya giriş türetimine başvurduk. 3. - 6. satırda çıkarımın bütün öncüllerini yazdık. Sonra da 1. satırın dışında kalan eldeki bütün satırlardan (→ç) ile (→dç) kuralları yardımıyla elde edilebilen bütün satırları (7. - 10. satırları) türettik. Elde etmek istediğimiz s önermesi bu satırlara ait olmadığından, s'ye ilişkin olarak bir yardımcı dolaylı türetim yaptık. Böylece 12. - 15. satırlarını elde ettik.

Örnek 4:

$(p \rightarrow q) \rightarrow p \therefore p$ çıkarımının geçerli olduğunu bir türetimle gösterelim.

İlk önce

1.	Gös. p	
	$\overline{p}$	... (Var.)

$(p \rightarrow q) \rightarrow p$ ... (Ön.)

$\sim(p \rightarrow q)$ ... (2, 3, $\rightarrow$dç)

satırlarını elde ederiz. Ancak bu satırları yazdıktan sonra duraklıyoruz. Dolaylı bir türetim yaptığımıza göre amacımız bir çelişkiyi elde etmektir. İmdi 4. satırdaki önerme $\sim(p \rightarrow q)$'dür. Bu da bir *koşullu değilleme*'sidir. Koşullunun kendisini (yani $p \rightarrow q$ önermesini) bir yardımcı türetimle elde etmeğe çalışalım.

1. Gös. p
2. $\quad \bar{p}$ ... (Var.)
3. $\quad (p \rightarrow q) \rightarrow p$ ... (Ön.)
4. $\quad \sim(p \rightarrow q)$ ... (2, 3, $\rightarrow$dç)
5. $\quad$ ~~Gös.~~ $p \rightarrow q$
6. $\quad\quad p$ ... (Var.)
7. $\quad\quad$ ~~Gös.~~ q
8. $\quad\quad\quad \bar{q}$ ... (Var.)
9. $\quad\quad\quad p$ ... (6, Tk.)
10. $\quad\quad\quad \bar{p}$ ... (2, Tk.)

Böylece başarıya ulaşmış oluyoruz. Genel olarak *dolaylı* bir türetim yaparken $\sim(A \rightarrow B)$ gibi bir *koşullu değillemesi*'ni elde edersek, bir de *koşullunun kendisini*, yani $A \rightarrow B$ önermesini bir yardımcı türetimle elde etmeğe çalışmalıyız. Bu pratik öğüdü izlemekle (her zaman değilse bile) çoğu zaman en kısa yoldan başarıya ulaşırız.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki çıkarımların geçerli olduğunu türetimle gösteriniz:

1. $\bar{p} \rightarrow q \therefore (p \rightarrow q) \rightarrow q$
2. $(p \rightarrow q) \rightarrow q \therefore \bar{p} \rightarrow q$
3. $(p \rightarrow q) \rightarrow s, r \rightarrow \bar{p}, r \therefore s$
4. $(p \rightarrow q) \rightarrow q \therefore (q \rightarrow p) \rightarrow p$

1.5.4 Salt Türetim Biçimleri:

1.5.4.1 Dolaysız Açılışlı ve Dolaysız Kapanışlı Türetim

Dolaysız Türetim'ler,

(1) ~~Gös.~~ B

A_1 ... (Ön.)
.
.
.
An ... (Ön.)
.
.
.
B

biçimindeki türetimlerdir. Bir dolaysız türetimdeki *açış*, tek adımlı olup bir tek satırın, yani ana-satırın yazılmasından ibarettir. (1) türetiminin açışı

(2) Gös. B

satırının yazılması demektir. İşte bu biçimdeki açışlara *dolaysız açış* diyoruz. Dolaysız açışta varsayım olmadığından, dolaysız açış yerine *varsayımsız açış* da diyebiliriz.

Öte yandan (1) gibi bir dolaysız türetimin kapanışı'ı, gösterilmek istenilen B önermesinin sonuncu yardımcı satırda elde edilmesine dayanır. Böyle bir kapanışa *dolaysız kapanış* diyoruz. Dolaysız kapanış

(3) ~~Gös.~~ B

.
.
.
B

biçimindedir.

Dikkat edilirse, (2) biçimindeki dolaysız açışta kapanışın nasıl olacağını belirtmediğimiz gibi, (3) biçimindeki kapanışta da açışın nasıl olacağını belirtmedik. Buraya kadar incelediğimiz türetimlerde dolaysız açışla dolaysız kapanış hep birbirine bağlıydı. Şimdi ise açış ile kapanışın aynı biçimde olabildiği gibi, ayrı biçimlerde de olabileceğini kabul ederek açış biçimleriyle kapanış biçimlerini birbirinden bağımsız olarak ele alıyoruz.

Örneğin,

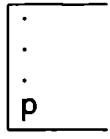
(4) Gös. p

ile

(5) Gös. $p \rightarrow q$

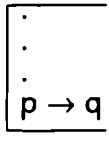
dolaysız açış biçiminde,

(6) ~~Gös.~~ p



ile

(7) ~~Gös.~~ $p \rightarrow q$



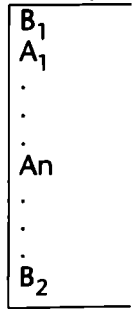
dolaysız kapanış biçimindedir.

Açış ile kapanışı aynı biçimde olan türetim biçimlerine *salt türetim biçimleri,* ayrı olanlara ise *karma türetim biçimleri* diyoruz. Örneğin (1) biçimindeki *dolaysız açışlı* ve *dolaysız kapanışlı* türetimler salt türetim biçimindedir. Buraya kadar yalnız salt türetim biçimlerini inceledik. Bundan böyle karma türetim biçimlerini de inceleyeceğiz.

1.5.4.2 Koşullu Açışlı ve Koşullu Kapanışlı Türetim

Koşulluya Giriş türetim'leri,

(1) ~~Gös.~~ $B_1 \rightarrow B_2$



biçimindeki türetimlerdir. Koşulluya giriş türetiminin *iki adımlı* olup ana-satır ile B_1 varsayımının yazılmasından ibarettir. Böyle bir açışa koşulluya giriş açısı veya kısaca *Koşullu açış* diyoruz. Bu açış,

(2) Gös. $B_1 \rightarrow B_2$

B_1 ... (Var.)

biçimindedir. Birinci adımda ana-satırı yazarız. Ana-satırdaki önermenin bir *koşullu* olması gerekir. İkinci adımda ise sonuç olduğu gösterilmek istenilen *koşullunun ön-bileşeni* varsayım olarak yazılır. Koşulluya giriş açışı *varsayımlı* bir açış biçimidir.

Öte yandan (1) türetiminin kapanışı sonuncu yardımcı satırdaki önermenin, sonuç olduğu gösterilmek istenilen koşullunun ard-bileşeni olmasına dayanır. İşte

(3) ~~Gös.~~ $B_1 \rightarrow B_2$

.
.
.
B_2

biçimindeki kapanışa koşulluya giriş kapanışı veya kısaca koşullu kapanış diyoruz.

Koşullu açışla koşullu kapanış birbirinden bağımsız olduğundan (2)'nin kapanış biçimini belirtmediğimiz gibi, (3)'ün de açış biçimini belirtmedik.

Örneğin,

(4) Gös. $(\overline{p} \rightarrow q) \rightarrow r$

$\overline{p} \rightarrow q$ ... (Var.)

bir koşulluya giriş açışı,

(5) ~~Gös.~~ $(\overline{p} \rightarrow q) \rightarrow r$

.
.
.
r

ise bir koşulluya giriş kapanışıdır.

Şüphesiz (1) biçimindeki türetimler *salt türetim* biçimindedir. Bunlara *koşullu açışlı ve koşullu kapanışlı türetim* diyoruz.

1.5.4.3 Dolaylı Açışlı ve Dolaylı Kapanışlı Türetim

C ile D çelişik önermeler olduğunda,

(1) ~~Gös.~~ B

dğ(B) ... (Var.)
A_1 ... (Ön.)
.
.
An ... (Ön.)
.
.
C
.
.
D

biçimindeki türetimler *dolaylı türetim*'lerdir. Dolaylı türetmin açışı *iki adımlı* olup ana-satır ile dğ(B) varsayımının yazılmasından ibarettir. Böyle bir açışa *dolaylı açış* diyoruz. Dolaylı açış,

(2) Gös. B

dğ(B) ... (Var.)

biçimindedir. Birinci adımda ana-satırı yazarız. Bu satırdaki önerme herhangi bir biçimde olabilir. (Özel olarak B bir koşullu da olabilir.) İkinci adımda ise *varsayım* olarak sonuç olduğu gösterilmek istenilen önermenin kısaltılmış değillemesi yazılır. Dolaylı açış da bir *varsayımlı açış* biçimidir.

Dolaylı türetimin kapanışı yardımcı satırlar arasında C ile D gibi iki çelişik önermenin bulunmasına dayanır. Yani *dolaylı kapanış,* C ile D çelişik olmak üzere

(3) ~~Gös.~~ B

.
.
.
C
.
.
.
D

biçimindedir.

Dolaylı açış ile dolaylı kapanış birbirinden bağımsız olduğundan, (2)'nin kapanış biçimi ile (3)'ün açış biçimini belirtmedik.

Örneğin,

(4) Gös. $\sim(p \rightarrow q)$

$p \rightarrow q$ ... (Var.)

bir dolaylı açış,

(5) ~~Gös.~~ $\sim(p \rightarrow q)$

$q \rightarrow \overline{r}$

$\sim(q \rightarrow \overline{r})$

bir dolaylı kapanıştır.

(1) biçimindeki dolaylı türetimlere *dolaylı açışlı ve dolaylı kapanışlı* türetim diyoruz. Bu türetimlerin *salt türetim* biçiminde olduğu besbellidir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki açış ve kapanışların hangi biçimde (dolaysız, koşulluya giriş ya da dolaylı açış veya kapanış) olduğunu belirtiniz.

1. Gös. $p \rightarrow \sim(q \rightarrow r)$

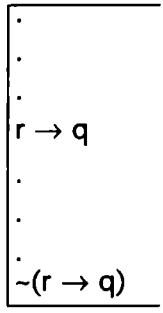
2. Gös. $p \rightarrow q$

   $\sim(p \rightarrow q)$ ... (Var.)

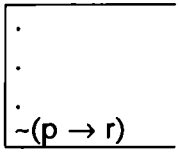
3. ~~Gös.~~ $\sim(\overline{p} \rightarrow q)$

   $\sim(\overline{p} \rightarrow q)$

4. ~~Gös.~~ $\overline{p}$



5. ~~Gös.~~ p → ~(p → r)



6. Gös. (p → q) → (r → s)

p → q ... (Var.)

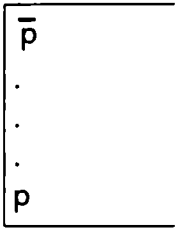
7. Gös. ~[(p → r) → q]

(p → r) → q ... (Var.)

8. Gös. ($\overline{q}$ → r) → ($\overline{p}$ → q)

9. Gös. ~(q → r)

10. ~~Gös.~~ p



1.5.5 Karma Türetim Biçimleri

1.5.5.1 Dolaysız Açışlı ve Koşullu Kapanışlı Türetim

Örnek 1:

q ∴ p → q çıkarımının geçerli olduğunu bir türetimle gösterelim.

(1) 1. ~~Gös.~~ p → q

2. | p ... (Var.)

3. | q ... (Ön.)

Dikkat edilirse, 2. satırdaki varsayamın türetim içinde hiç bir görevi yoktur. Böyle bir durumda varsayımın yazılmamasına izin verir. O zaman da türetime *dolaysız açış* ile başlamış oluyoruz. Buna karşılık kapanış, *koşullu kapanışı* biçiminde kalıyor. Böylece salt biçimde olan (1) türetimi yerine *karma* biçimde olan *dolaysız açışlı ve koşullu kapanışlı*

(1') 1. Gös. p → q

2. | q ... (Ön.)

türetimini elde ederiz.

Genel olarak

Gös. A → B

biçimindeki bir ana-satır verildiğinde, eğer B ard-önermesini A varsayımına dayanmaksızın türetebilirsek, o zaman A varsayımını hiç yazmadan, *dolaysız açışlı ve koşullu kapanışlı* olan bir türetim yapmağa hakkımız vardır.

Örnek 2:

p, p → q ∴ r → q çıkarımının geçerli olduğunu bir türetimle gösterelim.

(2) 1. ~~Gös.~~ r → q

2. | r ... (Var.)

3. | p ... (Ön.)

4. | p → q ... (Ön.)

5. | q ... (3, 4, →ç)

türetiminde r varsayımını hiç kullanmadığımızdan, yerine dolaysız açışlı ve koşullu kapanışlı

(2^1)	1.	~~Gös.~~ $r \rightarrow q$	
	2.	p	... (Ön.)
	3.	$p \rightarrow q$	... (Ön.)
	4.	q	... (2, 3, →ç)

türetimini yapabiliriz.

Örnek 3:

$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r) \therefore p \rightarrow (q \rightarrow r)$ çıkarımının geçerliliğini karma türetim yönteminden yararlanan yeni bir türetimle gösterelim.

1.	~~Gös.~~ $p \rightarrow (q \rightarrow r)$	
2.	p	... (Var.)
3.	$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$	... (Ön.)
4.	~~Gös.~~ $q \rightarrow r$	
5.	q	... (Var.)
6.	~~Gös.~~ $p \rightarrow q$	
7.	q	... (5, Tk.)
8.	$p \rightarrow r$	... (3, 6, →ç)
9.	r	... (2, 8, →ç)

6. ile 7. satırlar *dolaysız açışlı ve koşullu kapanışlı* bir yardımcı türetimdir. 3. satırdan bir öncül-satır olarak yararlanabilmek için $p \rightarrow q$ önermesini türetmek gereğini duyuyoruz. 5. satırdaki q önermesine dayanarak da 6. ile 7. satırlardaki yardımcı türetimle $p \rightarrow q$ önermesini elde edebiliyoruz.

1.5.5.2 Koşullu Açışlı ve Dolaysız Kapanışlı Türetim

Örnek 1:

$p \rightarrow (p \rightarrow q) \therefore p \rightarrow q$ çıkarımının geçerli olduğunu bir türetimle gösterelim.

(1) 1. ~~Gös.~~ $p \rightarrow q$

2.	p	... (Var.)
3.	$p \rightarrow (p \rightarrow q)$	... (Ön.)
4.	$p \rightarrow q$	... (2, 3, →ç)
5.	q	... (2, 4, →ç)

İmdi, salt koşulluya giriş biçiminde olan (1) türetiminde 5. satırını kaldırıp dolaysız kapanış yapabiliriz. Nitekim 4. satırdaki önerme, sonuç olduğu gösterilmek istenilen $p \rightarrow q$'dan başka bir şey değildir. Böylece *koşullu açışlı ve dolaysız kapanışlı*

(1') 1. ~~Gös.~~ $p \rightarrow q$

2.	p	... (Var.)
3.	$p \rightarrow (p \rightarrow q)$	... (Ön.)
4.	$p \rightarrow q$	... (2, 3, →ç)

türetimini elde ederiz. Örnekteki çıkarımın geçerliliğini göstermek için (1') türetimi yeterlidir. Nitekim bu çıkarımın geçerliliğini göstermeğe yetkili olduğunu bildiğimiz türetimi, (1') türetiminden elde edilebilir.

Genel olarak salt koşulluya giriş biçimindeki

(2) ~~Gös.~~ $B_1 \rightarrow B_2$

B_1	... (Var.)
.	
.	
.	
$B_1 \rightarrow B_2$	
B_2	

türetimi yerine, *koşullu açışlı ve dolaysız kapanışlı*

(2') ~~Gös.~~ $B_1 \rightarrow B_2$

B_1
.
.
.
$B_1 \rightarrow B_2$

biçimindeki türetimle yetinebiliriz. Nitekim (2') türetiminden (2) türetimine geçebileceğini biliyoruz: B_1 varsayımıyla $B_1 \rightarrow B_2$ satırından (→ç) gereği B_2'yi türetmek mümkündür.

Örnek 2:

$\sim(\overline{p} \rightarrow q) \rightarrow p \therefore \overline{p} \rightarrow q$ çıkarımının geçerli olduğunu bir çıkarımla gösterelim.

1.	~~Gös.~~ $\overline{p} \rightarrow q$	
2.	$\overline{p}$	... (Var.)
3.	$\sim(\overline{p} \rightarrow q) \rightarrow p$	... (Ön.)
4.	$\overline{p} \rightarrow q$	... (2, 3, →dç)

1.5.5.3 Dolaysız Açışlı ve Dolaysız Kapanışlı Türetim

Örnek 1:

$p, \overline{p} \therefore q$ çıkarımının geçerli olduğunu bir türetimle gösterelim:

(1)

1.	~~Gös.~~ q	
2.	$\overline{q}$	... (Var.)
3.	p	... (Ön.)
4.	$\overline{p}$	... (Ön.)

Bir türetim salt biçimde bir dolaylı türetimdir. Ancak 2. satırdaki varsayımı hiç kullanmadığımızı göz önünde tutarak bu varsayımı ortadan kaldırıp (1) türetimi yerine, *dolaysız açışlı ve dolaylı kapanışlı*

(1')

1.	~~Gös.~~ q	
2.	p	... (Ön.)
3.	$\overline{p}$	... (Ön.)

türetimini elde ederiz. (1') türetiminin örnekteki çıkarımın geçerliliğini göstermeğe yeterli olduğu, (1) biçiminde genişletilebilmesinden anlaşılır.

Genel olarak verilen bir dolaylı türetimin varsayımı yeni satırlar türetmek için kullanılmıyorsa bu varsayımı ortadan kaldırmaya izin vardır.

Örnek 2:

$p, p \rightarrow q, q \rightarrow p \therefore r$ çıkarımının geçerli olduğunu bir türetimle gösterelim.

1.	~~Gös.~~ r	
2.	p	... (Ön.)
3.	$p \rightarrow q$	... (Ön.)
4.	$q \rightarrow \overline{p}$	... (Ön.)
5.	q	... (2, 3, →ç)
6.	$\overline{p}$	... (4, 5, →ç)

Bu da dolaysız açışlı ve dolaylı kapanışlı bir türetimdir. ($\overline{r}$ varsayımını hiç kullanmayacağımızdan dolayı yazmadık).

1.5.5.4 Dolaylı Açışlı ve Dolaysız Kapanışlı Türetim

§ 1.5.3.1.'de geçen (1') biçimindeki türetimler *dolaylı açışlı ve dolaysız kapanışlı* sayılabilir. Nitekim kapanış, sonuç olduğu gösterilmek istenilen B önermesinin ortaya çıkmasına dayanıyor.

Dikkat edilirse, § 1. 5. 3. 1.'deki Örnek 2 ile Örnek 3'ün konusu olan türetimler dolaylı açışlı ve dolaysız kapanışlıdır.

1.5.5.5 Dolaylı Açışlı ve Koşullu Kapanışlı Türetim

Örnek 1:

$\sim(p \rightarrow q) \rightarrow r, r \rightarrow q \therefore p \rightarrow q$ çıkarımının geçerli olduğunu bir türetimle gösterelim.

İlk akla gelen

(1)

1.	~~Gös.~~ $p \rightarrow q$	
2.	p	... (Var.)
3.	$\sim(p \rightarrow q) \rightarrow r$	... (Ön.)
4.	$r \rightarrow q$	... (Ön.)
5.	~~Gös.~~ q	
6.	$\bar{q}$	... (Var.)
7.	$\bar{r}$	... (4, 6, →dç)
8.	$p \rightarrow q$	... (3, 7, →dç)
9.	q	... (2, 8, →ç)

gibi bir koşuluya giriş türetimidir. (Yardımcı türetim, dolaylı açışlı ve dolaysız kapanışlıdır.)

Verilen çıkarımın geçerli olduğunu bir de dolaylı açışlı bir türetimle yapmayı deneyelim. O zaman da

(1')

1.	~~Gös.~~ $p \rightarrow q$	
2.	$\sim(p \rightarrow q)$	... (Var.)
3.	$\sim(p \rightarrow q) \rightarrow r$	... (Ön.)
4.	$r \rightarrow q$	... (Ön.)
5.	r	... (2, 3, →ç)
6.	q	... (Var.)
7.	~~Gös.~~ $p \rightarrow q$	
8.	q	... (6, Tk.)

gibi dolaylı açışlı ve dolaysız kapanışlı bir türetim elde ederiz. (Yardımcı türetim, dolaysız açışlı ve koşulluya giriş kapanışlıdır.)

Dikkat edilirse, (1') türetiminin 6. satırındaki q önermesi, sonuç olduğu gösterilmek istenilen $p \rightarrow q$ önermesinin ard-bileşenidir. Oysa bu ard-bileşene dayanarak koşullunun kendisi bir yardımcı türetimle elde edilebil-

diğinden, bu yardımcı türetimi yapmadan koşulluya giriş kapanışına izin verlir. Böylece (1') türetimi yerine, *dolayla açışlı ve koşulluya giriş kapanışlı*

(1") 1. ~~Gös.~~ $p \rightarrow q$

2.	$\sim(p \rightarrow q)$	... (Var.)
3.	$\sim(p \rightarrow q) \rightarrow r$	... (Ön.)
4.	$r \rightarrow q$	... (Ön.)
5.	r	... (3, 4, →ç)
6.	q	... (4, 5, →ç)

türetim elde edilir.

Örnek 2:

$r \rightarrow (p \rightarrow q)$, $\overline{r} \rightarrow q \therefore p \rightarrow q$ çıkarımının geçerli olduğunu dolaylı açışlı bir türetimle gösterelim.

1. ~~Gös.~~ $p \rightarrow q$

2.	$\sim(p \rightarrow q)$	... (Var.)
3.	$r \rightarrow (p \rightarrow q)$	... (Ön.)
4.	$\overline{r} \rightarrow q$	... (Ön.)
5.	$\overline{r}$	... (2, 3, →dç)
6.	q	... (4, 5, →ç)

1.5.5.6 Koşullu Açışlı ve Dolaylı Kapanışlı Türetim

Örnek 1:

§ 1.5.3.2. Örnek 2'deki $\overline{p} \therefore p \rightarrow q$ çıkarımının geçerliliğini bir de karma biçimde olan bir türetimle göstermeye çalışalım.

Söz konusu çıkarımın § 1.5.3.2.'deki türetimin 4.-7. satırları, q'nun sonuç olduğunu göstermeye yarayan yardımcı bir dolaylı türetimi oluştururlar. Bu yardımcı türetimdeki $\overline{q}$ varsayımının hiçbir görevi olmadığından yerine

dolaysız açışlı ve dolaysız kapanışlı olan bir yardımcı türetim kullanabiliriz. Böylece türetim,

(1) 1. ~~Gös.~~ $p \rightarrow q$

2. | p ... (Var.)
3. | $\bar{p}$ ... (Ön.)
4. | ~~Gös.~~ q
5. | p ... (2, Tk.)
6. | $\bar{p}$ ... (3, Tk.)

biçimini alır. Oysa (1) türetimindeki yardımcı türetimin yardımcı satırları (yani 5. ve 6. satırları) ana-türetimin satırlarının tekrarından başka bir şey değildir. Dolayısıyla 4., 5. ve 6. satırlardan oluşan yardımcı türetimin bütünüyle ortadan kaldırılmasına izin verilir. Böylece (1) türetimi yerine, *koşullu açışlı ve dolaylı kapanışlı*

(1') 1. ~~Gös.~~ $p \rightarrow q$

2. | p ... (Var.)
3. | $\bar{p}$ ... (Ön.)

türetimini elde ederiz. (1') türetiminin verilen çıkarımın geçerliliğini göstermek için yeterlidir. Nitekim (1') türetiminin (1) türetimi biçiminde genişletilebildiğini biliyoruz.

Genel olarak, C ile D çelişik önermeler olduğunda,

(2 ~~Gös.~~ $B_1 \rightarrow B_2$

| B_1 ... (Var.)
| A_1 ... (Ön.)
| .
| .
| .
| A_n ... (Ön.)
| .
| .
| .
| C
| .
| .
| .
| D

Biçimindeki *koşullu açışlı ve dolaylı kapanışlı* türetimle, $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ çıkarımının geçerli olduğunu gösteririz.

Örnek 2:

§ 1.5.3.2. Örnek 3'deki $q \to t,\ p \to \overline{r},\ r \to q,\ t \to p \therefore r \to s$ çıkarımının geçerli olduğunu koşullu ve dolaylı kapanışlı bir türetimle gösterelim.

1.	~~Gös.~~ $r \to s$	
2.	r	... (Var.)
3.	$q \to t$	... (Ön.)
4.	$p \to \overline{r}$	... (Ön.)
5.	$r \to q$	... (Ön.)
6.	$t \to p$	... (Ön.)
7.	$\overline{p}$	... (2, 4, →dç)
8.	$\overline{t}$	... (6, 7, →dç)
9.	$\overline{q}$	... (3, 8, →dç)
10.	$\overline{r}$	... (5, 9, →dç)

Dikkat edilirse, 2. ile 10. satırlardaki önermeler çelişiktir. Buna göre *dolaylı kapanış* yapmaya hakkımız vardır. Böylece *koşullu açış ve dolaylı kapanışlı* bir türetim elde ediyoruz.

Örnek 3:

§ 1.5.3.2. Örnek 4'deki $(p \to q) \to p \therefore p$ çıkarımının geçerli olduğunu bir karma türetimle gösterelim.

1.	~~Gös.~~ p	
2.	$\overline{p}$	... (Var.)
3.	$(p \to q) \to p$	... (Ön.)
4.	$\sim(p \to q)$	... (2, 3, →dç)
5.	~~Gös.~~ $p \to q$	... (Ön.)
6.	p	... (Var.)
7.	$\overline{p}$	... (2, Tk.)

Görüldüğü gibi, 5., 6. ve 7. satırlardan oluşan yardımcı türetim koşullu açışlı ve dolaylı kapanışlıdır.

Genel olarak karma türetimler karşılıkları olan salt türetimlerden daha kısadır. Her karma türetimi genişleterek salt biçimde olan bir türetime çevirebiliriz. Böylece karma türetimlerin yeterliliği gösterilmiş olur. Pratik bakımdan salt türetimler yerine mümkün olduğu kadar karma türetimler yapmaya çalışmalıyız.

ALIŞTIRMALAR

Önceki alıştırmalara konu olan çıkarımların geçerliliğini, mümkün olduğu kadar *karma* biçimde olan türetimlerle göstermeye çalışınız.

1.5.6 Türetim İşleminin Tanımı

Şimdiye kadar türetim işlemi (ve dolayısıyla türetim çizelgesi) hakkında pek çok bilgiler verdik. Şimdi ise bütün bu bilgileri toplayarak "türetim"in teorik bakımdan yeterli olan genel bir tanımını vermeye çalışacağız.

(1) $A_1, \ldots, A_n \therefore B$

herhangi bir geçerli çıkarım olsun. ($n \geq 0$'dır. $n = 0$ ise, çıkarım öncülsüz olup B sonucu bir mantıksal teoremdir.) Amacımız (1) çıkarımının karşılığı olup bu çıkarımın geçerliliğini gösteren bir *türetim*'in genel tanımını yapmaktır. (Söz konusu türetim dolaysız, koşulluya giriş veya dolaylı biçiminde olabildiği gibi, yalın veya karmaşık, ya da salt veya karma biçimde de olabilir.)

İmdi türetim işlemini sonlu sayıda adımdan oluşan bir işlem olarak tanımlıyoruz. Türetim adımlarını *açış, ara ve kapanış* adımları olarak üçe ayırmıştık. Ancak ara adımlarının öncül yazma adımları ile yeni satır türetme adımlarından oluştuğunu gördük. Buna göre türetim adımlarını *açış adımları, öncül yazma adımları, yeni satır türetme adımları ve kapanış adımları* olmak üzere dört çeşide ayırabiliriz. Yalın türetimlerde bir tek açış adımıyla bir tek kapanış adımı vardır. Karmaşık türetimlerde ise birden çok sayıda açış adımı ve kapanış adımı vardır. Her açış adımına karşılık bir kapanış adımı olduğundan açış adımlarının sayısıyla kapanış adımlarının sayısı eşittir.

I. *Açış Adımları:*

C, herhangi bir (sembolleştirilmiş) önerme olsun. O zaman türetimin bir adımı olarak; ya

(i) Gös. C

ya C önermesinin $C_1 \rightarrow C_2$ biçiminde bir koşullu olması halinde

(ii) Gös. $C_1 \rightarrow C_2$

C_1 ... (Var.)

ya da

(iii) Gös. C

dğ(C) ... (Var.)

yazılabilir. (i)'in yazılmasına *dolaysız açış*, (ii)'nin yazılmasına *koşullu açış*, (iii)'ün yazılmasına da *dolaylı açış* denir.

II. *Öncül yazma adımları:*

Verilen (1) çıkarımının A_1, ..., A_n öncüllerinden her biri türetimin bir satırı olarak yazılabilir. Satırın önüne (Ön.) işareti konur. Buna bir *öncül yazma adımı* denir.

III. *Yeni satır türetme adımları:*

Belli bir adımda, *çizilmemiş 'Gös.' işareti ile başlamayan ve çerçeve içinde bulunmayan* satırlara, bu adımda kullanılabilen *öncül-satırlar* denir. İmdi öncül-önermelerden bir türetme kuralı gereği türetilebilen herhangi bir önerme türetimin bir satırı olarak yazılabilir. Bu önermenin ardına türetimde kullanılan öncül-satırların sıra No.'larıyla kullanılan türetme kuralının işareti konur. Buna da *yeni satır türetme adımı* denir.

IV. *Kapanış adımları:*

C, belli bir önerme, S_1, ..., S_k belli bir takım satırlar olsun. Türetimin belli bir adımında alt alta yazılmış

(2) Gös. C

S_1

.

.

.

S_k

satırlarıyla karşılaştığımızı kabul edelim.* Dikkat edilirse ilk satırdaki 'Gös.' işareti çizilmemiştir. Buna karşılık S_1, ..., S_k satırlarında çizilmemiş 'Gös.' işaretinin hiç geçmediğini kabul ediyoruz. O zaman da üç ayrı durum göz önünde tutarız.

(i) S_1, ..., S_k satırlarından en az biri *çerçeve içinde* bulunmayıp *içindeki önerme* C'den ibaret ise, (2) satırlar dizisi

(2') ~~Gös.~~ C

S_1

.

.

.

S_k

biçimine dönüşür. Böyle bir adıma *dolaysız kapanış* denir.

(ii) C önermesi $C_1 \rightarrow C_2$ biçimindeki bir koşulludur. O zaman S_1, ..., S_k önermelerinden en az biri *çerçeve içinde olmayıp* böyle bir satırın içindeki önerme C_2 ard-bileşininden ibaret ise, (2) satırlar dizisi gene (2') biçimine dönüştürülür. Böyle bir adıma *koşullu kapanış* denir.

(iii) S_1, ..., S_k satırlarından en az *ikisi çerçevelenmemiş* olup böyle iki satırın içindeki önermeler birbiriyle çelişik ise, (2) satırlar dizisi (2') biçimine dönüştürülür. Böyle bir adıma *dolaylı kapanış* denir.

İmdi dört çeşit adımı böylece tanımladıktan sonra, (1) çıkarımının geçerli olduğunu gösteren bir *türetim*'i aşağıdaki koşulları yerine getiren sonlu sayıda adımdan oluşan bir işlem olarak tanımlarız:

I. Birinci adım bir açış adımı olup 'Gös.' işaretinin önündeki önerme (1) çıkarımın B sonucundan ibaret olmalıdır.

* (2) satırlar dizisinin ilk satırı (Gös. C) ya türetimin 1. satırıdır, ya da başka bir satırı. Birinci halde ana-türetimin ana-satırı, ikinci halde de yardımcı bir türetimin ana-satırıdır.

II. Sonuncu adım, birinci adımın karşılığı olan kapanış adımı olmalıdır. Yani sonuncu adımda, 1. satırdaki 'Gös.' işareti ortasından çizilip bütün öbür satırlar çerçevelenmelidir.

1.5.7 Mantıksal Teoremler

Aşağıdaki önermeler yalnız koşullu-evetleme ile değilleme eklemlerine dayanan mantıksal teoremlerdir.

T.16 $p \rightarrow (\bar{p} \rightarrow q)$

T.17 $\bar{p} \rightarrow (p \rightarrow q)$

T.18 $(\bar{p} \rightarrow p) \rightarrow p$

T.19 $(p \rightarrow \bar{p}) \rightarrow \bar{p}$

T.20 $\sim(p \rightarrow q) \rightarrow p$

T.21 $\sim(p \rightarrow q) \rightarrow \bar{q}$

T.22 $[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow p$

T.23 $[(p \rightarrow q) \rightarrow q] \rightarrow [(q \rightarrow p) \rightarrow p]$

T.24 $[(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow (\bar{p} \rightarrow q)$

T.25 $(\bar{p} \rightarrow q) \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow q]$

Bu teoremlerin ispatlanmasını örneklerle açıklayalım.

Örnek 1:

T.16'yı bir türetimle ispatlayalım.

1.	~~Gös.~~ $p \rightarrow (\bar{p} \rightarrow q)$	
2.	p	... (Var.)
3.	~~Gös.~~ $p \rightarrow q$	
4.	$\bar{p}$	... (Var.)
5.	p	... (2, Tk.)

Bu türetimdeki yardımcı türetim koşullu açışlı ve dolaylı kapanışlıdır.

Örnek 2:

T.18'i bir türetimle ispatlayalım.

1. ~~Gös.~~ $(\bar{p} \rightarrow p) \rightarrow p$
2. $\bar{p} \rightarrow p$ ... (Var.)
3. ~~Gös.~~ p
4. $\bar{p}$ ... (Var.)
5. p ... (2, 4, →ç)

Yabancı türetim, dolaylı açışlı ve dolaysız kapanışlıdır.

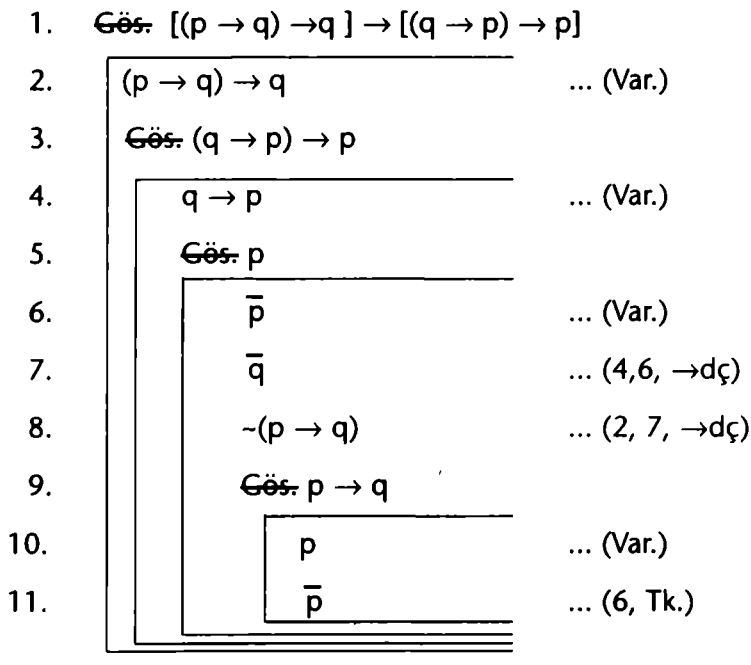
Örnek 3:

T.20'yi bir türetimle ispatlayalım.

1. ~~Gös.~~ $(p \rightarrow q) \rightarrow p$
2. $\sim(p \rightarrow q)$ ... (Var.)
3. ~~Gös.~~ p
4. $\bar{p}$ ... (Var.)
5. ~~Gös.~~ $p \rightarrow q$
6. p ... (Var.)
7. $\bar{p}$ ... (4, Tk.)
8. $\sim(p \rightarrow q)$ ... (2, Tk.)

Örnek 4:

T. 23'ü bir türetimle ispatlayalım.



ALIŞTIRMALAR

T.17, T.19, T.21, T.22, T.24, T.25 mantıksal teoremlerini bir türetimle ispatlayınız.

1.5.8 Tümel-Evetlemeden Çıkış ve Tümel Evetlemeye Giriş Kuralları

(1) $A \wedge B \therefore A$

ile

(2) $A \wedge B \therefore B$

biçimindeki bütün çıkarımların geçerli olduğu apaçıktır. Buna göre

(3) $A \wedge B$

biçimindeki bir öncülden A sonucunu türetmeye her zaman hakkımız vardır.

(4) $A \wedge B$

biçimindeki bir öncülden B sonucunu türetmeye her zaman hakkımız vardır. Bu iki türetme kuralını elde ederiz. Her iki kurala ("$\wedge$" ekleminin çıkışını sağladıklarından) *tümel-evetlemeden çıkış kuralı* diyoruz. Bu kuralları ($\wedge$ç) işaretiyle gösteriyoruz. Buna göre (6) ile (6')'yü kısaca

$$(5)\ \frac{A \wedge B}{A}\ (\wedge ç) \qquad (6)\ \frac{A \wedge B}{B}\ (\wedge ç)$$

biçiminde dile getiriyoruz.

Öte yandan

(7) $A, B \therefore A \wedge B$

ile

(8) $A, B \therefore B \wedge A$

biçimindeki bütün çıkarımların da geçerli olduğu apaçıktır. Örneğin (7) biçimde sembolleştirilebilen

(7') Ali zekidir, Ali çalışkandır; o halde Ali zeki ve çalışkandır

çıkarımıyla, (8) biçiminde sembolleştirilebilen

(8') Ali zekidir, Ali çalışkandır; o halde Ali çalışkan ve zekidir

günlük dil çıkarımı geçerlidir. Buna göre

(8) A ile B öncüllerinden $A \wedge B$ sonucunu türetmeye her zaman hakkımız vardır. Bu durumda iki türetme kuralını elde ederiz. Her iki kurala ('$\wedge$' ekleminin girişini sağladıklarından) *tümel-evetlemeye giriş kuralı* diyoruz. Bu kurallarıda ($\wedge$g) işaretiyle gösteriyoruz. (8) ile (8')'yü kısaca

$$(8'')\ \frac{A, B}{A \wedge B}\ (\wedge g) \qquad \frac{A, B}{B \wedge A}\ (\wedge g)$$

biçiminde dile getiriyoruz.

Yazıda kolaylık ve kısalık sağlamak amacıyla (cebirdeki "çarpı" işareti için yapıldığı gibi) bundan böyle '$\wedge$" işaretini hiç yazmayıp *bitişik* önermelerin arasında hep tümel-evetleme ekleminin bulunduğunu kabul edeceğiz. Yani $A \wedge B$ yerine AB yazıp, AB deyimini A ile B'nin tümel-evetlemesi olarak sayacağız. Üstelik '$\wedge$' sembolüyle birlikte buna ilişkin parantez çiftini de (uç parantezi durumunda olmasa bile) ortadan kaldıracağız. Böylece (3') yerine

(3") AB

yazacağız. Ancak parantezleri silmenin çok-anlamlılığa yol açmaması için birlikte-evetleme ekleminin bütün öteki 2-li eklemlerden de daha sıkı bağladığını kabul edeceğiz. Örneğin

$p \rightarrow qr$

önermesini $(p \rightarrow q) \wedge r$'nin değil de hep $p \rightarrow (q \wedge r)$'nin kısaltması sayacağız.

Tümel-evetleme eklemini kapsayan geçerli çıkarımlar ve mantıksal teoremler vardır. Bunların karşılığı olan türetimlerde ($\wedge$ç) ile ($\wedge$ğ) türetme kurallarını uygularız. Bunu da örneklerle göstereceğiz.

Örnek 1:

pq $\therefore$ qp çıkarımının geçerli olduğunu bir türetimle gösterelim.

