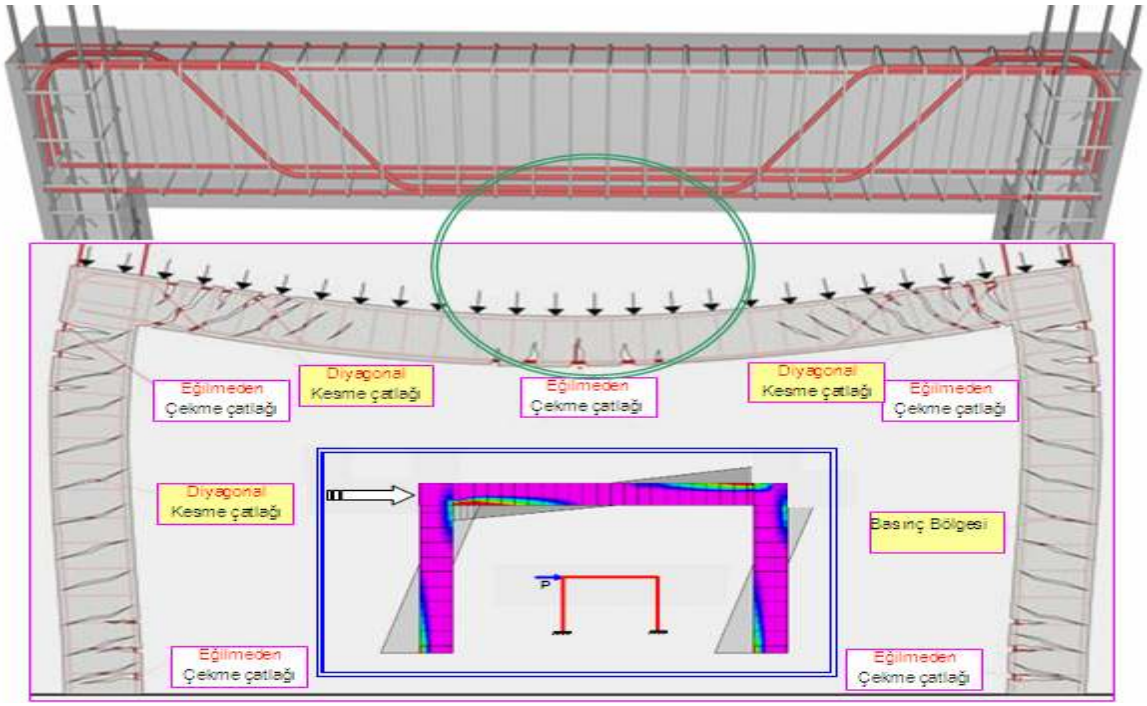
ESOGÜ-MMF
1970

YAPI STATİĞİ II

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER



İÇİNDEKİLER

		SAYFA
BÖLÜM 1		**2**
1.1	İzostatik sistemler ve İşaret Kabulü…….	
1.2	Mesnetler……	
1.3	İzostatik Sistemlerin Çözüm ve Örnekler……	
1.4	Hiperstatik Sistemler……..	
1.5	Sistemlerin Çözümünde yapılan Kabuller……..	
BÖLÜM 2		**57**
2.1	Virtüel İş……..	
2.2	Betti Teoremi……..	
BÖLÜM 3		**97**
3.1	Mohr Metodu……..	
3.2	Castigliano I Teoremi……	
3.3	Castigliano II Teoremi……	
BÖLÜM 4		**136**
4.1	Açı Metodu……..	
4.2	Düğüm Noktaları Sabit Sistemlerde Açı Metodu……..	
4.3	Ankastrelik Momentlerinin Bulunması……	
4.4	Düğün Noktaları Sabit Sistemlere Ait Örnekler……..	
4.5	Düğüm Noktaları Hareketli Sistemlerin Açı Metoduyla Çözümü…….	
4.6	Simetrik Sistemler Açı Metoduyla Çözümü……	
4.7	Simetrik Sistem Simetrik Yükleme……..	
4.8	Simetrik Sistem Antimetrik Yükleme……	
4.9	Isı Etkisi……	
BÖLÜM 5		**229**
5.1	Cross Metodu……..	
5.2	Düğüm Noktaları Sabit Sistemlerin Cross Yöntemiyle Çözümü……....	
5.3	Düğüm Noktaları Hareketli Sistemlerin Cross Yöntemiyle Çözümü……	
BÖLÜM 6		**272**
6.1	Kuvvet Metodu……..	
6.2	Simetrik Sistemler……..	
6.3	Üç Moment Denklemi……	
BÖLÜM 7		**357**
7.1.	Matris Metodları……..	
7.2.	Kafes Sistemlerin Matris Metodu İle Çözümü …….	
7.2.	Çerçeve Sistemlerin Matris Metodu İle Çözümü……	
EKLER		
EK1	Alan Çarpım Tablosu……..	**397**
EK2	Ankastrelik Moment Tablosu……	**398**
EK3	**Kaynaklar**	**399**

BÖLÜM 1

1.1. İZOSTATİK SİSTEMLER VE İŞARET KABULÜ

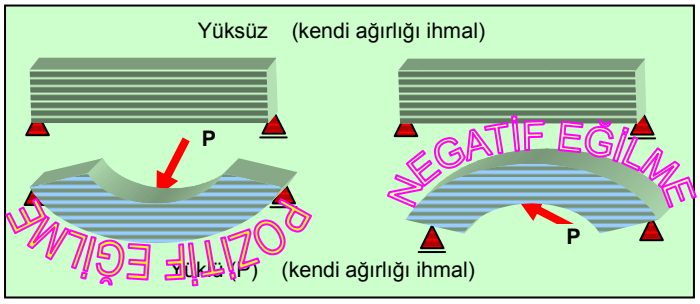
Kolon ve kirişlerden oluşan yapı sistemlerinin boyutlandırılmasında esas olan,

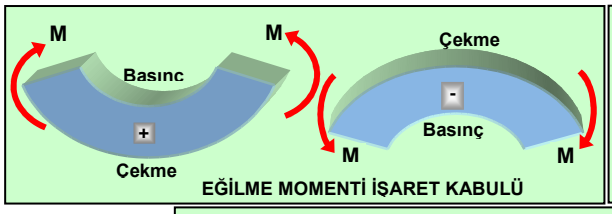
a. Kesme kuvveti **(V)**
b. Moment **(M)**
c. Eksenel kuvvet **(N)**

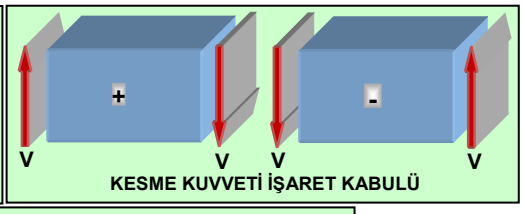
kesit tesirleri yapı elemanının dolaysıyla sisteminin,

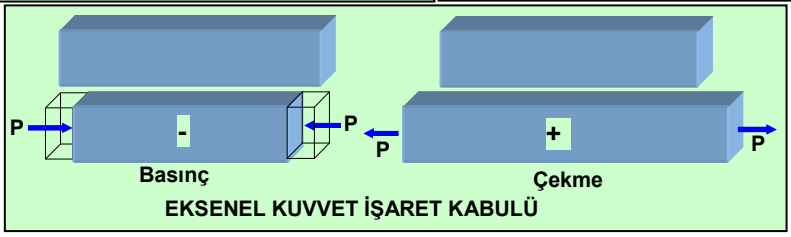
a. Kesit ve fiziksel
b. Mesnet
c. Yük

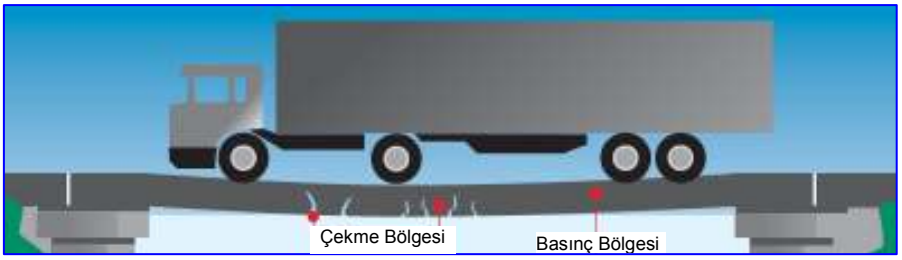
özelliklerine göre belirlenir. Kesit tesirlerinin işaretlerinin belirlenmesinde elemanların şekil değiştirmeleri esas olmak üzere yapılmasına karşın değişik kabuller yapılarak değişik işaret kabulleri kullanılabilmektedir. Literatürdeki mevcut kaynaklarda eksenel kuvvet işaretinde bir farklılık olmamakla birlikte moment ve kesme kuvvetlerinin çizimlerinde değişik işaret kabullerine rastlamak mümkündür. Bu notlarda kullanılan işaret kabulü aşağıdaki gibidir.



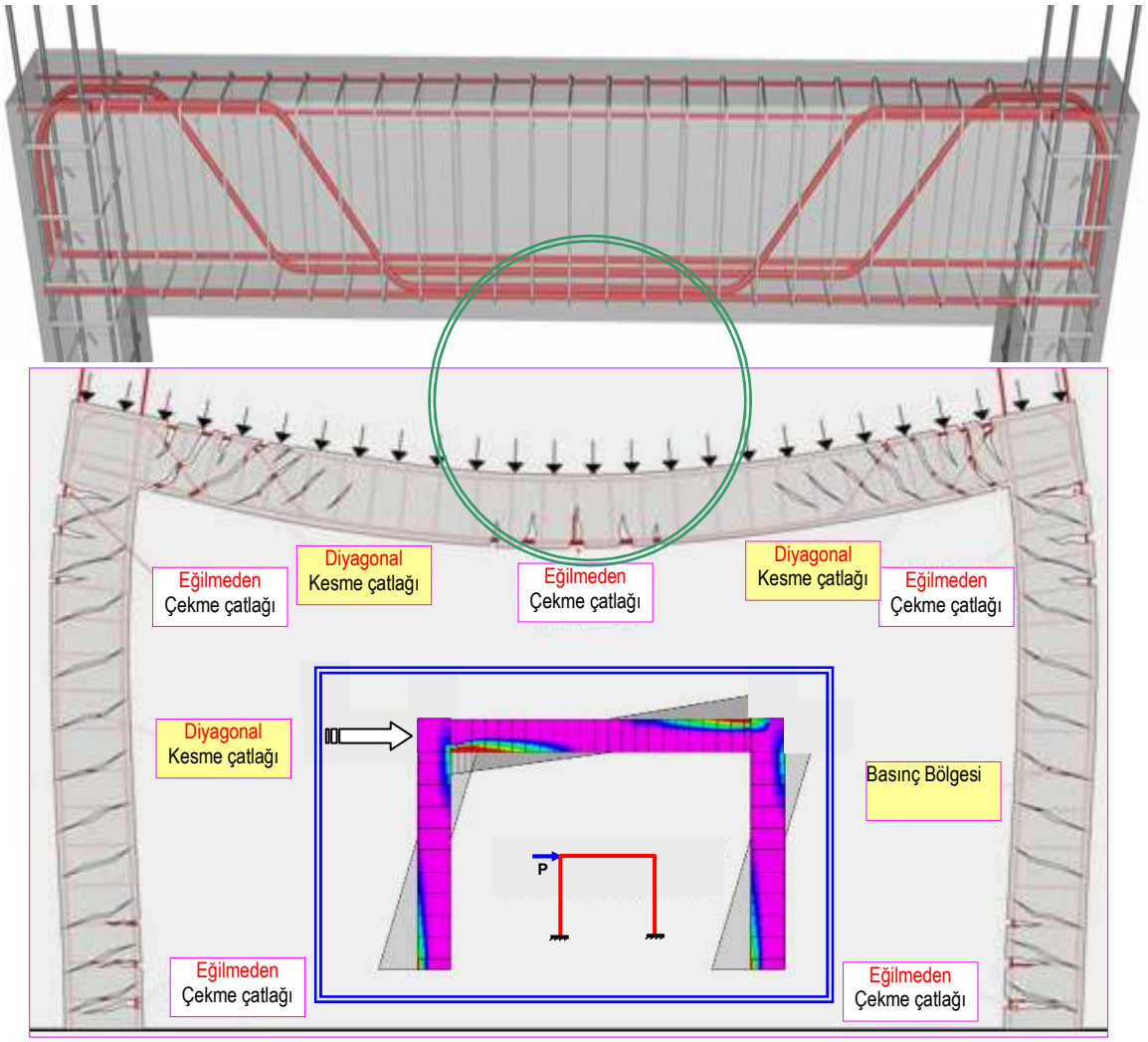


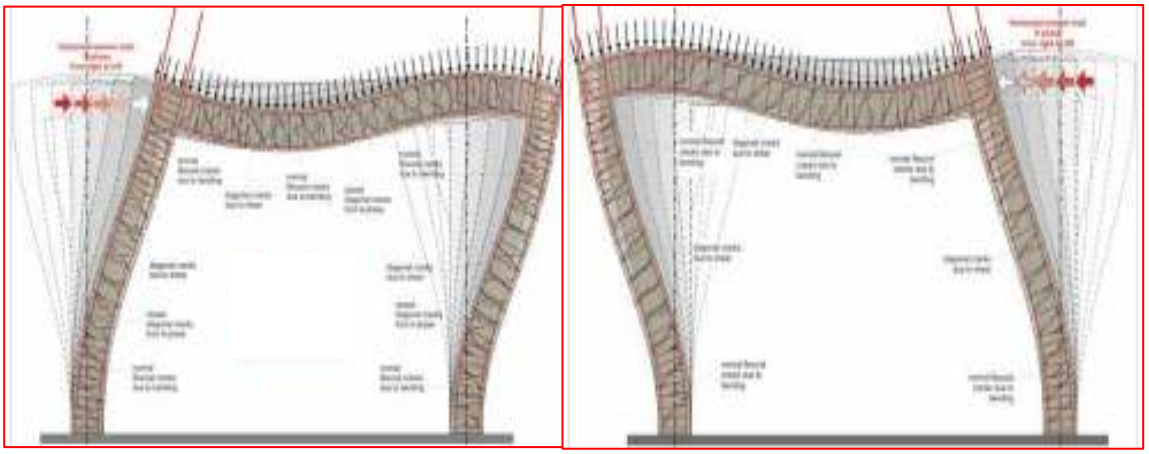


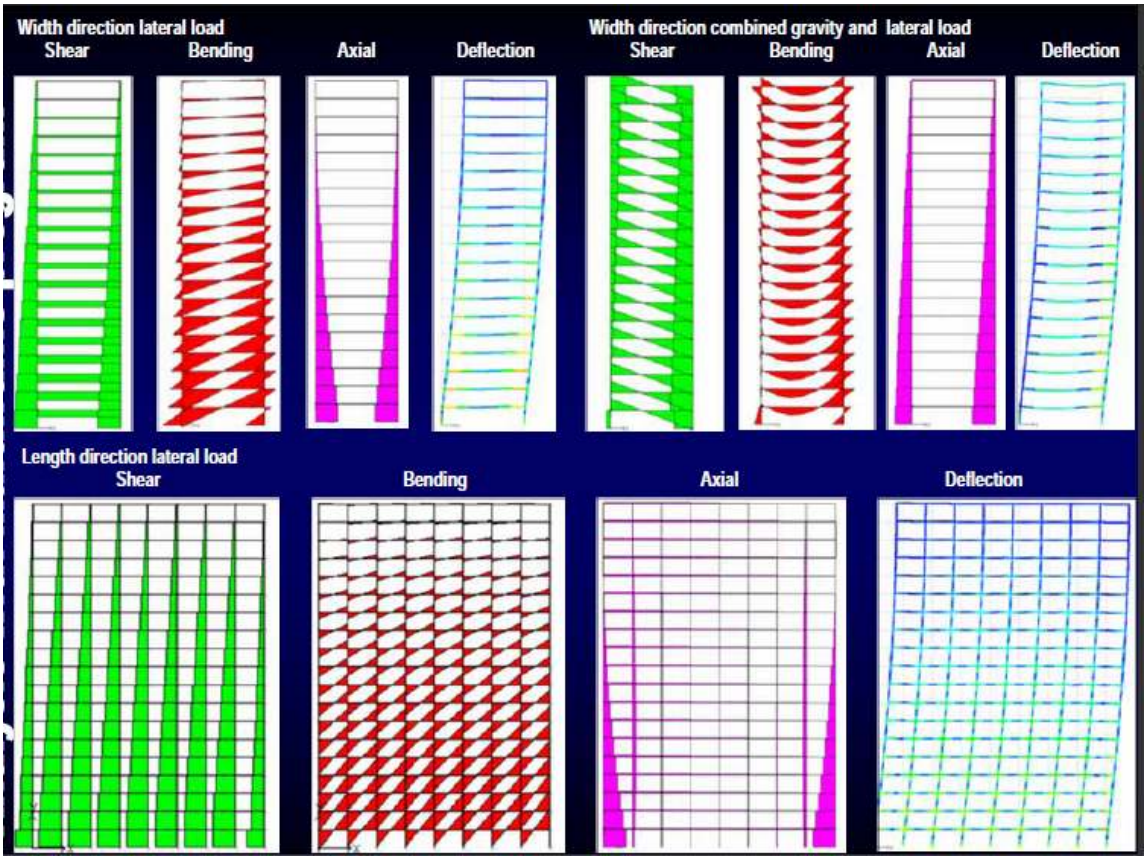


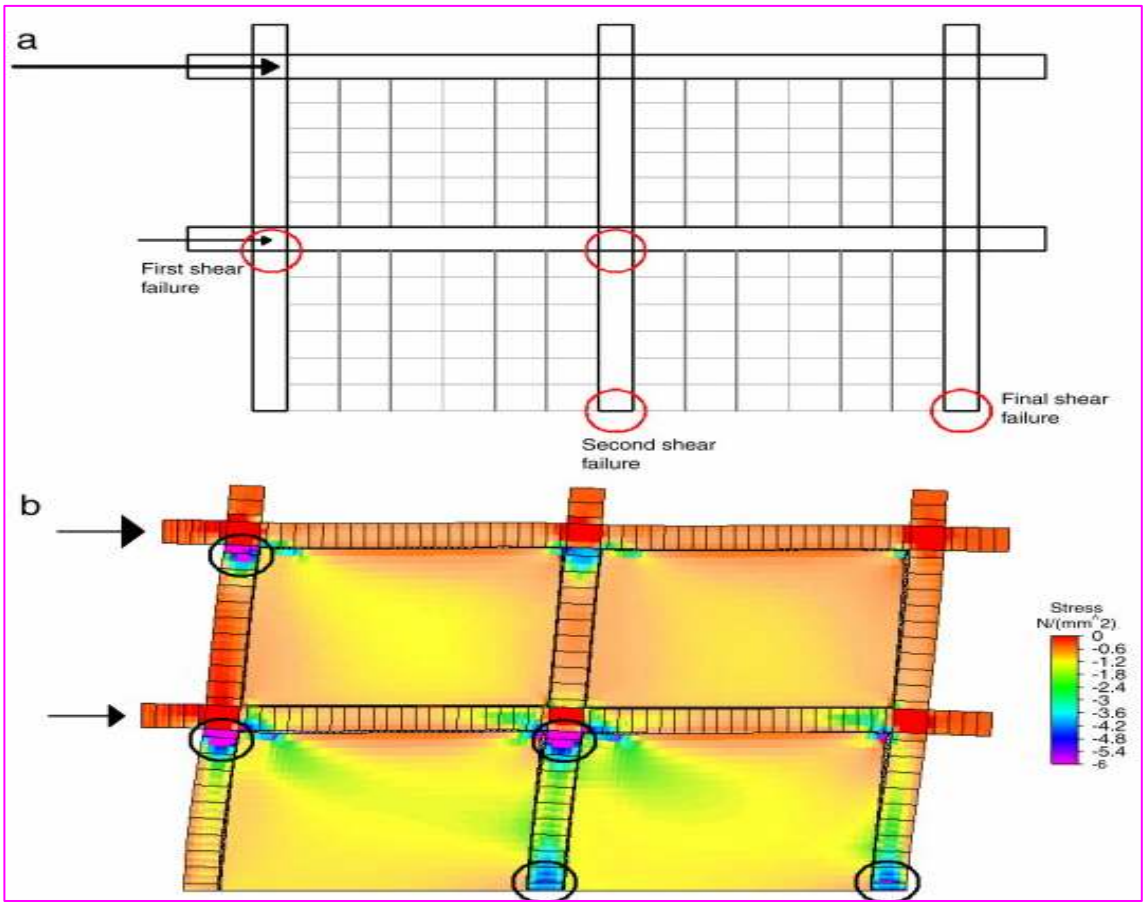


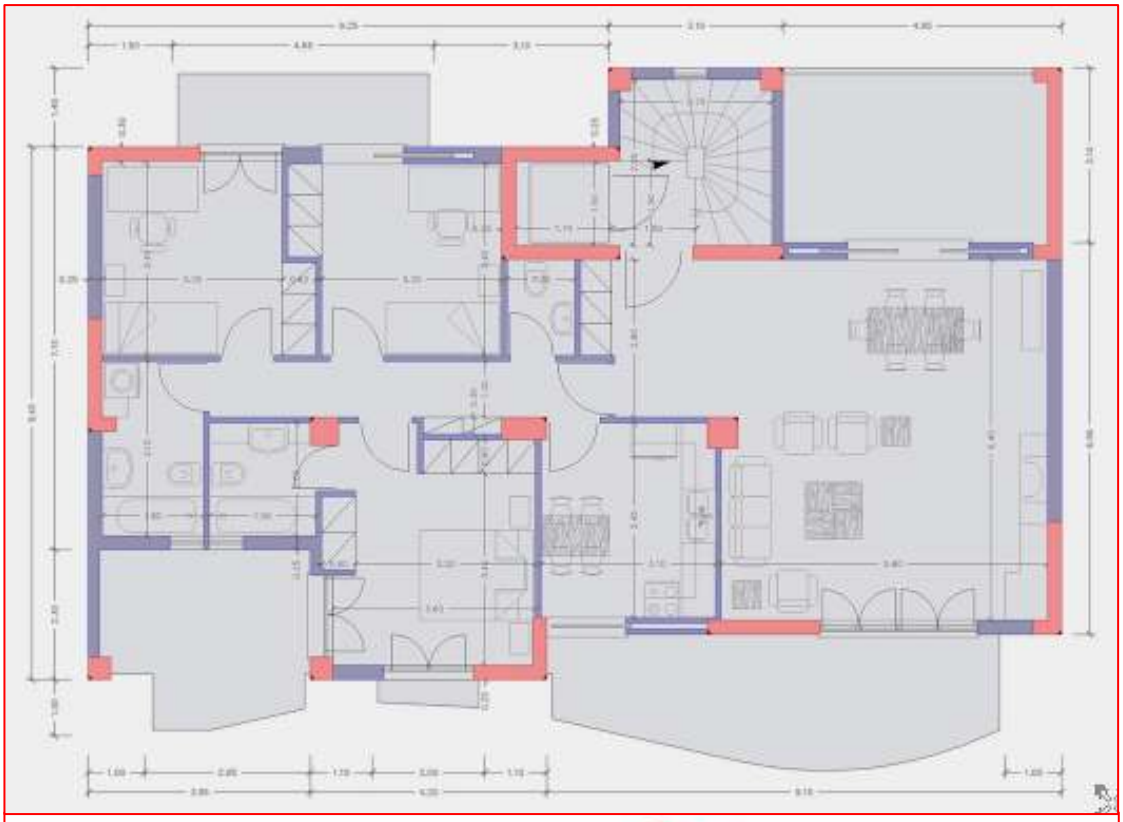
Yukarıdaki şekillerden de anlaşılabileceği gibi, eğilme momentinden dolayı elemanının uzayan yani çekme meydana gelen kısmı artı diğer kısmı ise basınç bölgesi olarak kabul edilmiştir. Bu notlarda moment alanı elemanın çekme meydana getiren yüzüne çizilmiştir. Kesme kuvvetinde ise kesiti saat yönünde döndürmeye çalışan kesme kuvveti artı tersi eksi olarak kabul edilmiştir. Eksenel kuvvette ise kesitin boyunu kısaltmaya çalışan basınç kuvveti eksi kesitin boyunu uzatmaya çalışan çekme kuvveti ise artı olarak kabul edilmiştir.



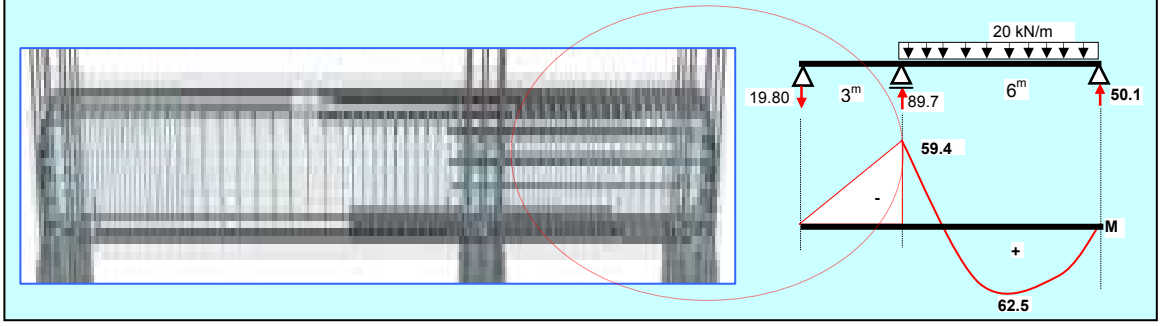



Width direction lateral load
Shear
Bending
Axial
Deflection
Width direction combined gravity and lateral load
Shear
Bending
Axial
Deflection
Length direction lateral load
Shear
Bending
Axial
Deflection

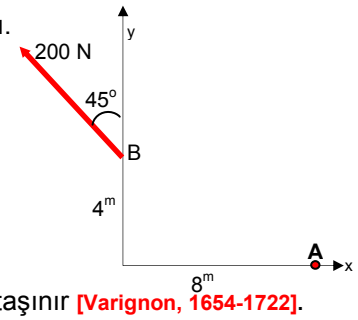

a
First shear failure
Second shear failure
Final shear failure
b
Stress N/(mm^2)
0
-0.6
-1.2
-1.8
-2.4
-3
-3.6
-4.2
-4.8
-5.4
-6



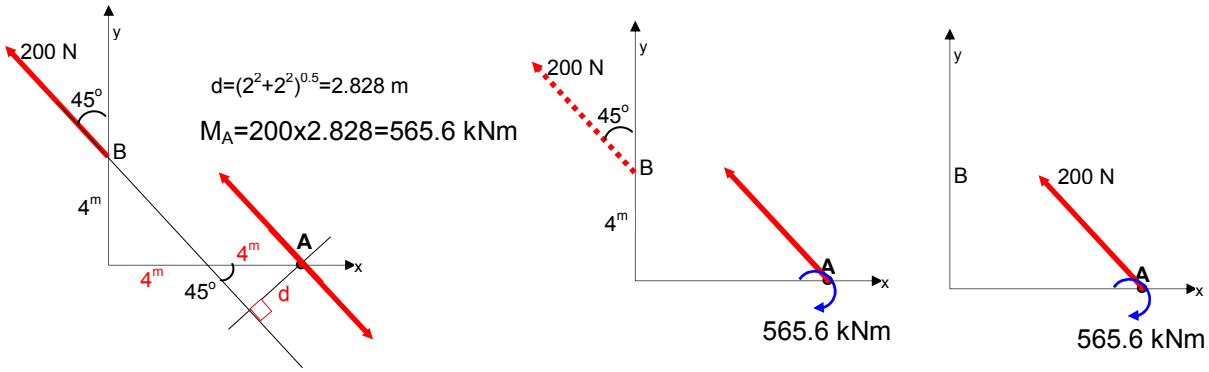
NOT: Kısa kirişler (kesme kirişi), moment değerleri kiriş üzerinde olan yani kesitin alt kısmında eğilme etkisi olmayan kirişler olarak tanımlanabilir. Bu tür kirişlerde kiriş boyunca etriye sıklaştırması yapılması uygun olur.



ÖRNEK 1: Şekilde verilen **200 N**'luk kuvvetin A noktasına taşınması.

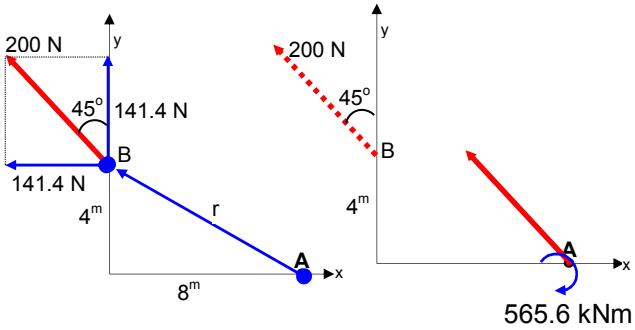


Çözüm: 200 N **A** noktasına şekildeki gibi dik mesafe ile çarpımıyla taşınır **[Varignon, 1654-1722]**.



VEYA 200 N birleşenlerine ayrılarak matris formatıyla moment ifadesi yazılarak taşınır.

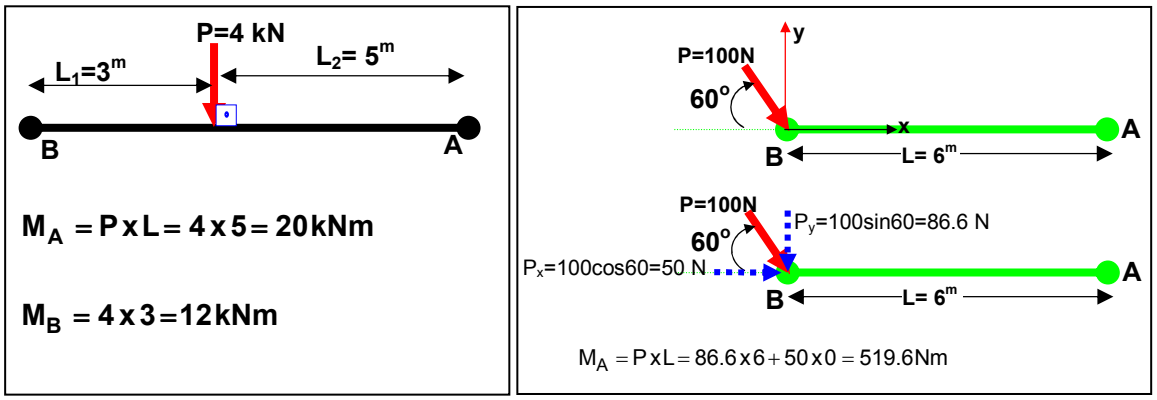
$$M_A = r \times F = \begin{bmatrix} i & j & k \\ -8 & 4 & 0 \\ -141.4 & 141.4 & 0 \end{bmatrix} = -565.6k$$

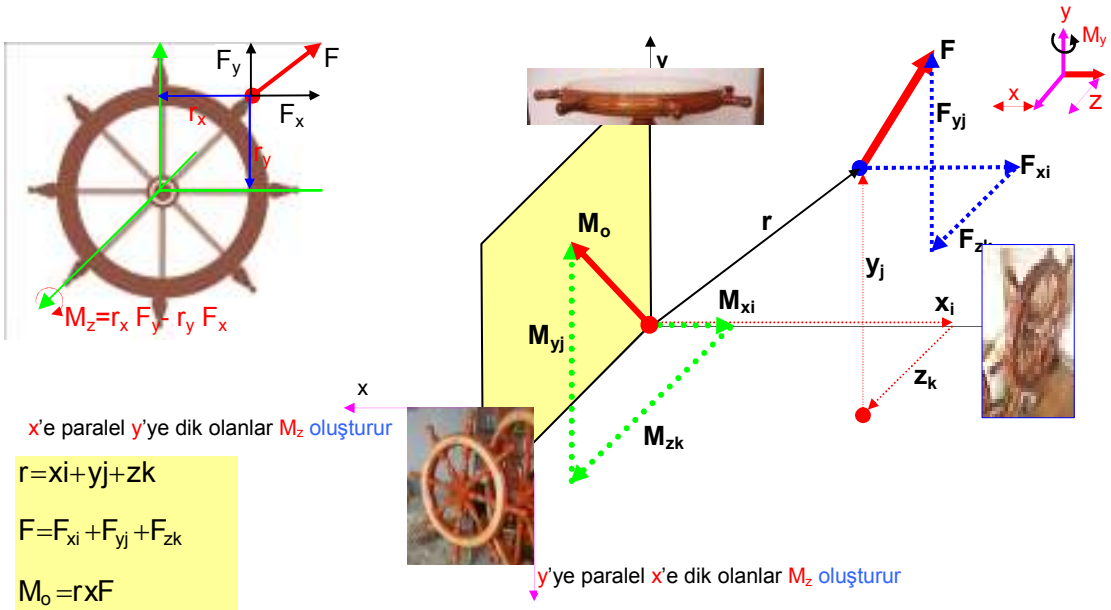


1. MOMENT [BİR KUVVETİN DİK BİR EKSENE GÖRE]

Moment; bir kuvvetin bir noktaya **dik** mesafesi ile çarpımından oluşan kuvvet çiftine denir.

Düzlem kuvvetlerin momenti aşağıda kısaca örnek üzerinde açıklanmıştır.





$r = xi + yj + zk$

$F = F_{xi} + F_{yj} + F_{zk}$

$M_o = r \times F$

$M_o = M_{xi} + M_{yj} + M_{zk}$

Momentin İşaret: Vektörel çarpım işaret kuralından çıkar. Veya M=rxF olmasından dolayı F kuvveti indis (x,y,z) eksenine bitiştirilir ve saat dönüşü + tersi – alınarak vektörel çarpım işaret kuralı ile aynı olduğu görülür.

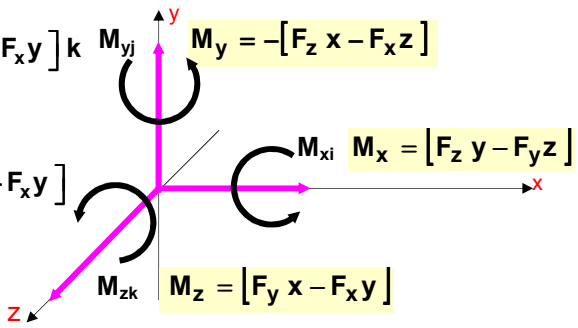
MOMENT,

1. Verilen kuvvet-kuvvetlerin eksenlerindeki birleşenleri
2. Kuvvet-kuvvetlerin uygulandığı nokta ile moment alınacak nokta arasındaki noktaların yer vektörleri
3. 1. ve 2. deki değerler kullanılarak $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}$ ile MOMENT-MOMENTLER hesaplanır.
4. Moment hesabı için gerekli olan matris tablodaki gibi oluşturulur.

