Değişken Kesitli Çubuklardan Oluşan Kiriş ve Çerçeve Sistemler

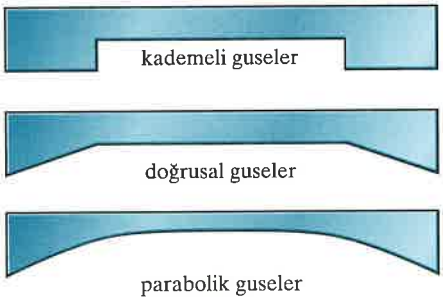
Bu bölümde değişken kesitli çubuklardan oluşan kiriş ve çerçevelerin hesabında açı ve moment dağıtma yöntemlerinin uygulanışı ele alınacaktır. İlk olarak; geçiş sayılarının, birim yerdeğiştirme sabitlerinin ve ankastrelik momentlerinin nasıl elde edileceği üzerinde durulacaktır. Bunu, tasarım kaynaklarında sıkça kullanılan tablo değerlerinin kullanımı ile ilgili bir değerlendirme takip edecektir. Son olarak da açı ve moment dağıtma yöntemleri kullanılarak statikçe belirsiz yapı sistemlerinin hesabı ele alınacaktır.

13.1 Değişken Kesitli Çubukların Yükleme Özellikleri

Çoğu kez malzemeden tasarruf sağlamak amacıyla köprü ve binalarda uzun açıklıklar için kullanılan kirişler değişken kesitli, bir başka ifadeyle atalet momenti değişken olacak şekilde tasarlanır. Değişken kesitli olan en yaygın yapısal elemanlar; kademeli, doğrusal veya parabolik guselere sahiptir, Şekil 13–1. Çubuğun atalet momentini x uzunluk koordinatının bir fonksiyonu olarak ifade edebilmemiz durumunda, çubuk elemanın sehimini belirleyebilmek için Bölüm 9'da anlatılan virtüel iş ilkesi veya Castigliano teoremini kullanabiliriz. Söz konusu denklemler,

$$\Delta = \int_0^l \frac{Mm}{EI}dx \qquad \text{veya} \qquad \Delta = \int_0^l \frac{\partial M}{\partial P}\frac{M}{EI}dx$$

şeklindedir. Eğer çubuğun geometrisi ve yükleme, kapalı formda elde edilemeyen bir integral hesabı gerektiriyorsa integrali hesaplamak için Simpson kuralı veya başka bir sayısal çözüm yöntemi kullanılmalıdır.



Şekil 13–1

13

Değişken kesitli bir çubukta eleman kuvvetlerini belirlemek üzere açı veya moment dağıtma yöntemi kullanılıyor ise bu durumda çubuk eleman için öncelikle aşağıdaki özelliklerin belirlenmesi gerekir.

Ankastrelik Momentleri (ANKM). Ankastre mesnetli olarak kabul edilen çubuktaki uç mesnet momentleri, Şekil 13–2*a*.

Birim Yerdeğiştirme Sabiti (*K*). Çubuk eleman ucunun $\theta = 1$ rad açısı kadar dönebilmesi için çubuk ucuna uygulanması gereken momentin büyüklüğüdür. Burada, moment mafsallı mesnede uygulanırken diğer uç ankastre kabul edilir, Şekil 13–2*b*.

Geçiş Sayısı (GS). Mafsallı uçtan ankastre uca "aktarılan" momentin sayısal oranını (C) gösterir, Şekil 13–2*c*.

Birim yerdeğiştirme sabiti ve geçiş sayısı elde edildikten sonra, aralarındaki önemli ilişki fark edilerek bu değerlere ait hesaplamalar kısmen kontrol edilebilir. Bu bakımdan yükleme ve sehim durumu Şekil 13–3'de verilen kirişi ele alalım. Maxwell–Betti karşıtlık teoreminin uygulanışı; Şekil 13–3*b*'deki yerdeğiştirmeler boyunca etkiyen Şekil 13–3*a*'daki kuvvetler tarafından yapılan işin, Şekil 13–3*a*'deki yerdeğiştirmeler boyunca etkiyen Şekil 13–3*b*'deki kuvvetlerin yaptığı işe eşit olmasını gerektirir,

$$U_{AB} = U_{BA}$$
$$K_A(0) + C_{AB}K_A(1) = C_{BA}K_B(1) + K_B(0)$$

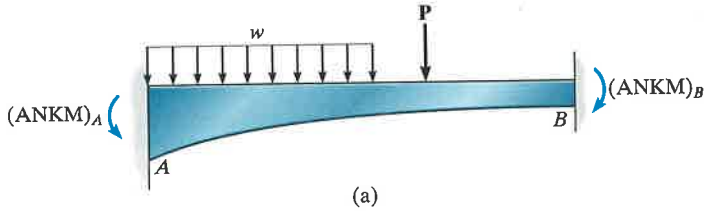
veya

$$C_{AB}K_A = C_{BA}K_B \tag{13–1}$$

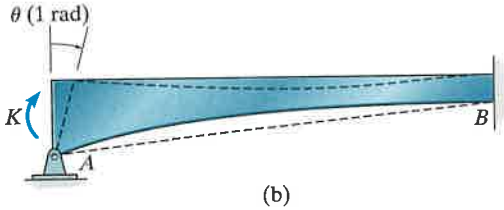
Dolayısıyla elde edilen birim yerdeğiştirme sabiti ve geçiş sayısı Denklem 13–1'i sağlamalıdır.



Doğrusal guseli çekiç başlı betonarme köprü ayağı, bu karayolu köprüsüne ait kirişleri taşımak amacıyla kullanılmaktadır.



(a)

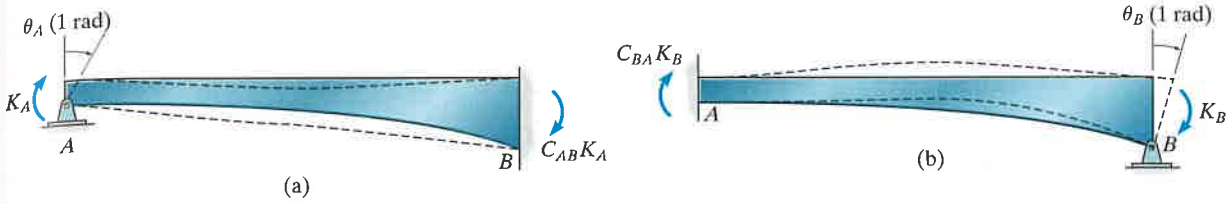


(b)



(c)

Şekil 13–2



Şekil 13–3

Bu özellikler, eşlenik–kiriş yöntemi veya herhangi bir enerji yöntemi kullanılarak belirlenebilir. Ancak işlemler için çoğu kez önemli miktarda bir iş hacmi gerekmektedir. Dolayısıyla yapı tasarımında yaygın kullanılan şekiller için bu verileri elde etmek amacıyla grafik ve tablolar hazırlanmıştır. Portland Çimento Birliği tarafından yayımlanan *Handbook of Frame Constants,* bu türden bir kaynaktır.* Bu kitaptan alınan tabloların bir kısmı burada Tablo 13–1 ve 13–2'de verilmiştir. Verilerin daha kapsamlı bir tablo düzeni, kullanılan *formüllerin* elde edilişleri ile birlikte PCA el kitabında mevcuttur.

Tablolarda kullanılan terimler aşağıda tanımlanmıştır:

a_A, a_B = A ve B uçlarındaki guse uzunluklarının açıklık uzunluğuna oranı.

b = tekil yükten A ucuna olan mesafenin açıklık uzunluğuna oranı.

C_{AB}, C_{BA} = AB çubuk elemanının A ve B uçlarındaki geçiş sayıları.

h_A, h_B = çubuk elemanın A ve B uçlarındaki yükseklikleri.

h_C = çubuk elemanın en küçük kesitine ait yüksekliği.

I_C = yüksekliği en küçük olan kesitin atalet momenti.

k_{AB}, k_{BA} = A ve B uçlarındaki birim yerdeğiştirme sabitleri.

L = çubuk elemanın uzunluğu.

M_{AB}, M_{BA} = A ve B uçlarındaki ankastrelik momentleri; tablolarda w düzgün yayılı yükü için ve P tekil kuvveti için verilmektedir.

r_A, r_B = dikdörtgen kesit alanları için oranlar, $r_A = (h_A - h_C)/h_C$, $r_B = (h_B - h_C)/h_C$.

Belirtildiği üzere ankastrelik momentleri ve geçiş sayıları tablolardan alınır. Mutlak birim yerdeğiştirme sabiti, tablo haline getirilmiş birim yerdeğiştirme sabitleri kullanılarak,

$$K_A = \frac{k_{AB}EI_C}{L} \qquad K_B = \frac{k_{BA}EI_C}{L} \tag{13–2}$$

bağıntısından bulunabilir. Tabloların kullanımı ile ilgili uygulama Örnek 13–1'de verilecektir.

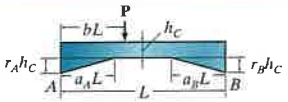
*Handbook of Frame Constants. Portland Cement Association, Chicago, Illinois.



© Lisa S. Engelbrecht/Danita Delimont/Alamy

Değişken atalet momentine sahip ahşap çerçeveler kiliselerin inşasında sıklıkla kullanılmaktadır.

TABLO 13–1 Doğrusal Guseler–Sabit Genişlik

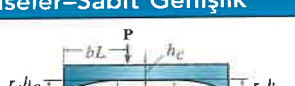


Not: Tüm geçiş–sayıları negatif ve tüm birim yerdeğiştirme sabitleri pozitifir.

Sağ Guse		Geçiş Sayıları		Birim Yerdeğiştirme Sabitleri		Düzgün Yayılı Yük ANKM *Kats.* X wL^2		Tekil Yük *ANKM– Kats.* x *PL*										Guse Yükü			
								b										Sol		Sağ	
								0.1		0.3		0.5		0.7		0.9		ANKM *Kats.* X $w_A L^2$		ANKM *Kats.* X $w_B L^2$	
a_B	r_B	C_{AB}	C_{BA}	k_{AB}	k_{BA}	M_{AB}	M_{BA}	M_{AB}	M_{BA}	M_{AB}	M_{BA}	M_{AB}	M_{BA}	M_{AB}	M_{BA}	M_{AB}	M_{BA}	M_{AB}	M_{BA}	M_{AB}	M_{BA}
a_A = 0.3 a_B = *değişken* r_A = 1.0 r_B = *değişken*																					
0.2	0.4	0.543	0.765	9.19	6.52	0.1194	0.0791	0.0935	0.0034	0.2185	0.0384	0.1955	0.1147	0.0889	0.1601	0.0096	0.0870	0.0133	0.0008	0.0006	0.0058
	0.6	0.576	0.758	9.53	7.24	0.1152	0.0851	0.0934	0.0038	0.2158	0.0422	0.1883	0.1250	0.0798	0.1729	0.0075	0.0898	0.0133	0.0009	0.0005	0.0060
	1.0	0.622	0.748	10.06	8.37	0.1089	0.0942	0.0931	0.0042	0.2118	0.0480	0.1771	0.1411	0.0668	0.1919	0.0047	0.0935	0.0132	0.0011	0.0004	0.0062
	1.5	0.660	0.740	10.52	9.38	0.1037	0.1018	0.0927	0.0047	0.2085	0.0530	0.1678	0.1550	0.0559	0.2078	0.0028	0.0961	0.0130	0.0012	0.0002	0.0064
	2.0	0.684	0.734	10.83	10.09	0.1002	0.1069	0.0924	0.0050	0.2062	0.0565	0.1614	0.1645	0.0487	0.2185	0.0019	0.0974	0.0129	0.0013	0.0001	0.0065
0.3	0.4	0.579	0.741	9.47	7.40	0.1175	0.0822	0.0934	0.0037	0.2164	0.0419	0.1909	0.1225	0.0856	0.1649	0.0100	0.0861	0.0133	0.0009	0.0022	0.0118
	0.6	0.629	0.726	9.98	8.64	0.1120	0.0902	0.0931	0.0042	0.2126	0.0477	0.1808	0.1379	0.0747	0.1807	0.0080	0.0888	0.0132	0.0010	0.0018	0.0124
	1.0	0.705	0.705	10.85	10.85	0.1034	0.1034	0.0924	0.0052	0.2063	0.0577	0.1640	0.1640	0.0577	0.2063	0.0052	0.0924	0.0131	0.0013	0.0013	0.0131
	1.5	0.771	0.689	11.70	13.10	0.0956	0.1157	0.0917	0.0062	0.2002	0.0675	0.1483	0.1892	0.0428	0.2294	0.0033	0.0953	0.0129	0.0015	0.0008	0.0137
	2.0	0.817	0.678	12.33	14.85	0.0901	0.1246	0.0913	0.0069	0.1957	0.0750	0.1368	0.2080	0.0326	0.2455	0.0022	0.0968	0.0128	0.0017	0.0006	0.0141
a_A = 0.2 a_B = *değişken* r_A = 1.5 r_B = *değişken*																					
0.2	0.4	0.569	0.714	7.97	6.35	0.1166	0.0799	0.0966	0.0019	0.2186	0.0377	0.1847	0.1183	0.0821	0.1626	0.0088	0.0873	0.0064	0.0001	0.0006	0.0058
	0.6	0.603	0.707	8.26	7.04	0.1127	0.0858	0.0965	0.0021	0.2163	0.0413	0.1778	0.1288	0.0736	0.1752	0.0068	0.0901	0.0064	0.0001	0.0005	0.0060
	1.0	0.652	0.698	8.70	8.12	0.1069	0.0947	0.0963	0.0023	0.2127	0.0468	0.1675	0.1449	0.0616	0.1940	0.0043	0.0937	0.0064	0.0002	0.0004	0.0062
	1.5	0.691	0.691	9.08	9.08	0.1021	0.1021	0.0962	0.0025	0.2097	0.0515	0.1587	0.1587	0.0515	0.2097	0.0025	0.0962	0.0064	0.0002	0.0002	0.0064
	2.0	0.716	0.686	9.34	9.75	0.0990	0.1071	0.0960	0.0028	0.2077	0.0547	0.1528	0.1681	0.0449	0.2202	0.0017	0.0975	0.0064	0.0002	0.0001	0.0065
0.3	0.4	0.607	0.692	8.21	7.21	0.1148	0.0829	0.0965	0.0021	0.2168	0.0409	0.1801	0.1263	0.0789	0.1674	0.0091	0.0866	0.0064	0.0002	0.0020	0.0118
	0.6	0.699	0.678	8.65	8.40	0.1098	0.0907	0.0964	0.0024	0.2135	0.0464	0.1706	0.1418	0.0688	0.1831	0.0072	0.0892	0.0064	0.0002	0.0017	0.0123
	1.0	0.740	0.660	9.38	10.52	0.1018	0.1037	0.0961	0.0028	0.2078	0.0559	0.1550	0.1678	0.0530	0.2085	0.0047	0.0927	0.0064	0.0002	0.0012	0.0130
	1.5	0.809	0.645	10.09	12.66	0.0947	0.1156	0.0958	0.0033	0.2024	0.0651	0.1403	0.1928	0.0393	0.2311	0.0029	0.0950	0.0063	0.0003	0.0008	0.0137
	2.0	0.857	0.636	10.62	14.32	0.0897	0.1242	0.0955	0.0038	0.1985	0.0720	0.1296	0.2119	0.0299	0.2469	0.0020	0.0968	0.0063	0.0003	0.0005	0.0141

© Straight Haunches – Constant Width, Handbook of Frame Constants. Portland Cement Association, Chicago Illinois.

TABLO 13–2 Parabolik Guseler–Sabit Genişlik



Not: Tüm geçiş–sayıları negatif ve tüm birim yerdeğiştirme sabitleri pozitifir.

Sağ Guse		Geçiş sayıları		Birim Yerdeğiştirme sabitleri		Tekil Yük *ANKM– Kats. x PL*												Guse Yükü			
						Düzgün Yayılı Yük ANKM *Kats. X wL^2*		*b*										Sol		Sağ	
								0.1		0.3		0.5		0.7		0.9		ANKM *Kats. X $w_A L^2$*		ANKM *Kats. X $w_B L^2$*	
a_B	r_B	C_{AB}	C_{BA}	k_{AB}	k_{BA}	M_{AB}	M_{BA}	M_{AB}	M_{BA}	M_{AB}	M_{BA}	M_{AB}	M_{BA}	M_{AB}	M_{BA}	M_{AB}	M_{BA}	M_{AB}	M_{BA}	M_{AB}	M_{BA}
a_A = 0.2 a_B = *değişken* r_A = 1.0 r_B = *değişken*																					
0.2	0.4	0.558	0.627	6.08	5.40	0.1022	0.0841	0.0938	0.0033	0.1891	0.0502	0.1572	0.1261	0.0715	0.1618	0.0073	0.0877	0.0032	0.0001	0.0002	0.0030
	0.6	0.582	0.624	6.21	5.80	0.0995	0.0887	0.0936	0.0036	0.1872	0.0535	0.1527	0.1339	0.0663	0.1708	0.0058	0.0902	0.0032	0.0001	0.0002	0.0031
	1.0	0.619	0.619	6.41	6.41	0.0956	0.0956	0.0935	0.0038	0.1844	0.0584	0.1459	0.1459	0.0584	0.1844	0.0038	0.0935	0.0032	0.0001	0.0001	0.0032
	1.5	0.649	0.614	6.59	6.97	0.0921	0.1015	0.0933	0.0041	0.1819	0.0628	0.1399	0.1563	0.0518	0.1962	0.0025	0.0958	0.0032	0.0001	0.0001	0.0032
	2.0	0.671	0.611	6.71	7.38	0.0899	0.1056	0.0932	0.0044	0.1801	0.0660	0.1358	0.1638	0.0472	0.2042	0.0017	0.0971	0.0032	0.0001	0.0000	0.0033
0.3	0.4	0.588	0.616	6.22	5.93	0.1002	0.0877	0.0937	0.0035	0.1873	0.0537	0.1532	0.1339	0.0678	0.1686	0.0073	0.0877	0.0032	0.0001	0.0007	0.0063
	0.6	0.625	0.609	6.41	6.58	0.0966	0.0942	0.0935	0.0039	0.1845	0.0587	0.1467	0.1455	0.0609	0.1808	0.0057	0.0902	0.0032	0.0001	0.0005	0.0065
	1.0	0.683	0.598	6.73	7.68	0.0911	0.1042	0.0932	0.0044	0.1801	0.0669	0.1365	0.1643	0.0502	0.2000	0.0037	0.0936	0.0031	0.0001	0.0004	0.0068
	1.5	0.735	0.589	7.02	8.76	0.0862	0.1133	0.0929	0.0050	0.1760	0.0746	0.1272	0.1819	0.0410	0.2170	0.0023	0.0959	0.0031	0.0001	0.0003	0.0070
	2.0	0.772	0.582	7.25	9.61	0.0827	0.1198	0.0927	0.0054	0.1730	0.0805	0.1203	0.1951	0.0345	0.2293	0.0016	0.0972	0.0031	0.0001	0.0002	0.0072
a_A = 0.5 a_B = *değişken* r_A = 1.0 r_B = *değişken*																					
0.2	0.4	0.488	0.807	9.85	5.97	0.1214	0.0753	0.0929	0.0034	0.2131	0.0371	0.2021	0.1061	0.0979	0.1506	0.0105	0.0863	0.0171	0.0017	0.0003	0.0030
	0.6	0.515	0.803	10.10	6.45	0.1183	0.0795	0.0928	0.0036	0.2110	0.0404	0.1969	0.1136	0.0917	0.1600	0.0083	0.0892	0.0170	0.0018	0.0002	0.0030
	1.0	0.547	0.796	10.51	7.22	0.1138	0.0865	0.0926	0.0040	0.2079	0.0448	0.1890	0.1245	0.0809	0.1740	0.0056	0.0928	0.0168	0.0020	0.0001	0.0031
	1.5	0.571	0.786	10.90	7.90	0.1093	0.0922	0.0923	0.0043	0.2055	0.0485	0.1818	0.1344	0.0719	0.1862	0.0035	0.0951	0.0167	0.0021	0.0001	0.0032
	2.0	0.590	0.784	11.17	8.40	0.1063	0.0961	0.0922	0.0046	0.2041	0.0506	0.1764	0.1417	0.0661	0.1948	0.0025	0.0968	0.0166	0.0022	0.0001	0.0032
0.5	0.4	0.554	0.753	10.42	7.66	0.1170	0.0811	0.0926	0.0040	0.2087	0.0442	0.1924	0.1205	0.0898	0.1595	0.0107	0.0853	0.0169	0.0020	0.0042	0.0145
	0.6	0.606	0.730	10.96	9.12	0.1115	0.0889	0.0922	0.0046	0.2045	0.0506	0.1820	0.1360	0.0791	0.1738	0.0086	0.0878	0.0167	0.0022	0.0036	0.0152
	1.0	0.694	0.694	12.03	12.03	0.1025	0.1025	0.0915	0.0057	0.1970	0.0626	0.1639	0.1639	0.0626	0.1970	0.0057	0.0915	0.0164	0.0028	0.0028	0.0164
	1.5	0.781	0.664	13.12	15.47	0.0937	0.1163	0.0908	0.0070	0.1891	0.0759	0.1456	0.1939	0.0479	0.2187	0.0039	0.0940	0.0160	0.0034	0.0021	0.0174
	2.0	0.850	0.642	14.09	18.64	0.0870	0.1275	0.0901	0.0082	0.1825	0.0877	0.1307	0.2193	0.0376	0.2348	0.0027	0.0957	0.0157	0.0039	0.0016	0.0181

© Parabolic Haunches-Constant Width, Handbook of Frame Constants. Portland Cement Association, Chicago Illinois.

13

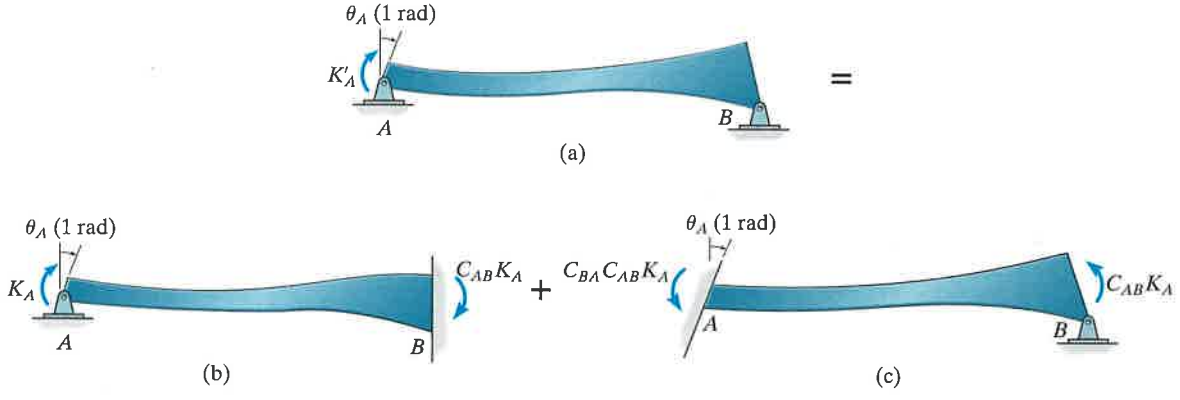
13.2 Moment Dağıtma Yönteminin Değişken Kesitli Çubuklardan Oluşan Yapı Sistemlerine Uygulanışı

Bir yapının değişken kesitli çubuk elemanlarına ait ankastrelik momentleri, birim yerdeğiştirme sabitleri ve geçiş sayıları belirlendikten sonra moment dağıtma yönteminin uygulanışı, Bölüm 12'de anlatıldığı gibidir. Bu bakımdan eğer bir çubuk elemanın birim yerdeğiştirme sabiti; kenar açıklığın mafsallı ve yapı sisteminin simetrik/antisimetrik olması koşullarını dikkate almak için değiştirilmiş ise moment dağıtma işleminin kısaltılabileceğini hatırlayalım. Benzer değişiklikler değişken kesitli çubuklar için de yapılabilir.

Uzak Ucu Mafsallı Bağlı Kiriş. Şekil 13–4*a*'daki B uzak ucunda mafsallı olan kirişi ele alalım. K_A' mutlak birim yerdeğiştirme sabiti, kirişi A'da $\theta = 1$ rad kadar döndürecek şekilde A'ya uygulanan moment olup şu şekilde belirlenebilir. İlk olarak B'nin geçici olarak ankastre olduğunu ve A'ya bir K_A momentinin uygulandığını kabul edelim, Şekil 13–4*b*. Bu durumda B'de meydana gelen moment $C_{AB}K_A$ olup burada C_{AB}, A'dan B'ye olan geçiş sayısını göstermektedir. B ankastre olamayacağından ikinci adım olarak kirişe ters yönde uygulanacak $C_{AB}K_A$ momenti (Şekil 13–4*c*), A ucunda $C_{BA}C_{AB}K_A$ momentine neden olacaktır. Bu iki moment uygulamasının sonucu, süperpozisyon ilkesine bağlı olarak Şekil 13–4*a*'da görüldüğü gibi yüklenen kirişi verir. Bundan dolayı kirişin A'daki mutlak birim yerdeğiştirme sabitinin,

$$K_A' = K_A(1 - C_{AB}C_{BA}) \tag{13–3}$$

olacağı görülebilir. Burada K_A, B uzak ucunda ankastre olarak kabul edilen kirişin mutlak birim yerdeğiştirme sabitidir. Örneğin sabit kesitli bir kiriş için $K_A = 4EI/L$ ve $C_{AB} = C_{BA} = \frac{1}{2}$'dir. Bu değerlerin Denklem 13–3'de yerine yazılması, Denklem 12–4 ile aynı olan $K_A' = 3EI/L$ değerini verir.



Şekil 13–4

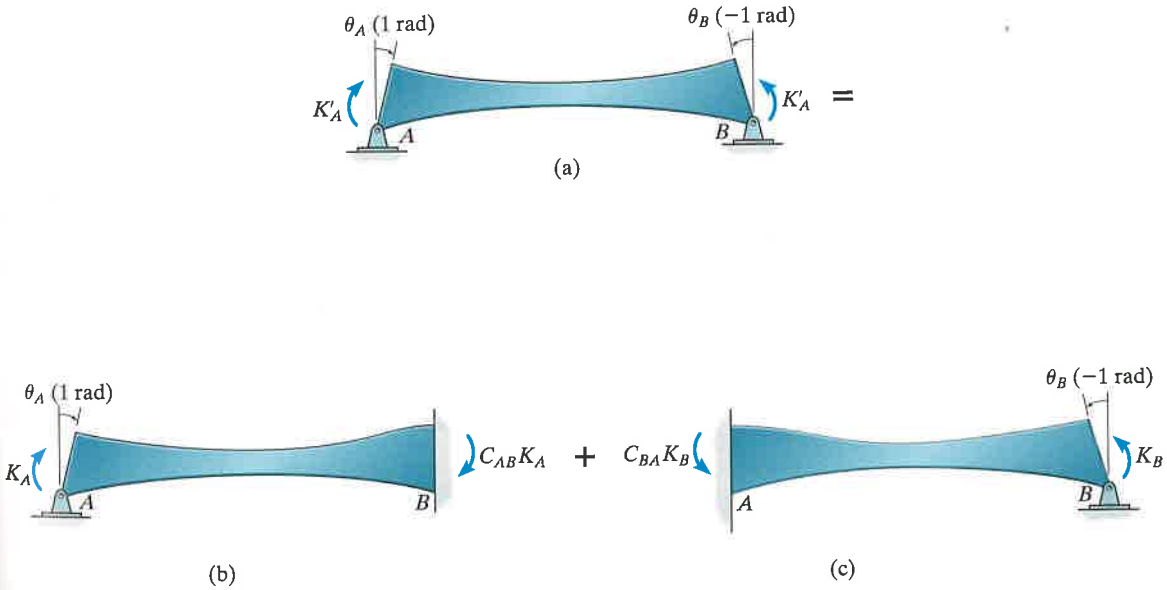
Simetrik Kiriş ve Yükleme. Burada A ucunu $\theta_A = +1$ rad ve B ucunu $\theta_B = -1$ rad kadar döndürebilmek için gerekli olan K_A' momentinin bulunması gereklidir, Şekil 13–5*a*. Bu durumda ilk olarak B ucunun ankastre olduğunu kabul ederek K_A momentini A'ya uygularız, Şekil 13–5*b*. Daha sonra da A ucunun ankastre olduğunu kabul ederek B ucuna negatif bir K_B momenti uygularız. Bu durum Şekil 13–5*c*'de görüldüğü gibi A ucunda bir $C_{BA}K_B$ momentine neden olur. A'ya uygulanan bu iki momentin süperpozisyonu Şekil 13–5*a*'daki durumu verir. Bu durumda,

$$K_A' = K_A - C_{BA}K_B$$

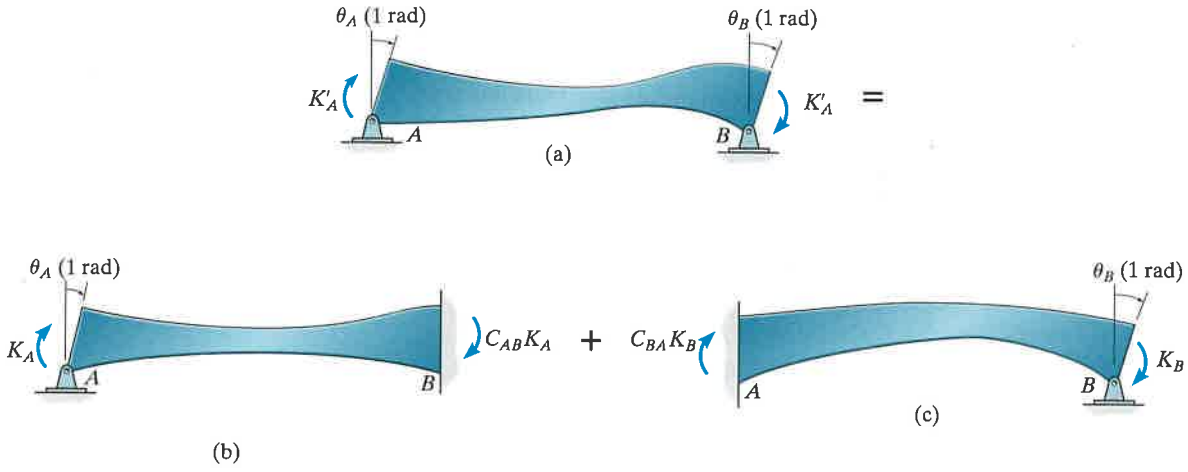
yazılır. Ayrıca Denklem 13–1 kullanılarak ($C_{BA}K_B = C_{AB}K_A$),

$$\boxed{K_A' = K_A(1 - C_{AB})} \qquad (13\text{–}4)$$

yazılabilir. Sabit kesitli bir kiriş için $K_A = 4EI/L$ ve $C_{AB} = \frac{1}{2}$ olduğundan, yukarıdaki denklemden Denklem 12–5 ile aynı olan $K_A' = 2EI/L$ değeri elde edilir.



Şekil 13–5



Şekil 13–6

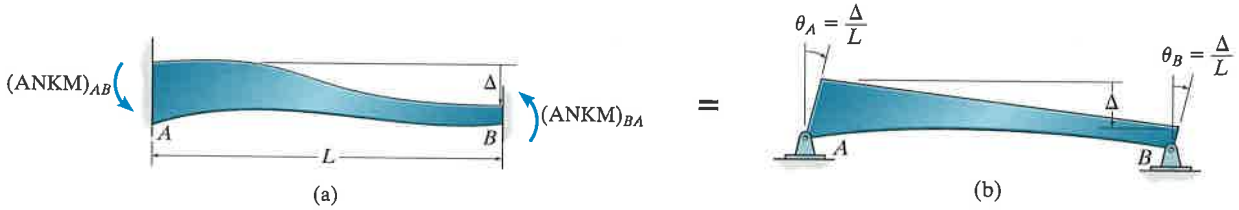
Antisimetrik Yüklemeli Simetrik Kiriş. Antisimetrik yüklemeli bir simetrik kiriş için, kiriş uçlarında eşit dönmelerin oluşmasını sağlayacak K_A' momenti bulunmalıdır, Şekil 13–6*a*. Bunun için ilk olarak B ucunu ankastre yapar ve K_A momentini A'ya uygularız, Şekil 13–6*b*. Benzer şekilde A ucu ankastre iken K_B'nin B'ye uygulanışı Şekil 13–6*c*'de görülmektedir. Bu iki durumun süperpozisyonu Şekil 13–6*a*'daki değerleri verir. Böylece,

$$K_A' = K_A + C_{BA}K_B$$

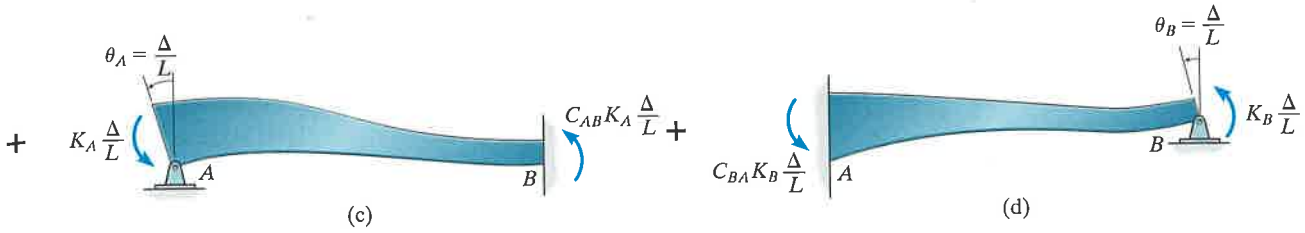
veya Denklem 13–1 ($C_{BA}K_B = C_{AB}K_A$) kullanılarak mutlak birim yerdeğiştirme için,

$$\boxed{K_A' = K_A(1 + C_{AB})} \tag{13–5}$$

elde ederiz. Sabit kesitli bir kiriş için veriler ($K_A = 4EI/L$ ve $C_{AB} = \frac{1}{2}$) yerine yazılarak Denklem 12–6 ile aynı olan $K_A' = 6EI/L$ değeri elde edilir.



Şekil 13–7



(c) (d)

Şekil 13–7

13

Kirişin Göreli Düğüm Noktası Ötelenmesi. Eğer değişken kesitli bir çubuk elemanın A ve B uçları arasında göreli bir düğüm noktası ötelenmesi (Δ) varsa bu çubukta ankastrelik momentleri meydana gelecektir, Şekil 13–7*a*. Bu momentleri belirleyebilmek için şu şekilde hareket edilebilir. Öncelikle A ve B uçlarının mafsallı olduğunu düşünerek, uç dönmeleri $\theta_A = \theta_B = \Delta/L$ olacak şekilde kirişin B ucunun Δ kadar yerdeğiştirme yapmasına izin verelim, Şekil 13–7*b*. İkinci adım olarak B'nin ankastre olduğunu kabul edelim ve A ucunu $\theta_A = -\Delta/L$ kadar döndürecek şekilde A ucuna bir $M'_A = -K_A(\Delta/L)$ momentini uygulayalım, Şekil 13–7*c*. Üçüncü adım olarak da A'nın ankastre olduğunu kabul edelim ve B ucunu $\theta_B = -\Delta/L$ kadar döndürecek şekilde B ucuna bir $M'_B = -K_B(\Delta/L)$ momentini uygulayalım, Şekil 13–7*d*. Bu üç işlem adımının toplamı Şekil 13–7*a*'da gösterilen durumu verdiğinden A ucu için,

$$(\text{ANKM})_{AB} = -K_A\frac{\Delta}{L} - C_{BA}K_B\frac{\Delta}{L}$$

yazılır. Denklem 13–1 uygulanarak ($C_{BA}K_B = C_{AB}K_A$),

$$(\text{ANKM})_{AB} = -K_A\frac{\Delta}{L}(1 + C_{AB}) \qquad (13\text{–}6)$$

elde edilir. Benzer bir ifade B ucu için de yazılabilir. Sabit kesitli bir çubuk için $K_A = 4EI/L$ ve $C_{AB} = \frac{1}{2}$ olduğunu anımsayalım. Böylece Denklem 11–5 ile aynı olan $(\text{ANKM})_{AB} = -6EI\Delta/L^2$ değeri elde edilir.

Eğer B ucu ankastre değil de Şekil 13–8'deki gibi mafsallı ise A'daki ankastrelik momenti yukarıda açıklanana benzer şekilde belirlenebilir. Bu durumda ankastrelik momenti,



Şekil 13–8

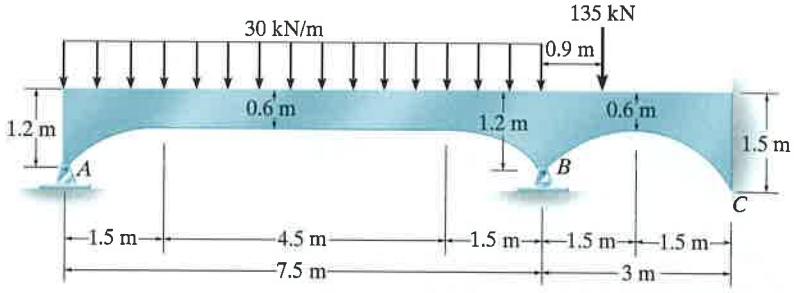
$$(\text{ANKM})'_{AB} = -K_A\frac{\Delta}{L}(1 - C_{AB}C_{BA}) \qquad (13\text{–}7)$$

şeklinde olacaktır. Bu denklemin sabit kesitli bir çubuk için kitabın arkasında verilen $(\text{ANKM})'_{AB} = -3EI\Delta/L^2$ değeri ile aynı sonucu verdiği görülebilir.

Bir sonraki örnek, moment dağıtma yönteminin değişken kesitli çubuklardan oluşan yapılara uygulanışını göstermektedir. Ankastrelik momentleri, birim yerdeğiştirme sabitleri ve geçiş sayıları belirlendikten ve birim yerdeğiştirme sabitleri yukarıda verilen denklemlere göre değiştirildikten sonra çözümde izlenecek yol Bölüm 12'de anlatılan ile aynıdır.

ÖRNEK 13.1

Şekil 13–9*a*'da görülen kirişin çubuk uç momentlerini hesaplayınız. Kiriş kalınlığı 0.3 m olup *EI* sabittir.



(a)

Şekil 13–9

ÇÖZÜM

Guseler parabolik olduğundan, kirişin moment dağıtma özelliklerini elde etmek için Tablo 13–2 kullanılacaktır.

AB Açıklığı

$$a_A = a_B = \frac{1.5}{7.5} = 0.2 \qquad r_A = r_B = \frac{1.2 - 0.6}{0.6} = 1.0$$

Bu oranlara bağlı olarak Tablo 13–2'den,

$$C_{AB} = C_{BA} = 0.619$$

$$k_{AB} = k_{BA} = 6.41$$

elde edilir. Denklem 13–2 kullanılarak,

$$K_{AB} = K_{BA} = \frac{kEI_C}{L} = \frac{6.41E\left(\frac{1}{12}\right)(0.3)(0.6)^3}{7.5} = 4.615(10^{-3})E$$

bulunur. *BA* açıklığının uzak ucu mafsallı olduğundan, *BA*'nın birim yer-değiştirme sabitini Denklem 13–3'ü kullanarak değiştireceğiz. Bu durumda,

$$K'_{BA} = K_{BA}(1 - C_{AB}C_{BA}) = 4.615(10^{-3})E[1 - 0.619(0.619)] = 2.847(10^{-3})E$$

elde ederiz. Düzgün yayılı yük için Tablo 13–2'den,

$$(\text{ANKM})_{AB} = -(0.0956)(30)(7.5)^2 = -161.33 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$(\text{ANKM})_{BA} = 161.33 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

BC Açıklığı

$$a_B = a_C = \frac{1.5}{3} = 0.5 \qquad r_B = \frac{1.2 - 0.6}{0.6} = 1.0$$

$$r_C = \frac{1.5 - 0.6}{0.6} = 1.5$$

Tablo 13–2'den

$$C_{BC} = 0.781 \qquad C_{CB} = 0.664$$

$$k_{BC} = 13.12 \qquad k_{CB} = 15.47$$

elde ederiz. Böylece Denklem 13–2'den,

$$K_{BC} = \frac{kEI_C}{L} = \frac{13.12E\left(\frac{1}{12}\right)(0.3)(0.6)^3}{3} = 23.616(10^{-3})E$$

$$K_{CB} = \frac{kEI_C}{L} = \frac{15.47E\left(\frac{1}{12}\right)(0.3)(0.6)^3}{3} = 27.846(10^{-3})E$$

bulunur. Tekil yük için,

$$b = \frac{0.9}{3} = 0.3$$

$$(\text{ANKM})_{BC} = -0.1891(135)(3) = -76.59\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$(\text{ANKM})_{CB} = 0.0759(135)(3) = 30.74\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

Birim yerdeğiştirme sabitleri için yukarıdaki değerler kullanılarak dağıtma sayıları hesaplanmış ve Şekil 13–9*b*'daki tabloya girilmiştir. Moment dağıtma işlemi, Bölüm 12'de anlatıldığı gibi yapılmış ve çubuk uç momentleri kN·m cinsinden tablonun son satırında verilmiştir.

Düğüm Noktası	*A*	*B*		*C*
Çubuk	*AB*	*BA*	*BC*	*CB*
K	$4.615(10^{-3})E$	$2.847(10^{-3})E$	$23.616(10^{-3})E$	$27.846(10^{-3})E$
DS	1	0.107	0.893	0
GS	0.619	0.619	0.781	0.664
ANKM	−161.33	161.33	−76.59	30.74
Dğt.	161.33	−9.07	−75.67	
Aktr.		99.86		−59.10
Dğt.		−10.69	−89.18	
Aktr.				−69.95
ΣM	0	241.43	−241.43	−98.01

(b)

Şekil 13–9

13

13.3 Açı Yönteminin Değişken Kesitli Çubuklara Uygulanışı

Açı–yerdeğiştirme denklemleri, sabit kesitli çubuk elemanlar için Bölüm 11'de elde edilmişti. Bu altbölümde, bu denklemleri değişken kesitli çubuklara da uygulanacak şekilde genelleştireceğiz. Bu amaçla önceki altbölümün sonuçlarını kullanacak ve denklemlerin Bölüm 11'de anlatıldığı şekilde formüle edilmesi ile devam edeceğiz. Başka bir anlatımla; yüklerden, göreli düğüm noktası yerdeğiştirmesinden ve her bir düğüm noktasının dönmesinden kaynaklanan etkileri ayrı ayrı ele alacak ve daha sonra sonuçları süperpoze edeceğiz.

Yükler. Yükler, açıklığın A ve B uçlarına etkiyen $(\text{ANKM})_{AB}$ ve $(\text{ANKM})_{BA}$ ankastrelik momentleri ile tanımlanır. Pozitif momentler saat ibresi yönündedir.

Göreli Düğüm Noktası Ötelenmesi. Düğüm noktaları arasında meydana gelen göreli bir Δ yerdeğiştirmesinin neden olduğu momentler Denklem 13–6 ile hesaplanır. Bu moment, A ucunda $-[K_A\Delta/L](1+C_{AB})$ ve B ucunda $-[K_B\Delta/L](1+C_{BA})$ şeklindedir.

A'da Dönme. A ucunun θ_A kadar dönmesi durumunda, açıklığın A ucuna etkimesi gereken moment $K_A\theta_A$ olur. Ayrıca bu dönmeden dolayı B ucunda $C_{AB}K_A\theta_A = C_{BA}K_B\theta_A$ momenti meydana gelir.

B'de Dönme. B ucunun θ_B kadar dönmesi durumunda, B ucuna $K_B\theta_B$ kadar bir moment etkimelidir ve bu durumda A ucunda meydana gelen moment $C_{BA}K_B\theta_B = C_{AB}K_A\theta_B$ olur.

Bu etkilerden kaynaklanan toplam uç momentleri aşağıdaki genelleştirilmiş açı–yerdeğiştirme denklemlerini verir,

$$M_{AB} = K_A\left[\theta_A + C_{AB}\theta_B - \frac{\Delta}{L}(1 + C_{AB})\right] + (\text{ANKM})_{AB}$$

$$M_{BA} = K_B\left[\theta_B + C_{BA}\theta_A - \frac{\Delta}{L}(1 + C_{BA})\right] + (\text{ANKM})_{BA}$$

Bu iki denklem benzer olduğundan, bunları tek bir denklem ile de ifade etmek mümkündür. Açıklığın bir ucunu yakın uç (N) ve diğer ucunu uzak uç (F) olarak adlandırarak ve çubuk elemanın dönmesini $\psi = \Delta/L$ şeklinde göstererek,

$$M_N = K_N(\theta_N + C_N\theta_F - \psi(1 + C_N)) + (\text{ANKM})_N \qquad (13\text{–}8)$$

elde ederiz. Burada,

M_N = açıklığın yakın ucundaki moment; bu moment açıklıkta saat ibresi yönünde pozitiftir.

K_N = tablolardan alınan veya hesapla bulunan yakın ucun mutlak birim yerdeğiştirme sabiti.

θ_N, θ_F = mesnetlerdeki açıklığa ait yakın– ve uzak–uç açıları; bu açılar *radyan* cinsinden olup *saat ibresi yönünde pozitiftir.*

ψ = doğrusal bir yerdeğiştirmeden dolayı açıklığa ait elastik eğri kirişinin dönme açısı, $\psi = \Delta/L$; bu açı *radyan* cinsinden olup *saat ibresi yönünde pozitiftir.*

$(\text{ANKM})_N$ = yakın–uç mesnedindeki ankastrelik momenti; bu moment açıklıkta saat ibresi yönünde *pozitif* olup tablolardan veya hesapla elde edilir.

Bu denklemin uygulanışı Bölüm 11'de anlatıldığı gibi olduğundan, burada tekrar ele alınmayacaktır. Sabit kesitli çubuklara uygulandığında Denklem 13–8'in Denklem 11–8'i verdiğine dikkat edelim.



Hafif–ağırlıktaki metal binalar, çoğu kez değişken atalet momentlerine sahip çerçeve çubukları kullanılarak tasarlanır.



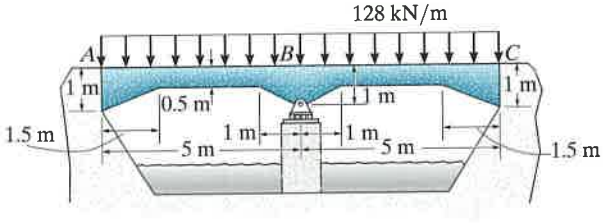
Sürekli bir betonarme karayolu köprüsü.

PROBLEMLER

Altbölüm 13.1–13.3

13–1. A, B ve C'deki momentleri, moment dağıtma yöntemi ile hesaplayınız. A ve C'deki mesnetlerin ankastre olduğunu ve B'deki kayıcı mafsallı mesnedin rijit bir taban üzerine oturduğunu kabul ediniz. Kiriş kalınlığı 1 m'dir. Tablo 13–1'i kullanınız. E sabittir. Guseler doğrusaldır.

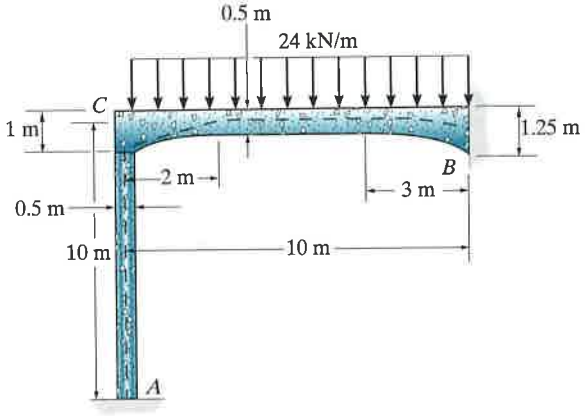
13–2. Problem 13–1'i açı yöntemini kullanarak çözünüz.



Problemler 13–1/2

13–3. Parabolik guseli çerçeve sistemin çubuk uç momentlerini moment dağıtma yöntemi ile hesaplayınız. A ve B mesnetleri ankastredir. Tablo 13–2'yi kullanınız. Çubukların her biri 0.25 m kalınlığındadır. E sabittir.

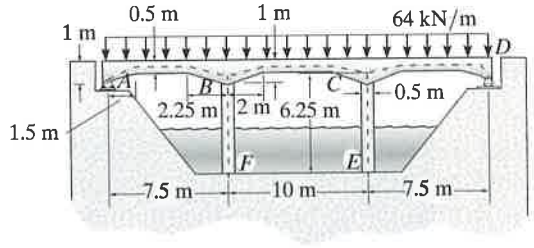
***13–4.** Problem 13–3'ü açı yöntemini kullanarak çözünüz.



Problemler 13–3/4

13–5. Simetrik köprü çerçevesinin çubuk uç momentlerini moment dağıtma yöntemi ile hesaplayınız. F ve E'deki mesnetler ankastre olup B ve C düğüm noktaları rijit birleşimlidir. Tablo 13–2'yi kullanınız. E'nin sabit ve çubukların her birinin 0.25 m kalınlığında olduğunu kabul ediniz.

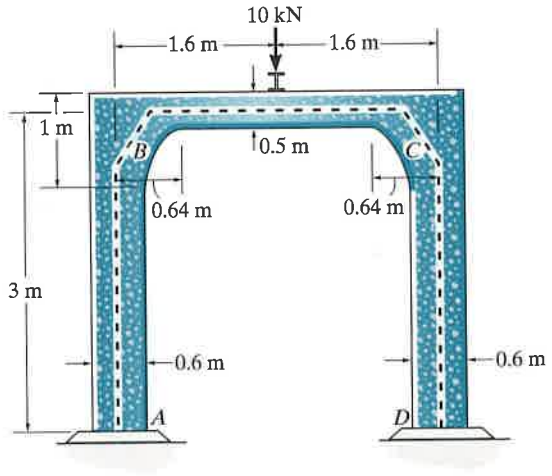
13–6. Problem 13–5'i açı yöntemini kullanarak çözünüz.



Problemler 13–5/6

13–7. Parabolik guseli simetrik köprü çerçevesinin çubuk uç momentlerini moment dağıtma yöntemi ile hesaplayınız. A ve D'deki mesnetler ankastredir. Tablo 13–2'yi kullanınız. Çubukların her biri 0.2 m kalınlığındadır. E sabittir.

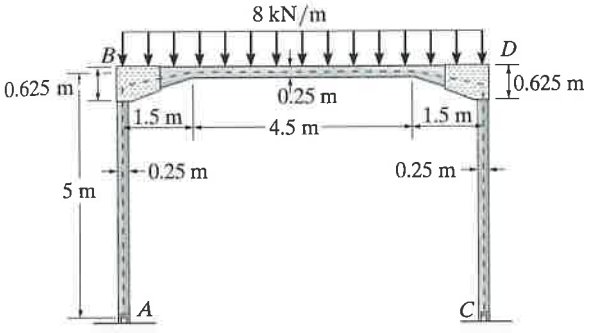
***13–8.** Problem 13–7'yi açı yöntemini kullanarak çözünüz.



Problemler 13–7/8

13–9. Çerçeve sistemin çubuk uç momentlerini moment dağıtma yöntemi ile hesaplayınız. A ve C'deki mesnetler sabit mafsallı olup B ve D düğüm noktaları rijit birleşimlidir. E'nin sabit ve çubuk kalınlıklarının 0.25 m olduğunu kabul ediniz. Guseler doğrusal olduğundan, Tablo 13–1'i kullanınız.

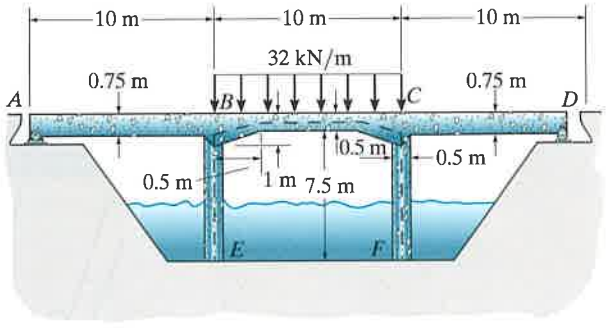
13–10. Problem 13–9'u açı yöntemini kullanarak çözünüz.



Problemler 13–9/10

13–11. Simetrik köprü çerçevesinin çubuk uç momentlerini moment dağıtma yöntemi ile hesaplayınız. F ve E'deki mesnetler ankastre olup B ve C düğüm noktaları rijit birleşimlidir. Guseler doğrusal olduğundan, Tablo 13–1'i kullanınız. E'nin sabit ve çubukların her birinin 0.25 m kalınlığında olduğunu kabul ediniz.

***13–12.** Problem 13–11'i açı yöntemini kullanarak çözünüz.



Problemler 13–11/12

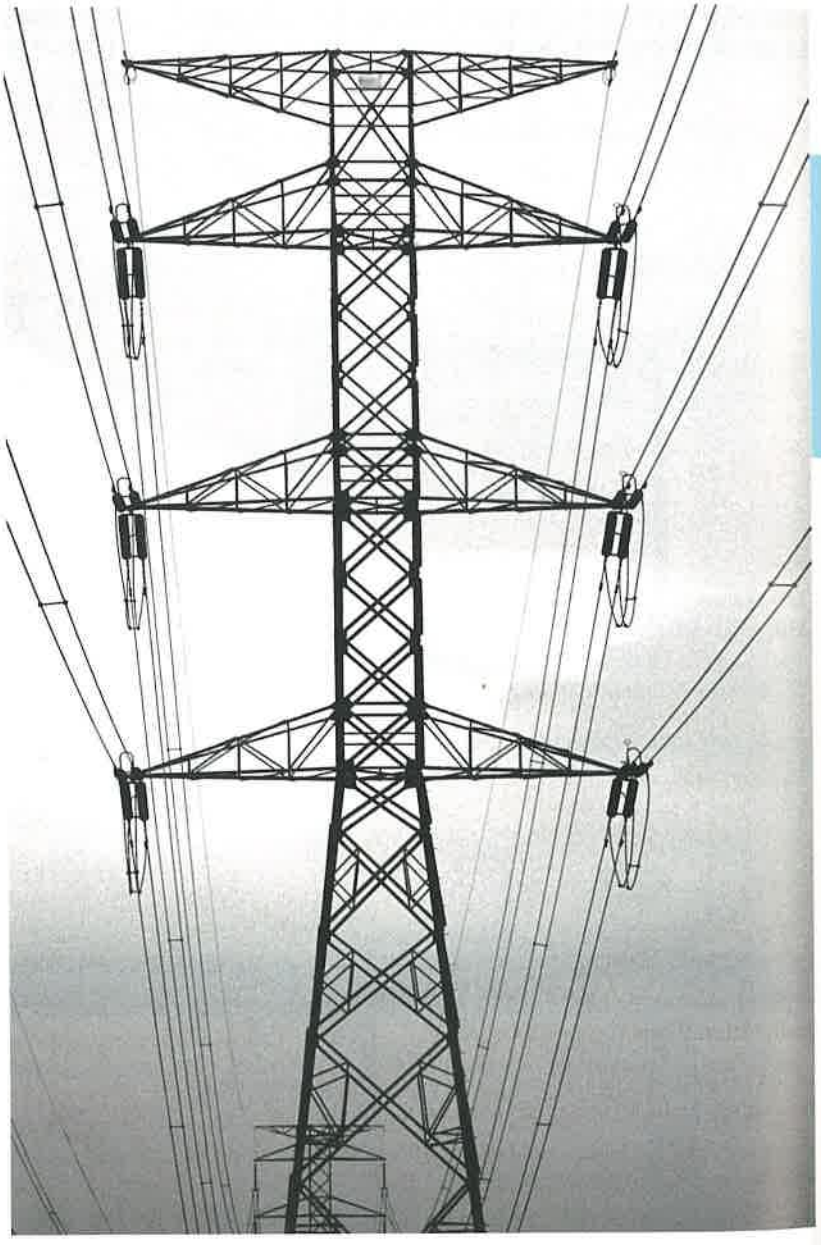
BÖLÜM ÖZETİ

Değişken atalet momentine sahip değişken kesitli çubuk elemanlar, malzemeden tasarruf sağlamak amacıyla uzun açıklıklı köprülerde ve bina çerçevelerinde sıklıkla kullanılmaktadır.

Değişken kesitli çubukların kullanılması durumunda yapı sistemlerinin hesabı, açı yöntemi veya moment dağıtma yöntemi kullanılarak yapılabilir. Böyle bir durumda da çubuk elemanlar için ankastrelik momentlerinin, birim yerdeğiştirme sabitlerinin ve geçiş sayılarının belirlenmesi gerekmektedir. Bu değerler, biraz zahmetli de olsa eşlenik kiriş yöntemi kullanılarak bulunabilir. Bu değerleri, Portland Çimento Birliği tarafından yayımlanan kaynakta olduğu gibi tablo haline getirilmiş verilerden elde etmek de mümkündür.

Moment dağıtma yöntemi kullanıldığında, bazı çubuk elemanların birim yerdeğiştirme sabitlerinin değiştirilmesi durumunda çözüm basitleştirilebilmektedir.

Bölüm 14



© P.G. Bowater/Science Source

Enerji iletim hatlarında kullanılan elektrik direklerinin uzay kafes çözümlemesi, matris yerdeğiştirme yöntemi kullanılarak yapılabilir.

Matris Yerdeğiştirme (Rijitlik) Yöntemi ile Kafes Sistem Hesabı

Bu bölümde yapı sistemlerinin hesabında kullanılan matris yerdeğiştirme yönteminin temel esasları üzerinde durulacaktır. Bu yöntemin, elle hesapta zahmetli olmasına rağmen bilgisayar ile kullanıma oldukça uygun olduğu gösterilecektir. Düzlem kafes sistemlere ait özel uygulama örnekleri verilecektir. Daha sonra bu yöntem uzay kafes sistemlerini de kapsayacak şekilde genişletilecektir. Kiriş ve çerçeveli yapı sistemleri daha sonraki bölümlerde ele alınacaktır.

14.1 Matris Yerdeğiştirme Yönteminin Esasları

Aslında matris yöntemler kullanılarak yapı sistemlerinin çözümlenebileceği iki yol vardır. Bu ve sonraki bölümlerde ele alınacak olan matris yerdeğiştirme yöntemi, bir yerdeğiştirme yöntemidir. Yapı sistemlerini çözümlemek için Altbölüm 9-1'de verilen ve esneklik yöntemi olarak adlandırılan kuvvet yöntemi de kullanılabilir; ancak söz konusu yöntem bu kitapta ele alınmayacaktır. Bunun çeşitli nedenleri olmakla birlikte en önemlisi, matris yerdeğiştirme yöntemi hem statikçe belirli hem de statikçe belirsiz yapı sistemlerini çözümlemek için kullanılabilirken, kuvvet yöntemi bu iki durumun her biri için farklı bir yaklaşıma ihtiyaç duymaktadır. Ayrıca matris yerdeğiştirme yöntemi, yerdeğiştirme ve kuvvetleri doğrudan verirken kuvvet yöntemi ile yerdeğiştirmeler doğrudan elde edilememektedir. Bunun yanında matris yerdeğiştirme yönteminde, matrislerin bilgisayar işlemleri için formüle edilmesi genellikle çok daha kolay olup bilgisayar hesaplamaları etkili bir şekilde gerçekleştirilebilmektedir.

Matris yerdeğiştirme yönteminin uygulanışı, yapı sisteminin bir dizi ayrık ***sonlu elemana*** ayrılmasını ve bu elemanlara ait uç noktalarının *düğüm noktaları* olarak tanımlanmasını gerektirmektedir. Kafes sistem hesabında sonlu elemanlar kafes sistemi oluşturan her bir çubuk eleman ile temsil edilirken, düğüm noktaları birleşim noktalarını gösterir. Her bir çubuk elemanın kuvvet-yerdeğiştirme özellikleri belirlenir ve sonrasında düğüm noktalarında yazılan kuvvet denge denklemleri kullanılarak birbirleri ile ilişkilendirilir. Daha sonra bu bağıntılar tüm yapı sistemi için **K** *yapı rijitlik matrisi* olarak tanımlanan matris içinde birleştirilir. Yapı rijitlik matrisi belirlendikten sonra düğüm noktalarının bilinmeyen yerdeğiştirmeleri, yapı sistemi üzerine etkiyen herhangi bir yükleme durumu için belirlenebilir. Bu yerdeğiştirmeler belirlendikten sonra yapı sistemine ait mesnet tepkileri ve çubuk kuvvetleri, her bir çubuk eleman için kuvvet-yerdeğiştirme bağıntıları kullanılarak hesaplanabilir.

Matris yerdeğiştirme yönteminin uygulanışına yönelik bir yöntem geliştirilmeden önce, bazı ön tanım ve kavramların ortaya konulması gerekmektedir.

Eleman ve Düğüm Noktası Tanımlanması. Matris yerdeğiştirme yönteminin uygulanışındaki ilk adımlardan biri, yapı sisteminin elemanlarını ve bu elemanlara ait düğüm noktalarını tanımlamaktır. Her bir çubuk eleman kare içine alınmış bir sayı ile tanımlanırken, düğüm noktalarını tanımlamak için daire içine alınmış sayılar kullanılacaktır. Ayrıca çubuğun "yakın" ve "uzak" uçları da tanımlanacaktır. Bu işlem, ok ucunun çubuğun uzak ucuna doğru yönlendiği çubuk eleman boyunca yerleştirilecek bir ok ile yapılacaktır. Bir kafes sisteme ait eleman, düğüm noktası ve "yön" tanımlama örnekleri Şekil 14-1*a*'da gösterilmiştir. Bu gösterimlerin hepsi *keyfi* bir şekilde yapılmıştır.*

Global ve Lokal Koordinatlar. Yük ve yerdeğiştirmeler vektörel büyüklükler olduğundan, bunların gerçek yönlerini tanımlamak için bir koordinat sisteminin oluşturulması gerekir. Burada iki farklı koordinat sistemi kullanılacaktır. Düğüm noktalarındaki *dış* kuvvet ve yerdeğiştirme bileşenlerinin her birinin yönünü tanımlamak için tek bir *global* veya *yapı koordinat sistemi* (x, y) kullanılacaktır, Şekil 14-1*a*. Yapı elemanlarına ait yerdeğiştirme ve *iç kuvvetlerin* yönlerini tanımlamak amacıyla da her bir çubuk eleman için bir *lokal* veya *eleman koordinat sistemi* oluşturulacaktır. Bu koordinat sistemi, orijini "yakın" düğüm noktasında olan ve x' ekseni "uzak" düğüm noktasına doğru uzanan, x' ve y' eksenleri kullanılarak tanımlanacaktır. 4 numaralı kafes sistem çubuğuna ait bir örnek Şekil 14-1*b*'de görülmektedir.

*Büyük kafes sistemler için **K** yapı rijitlik matrisi kullanılarak matris işlemlerinin gerçekleştirilmesi, terimlerinin bir dalga şeklinde numaralandırılması yani yukarıdan aşağıya doğru başlanıp aşağıdan yukarıya doğru devam edilmesi durumunda daha etkilidir.

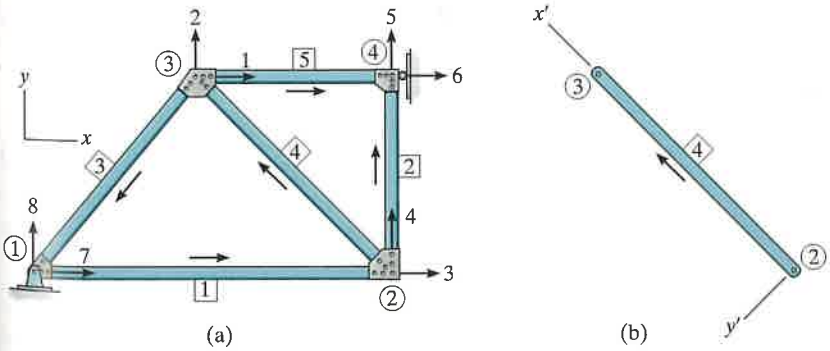
Kinematik Belirsizlik. Altbölüm 11-1'de sözü edildiği gibi, bir kafes sisteme ait tutulmamış serbestlik dereceleri yerdeğiştirme yöntemlerinin temel bilinmeyenlerini gösterir ve dolayısıyla da tanımlanmak durumundadır. Genel bir kural olarak her bir birleşim noktası (düğüm noktası) için iki serbestlik derecesi veya olası iki yerdeğiştirme vardır. Uygulamada bir kafes sistemdeki her bir serbestlik derecesi, birleşim noktası veya düğüm noktasında gösterilen bir yerdeğiştirme numarası kullanılarak belirtilecek ve bir ok kullanılarak pozitif global koordinat doğrultusu ile ilişkilendirilecektir. Örneğin Şekil 14-1*a*'daki kafes sistem, görüldüğü gibi 1'den 8'e kadar olan "yerdeğiştirme numaraları" ile tanımlanan sekiz adet serbestlik derecesine sahiptir. Olası bu sekiz yerdeğiştirmeden dolayı, kafes sistem beşinci dereceden kinematik olarak belirsizdir: 1'den 5'e kadar olanlar bilinmeyen veya ***tutulmamış serbestlik derecelerini***, 6'dan 8'e kadar olanlar ise ***tutulmuş serbestlik derecelerini*** göstermektedir. Kısıtlamalardan dolayı tutulmuş bu yerdeğiştirmeler sıfır olacaktır. Sonraki uygulamalar için, *bilinmeyen yerdeğiştirmeleri (tutulmamış serbestlik derecelerini) tanımlamak için daima en küçük yerdeğiştirme numaraları kullanılacak ve bilinen yerdeğiştirmeleri (tutulmuş serbestlik derecelerini) tanımlamak için de en büyük yerdeğiştirme numaraları kullanılacaktır*. Bu tanımlama yönteminin seçilmesinin nedeni, yapı rijitlik matrisinin sonradan ayrıştırılmasının kolaylığı ile ilişkilidir. Böylelikle bilinmeyen yerdeğiştirmeler doğrudan bulunabilmektedir.

Kafes sistem numaralandırılıp yerdeğiştirme numaraları verildikten sonra **K** yapı rijitlik matrisi oluşturulabilir. Bunun için öncelikle kafes sistemin her bir çubuk elemanına ait **k**′ *eleman rijitlik matrisi* oluşturulmalıdır. Bu matris, çubuk elemana ait yük-yerdeğiştirme bağıntılarını *lokal koordinatlar* cinsinden ifade etmek için kullanılmaktadır. Kafes sisteme ait tüm çubukların aynı doğrultuda olmaması nedeniyle, bu bağıntıları her bir çubuk elemanın lokal x', y' koordinat sisteminden yapı sisteminin global x, y koordinat sistemine dönüştürecek bir yol bulunmalıdır. Bu dönüştürme işlemi, *kuvvet veya yerdeğiştirme dönüşüm matrisleri* kullanılarak yapılabilir. Dönüşüm matrisleri oluşturulduktan sonra eleman rijitlik matrisinin terimleri lokal koordinatlardan global koordinatlara dönüştürülür ve daha sonra da yapı rijitlik matrisini oluşturmak üzere birleştirilir. Daha önce ifade edildiği gibi, **K**'yı kullanarak önce düğüm noktası yerdeğiştirmelerini daha sonra da mesnet tepkilerini ve çubuk kuvvetlerini bulabiliriz. Şimdi bu yöntemin elde edilişi üzerinde duracağız.

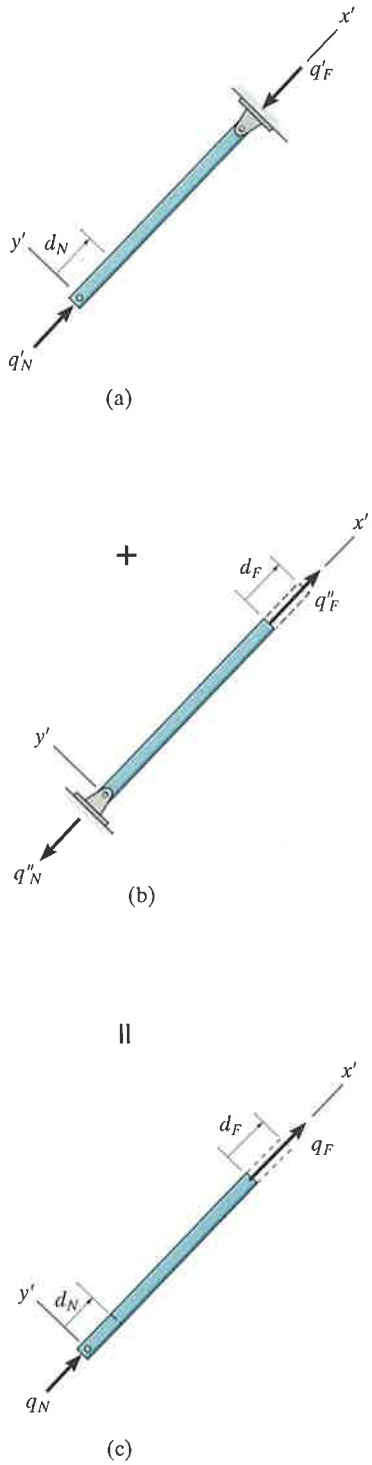


© Bethlehem Steel Corporation

Bu uçak hangarının yapısal çerçevesi, yapının ağırlığını önemli derecede azaltmak üzere tamamen kafesten inşa edilmiştir. (*Bethelem Çelik şirketinin izniyle*)



Şekil 14–1



Şekil 14–2

14.2 Eleman Rijitlik Matrisi

Bu altbölümde tek bir kafes çubuğu için, Şekil 14-2'de görüldüğü gibi yönlenmiş x', y' lokal koordinatlarını kullanarak rijitlik matrisini oluşturmaya çalışacağız. Bu matristeki terimler çubuk elemana dair yük-yerdeğiştirme bağıntılarını göstermektedir.

