İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ EDEBİYAT FAKÜLTESİ YAYINLARI: No : 1300

Dr. TEO GRÜNBERG

SEMBOLİK MANTIK

I

ÖNERMELER MANTIĞI

BAHA MATBAASI
İSTANBUL — 1968

ÖNSÖZ

Formel (deduktif) mantık M.Ö. IV.cü yüzyılda *Aristoteles* tarafından kurulduğundan beri XIX.cu yüzyılın ortalarına kadar süren uzun bir duraklama dönemi geçirmiştir. Gerçi bu uzun süre içinde mantığa hiç bir katkıda bulunulmadığı söylenemez. Biryol Eskiçağ'da *Megaralılar*'ın ve *İstoacılar*'ın, bir de Ortaçağ'da *İskolastikler*'in mantık alanında bazı önemli yenilikler getirdiklerini belirtmek gerek. Ama söz konusu yeniliklerin önemi, ancak XIX.cu ve XX.ci yüzyılda modern mantıkçılar tarafından anlaşılmıştır. *Kant* bile Aristoteles mantığının mutlak bir yetkinlikte olduğunu, ondan sonra gelen mantıkçıların ancak ufak tefek önemsiz şekil değişiklikleri yaptıklarını veya yapabileceklerini ileri sürmüştü.

Günümüzde ise mantık büyük bir hızla gelişmekte olan bir bilim haline girmiştir. Bir çok başka bilimde olduğu gibi, mantığın gelişmesi de *matematiksel* yöntemi benimsemesi sonucunda olmuştur. Bu yolda ilk adım ünlü Alman filozofu ve bilim adamı *G.W.Leibniz* (1646-1716) tarafından atılmıştı. Leibniz'in tasarladığı *"characteristica universalis"* (salt sembollerden kurulu evrensel dil) ile *"mathesis universalis"* (bu dile dayanan evrensel matematik) modern matematiksel veya *"sembolik"* mantığın öncüsü sayılabilir.

Ancak Leibniz'in bu yoldaki somut çalışmaları pek sınırlı kalmış, düşüncelerinin pek az bir kısmını gerçekleştirebilmiştir. Bu bakımdan onu modern mantığın kurucusu değil, sadece *öncüsü* sayabiliriz. Modern mantığın asıl kurucuları İngiliz matematikçisi *George Boole* (1815-1864) ile Alman matematikçi ve mantıkçısı *Gottlob Frege* (1848-1925) olmuştur.

Modern mantık *'mantığın cebiri'*, *'lojistik'*, *'matematiksel mantık'* ve *'sembolik mantık'* gibi çeşitli adlarla anılmıştır. Günümüzde en çok kullanılanı sonuncusu olduğundan, kitabımız için *'Sembolik Mantık'* başlığını seçmeyi uygun gördük. Ancak, "sembolik" mantığın genel mantık biliminin sadece özel bir dalı olmadığını önemle belirtmek gerek. Sembolik mantık (formel) mantığın tümü demektir; klâsik mantık ise sembolik mantığın küçük, hem de oldukça küçük bir bölümü haline gelmiştir. Bu bakımdan, "sembolik mantık" yerine düpedüz "mantık" demek daha uy-

gun olabilir. Nitekim, yabancı ülkelerde son yıllarda yayınlanan sembolik mantık kitaplarının çoğunun sadece "mantık" başlığını taşıdığını görüyoruz.

Modern mantık, uygulama alanları son derece geniş ve çeşitli olan bir disiplindir. Sembolik dil, anlamı belirli ve tek-anlamlı terimler, açık-seçik kavram tanımları, açık (yani gizli ön-dayanaklardan arınmış) kanıtlamalar ve çok kısaltılmış deyimler sağlar. Bu yüzden modern mantık, bütün *bilimlerin* (hattâ "üst-mantık" - metalogic - olarak, mantık biliminin bile) *temellendirilmesi* için başvurulabilecek tek araç haline gelmiştir. Salt *matematik* için böyle bir temellendirmenin şimdiden başarılmış olduğunu söyleyebiliriz. Örneğin, Whitehead ve Russell'ın *"Principia Mathematica"* (1910-1913) adlı ortak eserinde matematiğin tümünü salt mantığa indirgeme çabası büyük ölçüde başarılmıştır. Deduktif olmıyan bilim ve disiplinlerin (tabiat bilimleri, sosyal bilimler, hukuk, etik ve linguistik'in) temellendirilmesi için de modern mantıktan gittikçe geniş ölçüde faydalanılmaktadır. Bu alanlarda şimdiye kadar kesin sonuçlar elde edilmemekle birlikte, sembolik mantık yönteminin bütün bu bilim ve disiplinlerde gittikçe yayıldığını görüyoruz. Tanınmış çağdaş Amerikan mantıkçısı *F.B.Fitch*'in dediği gibi, "nasıl bugün köklü bir matematik bilgisi olmadan fizik öğrenmek uygunsuzsa, aynı şekilde köklü bir sembolik mantık bilgisi edinmeden ahlâk ve siyaset öğrenimi yapmanın düşünülemiyeceği gün gelebilir." (Bk. Fitch, "Symbolic Logic", Giriş).

Modern mantık *teknik* alanına da büyük başarı ile uygulanmaktadır. Özellikle kibernetik, otomasyon ve elektronik beyinler (computers) için sembolik mantık onsuz olunamaz bir yöntem durumundadır. Nitekim elektronik beyinlerin temeli olan elektrik devreleri ve iletme-ağlarının dayandığı teori, sembolik mantığın bir kolundan (önermeler-mantığından) başka bir şey değildir (Bk. § 16).

Kendi ilgi ve çalışmalarımız açısından ise modern mantığın en önemli ve ilginç uygulama alanı *"felsefe"*dir. Mantığı felsefenin *biricik* metodu sayıyoruz. Bu bakımdan, felsefenin kaderinin sıkı sıkıya mantığın kaderine bağlı olduğu kanısındayız.

Bilimlerden uzak kalan ve iki bin yıldan çok süren bir duraklama dönemi geçiren "klâsik mantık"a dayanan felsefenin yerinde sayması bu bakımdan zorunlu idi. Buna karşılık, sembolik mantığa dayanan modern "analitik felsefe"nin bir araç olarak kullandığı bu bilimle birlikte ilerlediğini görüyoruz. Analitik felsefenin ("bilim felsefesi" olarak) başlıca görevi bütün insan bilimlerini ve disiplinlerini temellendirmek olduğundan, bir temellendirme ise kökçe mantığa dayandığından, böyle bir paralelliğe

şaşmamak gerek. Sembolik mantık metodunun yalnız tek tek bilim ve disiplinlerin temellendirilmesinde değil, genel *bilgi-teorisi* ve *ontoloji* alanlarında da son derece başarılı olduğunu belirtmek isteriz. Bugün sembolik mantığa vakıf olmadan, son yılların felsefe literatürünün (özellikle İngilizce yayınlarının) büyük bir kısmını izlemek imkânsız bir hale gelmiştir.

Bu kitap İstanbul Üniversitesi Edebiyat Fakültesi Felsefe Bölümünde beş yıldır vermekte olduğumuz sembolik mantık derslerinden edindiğimiz görgünün ürünü olup bu konuda tasarladığımız bir seri eserin birinci cildidir. Bu 1.ci ciltte sembolik mantığın bir çeşit temel bölümü sayılan *"önermeler mantığı"* ele alınmıştır. Kitabın sonunda önermeler-mantığının en önemli bir uygulama alanı olan elektrik devreleri ve iletme-ağları teorisinin ana çizgilerini belirtmeye çalıştık. Niceleme-mantığı ile mantığın öbür bölümlerini ise 2.ci ciltte ele almayı düşünüyoruz.

Bu kitap Felsefe Bölümünün kısmen hazırlık yılı öğrencilerinin, kısmen ilerlemiş öğrencilerin ders programına alınabilir. Belli bir matematiksel kültürü olan kimseler de kolaylıkla kitaptan yararlanabilirler. Ancak, matematiksel kültürün sembolik mantığın öğrenilmesi için zorunlu olmadığını belirtmek isteriz. Ezici çoğunluğu lise edebiyat kolundan mezun olan ve matematiğe pek de hevesli olmıyan öğrencilerimizin sembolik mantığı yadırgamadan pek başarılı bir şekilde öğrendiklerini söyleyebiliriz. Başarı derecesinin, sembolik mantık öğretiminin hazırlık yılından (1.ci sınıftan) başlatılması sonucunda büyük ölçüde arttığını gördük. Bu bakımdan, sembolik mantık öğretiminin bu şekilde devam ettirilmesini, hattâ ilerde (bu iş için yeteri kadar lise felsefe öğretmeni yetiştikten sonra) lise mantık dersleri programına alınmasını gönülden dilediğimizi belirtmek isteriz.

Kitabın hazırlanmasında bana yardımını esirgemiyen, özellikle yeni teknik terimlerin seçilmesinde benimle sıkı bir işbirliği yapan Dr. Hüseyin Batuhan'a, düzeltmelerde büyük yardımı dokunan eşim Raşel Grünberg'e, ayrıca eseri özenle daktilo eden Esen ve Sema Behen'e candan teşekkürlerimi tekrarlamayı bir borç bilirim.

İstanbul, 1967

Dr. Teo Grünberg

İÇİNDEKİLER

Önsöz **Sayfa**

Giriş: **Deduktif Çıkarımlar**

§ 1. Bilgi ve Mantık ... 1
§ 2. Çıkarım - Şemaları 5
§ 3. Geçerli ve Geçersiz Çıkarımlar 8

Bölüm I: **Dilsel Deyimlerin Mantıksal Yapısı**

§ 4. "Atomsal" ve "Molekülsel" Önermeler 11
§ 5. Bölünmemiş Önermelerden Kurulu Çıkarımlar 14
§ 6. Doğruluk Fonksiyonları 20

Bölüm II: **Önerme-Eklemleri ve Doğruluk-Çizelgeleri**

§ 7. Hayırlama, Birlikte-Evetleme ve Ayrıklık 24
§ 8. Koşul, Karşılıklı-Koşul, Bağdaşmazlık ve Birlikte Hayırlama Eklemleri 54
§ 9. Önerme-Eklemlerinin Sistematik Sınıflanması 68

Bölüm III: **Doğruluk-Değeri Analizi**

§ 10. Geçerlilik, Tutarlılık ve Tutarsızlık ... 74
§ 11. Eşdeğerlik - Bağlantısı ve Quine-Çizelgesi 79
§ 12. Mantık Kanunları 99

Bölüm IV: **Normal-Şemalar ve İkililik**

§ 13. Normal-Şemalar 130
§ 14. İkililik 142
§ 15. Tam Normal-Şemalar ... 154
§ 16. Mantıksal İletme-Ağları 169

Notlar ve Aydınlatmalar 192

Bibliyografya 217

GİRİŞ

DEDUKTİF ÇIKARIMLAR

§ 1. Bilgi ve Mantık

Mantık bilgilerimizi elde etmek için başvurduğumuz "araç"lardan biridir. Tek tek bilgilerimiz *"önermeler"* biçiminde dile getirilir. Bir önerme *"doğru"* veya *"yanlış"* olabilen herhangi bir dilsel deyimdir. "Doğru" ile "yanlış"a "doğruluk-değeri" denildiğinden, *önermeleri belli bir doğruluk-değeri taşıyan dilsel deyimler* şeklinde tanımlıyabiliriz. İmdi herhangi bir *bilgiyi* elde etmek, belli bir önermenin doruluğunun *"belgelenmesi"*, yanı bu önermenin evetlenmesini haklı-gösteren geçerli gerekçelerin (belgelerin) ortaya konulması demektir.[1] Böyle bir belgeleme ya başka bilgilere, yani önceden belgelenmiş önermelere dayanır, ya başka hiç bir bilgiye dayanmaz. Birinci halde belgelemenin *"dolaylı"*, ikinci halde ise *"dolaysız"* olduğunu söyleyeceğiz.

Örneğin: belli bir maddenin içinde bakır bulunup bulunmadığını araştıran bir kimyacı gözönüne alalım. Bu kimyacı söz konusu maddeyi toz haline getirerek bir spatül içinde aleve tutar. Alevin yeşilleşmesi halinde maddenin içinde bakır olduğu sonucuna (belli bir olasılık derecesi çerçevesinde) varılır. İmdi 'alev yeşilleşti' önermesinin doğruluğu, başka hiç bir bilgiye başvurulmasını gerektirmeden "dolaysız" olarak belgelenir. Bu önermenin ifade ettiği bilginin - alevin yeşilleşmesi olgusunun bilgisi - kazanılmasında başvurulan aracın mantık olmadığı meydandadır. Böyle bir bilgi salt *"deney"* (veya "gözlem") araciyle elde edilmiştir. Öte yandan sözü geçen maddenin içinde bakır bulunması olgusunun bilinmesi salt deneye dayanmaz. Nitekim "bu maddede bakır vardır" önermesi "dolaysız" olarak değil, ancak *"dolaylı"* olarak 'bu alev yeşilleşti' gibi başka bir önermenin doğruluğuna dayanarak belgelenir. İşte bu son haldeki belgelemede *"mantık"* aracına başvuruluyor.

Buna göre, *mantığın* bilgilerimizin "dolaylı-belgeleme" yolu ile elde edilmesini sağlıyan bir yol veya metottan ibaret olduğunu söyleyebiliriz.

İmdi "dolaylı-belgeleme" deyimi yerine *'çıkarım'* deyimini de kullanabiliriz. Nitekim bir *"çıkarım"* (inference), *"öncül"* denilen bir takım önermeler yardımiyle *"sonuç"* denilen belli bir önermenin belgelenmesinden başka bir şey değildir.

Öte yandan, mantıkçılar doğrudan doğruya "çıkarım süreçleri" ile değil, sadece çıkarımların *"geçerliliği"* (validity") ile ilgilenir. Çıkarım süreçlerinin gerçekte olduğu gibi incelenmesi mantığın değil, empirik bir bilim dalı olan "bilgi-psikolojisi"nin konusuna girer. Böylece mantığı her türlü çıkarımların geçerliliğini belirlemeye yarayan "geçerlilik-ayraçları"nı (criteria of validity) ortaya koyan bir bilgi-dalı diye tanımlıyabiliriz.

Görüldüğü gibi, verilen bir önermenin doğruluğunun "dolaylı" olarak (yani "çıkarımsal" yolla) *belgelenmesi* salt mantık işi değildir. Belgelemenin kendisi bir süreç, bir davranıştır. Mantığın görevi böyle bir süreç veya davranışın "haklı-gösterilmesi"nden ibarettir. Başka bir deyimle, mantık genel olarak verilen bir önermenin doğruluğunu veya yanlışlığını belgeleyebilecek öncüllerin ve ara basamakların bulunması için *yeterli* değildir. Böyle bir çaba daha çok "buluş-bağlamı"na (context of discovery") aittir. Mantığın görevi buluş-bağlamında varsayım olarak ortaya konulan bir çıkarımın haklı, yani geçerli olup olmadığının belirlenmesinden ibarettir. Böylece mantık dolaylı-belgeleme uğraşısı için yeterli olmamakla birlikte, *"gerekli"* olan bir araçtır.

İmdi çıkarımları *"deduktif"* ve *"induktif"* olmak üzere iki öbeğe ayırabiliriz. Deduktif bir çıkarımda, öncüllerin doğruluğu sonucun doğruluğunu "kesin" veya "sonuçlandırıcı" bir şekilde gerektirir. Induktif bir çıkarımda ise, öncüllerin doğruluğu sonucun doğruluğunu gerektirmez, sadece belli bir *"olasılık"* (probabilite) derecesi kazanmasına yol açar. Biz burada yalnız "deduktif çıkarımlar"ı inceliyeceğiz; "induktif çıkarımlar"ı inceleyen "induktif mantık"ı konumuzun dışında bırakacağız.

Ö belli bir dile ait herhangi belli bir önerme, $Ö_1$, $Ö_2$, ..., $Ö_n$ de aynı dile ait n tane başka önerme olsun. Ö önermesinin bu n tane önermenin "sonucu" olmasını

(1) $$Ö_1, Ö_2, \ldots, Ö_n \vdash Ö$$

veya

(2) $$\frac{Ö_1, Ö_2, \ldots, Ö_n}{Ö}$$

ya da

(3)
$$\begin{array}{c} Ö_1 \\ Ö_2 \\ \vdots \\ Ö_n \\ \therefore Ö \end{array}$$

biçiminde dile getirebiliriz. Verilen Ö gibi bir önermenin doğruluğunu belgelemek için bir yandan (1) (veya (2) ya da (3)) *çıkarımının "geçerli"* olduğunu, öbür yandan da böyle bir çıkarımdan geçen $Ö_1$, $Ö_2$ ..., $Ö_n$ *öncüllerinin "doğru"* olduğunu belgelemek gerek. Buna karşılık, Ö önermesinin "yanlışlığını" belgelemek için Ö nün öncül olarak geçtiği

(4) $$Ö \vdash Ö'_1, Ö'_2, \ldots, Ö'_m$$

gibi bir çıkarımdaki sonuçlardan hiç olmazsa birisinin yanlış olduğunu göstermek gerekir. Ö nün birçok sonucunun hattâ şimdiye kadar elde edilen bütün sonuçlarının doğru olması Ö nün doğruluğunu *kesin* bir şekilde belgelemez. Başka bir deyimle, (4) ten

(5) $$Ö'_1, Ö'_2, \ldots, Ö'_m \vdash Ö$$

gibi "deduktif" bir çıkarımın elde edilmesi mümkün değildir. Bununla birlikte, Ö nün birçok sonuçlarının doğru olması, Ö nün belli bir olasılık derecesi kazanmasına yol açabilir. Başka bir deyimle, Ö önermesini sözü geçen $Ö'_1, Ö'_2, \ldots, Ö'_m$ deduktif-sonuçlarının "induktif" bir sonucu sayabiliriz. Bu durumu da :

(6) $$Ö'_1, Ö'_2, \ldots, Ö'_m \vdash\!\!\rightarrow Ö$$

biçiminde dile getireceğiz.

İmdi tabiat bilimlerine ilişkin olan teorilerde geçen genel kanunları (1) biçiminde bir takım öncüllerden deduktif yolla çıkaracak yerde, (4) gereği bir takım deduktif sonuçlarını elde ederek bunların (empirik yollarla) doğru olup olmadığını araştırırız. Bu sonuçların bir çoğunun doğru olması (6) gereği Ö önermesinin (yani söz konusu tabiat kanununun) belli bir olasılık derecesi kazanmasına yol açtığı gibi, hiç olmazsa bir sonucun yanlış çıkması Ö nün yanlışlığının kesin olarak belgelenmesine yol açar.[3] Böylece Ö gibi bir tabiat kanununun veya, daha doğrusu, bir "varsayım"ının doğruluğunun veya yanlışlığının belgelenmesi, Ö nün de-

duktif öncüllerine değil de, deduktif sonuçlarına başvurmak suretiyle mümkündür. İmdi Ö önermesi ((4) çıkarımında) bir "öncül" konumunda olmakla birlikte, doğruluk-değerinin önceden bilinmediğini görüyoruz. Hattâ Ö nün yanlış olması bile mümkündür. Ama Ö nün yanlış olması halinde bile (4) çıkarımının mümkün olması gerekir. Başka bir deyimle, bir (deduktif) çıkarımın geçerli olması hiç de öncüllerin doğruluğunu gerektirmez. Yoksa Ö nün yanlış olması halinde (4) çıkarımı yapılamıyacağından, Ö nün yanlış olduğunun ortaya konulması imkânsız olacaktı. Böylece, görüldüğü gibi, empirik bilimlerin mümkün olması yanlış öncüllü deduktif çıkarımların varolmasını gerektirir.

Örneğin :

(7) Bütün cisimler belli şartlar altında ısıtılınca genleşir

önermesiyle dile getirebileceğimiz tabiat kanununu göz önüne alalım.

(7) önermesinin doğruluğunu belgelemek için :

(8) a cismi belli şartlar altında ısıtılıp genleşti
b cismi belli şartlar altında ısıtılıp genleşti
c cismi belli şartlar altında ısıtılıp genleşti
.....
.....

biçimindeki önermelerin doğru olup olmadığını araştırırız. (8) önermeleri (7) önermesinin deduktif sonuçlarıdır. Bu biçimdeki önermelerin sayısı ilkece sonsuz olduğundan, hepsinin doğruluk-değerinin tesbit edilmesi imkânsızdır. Ancak bu önermelerin birçoğunun doğru çıkması (7) önermesinin ((6) uyarınca) belli bir olasılık derecesi kazanmasına yol açabilir. Öte yandan (8) önermelerinden bazılarının yanlış çıkması (7) nin de yanlış olmasını gerektirir. Böylece (7) nin yanlış olması, böyle bir yanlış öncülden (8) gibi deduktif sonuçların çıkarılmasına bağlıdır.

Üstelik salt formel bilimlerde, yani matematiksel teorilerde de yanlış öncüllü deduktif çıkarımlara başvurulmaktadır. Nitekim Ö gibi bir önermenin doğruluğunu belgelemek için çok defa Ö nün hayırlanması olan Ö 'gibi bir önermenin sonuçlarından birisinin "yanlış" (çelişik) olduğunu gösteririz. Bu halde Ö' nün de yanlış olması, dolayısiyle Ö nün doğru olması gerektiğinden, güdülen amaca varıldığını görüyoruz. "Reductio ad absurdum" (olmazlığa geri götürme) denilen kanıtlama yolu da yanlış öncüllü deduktif bir çıkarıma dayanır: Ö gibi bir önermenin "yanlışlığını" belgelemek için, Ö nün bir sonucunun Ö nün hayırlanması olduğunu gösteririz. Bu son önermenin Ö den çıkarılması ise geçerli bir çıkarım durumunda olmalıdır. Yoksa metodun geçerliliği kalmaz.

§ 2. Çıkarım-Şemaları

(1) Ahmet Ankaraya gidecek veya (Ahmedin) annesi İstanbula gelecek
Oysa Ahmet Ankaraya gitmiyecek (gidecek değildir)
Şu halde, Ahmedin annesi İstanbula gelecek

gibi bir (deduktif) çıkarımı göz önüne alalım. (Bundan böyle *'çıkarım'* sözcüğünü başka bir şekilde belirtilmediği hallerde yalnız *'deduktif çıkarım'* anlamında kullanacağız). Bu çıkarımda şu iki önerme geçmektedir:

(2) Ahmet Ankaraya gidecek

ve

(3) Ahmedin annesi İstanbula gelecek.

Bu iki önermenin yerini tutan veya başka bir deyimle bunları "temsil" eden 'p' ve 'q' gibi iki harf seçebiliriz. O zaman: (1) çıkarımını

(4) p veya q
oysa p değil
şu halde q

biçiminde; veya (1 . 3) uyarınca :

(5) p veya q
p değil
∴ q

biçiminde temsil edebiliriz.

İmdi (5) teki 'p' ve 'q' yerine sırasiyle

(6) Fırtına kopacak

ve

(7) Ahmet uçağa binecek

önermelerini koyalım. O zaman

(8) Fırtına kopacak veya Ahmet uçağa binecek
Fırtına kopmıyacak
∴ Ahmet uçağa binecek

gibi bir çıkarım elde ederiz. (5) deyiminde geçen 'p' ve 'q' gibi harflere (belirsiz sayıda birçok deyimi temsil ettiğinden) *"temsilci-harfler"* (veya "şematik-harfler") diyeceğiz. Her deyim-kategorisi için belli bir takım "temsilci-harfler" kullanabiliriz. 'p' ve 'q' harfleri "önerme" kategorisine

ait deyimleri temsil ettiğinden, bu gibi temsilci-harflere *"önerme-temsilcileri"* diyeceğiz. (İlerde başka deyim kategorilerine ilişkin temsilci-harflerle de karşılaşacağız).

Belli bir temsilci-harfin temsil ettiği deyimlere bu harfin *"yerine-koyma örnekleri"* (substitution instances, substituends) denir. Örneğin: herhangi bir önerme sözü geçen 'p' harfinin (önerme-temsilcisinin) bir yerine-koyma örneği sayılabildiği halde, 'Ahmet' gibi bir deyim 'p' nin bir yerine-koyma örneği değildir. Böyle bir deyim bir önerme-temsilcisinin değil, bir *"ad-temsilcisi"*nin yerine-koyma örneği olabilir.

İçinde bir veya daha çok sayıda temsilci-harfin geçtiği herhangi bir deyime bir *" ş e m a "* denir. Örneğin (4) deyimi 'p' ve 'q' gibi iki temsilci-harfi içine aldığından bir "şema"dır. Bir şemanın içinde geçen temsilci-harfleri birer yerine-koyma örneğiyle değiş-tokuş etmek suretiyle elde edilen deyimlere - her harfin şema içinde *bütün geçişlerini aynı* bir yerine-koyma örneğiyle değiş-tokuş etmek şartiyle - sözü geçen *şemanın yerine-koyma örnekleri* diyeceğiz. Örneğin: (1) çıkarımı (4) şemasının, (8) çıkarımı da (5) şemasının bir yerine-koyma örneğidir. Nitekim gerek 'p' gerek 'q' harflerinin her iki *"geçiş"*inin (occurences) aynı bir yerine-koyma örneğiyle değiş-tokuş edildiği meydandadır. Birinci çıkarımda 'p' nin her iki geçişi 'Ahmet Ankaraya gidecek' önermesiyle, 'q' nün her iki geçişi de 'Ahmedin annesi İstanbula gelecek' önermesiyle değiş-tokuş edilmiştir; ikincisinde ise 'p' nin her iki geçişi 'Fırtına kopacak' önermesiyle, 'q' nün her iki geçişi de 'Ahmet uçağa binecek' önermesiyle değiş-tokuş edilmiştir. Buna karşılık:

Fırtına kopacak veya Ahmet uçağa binecek
Fırtına kopmıyacak
. . Ahmet uçağa binmeyecek

çıkarımı (5) şemasının bir yerine-koyma örneği değildir; çünkü bu halde 'p' nin her iki geçişi 'Fırtına kopacak' önermesiyle değiş-tokuş edildiği halde, 'q' nün birinci geçişi 'Ahmet uçağa binecek' önermesiyle, ikinci geçişi ise bundan farklı olan 'Ahmet uçağa binmeyecek' önermesiyle değiş-tokuş edilmiştir.

İmdi, yerine-koyma örneklerinden (hiç olmazsa) biri bir çıkarım durumunda olan herhangi bir şemaya bir *" ç ı k a r ı m - ş e m a s ı "* denir.[1] Buna göre, (4) veya (5) deyiminin bir çıkarım-şeması olduğunu söyleyebiliriz. (5) çıkarım-şemasında bir yandan "değişken" bir anlamı olan 'p' ve 'q' gibi temsilci-harflerin, öbür yandan ise 'veya' gibi hiç bir olgusal içeriği olmıyan bir "değişmez'in (constant)" geçtiğini görüyoruz. İmdi, 'veya', 'değil', 've', 'ise', 'ancak', 'ya... ya...', 'bazı', 'bütün', 'dır', gibi

hiç bir olgusal içeriği olmıyan deyimlere *"mantıksal-değişmezler"* (logical constants), olgusal bir karşılığı olan deyimlere ise *"deskriptif"* deyimler denir. 'p' gibi bir temsilci-harfin kendisi (belli hiç bir olguyu tasvir etmediğinden) bir "deskriptif" deyim değildir. Bununla birlikte 'p' nin birer "deskriptif" deyim olduğu şüphe götürmiyen (olgusal içerikli) bir takım önermeleri ('p' nin yerine-koyma örneklerini) temsil ettiğini belirtmek gerek.

Verilen her çıkarıma karşılık birçok çıkarım-şemasının meydana getirilmesi mümkündür. Bunun için çıkarımın içinde geçen bazı deskriptif deyimleri belli birer temsilci-harfle değiş-tokuş etmemiz yeter. Ancak belli bir deskriptif deyimi belli bir önerme-temsilcisiyle değiş-tokuş ettiğimizde, bu deyimin söz konusu çıkarımın içindeki *bütün geçişlerini hep aynı temsilci-harfle değiş-tokuş* etmek gerekecektir. Örneğin: (1) çıkarımından ('Ahmet Ankaraya gidecek' yerine 'p', 'Ahmedin annesi İstanbula gelecek' yerine de 'q' koymak suretiyle) (4) veya (5) çıkarım-şemalarını elde ettiğimiz gibi; 'Ahmet Ankaraya gidecek veya annesi İstanbula gelecek' önermesi yerine 'p', 'Ahmet Ankaraya gitmiyecek' önermesi yerine 'q', 'Ahmedin annesi İstanbula gelecek' önermesi yerine de 'r' önerme-temsilcisini koyarak :

(9) p, oysa q, şu halde r

veya

(10) p, q ⊢ r

ya da

(11)
p
q
∴ r

biçimindeki bir çıkarım-şemasını elde edebiliriz. (1) çıkarımı bu çıkarım-şemalarının her birinin de bir yerine-koyma örneği durumundadır. Aynı zamanda (5) çıkarımının kendisinin de (11) çıkarım-şemasının bir yerine-koyma örneği olduğunu söyleyebiliriz. Nitekim, (11) de 'p' yerine *'p veya q'*, 'q' yerine *'p değil'*, 'r' yerine de *'q'* koymakla elde edilen deyimin (5) ten başka bir şey olmadığı meydandadır.

İmdi, herhangi bir *çıkarım-şemasının* *" g e ç e r l i "* olmasını, bütün öncülleri doğru olduğu halde sonucu yanlış olan hiç bir çıkarımın bu çıkarım-şemasının yerine-koyma örneği olmaması şeklinde tanımlıyoruz. Buna göre, herhangi bir *çıkarımın* *" g e ç e r l i "* olmasını da, bu çı-

karımın *geçerli bir çıkarım-şemasının yerine-koyma örneği olması* şeklinde tanımlıyabiliriz.[2]

Bu tanımlara dayanarak, *geçerli bir çıkarım-şemasının yerine-koyma örneği olan her çıkarımın geçerli bir çıkarım; her çıkarım-şemasının da geçerli bir çıkarım-şeması olduğunu* öne sürebiliriz. Bu iddialardan birincisi yaptığımız tanımların dolaysız bir sonucudur. İkincisini ise şöyle kanıtlayabiliriz:

$Ş_1$ ve $Ş_2$ herhangi iki çıkarım-şeması olup $Ş_2$ nin $Ş_1$ in yerine-koyma örneği olduğunu kabul edelim. O zaman $Ş_1$ in geçerli olması halinde $Ş_2$ nin de geçerli olduğunu gösterebiliriz. Nitekim $Ş_1$ in geçerli olduğunu, Ç nin bütün öncülleri doğru olmakla birlikle sonucu yanlış bir çıkarım olduğunu düşünelim. Buna göre Ç nin $Ş_1$ çıkarım-şemasının yerine-koyma örneği olmadığını söyleyebiliriz. O zaman da Ç, $Ş_2$ nin de yerine-koyma örneği olamaz; çünkü Ç çıkarımı $Ş_2$ nin çıkarım-şemasının yerine-koyma örneği olsaydı ($Ş_2$ nin kendisi $Ş_1$ in yerine-koyma örneği olmasından dolayı) $Ş_1$ çıkarım-şemasının da yerine-koyma örneği olacaktı.

Öte yandan, bir çıkarım-şemasının yerine-koyma örneği olan bir çıkarımın geçerli olmasının, bu çıkarım-şemasının kendisinin geçerli olmasını gerektirmediğini gösterebiliriz. Örneğin: (geçerli bir çıkarım olan) (1) çıkarımı (11) çıkarım-şemasının yerine-koyma örneği durumundadır.

(11) in işe geçerli bir çıkarım-şeması olmadığı meydandadır. Nitekim:

(12)
Bütün insanlar ölümlüdür
Sokrates insandır
∴ Sokrates ölümlü değildir

çıkarımı (11) in yerine-koyma örneği olduğu halde (bütün öncülleri *doğru* sonucu ise *yanlış* olduğundan) geçerli değildir. Bu ise (11) in geçerli olmadığını gösterir.

Genel olarak, verilen herhangi bir çıkarım-şemasının "*g e ç e r s i z*" olduğunu (yani geçerli olmadığını) öncülleri doğru, sonucu ise yanlış olan bir yerine-koyma örneğinin bulunması yoluyla gösterebiliriz. Böyle bir yerine-koyma örneğinin bulunamıyacağını kanıtlamak suretiyle de sözü geçen çıkarım-şemasının *geçerli* olduğunu gösterebiliriz.

§ 3. Geçerli ve Geçersiz Çıkarımlar

Klâsik mantıkta bir çıkarımın "geçerliliği", bu çıkarımın sonucunun çıkarımın öncüllerinin *"zorunlu" bir sonucu* olması; başka bir deyimle,

öncüllerin doğru olması halinde sonucun yanlış olmasının imkânsızlığı şeklinde tanımlanır. Modern mantıkta ise *"zorunluluk"* ve *"imkânsızlık"* tanımlanamıyan "ilkel-terimler" durumunda değildir. Dolayısiyle (deduktif) çıkarımların geçerliliği bu "mantıksal-kipler" (logical-modalities) araciyle tanımlanmaz; tam tersine, mantıksal-kipler çıkarımların geçerliliği yardımiyle tanımlanır. Nitekim, verilen bir çıkarımda sonucun öncüllerin *zorunlu* bir sonucu olması, sözü geçen çıkarımın *"geçerli"* olması, başka bir deyimle, geçerli bir çıkarım-şemasının bir yerine-koyma örneği olması şeklinde tanımlanır.

İmdi bir çıkarımın gerek öncüllerinin gerek sonucunun doğru olması bu çıkarımın "geçerliliği" için *ne gerekli ne de yeterli bir şarttır*. Örneğin: Ahmet herhangi bir sıradan adam olsun:

(1) Ahmet sinema yıldızı olsaydı, ünlü olurdu
Ahmet sinema yıldızı değildir
∴ Ahmet ünlü değildir

çıkarımı "geçersiz" olduğu halde, gerek öncülleri gerek sonucu doğrudur.

Öte yandan:

(2) Bütün balıklar memelidir
Bütün memeliler kanatlıdır
∴ Bütün balıklar kanatlıdır

çıkarımının hem öncülleri, hem sonucu yanlış olduğu halde, bu "geçerli" bir çıkarımdır.

(1) çıkarımının "geçersiz" olduğunu, *"aynı biçimde"* [1] olan :

(3) Einstein sinema yıldızı olsaydı, ünlü olurdu
Einstein sinema yıldızı değildir
∴ Einstein ünlü değildir

gibi bir çıkarımın öncüllerinin doğru olduğu halde, sonucunun yanlış olduğunu belirtmek suretiyle gösterebiliriz.

(2) çıkarımının "geçerli" olduğunu da, bu çıkarımın

(4) Bütün F ler G dir
Bütün G ler H dir
∴ Bütün F ler H dir

gibi "geçerli" bir çıkarım-şemasının bir "yerine-koyma örneği" olduğunu görmek suretiyle anlarız.

İmdi, (2) örneğinin gösterdiği gibi, geçerli olmakla birlikte sonucu yanlış çıkarımlar olduğundan, verilen bir önermenin doğruluğunun (deduktif yolla) belgelenmesi için, sadece verilen bir takım öncüllerin *"geçerli"* bir sonucu olduğunun gösterilmesi yetmez. (Geçerli bir çıkarımın sonucuna, *öncüllerin geçerli bir sonucu;* geçersiz bir çıkarımın sonucuna ise, *öncüllerin geçersiz bir sonucu* diyoruz). Böyle bir belgeleme için bir de "öncüller" in doğruluğunun belgelenmesi gerekir. Oysa deduktif bir çıkarımın öncüllerinin, dolaysız olarak veya induktif yolla belgelenebilen önermeler olması mümkündür. Bu bakımdan, *öncüllerin belgelenmesi* işinin genel olarak *"deduktif mantığın"* konusu dışında kaldığını, deduktif mantığın görevinin, daha önce işaret ettiğimiz gibi, sadece (deduktif) çıkarımların *geçerliliğinin* belirlenmesinden ibaret olduğunu görüyoruz.

Öte yandan, herhangi bir (deduktif) çıkarımın geçerliliğinin, bu çıkarımın geçerli bir "çıkarım-şeması"nın yerine-koyma örneği olması anlamına geldiğini; salt "mantıksal-değişmezler" ve "temsilci-harfler"den kurulu bir çıkarım-şemasında ise *olgusal* bir *içeriği* olan hiç bir deyimin ("deskriptif" deyimin) geçmediğini göz önünde tutarak; böyle bir çıkarımın her türlü *olgusal içerikten bağımsız, salt "formel"* bir çıkarım durumunda olduğunu görüyoruz. İşte deduktif mantığa *"formel mantık"* denilmesinin gerekçesi bundan ibarettir. Aynı şekilde, "deduktif çıkarım" yerine *"formel çıkarım"* da diyebiliriz.

BÖLÜM I

DİLSEL DEYİMLERİN MANTIKSAL YAPISI

§4. "Atomsal" ve "Molekülsel" Önermeler

Herhangi bir dilin önermelerini *"atomsal-önermeler"* ve *"molekülsel-önermeler"* olarak iki öbeğe ayırabiliriz. Bir *"atomsal-önerme"*,[1] içinde geçen deyimlerin hiç biri bir önerme olmıyan bir önerme; bir *"molekülsel-önerme"* ise, içinde geçen deyimlerin hiç olmazsa biri bir önerme olan bir önerme demektir. Örneğin :

(1) Ahmet Ankaraya gidecek

önermesi "atomsal";

(2) Ahmet Ankaraya gidecek veya Ali İstanbula gelecek

önermesi "molekülsel"dir. Nitekim (1) in içinde hiç bir başka önerme geçmediği halde, (2) nin içinde 'Ahmet Ankaraya gidecek' ile 'Ali İstanbula gelecek' önermeleri geçmektedir.

Herhangi bir önermenin içinde geçen bir önermeye bu önermenin bir *"bileşen"*i diyeceğiz. Buna göre "atomsal-önermeler"i hiç bir bileşeni olmıyan önermeler, "molekülsel-önermeler"i ise hiç olmazsa bir bileşeni olan önermeler şeklinde tanımlıyabiliriz. Görüldüğü gibi, (1) in hiç bir bileşeni yoktur; (2) nin ise tam iki bileşeni var. Verilen bir molekülsel önermenin bazı bileşenlerinin de "molekülsel" olması mümkündür. Ancak böyle bir bileşenin de bileşenleri olacak, bunlardan molekülsel olanların gene bileşenleri olacak... Oysa herhangi bir önerme *sonlu* sayıda harf veya işaretten kuruludur. Şu halde, herhangi bir önermenin bileşenlerine ayrılması işleminin sonlu sayıda adımdan sonra durması gerekecektir. Buna göre, her molekülsel-önermenin önünde sonunda belli sayıdaki "atomsal-önermeler"e bölünebileceğini görüyoruz. İşte herhangi bir önermenin içinde geçen atomsal önermelere bu önermenin "bölünmez-bileşenler"i veya

*"atomsal-bileşenler"*i diyeceğiz. Örneğin: (2) önermesinin "atomsal-bileşenler"i 'Ahmet Ankaraya gidecek' ile 'Ali İstanbula gelecek' önermelerinden ibarettir.

İmdi :

(3) Ahmet Ankaraya gitmiyecek

türünden bir önermeyi göz önüne alarak, böyle bir önermenin "atomsal" mı, yoksa "molekülsel" mi olduğunu araştıralım. Görünüşte böyle bir önermenin içinde başka hiç bir önerme (hiç bir "bileşen") geçmediğinden, *"atomsal"* sayılması gerekir. Ancak böyle bir önermenin mantıkça 'Ahmet Ankaraya gidecek' önermesinin *hayırlanması* (negation) anlamına geldiğini göz önünde tutarak, onu

(4) (Ahmet Ankaraya gidecek) değil

biçiminde yorumlamak isteriz. (4) önermesi ise, 'Ahmet Ankaraya gidecek' gibi bir bileşeni olduğundan, açıkça "molekülsel"dir. Ancak (3) ile (4) ün "anlamdaş" olmakla birlikte, aynı "önermeler" (yani aynı "bildirsel-cümleler") olmadığı meydandadır. Bu bakımdan (4) ün molekülsel olması, (3) ün de molekülsel olmasını ilkece gerektirmez. Böylece, sözü geçen tanımımız gereği (3) ü "atomsal", (4) ü ise "molekülsel" saymamız gerekir; dolayısiyle böyle bir ayrımın "mantık" açısından elverişsiz, hattâ zararlı olduğunu kabul etmek zorunda kalırız. İşte bu durumu göz önünde tutarak 'atomsal' ve 'molekülsel' terimlerinin tanımını şu şekilde değiştireceğiz:

Ö gibi herhangi bir önermenin *"atomsal"* olması, bu önermenin "mantıksal-yapısı"nı yansıtan Ö′ gibi bir önermenin içinde başka hiç bir önermenin (bileşenin) geçmemesi; Ö nün *"molekülsel"* olması ise, sözü geçen Ö′ önermesinin içinde başka bir önermenin (bileşenin) geçmesi demektir.

Örneğin: (3) önermesinin *"molekülsel"* olduğunu, bu önermenin "mantıksal-yapısını" yansıtan (4) önermesinin bileşenleri bulunması şeklinde tesbit edebiliriz. Buna karşılık, 'Ahmet Ankaraya gitti' türünden bir önermenin *"atomsal"* olduğunu, bir yandan bu önermenin mantıksal-yapısının doğrudan doğruya kendisi tarafından yansıtıldığına, öte yandan ise önermenin içinde hiç bir bileşenin geçmediğine işaret etmek suretiyle gösterebiliriz.

İmdi Ö gibi belli bir önermenin *"mantıksal-yapısı"*nın Ö′ gibi bir önerme tarafından *"yansıtılması"*nın (Ö′ önermesi Ö den farklı olabildiği gibi, onunla özdeş de olabilir!) hiç bir şekilde *mutlak* bir anlamı *olmadı-*

ğını belirtmek gerek. Nitekim Ö önermesinin mantıksal-yapısı, belli bir sistem açısından, Ö′ gibi bir önerme tarafından yansıtıldığı halde, başka bir sistem açısından, Ö′ den çok farklı olan Ö″ gibi başka bir önerme tarafından yansıtılabilir. İşte modern düşünüş açısından, belli bir *"mantık teorisi"* bir yandan daha önce belirttiğimiz şekilde "çıkarımların geçerliliğini" belirlemeğe yarayan bir metod olduğu gibi; öbür yandan günlük dile veya çeşitli bilim dillerine ait önermelerin "mantıksal-yapısını yansıtan" önermelere çevrilmesini sağlayan bir metod durumundadır. Başka bir deyimle, Ö′ gibi bir önermenin verilen bir Ö önermesinin *mantıksal-yapısını yansıtması*, başvurulan mantık teorisi uyarınca, Ö önermesinin *"standart"* veya *"kanunsal"* (canonical) karşılığının sözü geçen Ö′ önermesi olmasından başka bir şey değildir. Böylece mantığın "çıkarımların geçerliliğini" tesbit etme görevi yanısıra, bir de günlük dile veya bilim dillerine ait önermeleri "standart" biçime dönüştürme veya *"açımlama"* (paraphrase) görevi olduğunu görüyoruz. İşte herhangi bir önermenin *"mantıksal-yapısı"*, bu önermenin "standart" veya "kanunsal açımlama"sının yapısı demektir. Bu bakımdan, bir önermenin *"gerçek" mantıksal-yapısından* söz edilmesinin kökçe mânasız olduğunu görüyoruz. ("Mantıksal görecilik"!) [2]

Örneğin: 'Ahmet Ankaraya gidecek' önermesiyle bu önermenin hayırlanmasını göz önüne alalım. Bu önermelerin mantıksal-yapısı *klâsik mantık* teorisi açısından, sırasiyle:

(5) Ahmet Ankaraya gidecek olan (bir kimse) dir

ve

(6) Ahmet Ankaraya gidecek olan (bir kimse) değildir

önermeleri yardımiyle dile getirilmelidir. Böyle bir görüş uyarınca gerek (5) gerek (6) *"atomsal"*dır. Nitekim (6) da geçen *'değildir'* deyimi, (5) te geçen *'dir'* deyimi gibi bir *"koşaç"* (copula) sayılmaktadır. Buna göre, klâsik mantık açısından sözü geçen (3) önermesinin "molekülsel" değil, "atomsal" sayılması gerekecektir.

Öte yandan *J. S. Mill*'e göre, gerek 'Ahmet Ankaraya gidecek' önermesi gerek bunun hayırlanması olan (3) önermesi olduğu gibi kendi mantıksal-yapısını yansıtmaktadır. Ancak Mill, klâsik mantıkçılar gibi, "hayırlama"yı bir "koşaç" saydığından, (3) önermesinin onun görüşü uyarınca da "atomsal" sayılması gerekir. [3]

Modern mantık açısından ise "hayırlama" bir koşaç sayılmadığından, (3) önermesinin mantıksal yapısı ("bölünmemiş önermeler mantığı" çerçevesinde) (4) veya

(7) değil (Ahmet Ankaraya gidecek)

gibi bir önerme araciyle dile getirilmelidir. Bu halde ise (3) ün atomsal değil, molekülsel olduğu meydandadır.

Bu üç ayrı, hattâ birbiriyle bağdaşmaz olan görüşten hangisinin "doğru" olduğunun sorulması mânasız olmakla birlikte, hangisinin (bilgi üretimi için *elverişliliği* bakımından) daha *"üstün"* olduğunun sorulması hiç de mânasız değildir. İşte bu bakımdan üçüncü görüşün, yani *modern mantık* görüşünün ötekilerinden üstün olduğu söylenebilir. Ancak böyle bir "üstünlüğün" gösterilmesi için (3) ün (7) biçiminde yorumlanması gibi tek tek özel sonuçlarını değil de, "sistem" olarak başarılarının tümünü öteki görüşlerin başarılariyle karşılaştırmak gerekir.

§ 5. Bölünmemiş Önermelerden Kurulu Çıkarımlar

(1) Fırtına kopacak veya uçağa bineceğim
Fırtına kopmıyacak
∴ Uçağa bineceğim

gibi bir çıkarımı göz önüne alalım. Bu çıkarımda geçen *atomsal-önermeler:*

(2) Fırtına kopacak

ile

(3) Uçağa bineceğim

önermelerinden ibarettir. İmdi böyle bir çıkarımın geçerliliğinin, içinde geçen *atomsal-önermelerin "iç-yapısı"na* (internal structure) hiç bir şekilde *bağlı* olmadığını gösterebiliriz. Nitekim, (2) önermesi yerine 'p' gibi bir önerme-temsilcisini, (3) önermesi yerine de 'q' gibi bir önerme-temsilcisini koymakla elde edilen

(4) p veya q
p değil
∴ q

şemasını göz önüne alalım. Bu şema, ilerde kanıtlıyacağımız gibi, *"geçerli"* bir *çıkarım-şeması* olduğundan, (4) ün bir *yerine-koyma örneği* durumunda olan (1) çıkarımının da "geçerli" olduğunu söyleyebiliriz. Görüldüğü gibi, (1) in geçerliliğini kanıtlamak için, bir yandan bu çıkarımın (4) gibi bir çıkarım-şemasının bir yerine-koyma örneği olduğunu, öbür yandan da (4) ün geçerli bir çıkarım-şeması olduğunu kanıtlamak yetiyor. Oysa (4) çıkarım-şemasında (2) ile (3) atomsal-önermeleri geçmediği gibi, bu şemanın geçerliliğinin kanıtlanması için bu atomsal-önermelerin iç yapısının hesaba katılması hiç de gerekmiyor. (İ.K. [1])

İşte (1) gibi, geçerli olup olmaması, içinde geçen atomsal-önermelerin iç-yapısına bağlı olmıyan çıkarımlara *"bölünmeyen önermelerden kurulu çıkarımlar"*, yalnız bu türlü çıkarımları inceleyen mantık dalına da *"bölünmemiş önermeler mantığı"* veya kısaca *"önermeler mantığı"* diyeceğiz. (Söz konusu *"bölünmemiş önermeler"*, içinde geçtiği çıkarımların geçerliliği bakımından iç-yapısının hiç bir etkisi olmıyan "atomsal-önermeler"den başka bir şey değildir).

İmdi, bütün çıkarımların bu çeşitten olmadığını, dolayısiyle "bölünmemiş önermeler mantığı"nın mantığın tümünü tüketmediğini şöyle bir örnekle gösterebiliriz:

(5) Bütün insanlar ölümlüdür
Sokrates insandır
∴ Sokrates ölümlüdür

önermesinin gerek öncülleri gerek sonucu birer "atomsal-önerme" durumundadır. Oysa geçerli bir çıkarım olan (5) in geçerliliği bu "atomsal önermeler"in "iç-yapısı"na bağlıdır. Nitekim (1) çıkarımı halinde yaptığımız gibi, (5) çıkarımının içinde geçen atomsal önermelerin yerine ayrı önerme-temsilcileri (söz gelişi 'p', 'q' ve 'r' olsun) koymak suretiyle elde edilen :

(6) p
q
∴ r

çıkarım-şemasının *"geçersiz"* olduğunu görüyoruz. Şu halde (5) in "bölünmemiş önermelerden kurulu bir çıkarım" *olmadığını*, dolayısiyle "önermeler mantığı" *konusunun dışında* kaldığını kabul etmemiz gerekir.

İşte bu Bölümde "bölünmeyen önermelerden kurulu çıkarımlar"ı inceleyeceğiz. Bu bakımdan *atomsal-önermelerin iç-yapısını* bir yana bırakarak bu önermeleri *"bölünmeyen bütünler"* şeklinde yorumlıyacağız. Bunların iç-yapısını ise ancak mantığın öteki dallarıyla ilgili sonraki Bölümlerde inceleyeceğiz.

Şimdi "bölünmeyen önermelerden kurulu çıkarımlar"ın mantıksal-yapısını daha yakından inceleyelim. Herhangi bir çıkarımın gerek öncüllerine gerekse sonucuna bu çıkarımın "üyeler"i diyelim. O zaman "bölünmeyen önermelerden kurulu her geçerli çıkarım"ın üyelerinden hiç olmazsa birisinin *"molekülsel"* olması gerektiğini söyleyebiliriz. Nitekim bütün üyeleri "atomsal" olan bir çıkarım

(7)
$$\begin{array}{l} Ö_1 \\ Ö_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Ö_n \\ \therefore Ö \end{array}$$

biçiminde olduğundan; böyle bir çıkarımın üyeleri olan $Ö_1$, $Ö_2$, ..., $Ö_n$, Ö önermelerinden her birinin "atomsal" olması halinde, çıkarımda geçen atomsal-önermelerin yerine 'p_1', 'p_2', 'p_n', 'q' gibi n + 1 tane ayrı önerme-temsilcisinin konulması sonucunda elde edilen:

(8)
$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_n \\ \therefore q \end{array}$$

çıkarım-şemasının "geçersiz" olduğunu görüyoruz. (İ.K.)

İmdi "bölünmeyen önermelerden kurulu" herhangi bir çıkarımı göz önüne alarak; çıkarımın içinde geçen atomsal-önermeler yerine belli önerme-temsilcileri koyalım; öyle ki:

(a) *Aynı* atomsal-önermelerin çıkarımın içindeki ayrı geçişleri için *aynı* önerme-temsilcileri seçilsin;

(b) *Ayrı* atomsal-önermelerin çıkarımın içindeki ayrı geçişleri için *ayrı* önerme-temsilcileri seçilsin.

Bu şekilde elde edilen çıkarım-şemasına sözü geçen *çıkarımın "temsilci-şema"sı* diyeceğiz. Buna göre, bölünmeyen önermelerden kurulu herhangi bir çıkarımın "temsilci-şeması", bu çıkarımdan (a) ve (b) şartlarını yerine getirecek şekilde türetilen "çıkarım-şeması demektir. Her çıkarımın, karşılığı olan temsilci-şemanın bir yerine-koyma örneği olduğu meydandadır. Buna karşılık, her çıkarım-şeması bütün yerine-koyma örneklerinin "temsilci-şeması" değildir. Genel olarak salt mantıksal-değişmezlerle önerme-temsilcilerinden kurulu bir çıkarım-şeması, şu şartları yerine getiren yerine-koyma örneklerinin temsilci-şeması olur:

(i) Çıkarım-şemasının içinde geçen her önerme-temsilcisinin yerine bir atomsal-önerme konulmalı;

(ii) *Ayrı* önerme-temsilcilerinin yerine *ayrı* atomsal-önermeler konulmalı.

Örneğin: (1) çıkarımının karşılığı olan "temsilci-şema" (4) çıkarım şemasıdır. Görüldüğü gibi, (4) çıkarım-şeması (1) çıkarımından (a) ve (b) şartlarını yerine getirecek şekilde elde edilebilir. Öte yandan, (1) çıkarımının (4) çıkarımının (i) ve (ii) şartlarını yerine getiren bir yerine-koyma örneği durumunda olduğunu da görüyoruz.

İmdi, bölünmeyen önermelerden kurulu herhangi bir çıkarımın *"geçerliliğinin" gerekli ve yeterli şartı,* bu çıkarımın karşılığı olan "temsilci-şemanın" geçerli olmasından ibarettir. Bunu şöyle kanıtlıyabiliriz:

1— *Şart yeterlidir,* yani temsilci-şemasının geçerli olması halinde çıkarımın kendisi de geçerli olur:

Nitekim çıkarım kendi temsilci-şemasının bir yerine-koyma örneğidir. Şu halde temsilci-şemanın geçerli bir çıkarım-şeması olması halinde, bunun bir yerine koyma örneği durumunda olan söz konusu çıkarımın da geçerli olması gerekecektir. (İ.K.)

2— *Şart gereklidir,* yani çıkarımın geçerli olması halinde temsilci-şeması da geçerli bir çıkarım-şeması olur:

Nitekim Ç bölünmeyen önermelerden kurulu herhangi bir çıkarım, T de Ç çıkarımının temsilci-şeması olsun. Ç nin geçerli bir çıkarım olduğunu kabul edelim. Dolayısiyle Ç nin bir yerine-koyma örneği olduğu Ş gibi bir geçerli çıkarım-şemasının bulunması gerekecektir. Ç nin geçerliliği, içinde geçen atomsal-önermelerin iç-yapısından bağımsız olduğundan, Ş çıkarım-şemasının salt mantıksal-değişmezlerle önerme-temsilcilerinden kurulu olduğunu kabul edebiliriz. O zaman da T çıkarım-şemasının Ş çıkarım-şemasının bir yerine-koyma örneği olması gerekir. Nitekim Ç nin bir yerine-koyma örneği olduğu bu çeşit çıkarım-şemalarının her biri, Ç nin içinde geçen bazı önermelerin yerine önerme-temsilcilerinin konulmasiyle elde edilebilir. T çıkarım-şeması ise bu şekilde elde edilen çıkarım-şemalarından her birinin bir yerine-koyma örneği durumundadır. Buna göre, T nin sözü geçen geçerli Ş çıkarım-şemasının da bir yerine-koyma örneği olması gerektiği, dolayısiyle T nin de geçerli olduğu sonucuna varmış oluruz. (İ.K.)

İmdi, temsilci-şeması aynı olan (bölünmeyen önermelerden kurulu) çıkarımların *aynı biçimde* olduğunu söyleyebiliriz. Buna göre, (bölünmeyen önermelerden kurulu) herhangi bir çıkarımın *"geçersiz"* olduğu, öncülleri doğru, sonucu ise yanlış olan aynı biçimde bir çıkarımın gösterilmesi ile bir hamlede kanıtlanabilir. Örneğin:

(9) $2 = 2$ veya $3 = 3$
$2 = 2$
$\therefore 3 = 3$

çıkarımının, gerek öncülleri gerek sonucu doğru olmakla birlikte, "geçersiz" olduğunu; bu çıkarım ile *aynı biçimde* olan:

(10) Bütün insanlar ölümlüdür veya Sokrates ölümlü değildir
Bütün insanlar ölümlüdür
$\therefore$ Sokrates ölümlü değildir

çıkarımının, öncüllerinin doğru, sonucunun ise yanlış olmasından dolayı, *geçersiz* bir çıkarım olduğunu belirtmek suretiyle kanıtlıyabiliriz.

(9) ile (10) çıkarımlarının "aynı biçimde" olduğunu, her ikisinin karşılığı olan "temsilci-şema"nın :

(11) p veya q
p
$\therefore$ q

çıkarım-şemasından ibaret olmasından anlarız. ((11) çıkarım-şemasının ise "geçersiz" olduğu, (10) gibi açıkça geçersiz bir yerine koyma örneği bulunmasından anlaşılır.).

Bu durumu göz önünde tutarak, "bölünmemiş önermeler mantığı" çerçevesinde herhangi bir çıkarımın *"mantıksal-yapısı"*nın bu çıkarımın karşılığı olan temsilci-şema tarafından dile getirildiğini söyleyebiliriz. Buna göre, (4) çıkarım-şemasının (1) çıkarımının; (11) in ise (9) veya (10) çıkarımının mantıksal-yapısını dile getirdiğini görüyoruz.

Öte yandan "önermeler"in mantıksal-yapısını, bunların içinde geçen "deskriptif" deyimlerin yerine "temsilci-harfler" koyarak dile getirebiliriz. Önermeler mantığında, önermelerin mantıksal-yapısını "bölünmeyen önermelerden kurulu çıkarımlar"daki görevi açısından belirtmek için, (çıkarımlar halinde yapıldığı gibi) her atomsal-önermenin yerine, sözü geçen (a) ve (b) şartlarını yerine getirecek şekilde, belli bir önerme-temsilcisinin konulması gerekir. Böylece elde edilen deyimlere *"önerme-şemaları"* diyeceğiz. "Önerme-şemaları"nı genel bir şekilde, içinde bir takım

"temsilci-harfler" geçen ve bu harflerin yerine uygun "değişmezler"in konulması (yani uygun bir şekilde "yorumlanması") halinde birer "önerme" biçimine dönen deyimler olarak tanımlıyabiliriz. Temsilci-harfleri belli bir takım "değişmezler" le "yorumlıyacak" yerde, bunların yerine, içlerinde gene temsilci-harfler geçen deyimler koyabiliriz. Aynı temsilci-harflerin ayrı geçişleri için aynı deyimin konulması şartiyle her iki halde de elde edilen deyimlere, söz konusu *önerme-şemasının "yerine-koyma örnekleri"* diyeceğiz. Örneğin:

(11) p veya q

deyimi bir "önerme-şeması"dır. 'p' yerine 'bütün insanlar ölümlüdür' 'q' yerine de 'Sokrates ölümlü değildir' önermesinin konulmasiyle elde edilen

(12) Bütün insanlar ölümlüdür veya Sokrates ölümlü değildir

önermesi (11) önerme-şemasının bir yerine-koyma örneğidir. Öte yandan,

(11) de 'q' nün yerine 'p' deyiminin konulmasiyle elde edilen

(13) p veya p

önerme-şemasını da (11) önerme-şemasının bir yerine-koyma şeması saymamız gerekir.

İmdi her çıkarım bir takım "önermeler"den (öncüllerle sonuçtan) meydana geldiği gibi, her "çıkarım-şeması" bir takım "önerme-şemaları"ndan meydana gelir. Öncüllerden türetilen önerme-şemalarına *"öncül-şemaları"*, sonuçlardan türetilen önerme-şemalarına *"sonuç-şemaları"*, herhangi bir çıkarım-şemasının öncül-şemaları ile sonuç-şemasına da bu çıkarım-şemasının *"üyeleri"* diyeceğiz. Örneğin: (11) çıkarım-şemasının üyeleri 'p veya q' ve 'p' öncül-şemalariyle 'q' sonuç-şemasından ibarettir.

Önermeler mantığı çerçevesinde her önerme-şeması salt mantıksal-değişmezler ile önerme-temsilcilerinden kuruludur. İmdi bölünmeyen önermelerden kurulu her *çıkarımın* karşılığı olan ve onun "mantıksal-yapısı"nı dile getiren bir *"temsilci-şema"*yı belirleyebildiğimiz gibi, (önermeler mantığında) her *önermenin* "mantıksal-yapısı"nı dile getiren bir *"temsilci-şemayı"* da belirleyebiliriz. İşte verilen bir önermenin *"temsilci-şema"*sını, bu önermenin içinde geçen bütün atomsal-önermelerden, (çıkarımlar halinde sözü geçen) (a) ve (b) şartlarını yerine getirecek şekilde önerme-temsilcileri koymak suretiyle, elde edilen önerme-şeması şeklinde tanımlıyoruz. Herhangi bir önermenin "temsilci-şeması", bu önermenin bir yerine-koyma örneği olduğu her önerme-şemasının bir yerine-koyma örneğidir. Örneğin: (12) önermesinin "temsilci-şeması" olan (11) önerme-

şemasını göz önüne alalım. (12) önermesi 'r' gibi bir "önerme-şemasının (tek harfli şema!) bir yerine-koyma örneğidir. (11) önerme-şeması ise 'r' nin bir yerine-koyma örneğidir. Daha iyi bir örnek olarak :

(14) A veya B ise, C

biçimindeki bir önermeyi [2] göz önüne alalım. (14) önermesinin "temsilci-şeması

(15) p veya q ise, r

biçimindedir. İmdi (14) önermesi (15) önerme-şemasının bir yerine-koyma örneği olduğu gibi :

(16) p ise, q

gibi bir önerme-şemasının da bir yerine-koyma örneği durumundadır. (Nitekim, (16) da 'p' yerine 'A veya B', 'q' yerine de 'C' koymakla (14) elde edilir). İşte (14) ün temsilci-şeması olan (15) önerme-şeması sözü geçen (16) önerme-şemasının bir yerine-koyma örneğidir. Nitekim, (16) da 'p' nin yerine 'p veya q', 'q' nün yerine de 'r' koymak suretiyle (15) in elde edilebileceği meydandadır.

Önermeler mantığı çerçevesinde bütün önerme-şemalarını iki öbeğe ayırabiliriz: Bir yandan atomsal-önermelerin "temsilci-şeması" durumunda olan "atomsal önerme-şemaları", öbür yandan da molekülsel-önermelerin 'temsilci-şemaları" durumunda olan "molekülsel önerme-şemaları". Her atomsal önerme-şeması bir tek önerme-temsilcisinden ibaret olduğu halde, her molekülsel önerme-şemasının içinde en az bir önerme-temsilcisi ile en az bir mantıksal-değişmezin geçmesi gerekir. Örneğin: 'p' harfi tek başına bir "atomsal önerme-şeması", 'p' ve 'q' harfleriyle 'veya' mantıksal değişmezinden kurulu 'p veya q' deyimi bir "molekülsel önerme-şeması"dır.

§ 6. Doğruluk Fonksiyonları

(1) Ahmet Ankaraya gitmiyecek

ile

(2) Ahmet Ankaraya gidebilir

önermelerini göz önüne alalım. §4'te belirttiğimiz gibi, (1) in "mantıksal-yapısı"

(3) (Ahmet Ankaraya gidecek) değil

biçimindeki bir önerme ile dile getirilmelidir. Öte yandan bir "kip-önermesi" (modal statement) olan (2) nin mantıksal-yapısı :

(4) Ahmedin Ankaraya gitmesi mümkün

biçimindeki bir önerme yardımiyle dile getirilmelidir.

İmdi, herhangi bir önermenin mantıksal-yapısını dile getiren *"temsilci-şema"*nın bu önermenin doğrudan doğruya kendisinden değil de, mantıksal-yapısını dile getiren karşılığından türetilen önerme-şeması olduğu meydandadır. Buna göre, (1) önermesinin "temsilci-şeması"nın

(5) p değil

veya

(6) p olduğu yanlıştır

biçiminde olduğunu görüyoruz. 'p' harfi burada (1) önermesinin bir "bileşen"i saydığımız :

(7) Ahmet Ankaraya gidecek

önermesinin yerine konulmuştur.

Aynı şekilde (2) önermesinin "temsilci-şeması" olarak

(8) p mümkün

önerme-şemasını seçebiliriz.

İmdi, (3) önermesinin "doğruluk-değeri"nin (yani "doğru" veya "yanlış" olmasının) sadece "bileşen"i olan (7) önermesinin doğruluk-değerine bağlı olduğunu gösterebiliriz. Nitekim (7) nin *"doğru"* olması, yani Ahmedin gerçekten de Ankaraya gitmesi halinde (3) ün *"yanlış"* olacağı; (7) nin *"yanlış"* olması (yani gerçekte Ahmedin Ankaraya gitmemesi) halinde (4) ün *"doğru"* olacağı meydandadır. Genel olarak (5) önerme-şemasının yerine-koyma örneği durumunda olan her önermenin "doğruluk-değeri"nin sadece içinde geçen bileşenin (yani 'p' yi yorumlıyan önermenin) "doğruluk-değeri" ne bağlı olduğunu söyleyebiliriz. Gerçekten de 'p' nin yerine "doğru" bir önerme konulursa, *'p değil'* deyimi "yanlış" bir önerme; 'p' nin yerine "yanlış" bir önerme konulursa 'p değil' deyimi "doğru" bir önerme olur. Örneğin:

(9) $2 < 3$

önermesi "doğru" olduğundan,

(10) $(2 < 3)$ değil

önermesinin "yanlış" olduğunu görüyoruz.

Öte yandan (4) önermesiyle, genel olarak (8) önerme-şemasının yerine-koyma örnekleri olan önermeler için durum aynı değildir. Nitekim

(4) önermesinin "doğruluk-değeri" ('mümkün' sözcüğünün "mantıkça-mümkün" şeklinde yorumlanması şartiyle) hiç de bileşeni olan (7) önermesinin doğruluk-değerine bağlı değildir. (7) ister "doğru", ister "yanlış" olsun, Ahmedin Ankaraya gidip gitmemesi "raslantısal" (contingent) bir olgudan ibaret olduğundan, (4) "doğru"dur. (Ahmedin gerçekte Ankaraya gitmemesi halinde bile gene de gitmesi "mantıkça imkânsız" değildir!) Görüldüğü gibi, (4) önermesinin doğruluk-değerinin belirlenmesi için sadece (7) önermesinin doğruluk-değerinin bilinmesi yetmemektedir. Gerçi (7) nin "doğru" olması halinde (4) ün de "doğru" olduğunu söyleyebiliriz, ama (7) nin "yanlış" olması halinde (4) ün doğru mu, yanlış mı olduğunu başka bilgilere başvurmadan söylememiz imkânsızdır. ((4) ün bu halde de "doğru" olduğunu sözü geçen (7) önermesinin "raslantısal" lığına dayanarak öne sürdük).

Buna karşılık, (8) önerme-şemasında 'p' yerine mantıkça imkânsız bir durumu dile getiren :

(11) $3 < 2$

gibi bir önermenin konulmasiyle elde edilen :

(12) $3 < 2$ mümkün

önermesinin *"yanlış"* olduğunu görüyoruz. (3 sayısının 2 sayısından küçük olması mümkün değildir!) (12) önermesinin "yanlış" olduğunu sadece bileşeni olan (11) önermesinin yanlış olmasına davanarak değil, bir de "imkânsız" olmasına dayanarak öne sürebiliyoruz.

Doğruluk-değeri aynı olan önermelere *"eşdeğer" (equivalent)* diyelim. İmdi, (5) önerme-şemasında 'p' yerine eşdeğer önermeler koymak suretiyle elde edilen önermelerin ("yerine-koyma örnekleri"nin) her zaman "eşdeğer" olduğu halde; (8) önerme-şemasında 'p' yerine eşdeğer önermeler koyarak elde edilen önermelerin bazan *eşdeğer olmadığını* gösterebiliriz. Nitekim, 'p' nin yerine *"doğru"* bir önerme konulduğunda 'p değil' deyiminin her zaman "yanlış" bir önerme biçimine; 'p' nin yerine *"yanlış"* bir önermenin konulması halinde de *"doğru"* bir önerme biçimine girdiğini belirtmiştik. 'p mümkün' önerme-şemasına gelince: (7) önermesinin "yanlış" olduğunu kabul edelim. O zaman 'p mümkün' önerme-şemasında 'p' nin yerine (7) nin konulmasiyle elde edilen (4) önermesi "doğru" olur. İmdi, bu halde (7) önermesi ile (11) önermesi - *ikisi de "yanlış"* olduğundan - *"eşdeğer" önermeler* durumundadır. Oysa, *"doğru"* olan (4) önermesinde (7) bileşeninin yerine (11) önermesinin konulmasiyle elde edilen (12) önermesi *"yanlış"*tır. (İ.K.)

İmdi, *doğruluk-değeri salt bileşenlerinin doğruluk-değerine bağlı olup*

bileşenlerin yerine "eşdeğer" önermelerin konulması sonucunda değişmiyen önermelere "doğruluk-fonksiyonları" (truth functions) *denir*. Bu türlü önermelerin "temsilci"si olan "önerme-şemaları"na da *"doğruluk-fonksiyonu şemaları"* (truth functional schemata) diyeceğiz. Buna göre, (3) önermesinin bir "doğruluk-fonksiyonu", (5) önerme-şemasının da bir "doğruluk-fonksiyonu şeması" olduğunu görüyoruz. Buna karşılık, (4) bir doğruluk-fonksiyonu olmadığı gibi, (8) de bir doğruluk-fonksiyonu şeması değildir.

Doğruluk-fonksiyonlarını atomsal-bileşenlerinin sayısına bakarak "1-li" (yani 1 bileşenli), "2-li" (yani 2 bileşenli), ..., "n-li" (yani n bileşenli) ... doğruluk-fonksiyonlarına ayırabiliriz. Örneğin: (3) önermesi (yalnız bir tek atomsal bileşeni olduğundan) bir "1-li doğruluk-fonksiyonu", (5) önerme-şeması da bir "1-li doğruluk-fonksiyonu şeması"dır.

İndi, sözü geçen (3), (4), (5) ve (8) örneklerinin gösterdiği gibi, bölünmemiş önermeler mantığının konusuna giren önermelerle önerme-şemalarının bazıları "doğruluk-fonksiyonu" durumundadır, bazıları değildir. Böylece bölünmemiş önermeler mantığını, incelenen molekülsel önermelerin ve önerme-şemalarının "doğruluk-fonksiyonu" durumunda olup olmamasına bakarak, iki ayrı kola ayırabiliriz. Bu kollardan birincisine *"doğruluk-fonksiyonları teorisi"* diyeceğiz. İkinci kolun ise *"kip-önermeleri"* (modal statements), *"dilek-şart önermeleri"* (subjunctive conditionals) ve *"yargısal-tavır* (propositional attitudes) [1] *önermeleri"* gibi pek çeşitli konularla ilgili olduğunu söyleyebiliriz.

"Doğruluk-fonksiyonları teorisi" modern mantığın en çok işlenmiş bir dalı olup matematiksel bir yetkinliğe erişmiş olduğu halde, doğruluk-fonksiyonu olmıyan önermelerin teorisinin bugün bile karanlıklara bürünmüş olduğunu ve şiddetli tartışmalara yol açtığını gözlemekteyiz. Bu konuda son onyıllarda en iyi işlenmiş olan "mantıksal-kipler teorisi" bile tam bir aydınlığa kavuşmaktan uzaktır. Hattâ böyle bir teorinin imkânsız veya mânasız olduğunu öne süren (*Quine* gibi) ünlü mantıkçıların da bulunduğuna işaret etmeliyiz. Bu durumu göz önünde tutarak, yalnız "doğruluk-fonksiyonları teorisi"ni incelemekle yetineceğiz. [2] Aslında bu teori bütün mantığın belkemiğini teşkil etmektedir. Üstelik, modern mantıkta doğruluk-fonksiyonu olmıyan önermeleri önünde sonunda doğruluk-fonksiyonlarına geri götürme eğilimi olduğunu ("kaplamsallık tezi" - extensionality thesis -) da belirtmek gerek. [3] "Mantıksal-kipler" için böyle bir geri götürmenin bugün bile mümkün olduğunu söyleyebiliriz (Bk. § 3.). Bundan böyle *'önermeler mantığı'* deyimini (başka şekilde belirtilmediği hallerde) dar mânada yalnız *"doğruluk-fonksiyonları teorisi"* anlamında kullanacağız.

B ö l ü m II.

ÖNERME-EKLEMLERİ VE DOĞRULUK-ÇİZELGELERİ

§ 7. H a y ı r l a m a , B i r l i k t e - E v e t l e m e v e A y r ı k l ı k

Önermeler Mantığında çıkarımların geçerliliğinin salt üyeleri olan molekülsel-önermelerin mantıksal-yapısına bağlı olduğunu söyleyebiliriz. Buna göre, bu türlü çıkarımların geçerlilik-ayraçlarının belirlenmesi için, molekülsel-önermelerin mantıksal değişmezlerle atomsal-önermelerden ne şekilde kurulu olduğunu yakından incelememiz gerekecektir. İmdi günlük dilde iki veya daha çok sayıda basit önermeden bir takım "bağlaç"lar yardımiyle bileşik önermelerin kurulması mümkündür. Örneğin :

(1) Ahmet Ankaraya gidecek ve Ali İstanbula gelecek

(2) Ahmet Ankaraya gidecek veya Ali İstanbula gelecek

önermelerini göz önüne alalım. (1) önermesi :

(3) Ahmet Ankaraya gidecek

ile

(4) Ali İstanbula gelecek

basit önermelerinden *'ve'* bağlacı yardımiyle meydana gelmiş bir bileşik önermedir. (2) ise (3) ile (4) ten *'veya'* bağlacı yardımiyle meydana gelmiştir.

Şimdi (1) gibi bir önermenin önermeler mantığı açısından mantıksal-yapısını inceleyelim. İmdi (1) önermesi (3) ve (4) *atomsal-bileşenlerinden* kurulu bir *"molekülsel-önerme"* durumundadır. Buna göre, (3) yerine 'p', (4) yerine de 'q' gibi bir önerme-temsilcisini koyarak, (1) önermesinin mantıksal-yapısını dile getiren "önerme-şeması"nın (yani (1) önermesinin "temsilci"sinin) :

(5) p ve q

olduğu anlaşılır. (5) çıkarım-şemasında bir tek *"mantıksal-değişmez"*in geçtiğini, bunun da *'ve'* bağlacından ibaret olduğunu görüyoruz.