M	=	i	j	k	→Eksenlerin doğrultman kosinüsleri
		x	y	z	→F kuvvetinin uygulama noktası koordinatları
		F_x	F_y	F_z	→F kuvvetinin bileşenleri

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} = \left[F_z\, y - F_y z\right] i - \left[F_z\, x - F_x z\right] j + \left[F_y\, x - F_x y\right] k$$

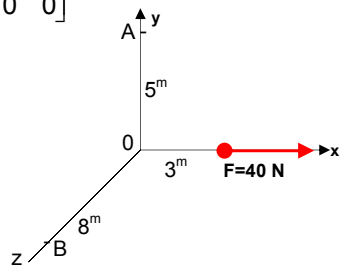
$$M_x = \left[F_z\, y - F_y z\right] \qquad M_y = -\left[F_z\, x - F_x z\right] \qquad M_z = \left[F_y\, x - F_x y\right]$$



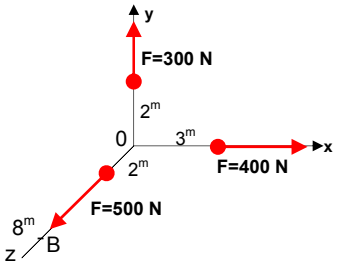
M_x, M_y ve **M_z** değerleri skaler olup **F** kuvvetinin **O** merkezinden geçen eksenlere göre momentleridir. Bu momentler; **F kuvvetinin rijit cisme eksenleri etrafında uyguladığı döndürme uygulamalarıdır**

$$M_o=\begin{bmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 0 \end{bmatrix}=0 \qquad M_A=\begin{bmatrix} i & j & k \\ 3 & 5 & 0 \\ 40 & 0 & 0 \end{bmatrix}=5x40=200\,Nm \qquad M_B=\begin{bmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 8 \\ 40 & 0 & 0 \end{bmatrix}=-8x40=-320\,Nm$$

$$M_o=\begin{bmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 2 \\ 40 & 30 & 50 \end{bmatrix}Nm=\begin{cases} M_x=[2x50-2x30]i=40i \\ M_y=-[3x50-2x40]i=70j \\ M_z=[3x50-2x40]i=70k \end{cases}$$



$$M_B=\begin{bmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 8 \\ 40 & 0 & 0 \end{bmatrix}=M_y=-[8x40]j=-320j+\begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 30 & 0 \end{bmatrix}=M_x=[8x30]i=240i+\begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 6_{8-2} \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}=0=\begin{cases} M_x=240i \\ M_y=-320j \\ M_z=0 \end{cases}$$

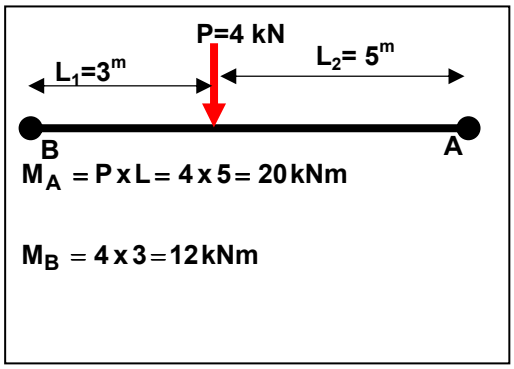


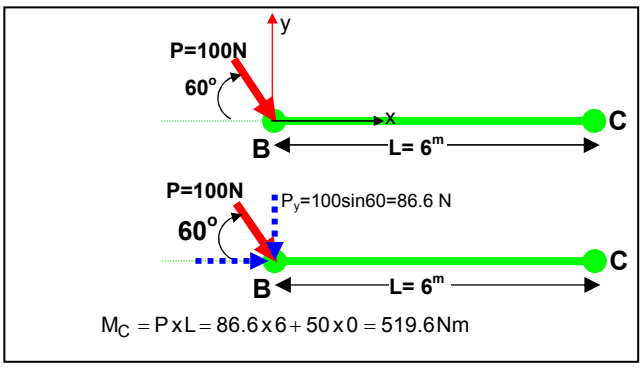
Özellik 1: **M** momentinin **M_x** skaler birleşeni **M** ile **x** ekseni üzerindeki birim vektör i'nin skaler çarpımından;

$$\mathbf{M.i=[M_x i+M_y j+M_z k].i=[M_x i.i+M_y j.i+M_z k.i]=M_x[1]+0+0=M_x}$$

olarak elde edilir. Buna göre **M** momentinin herhangi bir **n** eksenine göre **M_n** momenti **n** ekseni üzerindeki **u_n** birim vektörü ile **[M_n =M u_n]** çarpımıdır.

Yukarıda klasik olarak momentler vektörel olarak aşağıdaki şekilde aynısının bulunduğu görülür.





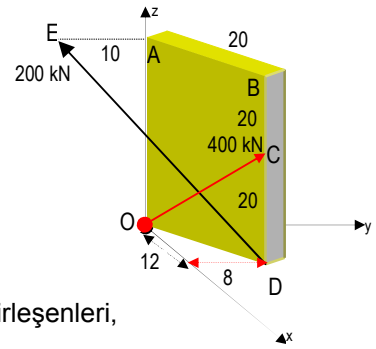
$$\mathbf{M=r\,x\,F} \qquad \mathbf{r=xi+yj+zk} \qquad \mathbf{F=F_{xi}+F_{yj}+F_{zk}} \qquad \mathbf{M=M_{xi}+M_{yj}+M_{zk}}$$

$$\mathbf{M_A}=\begin{bmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z}\\ \mathbf{F_x} & \mathbf{F_y} & \mathbf{F_z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \mathbf{-5} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-4} & \mathbf{0}\end{bmatrix}=\mathbf{[0]i+[0]j+[[-4]x[-5]-0]k=20\,kNm}$$

$$\mathbf{M_B}=\begin{bmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z}\\ \mathbf{F_x} & \mathbf{F_y} & \mathbf{F_z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{-4} & \mathbf{0}\end{bmatrix}=\mathbf{[0]i+[0]j+[-4x3-0]k=-12\ kNm}$$

$$\mathbf{M_C}=\begin{bmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \mathbf{x} & \mathbf{y} & \mathbf{z}\\ \mathbf{F_x} & \mathbf{F_y} & \mathbf{F_z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \mathbf{-6} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{50} & \mathbf{-86.6} & \mathbf{0}\end{bmatrix}=\mathbf{[0]i+[0]j+[[-86.6]x[-6]-0]k=519.6\,Nm}$$

ÖRNEK 2: Şekilde verilen sistemde;
a: x, y ve z eksenlerindeki momentleri, **b:** AD doğrultusundaki momenti hesaplayınız.



a: Verilen kuvvetin eksenlerdeki birleşenleri,

$$\vec{r}_{DE}=[-12\vec{i}-18\vec{j}+40\vec{k}]\quad \vec{F}=\frac{200}{\sqrt{12^2+18^2+40^2}}[-12\vec{i}-18\vec{j}+40\vec{k}]=[-52.77\vec{i}-79.16\vec{j}+175.90\vec{k}]$$

$$\vec{r}_{MO}=[12\vec{i}+8\vec{j}+20\vec{k}]\ 24.66\vec{F}=\frac{400}{\sqrt{12^2+8^2+20^2}}[12\vec{i}+8\vec{j}+20\vec{k}]=[194.65\vec{i}+129.77\vec{j}+324.41\vec{k}]$$

x, y ve z eksenlerine göre moment, $\overrightarrow{DO}=12\vec{i}+8\vec{j}$ $\overrightarrow{MO}=12\vec{i}+8\vec{j}+20\vec{k}$ yer vektörleri ile hesaplanır.

$$M_0=\begin{bmatrix}\mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k}\\ 12 & 8 & 0\\ -52.77 & -79.16 & 175.90\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k}\\ 12 & 8 & 20\\ 194.65 & 129.77 & 324.41\end{bmatrix}=\begin{cases}[1407.2-0.12]\mathrm{i}-[2110.8-0.08]\mathrm{j}+[-527.76+0.04]\mathrm{k}\\ [1407.08\mathrm{i}-2110.72\mathrm{j}-527.72\mathrm{k}]\mathrm{kNm}\end{cases}$$

Eğer her eksenin momenti ayrı hesaplanırsa matristeki aranan eksen numarasına **1** diğerlerine **0** yazılarak ayrı ayrı aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

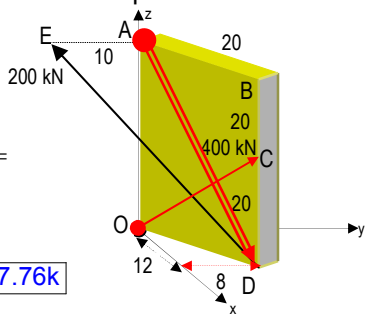
$$M_x=\begin{bmatrix}\boxed{1}_{\text{x'momenti}} & 0 & 0\\ 12 & 8 & 0\\ -52.77 & -79.16 & 175.90\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boxed{1}_{\text{x'momenti}} & 0 & 0\\ 12 & 8 & 20\\ 194.65 & 129.77 & 324.41\end{bmatrix}=\boxed{1}[1407.2-0.12]=1407.08\,\mathrm{kNm}$$

$$M_y=-\left(\begin{bmatrix}0 & \boxed{1}_{\text{y'momenti}} & 0\\ 12 & 8 & 0\\ -52.77 & -79.16 & 175.90\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & \boxed{1}_{\text{y'momenti}} & 0\\ 12 & 8 & 20\\ 194.65 & 129.77 & 324.41\end{bmatrix}\right)=-\boxed{1}[2110.80-0.08]=-2110.72\,\mathrm{kNm}$$

$$M_Z=\begin{bmatrix}0 & 0 & \boxed{1}_{z'momenti}\\ 12 & 8 & 0\\ -52.77 & -79.16 & 175.90\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & \boxed{1}_{z'momenti}\\ 12 & 8 & 20\\ 194.65 & 129.77 & 324.41\end{bmatrix}=\boxed{1}[-527.76+0.04]=-527.72\,kNm$$

b: **AD** doğrultusundaki momenti bulmak için tüm kuvvetler A noktasına taşınır ve sonra AD doğrultman değerleri ile çarpılarak AD doğrultusundaki moment aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$\mathbf{r_{AD}=(0-12)i+(0-8)j+(40-0)k=-12i-8j+40k}$



A moment

$$M_A=\begin{bmatrix}i & j & k\\ 12 & 8 & -40\\ -57.77 & -79.16 & 175.9\end{bmatrix}_{200N}+\begin{bmatrix}i & j & k\\ 0 & 0 & -40\\ 194.65 & 129.77 & 324.41\end{bmatrix}_{400N}=$$

$$=[-1759.2i+200j-487.76k]_{200}+5190.8i-7786j=\boxed{3431.6i}\boxed{-7586j}\boxed{-487.76k}$$

$$M_{AD}=M_A\bullet r_{AD}=\left[\boxed{3431.6i}\boxed{-7586j}\boxed{-487.76k}\right]\bullet\left[\frac{12i+8j-40k}{42.52}\right]=00$$

VEYA; **AD** doğrultusundaki momenti bulmak için tüm kuvvetler D noktasına taşınır ve sonra DA doğrultman değerleri ile çarpılarak DA doğrultusundaki moment aşağıdaki şekilde yukarıda hesaplanan AD doğrultusuyla aynı olarak hesaplanır.

D moment

$$M_D=\begin{bmatrix}i & j & k\\ 0 & 0 & 0\\ -57.77 & -79.16 & 175.9\end{bmatrix}_{200N}+\begin{bmatrix}i & j & k\\ -12 & -8 & 0\\ 194.65 & 129.77 & 324.41\end{bmatrix}_{400N}=$$

$$=[0i+0j+0k]_{200}-2595.28i+3892.92j-0.04k=\boxed{-2595.28i}\boxed{+3692.92j}\boxed{-0.04k}$$

$$M_{AD}=M_A\bullet r_{AD}=\left[\boxed{-2595.28i}\boxed{3692.92j}\boxed{+0.04k}\right]\bullet\left[\frac{-12i-8j+40k}{42.52}\right]=000$$

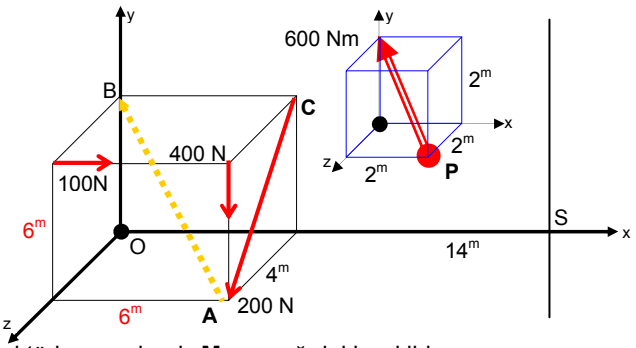
ÖRNEK 3: Şekilde verilen kuvvet (100 N, 200 N ve 400 N) ve momentin (600 Nm),

- **a)** **AB** doğrultusunda oluşturacağı momenti (M_{AB})
- **b)** Orjinden 14 m uzaktati S-S doğrultusundaki momenti (M_{ss}) hesaplayınız.

Çözüm a: Eksenler üzerinde olmayan kuvvetlerin ve momentlerin birleşenleri bulunur.

$$\vec{F}_{AC}=200\left[\frac{-6j+4k}{\sqrt{6^2+4^2}}\right]=-166.41j+110.94k$$

$$\vec{M}_P=600\left[\frac{-2i+2j-2k}{\sqrt{2^2+2^2+2^2}}\right]=-346.42i+346.42j-346.42k$$



B noktasındaki momenti bulunarak **AB** doğrutusundaki birim vektörle çarpılarak $\mathbf{M_{BA}}$ aşağıdaki şekilde bulunur.

B

$$M_B=[-346.42i+346.42j-346.42k]_P+\underbrace{\begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 4 \\ 100 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{100N}+\underbrace{\begin{bmatrix} i & j & k \\ 6 & 0 & 4 \\ 0 & -400 & 0 \end{bmatrix}}_{400N}+\underbrace{\begin{bmatrix} i & j & k \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & -166.41 & 110.94 \end{bmatrix}}_{200N}$$

$$=[-346.42i+346.42j-346.42k]_P+-4x100j+4x400i-6x400k-6x110.94j-6x166.41k$$

$$=\boxed{1253.58i}\boxed{+80.78j}\boxed{-3744.88k}$$

B noktasında bulunan $M_B=\boxed{1253.58i}\boxed{+80.78j}\boxed{-3744.88k}$ momenti hangi doğrultuya taşınacak ise o yöndeki birim vektörle (dogrultman cosinüsleri) çarpılarak taşınır.

Örnekte **AB** doğrultusunda taşınması isteniğine göre bu yöndeki birim vektör;

$$u_{AB}=\frac{-6i+6j-4k}{\sqrt{6^2+6^2+4^2}}=-0.64i+0.64j-0.426k \quad \text{ise}$$

$$M_{AB}=M_B \bullet u_{AB}=[\boxed{1253.58i}\boxed{+80.78j}\boxed{-3744.88k}]\bullet_{skaler}[-0.64i+0.64j-0.426k]$$

$$M_{AB}=(1253.58x(-0.64))i.i+(80.98x0.64)j.j+(-3744.88x(-0.426))k.k=-802.29+51.83+1596.79=\boxed{846.20\,Nm}$$

VEYA A noktasındaki moment bulunarak da $\mathbf{M_{AB}}$ aşağıdaki gibi aynısı bulunur.

A moment

$$M_A=[-346.42i+346.42j-346.42k]_P+\underbrace{\begin{bmatrix} i & j & k \\ -6 & 6 & 0 \\ 100 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{100N}+\underbrace{\begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -400 & 0 \end{bmatrix}}_{400N}+\underbrace{\begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 6 & -4 \\ 0 & -166.41 & 110.94 \end{bmatrix}}_{200N}$$

$$[-346.42i+346.42j-346.42k]_P-600k+00+00=\boxed{-346.42i}\boxed{+346.42j}\boxed{-946.42k}$$

$$M_{AB}=M_A \bullet u_{AB}=\boxed{-346.42i}\boxed{+346.42j}\boxed{-946.42k}\bullet[-0.64i+0.64j-0.426k]=846.59\,Nm$$

Çözüm b: Kuvvetlerin eksenlere göre analizleri yukarıda yapılmıştı. Burada S noktasında tüm kuvvetlerden oluşan moment hesaplanır ve S doğrusu boyunca hesaplanan doğrulman değerleri ile çarpılarak S doğrultusundaki moment aşağıdaki şekilde hesaplanır.

S moment

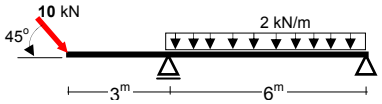
$$M_S=[-346.42i+346.42j-346.42k]_P+\underbrace{\begin{bmatrix} i & j & k \\ -14 & 6 & 4 \\ 100 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{100N}+\underbrace{\begin{bmatrix} i & j & k \\ -8 & 6 & 4 \\ 0 & -400 & 0 \end{bmatrix}}_{400N}+\underbrace{\begin{bmatrix} i & j & k \\ -8 & 6 & 4 \\ 0 & -166.41 & 110.94 \end{bmatrix}}_{200N}$$

$$[-346.42i+346.42j-346.42k]_P+[00i+400j+600k]_{100}+[1600i+00j+3200k]_{400}$$

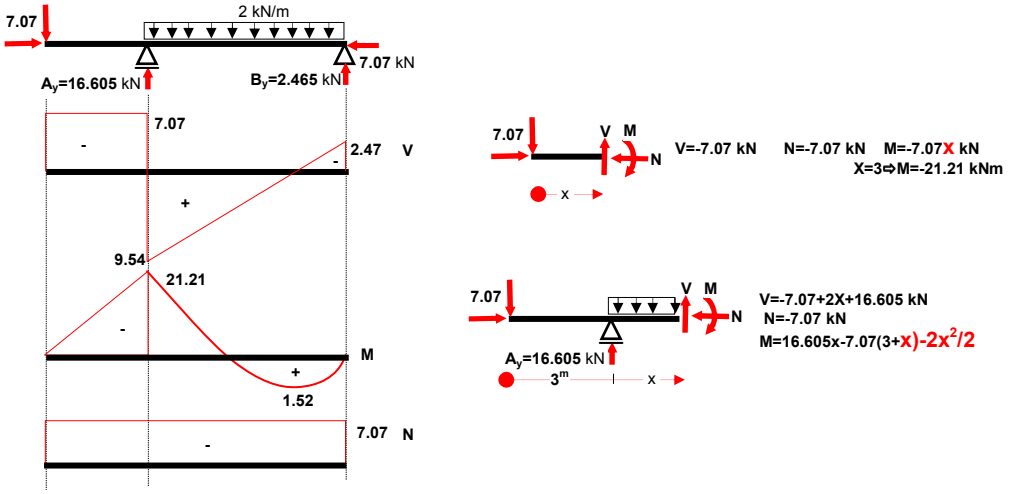
$$+[1331.28i+877.52j+1331.28k]_{400}+=\boxed{2584.86i}\boxed{+1623.94j}\boxed{+4784.86k}$$

$$M_S=M_A \bullet u_{ss}=\boxed{2584.86i}\boxed{+1623.94j}\boxed{+4784.86k}\bullet[j]=1623.94\,Nm$$

ÖRNEK 4: Şekildeki çıkmalı kirişin kesme, moment ve normal kuvvet diyagramlarının çizimi.

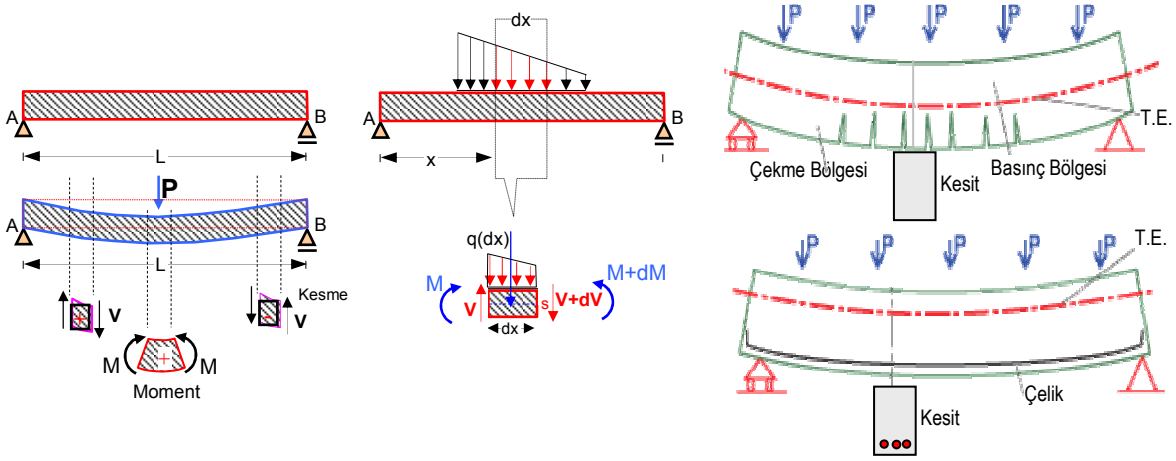


Çözüm: ilk önce sistemin mesnet tepki kuvvetleri bulunur ve sonra kesim yapılarak her noktanın kesit tesirleri [V, M ve N] bulunur.



Yapı sistemlerinde yük, kesme kuvveti ve moment arasındaki ilişki

4.4. KESME KUVVETİ İLE MOMENT ARASINDAKİ İLİŞKİ



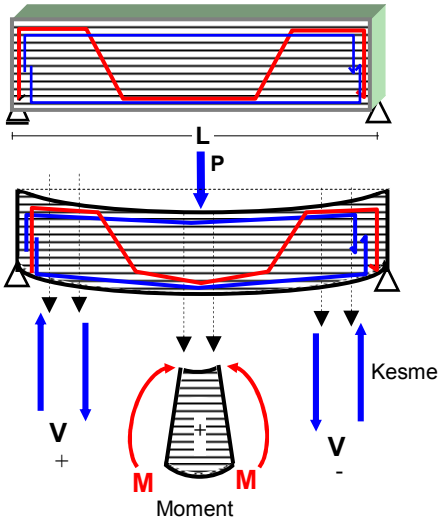
$\Sigma F_y=0$ $V - q\,(dx) - [V + dV] = 0$ $-q\,(dx) - [dV] = 0$ **$dV = -q\,(dx)$** $\frac{dV}{dx} = -q$

(Kesme kuvvetinin türevi yayılı yükün değerini verir.)

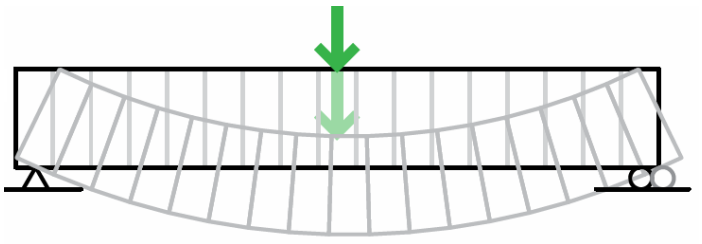
$\Sigma M_s=0$ $V\,dx + M - q\,(dx)\,(dx/2) - [M + dM] = 0$ **$V dx = dM$** $\frac{dM}{dx} = V$

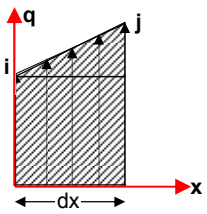
(Momentin türevi ise kesme kuvvetinin değerini verir.)

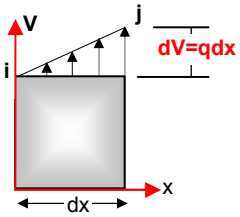
Not: dx küçük bir dilim olduğu için $\frac{dx^2}{2} = 0$ alınmıştır.

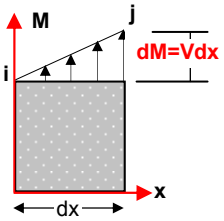






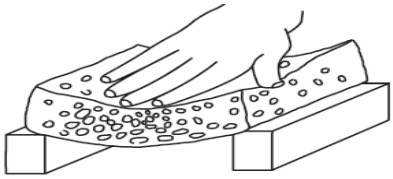


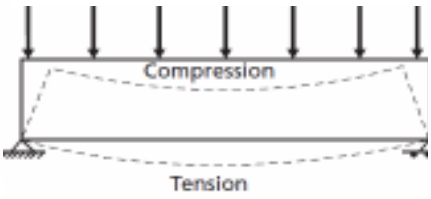


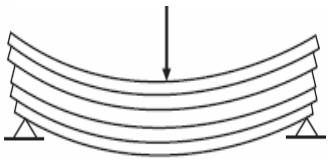


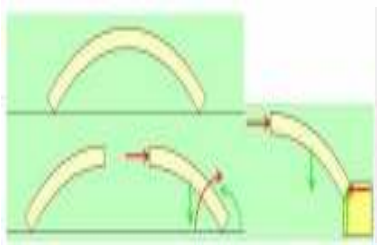
VEYA $\left[V_j - V_i\right] = \int_i^j q\,dx$ Buna göre yayılı yükün alanı kesme kuvvetini verir.

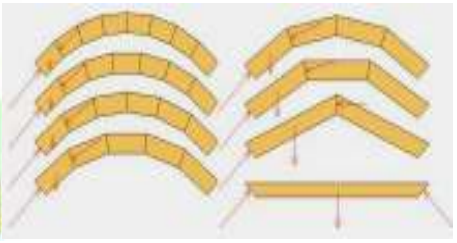
$\left[M_j - M_i\right] = \int_i^j V\,dx$ Kesme kuvvetinin alanı momenti verir.

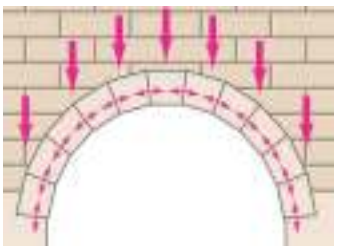












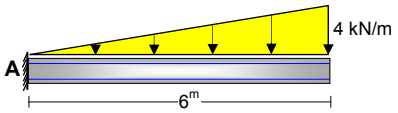


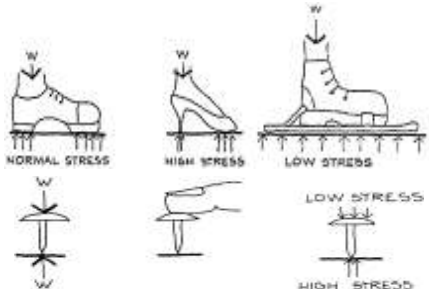




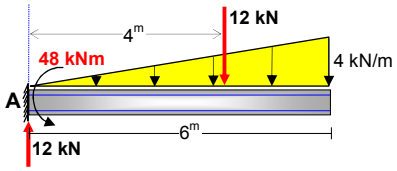


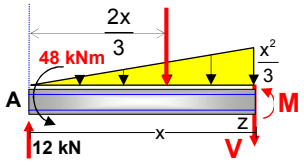
ÖRNEK 1.2: Şekildeki konsol kirişin kesme ve momet bağıntılarının elde edilmesi





Konsol kirişin A mesnedindeki kesit tesirleri aşağıdaki şekilde bulunur.





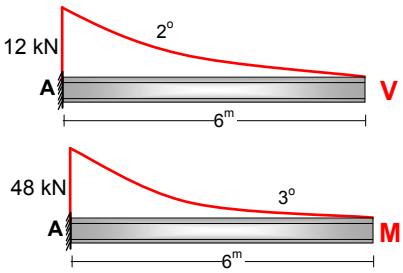
$\Sigma F_y=0 \quad 12-\frac{x^2}{3}-V=0 \qquad V=12-\frac{x^2}{3}$

$\Sigma M_z=0 \quad -48+12x-\frac{x^2}{3}\frac{x}{3}-M=0 \qquad M=12x-48-\frac{x^3}{9}$

$x=2 \Rightarrow \quad V_2=12-\frac{x^2}{3}=12-\frac{2^2}{3}=10.67\,kN \qquad M_2=12x-\frac{x^3}{9}-48=12x2-\frac{2^3}{9}-48=-24.89\,kNm$

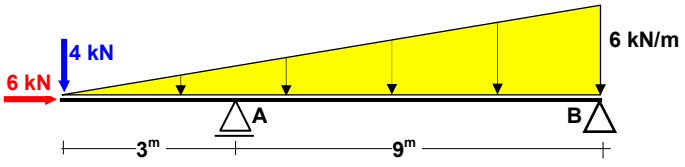
$x=4 \Rightarrow \quad V_4=12-\frac{x^2}{3}=12-\frac{4^2}{3}=6.67\,kN \qquad M_4=12x-\frac{x^3}{9}-48=12x4-\frac{4^3}{9}-48=-7.11\,kNm$

$x=6 \quad V_6=12-\frac{x^2}{3}=12-\frac{6^2}{3}=0 \qquad M_6=12x-\frac{x^3}{9}-48=12x6-\frac{6^3}{9}-48=0$

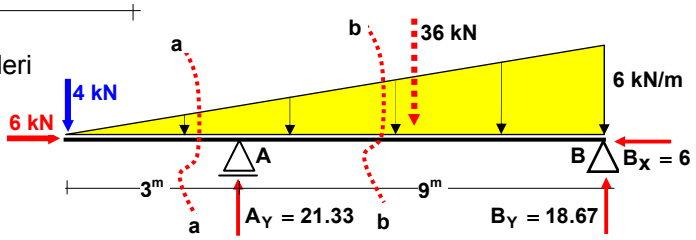




ÖRNEK 4.3: Verilen kirişin **kesme**, **moment** ve **normal kuvvet** diyagramlarının çizimi.



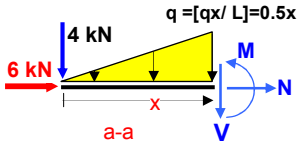
Çözüm: Sistemin mesnet tepki kuvvetleri hesaplanır.



$\sum F_x = 0 \quad 6 - B_x = 0 \quad B_x = 6\ kN$

$\sum M_A = 0 \quad \left[\frac{6x12}{2}\right] x5 - 4x3 - B_y 9 = 0 \quad B_y = 18.67\ kN$

$\sum M_B = 0 \quad \left[\frac{6x12}{2}\right] x4 + 4x12 - A_y 9 = 0 \quad B_y = 21.33\ kN$

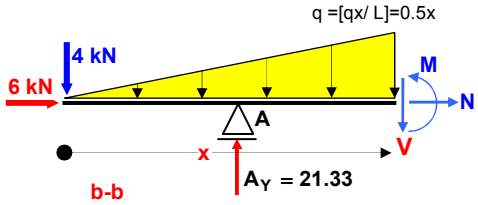


a-a ve **b-b** kesitlerinde kesimler yapılarak kesit tesirleri aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$\sum F_x = 0 \quad N + 6 = 0 \quad N = -6 \qquad x = 3^m \rightarrow N = -6\,kN$

$\sum F_y = 0 \quad V - 4 - 0.5x[x/2] = 0 \quad V = 4 + 0.25x^2 \qquad x = 3^m \rightarrow V = 6.25\,kN$

$\sum M = 0 \quad M + 4x + 0.5x[0.5x][x/3] = 0 \quad M = -[4x + x^3 0.25/3] \quad x = 3^m \rightarrow M = -14.25\,kNm$



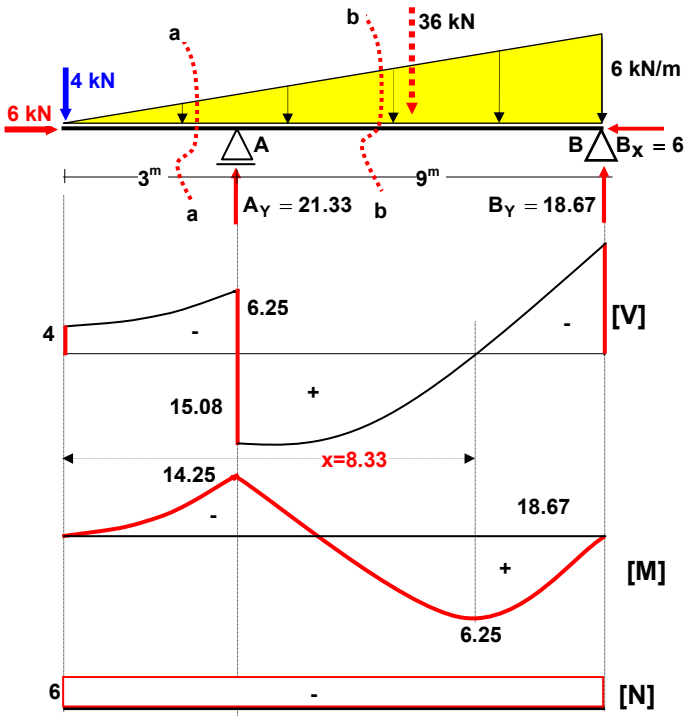
$\sum F_x = 0 \quad N + 6 = 0 \quad N = -6\,kN \qquad x = 7.5^m \rightarrow N = -6\,kN \qquad x = 12^m \rightarrow N = -6\,kN$

$\sum F_y = 0 \quad V + 4 - 21.33 + 0.5x[x/2] = 0 \quad V = 17.33 - 0.25x^2 \quad x = 3^m + 4.5^m = 7.5^m \rightarrow V = 3.27\,kN$

$\sum M_x = 0 \quad M_x + 4x - 21.33[x-3] + 0.5x[0.5x][x/3] = 0 \quad M_x = -63.99 + 17.33x - x^3 0.25/3$

$x = 7.5^m \rightarrow M_x = 30.83\,kNm$

$x = 12^m \rightarrow M_x = 0$



Maksimum açıklık momenti **V=0** da olduğuna göre,

$$Q=0 \quad 4+[0.5x]x[0.5]-21.33=0 \qquad x=\left[\frac{17.33}{0.25}\right]^{[1/2]}=8.33$$

$$x=8.33 \rightarrow\rightarrow \quad \max M_{aç}=21.33[x-3]-4x-8.33\,[0.5x][0.5][8.33/3]-14.25=32.20\,\text{kNm}$$

İstenirse sağ yönden de kesim yapılarak sonuçlar kontrol edilebilir.

$$\sum F_x=0 \quad N+6=0 \quad N=-6\,\text{kN} \qquad x=9^m \rightarrow N=-6\,\text{kN} \qquad x=12^m \rightarrow N=-6\,\text{kN}$$

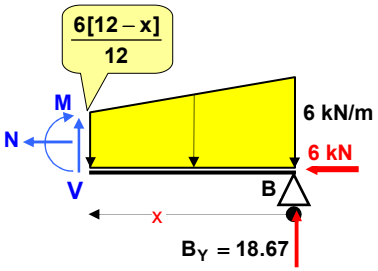
$$q_x=\frac{6[12-x]}{12}=6-0.5x$$

$$V+([[6-0.5x]+6]x)/2-18.67=0 \quad V=18.67+0.25x^2-6x \qquad x=4.5 \text{ ise } V=3.27\,\text{kN}$$

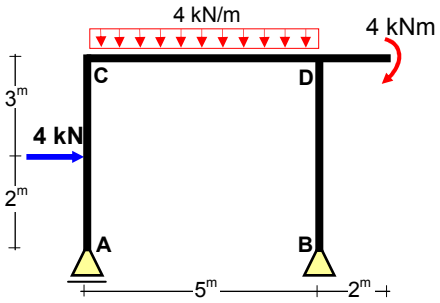
$$M_x+[6-0.5x]x\,x/2+0.5xx[0.5][2x/3]-18.67x=0$$

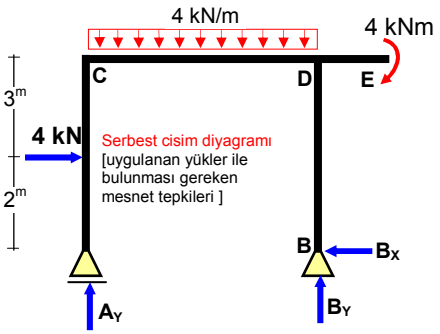
$$M_x=18.67x-3x^2+0.5x^3/6 \qquad x=4.5 \text{ ise } M_x=30.86\,\text{kN}$$

$$x=9 \text{ ise } M_x=14.22\,\text{kN}$$



ÖRNEK 1.3. V, M ve **N** diyagramları ile **[$_{aç}M_{max}$=?]** momentinin hesaplanması.