Yükler çubuk ekseni boyunca etkidiğinden, bir kafes sistem çubuğu sadece kendi ekseni (x' ekseni) doğrultusunda yerdeğiştirme yapabilir. Bu nedenle de olası iki bağımsız yerdeğiştirme söz konusudur. Uzak uç mafsallı olarak tutulurken, çubuk elemanın yakın ucunda pozitif bir d_N yerdeğiştirmesine maruz kalması durumunda (Şekil 14-2a) çubuk uçlarında oluşan kuvvetler,

$$q'_N = \frac{AE}{L} d_N \quad q'_F = -\frac{AE}{L} d_N$$

olarak elde edilir. q'_F, denge gereği negatif x' doğrultusunda etkidiğinden negatiftir. Benzer şekilde yakın uç mafsallı olarak tutulurken uzak uçtaki pozitif bir d_F yerdeğiştirmesi (Şekil 14-2b),

$$q''_N = -\frac{AE}{L} d_F \quad q''_F = \frac{AE}{L} d_F$$

şeklinde gösterilen çubuk kuvvetlerine neden olur. Süperpozisyon ile (Şekil 14-2c), her iki yerdeğiştirmeden kaynaklanan bileşke kuvvetler,

$$q_N = \frac{AE}{L} d_N - \frac{AE}{L} d_F \tag{14–1}$$

$$q_F = -\frac{AE}{L} d_N + \frac{AE}{L} d_F \tag{14–2}$$

olarak belirlenir. Bu yük-yerdeğiştirme bağıntıları matris formda*,

$$\begin{bmatrix} q_N \\ q_F \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_N \\ d_F \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir veya,

$$\boxed{\mathbf{q} = \mathbf{k'd}} \tag{14–3}$$

Burada,

$$\mathbf{k'} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{14–4}$$

Bu $\mathbf{k'}$ matrisi, *eleman rijitlik matrisi* olarak adlandırılır ve kafes sistemin her bir elemanı için aynı yapıya sahiptir. Bu matrisi oluşturan dört terim, *eleman rijitlik etki katsayısı* (k'_{ij}) olarak tanımlanır. Fiziksel olarak k'_{ij}, j düğüm nok-

*Matrisi cebri ile ilgili özet bilgi Ek A'da verilmektedir.

tasına bir *birimlik yerdeğiştirme* verildiğinde i düğüm noktasındaki kuvveti gösterir. Örneğin $i = j = 1$ olması durumunda k'_{11}, uzak düğüm noktası tutulduğunda yakın düğüm noktasındaki kuvveti gösterir ve yakın düğüm noktası $d_N = 1$ kadar bir yerdeğiştirme yapar yani,

$$q_N = k'_{11} = \frac{AE}{L}$$

Benzer şekilde uzak düğüm noktasındaki kuvvet; $i = 2$ ve $j = 1$ alınarak belirlenir. Böylece,

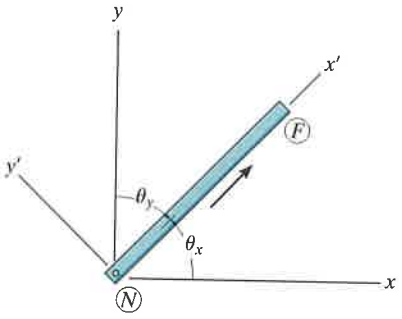
$$q_F = k'_{21} = -\frac{AE}{L}$$

Bu iki terim, eleman rijitlik matrisinin birinci sütununu oluşturmaktadır. Aynı şekilde bu matrisin ikinci sütunu, çubuğun sadece uzak ucunun bir birimlik yerdeğiştirme yapması durumundaki çubuk kuvvetlerini gösterir.

14

14.3 Yerdeğiştirme ve Kuvvet Dönüşüm Matrisleri

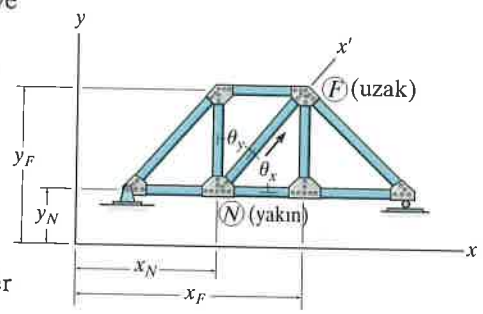
Bir kafes sistem birçok çubuk elemandan oluştuğundan, şimdi lokal koordinatlarda tanımlanan **q** çubuk kuvvetlerini ve **d** yerdeğiştirmelerini global koordinatlara dönüştürmek için kullanılabilecek bir yöntem üzerinde duracağız. Genelde olduğu gibi, global koordinatları pozitif x sağa doğru ve pozitif y yukarıya doğru olacak şekilde göz önüne alacağız. *Pozitif* x, y global eksenleri ile *pozitif* x' lokal ekseni arasındaki en küçük açılar Şekil 14-3'de görüldüğü gibi θ_x ve θ_y ile gösterilecektir. Bu açıların kosinüsleri matris çözümlemesinde $\lambda_x = \cos\theta_x$, $\lambda_y = \cos\theta_y$ şeklinde tanımlanmak suretiyle kullanılacaktır. Çubuk elemanın N yakın ve F uzak uçlarının x, y koordinatları tanımlandıktan sonra λ_x ve λ_y'nin sayısal değerleri bilgisayar yardımıyla kolaylıkla hesaplanabilir. Örneğin Şekil 14-4'de görülen kafes sistemin NF çubuğunu ele alalım. Burada N ve F'nin koordinatları sırasıyla (x_N, y_N) ve (x_F, y_F)'dir.* Böylece,



Şekil 14–3

$$\lambda_x = \cos\theta_x = \frac{x_F - x_N}{L} = \frac{x_F - x_N}{\sqrt{(x_F - x_N)^2 + (y_F - y_N)^2}} \quad (14\text{–}5)$$

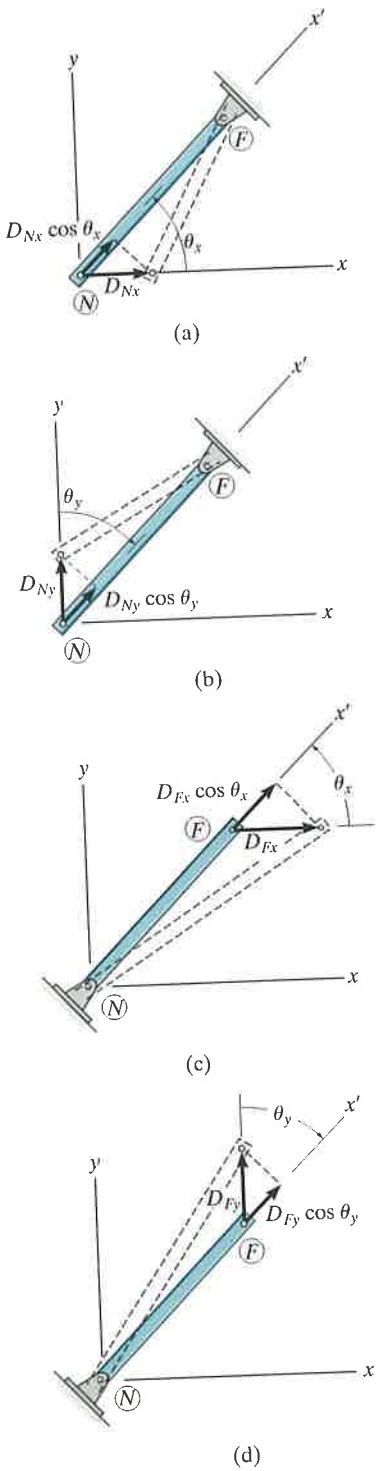
$$\lambda_y = \cos\theta_y = \frac{y_F - y_N}{L} = \frac{y_F - y_N}{\sqrt{(x_F - x_N)^2 + (y_F - y_N)^2}} \quad (14\text{–}6)$$



Şekil 14–4

Bu "genelleştirilmiş" denklemlerdeki cebirsel işaretler, x-y düzleminin diğer çeyreklerinde yönlenmiş olan elemanları doğrudan dikkate almaktadır.

*Orijin herhangi bir uygun noktaya yerleştirilebilir. Ancak genellikle Şekil 14-4'de görüldüğü gibi tüm düğüm noktalarının x, y koordinatlarının *pozitif* olmasını sağlayacak noktaya yerleştirilir.



Şekil 14–5

Yerdeğiştirme Dönüşüm Matrisi. Global koordinatlarda bir kafes çubuğunun her bir ucunun iki serbestlik derecesi veya bağımsız yerdeğiştirmesi olabilir. Örneğin N düğüm noktasının D_{Nx} ve D_{Ny} (Şekil 14-5*a* ve Şekil 14-5*b*) ve F düğüm noktasının D_{Fx} ve D_{Fy} (Şekil 14-5*c* ve Şekil 14-5*d*) yerdeğiştirme bileşenleri söz konusudur. Şimdi bu yerdeğiştirmelerin çubuk elamanı boyunca olan yerdeğiştirme bileşenlerini belirlemek için, söz konusu yerdeğiştirmelerin her biri ayrı ayrı ele alınacaktır. Uzak uç mafsallı olarak tutulurken yakın uca global bir D_{Nx} yerdeğiştirmesi verilmesi durumunda (Şekil 14-5*a*), çubuk boyunca meydan gelen yerdeğiştirme (şekil değiştirme) $D_{Nx}\cos\theta_x$ olur.* Benzer şekilde bir D_{Ny} yerdeğiştirmesi, çubuğun x' ekseni boyunca $D_{Ny}\cos\theta_y$ kadar yer değiştirme yapmasına neden olacaktır, Şekil 14-5*b*. *Her iki* global yerdeğiştirmenin etkisi çubuğun,

$$d_N = D_{Nx}\cos\theta_x + D_{Ny}\cos\theta_y$$

kadar yer değiştirme yapmasına neden olur.

Benzer şekilde yakın uç mafsallı olarak tutulurken, D_{Fx} ve D_{Fy} pozitif yerdeğiştirmelerinin art arda F uzak ucuna uygulanması (Şekil 14-5*c* ve Şekil 14-5*d*) çubuğun,

$$d_F = D_{Fx}\cos\theta_x + D_{Fy}\cos\theta_y$$

kadar yer değiştirme yapmasına neden olur. $\lambda_x = \cos\theta_x$ ve $\lambda_y = \cos\theta_y$ çubuk elemana ait ***doğrultu kosinüslerini*** göstermektedir. Bu durumda,

$$d_N = D_{Nx}\lambda_x + D_{Ny}\lambda_y$$

$$d_F = D_{Fx}\lambda_x + D_{Fy}\lambda_y$$

bağıntısı matris formda aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$\begin{bmatrix} d_N \\ d_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{bmatrix} \tag{14–7}$$

veya

$$\mathbf{d} = \mathbf{TD} \tag{14–8}$$

Burada,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{bmatrix} \tag{14–9}$$

Burada **T**, dört adet global x, y yerdeğiştirmesini (**D**) iki adet lokal x' yerdeğiştirmesine (**d**) dönüştürmektedir. Bundan dolayı **T**, ***yerdeğiştirme dönüşüm matrisi*** olarak adlandırılır.

*θ_x veya θ_y'deki değişim çok küçük olduğundan ihmal edilecektir.

Kuvvet Dönüşüm Matrisi. Şimdi uzak uç mafsallı olarak tutulurken, q_N kuvvetinin çubuk elemanın yakın ucuna uygulandığı durumu ele alalım, Şekil 14-6*a*. Burada q_N'nin N'deki global kuvvet bileşenleri,

$$Q_{Nx} = q_N \cos\theta_x \qquad Q_{Ny} = q_N \cos\theta_y$$

şeklindedir. Benzer şekilde q_F'nin çubuğa uygulanması durumunda (Şekil 14-6*b*) F'deki global kuvvet bileşenleri,

$$Q_{Fx} = q_F \cos\theta_x \qquad Q_{Fy} = q_F \cos\theta_y$$

olarak elde edilir.

$\lambda_x = \cos\theta_x$, $\lambda_y = \cos\theta_y$ doğrultu kosinüsleri kullanıldığında bu denklemler,

$$Q_{Nx} = q_N\lambda_x \qquad Q_{Ny} = q_N\lambda_y$$

$$Q_{Fx} = q_F\lambda_x \qquad Q_{Fy} = q_F\lambda_y$$

şeklini alır ve matris formda aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$\begin{bmatrix} Q_{Nx} \\ Q_{Ny} \\ Q_{Fx} \\ Q_{Fy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ \lambda_y & 0 \\ 0 & \lambda_x \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_N \\ q_F \end{bmatrix} \tag{14–10}$$

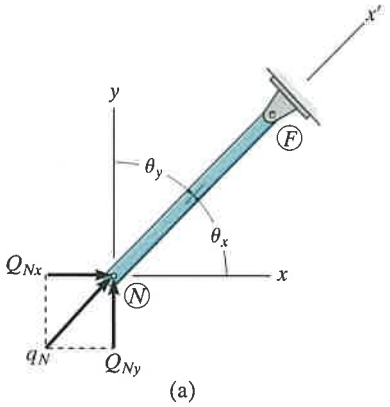
veya

$$\boxed{\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T\mathbf{q}} \tag{14–11}$$

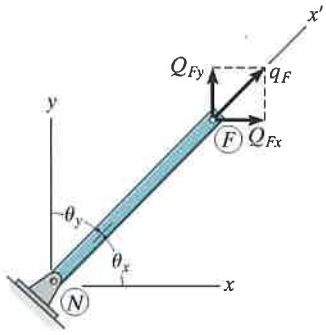
Burada,

$$\mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ \lambda_y & 0 \\ 0 & \lambda_x \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix} \tag{14–12}$$

Bu durumda $\mathbf{T}^T$, çubuk uçlarına etkiyen iki adet lokal (x') $\mathbf{q}$ kuvvetini dört adet global (x, y) $\mathbf{Q}$ kuvvet bileşenine dönüştürmektedir. Karşılaştırıldığında, bu ***kuvvet dönüşüm matrisinin*** yerdeğiştirme dönüşüm matrisinin transpozesi olduğu görülür, Denklem 14-9.



(a)



(b)

Şekil 14–6

14

14.4 Eleman Global Rijitlik Matrisi

Şimdi önceki altbölümlerdeki sonuçları birleştirecek ve bir kafes çubuğunun **Q** global kuvvet bileşenlerini, **D** global yerdeğiştirmelerine ilişkilendiren eleman rijitlik matrisini elde edeceğiz. Denklem 14-8'i (**d = TD**) Denklem 14-3'de (**q = k'd**) yerine yazarsak **q** çubuk kuvvetlerini, çubuk elemanın uç noktalarındaki **D** global yerdeğiştirmeleri cinsinden elde edebiliriz,

$$\mathbf{q} = \mathbf{k'TD} \tag{14–13}$$

Bu denklemin Denklem 14-11'de ($\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T\mathbf{q}$) yerine yazılması aşağıdaki nihai sonucu verir.

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T\mathbf{k'TD}$$

veya

$$\mathbf{Q} = \mathbf{kD} \tag{14–14}$$

Burada,

$$\mathbf{k} = \mathbf{T}^T\mathbf{k'T} \tag{14–15}$$

k matrisi, global koordinatlardaki ***eleman rijitlik matrisidir.*** $\mathbf{T}^T$, **T** ve **k'** bilindiğinden,

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ \lambda_y & 0 \\ 0 & \lambda_x \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix} \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{bmatrix}$$

elde ederiz. Matris işlemleri yapılarak,

$$\mathbf{k} = \frac{AE}{L} \begin{array}{c} \\ N_x \\ N_y \\ F_x \\ F_y \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} N_x & N_y & F_x & F_y \end{array} \\ \begin{bmatrix} \lambda_x^2 & \lambda_x\lambda_y & -\lambda_x^2 & -\lambda_x\lambda_y \\ \lambda_x\lambda_y & \lambda_y^2 & -\lambda_x\lambda_y & -\lambda_y^2 \\ -\lambda_x^2 & -\lambda_x\lambda_y & \lambda_x^2 & \lambda_x\lambda_y \\ -\lambda_x\lambda_y & -\lambda_y^2 & \lambda_x\lambda_y & \lambda_y^2 \end{bmatrix} \end{array} \tag{14–16}$$

bulunur.

Bu 4 × 4 boyutundaki simetrik matristeki her bir terimin *konumu*, önce N yakın uç ve sonra da F uzak uç ile ilgili global serbestlik dereceleri ile ilintilidir. Bu durum, satır ve sütunlar boyunca kullanılan N_x, N_y, F_x, F_y gibi yerdeğiştirme numaraları ile belirtilmektedir. Burada **k**, çubuk uçlarındaki kuvvet ve yerdeğiştirme bileşenlerinin global veya x, y doğrultularında olması durumunda çubuk elemana ait kuvvet-yerdeğiştirme bağıntılarını göstermektedir. Bu nedenle bu matristeki her bir terim, j'de x veya y *birim* yerdeğiştirme bileşeninin meydana gelebilmesi için i'de uygulanması gereken x veya y kuvvet bileşenini gösteren bir $\mathbf{k}_{ij}$ ***rijitlik etki katsayısını*** ifade etmektedir. Sonuç olarak matrisin her bir sütunu; tanımlanan ucun, tekabül eden matris sütunu ile ilgili olarak bir birimlik yerdeğiştirmeye maruz kalması durumunda çubuk uçlarında meydana gelecek dört kuvvet bileşenini göstermektedir. Örneğin bir birimlik $D_{Nx} = 1$ yerdeğiştirmesi, matrisin birinci sütununda gösterilen dört kuvvet bileşenini oluşturacaktır.

14

14.5 Kafes Sistem Rijitlik Matrisi

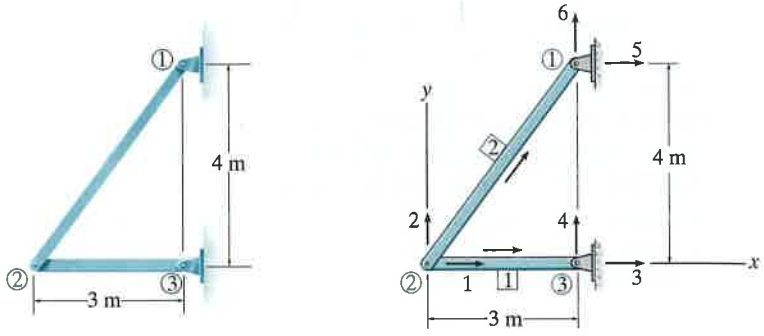


Tüm eleman rijitlik matrisleri global koordinatlarda oluşturulduktan sonra tüm kafes sisteme ait **K** rijitlik matrisinin belirlenebilmesi için, bu matrislerin uygun bir düzende birleştirilmesi gerekir. Eleman matrislerinin birleştirilmesi, her bir eleman matrisindeki terimlerin dikkatli bir şekilde tanımlanmasına bağlıdır. Bu işlem; matrisin satır ve sütunlarını, önceki altbölümde açıklandığı üzere kafes çubuğunun her bir ucundaki olası iki serbestlik derecesini tanımlamak için kullanılan *dört* adet yerdeğiştirme numarası (N_x, N_y, F_x, F_y) ile göstermek suretiyle yapılır (Bkz. Denklem 14-16). Bu durumda yapı sisteminin rijitlik matrisi, kafes sisteme verilen en büyük yerdeğiştirme numarasına eşit bir mertebeye sahip olacaktır. Bu da en büyük yerdeğiştirme numarasının, yapının toplam serbestlik derecesi sayısına karşılık gelmesinden kaynaklanmaktadır. **k** matrisleri birleştirilirken **k**'nın her bir terimi, **K** yapı rijitlik matrisinde kendisine ait *aynı* numaralı satır ve sütuna yerleştirilir. İki veya daha fazla çubuk *aynı* birleşim noktasına veya düğüm noktasına *bağlandığında*, bu çubukların **k** matrislerindeki bazı terimler **K** matrisinde aynı konuma yazılır. Böyle bir durumda ortak konuma yazılan terimler cebirsel olarak toplanır. **k** matrisinin her bir teriminin, çubuk elemanın ucuna uygulanan bir kuvvete karşı gelen eleman direncini gösterdiği dikkate alınırsa bu durumun nedeni anlaşılır hale gelir. Böylelikle, **K** matrisi oluşturulurken bu dirençlerin x veya y doğrultusunda toplanması, her bir düğüm noktasının x veya y doğrultusundaki birim yerdeğiştirmeye karşı gelen *toplam direncini* belirler.

Yapı rijitlik matrisini oluşturmak üzere eleman matrislerinin bu şekilde birleştirilmesi, şimdi iki sayısal örnek ile açıklanacaktır. Bu işlem, elle gerçekleştirilmesi durumunda oldukça yorucu olmasına rağmen bilgisayarda programlaması oldukça kolaydır.

ÖRNEK 14.1

Şekil 14-7*a*'daki iki çubuk elemandan oluşan kafes sistemin rijitlik matrisini oluşturunuz. AE sabittir.



Şekil 14–7

ÇÖZÜM

İncelendiğinde, ① ve ③ düğüm noktaları yerdeğiştirmeye karşı tutulurken, ② düğüm noktasının iki bilinmeyen yerdeğiştirme bileşeninin olduğu görülür. Bu nedenle ② düğüm noktasındaki yerdeğiştirme bileşenlerine ilk yerdeğiştirme numaraları verilmiş, daha sonra da ③ ve ① düğüm noktasındakiler numaralandırılmıştır, Şekil 14-7*b*. Global koordinat sisteminin orijini herhangi bir noktaya yerleştirilebilir. Burada, kolaylık sağlaması açısından şekilde görüldüğü gibi ② düğüm noktası seçilmiştir. Çubuk elemanlar keyfi olarak tanımlanmış ve her bir çubuğun yakın ve uzak uçlarını göstermek için iki çubuk eleman boyunca oklar kullanılmıştır. Artık her bir çubuk eleman için doğrultu kosinüslerini ve rijitlik matrisini belirleyebiliriz.

1 Çubuğu. ② yakın uç ve ③ uzak uç olduğundan Denklem 14-5 ve 14-6'dan,

$$\lambda_x = \frac{3-0}{3} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{0-0}{3} = 0$$

buluruz. Denklem 14-16'daki her bir terimi $L = 3$ m'ye bölerek,

$$\mathbf{k}_1 = AE \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.333 & 0 & -0.333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.333 & 0 & 0.333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

elde ederiz. $\mathbf{k}_1$'in *simetrik* olduğu göz önüne alınarak, hesaplamalar kısmen kontrol edilebilir. $\mathbf{k}_1$'deki satır ve sütunların, önce yakın uçtaki x, y serbestlik dereceleriyle ve sonra da uzak uçtakiler ile tanımlandığına dikkat ediniz; yani 1 çubuğu için sırasıyla 1, 2, 3, 4, Şekil 14-7*b*. Bu işlem, $\mathbf{K}$ matrisi içerisinde daha sonra birleştirilecek olan terimlerin tanımlanması amacıyla yapılmıştır.

2 Çubuğu. ② yakın uç ve ① uzak uç olduğundan,

$$\lambda_x = \frac{3-0}{5} = 0.6 \qquad \lambda_y = \frac{4-0}{5} = 0.8$$

buluruz. Böylece Denklem 14-16'da $L = 5$ m yazılarak,

$$\mathbf{k}_2 = AE \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.072 & 0.096 & -0.072 & -0.096 \\ 0.096 & 0.128 & -0.096 & -0.128 \\ -0.072 & -0.096 & 0.072 & 0.096 \\ -0.096 & -0.128 & 0.096 & 0.128 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

elde edilir. 2 çubuğunun sırasıyla yakın ve uzak uçlarındaki x, y serbestlik derecelerini göstermelerinden dolayı satır ve sütunlar 1, 2, 5, 6 şeklinde tanımlanmıştır.

Yapı Rijitlik Matrisi. Kafes sistem için tanımlanan altı adet serbestlik derecesi olduğundan, bu matris 6 x 6 boyutundadır, Şekil 14-7*b*. Yukarıdaki iki matrisin karşı gelen terimleri yapı rijitlik matrisini oluşturmak üzere cebirsel olarak toplanır. $\mathbf{k}_1$ ve $\mathbf{k}_2$'deki eksik olan sütun ve satırlar, iki adet 6 x 6'lık matris oluşturmak üzere sıfır eklenmek suretiyle genişletilirse birleştirme işlemini görmek daha kolay olacaktır. O halde,

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$$

$$\mathbf{K} = AE \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.333 & 0 & -0.333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.333 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} + AE \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.072 & 0.096 & 0 & 0 & -0.072 & -0.096 \\ 0.096 & 0.128 & 0 & 0 & -0.096 & -0.128 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.072 & -0.096 & 0 & 0 & 0.072 & 0.096 \\ -0.096 & -0.128 & 0 & 0 & 0.096 & 0.128 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

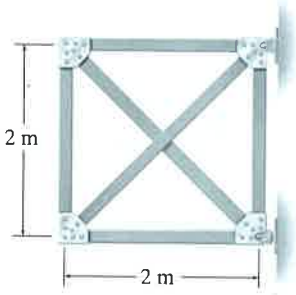
$$\mathbf{K} = AE \begin{bmatrix} 0.405 & 0.096 & -0.333 & 0 & -0.072 & -0.096 \\ 0.096 & 0.128 & 0 & 0 & -0.096 & -0.128 \\ -0.333 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.072 & -0.096 & 0 & 0 & 0.072 & 0.096 \\ -0.096 & -0.128 & 0 & 0 & 0.096 & 0.128 \end{bmatrix}$$

Bu işlem için bilgisayar kullanılması durumunda genellikle **K**'nın tüm terimleri sıfır olacak şekilde başlanır. Daha sonra global koordinatlardaki eleman rijitlik matrisleri oluşturuldukça, eleman rijitlik matrislerinin belirlenip, depolanıp daha sonra da birleştirilmesi yerine, bunlar **K** matrisinde kendilerine ait konumlarına doğrudan yazılır.

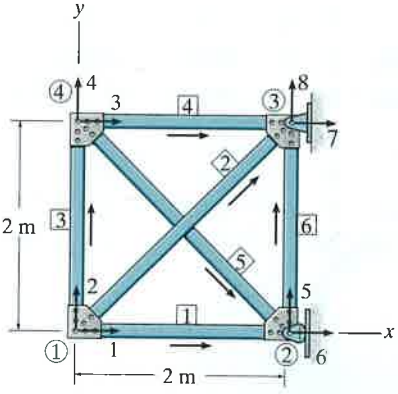
14

ÖRNEK 14.2

Şekil 14-8*a*'da görülen kafes sistemin rijitlik matrisini oluşturunuz. AE sabittir.



(a)



(b)

Şekil 14–8

ÇÖZÜM

Kafes sistem birinci dereceden statikçe belirsiz olmasına rağmen bu durum yapı rijitlik matrisini elde etmek açısından bir zorluk oluşturmayacaktır. Her bir düğüm noktası ve çubuk eleman keyfi bir şekilde sayısal olarak tanımlanmış, yakın ve uzak uçlar çubuk elemanlar boyunca oklarla gösterilmiştir. Şekil 14-8*b*'de görüldüğü gibi öncelikle *tutulmamış yerdeğiştirmeler numaralandırılmıştır.* Kafes sistemin sekiz adet serbestlik derecesi olduğundan, **K** matrisi 8 x 8 boyutunda bir matris olacaktır. Tüm düğüm noktalarına ait koordinatların pozitif olmasını sağlamak üzere global koordinatların orijini ① düğüm noktasında seçilmiştir. Şimdi Denklem 14-5, 14-6 ve 14-7 her bir çubuk elemana uygulanacaktır.

1 Çubuğu. Burada $L = 2$ m olduğundan,

$$\lambda_x = \frac{2-0}{2} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{0-0}{2} = 0$$

$$\mathbf{k}_1 = AE \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 6 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 6 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 6 \\ 5 \end{array}$$

2 Çubuğu. Burada $L = 2\sqrt{2}$ m olduğundan,

$$\lambda_x = \frac{2-0}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \lambda_y = \frac{2-0}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathbf{k}_2 = AE \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.1768 & 0.1768 & -0.1768 & -0.1768 \\ 0.1768 & 0.1768 & -0.1768 & -0.1768 \\ -0.1768 & -0.1768 & 0.1768 & 0.1768 \\ -0.1768 & -0.1768 & 0.1768 & 0.1768 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{array}$$

3 Çubuğu. Burada $L = 2$ m olduğundan,

$$\lambda_x = \frac{0-0}{2} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{2-0}{2} = 1$$

$$\mathbf{k}_3 = AE \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

4 Çubuğu. Burada $L = 2$ m olduğundan,

$$\lambda_x = \frac{2-0}{2} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{2-2}{2} = 0$$

$$\mathbf{k}_4 = AE \begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

5 Çubuğu. Burada $L = 2\sqrt{2}$ m olduğundan,

$$\lambda_x = \frac{2-0}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \lambda_y = \frac{0-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\mathbf{k}_5 = AE \begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 6 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.1768 & -0.1768 & -0.1768 & 0.1768 \\ -0.1768 & 0.1768 & 0.1768 & -0.1768 \\ -0.1768 & 0.1768 & 0.1768 & -0.1768 \\ 0.1768 & -0.1768 & -0.1768 & 0.1768 \end{bmatrix} \end{array}$$

6 Çubuğu. Burada $L = 2$ m olduğundan,

$$\lambda_x = \frac{2-2}{2} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{2-0}{2} = 1$$

$$\mathbf{k}_6 = AE \begin{array}{c} \\ 6 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 6 & 5 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Yapı Rijitlik Matrisi. Şimdi yukarıdaki altı adet matris, karşı gelen terimleri cebirsel olarak toplanmak suretiyle 8 x 8 boyutundaki **K** matrisi içinde birleştirilebilir. Örneğin; $(k_{11})_1 = AE(0.5)$, $(k_{11})_2 = AE(0.1768)$, $(k_{11})_3 = (k_{11})_4 = (k_{11})_5 = (k_{11})_6 = 0$ olduğundan, $K_{11} = AE(0.5 + 0.1768) = AE(0.6768)$, vb. Böylece kafes sistemin rijitlik matrisi,

$$\mathbf{K} = AE \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.6768 & 0.1768 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & -0.1768 & -0.1768 \\ 0.1768 & 0.6768 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & -0.1768 & -0.1768 \\ 0 & 0 & 0.6768 & -0.1768 & 0.1768 & -0.1768 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & -0.1768 & 0.6768 & -0.1768 & 0.1768 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1768 & -0.1768 & 0.6768 & -0.1768 & 0 & -0.5 \\ -0.5 & 0 & -0.1768 & 0.1768 & -0.1768 & 0.6768 & 0 & 0 \\ -0.1768 & -0.1768 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.6768 & 0.1768 \\ -0.1768 & -0.1768 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0.1768 & 0.6768 \end{bmatrix} \end{array}$$

Cevap

şeklinde elde edilir.

14.6 Matris Yerdeğiştirme Yönteminin Kafes Sistemlere Uygulanışı

Yapı rijitlik matrisi oluşturulduktan sonra kafes sisteme etkiyen **Q** global kuvvet bileşenleri **D** global yerdeğiştirmeleri ile,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K}\mathbf{D} \tag{14–17}$$

bağıntısı kullanılarak ilişkilendirilebilir. Bu denklem ***yapı rijitlik denklemi*** olarak adlandırılır. Tutulmamış serbestlik derecelerini tanımlamak için daima en küçük yerdeğiştirme numaraları seçildiğinden, bu durum yukarıdaki denklemin aşağıdaki gibi ayrıştırılmasını sağlar*:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_k \\ \cdots \\ \mathbf{Q}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \vdots & \mathbf{K}_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{K}_{21} & \vdots & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_u \\ \cdots \\ \mathbf{D}_k \end{bmatrix} \tag{14–18}$$

Burada,

$\mathbf{Q}_k, \mathbf{D}_k$ = *bilinen* dış yükler ve yerdeğiştirmeler. Buradaki yükler problemin bir parçası olarak kafes sistem üzerinde bulunmakta ve yerdeğiştirmeler sabit mafsal veya kayıcı mafsal gibi mesnet kısıtlamalarından dolayı genellikle sıfır olarak belirtilmektedir.

$\mathbf{Q}_u, \mathbf{D}_u$ = *bilinmeyen* kuvvetler ve yerdeğiştirmeler. Buradaki kuvvetler bilinmeyen mesnet tepkilerini göstermektedir. Yerdeğiştirmeler ise hareketin belirli bir doğrultuda kısıtlanmadığı düğüm noktalarındadır.

$\mathbf{K}$ = **Q** ve **D**'nin ayrıştırılması ile uyumlu olacak şekilde ayrıştırılan *yapı* rijitlik matrisi.

Denklem 14-18'in açık olarak yazılmasıyla,

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_{11}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{12}\mathbf{D}_k \tag{14–19}$$

$$\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{22}\mathbf{D}_k \tag{14–20}$$

elde edilir. Mesnetler yer değiştirmediğinden genelde $\mathbf{D}_k = \mathbf{0}$'dır. Bu durumda Denklem 14-19,

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_{11}\mathbf{D}_u$$

biçimini alır. Ayrıştırılan $\mathbf{K}_{11}$ matrisindeki terimler; x veya y doğrultusundaki bir birimlik yerdeğiştirmeye karşı gelen bir kafes düğüm noktasındaki *toplam direnci* gösterdiğinden bu durumda yukarıdaki denklem, dış yüklerin sıfır olduğu veya bilinen bir değere ($\mathbf{Q}_k$) sahip olduğu düğüm noktalarına uygulanan tüm *kuvvet denge denklemlerinin* toplamını simgelemektedir. $\mathbf{D}_u$ için çözüm yapıldığında,

$$\mathbf{D}_u = [\mathbf{K}_{11}]^{-1}\mathbf{Q}_k \tag{14–21}$$

elde ederiz. Bu denklemden, bilinmeyen tüm düğüm noktası yerdeğiştirmeleri için doğrudan bir çözüm elde edebiliriz; daha sonra da $\mathbf{D}_k = \mathbf{0}$ alınıp Denklem 14-20 kullanılarak,

$$\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21}\mathbf{D}_u \tag{14–22}$$

elde edilir ki buradan bilinmeyen mesnet tepkileri bulunabilir. Çubuk kuvvetleri ise Denklem 14-13 kullanılarak elde edilebilir,

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}'\mathbf{T}\mathbf{D}$$

*Bu ayrıştırma düzeni takip eden sayısal örneklerle anlaşılır hale gelecektir.

Bu denklemin açık olarak yazılmasıyla,

$$\begin{bmatrix} q_N \\ q_F \end{bmatrix} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Denge gereği $q_N = -q_F$ olduğundan, kuvvetlerden sadece birinin belirlenmesi yeterlidir. Burada çubukta çekmeye neden olan q_F belirlenecektir, Şekil 14-2*c*.

$$q_F = \frac{AE}{L}[-\lambda_x \quad -\lambda_y \quad \lambda_x \quad \lambda_y]\begin{bmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{bmatrix} \tag{14–23}$$

Bu denklem kullanılarak hesaplanan sonuç negatif ise çubuk elemanın basınç etkisinde olduğu anlaşılır.

Çözümde İzlenecek Yol

Aşağıdaki hesap adımları, matris yerdeğiştirme yöntemi kullanılarak bir kafes sistemdeki bilinmeyen yerdeğiştirme ve mesnet tepkilerini hesaplamak için kullanılabilecek bir yöntem ortaya koymaktadır.

Gösterim

- x, y global koordinat sistemi oluşturulur. Orijin, genellikle diğer tüm düğüm noktalarına ait koordinatların pozitif olmasını sağlayacak bir noktaya yerleştirilir.
- Her bir düğüm noktası ve çubuk eleman sayısal olarak tanımlanır ve çubuk boyunca baş tarafı uzak uca doğru gelecek şekilde bir ok yerleştirilerek her bir çubuğun yakın ve uzak uçları simgesel olarak gösterilir. Bu gösterimler keyfi bir şekilde yapılır.
- *En küçük numaralar tutulmamış serbestlik derecelerini, en büyük numaralar ise tutulmuş serbestlik derecelerini* tanımlamak için kullanılarak her bir düğüm noktasında iki yerdeğiştirme numarası tanımlanır.
- Probleme bağlı olarak $\mathbf{D}_k$ ve $\mathbf{Q}_k$ oluşturulur.

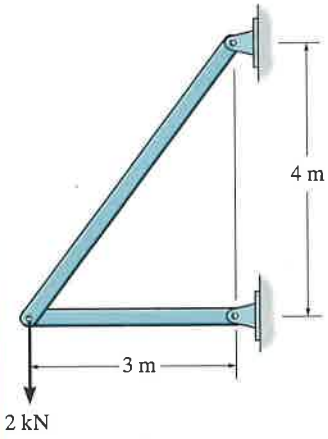
Yapı Rijitlik Matrisi

- Her bir çubuk eleman için; λ_x, λ_y ve Denklem 14-16 kullanılarak eleman rijitlik matrisi belirlenir.
- Altbölüm 14-5'de açıklandığı gibi, bu matrisler birleştirilerek tüm kafes sistem için rijitlik matrisi oluşturulur. Hesaplamaların kısmi bir kontrolü olması açısından, eleman ve yapı rijitlik matrisleri *simetrik* olmalıdır.

Yerdeğiştirmeler ve Kuvvetler

- Yapı rijitlik matrisi, Denklem 14-18 ile gösterildiği şekilde ayrıştırılır.
- Denklem 14-21 ile bilinmeyen düğüm noktası yerdeğiştirmeleri $\mathbf{D}_u$; Denklem 14-22 ile mesnet tepkileri $\mathbf{Q}_u$ ve Denklem 14-23 ile çubuk kuvvetleri $\mathbf{q}_F$ hesaplanır.

ÖRNEK 14.3



(a)

Şekil 14–9

Şekil 14-9*a*'daki iki çubuk elemandan oluşan kafes sistemin çubuk kuvvetlerini hesaplayınız. AE sabittir.

ÇÖZÜM

Gösterim. x, y'nin orijini ile düğüm noktalarının ve çubuk elemanların numaralandırılması Şekil 14-9*b*'de verilmiştir. Ayrıca çubukların yakın ve uzak uçları oklarla gösterilmiş ve her bir düğüm noktasında yerdeğiştirme numaraları tanımlanmıştır. İncelendiğinde, bilinen dış yerdeğiştirmelerin $D_3 = D_4 = D_5 = D_6 = 0$ olduğu görülür. Ayrıca bilinen dış yükler $Q_1 = 0$, $Q_2 = -2$ kN'dur. Böylece,

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \qquad \mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Yapı Rijitlik Matrisi. Bu matris, burada kullanılan gösterimin aynısı kullanılarak Örnek 14-1'de oluşturulmuştu.

Yerdeğiştirmeler ve Kuvvetler. Denklem 14-17 (**Q = KD**) kullanılarak kafes sistem için,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = AE \left[\begin{array}{cc:cccc} 0.405 & 0.096 & -0.333 & 0 & -0.072 & -0.096 \\ 0.096 & 0.128 & 0 & 0 & -0.096 & -0.128 \\ \hdashline -0.333 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.072 & -0.096 & 0 & 0 & 0.072 & 0.096 \\ -0.096 & -0.128 & 0 & 0 & 0.096 & 0.128 \end{array}\right] \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

elde edilir. Bu denklemden $\mathbf{K}_{11}$'i tanımlayabilir ve böylelikle $\mathbf{D}_u$'yu bulabiliriz. Denklem 14-19'daki gibi bir matris çarpımının,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} 0.405 & 0.096 \\ 0.096 & 0.128 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

verdiği görülür. Bu denklemler açık bir şekilde yazılarak çözüm kolaylıkla bulunabilir,

$$0 = AE(0.405D_1 + 0.096D_2)$$

$$-2 = AE(0.096D_1 + 0.128D_2)$$

Bu denklemler, fiziksel olarak ② düğüm noktasına uygulanan $\Sigma F_x = 0$ ve $\Sigma F_y = 0$ denge denklemlerini göstermektedir. Çözüm yapıldığında,

$$D_1 = \frac{4.505}{AE} \qquad D_2 = \frac{-19.003}{AE}$$

elde ederiz. Şekil 14-9*b* incelendiğinde, bu sonuçların pozitif ve negatif işaretlerinden de anlaşılacağı gibi, ② düğüm noktasında sağ tarafa doğru ve aşağıya doğru bir yerdeğiştirme olması aslında beklenen bir durumdur.

Mesnet tepkileri; bu sonuçlar kullanılarak Denklem (1), Denklem 14-20 (veya Denklem 14-22) formunda yazılmak suretiyle,

$$\begin{bmatrix} Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} -0.333 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.072 & -0.096 \\ -0.096 & -0.128 \end{bmatrix} \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} 4.505 \\ -19.003 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Bu denklem sistemi, mesnet tepkileri için açık bir şekilde yazılır ve çözülürse,

$$Q_3 = -0.333(4.505) = -1.5 \text{ kN}$$

$$Q_4 = 0$$

$$Q_5 = -0.072(4.505) - 0.096(-19.003) = 1.5 \text{ kN}$$

$$Q_6 = -0.096(4.505) - 0.128(-19.003) = 2.0 \text{ kN}$$

bulunur.

Çubuk kuvvetleri Denklem 14-23'den hesaplanabilir. λ_x ve λ_y için Örnek 14-1'deki verileri kullanarak,

1 Çubuğu: $\lambda_x = 1, \lambda_y = 0, L = 3$ m

$$q_1 = \frac{AE}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} 4.505 \\ -19.003 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

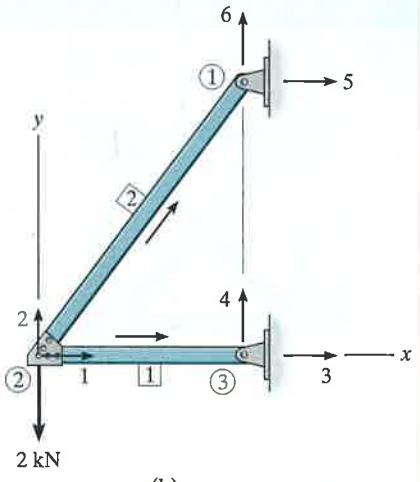
$$= \frac{1}{3}[-4.505] = -1.5 \text{ kN} \qquad \textit{Cevap}$$

2 Çubuğu: $\lambda_x = 0.6, \lambda_y = 0.8, L = 5$ m

$$q_2 = \frac{AE}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ -0.6 & -0.8 & 0.6 & 0.8 \end{bmatrix} \frac{1}{AE} \begin{bmatrix} 4.505 \\ -19.003 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{5}[-0.6(4.505) - 0.8(-19.003)] = 2.5 \text{ kN} \qquad \textit{Cevap}$$

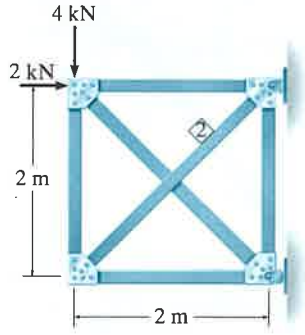
elde ederiz. Bu sonuçlar ② düğüm noktasında yazılacak denge denklemleri ile doğrulanabilir.



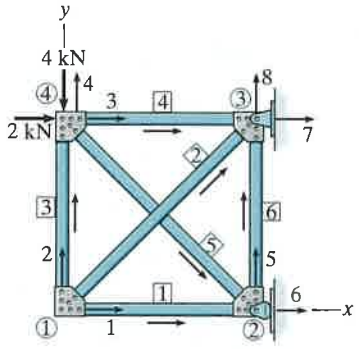
(b)

14

ÖRNEK 14.4



(a)



(b)

Şekil 14–10

Şekil 14-10*a*'da görülen kafes sistemin mesnet tepkilerini ve 2 numaralı elemanın çubuk kuvvetini hesaplayınız. AE sabittir.

ÇÖZÜM

Gösterim. Düğüm noktaları ile çubuk elemanlar numaralandırılmış ve x, y eksenlerinin orijini ①'de oluşturulmuştur, Şekil 14-10*b*. Ayrıca her bir çubuk elemanın yakın ve uzak uçlarını göstermek için oklar kullanılmıştır. Yerdeğiştirme numaraları, en küçük numaralar tutulmamış serbestlik derecelerini gösterecek şekilde yazılırsa (Şekil 14-10*b*),

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \qquad \mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

elde ederiz.

Yapı Rijitlik Matrisi. Şekil 14-10*b*'deki aynı gösterim kullanılarak bu matris Örnek 14-2'de oluşturulmuştu.

Yerdeğiştirmeler ve Kuvvetler. Bu problem için **Q = KD**,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \\ \hdashline Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} = AE \left[\begin{array}{ccccc:ccc} 0.6768 & 0.1768 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & -0.1768 & -0.1768 \\ 0.1768 & 0.6768 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & -0.1768 & -0.1768 \\ 0 & 0 & 0.6768 & -0.1768 & 0.1768 & -0.1768 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & -0.1768 & 0.6768 & -0.1768 & 0.1768 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1768 & -0.1768 & 0.6768 & -0.1768 & 0 & -0.5 \\ \hdashline -0.5 & 0 & -0.1768 & 0.1768 & -0.1768 & 0.6768 & 0 & 0 \\ -0.1768 & -0.1768 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.6768 & 0.1768 \\ -0.1768 & -0.1768 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0.1768 & 0.6768 \end{array}\right] \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

şeklinde yazılabilir. Bilinmeyen yerdeğiştirme denklemi 14-19'u formüle etmek üzere çarpım yapılarak,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} 0.6768 & 0.1768 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1768 & 0.6768 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6768 & -0.1768 & 0.1768 \\ 0 & -0.5 & -0.1768 & 0.6768 & -0.1768 \\ 0 & 0 & 0.1768 & -0.1768 & 0.6768 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu denklem sistemi, yerdeğiştirmeler için açık bir şekilde yazılır ve çözülürse,

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{bmatrix} = \frac{1}{AE}\begin{bmatrix} 3.5859 \\ -13.7279 \\ -0.4142 \\ -17.3137 \\ -4.4142 \end{bmatrix}$$

bulunur. Denklem (1), hesaplanan sonuçlara bağlı olarak Denklem 14-20 formunda yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} = AE\begin{bmatrix} -0.5 & 0 & -0.1768 & 0.1768 & -0.1768 \\ -0.1768 & -0.1768 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.1768 & -0.1768 & 0 & 0 & -0.5 \end{bmatrix}\frac{1}{AE}\begin{bmatrix} 3.5859 \\ -13.7279 \\ -0.4142 \\ -17.3137 \\ -4.4142 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

elde ederiz. Bu denklem sistemi, mesnet tepkileri için açık bir şekilde yazılır ve çözülürse,

$$Q_6 = -4.00 \text{ kN} \qquad \textit{Cevap}$$

$$Q_7 = 2.00 \text{ kN} \qquad \textit{Cevap}$$

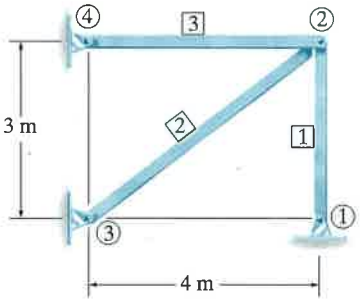
$$Q_8 = 4.00 \text{ kN} \qquad \textit{Cevap}$$

elde edilir. Q_6 için negatif işaret, kayıcı mafsallı mesnet tepkisinin negatif x doğrultusunda etkidiğini göstermektedir. Örnek 14-2'den; $\lambda_x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\lambda_y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $L = 2\sqrt{2}$ m alınarak 2 numaralı elemana ait çubuk kuvveti Denklem 14-23'den bulunabilir. Böylece,

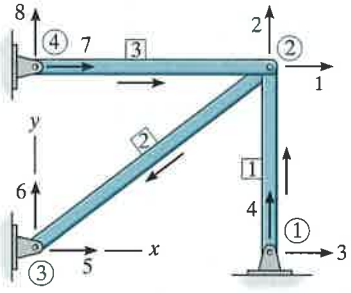
$$q_2 = \frac{AE}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\frac{1}{AE}\begin{bmatrix} 3.5859 \\ -13.7279 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= 2.54 \text{ kN} \qquad \textit{Cevap}$$

ÖRNEK 14.5



(a)



(b)

Şekil 14–11

① düğüm noktasındaki mesnedin *aşağıya doğru* 25 mm çökme yapması durumunda Şekil 14-11*a*'daki birleşimin 2 numaralı elemanındaki çubuk kuvvetini hesaplayınız. $AE = 8(10^3)$ kN alınız.

ÇÖZÜM

Gösterim. Kolaylık sağlaması açısından, Şekil 14-11*b*'deki global koordinatların orijini ③ düğüm noktasında oluşturulmuş ve her zamanki gibi en küçük yerdeğiştirme numaraları tutulmamış serbestlik derecelerini tanımlamak için kullanılmıştır. Böylece,

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.025 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \qquad \mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

Yapı Rijitlik Matrisi. Denklem 14-16 kullanılarak,

1 Çubuğu: $\lambda_x = 0, \lambda_y = 1, L = 3$ m olduğundan,

$$\mathbf{k}_1 = AE \begin{matrix} \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 3 & 4 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.333 & 0 & -0.333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.333 & 0 & 0.333 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

2 Çubuğu: $\lambda_x = -0.8, \lambda_y = -0.6, L = 5$ m olduğundan,

$$\mathbf{k}_2 = AE \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.128 & 0.096 & -0.128 & -0.096 \\ 0.096 & 0.072 & -0.096 & -0.072 \\ -0.128 & -0.096 & 0.128 & 0.096 \\ -0.096 & -0.072 & 0.096 & 0.072 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

3 Çubuğu: $\lambda_x = 1, \lambda_y = 0, L = 4$ m olduğundan,

$$\mathbf{k}_3 = AE \begin{matrix} \\ 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 7 & 8 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{matrix}$$

elde edilir. Bu matrisler birleştirilerek yapı rijitlik matrisi,

$$\mathbf{K} = AE \begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0.378 & 0.096 & 0 & 0 & -0.128 & -0.096 & -0.25 & 0 \\ 0.096 & 0.405 & 0 & -0.333 & -0.096 & -0.072 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.333 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.128 & -0.096 & 0 & 0 & 0.128 & 0.096 & 0 & 0 \\ -0.096 & -0.072 & 0 & 0 & 0.096 & 0.072 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

şeklinde bulunur.

Yerdeğiştirmeler ve Kuvvetler. Burada $\mathbf{Q} = \mathbf{KD}$ bağıntısına bağlı olarak,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hdashline Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} = AE \left[\begin{array}{cc:cccccc} 0.378 & 0.096 & 0 & 0 & -0.128 & -0.096 & -0.25 & 0 \\ 0.096 & 0.405 & 0 & -0.333 & -0.096 & -0.072 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.333 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.128 & -0.096 & 0 & 0 & 0.128 & 0.096 & 0 & 0 \\ -0.096 & -0.072 & 0 & 0 & 0.096 & 0.072 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \hdashline 0 \\ -0.025 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

yazılır. Yerdeğiştirmeler için çözüm geliştirilerek (Denklem 14-19),

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} 0.378 & 0.096 \\ 0.096 & 0.405 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} + AE \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.128 & -0.096 & -0.25 & 0 \\ 0 & -0.333 & -0.096 & -0.072 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -0.025 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan,

$$0 = AE\left[(0.378D_1 + 0.096D_2) + 0\right]$$

$$0 = AE\left[(0.096D_1 + 0.405D_2) + 0.00833\right]$$

bulunur. Bu denklem sistemi çözülerek,

$$D_1 = 0.00556 \text{ m}$$

$$D_2 = -0.021875 \text{ m}$$

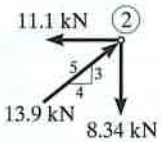
elde edilir. Mesnet tepkilerinin hesaplanması gerekmese de ihtiyaç duyulması durumunda bunlar Denklem 14-20 ile tanımlanan açılım ile bulunabilir. 2 numaralı elemandaki çubuk kuvvetini bulmak için Denklem 14-23'ün kullanılması durumunda,

2 Çubuğu: $\lambda_x = -0.8$, $\lambda_y = -0.6$, $L = 5$ m, $AE = 8(10^3)$ kN olduğundan,

$$q_2 = \frac{8(10^3)}{5}[0.8 \quad 0.6 \quad -0.8 \quad -0.6] \begin{bmatrix} 0.00556 \\ -0.021875 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{8(10^3)}{5}(0.00444 - 0.0131) = -13.9 \text{ kN} \qquad \textit{Cevap}$$

Aynı yaklaşımı kullanarak 1 numaralı elemandaki çubuk kuvvetinin $q_1 = 8.34$ kN ve 3 numaralı elemandakinin $q_3 = 11.1$ kN olduğunu gösteriniz. Sonuçlar ② düğüm noktasının serbest cisim diyagramında gösterilmiştir ki (Şekil 14-11c) bu kuvvetlerin dengede olduğunun kontrolü yapılabilir.



(c)

14.7 Noktasal Koordinatlar

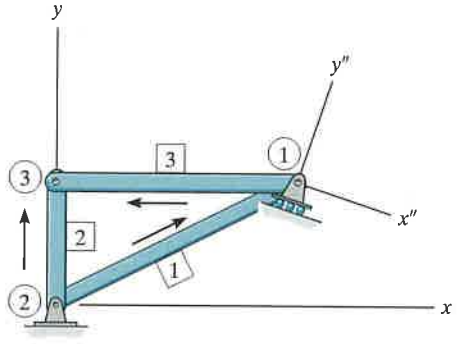
Bazen bir kafes sistem *eğimli* bir yüzey üzerine yerleştirilen kayıcı bir mafsalla mesnetlenebilir ve bu durumda mesnetteki (düğüm noktasındaki) sıfır yerdeğiştirme koşulunu, yatay ve düşey doğrultuda kullanılacak tek bir global koordinat sistemi ile doğrudan tanımlamak *mümkün olmaz*. Örneğin Şekil 14-12*a*'daki kafes sistemi ele alalım. ① düğüm noktasındaki sıfır yerdeğiştirme koşulu ancak y'' ekseni boyunca tanımlanabilir ve kayıcı mafsal x'' ekseni boyunca yer değiştirebildiğinden, bu düğüm noktasının *her iki* global koordinat ekseni (x, y) boyunca yerdeğiştirme *bileşenleri* olacaktır. Bu nedenle kafes sistem için global rijitlik matrisini x, y eksenlerini kullanarak yazarken, matris çözümlemesinde bazı değişiklikler yapmadan bu düğüm noktasındaki sıfır yerdeğiştirme koşulunu hesaba katamayız.

Bilgisayar çözümlemesine kolayca dâhil edilebilecek şekilde bu problemi çözebilmek için, eğimli mesnette konumlandırılmış bir x'', y'' ***noktasal koordinat*** sistemi kullanılacaktır. Bu eksenler; mesnet tepkileri ve mesnet yerdeğiştirmeleri her bir koordinat ekseni boyunca olacak şekilde yönlendirilir, Şekil 14-12*a*. Bu durumda kafes sisteme ait global rijitlik denklemini belirleyebilmek için, bu mesnede bağlanan her bir çubuk eleman için kuvvet ve yerdeğiştirme dönüşüm matrislerinin oluşturulması gerekir. Böylece sonuçlar aynı x, y global koordinat sistemi içinde toplanabilir. Bu işlemin nasıl yapılacağını göstermek için, Ⓝ yakın düğüm noktasında x, y global koordinat sistemine ve Ⓕ uzak düğüm noktasında x'', y'' noktasal koordinat sistemine sahip Şekil 14-12*b*'deki 1 numaralı kafes çubuğunu dikkate alalım. Şekil 14-12*c*'de görüldüğü gibi bu eksenler boyunca bileşenleri olacak şekilde **D** yerdeğiştirmeleri meydana geldiğinde, çubuk uçları boyunca x' doğrultusundaki **d** yerdeğiştirmeleri,

$$d_N = D_{Nx} \cos \theta_x + D_{Ny} \cos \theta_y$$

$$d_F = D_{Fx''} \cos \theta_{x''} + D_{Fy''} \cos \theta_{y''}$$

şeklinde elde edilir.



(a)

Şekil 14–12

Bu denklemler matris formda,

$$\begin{bmatrix} d_N \\ d_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{x''} & \lambda_{y''} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx''} \\ D_{Fy''} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde çubuğun yakın ve uzak uçlarındaki **q** kuvvetlerinin (Şekil 14-12*d*) global eksenler boyunca,

$$Q_{Nx} = q_N \cos\theta_x \qquad Q_{Ny} = q_N \cos\theta_y$$

$$Q_{Fx''} = q_F \cos\theta_{x''} \qquad Q_{Fy''} = q_F \cos\theta_{y''}$$

bileşenleri (**Q**) vardır. Bu denklemler,

$$\begin{bmatrix} Q_{Nx} \\ Q_{Ny} \\ Q_{Fx''} \\ Q_{Fy''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ \lambda_y & 0 \\ 0 & \lambda_{x''} \\ 0 & \lambda_{y''} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_N \\ q_F \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Bu durum için eleman rijitlik matrisi, yukarıda verilen denklemlerdeki yerdeğiştirme ve kuvvet dönüşüm matrisleri kullanılarak elde edilebilir. Denklem 14-5 kullanılarak,

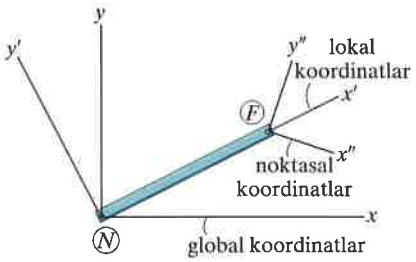
$$\mathbf{k} = \mathbf{T}^T\mathbf{k}'\mathbf{T}$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ \lambda_y & 0 \\ 0 & \lambda_{x''} \\ 0 & \lambda_{y''} \end{bmatrix} \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{x''} & \lambda_{y''} \end{bmatrix}$$

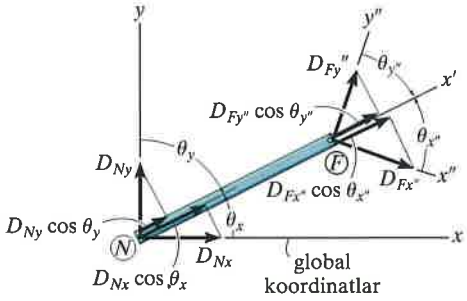
elde edilir. Matris işlemleri sonucunda,

$$\mathbf{k} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} \lambda_x^2 & \lambda_x\lambda_y & -\lambda_x\lambda_{x''} & -\lambda_x\lambda_{y''} \\ \lambda_x\lambda_y & \lambda_y^2 & -\lambda_y\lambda_{x''} & -\lambda_y\lambda_{y''} \\ -\lambda_x\lambda_{x''} & -\lambda_y\lambda_{x''} & \lambda_{x''}^2 & \lambda_{x''}\lambda_{y''} \\ -\lambda_x\lambda_{y''} & -\lambda_y\lambda_{y''} & \lambda_{x''}\lambda_{y''} & \lambda_{y''}^2 \end{bmatrix} \qquad (14\text{–}24)$$

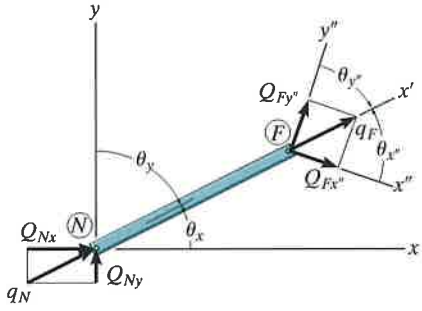
bulunur. Bu rijitlik matrisi, eğimli bir yüzeydeki kayıcı mafsallı mesnede bağlanan her bir kafes çubuğu için kullanılabilir. Yapı rijitlik matrisini oluşturmak üzere matrislerin birleştirilme işlemi ise daha önce açıklandığı gibi yapılır. Bir sonraki örnek problem bu durumun uygulanışını göstermektedir.



(b)



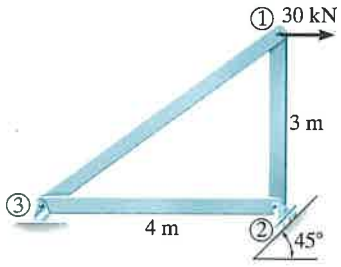
(c)



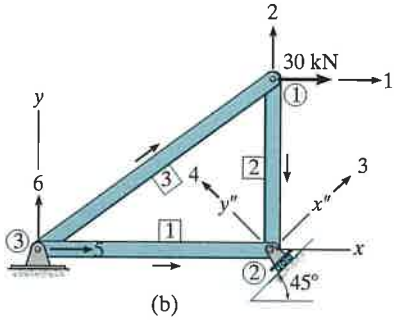
(d)

ÖRNEK 14.6

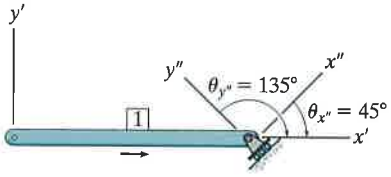
Şekil 14-13*a*'da görülen kafes sistemin mesnet tepkilerini hesaplayınız.



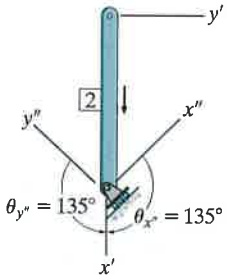
(a)



(b)



(c)



(d)

Şekil 14–13

ÇÖZÜM

Gösterim. ②'deki kayıcı mafsallı mesnet eğimli bir yüzeyde bulunduğundan, bu düğüm noktasında noktasal koordinatlar kullanılmalıdır. Düğüm noktaları ile çubuk elemanlar numaralandırılmış ve global x, y eksenleri ③ düğüm noktasında oluşturulmuştur, Şekil 14-13*b*. $D_4 = 0$ koşulunu kullanabilmek için, 3 ve 4 numaralı yerdeğiştirmelerin x'', y'' eksenleri boyunca tanımlandığına dikkat ediniz.

Eleman Rijitlik Matrisleri. 1 ve 2 çubuklarının global ve noktasal eksen doğrultularında yerdeğiştirme bileşenleri olacağından, bu çubuklar için rijitlik matrisleri Denklem 14-24 kullanılarak oluşturulmalıdır. 3 çubuğu için rijitlik matrisi her zamanki gibi belirlenebilir.

1 Çubuğu. Şekil 14-13*c*, $\lambda_x = 1$, $\lambda_y = 0$, $\lambda_{x''} = 0.707$, $\lambda_{y''} = -0.707$

$$\mathbf{k}_1 = AE \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 & 4 & \\ 0.25 & 0 & -0.17675 & 0.17675 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ -0.17675 & 0 & 0.125 & -0.125 & 3 \\ 0.17675 & 0 & -0.125 & 0.125 & 4 \end{bmatrix}$$

2 Çubuğu. Şekil 14-13*d*, $\lambda_x = 0$, $\lambda_y = -1$, $\lambda_{x''} = -0.707$, $\lambda_{y''} = -0.707$

$$\mathbf{k}_2 = AE \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.3333 & -0.2357 & -0.2357 & 2 \\ 0 & -0.2357 & 0.1667 & 0.1667 & 3 \\ 0 & -0.2357 & 0.1667 & 0.1667 & 4 \end{bmatrix}$$

3 Çubuğu. $\lambda_x = 0.8$, $\lambda_y = 0.6$

$$\mathbf{k}_3 = AE \begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 & 2 & \\ 0.128 & 0.096 & -0.128 & -0.096 & 5 \\ 0.096 & 0.072 & -0.096 & -0.072 & 6 \\ -0.128 & -0.096 & 0.128 & 0.096 & 1 \\ -0.096 & -0.072 & 0.096 & 0.072 & 2 \end{bmatrix}$$

Yapı Rijitlik Matrisi. Yapı rijitlik matrisini oluşturmak üzere bu matrisler birleştirilerek,

$$\begin{bmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = AE \left[\begin{array}{ccc:ccc} 0.128 & 0.096 & 0 & 0 & -0.128 & -0.096 \\ 0.096 & 0.4053 & -0.2357 & -0.2357 & -0.096 & -0.072 \\ 0 & -0.2357 & 0.2917 & 0.0417 & -0.17675 & 0 \\ \hdashline 0 & -0.2357 & 0.0417 & 0.2917 & 0.17675 & 0 \\ -0.128 & -0.096 & -0.17675 & 0.17675 & 0.378 & 0.096 \\ -0.096 & -0.072 & 0 & 0 & 0.096 & 0.072 \end{array}\right] \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

elde edilir. Üç bilinmeyen yerdeğiştirme (**D**), ayrıştırılan üst matrislerin matris çarpımları yapılarak elde edilen denklem sisteminin çözümünden bulunabilir,

$$D_1 = \frac{352.5}{AE}$$

$$D_2 = \frac{-157.5}{AE}$$

$$D_3 = \frac{-127.3}{AE}$$

Q bilinmeyen mesnet tepkileri, Denklem (1)'deki ayrıştırılmış alt matrislerin çarpımından elde edilir. Hesaplanan yerdeğiştirmeler kullanılarak,

$$Q_4 = 0(352.5) - 0.2357(-157.5) + 0.0417(-127.3)$$
$$= 31.8 \text{ kN} \qquad \textit{Cevap}$$

$$Q_5 = -0.128(352.5) - 0.096(-157.5) - 0.17675\,(-127.3)$$
$$= -7.5 \text{ kN} \qquad \textit{Cevap}$$

$$Q_6 = -0.096(352.5) - 0.072(-157.5) + 0(-127.3)$$
$$= -22.5 \text{ kN} \qquad \textit{Cevap}$$

elde edilir.

14

14

14.8 Sıcaklık Değişimi ve İmalat Hataları Etkisindeki Kafes Sistemler

Eğer bir kafes sistemin bazı çubukları, sıcaklık değişimi veya imalat hatalarından dolayı uzunluklarında bir artış veya azalmaya maruz kalırsa bu durumda çözüme ulaşmak için süperpozisyon yöntemini kullanmak gerekir. Bu işlem üç adımda gerçekleştirilir. İlk olarak, sıcaklık veya imalattan dolayı düğüm noktalarının hareketlerini *engellemek* için gerekli olan ankastrelik uç kuvvetleri hesaplanır. İkinci olarak, bu kuvvetler kafes sistem düğüm noktalarına eşit fakat ters yönlerde uygulanır ve matris çözümlemesi kullanılarak düğüm noktalarının yerdeğiştirmeleri hesaplanır. Son olarak da bu iki sonuç süperpoze edilerek gerçek çubuk kuvvetleri ile kafes sisteme ait mesnet tepkileri bulunur. Böyle bir yöntemin, sadece kafes sistemin statikçe belirsiz olması durumunda gerekli olduğu açıktır. Kafes sistemin statikçe belirli olması durumunda da düğüm noktalarındaki yerdeğiştirmeler bu yöntemle bulunabilir. Ancak kafes sistem; sıcaklık değişimleri ve imalat hatalarından kaynaklanan uzunluk değişimlerine adapte olmakta serbest olduğundan, bu etkilerin mesnet tepkileri ve çubuk kuvvetleri üzerinde bir tesiri olmayacaktır.

Sıcaklık Etkileri. L uzunluğundaki bir kafes çubuğunun ΔT sıcaklık artışına maruz kalması durumunda çubuk uzunluğunda $\Delta L = \alpha \Delta T L$ kadar bir artış meydana gelecektir. Burada α ısıl genleşme katsayısıdır. Çubuğa uygulanan bir q_0 basınç kuvveti, çubuk uzunluğunda $\Delta L' = q_0 L/AE$ kadar bir azalmaya neden olacaktır. Bu iki yerdeğiştirmeyi eşitlememiz durumunda $q_0 = AE\alpha\Delta T$ olur. Bu kuvvet, Şekil 14-14'de görüldüğü gibi çubuk elemana ait düğüm noktalarını ankastre konumda tutacağından,

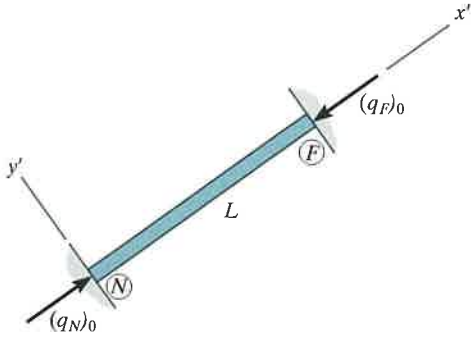
$$(q_N)_0 = AE\alpha\Delta T$$

$$(q_F)_0 = -AE\alpha\Delta T$$

elde edilir. Bir sıcaklık azalması meydana gelmesi durumunda ΔT'nin negatif olacağına ve bu kuvvetlerin çubuk elemanı dengede tutmak üzere yön değiştireceğine dikkat ediniz.