Aynı şekilde (2) önermesi de (3) ve (4) atomsal-bileşenlerinden kurulu bir "molekülsel-önerme" durumundadır. (2) önermesinin temsilcisi olan çıkarım-şeması ise:

(6) *p veya q*

biçimindedir. Bu şemada da bir tek "mantıksal-değişmez"in geçtiğini görüyoruz. Ancak bu mantıksal-değişmez (5) te olduğu gibi 've' bağlacından değil, *'veya'* bağlacından ibarettir.

Öte yandan (6-1) (yani § 6 da sözü edilen (1)) gibi bir önermeyi de -(6-3) biçiminde yorumlamak şartiyle- *"bileşik"* saymalıyız. Ancak, (6-1) in içinde iki değil, *yalnız bir tek "basit" önerme* geçtiğini, böyle bir bileşik önermenin "mantıksal-değişmez"i durumunda olan *'değil'* sözcüğünün de bir *"bağlaç"* olmadığını belirtmek gerek.

Genel olarak, bir veya daha çok sayıda "atomsal-önerme"den kurulu herhangi bir *"molekülsel-önerme"*de geçip söz konusu atomsal-önermeleri birbirine "eklemeğe" yarayan mantıksal-değişmezlere *" ö n e r m e - e k l e m l e r i "* (connectives, connectors) diyeceğiz. Önerme-eklemlerini, birbirine ekledikleri önermelerin sayısına bakarak, "1-li", "2-li", ..., "n-li", ... önerme-eklemlerine ayırabiliriz. Buna göre, *'değil'* sözcüğünün bir *"1-li önerme-eklemi"*, *'ve'* ile *'veya'* sözcüklerinin ise birer *"2-li önerme-eklemi"* olduğunu görüyoruz. İmdi 've' veya 'veya' gibi bir "2-li önerme-eklemi" iki *ayrı* önermeyi birbirine eklemeğe yaradığı halde, 'değil' gibi bir 1-li önerme-ekleminin belli bir önermeyi herhangi başka bir önermeye "eklemeğe" yaramadığı meydandadır. Bu bakımdan böyle bir sözcüğe "eklem" denilmesinin yerinde olmadığı öne sürülebilir. Ancak, matematikte "1" in çokluğu göstermediği halde bir "sayı" olarak kabul edildiğini göz önünde tutarak "1-li önerme eklemleri"ni de "n-li önerme-eklemleri" nin özel bir hali şeklinde yorumlamağa hakkımız vardır. Dolayısiyle matematiksel kullanımlar açısından *"1-li* önerme-eklemi" deyiminin yerinde olduğunu söyleyebiliriz.

Önerme-eklemlerini bir de *"doğruluk-fonksiyonu durumunda olan önerme-eklemleri"* (truth-functional connectives) ile *"doğruluk-fonksiyonu durumunda olmıyan önerme-eklemleri"* olmak üzere iki öbeğe ayırıyoruz. Örneğin: *'değil'* ile *'mümkün'* sözcüklerini göz önüne alalım. *'Değil'* sözcüğünün bir "1-li önerme-eklemi" olarak içinde geçtiği (6-1) veya (6-3) önermesi bir "doğruluk-fonksiyonu", (6-5) önerme-şeması da bir "doğruluk-fonksiyonu şeması" olduğundan, bu sözcüğün *birinci öbeğe* ait olduğunu görüyoruz. Öte yandan, *'mümkün'* sözcüğünün de bir "1-li önerme-eklemi" olduğunu söyleyebiliriz. Nitekim (6-4) gibi bir önerme 'mümkün' sözcüğü yardımiyle (6-7) atomsal-bileşeninden meydana gelen bir

"molekülsel-önerme" durumundadır. Ancak, (6-4) önermesi bir "doğruluk-fonksiyonu" olmayıp (6-8) önerme-şeması da bir "doğruluk-fonksiyonu şeması" olmadığından, 'mümkün' sözcüğü *ikinci* öbeğe girmelidir.

Buraya kadar dört ayrı önerme-eklemi ile karşılaşmış bulunuyoruz: *'değil', 'mümkün', 've'* ve *'veya'*. Bunlardan ilk ikisi "1-li", son ikisi ise "2-li"dir. İmdi bu dört eklemin birincisinin "doğruluk-fonksiyonu" durumunda olduğunu, ikincisinin ise bu durumda olmadığını görmüştük. Şimdi de son ikisinin doğruluk-fonksiyonu durumunda olup olmadığını araştıralım.

İlk önce 've' eklemini göz önüne alalım. İmdi:

(7) A ve B

biçimindeki herhangi bir önermenin doğru olmasının "gerekli" şartı *hem A hem B bileşeninin doğru olmasıdır*. Nitekim A veya B önermelerinden (hiç olmazsa) birinin yanlışlığının (7) nin yanlışlığını gerektirdiği meydandadır. Buna göre, (7) nin bir doğruluk-fonksiyonu olması için, sözü geçen şartın bir de "yeterli" olması gerektiğini söyleyebiliriz. Oysa günlük dilde (7) biçiminde olup her iki bileşeni doğru olduğu halde, yanlış olan önermeler vardır. Nitekim *'ve'* sözcüğü bazı hallerde *'ve bundan sonra'* anlamında kullanılır. Oysa B önermesinin A önermesinin dile getirdiği bir olaydan önce meydana gelen bir olayı belirtmesi halinde, *'B ve bundan sonra A'* önermesinin *doğru, 'A ve bundan sonra B'* önermesinin ise *yanlış* olacağı meydandadır. Buna göre, *'ve'* nin *'ve bundan sonra'* mânasına gelmesi halinde 'A' ile 'B' nin her ikisinin de doğru olduğu halde 'A ve B' önermesinin *"yanlış"* olabileceğini görüyoruz. Örneğin:

(8) Ahmet yemeğini yedi ve uykuya daldı

gibi bir önermeyi göz önüne alalım. Bu önermenin doğruluğu, bileşenleri olan:

(9) Ahmet yemeğini yedi

ile

(10) Ahmet uykuya daldı

önermelerinin her ikisinin doğruluğunu gerektirir. İmdi (9) ile (10) un doğru olduğunu kabul edelim. O zaman (belli bir durum ve bağlam içinde) (8) önermesinin doğru olması halinde bile:

(11) Ahmet uykuya daldı ve yemeğini yedi

önermesinin (Ahmedin bir uyurgezer olmaması şartiyle) yanlış olduğu meydandadır. Oysa (11) önermesi (7) biçiminde olup gerek A gerek B bileşeni doğrudur. Buna göre *"ve'* önerme-ekleminin (11) gibi bir öner-

menin bağlamı içinde "doğruluk-fonksiyonu durumunda olmadığını" söyleyebiliriz. Nitekim, böyle bir önermenin doğruluk-değerinin sadece bileşenlerinin doğruluk-değeri araciyle belirlenemediğini gördük. [1]

Öte yandan, (11) türünden bir önermenin "mantıksal-yapısı"nın doğrudan doğruya kendisi tarafından değil de, ($z_1 < z_2$ olmak üzere)

(12) Ahmet z_1 anında yemeğini yedi ve z_2 anında uykuya daldı

biçimindeki bir önerme yardımiyle dile getirildiği söylenebilir. Başka bir deyimle, (11) önermesini (12) nin "kısa" (elliptik) bir ifade şekli saymak mümkündür. (12) önermesinin doğruluk-değeri ise bileşenlerinin sırasına bağlı değildir. Nitekim, 'Ahmet z_1 anında yemeğini yedi' ile 'Ahmet z_2 anında uykuya daldı' bileşenlerinin doğru olması halinde; gerek

(12) önermesi, gerek

(13) Ahmet z_2 anında uykuya daldı ve z_1 anında yemeğini yedi

önermesi doğru olur. Böylece 've' sözcüğünün (12) (veya (13)) önermesinin bağlamı içinde "doğruluk-fonksiyonu" durumunda olduğunu görüyoruz.

Bununla birlikte 've' ekleminin çokluk doğruluk-fonksiyonu durumunda olduğunu da belirtmek gerek. Örneğin:

(14) İstanbul İzmir'den büyüktür ve Adana Bursa'dan büyüktür

önermesinin doğruluğunun "gerekli" ve "yeterli" şartı 'İstanbul İzmir'den büyüktür' önermesiyle 'Adana Bursa'dan büyüktür' önermesinin doğruluğundan ibaret olduğundan, 've' ekleminin böyle bir önermenin bağlamı içinde doğruluk-fonksiyonu durumunda olduğu görülüyor.

Öte yandan 've' sözcüğünün günlük dilde her zaman bir "önerme-eklemi" olarak kullanılmadığını da belirtmek gerek. Örneğin:

(15) Ali ve Veli arkadaştırlar

önermesi, içinde 've' bağlacı geçmekle birlikte, molekülsel değil, atomsal bir önermedir. 'Ve' sözcüğü böyle bir bağlamda iki önermeyi değil, iki sözcüğü birbirine eklemektedir. Başka bir deyimle 've' sözcüğü (15) önermesinde bir "sözcük-eklemi" durumundadır. Buna karşılık:

(16) İstanbul ve İzmir Adana'dan büyüktür

önermesinin mantıksal yapısının

(17) İstanbul Adana'dan büyüktür ve İzmir Adana'dan büyüktür

biçimindeki bir önerme yardımiyle dile getirildiği gerekçesiyle, 've' sözcüğünün (16) bağlamında 'İstanbul' ile 'İzmir' sözcüklerini birbirine ekleyen bir "sözcük-eklemi" değil de, 'İstanbul Adana'dan büyüktür' önermesiyle 'İzmir Adana'dan büyüktür' önermesini birbirine ekleyen bir "önerme-eklemi" olduğunu öne sürebiliriz.

İmdi 've' sözcüğünün günlük dilde birçok değişik anlamlarda kullanıldığını göz önünde tutarak, bu sözcüğün *"doğruluk-fonksiyonu durumundaki bir önerme-eklemi"* şeklinde geçtiği halleri ötekilerinden ayırdetmek amaciyle, özel bir sembolün kullanılması faydalı olur. İşte biz modern mantıkçıların çoğunu izleyerek ' · ' (nokta) sembolünü kullanacağız. Buna göre, (12), (13), (14) ve (17) önermelerini sırasiyle şöyle dile getirebiliriz:

(18) (Ahmet z_1 zamanında yemeğini yedi) · (Ahmet z_2 zamanında uykuya daldı)

(19) (Ahmet z_2 zamanında uykuya daldı) · (Ahmet z_1 zamanında yemeğini yedi)

(20) (İstanbul İzmir'den büyüktür) · (Adana Bursa'dan büyüktür)

(21) (İstanbul Adana'dan büyüktür) · (İzmir Adana'dan büyüktür)

Buna karşılık (8) önermesinin

(22) (Ahmet yemeğini yedi) · (Ahmet uykuya daldı),

(11) önermesinin ise

(23) (Ahmet uykuya daldı) · (Ahmet yemeğini yedi)

biçiminde dile getirilmesi yanlış olur. Nitekim (22) ile (23) eşdeğer olduğu halde (8) ile (11) eşdeğer değildir. (8) in doğru olması halinde (11) yanlıştır; oysa (22) ile (23) ün her ikisi de doğru olur. Öte yandan, ' · ' sembolünü bir *"önerme-eklemi"* olarak tanımladığımızdan, iki sözcüğün birbirine eklenmesi için kullanılmaması gerekir. Böylece (15) önermesinin

(Ali) · (Veli) arkadaştır

biçiminde dile getirilmesi yasaya aykırı olur. Nitekim böyle bir deyimi mânasız saymamız gerekir.

Görüldüğü gibi, ' · ' sembolünün kaplamı 've' sözcüğünün kaplamından (bir bakıma) daha dardır. Ancak, ' · ' sembolü yalnız 've' sözcüğünün karşılığı olarak değil de, bazı bağlamlarda aynı anlama gelen 'hem ...hem', 'gerek ... gerek', 'ama' gibi sözcüklerin, 'ip', 'ıp' gibi "sonek"lerin;

"virgül", "noktalı virgül", "nokta" gibi noktalama işaretlerinin karşılığı olarak da kullanılır. Genel olarak, günlük dile ait herhangi bir önermeyi sembolik dile çevirmek istediğimiz zaman, böyle bir önermenin içinde geçen doğruluk-fonksiyonu durumunda olan bir 've' sözcüğü ile değiş-tokuş edilebilen herhangi bir deyimin yerine ' · ' sembolünü kullanmak gerek. Örneğin :

(24) Gök mavi, hava ılık, heryer yemyeşildi
önermesi

(25) Gök mavi idi ve hava ılıktı ve heryer yemyeşildi
biçimindeki bir önermeye çevrilebildiğinden, sembolik dilde:

(26) (Gök mavi idi) · (Hava ılıktı) · (Heryer yemyeşildi)
şeklinde dile getirilmelidir. Aynı şekilde:

(27) Ahmet Ankara'ya gidip annesini görecek
ile

(28) Ahmet Ankara'ya gidecek, ama Ali İstanbul'a gelecek
önermeleri sırasiyle:

(29) (Ahmet Ankara'ya gidecek) · (Ahmet annesini görecek)

(30) (Ahmet Ankara'ya gidecek) · (Ali İstanbul'a gelecek)
biçimine çevrilir.

İmdi, gerek (doğruluk-fonksiyonu durumundaki bir önerme-eklemi olarak kullanılan) 've' sözcüğü, gerek ' · ' sembolü iki ayrı önermeyi *birlikte evetlemeğe* yarıyor. Daha açık olarak, 'A' ve 'B' gibi iki önermeyi ayrı ayrı evetliyecek yerde, (7) veya

(31) A · B

gibi bir tek önermeyi evetliyebiliriz. Buna göre, ' · ' sembolüne *"birlikte-evetleme eklemi";* (31) biçimindeki bir önermeye (veya daha doğrusu, böyle bir önermenin evetlenmesine) de bir *"birlikte-evetleme"* diyeceğiz [2].

İmdi, *"birlikte-evetleme eklemi"* ile bir doğruluk-fonksiyonu durumundaki bir önerme-eklemi olarak kullanılan *'ve'* sözcüğü arasında şöyle önemli bir ayrım vardır: 'Ve' sözcüğü *günlük dilde* hiç bir zaman aralarında bir ilgi olmıyan herhangi iki önermenin "birlikte evetlenmesi" için kullanılmaz. Örneğin:

(32) Kar beyazdır ve bir üçkenin üç açısının toplamı 180° ye
eşittir

türünden bir önermenin, sözdizimi açısından düzgün bir deyiş şekli olmakla birlikte, yersiz ve mânasız sayılacağı meydandadır. Oysa, sembolik mantıkta böyle bir önermeyi veya sembolik karşılığı olan:

(33) (Kar beyazdır) · (Bir üçkenin üç açısının toplamı 180° ye eşittir)

önermesini mânalı sayıyoruz. Genel olarak, 'A' ile 'B' nin her ikisi mânalı olmak şartiyle, (7) veya (31) önermesinin mânalı olduğunu kabul edeceğiz. Günlük dilde ise, (7) biçimindeki bir önermenin mânalı olması 'A' ile 'B' bileşenleri arasında (belirttikleri olayların bitişikliği, benzerliği, karşıtlığı, v.b.g.) belli bir ilginin bulunmasına bağlıdır.

'Veya' eklemine gelince: bu sözcüğün de ('ve' gibi) bazı hallerde doğruluk-fonksiyonu durumunda olduğunu, ama bazı hallerde öyle olmadığını gösterebiliriz. Ancak bunu göstermeden önce, 'veya' sözcüğünün günlük dilde iki ayrı anlamda geçtiğini belirtmek gerek. Nitekim:

(34) A veya B

biçimindeki herhangi bir önermeyi göz önüne alalım. Böyle bir önermenin *"doğruluğu"* için *"gerekli"* şart, bu önermenin bileşenleri durumunda olan 'A' ile 'B' önermelerinden *hiç olmazsa birinin "doğru" olmasıdır.* Bu şartı şöyle bir çizelge yardımiyle de dile getirebiliriz:

(35)

A veya B	A	B
D	D	
D		D

Burada 'D' harfini *'doğru'* sözcüğünün sembolik bir kısaltması olarak kullanıyoruz. Çizelgemiz *" 'A veya B' doğru ise, 'A' doğru veya 'B' doğrudur"*, yani *" 'A veya B' nin doğruluğunun gerekli şartı, 'A' nın veya 'B' nin doğru olmasıdır"* anlamına gelen bir diyagram olarak yorumlanmalıdır. Çizelgenin yatay çizgisinin altındaki iki sıra, 'A veya B' önermesinin doğru olması hallerini "tüketici" bir şekilde temsil eder. Başka bir deyimle, bu önermenin doğru olması ancak bu iki halden hiç olmazsa birinin gerçekleşmesine bağlıdır. Hiç birinin gerçekleşmemesi, yani *ne 'A' önermesinin ne de 'B' önermesinin "doğru" olmaması halinde, 'A veya B' önermesi de "doğru" değildir.* Bu da, (her önermenin ya "doğru", ya da "yanlış" olduğunu kabul ettiğimizden (iki-değerli mantık!)) *"hem 'A' hem 'B' yanlış ise 'A veya B' yanlış olur"* anlamına gelir. Bu durumu ise:

(36)

A	B	A veya B
Y	Y	Y

biçimindeki bir çizelge yardımiyle dile getirebiliriz. Burada 'Y' harfini *'yanlış'* sözcüğünün sembolik kısaltması olarak kullanıyoruz.
Örnek olarak :

(37) Ali gelecek veya Veli gidecek
önermesini göz önüne alalım. Bu önermenin bileşenleri

(38) Ali gelecek
ile

(39) Veli gidecek
önermelerinden ibaret olduğundan, (35) ve (36) çizelgeleri sırasiyle:

(40)

Ali gelecek veya Veli gidecek	Ali gelecek	Veli gidecek
D	D	
D		D

(41)

Ali gelecek	Veli gidecek	Ali gelecek veya Veli gidecek
Y	Y	Y

biçimine girer: (37) doğru ise, (38) veya (39) doğrudur; (38) ve (39) yanlış ise, (37) yanlıştır.

(35) çizelgesinde 'A' nın doğru olması halinde 'B' nin doğruluk değeri, 'B' nin doğru olması halinde de 'A' nın doğruluk-değeri belirtilmemiştir. Şimdi ise bu doğruluk-değerlerinin ne olabileceğini araştıralım. İşte bu konuda iki şık mümkündür:

(i) *'A veya B' doğru ise, 'A' ve 'B' nin her ikisinin de doğru olması mümkündür.*

(ii) *'A veya B' doğru ise, 'A' ile 'B' nin her ikisinin birden doğru olması mümkün değildir.*

(i) şıkkını :

(42)

A veya B	A	B
D	D	D, Y
D	D, Y	D

veya her sırada her önermenin yalnız bir tek doğruluk-değeri taşımasını sağlamak amaciyle:

(43)

A veya B	A	B
D	D	Y
D	Y	D
D	D	D

gibi bir çizelge ile dile getirebiliriz. Böyle bir çizelge:

"'A veya B' doğru ise, 'A' doğru veya 'B' doğru veya hem 'A' hem 'B' doğrudur"

şeklinde yorumlanmalıdır.

(ii) şıkkına gelince; bu şıkkı da :

(44)

A veya B	A	B
D	D	Y
D	Y	D

biçimindeki bir çizelge yardımiyle dile getirebiliriz. Nitekim söz konusu şıkta 'A veya B' nin doğru olması halinde, 'A' ile 'B' nin her ikisi birden doğru olamadığından; 'A' doğru ise 'B' yanlış, 'B' doğru ise 'A' yanlış olur. Öte yandan, hem 'A' hem 'B' doğru ise, 'A' veya 'B' doğru değil, dolayısiyle de "yanlış"tır. Buna dayanarak (36) çizelgesini (ii) şıkkında şöyle genişletebiliriz:

(45)

A	B	A veya B
Y	Y	Y
D	D	Y

Böylece *'veya'* ekleminin biri (43) ve (36) çizelgeleri, ötekisi de (44) ve (45) çizelgeleriyle belirtilebilen iki ayrı anlamı olduğunu görüyoruz. Örneğin: 'veya' sözcüğü:

(46) Kitaplarımı X ten veya Y den satın alacağım

gibi bir önermede (i) mânasında kullanılmaktadır. Nitekim, kitaplarımı hem X ten hem de Y den satınalmam (46) önermesini yanlışlamaz. Böyle bir önermeyi daha belirtik olarak:

(47) Kitaplarımı X ten veya Y den, ya da her ikisinden satınalacağım

biçiminde dile getirebiliriz.

Birçok hallerde ise 'veya' sözcüğünün (i) mânasında mı, yoksa (ii) mânasında mı kullanıldığı belli değildir. Hattâ birçok hallerde bu iki mânadan hangisinde kullanıldığının belirlenmesi imkânsızdır. Örneğin: matematikte '$x \leqq y$' şeklinde kısaltılan:

(48) $x < y$ veya $x = y$

deyimini göz önüne alalım. x ile y herhangi iki sayı oldukta, hem x'in y'den küçük olması, hem de x'in y ile özdeş olması imkânsız olduğundan, 'veya' sözcüğünün (48) de açıkça (ii) mânasında geçtiği sanılabilir. Ama (*Quine*'ın belirttiği gibi[3]) durum gerçekte hiç de böyle değildir. Tam tersine, 'veya' sözcüğünün (48) de (i) mânasında mı, yoksa (ii) mânasında mı kullanıldığının tesbit edilmesi imkânsızdır. Nitekim bu iki mâna arasındaki tek ayrım *her iki bileşenin birden "doğru"* olması halinde ortaya çıkar. Oysa (48) halinde her iki bileşenin birden "doğru" olması imkânsız olduğundan, 'veya' sözcüğünün hangi mânada kullanıldığı "denetlenemez". ('Veya' sözcüğünün (ii) mânasında kullanıldığının tesbit edilmesi için hem '$x < y$', hem de '$x = y$' nin doğru olması halinde (48) in yanlış olduğunu göstermemiz gerekir. Hem '$x < y$' hem de '$x = y$' doğru olamıyacağından bunun imkânsız olduğu meydandadır).

Aynı şekilde,

(49) s P dir veya s P değildir

biçimindeki bir önermede 'veya' sözcüğünün (i) mânasında mı, yoksa (ii) mânasında mı geçtiğinin tesbit edilmesi imkânsızdır. Nitekim 'veya' nın böyle bir bağlam içinde (ii) mânasında geçmesi, hem 's P dir' hem de 's P değildir' önermelerinin doğru olması halinde (49) un tümce yanlış olması suretiyle ortaya çıkabilir.

'Veya' sözcüğünün (ii) mânasında açıkça kullanıldığı haller pek seyrektir. Örneğin: bir çocuğun babasından kendisini önce pastahaneye, sonra da sinemaya götürmesini istediğini, babasının ise, hayırlayıcı bir eda ile :

(50) Pastahaneye (gideceğiz) veya sinemaya gideceğiz

şeklinde cevap verdiğini düşünelim. Baba bu cevabıyla çocuğunu hem pastahaneye hem de sinemaya götürmiyeceğini belirtmek istediğinden; sonunda çocuğunu (yalvarma ve ağlamalarına dayanamayarak) hem pastahaneye hem de sinemaya götürmesi halinde, kendi kendisini yanlışlamış olacaktır. Başka bir deyimle, (50) önermesi 'pastahaneye gideceğiz' ile 'sinemaya gideceğiz' bileşenlerinden her ikisinin doğru çıkması halinde yanlış olur. (48) ve (49) örneklerinin tersine, bu örnekte her iki bileşenin bir arada doğru olması mümkün olduğundan (50) önermesinde 'veya' sözcüğünün (ii) mânasında kullanıldığının tesbit edilmesi mümkün oluyor.[4]

İmdi, yanlış anlamaya yol açmamak amaciyle, 'veya' sözcüğünün (i) mânasında kullanıldığı zaman (47) de olduğu gibi *'ya da her ikisi'* ifadesi ile; (ii) mânasında kullanıldığı zaman da *'ama her ikisi değil'* ifadesi ile tamamlanması faydalı olur. Buna göre (7) türünden bir önerme (i) halinde:

(51) A veya B ya da her ikisi

biçimindeki;

(ii) halinde ise:

(52) A veya B ama her ikisi değil

biçimindeki bir önermeye çevrilebilir.

Öte yandan, *'veya'* sözcüğünün çokluk (i) mânasında (başka bir deyimle *'ve/ya'* - 'and/or' - anlamında) kullanıldığını göz önünde tutarak, bu sözcüğü bilimsel ve teknik yazılarda yalnız (i) mânasında kullanmak yoluna gidebiliriz. 'Veya' sözcüğünün (ii) mânasında geçtiği önermeler yerine ise *'ya ... ya ...'* deyiş şeklini kullanarak,

(53) Ya A ya B

biçimindeki önermelere başvurmamız mümkündür. Örneğin: (50) önermesini

(54) Ya pastahaneye gideceğiz ya sinemaya (gideceğiz)

gibi bir önermeye çevirebiliriz.

Gerçekten de 'ya ... ya ...' ifade şekli Türkçede hemen hemen her zaman 'veya' ekleminin (ii) mânasının karşılığı olarak kullanılır. Başka bir deyimle, (53) biçimindeki bir önermenin doğruluğu halinde, hem 'A' hem 'B' bileşeninin doğru olması imkânsızdır. Bu durumu aşağıdaki çizelgeler yardımiyle dile getirebiliriz:

(55)

Ya A ya B	A	B
D	Y	D
D	D	Y

(56)

A	B	Ya A ya B
Y	Y	Y
D	D	Y

Biz de bu ikinci yolu seçerek, bundan böyle (başka şekilde belirtilmediği hallerde) 'veya' sözcüğünü yalnız (i) mânasında kullanıp bu sözcüğün (ii) mânası yerine hep 'ya ... ya ...' ifade şeklini kullanacağız.

Şimdi de *'veya'* ekleminin *doğruluk-fonksiyonu durumunda* geçtiği hallerle bu durumda olmadığı halleri inceleyelim. İmdi *'veya'* sözcüğünün ((i) mânasında) 'A veya B' gibi bir önermede *doğruluk-fonksiyonu* durumunda olması için, 'A' ile 'B' bileşenlerinden hiç olmazsa birinin doğruluğu söz konusu 'A veya B' önermesinin doğruluğunun *"yeterli"* şartı olmalıdır. Bunu da:

(57)

A	B	A veya B
D	D	D
D	Y	D
Y	D	D

biçimindeki bir çizelge yardımiyle dile getirebiliriz. (Bu çizelge: " 'A' doğru ve 'B' doğru veya 'A' doğru ve 'B' yanlış, ya da 'A' yanlış ve 'B' doğru ise, 'A veya B' doğrudur" anlamına gelir).

Buna dayanarak, *'A veya B'* önermesinin *doğru olmaması* halinde, 'A' ile 'B' *bileşenlerinden hiç birinin doğru olmaması gerektiği* sonucunu çıkarabiliriz. Bunu da " 'A veya B' yanlış ise, hem 'A' hem 'B' yanlıştır" biçimindeki bir önerme veya:

(58)

A veya B	A	B
Y	Y	Y

gibi bir çizelge şeklinde dile getirebiliriz.

İmdi (36), (43), (57) ve (58) çizelgelerini şu iki çizelgede birleştire-

biliriz: (Her sıranın sağında, bu sıranın türetilmiş olduğu önceki çizelgenin numarasını yazıyoruz).

(59)

A	B	A veya B	
D	D	D	(57)
D	Y	D	(57)
Y	D	D	(57)
Y	Y	Y	(36)

(60)

A veya B	A	B	
D	D	D	(43)
D	D	Y	(43)
D	Y	D	(43)
Y	Y	Y	(58)

İşte, 'veya' sözcüğünün (59) ve (60) çizelgeleri yardımiyle belirlenen anlamda doğruluk-fonksiyonu durumundaki bir önerme-eklemi olarak kullanıldığı hallerde, bu sözcüğün yerine (modern mantıkçıları izleyerek) *'v'* sembolünü kullanacağız. Söz konusu 'v' sembolüne *"ayrıklık-eklemi);*

(61) A v B

biçimindeki bir önermeye de bir *"ayrıklık"* diyeceğiz. [3]

Ayni şekilde, *'ya ... ya ...'* deyiş biçiminin *doğruluk-fonksiyonu* durumundaki bir önerme-eklemi olması şartını ((55) ve (56) çizelgelerini göz önünde tutarak) :

(61)

A	B	ya A ya B
D	D	Y
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

(62)

ya A ya B	A	
Y	D	D
D	D	Y
D	Y	D
Y	Y	Y

çizelgeleri yardımiyle dile getirebiliriz. (61) ve (62) çizelgelerinin belirlediği doğruluk-fonksiyonu durumundaki önerme-eklemini '≢' sembolü ile dile getirip buna *"bağdaşmaz-ayrıklık eklemi"* diyeceğiz. Buna göre, 'veya' sözcüğünün (ii) mânasında doğruluk-fonksiyonu durumunda geçtiği 'A veya B' gibi önermelerle, 'ya ... ya ...' ifadesinin doğruluk-fonksiyonu durumunda geçtiği 'ya A ya B' gibi önermeleri:

(63) $A \not\equiv B$

biçimindeki bir önerme şeklinde dile getireceğiz. (63) biçimindeki bir önermeye bir *"bağdaşmaz-ayrıklık"* diyeceğiz. [6]

Örnek olarak aşağıdaki önermeleri göz önüne alalım:

(64) Yarın Ankara'ya veya Konya'ya gideceğim

(65) Yarın ya Ankara'ya gideceğim ya Konya'ya

(66) Bu hasta hemen ameliyat edilecek veya kısa bir süre içinde ölecek

(67) Bu hasta ya hemen ameliyat edilecek ya da kısa bir süre içinde ölecek.

İmdi, (64) veya (65) önermesini Ankara'ya mı, yoksa Konya'ya mı gideceğime henüz karar vermediğim bir anda evetlediğimi [7] kabul edelim. (64) önermesini evetlemekle (yarın) *hem Ankara'ya hem Konya'ya* gitmiyeceğimi öne sürmüş olmam. Buna karşılık, (65) önermesini evetlemekle, (yarın) hem Ankara'ya hem Konya'ya gitmeyeceğime bir çeşit söz vermiş oluyorum. Başka bir deyimle, (64) önermesini evetleyip her iki kente gidecek olursam, hiç de yalan söylemiş sayılmam; buna karşılık, (65) önermesini evetledikten sonra kentlerin her ikisine uğramam beni yalancı çıkarır. Öte yandan, gerek (64) gerek (65) önermesinin *"doğruluk-fonksiyonu* durumunda" olduğunu gösterebiliriz. Nitekim, (64) önermesini evetledikten sonra, ertesi gün Ankara'ya, veya Konya'ya ya da her iki-

sine gitmem iddiamı doğrular. (65) önermesini evetlemem halinde ise, Konya'ya gitmeyip Ankara'ya gitmem, veya Ankara'ya gitmeyip Konya'ya gitmem iddiamı doğrular. Buna göre, (64) ün bir "ayrıklık", (65) in ise bir "bağdaşmaz-ayrıklık" olduğunu görüyoruz. Dolayısiyle (64) ü:

(68) (Yarın Ankara'ya gideceğim) v (yarın Konya'ya gideceğim) biçimine; (65) i ise:

(69) (Yarın Ankara'ya gideceğim) ≢ (Yarın Konya'ya gideceğim) biçimine çevirebiliriz.

(66) ile (67) önermelerine gelince: bu önermelerden birinin veya ötekinin söz konusu hastaya bakan bir hekim tarafından evetlendiğini kabul edelim. Hekim bu önermelerden herhangi birisini evetlemekle, hastanın ameliyat edilmemesi halinde kısa bir süre içinde öleceğine dair inancını belirtmiş olur. Ancak, hekim (66) yı evetlemekle, ameliyat yapılsa bile hastanın (kısa bir süre içinde) ölmiyeceğini hiç de öne sürmediği halde; (67) yi evetlemekle böyle bir iddiada bulunmuş olurdu. Başka bir deyimle, hastanın ameliyat edildikten az sonra (hiç bir kazaya uğramadan) ölmesi (66) önermesini yanlışlamadığı halde, (67) önermesini yanlışlar.

İmdi, ne (66) nın ne de (67) nin bir doğruluk-fonksiyonu olmadığını gösterebiliriz. Nitekim, hastanın (hemen) ameliyat edilmeyip kısa bir süre içinde öldüğünü düşünelim. O zaman bileşenlerden biri ('hasta hemen ameliyat edilecek') "yanlış", ötekisi de ('hasta kısa bir süre içinde ölecek') "doğru" olur. Bu da gerek (66) yı gerek (67) yi -bunların doğruluk-fonksiyonu olması halinde- doğrular. Gerçekte ise böyle bir durum hekimin iddiasını doğrulamak için hiç de yeterli değildir. Böyle bir iddiayı doğrulayabilmek için, ölümün *"neden"*inin ameliyatla giderilmek istenilen hastalık faktöründen ibaret olduğunu tesbit etmek gereklidir. Buna göre, hastanın ameliyat olmadan ölmesi halinde, otopsi sonucunda ameliyatla giderilmek istenilen faktörün hiç de öldürücü olmadığı, ölümün bambaşka bir nedene bağlı olduğu ortaya çıkarsa, hekimimizin iddiası doğrulanmak şöyle dursun, açıkça *çürütülmüş* olur. [8]

Böylece, *"veya'* sözcüğünün (66) önermesinde; *'ya ... ya ...'* ifadesinin de (67) önermesinde *doğruluk-fonksiyonu durumunda olmadığını* görüyoruz. Dolayısiyle, (66) nın:

(70) (Bu hasta hemen ameliyat edilecek) v (bu hasta kısa bir süre içinde ölecek)

biçiminde; (67) nin de:

(71) (Bu hasta hemen ameliyat edilecek) ≠ (bu hasta kısa bir süre içinde ölecek)

biçiminde dile getirilmesi yanlış olur. Başka bir deyimle, bir yandan (66) ile (70), öbür yandan da (67) ile (71) birbiriyle *anlamdaş sayılmaması gereken önermeler* durumundadır. (70) önermesinin doğruluk-değeri ile bileşenlerinin doğruluk-değerleri arasındaki bağlantılar (59) ve (60) çizelgeleriyle; (71) önermesinin doğruluk-değeri ile bileşenlerinin doğruluk-değerleri arasındaki bağlantılar da (61) ve (62) çizelgeleriyle dile getirilebilir. Buna karşılık (66) önermesinin doğruluk-değeri ile bileşenlerinin doğruluk-değerleri arasındaki "formel" bağlantıları şu çizelgelerle belirtebiliriz: ('A' harfini 'bu hasta hemen ameliyat edilecek' önermesinin, 'B' harfini de 'bu hasta kısa bir süre içinde ölecek' önermesinin kısaltması olarak kullanıyoruz)

(72)

A	B	A veya B
D	D	?
D	Y	?
Y	D	?
Y	Y	Y

(73)

A veya B	A	B
D	D	D
D	D	Y
D	Y	D
Y	D	D
Y	D	Y
Y	Y	D
Y	Y	Y

(72) çizelgesinin ilk üç satırında geçen soru-işaretleri, 'A' ile 'B' bileşenlerinin doğruluk-değerinin 'A veya B' önermesinin doğruluk-değerini belirlemeğe yetmediğini dile getirir. (73) çizelgesi ise, 'A veya B' önermesinin hem 'A' hem 'B' nin yanlışlığı halinde *"yanlış"* olduğunu; bütün öteki hallerde ise "belirsiz" olduğunu, yani salt 'A' ile 'B' nin doğruluk-

değerleri yardımiyle belirtilmediğini gösterir. Örneğin: 'A' ile 'B' nin her ikisinin "doğru" olması halinde, 'A veya B' önermesi "doğru" olabildiği gibi (1.ci sıra), "yanlış" ta olabilir (4.cü sıra).

Aynı şekilde, (67) önermesinin doğruluk-değeri ile bu önermenin bileşenlerinin doğruluk-değerleri arasındaki formel bağlantıları aşağıdaki çizelgelerle dile getirebiliriz:

(74)

A	B	ya A ya B
D	D	Y
D	Y	?
Y	D	?
Y	Y	Y

(75)

ya A ya B	A	B
D	D	Y
D	Y	D
Y	D	D
Y	D	Y
Y	Y	D
Y	Y	Y

İmdi, *'ve'* sözcüğü ile *'birlikte-evetleme'* işareti için de bu türlü çizelgelerin kullanılması mümkündür. Nitekim, *'ve'* sözcüğünün 'A ve B' gibi bir önermede *doğruluk-fonksiyonu* durumundaki bir önerme-eklemi olması şartını şu çizelgelerle dile getirebiliriz:

)

A	B	A ve B
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	Y

(77)

A ve B	A	B
D	D	D
Y	D	Y
Y	Y	D
Y	Y	Y

Örneğin: 'A ve B' olarak (12) önermesini, 'A' olarak 'İstanbul İzmir'den büyüktür', 'B' olarak da 'Adana Bursa'dan büyüktür' önermelerini seçebiliriz.

Öte yandan, (11) önermesi gibi 've' sözcüğünün içinde doğruluk-fonksiyonu durumunda olmıyan bir önerme-eklemi şeklinde geçtiği 'A ve B' biçimindeki bir önermenin doğruluk-değeri ile bileşenlerinin doğruluk-değerleri arasındaki formel bağlantıları şu çizelgelerle dile getirebiliriz:

(78)

A	B	A ve B
D	D	?
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	Y

(79)

A ve B	A	B
D	D	D
Y	D	D
Y	D	Y
Y	Y	D
Y	Y	Y

İmdi herhangi bir önermenin karşılığı olan iki çizelgeden her birinin ötekisinden türetilmesi mümkündür: (59) ile (60), (61) ile (62), (72) ile (73), (74) ile (75), (76) ile (77), (78) ile (79) çizelgeleri birbirinden türetilebilir. Buna göre, her önerme-eklemini *bir tek çizelge* yardımiyle belirtmek mümkün olur. Örneğin: birlikte-evetleme işaretinin karşılığı olan

(76) ile (77) çizelgelerini göz önüne alalım. (76) yı (77) den, (77) yi de (76) dan türetebildiğimizden, bu iki çizelgeden yalnız biriyle yetinebiliriz. Ancak (76) nın (77) ye göre şöyle bir üstünlüğü olduğunu belirtmek gerek: (76) çizelgesinin sol yanı 'A' ile 'B' bileşenlerinin bir arada taşıması mümkün olan bütün doğruluk-değerlerini "tüketici" bir şekilde dile getirir. Nitekim 'A' ve 'B' gibi iki önerme halinde, mümkün olan bütün şıkların

(82) 'A' doğrudur ve 'B' doğrudur;
'A' doğrudur ve 'B' yanlıştır;
'A' yanlıştır ve 'B' doğrudur;
'A' yanlıştır ve 'B' yanlıştır

hallerinden ibaret olduğu meydandadır. (82) de geçen dört şıktan birinin gerçekleşmesi zorunlu olduğu gibi, bu şıklardan birinin gerçekleşmesi geri kalan üç şıkkın her birini imkânsız kılar. (76) çizelgesinin sağ yanı ise, sözü geçen dört şıktan her biri halinde 'A ve B' önermesinin taşıdığı doğruluk-değerini belirtir. Buna göre, (76) çizelgesini matematiksel anlamda bir "fonksiyon" şeklinde yorumlamak mümkündür. Nitekim 'A ve B' ifadesini 'A' ve 'B' gibi iki "değişken"li bir fonksiyon; 'D' ve 'Y' nin de gerek 'A' ve 'B' değişkenlerinin, gerek 'A ve B' deyiminin değerleri olduğunu düşünelim. 'A ve B' deyimini matematiksel kullanımlara uygun olarak 'f(A,B)' biçiminde dile getirelim. O zaman (76) çizelgesini:

(83) f(D,D) = D
f(D,Y) = Y
f(Y,D) = Y
f(Y,Y) = Y

biçiminde dile getirebiliriz. 'A' ile 'B' değişkenlerinin değerler-alanını, yalnız 'D' ve 'Y' den ibaret saydığımızdan, (83) söz konusu 'f' fonksiyonunu belirlemeğe yeterlidir.

İmdi, (76) türünden çizelgelere *"doğruluk-çizelgeleri"* (truth tables) denir. Her doğruluk-fonksiyonuna karşılık böyle bir doğruluk-çizelgesi vardır. (76) *"birlikte-evetleme"nin* doğruluk-çizelgesi olduğu gibi, (59) *"ayrıklık"*ın, (61) de *"bağdaşmaz-ayrıklık"*ın doğruluk-çizelgesi durumundadır. İlerde her doğruluk-çizelgesine karşılık bir ve yalnız bir tek ("doğruluk-fonksiyonu" durumundaki) önerme-eklemi bulunduğunu göstereceğiz.

(72), (74) ve (78) çizelgelerine gelince: bunları "eksik" doğruluk-çizelgeleri olarak yorumlıyabiliriz. Böylece, doğruluk-fonksiyonu duru-

munda olmıyan her önerme-eklemine karşılık bir "eksik doğruluk-çizelgesi" bulunduğunu görüyoruz.

Şimdiye kadar hep "2-li önerme-eklemleri"nin doğruluk-çizelgelerini göz önüne aldık. Oysa her *"1-li"* önerme-ekleminin de belli bir doğruluk-çizelgesi vardır. Örneğin: sözü geçen 'değil' ile 'mümkün' sözcüklerini göz önüne alalım. 'A' herhangi belli bir önerme oldukta,

(84) A değil

önermesinin doğruluğunun *gerekli* ve *yeterli* şartı 'A' bileşeninin yanlış olmasıdır. Başka bir deyimle, (84) doğru ise, 'A' yanlıştır; 'A' doğru ise, (84) yanlıştır. Dolayısiyle (84) doğru değil, yani yanlış ise, 'A' doğru olur. 'A' doğru değil, yani yanlış ise, (84) doğru olur. Bu durumu ise şu iki çizelge yardımiyle dile getirebiliriz:

(85)

A	A değil
D	Y
Y	D

(86)

A değil	A
D	Y
Y	D

(85) ile (86) çizelgeleri birbirinden türetilebildiğine göre, bunlardan yalnız biriyle yetinebiliriz. (85) çizelgesi ise f(A) biçiminde dile getirilebilen *bir değişkenli* bir fonksiyon şeklinde yorumlanabilir. Nitekim böyle bir f fonksiyonu (85) gereği:

(87) $f(D) = Y$
$f(Y) = D$

şartlariyle belirlenebilir.

İşte (85) çizelgesi *'değil' ekleminin "doğruluk-çizelgesi"* durumundadır. Bu çizelgenin sol yanı 'A' gibi bir önermenin taşıyabildiği doğruluk - değerleri açısından mümkün olan bütün şıkları belirtir. Nitekim, (2-değerli mantık'ta) herhangi bir önermenin ya "doğru" ya "yanlış" olması gerektiğinden, bu şıkların:

(88) 'A' doğrudur;
'A' yanlıştır

hallerinden ibaret olduğu meydandadır. Herhangi bir önerme (88) hallerinden birinde ve yalnız birindedir. Başka bir deyimle, her önerme doğru-

dur veya yanlıştır, ama hiç bir zaman hem doğru hem yanlış değildir. ("Her önerme ya doğru, ya yanlıştır").

Öte yandan 'değil' sözcüğü gibi bir "1-li önerme-eklemi" olan *'mümkün'* sözcüğünün karşılığı olan çizelgeleri şöyle kurabiliriz: 'A' doğru ise :

(89) A mümkün

önermesi de doğru olur. Nitekim doğru bir önermenin imkânsız bir durumu dile getiremiyeceği meydandadır. Dolayısiyle, (89) yanlış ise 'A' da yanlıştır. (Yani 'A' imkânsız bir durumu dile getiriyorsa, yanlış bir önerme olur). Öte yandan, 'A' nın yanlış olması halinde (89) önermesinin doğru mu, yoksa yanlış mı olduğu ('A' nın içeriğinden bağımsız olarak) belli değildir. Buna göre, (89) un doğru olması halinde 'A' nın doğru olması da, yanlış olması da mümkündür. Bu durumu aşağıdaki çizelgelerle dile getirebiliriz:

(90)

A	A mümkün
D	D
Y	?

(91)

A mümkün	A
D	D
D	Y
Y	Y

(91) çizelgesini :

(92)

A mümkün	A
D	?
Y	Y

biçiminde de dile getirmek mümkündür.

(90) ile (91) ya da (92) çizelgeleri birbirinden türetilebilir. (90) çizelgesi 'mümkün' ekleminin "eksik doğruluk-çizelgesi" durumundadır.

('Mümkün' sözcüğü doğruluk-fonksiyonu durumunda olmıyan bir önerme-eklemi olduğundan, doğruluk-çizelgesinin "eksik" olması gerekir).

'Değil' sözcüğünün, doğruluk-çizelgesi (85) ten ibaret olan doğruluk-fonksiyonu durumundaki bir "1-li önerme-eklemi" şeklinde yorumlanması, (84) önermesinin 'A' önermesinin "hayırlanması" (negation) anlamında kullanılmasına bağlıdır. Oysa böyle bir "hayırlama" işleminin bazı hallerde başka şekilde dile getirildiğini, 'değil' sözcüğünün de bazan bir önermenin "hayırlama"sından başka bir anlamda kullanıldığını göz önünde tutmamız gerek. Örneğin:

(93) Bütün insanlar ölümlüdür

önermesinin hayırlanması hiç te:

(94) Bütün insanlar ölümlü değildir

önermesinin evetlenmesi anlamına gelmez. Oysa 'A' olarak (93) önermesini seçtiğimizde, (94) ün 'A değil' yani (84) biçiminde olduğu meydandadır. Gerçekte (93) önermesini hayırlamak için (94) ü değil de, (84) biçiminde olmıyan:

(95) Bazı insanlar ölümlü değildir

biçimindeki bir önermeyi evetlemek gerek.

İşte 'A değil' biçimindeki bir önermede *'değil'* sözcüğünün "hayırlama" şeklinde kullanılması, yani 'A değil' önermesini evetlememizin 'A' önermesini hayırlamamız anlamına gelmesi halinde (öteki kullanılışlarından ayırdetmek amaciyle) özel bir sembol kullanılır. Böyle bir sembol olarak (modern mantıkçıların çoğunu izleyerek) '~' işaretini kullanacağız. '~' sembolüne *"hayırlama-eklemi"*;

(96) **~A**

biçimindeki bir önermeye de *"hayırlama"* (negation) diyeceğiz. Örneğin

(95) önermesini:

(96) ~ (bütün insanlar ölümlüdür)

biçimindeki bir "hayırlama" biçiminde dile getirebiliriz. Aynı şekilde (6-1) veya (6-3) önermesini:

(97) ~ (Ahmet Ankara'ya gidecek)

biçiminde dile getirebiliriz. (96) önermesinin (94) ün, (97) önermesinin de (6-1) (veya (6-3)) ün "mantıksal-yapısı"nı yansıttığını söyleyebiliriz.

Buraya kadar dört ayrı doğruluk-fonksiyonunu ("hayırlama", "bir-

likte-evetleme", "ayrıklık" ve "bağdaşmaz-ayrıklık") incelemiş bulunuyoruz. Bu doğruluk-fonksiyonlarının "temsilci"si olan "önerme-şemaları" sırasiyle:

(98) $\sim p$

(99) $p \cdot q$

(100) $p \vee q$

(101) $p \not\equiv q$

biçiminde dile getirilebilir. İmdi bu türlü önerme-şemalarının ("doğruluk-fonksiyonu şemaları"nın) anlamını (doğruluk-fonksiyonu durumundaki önerme-eklemleri halinde olduğu gibi) birer "doğruluk-çizelgesi" yardımiyle belirlemek mümkündür. Sözü geçen dört önerme-şemasının karşılığı olan doğruluk-çizelgeleri şöyledir:

(102)

p	$\sim p$
D	Y
Y	D

(103)

p	q	$p \cdot q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	Y

(104)

p	q	$p \vee q$
D	D	D
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

(105)

p	q	p≠q
D	D	Y
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

(103), (104) ve (105) çizelgelerini aşağıdaki şekilde bir tek karma-çizelge halinde birleştirmek de mümkündür.

(106)

p	q	p · q	p v q	p≠q
D	D	D	D	Y
D	Y	Y	D	D
Y	D	Y	D	D
Y	Y	Y	Y	Y

İmdi, sözü geçen önerme-eklemleri yardımiyle verilen herhangi bir takım atomsal-önermeden istenildiği kadar uzun ve karmaşık molekülsel-önermeler elde edilebilir. 'A' ve 'B' nin herhangi iki (anlamlı) önerme olduğunu düşünelim. Örneğin: 'A' olarak:

(107) 2+2=5

önermesini; 'B' olarak da :

(108) Kar beyazdır

önermesini göz önüne alalım (107) "yanlış" bir önermedir. Ama yanlış olması hiç te anlamsız olmasını gerektirmez. Tam tersine (107) "yanlış" olduğundan "anlamlı" bir önermedir. İmdi:

(109) Kar beyaz değildir

(110) 2+2=5 ve kar beyazdır

(111) 2+2=5 veya kar beyazdır

(112) ya 2+2=5 ya kar beyazdır

önermelerini göz önüne alalım. Bu önermelerin her biri günlük dilin gramer ve sözdizimi kuralları gereği düzgün bir deyim olmakla birlikte, bu

gibi önermelerin evetlenmesinin acayip, hattâ mânasız sayılacağı meydandadır. Öte yandan, bu önermelerin sembolik karşılığı olan:

(113) $\sim$ (kar beyazdır)

(114) (2+2=5) $\cdot$ (kar beyazdır)

(115) (2+2=5) v (kar beyazdır)

(116) (2+2=5) $\neq$ (kar beyazdır)

önermeleri mantıkta "mânalı" sayılır. Nitekim, mantıkta herhangi bir önermenin *"mânalı"* olması, bu önermenin *"doğru"* veya *"yanlış"* olması demektir. Oysa sözü geçen önermelerin herbirinin belli bir doğruluk-değeri vardır. (108) bileşeni "doğru" olduğundan, *(113) önermesi "yanlış"tır.* (107) bileşeni "yanlış", (108) bileşeni de "doğru" olduğundan, *(114) önermesi "yanlış"; (115) önermesiyle (116) önermesi "doğru"dur.*

Aynı şekilde:

(117) (Kar beyaz değildir) değil

(118) Kar beyazdır ve kar beyazdır

(119) Kar beyazdır veya kar beyazdır

(120) Ya kar beyazdır ya kar beyazdır

çeşidinden önermeler günlük dilde hiç bir şekilde kullanılmayıp mânasız sayıldığı halde; bunların sembolik karşılık olan:

(121) $\sim \sim$ (kar beyazdır)

(122) (Kar beyazdır) $\cdot$ (kar beyazdır)

(123) (Kar beyazdır) v (kar beyazdır)

(124) (Kar beyazdır) $\neq$ (kar beyazdır)

önermeleri mantıkta "mânalı" sayılmalıdır. Nitekim, (121), (122) ve (123) "doğru", (124) ise "yanlış"tır.

İmdi, 'A' ve 'B' herhangi iki (mânalı) önerme oldukta 'A $\cdot$ B' de (mânalı) bir önerme olduğundan, (108) ile (122) yi "birlikte-evetleme" işaretiyle birbirine eklemek suretiyle elde edilen:

(125) (Kar beyazdır) $\cdot$ ((kar beyazdır) $\cdot$ (kar beyazdır))

önermesini (gerek (108) den gerek (122) den farklı) "mânalı" bir önerme saymalıyız. (125) gibi karmaşık bir (molekülsel) önermede, bileşenlerin ne şekilde eklendiğini belirtmek için (cebirde yapıldığı gibi) *"parantez-*

ler"e başvurulur. Nitekim parantezlere (veya aynı görevi yapabilecek başka türlü ayırıcı işaretlere) başvurulmaması halinde; (125) gibi bir önerme ile:

(126) ((Kar beyazdır) · (kar beyazdır)) · (kar beyazdır)

önermesini birbirinden ayırdetmemiz imkânsız olurdu. Oysa (125) ile (126) yı *iki ayrı önerme* sayıyoruz.

Aynı şekilde, verilen bir takım önerme-şemalarından önerme-eklemleri yardımiyle istenilen uzunlukta yeni önerme-şemaları meydana getirilebilir. Örnegın: 'p · q' ile 'p' şemalarından '(p · q) · p' şemasını elde edebiliriz. İmdi *'tam-deyim'* sözcüğünü herhangi bir "önerme" veya "önerme-şeması" anlamında kullanalım. O zaman 'A' herhangi bir (mânalı) tam-deyim oldukta '∼A' nın; 'A' ile 'B' de herhangi iki (mânalı) tam-deyim oldukta, 'A . B', 'A v B', 'A ⊃ B' nin de birer (mânalı) tam-deyim olduğunu söyleyebiliriz. Belli bir tam-deyimde her önerme-ekleminin (her geçişinin) belli bir *"etki-alanı"* vardır. Örneğin: '∼' nin '∼A' daki etki-alanı 'A' tam-deyiminden; '.' nin 'A . B' tam-deyimindeki etki-alanı da 'A' ile 'B' tam-deyimlerinden ibarettir. "2-li önerme-eklemleri" halinde etki-alanı iki kısımdan ibaret olduğundan, bunlardan birincisine (eklemin solundaki kısma) *"ön etki-alanı"*, ikincisine de (eklemin sağındaki kısmına *"ard etki-alanı"* diyeceğiz. Örneğin: 'A v B' gibi bir tam-deyimde 'v' ekleminin "ön etki-alanı" 'A' tam-deyiminden, "ard etki-alanı" ise 'B' tam-deyiminden ibarettir. (Görüldüğü gibi, "1-li" önerme-eklemlerinin "ard etki-alanı" tüm etki-alanını tüketir).

Karmaşık tam-deyimler halinde, önerme-eklemlerinin etki-alanını belirtmek için "parantezler"e (veya aynı görevi yapabilecek başka türlü ayırıcı işaretlere — noktalama işaretlerine) başvurmak gerekir. Örneğin: *'A . B . C'* gibi bir tam-deyimde '·' ekleminin ne birinci ne de ikinci geçişinin etki-alanı belirtilmiştir. Burada iki şık olabilir: Ya '·' nın birinci geçişinin ard etki-alanı yalnız 'B' den ibarettir, ya da, 'B · C' den. Birinci halde tam-deyimi, tek-anlamlı olması için:

(127) (A · B) · C

ikinci halde ise:

(128) A · (B · C)

biçiminde dile getirmeliyiz. Şu halde, 'A . B . C' gibi bir tam-deyimin bir

tek (anlamlı) tam-deyim değil, (126) ve (127) gibi iki ayrı (anlamlı) tam-deyim şeklinde yorumlanabileceğini görüyoruz. Oysa mantıkta her tam-deyimin "tek-anlamlı" olması, yani yalnız bir tek şekilde yorumlanabilmesi gerekir. Bundan dolayı 'A . B . C' gibi bir tam-deyimi 'A', 'B' ve 'C' bileşenlerinden her birinin anlamlı olması halinde bile "anlamsız" saymamız gerekecektir. İşte anlamlı ile anlamsız tam-deyimleri birbirinden ayırdetmek için "anlamlı" olanlara *"düzgün tam-deyimler"* (well-formed formulae) denir. Böylece 'A · B · C' deyiminin bir "düzgün-tam-deyim" olmadığını, (127) ile (128) deyimlerinin "düzgün-tam-deyimler" olduğunu söyleyebiliriz. Aynı şekilde, 'A ve B . C' bir düzgün-tam-deyim olmadığı halde, gerek 'A v (B · C)' gerek '(A v B) · C' bir düzgün-tam-deyim durumundadır.

Herhangi bir önerme-eklemiyle bu eklemin etki-alanından ibaret olan bir deyime söz konusu *önerme-ekleminin "kapanış"*ı (closure) diyeceğiz. Örneğin: 'A v B' deyimi 'v' ekleminin bir kapanışıdır. 'A v (B · C)' deyimi de "v' nin bir kapanışıdır. Buna karşılık, 'A . (B ve C)' deyimi 'v' nin bir kapanışı değildir. Her "kapanış" bir "düzgün-tam-deyim" olduğu gibi, (bölünmemiş önermeler mantığı çerçevesinde) atomsal olmıyan *her düzgün-tam-deyimin belli bir önerme-ekleminin kapanışı olduğunu* söyleyebiliriz. Böyle bir ekleme de sözü geçen düzgün-tam-deyimin *"ana-eklemi"* (major connective) denir. Buna göre, verilen bir önerme-ekleminin belli bir önermenin "ana-eklem"i olması, bu önermenin söz konusu eklemin bir "kapanış"ından ibaret olması demektir. *Her molekülsel düzgün-tam-deyimin bir ve yalnız bir tek ana-eklemi* bulunur. Örneğin: 'A · (B v C)' tam-deyiminin ana-eklemi '.'; 'A v (B . C)' tam-deyiminin ana-eklemi ise 'v' dir.

İmdi "1-li önerme-eklemleri"nin etki-alanı (eklemin sağında yazılan) bir tek düzgün-tam-deyimden ibaret olduğu halde; bir "2-li önerme-eklemi"nin etki-alanı, biri eklemin soluna, ötekisi de sağına yazılan iki ayrı düzgün-tam-deyimden ibarettir. Verilen bir tam-deyimin ana-eklemi durumunda olan bir önerme-ekleminin etki-alanını meydana getiren bu düzgün-tam-deyimlere söz konusu tam-deyimin *"ana bileşenler"*i getiren bu düzgün-tam-deyimlere söz konusu tam-deyimin *"ana bileşenler"*i diyeceğiz. Buna göre, ana-eklemi "1-li" olan bir tam-deyimin *bir tek "ana-bileşen"*i olduğu halde, eklemi "2-li" olan bir formülün *iki ayrı "ana-bileşen"*i olmalıdır. Örneğin:

$$\sim((A \cdot B) \vee C)$$

tam-deyiminin bir tek ana-bileşeni ('(A · B) v C)') vardır. Nitekim bu

tam-deyimin ana-eklemi "1-li" olan '~' den ibarettir. Buna karşılık '(A . B) ve C' deyiminin iki ayrı ana-bileşeni ('A . B' ile 'C') vardır; çünkü bu tam-deyimin ana-eklemi "2'li olan 'v' ekleminden ibarettir.

İmdi, herhangi bir molekülsel-önermenin doğruluk-değerini (bu önermede geçen bütün önerme-eklemleri doğruluk-fonksiyonu durumunda olmak şartiyle) önermenin atomsal-bileşenlerinin doğruluk-değerleri araciyle kolayca belirleyebiliriz. Nitekim, Ö herhangi bir molekülsel önerme olsun. İlk önce Ö nün ana-eklemini tesbit ederiz. Böylece de Ö nün ana-bileşeni veya ana-bileşenleri de tesbit edilmiş olur. Bu bileşenlerin ya tümü atomsaldır, ya da hiç olmazsa biri gene molekülselder. Birinci halde Ö nün doğruluk-değeri ana-ekleminin doğruluk-çizelgesi yardımiyle ana-bileşenlerinin verilen doğruluk-değerleri türünden bir çırpıda belirlenebilir. İkinci halde ise, molekülsel olan ana-bileşenin ana-eklemiyle ana bileşenlerini tesbit ederiz. O zaman da Ö önermesinin yol açtığı aynı şıklarla karşılaşırız. Aynı işlemi tekrarlamakla, önünde sonunda (sonlu sayıda adımlarla) bütün ana-bileşenleri atomsal olan önermelerle karşılaşmamız gerekir. Bu son çeşit önermelerin doğruluk-değerini (doğruluk-çizelgeleri ve atomsal-bileşenlerinin doğruluk-değerleri gereği) belirledikten sonra, bir derece daha üstün olan, yani ana bileşenleri bu önermelerden ibaret olan bileşenlerin doğruluk-değerini belirleriz. Aynı işlemi gittikçe daha yüksek dereceden bileşenler için tekrarlıyarak önünde sonunda Ö önermesinin doğruluk-değerini belirleyebiliriz. Bu işlemi aşağıdaki şekilde bir çizelge yardımiyle yapabiliriz:

1.ci sırada doğruluk-değerini belirlemek istediğimiz Ö önermesini yazarız. 2.ci sırada (1.ci sıradaki konumlarının tam altına gelmek üzere) Ö önermesinin ana-bileşenleri yazılır. Ö önermesinin ana-ekleminden başka bütün kısımları böylece 2.ci sıraya aktarılmış olduğundan, bu ana-eklem Ö önermesinin 1.ci sıradan 2.ci sıraya aktarılmıyan tek kısmından ibaret olur. Aynı şekilde 3.cü sırada 2.ci sırada gösterilen önermelerin ana-bileşenleri (2.ci sıradaki yerlerinin tam altına gelmek üzere) yazılır. Böylece bu önermelerin ana-eklemi, 2.ci sıradan 3.cü sıraya aktarılmıyan kısımlarından ibaret olur. Aynı işlemi ana-bileşenleri atomsal-önermelerden ibaret olan bileşenlerin doğruluk-değerini belirleriz. Aynı ilşemi gittikçe dada (bir üstteki sıradaki yerlerinin gene tam altına gelmek üzere) atomsal önermeleri yazar ve altlarını çizeriz. Bu şekilde elde edilen çizelgeye Ö önermesinin *"kuruluş-çizelgesi"* diyeceğiz. Buna göre, Ö gibi bir önermenin "kuruluş-çizelgesi"nin bu önermenin mantıksal-yapısının kuruluş şeklini dile getirdiğini söyleyebiliriz. Örneğin:

(129) $\sim(\sim(\sim(A \vee B) \cdot \sim B) \vee (\sim A \cdot B))$

gibi bir önermenin "kuruluş-çizelgesi" şöyle olur:

(130)

1. $\sim(\sim(\sim(A \vee \sim B) \cdot \sim B) \vee (\sim A \cdot B))$
2. $\sim(\sim(A \vee \sim B) \cdot \sim B) \vee (\sim A \cdot B)$
3. $\sim(\sim(A \vee \sim B) \cdot \sim B) \quad \sim A \cdot B$
4. $\sim(A \vee \sim B) \cdot \sim B \quad \sim A \quad B$
5. $\sim(A \vee \sim B) \quad \sim B \quad A$
6. $A \vee \sim B \quad \underline{B}$
7. $\underline{A} \quad \sim B$
8. B

İmdi, (130) gibi bir "kuruluş-çizelgesi" yardımiyle, (129) önermesinin doğruluk-değerinin atomsal bileşenlerinin doğruluk-değerleri türünden belirlenmesi çok kolaydır. Nitekim böyle bir belirlemeyi yapmak için, (130) çizelgesinde ilk önce en sondaki sıradan başlamak üzere her atomsal bileşenin altına (atomsal bileşeninin altındaki çizginin altına) doğruluk-değeri ("doğru" ise 'D', "yanlış" ise 'Y') yazılır. Ondan sonra ana-bileşenleri bu atomsal-önermelerden ibaret olan önermelerin doğruluk-değerini bu önermelerin her birinin ana-eklemi altına yazarız. Sonra da ana-bileşenleri bu son önermelerden ibaret olan önermelerin doğruluk-değerini bunların her birinin ana-eklemi altına yazarız... Bu işlemi gereken sayıda tekrarlamakla önünde sonunda (129) önermesinin ana-eklemi altına bu önermenin doğruluk-değerini yazmış oluruz.

(129) önermesinin biri 'A', ötekisi de 'B' olmak üzere iki atomsal bileşeni vardır. 'A' nın "doğru", 'B' nin de "yanlış" olduğunu kabul edelim. O zaman (129) önermesinin doğruluk-değerini (130) "kuruluş-çizelgesi"ne dayanarak şöyle tesbit edebiliriz.

(131)

1. $\sim(\sim(\sim(A \vee \sim B) \cdot \sim B) \vee (\sim A \cdot B))$
   Y
2. $\sim(\sim(A \vee \sim B)\sim \cdot B) \vee (\sim A \cdot B)$
   D
3. $\sim(\sim(A \vee \sim B) \cdot \sim B) \quad \sim A \cdot B$
   $D \qquad\qquad Y$
4. $\sim(A \vee \sim B) \cdot \sim B \quad \sim A \quad B$
   $Y \qquad Y \quad Y$
5. $\sim(A \vee \sim B) \quad \sim B \quad A$
   $Y \qquad D \quad \underline{D}$

6. A v~B B
D Y

7. A ~B
D D

8. B
Y

(129) önermesinin doğruluk-değerini, "kuruluş-çizelgesi"ni açık olarak belirtmeden de tesbit etmek mümkündür. Bunun için (129) önermesinin altında *bir tek sıra* halinde 'D' veya 'Y' harflerini şu şekilde yazarız: İlk önce atomsal-bileşenlerin altına doğruluk-değerlerini yazarız. Ondan sonra en düşük dereceden başlıyarak en yüksek dereceye çıkmak üzere her ana-eklemin altına kapanışı olan önermenin doğruluk-değerini yazarız Böylece en sonda (129) önermesinin ana-eklemi altına (en yüksek dereceden ana-eklem!) kendi doğruluk-değerini yazmış oluruz. Bu şekilde elde edilen çizelge:

(132) ~(~(~(A v~B) · ~B) v (~A · B))
Y D Y DDDY YDY D YDYY

biçiminde olur. 'D' ve 'Y' harflerinin yazılış sırasını her birinin altına bir sayı yazmakla belirtmek mümkündür. Bu halde ise (132) çizelgesi:

(133) ~(~(~(A v~B) · ~B) v (~A · B))
Y D Y DDDY YDY D YDYY
8 6 4 1 3 21 5 21 7 21 3 1

(129) gibi bir önermenin doğruluk-değerini bir de şöyle belirtmek mümkündür:

'D' harfini keyfe-bağlı olarak seçilmiş olup "doğru" olduğu bilinen belli bir önermenin kısaltması olarak kullanalım. Aynı şekilde 'Y' harfi keyfe-bağlı olarak seçilmiş olup "yanlış" olduğu bilinen belli bir önermenin kısaltması olsun. O zaman (129) gibi bir önermenin "doğru" olduğunu bildiğimiz herhangi bir bileşeninin 'D' ile değiş-tokuş edilmesiyle elde edilen önerme (129) ile "eşdeğer" olur. Aynı şekilde (129) önermesinin herhangi bir bileşeninin 'Y' ile değiş-tokuş edilmesiyle elde edilen önerme de (129) ile eşdeğer olur. Buna göre, (129)da ("doğru" olduğunu kabul ettiğimiz) 'A' atomsal-önermesi yerine 'D', ("yanlış" olduğunu kabul ettiğimiz) 'B' önermesi yerine de 'Y' koymakla elde edilen:

(134) ~(~(~(D v~Y) · ~Y) v (~D · Y))

önermesi (129) ile eşdeğer olur. (134) önermesinde ise (doğruluk-çizelgelerine dayanarak) "doğru" olduğunu tesbit ettiğimiz bileşenleri 'D' ile, "yanlış" olduğunu tesbit ettiğimiz bileşenleri de 'Y' ile değiş-tokuş etmek suretiyle elde edilen önerme (134) ile, dolayısiyle de (129) ile eşdeğer olur. Bu son önermeyi de aynı şekilde onunla eşdeğer olan başka bir önermeye dönüştürebiliriz. Aynı işlemi gerektiği kadar tekrarlıyarak, (129) önermesinin sonunda 'Y' önermesine dönüştüğünü, dolayısiyle de "yanlış" olduğunu gösterebiliriz:

(135)

1. $\sim(\sim(\sim(A \vee \sim B) \cdot \sim B) \vee (\sim A \cdot B))$
2. $\sim(\sim(\sim(D \vee \sim Y) \cdot \sim Y) \vee (\sim D \cdot Y))$
3. $\sim(\sim(\sim(D \vee D) \cdot D) \vee (Y \cdot Y))$
4. $\sim(\sim(\sim D \cdot D) \vee Y)$
5. $\sim(\sim(Y \cdot D) \vee Y)$
6. $\sim(\sim Y \vee Y)$
7. $\sim(D \vee Y)$
8. $\sim D$
9. Y

§ 8. Koşul, Karşılıklı-koşul, Bağdaşmazlık ve Birlikte-hayırlama Eklemleri

'İse' ('-se') ek-fiili yardımiyle meydana getirilen:

(1) A ise, B

biçimindeki bileşik-önermelere *"koşul-önermeleri"* (conditional statements) denir.[1] Örneğin:

(2) Ahmet Ankara'ya gitmezse, annesi İstanbul'a gelecektir
(3) Fırtına kopmazsa, Ahmet uçağa binecektir
(4) Yarın Ankara'ya gitmezsem, Konya'ya gideceğim
(5) Sokrates insan ise, ölümlüdür.

önermelerinin her biri (mantıksal-yapısı bakımından) (1) biçiminde olduğundan bir "koşul-önermesi" durumundadır. Her koşul-önermesi iki ana-bileşeni olan bir molekülsel-önermedir. Buna göre, *'ise'* sözcüğünü, bir koşul-önermesinin ana-eklemi durumunda geçmesi halinde, bir *"2-li önerme-eklemi"* sayabiliriz.

(1) biçimindeki bir önermenin iki ana-bileşeni 'A' ile 'B' önermelerinden ibarettir. 'A' önermesine koşul-önermesinin *"ön-önerme"*si (antecedent), 'B' önermesine de *"ard-önerme"*si (consequent) diyeceğiz. Buna göre, ön-önermenin 'ise' ekleminin ön etki-alanından, ard-önermenin ise

aynı eklemin ard etki-alanından ibaret olduğunu söyleyebiliriz. Günlük dilin kullanımları açısından, bir koşul-önermesinin öne sürülmesi, bu önermenin tümünün evetlenmesinden çok, sadece *ard-önermesinin şarta bağlı olarak evetlenmesi* anlamına gelir. [2] Başka bir deyimle, (1) gibi bir önermeyi öne sürmemiz, 'B' önermesini 'A' nın doğru olması şartiyle evetlememizden başka bir şey değildir. Buna göre, 'A' nın doğru olduğu anlaşılırsa (yani söz konusu koşul yerine gelirse) 'B' nin doğruluğunu iddia etmiş sayılırız; öyle ki 'B' nin yanlışlığı iddiamızın tümünü çürütür. Şu halde, 'A' doğru, 'B' de yanlış ise (1) koşul-önermesinin tümü *yanlış* olur. Bu durumu şöyle bir çizelge yardımiyle dile getirebiliriz:

(6)

A	B	A ise, B
D	Y	Y

Buna karşılık, 'A' nın doğru olması halinde 'B' nin de doğru olması genel olarak (1) önermesinin doğruluğu için *"yeterli" bir şart değildir.* Nitekim böyle bir durumda 'A' ve 'B' bileşenlerinin içeriğine bağlı olarak, (1) önermesi bazı hallerde "doğru", başka hallerde ise "yanlış" olabilir. Bu durumu da:

(7)

A	B	A ise, B
D	D	?

gibi bir çizelge ile dile getirebiliriz. Burada '?' işaretiyle 'A ise, B' önermesinin duruma göre doğru veya yanlış olabileceğini, ama doğru mu, yoksa yanlış mı olduğunun salt 'A' ile 'B' bileşenlerinin doğruluk-değeri ile belirlenmediğini gösteriyoruz.

Öte yandan, 'A' nın *yanlış* olduğu anlaşılırsa (1) önermesi "hükümsüz" olur. Bu halde ('B' önermesi ister "doğru" ister "yanlış" olsun) (1) in hiç bir doğruluk-değeri olmadığını, yani ne doğru ne de yanlış olduğunu söyleyebiliriz. ("Doğruluk-değeri boşluğu" -truth-value gap-). Bu durumu da:

(8)

A	B	A ise, B
Y	D	—
Y	Y	—

'—' işaretini 'A ise, B' önermesinin ne doğru ne yanlış olduğunu belirtmek için kullanıyoruz.

(6), (7) ve (8) çizelgelerini bir tek çizelge olarak

(9)

A	B	A ise, B
D	D	?
D	Y	Y
Y	D	—
Y	Y	—

biçiminde birleştirebiliriz. (9) çizelgesinden :

(10)

A ise, B	A	B
D	D	D
Y	D	D
Y	D	Y
—	Y	D
—	Y	Y

gibi bir çizelgeyi türetebiliriz.

(9) ile (10) çizelgeleri günlük dilin herhangi bir koşul-önermesinin doğruluk-değeri ile bu önermenin bileşenlerinin doğruluk-değerleri arasındaki formel bağlantıları dile getirir.

Günlük dilde bir koşul-önermesini genel olarak ne ön-önermenin ne de ard-önermenin doğruluk-değerini bilmediğimiz hallerde öne süreriz. Nitekim, *ön-önermenin yanlış* olduğunu bilirsek, (1) gibi bir önermenin evetlenmesi (bu önerme ne doğru ne de yanlış olduğundan) mânasızdır. *Ön-önermenin doğru* olduğunu bildiğimiz hallerde ise, (1) biçimindeki bir önerme-yerine:

(11) A olduğundan, B

gibi bir önermeyi evetleriz. Örneğin: Sokrates'in insan olduğunu bildiğimizden, günlük dilde hiç bir zaman (5) önermesini kullanmaz, onun yerine:

(12) Sokrates insan olduğundan, ölümlüdür

türünden bir önermeyi evetleriz.

Öte yandan, *ard-önermenin doğru* olduğunu bildiğimiz hallerde, ya doğrudan doğruya bu önermeyi evetleriz, ya da doğruluğunun gerekçesini belirtmek amaciyle (11) biçimindeki bir önermeyi evetleriz. Böyle bir durumda (11) yerine:

(13) B, çünkü A

biçimindeki bir önermeyi de evetlemek mümkündür.