Çözüm: İlk önce mesnet tepki kuvvetleri hesaplanır.

$$\sum M_A=0 \quad 4x5x2.5+4x2+4-5xB_y=0 \qquad B_y=12.40\ \text{kN}$$

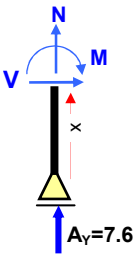
$$\sum F_x=0 \quad 4-B_x=0 \quad \underline{B_x=4\ \text{kN}}$$

$$\sum M_B=0 \quad 4x5x2.5-4x2-4-5xA_y=0 \qquad A_y=7.60\ \text{kN}$$

VEYA: Kirişin **E** noktasında momentin sıfır (4 dış momenttir bu yüzden dikkate alınmaz veya bu noktada yazılan moment bağıntısı bu dış momente eşitlenir) olacağından **E** noktasına göre moment alarak **B_x** tepkisi bulunabilir. Yani momenti bilinen bir noktaya göre moment alınarak <u>uygun</u> mesnet tepki kuvvetleri hesaplanabilir (B noktasına göre moment yazılarak B_x bilinmeyeni bulunamaz)

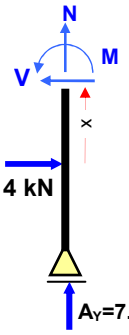
$$\mathbf{\sum M_E=0 \quad 7.6x7-4x3-4x5\ x2.5+12.4x2+4+5xB_x=0 \qquad B_x=4.00\ kN}$$

$$\mathbf{\sum M_E=0 \quad 7.6x7-4x3-4x5\ x2.5+12.4x2+4+5xB_x=4 \qquad B_x=4.00\ kN}$$



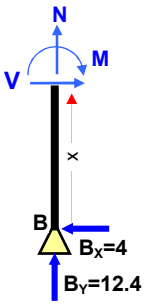
$\sum F_x = 0 \quad N+7.6=0 \quad N=-7.60\,kN$

$\sum F_y = 0 \quad V=0 \qquad M=0$



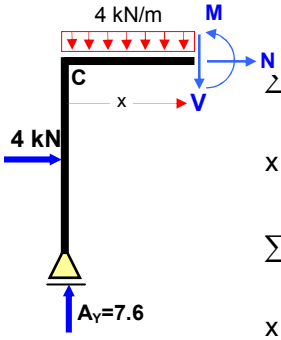
$\sum F_x = 0 \quad N+7.6=0 \quad N=-7.60\,kN \qquad \sum F_y = 0 \quad V+4=0 \quad V=-4$

$\sum M_x = 0 \quad M+4x=0 \quad M=-4x \qquad x=1\,m \quad M=-4\,kNm \quad x=3m \quad M=-12\,kNm$



$\sum F_x = 0 \quad N+12.4=0 \quad N=-12.4\,kN \qquad \sum F_y = 0 \quad V-4=0 \quad V=4$

$\sum M_x = 0 \quad M+4x=0 \quad M=-4x \qquad x=1m \quad M=-4\,kNm \quad x=5m \quad M=-20\,kNm$



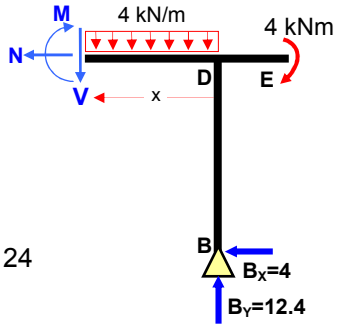
$\sum F_x = 0 \quad N+4=0 \quad N=-4\,kN \qquad \sum F_y = 0 \quad 7.6-V-4x=0 \quad V=7.6-4x$

$x=2m \quad V=-0.4\,kNm \qquad x=5m \quad V=-12.4\,kNm$

$\sum M_x = 0 \quad 7.6x-4xx[1/2]-M-4[3]=0 \quad M=7.6x-2x^2-12$

$x=2m \quad M=-4.8\,kNm \qquad x=5m \quad M=-24\,kNm$

$\sum F_x = 0 \quad N+4=0 \quad N=-4\,kN$



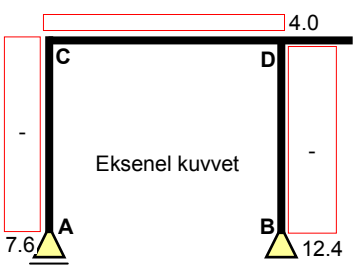
$\sum F_y = 0 \quad 12.4+V-4x=0 \quad V=-12.4+4x$

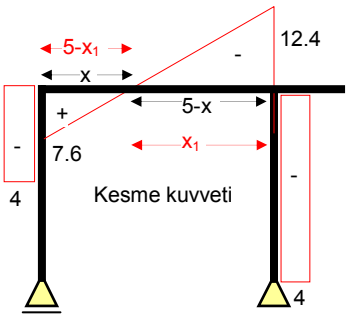
$x=2m \quad V=-4.4\,kNm \qquad x=5m \quad V=7.6\,kNm$

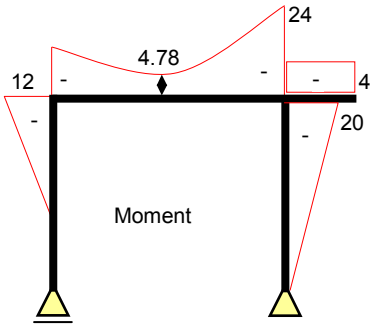
$\sum M_x = 0 \quad M+4+4xx[1/2]+4[5]-12.4x=0 \quad M=12.4x-2x^2-24$

$x=2m \quad M=-7.2\,kNm \qquad x=5m \quad M=-12\,kNm$

Sistemin Q, M ve N diyagramları aşağıdaki şekilde elde edilmiştir.







Maksimum açıklık momentinin hesabı aşağıdaki gibi yapılabilir. [V=0'daki x benzer üçgen bağıntılarından da bulunarak maksimum moment hesaplanabilir]

$$\frac{x}{7.6}=\frac{5-x}{12.4} \qquad x=1.9\,m \quad \max M_{aç}=7.6[1.9]-4[3]-1.9[4][1.9/2]=-4.78\,kNm$$

VEYA DİĞER YÖNDEN $\dfrac{x_1}{12.4}=\dfrac{5-x_1}{7.6}$ $x_1=3.1\,m$ $\max M_{aç}=12.4[3.1]-4[5]-3.1[4][3.1/2]-4=-4.78\,kNm$

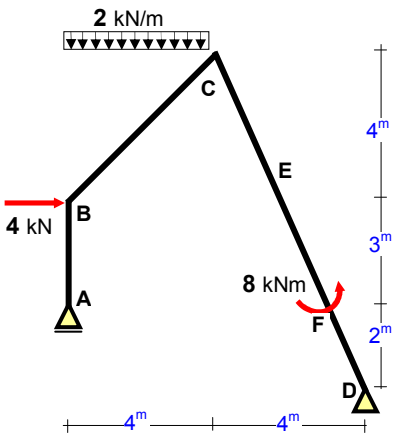
VEYA aşağıdaki formüller kullanılarak da aynı değerler aşağıdaki gibi bulunur.

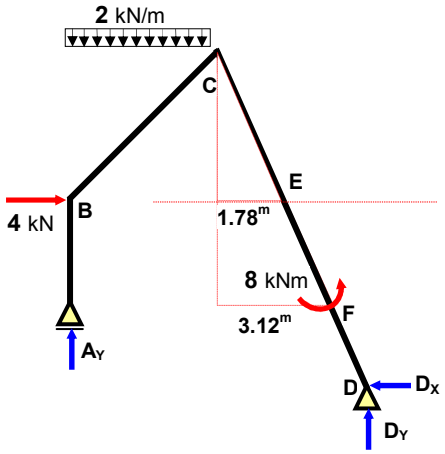
SOL YÖNDEN $\Rightarrow \quad x=\dfrac{V}{q}=\dfrac{7.6}{4}=1.9 \quad \max M_{aç}=\dfrac{V^2}{2q}\pm M_{mesnet}=\dfrac{[7.6]^2}{2x4}-12=-4.78\,kNm$

SAĞYÖNDEN $\Leftarrow \quad x_1=\dfrac{V}{q}=\dfrac{12.4}{4}=3.1 \quad \max M_{aç}=\dfrac{V^2}{2q}\pm M_{mesnet}=\dfrac{[12.4]^2}{2x4}-24=-4.78\,kNm$

NOT: Maksimum açıklık momenti her zaman artı moment olacak diye bir yaklaşım olmamalıdır. Maksimum moment artı işaretli en büyük olan moment veya sıfıra en yakın olan eksi işaretli momenttir.

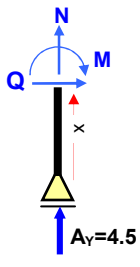
ÖRNEK 1.4. Şekilde verilen çerçevenin **V**,**M** ve **N** kesit tesirlerinin çizimi.





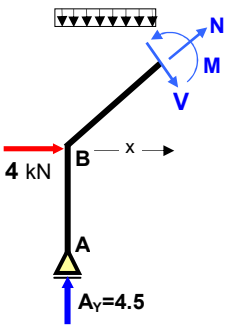
$\sum F_x=0 \quad D_x=4\,kN \qquad \sum M_D=0 \quad 4x5-2x4x6-8+8A_y=0 \quad A_y=4.5\,kN$

$\sum M_A=0 \quad 4x3+2x4x2-8+4x2+8D_y=0 \quad D_y=3.5\,kN$

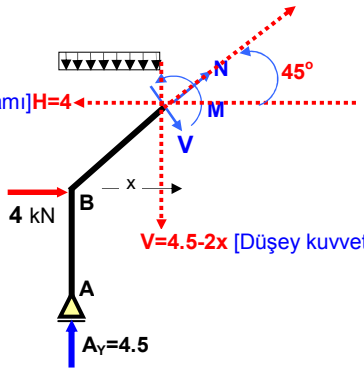


$\sum F_X=0 \quad N+7.6=0 \quad N=-7.6\,kN$

$\sum F_Y=0 \quad V=0 \quad M=0$



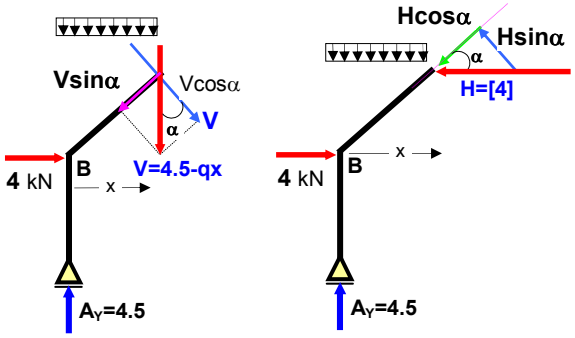
[Yatay kuvvetlerin toplamı]H=4



V=4.5-2x [Düşey kuvvetlerin toplamı]

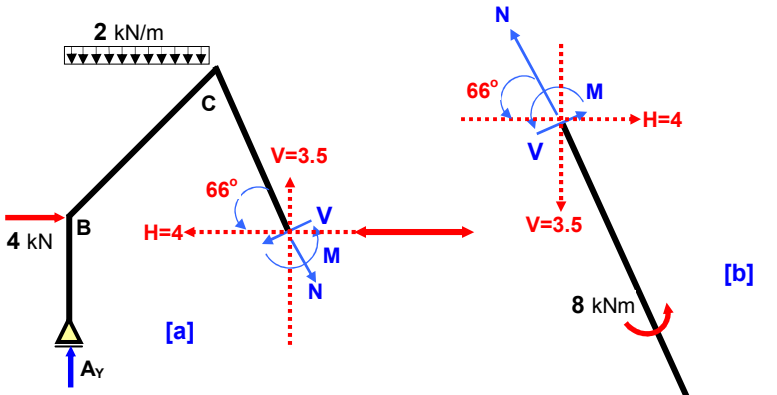
$M_{x=2} = 4.5 \times 2 - 4 \times 2 - 2 \times 2 \times 1 = -3\,kNm$

$M_{x=4} = 4.5 \times 4 - 4 \times 4 - 2 \times 4 \times 2 = -14\ kNm$



$$V = V\cos\alpha - H\sin\alpha = [4.5 - 2x]\cos 45 - 4\sin 45 \begin{cases} x = 0 \Rightarrow V = [4.5]\cos 45 - [4]\sin 45 = 0.354\ kN \\ x = 2 \Rightarrow V = [4.5 - 2x]\cos 45 - 4\sin 45 = -2.48\ kN \\ x = 4 \Rightarrow V = [4.5 - 2x]\cos 45 - 4\sin 45 = -5.30\ kN \end{cases}$$

$$N = -(H\cos\alpha + V\sin\alpha) = -[4\cos 45 + [[4.5 - 2x]\sin 45] = 6.01 - 1.414x \begin{cases} x = 0 \Rightarrow N = -6.01 \\ x = 2 \Rightarrow N = -3.17 \\ x = 4 \Rightarrow N = -0.354 \end{cases}$$

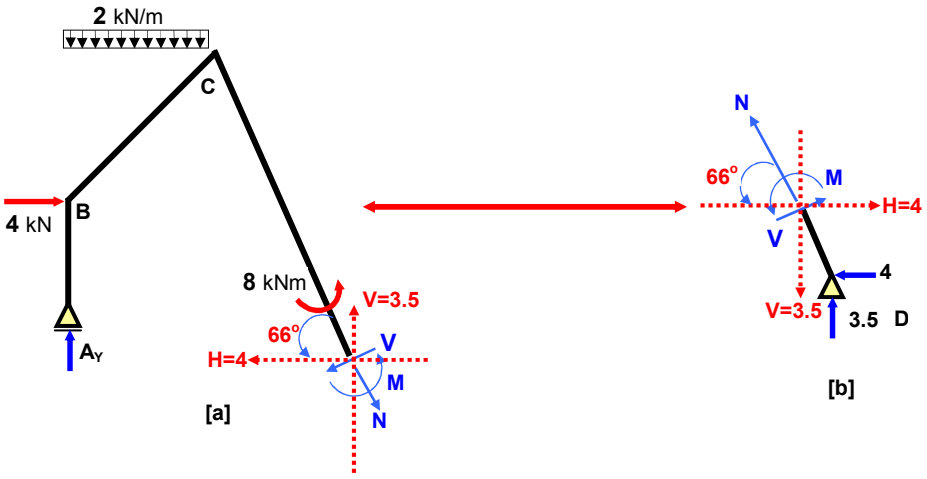


$M_E = 4.5 \times [4 + 1.78] - 2 \times 4 \times [2 + 1.78] = -4.23\,kNm\,[a]$

$M_E = 3.5 \times 2.22 - 4 \times 5 + 8 = -4.23\,kNm\ [b]$

$V = V\cos\alpha - H\sin\alpha = [-3.5]\cos[-66] - 4\sin[-66] = -2.23$ [a][b]

$N = -[H\cos\alpha + V\sin\alpha] = 4\cos[-66] + [-3.5]\sin[-66] = 4\cos[-66] + [-3.5]\cos[90 - 66] = 4.82$ [a][b]



$M_F = 4.5\,x\,[4+3.12] - 2\,x\,4\,x\,[2+3.12] + 4\,x\,3 - 8 = -4.92\,kNm\,[a]$ $M_F = 3.5\,x\,0.88 - 4\,x\,2 = -4.92\ kNm\ [b]$

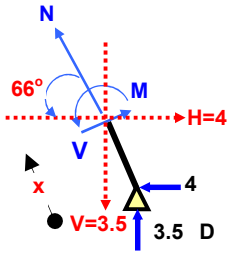
V ve **N** Yük olmadığı için yukarıdakinin aynısı olur.

$V = V\cos\alpha - H\sin\alpha = 3.5\cos 66 - 4\sin 66 = 3.5\cos 66 - 4\cos 24 = -2.23\,kN$

$\mathbf{N = H\cos\alpha + V\sin\alpha) = 4\cos 66 + 3.5\sin 66 = 4\cos 66 + 3.5\cos[90-66] = 4.82}$

Çubuk üzerinde yük olmadığı için **x**'in değişimi ile sadece moment değişir. **V** ve **N** değişmez.

$M = x[3.5\cos 66] - x[4\sin 66]$

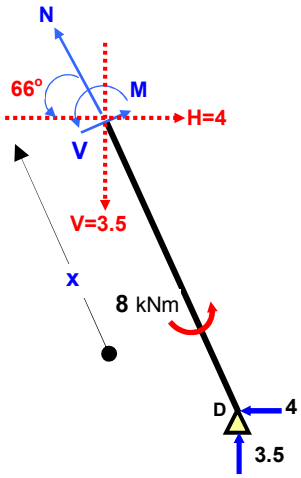


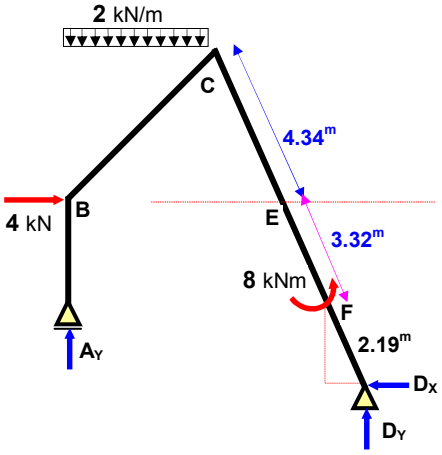
$x = 2.19 \Rightarrow M_F = 2.19[3.5\cos 66] - 2.19[4\sin 66] = -4.89\,kNm$

$M = x[3.5\cos 66] - x[4\sin 66] + 8$

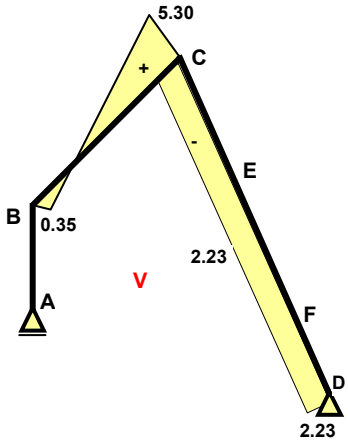
$x = 2.19 + 3.32 \Rightarrow M_F = 5.51[3.5\cos 66] - 5.51[4\sin 66] + 8 = 4.29\,kNm$

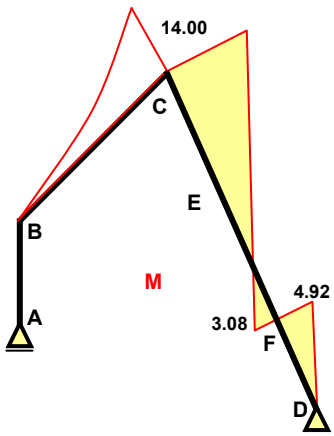
$x = 2.19 + 3.32 + 4.34 \Rightarrow M_F = 9.85[3.5\cos 66] - 9.85[4\sin 66] + 8 = -13.97\,kNm$

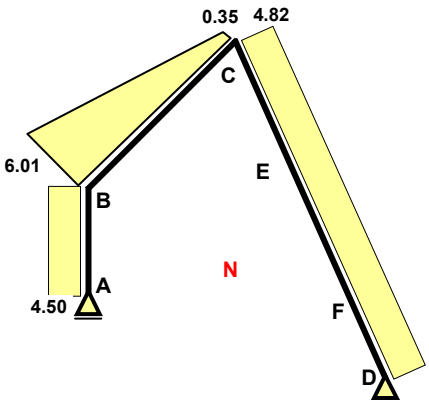




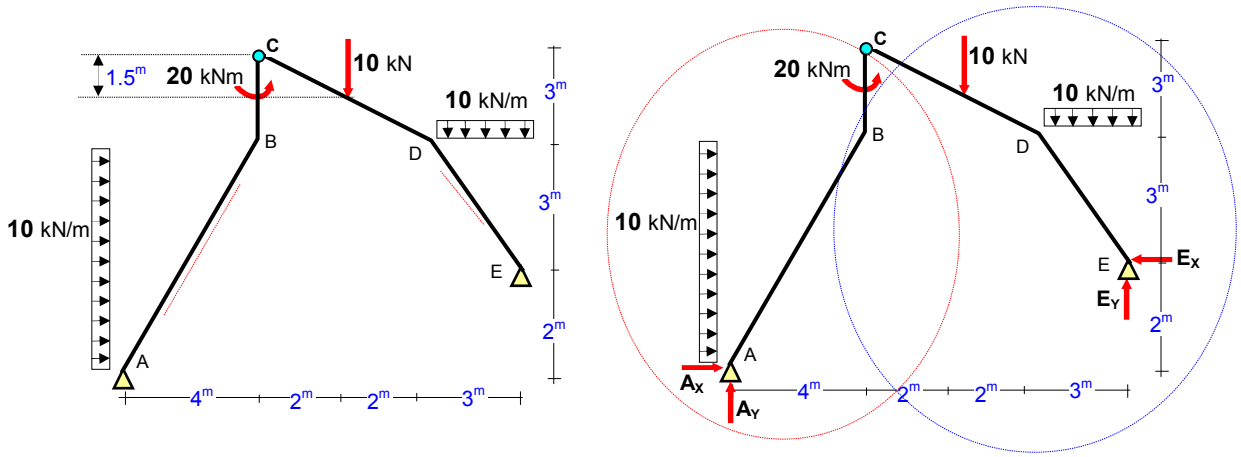
Sistemin V, M ve N diyagramları aşağıda verilmiştir.







ÖRNEK 1.4. Şekilde verilen 3 mafsallı çerçevenin **V**,**M** ve **N** kesit tesirlerinin çizimi.



Çözüm: Mesnet ve mafsalda moment ifadesi yazarak mesnet tepki kuvvetleri hesaplanır.

$$\sum M_A = 0 \quad 5\cdot 10\cdot 2.5 - 20 + 10\cdot(4+2) + 10\cdot 3\cdot(1.5+8) - 2E_X - 11E_Y = 0 \quad 2E_X + 11E_Y = 450$$

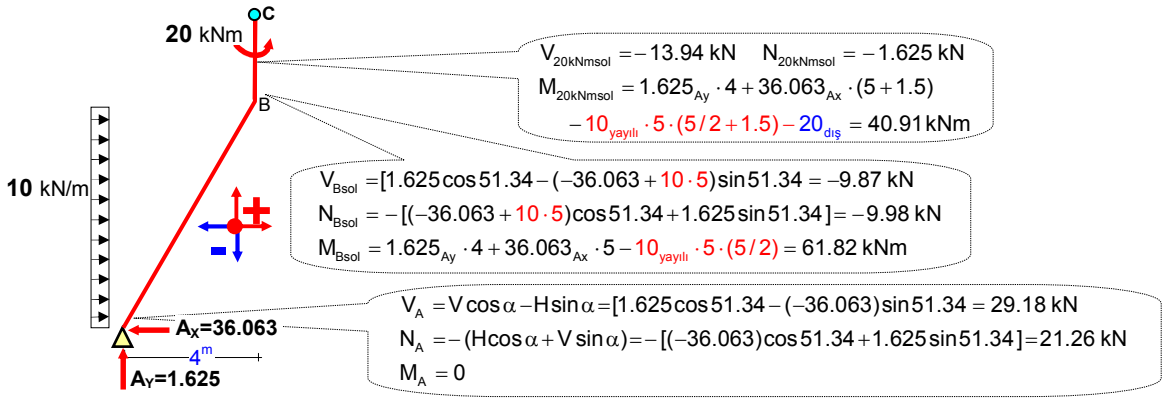
$$\sum M_C = 0 \quad 2\cdot 10 + 10\cdot 3\cdot(1.5+4) + 6E_X - 7E_Y = 0 \quad 6E_X - 7E_Y = -185$$

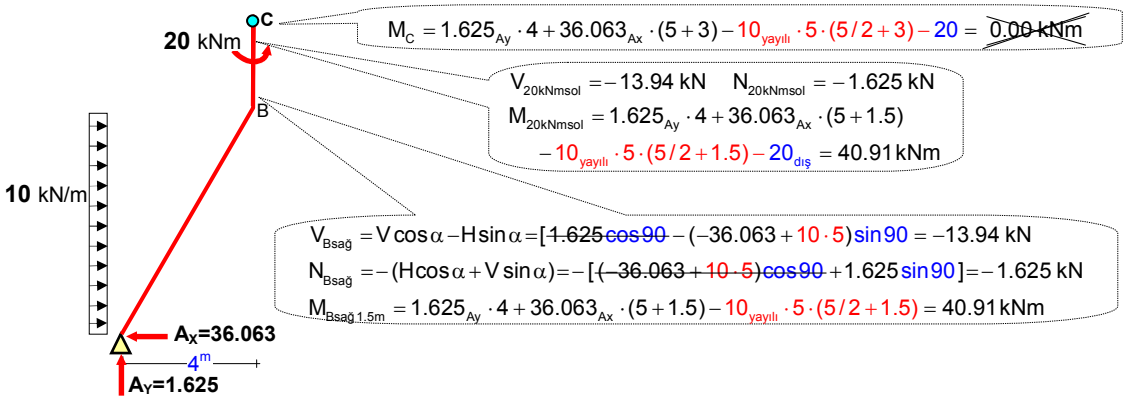
$$E_X = 13.94\ \text{N} \qquad E_Y = 38.375\ \text{N}$$

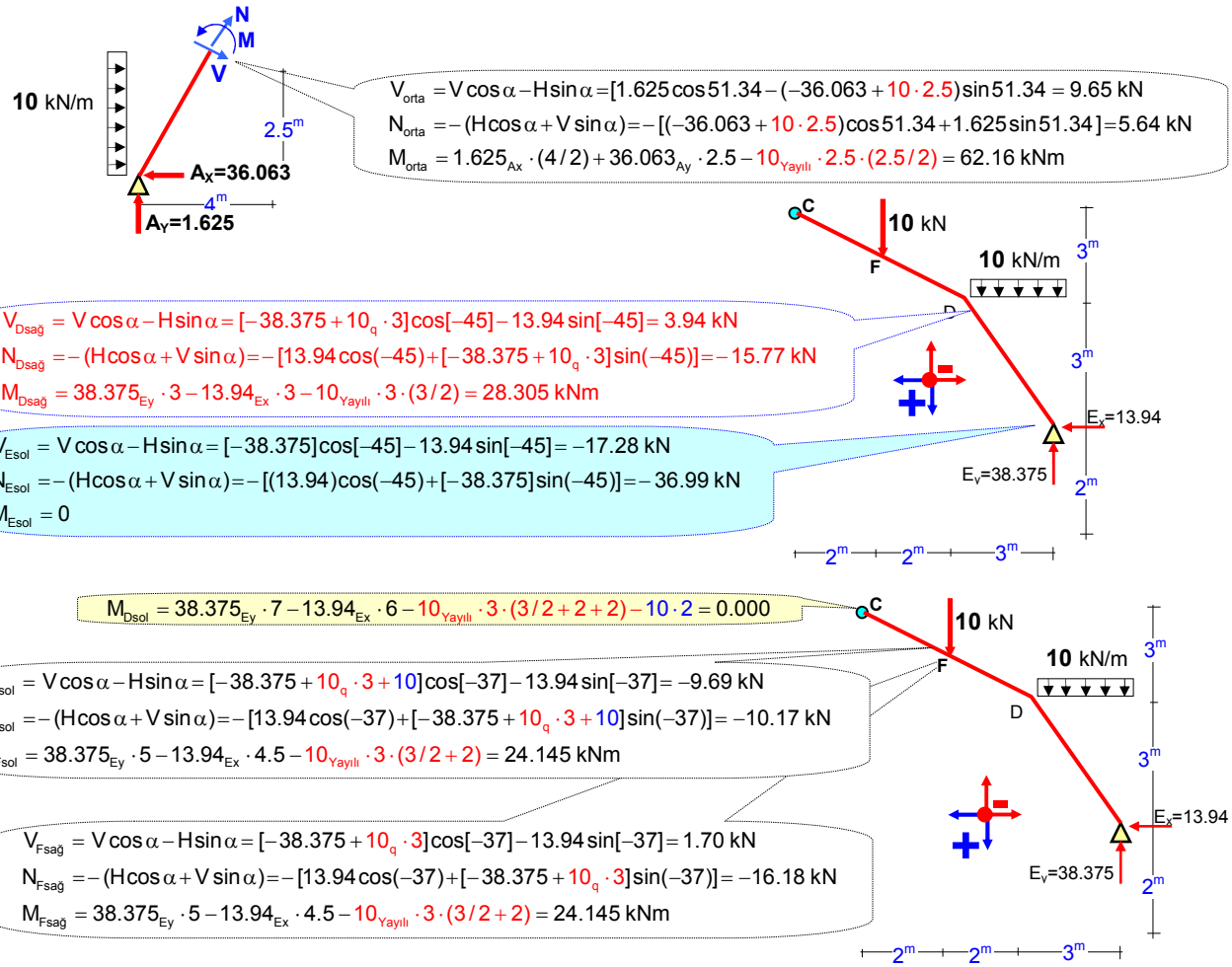
$$\sum M_E = 0 \quad 5\cdot 10\cdot 0.5 - 10\cdot 5 - 20 - 10\cdot 3\cdot 1.5 + 11A_Y - 2A_X = 0 \quad 11A_Y - 2A_X = 90$$

$$\sum M_C = 0 \quad 4A_Y - 8A_X - 5\cdot 10\cdot(2.5+3) - 20 = 0 \quad 4A_Y - 8A_X = 295$$

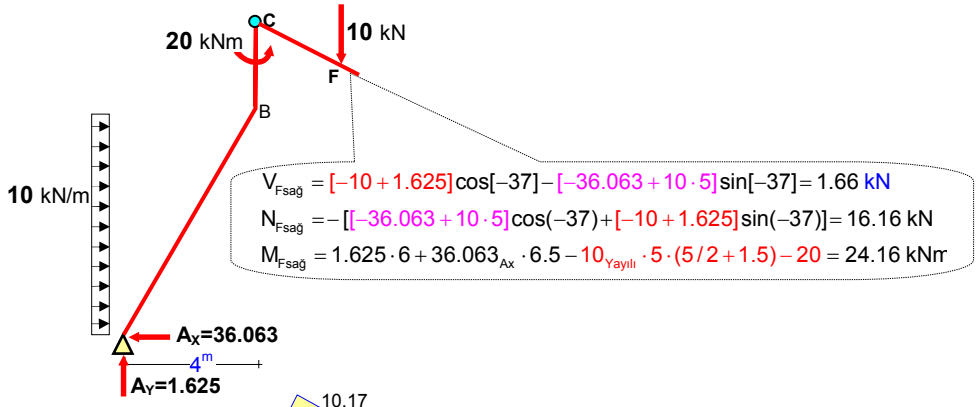
$$A_Y = 1.625\ \text{N} \qquad A_X = -36.063\ \text{N}$$

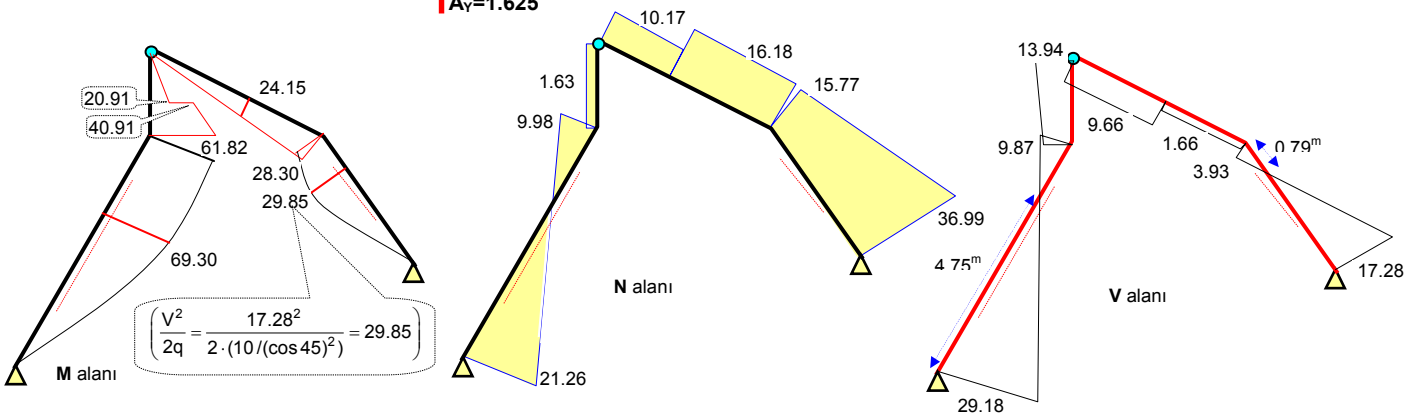




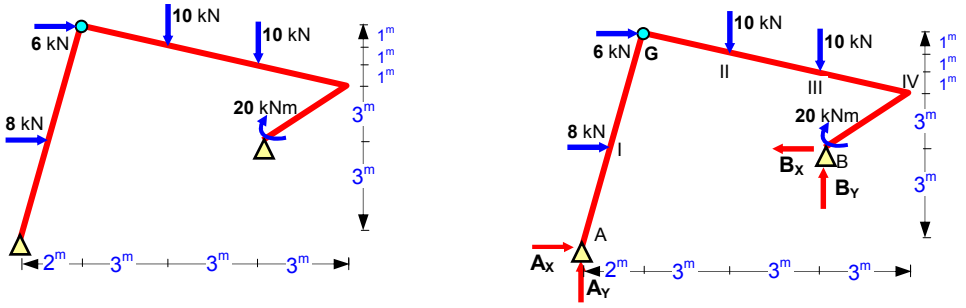


F noktasının sağındaki kesit tesirlerinin diğer yönden bulunuşu yandaki gibidir.





ÖRNEK 1.4. Şekilde verilen 3 mafsallı çerçevenin **V**,**M** ve **N** kesit tesirlerinin çizimi.