Bu iki kuvveti, Denklem 14-10'u kullanarak global koordinatlara aşağıdaki gibi dönüştürebiliriz,

$$\begin{bmatrix} (Q_{Nx})_0 \\ (Q_{Ny})_0 \\ (Q_{Fx})_0 \\ (Q_{Fy})_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ \lambda_y & 0 \\ 0 & \lambda_x \\ 0 & \lambda_y \end{bmatrix} AE\alpha\Delta T \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = AE\alpha\Delta T \begin{bmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \\ -\lambda_x \\ -\lambda_y \end{bmatrix} \qquad (14\text{–}25)$$



Şekil 14–14

İmalat Hataları. Bir kafes çubuğunun, kafes sisteme yerleştirilmeden önce ΔL kadar daha uzun üretilmesi durumunda, çubuğu L tasarım uzunluğunda tutmak için gerekli olan q_0 kuvveti, $q_0 = AE\Delta L/L$ olacaktır. Böylece Şekil 14-14'deki çubuk eleman için,

$$(q_N)_0 = \frac{AE\Delta L}{L}$$

$$(q_F)_0 = -\frac{AE\Delta L}{L}$$

elde ederiz.

Eğer bir çubuk eleman gerektiğinden daha kısa olarak üretilmişse bu durumda ΔL negatif olacak ve bu kuvvetler yön değiştirecektir.

Bu kuvvetler global koordinatlarda,

$$\begin{bmatrix} (Q_{Nx})_0 \\ (Q_{Ny})_0 \\ (Q_{Fx})_0 \\ (Q_{Fy})_0 \end{bmatrix} = \frac{AE\Delta L}{L} \begin{bmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \\ -\lambda_x \\ -\lambda_y \end{bmatrix} \tag{14–26}$$

olarak elde edilir.

Matris Çözümleme. Kafes sistemin; dış yükler, sıcaklık değişimleri ve imalat hatalarına maruz kaldığı genel durumda, kafes sistem için başlangıç kuvvet-yerdeğiştirme bağıntısı,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{KD} + \mathbf{Q}_0 \tag{14–27}$$

şeklinde yazılır. Burada $\mathbf{Q}_0$, tüm kafes sistem için çubuk elemanların Denklem 14-25 ve 14-26 ile tanımlanan sıcaklık değişimi ve imalat hatalarından kaynaklanan başlangıç ankastrelik uç kuvvetlerine ait bir sütun matristir. Bu denklemi aşağıdaki şekilde ayrıştırabiliriz,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_k \\ \cdots \\ \mathbf{Q}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \vdots & \mathbf{K}_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{K}_{21} & \vdots & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_u \\ \cdots \\ \mathbf{D}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathbf{Q}_k)_0 \\ \cdots \\ (\mathbf{Q}_u)_0 \end{bmatrix}$$

Çarpma işlemi yapılarak,

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_{11}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{12}\mathbf{D}_k + (\mathbf{Q}_k)_0 \tag{14–28}$$

$$\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{22}\mathbf{D}_k + (\mathbf{Q}_u)_0 \tag{14–29}$$

elde edilir. Yukarıda açıklanan süperpozisyon yöntemine göre $\mathbf{D}_u$ bilinmeyen yerdeğiştirmeleri, $\mathbf{K}_{12}\mathbf{D}_k$ ve $(\mathbf{Q}_k)_0$ her iki taraftan çıkarılarak ve daha sonra $\mathbf{D}_u$ için çözüm yapılarak birinci denklemden aşağıdaki gibi bulunur,

$$\mathbf{D}_u = \mathbf{K}_{11}^{-1}(\mathbf{Q}_k - \mathbf{K}_{12}\mathbf{D}_k - (\mathbf{Q}_k)_0)$$

Bu noktasal yerdeğiştirmeler elde edildikten sonra çubuk kuvvetleri süperpozisyon ile aşağıdaki gibi belirlenir,

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}'\mathbf{TD} + \mathbf{q}_0$$

Bu denklemin, çubuğun uzak ucundaki kuvveti belirlemek üzere açık bir şekilde yazılması durumunda,

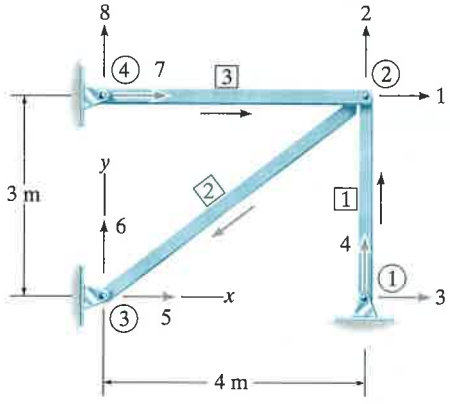
$$q_F = \frac{AE}{L}[-\lambda_x \quad -\lambda_y \quad \lambda_x \quad \lambda_y] \begin{bmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \end{bmatrix} + (q_F)_0 \tag{14–30}$$

elde edilir. Bu sonuç, daha önce tanımlandığı gibi sıcaklık değişimleri ve/veya imalat hatalarından kaynaklanan çubuk elemana ait başlangıç ankastrelik uç kuvvetini gösteren $(q_F)_0$ ek terimi hariç, Denklem 14-23 ile aynıdır. Bu denklemden bulunan sonucun negatif olması durumunda, çubuk elemanın basınç etkisinde olacağını aklınızda bulundurunuz.

Sonraki iki örnek bu yöntemin uygulanışını göstermektedir.

ÖRNEK 14.7

2 numaralı çubuk elemanı, yerine yerleştirilmeden önce 0.01 m daha kısa olarak üretilmişse Şekil 14-15'deki mafsallı birleşimin 1 ve 2 numaralı elemanlarına ait çubuk kuvvetlerini hesaplayınız. $AE = 8(10^3)$ kN alınız.



Şekil 14–15

ÇÖZÜM

Çubuk eleman kısa olduğundan ΔL = -0.01 m olur ve bu nedenle de λ_x = -0.8, λ_y = -0.6 alınmak suretiyle 2 numaralı çubuğa Denklem 14-26 uygulanarak,

$$\begin{bmatrix} (Q_1)_0 \\ (Q_2)_0 \\ (Q_5)_0 \\ (Q_6)_0 \end{bmatrix} = \frac{AE(-0.01)}{5} \begin{bmatrix} -0.8 \\ -0.6 \\ 0.8 \\ 0.6 \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} 0.0016 \\ 0.0012 \\ -0.0016 \\ -0.0012 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

elde edilir. Bu birleşim için yapı rijitlik matrisi Örnek 14-5'de oluşturulmuştu. Denklem 14-27'yi uygulayarak,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hdashline Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} = AE \left[\begin{array}{cc:cccccc} 0.378 & 0.096 & 0 & 0 & -0.128 & -0.096 & -0.25 & 0 \\ 0.096 & 0.405 & 0 & -0.333 & -0.096 & -0.072 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.333 & 0 & 0.333 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.128 & -0.096 & 0 & 0 & 0.128 & 0.096 & 0 & 0 \\ -0.096 & -0.072 & 0 & 0 & 0.096 & 0.072 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + AE \begin{bmatrix} 0.0016 \\ 0.0012 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ -0.0016 \\ -0.0012 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

elde ederiz. Matrisler kesikli çizgilerle gösterildiği gibi ayrıştırılarak ve bilinmeyen yerdeğiştirmelere ait denklemleri elde etmek için çarpım yapılarak,

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = AE\begin{bmatrix}0.378 & 0.096\\0.096 & 0.405\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_1\\D_2\end{bmatrix} + AE\begin{bmatrix}0 & 0 & -0.128 & -0.096 & -0.25 & 0\\0 & -0.333 & -0.096 & -0.072 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} + AE\begin{bmatrix}0.0016\\0.0012\end{bmatrix}$$

bulunur. Buradan,

$$0 = AE\,[0.378D_1 + 0.096D_2] + AE[0] + AE[0.0016]$$

$$0 = AE\,[0.096D_1 + 0.405D_2] + AE[0] + AE[0.0012]$$

Bu denklem sistemi çözülerek,

$$D_1 = -0.003704 \text{ m}$$

$$D_2 = -0.002084 \text{ m}$$

elde edilir. Burada istenmemekle birlikte **Q** mesnet tepkileri, Denklem (1)'in Denklem 14-29 formunda yazılması ile bulunabilir.

1 ve 2 numaralı elemanlardaki çubuk kuvvetlerini belirlemek için Denklem 14-30 uygulanmalıdır. Bu durumda,

1 Çubuğu. $\lambda_x = 0, \lambda_y = 1, L = 3$ m, $AE = 8(10^3)$ kN olduğundan,

$$q_1 = \frac{8(10^3)}{3}[0 \quad -1 \quad 0 \quad 1]\begin{bmatrix}0\\0\\-0.003704\\-0.002084\end{bmatrix} + [0]$$

$$q_1 = -5.56 \text{ kN} \qquad \textit{Cevap}$$

2 Çubuğu. $\lambda_x = -0.8, \lambda_y = -0.6, L = 5$ m, $AE = 8(10^3)$ kN olduğundan,

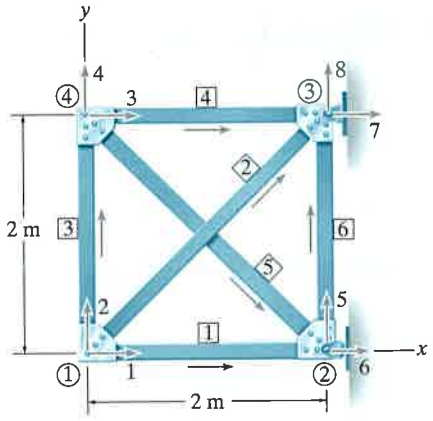
$$q_2 = \frac{8(10^3)}{5}[0.8 \quad 0.6 \quad -0.8 \quad -0.6]\begin{bmatrix}-0.003704\\-0.002084\\0\\0\end{bmatrix} - \frac{8(10^3)\,(-0.01)}{5}$$

$$q_2 = 9.26 \text{ kN} \qquad \textit{Cevap}$$

elde edilir.

ÖRNEK 14.8

Şekil 14-16'da görülen kafes sistemin 2 numaralı çubuk elemanı 30 °C'lik bir sıcaklık artışına maruz kalmıştır. 2 elemanında meydana gelecek çubuk kuvvetini hesaplayınız. $\alpha = 12\ (10^{-6})/°C$, $E = 200$ GPa alınız. Her bir çubuğun kesit alanı $A = 484\ mm^2$'dir.



Şekil 14–16

ÇÖZÜM

Bir sıcaklık artışı söz konusu olduğundan, $\Delta T = +30\ C°$ olur. Doğrultu kosinüsleri $\lambda_x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\lambda_y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ olarak hesaplanan 2 çubuğuna Denklem 14-25 uygulanarak,

$$\begin{bmatrix} (Q_1)_0 \\ (Q_2)_0 \\ (Q_7)_0 \\ (Q_8)_0 \end{bmatrix} = AE(12)\ (10^{-6})\ (30) \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = AE \begin{bmatrix} 0.254558(10^{-3}) \\ 0.254558(10^{-3}) \\ -0.254558(10^{-3}) \\ -0.254558(10^{-3}) \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

elde edilir. Bu kafes sisteme ait rijitlik matrisi Örnek 14-2'de oluşturulmuştu.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \end{bmatrix} = AE \left[\begin{array}{ccccc:ccc} 0.6768 & 0.1768 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & -0.1768 & -0.1768 \\ 0.1768 & 0.6768 & 0 & -0.5 & 0 & 0 & -0.1768 & -0.1768 \\ 0 & 0 & 0.6768 & -0.1768 & 0.1768 & -0.1768 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & -0.1768 & 0.6768 & -0.1768 & 0.1768 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1768 & -0.1768 & 0.6768 & -0.1768 & 0 & -0.5 \\ \hdashline -0.5 & 0 & -0.1768 & 0.1768 & -0.1768 & 0.6768 & 0 & 0 \\ -0.1768 & -0.1768 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.6768 & 0.1768 \\ -0.1768 & -0.1768 & 0 & 0 & -0.5 & 0 & 0.1768 & 0.6768 \end{array}\right] \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + AE \begin{bmatrix} 0.254558(10^{-3}) \\ 0.254558(10^{-3}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ -0.254558(10^{-3}) \\ -0.254558(10^{-3}) \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \hdashline 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \quad (1)$$

Bu denklem sistemi, bilinmeyen yerdeğiştirmeleri elde etmek üzere açık bir şekilde yazılır ve çözülürse,

$$D_1 = -0.149117(10^{-3})\ \text{m}$$
$$D_2 = -0.869117(10^{-3})\ \text{m}$$
$$D_3 = -0.149117(10^{-3})\ \text{m}$$
$$D_4 = -0.720(10^{-3})\ \text{m}$$
$$D_5 = -0.149117(10^{-3})\ \text{m}$$

bulunur. 2 elemanına ait çubuk kuvvetini belirlemek için Denklem 14-30 kullanılırsa,

$$q_2 = \frac{[484(10^{-6})][200(10^6)]}{2\sqrt{2}}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\begin{bmatrix} -0.149117(10^{-3}) \\ -0.869117(10^{-3}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - [484(10^{-6})][200(10^6)][12(10^{-6})](30)$$

$$= -10.21\ \text{kN} = 10.2\ \text{kN (B)} \qquad \textit{Cevap}$$

elde edilir.

Kafes sistem dıştan statikçe belirli olduğundan, 2 numaralı çubuktaki sıcaklık artışının kafes sistemde herhangi bir mesnet tepkisine neden olmayacağına dikkat ediniz. Bunu göstermek üzere mesnet tepkilerinin hesabında Denklem (1)'in matris açılımını dikkate alalım. Yerdeğiştirmelere ait sonuçlar kullanılarak,

$$Q_6 = AE\{(-0.5)[-0.149117(10^{-3})] + 0 + (-0.1768)[-0.149117(10^{-3})] + (0.1768)[0.720(10^{-3})] + (-0.1768)[-0.149117(10^{-3})]\} + AE[0] = 0$$

$$Q_7 = AE\{(-0.1768)[-0.149117(10^{-3})] + (-0.1768)[-0.869117(10^{-3})] + (-0.5)[-0.149117(10^{-3})] + 0 + 0\} + AE[-0.254558(10^{-3})] = 0$$

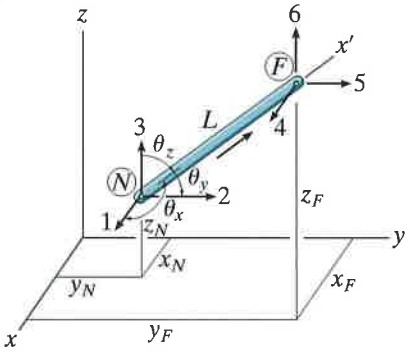
$$Q_8 = AE\{(-0.1768)[-0.149117(10^{-3}) + (-0.1768)[-0.869117(10^{-3})] + 0 + 0 + (-0.5)[-0.149117(10^{-3})]\} + AE[-0.254558(10^{-3})] = 0$$

bulunur.

14

14.9 Uzay Kafes Sistem Hesabı

Hem statikçe belirli hem de statikçe belirsiz uzay kafes sistemlerin hesabı, daha önce açıklanan hesap yöntemi kullanılarak yapılabilir. Ancak problemin üç boyutlu görünümünü göz önüne almak için **T** dönüşüm matrisine ek terimler dâhil edilmelidir. Bu bakımdan Şekil 14-17'de görülen kafes sistemini göz önüne alalım. x' lokal koordinatı cinsinden tanımlanan eleman rijitlik matrisi Denklem 14-4 ile verilmiştir. Ayrıca Şekil 14-17'nin incelenmesi neticesinde, Denklem 14-5 ve 14-6 ile benzeşen denklemler kullanılarak global ve lokal koordinatlar arasındaki doğrultu kosinüsleri aşağıdaki gibi belirlenebilir,



Şekil 14–17

$$\lambda_x = \cos\theta_x = \frac{x_F - x_N}{L}$$

$$= \frac{x_F - x_N}{\sqrt{(x_F - x_N)^2 + (y_F - y_N)^2 + (z_F - z_N)^2}} \tag{14–31}$$

$$\lambda_y = \cos\theta_y = \frac{y_F - y_N}{L}$$

$$= \frac{y_F - y_N}{\sqrt{(x_F - x_N)^2 + (y_F - y_N)^2 + (z_F - z_N)^2}} \tag{14–32}$$

$$\lambda_z = \cos\theta_z = \frac{z_F - z_N}{L}$$

$$= \frac{z_F - z_N}{\sqrt{(x_F - x_N)^2 + (y_F - y_N)^2 + (z_F - z_N)^2}} \tag{14–33}$$

Üçüncü boyutun bir sonucu olarak dönüşüm matrisi (Denklem 14-9),

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \end{bmatrix}$$

şeklini alır. Bu ve Denklem 14-4, Denklem 14-15'de ($\mathbf{k} = \mathbf{T}^T\mathbf{k}'\mathbf{T}$) yerine yazılarak,

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 \\ \lambda_y & 0 \\ \lambda_z & 0 \\ 0 & \lambda_x \\ 0 & \lambda_y \\ 0 & \lambda_z \end{bmatrix} \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \end{bmatrix}$$

elde edilir. Matris çarpımı yapılarak aşağıdaki *simetrik* matris bulunur,

$$\mathbf{k} = \frac{AE}{L}\begin{array}{c} \\ N_x \\ N_y \\ N_z \\ F_x \\ F_y \\ F_z \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} N_x & N_y & N_z & F_x & F_y & F_z \end{array} \\ \begin{bmatrix} \lambda_x^2 & \lambda_x\lambda_y & \lambda_x\lambda_z & -\lambda_x^2 & -\lambda_x\lambda_y & -\lambda_x\lambda_z \\ \lambda_y\lambda_x & \lambda_y^2 & \lambda_y\lambda_z & -\lambda_y\lambda_x & -\lambda_y^2 & -\lambda_y\lambda_z \\ \lambda_z\lambda_x & \lambda_z\lambda_y & \lambda_z^2 & -\lambda_z\lambda_x & -\lambda_z\lambda_y & -\lambda_z^2 \\ -\lambda_x^2 & -\lambda_x\lambda_y & -\lambda_x\lambda_z & \lambda_x^2 & \lambda_x\lambda_y & \lambda_x\lambda_z \\ -\lambda_y\lambda_x & -\lambda_y^2 & -\lambda_y\lambda_z & \lambda_y\lambda_x & \lambda_y^2 & \lambda_y\lambda_z \\ -\lambda_z\lambda_x & -\lambda_z\lambda_y & -\lambda_z^2 & \lambda_z\lambda_x & \lambda_z\lambda_y & \lambda_z^2 \end{bmatrix} \end{array} \quad (14\text{–}34)$$

Bu denklem, *global koordinatlarda* ifade edilen ***eleman rijitlik matrisini*** göstermektedir. Satır ve sütunlar boyunca olan yerdeğiştirme numaraları, önce yakın uçtaki x, y, z doğrultularını (N_x, N_y, N_z) sonra da uzak uçtakilerini (F_x, F_y, F_z) göstermektedir.

Bilgisayar programlaması açısından, her bir çubuk eleman için $\mathbf{T}^T\mathbf{k}'\mathbf{T}$ matris çarpımını yapmak yerine Denklem 14-34'ü kullanmak genellikle daha etkilidir. Eğer "yapı" rijitlik matrisi (**K**), başlangıçta tüm terimleri sıfır olacak şekilde tanımlanırsa bilgisayar depolama alanından kazanılır; daha sonra da her bir çubuk elemanın rijitlik matrisinin terimleri oluşturuldukça, bu değerler **K**'da ilgili yerlerine doğrudan yerleştirilir. Yapı rijitlik matrisi oluşturulduktan sonra düğüm noktası yerdeğiştirmelerini, mesnet tepkilerini ve çubuk kuvvetlerini hesaplamak için Altbölüm 14-6'da açıklanan hesap yöntemi kullanılabilir.

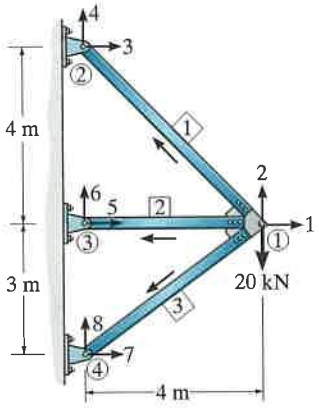


Bu binanın çatısı, bir dizi uzay kafes sistem ile taşınmaktadır.

PROBLEMLER

14-1. Kafes sistemin **K** rijitlik matrisini oluşturunuz. A = 450 mm^2 ve E = 200 GPa alınız. Tüm düğüm noktalarının mafsallı olduğunu kabul ediniz.

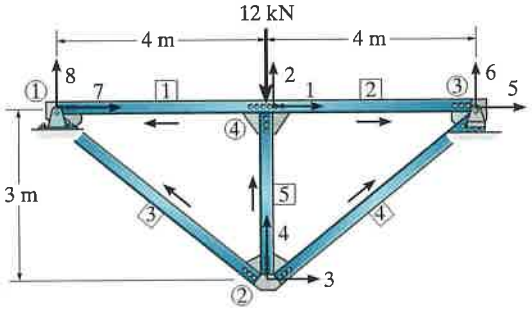
14-2. Problem 14-1'deki kafes sistemde ① düğüm noktasının düşey yerdeğiştirmesini ve 2 elemanına ait çubuk kuvvetini hesaplayınız.



Problem 14-1/2

14-3. Kafes sistemin **K** rijitlik matrisini oluşturunuz. Her bir çubuk eleman için A = 0.0015 m^2 ve E = 200 GPa alınız.

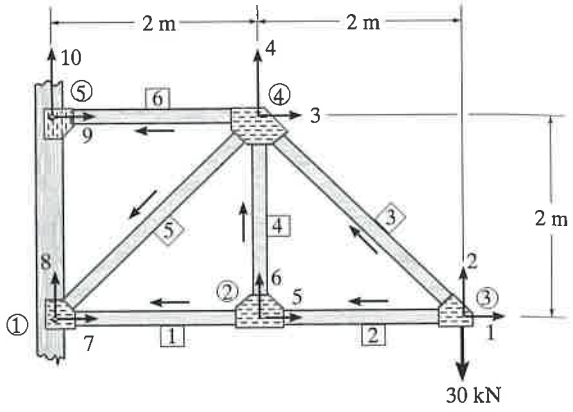
***14-4.** Problem 14-3'deki kafes sistemde ② düğüm noktasının düşey yerdeğiştirmesini ve 4 elemanına ait çubuk kuvvetini hesaplayınız. Her bir çubuk eleman için A = 0.0015 m^2 ve E = 200 GPa alınız.



Problem 14-3/4

14-5. Kafes sistemin **K** rijitlik matrisini oluşturunuz. Her bir çubuk eleman için A = 0.0015 m^2 ve E = 200 GPa alınız.

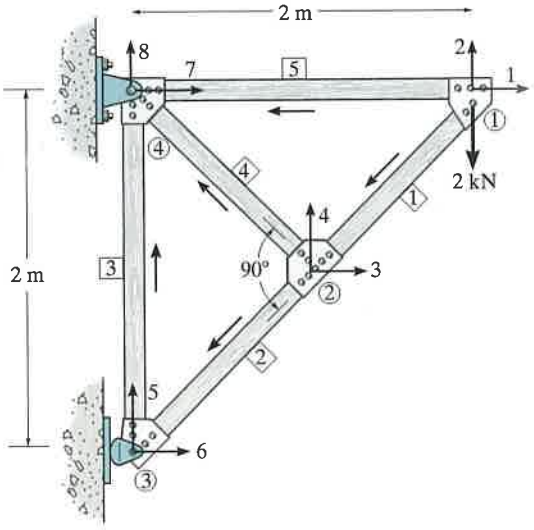
14-6. ② düğüm noktasının yatay yerdeğiştirmesini ve 5 elemanına ait çubuk kuvvetini hesaplayınız. A = 0.0015 m^2 ve E = 200 GPa alınız.



Problem 14-5/6

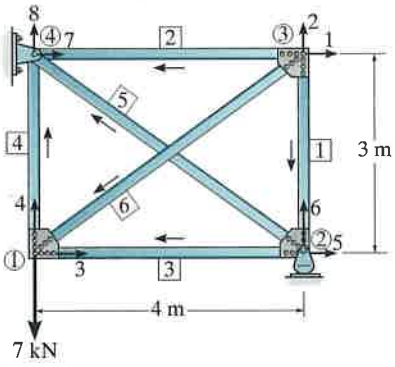
14-7. Kafes sistemin **K** rijitlik matrisini oluşturunuz. AE sabittir.

***14-8.** Problem 14-7'deki kafes sistemin 1 ve 5 elemanlarına ait çubuk kuvvetlerini hesaplayınız. AE sabittir.



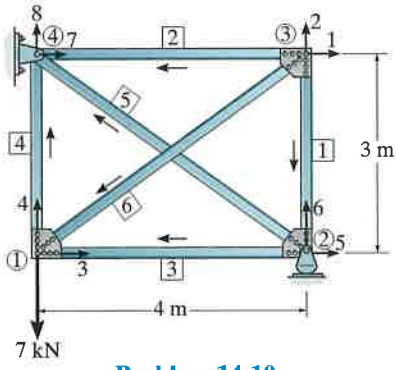
Problem 14-7/8

14-9. Kafes sistemin **K** rijitlik matrisini oluşturunuz. Her bir çubuk eleman için $A = 0.0015\ m^2$ ve $E = 200$ GPa alınız.



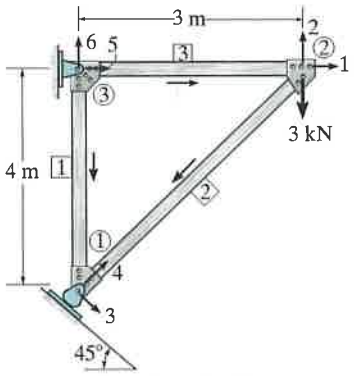
Problem 14-9

14-10. Problem 14-9'daki kafes sistemin 6 elemanına ait çubuk kuvvetini hesaplayınız. Her bir çubuk eleman için $A = 0.0015\ m^2$ ve $E = 200$ GPa alınız.



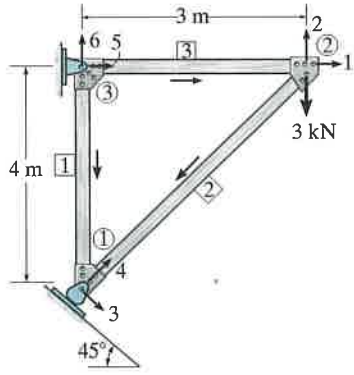
Problem 14-10

14-11. Kafes sistemin **K** rijitlik matrisini oluşturunuz. AE sabittir.



Problem 14-11

*14-12. ② düğüm noktasının düşey yerdeğiştirmesi ile mesnet tepkilerini hesaplayınız. AE sabittir.



Problem 14-12

BÖLÜM ÖZETİ

Matris yerdeğiştirme yöntemi yapı sistemlerinin bilgisayar kullanılarak çözümlenmesinde tercih edilen yöntemdir. Bu yöntem, öncelikle yapı elemanlarının sayısının ve bu elemanlara ait düğüm noktalarının sayısının tanımlanmasını gerektirmektedir. Daha sonra tüm yapı sitemi için global koordinatlar oluşturulur ve her bir çubuk elemana ait lokal koordinat sistemi, orijini seçilen bir yakın uçta ve pozitif x' ekseni uzak uca doğru olacak şekilde yerleştirilir.

Bu yöntemin formüle edilmesi, öncelikle her bir çubuk eleman için $\mathbf{k}'$ rijitlik matrisinin oluşturulmasını gerektirir. Bu matris, çubuk uç kuvvetlerini ($\mathbf{q}$) çubuk uç yerdeğiştirmeleri ile ($\mathbf{d}$) ilişkilendirmektedir, $\mathbf{q} = \mathbf{k}'\mathbf{d}$. Daha sonra da $\mathbf{T}$ dönüşüm matrisi kullanılarak $\mathbf{d}$ lokal yerdeğiştirmeleri ile $\mathbf{D}$ global yerdeğiştirmeleri ilişkilendirilir, $\mathbf{d} = \mathbf{TD}$. Ayrıca $\mathbf{T}$ dönüşüm matrisine bağlı olarak $\mathbf{q}$ lokal kuvvetleri $\mathbf{Q}$ global kuvvetlerine dönüştürülür, $\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T\mathbf{q}$. Bu matrisler kullanılarak $\mathbf{k}$ eleman rijitlik matrisi global koordinatlarda elde edilir, $\mathbf{k} = \mathbf{T}^T\mathbf{k}'\mathbf{T}$. Bütün eleman rijitlik matrislerinin birleştirilmesi, tüm yapı sistemine ait $\mathbf{K}$ rijitlik matrisini verir.

Daha sonra yapı sistemine ait yerdeğiştirmeler ve kuvvetler, $\mathbf{Q} = \mathbf{KD}$'nin ayrıştırılması ile elde edilir. Bu durumda bilinmeyen yerdeğiştirmeler, mesnetlerin yer değiştirme yapmaması koşuluyla, $\mathbf{D}_u = [\mathbf{K}_{11}]^{-1}\mathbf{Q}_k$ bağıntısından belirlenir. Son olarak da mesnet tepkileri $\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21}\mathbf{D}_u$ bağıntısından ve çubuk kuvvetleri $\mathbf{q} = \mathbf{k}'\mathbf{TD}$ bağıntısından hesaplanır.

Bölüm 15



© Bright/Fotolia

Ayakları üzerinde sürekli olan köprü kirişlerindeki statikçe belirsiz kuvvetler, matris yerdeğiştirme yöntemi kullanılarak belirlenebilir.

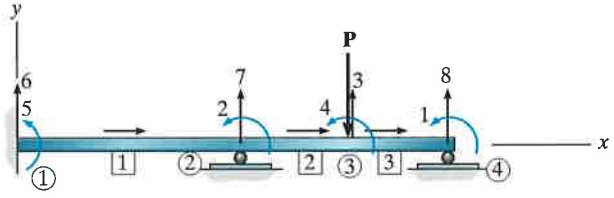
Matris Yerdeğiştirme (Rijitlik) Yöntemi ile Kiriş Hesabı

Önceki bölümde gösterilen kavramlar burada genişletilecek ve kirişlerin hesabında kullanılacaktır. Eleman rijitlik matrisi ve dönüşüm matrisi elde edildikten sonraki uygulama adımlarının kafes sistemlerinki ile tamamen aynı olduğu gösterilecektir. Mesnet çökmesi ve sıcaklık değişimi özel olarak ele alınacaktır.

15.1 Ön Bilgiler

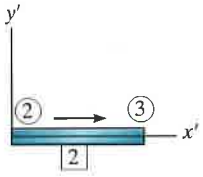
Matris yerdeğiştirme yönteminin kirişlere nasıl uygulanacağını göstermeden önce, bu yapı elemanlarıyla ilgili bazı ön kavram ve tanımlamalardan bahsedeceğiz.

Eleman ve Düğüm Noktası Tanımlanması. Matris yerdeğiştirme yöntemini kirişlere uygulamak için öncelikle kirişi sonlu elemanlara nasıl ayıracağımızı belirlemeliyiz. Genellikle her bir kiriş eleman, sabit kesitli olmalı ve üzerinde herhangi bir yükleme olmamalıdır. Bu nedenle bir çubuk elemana ait düğüm noktaları; bir mesnet noktasında veya çubukların birbirine birleştiği, bir dış yükün uygulandığı, kesit alanının aniden değiştiği noktalarda veya düşey ya da açısal yerdeğiştirmenin belirleneceği bir noktada tanımlanır. Örneğin Şekil 15-1*a*'da görülen kirişi göz önüne alalım. Kafes sistemlerdeki aynı gösterim kullanılarak dört düğüm noktası daire içinde sayısal olarak tanımlanırken, üç çubuk eleman kare içinde sayısal olarak tanımlanmıştır. Ayrıca çubuk elemanlara ait "yakın" ve "uzak" uçların, her bir çubuk boyunca gösterilen oklarla tanımlandığına dikkat ediniz.



(a)

Şekil 15–1

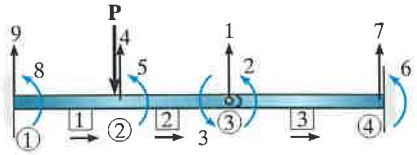


(b)

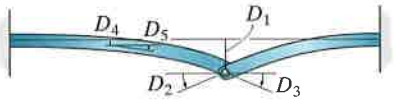
Şekil 15–1 (Devamı)

Global ve Lokal Koordinatlar. Global koordinat sistemi, orijini genellikle bir düğüm noktasında olan ve kiriş üzerindeki diğer düğüm noktalarının tümü pozitif koordinatlara sahip olacak şekilde seçilen x, y, z eksenleri kullanılarak tanımlanacaktır, Şekil 15-1*a*. x', y', z' lokal veya eleman koordinat sisteminin orijini her bir çubuğun "yakın" ucunda olup pozitif x' ekseni "uzak" uca doğrudur. Şekil 15-1*b*, 2 çubuğu için bu koordinatları göstermektedir. Her iki durumda da sağ el parmaklarının $x(x')$ ekseninden $y(y')$ eksenine doğru dönmesi durumunda, başparmağın sayfa düzlemi dışına doğru olan $z(z')$ ekseninin pozitif yönünü gösterdiği sağ el koordinat sistemi kullanılmıştır. Her bir kiriş eleman için x ve x' eksenlerinin aynı doğru üzerinde olacağına, bunun yanında global ve eleman koordinatlarının tümünün paralel olacağına dikkat ediniz. Bu nedenle kafes sistemlerin aksine, burada bu koordinat sistemleri arasında dönüşüm matrislerinin belirlenmesine gerek olmayacaktır.

15



(a)

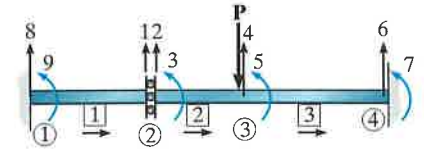


(b)

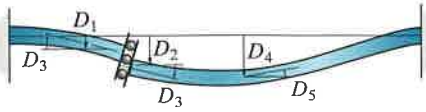
Şekil 15–2

Kinematik Belirsizlik. Çubuk elemanlar ve düğüm noktaları tanımlandıktan ve global koordinat sistemi oluşturulduktan sonra, kirişin serbestlik dereceleri ve kinematik açıdan belirlilik durumu saptanabilir. Hem eğilme hem de kesme etkilerinin dikkate alınması durumunda, bir kirişin *her bir düğüm noktasının* düşey bir yerdeğiştirme ile bir dönmeden oluşan iki serbestlik derecesi olabilir. Kafes sistemlerde olduğu gibi bu doğrusal ve açısal yerdeğiştirmeler, yerdeğiştirme numaraları ile tanımlanacaktır. En küçük yerdeğiştirme numaraları bilinmeyen yerdeğiştirmeleri (tutulmamış serbestlik derecelerini) tanımlamak için kullanılırken, en büyük yerdeğiştirme numaraları bilinen yerdeğiştirmeleri (tutulmuş serbestlik derecelerini) tanımlamak için kullanılacaktır. Bu tanımlama yönteminin seçilmesinin nedeninin, bilinmeyen yerdeğiştirmelerin en kısa yoldan bulunabilmesi için yapı rijitlik matrisinin sonradan ayrıştırılmasının kolaylığı ile alakalı olduğunu anımsayınız.

Yerdeğiştirme-numarası gösterimine ait bir örnek vermek için tekrar Şekil 15-1*a*'daki sürekli kirişi ele alalım. Bu kiriş kinematik olarak dördüncü dereceden belirsizdir. 1'den 4'e kadar olan yerdeğiştirme numaralarının bilinmeyen yerdeğiştirmeleri gösterdiği ve 5'den 8'e kadar olan numaraların bu durumda tümü sıfır olan bilinen yerdeğiştirmeleri gösterdiği, toplam sekiz serbestlik derecesi vardır. Başka bir örnek olarak Şekil 15-2*a*'daki kiriş, üç çubuk elemana ve dört düğüm noktasına ayrılabilir. Özellikle 3 numaralı düğüm noktasındaki ara mafsalın, 2 ve 3 numaralı çubuk elemanlarının her ikisi için de aynı düşey yerdeğiştirmeyi yaptığına; ancak her bir çubuk elemanın ucundaki dönmenin farklı olduğuna dikkat ediniz. Bu nedenle bu yerdeğiştirmeleri göstermek için üç yerdeğiştirme numarası kullanılmıştır. Burada, Şekil 15-2*b*'de görüldüğü gibi beşinin bilinmediği ve yine hepsi sıfır olmak üzere dördünün bilindiği toplam dokuz adet serbestlik derecesi vardır. Son olarak da Şekil 15-3*a*'daki kirişte kullanılan kayıcı düzeneği ele alalım. Kirişin sehim şekli Şekil 15-3*b*'de gösterilmiş olup en küçük yerdeğiştirme numaraları ile gösterilen beş bilinmeyen yerdeğiştirme bileşeni vardır. Kiriş, kinematik olarak beşinci dereceden belirsizdir.



(a)



(b)

Şekil 15–3

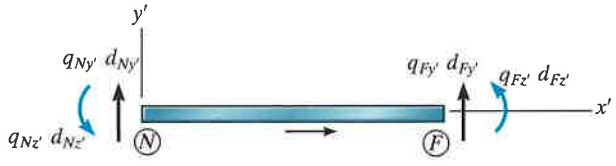
Kirişler için matris yerdeğiştirme yönteminin geliştirilmesi, kafes sistemler için kullanılana benzer bir yol izler. Öncelikle her bir çubuk eleman için rijitlik matrisi oluşturulur ve daha sonra da bu matrisler kiriş veya yapı rijitlik matrisini oluşturmak üzere birleştirilir. Yapı sistemine ait matris denklemini

kullanarak düğüm noktalarındaki bilinmeyen yerdeğiştirmeleri belirleyebilir ve buradan kirişe ait mesnet tepkilerini ve düğüm noktalarındaki kesme kuvvetlerini ve momentleri hesaplayabiliriz.

15.2 Kiriş-Eleman Rijitlik Matrisi

Bu altbölümde sabit bir kesit alanına sahip ve x', y', z' lokal koordinat sistemi ile tanımlanan bir kiriş veya çubuk eleman için rijitlik matrisini elde edeceğiz, Şekil 15-4. Koordinatların orijini, "yakın" uçta (N) tanımlanmış olup pozitif x' ekseni F "uzak" ucuna doğrudur. Çubuğun her iki ucunda da $q_{Ny'}$ ve $q_{Fy'}$ kesme kuvvetleri ile $q_{Nz'}$ ve $q_{Fz'}$ eğilme momentlerinden oluşan ikişer tepki kuvveti vardır. Bu kuvvetlerin tümü pozitif koordinat doğrultularında etkimektedir. Örneğin $q_{Nz'}$ ve $q_{Fz'}$ momentleri *saat ibresinin tersi yönünde* pozitiftir; çünkü bu durumda moment vektörleri sağ el kuralına bağlı olarak sayfa düzlemi dışına doğru olan pozitif z' ekseni doğrultusunda olacaktır.

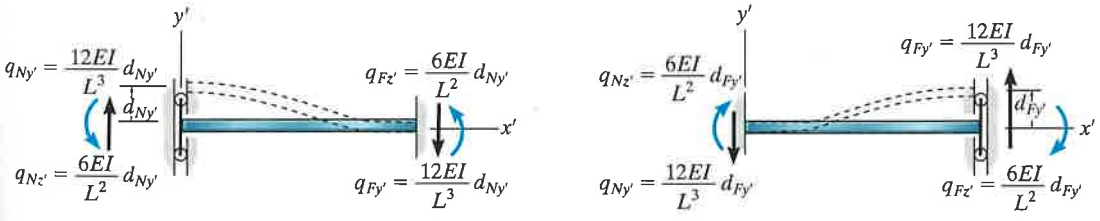
Bu kuvvetlerle ilişkili doğrusal ve açısal yerdeğiştirmeler de bu pozitif işaret kuralına uymaktadır. Şimdi, bu yerdeğiştirmelerin her birini ayrı ayrı uygulayacak ve daha sonra da her bir yerdeğiştirmeden kaynaklanan çubuk uç kuvvetlerini belirleyeceğiz.



pozitif işaret kuralı

Şekil 15–4

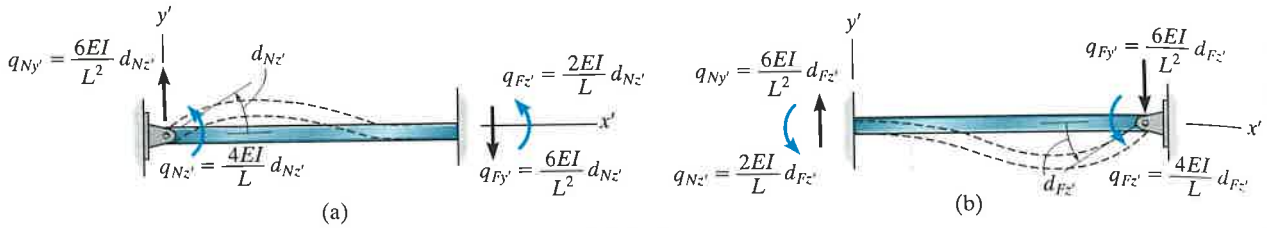
y' Yerdeğiştirmeleri. Pozitif bir $d_{Ny'}$ yerdeğiştirmesi verilirken olası diğer yerdeğiştirmeler engellendiğinde meydana gelen kesme kuvvetleri ve eğilme momentleri Şekil 15-5*a*'da görülmektedir. Buradaki moment, Altbölüm 11-2'de Denklem 11-5 olarak elde edilmişti. Benzer şekilde $d_{Fy'}$ uygulandığında meydana gelen kesme kuvvetleri ve eğilme momentleri Şekil 15-5*b*'de verilmiştir.



y' yerdeğiştirmeleri

(a) (b)

Şekil 15–5



Şekil 15–6

z' Dönmeleri. Pozitif bir $d_{Nz'}$ dönmesi verilirken olası diğer yerdeğiştirmeler engellendiğinde, söz konusu şekil değiştirme durumu için gerekli olan kesme kuvvetleri ve eğilme momentleri Şekil 15-6*a*'da verilmiştir. Buradaki momentler, Altbölüm 11-2'de Denklem 11-1 ve 11-2 olarak elde edilmişti. Benzer şekilde $d_{Fz'}$ uygulandığında meydana gelen bileşke kuvvetler Şekil 15-6*b*'de görülmektedir.

Şekil 15-5 ve 15-6'daki sonuçlar süperpozisyon ile toplanırsa çubuk elemana ait dört adet yük-yerdeğiştirme bağıntısı matris formda,

$$\begin{bmatrix} q_{Ny'} \\ q_{Nz'} \\ q_{Fy'} \\ q_{Fz'} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{matrix} N_{y'} & N_{z'} & F_{y'} & F_{z'} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} d_{Ny'} \\ d_{Nz'} \\ d_{Fy'} \\ d_{Fz'} \end{bmatrix} \tag{15–1}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu denklemler kısaltılmış formda,

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}\mathbf{d} \tag{15–2}$$

şeklinde de yazılabilir. Denklem 15-1 ile verilen simetrik **k** matrisi *eleman rijitlik matrisi* olarak adlandırılır. Bu matrisi oluşturan 16 adet rijitlik etki katsayısı $\mathbf{k}_{ij}$, çubuk elemanın kesme kuvveti ve eğilme momenti yerdeğiştirmelerine tekabül etmektedir. Fiziksel olarak bu katsayılar, çubuğun belirli bir birim yerdeğiştirmeye maruz kalması durumundaki çubuk uç kuvvetlerini gösterir. Örneğin *tüm diğer yerdeğiştirmeler sıfır iken* $d_{Ny'} = 1$ ise (Şekil 15-5*a*) çubuk eleman sadece **k** matrisinin birinci sütununda gösterilen dört uç kuvvetine maruz kalacaktır. Benzer şekilde **k** matrisinin diğer sütunları, sütunlar üzerinde gösterilen yerdeğiştirme numaraları ile tanımlanan birim yerdeğiştirmelere karşı gelen çubuk uç kuvvetleridir. Türetilme aşamasında, hem denge hem de yerdeğiştirme geometrik uygunluk koşulu sağlanmıştır. Ayrıca x', y', z' eksenleri x, y, z'ye paralel olduğundan, bu matrisin hem lokal hem de global koordinatlarda *aynı* olduğuna, bu nedenle de koordinatlar arasında dönüşüm matrislerine gerek olmadığına dikkat ediniz.

15.3 Kiriş-Yapı Rijitlik Matrisi

Tüm eleman rijitlik matrisleri belirlendikten sonra bu matrisler yapı rijitlik matrisi (**K**) içinde birleştirilmelidir. Bu işlem, öncelikle eleman rijitlik matrisinde her bir terimin bulunduğu *konumunun* bilinmesine bağlıdır. Her bir **k** matrisinin satır ve sütunları (Denklem 15-1) önce çubuk elemanın yakın ucundaki iki yerdeğiştirme numarası ($N_{y'}$ ve $N_{z'}$) ve daha sonra da uzak ucundakiler ($F_{y'}$ ve $F_{z'}$) ile tanımlanır. Bu nedenle matrisler birleştirilirken her bir terim, **K** matrisinde de aynı konumuna yazılmalıdır. Böylelikle **K**, toplam serbestlik derecesi sayısını göstermesi nedeniyle kirişe verilen en büyük yerdeğiştirme numarasına eşit bir mertebeye sahip olacaktır. Ayrıca birden fazla çubuğun bir düğüm noktasına birleşmesi durumunda bu çubukların rijitlik etki katsayıları **K** matrisinde aynı konuma denk geleceğinden, yapı sistemine ait noktasal rijitlik etki katsayılarını belirlemek üzere bu terimler cebirsel olarak birbirleriyle toplanmalıdır. Her bir katsayı, herhangi bir düğüm noktasındaki birim yerdeğiştirmeden (y' veya z') dolayı yapı sisteminin belirli bir doğrultudaki (y' veya z') noktasal direncini gösterdiğinden, bu yapılması gereken bir işlemdir. Örneğin $\mathbf{K}_{23}$; bir birimlik yerdeğiştirme "3" numaralı yerdeğiştirme bileşeninin yerinde ve doğrultusunda meydana geldiğinde, "2" numaralı yerdeğiştirme bileşeninin yerinde ve doğrultusundaki uç kuvvetini gösterir.

15

15.4 Matris Yerdeğiştirme Yönteminin Kirişlere Uygulanışı

Yapı sistemine ait rijitlik matrisi belirlendikten sonra kirişin düğüm noktalarına etkiyen yükler, yapı rijitlik denklemi kullanılarak yerdeğiştirmelerle ilişkilendirilebilir,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{KD}$$

Burada **Q** ve **D**, hem bilinen hem de bilinmeyen yük ve yerdeğiştirmeleri içeren sütun matrislerdir. Rijitlik matrisinin, yük ve yerdeğiştirmenin bilinen ve bilinmeyen terimlerine ayrıştırılması durumunda,

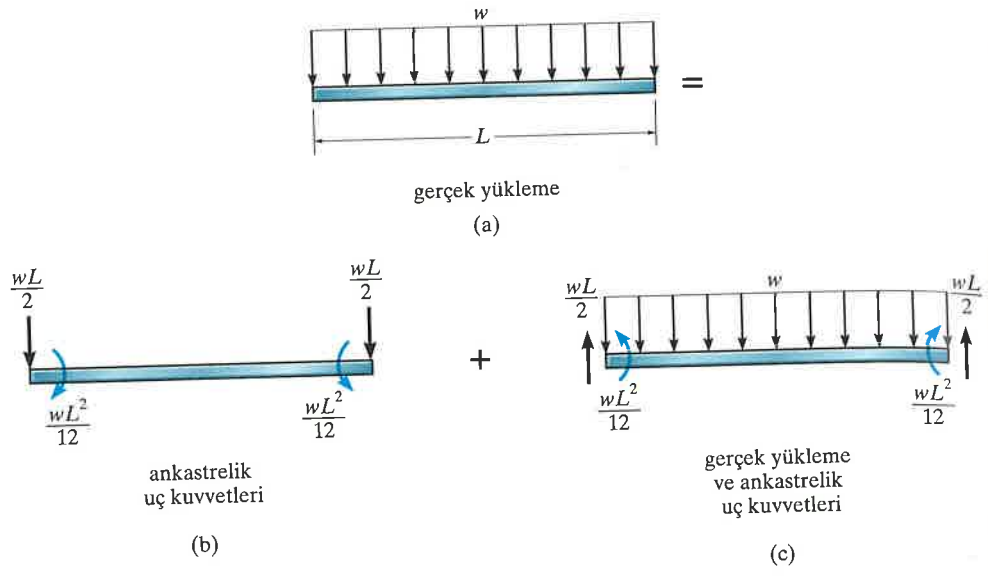
$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}_k \\ \hline \mathbf{Q}_u \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \hline \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{D}_u \\ \hline \mathbf{D}_k \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu denklemin açık olarak yazılmasıyla aşağıdaki iki denklem elde edilir,

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_{11}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{12}\mathbf{D}_k \qquad (15\text{–}3)$$

$$\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{22}\mathbf{D}_k \qquad (15\text{–}4)$$

$\mathbf{D}_u$ bilinmeyen uç yerdeğiştirmeleri, bu denklemlerin ilkinden belirlenebilir. Daha sonra bu değerler kullanılarak $\mathbf{Q}_u$ mesnet tepkileri ikinci denklemden hesaplanır.



Şekil 15–7

Açıklık Yüklemeleri. Uygulama açısından, kiriş elemanların üzerinde uzunlukları boyunca yük olmaması önemlidir. Her bir çubuk eleman için rijitlik matrisi, sadece çubuk uçlarına uygulanan yüklemeler için geliştirilmiş olduğundan bu gerekli bir koşuldur (Bkz. Şekil 15-4). Ancak kirişler genelde yayılı yük etkisinde kaldığından, matris çözümlemesi yapılabilmesi için bu koşulda değişiklik yapılmalıdır.

Bu durumu ele almak için, Altbölüm 14-8'de üzerinde durulduğu üzere kafes sistemler için kullanılana benzer bir şekilde süperpozisyon ilkesini kullanacağız. Bu duruma ait bir uygulama göstermek üzere w düzgün yayılı yükü etkisindeki Şekil 15-7'de görülen L uzunluğundaki kiriş elemanını göz önüne alalım. İlk olarak, matris yerdeğiştirme yönteminde kullanılacak olan ankastrelik uç kuvvetleri çubuğa uygulanır, Şekil 15-7*b*. Bu kuvvetler bir sütun matris $(-\mathbf{q}_0)$ olarak dikkate alınır. Daha sonra yayılı yük ve bu yüke ait $\mathbf{q}_0$ ankastrelik uç kuvvetleri uygulanır, Şekil 15-7*c*. Kirişteki gerçek yükleme, bu iki sonuç toplanarak belirlenir. Diğer yükleme durumlarına ait ankastrelik uç kuvvetleri kitabın arkasında verilmiştir. Bu yöntemi, buradaki gibi yatay bir eksen üzerindeki yüklemeleri içeren problemlerin çözümü yanında sıcaklık değişimi ve imalat hataları içeren problemlerin çözümünde de kullanabiliriz.

Çubuk Uç Kuvvetleri. Kiriş elemanların uçlarındaki kesme kuvveti ve momentler, Denklem 15-2 kullanılarak ve eğer çubuk eleman bir açıklık yüklemesi etkisinde ise $\mathbf{q}_0$ ankastrelik uç kuvvetleri eklenerek belirlenebilir. Bu durumda,

$$\mathbf{q} = \mathbf{kd} + \mathbf{q}_0 \tag{15–5}$$

elde ederiz. Eğer sonuçlar negatif ise bu durum uç kuvvetlerinin Şekil 15-4'de gösterilenin tersi yönünde olduğunu gösterir.

Çözümde İzlenecek Yol

Aşağıdaki hesap adımları; statikçe belirli veya statikçe belirsiz bir kirişe ait sonlu elemanlar için yerdeğiştirmelerin, mesnet tepkilerinin ve iç kuvvetlerin belirlenmesinde kullanılabilecek bir yöntem ortaya koymaktadır.

Gösterim

- Kiriş sonlu elemanlara ayrılır ve keyfi olarak her bir eleman ve o elemana ait düğüm noktaları tanımlanır. Düğüm noktası için daire içine alınmış bir sayı, eleman için de kare içine alınmış bir sayı kullanılır. Bir çubuk eleman; genellikle mesnet noktaları, tekil yük noktaları ve birleşim noktaları arasında veya iç kuvvetlerin ya da yerdeğiştirmelerin belirleneceği noktalara bağlı olarak tanımlanır. Ayrıca çubuk elemanlar için E ve I sabit olmalıdır.

- Baş tarafı uzak uca doğru olan bir ok çubuk boyunca yönlendirilerek her bir çubuk elemanın yakın ve uzak ucu sembolik olarak gösterilir.

- Her bir düğüm noktasındaki y ve z yerdeğiştirme numaraları sayısal olarak belirtilir. Daima tutulmamış serbestlik derecelerini tanımlamak için *en küçük yerdeğiştirme numaraları*, daha sonra da tutulmuş serbestlik derecelerini tanımlamak için geriye kalan veya en büyük yerdeğiştirme numaraları kullanılır.

- Problemden, $\mathbf{D}_k$ bilinen yerdeğiştirmeleri ile $\mathbf{Q}_k$ bilinen dış yükleri tespit edilir. Eğer çubuk eleman üzerinde bir açıklık yüklemesi varsa ankastrelik uç kuvvetleri *ters yönde* hesaba katılır.

Yapı Rijitlik Matrisi

- Global koordinatlarda tanımlanan her bir çubuk elemana ait rijitlik matrisini belirlemek üzere Denklem 15-1 uygulanır.

- Her bir çubuk eleman için rijitlik matrisi belirlenip, sütun ve satırlar uygun yerdeğiştirme numaraları ile tanımlandıktan sonra $\mathbf{K}$ yapı rijitlik matrisini oluşturmak üzere matrisler birleştirilir. Kısmi bir kontrol olarak, eleman *ve* yapı rijitlik matrislerinin tümü *simetrik* olmalıdır.

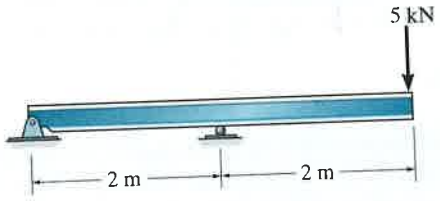
Yerdeğiştirmeler ve Kuvvetler

- Yapı sistemine ait rijitlik denklemi ayrıştırılır ve $\mathbf{D}_u$ bilinmeyen uç yerdeğiştirmeleri ile $\mathbf{Q}_u$ mesnet tepkilerini belirlemek üzere matris çarpımı yapılır.

- Her bir kiriş elemanının uçlarındaki kesme kuvveti ve moment $\mathbf{q}$, ilave ankastrelik uç kuvvetlerinin de dikkate alındığı Denklem 15-5'den belirlenebilir.

ÖRNEK 15.1

Şekil 15-8*a*'da görülen kirişin mesnet tepkilerini hesaplayınız. EI sabittir.



(a)

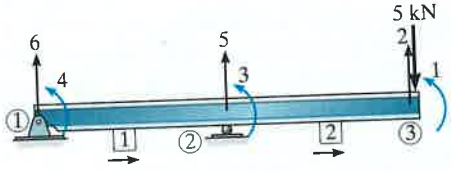
Şekil 15–8

ÇÖZÜM

Gösterim. Kirişin, Şekil 15-8*b*'de tanımlanmış olan iki çubuk elemanı ve üç düğüm noktası vardır. 1'den 6'ya kadar olan yerdeğiştirme numaraları, *en küçük numaralar* (1-4) *tutulmamış serbestlik derecelerini gösterecek* şekilde belirlenmiştir.

Bilinen yük ve yerdeğiştirme matrisleri,

$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \qquad \mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \end{matrix}$$



(b)

şeklindedir.

Eleman Rijitlik Matrisleri. Her iki çubuk elemana ait rijitlik matrisi de Denklem 15-1'den belirlenir. Her bir sütun ve satır için yerdeğiştirme numaralarının nasıl oluşturulduğuna dikkat ediniz.

$$\mathbf{k}_1 = EI \begin{matrix} \\ 6 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 6 & 4 & 5 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1.5 & 1.5 & -1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 & -1.5 & 1 \\ -1.5 & -1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 1.5 & 1 & -1.5 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\mathbf{k}_2 = EI \begin{matrix} \\ 5 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 5 & 3 & 2 & 1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1.5 & 1.5 & -1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 & -1.5 & 1 \\ -1.5 & -1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 1.5 & 1 & -1.5 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Yerdeğiştirmeler ve Kuvvetler. Artık bu terimleri yapı rijitlik matrisi içerisinde birleştirebiliriz. Örneğin; $\mathbf{K}_{11} = 0 + 2 = 2$, $\mathbf{K}_{55} = 1.5 + 1.5 = 3$, vb. Böylece,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{KD}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ \hline Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = EI \left[\begin{array}{cccc:cc} 2 & -1.5 & 1 & 0 & 1.5 & 0 \\ -1.5 & 1.5 & -1.5 & 0 & -1.5 & 0 \\ 1 & -1.5 & 4 & 1 & 0 & 1.5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1.5 & 1.5 \\ \hdashline 1.5 & -1.5 & 0 & -1.5 & 3 & -1.5 \\ 0 & 0 & 1.5 & 1.5 & -1.5 & 1.5 \end{array}\right] \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ \hline 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1 2 3 4 5 6

Matrisler yukarıda kesikli çizgilerle gösterildiği gibi ayrıştırılmıştır. İlk dört satır için çarpımlar yapılarak,

$$0 = 2D_1 - 1.5D_2 + D_3 + 0$$

$$-\frac{5}{EI} = -1.5D_1 + 1.5D_2 - 1.5D_3 + 0$$

$$0 = D_1 - 1.5D_2 + 4D_3 + D_4$$

$$0 = 0 + 0 + D_3 + 2D_4$$

elde edilir. Çözüm yapılarak,

$$D_1 = -\frac{16.67}{EI}$$

$$D_2 = -\frac{26.67}{EI}$$

$$D_3 = -\frac{6.67}{EI}$$

$$D_4 = \frac{3.33}{EI}$$

bulunur. Bu sonuçlar kullanılarak ve son iki satır çarpılarak,

$$Q_5 = 1.5EI\left(-\frac{16.67}{EI}\right) - 1.5EI\left(-\frac{26.67}{EI}\right) + 0 - 1.5EI\left(\frac{3.33}{EI}\right)$$

$$= 10 \text{ kN} \qquad \textit{Cevap}$$

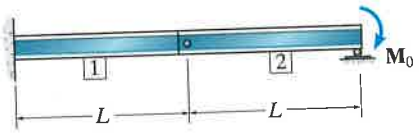
$$Q_6 = 0 + 0 + 1.5EI\left(-\frac{6.67}{EI}\right) + 1.5EI\left(\frac{3.33}{EI}\right)$$

$$= -5 \text{ kN} \qquad \textit{Cevap}$$

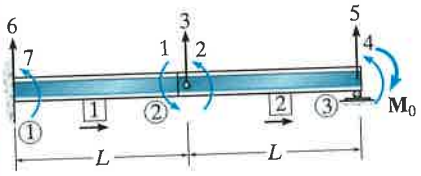
elde edilir.

15

ÖRNEK 15.2



(a)



(b)

Şekil 15–9

Şekil 15-9*a*'da görülen bileşik kirişin kayıcı mafsallı mesnedindeki bağ kuvvetini hesaplayınız. *EI* sabittir.

ÇÖZÜM

Gösterim. Kiriş sehim yaptığında ara mafsal noktasında tek bir düşey yerdeğiştirme meydana gelecek ancak bu noktaya bağlı olan her bir çubuğun dönmesi farklı olacaktır. Ayrıca kayıcı mafsalda da bir dönme meydana gelecektir. Bilinmeyen bu dört serbestlik derecesi; 1, 2, 3 ve 4 yerdeğiştirme numaraları ile gösterilmiştir, Şekil 15-9*b*.

$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -M_0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \qquad \mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix}$$

Eleman Rijitlik Matrisleri. Şekil 15-9b'de görülen yerdeğiştirme numaralarına uygun olarak her bir çubuğa Denklem 15-1 uygulanarak,

$$\mathbf{k}_1 = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 7 \\ 3 \\ 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 6 & 7 & 3 & 1 \end{matrix}$$

$$\mathbf{k}_2 = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 4 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 3 & 2 & 5 & 4 \end{matrix}$$

elde edilir.

Yerdeğiştirmeler ve Kuvvetler. Yapı rijitlik matrisi, eleman rijitlik matrislerinin terimleri toplanarak oluşturulur. Yapı matris denklemini kullanarak,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{KD}$$

$$
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \hline 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -M_0 \\ \hline Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \end{bmatrix}
= EI
\left[\begin{array}{ccccc|ccc}
1 & 2 & 3 & 4 & & 5 & 6 & 7 \\
\hline
\frac{4}{L} & 0 & -\frac{6}{L^2} & 0 & & 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\
0 & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & & -\frac{6}{L^2} & 0 & 0 \\
-\frac{6}{L^2} & \frac{6}{L^2} & \frac{24}{L^3} & \frac{6}{L^2} & & -\frac{12}{L^3} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\
0 & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & & -\frac{6}{L^2} & 0 & 0 \\
\hline
0 & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & & \frac{12}{L^3} & 0 & 0 \\
\frac{6}{L^2} & 0 & -\frac{12}{L^3} & 0 & & 0 & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\
\frac{2}{L} & 0 & -\frac{6}{L^2} & 0 & & 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L}
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \hline 5 \\ 6 \\ 7 \end{array}
$$

elde ederiz. Yerdeğiştirmeleri belirlemek için ilk dört satır çarpılarak,

$$0 = \frac{4}{L}D_1 - \frac{6}{L^2}D_3$$

$$0 = \frac{4}{L}D_2 + \frac{6}{L^2}D_3 + \frac{2}{L}D_4$$

$$0 = -\frac{6}{L^2}D_1 + \frac{6}{L^2}D_2 + \frac{24}{L^3}D_3 + \frac{6}{L^2}D_4$$

$$-M_0 = \frac{2}{L}D_2 + \frac{6}{L^2}D_3 + \frac{4}{L}D_4$$

elde edilir. Böylece,

$$D_1 = \frac{M_0 L}{2EI}$$

$$D_2 = -\frac{M_0 L}{6EI}$$

$$D_3 = \frac{M_0 L^2}{3EI}$$

$$D_4 = -\frac{2M_0 L}{3EI}$$

bulunur. Q_5 mesnet tepkisi, bu sonuçlara bağlı olarak beşinci satırın çarpımından elde edilir.

$$Q_5 = -\frac{6EI}{L^2}\left(-\frac{M_0 L}{6EI}\right) - \frac{12EI}{L^3}\left(\frac{M_0 L^2}{3EI}\right) - \frac{6EI}{L^2}\left(-\frac{2M_0 L}{3EI}\right)$$

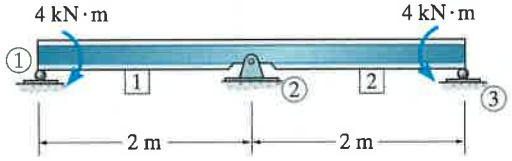
$$Q_5 = \frac{M_0}{L} \qquad \textit{Cevap}$$

Bu sonuç, 2 çubuğuna uygulanacak statik çözümlemeyle kolaylıkla kontrol edilebilir.

15

ÖRNEK 15.3

Şekil 15-10*a*'daki kiriş iki adet kuvvet çifti momenti etkisindedir. Kiriş ortasındaki ② numaralı mesnedin 1.5 mm çökme yapması durumunda mesnet tepkilerini hesaplayınız. $E = 200$ GPa ve $I = 22(10^{-6})$ m^4 alınız.



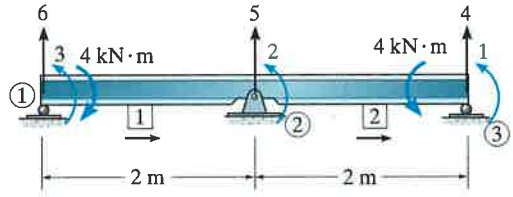
(a)

Şekil 15–10

ÇÖZÜM

Gösterim. Kirişe ait iki çubuk eleman ve üç bilinmeyen serbestlik derecesi vardır ve bu serbestlik dereceleri en küçük yerdeğiştirme numaraları ile gösterilmiştir, Şekil 15-10*b*. Burada bilinen yük ve yerdeğiştirme matrisleri,

$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \qquad \mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0015 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$



(b)

şeklindedir.

Eleman Rijitlik Matrisleri. Eleman rijitlik matrisleri, Denklem 15-1 kullanılarak Şekil 15-10*b*'de görülen yerdeğiştirme numaralarına ve çubuk yönlerine uygun olarak belirlenir. Bu durumda,

$$\mathbf{k}_1 = EI \begin{array}{c} \\ 1.5 \\ 1.5 \\ -1.5 \\ 1.5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 6 & 3 & 5 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1.5 & -1.5 & 1.5 \\ 2 & -1.5 & 1 \\ -1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 1 & -1.5 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 6 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{array}$$

$$\mathbf{k}_2 = EI \begin{array}{c} \\ 1.5 \\ 1.5 \\ -1.5 \\ 1.5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 5 & 2 & 4 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1.5 & -1.5 & 1.5 \\ 2 & -1.5 & 1 \\ -1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 1 & -1.5 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 5 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{array}$$

elde ederiz.

Yerdeğiştirmeler ve Kuvvetler. Yapı rijitlik matrisi oluşturularak ve yapı sistemi için rijitlik denklemi yazılarak,

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \\ \hdashline Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = EI \begin{array}{c} \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ \hdashline -1.5 \\ 1.5 \\ 0 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 1 & 0 & -1.5 & 1.5 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -1.5 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1.5 & 1.5 \\ \hdashline -1.5 & -1.5 & 0 & 1.5 & -1.5 & 0 \\ 1.5 & 0 & -1.5 & -1.5 & 3 & -1.5 \\ 0 & 1.5 & 1.5 & 0 & -1.5 & 1.5 \end{array}\right] \end{array} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \hdashline 0 \\ -0.0015 \\ 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bilinmeyen yerdeğiştirmeler için çözüm yapıldığında,

$$\frac{4}{EI} = 2D_1 + D_2 + 0D_3 - 1.5(0) + 1.5(-0.0015) + 0$$

$$0 = 1D_1 + 4D_2 + 1D_3 - 1.5(0) + 0 + 0$$

$$\frac{-4}{EI} = 0D_1 + 1D_2 + 2D_3 + 0 - 1.5(-0.0015) + 0$$

$EI = 200(10^6)(22)(10^{-6})$ yerine yazılır ve çözüm yapılırsa,

$$D_1 = 0.001580 \text{ rad}, \quad D_2 = 0, \quad D_3 = -0.001580 \text{ rad}$$

bulunur. Bu sonuçlar kullanılarak mesnet tepkileri,

$Q_4 = 200(10^6)22(10^{-6})[-1.5(0.001580) - 1.5(0) + 0 + 1.5(0) - 1.5(-0.0015) + 0] = -0.525 \text{ kN}$ *Cevap*

$Q_5 = 200(10^6)22(10^{-6})[1.5(0.001580) + 0 - 1.5(-0.001580) - 1.5(0) + 3(-0.0015) - 1.5(0)] = 1.05 \text{ kN}$ *Cevap*

$Q_6 = 200(10^6)22(10^{-6})[0 + 1.5(0) + 1.5(-0.001580) + 0 - 1.5(-0.0015) + 1.5(0)] = -0.525 \text{ kN}$ *Cevap*

şeklinde elde edilir.

ÖRNEK 15.4

Şekil 15-11*a*'da görülen kirişin A mesnedindeki momenti hesaplayınız. $E = 200$ GPa, $I = 216(10^6)$ mm^4 alınız.

ÇÖZÜM

Gösterim. Burada kirişin 1 ve 2 yerdeğiştirme numaraları ile gösterilen iki tutulmamış serbestlik derecesi vardır.

Matris çözümlemesi dış yüklerin düğüm noktalarına uygulanmasını gerektirdiğinden, yayılı ve tekil yükler kitabın arkasındaki tablodan hesaplanan ankastrelik moment eşdeğerleriyle değiştirilecektir. 3, 4 ve 5 yerdeğiştirme numaraları ile gösterilen mesnet tepkileri yük matrisinde *bilinmeyen olacağından*, ①'e herhangi bir dış yük ve ②'ye de herhangi bir düşey kuvvet yerleştirilmediğine dikkat ediniz. Şekil 15-11*b*'deki kuvvetler için matris çözümlemeyle elde edilecek sonuçlar, süperpozisyon ilkesi kullanılmak suretiyle daha sonra Şekil 15-11*c*'de görülen uç kuvvetleri dikkate alınarak değiştirilecektir. Şekil 15-11*b*'den, bilinen yerdeğiştirme ve yük matrisleri,

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \qquad \mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 12 \\ 84 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

olarak yazılır.

Eleman Rijitlik Matrisleri. Her iki çubuğa ait rijitlik matrisi de Denklem 15-1'den belirlenir.