1.	~~Gös.~~ qp	
2.	pq	... (Ön.)
3.	q	... (2, $\wedge$ç)
4.	p	... (2, $\wedge$ç)
5.	qp	... (3,4, $\wedge$ğ)

Türetim dolaysız açışlı ve dolaysız kapanışlıdır.

Örnek 2:

p(qr) ∴ (pq)r çıkarımının geçerli olduğunu bir türetimle gösterelim.

1. ~~Gös.~~ (pq)r

2.	p(qr)	... (Ön.)
3.	p	... (2, ∧ç)
4.	qr	... (2, ∧ç)
5.	q	... (4, ∧ç)
6.	pq	... (3, 5, ∧g)
7.	r	... (4, ∧ç)
8.	(pq)r	... (6, 7, ∧g)

Aşağıdaki önermeler yalnız koşullu-evetleme, değilleme ve tümel-evetleme eklemlerine dayanan önemli mantıksal teoremlerdir.

T.26 $(p \to q)(q \to r) \to (p \to r)$*

T.27(i) $(pq \to r) \to [(p \to (q \to r)]$

T.27(ii) $[p \to (q \to r)] \to (pq \to r)$

T.28(i) $(p \to qr) \to (p \to q) \to (p \to r)$

T.28(ii) $(p \to q)(p \to r) \to (p \to qr)$

T.29(i) $(pq \to r) \to (pr \to q)$

T.29(ii) $(p\bar{r} \to \bar{q}) \to (pq \to r)$

T.30 $(p \to q) \to (rp \to rq)$

T.31 $(p \to q) \to (pr \to pq)$

T.32 $(p \to r)(q \to s) \to (pq \to rs)$

T.33 $(p \to q)(\bar{p} \to q) \to q$

* Daha önce yaptığımız uzlaşma gereği, T.26
$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$
önermesinin bir kısaltması sayılmalıdır.

T.34 $(p \to q)(p \to q) \to p$

T.35(i) $(\overline{p} \to r)(q \to r) \to [(p \to q) \to r]$

T.35(ii) $[(p \to q) \to r] \to (\overline{p} \to r)(q \to r)$

T.36 $\sim(pp)$

T.37(i) $(p \to q) \to \sim(p\overline{q})$

T.37(ii) $\sim(p\overline{q}) \to (p \to q)$

T.38(i) $pq \to \sim(p \to \overline{q})$

T.38(ii) $\sim(p \to \overline{q}) \to pq$

T.39(i) $\sim(pq) \to (p \to \overline{q})$

T.39(ii) $(p \to \overline{q}) \to \sim(pq)$

T.40(i) $\sim(p \to q) \to p\overline{q}$

T.40(ii) $p\overline{q} \to \sim(p \to q)$

T.41(i) $p \to pp$

T.41(ii) $pp \to p$

T.42 $(p \to q)\ p \to q$

T.43 $\overline{p} \to \sim(pq)$

T.44 $\overline{q} \to \sim(pq)$

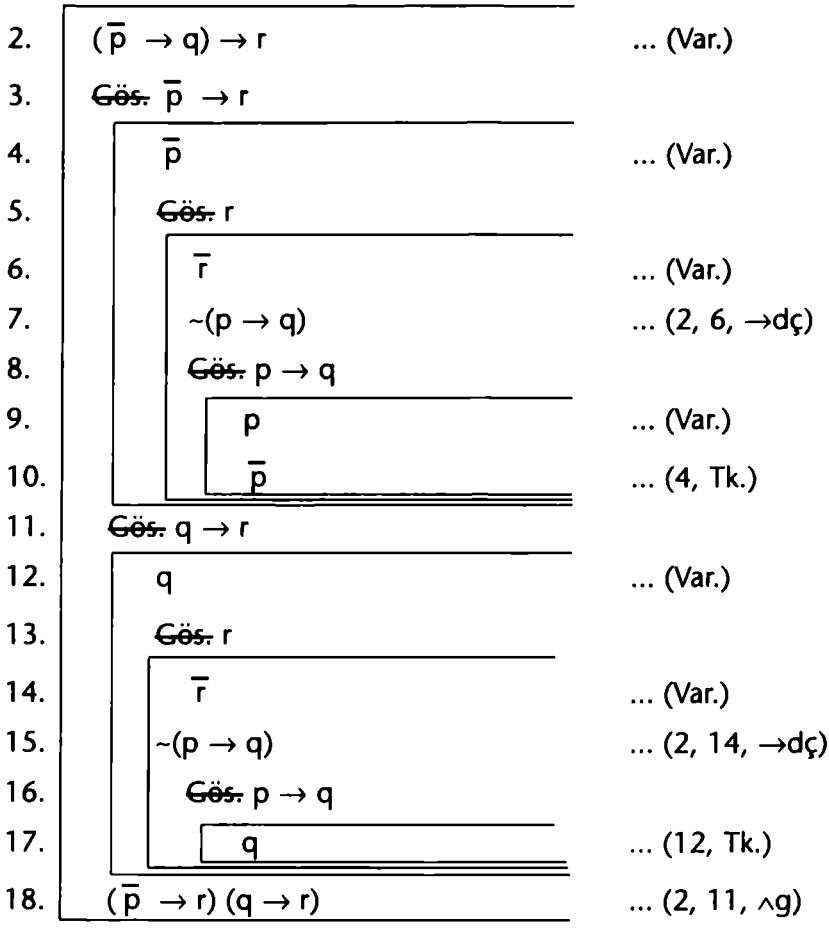
Örnek 3:

T.26'yı bir türetimle ispatlayalım.

1.	~~Gös.~~ $(p \to q)\ (q \to r) \to (p \to r)$	
2.	$(p \to q)\ (q \to r)$	... (Var.)
3.	~~Gös.~~ $p \to r$	
4.	p	... (Var.)
5.	$p \to q$	... (2, $\wedge$ç)
6.	q	... (4, 5, $\to$ç)
7.	$q \to r$	... (2, $\wedge$ç)
8.	r	... (6, 7, $\wedge$ç)

Örnek 4:

T.35 (ii)'yi bir türetimle ispatlayalım.



1. satırdaki koşullunun ard-bileşeni, $(\bar{p} \rightarrow r)\ (q \rightarrow r)$ tümel-evetlemesinden ibarettir. Bu tümel evetleminin de bir yardımcı türetimle sonuç olduğunu gösterecek yerde, her bileşeninin sonuç olduğunu ayrı ayrı yardımcı türetimlerle göstermekteyiz. Böylece 3. satırda başlayan yardımcı türetimle tümel-evetlemenin $\bar{p} \rightarrow r$ bileşeninin, 11. satırla başlayan yardımcı türetimle de $q \rightarrow r$ bileşeninin sonuç olduğunu gösteriyoruz. 19. satırda da $(\wedge g)$ ku-

ralı gereği 3. ile 11. satırlardan ($\bar{p} \rightarrow r$) ($q \rightarrow r$) tümel-evetlemesinin kendisini türetiyoruz.

Genel olarak AB gibi tümel-evetlemeyi bir ana veya bir yardımcı türetimle elde etmek için A ile B'nin sonuç olduğunu iki ayrı yardımcı türetimle gösterir, sonra da AB'nin kendisinin ($\wedge g$) kuralıyla türetiriz. Yani AB tümel-evetlemesini

k. ~~Gös.~~ A

m. ~~Gös.~~ B

n. AB ... (k, m $\wedge$ g) (k < m < n)

biçiminde bir işlem elde ederiz.

Örnek 5:

T.40 (i)'i bir türetimle ispatlayalım.

1. ~~Gös.~~ $\sim(p \rightarrow q) \rightarrow p\bar{q}$
2. $\sim(p \rightarrow q)$ ... (Var.)
3. ~~Gös.~~ p
4. $\bar{p}$ ... (Var.)
5. ~~Gös.~~ $p \rightarrow q$
6. p ... (Var.)
7. $\bar{p}$ ... (4, Tk.)
8. $\sim(p \rightarrow q)$ ... (2, Tk.)
9. ~~Gös.~~ $\bar{q}$
10. q ... (Var.)
11. ~~Gös.~~ $p \rightarrow q$
12. q ... (10, Tk.)
13. $\sim(p \rightarrow q)$ ... (2, Tk.)
14. $p\bar{q}$ ... (3, 9, $\wedge$g)

ALIŞTIRMALAR

T.27 (i) - T.35 (i) - T.36 - T.39 (ii), T.40 (ii) - T.44 mantıksal teoremlerini bir türetimle ispatlayınız.

1.5.9 Karşılıklı Koşullu-Evetlemeden Çıkış ve Karşılıklı Koşullu-Evetlemeye Giriş Kuralları

(1) $A \leftrightarrow B \therefore A \rightarrow B$

(2) $A \leftrightarrow B \therefore B \rightarrow A$

(3) $A \rightarrow B, B \rightarrow A \therefore A \leftrightarrow B$

biçimindeki bütün çıkarımlar geçerlidir.

Böylece aşağıda gösterilen karşılıklı koşulludan çıkış (↔ç) ile karşılıklı koşulluya giriş (↔g) türetme kurallarını elde ederiz.

(4) $\dfrac{A \leftrightarrow B}{A \rightarrow B}$ (↔ç) (5) $\dfrac{A \leftrightarrow B}{B \rightarrow A}$ (↔ç)

(6) $\dfrac{A \rightarrow B,\ B \rightarrow A}{A \leftrightarrow B}$ (↔g)

Sözü geçen (↔ç) ile (↔g) türetme kurallarına dayanarak, karşılıklı-koşul eklemini kapsayan geçerli çıkarımların geçerliliğini bir türetimle gösterebiliriz. Bunu örneklerle açıklayacağız.

Örnek 1:

$p \leftrightarrow q \therefore p \rightarrow q$ çıkarımının geçerli olduğunu türetimle gösterelim.

1. Gös. $p \rightarrow q$
2. | $p \leftrightarrow q$ ... (Ön.)
3. | $p \rightarrow q$ ... (2, ↔ç)

Örnek 2:

$p \rightarrow q, q \rightarrow p \therefore p \leftrightarrow q$ çıkarımının geçerli olduğunu bir türetimle gösterelim.

1. ~~Gös.~~ $p \rightarrow q$
2. | $p \rightarrow q$ ... (Ön.)
3. | $q \rightarrow p$ ... (Ön.)
4. | $p \rightarrow q$ ... (2, 3, $\leftrightarrow$g)

Örnek 3:

1. ~~Gös.~~ $q \leftrightarrow p$
2. | $p \leftrightarrow q$ ... (Ön.)
3. | $q \rightarrow p$ ... (2, $\leftrightarrow$ç)
4. | $p \rightarrow q$ ... (2, $\leftrightarrow$ç)
5. | $q \leftrightarrow p$ ... (3, 4, $\leftrightarrow$g)

Karmaşık hallerde $A \leftrightarrow B$ gibi bir satırı elde etmek için bir yardımcı türetimle $A \rightarrow B$'nin sonuç olduğu, başka bir yardımcı türetimle de $B \rightarrow A$'nın sonuç olduğu gösterilerek $A \rightarrow B$ ile $B \rightarrow A$'dan $A \leftrightarrow B$ satırı ($\leftrightarrow$g) kuralı gereği türetilir. Aşağıdaki örneklerde hep bu yola başvuruyoruz.

Örnek 4:

$pq \therefore p \leftrightarrow q$ çıkarımının geçerli olduğunu bir türetimle gösterelim.

1. ~~Gös.~~ $p \leftrightarrow q$
2. | pq ... (Ön.)
3. | ~~Gös.~~ $p \rightarrow q$
4. | | q ... (2, $\wedge$ç)
5. | ~~Gös.~~ $q \rightarrow p$
6. | | p ... (2, $\wedge$ç)
7. | $p \leftrightarrow q$ ... (3, 5, $\leftrightarrow$g)

Karşılıklı koşullu-evetleme eklemi bir çok mantıksal teoremde de geçer. Özellikle hem A → B hem de B → A birer mantıksal teorem durumunda ise, A ↔ B önermesi de bir mantıksal teoremdir. O zaman da A ↔ B teoremini yukarıda açıkladığımız yolla ispatlarız. Yani ispat için başvurulacak türetim,

1. ~~Gös.~~ A ↔ B
2. ~~Gös.~~ A →B
.
.
.
m. ~~Gös.~~ B → A
.
.
.
k. A ↔ B ... (2, m, ↔g)

biçimindedir. Bunu da aşağıdaki örnekle açıklıyoruz.

Örnek 5:

T.41'in yani T.41 (i) ile T.41 (ii)'den elde edilen karşılıklı-koşullu'nun bir mantıksal teorem olduğunu bir türetimle ispatlayalım.

1. ~~Gös.~~ p ↔ pp
2. | ~~Gös.~~ p → pp
3. | | p ... (Var.)
4. | | p ... (3, Tk.)
5. | | pp ... (3, 4, ∧g)
6. | ~~Gös.~~ pp → p
7. | | pp ... (Var.)
8. | | p ... (7, ∧ç)
9. | p ↔ pp ... (2, 6, ↔g)

ALIŞTIRMALAR

Karşılıklı koşullu-evetleme eklemini kapsayan aşağıdaki mantıksal teoremleri bir türetimle ispatlayınız.

T.45 $q \rightarrow (pq \leftrightarrow p)$

T.46 $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (pq \leftrightarrow p)$

T.47 $(p \leftrightarrow q)\ p \rightarrow q$

T.48 $(p \leftrightarrow q)\ \overline{p} \rightarrow \overline{q}$

T.49 $(p \leftrightarrow q)\ \overline{q} \rightarrow \overline{p}$

T.50 $[p \rightarrow (q \leftrightarrow r)] \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow r)]$

T.51 $[p \rightarrow (q \leftrightarrow r)] \leftrightarrow (pq \leftrightarrow pr)$

T.52 $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)\ (q \rightarrow p)$

T.53 $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \sim[(p \rightarrow q) \rightarrow \sim(q \rightarrow p)]$

T.54 $pq \rightarrow (p \leftrightarrow q)$

T.55 $\overline{pq} \rightarrow (p \leftrightarrow q)$

T.56 $[(p \leftrightarrow q) \rightarrow r] \leftrightarrow (pq \rightarrow r)\ (\overline{pq} \rightarrow r)$

T.57 $p\overline{q} \rightarrow \sim(p \leftrightarrow q)$

T.58 $\overline{p}q \rightarrow \sim(p \leftrightarrow q)$

T.59 $\sim(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow \overline{q})$

T.60 $\sim(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\overline{p} \leftrightarrow q)$

T.61 $(\overline{p} \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow \overline{q})$

T.62 $p \leftrightarrow q$

T.63 $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$

T.64 $[(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r] \leftrightarrow [p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)]$

T.65 $(p \leftrightarrow q)\ (q \leftrightarrow r) \rightarrow (p \leftrightarrow r)$

T.66 $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \leftrightarrow r) \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)]$

T.67 $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\overline{p} \leftrightarrow \overline{q})$

T.68 $(p \leftrightarrow r)\,(q \leftrightarrow s) \rightarrow [(p \rightarrow q) \leftrightarrow (r \rightarrow s)]$

T.69 $(p \leftrightarrow r)\,(q \leftrightarrow s) \rightarrow (pq \leftrightarrow rs)$

T.70 $(p \leftrightarrow r)\,(q \leftrightarrow s) \leftrightarrow [(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (r \leftrightarrow s)]$

T.71 $(q \leftrightarrow r) \rightarrow (pq \rightarrow pr)$

T.72 $p(q \leftrightarrow r) \rightarrow (pq \rightarrow r)$

1.5.10 Tikel-Evetlemeden Çıkış ve Tikel-Evetlemeye Giriş Kuralları

(1) $A \vee B \therefore$ dğ(A) $\rightarrow$ B

biçimindeki çıkarımların geçerli olduğunu görüyoruz.

Buna göre aşağıdaki tikel-evetlemeden çıkış ($\vee$ç) türetme kuralını elde ederiz.

(2) $$\frac{A \vee B}{\text{dğ(A)} \rightarrow B} \quad (\vee\text{ç})$$

Bu kural A $\vee$ B gibi bir öncülden dğ(A) $\rightarrow$ B biçimindeki bir sonucu her zaman türetme hakkımız olduğunu dile getirir.

Öte yandan A $\rightarrow$ B gibi bir koşullu dğ(A) $\vee$ B biçimindeki tikel-evetleme ile eşdeğerdir. Dolayısıyla

(3) $A \rightarrow B \therefore$ dğ(A) $\vee$ B

biçimindeki tüm çıkarımlar geçerlidir.

İmdi (3) biçimindeki bütün çıkarımların geçerli olduğuna dayanarak aşağıdaki tikel-evetlemeye giriş ($\vee$g) türetme kuralını elde ederiz.

(4) $$\frac{A \rightarrow B}{\text{dğ(A)} \vee B} \quad (\vee\text{g})$$

Bu kural A $\rightarrow$ B biçimindeki bir öncülden, dğ(A) $\vee$ B sonucunu her zaman türetmeğe hakkımız olduğunu dile getirir.

($\vee$ç) ile ($\vee$g) türetme kuralları yardımıyla tikel-evetleme eklemini kapsayan geçerli çıkarımların geçerli olduğunu gösterebildiğimiz gibi, bu ekle-

mi kapsayan mantıksal teoremleri de ispatlayabiliriz. Bunu da aşağıdaki örneklerle açıklıyoruz.

Örnek 1:

$p \therefore p \vee q$ çıkarımının geçerli olduğunu bir türetimle gösterelim.

1. ~~Gös.~~ $p \vee q$
2. | p ... (Ön.)
3. | ~~Gös.~~ $\bar{p} \rightarrow q$
4. | | $\bar{p}$ ... (Var.)
5. | | p ... (2, Tk.)
6. | $p \vee q$ ... (3, $\vee$g)

dikkat edilirse ($\vee$g) kuralı gereği $\bar{p} \rightarrow q$ öncülünden $p \vee q$ sonucunu türetebiliyoruz. Nitekim sonuçtaki p önermesi, öncüldeki $\bar{p}$ önermesinin kısaltılmış değillemesidir. Böylece 3. satırdan 6. satırı türetmek mümkündür.

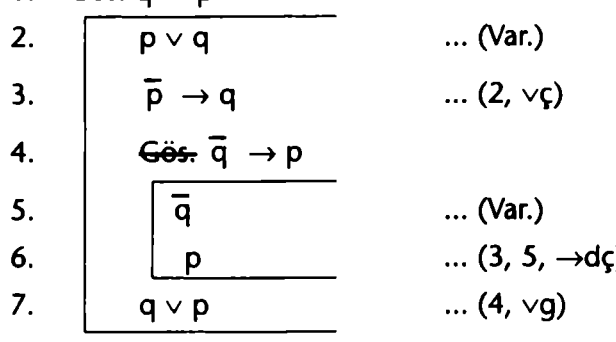
Örnek 2:

$p \vee q, \bar{p} \therefore q$ çıkarımının geçerli olduğunu bir türetimle gösterelim.

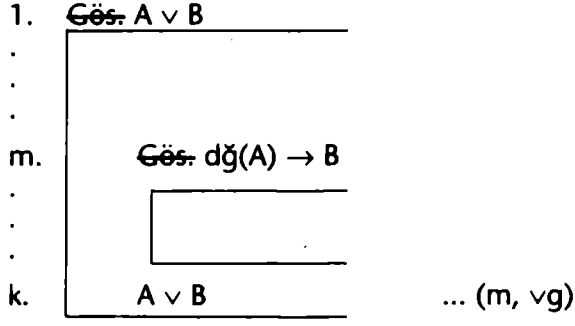
1. ~~Gös.~~ q
2. | $p \vee q$ ... (Ön.)
3. | $\bar{p}$ ... (Ön.)
4. | $\bar{p} \rightarrow q$ ... (2, $\vee$ç)
5. | q ... (3, 4, $\rightarrow$ç)

Örnek 3:

$p \vee q \therefore q \vee p$ çıkarımının geçerli olduğunu bir türetimle gösterelim.



Dikkat edilirse, $q \vee p$'nin sonuç olduğunu göstermek için 4. satırda başlayan bir yardımcı türetimle $\bar{q} \rightarrow p$'nin de bir sonuç olduğunu göstermek zorunda kaldık. Genel olarak da $A \vee B$ gibi bir ayrıklığın sonuç olduğunu göstermek için bir yardımcı türetimle dğ(A) → B nin bir sonuç olduğunu gösteririz. Böylece koşulluya giriş türetimi yapabiliriz. dğ(A) → B'yi böylece elde ettikten sonra (∨g) kuralı gereği $A \vee B$'yi türetiriz. Nitekim A önermesi, dğ(A) önermesinin kısaltılmış değillemesi durumundadır. Buna göre



biçiminde bir türetim elde ederiz.

Aşağıdaki önermeler, tikel-evetleme eklemini kapsayan önemli mantıksal teoremlerdir.

T.73 $(p \vee q) \rightarrow (\bar{p} \rightarrow q)$

T.74 $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\overline{p} \vee q)$

T.75 $p \leftrightarrow (p \leftrightarrow p)$

T.76 $(p \vee q)\,(p \rightarrow r)\,(q \rightarrow s) \rightarrow (r \vee s)$

T.77 $(p \vee q)\,(p \rightarrow r)\,(q \rightarrow r) \rightarrow r$

T.78 $[(p \vee q) \rightarrow r]\,(p \rightarrow r)\,(q \rightarrow r)$

T.79 $(pq \rightarrow r) \leftrightarrow [(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)]$

T.80 $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$

T.81 $[p \vee (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \vee r]$

T.82 $[p \rightarrow (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)]$

T.83 $(p \rightarrow q) \rightarrow [(p \vee r) \rightarrow (q \vee r)]$

T.84 $(p \rightarrow q) \rightarrow [(r \vee p) \rightarrow (r \vee q)]$

T.85 $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$

T.86 $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)$

T.87 $p \vee \overline{p}$

T.88 $(p \vee qr) \leftrightarrow (p \vee q)\,(p \vee r)$

T.89 $p(q \vee r) \leftrightarrow (pq \vee pr)$

T.90 $\sim(pq) \leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$

T.91 $\sim(p \vee q) \leftrightarrow \overline{pq}$

T.92 $pq \leftrightarrow \sim(\overline{p} \vee \overline{q})$

T.93 $(p \vee q) \leftrightarrow (\overline{pq})$

T.94 $(pq \vee p\overline{q}) \leftrightarrow p$

T.95 $(p \vee q)\,(p \vee \overline{q}) \leftrightarrow p$

T.96 $(p \vee pq) \leftrightarrow p$

T.97 $p(p \vee q) \leftrightarrow p$

T.98 $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (pq \vee \overline{pq})$

T.99 $\sim(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p\overline{q} \vee p\overline{q})$

T.100 $(p \leftrightarrow q) \vee (p \leftrightarrow \overline{q})$

Örnek 3:

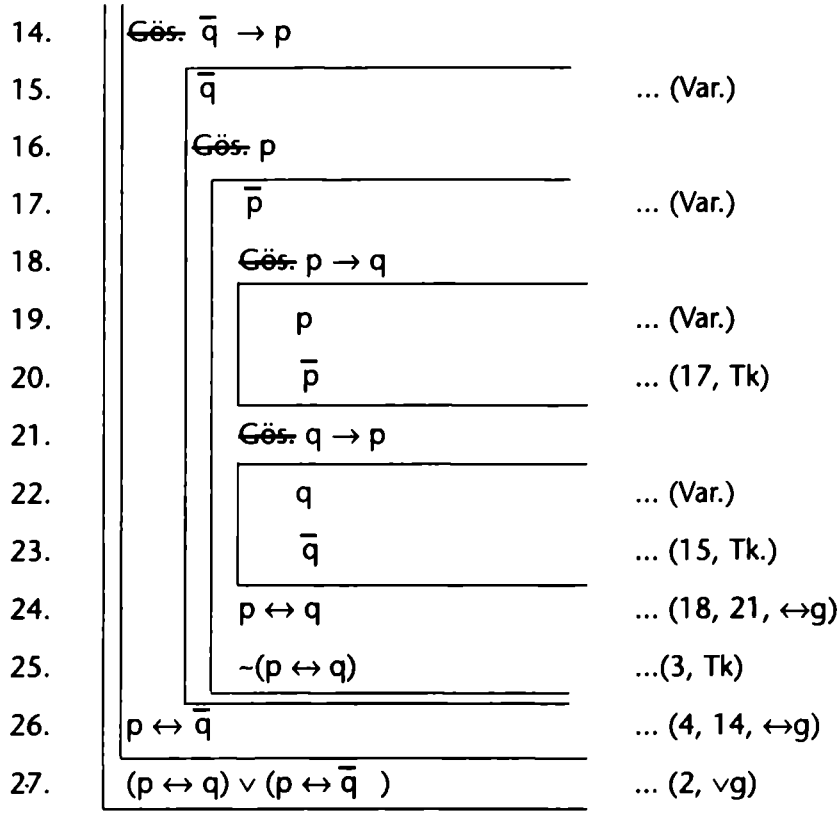
T.83'ü bir türetimle ispatlayalım.

1. ~~Gös.~~ $(p \to q) \to [(p \vee r) \to (q \vee r)]$
2. $p \to q$ ... (Var.)
3. ~~Gös.~~ $(p \vee r) \to (q \vee r)$
4. $p \vee r$ ... (Var.)
5. $\overline{p} \to r$ ... (4, $\vee$ç)
6. ~~Gös.~~ $\overline{q} \to r$
7. $\overline{q}$ ... (Var.)
8. ~~Gös.~~ r
9. $\overline{r}$ ... (Var.)
10. p ... (5, 9, $\to$dç)
11. $\overline{p}$ ... (2, 7, $\to$dç)
12. $q \vee r$ ... (6, $\vee$g)

Örnek 4:

T.100'ü bir türetimle ispatlayalım.

1. ~~Gös.~~ $(p \leftrightarrow q) \vee (p \leftrightarrow \overline{q})$
2. ~~Gös.~~ $\sim(p \leftrightarrow q) \to (p \leftrightarrow \overline{q})$
3. $\sim(p \leftrightarrow q)$ ... (Var.)
4. ~~Gös.~~ $p \to \overline{q}$
5. p ... (Var.)
6. ~~Gös.~~ $\overline{q}$
7. q ... (Var.)
8. ~~Gös.~~ $p \to q$
9. q ... (7, Tk.)
10. ~~Gös.~~ $q \to p$
11. p ... (5, Tk.)
12. $p \leftrightarrow q$ ... (8, 10, $\leftrightarrow$g)
13. $\sim(p \leftrightarrow q)$ ... (3, Tk.)



ALIŞTIRMALAR

T.73 - T.82 ile T.84 -T.99 mantıksal teoremlerini bir türetimle ispatlayınız.

1.5.11 Türetilmiş Türetme Kuralları

1.5.11.1 Türetilmiş Koşulluya Giriş Kuralları

Türetim işlemini kısaltmak ve kolaylaştırmak için önceden ispatlanmış (yani türetilmiş) olan bazı ek kurallara başvurabiliriz. *Türetilmiş türetme kuralları* dediğimiz bu kuralların en önemlilerini inceleyeceğiz. Önce türetilmiş koşulluya giriş kurallarını ele alıyoruz.

1. *Ard-Bileşenden koşulluya giriş kuralı* (→Ag)

Bu kural

(1) $B \therefore A \to B$

biçimindeki çıkarımların geçerli olduğunu dile getirir. Kuralı ($\to$Ag) işareti ile gösteriyor ve

(i) $\dfrac{B}{(A) \to B}$ ($\to$Ag)

biçiminde dile getiriyoruz. (1)'in geçerli olduğunu aşağıdaki türetimle denetliyoruz.

(2) 1. Gös. $A \to B$
2. | A ... (Var.)
3. | B ... (Ön.)

($\to$Ag) kuralının kullanılışına örnek olarak

(3) $p \vee q,\ p \to r \therefore (q \vee r) \to [(p \vee q) \wedge (p \to r)]$

çıkarımının geçerli olduğunu türetimle denetleyelim.

(4) 1. ~~Gös.~~ $(q \vee r) \to [(p \vee q) \wedge (p \to r)]$
2. | $p \vee q$ ... (Ön.)
3. | $p \to r$ ... (Ön.)
4. | $(p \vee q) \wedge (p \to r)$ ... (2, 3, $\wedge$g)
5. | $(q \vee r) \to [(p \vee q) \wedge (p \to r)]$ ... (4, $\to$Ag)

İkinci bir örnek olarak

(5) $(p \leftrightarrow q) \to [r \vee (p \leftrightarrow q)]$

önermesinin geçerli olduğunu ($\to$Ag)'ye dayanan bir türetimle denetleyelim.

(6) 1. ~~Gös.~~ $(p \leftrightarrow q) \to [r \vee (p \leftrightarrow q)]$
2. | $p \leftrightarrow q$ ... (Var.)
3. | $\sim r \to (p \leftrightarrow q)$ ... (2, $\to$Ag)
4. | $r \vee (p \leftrightarrow q)$ ... (3, $\vee$g)

2. *Ön-bileşenin Değillemesinden Koşulluya Giriş Kuralı* (→Ög);

Bu kural

(7) $\sim A \therefore A \rightarrow B$

biçimindeki çıkarımların geçerli olduğunu dile getiren kuraldır. Kuralı (→Ög) işaretleriyle gösteriyor ve

$$(7') \quad \frac{\sim A}{A \rightarrow B} \quad (\rightarrow Ög)$$

biçiminde dile getiriyoruz.

Örnek olarak

(8) $(p \rightarrow q) \rightarrow q,\ q \rightarrow p \therefore p$

çıkarımının geçerli olduğunu bir türetimle denetleyelim.

(9)

1.	Gös. p	
2.	~p	... (Var.)
3.	$(p \rightarrow q) \rightarrow q$	... (Ön.)
4.	$q \rightarrow p$	... (Ön.)
5.	~q	... (2, 4, →dç)
6.	$\sim(p \rightarrow q)$	... (3, 5, →dç)
7.	$p \rightarrow q$	... (2, →Ög)

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin ve çıkarımların geçerli olduğunu türetilmiş koşulluya giriş kurallarından yararlanan bir türetimle denetleyiniz.

1. $(p \rightarrow q) \rightarrow [r \rightarrow (p \rightarrow q)]$
2. $q \therefore p \vee q$

3. $\sim(p \rightarrow r) \therefore (p \rightarrow r) \rightarrow q$

4. $\sim(p \wedge q) \rightarrow \sim(p \wedge q) \vee \sim r$

1.5.11.2 Türetilmiş Şıkları Ayırma Kuralları

Şıkları Ayırma Kuralı denilen üç ayrı türetilmiş türetme kuralını kullanacağız.

1. *Basit İkilemli Şıkları Ayırma Kuralı* (B.İ.Ş.);

Bu kural

(1) $A \rightarrow B, \sim A \rightarrow B \therefore B$

biçimindeki çıkarımların geçerli olduğunu dile getiren türetme kuralıdır. Kuralı (İ.Ş.) işaretiyle gösteriyoruz, ve

$$(1') \quad \frac{A \rightarrow B, \sim A \rightarrow B}{B} \quad (İ.Ş.)$$

biçiminde dile getiriyoruz. Bu kuralın geçerli olduğunu aşağıdaki türetimle denetliyoruz.

(2)

1.	~~Gös.~~ B	
2.	~B	... (Var.)
3.	A → B	... (Ön.)
4.	~A → B	... (Ön.)
5.	~A	... (2, 3, →dç)
6.	B	... (4, 5, →ç)

2. *Karmaşık İkilemli Şıkları Ayırma Kuralı* (K.İ.Ş.);

Bu kural

(3) $A \vee B, A \rightarrow C, B \rightarrow C \therefore C$

biçimindeki çıkarımların geçerli olduğunu dile getiren türetme kuralıdır. Kuralı (K.İ.Ş.) işaretiyle gösteriyoruz, ve

$$(3')\ \frac{A \vee B,\ A \to C,\ B \to C}{C}\ \text{(K.I.Ş.)}$$

biçiminde dile getiriyoruz.

Bu kuralın geçerli olduğunu aşağıdaki türetimle denetliyoruz.

(4) 1. ~~Gös.~~ C

2.	~C	... (Var.)
3.	A ∨ B	... (Ön.)
4.	A → C	... (Ön.)
5.	B → C	... (Ön.)
6.	~A	... (2, 4, →dç)
7.	~B	... (3, 4, →dç)
8.	~A → B	... (3, ∨ç)
9.	B	... (6, 8, →ç)

3. *Salt Şıkları Ayırma Kuralı (S.Ş.)*

Bu kural

(6) $A \to C,\ B \to C \therefore (A \vee B) \to C$

biçimindeki çıkarımların geçerli olduğunu dile getiren türetme kuralıdır. Kural (S.Ş.) işaretiyle gösteriyor, ve

$$(5')\ \frac{A \to C,\ \ B \to C}{(A \vee B) \to C}\ \text{(S.Ş.)}$$

biçiminde dile getiriyoruz. Bu kuralın geçerli olduğunu aşağıdaki türetimle denetliyoruz.

(6) 1. ~~Gös.~~ (A ∨ B) → C

2.	A ∨ B	... (Var.)
3.	A → C	... (Ön.)
4.	B → C	... (Ön.)
5.	~A → B	... (2, →g)

6.	~~Gös.~~ ~A → C	
7.	~A	... (Var.)
8.	B	... (5, 7, →ç)
9.	C	... (4, 8, →ç)
10.	~~Gös.~~ C	
11.	~C	... (Var.)
12.	~A	... (3, 11, →dç)
13.	C	... (6, 12, →ç)

(B.İ.Ş.) kuralının kullanılışına örnek olarak

(7) $p \rightarrow q, \sim p \rightarrow r, r \rightarrow q \therefore q$

çıkarımının geçerli olduğunu türetimle denetleyelim..

1.	~~Gös.~~ q	
2.	p → q	... (Ön.)
3.	~p → r	... (Ön.)
4.	r → q	... (Ön.)
5.	~~Gös.~~ ~p → q	
6.	~p	... (Var.)
7.	r	... (3, 5, →ç)
8.	q	... (4, 7, →ç)
9.	q	... (2, 5, B.İ.Ş.)

(K.İ.Ş.) kuralına örnek olarak

(8) $q \vee (p \rightarrow r), \sim q \vee r, (p \rightarrow r) \rightarrow r \therefore r$

çıkarımının geçerli olduğunu bir türetimle denetleyelim.

(9)

1.	~~Gös.~~ r	
2.	q ∨ (p → r)	... (Ön.)
3.	~q ∨ r	...(Ön.)
4.	(p → r) → r	... (Ön.)
5.	q → r	... (3, ∨ç)
6.	r	... (2, 4, 5, K.İ.Ş.)

(S.Ş.) kuralına örnek olarak da

(10) $\sim q \vee (\sim p \wedge q),\ \sim(p \to r) \vee (\sim p \wedge q) \therefore [q \vee (p \to r)] \to (\sim p \wedge q)$

çıkarımının geçerli olduğunu bir türetimle denetleyiniz.

(11) 1. ~~Gös.~~ $[q \vee (p \to r)] \to (\sim p \wedge q)$

2.	$\sim q \vee (\sim p \wedge q)$	... (Ön.)
3.	$\sim(p \to r) \vee (\sim p \wedge q)$	... (Ön.)
4.	$q \to (\sim p \wedge q)$	... (2, $\vee$ç)
5.	$(p \to r) \to (\sim p \wedge q)$	... (3, $\vee$ç)
6.	$[q \vee (p \to r) \to (\sim p \wedge q)$	... (4, 5, S.Ş.)

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin ve çıkarımların geçerli olduğunu (B.İ.Ş.), (K.İ.Ş.) veya (S.Ş.) kurallarına dayanan birtretimle denetleyiniz.

1. $(p \to q) \to (p \wedge r),\ \sim(p \to q) \to (p \wedge r) \therefore p \wedge r$

2. $(p \leftrightarrow q) \vee (q \leftrightarrow r),\ (p \leftrightarrow q) \to (p \wedge r),\ (q \leftrightarrow r) \to (p \wedge r) \therefore p \wedge r$

3. $(p \to r) \to p,\ \sim(p \wedge q) \to p \therefore [(q \to r) \vee \sim(p \wedge q)] \to p$

1.5.12 Türetim İşlemine İlişkin Pratik Öneriler

Buraya kadar karşılaştığımız türetme kurallarını topluca aşağıda gösterelim.

İlkel Türetme Kuralları

Koşulludan çıkış: $\dfrac{A \to B,\ A}{B}\ (\to ç)$

Koşulludan devirmeli çıkış: $\dfrac{A \to B,\ dğ(B)}{dğ(A)}\ (\to dç)$

Tümel-evetlemeden çıkış: $\dfrac{A \wedge B}{A}\ (\wedge ç),\quad \dfrac{A \wedge B}{B}\ (\wedge ç)$

Tümel-evetlemeye giriş: $\frac{A\ ,\ B}{A \wedge B}\ (\wedge g),\quad \frac{A\ ,\ B}{B \wedge A}\ (\wedge g)$

Karşılıklı-koşulludan çıkış: $\frac{A \leftrightarrow B}{A \rightarrow B}\ (\leftrightarrow ç),\quad \frac{A \leftrightarrow B}{B \rightarrow A}\ (\leftrightarrow ç)$

Karşılıklı-koşulluya giriş: $\frac{A \rightarrow B,\ B \rightarrow A}{A \leftrightarrow B}\ (\leftrightarrow g)$

Tikel-evetlemeden çıkış: $\frac{A \vee B}{dğ(A) \rightarrow B}\ (\vee ç)$

Tikel-evetlemeye giriş: $\frac{A \rightarrow B}{dğ(A) \vee B}\ (\vee g)$

Tekrarlama: $\frac{A}{A}\ (Tk.)$

Türetilmiş Türetim Kuralları:

Ard-bileşenden koşulluya giriş: $\frac{B}{A \rightarrow B}\ (\rightarrow Ag)$

Ön-bileşenin değillemesinden koşulluya giriş: $\frac{\sim A}{A \rightarrow B}\ (\rightarrow Ög)$

Basit ikilemli şıkları ayırma kuralı: $\frac{A \rightarrow B,\ \sim A \rightarrow B}{B}\ (B.İ.Ş.)$

Karmaşık ikilemli şıkları ayırma kuralı: $\frac{A \vee B,\ A \rightarrow C,\ B \rightarrow C}{C}\ (K.İ.Ş.)$

Salt şıkları ayırma kuralı: $\frac{A \rightarrow C,\ B \rightarrow C}{(A \vee B) \rightarrow C}\ (S.Ş.)$

Önermeler mantığının giriş ve çıkış kuralları olarak yalnız (→ç), (→dç), (∧ç), (∧g), (↔ç), (↔g), (∨ç) ve (∨g) kurallarını algılayacağız.

Türetim işlemini yaparken bazı pratik öğütlere uymamız çok yararlıdır. Şimdiye kadar sözünü ettiğimiz pratik öğütleri de aşağıda sıralıyoruz.

I. A → B gibi bir *koşullu*'yu elde etmek için koşullu türetime yani (koşullu açış veya koşullu kapanış, ya da her ikisine birden) başvurmalıyız. Gereğinde (→Ag), (→Ög) ve (S.Ş.) türetilmiş türetme kurallarından yararlanırız.

II. A ∧ B gibi bir *tümel-evetleme*'yi elde etmek için, ölk önce A ile B bileşenlerini (gereğinde birer yardımcı türetim aracıyla) ayrı ayrı elde-edip sonra da A ∧ B'yi (∧g) kuralı gereği türetmeliyiz.

III. A ↔ B gibi bir *karşılıklı koşullu*'yu elde etmek için, ilk önce A → B ile B → A bileşenlerini (gereğinde birer yardımcı türetim aracıyla) ayrı ayrı elde edip sonra da A ↔ B'yi (↔g) kuralı gereği elde etmeliyiz.

IV. A ∨ B gibi bir *tikel-evetleme*'yi elde etmek için, ilk önce dğ(A) → B'yi (gereğinde birer yardımcı türetim aracıyla) elde edip sonra da A ∨ B'yi (∨g) kuralı gereği türetmeliyiz.