Çözüm: Mesnet ve mafsalda moment ifadesi yazarak mesnet tepki kuvvetleri hesaplanır.

$$\sum M_A = 0 \quad 8\cdot 10 + 10\cdot 5 + 6\cdot 9 + 8\cdot 3 + 20 - 3B_X - 8B_Y = 0 \qquad 3B_X + 8B_Y = 228$$

$$\sum M_G^{sağ} = 0 \quad 3\cdot 10 + 10\cdot 6 + 20 + 6B_X - 6B_Y = 0 \qquad -6B_X + 6B_Y = 110$$

$$\Rightarrow \quad B_X = 7.39\ \text{kN}, \quad B_Y = 25.73\ \text{kN}$$

$$\sum M_B = 0 \quad 6\cdot 6 - 10\cdot 3 + 20 + 8A_Y - 3A_X = 0 \qquad 8A_Y - 3A_X = -26$$

$$\sum M_G^{sol} = 0 \quad 2A_Y - 9A_X - 6\cdot 8 = 0 \qquad 2A_Y - 9A_X = 48$$

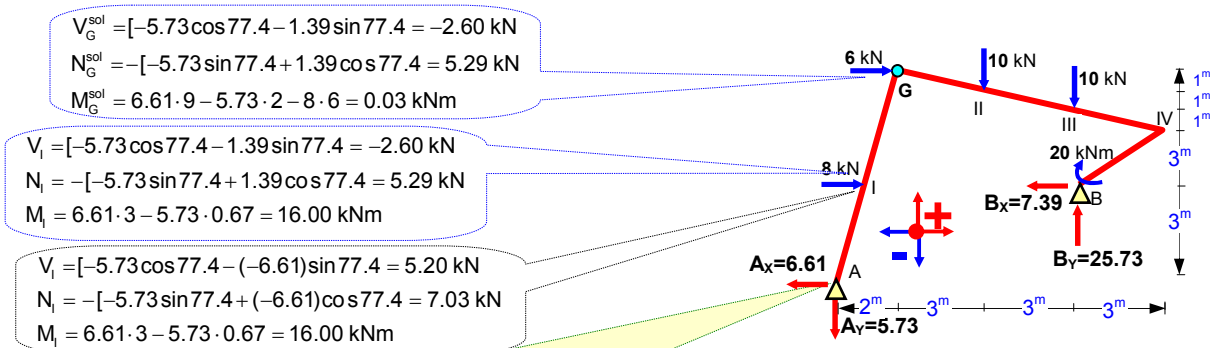
$$\Rightarrow \quad A_Y = -5.73\ \text{kN}_{\text{yön ters}}, \quad A_X = -6.61\ \text{kN}_{\text{yön ters}}$$

$V_G^{sol} = [-5.73\cos 77.4 - 1.39\sin 77.4 = -2.60$ kN
$N_G^{sol} = -[-5.73\sin 77.4 + 1.39\cos 77.4 = 5.29$ kN
$M_G^{sol} = 6.61\cdot 9 - 5.73\cdot 2 - 8\cdot 6 = 0.03$ kNm

$V_I = [-5.73\cos 77.4 - 1.39\sin 77.4 = -2.60$ kN
$N_I = -[-5.73\sin 77.4 + 1.39\cos 77.4 = 5.29$ kN
$M_I = 6.61\cdot 3 - 5.73\cdot 0.67 = 16.00$ kNm

$V_I = [-5.73\cos 77.4 - (-6.61)\sin 77.4 = 5.20$ kN
$N_I = -[-5.73\sin 77.4 + (-6.61)\cos 77.4 = 7.03$ kN
$M_I = 6.61\cdot 3 - 5.73\cdot 0.67 = 16.00$ kNm

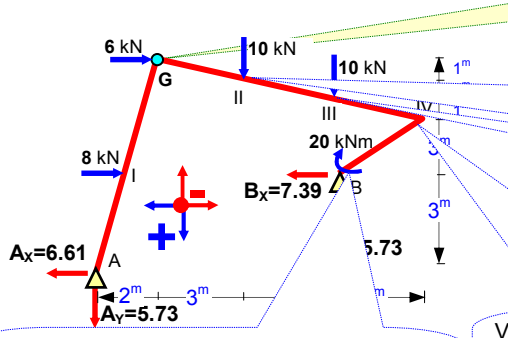
$V_A^{sağ} = V\cos\alpha - H\sin\alpha = [-5.73\cos 77.4 - (-6.61)\sin 77.4 = 5.20$ kN
$N_A^{sağ} = -(H\cos\alpha + V\sin\alpha) = -[-5.73\sin 77.4 + (-6.61)\cos 77.4 = 7.03$ kN



$V_G^{sağ} = V\cos\alpha - H\sin\alpha = [-5.73\cos 18.43 - 7.39(-\sin 18.43) = -3.10$ kN
$N_G^{sağ} = -(H\cos\alpha + V\sin\alpha) = -[-5.73(-\sin 18.43) + 7.39\cos 18.43 = -8.82$ kN

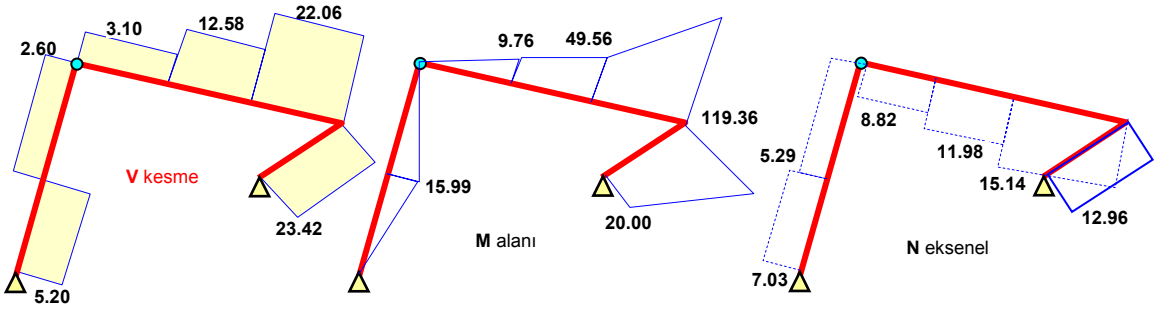
$V_{II}^{sağ} = [-15.73\cos 18.43 - 7.39(-\sin 18.43) = -12.58$ kN
$N_{II}^{sağ} = -[-15.73(-\sin 18.43) + 7.39\cos 18.43] = -11.98$ kN
$M_{II}^{sağ} = 25.73\cdot 3 - 10\cdot 3 - 7.39\cdot 5 - 20 = -9.76$ kNm

$V_{III}^{sağ} = [-25.73\cos 18.43 - 7.39(-\sin 18.43) = -22.06$ kN
$N_{III}^{sağ} = -[-25.73(-\sin 18.43) + 7.39\cos 18.43] = -15.14$ kN
$M_{III}^{sağ} = -7.39\cdot 4 - 20 = -49.56$ kNm

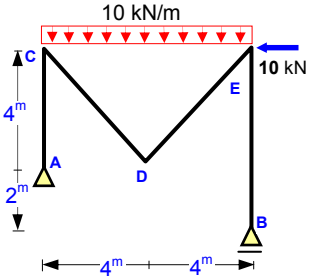


$V_B^{sağ} = -25.73\cos 45 - 7.39\sin 45 = -23.42$ kN
$N_B^{sağ} = -[-25.73\sin 45 + 7.39\cos 45] = -12.96$ kN
$M_B^{sağ} = -20$ kNm

$V_{IV}^{sağ} = -25.73\cos 45 - 7.39\sin 45 = -23.42$ kN
$N_{IV}^{sağ} = -[-25.73\sin 45 + 7.39\cos 45] = 12.96$ kN
$M_{IV}^{sağ} = -25.73\cdot 3 - 7.39\cdot 3 - 20 = -119.36$ kNm



ÖRNEK 1.4. Şekilde verilen çerçevenin **V**,**M** ve **N** kesit tesirlerinin çizimi.



$$\sum \mathbf{M_A} = \mathbf{0} \quad \mathbf{8 \cdot 10 \cdot 4 - 10 \cdot 4 - 8B_Y = 0} \qquad \mathbf{B_Y = 35\ kN}$$

$$\sum \mathbf{F_x} = \mathbf{0} \quad \mathbf{A_X = 10\ kN}$$

$$\sum \mathbf{M_B} = \mathbf{0} \quad \mathbf{-8 \cdot 10 \cdot 4 - 10 \cdot 4 + 8A_Y = 0} \qquad \mathbf{A_Y = 45\ kN}$$

Çözüm: Mesnette moment ifadesi yazarak mesnet tepki kuvvetleri hesaplanır.

$V_C^{sol} = V\cos\alpha - H\sin\alpha = [45\cos 90 - 10\sin 90] = -10\ kN$
$N_C^{sol} = -(H\cos\alpha + V\sin\alpha) = -[45\sin 90 + 10\cos 90] = -45\ kN$
$M_C^{sol} = -10 \cdot 4 = -40\ kNm$

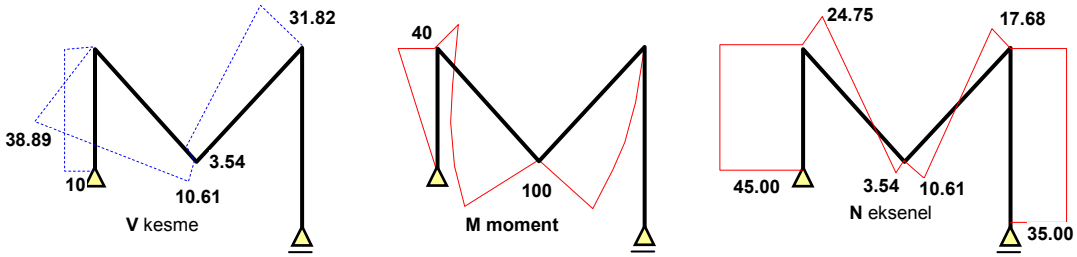
$V_C^{sağ} = [45\cos 45 - 10(-\sin 45)] = 38.89\ kN$
$N_C^{sağ} = -[45(-\sin 45) + 10\cos 45] = 24.75\ kN$
$M_C^{sağ} = -10 \cdot 4 = -40\ kNm$

$V_D^{sol} = [5\cos 45 - 10(-\sin 45)] = -10.61\ kN$
$N_D^{sol} = -[5(-\sin 45) + 10\cos 45] = -3.54\ kN$
$M_D^{sol} = 45 \cdot 4 - 10 \cdot 4 \cdot 2 = 100\ kNm$

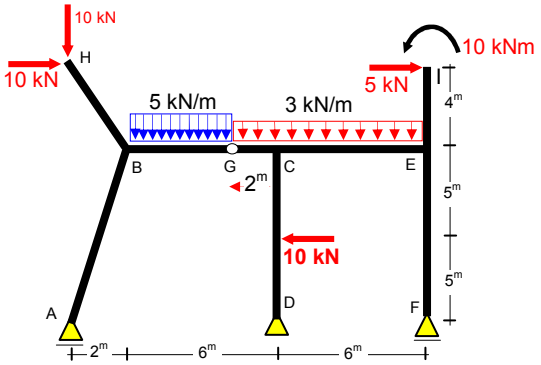
$V_D^{sağ} = [5\cos 45 - 10\sin 45] = -3.54\ kN$
$N_D^{sağ} = -[5\sin 45 + 10\cos 45] = -10.61\ kN$
$M_D^{sağ} = 45 \cdot 4 - 10 \cdot 4 \cdot 2 = 100\ kNm$

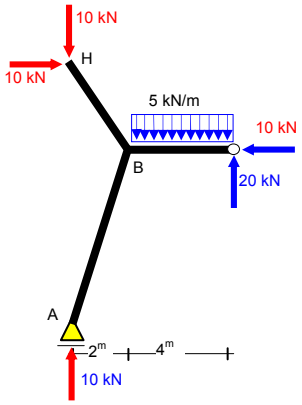
$V_E^{sol} = [-35\cos 45 - 10\sin 45] = -31.82\ kN$
$N_E^{sol} = -[-35\sin 45 + 10\cos 45] = 17.68\ kN$
$M_E^{sol} = 45 \cdot 8 - 10 \cdot 4 \cdot 8 - 10 \cdot 4 = 0\ kNm$

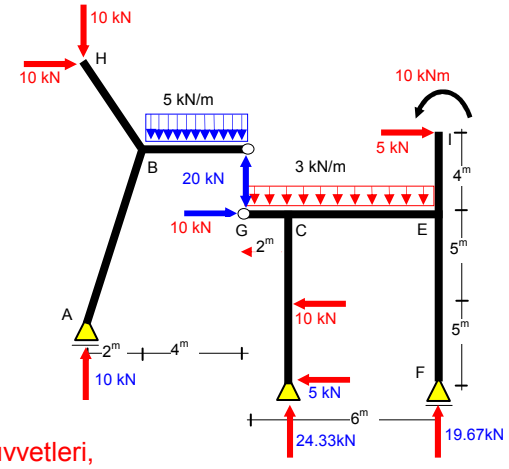
$V_E^{sağ} = [-35\cos 90 - 0\sin 45] = 0\ kN$
$N_E^{sağ} = -[-35\sin 90 + 0\cos 45] = 35\ kN$
$M_E^{sağ} = 45 \cdot 8 - 10 \cdot 4 \cdot 8 - 10 \cdot 4 = 0\ kNm$



ÖRNEK 2.4. Şekilde verilen sistemin V, **M** ve **N** diyagramlarının belirlenmesi.







Taşınan parçanın mesnet tepki kuvvetleri,

$\Sigma F_x = 0 \quad G_x = 10\ kN \quad \Sigma F_y = 0 \quad A_y + G_y = 10 + 5 \times 4 = 30$

$\Sigma M_A = 0 \quad 6\,G_y - 5 \times 4 \times 4 + 10 \times 10 - 10 \times 6 = 0 \quad G_y = 20\ kN$

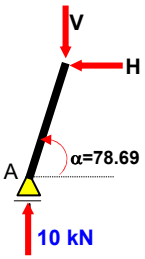
$\Sigma M_G = 0 \quad 6\,A_y - 5 \times 4 \times 2 - 10 \times 6 + 10 \times 4 = 0 \quad A_y = 10\ kN$

Taşıyan parçanın mesnet tepki kuvvetleri,

$\Sigma F_x = 0 \quad D_x = 10 - 10 + 5 = 5\ kN \quad \Sigma F_y = 0 \quad D_y + F_y = 3 \times 8 + 20 = 44\ kN$

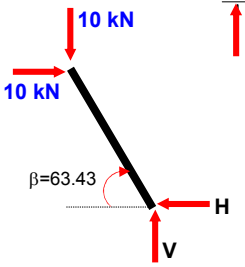
$\Sigma M_D = 0 \quad 10 \times 10 - 20 \times 2 + 3 \times 8 \times 2 + 5 \times 14 - 10 - 10 \times 5 - 6\,F_y = 0 \quad F_y = 19.67\ kN$

$\Sigma M_F = 0 \quad -10 \times 5 + 10 \times 10 - 20 \times 8 - 3 \times 8 \times 4 + 5 \times 14 - 10 + 6\,D_y = 0 \quad D_y = 24.33\ kN$



$V_A^{sağ} = V\cos\alpha - H\sin\alpha = 10\cos 78.69 - 0\sin 78.69 = 1.96\ kN$

$N_A^{sağ} = -[0\cos 78.69 + 10\sin 78.69] = -9.81\ kN$



$V_B^{sol} = V\cos\alpha - H\sin\alpha = -10\cos 63.43 - 10\sin(-63.43) = 4.47\ kN$

$N_B^{sol} = -(H\cos\alpha + V\sin\alpha) = -(10\cos 64.43 - 10\sin(-64.43)) = -13.41\ kN$

M_{BA}= 10 x 2 = 20 kNm **M_{BH}**= 10 x 4 – 10 x 2 = 20 kNm

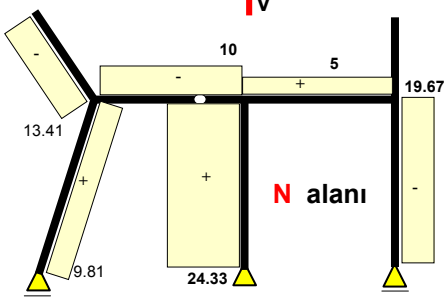
M_{BG}= 10 x 2 –10 x 2+10 x 4 = 40 kNm

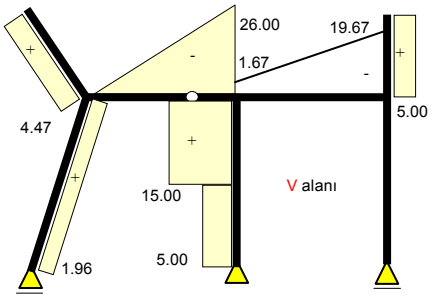
M_{CG}= -(20 x 2 +3 x 2 x 1)= -46 kNm

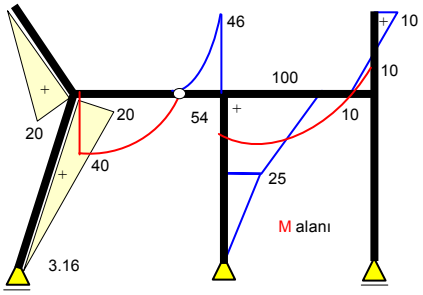
M_{CD}= 10 x 5 +5 x 10 = 100 kNm

M_{CE}= 19.67x 6 –5 x 4 – 18 x 3 +10 = 54 kNm

M_{EC}= -5 x 4 +10 = -10 kNm **M_{EI}**= -5 x 4 +10 = -10 kNm

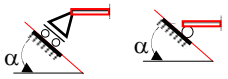
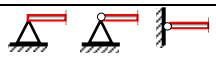
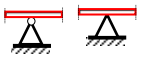
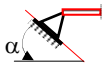


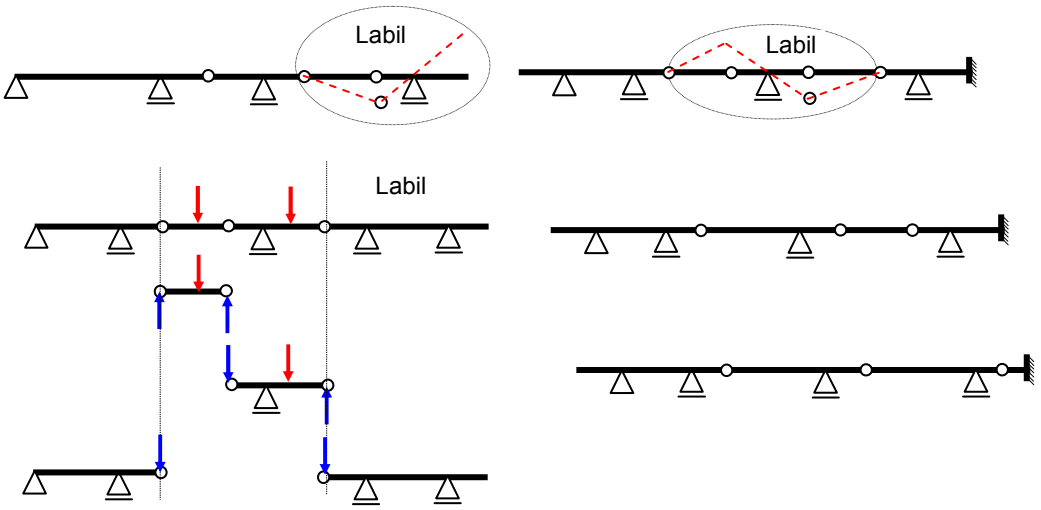




1.2. MESNETLER

Bir sistemin, mesnet reaksiyonları dahil bütün kesit tesirlerinin belirlenmesi için $\Sigma F_x=0$, $\Sigma F_y=0$ ve $\Sigma M=0$ denge denklemleri belirlenebiliyor ise sistem izostatiktir. İzostatik sistemlerde mesnet şekilleri ve yükleme durumu etkin olduğu için burada kısa ve genel bir inceleme yapılmaktadır.

Tip	Konum	Menet şekli	Reaksiyonlar	Bilinmeyenler	Moment	Dönüş
Kayıcı	Kenar			$R_x=0$ $R_y\neq0$	M=0	φ≠0
	Orta					
	Eğik			$R_y=R\cos\alpha$ $R_x=R\sin\alpha$		
Sabit	Kenar			$R_x\neq0$ $R_y\neq0$		
	Orta					
	Eğik			$R_y=R\cos\alpha$ $R_x=R\sin\alpha$		
Ankastre	Tam			$R_x\neq0$ $R_y\neq0$	M≠0	φ=0
	Kayıcı			$R_x\neq0$ $R_y=0$		



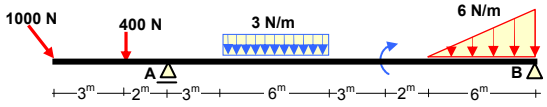






1.3. İZOSTATİK SİSTEMLERİN ÇÖZÜM ÖRNEKLERİ

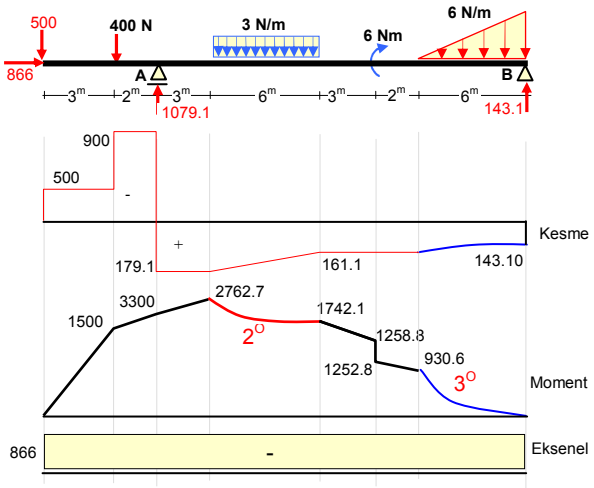
ÖRNEK 4.10: Şekilde verilen çıkmalı kirişin **V,N** ve **M** diyagramlarının çizimi.



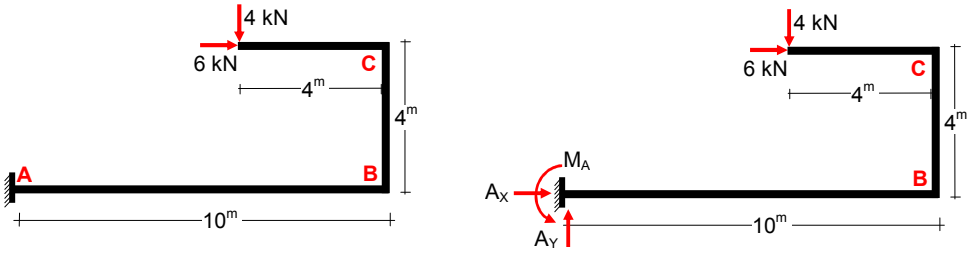
A ve **B** noktalarında $\Sigma M_A=0$ ve $\Sigma M_B=0$ yazılarak mesnet tepki kuvvetleeri bulunur.

$\Sigma M_A=0$ $-400x2-1000\sin 30x5+3x6x6+6+6x6x0.5x(3+6+3+2+6x2/3)-20B_y=0$ **B_y=-143.10 N**

$\Sigma M_B=0$ $-400x22-1000\sin 30x25-3x6x14+6-6x6x0.5x(6/3)-20A_y=0$ **A_y=1079.10 N**



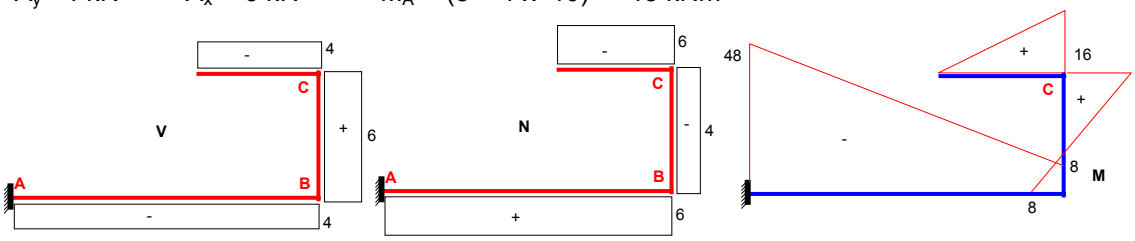
ÖRNEK 2.1. Kirişin **kesme** kuvvet, **moment** ve **normal** kuvvet alanın belirlenmesi.



V_C= - 4 kN N_C = -6 kN M_C= 4 x 4 =16 kNm

V_B= 6 kN N_C = - 4 kN M_B= 4 x 4 – 6 x 4 =-8 kNm

A_y= 4 kN A_x= -6 kN M_A= -(8 + 4 x 10) = -48 kNm



GERBER KİRİŞLER

Gerber kiriş,

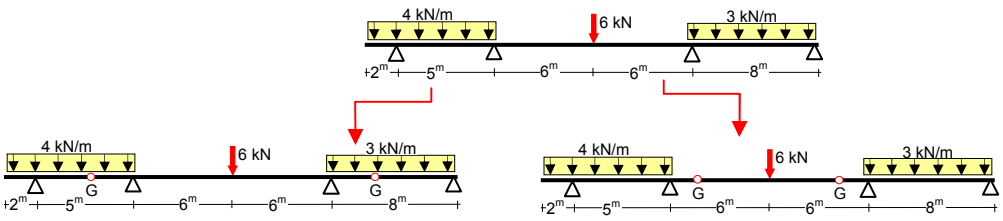
1. Hiperstatik sistemlerin mafsallarla izostatik hale getirilmiş
2. Basit, çıkmalı ve konsol kirişlerin mafsallarla birbirine bağlanmış

Durumlarının,

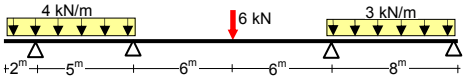
a. Taşıyıcı
b. İzostatik

sistemlere denir. Gerber kirişler uygulamada çatı aşıklarında ve köprü kirişlerinde kullanılır. Gerber kirişlerin oluşturulmasında kirişlerin labil olmamasına dikkat edilmelidir. Aşağıda bazı gerber kiriş çözüm örnekleri bulunmaktadır.

Aşağıda örnek olarak verilen hiperstatik mütemadi kirişin izostatik olarak (gerber) çözümü için mafsallarla değişik durumlarda yapmak mümkündür.

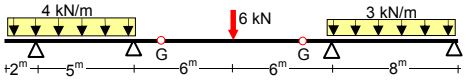


ÖRNEK 2.3. Şekilde verilen mütemadi kirişi **gerber kiriş** haline getirerek kesme kuvvet ve moment alanın belirlenmesi.

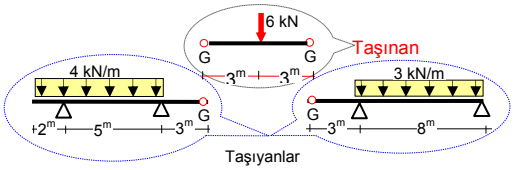


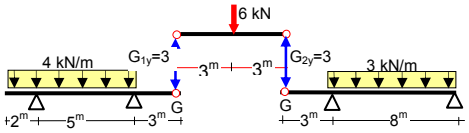
Bu mütemadi kiriş **iki** şekilde gerber kiriş haline getirilebilir.

1. Durum



Sistem bir taşınan ve 2 taşıyan izostatik sistem haline getirilmiştir. Taşınan sistem çözülerek mesnet tepkileri taşıyan sistemlere yük olarak yüklenir.



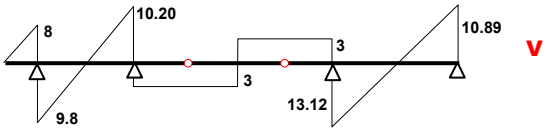


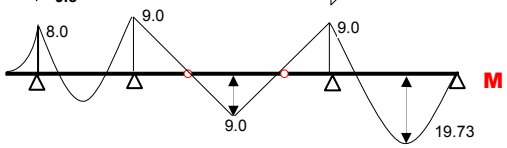
$\Sigma M_A=0 \quad 5B_y - 3 \times 8 - 4 \times 7 \times 1.5 = 0 \quad B_y = 13.20\ kN$

$\Sigma M_B=0 \quad 5A_y + 3 \times 3 - 4 \times 7 \times 3.5 = 0 \quad A_y = 17.80\ kN$

$\Sigma M_C=0 \quad 8D_y + 3 \times 3 - 3 \times 8 \times 4 = 0 \quad D_y = 10.88\ kN$

$\Sigma M_D=0 \quad 8C_y - 3 \times 11 - 3 \times 8 \times 4 = 0 \quad C_y = 16.12\ kN$

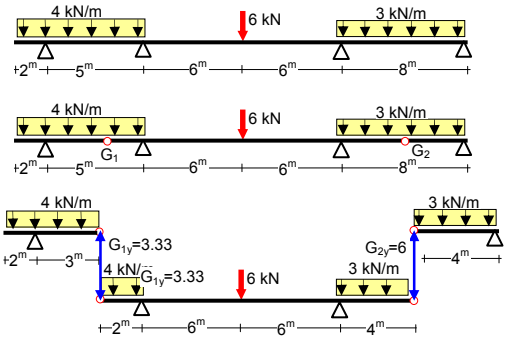




$$M_{AB} = \frac{V^2}{2q} \pm M_A = \frac{9.8^2}{2 \times 4} - 8 = 4.01\ kNm \qquad M_{GG} = \frac{6 \times 6}{4} = 9.00\ kNm$$

$$M_{CD} = \frac{V^2}{2q} \pm M_C = \frac{13.12^2}{2 \times 3} - 9 = 19.69\ kNm \qquad M_{DC} = \frac{V^2}{2q} \pm M_D = \frac{10.88^2}{2 \times 3} - 0 = 19.73\ kNm$$

2. Durum



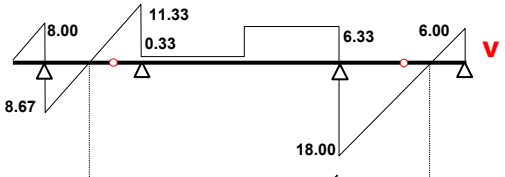
Devam edecek

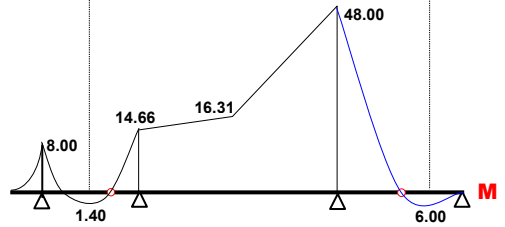
$\Sigma M_A= 0 \quad 3\,G_{1y} - 5 \times 4 \times 0.5 = 0 \quad G_{1y} = 3.33\ kN \qquad \Sigma M_G= 0 \quad 3A_y - 5x4x2.5 = 0 \quad A_y = 16.67\ kN$

$\Sigma M_D= 0 \quad 4\,G_{2y} - 3 \times 4 \times 2 = 0 \quad G_{2y} = 6.00\ kN \qquad D_y = 6.00\ kN$

$\Sigma M_C= 0 \quad 10\,B_y + 3 \times 4 \times 2 + 6 \times 4 - 6 \times 5 - 3.33 \times 12 - 2 \times 4 \times 11 = 0 \quad B_y = 11.00\ kN$

$\Sigma M_B= 0 \quad 10\,C_y + 3.33 \times 2 + 4 \times 2 \times 1 - 6 \times 14 - 6 \times 5 - 3 \times 4 \times 12 = 0 \quad C_y = 24.33\ kN$



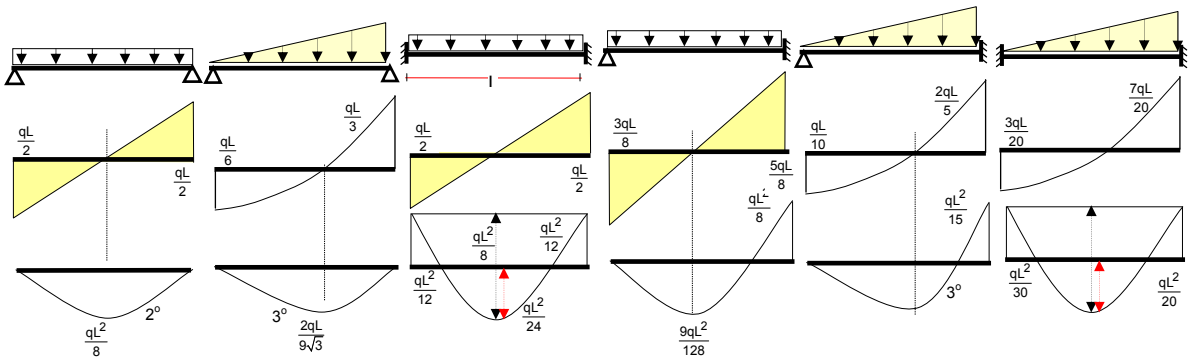


$$M_{AG_1} = \frac{V^2}{2q} \pm M_A = \frac{8.67^2}{2 \times 4} - 8 = 1.40\ kNm \qquad M_B = -(3.33 \times 2 + 4 \times 2 \times 1) = -14.66\ kNm$$

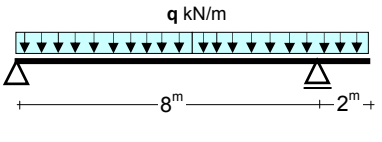
$M_C = -(6\,x\,4+3\,x\,4\,x\,2) = -48.00\,kNm \qquad M_{6t} = -(3.33\,x\,7+4\,x\,2\,x\,6)+11x5 = -16.51\ kNm$

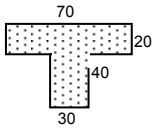
$$\mathbf{M_{DG_2} = \frac{V^2}{2q} \pm M_D = \frac{6^2}{2x3} - 0 = 6.00\,tm} \quad \textbf{veya} \quad \mathbf{M_{G_2D} = \frac{V^2}{2q} \pm M_D = \frac{6^2}{2x3} - 0 = 6.00}$$

Bazı sistemlerin moment ve kesme kuvvet alanları

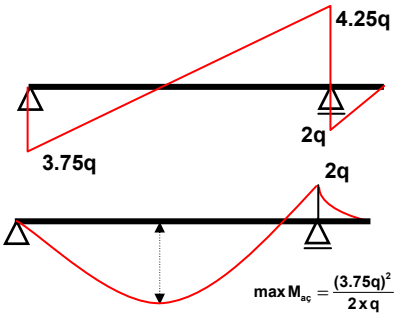


ÖRNEK 1.8: Şekilde yükleme durumu, kesiti ve $\sigma_{emniyet}$=200 N/mm^2 τ_{em}=50 N/mm^2 olarak verilen kirişin emniyetle taşıyabileceği **q** yükünün belirlenmesi.