1 Çubuğu:

$$\frac{12EI}{L^3} = \frac{12(200)(216)}{6^3} = 2400$$

$$\frac{6EI}{L^2} = \frac{6(200)(216)}{6^2} = 7200$$

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4(200)(216)}{6} = 28\,800$$

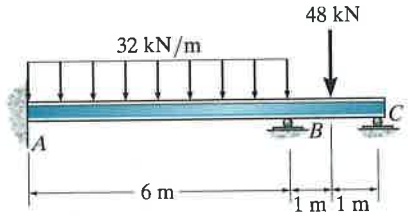
$$\frac{2EI}{L} = \frac{2(200)(216)}{6} = 14\,400$$

$$\mathbf{k}_1 = \begin{matrix} \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 4 & 3 & 5 & 2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2400 & 7200 & -2400 & 7200 \\ 7200 & 28\,800 & -7200 & 14\,400 \\ -2400 & -7200 & 2400 & -7200 \\ 7200 & 14\,400 & -7200 & 28\,800 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{matrix}$$

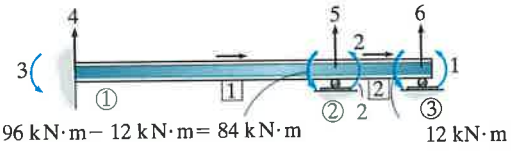
2 Çubuğu:

$$\frac{12EI}{L^3} = \frac{12(200)(216)}{2^3} = 64\,800$$

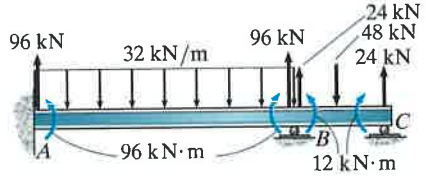
$$\frac{6EI}{L^2} = \frac{6(200)(216)}{2^2} = 64\,800$$



(a)



matris yerdeğiştirme yöntemi ile çözümlenecek kiriş
(b)



gerçek yükleme ve ankastrelik uç kuvvetleri etkisindeki kiriş
(c)

Şekil 15–11

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4(200)(216)}{2} = 86\,400$$

$$\frac{2EI}{L} = \frac{2(200)(216)}{2} = 43\,200$$

$$\mathbf{k}_2 = \begin{matrix} \\ 64\,800 \\ 64\,800 \\ -64\,800 \\ 64\,800 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 5 & 2 & 6 & 1 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 64\,800 & -64\,800 & 64\,800 \\ 86\,400 & -64\,800 & 43\,200 \\ -64\,800 & 64\,800 & -64\,800 \\ 43\,200 & -64\,800 & 86\,400 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \\ 5 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \end{matrix}$$

Yerdeğiştirmeler ve Kuvvetler. Yapı matris denklemi yazılarak,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{KD}$$

$$\begin{bmatrix} 12 \\ 84 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 86\,400 & 43\,200 & 0 & 0 & 64\,800 & -64\,800 \\ 43\,200 & 115\,200 & 14\,400 & 7200 & 57\,600 & -64\,800 \\ 0 & 14\,400 & 28\,800 & 7200 & -7200 & 0 \\ 0 & 7200 & 7200 & 7200 & -2400 & 0 \\ 64\,800 & 57\,600 & -7200 & -2400 & 67\,200 & -64\,800 \\ -64\,800 & -64\,800 & 0 & 0 & -64\,800 & 64\,800 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ve her zamanki gibi çözüm yapılarak,

$$12 = 86\,400D_1 + 43\,200D_2$$

$$84 = 43\,200D_1 + 115\,220D_2$$

$$D_1 = -0.2778(10^{-3})\ \text{m}$$

$$D_2 = 0.8333(10^{-3})\ \text{m}$$

bulunur. Böylece,

$$Q_3 = 0 + 14\,400(0.8333)(10^{-3}) = 12\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

elde edilir. A'daki gerçek momentin hesabında, Q_3 için hesaplanan sonuçla birlikte Şekil 15-11*c*'de görülen +96kN·m'lik ankastrelik uç *kuvveti* de dikkate alınmalıdır. Böylece,

$$M_{AB} = 12\ \text{kN}\cdot\text{m} + 96\ \text{kN}\cdot\text{m} = 108\ \text{kN}\cdot\text{m}\ \circlearrowleft$$

Burada istenmemekle birlikte B'deki moment ve kesme kuvvetini, 1 çubuğunu ve 2 düğüm noktasını dikkate alarak belirleyebiliriz. Bu durumda çözüm,

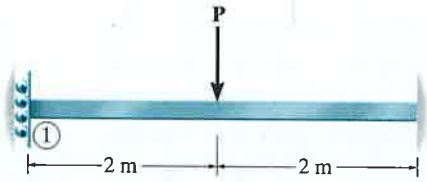
$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{k}_1\mathbf{d} + (\mathbf{q}_0)_1$$

$$\begin{bmatrix} q_4 \\ q_3 \\ q_5 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{matrix} \\ 2400 \\ 7200 \\ -2400 \\ 7200 \end{matrix} \begin{matrix} \begin{matrix} 4 & 3 & 5 & 2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 7200 & -2400 & 7200 \\ 28\,800 & -7200 & 14\,400 \\ -7200 & 2400 & -7200 \\ 14\,400 & -7200 & 28\,800 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.8333 \end{matrix} (10^{-3}) + \begin{bmatrix} 96 \\ 96 \\ 96 \\ -96 \end{bmatrix}$$

açılımı kullanılarak bulunabilir.

ÖRNEK 15.5

Şekil 15-12*a*'da görülen kirişin ①'deki düşey yer değiştirmesini ve mesnet tepkilerini hesaplayınız. *EI* sabittir.

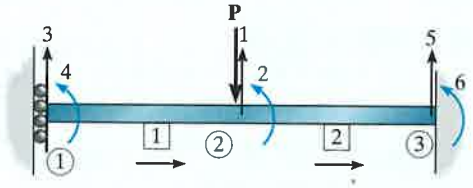


(a)

Şekil 15–12

ÇÖZÜM

Gösterim. Kiriş iki çubuk elemana ayrılarak düğüm noktaları ve çubuklar yakın uçlarından uzak uçlarına doğru yönleri ile birlikte tanımlanmıştır, Şekil 15-12*b*. Bilinmeyen yerdeğiştirmeler Şekil 15-12*c*'de gösterilmiştir. Özellikle, kayıcı ankastre mesnetten dolayı açısal bir yerdeğiştirmenin (D_4) meydana gelmediğine dikkat ediniz.



(b)

Eleman Rijitlik Matrisleri. *EI* sabit ve çubuklar eşit uzunluklarda olduğundan, eleman rijitlik matrisleri aynıdır. Denklem 15-1 ve Şekil 15-12*b*'ye uygun olarak her bir sütun ve satırı tanımlamak için yerdeğiştirme numaraları kullanılırsa,

$$\mathbf{k}_1 = EI \begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1.5 & 1.5 & -1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 & -1.5 & 1 \\ -1.5 & -1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 1.5 & 1 & -1.5 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{k}_2 = EI \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1.5 & 1.5 & -1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 2 & -1.5 & 1 \\ -1.5 & -1.5 & 1.5 & -1.5 \\ 1.5 & 1 & -1.5 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

elde edilir.

Yerdeğiştirmeler ve Kuvvetler. Eleman rijitlik matrisleri yapı rijitlik matrisi içerisinde birleştirilerek ve yapı rijitlik denklemi kullanılarak,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{KD}$$

$$\begin{bmatrix} -P \\ 0 \\ 0 \\ \hline Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = EI \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \\ 3 & 0 & -1.5 & -1.5 & -1.5 & 1.5 & D_1 \\ 0 & 4 & 1.5 & 1 & -1.5 & 1 & D_2 \\ -1.5 & 1.5 & 1.5 & 1.5 & 0 & 0 & D_3 \\ \hline -1.5 & 1 & 1.5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1.5 & -1.5 & 0 & 0 & 1.5 & -1.5 & 0 \\ 1.5 & 1 & 0 & 0 & -1.5 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

elde edilir. Yerdeğiştirmeler için çözüm yapılarak,

$$-\frac{P}{EI} = 3D_1 + 0D_2 - 1.5D_3$$

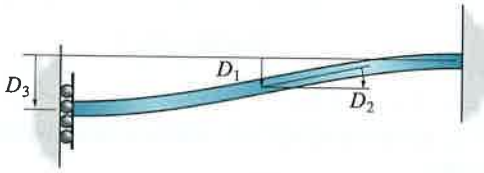
$$0 = 0D_1 + 4D_2 + 1.5D_3$$

$$0 = -1.5D_1 + 1.5D_2 + 1.5D_3$$

$$D_1 = -\frac{1.667P}{EI}$$

$$D_2 = \frac{P}{EI}$$

$$D_3 = -\frac{2.667P}{EI} \qquad \textit{Cevap}$$



(c)

bulunur. Sonuçların işaretlerinin Şekil 15-12*c*'de görülen yerdeğiştirmelerin yönleriyle uyumlu olduğuna dikkat ediniz. Bu sonuçlar kullanılarak mesnet tepkileri,

$$Q_4 = -1.5EI\left(-\frac{1.667P}{EI}\right) + 1EI\left(\frac{P}{EI}\right) + 1.5EI\left(-\frac{2.667P}{EI}\right)$$

$$= -0.5P \qquad \textit{Cevap}$$

$$Q_5 = -1.5EI\left(-\frac{1.667P}{EI}\right) - 1.5EI\left(\frac{P}{EI}\right) + 0\left(-\frac{2.667P}{EI}\right)$$

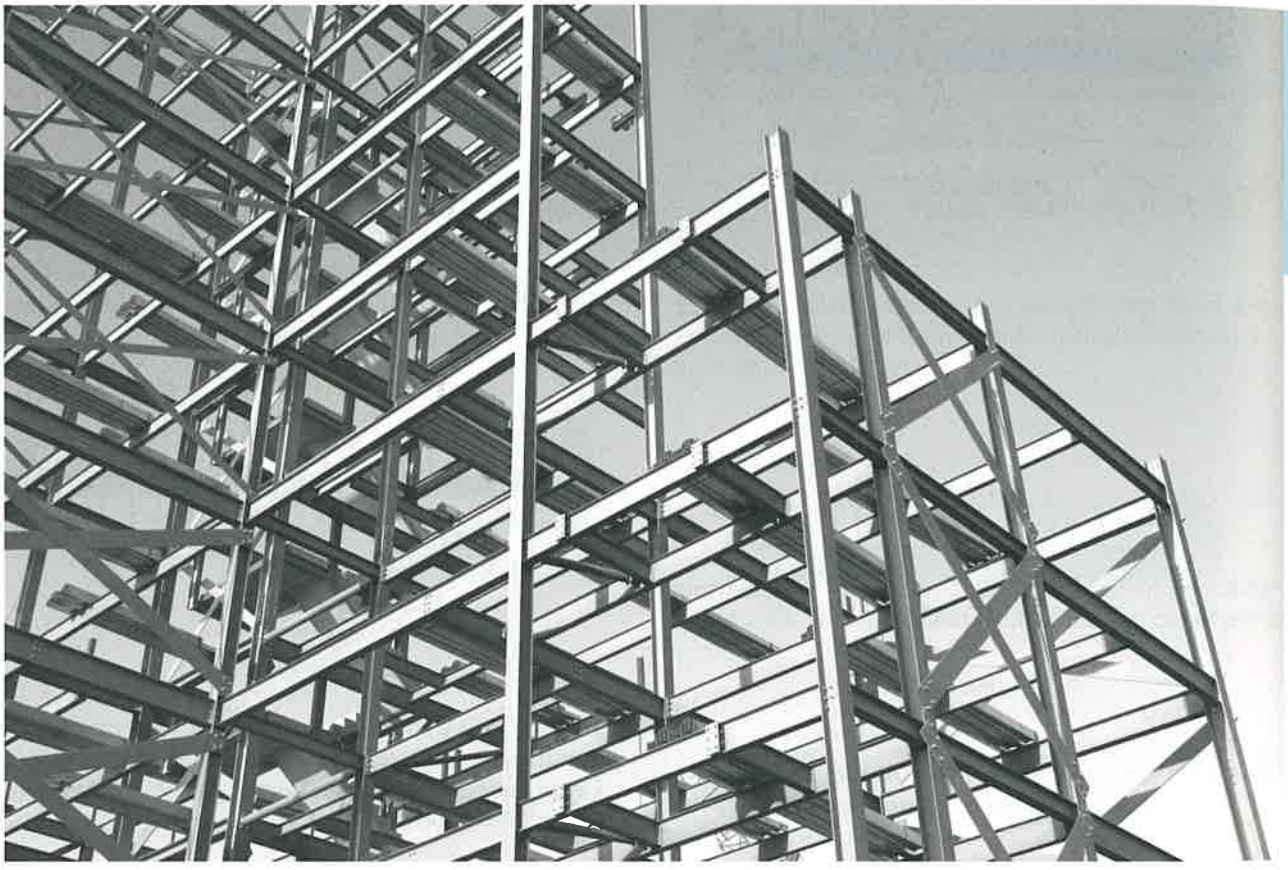
$$= P \qquad \textit{Cevap}$$

$$Q_6 = 1.5EI\left(-\frac{1.667P}{EI}\right) + 1EI\left(\frac{P}{EI}\right) + 0\left(-\frac{2.667P}{EI}\right)$$

$$= -1.5P \qquad \textit{Cevap}$$

şeklinde hesaplanır.

Bölüm 16



© Joe Gough/Fotolia

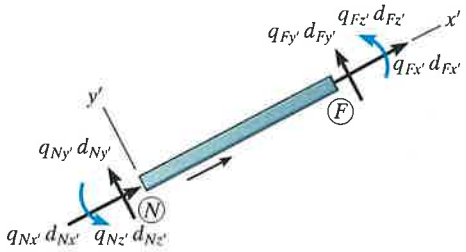
Bu binaya ait çerçeve statikçe belirsizdir. Kuvvet hesabı, matris yerdeğiştirme yöntemi kullanılarak yapılabilir.

Matris Yerdeğiştirme (Rijitlik) Yöntemi ile Düzlem Çerçeve Hesabı

Önceki bölümlerde kafes ve kiriş sistemler üzerinde gösterilen kavramlar bu bölümde genişletilecek ve çerçeve sistemlerin hesabında kullanılacaktır. Çözüm yönteminin kiriş sistemlerinki ile benzer olduğu gösterilecek; ancak çerçeve çubuk elemanları farklı doğrultularda yönlendiğinden dönüşüm matrislerinin kullanılması gerekecektir.

16.1 Çerçeve-Eleman Rijitlik Matrisi

Bu altbölümde x', y', z' lokal koordinat sistemi ile tanımlanan doğru eksenli sabit kesitli (prizmatik) bir çerçeve çubuğu için rijitlik matrisinin elde edilişi üzerinde duracağız, Şekil 16-1. Bu çubuk eleman; yakın ve uzak uçlarında sırasıyla $q_{Nx'}$, $q_{Fx'}$ eksenel kuvvetleri, $q_{Ny'}$, $q_{Fy'}$ kesme kuvvetleri ve $q_{Nz'}$, $q_{Fz'}$ eğilme momentleri etkisindedir. Bu kuvvetlerin tümü kendilerine karşı gelen yerdeğiştirmelerle birlikte pozitif koordinat doğrultularında etkimektedir. Kirişlerde olduğu gibi, $q_{Nz'}$ ve $q_{Fz'}$ momentleri saat ibresinin tersi yönünde pozitiftir; çünkü bu durumda moment vektörleri sağ el kuralına bağlı olarak sayfa düzlemi dışına doğru olan pozitif z' ekseni doğrultusunda olacaktır.



Şekil 16–1

Bu kuvvetlerden kaynaklanan kuvvet-yerdeğiştirme bağıntılarının her birini önceki bölümlerde ele almıştık. Eksenel kuvvet Şekil 14-2, kesme kuvveti Şekil 15-5 ve eğilme momenti Şekil 15-6 referans alınarak incelenmişti. Eğer



Bu yaya köprüsü bir "Vierendeel kirişi" şeklindedir. Köşegen çubuklar kullanılmadığından, kesinlikle bir kafes sistem olmayıp matris yerdeğiştirme yöntemi kullanılarak çözümlenebilecek statikçe belirsiz bir çerçeve kutu sistem oluşturmaktadır.

bu sonuçlar süperpozisyon ile toplanırsa çerçeve çubuğu için elde edilecek altı adet kuvvet-yerdeğiştirme bağıntısı matris formda,

$$\begin{matrix} & N_{x'} & N_{y'} & N_{z'} & F_{x'} & F_{y'} & F_{z'} \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} q_{Nx'} \\ q_{Ny'} \\ q_{Nz'} \\ q_{Fx'} \\ q_{Fy'} \\ q_{Fz'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{Nx'} \\ d_{Ny'} \\ d_{Nz'} \\ d_{Fx'} \\ d_{Fy'} \\ d_{Fz'} \end{bmatrix} \tag{16–1}$$

veya kısaltılmış formda,

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}'\mathbf{d} \tag{16–2}$$

şeklinde ifade edilebilir. $\mathbf{k}'$ eleman rijitlik matrisi, dikkate alınan çubuk elemanın belirli bir birim yerdeğiştirmeye maruz kalması durumunda çubuğa etkiyen kuvvetleri fiziksel olarak ifade eden otuz altı adet rijitlik etki katsayısından oluşmaktadır. Matristeki her bir sütun, sütunlar üzerinde gösterilen yerdeğiştirme numaraları ile tanımlanan birim yerdeğiştirmelere karşı gelen çubuk uç kuvvetlerini göstermektedir. Birleştirme aşamasında, hem denge hem de yerdeğiştirme geometrik uygunluk koşulu sağlanmıştır.

16.2 Yerdeğiştirme ve Kuvvet Dönüşüm Matrisleri

Kafes sistemlerde olduğu gibi **q** çubuk uç kuvvetlerini ve **d** uç yerdeğiştirmelerini, x', y', z' lokal koordinatlarından x, y, z global koordinatlarına dönüştürebilmeliyiz. Bu nedenle dönüşüm matrislerine gereksinim vardır.

Yerdeğiştirme Dönüşüm Matrisi. Şekil 16-2*a*'da görülen çerçeve çubuğunu göz önüne alalım. Burada global koordinatlardaki bir D_{Nx} yerdeğiştirmesinin, aşağıda ifade edilen lokal koordinat yerdeğiştirmelerine neden olduğu görülmektedir,

$$d_{Nx'} = D_{Nx}\cos\theta_x \qquad d_{Ny'} = -D_{Nx}\cos\theta_y$$

Benzer şekilde global koordinatlardaki bir D_{Ny} yerdeğiştirmesi (Şekil 16-2*b*),

$$d_{Nx'} = D_{Ny}\cos\theta_y \qquad d_{Ny'} = D_{Ny}\cos\theta_x$$

şeklinde ifade edilen lokal koordinat yerdeğiştirmelerine neden olur. Son olarak z ve z' eksenleri çakıştığından yani sayfa düzlemi dışına doğru olduğundan, z etrafındaki bir D_{Nz} dönmesi z' ekseni etrafındaki bir $d_{Nz'}$ dönmesine neden olur. Böylece,

$$d_{Nz'} = D_{Nz}$$

Benzer şekilde x doğrultusundaki D_{Fx} ve y doğrultusundaki D_{Fy} global yerdeğiştirmeleri ile D_{Fz} dönmesinin çubuğun uzak ucuna uygulanması durumunda meydana gelen dönüşüm denklemleri sırasıyla,

$$d_{Fx'} = D_{Fx}\cos\theta_x \qquad d_{Fy'} = -D_{Fx}\cos\theta_y$$
$$d_{Fx'} = D_{Fy}\cos\theta_y \qquad d_{Fy'} = D_{Fy}\cos\theta_x$$
$$d_{Fz'} = D_{Fz}$$

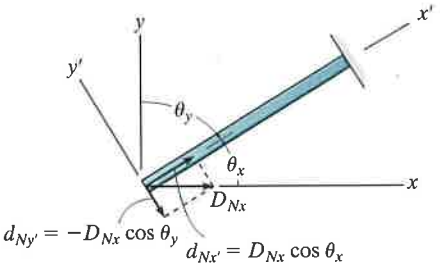
olur. $\lambda_x = \cos\theta_x$, $\lambda_y = \cos\theta_y$'nin çubuk elemana ait doğrultu kosinüslerini göstermesi durumunda yerdeğiştirmelerin süperpozisyonunu matris formda,

$$\begin{bmatrix} d_{Nx'} \\ d_{Ny'} \\ d_{Nz'} \\ d_{Fx'} \\ d_{Fy'} \\ d_{Fz'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_y & \lambda_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_x & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_y & \lambda_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{Nx} \\ D_{Ny} \\ D_{Nz} \\ D_{Fx} \\ D_{Fy} \\ D_{Fz} \end{bmatrix} \tag{16–3}$$

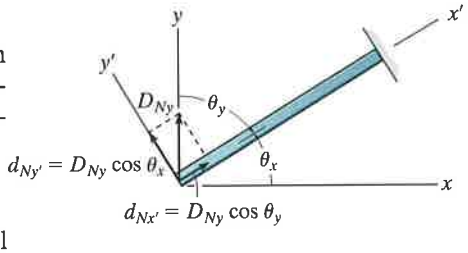
şeklinde yazabiliriz veya

$$\mathbf{d} = \mathbf{TD} \tag{16–4}$$

İncelendiğinde, **T**'nin altı adet x, y, z global uç yerdeğiştirmesini (**D**) altı adet x', y', z' lokal uç yerdeğiştirmesine (**d**) dönüştürdüğü görülür. Bundan dolayı **T** *yerdeğiştirme dönüşüm matrisi* olarak adlandırılır.

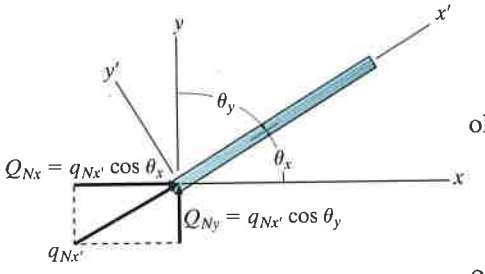


(a)

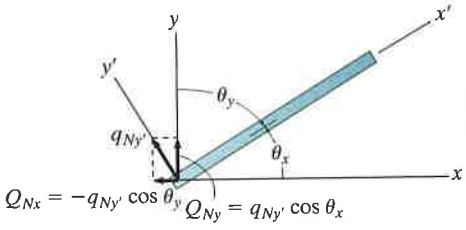


(b)

Şekil 16–2



(a)



(b)

Şekil 16–3

Kuvvet Dönüşüm Matrisi. Şimdi, her bir kuvvet bileşeninin çubuk elemanın yakın ucuna uygulanması durumunda kuvvet bileşenlerinin lokal koordinatlardan global koordinatlara nasıl dönüştürüleceğini belirleyebiliriz. $q_{Nx'}$ kuvvet bileşeninin uygulanması durumunda (Şekil 16-3*a*),

$$Q_{Nx} = q_{Nx'} \cos\theta_x \qquad Q_{Ny} = q_{Nx'} \cos\theta_y$$

olduğu görülebilir. $q_{Ny'}$ uygulandığındaki (Şekil 16-3*b*) bileşenler,

$$Q_{Nx} = -q_{Ny'} \cos\theta_y \qquad Q_{Ny} = q_{Ny'} \cos\theta_x$$

olarak elde edilir. Son olarak $q_{Nz'}$ ve Q_{Nz} aynı doğrultuda olduğundan,

$$Q_{Nz} = q_{Nz'}$$

elde ederiz. Benzer şekilde $q_{Fx'}$, $q_{Fy'}$, $q_{Fz'}$ uç kuvvetleri aşağıdaki bileşenleri verecektir:

$$Q_{Fx} = q_{Fx'} \cos\theta_x \qquad Q_{Fy} = q_{Fx'} \cos\theta_y$$

$$Q_{Fx} = -q_{Fy'} \cos\theta_y \qquad Q_{Fy} = q_{Fy'} \cos\theta_x$$

$$Q_{Fz} = q_{Fz'}$$

$\lambda_x = \cos\theta_x$, $\lambda_y = \cos\theta_y$ alınarak matris formda birleştirilen bu denklemlerden,

$$\begin{bmatrix} Q_{Nx} \\ Q_{Ny} \\ Q_{Nz} \\ Q_{Fx} \\ Q_{Fy} \\ Q_{Fz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & -\lambda_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_y & \lambda_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_x & -\lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_y & \lambda_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{Nx'} \\ q_{Ny'} \\ q_{Nz'} \\ q_{Fx'} \\ q_{Fy'} \\ q_{Fz'} \end{bmatrix} \tag{16–5}$$

veya

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T\mathbf{q} \tag{16–6}$$

elde edilir. Burada $\mathbf{T}^T$, lokal koordinatlarda tanımlanan altı adet çubuk uç kuvvetini global koordinatlarda tanımlanan altı adet kuvvete dönüştürmektedir.

16.3 Çerçeve-Eleman Global Rijitlik Matrisi

Q global uç kuvvetlerini **D** global uç yerdeğiştirmelerine ilişkilendiren bir çerçeve çubuğuna ait rijitlik matrisini belirlemek amacıyla önceki altbölümün sonuçları burada birleştirilecektir. Bunun için Denklem 16-4 (**d** = **TD**) Denklem 16-2'de (**q** = **k'd**) yerine yazılır. Böylece,

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}'\mathbf{TD} \tag{16–7}$$

elde ederiz.

Burada **q** çubuk uç kuvvetleri, **D** global uç yerdeğiştirmeleriyle ilişkilendirilmektedir. Bu bağıntının Denklem 16-6'da (**Q** = $\mathbf{T}^T\mathbf{q}$) yerine yazılması sonuç denklemini verecektir,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}^T\mathbf{k}'\mathbf{TD} \tag{16–8}$$

veya

$$\mathbf{Q} = \mathbf{kD}$$

Burada,

$$\mathbf{k} = \mathbf{T}^T\mathbf{k}'\mathbf{T} \tag{16–9}$$

Burada **k**, çerçeve çubuğuna ait global rijitlik matrisini göstermektedir. Bu matrisin genelleştirilmiş formdaki değerlerini Denklem 16-5, 16-1 ve 16-3'ü kullanmak suretiyle matris işlemleri yaparak aşağıdaki gibi elde edebiliriz,

$$\mathbf{k} = \begin{array}{c} \begin{matrix} N_x & N_y & N_z & F_x & F_y & F_z \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \left(\frac{AE}{L}\lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_y^2\right) & \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_y & -\left(\frac{AE}{L}\lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_y^2\right) & -\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_y \\ \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & \left(\frac{AE}{L}\lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_x^2\right) & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x & -\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & -\left(\frac{AE}{L}\lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_x^2\right) & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x \\ -\frac{6EI}{L^2}\lambda_y & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{2EI}{L} \\ -\left(\frac{AE}{L}\lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_y^2\right) & -\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & \frac{6EI}{L^2}\lambda_y & \left(\frac{AE}{L}\lambda_x^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_y^2\right) & \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & \frac{6EI}{L^2}\lambda_y \\ -\left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & -\left(\frac{AE}{L}\lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_x^2\right) & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \left(\frac{AE}{L} - \frac{12EI}{L^3}\right)\lambda_x\lambda_y & \left(\frac{AE}{L}\lambda_y^2 + \frac{12EI}{L^3}\lambda_x^2\right) & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_x \\ -\frac{6EI}{L^2}\lambda_y & \frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2}\lambda_y & -\frac{6EI}{L^2}\lambda_x & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} N_x \\ N_y \\ N_z \\ F_x \\ F_y \\ F_z \end{matrix} \tag{16–10}$$

Yukarıdaki 6 × 6 boyutundaki matrisin *simetrik* olduğuna dikkat ediniz. Ayrıca her bir terimin konumu, sütunların üzerinde ve satırların yanında sıralanan yakın uçtaki yerdeğiştirme numaraları N_x, N_y, N_z ve sonrasında da uzak uçtakiler F_x, F_y, F_z ile ilintilidir. **k'** matrisi gibi **k** matrisinin her bir sütunu, sütun üzerindeki yerdeğiştirme numarası ile tanımlanan doğrultudaki bir birimlik yerdeğiştirmeye direnç göstermek için gerekli olan düğüm noktalarındaki çubuk uç kuvvetlerini göstermektedir. Örneğin **k**'nın ilk sütunu, yakın uçta uygulanan x doğrultusundaki bir D_{Nx} *birim yerdeğiştirmesinden* kaynaklanan yakın ve uzak uçlardaki global çubuk uç kuvvetlerini göstermektedir.

16.4 Matris Yerdeğiştirme Yönteminin Çerçeve Sistemlere Uygulanışı

Eleman rijitlik matrisleri belirlendikten sonra bu matrisler yapı rijitlik matrisi içerinde her zamanki gibi birleştirilebilir. Yapı sistemine ait matris denklemi yazılarak tutulmamış düğüm noktalarındaki yerdeğiştirmeler, sonrasında da düğüm noktalarındaki mesnet tepkileri ve iç kuvvetler belirlenebilir. Bir çubuk elemana yatay bir eksen boyunca etkiyen yükler, imalat hataları, sıcaklık değişimleri, eğimli mesnetler ve ara mesnetler kafes ve kiriş sistemler için açıklanana benzer şekilde ele alınır.

Çözümde İzlenecek Yol

Aşağıdaki hesap adımları, statikçe belirli ve statikçe belirsiz çerçeve sistem çubuklarında; yerdeğiştirmelerin, mesnet tepkilerinin ve iç kuvvetlerin bulunması için kullanılabilecek bir yöntem ortaya koymaktadır.

Gösterim

- Yapı sistemi sonlu elemanlara ayrılır ve keyfi olarak her bir eleman ve o elemana ait düğüm noktaları tanımlanır. Çerçeve sistem çubukları; genellikle mesnet noktaları, tekil yük noktaları, köşeler veya birleşim noktaları arasında veya iç kuvvetlerin ya da yerdeğiştirmelerin belirleneceği noktalara bağlı olarak tanımlanır.
- Orijin, kolaylık sağlaması açısından genellikle çubuk elemanlardan biri üzerindeki bir düğüm noktasına yerleştirilerek ve tüm düğüm noktaları pozitif koordinatlara sahip olacak şekilde eksenler seçilerek x, y, z global koordinat sistemi oluşturulur.
- Çerçeve sistemin her bir düğüm noktasında üç adet x, y, z yerdeğiştirme bileşeni sayısal olarak tanımlanır. *Tutulmamış serbestlik derecelerini* tanımlamak için daima *en küçük yerdeğiştirme numaraları*, *tutulmuş serbestlik derecelerini* tanımlamak için de geriye kalan veya *en büyük yerdeğiştirme numaraları* kullanılır.
- Problemden, bilinen $\mathbf{D}_k$ yerdeğiştirmeleri ile bilinen $\mathbf{Q}_k$ dış yükleri tespit edilir. $\mathbf{Q}_k$ belirlenirken, açıklık yükü taşıyan bir çubuk eleman için ankastrelik uç kuvvetlerinin *ters yönde* hesaba katıldığından emin olunmalıdır.

Yapı Rijitlik Matrisi

- Her bir çubuk eleman için global koordinatlardaki rijitlik matrisini belirlemek amacıyla Denklem 16-10 kullanılır. λ_x ve λ_y doğrultu kosinüsleri, çubuk uç noktalarına ait x, y koordinatlarından belirlenir, Denklem 14-5 ve 14-6.
- Her bir eleman rijitlik matrisi belirlenip altışar adet satır ve sütun yakın ve uzak yerdeğiştirme numaraları ile tanımlandıktan sonra, $\mathbf{K}$ yapı rijitlik matrisi oluşturulmak üzere matrisler birleştirilir. Kısmi bir kontrol olarak, eleman ve yapı rijitlik matrislerinin tümü *simetrik* olmalıdır.

Yerdeğiştirmeler ve Kuvvetler

- Rijitlik matrisi, Denklem 14-18 ile gösterildiği gibi ayrıştırılır. Bu durumda denklemin açık olarak yazılmasıyla,

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_{11}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{12}\mathbf{D}_k$$
$$\mathbf{Q}_u = \mathbf{K}_{21}\mathbf{D}_u + \mathbf{K}_{22}\mathbf{D}_k$$

elde edilir. $\mathbf{D}_u$ bilinmeyen uç yerdeğiştirmeleri bu denklemlerin ilkinden belirlenir. $\mathbf{Q}_u$ mesnet tepkileri, bu değerlere bağlı olarak ikinci denklemden hesaplanır. Son olarak, çubuk uçlarındaki $\mathbf{q}$ iç kuvvetleri Denklem 16-7'den aşağıdaki gibi hesaplanabilir,

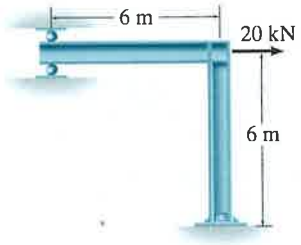
$$\mathbf{q} = \mathbf{k}'\mathbf{T}\mathbf{D}$$

Bilinmeyenlerden herhangi birinin negatif bir değer olarak hesaplanması durumunda, söz konusu bilinmeyenin negatif koordinat yönünde etkidiği anlaşılır.

16

ÖRNEK 16.1

Şekil 16-4*a*'daki iki çubuk elemandan oluşan çerçeve sistemin çubuk uç kuvvetlerini hesaplayınız. Her iki çerçeve eleman için de $I = 180(10^6)$ mm^4, $A = 6000$ mm^2 ve $E = 200$ GPa alınız.



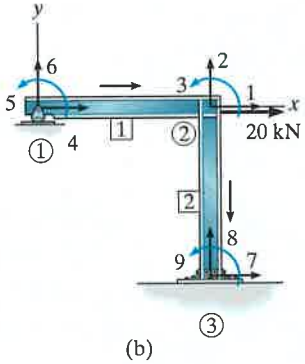
(a)

ÇÖZÜM

Gösterim. İncelendiğinde, çerçevenin Şekil 16-4*b*'deki gibi tanımlanan iki çubuk elemanının ve üç düğüm noktasının olduğu görülür. Global koordinat sisteminin orijini olarak ① numaralı düğüm noktası seçilmiştir. Düğüm noktalarındaki yerdeğiştirme numaraları, *önce tutulmamış serbestlik dereceleri* için tanımlanmıştır. ① ve ③'deki kısıtlamalara ve uygulanan yüklemeye bağlı olarak,

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \qquad \mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

yazarız.



(b)

Şekil 16–4

Yapı Rijitlik Matrisi. Aşağıdaki terimler her iki eleman rijitlik matrisi için de ortaktır:

$$\frac{AE}{L} = \frac{6(10^{-3})(200)(10^6)}{6} = 200(10^3)\ \text{kN/m}$$

$$\frac{12EI}{L^3} = \frac{12(200)(10^6)(180)(10^{-6})}{6^3} = 2(10^3)\ \text{kN/m}$$

$$\frac{6EI}{L^2} = \frac{6(200)(10^6)(180)(10^{-6})}{6^2} = 6(10^3)\ \text{kN}$$

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4(200)(10^6)(180)(10^{-6})}{6} = 24(10^3)\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$\frac{2EI}{L} = \frac{2(200)(10^6)(180)(10^{-6})}{6} = 12(10^3)\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

1 Çubuğu:

$$\lambda_x = \frac{6-0}{6} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{0-0}{6} = 0$$

Bu veriler Denklem 16-10'da yerine yazılarak,

$$\mathbf{k_1} = (10^3)\begin{array}{c} \begin{matrix} 4 & 6 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \left[\begin{matrix} 200 & 0 & 0 & -200 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 6 & 24 & 0 & -6 & 12 \\ -200 & 0 & 0 & 200 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 6 & 12 & 0 & -6 & 24 \end{matrix}\right] \end{array}\begin{matrix} 4 \\ 6 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

elde edilir. Bu 6×6'lık matrisin satır ve sütunları, önce yakın uçtakiler ve sonra da uzak uçtakiler olmak üzere üçer adet x, y, z yerdeğiştirme numaraları ile tanımlanmıştır; yani sırasıyla 4, 6, 5, 1, 2, 3, Şekil 16-4*b*. Bu işlem, terimlerin sonradan birleştirilmesi için yapılmıştır.

2 Çubuğu:

$$\lambda_x = \frac{6-6}{6} = 0 \qquad \lambda_y = \frac{-6-0}{6} = -1$$

Bu verilerin Denklem 16-10'da yerine yazılmasıyla,

$$\mathbf{k_2} = (10^3)\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \left[\begin{matrix} 2 & 0 & 6 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 200 & 0 & 0 & -200 & 0 \\ 6 & 0 & 24 & -6 & 0 & 12 \\ -2 & 0 & -6 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & -200 & 0 & 0 & 200 & 0 \\ 6 & 0 & 12 & -6 & 0 & 24 \end{matrix}\right] \end{array}\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

elde edilir. Sütun ve satır tanımlaması, her zamanki gibi sırasıyla yakın ve uzak uç için x, y, z düzenindeki üçer yerdeğiştirme numarasıyla; yani 1, 2, 3 sonra da 7, 8, 9 şeklinde yapılmıştır, Şekil 16-4*b*.

Yapı rijitlik matrisi, $\mathbf{k}_1$ ve $\mathbf{k}_2$ birleştirilerek belirlenmiştir. Bu durumda $\mathbf{Q} = \mathbf{KD}$ ayrıştırılması ile gösterilen sonuç,

$$\begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hdashline Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{bmatrix} = (10^3) \left[\begin{array}{ccccc:cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 202 & 0 & 6 & -200 & 0 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 202 & -6 & 0 & -6 & -2 & 0 & -200 & 0 \\ 6 & -6 & 48 & 0 & 12 & 6 & -6 & 0 & 12 \\ -200 & 0 & 0 & 200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 12 & 0 & 24 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & -2 & 6 & 0 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -6 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & -200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 200 & 0 \\ 6 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 24 \end{array}\right] \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

şeklinde yazılır.

Yerdeğiştirmeler ve Kuvvetler. Yerdeğiştirmeleri belirlemek üzere denklemlerin açık bir şekilde yazılmasıyla,

$$\begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (10^3) \begin{bmatrix} 202 & 0 & 6 & -200 & 0 \\ 0 & 202 & -6 & 0 & -6 \\ 6 & -6 & 48 & 0 & 12 \\ -200 & 0 & 0 & 200 & 0 \\ 0 & -6 & 12 & 0 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Çözüm yapıldığında,

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.51(10^{-3})\ \text{m} \\ -37.47(10^{-6})\ \text{m} \\ -2.505(10^{-3})\ \text{rad} \\ 17.51(10^{-3})\ \text{m} \\ 1.243(10^{-3})\ \text{rad} \end{bmatrix}$$

bulunur. Mesnet tepkileri, bu sonuçlara bağlı olarak Denklem (1)'den aşağıdaki gibi belirlenebilir:

$$\begin{bmatrix} Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{bmatrix} = (10^3) \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & -200 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 12 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 17.51(10^{-3}) \\ -37.47(10^{-6}) \\ -2.505(10^{-3}) \\ 17.51(10^{-3}) \\ 1.243(10^{-3}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.50\ \text{kN} \\ -20\ \text{kN} \\ 7.50\ \text{kN} \\ 75\ \text{kN} \cdot \text{m} \end{bmatrix}$$ *Cevap*

② düğüm noktasındaki çubuk uç kuvvetleri, 1 çubuğuna Denklem 16-7 uygulanarak belirlenebilir. Burada $\mathbf{k}'_1$ Denklem 16-1 ile, $\mathbf{T}_1$ de Denklem 16-3 ile tanımlanmıştır. Böylece,

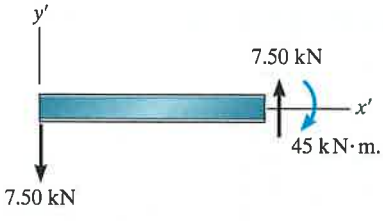
$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{k}_1\mathbf{T}_1\mathbf{D} = (10^{-3})\begin{array}{c} \begin{matrix} 4 & 6 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 & -200 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 6 & 24 & 0 & -6 & 12 \\ -200 & 0 & 0 & 200 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 6 & 12 & 0 & -6 & 24 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 17.51(10^{-3}) \\ 0 \\ 1.243(10^{-3}) \\ 17.51(10^{-3}) \\ -37.47(10^{-6}) \\ -2.505(10^{-3}) \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 4 \\ 6 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \end{array}$$

Matrislerdeki terimlerin, sütun ve satırlar boyunca gösterilen yerdeğiştirme numaraları ile uyumlu olacak şekilde düzenlenmiş olduğuna dikkat ediniz. Çözüm yapıldığında,

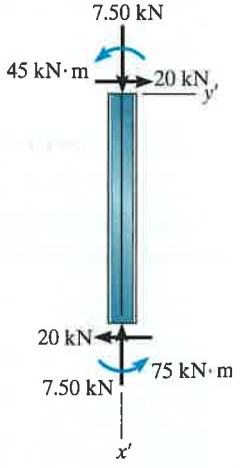
$$\begin{bmatrix} q_4 \\ q_6 \\ q_5 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -7.50\ \text{kN} \\ 0 \\ 0 \\ 7.50\ \text{kN} \\ -45\ \text{kN}\cdot\text{m} \end{bmatrix}$$

Cevap

bulunur. Yukarıdaki sonuçlar Şekil 16-4*c*'de gösterilmiştir. Bu vektörlerin yönleri, Şekil 16-1'de tanımlanan pozitif yönlere göredir. Ayrıca x', y', z' lokal eksenlerinin orijini çubuk elemanın yakın ucundadır. Benzer şekilde 2 çubuğunun serbest-cisim diyagramı Şekil 16-4*d*'de çizilmiştir.



(c)

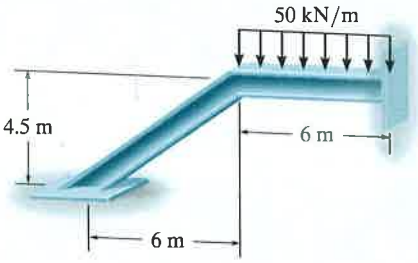


(d)

Şekil 16–4

ÖRNEK 16.2

Şekil 16-5*a*'da görülen çerçeve sistemin çubuk uç kuvvetlerini hesaplayınız. Her bir çubuk eleman için $I = 225(10^6)$ mm^4, $A = 7500$ mm^2 ve $E = 200$ GPa alınız.



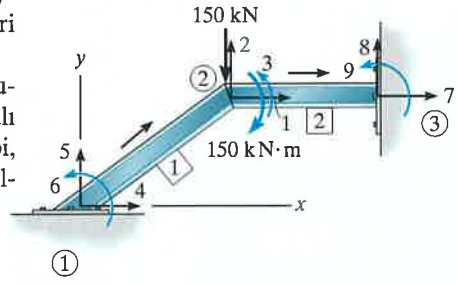
(a)

Şekil 16–5

ÇÖZÜM

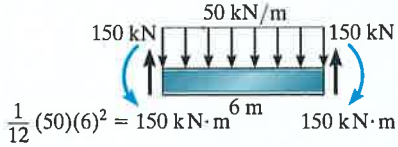
Gösterim. Yatay çubuk üzerine etkiyen yayılı yük, matris çözümlemesi yapabilmek için statik bilgilerinden ve kitabın arkasında verilen tablodan hesaplanacak eşdeğer uç momentleri ve kesme kuvvetleri ile değiştirilecektir. (8 ve 9 yerdeğiştirme numaralı mesnet tepkileri yük matrisinde *bilinmeyen olacağından*, ③'e 150 kN'luk dış kuvvet veya 150 kN·m'lik moment yerleştirilmediğine dikkat ediniz.) Şekil 16-5*b*'deki çerçeve sistem için elde edilecek sonuçlar, süperpozisyon ilkesi kullanılmak suretiyle daha sonra bu çubuk eleman için Şekil 16-5*c*'de verilen uç kuvvetleri dikkate alınarak değiştirilecektir.

Şekil 16-5*b*'de görüldüğü gibi düğüm noktaları ve çubuk elemanlar numaralandırılmış ve global koordinat sisteminin orijini olarak ① numaralı düğüm noktası seçilmiştir. Yerdeğiştirme numaraları her zamanki gibi, öncelikle tutulmamış serbestlik derecelerine verilen numaralarla belirtilmiştir. Böylece,



(b)

+



$\frac{1}{12}(50)(6)^2 = 150$ kN·m

(c)

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \qquad \mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ -150 \\ -150 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

Yapı Rijitlik Matrisi.

1 Çubuğu:

$$\frac{AE}{L} = \frac{7500(10^{-6})(200)(10^6)}{7.5} = 200(10^3)\ \text{kN/m}$$

$$\frac{12EI}{L^3} = \frac{12(200)(10^6)(225)(10^{-6})}{(7.5)^3} = 1280\ \text{kN/m}$$

$$\frac{6EI}{L^2} = \frac{6(200)(225)}{(7.5)^2} = 4800\ \text{kN}$$

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4(200)(225)}{7.5} = 24(10^3)\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$\frac{2EI}{L} = \frac{2(200)(225)}{7.5} = 12(10^3)\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$\lambda_x = \frac{6-0}{7.5} = 0.8 \qquad \lambda_y = \frac{4.5-0}{7.5} = 0.6$$

Denklem 16-10'u kullanarak,

$$\mathbf{k}_1 = (10^3)\begin{array}{c} \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 128.46 & 95.39 & -2.88 & -128.46 & -95.39 & -2.88 \\ 95.39 & 72.82 & 3.84 & -95.39 & -72.82 & 3.84 \\ -2.88 & 3.84 & 24 & 2.88 & -3.84 & 12 \\ -128.46 & -95.39 & 2.88 & 128.46 & 95.39 & 2.88 \\ -95.39 & -72.82 & -3.84 & 95.39 & 72.82 & -3.84 \\ -2.88 & 3.84 & 12 & 2.88 & -3.84 & 24 \end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c} \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}$$

elde ederiz.

2 Çubuğu:

$$\frac{AE}{L} = \frac{7500(10^{-6})(200)(10^6)}{6} = 250(10^3)\ \text{kN/m}$$

$$\frac{12EI}{L^3} = \frac{12(200)(225)}{(6)^3} = 2500\ \text{kN/m}$$

$$\frac{6EI}{L^2} = \frac{6(200)(225)}{(6)^2} = 7500\ \text{kN/m}$$

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4(200)(225)}{6} = 30(10^3)\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$\frac{2EI}{L} = \frac{2(200)(225)}{6} = 15(10^3)\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$\lambda_x = \frac{12-6}{6} = 1 \qquad \lambda_y = \frac{4.5-4.5}{6} = 0$$

Böylece Denklem 16-10'dan,

$$\mathbf{k}_2 = (10^3)\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 250 & 0 & 0 & -250 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 7.5 & 0 & -2.5 & 7.5 \\ 0 & 7.5 & 30 & 0 & -7.5 & 15 \\ -250 & 0 & 0 & 250 & 0 & 0 \\ 0 & -2.5 & -7.5 & 0 & 2.5 & -7.5 \\ 0 & 7.5 & 15 & 0 & -7.5 & 30 \end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array}$$

elde ederiz. Bu durumda **Q = KD** bağıntısında yer alan yapı rijitlik matrisi,

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ -150 \\ -150 \\ \hdashline Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{array} \begin{array}{c} \\ = \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} (10^3) \left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 378.46 & 95.39 & 2.88 & -128.46 & -95.36 & 2.88 & -250 & 0 & 0 \\ 95.39 & 75.32 & 3.66 & -95.36 & -72.82 & -3.84 & 0 & -2.5 & 7.5 \\ 2.88 & 3.66 & 54 & -2.88 & 3.84 & 12 & 0 & -7.5 & 15 \\ \hdashline -128.46 & -95.39 & -2.88 & 128.46 & 95.39 & -2.88 & 0 & 0 & 0 \\ -95.39 & -72.82 & 3.84 & 95.39 & 72.82 & 3.84 & 0 & 0 & 0 \\ 2.88 & -3.84 & 12 & -2.88 & 3.84 & 24 & 0 & 0 & 0 \\ -250 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 250 & 0 & 0 \\ 0 & -2.5 & -7.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.5 & -7.5 \\ 0 & 7.5 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7.5 & 30 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{c} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right] \quad (1)$$

olarak elde edilir.

Yerdeğiştirmeler ve Kuvvetler. Yerdeğiştirmeleri belirlemek üzere denklemlerin açık bir şekilde yazılıp çözümlenmesiyle,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -150 \\ -150 \end{bmatrix} = (10^3) \begin{bmatrix} 378.46 & 95.39 & 2.88 \\ 95.39 & 75.32 & 3.66 \\ 2.88 & 3.66 & 54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.716 \text{ mm} \\ -2.76 \text{ mm} \\ -0.00261 \text{ rad} \end{bmatrix}$$

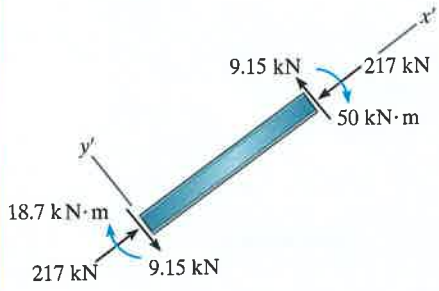
bulunur. Mesnet tepkileri, bu sonuçlara bağlı olarak Denklem (1)'den aşağıdaki gibi belirlenir:

$$\begin{bmatrix} Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \\ Q_8 \\ Q_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -128.46 & -95.39 & -2.88 \\ -95.39 & -72.82 & 3.84 \\ 2.88 & -3.84 & 12 \\ -250 & 0 & 0 \\ 0 & -2.5 & -7.5 \\ 0 & 7.5 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.716 \\ -2.76 \\ -0.00261(10^3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 178.8 \text{ kN} \\ 122.7 \text{ kN} \\ -18.7 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ -179.0 \text{ kN} \\ 26.5 \text{ kN} \\ -59.9 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{bmatrix}$$

Denklem 16-7, 1 ve 2 çubuklarına uygulanarak çubuk uç kuvvetleri hesaplanabilir. 1 çubuğu için $\mathbf{q} = \mathbf{k}_1'\mathbf{T}_1\mathbf{D}$ yazılır. Burada $\mathbf{k}_1'$ Denklem 16-1'den, $\mathbf{T}_1$ ise Denklem 16-3'den belirlenebilir. Böylece,

$$\begin{bmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 & -200 & 0 & 0 \\ 0 & 1.28 & 4.8 & 0 & -1.28 & 4.8 \\ 0 & 4.8 & 24 & 0 & -4.8 & 12 \\ -200 & 0 & 0 & 4.8 & 0 & 0 \\ 0 & -1.28 & -4.8 & 0 & 1.28 & -4.8 \\ 0 & 4.8 & 12 & 0 & -4.8 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 5 \\ 0 & 6 \\ 0.716 & 1 \\ -2.76 & 2 \\ -2.61 & 3 \end{bmatrix}$$

Burada yerdeğiştirme numaraları, çubuk elemanın sırasıyla yakın ve uzak uçlarındaki satır ve sütunlarını göstermektedir; yani 4, 5, 6, sonra da 1, 2, 3, Şekil 16-5*b*. Böylece,



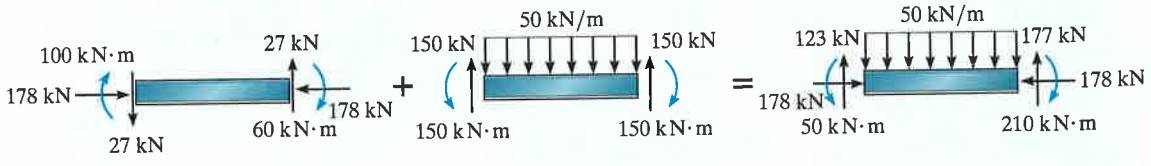
(d)

$$\begin{bmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 216.6\ \text{kN} \\ -9.15\ \text{kN} \\ -18.7\ \text{kN}\cdot\text{m} \\ -216.6\ \text{kN} \\ 9.15\ \text{kN} \\ -50\ \text{kN}\cdot\text{m} \end{bmatrix}$$

Cevap

Bu sonuçlar Şekil 16-5*d*'de gösterilmiştir.

Benzer bir çözümleme 2 çubuğu için yapılmış ve elde edilen sonuçlar Şekil 16-5*e*'nin solunda verilmiştir. Bu sonuçlar, süperpozisyon ilkesi kullanılmak suretiyle Şekil 16-5*c*'de verilen uç kuvvetleri dikkate alınarak değiştirilirse 2 numaralı çubuk eleman için Şekil 16-5*c*'nin sağ tarafında verilen nihai sonuçlar elde edilir.

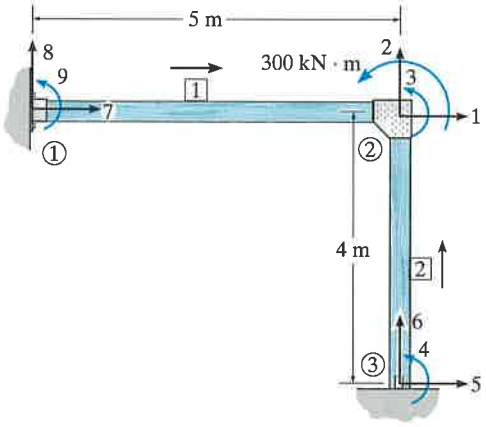


Şekil 16–5

PROBLEMLER

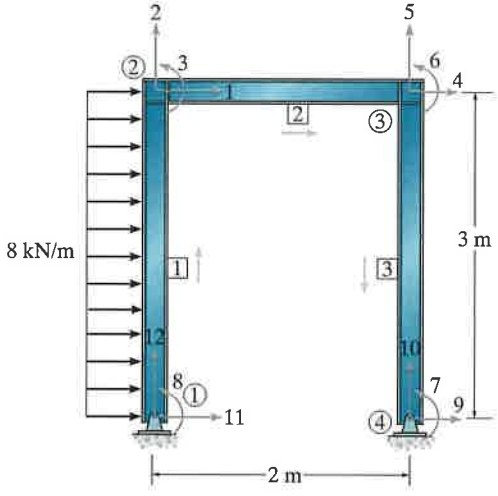
16–1. Çerçeve sistem için **K** yapı rijitlik matrisini oluşturunuz. ③'ün sabit mafsallı, ①'in ankastre olduğunu kabul ediniz. Her bir çubuk eleman için $E = 200$ GPa, $I = 300(10^6)$ mm^4, $A = 21(10^3)$ mm^2 alınız.

16–2. ① ve ③'deki mesnet tepkilerini hesaplayınız. ③'ün sabit mafsallı, ①'in ankastre olduğunu kabul ediniz. Her bir çubuk eleman için $E = 200$ GPa, $I = 300(10^6)$ mm^4, $A = 21(10^3)$ mm^2 alınız.



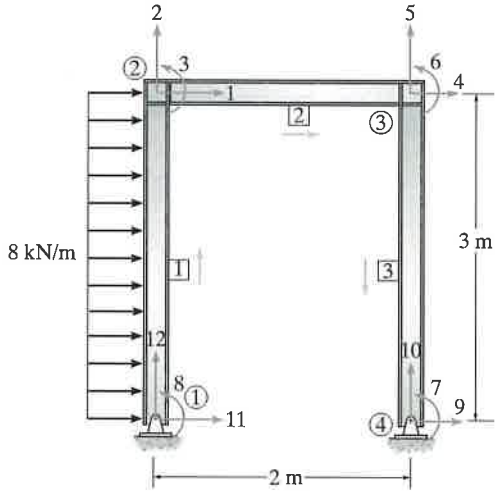
Problemler 16–1/2

16–3. Çerçeve sistem için **K** yapı rijitlik matrisini oluşturunuz. Her bir çubuk eleman için $E = 200$ GPa, $I = 270(10^6)$ mm^4, $A = 9(10^3)$ mm^2 alınız.



Problem 16–3

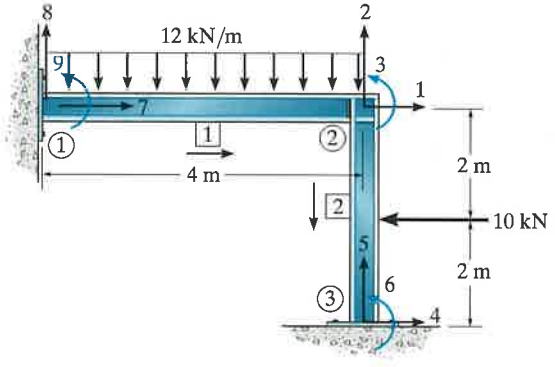
***16–4.** ① ve ④'deki mesnet tepkilerini hesaplayınız. ① ve ④'ün sabit mafsallı, ② ve ③'ün rijit birleşimli olduğunu kabul ediniz. Her bir çubuk eleman için $E = 200$ GPa, $I = 270(10^6)$ mm^4, $A = 9(10^3)$ mm^2 alınız.



Problem 16–4

16–5. Çerçeve sistem için **K** yapı rijitlik matrisini oluşturunuz. ① ve ③'ün ankastre olduğunu kabul ediniz. Her bir çubuk eleman için $E = 200$ GPa, $I = 300(10^6)$ mm^4, $A = 10(10^3)$ mm^2 alınız.

16–6. ① ve ③ ankastre mesnetlerindeki bağ kuvvetlerini hesaplayınız. Her bir çubuk eleman için $E = 200$ GPa, $I = 300(10^6)$ mm^4, $A = 10(10^3)$ mm^2 alınız.

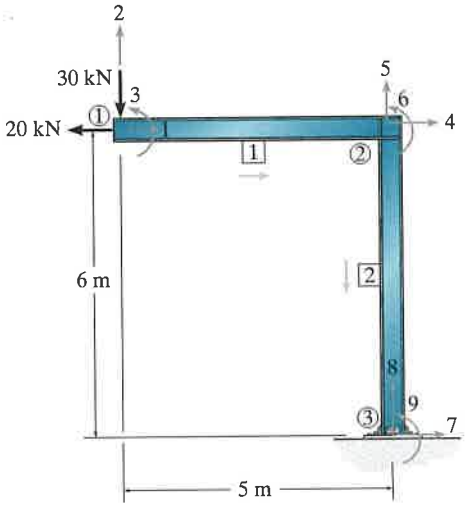


Problemler 16–5/6

16

16–7. Çerçeve sistem için **K** yapı rijitlik matrisini oluşturunuz. Her bir çubuk eleman için $E = 200$ GPa, $I = 250(10^6)$ mm^4, $A = 12(10^3)$ mm^2 alınız.

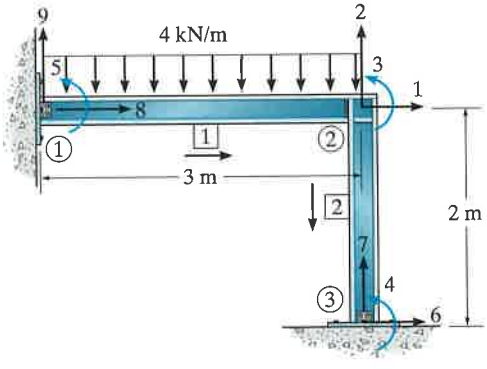
***16–8.** ①'deki yerdeğiştirme bileşenlerini hesaplayınız. Her bir çubuk eleman için $E = 200$ GPa, $I = 250(10^6)$ mm^4, $A = 12(10^3)$ mm^2 alınız.



Problemler 16–7/8

16–9. Çerçeve sistem için **K** yapı rijitlik matrisini oluşturunuz. ① ve ③'ün sabit mafsallı olduğunu kabul ediniz. Her bir çubuk eleman için $E = 200$ GPa, $I = 243(10^6)$ mm^4, $A = 6000$ mm^2 alınız.

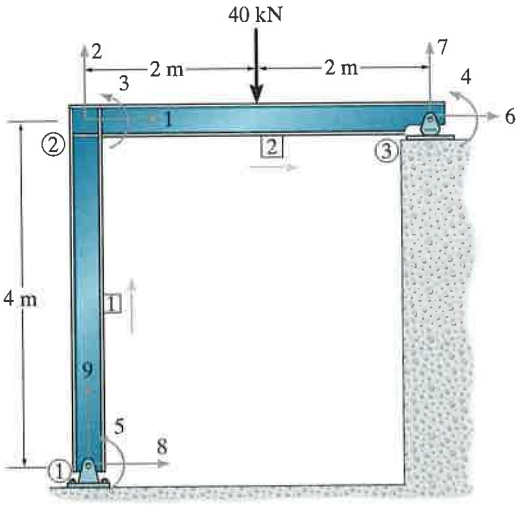
16–10. Her bir çubuk elemana ait çubuk uç kuvvetlerini hesaplayınız. ① ve ③'ün sabit mafsallı olduğunu kabul ediniz. Her bir çubuk eleman için $E = 200$ GPa, $I = 243(10^6)$ mm^4, $A = 6000$ mm^2 alınız.



Problemler 16–9/10

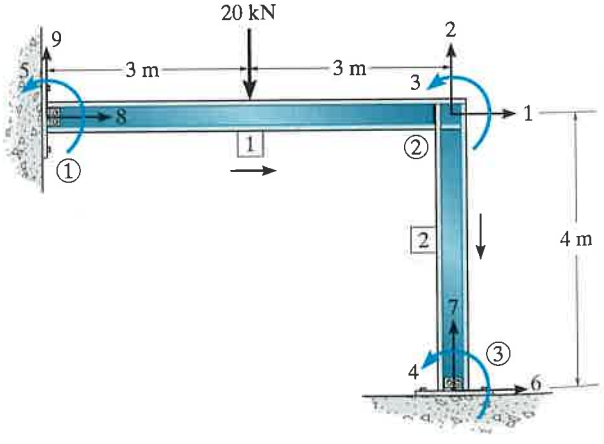
16–11. Çerçeve sistem için **K** yapı rijitlik matrisini oluşturunuz. Her bir çubuk eleman için $E = 200$ GPa, $I = 280(10^6)$ mm^4, $A = 18(10^3)$ mm^2 alınız.

***16–12.** Her bir çubuk elemana ait çubuk uç kuvvetlerini hesaplayınız. Her bir çubuk eleman için $E = 200$ GPa, $I = 280(10^6)$ mm^4, $A = 18(10^3)$ mm^2 alınız.



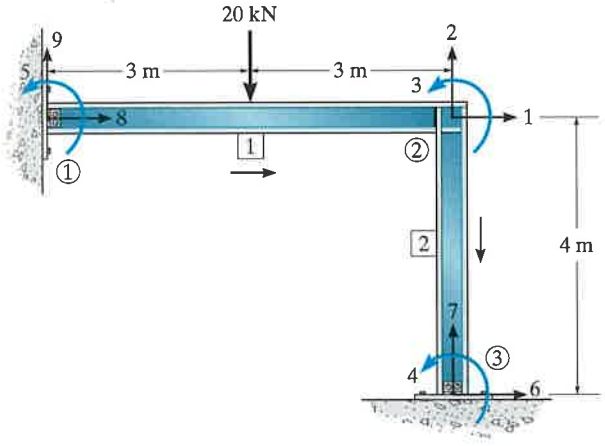
Problemler 16–11/12

16–13. Çerçeve sistem için **K** yapı rijitlik matrisini oluşturunuz. Her bir çubuk eleman için $E = 200$ GPa, $I = 240(10^6)$ mm^4, $A = 6000$ mm^2 alınız. ① ve ③'ün sabit mafsallı, ② düğüm noktasının rijit birleşimli olduğunu kabul ediniz.



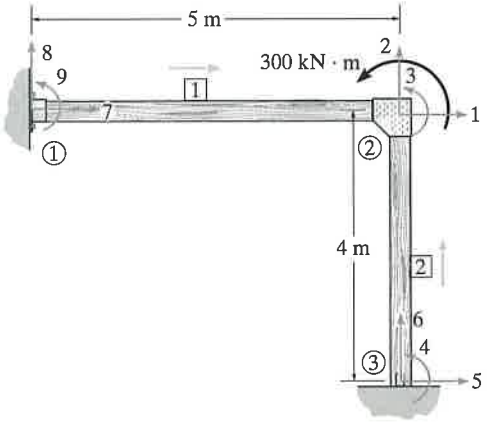
Problem 16–13

16–14. ① ve ③'deki dönmeleri ve mesnetlerdeki bağ kuvvetlerini hesaplayınız. Her bir çubuk eleman için $E = 200$ GPa, $I = 240(10^6)$ mm^4, $A = 6000$ mm^2 alınız. ① ve ③'ün sabit mafsallı, ② düğüm noktasının rijit birleşimli olduğunu kabul ediniz.



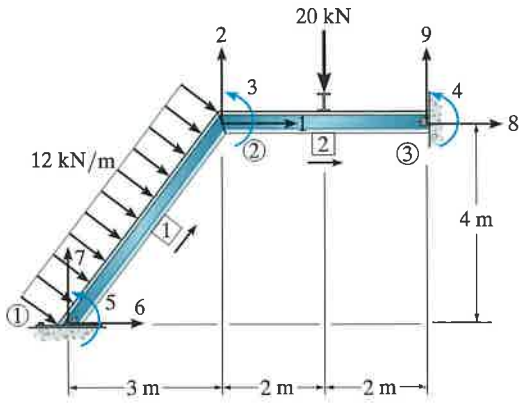
Problem 16–14

16–15. ① ve ③'deki mesnet tepkilerini hesaplayınız. Her bir çubuk eleman için $E = 200$ GPa, $I = 300(10^6)$ mm^4, $A = 21(10^3)$ mm^2 alınız.



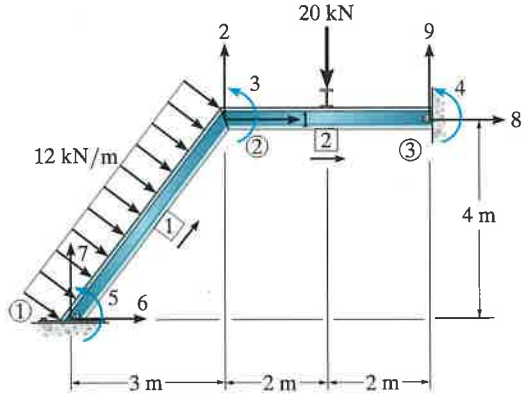
Problem 16–15

***16–16.** İki çubuk elemandan oluşan çerçeve sistem için **K** yapı rijitlik matrisini oluşturunuz. Her bir çubuk eleman için $E = 200$ GPa, $I = 350(10^6)$ mm^4, $A = 20(10^3)$ mm^2 alınız. ① ve ③'ün sabit mafsallı, ② düğüm noktasının rijit birleşimli olduğunu kabul ediniz.



Problem 16–16

16–17. ① ve ③'deki mesnet tepkilerini hesaplayınız. Her bir çubuk eleman için $E = 200$ GPa, $I = 350(10^6)$ mm^4, $A = 20(10^3)$ mm^2 alınız. ① ve ③'ün sabit mafsallı, ② düğüm noktasının rijit birleşimli olduğunu kabul ediniz.



Problem 16–17

16

Bölüm 17



© Andrea Izzotti/Shutterstock

Bir bilgisayar programı kullanılarak yapısal bir çözümleme yapmadan önce yapı sistemine ait yapı elemanlarının uygun bir şekilde nasıl modelleneceğinin bilinmesi önemlidir.

Yapısal Modelleme ve Bilgisayar Çözümlemesi

Bu kitapta; güvenilir bir yapısal çözümlemenin gerçekleştirilebilmesi için bir yapı sisteminin nasıl modellenmesi gerektiği konusunda bir takım kavramlar üzerinde durulmuştur. Bu bölümde bu kavramları genişletecek ve çözümlemenin bilgisayar ile yapılması durumunda nasıl uygulanacağını göstereceğiz. Bu yaklaşım; geometrik, yük ve malzeme verilerinin nasıl birleştirileceği ile ilgili açıklamaları ve daha sonra bunların günümüzde mevcut olan birçok farklı yapısal analiz bilgisayar programından herhangi biri için veri olarak nasıl kullanılacağını kapsayacaktır.

17.1 Genel Yapı Modellemesi

Genel anlamda yapısal bir çözümleme, bir yapı sisteminin çeşitli yüklemeler etkisinde kalması durumunda yapıdaki iç kuvvetleri belirlemek ve yapı elemanlarının yerdeğiştirmelerini bulmak için gerçekleştirilir. Bunun için de öncelikle yapı sistemi için kafes veya çerçeve sistem gibi bir yapı türü seçilmeli ve daha sonra çözümlemede kullanılabilecek şekilde bu yapı türü için bir model oluşturulmalıdır. Bu model; eleman geometrilerini, birleşim şekillerini, yüklemeleri ve malzeme özelliklerini içermelidir. Modelleme işlemi, kabul edilebilir olduğu kadar güvenilir sonuçlar elde edilmesini sağlayacak hassasiyette olmalıdır. Bu durum; özellikle toplantı salonları, okullar ve hastaneler gibi kalabalık insan grupları tarafından meşgul edilen yapı sistemleri için geçerlidir. Bilgisayar çözümlemesinin, belirli bir sayısal sonucun hesabı için doğru olabileceğini; ancak hazırlanan modelin hatalı bilgisayar verilerine neden olması durumunda nihai sonuçların felaketlere neden olabileceğini unutmayınız.

Önceki bölümlerde belirtildiği gibi bir yükü taşımak için kullanılabilecek birçok farklı yapı türü mevcuttur. Belirli bir fonksiyonu yerine getirmek üzere doğru yapı türünün seçimi hem bir bilim hem de bir sanattır. Çoğu zaman birkaç farklı yapı türüne ait modeller dikkate alınmalı ve her biri çözümlenerek ekonomik açıdan uygun olan ve aynı zamanda da emniyetli ve güvenilir olan belirlenmelidir. Bunun için tipik bir örnek olarak hafif metal duvarlar ve çatıya sahip çelik çerçeveli bir yapı sistemine karşılık yığma duvar ve ahşaptan oluşan bir yapı sistemi seçilebilir. Bu yapı sistemlerinin her birinin yük altındaki davranışı farklıdır ve her birine ait model ayrıca inşa ediliş şekline de bağlıdır. Bazı yapısal şekillerin sınırlı bir kullanım alanı vardır. Örneğin kısa açıklıklar için sıklıkla kafes ve kirişli köprüler, uzun açıklıklar için ise asma veya eğik kablo askılı köprüler kullanılır.