V. ~A gibi bir *değilleme*'yi veya p gibi bir basit önerme'yi elde etmek için, dolaylı türetime (yani dolaylı açış ve dolaylı kapanış, ya da her ikisine birden) başvurmalıyız. Gereğinde (B.İ.Ş.) ve (K.İ.Ş.) türetilmiş türetme kurallarından yararlanırız.

VI. Türetim işlemini yaparken, her adımda eldeki öncül-satırlardan *çıkış* ile *giriş kuralları* gereği türetilebilen satırları türetmeliyiz. Ancak ondan sonra yeni bir ana-satır yazmaya kalkışabiliriz.

VII. Dolaylı türetim yaparken, öncül-satırlardan biri ~(A → B) gibi bir koşullu değillemesi biçiminde ise, A → B koşullusunu (gereğinde bir yardımcı türetim yardımıyla) elde etmeye çalışmalıyız.

2. NİCELEME MANTIĞI

Önermeler mantığında günlük dili veya bilim dilini sembolleştirdiğimiz zaman *basit* yani bileşik olmayan önermeleri p, q, r, ... gibi temsilci harflerle gösteriyoruz. Böylece basit önermelerin içeriği soyutlanmış olur. O zaman da günlük dil veya bilim diline ait sezgisel olarak geçerli olan pek çok çıkarım ve önermelerin önermeler mantığındaki sembolik karşılıkları geçersiz olur. Örneğin,

(1) Bütün kediler memelidir; bütün memeliler omurgalıdır; o halde bütün kediler omurgalıdır

ile

(2) Her tamsayı bir rasyonel sayıdır; 27 bir tamsayıdır; o halde 27 bir rasyonel sayıdır

sezgisel olarak geçerlidir. Ama her ikisi de önermeler mantığında

(3) p, q ∴ r

biçiminde sembolleştirilir. (3) ise geçersiz bir çıkarımdır.

İşte *niceleme mantığı* (veya *yüklemler mantığı*) önermeler mantığını da içine alan daha güçlü bir mantık sistemidir. Bu mantık sisteminde yalnız bileşik önermelerin değil, basit önermelerin de mantıksal yapısı ortaya çıkarılır. Önermeler mantığında sembolik karşılığı geçersiz olan (1) veya (2) gibi bir çıkarımın niceleme mantığındaki sembolik karşılığının geçerli olduğunu ileride göreceğiz. Niceleme mantığındaki sembolleştirmenin daha *ince* olduğu söylenir.

2.1 SEMBOLLEŞTİRME

2.1.1 Tekil Önermeler

2.1.1.1 Atomsal Önermeler

Günlük dil ve bilim dilinde basit önerme durumundaki önermeler bir veya birden çok ad ile bir yüklemden oluşur. Örneğin

(1) Ali koşuyor

(2) 27 bir tam sayıdır

(3) Ali ile Behçet kardeştir

(4) $2 < 3$

(5) Ali Behçet'i Cevdet'e gönderdi

(6) A noktası B noktası ile C noktası arasındadır

tümcelerini göz önüne alalım. (1) ile (2)'de birer ad (3) ile (4)'te ikişer ad (5) ile (6)'da üçer ad vardır. Mantıkta *yüklem,* bir veya birden çok sayıda addan bir önerme oluşturan bir sözdür.

Buna göre bir basit önermede yüklem adların dışında kalan sözdür. Buna göre (1)'in yüklemi "koşuyor", (2)'nin yüklemi "bir tam sayıdır', (3)'ün yüklemi "... ile ... kardeştir", (4)'ün yüklemi "<", (5)'in yüklemi "gönderdi", (6)'nın yüklemi de "ile .. nın arasındadır" sözleri olduğunu söyleyebiliriz.

Bir tek addan bir önerme oluşturan yüklem'e *birli yüklem,* iki addan bir önerme oluşturan yükleme *ikili yüklem* ve genel olarak *n* tane addan bir önerme oluşturan yükleme de *n'li yüklem* denir. Örneğin (1) ile (2)'nin yüklemleri birli (3) ile (4)'ünkiler *ikili,* (5) ile (6)'nınkiler de üçlü yüklemler'dir.

> Günlük dil ve bilim diline ait olan önermeleri *sembolleştirme* işlemi, önermede geçen her adın yerine *a, b, c, ...* gibi *ad temsilcisi* ve her *n*'li yüklem yerine *F, G, H, ...* gibi bir *n'li yüklem temsilcisi*'ni koyma işlemi demektir. Sembolleştirmede yüklem temsilcisi, ad temsilcilerinin önüne yazılır.

Örneğin, (1)'i sembolleştirmek için "Ali" adı yerine *a,* "koşuyor" yüklemi yerine de *F* koyalım. Bu yerine koyma işlemini

(7) (Ali: *a,* koşuyor: *F*)

biçiminde dile getiriyoruz. (7)'ye bir *sembolleştirme biçimi* diyoruz. (1) tümcesi (7) sembolleştirme biçimi gereği

(8) *Fa*

sembolik önermesine çevrilir. (8) önermesine (1)'in *sembolik karşılığı* diyoruz.

(9) (27: *b*, bir tamsayıdır: *G*)

sembolleştirme biçimine dayanarak (2) tümcesini de (8) biçiminde sembolleştirebiliriz.

(10) (2: *b*, 3:*c*, <: *G*)

sembolleştirme biçimine dayanarak (4) tümcesini

(11) *Gbc*

Genel olarak *F* bir *n*'li yüklem temsilcisi ve a_1, ..., a_n tane ad olduğunda

(12) $Fa_1, ..., a_n$

önermesine bir *atomsal önerme* (veya *çekirdek önerme*) denir. Her atomsal önerme basit'tir. Ancak ilerde göreceğimiz gibi atomsal olmayan basit önermeler vardır.

Dikkat edilirse $n = 0$ durumunda *sıfırlı yüklem temsilcisi,* sıfır sayıda addan bir önerme oluşturan bir yüklem temsilcisi, yani tek başına önerme olan bir yüklem temsilcisidir. Dolayısıyla *p, q, r,* ... gibi önerme temsilcileri birer sıfırlı yüklem temsilcisi sayılır. *p, q, r,* ... önerme temsilcileri aynı zamanda atomsal önermelerdir.

Birli yüklem, ilişkin olduğu adın gösterdiği nesnenin bir *özellik*'ini dile getirir. $n > 1$ olduğunda, *n*-li yükleme *çoklu yüklem* denir. Çoklu yükleme ilişkin olduğu adların gösterdiği nesneler arasındaki *bağıntı*'yı dile getirir. Bu nedenle birli yüklemlere *özellik yüklemi,* çoklu yüklemlere ise *bağıntı yüklemi* denir.

"Ad" yerine *tekil terim* veya kısaca *terim*'de denir. Terimler basit veya karmaşık olabilir. Örneğin "Ali", "2", "Güneş" basit terimler, "Ali'nin babası", "Güneşin en büyük gezgeni" "1+1" karmaşık terimlerdir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki tümceleri verilen sembolleştirme biçimleri gereği sembolleştiriniz.

1. Dünya Güneşin çevresinde dönüyor.

   (Dünya: *a*, Güneş: *b*, çevresinde dönüyor: *F*)

2. Farabi, İbn Sina'dan önce yaşamıştır.

   (Farabi: *a*, İbn Sina: *b*, "den önce yaşamıştır: *F*)

3. Ali bu kitabı Behçet'e verdi.

   (Ali: *a*, bu kitap: *b*, Behçet: *c*, verdi: *F*)

4. $3 < 4$

   (3: *a*, 4: *b*, "<": *F*)

2.1.1.2 Bileşik Tekil Önermeler

Atomsal önermelerin önerme eklemleriyle birleşmesinden oluşan önermeler *bileşik önermeler*'dir.

Tekil önermeler içinde niceleyici geçmeyen önermelerdir.

Günlük dil ve bilim dilinde bir çok tümcenin sembolik karşılığı bileşik tekil önerme oluşumundadır. Örneğin

(1) Ali Behçet'ten uzun ise, Behçet Ali'den kısadır tümcesini

(2) (Ali: *a*, Behçet: *b*, dan uzundur: *F*, ndan kısadır: *G*) sembolleştirme biçimine göre sembolleştirelim. Böylece

(3) $Fab \rightarrow Gba$

Bileşik tekil önermesini elde ederiz.

Başka bir örnek olarak

(4) $2 < 3$ ve $3 < 5$ ise $2 < 5$

tümcesini

(5) (2: *a*, 3: *b*, 5: *c*, <: *F*)

sembolleştirme biçimi gereği sembolleştirelim. Elde edilen sembolik karşılık şöyledir.

(6) $(Fab \wedge Fbc) \rightarrow Fac$

Üçüncü örnek olarak içinde önerme eklemi geçen aşağıdaki çıkarım verilen sembolleştirme biçimine göre sembolleştirelim.

(7) $2 < 3 \vee 3 > 2, \sim(3 > 2) \therefore 2 < 3$

(8) 2: *a*, 3: *b*, < : *F*, > : *G*

(7)'nin (8) gereği sembolik karşılığı şöyledir.

(9) $Fab \vee Gba, \sim Gba \therefore Fab$

Sonuncu örnek olarak

(10) Ali İstanbul'a gidecekse, Behçet İzmir'e gidecek tümcesini

(11) (Ali: *a*, Behçet: *b*, İstanbul: *c*, İzmir: d, gidecek: *F*) sembolleştirme biçimi gereği sembolleştirelim. Burada "gidecek" ikili yüklem olup "Ali İstanbul'a gidecek"i *Fac* biçiminde "Behçet İzmir'e gidecek"i de *Fbd* biçiminde sembolleştiririz. Buna göre (10)'un sembolik karşılığı

(11) $Fac \rightarrow Fbd$

dir.

p, q, r, ... gibi temsilci harfler atomsal önermeler olduğundan, içinde temsilci harfler geçen

(12) $Fac \rightarrow p$

gibi genel önermeler vardır. Ayrıca önermeler mantığına ait bütün önermeler aynı zamanda niceleme mantığı diline aittir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki günlük dil veya bilim diline ait önerme ve çıkarımları verilen sembolleştirme biçimleri gereği sembolleştiriniz.

1. $(2 < 3 \leftrightarrow 4 = 2 + 2,\ 4 \neq 2 + 2 \therefore \sim(2 < 3))$

   $(2: a,\ 3: b,\ 4: c,\ 2 + 2: d,\ <: F)$

2. Ali Behçet'in oğludur. Behçet Cevdet'in oğludur $\therefore$ Cevdet Ali'nin büyükbabasıdır.

   (Ali: a, Behçet: b, Cevdet: c, oğludur: F, büyükbabasıdır: G)

3. $5 > 2 + 1 \rightarrow 6 > 2 + 1,\ 4 > 2 + 1 \rightarrow 6 > 2 + 1,$

   $5 > 2 + 1 \vee 4 > 2 + 1 \therefore 6 > 2 + 1$

   $(5: a,\ 2 + 1: b,\ 6: c,\ 4: d,\ > : F)$

2.1.2 Açık Önermeler

Matematik dilinde belli bir nesneyi gösteren (sayı adları gibi) terimlerin yanısıra belli bir nesneyi göstermeyen $x, y, z, \ldots$ gibi değişkenler kullanılmaktadır. İçinde değişken geçen

(1) $x - 3 = 0$

gibi denklemler ile içinde değişken geçen

(2) $x > 3$

gibi eşitsizlikler önerme değildir. Ancak denklem veya eşitsizlik, içinde geçen değişken veya değişkenlerin yerine birer ad konulması sonucunda önermeye dönüşür. Örneğin (1) denkleminde x yerine 3 koyarsak (1)'i doğru olan

(3) $3 - 3 = 0$

önermesine, (2)'yi de yanlış olan

(4) $3 > 3$

önermesine dönüştürürüz.

Genel olarak içinde bir veya daha çok sayıda *x, y, z, ...* gibi değişkenler geçen ve bu değişkenlerin yerine birer ad konulunca doğru veya yanlış bir önermeye dönüşen sözlere *açık önerme* denir. Buna göre denklem ve değişkenli eşitsizliklerin matematik diline ait açık önermeler olduğunu söyleyebiliriz. Günlük dilde de açık önermeler vardır. Nitekim içinde "bu", "şu", "o" gibi adıllar geçen tümceler açık önerme sayılabilir.

(5) O gitti

ile

(6) O bunu aldı

tümceleri, bağlamdan bağımsız olarak doğru veya yanlış önermeler değildir. Ancak belli bir bağlamda "o" ile "bu" adıllarının gösterdiği şey veya kişi belirlendiğinde, (5) ile (6) tümceleri (doğru veya yanlış) olan önerme niteliğini kazanır. Dolayısıyla adılları, x, y, z, ... gibi değişkenlerin günlük dildeki karşılığı sayabiliriz. Böylece (5) ve (6)'yı sırayla

(7) x gitti

ve

(8) x, y'yi aldı

biçimlerine çevirebiliriz.

İçinde *n* tane farklı değişken geçen bir açık önermeye *n-li açık önerme* denir. Buna göre (5) veya (7) birli açık önerme, (6) veya (8)'de ikili açık önermedir.

Açık önermeler verilen sembolleştirme biçimleri gereği sembolleştirilir. Örneğin (7) birli açık önermesinin sembolik karşılığı

(9) (gitti: *F*)

sembolleştirme biçimi gereği

(11) *Fx*

dir. (8) ikili açık önermesinin sembolik karşılığı

(11) (aldı: *F*)

semboleştirme biçimi gereği

(12) Fxy

dir.

Fx ile Fxy sembolik açık önermelerdir. Sembolik açık önermelere kısaca "açık önerme" diyeceğiz.

Açık önermelerde değişkenlerin yanısıra adlar da geçebilir. Örneğin

(13) Ali bunu aldı

tümcesi

(14) Ali x'i aldı

Anlamına gelen bir birli açık önermedir. (14)'ün sembolik karşılığı

(15) (Ali: a, aldı: F)

sembolleştirme biçimi gereği

(16) Fax

açık önermesidir. Yüklem temsilcisinin ikili olmasına karşın (16) bir birli açık önermedir, nitekim bir tek değişkeni vardır.

(17) bir n-li yüklem temsilcisi ile aralarında en az bir değişken bulunan n tane ad temsilcisi eya değişkenden oluşan

(18) $Ft_1 \ldots t_n$

biçimindeki bir söze *atomsal açık önerme* diyoruz. $t_1, \ldots, t_n$ harfleri ad temsilcilerini veya değişkenleri gösteren dile ait *terim değişkenleri*'ir.

Ad temsilcileri ve değişkenler basit terimlerdir. İleride özdeşlik mantığı bölümünde karmaşık terimlerle de karşılaşacağız.

Atomsal açık önermeler, önerme eklemleri yardımıyla birleştirilip *bileşik açık önermeler* oluşturulur. Örneğin

(19) $Fax \rightarrow (p \wedge \sim q)$

bileşik bir birli açık önerme,

(20) $(Fax \rightarrow Gy) \vee (Fyx \leftrightarrow Gy)$

bileşik bir ikili açık önermedir.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki açık önermeleri verilen sembolleştirme biçimi gereği sembolleştiriniz.

1. x, y'nin kardeşidir.

   (kardeşidir: F)

2. $x > 3 \rightarrow x > 2$

   (2: a, 3: b, ">": F)

3. Ali bunu ona verirse, o bunu Behçet'e verir.

   (Ali: a, Behçet: b, verir: F)

   "bu" adılın yerine x değişkeni, "o" adılı yerine de y değişkenini koyunuz.

II. Aşağıdaki açık önermelerin kaçlı olduklarını ve atomsal veya bileşik olduklarını belirtiniz.

1. Gax
2. $Gxy \vee p$
3. $Hxy \rightarrow Fa$
4. $Gbxa \rightarrow Hx$
5. $\sim Hxay \rightarrow (Fx \leftrightarrow Hbz)$

2.1.3 Genel Önermeler

İçinde bir niceleme işareti geçen önermelere *genel önerme,* geçmeyenlere de *tekil tamdeyim* denir.

Günlük dildeki niceleme işaretleri, "her" veya "bütün" ile "bazı" gibi sözcüklerdir.

"Her veya "bütün"ün dile getirdiği niceleme işaretine *tümel niceleme işareti,* "bazı"nın dile getirdiği niceleme işaretine *tikel niceleme işareti* denir. Sembolik dilde tümel niceleme işareti "$\forall$" ile tikel niceleme işareti "$\exists$" ile dile getirilir.

2.1.3.1 Tümel Önermeler

$A(x)$ birli bir açık önerme olduğunda

(1) $\forall x A(x)$

bir önermedir. Bu önerme, "her x için $A(x)$" biçiminde dile getirilir. (1) biçimindeki önermelere *tümel önerme* denir. "$\forall x$"e *tümel niceleyici*, $A(x)$'e de "$\forall x$" in *etki alanı* denir. $A(x)$'in özellemelerine de (1)'in *tümel özellemeleri* denir.

Örnek olarak

(2) $x = x$

açık önermesinden

(3) $\forall x(x = x)$

tümel önermesi oluşur. (3) önermesinde "$x = x$", "$\forall x$"in etki alanıdır. Başka bir örnek olarak

(4) x filozoftur veya x filozof değildir.

açık önermesini göz önüne alalım. (4)'den

(5) $\forall x[x \text{ filozoftur} \vee \sim(x \text{ filozoftur})]$

tümel önermesi oluşur.

İmdi (3) tümel önermesinin sembolik karşılığı

(6) ("=": F)

sembolleştirme biçimi gereği

(7) $\forall x Fxx$

dir. (5) tümel önermesinin sembolik karşılığı

(filozoftur: F)

sembolleştirme biçimi gereği

(8) $\forall x(Fx \vee \sim Fx)$

dir. (7) ile (8)'de "$\forall x$" tümel niceleyicisi geçmekte olup bu niceleyicinin

(7)'deki etki alanı "Fxx", (8)'deki etki alanı da "$Fx \vee \sim Fx$"dır.

Geleneksel (klasik) mantıkta, *tümel olumlu önerme* denilen

(9) Bütün insanlar ölümlüdür.

Gibi önermeler birer tümel önermedir. Nitekim (9) önermesi

(10) Her x için, x insan ise x ölümlüdür anlamına gelir. (10)'un sembolik karşılığı

(11) (insandır: F, ölümlüdür: G)

sembolleştirme biçimi gereği

(12) $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$

dır. (12) önermesi tümel olumlu önermelerin biçimini dile getirir.

Geleneksel mantıkta *tümel olumsuz önerme* denilen

(13) Hiçbir insan taş değildir.

gibi önermeler de tümel önermelerdir. Nitekim (13),

(14) Her x için, x insan ise x taş değidir.

anlamına gelir. (14)'ün sembolik karşılığı

(15) (İnsandır: F, Taştır: G)

sembolleştirme biçimi gereği

(16) $\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$

tümel önermesidir. (16), tümel olumsuz önermelerin biçimini dile getirir.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki tümel önermelerin sembolik karşılıklarını verilen sembolleştirme biçimi gereği bulunuz.

1. $\forall x(x > 3)$

   (">": F)

2. Hiçbir insan ölümsüz değildir.

(İnsan: *F*, Ölümlü: *G*)

"x ölümsüzdür" açık önermesi, "x ölümlü olmayandır" anlamına geldiğinden "~Gx" biçiminde sembolleştirilir.

3. Bütün memeliler omurgalı hayvandır.

(Memelidir: *F*, Omurgalıdır: *G*, Hayvandır: *H*)

"x omurgalı hayvandır" açık önermesi, "x omurgalıdır ve x hayvandır" anlamına gelir. Dolayısıyla "x omurgalı hayvandır", "Gx ∧ Hx" biçiminde sembolleştirilir.

2.1.3.2 Tikel Önermeler

A(x) bir birli açık önerme olduğunda,

(1) ∃x*A(x)*

biçimindeki önermelere *tikel önerme* denir. (1), "bazı x'ler için *A(x)* "veya" en az bir x için *A(x)*" anlamına gelir. "∃x"e tikel niceliyici *A(x)*'e de "∃x"in *etki alanı* denir. *A(x)*'in özellemelerine (1)'in *tikel özellemeleri* denir.

Geleneksel mantıkta *tikel evetleme önermesi* denilen

(2) Bazı insanlar filozoftur.

gibi önermeler birer tikel önermedir. Öneğin (2) önermesi

(3) Bazı x'ler için, x insandır ve x filozoftur, ya da

(4) En az bir x için, x insandır ve x filozoftur,

biçimini dile getirilir. (4), veya (5),

(5) (İnsandır: *F*, Filozoftur: *G*)

sembolleştirme biçimi gereği

(6) ∃x(Fx ∧ Gx)

biçiminde sembolleştirilir. (6) önermesinde "∃x" tikel niceleyici, "Fx ∧ Gx" ise "∃x" niceleyicisinin etki alanıdır.

Geleneksel mantıkta *tikel olumsuz önerme* denilen

(7) Bazı insanlar filozof değildir.

gibi önermeler tikel önermelerdir. (7) önermesi,

(8) En az bir x için, x insandır ve x filozof değildir.

anlamına gelir. (8) önermesinin sembolik karşılığı (5) sembolleştirme gereği

(9) $\exists x(Fx \wedge \sim Gx)$

dir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki tikel önermelerin verilen sembolleştirme biçimleri gereği sembolik karşılıklarını bulunuz.

1. $\exists x(x = 3 \vee x < 3 \vee x > 3)$

   ("=": F, "<": g, ">": H)

2. Bazı kediler tekirdir.

   ("kedidir": F, "tekirdir": G)

3. Bazı tamsayılar çift sayı değildir.

   ("tamsayıdır": F, "çift sayıdır": G)

2.1.3.3 Bileşik Genel Önermeler

Matematik diline ait

(1) Sıfırdan küçük doğal sayı yoktur

önermesini göz önüne alalım. Bu önerme

(2) $\sim\exists x$(x sıfırdan küçük doğal sayıdır)

anlamına gelir. (2)'nin sembolik karşılığı

(3) (Sıfırdan küçük doğal sayıdır: F)

sembolleştirme biçimi gereği

(4) $\sim\exists xFx$

dir. (4) bileşik bir genel önermedir.

(5) $\sim\forall xFx$

de bir bileşik genel önermedir. Bu önerme

(6) (Doğal sayıdır: G)

sembolleştirme biçimi gereği

(7) Herşey doğal sayı değildir

in sembolik karşılığıdır. Nitekim (7) önermesi

(8) $\sim\forall x$(x doğal sayıdır)

anlamına gelir.

(9) $\forall xGx \rightarrow \exists xGx$

önermesi, ana eklemi "$\rightarrow$" olan bir bileşik genel önermedir. (9) önermesi, (6) sembolleştirme biçimi gereği

(10) $\forall$(x doğal sayıdır) $\rightarrow \exists$(x doğal sayıdır)

ın sembolik karşılığıdır.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki tümceleri verilen sembolleştirme biçimleri gereği genel önerme biçiminde sembolleştiriniz.

1. $\sim\forall x(x < 3 \vee x > 3)$

   ("<": F, ">" : G)

2. $\sim\exists x$[x tamsayıdır $\wedge$ $\sim$(x tek sayıdır $\vee$ çift sayıdır)]

   ("tamsayıdır": F, "tek sayıdır": G, "çift sayıdır": H)

3. $\exists x(x > 1) \rightarrow \exists x(x > 0)$

   (1: a, 0: b, > : F)

2.1.4 Tamdeyimler

2.1.4.1 Tamdeyim Türleri, Bağlı ve Bağsız Değişken Geçişleri

Sembolik dilin gerek kapalı önermelerine gerekse açık önermelerine *tamdeyim* diyoruz. O zaman da önermelerin *kapalı tamdeyimler,* açık önermelerin de *açık tamdeyimler* olduğunu söyleriz. *Atomsal tamdeyimler* atomsal önermeler ile atomsal açık önermelerdir. Birincileri kapalı, ikincileri de açık tamdeyimlerdir. İçinde *n*-tane farklı değişken geçen tamdeyimlere *n-li açık tamdeyim* denir. Bunlar *n*-li açık önermelerdir.

İçinde (tümel veya tikel) niceliyici geçen tamdeyimlere *genel tamdeyim,* içinde niceleyici geçmeyenlere de *tekil tamdeyim* denir.

Atomsal tamdeyimler önerme eklemleri ile birleştirilip bileşik tamdeyimler oluşturulur. Buna göre *bileşik tamdeyim,* ana eklemi olan tamdeyim demektir. Bileşik tamdeyimler, bileşik önermeler ile bileşik açık önermelerdir.

A herhangi bir (açık veya kapalı) tamdeyim olduğunda

(1) $\forall x\underline{A}$

biçimindeki tamdeyimlere *tümel tamdeyim,*

(2) $\exists xA$

biçimindeki tamdeyimlere de *tikel tamdeyim* denir. Eğer, A, *A(x)* biçiminde bir birli açık önerme ise (1) tümel önerme, (2)'de tikel önerme olur.

Ancak açık olan tümel ve tikel tamdeyimler vardır. Örneğin *A* tamdeyimi, "*Fxy*" biçiminde bir açık önerme ise, (1) tümel tamdeyim

(3) $\forall xFxy$

biçimini, (2) tikel tamdeyimi de

(4) $\exists xFxy$

biçimini alır. (3) ile (4) ise açık tamdeyimlerdir. Nitekim niceleyicinin etkisinde olan x değişkeninin (3) ve (4)'de bağlı olarak geçtiği, buna karşılık niceleyicinin etkisinde olmayan y değişkeninin bağsız olarak geçtiği söylenir.

Genel olarak "$\forall$x" veya "$\exists$x" niceleyicilerinin etki alanında geçen "x" de-

değişkeninin geçişlerine *bağlı geçişler* denir. Bağlı olmayan değişken geçişlerine ise *bağsız geçişler* denir. Buna göre "x" değişkeninin bir bağsız geçişi "$\forall x$" veya "$\exists x$" etki alanında olmayan bir geçişi demektir.

İmdi aynı değişkenin bir tamdeyimde hem bağlı hem bağsız geçişleri olabilir. Örneğin

(5) $\forall xFxy \vee Gx$

tamdeyiminde x'in birinci ve ikinci geçişi y'nin tek geçişi gibi bağlıdır. Ancak x'in üçüncü geçişi (yani "Gx" bileşenindeki geçişi" "$\forall x$" niceleyicisinin etkisinde olmadığından bağsızdır. Böylece x'in (5)'te hem bağlı hem bağsız geçtiğini görüyoruz.

Kapalı tamdeyimler yani önermeler ya "p", "Fa", "Gab" gibi değişkensiz olurlar ya da "$\exists xGx$" ya da "$\forall xFax$" gibi değişkenli olurlar. Ancak kapalı tamdeyimlerde geçen her değişken (tanım gereği) bağlı olmalıdır. Öte yandan açık tamdeyimler "Gx" veya "Fxa" gibi niceleyicisiz, ya da $\exists yFxy$ gibi niceleyicili olup bir bağlı değişken kapsarlar. Ancak bağlı değişken kapsayan açık tamdeyimlerde (tanım gereği) en az bir bağsız değişken de geçmelidir.

Basit tamdeyimler, bileşik olmayan, dolayısıyla ana eklemi olmayan önermeler olarak tanımlanır. Buna göre "$\forall xA$" biçimindeki tümel tamdeyimler ile "$\exists xA$" biçimindeki tikel tamdeyimler bileşik değil, basit tamdeyimlerdir. Dikkat edilirse

(6) $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$

tamdeyimi, içinde "$\rightarrow$" ekleminin geçmesine karşın basit tamdeyim sayılmalıdır; nitekim (6)'daki "$\rightarrow$" nin geçişi ana eklem niteliğinde değildir. Buna karşılık

(7) $\forall xFx \rightarrow Gx$

te "$\rightarrow$" nin geçişi ana eklem durumunda olduğundan (7) bir bileşik tamdeyimdir. Dikkat edilirse (7)'de "$\forall x$" niceliyicisinin etki alanı yalnız "Fx" dir. Eğer "$\forall x$"in etki alanı "$Fx \rightarrow Gx$"in tümü olsaydı (7) tamdeyimi (6) biçimini alırdı. Nitekim (6)'da "$\forall x$"in etki alanı gerçekten "$Fx \rightarrow Gx$"dir. Tümel tamdeyimler ve tikel tamdeyimler genel basit tamdeyimlerdir. Tikel basit

tamdeyimler ise atomsal tamdeyimlerdir. Örneğin Fab, Fax, Fxx atomsal tamdeyimlerdir.

Örnek olarak

(8) $\forall y(Gx \rightarrow Fxy)$

tamdeyimin çeşitli özelliklerini belirtelim. (3), birli açık tamdeyimdir. Nitekim x değişkeninin birinci ve ikinci geçişi bağsız olup başka bağsız değişken yoktur. (8)'de geçen öbür değişken olan y'nin birinci ve ikinci geçişi bağlı olduğundan (3) ikili tamdeyim değildir. (8)'de geçen "$\forall y$" niceleyicisinin etki alanı "$Gx \rightarrow Fxy$"dır. (8)'in ana eklemi yoktur, nitekim (8)'de geçen "$\rightarrow$" eklemi ana eklem durumunda değildir. Dolayısıyla (8) basit tamdeyimdir. (8)'de "$\forall y$" niceleyicisi bulunduğundan (8) tümel tamdeyim dolayısıyla da genel tamdeyimdir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki tamdeyimlerdeki değişken geçişlerinden hangilerinin bağlı, hangilerinin de bağsız olduğunu belirtiniz. Ayrıca açık olan tamdeyimlerin kaçlı olduklarını belirtiniz.

1. $\exists xFxy$
2. $\exists x(p \rightarrow Gx)$
3. $\sim\forall x(Fx \rightarrow Gxy)$
4. $Gx \leftrightarrow \exists xFxy$
5. $Fx \wedge \sim\exists y(Fy \rightarrow Gyx)$

2.1.4.2 Yuvalanmış Tamdeyimler

Bir niceleyicinin etki alanında başka bir niceleyici bulunursa bu niceliyicilerin *yuvalanmış niceleyiciler* olduğu söylenir. Örneğin

(1) $\forall x\exists yFxy$

tamdeyimlerinde geçen "$\forall x$" ile "$\exists y$" yuvalanmış niceleyicilerdir. Nitekim "$\exists y$", "$\forall x$"in etki alanı olan "$\exists y\ Fxy$" de geçmektedir.

İçinde yuvalanmış niceleyiciler bulunan tamdeyimlere *yuvalanmış tamdeyim* diyoruz. Örneğin (1) tamdeyimi ile

(2) $\forall x(Ga \vee \exists yFxy)$

(3) $\forall x(Gx \vee \exists yFxy)$

(4) $\forall x\exists y\forall zFxyz$

yuvalanmış tamdeyimlerdir. Dikkat edilirse (3)'te "$\exists y$", "$\forall x$"in etki alanında geçiyor. Buna karşılık "$\forall xGx \vee \exists yFxy$" tamdeyiminde "$\exists y$", "$\forall x$" etki alanında geçmiyor. Bu nedenle sözü geçen tamdeyim yuvalanmış bir tamdeyim değildir.

Yuvalanmış tamdeyimler, günlük dile veya bilim diline ait önermeler veya açık önermelerin sembolik karşılığı olabilirler. Örneğin matematik diline ait

(5) Her tamsayıdan büyük olan bir tamsayı vardır.

önermesi

(6) $\forall x[x \text{ tamsayıdır} \rightarrow \exists y(y \text{ tamsayıdır} \wedge y > x)]$

anlamına gelir. (6) önermesinin sembolik karşılığı

(7) (Tamsayıdır: *F*, ">": *G*)

sembolleştirme biçimi gereği

(8) $\forall x[Fx \rightarrow \exists y(Fy \wedge Gyx)]$

dir. (8) ise yuvalanmış niceleyicili bir tamdeyimdir.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki tamdeyimlerden hangilerinin yuvalanmış tamdeyim olduğunu belirtiniz.

1. $\exists xFx \wedge \exists yGx$
2. $\exists x(Fx \wedge \exists yGx)$
3. $\forall x(\exists y \rightarrow \exists xFx)$

4. $\forall x \forall x(Fx \rightarrow Gx)$

5. $(\forall y Fx \rightarrow \exists x Gx) \wedge \forall y Hy$

II. Günlük dile veya bilim diline ait aşağıdaki önermelerin yuvalanmış tamdeyim biçimindeki sembolik karşılıklarını, verilen sembolleştirme biçimleri gereği bulunuz.

1. Bazı insanların çocuğu vardır.

   (İnsan: *F*, "ın çocuğu": *G*)

   Burada "ın çocuğu" bir ikili yüklem durumundadır. Nitekim verilen önerme,

   $$\exists x[x \text{ insandır} \wedge \exists y(y, x\text{'in çocuğudur})]$$

   anlamına geliyor.

2. $\exists x \forall y[x \text{ bir doğal sayıdır} \wedge (x = y \wedge x < y)]$

   (Doğal sayıdır: *F*, "=": *G*, "<": *H*)

3. Her insan çocuğunu sevmelidir.

   ("İnsandır": *F*, "in çocuğu": *G*, "sevmelidir": *H*)

   Verilen önerme,

$\forall x(x \text{ insandır} \rightarrow \exists y[(y, x\text{'in çocuğudur}) \wedge (x, y\text{'yi sevmelidir})]$ anlamına gelir. Dolayısıyla "ın çocuğu" ile "sevmelidir" ikili yüklemler durumundadır.

2.1.4.3 Boş Niceleyici Geçişleri

$\forall xA$ tümel önermesiyle $\exists xA$ tikel önermeside niceleyicinin etki alanı *A* tamdeyimidir. İmdi bağlı değişkeni x olan "$\forall x$" ile "$\exists x$" niceleyicilerinin *etkin* olması için, *A* etki alanında x değişkeni bağsız olarak geçmelidir. Eğer *A* etki alanında x değişkeni bağsız olarak geçmezse "$\forall x$" veya "$\exists x$" niceleyicisinin boş olarak geçtiği söylenir. Örneğin

(1) $\forall xp$

(2) $\exists xFa$

(3) $\forall xFy$

(4) $\exists x \forall xFx$

tamdeyimlerinde baştaki niceleyici boş olarak geçiyor. Nitekim (1)'de "$\forall x$"in etki alanı p'dir, p'de ise x bağsız olarak geçmiyor. (2)'de "$\exists x$"in etki alanı "Fa"dır, ve x "Fa"da boş geçmiyor; (3)'de "$\forall x$" in etki alanı "Fy" dir, ve "Fy"'de bağsız geçmiyor. (4)'de "$\exists x$"in etki alanı "$\forall xFx$"dir, ve x "$\forall xFx$"de geçmekle birlikte bağsız olarak geçmiyor. İleride göreceğimiz gibi boş niceleyiciler kaldırılabilir.

Bir bileşik genel önermenin bileşenlerinde boş geçen bir niceleyicinin bileşik önermede de boş geçtiğini söyleyebiliriz. Örneğin "$\forall x$" ile "$\exists x$" niceleyicileri

(5) $\forall xp \rightarrow Fxy$

(6) $q \rightarrow \exists xFa$

(7) $\forall xGx \leftrightarrow \forall xFy$

(8) $\exists x(Fy \vee \forall xGx)$

bileşik önermelerinde boş olarak geçiyor (5)'de "$\forall x$"in birinci geçişi, (6)'da "$\exists x$"in birinci geçişi, (7)'de "$\forall x$"in birinci ve ikinci geçişi ve (8)'de "$\exists x$"in birinci geçişi boştur. Dikkat edilirse

(9) $\forall x(Fx \rightarrow \forall xGx)$

de "$\forall x$" in birinci geçişi boş değildir. Nitekim "$\forall x$" birinci geçişinin etki alanı olan "$Fx \rightarrow \forall xGx$" de x değişkeninin bağsız geçişi vardır.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki tamdeyimlerde niceliyicilerin boş geçişlerini belirtiniz.

1. $\forall x \exists xFxy$
2. $\exists x(Fx \rightarrow \forall xGxy)$
3. $\forall y(\exists xGx \vee \exists yHyx)$
4. $\exists x(q \leftrightarrow \exists yFyz)$

2.1.4.4 Yerine-Koyma ve Özellemeler

A herhangi bir tamdeyim ve a herhangi bir ad olduğunda, A'da x'in her bağsız geçişi yerine (varsa) a adını koyalım. Bu işleme *yerine-koyma* işlemi denir. Yerine-koyma işlemi sonucunda elde edilen tamdeyim

(1) A (a/x)

biçiminde gösterilir. (a/x), yerine-koyma işlemini dile getirir. (1)'e A'nın *yerine-koyma örneği* denir. Örneğin

(2) $Fxy \rightarrow Gxb$

tamdeyimine (a/x) yerine-koyma işlemini uygularsak, yani (2)'deki x'in her bağsız geçişi yerine a adını koyarsak

(3) $Fay \rightarrow Gab$

yerine-koyma örneğini elde ederiz. İkinci bir örnek olarak

(4) $Fay \rightarrow \exists yGy$

tamdeyimde (a/y) yerine-koyma işlemini uygulayalım. Bu durumda y'nin yalnız birinci geçişi yerine a'yı koymamız gerekir. Nitekim y'nin ikinci ve üçüncü geçişi bağlıdır. y'nin bağsız olan tek geçişi birinci geçişidir. Buna göre (4)'ün yerine-koyma örneği

(5) $Faa \rightarrow \exists xGx$

olur. Dikkat edilirse (4)'te yerine-koyma işleminden önce a adı geçmektedir. Yerine-koyma işlemi sonucunda a adının geçiş sayısı 1'den 2'ye yükselmiştir. Üçüncü örnek

(6) $Fy \leftrightarrow (Gb \vee \exists zFz)$

tamdeyimine (b/z) yerine-koyma işlemini uygulayalım. Oysa (6)'da z yalnız bağlı olarak geçiyor. Bu durumda b adını "z"nin hiçbir geçişi yerine koymamız mümkün değildir. O zaman da yerine-koyma örneğinin (6) ile özdeş olduğu kabul edilir. Genel olarak A'nın içinde x bağsız olarak geçmezse *A* önermesi A(a/x) yerine-koyma örneği ile özdeş olur.

Dördüncü örnek olarak

(7) $Fy \leftrightarrow (Gb \vee \exists zFz)$

tamdeyimine (a/x) yerine-koyma işlemini uygulayalım. x değişkeni (7)'de hiç geçmediğinden dolayı yerine-koyma örneği (7) ile özdeş olur.

İmdi *A*, Ax gibi bir biçiminde bir açık önerme olsun. *A(x)*'in özellemesini, *A(x)*'de x'in geçişleri yerine a adın konulmasıyla elde edilen önerme olarak tanımlarız. Bu tanım yalnız tekil açık önermelere uygulanabilir. Bütün tamdeyimlere uygulanabilecek genel tanım şöyledir.

A bir tamdeyim, x bir değişken ve a bir ad olduğunda, A(a/x) yerine koyma örneğine *A* tamdeyiminin *özelleme*'si denir. *A* tamdeyimi, *A(x)* biçiminde bir birli açık önerme ise, A(a/x) yerine A(a) da yazılır. A(a/x)'e $\forall x$ *A*'nın *tümel özelleme*'si ve $\exists x$*A*'nın *tikel özelleme*'si denir.