Ard-önermenin yanlış olduğunu bildiğimiz hallerde ise (1) önermesini veya ona çevrilebilen herhangi başka bir önermeyi (yalan hali bir yana) evetlemiyeceğimiz meydandadır.

Bazı koşul-önermelerini de birer *"dilek-şart önermesi"*[3] şeklinde yorumlamamız gerekir. Örneğin:

(14) Ahmet Ankara'ya giderse, annesi çok sevinecektir

önermesi ön-önermenin yanlış olması halinde de doğru olabilir. O zaman (14) ü :

(15) Ahmet Ankara'ya gitse, annesi çok sevinirdi

biçimindeki bir dilek-şart önermesine çevirebiliriz. Bir dilek-şart önermesini genel olarak dilek-şart kipinden 'olsa' fiili yardımiyle:

(16) A olsa, B

biçiminde dile getirebiliriz. (16) biçimindeki bir önermenin doğruluk-değeri ile bileşenlerinin doğruluk-değerleri arasındaki formel bağlantıları :

(17)

A	B	A olsa, B
D	D	?
D	Y	Y
Y	D	?
Y	Y	?

çizelgesiyle, bundan türetilebilen:

(18)

A olsa, B	A	B
D	D	D
D	Y	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	D	Y
Y	Y	D
Y	Y	Y

çizelgesi yardımiyle dile getirebiliriz. Nitekim, (16) gibi bir dilek-şart önermesini genel olarak *"ön-önermenin doğruluk-değerini bilmediğimiz* hallerde öne sürmekle birlikte, (1) biçimindeki "koşul-önermeleri"nden farklı olarak 'A' nın yanlış çıkması hiç te (16) nın hiç bir doğruluk-değeri taşımamasına yol açmaz. Hattâ *"olana-aykırı koşul-önermeleri"* (counterfactual conditionals) denilen bazı dilek-şart önermelerini *ön-önermenin yanlış olduğunu bildiğimiz* hallerde öne süreriz. Olana-aykırı koşul-önermelerini 'olsaydı' sözcüğü yardımiyle:

(19) A olsaydı, B

biçiminde dile getirebiliriz. Örneğin: Ahmed'in Ankara'ya gitmiyeceğini bildiğimiz halde,

(20) Ahmet Ankara'ya gitseydi, annesi çok sevinecekti

gibi bir önermeyi "doğru" olarak evetlemek mümkündür. İşte (19) biçimindeki bir olana-aykırı koşul-önermesinin doğruluk-değeri ile bileşenlerinin doğruluk-değerleri arasındaki formel bağlantıları:

(20)

A	B	A alsaydı, B
Y	D	?
Y	Y	?

çizelgesiyle, bundan türetilebilen:

(21)

A olsaydı, B	A	B
D	Y	D
D	Y	Y
Y	Y	D
Y	Y	Y

çizelgesi yardımiyle dile getirebiliriz.

İmdi, gerek (9) ve (10) çizelgeleri ile belirtilen *'ise'* eklemi, gerek (17) ve (18) çizelgeleriyle belirlenen *'olsa'* eklemi, gerekse (20) ve (21) çizelgeleriyle belirlenen *'olsaydı'* ekleminin *doğruluk-fonksiyonu* durumunda *olmadığı* meydandadır. Aslında *"olsa'* ile *'olsaydı'* eklemleri yapıları gereği doğruluk-fonksiyonu durumunda değildir. *'İse'* ekleminin ise günlük dilde çokluk doğruluk-fonksiyonu durumunda geçmemekle birlikte, bir doğruluk-fonksiyonu durumunda da kullanılabileceğini göstereceğiz. Nitekim, (9) çizelgesini göz önüne alarak bunu bir (eksiksiz) doğruluk-çizelgesi biçimine dönüştürmeğe çalışalım. Birinci sırada ('A' doğru ve 'B' doğru hali) (1) önermesi (yani 'A ise, B') duruma göre doğru veya yanlış olabiliyor. *'İse'* sözcüğünün doğruluk-fonksiyonu durumunda olması halinde ise, (1) önermesinin yalnız bir tek belli doğruluk-değeri taşıması (yani ya doğru, ya yanlış olması) gerekecektir. Oysa (1) önermesi, (10) çizelgesi uyarınca ancak 'A' doğru ve 'B' doğru ise doğru olabilir. Şu halde 1.ci sırada (1) in altına 'Y' yazılması, (1) önermesinin ortak kullanımlar bakımından doğru olduğu hallerde yanlış sayılmasına yol açar. Buna göre, 1.ci sırada (1) in altına 'D' yazmanın ortak kullanımlara en az aykırı olduğunu görüyoruz. 2.ci sıraya gelince: (9) çizelgesinde olduğu gibi 'Y' yazarız. 3.cü ve 4.cü sıraya gelince: ortak kullanımların bu haller için (1) önermesine hiç bir doğruluk-değeri yüklemediğini görüyoruz. ("Doğruluk-değeri boşluğu"!) Böyle bir halde, (1) önerme-

sine ilkece keyfe-bağlı olarak istediğimiz doğruluk-değerini yüklemek mümkündür. Bununla birlikte, dolambaçlı bir yola başvurarak, (1) önermesini bu son iki halde "doğru" saymanın, ortak kullanımlara en uygun bir belirleme olduğunu gösterebiliriz. Nitekim

(22) $\sim A \vee B$

ayrıklığını göz önüne alalım. Böyle bir önermenin 'A' nın *yanlış* olması halinde doğru olduğunu kolayca görebiliriz. Oysa, (22) önermesinin doğru olması, (1) önermesinin de doğruluğunu gerektirir. Bu durumu şöyle bir karma çizelge yardımiyle dile getirebiliriz:

(23)

A	~A	~A v B	A ise, B
Y	D	D	D

'~A v B' nin doğruluğunun 'A ise, B' nin doğruluğunu gerektirdiğini şöyle gösterebiliriz: 'C veya B' biçimindeki bir önermeyi göz önüne alalım. Bu önermenin doğru olması şartiyle, *'C' yanlış ise, 'B' doğru* olur. İmdi, 'C' yerine '~A' *('A değil'* önermesini) koyalım. O zaman '~A' yanlış ise 'A' doğru olur. *"'~A' yanlıştır"* deyimi yerine *"A doğrudur"* deyimini kullanabiliriz. Şu halde 'A' doğru ise 'B' doğru olur. Bu son deyim ise *'A ise, B'* anlamına gelir. (İ.K.)[4]

İşte, 'ise' ekleminin doğruluk-fonksiyonu durumunda geçtiği hallerde, *'A ise, B'* önermesinin doğruluk-değerinin 'A' *ön-önermesinin "yanlış"* olması halinde hep *"doğru"* olduğunu kabul edeceğiz. Buna göre, gerek 3.cü, gerek 4.cü sırada (1) önermesinin altına 'Y' yazmak gerekecektir. Böylece (9) çizelgesi yerine:

(24)

A	B	A ise, B
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	D

doğruluk-çizelgesini kurabiliriz. Bu çizelgeden de:

(25)

A ise, B	A	B
D	D	D
Y	D	Y
D	Y	D
D	Y	Y

çizelgesini türetebiliriz. (24) ve (25) çizelgeleriyle belirlenen doğruluk-fonksiyonu durumundaki önerme-eklemine *"koşul-eklemi"* diye-

ceğiz. Bu eklem için (modern mantıkçıların çoğunu izleyerek) '⊃' sembolünü kullanacağız.

(26) $A \supset B$

biçimindeki önermelere *"doğruluk fonksiyonu durumundaki koşul önermeleri"* veya *"materyel" koşul-önermeleri* denir. [5]

İmdi, günlük dilde kullanılan koşul-önermelerinin çoğunluğu "materyel" olmamakla birlikte, materyel koşul-önermelerinin bazı hallerde günlük dilde de kullanıldığını gösterebiliriz. Özellikle, 'veya' sözcüğünün *doğruluk-fonksiyonu* durumunda geçtiği *'A veya B'* biçjimindeki önermelerin karşılığı olan:

(27) $\sim A$ ise, B

biçimindeki her önermeyi (23) gereği bir "materyel koşul-önermesi" şeklinde yorumlıyabiliriz. Nitekim (27) önermesi 'A veya B' ile eşdeğer olduğundan, gerek 'A' nın gerek 'B' nin doğru olması halinde doğru olur. Buna karşılık 'A veya B' bir doğruluk-fonksiyonu değilse, (27) nin bir "materyel koşul-önermesi" olamıyacağını gösterebiliriz.

Günlük dilde kullanılan koşul-önermelerinden bir çoğunun "materyel" olup olmadığını kesin bir şekilde tesbit edemiyoruz. Örneğin: sözü geçen (2), (3) ve (4) önermelerini gerek "materyel" gerek "materyel" olmıyan birer koşul-önermesi şeklinde yorumlamak mümkündür. Genel olarak, 'A ise, B' nin *'B, çünkü A'* anlamına gelmesi halinde "materyel" olmadığını; buna karşılık 'A' ile 'B' arasında hiç bir özünlü bağlantı olmaması halinde de "materyel" olduğunu söyleyebiliriz. Örneğin:

(28) Ahmet bu ilâcı alırsa iyileşecektir.

önermesi "materyel" olmıyan bir koşul-önermesi sayılmalıdır. Nitekim, (28) önermesinin her iki bileşeninin doğru olması (yani Ahmed'in söz konusu ilâcı alıp bir süre sonra iyileşmesi), bu önermenin doğru olmasının yeterli bir koşulu değildir. Ahmed'in iyileşmesi ilâcın alınmasına değil de bambaşka bir nedene bağlı olabilir. Üstelik, ön-önermenin *yanlışlığının,* yani Ahmed'in ilâcı almamasının hiç te (28) önermesinin doğruluğunu gerektirmediği meydandadır. Buna karşılık:

(29) Bu problemi çözebilirsen, şapkamı yerim.

önermesi [6] "materyel" bir koşul-önermesi sayılabilir. Nitekim böyle bir önermeyi söz konusu problemin karşımdaki tarafından çözülemiyeceğine dair inancımı belirtmek için öne sürerim; öyle ki problemin gerçekten çö-

zülememesi halinde, ön-önermenin yanlışlığı (29) önermesini tüm olarak doğrular. Öte yandan, beklediğimin tersine, problem çözülürse, şapkamı yemem (örneğin çikolatadan bir şapka yaptırıp onu belli bir süre giydikten sonra yemem) gene (29) önermesini doğrular.

İmdi, (29) önermesini öne sürecek yerde,

(30) Bu problemi çözemiyeceksin, yoksa şapkamı yerim

gibi bir önermeyi kullanmak mümkündür. (29) ile (30) önermelerini eş-anlamlı sayabiliriz. (30) önermesinin doğruluğunun gerekli ve yeterli koşulu problemin çözülememesi veya beklediğimizin tersine, çözülmesi halinde şapkamı yememden ibarettir. İşte, 'A ise, B' biçimindeki herhangi bir "materyel" koşul-önermesini:

(31) A değil, yoksa B

biçiminde dile getirmek mümkündür. (31) önermesinin doğruluğunun gerekli ve yeterli koşulu, 'A' önermesinin yanlış olması veya 'B' önermesinin doğru olmasından ibarettir.

(32) A, yoksa B

biçimindeki bir önermeyi 'A v B' ayrıklığı şeklinde yorumlıyabiliriz. Nitekim, (32) önermesinin ancak hem 'A' hem 'B' nin yanlış olması halinde yanlış olduğunu, bütün öteki hallerde ise doğru olduğunu kabul edebiliriz. Örneğin: bir annenin misafir bulundukları bir evde yaramazlık yapmasından korktuğu çocuğunun uslu durmasını sağlamak amacıyla söylediği:

(33) Uslu durursun, yoksa seni bir daha buraya getirmem

önermesini göz önüne alalım. Burada 'A' olarak 'uslu durursun' önermesi, 'B' olarak ta 'seni bir daha buraya getirmem' önermesi alınmıştır. İmdi, 'A' önermesinin doğruluğu (33) önermesinin doğruluğu için yeterli bir koşuldur. Bu durumu:

(34)

A	A, yoksa B
D	D

çizelgesi yardımiyle dile getirebiliriz. Bu koşul 'B' önermesinin doğruluk-değerine bağlı olmadığından, 'B' ister doğru, ister yanlış olsun, geçerliliğini kaybetmez. Şu halde:

(35)

A	B	A, yoksa B
D	D	D
D	Y	D

çizelgesini kurabiliriz. Nitekim, (33) önermesini

(36) Uslu durursan, seni bir daha buraya getiririm

biçiminde yorumlamamak gerek; öyle ki çocuğun uslu durmasına rağmen annesinin onu bir daha söz konusu eve getirmemesi (33) önermesini yanlışlamaz.

Öte yandan 'A' nin *yanlış* olması, yani çocuğun uslu durmaması halinde, '*B*' de yanlış ise, yani annesi onu bir daha o eve getirirse, (33) yanlış olur; buna karşılık, 'B' doğru ise, yani annesi çocuğu bir daha o eve getirmezse (33) doğru olur. Bu durumu da:

(37)

A	B	A, yoksa B
Y	Y	Y
Y	D	D

çizelgesiyle dile getirebiliriz. (34), (35) ve (37) çizelgelerini de:

(38)

A	B	A, yoksa B
D	D	D
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

gibi bir tek çizelge halinde birleştirebiliriz. (38) çizelgesi ise 'A v B' ayrıklığının doğruluk-çizelgesinden başka bir şey değildir. (33) önermesini

(39) Uslu durmazsan, seni bir daha buraya getirmem

gibi bir materyel koşul-önermesine de dönüştürebiliriz. Bu önerme de '$\sim A \supset B$' biçimindedir.

Günlük dilde kullanılan önerme-eklemleri arasında bir de şu eklemlerin önemi vardır:

'A ise, B' ve 'B ise, A' gibi birbirinin *"evriği"* olan iki koşul-önermesi yerine:

(40) A, ancak ve ancak B ise

gibi bir tek önermeyi kullanmak mümkündür. (40) önermesi:

(41) A ise, B; B ise, A

anlamına gelir. Bu bakımdan (40) biçimindeki önermelere *"karşılıklı-koşul önermeleri"*[7] diyeceğiz. Karşılıklı-koşul önermeleri ikişer koşul-önermesinin bir arada evetlenmesi anlamına geldiğinden, koşul-önermeleri için bütün söylediklerimiz karşılıklı-koşul önermelerine de uygulanır. Ö-

zellikle karşılıklı-koşul önermelerini *"materyel karşılıklı-koşul önermeleri"* ile *"materyel olmıyan karşılıklı-koşul önermeleri"*ne ayırmamız gerekecektir.

Her iki türlü karşılıklı-koşul önermelerinin doğruluk-çizelgesini kurmak için şöyle bir karma çizelgeye başvurabiliriz:

(42)

A	B	A ise, B	B ise, A	(A ise, B) ve (B ise, A)
D	D	?	?	?
D	Y	Y	—	—
Y	D	—	Y	—
Y	Y	—	—	—
D	D	D	D	D
D	Y	Y	D	Y
Y	D	D	Y	Y
Y	Y	D	D	D

(42) nin ilk dört sırası materyel-olmıyan koşul-önermelerine, son dört sırası ise materyel koşul-önermelerine ilişkindir. (42) ye dayanarak *materyel-olmıyan karşılıklı-koşul önermelerinin doğruluk-çizelgesinin :*

(43)

A	B	A, ancak ve ancak B ise
D	D	?
D	Y	—
Y	D	—
Y	Y	—

biçiminde; *materyel karşılıklı-koşul önermelerinin doğruluk-çizelgesinin* de :

(44)

A	B	A, ancak ve ancak B ise
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	D

biçiminde olduğunu görüyoruz. (43) çizelgesi, materyel olmıyan bir karşılıklı koşul-önermesinin ancak her iki bileşeninin doğru olması halinde belli bir doğruluk-değeri olduğunu, bu doğruluk-değerinin ise sadece bileşenlerinin doğruluk-değerine bağlı olmadığını belirtmektedir. Örneğin:

(45) Paris Fransa'dadır, ancak ve ancak deniz tuzlu ise

(46) Paris Afrikada'dır, ancak ve ancak deniz tatlı ise

önermeleri günlük dilin kullanımları açısından (sözdizimi düzgün olmakla birlikte) "mânasız" veya hiç olmazsa "yersiz" sayılır. Buna karşılık bunları materyel karşılıklı-koşul önermeleri olarak yorumlarsak, her ikisinin de "doğru" olduğunu söyleyebiliriz. Nitekim, birincisinin her iki bileşeni "doğru", ikincisinin ise her iki bileşeni "yanlış"tır.

(47) Ahmet iyileşecektir, ancak ve ancak bu ilâcı içerse

önermesini materyel olmıyan bir karşılıklı-koşul önermesi olarak yorumlamak gerek. Nitekim, Ahmed'in ilâcı içip iyileşmesi (bu ilâcı içmesinden bambaşka bir nedene bağlı olabildiğinden) (47) önermesinin doğruluğunu gerektirmediği gibi; her iki bileşeninin yanlış olması, yani Ahmed'in ilâcı içmeyip iyileşmemesi de bu önermenin doğruluğunu gerektirmez.

Materyel karşılıklı-koşul önermelerini (ötekilerinden ayırdetmek amaciyle)

(48) $A \equiv B$

biçiminde dile getireceğiz. '≡' işaretine *"karşılıklı-koşul eklemi"* diyeceğiz.

Başka bir önerme-eklemi *"bağdaşmazlık"* (incompatibility) eklemidir. Günlük dilde iki önermenin birbiriyle bağdaşmadığını ifade eden özel bir sözcük yoktur. 'A' ile 'B' gibi iki önermenin birbiriyle bağdaşmaz olduğu ancak:

(49) A ise, B değil

biçimindeki bir önerme yardımiyle dile getirilir.

(49) biçimindeki bir önermenin doğruluk-çizelgesi, içinde geçen 'ise' ekleminin doğruluk-fonksiyonu durumunda olup olmadığına, yani önermenin materyel veya materyel-olmıyan bir koşul-önermesi olmasına bağlıdır. Birinci halde:

(50)

A	B	B değil	A ise, B değil
D	D	Y	Y
D	Y	D	D
Y	D	Y	D
Y	Y	D	D

çizelgesini; ikinci halde ise:

(51)

A	B	B değil	A ise, B değil
D	D	Y	Y
D	Y	D	?
Y	D	Y	—
Y	Y	D	—

çizelgesini elde ederiz.

(50) çizelgesi ile belirlenen bağdaşmazlığa *"materyel bağdaşmazlık"*, (51) çizelgesiyle belirlenen bağdaşmazlığa da *"materyel-olmıyan bağdaşmazlık"* diyeceğiz. Görüldüğü gibi, bir materyel bağdaşmazlığın doğru olmasının gerekli ve yeterli koşulu bileşenlerden hiç olmazsa birinin yanlış olmasından ibarettir. Örneğin:

(52) Yarın Ankara'ya gidersem, Konya'ya gitmiyeceğim

önermesini "materyel" bir bağdaşmazlık şeklinde yorumlarsak, yarın Ankara'ya gitmemem veya Konya'ya gitmemem bu önermeyi doğrular. Buna karşılık, (52) önermesini *materyel olmıyan* bir bağdaşmazlık şeklinde yorumlamamız halinde, yarın Ankara'ya gidip Konya'ya gitmemem bu önermenin doğrulanması için "yeterli" bir koşul değildir. (52) nin doğru olması için bir de:

(53) Yarın Konya'ya gitmiyeceğim, çünkü Ankara'ya gideceğim

önermesinin doğru olması gerekir. Başka bir deyimle, bileşenleri 'A' ile 'B' gibi iki önermeden ibaret olan "materyel-olmıyan" bir bağdaşmazlık 'A' ile 'B' bileşenlerinin *aynı zamanda doğru olamaması* anlamına gelir. Buna göre, materyel-olmıyan bir bağdaşmazlığın salt bir bağdaşmazlık değil bir *"bağdaşamazlık"* olduğunu söyleyebiliriz. Bu durumdan faydalanarak, bundan böyle 'materyel-olmıyan bağdaşmazlık' deyimi yerine *'bağdaşamazlık'* terimini kullanıp *'b a ğ d a ş m a z l ı k'* terimini (başka türlü belirtilmediği hallerde) yalnız "materyel-bağdaşmazlık" anlamında kullanacağız.

İmdi (materyel) bağdaşmazlıklar sembolik mantıkta özel bir önerme-eklemi yardımiyle dile getirilir. *"B a ğ d a ş m a z l ı k - e k l e m i"* diyeceğimiz bu eklem için '|' sembolü kullanılır.[8] Buna göre herhangi bir bağdaşmazlığı:

(54) A|B

biçiminde dile getirebiliriz. Örneğin: (52) önermesini "materyel" olarak yorumlamamız halinde, bu önermeyi:

(55) Yarın Ankara'ya gideceğim | yarın Konya'ya gideceğim biçimine dönüştürebiliriz.

Bağdaşmazlık-eklemi pratikte pek kullanılmamakla birlikte teorik açıdan önemlidir. İlerde göstereceğimiz gibi, doğruluk-fonksiyonu durumunda olan *bütün* önerme-eklemlerini salt bağdaşmazlık-eklemine geri götürmek mümkündür. Böylece, doğruluk-fonksiyonları teorisini teorik olarak sadece bağdaşmazlık-eklemi yardımiyle dile getirebiliriz.

Doğruluk-fonksiyonu durumunda olan bütün önerme-eklemleri arasında bir de *"birlite-hayırlama eklemi"*[9] diyeceğimiz başka bir ("2-li") önerme-eklemi vardır. Bu eklem günlük dilde 'ne...ne...' ifade şekli ile dile getirilmektedir. Örneğin:

(56) Yarın ne Ankara'ya gideceğim ne de Konya'ya

gibi bir önermede geçen 'ne...ne...' deyimi "birlikte-hayırlama eklemi" durumundadır. Nitekim, (56) önermesinin evetlenmesi, bu önermenin bileşenleri olan 'yarın Ankara'ya gideceğim' önermesiyle 'yarın Konya'ya gideceğim' önermesini *birlikte hayırlamak* anlamına gelir. Genel olarak ta :

(57) Ne A ne B

biçimindeki herhangi bir önermenin, evetlenmesinin 'A' ile 'B' önermelerinin birlikte hayırlanması anlamına geldiğini kabul edebiliriz. Buna göre, (57) biçimindeki bir önermenin doğruluğunun gerekli ve yeterli koşulunun ne 'A' nın ne de 'B' nin doğru olmamasından, yani *hem 'A' nın hem de 'B' nin yanlış olmasından* ibaret olduğunu görüyoruz. (57) bütün öteki hallerde "yanlış" olur. Buna göre, (57) nin doğruluk-çizelgesi

(58)

A	B	ne A ne B
D	D	Y
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	D

biçiminde olmalıdır. Şu halde birlikte-hayırlama ekleminin günlük dildeki bütün kullanılışlarında *doğruluk-fonksiyonu* durumunda olduğunu söyleyebiliriz. Birlikte-hayırlama eklemi olarak '↓' sembolü kullanılır. Buna göre, (57) biçimindeki herhangi bir önermeyi:

(59) $A \downarrow B$

biçimine dönüştürebiliriz. (58) veya (59) biçimindeki bir önermeye ise bir "b i r l i k t e - h a y ı r l a m a" diyeceğiz.

Buraya kadar *"hayırlama-eklemi", "birlikte-evetleme eklemi", "ayrıklık-eklemi", "bağdaşmaz-ayrıklık eylemi", "koşul-eklemi", "karşılıklı koşul eklemi", "bağdaşmazlık-eklemi"* ve *"birlikte-hayırlama eklemi"* olmak üzere doğruluk-fonksiyonu durumunda olan sekiz tane ayrı önerme-eklemi ile karşılaştık. Pratikte, *'hayırlama-eklemi", "'birlikte-evetleme eklemi" "ayrıklık-eklemi", "koşul-eklemi"* ve *"karşılıklı-koşul eklemi"* olmak üzere yalnız beş tane önerme-eklemi kullanılır. Nitekim bu eklemler mantıksal işlemlerin yapılması için çok elverişli oldukları halde, öteki eklemler (teorik açıdan önemli olsalar bile) bu türlü işlemlerin yapılması için pek kullanışsız ve elverişsizdir. Öte yandan, ilerde göstereceğimiz gibi, sözü geçen beş eklemin, aralarından sadece ikisine geri götürülmesi mümkündür. Ancak beşinin de kullanılması sadece ikisiyle yetinmekten (işlemsel bakımdan) daha elverişli olduğundan, pratikte beşi de kullanılmaktadır.

Bundan böyle sadece doğruluk-fonksiyonu durumunda olan önerme-eklemlerini inceleyeceğimizden, *'önerme-eklemi'* deyimini salt *doğruluk-fonksiyonu* durumunda olan önerme-eklemlerine; 'koşul önermesi' ve *'karşılıklı-koşul önermesi'* deyimlerini de salt *materyel* koşul-önermeleriyle *materyel* karşılıklı-koşul önermelerine uygulayacağız.

§ 9. Önerme-eklemlerinin Sistematik Sınıflanması

Şimdiye kadar, çeşitli önerme-eklemlerini günlük dildeki kullanılışları açısından, biraz da gelişi güzel bir şekilde inceledik. Burada ise *mümkün olan bütün önerme-eklemlerini (doğruluk-fonksiyonu* durumunda olan önerme-eklemleri anlamında) *sistematik* bir şekilde inceleyerek, bunların *"tüketici"* bir şekilde sınıflandırılabileceğini göstereceğiz.

İmdi, 'A_1', 'A_2', ..., 'A_n' gibi n tane önermenin birbirine eklenmesiyle meydana gelen bir molekülsel-önermeyi genel olarak:

(1) $$f(A_1,A_2,\ldots,A_n)$$

biçiminde dile getirebiliriz[1]. Burada 'f' sembolü bir *"n-li önerme-eklemi"*dir. 'f' eklemi (1) molekülsel-önermesinin "ana-eklemi" olup etki-alanı bu önermenin ana-bileşenleri olan 'A_1', 'A_2', ..., 'A_n' önermelerinden ibarettir. 'f' ekleminin doğruluk-fonksiyonu durumunda olduğunu kabul edelim. O zaman (1) önermesi bir doğruluk-fonksiyonu olup doğruluk-değeri yalnız 'A_1', 'A_2', ..., 'A_n' önermelerinin doğruluk-değerleri tarafından belirlenmiştir. Dolayısiyle (1) biçimindeki her önermeye karşılık:

(2)

A_1	A_2	. . .	A_n	$f(A_1,A_2,\ldots,A_n)$
D	D	. . .	D	.
D	D	. . .	Y	.
.	.	. . .	.	.
.	.	. . .	.	.
Y	Y	. . .	Y	.

biçimindeki belli bir doğruluk-çizelgesi vardır. (2) biçimindeki çizelgelere *"n-li doğruluk-çizelgeleri"* diyelim. İmdi, mümkün olan *bütün n-li doğruluk-çizelgelerinin sayısının* tam $2^{(2^n)}$ olduğunu kanıtlıyabiliriz. Nitekim, her n-li doğruluk-çizelgesinin sol yanındaki sıralar *'D' ve 'Y' harflerinin n-er n-er tekrarlı "dizimler"inden* (arrangements) ibarettir. Oysa bu

dizimlerin sayısı 2^n dir. *(r tane nesnenin n-er n-er tekrarlı dizimlerinin sayısı* r^n dir. Bunu rekürsif olarak şöyle kanıtlıyabiliriz: n=1 için r tane nesnenin 1-er 1-er tekrarlı dizimlerinin sayısının $r^n = r^1$ olduğu meydandadır. Şu halde r tane nesnenin n-er n-er tekrarlı dizimlerinin sayısının r^n olduğunu kabul ederek, r tane nesnenin n+1-er n+1-er tekrarlı dizimlerinin sayısının r^{n+1} olduğunu kanıtlamamız gerekir. Oysa bu dizimleri elde etmek için söz konusu r tane nesnenin n-er n-er tekrarlı dizimlerinin her birinin sonuna bu nesnelerden birini katmak gerekli ve yeterlidir. Böylece her dizimden r tane yeni dizim elde ederiz. Eldeki dizimlerin sayısı r^n olduğuna göre, meydana getirilen yeni dizimlerin sayısı $r \cdot r^n = r^{n+1}$ olur. (İ.K.))

İmdi, herhangi iki tane farklı n-li doğruluk-çizelgesini göz önüne alalım. Bu çizelgelerin sol yanları ('D' ve 'Y' harflerinden kurulu 2^n tane dizimden ibaret olduğundan) özdeştir. Şu halde bu çizelgeler ancak sağ yanları bakımından farklı olabilirler. Oysa, herhangi bir n-li doğruluk-çizelgesinin sağ yanı *'D' ve 'Y' harflerinin* 2^n*-er* 2^n*-er tekrarlı diziminden* ibarettir. Bu dizimlerin sayısı ise $2^{(2^n)}$dir. Şu halde *(birbirinden farklı olan) n-li doğruluk-çizelgelerinin sayısı* $2^{(2^n)}$ *dir.*
(İ.K.)

Aynı şekilde, *r-değerli mantıkta* $r^{(r^n)}$ *tane farklı n-li doğruluk-çizelgesinin* mümkün olduğunu kanıtlıyabiliriz.

İmdi, (2-değerli mantıkta) herhangi bir n-li doğruluk-çizelgesini çizmek için pratikte şöyle bir yola başvurmak mümkündür: İlk önce 'A_n'in (yani son bileşenin) altına (bir tek) 'D' yazılır. Ondan sonra 'A_{n-1}' in (yani sondan bir önceki bileşenin) altına alt-alta iki 'D' yazılır. Sonra da 'A_{n-2}' nin altına alt-alta olarak dört tane 'D'; 'A_{n-3}' ün altına alt-alta olarak sekiz tane 'D'; 'A_{n-4}' ün altına alt-alta olarak on altı tane 'D' ... yazılır. Buna göre, 'A_n', 'A_{n-1}', 'A_{n-2}', ..., 'A_2', 'A_1' in altına yazılması gereken 'D' lerin sayısının sırasiyle $2^0=1$, $2^1=2$, $2^2=4$, ..., 2^{n-2} ve 2^{n-1} olduğunu görüyoruz. ('A_n' in '$A_{n-(n-1)}$' 'A_{n-1}'in '$A_{n-(n-1)}$' ..., 'A_1' in 'A_{1-0}' şeklinde yazılabileceğine dikkat edersek, 'A_i' nin altına 2^{i-1} tane 'D' yazılması gerektiğini görürüz). İşte, bu işlemin sonunda 'A_n' altına 2^{n-1} tane 'D' yazdıktan sonra, bunların altına alt-alta olarak bir de aynı sayıda (yani 2^{n-1} tane) 'Y' yazarız. Ondan sonra 'A_{n-1}' in altındaki 'D' lerin altına aynı sayıda (yani 2^{n-2} tane) 'Y' yi alt-alta yazarız. Bunların altına da gene aynı sayıda 'D', onların da altına aynı sayıda 'Y' yazılır. 'A_i' gibi herhangi bir bileşenin altındaki 2^{i-1} tane 'D' nin altına münavebe ile aynı sayıda 'Y', sonra aynı sayıda'D' yazılır. Bu işleme her sütunda birinci

sütunda bulunan sayıda harf yazılıncaya kadar devam edilmelidir. Bütün bu işlemlerin sonucunda, her bileşenin altında $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ tane harften kurulu birer sütun meydana gelmiş olacaktır. İşte bu n tane sütunun yanyana gelmesinden meydana gelen 2^n tane sıra birbirinden farklı olup 'D' ve 'Y' harflerinin n-er n-er tekrarlı dizimlerinden başka bir şey değildir. Örneğin: '$f(A_1, A_2, A_3)$' gibi bir doğruluk-fonksiyonunun doğruluk-çizelgesini çizmek için, önce 'A_3' ün altına 1 tane 'D', sonra 'A_2' nin altına (alt-alta olarak) 2 tane 'D', en sonda da 'A_1' in altına 4 tane 'D' yazarız. Sonra 'A_3' ün altındaki 'D' lerin altına aynı sayıda (yani 4 tane) 'Y' yi alt-alta yazarız. Böylece 'A_1' in altında 4 tane 'D' ile 4 tane 'Y' den kurulu *sekiz* üyeli bir sütun meydana gelir. Bundan sonra 'A_2' nin altındaki 2 tane 'D' nin altına 2 tane 'Y', bunların altına gene 2 tane 'D', en sonda da (8'i doldurmak üzere) daha 2 tane 'Y' yazarız. 'A_3' ün altına da, 'D' nin altına münavebe ile bir 'Y' bir 'D' yazarak sekiz harfli sütunu tamamlarız. Böylece:

(3)

A_1	A_2	A_3	$f(A_1,A_2,A_3)$
D	D	D	.
D	D	Y	.
D	Y	D	.
D	Y	Y	.
Y	D	D	.
Y	D	Y	.
Y	Y	D	.
Y	Y	Y	.

(3) çizelgesinin her sütunu 8 üyeli olduğuna göre, '$f(A_1,A_2,A_3)$' altındaki sütunun da 8 üyeli olması gerekir. Bu türlü sütunların sayısının ise (her biri 'D' ve 'Y' harflerinin 8-er 8-er tekrarlı bir diziminden ibaret olduğundan) $2^8 = 2^{(2^3)}$ olduğunu görüyoruz.

Böylece, *"1-li doğruluk-çizelgeleri"*nin sayısının $2^{(2^1)} = 2^2 = 4$; "2 — li doğruluk-çizelgeleri" nin sayısının $2^{(2^2)} = 2^4 = 16$; *"3-lü doğruluk çizelgeleri"*nin sayısının $2^{(2^3)} = 2^8 = 256$; *"4-lü doğruluk-çizelgeleri"*nin sayısının $2^{(2^4)} = 2^{16} = 65.536$; ... olduğunu söyleyebiliriz. İmdi, ilerde göstereceğimiz gibi, verilen herhangi bir n-li doğruluk-çizelgesine karşılık, doğruluk-çizelgesi bu çizelgeden ibaret olan bir önerme-eklemini salt '$\sim$', '$\cdot$' ve '$\vee$' eklemleri türünden tanımlamak mümkündür. Böylece *her doğruluk-çizelgesine karşılık (en az) bir önerme-eklemi bulunduğunu* kanıtlamış oluruz. Öte yandan, *doğruluk-çizelgeleri aynı olan iki önerme-eklemi* (doğruluk-fonksiyonları teorisi çerçevesi içinde) *an-*

lamdaş sayılmalıdır. Nitekim 'f' ve 'g' doğruluk-çizelgeleri aynı olan herhangi iki önerme-eklemi ise, bunları '~', ' · ' ve 'v' türünden aynı şekilde tanımlamak mümkün olur. Dolayısiyle 'f' ile 'g' *birbirine çevrilebilen semboller* durumundadır. Birbirine çevrilebilen sembolleri ise "anlamdaş" sayıyoruz. (Başka bir deyimle, iki sembolün anlamdaş olmasını, bunların birbirine çevrilebilmesi şeklinde tanımlıyoruz). (İ.K.). Böylece *(doğruluk-fonksiyonu* durumunda olan) *her önerme-ekleminin belli bir doğruluk-çizelgesi yardımiyle tek-anlamlı bir şekilde belirlenebildiğini* görüyoruz.

"3-lü", "4-lü", ..., "n-li"... önerme-eklemlerini 1-li ve 2-li eklemler türünden tanımlıyabildiğimizden, sadece sonuncuları incelemekle yetinebiliriz. "1-li" ve "2-li" eklemleri ise tüketici bir şekilde aşağıdaki karmaşık çizelgeler yardımiyle inceleyebiliriz. (Bu çizelgelerde 'A', 'B' gibi önerme-kısaltmalarını kullanacak yerde 'p' ve 'q' gibi önerme-temsilcilerini kullanıyoruz. Böylece çizelgeler daha genel bir anlam kazanmaktadır).

"1-li eklemler" :

		(1)	(2)	(3)	(4)
(4)	p		p	~p	
	D	D	D	Y	Y
	Y	D	Y	D	Y

Bu eklemlerin sayısının $2^{(2^1)} = 4$ olduğunu belirtmiştik. Bu sonuç çizelgemizden doğrudan doğruya da çıkmaktadır. Çizelgedeki (3) eklemi §7 de sözünü ettiğimiz "hayırlama-eklemi"nden başka bir şey değildir. Nitekim: '~p' önerme-şemasının doğruluk-çizelgesi (7-102) uyarınca:

p	~p
D	Y
Y	D

biçimindedir. Böylece '~' ile (3) ekleminin doğruluk-çizelgelerinin aynı olduğunu görüyoruz. (İ.K.)

(2) eklemine *"evetleme-eklemi" (affirmation)* diyeceğiz. Nitekim, 'f' (2) türünden bir eklem ise, 'f(A)' biçimindeki herhangi bir önermeyi doğrudan doğruya 'A' olarak tanımlıyabiliriz. Başka bir deyimle:

$$f(A) =_{DK} A$$

gibi bir tanım yapmamız mümkündür. ('$=_{DK}$' sembolünü "tanımlama-işareti olarak kullanıyoruz. 'Dk' ifadesi 'demek' sözcüğünün kısaltmasıdır).

(1) eklemine *"1-li totoloji"*, (4) eklemine de *"1-li çelişme"* diyoruz. Bunların anlamını ilerde aydınlatacağız.

"2-li eklemler":

(5)

p	q	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y	Y
D	Y	D	D	D	D	Y	Y	Y	Y	D	D	D	D	Y	Y	Y	Y
Y	D	D	D	Y	Y	D	D	Y	Y	D	D	Y	Y	D	D	Y	Y
Y	Y	D	Y	D	Y	D	Y	D	Y	D	Y	D	Y	D	Y	D	Y

"2-li eklemler"in sayısının $2^{(2^2)} = 16$ olduğunu göstermiştik. Bu sonucu doğrudan doğruya çizelgeden de çıkarabiliriz. Bu 16 tane eklemi şöyle bir çizelge halinde sıralayabiliriz.

(1) TOTOLOJİ	
(2) AYRIKLIK	$p \vee q$
(3) EVRİK KOŞUL	$p \subset q$
(4) p-nin EVETLENMESİ	p
(5) KOŞUL	$p \supset q$
(6) q-nün EVETLENMESİ	q
(7) KARŞILIKLI-KOŞUL	$p \equiv q$
(8) BİRLİKTE-EVETLEME	$p \cdot q$
(16) ÇELİŞME	
(15) BİRLİKTE-HAYIRLAMA	$p \downarrow q$
(14) EVRİK-KOŞULUN HAYIRLANMASI	$p \not\subset q$
(13) p-nin HAYIRLANMASI	$\sim p$
(12) KOŞULUN HAYIRLANMASI	$p \not\supset q$
(11) q-nün HAYIRLANMASI	$\sim q$
(10) BAĞDAŞMAZ-AYRIKLIK	$p \nmid q$
(9) BAĞDAŞMAZLIK	$p \mid q$

Bu çizelgede geçen önerme-şemaları iki sütun halinde öbekleştirilmiştir. Birinci sütundaki her önerme-şeması ikinci sütunda kendi hizasında bulunan önerme-şemasının hayırlanması durumundadır. (2.ci sütundaki herhangi bir önerme-şemasının doğruluk-çizelgesi, 1.ci sütundaki karşılığının çizelgesinde 'D' yerine 'Y', 'Y' yerine 'D' koymak suretiyle elde edilebilir!). Buna göre, son sekiz eklemin ilk sekiz eklem türünden (hayırlama işlemi yardımiyle) tanımlanabileceğini, dolayısiyle "1-li" bir eklem

olan "hayırlama-eklemi"nden başka, yalnız (1) — (8) "2-li eklemler"iyle yetinebileceğimizi görüyoruz. İmdi, bu sekiz tane 2-li eklemden (1) eklemi, yani totoloji "işlek" değildir. (4) ve (6) eklemleri ise "yozlaşmış" (degenerated) sayılabilir. Nitekim bu eklemlerden biriyle meydana getirilen herhangi bir önermenin doğruluk-değeri yalnız bir tek bileşeninin doğruluk-değerine bağlıdır. Örneğin: 'f', (4) türünden bir 2-li eklem olsun. O zaman 'f(A,B)' biçimindeki bir önerme hep 'A' bileşeni ile eşdeğer olur.

Böylece geriye sadece beş tane eklem kaldığını görüyoruz. Bunlardan (3) ün doğrudan doğruya (5) türünden

$$p \subset q \quad =_{DK} \quad q \supset p$$

şeklinde tanımlanabileceği meydandadır. O halde geriye sadece *"ayrıklık"*, *"koşul"*, *"karşılıklı-koşul"* ve *"birlikte-evetleme"* eklemleri kalmaktadır. İşte, daha önce de belirttiğimiz gibi, pratikte sadece bu dört 2-li eklemle bir 1-li eklem olan *"hayırlama"* kullanılmaktadır.

B ö l ü m III

DOĞRULUK-DEĞERİ ANALİZİ

§ 10. Geçerlilik, Tutarlılık ve Tutarsılık

Giriş'te belirttiğimiz gibi, mantık

(1)
$$\begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n \\ \therefore B \end{array}$$

biçimindeki herhangi bir çıkarımın geçerli olup olmadığını tesbit etmeğe yarayan bir metot durumundadır. Oysa, (1) gibi bir *çıkarımın geçerliliğinin gerekli ve yeterli şartı:*

(2)
$$(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) \supset B$$

(materyel) *koşul-önermesinin mantıkça-doğru olmasından* ibarettir. Bir *"önerme"nin mantıkça-doğru* olmasını, bu önermenin *"geçerli" bir önerme-şemasının* bir *yerine-koyma örneği olması* şeklinde; bir *"önerme-şeması"nın geçerli* olmasını da, bu *önerme-şemasının yerine-koyma örneği olan her önermenin doğru olması* şeklinde tanımlıyoruz. Bu tanımlara dayanarak, (1)'in geçerliliğinin gerekli ve yeterli şartının (2)'nin mantıkça-doğru olmasından ibaret olduğunu şöyle kanıtlıyabiliriz:

(3)
$$\begin{array}{l} A'_1 \\ A_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ A'_n \\ \therefore B' \end{array}$$

(1) çıkarımının "temsilci"si olan bir çıkarım-şeması olsun. O zaman (3) ün geçerliliğinin gerekli ve yeterli şartının

(4) $$(A'_1 \cdot A'_2 \cdot \ldots \cdot A'_n) \supset B'$$

önerme-şemasının geçerliliğinden ibaret olduğu kolayca görülür. İmdi,

(1) geçerli ise, (3) te geçerli olur. (3) geçerli ise, (4) te geçerli olur.

(4) geçerli ise, (bu önerme-şemasının bir yerine-koyma örneği olan) (2) önermesi de mantıkça-doğru olur. Öte yandan, (2) mantıkça-doğru ise,

(4) geçerli olur. (4) geçerli ise, (3) geçerli olur. (3) te geçerli ise (1) geçerli olur. (İ.K.)[1]

Görüldüğü gibi, mantığın amacı olan *"çıkarımlar"ın geçerliliğinin* belirlenmesi *"önermeler"in mantıkça-doğruluğunun* belirlenmesine geri götürülebilir. İşte bu bölümde, bölünmemiş önermeler mantığı çerçevesinde önermelerin mantıkça-doğru olmasının nasıl belirlenebildiğini inceleyeceğiz. Ancak bu işe girişmeden önce, verilen herhangi bir önermenin *"mantıkça-doğru"* olmasının bu önermenin mutlak bir özelliği olmadığını, başvurulan mantık dalına bağlı olduğunu belirtmek gerek. Özellikle, önermeler mantığı (doğruluk-fonksiyonları teorisi) çerçevesinde *mantıkça-doğru* olmıyan bir önermenin mantığın başka (ve daha kuşatıcı) bir dalı olan "niceleme mantığı" çerçevesinde mantıkça-doğru olabildiğini ilerde göstereceğiz. Buna karşılık, önermeler mantığı çerçevesinde mantıkça-doğru olan herhangi bir önerme, mantığın bütün öteki dallarının çerçevesi içinde de mantıkça-doğrudur. Bunun gerekçesi, mantığın bütün dallarının önermeler mantığı temeli üzerine kurulmuş olmasından, dolayısiyle bu dallardan her birinin de önermeler mantığını kuşatmasından ibarettir. Bu Bölüm'de *'geçerli'* ve *'mantıkça-doğru'* terimlerini (başka şekilde belirtilmediği hallerde) yalnız *"önermeler mantığı açısından geçerli"* ve *"önermeler mantığı açısından mantıkça-doğru"* anlamında kullanacağız.

İmdi, § 5'te belirttiğimiz gibi, herhangi bir önermenin mantıksal-yapısını bu önermenin *"temsilci-şeması"* dediğimiz bir önerme-şeması yardımiyle dile getirebiliriz. İşte, herhangi bir önermenin "mantıkça-doğru" olmasının gerekli ve yeterli şartının, bu önermenin temsilci-şemasının geçerli olmasından ibaret olduğunu kanıtlıyabiliriz. Nitekim, verilen bir önermenin temsilci-şeması, bu önermenin yerine-koyma örneği olduğu önerme-şemalarının her birinin de bir yerine-koyma örneğidir. Buna göre, Ö belli bir önerme, T de bu önermenin temsilci-şeması olsun. İmdi, Ö mantıkça-doğru bir önerme ise, Ş gibi geçerli bir önerme-şemasının yerine-

koyma örneği olmalıdır. Oysa T şeması Ş şemasının bir yerine-koyma örneği durumundadır. Ş geçerli olduğundan T de geçerli olur. Öte yandan, T geçerli ise, Ö önermesi T nin bir yerine-koyma örneği olduğundan, mantıkça-doğru olur. (İ.K.). Buna dayanarak, *önermelerin mantıksal-doğruluğunu* belirlemek için bunların temsilci-şeması olan *önerme-şemalarının geçerliliğini* belirlemenin yettiğini göz önünde tutacak, dolayısiyle bundan böyle sadece *"önerme-şemaları"*nı inceleyeceğiz.

İmdi, verilen bir önerme-şemasının geçerliliğini, bu önerme-şemasının yerine-koyma örneği olan bütün önermelerin doğru olması şeklinde tanımlamıştık. Oysa, *bir doğruluk-fonksiyonu şemasının yerine-koyma örneği olan bütün önermelerin doğru olmasının gerekli ve yeterli şartı, bu şemanın doğruluk-çizelgesinin sağ yanındaki sütunun salt 'D' harflerinden kurulu olmasından* ibarettir. Bunu şöyle kanıtlıyabiliriz:

Şart gereklidir:

(5) $g(p_1,p_2,\ldots,p_n)$

deyimi belli bir önerme-şeması olsun. O zaman (5) şemasının yerine-koyma örneği durumunda olan her önerme

(6) $f(A_1,A_2,\ldots,A_n)$

biçiminde olur. İmdi, (5) in geçerli bir doğruluk-fonksiyonu şeması olduğunu kabul edelim. Bu halde, (6) önermesinin doğruluk-değeri sadece 'A_1', 'A_2', ..., 'A_n' bileşenlerinin doğruluk-değeri yardımiyle belirlenir. (5) geçerli olduğundan, (6) biçimindeki her önermenin doğru olması gerekir. Bu ise, ancak (5) in karşılığı olan doğruluk-çizelgesinin sağ yanındaki sütunun salt 'D' harflerinden kurulu olması halinde mümkündür. (İ.K.).

Şart yeterlidir :

(5) şemasının karşılığı olan doğruluk-çizelgesinin sağ yanındaki sütunun salt 'D' harflerinden kurulu olduğunu kabul edelim. O zaman, (5) bir doğruluk-fonksiyonu şeması olmak şartiyle, (6) biçimindeki bütün önermeler doğru olur. Dolayısiyle (5) önerme-şeması da geçerli olur. (İ. K.).

Böylece, (önermeler mantığı çerçevesinde) herhangi bir önerme-şemasının geçerli olup olmadığının, salt bu önerme-şemasının doğruluk-çizelgesi yardımiyle tesbit edilebileceğini görüyoruz. Verilen bir doğruluk-

fonksiyonu şemasının veya bir doğruluk-fonksiyonunun doğruluk-çizelgesini "hesaplamağa" yarayan herhangi bir metoda ise *"doğruluk-değeri analizi"*[2] diyeceğiz.

İmdi pratikte kullanılan her önerme-şeması ya bir *"atomsal-şema"*-dır, ya da atomsal-şemalarla '~', '·', 'v', '⊃' ve '≡' eklemlerinden kurulu bir şema. Buna göre, sözü geçen beş önerme-ekleminin karşılığı olan doğruluk-çizelgelerine dayanarak, verilen herhangi bir önerme-şemasının *"doğruluk-değeri analizi"ni,* şöyle yaparız: Önce bu şemanın içinde geçen önerme-temsilcilerine mümkün olan bütün doğruluk-değerlerini sırasiyle yükleriz; sonra tüm deyimin doğruluk-değerini § 7'de gösterdiğimiz metotlardan birini uygulamak suretiyle tesbit ederiz. Örneğin: (7-129) önermesinin temsilci-şeması olan

(7) ~(~(~(p v ~q) · ~q) v (~p · q))

önerme-şemasının doğruluk-değeri analizi, bu deyimin sırasiyle 'p' doğru, 'q' doğru; 'p' doğru, 'q' yanlış; 'p' yanlış, 'q' doğru; 'p' yanlış, 'q' yanlış hallerinde taşıyacağı doğruluk-değerini belirlemek suretiyle şöyle yapılabilir :

(8) ~(~(~(p v ~q) · ~q) v (~p · q))

1. Y D Y D D YD Y YD D YD Y D
2. Y D Y D D DY Y DY D YD YY
3. Y D D Y Y YD Y YD D DY D D
4. Y D Y Y D DY Y DY D DY Y Y

Görüldüğü gibi, (7) gibi bir önerme-şemasının doğruluk-değeri analizi için (§ 7'de gösterilen metotlardan birine dayanan) sözü geçen işlemin tam *dört* defa tekrarlanması gerekiyor. Genel olarak bir "n-li önerme-şeması"nın doğruluk-değeri analizi için bu işlemi 2^n defa tekrarlamak gerek. Bu ise uzun ve yorucu bir iştir. İşte *Quine,* doğruluk-değeri analizinde bu tekrarlamaların sayısını birçok hallerde azaltan yeni bir metot ortaya atmıştır. Çok faydalı gördüğümüz bu metodu, § 11'de bütün ayrıntılariyle göstereceğiz.

İmdi, *"doğruluk-değeri analizi"*nin (hangi metotla yürütülürse yürütülsün) önermeler mantığı için son derece önemli olduğunu söyleyebiliriz. Nitekim, böyle bir analize dayanarak herhangi bir önerme-şemasının, dolayısiyle herhangi bir önermenin ve bundan dolayı da herhangi bir çıkarımın (önermeler mantığı çerçevesi içinde) geçerli olup olmadığını tesbit etmek mümkündür. Üstelik, doğruluk-değeri analizi herhangi bir önerme-şemasının *"tutarlı"* veya *"tutarsız"* olduğunu belirlemeye de yarar. Nitekim, bir önerme-şemasının *"tutarlı"* (consistent, satisfiable) ol-

masını, bu *önerme-şemasının yerine-koyma örneği olan en az bir "doğru" önermenin bulunması* şeklinde tanımlıyoruz. Buna göre, bir önerme-şemasının "*tutarsız*" (inconsistent, unsatisfiable, contravalid) olması, bu *önerme-şemasının "tutarlı" olmaması,* yani bu *önerme-şemasının yerine-koyma örneği olan hiç bir önermenin doğru olmaması* demektir. Bu tanımlara dayanarak, herhangi bir önerme-şemasının *tutarlılığının gerekli ve yeterli şartının,* bu önerme-şemasının doğruluk-çizelgesinin sağ yanındaki sütunda *en az bir tane 'D'* harfinin bulunması; tutarsızlığının gerekli ve yeterli şartının da bu sütunda hiç bir 'D' harfinin bulunmamasından ibaret olduğu kolayca görülebilir. Şu halde, *verilen bir önerme-şemasının tutarlı veya tutarsız olduğunu, salt doğruluk-değeri analizi yardımiyle belirlemek mümkündür.* (İ.K.).

Örneğin: (8) doğruluk-değeri analizine dayanarak, (7) önerme-şemasının "tutarsız" olduğunu söyleyebiliriz. Nitekim, böyle bir analizin sonucunda (7) şemasının doğruluk-çizelgesinin:

(9)

p	q	(7)
D	D	Y
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	Y

biçiminde olduğu anlaşılır. Bu çizelgenin sağ sütunundaki harflerin, (8) çizelgesinde *ana-eklemin* altına yazılan harflerden ibaret olduğunu göz önünde tutarak, (9) doğruluk-çizelgesini çizmeden de (7) şemasının tutarsız olduğu anlaşılabilir. Genel olarak, doğruluk-analizi yapılmış olan bir önerme-şemasının "geçerli" olmasının gerekli ve yeterli şartı, ana-eklemin altındaki *bütün harflerin 'D' den ibaret olması;* "tutarlı" olmasının gerekli ve yeterli şartı, bu harflerin arasında *en az bir 'D' harfinin* bulunması; "tutarsız" olmasının gerekli ve yeterli şartı da bu harfler arasında *hiç bir 'D' harfinin bulunmamasıdır.*

Doğruluk-değeri analizini, bölünmemiş önermeler mantığı çerçevesinde verilen herhangi bir çıkarımın geçerli olup olmadığını belirlemek için kullanabiliriz. Nitekim, daha önce belirttiğimiz gibi, herhangi bir *çıkarımın geçerliliğinin gerekli ve yeterli şartı, ön-önermesi bu çıkarımın öncüllerinin birlikte-evetlenmesinden, ard-önermesi de çıkarımın sonucundan ibaret olan (materyel) koşul-önermesinin geçerli olmasından* başka bir şey değildir. Örneğin:

(10)

A
B
$\therefore$ A.B

biçimindeki bir çıkarımın geçerli olup olmadığını araştıralım. Bu amaçla

(11) $$(A \,.\, B) \supset (A \,.\, B)$$

önermesinin mantıkça-doğru, dolayısiyle de bu önermenin temsilci-şeması olan

(12) $$(p \cdot q) \supset (p \cdot q)$$

önerme-şemasının geçerli olup olmadığını belirlemek gerekecektir. Bunun için de (12) şemasının doğruluk-değeri anlizini şöylesine yaparız:

(13)

(p	·	q)	⊃	(p	·	q)
D	D	D	D	D	D	D
D	Y	Y	D	D	Y	Y
Y	Y	D	D	Y	Y	D
Y	Y	Y	D	Y	Y	Y

İmdi, (12 şemasının ana-eklemi '⊃' dir. Oysa, (13) çizelgesinde '⊃' nin altındaki sütunun salt 'D' harflerinden kurulu olduğunu görüyoruz. Şu halde (12) şemasının, dolayısiyle de (10) çıkarımının geçerli olduğu sonucuna varıyoruz.

§11. *Eşdeğerlik-Bağlantısı ve Quine-Çizelgeleri*

(1) $$f(p_1 , p_2 , \ldots , p_n)$$

ve

(2) $$g(p_1 , p_2 , \ldots , p_n)$$

gibi her birinde 'p_1', 'p_2' .... , 'p_n' önerme-temsilcilerinin geçtiği iki önerme-şemasını göz önüne alalım. (1) şemasının doğruluk-çizelgesiyle (2) şemasının doğruluk-çizelgesinin birbiriyle özdeş olması halinde, bu iki şemanın *"eşdeğer"* olduğunu söyleyeceğiz.

Örneğin: 'p ⊃ q' ile '~p v q' önerme-şemalarının her birinin doğruluk-çizelgesini çizelim:

p	q	p ⊃ q
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	D

p	q	~p v q
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	D

Görüldüğü gibi, bu iki doğruluk-çizelgesi birbiriyle özdeştir. Şu halde 'p ⊃ q' ile '~p v q' önerme-şemalarının "eşdeğer" olduğu anlaşılır.

Genel olarak, (1) ve (2) gibi herhangi iki önerme-şemasının "eşdeğer olup olmadığını kolaylıkla tesbit edebilmek için bu şemaların doğruluk-çizelgelerini

(3) p_1	p_2	. . .	p_n	$f(p_1, p_2, \ldots, p_n)$	$g(p_1, p_2, \ldots, p_n)$
D	D	. . .	D	.	.
D	D	. . .	Y	.	.
.	.	. . . .		.	.
.	.	. . . .		.	.
Y	Y	. .	Y	.	.

biçimindeki bir tek karmaşık çizelge halinde birleştiririz. O zaman (1) ile (2) nin eşdeğerliğinin gerekli ve yeterli şartının, (3) çizelgesinin sağ yanındaki iki sütunun özdeşliğinden ibaret olduğunu söyleyebiliriz.
Örneğin: 'p ⊃ q' ile '~p v q' şemalarının eşdeğer olduğu

p	q	p ⊃ q	~p v q
D	D	D	D
D	Y	Y	Y
Y	D	D	D
Y	Y	D	D

çizelgesinden anlaşılır.

İmdi, (3) biçimindeki karmaşık çizelgeleri, ayrı ayrı önerme-temsilcilerini içine alan önerme-şemaları haline de uygulanacak şekilde genelleştirebiliriz. Örneğin: '~p' ile '~p . (q v ~q)' gibi iki önerme şemasını göz önüne alalım. Görüldüğü gibi, 'q' önerme-temsilcisi bu şemaların ikincisinde geçtiği halde, birincisinde hiç geçmiyor. İmdi, birinci şemaya, yani '~p' deyimine yüklenilebilen doğruluk-değerleri salt 'p' ye yüklenilen doğruluk-değerlerine bağlı olup 'q' ye yüklenilen doğruluk-değerlerinden bağımsızdır. Bu durumu göz önünde tutarak, söz konusu '~p' ile '~p . (q v ~q)' şemalarının karşılığı olarak şöyle bir karmaşık çizelge kurabiliriz:

p	q	~p	~p · (q v ~q)
D	D	Y	Y
D	Y	Y	Y
Y	D	D	D
Y	Y	D	D

Bu çizelgede '~p' nin altındaki sütunun '~p . (q v ~q)' nün altın-

daki sütunla özdeş olduğunu görüyoruz. Buna göre, sözü geçen iki önerme-şemasının "eşdeğer" olduğunu söyleyeceğiz.

Genel olarak $Ş_1$ ve $Ş_2$ gibi (doğruluk-fonksiyonu durumunda olan) herhangi iki önerme-şemasının "eşdeğer" olmasını şöyle tanımlıyoruz: Bu iki şemanın en az birinde geçen önerme-temsilcilerinin 'p_1', 'p_2', . . . , 'p_n' den ibaret olması halinde

(4)

p_1	p_2	. . .	p_n	$Ş_1$	$Ş_2$
D	D	. . .	D	.	.
D	D	. . .	Y	.	.
.	.	. . .	.	.	.
.	.	. . .	.	.	.
Y	Y	.	Y	.	.

biçiminde karmaşık bir çizelge kurulur. Çizelgede $Ş_1$ in altındaki sütun, salt bu şemanın içinde geçen önerme-temsilcilerine (çizelgenin solundaki sütunlara bakarak) yüklenen doğruluk-değerlerine dayanarak meydana getirilir. $Ş_2$ nin altındaki sütun da, aynı şekilde, sadece bu şemanın içinde geçen önerme-temsilcilerine yüklenen doğruluk-değerlerine dayanılarak meydana getirilir. İşte, bu iki sütunun birbiriyle özdeş olması halinde, $Ş_1$ ve $Ş_2$ şemalarına *"eşdeğer"* diyeceğiz.

"Eşdeğerliği", içlerinde bazı önermelerin bileşen olarak geçtiği önerme-şemaları halinde de tanımlıyabiliriz. Ancak bu halde, sözü geçen bileşen-önermelerin her birinin doğruluk-değerini bilmek gerekir. Nitekim:

(5) $$f(p_1, p_2, . . . , p_n, A_1, A_2, . . . , A_m)$$

biçiminde, içinde bileşen olarak 'p_1', 'p_2', ... , 'p_n' gibi n tane önerme-temsilcisi ve 'A_1', 'A_2', ... , 'A_m' gibi m tane önerme geçen bir önerme-şemasını[1] göz önüne alalım. Böyle bir önerme-şemasının yüklendiği doğruluk-değerlerini, bir yandan 'p_1', 'p_2', ... , 'p_n' önerme-temsilcilerine (doğruluk-çizelgesinin solundaki sütunları uyarınca) yüklenen doğruluk-değerlerine, öbür yandan da 'A_1', 'A_2', ... , 'A_m' önermelerinin her birinin (içeriği gereğince) gerçekte taşıdığı doğruluk-değerine dayanarak belirlemek mümkündür.

İmdi, $Ş_1$ ve $Ş_2$ nin (5) biçiminde herhangi iki önerme-şeması olduğunu, ayrıca bunların içinde bileşen olarak geçen önermelerin her birinin taşıdığı doğruluk-değerini bildiğimizi kabul edelim. O zaman (4) biçimindeki karmaşık bir çizelge kurmak suretiyle $Ş_1$ ile $Ş_2$ nin eşdeğer olup olmadığını tesbit edebiliriz. Özel hal veya daha doğrusu, sınır hali (ya da

"yczlaşmış" hal) olarak, $Ş_1$ ile $Ş_2$ formüllerinden birinin doğruluk-değeri bilinen bir önerme olduğunu kabul edelim. Örneğin: $Ş_2$ *doğru* olduğu bilinen bir önerme olsun. O zaman $Ş_1$ deyiminin içinde geçen önerme-temsilcilerinin 'p_1', 'p_2', ... , 'p_n' harflerinden ibaret olması halinde, (4) çizelgesi:

(6)

p_1	p_2	. . .	p_n	$Ş_1$	$Ş_2$
D	D	. . .	D	.	D
D	D	. . .	Y	.	D
.	.		.	.	.
.	.	. . .	.	.	.
Y	Y	. . .	Y	.	D

biçimine girer. Nitekim, $Ş_2$ deyimi "doğru" bir önermeden ibaret olduğundan, söz konusu n tane önerme-temsilcisine yüklenen doğruluk-değerleri ne olursa olsun, $Ş_2$ nin doğruluk-değerinin hep 'D' olarak kalacağı meydandadır. Özel bir örnek olarak $Ş_1$ şemasının 'p v ~p' den ibaret olduğunu kabul edelim. O zaman (6) çizelgesi:

p	q	p v ~q	$Ş_2$
D	D	D	D
D	Y	D	D
Y	D	D	D
Y	Y	D	D

biçimine girer. Bu çizelgeden 'p v ~p' önerme-şemasiyle herhangi "doğru" bir önermenin *"eşdeğer"* olduğu anlaşılır.

Son bir hal olarak, gerek $Ş_1$ gerek $Ş_2$ nin (doğruluk-değeri bilinen) birer önerme olduğunu düşünelim. O zaman ne $Ş_1$ in, ne de $Ş_2$ nin içinde hiç bir önerme-temsilcisinin geçmemesi gerekir. Ancak bu halde, keyfe-bağlı olarak 'p_1', 'p_2', ... , 'p_n' gibi n tane (n = 1 olabilir) önerme-temsilcisini seçerek gene de (4) biçiminde karmaşık bir çizelge kurmak mümkündür. Örneğin: $Ş_1$ deyiminin "doğru", $Ş_2$ deyiminin de "yanlış" bir önerme olduğunu kabul edelim. O zaman (4) çizelgesi:

(7)

p_1	p_2	. . .	p_n	$Ş_1$	$Ş_2$
D	D	. . .	D	D	Y
D	D	. . .	Y	D	Y
.	.	. . .	.	.	.
.	.	. . .	.	.	.
Y	Y	. . .	Y	D	Y

biçimini alır. $Ş_1$ ile $Ş_2$ nin eşdeğer olmasını, birinin altındaki sütunun ötekinin altındaki sütunla özdeş olması şeklinde tanımladığımızdan; böyle bir *eşdeğerliğin gerekli ve yeterli şartının* bu *iki önermenin aynı doğruluk-değerini taşımasından* ibaret olduğunu söyleyebiliriz.

Böylece $Ş_1$ ve $Ş_2$ gibi herhangi iki "tam-deyimin" (yani "önerme" veya "önerme-şeması"nın) "e ş d e ğ e r" olmasını en genel bir şekilde tanımlamak mümkün oluyor. Nitekim, $Ş_1$ ile $Ş_2$ tam-deyimlerinin *eşdeğerliğini,* bu tam-deyimlerin karşılığı olan (4) biçimindeki karmaşık çizelgenin sağındaki iki sütunun birbiriyle özdeş olması şeklinde tanımlıyoruz. Gördüğümüz gibi, § 6'da yalnız "önermeler"e uygulanacak şekilde tanımladığımız "eşdeğerlik", burada her türlü "tam-deyimler"e uygulanabilen *eşdeğerlik* bağlantısının özel bir halinden başka bir şey olmuyor.

(a) Her tam-deyim kendiyle eşdeğerdir. Eşdeğerlik *"dönüşümlü"* (reflexive) dir.

$$Ş \leftrightarrow Ş$$

(b) Herhangi bir tam-deyim başka bir tam-deyimle eşdeğer ise, ikincisi de birincisi ile eşdeğer olur. Eşdeğerlik *"bakışımlı"* (symmetric) dır.

$Ş_1 \leftrightarrow Ş_2$ ise, $Ş_2 \leftrightarrow Ş_1$ olur.

(c) Verilen bir tam-deyim ikinci bir tam-deyimle, ikinci tam-deyim de üçüncü bir tam-deyimle eşdeğer ise, birinci tam-deyim üçüncüsü ile eşdeğer olur. Eşdeğerlik *"geçişli"* (transitive) dir.

$Ş_1 \leftrightarrow Ş_2$ ve $Ş_2 \leftrightarrow Ş_3$ ise, $Ş_1 \leftrightarrow Ş_3$ olur.

(d) Bir yandan *"geçerli"* olan herhangi iki tam-deyim, öbür yandan da *"tutarsız"* olan herhangi iki tam-deyim her zaman birbiriyle eşdeğer olur.

$Ş_1$ geçerli ve $Ş_2$ geçerli ise, $Ş_1 \leftrightarrow Ş_2$ olur:

$Ş_1$ tutarsız ve $Ş_2$ tutarsız ise, $Ş_1 \leftrightarrow Ş_2$ olur.

(e) *Değiş-tokuş edebilme kanunu:* $Ş_1$ gibi verilen bir tam-deyimde, bu tam-deyimin bileşeni olan $Ş_2$ gibi bir tam-deyimin bir veya daha çok sayıdaki geçişlerini $Ş_2$ ile eşdeğer olan $Ş_3$ gibi herhangi bir tam-deyimle değiş-tokuş etmek suretiyle elde edilen $Ş_4$ formülü $Ş_1$ ile eşdeğer olur.

$Ş_2$, $Ş_1$ in bir bileşeni; $Ş_2 \leftrightarrow Ş_3$ ve; $Ş_4$, $Ş_1$ de $Ş_2$ nin bir veya daha

çok sayıda geçişlerinin $Ş_3$ ile değiş-tokuş edilmesiyle elde edilen bir tam-deyim ise; $Ş_1 \leftrightarrow Ş_4$ olur.

(f) $Ş_1$, verilen bir tam-deyim; $Ş_2$, $Ş_1$'in bir bileşeni; $Ş_3$, $Ş_2$ ile eşdeğer olan herhangi bir tam-deyim; $Ş_4$ te, $Ş_1$'de $Ş_2$'nin bir veya daha çok sayıdaki geçişlerinin $Ş_3$ ile değiş-tokuş edilmesiyle elde edilen bir tam-deyim olsun. O zaman: $Ş_1$ geçerli ise $Ş_4$ te geçerli olur; $Ş_1$ geçersiz ise, $Ş_4$ te geçersiz olur; $Ş_1$ tutarlı ise, $Ş_4$ te tutarlı olur; $Ş_1$ tutarsız ise, $Ş_4$ te tutarsız olur.

(g) Ş ile $Ş_2$ verilen iki tam-deyim; $Ş_3$, $Ş_1$ veya $Ş_2$ nin bir bileşeni; $Ş_4$ $Ş_3$ ile eşdeğer olan herhangi bir tam-deyim; $Ş_5$ $Ş_1$ de $Ş_3$ bileşeninin (eğer böyle bir bileşeni varsa) bir veya daha çok sayıdaki geçişlerinin $Ş_4$ ile değiş-tokuş edilmesiyle elde edilen bir tam-deyim; $Ş_6$, $Ş_2$ de $Ş_3$ bileşeninin (eğer böyle bir bileşeni varsa) bir veya daha çok sayıdaki geçişlerinin $Ş_5$ ile değiş-tokuş edilmesiyle elde edilen bir tam-deyim olsun. O zaman: $Ş_1$ ile $Ş_2$ eşdeger ise $Ş_5$ ile $Ş_6$ eşdeğer olur; $Ş_1$ ile $Ş_2$ eşdeğer değilse, $Ş_5$ ile $Ş_6$ eşdeğer olmaz; $Ş_1$, $Ş_2$ yi içerirse, $Ş_5$ $Ş_6$ yı içerir; $Ş_1$, $Ş_2$ yi içermezse, $Ş_5$ $Ş_6$'yı içermez. (Başka bir deyimle, eşdeğer tam-deyimlerin değiş-tokuşu *geçerliliği, geçersizliği, tutarlılığı, tutarsızlığı, eşdeğerliği, eşdeğer-olmamayı, içermeyi* ve *içermemeyi* saklar).

Buna karşılık, *temsilci-harflere uygulanan yerine-koyma işlemi* (yani önerme-şemalarında geçen temsilci-harflerin yerine herhangi birer tam-deyimin konulması) "geçerliliği", "tutarsızlığı", "eşdeğerliği" ve "içermeyi" sakladığı halde; "tutarlılığı", "geçersizliği", "eşdeğer-olmamayı" ve "içermemeyi" genel olarak *saklamaz.* (Örneğin: *tutarlı* bir önerme-şeması olan '$(\sim pq) \cdot r$' deyiminde 'q' yerine 'p' koymakla elde edilen '$(\sim pp) \cdot r$' *tutarsız* bir tam-deyimdir.)

İmdi, §10'da sözünü ettiğimiz "Quine metodu" aşağıda göstereceğimiz bir takım eşdeğerliklere dayanmaktadır. Söz konusu eşdeğerlikler bir bileşeni doğruluk-değeri bilinen bir önermeden, öbürü ise büsbütün keyfe-bağlı olan bir tam-deyimden ibaret olan bileşik bir tam-deyimin daha basit bir tam-deyimle eşdeğerliği şeklindedir. İmdi, §7'de yaptığımız gibi, 'D' harfini keyfe-bağlı olarak seçilmiş olup "doğru" olduğu bilinen bir önermenin kısaltması, 'Y' harfini de gene keyfe-bağlı seçilmiş olup "yanlış" olduğu bilinen bir önermenin kısaltması sayalım. Ayrıca, 'A' harfi herhangi bir düzgün tam-deyimin (yani bir önermenin veya önerme-şemasının) kısaltması olsun. O zaman şu eşdeğerlikleri kolayca kanıtlıyabiliriz: ('...' ve '---' gibi iki tam-deyimin eşdeğer olduğunu

'...' ↔ '---'

şeklinde dile getiriyoruz).

(8)

I . 1	'~D' ↔ 'Y'
I . 2	'~Y' ↔ 'D'
II . 1	'D · A' ↔ 'A'
II . 2	'A · D' ↔ 'A'
II . 3	'Y · A' ↔ 'Y'
II . 4	'A · Y' ↔ 'Y'
III . 1	'D v A' ↔ 'D'
III . 2	'A v D' ↔ 'D'
III . 3	'Y v A' ↔ 'A'
III . 4	'A v Y' ↔ 'A'
IV . 1	'D⊃A' ↔ 'A'
IV . 2	'A⊃D' ↔ 'D'
IV . 3	'Y⊃A' ↔ 'D'
IV . 4	'A⊃Y' ↔ '~A'
V . 1	'D≡A' ↔ 'A'
V . 2	'A≡D' ↔ 'A'
V . 3	'Y≡A' ↔ '~A'
V . 4	'A≡Y' ↔ '~A'

Bu eşdeğerlikleri aşağıda yazılı kurallar şeklinde dile getirmek te mümkündür:

(9) I. "Doğru bir önermenin hayırlanması "yanlış" bir önermeyle; "yanlış" bir önermenin hayırlanması da doğru bir önermeyle eşdeğerdir.

II. Bir bileşeni "doğru" olan bir *birlikte-evetleme* öbür bileşeniyle eşdeğerdir. Bir bileşeni "yanlış" olan bir birlikte-evetleme ise "yanlış" bir önermeyle eşdeğerdir.

III. Bir bileşeni "doğru" olan bir *ayrıklık* "doğru" bir önermeyle eşdeğerdir. Bir bileşeni "yanlış' 'olan bir ayrıklık ise öbür bileşeniyle eşdeğerdir.

IV. Bir bileşeni "doğru" olan bir *"koşullu"* (yani bir "koşullu tamdeyim") ard-bileşeniyle eşdeğerdir. Bir bileşeni "yanlış" olan bir koşullu ise ön-bileşeninin hayırlanmasiyle eşdeğerdir.[3]

V. Bir bileşeni "doğru" olan bir *"karşılıklı-koşullu"* (yani bir "karşılıklı-koşullu tam-deyim") öbür bileşeniyle eşdeğerdir. Bir bileşeni "yanlış" olan bir karşılıklı-koşullu ise öbür bileşeninin hayırlanmasiyle eşdeğerdir.