Bir yapı sistemini oluşturan yapı elemanları tek bir düzene sahip olmayabileceğinden, bir yapı türü için sadece belirli bir modelin seçilmesi yeterli değildir. Örneğin bir kafes köprünün seçilmesinin ardından Altbölüm 3.1'de belirtildiği üzere Pratt veya Warren tipi kafes sistem örnekleri gibi, kafes sistem türünün de belirlenmesi gerekir. Binalardaki döşeme sistemleri de Altbölüm 2.1'de belirtildiği üzere detaylarda değişkenlik gösterdiğinden her birine ait modelin açıkça belirtilmesi gerekir. Karmaşık projeler için uygun seçimler deneyimle mümkündür ve genelde projeyi tasarlayan mimarlarla yakın çalışma içinde olunmasını icap ettiren bir takım çalışması gerektirir.

Can güvenliğini sağlamak üzere bazı yapı sistemlerinin tasarımında bir bina kriteri olarak, bir yapı sisteminin birincil taşıyıcı elemanlarından bazılarının *çıkarılması* durumunda yapının kararlı kalması istenmektedir. Bu koşul, Oklahoma City'deki Murrah Federal Binasına 1995 yılında gerçekleştirilen trajik bombalamanın ardından ortaya çıkmıştır. İnceleme sonucunda ölümlerin çoğunun patlama sonucu değil de bina önündeki döşeme kısımlarının tamamının aşamalı olarak yıkımı sonucunda meydana geldiği anlaşılmıştır. Bunun sonucunda birçok federal binanın ve bazı çok katlı ticari binaların tasarımı, artık yapı sisteminin birincil elemanlarının olası kaybı durumunda yapının kararlı bir durumda kalmasını gerektirmektedir. Bu nedenle kapsamlı bir yapısal çözümleme, birçok farklı yapısal mesnet durumu için yük aktarım hattının dikkatli bir şekilde incelenmesini ve her bir durum için bir model oluşturulmasını gerektirmektedir.

Sonraki altbölümlerde; temel yapı elemanlarına, çeşitli mesnetlere ve birleşimlere, yüklemelere ve malzemelere uygulanan bu modelleme süreci gözden geçirilecektir. Model oluşturulduktan ve yapısal bir çözümleme gerçekleştirildikten sonra hesaplanan sonuçlar, yapısal davranışla alakalı olarak kendi önsezimizle uyumlu olduğundan emin olmak için kontrol edilmelidir. Böyle bir uyum görülmüyorsa modelleme işlemi geliştirilmeli veya uzman görüşüne bağlı olarak hesaplar doğrulanmalıdır.

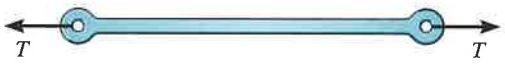
17.2 Bir Yapı Sisteminin ve Elemanlarının Modellenmesi

Çeşitli yapı elemanı türleri Altbölüm 1.2'de ele alınmıştır. Burada bu elemanlarla ilgili özet bir tanımlama yapılacak ve her birinin nasıl modellenebileceği gösterilecektir.

Gergi Çubukları. Bazen *çapraz bağlantı elemanı* olarak da adlandırılan bu yapı elemanları, sadece çekme kuvveti taşımak üzere tasarlanır. Yapılarda birçok uygulaması olan bu sistemlere ait bir örnek, mesnet bağlantıları ile birlikte Şekil 17-1*a*'daki fotoğraflarda görülmektedir. Narin olmalarına bağlı olarak bu elemanlara ait mesnetlerin daima mafsallı olduğu *kabul edilir*. Netice olarak, bu elemana ait model Şekil 17-1*b*'de görülmektedir.



(a)



(b)

Şekil 17–1

17



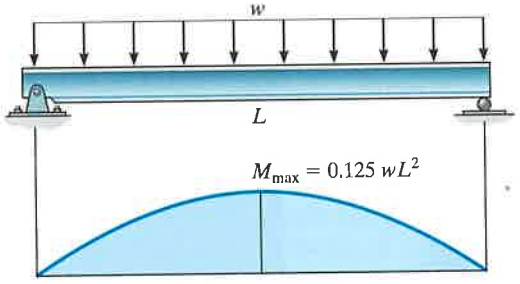
(a)



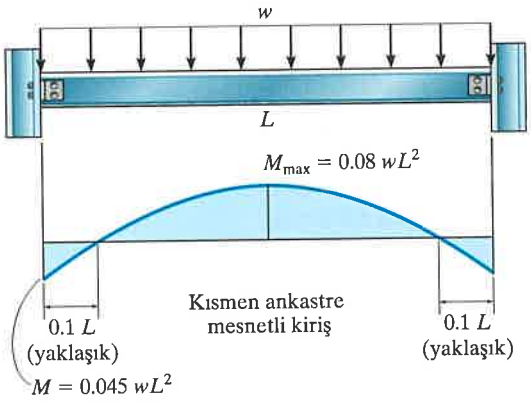
(b)

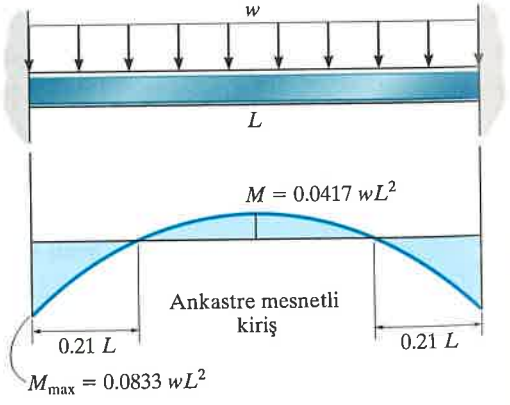
Şekil 17–2

Tali ve Ana Kirişler. *Kirişler*, genelde eksenlerine dik doğrultuda uygulanan yükleri taşıyan sabit kesitli çubuk elemanlardır. *Ana kirişler,* bir dizi döşeme kirişi taşıyan bir bina ana kirişinde olduğu gibi kendisine bağlanan tali kirişler için birer mesnet oluşturur, Şekil 17-2*a*. Bazı durumlarda bu elemanlar için uygun mesnet seçiminde dikkatli olunmalıdır. Mesnedin Şekil 17-2*b*'de olduğu gibi basit bir cıvatalı birleşim olması durumunda bu mesnet bir mafsal olarak modellenmelidir. Bunun nedeni yönetmeliklerin genellikle kirişlerin elastik yerdeğiştirmesini sınırlandırmasındandır ve buna bağlı olarak da mesnet dönmeleri genellikle çok küçük olmaktadır. Mafsallı mesnet seçimi, elemanın tasarımında daha güvenli tarafta kalınmasını sağlayacak bir yaklaşım ortaya koyacaktır. Örneğin aynı düzgün yayılı yük etkisindeki basit mesnetli, kısmen ankastre ve ankastre mesnetli kirişlere ait moment diyagramlarını dikkate alalım, Şekil 17-3. Basit mesnetli durumdaki moment *en büyüktür* ve bundan dolayı da bu kiriş, uygulanan yüklemeye karşı koyabilmek için diğer iki durumla karşılaştırıldığında daha yüksek bir dayanıma ve rijitliğe sahip olmalıdır.



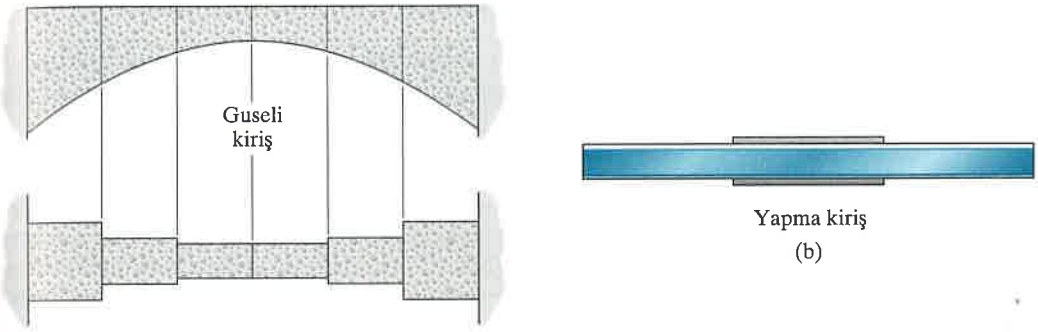
Basit mesnetli kiriş



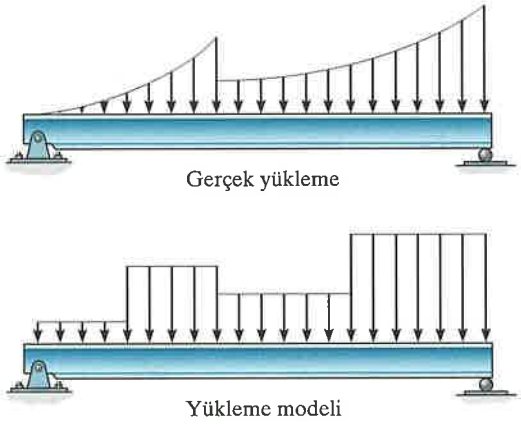


Şekil 17–3

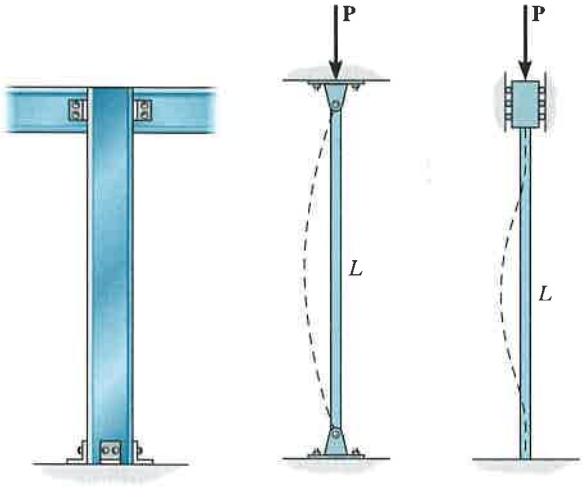
Kirişler, guseli kesit alanlarına da (Şekil 17-4*a*) sahip olabileceği gibi alt ve üst kısımlarına levhalar eklenmek suretiyle de oluşturulabilir, Şekil 17-4*b*. Mesnetleri bir tarafa bırakılacak olursa bilgisayar çözümlemesi için kullanılacak olan guseli kirişin modeli, bir dizi rijit-birleşimli sabit kesitli kiriş parçası ile gösterilebilir ki burada "düğüm noktaları" her bir parçanın birleşim noktalarında tanımlanır. İyi bir değerlendirme sonucunda bu ayrıştırma için seçilecek parça sayısı kabul edilebilir olmalıdır. Şekil 17-4*a*'da görüldüğü gibi guseli kiriş parçalarının uç noktalarından yüksekliği *en küçük* olanın, sabit kesitli kiriş parçalarının kalınlığı olarak seçilmesi güvenli tarafta kalınmasını sağlayacaktır. Kirişlerin bu şekilde ele alınması, nadir görülen türdeki yayılı yüklerin kirişlere uygulanması durumunda da geçerlidir. Bilgisayar yazılımları genellikle düzgün yayılı, üçgen ve yamuk yüklemeleri içermektedir. Belirli bir yüklemenin bilgisayar programı içinde tanımlanmaması durumunda, bu yükleme bir yaklaşımla birbirine bağlı kiriş parçaları üzerine etkiyen düzgün yayılı yükler dizisi şeklinde dikkate alınabilir. Güvenli tarafta kalınmasını sağlayacak bir yaklaşım, Şekil 17-5'de görüldüğü gibi her bir kiriş parçasındaki yayılı yüke ait en büyük şiddet değerini seçmek olacaktır.



Şekil 17–4

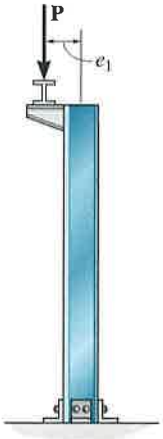


Şekil 17–5



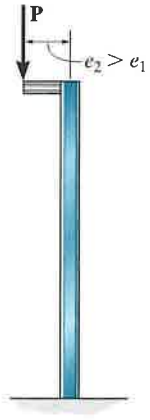
(a) Mafsallı (b) Ankastre (c)

Şekil 17–6



Kiriş kolon

(a)



(b)

Şekil 17–7

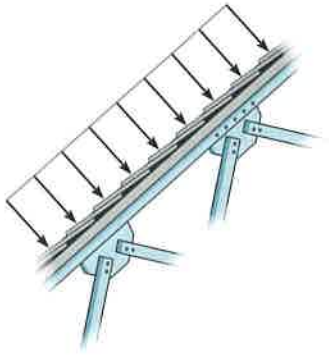
Kolonlar. Altbölüm 1.2'de açıklandığı üzere kolonlar; basınç yüklerinin doğrudan etkiyle taşındığı yani yükün, kesit alanının geometrik merkezinden geçtiği yapı elemanlarıdır. Uç mesnetleri, kirişlerde olduğu gibi sonuçların tasarım açısından güvenilir bir yaklaşım ortaya koymasını sağlayacak şekilde modellenmelidir. Örneğin Şekil 17-6*a*'da görülen kolona merkezinden bir yükün uygulanması ve mesnetlerinin sabit mafsallı olarak modellenmesi durumunda (Şekil 17-6*b*) bu kolonun kesit alanı, aynı kolonun ankastre mesnetli olarak modellendiği (Şekil 17-6*c*) duruma kıyasla burkulmayı önleyecek daha büyük bir rijitliğe sahip olacak şekilde tasarlanmalıdır.* Diğer bir örnek olarak kolona bir ***çıkma*** kısmın eklenmesi durumunda kolon merkezi dışından etkiyen bir yük taşıyacak, böylelikle de bir ***kiriş kolon*** meydana gelecektir, Şekil 17-7*a*. Burada kolona ait model; yükün, kolon kesit alanının eğilme ekseninden güvenli tarafta kalınacak bir mesafede uygulanmasını ve dolayısıyla da burkulmaya karşı daha fazla emniyet sağlanmasını temin edecek şekilde boyutlandırılmalıdır, Şekil 17-7*b*.

Genel Yapı Sistemi. Bir yapı sistemi tasarlanırken dikkate alınması gereken çeşitli sabit ve hareketli yükler Altbölüm 1.3'de ele alınmıştır. Tüm bu yükler yönetmeliklerde tanımlanmıştır ve Altbölüm 1.4'de belirtildiği gibi yük katsayıları kullanılarak ve bu katsayıları çeşitli yük kombinasyonlarında uygulayarak yüklerdeki belirsizliği dikkate almak üzere olasılık teorisinin kullanımına yönelik bir eğilim söz konusudur. Yüklemeler belirlendikten sonra yüklemenin yapı sistemine ait modele kabul edilebilir bir güvenlik sağlanacak şekilde uygulanabilmesi için iyi bir mühendislik değerlendirmesinin yapılması beklenir. Yüklerin sadece şiddetinin belirlenmesi yeterli olmayıp bu yüklerin model üzerindeki konumu da tanımlanmalıdır. Modele ait boyutlar genellikle her bir eleman için merkezden merkeze olacak şekilde tanımlanır. Belirsizlik olması durumunda, daha büyük iç kuvvetlerin hesaplanması ve böylelikle emniyetli bir tasarım elde edilebilmesi için daima *büyük olan boyutları* kullanınız.

*Kolonlarda meydana gelebilecek ani stabilite kaybı (kararsızlık) veya burkulma; *Mechanics of Materials*, 9/e, R. C. Hibbeler, Pearson Education kitabında ele alınmıştır.

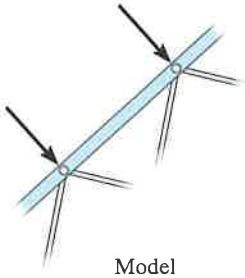
Yük aktarım hattının belirlenmesinin ardından bir elemandan diğerine yük aktarımı için makul kabuller yapılabilir. Bkz. Altbölüm 2.2. Örneğin kafes sistemler tarafından taşınan çatı sistemleri genellikle aşıklara bağlanır. Ancak çatı sistemi bazen doğrudan doğruya kafes sistemin tüm üst başlığı boyunca da yerleştirilebilir, Şekil 17-8*a*. Böyle bir durumda düğüm noktaları arasındaki yük dağılımının bileşkesi genellikle eşit olarak bölünüp düğüm noktalarının her birinde noktasal bir yükleme olarak alınabilir, Şekil 17-8*b*.

İkinci bir örnek olarak Şekil 17-9*a*'da görüldüğü gibi modellenen metal bir binanın ön tarafındaki rüzgâr etkisini dikkate alalım. Her bir makas aralığında gergi çubukları kullanılarak oluşturulan X çaprazları, binanın kesikli çizgilerle gösterildiği gibi bir ***yanal ötelenme*** hareketi yapmasını engellemektedir. Gerçek binada, aşıkların her bir çerçeveye bağlı olması ve bunun yanında çatının da aşıklara rijit olarak bağlı olmasından dolayı aşıklar da binanın hareketini sınırlandıracaktır. X çaprazlı statikçe belirsiz bir kafes sistemin, çözümlemeyi basitleştirmek amacıyla statikçe belirli bir sisteme nasıl indirgendiği Altbölüm 7.2'de yaklaşık hesap yöntemleri kullanılarak gösterilmişti. Buradaki durumda çatı birleşimi tarafından sağlanan taşıyıcılık ihmal edilerek gergi çubukları güvenli tarafta kalacak şekilde tasarlanabilir ve *sadece çekme etkisindeki çubukların* göçmeye karşı gerekli direnci sağladığı kabul edilebilir. Başka bir ifadeyle çubukların kesit alanı küçük olduğundan önemli bir basınç kuvveti taşımadıkları ve bu nedenle de kolayca burkulabildikleri kabul edilebilir. Şekil 17-9*b*'deki modelde görülen sadece dört çubuk elemanın rüzgâr yüküne direnç gösterdiği kabul edilmiştir. Diğer dört çubuk eleman ise rüzgâr yükünün ters yönden etkimesi durumunda taşıyıcılık sağlayacaktır.



Gerçek yapı

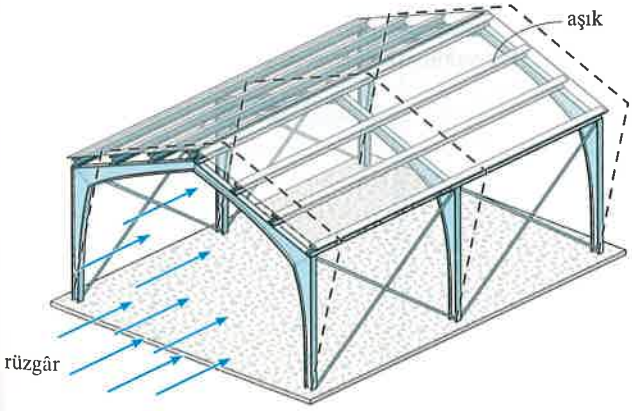
(a)



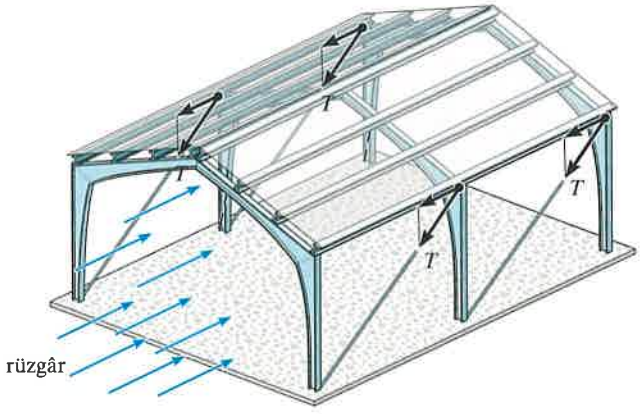
Model

(b)

Şekil 17–8



(a)



(b)

Şekil 17–9

Malzeme dayanımı ve yapı rijitliği de göz önünde bulundurulması gereken unsurlardır. Dayanım özellikleri; elastik sınır veya çekme dayanımının aşılmadığı emniyet gerilmelerinin ve bunun yanında çevresel yüklemeler veya sıcaklık değişimi durumunda yorulma ve kırılmaya imkân tanımayan bir gerilme sınırının seçilmesini içermektedir.

Elastik bir hesapla ilgili malzeme özellikleri; elastisite modülü, kayma modülü, Poisson oranı, ısıl genleşme katsayısı ve malzeme birim hacim ağırlığı veya özgül ağırlığıdır. Aslında yapı sisteminin rijitliği, yapının elastisite modülüne (E) bağlıdır. Çelik için bu özellik, malzeme önemli bir sıcaklık değişimine maruz kalmadığı sürece bir çelik numunesinden diğerine hemen hemen sabit kalmaktadır. Ancak beton ve ahşap malzemelerde meydana gelebilecek değişkenliklerden dolayı bu malzemelerde E'nin seçimine dikkat edilmelidir. Zamanla tüm bu malzeme özellikleri, çelik ve betonda görüldüğü gibi ve bunun yanında ahşapta görülebilecek azalma gibi *atmosferik korozyondan* etkilenebilir. Altbölüm 1.4'de bahsedildiği gibi malzeme dayanımı ve rijitlik özellikleri ile ilgili olarak malzemede meydana gelebilecek değişkenlikleri dikkate almak üzere sıklıkla bir dayanım katsayısı kullanılmaktadır.

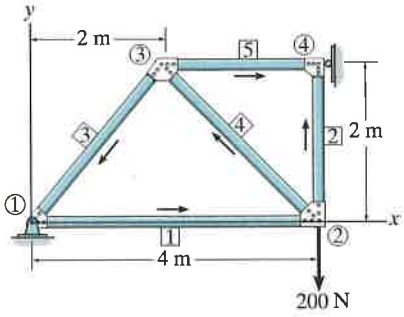
17.3 Yapısal Çözümleme ile İlgili Bilgisayar Programlarının Genel Uygulaması

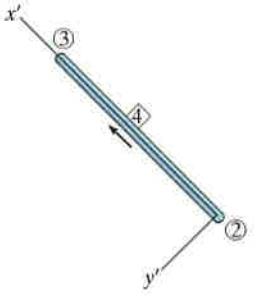
Yapı sistemine ait model oluşturulduktan ve bunun yanında yük ve malzeme özellikleri tanımlandıktan sonra tüm bu veriler mevcut olan bir bilgisayar programı için tablo haline getirilmelidir. STAAD, RISA ve SAP gibi günümüzde mevcut olan en popüler yapısal analiz programları, Bölüm 14 ila Bölüm 16 arasında açıklanan matris yerdeğiştirme (rijitlik) yöntemine dayalıdır.* Bu programların her biri biraz farklı bir ara yüze sahip olsa da söz konusu programların tümü mühendisin verileri belirli bir formata göre girmesini gerektirmektedir. Daha sonra ele alınacağı üzere birçok bilgisayar yazılımı veri girişini kendisi düzenleyecek olmakla birlikte aşağıda bu işlemin nasıl yapılacağına dair genel bir yaklaşım verilmektedir.

*Bu yöntemin üç boyutlu çerçeve sistemlerde burulma etkilerini içeren daha kapsamlı bir açıklaması, matris çözümlemeyle ile ilgili kitaplarda verilmektedir.

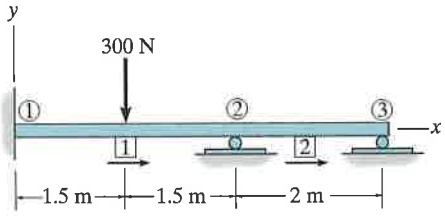
Başlangıç Adımları. Herhangi bir programın kullanımına başlanmadan önce, ilk olarak yapı elemanlarının ve *düğüm noktası* olarak adlandırılan birleşim noktalarının sayısal olarak tanımlanması ve bunun yanında yapı sisteminin geometrisinin ve yüklemesinin tanımlanabilmesi için global ve lokal koordinat sistemlerinin oluşturulması gerekir. Bunun için de yapı sisteminin bir taslağı çizilip çubuk elemanlar kare içine alınan sayılarla, düğüm noktaları da daire içine alınan sayılarla gösterilir. Bazı programlarda çubuk elemanların "yakın" ve "uzak" uçlarının tanımlanması gerekir. Bu işlem, ok ucu uzak uca doğru olacak şekilde çubuk boyunca gösterilen bir ok ile yapılır. Bir düzlem kafes, kiriş ve düzlem çerçeve için çubuk eleman, düğüm noktası ve "yön" tanımlaması Şekil 17-10, 17-11 ve 17-12'de görülmektedir. Şekil 17-10'da görüldüğü gibi ② düğüm noktası 4 çubuğunun "yakın ucunda", ③ düğüm noktası ise "uzak ucundadır". Bu gösterimlerin tümü rastgele bir şekilde yapılabilir. Ancak kafes sistemlerde dış yükler birleşim noktalarına etkidiğinden, ayrıca yerdeğiştirme ve çubuk kuvvetleri de bu noktalarda belirleneceğinden bir kafes sisteme ait düğüm noktalarının daima birleşim noktalarında tanımlanacağına dikkat ediniz. Kiriş ve çerçeveler için düğüm noktaları; mesnetlerde, bir köşe veya birleşim noktasında, bir ara mafsalda veya doğrusal veya açısal yerdeğiştirmenin belirleneceği bir noktada olabilir, Şekil 17-11 ve 17-12.

Yük ve yerdeğiştirmeler vektörel büyüklükler olduğundan, bunların gerçek yönlerini tanımlamak için bir koordinat sisteminin oluşturulması gereklidir. Burada iki farklı koordinat sisteminin kullanılması gerekmektedir.

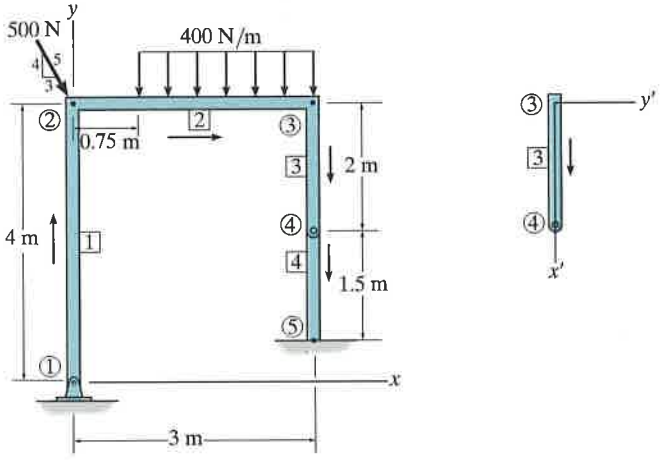




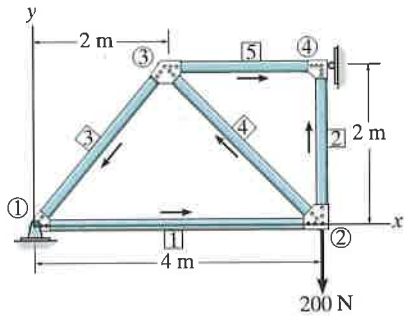
Şekil 17–10

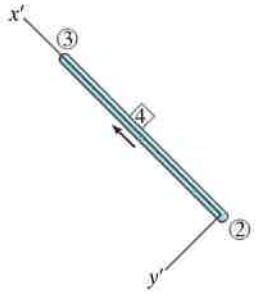


Şekil 17–11



Şekil 17–12





Şekil 17–10 (tekrar)

Global Koordinatlar. Her bir düğüm noktasının orijine göre olan konumunu belirlemek ve düğüm noktalarındaki dış yük ve yerdeğiştirme bileşenlerinin her birinin yönünü tanımlamak için, sağ el kuralına uyan x, y, z eksenleri kullanılmak suretiyle tek bir ***global veya yapı koordinat sistemi*** dikkate alınır. Orijini, diğer tüm düğüm noktaları pozitif koordinatlara sahip olacak şekilde bir düğüm noktasına konumlandırmak uygun bir seçenektir. Her bir şekle bakınız.

Lokal Koordinatlar. Kiriş ve çerçeve sistem çubukları üzerine etkiyen dış yüklerin konum ve doğrultularını tanımlamak ve herhangi bir yapı sistemine ait bir çubuk elemanın düğüm noktalarında hesaplanan iç kuvvetlerini yorumlayabilmek için ***lokal veya eleman koordinat sistemi*** kullanılır. Bu koordinat sistemi, orijin "yakın" uçta ve x' ekseni "uzak" düğüm noktasına doğru çubuk ekseni boyunca olacak şekilde sağ el kuralına uyan x', y', z' eksenleri kullanılarak tanımlanabilir. 4 numaralı kafes çubuğuna ve 3 numaralı çerçeve çubuğuna ait birer örnek sırasıyla Şekil 17-10 ve 17-12'de görülmektedir.

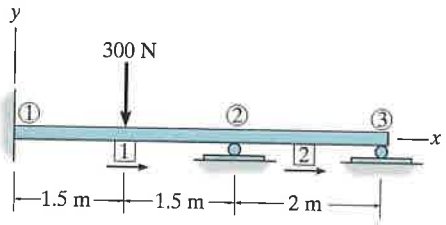
Program İşleyişi. Herhangi bir program çalıştırıldığında, veri girilmesi ve sonuçların alınması için çeşitli seçim imkânları sunan bir menü açılır. Veri girişi için kullanılan adımlar aşağıda açıklanmaktadır. Her bir problemde sayısal büyüklükler için uyumlu bir birim sistemi kullanıldığından emin olunmalıdır.

Genel Yapı Bilgisi. Bir problem başlığı atamak ve çözümlenecek yapı sisteminin türünü (kafes, kiriş veya çerçeve) tanımlamak için genellikle ilk önce seçilir.

Düğüm Noktası Verisi. Sırayla, her bir düğüm noktası ile söz konusu düğüm noktasının global koordinatları girilir.

Çubuk Eleman Verisi. Sırayla, her bir çubuk eleman numarası, yakın ve uzak düğüm noktası numaraları ve çubuk eleman özellikleri; E (elastisite modülü), A (kesit alanı), ve/veya I (atalet momenti ve/veya polar atalet momenti veya üç boyutlu çerçeveler için gerekli olan diğer uygun burulma sabitleri*) girilir. Eğer söz konusu bu eleman özellikleri bilinmiyor ise yapı sisteminin statikçe belirli olması durumunda bu değerler bire eşit alınabilir. Herhangi bir mesnet çökmesi meydana gelmemesi ve çubuk elemanların tümünün aynı kesit alanına sahip olması ve aynı malzemeden üretişmiş olması koşuluyla bu işlem statikçe belirsiz sistemler için de yapılabilir. Her iki durumda da hesaplanacak sonuçlar gerçek mesnet tepkilerini ve iç kuvvetlerini verecek; ancak gerçek yerdeğiştirmeleri göstermeyecektir?

*Çoğu zaman önceden oluşturulmuş herhangi bir yapısal şekil; örneğin geniş başlıklı bir I kesiti, programın bu şeklin geometrik özelliklerine ait bir veri tabanına sahip olması durumunda kullanılabilmektedir.



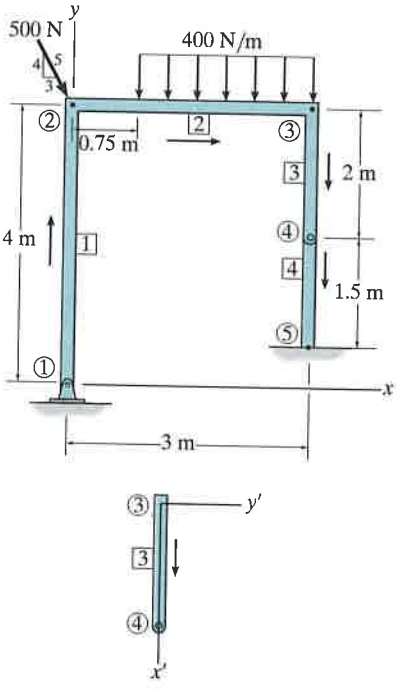
Şekil 17–11 (tekrar)

Eğer bir ara mafsal, bir kiriş veya çerçeveye ait iki çubuk elemanını birleştiriyorsa o düğüm noktasındaki moment serbestliği belirtilmelidir. Örneğin Şekil 17-12'deki çerçevenin 3 numaralı çubuk elemanın ④ numaralı uzak düğüm noktasında bir mafsal vardır. Benzer şekilde bu mafsal 4 numaralı çubuk elemanın yakın düğüm noktasında da tanımlanabilir.

Mesnet Verisi. Bir mesnette tanımlanan her bir düğüm noktası sırayla girilir ve kısıtlama olan global koordinat doğrultuları belirtilir. Örneğin Şekil 17-12'deki çerçevenin ⑤ numaralı düğüm noktası ankastre bir mesnet olduğundan x, y ve z (dönme) doğrultuları için sıfır değeri girilir; ancak bu mesnedin aşağıya doğru 0.003 m çökme yapması durumunda y için -0.003 değeri girilir.

Yük Verisi. Dış yükler düğüm noktalarında veya çubuk elemanlar üzerinde tanımlanır. *Noktasal yüklemelerin* cebirsel değerleri *global koordinatlarda* girilir. Örneğin Şekil 17-10'daki kafes sistem için ② numaralı düğüm noktasındaki yükleme y doğrultusunda olup değeri -200'dür. Kiriş ve çerçeve *çubukları* için yüklemeler ve bu yüklemelerin konumları genellikle *lokal koordinatlar* esas alınarak girilir. Örneğin Şekil 17-12'deki çerçevenin 2 numaralı çubuğu üzerindeki yayılı yük; ② numaralı yakın düğüm noktasından 0.75 m uzaklıkta -400 N/m değeri ile ve yine aynı düğüm noktasından 3 m uzaklıkta -400 N/m değeri ile tanımlanır.

Sonuçlar. Tüm veriler girildikten sonra artık problem çözümlenip yapı sistemine ait mesnet tepkileri ile her bir düğüm noktasındaki yerdeğiştirme ve iç kuvvetler yapı sisteminin yerdeğiştirme grafiği ile birlikte elde edilebilir. Sonuçların kısmi bir kontrolü olarak düğüm noktalarının her birinde sıklıkla statik bir kontrol yapılır. *Elde edilen sonuçlara hiçbir şekilde tamamen güvenilmemelidir. Bunun yerine bilgisayar çıktılarını daha ileri düzeyde kontrol etmek üzere bu kitapta anlatılan birçok klasik yöntemden bir tanesi kullanılarak sezgisel bir yapı analizi yapmak akıllıca olur. Nihayetinde, yapı mühendisi hem modellemede hem de nihai sonuçların hesabında tüm sorumluluğu almak zorundadır.*



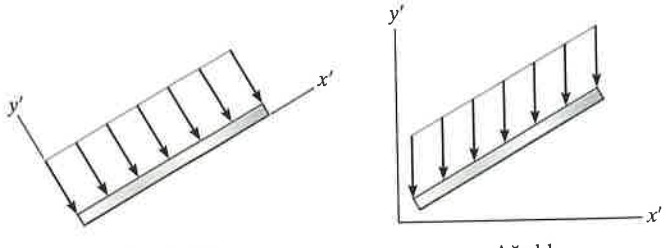
Şekil 17–12 (tekrar)

Otomatik Birleştirme. Yapısal düzenle ilgili yukarıdaki adımların tümü, global ve lokal koordinat sistemlerinin oluşturulması ve yük verisinin tanımlanması bazen program içinde *otomatik olarak* gerçekleştirilmektedir. Örneğin bilgisayar ekranına yapı sisteminin *ölçekli bir çizimi*, her bir elemanın uç noktalarının koordinatları tanımlanarak veya eleman uç noktalarının global koordinatları fare ile tıklanarak çizilebilir. Bu işlemin yapılmasıyla program, her bir elemanın yakın ve uzak uçlarını lokal koordinatları ile birlikte otomatik olarak belirlemektedir. Programın izin vermesi durumunda diğer bir yaklaşım da AutoCAD gibi bir çizim programı kullanarak yapı sisteminin oluşturulması ve sonrasında bu grafiğin yapısal analiz programına aktarılmasıdır.

Yük verisi, bu grafik ara yüz aracılığıyla da girilebilmektedir. Bu yolla kullanıcı, yükün yapı sistemine doğru yönde uygulandığından emin olmak üzere görsel bir kontrol sağlayabilir. Yük, lokal veya global koordinatlarda tanımlanabilir. Örneğin yapı sisteminin üçgen bir çerçeve olması durumunda yayılı bir rüzgâr yüklemesi eğimli çatı elemanına dik olarak etkiyeceğinden, bu yük tanımlanırken *lokal koordinatlar* kullanılır, Şekil 17-13*a*. Sabit yük, döşeme ve çatı hareketli yükleri ile kar yükleri gibi ağırlık yüklerinin tamamı düşey doğrultuda aşağıya doğru etkidiğinden, bu yükler yatay ve düşey doğrultudaki global koordinatlar kullanılarak tanımlanır, Şekil 17-13*b*.

Yapı analizi ve tasarımı için kullanılan programların çoğu, ayrıca bir yük birleştirme özelliğine de sahiptir. Mühendis sadece sabit yük, rüzgâr yükü, kar yükü, vb. gibi yükün türünü tanımlamakta ve sonrasında da program, ASCE 7 gibi yönetmelik denklemlerine ve koşullarına bağlı olarak bu yüklemelerin her birini hesaplamaktadır. Nihayetinde Altbölüm 1.4'de belirtilenlere benzer yük kombinasyonları yapı sistemine uygulanmakta ve çözümleme yapılmaktadır.

17



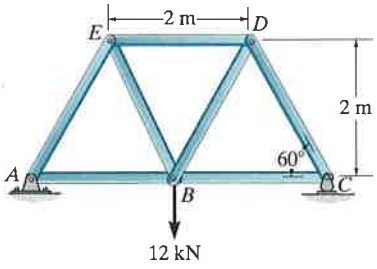
Rüzgâr yükü
lokal koordinatlar
(a)

Ağırlık
global koordinatlar
(b)

Şekil 17–13

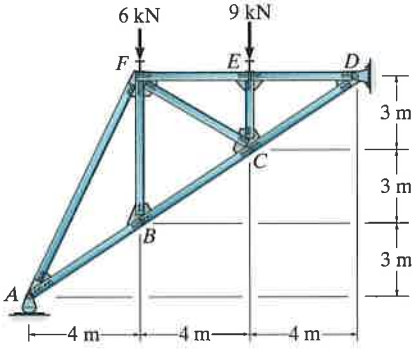
BİLGİSAYAR PROBLEMLERİ

*C17–1. Bir bilgisayar programı kullanarak kafes sistemin mesnet tepkilerini ve çubuk kuvvetlerini hesaplayınız. AE sabittir.



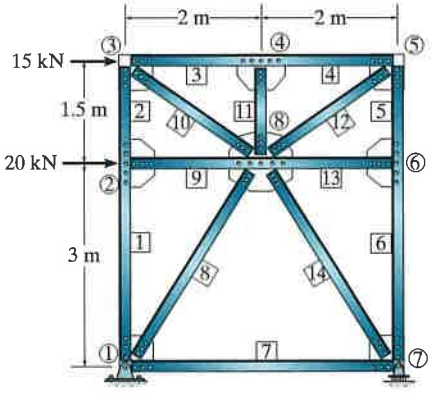
Problem C17–1

*C17–2. Bir bilgisayar programı kullanarak kafes sistemin mesnet tepkilerini ve çubuk kuvvetlerini hesaplayınız. AE sabittir.



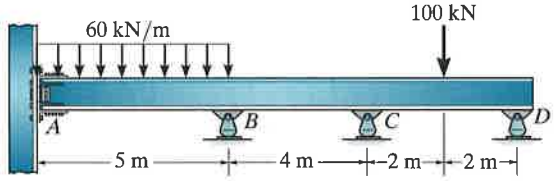
Problem C17–2

*C17–3. Bir bilgisayar programı kullanarak kafes sistemin 14 numaralı çubuk eleman kuvvetini hesaplayınız. AE sabittir.



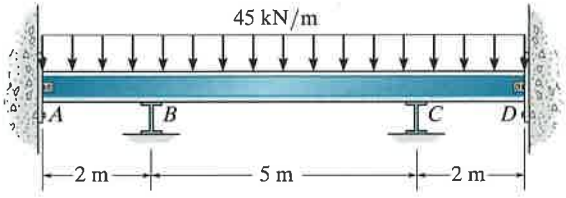
Problem C17–3

*C17–4. Bir bilgisayar programı kullanarak kirişin mesnet tepkilerini hesaplayınız. A'nın ankastre olduğunu kabul ediniz. EI sabittir.



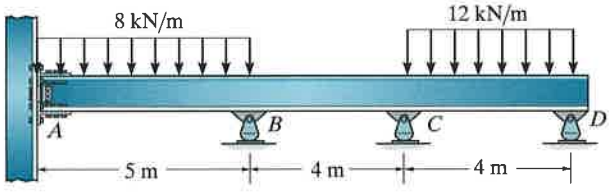
Problem C17–4

*C17–5. Bir bilgisayar programı kullanarak kirişin mesnet tepkilerini hesaplayınız. A ve D'nin sabit mafsallı, B ve C'nin ise kayıcı mafsallı olduğunu kabul ediniz. EI sabittir.



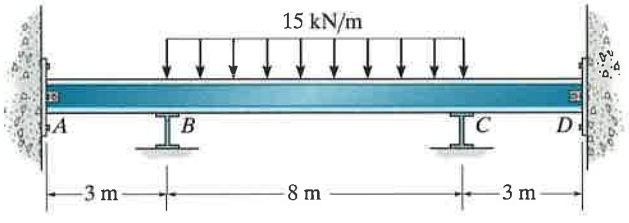
Problem C17–5

*C17–6. Bir bilgisayar programı kullanarak kirişin mesnet tepkilerini hesaplayınız. A'nın ankastre olduğunu kabul ediniz. EI sabittir.



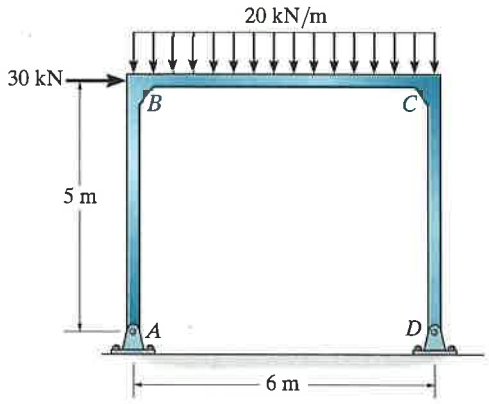
Problem C17–6

*C17–7. Bir bilgisayar programı kullanarak kirişin mesnet tepkilerini hesaplayınız. A ve D'nin sabit mafsallı, B ve C'nin ise kayıcı mafsallı olduğunu kabul ediniz. EI sabittir.



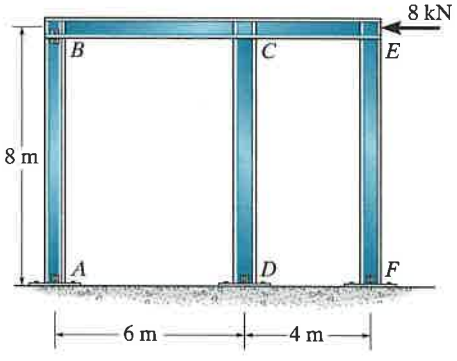
Problem C17–7

***C17–8.** Bir bilgisayar programı kullanarak çerçeve sistemin mesnet tepkilerini hesaplayınız. *AE* ve *EI* sabittir.



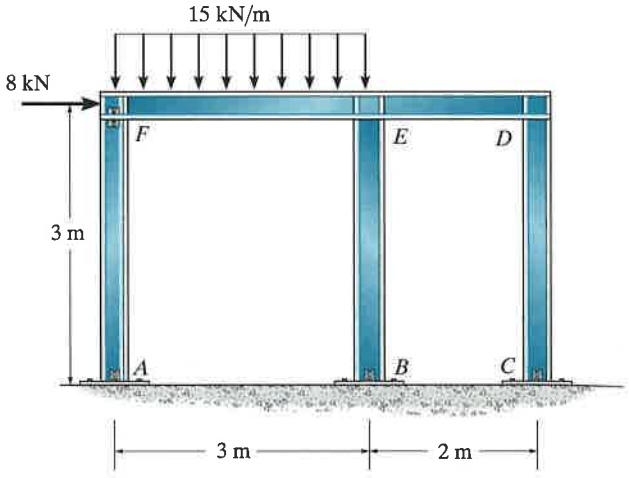
Problem C17–8

***C17–9.** Bir bilgisayar programı kullanarak çerçeve sistemin mesnet tepkilerini hesaplayınız. *A*, *B*, *D* ve *F*'nin mafsallı olduğunu kabul ediniz. *AE* ve *EI* sabittir.



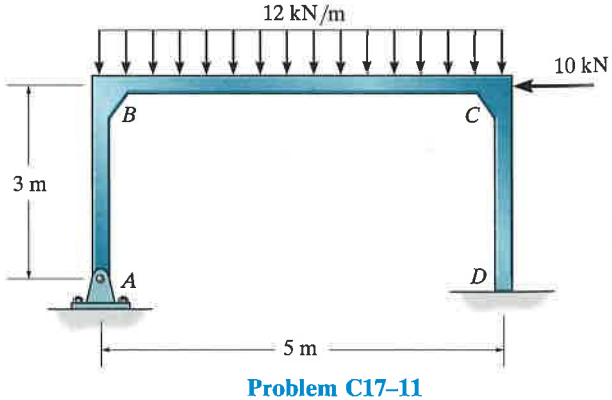
Problem C17–9

***C17–10.** Bir bilgisayar programı kullanarak çerçeve sistemin mesnet tepkilerini hesaplayınız. *A*, *B* ve *C*'nin sabit mafsallı olduğunu kabul ediniz. *AE* ve *EI* sabittir.



Problem C17–10

***C17–11.** Bir bilgisayar programı kullanarak çerçeve sistemin mesnet tepkilerini hesaplayınız. *AE* ve *EI* sabittir.



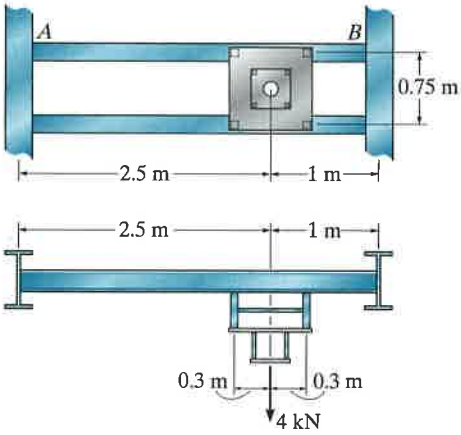
Problem C17–11

TASARIM PROBLEMLERİ

P17–1. Aşağıdaki fotoğraf, bir hastanenin ameliyathanesindeki tıbbi araç-gereçleri taşımak üzere tasarlanan yapısal bir birleşimi göstermektedir. Bu araç-gereçlerin 4 kN ağılığında olması beklenmektedir. Her bir tali kenar kirişinin kesit alanı $12(10^3)$ mm^2 ve atalet momenti $115(10^6)$ mm^4 olarak verilmiştir. Bu kirişlerin uç noktaları, şekilde görüldüğü gibi ana kirişlere kaynaklanmıştır. Taşıyıcı düzenek ise kenar kirişlere cıvatalı olarak bağlanmıştır. Kenar kirişlerden herhangi birini modelleyiniz ve yaptığınız kabulleri doğrulayınız. Bilgisayar çözümlemesi yaparak bulacağınız sonuçları, kenar kirişlerden herhangi bir tanesi için moment diyagramını çizmek için kullanınız. Sonuçların kısmi bir kontrolü olarak bu kirişteki maksimum momenti, moment dağıtma gibi klasik yöntemlerden bir tanesini kullanarak veya sehim tablolarını kullanarak belirleyiniz. Çubuk elemanların ağırlıklarını ihmal ediniz ve $E = 200$ GPa alınız.



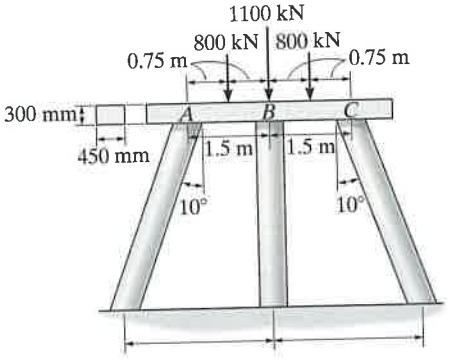




Problem P17–1

P17–2. Fotoğrafta görülen betonarme köprü ayağı bir karayolu köprüsünün bir bölümünü taşımaktadır. Üst kiriş (başlık) boyutları ile kirişe etkimesi beklenen yükleme aşağıdaki şekilde verilmiştir. Kirişin kesit alanı da şekilde görülmektedir. Her bir kolonun çapı 400 mm olup kirişe rijit olarak birleştirilmiştir. Köprü ayağı için yapısal bir model oluşturunuz ve yaptığınız kabulleri doğrulayınız. Kirişteki maksimum momenti belirlemek için bilgisayar çözümlemesi yapınız. Sonuçların kısmi bir kontrolü olarak bu maksimum momenti, moment dağıtma gibi klasik yöntemlerden bir tanesini veya sehim tablolarını kullanarak belirleyiniz. Çubuk elemanların ağırlıklarını ve beton içindeki çelik donatının etkisini ihmal ediniz. $E = 29.0$ GPa alınız.

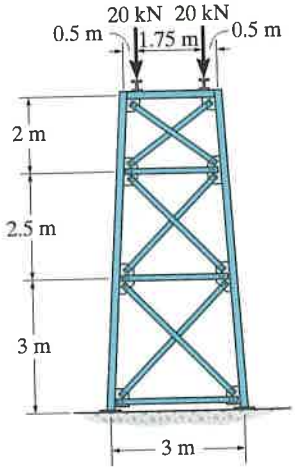




Problem P17–2

P17–3. Fotoğrafta görülen çelik kafes çerçeve, yaya köprüsünün bir bölümünü taşımaktadır. Bu çerçeve, her birinin kesit alanı $3.42(10^3)$ mm^2 ve atalet momenti $39.6(10^6)$ mm^4 olan iki adet geniş başlıklı I kesiti kullanılarak yapılmıştır. Benzer bir çubuk eleman, şekilde görüldüğü gibi 40 kN olarak belirlenen köprü yükünü taşımak üzere üst bölümde kullanılmıştır. Bu elemanın uç noktaları kolonlara kaynaklanırken, kolonların alt kısımları da betona cıvatalı olarak bağlanmış taban levhalarına kaynaklanmıştır. Her bir kafes çubuğunun kesit alanı $1.78(10^3)$ mm^2 olup uç noktalarından, bağlantı levhalarına cıvatalı olarak birleştirilmiştir. Bu levhalar da kolonların gövde kısmına kaynaklanmıştır. Çerçeve sistem için yapısal bir model oluşturunuz ve yaptığınız kabulleri doğrulayınız. Bu modeli dikkate almak suretiyle yapısal çözümleme için bir bilgisayar programı kullanarak kafes çubuk kuvvetlerini hesaplayınız ve kolonlardaki en büyük eksenel kuvveti bulunuz. Çubuk elemanların ağırlıklarını ihmal ediniz ve şekilde görülen boyutları kullanınız. Sonuçlarınızı, bazı kafes çubuk kuvvetlerini belirlemek üzere kesim yöntemini kullanarak bulduğunuz sonuçlarla karşılaştırınız. $E = 200$ GPa alınız.

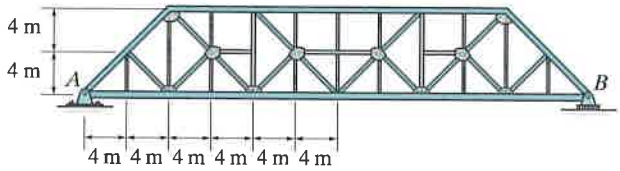




Problem P17–3

P17–4. *AB* alt başlık ana kirişi üzerindeki yükün 3 kN/m olması durumunda fotoğrafta görülen tarihi Pratt tipi kafes sistemin yük taşıma kapasitesi incelenecektir. Köprüye ait bir çizim, çubuk elemanlara ait boyutları göstermektedir. Tüm çubuk elemanlar bağlantı levhalarına cıvatalı olarak birleştirilmiştir. Düşey ve yarım-köşegen şeklindeki çubukların her birinin kesit alanı $2.5(10^3)$ mm^2 ve her bir ana köşegen çubuk ile üst başlık çubuklarının kesit alanı $4.6(10^3)$ mm^2 olarak verilmiştir. Kenar ana kirişin kesit alanı $12(10^3)$ mm^2 ve atalet momenti $113(10^6)$ mm^4'dür. Kafes köprü için yapısal bir model oluşturunuz ve yaptığınız kabulleri doğrulayınız. Her bir kafes çubuk kuvvetini hesaplamak üzere bilgisayar çözümlemesi yapınız. Sonuçlara bağlı olarak kenar ana kiriş için moment diyagramını çiziniz. Kafes çubuk elemanlardan bazıları için çubuk kuvvetlerini belirlemek üzere kesim yöntemini kullanarak bulduğunuz sonuçları kontrol ediniz. Çubuk elemanların ağırlıklarını ihmal ediniz ve $E = 200$ GPa alınız.

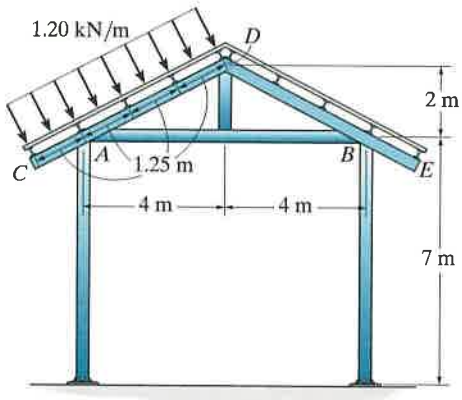




Problem P17–4

P17–5. Fotoğrafta görülen gölgelik, beş adet kafes çerçeve tarafından taşınan açık bir çatı sistemine sahiptir. Bu çerçevelerden her biri, kesit alanı $8.08(10^{-3})$ m^2 ve atalet momenti $45.8(10^{-6})$ m^4 olan *CD* ve *DE* çubuk elemanlarından oluşmaktadır. Diğer tüm çubuk elemanların kesit alanı $5.35(10^{-3})$ m^2 ve atalet momenti $4.46(10^{-6})$ m^4 olarak verilmiştir. Düğüm noktaları tamamen kaynaklanmıştır ve kolonlar, beton temel üzerine cıvatalı olarak bağlanmış taban levhaları üzerinde yer almaktadır. Çatının bir tarafına etkiyen ve çerçeve üzerinde yayılı olan rüzgâr yükünün şiddeti 1.20 kN/m'dir. Yapı sisteminin geometrisi şekilde görülmektedir. Çerçeve sistemin yapısal bir modelini oluşturunuz ve yaptığınız kabulleri doğrulayınız. Her bir düğüm noktasındaki kuvveti belirlemek üzere bilgisayar çözümlemesi yapınız. Bu sonuçları kullanarak *AB* yatay çubuk elemanı için moment diyagramını çiziniz. Sonuçların kısmi bir kontrolü olarak, çerçeve sistemin mafsallı birleşimlerden oluştuğunu ve bir kafes sistem şeklinde çalıştığını kabul ederek bu elemandaki çekme kuvvetini hesaplayınız. Çubuk elemanların ağırlıklarını ihmal ediniz ve $E = 200$ GPa alınız.





Problem P17–5

EK

A

Yapı Analizi İçin Matris Cebri

A.1 Temel Tanımlamalar ve Matris Çeşitleri

Masa üstü bilgisayarların kolay erişilebilirliği ile yapı sistemlerinin analizi için matris cebir uygulaması yaygın hale gelmiştir. Çözümün kısa bir biçimde formüle edilmesi ve sonrasında bilgisayar kullanılarak gerçek matris işlemlerinin yapılması nispeten daha kolay olduğundan, matris cebri yapı analizi için uygun bir yaklaşım sağlar. Bu nedenle yapı mühendisinin, matematiğin bu alanıyla ilgili temel işlemleri iyi bilmesi önemlidir.

Matris. ***Matris***, sayıların m satır ve n sütundan oluşan dikdörtgen şeklindeki düzenlemesidir. ***Eleman*** olarak adlandırılan sayılar, köşeli parantez içinde toplanır. Örneğin **A** matrisi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Böyle bir matris m x n (m çarpı n) ***mertebesindedir***. Bir elemanın ilk indisinin satır konumunu, ikinci indisinin ise sütun konumunu gösterdiğine dikkat edelim. O halde genel olarak a_{ij}, i'nci satır ve j'nci sütunda konumlandırılan elemandır.

Satır Matris. Eğer matris sadece tek bir satırdaki elemanlardan oluşuyorsa, bu matris bir ***satır matris*** olarak tanımlanır. Örneğin 1 x n'lik bir satır matrisi aşağıdaki gibi yazılır.

$$\mathbf{A} = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]$$

Satır alt indisinin daima 1'e eşit olduğu anlaşıldığından, burada eleman gösteriminde tek bir alt indis kullanılır, $a_1 = a_{11}$, $a_2 = a_{12}$, vb.

Sütun Matris. Elemanları tek bir sütuna kümelenmiş matris, ***sütun matris*** olarak tanımlanır. m x 1'lik bir sütun matris,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada alt indis gösterimi $a_1 = a_{11}$, $a_2 = a_{21}$, vb. şeklindedir.

Kare Matris. Bir matristeki satırların sayısı sütunların sayısına eşitse bu matris ***kare matris*** olarak adlandırılır. n x n'lik bir kare matris,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Köşegen Matris. Bir kare matrisin asal köşegeni dışındaki tüm elemanları, soldan sağa doğru olmak üzere aşağıya doğru ilerlendiğinde sıfır ise bu matris ***köşegen matris*** olarak tanımlanır. Örneğin,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Birim Matris. ***Birim matris***, tüm köşegen elemanları bire eşit olan köşegen bir matristir. Örneğin,

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Simetrik Matris. $a_{ij} = a_{ji}$ olması durumunda ***kare bir matris*** simetriktir. Örneğin,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

A

A.2 Matris İşlemleri

Matrislerin Eşitliği. Eğer aynı mertebede iseler ve karşılıklı elemanlarının her biri eşit ise, $a_{ij} = b_{ij}$, **A** ve **B** matrisleri eşittir denir. Örneğin eğer,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

ise bu durumda **A** = **B**.

Matrislerin Toplanması ve Çıkarılması. Eğer aynı mertebede iseler iki matris birbiriyle toplanabilir veya birbirinden çıkarılabilir. Sonuç, karşılıklı elemanların toplanmasıyla veya çıkarılmasıyla elde edilir. Örneğin eğer,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -5 & 8 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ise bu durumda,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 11 & -1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Bir Skaler ile Çarpma. Bir matris bir skaler ile çarpıldığında, matrisin her bir elemanı o skaler ile çarpılır. Örneğin eğer,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \qquad k = -6$$

ise bu durumda,

$$k\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -24 & -6 \\ -36 & 12 \end{bmatrix}$$

Matris Çarpımı. **A** ve **B** matrisleri ancak çarpım için ***uyumlu*** iseler birbirleriyle çarpılabilir. Bu koşul, **A**'nın *sütunların* sayısı **B**'nin *satırların* sayısına *eşit* olması durumunda sağlanır. Örneğin eğer,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \tag{A–1}$$

ise bu durumda **A** iki sütuna ve **B** iki satıra sahip olduğundan, **AB** hesaplanabilir. Ancak **BA**'nın mümkün olmadığına dikkat ediniz. Neden?

Eğer (m x n) mertebesindeki **A** matrisi, (n x q) mertebesindeki bir **B** matrisi ile çarpılırsa bu (m x q) mertebesinde olan bir **C** matrisini verecektir.

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{A} & \mathbf{B} & = & \mathbf{C} \\ (m \times n) & (n \times q) & & (m \times q) \end{array}$$

C matrisinin elemanları, **A**'nın a_{ij} ve **B**'nin b_{ij} elemanları kullanılarak aşağıda gösterildiği gibi bulunur:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \qquad \text{(A–2)}$$

Bu formülün çalışma prensibi birkaç basit örnek ile açıklanabilir. Aşağıdaki iki matrisi ele alalım:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 6 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Bu iki matris çarpma için uyumlu olduğundan, yani **A**'nın üç sütunu ve **B**'nin üç satırı olduğundan **C** = **AB** çarpımı mümkündür. Denklem A–2 kullanılarak yapılan çarpım, iki satırı ve bir sütunu olan **C** matrisini verecektir. Sonuçlar aşağıdaki gibi belirlenir:

c_{11}: **A**'nın ilk satırındaki elemanlar, **B**'nin sütunundaki karşı gelen elemanlarla çarpılır ve sonuçlar toplanır.

$$c_{11} = c_1 = 2(2) + 4(6) + 3(7) = 49$$

c_{21}: **A**'nın ikinci satırındaki elemanlar, **B**'nin sütunundaki karşı gelen elemanlarla çarpılır ve sonuçlar toplanır.

$$c_{21} = c_2 = -1(2) + 6(6) + 1(7) = 41$$

Böylece,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 49 \\ 41 \end{bmatrix}$$

A

İkinci bir örnek olarak aşağıdaki iki matrisi ele alalım:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 1 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Burada da **A**'nın iki sütunu ve **B**'nin iki satırı olduğundan, **C** = **AB** çarpımı bulunabilir. Bulunacak **C** matrisi üç satıra ve iki sütuna sahip olacaktır. Elemanlar aşağıdaki gibi belirlenir:

$c_{11} = 5(2) + 3(-3) = 1$ (**A**'nın ilk satırı çarpı **B**'nin ilk sütunu)

$c_{12} = 5(7) + 3(4) = 47$ (**A**'nın ilk satırı çarpı **B**'nin ikinci sütunu)

$c_{21} = 4(2) + 1(-3) = 5$ (**A**'nın ikinci satırı çarpı **B**'nin ilk sütunu)

$c_{22} = 4(7) + 1(4) = 32$ (**A**'nın ikinci satırı çarpı **B**'nin ikinci sütunu)

$c_{31} = -2(2) + 8(-3) = -28$ (**A**'nın üçüncü satırı çarpı **B**'nin ilk sütunu)

$c_{32} = -2(7) + 8(4) = 18$ (**A**'nın üçüncü satırı çarpı **B**'nin ikinci sütunu)

Çarpım düzeni Denklem A–2'ye göredir. Böylece,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 47 \\ 5 & 32 \\ -28 & 18 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Ayrıca **BA** çarpımının, bu şekilde yazıldığında matrisler çarpma için uyumlu olmadığından, mümkün olmayacağına dikkat ediniz.

Matris çarpımı için aşağıdaki kurallar geçerlidir.

1. Genellikle iki matris çarpımının değişme özelliği yoktur:

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \tag{A–3}$$

2. Dağılma özelliği vardır:

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \tag{A–4}$$

3. Birleşme özelliği vardır:

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} \tag{A–5}$$

Matrisin Transpozesi (Devriği). Satır ve sütunları karşılıklı değiştirilerek bir matrisin transpozesi alınabilir. Örneğin eğer,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = [b_1 \quad b_2 \quad b_3]$$

ise bu durumda,

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

olur. **AB** çarpım için uyumlu olmadığından, bu çarpımın tanımlı olmadığına dikkat ediniz. (**A** üç sütuna ve **B** bir satıra sahiptir.) Bunun yanında $\mathbf{AB}^T$ çarpımı, matrisler çarpma için uyumlu olduğundan (**A** üç sütuna ve $\mathbf{B}^T$ üç satıra sahip) mümkündür. Transpoze matrisler için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T \qquad \text{(A–6)}$$

$$(k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T \qquad \text{(A–7)}$$

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T \qquad \text{(A–8)}$$

Son eşitlik bir örnekle açıklanacaktır. Eğer,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

ise bu durumda Denklem A–8'den,

$$\left(\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 28 & 28 \\ -2 & -12 \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} 28 & -2 \\ 28 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 28 & -2 \\ 28 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & -2 \\ 28 & -12 \end{bmatrix}$$

Matris Ayrıştırma. Bir matris, ayrıştırma ile alt matrislere bölünebilir. Örneğin,

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$

Buradaki alt matrisler,

$$\mathbf{A}_{11} = [a_{11}] \qquad \mathbf{A}_{12} = [a_{12} \quad a_{13} \quad a_{14}]$$

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

A

şeklindedir. Ayrıştırmanın çarpma için uyumlu olması koşuşuyla, matris cebrinin kuralları ayrıştırılan matrisler için de geçerlidir. Örneğin eşit sayıda satır ve sütuna sahip olması koşuluyla, **A** ve **B**'nin karşı gelen alt matrisleri toplanabilir veya çıkartılabilir. Benzer şekilde **A** ve **B** matrislerinin ve bunlara ait alt matrislerin ilgili sütun ve satır sayıları eşit olmak şartıyla, matris çarpımı da mümkündür. Örneğin eğer,

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc:c} 4 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -5 \\ \hdashline 6 & 3 & 8 \end{array}\right] \qquad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc} 2 & -1 \\ 0 & 8 \\ \hline 7 & 4 \end{array}\right]$$

ise **A**'nın sütun sayısı **B**'nin satır sayısına eşit olduğundan (üç) **AB** çarpımı mümkündür. Benzer şekilde **A** iki sütuna ve **B** iki satıra ayrıştırıldığından, ayrıştırılan matrisler çarpım için uyumludur yani,

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} \\ \mathbf{B}_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} \end{bmatrix}$$

Alt matrislerin çarpımıyla,

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix} [7 \quad 4] = \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ -35 & -20 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} = [6 \quad 3] \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = [12 \quad 18]$$

$$\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} = [8][7 \quad 4] = [56 \quad 32]$$

$$\mathbf{AB} = \left[\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ -35 & -20 \end{bmatrix} \\ [12 \quad 18] + [56 \quad 32] \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -39 & -18 \\ 68 & 50 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

A.3 Determinantlar

Sonraki alt bölümde bir matrisin tersinin nasıl alınacağı üzerinde durulacaktır. Bu işlem, matrisin determinantının hesaplanmasını gerektirdiğinden şimdi determinantların bazı temel özellikleri üzerinde durulacaktır.

Bir ***determinant***, dikey çizgiler içerisinde yer alan kare bir sayı dizidir. Örneğin n satır ve n sütuna sahip n'nci mertebeden bir determinant,

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{A-9}$$

şeklindedir. Bu determinantın değerinin hesabı, ***Laplace açılımı*** kullanılarak belirlenebilen tek bir sayısal değer verir. Bu yöntem, determinantın minör ve kofaktöründen yararlanmaktadır. n'nci mertebeden bir determinantın her bir a_{ij} elemanı, n–1 mertebesinde bir determinant olan bir ***minöre*** (M_{ij}) sahiptir. Bu determinant (minör), a_{ij} elemanının bulunduğu i'nci satır ve j'nci sütunun silinmesi ile elde edilir. Eğer minör $(-1)^{i+j}$ ile çarpılırsa bu a_{ij}'nin kofaktörü olarak tanımlanır ve

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \tag{A–10}$$

şeklinde gösterilir. Örneğin üçüncü mertebeden bir determinantı ele alalım.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

İlk satırdaki elemanlar için kofaktörler,

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

olur. n mertebesindeki bir determinant için Laplace açılımı (Denklem A–9); determinantın gösterdiği sayısal değerin, herhangi bir satır veya sütuna ait elemanlar ile bunlara karşı gelen kofaktörlerin çarpımlarının toplamına eşit olduğunu ifade eder,

$$D = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \text{or } n)$$

veya (A–11)

$$D = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} \qquad (j = 1, 2, \ldots, \text{or } n)$$

D sayısının, kofaktörlerden dolayı her biri n–1 mertebesinde olan n adet determinant (kofaktörler) cinsinden ifade edildiği görülür. Bu determinantların her biri aynı formül kullanılarak yeniden hesaplanabilir. Bu durumda (n–2) mertebesinde olan (n–1) adet determinant, vb. hesaplanmalıdır. Hesaplama süreci, geriye kalan hesaplanacak determinantlar ikinci mertebeye indirgenene kadar devam eder. Bu sayede elemanların kofaktörleri D'nin tekil elemanları olur. Örneğin aşağıdaki ikinci mertebeden determinantı ele alalım:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

D'yi en üstteki satır elemanlarından aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz,

$$D = 3(-1)^{1+1}(2) + 5(-1)^{1+2}(-1) = 11$$

veya, örneğin, ikinci sütun elemanlarını kullanarak,

$$D = 5(-1)^{1+2}(-1) + 2(-1)^{2+2}(3) = 11$$

elde ederiz.