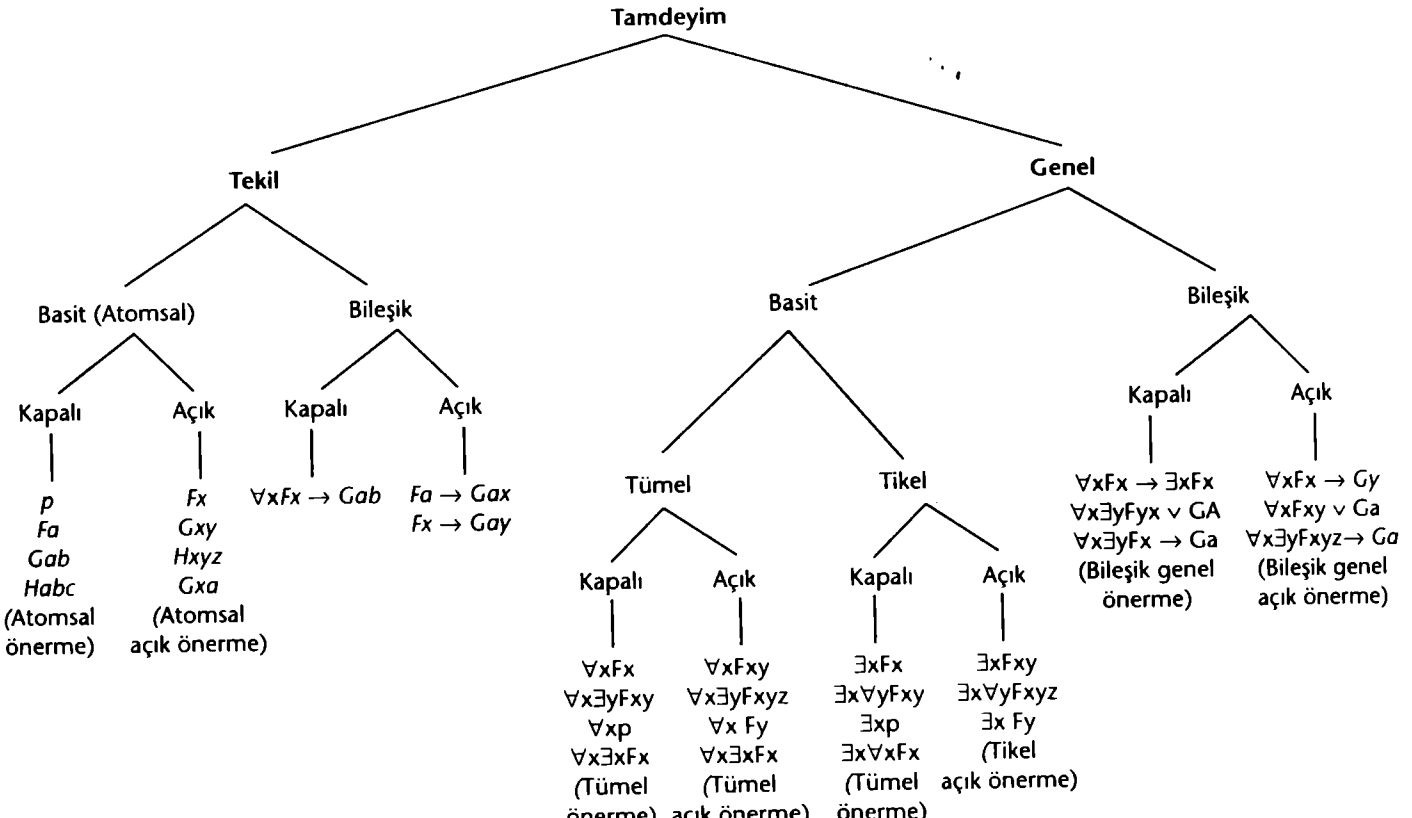
ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki tamdeyimlerin, verilen yerine-koyma işlemine dayanan özellemelerini bulunuz.

1. $\exists xFx \leftrightarrow (p \rightarrow Gx)$, (b/x)
2. $(\forall xFxy \wedge p) \rightarrow \exists xGxy$, (a/y)
3. $\exists x(Fxa \wedge p)$, (b/x)
4. $\forall x(Fxz \rightarrow p) \wedge (Gxy \leftrightarrow Fxz)$, (c/z)
5. $\exists x(p \wedge q) \rightarrow \forall x(Fzx \rightarrow Gy)$, (b/y)

2.1.4.5 Tamdeyimlerin Sınıflanması

Tamdeyimleri tekil veya genel, basit veya bileşik, kapalı veya açık olmak üzere sınıflandırabiliriz. Aşağıda tamdeyimlerin genel bir sınıflamasını yapıyoruz. Her çeşit tamdeyim için de bir veya birden çok örnek veriyoruz.


Tamdeyim
Tekil
Genel
Basit (Atomsal)
Bileşik
Basit
Bileşik
Kapalı
Açık
Kapalı
Açık
Kapalı
Açık
Kapalı
Açık
p
Fa
Gab
Habc
(Atomsal önerme)
Fx
Gxy
Hxyz
Gxa
(Atomsal açık önerme)
∀xFx → Gab
Fa → Gax
Fx → Gay
Tümel
Tikel
∀xFx → ∃xFx
∀x∃yFyx ∨ GA
∀x∃yFx → Ga
(Bileşik genel önerme)
∀xFx → Gy
∀xFxy ∨ Ga
∀x∃yFxyz→ Ga
(Bileşik genel açık önerme)
Kapalı
Açık
Kapalı
Açık
∀xFx
∀x∃yFxy
∀xp
∀x∃xFx
(Tümel önerme)
∀xFxy
∀x∃yFxyz
∀x Fy
∀x∃xFx
(Tümel açık önerme)
∃xFx
∃x∀yFxy
∃xp
∃x∀xFx
(Tümel önerme)
∃xFxy
∃x∀yFxyz
∃x Fy
(Tikel açık önerme)

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki tamdeyimlerin türünü belirtiniz. (Tekil veya genel, basit veya bileşik, basit atomsal veya basit genel, tümel veya tikel, kapalı veya *n*-li açık);

1. $Fx \rightarrow p$
2. $\exists x \forall y Fxy$
3. $\exists x Fx \leftrightarrow \forall x(Fx \vee Gxy)$
4. $\exists x(Fx \wedge \sim Gx)$
5. $\forall x \exists x Fx \rightarrow (q \wedge Fxy)$
6. $\sim \exists x \sim (Fx \vee Gxy)$
7. $\forall x Fz \rightarrow \exists x(Fx \rightarrow \forall y\, Fy)$
8. $\exists x \sim (Fx \vee p) \rightarrow \forall x \exists y Gxy$
9. $(Fxy \vee \sim Hx) \wedge \sim \forall x \exists y Gxy$
10. $[Fab \rightarrow (p \wedge \sim Gbc)] \rightarrow \sim q$

2.1.4.6 Bağlı Değişken Değiştirmesi

İçinde bağlı değişkenler geçen bir genel önermenin bir veya daha çok sayıda değişkeninin bütün bağlı geçişleri yerine o önermede hiç geçmeyen yeni bir değişkeni koyma işlemine *bağlı değişken değiştirmesi* denir. Farklı bağlı değişkenlerin yerine farklı yeni değişkenler konulmalıdır. Örneğin

(1) $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$

önermesinde "x" bağlı değişkeninin bütün bağlı geçişlerine, (1)'de geçmeyen y değişkenini koyarsak

(2) $\forall y(Fy \rightarrow Gy)$

önermesini bağlı değişken değiştirmesi sonucunda elde ederiz.

İkinci bir örnek olarak

(3) $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vee Hx$

önermesine bağlı değişken değiştirmesi işlemini uygulayalım. Bu amaçla (3)'de hiç geçmeyen "y" değişkenini seçip "x"in bağlı olan ilk üç geçişi yerine "y" koyuyoruz.

(4) $\forall y(Fy \rightarrow Gy) \vee Hx$

Üçüncü bir örnek olarak

(5) $\forall x \exists v Fxv$

önermesine bağlı değişken değiştirme işlemini her iki bağlı değişkenine uygulayalım. "x" yerine "z" ve "y" yerine "v" değişkenini koyarsak

(6) $\forall z \exists v Fzv$

elde edilir.

Sonuncu örnek olarak

(7) $Fxy \vee \exists x(Gx \rightarrow \forall y Hxy)$

önermesine bağlı değişken değiştirme işlemini yalnız "x" değişkenine uygularsak

(8) $Fxy \vee \exists z(Gz \rightarrow \forall y Hzy)$

önermesini elde ederiz. Burada yalnız "x"in bağlı geçişleri yerine "z" koyduk "y"nin bağlı geçişlerini değiştirmedik.

İleride göreceğimiz gibi herhangi bir önermeden bağlı değişken değiştirme yöntemiyle elde edilen önerme ilk önerme ile eşdeğerdir. Dolayısıyla gereği olduğunda bağlı değişken değiştirme işlemini istediğimiz zaman yapabiliriz. İleride inceleyeceğimiz türetim yönteminde bağlı değişken değiştirmesi yardımcı bir kural olarak kullanılacaktır.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelere bağlı değişken değiştirme işlemini uygulayınız.

1. $\exists x(Fx \vee \sim Gx)$
2. $Gx \rightarrow \forall x(Gx \rightarrow Hx)$
3. $(p \wedge Fx) \leftrightarrow \sim \exists x \forall y Gyx$

3. alıştırmada işlemi yalnız "x" değişkenine uygulayınız.

4. $\exists x[(p \rightarrow \forall yHxy) \vee Gy)]$

   4. alıştırmada işlemi hem "x"e hem "y" ye uygulayınız.

5. $\forall x[\exists y(Fxy \wedge p) \rightarrow Hx] \vee Gxy$

   5. alıştırmada işlemi hem "x"e hem "y" ye uygulayınız.

2.2 YORUMLAMA

2.2.1 Tekil Önermelerin Yorumlanması

Daha önce belirttiğimiz gibi, bir önermeyi yorumlama, önermenin belli bir doğruluk değerini almasını sağlayacak biçimde, önermede geçen ve mantık değişmezi olmayan her sembole (yani temsilci harfle) bir kaplamsal anlam verilmesi işlemidir. Önermeler mantığında yorumlama, p, q, r, ... gibi önerme temsilcilerine birer doğruluk değeri verilmesi işlemi, yani değerleme işlemidir. İmdi tekil önermeler, önerme eklemleri ile birleştirilen atomsal önermelerden oluşur. Dolayısıyla bir tekil önermeden geçen bütün atomsal önermelere belli birer doğruluk değerini verirsek tekil önerme belli bir doğruluk değeri alır. Buna göre *tekil önermeleri yorumlama*'yı, bu önermelerde geçen atomsal önermelere doğruluk değeri verme işlemi olarak tanımlıyoruz. Bu işleme, söz konusu atomsal önermelerin *değerleme*'si diyoruz. Örneğin

(1) $Fa \leftrightarrow (Gbc \vee Fb)$

bileşik tekil önermesini göz önüne alalım. (1)'i yorumlamak için

(2) (Fa: D, Fb: Y, Gbc: D)

değerlemesini seçelim. O zaman (1) önermesi (2) değerlemesinde alacağı doğruluk değerini şöyle hesaplayabiliriz.

(3) $Fa \leftrightarrow (Gbc \vee Fb)$

$D \leftrightarrow (D \vee Y)$

$D \leftrightarrow D$

D

Böylece (1)'in (2) değerlemesinde (veya yorumlamasında) D değerini aldığını görürüz.

İkinci bir örnek olarak

(4) $\sim[Fa \rightarrow (p \vee Gba)] \rightarrow q$

(karma) bileşik tekil önermesinin

(5) (p: Y, q: D, Fa: D, Gba: Y)

değerlemesinde aldığı doğruluk değerini hesaplayalım.

(6) $\sim[Fa \rightarrow (p \vee Gba)] \rightarrow q$

$\sim[D \rightarrow (Y \vee Y)] \rightarrow D$

$\sim[D \rightarrow Y] \rightarrow D$

$\sim Y \rightarrow D$

D

Demek ki (4), D değerini alıyor.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin yorumlanması için verilen değerlemede aldıkları doğruluk değerini hesaplayınız.

1. $\sim Fa \leftrightarrow Gb$
   (Fa: D, Gb: Y)
2. $Fa \rightarrow (p \vee Gbc)$
   (p: D, Fa: D, Gbc: Y)
3. $Fab \leftrightarrow \sim(Ga \vee \sim Fbc)$
   (Fab: D, Ga: Y, Fbc: D)

2.2.2 Tekil Birli Açık Önermelerin Yorumlanması ve Gerçeklenmesi

Matematik dilinde (tek bilinmeyenli) denklem, içinde bir değişken bir tümcedir. (değişkene "bilinmeyen" de denir.) değişken belli bir önermenin adı değildir, ancak *değer alanı* denilen bir kümenin öğesi olan nesneler değişkenin değerleri sayılır. Örneğin

(1) $x + 27 = 0$

denkleminde x değişkeninin değerleri sayılardır. Yani x'in değer alanı sayılardan oluşur. Ancak değer alanının hangi türden sayılardan oluştuğunu ayrıca belirtmek gerekir. Bu değer alanı doğal sayılar, tamsayılar, rasyonel sayılar, reel sayılar veya kompleks sayılar olabilir. x yerine değer alanına ait bir sayı adı koyarsak (1) denkleminin bir özellemesi elde edilir. Her özelleme doğru veya yanlış olur. Doğru bir özellemeye yol açan sayıya denklemin *kök*'ü veya *çözüm*'ü denir. Kökün varlığı seçilen değer alanına da bağlıdır. (1) denkleminin kökü –27 sayısıdır. Bu sayı ise tamsayılar kümesinin bir öğesi olmakla birlikte doğal sayılar kümesinin öğesi değildir. (Nitekim doğal sayılar kümesi, {0, 1, 2, 3, ...} kümesine eşittir.) Demek ki (1) denkleminin doğal sayılar kümesinde kökü olmayıp tamsayılar kümesinde kökü vardır. Mantıkta açık önermelerin değer alanına *konuşma evreni* veya *evren* denir. Örneğin

(2) x filozoftur

birli açık önermesi için uygun bir evren

(3) {Aristo, İbn Sina, Mozart}

kümesi olabilir. Evrenin her bir öğesinin adını (2)'de x değişkeni yerine koyarsak

(4) Aristo filozoftur

(5) İbn Sina filozoftur

(6) Mozart filozoftur

özellemelerini elde ederiz. (4) ile (5) doğru özellemeler, (6) ise yanlış bir özellemedir. Doğru özellemeye yol açan evren öğesinin açık önermeyi *gerçeklediği* söylenir. Böylece Aristo ile İbn Sina'nın (2) açık önermesini gerçeklediğini, ama Mozart'ın (2)'yi gerçeklemediğini görüyoruz. Yorumlanmış sembolik dilin ad temsilcilerine artık yalın olarak "ad" diyeceğiz. O zaman da E evrenine ait bireylerden yeni adları olan a, b, c, ... adlarıyla söz edeceğiz. Örneklerimizde kolaylık amacıyla hep sonlu sayıda öğesi olan evrenlerden söz edeceğiz. Buna göre $E = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ yazacağız. Burada *a* yerine a_1, b yerine a_2, c yerine a_3 yazdık.

Şimdi sembolik dile ait açık önermelerin yorumlama işlemine geçelim. Önce tekil birli önermeleri ele alıyoruz. İmdi *A(x)* bir tekil birli açık önerme olsun. *A(x)*'i yorumlamak için *E* gibi bir evreni seçmemiz gerekir. Sembolik dile ait tamdeyimlerin belli bir anlamı olmadığından *E* evreni olarak istediğimiz bir kümeyi seçebiliriz. *E* kümesi her türlü somut veya soyut, canlı veya cansız varlıklardan oluşabilir. Evrenin öğelerine *bireyler* denir. *A(x)*'i yorumlamak için sembolik dilin a, b, c, ... gibi ad temsilcileri ile $\{e_1, e_2, e_3, ...\}$ biçimindeki *E* kümesinin öğeleri arasında bire bir karşılılık kurulmalıdır. Buna göre a ad temsilcisi e_1 bireyinin adı, b ad temsilcisi e_2 bireyinin adı, c ad temsilcisi e_3 bireyinin adı vb... sayılacaktır. Her ad temsilcisinin bir tek bireyi adlandırdığını, her bireyin de bir tek ad temsilcisi ile adlandırıldığını kabul ediyoruz. Böylece ad temsilcileri yorumlanmış oluyor. Ad temsilcisinin adlandırdığı nesne adın *kaplamsal anlamı* ya da *kaplamı*'dır. a, E'nin öğesi ve $a \in E$ yazılır.

$a \in E$ olduğunda A(a), yani A[a/x] bir tekil önermedir. Bu tekil önermeye *A(x)* tekil birli önermesinin *E evreninde özelleme*'si diyoruz.

Örneğin

A(x)

(7) $Fx \rightarrow Gx$

biçiminde, *E* evreni de

(8) $E = \{a, b, c\}$

biçiminde olsun.

(9) $Fa \rightarrow Ga$

(10) $Fb \rightarrow Gb$

(11) $Fc \rightarrow Gc$

(7) tekil birli açık önermesinin *E* evrenindeki özellemeleridir. Bir açık önermenin yorumlanması için verilen evrendeki bütün özellemelerin yorumlanması gerekir. Dolayısıyla özellemelerin atomsal bileşenleri olan "Fa", "Ga", "Fb", "Gb", "Fc", "Gc"nin doğruluk değerlerini belirtmek gerekir. *E* evrenini seç-

tikten sonra, bu atomsal önermelerin doğruluk değerlerini saptamakla (7)'nin yorumlanması eksiksiz olarak yapılmış olur. Örneğin

(12) (E : {a, b, c}; Fa: D, Fb: D, Fc: Y, Ga: Y, Gb: D, Gc: Y}

sözü geçen (7) açık önermesinin bir yorumlamasıdır. Evren ile atomsal önermeler arasına noktalı virgül (;) koyuyoruz. "Fa", "Fb", "Fc" atomsal önermelerine "F"nin *E evrenindeki atomsal önermeleri*, "Ga", "Gb", "Gc"ye de "G"nin E *evrenindeki atomsal önermeler*'i diyoruz. Bu atomsal önermelere belli bir doğruluk değeri veren yorumlama "F" ile "G"ye belli birer kaplamsal anlam (veya kaplam) sağlayarak onları yorumlamış olur. Böylece yorumlanmış olan yüklem temsilcilerine yalın olarak "yüklem" diyeceğiz.

"F" gibi bir birli yüklemin *E* evrenindeki kaplamı "Fa"yı doğru kılan a gibi evren öğelerinden oluşur. Bu kaplamı $kp(F^1)$ biçiminde gösteriyoruz.

kp (F) kümesi "E"nin bir alt kümesidir. Bunu

(13) $kp(F) \subseteq E$

biçiminde gösteriyoruz. İmdi

(14) $a \in kp(F)$ ancak ve ancak "Fa" doğru ise

$b \in kp(F)$ ancak ve ancak "Fb" doğru ise

$c \in kp(F)$ ancak ve ancak "Fc" doğru ise

Benzer koşullar kp (G) için geçerlidir. Buna göre verilen (12) yorumlamasında

(15) $kp(F) = \{a, b\}$

(16) $kp(G) = \{b\}$

olduğunu söyleyebiliriz. Nitekim (12) gereği "Fa" ile "Fb" doğru, "Fc" ise yanlıştır, öbür yandan ise "Gb" doğru, "Ga" ile "Gc" yanlıştır. Böylece (12)'nin "F" ile "G"nin *E* evrenindeki atomsal önermelerine doğruluk değeri vermekle kp (F) ile kp (G)'yi belirlediğini görüyoruz. Bu nedenle (12)'nin içinde geçen

(17) (Fa: D, Fb: D, Fc: Y)

değerlemesi "F"nin kaplamsal anlamı, gene (12)'nin içinde geçen

(18) (Ga: Y, Gb: D, Gc: Y)

değerlemesi ise "G"nin kaplamsal anlamı sayılmalıdır. Kısalık amacıyla atomsal önermelerin değerlemesinde yalnız D değerini alan atomsal önermeleri belirlemekle yetinebiliriz. Böylece (12) yorumlamasını

(19) (E: {a, b, c}; Fa, Fb, Gb)

biçiminde kısaltabiliriz. (19) yorumlamasında yer alan atomsal önermelerin D değerini aldığı, F ile G'nin *E* evrenindeki atomsal önermelerden (19)'da yer almayanlarının ise Y değerini aldığını kabul ediyoruz. Bundan böyle yorumlamaları (19) biçiminde dile getireceğiz. Buna göre:

> "F_1", ..., "F_m" gibi yüklem temsilcilerini kapsayan bir *tekil birli açık önermenin E evreninde yorumlaması,* E evreninin öğeleri ile "F_1", ..., "F_m" yüklemlerinin *E* evrenindeki atomsal önermelerinden doğru değerini alanlarının sıralanmasından oluşur.

Böylece her yüklem temsilcisi belli bir kaplamı olan bir yüklem olarak yorumlanmış olur. Örneğin sözü geçen (7) açık önermesinde geçen "F" ile "G"nin kaplamlarının sırasıyla {a, b} ile {b} olduğunu, (yani kp(F) = {a, b}, kp(G) = {b} olduğunu) (19) yorumlamasında doğrudan doğruya görüyoruz. Nitekim bu yüklemin kaplamı, yorumlamada geçen atomsal önermelerdeki adların gösterdiği evren öğeleridir. (19)'da geçen "F"nin atomsal önermeleri "Fa" ile "Fb", "G"nin atomsal önermesi ise "Gb"dir.

(7) açık önermesinin *E* evrendeki özellemelerine yani (9), (10) ve (11) önermelerine gelince, bunların doğruluk değeri (19) yorumlaması gereği tek biçimde belirlenmiştir. Bu doğruluk değerini şöyle hesaplayabiliriz.

(20)

Fa → Ga	Fb → Gb	Fc → Gc
D → Y	D → D	Y → Y
Y	D	D

> Genel olarak *A(x)* biçimindeki bir birli açık önerme ile bu önermenin *E* evrenindeki bir yorumlaması verildiğinde A(a), *A(x)*'in *E* evrenindeki bir özellemesi olup verilen yorumlamada doğru ise a bireyinin *A(x)* açık önermesinin *gerçeklediği* söylenir.

Buna göre *E* evrenine ait bireylerden b ile c'nin (7) açık önermesini gerçeklediğini, a bireyinin ise gerçeklemediğini söyleyebiliriz. Böylece (19) gibi bir yorumlamanın, (7) açık önermesinin bütün özellemelerinin doğruluk değerini belirlediği için bu özellemelerin de bir yorumlaması olduğu ortaya çıkar. O zaman da *E* evrenine ait bireylerden hangilerinin (7) açık önermesini gerçeklediği, hangilerinin gerçeklemediği de belirlenmiş olur.

İkinci bir örnek olarak

(21) $(Fx \wedge \sim Gx) \rightarrow Hx$

tekil birli açık önermesinin bir yorumlamasını gösterelim. *E* olarak {a, b} seçerek yorumlamayı

(22) (E: {a, b}; Fb, Ga, Ha, Hb)

biçiminde dile getiriyoruz. (22)'ye dayanarak "Fb", "Ga", "Ha", "Hb"nin D değerini aldığını, geriye kalan "Fa", "Gb" atomsal önermelerinin ise Y değerini aldığını söyleyebiliriz.

Genel olarak *A(x)* gibi bir tekil birli açık önermenin *E* gibi bir evrendeki yorumlaması, *A(x)*'in *E* evrenindeki bütün özellemelerinin de yorumlaması durumundadır. (21) açık önermesinin $E = \{a, b\}$ evrenindeki özellemeleri

(23) $(Fa \wedge \sim Ga) \rightarrow Ha$

$(Fb \wedge \sim Gb) \rightarrow Hb$

tekil önermeleridir. (23) önermelerinin (22) yorumlaması gereği doğruluk değerleri şöyle hesaplanabilir.

(24)

$(Fa \wedge \sim Ga) \rightarrow Ha$	$(Fb \wedge \sim Gb) \rightarrow Hb$
$(Y \wedge \sim D) \rightarrow D$	$(D \wedge \sim Y) \rightarrow D$
$(Y \wedge Y) \rightarrow D$	$(D \wedge D) \rightarrow D$
$Y \rightarrow D$	D
D	

Böylece (21) açık önermesinin *E* evrenindeki bütün özellemelerinin (22) yorumlaması gereği doğru olduğunu görüyoruz. O halde (21) açık önermesini, *E* evrenine ait her birey gerçekliyor.

Üçüncü örnek olarak

(25) $Fx \rightarrow \sim Gx$

tekil birli açık önermesiyle

(26) (E: {a, b}; Fa, Fb, Ga, Gb)

yorumlamasını göz önüne alalım. (26) gereği

(27) kp(F) = {a, b}

ve

(28) kp(G) = {a, b}

olur. Öte yandan (25)'in *E* evrenindeki özellemeleri

(29) $Fa \rightarrow \sim Ga$

ile

(30) $Fb \rightarrow \sim Gb$

dir. (29) ile (30)'un doğruluk değerleri de şöyle hesaplanabilir.

(31)

$Fa \rightarrow \sim Ga$	$Fb \rightarrow \sim Gb$
$D \rightarrow \sim D$	$D \rightarrow \sim D$
$D \rightarrow Y$	$D \rightarrow Y$
Y	Y

Böylece (25) açık önermesinin *E* evrenindeki bütün özellemelerinin (26) yorumlaması gereği yanlış olduğunu görüyoruz. Dolayısıyla *E* evrenine ait hiçbir birey (25)'i gerçeklemiyor.

F gibi bir yüklemin kaplamı, *E* evreninin bir alt kümesidir. Yani kp(F) $\subseteq$ *E* olur. Sınır durumlarında kp (F) *E* ile özdeş olabilir; yani kp (F) = *E* olur, ya da tam tersine kp (F)'nin hiçbir öğesi olmayabilir. Hiçbir öğesi olmayan kümeye boş küme denir ve { } biçiminde gösterilir. Buna göre sınır durumunda kp (F) = *E* olduğu gibi kp (F) = { } de olabilir. Bu sonuncu durumda F'nin kaplamının *boş* olduğu söylenir. Örneğin (25) açık önermesinde geçen F ile G yüklemlerinin (26) yorumlamasındaki kaplamları *E* evreni ile özdeştir. Öte yandan

(32) $Fx \vee \sim Gx$

açık önermesinde geçen F yükleminin

(33) (E: {a, b}; Ga)

yorumlamasında kaplamı boştur, yani

(34) $kp(F) = \{\ \}$

"p", "q", "r", ... gibi önerme temsilcileri sıfırlı yüklem durumundadır. Bu nedenle önerme temsilcilerinin de kaplamı vardır. Bir önerme temsilcisi tek başına bir atomsal önerme olduğundan yorumlamada D değerini alan atomsal önermeler olarak yer alabilirler. "p" gibi bir önerme temsilcisine, yorumlamada yer alırsa D değeri, yoksa Y değeri verilmiş olur.

"p" nin kaplamı "p" ye verilen doğruluk değeri olarak tanımlanır.

Şimdiye kadar yalnız birli yüklemlerden oluşan açık önermeleri örnek olarak aldık. Şimdi de içinde çoklu önermelerin geçtiği açık önermelerin yorumlamasını ele alalım. Örneğin

(35) $p \rightarrow Gxx$

tekil birli önermesinin

(36) (E: {a, b}; p, Gab, Gba, Gbb)

gibi bir yorumlamasını inceleyelim. (35)'in *E* evrenindeki özellemeleri

(37) $p \rightarrow Gaa$

ile

(38) $p \rightarrow Gbb$

dir. Her ikisinin doğruluk değerini (36) yorumlaması gereği şöyle hesaplayabiliriz.

(39)
$$\begin{array}{cc} p \rightarrow Gaa & p \rightarrow Gbb \\ D \rightarrow Y & D \rightarrow D \\ Y & D \end{array}$$

Demek ki (35), (36) yorumlamasında salt gerçeklenebilir bir açık önermedir.

p ile G'nin kaplamlarına gelince kp(p) bir doğruluk değeridir. "p" atomsal önermesi (36) yorumlamasında yer aldığından dolayı

(40) kp(p) = D

olur. Eğer "p" yorumlamada yer almasaydı kp(p) = Y olurdu.

G ikili yükleminin kaplamı, (36) yorumlamasında yer alan G'nin atomsal önermelerinin içindeki <a, b>, <b, a>, <b, b> sıralanmış ikililerinden oluşan kümedir. Yani

(41) kp(G) = {<a, b>, <b, a>, <b, b>}

dir.

E herhangi bir küme olduğunda E X E ile gösterilen E'nin kendiyle *kartezyen çarpımı*, E'nin öğelerinden oluşan sıralanmış ikililerin kümesi demektir. E X E'nin bir alt kümesine *bağıntı* denir.

Örneğin *E* = {a, b} ise

(42) E X E = {a, b} X {a, b} = {<a, a>, <a, b>, <b, a>, <b, b>}

E X E yerine E^2 (E kare)'de yazılır. Genel olarak:

E^n ile gösterilen E'nin n'inci *kartezyen kuvveti*, E'nin kendiyle n kez çarpımı demektir.

Örneğin *E* = <a, b> ise

(43) E3 = (E X E) X E = ({a, b} X {a, b}, X {a, b} = {<a, a>, <a, b>, <b, a>, <b, b>} X {a, b} = {<a, a, a>, <a, b, a>, <b, a, a>, <b, b, a>, <a, a, b>, <a, b, b>, <b, a, b>, <b, b, b>}

olur. Genel olarak F bir n-li yüklem ise F'nin *E* evrenindeki kaplamı E^n'nin bir alt kümesidir. Yani

(44) $kp(F) \subseteq E^n$

dir. Örneğin (41) ile tanımlanan kp(G) için

(45) $kp(G) \subseteq E^2$

olduğunu görüyoruz.

Son olarak içinde ad geçen açık önermelerin yorumlamasını ele alalım. Örneğin

(46) $Fb \rightarrow Gxa$

açık önermesinin bir yorumlaması

(47) (E: {a, b, c}; Fb, Gba, Gbb)

olsun. O zaman

$kp(F) = \{a\}$

$kp(G) = \{\langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$

olur. (46)'nın *E* evrenindeki özellemeleri

(48) $Fb \rightarrow Gaa$

(49) $Fb \rightarrow Gba$

(50) $Fb \rightarrow Gca$

önermeleridir. Bunların doğruluk değerleri de şöyle hesaplanır.

(51)

$Fb \rightarrow Gaa$	$Fb \rightarrow Gba$	$Fb \rightarrow Gca$
$D \rightarrow Y$	$D \rightarrow D$	$D \rightarrow Y$
Y	D	Y

Demek ki (46), (47) yorumlamasında salt gerçeklenebilir bir açık önermedir.

Açık önermelerin yorumlama biçimi ışığında tekil önermelerin §2.2.1'de ele aldığımız tekil önermelerin yorumlamasının evrenin, söz konusu tekil önermede geçen adların gösterdiği bireylerden oluştuğunu söyleyebiliriz. Örneğin §2.2.1'deki (1), yani

(52) $Fa \leftrightarrow (Gbc \vee Fb)$

tekil önermesinin (2) yani

(53) (Fa: D, Fb: Y, Gbc: D)

biçimindeki yorumlamasının

(54) (E: {a, b, c}; Fa, Gbc)

anlamına geleceğini kabul ediyoruz. Nitekim (53)'te geçen adlar "a", "b", "c" olduğundan E = {a, b, c} olur. Öte yandan (53)'te "Fa" ile "Gbc"ye D değeri verildiğinden "Fa" ile "Gbc" (54)'de yer alıyor. Bu türlü yorumlama niceleme mantığında yorumlamanın genel biçimidir.

Yorumlama biçimi, ait olduğu mantık sistemine göre değişir. Ama "geçerlilik", "tutarlılık", "eşdeğerlik" ve "içerme"nin "yorumlama" kavramına dayanan tanımları hep aynıdır. Bu tanımları aşağıda topluca tekrar dile getiriyoruz.

1. A önermesi *geçerli*'dir, ancak ve ancak *A* her yorumlamada doğru ise.
2. A önermesi *geçersiz*'dir, ancak ve ancak *A* geçerli değilse.
3. $\{A_1, ..., A_n\}$ önerme kümesi *tutarlı*'dır, ancak ve ancak en az bir yorumlamada $A_1, ..., A_n$ önermeleri birlikte doğru ise.
4. $\{A_1, ..., A_n\}$ önerme kümesi *tutarsız*'dır, ancak ve ancak $\{A_1, ..., A_n\}$ tutarlı değilse.
5. A önermesi *tutarlı*'dır, ancak ve ancak {A} birim kümesi tutarlı ise. (Dolayısıyla *A* tutarlıdır, ancak ve ancak *A* en az bir yorumlamada doğru ise, yoksa *A tutarsız*'dır.)
6. $A_1, ..., A_n \therefore$ B çıkarımı *geçerli*'dir, ancak ve ancak $\{A_1, ..., A_n, \sim B\}$ geçersiz kılıcı kümesi tutarsız ise.
7. $A_1, ..., A_n \therefore$ B çıkarımı *geçersiz*'dir, ancak ve ancak $A_1, ..., A_n \therefore$ B geçerli değilse. (Dolayısıyla $A_1, ..., A_n \therefore$ B'nın geçersiz olması $\{A_1, ..., A_n, \sim B\}$ kümesinin tutarlı olması demektir.)
8. A ile B önermeleri *eşdeğer*'dir. ($A \equiv B$), ancak ve ancak her yorumlamada A'nın doğruluk değeri ile B'nin doğruluk değeri birbiriyle özdeş ise.
9. $A_1, ..., A_n$ önermeleri B önermesini içerir ($A_1, ..., A_n \therefore B$), ancak ve ancak $A_1, ..., A_n \therefore$ B çıkarımı geçerli ise.

Öte yandan: *A(x)* bir açık önerme, *E* ise açık önermenin bir yorumlamasında geçen evren olsun. Eğer E'nin en az bir öğesi *A(x)*'i gerçeklerse, *A(x)* açık önermesinin verilen yorumlamada *gerçeklenebilir* olduğu

söylenir. Eğer E'nin hiç bir öğesi *A(x)*'i gerçeklemezse, *A(x)*'in verilen yorumlamada *gerçeklenemez* olduğu söylenir. Eğer E'nin bütün öğeleri *A(x)*'i gerçeklerse *A(x)*'in verilen yorumlamada *evrensel-gerçeklenebilir* olduğu söylenir. En sonda *A(x)* gerçeklenebilir olmakla birlikte evrensel-gerçeklenebilir değilse, *A(x)*'e verilen yorumlamada *salt-gerçeklenebilir* diyeceğiz. Buna göre bir açık önermenin *E* evrenindeki bütün özellemeleri doğru ise açık önerme evrensel-gerçeklenebilir olur, bazı özellemeleri doğru ise açık önerme gerçeklenebilir olur, her özellemesi yanlış ise açık önerme gerçeklenemez olur, en az bir özellemesi doğru ise ve en az bir özellemesi yanlış ise, açık önerme salt-gerçeklenebilir olur.

Yukarıdaki örneklerden (7) açık önermesinin (12) yorumlamasında salt-gerçeklenebilir olduğu, (21) açık önermesinin (22) yorumlamasında evrensel gerçeklenebilir olduğu ve (25) açık önermesinin (26) yorumlamasında gerçeklenemez olduğunu görüyoruz.

Her açık önerme ya evrensel-gerçeklenebilirlik, ya salt-gerçeklenebilirlik ya da gerçeklenemezlik özelliklerinden birini ve yalnız birini taşır. Böylece tüm açık önermeleri üç ayrık çeşide ayırabiliriz.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki tekil birli önermelerde geçen yüklemlerin verilen yorumlamadaki kaplamlarını bulunuz.

1. $Fx \vee \sim Fx$
   (E: {a, b}; Fa, Gb)
2. $Fx \rightarrow (Gx \rightarrow Fx)$
   (E: {a, b}; Fb)
3. (E: {a, b, c}; Fa, Gb)
4. $(p \wedge \sim Gx) \rightarrow Hx$
   (E: {a, b}; p, Ha)
5. $Fa \rightarrow (G\not\rightarrow q)$
   (E: {a, b, c}; Fa, Fb, Ga)
6. $Fxx \rightarrow (Gx \vee Hx)$
   (E: {a, b}; Fab, Fba, Gb)

7. $Fxa \rightarrow \sim Gxx$
   (E: {a, b}; Faa, Fba)

   Dikkat edilirse yukarıdaki yorumlamada "G"nin atomsal önermesi geçmediğinden kp(G) = { } olur.

8. $Gab \rightarrow \sim(Fx \vee Hx)$
   (E: {a, b}; Gaa, Gba, Fa, Hb)

9. $Ha \leftrightarrow (Fa \wedge \sim Gbb)$
   (E: {a, b}; Faa, Hb)

10. $Fxa \rightarrow (Gxb \wedge Hax)$
    (E: {a, b}; Fab, Fba, Gaa, Hba, Hbb)

II. Yukarıdaki açık önermelerin verilen evrendeki özellemelerini belirtiniz ve bunların verilen yorumlamadaki doğruluk değerlerini hesaplayınız.

III. Yukarıdaki açık önermelerin verilen yorumlamalarda tümel-gerçeklenebilir veya salt gerçeklenebilir ya da gerçeklenemez olduklarını belirtiniz.

2.2.3 Yuvalanmamış Genel Önermelerin Yorumlanması

İçinde yuvalanmış niceleyiciler geçmeyen *önermeler*'e (veya genel olarak tamdeyimlere) *yuvalanmamış önerme* (ya da *yuvalanmamış tamdeyim*) diyoruz.

Örneğin

(1) $\exists xFx$

yuvalanmamış bir önerme,

(2) $\exists x \forall yFxy$

ise yuvalanmış bir önermedir.

Genel önermelerin yorumlanmasını incelerken önce yuvalanmamış genel önermeleri, sonra da yuvalanmış genel önermeleri ele alacağız. Yuvalanmış genel önermeleri ise tümel önermeler, tikel önermeler ve bileşik önermelere ayıracağız.

2.2.3.1 Tümel Önermelerin Yorumlanması

Yuvalanmamış tümel önermeler $\forall xA$ biçimindedir. *A*'ya ("Fx" gibi) *A(x)* biçiminde bir tekil birli açık önerme, ya da ("Fa" veya "p" gibi) bir tekil önermedir. $\forall xA(x)$, "her x için *A(x)*" diye okunur. Her x için *A(x)* ise,

(1) x değişkeninin her değeri *A(x)* önermesini gerçekler

anlamına gelir. *A(x)*'in *E* evreninde bir yorumlamasını verdiğimizde, x değişkeninin her değeri, *E* evreninin her öğesi demekir. Dolayısıyla (1),

(2) *E* evreninin her öğesi *A(x)* açık önermesini verilen yorumlarda gerçekler

biçimine dönüşür. (2) ise,

(3) *A(x)*, verilen yorumlamada tümel-gerçeklenebilir bir açık önermedir anlamına gelir. Sonuç olarak:

$\forall xA(x)$ biçimindeki bir tümel önermenin *A(x)* açık önermeinin *E* evrenindeki bir yorumlamasında *doğru* olması, *A(x)*'in verilen yorumlamada evrensel-gerçeklenebilir olması demektir.

Buna göre *A(x)*'in her yorumlamasının aynı zamanda $\forall xA(x)$'in de bir yorumlaması olduğunu söyleyebiliriz.

A(x)'in *E* evreninde bir yorumlamada doğru olmasının gerekli ve yeterli koşulu,

A(x)'in *E* evrenindeki tüm özellemelerinin doğru olmasıdır.

Örneğin

(1) $\forall xFx$

tümel önermesinin

(2) (E: {a, b}; Fa, Fb)

yorumlamasındaki doğruluk değerini bulalım. $\forall xFx$'in doğru olması (2) yorumlamasında evrensel-gerçeklenebilir olması demektir. Oysa (1)'in bütün özellemeleri "Fa" ile "Fb" den ibarettir. Her ikisi D değerini aldığından "Fx" evrensel-gerçeklenebilirdir. O halde (1), (2) yorumlamasında doğrudur.

İkinci bir örnek olarak

(3) $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$

tümel önermesinin

(4) (E: {a, b}; Fa, Gb)

yorumlamasında doğruluk değerini bulalım. "Fx → Gx" açık önermesinin "Fa → Ga" özellemesi Y değerini alır. Nitekim "Fa" ya D değeri, "Ga"ya da Y değeri verilmiştir. Dolayısıyla "Fx → Gx" evrensel-gerçeklenebilir değildir. O halde (3) tümel önermesi verilen (4) yorumlamasında yanlıştır.