İmdi, '$f(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$' gibi herhangi bir önerme-şemasını göz önüne alalım. İlk önce bu şemanın içinde geçen önerme-temsilcilerinden biri, örneğin 'p_1' seçilerek bu harfin yerine sırasiyle 'D' ve 'Y' harfleri konur. Bu suretle elde edilen tam-deyimlerin birincisi şemamızın sol altına, ikincisi de sağ altına yazılır. Birinci tam-deyim '$f(D, p_2, p_3, \dots, p_n)$', ikincisi ise '$f(Y, p_2, p_3, \dots, p_n)$' biçimindedir.

Ondan sonra, bu iki deyimde I - V kurallarını (bir de değiş-tokuş edilebilme ilkesini) uygulayarak, birincisini onunla eşdeğer olan '$g(p_2, p_3, \dots, p_n)$' gibi daha basit bir deyime; ikincisini de gene onunla eşdeğer olan '$h(p_2, p_3, \dots, p_n)$' gibi daha basit bir deyime çevirebiliriz. Bundan sonra da aynı işlem bu iki yeni deyimin her biri için tekrarlanır. Bir yandan '$g(p_2, p_3, \dots, p_n)$' deyiminde geçen bir önerme-temsilcisi, örneğin 'p_2' seçilerek bu harfin yerine sırasiyle 'D' ile 'Y' harfleri konup elde edilen deyimler '$g(p_2, p_3, \dots, p_n)$' in sol ve sağ altına yazılır. Öbür yandan da '$g(p_2, p_3, \dots, p_n)$' deyiminde geçen belli bir önerme-temsilcisi seçilerek onun yerine sırasiyle 'D' ve 'Y' harfleri konup elde edilen deyimler bu deyimin sol ve sağ altına yazılır... Bu işlemler (I - V kuralları yardımiyle sadeleştirilerek) elde edilen deyimler sadece 'D' veya 'Y' harfinden ibaret oluncaya kadar tekrarlanır. Böylece:

(10)

$$f(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$$

$$f(D, p_2, p_3, \dots, p_n) \qquad f(Y, p_2, p_3, \dots, p_n)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$g(p_2, p_3, \dots, p_n) \qquad h(p_2, p_3, \dots, p_n)$$

$$g(D, p_3, \dots, p_n) \quad g(Y, p_3, \dots, p_n) \quad h(D, p_3, \dots, p_n) \quad h(Y, p_3, \dots, p_n)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$j(p_3, \dots, p_n) \quad k(p_3, \dots, p_n) \quad l(p_3, \dots, p_n) \quad m(p_3, \dots, p_n)$$

biçiminde bir çizelge meydana gelir. (10) çizelgesinin son sırası salt 'D' veya 'Y' harflerinden kuruludur. Bu harfler ise, çizelgenin başındaki '$f(p_1, p_2, p_3, \dots, p_n)$' deyiminin doğruluk-çizelgesinin sağ yanındaki sütunu meydana getiren harflerinden başka bir şey değildir.[4] Böylece (10) çizelgesine dayanarak, verilen herhangi bir önerme-şemasının doğruluk-çizelgesini elde etmenin mümkün olduğunu görüyoruz. Şu halde, (10) çizelgesinin kurulması işleminin "doğruluk-değeri analizi"nin bir şekli olduğunu söyleyebiliriz. İşte *"Quine metodu"*, '$f(p_1, p_2, \dots, p_n)$' gibi bir

önerme-şemasının doğruluk-değeri analizinin (10) biçimindeki bir çizelge yardımiyle yapılmasından ibarettir. (10) çizelgesine '$f(p_1, p_2, \ldots, p_n)$' tam-deyiminin *"Quine-çizelgesi"* diyeceğiz. Buna göre, herhangi bir tam-deyimin *"geçerli"* olmasını, bu deyimin Quine-çizelgesindeki son harflerin salt 'D' harflerinden ibaret olması; tam-deyimin *"tutarlı"* olmasını bunlar arasında en az bir 'D' harfinin bulunması; tam-deyimin *"tutarsız"* olmasını da hiç bir 'D' harfinin bulunmaması şeklinde tanımlıyabiliriz.

Örnek olarak:

(11) $$((p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim r)) \supset (q \equiv r)$$

gibi karmaşık bir önerme-şemasının Quine-çizelgesini kurmağa çalışalım. Bu türlü karmaşık tam-deyimleri daha basit bir şekilde dile getirmek amaciyle bundan bölye şu uzlaşımları yapacağız:

(i) *Birlikte-evetleme* ekleminin etki-alanının önünde hayırlama-işareti bulunan veya bulunmıyan ikişer harften ibaret olması halinde, eklemi "nokta" işareti ile dile getirecek yerde, sadece bu iki harfi yanyana yazabiliriz. (Örneğin: 'p · q' gibi bir deyimi 'pq' şeklinde, '$\sim$p · q' gibi bir deyimi de '$\sim$pq' şeklinde yazabiliriz).

(ii) (i) uzlaşımı uyarınca dile getirilen birlikte-evetleme ekleminin "ekleyici-gücü"nün ayrıklık-ekleminin ekleyici-gücünden daha büyük olduğunu, başka bir deyimle, 'AB v C' gibi bir formülün hep '(AB) v C', '$\sim$AB v C' gibi bir formülün de hep '($\sim$AB) v C' anlamına geldiğini kabul edeceğiz. Böylece '(AB) v C' veya '($\sim$AB v C' biçimindeki deyimlerde parantezleri kaldırmak mümkün olur.

(iii) Birlikte-evetleme eklemiyle ayrıklık-ekleminin "ekleyici gücünün biryol bütün öteki 2-li eklemlerin, özellikle koşul-ekleminin ve karşılıklı-koşul ekleminin "ekleyici-gücünden" daha büyük olduğunu kabul edeceğiz. Başka bir deyimle, 'A · B $\supset$ C', 'A v B $\supset$ C', 'A · B $\equiv$ C' ve 'A v B $\equiv$ C' deyimlerini sırasiyle hep '(A · B) $\supset$ C', '(A v B) $\supset$ C', '(A · B) $\equiv$ C' ve '(A v B) $\equiv$ C' şeklinde yorumlıyacağız. Böylece bu gibi hallerde parantezlerin kullanılmasına lüzum kalmaz. Buna karşılık 'A · (B $\supset$ C)', 'A v (B $\supset$ C)', 'A · (B $\equiv$ C)' veya 'A v (B $\equiv$ C)' gibi bir deyimde parantezlerin kaldırılamayacağı meydandadır.

(i) - (iii) uzlaşımları uyarınca dile getirilen herhangi bir tam-deyimin Quine-çizelgesini kurduğumuzda, '$\sim$p' gibi hayırlanmış bir harfin

yerine 'D' veya 'Y' harfini koyacak yerde, doğrudan doğruya birinci halde 'Y', ikinci halde ise 'D' yazacağız. Örneğin: '$\sim p \sim r$' gibi bir deyimde 'p' nin yerine 'D' harfini koymak gerektiğinde, ilk önce '$\sim D \sim r$', sonra da '$Y \sim r$' yazacak yerde, doğrudan doğruya '$Y \sim r$' yazarız. Aynı şekilde, '$\sim p \sim r$' deyiminde 'p' yerine 'Y' koymak gerekince, doğrudan doğruya '$D \sim r$' yazarız.

İmdi, sözü geçen (11) deyimini (i) - (iii) uzlaşımları uyarınca:

(12) $$pq \vee \sim p \sim r \supset (q \equiv r)$$

biçimine çevirebiliriz. (12) nin Quine-çizelgesi ise şöyle olur:

(13) $$pq \vee \sim p \sim r \supset (q \equiv r)$$

$Dq \vee Y \sim r \supset (q \equiv r)$
$q \vee Y \supset (q \equiv r)$
$q \supset (q \equiv r)$
$D \supset (D \equiv r)$
$D \equiv r$
r
$D \quad Y$

$Y \supset (Y \equiv r)$
D

$Yq \vee D \sim r \supset (q \equiv r)$
$Y \vee \sim r \supset (q \equiv r)$
$\sim r \supset (q \equiv r)$
$Y \supset (q \equiv D)$
D

$D \supset (q \equiv Y)$
$q \equiv Y$
$\sim q$
$Y \quad D$

(13) çizelgesi şöyle kurulur: İlk önce (12) deyiminde 'p' önermetemsilcisi yerine 'D' harfini koyarız. Böylece elde edilen deyimi (13) ün sol altına yazarız. Ondan sonra (13)'te 'p' yerine 'Y' koyup elde edilen deyimi (13)'ün sağ altına yazarız. Bundan sonra da her iki deyimi (I) - (V) kurallarına dayanarak sadeleştiririz. Bu amaçla yapılan işlemler şunlardır:

İlk önce soldaki deyimi, yani

$$'Dq \vee Y \sim r \supset (q \equiv r)$$

deyimini ele alalım. Bu deyimin sol başındaki 'Dq' bileşenini (II) kuralı uyarınca 'q' ye, ikinci bileşeni olan '$Y \sim r$' deyimini de gene (II) uyarınca 'Y' ye çeviririz. Böylece elden edilen

$$q \vee Y \supset (q \equiv r)$$

deyiminin sol başındaki 'q v Y' bileşeni (III) gereği 'q' ye eşdeğer olduğundan, bu deyimin tümünü:

$$q \supset (q \equiv r)$$

deyimine çeviririz. Bu deyim ise, içinde artık 'D' veya 'Y' harfi geçmedi-

ğinden, daha fazla sadeleşemez. Öte yandan bu deyimde gene bir takım önerme-temsilcileri geçtiğinden, ilk işlemi tekrarlamak, başka bir deyimle, bu önerme-temsilcilerinden birini seçip yerine sırasiyle 'D' ile 'Y' harfi koymak gerekir. Böyle bir işlem için de ilgili tam-deyimin *içinde geçişlerinin sayısı en çok olan önerme-temsilcisinin seçilmesi faydalıdır.* Söz konusu tam-deyimde ise 'q' ile 'r' önerme-temsilcilerinin geçtiğini, birincisinin *iki* geçişi, ikincisinin ise yalnız *bir* geçişi olduğunu görüyoruz. Buna göre 'q' önerme-temsilcisini seçip yerine sırasıyle 'D' ile 'Y' harfini koymamız uygundur. Böylece, bir yandan

$$D \supset (D \equiv r)$$

öbür yandan da

$$Y \supset (Y \equiv r)$$

deyimlerini elde ederiz. Bunlardan birincisini (IV) gereği 'D ≡ r' ye, bu son deyimi de (V) gereği 'r' ye çevririz. ('r' deyimi tek-harfli bir şema olup yerine sırasiyle 'D' ile 'Y' koymak gerekir). İkincisini ise gene (IV) gereğince 'D' ye çevririz.

Sağdaki deyime, yani

$$Yq \vee D{\sim}r \supset (q \equiv r)$$

ye gelince: bu deyimin sol baştaki bileşeni olan 'Yq' deyiminin (II) gereği 'Y' ile; ikinci bileşeni olan 'D∼r' nin de gene (II) gereği '∼r' ile eşdeğer olduğunu görüyoruz. Dolayısiyle deyimin tümünü:

$$Y \vee {\sim}r \supset (q \equiv r)$$

ye çevririz. Bu deyimin sol başındaki bileşeni olan 'Y ∨ ∼r' deyimi (III) gereği '∼r' ile eşdeğer olduğundan, deyimin tümünü:

$${\sim}r \supset (q \equiv r)$$

ye çevririz. Bu deyimde ise ne 'D' harfi, ne de 'Y' harfi geçiyor. Buna karşı, deyimin içinde 'q' ve 'r' olmak üzere iki önerme-temsilcisinin bulunduğunu görüyoruz. 'q' nün bir tek geçişi, 'r' nin ise *iki* geçişi olduğunu göz önünde tutarak, 'q' yü değil de 'r' yi seçerek, yerine sırasiyle 'D' ve 'Y' harflerini koyarız. Böylece, bir yandan

$$Y \supset (q \equiv D)$$

öbür yandan da

$$D \supset (q \equiv Y)$$

deyimlerini elde ederiz. Bunlardan birincisi (IV) gereği 'D' ye çevrilir. İkincisi ise gene (IV) gereği 'q ≡ Y' deyimine çevrilir. Bu son formülü de (V) gereği 'D' ye çeviririz.

İmdi, (13) çizelgesine dayanarak, söz konusu (12) önerme-şemasının doğruluk-çizelgesinin aşağıdaki şekilde olduğu sonucunu çıkarabiliriz:

(14)

p	q	r	pq v ~p~r ⊃ (q ≡ r)
D	D	D	D
D	D	Y	Y
D	Y	D	D
D	Y	Y	D
Y	D	D	D
Y	D	Y	Y
Y	Y	D	D
Y	Y	Y	D

(14) çizelgesinden, (12) tam-deyiminin *geçerli olmamakla* birlikte *tutarlı* olduğu anlaşılır. Ancak (13) deyiminin bu niteliğini tesbit etmek için hiç te (14) doğruluk-çizelgesini belirtik bri şekilde çizmek gerekmiyor. (12) nin geçerli olmayıp tutarlı olduğunu, doğrudan doğruya (13) Quine-çizelgesinden anlıyabiliriz. Nitekim, (13) çizelgesinin sonundaki harfler arasında hem 'D' hem de 'Y' geçtiğini görüyoruz.

Quine-metoduna dayanarak, bir takım önerme-şemalarının ("salt-şemalar"ın) geçerli olduğu tesbit edildikten, başka bir deyimle, bir takım *"totolojiler"*in bulunmasından sonra, verilen herhangi bir tam-deyimin Quine-çizelgesini daha da sadeleştirmek mümkündür. Nitekim, böyle bir çizelgede rastlanan herhangi bir salt-şemayı önceden bildiğimiz bir "totoloji" olarak tanıyabildiğimiz anda, bu tam-deyimin altına doğrudan doğruya 'D' harfini yazabiliriz. Öte yandan, rastlanan salt-şemayı önceden bildiğimiz bir *"ç e l i ş m e"* (contradiction) yani tutarsız bir salt-şema olarak tanıyabilirsek, bu tam-deyimin altına doğrudan doğruya 'Y' harfini yazabiliriz.

Örneğin: daha önce '$p \cdot (p \supset q) \supset q$' şemasının geçerliliğinin belgelendiğini kabul ederek, '$(p \supset q) \cdot (q \supset r) \supset (p \supset r)$' şemasının Quine-çizelgesini şu şekilde kurabiliriz:

$$(p \supset q) \cdot (q \supset r) \supset (p \supset r)$$

$$(D \supset q) \cdot (q \supset r) \supset (D \supset r)$$
$$q \cdot (q \supset r) \supset r$$
$$D$$

$$(Y \supset q) \cdot (q \supset r) \supset (Y \supset r)$$
$$D \cdot (q \supset r) \supset D$$
$$D$$

Nitekim, bu çizelgenin üçüncü sırasının sol yanında geçen '$q \cdot (q \supset r) \supset r$)' şeması, geçerliliği bilindiği kabul edilen '$p \cdot (p \supset q) \supset q$' şemasının ('p' yerine 'q', 'q' yerine 'r' koymak suretiyle) bir yerine-koyma örneği durumundadır. Oysa, geçerli bir salt-şemanın yerine-koyma örneği olan her salt-şema bir «totoloji" olduğundan, '$q \cdot (q \supset r) \supset r$' şeması bir totolojidir. Şu halde, sözü geçen Quine-çizelgesinde bu şemanın altına doğrudan doğruya 'D' harfini yazmağa hakkımız vardır. (İ.K.)

Quine-çiezlgelerini, "değiş-tokuş edilebilme ilkesi"nden faydalanmak suretiyle daha da kısaltmak mümkündür. Nitekim, böyle bir çizelgede rastlanan herhangi bir tam-deyimi bu tam-deyimin bir bileşenini onunla eşdeğer olan daha basit bir tam-deyimle değiş-tokuş etmekle elde edilen bir tam-deyime çevirmek (değiş-tokuş edilebilme ilkesi gereğince) mümkündür.

Örneğin, (10-7) önerme-şemasının aşağıda gösterilen Quine-çizelgesini göz önüne alalım.

(15)

$\sim(\sim(\sim(p \vee \sim q) \cdot \sim q) \vee \sim pq)$

$\sim(\sim(\sim(D \vee \sim q) \cdot \sim q) \vee Yq)$ $\quad$ $\sim(\sim(\sim(Y \vee \sim q) \cdot \sim q) \vee Dq)$

$\sim(\sim(\sim(D) \cdot \sim q) \vee Y)$ $\quad$ $\sim(\sim(\sim(\sim q) \cdot \sim q) \vee q)$

$\sim(\sim(Y \cdot \sim q))$ $\quad$ $\sim(\sim(\sim(Y) \cdot Y) \vee D)$ $\quad$ $\sim(\sim(\sim(D) \cdot D) \vee Y)$

$\sim(D)$ $\quad$ $\sim(\sim(\sim(D) \cdot D))$

Y $\quad$ $\sim(D)$ $\quad$ $\sim(\sim(\sim(D)))$

Y $\quad$ $\sim(\sim(Y))$

$\sim(D)$

Y

İmdi, (15) çizelgesinin üçüncü satırının sağ yanını meydana getiren:

(16) $\quad \sim(\sim(\sim(\sim q) \cdot \sim q) \vee q)$

formülünde '$\sim(\sim q)$' gibi bir bileşen geçmektedir. Oysa, ilerde göstereceğimiz gibi, '$\sim\sim q$' (yani '$\sim(\sim(q)$ formülü) 'q' ile eşdeğerdir. Şu halde, (16) tam-deyiminde '$\sim(\sim q)$' bileşenini 'q' ile değiş-tokuş etmekle elde edilen:

(17) $\quad \sim(\sim(q \sim q) \vee q)$

tam-deyimi değiş-tokuş edilebilme ilkesi gereğince, (16) ile eşdeğer olur. Böyle bir eşdeğerliğe dayanarak, (15) çizelgesinde geçen (16) şemasını (17) şemasına çevirebiliriz.

(17) şemasında ise bileşen olarak geçen '$q \sim q$' tam-deyimi (ilerde göreceğimiz gibi) "tutarsız"dır. Tutarsız bir tam-deyim "yanlış" bir öner-

meyle eşdeğer olduğundan, (17)' de 'q∼q' bileşeninin 'Y' ile değiş-tokuş edilmesiyle elde edilen:

(18) $\sim(\sim(Y) \vee q)$

tam-deyimi (17) ile eşdeğer olur. Dolayısiyle (17) yi (18)'e çevirmek mümkündür.

İşte, bu durumu göz önünde tutarak, (10-7) tam-deyiminin Quine-çizelgesini (15) biçiminde kuracak yerde, daha basit olan:

$\sim(\sim(\sim(p \vee \sim q) \cdot \sim q) \vee \sim pq)$

$\sim(\sim(\sim(D \vee \sim q) \cdot \sim q) \vee Yq)$ $\quad$ $\sim(\sim(\sim(Y \vee \sim q) \cdot \sim q) \vee Dq)$

$\sim(\sim(\sim(D) \cdot \sim q) \vee Y)$ $\quad$ $\sim(\sim(\sim(\sim q) \cdot \sim q) \vee q)$

$\sim(\sim(Y \sim q))$ $\quad$ $\sim(\sim(q \sim q) \vee q)$

$\sim(D)$ $\quad$ $\sim(\sim(Y) \vee q)$

Y $\quad$ $\sim(D \vee q)$

$\sim(D)$

Y

biçiminde kurabiliriz.

İmdi, verilen herhangi iki tam-deyimin eşdeğer olup olmadığı, her iki tam-deyimin Quine-çizelgesini kurmak suretiyle tesbit edilebilir. Böylece, bir yandan Quine-çizelgelerini kurmanın, öbür yandan da "tutarlı", "tutarsız" ve "eşdeğer" şemaları ortaya çıkarmanın birbirini destekliyen işlemler olduğunu görüyoruz. Tutarlılık, tutarsızlık ve eşdeğerlik Quine-çizelgeleri yardımiyle belirlenir. Ama birçok tutarlı, tutarsız ve eşdeğer şemaları belirledikten sonra, bunların yardımiyle pek çok sayıda başka şemaların tutarlığını, tutarsızlığını veya eşdeğerliğini tesbit edebiliriz.

Doğruluk-değeri analizinin (ister Quine-metoduyla (ister başka bir metotla yürütülsün) en büyük faydası, önermeler mantığı çerçevesinde verilen herhangi bir çıkarımın geçerli olup olmadığının tesbitine yaramasıdır. Oysa, §10'da belirttiğimiz gibi, (10-1) biçimindeki herhangi bir çıkarımın geçerli olmasının gerekli ve yeterli şartı (10-4) gibi bir koşullunun geçerliliğinden ibarettir. (10-4) biçimindeki bir koşullunun geçerli olup olmadığını *"denetlemek"* (testing) için de, herhangi başka bir tam-deyim için olduğu gibi, doğruluk-değeri analizini yapmak gerekir.

İmdi, (10-1) biçimindeki bir çıkarımın geçerliliğini denetlemenin genel yolu, bu çıkarımın karşılığı olan (10-4) koşullusunun doğruluk-değeri analizini yapmaktan ibaret olmakla birlikte; birçok hallerde çıkarımın geçerliliğini, koşullunun tümünün doğruluk-değeri analizini yapmaksızın,

kestirme bir yoldan da aşağıda gösterilen şekilde denetlemek mümkündür:

(10-1) biçimindeki bir çıkarımı göz önüne alalım. Bu çıkarımın karşılığı olan (10-4) koşullusunun ön-bileşeni $Ş_1$, ard-bileşeni $Ş_2$ olsun. ($Ş_1$, söz konusu çıkarımın öncüllerinin birlikte-evetlenmesinin temsilci şeması; $Ş_2$ ise bu çıkarımın sonucunun temsilci-şemasıdır).

İmdi, her biri bir "salt-şema" durumunda olan bu iki şemanın karşılığı olan doğruluk- çizelgelerini göz önünde tutarak, şu iki özel hali inceleyelim:

(A) $Ş_1$ şemasının doğruluk-çizelgesinin sağ yanındaki sütunda yalnız bir tek 'D' harfinin bulunması hali.

(B) $Ş_2$ şemasının doğruluk-çizelgesinin sağ yanındaki sütunda yalnız bir tek 'Y' harfinin bulunması hali.

Bir çok hallerde, verilen bir önerme-şemasının sözü geçen (A) veya (B) niteliğini taşıdığını, bu şemanın doğruluk-çizelgesini belirtik bir şekilde kurmaksızın bir bakışta tesbit etmek mümkündür. Örneğin: 'p ~ q' gibi bir şemanın (A) niteliğini taşımasının ancak 'p' nin "doğru", 'q' nün de "yanlış" olması halinde *doğrulandığını* bir çırpıda görüyoruz. Öte yandan, '~ (p ~ q) gibi bir şemanın (B) niteliğini taşımasının ancak 'p' nin "dogru", 'q' nün de "yanlış" olması halinde yanlışlandığını bir bakışta tesbit edebiliriz. İşte verilen bir çıkarımın geçerliğini kestirme yoldan denetlemek, ancak bu çıkarımın karşılığı olan $Ş_1$ şemasının (A) niteliğini veya $Ş_2$ şemasının (B) niteliğini taşıması halinde mümkündür. Şimdi bu iki hali ayrı ayrı ele alalım:

1. ci hal: $Ş_1$ şeması (A) niteliğini taşıyor.

İlk önce $Ş_1$ şemasını doğrulamak için bu şemanın içinde geçen temsilci-harflere yüklenmesi gereken doğruluk-değerlerini tesbit ederiz. Böylece, her temsilci-harfe karşılık belli bir tek doğruluk-değeri belirlenmiş olur. Ondan sonra $Ş_2$ şemasını ele alarak, gerek bu şemada gerek $Ş_1$ şemasında geçen her temsilci-harfin yerine, bu temsilci-harf için, belirlediğimiz doğruluk-değerinin "doğru" veya "yanlış" olmasına bakarak, 'D' veya 'Y' harfini koyarız. Böylece elde edilen tam-deyim $Ş_3$ olsun, $Ş_3$ ya bir karma-şemadır, ya da bir önerme. İşte, söz konusu çıkarımın geçerliliğinin gerekli ve yeterli şartı, $Ş_3$ *tam-deyiminin geçerliliğinden* (yani geçerli bir şema veya doğru bir önerme olmasından) ibarettir. (Nitekim, bir koşullunun "geçersiz" olması, ön-bileşeninin geçerli, ard-bileşeninin de ge-

çersiz olması halinde mümkündür. Oysa, $Ş_1$ ön-bileşeni, (A) niteliğini taşıdığından, yalnız bir tek halde geçerlidir). Örneğin:

(19) Sokrates insandır

Sokrates ölümsüz değildir

∴ Sokrates insan olduğu takdirde; Sokrates ölümsüz ise, Ahmet Ankara'ya gidecek

gibi bir çıkarımın geçerli olup olmadığını, ilk önce genel metotla, sonra da kestirme yoldan araştıralım. İmdi, *'Sokrates insandır'* önermesi yerine 'p', *'Sokrates ölümsüzdür'* önermesi yerine 'q' *'Ahmet Ankara'ya gidecek'* önermesi yerine de 'r' koyarak; bu çıkarımın temsilci-şemasını:

(20)
$$\begin{array}{l} p \\ \sim q \\ \therefore (p \supset q) \supset r \end{array}$$

biçiminde dile getirebiliriz. (20) çıkarım-şemasının geçerliliğinin gerekli ve yeterli şartı ise:

(21) $$p \sim q \supset ((p \supset q) \supset r)$$

önerme-şemasının geçerliliğinden ibarettir. (21) şemasının geçerli olup olmadığını denetlemek için Quine-çizelgesini çizelim:

(22)

$p \sim q \supset ((p \supset q) \supset r)$

$D \sim q \supset ((D \supset q) \supset r)$ — $Y \sim q \supset ((Y \supset q) \supset r)$

$\sim q \supset (q \supset r)$ — $Y \supset ((Y \supset q) \supset r)$

$Y \supset (D \supset r)$ — $D \supset (Y \supset r)$ — D

D — $Y \supset r$

D

(22) çizelgesinden, (22) önerme-şemasının, dolayısiyle (20) çıkarım-şemasının ve (19) çıkarımının geçerli olduğu sonucunu çıkarabiliriz.

Şimdi (19) çıkarımının geçerliliğini kestirme yoldan da denetlemenin mümkün olup olmadığını araştıralım. Bu amaçla (19) çıkarımının (20) temsilci-şemasını incelemek gerekir. İmdi, (20) çıkarım-şemasının öncül-üyelerinin birlikte evetlenmesi (yani (19) çıkarımının karşılığı olan $Ş_1$ şeması) 'p ∼ q', sonuç-üyesi ise (yani (19) çıkarımının karşılığı olan $Ş_2$ şeması) '(p ⊃ q) ⊃ r' den ibarettir. Oysa, 'p ∼ q' şeması (A) özelliğini taşıyor; nitekim bu şema ancak 'p' nin "doğru", 'q' nün de "yanlış" olması halinde doğrulanır. Şu halde, (19) çıkarımının geçerliliğini kestirme yoldan da denetleyebileceğimizi görüyoruz. Böyle bir denetlemeyi yap-

mak için de, '$(p \supset q) \supset r$' şemasında 'p' yerine 'D', 'q' yerine 'Y' koymakla elde edilen:

(23) $$(D \supset Y) \supset r$$

karma-şemasının geçerli olup olmadığını belirlemek gerekir. Bu amaçla (23) tam-deyiminin Quine-çizelgesini kuralım:

(24)
$$\begin{array}{c} (D \supset Y) \supset r \\ Y \supset r \\ D \end{array}$$

(24) çizelgesinden, (23) tam-deyiminin, dolayısiyle (21) önerme-şemasının, (20) çıkarım-şemasının ve (19) çıkarımının geçerli olduğu sonucunu çıkarırız. Böylece, (19) gibi bir çıkarımın geçerliliğini denetlemek için, genel metoda göre (22) gibi uzunca bir çizelgenin kurulması gerektiği halde; kestirme yola başvurmakla (24) gibi çok basit bir çizelge ile yetinebileceğimizi görüyoruz.

2. ci hal: $Ş_2$ şeması (B) niteliğini taşıyor.

İlk önce $Ş_2$ şemasını yanlışlamak için bu şemanın içinde geçen temsilci-harflere yüklenmesi gereken doğruluk-değerlerini tesbit ederiz. Böylece her temsilci-harfe karşılık bir tek doğruluk-değeri belirlenmiş olur. Ondan sonra $Ş_1$ şemasını ele alarak, gerek bu şemada gerekse $Ş_2$ şemasında geçen her temsilci-harfin yerine, bu temsilci-harf için belirlediğimiz doğruluk-değerinin "doğru" veya "yanlış" olmasına bakarak 'D' veya 'Y' harfini koyarız. Böylece elde edilen tam-deyim $Ş_4$ olsun. $Ş_4$ ya bir karma-şemadır, ya da bir önerme. İşte, söz konusu çıkarımın geçerliliğinin gerekli ve yeterli şartı, $Ş_4$ *tam-deyiminin tutarsızlığından* (yani tutarsız bir şema veya yanlış bir önerme olmasından) ibarettir. (Nitekim, bir koşullunun "geçersiz" olması, ancak ön-bileşeninin geçerli, ard-bileşeninin de geçersiz olması halinde mümkündür. Oysa, $Ş_2$ ard-bileşeni, (B) niteliğini taşıdığından, yalnız bir tek halde geçersizdir). Örneğin:

(25)
$$\begin{array}{l} p \supset q \\ qr \supset s \\ \therefore\ pr \supset s \end{array}$$

gibi bir çıkarım-şemasının geçerli olup olmadığını ilk önce genel metotla, sonra da (mümkünse) kestirme yoldan denetleyelim. Birinci metoda göre,

(26) $$(p \supset q) \cdot (qr \supset s) \supset (pr \supset s)$$

önerme-şemasının Quine-çizelgesini çizmeliyiz. Bu çizelge şöyledir:

(27)

$(p \supset q) \cdot (qr \supset s) \supset (pr \supset s)$		
$(D \supset q) \cdot (qr \supset s) \supset (Dr \supset s)$		$(Y \supset q) \cdot (qr \supset s) \supset (Yr \supset s)$
$q \cdot (qr \supset s) \supset (r \supset s)$		$D \cdot (qr \supset s \supset (Y \supset s)$
$D \cdot (Dr \supset s) \supset (r \supset s)$	$Y \cdot (Yr \supset s) \supset (r \supset s)$	$(qr \supset s) \supset D$
$(r \supset s) \supset (r \supset s)$	$Y \supset (r \supset s)$	D
D	D	

'$(r \supset s) \supset (r \supset s)$' şeması, ilerde bir totoloji olduğunu göreceğimiz '$p \supset p$' şemasının yerine-koyma örneği olduğundan, geçerlidir. Dolayısiyle, onun altına doğrudan doğruya 'D' harfini yazabildik).

İmdi, (27) çizelgesine dayanarak, (26) önerme-şemasının, dolayısiyle (25) çıkarım-şemasının geçerli olduğunu söyleyebiliriz.

Öte yandan, (25) çıkarım-şemasının sonuç-üyesi ($Ş_2$ şeması) olan '$pr \supset s$' şeması (B) niteliğini taşıyor. Nitekim, bu şema ancak ve ancak 'p' nin "doğru", 'r' nin "doğru" ve 's' nin «yanlış» olması halinde *yanlışlanır*. Buna göre, (25) çıkarım-şemasının öncül-üyelerinin birlikte-evetlenmesi olan '$(p \supset q) \cdot (qr \supset s)$' şemasında 'p' yerine 'D', 'r' yerine 'D' ve 's' yerine 'Y' koymakla elde edilen:

(28) $$(D \supset q) \cdot (qD \supset Y)$$

karma-şeması sözü geçen $Ş_4$ şemamız oluyor. Şu halde (25) çıkarım-şemasının geçerliliğinin gerekli ve yeterli şartı, (28) tam-deyiminin "tutarsız" olmasından ibarettir. (28) tam-deyiminin tutarsız olup olmadığını belirlemek için Quine-çizelgesini çizelim:

(29)

$(D \supset q) \cdot (qD \supset Y)$
$q \cdot (q \supset Y)$
$q \sim q$
Y

(29) çizelgesine dayanarak, (26) önerme şemasının, dolayısiyle (25) çıkarım-şemasının *geçerli* olduğunu görüyoruz.

Özel hal olarak, $Ş_1$ veya $Ş_2$ nin 'p' veya '$\sim p$' biçiminde olması halini göz önüne alalım. $Ş_1$ şeması, 'p' veya '$\sim p$' biçiminde ise, (A) özelliğini taşır. $Ş_2$ şeması, 'p' veya '$\sim p$' biçiminde ise, (B) özelliğini taşır.

1. ci hal: $Ş_1$ şeması 'p' veya '$\sim p$' biçimindedir.

$Ş_2$ şemasını '$g(p, q, r, \ldots)$' şeklinde dile getirelim. O zaman geçerliliğini denetlemek istediğimiz çıkarım şeması:

(30) p
$\therefore g(p, q, r, \ldots)$

veya

(31) $\sim p$
$\therefore g(p, q, r, \ldots)$

biçimini alır. (30) gibi bir çıkarım-şemasının geçerliliğinin gerekli ve yeterli şartı, '$g(D, q, r, \ldots)$' karma-şemasının geçerliliğinden; (31) çıkarım-şemasının geçerliliğinin gerekli ve yeterli şartı da '$g(Y, q, r, \ldots)$' karma-şemasının geçerliliğinden ibarettir. Örneğin:

p
$\therefore (p \supset q) \supset q$

çıkarım-şemasının geçerliliğini, '$(D \supset q) \supset q$' karma-şemasının Quine-çizelgesi yardımiyle denetleyebiliriz. Oysa, bu çizelge şöyledir:

$(D \supset q) \supset q$
$q \supset q$
D

Şu halde, söz konusu çıkarım-şeması geçerlidir. Öte yandan,

$\sim q$
$\therefore \sim (pq)$

gibi bir çıkarım-şemasının geçerliliğini, '$\sim (pq)$' şemasında 'p' yerine 'Y' koymakla elde edilen '$\sim (Yq)$' şemasına dayanarak denetleyebiliriz. '$\sim (Yq)$' şemasının Quine-çizelgesi

$\sim (Yq)$
$\sim (Y)$
D

biçiminde olduğundan, çıkarım-şemasının geçerli olduğu sonucuna varıyoruz.

2. ci hal: $Ş_2$ şeması 'p' veya '$\sim p$' biçimindedir.

$Ş_1$ şemasını '$f(p, q, r, \ldots)$' şeklinde dile getirelim. O zaman geçerliliğini denetlemek istediğimiz çıkarım şeması:

(32) $f(p, q, r, \ldots)$
$\therefore p$

veya

(33) $f(p, q, r, \ldots)$
$\therefore \sim p$

biçimini alır. (32) gibi bir çıkarım-şemasının geçerliliğinin gerekli ve yeterli şartı, '$f(Y, q, r, \ldots)$' karma-şemasının tutarsızlığından; (33) gibi bir çıkarım-şemasının geçerliliğinin gerekli ve yeterli şartı da '$f(D, q, r, \ldots)$' karma-şemasının *tutarsızlığından* ibarettir. Örneğin:

$pq \vee p \sim q$
$\therefore p$

çıkarım-şemasının geçerli olduğunu, '$Yq \vee Y \sim q$' karma-şemasının

$Yq \vee Y \sim q$
$Y \vee Y$
Y

Quine-çizelgesine dayanarak söyleyebiliriz.

$\sim pq \vee \sim p \sim q$
$\therefore \sim p$

çıkarım-şemasının da geçerli olduğunu, '$\sim Dq \vee \sim D \sim q$' karma-şemasının

$\sim Dq \vee \sim D \sim q$
$q \vee \sim q$
D

Quine-çizelgesinden görüyoruz. (Bu çizelgede geçen '$q \vee \sim q$' şeması ilerde göstereceğimiz totolojiler arasında bulunduğundan, şemanın altına doğrudan doğruya 'D' yazabildik).

§12. *Mantık Kanunları*

Klâsik mantıkta *"aynılık ilkesi"*, *"çelişmeme ilkesi"* ve *"üçüncü halin olmazlığı ilkesi"* olmak üzere üç temel *"mantık kanunu"* kabul edilirdi. Modern mantıkta ise, bu üç ilkenin sayısı pek çok (hattâ sonsuz) olan çeşitli "mantık kanunları" arasında yer aldığını, bu gibi "mantık kanunları"nın da bir takım *"totolojiler"*den başka bir şey olmadığını göreceğiz.

İlk önce *"aynılık ilkesi"*ni (principle of identity) göz önüne alarak şu üç örneği inceleyelim:

(1) Sokrates Sokrates'tir (Sokrates = Sokrates)

(2) Bütün insanlar insandır

(3) Sokrates insan ise, Sokrates insandır.

Bu üç önermeyi "aynılık ilkesi"nin üç ayrı örneği sayabiliriz. Buna göre, aynılık ilkesinin *kendisini* dile getirmek için, sözü geçen üç önermenin lojik-yapısını dile getiren "önerme-şeması"nı veya (her birinin lojik-yapısı ayrı olması halinde) "önerme-şemaları"nı ortaya koymağa çalışalım.

(1) önermesinde 'Sokrates' gibi bir *tekil-terim* (singular term) geçmektedir. Buna göre, 'Sokrates' sözcüğü yerine 'x' gibi (tekil-terimlere özgü) bir temsilci-harf koyarak, (1) önermesinin temsilci-şeması olarak

(4) x, x'tir (veya 'x = x')

şemasını seçebiliriz.

(2) önermesinde ise 'insan' gibi bir *genel-terim* (general term) geçiyor. Buna göre, 'insan' sözcüğü yerine 'F' gibi (genel-terimlere özgü) bir temsilci-harf koyarak (2) önermesinin temsilci-şeması olarak:

(5) Bütün F'ler F'dir

ifadesini seçebiliriz.

(3) önermesine gelince: bunun temsilci-şeması olarak, 'Sokrates insandır' *önermesi* yerine (önermelere özgü) 'p' gibi bir temsilci-harf koyarak:

(6) p ise, p (veya 'p ⊃ p')

ifadesini seçebiliriz.

Görüldüğü gibi, aynılık ilkesi olarak üç *ayrı* önerme-şeması ile karşılaşmaktayız. Bu üç şema (ilerde daha iyi anlaşılacağı gibi) gerçekten de birbirinden özce farklı olduğundan, bir değil de, *üç ayrı "aynılık ilkesi"nin bulunduğunu* kabul etmemiz gerekecektir. (4), (5) ve (6) önerme-şemalariyle dile getirilebilen bu üç ayrı ilkenin ilk ikisi önermeler mantığının çerçevesine girmediğinden, bunları ancak ilerde inceleyebileceğiz.

Buna karşılık, sonuncu ilkenin önermeler mantığı çerçevesine girdiği meydandadır. Şu halde, biz burada (6) önerme-şemasiyle dile gelen aynılık ilkesini incelemekle yetinebiliriz.

Bu amaçla (6) şemasının ilk önce Quine-çizelgesini kuralım:

$$\begin{array}{ccc} & p \supset p & \\ D \supset D & & Y \supset Y \\ D & & D \end{array}$$

Bu çizelgeden (6) şemasının "geçerli" olduğu anlaşılır. (6) şeması bir "salt-şema" da olduğundan, §11, n. 2 anlamında bir *"t o t o l o j i"* sayılmalıdır. Böylece aynılık ilkesinin belli bir şeklinin bir totolojiden ibaret olduğunu kanıtlamış oluyoruz.

Şimdi de "çelişmeme ilkesi"ni (principle of non-contradiction) inceleyelim. Bu ilkeye örnek olarak,

(7) Sokrates hem insan hem insan-olmıyan değildir

gibi bir önermeyi seçebiliriz. Bu önermede geçen 'Sokrates' tekil-terimi yerine 'x' temsilci-harfini, 'insan' genel-terimi yerine de 'F' temsilci-harfini koymak suretiyle:

(8) ((x, F dir) ve (x, F değildir)) değil

biçiminde bir temsilci-şemayı elde edebiliriz. Bu şemayı da

(9) ((x, F dir) ve ((x, F dir) değil)) değil

biçimine çevirebiliriz. İmdi, (9) şemasında 'x' 'F dir' ifadesi yerine 'p' gibi bir temsilci-harf koyarak:

(10) (p ve p-değil) değil

veya sembolik olarak:

(11) $\sim (p \sim p)$

gibi bir önerme-şemasını elde ederiz. İşte, (11) şemasını çelişmeme-ilkesinin en genel biçimi sayabiliriz. Oysa, (11) şemasının önermeler mantığı çerçevesine girdiği meydandadır. Şu halde, bu ilkeyi burada incelemek mümkündür. Bu amaçla da (11) şemasının Quine-çizelgesini çizelim:

$$\sim (p \sim p)$$

$$\sim (DY) \qquad \sim (YD)$$

$$\sim (Y) \qquad \sim (Y)$$

$$D \qquad D$$

Bu çizelgeden (11) şemasının geçerli, dolayısiyle de (bir salt-şema olduğundan) bir "t o t o l o j i" olduğu anlaşılır. Böylece çelişmeme-ilkesinin en genel şeklinin de bir totolojiden başka bir şey olmadığını görüyoruz.

Çelişmeme ilkesini '$\sim (p \supset \sim p)$' biçiminde dile getirmemek gerek. Nitekim, böyle bir şema (ilk bakışta sanılabildiği gibi) hiç te geçerli değildir. Bunu sözü geçen şemanın aşağıdaki Quine-çizelgesinden görebiliriz:

$$\sim (p \supset \sim p)$$

$$\sim (D \supset Y) \qquad \sim (Y \supset D)$$

$$\sim (Y) \qquad \sim (D)$$

$$D \qquad Y$$

Buna göre, '$\sim (p \supset \sim p)$' (yani, '(p ise, p değildir) değil') şemasının yerine-koyma örneği olan

Sokrates insan ise, insan-olmıyan değildir

gibi bir önermeyi, çelişmeme ilkesinin bir örneği saymamak gerektiğini söyleyebiliriz.

*"Üçüncü halin olmazlığı ilkesi"*ne gelince; bu ilkenin bir örneği olarak:

(12) Sokrates insandır veya insan-olmıyandır

gibi bir önermeyi seçebiliriz. Bu önermede 'Sokrates' yerine 'x', 'insan' yerine de 'F' koymak suretiyle:

(13) (x, F dir) veya (x, F değildir)

biçiminde bir temsilci-şema elde ederiz. Bu şemada ise 'x, F dir' yerine 'p' temsilci-harfini koyarak:

(14) p veya p değil

şemasını veya sembolik olarak

(15) p v ~p

şemasını elde ederiz. İşte (15) şeması, üçüncü halin olmazlığı ilkesinin en genel şeklini dile getirmektedir. Bu ilkenin de bir *totolojiden)* ibaret olduğunu,

p v ~p

D v Y Y v D

D D

Quine-çizelgesinden görebiliriz.

İmdi, klâsik mantığın bu üç temel ilkesinin birer "totoloji"den ibaret olduğunu göz önünde tutarak, *"mantık ilkesi"* deyimini sadece bu üç özel totolojiye değil de, en genel bir şekilde herhangi bir totolojiye veya daha doğrusu herhangi bir *"totolojik önerme-şeması"*na uygulayabiliriz. 'Mantık ilkesi' deyimini bu geniş mânada kullandıkta; her mantık ilkesinin, *salt biçimleri gereği "doğru"* (başka bir deyimle *"mantıkça-doğru")* olan birçok (ilkece sonsuz sayıda) önermenin bir şemasından başka bir şey olmadığını söyleyebiliriz. Örneğin: 'p v ~p' "mantık ilkesi" (12) gibi 'A v ~A' biçimindeki bütün önermelerin şeması durumundadır.

Genel olarak, herhangi bir önermenin *"mantıkça-doğru"* olmasını, bu önermenin belli *bir "mantık ilkesi"nin yerine-koyma örneği* olması şeklinde tanımlıyoruz. Mantıkça-doğru önermelerin doğruluğu dil-dışı hiç bir olguya başvurmadan tesbit edilebilir. Nitekim, verilen bir önermenin belli bir mantık ilkesinin yerine-koyma örneği olduğunu tesbit ettiğimiz anda, başka hiçbir bilgiye başvurmadan bu önermenin "doğru" olduğunu söyleyebiliriz. İmdi, *mantığı* sadece öteki bilimlerin ortak metodu olarak değil de, tek başına bağımsız bir bilim olarak yorumladıkta, onu *"mantıkça-doğru önermelerden kurulu olan bilim"* şeklinde tanımlıyabiliriz. "Logicist" denilen bir matematik felsefesi açısından salt matematiğin tümü de bir takım *mantıkça-doğru önermelerin "tanımsal-kısaltmalar"ından* (definitional abbreviations[1]) ibaret sayıldığından, (böyle bir görüş gereği) matematiğin sadece mantık ilkelerine (totolojilere) dayandığını söyleyebiliriz. Böylece, totolojileri tesbit etmenin bir yandan (bağımsız bir bilim şeklinde yorumlanan) *mantığın,* öbür yandan da (mantıkça-

doğru önermelerin tanımsal-kısaltmaları şeklinde yorumlanan) *matematiğin* temellendirilmesi için ne kadar önemli olduğunu görüyoruz.

İmdi, totolojileri üst-eklemlerine bakarak şu beş öbeğe ayırabiliriz:

a) *'~A' biçimindeki totolojileri*

'~A' nın bir totoloji olması halinde 'A' bir *"çelişme"* olduğundan, bu türlü totolojilerin "çelişmeler"i belirlemeğe yaradığını söyleyebiliriz. Gerçekten de en önemli bir çelişme olan 'p~p' şeması '~(p~p)' totolojisi (*"çelişmeme-ilkesi"*) şeklinde belirtilmektedir.

b) *'A . B' biçimindeki totolojiler:*

'A . B' biçimindeki herhangi bir salt-şemanın bir totoloji olmasının gerekli ve yeterli şartı, hem 'A' nın hem 'B" nin bir totoloji olmasından ibarettir. Nitekim, 'p_1', 'p_2', ..., 'p_n', 'A' ile 'B' şemalarının (hiç olmazsa) birinde geçen temsilci-harfler olsun. O zaman 'A . B' bir totoloji ise, bu temsilci-harflere yüklenen bütün doğruluk-değerleri için 'D' değerini alır. Bu halde gerek 'A' gerek'B' bu temsilci-harflerin bütün doğruluk-değerleri için 'D' değerini almalı. Dolayısiyle gerek 'A' gerek 'B' bir totoloji olur. Şu halde şart *"gerekli"*dir. Bu durumu şöyle bir çizelge yardımiyle canlandırabiliriz.

p_1 ..... p_n	A . B	A	B
D ..... D	D	D	D
D ..... Y	D	D	D
.....	.	.	.
.....	.	.	.
Y ..... Y	D	D	D

Öte yandan, hem 'A' hem 'B' bir totoloji ise, temsilci-harflerin bütün doğruluk-değerleri için 'D' değerini alır. Dolayısiyle 'A . B' şeması da temsilci-harflerin bütün doğruluk-değerleri için 'D' değerini alır. Şu halde şart *"yeterli"*dir. Bu durumu da aşağıdaki çizelge ile gösterebiliriz:

p_1 ..... p_n	A	B	A . B
D ..... D	D	D	D
D ..... Y	D	D	D
.....	.	.	.
.....	.	.	.
Y ..... Y	D	D	D

İmdi, 'A . B' biçimindeki herhangi bir totolojinin, 'A' ve 'B' olmak üzere iki ayrı totolojinin birlikte-evetlenmesinden ibaret olduğunu göz

önünde tutarak, 'A . B' yerine 'A' ve 'B' totolojilerini ayrı ayrı dile getireceğiz. Bu bakımdan, pratikte kullanacağımız totolojiler arasında hiç bir zaman 'A . B' türünden tam-deyimlere yer vermiyeceğiz.

c) *'A v B' biçimindeki totolojiler:*

'A v B' biçimindeki her tam-deyim, '$\sim A \supset B$' tam-deyimiyle eşdeğerdir. Bunu şöyle bir çizelge yardımiyle kanıtlıyabiliriz:

A	B	$\sim A \supset B$	A v B
D	D	D	D
D	Y	D	D
Y	D	D	D
Y	Y	Y	Y

İmdi, bu eşdeğerliğe dayanarak, 'A v B' biçimindeki her totolojiyi (pek daha işlek olan) '$\sim A \supset B$' biçimine dönüştürerek, pratikte kullanılan totolojiler arasında 'A v B' biçiminde olanlara hemen hemen hiç yer ayırmıyacağız.

d) *'$A \supset B$' biçimindeki totolojiler:*

En önemli ve işlek olan totolojiler işte bu biçimde olanlardır. Nitekim, daha önce gösterdiğimiz gibi, herhangi bir çıkarımın geçerliliğini, 'A ⊃ B' biçimindeki bir salt-şemanın geçerliliğine geri götürmek mümkündür. Genel olarak 'A ⊃ B' herhangi bir totoloji olduğunda, böyle bir totolojiye dayanarak

(16)
$$\begin{array}{l} A \\ \therefore B \end{array}$$

gibi bir çıkarım-şemasının geçerliliğini öne sürebiliriz. 'A ⊃ B' totolojisinin

(17)
$$A_1 . A_2 . \ldots . A_n \supset B$$

biçiminde olması halinde de, böyle bir totolojiye dayanarak:

(18)
$$\begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n \\ \therefore B \end{array}$$

çıkarım-şemasının geçerli olduğu sonucunu çıkarabiliriz.

Bir de 'A ⊃ B' biçimindeki bir totolojiye dayanarak, 'A' şemasının 'B' şemasını *"içerdiğini"*, başka bir deyimle, bu iki şema arasında *"içerme"* bağlantısı olduğunu söyleyebiliriz. Bu durumu ise (§11, n. 2'de belirttiğimiz gibi):

(19) 'A' → 'B'

deyimiyle dile getiriyoruz.

e) *'A ≡ B' biçimindeki totolojiler:*

'A ≡ B' biçimindeki herhangi bir totoloji ('A ≡ B' şeması '(A ⊃ B). (B ⊃ A)' şemasıyla eşdeğer olduğundan) 'A ⊃ B' ile 'B ⊃ A' gibi iki ayrı totolojinin birlikte-evetlenmesinden ibarettir. Ancak, 'A ≡ B' gibi bir saltşemanın bir totoloji olmasından, 'A' ile 'B' nin *eşdeğer* olduğu, yani:

(20) 'A' ↔ 'B'

sonucunun çıkarılabileceğini göz önünde tutarak, 'A ≡ B' biçimindeki totolojileri bilmenin (özellikle Quine-çizelgelerinin kurulması için) çok faydalı olacağını söyleyebiliriz. Pratikte kullanılan totolojilerin birçoğunun 'A ≡ B' biçiminde olduğunu göreceğiz.

Totolojilerin genel niteliklerini böylece belirttikten sonra, şimdi de pratikte kullanılan en önemli totolojileri gösterelim. Çelişmeme ilkesiyle, üçüncü halin olmazlığı ilkesinden başka, bütün bu totolojiler 'A ⊃ B' veya 'A ≡ B' biçimindedir. Bu bakımdan, bu türlü mantık ilkelerini birer *"totoloji"* şeklinde dile getirecek yerde, (19) biçimindeki *"içermeler"* (implications) veya (20) biçimindeki *"eşdeğerlikler"* (equivalences) şeklinde de yorumlamak mümkündür. Üstelik 'A ⊃ B' biçimindeki bir mantık ilkesini, bir de (16) gibi bir *"çıkarım-şeması"* şeklinde de yorumlıyabileceğimizi görmüştük. Bu bakımdan 'A ⊃ B' gibi bir totoloji ile, bunun karşılığı olan (16) "çıkarım-şeması"nı ve (19) "içerme"sini aynı bir "mantık ilkesi"nin üç ayrı şekli olarak yorumlıyacağız. Örneğin: aşağıda gösterilen *'p · (p ⊃ q) ⊃ q' totolojisi* ile,

(21) 'p · (p ⊃ q)'→'q'

içerme'sini ve

p · (p ⊃ q)

∴ q

ve daha iyisi

(22)
$$\begin{array}{l} p \\ p \supset q \\ \therefore q \end{array}$$

çıkarım-şeması'nı *"modus ponens"* (modus ponendo ponens) denilen bir tek mantık ilkesinin ayrı şekilleri sayacağız.

İmdi, (önermeler mantığının) başlıca mantık ilkeleri (totoloji şeklinde şunlardır:

A) Ana-eklemi '~' den ibaret olon totolojiler:

(23) $\sim (p \sim p)$ (çelişmeme ilkesi)

(24) $\sim (p_1 \cdot \sim p_1 \cdot p_2 \cdot \sim p_2 \cdot \ldots \cdot p_n \cdot \sim p_n)$

B) Ana-eklemi 'v' den ibaret olan totolojiler:

(25) $p \; v \; \sim p$ (üçüncü-halin olmazlığı)

(26) $p_1 \; v \sim p_1 \; v \; p_2 \; v \sim p_2 \; v \ldots v \; p_n \; v \sim p_n$

(27) $pq \; v \; p \sim q \; v \sim pq \; v \sim p \sim q$

(28) $(p \supset q) \; v \; (q \supset p)$

C) Ana-eklemi '⊃' veya '≡' den ibaret olan totolojiler:

'ö' herhangi bir 2-li önerme-eklemi oldukta,

$$(p \; ö \; p) \equiv p$$

şemasının bir totoloji olması halinde, 'ö' eklemini *"denkgüçlü"* (idempotent)

$$(p \; ö \; q) \equiv (q \; ö \; p)$$

şemasının bir totoloji olması halinde, 'ö' eklemine *"çevirgeç"* (commutative);

$$((p \; ö \; q) \; ö \; r) \equiv (p \; ö \; (q \; ö \; r))$$

şemasının bir totoloji olması halinde de, 'ö' eklemine *"ortaklaştırıcı"* (associative) denir.

Sözü geçen üç deyim matematikten alınmıştır. Ancak bu deyimlerin aritmetik ve cebirdeki tanımları için, '≡' önerme-eklemi yerine '=' özdeşlik işaretini kullanmak gerekir. Örneğin: 'x', 'y' ve 'z', değerler-alanı "reel-sayılar"dan ibaret olan üç değişken olsun. O zaman:

$$x + y = y + x$$

ve

$$x \times y = y \times x$$

birer geçerli şema olduğundan, gerek '÷' *(toplama)* gerekse 'X' *(çarpma)* işleminin "çevirgeç" olduğu görülür.

$$((x + y) + z) = (x + (y + z))$$

ve

$$((x \times y) \times z) = (x \times (y \times z))$$

şemalarının geçerliliğinden de '+' ve '×' işlemlerinin her ikisinin de "ortaklaştırıcı" olduğunu anlıyoruz. Öte yandan: ':' *(bölme)* işleminin ne "çevirgeç" ne de "ortaklaştırıcı" olmadığını:

$$2 : 3 = 3 : 2$$

ile

$$(18 : 6) : 2 = 18 : (6 : 2)$$

önermelerinin "yanlış" olmasından çıkarabiliriz.

Bu üç işlemden hiçbirinin "denkgüçlü" olmadığı da meydandadır. (Nitekim ne 'x ÷ x = x', ne 'x X x = x' ne de '(x : x) = x' geçerli değildir).

İmdi, '·', 'v', '⊃' ve '≡' 2-li önerme-eklemlerinden '·' ve 'v' nin idempotent çevirgeç ve ortaklatırıcı olduğu: '≡' nin çevirgeç ve ortaklaştırıcı olmakla birlikte denkgüçlü olmadığı; '⊃' nin ise bu üç özellikten hiçbirini taşımadığı gösterilebilir.

a) *Birlikte-evetleme eklemi:*

(29) $pp \equiv p$ (birlikte-evetlemenin denkgüçlülüğü)
(30) $pq \equiv qp$ (birlikte-evetlemenin çevirgeçliği)
(31) $(pq) \cdot r \equiv p \cdot (qr)$ (birlikte-evetlemenin ortaklaştırıclığı)

'A', 'B' ve 'C' herhangi üç tam-deyim oldukta, (31) totolojisine dayanarak, '(AB) · C' ile 'A · (BC)' tam-deyimlerinin eşdeğer olduğunu görüyoruz. O zaman da bu iki tam-deyim teorik açıdan *farklı* olmakla birlikte, pratikte (yani doğruluk-değeri belirlenimleri bakımından) bu iki tam-deyim *aynı* saymak mümkündür. O zaman da parantezleri kaldırarak sadece 'ABC' yazarız. ('ABC' ifadesi teorik açıdan çok-anlamlı olup halis bir "düzgün-tam-deyim" değildir. Ama pratikte böyle bir deyimin kullanılmasında hiç bir sakınca yoktur).

Genel olarak, 'A_1', 'A_2', ... , 'A_n' n tane düzgün-tam-deyim oldukta,

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$$

gibi bir tam-deyimin (içinde temsilci-harfler geçmesi halinde, bu harflere yüklenen belli doğruluk-değerleri için) belli bir doğruluk-değeri olduğun-

dan, böyle bir deyime pratikte (tek-anlamlı imiş gibi) kullanmak mümkündür. Böyle bir tam-deyimde ne ana-eklem, ne de ana-bileşenler belirlenmiş değildir. 'A_1', 'A_2', ... , 'A_n' bileşenlerinden herhangi birini keyfe-bağlı olarak ana-eklem olarak seçebiliriz. Bu bakımdan bu bileşenleri hep aynı seviyede sayarak her birine bir *"çarpan"*, deyimin tümüne de bir *"çok-çarpanlı birlikte-evetleme"* diyeceğiz.

İmdi, çok-çarpanlı birlikte-evetlemelerde (30) totolojisine dayanarak *çarpanların sırasını* istediğimiz gibi *değiştirmek*, (29) totolojisine dayanarak ta bu çarpanlardan özdeş olanların (geçiş sayısı 1'den büyük olan çarpanlar!) sayısını "bir"e indirmek mümkündür. Örneğin:

$(p \vee q) \cdot (p \supset q) \cdot (q \vee p) \cdot (\sim p \vee q) \cdot (p \supset q) \cdot (\sim p \vee q) \cdot (q \vee p) \cdot (p \vee q)$

gibi karmaşık bir çok-çarpanlı birlikte-evetlemeyi, birlikte-evetleme ekleminin çevirgeçliği ve denkgüçlülüğünden faydalanarak, pek daha basit olan:

$$(p \vee q) \cdot (q \vee p) \cdot (\sim p \vee q) \cdot (p \supset q)$$

çok-çarpanlı birlikte-evetlemeye dönüştürebiliriz.

Görüldüğü gibi, herhangi bir *"çok-çarpanlı birlikte-evetleme", içinde geçen farklı çarpanlar tarafından* (bunların *geçiş sayısı* ile *sıralarından bağımsız* olarak) *büsbütün belirlenmiştir.*

b) *Ayrıklık eklemi :*

(32) $p \vee p \equiv p$ (ayrıklığın denkgüçlülüğü)

(33) $p \vee q \equiv q \vee p$ (ayrıklığın çevirgeçliği

(34) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ (ayrıklığın ortaklaştırıcılığı)

(34)'e dayanarak,

$$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$$

gibi *"çok-çarpanlı ayrıklıklar"* kullanmak mümkündür. (33) ve (34) gereği de, herhangi bir "çok-çarpanlı ayrıklık"ın sadece farklı çarpanları tarafından (bu çarpanların geçiş sayısıyla bunların sırasından bağımsız olarak) büsbütün belirlendiğini söyleyebiliriz. Örneğin:

$$p \vee (p \supset q) \vee p \vee p \vee (p \supset q) \vee q \vee p \vee p$$

gibi karmaşık bir çok-çarpanlı ayrıklığı,

$$p \vee q \vee (p \supset q)$$

ye dönüştürmek mümkündür.

c) *Karşılıklı-koşul eklemi :*

(35) $(p \equiv q) \equiv (q \equiv p)$ (karşılıklı-koşulun çevirgeçliği)

(36) $((p \equiv q) \equiv r) \equiv (p \equiv (q \equiv r))$ (karşılıklı-koşulun ortaklaştırıcılığı)

(36)'ya dayanarak,

$$A_1 \equiv A_2 \equiv \ldots . \equiv A_n$$

biçimindeki *"çok-çarpanlı karşılıklı-koşullular"* kullanmak mümkündür. '$A \equiv B \equiv C$' deyiminin ya '$(A \equiv B) \equiv C$)' ya da '$(A \equiv (B \equiv C))$' anlamına geldiğini hatırdan çıkarmamak gerek. Buna göre, '$A \equiv B \equiv C$' gibi bir tam-deyimin *doğruluğunun gerekli ve yeterli şartı, ya çarpanlardan yalnız birinin "doğru" olmasından, ya da her üçünün "doğru" olmasından* ibarettir.

Karşılıklı-koşul eklemi *denkgüçlü değildir;* yani:

$$(p \equiv p) \equiv p$$

bir *totoloji değildir.* Bundan dolayı çok-çarpanlı karşılıklı-koşullular genel olarak çarpanlarının geçiş sayısından bağımsız değildir. Bununla birlikte, herhangi bir çok-çarpanlı karşılıklı-koşullu, *geçiş sayısı çift olan çarpanlarından bağımsız* olup sadece *geçiş sayısı tek olan çarpanlarından kurulu bir çok-çarpanlı karşılıklı-koşulluya geri götürülebilir.* Örneğin:

$$A \equiv B \equiv A \equiv A \equiv B \equiv C \equiv A \equiv B \equiv C$$

gibi bir çok-çarpanlı karşılıklı-koşulluyu göz önüne alalım. Bu tam-deyimin 'A', 'B' ve 'C' olmak üzere üç farklı çarpanı vardır. 'A' çarpanının geçiş sayısı 4, 'B' çarpanının geçiş sayısı 3, ve 'C' çarpanının geçiş sayısı da 2 dir. İmdi çevirgeçlik özelliğinden faydalanarak, bu tam-deyimi:

$$A \equiv A \equiv A \equiv A \equiv B \equiv B \equiv B \equiv C \equiv C$$

gibi bir deyime dönüştürebiliriz. Bu son deyimin

$$A \equiv A \equiv B \equiv B \equiv B \equiv C \equiv C$$

bileşenini 'Ç' şeklinde kısaltalım. O zaman tam-deyim '$A \equiv A \equiv Ç$' biçimine girer. Oysa,

(37) $(p \equiv p \equiv q) \equiv q$

şemasının bir totoloji olduğu gösterilebilir. Şu halde, tam-deyimimizin 'Ç' ile eşdeğer olduğunu, dolayısiyle de 'Ç' ye dönüştürülebileceğini görüyoruz. Oysa, 'Ç' nin kendisi '$A \equiv A \equiv Ç$' biçiminde olduğundan, (37) uyarınca '$Ç_1$' deyimine dönüştürülebilir..... Aynı işlemi tekrarlamak sure-

tiyle, başlangıçtaki tam-deyimi *'B'* ye dönüştürmek, dolayısiyle de geçiş sayısı çift olan 'A' ile 'C' çarpanlarını elemek mümkün olduğunu görüyoruz.

Aynı şekilde, *her çarpanının geçiş sayısı çift olan herhangi bir çok-çarpanlı karşılıklı-koşullunun geçerli olduğunu* kanıtlıyabiliriz. Nitekim, böyle bir deyim 'A ≡ A' gibi bir totolojiye dönüştürülebilir.

d) *Karşılıklı-şart eklemiyle hayırlama-ekleminin biraradalığı:*

'A_1', 'A_2', ... , 'A_n' gibi herhangi n tane düzgün-tam-deyimi göz önüne alalım. 'B_1' harfini ya 'A_1', ya da '$\sim A_1$' in kısatlması olarak kullanalım. Aynı şekilde 'B_2' ya 'A_2' nin, ya '$\sim A_2$' nin, ... , 'B_n' ya 'A_n' in, ya '$\sim A_n$' in kısaltması olsun. O zaman, 'A_1', 'A_2', ... , 'A_n' deyimlerinden salt '≡' ile '∼' eklemleri yardımiyle kurulu herhangi bir tam-deyimin:

$$B_1 \equiv B_2 \equiv \ldots . \equiv B_n$$

biçimindeki bir çok-çarpanlı karşılıklı-şart koşulluya çevrilebileceğini göstereceğiz. Örneğin:

$$\sim (\sim (\sim A \equiv B) \equiv \sim (\sim A \equiv B \equiv \sim C) \equiv \sim (A \equiv B))$$

gibi bir tam-deyimi göz önüne alalım. Bu tam-deyimi (36),

(38) $\sim (p \equiv q) \equiv (\sim p \equiv q)$

veya

(39) $\sim (p \equiv q) \equiv (p \equiv \sim q)$

ve

(40) $\sim \sim p \equiv p$ (çifte-hayırlama ilkesi)

totolojilerine dayanarak, şu biçime dönüştürebiliriz:

$$\sim (\sim \sim A \equiv B \equiv (\sim (\sim A \equiv B) \equiv \sim C) \equiv \sim A \equiv C)$$
$$\sim (A \equiv B \equiv \sim A \equiv B \equiv \sim C \equiv \sim A \equiv C)$$
$$\sim (A \equiv B) \equiv A \equiv B \equiv \sim C \equiv \sim A \equiv C$$
$$\sim A \equiv B \equiv A \equiv B \equiv \sim C \equiv \sim A \equiv C$$

Bu son deyimin ise bir "çok-çarpanlı karşılıklı-koşullu" olduğu meydandadır. (İ.K.)

İmdi, sözü geçen '$B_1 \equiv B_2 \equiv \ldots \equiv B_n$' biçimindeki herhangi bir tam-deyimi göz önüne alalım. Böyle bir deyimin çarpanlarında ana-eklem olarak geçen bütün hayırlama-işaretlerinin bir tek çarpan içinde toplanması mümkündür. Örneğin: '$\sim A \equiv B \equiv A \equiv B \equiv \sim C \equiv \sim A \equiv C$' tam-deyimi-

ni yeniden göz önüne alalım. Karşılıklı-koşulun çevirgeçliğine dayanarak, bu tam-deyimi

$$\sim A \equiv \sim A \equiv \sim C \equiv A \equiv B \equiv B \equiv C$$

ye dönüştürebiliriz. İmdi:

$$(\sim p \equiv \sim q) \equiv (\sim \sim p \equiv q)$$

bir totolojidir. Bu totolojiye dayanarak, tam-deyimimizi şöyle dönüştürebiliriz:

$$\begin{aligned}
&(\sim A \equiv \sim A) \equiv (\sim C \equiv A \equiv B \equiv B \equiv C)\\
&\equiv\\
&(A \equiv A) \equiv (\sim C \equiv A \equiv B \equiv B \equiv C)\\
&\equiv\\
&A \equiv A \equiv \sim C \equiv A \equiv B \equiv B \equiv C\\
&\equiv\\
&A \equiv \sim C \equiv A \equiv A \equiv B \equiv B \equiv C\\
&\equiv\\
&(A \equiv \sim C) \equiv (A \equiv A \equiv B \equiv B \equiv C)\\
&\equiv\\
&(A \equiv C) \equiv (A \equiv A \equiv B \equiv B \equiv C)\\
&\equiv\\
&A \equiv C \equiv A \equiv A \equiv B \equiv B \equiv C
\end{aligned}$$

Böylece hayırlama-ekleminin bütün geçişleri bir tek çarpan (1.ci çarpan) içinde toplanmış olur. (İ.K.)

İmdi, 'A' herhangi bir tam-deyim oldukta, 'A' tam-deyiminin önüne n tane ayrı hayırlama-işareti koymakla elde edilen tam-deyime A nın *"n-li hayırlanması"* diyelim. Örneğin: 'p' gibi bir temsilci-harfin 2-li hayırlanması '$\sim\sim$p', 3-lü hayırlanması '$\sim\sim\sim$p' 4-lü hayırlanması '$\sim\sim\sim\sim$p' v.ö. dür. 'A' tam-deyiminin "n-li hayırlanması"nı

$$(\sim)^n A$$

deyimiyle dile getireceğiz. Örneğin: 'p v q' gibi bir deyimin 7-li hayırlanması '$(\sim)^7$ (p v q)' olur. (40) totolojisine ("çift-hayırlama ilkesi) dayanarak:

(41)
$$(\sim)^n p \equiv p \qquad (n \text{ çift ise})$$
$$(\sim)^n p \equiv \sim p \qquad (n \text{ tek ise})$$

totolojilerini kanıtlıyabiliriz. *("n-li hayırlama ilkesi"!)*. (41)'de 'n' sayısı olarak herhangi bir "tabiî sayı"yı (yani o veya herhangi bir pozitif tam sayıyı) seçebiliriz. n = o halinde,

$$(\sim)^0 A = {}_{Dk}\ A$$

tanımını yapıyoruz. Böylece herhangi bir tam-deyimi (içinde '~' işareti geçsin veya geçmesin) bir "n-li hayırlama" biçiminde yazmamız mümkün olur.

Özellikle sözü geçen

$$B_1 \equiv B_2 \equiv \ldots \equiv B_n$$

tam-deyimini:

(i) $$(\,(\sim)^{m_1} A_1) \equiv (\,(\sim)^{m_2} A_2) \equiv \ldots\ldots \equiv (\,(\sim)^{m_n} A_n)$$

biçiminde dile getirebiliriz. Bu tam-deyimi, içinde geçen bütün hayırlama-işareterini birinci çarpanı içinde toplıyarak,

$$(\,(\sim)^{m_1 + m_2 + \cdot + m_n} A_1) \equiv A_2 \equiv \ldots\ldots \equiv A_n$$

biçimine dönüştürebiliriz. Bu tam-deyimin birinci çarpanı ise (41) gereğince,

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n$$

sayısının *çift* olması halinde 'A' bileşeniyle, söz konusu sayının *tek* olması halinde de '~A' ile eşdeğerdir. Buna göre (i) formülünü birinci halde,

(ii) $$A_1 \equiv A_2 \equiv \ldots\ldots \equiv A_n$$

biçimine, ikinci halde ise

(iii) $$\sim A_1 \equiv A_2 \equiv \ldots\ldots \equiv A_n$$

biçimine dönüştürmek mümkündür. Oysa, 'A_1', 'A_2', ... , 'A_n' bileşenlerinden her birinin geçiş sayısı çift olduğundan, (ii) tam-deyimi geçerlidir. Öte yandan, 'A_1', 'A_2', ... , 'A_n' gibi bir takım bileşenlerle salt '$\equiv$' ve '~' eklemlerinden kurulu herhangi bir tam-deyimi '$B_1 \equiv B_2 \equiv \ldots\ldots \equiv B_n$', dolayısiyle de (i) biçimine dönüştürmek mümkündür. Bütün bunları göz önünde tutarak şöyle bir sonuca varıyoruz:

'A_1', 'A_2', ... 'A_n' gibi bir takım bileşenlerden salt karşılıklı-koşul ile hayırlama eklemleri yardımiyle kurulu herhangi bir tam-deyimin *geçerliliğinin yeterli bir şartı,* biryol sözü geçen *bileşenlerin* her birinin *geçiş sayısının çift olması,* bir de *hayırlama-işaretinin geçiş sayısının çift olmasından* ibarettir.[3]

Bu kurala (onu ilk olarak ortaya atan kimsenin adıyla) *"McKinsey kuralı",* kuralda sözü edilen şarta da *"McKinsey özelliği"* diyeceğiz. O zaman, *karşılıklı-koşul eklemiyle hayırlama-ekleminden başka hiçbir önerme-eklemini içine almıyan herhangi bir salt önerme-şemasının bir totoloji*

olmasının gerekli ve yeterli şartının, bu şemanın McKinsey özelliğini taşımasından ibaret olduğunu kanıtlıyabiliriz.

Bu amaçla, içinde karşılıklı-koşul eklemiyle hayırlama-ekleminden başka hiçbir önerme-ekleminin geçmediği Ş gibi bir salt önerme-şemasını göz önüne alalım. (Örneğin: 'p', '$\sim$p', '$\sim\sim$p', '$(\sim)^n$ p', 'p $\equiv$ q', '$\sim$(p$\equiv\sim$q)', '$\sim$(p$\equiv$q$\equiv$p)', ... bu türlü şemalardır). Ş şemasının *"McKinsey özelliği"*ni taşıması, biryol bu *şemanın içine aldığı temsilci-harflerden her birinin geçiş sayısının çift olması,* bir de *şemanın içine aldığı hayırlama-işaretlerinin sayısının çift olması,* ya da *özel hal olarak şemanın içinde hayırlama-ekleminin hiç geçmemesi* demektir.

Şart gereklidir: Ş şeması bir totoloji ise, McKinsey özelliğini taşır. Nitekim, Ş nin bir totoloji olduğunu kabul edelim. O zaman Ş nin atomsal-bileşenlerinin sayısı "bir"den büyük olmalıdır. Yoksa, Ş şeması '$(\sim)^m$ p' biçiminde olurdu. Bu son deyim ise ya 'p' ile, ya da '$\sim$p' ile eşdeğerdir. Oysa ne 'p' bir totolojidir, ne de '$\sim$p'. Şu halde, Ş şemasının en az iki bileşeni olması, dolayısiyle bu iki bileşeni birbirine ekleyen bir "2-li önerme-eklemi"nin bulunması gerekir. Ş şemasında hayırlama-eklemiyle karşılıklı-koşul ekleminden başka bir önerme-eklemi geçmediğinden dolayı da, bu "2- li" önerme-eklemi '$\equiv$' eklemi olmalıdır.