A

Denklem A–11'i kullanmak yerine ikinci mertebeden bir determinantın hesabının, üst soldan sağ aşağıya doğru köşegen elemanlarının çarpılarak ve bundan üst sağdan sol aşağıya doğru elemanların ok yönündeki çarpımının çıkarılarak yapılması belki de daha kolaydır.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3(2) - 5(-1) = 11$$

Bunun ardından üçüncü mertebeden bir determinantı ele alalım,

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$|D|$'yi en üst sıradaki veya ilk sütundaki elemanları kullanmak suretiyle Denklem A–11 ile hesaplayabiliriz,

$$\begin{aligned} D &= (1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (3)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1(4-0) - 3(8+6) - 1(0+2) = -40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 4(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 1(4-0) - 4(6-0) - 1(18+2) = -40 \end{aligned}$$

Bir alıştırma olarak $|D|$'yi ikinci satırdaki elemanları kullanarak hesaplamaya çalışınız.

A.4 Bir Matrisin Tersi

Aşağıdaki üç doğrusal denklem takımını ele alalım:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= c_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= c_3 \end{aligned}$$

Bu denklemler matris formda,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(A–12)}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{C} \qquad \text{(A–13)}$$

şeklinde yazılabilir. x için çözümün **C**'yi **A**'ya bölerek elde edilebileceği düşünülebilir; ancak matris cebrinde bölme işlemi mümkün değildir. Bunun yerine matrisin tersi ile çarpım yapılır. **A *matrisinin tersi***, aynı mertebede olan başka bir matristir ve simgesel olarak $\mathbf{A}^{-1}$ şeklinde yazılır. Aşağıdaki özelliğe sahiptir,

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

Burada **I** birim matristir. Denklem A–13'ün her iki tarafı $\mathbf{A}^{-1}$ ile çarpılarak,

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$$

elde edilir. $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{I}\mathbf{x} = \mathbf{x}$ olduğundan,

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C} \qquad \text{(A–14)}$$

bulunur. $\mathbf{A}^{-1}$'in elde edilebilmesi durumunda **x** için çözüm mümkündür.

$\mathbf{A}^{-1}$'in elle hesabında kullanılan yöntem, Cramer kuralı kullanılarak geliştirilebilir. Burada geliştirme işlemi üzerinde durulmayacak olup sadece sonuçlar verilecektir.* Bu durumda Denklem A–14'deki matrislere ait elemanlar,

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \qquad \text{(A–15)}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $|A|$, Altbölüm A.3'de açıklanan Laplace açılımı kullanılarak belirlenen **A** katsayı matrisinin determinantıdır. C_{ij} kofaktörlerini içeren kare matris, ***ek (adjoint) matris*** olarak tanımlanır. $\mathbf{A}^{-1}$ matris tersinin; önce her bir a_{ij} elemanı kendi kofaktörü C_{ij} ile değiştirilerek, daha sonra ortaya çıkan matrisin transpozesi alınmak suretiyle ek (adjoint) matris elde edilerek ve son olarak da ek (adjoint) matris $1/|A|$ ile çarpılarak **A**'dan elde edildiği görülebilir.

$\mathbf{A}^{-1}$'in sayısal olarak nasıl elde edileceğini göstermek üzere, aşağıdaki doğrusal denklem takımının çözümünü ele alalım:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 5 \end{aligned} \qquad \text{(A–16)}$$

Burada,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

*Bkz. Kreyszig, E., Advanced Engineering Mathematics, John wiley & Sons, Inc., New York.

A için kofaktör matrisi,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Determinantları hesaplayarak ve transpoze alarak ek (adjoint) matris,

$$\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & -2 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -6$$

olduğundan **A**'nın tersi,

$$\mathbf{A}^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & -2 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. Denklem A–16'nın çözümünden,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & -2 \\ -3 & -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = -\tfrac{1}{6}\big[(-4)(-1) + 0(-1) + (-2)(5)\big] = 1$$

$$x_2 = -\tfrac{1}{6}\big[(-1)(-1) + (-3)(-1) + (-2)(5)\big] = 1$$

$$x_3 = -\tfrac{1}{6}\big[(-3)(-1) + (-3)(-1) + (0)(5)\big] = -1$$

elde edilir.

Daha büyük denklem takımları için sayısal hesaplamaların oldukça büyüyeceği açıktır. Bu nedenle yapı analizizde matrislerin tersini hesaplamak için bilgisayarlardan faydalanılmaktadır.

A.5 Denklem Sistemlerinin Gauss Yöntemi ile Çözümü

Büyük bir doğrusal denklem sisteminin çözülmesi gerektiğinde, sayısal etkinliğinden dolayı Gauss yok etme yöntemi kullanılabilir. Bu yöntemin uygulanışı; n denklem takımından herhangi birinin, x_1 gibi bir bilinmeyen için tüm diğer bilinmeyenler $(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ cinsinden çözümünü gerektirir. ***Pivot denklemi*** olarak bilinen bu denklemin geri kalan denklemlerde yerine yazılması, n–1 bilinmeyenli n–1 denklem takımını verir. Bu denklemlerden birinin x_2 için geri kalan n–2 adet bilinmeyen $(x_3, x_4, \ldots, x_n)$ cinsinden çözülerek bu işlemin tekrar edilmesi ikinci pivot denklemini oluşturur. Bu denklemin daha sonra diğer denklemlerde yerine yazılması, n–3 bilinmeyenli bir n–3 denklem takımını verir. Bu süreç bir tane bir bilinmeyenli bir pivot denklemi kalana dek tekrar edilir ve daha sonra da bu denklem çözülür. Sonrasında diğer bilinmeyenler, diğer pivot denklemlerinde ardışık olarak geriye doğru yerine yazılmak suretiyle belirlenir. Her bir pivot denklemi oluşturulurken denklem takımında yok edilmeye çalışılan bilinmeyen için daima *en büyük* katsayıya sahip denklemin seçilmesi, elde edilecek çözümün doğruluğunu artıracaktır. Bu yöntem şimdi bir örnek üzerinde gösterilecektir.

Aşağıdaki denklem takımını Gauss yok etme ile çözünüz:

$$-2x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 2 \qquad \text{(A–17)}$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \qquad \text{(A–18)}$$

$$4x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 4 \qquad \text{(A–19)}$$

x_1'i yok ederek başlayabiliriz. x_1'e ait en büyük katsayısı Denklem A–19'da olduğundan, bu denklemi pivot denklemi olarak alalım. x_1 için çözüm yapılırsa,

$$x_1 = 1 + 1.25x_2 - 0.75x_3 \qquad \text{(A–20)}$$

elde edilir. Bu denklem, Denklem A–17 ve A–18'de yerine yazılarak ve basitleştirilerek,

$$2.75x_2 + 1.75x_3 = 2 \qquad \text{(A–21)}$$

$$1.5x_2 - 0.5x_3 = 0 \qquad \text{(A–22)}$$

yazılır. Bunun ardından x_2'yi yok edelim. x_2'ye ait katsayısı en büyük olduğundan, pivot denklem için Denklem A–21 seçilerek,

$$x_2 = 0.727 - 0.636x_3 \qquad \text{(A–23)}$$

elde edilir. Bu denklemin Denklem A–22'de yerine yazılması ve basitleştirilmesi, x_3 için çözümün yapılabileceği son pivot denklemini verir. Bu çözümden $x_3 = 0.75$ olarak elde edilir. Bu değerin A–23 pivot denkleminde yerine yazılması $x_2 = 0.25$ değerini verir. Son olarak da pivot Denklem A–20'den $x_1 = 0.75$ olarak elde edilir.

PROBLEMLER

A–1. Eğer $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ ise $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ ve $\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$'yi hesaplayınız.

A–2. Eğer $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ ise $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$'yi hesaplayınız.

A–3. Eğer $\mathbf{A} = [6 \;\; 1 \;\; 3]$ ve $\mathbf{B} = [1 \;\; 6 \;\; 3]$ ise $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$ olduğunu gösteriniz.

A–4. Eğer $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{B} = [2 \;\; -1 \;\; 3]$ ise $\mathbf{AB}$'yi hesaplayınız.

A–5. Eğer $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -5 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ ise $\mathbf{AB}$'yi hesaplayınız.

A–6. Problem A–5'de verilen matrisler için $\mathbf{BA}$'yı hesaplayınız.

A–7. Eğer $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$ ise $\mathbf{AB}$'yi hesaplayınız.

A–8. Eğer $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$ ise $\mathbf{AB}$'yi hesaplayınız.

A–9. Eğer $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix}$ ise $\mathbf{AB}$'yi hesaplayınız.

A–10. Eğer $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ ise $\mathbf{AB}$'yi hesaplayınız.

A–11. Eğer $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ise $\mathbf{AA}^T$'yi hesaplayınız.

A–12. Dağılma özelliğinin var olduğunu gösteriniz,

Eğer $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

ise $\mathbf{A(B + C)} = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$

A–13. Birleşme özelliğinin var olduğunu gösteriniz,

Eğer $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [5 \quad -1 \quad 2]$. ise

$\mathbf{A(BC)} = \mathbf{(AB)C}$

A–14. $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$ ve $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 8 & 6 \end{vmatrix}$ determinantlarını hesaplayınız.

A–15. Eğer $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ise $\mathbf{A}^{-1}$'i hesaplayınız.

A–16. Eğer $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ise $\mathbf{A}^{-1}$'i hesaplayınız.

A–17. $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$ matris denklemini kullanarak $-x_1 + 4x_2 + x_3 = 1$, $2x_1 - x_2 + x_3 = 2$ ve $4x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 4$ denklemlerini çözünüz.

A–18. Problem A–17'deki denklemleri, Gauss yok etme yöntemini kullanarak çözünüz.

A–19. $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ matris denklemini kullanarak $x_1 - x_2 + x_3 = -1$, $-x_1 + x_2 + x_3 = -1$ ve $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5$ denklemlerini çözünüz.

A–20. Problem A–19'daki denklemleri, Gauss yok etme yöntemini kullanarak çözünüz.

Temel Problem Çözümleri

Bölüm 2

F2–1. $\zeta + \Sigma M_A = 0;\quad 60 - F_{BC}\left(\frac{3}{5}\right)(4) = 0 \quad F_{BC} = 25.0 \text{ kN}$

$\zeta + \Sigma M_B = 0;\quad 60 - A_y(4) = 0$

$A_y = 15.0 \text{ kN}$ *Cevap*

$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;\quad A_x - 25.0\left(\frac{4}{5}\right) =$

$A_x = 20.0 \text{ kN}$ *Cevap*

$B_x = C_x = 25.0\left(\frac{4}{5}\right) = 20.0 \text{ kN}$

$B_y = C_y = 25.0\left(\frac{3}{5}\right) = 15.0 \text{ kN}$ *Cevap*

F2–2. $\zeta + \Sigma M_A = 0;\quad F_{BC} \sin 45°(4) - 10(4)(2) = 0$

$$F_{BC} = \frac{20}{\sin 45°} \text{ kN}$$

$\zeta + \Sigma M_B = 0;\quad 10(4)(2) - A_y(4) = 0$

$A_y = 20.0 \text{ kN}$ *Cevap*

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;\quad A_x - \left(\frac{20}{\sin 45°}\right)(\cos 45°) = 0$$

$A_x = 20.0 \text{ kN}$ *Cevap*

$$B_x = C_x = \left(\frac{20}{\sin 45°}\right)(\cos 45°) = 20.0 \text{ kN}$$ *Cevap*

$$B_y = C_y = \left(\frac{20}{\sin 45°}\right)(\sin 45°) = 20.0 \text{ kN}$$ *Cevap*

F2–3. $\zeta + \Sigma M_A = 0;\quad F_{BC} \sin 60°(4) - 10(2)(1) = 0$

$$F_{BC} = \frac{5}{\sin 60°} \text{ kN}$$

$\zeta + \Sigma M_B = 0;\quad 10(2)(3) - A_y(4) = 0$

$A_y = 15.0 \text{ kN}$ *Cevap*

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;\quad \left(\frac{5}{\sin 60°}\right)(\cos 60°) - A_x = 0$$

$A_x = 2.89 \text{ kN}$ *Cevap*

$$B_x = C_x = \left(\frac{5}{\sin 60°}\right)(\cos 60°) = 2.89 \text{ kN}$$ *Cevap*

$$B_y = C_y = \left(\frac{5}{\sin 60°}\right)(\sin 60°) = 5.00 \text{ kN}$$ *Cevap*

F2–4. *AC* Çubuğu

$\zeta + \Sigma M_C = 0;\quad 10(3) - N_A(4) = 0 \quad N_A = 7.50 \text{ kN}$ *Cevap*

$\zeta + \Sigma M_A = 0;\quad C_y(4) - 10(1) = 0 \quad C_y = 2.50 \text{ kN}$

BC Çubuğu

$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;\quad B_x = 0$ *Cevap*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad B_y - 2.50 - 8(2) = 0 \quad B_y = 18.5 \text{ kN}$ *Cevap*

$\zeta + \Sigma M_B = 0;\quad 2.50(2) + 8(2)(1) - M_B = 0$

$M_B = 21.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$ *Cevap*

F2–5. $\zeta + \Sigma M_A = 0;\quad F_{BC}\left(\frac{3}{5}\right)(2) + F_{BC}\left(\frac{4}{5}\right)(1.5) - 1.5(1) = 0$

$F_{BC} = 0.625 \text{ kN}$

$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;\quad A_x - 0.625\left(\frac{4}{5}\right) = 0 \quad A_x = 0.5 \text{ kN}$ *Cevap*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad A_y + 0.625\left(\frac{3}{5}\right) - 1.5 = 0$

$A_y = 1.125 \text{ kN}$ *Cevap*

$B_x = C_x = 0.625\left(\frac{4}{5}\right) = 0.5 \text{ kN}$ *Cevap*

$B_y = C_y = 0.625\left(\frac{3}{5}\right) = 0.375 \text{ kN}$ *Cevap*

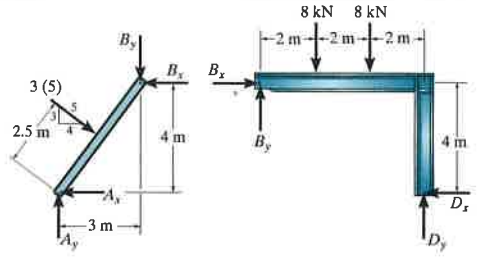
F2–6. $\zeta + \Sigma M_C = 0;\quad 6(2) + 2(2) - N_A(4) = 0$

$N_A = 4.00 \text{ kN}$ *Cevap*

$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;\quad C_x - 2 = 0 \quad C_x = 2.00 \text{ kN}$ *Cevap*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad C_y + 4.00 - 6 = 0 \quad C_y = 2.00 \text{ kN}$ *Cevap*

F2–7.



AB Çubuğu

$\zeta + \Sigma M_A = 0;\quad B_x(4) - B_y(3) - 3(5)(2.5) = 0$

BCD Çubuğu

$\zeta + \Sigma M_D = 0;\quad 8(2) + 8(4) - B_x(4) - B_y(6) = 0$

$B_x = 10.25 \text{ kN} \quad B_y = 1.167 \text{ kN} = 1.17 \text{ kN}$ *Cevap*

AB Çubuğu

$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;\quad -A_x + 3(5)\left(\frac{4}{5}\right) - 10.25 = 0$

$A_x = 1.75 \text{ kN}$ *Cevap*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad A_y - (3)(5)\left(\frac{3}{5}\right) - 1.167 = 0$

$A_y = 10.167 \text{ kN} = 10.2 \text{ kN}$ *Cevap*

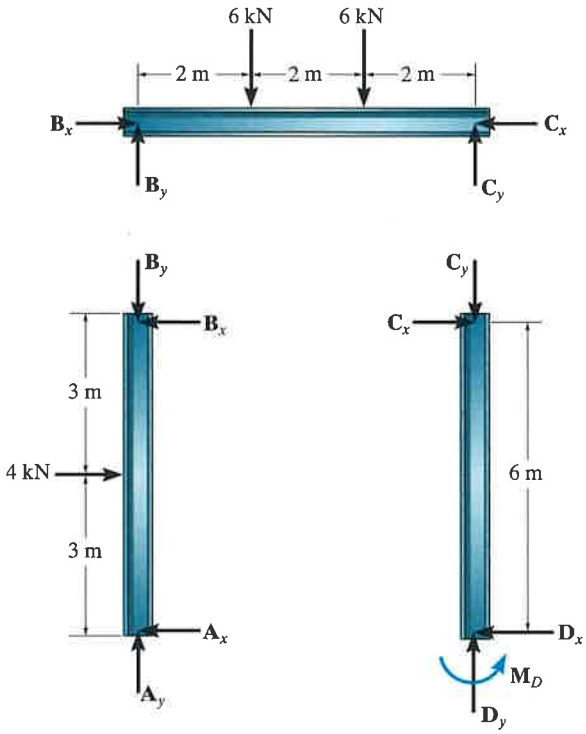
BCD Çubuğu

$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;\quad 10.25 - D_x = 0 \quad D_x = 10.25 \text{ kN}$ *Cevap*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad D_y + 1.167 - 8 - 8 = 0$

$D_y = 14.833 \text{ kN} = 14.8 \text{ kN}$ *Cevap*

F2–8.



AB Çubuğu

$\zeta + \Sigma M_A = 0;\quad B_x(6) - 4(3) = 0 \quad B_x = 2.00\ \text{kN}$ *Cevap*

$\zeta + \Sigma M_B = 0;\quad 4(3) - A_x(6) = 0 \quad A_x = 2.00\ \text{kN}$ *Cevap*

BC Çubuğu

$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0;\quad 2.00 - C_x = 0 \quad C_x = 2.00\ \text{kN}$ *Cevap*

$\zeta + \Sigma M_C = 0;\quad 6(2) + 6(4) - B_y(6) = 0 \quad B_y = 6.00\ \text{kN}$ *Cevap*

$\zeta + \Sigma M_B = 0;\quad C_y(6) - 6(2) - 6(4) = 0 \quad C_y = 6.00\ \text{kN}$ *Cevap*

AB Çubuğu

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad A_y - 6.00 = 0 \quad A_y = 6.00\ \text{kN}$ *Cevap*

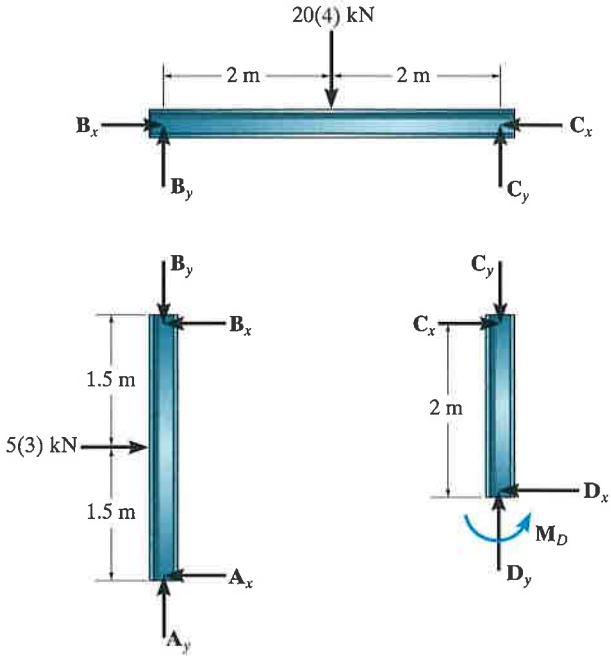
CD Çubuğu

$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0;\quad 2.00 - D_x = 0 \quad D_x = 2.00\ \text{kN}$ *Cevap*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad D_y - 6.00 = 0 \quad D_y = 6.00\ \text{kN}$ *Cevap*

$\zeta + \Sigma M_D = 0;\quad M_D - 2.00(6) = 0 \quad M_D = 12.0\ \text{kN}\cdot\text{m}$ *Cevap*

F2–9.



AB Çubuğu

$\zeta + \Sigma M_A = 0;\quad B_x(3) - 5(3)(1.5) = 0 \quad B_x = 7.5\ \text{kN}$ *Cevap*

$\zeta + \Sigma M_B = 0;\quad 5(3)(1.5) - A_x(3) = 0 \quad A_x = 7.5\ \text{kN}$ *Cevap*

BC Çubuğu

$\zeta + \Sigma M_C = 0;\quad 20(4)(2) - B_y(4) = 0 \quad B_y = 40.0\ \text{kN}$ *Cevap*

$\zeta + \Sigma M_B = 0;\quad C_y(4) - 20(4)(2) = 0 \quad C_y = 40.0\ \text{kN}$ *Cevap*

$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0;\quad 7.5 - C_x = 0 \quad C_x = 7.5\ \text{kN}$ *Cevap*

AB Çubuğu

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad A_y - 40.0 = 0 \quad A_y = 40.0\ \text{kN}$ *Cevap*

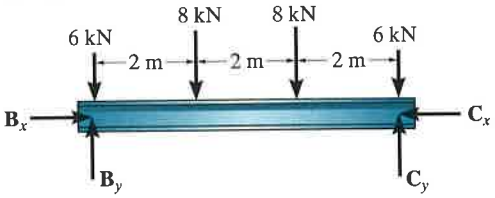
CD Çubuğu

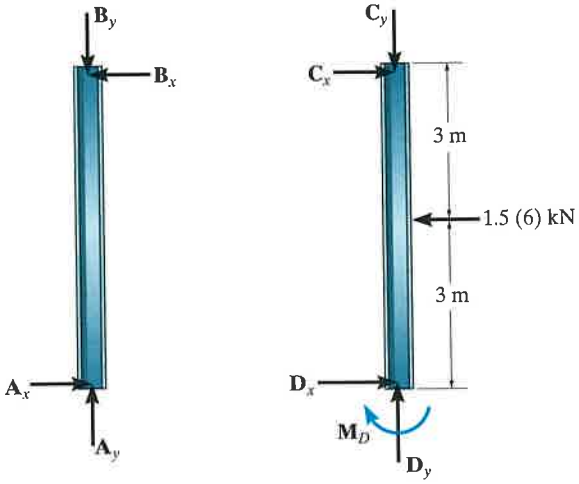
$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0;\quad 7.5 - D_x = 0 \quad D_x = 7.5\ \text{kN}$ *Cevap*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad D_y - 40.0 = 0 \quad D_y = 40.0\ \text{kN}$ *Cevap*

$\zeta + \Sigma M_D = 0;\quad M_D - 7.5(2) = 0 \quad M_D = 15.0\ \text{kN}\cdot\text{m}$ *Cevap*

F2–10.





BC Çubuğu

$\zeta + \Sigma M_B = 0;\quad C_y(6) - 8(2) - 8(4) - 6(6) = 0$

$C_y = 14.0\ \text{kN}$ *Cevap*

$\zeta + \Sigma M_C = 0;\quad 8(2) + 8(4) + 6(6) - B_y(6) = 0$

$B_y = 14.0\ \text{kN}$ *Cevap*

AB Çubuğu

$\zeta + \Sigma M_A = 0;\quad B_x = 0$ *Cevap*

$\pm \Sigma F_x = 0;\quad A_x = 0$ *Cevap*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad A_y - 14.0 = 0 \quad A_y = 14.0\ \text{kN}$ *Cevap*

BC Çubuğu

$\pm \Sigma F_x = 0;\quad C_x = 0$ *Cevap*

CD Çubuğu

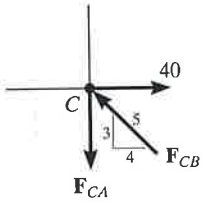
$\pm \Sigma F_x = 0;\quad D_x - 1.5(6) = 0 \quad D_x = 9.00\ \text{kN}$ *Cevap*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad D_y - 14.0 = 0 \quad D_y = 14.0\ \text{kN}$ *Cevap*

$\zeta + \Sigma M_D = 0;\quad 1.5(6)(3) - M_D = 0 \quad M_D = 27.0\ \text{kN}\cdot\text{m}$ *Cevap*

Bölüm 3

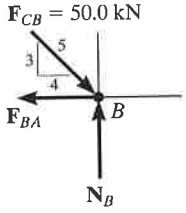
F3–1. *C* Düğüm noktası



$\pm \Sigma F_x = 0;\quad 40 - F_{CB}\left(\frac{4}{5}\right) = 0 \quad F_{CB} = 50.0\ \text{kN (B)}$ *Cevap*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad 50.0\left(\frac{3}{5}\right) - F_{CA} = 0 \quad F_{CA} = 30.0\ \text{kN (Ç)}$ *Cevap*

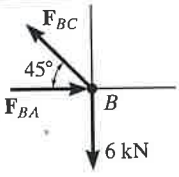
B Düğüm noktası



$\pm \Sigma F_x = 0;\quad 50.0\left(\frac{4}{5}\right) - F_{BA} = 0 \quad F_{BA} = 40.0\ \text{kN (Ç)}$ *Cevap*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad N_B - 50.0\left(\frac{3}{5}\right) = 0 \quad N_B = 30.0\ \text{kN}$

F3–2. *B* Düğüm noktası



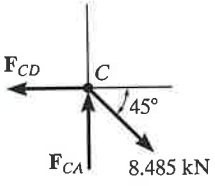
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad F_{BC} \sin 45° - 6 = 0$

$F_{BC} = 8.485\ \text{kN (Ç)} = 8.49\ \text{kN (Ç)}$ *Cevap*

$\pm \Sigma F_x = 0;\quad F_{BA} - 8.485 \cos 45° = 0$

$F_{BA} = 6.00\ \text{kN (B)}$ *Cevap*

C Düğüm noktası



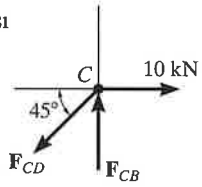
$\pm \Sigma F_x = 0;\quad 8.485 \cos 45° - F_{CD} = 0$

$F_{CD} = 6.00\ \text{kN (Ç)}$ *Cevap*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad F_{CA} - 8.485 \sin 45° = 0$

$F_{CA} = 6.00\ \text{kN (B)}$ *Cevap*

F3–3. *C* Düğüm noktası



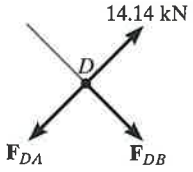
$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0;\quad 10 - F_{CD}\cos 45° = 0$

$F_{CD} = 14.14\text{ kN (Ç)} = 14.1\text{ kN (Ç)}$ *Cevap*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad F_{CB} - 14.14\sin 45° = 0$

$F_{CB} = 10.0\text{ kN (B)}$ *Cevap*

D Düğüm noktası

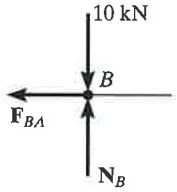


$+\nearrow \Sigma F_{x'} = 0;\quad 14.14 - F_{DA} = 0$

$F_{DA} = 14.14\text{ kN (Ç)} = 14.1\text{ kN (Ç)}$ *Cevap*

$\nwarrow+ \Sigma F_{y'} = 0;\quad F_{DB} = 0$ *Cevap*

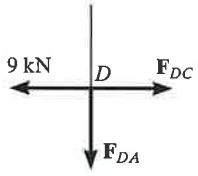
B Düğüm noktası



$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0;\quad F_{BA} = 0$ *Cevap*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad N_B - 10.0 = 0\quad N_B = 10.0\text{ kN}$

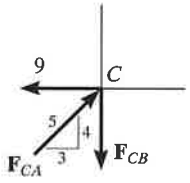
F3–4. *D* Düğüm noktası



$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0;\quad F_{DC} - 9 = 0\quad F_{DC} = 9\text{ kN (Ç)}$ *Cevap*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad F_{DA} = 0$ *Cevap*

C Düğüm noktası



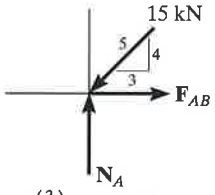
$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0;\quad F_{CA}\left(\frac{3}{5}\right) - 9 = 0$

$F_{CA} = 15\text{ kN (B)}$ *Cevap*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad 15\left(\frac{4}{5}\right) - F_{CB} = 0$

$F_{CB} = 12\text{ kN (Ç)}$ *Cevap*

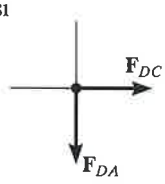
A Düğüm noktası



$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0;\quad F_{AB} - 15\left(\frac{3}{5}\right) = 0\quad F_{AB} = 9\text{ kN (Ç)}$ *Cevap*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad N_A - 15\left(\frac{4}{5}\right) = 0\quad N_A = 12\text{ kN}$

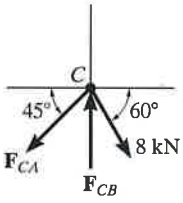
F3–5. *D* Düğüm noktası



$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0;\quad F_{DC} = 0$ *Cevap*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad F_{DA} = 0$ *Cevap*

C Düğüm noktası



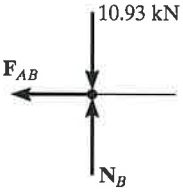
$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0;\quad 8\cos 60° - F_{CA}\cos 45° = 0$

$F_{CA} = 5.657\text{ kN (Ç)} = 5.66\text{ kN (Ç)}$ *Cevap*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad F_{CB} - 5.657\sin 45° - 8\sin 60° = 0$

$F_{CB} = 10.93\text{ kN (B)} = 10.9\text{ kN (B)}$ *Cevap*

B Düğüm noktası



$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0;\quad F_{AB} = 0$ *Cevap*

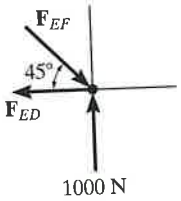
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad N_B = 10.93\text{ kN}$

F3–6. Tüm kafes sistem

$\zeta + \Sigma M_A = 0;\quad E_y(8) - 600(2) - 800(4) - 600(6) = 0$

$E_y = 1000\ \text{N}$

E Düğüm noktası



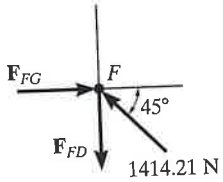
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad 1000 - F_{EF}\sin 45° = 0$

$F_{EF} = 1414.21\ \text{N (B)} = 1.41\ \text{kN (B)}$ *Cevap*

$\pm \Sigma F_x = 0;\quad 1414.21\cos 45° - F_{ED} = 0$

$F_{ED} = 1000\ \text{N (Ç)} = 1.00\ \text{kN (Ç)}$ *Cevap*

F Düğüm noktası



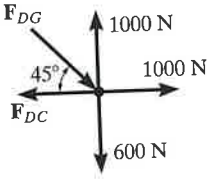
$\pm \Sigma F_x = 0;\quad F_{FG} - 1414.21\cos 45° = 0$

$F_{FG} = 1000\ \text{N (B)} = 1.00\ \text{kN (B)}$ *Cevap*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad 1414.21\sin 45° - F_{FD} = 0$

$F_{FD} = 1000\ \text{N (Ç)} = 1.00\ \text{kN (Ç)}$ *Cevap*

D Düğüm noktası



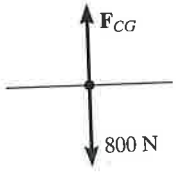
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad 1000 - 600 - F_{DG}\sin 45° = 0$

$F_{DG} = 565.69\ \text{N (B)} = 566\ \text{N (B)}$ *Cevap*

$\pm \Sigma F_x = 0;\quad 1000 + 565.69\cos 45° - F_{DC} = 0$

$F_{DC} = 1400\ \text{N (Ç)} = 1.40\ \text{kN (Ç)}$ *Cevap*

C Düğüm noktası



$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad F_{CG} - 800 = 0\quad F_{CG} = 800\ \text{N (Ç)}$ *Cevap*

Simetriden dolayı,

$F_{BC} = F_{DC} = 1.40\ \text{kN (Ç)}\quad F_{BG} = F_{DG} = 566\ \text{N (B)}$ *Cevap*

$F_{HG} = F_{FG} = 1.00\ \text{kN (B)}$

$F_{HB} = F_{FD} = 1.00\ \text{kN (Ç)}\quad F_{AH} = F_{EF} = 1.41\ \text{kN (B)}$ *Cevap*

$F_{AB} = F_{ED} = 1.00\ \text{kN (Ç)}$

F3–7. Tüm kafes sistem için

$\zeta + \Sigma M_E = 0;\quad 2(5) + 2(10) + 2(15) - A_y(20) = 0$

$A_y = 3.00\ \text{k}$

$\pm \Sigma F_x = 0;\quad A_x = 0$

Soldaki parça için

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad 3.00 - 2 - F_{BG}\sin 45° = 0$

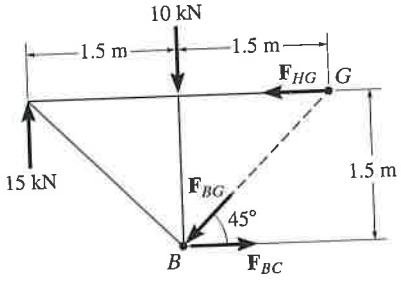
$F_{BG} = 1.41\ \text{k (B)}$ *Cevap*

$\zeta + \Sigma M_B = 0;\quad F_{HG}(5) - 3(5) = 0$

$F_{HG} = 3.00\ \text{k (B)}$ *Cevap*

$\zeta + \Sigma M_G = 0;\quad F_{BC}(5) + 2(5) - 3.00(10) = 0$

$F_{BC} = 4.00\ \text{k (Ç)}$ *Cevap*



F3–8. Tüm kafes sistem için

$\circlearrowleft +\Sigma M_E = 0;$

$3(4.8) + 3(3.6) + 3(2.4) + 3(1.2) - A_y(4.8) = 0$

$A_y = 7.5\ \text{kN}$

$\pm \Sigma F_x = 0;\quad A_x = 0$

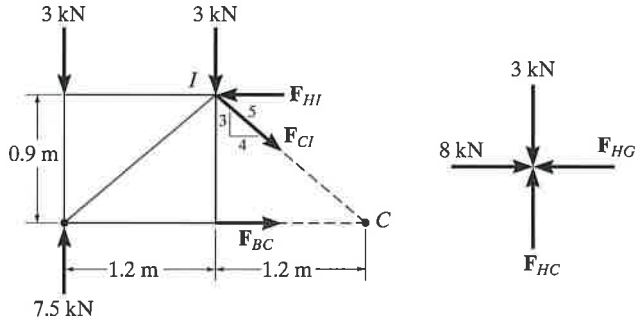
Soldaki parça için

$\circlearrowleft +\Sigma M_C = 0;\quad F_{HI}(0.9) + 3(1.2) + 3(2.4) - 7.5(2.4) = 0$

$F_{HI} = 8\ \text{kN (B)}$

$\circlearrowleft +\Sigma M_I = 0;\quad F_{BC}(0.9) + 3(1.2) - 7.5(1.2) = 0$

$F_{BC} = 6\ \text{kN (Ç)}$ *Cevap*



H Düğüm noktası

$\pm \Sigma F_x = 0;\quad 8 - F_{HG} = 0\quad F_{HG} = 8\ \text{kN (B)}$ *Cevap*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad F_{HC} - 3 = 0\quad F_{HC} = 3\ \text{kN (B)}$ *Cevap*

F3–9. Tüm kafes sistem için

$\circlearrowleft +\Sigma M_A = 0;\quad N_C(4) - 8(2) - 6(2) = 0\quad N_C = 7.00\ \text{kN}$

Sağ parçayı dikkate alalım

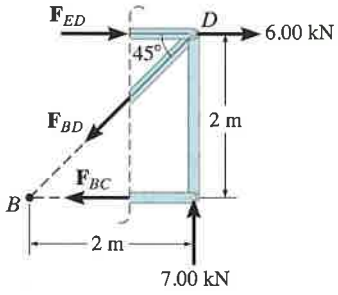
$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad 7.00 - F_{BD}\sin 45° = 0$

$F_{BD} = 9.899\ \text{kN (Ç)} = 9.90\ \text{kN (Ç)}$ *Cevap*

$\circlearrowleft +\Sigma M_B = 0;\quad 7.00(2) - 6(2) - F_{ED}(2) = 0$

$F_{ED} = 1.00\ \text{kN (B)}$ *Cevap*

$\circlearrowleft +\Sigma M_D = 0;\quad 0 - F_{BC}(2) = 0\quad F_{BC} = 0$ *Cevap*



F3–10. Tüm kafes sistem için

$\circlearrowleft +\Sigma M_A = 0;$

$N_E(8) - 1800(8) - 1800(4) - 1800(6) - 1800(8) = 0$

$N_E = 4500\ \text{N}$

Sağ parçayı dikkate alalım

$\circlearrowleft +\Sigma M_E = 0;$

$1800(2) - F_{CF}\left(\frac{3}{5}\right)(4) = 0\ F_{CF} = 1500\ \text{N (B)}$ *Cevap*

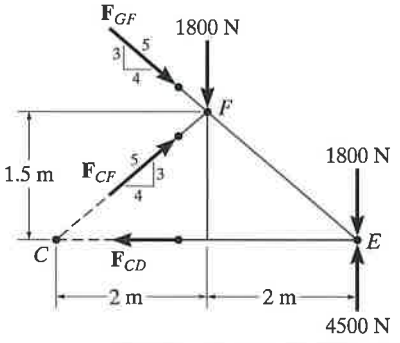
$\circlearrowleft +\Sigma M_C = 0;$

$4500(4) - 1800(4) - 1800(2) - F_{GF}\left(\frac{3}{5}\right)(4) = 0$

$F_{GF} = 3000\ \text{N (B)}$ *Cevap*

$\circlearrowleft +\Sigma M_F = 0;\quad 4500(2) - 1800(2) - F_{CD}(1.5) = 0$

$F_{CD} = 3600\ \text{N (Ç)}$ *Cevap*



F3–11. Tüm kafes sistem için

$\circlearrowleft +\Sigma M_A = 0;\quad N_D(6) - 2(6) - 4(3) = 0\quad N_D = 4.00\ \text{kN}$

Sağ parçayı dikkate alalım

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad 4.00 - 2 - F_{FC}\sin 45° = 0$

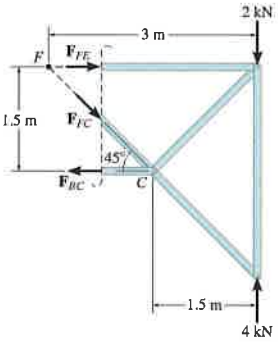
$F_{FC} = 2.828\ \text{kN (B)} = 2.83\ \text{kN (B)}$ *Cevap*

$\circlearrowleft +\Sigma M_F = 0;\quad 4.00(3) - 2(3) - F_{BC}(1.5) = 0$

$F_{BC} = 4.00\ \text{kN (Ç)}$ *Cevap*

$\circlearrowleft +\Sigma M_C = 0;\quad 4.00(1.5) - 2(1.5) - F_{FE}(1.5) = 0$

$F_{FE} = 2.00\ \text{kN (B)}$ *Cevap*



F3–12. Tüm kafes sistem için

$\zeta + \Sigma M_A = 0;\quad N_E(4) - 2(1) - 2(2) - 2(3) = 0$

$N_E = 3\ \text{kN}$

Sağ parçayı dikkate alalım

$\zeta + \Sigma M_F = 0;\quad 3(1) - F_{CD}(0.75) = 0$

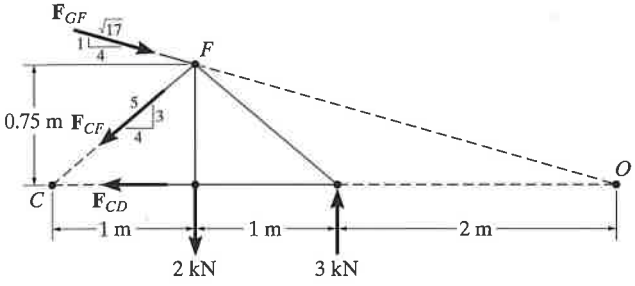
$F_{CD} = 4\ \text{kN (Ç)}$ *Cevap*

$\zeta + \Sigma M_C = 0;\quad 3(2) - 2(1) - F_{GF}\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)(4) = 0$

$F_{GF} = 4.12\ \text{kN (B)}$ *Cevap*

$\zeta + \Sigma M_O = 0;\quad F_{CF}\left(\frac{3}{5}\right)(4) + 2(3) - 3(2) = 0$

$F_{CF} = 0$ *Cevap*



Bölüm 4

F4–1. $\zeta + \Sigma M_A = 0;\quad B_y(2) + 20 - 10(4) = 0$

CB Parçası

$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0;\quad N_C = 0$ *Cevap*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad V_C + 10 - 10 = 0$

$V_C = 0$ *Cevap*

$\zeta + \Sigma M_C = 0;\quad -M_C + 10(1) - 10(3) = 0$

$M_C = -20\ \text{kN}\cdot\text{m}$ *Cevap*

F4–2. $\zeta + \Sigma M_A = 0;$

$B_y(3) - 4(1.5)(0.75) - 8(1.5)(2.25) = 0$

$B_y = 10.5\ \text{kN}$

CB Parçası

$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0;\quad N_C = 0$ *Cevap*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad V_C + 10.5 - 8(1.5) = 0\quad V_C = 1.50\ \text{kN}$ *Cevap*

$\zeta + \Sigma M_C = 0;\quad 10.5(1.5) - 8(1.5)(0.75) - M_C = 0$

$M_C = 6.75\ \text{kN}\cdot\text{m}$ *Cevap*

F4–3. $\zeta + \Sigma M_B = 0;\quad \frac{1}{2}(6)(6)(3) - A_y(6) = 0$

$A_y = 9.00\ \text{kN}$

$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0;\quad A_x = 0$

AC Parçası

$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0;\quad N_C = 0$ *Cevap*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad 9.00 - \frac{1}{2}(3)(1.5) - V_C = 0$

$V_C = 6.75\ \text{kN}$ *Cevap*

$\zeta + \Sigma M_C = 0;\quad M_C + \frac{1}{2}(3)(1.5)(0.5) - 9.00(1.5) = 0$

$M_C = 12.4\ \text{kN}\cdot\text{m}$ *Cevap*

F4–4. $\zeta + \Sigma M_B = 0;$

$6(1)(0.5) - \frac{1}{2}(6)(1)(0.333) - A_y(1) = 0$

$A_y = 2\ \text{kN}$

$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0;\quad A_x = 0$

AC Parçası

$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0;\quad N_C = 0$ *Cevap*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad 2 - 6(0.5) - V_C = 0$

$V_C = -1\ \text{kN}$ *Cevap*

$\zeta \Sigma M_C = 0;\quad M_C + 6(0.5)(0.25) - 2(0.5) = 0$

$M_C = 0.25\ \text{kN}\cdot\text{m}$ *Cevap*

F4–5. Mesnet Tepkileri

$\zeta + \Sigma M_A = 0;\quad F_B \sin 45°(3) - 5(6)(3) = 0\quad F_B = 42.43\ \text{kN}$

$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0;\quad 42.43 \cos 45° - A_x = 0\quad A_x = 30.0\ \text{kN}$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad 42.43 \sin 45° - 5(6) - A_y = 0\quad A_y = 0$

AC Parçası

$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0;\quad N_C - 30.0 = 0\quad N_C = 30.0\ \text{kN}$ *Cevap*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad -5(1.5) - V_C = 0\quad V_C = -7.50\ \text{kN}$ *Cevap*

$\zeta + \Sigma M_C = 0;\quad M_C + 5(1.5)(0.75) = 0$

$M_C = -5.625\ \text{kN}\cdot\text{m}$ *Cevap*

F4–6. Mesnet Tepkisi

$\zeta + \Sigma M_A = 0;\quad B_y(5) - 4.5(3)(3.5) - 6(2) - 8(1) = 0$

$B_y = 13.45\ \text{kN}$

CB parçası

$\pm\rightarrow \Sigma F_x = 0;\quad N_C = 0$ *Cevap*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\ V_C + 13.45 - 4.5(2) = 0\ V_C = -4.45\ \text{kN}$ *Cevap*

$\zeta + \Sigma M_C = 0;\quad 13.45(2) - 4.5(2)(1) - M_C = 0$

$M_C = 17.9\ \text{kN}\cdot\text{m}$ *Cevap*

F4–7. Sol parça

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\ -6 - \frac{1}{2}\left(\frac{18}{3}x\right)(x) - V = 0$

$V = \{-3x^2 - 6\}$ kN *Cevap*

$\zeta + \Sigma M_O = 0;\ M + \frac{1}{2}\left(\frac{18}{3}x\right)(x)\left(\frac{x}{3}\right) + 6x = 0$

$M = \{-x^3 - 6x\}$ kN · m *Cevap*

F4–8. Mesnet Tepkisi

$\zeta + \Sigma M_B = 0;\ \frac{1}{2}(12)(6)(2) - A_y(6) = 0\ \ A_y = 12.0$ kN

Sol parça

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\ 12.0 - \frac{1}{2}\left(\frac{12}{6}x\right)(x) - V = 0$

$V = \{12.0 - x^2\}$ kN *Cevap*

$\zeta + \Sigma M_O = 0;\ M + \frac{1}{2}\left(\frac{12}{6}x\right)(x)\left(\frac{x}{3}\right) - 12.0x = 0$

$M = \left\{12.0x - \frac{1}{3}x^3\right\}$ kN · m *Cevap*

F4–9. Mesnet Tepkileri

$\zeta + \Sigma M_A = 0;\ B_y(8) - 8(4)(6) = 0\ \ B_y = 24.0$ kN

$\zeta + \Sigma M_B = 0;\ 8(4)(2) - A_y(8) = 0\ \ A_y = 8.00$ kN

$0 \le x < 4$ m sol parça

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\ 8.00 - V = 0\ \ V = \{8\}$ kN *Cevap*

$\zeta + \Sigma M_O = 0;\ M - 8.00x = 0\ \ M = \{8x\}$ kN · m *Cevap*

4 m $< x < 8$ m sağ parça

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\ V + 24.0 - 8(8 - x) = 0$

$V = \{40 - 8x\}$ kN *Cevap*

$\zeta + \Sigma M_O = 0;\ 24.0(8 - x) - 8(8 - x)\left(\frac{8 - x}{2}\right) - M = 0$

$M = \{-4x^2 + 40x - 64\}$ kN · m *Cevap*

F4–10. $0 \le x < 2$ m

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\ V = 0$ *Cevap*

$\zeta + \Sigma M_O = 0;\ M + 20 = 0\ \ M = -20$ kN · m *Cevap*

2 m $< x \le 4$ m

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\ -5(x - 2) - V = 0$

$V = \{10 - 5x\}$ kN *Cevap*

$\zeta + \Sigma M_O = 0;\ M + 5(x - 2)\left(\frac{x - 2}{2}\right) + 15 + 20 = 0$

$M = \left\{-\frac{5}{2}x^2 + 10x - 45\right\}$ kN · m *Cevap*

F4–11. Mesnet Tepkileri

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\ A_y - 5(2) - 15 = 0\ \ A_y = 25.0$ kN

$\zeta + \Sigma M_A = 0;\ M_A - 5(2)(1) - 15(4) = 0$

$M_A = 70.0$ kN · m

$0 \le x < 2$ m sol parça

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\ 25.0 - 5x - V = 0$

$V = \{25 - 5x\}$ kN *Cevap*

$\zeta + \Sigma M_O = 0;\ M + 5x\left(\frac{x}{2}\right) + 70.0 - 25.0x = 0$

$M = \left\{-\frac{5}{2}x^2 + 25x - 70\right\}$ kN · m *Cevap*

2 m $< x \le 4$ m sağ parça

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\ V - 15 = 0\ \ V = 15$ kN *Cevap*

$\zeta + \Sigma M_O = 0;\ -M - 15(4 - x) = 0$

$M = \{15x - 60\}$ kN · m *Cevap*

F4–12. Mesnet Tepkileri

$\zeta + \Sigma M_A = 0;\ B_y(8) - 30(4)(2) - 90(4) = 0$

$B_y = 75.0$ kN

$\zeta + \Sigma M_B = 0;\ 90(4) + 30(4)(6) - A_y(8) = 0$

$A_y = 135.0$ kN

$0 \le x < 4$ m sol parça

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\ 135.0 - 30x - V = 0$

$V = \{135 - 30x\}$ kN *Cevap*

$\zeta + \Sigma M_O = 0;\ M + 30x\left(\frac{x}{2}\right) - 135.0x = 0$

$M = \{-15x^2 + 135x\}$ kN · m *Cevap*

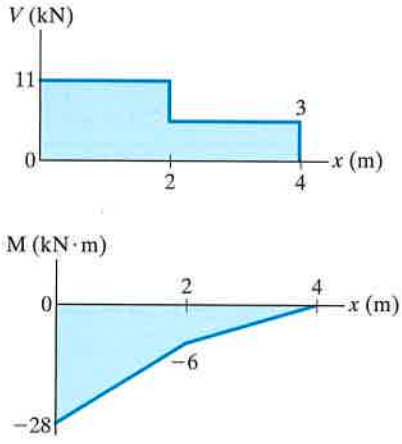
4 m $< x \le 8$ m sağ parça

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\ V + 75.0 = 0\ \ V = \{-75$ kN$\}$ *Cevap*

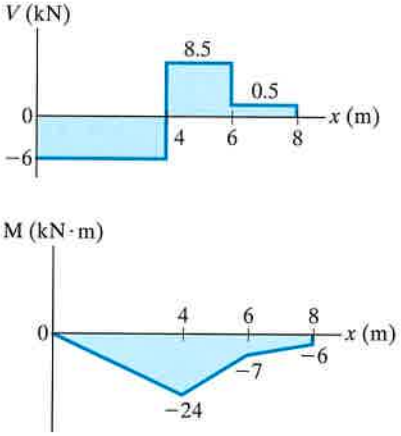
$\zeta + \Sigma M_O = 0;\ 75.0(8 - x) - M = 0$

$M = \{-75x + 600\}$ kN · m *Cevap*

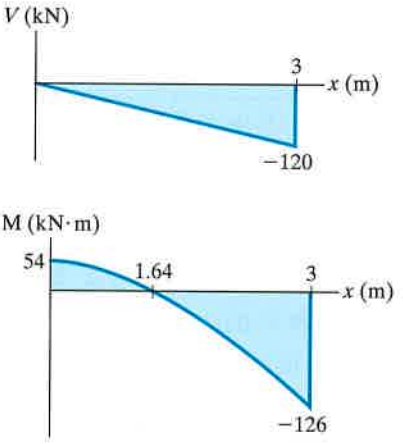
F4–13.



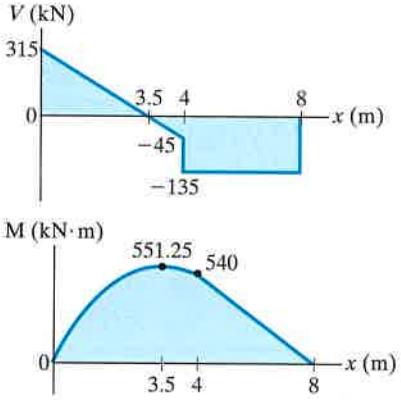
F4–14.



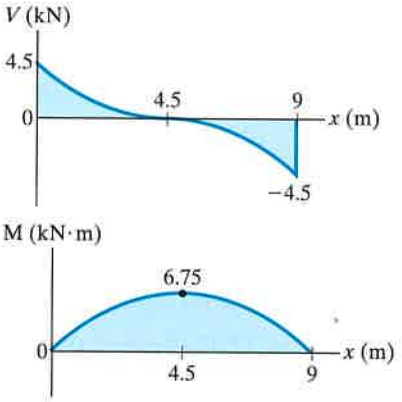
F4–15.



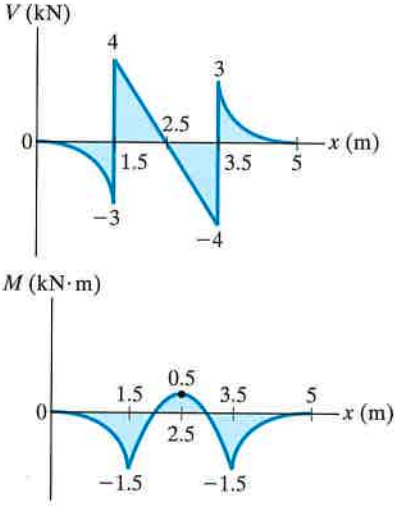
F4–16.



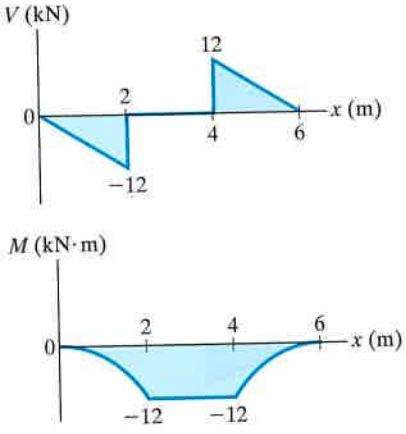
F4–17.



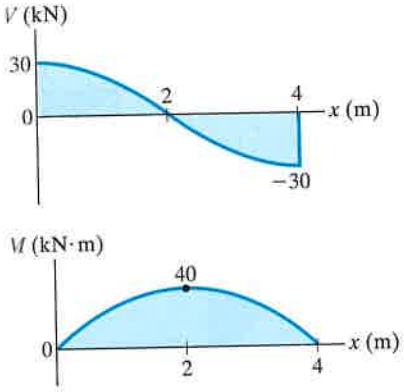
F4–18.



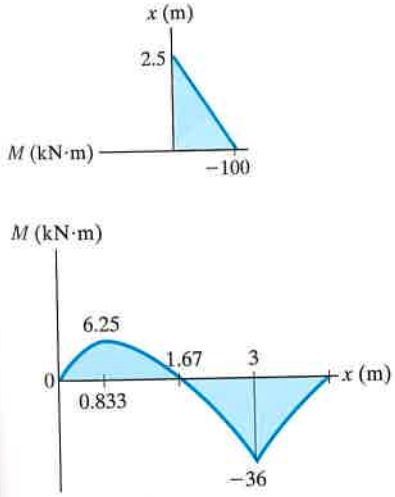
F4–19.



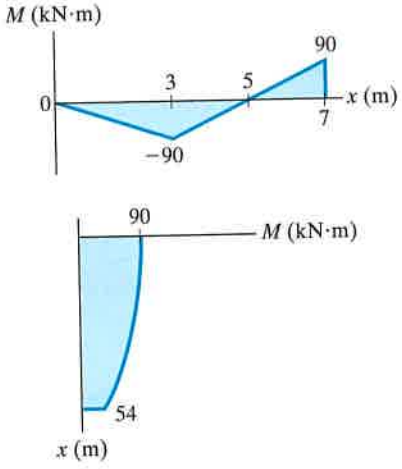
F4–20.



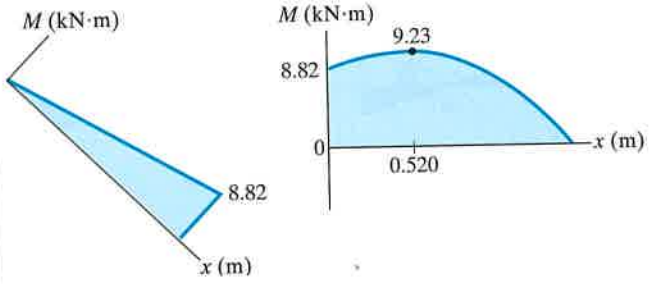
F4–21.



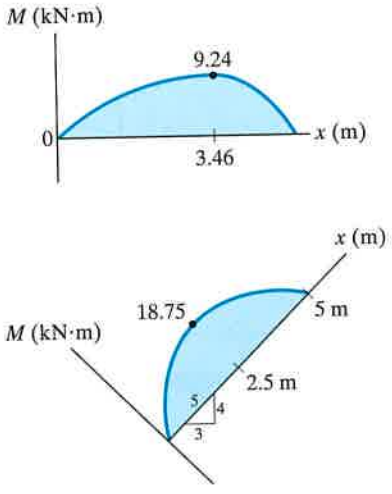
F4–22.



F4–23.

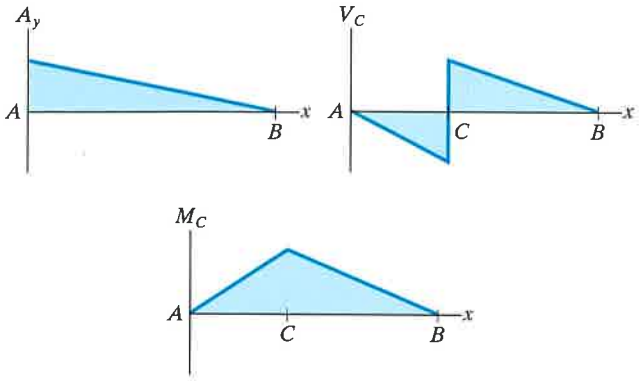


F4–24.

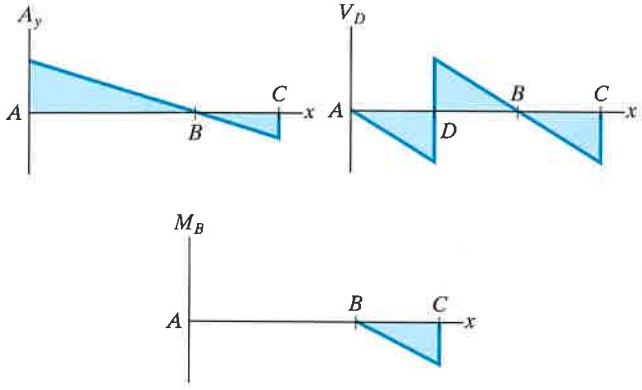


Bölüm 6

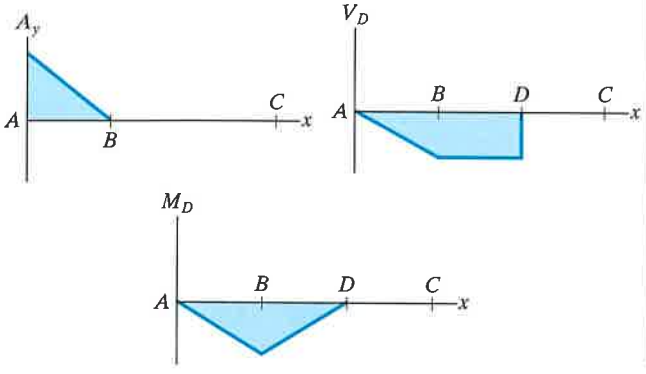
F6–1.



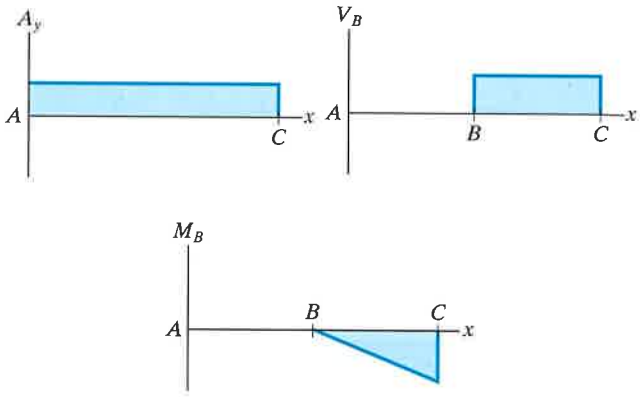
F6–2.



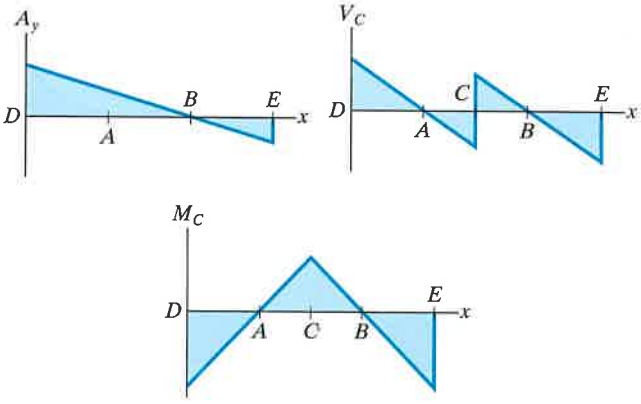
F6–3.



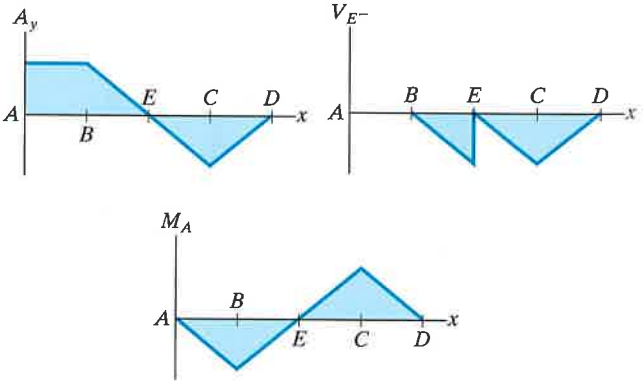
F6–4.



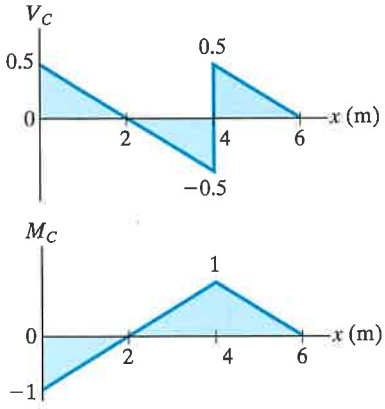
F6–5.



F6–6.



F6–7.



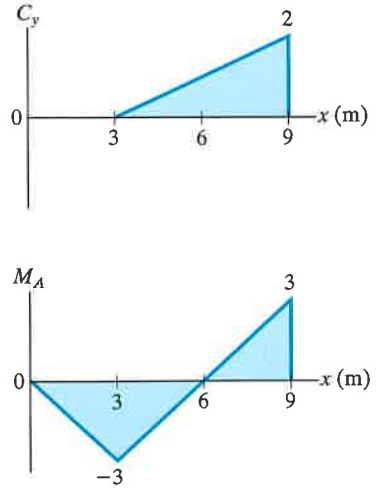
$$(M_C)_{\max(+)} = 8(1) + \left[\frac{1}{2}(6-2)(1)\right](1.5) + \left[\frac{1}{2}(2)(-1)\right](2) + \left[\frac{1}{2}(6-2)(1)\right](2)$$

$$= 13.0\ \text{kN}\cdot\text{m} \quad \textit{Cevap}$$

$$(V_C)_{\max(+)} = 8(0.5) + \left[\frac{1}{2}(2)(0.5)\right](1.5) + \left[\frac{1}{2}(6-4)(0.5)\right](1.5) + \left[\frac{1}{2}(2)(0.5)\right](2) + \left[\frac{1}{2}(4-2)(-0.5)\right](2) + \left[\frac{1}{2}(6-4)(0.5)\right](2)$$

$$= 6.50\ \text{kN} \quad \textit{Cevap}$$

F6–8.



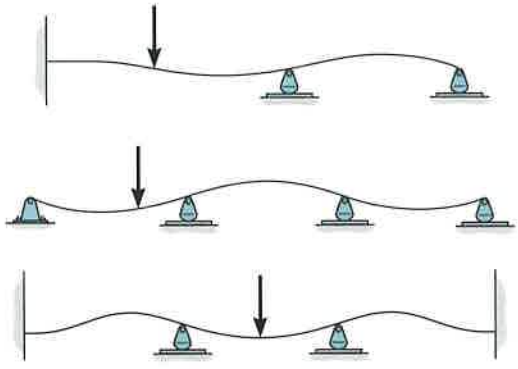
$$(C_y)_{\max(+)} = 6(2) + \left[\frac{1}{2}(9-3)(2)\right](2) + \left[\frac{1}{2}(9-3)(2)\right](4) = 48\ \text{kN} \quad \textit{Cevap}$$

$$(M_A)_{\max(-)} = 6(-3) + \left[\frac{1}{2}(6-0)(-3)\right](2) + \left[\frac{1}{2}(6-0)(-3)\right](4) + \left[\frac{1}{2}(9-6)(3)\right](4)$$

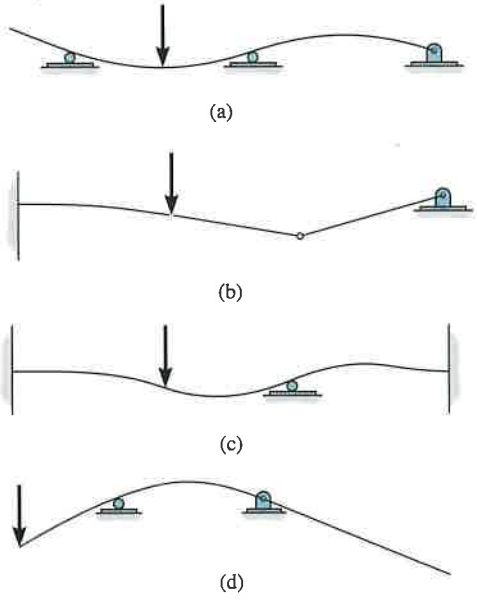
$$= -54\ \text{kN}\cdot\text{m} \quad \textit{Cevap}$$

Bölüm 8

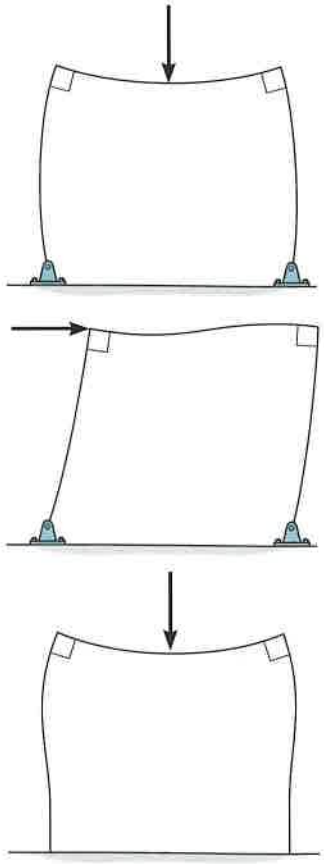
F8–1.



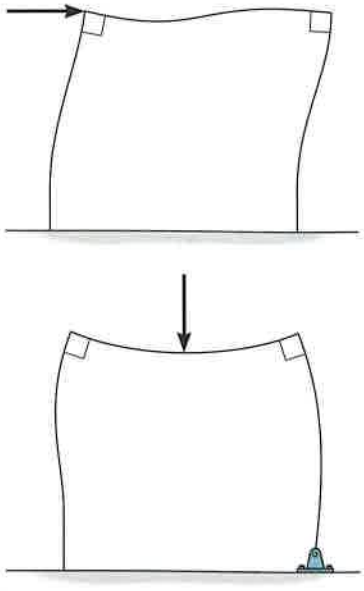
F8–2.



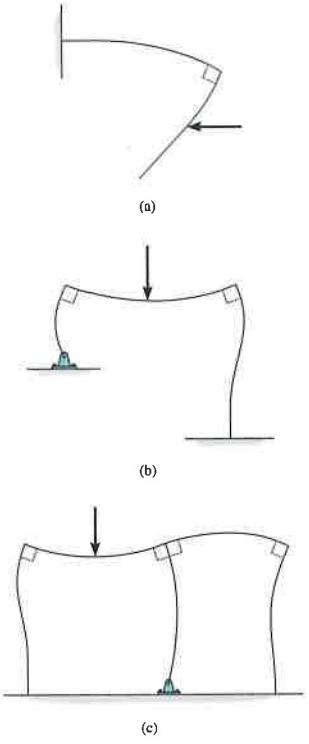
F8–3.



F8–4.



F8–5.