Üçüncü örnek olarak

(5) ∀x[Fxb → (Ga ∨ Hx)]

tümel önermesinin

(6) (E: {a, b}; Faa, Fba, Hb)

yorumlamasında doğruluk değerini bulalım. (5)'in *E* evrenindeki özellemeleri

(7) Fab → (Ga ∨ Ha)

ile

(8) Fbb → (Ga ∨ Hb)

dır. (7) ile (8)'in (6)'daki doğruluk değeri hesapları şöyledir:

(9)

Fab → (Ga ∨ Ha)	Fbb → (Ga ∨ Hb)
Y → (Y ∨ Y)	Y → (Y ∨ D)
Y → Y	Y → D
D	D

Demek ki "Fab → (Ga ∨ Hx)" açık önermesi (6)'da tümel-gerçeklenebilirdir. Dolayısıyla (5), (6) yorumlamasında doğrudur.

Dördüncü örnek olarak niceleyicisi boş geçen bir tümel önermeyi ele alıyoruz.

(10) ∀xFa

tümel önermesinin

(11) (E: {a, b}; Fb)

yorumlamasındaki doğruluk değerini bulalım. İmdi "Fa"nın tek özellemesi vardır, o da "Fa"nın kendisidir. Nitekim

(12) F(a/x) = Fa

dır. "Fa" özellemesi ise (11) yorumlamasında Y değerini alır. Dolayısıyla (10) yanlıştır.

Genel olarak *A* bir tekil önerme olduğunda, "∀x" niceleyicisi ∀x*A* biçimindeki tümel önermede boş geçer. O zaman da herhangi bir evreninde a ∈ *E* ise A(a /x) = A olur. Dolayısıyla her evrende ∀xA'nın bir tek özellemesi vardır, bu da *A* önermesidir. Buna göre bütün yorumlamalarda ∀xA'nın doğruluk değeri, A'nın doğruluk değerine eşittir. Dolayısıyla ∀x*A* ile *A* eşdeğer olur, yani A ≡ B'dir.

Günlük dil veya bilim diline ait yuvalanmamış tümel önermelere gelince, bunların doğruluk değerini belirlemek için başvurduğumuz yorumlamada yalnızca *E* evreninin saptanması yetiyor. Nitekim tümel önermede geçen yüklemlerin anlamı önceden belirlenmiş olduğundan değerini alan atomsal önermelerin sıralanmasına gerek yoktur. Örneğin

(13) ∀x(x çift sayıdır)

tümel önermesinin bir yorumlaması

(14) (E: {1, 2, 3})

biçimindedir.

(15) x çift sayıdır

açık önermesinin *E* evrenindeki özellemeleri

(16) 1 çift sayıdır

(17) 2 çift sayıdır

(18) 3 çift sayıdır

önermeleridir. Bunların doğruluk değerlerini, "çift sayıdır" yükleminin anlamı gereği biliriz. Nitekim (16) ile (18) yanlış, (17) ise doğrudur. Demek ki (15) evrensel-gerçeklenebilir değildir. O halde (13) tümel önermesi yanlıştır.

Başka bir örnek olarak (13)'ün

(19) (E: {2, 4, 6})

yorumlamasında doğruluk değerini bulalım. (15)'in *E* evrenindeki özellemeleri

(20) 2 çift sayıdır

(21) 4 çift sayıdır

(22) 6 çift sayıdır

dır. Bunların tümü doğru olduğundan (15) evrensel-geçerlidir. Dolayısıyla (13) tümel önermesi (19) yorumlamasında doğrudur.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki tümel önermelerin verilen yorumlamalardaki doğruluk değerini bulunuz.

1. $\forall x(p \rightarrow Fx)$
   (E: {a, b}; p, Fa)
2. $\forall x(Fx \wedge \sim Fx)$
   (E: {a, b}; Fb)
3. $\forall x[(Fx \wedge Gx) \rightarrow Fx]$
   (E: {a, b, c}; Fb, Ga, Gc)
4. $\forall x[Fxa \rightarrow (Gax \wedge p)]$
   (E: {a, b}; p, Faa, Gaa, Gbb)
5. $\forall x[Fxx \leftrightarrow \sim(Gax) \wedge Hx \wedge p)]$
   (E: {a, b}; Faa, Hb)
6. $\forall x(Fa \rightarrow Gb)$
   (E: {a, b}; Fa, Ga)
7. $\forall x(p \rightarrow q)$
   (E: {a, b}; p, q)
8. $\forall x(x < 3 \rightarrow x > 4)$
   (E: {1, 2, 3, 4})
9. $\forall x[(x > 1 \wedge x < 3) \rightarrow x = 3]$
   (E: {1, 2, 3})
10. $\forall x$(x tamsayıdır $\rightarrow$ x teksayıdır)
    (E: {1, 3, 5})

2.2.3.2 Tikel Önermelerin Yorumlanması

Yuvalanmamış tikel önermeler $\exists xA$ biçimindedir. A ya *A(x)* biçiminde bir tekil birli açık önerme, ya da bir tekil önermedir.

$\exists xA(x)$, "en az bir x için A(x)" diye okunur. Bu da

(1) x değişkeninin en az bir değeri *A(x)* açık önermesini gerçekler

anlamına gelir. x değişkeninin değerleri, ilgili yorumlamanın *E* evrenindeki öğeleridir. Buna göre (1) yerine

(2) E evreninin en az bir değeri *A(x)* açık önermesini gerçekler

yazabiliriz. (2) ise A(x)'in gerçeklenebilir olduğunu dile getirir. O halde

(3) $\exists xA(x)$ biçimindeki bir tikel önermenin bir yorumlamada *doğru* olması, *A(x)* açık önermesinin verilen yorumlamada gerçeklenebilir olması demektir.

Buna göre $\exists xA(x)$'in bir yorumlamada doğru olması A(x)'in en az bir özellemesinin o yorumlamada doğru olması demektir.

Örneğin

(4) $\exists x(Fx \wedge Gx)$

in

(5) (E: {a, b}; Fb, Ga, Gb)

yorumlamasında doğruluk değerini bulalım. (4)'ün *E* evrenindeki özellemeleri

(6) $Fa \wedge Ga$

ile

(7) $Fb \wedge Gb$

dir. Bu özellemelerin doğruluk değeri hesaplamaları şöyledir.

(8)
$$\begin{array}{cc} Fa \wedge Ga & Fb \wedge Gb \\ Y \wedge D & D \wedge D \\ Y & D \end{array}$$

özellemelerinden biri doğru olduğundan (4) tikel önermesi (5) yorumlamasında doğrudur.

İkinci bir örnek olarak

(9) $\exists x(p \wedge Fxa)$

(10) (E: {a, b}; Faa, Fbb)

yorumlamasında doğruluk değerini bulalım. (9)'un özellemeleri

(11) $p \wedge Faa$

(12) $p \wedge Fba$

dır. Bunların doğruluk değeri hesaplamaları aşağıdadır.

(13)
$$\begin{array}{cc} p \wedge Faa & p \wedge Fbb \\ Y \wedge D & Y \wedge D \\ Y & Y \end{array}$$

Her iki özelleme yanlış olduğundan (9) yanlıştır.

Üçüncü bir örnek olarak boş niceleyici geçişli

(14) $\exists x(Fa \wedge \sim Fb)$

önermesinin

(15) (E: {a, b, c}; Fa, Fc)

yorumlamasında doğruluk değerini bulalım. (14)'ün bir tek özellemesi vardır, o da

(16) $Fa \wedge \sim Fb$

önermesidir. (16)'nın doğruluk değeri hesaplaması aşağıdadır.

(17)
$$\begin{array}{c} Fa \wedge \sim Fb \\ D \wedge D \\ D \end{array}$$

O halde (16) doğru olup (14)'de doğrudur.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki tikel önermelerin verilen yorumlamalardaki doğruluk değerini bulunuz.

1. $\exists x(q \wedge Fx)$
   (E: {a, b}; q, Fb)
2. $\exists x(Fx \wedge \sim Gx \wedge Hx)$
   (E: {a, b, c}; Fa, Gb, Hc)
3. $\exists x[p \leftrightarrow (q \wedge Fxx)]$
   (E: {b, c}; q, Fbc, Fcc, Fcb)
4. $\exists x[(Fx \wedge Gxx) \rightarrow \sim Gxx]$
   (E: {a, c}; Fa, Gac, Gca)
5. $\exists x(p \vee Gb)$
   (E: {b, c}; p, Gc)

2.2.3.3 Bileşik Genel Önermelerin Yorumlanması

Yuvalanmamış tümel önermelerle yuvalanmamış tikel önermeler atomsal basit genel önermelerdir.

Aralarında en az biri yuvalanmamış genel önerme olan basit önermelerin önerme eklemleriyle birleştirilmesinden oluşan önermeler *yuvalanmamış bileşik genel önermeler*'dir.

Örneğin

(1) $\sim\forall x A(x)$

biçimindeki değillenmiş tümel önermeler bileşik genel önermelerdir. (1)'in E evrenindeki bir yorumlamada doğru olması, $A(x)$'in E evrenindeki bütün özellemelerinin doğru olmaması, yani $A(x)$'in E evreninde en az bir özellemesinin yanlış olması demektir. Bu da $\sim A(x)$'in en az bir özellemesinin doğru olması anlamına gelir. O zaman da $\sim A(x)$ gerçeklenebilir bir açık önerme olup

(2) $\exists x \sim A(x)$

doğru olur. O halde herhangi bir yorumlamada (1) doğru ise (2)'de doğru olur. Dolayısıyla (1), (2)'yi içerir. Böylece

(3) $\sim\forall x A(x) \models \exists x \sim A(x)$

içermesini elde ederiz.

Öte yandan $\exists x \sim A(x)$, E evrenindeki bir yorumlamada doğru olursa, $\sim A(x)$'in E evrenindeki bir özellemesi doğru olup $A(x)$'in E evrenindeki bir özellemesi yanlış olur. O zaman da $A(x)$ evrensel-gerçeklenebilir olamaz. Dolayısıyla $\forall x A(x)$ yanlış olur. Böylece (1) doğru olur. O halde (2) doğru ise (1)'de doğru olur. Demek ki (1) ile (2) eşdeğerdir.

(4) $\sim\forall x A(x) \equiv \exists x \sim A(x)$

Bu eşdeğerliği niceleyicinin boş geçtiği durumlar için de gösterebiliriz. Nitekim A bir önerme olup "$\forall x$", $\forall x A$'da boş geçerse $\forall x A \equiv A$, $\exists x \sim A \equiv \sim A$ olur. O halde

(5) $\sim\forall x A \equiv \sim A \equiv \exists x \sim A$

elde edilir. Sözü geçen (4) veya (5) eşdeğerliğine dayanarak, değillenmiş temel önermeleri birer basit genel önermeye indirgeyebiliriz.

Örneğin (4) gereği

(4') $\sim\forall x Fx \equiv \exists x \sim Fx$

eşdeğerliğini elde ederiz. İkinci bir örnek olarak (4) gereğince

(6) $\sim\forall x(Fx \rightarrow Gx) \equiv \exists x \sim (Fx \rightarrow Gx)$

elde edilir. Oysa

(7) $\sim(Fx \rightarrow Gx) \equiv Fx \wedge \sim Gx$

Böylece (6) ile (7)'den

(8) $\sim\forall x(Fx \rightarrow Gx) \equiv \exists x(Fx \wedge \sim Gx)$

eşdeğerliği elde edilir. İmdi "$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$" önermesi geleneksel mantığın tümel olumlu (A türünden) önermesi olup, "$\exists x(Fx \wedge \sim Gx)$" tikel olumsuz (O türünden) önermesidir. (8) eşdeğerliği A'nın değillemesinin O ile eşdeğer olduğunu, bir başka deyimle, A ile O'nun çelişik önermeler olduğunu gösterir.

Öte yandan

(9) $\sim\exists xA(x)$

biçimindeki değillenmiş tikel önermeler

(10) $\forall x\sim A(x)$

ile eşdeğerdir. Nitekim (9) bir yorumlamada doğru ise A(x)'in en az bir yorumlaması bile doğru olmaz, yani A(x)'in bütün özellemeleri yanlış olur. Dolayısıyla A(x) gerçeklenemez olur. O zaman da ~A(x) evrensel-gerçeklenebilir olup $\forall x\sim A(x)$ doğru olur. Öte yandan $\forall x\sim A(x)$ bir yorumlamada doğru ise ~A(x)'in bütün özellemeleri doğru olup A(x)'in bütün özellemeleri yanlış olur. Dolayısıyla A(x)'in hiç bir özellemesi doğru olmaz. O zaman da $\exists xA(x)$ yanlış olup (9) doğru olur. O halde (9) ile (10) birbiriyle eşdeğerdir.

(11) $\sim\exists xA(x) \equiv \forall x\sim A(x)$

Boş niceleyici geçişi durumunda

(12) $\sim\exists xA \equiv \sim A \equiv \forall x\sim A$

elde edilir.

(11) eşdeğerliğine dayanarak

(13) $\sim\exists xFx \equiv \forall x\sim Fx$

ile

(14) $\sim\exists x(Fx \wedge Gx) \equiv \forall x\sim(Fx \wedge Gx)$

eşdeğerlikleri elde edilir. (14) ile

(15) $\sim(Fx \wedge Gx) \equiv \sim Fx \vee \sim Gx \equiv Fx \rightarrow \sim Gx$

den

(16) $\sim\exists x(Fx \wedge Gx) \equiv \forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$

eşdeğerliği elde edilir. Oysa geleneksel mantıktaki tikel olumlu önerme (I) $\exists x(Fx \wedge Gx)$, tümel olumsuz önerme (E) $\forall x(Fx \rightarrow \sim Gx)$ dir. (16) eşdeğerliği E ile I önermelerinin çelişik olduğunu dile getirir.

(11) eşdeğerliği gereği, değillenmiş tikel önermeler birer genel basit önermeye indirgenebilir.

Bir basit genel önermeye indirgenemeyen bir bileşik genel önermeye örnek

(17) $\forall xFxa \rightarrow Faa$

önermesidir. (17) önermesi bütün yorumlamalarda doğrudur. Dolayısıyla (17) geçerli bir önermedir.

Örneğin (17)'nin

(18) (E: {a, b, c}; Fab, Fca}

yorumlamasındaki doğruluk değerini bulalım. Bu amaçla (17)'nin her iki bileşeninin doğruluk değerini bulmalıyız. İmdi "$\forall xFx$" bileşeninin doğruluk değerini araştırmak amacıyla "Fxa"nın aşağıdaki üç özellemesinin doğruluk değerlerine bakarız.

(19) Faa: Y

(20) Fba: Y

(21) Fca: D

Buna göre "$\forall xFxa$" yanlıştır. Öte yandan "Faa" bileşeni de yanlıştır. Dolayısıyla (17) bileşik önermesi "$Y \rightarrow Y$" biçiminde olup doğrudur.

Bir yorumlamadaki E evreni herhangi bir sayıda bireyden oluşabilir. Bu sayı 1 olabildiği gibi sonsuz da olabilir. Ancak evren boş olmamalı, en az bir öğe kapsamalıdır. Örneğin

(22) $\forall xFxx \rightarrow \exists xGxx$

bileşik genel önermesinin tek öğeli evreni olan

(23) (E: {b}, Fbb)

yorumlamasında doğruluk değerini bulalım. E evreni tek öğeli olduğundan (22)'nin (23) yorumlamasında bir tek özellemesi vardır. Bu da

(24) $Fbb \rightarrow Gbb$

önermesidir. (24)'ün doğruluk değeri hesaplaması şöyledir.

(25) $Fbb \rightarrow Gbb$
$D \rightarrow Y$
Y

Buna göre (22)'nin yanlış olduğunu görüyoruz.

İleride bileşik genel önermelerin doğruluk değerini belirleyen etkin bir yöntemi göstereceğiz. Ayrıca (17) gibi geçerli olan önermeler için etkin denetleme yöntemlerini ayrıntılı olarak inceleyeceğiz.

Dikkat edilirse niceleme mantığında bir önermenin geçerli olduğu sonlu sayıda işlem adımıyla yapılamaz. Nitekim bir önermenin geçerli olması bütün yorumlamalarda doğru olması demektir. Oysa niceleme mantığında mümkün yorulmaların sayısı sonsuzdur. Çünkü yorumlamadaki evrenler herhangi sayıda öğeden, üstelik sonsuz sayıda öğeden oluşabilir. Bu durumda her yorumlamayı ele alıp verilen önermenin o yorumlamadaki doğruluk değerini saptamak imkansızdır. Denetleme yöntemleri, geçerliliği (tek tek yorumlamalara başvurmadan) belli bir takım kurallar yardımıyla sonlu sayıda adımla ortaya koyarlar.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki değillenmiş tümel ve tikel önermeleri birer basit genel önermeye indirgeyiniz.

1. $\sim\forall x(Gx \vee Hx)$
2. $\sim\forall x(Gx \leftrightarrow \sim Hx)$
3. $\sim\forall xGa$
4. $\sim\exists x(Fx \wedge Gx \wedge Hx)$
5. $\sim\exists x[(Fx \wedge \sim Gx) \vee \sim Hx]$

II. Aşağıdaki bileşik önermelerin verilen yorumlamalardaki doğruluk değerini bulunuz.

1. $\forall xFx \rightarrow \exists xFx$
   (E: {a, b}; Fa)
2. $\sim\exists xFx \rightarrow \forall xGx$
   (E: {a}; Fb, Ga)

3. $\forall xGxx \rightarrow Fb$
   (E: {a, b}; Fa, Gaa, Gbb)
4. $\sim\exists xFx \leftrightarrow \exists xGxa$
   (E: {a, b}; Fb, Gab, Gba, Gbb)
5. $(p \wedge \exists x\sim Gx) \rightarrow (q \vee \forall xFxx)$
   (E: {a, b}; p, Gb, Faa, Fba)

2.2.4. Yuvalanmış Genel Önermelerin Yorumlanması

Örnek olarak

(1) $\forall x\exists yFxy$

yuvalanmış genel önermenin

(2) (E: {a}; Faa)

yorumlamasında doğruluk değerini bulalım. İmdi (1)'in E evrenindeki tek özellemesi $\exists yFxy$ (a/x)'dir. Bu da

(3) $\exists yFay$

önermesiyle özdeştir. (1)'in doğruluk değeri ise (3)'ün tek özellemesi olan

(4) Faa

önermesinin doğruluk değerine bağlıdır. Oysa (4) önermesi (2) yorumlamasında doğru olduğundan (3) doğrudur. O zaman da (1) yuvalanmış genel önermesi de doğru olur.

Genel olarak yuvalanmış bir genel önermenin doğruluk değerini belirlemek için verilen önermenin özellemelerinin özellemelerinin özellemelerinin, vb... doğruluk değerlerini saptamak gerekir. Böylece yuvalanmış bir genel önermenin doğruluk değerinin belirlenmesi, önünde sonunda yuvalanmamış genel önermelerin doğruluk değerinin belirlenmesi işlemine indirgenebildiğini görüyoruz. (1)'in

(5) (E: {b, c}; Fbc, Fcb)

yorumlamasındaki doğruluk değerini bulalım. (1)'in E evrenindeki özellemeleri

(6) $\exists yFby$

(7) $\exists yFcy$

dir. (6)'nın E evrenindeki özellemeleri ise

(8) Fbb

(9) Fbc

dir. (7)'nin E evrenindeki özellemeleride

(10) Fcb

(11) Fcc

dir. İmdi verilen (9) yorumlamasında (8) yanlış, (9) doğru, (10) doğru ve (11) yanlıştır. Dolayısıyla (6) ile (7) tikel önermeleri doğrudur. O zaman da (1) tümel önermesi (her iki özellemesi doğru olduğundan) doğrudur.

Üçüncü bir örnek olarak

(12) $\exists x[Fx \wedge \forall yGxy] \rightarrow \sim p$

yuvalanmış bileşik genel önermesinin

(13) (E: {a, b}; p, Fb, Fab)

yorumlamasındaki doğruluk değerini bulalım. Önce birinci bileşenin özellemelerini belirtiyoruz.

(14) $Fa \wedge \forall yGay$

(15) $Fb \wedge \forall yGby$

(14)'ün ikinci bileşeninin özellemeleri

(16) Gaa

(17) Gab

(15) in ikinci bileşeninin özellemeleri de

(18) Gba

(19) Gbb

dir. İmdi (13) yorumlamasında Gaa yanlış, Gab yanlış, Gba yanlış ve Gbb yanlıştır. Dolayısıyla "∀yGay" ile "∀yGby"nin ikisi de yanlıştır. O halde (14) ve (15)'in ikisi yanlıştır. Dolayısıyla (12)'nin ilk bileşeni yanlıştır. İkinci bileşeni olan "~p" de yanlıştır. O halde (12) doğrudur.

İleride yuvalanmış genel önermelerin doğruluk değerini çok daha etkin bir yöntemle belirleyeceğiz.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki yuvalanmış genel önermelerin doğruluk değerini verilen yorumlamalardaki doğruluk değerlerini bulunuz.

1. $\exists y \forall x(Fx \wedge Gy)$
   (E: {b}; Fb)
2. $\forall x(Fx \vee \exists y Gy)$
   (E: {a}; Fa, Ga)
3. $\forall x(Fx \rightarrow \exists y Gxy)$
   (E: {a, b}; Fa, Gba, Gbb)
4. $\forall x[(p \wedge q) \rightarrow \forall y Fyx] \rightarrow q$
   (E: {b, c}; p, Faa, Fba, Fbb)
5. $\exists x Fx \leftrightarrow \sim \forall y \exists y Gxy$
   (E: {a, c}; Fb, Gbb)

2.3 Niceleme Mantığı Yasaları ve İkililik

Niceleme mantığının yasaları, özel önemi olan geçerli önermeler ile doğru eşdeğerlikler ve içermelerdir.

İkililik kavramı ve ikililik ilkeleri niceleme mantığında uygulanabilir. Böylece niceleme mantığının her yasası için, ikililik ilkeleri gereği ikinci bir yasa elde edilebilir.

Niceleme mantığında "∀" ile "∃" niceleme işaretleri birbirinin ikilisi olan mantık değişmezleridir. p, q, r, ... önerme temsilcilerinin işlevini de genel olarak atomsal önermeler üstlenir. Buna İk (A, B)'nın tanımını şöyle genelleştirebiliriz.

A niceleme mantığı diline ait içinde A_1, ..., A_n atomsal tam deyimleri geçen $A(A_1, ..., A_n)$ biçiminde bir tamdeyim olduğunda;

(1) İk (A, B) ancak ve ancak $B \equiv \sim A\ (\sim A_1, ..., A_n)$ ise özel hal olarak A yerine "$\forall xFx$"i alırsak

(2) İk ($\forall xFx$, B) ancak ve ancak $B \equiv \sim\forall x\ \sim Fx$ elde edilir. Nitekim "$\forall xFx$" tam deyiminde geçen tek atomsal tamdeyim "Fx"dir. Oysa $\sim\forall x\sim Fx$, $\exists xFx$ ile eşdeğerdir. Nitekim $\sim\forall xA(x) \equiv \exists x\sim A(x)$ olduğunu görmüştük. A(x) yerine "~Fx" koyunca $\sim\forall x\sim Fx \equiv \exists x\sim\sim Fx \equiv \exists xFx$ elde edilir.

O halde

(3) İk ($\forall xFx$, B) ancak ve ancak $B \equiv \exists xFx$ ise elde edilir.

Öte yandan A yerine "$\exists xFx$"i alırsak

(4) İk ($\exists xFx$, B) ancak ve ancak $B \equiv \sim\exists x\sim Fx$ elde edilir. Oysa $\sim\exists xA(x) \equiv \forall x\sim A(x)$ gereğince $\sim\exists x\sim Fx \equiv \forall x\sim\sim Fx \equiv \forall xFx$ olur. O halde

(5) İk ($\exists xFx$, B) ancak ve ancak $B \equiv \forall xFx$ ise.

Böylece $\forall xFx$ ile $\exists xFx$'in birbirinin ikilisi olduğunu görüyoruz. O zaman da "$\forall$" ile "$\exists$" mantık değişmezleri de (tıpkı "$\wedge$" ile "$\vee$" gibi) birbirinin ikilisi olur. Buna göre A herhangi bir tamdeyim olduğunda, A'da geçen her mantık değişmezi (yani her önerme eklemi ile her niceleme işareti) yerine ikilisi konulunca elde edilen tamdeyim A'nın bir ikilisi olur. Örneğin "$\forall xFx$"de "$\forall$" yerine "$\exists$" koymakla elde edilen "$\exists xFx$", "$\forall xFx$"in bir ikilisidir. Daha karmaşık bir örnek olarak

(6) $\forall x\exists y(\sim Fxy \wedge Gx) \vee \sim\exists x\forall yHxy$

önermesinin bir ikilisini bulalım. İk bağıntısının tanımına dayanan *1'inci yöntem* gereği (6)'nın bir ikilisi

(7) $\sim[\forall x\exists y(\sim\sim Fxy \wedge \sim Gx) \vee \sim\exists x\forall y\sim Hxy]$

veya kısaca

(8) $\sim[\forall x\exists y(Fxy \wedge \sim Gx) \vee \sim\exists x\forall y\sim Hxy]$

dir. *2'nci yöntem*'e göre, yani mantık değişmezleri yerine ikililerinin konulması yöntemine göre, (6)'nın bir ikilisi

(9) $\exists x \forall y(\sim Fxy \vee Gx) \wedge \sim \forall x \exists y Hxy)$

dir. (9)'u elde etmek için bir yandan "$\wedge$" ile "$\vee$" yi bir yandan "$\forall$" ile "$\exists$" yi değiş tokuş ettik.

İmdi ikililik ilkeleri niceleme mantığına da uygulanabilmektedir. O zaman C, A'nın ve D, B'nin bir ikilisi ise $A \equiv B$ gibi bir yasadan $C \equiv D$ yasası, $A \models B$ gibi bir yasadan $D \models C$ yasası elde edilir. Aşağıda sıraladığımız yasalar dizisi, her yasa ile birlikte bir ikilisini de kapsayabilir.

(i) Birli ve Sıfırlı Yüklemli Yasalar

a) Niceleyici Değilleme Yasaları

1. $\sim \forall x Fx \equiv \exists x \sim Fx$
2. $\sim \exists x Fx \equiv \forall x \sim Fx$
3. $\forall x Fx \equiv \sim \exists x \sim Fx$
4. $\exists x Fx \equiv \sim \forall x \sim Fx$

b) Kıyas Yasaları

1. $\forall x(Gx \rightarrow Hx), \forall x(Fx \rightarrow Gx) \models \forall x(Fx \rightarrow Hx)$
2. $\forall x(Gx \rightarrow Hx), \exists x(Fx \wedge Gx) \models \exists x(Fx \wedge Hx)$
3. $\forall x(Gx \rightarrow \sim Hx), \forall x(Fx \rightarrow Gx) \models \forall x(Fx \rightarrow \sim Hx)$
4. $\forall x(Gx \rightarrow \sim Hx), \exists x(Fx \wedge Gx) \models \exists x(Fx \wedge \sim Hx)$

c) Altıklık Yasaları

1. $\forall x Fx \models \exists x Fx$
2. $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists x Fx \models \exists x(Fx \wedge Gx)$

d) Tümel Özelleme ve Tikel Genelleme Yasaları

1. $\forall x Fx \models Fa$ (Tümel özelleme)
2. $Fa \models \exists x Fx$ (Tikel genelleme)

Dikkat edilirse $\forall xFx$'in 2'nci yönteme göre ikilisi $\exists xFx$, Fa'nın ikilisi de Fa'nın kendisidir. Böylece 1'inci yasadan 2'nci yasa elde edilir.

e) Dağıtıcılık Yasaları

1. $\forall x(Fx \wedge Gx) \equiv \forall xFx \wedge \forall xGx$("$\forall$"nın "$\wedge$" üzerine dağıtıcılığı)
2. $\exists x(Fx \vee Gx) \equiv \exists xFx \vee \exists xGx$("$\exists$" nin "$\vee$" nin üzerine dağıtıcılığı)

2'nci yöntem gereği, "$\forall x(Fx \vee Gx)$"in ikilisi "$\exists xFx \vee \exists xGx$"dir. Böylece 1'inci yasaladan 2'nci yasayı elde ederiz.

3. $(\forall xFx \vee \forall xGx) \models \forall xFx \vee \forall xGx$ ("$\forall$"nın "$\vee$" üzerine tek yönlü dağıtıcılığı)
4. $\exists x(Fx \wedge Gx) \models \exists xFx \wedge \exists xGx$ ("$\exists$"nin "$\wedge$" üzerine tek yönlü dağıtıcılığı)
5. $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \models \forall xFx \rightarrow \forall xGx$ ("$\forall$"nın "$\rightarrow$" üzerine tek yönlü dağıtıcılığı)
6. $\exists xFx \rightarrow \exists xGx \models \exists x(Fx \rightarrow Gx)$ ("$\exists$" nin "$\rightarrow$" üzerine tek yönlü dağıtıcılığı)
7. $\forall x(Fx \leftrightarrow Gx) \models (\forall xFx \leftrightarrow \forall xGx)$ ("$\forall$"nın "$\leftrightarrow$" üzerine tek yönlü dağıtıcılığı)

f) Sınırlama Yasaları

1. $\forall x(p \wedge Fx) \equiv p \wedge \forall xFx$
2. $\exists x(p \vee Fx) \equiv p \vee \exists xFx$
3. $\forall x(p \vee Fx) \equiv p \vee \forall xFx$
4. $\exists x(p \wedge Fx) \equiv p \wedge \exists xFx$
5. $\forall x(p \rightarrow Fx) \equiv p \rightarrow \forall xFx$
6. $\exists x(p \rightarrow Fx) \equiv p \rightarrow \exists xFx$
7. $\forall x(Fx \rightarrow p) \equiv \exists xFx \rightarrow p$
8. $\exists x(Fx \rightarrow p) \equiv \forall xFx \rightarrow p$
9. $\forall x(Fx \rightarrow p) \models \forall xFx \leftrightarrow p$
10. $\forall x(Fx \leftrightarrow p) \models \exists xFx \leftrightarrow p$
11. $\exists xFx \leftrightarrow p \models \exists x(Fx \leftrightarrow p)$

g) Boş Niceleyici Geçişi Yasaları

1. $\forall xp \equiv p$

2. $\exists xp \equiv p$

i) Bağlı Değişken Değiştirme Yasaları

1. $\forall xFx \equiv \forall yFy$

2. $\exists xFx \equiv \exists yFy$

ii) Çok Yüklemli Yasalar

a) Niceleyici Değilleme Yasaları

1. $\sim\forall x\forall yFxy \equiv \exists x\exists y\sim Fxy$

2. $\sim\exists x\exists yFxy \equiv \forall x\forall y\sim Fxy$

3. $\sim\forall x\exists yFxy \equiv \exists x\forall y\sim Fxy$

4. $\sim\exists x\forall yFxy \equiv \forall x\exists y\sim Fxy$

b) Yer Değiştirme Yasaları

1. $\forall x\forall yFxy \equiv \forall y\forall xFxy$

2. $\exists x\exists yFxy \equiv \exists y\exists xFxy$

3. $\exists y\forall xFxy \models \forall y\exists xFxy$

4. $\exists x\exists yFxy \equiv \exists x\exists y(Fxy \vee Fyx)$

(iii) Koşullu-geçerli Yasalar

"A_1, ..., A_n önermelerinin tümü geçerli ise B önermesi geçerlidir" biçimindeki bir yasa *koşullu-geçerli* diyoruz. Niceleme mantığının başlıca koşullu-geçerli yasaları şunlardır.

1. A(a) geçerli ise $\forall xA(x)$ geçerlidir.

2. *a* ad temsilcisi A'da geçmezse ve $A \rightarrow B(a)$ geçerli ise, $A \rightarrow \forall xB(x)$ geçerlidir.

1'inci yasaya *tümel genelleme kuralı,* 2'nci yasaya da koşullu *tümel genelleme yasası* denir.

Tümel genelleme kuralına örnek olarak, geçerli olan

$\forall yFya \rightarrow Faa$

önermesini göz önüne alalım. Bu önerme geçerli olduğundan 1. kural gereği

$\forall x(\forall yFyx \rightarrow Fxx)$

önermesi de geçerli olur.

Koşullu tümel genelleme kuralına örnek olarak, geçerli olan

$p \rightarrow (p \vee Fa)$

önermesini göz önüne alalım. Bu önerme geçerli olduğundan 2. kural gereği

$p \rightarrow \forall x(p \vee Fx)$

de geçerlidir.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki tamdeyimlerin 1'inci ve 2'nci yöntem gereği birer ikilisini bulunuz.

Verilen tamdeyimin 1'inci yöntem gereği ikilisi, tamdeyimde geçen bütün atomsal tamdeyimlerin değillemesi ve tamdeyimin kendisinin değillemesiyle elde edilir. 2'nci yöntem gereği ikili ise, tamdeyimde geçen bütün mantık değişmezlerin ikilileri ile değiş tokuş edilmesiyle elde edilir.

1. $\sim\forall xFx \vee \exists x\sim Gx$
2. $\sim(\forall xGxy \vee \sim\exists x\exists yHxy)$
3. $(Fx \wedge \forall x\forall yGyx)$
4. $\sim\forall xHxy \vee \sim\exists x\exists yGxy \vee Hxx$
5. $\forall x[p \wedge \sim\forall x\forall y(Gxy \vee Hy)]$

II. §1.2'deki yasaların her birini ikililik ilkelerinin gereği olan bir karşılığını bulunuz.

2.4 Çözümleyici Çizelge Yöntemi

Önermeler mantığında hem denetleme hem karar-verme yöntemi olan çözümleyici çizelge, niceleme mantığında denetleme yöntemi olarak kullanılmak üzere genelleştirilebilir. Bu yöntem, yuvalanmamış önermeler için karar-verme yöntemi olarak da kullanılabilir. İmdi çözümleyici çizelge yöntemini niceleme mantığına uygulamak için önermeler mantığı için kullanılan kurallara bazı yeni kurallar eklenir. Ancak bu yeni kurallar yalnızca genel önermelerin denetlenmesi için gerekli olup tekil önermelerin denetlenmesi için eski kurallar yeterlidir.

2.4.1 Tekil Önermelerin Çözümleyici Çizelgesi

Önermeler mantığında çözümleyici çizelge için ortaya koyduğumuz çözümleme kuralları niceleme mantığı dilinin tekil önermelerinin çözümlenmesi için de kullanılabilir. Örneğin

(1) $Fa \wedge \sim Gb \wedge (p \wedge \sim Fa)$

tekil önermesi tümel-evetlemenin çözümlemesi kuralı gereği

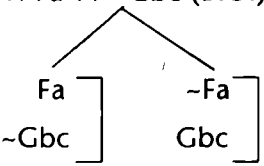
(2) 1. $Fa \wedge \sim Gb \wedge (p \wedge \sim Fa)$ (B.Ö.)
2. Fa
3. $\sim Gb$
4. $p \wedge \sim Fa$ (1)
5. p
6. $\sim Fa$ (4)

biçiminde çözümlenir.

(3) $Fa \leftrightarrow \sim Gbc$

tekil önermesi karşılıklı-koşullunun çözümleme kuralı gereği

(4) 1. $Fa \leftrightarrow \sim Gbc$ (B.Ö.)



biçiminde çözümlenir. (1), (5)'in çözümleyici çizelgesidir.

Genel olarak tekil önermelerin çözümleyici çizelgesi daha önce kullandığımız çözümleme kurallarına dayanarak kurulabilir. Örneğin (1)'in doğruluk çizelgesi

(5) 1. $Fa \wedge \sim Gb \wedge (p \wedge \sim Fa)$ (B.Ö.)

Fa
~Gb
(1)
2. $p \wedge \sim Fa$
p
~Fa
(2)
X

dır. Bu çizelge kapalı olduğundan (1) tekil önermesi tutarsız olup doğrulayıcı yorumlaması yoktur. Öte yandan (3) tekil önermesinin çözümleyici çizelgesi (4) olur. Oysa (4)'ün her iki yolu açık olup çizelgenin kendisi açıktır. Dolayısıyla (3) tutarlı olup doğrulayıcı yorumlaması vardır. Her açık yol önermeler mantığında olduğu gibi bir doğrulayıcı yorumlama belirler. (4) çözümleyici çizelgesinin birinci açık yolunun belirlediği doğrulayıcı yorumlamayı gösterelim. İmdi doğrulayıcı yorumlama (gene önermeler mantığında olduğu gibi) yoldaki "temel" önermelerce belirlenir. Niceleme mantığında:

temel önermeler, atomsal önermeler ile onların değillemeleridir.

Örneğin p, Fa, Gab, Habc, ..., ~p, ~Fa, ~Gab, ~Habc, ... temel önermelerdir. İmdi (4) çizelgesinin birinci açık yolundaki temel önermeler "Fa" ile "~Gbc" dir. Açık yolda "Fa"nın geçmesi "Fa" ya D değerinin verilmesini, "~Gbc" nin geçmesi ise "Gbc"ye Y değerinin verilmesini gerektirir. Nitekim böyle yapmakla açık yolda geçen bütün temel önermeler D değerini almış olur. Açık yolun belirlediği evren, temel önermelerde geçen adlardan oluşur. Yorumlamada sıralanmış olan atomsal önermelerin, açık yolda (değillenmemiş temel önerme olarak) geçen atomsal önermelerdir. Dolayısıyla yorumlamanın E evreni {a, b, c} yorumlamada geçen tek atomsal önerme de "Fa" olmalıdır. O halde 1'inci açık yolun belirlediği yorumlama

(6) (E: {a, b, c}; Fa)

biçimindedir.

Sınama amacıyla (3) tekil önermesinin bulunan (6) yorumlamasındaki doğruluk değerini hesaplaalım.

(7) $Fa \leftrightarrow \sim Gbc$
$D \leftrightarrow \sim Y$
$D \leftrightarrow D$
D

Görüldüğü gibi (3), gerçekten (6) yorumlamasında doğrudur. Dolayısıyla (6)'nın (3)'ün bir doğrulayıcı yorumlaması olduğu sınanmış olur.

(3) önermesinin (6) yorumlamasındaki doğruluk değerini (4) çözümleyici çizelgesine bakarak da bulabiliriz. Nitekim (4)'ün başlangıç önermesinin verilen yorumlamada doğru olmasının gerekli ve yeterli koşulu en az bir açık yolunun doğru olması, yani o açık yoldaki bütün temel önermelerin doğru olmasıdır. İmdi (4) çizelgesinin birinci açık yolundaki temel önermeler "Fa" ile "~Gbc" dır. Oysa (6) yorumlaması gereği "Fa" D değerini "Gbc" Y değerini alır. Dolayısıyla hem "Fa" hem "~Gbc" doğru olup (4) çizelgesinin başlangıç önermesi olan (3) tekil önermesi doğrudur.

Başka örnek olarak

(8) $[(Fa \rightarrow Fb) \wedge Fa) \rightarrow Fb$

tekil önermesinin geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim. Bu amaçla başlangıç önermesi (8)'in değillemesi olan aşağıdaki çözümleyici çizelgeyi kurarız.

(9) 1. $\sim[[(Fa \rightarrow Fb) \wedge Fa] \rightarrow Fb]$ (B.Ö.)
2. $(Fa \rightarrow Fb) \wedge Fa$ (1)
$\sim Fb$
3. $Fa \rightarrow Fb$ (2)
Fa

$\sim Fa$	Fb
X	X

(9) çözümleyici çizelgesi kapalı olduğundan (8) önermesi geçerlidir.