İmdi, Ş şemasının atomsal-bileşenleri 'A_1', 'A_2', ... , 'A_n' den ibaret olsun. n $>$ 1 dir. O zaman Ş şemasını:

$$((\sim)^m A_1) \equiv A_2 \equiv \ldots\ldots \equiv A_n$$

biçimine, bu son şemayı da, m sayısının çift veya tek olmasına bakarak, ya

(a) $$A_1 \equiv A_2 \equiv \ldots\ldots \equiv A_n$$

ya da

(b) $$\sim A_1 \equiv A_2 \equiv \ldots\ldots \equiv A_n$$

biçimine dönüştürebiliriz. (a) deyimi, hayırlama-eklemini içine almıyan bir şema, (b) deyimi ise bu eklemin bir defa geçtiği bir şemadır. Örneğin:

$$p \equiv q \equiv p \equiv p \equiv q \equiv r \equiv q \equiv p \equiv p$$

(a) biçiminde,

$$\sim p \equiv q \equiv p \equiv p \equiv q \equiv r \equiv q \equiv p \equiv p$$

ise (b) biçiminde bir şemadır.

İmdi *(b) şemasının* hiçbir zaman bir *totoloji olamıyacağını* gösterebiliriz. Nitekim, 'A_1' bileşeninin 'p' temsilci-harfinden ibaret olduğunu düşünelim. O zaman (b) şeması:

(c) $$\sim p \equiv B$$

biçimindedir. 'B' deyimi, '$A_2 \equiv \ldots . \equiv A_n$' kısaltması olup (a) biçiminde bir şemadır. O zaman *'B' ya bir totolojidir, ya değildir. 'B' bir totoloji ise,* temsilci-harflere yüklenen bütün doğruluk-değerleri için doğrudur. Bu halde, 'p' temsilci-harfine 'D' değerini vermek suretiyle (c) şemasının 'Y' değerini aldığını görüyoruz. Öte yandan 'B' bir totoloji değilse, şu iki şıkla karşılaşırız: *'p' temsilci-harfinin 'B' şemasındaki geçişlerinin sayısı ya çifttir, ya da tek.*

Birinci şıkta, 'B' şemasını artık 'p' harfini içine almıyan 'C' gibi bir şemaya dönüştürebiliriz. Böylece (c) şeması '$\sim p \equiv C$' ye dönüştürülebilir. Oysa, 'C' şeması 'B' ile eşdeğer olduğundan, 'C' de bir totoloji değildir. Şu halde, 'C' şeması, içinde geçen (her biri 'p' den farklı olan) temsilci-harflerin belli bir takım değerleri için *yanlış* olur. O zaman da, 'p' temsilci-harfine 'Y' değerini vermek suretiyle (c) şemasının 'Y' değerini aldığını görüyoruz.

İkinci şıkta, yani 'p' harfinin 'B' şemasındaki geçişlerinin tek olması halinde, 'B' şemasını, 'Ç' artık 'p' harfini içine almıyan bir şema olmak üzere, '$p \equiv Ç$' biçimine dönüştürebiliriz. O zaman da (c) şeması

(d) $$(\sim p \equiv p) \equiv Ç$$

biçimine dönüştürülebilir. 'Ç' şeması içinde 'p' temsilci-harfi bulunmayan (a) biçimindeki bir şemadır. 'Ç' şemasının içinde geçiş sayısı tek olan farklı temsilci-harfler 'q_1', 'q_2', ... , 'q_k' olsun. O zaman 'Ç' şemasını '$q_1 \equiv q_2 \equiv \ldots . \equiv q_k$' biçimine, dolayısiyle de (d) şemasını:

$$(\sim p \equiv p) \equiv (q_1 \equiv q_2 \equiv \ldots . \equiv q_k)$$

biçimine dönüştürebiliriz. İmdi, '$\sim p \equiv p$' şeması 'p' harfinin bütün değerleri için 'Y' değerini alır (çelişme!). Buna karşılık, 'q_1', 'q_2', ..., 'q_k' harflerinin her birine 'D' değeri vermek suretiyle 'd' şemasına 'Y' değerini verebiliriz. Böylece (d) şemasının da 'Y' değerini aldığını, dolayısiyle bir totoloji olmadığını görüyoruz. İşte bu şekilde, (b) biçimindeki bir şemanın hiçbir zaman bir totoloji olmadığını kanıtlamış olduk.

Böylece Ş şemasının bir totoloji olması halinde, (b) biçimine dönüştürülemiyeceğini, dolayısiyle de (a) biçimine dönüştürülebileceğini görüyoruz. Başka bir deyimle, Ş şeması bir totoloji ise, içinde geçen hayırla-

ma-işaretlerinin sayısı çift olmalı, ya da Ş içinde böyle bir işaret hiç geçmemeli.

İmdi, (a) biçimindeki bir şemanın içinde geçen temsilci-harflerden birinin -söz gelişi 'p' harfinin- geçiş sayısının "tek" olduğunu kabul edelim. O zaman, (a) şemasını, 'p ≡ Ç' biçimine dönüştürebiliriz. 'Ç', içinde 'p' harfinin geçmediği '$q_1 \equiv q_2 \equiv \ldots\ldots \equiv q_k$' biçiminde bir şema olsun ve 'q_1', 'q_2', ... , 'q_k' temsilci-harflerine keyfe-bağlı olarak belli bir takım doğruluk-değeri alır. İmdi, 'Ç' nin aldığı değer 'D' ise, 'p' ye 'Y' değerini; 'Ç' nin aldığı değer 'Y' ise, 'p' ye 'D' değerini verelim. Her iki halde de 'p ≡ Ç' şemasının "yanlış" değerini aldığı meydandadır. Şu halde, 'p' temsilci-harfinin (a) şemasında, dolayısiyle Ş şemasındaki geçiş sayısının tek olması halinde, ne (a) şemasının, ne de Ş şemasının bir totoloji olmadığını görüyoruz. (İ.K.)

Şart yeterlidir: Ş şeması McKinsey özelliğini taşırsa, bir totoloji olur. Nitekim, Ş şemasının ya (a), ya da (b) biçimine dönüştürülebildiğini görmüştük. Ş şeması McKinsey özelilğini taşıyorsa, (b) biçimine dönüştürülemez, ancak (a) biçimine dönüştürülebilir. Oysa bu türlü bir tam-deyimin çarpanlarının her birinin geçiş sayısının çift olması halinde geçerli olduğunu daha önce kanıtlamıştık. Şu halde (a) şeması, dolayısiyle de Ş şeması bir totolojidir. (İ.K.)

Örneğin: her biri, içinde karşılıklı-şart eklemiyle hayırlama-eklemeninden başka bir önerme-eklemi geçmiyen bir şema durumunda olan (35) - (41) totolojileri hep "McKinsey özelliği"ni taşımaktadır. Pratikte kullanılan ve aynı özelliği taşıyan şemalar arasında bir de:

(42) $\qquad (\sim p \equiv \sim q) \equiv (p \equiv q)$

(43) $\qquad (p \equiv \sim q) \equiv (\sim p \equiv q)$

totolojilerini anabiliriz.

e) Dönüşümlülük:

'ö' bir "2-li öerme-eklemi" oldukta:

p ö p

şemasının bir totoloji olması halinde, 'ö' ekleminin *"dönüşümlü"* (reflexive) olduğu söylenir. Dönüşümlü deyimi daha çok bağlantı-terimlerine uygulanmaktadır. Örneğin: özdeşlik-bağlantısını dile getiren '=' sembolü dönüşümlüdür. Nitekim 'x = x' şemasının geçerli olduğu meydandadır. Buna karşılık matematikte kullanılan '<' sembolü dönüşümlü değildir. Nitekim 'x < x' şemasının geçerli olmadığını, bu şemanın yerine-

koyma örneği durumunda olan '2 < 2' gibi yanlış önermelerin bulunmasından anlıyoruz). ' · ', 'v', '⊃' ve '≡' eklemlerinden ancak son ikisi dönüşümlüdür.

(44) p ⊃ p (koşul-ekleminin dönüşümlülüğü *"aynılık-ilkesi")*

(45) p ≡ p (karşılıklı-koşul ekleminin dönüşümlülüğü, *"aynılık-ilkesi")*

(44) ve (45) birer totoloji olduğu halde, ne 'pp' şemasının, ne de 'p v p' şemasının öyle olmadığı kolayca gösterilebilir. Şu halde ne birlikte-evetleme eklemi, ne de ayrıklık-eklemi dönüşümlüdür.

f) Geçişlilik :

'ö' bir "2-li önerme-eklemi" oldukta,

$$(p\ ö\ q) \cdot (q\ ö\ r) \supset (p\ ö\ r)$$

şemasının bir totoloji olması halinde, 'ö' ekleminin "geçişli" (transitive) olduğu söylenir. (Geçişli) deyimi daha çok bağlantı-terimlerine uygulanmaktadır. Örneğin: gerek '=' gerek '<' geçişlidir. Nitekim, '(x=y) · (y=z) ⊃ (x=z)' ile '(x<y) · (y<z) ⊃ (x<z)' şemalarından her biri geçerlidir. Buna karşılık, 'Baba' bağlantı-teriminin geçişli olmadığı,

(Ahmet Alinin babasıdır) · (Ali Velinin babasıdır) ⊃ (Ahmet Velinin babasıdır)

önermesinin yanlış olmasından anlaşılır.

İmdi, ' · ', 'v', '⊃' ve '≡' eklemlerinden ' · ', '⊃' ve '≡' geçişlidir.

(46) (pq) · (qr) ⊃ pr (birlikte-evetlemenin geçişliliği)

(47) (p⊃q) · (q⊃r) ⊃ (p⊃r) (koşul-ekleminin geçişilliği)

(48) (p≡q) · (q≡r) ⊃ (p≡q) (karşılıklı-koşul ekleminin geçişliliği)

Buna karşılık, ayrıklık-eklemi geçişli değildir. Nitekim:

$$(p\ v\ q) \cdot (q\ v\ r) \supset (p\ v\ r)$$

bir totoloji değildir. Bunu şöyle gösterebiliriz: 'p' yerine 'Y', 'q' yerine 'D' ve 'r' yerine 'Y' koyalım. O zaman şemamız 'Y' değerini alır.

g) *Dağıtıcılık :*

'ö' ile 'ö₁' iki "2-li önerme-eklemi" olsun. O zaman:

(i) $p\ ö\ (q\ ö_1\ r) \equiv (p\ ö\ q)\ ö_1\ (p\ ö\ r)$

şeması bir totoloji ise, *'ö' ekleminin 'ö₁' eklemine göre "soldan-dağıtıcı"* olduğu;

(ii) $$(q\ \ddot{o}_1\ r)\ \ddot{o}\ p \equiv (q\ \ddot{o}\ p)\ \ddot{o}_1\ (r\ \ddot{o}\ p)$$

şeması bir totoloji ise, *'ö' ekleminin 'ö₁' eklemine göre "sağdan-dağıtıcı"* olduğu söylenir. Özel hal olarak, 'ö' nün çevirgeç olması halinde, 'ö' eklemi 'ö₁' gibi herhangi bir ekleme göre soldan-dağıtıcı ise, aynı zamanda sağdan-dağıtıcı olur. Nitekim 'ö' nün çevirgeç olması halinde, (i) ile (ii) şemalarının eşdeğer olduğunu gösterebiliriz. (Böyle bir durum için, sadece 'ö' nün çevirgeç olmasının yettiğini, 'ö₁' in de çevirgeç olmasının gerekmediğini belirtmek faydalıdır). İmdi, 'ö' ekleminin 'ö₁' eklemine göre hem "soldan-dağıtıcı", hem "sağdan-dağıtıcı" olması halinde, *"'ö' ekleminin 'ö₁' eklemine göre dağıtıcı"* olduğu söylenir.

('Dağıtıcı' deyimi matematikte "toplama", "çarpma", .. gibi işlemlere uygulanır. Örneğin: '×' çarpma işareti, '+' toplama işaretine göre dağıtıcıdır. Nitekim '$x \times (y + z) = x \times y + x \times z$' geçerli bir şemadır. Buna karşılık, '+' işareti '×' işaretine göre dağıtıcı değildir. Nitekim, '$x + (y \times z) = (x + y) \times (x + z)$' geçerli bir şema değildir. Örneğin:

$$2 + (1 \times 3) = (2 + 1) \times (2 + 3)$$

yanlış bir önermedir).

Öte yandan, ya

$$p\ \ddot{o}\ (q\ \ddot{o}_1\ r) \supset (p\ \ddot{o}\ q)\ \ddot{o}_1\ (p\ \ddot{o}\ r)$$

şemasının, ya da

$$(p\ \ddot{o}\ q)\ \ddot{o}_1\ (p\ \ddot{o}\ r) \supset p\ \ddot{o}\ (q\ \ddot{o}_1\ r)$$

şemasının bir totoloji olması halinde, 'ö' ekleminin 'ö₁' eklemine göre *"tek-yönlü dağıtıcı"* olduğunu söyleyeceğiz.

Ayrıca, 'ö₂', gerek 'ö' gerek 'ö₁' den farklı bir eklem oldukta,

$$p\ \ddot{o}\ (q\ \ddot{o}_1\ r) \equiv (p\ \ddot{o}\ q)\ \ddot{o}_2\ (p\ \ddot{o}\ r)$$
$$(q\ \ddot{o}_1\ r)\ \ddot{o}\ p \equiv (q\ \ddot{o}\ p)\ \ddot{o}_2\ (r\ \ddot{o}\ p)$$
$$p\ \ddot{o}\ (q\ \ddot{o}_1\ r) \equiv (p\ \ddot{o}_2\ q)\ \ddot{o}_1\ (p\ \ddot{o}_2\ r)$$
$$(q\ \ddot{o}_1\ r)\ \ddot{o}\ p \equiv (q\ \ddot{o}_2\ p)\ \ddot{o}_1\ (r\ \ddot{o}_2\ p)$$

şemalarının birinin bir totoloji olması halinde, 'ö' ekleminin 'ö₁' eklemine göre *"yarı-dağıtıcı"* olduğunu söyleyeceğiz.

İmdi, '$\cdot$', 'v', '$\supset$' ve '$\equiv$' eklemlerinden '$\cdot$', 'v' ve '$\equiv$' nın çevirgeç olduğunu; '$\supset$' nın ise öyle olmadığını söylemiştik. Buna göre, "birlikte-

evetleme", "ayrıklık" ve "karşılıklı-koşul" eklemlerinin "dağıtıcılık" ından söz edilebildiği halde, "koşul-eklemi"ne ancak "soldan-dağıtıcılık"la "sağdan-dağıtıcılık" uygulanabilir.

(i) Birlikte-evetleme ekleminin dağıtıcılık kanunları:

(49) $p \cdot (qr) \equiv (pq) \cdot (pr)$ ('.' nin '.' ne göre dağıtıcılığı)
(50) $p \cdot (q \vee r) \equiv pq \vee pr$ ('.' nin 'v' ne göre dağıtıcılığı)
(51) $p \cdot (q \supset r) \supset (pq \supset pr)$ ('.' nin '⊃' ne göre tek-yönlü dağıtıcılığı)
(52) $p \cdot (q \equiv r) \supset (pq \equiv pr)$ ('.' nin '≡' ne göre tek-yönlü dağıtıcılığı)

(ii) Ayrıklık-ekleminin dağıtıcılık kanunları:

(53) $p \vee qr \equiv (p \vee q) \cdot (p \vee r)$ ('v' nin '.' ne göre dağıtıcılığı)
(54) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee (p \vee r)$ ('v' nin 'v' ye göre dağıtıcılığı)
(55) $p \vee (q \supset r) \equiv (p \vee q \supset p \vee r)$ ('v' nin '⊃' ne göre dağıtıcılığı)
(56) $p \vee (q \equiv r) \equiv (p \vee q \equiv p \vee r)$ ('v' nin '≡' ne göre dağıtıcılığı)

(iii) Koşul-ekleminin soldan-dağıtıcılık kanunları:

(57) $(p \supset qr) \equiv (p \supset q) \cdot (p \supset r)$ ('⊃' nin '.' ne göre soldan-dağıtıcılığı)
(58) $(p \supset q \vee r) \equiv (p \supset q) \vee (p \supset r)$ ('⊃' nin 'v' ye göre soldan-dağıtıcılığı)
(59) $(p \supset (q \supset r)) \equiv ((p \supset q) \supset (p \supset r))$ ('⊃' nin '⊃' ne göre soldan-dağıtıcılığı)
(60) $(p \supset (q \equiv r)) \equiv ((p \supset q) \equiv (p \supset r))$ ('⊃' nin '≡' ne göre soldan-dağıtıcılığı)
(61) $(p \supset (q \equiv r)) \equiv (pq \equiv pr)$ ('⊃' nin '≡' ne göre soldan yarı-dağıtıcılığı)

(iv) Koşul-ekleminin sağdan-dağıtıcılık kanunları:

(62 a) $(p \supset r) \cdot (q \supset r) \supset (pq \supset r)$ ('⊃' nin '.' ne göre tek-yönlü sağdan-dağıtıcılığı)
(62 b) $(pq \supset r) \equiv (p \supset r) \vee (q \supset r)$ ('⊃' nin '.' ne göre sağdan yarı-dağıtıcılığı)
(63) $(p \vee q \supset r) \supset (p \supset r) \vee (q \supset r)$ ('⊃' nin 'v' ye göre tek-yönlü sağdan-dağıtıcılığı)
(64) $(p \vee q \supset r) \equiv (p \supset r) \cdot (q \supset r)$ ('⊃' 'v' ye göre sağdan-yarı-dağıtıcılığı)
(65) $((p \supset q) \supset r) \supset ((p \supset r) \supset (q \supset r))$ ('⊃' nin '⊃' ne göre tek-yönlü sağdan dağıtıcılığı)

Öte yandan, '⊃' ekleminin '≡' eklemine göre hiçbir şekilde sağdan-dağıtıcı olmadığını gösterebiliriz.

(v) Karşılıklı-koşul ekleminin dağıtıcılık kanunları:

(66) $(p \equiv q) \cdot (p \equiv r) \supset (p \equiv qr)$ ('≡' nin '·' ne göre tek-yönlü dağıtıcılığı)

(67) $(p \equiv q \vee r) \supset (p \equiv q) \vee (p \equiv r)$ ('≡' nin 'v' ye göre tek-yönlü dağıtıcılığı)

(68) $((p \equiv (q \supset r)) \supset ((p \equiv q) \supset (p \equiv r))$ ('≡' nin '⊃' ne göre tek-yönlü dağıtıcılığı)

Buna karşılık, '≢' nin '≡' ne göre hiç bir şekilde dağıtıcı olmadığı gösterilebilir.

h) Koşul ekleminin çeşitli özellikleri :

(69) $\sim p \supset (p \supset q)$ (Ön-önermenin hayırlanması: "denial of the antecedent")

(70) $q \supset (p \supset q)$ (ard-önermenin evetlenmesi, "affirmation of the consequent")

(69) ile (70) birer totoloji, dolayısiyle birer mantık ilkesi durumundadır.[4] Öte yandan,

$$\begin{array}{l} \sim p \\ p \supset q \\ \therefore \sim q \end{array}$$

çıkarım-şemasiyle,

$$\begin{array}{l} q \\ p \supset q \\ \therefore p \end{array}$$

çıkarım-şemasına göre yapılan çıkarımlara sırasiyle *"ön-önermenin hayırlanması paralojizmi"* (fallacy of the denial of the antecedent) ve *"ard-önermenin evetlenmesi paralojizmi"* (fallacy of the affirmation of the consequent) denilmektedir. Bu iki çıkarım-şemasının geçerli olmadığı,

$$\sim p \cdot (p \supset q) \supset q$$

ile

$$q \cdot (p \supset q) \supset p$$

şemalarının birer totoloji *olmamasından* anlaşılır. "Ön-önermenin hayırlanması paralojizm"ine:

Ahmet Ankara'ya giderse, annesi İstanbul'a gelmiyecek
Ahmet Ankara'ya gitmiyecek
∴ Ahmed'in annesi İstanbul'a gelecek

çıkarımını; "ard-önermenin evetlenmesi paralojizmi"ne de:

Ahmet Ankara'ya giderse, annesi İstanbul'a gelecek
Ahmed'in annesi İstanbul'a gelecek
∴ Ahmet Ankara'ya gidecek.

çıkarımını örnek olarak gösterebiliriz.

(71) $(p \supset (q \supset r)) \equiv (pq \supset r)$ ('q' nun giriş ve çıkışı, "importation-exportation")

(72) $(p \supset (q \supset r)) \equiv (q \supset (p \supset r))$ ('p' ile 'q' nün birbiriyle yer değiştirmesi, "commutation")

(73) $((p \supset q) \supset r) \supset (p \supset (q \supset r))$

(74) $((p \supset q) \supset r) \supset (pq \supset r)$

(75) $((p \supset q) \supset r) \supset (q \supset (p \supset r))$

(76) $(p \supset q) \supset (rp \supset rq)$ ("çarpma", "factorization")

(77) $(p \supset q) \supset (r \vee p \supset r \vee q)$ ("toplama", "summation")

"Çarpma" ve "toplama" işlemleri yalnız (76) ve (77) uyarınca koşullulara değil, bir de

(78) $(p \equiv q) \supset (rp \equiv rq)$

ve

(79) $(p \equiv q) \supset (r \vee p \equiv r \vee q)$

totolojileri uyarınca karşılıklı-şart koşullulara da uygulanabilir.

(80) $(p \supset q) \equiv (\sim q \supset \sim p)$ (devirme; "contraposition" veya "transposition")

(81) $p \supset ((p \supset q) \supset q)$ (evetleme, "assertion")

(82) $((p \supset q) \supset p) \supset p$ (Peirce kanunu)

(83) $(p \supset q) \cdot (r \supset s) \supset (pr \supset qs)$ (Leibniz teoremi)

(84) $(p \supset r) \cdot (q \supset s) \cdot (p \vee q) \cdot \sim (rs) \supset (r \supset p) \cdot (s \supset q)$ (Hauber kanunu

(85) $(p_1 \supset q_1) \cdot (p_2 \supset q_2) \cdot \ldots \cdot (p_n \supset q_n) \cdot (p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \cdot \sim (q_1\, q_2) \cdot \sim (q_1\, q_3) \cdot \ldots \cdot \sim (q_1\, q_n) \cdot \sim (q_2\, q_3) \cdot \ldots \cdot \sim (q_{n-1}\, q_n) \supset ((q_1 \supset p_1) \cdot (q_2 \supset p_2) \cdot \ldots \cdot (q_n \supset p_n))$ (Hauber kanununun genelleşmiş şekli)

Bu kanunun anlamı şudur: verilen bir takım koşul-önermelerinin ön-önermeleri tam bir ayrıklığı, meydana getirir, (yani çarpanları bu ön-önermelerden ibaret olan çok-çarpanlı ayrıklık doğru ise), ard-önermeleri de ikişer iki-

şer bağdaşmaz bir durumda ise; o zaman sözü geçen koşul-önermelerinin her birinden kendi evriğini (yani ön-önerme ile ard-önermenin değiş-tokuş edilmesiyle elde edilen koşul-önermesini) çıkarmak mümkündür. ('p' ile 'q' nün bağdaşmazlığını, yani her ikisinin birlikte doğru olmaması, $\sim p \vee \sim q$, 'p|q', 'p$\supset \sim$q' veya '$\sim$(pq)' biçiminde dile getirilebilir).

i) Sadeleştirme (simplification):

(86) $pq \supset p$
(87) $pq \supset q$
(88) $p \supset p \vee q$
(89) $q \supset p \vee q$

Görüldüğü gibi, sadeleştirme kanunları birlikte-evetlemelerin kendi bileşenlerini içerdiğini; ayrıklıkların ise kendi bileşenleri tarafından içerildiğini dile getirirler.

j) Açılma ("development"):

(90) $p \equiv p \vee pq$
(91) $p \equiv p \,.\, (p \vee q)$
(92) $p \equiv pq \vee p \sim q$
(93) $p \equiv (p \vee q) \,.\, (p \vee \sim q)$

Bu totolojiler, verilen bir tam-deyimi, istenilen herhangi başka bir tam-deyimi de içine alan daha geniş bir tam-deyime dönüştürmeye yarar.

k) Genleşme (expansion):

(94) $pq \equiv (p \equiv (p \supset q))$
(95) $p \vee q \equiv (q \equiv (p \supset q))$
(96) $(p \supset q) \equiv (p \equiv pq)$
(97) $(p \supset q) \equiv (q \equiv p \vee q)$

Bu totolojiler, herhangi bir birlikte-evetlemeyi, ayrıklığı veya koşulluyu bir karşılıklı-koşulluya (yani ana-eklemi karşılıklı-koşul ekleminden ibaret olan bir tam-deyime) dönüştürmeye yarar.

l) Çeşitli tam-deyimlerin hayırlanması:

(98) $\sim(pq) \equiv \sim p \vee \sim q$ (De Morgan kanunu)
(99) $\sim(p_1 p_2 \ldots p_n) \equiv \sim p_1 \vee \sim p_2 \vee \ldots \vee \sim p_n$ »
(100) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \sim q$ »
(101) $\sim(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \equiv \sim p_1 \sim p_2 \ldots \sim p_n$ »
(102) $\sim(p \supset q) \equiv p \sim q$ (koşullunun hayırlanması)

Karşılıklı-koşullunun hayırlanması ise (38) veya (39) totolojileriyle daha önce gösterilmişti. (98) — (102) totolojileriyle (38) ve (39) totolojilerine dayanarak, herhangi bir tam-deyim, etki-alanı bir atomsal-bileşenden ibaret olmıyan hiçbir hayırlama-işaretini içine almıyan bir tam-deyime dönüştürebiliriz. Örneğin (10—7) şemasını şöyle dönüştürmek mümkündür:

$$\sim(\sim(\sim(p \vee \sim q) \cdot \sim q) \vee \sim pq)$$
$$\sim(\sim(\sim pq \sim q) \vee \sim pq)$$
$$\sim(p \vee \sim q \vee q \vee \sim pq)$$
$$\sim pq \sim q \cdot \sim(\sim pq)$$
$$\sim pq \sim q \cdot (p \vee \sim q)$$

m) Çeşitli çıkarım ilkeleri:

(103)	$(p \supset \sim p) \equiv \sim p$	(reductio ad absurdum)
(104)	$(\sim p \supset p) \equiv p$	»
(105)	$(p \supset q) \cdot (p \supset \sim q) \equiv \sim p$	»
(106)	$q \cdot (qp \supset r) \cdot (qp \supset \sim r) \supset \sim p$	»
(107)	$q \cdot (q \sim p \supset r) \cdot (q \sim p \supset \sim r) \supset p$	»

'A' gibi verilen herhangi bir önermeyi *"reductio ad absurdum"* (olmazlığa geri götürme) yoluyla *kanıtlamak,* '$\sim$A' nın bir çelişmeye yol açtığını göstermek demektir. '$\sim$A' bir çelişmeye yol açarsa, '$\sim$A' yanlıştır. Dolayısiyle (üçüncü halin olmazlığı ilkesi gereğince) 'A' doğrudur. Şu halde 'A' kanıtlanmıştır.

İmdi, böyle bir kanıtlama işleminde ortaya çıkan çelişik önermeler 'C' ve '$\sim$C' olsun. Bu çelişik önermeleri 'A' dan türetmek için başvurulan (önceden kanıtlanmış) önerme veya önermelerin birlikte-evetlenmesi de 'B' olsun. O zaman, 'A' nın kanıtı şöyle bir çıkarım şeklinde olur:

$$B$$
$$B \sim A \supset C$$
$$B \sim A \supset \sim C$$
$$\therefore A$$

Böyle bir çıkarımın geçerliliği, (107) önerme-şemasının bir totoloji olmasından anlaşılır.[5]

Öte yandan, 'A' gibi bir önermenin *hayırlanmasını* (yani '$\sim$A' yı) *"reductio ad absurdum'*, yoluyla *kanıtlamak,* 'A' önermesinin kendisinin bir çelişmeye yol açtığını göstermek demektir. 'A' dan türetilen çelişik önermeler 'C' ve '$\sim$C', bunları türetmek için başvurulan (önceden kanıtlanmış) önerme veya önermelerin birlikte-evetlenmesi 'B' olsun. O zaman çıkarım

$$\begin{array}{l} B \\ BA \supset C \\ BA \supset \sim C \\ \therefore \sim A \end{array}$$

biçiminde olur. Bu çıkarımın geçerliliği de (106) nın bir totoloji olmasından anlaşılır.

(108) $(p \supset q) \cdot p \supset q$ (Modus ponens, "modus ponendo ponens")

Bu önerme-şemasının bir totoloji olması, İstoacıların

$$\begin{array}{l} p \supset q \\ p \\ \therefore q \end{array}$$

biçimindeki *"hipotetik sillojizm"*inin geçerliliğini belgeler. Bu sillojizmin klâsik örneği şudur:

Güneş doğmuşsa, etraf aydınlıktır
Güneş doğmuştur
O halde etraf aydınlıktır.

çıkarımıdır.

İstoacıların öteki "hipotetik sillojizm"i ise

$$\begin{array}{l} p \supset q \\ \sim q \\ \therefore \sim p \end{array}$$

biçimindedir. Bunun karşılığı olan totoloji:

(109) $(p \supset q) \cdot \sim q \supset \sim p$ (modus tollens, "modus tollendo tollens")

dir.

İstoacılar, sözü geçen hipotetik sillojizmlerin yanı sıra *"disjonktif sillojizm"*ler de ortaya koymuşlardı. Bunlardan biri,

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \\ \therefore q \end{array}$$

çıkarım-şeması veya

(110) $(p \vee q) \cdot \sim p \supset q$ (modus tollendo ponens)

totolojisiyle; öbürü de

$$\sim p \vee \sim q$$
$$p \qquad \ldots$$
$$\therefore \sim q$$

çıkarım-şeması veya

(111) $(\sim p \vee \sim q) \cdot p \supset \sim q$ (modus ponendo tollens)

totolojisiyle dile getirilebilir.

Son olarak *"ikilem"* (dilemma) denilen çıkarım biçimlerini gözden geçirelim. Bir ikilem, öncülleri *iki* koşul-önermesiyle bir ayrıklıktan ibaret bir çıkarımdır. Öncül olarak iki koşul-önermesi alınacak yerde *n tane* koşul önerme si kullanmak suretiyle "üçlem"ler, "dörtlem"ler,..., ve genel olarak "n-lem" ler (polyemmas) meydana getirmek mümkündür. İkilemleri (ve genel olarak "n-lem"leri) sonuçlarının olumlu veya olumsuz olmasına bakarak *"yapıcı"* (constructive) ve *"yıkıcı"* (destructive) olmak üzere iki öbeğe ayırıyoruz. Ayrıca, sonucun bir tek önerme veya birçok önermenin ayrıklığından ibaret olmasına bakarak, ikilemler "basit" ve "karmaşık" diye iki öbeğe ayrılabilmektedir. Böylece bütün ikilemleri (ve "n-lem" leri) *"basit yapıcı"*, *"basit yıkıcı"*, *"karmaşık yapıcı"* ve *"karmaşık yıkıcı"* olmak üzere dört öbeğe ayırıyoruz:

Basit yapıcı ikilem:

$$A \supset C$$
$$B \supset C$$
$$A \vee B$$
$$\therefore C$$

böyle bir çıkarma geçerliliği,

(112) $(p \supset r) \cdot (q \supset r) \cdot (p \vee q) \supset r$

totolojisine dayanır[6].

Basit yapıcı n-lem:

$$A_1 \supset B$$
$$A_2 \supset B$$
$$\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots$$
$$A_n \supset B$$
$$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$$
$$\therefore B$$

Bu çıkarımın geçerliliği,

(113) $(p_1 \supset q) \cdot (p_2 \supset q) \cdot \ldots \cdot (p_n \supset q) \cdot (p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \supset q$

totolojisine dayanır.

Basit yıkıcı ikilem:

$$A \supset B$$
$$A \supset C$$
$$\sim B \vee \sim C$$
$$\therefore \sim A$$

Bu çıkarımın geçerliliği,

(114 $(p \supset q) \cdot (p \supset r) \cdot (\sim q \vee \sim r) \supset \sim p$

totolojisine dayanır.

Basit yıkıcı n-lem:

$$A \supset B_1$$
$$A \supset B_2$$
$$\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots$$
$$A \supset B_n$$
$$\sim B_1 \vee \sim B_2 \vee \ldots \vee \sim B_n$$
$$\therefore \sim A$$

Bu çıkarımın geçerliliği,

(115) $(p \supset q_1) \cdot (p \supset q_2) \cdot \ldots \cdot (p \supset q_n) \cdot (\sim q_1 \vee \sim q_2 \vee \ldots \vee \sim q_n) \supset \sim p$

totolojisine dayanır.

Karmaşık yapıcı ikilem:

$$A \supset B$$
$$C \supset D$$
$$A \vee C$$
$$\therefore B \vee D$$

Bu çıkarımın geçerliliği,

(116) $(p \supset q) \cdot (r \supset s) \cdot (p \vee r) \supset (q \vee s)$

totolojisine dayanır.

Karmaşık yapıcı n-lem:

$$A_1 \supset B_1$$
$$A_2 \supset B_2$$
$$\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots$$
$$A_n \supset B_n$$
$$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$$
$$\therefore B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_n$$

Bu çıkarımın geçerliliği,

(117) $(p_1 \supset q_1) \cdot \ldots \cdot (p_n \supset q_n) \cdot (p_1 \vee \ldots \vee p_n) \supset (q_1 \vee q^2 \vee \ldots q_n)$

totolojisine dayanır.

Karmaşık yıkıcı ikilem:

$$A \supset B$$
$$C \supset D$$
$$\sim B \vee \sim D$$
$$\therefore \sim A \vee \sim C$$

Bu çıkarımın geçerliliği,

(118) $(p \supset q) \cdot (r \supset s) \cdot (\sim q \vee \sim s) \supset (\sim p \vee \sim r)$

totolojisine dayanır.

Karmaşık yıkıcı n-lem:

$$A_1 \supset B_1$$
$$A_2 \supset B_2$$
$$\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots$$
$$A_n \supset B_n$$
$$\sim B_1 \vee \sim B_2 \vee \ldots \vee \sim B$$
$$\therefore \sim A_1 \vee \sim A_2 \vee \ldots \vee \sim A_n$$

Bu çıkarımın geçerliliği,

$$(p_1 \supset q_1) \cdot \ldots \cdot (p_n \supset q_n) \cdot (\sim q_1 \vee \ldots \vee \sim q_n) \supset (\sim p_1 \vee \ldots \vee \sim p_n)$$

totolojisine dayanır.

n) Önerme-eklemlerinin indirgenmesi:

'$\sim$', '$\cdot$', '$\vee$', '$\supset$' ve '$\equiv$' eklemlerini, bunlardan sadece ikisi türünden tanımlamak mümkündür. Bu amaçla seçilecek iki eklemden birinin hep '$\sim$' olması gerekir. Öbürü ise '$\cdot$', '$\vee$' veya '$\supset$' olabildii halde, '$\equiv$' olamaz. ('$\cdot$' ekleminin sadece '$\sim$' ile '$\equiv$' eklemleri türünden tanımlanamıyacağı kanıtlanmıştır).[7] Buna göre, sözü geçen beş temel eklemin ya '$\sim$' ve '$\cdot$' eklemleri, ya '$\sim$' ve '$\vee$' eklemleri, ya da '$\sim$' ve '$\supset$' eklemlerine indirgenebileceğini söyleyebiliriz. Önerme-eklemlerini '$\sim$' ve '$\cdot$' ye indirgeyen sisteme (böyle bir sistemi ilk kullanan mantıkçıların adıyla) *"Brentano sistemi"*; '$\sim$' ve '$\vee$' ye indirgeyen sisteme *"Whitehead-Russell, Hilbert-Ackermann sistemi"*; '$\sim$' ve '$\supset$' ye indirgeyen sisteme de *"Frege-Lukasiewicz sistemi"* diyeceğiz.

Brentano sistemi:

(119) $p \vee q \equiv \sim(\sim p \sim q)$

(120) $(p \supset q) \equiv \sim(p \sim q)$

totolojilerine dayanarak, 'v' ile '$\supset$' eklemleri bu sistemde şöyle tanımlanır:

$$p \vee q \quad =_{Dk} \quad \sim(\sim p \sim q)$$

$$p \supset q \quad =_{Dk} \quad \sim(p \sim q)$$

'$\supset$' eklemi böylece tanımlandıktan sonra, '$\equiv$' eklemi,

(121) $(p \equiv q) \equiv (p \supset q) \cdot (q \supset p)$

totolojisine dayanarak,

$$p \equiv q \quad =_{Dk} \quad (p \supset q) \cdot (q \supset p)$$

biçiminde tanımlanır.[4]

Whitehead-Russell, Hilbert-Ackermann sistemi:

(122) $pq \equiv \sim(\sim p \vee \sim q)$

(123) $(p \supset q) \equiv \sim p \vee q$

totolojilerine dayanarak, '$\cdot$' ve '$\supset$' eklemleri bu sistemde

$$pq \quad =_{Dk} \quad \sim(\sim p \vee \sim q)$$

ve

$$p \supset q \quad =_{Dk} \quad \sim p \vee q$$

biçiminde tanımlanır. '$\equiv$' ise Brentano sisteminde olduğu gibi tanımlanır.

Frege-Lukasiewicz sistemi:

(124) $pq \equiv \sim(p \supset \sim q)$

(125) $p \vee q \equiv (\sim p \supset q)$

totolojilerine dayanarak, '$\cdot$' ve 'v' eklemleri bu sistemde

$$pq \quad =_{Dk} \quad \sim(p \supset \sim q)$$

ve

$$p \vee q =_{Dk} \quad \sim p \supset q$$

biçiminde tanımlanır. '$\equiv$' eklemi ilk iki sistemde olduğu gibi tanımlanır.

Ayrıca ,sözü geçen beş eklemin tümünü de sadece '$|$'*bağdaşmazlık eklemi* türünden, veya sadece '$\downarrow$'*birlikte-hayırlama eklemi* türünden tanımlamak mümkündür. (Bütün önerme-eklemlerini başka bir tek 2-li eklem türünden tanımlamak imkânsızdır).[9]

(126) $\sim p \equiv p|p$
(127) $pq \equiv (p|q) \mid (p|q)$
(128) $p \vee q \equiv (p|p) \mid (q|q)$
(129) $(p \supset q) \equiv p|(q|q)$
(130) $(p \equiv q) \equiv (p|q) \mid ((p|p) \mid (q|q))$

totolojilerine dayanark, '$\sim$', ' $\cdot$ ', 'v', '$\supset$' ve '$\equiv$' eklemleri '$|$' türünden şöyle tanımlanabilir:

$$\sim p \underset{Dk}{=} p|p$$
$$pq \underset{Dk}{=} (p|q) \mid (p|q)$$
$$p \vee q \underset{Dk}{=} (p|p) \mid (q|q)$$
$$p \supset q \underset{Dk}{=} p \mid (q|q)$$
$$p \equiv q \underset{Dk}{=} (p|q) \mid ((p|p) \mid (q|q))$$

Öte yandan,

(131) $\sim p \equiv p \downarrow p$
(132) $pq \equiv (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$
(133) $p \vee q \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$

totolojilerine dayanarak, '$\sim$', ' $\cdot$ ' ve 'v' eklemlerini '$\downarrow$' türünden şöyle tanımlıyabiliriz:

$$\sim p \underset{Dk}{=} p \downarrow p$$
$$pq \underset{Dk}{=} (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$$
$$p \vee q \underset{Dk}{=} (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$$

'$\supset$' ve '$\equiv$' eklemleri ise '$\sim$' ve ' $\cdot$ ' (veya '$\sim$' ve 'v') türünden tanımlanmak suretiyle '$\downarrow$' eklemine indirgenebilirler.

'$\downarrow$' ekleminin önemli iki özelliği:

(134) $pq \equiv \sim p \downarrow \sim q$

ile

(135) $p \vee q \equiv \sim(p \downarrow q)$

totolojileriyle dile gelmektedir.

Öte yandan, gerek '$|$' gerek '$\downarrow$' eklemini aşağıdaki totolojilere dayanarak kolaylıkla '$\sim$' ile ' $\cdot$ ' veya '$\sim$' ile 'v', ya da '$\sim$' ile '$\supset$' eklemlerine geri götürebiliriz.

(136) $p|q \equiv \sim(pq)$
(137) $p|q \equiv \sim p \vee \sim q$
(138) $p|q \equiv (p \supset \sim q)$

(139) $p \downarrow q \eqq \sim p \sim q$

(140) $p \downarrow q \equiv \sim (p \vee q)$

(141) $p \downarrow q \equiv \sim (\sim p \supset q)$

'$\eqq$' (karşılıklı-şart) eklemiyle '$\nVdash$' (bağdaşmaz-ayrıklık) eklemini aşağıdaki totolojilere dayanarak '$\sim$', '$\cdot$' ve '$\vee$' eklemleri türünden tanımlamak mümkündür.

(142) $(p \eqq q) \equiv (pq \vee \sim p \sim q)$

(143) $(p \eqq q) \equiv (\sim p \vee q) \cdot (p \vee \sim q)$

(144) $(p \nVdash q) \equiv \sim (p \eqq q)$

(145) $(p \nVdash q) \equiv (\sim p \eqq q)$

(146) $(p \nVdash q) \eqq (p \equiv \sim q)$

(147) $(p \nVdash q) \equiv (p \sim q \vee \sim pq)$

(148) $(p \nVdash q) \eqq (p \vee q) \cdot (\sim p \vee \sim q)$

Bölüm IV.

NORMAL-ŞEMALAR VE İKİLİLİK

§ 13. Normal-Şemalar.

Verilen herhangi bir önerme-şemasının doğruluk çizelgesini göz önüne alalım. Örnek olarak, doğruluk-çizelgesi

p	q	r	f(p,q,r)
D	D	D	D
D	D	Y	Y
D	Y	D	D
D	Y	Y	D
Y	D	D	Y
Y	D	Y	D
Y	Y	D	Y
Y	Y	Y	Y

biçimnde olan 'f(p,q,r)' gibi bir şemayı düşünelim. Görüldüğü gibi 'f(p,q,r)' şeması ancank ve ancak 'p' doğru, 'q' doğru, 'r' doğru veya 'p' doğru, 'q' yanlış, 'r' doğru; veya 'p' doğru, 'q' yanlış, 'r' yanlış; veya 'p' yanlış, 'q' doğru, 'r' yanlış ise; doğru olur. Başka bir deyimle, 'f(p,q,r)' şeması ancak ve ancak 'p', 'q', 'r'; veya 'p' '$\sim$q', 'r'; veya 'p', '$\sim$q', '$\sim$r'; veya '$\sim$p', 'q', '$\sim$r' doğru ise; doğrudur. Bu durumu

'f(p,q,r)' $\leftrightarrow$ 'pqr v p$\sim$qr v p$\sim$q$\sim$r v $\sim$pq$\sim$r'

eşdeğerliğiyle dile getirebiliriz. Bu eşdeğerliğin sağ kısmı olan

(1) pqr v p$\sim$qr v p$\sim$q$\sim$r v $\sim$pq$\sim$r

şeması bir "çok-çarpanlı ayrıklık"tır. Bu ayrıklığın her çarpanı ise bir "çok-çarpanlı birlikte-evetleme" durumundadır. Bu birlikte-evetlemenin de her

çarpanının bir temsilci-harf veya bir temsilci-harfin hayırlanması olduğunu görüyoruz. Örneğin, (1) ayrıklığının ikinci çarpanı olan 'p∼qr' şemasını göz önüne alalım. Bu şema bir "çok-çarpanlı birlikte-evetleme" olup birinci çarpanı 'p' temsilci-harfinden, ikinci çarpanı 'q' temsilci-harfinin hayırlanmasından, üçüncü çarpanı da 'r' temsilci-harfinden ibarettir.

İmdi, 'p', 'q', 'r', ... , 'p_1', 'q_1', 'r_1', ... gibi herhangi bir temsilci harfe bir *"atomsal-şema"* şema; herhangi bir atomsal-şemaya veya böyle bir şemanın hayırlanmasına bir *"yalın-şema"* diyelim. Örneğin, 'p' hem bir atomsal-şema hem de bir yalın-şemadır. '∼p' ise bir yalın-şema olmakla birlikte bir atomsal-şema değildir. (Görüldüğü gibi her atomsal-şema aynı zamanda bir yalın-şema olduğu halde, her yalın-şema bir atomsal-şema değildir.)

Buna göre, sözü geçen 'p∼qr' şemasının, her çarpanı bir "yalın-şema" olan bir "çok-çarpanlı birlikte-evetleme" olduğunu söyleyebiliriz. Öte yandan böyle bir birlikte-evetlemenin bütün çarpanlarının birbirinden *farklı* olduğunu, başka bir deyimle, söz konusu şemada geçen her temsilci-harfin geçiş sayısının hep "bir"e eşit olduğunu görüyoruz. İşte, herhangi bir *"yalın-şema"*ya veya, her çarpanı bir yalın-şema olup içine aldığı her temsilci-harfin geçiş sayısı "1"e eşit olan herhangi bir çok-çarpanlı birlikte-evetlemeye bir *"temel-şema"* (Fundamental schema[1]) diyeceğiz. Örneğin: 'p∼qr' şeması bir "temel-şema" olduğu halde, 'p∼q∼pr' gibi bir şema, 'p' harfinin geçiş sayısının "2"ye eşit olmasından dolayı bir temel-şema ***değildir***. Genel olarak, her "atomsal-şema" veya her "yalın-şema" bir temel-şema olduğu halde, her temel-şemanın bir atomsal şema veya bir yalın-şema olmadığı meydandadır. Örneğin, 'p' aotmsal-şemasıyla '∼p' yalın-şeması birer temel-şema" durumundadır. Öte yandan bir temel-şema olan 'p∼qr' ifadesi ne bir atomsal-şema ne de bir yalın-şemadır.

Buna göre, (1) şemasının, her çarpanı bir "temel-şema"dan ibaret olan bir "çok-çarpanlı ayrıklık" olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca, (1) şemasının bütün çarpanlarının birbirinden farklı olduğunu, başka bir deyimle, bu çarpanların her birinin geçiş sayısının "1"e eşit olduğunu görüyoruz. İşte, herhangi bir *"temel-şema"* ya veya, her çarpanı, geçiş sayısı "1"e eşit olan bir temel-şema olan herhangi bir çok-çarpanlı ayrıklığa bir *"n o r m a l - ş e m a"* denir. Buna göre, her "atomsal-şema"nın, her "yalın-şema"nın ve her "temel-şema"nın bir "normal-şema" olduğunu, ama her normal-şemanın bir temel-şema (veya bir yalın-şema, ya da bir atomsal-şema) olmadığını söyleyebiliriz. Örneğin, sözü geçen (1) şeması bir normal-şema olmakla birlikte bir temel-şema değildir.

İmdi, herhangi bir normal-şema şu dört özelliği taşır:

(a) Bir normal-şemanın içinde *ne "koşul-eklemi" ne de "karşılıklı-koşul eklemi"* geçer.

(b) Bir normal-şemanın içinde *"hayırlama-eklemi"* ya hiç geçmez, ya da (geçmesi halinde) her geçişinin etki-alanı ancak birer *atomsal-şemadan* ibaret olur.

(c) Bir normal-şemanın içinde *"birlikte-evetleme eklemi"* ya hiç geçmez, ya da (geçmesi halinde) her geçişinin etki-alanı ancak ikişer *yalın-şemadan* ibaret olur.

(d) Bir normal-şemanın bir çarpanında geçen her temsilci-harfin bu çarpan içindeki geçiş sayısı "1"e eşittir.

Öte yandan, (1) şemasının her çarpanının aynı temsilci-harflerden kurulu olduğunu görüyoruz. Ancak, bu biçimde olmayan normal-şemaların da (örneğin: 'p v ~pq v p~qr') bulunduğu meydandadır. Bu bakımdan, (1) gibi, sözü geçen niteliği taşıyan şemalar, özel bir çeşitten normal-şemalar durumundadır. İşte bu çeşit normal-şemalara *"tam normal-şemalar"* (full normal forms) denir. Buna göre, her "tam normal-şema"nın sözü geçen (a) — (d) özelliklerinden başka, bir de şu beşinci özelliği taşıdığını söyleyebiliriz:

(e) Bir tam normal-şemanın içinde geçen her temsilci-harf, bu normal-şemanın her çarpanında da geçer.

(d) ve (e) özelliklerini birleştirerek, tam normal-şemaların şöyle bir özelliği taşıdığını söyleyebiliriz:

(f) Bir tam normal-şemanın içinde geçen her temsilci-harfin, bu normal-şemanın her çarpanındaki geçiş sayısı "1"e eşittir.

İmdi, herhangi bir salt-şemayı *"tutarlı"* olması şartiyle, bir *"normal-şema"*ya, hattâ bir *"tam normal-şema"*ya dönüştürebiliriz. Bunun için verilen şemanın doğruluk-çizelgesini bilmemiz yeter. Ancak, şemanın *"tutarsız"* olması halinde durum değişir. Nitekim, tutarsız bir şemanın doğruluk-çizelgesinin sağındaki sütun hep 'Y' harflerinden kurulu olduğundan, sözü geçen 'f (p,q,r)' şemasını bir normal-şema halinde dönüştürmek için başvurduğumuz metodu kullanmak imkânsız olur. Ancak, içinde 'p_1', 'p_2',..., 'p_n' gibi n tane farklı temsilci-harfin geçtiği herhangi bir tutarsız şemayı

(2) $\quad p_1 \sim p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$

gibi bir *"normalımsı"* şemaya çevirmek mümkündür. (2) şeması tutarsız olduğundan, söz konusu şemamızla eşdeğerdir. Öte yandan (2) şeması (d) veya (f) özelliklerini taşımamakla birlikte, (a), (b), (c) ve (e) özelliklerini taşıması bakımından "normalımsı" sayılabilir.

Böylece, doğruluk-çizelgesi biilnen herhangi bir salt-şemayı, ya (tutarlı olması halinde) bir normal-şemaya (hattâ bir "tam normal-şema"ya), ya da (tutarsız olması halinde) (2) gibi bir "normalımsı" şemaya dönüştürebildiğimizi görüyoruz. "Tutarsız" bir şemanın hiç bir şekilde bir "normal-şema"ya dönüştürülemiyeceğini kanıtlamak ta mümkündür. Nitekim, *"her normal-şema tutarlıdır"*. Dolayısiyle tutarsız bir şema hiç bir normal-şema ile eşdeğer olamaz. Herhangi bir normal-şemanın "tutarlı" olduğunu da şöyle kanıtlıyabiliriz:

Herhangi bir "temel-şema"yı göz önüne alalım. Bu şemanın içinde geçen her temsilci-harfe, harfin şema içinde hayırlanmamış veya hayırlanmış olduğuna bakarak, 'D' veya 'Y' değerini verelim. Her harfin geçiş sayısı "1"e eşit olduğundan böyle bir işlemin yapılması her zaman mümkündür. İmdi, böyle bir işlemin sonucunda söz konusu temel-şemanın her çarpanının doğru olduğu, dolayısiyle temel-şemanın kendisinin de doğru olduğu meydandadır. Şu halde *her temel-şemanın tutarlı olduğu anlaşılır*. Örneğin: 'p ~ qr' gibi bir temel-şemanın, 'p' ye 'D', 'q' ye 'Y' ve 'r' ye 'D' değerini vermek suretiyle 'D' değerini aldığı, dolayısiyle "tutarlı" olduğu görülür. Oysa her normal-şemaya bir temel-şemadan, ya da her çarpanı bir temel-şema olan bir "çok-çarpanlı ayrıklık"tan ibarettir.

Birinci halde normal-şemanın tutarlı olduğu meydandadır. İkinci hale gelince: çarpanlardan birinin (temsilci-harflere verilen bazı değerler için) 'D' değerini alması, ayrıklığın tümünün yani normal şemanın kendisinin "D" değerini almasına yol açtığından, söz konusu normal-şemanın tutarlı olduğunu görüyoruz. Şu halde *her normal-şema tutarlıdır*. (İ.K.)[3]

İmdi, (doğruluk-fonksiyonu durumunda olan) 'f' gibi herhangi bir n-li önerme-eklemi, '$f(p_1,p_2,\ldots,p_n)$' gibi bir salt-şemanın doğruluk-çizelgesi yardımiyle belirlenir. Oysa, '$f(p_1,p_2,\ldots,p_n)$' biçimindeki bir şemayı (karşılığı olan doğruluk-çizelgesine dayanarak) ya bir "normal-şema'ya ya da (2) türünden "normalımsı" bir şemaya dönüştürmek mümkündür. Normal-şemaların içinde yalnız "hayırlama", "birlikte-evetleme" ve "ayrıklık" eklemleri; sözü geçen "normalımsı" şemalarda da yalnız "hayırlama" ve birlikte-evetleme" eklemleri geçebildiğinden, *herhangi bir n-li önerme-ekleminin* salt *"hayırlama", "birlikte-evetleme"* ve *"ayrıklık"* eklemleri türünden *tanımlanabildiği* de kanıtlanmış olur.

Öte yandan, *"hayırlama", "birlikte-evetleme", "ayrıklık" "koşul"* ve *"karşılıklı-koşul"* eklemlerinden kurulu '$f(p_1,p_2,\ldots,p_n)$' biçiminde herhangi bir salt-şemayı, karşılığı olan doğruluk-çizelgesine başvurmaksızın da ya bir "normal-şema"ya, ya da (2) gibi "normalımsı" bir şema haline dönüştürmenin mümkün olduğunu gösterebiliriz. Örneğin:

(3) $\sim((\sim p \vee p \supset \sim q \vee r) \supset \sim(r \equiv \sim(p \vee \sim q)))$

gibi karmaşık bir önerme-şemasını göz önüne alalım:

İlk önce, (3) şemasını, hayırlama-ekleminin her geçişinin etki-alanı bir tek temsilci-harften ibaret olan bir şemaya dönüştürebiliriz. Bu amaçla '$\sim(p \supset q)$' nün '$p \sim q$' ile eşdeğer olmasına dayanarak, (3) şemasını:

$$(\sim p \vee p \supset \sim q \vee r). \sim\sim(r \equiv \sim(p \vee \sim q))$$

biçimine; bu şemayı da, çift-hayırlama ilkesi gereği:

$$(\sim p \vee p \supset \sim q \vee r) \cdot (r \equiv \sim(p \vee \sim q))$$

biçimine; bu son şemayı da, De Morgan kanunuyle, çift-hayırlama ilkesi gereği:

(4) $(\sim p \vee p \supset \sim q \vee r) \cdot (r \equiv \sim pq)$

şemasına dönüştürebiliriz.

(4) şemasında '$\supset$' ile '$\equiv$' eklemleri geçtiğinden, bu iki eklemi ortadan kaldırmak gerekir. Bunun için de bir yandan, '$p \supset q$' ile '$\sim p \vee q$' arasındaki eşdeğerliğe, öbür yandan da '$p \equiv q$' ile '$pq \vee \sim p \sim q$' arasındaki eşdeğerliğe dayanarak, (4) şemasını:

$$(\sim(\sim p \vee p) \vee \sim q \vee r) \cdot (r \sim pq \vee \sim r \cdot \sim(\sim pq))$$

şemasına dönüştürebiliriz. Bu şemayı ise, De Morgan ve çift-hayırlama ilkeleri gereğince:

$$(p \sim p \vee \sim q \vee r) \cdot (r \sim pq \vee \sim r \cdot (p \vee \sim q))$$

biçimine dönüştürürüz. '$\cdot$' ekleminin '$\vee$' ye göre dağıtıcılığından faydalanarak, bu son şemayı ilk önce

(5) $(p \sim p \vee \sim q \vee r) \cdot (r \sim pq \vee \sim r\, p \vee \sim r \sim q)$

biçimine dönüştürürüz.

İmdi (5) şeması

(6) $(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n) \cdot (B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_m)$

biçimindedir. Oysa (6) deyimini '$\cdot$' ekleminin '$\vee$' ye göre dağıtıcılığı uyarınca aşağıdaki şekilde dönüştürmek mümkündür:

'$B_1 \vee B_2 \vee \ldots \vee B_m)$' deyimini '$C$' ile kısaltalım. O zaman (6) deyimi

$$(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n) \cdot C$$

biçimini alır. Bu son deyim ise,

$$A_1C \vee A_2C \vee \ldots \vee A_nC$$

ye, yani:

$$A_1 \cdot (B_1 \vee \ldots \vee B_m) \vee A_2 \cdot (B_1 \vee \ldots \vee B_m) \vee \ldots \vee A_n \cdot (B_1 \vee \ldots \vee B_m)$$

deyimine dolayısiyle de:

$$(A_1B_1 \vee \ldots \vee A_1B_m) \vee (A_2B_1 \vee \ldots \vee A_2B_m) \vee \ldots \vee (A_nB_1 \ldots \vee A_nB_m)$$

yani

$$(7) \quad A_1B_1 \vee \ldots \vee A_1B_m \vee A_2B_1 \vee \ldots A_2B_m \vee \ldots \vee A_nB_1 \vee \ldots \vee A_nB_m$$

deyimine dönüştürülebilir.

Görüldüğü gibi, (6) ile (7) tam-deyimlerinin eşdeğerliği, cebirdeki

$$(8) \quad (x_1 + x_2 + \ldots x_n) \cdot (y_1 + y_2 + \ldots + y_m) = x_1y_1 + \ldots + x_1y_m + x_2y_1 + \ldots x_2y_m + \ldots + x_ny_1 + x_ny_m$$

özdeşliğine benzemektedir. Şu halde ' · ' ile 'v' eklemlerinin, aritmetik ve cebirdeki toplama ve çarpma işlemlerine benziyecek bir şekilde kullanabileceğimizi görüyoruz.

İşte, "(6) ↔ (7)" eşdeğerliğinden faydalanarak, sözü geçen (5) şemasını *"parantezsiz"* bir biçime dönüştürmek mümkündür. Ancak bu işlemi yapmadan, (5) şemasının birinci çarpanında 'p∼p' deyiminin (bir "çok-çarpanlı ayrıklığın" bileşeni olarak) geçtiğini göz önünde tutarak, bu çarpanı (yani 'p∼p v ∼q v r' şemasını) *"sadeleştirme"* yoluyla '∼q v r' biçimine dönüştürmek faydalıdır. 'p∼p v ∼q v r' şeması, 'B · ∼B v A' biçimindedir. Oysa, böyle bir deyim 'A' ile eşdeğerdir. Şu halde, 'p∼p v ∼q v r' şemasını gerçekten de '∼q v r' biçimine dönüştürebileceğimizi görüyoruz. Böylece (5) şeması

$$(9) \quad (\sim q \vee r) \cdot (r \sim pq \vee \sim rp \vee \sim r \sim q)$$

biçimine girer. (9) şemasını, sözü geçen "(6) ↔ (7)" eşdeğerliği uyarınca:

$$(10) \quad \sim qr \sim pq \vee \sim q \sim rp \vee \sim q \sim r \sim q \vee rr \sim pq \vee r \sim rp \vee r \sim r \sim q$$

biçimine dönüştürebiliriz. Birlikte-evetlemenin denkgüçlülüğüne, çevirgeçliğine ve ortaklaştırıcılığına dayanarak, bir de her çarpanda geçen temsilci-harflerini alfabe sırasına göre yeniden düzenliyerek, (10) şemasını:

$$(11) \quad \sim pq \sim qr \vee p \sim q \sim r \vee \sim q \sim r \vee \sim pqr \vee pr \sim r \vee qr \sim r$$

biçimine dönüştürmek mümkündür.

İmdi, (11) formülünün birinci, beşinci ve altıncı çarpanında belli bir temsilci-harfle birlikte bunun hayırlanmasının geçtiğini görüyoruz. Birinci çarpanda geçen '$q \sim q$' deyiminden dolayı bu çarpanın tümünü ortadan kaldırarak, (11) şemasını

$$p \sim q \sim r \vee \sim q \sim r \vee \sim pqr \vee pr \sim r \vee qr \sim r$$

biçimine dönüştürebiliriz. Bu son deyimi de, adım adım, aynı işlemi uygulayarak, önünde sonunda:

(12) $$p \sim q \sim r \vee \sim q \sim r \vee \sim pqr$$

şemasına dönüştürürüz.

İşte (12) şeması bir "normal-şema" durumundadır. Böylece (3) gibi bir şemayı (bu şemanın doğruluk-çizelgesine başvurmaksızın) bir "normal-şema" haline dönüştürmenin mümkün olduğunu görüyoruz.[4] Ancak, (12) şemasının "normal" olmakla birlikte "tam" olmadığını göz önünde tutarak, bu son metotla edle edilen "normal-şemalar"ın (doğruluk-çizelgelerine dayanarak elde edilen normal-şemaların tersine) genel olarak *"tam" olmadıklarını* söyleyebiliriz. Ancak, verilen *herhangi bir normal-şemayı kolaylıkla bir "tam normal-şema" haline dönüştürebildiğini* göstereceğimizden, bu durum söz konusu metod için bir sakınca değildir.

Örneğin, (12) normal-şemasını bir "tam normal-şema" haline dönüştürmeye çalışalım. Görüldüğü gibi, (12) şemasında geçen temsilci harfler 'p', 'q', 'r' harflerinden ibarettir. Her üç harf (bir ve yalnız bir kez) bu şemanın birinci ve üçüncü çarpanında geçtikleri halde, '$\sim q \sim r$' den ibaret olan ikinci çarpanda söz konusu harferden birinin ('p' harfinin) geçmediğini görüyoruz. Şu halde, (12) şemasını bir "tam normal-şema" haline getirmek için, bu şemanın ikinci çarpanının biçimini değiştirmek gerekir. İmdi, söz konusu çarpanla, '$p \vee \sim p$', şemasının birlikte-evetlemesini, yani '$\sim q \sim r. (p \vee \sim p)$' şemasını göz önüne alalım. Bu şema '$\sim q \sim r$' ile eşdeğerdir. Şu halde, '$\sim q \sim r$' çarpanını '$\sim q \sim r.(p \vee \sim p)$' biçimine, dolayısiyle de (bu son şema ile eşdeğer olan) '$\sim q \sim rp \vee \sim q \sim r \sim p$' şemasına veya aynı anlama gelen '$p \sim q \sim r \vee \sim p \sim q \sim r$' şemasına dönüştürmek mümkündür. Böylece (12) şemasının tümünü

$$p \sim q \sim r \vee p \sim q \sim r \vee \sim p \sim q \sim r \vee \sim pqr$$

biçimine dönüştürebiliyoruz. Ancak bu son şemanın ilk iki çarpanı da aynı biçimde ('$p \sim q \sim r$') olduğundan, ayrıklığın denkgüçlülüğüne dayanarak söz konusu şemayı:

$$p\sim q\sim r \vee \sim p\sim q\sim r \vee \sim pqr$$

veya

(13) $$p\sim q\sim r \vee \sim pqr \vee \sim p\sim q\sim r$$

biçimine dönüştürebiliriz. Oysa, (13) şeması bir "tam normal-şema" durumundadır. Böylece, "tam" olmıyan (12) normal-şemasını "tam" bir biçime dönüştürmenin mümkün olduğunu görüyoruz.

Genel olarak, "tam" olmıyan herhangi bir normal-şemayı "tam" bir hale koymak için, söz konusu normal-şemanın *"eksikli"* çarpanlarını (yani şemada geçen temsilci-harflerden bazılarını içine almıyan çarpanlarını) *"eksiksiz"* çarpanlara şöyle çevirириz: 'A' verilen bir normal-şemanın eksikli bir çarpanı olsun. 'A' çarpanında "eksik" olan (yani söz konusu normal-şemanın bazı başka çarpanlarında geçtiği halde 'A' çarpanında geçmiyen) temsilci-harfler 'q_1', 'q_2', ..., 'q_m' olsun. O zaman 'A' çarpanını ilk önce

(14) $$A.(q_1 \vee \sim q_1) \cdot (q_2 \vee \sim q_2) \cdot \ldots \cdot (q_m \vee \sim q_m)$$

biçimine dönüştürebiliriz. Nitekim (14) 'A' ile eşdeğerdir. (14) şeması ise

(15) $$Aq_1q_2 \ldots q_m \vee Aq_1\sim q_2 \ldots q_m \vee \ldots \vee A\sim q_1\sim q_2\ldots\sim q_m$$

biçimine dönüştürülebilir. (15) şemasının her çarpanı sözü geçen normal şemanın "eksiksiz" birer çarpanı sayılabilir. Böylece, bu normal-şemanın 'A' çarpanı yerine (15) şemasını koymakla, normal-şemamızın (kendisiyle eşdeğer olan) bir "tam normal-şema" haline dönüştürülebildiğini görüyoruz (İ.K.)

Örneğin: '$p\sim q \vee q\sim r \vee \sim p\sim r$' gibi (tam olmıyan) bir normal-şemayı "tam" bir hale dönüştürmeye çalışalım. Bu şemanın içinde geçen temsilci-harfler 'p', 'q' ve 'r' harflerinden ibarettir. Şu halde, şemanın üç çarpanlarından her birinin de "eksikli" olduğunu anlıyoruz.

Bu çarpanların her birine de sözü geçen işlemi uygulamak gerekecektir. Birinci çarpanda, yani '$p\sim q$' deyiminde eksik olan temsilci-harf 'r' olduğuna göre, '$p\sim q$' yü ilk önce '$p\sim q\,.\,(r \vee \sim r)$' sonra da '$p\sim qr \vee p\sim q\sim r$' biçimine dönüştürürüz. Aynı şekilde '$q\sim r$' deyimini (yani ikinci çarpanı) önce '$q\sim r\,.\,(p \vee \sim p)$', sonra '$pq\sim r \vee \sim pq\sim r$' biçimine; 'pr' deyimini de (yani üçüncü çarpanı) önce '$\sim p\sim r\,.\,(q \vee \sim q)$', sonra '$\sim pq\sim r \vee \sim p\sim q\sim r$' biçimine dönüştürürüz. Böylece sözü geçen normal-şemayı

$$p\sim qr \vee p\sim q\sim r \vee pq\sim r \vee \sim pq\sim r \vee \sim pq\sim r \vee \sim p\sim q\sim r$$

biçimine, bunu da ('$\sim pq\sim r$' çarpanının geçiş sayısı 2 olmasından dolayı)

$$p\sim qr \vee p\sim q\sim r \vee pq\sim r \vee \sim pq\sim r \vee \sim p\sim q\sim r$$

biçimine, (yani bir "tam normal-şema" haline) dönüştürmüş oluyoruz.

Öte yandan bir çok hallerde, verilen bir (tam veya tam olmıyan) normal-şemayı *"sadeleştirmek"*, yani çarpanlarının sayısı daha küçük olan başka bir normal-şemaya dönüştürmek mümkündür. Ancak, *"sadeleşmiş" normal-şemanın hiç bir zaman "tam" olmadığını* belirtmek gerek. Nitekim, ilerde göstereceğimiz gibi, birbiriyle eşdeğer olan bütün şemalara karşılık (bunların her biriyle eşdeğer olan) bir ve yalnız bir tek tam normal-şema vardır. Başka bir deyimle 'A' ile 'B' iki (salt) önerme-şeması, 'N_1' ile 'N_2' tam normal-şemalar, 'A' ↔ 'B', 'A' ↔ 'N_1' ve 'B' ↔ 'N_2' ise; 'N_1' = 'N_2' olur. İmdi, 'A' verilen herhangi bir normal-şema, 'N_1' ise 'A' nın sadeleşmesi sonucunda elde edilen bir tam normal-şema olsun. 'A' bir normal-şema olduğundan, ya tam olmalıdır, ya tam değil. Birinci halde 'A'↔'A' ve 'A'↔'N_1' olduğundan, 'A' = 'N_1' olur. Dolayısiyle 'N_1' şeması 'A' nın sadeleşmiş (yani çarpanlarının sayısı daha küçük olan) bir normal-şema olamaz. İkinci halde ise 'A' şemasını 'N_2' gibi bir tam normal-şemaya dönüştürmek mümkündür. O zaman 'A'↔'N_1' ve 'A'↔'N_2' olduğundan, 'N_1' = 'N_2' olur. Oysa 'N_2' şemasının çarpanlarının sayısı 'A' şemasının çarpanlarının sayısından eksik değildir. Şu halde, 'N_2' şeması, dolayısiyle de 'N_1' şeması 'A' şemasının sadeleşmiş bir şekli olamaz. (İ.K.)

Örnek olarak, sözü geçen (12) normal-şemasiyle, (13) tam normal-şemasını sadeleştirmeye çalışalım. (12) şemasının 'p∼q∼r' ile '∼q∼r' çarpanlarına dikkatimizi çevirirsek, '∼q∼r' ifadesinin her ikisine ortak bir bileşen olduğunu, bu iki çarpanın ayrıklığı olan '∼q∼r v p∼q∼r' deyiminin de 'A v B A' biçiminde olduğunu görürüz. Oysa, 'p v pq ≡ p' totolojisi gereğince, 'A v B A' biçimindeki bir formül 'A' ile eşdeğerdir. Şu halde '∼q∼r v p∼q∼r' şemasının '∼q∼r' şemasına eşdeğer olduğu ortaya çıkar. İşte bu eşdeğerliği göz önünde tutarak, (12) şemasını:

(16) $\sim q \sim r \vee \sim pqr$

gibi sadeleşmiş bir normal-şema haline dönüştürebiliriz.

(13) tam normal-şemasına gelince: bu şemanın birinci ile üçüncü çarpanlarının ayrıklığı olan 'p∼q∼r v ∼p∼q∼r' şeması 'B A v ∼B A' biçimindedir. Oysa böyle bir tam-deyim, 'pq v p∼q ≡ p' totolojisi gereğince 'A' ile eşdeğerdir. Şu halde 'p∼q∼r v ∼p∼q∼r' şemasının '∼q∼r' ifadesiyle eşdeğer olduğunu; dolayısiyle de (13) tam normal-şemasının

$$\sim q \sim r \vee \sim pqr$$

biçiminde sadeleştirlebildiğini görüyoruz. Bu sadeleşmiş şema sözü geçen (16) şemasiyle özdeş olduğundan, gerek (12) normal-şemasından, gerek bu normal-şemanın karşılığı olan (13) tam normal-şemasından, sadeleşme işlemi sonun-

da aynı bir normal-şemayı ((16) şemasını) elde edilebildiğini anlıyoruz.

Normal-şemaları sadeleştirmek için başvurulabilecek başka bir yol da şöyledir:

(17) $p \vee \sim pq \equiv p \vee q$

bir totolojidir. Nitekim, 'p v pq' şeması 'v' nin ' · ' eklemine göre dağıtıcılığı uyarınca '(p v ~p) · (p v q)' ile eşdeğerdir. Oysa bu son şema 'p v q' ile eşdeğerdir. (İ.K.) İmdi, (17) totolojiisne dayanarak, 'A v ~AB' biçimindeki herhangi bir şemanın 'A v B' şemasına dönüştürülebildiğini görüyoruz. Böylece, 'A' ile '~AB' nin bir normal-şemanın iki çarpanı olması halinde, bu iki çarpan yerine (daha basit olan) 'A v B' ifadesini koymak mümkün olur. Ancak 'A' şemasının bir "yalın-şema"dan ibaret olması gerekir. Başka bir deyimle, 'A' deyimi 'p' veya '~p' biçiminde olmalıdır. Buna göre, 'p v ~p · B v C' biçimindeki herhangi bir normal-şemayı 'p v B v C' biçimine; '~p v p · B v C' biçimindeki herhangi bir normal şemayı da '~p v B v C' biçimine dönüştürebiliriz. Burada 'B', 'p' harfini içne almıyan herhangi bir temel-şemanın kısaltması; 'C' ise herhangi bir normal-şemanın kısaltması sayılmalıdır.

Örneğin: 'B' olarak '~q~rs' deyimini, 'C' olarak ta 'p~q v ~q~r~s' deyimini seçerek, böylece elde edilen

(18) $p \vee \sim p \sim q \sim rs \vee p \sim q \vee \sim q \sim r \sim s$

normal-şemasını sadeleştirmeye çalışalım. İlk önce 'p v ~p~q~rs' bileşeni yerine 'p v ~q~rs' koyarak, (18) şemasını

(19) $p \vee \sim q \sim rs \vee p \sim q \vee \sim q \sim r \sim s$

biçimine dönüştürürüz. (19) şemasının birinci ile üçüncü çarpanlarının ayrıklığı 'A v AB' biçiminde olduğundan, bu iki çarpanı ortadan kaldırarak, yerlerine sadece 'p' deyimini koyabiliriz. Böylece (19) şeması

(20) $p \vee \sim q \sim rs \vee \sim q \sim r \sim s$

biçimine dönüşür. (19) şemasının ikinci ve üçüncü çarpanlarının ayrıklığı ise 'AB v A~B' biçiminde olduğundan, bu iki çarpanı ortadan kaldırarak, yerlerine 'A' deyimini, yani '~q~r' yi koymak mümkündür. İşte, (18) normal-şemasını bu şekilde önünde sonunda (artık sadeleşemiyen):

(21) $p \vee \sim q \sim r$

biçimine dönüştürmek mümkündür,

'A v ~AB' ile 'A v B' formüllerinin eşdeğerliğine dayanarak, şöyle bir sadeleşme metodunu da kullanmak mümkündür:

'A' olarak, bir yalın-şema yerine herhangi bir temel-şemayı seçelim. 'A' temel-şemasının çarpanlarının 'C_1', 'C_2', ... , 'C_m' yalın-şemalarından ibaret olduğunu kabul edelim. O zaman 'A v ~AB' deyimi:

(22) $C_1C_2...C_m \text{ v } \sim(C_1C_2...C_m) \cdot B$

biçimini alır. (22) ise De Morgan kanunu gereği:

$$C_1C_2...C_m \text{ v } (\sim C_1 \text{ v } \sim C_2 \text{ v } ... \text{ v } \sim C_m) \cdot B$$

biçimine; bu son deyimi de ' · ' ekleminin 'v' ye göre dağıtıcılığı gereği:

(23) $C_1C_2...C_m \text{ v } \sim C_1B \text{ v } \sim C_2B \text{ v } ... \text{ v } \sim C_mB$

biçimine dönüştürmek mümkündür. İşte böylece (23) biçimindeki bir bileşeni olan herhangi bir normal-şemayı

(24) $C_1C_2...C_m \text{ v } B$

biçimindeki sadeleşmiş bir normal-şema haline dönüştürebildiğimizi görüyoruz. Burada 'C_1', 'C_2',..., 'C_m' her biri ayrı bir temsilci- harften kurulu m tane yalın-şema, 'B' ise bu yalın-şemalarda geçen temsilci-harflerden hiç birini içine almıyan herhangi bir temel-şema sayılmalıdır.