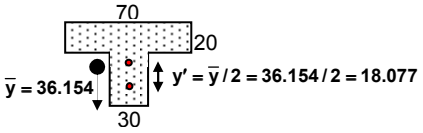


$\sum M_A = 0 \qquad q\,x\,10\,x\,5 - 8B_y = 0 \qquad B_y = 6.25q \qquad \sum M_B = 0 \qquad q\,x\,10\,x\,3 - 8A_y = 0 \qquad A_y = 3.75q$



Kesme kuvvet alanı

Moment alanı



Kesitin atalet momentinin hesaplanması $\qquad \bar{y} = \dfrac{70\,x\,20\,x\,50 + 30\,x\,40\,x\,20}{70\,x\,20 + 40\,x\,30} = 36.154\,cm$

$$I_x = I_{x1} + I_{x2} = \frac{bh^3}{12} + A\,d^2 + \frac{bh^3}{12} + A\,d^2 = \frac{70\,x\,20^3}{12} + 70\,x\,20\,x\,(50-36.154)^2$$
$$+ \frac{30\,x\,40^3}{12} + 30\,x\,40\,x\,(36.154-20)^2 = 788205.13\,cm^4$$

$$\sigma_{em} = \frac{M\bar{y}}{I} = \frac{7.03\,q(10^5)}{788205.13}\,36.154 = 200 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots q = 6.2\,kg/cm$$

$$\tau_{em} = \frac{V\,Ay'}{Ib} = \frac{4.25\,q(10^3)\,x\,36.154\,x\,30\,x\,(36.154/2)}{788205.13\,x\,30} = 50 \ldots\ldots\ldots q = 14.2\,kg/cm$$

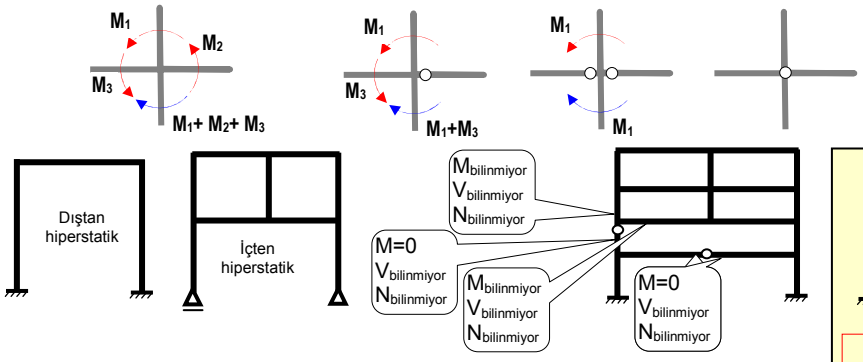
Kirişin emniyetle taşıyabileceği **q= 6.20** kg/cm olarak alınır. **q= 14.2** kg/cm olarak alınması durumunda normal gerilme emniyetle taşınamaz.

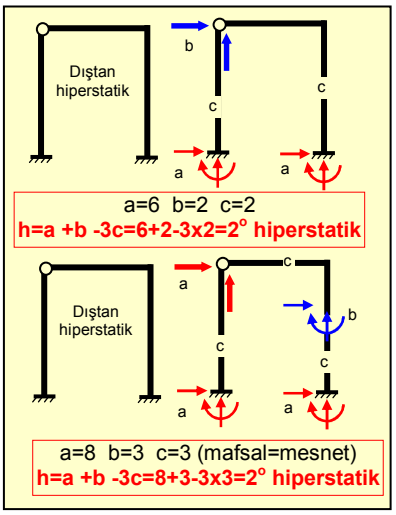
1.4. HİPERSTATİK SİSTEMLER

Bir sistemin, mesnet reaksiyonları dahil bütün kesit tesirleri,

1. $\Sigma F_x=0$ $\Sigma F_y=0$ $\Sigma M=0$

denge denklemleri elde edilen sistemlere izostatik sistemler. Bu üç denge denklemleri ile mesnet reaksiyonları ve kesit tesirleri bulınamayan sistemlere ise hiperstatik sistemler denir. Bu üç temel denklem dışında yazılan ilave denklem sayısına sistemin **hiperstatiklik derecesi** denir. Bir sistemin hiperstatiklik derecesi, verilen sistemi izostatik sistemlere ayırarak yazılan denge denklemleri ile giderilir ve sistemin kesit tesirleri bulunur. Eğer bir sistemin hiperstatiklik derecesi mesnet reaksiyonları kaldırılarak gideriliyor ise **dıştan**, bazı elemanlardaki kesit tesirleri kaldırılarak gideriliyor ise **içten** ve her ikisi birlikte yapılarak gideriliyor ise **hem içten hem dıştan hiperstatik** olarak aşağıdaki şekillerdeki gibi tanımlamak mümkündür. Yapı sistemlerindeki hiperstatiklik derecesi çözüm yöntemine göre değişiklik göstermektedir. Bu durum kuvvet ve açı metoduna göre aşağıda örnekler üzerinde açıklanmaktadır.



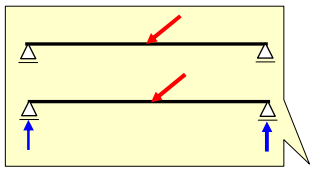


a: Sistemdeki mesnet tepkisi sayısı
b: Hiperstatik kısmın kesit tesiri sayısı
c: Hiperstatik kısmın izostatik hale gelince ki parça sayısı
h: hiperstatiklik derecesi

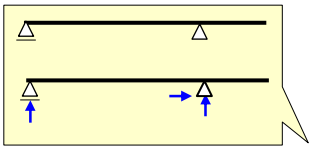
olmak üzere,

h=a +b -3c

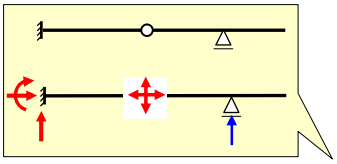
h>0 sistem hiperstatik h=0 sistem izostatik h < 0 sistem labil



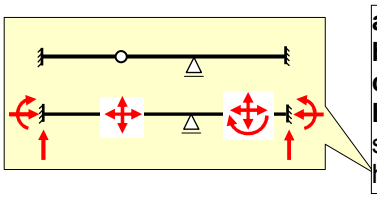
a=2 b=0 c=1
h=2+0-3x1=-1
sistem **Labil** (sadece çubuk-menet eksenine dik yük olması durumu için taşıyıcıdır.)



a=3
b=0
c=1
h=2+1-3x1=0
sistem **izostatik**

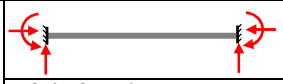
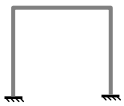
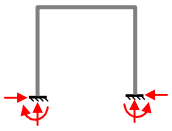
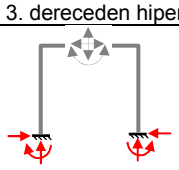
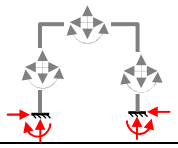
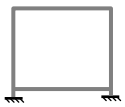
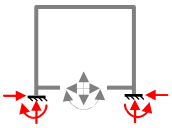
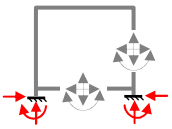
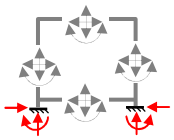
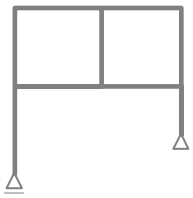
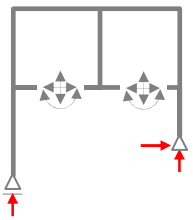
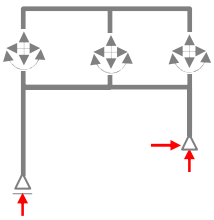
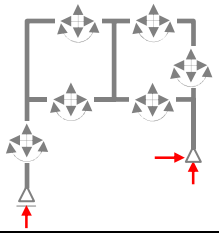
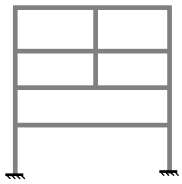
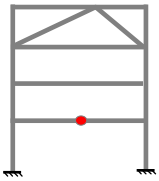
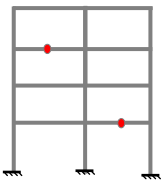
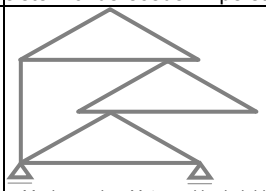
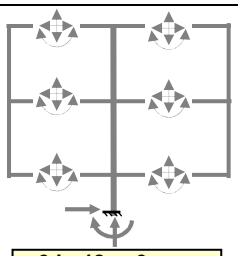
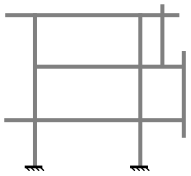
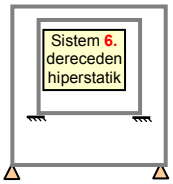
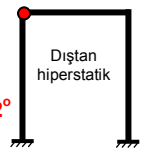
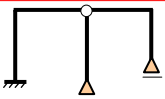
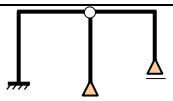


a=4
b=2
c=2
h=4+2-3x2=0
sistem **izostatik**



a=7
b=5
c=3
h=7+5-3x3=3
sistem 3. dereceden hiperstatik

Mesnet ve Çubuk						
Mesnet ve uç kuvvetleri						

Verilen Sistem	Serbest cisim diyagramı	Serbest cisim diyagramı	Serbest cisim diyagramı
	 a=6 b=0 c=1 h=3+0-3x1=3 [Dıştan] sistem 3. dereceden hiperstatik	 **a=6 b=3 c=2 h=6+3-3x2=3** sistem 3. dereceden hiperstatik	 **a=6 b=9 c=4 h=6+9-3x4=3** sistem 3. dereceden hiperstatik
	 **a=6 b=0 c=1 h=3+0-3x1=3** [Dıştan] sistem 3. dereceden hiperstatik	 **a=6 b=3 c=2 h=6+3-3x2=3** sistem 3. dereceden hiperstatik	 **a=6 b=9 c=4 h=6+9-3x4=3** sistem 3. dereceden hiperstatik
	 **a=6 b=3 c=1 h=6+3-3x1=6** sistem 6. dereceden hiperstatik	 **a=6 b=6 c=2 h=6+6-3x2=6** sistem 6. dereceden hiperstatik	 **a=6 b=12 c=4 h=6+12-3x4=6** sistem 6. dereceden hiperstatik
	 **a=3 b=6 c=1 h=3+6-3x1=6** sistem 6. dereceden hiperstatik	 **a=3 b=9 c=2 h=3+9-3x2=6** sistem 6. dereceden hiperstatik	 **a=3 b=18 c=5 h=3+18-3x5=6** sistem 6. dereceden hiperstatik
 **18.** dereceden	 **17.** dereceden	 **22.** dereceden	 **11.** dereceden Yatay yüklerde labil
 **a=3 b=18 c=3 h=3+18-3x3=12** sistem **12.** dereceden		 **15.** dereceden hiperstatik	 **a=4 b=6 c=2 h=4+6-3x2=4** sistem **4.** dereceden hiperstatik
M=çubuk sayısı a=mesnet tepkisi sayısı N=düğüm sayısı C=mafsal sayısı **h=3M+a –(3N+C)=3x3+6-(3x4+1)=2°** **hiperstatik** 	M=çubuk sayısı a=mesnet tepkisi sayısı N=düğüm sayısı C=mafsal sayısı **h=3M+a –(3N+C)=3x5+6-(3x6+2)=1°** **hiperstatik** 	 **a=6 b=4 c=3 h=6+4-3x3=1°**	

Hiperstatik sistemlerin çözüm metodlarına göre hiperstatiklik derecelerin belirlenmesi;

1. Sistemdeki iki ucu mafsallı çubuk sayısı $\mathbf{S_1}$
2. Sistemdeki bir ucu mafsallı bir ucu rijit çubuk sayısı $\mathbf{S_2}$
3. Sistemdeki iki ucu rijit çubuk sayısı $\mathbf{S_3}$
4. Sistemdeki mesnet tepkisi sayısı **a**
5. Sistemdeki mafsallı düğüm noktası sayısı (mesnetler dahil) $\mathbf{d_1}$
6. Sistemdeki rijit düğüm noktası sayısı (mesnetler dahil) $\mathbf{d_2}$

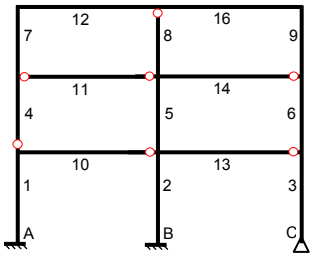
olmak üzere aşağıdaki şekilde bulmak mümkündür.

Kuvvet metoduna göre, $\mathbf{n = S_1 + 2\,S_2 + 3\,S_3 + a - (2\,d_1 + 3\,d_2)}$

Şekil değiştirme büyüklükleri yöntemine göre, $\mathbf{m = 2\,d_1 + 3\,d_2 - a}$

Şekil değiştirme büyüklükleri yönteminin özel durumu olan **AÇI** yönteminde bilinmeyenler açılardır. Eksenel kuvvet şekil değiştirmeleri ihmal edildiğinden hiperstatiklik derecesi olan m değeri oldukca küçülür.

ÖRNEK 1.9: Şekilde verilen çerçevenin hiperstatiklik derecesini,
a) Kuvvet yöntemine göre
b) Şekil değiştirme büyüklükleri yöntemine göre belirleyiniz.





1. Sistemdeki iki ucu mafsallı çubuk sayısı $\mathbf{S_1=1}$ **(11)**
2. Sistemdeki bir ucu mafsallı bir ucu rijit çubuk sayısı $\mathbf{S_2=6}$ **(3,13,14,8,10,4)**
3. Sistemdeki iki ucu rijit çubuk sayısı $\mathbf{S_3=8}$ **(1,7,12,16,9,6,5,2)**
4. Sistemdeki mesnet tepkisi sayısı **a=8**
5. Sistemdeki mafsallı düğüm noktası sayısı (mesnetler dahil) $\mathbf{d_1=1}$
6. Sistemdeki rijit düğüm noktası sayısı (mesnetler dahil) $\mathbf{d_2=11}$

a. Kuvvet metoduna göre,

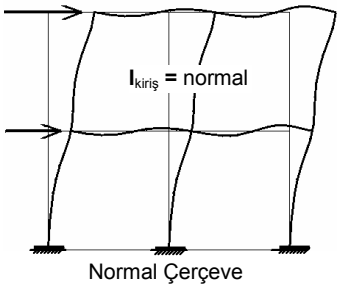
$\mathbf{n = S_1 + 2\,S_2 + 3\,S_3 + a - (2\,d_1 + 3\,d_2)}$

$\mathbf{n = 1 + 2 \times 6 + 3 \times 8 + 8 - (2 \times 1 + 3 \times 11) = 10}$

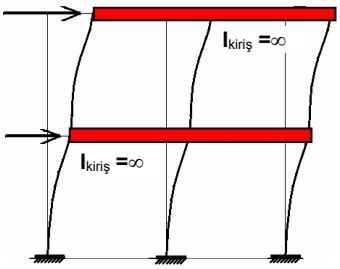
b. Şekil değiştirme büyüklükleri yöntemine göre,

$\mathbf{m = 2\,d_1 + 3\,d_2 - a}$ $\mathbf{m = 2 \times 1 + 3 \times 11 - 8 = 27}$

Yapılar yatay yüklere maruz kaldığı zaman yapının kirişleri döşemelerle birlikte diğer yapı elemanı kolonlara göre oldukça rijit kalmaktadır.

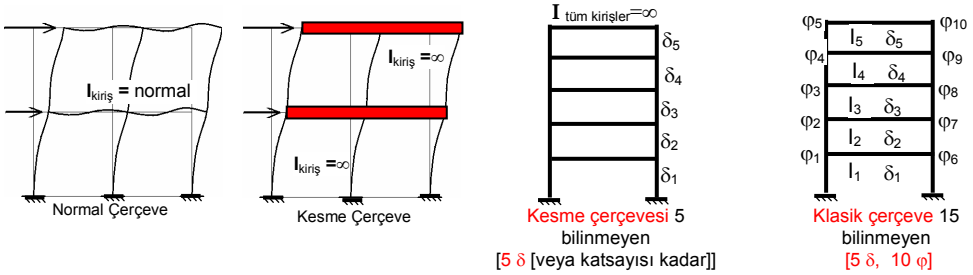


Normal Çerçeve



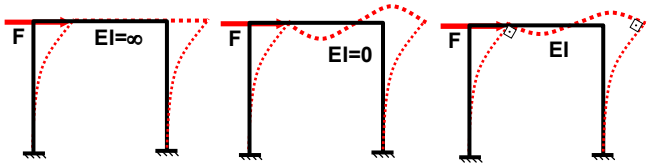
Kesme Çerçeve

Bundan dolayı kirişlerin rijitliğini kolon rijitliğinden çok büyük olduklarından sonsuz kabul ederek (kirişlerin deformasyon yapmadığını kabul ederek) kolonların kirişlere ankastre bağlı olarak (φ=0) alınmaktadır. Kabul edilen bu çerçevelere kesme çerçeveleri denir. Kesme çerçevelerinde kolon rijitlikleri birim yüklemeler yapılarak bulunur. Çerçevelerin kesme çerçevesi olarak kabul edilmesiyle bilinmeyen sayısı yatay deplasman sayısına inmektedir. Çünkü kolonlar kirişlere ankastre bağlı olduğu kabul edildiği için buralardaki dönüş açıları sıfır (φ=0) olmaktadır. Yapılar yatay yüklere maruz kaldığında yapının kirişleri döşemelerle birlikte diğer yapı elemanı kolonlara göre oldukça rijit kalmaktadır.



Şekil 5.5.. Kesme ve klasik çerçevenin karşılaştırılması

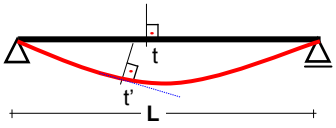
Çerçeve sistemlerin şekil değiştirmesinde kiriş rijitliklerinin etkisi aşağıdaki gibidir.

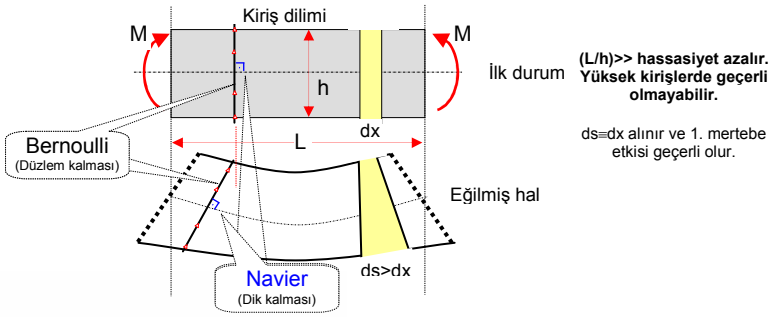


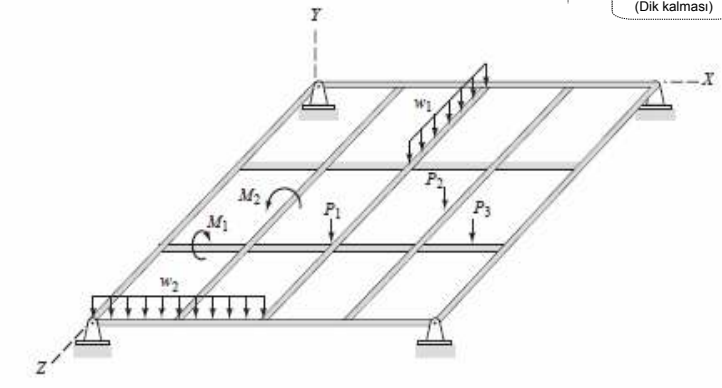
Şekil 5.7. Kiriş rijitliğin çerçeve davranışına etkisi

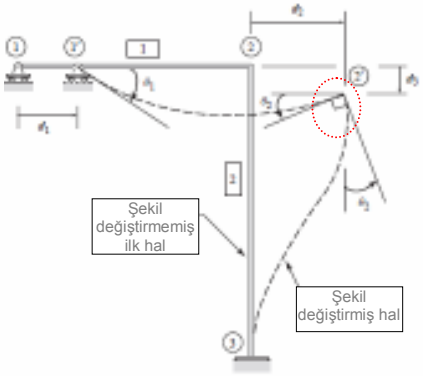
1.5. HİPERSTATİK SİSTEMLERİN ÇÖZÜMÜNDE YAPILAN KABULLER

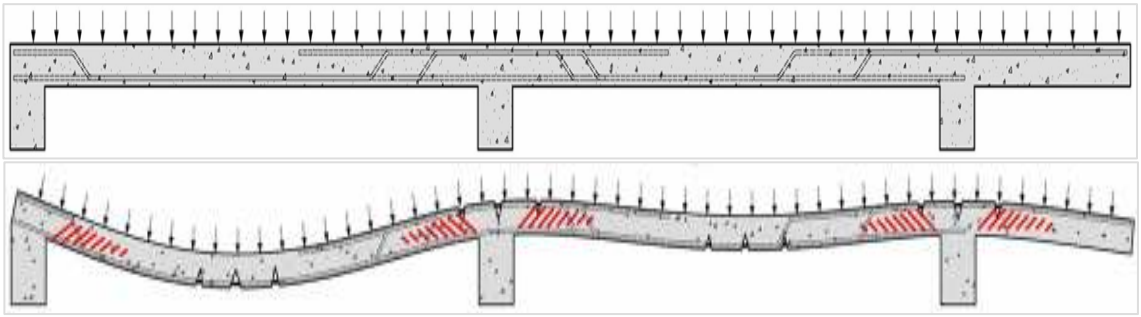
1. **BERNOULLİ** (1705) hipotezi (h << L) geçerlidir. L ≤ h ise geçersizdir. Eğilmeden önce düzlem olan kesitler eğilmeden de sonra düzlem kalırlar prensibi geçerlidir.





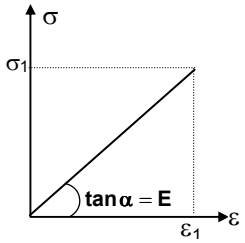




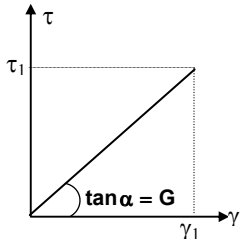


2. Bazı elastik cisimlerin belirli yük sınırları altında gerilme-şekil değiştirme bağıntıları lineer olarak değiştiğini belirten **HOOKE** kanunları geçerlidir (Robert Hooke, 1660).

Normal gerilme hali $\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}$

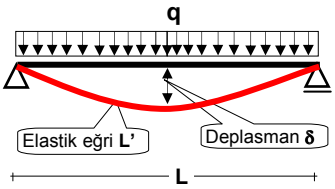


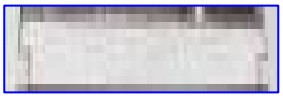
Kayma gerilmesi $\tau_1 = G\gamma_1$

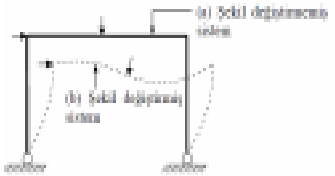


3. Elemanların boyca uzama-kısalma durumlarının hesaba katılmadığı birinci mertebe teorisi geçerlidir. Yani şekil değiştirmeler elamanın boyutları yanında oldukça küçükse denge denklemlerinde şekil değiştirmemiş boyutlar kullanılır. İkinci mertebe teorisi kullanılmamaktadır.

$$\delta = \frac{5}{384}\left[\frac{ql^4}{EI}\right]$$



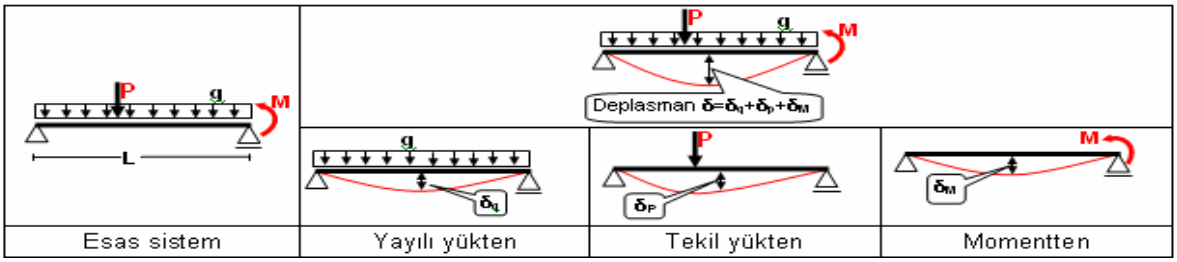


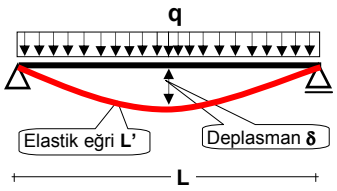


Bu elemanda yazılacak denge denklemlerin kiriş açıklığı şekil değiştirmeden sonraki **L'** olmasına karşın **L** açıklığı kullanılmasıdır.

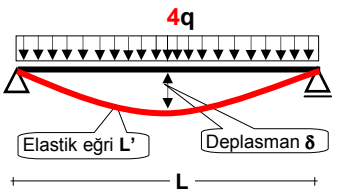
4. Yukarıda verilen 2. ve 3. maddelerin geçerli olması halinde süperpozisyon kuralları geçerlidir. Eğer bir sistemin bir noktasındaki kesit tesirleri ve şekil değiştirmeler sistem üzerindeki yüklerin her biri için bulunan değerlerin işaretleri ile toplamına eşittir. Aşağıdaki örnekte kirişin orta noktasındaki deplasman için yapılan süperpozisyon görülmektedir.

5. Hook kanunun geçerli olmasından dolayı elemanlar lineer elastik olduğu için sistemdeki şekil değiştirme üzerindeki yüke bağlıdır. Yani kuvvetler ve şekil değiştirmeler orantılıdır. Bu durum aşağıdaki örnekte açıklanmaktadır. **[Örnek q= 2 t/m L=10 m EI= 10080 tm^2]**





$$\delta = \frac{5}{384}\left[\frac{ql^4}{EI}\right] = \frac{5}{384}\left[\frac{2\times10^4}{10080}\right] = 0.0258\,m$$



$$\delta = \frac{4\times5}{384}\left[\frac{ql^4}{EI}\right] = \frac{5}{96}\left[\frac{ql^4}{EI}\right] = 0.1032$$

1.6. ELASTİK ŞEKİL DEĞİŞTİRMELER

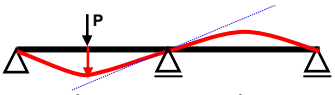
Sistemler kendi ağırlıklarından, üzerine uygulanan yüklerden ve servis süresince karşılaşabilecekleri yüklemelerden (ısı, rüzgar ve deprem gibi) dolayı şekil değiştirirler. Bu şekil değiştirmeler;

1. **Sınır koşulları:** mesnetlerde deplasmanın sıfır olması, ankastre mesnet dönmezken sabit ve kayıcı mesnetlerde dönmenin olması
2. **Uygunluk koşulları:** aşağıdaki simetrik sistemin kendi ağırlığından dolayı açıklıklarda teğet eğimlerinin sıfır olması, mesnetin sağı ve solundaki teğet eğimlerinin eşit ve ters işaretli olması, uygulanan her bir kuvvetin şekil değiştirmiş durumda etki etmesi,

Olarak hesaplarda dikkate alınır.



Kendi ağırlığından şekil değiştirme



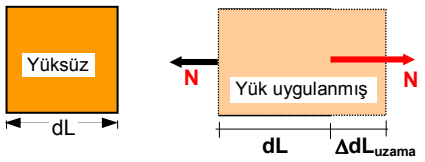
Tekil yükten şekil değiştirme

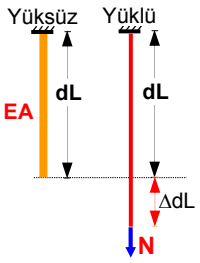
Sistemlerde şekil değiştirmeler en genel haliyle Eksenel kuvvetten, momentten ve kesme kuvvetinden dolayı veya bunların karışımından oluşur. İncelenen sistemlerde şekil değiştirmelerin bilinmesi,

1. Hiperstatik sistemlerin çözümünde gerekli olan ilave denklemlerin elde edilmesinde
2. Rijitlik oranının belirlenmesinde
3. 2. mertebe ektilerin kontrolünde

Hesap hassasiyetini ve çözümü kolaylaştırmaktadır. Aşağıda şekil değiştirmeler herbir durum için ayrı ayrı hesaplanmaktadır.

1. Eksenel kuvvetten dolayı oluşan şekil değiştirmeler **EA=** Eksenel Rijitlik

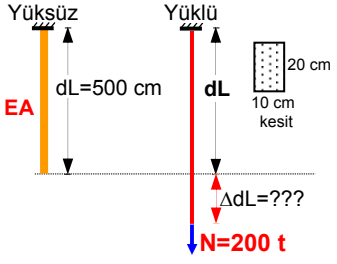




$$\varepsilon = \frac{\Delta dl}{dl} \qquad \Delta dl = \varepsilon . dl = \frac{\sigma}{E} dl = \frac{N}{EA} dl$$

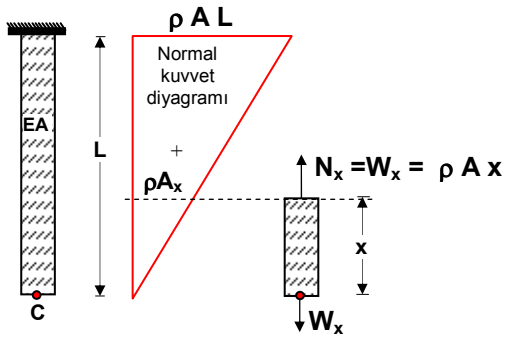
ÖRNEK 1.10: Verilen çubuktaki birim uzamayı ve gerilmeyi hesaplayınız. **(E=3.10^5 kg/cm^2, N=200 t)**

$$\varepsilon = \frac{\Delta dl}{dl} \qquad \Delta dl = \varepsilon . dl = \frac{\sigma}{E} dl = \frac{N}{EA} dl \qquad \Delta dl = \frac{2.10^5}{3.10^5.(20x10)} 500 = 1.667\,cm$$



$$\varepsilon = \frac{\Delta dl}{dl} = \frac{1.667}{500} = 0.00333 \qquad \sigma = \frac{N}{A} = \varepsilon . E = 0.00333\,x\,300.000 = 1000\,kg/cm^2$$

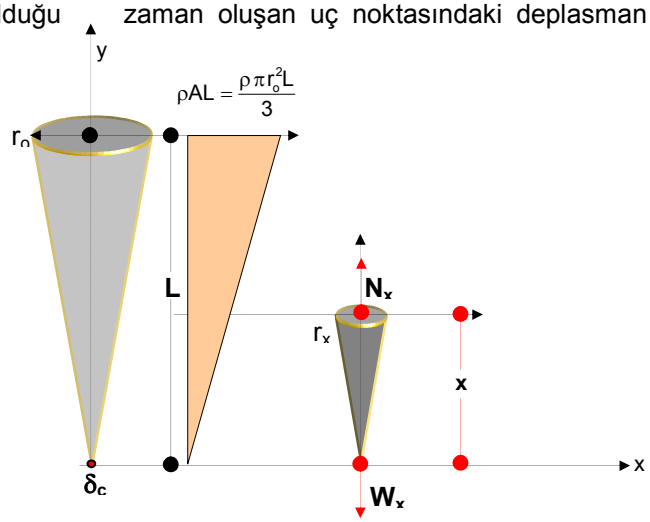
ÖRNEK 1.11: Kendi ağırlığından dolayı uç noktasındaki deplasman δ_C=? (ρ: özgül ağırlık A: alan)



Küçük **x** boyundaki uzama, **x** boyundaki normal kuvvet alanının eksenel rijitliğe bölünmesi sonucu,

$$d\delta = \frac{NL}{EA} = \frac{N_x}{EA_x}dx = \frac{\rho A_x x}{EA_x}dx \qquad \delta_C = \int_0^L d\delta = \int_0^L \frac{\rho A_x x}{EA_x}dx = \int_0^L \frac{\rho x}{E}dx = \left[\frac{\rho x^2}{2E}\right]_0^L = \frac{\rho L^2}{2E}$$

olarak bulunur. Kısaca çubuğun ucundaki deplasman eksenel kuvvet alanın **EA'**ya bölümüdür. Şekil koni olduğu zaman oluşan uç noktasındaki deplasman ise aşağıdaki şekilde hesaplanır.



Koninin kesit yarıçapı ile boyu arasındaki bezerlik yazılır.

$$\frac{r_x}{x} = \frac{r_o}{L} \qquad r_x = \frac{x r_o}{L}$$

[r_x: kesilen x boyundaki parçacığı kesitin yarıçapı]

Kesilen x boyundaki parçacığın hacmi $V = \frac{\pi x r_x^2}{3} = \frac{\pi x^3 r_o^2}{3L^2}$

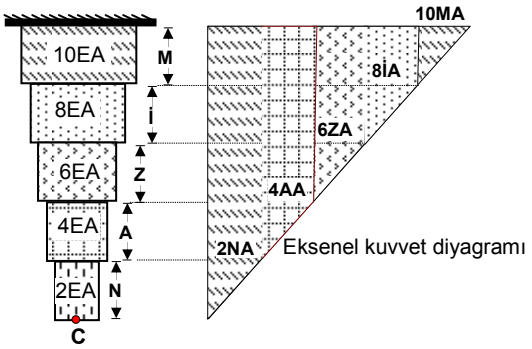
Kesilen x boyundaki parçacığın kütlesi $W = \frac{\rho \pi x^3 r_o^2}{3L^2}$

Kesilen x boyundaki parçacığın kesit alanı $A = \pi r_x^2 = \frac{\pi r_o^2 x^2}{L^2}$

Çubuk boyunca ağırlığından dolayı oluşan deplasman ise aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\delta = \int_0^L \frac{W}{EA}dx = \int_0^L \frac{\frac{\rho \pi r_o^2}{3L^2}x^3}{E\frac{\pi r_o^2}{L^2}x^2}dx = \frac{\rho}{3E}\int_0^L x dx = \frac{\rho L^2}{6E}$$

ÖRNEK 1.12: Kademeli düşey çubuğun kendi ağırlığından dolayı uç noktasındaki δ_C=? (ρ: özgül ağırlık olup bütün çubuklarda eşittir.)



$$\delta_1 = \frac{PN}{EA} = \frac{NN2A\rho}{22EA} = \frac{N^2\rho}{2E}$$

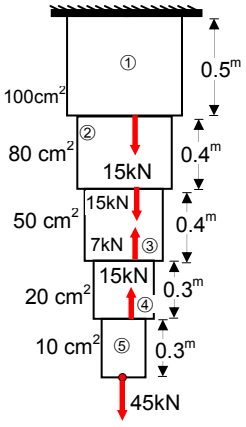
$$\delta_2 = \rho\left(\frac{NA}{2E} + \frac{N^2}{2E}\right)$$

$$\delta_3 = \rho\left(\frac{NZ}{3E} + \frac{2AZ}{3E} + \frac{Z^2}{2E}\right)$$

$$\delta_4 = \rho\left(\frac{N\dot{I}}{4E} + \frac{A\dot{I}}{2E} + \frac{3Z\dot{I}}{4E} + \frac{\dot{I}^2}{2E}\right) \qquad \delta_5 = \rho\left(\frac{NM}{5E} + \frac{2MA}{5E} + \frac{3MZ}{5E} + \frac{4M\dot{I}}{5E} + \frac{M^2}{2E}\right)$$

TOPLAM UÇ NOKTASI DEPLASMANI, **M=İ=Z=A=N=L** $\delta_C = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 = \frac{29L^2\rho}{4E}$ olarak bulunur.