F8–6. $0 \leq x_1 < \frac{L}{2}$ için

$$M_1 = \frac{P}{2}x_1$$

$$EI\frac{d^2v_1}{dx_1^2} = \frac{P}{2}x_1$$

$$EI\frac{dv_1}{dx_1} = \frac{P}{4}x_1^2 + C_1 \tag{1}$$

$$EI\,v_1 = \frac{P}{12}x_1^3 + C_1x_1 + C_2 \tag{2}$$

$\frac{L}{2} < x_2 \leq L$ için

$$M_2 = \frac{P}{2}(L - x_2) = \frac{PL}{2} - \frac{P}{2}x_2$$

$$EI\frac{d^2v_2}{dx_2^2} = \frac{PL}{2} - \frac{P}{2}x_2$$

$$EI\frac{dv_2}{dx_2} = \frac{PL}{2}x_2 - \frac{P}{4}x_2^2 + C_3 \tag{3}$$

$$EI\,v_2 = \frac{PL}{4}x_2^2 - \frac{P}{12}x_2^3 + C_3x_2 + C_4 \tag{4}$$

$x_1 = 0$'da $v_1 = 0$. Denklem (2)'den, $C_2 = 0$

$x_1 = \frac{L}{2}$'de $\frac{dv_1}{dx_1} = 0$. Denklem (1)'den, $C_1 = -\frac{PL^2}{16}$

$x_2 = \frac{L}{2}$'de $\frac{dv_2}{dx_2} = 0$. Denklem (3)'den, $C_3 = -\frac{3PL^2}{16}$

$x_2 = L$'de $v_2 = 0$. Denklem (4)'den, $C_4 = \frac{PL^3}{48}$

$$v_1 = \frac{Px_1}{48EI}(4x_1^2 - 3L^2) \quad \textit{Cevap}$$

$$v_2 = \frac{P}{48EI}(-4x_2^3 + 12Lx_2^2 - 9L^2x_2 + L^3) \quad \textit{Cevap}$$

F8–7 $M = Px - PL$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = Px - PL$$

$$EI\frac{dv}{dx} = \frac{P}{2}x^2 - PLx + C_1 \qquad (1)$$

$$EI\,v = \frac{P}{6}x^3 - \frac{PL}{2}x^2 + C_1x + C_2 \qquad (2)$$

$x = 0$'da $\frac{dv}{dx} = 0$. Denklem (1)'den, $C_1 = 0$

$x = 0$'da $v = 0$. Denklem (2)'den, $C_2 = 0$

$$v = \frac{Px}{6EI}(x^2 - 3Lx) \quad \textit{Cevap}$$

F8–8. $M = M_0 - \frac{M_0}{L}x$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = M_0 - \frac{M_0}{L}x$$

$$EI\frac{dv}{dx} = M_0x - \frac{M_0}{2L}x^2 + C_1$$

$$EI\,v = \frac{M_0}{2}x^2 - \frac{M_0}{6L}x^3 + C_1x + C_2 \qquad (1)$$

$x = 0$'da $v = 0$. Denklem (1)'den, $C_2 = 0$

$x = L$'de $v = 0$. Denklem (1)'den, $C_1 = -\frac{M_0L}{3}$

$$v = \frac{M_0}{6EIL}(-x^3 + 3Lx^2 - 2L^2x) \quad \textit{Cevap}$$

F8–9. $0 \le x_1 < \frac{L}{2}$ için

$$M = -\frac{M_0}{L}x_1$$

$$EI\frac{d^2v_1}{dx_1^2} = -\frac{M_0}{L}x_1$$

$$EI\frac{dv_1}{dx_1} = -\frac{M_0}{2L}x_1^2 + C_1 \qquad (1)$$

$$EIv_1 = -\frac{M_0}{6L}x_1^3 + C_1x_1 + C_2 \qquad (2)$$

$\frac{L}{2} < x_2 \le L$ için

$$M = M_0 - \frac{M_0}{L}x_2$$

$$EI\frac{d^2v_2}{dy_2^2} = M_0 - \frac{M_0}{L}x_2$$

$$EI\frac{dv_2}{dx_2} = M_0x_2 - \frac{M_0}{2L}x_2^2 + C_3 \qquad (3)$$

$$EIv_2 = \frac{M_0}{2}x_2^2 - \frac{M_0}{6L}x_2^3 + C_3x_2 + C_4 \qquad (4)$$

$x_1 = 0$'da $v_1 = 0$. Denklem (2)'den, $C_2 = 0$

$x_2 = L$'de $v_2 = 0$. Denklem (4)'den,

$$0 = C_3L + C_4 + \frac{M_0L^2}{3} \qquad (5)$$

$x_1 = x_2 = \frac{L}{2}$'de $\frac{dv_1}{dx_1} = \frac{dv_2}{dx_2}$ Denklem (1) ve (3)'den $C_1 - C_3 = \frac{M_0L}{2}$ (6)

$x_1 = x_2 = \frac{L}{2}$'de $v_1 = v_2$. Denklem (2) ve (4)'den,

$$C_1L - C_3L - 2C_4 = \frac{M_0L^2}{4} \qquad (7)$$

Denklem (5), (6) ve (7) çözülerek

$$C_4 = \frac{M_0L^2}{8} \quad C_3 = -\frac{11M_0L}{24} \quad C_1 = \frac{M_0L}{24}$$

$$v_1 = \frac{M_0}{24EIL}(-4x_1^3 + L^2x_1) \quad \textit{Cevap}$$

$$v_2 = \frac{M_0}{24EIL}(-4x_2^3 + 12Lx_2^2 - 11L^2x_2 + 3L^3) \quad \textit{Cevap}$$

F8–10.

$$M = -\frac{w}{2}x^2 + wLx - \frac{wL^2}{2}$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{w}{2}x^2 + wLx - \frac{wL^2}{2}$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{w}{6}x^3 + \frac{wL}{2}x^2 - \frac{wL^2}{2}x + C_1 \quad (1)$$

$$EI\,v = -\frac{w}{24}x^4 + \frac{wL}{6}x^3 - \frac{wL^2}{4}x^2 + C_1x + C_2 \quad (2)$$

$x = 0$'da $\frac{dv}{dx} = 0$. Denklem (1)'den $C_1 = 0$

$x = 0$'da $v_1 = 0$. Denklem (2)'den $C_2 = 0$

$$v = \frac{w}{24EI}(-x^4 + 4Lx^3 - 6L^2x^2)$$ *Cevap*

F8–11.

$$M = -\frac{w_0}{6L}x^3$$

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{w_0}{6L}x^3$$

$$EI\frac{dv}{dx} = -\frac{w_0}{24L}x^4 + C_1 \quad (1)$$

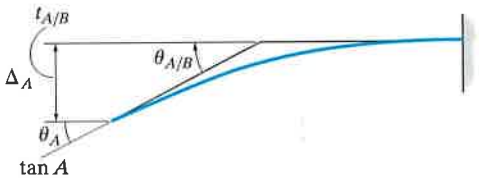
$$EI\,v = -\frac{w_0}{120L}x^5 + C_1x + C_2 \quad (2)$$

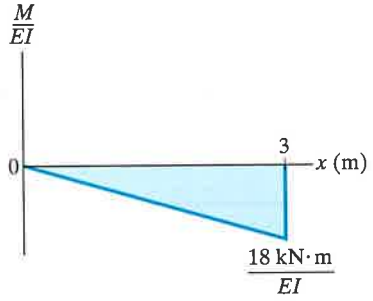
$x = L$'de $\frac{dv}{dx} = 0$. Denklem (1)'den, $C_1 = \frac{w_0L^3}{24}$

$x = L$'de $v = 0$. Denklem (2)'den, $C_2 = -\frac{w_0L^4}{30}$

$$v = \frac{w_0}{120EIL}(-x^5 + 5L^4x - 4L^5)$$ *Cevap*

F8–12.



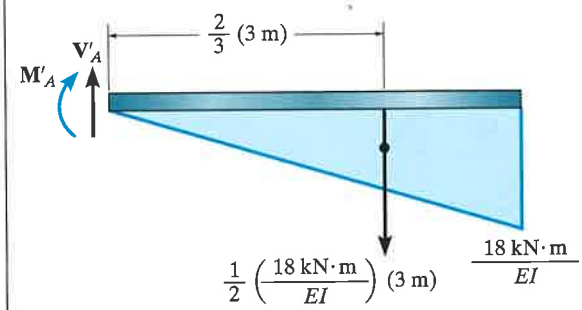


$$\theta_A = |\theta_{A/B}| = \left|\frac{1}{2}\left(\frac{-18\text{ kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)(3\text{ m})\right| = \frac{27\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI}$$ *Cevap*

$$\Delta_A = |t_{A/B}| = \left|\left[\frac{1}{2}\left(\frac{-18\text{ kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)(3\text{ m})\right]\left[\frac{2}{3}(3\text{ m})\right]\right|$$

$$= \frac{54\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow$$ *Cevap*

F8–13.



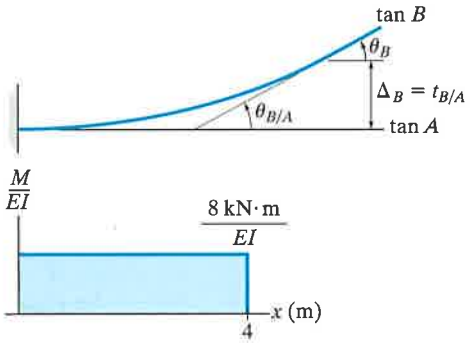
$$+\uparrow\Sigma F_y = 0;\quad V'_A - \frac{1}{2}\left(\frac{18\text{ kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)(3\text{ m}) = 0$$

$$\theta_A = \frac{27\text{ kN}\cdot\text{m}^2}{EI}$$ *Cevap*

$$\circlearrowleft +\Sigma M_A = 0;\quad -M'_A - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{18\text{ kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)(3\text{ m})\right]\left[\frac{2}{3}(3\text{ m})\right] = 0$$

$$M'_A = \Delta_A = -\frac{54\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI} = \frac{54\text{ kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow$$ *Cevap*

F8–14.

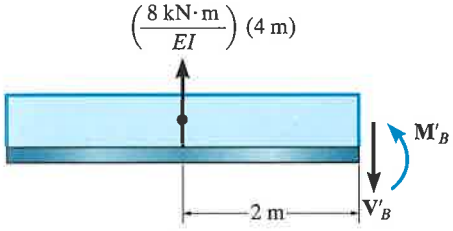


$$\theta_B = |\theta_{B/A}| = \left(\frac{8\ \text{kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)(4\ \text{m}) = \frac{32\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \measuredangle \quad \textit{Cevap}$$

$$\Delta_B = |t_{B/A}| = \left[\left(\frac{8\ \text{kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)(4\ \text{m})\right]\left[\frac{1}{2}(4\ \text{m})\right]$$

$$= \frac{64\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \uparrow \quad \textit{Cevap}$$

F8–15.



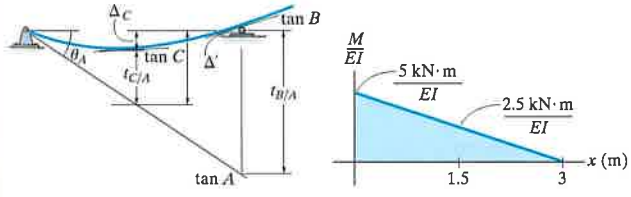
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad \left(\frac{8\ \text{kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)(4\ \text{m}) - V'_B = 0$$

$$\theta_B = \frac{32\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \measuredangle \quad \textit{Cevap}$$

$$\zeta + \Sigma M_B = 0; \quad M'_B - \left[\left(\frac{8\ \text{kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)(4\ \text{m})\right](2\ \text{m}) = 0$$

$$M'_B = \Delta_B = \frac{64\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \uparrow \quad \textit{Cevap}$$

F8–16.



$$t_{B/A} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{5\ \text{kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)(3\ \text{m})\right]\left[\frac{2}{3}(3\ \text{m})\right] = \frac{15\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$$

$$t_{C/A} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{2.5\ \text{kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)(1.5\ \text{m})\right]\left[\frac{2}{3}(1.5\ \text{m})\right]$$

$$+ \left[\left(\frac{2.5\ \text{kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)(1.5\ \text{m})\right]\left[\frac{1}{2}(1.5\ \text{m})\right]$$

$$= \frac{4.6875\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$$

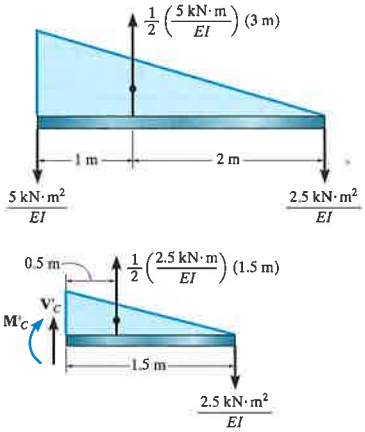
$$\Delta' = \frac{1}{2}t_{B/A} = \frac{1}{2}\left(\frac{15\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\right) = \frac{7.5\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$$

$$\theta_A = \frac{|t_{B/A}|}{L_{AB}} = \frac{15\ \text{kN}\cdot\text{m}^3/EI}{3\ \text{m}} = \frac{5\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \measuredangle \quad \textit{Cevap}$$

$$\Delta_C = \Delta' - t_{C/A} = \frac{7.5\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI} - \frac{4.6875\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$$

$$= \frac{2.81\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \downarrow \quad \textit{Cevap}$$

F8–17.



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -V'_A - \frac{5\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI} = 0$$

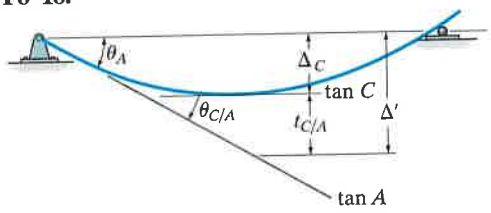
$$\theta_A = V'_A = -\frac{5\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI} = \frac{5\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \measuredangle \quad \textit{Cevap}$$

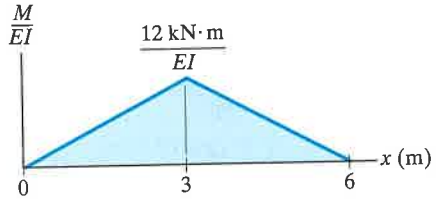
$$\zeta + \Sigma M_C = 0; \quad \left[\frac{1}{2}\left(\frac{2.5\ \text{kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)(1.5\ \text{m})\right](0.5\ \text{m})$$

$$- \left(\frac{2.5\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI}\right)(1.5\ \text{m}) - M'_C = 0$$

$$\Delta_C = M'_C = -\frac{2.8125\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI} = \frac{2.81\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \downarrow \quad \textit{Cevap}$$

F8–18.





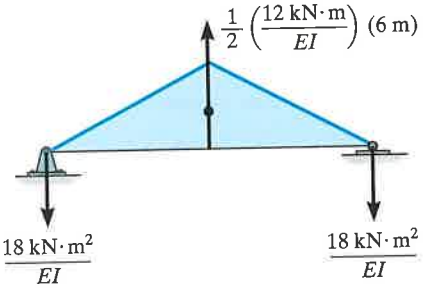
$$\theta_A = \theta_{C/A} = \frac{1}{2}\left(\frac{12\ \text{kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)(3\ \text{m}) = \frac{18\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \curvearrowleft \quad \textit{Cevap}$$

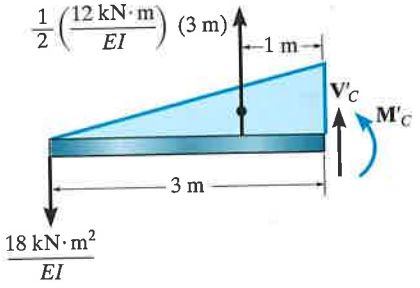
$$t_{C/A} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{12\ \text{kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)(3\ \text{m})\right]\left[\frac{1}{3}(3\ \text{m})\right] = \frac{18\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$$

$$\Delta' = \theta_A L_{AC} = \left(\frac{18\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI}\right)(3\ \text{m}) = \frac{54\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$$

$$\Delta_C = \Delta' - t_{C/A} = \frac{54\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI} - \frac{18\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI} = \frac{36\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \downarrow \quad \textit{Cevap}$$

F8–19.





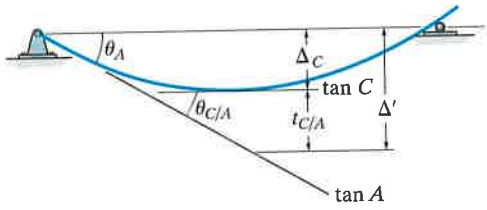
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -V'_A - \frac{18\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI} = 0$$

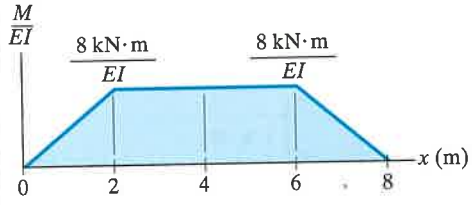
$$V'_A = \theta_A = -\frac{18\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI} = \frac{18\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \curvearrowleft \quad \textit{Cevap}$$

$$\zeta + \Sigma M_C = 0; \quad M'_C + \left(\frac{18\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI}\right)(3\ \text{m}) - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{12\ \text{kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)(3\ \text{m})\right](1\ \text{m}) = 0$$

$$M'_C = \Delta_C = -\frac{36\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI} = \frac{36\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \downarrow \quad \textit{Cevap}$$

F8–20.





$$\theta_A = \theta_{C/A} = \frac{1}{2}\left(\frac{8\ \text{kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)(2\ \text{m}) + \left(\frac{8\ \text{kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)(2\ \text{m}) = \frac{24\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \curvearrowleft \quad \textit{Cevap}$$

$$t_{C/A} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{8\ \text{kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)(2\ \text{m})\right]\left[2\ \text{m} + \frac{1}{3}(2\ \text{m})\right] + \left[\left(\frac{8\ \text{kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)(2\ \text{m})\right](1\ \text{m}) = \frac{37.33\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$$

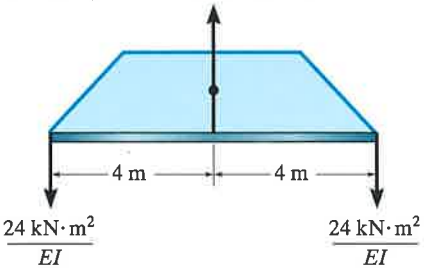
$$\Delta' = \theta_A L_{AC} = \left(\frac{24\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI}\right)(4\ \text{m}) = \frac{96\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$$

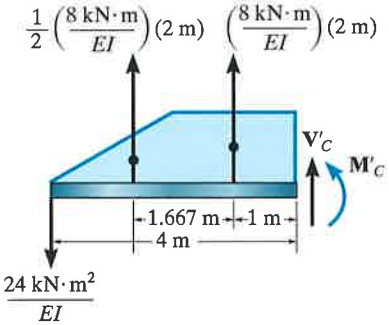
$$\Delta_C = \Delta' - t_{C/A} = \frac{96\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI} - \frac{37.33\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$$

$$= \frac{58.7\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \downarrow \quad \textit{Cevap}$$

F8–21.

$$\left(\frac{8\ \text{kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)(4\ \text{m}) + \frac{1}{2}\left(\frac{8\ \text{kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)(4\ \text{m}) = \frac{48\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI}$$





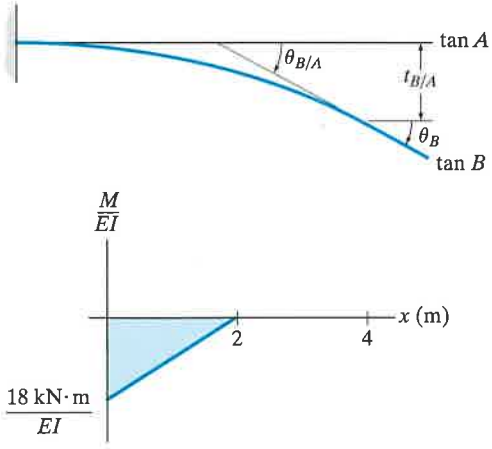
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -V'_A - \frac{24\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI} = 0$$

$$\theta_A = V'_A = \frac{24\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \curvearrowleft \qquad \textit{Cevap}$$

$$\zeta + \Sigma M_C = 0; \quad M'_C + \left(\frac{24\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI}\right)(4\ \text{m}) - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{8\ \text{kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)(2\ \text{m})\right](2.667\ \text{m}) - \left(\frac{8\ \text{kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)(2\ \text{m})(1\ \text{m}) = 0$$

$$\Delta_C = M'_C = \frac{58.7\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \downarrow \qquad \textit{Cevap}$$

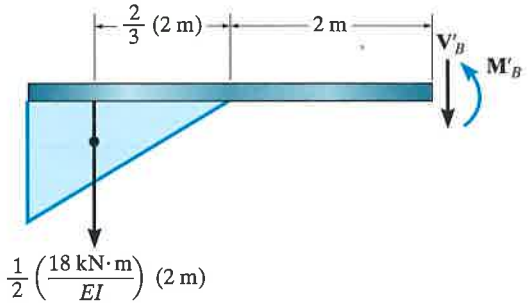
F8–22.



$$\theta_B = |\theta_{B/A}| = \left|\frac{1}{2}\left(-\frac{18\ \text{kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)(2\ \text{m})\right| = \frac{18\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \curvearrowleft \textit{Cevap}$$

$$\Delta_B = |t_{B/A}| = \left|\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{18\ \text{kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)(2\ \text{m})\right]\left[2\ \text{m} + \frac{2}{3}(2\ \text{m})\right]\right| = \frac{60\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \downarrow$$

F8–23.



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -V'_B - \frac{1}{2}\left(\frac{18\ \text{kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)(2\ \text{m}) = 0$$

$$\theta_B = -\frac{18\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI} = \frac{18\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \curvearrowleft \qquad \textit{Cevap}$$

$$\zeta + \Sigma M_B = 0; \quad M'_B + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{18\ \text{kN}\cdot\text{m}}{EI}\right)(2\ \text{m})\right]\left[\frac{2}{3}(2\ \text{m}) + 2\ \text{m}\right] = 0$$

$$M'_B = \Delta_B = -\frac{60\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI} = \frac{60\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \downarrow \qquad \textit{Cevap}$$

Bölüm 9

F9–1.

Çubuk	n (N)	N (N)	L (m)	nNL (N²·m)
AB	−1.667	−1000	5	8333.33
AC	1	600	3	1800.00
BC	1.333	800	4	4266.67
				Σ 14 400

Böylece,

$$1\,\text{N}\cdot\Delta_{B_v}=\sum\frac{nNL}{AE}=\frac{14\,400\,\text{N}^2\cdot\text{m}}{AE}$$

$$\Delta_{B_v}=\frac{14\,400\,\text{N}\cdot\text{m}}{AE}\downarrow$$ *Cevap*

F9–2.

Çubuk	N	$\frac{\delta N}{\delta P}$	N (P = 600 N)	L (m)	$N\left(\frac{\delta N}{\delta P}\right)L$ (N·m)
AB	−1.667P	−1.667	−1000	5	8333.33
AC	P	1	600	3	1800.00
BC	1.333P	1.333	800	4	4266.67
					Σ 14 400

$$\Delta_{B_v}=\sum N\left(\frac{\delta N}{\delta P}\right)\frac{L}{AE}=\frac{14\,400\,\text{N}\cdot\text{m}}{AE}\downarrow$$ *Cevap*

F9–3.

Çubuk	n (kN)	N (kN)	L (m)	nNL (kN²·m)
AB	1	−4.041	2	−8.0829
AC	0	8.0829	2	0
BC	0	−8.0829	2	0
CD	0	8.0829	1	0
				Σ −8.0829

Böylece,

$$1\,\text{kN}\cdot\Delta_{A_h}=\sum\frac{nNL}{AE}=-\frac{8.0829\,\text{kN}^2\cdot\text{m}}{AE}$$

$$\Delta_{A_h}=-\frac{8.08\,\text{kN}\cdot\text{m}}{AE}=\frac{8.08\,\text{kN}\cdot\text{m}}{AE}\rightarrow$$ *Cevap*

F9–4.

Çubuk	N (kN)	$\frac{\delta N}{\delta P}$	N (P = 0)(kN)	L (m)	$N\left(\frac{\delta N}{\delta P}\right)L$ (kN·m)
AB	P − 4.041	1	−4.041	2	−8.083
AC	8.083	0	8.083	2	0
BC	−8.083	0	−8.083	2	0
CD	8.083	0	8.083	1	0
					Σ −8.083

$$\Delta_{A_h}=\sum N\left(\frac{\delta N}{\delta P}\right)\frac{L}{AE}=-\frac{8.083\,\text{kN}\cdot\text{m}}{AE}=\frac{8.08\,\text{kN}\cdot\text{m}}{AE}\rightarrow$$ *Cevap*

F9–5.

Çubuk	n (kN)	N (kN)	L (m)	nNL (kN²·m)
AB	0	0	3	0
AC	1.414	8.485	$3\sqrt{2}$	50.91
BC	−1	−6	3	18.00
AD	0	−6	3	0
CD	−1	0	3	0
				Σ 68.91

$$1\,\text{kN}\cdot\Delta_{D_h}=\sum\frac{nNL}{AE}=\frac{68.91\,\text{kN}^2\cdot\text{m}}{AE}$$

$$\Delta_{D_h}=\frac{68.9\,\text{kN}\cdot\text{m}}{AE}\rightarrow$$ *Cevap*

F9–6.

Çubuk	N (kN)	$\frac{\delta N}{\delta P}$	N (P = 0)(kN)	L (m)	$N\left(\frac{\delta N}{\delta P}\right)L$ (kN·m)
AB	0	0	0	3	0
AC	$\sqrt{2}(P+6)$	$\sqrt{2}$	$6\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	50.91
BC	−(P + 6)	−1	−6	3	18.00
AD	−6	0	−6	3	0
CD	−p	−1	0	3	0
					Σ 68.91

$$\Delta_{D_h}=\Sigma N\left(\frac{\delta N}{\delta P}\right)\frac{L}{AE}=\frac{68.9\,\text{kN}\cdot\text{m}}{AE}\rightarrow$$ *Cevap*

F9–7.

Çubuk	n (kN)	N (kN)	L (m)	nNL (kN^2 · m)
AB	0.375	18.75	3	21.09
BC	0.375	18.75	3	21.09
AD	−0.625	−31.25	5	97.66
CD	−0.625	−31.25	5	97.66
BD	0	50	4	0
				Σ 237.5

$$1\ \text{kN} \cdot \Delta_{D_v} = \sum \frac{nNL}{AE} = \frac{237.5\ \text{kN}^2 \cdot \text{m}}{AE}$$

$$\Delta_{D_v} = \frac{237.5\ \text{kN} \cdot \text{m}}{AE} \downarrow$$ *Cevap*

F9–8.

Çubuk	N (kN)	$\frac{\delta N}{\delta P}$	$N(P=0)$(kN)	L (m)	$N\left(\frac{\delta N}{\delta P}\right)L$ (kN · m)
AB	$\frac{3}{8}P + 18.75$	0.375	18.75	3	21.09
BC	$\frac{3}{8}P + 18.75$	0.375	18.75	3	21.09
AD	$-\left(\frac{5}{8}P + 31.25\right)$	−0.625	−31.25	5	97.66
CD	$-\left(\frac{5}{8}P + 31.25\right)$	−0.625	−31.25	5	97.66
BD	50	0	50	4	0
					Σ 237.5

$$\Delta_{D_v} = \sum N\left(\frac{\delta N}{\delta P}\right)\frac{L}{AE} = \frac{237.5\ \text{kN} \cdot \text{m}}{AE} \downarrow$$ *Cevap*

F9–9.

Çubuk	n (kN)	N (kN)	L (m)	nNL (kN^2 · m)
AB	0	–6	1.5	0
BC	0	–6	1.5	0
BD	1	0	2	0
CD	0	10	2.5	0
AD	–1.25	–10	2.5	31.25
DE	0.75	12	1.5	13.5
				Σ 44.75

$$1\ \text{kN} \cdot \Delta_{B_v} = \sum \frac{nNL}{AE} = \frac{44.75\ \text{kN}^2 \cdot \text{m}}{AE}, \quad \Delta_{B_v} = \frac{44.75\ \text{kN} \cdot \text{m}}{AE} \downarrow$$ *Cevap*

F9–10.

Çubuk	N (kN)	$\frac{\delta N}{\delta P}$	$N\,(P=0)$(kN)	L (m)	$N\left(\frac{\delta N}{\delta P}\right)L$ (kN · m)
AB	−6	0	−6	1.5	0
BC	−6	0	−6	1.5	0
BD	P	1	0	2	0
CD	10	0	10	2.5	0
AD	$-(1.25P + 10)$	−1.25	−10	2.5	31.25
DE	$0.75P + 12$	0.75	12	1.5	13.5
					Σ 44.75

$$\Delta_{B_v} = \sum N\left(\frac{\delta N}{\delta p}\right)\frac{L}{AE} = \frac{44.75\ \text{kN}\cdot\text{m}}{AE}\downarrow$$ *Cevap*

F9–11.

Çubuk	n (kN)	N (kN)	L (m)	nNL (kN² · m)
AB	0.5	50	2	50.00
DE	0.5	50	2	50.00
BC	0.5	50	2	50.00
CD	0.5	50	2	50.00
AH	−0.7071	−70.71	$2\sqrt{2}$	141.42
EF	−0.7071	−70.71	$2\sqrt{2}$	141.42
BH	0	30	2	0
DF	0	30	2	0
CH	0.7071	28.28	$2\sqrt{2}$	56.57
CF	0.7071	28.28	$2\sqrt{2}$	56.57
CG	0	0	2	0
GH	−1	−70	2	140.00
FG	−1	−70	2	140.00
				Σ 875.98

$$1\ \text{kN}\cdot\Delta_{C_v} = \sum\frac{nNL}{AE} = \frac{875.98\ \text{kN}^2\cdot\text{m}}{AE},\quad \Delta_{C_v} = \frac{876\ \text{kN}\cdot\text{m}}{AE}\downarrow$$ *Cevap*

F9–12.

Çubuk	N (kN)	$\frac{\delta N}{\delta P}$	$N\ (P = 40$ kN)	L (m)	$N\left(\frac{\delta N}{\delta P}\right)L$ (kN · m)
AB	$0.5P + 30$	0.5	50	2	50.00
DE	$0.5P + 30$	0.5	50	2	50.00
BC	$0.5P + 30$	0.5	50	2	50.00
CD	$0.5P + 30$	0.5	50	2	50.00
AH	$-(0.7071P + 42.43)$	−0.7071	−70.71	$2\sqrt{2}$	141.42
EF	$-(0.7071P + 42.43)$	−0.7071	−70.71	$2\sqrt{2}$	141.42
BH	30	0	30	2	0
DF	30	0	30	2	0
CH	$0.7071P$	0.7071	28.28	$2\sqrt{2}$	56.57
CF	$0.7071P$	0.7071	28.28	$2\sqrt{2}$	56.57
CG	0	0	0	2	0
GH	$-(P + 30)$	−1	−70	2	140.00
FG	$-(P + 30)$	−1	−70	2	140.00
					Σ 875.98

$$\Delta_{C_v} = \sum N\left(\frac{\delta N}{\delta P}\right)\frac{L}{AE} = \frac{875.98\ \text{kN}\cdot\text{m}}{AE}$$

$$\Delta_{C_v} = \frac{876\ \text{kN}\cdot\text{m}}{AE}\downarrow$$ *Cevap*

F9–13. Eğim için

$$1\ \text{kN}\cdot\text{m}\cdot\theta_A = \int_0^{2}\frac{m_\theta M}{EI}dx = \int_0^{3\text{m}}\frac{(-1)(-30x)}{EI}dx$$

$$= \frac{135\ \text{kN}^2\cdot\text{m}^3}{EI}$$

$$\theta_A = \frac{135\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI}\ \curvearrowright$$ *Cevap*

Yerdeğiştirme için

$$1\ \text{kN}\cdot\Delta_{A_v} = \int_0^{L}\frac{mM}{EI}dx = \int_0^{3\text{m}}\frac{(-x)(-30x)}{EI}dx = \frac{270\ \text{kN}^2\cdot\text{m}^3}{EI}$$

$$\Delta_{A_v} = \frac{270\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow$$ *Cevap*

F9–14. Eğim için, $M = -30x - M'$ Sonra, $\frac{\partial M}{\partial M'} = -1$.

$M' = 0$ alınır. Sonra, M = (− 30x) kN·m

$$\theta_A = \int_0^{L} M\left(\frac{\partial M}{\partial M'}\right)\frac{dx}{EI} = \int_0^{3\text{m}}\frac{(-30x)(-1)dx}{EI}$$

$$= \frac{135\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI}\ \curvearrowright$$ *Cevap*

Yerdeğiştirme için, $M = -Px$. Sonra $\frac{\partial M}{\partial P} = -x$.

$P = 30$ kN alınır. Sonra $M = (-30x)$ kN · m.

$$\Delta_{A_v} = \int_0^{L} M\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI} = \int_0^{3\text{m}}\frac{(-30x)(-x)dx}{EI} = \frac{270\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow$$

F9–15. Eğim için $m_\theta = 1$ kN · m ve $M = 4$ kN · m.

$$1\ \text{kN}\cdot\text{m}\cdot\theta_A = \int_0^{L}\frac{m_\theta M}{EI}dx = \int_0^{3\text{m}}\frac{(1)(4)dx}{EI} = \frac{12\ \text{kN}^2\cdot\text{m}^3}{EI}$$

$$\theta_A = \frac{12\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI}\ \curvearrowleft$$ *Cevap*

Yerdeğiştirme için, $m = x$ kN · m ve $M = 4$ kN · m

$$1\ \text{kN}\cdot\Delta_{A_v} = \int_0^{L}\frac{mM}{EI}dx = \int_0^{3\text{m}}\frac{x(4)dx}{EI} = \frac{18\ \text{kN}^2\cdot\text{m}^3}{EI}$$

$$\Delta_{A_v} = \frac{18\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\uparrow$$ *Cevap*

F9–16. Eğim için, $M = M'$. Sonra $\frac{\partial M}{\partial M} = 1$

$M' = 4$ kN·m alınır. Sonra M = 4 kN · m.

$$\theta_A = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial M'}\right)\frac{dx}{EI} = \int_0^{3\text{m}} \frac{4(1)dx}{EI} = \frac{12\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \curvearrowleft$$ *Cevap*

Yerdeğiştirme için, $M = (Px + 4)$ kN · m. Sonra $\frac{\partial M}{\partial P} = x$. $P = 0$ alınır. Sonra M = 4 kN · m.

$$\Delta_{A_v} = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI} = \int_0^{3\text{m}} \frac{4(x)dx}{EI} = \frac{18\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \uparrow$$ *Cevap*

F9–17. Eğim için, $m = -1$ kN · m ve

$M = (-x^3)$ kN · m.

$$1\ \text{kN}\cdot\text{m}\cdot\theta_B = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI}dx = \int_0^{3\text{m}} \frac{(-1)(-x^3)}{EI}dx = \frac{20.25\ \text{kN}^2\cdot\text{m}^3}{EI}$$

$$\theta_B = \frac{20.25\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \curvearrowleft$$ *Cevap*

Yerdeğiştirme için, $m = (-x)$ kN · m ve

$M = (-x^3)$ kN · m.

$$1\ \text{kN}\cdot\Delta_{B_v} = \int_0^L \frac{mM}{EI}dx = \int_0^{3\text{m}} \frac{(-x)(-x^3)}{EI}dx$$

$$= \frac{48.6\ \text{kN}^2\cdot\text{m}^3}{EI}$$

$$\Delta_{B_v} = \frac{48.6\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \downarrow$$ *Cevap*

F9–18. Eğim için, $M = -(M' + x^3)$ kN · m. Sonra

$\frac{\partial M}{\partial M'} = -1$.

$M' = 0$ alınır. Sonra $M = (-x^3)$ kN · m.

$$\theta_B = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial M'}\right)\frac{dx}{EI} = \int_0^{3\text{m}} \frac{(-x^3)(-1)dx}{EI}$$

$$= \frac{20.25\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \curvearrowleft$$ *Cevap*

Yerdeğiştirme için, $M = -(Px + x^3)$ kN · m.

Sonra $\frac{\partial M}{\partial P} = -x$. $P = 0$ alınır, sonra da $M = (-x^3)$ kN · m.

$$\Delta_{B_v} = \int_0^L M\left(\frac{\delta M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI} = \int_0^{3\text{m}} \frac{(-x^3)(-x)dx}{EI}$$

$$= \frac{48.6\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{\text{EI}} \downarrow$$ *Cevap*

F9–19. Eğim için $m_\theta = (1 - 0.125x)$ kN · m ve

$M = (32x - 4x^2)$ kN · m.

$$1\ \text{kN}\cdot\text{m}\cdot\theta_A = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI}dx = \int_0^{8\text{m}} \frac{(1-0.125x)(32x - 4x^2)}{EI}dx$$

$$= \frac{170.67\ \text{kN}^2\cdot\text{m}^3}{EI}$$

$$\theta_A = \frac{171\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \curvearrowleft$$ *Cevap*

Yerdeğiştirme için, m = $(0.5x)$ kN · m ve

$M = (32x - 4x^2)$ kN · m.

$$1\ \text{kN}\cdot\Delta_{C_v} = \int \frac{mM}{EI}dx = 2\int_0^{4\text{m}} \frac{0.5x(32x - 4x^2)}{EI}dx$$

$$= \frac{426.67\ \text{kN}^2\cdot\text{m}^3}{EI}$$

$$\Delta_{C_v} = \frac{427\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \downarrow$$ *Cevap*

F9–20. Eğim için, $M = M' - 0.125M'x + 32x - 4x^2$.

Sonra $\frac{\partial M}{\partial M'} = 1 - 0.125x$.

$M' = 0$ alınır, sonra da $M = (32x - 4x^2)$kN · m.

$$\theta_A = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial M'}\right)\frac{dx}{EI} = \int_0^{8\text{m}} \frac{(32x - 4x^2)(1 - 0.125x)}{EI}dx$$

$$= \frac{170.67\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI} = \frac{171\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \curvearrowleft$$ *Cevap*

Yerdeğiştirme için, $M = 0.5Px + 32x - 4x^2$. Sonra

$\frac{\partial M}{\partial P} = 0.5x$. $P = 0$ alınır, sonra da $M = (32x - 4x^2)$ kN · m.

$$\Delta_{C_v} = \int M\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI} = 2\int_0^{4\text{m}} \frac{(32x - 4x^2)(0.5x)dx}{EI}$$

$$= \frac{426.67\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI} = \frac{427\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \downarrow$$ *Cevap*

F9–21. Eğim için, $(m_\theta)_1 = 0$, $(m_\theta)_2 = -1\ \text{kN}\cdot\text{m}$, $M_1 = (-12x_1)\ \text{kN}\cdot\text{m}$ ve $M_2 = -12(x_2 + 2)\ \text{kN}\cdot\text{m}$.

$$1\ \text{kN}\cdot\text{m}\cdot\theta_C = \int_0^L \frac{m_\theta M}{EI}\,dx = \int_0^{2\text{m}} \frac{0(-12x_1)}{EI}\,dx + \int_0^{2\text{m}} \frac{(-1)[-12(x_2+2)]}{EI}\,dx$$

$$1\ \text{kN}\cdot\text{m}\cdot\theta_C = \frac{72\ \text{kN}^2\cdot\text{m}^3}{EI}$$

$$\theta_C = \frac{72\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI} \curvearrowright \qquad \textit{Cevap}$$

Yerdeğiştirme için, $m_1 = 0, m_2 = -x_2, M_1 = (-12x_1)\,\text{kN}\cdot\text{m}$, ve $M_2 = -12(x_2 + 2)\ \text{kN}\cdot\text{m}$.

$$1\ \text{kN}\cdot\Delta_C = \int_0^L \frac{mM}{EI}\,dx = \int_0^{2\text{m}} \frac{0(-12x_1)}{EI}\,dx + \int_0^{2\text{m}} \frac{(-x_2)[-12(x_2+2)]}{EI}\,dx$$

$$1\ \text{kN}\cdot\Delta_{C_v} = \frac{80\ \text{kN}^2\cdot\text{m}^3}{EI}$$

$$\Delta_{C_v} = \frac{80\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow \qquad \textit{Cevap}$$

F9–22. Eğim için, $M_1 = (-12x_1)\ \text{kN}\cdot\text{m}$ ve $M_2 = -12(x_2 + 2) - M'$

Böylece $\frac{\partial M_1}{\partial M'} = 0$ ve $\frac{\partial M_2}{\partial M'} = -1$. $M' = 0, M_2 = -12(x_2 + 2)$

$$\theta_C = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial M'}\right)\frac{dx}{EI} = \int_0^{2\text{m}} \frac{-12x_1(0)}{EI}\,dx + \int_0^{2} \frac{[-12(x_2+2)](-1)}{EI}\,dx$$

$$= \frac{72\ \text{kN}\cdot\text{m}}{EI} \curvearrowright \qquad \textit{Cevap}$$

Yerdeğiştirme için, $M_1 = (-12x_1)\ \text{kN}\cdot\text{m}$ ve $M_2 = -12(x_2 + 2) - Px_2$.

Böylece, $\frac{\partial M_1}{\partial P} = 0$ ve $\frac{\partial M_2}{\partial P} = -x_2$. $P = 0$, $M_2 = -12(x_2 + 2)\ \text{kN}\cdot\text{m}$ alınır.

$$\Delta_C = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI} = \int_0^{2\text{m}} \frac{(-12x_1)(0)}{EI}\,dx + \int_0^{2\text{m}} \frac{[-12(x_2+2)](-x_2)}{EI}\,dx$$

$$= \frac{80\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow$$

F9–23. $M_1 = 0.5x_1, M_2 = 0.5x_2, M_1 = \left(24x_1 - \frac{1}{6}x_1^3\right)\text{kN}\cdot\text{m}$ ve $M_2 = \left(48x_2 - 6x_2^2 + \frac{1}{6}x_2^2\right)\text{kN}\cdot\text{m}$.

$$1\ \text{kN}\cdot\Delta_{C_v} = \int_0^L \frac{mM}{EI}\,dx = \int_0^{6\text{m}} \frac{(0.5x_1)\left(24x_1 - \frac{1}{6}x_1^3\right)}{EI}\,dx_1 + \int_0^{6\text{m}} \frac{(0.5x_2)\left(48x_2 - 6x_2^2 + \frac{1}{6}x_2^3\right)}{EI}\,dx_2$$

$$= \frac{1620\ \text{kN}^2\cdot\text{m}^3}{EI}$$

$$\Delta_{C_v} = \frac{1620\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow \qquad \textit{Cevap}$$

F9–24. $M_1 = 0.5Px_1 + 24x_1 - \frac{1}{6}x_1^3$,

$M_2 = 0.5Px_2 + 48x_2 - 6x_2^2 + \frac{1}{6}x_2^3$.

Sonra $\frac{\partial M_1}{\partial P} = 0.5x_1$, $\frac{\partial M_2}{\partial P} = 0.5x_2$.

$P = 0$, $M_1 = \left(24x_1 - \frac{1}{6}x_1^3\right)\text{kN}\cdot\text{m}$ ve

$M_2 = \left(48x_2 - 6x_2^2 + \frac{1}{6}x_2^3\right)\text{kN}\cdot\text{m}$ alınır.

$$\Delta_{C_v} = \int_0^L M\left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)\frac{dx}{EI} = \int_0^{6\text{m}} \frac{\left(24x_1 - \frac{1}{6}x_1^3\right)(0.5x_1)}{EI}\,dx_1 + \int_0^{6\text{m}} \frac{\left(48x_2 - 6x_2^2 + \frac{1}{6}x_2^3\right)(0.5x_2)}{EI}\,dx_2$$

$$= \frac{1620\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow \qquad \textit{Cevap}$$

Bölüm 10

F10–1. Süperpozisyon

$$\Delta'_B = \frac{Px^2}{6EI}(3L - x) = \frac{40(2^2)}{6EI}[3(4) - 2] = \frac{266.67\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI} \downarrow$$

$$f_{BB} = \frac{(L/2)^3}{3EI} = \frac{L^3}{24EI} = \frac{4^3}{24EI} = \frac{2.667\ \text{m}^3}{EI} \uparrow$$

$$\Delta_B = \Delta'_B + B_y f_{BB}$$

$$(+\uparrow)\ 0 = -\frac{266.67\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI} + B_y\left(\frac{2.667\ \text{m}^3}{EI}\right)$$

$$B_y = 100\ \text{kN} \qquad \textit{Cevap}$$

Denge

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;\quad A_x = 0 \qquad \textit{Cevap}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad 100 - 40 - A_y = 0 \quad A_y = 60\ \text{kN} \qquad \textit{Cevap}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0;\quad 100(2) - 40(4) - M_A = 0$$

$$M_A = 40\ \text{kN}\cdot\text{m} \qquad \textit{Cevap}$$

F10–2. Süperpozisyon

$$\Delta'_B = \int_0^L \frac{mM}{EI}dx = \int_0^L \frac{(-x)\left(-\frac{w_0}{6L}x^3\right)}{EI}dx = \frac{w_0 L^4}{30\,EI} \downarrow$$

$$f_{BB} = \int_0^L \frac{mm}{EI}dx = \int_0^L \frac{(-x)(-x)}{EI}dx = \frac{L^3}{3EI} \downarrow$$

$$\Delta_B = \Delta'_B + B_y f_{BB}$$

$$(+\downarrow)\ 0 = \frac{w_0 L^4}{30\,EI} + B_y\left(\frac{L^3}{3EI}\right) \qquad B_y = -\frac{w_0 L}{10} = \frac{w_0 L}{10} \uparrow \textit{Cevap}$$

Denge

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;\quad A_x = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad A_y - \frac{1}{2}w_0 L + \frac{w_0 L}{10} = 0 \quad A_y = \frac{2w_0 L}{5} \qquad \textit{Cevap}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0;\quad M_A + \frac{w_0 L}{10}(L) - \left(\frac{1}{2}w_0 L\right)\left(\frac{L}{3}\right) = 0$$

$$M_A = \frac{w_0 L^2}{15} \qquad \textit{Cevap}$$

F10–3. Süperpozisyon

$$\Delta'_B = \frac{wL^4}{8EI} = \frac{10(6^4)}{8EI} = \frac{1620\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI} = \frac{1620(10^3)\ \text{N}\cdot\text{m}^3}{[200(10^9)\ \text{N/m}^2][300(10^{-6})\ \text{m}^4]} = 0.027\ \text{m}\downarrow$$

$$f_{BB} = \frac{L^3}{3EI} = \frac{6^3}{3EI} = \frac{72\ \text{m}^3}{EI} = \frac{72\ \text{m}^3}{[200(10^9)\ \text{N/m}^2][300(10^{-6})\ \text{m}^4]} = 1.2(10^{-6})\ \text{m/N}\uparrow$$

$$\Delta_B = \Delta'_B + B_y f_{BB}$$

$$(+\downarrow)5(10^{-3})\ \text{m} = 0.027\ \text{m} + B_y[-1.2(10^{-6})\ \text{m/N}]$$

$$B_y = 18.33(10^3)\ \text{N} = 18.33\ \text{kN} = 18.3\ \text{kN} \qquad \textit{Cevap}$$

Denge

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;\quad A_x = 0 \qquad \textit{Cevap}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad A_y + 18.33 - 60 = 0$$

$$A_y = 41.67\ \text{kN} = 41.7\ \text{kN} \qquad \textit{Cevap}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0;\quad M_A + 18.33(6) - 60(3) = 0$$

$$M_A = 70.0\ \text{kN}\cdot\text{m} \qquad \textit{Cevap}$$

F10–4. Süperpozisyon

$$\Delta'_B = \frac{M_0 x}{6EIL_{AC}}(L_{AC}^2 - x^2) = \frac{M_0(L)}{6EI(2L)}[(2L)^2 - L^2] = \frac{M_0 L^2}{4EI} \downarrow$$

$$f_{BB} = \frac{L_{AC}^3}{48EI} = \frac{(2L)^3}{48EI} = \frac{L^3}{6EI} \uparrow$$

$$\Delta_B = \Delta'_B + B_y f_{BB}$$

$$(+\uparrow)\ 0 = -\frac{M_0 L^2}{4EI} + B_y\left(\frac{L^3}{6EI}\right) \qquad B_y = \frac{3M_0}{2L} \qquad \textit{Cevap}$$

Denge

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0;\quad A_x = 0 \qquad \textit{Cevap}$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = 0;\quad -C_y(2L) + \frac{3M_0}{2L}(L) - M_0 = 0$$

$$C_y = \frac{M_0}{4L} \qquad \textit{Cevap}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad \frac{3M_0}{2L} - \frac{M_0}{4L} - A_y = 0 \quad A_y = \frac{5M_0}{4L} \qquad \textit{Cevap}$$

F10–5. Süperpozisyon

$$\Delta'_B = \frac{Pbx}{6EIL_{AC}}(L_{AC}^2 - b^2 - x^2) = \frac{50(2)(4)}{6EI(8)}(8^2 - 2^2 - 4^2)$$

$$= \frac{366.67\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow$$

$$f_{BB} = \frac{L_{AC}^3}{48EI} = \frac{8^3}{48EI} = \frac{10.667\ \text{m}^3}{EI}\uparrow$$

$$\Delta_B = \Delta'_B + B_y f_{BB}$$

$$(+\uparrow)\ 0 = -\frac{366.67\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI} + B_y\left(\frac{10.667\ \text{m}^3}{EI}\right)$$

$B_y = 34.375\ \text{kN} = 34.4\ \text{kN}$ *Cevap*

Denge

$\zeta + \Sigma M_A = 0;\quad 34.375(4) - 50(2) - C_y(8) = 0$

$C_y = 4.6875\ \text{kN} = 4.69\ \text{kN}$ *Cevap*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad A_y + 34.375 - 50 - 4.6875 = 0$

$A_y = 20.3125\ \text{kN} = 20.3\ \text{kN}$ *Cevap*

$\pm \Sigma F_x = 0;\quad A_x = 0$ *Cevap*

F10–6.

$$\Delta'_B = \frac{5wL_{AC}^4}{384EI} = \frac{5(10)(12^4)}{384EI} = \frac{2700\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$$

$$= \frac{2700(10^3)\ \text{N}\cdot\text{m}^3}{[200(10^9)\ \text{N/m}^2][300(10^{-6})\ \text{m}^4]} = 0.045\ \text{m}\downarrow$$

$$f_{BB} = \frac{L_{AC}^3}{48EI} = \frac{12^3}{48EI} = \frac{36\ \text{m}^3}{EI}$$

$$= \frac{36\ \text{m}^3}{[200(10^9)\ \text{N/m}^2][300(10^{-6})\ \text{m}^4]} = 0.6(10^{-6})\ \text{m/N}\uparrow$$

$\Delta_B = \Delta'_B + B_y f_{BB}$

$(+\downarrow)\ 5(10^{-3})\ \text{m} = 0.045\,\text{m} + B_y[-0.6(10^{-6})\ \text{m/N}$

$B_y = 66.67(10^3)\ \text{N} = 66.7\ \text{kN}$ *Cevap*

Denge

$\zeta + \Sigma M_A = 0;\quad C_y(12) + 66.67(6) - 120(6) = 0$

$C_y = 26.67\ \text{kN} = 26.7\ \text{kN}$ *Cevap*

$+\uparrow \Sigma F_y = 0;\quad A_y + 26.67 + 66.67 - 120 = 0$

$A_y = 26.67\ \text{kN} = 26.7\ \text{kN}$ *Cevap*

$\pm \Sigma F_x = 0;\quad A_x = 0$

Seçilmiş Problemlerin Cevapları

Bölüm 1

1–1. $DL = 18.4$ kN; $LL = 43.2$ kN

1–2. $DL = 13.1$ kN/m

1–3. $F_D = 90$ kN; $F_L = 92.2$ kN; $F = 182$ kN

1–5. $w = 6.62$ kN/m

1–6. $F = 173$ kN

1–7. $W_C = 9.16$ kN/m

1–9. 9.36 kN/m

1–10. $w = 3.46$ kN/m

1–11. $p_x = 0.2$ kN/m^2;
$p_y = 0.35$ kN/m^2

1–13. İç: $p = \pm 315$ N/m^2;
Dış: $p = -1.04$ kN/m^2

1–14. $L = 1.70$ kN/m^2

1–15. $p_f = 1.15$ kN/m^2

1–17. $p = -1057$ N/m^2 veya -428 N/m^2

1–18. $F = 192$ kN

1–19. $p = -892$ N/m^2

1–21. $p_f = 0.576$ kN/m^2

1–22. $p_f = 1.15$ kN/m^2

1–23. $p_f = 0.816$ kN/m^2

1–25. Rüzgâr üstü tarafın dışı: 488 N/m^2;
Rüzgâr altı tarafın dışı: -236 N/m^2;
İç: ± 134 N/m^2

Bölüm 2

2–1. *BE*: 14.2 kN/m; *E*'de *FED*: 35.6 kN

2–2. *BE*: $w_{max} = 21.36$ kN/m;
FED: $w_{max} = 10.68$ kN/m
E'de 26.70 kN

2–3. *BF*: 12.84 kN/m; *B*, *C* ve *D*'de *ABCDE*: 57.78 kN

2–5. *BF* üzerinde 9.63 kN/m,
ABCDE üzerinde 28.89 kN'luk 3 kuvvet

2–6. *BG* üzerinde 3.308 kN/m, *ABCD* üzerinde 7.44 kN'luk 2 kuvvet

2–7. *BG* üzerinde 5.292 kN/m şiddetinde üçgen yükleme, *ABCD* üzerinde 3.175 kN'luk 2 kuvvetle birlikte 2.646 kN/m şiddetindeki üçgen yüklemeler

2–9. *BE* üzerinde yamuk yükleme, şiddeti 59.31 kN/m, *FED* üzerinde $E_y = 55.6$ kN ile birlikte üçgen yükler, şiddetleri 29.66 kN/m

2–10. *BE* üzerinde 31.63 kN/m; *FED* üzerinde 56.9 kN'luk kuvvet

2–11. **a.** Statikçe belirli
b. 2° statikçe belirsiz
c. Statikçe belirli
d. 1° statikçe belirsiz
e. 1° statikçe belirsiz

2–13. **a.** Kararlı ve birinci dereceden statikçe belirsiz
b. Kararlı ve statikçe belirli
c. Kararlı ve birinci dereceden statikçe belirsiz

2–14. **a.** Kararsız
b. Kararlı ve statikçe belirli
c. Kararlı ve birinci dereceden statikçe belirsiz

2–15. **a.** Kararsız
b. Statikçe belirli
c. Statikçe belirli

2–17. **a.** Statikçe belirli
b. Statikçe belirli
c. Kararlı ve statikçe belirli
d. Kararsız

2–18. $B_y = 44.6$ kN; $A_y = 16.9$ kN; $A_x = 22.5$ kN

2–19. $F_B = 495$ kN; $A_x = 429$ kN; $A_y = 22.5$ kN

2–21. $A_y = 4.00$ kN; $M_B = 63.0$ kN · m; $B_y = 17.0$ kN; $B_x = 0$

2–22. $B_y = 217$ kN; $A_y = 181$ kN; $A_x = 0$

2–23. $N_C = 2.25$ kN; $B_y = 3.75$ kN; $A_x = 0$; $A_y = 21.75$ kN; $M_A = 38.25$ kN · m

2–25. $C_y = 45.0$ kN; $C_x = 45.0$ kN; $A_x = 45.0$ kN; $A_y = 45.0$ kN

2–26. $B_y = 25.6$ kN; $A_y = 73.6$ kN; $B_x = 100$ kN

2–27. $N_E = 12.0$ kN; $N_C = 4.00$ kN; $A_x = 0$; $A_y = 10.0$ kN; $M_A = 30.0$ kN · m

2–29. $B_y = 80$ kN; $A_y = 50$ kN; $C_y = 150$ kN; $D_y = 60$ kN

2–30. $N_A = 13.0$ kN; $B_x = 0$; $B_y = 26.0$ kN; $M_B = 60.0$ kN · m

2–31. $w_1 = \dfrac{2P}{L}$; $w_2 = \dfrac{4P}{L}$
$w_1 = 1.33$ kN/m; $w_2 = 2.67$ kN/m

2–33. $A_x = 12.0$ kN; $A_y = 16.0$ kN; $C_x = 12.0$ kN; $C_y = 16.0$ kN

2–34. $N_B = 7.42$ kN; $A_x = 1.55$ kN; $A_y = 2.06$ kN;

2–35. $F = 311$ kN; $A_x = 460$ kN; $A_y = 7.85$ kN

2–37. $A_x = 875$ N; $A_y = 1094$ kN; $C_x = 875$ N; $C_y = 1094$ kN

2–38. $T = 3.5$ kN; $A_y = 7$ kN; $A_x = 15.3$ kN; $D_x = 17.0$ kN; $D_y = 17.0$ kN

2–39. $B_y = 150$ kN; $D_x = 0$; $D_y = 150$ kN; $C_y = 675$ kN; $A_x = 0$; $A_y = 375$ kN; $F_y = 625$ kN; $E_x = 0$; $E_y = 375$ kN

2–41. $A_x = 6.96$ kN; $A_y = 34.7$ kN; $C_x = 15.0$ kN; $C_y = 37.3$ kN

2–42. $C_x = 45.0$ kN; $D_x = 45.0$ kN; $C_y = 7.00$ kN; $A_y = 83.0$ kN; $A_x = 45.0$ kN; $D_y = 7.00$ kN

2–43. $B_x = 124$ kN; $B_y = 111$ kN; $C_x = 41$ kN; $C_y = 159$ kN

Bölüm 3

3–1. **a.** Kararsız.
b. 1° statikçe belirsiz.
c. Statikçe belirli.
d. Statikçe belirli.

3–2. **a.** İçten ve dıştan kararlı. Statikçe belirli.
b. İçten ve dıştan kararlı. 2° statikçe belirsiz.

3–3. **a.** İçten ve dıştan kararlı. Statikçe belirli.
b. İçten ve dıştan kararlı. 1° statikçe belirsiz.
c. İçten kararsız.

3–5. $F_{ED} = 8.33$ kN (Ç); $F_{CD} = 6.67$ kN (B); $F_{BC} = 6.67$ kN (B); $F_{CE} = 5$ kN (Ç); $F_{GF} = 20$ kN (Ç); $F_{GA} = 15$ kN (Ç); $F_{AF} = 18.0$ kN (B); $F_{AB} = 10.0$ kN (B); $F_{BE} = 4.17$ kN (B); $F_{FB} = 7.50$ kN (Ç); $F_{FE} = 12.5$ kN (Ç)

3–6. $F_{DC} = 40.4$ kN (B); $F_{DE} = 20.2$ kN (Ç); $F_{CE} = 5.77$ kN (B); $F_{CB} = 17.3$ kN (B); $F_{BA} = 28.9$ kN (B); $F_{BE} = 5.77$ kN (Ç); $F_{EA} = 14.4$ kN (Ç)

3–7. $F_{DC} = 9.24$ kN (Ç); $F_{DE} = 4.62$ kN (B); $F_{CE} = 9.24$ kN (B); $F_{CB} = 9.24$ kN (Ç); $F_{BE} = 9.24$ kN (B); $F_{BA} = 9.24$ kN (Ç); $F_{EA} = 4.62$ kN (B)

3–9. $F_{AF} = 15$ kN (Ç); $F_{AB} = 12$ kN (B); $F_{BF} = 40.5$ kN (B); $F_{BC} = 12$ kN (B); $F_{FC} = 22.5$ kN (Ç); $F_{FE} = 6$ kN (B); $F_{CE} = 13.5$ kN (B); $F_{CD} = 6$ kN (Ç); $F_{DE} = 7.5$ kN (B)

3–10. $F_{GB} = F_{BF} = 0$; $F_{DE} = 13.8$ kN (B); $F_{DC} = 11.1$ kN (Ç); $F_{EF} = 13.8$ kN (B); $F_{EC} = 6.00$ kN (B); $F_{CF} = 5.37$ kN (Ç); $F_{CB} = 5.07$ kN (Ç); $F_{FG} = 10.8$ kN (B); $F_{GA} = 10.8$ kN (B); $F_{BA} = 5.07$ kN (Ç)

3–11. $F_{ED} = F_{DC} = 0$; $F_{EF} = F_{CG} = 0$; $F_{DF} = F_{DG} = 4.24$ kN (B); $F_{AF} = F_{GB} = 4.24$ kN (B); $F_{AB} = 3$ kN (Ç); $F_{EA} = F_{CB} = 4$ kN (B)

3–13. $F_{AB} = 0$; $F_{AN} = 360$ kN (B); $F_{NB} = 424$ kN (Ç); $F_{NM} = 300$ kN (B); $F_{ML} = 300$ kN (B); $F_{MB} = 120$ kN (B); $F_{BL} = 255$ kN (B); $F_{BC} = 480$ kN (Ç); $F_{CD} = 480$ kN (Ç); $F_{CL} = 0$; $F_{LD} = 84.9$ kN (Ç); $F_{LK} = 540$ kN (B); $F_{KD} = 120$ kN (B); $F_{GH} = 360$ kN (B); $F_{FG} = 0$; $F_{HF} = 424$ kN (B); $F_{HI} = 300$ kN (B); $F_{IJ} = 300$ kN (B); $F_{IF} = 120$ kN (B); $F_{FJ} = 255$ kN (B); $F_{EF} = 480$ kN (Ç); $F_{DE} = 480$ kN (Ç); $F_{JE} = 0$; $F_{JD} = 84.9$ kN (Ç); $F_{KJ} = 540$ kN (B)

3–14. $F_{ED} = 8.33$ kN (Ç); $F_{CD} = 6.67$ kN (B); $F_{BC} = 6.67$ kN (B); $F_{CE} = 5$ kN (Ç); $F_{GF} = 20$ kN (Ç); $F_{GA} = 15$ kN (Ç); $F_{AF} = 18.0$ kN (B); $F_{AB} = 10.0$ kN (Ç); $F_{BE} = 4.17$ kN (B); $F_{FB} = 7.50$ kN (Ç); $F_{FE} = 12.5$ kN (Ç)

3–15. $F_{GF} = F_{EF} = 2.25$ kN (B); $F_{GB} = F_{EC} = 3.75$ kN (Ç); $F_{AB} = F_{DC} = 0$; $F_{AG} = F_{DE} = 6.00$ kN (B); $F_{BF} = F_{CF} = 3.75$ kN (B); $F_{CB} = 4.50$ kN (Ç)

3–17. $F_{DC} = 10.0$ kN (B); $F_{DE} = 8.00$ kN (B); $F_{CE} = 34.2$ kN (Ç); $F_{CB} = 24.0$ kN (B); $F_{EA} = 24.0$ kN (Ç); $F_{EB} = 12.0$ kN (B); $F_{BA} = 30.0$ kN (B)

3–18. $F_{BD} = 7.00$ kN (Ç); $F_{BC} = 1.00$ kN (Ç); $F_{ED} = 7.00$ kN (B)

3–19. $F_{CD} = 10.0$ kN (Ç); $F_{JN} = 12.5$ kN (Ç); $F_{JK} = 20.2$ kN (B); *KN*, *NL*, *MB*, *BL*, *CL*, *IO*, *OH*, *GE*, *EH*, *HD* sıfır kuvvet çubuklarıdır.