Örneğin:

$$p\sim q\ r \text{ v } \sim ps\sim t \text{ v } qs\sim t \text{ v } \sim rs\sim t$$

gibi bir normal-şemayı bir hamlede

$$p\sim qr \text{ v } s\sim t$$

biçimine dönüştürebiliriz.

Görüldüğü gibi, normal-şemaları sadeleştirmek için dört ayrı metoda başvurmak mümkündür. Bu metotlardan her biri belli bir *"sadeleşme kuralı"* na dayanmaktadır. Bu *sadeleşme kurallarını* ise şöyle özetlemek mümkündür:

(i) 'A v AB' biçimindeki herhangi bir tam-deyim 'A' biçimine dönüştürülebilir.

(ii) 'AB v A~B' biçimindeki herhangi bir tam-deyim 'A' biçimine dönüştürülebilir.

(iii) 'p v ~pA' biçimindeki herhangi bir tam-deyim 'p v A' biçimine; '~p v pA' biçimindeki herhangi bir tam-deyim de '~p v A' biçimine dönüştürülebilir.

(iv) '$p_1p_2...p_m \text{ v } \sim p_1A \text{ v } \sim p_2A \text{ v } ... \sim p_mA$' biçimindeki herhangi bir tam-deyim '$p_1p_2...p_m \text{ v } A$' biçimine;
'$p_1p_2...\sim p_m \text{ v } \sim p_1A \text{ v } \sim p_2A \text{ v } ... \text{ v } p_mA$' biçimindeki herhangi bir tam-deyim '$p_1p_2...\sim p_m \text{ v } A$' biçimine;

.....

.....

'$\sim p_1 \sim p_2 \ldots \sim p_m$ v p_1A v p_2A v ... v p_mA' biçimindeki herhangi bir tam-deyim '$\sim p_1 \sim p_2 \ldots \sim p_m$ v A' biçimine dönüştürülebilir.

Bu §'ı kapatmadan önce, bir de verilen herhangi bir önerme-şemasını bir normal-şema (veya tutarsız olması halinde "normalımsı" bir şema) haline dönüştürmek için başvurulması gereken kuralları özetliyelim:

(a) '$\sim \sim$A' biçimindeki herhangi bir tam-deyim 'A' biçimine dönüştürülebilir.

(*Çift-hayırlama* ilkesi.)

(b) '$\sim(A_1A_2 \ldots A_n)$' biçimindeki herhangi bir tam-deyim '$\sim A_1$ v $\sim A_2$ v ... v $\sim A_n$' biçimine; '$\sim(A_1$ v A_2 v ... v $A_n)$' biçimindeki herhangi bir tam-deyim de '$\sim A_1 \sim A_2 \ldots \sim A_n$' biçimine dönüştürülebilir. (*De Morgan* kanunu.)

(c) '$\sim(A \supset B)$' biçimindeki herhangi bir tam-deyim 'A$\sim$B' biçimine dönüştürülebilir.

(d) '$\sim(A \equiv B)$' biçimindeki herhangi bir tam-deyim 'A $\equiv \sim$B' (veya '$\sim$A $\equiv$ B') biçimine dönüştürülebilir.

(e) 'A$\supset$B' biçimindeki herhangi bir tam-deyim '$\sim$A v B' biçimine dönüştürülebilir.

(f) 'A $\equiv$ B' biçimindeki herhangi bir tam-deyim 'AB v $\sim$A$\sim$B' biçimine dönüştürülebilir.

(g) 'A . (B_1 v B_2 v ... v B_n)' biçimindeki herhangi bir tam-deyim 'AB_1 v A_2B_2 v ... v A_nB_n' biçimine; '(A_1 v A_2 v ... v A_n) . B' biçimindeki herhangi bir tam-deyim de 'A_1B v A_2B v ... v A_nB' biçimine dönüştürülebilir.

(h) '(A_1 v A_2 v ... v A_n) . (B_1 v B_2 v ... v B_m)' biçimindeki herhangi bir tam-deyim 'A_1B_1 v A_1B_2 v ... v A_nB_m' biçimine dönüştürülebilir. (' . ' ekleminin 'v' ye göre dağıtıcılığı.)

(i) Gerek 'AA' biçimindeki herhangi bir tam-deyim, gerek 'A v A' biçimindeki herhangi bir tam-deyim 'A' biçimine dönüştürülebilir. (Denkgüçlülük.)

(j) 'A v B$\sim$B' veya 'A v B$\sim$BC' biçimindeki herhangi bir tam-deyim 'A' ya dönüştürülebilir.

§ 14. İkililik.

'pq' ile 'p v q' şemalarının doğruluk-çizegelerini birbiriyle karşılaştırırsak, her birinin öbüründen, 'D' lerin yerine 'Y', 'Y' lerin yerine de 'D' koymak suretiyle elde edilebileceğini görürüz. Nitekim, 'pq' şemasına ait

(1)

p	q	
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	Y

doğruluk-çizelgesinde (çizelgenin gerek sağında gerek solunda) geçen her 'D' harfi yerine 'Y' harfini, her 'Y' harfi yerine 'D' harfini koyarsak,

(2)

p	q	
Y	Y	Y
Y	D	D
D	Y	D
D	D	D

gibi bir çizelge elde ederiz. Oysa, (2) çizelgesi 'p v q' şemasının doğruluk-çizelgesinden başka bir şey değildir. (2) çizelgesini, kurulu olduğu dört sırayı yeniden düzenlemek suretiyle, 'p v q' şemasının alışmış olduğumuz

(3)

p	q	
D	D	D
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

biçimine çevirmek te mümkündür.

Aynı şekilde, 'p v q' ye ait (3) doğruluk-çizelgesinde 'D' harfinin her geçişi yerine 'Y' harfini, 'Y' harfinin her geçişi yerine 'D' harfini koymak suretiyle, 'pq' nün doğruluk-çizelgesi durumunda olan

p	q	
Y	Y	Y
Y	D	Y
D	Y	Y
D	D	D

çizelgesini elde ederiz. (4) çizelgesini (sıralarının yerini değiştirmek suretiy-

le) 'pq' şemasının alışılmış doğruluk-çizelgesi olan (1) biçimine çevirmek mümkündür.

Genel olarak, '$f(p_1,p_2,\ldots,p_n)$' herhangi bir (salt) şema oldukta, bu şemanın doğruluk-çizelgesinde bütün 'D' harflerinin yerine 'Y' harfini, bütün 'Y' harfleri yerine de 'D' harfini koymak suretiyle elde edilen doğruluk-çizelgesinin belirlediği '$g(p_1,p_2,\ldots,p_n)$' gibi bir şemaya sözü geçen '$f(p_1,p_2,\ldots,p_n)$' şemasının *"i k i l i"*si (dual) denir.

Buna göre, bir yandan *'pq' şemasının 'p v q' şemasının ikilisi,* öbür yandan da *'p v q' şemasının 'pq' şemasının ikilisi* olduğunu söyleyebiliriz. Başka bir deyimle 'pq' ile 'p v q' şemaları *birbirinin ikiilsi* durumundadır. Genel olarak '$g(p_1,\ldots,p_n)$' şeması '$f(p_1,\ldots,p_n)$' gibi bir şemanın ikilisi ise, '$f(p_1,\ldots,p_n)$' şeması da '$g(p_1,\ldots,p_n)$' şemasının ikilisi olur. Nitekim, verilen herhangi bir doğruluk-çizelgesinde 'D' lerin yerine 'Y', 'Y' lerin yerine de 'D' koyduktan sonra aynı işlemi tekrarlarsak ilk çizelgeyi yeniden elde edeceğimiz besbellidir.

$Ş_1$ ve $Ş_2$ *birbirinin ikilisi* olduğunu, sembolik olarak:

$$Ş_1 \rangle\!-\!-\!\langle Ş_2$$

biçiminde dile getireceğiz. Örneğin:

(5) 'pq' $\rangle\!-\!-\!\langle$ 'p v q'

'$f(p_1,\ldots,p_n)$' $\rangle\!-\!-\!\langle$ '$g(p_1,\ldots,p_n)$' olması halinde, 'f' ile 'g' *"n-li önerme eklemleri"nin* de *birbirinin ikilisi* olduğu söylenir. Bu durumu da

$$\text{'f'} \rangle\!-\!-\!\langle \text{'g'}$$

biçiminde dile getireceğiz. Örneğin:

(6) ' . ' $\rangle\!-\!-\!\langle$ 'v'

Aynı bir doğruluk-çizelgesine karşılık bir çok (birbiriyle eşdeğer olan) şemalar olduğundan, her şemanın da bir çok (birbiriyle eşdeğer olan) ikilikleri vardır. Genel olarak:

(7) $Ş_1 \rangle\!-\!-\!\langle Ş_2$ ve $Ş_2 \leftrightarrow Ş_2'$ ise, $Ş_1 \rangle\!-\!-\!\langle Ş_2'$

yani, verilen *bir şemanın ikililerinden biriyle eşdeğer olan her şema ilk şemanın bir ikilisidir.*

Örneğin, 'pq' şemasının bir ikilisi olan 'p v q' şemasiyle eşdeğer olan '$\sim p \supset q$' şeması da 'pq' nin bir ikilisidir.

$$g(p_1,\ldots,p_m, r_1,\ldots,r_{n-m})$$

biçiminde gösterebiliriz. Bu iki şema birbiriyle eşdeğer olduğundan, bunlardan her biri de (birincide 'q_1',...,'q_{n-m}' harflerinin her biri yerine bir 'D' harfinin konulmasiyle elde edilen)

$$f(p_1,\ldots,p_m,D,\ldots,D)$$

gibi bir m-li şema ile eşdeğer olur. Oysa, $m<n$ ise, ilk iki şemanın hiç birinin de indirgenemez olmadığı ortaya çıkar. Şu halde (bu şemalar indirgenemez olduklarından) $m = n$ olmalı. (İ.K.)

(13) Birbirinin ikilisi olan şemaların dereceleri eşittir. Birbirinin ikilisi olan indirgenemez şemalar da aynı temsilci-harflerden kuruludur.

Kanıt: '$f(p_1,\ldots,p_n)$' herhangi bir indirgenemez şema olsun. O zaman '$f(\sim p_1, \ldots,\sim p_n)$' şeması birinci şemanın bir ikilisi olur. Oysa birinci şema indirgenemez olduğundan, ikincisi de indirgenemez bir şemadır. Nitekim, ikinci şema indirgenemez bir şema olmasaydı, $m<n$ olmak üzere, bu şema ile eşdeğer olan '$g(a_1,\ldots,a_m)$' gibi bir m-li şema bulunacaktı. (Burada 'a',...,'a_m' sembollerini m tane ayrı temsilci-harfin kısaltması olarak kullanıyoruz.) Yani:

$$'\sim f(\sim p_1,\ldots,\sim p_n)' \leftrightarrow 'g(a_1,\ldots,a_m)'$$

O zaman

$$'\sim\sim f(\sim\sim p_1,\ldots,\sim\sim p_n)' \leftrightarrow '\sim g(\sim a_1,\ldots,\sim a_m)'$$

olur. Bu eşdeğerliğin ard-üyesini '$h(b_1,\ldots,b_m)$' ile kısaltabiliriz. (Burada 'b_1', ...,'b_m' sembollerini sırasiyle '$\sim a_1$',...,'$\sim a_m$' deyimlerinin kısaltması olarak kullanıyoruz.) O zaman

$$'f(p_1,\ldots,p_n)' \leftrightarrow 'h(B_1,\ldots b_m)'$$

olur. $m<n$ olduğundan, böyle bir eşdeğerlik '$f(p_1,\ldots,p_n)$' şemasının indirgenemez bir şema olmamasını gerektirir. Oysa bu şema indirgenemez bir şemadır. Şu halde '$\sim f(\sim p_1,\ldots,\sim p_n)$' de indirgenemez bir şema olmalıdır.

Böylece, '$f(p_1,\ldots,p_n)$' şemasının 'p_1',...,'p_n' temsilci-harflerinden kurulu (n-inci dereceden) bir indirgenemez ikilisi olduğu kanıtlanmış olur. Bundan da '$f(p_1,\ldots,p_n)$' şemasının her ikilisinin n-inci dereceden olduğu, bunlardan da indirgenemez olanların '$f(p_1,\ldots,p_n)$' şemasının içine aldığı aynı temsilci-harflerden kurulu olduğu çıkarılır. (İ.K.)

Genel olarak bir şema kendinin ikilisi değildir, yani

(14) $'f(p_1,\ldots,p_n)' \rangle\!\!-\!\!\langle 'f(p_1,\ldots,p_n)'$

yani

$$\text{'}f(p_1,\ldots,p_n)\text{'} \leftrightarrow \text{'}f(\sim p_1,\ldots,\sim p_n)\text{'}$$

çokluk yanlıştır. Ama gene de bazı özel 'f' ler için doğrudur. İşte, (14)'ü yerine getiren şemalara *"kendiyle-ikili"* (self-dual) şemalar denir.

(15) *Her yalın-şema "kendiyle-ikili"dir.*

Kanıt: Bir yalın şema 'p' gibi bir temsilci-harf veya '$\sim$p' gibi hayırlanmış bir temsilci-harf demektir. 'p' nin ikilisi '$\sim(\sim p)$' ile eşdeğer olan herhangi bir şemadır. Oysa 'p' bu son şema ile eşdeğerdir. Şu halde 'p' kendiyle-ikilidir. '$\sim$p' nin ikilisi de '$\sim(\sim\sim p)$' ile eşdeğer olan herhangi bir şemadır. Oysa '$\sim$p' bu son şema ile eşdeğerdir. Şu halde '$\sim$p' de kendiyle-ikilidir.

'p' şeması kendiyle-ikili olduğundan, 'p' ile eşdeğer olan her şema da kendiyle-ikili olur. Örneğin, 'p v pq' şeması, 'p' ile eşdeğer olduğundan, kendiyle-ikilidir. Aynı şekilde 'pq v p$\sim$q' de, 'p' ile eşdeğer olduğundan, kendiyle-ikilidir. Ancak, 'p' indirgenemez bir kendiyle-ikili şema olduğu halde, 'p v pq' (veya 'pq v p$\sim$q') nün indirgenemez olmıyan bir kendiyle-ikili şema olduğunu belirtmek gerek.

Birden çok harfli indirgenemez kendiyle-ikili şemalara örnek olarak aşağıdaki şemaları gösterebiliriz:

$$p \equiv q \equiv r$$
$$pq \vee pr \vee qr$$
$$p_1p_2p_3 \vee p_1p_4 \vee p_2p_4 \vee p_3p_4$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_1p_2\ldots p_{n-1} \vee p_1p_n \vee p_2p_n \vee \ldots \vee p_{n-1}\,p_n$$

O-ncı dereceden olan hiç bir şema kendiyle-ikili olamaz. Nitekim böyle bir şema bir önerme ile eşdeğerdir. Oysa, bir önermenin (O-ncı dereceden bir şema olarak) ikilisi, bu önermenin hayırlanmasından ibarettir. Bir önermenin hayırlanması ise hiç bir zaman önermenin kendisiyle eşdeğer olmadığından, O-ncı dereceden hiç bir şema da kendiyle-ikili olamaz. Dolayısiyle:

(16) Hiç bir kendiyle-ikili şema geçerli veya tutarsız değildir. Yani, her kendiyle-ikili şema geçersiz ama tutarlıdır.

İmdi, '$f(p_1,\ldots,p_n)$' gibi herhangi bir n-li şemayı ele alalım. Genel olarak bu şema yardımiyle elde edilen '$f(\sim p_1,\ldots,\sim p_n)$' şeması, ilk şemanın ne kendisiyle ne de hayırlanmasiyle eşdeğer değildir. Hayırlanmasiyle eşdeğer olması halinde kendiyle-ikili bir şema olur.

'$f(p_1,\ldots,p_n)$' gibi bir şemanın kendiyle-ikili olmasının gerekli ve yeterli şartı

(17) $'f(\sim p_1,\ldots,\sim p_n)'\leftrightarrow'\sim f(p_1,\ldots,p_n)'$

eşdeğerliğinden ibarettir.

Öte yandan,

(18) $'f(\sim p_1,\ldots,\sim p_n)'\leftrightarrow'f(p_1,\ldots,p_n)'$

eşdeğerliğinin yerine gelmesi, yani $'f(\sim p_1,\ldots,\sim p_n)'$ şemasının $'f(p_1,\ldots,p_n)'$ in kendisiyle eşdeğer olması halinde, $'f(p_1,\ldots,p_n)'$ şemasının bir ikilisi, kendi hayırlanmasından ibaret olur. Yani:

(19) $'f(p_1,\ldots,p_n)'\rangle\!\!-\!\!-\!\!\langle'\sim f(p_1,\ldots,p_n)'$

İmdi, $'f(\sim p_1,\ldots,\sim p)'$ şemasına (ve dolayısiyle bununla eşdeğer olan her şemaya) $'f(p_1,\ldots,p_n)'$ şemasının *"ters-ikili"si* (contradual[3]) denir. Buna göre (19) (dolayısiyle de (18)) şartını yerine getiren her şemaya *"kendiyle ters-ikili"* (self-contradual) şema diyeceğiz. O-ncı dereceden olan her şema, dolayısiyle her geçerli veya tutarsız şema, özellikle her önerme, kendiyle ters-ikilidir. Birden çok harfli indirgenemez kendiyle ters-ikili olan bir şemaya örnek olarak ta

$$p \equiv q$$

şemasını gösterebiliriz. $('\sim p \equiv \sim q'\leftrightarrow'p \equiv q')$

$'p \equiv q'$ şemasiyle eşdeğer olan $'pq \vee \sim p\sim q'$ gibi bir şema da buna göre kendiyle ters-ikilidir.

"Kendiyle-ikililik"i (self-duality) ve *"kendiyle ters-ikililik"i* (self-contraduality) böylece inceledikten sonra, gene genel hale dönerek, verilen herhangi bir şemanın bir ikilisini meydana getirmek için başvurabileceğimiz yöntemleri sistematik bir şekilde inceleyeceğiz.

(1) Verilen (salt) şemanın doğruluk-değeri analizini yaparak doğruluk-çizelgesini kurarız. Bu doğruluk-çizelgesinde bütün 'D' harfleri yerine 'Y', bütün 'Y' harfleri yerine de 'D' koymak suretiyle yeni bir doğruluk-çizelgesi elde ederiz. Ondan sonra da bu yeni doğruluk-çizelgesinin belirlediği normal-şemayı meydana getiririz. İşte, *bu normal-şema ilk şemanın bir ikilisidir.*

Örneğin: § 9 da sözü edilen $'p\supset q'$ şemasının bu yönteme göre bir ikilisini meydana getirelim. $'p\supset q'$ şemasının doğruluk-çizelgesi

p	q	p<q
D	D	D
D	Y	D
Y	D	Y
Y	Y	D

biçimindedir. Bu çizelgede geçen bütün 'D' ler yerine 'Y', bütün 'Y' ler yerine de 'D' koyarak,

p	q	
Y	Y	Y
Y	D	Y
D	Y	D
D	D	Y

gibi bir doğruluk-çizelgesini elde ederiz. Bu son çizelgenin belirlediği normal-şema 'p∼q' dür. Oysa 'pq∼' şeması '∼(p⊃q)', dolayısiyle de 'p⊅q' ile eş-değerdir. Böylece 'p⊃q' şemasının bir ikilisi olarak 'p∼q' veya 'p⊅q' şema-sını elde edebiliriz.[4]

(II) 'f(p_1,...,p_n)' gib herhangi bir şemanın bir ikilisini elde etmek için, bu şemada geçen bütün temsilci-harfleri yerine hayırlamalarını koyarız. Böylece elde edilen şemanın tümünü de hayırlamak suretiyle ilk şemanın bir ikilisi olarak '∼f(∼p_1,...,∼p_n)' şemasını elde ederiz.

Örneğin: bu yönteme göre, 'p v q' şemasının ikilisi olarak '∼(∼p v ∼q)' şemasını, veya bunun eşdeğeri olan 'pq' şemasını elde ederiz.

(III) Verilen herhangi bir şemanın bir ikilisini elde etmek için, ilk önce bu şemayı '∼', ' · ' ve 'v' den başka hiç bir önerme-eklemini içine almıyan baş-ka bir şemaya dönüştürürüz. Bu son şemada ' · ' nin her geçişi yerine 'v', 'v' nin her geçişi yerine de ' · ' konur. İşte, böylece elde edilen şema, ilk şemanın bir ikilisidir. Örneğin: salt '∼', ' · ' ve 'v' eklemlerinden kurulu

(a) $\sim(p\sim q \vee r) \cdot (\sim p \vee r) \cdot q$

gibi bir şemayı ele alalım. (a) şemasında ' · ' yerine 'v', 'v' yerine ' · ' koy-mak suretiyle

(b) $\sim[(p \vee \sim q) \cdot r] \vee \sim pr \vee q$

şeması elde edilir. (b) şemasının (a) nın bir ikilisi olduğunu kanıtlıyalım. Bu amaçla (b) şemasının, (a) şemasında geçen bütün temsilci-harflerin hayırla-nıp böylece elde edilen şemanın tümünün hayırlanmasiyle elde edilen

(c) $\sim[\sim(\sim p\sim\sim q \vee \sim r) \cdot (\sim\sim p \vee \sim r) \cdot \sim q]$

şeması ile eşdeğer olduğunu göstermek gerekir. (c) şemasını daha basit bir biçime koymak amaciyle, (a) şemasında geçen hayırlanmış harfler yerine, bunların kısaltması olarak, 'a', 'b',... gibi bir takım başka harfler kullana-lım. '∼p' yerine 'a', '∼q' yerine de 'b' harfini koyarsak,

(a) şeması

$$\sim(pb \vee r) \cdot (a \vee r) \cdot q$$

biçimine girer. O zaman da (c) şeması

$$\sim[(\sim p \sim b \vee \sim r) \cdot (\sim a \vee \sim r) \cdot \sim q]$$

gibi, içinde geçen bütün harfleri hayırlanmış olan bir şema biçimine girer. Bu şemayı, içinde artık hiç bir hayırlanmış harf geçmiyen bir şemaya dönüştürelim. Bu amaçla, De Morgan kanunlarını uygulıyarak, '$\sim p \sim b$' yerine '$\sim(p \vee b)$' '$\sim a \vee \sim r$' yerine de '$\sim(ar)$' koyarız. Böylece şemamız

$$\sim\{\sim[\sim(p \vee b) \vee \sim r] \cdot \sim(ar) \cdot \sim q\}$$

biçimine girer. Bu şemanın '$\sim(p \vee b) \vee \sim r$' bileşeni yerine '$\sim[(p \vee b) \cdot r]$' koymak suretfiyle, şemanın tümü

$$\sim\{\sim\sim[(p \vee b) \cdot r] \cdot \sim(ar) \cdot \sim q\}$$

biçimine girer. Bu son şemayı da

$$\sim[(p \vee b) \cdot r] \vee ar \vee q$$

biçimine dönüştürürüz. Bu şema da, 'a' yerine '$\sim p$', 'b' yerine '$\sim q$' koymak suretiyle, (b) şemasına dönüştürülür. (İ.K.)

Genel olarak, '$f(p_1,\ldots,p_n)$' salt '$\sim$', '$\cdot$' ve '$\vee$' eklemlerinden kurulu herhangi bir şema oldukta, '$\sim f(\sim p_1,\ldots,\sim p_n)$' şemasını, aynı metotla, '$f(p_1,\ldots,p_n)$' şemasında '$\cdot$' yerine '$\vee$', '$\vee$' yerine de '$\cdot$' koymak suretiyle elde edilen şemaya dönüştürmek mümkündür.

Söz konusu (III) metodu, verilen bir şemanın bir ikilisini bulmak için başvurulabilen yolların en önemlisidir.[5]

İkililik yardımiyle, verilen totoloji, çelişme, içerme ve eşdeğerliklerden yeni bir takım totoloji, çelişme, içerme ve eşdeğerliklerin elde edilmesi mümkündür. Bunun için de "ikililik ilkeleri" (principles of duality) denilen şu kurallar uygulanır:

Genel ikililik ilkesi:

Ş herhangi bir şema, $Ş_1$ de Ş nin bir ikilisi oldukta, Ş nin geçerli olmasının gerekli ve yeterli şartı, $Ş_1$ in tutarsız olmasından, yani $Ş_1$ in hayırlanmasından geçerli olmasından ibarettir.

Kanıt: Ş olarak '$f(a_1,\ldots,a_n)$', $Ş_1$ olarak ta '$g(b_1,\ldots,b_m)$' gibi iki şemayı ele alalım. (Burada 'a_1','a_n' harflerini n tane ayrı değişkenin, 'b_1','b_m'

harflerini de m tane ayrı değişkenin birer kısaltması olarak kullanıyoruz.) $Ş_1$ in Ş nin bir ikilisi olması

$$'g(b_1,\ldots,b_m)'\leftrightarrow'\sim f(\sim a_1,\ldots,\sim a_n)'$$

biçiminde dile getirilir. İmdi, $'f(a_1,\ldots,a_m)'$ geçerli ise, $'f(\sim a_1,\ldots,\sim a_n)'$ de geçerlidir. O zaman da $'\sim f(\sim a_1,\ldots,\sim a_n)'$ tutarsız olur. Dolayısiyle, bu şema ile eşdeğer olan $'g(b_1,\ldots,b_m)'$ de tutarsız olur. Öte yandan, $'g(b_1,\ldots,b_m)'$ geçerli ise, $'\sim g(\sim b_1,\ldots,\sim b_m)'$ şeması da, aynı şekilde tutarsız olur. Dolayısiyle

$$'f(a_1,\ldots,a_n)'\leftrightarrow'\sim g(\sim b_1,\ldots,\sim b_m)'$$

eşdeğerliği gereği $'f(a_1,\ldots,a_n)'$ şeması da tutarsız olur. (İ.K.)

Örneğin: 'p v ~p' şemasının geçerli olduğunu biliyoruz. Bu şemanın bir ikilisi ((III) metodu gereği) 'p~p' şemasıdır. Genel ikililik ilkesi uyarınca 'p~p' nin tutarsız olduğunu, yani '~(p~p)' nin geçerli olduğunu kanıtlarız. Böylece, bu ilke yardımiyle 'p v ~p' gibi bir totolojiden '~(p~p)' gibi başka bir totoloji elde edebiliriz.

İçermeler için özel ikililik ilkesi[6]*:*

(a) $Ş_1$ ve $Ş_2$ herhangi iki şema, $Ş_1'$ ve $Ş_2'$ de bu iki şemanın birer ikilisi oldukta, $Ş_1\supset Ş_2$ şemasının geçerli olmasının gerekli ve yeterli şartı, $Ş_2'\supset Ş_1'$ şemasının geçerli olmasından ibarettir.

(b) $Ş_1$ şemasının $Ş_2$ şemasını içermesinin gerekli ve yeterli şartı, $Ş_2$'nün $Ş_1'$ yü içermesinden ibarettir.

Kanıt: $Ş_1\rangle\!\!-\!\!-\langle Ş_1'$ ve $Ş_2\rangle\!\!-\!\!-\langle Ş_2'$ olsun. $Ş_1\supset Ş_2$ şemasının (III) metoduna göre bir ikilisini bulmaya çalışalım. $Ş_1$ in bu metotla elde edilen ikilisi $Ş_1''$, $Ş_2$ nin de bu metotla elde edilen ikilisi $Ş_2''$ olsun. $Ş_1\supset Ş_2$ şeması $\sim Ş_1$ v $Ş_2$ şeması ile eşdeğerdir. Şu halde, $Ş_1\supset Ş_2$ nin (III) metoduyla elde edilen ikilisinin $\sim Ş_1''\cdot Ş_2''$ şemasından ibaret olduğunu söyleyebiliriz.

$$Ş_1'\leftrightarrow Ş''_1 \text{ ve } Ş_2'\leftrightarrow Ş_2'' \text{ olduğundan,}$$

$$Ş_1\supset Ş_2\rangle\!\!-\!\!-\langle(\sim Ş_1'\cdot Ş_2')$$

sonucuna varırız.

İmdi,

(20) $$\sim(\sim pq)\equiv(q\supset p)$$

bir totoloji olduğundan,

$$\sim(\sim Ş_1'\cdot Ş_2')\leftrightarrow Ş_2'\supset Ş_1'$$

olduğunu görüyoruz. Şu halde, $Ş_1 \supset Ş_2$ geçerli ise, $Ş_2' \supset_1'$ geçerlidir; $Ş_2' \supset_1'$ de geçerli ise, $Ş_1 \supset Ş_2$ geçerlidir. (İ.K.)

(b) yi kanıtlamak için de, $Ş_1 \supset Ş_2$ nin geçerliliğinin gerekli ve yeterli şartının $Ş_1 \rightarrow Ş_2$ olduğunu göz önünde tutmak yetiyor.

Örneğin: bu ilkeye dayanarak, 'pq⊃p' totolojisinden, 'p⊃p v q' totolojisini elde edebiliriz. Nitekim, 'pq' nün ikilisi 'p v q', 'p' nin de ikilisi gene 'p' dir.

Eşdeğerlikler için özel ikililik ilkesi :

(a) $Ş_1$ ve $Ş_2$ herhangi iki şema, $Ş_1'$ şeması $Ş_1$ in, $Ş_2'$ şeması da $Ş_2$ nin birer ikilisi oldukta, $Ş_1 \equiv Ş_2$ şemasının geçerli olmasının gerekli ve yeterli şartı, $Ş_1' \equiv Ş_2'$ şemasının geçerli olmasından ibarettir.

(b) İki şemanın birbiriyle eşdeğer olmasının gerekli ve yeterli şartı, bu iki şemanın ikililerinin de birbiriyle eşdeğer olmasından ibarettir.

Kanıt: $Ş_1 \rangle\!-\!-\langle Ş_1'$ ve $Ş_2 \rangle\!-\!-\langle Ş_2'$ olsun. İçermeler için özel ikililik ilkesi uyarınca, bir yandan $Ş_1 \supset Ş_2$ nin geçerliliğinin gerekli ve yeterli şartı $Ş_2' \supset Ş_1'$ den ibarettir; öbür yandan da $Ş_2 \supset Ş_1$ in geçerliğinin gerekli ve yeterli şartı $Ş_1' \supset Ş_2'$ den ibarettir. Şu halde, $Ş_1 \equiv Ş_2$ nin geçerliğinin gerekli ve yeterli şartı $Ş_1' \equiv Ş_2'$ den ibarettir. (İ.K.)

Örneğin: bu ilkeye dayanarak, 'p v q ≡ q v p' totolojisinden 'pq ≡ qp' totolojisini elde edebiliriz. (Nitekim, 'p v q' nün ikilisi 'pq', 'q v p' nin ikilisi de 'qp' dir.)

İkililikle ilgili önemli bir özellik te şudur:

(21) İki şemanın birbirinin ikilisi olmasının gerekli ve yeterli şartı, bu iki şemanın hayırlanmalarının da birbirinin ikilisi olmasından ibarettir.

Yani $Ş_1 \rangle\!-\!-\langle Ş_2$, ancak ve ancak $\sim Ş_1 \rangle\!-\!-\langle \sim Ş_2$ ise.

Kanıt: $Ş_1$ şeması '$f(a_1,\ldots,a_n)$' biçiminde, $Ş_2$ şeması da '$g(b_1,\ldots,b_m)$' biçiminde olsun. $Ş_1$ in hayırlanması '$h(a_1,\ldots,a_n)$', $Ş_2$ nin de hayırlanması '$k(b_1,\ldots,b_m)$' oldukta, $Ş_1 \rangle\!-\!-\langle Ş_2$, ancak ve ancak $\sim Ş_1 \rangle\!-\!-\langle \sim Ş_2$ ise, yani

'$g(b_1, \ldots, b_m)$' ↔ '$\sim f(\sim a_1, \ldots, \sim a_n)$', ancak ve ancak

'$k(b_1, \ldots, b_m)$' ↔ '$\sim h(a_1, \ldots, a_n)$' ise

olduğu meydandadır. Nitekim, bu önerme

'$g(b_1,\ldots,b_m)$' ↔ '$\sim f(\sim a_1,\ldots,\sim a_n)$', ancak ve ancak

'$\sim g(b_1,\ldots,b_m)' \leftrightarrow$ '$\sim \sim f(\sim a_1,\ldots,\sim a_n)$' ise

önermesinden başka bir şey değildir.

(21) den şu iki sonuç çıkarılabilir:

(22) Her kendiyle-ikili şemanın hayırlanması da kendiyle-ikili bir şemadır.

Nitekim Ş *kendiyle-ikili* oldukta, Ş⟩——⟨Ş olur. Dolayısiyle, (21) gereği $\sim$Ş⟩——⟨$\sim$Ş sonucu çıkar.

(23) Kendiyle ters-ikili olan her şemanın hayırlanması da kendiyle-ters ikili olan bir şemadır.

Ş *kendiyle ters-ikili* olan bir şema oldukta, Ş⟩——⟨$\sim$Ş olur. Bunu şöyle gösterebiliriz: '$f(p_1,\ldots,p_n)$' kendiyle ters-ikili olan bir şema ise,

$$'f(p_1,\ldots,p_n)' \leftrightarrow 'f(\sim p_1,\ldots,\sim p_n)'$$

dolayısiyle de

$$'\sim f(p_1,\ldots,p_n)' \leftrightarrow '\sim f(\sim p_1,\ldots,\sim p_n)'$$

dir. Bu son eşdeğerlik te Ş⟩——⟨$\sim$Ş anlamına gelir[8].

Ş⟩——⟨$\sim$Ş olduğuna göre, (21)'e dayanarak, Ş şemasının hayırlanmasının da ($\sim$Ş⟩——⟨Ş den dolayı) kendiyle ters-ikili bir şema olduğu ortaya çıkar. ((23) özelliği, (21) den bağımsız olarak ta, salt ikililik-bağlantısının bakışım özelliğine dayanarak kanıtlanabilir.)

Örneğin: 'p v q' ile 'pq' birbirinin ikilisidir. Şu halde, (21) gereği, '$\sim$(p v q)' ile '$\sim$(pq)' de birbirinin ikilisi olmalı.

'p $\equiv$ q $\equiv$ r' kendiyle-ikilidir. Şu halde, 22 gereği, '$\sim$(p $\equiv$ q $\equiv$ r)' şeması da kendiyle ikili olmalıdır.

'p $\equiv$ q' şeması kendiyle ters-ikilidir. Normal şemalar '$\sim$', '·' ve 'v' ekleminden başka hiç bir eklemi içine almıyan şemalar olduklarından, (III) metodunu uygulıyarak, her normal şemadan, bu şemanın ikilisi olan belli bir şema elde edilebilir. Örneğin:

$$p\sim qr \text{ v } \sim pqr \sim s \text{ v } \sim qs$$

normal şemasından bu yolla elde edilen ikili şema

$$(p \text{ v } \sim q \text{ v } r) \,.\, (\sim p \text{ v } q \text{ v } r \text{ v } \sim s) \,.\, (\sim q \text{ v } s)$$

biçimindedir.

Normal şemalardan, (III) metodu yardımiyle elde edilen bu türlü şemalara *"birliksel normal-şemalar"* (conjunctive normal schemata) denir. Bu şemalar çok-çarpanlı birlikte-evetlemeler durumundadır. Her çarpan bir "birliksel temel-şema"dır. Bir birliksel temel-şema, her çarpanı bir yalın-şema

olan çok çarpanlı bir *ayrıklıktır*. Bu yalın-şemaların her biri *ayrı* bir harften kuruludur.

Her şema (tutarlı olması halinde) bir normal-şemaya, veya (tutarsız olması halinde) bir normalımsı şemaya dönüştürülebildiği gibi, her şema (*geçersiz* olması halinde) bir birliksel normal-şemaya veya (*geçerli* olması halinde) '$p_1 \vee \sim p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \ldots \vee p_n$' gibi bir "normalımsı şema"ya dönüştürülebilir. Bu amaçla başvurulacak kurallar, normal-şemalar halinde başvurulan kuralların ikilisidir.

Birliksel normal-şemaların sadeleşmesi için de, normal-şemaların sadeleşmesinde kullanılan kuralların ikilileri kullanılır:

(i) 'A . (A v B)' biçimindeki herhangi bir tam-deyim 'A' biçimine dönüştürülebilir.

(ii) '(A v B) . (A v ~B)' biçimindeki herhangi bir tam-deyim 'A' biçimine dönüştürülebilir.

(iii) 'p . (~p v A)' biçimindeki herhangi bir tam-deyim 'p.A' biçimine; '~p . (p v A)' biçimindeki herhangi bir tam-deyim de '~p . A' biçimine dönüştürülebilir.

(iv) '$(p_1 \vee \ldots \vee p_m) . (\sim p_1 \vee A) . \ldots . (\sim p_m \vee A)$' biçimindeki herhangi bir tam-deyim, '$(p_1 \vee \ldots \vee p_m) . A$' biçimine;

'$(\sim p_1 \vee \ldots \vee \sim p_m) . (p_1 \vee A) . \ldots . (p_m \vee A)$' biçimindeki herhangi bir tam-deyim '$(\sim p_1 \vee \ldots \vee \sim p_m) . A$' biçimine dönüştürülebilir.[9]

İkililik kavramı, yalnız salt önerme-şemalarına değil, bütün tam-deyimlere de uygulanabilir. '$f(A_1 \ldots\ldots A_n\ p_1,\ldots,p_m)$', içinde '$A_1$','...','$A_n$' önermeleriyle '$p_1$','...','$p_m$' geçen bir tam-deyim oldukta,

(24) '$f(A_1,\ldots,A_n,p_1,\ldots,p_m)$')——($\S = {}_{Dk}$

$\S \leftrightarrow$ '$\sim f(\sim A_1,\ldots,\sim A_n,\sim p_1,\ldots,\sim p_n)$'

Özel bir hal olarak, bir önermenin ikilisi bu önermenin hayırlanmasından ibarettir. Buna göre 'D' nin ikilisi 'Y', 'Y' nin ikilisi de 'D' dir.

§15. Tam Normal-Şemalar

§ 9'da, mümkün olan bütün n-li doğruluk-çizelgelerinin sayısının $2^{(2^n)}$ olduğunu kanıtlamıştık. İmdi, 'p_1','...','p_n' gibi n tane farklı temsilci-harfi ele alarak, bunlardan kurulu salt-şemaların (1-li, 2-li,...,n-li şemalar) doğruluk-çizelgelerini inceleyelim. Söz konusu şemaların her birine karşılık bir ve yalnız bir tek n-li doğruluk-çizelgesi vardır. Verilen bir şemanın doğruluk-çizelge-

sini kurduktan sonra, bu çizelgeye dayanarak, bu şema ile eşdeğer olan bir *"tam normal-şema"* elde edebiliriz. Örneğin: § 13'ün başındaki doğruluk-çizelgesine dayanarak, sözü geçen 'f(p,q,r)' şemasının bir tam normal-şemasını elde etmiştik.

Genel olarak, verilen bir n-li doğruluk-çizelgenin karşılığı olan tam normal-şemayı elde etmek için şu işlemler yapılır: İlk önce, çizelgenin sağ yanındaki 'D' ler tespit edilerek, bu 'D' lerin her birinin solunda aynı hizadaki harf dizisi ele alınır. Bu harf dizilerinin her biri bir n-li dizidir. Her dizinin 1.ci üyesi 'p_1' temsilci-harfinin altındaki sütuna, 2.ci üyesi 'p_2' temsilci-harfinin altındaki sütuna,..., n.nci üyesi de 'p_n' temsilci-harfinin altındaki sütuna aittir. Bu harf dizilerinin sayısı en az 0, en çok 2^n olabilir. Bu sayı, doğruluk-çizelgesinin sağ yanındaki sütunun salt 'D' den kurulu olması — yani söz konusu şemanın bir totoloji olması — halinde 2^n dir. Doğruluk-çizelgesinin sağ yanındaki sütunun salt 'Y' den kurulu olması — yani şemanın bir çelişme olması — halinde ise bu sayı 0 dır.

Bu harf dizilerini tespit ettikten sonra, her diziye karşılık, aşağıda gösterilen şekilde, bir temel-şema elde edilir:

Dizinin 1.ci üyesi 'D' ise, temel-şemanın 1.ci çarpanı olarak 'p_1' seçilir. Dizinin 1.ci üyesi 'Y' ise, temel-şemanın 1.ci çarpanı olarak '$\sim p_1$' seçilir.

Aynı şekilde dizinin 2.ci, ...,n.ci üyesine karşılık, bu üyenin 'D' veya 'Y' olmasına bakarak, temel-şemanın 2.ci,...,n.ci çarpanı olarak, sırasiyle 'p_2' veya '$\sim p_2$', ... , 'p_n' veya '$\sim p_n$' seçilir. Böylece elde edilen n-çarpanlı birlikte-evetlemenin gerçekten de bir temel-şema olduğu besbellidir. (Nitekim, böyle bir birlikte-evetlemenin her çarpanı *ayrı* bir temsilci-harften kuruludur: 1.ci çarpanı 'p_1' ile, 2.ci çarpanı 'p_2' ile,..., n.ci çarpanı 'p_n' ile meydana getirilmiştir.)

Bu şekilde elde edilen temel-şemaların sayısı en az 0, en çok 2^n dir. Doğruluk-çizelgesini incelediğimiz şema bir totoloji ise, bu sayı 2^n dir. Şema bir çelişme ise, bu sayı 0 dır.

Bu temel-şemaları elde ettikten sonra, bunlardan kurulu bir "tam normal-şema"yı şöyle elde edebiliriz: Tam normal-şemanın 1.ci çarpanı olarak, sözü geçen harf dizilerinin birincisinin karşılığı olan temel-şemayı; . . . . , tam normal-şemanın sonuncu çarpanı olarak ta, bu harf dizilerinin sonuncusunun karşılığı olan temel-şemayı seçeriz. Böylece elde edilen ayrıklığın gerçekten bir *"tam normal-şema"* olduğunu şöyle kanıtlıyabiliriz: her çarpan 'p_1',...,'p_n' harflerinden kurulu bir n-li temel-şemadır. Dolayısiyle, ayrıklığın bir çarpanında geçen her harf ayrıklığın bütün öbür çarpanlarında da geçiyor. Öte yandan, ayrıklığın her çarpanının geçiş sayısı 1 dir. Nitekim, sözünü ettiğimiz

harf dizileri birbirinden farklıdır. (Farklı harf dizilerinin sayısı en çok 2^n dir.) Oysa, farklı harf dizilerinin karşılığı olan temel-şemalar da farklıdır. Şu halde, bu harf dizilerine karşılık elde edilen bütün temel-şemalar birbirinden farklıdır. (İ.K.)

Böylece elde edilen bir tam normal-şemanın doğruluk-çjizelgesi, bu tam normal-şemayı türetmek için kullanılan doğruluk-çizelgesiyle özdeştir. Dolayısiyle, böyle bir tam normal-şema, kaynağı olan ilk şema ile eşdeğerdir. Örneğin § 13'teki (1) tam normal-şeması, kaynağı olan 'f(p,q,r)' şeması ile eşdeğerdir.

Bu metotla, sağ yanındaki sütunu salt 'Y' den ibaret olan doğruluk-çizelgesi bir yana bırakılırsa, her n-li doğruluk-çizelgesine karşılık bir tam normal-şema bulunabilr. Bu n-li tam normal-şemaları, çarpanlarının sayısına bakarak 1-çarpanlı, 2-çarpanlı,...,2^n-çarpanlı olmak üzere öbeklere ayırabiliriz. O zaman da "0-çarpanlı", yani hiç bir çarpanı olmıyan bir n-li tam normal-şemadan da söz edebiliriz. Böyle bir "sanal şema"ya *"boş-şema"* denir. Böylece, ***her n-li doğruluk-çizelgesine karşılık (istisnasız olarak) bir n-li tam normal-şema bulunduğunu*** söyleyebiliriz. n-li doğruluk-çizelgelerinin sayısı $2^{(2^n)}$ olduğundan, bu yolla elde edilen n-li tam normal-şemalarının sayısının $2^{(2^n)}$ olduğunu görüyoruz. Öte yandan, bu tam normal-şemaların her birinin doğruluk çizelgesi, kaynağı olan doğruluk-çizelgesiyle eşdeğer olduğından, söz konusu $2^{(2^n)}$ tane n-li tam normal-şemanın birbirinden farklı olduğu anlaşılır. Bu şemalardan herhangi ikisi hiç bir zaman birbiriyle eşdeğer değildir.

Böylece, 'p_1',...,'p_n' gib n tane temsilci-harften kurulu $2^{(2^n)}$ ***tane birbiriyle eşdeğer olmıyan n-li tam normal-şemanın bulunduğunu*** görüyoruz. (Ayrıksal veya birliksel çarpanların sırasının değişmesiyle elde edilen şemaları *"ayrı"* saymıyoruz!) Öte yandan, bu $2^{(2^n)}$ tane n-li tam normal-şemanın, 'p_1',...,'p_n' harflerinden kurulu bütün n-li tam normal-şemaları *tükettiğini* gösterebiliriz. Nitekim Ş, 'p_1',...,'p_n' den kurulu herhangi bir n-li tam normal-şema olsun. Ş nin doğruluk-çizelgesini kuralım. Sonra da, bu çizelgenin belirlediği tam normal-şemayı meydana getirelim. İşte, bu şekilde elde edilen şema, (birliksel ve ayrıksal çarpanların sırasını göz önünde tutmamak şartiyle) Ş ile özdeştir. Şu halde:

(1) Verilen n tane temsilci-harften kurulu bütün n-li tam normal-şemaların sayısı $2^{(2^n)}$ dir.

İmdi, verilen herhangi bir salt önerme-şemasının bir tam normal-şemaya dönüştürülebildiğini görmüştük. Öte yandan, birbiriyle eşdeğer olan iki şema-

nın karşılığı olan tam normal-şemalar da birbiriyle eşdeğer olmalı. Oysa, aynı harflerden kurulu olan farklı iki n-li tam normal-şema birbiriyle eşdeğer olamaz. Şu halde; 'p_1', 'p_2',...,'p_n' gibi n tane harften kurulu her (salt) şemaya karşılık, bu şema ile eşdeğer olan bir ve yalnız bir tek n-li tam normal-şema vardır.

$m \leqslant n$ oldukta, 'p_1',...,'p_n' harflerinin m tanesinden kurulu her m-li salt önerme-şeması da, onunla eşdeğer olan bir n-li tam normal şemaya dönüştürülebilir. Bu amaçla, verilen şema ile, bu şemanın içine almadığı harflerden kurulu bir totolojinin birlikte-evetlemesi meydana getirilir. (Bu şekilde elde edilen n-li şema, ilk şema ile eşdeğerdir.) Bu n-li şemayı da bir n-li tam normal-şemaya dönüştürürüz. Elde edilen n-li tam normal-şema ilk şema ile eşdeğerdir. Böylece şu önemli sonuca varıyoruz:

(2) Verilen n tane farklı temsilci-harfin bazılarından veya tümünden kurulu her salt önerme-şemasına karşılık, bu şema ile eşdeğer olan bir ve yalnız bir tek n-li tam normal-şema vardır. (Daha doğrusu, bu şema ile eşdeğer olan bütün n-li tam normal-şemalar birbirinden ancak çarpanlarının sırası bakımından farklıdır.)

Özellikle, çelişmelerin (yani tutarsız şemaların) karşılığı "boş-şema" dır. Totolojilerin karşılığı ise 2^n çarpanlı n-li tam normal-şemadan ibarettir. (Verilen n tane temsilci-harften kurulu n-li tam normal-şemalar arasında 2^n çarpanlı olan bir ve yalnız bir tek şema vardır.) Bu şemaya *"eksiksiz n-li tam normal-şema"* diyoruz. Herhangi bir n-li tam normal-şemanın her çarpanı aynı zamanda eksiksiz n-li tam normal-şemanın da bir çarpanıdır. Bu özelliği, *her n-li tam normal-şemanın, eksiksiz n-li tam normal-şemanın bir "alt-şema"sı olduğunu* söylemekle dile getiririz. Boş-şemayı da eksiksiz n-li tam normal-şemanın bir alt-şeması sayarız. Ayrıca, n-li tam normal-şema da, kendinin alt-şeması sayılır. Böylece, eksiksiz n-li tam-normal şemanın $2^{(2^n)}$ tane farklı alt-şeması olduğunu, n-li tam normal-şemaların da böylece söz konusu alt-şemalardan ibaret olduğunu söyleyebiliriz.

Eksiksiz n-li tam normal-şema, 'p_1',...,'p_n' harflerinden kurulu mümkün bütün temel-şemaların ayrıklığından ibarettir. Bu ise

(3) $p_1p_2 \ldots p_{n-1}p_n \vee p_1p_2 \ldots p_{n-1} \sim p_n \vee p \ldots\ldots \vee \sim p_1 \sim p_2 \ldots \sim p_{n-1} \sim p_n$

biçimindedir. (3) şeması, bir n-li totoloji olan:

(4) $(p_1 \vee \sim p_1) . (p_2 \vee \sim p_2) \ldots\ldots (p_n \vee \sim p_n)$

şemasının (' . ' nin 'v' ye göre dağıtıcılığına dayanan) açınımı olarak elde edilebilir. Bu açınımın 2^n çarpanlı bir n-li tam normal-şema olduğunu rekursif

yolla kanıtlıyabiliriz. Nitekim: n = 1 için (4) şeması '$p_1 \vee \sim p_1$' biçiminde bir 1-li tam normal-şemadır. n için, (4) ün açınımının

$$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$$

biçiminde bir n-li tam normal-şema olduğunu kabul edelim. O zaman

$$(p_1 \vee \sim p_1) \cdot (p_2 \vee \sim p_2) \ldots\ldots (p_n \vee \sim p_n) \cdot (p_{n+1} \vee \sim p_{n+1})$$
$$(A_1 \vee A_2 \vee \ldots\ldots \vee A_n) \cdot (p_{n+1} \vee \sim p_{n+1})$$

ile eşdeğer olduğundan, açınımı

$$A_1 \cdot p_{n+1} \vee \ldots \vee A_n \cdot p_{n+1} \vee A_1 \cdot \sim p_{n+1} \vee \ldots \vee A_n \cdot \sim p_{n+1}$$

biçiminde olur. Oysa bu formül, 2.2^n çarpanlı bir n+1 li tam normal-şemadır. $2.2^n = 2^{n+1}$ (İ.K.)

(2) ye dayanarak, şu sonucu elde edebiliriz:

(5) Herhangi bir şemanın bir totoloji olmasının gerekli ve yeterli bir şartı, bu şemanın bir eksiksiz tam-normal şemaya dönüştürülebilmesidir.

Tam normal-şemaların (§ 14'deki (III) metodu ile elde edilen) ikililerine, *"birliksel tam normal şemalar"* denir. (Tam normal-şemalar'a —onları birliksel tam normal-şemalardan ayırdetmek amaciyle— *"ayrıksal tam normal şemalar"* da denir.)

İkililik ilkelerine dayanarak, birliksel tam normal-şemaların aşağıdaki özellikleri olduğu kanıtlanabilir:

(6) Verilen n tane temsilci-harften kurulu bütün n-li birliksel tam normal-şemaların sayısı $2^{(2^n)}$ dir. Bunlardan herhangi ikisi hiç bir zaman birbiriyle eşdeğer değildir.

(7) Verilen n tane farklı temsilci-harfin bazılarından veya tümünden kurulu her salt önerme-şemasına karşılık, bu şema ile eşdeğer olan bir ve yalnız bir tek n-li birliksel n-li tam normal-şema vardır.

(8) $(p_1 \vee \ldots \vee p_n) \cdot (p_1 \vee \ldots \vee \sim p_n) \ldots\ldots\ldots (\sim p_1 \vee \ldots \vee \sim p_n)$

biçimindedir. Bu şema da, bir n-li çelişme olan

(9) $p_1 \sim p_1 \vee p_2 \sim p_2 \vee \ldots\ldots \vee p_n \sim p_n$

şemasının açınımı olarak elde edilebilir.

(10) Herhangi bir şemanın bir çelişme olmasını gerekli ve yeterli şartı, bu şemanın bir eksiksiz birliksel tam normal-şemaya dönüştürülebilmesidir.

Çelişmelerin karşılığının boş-şema olduğunu görmüştük. Bu da, bir çelişmenin hiç bir (boş olmıyan) normal-şemaya dönüştürülemediğinin başka bir şekilde dile getirilmesi demektir. Totolojilerin bir birliksel normal-şemaya dönüştürülmesini de, bunların karşılığının "boş birliksel tam normal-şema" (yani "0-lı birliksel tam normal-şema) olduğunu söylemek suretiyle dile getiriyoruz.

(11) Herhangi bir şemanın bir totoloji olmasının gerekli ve yeterli şartı, bu şemanın boş birliksel tam normal-şema ile eşdeğer olmasıdır.

(12) Herhangi bir şemanın bir çelişme olmasının gerekli ve yeterli şartı, bu şemanın boş ayrıksal tam normal-şema ile eşdeğer olmasıdır.

Aşağıda 1-li ve 2-li salt önerme-şemalarının ayrıksal ve birliksel tam normal-şemalarını (tüketici) bir şekilde gösteriyoruz:

1-li Şemalar:

	Ayrıksal 1-li tam normal-şema	*Birliksel 1-li tam normal-şema*
1-li totoloji	$p \vee \sim p$	boş-şema
p	p	p
$\sim p$	$\sim p$	$\sim p$
1-li çelişme	boş-şema	$p \sim p$

2-li Şemalar:

	Ayrıksal 2-li tam normal-şema	*Birliksel 2-li tam normal-şema*
2-li totoloji	$pq \vee p\sim q \vee \sim pq \vee \sim p\sim q$	boş-şema
$p \vee q$	$pq \vee p\sim q \vee \sim pq$	$p \vee q$
$p \subset q$	$pq \vee p\sim q \vee \sim p\sim q$	$p \vee \sim q$
p	$pq \vee p\sim q$	$(p \vee q) \cdot (p \vee \sim q)$
$p \supset q$	$pq \vee \sim pq \vee \sim p\sim q$	$\sim p \vee q$
q	$pq \vee \sim pq$	$(p \vee q) \cdot (\sim p \vee q)$
$p \equiv q$	$pq \vee \sim p\sim q$	$(p \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee q)$
$p \cdot q$	pq	$(p \vee q) \cdot (p \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee q)$
$p \mid q$	$p\sim q \vee \sim pq \vee \sim p\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
$p \neq q$	$p\sim q \vee \sim pq$	$(p \vee q) \cdot (\sim p \vee \sim q)$
$\sim q$	$p\sim q \vee \sim p\sim q$	$(p \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee \sim q)$
$p \nsubseteq q$	$p\sim q$	$(p \vee q) \cdot (p \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee \sim q)$
$\sim p$	$\sim pq \vee \sim p\sim q$	$(\sim p \vee q) \cdot (\sim p \vee \sim q)$
$p \not\subset q$	$\sim pq$	$(p \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee q) \cdot (\sim p \vee \sim q)$
$p \downarrow q$	$\sim p\sim q$	$(p \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee q) \cdot (\sim p \vee \sim q)$
2-li çelişme	boş-şema	$(p \vee q) \cdot (p \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee q)(\sim p \vee \sim q)$

Yukarıdaki 1-li ve 2-li şemaların ayrıksal normal-şemalarını doğruluk-çizelgelerine dayanarak (§ 14'deki (I) metoduyla) elde ederiz. Aynı şemaların birliksel tam normal-şemalarını elde etmek için (§ 13'te, ayrıksal tam normal-şemalar için kullandığımız kuralların ikilisi olan kurallara dayanan) dönüştürme metodunu kullanabiliriz. Örneğin: (p · q' şemasını ele alalım. Bu şema tek başına ('pq' olarak) 2 çarpanlı bir birliksel normal-şema durumundadır. Fakat "tam" değildir. Onu "tam" bir biçime getirmek için, birinci çarpana 'q∼q' yü, ikinci çarpana da 'p∼p'yi 'v' eklemi yardımiyle ekleriz. Eklenen bileşenler birer çelişme olduğundan, bu şekilde elde edilen '(p v q∼q) · (q v p∼p)' şeması 'pq' ile eşdeğer olur. İmdi, '(p v q∼q) · (q v p∼p)' şemasını, 'v' nin ' · ' ye göre dağıtıcılığından faydalanarak,

$$(p \vee q) \cdot (p \vee \sim q) \cdot (q \vee p) \cdot (q \vee \sim p)$$

biçimine dönüştürebiliriz. Bu son şemayı da

$$(p \vee q) \cdot (p \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee q)$$

biçimine indirgeyebiliriz. Bu ise 'pq' nün birliksel 2-li tam normal-şemasından başka bir şey değildir.

1-li ve 2-li şemaların ayrıksal ve birliksel tam normal-şemalarının çizelgesinden, şu ikililik-bağlantılarını ortaya çıkarabiliriz:

1-li Şemalar:

(13) 1-li totoloji)——(1-li çelişme (kendiyle ters-ikili)

(14) 'p')——('p' (kendiyle-ikili)

(15) '∼p')——('∼p' (kendiyle-ikili)

2-li Şemalar:

(16) 2-li totoloji)——(2-li çelişme (kendiyle ters-ikili)

(17) 'p ≡ q')——('p ≢ q' (kendiyle ters-ikili)

(18) 'p')——('p' (kendiyle-ikili)

(19) '∼p')——('∼p' (kendiyle-ikili)

(20) 'pq')——('p v q'

(21) 'p⊃q')——('p⊄q'

(22) 'p⊂q')——('p⊅q'

(23) 'p | q')——('p ↓ q'

Genel olarak, Ş herhangi bir şema oldukta, Ş nin birliksel tam normal şemasını elde etmek için, ilk önce Ş nin doğruluk çizelgesini (Ş nin doğruluk değeri-analizi sonucunda) kurarız. Bundan sonra da, bu doğruluk çizelgesinde 'D' yerine 'Y', 'Y' yerine 'D' koymak suretiyle Ş nin ikilisinin doğruluk çizelgesini elde ederiz. Bu son doğruluk çizelgesi yardımiyle $Ş_1$ gibi bir ayrıksal tam-normal şemayı elde ederiz.

$$Ş \rangle\!\!-\!\!-\!\!\langle Ş_1$$

Sonra, $Ş_1$ ayrıksal tam-normal şemasının ikilisi olan $Ş_2$ birliksel tam normal-şemasını meydana getiririz.

$$Ş_1 \rangle\!\!-\!\!-\!\!\langle Ş_2$$

$$Ş \rangle\!\!-\!\!-\!\!\langle Ş_1 \text{ ve } Ş_1 \rangle\!\!-\!\!-\!\!\langle Ş_2 \text{ den (§ 14'deki (8) gereği)}$$

$$Ş \leftrightarrow Ş_2$$

elde edilir. Şu halde, $Ş_2$ şeması, Ş şemasının aranılan birliksel tam normal-şemasından başka bir şey değildir.

Örneğin: Ş şeması olarak

$$(p \vee \sim q) \cdot r$$

gibi bir 3-lü şema seçelim. Bu şemanın ikilisi olan ayrıksal tam normal-şema da $Ş_1$ olsun. Ş ile $Ş_1$ şemalarının doğruluk çizelgelerini aşağıda gösteriyoruz:

	p	q	r	Ş
1.	D	D	D	D
2.	D	D	Y	Y
3.	D	Y	D	D
4.	D	Y	Y	Y
5.	Y	D	D	Y
6.	Y	D	Y	Y
7.	Y	Y	D	D
8.	Y	Y	Y	Y

	p	q	r	$Ş_1$
8.	Y	Y	Y	Y
7.	Y	Y	D	D
6.	Y	D	Y	Y
5.	Y	D	D	D
4.	D	Y	Y	D
3.	D	Y	D	D
2.	D	D	Y	Y
1.	D	D	D	D

$Ş_1$ in doğruluk-çizelgesini, Ş nin doğruluk çizelgesinde 'D' yerine 'Y', yerine de 'D' koymak suretiyle elde ettik. Bu son çizelgeye göre $Ş_1$ ayrıksal tam normal şemasının

$$pqr \vee p \sim qr \vee p \sim q \sim r \vee \sim pqr \vee \sim p \sim qr$$

biçiminde olduğu ortaya çıkar.

$Ş_1$ böylece bulunduktan sonra, $Ş_1$'de 'v' yerine ' · ', ' · ' yerine de 'v' koyarak, $Ş_1$ in ikilisi olan $Ş_2$ birliksel tam normal şemasını elde ederiz. Buna göre, $Ş_2$ nin

$$(p \vee q \vee r) \cdot (p \vee \sim q \vee r) \cdot (p \vee \sim q \vee \sim r) \cdot (\sim p \vee q \vee r) \cdot (\sim p \vee \sim q \vee r)$$

biçiminde olduğu meydana çıkar. Bu son şema ise Ş şemasının aranılan birliksel tam normal-şemasıdır.

Verilen bir şemanın birliksel tam normal şemasını, bu şemanın doğruluk-çizelgesine dayanarak elde edecek yerde, bir de (doğruluk-çizelgesine başvurmaksızın) bu şemanın ayrıksal tam normal şeması yardımiyle bulabiliriz. Örnek olarak sözü geçen '$(p \vee \sim q) \cdot r$' şemasını yeniden ele alalım. Bu şemanın ayrıksal tam normal-şeması Ş olsun. Ş şeması

$$pqr \vee p \sim qr \vee \sim p \sim qr$$

biçimindedir. İmdi, sözü geçen şemanın ayrıksal tam normal şemasının bu biçimde olduğunun önceden bilindiğini kabul edelim. O zaman Ş ile eşdeğer olan birliksel tam normal şemayı (doğruluk çizelgelerini kurmadan) nasıl elde edebileceğimizi araştıralım.

'p', 'q' ve 'r' temsilci harflerine yüklenebilen doğruluk değerleri için tam sekiz şık vardır: 1.ci şıkta 'p', 'q' ve 'r' nin üçü de 'D' değerini alır; 2.ci şıkta 'p' ve 'q' 'D' değerini, 'r' 'Y' değerini alır ;.....; 8.ci şıkta 'p', 'q' ve 'r' nin üçü de 'Y' değerini alır. Buna göre, (a) şemasının 1.ci, 3.cü ve 7.ci şıkta (ve yalnız bu şıklarda) 'D' değerini aldığını söyleyebiliriz. Bu durumu kısaca

Ş şemasının karşılığı (1, 3, 7) dir

önermesiyle dile getireceğiz.

Ş şemasının ikilisi olan ayrıksal tam normal-şema $Ş_1$ olsun. Amacımız $Ş_1$ şemasının (yukarıdaki anlamda) "karşılığını" bulmaktır. Ş ve $Ş_1$ birbirinin kilisi olan birer 3-lü şema olduğundan, $Ş_1$ in 'D' değerini aldığı şıklar Ş nin aldığı değerler yardımiyle şöyle belirlenir:

Ş 1.ci şıkta 'Y' değerini alsa, $Ş_1$ 3. ci şıkta 'D' değerini alır.

Ş 2.ci şıkta 'Y' değerini alsa, $Ş_1$ 7.ci şıkta 'D' değerini alır.

.....

.....

Ş i.nci şıkta 'Y' değerini alsa, $Ş_1$ 8-i + 1 nci şıkta 'D' değerini alır.

.....

.....

Ş 8.nci şıkta 'Y' değerini alsa, $Ş_1$ 1.ci şıkta 'D' değerini alır.

Oysa, Ş şeması 1.ci, 3.cü ve 7.ci şıklarda (ve yalnız bu üç şıkta) 'D' değerini alıyor. Dolayısiyle 2.ci, 4.cü, 5.ci 6.cı ve 8.nci şıklarda 'Y' değerini alır.

İmdi, Ş şemasının 'Y' değerini aldığı bütün şıklarda (ve yalnız bu şıklarda) 'D' değerini alan bir şema, Ş nin hayırlanmasiyle eşdeğerdir. Şu halde $\sim$Ş şeması 2.ci, 4.cü, 5.ci, 6.cı ve 8.ci şıklarda 'D' değerini alır. Başka bir deyimle, Ş şemasının karşılığı (2, 4, 5, 6, 8) dir.

Ş şemasının karşılığını böylece tespit ettikten sonra, artık $Ş_1$ in karşılığını kolayca belirleyebiliriz. Nitekim (yukarıda belirttiğimiz gibi) Ş nin i.nci şıkta 'Y' değerini alması halinde, $Ş_1$ 8 — i + 1 nci şıkta 'D' değerini aldığına göre; $\sim$Ş i.ci şıkta 'D' değerini alırsa, $Ş_1$ de 8 — i + 1 nci şıkta 'D' değerini alır. Buna göre $Ş_1$ in karşılığını şöyle hesaplıyabiliriz:

$$8-2+1=7$$
$$8-4+1=5$$
$$8-5+1=4$$
$$8-6+1=3$$
$$8-8+1=1$$

Şu halde $Ş_1$ in karşılığı (1, 3, 4, 5, 7) dir. Dolayısiyle de $Ş_1$ in

$$pqr \vee p\sim qr \vee p\sim q\sim r \vee \sim pqr \vee \sim p\sim qr$$

biçiminde olduğu ortaya çıkar. Ondan sonra, $Ş_1$ in ikilisi olan $Ş_2$ birliksel tam normal şemayı bir hamlede elde edebiliriz. Bunun için, $Ş_1$'de 'v' yerine '$\cdot$', '$\cdot$' yerine de 'v' koymak yetiyor. Böyleec $Ş_2$ nin

$$(p \vee q \vee r) \cdot (p \vee \sim q \vee r) \cdot (p \vee \sim q \vee \sim r) \cdot (\sim p \vee q \vee r) \cdot (\sim p \vee \sim q \vee r)$$

biçiminde olduğu sonucu çıkar. Ş)——($Ş_1$ ve $Ş_1$)——($Ş_2$ olduğundan, Ş $\leftrightarrow$ $Ş_2$. Şu halde, $Ş_2$ şeması, Ş şemasının aranılan birliksel tam normal şemasıdır.

Genel olarak, Ş herhangi bir ayrıksal n-li tam normal-şema oldukta, Ş ile eşdeğer olan birliksel n-li tam normal şemayı şöyle bulabiliriz:

İlk önce nin "karşılığı" (yani 'D' değerini aldığı şıklar) tespit edilir. Bu karşılık

$$(m_1, m_2, \ldots, m_k)$$

olsun. [1]

n-li şemalar halinde, mümkün olan bütün şıkların sayısı 2^n olduğundan:

$$1 \leqslant m_i \leqslant 2^n \qquad i = 1, 2, \ldots, k$$
$$0 \leqslant k \leqslant 2^n$$

Ş nin karşılığı bulunduktan sonra, mümkün olan 2^n şıktan sözü geçen $m_1, m_2, \ldots, m_k$ nci şıklar çıkarılarak, arta kalan şıklar tespit edilir. Bu şıkların sayısı $2^n - k$ dır. Bu $2^n - k$ tane şık ta $h_1, h_2, \ldots, h_{2^n - k}$ nci şıklar olsun. Buna göre, $\sim$Ş şemasının karşılığını

$$(h_1, h_2, \ldots., h_{2^n - k})$$

biçiminde dile getirebiliriz.

$\sim$Ş nin karşılığını böylece belirledikten sonra, $Ş_1$ in karşılığı şu biçimde belirlenir:

$$(2^n - h_{2^n - k} + 1, \ldots., 2^n - h_1 + 1)$$

$Ş_1$ in karşılığına [2] dayanarak ta, ilk önce $Ş_1$ in kendisi (bir ayrıksal tam normal şema olarak) elde edilerek; ondan sonra $Ş_1$'de ' · ' yerine 'v', 'v' yerine de ' · ' koymak suretiyle $Ş_1$ ile eşdeğer olan $Ş_2$ birliksel, tam normal-şemasını bulmak mümkündür.

Bu son metoda dayanarak, 2-li şemaların birliksel tam normal-şemalarını, bu şemaların ayrıksal tam normal-şemalarından kolayca elde edebiliriz.

Örnek olarak 'p $\not\equiv$ q' şemasının birliksel tam normal-şemasını bu metotla bulmağa çalışalım. Bu şemanın ayrıksal tam normal-şeması

$$p \sim q \text{ v } \sim pq$$

dür. Buna göre, bu şemanın karşılığının (2, 3) olduğunu ortaya çıkarırız. O zaman, şemamızın hayırlanmasının karşılığı (1, 4) olur. Şemamız bir 2-li şema olduğuna göre $2^2 = 4$ tane mümkün şık vardır. Şu halde şemamızın ikilisinin karşılığı,

$$4 - 4 + 1 = 1$$
$$4 - 1 + 1 = 4$$

olduğundan, (1, 4) olur. İmdi, karşılığı (1, 4) olan ayrıksal tam normal şema

$$pq \text{ v } \sim p \sim q$$

dür. Bu şemanın ikilisi olan birliksel tam normal şema

$$(p \text{ v } q) \cdot (\sim p \text{ v } \sim q)$$

dür. Bu ise aradığımız birliksel tam normal şemadan başka bir şey değildir.

Pratikte, doğruluk-çizelgesi veya ayrıksal tam normal-şeması verilmiş olan herhangi bir şemanın birliksel tam normal-şeması şöyle bir metotla elde edilir:

Ş herhangi bir n-li şema, $Ş_i$ de Ş nin bir ikilisi olsun. 'A_i' sembolünü 'p' veya '$\sim p_j$' nin bir kısaltması olarak kullanalım. O zaman her temel-şema '$A_1 \ldots A_n$' biçiminde olur. İmdi, eksiksiz ayrıksal n-li tam normal-şemanın i.nci çarpanı '$A_1 \ldots A_n$' ise, $2^n - i + 1$ nci çarpanı '$\sim A_1 \ldots \sim A_n$' dır. Dolayısiyle, '$A_1 \ldots A_n$' ~Ş şemasının ayrıksal n-li tam normal-şemasının bir çarpanı ise, '$\sim A_1 \ldots \sim A_n$' $Ş_i$ şemasının ayrıksal n-li tam normal-şemasının bir çarpanıdır. Bu son şemanın bütün çarpanları da '$A_1 \ldots A_n$' ~Ş nin normal-şemasının bir çarpanı olmak üzere— '$\sim A_1 \ldots \sim A_n$' biçimindedir.

Buna göre, $Ş_i$ in ayrıksal n-li tam normal-şemasını elde etmek için, Ş nin 'Y' değerini aldığı şıkları tespit ederiz. Ondan sonra da, bu şıkların karşılığı olan '$A_1 \ldots A_n$' biçimindeki temel-şemaları kurar, bunları da '$\sim A_1 \ldots \sim A_n$' biçiminde değiştiririz. Bunların da ayrıklığı $Ş_i$ in ayrıksal n-li tam normal-şemasını meydana getirir. Bu son şemada da ' · ' yerine 'v', 'v' yerine ' · ' koyarak Ş nin birliksel n-li tam normal-şemasını elde ederiz. Buna göre, Ş nin birliksel n-li tam normal-şemasının çarpanlarının —'$A_1 \ldots A_n$' ~Ş nin ayrıksal n-li tam normal-şemasının bir çarpanı olmak üzere— 'A_1 v ... v A_n' biçiminde olduğu anlaşılır.

Şu halde Ş gibi ***herhangi bir şemanın birliksel n-li tam normal-şemasını*** elde etmek için, ilk önce bu şemanın 'Y' değerini aldığı şıkları tespit ederiz. Bu da, ya şemanın doğruluk-çizelgesi, ya da ayrıksal n-li tam normal-şeması yardımiyle yapılabilir. Bundan sonra, tespit edilen her şıkkın karşılığı olan 'A_1',...,'A_n' biçimindeki yalın-şema dizilerini elde ederiz. Ondan sonra da, 'A_1',...,'A_n' biçimindeki her diziden '$\sim A_1$ v ... v $\sim A_n$' biçimindeki bir ayrıklık kurulur. Bu ayrıklıkların birlikte-evetlenmesi aranılan birliksel n-li tam normal-şemadır.

Örneğin: sözü geçen '(p v ~q) · r' şemasının 'Y' değerini aldığı şıklar 2.ci, 4.cü, 5.ci, 6. cı ve 8.ci şıklardan ibarettir. Bu şıkların karşılığı olan yalın-şema dizileri:

p, q, ~r; p, ~q, ~r; ~p, q, r; ~p, q, ~r; ~p, ~q; ~r

dir. Bu dizilerden, Ş nin birliksel n-li tam normal-şeması olan

(p v q v r) · (p v ~q v r) · (p v ~q v ~r) · (~p v q v r) . (~p v ~q v r)

tam-deyimi elde edilir.

Ş nin birliksel n-li tam normal-şemasını sözü geçen yalın-şema dizilerine başvurmadan da şöyle elde edebiliriz: İlk önce Ş nin 'Y' değerini aldığı şıklar tespit edilir. Her şık —'d_i' sembolü 'D' veya 'Y' nin bir kısaltması olmak üzere— '$d_1,\ldots,d_n$' biçimindeki bir dizi ile belirlenmiştir. İmdi, '$d_1,\ldots,d_n$' şıkkının karşılığı olan çarpan 'A_1 v ... v A_n' olsun O zaman, $d_i = D$ ise, $A_i = \sim p_i$; $d_i = Y$ ise, $A_i = p_i$ olur.