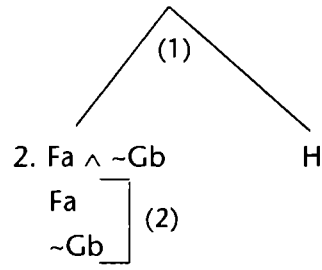
Böylece çözümleyici çizelgeye dayanarak herhangi bir tekil önermenin (i) verilen bir yorumlamada doğruluk değerini buluruz. (ii) çizelgesinin sonlu açık yolu varsa bir doğrulayıcı yorumlamasını buluruz ve (iii) çizelge kapalı ise tutarsız olup olmadığını denetleriz.

Son olarak

(10) $(Fa \wedge \sim Gb) \vee Hc$

nin çözümleyici çizelgesini kurup (8)'in bir doğrulayıcı yorumlamasını (varsa) bulalım.

(11) 1. $(Fa \wedge \sim Gb) \vee Hc$



(11)'in iki açık yolu olduğundan, (10)'un doğrulayıcı yorumlaması vardır. Birinci açık yolun belirlediği doğrulayıcı yorumlamanın evreni {a, b}'dir. "Fa" atomsal önermesi de yorumlamada yer almalıdır. Buna karşılık "Gb" yorumlamada yer almamalıdır; nitekim "Gb"ye Y değerini vermeliyiz. Buna karşılık "H" yüklemi birinci açık yolda bulunmadığından (10) önermesinde geçen "Hc" atomsal önermesine istediğimiz doğruluk değerini verebiliriz. Yorumlamanın mümkün olduğu kadar kısa olmasını sağlamak için "Hc"ye Y değerini vereceğiz. Dolayısıyla da "Hc" yorumlamada yer almayacaktır. Genel olarak açık yolda bulunmayan atomsal önermelere hep Y değerini vereceğiz.

2.4.2 Yuvalanmamış Genel Önermelerin Çözümleyici Çizelgesi

2.4.2.1 Tümel Önermelerin Çözümleyici Çizelgesi

$\forall xA(x)$ yuvalanmamış bir tümel önerme olduğunda,

(1) $\forall xA(x) \models A(a)$

içermesi doğru,

(2) $\forall xA(x) \therefore A(a)$

biçimindeki çıkarımlar da geçerlidir. (1) içermesine tümel özelleme yasası denir. (2) biçimindeki çıkarımların geçerliliği $\forall xA(x)$'ın doğru olmasının tanımına dayanır. Gerçekten $\forall xA(x)$'in doğru olması, A(x)'in bütün özellemelerinin doğru olması demektir. Dolayısıyla $\forall xA(x)$ doğru ise, A(x)'in özellemesi olan A(a) önermesi de doğru olur. Dolayısıyla (2)'nin geçersiz kılıcı kümesi olan

(3) $\{\forall xA(x), \sim A(a)\}$

kümesinin doğrulayıcı yorumlaması olamaz. Nitekim ya $\forall xA(x)$ yanlıştır, ya da $\forall x$ A(x) doğru olup bu kez $\sim A(a)$ yanlıştır.

Sözü geçen (2) çıkarımının geçerliliği, *tümel özelleme kuralı* dediğimiz ve

(4) 1. $\forall xA(x)$

A(a) (1)

biçiminde dile getirdiğimiz çözümleme kuralını haklı gösterir.

Tümel özelleme kuralı, öbür çözümleme kurallarından farklı olarak tekrar tekrar kullanılabilir. Nitekim $\forall xA(x)$'den tümel özelleme kuralı gereği A(a) elde edildikten sonra, gerekirse A(b), A(c) vb, ... de elde edilebilir.

İmdi önermeler mantığındaki çözümleyici çizelgenin çözümleme kurallarına (4) tümelin özellemesi kuralını katarak tümel önermelerin çözümleyici çizelgesini kurabiliriz. Örneğin

(5) $\forall x(Fx \rightarrow Gax)$

in çözümleyici çizelgesini kuralım ve varsa bir doğrulayıcı yorumlamasını bulalım.

(6) 1. $\forall x(Fx \rightarrow Gax)$ (B.Ö.)

2. $Fa \rightarrow Gaa$ (1)

(2)

$\sim Fa$ $\quad$ Gaa

(6) çözümleyici çizelgesi açık olduğundan (1)'in doğrulayıcı yorumlaması olup (6)'nın başlangıç önermesi olan (5) tümel önermesi tutarlıdır. Birinci açık yolun belirlediği doğrulayıcı yorumlama şöyle saptanır. Bu açık yolda geçen tek temel önerme "~Fa" dır. Doğrulayıcı yorumlamanın *E* evreni açık yoldaki temel önermelerde geçen adlardır. O halde *E* evreni {a} kümesiyle özdeştir. Öte yandan yorumlamada geçen atomsal önermeler açık yolda geçen atomsal önermelerden (yani değillenmemiş temel önermelerden) oluşur. Oysa birinci açık yolda hiçbir atomsal önerme geçmiyor. Öte yandan bu açık yolda "G" yüklemi hiç geçmediğinden "Gaa"ya istenilen doğruluk değeri verilebilir. Yorumlamanın mümkün olduğu kadar kısa olmasını sağlamak için (§2.4.1'de yaptığımız gibi) "Gaa"ya Y değerini vereceğiz. Dolayısıyla "Gaa"ya yorumlamada hiç yer vermeyeceğiz. Öte yandan açık yolda "~Fa" geçtiğinden "Fa"ya Y değerini vermek zorundayız. Dolayısıyla yorumlamada ne "Fa" ne de "Ga" yer alacaktır. Böylece birinci açık yolun belirlediği doğrulayıcı yorumlama

(7) (E: {a})

biçimindedir.

İkinci bir örnek olarak

(8) $\{\forall x{\sim}Fxx, \forall x(Gx \rightarrow Fxx)\}$

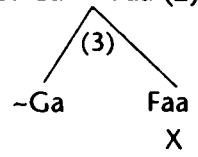
önerme kümesinin çözümleyici çizelgesini kuralım ve varsa bir doğrulayıcı yorumlamasını bulalım.

(9) 1. $\forall x{\sim}Fxx$ (B.Ö.)

2. $\forall x(Gx \rightarrow Fxx)$ (B.Ö.)

~Faa (1)

3. $Ga \rightarrow Faa$ (2)



(6) çizelgesinin bir açık yolu olduğundan (5) kümesinin doğrulayıcı yorumlaması olup (5) kümesi tutarlıdır. Doğrulayıcı yorumlama ise

(10) (E: {a})

biçimindedir.

Üçüncü örnek olarak

(11) $\forall x[Fx \rightarrow (Fx \vee Gxa)]$

tümel önermesinin tutarsız olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(12) 1. $\forall x\sim[Fx \rightarrow (Fx \vee Gxa)]$ (B.Ö.)

2. $\sim[Fa \rightarrow (Fa \vee Gaa)]$

Fa

3. $\sim(Fa \vee Gaa)$ (2)

$\sim Fa$

$\sim Gaa$ (3)

X

(9) çözümleyici çizelgesi kapalı olduğundan (8) tutarsızdır.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki tümel önermelerin ve tümel önerme kümelerinin çözümleyici çizelgesini kurunuz ve varsa birer doğrulayıcı yorumlamayı bulunuz.

1. $\forall x[(Fx \wedge Gx) \rightarrow Hx]$
2. $\forall x[(Fx \vee Ga) \wedge Hx]$
3. $\forall x\sim[(Fx \vee Gx) \wedge Ha]$
4. $\{\forall x(Fx \wedge Gx), \forall x(\sim Fx \vee \sim Gx)\}$
5. $\{\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x(Gx \rightarrow Hx), \forall x(Fx \wedge \sim Hx)\}$

2.4.2.2 Tikel Önermelerin Çözümleyici Çizelgesi

$\exists xA(x)$ biçimindeki tikel önermelerin çözümleyici çizelgesi, $\exists xA(x)$'in doğrulayıcı yorumlamasını saptayacaktır. Öte yandan $\exists xA(x)$'in doğru olması için A(x)'in A(a) gibi bir özellemesi doğru olmalıdır. Dikkat edilirse,

(1) $\exists xA(x) \therefore A(a)$

çıkarımı geçersizdir. Dolayısıyla $\exists xA(x)$ den herhangi bir *a* adı için A(a) özellemesini elde edemeyiz. Ancak a *yeni* bir ad ise, yani *a* $\exists xA(x)$'in ait olduğu yolda hiç bulunmuyorsa, o zaman *a* adı A(x) açık önermesini gerçekleyen bireyin adı olarak seçilebilir. Bu durumda $\exists xA(x)$'den A(a) elde edilebilir. Buna göre *tikel özelleme kuralı* dediğimiz çözümleme kuralını şöyle dile getiriyoruz.

(2) 1. $\forall xA(x)$

A(a) (1)

a yeni olmalı, yani aynı yolda daha önce geçmemelidir.

Örnek olarak (2) çözümleme kuralına dayanarak

(3) $\exists x(Fa \wedge \sim Fx)$

tikel önermesinin çözümleyici çizelgesini kuralım.

(4) 1. $\exists x(Fa \wedge \sim Fx)$ (B.Ö.)

2. $Fa \wedge \sim Fb$

Fa
$\sim Fb$ (2)

çözümleyici çizelgesi elde edilir. Dikkat edilirse 1. adımda "b" yerine "a" adını kullansaydık, (4) çizelgesi yerine

(5) 1. $\exists x(Fa \wedge \sim Fx)$ (B.Ö.)

2. $Fa \wedge \sim Fa$

3. Fa

4. $\sim Fa$

X

çözümleyici çizelgesini elde ederdik. Oysa (4) çizelgesinin açık olmasına karşın (5) kapalıdır. Gerçekte (3) tutarlı olup doğrulayıcı yorumlaması vardır. Oysa (5) çizelgesine dayanarak (3)'ün tutarsız olduğu sanılabilir. Demek ki (5) çizelgesi yasaya aykırıdır. (3)'ün asıl çözümleyici çizelgesi, açık olan (4) çizelgesidir. (4) çizelgesinde 1. adımda, (2) tikelin özellemesi kuralındaki kısıtlayıcı koşul uygulanmıştır. Tikel özellemede yol üzerinde daha önce geçen *a* adı değil, yeni olan *b* adı kullanılmıştır.

İmdi (4) çözümleyici çizelgesinin açık olan yoluna dayanarak (3)'ün bir doğrulayıcı yorumlamasını bulalım. Yolda bulunan temel önermeler "Fa" ile "~Fb" dir. Buna göre bu açık yolun belirlediği yorumlama

(6) (E: {a, b}; Fa)

dır.

(6) yorumlamasının (3) tikel önermesinin doğrulayıcı yorumlaması olduğunu sınayabiliriz. Bu amaçla

(7) $Fa \wedge \sim Fx$

in {a, b} biçimindeki E evreninde özellemeleri olan

(8) $Fa \wedge \sim Fa$

(9) $Fa \wedge \sim Fb$

önermelerine bakarız. İmdi (6) yorumlamasında (8) yanlış ama (9) doğrudur. Dolayısıyla (9)'un (7)'nin bir doğru özellemesi olduğunu görüyoruz. O halde (3) tikel önermesi, (6) yorumlamasında doğru olup (6), (3)'ün bir doğrulayıcı yorumlaması olur.

İkinci bir örnek olarak

(10) $\{\exists x(Fx \wedge \sim Gx), \exists x(Gx \wedge \sim Hx)\}$

önerme kümesinin çözümleyici çizelgesini kuralım.

(11) 1. $\exists x(Fx \wedge \sim Gx)$ (B.Ö.)

2. $\exists x(Gx \wedge \sim Hx)$ (B.Ö.)

3. $Fa \wedge \sim Ga$ (1)

4. Gb ∧ ~Hb (2)

Fa
~Ga (3)

Gb
~Hb (4)

1. adımda birinci tikel önermeye tikel özelleme kuralını *a* adıyla uyguladık. 2. adımda ise ikinci tikel önermeye tikel özelleme kuralını yeni ad olarak *b* adıyla uyguladık (11) çözümleyici çizelgesinde açık yol olduğundan, (10) kümesinin doğrulayıcı yorumlaması olup (10) kümesi tutarlıdır. Doğrulayıcı yorumlama ise

(12) (E: {a, b}; Fa, Gb)

dır. (12) açık yoluna dayanarak elde edebileceğimiz en kısa yorumlama (12)'dir. Açık yola bakarak "Fa" ile "Gb"ye D değerinin, "Ga" ile "Hb"ye de Y değerinin verilmesi gerektiğini anlıyoruz. Ancak açık yolda hiç geçmeyen "Fb", "Ha" önermelerine istediğmiz doğruluk değerlerini verebiliriz. Yorumlamanın kısalığını sağlamak amacıyla bu sonuncu atomsal önermelere Y değerini verip (12)'de yer almamalarını sağlıyoruz.

Sonuncu örnek olarak

(13) $\exists x\sim[Fx \rightarrow (Gx \rightarrow Fx)]$

tikel önermesinin çözümleyici çizelgesini kuralım.

(14) 1. $\exists x\sim[Fx \rightarrow (Gx \rightarrow Fx)]$ (B.Ö.)
2. $\sim[Fa \rightarrow (Ga \rightarrow Fa)]$ (1)
3. Fa
   $\sim(Ga \rightarrow Fa)$ (2)
   Ga
   $\sim Fa$ (3)
   X

(14) çözümleyici çizelgesi kapalı olduğundan, (13)'ün doğrulayıcı yorumlaması yoktur. Dolayısıyla (13) tutarsızdır.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki tikel önermeler ve tikel önerme kümelerinin çözümleyici çizelgesini kurunuz ve varsa birer doğrulayıcı yorumlamasını bulunuz.

1. $\exists x(Gx \vee Hx)$
2. $\exists x(Gax \vee Hxx)$
3. $\exists x[(p \rightarrow gx) \wedge Fx)$
4. $\{\exists x(Fx \wedge Gx), \exists x(Fx \rightarrow Gx)\}$
5. $\{\exists x(Fx \vee Gx), \exists x(\sim Fx \wedge \sim Gx)\}$

2.4.2.3 Bileşik Genel Önermelerin Çözümleyici Çizelgesi

Değillenmiş tümel ve değillenmiş tikel önermeleri çözümlemek için önce basit önerme biçimine indirgeriz. Nitekim

(1) $\sim\forall xA \therefore \exists x\sim A$

ile

(2) $\sim\exists xA \therefore \forall x\sim B$

çıkarımları daha önce gördüğümüz gibi geçerlidir. Bu geçerli çıkarımlara göre *niceleme değilleme kuralları* denilen aşağıdaki çözümleme kurallarını kullanacağız.

(3) 1. $\sim\forall xA$

$\exists x\sim A$ (1)

(4) 1. $\sim\exists xA$

$\forall x\sim A$

Örnek olarak

(5) $\sim\forall x(Fx \vee \sim Fx)$

değillenmiş tümel önermesinin çözümleyici çizelgesini kuralım.

(6) 1. $\sim\forall x(Fx \vee \sim Fx)$ (B.Ö.)

2. $\exists x\sim(Fx \vee \sim Fx)$ (1)

3. $\sim(Fa \vee \sim Fa)$ (2)

$\sim Fa$
Fa (3)
X

1. adımda niceleme değilleme kuralını uygulayarak değillenmiş tümel önermeyi basit bir önermeye indirgedik. Çözümleyici çizelge kapalı olduğundan (5) önermesi tutarsızdır.

(7) $\forall xFx \rightarrow \exists xFx$

önermesinin değillemesinin çözümleyici çizelgesini kurup (7)'nin geçerli olduğunu denetleyelim.

(8) 1. $\sim(\forall xFx \rightarrow \exists xFx)$ (B.Ö.)

3. $\forall xFx$
2. $\sim\exists xFx$ (1)

4. $\forall x\sim Fx$ (2)

Fa (3)

$\sim Fa$ (4)

X

çözümleyici çizelge kapalı olduğundan (7) önermesi geçerlidir.

Dikkat edilirse (8) çizelgesini kurarken 2. adımda "$\forall xFx$"i değil, daha sonra gelen "$\sim\exists xFx$"i çözümledik. Genel olarak niceleme değilleme kuralının bütün öteki kurallara göre önceliği vardır.

Tümel özelleme kuralı ile tikel özelleme kuralının birlikte uygulandığı bir örnek olarak

(9) $\{\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists x(Fx \wedge \sim Gx)\}$

önerme kümesinin çözümleyici çizelgesini kuralım ve varsa doğrulayıcı yorumlamasını bulalım.

(10) 3. $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$ (B.Ö.)

1. $\exists x(Fx \wedge \sim Gx)$ (B.Ö.)

2. $Fa \wedge \sim Ga$ (1)

Fa
$\sim Ga$ (2)

4. $Fa \rightarrow Ga$ (3)

(4)

$\sim Fa$ Ga

X X

Dikkat edilirse (10) çözümleyici çizelgesindeki birinci sırada yer alan tümel önermeyi ancak 3. adımda çözümledik. Buna karşılık ikinci sıradaki tikel önermeyi 1. adımda çözümledik. Genel olarak tümel özelleme kuralı en sonda başka hiçbir çözümleme kuralı uygulanamadığı zaman kullanılmalıdır. Buna karşılık tikel özelleme kuralının önceliği vardır; tümel özelleme kuralı, çatal açma kurallarından önce kullanılmalıdır. Eğer çözümleme kurallarını çizelgenin satırlarına sırasıyla uygulasaydık aşağıdaki çizelgeyi elde ederdik.

(11) 5, 1. $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$ (B.Ö.)

2. $\exists x(Fx \wedge \sim Gx)$ (B.Ö.)

4. $Fa \rightarrow Ga$ (1)

3. $Fb \wedge \sim Gb$ (2)

Fb
$\sim Gb$ (3)

(4)

$\sim Fa$ Ga

6. $Fb \rightarrow Gb$ 7. $Fb \rightarrow Gb$

(6) (7)

$\sim Fb$ Gb $\sim Fb$ Gb

X X X X

Oysa (11) çözümleyici çizelgesi (10)'dan çok daha uzun ve karmaşıktır.

Şimdi (10) çözümleyici çizelgesine dönelim. Bu çizelge kapalı olduğundan, (9) kümesinin doğrulayıcı yorumlaması olmayıp bu küme tutarsızdır.

Niceleme mantığında çözümleyici çizelge için gerekli olan bütün çözümleme kurallarını görmüş bulunuyoruz. Bu nedenle aşağıda çözümleme kurallarını öncelik sırasına göre sıralayacağız. Tümel-evetlemenin, tikel-evetlemenin değillemesinin ve koşulun değillemesinin çözümleme kurallarına *alt alta çözümleme kuralları*, tikel-evetlemenin, tümel-evetleminin değillemesinin, koşulun, karşılıklı-koşulun ve karşılıklı-koşullunun değillemesinin çözümleme kurallarına *çatal-açma çözümleme kuralları* diyoruz.

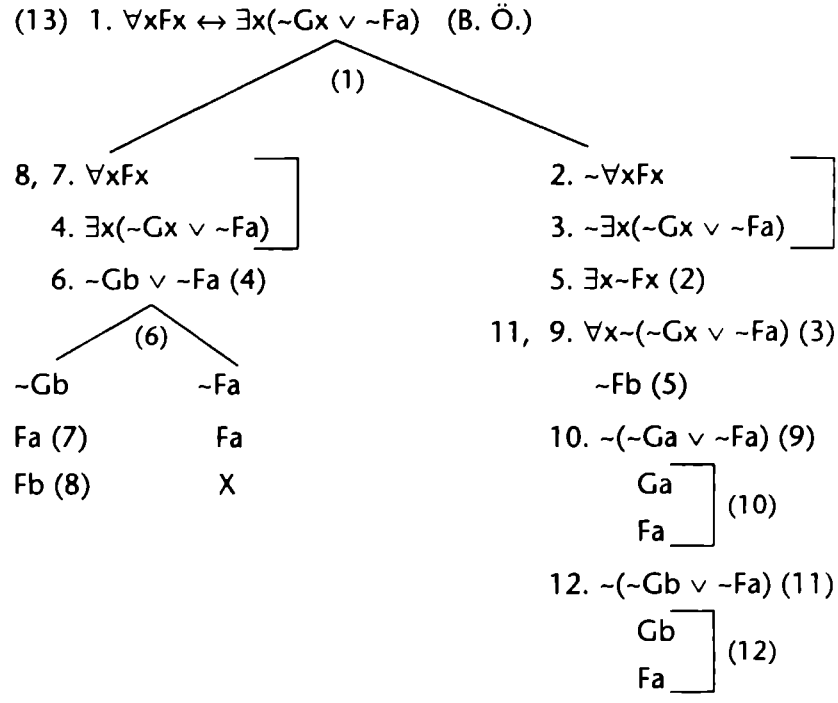
1. Niceleme değilleme kuralları (1'inci öncelik)
2. Alt-alta çözümleme kuralları
3. Tikel-özelleme kuralı
4. Çatal-açma çözümleme kuralları
5. Tümel-özelleme kuralı

Bundan böyle çözümleyici çizelgeleri hep bu öncelikler sırasına uyarak kuracağız.

Üçüncü örnek olarak

(12) $\forall xFx \leftrightarrow \exists x(\sim Gx \wedge \sim Fa)$

nın çözümleyici çizelgesini kuralım ve varsa doğrulayıcı yorumlamasını bulalım.



Dikkat edilirse (13) çizelgesini kurarken gerek sağ yolda gerek sol yolda tümel-evetleme kuralını aynı tümel önermeye iki kez uyguladık. Genel olarak:

> Çözümleyici çizelge ile doğrulayıcı yorumlama aramak için tümel özelleme kuralı tümel önermeye, aynı yolda daha önce bulunan her ad için ayrı ayrı uygulanmalıdır.

Sözü geçen (13) çözümleyici çizelgesi açık olduğundan (12) önermesinin doğrulayıcı yorumlaması vardır. Dolayısıyla (12) tutarlıdır. 1'inci açık yolun belirlediği doğrulayıcı yorumlama

(14) (E: {a, b}; Fa, Fb)

dir. İkinci açık yolun belirlediği doğrulayıcı yorumlama ise

(15) (E: {a, b}; Fa, Ga, Gb)

dir.

2.4.2.4 Çözümleyici Çizelge ile Doğruluk Değerinin Hesaplanması

Çözümleyici çizelgeyi bir önermenin verilen bir yorumlamadaki doğruluk değerini hesaplamak için kullanabiliriz. Nitekim daha önce belirttiğimiz gibi:

1. Önermenin çözümleyici çizelgesi kapalı ise önerme yanlıştır.
2. Önermenin çözümleyici çizelgesinde sonlu bir açık yol (yani sonlu sayıda önermeden oluşan bir açık yol) varsa, eğer yoldaki bütün temel önermeler verilen yorumlamada doğru ise önerme doğrudur.
3. Önermenin her açık yolunda en az bir temel önerme verilen yorumlamada yanlış ise önerme yanlıştır.

İşte bu üç kurala dayanarak önermenin doğruluk değerini hesaplayabiliriz. Doğruluk değerini hesaplayacak nitelikteki çözümleyici çizelgenin tümel-özelleme ile tikel-özelleme kuralları verilen yorumlamanın evrenine bağlıdır. Genel olarak yorumlamanın E evreni

(1) $E = \{a_1, ..., a_n\}$

biçimindeki bir sonlu evren ise, o zaman verilen evrene dayanan tümel-özelleme ile tikel-özelleme kuralları aşağıdaki biçimlerde olur.

$\{a_1, ..., a_n\}$ evreninde tümel-özelleme kuralı

(2) 1. $\forall xA(x)$

$A(a_1)$
$\vdots$
$A(a_n)$ — (1)

$\{a_1, ..., a_n\}$ evreninde tikel-özelleme kuralı

(3) 1. $\exists xA(x)$



Burada (3) tikel-özelleme kuralının önceliği olup tümel-özelleme kuralından önce uygulanmalıdır. Bunun nedeni (2)'nin alt-alta çözümleme kuralı, (3)'ün ise çatal-açma kuralı niteliğinde olmasıdır. Dikkat edilirse (2) ile (3), n = 1 sınır durumunda, E = {a} olduğundan, sırasıyla

(2′) 1. $\forall xA(x)$

$A(a)$ (1)

ve

(3′) 1. $\forall xA(x)$

$A(a)$ (1)

biçimlerini alır.

Örnek olarak

(4) $\forall x(Fx \wedge \sim Gx) \wedge p \wedge \exists xHx)$

önermesinin

(5) (E: {a, b}; Fa, Ga, Gb)

yorumlamasında doğruluk değerini hesaplayalım.

Bu amaçla {a, b} evreninde (2) tümel-özelleme kuralıyla (3) tikel-özelleme kuralına dayanarak aşağdaki çözümleyici çizelgeyi kurarız.

(6)

1. $\forall x(Fx \wedge \sim Gx) \wedge p \wedge \exists xHx$ (B.Ö.)
2. $\forall x(Fx \wedge \sim Gx)$
   p
5. $\exists xGx$ — (1)
3. $Fa \wedge \sim Ga$
4. $Fb \wedge \sim Gb$ — (2)
   Fa
   $\sim Ga$ — (3)
   Fb
   $\sim Gb$ — (4)

(5)

Ha Hb

Görüldüğü gibi (2) tümel-özelleme kuralını alt-alta kural niteliğinde olmasından dolayı çatal-açma kuralı olan (3) tikel özelleme kuralından önce uyguladık. İmdi (6) çizelgesinde iki açık yol vardır. Birinci yolun temel önermeleri "p", "Fa", "~Ga", "Fb", "~Gb" ve "Ha" dır. Verilen (5) yorumlamasında yalnız "Fa" doğru olup öbürleri yanlıştır. Dolayısıyla birinci yol yanlıştır. O halde ikinciye bakmak gerekir. İkinci yolun temel önermeleri ise "p", "Fa", "~Ga", "Fb", "~Gb" ve "Hb" dır. Bunlardan yalnız "Fa" doğrudur. (6) çözümleyici çizelgesinin verilen yorumlamada bütün yolları yanlış olduğundan başlangıç önermesi olan (4)'de yanlış olur.

İkinci bir örnek olarak

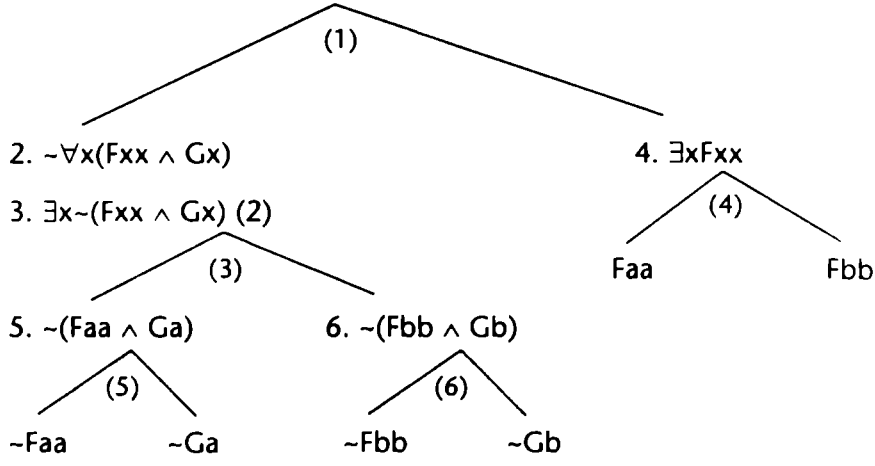
(7) $\forall x(Fxx \wedge Gx) \rightarrow \exists xFx$

önermesinin

(8) (E: {a, b}, Fa, Gb)

yorumlamasında doğruluk değerini hesaplayalım. Bu amaçla aşağıdaki çözümleyici çizelgeyi kuruyoruz.

(9) 1. $\forall x(Fxx \wedge Gx) \rightarrow \exists xFxx$ (B.Ö.)



(9) çizelgesinin altı tane açık yolu vardır. Birinci yoldaki temel önerme olan "~Faa" yanlıştır, o halde birinci yolun kendisi de yanlıştır. Ama ikinci yolun tek temel önermesi olan "~Ga" doğru olup ikinci açık yol doğrudur. Dolayısıyla (9) çizelgesinin başlangıç önermesi olan (7) önermesi (8) yorumlamasından doğrudur.

Üçüncü bir örnek olarak

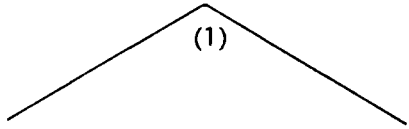
(10) $\exists xGxa \rightarrow \forall x{\sim}Gax$

önermesinin

(11) (E: {a}; Gaa)

yorumlamasında doğruluk değerini hesaplayalım.

(12) 1. $\exists xGxa \rightarrow \forall x{\sim}Gax$ (B.Ö.)



2. $\sim\exists xGxa$ 4. $\forall x{\sim}Gax$

3. $\forall x{\sim}Gxa$ (2) $\sim Gaa$ (4)

$\sim Gaa$ (3)

(12) çizelgesinin her iki yolu da yanlıştır. Nitekim her iki yoldaki tek temel önerme olan ~Gaa (11) yorumlamasında yanlıştır. O halde (10), (11)'de yanlıştır.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin verilen yorumlamalardaki doğruluk değerini çözümleyici çizelge ile hesaplayınız.

1. $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$, (E: {a}; Fa)
2. $\exists x{\sim}Gx \vee \forall xGx$, (E: {a, b}; Gb)
3. $\forall x[(Fx \wedge Gx) \rightarrow Hx]$, (E: {b, c}; Fa, Hb)
4. $\exists x(p \wedge Fx) \wedge \forall x(Gx \wedge {\sim}Fx)$, (E: {a, c}; P, Gc)
5. $\forall x(Fxx \vee Ga) \wedge \exists x(Hxa \wedge Fbx)$, (E: {a, b}; Faa, Gb, Hba)

2.2.3 Çözümleyici Çizelge ile Geçerlilik Denetlemesi

2.2.3.1 Yuvalanmamış Genel Önermelerin Geçerlilik Denetlemesi

Verilen bir önermenin geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetlemek için bu önermenin değillemesinin çözümleyici çizelgesini kurar ve elde edilen çizelgenin kapalı olduğuna bakarız. Öte yandan verilen bir çıkarımın

geçerli olduğunu denetlemek için başlangıç önermeleri çıkarımın öncüllerinden ve çıkarımın sonucunun değillemesinden ibaret olan çözümleyici çizelgeyi kurarız ve çizelgenin kapalı olduğuna bakarız. Önce yalnızca yuvalanmamış genel önermelerin ve bu türlü önermelerden oluşan çıkarımların geçerliliğinin denetlenmesini ele alacağız. Daha sonra yuvalanmış genel önermelere de yer vereceğiz.

Örnek olarak

(1) $(Fa \vee Gb) \rightarrow \exists x(Fx \vee Gx)$

yuvalanmamış genel önermesinin geçerliliğini çözümleyici çizelge ile denetleyelim. Bu amaçla (1)'in değillemesinin çözümleyici çizelgesini kuruyoruz.

1. $\sim[(Fa \vee Gb) \rightarrow \exists x(Fx \vee Gx)]$ (B.Ö.)

3. $Fa \vee Gb$

2. $\sim\exists x(Fx \vee Gx)$

7, 4. $\forall x\sim(Fx \vee Gx)$ (3)

Fa	Gb
5. $\sim(Fa \vee Ga)$ (4)	6. $\sim(Fa \vee Ga)$ (4)
$\sim Fa$, $\sim Ga$ (5)	$\sim Fa$, $\sim Ga$ (6)
X	8. $\sim(Fb \vee Gb)$ (7)
	$\sim Fb$, $\sim Gb$ (8)
	X

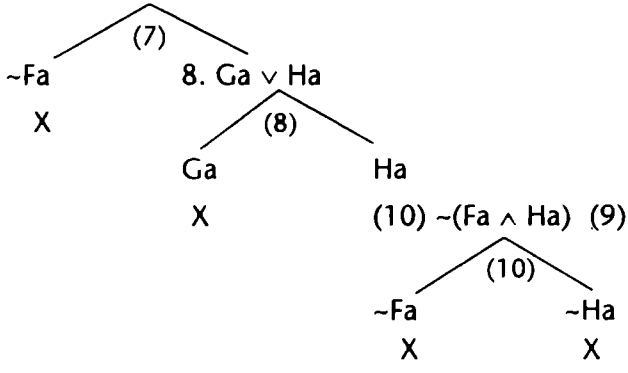
Çizelge kapalı olduğundan (1) önermesi geçerlidir. Dikkat edilirse (2) çizelgesinde geçen $\forall x\sim(Fx \vee Gx)$ tümel önermesine iki kez (4. ve 7. adımlarda) tümel özelleme kuralını uyguladık. Eğer bu tümel özellemeye 7. adımda tümel özelleme kuralı *b* adıyla ikinci kez uygulanmamış olsaydı çizelge açık kalacaktı. O zaman da verilen (1) önermesinin geçerliliği gösterilemiyecekti. Dolayısıyla bazı durumlarda tümel özelleme kuralının aynı tümel önermeye birden çok kez uygulanması kaçınılmazdı.

İkinci örnek olarak

(3) $\forall x[Fx \rightarrow (Gx \vee Hx)] \therefore \forall x(Fx \rightarrow Gx) \vee \exists x(Fx \wedge Hx)$

çıkarımının geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim. Bu amaçla başlangıç önermeleri (3)'ün öncülü ve (3)'ün sonucunun değillemesinden oluşan çözümleyici çizelgeyi kuralım.

(4) 6. $\forall x[Fx \rightarrow (Gx \vee Hx)]$ (B.Ö.)
1. $\sim[\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vee \exists x(Fx \wedge Hx)]$ (B.Ö.)
2. $\sim\forall x(Fx \rightarrow Gx)$ ⎤ (1)
3. $\sim\exists x(Fx \wedge Hx)$ ⎦
4. $\exists x\sim(Fx \rightarrow Gx)$ (2)
9. $\forall x\sim(Fx \wedge Hx)$ (3)
5. $\sim(Fa \rightarrow Ga)$ (4)
Fa ⎤ (5)
$\sim Ga$ ⎦
7. $Fa \rightarrow (Ga \vee Ha)$ (6)



(4) çizelgesi kapalı olduğundan (3) çıkarımı geçersizdir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin ve çıkarımların geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

1. $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow (\forall xFx \rightarrow \forall xGx)$
2. $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow (\exists xFx \rightarrow \exists xGx)$

3. $\forall x(Fx \wedge Gx) \leftrightarrow (\forall xFx \wedge \forall xGx)$
4. $\exists x(Fx \vee Gx) \leftrightarrow (\exists xFx \vee \exists xGx)$
5. $\forall x(p \wedge Fx) \leftrightarrow (p \wedge \forall xFx)$
6. $(\forall xFx \leftrightarrow p) \leftrightarrow \exists x(Fx \leftrightarrow p)$
7. $\forall xFx \leftrightarrow \forall yFy$
8. $\exists xFx \leftrightarrow \exists yFy$
9. $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x(Gx \rightarrow Hx) \therefore \forall x(Fx \rightarrow Hx)$
10. $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x(Fx \rightarrow Hx) \therefore \forall x[(Fx \rightarrow (Gx \wedge Hx)]$
11. $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x(Fx \wedge Hx) \therefore \forall x(Gx \wedge Hx)$
12. $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x(Fx \rightarrow \sim Gx) \therefore \sim\exists xFx$

2.4.3.2 Yuvalanmış Genel Önermelerin Geçerliliğinin Denetlenmesi

En sonda yuvalanmış (ve çoklu yüklemli) genel önermelerin ve yuvalanmış genel önermelerden oluşan çıkarımların denetlenmesini ele alıyoruz.

Örnek olarak

(1) $\forall x\forall yFxy \rightarrow \forall y\forall xFxy$

yuvalanmış genel önermenin geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim. Bu amaçla (1)'in değillemesinin çözümleyici çizelgesini kuruyoruz.

(2) 1. $\sim(\forall x\forall yFxy \rightarrow \forall y\forall xFxy)$ (B.Ö.)
6. $\forall x\forall yFxy$ ⎤ (1)
2. $\sim\forall y\forall xFxy$ ⎦
3. $\exists y\sim\forall xFxy$ (2)
4. $\exists y\exists x\sim Fxy$ (3)
5. $\exists x\sim Fxa$ (4)
$\sim Fba$ (5)
7. $\forall yFby$ (6)
Fba (7)
X

Dikkat edilirse 3. adımda "$\exists y{\sim}\forall xFxy$" önermesine niceleme değilleme kuralını uygulayarak "$\exists y\exists x{\sim}Fxy$" önermesini elde ettik. Nitekim niceleme değilleme kuralı, değilleme işaretinin en başta olmadığı durumlarda da uygulanabilmektedir. Öte yandan çizelgedeki yolu kapatabilmek için 6. adımda tümel özelleme kuralını uygularken "x" yerine "a" değil, "b" adını koyduk. Aynı biçimde 7. adımda tümel özelleme kuralını uygularken "y" yerine "a" adını koyduk. Böylece "Fba" önermesi elde edilip yol kapatabildik. (2) çizelgesi kapalı olduğundan (1) önermesi geçerlidir.

İkinci örnek olarak

(3) $\exists x\forall yFxy \rightarrow \forall y\exists xFxy$

önermesinin geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim.

(4) 1. $\sim(\exists x\forall yFxy \rightarrow \forall y\exists xFxy)$ (B.Ö.)
4. $\exists x\forall yFxy$ ⎫
2. $\sim\forall y\exists xFxy$ ⎭ (1)
3. $\exists y{\sim}\exists xFxy$ (2)
5. $\exists y\forall x{\sim}Fxy$ (3)
6. $\forall yFay$ (4)
7. $\forall x{\sim}Fxb$ (5)
Fab (6)
$\sim Fab$ (7)
X

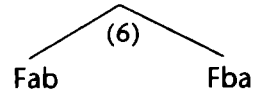
Üçüncü örnek olarak

(5) $\exists x\exists y(Fxy \vee Fyx) \rightarrow \exists x\exists yFxy$

önermesinin geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim. Bu amaçla (5)'in değillemesinin çözümleyici çizelgesini kuruyoruz.

(6) 1. $\sim[\exists x\exists y(Fxy \vee Fyx) \rightarrow \exists x\exists yFxy]$ (B.Ö.)
4. $\exists x\exists y(Fxy \vee Fyx)$ ⎫
2. $\sim\exists x\exists yFxy$ ⎭ (1)
3. $\forall x{\sim}\exists yFxy$ (2)

10, 7. $\forall x \forall y \sim Fxy$ (3)
5. $\exists y(Fay \vee Fya)$ (4)
6. $Fab \vee Fba$ (5)



8. $\forall y \sim Fay$ (7)
$\sim Fab$ (8)
X

9. $\forall y \sim Fay$ (7)
11. $\forall y \sim Fby$ (10)
$\sim Fba$ (11)
X

Dikkat edilirse açık kalan ikinci yolu kapatabilmek için 10. adımda tümel özelleme kuralını tekrar "$\forall x \forall y Fxy$" tümel önermesine uygulayıp bu kez "x" yerine "b" adını koyduk. Sonra da 11. adımda tümel özeleme kuralını uygulayıp "$\forall y \sim Fby$"ye uygulayıp "y" yerine "a" adını koyduk. Böylece açık kalan yolu kapatabildik. (6) kapalı olduğundan (5) geçerlidir.

Dördüncü örnek olarak

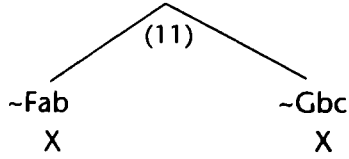
(7) $\forall x \exists y Fxy, \forall y \exists z Gyz \therefore \forall x \exists y \exists z (Fxy \wedge Gyz)$

çıkarımının geçerli olduğunu gösterelim. Bu amaçla ön-bileşenleri (7)'nin iki öncülü ile (7)'nin sonucunun değillemesinden oluşan aşağıdaki çözümleyici çizelgeyi kuruyoruz.