ÖRNEK 1.13: Kademeli düşey çubuğun uç noktasındaki δ_C=?. (E=2.10^3 kg/ cm^2 ve kendi ağırlığı ihmal)



$$\delta_1 = \frac{PL}{EA} = \frac{(15+15-7-15+45)10^3 \,x\, 50}{100\,x\,2.10^5} = 0.1325\,cm$$

$$\delta_2 = \frac{PL}{EA} = \frac{(15-7-15+45)10^3\,x\,40}{80\,x\,2.10^5} = 0.095\,cm$$

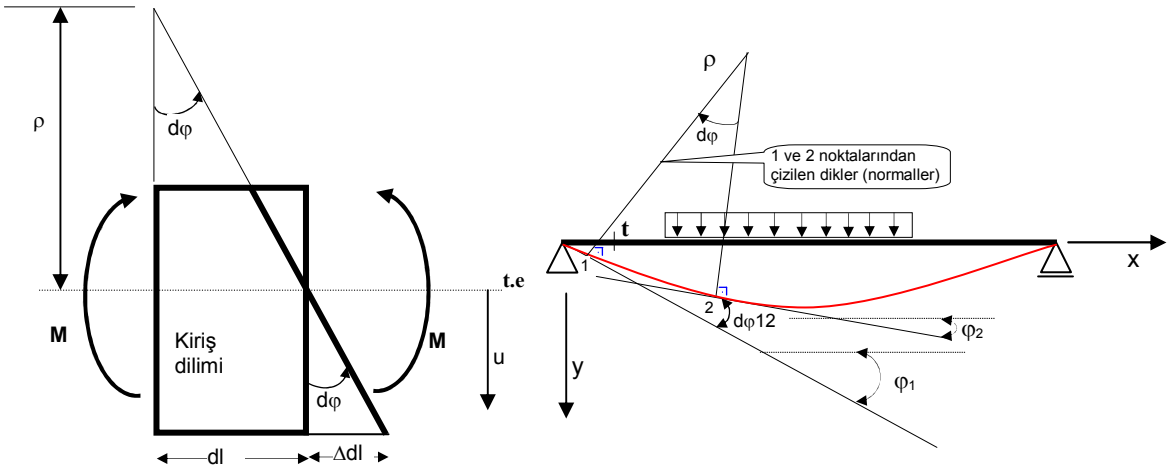
$$\delta_3 = \frac{PL}{EA} = \frac{(-7-15+45)10^3\,x\,40}{50\,x\,2.10^5} = 0.092\,cm$$

$$\delta_4 = \frac{PL}{EA} = \frac{(-15+45)10^3\,x\,30}{20\,x\,2.10^5} = 0.225\,cm$$

$$\delta_5 = \frac{PL}{EA} = \frac{(45)10^3\,x\,30}{20\,x\,2.10^5} = 0.675\,cm$$

$$\delta_C = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5 = 0.1325 + 0.095 + 0.092 + 0.225 + 0.675 = 1.22\,cm$$

2. Eğilme momentinden dolayı oluşan şekil değiştirme



$$d\varphi=\frac{dl}{\rho} \qquad \frac{1}{\rho}=\frac{d\varphi}{dl} \qquad \varepsilon=\frac{\Delta dl}{dl}=\frac{u\,d\varphi}{dl}=\frac{u}{\rho}$$

$$M=\int[(\sigma\,dA)_{kuvvet}\,u]_{moment}=\int E\frac{u}{\rho}u\,dA=\frac{E}{\rho}[\int u^2\,dA]_{Atalet\ Momenti}=\frac{EI}{\rho}=\frac{EI\,d\varphi}{dl} \quad \text{ise} \quad d\varphi=\frac{M}{EI}dl$$

φ_t= eksen dönüş açısı, bu açı çok küçük olduğundan radyan değeri eğimine eşit alınabilir.

$$\varphi_t\cong y' \qquad \frac{d\varphi}{dl}=\frac{M}{EI} \qquad EI\frac{d\varphi}{dl}=M \qquad y''=\frac{d^2y}{dl}=\frac{d\varphi}{dl}=-\frac{M}{EI}$$

[elastik eğrinin diferansiyel denklemi]

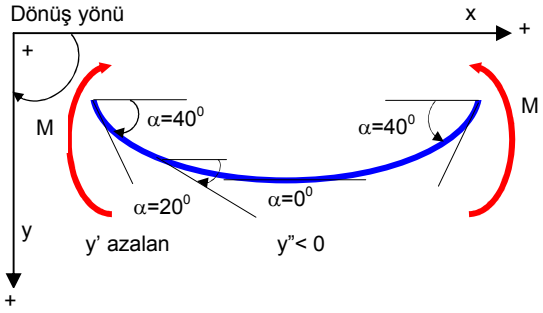
$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{M}{EI} \qquad \frac{d^2M}{dx^2}=-q$$

y : deplasman (elastik eğri)

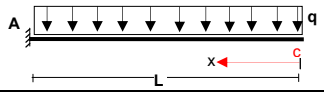
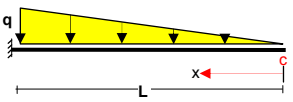
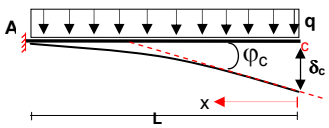
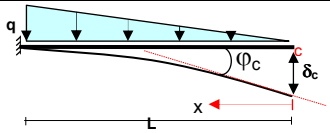
y' :dönüş açısı **y'' = –M / EI :moment**

$y''' = -V / EI$ **Kesme**

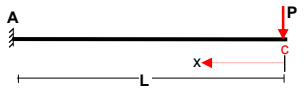
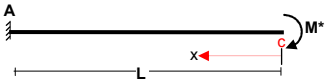
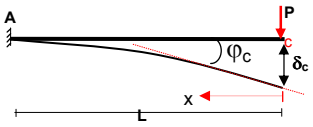
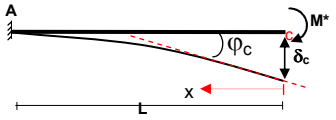
y^{IV} = q / EI yük (kesmenin türevi – yüke eşit olduğu için – işareti + olur)



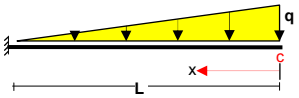
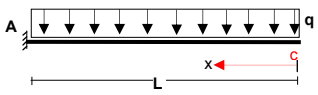
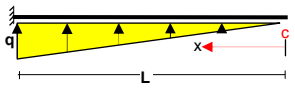
Uygulama: Tabloda verilen konsol kirişlerin uç deplasman ve dönüş açılarının hesabı

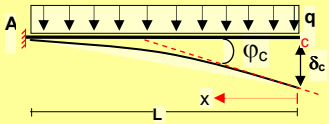
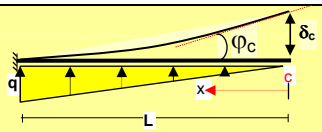
Konsol kiriş	**Yayılı yük**	**Üçgen yayılı yük**
		
Moment	$M_x=\frac{qx^2}{2}$	$M_x=\frac{qx^3}{6L}$
M. D. denklemi	$y''=-\frac{M}{EI}=-\frac{qx^2}{2EI}$	$y''=-\frac{M}{EI}=-\frac{qx^3}{6LEI}$
Dönüş	$y'=-\frac{qx^3}{6EI}+C_1 \quad [x=L \quad y'=0\Rightarrow C_1=\frac{qL^3}{6EI}$ $y'=-\frac{qx^3}{6EI}+\frac{qL^3}{6EI}$	$y'=-\frac{M}{EI}=-\frac{qx^4}{24LEI}+C_1 \quad x=L'de \quad y'=0\Rightarrow C_1=\frac{qL^3}{24EI}$ $y'=-\frac{qx^4}{24LEI}+\frac{qL^3}{24EI}$
E. Eğri	$y=-\frac{qx^4}{24EI}+\frac{qL^3x}{6EI}+C_2 \quad [x=L \quad y=0\Rightarrow C_2=-\frac{qL^4}{8EI}$ $y=-\frac{qx^4}{24EI}+\frac{qL^3x}{6EI}-\frac{qL^4}{8EI}$	$y=-\frac{qx^5}{120LEI}+\frac{qL^3x}{24EI}+C_2 \quad x=L \quad y=0 \quad C_2=-\frac{qL^4}{30EI}$ $y=-\frac{qx^5}{120LEI}+\frac{qL^3x}{24EI}-\frac{qL^4}{30EI}$
		
x=0	$\varphi_c^{x=0}=\frac{qL^3}{6EI} \qquad \delta_c^{x=0}=-\frac{qL^4}{8EI}$	$\varphi_c^{x=0}=\frac{qL^3}{24EI} \qquad \delta_c^{x=0}=-\frac{qL^4}{30EI}$

Uygulama: Tabloda verilen konsol kirişlerin uç deplasman ve dönüş açılarının hesabı

Konsol kiriş	**Tekil yük**	**Moment**
		
Moment	$M_x = Px$	$M_x = M^*$
M. D. denklemi	$y'' = -\frac{M}{EI} = -\frac{Px}{EI}$	$y'' = -\frac{M}{EI} = -\frac{M^*}{EI}$
Dönüş	$y' = -\frac{M}{EI} = -\frac{Px^2}{2EI} + C_1 \quad x = L'\text{de} \quad y' = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{PL^2}{2EI}$ $y' = -\frac{Px^2}{2EI} + \frac{PL^2}{2EI}$	$y' = -\frac{M}{EI} = -\frac{M^* x}{EI} + C_1 \quad x = L'\text{de} \quad y' = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{M^* L}{EI}$ $y' = -\frac{M^* x}{EI} + \frac{M^* L}{EI}$
E. Eğri	$y = -\frac{Px^3}{6EI} + \frac{PL^2 x}{2EI} + C_2 \qquad x = L \quad y = 0 \quad C_2 = -\frac{PL^3}{3EI}$ $y = -\frac{Px^3}{6EI} + \frac{PL^2 x}{2EI} - \frac{PL^3}{3EI}$	$y = -\frac{M^* x^2}{2EI} + \frac{M^* Lx}{EI} + C_2 \qquad x = L \quad y = 0 \quad C_2 = -\frac{M^* L^2}{2EI}$ $y = -\frac{M^* x^2}{2EI} + \frac{M^* Lx}{EI} - \frac{M^* L^2}{2EI}$
		
x=0	$\overset{x=0}{\varphi_c} = \frac{PL^3}{2EI} \qquad \overset{x=0}{\delta_c} = -\frac{PL^3}{3EI}$	$\overset{x=0}{\varphi_c} = \frac{M^* L}{EI} \qquad \overset{x=0}{\delta_c} = -\frac{M^* L^2}{2EI}$

Uygulama: Tabloda verilen konsol kirişlerin uç deplasman ve dönüş açılarının hesabı

Konsol kiriş	**Yayılı yük**	**Üçgen yayılı yük**
		
Bazı sistemlerin momentleri uzun olmasından dolayı süperpozisyon yöntemini kullanmak daha kısa yoldan çözüme ulaştırabilir. (3. bölümde Mohr yöntemi ile hesaplandı)		
		
Moment	$M_x = \frac{qx^2}{2}$	$M_x = -\frac{qx^3}{6L}$
M. D. denklemi	$y'' = -\frac{M}{EI} = -\frac{qx^2}{2EI}$	$y'' = -\frac{M}{EI} = \frac{qx^3}{6LEI}$
Dönüş	$y' = -\frac{qx^3}{6EI} + C_1 \quad [x = L \quad y' = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{qL^3}{6EI}$ $y' = -\frac{qx^3}{6EI} + \frac{qL^3}{6EI}$	$y' = -\frac{M}{EI} = \frac{qx^4}{24LEI} + C_1 \quad x = L'\text{de} \quad y' = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{qL^3}{24EI}$ $y' = \frac{qx^4}{24LEI} - \frac{qL^3}{24EI}$
E. Eğri	$y = -\frac{qx^4}{24EI} + \frac{qL^3 x}{6EI} + C_2 \quad [x = L \quad y = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{qL^4}{8EI}$ $y = -\frac{qx^4}{24EI} + \frac{qL^3 x}{6EI} - \frac{qL^4}{8EI}$	$y = \frac{qx^5}{120LEI} - \frac{qL^3 x}{24EI} + C_2 \qquad x = L \quad y = 0 \quad C_2 = \frac{qL^4}{30EI}$ $y = \frac{qx^5}{120LEI} - \frac{qL^3 x}{24EI} + \frac{qL^4}{30EI}$

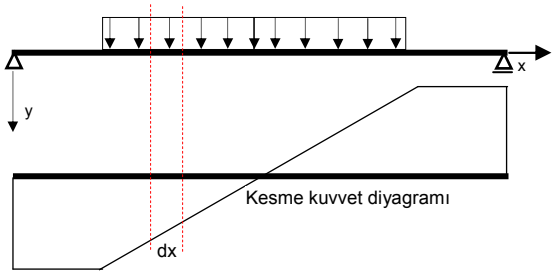
		
x=0	$\overset{x=0}{\varphi_c}=\frac{qL^4}{6EI}$ $\overset{x=0}{\delta_c}=-\frac{qL^4}{8EI}$	$\overset{x=0}{\varphi_c}=-\frac{qL^3}{24EI}$ $\overset{x=0}{\delta_c}=\frac{qL^4}{30EI}$
Toplam	Toplam dönüş $\overset{x=0}{\varphi_c}=\frac{qL^3}{6EI}-\frac{qL^3}{24EI}=\frac{qL^3}{8EI}$	Toplam deplasman $\overset{x=0}{\delta_c}=-\frac{qL^4}{8EI}+\frac{qL^4}{30EI}=-\frac{11qL^4}{120EI}$

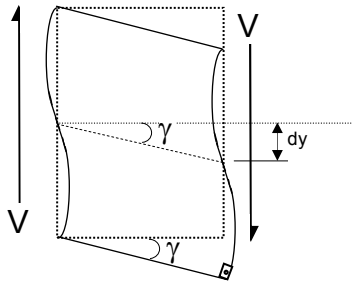


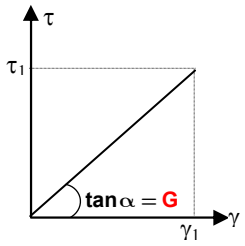


2. Kesme kuvvetinden dolayı oluşan şekil değiştirme

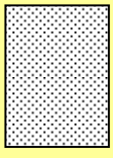
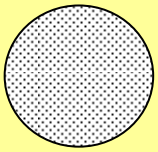
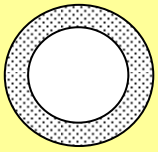
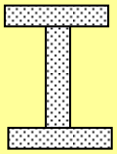
Kesme kuvvetini maruz bir kirişte aralarında dx kadar mesafe bulunan iki nokta kesme kuvveti doğrultusunda birbirine göre dy kadar bir yer değiştirme yaparlar. Bu aşağıda açıklanmaktadır.







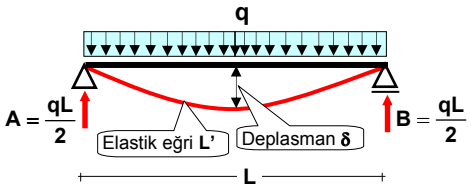
γ << 1 olmasından dolayı **tan$\gamma \cong \gamma$** alınabilir. (χ: kesitin geometrisine bağlı katsayı olup aşağıdaki tabloda bazı kesitler için verilmiştir.)

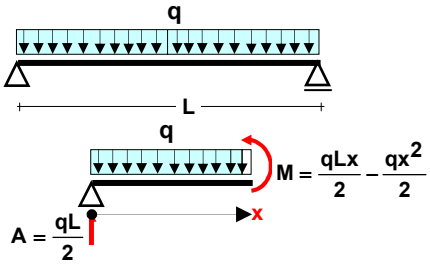
KESİT	DİKDÖRTGEN	DAİRE	HALKA	I PROFİLİ
				
χ	1.20	1.185	2.00	2.52 (NP 8)

$$\gamma=\frac{dy}{dx}=\frac{\tau}{G}=\left[\frac{1}{G}\left(\frac{V}{A}\right)\right]=\frac{\chi V}{GA} \qquad dy=\frac{\chi V}{GA}dx$$

ÖRNEK 1.14: Şekilde yükleme durumu ve özellikleri verilen **(EI= sabit)** kirişin;

a) **A** ve **B** mesnetlerindeki dönüş açılarının
b) Kirişin ortasındaki deplasmanın
c) Elastik eğri denkleminin bulunması.





Elastik eğrinin diferansiyel denklemi; $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$ $\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \frac{1}{EI}\left[\frac{qx^2}{2} - \frac{qLx}{2}\right]$ 1

Bu denklemin 1 defa integrali alınırsa, $y' = \frac{1}{EI}\left[\frac{qx^3}{6} - \frac{qLx^2}{4}\right] + C_1$ 2

olur. Buradaki C_1 sabiti **x** değişkeni yerine eğimin sıfır olduğu **x=L/2** sınır şartı yazılarak aşağıdaki şekilde bulunur.

$$x = \frac{L}{2} \text{ ise } C_1 = \frac{1}{EI}\left[\frac{qL^3}{24}\right]$$

C_1 sabiti **y'** denkleminde yerine yazılır ise; $y' = \frac{1}{EI}\left[\frac{qx^3}{6} - \frac{qLx^2}{4} + \frac{qL^3}{24}\right]$ 3

Bu denklemde **x** değişkeni istenilen noktanın değeri verilerek o noktanın eğimi bulunur. Örneğin **A** mesnedindeki eğimini bulmak için **x=0** verilirse,

$x = 0$ ise $\theta_A = \theta_B = \frac{1}{EI}\left[\frac{qL^3}{24}\right]$ olarak bulunur. (a nin cevabı)

3 denkleminin 1 defa daha integrali alınarak ise,

$$y = \frac{1}{EI}\left[\frac{qx^4}{24} - \frac{qLx^3}{12} + \frac{qL^3x}{24}\right] + C_2 \quad \text{.....4}$$

Buradaki C_2 sabiti ise deplasmanın sıfır olduğu **x= 0** veya **x=L** sınır şartları verilerek bulunarak ($x = 0$ veya $x = L$ ise $C_2 = 0$) yerine yazılır ise elastik eğri denklemi bulunur.

a) Elastik eğri denklemi; $y = \frac{1}{EI}\left[\frac{qx^4}{24} - \frac{qLx^3}{12} + \frac{qL^3x}{24}\right]$ 5

y':dönüş açısı $y'' = -M/EI$:moment $y''' = -V/EI$ Kesme $y^{IV} = q/EI$ yük İSE

$y = \frac{1}{EI}\left[\frac{qx^4}{24} - \frac{qLx^3}{12} + \frac{qL^3x}{24}\right]$ $y' = \frac{1}{EI}\left[\frac{qx^3}{6} - \frac{qLx^2}{4} + \frac{qLx^2}{8}\right]$ $y'' = \frac{1}{EI}\left[\frac{qx^2}{2} - \frac{qLx}{2} + \frac{qLx}{4}\right]$ $y''' = \frac{1}{EI}\left[qx - \frac{qL}{2} + \frac{qL}{4}\right]$ $y^{IV} = \frac{1}{EI}[q]$

b) Kirişin orta noktasındaki deplasman;

$$x = \frac{L}{2} \quad \text{ise} \quad f = \frac{1}{EI}\left[\frac{q(L/2)^4}{24} - \frac{qL(L/2)^3}{12} + \frac{qL^3(L/2)}{24}\right] = \frac{5}{384}\left[\frac{qL^4}{EI}\right]$$ olarak bulunur.

Uygulama: şekilde verilen kirişin elastik eğri denkleminin elde edilmesi (EI= sabit).



Çözüm: Sistemin hiperstatik olmasından dolayı x mesafesindeki moment ifadesi yazılamadığından bilinen en kesin sınır şartı yük ifadesi kullanılarak çözüm yapılmıştır.

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}=-q$$

$$EI\frac{d^3y}{dx^3}=-qx+C_1$$

Elastik eğrinin diferansiyel denklemi; $EI\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{qx^2}{2}+C_1x+C_2$

$$EI\frac{dy}{dx}=-\frac{qx^3}{6}+\frac{C_1x^2}{2}+C_2x+C_3 \qquad \boxed{1}$$

$$EIy=-\frac{qx^4}{24}+\frac{C_1x^3}{6}+\frac{C_2x^2}{2}+C_3x+C_4 \qquad \boxed{2}$$

Ankastre mesnette $x=0$'da Dönüş $=0$ olduğundan $EI\frac{dy}{dx}=-\frac{qx^3}{6}+\frac{C_1x^2}{2}+C_2x+C_3$ $\boxed{C_3=0}$

Ankastre mesnette $x=0$'da Deplasman $=0$ olduğundan $EIy=-\frac{qx^4}{24}+\frac{C_1x^3}{6}+\frac{C_2x^2}{2}+C_3x+C_4$ $\boxed{C_4=0}$

1 ve 2 denklemlerinde $C_3=0$ $C_4=0$ yazılırsa,

Dönüş $EI\frac{dy}{dx}=y'=-\frac{qx^3}{6}+\frac{C_1x^2}{2}+C_2x$ $\boxed{3}$

Deplasman $EIy=-\frac{qx^4}{24}+\frac{C_1x^3}{6}+\frac{C_2x^2}{2}$ $\boxed{4}$

$x=L$'da Dönüş $=0$ olduğundan $EI\frac{dy}{dx}=EIy'=-\frac{qL^3}{6}+\frac{C_1L^2}{2}+C_2L=0$

$x=L$'da Deplasman $=0$ olduğundan $EIy=-\frac{qL^4}{24}+\frac{C_1L^3}{6}+\frac{C_2L^2}{2}=0$

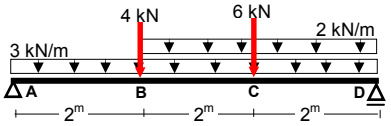
$\Rightarrow C_1=\frac{qL}{2}$ $C_2=-\frac{qL^2}{12}$

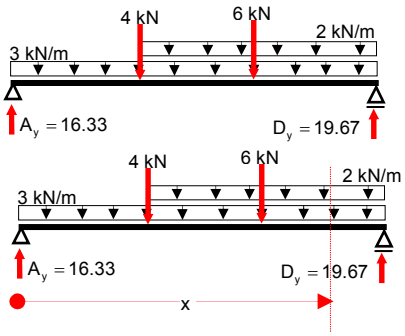
$C_1=\frac{qL}{2}$ $C_2=-\frac{qL^2}{12}$ $\boxed{4}$ nolu denklemde yazılırsa Elastik eğri $\boxed{EIy=-\frac{qx^4}{24}+\frac{qLx^3}{12}-\frac{qL^2x^2}{24}}$

$x=\frac{L}{2}\Rightarrow \boxed{EIy=-\frac{qx^4}{24}+\frac{qLx^3}{12}-\frac{qL^2x^2}{24}}$ $\boxed{y=\frac{qL^4}{384EI}}$

$x=L$ $\boxed{EIy'=-\frac{qx^3}{6}+\frac{qLx^2}{4}-\frac{qL^2x}{12}}$ $y'=0$ $x=\frac{L}{2}\Rightarrow \boxed{EIy'=-\frac{qx^3}{6}+\frac{qLx^2}{4}-\frac{qL^2x}{12}}$ $y'=0$

Örnek: Şekilde verilen kirişin elastik eğri denkleminin bulunması.





Çözüm: Verilen sistemin mesnet tepki kuvvetleri hesaplanır.
x mesafesindeki moment ifadesi;

$$y''=\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{M}{EI}=16.33x-\frac{3x^2}{2}-4\cdot(x-2)-\frac{2\cdot(x-2)^2}{2}-6\cdot(x-4)$$

$$y'=\frac{16.33x^2}{2}-\frac{3x^3}{6}-\frac{4\cdot(x-2)^2}{2}-\frac{2\cdot(x-2)^3}{6}-\frac{6\cdot(x-4)^2}{2}+C_1$$

$$y=\frac{16.33x^3}{6}-\frac{3x^4}{24}-\frac{4\cdot(x-2)^3}{6}-\frac{2\cdot(x-2)^4}{24}-\frac{6\cdot(x-4)^3}{6}+C_1x+C_2$$

x=0 ise C_2=0 olur. (Not: yukarıdaki y ifadesinde x başlangıcında tekil yüklerin ve 2 kN/m yayılı yükün etkisi olmadığı için terimlerini dikkate almıyoruz)

$$y=\frac{16.33x3}{6}-\frac{3x^4}{24}-\frac{4\cdot(x-2)^3}{6}-\frac{2\cdot(x-2)^4}{24}-\frac{6\cdot(x-4)^3}{6}+C_1x+C_2$$

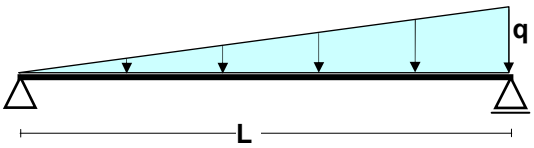
Yukarıdaki ifadeden x=L ise y=0'dan C_1=-58.98 olarak bulunur. Yukarıdaki y elastik eğri ifadesinde C_1=-58.98 ve x=6 m alındığında C_2=0 olduğu görülür.

Dönüş denklemi $$y'=\frac{16.33x^2}{2}-\frac{3x^3}{6}-\frac{4\cdot(x-2)^2}{2}-\frac{2\cdot(x-2)^3}{6}-\frac{6\cdot(x-4)^2}{2}-58.98$$

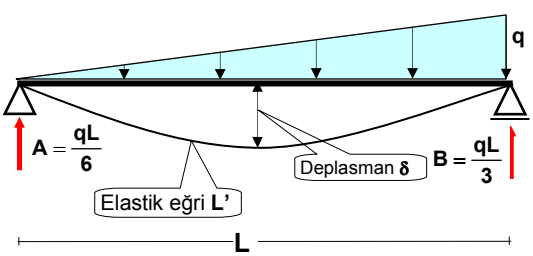
Elastik eğri denklemi $$y=\frac{16.33x3}{6}-\frac{3x^4}{24}-\frac{4\cdot(x-2)^3}{6}-\frac{2\cdot(x-2)^4}{24}-\frac{6\cdot(x-4)^3}{6}-58.98x$$

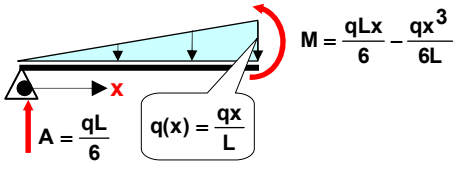
Maksimum deplasmanın yeri bulunmak istenirse muhtemelen 2 ile 4 m arasında bir noktadadır.

ÖRNEK 1.15: Şekilde yükleme durumu ve özellikleri verilen **(EI= sabit)** kirişin;



a) Elastik eğri denklemini **[y=?]**
b) Kirişin ortasındaki deplasmanı **[x=L/2 δ=?]**
c) **A** ve **B** mesnetlerindeki dönmeyi bulunuz. **[φ_A =? φ_B =?]**





Elastik eğrinin diferansiyel denklemi; $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{M}{EI}$ $\frac{d^2y}{dx^2}=y''=\frac{1}{EI}\left[\frac{qx^3}{6L}-\frac{qLx}{6}\right]$

Bu denklemin 1 defa integrali alınırsa,

$$y'=\frac{1}{EI}\left[\frac{qx^4}{24L}-\frac{qLx^2}{12}\right]+C_1 \qquad y=\frac{1}{EI}\left[\frac{qx^5}{120L}-\frac{qLx^3}{36}\right]+C_1x+C_2$$

buradan **x=0** dan $C_2=0$ ve **x=L** den C_1 bulunur.

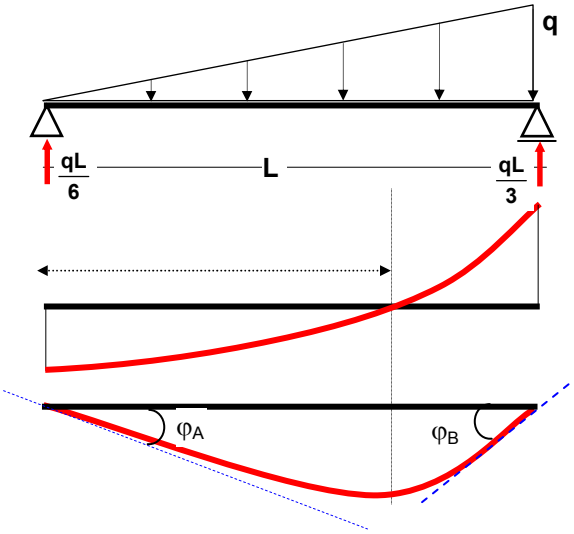
$$x=L \qquad 0=\frac{1}{EI}\left[\frac{qL^4}{120}-\frac{qL^4}{36}\right]+C_1L \qquad C_1=\frac{7qL^3}{360EI}$$

olur. Buna göre dönüş açısı denklemi aşağıdaki şekli alır. $y'=\frac{1}{EI}\left[\frac{qx^4}{24L}-\frac{qLx^2}{12}+\frac{7qL^3}{360}\right]$

Bu denklemde **x** değişkenine değer verilerek istenilen noktanın eğimi bulunur.

Örneğin A mesnedindeki eğimini bulmak için **x=0** verilirse,

$x=0$ ise $\theta_A=\frac{1}{EI}\left[\frac{7qL^3}{360}\right]$ $\theta_B=\frac{1}{EI}\left[\frac{8qL^3}{360}\right]$ olarak bulunur. (**c** nin cevabı)



Denkleminin 1 defa daha integrali ise,

$$y=\frac{1}{EI}\left[\frac{qx^5}{120L}-\frac{qLx^3}{36}+\frac{7qL^3x}{360}\right]+C_2$$

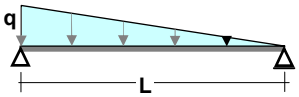
Buradaki C_2 sabiti ise deplasmanın sıfır olduğu **x=0** veya **x=L** sınır şartları verilerek bulunur ve **($x=0$ veya $x=L$ ise $C_2=0$)** yerine yazılır ise elastik eğri denklemi aşağıdaki gibi bulunur.

a) $$y=\frac{1}{EI}\left[\frac{qx^5}{120L}-\frac{qLx^3}{36}+\frac{7qL^3x}{360}\right]$$

b) Kirişin orta δ_{orta}=? $x=\frac{L}{2}$ ise $\delta_{ORTA}=\frac{1}{EI}\left[\frac{q(L/2)^5}{120L}-\frac{qL(L/2)^3}{36}+\frac{7qL^3(L/2)}{360}\right]=\frac{7}{3840}\left[\frac{ql^4}{EI}\right]$

olarak bulunur. Bu elastik eğri denkleminde istenilen noktadaki deplasmanı bulmak için **x** değişkenine o noktanın değeri verilerek bulunur.

ÖRNEK 1.15.1: Şekilde yükleme durumu ve özellikleri verilen **(EI= sabit)** kirişin;

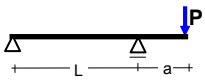


$$y' = \frac{qL^4}{360EI}\left[7 - 30\left[1-\frac{x}{l}\right]^2 + 15\left[1-\frac{x}{l}\right]^4\right]$$

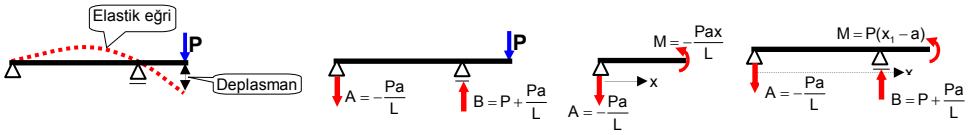
Elastik eğri denkleminin **[y=?]** olduğunu gösteriniz.

$$y = \frac{qL^4}{360EI}\left[7\left[1-\frac{x}{l}\right] - 10\left[1-\frac{x}{l}\right]^3 + 3\left[1-\frac{x}{l}\right]^5\right]$$

ÖRNEK 1.16: Şekilde verilen **(EI= sabit)** kirişin Elastik eğri denkleminin elde edilmesi



Kiriş 2 bölgeye ayrılır. **I**. Bölge **A-B**. Bu bölgede,



I. Bölgede elastik eğrinin diferansiyel denklemi; $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$

I. Bölge **II. Bölge**

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \frac{1}{EI}\left[\frac{Pax}{L}\right]. \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \frac{1}{EI}[P(a-x_1)] \text{.....1}$$

Bu denklemin 1 defa integrali alınırsa,

$$y' = \frac{1}{EI}\left[\frac{Pax^2}{2L}\right] + C_1 .. \qquad y' = \frac{1}{EI}\left[Pax_1 - \frac{Px_1^2}{2})\right] + C_{I-1} \text{.....2}$$

$$y = \frac{1}{EI}\left[\frac{Pax^3}{6L}\right] + C_1x + C_2 \qquad y = \frac{1}{EI}\left[\frac{Pax_1^2}{2} - \frac{Px_1^3}{6})\right] + C_{I-1}x_1 + C_{II-1} \text{.....3}$$

olur. Buradan C_1, $C_{1\text{-}1}$, $C_{II\text{-}1}$ ve $C_{II\text{-}1}$ sabitlerin belirlenmesi ise,

3. denklemden (**x=0** ve **x_1=0** da deplasmanın sıfır olduğu yazılarak)

C_2=0 ve **$C_{II\text{-}1}$=0**

$y = \frac{1}{EI}\left[\frac{Pax^3}{6L}\right] + C_1x + C_2$ denkleminde **x=L** de deplasmanın sıfır sınır şartından $C_1 = -\frac{PaL}{6}$ olur.

$C_{I\text{-}1}$ ise, B mesnedinin solundaki teğetin eğimi, B mesnedinin sağındaki teğetin eğimine eşit olması şartından,

$$y' = \frac{1}{EI}\left[\frac{Pax^2}{2L}\right] + C_1 \qquad y' = \frac{1}{EI}\left[Pax_1 - \frac{Px_1^2}{2})\right] + C_{I-1}$$

$x = L$ de $\quad \frac{1}{EI}\left[\frac{Pax^2}{2L}\right] + C_1 = \frac{1}{EI}\left[Pax_1 - \frac{Px_1^2}{2}\right] + C_{I-1} \qquad x_1 = 0$

C_1 değeri ve sınır şartları yerini yazılır ve iki denklem eşitlenir ise C_{I-1} bulunur.