Ayrıksal veya birliksel tam normal şemalara dayanarak, şu önemli özelliği kanıtlamak mümkündür:

Daha önce gösterdiğimiz gibi, her önerme şeması sadece '~', '·', 'v', '⊃' ve '≡' eklemlerinin tümü veya bazıları yardımiyle kurulabilir. 'p_1' 'p_2',..., 'p_n' gibi n tane farklı temsilci harfinin tümünden veya bazılarından kurulu olan şemaları göz önüne alalım. Bu şemalardan en çok $2^{(2^n)}$ tanesi birbirinden bağımsız olabilir. (Nitekim n-li doğruluk-çizelgelerinin sayısı $2^{(2^n)}$ dir. Oysa, birbirinden bağımsız olan yani birbiriyle eşdeğer olmıyan şemaların doğruluk-çizelgeleri ayrı olmalıdır.) Şimdi şu soruyu ortaya atıyoruz: Sözü geçen $2^{(2^n)}$ birbirinden bağımsız n-li şemalardan '~' eklemini içine almıyanların sayısı nedir? Bu soruyu şu biçime de sokabiliriz: Her n-li önerme-eklemi sadece '~', '·', 'v', '⊃' ve '≡' eklemleri yardımiyle tanımlanabilir. Bütün bu n-li önerme eklemlerinin sayısı da $2^{(2^n)}$ dir. İşte bu $2^{(2^n)}$ tane n-li önerme ekleminden kaç tanesi '~' eklemi kullanılmadan, salt '·', 'v', '⊃' ve '≡' eklemleri yardımiyle tanımlanabilir? Bu sayının $1/2\ 2^{(2^n)}$ olduğunu, yani söz konusu önerme-ekemlerinin bütün n-li eklemlerin yarısını meydana getirdiğini göstereceğiz.

(24) a. Her hangi bir n-li şemanın '~' siz kurulabilmesinin gerekli ve yeterli bir şartı, bu şemanın *ayrıksal* n-li tam normal-şemasında '$p_1 \ldots p_n$' çarpanının (yani sadece hayırlanmamış harflerden kurulu çarpanın) bulunmasıdır.

b. Her hangi bir n-li şemanın '~' siz kurulabilmesinin gerekli ve yeterli şartı da, bu şemanın *birliksel* n-li tam normal-şemasında '$\sim p_1$ v ... v $\sim p_n$' (yani sadece hayırlanmış harflerden kurulu çarpanın) bulunmamasıdır.

c. '~' siz kurulabilen her n-li şema, '~' siz kurulamıyan bir n-li şemanın hayırlanmasiyle eşdeğerdir. '~' siz kurulamıyan her n-li şema da, '~' siz kurulabilen bir n-li şemanın hayırlanmasiyle eşdeğerdir.

d. Sayısı $2^{(2^n)}$ olan birbirinden bağımsız n-li salt önerme-şemalarının tam yarısı '~' eklemi kullanılmadan, sadece '·', 'v', '⊃' ve '≡' eklemleri yardımiyle kurulabilir.

Kanıt :

a) *Şart gerekli dir:* Ş gibi bir n-li şema '~' siz kurulabilirse, Ş nin ayrıksal n-li tam normal şemasında '$p_1 \ldots p_n$' çarpanı bulunur. Nitekim böyle bir çarpan yoksa, ayrıksal tam normal-şema, temsilci-harflerin her birine 'D' değeri verilmesi halinde 'Y' değerini alır. (Böyle bir durumda, her çarpanda bir 'Y'

bulunur, dolayısiyle her çarpan da 'Y' değerini alır. Böylece ayrıklığın tümü 'Y' değerini alır.) Oysa, '$\sim$' siz olarak salt '$\cdot$', 'v', '$\supset$' ve '$\equiv$' eklemleri yardımiyle kurulu bir şema, bütün temsilci harflerine 'D' değeri yüklenmesi halinde, 'Y' değil, 'D' değerini alır. Şu halde, '$p_1 \ldots p_n$' çarpanı bulunmıyan bir ayrıksal n-li tam normal-şema, '$\sim$' siz bir şema ile eşdeğer olamaz. (İ.K.)

Şart yeterlidir: Ş şemasının ayrıksal n-li tam normal-şemasında '$p_1 \ldots p_n$' çarpanı bulunursa, Ş şeması '$\sim$' siz kurulabilir. Nitekim Ş şemasının n-li tam normal şeması

$$A_1 \text{ v } A_2 \text{ v } \ldots . \text{ v } A_j \qquad (1 \leqslant j \leqslant 2^n)$$

biçiminde olsun. 'A_i' i '$p_1 \ldots p_n$' çarpanının kısaltması olarak kullanıyoruz.

İmdi, bu şemayı

$$A_1 \text{ v } (A_1 \text{ v } A_2) \text{ v } (A_1 \text{ v } A_3) \text{ v } \ldots \text{ v } (A_1 \text{ v } A_j) \text{ v } \ldots \text{ v } (A_1 \text{ V } A_j)$$

biçimine dönüştürebiliriz.

Bu çok çarpanlı ayrıklığın birinci çarpanı olan 'A_1' ('$p_1 \ldots p_n$' biçiminde olduğundan) '$\sim$' siz bir bileşendir. Geri kalan 'A_1 v A_2',...,'A_1 v A_i', ... , 'A_1 v A_j' çarpanlarının her birini de '$\sim$' siz bir biçime dönüştürebiliriz.

Nitekim, 'A_i' (i = 2, 3, ... , j)

$$p_{m_1} p_{m_2} \cdots p_{m_k} \sim p_{h_1} \sim p_{h_2} \cdots \sim p_{h_{n-k}} \qquad (0 \leq k \leq n)$$

biçimindedir. k=o ise, 'A_i' '$\sim p_1 \sim p_2 \ldots \sim p_n$' olur. O zaman da '$A_1$ v A_i' çarpanı

$$p_1 p_2 \ldots p_n \text{ v } \sim p_1 \sim p_2 \ldots \sim p_n$$

olur. Oysa bu deyim

$$p_1 \ldots p_n \text{ v } \sim (p_1 \text{ v } \ldots \text{ v } p_n)$$

biçimine; bu da

$$(p_1 \text{ v } \ldots \text{ v } p_n) \supset p_1 \ldots p_n$$

biçimine dönüştürülebilir. Bu ise '$\sim$' siz bir bileşendir.

Öte yandan, k $\rangle$ o ise, (hep n-k $\rangle$ o olduğundan) 'A_1 v A_i' çarpanı

$$p_1 \cdots p_n \text{ v } p_{m_1} \cdots p_{m_k} \sim p_{h_1} \cdots \sim p_{h_{n-k}}$$

biçiminde olur. Bu ise

$$p_1 \cdots p_n \text{ v } p_{m_1} \cdots p_{m_k} \sim (p_{h_1} \text{ v } \cdots \text{ v } p_{h_{n-k}}$$

ya dönüştürülebilir. Bu son deyim de ('$p \sim q$' ile '$\sim (p \supset q)$' nün eşdeğerliği

$$p_1 \cdots p_n \text{ v } \sim [p_{m_1} \cdots p_{m_k} \supset (p_{h_1} \cdots p_{h_{n-k}})]$$

biçimine dönüştürülebilir. Bu deyim de, artık '~' siz bir bileşen olan

$$[p_{m_1} \ldots p_{m_k} \supset (p_{h_1} \ldots p_{h_{n-k}})] \supset p_1 \ldots p_n$$

deyimine dönüştürülebilir.

Böylece, sözü geçen ayrıksal tam normal şemanın tümünün de '~' siz bir biçime dönüştürülebileceğini görüyoruz. (İ.K.)

b) Ş her hangi bir n-li şema, $Ş_1$ Ş nin ayrıksal n-li tam normal-şeması, $Ş_2$ $Ş_1$ in ikilisi olan ayrıksal n-li tam normal-şema, $Ş_3$ te $Ş_2$ nin ikilisi olan birliksel n?li tam normal-şema olsun. O zaman, $Ş_1$ şemasında '$p_1 \ldots p_n$' çarpanının bulunmasının gerekli ve yeterli şartı, $Ş_3$ şemasında '$\sim p_1 \vee \ldots \vee \sim p_n$' çarpanının bulunmamasıdır.

Nitekim:

$Ş_1$ şemasında '$p_1 \ldots p_n$' in bulunmasının gerekli ve yeterli şartı, $Ş_1$ in karşılığında "1" in bulunmasıdır.

$Ş_1$ in karşılığında "1" in bulunmasının gerekli ve yeterli şartı, $\sim Ş_1$ in karşılığında "1" in bulunmamasıdır.

$Ş_1$ in karşılığında "1" in bulunmamasının gerekli ve yeterli şartı, $Ş_2$ nin karşılığında $2^n - 1 + 1$ sayısının, yani "2^n" in bulunmamasıdır.

$Ş_2$ nin karşılığında "2^n" in bulunmamasının gerekli ve yeterli şartı, $Ş_3$ te '$p_1 \vee \ldots \vee p_n$' çarpanının bulunmamasıdır.

Şu halde, $Ş_1$ şemasında '$p_1 \ldots p_n$' çarpanının bulunmasının gerekli ve yeterli şartı, $Ş_3$ şemasında '$\sim p_1 \vee \ldots \vee \sim p_n$' çarpanının bulunmamasıdır.

Oysa, (24 a) gereği, Ş şemasının '~' siz olmasının gerekli ve yeterli şartı, $Ş_1$ şemasına '$p_1 \ldots p_n$' in bulunmasıdır. Şu halde, Ş nin '~' siz olmasının gerekli ve yeterli şartı, $Ş_3$ te '$\sim p_1 \vee \ldots \vee \sim p_n$' in bulunmamasıdır. (İ.K.)

c) Ş şeması, '~' siz kurulabilen herhangi bir n-li şema, $Ş_1$ de Ş'nin ayrıksal n-li tam normal-şeması olsun. ((24 a) gereği) $Ş_1$ şemasında '$p_1 \ldots p_n$' çarpanı bulunur. O zaman $\sim Ş_1$'de '$p_1 \ldots p_n$' çarpanı geçmez. Dolayısiyle $\sim Ş$ şeması ((24 a) gereği) '~' siz kurulamıyan bir şemadır. Oysa, Ş şeması $\sim Ş$ şemasının hayırlanmasiyle eşdeğerdir. Şu halde, '~' siz kurulabilen her hangi bir şemanın, '~' siz kurulamıyan bir şemanın hayırlanmasiyle eşdeğer olduğu görülür.

Öte yandan, Ş şeması '~' siz kurulamıyan her hangi bir n-li şema, $Ş_1$ de Ş nin ayrıksal tam normal-şeması olsun. $Ş_1$ şemasında '$p_1 \ldots p_n$' çarpanı geçmez. Dolayısiyle $\sim Ş_1$ şemasında '$p_1 \ldots p_n$' çarpanı geçer. Şu halde, $\sim Ş$ şema-

sı '~' siz kurulabilen bir şemadır. O halde, '~' siz kurulamıyan her hangi bir şema, '~' siz kurulabilen bir şemanın hayırlanmasiyle eşdeğerdir. (İ.K.)

d) $Ş_1,\ldots,Ş_k$ ($k = 2^{(2^n)}$) '~', '·', 'v', '⊃' ve '≡' eklemleri yardımiyle 'p_1', ..., 'p_n' gibi n tane temsilci-harften kurulu $2^{(2^n)}$ tane birbirinden bağımsız şema olsun. Bu şemaları '~' siz kurulabilen şemaların K_1 kümesiyle, '~' siz kurulamıyan şemaların K_2 kümesine tüketici bir şekilde ayırabiliriz. (24 c) gereği, K_1 ile K_2 kümeleri arasında "bire-bir" bir tekabül vardır. Yani, K_1 in her üyesine karşılık K_2 nin bir üyesi, K_2 nin her üyesine karşılık ta K_1 in bir üyesi belirlenmiştir. Nitekim, K_1 in üyesi olan her hangi bir şemaya karşılık, bu şemanın hayırlanmasiyle eşdeğer olan K_2 ye ait bir şema vardır. K_2 nin üyesi olan her şemaya karşılık ta, bu şemanın hayırlanmasiyle eşdeğer olan K_1 e ait bir şema vardır. Dolayısiyle, K_1 ile K_2 nin üyelerinin sayısı eşittir. Oysa her iki kümenin üye sayısının toplamı $2^{(2^n)}$ dir. Şu halde, K_1 ile K_2 kümelerinin her birinin üye sayısı $2^{(2^n)}$ dir. (İ.K.)

(24 d) yi şu şekilde de kanıtlıyabiliriz: '~' siz kurulabilen n-li şemaların ayrıksal n-li tam normal-şemaları, '$p_1 \ldots p_n$' çarpanını içine almıyan ayrıksal n-li tam normal-şemalardan ibarettir. Bunlar da $2^n - 1$ tane çarpanın tümünden veya bazılarından kurulabilen ayrıksal n-li tam normal-şemalardan başka bir şey değildir. Oysa, bu türlü şemaların sayısı $2^{(2^n-1)} = 2^{(2^n)} \cdot 2^{-1} = 1/2\ 2^{(2^n)}$ dir. (İ.K.)

Örneğin: 1-li şemalar arasında *totoliji* ve *evetleme* '~' siz kurulabilen şemalar, *çelişme* ve *hayırlama* '~' siz kurulamıyan şemalardır. 16 tane birbirinden bağımsız 2-li eklemlere gelince; bunların (§ 9 daki (5) çizelgesine göre) ilk sekizi '~' siz kurulabilir, son sekizi de '~' siz kurulamaz.

§ 16. Mantıksal İletme-Ağları

Önermeler-mantığının (özellikle "normal-şemalar teorisi"nin) *"çevirgeçlik elektrik devreleri"* (switching circuits) ve genel olarak her türlü *"iletme ağları"* (communication networks) ile çok yakın bir ilgisi vardır.[1] Bu bakımdan, günümüzde çevirgeçli devrelere *"mantıksal devreler"* (logic circuits), iletme-ağlarına da *"mantıksal ağlar"* (logic networks) da denilmektedir.

Bir *iletme-ağı*, bir "kaynak"tan çıkan belli bir "madde"yi bir yerden başka bir yere kadar *iletmeğe* yarayan bir düzendir. İletilen maddenin giriş ve çıkış yerlerine, ağın *"kutuplar"*ı denir. Kutuplar birbirine bir takım *"iletkenler"* (yani kaynaktan çıkan maddeyi serbestçe ileten yollar) araciyle bağlıdır. İletkenlerin ek yerlerinde —birer *"çevirgeç"* (switch, Schalter, commutateur) ile *açılıp kapatılabilen*— (oynar) *"köprüler"* (Schaltstrecken[2]) bulunur. İletilen madde kapalı köprülerden geçer, açık köprülerden ise geçemez.

İletilen "madde" *elektrik akımı* olduğu gibi, herhangi bir *gaz, sıvı* veya *katı madde* olabilir. "İletkenler" —iletilen maddenin türüne göre— teller, borular, otomobil yolları, demiryolları, v.ö.; "çevirgeçler" de elektrik anahtarları veya çevirgeçleri, musluklar, yol sinyalleri, demiryolu makasları, v.ö.'den ibarettir.

Önermeler mantığı ile iletme-ağları arasındaki bağlantıları şöyle aydınlatabiliriz:

(1) Seri-bağlama.



şek - 1

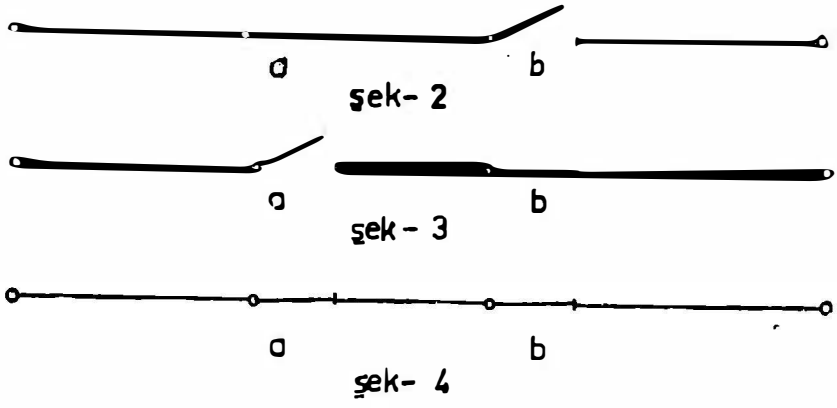
Şek. 1'de birbiriyle *seri* olarak bağlanmış iki "köprü"sü olan iki-kutuplu bir iletme-ağını gösteriyoruz. Bu iki köprünün *bağımsız* olduğunu kabul ediyoruz. Yani köprülerden birinin açık veya kapalı olması, öbürünün açık veya kapalı olmasına bağlı değildir. Bu özelliği köprüleri 'a' ve 'b' gibi ayrı harflerle göstermek suretiyle belirtiyoruz. Köprülerin birbirinden bağımsız olduğunu, her birinin *ayrı bir çevirgeçin yönetimi* altında bulunması şeklinde yorumlıyacağız.

Her çevirgecin bir veya birden çok sayıda köprüyü yönetebildiğini kabul ediyoruz. Herhangi bir çevirgeç (belli bir anda) ya *"durma"* halindedir, ya da *"işletilmiş"* halde. Bir çevirgeç *"durma"* halinde olduğu zaman, yönetimi altında olan bütün köprüler *açık* olur; çevirgeç *"işletilmiş"* hale geçtiği zaman da bu köprülerin tümü *kapalı* duruma geçer. Şu halde, *aynı* bir çevirgecin yönetimi altında bulunan köprülerin tümü (belli bir anda) ya açıktır ya da kapalı. Dolayısiyle bu türlü köprülerin birbirinden *bağımsız olmadığını* görüyoruz. (Köprülerden biri açık ise, öbürleri de açıktır; köprülerden biri kapalı ise, öbürleri de kapalıdır.)

Aynı bir çevirgeç tarafından yönetilen bütün köprüleri *aynı* harfle gösteriyoruz. Genel olarak, çevirgeçleri '(a)', '(b)', '(c)',...,'(a_1)', '(b_1)', '(c_1)',... gibi parentezler içine alınmış (indissiz veya indisli küçük harflerle göstereceğiz. Aynı küçük harfleri parantezsiz olmak şartiyle köprüler için de kullanıyoruz: (a) çevirgecinin yönettiği her köprüyü 'a' ile, (b) çevirgecinin yönettiği her köprüyü 'b' ile,... gösteriyoruz.

Şimdi şek. 1'deki iletme-ağına dönelim. Bu ağda a ve b gibi (bağımsız) iki köprü olduğundan, bu köprülerin açık veya kapalı olması bakımından dört ve

yalnız dört şık mümkündür: Ya a açık ve b açıktır, ya a kapalı ve b açıktır; ya a açık ve b kapalıdır; ya da a kapalı ve b kapalıdır. Şek. 1 1.ci şıkkı gösteriyor (her iki köprü açıktır). Geriye kalan üç şıkkı da aşağıda gösteriyoruz:



Şek- 2

Şek - 3

Şek- 4

Herhangi bir iletme-ağına uygun bir kaynak bağlandıkta, kaynaktan çıkan madde bir kutuptan öbür kutba kadar iletilirse, ağın "iletici durumda" veya kısaca *"iletici"* olduğunu söyleriz.

İmdi, ağımıza uygun bir kaynağın bağlandığını düşünelim. O zaman, kaynaktan çıkan madde ancak 4.cü şıkta (yani her iki köprünün kapalı olması halinde) bir kutuptan öbür kutba kadar iletilir; 1.ci, 2.ci ve 3.cü şıklarda iletilmez. Başka bir deyimle: seri-bağlama halinde, her iki köprü açık ise, ağ iletici değildir; köprülerden biri açık öbürü kapalı ise ağ gene iletici değildir; her iki köprü kapalı ise, ağ ileticidir. Bu şıklar tüketici olduğundan, *seri-bağlama halinde, ağın iletici olmasının gerekli ve yeterli şartının, her iki köprünün kapalı olmasından* ibaret olduğu görülür.

Öte yandan, herhangi *bir köprünün kapalı olmasının gerekli ve yeterli şartının bu köprüyü yöneten çevirgecin işletilmiş durumda bulunmasından* ibaret olduğunu gördük. (x) herhangi bir çevirgeç oldukta, '(x) işletilmiştir' önermesini 'X' ile (yani çevirgeci göstermek için kullanılan küçük harfin karşılığı olan *büyük harfle)* kısaltalım. Yani:

(1) $X =_{Dk}$ (x) çevirgeci işletilmiş durumdadır.

O zaman:

(2) x köprüsü (veya köprüleri) kapalıdır, ancak ve ancak X ise.

(1) ve (2) ye dayanarak şu sonuca varıyoruz: *Seri-bağlama halinde, ağın iletici olmasının gerekli ve yeterli şartı, ağın köprülerini yöneten her iki çevirgecin de işletilmiş durumunda olmasından ibarettir.*

'Ağ ileticidir' önermesini 'İ' ile kısaltalım. Yani:

(3) $\text{İ} = {}_{Dk}$ ağ ileticidir.

O zaman, 'A' *'(a) çevirgeci işletilmiştir'*, 'B' de *'(b) çevirgeci işletilmiştir'* anlamına geldikte,

(4) 'İ' ↔ 'AB'

olduğu sonucu çıkar. ('İ' doğru ise, hem 'A' hem 'B' doğrudur; hem 'A' hem 'B' doğru ise, 'İ' doğrudur.)

İmdi, mümkün dört durumu şek. 1 - 4 ile gösterilen ağı



a

şek- 5



b

şek- 6

ile gösterilen iki *"bileşen-ağ"*dan kurulu "bileşik" bir ağ şeklinde yorumlıyabiliriz. Şek. 5 ile gösterilen birinci bileşenin iletici olduğunu 'İ_1' ile, şek. 6 ile gösterilen ikinci bileşenin iletici olduğunu 'İ_2' ile dile getirelim. O zaman

(5) 'İ_1' ↔ 'A'
(6) 'İ_2' ↔ 'B'

olduğu görülür.

Bu iki bileşen-ağın seri-bağlanmasiyle meydana gelen ağın (şek. 1-4) iletici olduğunu burada 'İ_s' ile dile getirelim. O zaman (4) gereği:

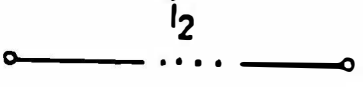
(7) 'İ_s' ↔ '$\text{İ}_1 \cdot \text{İ}_2$'

sonucu çıkar.

Şimdi herhangi iki ağı göz önüne alalım. Birinin iletici olduğunu 'İ_1' ile, öbürünün iletici olduğunu da 'İ_2' ile dile getirelim. O zaman bu iki ağı (sembolik olarak) sırasiyle

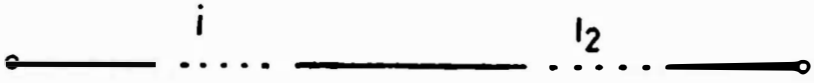


ve



ile göstereceğiz. Birincisine '$İ_1$-ağı', ikincisine de '$İ_2$-ağı' diyeceğiz. (Genel olarak belli bir ağın iletici olduğunu 'İ' gibi bir sembolle dile getirirsek, bu ağı 'İ-ağı' deyimiyle adlandıracağız.)

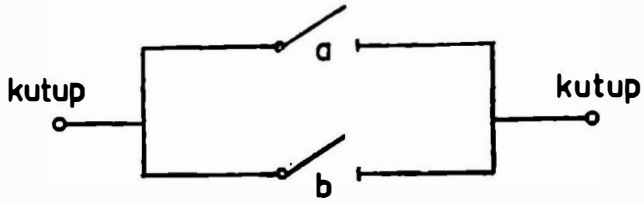
$İ_1$-ağı ile $İ_2$-ağını *seri* olarak bağlamak suretiyle



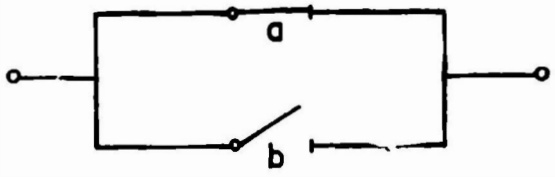
şek-7

biçiminde bileşik bir ağ elde ederiz. Bu ağa da '$İ_1 \cdot İ_2$ ağı' diyebiliriz.

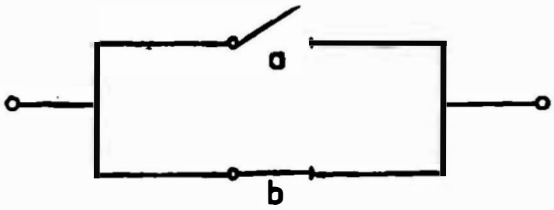
(11) Paralel-bağlama.



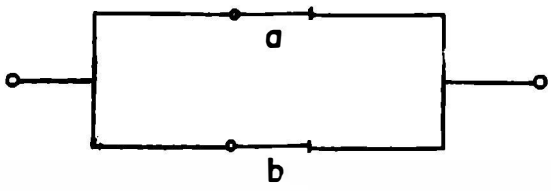
şek-8



şek-9



şek-10



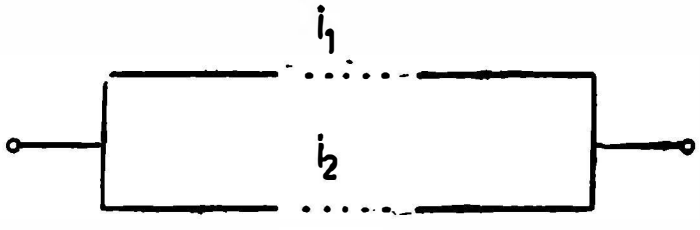
şek-11

Paralel-bağlama halinde de a ve b gibi birbirinden bağımsız iki köprüyü göz önüne alıyoruz. a köprüsü (a) çevirgecinin, b köprüsü de (b) çevirgecinin yönetimi altındadır. Yukarıdaki şekiller (Şek. 8-11) mümkün olan dört şıkkı göstermektedir. Kolayca görüldüğü gibi, ağ yalnız 1.ci şıkta (yani hem a hem b nin açık olması halinde) iletici değildir. 2.ci, 3.cü ve 4.cü şıklarda ağ hep ileticidir. Şu halde, *paralel-bağlama halinde, ağın iletici olmasının gerekli ve yeterli şartı, iki köprüden hiç olmazsa birinin kapalı olması,* dolayısiyle de *iki çevirgecin hiç olmazsa birinin işletilmiş olmasından* ibarettir. Dolayısiyle

(8) 'İ' ↔ 'A v B'

olduğunu görüyoruz.

Genel olarak $İ_1$-ağı ile $İ_2$-ağı gibi herhangi iki ağı *paralel* olarak bağlamak suretiyle



şek-12

biçiminde bir bileşik-ağ elde ederiz. Bu bileşik ağın iletici olmasının gerekli ve yeterli şartı, her iki bileşeninin yani gerek $İ_1$-ağının gerek $İ_2$-ağının iletici olmasından ibarettir. Bileşik ağın iletici olduğunu '$İ_p$' ile dile getirelim. O zaman

(9) '$İ_p$' ↔ '$İ_1$ v $İ_2$'

olur. Dolayısiyle şek. 12'deki ağa '$İ_1$ v $İ_2$ ağı' diyebiliriz.

(III) Evrik-ağ

İ-ağı gibi herhangi belli bir ağı göz önüne alalım. İ-ağının *evrik*'ini aşağıdaki özellikleri taşıyan J-ağı diye tanımlıyoruz:

(i) İ-ağı J-ağının (yani evrik-ağın) bir bileşenidir. İ-ağına *"evrilen-ağ"* da diyoruz.

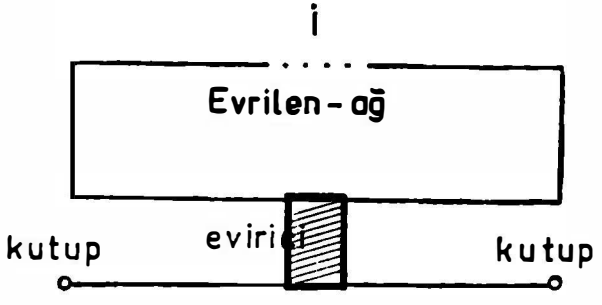
(ii) Evrilen-ağ evrik-ağın kutuplarına *"evirici"* dediğimiz bir düzenle bağlıdır.

(iii) Evrik-ağın iki kutbu arasında yer alan *"evirici"*, bu kutuplar arasındaki madde akımını ancak evrilmiş-ağın iletici olması halinde geçirerek, iletici olmaması halinde geçirmez. Bu özelliği

(10) 'J' ↔ '~İ'

eşdeğerliğiyle de dile getirebiliriz.

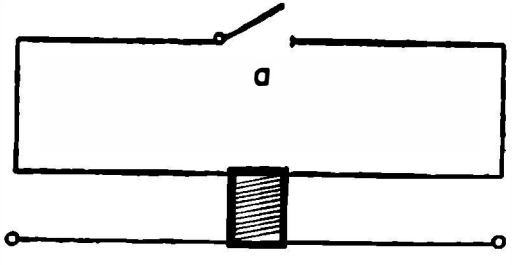
J-ağını, yani evrik-ağı şöyle gösterebiliriz:



şek - 13

Evirici, evrik-ağın yönetimi altında olup evrik-ağın kutupları arasında bulunan bir köprü sayılabilir. Bu köprü evrilen-ağın iletici olması halinde açık, evrilen-ağın iletici olmaması halinde ise kapalıdır. (Başka bir deyimle, evrilmiş-ağ "evirici-köprü"yü yöneten bir çevirgeç durumundadır.[3])

Özel hal olarak şek. 5'teki tek köprülü ağı ele alalım. Bu ağı (5) gereği 'A-ağı' deyimiyle adlandırabiliriz. A-ağının evriği



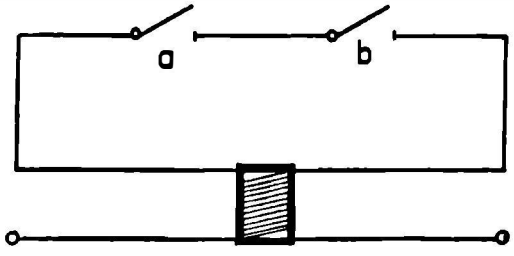
şek-14

biçimindedir. Bu ağın iletici olduğunu '$\dot{I}_e$' ile dile getirelim. O zaman (10) eş-değerliği uyarınca:

(11) '$\dot{I}_e$' $\leftrightarrow$ '$\sim$A'

olduğu görülür.

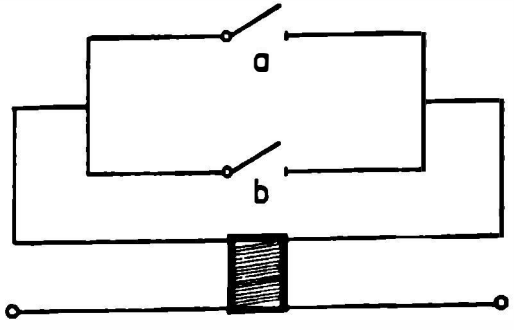
Şek. 8'deki AB-ağının evriği olan $\sim$(AB) ağı



şek- 15

biçimindedir. (Bu ağ için 'İ' $\leftrightarrow$ '$\sim$(AB)' dir.)

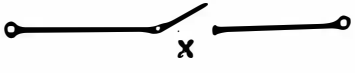
Şek. 9'daki A ve B ağının evriği olan $\sim$(A v B) ağı da



şek-16

biçimindedir. (Bu ağ için 'İ' $\leftrightarrow$ '$\sim$(A v B)' dir.)

İmdi herhangi bir mantıksal iletme-ağını, tek-köprülü ağlardan *seri-bağlama, paralel-bağlama* ve *evirme* işlemleri yardımiyle kurmak mümkündür. Nitekim, *"mantıksal iletme-ağları"*nı şöyle tanımlıyabiliriz:

(i) 

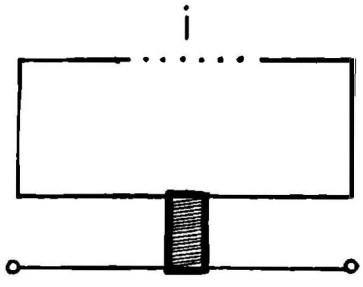
veya *'X-ağı'* şeklinde gösterilen her ağ bir "mantıksal iletme-ağı"dır. x köprüsü (x) gibi belli bir çevirgecin yönetimi altındadır. (x) çevirgeci ya dur-

ma halindedir, ya da işletilmiş halde. x köprüsü de ya açıktır, ya kapalı, (x) durma halinde ise, x açıktır; (x) işletilmiş halde ise, x kapalıdır. X-ağı tüm olarak ya ileticidir, ya değil. x kapalı ise, ağ ileticidir; x açık ise, ağ iletici değildir.

(ii)



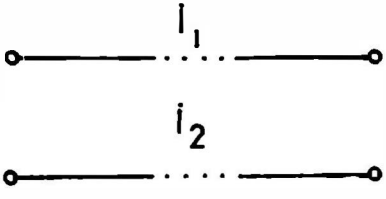
herhangi bir "mantıksal iletme-ağı" ise, bu ağın *evriği* denilen



ağı da bir "mantıksal iletme-ağıdır. İ-ağı iletici ise, evrik-ağ iletici değildir; İ-ağı iletici değilse, evrik-ağ ileticidir. Dolayısiyle evrik-ağı *'~İ ağı'* deyimiyle gösteriyoruz.

(iii)

ve

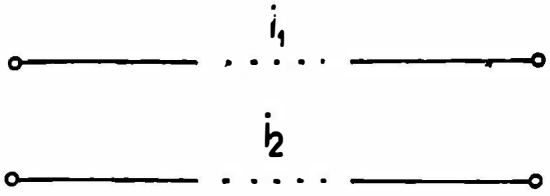


herhangi iki "mantıksal iletme-ağı" ise; bu ağların *seri bağlanmasiyle* elde edilen

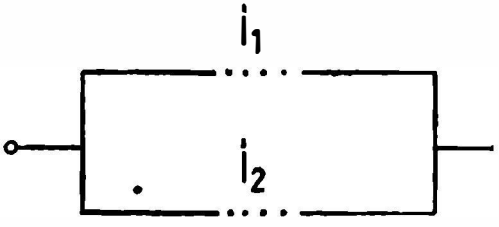


ağı bir "mantıksal iletme-ağı"dır. Bu ağın iletici olmasının gerekli ve yeterli şartı hem $İ_1$-ağının hem de $İ_2$-ağının iletici olmasından ibarettir. Dolayısiyle bu ağı '$İ_1 \cdot İ_2$ ağı' deyimiyle gösteriyoruz.

(iv)



herhangi iki "mantıksal iletme-ağı" ise, bu ağların *paralel-bağlanmasıyle* elde edilen



ağı da bir "mantıksal iletme-ağı"dır. Bu ağın iletici olmasının gerekli ve yeterli şartı, $İ_1$-ağının veya $İ_2$-ağının iletici olmasıdır. Dolayısiyle bu ağı '$İ_1$ v $İ_2$ ağı' deyimiyle gösterebiliriz.

(v) . Her "mantıksal iletme ağı" (i) — (iv) gereği kuruludur.

İmdi, (i) — (v) kuralları mantıksal iletme-ağlarını —kısaca *"ağlar"*ı— tüketici bir şekilde tanımladığı gibi bir de verilen her ağa karşılık belli bir "önerme"yi belirlemektedir. Her *"tek-köprülü eviricisiz ağ"ın belirleyici-önermesi atomsal* olup 'X' biçimindedir. Örneğin şek. 5'teki ağın belirleyici-önermesi 'A', şek. 6'daki ağın belirleyici-önermesi de 'B' dir. Bunların dışında kalan bütün ağların belirleyici-önermeleri *"molekülsel"*dir. Özellikle "tek-köprülü evrik-ağlar"ın belirleyici-önermesi '$\sim$X' biçimindedir. Örneğin şek. 14'teki ağın belirleyici-önermesi '$\sim$A' dır.

Buna göre, tek-köprülü eviricisiz ağlara *"atomsal-ağlar"*, her türlü (eviricisiz veya eviricili) tek-köprülü ağlara da *"yalın-ağlar"* diyebiliriz. Yalın-olmayan ağlara gelince, bunların belirleyici-önermeleri '$\sim$' ' . ' ve 'v' eklemleri yardımiyle 'A', 'B',... gibi atomsal-bileşenlerden kurulu molekülsel-önermelerdir. Örneğin şek. 1'deki ağın belirleyici-önermesi 'AB', şek. 8'deki ağın belirleyici-önermesi 'A v B', şek. 15'deki ağın belirleyici-önermesi '$\sim$(AB)', şek. 16'daki ağın belirleyici-önermesi de '$\sim$(A v B)' dir.

Genel olarak, (a_1), (a_2),...,(a_n) gibi n tane farklı çevirgeci olan herhangi bir ağı göz önüne alalım. Bu ağın belirleyici-önermesi

$$f(A_1,\ldots,A_n)$$

biçiminde olan bir önermedir. O zaman da, söz konusu ağı

$$f(A_1,\ldots,A_n)\text{-ağı}$$

deyimiyle gösterebiliriz. Bu ağın iletici olduğunu 'İ' ile gösterelim. Yani:

(12) $\quad \text{İ} =_{Dk} f(A_1,\ldots.A_n)$-ağı ileticidir

O zaman:

(13) $\quad$ 'İ' $\leftrightarrow$ '$f(A_1,\ldots,A_n)$'

olur. Başka bir deyimle, belli *bir ağın iletici olduğunu dile getiren önerme, bu ağın belirleyici-önermesiyle eşdeğerdir.*

İmdi, '$f(A_1,\ldots,A_n)$' gibi bir belirleyici-önermede, 'A_1',...,'A_n' atomsal-bileşenlerinin yerine 'p_1',...,'p_n' gibi n tane ayrı temsilci-harf koymak suretiyle

$$f(p_1,\ldots,p_n)$$

gibi bir n-li önerme-şeması elde edilir. ('$f(p_1,\ldots,p_n)$' şeması '$f(A_1,\ldots,A_n)$' önermesinin "temsilci-şema"sıdır.)

'$f(p_1,\ldots,p_n)$' şemasına $f(A_1,\ldots,A_n)$-ağının "iletme-şeması" diyeceğiz. Yapısı aynı olan iki ağın —birinin çevirgeçleri öbürününkinden farklı olması halinde— belirleyici-önermeleri özdeş değildir. Ama yapısı aynı olan bütün ağların iletme-şeması (hep aynı temsilci-harfleri kullanmak şartiyle) aynıdır. Yapısı farklı olan ağların temsilci-şemaları da farklı olur. Dolayısiyle, verilen herhangi bir ağın *"yapı"* sının bu ağın "iletme-şeması" tarafından belirlendiğini söyleyebiliriz.

Bütün *"tek-köprülü çeviricisiz ağlar"*ın iletme-şeması 'p' biçimindedir. Bütün *"tek-köprülü evrik ağlar"*ın iletme-şeması '$\sim$p' biçimindedir. Bütün *"seri-bağlamalı eviricisiz iki-köprülü ağlar"*ın iletme-şeması 'pq' biçimindedir. Bütün *"paralel-bağlamalı eviricisiz iki-köprülü-ağlar"*ın iletme-şeması 'p v q' biçimindedir...

Öte yandan, her mantıksal iletme-ağı türüne (yani aynı yapıda olan ağların kümesine) karşılık bir ve yalnız bir tek (doğruluk-fonksiyonu biçiminde olan) bir önerme-şeması olduğu gibi, sadece '$\sim$', ' $\cdot$ ' ve 'v' eklemlerinden kurulu her önerme-şemasına karşılık ta (bu önerme-şemasını iletme--şeması olarak kabul eden) belli bir mantıksal iletme-ağı kümesi vardır. Nitekim '$\sim$', ' $\cdot$ ' ve 'v' eklemleri yardımiyle meydana getirilen önerme-şemalarının kuruluşu, ağların (i) — (v) kuralları gereği kuruluşuyla el ele gider. Böylece aşağıdaki sonuca varıyoruz:

(14) Mantıksal iletme-ağı türleriyle sadece '$\sim$', '$\cdot$' ve 'v' eklemleriyle kurulu önerme-şemaları arasında bir "bire-bir tekabül" vardır.

İşte, mantıksal iletme-ağlarına "mantıksal" denilmesinin asıl gerekçesi bu özelliğinden ibarettir.

İmdi, her önerme-şemasına karşılık (14) uyarınca (en az) bir iletme-ağı olduğuna göre, o-lı önerme-şemaları saydığımız *doğru* önerme ile ('D') *yanlış* önermenin ('Y') de karşılığı olan birer iletme-ağının olup olmadığını sorabiliriz. İşte 'D' önermesinin karşılığı olarak hiç bir köprüsü olmıyan, dolayısiyle de hep iletici olan



(Şek. 17)

gibi bir ağı; 'Y' önermesinin karşılığı olarak ta, hep açık olan "değişmez" bir kapısı olan (dolayısiyle de hiç bir zaman iletici olmıyan)



(Şek. 18)

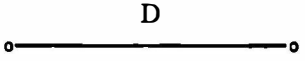
gibi bir ağı gösterebiliriz.

Şek. 17'deki ağın belirleyici-önermesi 'D' olduğundan bu ağa *'D-ağı'*; şek. 18'deki ağın belirleyici-önermesi de 'Y' olduğundan bu son ağa da *'Y-ağı'* diyeceğiz. D-ağının iletici olduğunu 'İ_D' ile, Y-ağının iletici olduğunu 'İ_Y' ile dile getirelim. O zaman:

(15) 'İ_Y' $\leftrightarrow$ 'D'

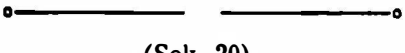
(16) 'İ_D' $\leftrightarrow$ 'Y'

Bundan böyle D-ağını



(Şek. 19)

biçiminde, Y-ağını da



(Şek. 20)

biçiminde göstereceğiz.

'D' önermesi D-ağının belirleyici-önermesi olduğu gibi, aynı zamanda da "iletme-şeması" (o-lı şema) dır. Aynı şekilde, 'Y' önermesi Y-ağının hem belirleyici-önermesi hem de iletme-şeması durumundadır.

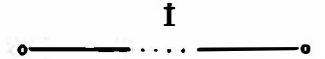
İletme-şemaları eşdeğer olan ağlara *"eşdeğer ağlar"* diyeceğiz. Eşdeğer ağların her zaman yapıları aynı olan ağlar olmadığını belirtmek gerek. Nitekim, köprü ve/veya evirici sayısı farklı olan ağlar hiç bir zaman aynı yapıda sayılmadığı halde, eşdeğer iki ağın köprü ve/veya evirici sayısı farklı olabilir.

Öte yandan, söz konusu ağları kullanmaktaki amacın, belli bir maddeyi bir yerden başka bir yere iletmek olduğunu hesaba katarsak, eşdeğer ağların —aynı iletme işini yaptığından— pratik bakımdan birbirinin yerini tutabileceğini kabul etmeliyiz. Ancak, ekonomi açısından, aynı işi görebilen iki düzenden, maliyeti daha az olanının seçilmesi gerekir. Dolayısiyle, eşdeğer ağlar arasında köprü ve evirici sayısı en küçük olanları kullanılmalıdır.

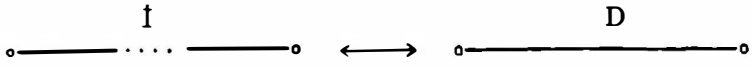
İmdi, herhangi bir ağın köprü sayısiyle evirici sayısının toplamına bu ağın *"karmaşıklık-derecesi"* diyelim. Bir ağın derecesi, bu ağın iletme-şemasında geçen temsilci- harflerin geçiş sayılarının toplamiyle aynı şemadaki hayırlama-ekleminin geçiş sayısının toplamına eşittir. Bu sayıya "şemanın karmaşıklık derecesi" de diyoruz. Nitekim ağdaki her köprüye karşılık, şemada belli bir temsilci-harfin geçişi vardır. Ağdaki her eviriciye karşılık ta, şemada hayırlama-ekleminin bir geçişi vardır. Karmaşıklık-derecesi kendi karmaşıklık-derecesinden küçük olan bir ağla eşdeğer olmıyan bir ağa "en küçük ağ" diyoruz. En-küçük ağların bulunması, iletme-ağları ekonomisinde son derece önemli bir yer tutar. Oysa, "en-küçük ağlar"ın bulunması, *"en-küçük önerme-şemaları"*nın (yani karmaşıklık-derecesi kendi karmaşıklık derecesinden küçük olan hiç bir şema ile eşdeğer olmıyan şemaların) bulunmasına geri götürülebilir. Böylece önermeler-mantığının iletme tekniğindeki büyük önemi anlaşılır.

Ağların eşdeğerliğine dayanarak, (önermeler-mantığına ait) her mantık kanununu ağlar yardımiyle yorumlamak mümkündür. Belli bir şemanın bir *totoloji* olduğunu göstermek için, iletme-şeması bu şemadan ibaret olan ağın 'D' ağı ile eşdeğer olduğu belirtilir. İki ağın eşdeğer olduğunu, bu ağların diyagramları arasında (tam-deyimlerin eşdeğerliği için kulandığımız) '↔' işaretini koyarız.

Buna göre,



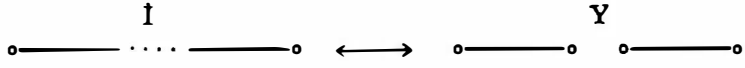
gibi bir ağın totoloji olduğunu



(Şek. 21)

biçiminde gösteririz.

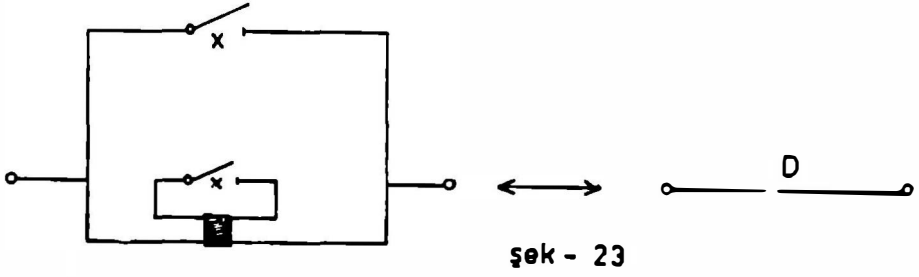
Aynı şekilde, belli bir İ-ağının iletme-şemasının bir *çelişme* olduğunu



(Şek. 22)

biçiminde dile getiririz.

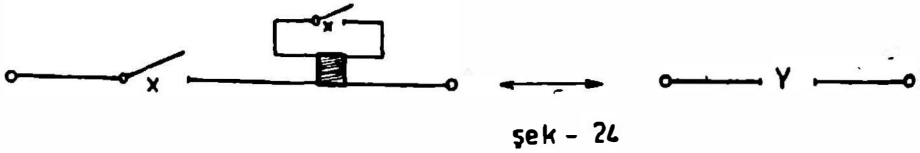
Örneğin: 'p v ~p' nin bir *totoloji* olduğunu



şek - 23

biçiminde dile getiririz.

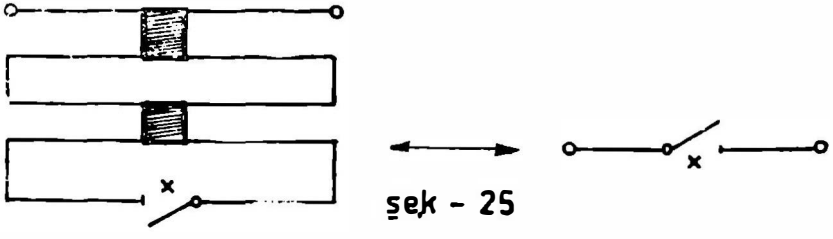
'p~p' şemasının bir *çelişme* olduğunu da



şek - 24

biçiminde dile getiririz.

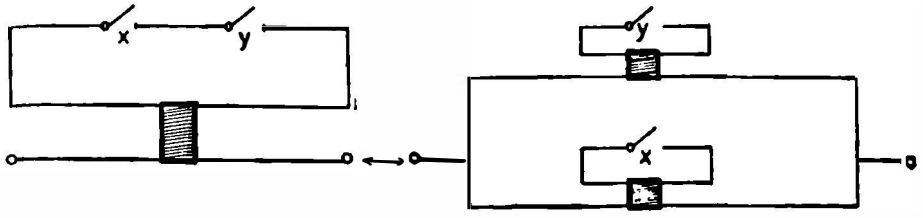
Çift-hayırlama kanununu, yani '~~p' nin 'p' ile *eşdeğer* olduğunu



şek - 25

biçiminde dile getiririz.

'$\sim(pq)$' ile '$\sim p \vee \sim q$' nün eşdeğerliğini (De Morgan)



şek - 26

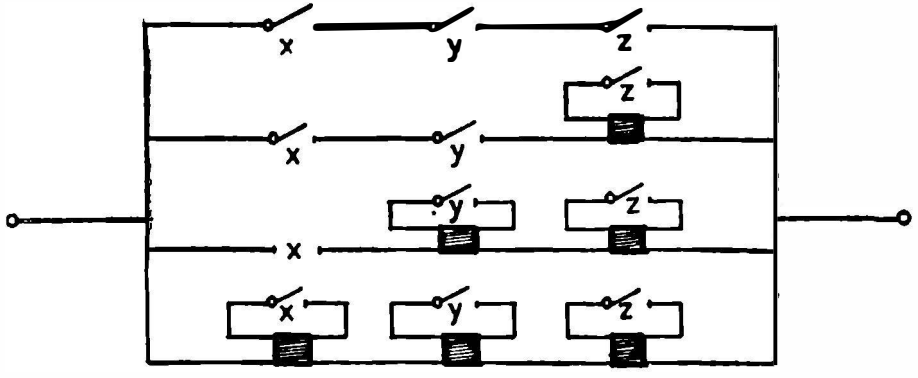
biçiminde dile getiririz.

Her önerme-şeması ayrıksal veya birliksel tam veya tam olmıyan bir normal-şemaya dönüştürülebildiğinden, verilen her ağa karşılık bu ağ ile eşdeğer olan ve iletme-şeması böyle bir normal-şema olan ağların kurulabildiği meydandadır.

Örneğin: iletme-şeması

$$pqr \vee pq\sim r \vee p\sim q\sim r \vee \sim p\sim q\sim r$$

gibi bir 4-çarpanlı ayrıksal 3-lü tam normal-şemadan ibaret olan ağ



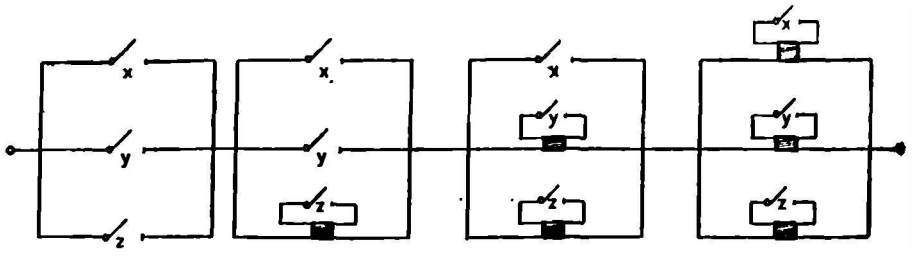
şek- 27

biçimindedir.

Yukardaki şemanın ikilisi olan 4-çarpanlı birliksel 3-lü tam normal-şemanın, yani

$$(p \vee q \vee r) \cdot (p \vee q \vee \sim r) \cdot (p \vee \sim q \vee \sim r) \cdot (\sim p \vee \sim q \vee \sim r)$$

şemasının karşılığı olan ağ da



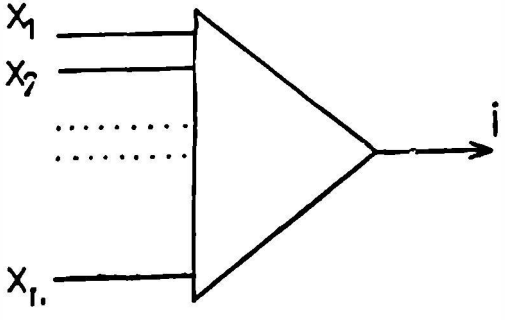
şek- 28

biçimindedir.

Herhangi bir ağı, bu ağın *"mantıksal taslak"*ı (logischer Plan) denilen standart biçimindeki bir diyagram yardımiyle belirtebiliriz. Bir ağın mantıksal taslağı aşağıdaki kurallara göre çizilir:

(i) Seri-bağlama.

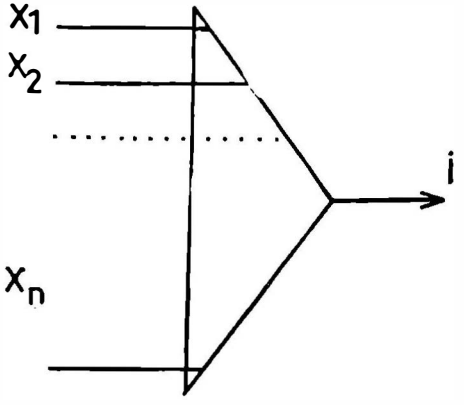
X_1-ağı, X_2-ağı,...,X_n-ağı gibi herhangi n tane ağın seri-bağlanmasından elde edilen ağın mantıksal-taslağı şöyledir:



şek-29

(ii) Paralel-bağlama.

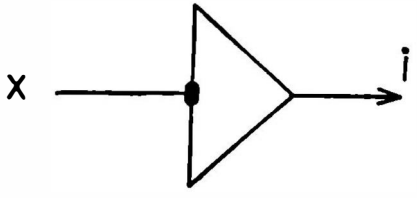
X_1-ağı, X_2-ağı,...,X_n-ağı gibi herhangi n tane ağın paralel-bağlanmasından elde edilen ağın mantıksal-taslağı şöyledir:



şek-30

(iii) Evirme.

X-ağı gibi herhangi bir ağın evriğinin mantıksal-taslağı şöyledir:

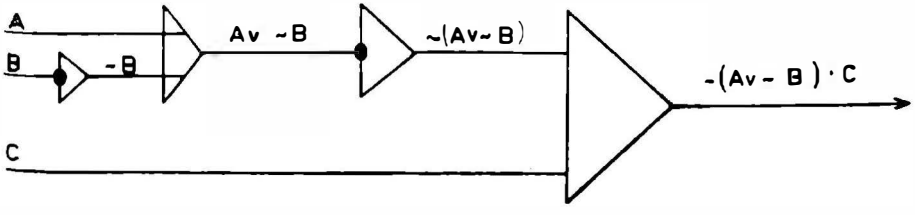


şek-31

Örneğin: belirleyici-önermesi

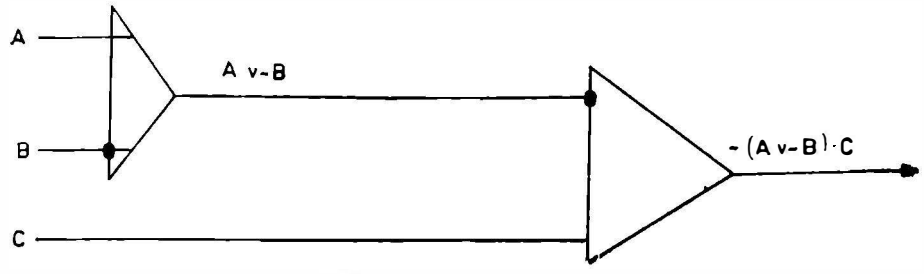
$$\sim(A \vee \sim B) \cdot C$$

biçiminde olan bir ağın mantıksal-taslağını çizelim. Bu taslak (i) — (iii) gereği



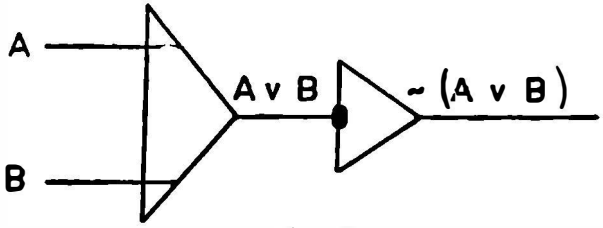
şek - 32

biçimindedir. Evirme işlemini gösteren "nokta"yı ayrı bir üçgende gösterecek yerde, önünde bulunan birden çok "giriş"li üçgende gösterilebilir. Böylece "tek-girişli üçgenler"i karmaşık taslaklardan bazı hallerde elemek mümkündür. Buna göre, Şek. 32'yi şu basit biçime dönüştürebiliriz:



şek - 33

Tek-girişli üçgenlerin her zaman elenemiyeceğini de belirtmek gerek. Örneğin, belirleyici-önermesi '~(A v B)' olan ağın mantıksal-taslağı

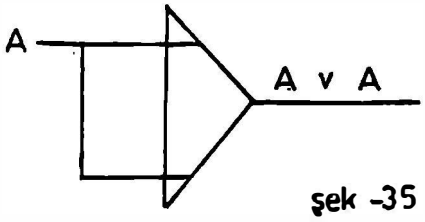


şek - 34

biçimindedir. Burdaki tek-girişli üçgenin, önünde başka bir (tek veya çok girişli) bir üçgen bulunmadığından, elenmesi imkânsızdır.

Verilen bir mantıksal-taslaktaki ***"giriş-harfleri"***, yani taslağın en solunda yazılan 'A', 'B',... 'X', 'Y',... gibi harfler, taslağın ilişkin olduğu ağın çevirgeçlerini belirtir. Giriş-harflerinin sayısı çevirgeçlerin sayısına eşittir. Her giriş-harfi (belli bir mantıksal-taslakta) bir tek defa yazılır. Aynı bir çevirgecin yönetimi altındaki köprülerin sayısı birden çok ise, her ayrı köprü ilgili giriş-harfinden çıkan bir çizgi ile belirtilir.

Örneğin belirleyici-önermesi 'A v A' olan bir ağda ayın bir çevirgecin ((a) çevirgecinin) yönetimi altında iki ayrı köprü vardır. Böyle bir ağın mantıksal-taslağı



şek -35

biçiminde çizilir.

Tek-köprülü eviricisiz A-ağı gibi bir ağın mantıksal-taslağı

A

(Şek. 36)

biçimindedir. Özellikle D-ağının mantıksal-taslağı

D

(Şek. 37)

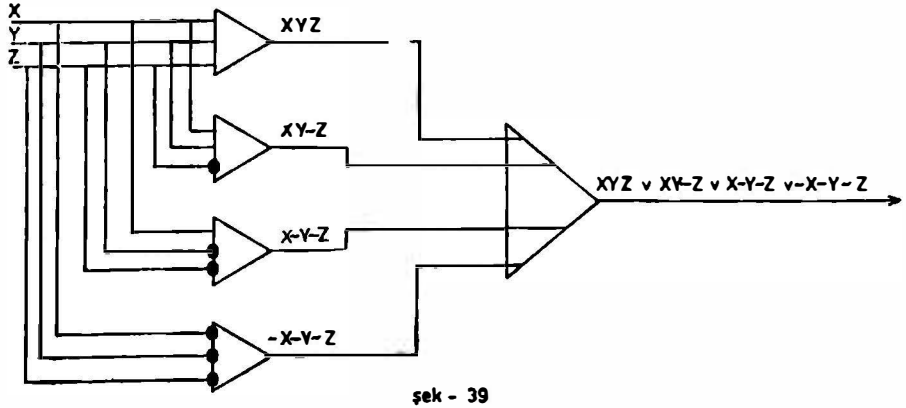
biçiminde, Y-ağının mantıksal-taslağı da

Y

(Şek. 38)

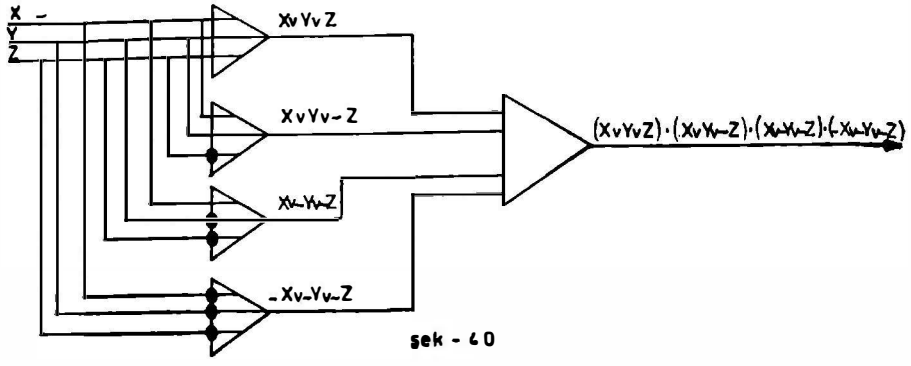
dir.

Karmaşık mantıksal-taslaklara örnek olarak Şek. 27 ve Şek. 28'deki ağların mantıksal-taslağını çizelim. Şek. 27'deki ağın mantıksal-taslağı:



şek - 39

biçimindedir. Şek. 28'deki ağın mantıksal-taslağı da şöyledir:



şek - 40

Önermeler-mantığını iletme-ağlarına uygulamakta başlıca şu iki amaç güdülür:

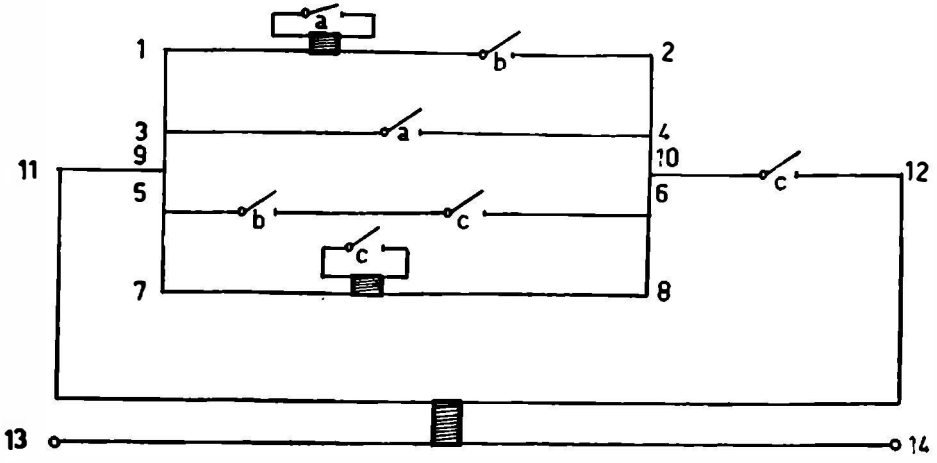
(i) Ağların analizi.

Önceden kurulmuş olan herhangi bir iletme-ağını kullanmak için, ağı işleten mühendisin bu ağın çevirgeçlerin hangi durumlarında "iletici" olduğunu, hangi durumlarda da "iletici-olmadığını" mümkün olduğu kadar basit, sistematik ve tüketici bir şekilde bilmesi gerek. Böyle bir bilgi ise ağın *"belirleyici-önermesi"* (veya aynı hesaba gelen *"mantıksal-taslak"*ı) yardımiyle sağlanır. İşte, verilen bir iletme-ağının *"analiz"*i, bu ağın *"belirleyici-önermesi"*nin (veya *"mantıksal-taslak"*ının) elde edilmesi demektir.

(ii) Ağların sentezi.

Belli bir iletme işini sağlamak üzere yeni bir iletme-ağını kurmak isteyen mühendis, bu amaç için en elverişli olan iletme-ağının *yapısını,* dolayısiyle de, böyle bir ağın *iletme-şemasını* veya *mantıksal-taslağını* elde etmesi gerekir. Böyle bir iş için *veriler,* kurmak istenilen ağın hangi durumlarda iletici olduğu, hangi durumlarda da iletici olmadığını belirten şartlardan ibarettir. Bu şartlara dayanarak söz konusu ağın iletme-şemasının *doğruluk-çizelgesini,* veya *ayrıksal tam normal-şemasını,* ya da birliksel tam normal-şemasını bir hamlede elde edebiliriz. Başka bir deyimle, "veriler" bir doğruluk-çizelgesi veya bir ayrıksal ya da birliksel tam normal-şema şeklinde belirirler. Mühendisin amacı, "verilen" tam normal-şema ile eşdeğer olan *"en-küçük şema"*lardan birini elde etmektir. Böyle bir "en-küçük şema" elde edildikten sonra, bunun karşılığı olan "mantıksal-taslak" çizilebilir. Böylece *güdülen amaç için en elverişli olan bir iletme-ağının yapısı belirlenmiş olur.* İşte bu işleme *"sentez"* denir.

Ağların *analizine* örnek olarak, aşağıdaki diyagramla gösterilebilen bir iletme-ağını ele alalım:



Şek - 41

Bu ağın analizini yapmak için, ilk önce bileşen-ağlarının kutuplarını numaralamak faydalı olur. Bu numaralama işlemi yapıldıktan sonra, her bileşen-ağın belirleyici-önermesi ayrı ayrı elde edilir. Şek. 41'deki bileşen-ağların belirleyici-önermelerini elde ediliş sırasına göre aşağıda gösteriyoruz: (Bileşen-ağları '$\dot{I}_{m-n}$' biçiminde gösteriyoruz.)

Bileşen-ağ.	Belirleyici-önerme
$\dot{I}_{1-2}$	$\sim AB$
$\dot{I}_{3-4}$	A
$\dot{I}_{5-6}$	BC
$\dot{I}_{7-8}$	$\sim C$
$\dot{I}_{9-10}$	$\sim AB \vee A \vee BC \vee \sim C$
$\dot{I}_{11-12}$	$(\sim AB \vee A \vee BC \vee \sim C) \cdot C$
$\dot{I}_{13-14}$	$\sim[(\sim AB \vee A \vee BC \vee \sim C) \cdot C]$

Böylece, Şek. 41'deki ağın "belirleyici-önerme"sinin

$$\sim[(\sim AB \vee A \vee BC \vee \sim C) \cdot C]$$

olduğu sonucuna varırız. Bu belirleyici-önermenin doğruluk-çizelgesini de bulmak suretiyle, söz konusu ağın hangi durumlarda iletici olduğunu, hangi durumlarda da iletici olmadığını tüketici bir şekilde belirtebiliriz.

Ağların *sentezine* örnek olarak ta, aşağıdaki doğruluk-çizelgesinin belirlediği şartları yerine getiren "en-küçük ağ"ın iletme-şemasını ve mantıksal-taslağını bulmağa çalışalım:

p	q	r	İ
D	D	D	D
D	D	Y	D
D	Y	D	D
D	Y	Y	Y
Y	D	D	D
Y	D	Y	Y
Y	Y	D	Y
Y	Y	Y	Y

Bu doğruluk-çizelgesinin belirlediği ayrıksal tam normal-şema

$$pqr \vee pq{\sim}r \vee p{\sim}qr \vee {\sim}pqr$$

biçimindedir. Bu normal-şemayı sadeleştirelim:

İlk iki çarpanın ayrıklığı (yani 'pqr v pq∼r') 'pq' ile eşdeğer olduğundan, şemamız

$$pq \vee p{\sim}qr \vee {\sim}pqr$$

biçimine dönüştürülebilir. Bu son şemayı da

$$p \cdot (q \vee {\sim}qr) \vee {\sim}pqr$$

biçimine; 'q v ∼qr' ile 'q v r' eşdeğer olduğundan da

$$p \cdot (q \vee r) \vee {\sim}pqr$$

biçimine dönüştürürüz. Bu ise

$$pq \vee pr \vee {\sim}pqr$$

ye dönüşür. Bu şema da

$$q \cdot (p \vee {\sim}pr) \vee pr$$

ye dönüşür. 'p v ∼pr' ile 'p v r' eşdeğer olduğundan, yukardaki şema

$$q \cdot (p \vee r) \vee pr$$

biçimine; bu da

(i) $$pq \vee qr \vee pr$$

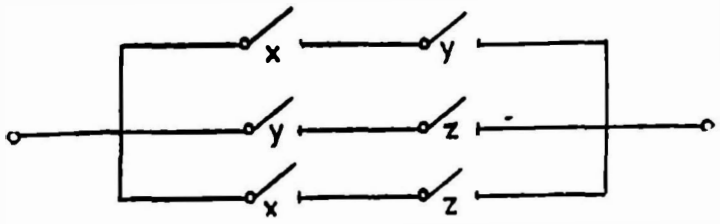
biçimine dönüştürülebilir.

İmdi, bu son şemanın karmaşıklık derecesi 6 dır. Oysa, daha önce karşılaştığımız

(ii) $q \cdot (p \vee r) \vee pr$

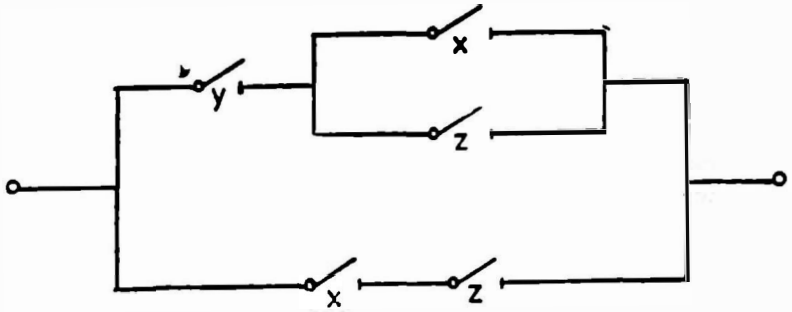
şemasının karmaşıklık derecesi 5 dir. Dolayısiyle iletme-ağını (i)'e göre değil, (ii)'ye göre kurmak daha elverişli olur.

(i)'in karşılığı olan mantıksal-taslak:



şek - 42

biçimında; (ii)'nin karşılığı olan mantıksal-taslak ise



şek - 43

biçimindedir.

NOTLAR VE AYDINLATMALAR

§ 1

[1] Deduktif mantığın dışında ondan bağımsız olan "induktif" bir mantığın mümkün olup olmadığı bir tartışma konusudur.

[2] (6) gibi induktif bir çıkarımda sonucun öncüller sayesinde kazandığı olasılık-derecesinin r gibi belli bir sayı olması halinde, söz konusu induktif çıkarımı:

$$Ö_1', Ö_2', \ldots, Ö_m' \quad \underset{r}{\vdash\!\!\rightarrow} \quad Ö$$

[3] Gerçekte hiçbir empirik varsayımın bir deneyle kesin bir şekilde yanlışlanması mümkün değildir. Nitekim Ö önermesinin herhangi bir empirik varsayımı dile getiren "tümel" bir önerme, Ö'nün de Ö önermesinin *deduktif* dolayısiyle "zorunlu" bir sonucu olduğunu kabul edelim. Ö′ nün *'bu alev şimdi yeşilleşecektir'* gibi bir "empirik tekil-önerme" olması halinde, ilkece bir tek deneyle yanlışlanması mümkün olduğunu düşünebiliriz. Ancak alevin yeşilleşmediğini gözlemem olgusunun yanlışladığı *'bu alev şimdi yeşilleşecektir'* önermesi değil, asıl *'bu alevin şimdi yeşilleştiğini göreceğim'* türünden "sübjektif" bir önermedir. Bu önermeyi Ö′ ile gösterelim. O zaman Ö′ nün yanlışlanması Ö'yü kesin bir şekilde yanlışlamıyacağından, Ö'yü de yanlışlamıyacağı meydandadır.

Öte yandan, Ö'nün kesin bir şekilde yanlışlanması bile Ö yü kesin bir şekilde yanlışlamıyabilir. Çünkü Ö′ doğrudan doğruya Ö nün değil, Ö ile $Ö_1$ gibi "başlangıç şartlarını" (initial conditions) dile getiren bir "empirik tekil-önerme"nin deduktif sonucudur, yani:

$$Ö, Ö_1 \quad \vdash \quad Ö'$$

oysa $Ö_1$ önermesinin kesin bir şekilde doğrulanması imkânsızdır. Hattâ $Ö_1'$ in sözü geçen "başlangıç şartlarını"nı tüketici bir şekilde dile getirmesi bile çokluk mümkün değildir. Bu şartların bazıları belirtik bir şekilde dile getirilmekle birlikte, bunlarla yetinmeyip bir de "bozucu hiçbir dış etkinin ortaya çıkmaması halinde" türünden kaypak bir şart katılıp Ö yü deneyle yanlışlanmaktan kurtarabilen açık bir kapı bırakılmaktadır. Böylece, Ö'nün deneyle yanlışlanması halinde, Ö nün de yanlışlandığın kabul edecek yerde, beklen-

meyen (ve gözlenemiyen) "bozucu etkilerin ortaya çıktığı" öne sürülebilir. (*"Ad hoc"* açıklama!)

§ 2

1 Bk. Copi, "Symbolic Logic", s. 20 v.ö.

2 İlerde bu tanımın yeterli olmadığını göstereceğimizden, bu tanımı ancak geçici olarak kabul edebiliriz.

§ 3

1 Bk. § 5.

§ 4

1 *'Atomsal-önerme'* deyimini ilerde başka bir anlamda da kullanacağız. Bu iki anlamı 'bölünmemiş önermeler mantığının atomsal önermeleri' ve 'niceleme mantığının atomsal-önermeleri' deyimlerini kullanmak suretiyle ayırd edebiliriz.

2 Bk. *Quine,* "Methods of Logic", s. 47-8 ve "Word and Object", s. 157-161.

3 Bk. *Mill,* "System of Logic", Bk. I, Ch. IV, § 1 ve § 2.

§ 5

1 *'İ.K.'* sembolünü (*'İşte Kanıtladı!'* deyiminin kısaltması olarak) matematikte geçen 'Q.E.D.' (Quod Erat Demonstrandum) deyiminin karşılığı olarak herhangi bir kanıtlamanın sonunu işaret etmek için kullanıyoruz.