(8) 5. $\forall x \exists y$ Fxy (B.Ö.)
7. $\forall y \exists z Gyz$ (B.Ö.)
1. $\sim \forall x \exists y \exists z (Fxy \wedge Gyz$ (B.Ö.)
2. $\exists x \sim \exists y \exists z (Fxy \wedge Gyz)$ (1)
3. $\exists x \forall y \sim \exists z (Fxy \wedge Gyz)$ (2)
4. $\exists x \forall y \forall z \sim (Fxy \wedge Gyz)$ (3)
9. $\forall y \forall z \sim (Fay \wedge Gyz)$ (4)
6. $\exists y Fay$ (5)
Fab
8. $\exists z Gbz$ (7)
Gbc

10. ∀z~(Fab ∧ Gbz) (9)

11. ~(Fab ∧ Gbc) (10)



(8) çizelgesi kapalı olduğundan (7) önermesi geçerlidir.

Beşinci örnek olarak

(9) ∃x∃y∀z~[(Fx ∧ ~Gy) ∧ ~(Fy ∧ ~Gz)]

önermesinin geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim. Bu amaçla (9)'un değillemesinin çözümleyici çizelgesini kuralım.

(10) 1. ~∃x ∃y∀z~[(Fx ∧ ~Gy) ∧ ~(Fy ∧ ~ Gz)]

2. ∀x~∃y∀z~[(Fx ∧ ~Gy) ∧ ~(Fy ∧ ~Gz)] (1)

3. ∀x∀y~∀z~[(Fx ∧ ~Gy) ∧ ~(Fy ∧ ~Gz)] (2)

4. ∀x∀y∃z[(Fx ∧ ~Gy) ∧ ~(Fy ∧ ~Gz)] (3)

10, 5. ∀y∃z[(Fa ∧ ~Gy) ∧ ~(Fy ∧ ~Gz)] (4)

6. ∃z[(Fa ∧ ~Ga) ∧ ~(Fa ∧ ~Gz)] (5)

7. (Fa ∧ ~Ga) ∧ ~(Fa ∧ ~Gb) (6)

8. (Fa ∧ ~Ga)
9. ~(Fa ∧ ~Gb) (7)

Fa
~Ga (8)

(9)

~Fa
X

Gb

11. ∃z[(Fa ∧ ~Gb) ∧ ~(Fb ∧ ~Gz)] (10)

12. (Fa ∧ ~Gb) ∧ ~(Fb ∧ ~Gc) (11)

13. Fa ∧ ~Gb
~(Fb ∧ ~Gc) (12)

Fa
~Gb (13)
X

(10) çizelgesi kapalı olduğundan (9) önermesi geçerlidir.

Son olarak oldukça zor olan bir örneği ele alıyoruz.

(11) $\exists y \forall x[[\forall z(Fza \rightarrow Fxz) \wedge \exists v Fva] \rightarrow Fxy]$

önermesinin geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleyelim. Bu amaçla (11)'in değillemesinin çözmleyici çizelgesini kuruyoruz.

(12) 1. $\sim\exists y \forall x[[\forall z(Fza \rightarrow Fxz) \wedge \exists v Fva] \rightarrow Fxy]$ (B.Ö.)

9, 2. $\forall y \sim \forall x[[\forall z(Fza \rightarrow Fxz) \wedge \exists v Fva] \rightarrow Fxy]$ (1)

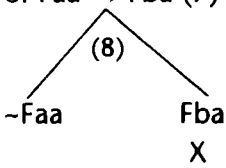
3. $\exists x \sim[[\forall z(Fza \rightarrow Fxz) \wedge \exists v Fva] \rightarrow Fxa]$ (2)

4. $\sim[[\forall z(Fza \rightarrow Fbz) \wedge \exists v Fva] \rightarrow Fba]$ (3)

5. $\forall z(Fza \rightarrow Fbz) \wedge \exists v Fva$ (4)
   $\sim Fba$

7. $\forall z(Fza \rightarrow Fbz)$ (5)
6. $\exists v Fva$
   Fca (6)

8. $Faa \rightarrow Fba$ (7)



10. $\sim\forall x[[\forall z(Fza \rightarrow Fxz) \wedge \exists v Fva] \rightarrow Fxc]$ (9)

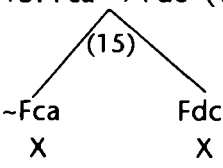
11. $\exists x \sim[[\forall z(Fza \rightarrow Fxz) \wedge \exists v Fva] \rightarrow Fxc]$ (10)

12. $\sim[[\forall z(Fza \rightarrow Fdz) \wedge \exists v Fva] \rightarrow Fdc]$ (11)

13. $\forall z(Fza \rightarrow Fdz) \wedge \exists v Fva$ (11)
    $\sim Fdc$

14. $\forall z(Fza \rightarrow Fdz)$ (13)
    $\exists v Fva$

15. $Fca \rightarrow Fdc$ (14)



(12) çözümleyici çizelgesi kapalı olduğundan (11) önermesi geçerlidir.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin ve çıkarımların geçerli olduğunu denetleyiniz.

1. $\sim\forall x\forall yFxy \leftrightarrow \exists x\exists y\sim Fxy$
2. $\sim\exists x\exists yFxy \leftrightarrow \forall x\forall y\sim Fxy$
3. $\sim\forall x\exists yFxy \leftrightarrow \exists x\ \forall y\ \sim Fxy$
4. $\sim\exists x\forall yFxy \leftrightarrow \forall x\exists y\sim Fxy$
5. $\sim\forall x\forall y\forall zFxyz \leftrightarrow \exists x\exists y\exists z\sim Fxyz$
6. $\exists x\exists yFxy \leftrightarrow \exists y\exists xFxy$
7. $\forall x\forall yFxy\ \therefore\ \forall y\forall xFyx$
8. $\sim\exists y\forall x(Fxy \leftrightarrow \sim Fxx)$
9. $\forall y\exists x(Fx \leftrightarrow \sim Fy) \leftrightarrow (\exists xFx \wedge \exists x\sim Fx)$
10. $\exists x\forall y(Fx \leftrightarrow Fy) \leftrightarrow (\sim\exists xFx \vee \forall xFx)$
11. $(\forall xFx \rightarrow \forall xGx) \leftrightarrow \exists x\forall y(Fx \rightarrow Gy)$
12. $\forall x\exists y(Fx \rightarrow Gy)\ \therefore\ \exists y\forall x(Fx \rightarrow Gy)$
13. $\exists x\forall y(Fx \rightarrow Gy)\ \therefore\ \forall x\exists y(Fx \rightarrow Gy)$
14. $\exists y\forall y(Fx \vee Gy) \leftrightarrow \forall y\exists y(Fx \vee Gy)$
15. $\exists y\forall x(Fx \wedge Gy) \leftrightarrow \forall x\exists y(Fx \vee Gy)$

2.4.3.3 Eşdeğerliklerin ve İçermelerin Denetlenmesi

(1) $A \equiv B$

biçimindeki bir eşdeğerliği çözümleyici çizelge ile denetlemek için iki yöntem vardır. 1'inci yönteme göre

(2) $A\ \therefore\ B$

ile

(3) $B\ \therefore\ A$

çıkarımlarının geçerli olduğunu birer çözümleyici çizelge ile denetleriz. 2'nci yönteme göre de

(4) $A \leftrightarrow B$

karşılıklı-koşullunun geçerliliğini çözümleyici çizelge ile denetleriz.

Öte yandan

(5) $A_1, \ldots, A_n \models B$

biçimindeki bir içermeyi çözümleyici çizelge ile denetlemek için (5)'in karşılığı olan

(6) $A_1, \ldots, A_n \therefore B$

çıkarımının geçerli olduğunu çözümleyici çizelge ile denetleriz.

Böylece eşdeğerlikler ile içermelerin denetlenmesi önerme ve çıkarımların geçerlilik denetlemesine indirgenmiş olur. Örneğin

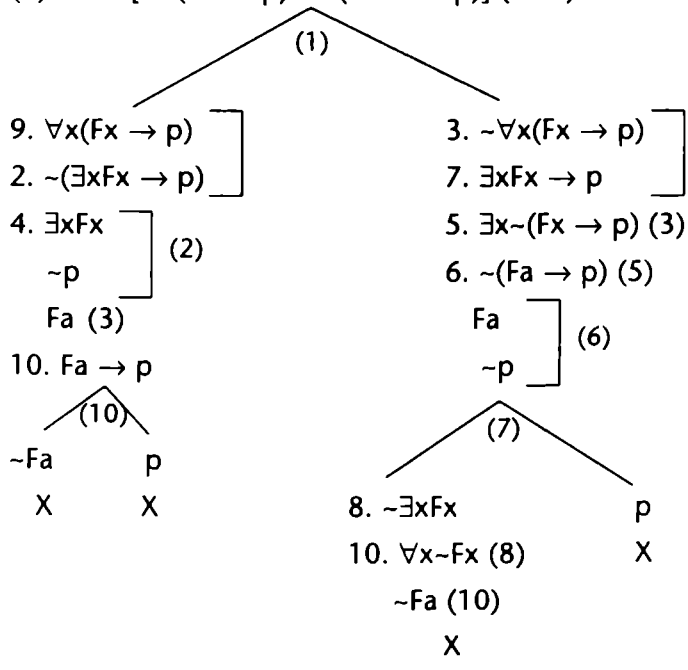
(7) $\forall x(Fx \rightarrow p) \equiv \exists xFx \rightarrow p$

eşdeğerliğini çözümleyici çizelge ile denetleyelim. Bu amaçla

(8) $\forall x(Fx \rightarrow p) \leftrightarrow (\exists xFx \rightarrow p)$

karşılıklı-koşullusunun geçerli olduğunu denetleyeceğiz. Bunun için (8)'in değillemesinin çözümleyici çizelgesini kuruyoruz.

(9) 1. $\sim[\forall x(Fx \rightarrow p) \leftrightarrow (\exists xFx \rightarrow p)]$ (B.Ö.)



(9) çizelgesi kapalı olduğundan (7) eşdeğerliği doğrudur. İçermenin denetlenmesine örnek olarak

(10) $\forall xFx, \exists xGx \models \exists x(Fx \wedge Gx)$

içermesini çözümleyici çizelge ile denetleyiniz. Bu amaçla

(11) $\forall xFx, \exists xGx \therefore \exists x(Fx \wedge Gx)$

çıkarımının geçerli olduğunu denetleyeceğiz. Bunun için de aşağıdaki çözümleyici çizelgeyi kuruyoruz.

(12) 3. $\forall xFx$ (B.Ö.)
4. $\exists xGx$ (B.Ö.)
1. $\sim\exists x(Fx \wedge Gx)$ (B.Ö.)
4. $\forall x\sim(Fx \wedge Gx)$ (1)
Ga (2)
Fa (3)
5. $\sim(Fa \wedge Ga)$ (4)

(5)

$\sim Fa$ $\sim Ga$

X X

ALIŞTIRMALAR

§1.3'deki mantık yasalarını dile getiren eşdeğerlikler ve içermeleri çözümleyici çizelge ile denetleyiniz.

2.4.3.4 Birli Yüklemli Niceleme Mantığının Karar-Verme Yöntemi

Çözümleyici çizelge yöntemi niceleme mantığının bir denetleme yöntemi olmakla birlikte, genelde bir karar-verme yöntemi değildir. Nitekim çoklu yüklemli ve yuvalanmış bazı tutarlı önermelerin çözümleyici çizelgesinin her açık yolu sonsuzdur. O zaman da doğrulayıcı yorumlamayı belirleyemeyeceğiz. Üstelik sonsuz yolun açık kalıp kalmayacağına karar vermemiz de imkânsız olur. Örneğin "$\forall x\exists yFxy$" önermesinin çözümleyici çizelgesinin tek yolu sonsuzdur.

..., 5, 3, 1. $\forall x \exists y Fxy$

2. $\exists y Fay$ (1)

Fab (2)

4. $\exists y Fby$ (3)

Fbc (4)

$\exists y Fcy$ (5)

.
.
.

Bu çizelgenin sonsuz yolunun açık kalıp kalmayacağına karar veremeyiz. (Ancak genel gidişine bakarak açık kalacağını tahmin edebiliriz.)

İçinde en az bir birli yüklem temsilcisi geçen ve hiçbir çoklu yüklem temsilcisi geçmeyen önermelere *birli önermeler* denir. Birli önermelere sınırlandırılmış niceleme mantığı dalına da *birli niceleme mantığı* denir. Birli niceleme mantığının (genel niceleme mantığının tersine) karar-verme yöntemi vardır. Şimdi çözümleyici çizelgeye dayanan bir karar-verme yöntemini gösteriyoruz. İmdi herhangi bir birli önermenin geçerli veya geçersiz, tutarlı veya tutarsız olduğunu saptayan çözümleyici çizelge şöyle kurulur. Sınanan önermede geçen farklı birli-yüklem temsilcisinin sayısı *n* olsun. O zaman çözümleyici çizelgenin kuruluşunda kullanılan tümel özelleme ile tikel-özelleme kuralları aşağıdaki biçimlerde olur.

(1) Tümel -özelleme kuralı

1. $\forall x A(x)$

$A(a_1)$
.
.
.
$A(a_2n)$ (1)

(2) Tikel-özelleme kuralı

1. $\exists x A(x)$

(1)

$A(a_1)$ $A(a_2n)$

Çizelgenin kuruluşunda alt-alta çözümleme kuralı niteliğinden olan tümel-özelleme kuralının çatal-açma çözümleme kuralı niteliğindeki tikel özelleme kuralına göre önceliği vardır.

Verilen önermenin tutarlı veya tutarsız olduğunu sınamak için önermenin kendisinin (1) ve (2) kurallarına dayanan çözümleyici çizelgesi kurulur. Çizelge açıksa önerme tutarlı, çizelge kapalı ise önerme tutarsızdır. Önerme tutarlı ise doğrulayıcı yorumlama açık yola dayanarak bulunur. Verilen önermenin geçerli veya geçersiz olduğunu sınamak için önermenin değillemesinin (1) ve (2) kurallarına dayanan çözümleyici çizelgesi kurulur. Çizelge kapalı ise verilen önerme geçerli, çizelge açık ise önerme geçersizdir. Geçersiz önermenin yanlışlayıcı yorumlaması açık yolun belirlediği yorumlamadır. Nitekim bu yorumlama önermenin değillemesinin doğrulayıcı yorumlaması olduğundan önermenin kendisinin yanlışlayıcı yorumlamasıdır.

Örnek olarak

(3) $\forall x(p \rightarrow Fx) \rightarrow (p \rightarrow \forall xFx)$

birli önermesinin geçerli olup olmadığını çözümleyici çizelge ile sınayalım veya başka bir deyimle karara bağlayalım. Önce verilen önermede geçen farklı yüklem temsilcilerinin sayısını saptamalıyız. Bu sayı 1'dir. Nitekim (3) önermesinde bir tek yüklem temsilci ("F") iki kez geçiyor. İmdi n = 1 olduğundan, $2^n = 2^1 = 2$ olur. Dolayısıyla (1) ile (2) kuralları aşağıdaki biçimlerde olurlar. (a_1 yerine *a* harfini, a_2 yerine de *b* harfini kullanıyoruz.)

(1') 1. $\forall xA(x)$

$A(a)$
$A(b)$ ⎤ (1)

(2') 1. $\exists xA(x)$

(1)
$A(a)$ $A(b)$

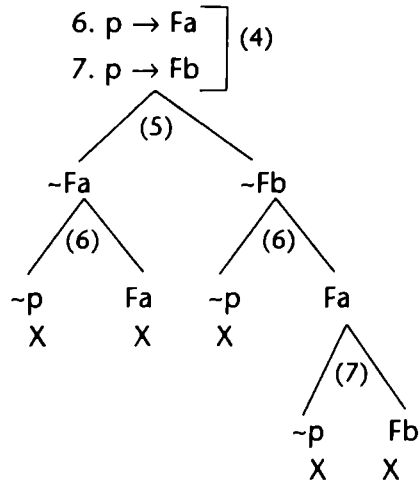
Şimdi (3) önermesinin değillemesinin çözümleyici çizelgesini (1') ile (2') kurallarına dayanarak kuralım.

(4) 1. $\sim[\forall x(p \rightarrow Fx) \rightarrow (p \rightarrow \forall xFx)]$ (B.Ö.)

4. $\forall x(p \rightarrow Fx)$ ⎤ (1)
2. $\sim(p \rightarrow \forall xFx)$ ⎦

p ⎤ (2)
3. $\sim\forall xFx$ ⎦

5. $\exists x\sim Fx$ (3)



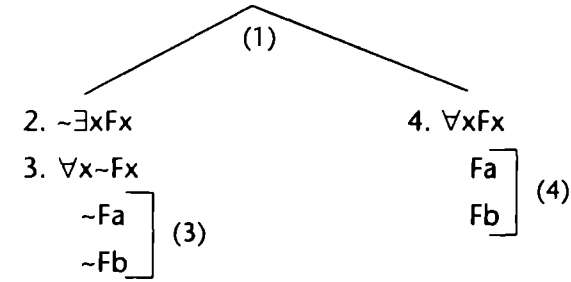
Bütün yolları kapalı olduğundan (4) çözümleyici çizelgesi kapalıdır. Dolayısıyla (3) önermesi geçerlidir.

İkinci örnek olarak

(5) $\exists xFx \rightarrow \forall xFx$

birli önermesinin tutarlı olup olmadığını çözümleyici çizelge ile karara bağlayalım. Verilen (5) önermesinde geçen birli yüklem temsilci sayısı gene 1'dir. Dolayısıyla $2^n = 2^1 = 2$ olup, (1) ile (2) kuralları (1') ile (2') biçimini alır. Buna göre (5)'in tutarlı olup olmadığını saptayan çözümleyici çizelge şöyle olur.

(6) 1. $\exists xFx \rightarrow \forall xFx$ (B.Ö.)



(6) çözümleyici çizelgesi açık olduğundan, (5) önermesi tutarlıdır. Birinci açık yolun belirlediği doğrulayıcı yorumlama

(7) (E: {a, b}),

ikinci açık yolun belirlediği doğrulayıcı yorumlama da

(8) (E: {a, b}; Fa, Fb)

dir.

Üçüncü örnek olarak

(9) $\forall xFx \rightarrow \forall xGx$

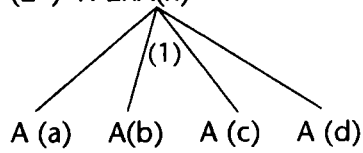
birli önermesinin geçerli olup olmadığını çözümleyici çizelge ile karara bağlayalım. (9)'da iki farklı yüklem temsilcisi ("F" ile "G") geçiyor. Dolayısıyla $2^n = 2^2 = 4$ olur. O zaman da a_1, a_2, a_3, a_4 yerine a, b, c, d harflerini kullanarak (1) ile (2) kuralları aşağıdaki biçimlerde olurlar.

(1") 1. $\forall xA(x)$

A (a)
A (b)
A (c)
A (d)

(1)

(2") 1. $\exists xA(x)$



Buna göre (9)'un değillemesinin çözümleyici çizelgesi şöyle olur.

(10) 1. $\sim(\forall xFx \rightarrow \forall xGx)$ (B.Ö.)

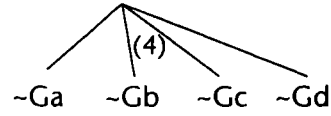
3. $\forall xFx$
2. $\sim\forall xGx$

(1)

4. $\exists x\sim Gx$ (2)

Fa
Fb
Fc
Fd

(3)



(10) çizelgesi açık olduğundan (9) önermesi geçersizdir. Her açık yol (9)'un bir doğrulayıcı yorumlamasını belirler. Birinci açık yolun belirlediği yanlışlayıcı yorumlama

(11) (E: {a, b, c, d}; Fa, Fb, Fc, Fd)

dir. (Aynı yorumlama öbür açık yollardan da elde edilebilir.)

Dördüncü örnek olarak içinde ad temsilcisi geçen

(12) $Fa \rightarrow \exists xFx$

birli önermesinin geçerli olup olmadığını çözümleyici çizelge ile karara bağlayalım. (12) önermesinde bir tek yüklem temsilcisi bulunduğundan, n = 1 olup (1) ile (2) kuralları (1') ile (2') biçimlerinde olur. Öte yandan *a* ad temsilcisi (12)'de geçtiğinden, (1') ile (2') kurallarında geçen adlardan biri *a* olmalı. Genel olarak sınanan önermede geçen ad temsilcileri (1) ile (2) kurallarındaki adlar arasında yer almalıdır. Eğer önermeden geçen ad temsilcisi sayısı 2^n'den büyükse, (1) ile (2) kuralları önermede geçen bütün ad temsilcilerini kapsayacak biçimde olur.

Şimdi (12)'nin geçerli olup olmadığını karara-bağlayan çözümleyici çizelgeyi kuralım.

(13) 1. $\sim(Fa \rightarrow \exists xFx)$
Fa
2. $\sim\exists xFx$ (1)
3. $\forall x\sim Fx$ (2)
$\sim Fa$
$\sim Fb$ (3)
X

(13) çizelgesi kapalı olduğundan (12) önermesi geçerlidir.

ALIŞTIRMALAR

I. Aşağıdaki birli önermelerin tutarlı olup olmadığını çözümleyici çizelge ile karara-bağlayınız.

1. $Fa \rightarrow \forall xFx$
2. $\exists xFx \rightarrow Fa$
3. $\exists xFx \wedge \exists x\sim Fx$
4. $\forall xFx \wedge \forall x\sim Fx$
5. $\forall xFx \rightarrow p$

6. $\forall x(Fx \vee Gx)$

7. $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$

8. $\exists x(Fx \wedge Gx)$

9. $\forall xFx \wedge \exists xGx$

10. $\forall x(Fx \wedge p) \wedge \exists xGx$

II. Aşağıdaki birli önermelerin geçerli olup olmadığını çözümleyici çizelge ile karara-bağlayınız.

1. $\forall xFx \rightarrow Fa$

2. $\forall x(Fx \wedge p) \rightarrow p$

3. $\exists x(Fx \rightarrow p) \rightarrow (\forall xFx \rightarrow p)$

4. $(\forall xFx \rightarrow p) \rightarrow \exists x(Fx \rightarrow p)$

5. $\forall x(Fx \wedge Gx) \rightarrow \exists xFx$

2.5 Türetim Yöntemi

2.5.1 Niceleme Değilleme Kuralları

Önermelerin mantığında denetleme yöntemi olarak kullandığımız türetme yöntemi, niceleme mantığına uygulanacak biçimde genelleştirilebilir. Bu amaçla yönteme bazı yeni kurallar katmamız gerekecektir. Genelleşmiş yöntemi önce yuvalanmamış genel önermeler, sonra da yuvalanmış olanlara uygulayacağız.

İlk ele alacağımız türetme kuralları (ikisini çözümleyici çizelge yönteminde de kullandığımız) *niceleyici değilleme kuralları*'dır. (ND) işaretiyle gösterdiğimiz bu kurallar aşağıdaki çıkarım kalıplarının geçerli olmasına dayanır.

(1) $\sim\forall xA \therefore \exists x\sim A$; $\quad \exists x\sim A \therefore \sim\forall xA$; $\quad \sim\exists xA \therefore \forall x\sim A$;

$\forall x\sim A \therefore \sim\exists xA$.

(ND) kuralları şöyle dile getirilir.

(1') $\dfrac{\sim\forall xA}{\exists x\sim A}$ (ND); $\dfrac{\sim\exists xA}{\forall x\sim A}$ (ND); $\dfrac{\forall x\sim A}{\sim\exists xA}$ (ND); $\dfrac{\exists x\sim A}{\sim\forall xA}$ (ND);

(ND) türetme kurallarına dayanarak bazı genel önermelerin geçerli olduğunu türetim yöntemiyle denetleyelim:

Örneğin

(1) $\sim\forall x(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow \exists x\sim(Fx \rightarrow Gx)$

önermesinin geçerli olduğunu türetimle gösterelim.

(2) 1. ~~Gös.~~ $\sim\forall x(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow \exists x\sim(Fx \rightarrow Gx)$
2. $\sim\forall x(Fx \rightarrow Gx)$ (Var.)
3. $\exists x\sim(Fx \rightarrow Gx)$ (2, ND)

(2) türetim çizelgesini koşullu türetimle kurduk. Verilen koşulunun ard bileşenini (ND) kuralı gereği elde ettik.

İkinci bir örnek olarak

(3) $\exists xFx \leftrightarrow \sim\forall x\sim Fx$

önermesinin geçerli olduğunu türetimle denetleyelim.

(4) 1. Gös. $\exists xFx \leftrightarrow \sim\forall x\sim Fx$
2. Gös. $\exists xFx \leftrightarrow \sim\forall x\sim Fx$
3. $\exists xFx$ (Var.)
4. $\sim\forall x\sim Fx$ (3, ND)
5. Gös. $\sim\forall x\sim Fx \rightarrow \exists xFx$
6. $\sim\forall x\sim Fx$ (Var.)
7. $\exists xFx$ (6, ND)
8. $\exists xFx \leftrightarrow \sim\forall x\sim Fx$ (2, 5, $\leftrightarrow$ g)

3. adımda "$\exists xFx$"den, "$\exists x\sim(\sim Fx)$" ile eşdeğer olduğuna bakarak (ND) kuralı gereği "$\sim\forall x\sim Fx$" elde ettik. Aynı biçimde 6. adımda $\sim\forall x\sim Fx$'den (ND) kuralı gereği "$\exists x\sim\sim Fx$" elde edip bu sonucu da "$\exists xFx$" biçiminde kısalttık.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin geçerli olduğunu (ND) kurallarına dayanarak türetim ile denetleyiniz.

1. $\sim\exists x(Fx \wedge \sim Gx) \rightarrow \forall x\sim(Fx \wedge Gx)$

2. $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \leftrightarrow \sim\exists x\sim(Fx \rightarrow Gx)$

3. $\exists x(Fx \wedge Gx) \leftrightarrow \sim\forall x\sim(Fx \wedge Gx)$

2.5.2 Tümel Niceleyiciden Çıkış Kuralı

Türetim yönteminde kullanacağımız ikinci türetme kuralı, gene çözümleyici çizelge yönteminde geçen *tümel-özelleme kuralı*'dır. Bu kural geçerli olan

(1) $\forall xA(x) \therefore A(a)$

çıkarım kalıbına dayanır. Türetim yönteminde bu kurala *tümel-niceleyiciden çıkış kuralı* denir. Kural, (∀ç) işaretiyle gösterilir ve

$$(1') \quad \frac{\forall xA}{A(a/x)} \ (\forall ç)$$

biçiminde dile getirilir.

Örnek olarak

(2) $\forall xFx \therefore Fa$

çıkarımının geçerli olduğunu türetim ile denetleyelim. Bu amaçla aşağıdaki türetim çizelgesini kuruyoruz.

(3) 1. ~~Gös~~ Fa

2. | $\forall xFx$ (Ön.)

3. | Fa (2, ∀ç)

Görüldüğü gibi 2. adımda (∀ç) kuralı gereği Fa sonucunu elde ettik.

İkinci örnek olarak

(4) $\sim\exists x(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow \sim(Fc \rightarrow Gc)$

önermesinin geçerli olduğunu (ND) ile (∀ç) kurallarına dayanan bir türetimle denetleyelim.

(5) 1. ~~Gös.~~ ~∃x(Fx → Gx) → ~(Fc → Gc)

2.	~∃x(Fx → Gx)	(Var.)
3.	∀x~(Fx → Gx)	(2, ND)
4.	~(Fc → Gc)	(3, ∀ç)

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin ve çıkarımların geçerli olduğunu (ND) ve (∀ç) kurallarına dayanan bir türetimle denetleyiniz.

1. ∀x(Fx ∨ ~Gx) → Fb ∨ ~Gb
2. ~∃x[(Fx ∧ Gx) →Hx] ∴ ~[(Fa ∧ Ga) → Ha]
3. ~∃x~[(Gx ↔ ~Hx) ∨ Fx] ∴ (Gc ↔ ~Hx) ∨ Fc

2.5.3 Tikel Niceleyiciye Giriş Kuralı

(1) ∀xA → A (a/x)

biçimindeki önermeler geçerlidir. Dolayısıyla

(2) ∀x~A → ~A (a/x)

de geçerlidir.

(3) p → q ≡ ~q → ~p

eşdeğerliği gereği, (2)'den

(4) A (a/x) → ~∀x~A,

dolayısıyla da

(5) A (a/x) → ∃xA

elde edilir. (5) biçimindeki önermeler geçerli olduğundan,

(6) A (a/x) ∴ ∃xA

çıkarım kalıbı geçerlidir. (6) çıkarım kalıbına türetim yönteminde *tikel niceleyiciye giriş kuralı* denir. (∃g) işaretiyle gösterilen bu kural

$$(6') \quad \frac{A\ (a/x)}{\exists xA}\ (\exists g)$$

biçiminde dile getirilir. (6)'nın anlamını örneklerle açıklıyoruz. Birinci örnek olarak A yerine "Fx" açık önermesini geçelim. O zaman

(7) F (x/a) = Fa

olur. Dolayısıyla (6),

(8) Fa ∴ ∃xFx

biçimini alır. İkinci örnek olarak *A* yerine "Fax" açık önermesini seçelim. O zaman (6),

(10) Faa ∴ ∃xFax

olur. Dördüncü örnek olarak *A* yerine Fxa açık önermesini seçelim. O zaman (6),

(11) Faa ∴ ∃xFxa

biçimini alır. En sonda *A* yerine Faa önermesini alalım. O zaman (6),

(12) Faa ∴ ∃xFxx

biçimini alır.

İmdi (∃g) türetme kuralına (ve gereğinde ND ve ∀ç kurallarına) dayanarak bazı önermelerin ve çıkarımların geçerli olduğu denetlenebilir. Örnek olarak

(13) Fa ∴ ∃xFx

çıkarımının geçerli olduğunu türetimle denetleyelim.

(14) 1. ~~Gös.~~ ∃xFx
2. | Fa (Ön.)
3. | ∃xFx (2, ∃g)

Görüldüğü gibi 2. adımda "Fa" önermesinde (∃g) kuralına dayanarak "∃xFx" önermesini elde ettik.

İkinci bir örnek olarak

(15) $\forall xFx \rightarrow \exists xFx$

önermesinin geçerli olduğunu türetimle denetleyelim.

(16) 1. ~~Gös.~~ $\forall xFx \rightarrow \exists xFx$

2.	$\forall xFx$	(Var.)
3.	Fa	(2, $\forall$ç)
4.	$\exists xFx$	(3, $\exists$g)

Üçüncü örnek olarak

(17) $\sim\exists xFx \rightarrow \sim\forall xFx$

önermesinin geçerli olduğunu türetimle denetleyelim.

(18) 1. ~~Gös.~~ $\sim\exists xFx \rightarrow \sim\forall xFx$

2.	$\sim\exists xFx$	(Var.)
3.	$\forall x\sim Fx$	(2, ND)
4.	$\sim Fa$	(3, $\forall$ç)
5.	$\exists x\sim Fx$	(4, $\exists$g)
6.	$\sim\forall xFx$	(5, ND)

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin ve çıkarımların geçerli olduğunu (ND), ($\forall$ç) ve ($\exists$g) kurallarına dayanarak türetimle denetleyiniz.

1. $Fa \vee \sim Ga \therefore \exists x(Fx \vee \sim Gx)$

2. $Fa \vee \sim Ga \therefore \exists x(Fx \vee Ga)$

Dikkat edilirse $(Fx \vee \sim Ga)\ (a/x) = Fa \vee \sim Ga$. Bu nedenle "$Fa \vee \sim Ga$"dan ($\exists$g) kuralı gereği "$\exists x(Fx \vee \sim Ga)$" elde edilir.

3. $\forall x(Fx \vee \sim Gx) \therefore \exists x(Fx \vee \sim Ga)$

4. $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \therefore \exists x(Fx \rightarrow Gx)$

5. $\sim\forall x(Fx \rightarrow Gx) \therefore \sim\exists x(Fx \rightarrow Gx)$

2.5.4 Tikel Niceleyiciden Çıkış Kuralı

Çözümleyici çizelgede kullandığımız tikel özelleme kuralı türetim yönteminde türetme kuralı olarak kullanılır. Bu kuralı şöyle dile getiriyoruz.

(1) Eğer ∃xA bir türetim çizelgesinin satırı ise ve *a* adı önceki satırlarda çerçeve dışında geçmezse, o zaman A(a/x) yeni bir satır olarak yazılabilir.

Bu kurala *tikel niceleyiciden çıkış kuralı* denir. Kuralı (∃ç) işaretiyle gösterilir ve *a* yeni olmak koşuluyla,

$$\frac{\exists xA}{A\,(a/x)}\ (\exists ç)$$

biçiminde dile getirilir.

Örnek olarak

(2) $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow (\exists xFx \rightarrow \exists xGx)$

önermesinin geçerli olduğunu (∃ç) kuralı ve öbür türetme kurallarına dayanarak türetim ile denetleyelim.

(3)

1.	~~Gös.~~ $\forall x\,(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow (\exists xFx \rightarrow \exists xGx)$	
2.	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	(Var.)
3.	~~Gös.~~ $\exists xFx \rightarrow \exists xGx$	
4.	$\exists xFx$	(Var.)
5.	Fa	(4, ∃ç)
6.	$Fa \rightarrow Ga$	(2, ∀ç)
7.	Ga	(5, 6, →ç)
8.	$\exists xGx$	(7, ∃g)

Görüldüğü gibi 4. adımda "∃xFx" önermesine (∃ç) kuralını uygulayarak "Fa" önermesini elde ettik. "a" adı önceki satırlarda geçmediği için bu işlem yasaya uygundur.

İkinci örnek olarak

(4) $\exists x(Fx \vee Gx) \therefore \sim\exists xFx \rightarrow \exists xGx$

çıkarımının geçerli olduğunu türetimle denetleyelim.

(5)	1.	~~Gös.~~ $\sim\exists xFx \rightarrow \exists xGx$	
	2.	$\sim\exists xFx$	(Var.)
	3.	$\forall x\sim Fx$	(2, ND)
	4.	$\exists x(Fx \vee Gx)$	(Ön.)
	5.	$Fa \vee Ga$	(4, $\exists$ç)
	6.	$\sim Fa$	(3, $\forall$ç)
	7.	$\sim Fa \rightarrow Ga$	(5, $\vee$ç)
	8.	Ga	(6, 7, $\rightarrow$ç)
	9.	$\exists xGx$	(8, $\exists$g)

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önerme ve çıkarımların geçerli olduğunu bir türetimle denetleyiniz.

1. $\exists x(Fx \wedge Gx) \rightarrow \exists xFx$
2. $\exists x(Fx \wedge Gx) \rightarrow (\exists xFx \wedge \exists xGx)$
3. $\exists x(Fx \vee Gx) \rightarrow (\exists xFx \vee \exists xGx)$
4. $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \exists x(Fx \wedge Hx) \therefore \exists x(Gx \leftrightarrow Hx)$

2.5.5 Tümel Niceleyiciye Giriş Türetimi

A(a), içinde *a* adı geçen bir önerme olsun. Eğer A(a) önermesi bir türetimin satırı ise ve *a* adı çerçeve içinde olmayan önceki satırlarda geçmiyorsa $\forall xA(x)$ tümel önermesi de türetilmiş olur. Buna göre aşağıdaki *tümel türetim* dediğimiz türetim biçimini tanımlıyoruz.

(1) $A_1, \ldots, A_n \therefore \forall xA(x)$

biçimindeki bir çıkarımın geçerli olduğunu göstermek için

(2) .
.
.
~~Gös.~~ $\forall xAx$

A_1	(Ön.)
.	
.	
.	
A_n	(Ön.)
.	
.	
.	
A(a)	

gibi bir türetim çizelgesi kurarız. *a* adı $\forall xA(x)$'de geçmediği gibi $\forall xA(x)$'den önce gelen satırlarda çerçevelenmemiş olarak hiç geçmemelidir.

Örnek olarak

(2) $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \therefore \forall xFx \rightarrow \forall xGx$

çıkarımının geçerli olduğunu tümel niceleyiciye giriş türetimiyle denetleyelim.

(3) 1. ~~Gös.~~ $\forall xFx \rightarrow \forall xGx$

2.	$\forall xFx$	(Var.)
3.	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	(Ön.)
4.	~~Gös.~~ $\forall xGx$	
5.	Fa	(2, $\forall$ç)
6.	$Fa \rightarrow Ga$	(3, $\forall$ç)
7.	Ga	(5, 6 $\rightarrow$ç)

İkinci bir örnek olarak

(4) $\forall x(Fx \wedge Gx) \rightarrow \forall xFx$

önermesinin geçerli olduğunu tümel niceleyiciye giriş türetimiyle denetleyelim.

(5) 1. ~~Gös.~~ $\forall x(Fx \wedge Gx) \rightarrow \forall xFx$

2.	$\forall x(Fx \wedge Gx)$	(Var.)
3.	~~Gös.~~ $\forall xFx$	
4.	$Fa \wedge Ga$	(2, $\forall$ç)
5.	Fa	(4, $\wedge$ç)

Üçüncü bir örnek olarak

(6) $\forall xFx \leftrightarrow \forall yFy$

önermesinin geçerli olduğunu tümel niceleyiciye giriş türetimiyle denetleyelim.

(7) 1. ~~Gös.~~ $\forall xFx \leftrightarrow \forall yFy$

2.	~~Gös.~~ $\forall xFx \rightarrow \forall yFy$	
3.	$\forall xFx$	(Var.)
4.	~~Gös.~~ $\forall yFy$	
5.	Fa	(3, $\forall$ç)
6.	~~Gös.~~ $\forall yFy \rightarrow \forall xFx$	
7.	$\forall yFy$	(Var.)
8.	~~Gös.~~ $\forall xFx$	
9.	Fa	(7, $\forall$ç)
10.	$\forall xFx \leftrightarrow \forall yFy$	(2, 8 $\leftrightarrow$ g)

Dördüncü örnek olarak

(8) $\forall x(p \wedge Fx) \therefore (p \wedge \forall xFx)$

çıkarımının geçerli olduğunu tümel niceleyiciye giriş türetimiyle denetleyelim.

(9)

1.	~~Gös.~~ $p \wedge \forall xFx$	
2.	$\forall x(p \wedge Fx)$	(Ön.)
3.	~~Gös.~~ $\forall xFx$	
4.	$p \wedge Fa$	(2, $\forall$ç)
5.	Fa	(4, $\wedge$ç)
6.	$p \wedge Fa$	(2, $\forall$ç)
7.	p	(6, $\wedge$ç)
8.	$p \wedge \forall xFx$	(7,3, $\wedge$ç)

Dikkat edilirse 4. adımda $\forall x(p \wedge Fx)$ tümel önermesinde ($\forall$ç) kuralı gereği $(p \wedge Fa)$ önermesi elde edilmiştir. Nitekim

(10) $(p \wedge Fx)\,(a/x) = p \wedge Fa$

dır.

Beşinci örnek olarak

(11) $\forall xFx \rightarrow \forall x(Fx \vee Gx)$

önermesinin geçerli olduğunu tümel niceleyiciye giriş türetimiyle denetleyelim.

(12)

1.	~~Gös.~~ $\forall xFx \rightarrow \forall x(Fx \vee Gx)$	
2.	$\forall xFx$	(Var.)
3.	~~Gös.~~ $\forall x(Fx \vee Gx)$	
4.	Fa	(2)
5.	~~Gös.~~ $\sim Fa \rightarrow Ga$	
6.	$\sim Fa$	(Var.)
7.	Fa	(4, Tk)
8.	$Fa \vee Ga$	(5, $\vee$g)

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin ve çıkarımların geçerli olduğunu tümel niceleyiciye giriş türetimiyle denetleyiniz.