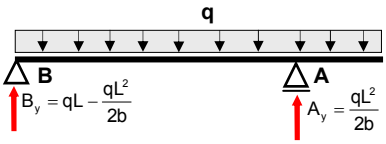
$\mathbf{C_{I-1} = \frac{1}{EI}\left[\frac{2PaL}{3}\right]}$ Sabitler yerine yazılarak I. ve II. bölge için elastik eğri denklemleri,

I. Bölge **II. Bölge**

Dönüş açısı $y' = \frac{1}{EI}\left[\frac{Pax^2}{2L}\right] + -\frac{PaL}{6}$ $\qquad y' = \frac{1}{EI}\left[Pax_1 - \frac{Px_1^2}{2}\right] + \frac{1}{EI}\left[\frac{2PaL}{3}\right]$

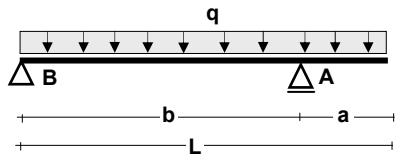
Deplasman $y = \frac{1}{EI}\left[\frac{Pax^3}{6L}\right] - \frac{PaLx}{6}$ $\qquad y = \frac{1}{EI}\left[\frac{Pax_1^2}{2} - \frac{Px_1^3}{6}\right] + \left[\frac{2PaLx_1}{3}\right]$

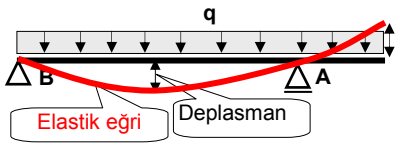
ÖRNEK 1.17: Şekildeki **(EI= sabit)** kirişin Elastik eğri denkleminin belirlenmesi.



$\mathbf{\Sigma M_B = 0 \quad q \times L \times L \times 0.5 - bA_y = 0}$

$A_y = \frac{qL^2}{2b} \qquad B_y = qL - \frac{qL^2}{2b}$





Sistemin şekil değiştirmiş hali

Kirişi 2 bölgeye ayırırız. **I**. Bölge **A-C**. Bu bölgede, **(0 < x < a)**

$M = -\frac{qx^2}{2} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \frac{1}{EI}\left[-\frac{qx^2}{2}\right] \qquad y'_{C-A} = \frac{1}{EI}\left[-\frac{qx^3}{6}\right] + C_1 \quad y_{C-A} = \frac{1}{EI}\left[-\frac{qx^4}{24}\right] + C_1x + C_2$

II. Bölge **A-B**. Bu bölgede, **(a < x < L)**

$M = -\frac{qx^2}{2} + \frac{qL^2}{2b}(x-a) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \frac{1}{EI}\left[-\frac{qx^2}{2} + \frac{qL^2}{2b}(x-a)\right]$

$y'_{A-B} = \frac{1}{EI}\left[-\frac{qx^3}{6} + \frac{qL^2}{2b}\left(\frac{(x-a)^2}{2}\right)\right] + C_3 \qquad y_{A-B} = \frac{1}{EI}\left[-\frac{qx^4}{24} + \frac{qL^2}{2b}\left(\frac{(x-a)^3}{6}\right)\right] + C_3x + C_4$

C_1, C_2, C_3, ve **C_4** sabitleri kirişi eğiminin ve deplasmanlarının sıfır ve eşit olması şartlarından yararlanarak bulunur. Sınır şartları aşağıdaki şekilde bulunur.

1. **x=a** ise deplasman sıfır olacağından $y = \frac{1}{EI}\left[-\frac{qx^4}{24}\right] + C_1x + C_2$

$0 = \frac{1}{EI}\left[-\frac{qa^4}{24}\right] + C_1a + C_2 \quad C_2 = -\frac{1}{EI}\left[-\frac{qa^4}{24}\right] + C_1a$

2. **x=L** ise deplasman sıfır olacağından

$$y=\frac{1}{EI}\left[-\frac{qx^4}{24}+\frac{qL^2}{2b}\left(\frac{(x-a)^3}{6}\right)\right]+C_3x+C_4 \qquad C_4=-\frac{1}{EI}\left[-\frac{qL^4}{24}+\frac{qL^2}{2b}\left(\frac{(L-a)^3}{6}\right)\right]+C_3L$$

3. **A** mesnedinin sağındaki ve solundaki dönüş açılarının eşit olması şartından **(x=a)**

$$y'_{C-A}=\frac{1}{EI}\left[-\frac{qx^3}{6}\right]+C_1=y'_{A-B}=\frac{1}{EI}\left[-\frac{qx^3}{6}+\frac{qL^2}{2b}\left(\frac{(x-a)^2}{2}\right)\right]+C_3$$

$$\frac{1}{EI}\left[-\frac{qx^3}{6}\right]+C_1=\frac{1}{EI}\left[-\frac{qx^3}{6}\right]+C_3 \quad \text{buradan} \qquad C_1=C_3$$

4. mesnetler arasındaki bölgede x=a da deplasman sıfır olma şartından

$$y_{A-B}=\frac{1}{EI}\left[-\frac{qx^4}{24}+\frac{qL^2}{2b}\left(\frac{(x-a)^3}{6}\right)\right]+C_3x+C_4 \qquad C_4=-\frac{1}{EI}\left[-\frac{qa^4}{24}+\frac{qL^2}{2b}\left(\frac{(a-a)^3}{6}\right)\right]+C_3a$$

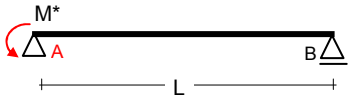
Bu şartların ortak çözümünden $C_1=C_3=\left[\frac{q(L^4-a^4)x}{24b}-\frac{qL^2bx}{12}\right]$ $C_2=C_4=\left[\frac{qa^4}{24}-\frac{q(L^4-a^4)a}{24b}+\frac{qL^2ba}{12}\right]$

I. Bölge **A-C**. Bu bölgede, **(0<x<a)** $y_{A-C}=\frac{1}{EI}\left[-\frac{qx^4}{24}+\frac{q(L^4-a^4)x}{24b}-\frac{qL^2bx}{12}+\frac{qa^4}{24}-\frac{q(L^4-a^4)a}{24b}+\frac{qL^2ba}{12}\right]$

II. Bölge **A-B**. Bu bölgede, **(a<x<L)**

$$y_{A-B}=\frac{1}{EI}\left[-\frac{qx^4}{24}+\frac{qL^2(x-a^3)}{12b}\frac{q(L^4-a^4)x}{24b}-\frac{qL^2bx}{12}+\frac{qa^4}{24}-\frac{q(L^4-a^4)a}{24b}+\frac{qL^2ba}{12}\right]$$

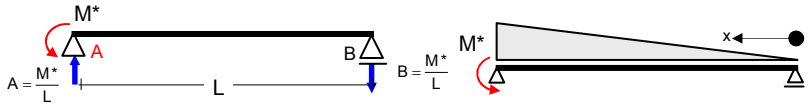
ÖRNEK 1.18: Şekilde yükleme durumu kirişinde,



a. $\varphi_A=?$ $\varphi_B=?$

b. Kirişin orta noktasındaki **[δ_{orta}=?]** deplasmanın belirlenmesi

Çözüm: Mesnet tepki kuvvetleri bulunarak moment alanı çizilir.



$$\frac{d^2y}{dx^2}=y''=-\frac{1}{EI}\left[\frac{M^*}{L}x\right] \qquad \text{.....1}$$

Bu denklemin 1 defa integrali alınırsa,

$$y'=-\frac{1}{EI}\left[\frac{M^*}{L}\frac{x^2}{2}\right]+C_1 \text{.....2}$$

$$y=-\frac{1}{EI}\left[\frac{M^*}{L}\frac{x^3}{6}\right]+C_1x+C_2 \text{.....3}$$

Sınır şartları **x=0** ise **y=0** buna göre $C_2=0$

x=L ise **y=0** buna göre $C_1 = -\dfrac{M*L}{6}$ olarak bulunur.

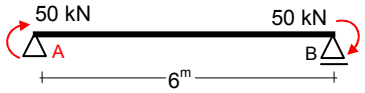
Buna göre dönüş açısı bağıntısı $y' = -\dfrac{1}{EI}\left[\dfrac{M*x^2}{2L} - \dfrac{M*L}{6}\right]$

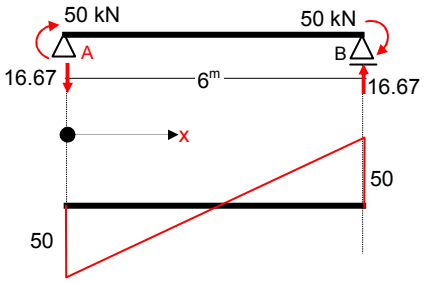
$$x = 0 \Rightarrow \varphi_A = \frac{M*L}{6EI} \qquad x = L \Rightarrow \varphi_B = \frac{M*L}{3EI}$$

Şekil değiştirme bağıntısı $y = -\dfrac{1}{EI}\left[\dfrac{M*x^3}{6L} - \dfrac{M*Lx}{6}\right]$

$$\mathbf{x = 0 \ \ ve \ \ x = 0 \Rightarrow \delta_A = \delta_B = 0} \qquad \mathbf{x = L/2 \ \Rightarrow \delta_{orta} = -\frac{M*L^2}{16EI}}$$

ÖRNEK: Şekilde verilen kirişin elastik eğri denklemini bulunuz.





Çözüm: Kirişin moment alanı çizilerek moment ifadesi yazılır.

$$M_x = 50 - \frac{100}{6}x = 50 - \frac{50}{3}x$$

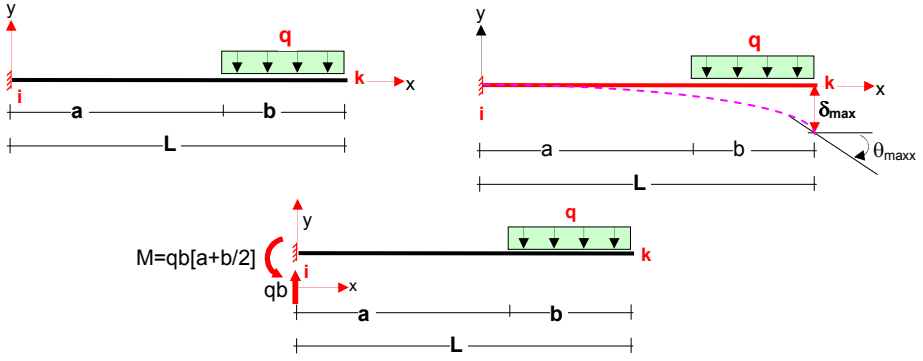
$$y'' = -\frac{M_x}{EI} = -\frac{1}{EI}\left[50 - \frac{50}{3}x\right] \qquad y' = -\frac{1}{EI}\left[50x - \frac{50x^2}{2x3} + C_1\right] \qquad y = -\frac{1}{EI}\left[\frac{50x^2}{2} - \frac{50x^3}{18} + C_1x + C_2\right]$$

Sınır şartları yazılarak sabitler, **x=0** ve **y=0** ise $C_2=0$ olur. **x=6** ise **y=0** dan $C_1=50$ olur.

Dönüş için $y' = -\dfrac{1}{EI}\left[50x - \dfrac{50x^2}{2x3} + 50\right]$ Elastik eğri denklemi $y = -\dfrac{1}{EI}\left[\dfrac{25x^3}{9} - \dfrac{50x^2}{2} + 50x\right]$

Bu denklemde hangi noktadaki deplasman veya dönüş isteniyorsa x yerine yazılarak aranan deplasman bulunur.

ÖRNEK: Şekilde verilen konsol kirişin elastik eğri denkleminin bulunması.



1. Bölge $0 \le x \le a$ $\quad M_1 = [qb[a+b/2]-qbx]$

$$y_1'' = -\frac{M}{EI} = \frac{1}{EI}[qbx - qb[a+b/2]]$$

$$y_1' = \frac{1}{EI}\left[\frac{qbx^2}{2} - qbax - \frac{qb^2x}{2} + C\right] \qquad x = 0\ [\text{dönüş} = 0]\ \text{ise}\ C = 0$$

$$y_1 = \frac{1}{EI}\left[\frac{qbx^3}{6} - \frac{qbax^2}{2} - \frac{qb^2x^3}{6} + D\right] \qquad x = 0\ [\text{deplasman} = 0]\ \text{ise}\ D = 0$$

2. Bölge $a \le x \le b$ $\quad M_2 = \left[qb[a+b/2]-qbx+qx^2/2\right]$

$$y_2'' = -\frac{M}{EI} = \frac{1}{EI}\left[qbx - qb[a+b/2] - qx^2/2\right]$$

$$y_2' = \frac{1}{EI}\left[\frac{qbx^2}{2} - qbax - \frac{qbx}{2} - \frac{qx^3}{6} + E\right] \qquad x = 0\ [\text{dönüş} = 0]\ \text{ise}\ E = 0$$

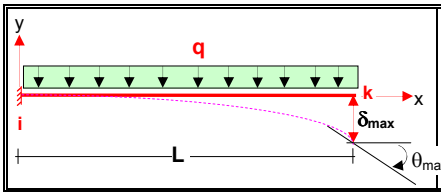
$$y_2 = \frac{1}{EI}\left[\frac{qbx^3}{6} - \frac{qbax^2}{2} - \frac{qb^2x^2}{4} - \frac{qx^4}{24} + Ex + F\right] \qquad x = 0\ [\text{deplasman} = 0]\ \text{ise}\ F = 0$$

$$y_2' = \frac{1}{EI}\left[\frac{qbx^2}{2} - qbax - \frac{qb^2x}{2} - \frac{qx^3}{6}\right] \qquad a = 0 \text{ ve } b = L \text{ ise } \theta_{max} = \frac{qL^3}{6EI}$$

Kiriş tam yüklü ise

$$y_2 = \frac{1}{EI}\left[\frac{qbx^3}{6} - \frac{qbax^2}{2} - \frac{qb^2x^2}{4} - \frac{qx^4}{24}\right] \qquad a = 0 \text{ ve } b = L \text{ ise } \delta_{max} = \frac{qL^3}{8EI}$$

Bulunan değerlerin aşağıda verilen tabloda bulunan değerler ile aynı olduğu görülmektedir.

	$\theta_k = -\frac{qL^3}{6EI}$ $\theta_k = 0$	$\delta_{max} = -\frac{qL^4}{8EI}$	$y = -\frac{Px^2}{24EI}[x^2 - 4Lx + 6L^2]$

1. ve 2. bölgelerdeki elastik eğri denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$y_1' = \frac{1}{EI}\left[\frac{qbx^2}{2} - qbax - \frac{qb^2x}{2}\right] \qquad y_2' = \frac{1}{EI}\left[\frac{qbx^2}{2} - qbax - \frac{qb^2x}{2} - \frac{qx^3}{6}\right]$$

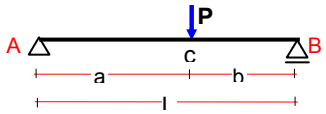
1. bölge

$$y_1 = \frac{1}{EI}\left[\frac{qbx^3}{6} - \frac{qbax^2}{2} - \frac{qb^2x^3}{6}\right]$$

2. bölge

$$y_2 = \frac{1}{EI}\left[\frac{qbx^3}{6} - \frac{qbax^2}{2} - \frac{qb^2x^2}{4} - \frac{qx^4}{24}\right]$$

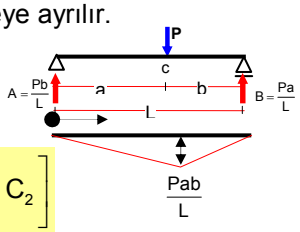
Örnek 1.18: Şekilde yükleme durumu kirişinde,



a. φ_A=? φ_B=?

b. Kirişin **c** noktasındaki **[δ_c=?]** deplasmanın belirlenmesi

Çözüm: Mesnet tepki kuvvetleri bulunarak moment alanı çizilir ve kiriş 2 bölgeye ayrılır.



1. Bölge $0 \le x \le a$ $\quad M_1 = \frac{Pb}{L}x$

$$y_1'' = -\frac{M}{EI} = \frac{1}{EI}\left[-\frac{Pb}{L}x\right] \qquad y_1' = \frac{1}{EI}\left[-\frac{Pbx^2}{2L} + C_1\right] \qquad y_1 = \frac{1}{EI}\left[-\frac{Pbx^3}{6L} + C_1x + C_2\right]$$

2. Bölge $a \le x \le L$ $\quad M_2 = \frac{Pb}{L}x - p[x-a]$ $\quad [b = (L-a) \text{ ise}]$ $\quad M_2 = Pa - \frac{Pax}{L}$

$$y_2'' = \frac{1}{EI}\left[\frac{Pax}{L} - Pa\right] \qquad y_2' = \frac{1}{EI}\left[\frac{Pax^2}{2L} - Pax + D_1\right] \qquad y_2 = \frac{1}{EI}\left[\frac{Pax^3}{6L} - \frac{Pax^2}{2} + D_1x + D_2\right]$$

Sabitlerin bulunması $x = 0$ ise $y = 0 \Rightarrow C_2 = 0$ $\qquad$ $x = L$ ise $y = 0 \Rightarrow \frac{PaL^2}{6} - \frac{PaL^2}{2} + D_1L + D_2$

A: 1. bölge için x=a daki çökme 2. bölge için x=b'deki çökmeye eşit

$$y_1[a] = y_2[b] \qquad \frac{PaL^2}{6} - \frac{PaL^2}{2} + D_1L + D_2 = -\frac{Pba^3}{6L} + C_1a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

B: 1. bölge için x=a daki dönüş 2. bölge için x=b'deki dönüşe eşit

$$y_1'[a] = y_2'[b] \qquad \frac{Pa^3}{2L} - Pa^2 + D_1 = -\frac{Pba^2}{2L} + C_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 2$$

1 ile **2**'nin ortak çözümünden, $\mathbf{C_2 = 0}$ $\quad \mathbf{C_1 = \frac{Pab}{6L}[2b + a]}$ $\quad \mathbf{D_1 = \frac{Pa}{6L}[2 + \frac{a^2}{L^2}]}$ $\quad \mathbf{D_2 = -\frac{Pa^3}{6}}$

Sabitler bulunduktan sonra her iki bölge için elastik eğri bağıntıları aşağıdaki şekilde olur.

$$0 \le x \le a \qquad y_1 = \frac{Pb}{6LEI}[-x^3 + ax[2b + a]] \qquad\qquad a \le x \le L \qquad y_2 = \frac{Pa}{6EI}\left[\frac{x^3}{6L} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6L}\left[2L^2 + a^2 - \frac{a^2}{6}\right]\right]$$

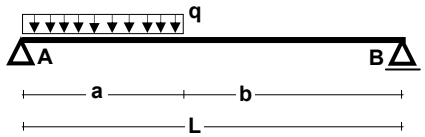
$$\delta_c = y_1[a] = \frac{Pb}{6LEI}[-x^3 + ax[2b + a]] = \frac{Pb}{6LEI}[-a^3 + aa[2b + a]] = \frac{Pa^2b^2}{3LEI}$$

$$\varphi_A = y_1'[0] = \frac{1}{EI}\left[-\frac{Pbx^2}{2L} + \frac{Pab}{6L}[2b + a]\right] = \frac{Pab}{6LEI}[2b + a]$$

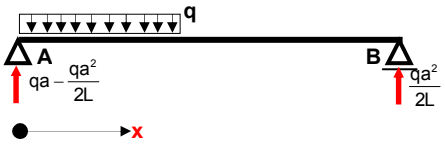
$$\varphi_B = y_2'[L] = \frac{1}{EI}\left[\frac{PaL^2}{2L} - PaL + \frac{Pa}{6L}[2 + \frac{a^2}{L^2}]\right] = \frac{1}{EI}\left[\frac{Pa^3}{6L^3} + \frac{Pa}{3L} - \frac{PaL}{2}\right]$$

$a = b = x = L/2$ ise $\varphi_B = \frac{1}{EI}\left[\frac{PL^2}{16}\right]$ $\qquad$ $a = b = x = L/2$ ise $\delta_c = \frac{PL^3}{48EI}$

ÖRNEK: Şekilde yüklemesi verilen kirişin elastik eğri denkleminin bulunması.



Çözüm: Kirişin önce mesnet tepki kuvvetleri hesaplanır ve bir **x** başlangıç noktası belirlenir.



Kiriş yük bulunan ve yüksüz kısım olmak üzere iki bölgeye ayrılır her bölge için denklemler ayrı ayrı elde edilir.

1. Bölge $0 \le x \le a$ $\quad M_1 = \left[qa - \frac{qa^2}{2L}\right]x - \frac{qx^2}{2}$

$$y_1'' = -\frac{M}{EI} = \frac{1}{EI}\left[\frac{qx^2}{2} - \left[qa - \frac{qa^2}{2L}\right]x\right] \qquad y_1' = \frac{1}{EI}\left[\frac{qx^3}{6} - \left[qa - \frac{qa^2}{2L}\right]\frac{x^2}{2} + C\right]$$

$$y_1 = \frac{1}{EI}\left[\frac{qx^4}{24} - \left[qa - \frac{qa^2}{2L}\right]\frac{x^3}{6} + Cx + D\right]$$

2. Bölge $a \le x \le L$ $\quad M_2 = \left[qa - \frac{qa^2}{2L}\right]x - qa\left[x - \frac{a}{2}\right] = \frac{qa^2}{2} - \frac{qa^2x}{2L}$

$$y_2'' = -\frac{1}{EI}\left[\frac{qa^2}{2} - \frac{qa^2x}{2L}\right] \qquad y_2' = \frac{1}{EI}\left[\frac{qa^2x^2}{4L} - \frac{qa^2x}{2} + E\right] \qquad y_2 = \frac{1}{EI}\left[\frac{qa^2x^3}{12L} - \frac{qa^2x^2}{4} + Ex + F\right]$$

Sabitlerin bulunması

$x = 0 \;\; y_1 = 0 \;\; D = 0$ $\quad$ $x = L \;\; y_2 = 0$ $\quad 0 = \frac{1}{EI}\left[\frac{qa^2L^3}{12L} - \frac{qa^2L^2}{4} + EL + F\right]$ $\quad EL + F = \frac{1}{EI}\left[\frac{qa^2L^2}{4} - \frac{qa^2L^2}{12}\right]$

$$EL + F = \frac{1}{EI}\left[\frac{qa^2L^2}{6}\right] \text{:::::::::::} 1$$

$x = a \quad y_1' = y_2'$ (Süreklilik denklemi) $\rightarrow\rightarrow\rightarrow \frac{1}{EI}\left(\frac{qa^4}{4L} + \frac{qa^3}{6} - \frac{qa^3}{2}\right) + C = \frac{1}{EI}\left(\frac{qa^4}{4L} - \frac{qa^3}{2}\right) + E$

$$C - E = -\frac{1}{EI}\left(\frac{qa^3}{6}\right) \text{.....} 2$$

$x = a \quad y_1 = y_2$ (Süreklilik denklemi)

$$\frac{1}{EI}\left(\frac{qa^4}{24} - \left[qa - \frac{qa^2}{2L}\right]\frac{a^3}{6}\right) + Ca = \frac{1}{EI}\left(\frac{qa^5}{12L} - \frac{qa^4}{4}\right) + Ea + F \qquad (C - E)a - F = -\left(\frac{qa^4}{8EI}\right) \text{.....} 3$$

$$(C-E)=-\frac{qa^3}{6EI} \qquad -\frac{qa^3}{6EI}-F=-\frac{qa^4}{8EI}\rightarrow\rightarrow\rightarrow\ F=-\frac{qa^4}{24EI}$$

$$EL+F=\frac{qa^2L^2}{6EI} \qquad EL-\frac{qa^4}{24EI}=\frac{qa^2L^2}{6EI}\rightarrow\rightarrow\ E=\frac{qa^4}{24EI}+\frac{qa^2L}{6EI}$$

$$(C-E)=-\frac{qa^3}{6EI} \qquad \left(C-(\frac{qa^4}{24EI}+\frac{qa^2L}{6EI})\right)=-\frac{qa^3}{6EI}>>>>>\ C=\frac{1}{EI}\left[\frac{qa^4}{24}+\frac{qa^2L}{6}-\frac{qa^3}{6}\right]$$

Bulunan sabitler yerine yazılırsa elastik eğri denklemi aşağıdaki şekilde elde edilmiş olur.

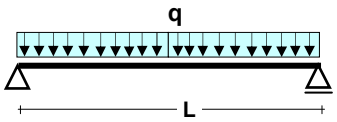
$$y_1=\frac{1}{EI}\left(\frac{qx^4}{24}-\left[qa-\frac{qa^2}{2L}\right]\frac{x^3}{6}+\left[\frac{qa^4}{24L}+\frac{qa^2L}{6}-\frac{qa^3}{6}\right]x\right)$$

$$y_2=\frac{1}{EI}\left(\frac{qa^2x^3}{12L}-\frac{qx^2a^2}{4}+\left[\frac{qa^2L}{6}+\frac{qa^4}{24L}\right]x-\frac{qa^4}{24}\right)$$

$x=0$ deplasman $=0$ $\qquad y_1=\frac{1}{EI}\left(\frac{qx^4}{24}-\left[qa-\frac{qa^2}{2L}\right]\frac{x^3}{6}+\left[\frac{qa^4}{24L}+\frac{qa^2L}{6}-\frac{qa^3}{6}\right]x\right)$

KONTROL

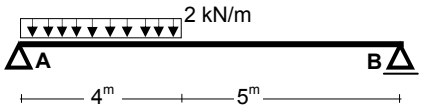
$a=L$ ise $\qquad y_1=\frac{1}{EI}\left(\frac{qx^4}{24}-\left[qL-\frac{qL^2}{2L}\right]\frac{x^3}{6}+\left[\frac{qL^4}{24L}+\frac{qL^2L}{6}-\frac{qL^3}{6}\right]x\right)$

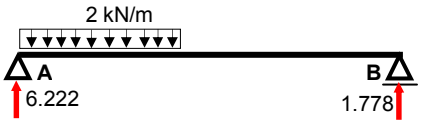


$$y_1=\frac{1}{EI}\left(\frac{qx^4}{24}-\frac{qx^3L}{12}+\frac{qxL^3}{24}\right)=\frac{qL^4}{24EI}\left(\frac{x^4}{L^4}-\frac{2x^3}{L^3}+\frac{x}{L}\right)$$

$$y=\frac{1}{EI}\left[\frac{qx^4}{24}-\frac{qLx^3}{12}+\frac{qL^3x}{24}\right]$$

ÖRNEK: Şekilde yüklemesi verilen kirişin elastik eğri denklemini ve x=4 m deki düşey deplasmanın hesaplanması. ($E=2.10^7$ kN/m^2 $I=1.10^{-5}$ m^4)

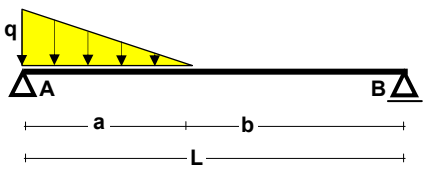


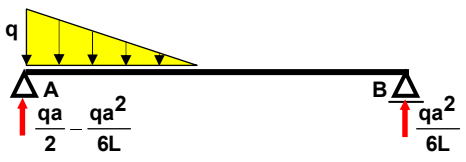


Çözüm: Verilen kirişin önce mesnet tepki kuvvetleri hesaplanır.

$$\mathbf{0\le x\le a}\quad y_1=\frac{1}{EI}\left(\frac{qx^4}{24}-\left[qa-\frac{qa^2}{2L}\right]\frac{x^3}{6}+\left[\frac{qa^4}{24L}+\frac{qa^2L}{6}-\frac{qa^3}{6}\right]x\right) \qquad x=4m\rightarrow\rightarrow y_1=\frac{71.111}{EI}=\frac{71.111}{2.10^7\ x1.10^{-5}}=0.356m$$

ÖRNEK: Şekilde yüklemesi verilen kirişin elastik eğri denkleminin bulunması.



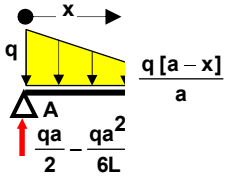


Çözüm: Sistemin mesnet tepki kuvvetleri ve sonra bir **x** başlangıç noktası alınarak şekil değiştirme hesaplanır. Kiriş yüklü ve yüksüz olan kısım olmak üzere iki bölgeye ayrılır.

$$0 \le x \le a \quad M_1 = \left[\frac{qa}{2} - \frac{qa^2}{6L}\right]x - \frac{q(a-x)}{a}\frac{x.x}{2} - \frac{qx}{a}\frac{x}{2}\frac{2x}{3} = \frac{qax}{2} - \frac{qa^2x}{6L} - \frac{qx^2}{2} + \frac{qx^3}{6a}$$

$$y_1'' = -\frac{M}{EI} = \frac{1}{EI}\left[-\frac{qax}{2} + \frac{qa^2x}{6L} + \frac{qx^2}{2} - \frac{qx^3}{6a}\right]$$

1.Bölge



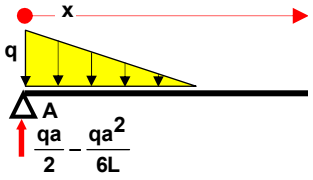
$$y_1' = \frac{1}{EI}\left[-\frac{qax^2}{4} + \frac{qa^2x^2}{12L} + \frac{qx^3}{6} - \frac{qx^4}{24a} + C\right]$$

$$y_1 = \frac{1}{EI}\left[-\frac{qax^3}{12} + \frac{qa^2x^3}{36L} + \frac{qx^4}{24} - \frac{qx^5}{120a} + Cx + D\right]$$

$$a \le x \le L \qquad M_2 = \left[\frac{qa}{2} - \frac{qa^2}{6L}\right]x - \frac{qa}{2}\left[x - \frac{a}{3}\right] = -\frac{qa^2x}{6L} + \frac{qa^2}{6}$$

$$y_2'' = \frac{1}{EI}\left[-\frac{qa^2x}{6L} + \frac{qa^2}{6}\right] = \frac{1}{EI}\left[\frac{qa^2x}{6L} - \frac{qa^2}{6}\right]$$

2. Bölge



$$y_2' = \frac{1}{EI}\left[\frac{qa^2x^2}{12L} - \frac{qa^2x}{6} + E\right]$$

$$y_2 = \frac{1}{EI}\left[\frac{qa^2x^3}{36L} - \frac{qa^2x^2}{12} + Ex + F\right]$$

Sabitlerin hesaplanması

$x = 0$'da $y_1 = 0$ $D = 0$ olur.