2 (14) deyiminde geçen 'A', 'B' ve 'C' harflerini "önerme-temsilcileri" değil, "önerme-kısaltmaları" olarak yorumladığımızdan, bu deyimi bir "önerme" saymağa hakkımız vardır. Genel olarak 'p', 'q', 'r', 's' gibi lâtin alfabesinin ortasındaki küçük harfleri (indisli veya indissiz) olarak "önerme-temsilcileri' olarak kullanacağız. Lâtin alfabesinin başında gelen büyük harfleri ise (başka şekilde belirtilmediği hallerde) önerme-kısaltmaları (veya daha genel olarak "tam-deyim" kısaltmaları) olarak kullanacağız.

§ 6

"Kip-önermeleri", "dilek-şart-önermeleri" ve "yargısal-tavır önermeleri" deyimlerini hangi anlamda kullandığımızı sırasiyle şu örneklerle belirtebiliriz:

(1) Ahmet Ankara'ya gidebilir

(2) Ahmed'in Ankara'ya gitmesi mümkündür

(3) Ahmet Ankara'ya gitmelidir

(4) Ahmed'in Ankara'ya gitmesi zorunludur

(5) Ahmet Ankara'ya gitmemelidir

(6) Ahmed'in Ankara'ya gitmesi imkânsızdır

önermelerinin her biri bir *"kip-önermesi"* (modal statement) durumundadır. (1) ile (2), (3) ile (4) ve (5) ile (6) nın aynı anlama geldiğini kabul edebiliriz. Birinciler *"imkân"* kipini, ikinciler *"zorunluluk"* kipini, üçüncüler de *"imkânsızlık"* kipini dile getirirler.

(7) Ahmet Ankara'ya gitseydi, annesi çok sevinecekti

önermesi bir *"dilek-şart önermesi"* (subjunctive conditional) durumundadır.

(8) Ahmet Tegucigalpa'nın Nicaragua'da olduğunu söyledi

(9) Ahmet Tegucigalpa'nın Nicaragua'da olduğuna inanıyor

(10) Ahmet Tegucigalpa'nın Honduras'ın başkenti olduğunu bilmiyor

önermelerinin her biri bir "yargısal-tavır" (propositional attitude) önermesi durumundadır.

İmdi, *'Ahmet Ankara'ya gidecek'* önermesini 'A' ile; *'Ahmed'in annesi sevinecek'*, önermesini 'B' ile; *'Tegucigalpa Nicaragua'dadır'* önermesini 'C' ile; *'Tegucigalpa Honduras'ın başkentidir'* önermesini de 'Ç' ile kısaltalım. O zaman: (1) veya (2) yi:

(11) A mümkün;

(3) veya (4) ü:

(12) A zorunlu,

(5) veya (6) yı:

(13) A imkânsız;

(7) yi:

(14) A olsaydı, B olacaktı;

(8) i:

(15) Ahmet C olduğunu söyledi;

(9) u:

(16) Ahmet C olduğuna inanıyor;

ve (10) u:

(17) Ahmet Ç olduğunu bilmiyor

biçiminde dile getirmek mümkündür.

[2] "Doğruluk-fonksiyonları teorisi"nin de ayrı ayrı birçok şekilleri olduğunu belirtmek gerek. Özellikle "doğru" ve "yanlış"tan başka bir doğruluk-değeri kabul etmiyen *"2-değerli mantık"ın* karşılığı olan "2-değerli doğruluk-fonksiyonları teorisi"nden söz edildiği gibi; "doğru" ve "yanlış"tan başka doğruluk-değerlerin de bulunduğunu (başka bir deyimle, bir önermenin ya doğru ya yanlış olması gerekmeyip "üçüncü" bir halin de olabileceğini) kabul eden *"çok-değerli mantıklar"ın* karşılığı olarak "3-değerli", "4-değerli", ... "n-değerli" doğruluk-fonksiyonları tecrileri"nin de kurulması mümkündür. Ancak biz "2-değerli mantık" çerçevesinde kalıp sadece "2-değerli doğruluk-fonksiyonları teorisi"ni göz önünde tutacağız. Dolayısiyle, *'doğruluk-fonksiyonu'* deyimini (başka türlü belirtilmediği hallerde) yalnız *"2-değerli doğruluk-fonksiyonu"* anlamında kullanacağız.

[3] Özellikle *Quine,* "ister matematiksel ister başka türden olan herhangi bir anlatımda doğruluk-fonksiyonu durumunda olmıyan hiçbir önerme-eklemine lüzum olmadığına inanmak için gerekçelerin olduğunu" öne sürmüştür: ("There is reason to believe that none but truth-functional modes of statement composition are needed in any discourse, mathematical or otherwise." Bk. Quine, "Mathematical Logic", s. 11).

§ 7

[1] Bk. *Strawson,* "Introduction to Logical Theory", s. 80-81. Strawson bu konuda 'evlendiler ve çocukları oldu' önermesiyle, 'çocukları oldu ve evlendiler' önermesi arasındaki farka işaret etmiştir. Ayrıca Bk. *Quine,* "Methods of Logic", s. 42 v.ö., özellikle s. 44.

[2] İngilizce *'conjuction',* Almanca *'Konjunktion'* ve Fransızca 'conjonction'. Aynı mânada "lojik-çarpım" (logical product) deyimi de kullanılmıştır.

Bk. *Quine,* "Methods of Logic", s. 4-5.

[4] Bk. *Tarski,* "Introduction to Logic", s. 21. Ayrıca Bk. *Quine,* "Methods of Logic", s. 4.

[5] İngilizcede *'disjunction'* veya *'alternation'* denir. Aynı mânada 'lojik toplam' (logical sum) deyimi de kullanılmıştır. 'v' sembolü lâtince 'vel' sözcüğünün ilk harfi olması bakımından seçilmiştir. Nitekim lâtincede 'vel' sözcüğü 'veya' anlamına gelir. 'Ya... ya...' anlamında ise lâtincede 'aut' sözcüğü kullanılır.

[6] *'Inclusive alternation'*. ('Ayrıklık' anlamında ise 'inclusive alternation' veya 'nonexclusive alternation' deyimleri de kullanılmıştır).

[7] Günlük dilde 'A veya B' biçimindeki bir önermeyi, önermenin iki bileşeninden hiç olmazsa birinin doğruluğuna inanmakla birlikte hangisinin doğru olduğunu (ya da her ikisinin mi, yoksa yalnız birinin mi doğru olduğunu) bilmediğimiz hallerde evetleriz. Başka bir deyimle, 'A' gibi bir önermenin doğru olduğuna inandığımız hallerde ('B' yanlış olduğunu bildiğimiz ya da doğru olup olmadığını bilmediğimiz bir önerme olduğunda), 'A veya B' gibi bir önermeyi hiçbir zaman öne sürmeyiz. Böyle bir halde 'A veya B' önermesini değil, daha kısa olmakla birlikte "bildirici gücü" daha yüksek olan 'A' önermesini öne süreriz. Örneğin: yarın Ankara'ya (ve yalnız Ankara'ya) gitmeğe karar verdiğim halde yarın nereye gideceğimi sonra bir kimseye açıkça *'yarın Ankara'ya gideceğim'* diyecek yerde, *'yarın Ankara'ya gideceğim veya Konya'ya gideceğim'* demem (aldığım kararı bir dereceye kadar gizlediğinden) *"yanıltıcı"* bir davranış sayılabilir. Oysa bu önerme mantık açısından "yanlış" değil, "doğru" sayılmalıdır. (Bk. Tarski, A.E., s. 22).

[8] Bk. *Reichenbach,* "Elements of Symbolic Logic", s. 28.

§ 8

[1] Günlük dilde koşul-önermeleri yalnız *'A ise,* B' (if A, then B) biçiminde değil, daha başka şekillerde de, özellikle:

(1) A, ancak B ise

(A, only if B) biçiminde de dile getirilmektedir. Örneğin: 'A' olarak

(2) Ahmet Ankara'ya gidecek

önermesini, 'B' olarak ta

(3) Ali Konya'ya gidecek

önermesini seçelim. O zaman:

(4) Ahmet Ankara'ya giderse, Ali Konya'ya gidecek

önermesiyle

(5) Ahmet Ankara'ya gidecek, ancak Ali Konya'ya giderse

(veya başka bir deyimle, 'Ahmet, ancak Ali'nin Konya'ya gitmesi halinde Ankara'ya gidecek') önermesi aynı anlama gelir. Nitekim, gerek (4) gerek (5), Ahmed'in Ankara'ya gitmesinin *gerekli* bir şartının Ali'nin Konya'ya gitme-

sinden ibaret olduğunu dile getirir. (Her iki önerme Ahmed'in Ankara'ya gitmesinin, Ali'nin Konya'ya gitmesinin *yeterli* bir şartı olduğunu da dile getirir). Genel olarak (1) veya 'A ise, B' biçimindeki bir koşul önermesi, 'B'nin doğruluğunun 'A'nın doğruluğu için bir *"gerekli şart"*; 'A'nın doğruluğunun da 'B'nin doğruluğu için bir *"yeterli şart"* olduğunu dile getirir.

Öte yandan, (1) veya 'A ise, B' biçimindeki bir önerme

(6) B, eğer A ise

(B, if A) önermesiyle eş-anlamlıdır. Örneğin:

(7) Ali Konya'ya gidecek, eğer Ahmet Ankara'ya giderse

önermesinin (4) veya (5) anlamına geldiğini kolayca görebiliriz.

[2] Bk. *Quine* "Methods of Logic", s. 12, n. 2.

Bk. § 6, n. 1.

[4] Bk. *Strawson*, "İntroduction to Logical Theory", s. 91-92.

Örneğin: 'C' olarak 'Ali gelecek', 'B' olarak ta 'Veli gelecek' önermesini alalım. O zaman şöyle bir çıkarım-zinciri meydana getirebiliriz:

(1)	Ali gelecek	(öncül)
(2)	Ali gelecek veya Veli gelecek	((1) gereği)
(3)	Ali gelmezse, Veli gelecek	((2) gereği)

Genel olarak, 'A' ve 'B' herhangi iki önerme oldukta,

(4)	~A (A yanlıştır)	(öncül)
(5)	~A veya B (A yanlıştır veya B doğrudur	((4) gereği)
(6)	~A ise, B (A yanlış değilse, B doğrudur)	((5) gereği)
(7)	~A ise, B (A doğru ise, B doğrudur)	((6) gereği

gibi bir çıkarım-zinciri meydana getirilebilir. Buna dayanarak:

(8) ~A
∴ A ise, B

biçimindeki bir çıkarımın geçerli olduğunu, dolayısiyle ön-önermesi "yanlış" olan bir koşul-önermesinin tüm olarak "doğru" olduğunu öne sürebiliriz. (Ancak, (8) gibi bir çıkarımın geçerliliğinin (5) önermesinde geçen 'veya' sözcüğünün doğruluk-fonksiyonu durumunda olmasına bağlı olduğunu, dolayısiyle iddiamızın her türlü koşul-önermesine uygulanamıyacağını belirtmek gerek).

Öte yandan 'A ~ A' gibi bir "çelişme"den 'B' gibi *herhangi* bir önermeyi şöyle bir çıkarım-zinciri yardımiyle çıkarmak mümkündür.

(9)	A ~ A	(öncül)
(10)	A	((9) gereği)
(11)	A veya B	((10) gereği)
(12)	~ A	((9) gereği)
(13)	B	((11) ve (12) gereği)

Böylece:

(14) A ~ A
∴ B

biçimindeki her çıkarımın geçerli olduğunu görüyoruz. Örneğin:

(15) Sokrates koşuyor ve Sokrates koşmuyor
(16) Sokrates koşuyor
(17) Sokrates koşuyor veya sen Roma'dasın
(18) Sokrates koşmuyor
(19) Sen Roma'dasın

çıkarım zincirine dayanarak:

(15) Sokrates koşuyor ve Sokrates koşmuyor
∴ Sen Roma'dasın

çıkarımının geçerli olduğunu söyleyebiliriz. (Bu örnek *Duns Scotus* tarafından verilmişti. Bk. *Luhasiewicz,* "Zur Geschichte der Aussagenlogik", s. 124).

İmdi, (14)'ün geçerliliğine dayanarak:

(16) A ~ A ise, B

biçimindeki şart-önermelerinin, özellikle de ((15) çıkarımının geçerliliğine dayanarak):

(17) Sokrates koşuyor ve Sokrates koşmuyorsa, sen Roma'dasın

şart-önermesinin *"doğru"* olduğunu görüyoruz.

Yanlış bir öncülden istenilen herhangi bir önermenin çıkarılabildiğini savunan *Russell*'den bir gün 'Russell Papa'dır' önermesinden '2 = 1' sonucunu çıkarması istenmiş, Russell de böyle bir çıkarımı şu şekilde yapmıştı:

"Ben Papa isem, Papa ve ben "bir" iz. Ben papa olmadığıma göre de

Papa ve ben "iki"yiz. Şu halde 2 = 1." (Bk. *Rosenbloom,* "The Elements of Mathematical Logic", s. 198).

Böyle bir çıkarımın geçerliliğine dayanarak:

(18) Russell Papa ise, 2 = 1

gibi bir koşul-önermesinin doğruluğunu öne sürmek mümkündür.

5 'Material conditional', 'material implication'.

6 Bu örnek *Tarski*'nindir. (Bk. Tarski, "Introduction to Logic", s. 26-27). *Strawson* ise böyle bir örneğin halis bir "materyel şart-önermesi" olmadığını öne sürmüştür. (Bk. Strawson, A.E., s. 89).

7 'Material biconditional', 'material equivalence'.

8 Bu ekleme *"Sheffer'in çizgi-fonksiyonu"* (Sheffers's stroke-function) da denir.

9 'Joint denial'

§ 9

1 n)2 halinde, n-li eklemin bileşenlerinin önüne yazılması uygundur. n = 2 halinde ise eklem çokluk iki bileşeninin arasında yazılmakla birlikte, bu halde bile eklemin her iki bileşenin önüne yazılması bazı bakımlardan faydalıdır. Özellikle *Lukasiewicz*'in kurduğu "Polonya metodu" denilen bir işaretleme sisteminde bütün "2-li önerme eklemler"ini hep bileşenlerinin önüne yazmakla parantezlerin kullanılması lüzumu ortadan kalkmıştır. Bu metoda göre, '$\sim$', '.', 'v' '$\supset$' ve '$\equiv$' işaretleri yerine sırasiyle 'N', 'K', 'A', 'C' ve 'E' harfleri kullanılmaktadır. Örneğin: '$(p \supset q)$ v $(q \supset p)$' ifadesi bu metoda göre:

ACpqCqp

biçiminde parantezsiz olarak dile getirilir.

§ 10

1 Böylece *"materyel"* koşul-ekleminin mantıksal zorunluluğu açıklamaya yettiğini görüyoruz.

2 'Truth-value analysis'. (Bk. *Quine,* "Methods of Logic", s. 26-27).

§ 11

1 Bu türlü önerme-şemalarına *"karma-şemalar"*, salt mantıksal-değişmezlerle önerme-temsilcilerinden kurulu şemalara ise *"salt-şemalar"* di-

yeceğiz. (5) biçimindeki bir "karma-şema", 'p_1', 'p_2',...,'p_n' önerme-temsilcileriyle 'A_1', 'A_2',...,'A_n' önermelerinin (doğruluk-fonksiyonu durumunda) bir takım önerme-eklemleri yardımiyle biribirine eklenmesi suretiyle meydana gelir.

(4) çizelgesine dayanarak $Ş_1$ ve $Ş_2$ gibi herhangi iki tam-deyim arasında bir de bir *"i ç e r m e"* (implication) bağlantısını tanımlamak mümkündür: $Ş_1$ tam-deyimin $Ş_2$ tam-deyimini *içermesini*, (4) çizelgesinde $Ş_1$ in altındaki sütunda geçen her 'D' harfinin hizasında $Ş_2$ nin altındaki sütunda da bir 'D' harfinin bulunması şeklinde tanımlıyoruz. Buna göre, $Ş_1$ tam-deyiminin altında hiçbir 'D' harfi yoksa, $Ş_1$ in herhangi bir tam-deyimi içerdiğini; öte yandan, $Ş_2$ nin altındaki sütun salt 'D' harflerinden kurulu ise, herhangi bir tam-deyimin $Ş_2$ yi içerdiğini söyleyebiliriz. Başka bir deyimle, *tutarsız bir şema veya yanlış bir önerme herhangi bir tam-deyimi içerir; geçerli bir şema veya doğru bir önerme de herhangi bir tam-deyim tarafından içerilir.* '...' gibi bir formülün' '---' gibi başka bir formülü içerdiğini

$$\text{'...'} \rightarrow \text{'---'}$$

biçiminde dile getireceğiz.

Bu şekilde tanımladığımız "içerme", önermeler arasındaki "materyel" içerme bağlantısının bir genellemesidir. Başka bir deyimle, önermeler arasındaki içerme bağlantısını bu genel "içerme"nin özel bir hali sayabiliriz. Aynı şekilde, sadece "önermeler"in bir özelliği olan "doğruluğu" da "geçerliliğin" özel bir hali olarak yorumlayabiliriz. Bu amaçla herhangi bir tam-deyimin *g e ç e r l i* olmasını, bu *tam-deyimin "geçerli" bir önerme-şeması veya "doğru" bir önerme olması* şeklinde tanımlıyabiliriz. O zaman 'A' gibi bir tam-deyimin 'B' gibi bir tam-deyimi *içermesinin* gerekli ve yeterli şartının *'$A \supset B$' tam-deyiminin geçerliliğinden* ibaret olduğunu; 'A' ile 'B' nin *eşdeğerliğinin* gerekli ve yeterli şartının da *'$A \equiv B$' tam-deyiminin geçerliliğinden* ibaret olduğunu söyleyebiliriz.

Öte yandan, *"karma-şemalar"*ın mümkün olduğunu göz önünde tutarak, çıkarım-şemalarını da "salt" ve "karma" şemalara ayırmamız gerekecektir. Bir *çıkarım-şemasının "salt"* olmasını, her üyesinin bir salt-şema olması şeklinde, *"karma"* olmasını da üyelerinden (hiç olmazsa) birinin bir "karma-şema" olması şeklinde tanımlıyoruz. Buna göre, herhangi bir çıkarımın "temsilci-şeması"nın "salt" bir çıkarım-şeması olduğunu söyleyebiliriz. Buna dayanarak, bir *çıkarımın geçerliliğini, bu çıkarımın temsilci-şemasının geçerliliği* şeklinde, ya da bu çıkarımın *geçerli bir "salt çıkarım-şemasının" yerine-koyma örneği olması* şeklinde tanımlamak gerekir. Herhangi bir önermenin temsilci-şemasının bir "salt-şema" olduğunu söyleyebiliriz. Buna göre, bir önermenin *"mantıkça-doğru"* (veya başka bir deyimle,

"formel-analitik", olmasını, bu *önermenin temsilci-şemasının geçerliliği* şeklinde, ya da bu önermenin *geçerli bir salt-şemanın yerine-koyma örneği olması* şeklinde tanımlıyoruz.

İşte *"t o t o l o j i"* (tautology) deyimini, teknik bir terim olarak, (önermeler mantığı çerçevesi içinde kalmak şartıyla) biryol *"mantıkça-doğru önermeler"* için, bir de (sözü geçen önermelerin yerine-koyma örneği olduğu) *"geçerli salt-şemalar"* için kullanacağız. Buna göre, mantıkça-doğru olmakla birlikte totolojik olmıyan önermelerle, geçerli olmakla birlikte totolojik olmıyan önerme-şemalarının mümkün olduğunu söyleyebiliriz.

İki *dilsel deyim* arasındaki bir bağlantıyı dile getiren *'eşdeğer'* terimi veya bu terimin sembolik karşılığı olarak kullandığımız '↔' işareti, inceleme konusu olan dile değil de, bu dile ait deyimlerden söz etmeğe yarayan bir *"üst-dil"*e (metalanguage) aittir. Buna karşılık, incelediğimiz önerme-eklemlerinin ve genel olarak mantıksal-değişmezlerin, doğrudan doğruya dil-dışı nesnelerden söz etmeğe yarayan "nesnel-dil"e (object-language) ait olduğunu belirtmek gerek. Özellikle, '∼', ' · ', 'v', '⊃' ve '≡' eklemleri nesnel-dile ait olduğu gibi, 'A' ile 'B' nesnel-dile ait herhangi iki formül oldukta, '∼A', 'A · B', 'A v B', 'A⊃B' ve 'A≡B' tam-deyimleri de nesnel-dile aittir.

Nesnel-dil deyimlerinden üst-dilde söz etmek için, bu deyimleri tırnak-içinde gösteririz. Ancak, tırnak işaretlerinin bu özel anlamdaki kullanılışını başka türlü kullanılışlarından (özellikle dikkati üzerine çekmek için kullanılması halinden) ayırdetmek amaciyle, çift-tırnak yerine "tek-tırnak" kullanacağız.

Genel olarak, herhangi bir dilsel-deyimi ya bir takım dil-dışı nesnelerden söz etmek için *"kullanırız"* ya da, aynı deyimi bu şekilde kullanmadan sadece *"anarız"*. İkinci halde deyimi tek-tırnak içinde göstermek gerekir. Örneğin: 'Ankara' sözcüğünü

Ankara Türkiye'nin başkentidir

bağlamında dil-dışı bir nesne olan *Ankara* şehrinden söz etmek için "kullandığımız" halde; aynı sözcüğü

'Ankara' altı harflidir

bağlamında herhangi dil-dışı bir nesneden söz etmek için kullanmayıp onu sadece *"anarız"* . Görüldüğü gibi, 'Ankara' sözcüğü birinci halde nesnel-dile, ikinci halde üst-dile aittir. Dolayısiyle, bu son halde tırnak-içinde gösterilmesi gerekir. Nitekim,

Ankara altı harflidir

önermesinin, 'Ankara' sözcüğü hakkında değil de, *Ankara* şehri hakkında

olması bakımından (hiçbir şehir bir takım harflerden meydana gelmediğine göre) mânasız olduğu meydandadır.

Nesnel-dile ait deyimlerden (üst-dilde) söz etmek için, bu deyimleri (tek) tırnak-içinde gösterdiğimiz gibi, bir de bunları bir takım özel sembollerle adlandırmak mümkündür. Biz burada, nesnel-dile ait önermeleri (üst-dilde) adlandırmak için (indissiz veya indisli olarak) 'Ö' harfini, nesnel-dile ait şema ve tam-deyim adlandırmak için de (gene indissiz veya indisli olarak) 'Ş' harfini kullanacağız. Buna göre, 'Ö' ile 'Ş' harflerini hep "üst-dil"e ait sayacağız. Üst-dil deyimlerini ise anmayıp kullandığımızdan, bu harfleri tırnak içinde göstermemek gerek. Öte yandan, 'A', 'B', 'C', ... harfleriyle 'p', 'q', 'r',... harflerini (indissiz veya indisli olarak) sadece nesnel-dile ait deyimlerin kısaltması veya temsilcisi saydığımızdan, bunların kendileri de "nesnel-dil"e ait semboller durumundadır.

[2] "Hayırlama", "birlikte-evetleme", "ayrıklık" gibi terimleri bundan böyle yalnız "önermeler" için değil, her türden "tam-deyimler" için de kullanacağız. Böylece 'A' ile 'B' herhangi iki tam-deyim oldukta, '$\sim$A' tam-deyimine bir *"hayırlama"*, 'A · B' (veya 'AB') tam-deyimine bir *'Birlikte-evetleme"*, 'A v B' formülüne bir *"ayrıklık"* diyeceğiz. Öte yandan, 'A$\supset$B' tam-deyimine, (genel olarak bir "önerme" durumunda olmadığından) "koşul-önermesi" diyemeyiz. Bu durumu göz önünde tutarak, 'A$\supset$B' biçimindeki bir tam-deyime kısaca bir *"k o ş u l l u"* diyeceğiz. Buna göre, bir "koşul-önermesi"ni, bir önerme durumunda olan bir "koşullu" şeklinde tanımlıyabiliriz.

'A$\supset$B' bir "koşullu" olduğunda, 'A' ya bu koşullu tam-deyimin *"ön-bileşen"i* 'B' ye de *"a r d - bileşen"i* diyeceğiz.

Öte yandan, 'A $\equiv$ B' biçimindeki bir tam-deyime genel olarak *"karşılıklı-koşullu"* diyeceğiz.

[4] Böyle bir çizelgenin son sırasında en çok 2^n tam-deyim bulunabilir.

[5] Quine bu kestirme yola "fell swoop", genel ama uzun olan metoda da "full sweep" demiştir. (Bk. Quine, "Methods of Logic", s. 35-37).

§ 12

[1] Ö' gibi bir önermenin Ö gibi başka bir önermenin "tanımsal-kısaltması" olması, Ö'nün, Ö önermesindeki bazı sembollerin "tanımlıyan" deyimleriyle değiş-tokuş edilmesi suretiyle meydana gelen deyimden ibaret olması demektir.

[2] Gerek 'A$\supset$B' gerek 'B$\supset$A' birer totoloji ise, 'A$\equiv$B' de bir totoloji olur. Bu durumu göz önünde tutarak, 'A$\supset$B' biçimindeki totolojileri, ancak 'B$\supset$A'

nın bir totoloji olmaması halinde anacağız. (Tek istisna 'p⊃p' totolojisi olacaktır).

[3] Bk. *Quine,* "Mathematical Logic", s. 60, n. 2.

[4] (69) totolojisi, *yanlış bir önermenin herhangi bir önermeyi içerdiğini* (e falso sequitur quodlibet); (70) totolojisi ise *doğru bir önermenin herhangi bir önerme tarafından içerildiğini* (verum sequitur ad quodlibet) dile getirir. "İçerme" sözcüğünün "mantıksal gerektirme" (logical entailment) anlamında kullanılması halinde bu iki iddia düpedüz yanlış olurdu. Bundan dolayı (69) ve (70) ilkeleri *"paradoksal"* sayılmıştır. Ancak önermeler arasındaki içerme-bağlantısını § 11, n. 2 deki tanım uyarınca yorumlamamız halinde böyle bir paradoksun ortaya çıkmadığı meydandadır. İşte böyle bir içermeye *"materyel içerme"*, mantıksal gerektirme anlamındaki içermeye ise *"formel içerme"* denir. 'A' ve 'B' gibi iki önerme arasında "materyel içerme" bağlantısının bulunmasının gerekli ve yeterli şartı 'A⊃B' koşul-önermesinin *"doğru"* olmasından ibaret olduğu halde; 'A' ile 'B' arasında "formel içerme" bağlantısının bulunmasının gerekli ve yeterli şartı 'A⊃B' şart-önermesinin *"mantıkça-doğru"* olmasından ibarettir.

Örneğin: '2 + 2 = 5' önermesi, 'Ahmet Ankara'ya gidecek' önermesini "materyel" anlamda içerdiği halde, "formel" anlamda içermez. Nitekim:

'2 + 2 = 5) ⊃ (Ahmet Ankara'ya gidecek)

koşul-önermesi "doğru" olmakla birlikte, "mantıkça-doğru" değildir.

Öte yandan

(2 + 2 = 5) ⊃ ((2 + 2 = 5) v (Ahmet Ankara'ya gidecek))

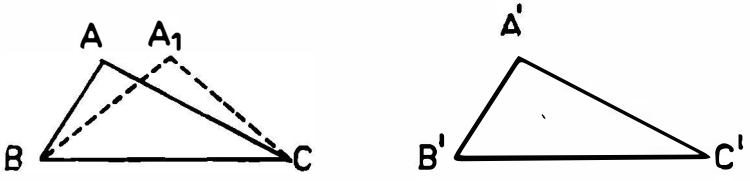
koşul-önermesi mantıkça-doğru olduğundan, '2 + 2 + 5' önermesinin '(2 + 2 = 5) v (Ahmet Ankara'ya gidecek)' önermesini formel olarak içerdiğini söyleyebiliriz.

İmdi, belli bir içermeyi dile getiren bir totoloji, içermenin materyel anlamda değil de formel anlamda yorumlanması halinde yanlış olursa, "paradoksal" sayılmaktadır. Bu gibi *paradoksal totolojiler* arasında (69) ve (70) şemalarından başka, *herhangi iki önermeden birinin öbürünü* (materyel anlamda) *içerdiğini* dile getiren (26) şemasını anabiliriz:

[5] "Reductio ad absurdum" metoduna bir örnek olarak, klâsik geometride karşılıklı üç kenarı eşit olan üçgenlerin eşitliğinin kanıtlanmasını gösterebiliriz. Bu kanıt AB ≃ A 'B', AC ≃ A 'C' ve BC ≃ B 'C' şartlarını yerine getiren ABC ve A'B'C' gibi iki üçgen yardımiyle yapılır.

İmdi, sözü geçen iki üçgenin eşit olması, birinin —söz gelişi A'B'C' nün— bir "yer değiştirme" (displacement) ve gereğinde bir "çevirme" işlemi so-

nucunda öbürüyle (ABC ile) örtüşmesi demektir. Böyle bir işlem ise A'B'C' üçgeninin bütün noktalarına f gibi belli bir "dönüştürüm"ün (transformation)



uygulanması demektir. Buna göre, ABC ile A'B'C' üçgenlerinin eşitliğinin kanıtlanması, fA' = A, fB' ≃ B ve fC' = C şartlarını yerine getiren f gibi bir dönüştürümün varolduğunun gösterilmesi şeklinde olur. Karşılıklı üç kenarı eşit olan üçgenlerin eşit olduğunu da

(1) $(AB \simeq A'B') \cdot (AC \simeq A'C') \cdot (BC \simeq B'C') \supset (\exists f)((fA' = A) \cdot (fB' = B) \cdot (fC' = C))$

gibi bir önerme şeklinde dile getirebiliriz. ('$(\exists f)(\ldots f\ldots)$' ifadesi "...f... şartını yerine getiren en azından bir f vardır" anlamına gelir).

İmdi varsayımımız uyarınca BC ≃ B'C' olduğundan, fB' = B ve fC' ≃ C şartlarını yerine getiren (en azından) bir f dönüştürümünün bulunması gerekir. O zaman fA' noktasiyle A noktası ya BC doğrusunun aynı yanında bulunurlar, ya ayrı yanlarda. İkinci şıkta f işlemine bir "çevirme" işlemi katmakla bu iki noktanın gene de BC doğrusunun aynı yanında olmasını sağlıyabileceğimizden, fA' ile A nın BC noktasının hep aynı yanında olduğunu kabul edebiliriz. İmdi fA' noktası A_1 olsun. O zaman ya $A_1 = A$ ya $A_1 \neq A$. Birinci şıkta ABC ile A'B'C' üçgenlerinin karşılıklı üç noktaları çakıştığından iki üçgen "eşit" (yani ABC ≃ A'B'C') olur. ('=' sembolünü —mutlak— *özdeşlik* anlamında, '≃' sembolünü ise *"eşitlik"* —congruence— anlamında kullanıyoruz). Şu halde iddiamız olan (1) önermesini kanıtlamak için fA' = A olduğunu göstermek yetecektir.

(1) iddiasını "reductio ad absurdum" yoluyla kanıtlamak için, bu önermenin hayırlanması olan

(2) $(AB \simeq A'B') \cdot (AC \simeq A'C') \cdot (BC \simeq B'C') \cdot (f)((fB' = B) \cdot (fC' = C) \supset (fA' \simeq A))$

önermesini göz önüne alarak ('$(f)(\ldots f\ldots)$' deyimi "f ne olursa olsun ...f..." anlamına gelir), doğruluğu önceden bilinen bazı önermelere dayanmak suretiyle (2) önermesinden bir çelişmeyi türetmeğe çalışmalıyız. İmdi (2) önermesinin doğru olması halinde, fA' (yani A_1) noktasiyle A noktasının BC doğru-

sunun aynı yanında bulunacak şekilde bir f dönüştürümü bulunabilir. Buna göre,

(3) $(\exists f)((fB' = B) \cdot (fC' = C) \cdot (fA' = A) \cdot$ (A ile fA' noktaları BC doğrusunun aynı yanında bulunurlar))

önermesini, 2) önermesiyle düzlem Euklides geometrisinin aksiyom ve postülatlarından türetmek mümkündür.

Öte yandan, (2) önermesinin doğruluğu halinde, $A'B' \simeq AB$ den dolayı $A_1B \simeq AB$ ve $A'C' \simeq AC$ den dolayı $A_1C \simeq AC$ olur. Şu halde bir yandan B noktası A_1A doğrusunun orta dikmesi üzerinde bulunur; öbür yandan da C noktası aynı A_1A doğrusunun orta dikmesi üzerinde bulunur. O zaman da B ile C noktaları A_1A doğrusuna göre simetrik olup A ile A_1 noktalarının BC doğrusunun *iki ayrı yanında* bulunması gerekir. Böylece (2) önermesiyle düzlem Euklides geometrisinin aksiyom ve postülatlarından:

(4) $(f)((fB' = B) \cdot (fC' = C) \cdot (fA' = A) \supset$ (A ile fA' noktaları BC doğrusunun iki ayrı yanında bulunurlar))

önermesini türetmiş oluruz. Oysa (4) önermesi (3) önermesinin hayırlanması anlamına gelir.

Böylece (2) önermesiyle düzlem Euklides geometrisinin aksiyom ve postülatlarından bir yandan (3) önermesini, öbür yandan ise (3)'ün hayırlanması olan (4) önermesini türetmek mümkündür. (1) önermesi yerine 'p' temsilci-harfi, (2) önermesi yerine 'r' temsilci-harfi, düzlem Euklides geometrisinin aksiyom ve postülatlarının birlikte-evetlenmesi yerine de 'q' temsilci-harfi konuldukta;

$$q \sim p \supset r$$

ile

$$q \sim p \supset \sim r$$

biçiminde iki öncülü kanıtladığımız görürüz. q'de, doğruluğu önceden bilinen bir öncül olduğundan:

$$\begin{array}{l} q \\ q \sim p \supset r \\ q \sim p \supset r \\ \therefore\ p \end{array}$$

geçerli çıkarım-şemasına dayanarak, 'p' harfinin temsil ettiği (1) önermesini "reductio ad absurdum" yoluyla kanıtlıyabiliriz.

Söz konusu "reductio ad absurdum" işlemini şöyle de yorumlamak mümkündür: 'r', '$q \sim p \supset r$' ve '$q \sim p \supset \sim r$' öncüllerinden doğrudan doğruya 'p' sonucunu çıkaracak yerde, ilk önce '$\sim p \supset p$' sonucunu çıkarırız. Nitekim:

$$q$$
$$q \sim p \supset r$$
$$q \sim p \supset \sim r$$
$$\therefore \sim p \supset p$$

geçerli bir çıkarım-şemasıdır. Örneğin: sözü geçen (4) önermesinin (2) ile düzlem Euklides geometrisinin aksyom ve postülatlarından türetilmesine dayanarak, (1) önermesinin (kendi hayırlanması olan) (2) önermesinden türetilebileceği sonucuna varırız. Bu ise '$\sim p \supset p$' biçiminde dile getirilebilir. Oysa, '$\sim p \supset p$' şeması 'p' ile eşdeğer olduğundan, önünde sonunda (1) sonucuna vardığımızı görüyoruz.

[6] Basit yapıcı ikilemin özel bir hali olarak:

$$p \supset q$$
$$\sim p \supset q$$
$$\therefore q$$

biçimindeki "boynuzlu sillojizm"i (syllogismus cornutus) anabiliriz.

[7] Bk. *Dopp,* "Leçons de Logique Formelle", deuxiême partie, Logique Moderne I, s. 162.

[8] Herhangi bir "n-li önerme-eklemi'ni Brentano sisteminde" dile getirmek, yani bu eklemi sadece '$\sim$' ve '$\cdot$' eklemleri türünden tanımlamak için genel bir metot vardır. Bu metodu bir örnekle aydınlatmak amaciyle, doğruluk-çizelgesi

p	q	r	f(p,q,r)
D	D	D	D
D	D	Y	Y
D	Y	D	D
D	Y	Y	D
Y	D	D	D
Y	D	Y	Y
Y	Y	D	Y
Y	Y	Y	D

bi;iminde olan 'f' gibi bir ("3-lü") eklemi göz önüne alalım. 'f(p,q,r)' şemasının, ancak ve ancak 'pq$\sim$r' nin veya '$\sim$pq$\sim$r' nin ya da '$\sim$p$\sim$qr' şemalarının doğru olması halinde "yanlış" olduğunu görüyoruz. Bu durumu

'$\sim$f(p,q,r)' $\leftrightarrow$ 'pq$\sim$r v $\sim$pq$\sim$r v $\sim$p$\sim$qr)'

eşdeğerliğiyle dile getirebiliriz. Oysa, böyle bir eşdeğerliğe dayanarak,

$$\text{'f(p,q,r)'} \leftrightarrow \text{'}\sim(pq\sim r \vee \sim pq\sim r \vee \sim pq\sim r)\text{'}$$

eşdeğerliğini, dolayısiyle de De Morgan kanunu gereği

$$\text{'f(p,q,r)'} \leftrightarrow \text{'}\sim(pq\sim r) \cdot \sim(\sim pq\sim r) \cdot \sim(\sim p\sim qr)\text{'}$$

eşedeğerliğini elde ederiz. İşte, bu şekilde 'f(p,q,r)' şemasını, '$\sim$' ve '$\cdot$' eklemlerinden başka hiçbir eklemi içine almıyan bir şemaya ('$\sim(pq\sim r) \cdot \sim(\sim pq\sim r) \cdot \sim(\sim p\sim qr)$' şemasına) çevirebileceğimizi görüyoruz.

Aynı şekilde, doğruluk-çizelgesi bilinen herhangi bir n-li önerme-eklemini '$\sim$' ve '$\cdot$' eklemleri türünden tanımlamak mümkündür. Buna tek bir istisna vardır. Bu da karşılığı olan şemanın bir totoloji olduğu eklemlerde ortaya çıkar. Ancak 'p_1', 'p_2',...,'p_n' gibi n tane temsilci-harfi içine alan herhangi bir totolojiyi (onunla eşdeğer olan)

$$\sim(p_1 \sim p_1 p_2 \ldots p_n)$$

biçimindeki bir şemayı dönüştürebileceğimizden, *istisnasız* olarak herhangi bir şemanın (ister totolojik olsun, ister omlasın), içinde '$\sim$' ve '$\cdot$' eklemlerinden başka hiçbir önerme-eklemi geçmiyen bir şemaya dönüştürülebileceğini görüyoruz.

Başlıca "2-li eklemler"in Brentano sistemindeki tanımları şöyledir:

$$\begin{aligned}
p \vee q &= {}_{Dk} \sim(\sim p\sim q)\\
p \supset q &= {}_{Dk} \sim(p\sim q)\\
p \equiv q &= {}_{Dk} \sim(p\sim q) \cdot \sim(\sim pq)\\
p \not\equiv q &= {}_{Dk} \sim(pq) \cdot \sim(\sim p\sim q)\\
p \mid q &= {}_{Dk} \sim(pq)\\
p \downarrow q &= {}_{Dk} \sim(pq) \cdot \sim(p\sim q) \cdot \sim(\sim pq)
\end{aligned}$$

[9] Bk. *Quine,* 'Mathematical Logic", s. 49, n. 2.

§ 13

[1] Bk. *Quine,* "Methods of Logic", s. 56.

[2] "Normal-şemalar"a *"normal-biçimler"* (normal forms) veya (bunları ilerde sözünü edeceğimiz "birliksel normal-şemalar"dan ayırdetmek amaciyle) *"ayrıksal normal-biçimler"* disjunctive normal forms) de denilmektedir.

[3] Bir ayrıklığın bir bileşeninin tutarlılığı, ayrıklığın tüm olarak tutarlı olmasına yol açar. Genel olarak ayrıklıklarla birlikte-evetlemelerin tutarlılığı, tutarsızlığı, geçerliliği ve geçersizliği şu kurallarla belirlenebilir:

(i) 'A' ve 'B' tutarlı ise, 'A v B' de tutarlıdır; ama 'AB' tutarsız olabilir.

(ii) 'A' ve 'B' tutarsız ise, hem 'AB' hem 'A v B' tutarsızdır.

(iii) 'A' ve 'B' geçerli ise, hem 'AB' hem de 'A v B' geçerlidir.

(iv) 'A' ve 'B' geçersiz ise, 'AB' geçersizdir; ama 'A v B' geçerli olabilir.

[4] (3) şemasını böylece bir normal-şema halinde dönüştürebildiğimize göre, *"tutarlı"* olduğunu ortaya koymuş oluruz. (Nitekim her normal-şema tutarlı olduğundan, (3) ün bir normal-şema ile eşdeğer olması tutarlılığını gerektirir.)

Öte yandan, aynı işlemleri uygulamak suretiyle herhangi bir tutarsız şemayı, her çarpanı tutarsız olan çok-çarpanlı bir *"normalımsı"* şema haline dönüştürmek mümkündür. Burada *"normalımsı"* bir şemayı, her çarpanı, birbirinden *farklı yalın-şemalardan* kurulu bir çok-çarpanlı birlikte-evetleme olan bir çok-çarpanlı ayrıklık şeklinde tanımlıyoruz. Buna göre "normal-şemalar"ı sözü geçen "normalımsı" şemaların özel bir türü olarak yorumlıyabiliriz. Örneğin: 'p∼qr v p∼q' bir "normal-şema" durumunda olan bir normalımsı şema; '∼p∼qpr v p∼q' ise bir "normal-şema" durumunda olmıyan bir normalımsı şemadır. Görüldüğü gibi, bu son şemanın birinci çarpanında (her yalın-şemanın geçiş sayısı "1"e eşit olmakla birlikte) her "atomsal-şema"nın, yani her *temsilci-harfin geçiş sayısı "1" değildir.* Nitekim 'p' harfinin bu çarpandaki geçiş sayısı "2"ye eşittir. Aynı çarpanda hem 'p' hem de '∼p' geçtiğinden, bu çarpanın *"tutarsız"* olduğunu görüyoruz. Ancak bir ayrıklığın bir çarpanının tutarsız olması genel olarak ayrıklığın tüm olarak tutarsız olmasını gerektirmez. Çarpanlarından bir tekinin bile tutarlılığı tüm ayrıklığın tutarlılığını sağlar. Oysa, sözü geçen '∼p∼qpr v p∼q' normalımsı şemasının birinci çarpanı tutarsız olmakla birlikte, ikincisi tutarlıdır. Şu halde şemamız (bir normal-şema olmamakla birlikte) tutarlı bir normalımsı şemadır. Ancak herhangi bir çok-çarpanlı ayrıklık, tutarlı çarpanlarının ayrıklığına dönüştürülebildiğinden, her tutarlı normalımsı şemanın (tutarsız çarpanlarını ortadan kaldırmak suretiyle) bir "normal-şema"ya dönüştürülebildiğini görüyoruz. Ancak her çarpanı tutarsız olan bir normalımsı şemanın bir normal şemaya dönüştürmenin imkânsız olduğu meydandadır. Böylece normalımsı şemaları, bir yandan (birer "normal-şema" halinde dönüştürülebilen) *"tutarlı normalımsı şemalar"*, öbür yandan da (birer "normal-şema" halinde dönüştürülemiyen) *"tutarsız normalımsı şemalar"* olmak üzere iki öbeğe ayırabiliriz.

İmdi, herhangi bir şemayı ya bir tutarlı normalımsı şemaya, ya bir tutarsız normal şemaya dönüştürmek mümkündür. Her tutarlı şema bir "tutarlı normalımsı şema" haline, her tutarsız şema ise bir "tutarsız normalımsı şe-

ma" haline dönüştürülebilir. Böylece, verilen herhangi bir şemanın "tutarlı" mı, "tutarsız"mı olduğunu, doğruluk-değeri analizine başvurmadan da tespit etmek mümkündür.

Örneğin, sözü geçen (10—7) yani

$$\sim\{\sim[\sim(p \vee \sim q) \cdot \sim q] \vee \sim pq\}$$

şemasının tutarsızlığını, bu şemayı önce (§ 12'de yaptığımız gibi)

$$\sim pq \sim q \cdot (p \vee \sim q)$$

biçimine; sonra da

$$\sim pq \sim qp \vee \sim pq \sim q \sim q$$

biçimine; en sonda da

$$p \sim pq \sim q \vee \sim pq \sim q$$

biçimindeki bir "tutarsız normalımsı şema" haline dönüştürmek suretiyle tespit edebiliriz.

İmdi, herhangi bir şemanın tutarlı olup olmadığını denetlemeye yarayan her metot aynı zamanda geçerliliğin de denetlenmesine yarar. Nitekim:

(a) Bir tam-deyimin geçerli olmasının gerekli ve yeterli şartı, bu *tam-deyimin hayırlanmasının tutarlı olmamasından* ibarettir.

(b) Bir tam-deyimin *geçersiz* olmasının gerekli ve yeterli şartı, bu *tam-deyiminin hayırlanmasının tutarlı olmasından ibarettir.*

Böylece, önerme-şemalarının normalımsı şemalar haline dönüştürülmesinin, yalnız "tutarlılık" ile "tutarsızlık" için değil, bir de "geçerlilik" ile "geçersizlik" için de bir *"denetleme metodu"* (test method) olduğunu görüyoruz.

(Öte yandan, geçerlilik ile geçersizliği denetlemeye yarayan her metot, aynı zamanda tutarlılık ile tutarsızlığı da denetlemeye yarar. Nitekim:

(c) Bir formülün *tutarlı* olmasının gerekli ve yeterli şartı, bu *tam-deyimin hayırlanmasının geçerli olmamasından* ibarettir.

(d) Bir tam-deyimin *tutarsız* olmasının gerekli ve yeterli şartı, *bu tam deyimin hayırlanmasının geçerli olmasından* ibarettir.

§ 14

(a) Her Ş şeması, eşdeğerliğin dönüşümlüğü gereği, kendi eşdeğerlik-kümesinin bir üyesidir.

(b) Ş herhangi bir şema, K kümesi Ş nin eşdeğerlik-kümesi, $Ş_1$ ve $Ş_2$ de K kümesinin üyesi olan iki şema olsun. O zaman $Ş \leftrightarrow Ş_1$ ve $Ş \leftrightarrow Ş_2$ olur. Bu iki eşdeğerliğin birincisinden, eşdeğerliğin bakışım özelliği gereği $Ş_1 \leftrightarrow Ş_2$ elde edilir. $Ş_1 \leftrightarrow Ş$ ve $Ş \leftrightarrow Ş_2$ den de, eşdeğerliğin geçişliği gereği, $Ş_1 \leftrightarrow Ş_2$ elde edilir.

(c) $Ş_1$ şeması, Ş şemasının eşdeğerlik-kümesi olan K kümesine ait olmıyan bir şema olsun. $Ş_1$ in, K ya ait olan $Ş_2$ gibi bir şema ile eşdeğer olduğunu kabul edelim. O zaman, $Ş_2$ (K nın bir üyesi olmasından dolayı) Ş ile eşdeğer olduğundan, $Ş_1$ şeması da —eşdeğerliğin geçişliği gereği— Ş ile eşdeğer olur. Böylece $Ş_1$ şeması, varsayıma aykırı olarak, K kümesine ait olur. (Olmazlığa geri götürme yolu ile kanıtlama!)

[2] (i) "$Ş_1$ ve $Ş_2$ herhangi iki şema oldukta, $Ş_1$)——($Ş_2$ ise, $Ş_2$)——($Ş_1$" şartı ile dile getirilen özelliğe, ')——(' ikililik-bağlantısının bakışım (simetri) özelliği denir. ')——(' nin bakışımlı (simetrik) olduğu şöyle kanıtlanabilir:

$Ş_1$ şeması olarak '$f(p_1,\ldots,p_n)$' gibi bir şemayı, $Ş_2$ şeması olarak ta '$g(q_1,\ldots,q_m)$' gibi bir şemayı ele alalım. O zaman (i) gereği:

(ii) "'$g(q_1,\ldots,q_m)$'↔'$\sim f(\sim p_1,\ldots,\sim p_n)$' ise, '$f(p_1,\ldots,p_n)$' ↔ '$\sim g\ (q_1,\ldots,q_m)$'"

(ii) ise kolaylıkla kanıtlanabilir:

'$g(q_1,\ldots,q_m)$' ↔ '$\sim f(\sim p_1,\ldots,\sim p_n)$'

öncülünden,

'$\sim g(q_1,\ldots,q_m)$'↔'$\sim \sim f(\sim p_1,\ldots,\sim p_n)$'

dolayısiyle de

'$\sim g(q_1,\ldots,q_m)$'↔'$f(\sim p_1,\ldots,\sim p_n)$'

sonucu çıkarılır. Buradan da

'$\sim g(\sim q_1,\ldots,\sim q_m)$'↔'$f(\sim \sim p_1,\ldots,\sim \sim p_n)$'

dolayısiyle de

'$f(p_1,\ldots,p_n)$'↔'$\sim g(\sim q_1,\ldots,\sim q_m)$'

elde edilir. (İ.K.)

[3] Bk. P.R. Halmos, "Lectures on Boolean Algebras", s. 8.

[4] 'p' ve 'q' harflerinden kurulu bir çelişmenin ikilisi olarak bu yoldan

$$pq \vee p{\sim}q \vee {\sim}pq \vee {\sim}p{\sim}q$$

normal şeması elde edilir. Bu şema '$p \vee {\sim}p$' totolojisine dönüştürülebilir.

Öte yandan, bu yöntemle bir totolojinin ikilisini doğrudan doğruya bulamayız. Nitekim, bu yöntemi bir totolojiye uygulamamız halinde sağ yanı hep 'Y' den ibaret bir doğruluk-çizelgesi buluruz. Böyle bir çizelge ise hiç bir normal şemayı belirlemez. Bununla birlikte, böyle bir çizelgenin '$p{\sim}p$' (veya '$p{\sim}pq{\sim}q$',...) gibi bir "normalımsı" şemayı belirlediğini kabul edebiliriz. Buna göre, bir totolojinin ikilisi olarak bir "normalımsı şema" elde edildiğini söyleyebiliriz.

Bu metotla, '$p \vee q$' nün ikilisi olarak 'pq', '$p \vee q$' nün ikilisi olarak ta 'pq' bulunur. Öte yandan, (II) metoduyla, '$p \vee q$' nün ikilisi olarak '${\sim}({\sim}p\,{\sim}q)$', 'pq' nün ikilisi olarak ta '${\sim}({\sim}p \vee {\sim}q)$' bulunur. İki ayrı metotla bulunan ikililer birbiriyle eşdeğer olduğundan:

$$'pq' \leftrightarrow {\sim}({\sim}p \vee {\sim}q)'$$
$$'p \vee q' \leftrightarrow {\sim}({\sim}p{\sim}q)'$$

dolayısiyle de

$$'{\sim}(pq)' \leftrightarrow {\sim}p \vee {\sim}q'$$
$$'{\sim}(p \vee q)' \leftrightarrow {\sim}p{\sim}q'$$

elde edilir. Böylece, De Morgan kanunlarının ikililik kanunları durumunda olduğu görülür.

Genel olarak, '$f(p_1,\ldots,p_n;\ \cdot\ ,\vee)$' sadece '$\sim$', '$\cdot$' ve '$\vee$' eklemlerinden kurulu herhangi bir n-li şema oldukta, böyle bir şemanın hayırlanmasının '$f({\sim}p_1,\ldots,{\sim}p_n;\ \vee\ ,\ \cdot\ )$' ile eşdeğer olduğu gösterilebilir. Nitekim:

$$'f({\sim}p_1,\ldots,{\sim}p_n;\ \cdot\ ,\ \vee)' \rangle\!\!-\!\!\langle\ '{\sim}f(p_1,\ldots,p_n;\ \cdot\ ,\ \vee)'\ \text{((II) gereği)}$$

$$'f({\sim}p_1,\ldots,{\sim}p_n;\ \cdot\ ,\ \vee)' \rangle\!\!-\!\!\langle\ 'f({\sim}p_1,\ldots,{\sim}p_n;\ \vee\ ,\ \cdot\ )'\ \text{((III) gereği)}$$

olduğundan,

$$'{\sim}f(p_1,\ldots,p_n;\ \cdot\ ,\ \vee)' \leftrightarrow 'f({\sim}p_1,\ldots,{\sim}p_n;\ \vee\ ,\ \cdot\ )'$$

elde edilir.

Bu eşdeğerliğe *Shannon teoremi* denir. (Bk. U. Weyh, "Elemente der Schaltungsalgebra", s. 42.)

Örneğin:

$$'{\sim}[p{\sim}qr \vee (p{\sim}q \vee r) \cdot {\sim}pr \cdot ({\sim}pq \vee p{\sim}r)]$$

şeması, Shannon teoremine dayanarak, bir çırpıda

$$(\sim p \vee q \vee \sim r) \cdot [(\sim \vee q) \cdot \sim r \vee p \vee \sim r \vee (p \vee \sim q) \cdot (\sim p \vee r)]$$

biçimine dönüştürülebilir.

[6] Bk. Church, "Introduction to Mathematical Logic", s. 108.

[7] Bk. Church, A.E., s. 108.

[8] Ş)——(~Ş özelliğine dayanarak, kendiyle ters-ikili olan bir şemanın İkililik-kümesiyle, bu şemanın hayırlanmasının eşdeğerlik kümesinin birbiriyle özdeş olduğu gösterilebilir. (Nitekim, Ş kendiyle ters-ikili olan bir şema oldukta, Ş nin ikililik-kümesi, ~Ş ile eşdeğer olan şemaların kümesinden ibarettir.)

[9] Ayrıksal ve birliksel (tam veya tam olmıyan) normal-şemaların *sadeleşmesi* bir de *"çarpanlara ayrılma"* mânasına gelir. Normal şemaların çarpanlara ayrılmasını üç ayrı halde yapabiliriz.

1.ci hal: Ortak çarpanlı terimler hali:

'A · B' ile 'A · C' gibi 'A' ortak çarpanı olan iki ayrıksal temel-şemayı

(1) $\quad A \cdot B \vee A \cdot C \equiv A \cdot (B \vee C)$

gereği iki çarpana ayırabiliriz. Örneğin 'pq v p~r' yi 'p · (q v ~r)' dönüştürebiliriz.

Ortak çarpanlı birliksel normal-şemalar ise (1) in ikililik karşılığı olan

(2) $\quad (A \vee B) \cdot (A \vee C) \equiv A \vee (B \cdot C)$

gereği çarpanlara ayrılabilir.

2.ci hal: Bakışık şemalar hali:

'a_1',...,'a_n' n tane farklı yalın-şemanın kısaltması oldukta, biryol '$a_1 \ldots a_n$' ile '$\sim a_1 \ldots \sim a_n$' ayrıksal temel-şemalarına, bir de '$a_1 \vee \ldots \vee a_n$' ile '$\sim a_1 \vee \ldots \vee \sim a_n$' birliksel temel-şemalarına *"bakışık"* diyoruz.

Bakışık şemaları aşağıdaki totolojilere göre çarpanlara ayırabiliriz:

(3) $\quad a_1 \ldots a_n \vee \sim a_1 \ldots \sim a_n \equiv (a_1 \vee \sim a_2) \cdot (a_2 \ldots a_n \vee \sim a_1 \sim a_3 \ldots \sim a_n)$

(4) $\quad (a_1 \vee \ldots \vee a_n) \cdot (\sim a_1 \vee \ldots \vee \sim a_n) \equiv (a_1 \cdot \sim a_2) \vee (a_2 \vee \ldots \vee a_n) \cdot (\sim a_1 \vee \sim a_3 \vee \ldots \vee \sim a_n)$

Örneğin '~pq~r v p~qr' deyimi (3) gereği '(~p v r) · (q~r v p~q)' ye dönüştürülebilir. (Bk. Ulrich Weyh, "Elemente der Schaltungsalgebra", s. 67 - 68.)

3.cü hal: Kısmen bakışık şemalar hali:

Biryol '$a_1 \ldots a_n \cdot A$' ile '$\sim a_1 \ldots \sim a_n \cdot B$' biçimindeki şemalara, bir de '$a_1 \vee \ldots \vee a_n \vee A$' ile '$\sim a_1 \vee \ldots \vee \sim a_n \vee B$' biçimindeki şemalara *"kısmen bakışık"* diyelim. ('A' ile 'B' burada herhangi iki şemanın kısaltmasıdır.) Öğrencim Ali Karatay çarpanlara ayrılma işleminin kısmen bakışık şemalar halinde de yapılabileceğini göstermiştir. Karatay'a göre çarpanlara ayrılma aşağıdaki genel kanunlara dayanır:

(5) $a_1 \ldots a_m a_{m+1} \ldots a_n \cdot A \vee \sim a_1 \ldots \sim a_m \sim a_{m+1} \ldots \sim a_n \cdot B \equiv$
$(a_1 \ldots a_m \vee \sim a_{m+1} \ldots \sim a_n) \cdot (a_{m+1} \ldots a_n \cdot A \vee \sim a_1 \ldots \sim a_m \cdot B)$

(6) $a_1 \vee \ldots \vee a_m \vee a_{m+1} \vee \ldots \vee a_n \vee A) \cdot (\sim a_1 \vee \ldots \vee \sim a_m \vee \sim a_{m+1} \vee$
$\ldots \vee \sim a_n \vee B) \equiv (a_1 \vee \ldots \vee a_m) \cdot (\sim a_{m+1} \vee \ldots \vee \sim a_n) \vee (a_{m+1} \vee \ldots$
$\vee a_n \vee A) \cdot (\sim a_1 \vee \ldots \vee \sim a_m \vee B)$

Örneğin (5) gereği, 'pqrs v ~p~q~rtu' şeması (m = 1 için)

$$(p \vee \sim q \sim r) \cdot (qrs \vee \sim ptu)$$

biçimine dönüştürülebilir..

§ 15

Ş herhangi bir şema, $(m_1,\ldots,m_k)$ de Ş nin karşılığı oldukta, $(m_1,\ldots,m_k)$'i Ş nin ayrıksal n-li tam normal--şemasının çarpanlarının kümesi olarak ta yorumlıyabiliriz. O zaman m_i sayısı (i = 1, 2,...,k) sayısı, söz konusu ayrıksal n-li tam normal-şemanın i.nci çarpanının temsilcisi sayılır. m_i sayısı, bu i.nci çarpanın "eksiksiz ayrıksal n-li tam normal-şema"daki sırasını gösterir.)

Ş herhangi bir n-li şema oldukta, Ş nin ayrıksal n-li tam normal-şemasının karşılığını, "Ş nin karşılığı" da sayacağız. Ş nin karşılığını kısaca

$$kr(Ş)$$

ile göstereceğiz.

İmdi, bütün n-li temel-şemaların kümesini (yani eksiksiz ayrıksal n-li tam normal-şemanın bütün çarpanlarının kümesini) 'E' ile gösterelim. E kümesi buna göre 2^n üyeli bir kümedir. Burada küme-üyesi olarak ele aldığımız her nesne E ye ait olduğundan, E kümesine "evrensel-küme" denir. Buna göre, her n-li şemanın karşılığının E kümesinin bir "alt-küme"si olduğunu; bir totolojinin karşılığının da E kümesinin kendisi olduğunu söyleyebiliriz. Gerek totolojinin karşılığı olan evrensel-küme, gerek çelişmenin karşılığı olan boşküme, evrensel-kümenin birer alt-kümesi sayılır. Buna göre, evrensel-kümenin üye sayısının $2(^{2^n})$ olduğu gösterilebilir.

K, E nin herhangi bir alt-kümesi oldukta, K ya ait olmıyan (ama gene de E ye ait olan) bütün üyelerin (yani n-li temel-şemaların) kümesine, K kümesinin *"tümleç"*i (complement) denir.

K gibi bir kümenin tümleci

$$K'$$

ile gösterilir. Evrensel-kümenin tümleci boş-küme, boş-kümenin tümleci de evrensel-kümedir.

K ile L, E nin herhangi iki alt-kümesi oldukta, K ile L nin üyelerinden kurulu kümeye K ile L nin *"birleşim"*i (union) denir. K ile L nin birleşimi

$$K \cup L$$

ile gösterilir. $K \cup L$ kümesi E nin bir alt-kümesidir. Gerek K nın gerek L nin her üyesi $K \cup L$ nin bir üyesi olduğu gibi, $K \cup L$ nin her üyesi K nın veya L nin bir üyesidir.

K ile L, E nin herhangi iki alt-kümesi oldukta, hem K hem L ye ait bütün üyelerin kümesine K ile L nin *"kesişim"*i (intersection) denir. Bu da

$$K \cap L$$

ile gösterilir. Hem K hem L ye ait her üye $K \cap L$ nin bir üyesi olduğu gibi, $K \cap L$ nin her üyesi hem K nın hem L nin üyesidir.

Kümelerin tümleci, birleşimi ve kesişimi kavramlarına dayanarak, şemaların karşılıklarının şu özellikleri taşıdığını gösterebiliriz:

(a) $$kr(\sim Ş) = (kr(Ş))'$$

yani: bir şemanın hayırlanmasının karşılığı, bu şemanın karşılığının tümleciyle özdeştir.

$Ş_1$ ile $Ş_2$ 'p_1',...,'p_n' gibi n tane temsilci-harfin tümünden veya bazılarından kurulu iki şema oldukta:

(b) $$kr(Ş_1 \cdot Ş_2) = kr(Ş_1) \cap kr(Ş_2)$$

yani: iki şemanın birlikte-evetlenmesinin karşılığı, bu şemaların karşılıklarının kesişimiyle özdeştir;

(c) $$kr(Ş_1 \vee Ş_2) = kr(Ş_1) \cup kr(Ş_2)$$

yani: iki şemanın ayrıklığının karşılığı, bu şemaların birleşimiyle özdeştir.

(a), (b) ve (c) özellikleri sırasiyle $\sim Ş_1$, $Ş_1 \cdot Ş_2$ ve $Ş_1 \vee Ş_2$ nin doğruluk-çizelgesine başvurmak suretiyle kolayca kanıtlanabilir.

Özel haller olarak, $Ş_1$ in karşılığı ya (i) Ş nin kendisiyle, ya da (ii) Ş nin hayırlanmasiyle eşdeğer olabilir. (i) halinde Ş *kendiyle-ikili,* (ii) halinde de Ş *kendiyle ters-ikilidir.*

(i) *Ş kendiyle-ikilidir:*

$$kr(Ş) = (m_1,\ldots,m_k)$$

$$kr(\sim Ş) = (h_1,\ldots,h_j) \qquad j = 2^n - k$$

olsun. O zaman $kr(Ş_1) = kr(Ş)$ olduğundan:

$$(2^n - h_j + 1,\ldots..,\ 2^n - h_1 + 1) = (m_1,\ldots,m_k)$$

olur. Dolayısiyle

$$j = k$$

ve

$$2^n - h_k + 1 = m_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2^n - h_1 + 1 = m_k$$

olur. Bu denklemlerden de

$$h_1 = 2^n - m_k + 1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$h_k = 2^n - m_1 + 1$$

elde edilir.

$j = k$ ve $j = 2^n - k$ olduğundan, $j = k = 1/2\ 2^n = 2^{n-1}$ olduğu görülür. Şu halde her kendiyle-ikili şemanın ayrıksal (veya birliksel) n-li tam normal-şeması 2^{n-1} çarpanlıdır.

(ii) *Ş kendiyle ters ikilidir:*

O zaman $kr(Ş_1) = kr(\sim Ş)$ olur. Dolayısiyle:

$$(2^n - h_j + 1,\ldots,\ 2^n - h_1 + 1) = (h_1,\ldots,h_j)$$

yani:

$$2^n - h_j + 1 = h_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$2^n - h_1 + 1 = h_j$$

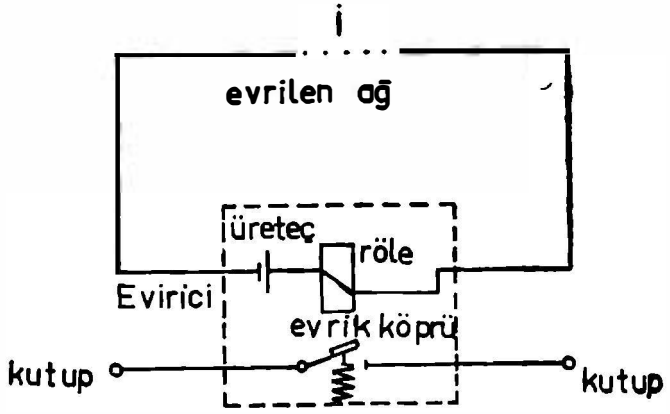
olduğu görülür.

§ 16

[1] Önermeler-mantığının çevirgeçli elektrik-devrelerin hesapları için kullanılabileceği ilk olarak *C. E. Şhannon* tarafından (1937'de) gösterilmiştir. Önermeler-mantığının hesaplarını yapabilen ilk makina ise *T. A. Kalin* ve *W. Burkhart* tarafından (1946'da) yapılmıştır.

[2] Bk. *U. Weyh,* "Elemente der Schaltungsalgebra", s. 21, 65.

[3] Elektrik devreleri halinde elektromagnetik röleli bir evirici kullanılabilir. Böyle bir eviricinin işleyişini aşağıda gösteriyoruz:



Evrilen ağ iletici durumunda ise, rölenin devresi kapanarak, eviricinin içindeki üreteçten çıkan akım röleden geçerek onu mıknatıslar. Dolayısiyle de evrik-köprü mıknatısın etkisi altında *açılır*. Böylece evrik-ağın kutupları arasında akım geçemez. Öte yandan, evrilen-ağın iletici olmaması halinde, rölenin devresi açık olup mıknatıslık özellliği olmaz. Dolayısiyle evrik-kapı onu altından tutan yayın etkisi altında *kapalı* kalır. Böylece akımın evrik-ağın bir kutbundan öbür kutbuna geçmesi mümkün olur.

Herhangi bir evrik-ağda (elektrikli olsun olmasın), bu evrik-ağın bir kutbundan giren maddenin eviriciden geçerek öbür kutba kadar iletilmesi imkânsız olmalıdır. Yoksa, evrilen-ağın iletici olması halinde, evrik-ağın bir kutbundan giren maddenin eviriciden geçerek evrilen ağı geçmek suretiyle yeniden eviriciye dönerek evrik-ağın öbür kutbuna kadar iletilebilecekti. Oysa, evrilen-ağın iletici olması halinde, evrik-ağın iletici olmaması gerekir. (İ.K.)

BİBLİYOGRAFYA

BOCHENSKI, I.M. — MENNE, A., **"Grundriss der Logistik"**, (F. Schöningh, Paderborn, 1962, 2.ci yayım.)

CARNAP, R., **"The Logical Syntax of Language"**, (Routledge and Kegan Paul, London, 1937.)

"Einführung in die symbolicche Logik", (Springer, Wien, 1954.)

CHURCH, A., **"Introduction to Mathematical Logic Vol. I"**. (Princeton University Press, 1956, 3.cü baskı: 1962.)

COPI, I. M., **"Symbolic Logic"**, (Macmillan, New York, 1954.)

CURRY, H.B., **"Foundations of Mathematical Logic"**, (McGraw-Hill, New York, 1963.)

DOPP, J., **"Leçons de Logique Formelle"**, (Louvain, 1950.)

EATON, R. M., **"General Logic"**, (C. Scribner's Sons, New York, 1931.)

FITCH, F. B., **"Symbolic Logic: An Introduction"**, (Ronald Press, New York, 1952.)

HALMOS, P. R., **"Lectures on Boolean Algebras"**, (Van Nostrand, New York, 1963.)

HERMES, H., **"Einführung in die mathematicche Logik"**, (Teubner, Stuttgart, 1963.)

HILBERT, D. und ACKERMAN, W. **"Grundzüge der theoretischen Logik"**, (Springer, Berlin, 3.cü yayım; 1949, 4.cü yayım: 1959.)

HUGHES, G.E. and LONDEY, D.G., **"The elements of formal logic"**, (Methuen, London, 1965.)

KALISH, D. and MONTAGUE, R., **"Logic: Techniques of Formal Reasoning"**, (Harcourt, Brace and Word, New York, 1964.)

KLEENE, S. C., **"Introduction to Metamathematics"**, (North-Holland, Amsterdam, 1952)

LEBLANC, H., **"An Introduction to Deductive Logic"**, (Wiley, New York, 1955.)

LORENZEN, P. **"Formale Logik"**, (Berlin, 1958.)

LUKAŞIEWICZ, J., **"Zur Geschichte der Aussagenlogik"**, (Erkenntnis, Cilt 5 (1935 - 6), s. 169 — 171.)

LUKASIEWICZ, J., **"Aristotle's Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic"**, (Oxford, 1951.)

MENNE, A., **"Logik und Existenz"**, (Meisenheim, 1954.)

MILL, J.S., **"A System of Logic"** (Longmans, Green, and Co., London, 1879, 10.cu yayım')

PRIOR, A. N., **"Formal Logic"**, (Oxford University Press, London, 2.ci yayım 1962.)

QUINE, W. V., **"Mathematical Logic"**, (Harvard University Press, 1940, 4.cü baskı 1958.)

QUINE, W. V., **"Methods of Logic"**, (Holt, Rinehart and Winston, New York, 1950, yeni yayım 1959.)

QUINE, W. V., **"Word and Object"**, (Technology Press of the Massachusetts Institute of Technology, 1960.)

REICHENBACH, H., **"Lojistik"**, çeviren: H. Vehbi Eralp, Edebiyat Fakültesi Yayınları, İstanbul, 1939.

REICHENBACH, H., **"Elements of Symbolic Logic"**, (Macmillan, New York, 1947.)

ROSENBLOOM, P., **"The Elements of Mathematical Logic"**, (Dover, New York, 1950.)

ROSSER, J.B., **"Logic for Mathematicians"**, (McGraw-Hill, New York, 1953.)

SCHOLZ, H. und HASENJAEGER, G., **"Grundzüge der mathematischen Logik"**, (Springer, Berlin, 1961.)

SUPPES, P., **"Introduction to Logic"** (Van Nostrand, New York, 1957)

STRAWSON, P. F., **"Introduction to Logical Theory"**, (Methuen), London, 1952.)

TARSKI, A., **"Introduction to Logic"**, (New York, 1941.)

WEYH, U., **"Elemente der Schaltungsalgebra"**, (R. Oldenburg, München, 3.cü yayım 1964.)

WHITEHEAD, A.N. and RUSSELL, B., **"Principia Mathematica" to 56** (Cambridge University Press, 1962; ilk yayım 1913.)

YANLIŞ - DOĞRU ÇİZELGESİ

Sayfa	Satır	Yanlış	Doğru
1	6	doruluğunun	doğruluğunun
8	14	$Ş_2$ nin	$Ş_2$
36	9 *	diyeceğiz [3]	diyeceğiz [5]
48	14 *	karşılık	karşılığı
50	6 *	Bütün satır silinecektir.	
51	6 *	bileşenlerin doğruluk-değerini belirleriz. Aynı ilşemi gittikçe da	önermelere varılana kadar tekrarlarız. Ondan sonraki sırada
52	8 *	$\sim$.	. $\sim$
60	9	biçjimindeki	biçimindeki
69	9 *	A_n ($_n$-)	A_{n-} ($_{n-2}$)
71	2 *	işareti	işareti"
74	3	T u t a r s ı l ı k	T u t a r s ı z l ı k
76	15	g	f
77	20	Son yedi harf sola kaydırılarak üstündekilerin hizasına getirilecektir.	
82	17	p $\vee$ $\sim$q	p $\vee$ $\sim$p
84	1	sayıda	sayıdaki
87	13	bölye	böyle
90	17	bri	bir
96	3	(qr$\supset$s	(qr$\supset$s)
97	16 *	$\sim$q	$\sim$p
107	5	(x x (y x z)	(x x (y x z))
110	9 *	Birinci $\sim$A yerine $\sim\sim$A konulacaktır.	
111	9-14	= A yerine $\sim\sim$A, A yerine $\sim\sim\sim$A konulacaktır.	≡
115		7. ile 8. satırların arasına şu satır konulmalıdır: ruluk-değerleri yükleyelim. O zaman 'Ç' şeması belli bir doğ	
116	10 *	geçişilliği	geçişliliği
124	14 *	çıkarma	çıkarımın
126	9 *	olabildii	olabildiği
131	6 *	"n o r m a l - ş e m a"	"n o r m a l - ş e m a"[2]
131	14 *	aotmsal	atomsal
133	1	biilnen	bilinen

[*] İşareti aşağıdan sayılacak satırları gösterir.

Sayfa	Satır	Yanlış	Doğru
133	15	olıuğu	olduğu
133	16 *	tutarlidır	tutarlıdır
135	8	A_2B_m	v A_2B_m
145	2 *	Formülün sonuna) konulacaktır.	
149	9	'pq ~'	'p ~ q'
150	11	suretfiyle	suretiyle
152	8	ilkesi :	ilkesi : '
156	12	bulunabilr	bulunabilir
156	17 *	ğından	ğundan
156	16 *	ikisi	biri
158	3 *	olmasını	olmasının
161	5 *	'D' yerine 'Y', yerine de 'D'	'D' yerine 'Y', 'Y' yerine de 'D'
163	6	Ş	~Ş
163	7	Ş şemasının	~Ş şemasının
163	7 *	İlk önce nin	İlk önce Ş nin
165	2	'p' veya '~p' nin	'p_i' veya '~p_i' nin
167	3 *	Formülün sonuna) konulacaktır	
168	8	n?li	n-li
169	11 *	lik	li
169	17 *	totoliji	totoloji
173		Şekil 7 de i yerine i_1 konulacaktır.	
179	13 *	çeviricisiz	eviricisiz
180	5 *	'$İ_Y$'	'$İ_D$'
180	4 *	'$İ_D$'	'$İ_Y$'
182		Şekil 25 in sol kısmı tersine çevrilecektir.	
186	3 *	ayın	aynı
192	1 *	yanlışlandığın	yanlışlandığını
193	17 *	Kanıtladı	Kanıtlandı
196	12	sonra	soran
198	11 *	Luhasiewicz	Lukasiewicz
203	18 *	2 + 2 = 5)	(2 + 2 = 5)
207	15	omlasın	olmasın
209	14 *	deyiminin	deyimin
216	2	Şhannon	Shannon

[*] İşareti aşağıdan sayılacak satırları gösterir.