1. $\forall x(Fx \wedge Gx) \leftrightarrow (\forall xFx \wedge \forall xGx)$
2. $\forall xFx \rightarrow \forall x(Fx \vee Gx)$
3. $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x(Gx \rightarrow Hx) \therefore \forall x(Fx \rightarrow Hx)$
4. $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x(Fx \rightarrow Hx) \therefore \forall x[Fx \rightarrow (Gx \wedge Hx)]$
5. $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \forall x(Fx \wedge Hx) \therefore \forall x(Gx \wedge Hx)$

2.5.7 Yuvalanmış Genel Önermeli Türetimler

Yuvalanmış genel önermeli türetimler için yeni kurallara gerek yoktur, yuvalanmamış genel önermeli türetimlerde kullandığımız türetme kuralları yeterlidir. Ancak tümel niceleyiciye giriş türetimini n tane tümel niceleyicili tümel önermeler durumu için genelleştireceğiz. *Genelleştirilmiş tümel niceleyiciye giriş türetimi* şöyle dile getirilir:

(1) $A_1, \ldots, A_n \therefore \forall x_1 \ldots \forall x_n A(x_1, \ldots, x_n)$

biçimindeki bir çıkarımın geçerli olduğunu göstermek için

(2)

.
.
.

~~Gös.~~ $\forall x_1, \ldots, x_n A(x_1, \ldots, x_n)$

A_1	(Ön.)
.	
.	
.	
A_n	(Ön.)
.	
.	
.	
$A(a_1, \ldots, a_n)$	

biçimindeki türetim çizelgesi kurarız. $a_1, \ldots, a_n$ adları $\forall x_1, \ldots \forall_n A(x_1, \ldots, x_n)$ önermesinde ve bu önermeden önce gelen satırlarda çerçevelenmemiş olarak hiç geçmeyen n tane farklı addır.

Örnek olarak

(3) $\forall x \forall y Fxy \rightarrow \forall y \forall x Fxy$

yuvalanmış genel önermenin geçerli olduğunu tümel niceleyiciye giriş türetimiyle denetleyelim.

(4) 1.	~~Gös.~~ $\forall x \forall y Fxy \rightarrow \forall y \forall x Fxy$	
2.	$\forall x \forall y Fxy$	(Var.)
3.	~~Gös.~~ $\forall y \forall x Fxy$	
4.	$\forall y Fay$	(2, $\forall$ç)
5.	Fab	(4, $\forall$ç)

İkinci örnek olarak

(5) $\exists x \forall y Fxy \rightarrow \forall y \exists x Fxy$

önermesinin geçerli olduğunu aynı biçimde denetleyelim.

(6) 1.	~~Gös.~~ $\exists x \forall y Fxy \rightarrow \forall y \exists x Fxy$	
2.	$\exists x \forall y Fxy$	(Var.)
3.	~~Gös.~~ $\forall y \exists x Fxy$	
4.	$\forall y Fay$	(2, $\exists$ç)
5.	Fab	(4, $\forall$ç)
6.	$\exists x Fxb$	(5, $\exists$g)

Üçüncü örnek olarak

(7) $\forall x \exists y Fxy, \forall y \exists z Gyz \therefore \forall x \exists y \exists z (Fxy \wedge Gyz)$

çıkarımının geçerli olduğu tümel niceleyiciye giriş türetimiyle denetleyelim.

(8) 1.	~~Gös.~~ $\forall x \exists y \exists z (Fxy \wedge Gyz)$	
2.	$\forall x \exists y Fxy$	(Ön.)
3.	$\forall y \exists z Gyz$	(Ön.)
4.	$\exists y Fay$	(2, $\forall$ç)
5.	Fab	(4, $\exists$ç)
6.	$\exists z Gbz$	(3, $\forall$ç)

7.	Gbc	(6, ∃ç)
8.	Fab ∧ Gbc	(5, 7, ∧ g)
9.	∃z(Fab ∧ Gbz)	(8, ∃g)
10.	∃y∃z(Fay ∧ Gyz)	(9, ∃g)

Dördüncü örnek olarak tümel niceleyiciye giriş türetimine dayanmayan bir türetimle

(9) ~∃x∀x(Fay ↔ ~Fxx)

önermesinin geçerli olduğunu denetleyelim.

(10) 1.	~~Gös.~~ ~∃y∀x(Fxy ↔ ~Fxy)	
2.	∃y∀x(Fxy ↔ ~Fxy)	(Var.)
3.	∀x(Fxa ↔ ~Fxa)	(2, ∃ç)
4.	Faa ↔ ~Faa	(3, ∀ç)
5.	Faa → ~Faa	(4, ↔ç)
6.	~Faa → Faa	(4, ↔ç)
7.	~~Gös.~~ Faa	
8.	~Faa	(Var.)
9.	Faa	(6, 8, →ç)
10.	~~Gös.~~ ~Faa	
11.	Faa	(Var.)
12.	~Faa	(5, 11, →ç)

(10) türetiminde dolaylı türetim biçimini kullandık.

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin ve çıkarımların geçerli olduğunu türetimle denetleyiniz.

1. ~∀x∀yFxy ∴ ∃y∃z~Fxy
2. ∀x∀yFxy ∴ ∀xFxx
3. ∃x∃yFxy ↔ ∃y∃xFyx
4. ∃x∃y(Fxy ∨ Fyx) ↔ ∃x∃yFxy

2.5.7 Kısaltılmış Türetimler

2.5.7.1 Eşdeğerlerin Değiş Tokuşu Kuralı

Niceleme mantığı türetimlerinde, önermeler mantığı yasası olan eşdeğerliklerinden yararlanarak türetimler kısaltılabilir. Bu amaçla kullanılan kural *eşdeğerlerin değiş tokuşu* kuralı'dır. Bu kuralı şöyle dile getiriyoruz.

(1) $A_1 \equiv A_2$

Önermeler mantığı yasası olan bir eşdeğerlik olduğunda, A_1, ile A_2'nin her önerme temsilcisinin bütün geçişleri yerine niceleme mantığına ait birer tamdeyim koyalım. Böylece A_1'den A_1^* tamdeyimi ve A_2'den A_2^* tamdeyimi elde edilir. A_1^*'a A_1'in yerine-koyma örneği, A_2^*'a A_2'nin yerine koyma örneği diyoruz. B, A_1^* ile A_2^* tamdeyimlerinden en az birini kapsayan bir önerme olup B*, B'den A_1^* ile A_2^*'nin değiş tokuşu ile elde edilen bir önerme olsun. O zaman türetimde B satırından B* satırı türetilebilir. Eşdeğerlerin değiş-tokuş kuralını (ED) işaretiyle gösteriyoruz. Eğer n'inci satırdan (ED) kuralıyla yeni bir satır elde edilirse satırın ardına gerekçe olarak

(2) (n, ED $\therefore A_1 \equiv A_2$)

yazılır. Örneğin

(3) $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

eşdeğerliğini göz önüne alalım. "p" yerine "Fx" tamdeyimini ve "q" yerine "Gx" tamdeyimini koyarak, "~(p → q)"nun "~(Fx → Gx)" ile "p ∧ ~q"nun "Fx ∧ ~Gx" yerine-koyma örneğini elde ederiz. İmdi

(4) $\forall x\sim(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow \exists x\sim(Fx \rightarrow Gx)$

önermesi, bir türetimin belli bir satırını oluştursun. O zaman (4) satırından, (ED) kuralı gereği

(5) $\forall x(Fx \wedge \sim Gx) \rightarrow \exists x(Fx \wedge \sim Gx)$

veya

(6) $\forall x(Fx \wedge \sim Gx) \rightarrow \exists x\sim(Fx \rightarrow Gx)$

ya da

(7) $\forall x\sim(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow \exists x(Fx \wedge \sim Gx)$

türetilebilir.

Örnek olarak

(8) $\sim\forall x(Fx \rightarrow Gx) \leftrightarrow \exists x(Fx \wedge \sim Gx)$

önermesinin geçerli olduğunu (ED) kuralına dayanan kısaltılmış bir türetimle denetleyelim.

(9)

1.	~~Gös.~~ $\sim\forall x(Fx \rightarrow Gx) \leftrightarrow \exists x(Fx \wedge \sim Gx)$	
2.	~~Gös.~~ $\sim\forall x(Fx \rightarrow Gx) \rightarrow \exists x(Fx \wedge \sim Gx)$	
3.	$\sim\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	(Var.)
4.	$\exists x\sim(Fx \rightarrow Gx)$	(3, ND)
5.	$\exists x(Fx \wedge \sim Gx)$	(4, ED: $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$)
6.	~~Gös.~~ $\exists x(Fx \wedge \sim Gx) \rightarrow \sim\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	
7.	$\exists x(Fx \wedge \sim Gx)$	(Var.)
8.	$\exists x\sim(Fx \rightarrow Gx)$	(7, ED: $(p \wedge q) \equiv \sim(p \rightarrow \sim q)$
9.	$\sim\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	(8, ND)
10.	$\sim\forall x(Fx \wedge Gx) \leftrightarrow \exists x(\sim Fx \vee \sim Gx)$	(2, 6, $\leftrightarrow$ g)

Üçüncü örnek olarak

(10) $\exists x\exists y\forall z[(Fx \wedge \sim Gy) \vee \sim(Fy \wedge \sim Gz)$

önermesinin geçerli olduğunu (ED) kuralına dayanan kısaltılmış bir türetimle denetleyelim.

(11)

1.	Gös. $\exists x\exists y\forall z[(Fx \wedge \sim Gy) \vee \sim(Fy \wedge \sim Gz)]$	
2.	$\sim\exists x\exists y\forall z[(Fx \wedge \sim Gy) \vee \sim(Fy \wedge \sim Gz)]$	
3.	$\forall x\sim\exists y\forall z[(Fx \wedge \sim Gy) \vee \sim(Fy \wedge \sim Gz)]$	(2, ND)
4.	$\forall x\forall y\sim\forall z[(Fx \wedge \sim Gy) \vee \sim(Fy \wedge \sim Gz)]$	(3, ND)
5.	$\forall x\forall y\exists z\sim[(Fx \wedge \sim Gy) \vee \sim(Fy \wedge \sim Gz)]$	(4, ND)
6.	$\forall y\exists z\sim[(Fa \wedge \sim Gy) \vee \sim(Fy \wedge \sim Gz)]$	(5, $\forall$ç)
7.	$\exists z\sim[(Fa \wedge \sim Ga) \vee \sim(Fa \wedge \sim Gz)]$	(6, $\forall$ç)
8.	$\sim[Fa \wedge \sim Ga) \vee \sim(Fa \wedge \sim Gb)]$	(7, $\exists$ç)
9.	$\forall y\exists z\sim[(Fb \wedge \sim Gy) \vee \sim(Fy \wedge \sim Gz)]$	(5, $\forall$ç)
10.	$\exists z\sim[(Fb \wedge \sim Gb) \vee \sim(Fb \wedge \sim Gz)]$	(9, $\forall$ç)

11.	~[(Fb ∧ ~Gb) ∨ ~(Fb ∧ ~Gc)]	(10, ∃ç)
12.	~(Fb ∧ ~Gb) ∧ (Fb ∧ ~Gc)	(11, ED: ~(p∨q) ≡ ~p∧~q)
13.	~(Fa ∧ ~Ga) ∧ (Fa ∧ ~Gb)	(8, ED: ~(p∨q) ≡ ~p∧~q)
14.	Fa ∧ ~Gb	(13, ∧ç)
15.	~Gb	(14, ∧ç)
16.	~(Fb ∧ ~Gb)	(12, ∧ç)
17.	Fb ∧ ~Gc	(12, ∧ç)
18.	Fb	(17, ∧ç)
19.	Fb → Gb	(16, ED: ~(p∧~q) ≡ p → q)
20.	Gb	(18, 19, →ç)

Türetim işlemini kısaltmak amacıyla bir de önermeler mantığı yasası olan önermelerin, yeni mantıksal teoremlerin yerine-koyma örnekleri türetim çizelgesine eklenebilir. Önermeler mantığına ait bir *teoremin yerine-koyma örneği*, teoremdeki her önerme temsilcisinin bütün geçişleri yerine bir tamdeyimin konulmasıyla elde edilen tam-deyim demektir. Örneğin

(12) (p ∧ q) → (p ↔ q)

teoreminin bir yerine-koyma örneği "p" yerine "Fa" ve "q" yerine "Ga" koymakla elde edilen

(13) (Fa ∧ Ga) → (Fa ↔ Ga)

tamdeyimidir.

Örnek olarak

(14) ∃x(Fx ∧ Gx) ∴ ∃x(Fx ↔ Gx)

çıkarımının geçerli olduğunu bir teorimin yerine-koyma örneğinin eklenmesine dayanan bir türetimle denetleyelim.

(15)

1.	Gös. ∃x(Fx ↔ Gx)	
2.	∃x(Fx ∧ Gx)	(Ön.)
3.	Fa ∧ Ga	(∃ç)
4.	(Fa ∧ Ga) → (Fa ↔ Ga)	((p ∧ q) → (p ↔ q))
5.	Fa ↔ Ga	(3, 4, →ç)
6.	∃x(Fx ↔ Gx)	(5, ∃g)

(15) türetiminde (12) teoreminin (13) yerine-koyma örneğini ekledik.

(A → B) → C biçimindeki bir önermenin geçerli olduğunu türetimde göstermek için ~A → C ile B → C yi göstermek yetiyor. Nitekim

(16) (p → q) → r ≡ (~p → r) ∧ (q → r)

eşdeğerliği doğrudur. Böylece ~A → C ile B → C biçimindeki öncüllerden (∧g) kuralına dayanarak (~A → C) ∧ (B → C) elde edilir. Bundan da (ED) kural gereği (A → B) → C türetilir.

Örnek olarak

(17) (∀xFx → p) → ∃x(Fx → p)

önermesinin geçerli olduğunu (ED) kuralına dayanan kısaltılmış bir türetimle denetleyelim.

(18)	1.	~~Gös.~~ (∀xFx → p) → ∃x(Fx → p)	
	2.	~~Gös.~~ ~∀xFx → ∃x(Fx → p)	
	3.	~∀xFx	(Var.)
	4.	∃x~Fx	(3, ND)
	5.	~Fa	(4, ∃ç)
	6.	Fa → p	(5, → Ög)
	7.	∃x(Fx → p)	(6, ∃g)
	8.	~~Gös.~~ p → ∃x(Fx → p)	
	9.	p	(Var.)
	10.	Fa → p	(9, → Ag)
	11.	∃x(Fx → p)	(10, ∃g)
	12.	(∀xFx → p) → ∃x(Fx → p)	(2,8 ∧ g, ED: (~p → r) ∧ (q→r) ≡ ((p → q) → r)

Dikkat edilirse kısalık amacıyla 2. ile 8. satırlardan (∧g) kuralıyla türetilen

(19) [~∀xFx → ∃x(Fx → p)] ∧ [p → ∃x(Fx → p)]

satırını yazmadık. Ancak 12. satırın ardındaki gerekçede bu satırın elde ediliş biçimini "2, 8 ∧ g" işaretleri yardımıyla belirttik.

Öte yandan (A ↔ B) → C biçimindeki bir önermenin geçerli olduğunu türetimle göstermek için,

(20) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r \equiv [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)] \rightarrow r$

eşdeğerliğinden yararlanarak, $(A \wedge B) \rightarrow C$ ile $(\sim A \wedge \sim B) \rightarrow C$ önermelerini göstermekle yetinebiliriz. Nitekim $(A \wedge B) \rightarrow C$ ile $(\sim A \wedge \sim B) \rightarrow C$'den $(\wedge g)$ kuralı gereği $(A \leftrightarrow B) \rightarrow C$ türetilir. Örneğin

(21) $(\forall xFx \leftrightarrow p) \therefore \exists x(Fx \leftrightarrow p)$

çıkarımının geçerli olduğunu (ED) kuralına dayanan kısaltılmış bir türetimle denetleyelim.

(22)	1.	~~Gös.~~ $\exists x(Fx \leftrightarrow p)$	
	2.	$\forall xFx \leftrightarrow p$	(Ön.)
	3.	~~Gös.~~ $(\forall xFx \wedge p) \rightarrow \exists x(Fx \leftrightarrow p)$	
	4.	$\forall xFx \wedge p$	(Var.)
	5.	$\forall xFx$	(4, $\wedge$ç)
	6.	p	(4, $\wedge$ç)
	7.	Fa	(5, $\forall$ç)
	8.	$Fa \wedge p$	(6, 7 $\wedge$ g)
	9.	$Fa \wedge p \rightarrow (Fa \leftrightarrow p)$ $((p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q))$	
	10.	$Fa \rightarrow p$	(8, 9 $\rightarrow$ç)
	11.	$\exists x(Fx \leftrightarrow p)$	(10, ;$\exists$g)
	12.	~~Gös.~~ $(\sim\forall xFx \wedge \sim p) \rightarrow \exists x(Fx \leftrightarrow p)$	
	13.	$\sim\forall xFx \wedge \sim p$	(Var.)
	14.	$\sim\forall xFx$	(13, $\wedge$ç)
	15.	$\sim p$	(13, $\wedge$ç)
	16.	$\exists x\sim Fx$	(14, ND)
	17.	$\sim Fa$	(16, $\exists$ç)
	18.	$\sim Fa \wedge \sim p$	(15, 16, $\wedge$g)
	19.	$(\sim Fa \wedge \sim p) \rightarrow (Fa \leftrightarrow p)$ $((\sim p \wedge \sim q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$	
	20.	$Fa \leftrightarrow p$	(18, 19 $\rightarrow$ç)
	21.	$\exists x(Fx \leftrightarrow p)$	(20, $\exists$g)
	22.	$(\forall xFx \leftrightarrow p) \rightarrow \exists x(Fx \leftrightarrow p)$ $[(p \wedge q) \rightarrow r] \wedge [(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow r] \rightarrow [(p \leftrightarrow q) \rightarrow r])$	(3, 12, $\wedge$g, ED:

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin ve çıkarımların geçerli olduğunu teorem yerine-koyma örneğini eklemekle ve/veya (ED) kuralına dayanarak kısaltılmış türetilme denetleyiniz. Her alıştırmada kullanılacak eşdeğerlik veya teorem ayrıca belirtilmiştir.

1. $\forall x(Fx \vee Gx) \rightarrow \forall x(Gx \vee Fx)$, $p \vee q \equiv q \vee p$
2. $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \therefore \forall x(\sim Fx \vee Gx)$, $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
3. $\exists x(Fx \leftrightarrow Gx) \leftrightarrow \exists x[(Fx \wedge Gx) \vee (\sim Fx \wedge Gx)]$,
   $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
4. $\exists x\sim(Fx \leftrightarrow Gx) \leftrightarrow \exists x[(Fx \wedge \sim Gx) \vee (\sim Fx \wedge Gx)]$
   $\sim(p \leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$
5. $(\forall xFx \rightarrow \forall xGx) \rightarrow \exists x(Fx \text{ — } Gx)$
   $[(\sim p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow r$

2.5.7.2 Bağlı Değişken Değiştirmesi Kuralı

Türetimi kısaltma amacıyla belli bir satırdaki genel önermeden, bağlı değişken değiştirmesi yoluyla elde edilen önermenin türetilmesine izin verilir. İzin verilen kurala *bağlı değişken değiştirmesi kuralı* diyoruz. Bu kuralı (BD) işaretiyle gösteriyoruz. Örneğin

(1) $\forall x\forall yFxy \rightarrow \forall y\forall xFyx$

önermesinin geçerli olduğunu (BD) kuralına dayanan kısaltılmış bir türetilme denetleyelim.

(2)

1.	~~Gös.~~ $\forall x\forall yFxy \rightarrow \forall y\forall xFyx$	
2.	$\forall x\forall yFxy$	(Var.)
3.	$\forall y\forall xFyx$	(2, BD)

İkinci bir örnek olarak

(3) $\sim\forall xFxx \therefore \forall yFyy \rightarrow \exists x\forall yGxy$

çıkarımının geçerli olduğunu (BD) kuralına dayanan kısaltılmış bir türetimle denetleyelim.

(4) 1. ~~Gös.~~ $\forall yFyy \rightarrow \exists x \forall yGxy$

2.	$\sim\forall xFxx$	(Ön.)
3.	$\sim\forall yFyy$	(2, BD)
4.	$\forall yFyy \rightarrow \exists x \forall yGxy$	(3, $\rightarrow$Ag)

Üçüncü örnek olarak

(5) $\exists x(Fxx \rightarrow \forall yGyx) \therefore \forall xFxa \rightarrow \exists z(Fzz \rightarrow \forall yGxz)$

çıkarımının geçerli olduğunu (BD) kuralına dayanan kısaltılmış bir türetimle gösterelim.

(6) 1. ~~Gös.~~ $\forall xFxa \rightarrow \exists z(Fzz \rightarrow \forall yGxz)$

2.	$\exists x(Fxx \rightarrow \forall yGyx)$	(Ön.)
3.	$\exists z(Fzz \rightarrow \forall yGxz)$	(2, BD)
4.	$\forall xFxa \rightarrow \exists z(Fzz \rightarrow \forall yGxz)$	(3, $\rightarrow$ Ag)

ALIŞTIRMALAR

Aşağıdaki önermelerin ve çıkarımların geçerli olduğunu (BD) kuralına dayanan kısaltılmış bir türetimle gösteriniz.

1. $\forall x[Fx \rightarrow (\exists xGx \wedge Ha)] \therefore \forall x[Fx \rightarrow (\exists yGy \wedge Ha)]$
2. $\exists z(\exists xHx \wedge Gz) \therefore \exists z(\exists yHy \wedge Gz)$
3. $[Fa \leftrightarrow \exists x(Gx \vee \forall yFxy)] \rightarrow [Fa \leftrightarrow \exists z(Gz \vee \forall yFzy)]$

2.5.7.3 Türetim İşlemine İlişkin Pratik Öğütler

Niceleme mantığında kullanılan türetme kurallarını topluca aşağıda gösteriyoruz.

İlkel Türetme Kuralları

Koşulludan çıkış: $\dfrac{A \rightarrow B,\ A}{B}$ ($\rightarrow$ç)

Koşulludan devirmeli çıkış: $\dfrac{A \rightarrow B,\ dğ(B)}{dğ(A)}$ $(\rightarrow dç)$

Tümel-evetlemeden çıkış: $\dfrac{A \wedge B}{A}$ (Aç), $\dfrac{A \wedge B}{B}$ (Aç)

Tümel-evetlemeye giriş: $\dfrac{A\ ,\ B}{A \wedge B}$ $(\wedge g)$, $\dfrac{B\ ,\ A}{A \wedge B}$ $(\wedge g)$

Karşılıklı-koşulludan çıkış: $\dfrac{A \leftrightarrow B}{A \rightarrow B}$ (Aç), $\dfrac{A \rightarrow B}{B \rightarrow A}$ (Aç)

Tikel-evetlemeden çıkış: $\dfrac{A \vee B}{dğA \rightarrow B}$ $(\vee ç)$

Tikel-evetlemeye giriş: $\dfrac{A \rightarrow B}{dğA \vee B}$ $(\vee g)$

Tekrarlama: $\dfrac{A}{A}$ (tk)

Niceleme Değilleme kuralı: $\dfrac{\sim\forall xA}{\exists x\sim A}$ (ND), $\dfrac{\sim\exists xA}{\forall x\sim A}$ (ND),

$\dfrac{\forall x\sim A}{\sim\exists xA}$ (ND), $\dfrac{\exists x\sim A}{\sim\forall xA}$ (ND)

Tümel-niceleyiciden çıkış: $\dfrac{\forall xA}{A(a/x)}$ (Aç)

Tikel-niceleyiciye giriş: $\dfrac{A(a/x)}{\exists xA}$ $(\exists g)$

Tikel-niceleyiciden çıkış; *a* adı yeni olmak koşuluyla $\dfrac{\exists xA}{A(a/x)}$

Türetilmiş Türetme Kuralları:

Ard-bileşenden koşulluya giriş: $\dfrac{B}{A \rightarrow B}$ ($\rightarrow$Ag)

Ön-bileşenin değillemesinden koşulluya giriş: $\dfrac{\sim A}{A \rightarrow B}$ ($\rightarrow$Ög)

Basit ikilemli şıkları ayırma kuralı: $\dfrac{A \rightarrow B,\ \sim A \rightarrow B}{B}$ (B.İ.Ş.)

Karmaşık ikilemli şıkları ayırma kuralı: $\dfrac{A \vee B,\ A \rightarrow C,\ B \rightarrow C}{C}$ (K.İ.Ş.)

Salt şıkları ayırma kuralı: $\dfrac{A \rightarrow C,\ B \rightarrow C}{(A \vee B) \rightarrow C}$ (S.Ş.)

Bağlı değişken değiştirme kuralı: $\dfrac{\forall xA(x)}{\forall yA(y)}$ (BD), $\dfrac{\exists xA(x)}{\exists yA(y)}$ (BD)

Türetim işlemi yaparken bazı pratik öğütlere uymamız çok yararlıdır. Şimdiye kadar da sözünü ettiğimiz pratik öğütleri aşağıda sıralıyoruz.

I. $(A \vee B) \rightarrow C$ biçimindeki bir önermeyi türetmek için önce $A \rightarrow C$ ile $B \rightarrow C$ türetilir, sonra da (S.Ş.) türetilmiş türetme kuralını uygularız.

II. $(A \rightarrow B) \rightarrow C$ biçimindeki bir önermeyi türetmek için önce $\sim A \rightarrow C$ ile $B \rightarrow C$ türetilir. Sonra ($\wedge$g) kuralını, ardında da $(\sim p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$ eşdeğerliği gereği (ED) türetilmiş türetme kuralını uygularız.

III. $(A \leftrightarrow B) \rightarrow C$ biçimindeki bir önermeyi türetmek için önce $(A \wedge B) \rightarrow C$ ile $(\sim A \wedge \sim B) \rightarrow C$ önermeleri türetilir. Sonra ($\wedge$g) kuralı-

nı ve ardından $[(p \wedge q) \rightarrow r] \wedge [(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow r] \equiv (p \leftrightarrow q) \rightarrow r$ eşdeğerliği gereği (ED) türetilmiş türetme kuralını uygularız.

IV. $A \rightarrow B$ biçimindeki bir koşulluyu türetmek için, eğer A bir tikel-evetleme veya bir koşullu ya da bir karşılıklı-koşullu değilse, koşullu türetim yoluna başvurulur.

V. $A \wedge B$ biçimindeki bir tümel-evetlemeyi türetmek için A ile B ayrı ayrı türetilir.

VI. $A \vee B$ biçimindeki bir tikel-evetlemeyi türetmek için dğ$A \rightarrow B$ türetilip sonra da ($\rightarrow$g) kuralı uygulanır.

VII. $A \leftrightarrow B$ biçimindeki bir karşılıklı-koşulluyu türetmek için önce $A \rightarrow B$ ile $B \rightarrow A$ türetilir, sonra da ($\leftrightarrow$g) kuralı uygulanır.

VIII. $\forall xA$ biçimindeki bir tümel önermeyi türetmek için ya tümel niceleyiciye giriş yoluna ya da dolaylı türetim yoluna başvurulur.

IX. $\exists xA$ biçimindeki bir tümel önermeyi türetmek için ya önce A(a/x) türetilip sonra ($\exists$g) kuralı uygulanır, ya da dolaylı türetim yoluna başvurulur.

X. I-VII durumları dışında kalan durumlarda ya dolaylı türetim yoluna başvurulur ya da türetilmiş şıkları ayırma kuralları uygulanır.

$A \equiv B$ biçimindeki bir eşdeğerliği türetimle denetlemek için $A \leftrightarrow B$ karşılıklı-koşullusunun geçerli olduğunu türetimle denetleriz. Öte yandan $A_1, \ldots, A_n \models B$ biçimindeki bir içermeyi türetimle denetlemek için $A_1, \ldots, A_n \therefore B$ çıkarımının geçerli olduğunu türetimle denetleriz.

ALIŞTIRMALAR

§2.3'deki mantık yasalarını dile getiren eşdeğerlik ve içermeleri sözü geçen pratik öğütlere uyarak denetleyiniz.

KAYNAKÇA

CİLT I: ÖNERMELER MANTIĞI

Batuhan, Hüseyin ve Teo Grünberg: Modern Mantık (Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen ve Edebiyat Fakültesi Yayın. No: 17, Ankara 1984)

Grünberg, Teo: Symbolic Logic Vol. I (Orta Doğu Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayın No: 16, Ankara, 1972)

Grünberg, Teo: Sembolik Mantık I: Önermeler Mantığı (İ.Ü. Edebiyat Fakültesi Yayınları No: 1300., İstanbul 1960)

Grünberg, Teo ve Adnan Onart, Hüseyin Batuhan: Modern Mantık ve Uygulamaları (Milli Eğitim Bakanlığı, İstanbul 1976)

CİLT I.2. NİCELEME MANTIĞI

Batuhan, Hüseyin ve Teo Grünberg: Modern Mantık (Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen ve Edebiyat Fakültesi Yayın. No: 19, Ankara 1984)

Grünberg, Teo: Symbolic Logic Vol I (Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen ve Edebiyat Fakültesi Yayın. No: 16, Ankara 1972)

Grünberg, Teo: Symbolic Logic Vol II (Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen ve Edebiyat Fakültesi Yayın. No: 16, Ankara 1970)

Kalish, D. ve R. Montague: Logic Techniques of Formal Reasoning (Harcourt, Brace & World 1964)

Smullyan, R. M. First-Order Logic (Springer Verlag, 1968)

CİLT II.3 ÖZDEŞLİK MANTIĞI

Jeffrey, R: Formal Logic its Scope and Limits (Mcgraw-Hill, 1967)

Kalish, D. ve R. Montague: Logic: Techniques of Formal Reasoning (Harcourt, Brace & World, 1964)

CİLT II. 4 VARLIK MANTIĞI

Lambert, K ve Bas. C. Van Fraassen: Derivation and Counterexample (Dickenson, 1972)

CİLT II.5 KİPLİK MANTIĞI

Hughes, G.E ve J.M. Cresswell: an Introduction to Modal Logic (Methuen, 1968)

Hughes, G.E ve J.M. Cresswell: A New Introduction to Modal Logic (Routledge, 1996)

Kommymayk, K.: Introductory Modal Logic (University of Notre Dame Press, 1986)

Cilt II. 6 BİLGİ MANTIĞI

Hintikka, J. Knowledge and Belief (Cornell University Press, 1962)

Carlson, L. "Quantified Hintikka-Style Epistemic Logic" Synthese 74 (1988) 223-262

CİLT II.7 ÇOK DEĞERLİ MANTIK

Ackermann, R.: Introduction to Many-Valued Logics (Routledge and Kegan Paul, 1967)

CİLT II.8 ÖDEV MANTIĞI

Hilpimen, R. (ed.): Deontic Logic: Introductory and Systematic Readings (D. Reidel, 1971)

CİLT II.9 SORULAR MANTIĞI

Hintikka, J.: The Semantics of Questions and the Question of Semantics (Acta Philosophica Fennica Vol. 28, No: 4, North-Holland 1976)

CİLT II. 10 ZAMAN MANTIĞI

Van Benthem J.J.A.K.: The Logic of Time (D. Reidel, 1983)

CİLT II. 11 KOŞULLAR MANTIĞI

Harper, W. L. ve R. Stalmaker, G. Pearce (eds): IFS: Conditionals, Belief, Decision Chance and Time (D. Reidel, 1981)

Jackson, F.: Conditionals (Blacwell, 1987)

Lewis, D.K.: Counterfactuals (Harward University Press, 1973)

Nute, D.: Topics in Conditional Logic (D. Reidel 1980)

CİLT III. 12. MANTIĞIN ELEŞTİREL DÜŞÜNME VE AKILCI TARTIŞMAYA UYGULANMASI

Hintikka J.: The Semantics of Questions and the Question of Semantics (Acta Philosophica Fennica Vol. 28 No: 4, Nort-Holland 1976)

Hintikkà, J ve Bachman, J.: WHAT IF...? Towards Excellence in Reasoning (Mayfield Pub. Com. 1991)

CİLT III. 13. KLASİK (GELENEKSEL) MANTIĞIN SEMBOLİK MANTIKLA ÇÖZÜMLENMESİ

Batuhan, Hüseyin ve Teo Grünberg: Modern Mantık (Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen ve Edebiyat Fakültesi Yayın. No: 17, Ankara 1984)

Öner, Necati: Klasik Mantık 6. Baskı, (A.Ü. İlahiyat Fakültesi Yayınları, Ankara 1991)

CİLT III. 14 KÜMELER KURAMI

Batuhan, Hüseyin ve Teo Grünberg: Modern Mantık (Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen ve Edebiyat Fakültesi Yayın. No: 17, Ankara 1976)

Zemman, E.J.: Introduction to Axiomatic Set Theory (Routledge and Kegan Paul, 1968)

Suppes, P.: Axiomatic Set Theory (D. Von Nosthand 1965)

CİLT III. 15. OTOMATİKLEŞMİŞ TEOREM İSPATLAMASI

Chang, C. ve R. C. Lee: Symbolic Logic and Mechanical Theorem Proving (Academic Press, 1973)

Filting, M.: First-Order Logic and Automated Theorem Proving (Springer - Verlag, 1990)

CİLT III. 16. OLASILIK KURAMININ MANTIKSAL TEMELLERİ

Batuhan, Hüseyin ve Teo Grünberg: Modern Mantık (Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen ve Edebiyat Fakültesi Yayın No: 17, Ankara 1984)

Kutlusoy Erkanlı, Zekiye: Logics - Philosophical Analysis of Comparative Probability (Yüksek Lisans Tezi, ODTÜ, 1985)

Skyrms, B.: Choice and Chance. An Introduction to Inductive Logic (Dickenson, 1966)

CİLT III. 17. MATEMATİĞİN MANTIKSAL TEMELLERİ

Beth, E.W.: The Foundations of Mathematics (North-Holland, 1968)

Samullyan, R.M.: Gödel's Incompleteness Theorems (Oxford U.P., 1992)

Suppes, P.: Axiomatic Set Theory (D.Van Northand, 1965)

CİLT III. 18 DOĞA BİLİMLERİNİN MANTIKSAL TEMELLERİ

Carnap, R.: Philosophical Foundations of Physics (Basic Boks. 1966)

Popper, K.R.: The Logic of Scientific Discovery (Hutchinson, 1959)

Salmon, M.et al.: Introduction to the Philosophy of Science (Prentice-Hall 1992)

Toulmin, S: The Philosophy of Science. An Introduction (Harper and Brothess, 1960)

CİLT III. 19 GÜNLÜK DİLİN SEMBOLLEŞTİRİLMESİ

Batuhan, Hüseyin Teo Grünberg ve Adnan Onart, Modern Mantık ve Uygulamaları (Millî Eğitim Bakanlığı, İstanbul 1976)

Tapscott, B.L.: Elementary Applied Symbolic Logic (Prentice-Hall,1976)

CİLT III. 20 MANTIK FELSEFESİ

Grünberg, Teo: "Mantık Felsefesi", Felsefe Dünyası, Türk Felsefe Derneği Yayın. Sayı 2 (1991) 8-14.

Haack, S.: Philosophy of Logics (Cambridge U.P., 1978)

TERİMLER DİZİNİ (1. CİLT)

A

açık önerme 201
ana bileşen 24
ana eklem 24
atomsal önerme 24
atomsal açık önerme 202
ayrıklık eklemi 17

B

bağlı değişken geçişi 209-210
bağlı değişken değiştirmesi 218
biçimsel mantık 4
bileşen 24
  ön bileşen 19
  ard bileşen 19
bileşik genel önerme 207-208
bileşik önerme 24, 198
bileşik tekil önerme 198
birli önerme 282
birli niceleme mantığı 282
boş niceleyici geçişi 213

Ç

çelişmezlik ilkesi 43
çıkarım 1
çözümleyici çizelge ikilisi (düal çözümleyici çizelge) 90
çözümleyici çizelge yöntemi 51
çözümleyici çizelgede eşdeğerlik 78
çözümleyici çizelgede geçerlilik 74, 77
çözümleyici çizelgede tutarlılık 76

D

değilleme eklemi 11
doğruluk değeri 2
doğruluk değeri hesabı 28-29

E

evrik koşul eklemi 22

G

geçerlilik 1, 6
genel önerme 203

İ

ikililik 93-94
ikililik ilkesi 102-103

K

karma doğruluk çizelgesi 35
karşılıklı koşul eklemi 23
koşul eklemi 18-19
koşulludan çıkış kuralı 106-107
koşulludan devirmeli çıkış kuralı 118

M

mantık 1-2
mantık değişmezi 4
mantık sistemi 10

N

niceleme mantığı 198

Ö

öncül 1
önerme 1, 24
özdeşlik ilkesi 43
özelleme 216
  tekil — 216
  tümel — 216

P

parantezli yazılış biçimi 26
parantezsiz yazılış biçimi 27

S

sembolleştirme 4

T

tamdeyim 209
  eklemi 15
tikel evetleme önermesi 15
tikel-evetlemeli tam-yasal biçim 86
tikel-evetlemeli yasal biçim 83
tutarlılık 6
tümel önerme 204
tümel-evetleme eklemi 12-13
tümel-evetlemeli tam yasal biçim 92
tümel evetlemeli yasal biçim 89
türetim 106
  dolaylı — 140-141
  dolaysız — 106-109

V

varsayım 121-122

Y

yerine koyma işlemi 215
yorumlama 5
yuvalanmış niceleyici 211
yuvalanmış tamdeyim 212



1927 yılında İstanbul'da doğan Teo Grünberg, 1950 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Kimya Mühendisliği Bölümü'nden mezun olmuş, 1964 yılında aynı Üniversite'nin Edebiyat Fakültesi Felsefe Bölümü'nden doktora derecesini alarak, 1970 yılında Doçent, 1979 yılında da Profesör olmuştur.

1962-66 yıllarında İstanbul Üniversitesi Felsefe Bölümü'nde konferansçı ve uzman olarak çalışan Prof. Dr. Grünberg, 1966-82 yıllarında Orta Doğu Teknik Üniversitesi (ODTÜ) Beşeri İlimler Bölümü'nde görev yapmış, 1982-83 yıllarında Sosyoloji Bölümü Başkanlığı, 1983-94 yıllarında kurulması için öncülük ettiği Felsefe Bölümü'nün Başkanlığı ile Sistematik Felsefe ve Mantık Anabilim Dalı Başkanlığı görevlerini yürütmüş, 1994 yılından itibaren de emekli olarak ODTÜ Felsefe Bölümü'ndeki derslerine devam etmiştir. Prof. Dr. Grünberg, ODTÜ'deki görevlerine ek olarak, 1968-79 yıllarında Ankara Üniversitesi Dil ve Tarih-Coğrafya Fakültesi Felsefe Bölümü'nde, 1989-90 yıllarında da Bilkent Üniversitesi Mühendislik Fakültesi'nde görev almıştır.

Prof. Dr. Teo Grünberg, 1967 yılında Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Dairesi lise modern mantık reform komisyonu üyesi, 1967-76 yıllarında lise felsefe öğretmenlerine hizmet içi modern mantık yaz kursları öğretim üyesi olarak görev yapmıştır. 1990-91 yıllarında Talim ve Terbiye Dairesi lise mantık ve felsefe dersleri müfredat komisyonu üyeliği görevlerinde de bulunmuştur.

Mantığa dayalı argümantatif (ya da analitik) düşünme geleneğinin felsefe eğitim ve araştırmaları içinde vazgeçilmez bir öğe olması yönünde çaba gösteren Prof. Dr. Teo Grünberg'in bir bölümü uluslararası dergilerde yayınlanmış 35'i aşkın makale ve bildirisi ile 15 kitabı bulunmaktadır.

Modern Mantığı Türkiye'de Üniversite ve Lise eğitimi düzeyinde kabul ettirip yaygınlaştırması, çok sayıda eleman yetiştirerek bu alanın ülkemizde kurumsallaşmasında ve gelişiminde belirleyici hizmetleri nedeniyle Prof. Dr. Grünberg'e 1998 yılında Türkiye Bilimler Akademisi Hizmet Ödülü verilmiştir.





ISBN 975-7064-31-9 (Tk. No)
975-7064-32-7 (1. Cilt)