$x = L$'de $y_2 = 0$ $\frac{qa^2x^3}{36L} - \frac{qa^2x^2}{12} + EL + F = 0$ $EL + F = \frac{qa^2L^2}{18L}$ -------1

$x = a$'da $y_1 = y_2$ $-\frac{qax^3}{12} + \frac{qa^2x^3}{36L} + \frac{qx^4}{24} - \frac{qx^5}{120a} + Cx + [D=0] = \frac{qa^2x^3}{36L} - \frac{qa^2x^2}{12} + Ex + F$

$$[E - C]a + F = \frac{qa^4}{30} \text{--------2}$$

$x = a$'da $y_1' = y_2'$ $-\frac{qax^2}{4} + \frac{qa^2x^2}{12L} + \frac{qx^3}{6} - \frac{qx^4}{24a} + C = \frac{qa^2x^2}{12L} - \frac{qa^2x}{6} + E \Rightarrow\Rightarrow$ $[E - C] = \frac{qa^3}{24}$ --------3

Denklem 3, denklem 2'de yerine yazılarak gerekli işlemler yapılırsa,

$[E - C] = \frac{qa^3}{24}$ -----3 $[E - C]a + F = \frac{qa^4}{30}$ -----2 $\frac{qa^4}{24} + F = \frac{qa^4}{30}$ $F = -\frac{qa^4}{120}$

$F = -\frac{qa^4}{120}$ denklem 1'de yerine yazılırsa $EL - \frac{qa^4}{120} = \frac{qa^2L^2}{18}$ $E = \frac{qa^2L}{18} + \frac{qa^4}{120L}$

$E=\frac{qa^2L^2}{18}+\frac{qa^4}{120L}$ denklem 3'de yerine yazılırsa, $\frac{qa^2L^2}{18}+\frac{qa^4}{120}-C=\frac{qa^3}{24}$ $C=\frac{qa^2L^2}{18}+\frac{qa^4}{120L}-\frac{qa^3}{24}$

Dönüş $y_1'=\frac{1}{EI}\left[-\frac{qax^2}{4}+\frac{qa^2x^2}{12L}+\frac{qx^3}{6}-\frac{qx^4}{24a}+\frac{qa^2L^2}{18}+\frac{qa^4}{120}-\frac{qa^3}{24}\right]$

1.Bölge

Deplasman $y_1=\frac{1}{EI}\left[-\frac{qax^3}{12}+\frac{qa^2x^3}{36L}+\frac{qx^4}{24}-\frac{qx^5}{120a}+\frac{qa^2L^2x}{18}+\frac{qa^4x}{120}-\frac{qa^3x}{24}\right]$

Dönüş $y_2'=\frac{1}{EI}\left[\frac{qa^2x^2}{12L}-\frac{qa^2x}{6}+\frac{qa^2L^2}{18}+\frac{qa^4}{120}\right]$

2. Bölge

Deplasman $y_2=\frac{1}{EI}\left[\frac{qa^2x^3}{36L}-\frac{qa^2x^2}{12}+\frac{qa^2Lx}{18}+\frac{qa^4x}{120}-\frac{qa^4}{120}\right]$

KONTROL

$x=0$ $y_1=0$ olmalı $y_1=\frac{1}{EI}\left[-\frac{qax^3}{12}+\frac{qa^2x^3}{36L}+\frac{qx^4}{24}-\frac{qx^5}{120a}+\frac{qa^2Lx}{18}+\frac{qa^4x}{120L}-\frac{qa^3x}{24}\right]=0$

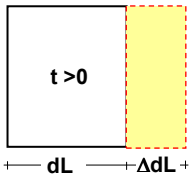
$a=L$ $x=a$ $y_B=0$ olmalı $y_B=\frac{1}{EI}\left[-\frac{qa^4}{12}+\frac{qa^5}{36L}+\frac{qa^4}{24}-\frac{qa^5}{120a}+\frac{qa^4}{18}+\frac{qa^5}{120a}-\frac{qa^4}{24}\right]=0$

$-\frac{qa^4}{12}+\frac{qa^4}{36L}+\frac{qa^4}{18}=0$ $\qquad 0=0$

3. Sıcaklık değişimi

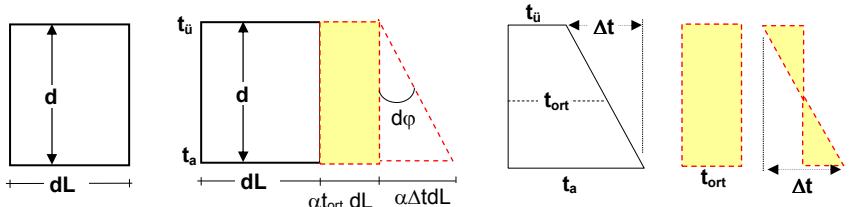
3.1. Eşit sıcaklık değişimi,

α: birim ısı değişimindeki birim boy değişimi



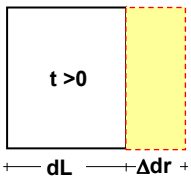
ΔdL= α . t . dl

3.2. Farklı ısı değişimi



Δt = t_a – $t_ü$ > 0 $\qquad$ **t_{ort} = (t_a + $t_ü$) /2** $\qquad d\varphi=\frac{\Delta dl}{d}=\frac{\alpha\,\Delta t\,dl}{d}$

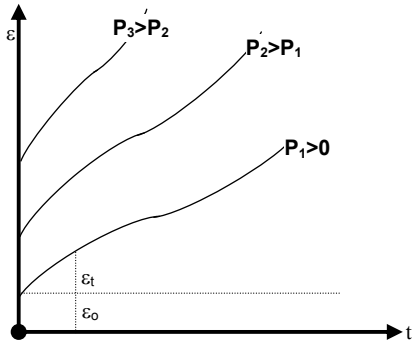
4. Rötreden dolayı oluşan şekil değiştirme

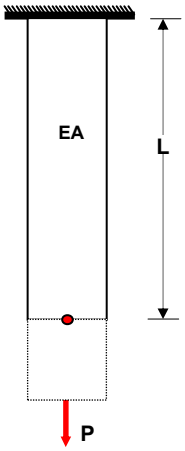


$\Delta d_r = \varepsilon_r$ dl

Yapı elemanlarında sıcaklık azalması gibi hesaplanabilen rötre, zamana bağlı olarak meydana gelen boy değişimidir. Malzemelerin rötre katsayısı (ε_r) deneysel olarak bulunmuş ve standartlarda verilmiştir. Betonun rötre katsayısı $\varepsilon_r = 6.10^{-4}$.,

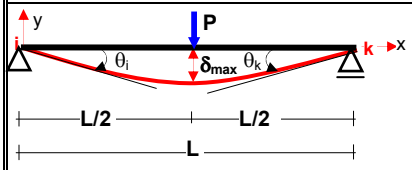
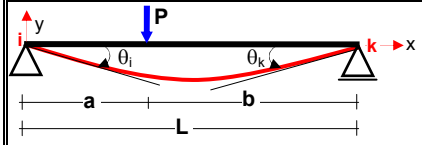
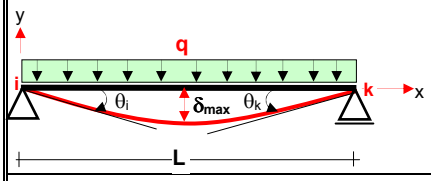
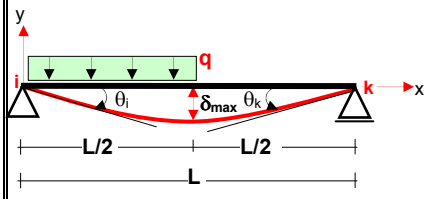
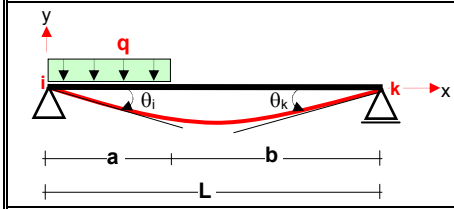
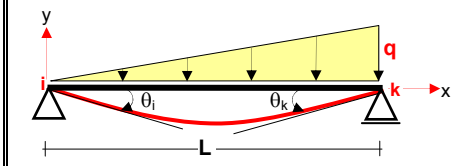
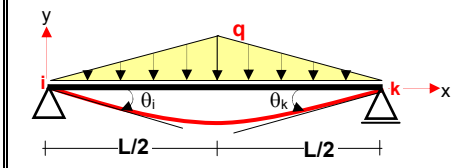
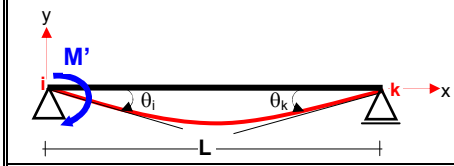
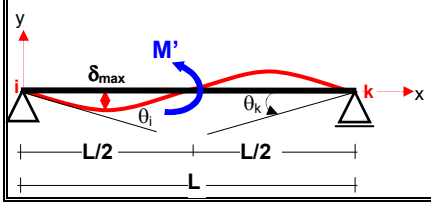
5. Sünmeden dolayı oluşan şekil değiştirme



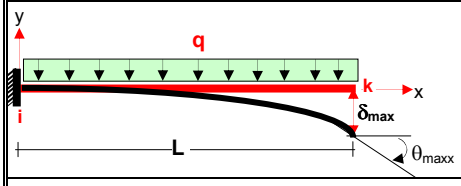
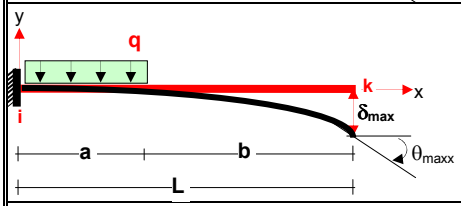
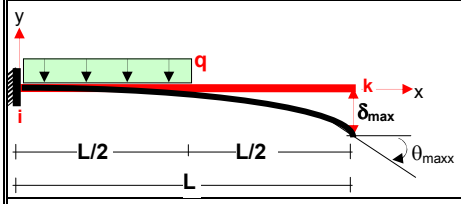
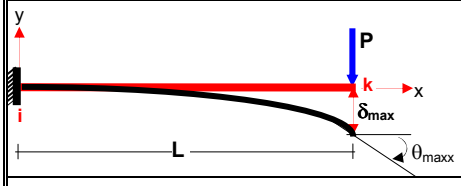
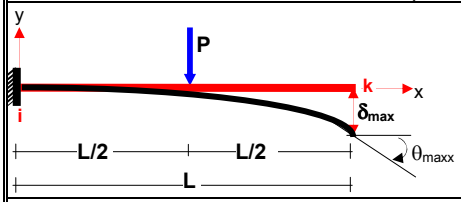
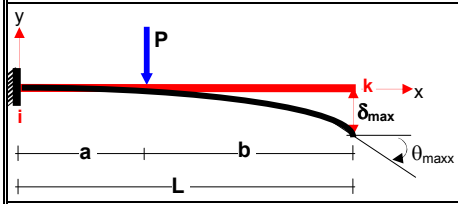
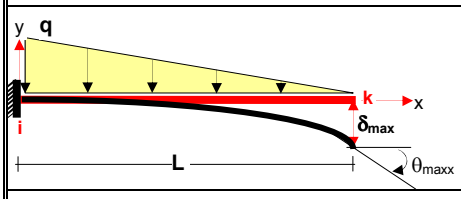
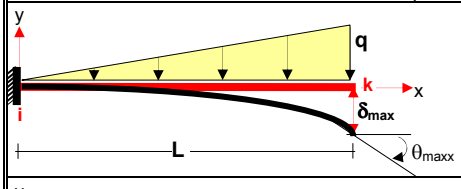
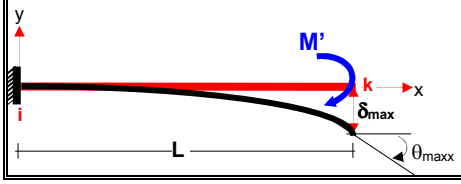


Yapı elemanları yükler altında uzun süre kaldığı için şekil değiştirmesinde etkili olan parametrelerden biriside süredir, yani zaman. Bu zaman içinde yapı elemanlarının boylarında meydana gelen artışa sünme denir. Sünme malzemenin yapısına bağlı olup deneylerle belirlenir. Yukarıdaki şeklin incelenmesinden de görülebileceği gibi yük arttıkça ilk sünme değeri (ε_o) artmakta ve sünme zamanı (0-t aralığı) azalmaktadır. Betonda normal hava şartlarında sünme olurken çelikte ise 300-400^oC derecede sünme olmaktadır.

Basit Kirişlerde Yükleme Durumlarına Göre Dönüş Açıları ve Deplasmanlar

Kirişin Yükleme Durumu	Eğim	Deplasman	Elastik Eğri Denklemi
	$\theta_i = -\frac{PL^2}{16EI}$ $\theta_k = \frac{PL^2}{16EI}$	$\delta_{max} = -\frac{PL^3}{48EI}$	$y = -\frac{PL^3}{48EI}[3L^2 - 4x^2]$
	$\theta_i = -\frac{Pab[L+b]}{16EIL}$ $\theta_k = \frac{Pab[L+a]}{16EIL}$	$\delta_a = -\frac{Pab}{6EIL}[L^2 - b^2$	$y = -\frac{PL^3}{6EIL}[L^2 - x^2 - b^2]$ $0 \le x \le a$
	$\theta_k = \theta_i = -\frac{qL^3}{24EI}$	$\delta_{max} = -\frac{5qL^4}{384EI}$	$y = -\frac{qx}{24EI}[x^3 - 2Lx^2 + L^3]$
	$\theta_i = -\frac{3qL^3}{128EI}$ $\theta_k = \frac{7qL^3}{384EI}$	$\delta_{max} = -\frac{6.563qL^4}{1000EI}$ $x = 0.4598L$	$y = \frac{-qx}{384EI}[16x^3 - 24Lx^2 + 9L^3]$ $0 \le x \le L/2$ $y = \frac{-qx}{384EI}[8x^3 - 24Lx^2 + 9L^2x - L^3$ $L/20 \le x \le L$
	$\theta_i = -\frac{qa^2[2L-a]^2}{24EIL}$ $\theta_i = -\frac{qa^2[2L^2 - a^2]}{24EIL}$		
	$\theta_i = -\frac{7qL^3}{360EI}$ $\theta_k = \frac{qL^3}{45EI}$	$\delta_{max} = \frac{0.00652qL^4}{EI}$ $[x = 0.5193]$	$y = \frac{qx}{360EI}[3x^3 - 10L^2x^2 + 7L^4]$
	$\theta_i = -\frac{5qL^3}{192EI}$ $\theta_k = \frac{5qL^3}{192EI}$	$\delta_{max} = -\frac{qL^4}{120EI}$	$y = \frac{qx}{EI}\left[-\frac{x^4}{15} + \frac{Lx^2}{6} - \frac{5L^3}{48}\right]$
	$\theta_i = -\frac{M'L}{3EI}$ $\theta_k = \frac{M'L}{6EI}$	$\delta_{max} = \frac{M'L^2}{\sqrt{243}EI}$	$y = \frac{M'L}{6EIL}[x^2 - 3Lx + 2L^2]$
	$\theta_i = -\frac{M'L^2}{36\sqrt{12}EI}$ $\theta_k = \frac{M'L^2}{36\sqrt{12}EI}$	$\delta_{max} = \frac{M'L}{24EI}$	$y = \frac{M'x}{24EIL}[4x^2 - L^2]$ $0 \le x \le L/2$

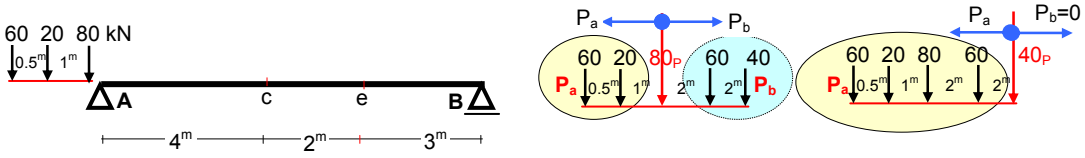
KONSOL Kirişlerde Yükleme Durumlarına Göre Dönüş Açıları ve Deplasmanlar

Kirişin Yükleme Durumu	Eğim	Deplasman	Elastik Eğri Denklemi
	$\theta_k = -\frac{qL^3}{6EI}$ $\theta_k = 0$	$\delta_{max} = -\frac{qL^4}{8EI}$	$y = -\frac{Px^2}{24EI}[x^2 - 4Lx + 6L^2]$
	$\theta_k = -\frac{qa^3}{6EI}$ $\theta_k = 0$	$\delta_{max} = -\frac{qa^3}{24EI}[4L - a]$	$y = -\frac{q}{24EI}[4ax^3 - 6a^2x^2 - x^4]$ $0 \le x \le a$ $y = -\frac{qa^3}{24EI}[a - 4x]$ $a \le x \le L$
	$\theta_k = -\frac{qL^3}{48EI}$ $\theta_k = 0$	$\delta_{max} = -\frac{7qL^4}{384EI}$	$y = -\frac{qx^2}{24EI}[x^2 - 2Lx + 1.5L^2]$ $0 \le x \le L/2$ $y = -\frac{qL^3}{192EI}[4x - 0.5L]$ $0 \le x \le L/2$
	$\theta_k = -\frac{PL^2}{2EI}$ $\theta_k = 0$	$\delta_{max} = -\frac{PL^3}{3EI}$	$y = -\frac{Px^2}{6EI}[3L - x]$
	$\theta_k = -\frac{PL^2}{8EI}$	$\delta_a = -\frac{5PL^3}{48EI}$	$y = -\frac{Px^2}{6EI}[1.5L - x] \quad 0 \le x \le L/2$ $y = -\frac{PL^2}{24EI}[3x - 0.5L] \quad L/2 \le x \le L$
	$\theta_k = -\frac{Pa^2}{2EI}$	$\delta_a = -\frac{Pa^2}{6EI}[3L - a]$	$y = -\frac{P}{6EI}[x^3 - 3ax^2] \quad 0 \le x \le L/2$ $y = -\frac{Pa^2}{6EI}[a - 3x] \quad a \le x \le L$
	$\theta_k = -\frac{qL^3}{24EI}\left[1 - \left[\frac{x}{L}\right]^4\right]$ $\theta_k = 0$	$\delta_{max} = -\frac{qL^4}{30EI}$	$y = -\frac{qx^2}{120EIL}[10L^3 - 10L^2x + 5Lx^2 - x^3]$
			
	$\theta_{max} = \frac{M'L}{EI}$	$\delta_{max} = \frac{M'L^2}{2EI}$	$y = \frac{Px^2}{6EI}[x - 3L]$

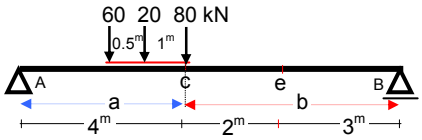
TESİR ÇİZGİSİ ÖRNEKLERİ

Yapı sistemlerinin maruz kaldığı temel yükler sabit ve hareketli yüklerdir. Sabit yükler için çözümler önceki konularda yapılmıştır. Hareketli yükler için çözümlerde ise yükün şiddeti kadar etkime noktası da önemlidir. Bilindiği üzere sabit bir kirişte yükün ortada ve kenarda olması şekil değiştirmeyi etkilediği gibi hareketli yükünde sistem üzerinde konumu sistemin davranışını etkiler. Özellikle hareketli yükün yoğun olduğu köprülerde bu etki daha büyüktür. Köprüler bu etkilere göre boyutlandırılır. İzostatik sistemlerin tesir çizgisi etkileri doğrusaldır. Hiperstatik sistemlerin tesir çizgileri etkisi ise eğrilerden oluşur. Burada izostatik sistemlerin tesir çizgilerine ait örnekler yapılmıştır.

Örnek: Verilen hareketli yük ve basit kiriş durumu için c ve e kesitlerindeki en büyük momenti oluşturacak yükleme durumunu ve bu durumlara ait moment değerlerinin hesaplanması.

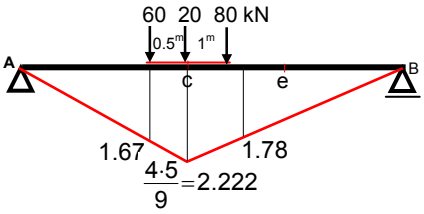


Çözüm: Bilindiği üzere c ve e kesitlerinde maksimum momentleri oluşturacak yükleme durumu hareketli yüklerden bir tanesinin kesitin tam üzerine gelmesiyle oluştuğu için bu hareketli yüklerden herhangi birisinin maksimum momenti aranan o kesite geleceği $P_c=?\Rightarrow \frac{R_a}{P+R_b}<\frac{a}{b}$ ve $\frac{R_b}{P+R_a}<\frac{b}{a}$ bağıntıları ile kontrol edilir. Bu bağıntıların her ikisinin birlikte sağlaması gerekir.



$$P_c=80\Rightarrow \frac{R_a}{P+R_b}<\frac{a}{b}\quad \frac{80}{80+0}<\frac{4}{5_{sağlamaz}}\qquad \frac{R_b}{P+R_a}<\frac{b}{a}\quad \frac{0}{80+80}<\frac{5}{4_{sağlar}}$$

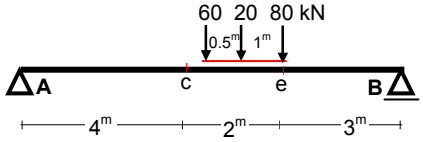
Yukarıdaki yükleme durumunda **e** kesitinde **P_c=80 kN** için bağıntılar sağlamadığından dolayı P değiştirilerek yeniden bir yükleme durumu aşağıdaki şekilde seçilmiştir.



$$P_c=20\Rightarrow \frac{R_a}{P+R_b}<\frac{a}{b}\quad \frac{60}{20+80}<\frac{4}{5_{sağlar}}\qquad \frac{R_b}{P+R_a}<\frac{b}{a}\quad \frac{80}{20+80}<\frac{5}{4_{sağlar}}$$

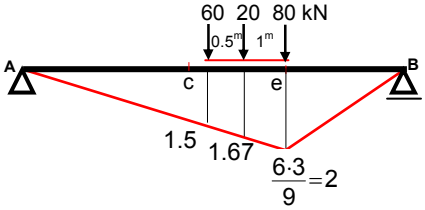
$$M_c=1.67\cdot 60+2.22\cdot 20+1.78\cdot 80=287.04\,kNm$$

e kesiti için maksimum momentin bulunması için **P_e=80 kN** alınarak aşağıdaki yükleme durumu elde edilerek gerekli kontroller yapılır.



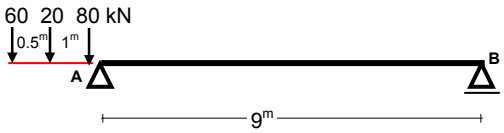
$$P_e=80\Rightarrow \frac{R_a}{P+R_b}<\frac{a}{b}\quad \frac{80}{80+0}<\frac{6}{3_{sağlar}}\qquad \frac{R_b}{P+R_a}<\frac{b}{a}\quad \frac{0}{80+80}<\frac{3}{6_{sağlar}}$$

Yukarıdaki yükleme durumunda **e** kesitinde **P_c=80 kN** için bağıntılar sağladığı görülmektedir. Bu duruma göre maksimum moment değeri hesaplanır.



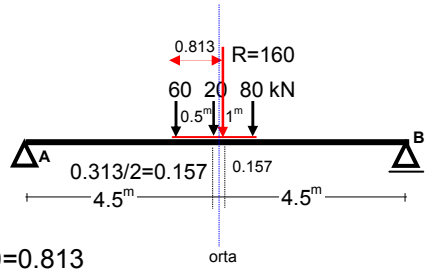
$$M_e=1.67\cdot 20+2\cdot 80+1.5\cdot 60=283.4\,kNm$$

Örnek: Şekilde verilen hareketli yük durumunun verilen kirişte oluşturabileceği maksimum yükleme durumunu ve yerini bulunuz.



Bileşke kuvvet ® ve etkime noktası bulunur.

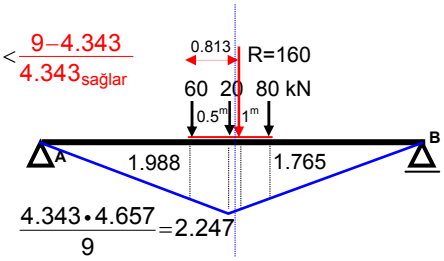




Bileşke kuvvetin c noktasına uzaklığı=[20x0.5+80x1.5]/160=0.813

Not: Bileşke R ile kabul edilen P kirişin tam ortasına getirilerek denklemler kontrol edilir.

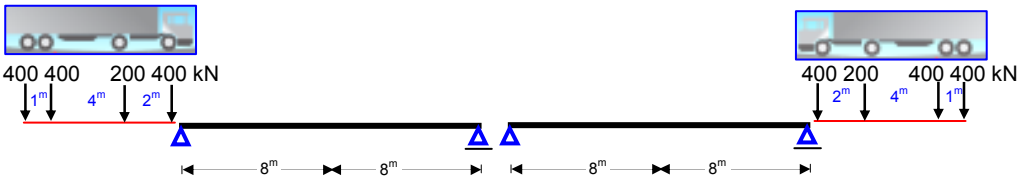
$$P_c = 20 \Rightarrow \frac{R_a}{P+R_b} < \frac{a}{b} \quad \frac{60}{20+80} < \frac{4.5-0.157=4.343}{9-4.343_{sağlar}} \qquad \frac{R_b}{P+R_a} < \frac{b}{a} \quad \frac{80}{20+80} < \frac{9-4.343}{4.343_{sağlar}}$$



$$\max M_{max} = 1.988 \cdot 60 + 2.247 \cdot 20 + 1.765 \cdot 80 = 305.42 kNm$$

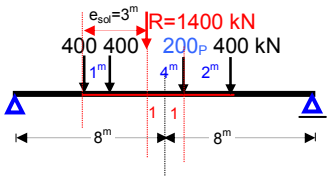
Not: Aynı kirişte bulunan c ve e kesitlerindeki moment $\max M_{max} = 305.42 kNm$ **moment değerinden daha küçüktür.**

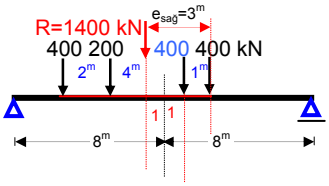
ÖRNEK: Verilen hareketli yüklerin sağdan ve soldan etkimeleri için **$\max M_{max}$** bulunması



Bileşke kuvvetin etkime noktası bulunur.

$$e_{sol} = [P_i \cdot x_i]/R_{bileşke} = [400 \cdot 1 + 200 \cdot 5 + 400 \cdot 7]/1400 = 3m \qquad e_{sağ} = [400 \cdot 1 + 200 \cdot 5 + 400 \cdot 7]/1400 = 3m$$



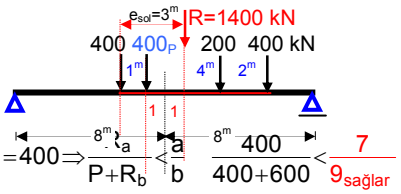


$$P_e=200 \Rightarrow \frac{R_a}{P+R_b}<\frac{a}{b} \quad \frac{800}{200+400}<\frac{9}{7_{\text{sağlamaz}}}$$

$$\frac{R_b}{P+R_a}<\frac{b}{a} \quad \frac{400}{200+800}<\frac{7}{9_{\text{sağlar}}}$$

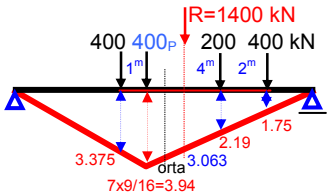
$$P_e=400 \Rightarrow \frac{R_a}{P+R_b}<\frac{a}{b} \quad \frac{400}{400+600}<\frac{7}{9_{\text{sağlar}}}$$

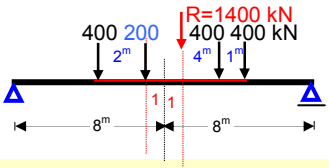
$$\frac{R_b}{P+R_a}<\frac{b}{a} \quad \frac{600}{400+400}<\frac{9}{7_{\text{sağlar}}}$$



$$P_e=400 \Rightarrow \frac{R_a}{P+R_b}<\frac{a}{b} \quad \frac{400}{400+600}<\frac{7}{9_{\text{sağlar}}}$$

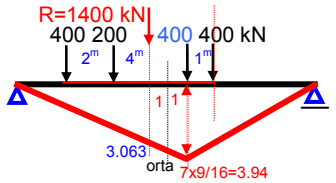
$$\frac{R_b}{P+R_a}<\frac{b}{a} \quad \frac{600}{400+400}<\frac{9}{7_{\text{sağlar}}}$$





$$P_e=200 \Rightarrow \frac{R_a}{P+R_b}<\frac{a}{b} \quad \frac{800}{200+400}<\frac{9}{7_{\text{sağlamaz}}}$$

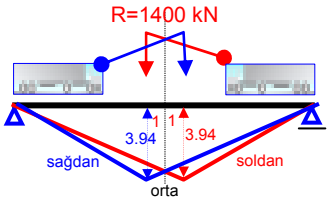
$$\frac{R_b}{P+R_a}<\frac{b}{a} \quad \frac{400}{200+800}<\frac{9}{7_{\text{sağlar}}}$$



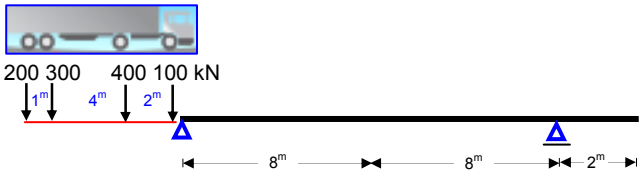
$$\text{max}M_{max}=(3.94+3.375+1.75)\cdot 400+2.19\cdot 200=4064 \text{ kNm}$$

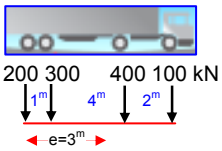
or

$$\text{max}M_{max}=3.063\cdot R_{\text{bileşke}}=3.063\cdot 1400=4288.2 \text{ kNm}$$

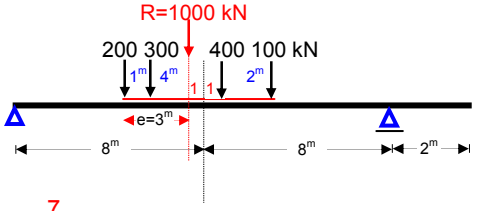


ÖRNEK: Verilen hareketli yüklerin sağdan ve soldan etkimeleri için **maxM_{max}** bulunması



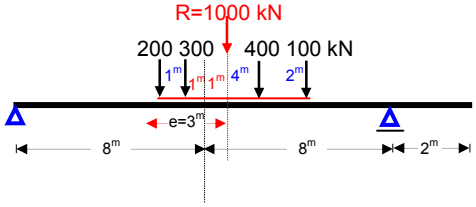


$$e=[P_i\cdot x_i]/R_{\text{bileşke}}=[300\cdot 1+400\cdot 5+100\cdot 7]/1000=3\text{m}$$

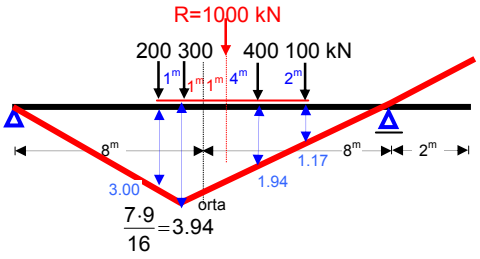


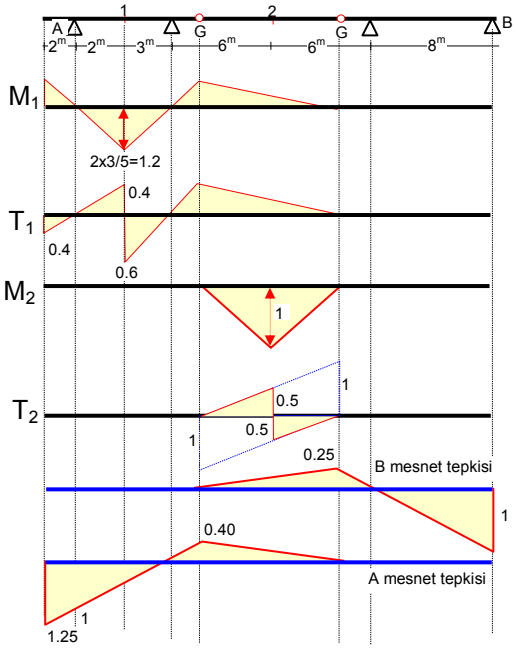
$$P_e=400 \Rightarrow \frac{R_a}{P+R_b}<\frac{a}{b} \quad \frac{500}{400+100}<\frac{9}{7_{\text{sağlar}}} \qquad \frac{R_b}{P+R_a}<\frac{b}{a} \quad \frac{100}{400+500}<\frac{7}{9_{\text{sağlar}}}$$

$$e=[P_i\cdot x_i]/R_{\text{bileşke}}=[300\cdot 1+400\cdot 5+100\cdot 7]/1000=3\text{m}$$

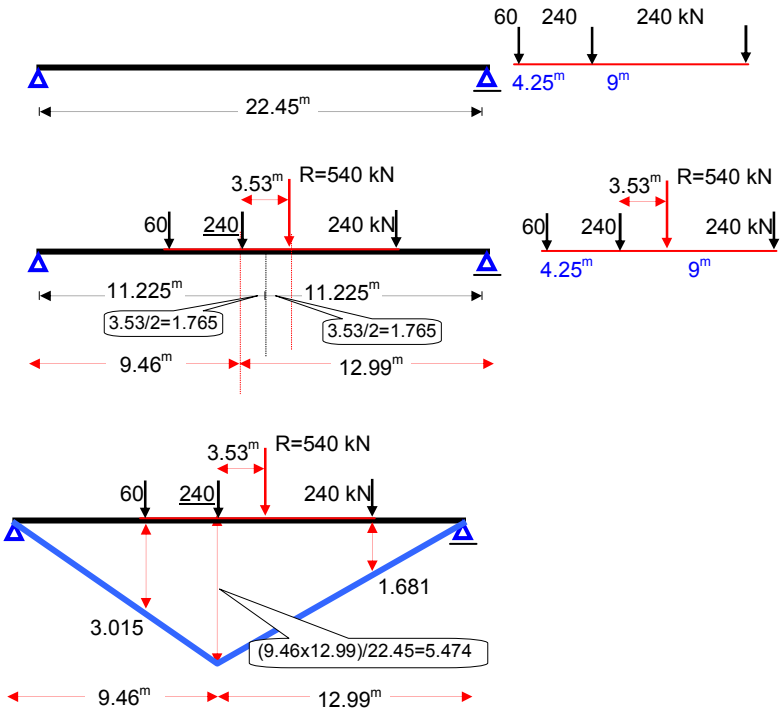


$$P_c = 300 \Rightarrow \frac{R_a}{P+R_b} < \frac{a}{b} \quad \frac{200}{300+500} < \frac{7}{9_{sağlar}} \qquad \frac{R_b}{P+R_a} < \frac{b}{a} \quad \frac{500}{300+200} < \frac{9}{7_{sağlar}}$$



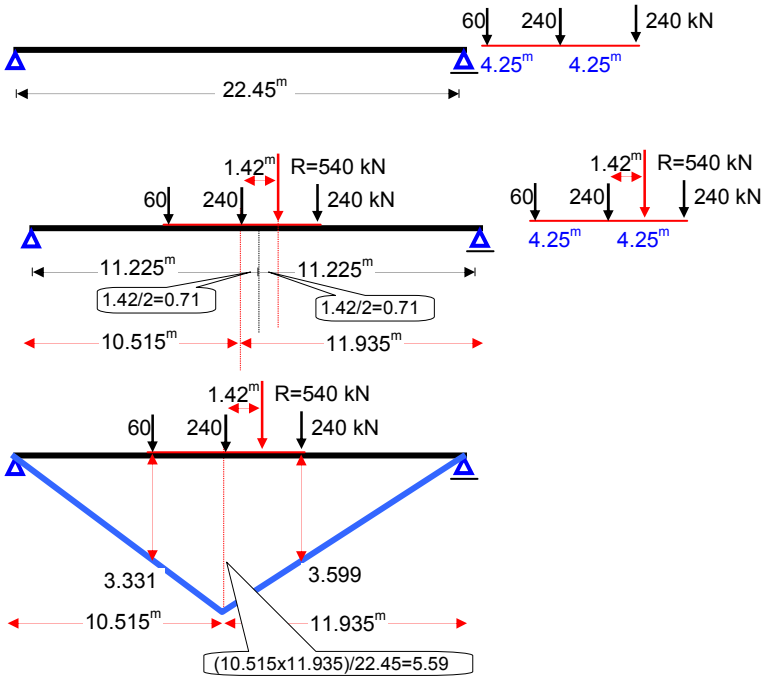


ÖRNEK: Verilen hareketli yüklerin sağdan ve soldan etkimeleri için **maxM_{max}** bulunması



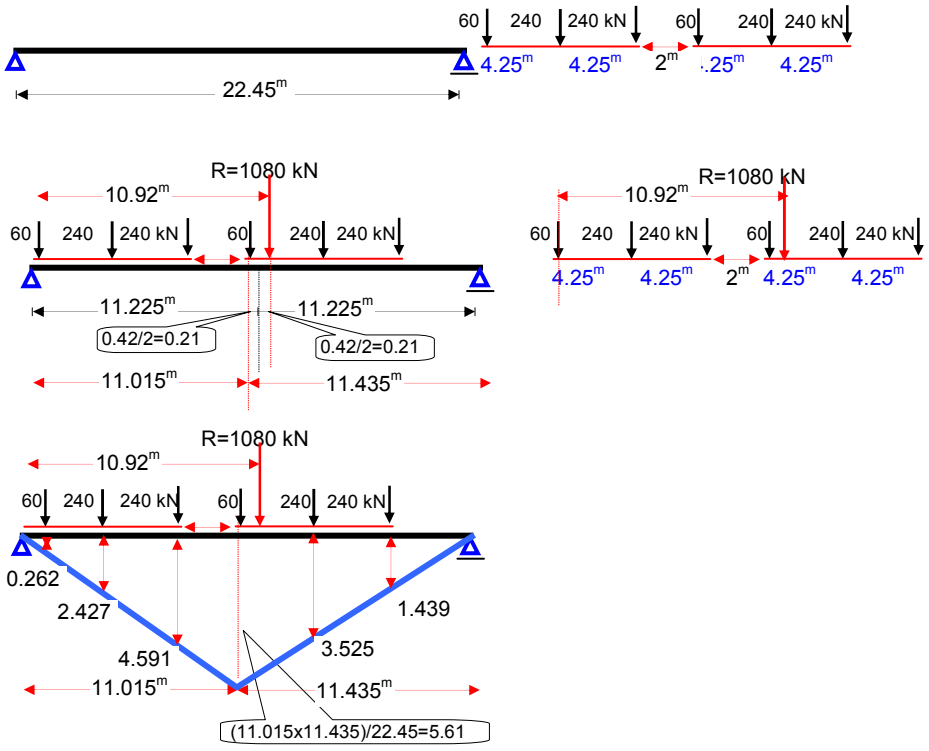
$$\max M_{max} = 60 \cdot 3.015 + 240 \cdot 5.474 + 240 \cdot 1.681 = 1898.10 kNm$$

ÖRNEK: Verilen hareketli yüklerin sağdan ve soldan etkimeleri için **maxM_{max}** bulunması



$$\max M_{max} = 60 \cdot 3.331 + 240 \cdot 5.59 + 240 \cdot 3.599 = 2405.22 \text{ kNm}$$

ÖRNEK: Verilen hareketli yüklerin sağdan ve soldan etkimeleri için **maxM_{max}** bulunması



$$\max M_{max} = 60 \cdot 0.262 + 240 \cdot 2.427 + 240 \cdot 4.591 + 60 \cdot 5.61 + 240 \cdot 3.525 + 240 \cdot 1.439 = 3228 \text{ kNm}$$