3–21. $F_{FG} = 5.33$ kN (B); $F_{GD} = 3.33$ kN (B); $F_{CD} = 10.0$ kN (Ç); $F_{GA} = 8.00$ kN (B)

3–22. $F_{HB} = 0$; $F_{AB} = 3.00$ kN (Ç); $F_{HC} = 5.41$ kN (Ç); $F_{HG} = 6.71$ kN (B)

3–23. $F_{GC} = 3.00$ kN (B); $F_{BC} = 3.00$ kN (Ç); $F_{GF} = 6.71$ kN (B); $F_{HC} = 5.41$ kN (Ç);

3–25. $F_{JI} = 117.5$ kN (B); $F_{DE} = 97.5$ kN (Ç); $F_{JD} = 61.7$ kN (B)

3–26. $F_{IH} = 7.45$ kN (B); $F_{BC} = 6.0$ kN (Ç); $F_{BH} = 1.49$ kN (Ç);

3–27. $F_{GF} = 9$ kN (B); $F_{FB} = 3.46$ kN (Ç); $F_{BC} = 6.06$ kN (Ç)

3–29. $F_{IH} = 6.00$ kN (Ç); $F_{ID} = 4.24$ kN (Ç); $F_{CD} = 10.1$ kN (B)

3–30. $F_{JI} = 9.00$ kN (Ç); $F_{IC} = 6.00$ kN (B); $F_{CD} = 10.1$ kN (B)

3–31. $F_{BC} = 9.75$ kN (Ç); $F_{HC} = 1.06$ kN (B); $F_{GH} = 10.1$ kN (B)

3–33. $F_{JH} = 2.83$ kN (Ç); $F_{JK} = 2.0$ kN (B); $F_{DC} = 0$; $F_{DE} = 2.0$ kN (B); $F_{EC} = 0$; $F_{EH} = 0$; $F_{CF} = 2.83$ kN (Ç); $F_{CB} = 2.0$ kN (B); $F_{AG} = 2.0$ kN (B); $F_{AB} = 0$; $F_{BG} = 0$; $F_{BF} = 2.83$ kN (Ç); $F_{GI} = 0$; $F_{GL} = 2.0$ kN (B); $F_{FK} = 2.0$ kN (B); $F_{LI} = 2.83$ kN (Ç); $F_{IF} = 2.83$ kN (Ç); $F_{IK} = 0$; $F_{HF} = 2.83$ kN (Ç); $F_{HK} = 0$; $F_{JE} = 2.0$ kN (B)

3–34. $F_{AD} = 0$; $F_{AF} = 4.00$ kN (B); $F_{FD} = 8.94$ kN (Ç); $F_{FE} = 11.3$ kN (B); $F_{BC} = 4.00$ kN (B); $F_{CE} = 8.94$ kN (Ç); $F_{BE} = 0$; $F_{CD} = 11.3$ kN (B); $F_{ED} = 16.0$ kN (B)

3–35. $F_{AB} = 3.90$ kN (B); $F_{BC} = 2.50$ kN (B); $F_{CD} = 2.50$ kN (B); $F_{BG} = F_{GF} = F_{GH} = F_{CH} = F_{HE} = 0$

3–37. $F_{AD} = 12.4$ kN (Ç); $F_{AB} = 5.09$ kN (B); $F_{AC} = 5.09$ kN (B)

3–38. $F_{BC} = F_{BD} = 1.34$ kN (B); $F_{AB} = 2.4$ kN (B); $F_{AG} = F_{AE} = 1.01$ kN (Ç); $F_{BG} = 1.80$ kN (Ç); $F_{BE} = 1.80$ kN (Ç)

3–39. $F_{FE} = 0$; $F_{ED} = 0$

3–41. $F_{AB} = 6.46$ kN (Ç); $F_{AC} = F_{AD} = 1.50$ kN (B); $F_{BC} = F_{BD} = 3.70$ kN (B); $F_{BE} = 4.80$ kN (Ç)

3–42. $F_{CF} = 0$; $F_{CD} = 2.31$ kN (Ç); $F_{ED} = 3.46$ kN (Ç); $F_{AB} = 3.46$ kN (B)

3–43. $F_{BC} = 1.15$ kN (B); $F_{DF} = 4.16$ kN (B); $F_{BE} = 4.16$ kN (Ç)

Bölüm 4

4–1. $N_C = 0$; $V_C = 0.667$ kN; $M_C = 0.667$ kN · m; $N_D = 0$; $V_D = -5.33$ kN; $M_D = -9.33$ kN · m

4–2. $N_C = 0$; $V_C = 0$; $M_C = -24.0$ kN · m

4–3. $N_A = 0$; $V_A = 2025$ N; $M_A = -1.519$ kN · m; $N_B = 0$; $V_B = 3825$ N; $M_B = -8.539$ kN · m; $V_C = 0$; $N_C = -5400$ kN; $M_C = -10.97$ kN · m

4–5. $w = 100$ N/m

4–6. $N_C = 0$; $V_C = -0.75$ kN; $M_C = -0.375$ kN · m; $N_D = 0$; $V_D = 1.25$ kN; $M_D = 1.875$ kN · m

4–7. $N_C = 0$; $V_C = 0$; $M_C = 48.0$ kN · m

4–9. $N_C = 0$; $V_C = 10.5$ kN; $M_C = 40.5$ kN · m

4–10. $N_C = 0$; $V_C = -5$ kN; $M_C = 10$ kN · m; $N_D = 0$; $V_D = 3.75$ kN; $M_D = 2.5$ kN · m

4–11. $N_C = 0$; $V_C = 16.7$ kN; $M_C = 87.5$ kN · m; $N_D = 0$; $V_D = -33.3$ kN; $M_D = 137.5$ kN · m

4–13. $M = (-9.9x + 1600)$ N · m

4–14. $0 \le x < a$ için $V = \frac{M_O}{L}$; $M = \frac{M_O}{L}x$

$a < x \le L$ için $V = \frac{M_O}{L}$; $M = -\frac{M_O}{L}(L - x)$

4–15. $V = 1.00$ kN; $M = (x + 28)$ kN · m

4–17. $0 \le x < 1$ m için, $V = -4$ kN; $M = \{-4x\}$ kN · m; 1 m $< x <$ 2 m için, $V = \{-12\}$ kN · m; $M = \{-12x + 8\}$ kN · m; 2 m $< x \le$ 3 m için, $V = \{-20\}$ kN; $M = \{-20x + 24\}$ kN · m

4–18. $0 \le x <$ 3m, $V = \{150 - 20x\}$ kN; $M = \{-10x^2 + 150x - 540\}$ kN · m; 3 m $< x \le$ 5 m, $V = 40$ kN; $M = \{40x - 300\}$ kN · m

4–19. $0 \le x <$ 2 m, $V = -1000$ N; $M = \{-1000x\}$ N · m; 2 m $< x <$ 5 m, $V = \{4200 - 1200x\}$ N; $M = \{-600x^2 + 4200x - 8000\}$ N · m; 5 m $< x \le$ m, $V = 1000$ N; $M = \{1000x - 7000\}$ N · m

4–21. $V = 2$ kN; $M = (2x + 4)$ kN · m

4–22. $0 \le x <$ 3 m için, $V = \{-1.33x^2 + 14\}$ kN; $M = \{-0.444x^3 + 14x\}$ kN · m 3 m $< x \le$ 6 m için, $V = \{-8x^2 + 26\}$ kN; $M = \{-4x^3 + 26x - 12\}$ kN · m

4–23. $V_{max} = -1.93$ kN; $M_{max} = -6$ kN · m

4–25. $V_{max} = -4.89$ kN; $M_{max} = -20$ kN · m

4–26. $V_{max} = -143$ kN; $M_{max} = 372$ kN · m

4–27. $V_{max} = -15.2$ kN; $M_{max} = 19.3$ kN · m

4–29. $V_{max} = -30.0$ kN; $M_{max} = -50.0$ kN · m

4–30. $V_{max} = 15.5$ kN; $M_{max} = 30.0$ kN · m

4–31. $V_{max} = \pm 10.0$ kN; $M_{max} = -7.50$ kN · m

4–33. $V_{max} = w_0L/3$; $M_{max} = 23\, w_0L^2/216$

4–34. $V_{max} = \pm 6$ kN; $M_{max} = 8$ kN · m

4–37. $V_{max} = 24.5$ kN; $M_{max} = 34.5$ kN · m

4–38. $V_{max} = 83.0$ kN; $M_{max} = -180$ kN · m

4–41. $V_{max} = -13.75$ kN; $M_{max} = 23.6$ kN · m

4–42. $V_{max} = 100$ kN; $M_{max} = -360$ kN · m

4–43. $V_{max} = 16.0$ kN; $M_{max} = 24.0$ kN · m

4–45. $V_{max} = 16.0$ kN; $M_{max} = 26.7$ kN · m

4–46. $V_{max} = -59.2$ kN $M_{max} = -109.5$ kN · m

4–47. $V_{max} = 4.10$ kN; $M_{max} = 18.8$ kN · m

4–49. $V_{max} = \pm 9.00$ kN; $M_{max} = 16.0$ kN · m

Bölüm 5

5–1. $T_{BC} = 1.60$ kN; $T_{CD} = 3.72$ kN; $T_{AB} = 2.99$ kN; $y_D = 2.10$ m

5–2. $x_B = 2.18$ m
5–3. $P_2 = 10.3$ kN; $P_1 = 17.1$ kN
5–5. $P = 360$ N
5–6. $y_B = 2.43$ m
$T_{AB} = 40.9$ kN; $T_{CD} = 64.1$ kN
$T_{max} = 64.1$ kN
5–7. $y_D = 0.644$ m; $P_1 = 6.58$ kN
5–9. $T_{min} = 400$ kN; $T_{max} = 431$ kN
5–10. $y = 0.0267x^2$; $T_{max} = 60.0$ kN
5–11. $T_{max} = 65.0$ kN; $T_{min} = 58.6$ kN
5–13. $T_{max} = 10.9$ kN
5–14. $F_{min} = 100$ kN; $F_{max} = 117$ kN; $T = 10$ kN
5–15. $M_{max} = 6.25$ kN · m
5–17. $T_{min} = 6.25$ MN; $T_{max} = 6.93$ MN
5–18. $M_{max} = 3.56$ kN · m
5–19. $F_F = 7.0$ kN; $F_E = F_D = 8.75$ kN; $T = 1.31$ kN
5–21. $B_y = 1.43$ kN; $B_x = 4.64$ kN; $A_x = 4.64$ kN;
$A_y = 8.57$ kN; $C_x = 4.64$ kN; $C_y = 6.43$ kN
5–22. $F_A = 19.9$ kN; $F_B = 11.9$ kN; $F_C = 10.4$ kN
5–23. $M_D = 10.8$ kN · m
5–25. $B_x = 233$ kN; $B_y = 25$ kN; $A_x = 233$ kN;
$A_y = 475$ kN; $C_x = 233$ kN; $C_y = 425$ kN
5–26. $h_1 = 13.125$ m; $h_2 = 22.5$ m; $h_3 = 28.125$ m
5–27. $B_x = 22.92$ kN; $B_y = 0$; $A_x = 7.92$ kN;
$A_y = 20$ kN; $C_x = 7.92$ kN; $C_y = 20$ kN
5–29. $A_x = 0$; $C_y = 9.55$ kN; $A_y = 15.5$ kN;
$T = 4.32$ kN

Bölüm 6

6–15. $(M_C)_{max} = 142$ kN · m; $(V_C)_{max} = 20$ kN
6–17. $(B_y)_{max(+)} = 49.5$ kN;
$(M_B)_{max(-)} = -45$ kN · m
6–18. $(M_C)_{max(+)} = 90$ kN · m; $(B_y)_{max(+)} = 99$ kN
6–19. $(A_y)_{max(+)} = 105.5$ kN
$(V_C)_{max(+)} = 32.3$ kN
$(M_C)_{max(+)} = 114.8$ kN · m
6–21. At B; $(M_D)_{max} = -4$ kN · m
6–22. $(M_E)_{max(+)} = 89.6$ kN · m; $(V_E)_{max(+)} = 24.6$ kN
6–23. $(M_E)_{max(-)} = -13.5$ kN · m; $(V_E)_{max(+)} = 5.25$ kN
6–26. $(V_{BC})_{max(+)} = 7.15$ kN; $(M_G)_{max(-)} = -9.81$ kN · m
6–27. $(M_E)_{max(+)} = 30.0$ kN · m
6–30. $(V_{AB})_{max} = 10.92$ kN; $(M_D)_{max} = 49$ kN · m
6–31. $(V_{BC})_{max} = 109$ kN; $(M_C)_{max} = 196$ kN · m
6–33. $(V_{BC})_{max} = 35$ kN; $(M_C)_{max} = 105$ kN · m
6–34. $(V_{CD})_{max(+)} = 17.6$ kN; $(M_C)_{max(+)} = 164$ kN · m
6–35. $(M_B)_{max(+)} = 150$ kN · m
6–37. $(V_{BC})_{max(-)} = -8.21$ kN; $(M_B)_{max(+)} = 12.3$ kN · m
6–57. $(F_{GD})_{max(+)} = 5.79$ kN (Ç) (Max.)
6–61. $(F_{CF})_{max(+)} = 33.9$ kN (Ç)
6–62. 44.1 kN · m
6–63. $(M_B)_{max} = -10.5$ kN · m
6–65. $(V_C)_{max} = 31.1$ kN
6–66. 20.0 kN · m
6–67. $(M_C)_{max(+)} = 21$ kN · m
6–69. $(F_{IH})_{max} = 15$ kN (B)
6–70. $(V_C)_{max} = 11.8$ kN; $(M_C)_{max} = 70.9$ kN · m
6–71. 67.8 kN · m
6–73. $M_{max} = 1031$ kN · m
6–74. $V_{max} = +12$ kN; $M_{max} = -46.8$ kN · m
6–75. $V_s = 80$ kN; $M_s = 96$ kN · m
6–77. 67.5 kN
6–78. 164 kN · m
6–79. 13.75 kN
6–81. $M_S = 833$ kN · m
6–82. $V_{\substack{abs \\ max}} = 62.5$ kN
6–83. $M_S = 135.2$ kN · m

Bölüm 7

7–1. $F_{BF} = 1.67$ kN (Ç); $F_{AE} = 1.67$ kN (B);
$F_{EF} = 1.33$ kN (B); $F_{AB} = 1.33$ kN (Ç);
$F_{BD} = 1.67$ kN (Ç); $F_{CE} = 1.67$ kN (B);
$F_{DE} = 1.33$ kN (B); $F_{BC} = 1.33$ kN (Ç);
$F_{AF} = 7.00$ kN (B); $F_{BE} = 2.00$ kN (B);
$F_{CD} = 9.00$ kN (B)
7–2. $F_{AE} = 0$; $F_{BF} = 3.33$ kN (Ç); $F_{EF} = 2.67$ kN (B);
$F_{AB} = 0$; $F_{CE} = 0$; $F_{BD} = 3.33$ kN (Ç);
$F_{DE} = 2.67$ kN (B); $F_{BC} = 0$; $F_{AF} = 8.00$ kN (B);
$F_{BE} = 4.00$ kN (B); $F_{CD} = 10.0$ kN (B)
7–3. $F_{AB} = F_{DE} = 1.875$ kN (B);
$F_{BC} = F_{DC} = 1.875$ kN (B);
$F_{JI} = F_{GF} = 1.875$ kN (Ç);
$F_{IH} = F_{HG} = 1.875$ kN (Ç);
$F_{JB} = F_{FD} = 3.125$ kN (B);
$F_{AI} = F_{GE} = 3.125$ kN (Ç);
$F_{IC} = F_{GC} = 3.125$ kN (Ç);
$F_{BH} = F_{HD} = 3.125$ kN (B);
$F_{JA} = F_{EF} = 2.50$ kN (B);
$F_{IB} = F_{DG} = 5$ kN (B); $F_{HC} = 5$ kN (B)
7–5. $F_{BH} = 23.3$ kN (Ç); $F_{AG} = 23.3$ kN (B);
$F_{GH} = 16.5$ kN (B); $F_{AB} = 7.50$ kN (Ç);
$F_{CG} = 2.12$ kN (Ç); $F_{BF} = 2.12$ kN (B);
$F_{BC} = 25.5$ kN (Ç); $F_{FG} = 34.5$ kN (B);
$F_{CE} = 19.1$ kN (Ç); $F_{DF} = 19.1$ kN (B);
$F_{CD} = 13.5$ kN (Ç); $F_{EF} = 22.5$ kN (B);
$F_{AH} = 31.5$ kN (B); $F_{BG} = 15.0$ kN (B);
$F_{CF} = 15.0$ kN (B); $F_{DE} = 28.5$ kN (B)

7–6. $F_{AG} = 0; F_{BH} = 46.7\ \text{kN (Ç)}; F_{AB} = 9.00\ \text{kN (B)};$
$F_{GH} = 33.0\ \text{kN (B)}; F_{BF} = 0; F_{CG} = 4.24\ \text{kN (Ç)};$
$F_{FG} = 36.0\ \text{kN (B)}; F_{BC} = 24.0\ \text{kN (Ç)}; F_{DF} = 0;$
$F_{CE} = 38.2\ \text{kN (Ç)}; F_{CD} = 0; F_{EF} = 36.0\ \text{kN (B)};$
$F_{AH} = 48.0\ \text{kN (B)}; F_{BG} = 33.0\ \text{kN (B)};$
$F_{CF} = 30.0\ \text{kN (B)}; F_{DE} = 42.0\ \text{kN (B)}$

7–7. $F_{EC} = 3.33\ \text{kN (Ç)}; F_{BD} = 3.33\ \text{kN (B)};$
$F_{ED} = 2.67\ \text{kN (Ç)}; F_{BC} = 2.67\ \text{kN (B)};$
$F_{CD} = 2.00\ \text{kN (Ç)}; F_{FB} = 10.0\ \text{kN (Ç)};$
$F_{AE} = 10.0\ \text{kN (B)}; F_{FE} = 13.3\ \text{kN (Ç)};$
$F_{AB} = 13.3\ \text{kN (B)}; F_{BE} = 4.00\ \text{kN (Ç)};$
$F_{AF} = 6.00\ \text{kN (Ç)}$

7–9. $F_{DG} = 12.4\ \text{kN (B)}; F_{CF} = 12.4\ \text{kN (Ç)};$
$F_{FG} = 16.25\ \text{kN (B)}; F_{CD} = 16.25\ \text{kN (Ç)};$
$F_{AC} = 19.45\ \text{kN (B)}; F_{BG} = 19.45\ \text{kN (Ç)};$
$F_{BC} = 38.75\ \text{kN (Ç)}; F_{AG} = 38.75\ \text{kN (B)};$
$F_{EF} = 10.6\ \text{kN (B)}; F_{DE} = 7.5\ \text{kN (Ç)};$
$F_{DF} = 1.25\ \text{kN (B)}; F_{CG} = 5.0\ \text{kN (B)};$
$F_{AB} = 13.75\ \text{kN (Ç)}$

7–10. $F_{DG} = F_{AC} = 0; F_{CF} = 24.75\ \text{kN (Ç)};$
$F_{CD} = 7.5\ \text{kN (Ç)}; F_{FG} = 25.0\ \text{kN (B)};$
$F_{BG} = 38.9\ \text{kN (Ç)}; F_{BC} = 25.0\ \text{kN (Ç)};$
$F_{AG} = 52.5\ \text{kN (B)}; F_{EF} = 10.6\ \text{kN (B)};$
$F_{DE} = 7.5\ \text{kN (Ç)}; F_{DF} = 10.0\ \text{kN (B)};$
$F_{CG} = 27.5\ \text{kN (B)}; F_{AB} = 0$

7–11. $F_{CE} = 6.67\ \text{kN (B)}; F_{DF} = 6.67\ \text{kN (Ç)};$
$F_{CD} = 5.33\ \text{kN (B)}; F_{EF} = 5.33\ \text{kN (Ç)};$
$F_{BF} = 15.0\ \text{kN (B)}; F_{AC} = 15.0\ \text{kN (Ç)};$
$F_{BC} = 22.7\ \text{kN (B)}; F_{AF} = 22.7\ \text{kN (Ç)};$
$F_{DE} = 4.00\ \text{kN (B)}; F_{CF} = 5.00\ \text{kN (B)};$
$F_{AB} = 9.00\ \text{kN (Ç)}$

7–13. $M_E = 4.86\ \text{kN} \cdot \text{m}; M_F = 8.64\ \text{kN} \cdot \text{m}$

7–14. $M_F = 8.1\ \text{kN} \cdot \text{m}; M_D = 14.4\ \text{kN} \cdot \text{m}$

7–15. $M_G = 8.64\ \text{kN} \cdot \text{m}$
$M_H = 14.4\ \text{kN} \cdot \text{m}$

7–17. $M_{HG} = 2.025\ \text{kN} \cdot \text{m}; M_{JI} = 2.025\ \text{kN} \cdot \text{m};$
$M_{JK} = 3.60\ \text{kN} \cdot \text{m}$

7–18. $A_x = 0; B_x = 0; C_x = 0$
$A_y = 54\ \text{kN}; B_y = 72\ \text{kN}; C_y = 18\ \text{kN}$
$M_A = 21.9\ \text{kN} \cdot \text{m}; M_B = 12.2\ \text{kN} \cdot \text{m};$
$M_C = 9.7\ \text{kN} \cdot \text{m}$

7–19. Sabit Mafsallı: $A_x = 6.00\ \text{kN}; A_y = 18.0\ \text{kN};$
$B_x = 6.00\ \text{kN}; B_y = 18.0\ \text{kN}$
Ankastre: $A_x = 6.00\ \text{kN}; A_y = 9.00\ \text{kN};$
$M_A = 18.0\ \text{kN} \cdot \text{m}; B_x = 6.00\ \text{kN};$
$B_y = 9.00\ \text{kN}; M_B = 18.0\ \text{kN} \cdot \text{m}$

7–21. $F_{CF} = 67.9\ \text{kN};$

7–22. $F_{CF} = 48.08\ \text{kN}$

7–23. $A_x = 7.50\ \text{kN}; A_y = 9.375\ \text{kN}; M_A = 11.25\ \text{kN} \cdot \text{m};$
$B_x = 7.50\ \text{kN}; B_y = 9.375\ \text{kN}; M_B = 11.25\ \text{kN} \cdot \text{m};$
$F_{DG} = 15.625\ \text{kN (B)}; F_{CD} = 10.00\ \text{kN (Ç)};$
$F_{FG} = 5.00\ \text{kN (B)}; F_{DF} = 15.625\ \text{kN (Ç)};$
$F_{DE} = 15.0\ \text{kN (B)}$

7–25. $F_{EG} = 27.5\ \text{kN (Ç)}; F_{EF} = 24.0\ \text{kN (B)};$
$F_{CG} = 4.00\ \text{kN (B)}; F_{CE} = 27.5\ \text{kN (B)};$
$F_{DE} = 20.0\ \text{kN (Ç)}$

7–26. $F_{EG} = 15.0\ \text{kN (Ç)}; F_{CG} = 4.00\ \text{kN (B)};$
$F_{EF} = 14.0\ \text{kN (B)}; F_{CE} = 15.0\ \text{kN (B)};$
$F_{DE} = 10.0\ \text{kN (Ç)}$

7–27. $A_x = B_x = 11.0\ \text{kN}; A_y = B_y = 32.7\ \text{kN};$
$F_{CG} = 40.8\ \text{kN (Ç)}; F_{FG} = 54.0\ \text{kN (B)};$
$F_{CD} = 18.5\ \text{kN (Ç)}; F_{GD} = 40.8\ \text{kN (B)};$
$F_{GH} = 5.00\ \text{kN (B)}; F_{DH} = 40.8\ \text{kN (Ç)};$
$F_{DE} = 30.5\ \text{kN (B)}; F_{HE} = 40.8\ \text{kN (B)};$
$F_{HI} = 44.0\ \text{kN (Ç)}$

7–29. $A_x = 10.0\ \text{kN}; A_y = 9.375\ \text{kN}; B_x = 10.0\ \text{kN};$
$B_y = 9.375\ \text{kN}; F_{GK} = 15.625\ \text{kN (B)}; F_{GF} = 0;$
$F_{JK} = 2.50\ \text{kN (Ç)}$

7–30. $F_{FG} = 0; F_{EH} = 2.50\ \text{kN (Ç)}; F_{FH} = 15.625\ \text{kN (B)}$

7–31. $F_{FG} = 0; F_{EH} = 2.50\ \text{kN (B)}; F_{FH} = 9.375\ \text{kN (B)}$

7–33. $F_{HG} = 2.52\ \text{kN (B)}; F_{KL} = 1.86\ \text{kN (Ç)};$
$F_{HL} = 2.99\ \text{kN (B)}$

7–35. $A_y = 6\ \text{kN}; A_x = 6\ \text{kN}; M_A = 18\ \text{kN} \cdot \text{m};$
$B_y = 2\ \text{kN}; B_x = 12\ \text{kN}; M_B = 36\ \text{kN} \cdot \text{m};$
$C_y = 2\ \text{kN}; C_x = 12\ \text{kN}; M_C = 36\ \text{kN} \cdot \text{m};$
$D_y = 6\ \text{kN}; D_x = 6\ \text{kN}; M_D = 18\ \text{kN} \cdot \text{m}$

7–37. $V = 3.333\ \text{kN}$

7–38. $\text{F} = 2.680\ \text{kN}$

Bölüm 8

8–1. $\theta_A = \dfrac{Pa(a - L)}{2EI};$

$v \quad \dfrac{Px_1}{6EI} \quad 3a(a - L)\big];$

$v \quad \dfrac{Pa}{6EI} 3x_2(x_2 - L) + a^2\big];$

$v_{\max} = \dfrac{Pa}{24EI}(4a^2 - 3L^2)$

8–2. $\theta_A = \dfrac{3}{8}\dfrac{PL^2}{EI}; v_C = \dfrac{PL^3}{6EI}$

8–3. $v_B = \dfrac{11PL^3}{48EI}$

8–5. $\theta_B = \frac{wa^3}{6EI}; v_1 = \frac{wx_1^2}{24EI}(-x_1^2 + 4ax_1 - 6a^2);$
$v_3 = \frac{wa^3}{24EI}(4x_3 + a - 4L);$
$v_B = \frac{wa^3}{24EI}(a - 4L)$

8–6. $v = \frac{M_0 x}{2EI}(x - L)$
$\theta_A = \frac{M_0 L}{2EI}$
$v_{\max} = \frac{M_0 L^2}{8EI}$

8–7. $v_1 = \frac{Pb}{6EIL}\left[x_1^3 - (L^2 - b^2)x_1\right]$
$v_2 = \frac{Pa}{6EIL}\left[3x_2^2 L - x_2^3 - (2L^2 + a^2)x_2 + a^2 L\right]$

8–9. $\theta_B = \frac{7wa^3}{6EI}; v_1 = \frac{wax_1}{12EI}(2x_1^2 - 9ax_1);$
$v_C = \frac{7wa^4}{12EI}$
$v_3 = \frac{w}{24EI}(-x_3^4 + 8ax_3^3 - 24a^2x_3^2 + 4a^3x_3 - a^4)$

8–10. $\theta_B = 0.00243 \text{ rad} \curvearrowleft$
$\Delta_{\max} = 7.29 \text{ mm} \downarrow$

8–11. $\theta_B = 0.00243 \text{ rad} \curvearrowleft$
$\Delta_{\max} = 7.29 \text{ mm} \downarrow$

8–13. $\Delta_C = \frac{18.6 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow$
$\theta_A = \frac{11.8 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \curvearrowleft$

8–14. $0.153\,L$

8–15. $0.153\,L$

8–17. $\frac{L}{3}$

8–18. $\theta_D = \frac{45 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI}$
$\Delta_C = \frac{1620 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI}$

8–19. $\Delta_C = \frac{1620 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI}$
$\theta_D = \frac{45 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI}$

8–21. $\theta_C = 0.00171 \text{ rad}$
$\Delta_C = 3.86 \text{ mm}$

8–22. $\theta_C = \frac{4}{3}\frac{M_0 L}{EI}$
$\Delta_C = \frac{5M_0 L^2}{6EI}$

8–23. $\theta_C = \frac{4M_0 L}{3EI}; \Delta_C = \frac{5M_0 L^2}{6EI}$

8–25. $\theta_B = \frac{18 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI} \curvearrowleft$
$\Delta_C = \frac{90 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow$

8–26. $\theta_C = \frac{Pa^2}{8EI}$
$\Delta_C = \frac{9Pa^3}{4EI}$

8–27. $\theta_C = \frac{Pa^2}{8EI}$
$\Delta_C = \frac{9Pa^3}{4EI}$

8–29. $\theta_C = \frac{M_0 a}{EI}$
$\Delta_C = \frac{M_0 a^2}{2EI}$

8–30. $\Delta_B = \frac{224 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI}$

8–31. $\theta_A = \frac{7Pa^2}{6EI}$
$\Delta_D = \frac{Pa^3}{4EI}$

8–33. $\theta_B = \frac{5Pa^2}{12EI}$
$\Delta_C = \frac{3Pa^3}{4EI}$

8–34. $\Delta_B = \frac{M_0 L^2}{16EI}, \theta_A = \frac{M_0 L}{3EI}$

8–35. $\Delta_B = \frac{M_0 L^2}{16EI}, \theta_A = \frac{M_0 L}{3EI}$

8–37. $\Delta_D = \frac{146 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI} \downarrow; \theta_{B_L} = \frac{12.5 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI};$
$\theta_{B_R} = -\frac{4.17 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI}$

8–38. $\theta_D = \frac{180 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{EI}$
$\Delta_C = \frac{405 \text{ kN} \cdot \text{m}^3}{EI}$

Bölüm 9

9–1. 5.15 mm
9–2. 5.15 mm
9–3. 6.23 mm
9–5. 3.79 mm
9–6. 3.79 mm
9–7. $(\Delta_A)_v = 130$ mm
9–9. $\Delta_{C_v} = 9.83$ mm
9–10. $(\Delta_C)_v = 9.83$ mm
9–11. 6.95 mm
9–13. $\Delta_{C_v} = 4.91$ mm $\downarrow$
9–14. $\Delta_{C_v} = 4.91$ mm $\downarrow$
9–15. $\Delta_{A_v} = 1.03$ mm $\downarrow$
9–17. $\Delta_{A_v} = 12.7$ mm $\downarrow$
9–18. $\Delta_{A_v} = 26.8$ mm $\uparrow$
9–19. $\Delta_C = \frac{PL^3}{48\,EI}\downarrow$
$\theta_B = \frac{PL^2}{16\,EI}\measuredangle$
9–21. $\theta_C = \frac{3.375\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI}\measuredangle$
$\Delta_C = \frac{118\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow$
9–22. $\theta_C = \frac{3.375\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI}\measuredangle\theta$
$\Delta_C = \frac{118\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow$
9–23. $(\Delta_C)_h = \frac{9.62\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\rightarrow$
9–25. $\Delta_C = 3.86$ mm
$\theta_C = 0.00171$ rad
9–26. $\Delta_C = 11.25$ mm
9–27. $\theta_B = 0.430°$
9–29. $\theta_C = 0.00563$ rad $\curvearrowleft$
$\Delta_C = 6.56$ mm $\downarrow$
9–30. $\theta_C = \frac{49.5\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI}\curvearrowleft$
$\Delta_C = \frac{140\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow$
9–31. $\theta_C = \frac{49.5\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI}\curvearrowleft$
$\Delta_C = \frac{140\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow$
9–33. $\Delta_C = \frac{1037\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow$
9–34. $\theta_B = 0.00457$ rad $\curvearrowleft$
$\Delta_B = 11.6$ mm $\downarrow$
9–35. $\theta_B = 0.00457$ rad $\measuredangle$
$\Delta_B = 11.6$ mm $\downarrow$
9–37. $\Delta_C = \frac{w_0L^4}{120EI}\downarrow$
9–38. $\Delta_C = \frac{w_0L^4}{120EI}\downarrow$
9–39. $\Delta_C = 3.375$ mm
9–41. $\theta_A = 4.5(10^{-3})$ rad
9–42. $\Delta_D = \frac{109\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow$
9–43. $\Delta_D = \frac{109\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow$
9–45. $(\Delta_D)_v = \frac{59.4\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow$
9–46. $(\Delta_C)_h = \frac{962\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\leftarrow$
9–47. $\theta_c = \frac{337.5\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI}\curvearrowleft$
9–49. 1.211 mm $\rightarrow$
9–50. 1.211 mm $\rightarrow$
9–51. 17.9 mm $\downarrow$
9–53. $(\Delta_C)_v = \frac{211\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow$
9–54. $(\Delta_C)_v = \frac{211\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}\downarrow$
9–55. $\theta_A = \frac{16.7\ \text{kN}\cdot\text{m}^2}{EI}$
$\Delta_B = \frac{18.1\ \text{kN}\cdot\text{m}}{EI}$
9–57. $(\Delta_C)_v = 49.1$ mm $\downarrow$
9–58. $(\Delta_C)_v = 49.1$ mm $\downarrow$
9–59. $(\Delta_C)_v = \frac{45\ \text{kN}\cdot\text{m}^3}{EI}$

Bölüm 10

10–1. $A_x = 0; B_y = \frac{w_0L}{10}; A_y = \frac{2w_0L}{5}; M_A = \frac{w_0L^2}{15}$
10–2. $C_x = 0; B_y = 153.75$ kN;
$A_y = 13.125$ kN; $C_y = 73.125$ kN
10–3. $B_y = \frac{3wL}{8}; M_A = \frac{wL^2}{8}; A_y = \frac{5wL}{8}; A_x = 0$
10–5. $B_y = -117.5$ kN; $A_x = 0; A_y = 87.5$ kN;
$M_A = 85$ kN·m
10–6. $A_x = 0; B_y = \frac{5wL}{4}; C_y = A_y = \frac{3wL}{8}$
10–7. $0.414\,L$
10–9. $B_y = 3.00$ N
10–10. $B_y = 54.2$ kN; $B_x = 0; C_y = 12.5$ kN;
$A_y = 13.3$ kN

10–11. $F_{sp} = \dfrac{5wkL^4}{4(6EI + kL^3)}$

10–13. $C_x = 18.75$ kN; $A_x = 108.75$ kN
$C_y = 212$ kN; $A_y = 148$ kN

10–14. $C_y = 18.75$ kN
$A_x = 12.0$ kN; $A_y = 0.750$ kN;
$M_A = 5.25$ kN · m

10–15. $A_y = 4.688$ kN; $C_x = 50$ kN; $C_y = 4.688$ kN;
$M_C = 81.25$ kN · m

10–17. $A_y = 14.8$ kN; $C_x = 0$; $C_y = 17.2$ kN;
$M_C = 4.92$ kN · m

10–18. $M_A = 55.4$ kN · m; $A_x = 24$ kN;
$C_y = 2.08$ kN; $A_y = 2.08$ kN; $M_B = 16.6$ kN · m

10–19. $A_y = -75.25$ kN; $D_y = 74.75$ kN;
$D_x = 10$ kN; $M_D = 29.25$ kN · m

10–21. $D_x = 27.0$ kN; $A_x = 13.0$ kN;
$D_y = 23.2$ kN; $A_y = 23.2$ kN

10–22. $A_x = 31.4$ kN; $A_y = 11.4$ kN;
$B_x = 48.6$ kN; $B_y = 11.4$ kN;
$M_C = 68.6$ kN · m

10–23. $B_x = 1.53$ kN; $A_x = 1.53$ kN;
$B_y = 7.50$ kN; $A_y = 15.0$ kN

10–25. $F_{CD} = 2.83$ kN (B); $F_{AD} = 2.83$ kN (Ç); $F_{BD} = 0$

10–26. $F_{CB} = 15.3$ kN (B); $F_{AC} = 41.2$ kN (B);
$F_{DC} = 32.9$ kN (Ç); $F_{DB} = 25.2$ kN (Ç);
$F_{AB} = 50.4$ kN (B); $F_{DA} = 24.7$ kN (Ç)

10–27. 7.91 kN (B)

10–29. 2.73 kN (Ç)

10–30. 2.13 kN (Ç)

10–31. 3.70 kN (B)

10–33. 4.76 kN (Ç)

10–34. $F_{sp} = \dfrac{3wL}{10}$; $B_y = \dfrac{7wL}{5}$

10–35. $F_{BD} = 112.1$ kN (B); $F_{AB} = 90.6$ kN (Ç);
$F_{BC} = 80.1$ kN (Ç)

10–37. $F_{CD} = 163$ kN (B);
$F_{CA} = F_{CB} = 212$ kN (Ç)

10–38. $M_{max} = 66.5$ kN · m

10–39. $D_x = 0$; $D_y = \dfrac{P}{3}$; $M_D = \dfrac{PL}{6}$

10–41. $A_y = \dfrac{P}{2}$; $A_x = 0$; $M_A = \dfrac{PL}{2}$; $B_y = \dfrac{P}{2}$;
$B_x = 0$; $M_B = \dfrac{PL}{2}$

10–47. $M_D = 46.9$ kN · m

Bölüm 11

11–1. $A_y = 181$ kN; $A_x = 0$;
$M_{BC} = \dfrac{2}{7}M_0$; $M_{AB} = -\dfrac{1}{7}M_0$;
$M_{BA} = -\dfrac{2}{7}M_0$

11–2. $M_{max} = \dfrac{7}{40}PL$

11–3. $M_{AB} = 12.4$ kN · m; $M_{BA} = 24.9$ kN · m;
$M_{BC} = 24.9$ kN; $M_{CB} = 9$ kN · m

11–5. $M_{AB} = 5$ kN · m; $M_{BA} = 10$ kN · m;
$M_{BC} = -10$ kN · m; $M_{CB} = 25$ kN · m

11–6. $M_{AB} = -49.5$ kN · m; $M_{BA} = 13.5$ kN · m;
$M_{BC} = -13.5$ kN · m; $M_{CB} = 9$ kN · m;
$M_{CD} = -9$ kN · m; $M_{DC} = 40.5$ kN · m;

11–7. $M_{AB} = 2.25$ kN · m; $M_{BA} = 4.50$ kN · m;
$M_{BC} = -4.50$ kN · m

11–9. $A_y = 53.3$ kN; $B_y = 72.0$ kN;
$C_x = 0$; $C_y = -5.3$ kN

11–10. $M_{AB} = -127.5$ kN · m; $M_{BA} = 105$ kN · m;
$M_{BC} = -105$ kN · m; $M_{CB} = 60$ kN · m

11–11. $M_{AB} = -30.6$ kN · m; $M_{BA} = -1.15$ kN · m;
$M_{BC} = 1.15$ kN · m; $M_{CB} = 34.0$ kN · m;
$M_{CD} = -34.0$ kN · m

11–13. $M_{AB} = -210$ kN · m; $M_{BA} = 120$ kN · m;
$M_{BC} = -120$ kN · m; $M_{CB} = -60$ kN · m;

11–14. $A_x = 17.7$ kN; $A_y = 24.6$ kN;
$C_x = 27.3$ kN; $C_y = 5.41$ kN

11–15. $M_{AB} = 4.91$ kN · m; $M_{BA} = 9.82$ kN · m;
$M_{BC} = -9.82$ kN · m; $M_{CB} = 9.82$ kN · m;
$M_{CD} = -9.82$ kN · m; $M_{DC} = -4.91$ kN · m

11–17. $M_{AB} = -1.50$ kN · m; $M_{CB} = 1.50$ kN · m;
$M_{BA} = 6.00$ kN · m; $M_{BC} = 3.00$ kN · m

11–18. $M_{AB} = -330$ kN · m; $M_{CB} = 400$ kN · m;
$M_{DB} = 0$

11–19. $M_{BA} = 13.17$ kN · m; $M_{BC} = -35.12$ kN · m;
$M_{BD} = 21.95$ kN · m; $M_{DB} = 10.98$ kN · m

11–21. $M_{AB} = -10.4$ kN · m; $M_{BA} = -6.26$ kN · m;
$M_{BC} = 6.26$ kN · m; $M_{DC} = -7.30$ kN · m

11–22. $M_{AB} = -773$ kN · m; $M_{BA} = -184$ kN · m;
$M_{BC} = 184$ kN · m; $M_{CB} = 258$ kN · m;
$M_{CD} = -258$ kN · m; $M_{DC} = -405$ kN · m

11–23. $M_{AB} = 25.4$ kN · m; $M_{BA} = 64.3$ kN · m;
$M_{BC} = -64.3$ kN · m; $M_{CB} = 99.8$ kN · m;
$M_{CD} = -99.8$ kN · m; $M_{DC} = -56.7$ kN · m

Bölüm 12

12–1. $M_{AB} = -34.8$ kN · m; $M_{BA} = 45.6$ kN · m;
$M_{BC} = -45.6$ kN · m; $M_{CB} = 67.2$ kN · m

12–2. $M_{AB} = 6.67$ kN · m; $M_{BA} = 13.3$ kN · m;
$M_{BC} = -13.3$ kN · m; $M_{CB} = 23.3$ kN · m

12–3. $M_{AB} = -166.7$ kN · m; $M_{BA} = 66.7$ kN · m;
$M_{BC} = -66.7$ kN · m; $M_{CB} = -33.3$ kN · m

12–5. $M_{AB} = -11.6$ kN · m; $M_{BA} = 12.8$ kN · m;
$M_{BC} = -12.8$ kN · m; $M_{CB} = 13.8$ kN · m

12–6. $M_{BA} = 16.0$ kN · m; $M_{BC} = -16.0$ kN · m;
$M_{CB} = 16.0$ kN · m; $M_{CD} = -16.0$ kN · m

12–7. $M_{AB} = 0; M_{BA} = 55.5\ \text{kN}\cdot\text{m};$
$M_{BC} = -55.5\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{CB} = 44.25\ \text{kN}\cdot\text{m}$

12–9. $A_y = 6\ \text{kN}; D_y = 6\ \text{kN};$
$B_y = 14\ \text{kN}; C_y = 14\ \text{kN}$

12–10. $M_{AD} = 48\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{AB} = -48\ \text{kN}\cdot\text{m};$
$M_{BA} = -24\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{BC} = 24\ \text{kN}\cdot\text{m};$
$M_{CB} = 48\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{CE} = -48\ \text{kN}\cdot\text{m}$

12–11. $M_{AB} = -30\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{BA} = 15\ \text{kN}\cdot\text{m};$
$M_{BC} = -15\ \text{kN}\cdot\text{m}$

12–13. $M_{BA} = 19.6\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{BC} = -19.6\ \text{kN}\cdot\text{m}$

12–14. $M_{AB} = 0; M_{BA} = 76.2\ \text{kN}\cdot\text{m};$
$M_{BD} = 21.8\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{BC} = -98.0\ \text{kN}\cdot\text{m};$
$M_{CB} = 89.4\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{CE} = -89.4\ \text{kN}\cdot\text{m};$
$M_{EC} = 0; M_{DB} = 0$

12–15. $A_x = 87.8\ \text{kN}; A_y = 288\ \text{kN}; M_A = 146\ \text{kN}\cdot\text{m};$
$D_x = 87.8\ \text{kN}; D_y = 288\ \text{kN}; M_D = 146\ \text{kN}\cdot\text{m}$

12–17. $D_{AB} = 0; D_{BA} = 181\ \text{kN}; D_{BD} = -77.3;$
$D_{BC} = -103; D_{CB} = 38.3; D_{DB} = 0$

12–18. $M_{AB} = 0; M_{BA} = 19.9\ \text{kN}\cdot\text{m};$
$M_{BC} = -19.9\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{CB} = 22.4\ \text{kN}\cdot\text{m};$
$M_{CD} = -6.77\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{CE} = -15.6\ \text{kN}\cdot\text{m};$
$M_{EC} = 1.18\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{DC} = 0$

12–19. $M_B = 0; M_{BA} = 14.897;$
$M_{BC} = -14.897; M_{CB} = -7.4485$

12–21. $M_{BA} = 168\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{BD} = -168\ \text{kN}\cdot\text{m};$
$M_{DB} = -47.8\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{DE} = 47.8\ \text{kN}\cdot\text{m};$
$M_{AB} = M_{DC} = 0$

12–22. $M_{AB} = -24.8\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{BA} = 26.1\ \text{kN}\cdot\text{m};$
$M_{BC} = -26.1\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{CB} = 50.7\ \text{kN}\cdot\text{m};$
$M_{CD} = -50.7\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{DC} = -40.7\ \text{kN}\cdot\text{m}$

12–23. $M_{AB} = 128\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{BA} = 218\ \text{kN}\cdot\text{m};$
$M_{BC} = 218\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{CB} = 175\ \text{kN}\cdot\text{m};$
$M_{CD} = 175\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{DC} = -55.7\ \text{kN}\cdot\text{m}$

12–25. $A_x = 4.88\ \text{kN}; A_y = 13\ \text{kN}; D_x = 4.88\ \text{kN};$
$D_y = 7\ \text{kN}$

12–26. $M_{DA} = 14.2\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{DC} = -14.2\ \text{kN}\cdot\text{m};$
$M_{CD} = -7.54\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{CB} = 7.54\ \text{kN}\cdot\text{m}$

Bölüm 13

13–1. $M_{AB} = -348\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{BA} = 301\ \text{kN}\cdot\text{m};$
$M_{BC} = -301\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{CB} = 348\ \text{kN}\cdot\text{m}$

13–2. $M_{AB} = -348\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{BA} = 301\ \text{kN}\cdot\text{m};$
$M_{BC} = -301\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{CB} = 348\ \text{kN}\cdot\text{m}$

13–3. $M_{AC} = 37.6\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{CA} = 75.1\ \text{kN}\cdot\text{m};$
$M_{CB} = -75.1\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{BC} = 369\ \text{kN}\cdot\text{m}$

13–5. $M_{AB} = 0; M_{BA} = 604\ \text{kN}\cdot\text{m};$
$M_{BC} = -609\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{BF} = 5.49\ \text{kN}\cdot\text{m};$
$M_{FB} = 2.76\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{CB} = 609\ \text{kN}\cdot\text{m};$
$M_{CD} = -604\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{CE} = 5.49\ \text{kN}\cdot\text{m};$
$M_{EC} = -2.76\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{DC} = 0$

13–6. $M_{AB} = 0; M_{BA} = 604\ \text{kN}\cdot\text{m};$
$M_{BC} = -610\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{BF} = 5.53\ \text{kN}\cdot\text{m};$
$M_{FB} = 2.77\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{CB} = 610\ \text{kN}\cdot\text{m};$
$M_{CD} = -604\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{CE} = -5.53\ \text{kN}\cdot\text{m};$
$M_{EC} = -2.77\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{DC} = 0$

13–7. $M_{AB} = 1.75\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{BA} = 3.51\ \text{kN}\cdot\text{m};$
$M_{BC} = -3.51\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{CB} = 3.51\ \text{kN}\cdot\text{m};$
$M_{CD} = -3.51\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{DC} = -1.75\ \text{kN}\cdot\text{m}$

13–9. $M_{BA} = 28.3\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{BD} = -28.3\ \text{kN}\cdot\text{m};$
$M_{DB} = 28.3\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{DC} = -28.3\ \text{kN}\cdot\text{m};$
$M_{AB} = M_{CD} = 0$

13–10. $M_{BA} = 28.3\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{BD} = -28.3\ \text{kN}\cdot\text{m}$
$M_{DB} = 28.3\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_{DC} = -28.3\ \text{kN}\cdot\text{m};$
$M_{AB} = M_{CD} = 0$

13–11. $M_{CD} = M_{BA} = 180\ \text{kN}\cdot\text{m};$
$M_{CF} = M_{BE} = 94.6\ \text{kN}\cdot\text{m}$
$M_{CB} = M_{BC} = -274\ \text{kN}\cdot\text{m};$
$M_{FC} = M_{EB} = 47.3\ \text{kN}\cdot\text{m}$

Bölüm 14

14–1.

$$\mathbf{K} = (10^6)\begin{bmatrix} 0.4664 & 0.0076 & -0.0884 & 0.0884 & -0.25 & 0 & -0.128 & -0.096 \\ 0.0076 & 0.1604 & 0.0884 & -0.0884 & 0 & 0 & -0.096 & -0.072 \\ -0.0884 & 0.0884 & 0.0884 & -0.0884 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0884 & -0.0884 & -0.0884 & 0.0884 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.128 & -0.096 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.128 & 0.096 \\ -0.096 & -0.072 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.096 & 0.072 \end{bmatrix}$$

14–2. $D_2 = -124.8(10^{-6})\ \text{m};$
$q_2 = 0.508\ \text{kN}$

14–3.

$$\mathbf{K} = 10^6 \begin{bmatrix} 0.15 & 0 & 0 & 0 & -0.075 & 0 & -0.075 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0768 & 0 & -0.0384 & -0.0288 & -0.0384 & 0.0288 \\ 0 & -0.1 & 0 & 0.1432 & -0.0288 & -0.0216 & -0.0288 & -0.0216 \\ -0.075 & 0 & -0.0384 & -0.0288 & 0.1134 & 0.0288 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0288 & -0.0216 & 0.028 & 0.0216 & 0 & 0 \\ -0.075 & 0 & -0.0384 & 0.0288 & 0 & 0 & 0.1134 & -0.0288 \\ 0 & 0 & 0.0288 & -0.0216 & 0 & 0 & -0.0288 & 0.0216 \end{bmatrix}$$

14–5.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cccccccccc} 203.033 & -53.033 & -53.033 & 53.033 & -150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -53.033 & 53.033 & 53.033 & -53.033 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -53.033 & 53.033 & 256.066 & 0 & 0 & 0 & -53.033 & -53.033 & -150 & 0 \\ 53.033 & -53.033 & 0 & 256.066 & 0 & -150 & -53.033 & -53.033 & 0 & 0 \\ -150 & 0 & 0 & 0 & 300 & 0 & -150 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -150 & 0 & 150 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -53.033 & -53.033 & -150 & 0 & 203.033 & 53.033 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -53.033 & -53.033 & 0 & 0 & 53.033 & 53.033 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \end{array} (10^6)$$

14–6. $D_1 = -0.0004$ m; $D_2 = -0.0023314$ m; $D_3 = 0.0004$; $D_4 = -0.00096569$ m; $D_5 = -0.0002$ m; $D_6 = 0.000966$ m; $(q_5)_F = -42.4$ kN

14–7.

$$\mathbf{K} = AE \begin{bmatrix} 0.8536 & 0.3536 & -0.3536 & -0.3536 & 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0.3536 & 0.3536 & -0.3536 & -0.3536 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3536 & -0.3536 & 1.0606 & 0.3536 & -0.3536 & -0.3536 & -0.3536 & 0.3536 \\ -0.3536 & -0.3536 & 0.3536 & 1.0606 & -0.3536 & -0.3536 & 0.3536 & -0.3536 \\ 0 & 0 & -0.3536 & -0.3536 & 0.8536 & 0.3536 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.3536 & -0.3536 & 0.3536 & 0.3536 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & -0.3536 & 0.3536 & 0 & 0 & 0.8536 & -0.3536 \\ 0 & 0 & 0.3536 & -0.3536 & -0.5 & 0 & -0.3536 & 0.8536 \end{bmatrix}$$

14–9.

$$\mathbf{K} = 10^3 \begin{bmatrix} 113.4 & 28.8 & -38.4 & -28.8 & 0 & 0 & -75 & 0 \\ 28.8 & 121.6 & -28.8 & -21.6 & 0 & 100 & 0 & 0 \\ -38.4 & -28.8 & 113.4 & 28.8 & -75 & 0 & 0 & 0 \\ -28.8 & -21.6 & 28.8 & 121.6 & 0 & 0 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & -75 & 0 & 113.4 & -28.8 & -38.4 & 28.8 \\ 0 & -100 & 0 & 0 & -28.8 & 121.6 & 28.8 & -21.6 \\ -75 & 0 & 0 & 0 & -38.4 & 28.8 & 113.4 & -28.8 \\ 0 & 0 & 0 & -100 & 28.8 & -21.6 & -28.8 & 121.6 \end{bmatrix}$$

14–10. $q_6 = 729$ N

14–11. $\mathbf{K} = AE$

	1	2	3	4	5	6	
	0.40533	0.096	0.01697	−0.11879	−0.33333	0	1
	0.096	0.128	0.02263	−0.15839	0	0	2
	0.01697	0.02263	0.129	−0.153	0	0.17678	3
	−0.11879	−0.15839	−0.153	0.321	0	−0.17678	4
	−0.33333	0	0	0	0.33333	0	5
	0	0	0.17678	−0.17678	0	0.25	6

Bölüm 15

15–1. $q_6 = 22.5\ \text{kN}\cdot\text{m}; q_2 = -11.25\ \text{kN}\cdot\text{m}$

15–2. $Q_4 = 4.125\ \text{kN}; Q_5 = 15.75\ \text{kN};$
$Q_6 = 4.125\ \text{kN}$

15–3. $Q_4 = 127.5\ \text{kN}; Q_5 = 105\ \text{kN}; Q_6 = 127.5\ \text{kN}$

15–5. $q_2 = 45\ \text{kN}\cdot\text{m}; q_3 = -45\ \text{kN}\cdot\text{m}$

15–6. $M_3 = 2.25\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_1 = 4.50\ \text{kN}\cdot\text{m}$

15–7. $M_2 = 18.5\ \text{kN}\cdot\text{m}; M_3 = 20.4\ \text{kN}\cdot\text{m}$

15–9. $Q_2 = -\frac{wL^2}{6}; Q_3 = wL; Q_4 = -\frac{wL^2}{3}$

15–10. $Q_3 = -204\ \text{kN}\cdot\text{m}; Q_5 = 38\ \text{kN}\cdot\text{m}$

15–11. $Q_3 = -216\ \text{kN}\cdot\text{m}; Q_5 = 392\ \text{kN}\cdot\text{m}$

Bölüm 16

16–1.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix}
851250 & 0 & 22500 & 22500 & -11250 & 0 & -840000 & 0 & 0 \\
0 & 1055760 & -14400 & 0 & 0 & -1050000 & 0 & -5760 & -14400 \\
22500 & -14400 & 108000 & 30000 & -22500 & 0 & 0 & 14400 & 24000 \\
22500 & 0 & 30000 & 60000 & -22500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-11250 & 0 & -22500 & -22500 & 11250 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1050000 & 0 & 0 & 0 & 1050000 & 0 & 0 & 0 \\
-840000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 840000 & 0 & 0 \\
0 & -5760 & 14400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5760 & 14400 \\
0 & -14400 & 24000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14400 & 48000
\end{bmatrix}$$

16–2. $Q_5 = -36.3\ \text{kN}; Q_6 = -46.4\ \text{kN};$
$Q_7 = 36.3\ \text{kN}; Q_8 = 46.4\ \text{kN};$
$Q_9 = 77.1\ \text{kN}\cdot\text{m}$

16–3.

$$\mathbf{K} = (10^3)\begin{bmatrix}
924 & 0 & 36 & -900 & 0 & 0 & 0 & 36 & 0 & 0 & -24 & 0 \\
0 & 681 & 81 & 0 & -81 & 81 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -600 \\
36 & 81 & 180 & 0 & -81 & 54 & 0 & 36 & 0 & 0 & -36 & 0 \\
-900 & 0 & 0 & 924 & 0 & 36 & 36 & 0 & -24 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -81 & -81 & 0 & 681 & -81 & 0 & 0 & 0 & -600 & 0 & 0 \\
0 & 81 & 54 & 36 & -81 & 180 & 36 & 0 & -36 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 36 & 0 & 36 & 72 & 0 & -36 & 0 & 0 & 0 \\
36 & 0 & 36 & 0 & 0 & 0 & 0 & 72 & 0 & 0 & -36 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -24 & 0 & -36 & -36 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -600 & 0 & 0 & 0 & 0 & 600 & 0 & 0 \\
-24 & 0 & -36 & 0 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & 0 & 24 & 0 \\
0 & -600 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 600
\end{bmatrix}$$

16–5.

$$\mathbf{K} = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 511.25 & 0 & 22.5 & -11.25 & 0 & 22.5 & -500 & 0 & 0 \\ 0 & 511.25 & -22.5 & 0 & -500 & 0 & 0 & -11.25 & -22.25 \\ 22.5 & -22.5 & 120 & -22.5 & 0 & 30 & 0 & 22.5 & 30 \\ -11.25 & 0 & -22.5 & 11.25 & 0 & -22.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -500 & 0 & 0 & 500 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 22.5 & 0 & 30 & -22.5 & 0 & 60 & 0 & 0 & 0 \\ -500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 500 & 0 & 0 \\ 0 & -11.25 & 22.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11.25 & 22.5 \\ 0 & -22.5 & 30 & 0 & 0 & 0 & 0 & 25.5 & 60 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \quad (10^6)$$

16–6. $R_4 = 3.21\ \text{kN} \rightarrow$
$R_5 = 21.6\ \text{kN} \uparrow$
$R_6 = 2.72\ \text{kN} \cdot \text{m}$ ↷
$R_7 = 6.79\ \text{kN} \rightarrow$
$R_8 = 26.4\ \text{kN} \uparrow$
$R_9 = 19.6\ \text{kN} \cdot \text{m}$ ↶

16–7.

$$\mathbf{K} = (10^3)\begin{bmatrix} 480 & 0 & 0 & -480 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.8 & 12 & 0 & -4.8 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 40 & 0 & -12 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ -480 & 0 & 0 & 482.78 & 0 & 8.333 & -2.778 & 0 & 8.333 \\ 0 & -4.8 & -12 & 0 & 404.8 & -12 & 0 & -400 & 0 \\ 0 & 12 & 20 & 8.333 & -12 & 73.33 & -8.333 & 0 & 16.67 \\ 0 & 0 & 0 & -2.778 & 0 & -8.333 & 2.778 & 0 & -8.333 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -400 & 0 & 0 & 400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8.333 & 0 & 16.67 & -8.333 & 0 & 33.33 \end{bmatrix}$$

16–9.

$$\mathbf{K} = (10^3)\begin{bmatrix} 472.9 & 0 & 72.9 & 72.9 & 0 & -72.9 & 0 & -400 & 0 \\ 0 & 621.6 & -32.4 & 0 & -32.4 & 0 & -600 & 0 & -21.6 \\ 72.9 & -32.4 & 162 & 48.6 & 32.4 & -72.9 & 0 & 0 & 32.4 \\ 72.9 & 0 & 48.6 & 97.2 & 0 & -72.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -32.4 & 32.4 & 0 & 64.8 & 0 & 0 & 0 & 32.4 \\ -72.9 & 0 & -72.9 & -72.9 & 0 & 72.9 & 0 & & 00 \\ 0 & -600 & 0 & 0 & 0 & 0 & 600 & 0 & 0 \\ -400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 & 0 \\ 0 & -21.6 & 32.4 & 0 & 32.4 & 0 & 0 & 0 & 21.6 \end{bmatrix}$$

16–10. 1 çubuğu için:
$q_{Nx'} = 1.27\ \text{kN}; q_{Ny'} = 5.15\ \text{kN}; q_{Nz'} = 0; q_{Fx'} = -1.27\ \text{kN}; q_{Fy'} = 6.85\ \text{kN}; q_{Fz'} = -2.54\ \text{kN} \cdot \text{m}$
2 çubuğu için:
$q_{Nx'} = 6.85\ \text{kN}; q_{Ny'} = 1.27\ \text{kN}; q_{Nz'} = 2.54\ \text{kN} \cdot \text{m}; q_{Fx'} = -6.85\ \text{kN}; q_{Fy'} = -1.27\ \text{kN}; q_{Fz'} = 0$

16–11.

$$\mathbf{K} = (10^3)\begin{bmatrix} 910.5 & 0 & 21 & 0 & 21 & -900 & 0 & -10.5 & 0 \\ 0 & 910.5 & 21 & 21 & 0 & 0 & -10.5 & 0 & -900 \\ 21 & 21 & 112 & 28 & 28 & 0 & -21 & -21 & 0 \\ 0 & 21 & 28 & 56 & 0 & 0 & -21 & 0 & 0 \\ 21 & 0 & 28 & 0 & 56 & 0 & 0 & -21 & 0 \\ -900 & 0 & 0 & 0 & 0 & 900 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10.5 & -21 & -21 & 0 & 0 & 10.5 & 0 & 0 \\ -10.5 & 0 & -21 & 0 & -21 & 0 & 0 & 10.5 & 0 \\ 0 & -900 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 900 \end{bmatrix}$$

16–13.

$$\mathbf{K} = (10^3)\begin{bmatrix} 209 & 0 & 18 & 18 & 0 & -9 & 0 & -200 & 0 \\ 0 & 302.67 & -8 & 0 & -8 & 0 & -300 & 0 & -2.667 \\ 18 & -8 & 80 & 24 & 16 & -18 & 0 & 0 & 8 \\ 18 & 0 & 24 & 48 & 0 & -18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 16 & 0 & 32 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ -9 & 0 & -18 & -18 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -300 & 0 & 0 & 0 & 0 & 300 & 0 & 0 \\ -200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 200 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 2.667 \end{bmatrix}$$

16–14. $D_1 = -16.678\,(10^{-3}) = -16.7\,(10^{-3})$ mm
$D_3 = 0.37479\,(10^{-3}) = 0.375\,(10^{-3})$ rad

Bu sonuçlar kullanılarak mesnet tepkileri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$Q_6 = -3.336$ kN
$Q_7 = 12.22$ kN
$Q_8 = 3.336$ kN
$Q_9 = 7.78$ kN

16–15. $Q_5 = -36.3$ kN
$Q_6 = -46.4$ kN
$Q_7 = 36.3$ kN
$Q_8 = 46.4$ kN
$Q_9 = 77.1$ kN · m

16–17. $Q_6 = 8.50$ kN; $Q_7 = 52.6$ kN; $Q_8 = 56.5$ kN;
$Q_9 = 3.43$ kN

Konu Dizini

Açı yöntemi, 460–495, 544–545
  açısal yerdeğiştirmeler (θ), 463–464
  ankastrelik momentleri (ANKM), 466–468, 544–545
  çerçeve sistem hesabı, 477–489
  çubuk birim yerdeğiştirme sabiti (k), 467
  değişken kesitli çubuk elemanlar, 544–545
  doğrusal yerdeğiştirmeler (Δ), 463, 465
  düğüm noktası dönmesi ve, 544–545
  elastik eğri kirişinin dönme açısı (ψ), 467
  göreli düğüm noktası ötelenmesi, 544
  ilkeleri, 463–468, 495
  işaret kabulü, 463
  kiriş hesabı, 469–476
  mafsallı kenar açıklıklar, 468
  yerdeğiştirme yöntemi, 460–495
Açısal birim kuvvet sabiti, 409
Açısal yerdeğiştirme (θ), 463–464, 587-588
Altbölümlere ayrılmış kafes sistemler, 86
Amerikan Beton Enstitüsü (ACI), 9
Amerikan Çelik Yapı Enstitüsü (AISC), 9
Amerikan Demiryolu Mühendisliği Birliği (AREA), 9, 15
Amerikan Devlet Karayolu ve Ulaştırma İdareleri Birliği (AASHTO), 9, 15
Amerikan İnşaat Mühendisleri Birliği (ASCE), 9
Amerikan Orman ve Kağıt Birliği (AFPA), 9
Ana kirişler, 5, 38, 40, 230–233, 267, 626–627
  çerçeve planları, 40
  idealiz edilmiş yapı elemanları, 38
  mesnetler ve birleşimler, 38
  modelleme, 626–627
  panel noktaları, 230–233
  tesir çizgileri, 230–233, 267
  yapısal yükler ve, 5
Ankastre kemer, 196
Ankastre mesnetli birleşimler, 36–37, 39, 80, 278–279, 303, 306, 331
  idealize edilmiş yapı sistemleri, 36–37, 39, 80
  portal çerçeveler ve kafesler, 278–279, 303
  sehim and, 306, 331
  sıfır yerdeğiştirme, 331
Ankastrelik momentleri (ANKM), 466–468, 498, 501–504, 519, 534–537, 541, 544–545
  açı-yerdeğiştirme denklemleri ve, 466–468, 498, 541
  çerçeve sistemler, 498, 519
  değişken kesitli çubuk elemanlar, 534–537, 541, 544–545
  guse özellikleri, 534–537
  kirişler, 466–498, 501–504, 534–537, 541, 544–545
  kirişlerin göreli düğüm noktası ötelenmesi, 541
  moment dağıtma yöntemi ve, 498, 501–504, 519, 544–545
Aşıklar, 84, 629
Atmosferik korozyon, 630

Bağ kuvvetleri, çözümde izlenecek yol, 60
Bağlantı levhası, 83
Baltimore tipi kafes sistem, 86-87
Basınç kuvveti (B), 88, 96–97
Basit kafes sistem, 89, 92, 136
Basit kiriş, 167, 248–249, 267
Betonarme kirişler, 5
Betti kanunu, 412-413
Bilinmeyen kuvvetler, belirlenmesi, 96–97, 103
Bileşik kafes sistemler, 90, 92, 108–111, 136
  çözümlenmesi, 108–111
  kararlılık, 92
  sınıflandırılması, 90
Bileşke kuvvet katsayıları, 24
Bilgisayar çözümlemesi, 622–638
  başlangıç adımları, 631
  çubuk eleman veri girişi, 632
  düğüm noktası tanımlanması, 631–632
  düğüm noktası veri girişi, 632–633
  global (yapı) koordinatlar, 632, 634
  lokal (eleman) koordinatlar, 632, 634
  mesnet verisi girişi, 633
  otomatik birleştirme, 634
  program işleyişi, 632
  yapı bilgisi, 632–633
  yapısal modelleme, 622–629
  yük veri girişi, 633–634
Bilgisayar çözümlemesi için otomatik birleştirme, 634
Bina ve tasarım yönetmelikleri, 9
Bina çerçeveleri, 274–293, 302–303. *Ayrıca bkz.* Çerçeveler
  ankastre bağlı, 278, 303
  düşey yükler, 274–276, 302
  konsol çerçeve yöntemi, 288–293, 303
  mafsallı bağlı, 277, 303
  yaklaşık hesap 274–293, 302–303
  yatay çerçeve (portal) yöntemi, 282–287, 303
  yatay yükler, 282–293, 303
Bina yükleri, 12–14, 16–17, 21–23
  asgari kullanım, 12–14
  rüzgâr basıncı ve, 21–23
  rüzgâr doğrultu etkisi, 16–17
Birim kuvvet sabitleri, 408–410, 412–413, 432
  açısal, 409
  doğrusal, 408–409
  matris formu, hesabı, 432
  Maxwell karşıt yerdeğiştirmeler teoremi, 412–413
  kuvvet yöntemi, 408–410, 412–413, 432
Birim matris, 639
Birim yerdeğiştirme, 553, 557, 588–589
Birim yük, 212, 219, 408–410, 435
  birim kuvvete karşılık gelen yerdeğiştirme, 408
  kuvvet yöntemi, 408–410
  tepki kuvvetleri için tesir çizgileri, 212, 219, 435
Birim şekil değiştirme enerjisi, 349–353, 363–364, 381–386, 402
  burulma ve, 382
  dış kuvvetlerin işi ve, 349–353, 402
  doğrusal elastik davranış ve, 381–382
  eğilme momenti, 352
  eksenel kuvvet, 352,381
  elastik, 349
  enerjinin korunumu ilkesi, 349, 353, 402
  iş ve enerji ilkesi, 353
  kesme kuvveti ve, 381
  sehim (açısal yerdeğiştirme) ve, 349–353, 363–364, 381–386, 402
  sıcaklık değişimleri ve, 382–383
  virtüel, 381–386
  virtüel iş yöntemine uygulanışı, 383–386
Birim yerdeğiştirme sabiti (K), 498–501, 510–515, 531, 534–537, 538–540
  çubuk, 498
  çubuk-göreli, 500
  değişiklikleri, 510–515
  değişken kesitli çubuk elemanlar, 534–537, 538–540
  düğüm noktası, 499
  mafsallı çubuklar, 510, 538
  moment dağıtma ve, 498–501, 510–515, 531, 538–540
  Portland Çimento Birliği yayınları, 535–537
  simetrik kirişler, 511–512, 539–540
  yerdeğiştirme yöntemi ve, 498–501, 510–515, 531
Birleşimler (Düğüm noktaları), 36–37, 83, 88, 116–117, 306, 331, 482–489, 496–531, 541, 544
  ankastrelik momentleri (ANKM), 498, 501–504, 541
  çerçeve sistemler, 482–489, 516–525
  çözümde izlenecek yol, 505
  dağıtma sayısı (DS), 499, 501
  değişken kesitli çubuk elemanlar, 541, 544
  dönme, 544
  geçiş sayısı (GS), 500, 502
  göreli düğüm noktası ötelenmesi, 541, 544
  idealize edilmiş yapı sistemleri, 36–37
  kafes sistemler, 83, 88, 116–117
  kirişler, 306, 331, 498–515, 541
  moment dağıtma yöntemi, 496–531
  sehim ve, 306, 331
  statikçe belirsiz yapı sistemleri, 496–531
  yanal ötelenme ve, 482–489, 518–525
  yerdeğiştirme, 482–489, 518–525
Boylamalar, 86
Burulmanın virtüel birim şekil değiştirme enerjisine etkisi, 382
Büküm noktası, 307, 310

Castigliano teoremi (ikinci), 363–369, 387–392, 403, 533
  açısal yerdeğiştirme, 363–369, 387–392, 403
  çerçeveler, 387–392, 403
  çözümde izlenecek yol, 365, 388
  değişken kesitli çubuk elemanlar, 533
  doğrusal elastik davranış ve, 363–364
  kafes sistemler, 363–369, 403
  kirişler, 387–392, 403

Çapraz bağlantı elemanları, 4
Çarpma katsayısı (yükler), 16
Çatı makaslı çerçeve, 84
Çatı sistemler, 20, 25–26, 44, 46, 84–85
  aşıklar, 84
  çatı makaslı çerçeve, 84
  idealize edilmiş yapı sistemi, 44, 46
  iki doğrultuda çalışan sistemler, 44, 46
  kafes sistemler, 84–85
  kar yükleri, 25–26
  makas aralığı, 84
  rüzgâr yükleri, 20
  yük aktarımı, 44, 46
Çekme kuvveti ($Ç$), 4, 88, 96–97
Çerçeveve sistemler, 8, 33, 40–41, 160–164, 274–293, 302–303, 305–310, 370–392, 403, 422–425, 439–445, 477–489, 496–500, 516–525, 604–621
  açı yöntemi, 477–489

açısal yerdeğiştirme, 370–380, 387, 403
ankastre mesnetli, 278, 303
ankastrelik momentleri (ANKM), 498, 519
bina, 274–293, 302–303
birim yerdeğiştirme sabiti (K), 408–500, 531
büküm noktası, 307, 310
Castigliano teoremi, 387–392, 403
çok katlı, 518–519
çözümde izlenecek yol, 372, 388, 610–611
düğüm noktaları hareketli, 482–489, 518–525
düğüm noktaları sabit, 477–481, 516–517
düğüm noktası yerdeğiştirmesi, 482–489, 518–525
düşey yükler, 274–276, 302
eğilme momentleri ve, 605–606
eksenel kuvvet ve, 605–606
elastik eğri, 305–310
eleman rijitlik matrisi (**k**), 605–606, 609
global rijitlik matrisi (**k**) for, 609
iç kuvvetler, 160–164
iç kuvvetler için işaret kabulü, 140, 160
idealize edilmiş yapı planları, 40–41
kesme kuvveti ve, 605–606
kesme kuvveti ve moment diyagramları, 160–164
konsol çerçeve yöntemi, 288–293, 303
kuvvet dönüşüm matrisi (**Q**), 608
kuvvet yöntemi, 422–425
sehim (elastik eğri), 305–310, 370–392, 403
sehim diyagramı, 306–311
mafsallı, 277, 303
matris yerdeğiştirme yöntemi, 604–621
mesnetler ve, 306
moment dağıtma, 496–500, 516–525
moment diyagramları, 307
portal sistemler, 277–281, 303
statikçe belirli, 370–392, 403
statikçe belirsiz, 422–425, 439–445, 477–489, 477–489, 496–500, 516–525
tesir çizgileri, 439–445
virtüel birim şekil değiştirme enerjisi ve, 381–386
virtüel eğilme momenti, 370
virtüel iş yöntemi, 370–380, 403
yaklaşık hesap, 274–293, 302–303
yapı rijitlik matrisi (**K**), 610–611
yapı sistemleri, 8, 33
yatay çerçeve (portal) yöntemi, 282–287, 303
yatay yükler, 282–293, 303
yerdeğiştirme dönüşüm matrisi (**T**), 607
yerdeğiştirme yöntemi, 477–489, 496–500, 516–525
yük-yerdeğiştirme bağıntıları, 605–606
Çift integrasyon yöntemi, 313–319, 346
çözümde izlenecek yol, 314
işaret kabulü, 313
kiriş sehim hesabı, 313–319, 346
sınır koşulları, 313
süreklilik koşulları, 313
Çift integrasyon yöntemi için sınır koşulları, 313
Çift integrasyon yöntemi için süreklilik koşulları, 313
Çubuk birim yerdeğiştirme sabiti, 498
Çubuk değiştirme yöntemi, 112–115, 137
Çubuk eleman veri girişi, 632
Çubuk göreli-birim yerdeğiştirme sabiti, 500

Dağıtma sayısı (DS), 499, 501
Değişken kesitli çubuk elemanlar, 532–547
açı yöntemi, 544–546
ankastrelik momentleri (ANKM), 534–537, 541, 544–545
birim yerdeğiştirme sabiti (K), 534–537, 538–540
dönme, 544–545
eşlenik-kiriş yöntemi, 535
geçiş sayısı (GS), 534–537
göreli düğüm noktası ötelenmesi, 541, 544
gusseler, 533–537
kirişler, 538–543
mafsallı bağlı, 538
moment dağıtma yöntemi, 538–543
Portland Çimento Birliği yayınları, 535–537
simetrik, 539–540
yerdeğiştirmeler, denklemler, 533
yükleme özellikleri, 533–537
Denge, 50–51, 58–67, 81, 91, 116, 407, 411, 458, 499, 501, 531
çözümde izlenecek yol, 60
dağıtma sayısı (GS), 499, 501
denklemleri, 50, 58–67, 81
düğüm noktaları, 499, 501, 531
geometrik uygunluk denklemleri ve, 51
kafes sistemler, 91, 116
koşulları, 50
kuvvet yöntemi, 58–60, 407, 411, 458
moment dağıtma yöntemi ve, 499, 501, 531
serbest-cisim diyagramları, 50, 58–67
statikçe belirli yapı sistemleri, 58–67, 81
statikçe belirlilik ve, 51, 58–59, 81, 91, 116
statikçe belirsiz yapı sistemleri, 81, 407, 411, 458, 499, 501, 531
yapısal kararlılık ve, 55–56
yerdeğiştirmeler, 407, 411, 458
Deprem yükleri, 26–27
dinamik analiz, 26–27
ivme tepki spektrumu, 27
statik analiz, 27
Dış kuvvetlerin işi, 349–353, 363–364, 402
birim şekil değiştirme enerjisi ve, 349–353, 402
enerjinin korunumu ilkesi, 349, 353, 402
iş ve enerji ilkesi, 353
kuvvet ve, 350–351
moment, 351
sehim (açısal yerdeğiştirme) ve, 349–353, 363–364, 402
Dış yük, 356, 590
global (yapı) koordinat sistemi, 590
kafes sistem yerdeğiştirmeleri ve, 356
Dıştan kararlılık, 91, 116, 137
Dirsek tipi çapraz bağlantı elemanı, 84
Doğrusal elastik davranış, 305, 363–364, 381–382
birim şekil değiştirme enerjisi ve, 381–382
Castigliano teoremi, 363–364
sehim ve, 305
Doğrusal birim kuvvet sabitleri, 408–409
Doğrusal yerdeğiştirmeler (Δ), 463, 465, 587–588
Donatı çubukları, 308–309
Dönme, 288–293, 278, 382–383, 412–413, 544–545
açı yöntemi, 544
bina çerçeveleri, 288–293
değişken kesitli çubuk elemanlar, 544–545
kiriş boyunca etkiyen sıcaklık değişimi, 382–383
konsol çerçeve yöntemi, 288–293
Maxwell karşıt yerdeğiştirmeler teoremi, 412–413
portal çerçeve mesnetleri, 278
statikçe belirli yapı sistemleri, 382–383
statikçe belirsiz yapı sistemleri, 412–413
virtüel birim şekil değiştirme enerjisi ve, 382–383
yatay yükler ve devrilme, 288–293
Dönme açısı, 348–403, 588
birim şekil değiştirme enerjisi ve, 352, 381–386
Castigliano teoremi (ikinci), 363–369, 387–392, 403
çerçeve sistemler, 370–380, 387, 403
dış kuvvetlerin işi ve, 350–351
elemanları (θ), 351–352, 355, 370–380, 387, 402–403
kafes sistemler, 356–362, 364–369, 402
kirişler, 370–380, 387, 403, 588
kuvvet (Δ), 350–351, 353–362, 364–380, 387–392, 402–403
rijitlik matrisi, 588
statikçe belirli yapı sistemleri, 348–403
virtüel iş yöntemi, 356–362, 370–380, 402–403
Dört yüzlü, 116. *Ayrıca bkz.* Uzay kafes sistemler
Döşeme plağı, *bkz.* Döşemeler
Döşemeler, 40–47, 80, 230–233, 267
ana kirişler, 40, 230–233, 267
döşeme kirişleri, 40
idealize edilmiş yapı, 40–47, 80
iki doğrultuda çalışan döşeme sistemi, 44–45, 80
kirişler, 40–41, 230
kolonlar, 230
panel noktaları, 230–233
tek doğrultuda çalışan döşeme sistemi, 42–43, 80, 230
tesir çizgileri, 230–233, 267
yük aktarımı, 42–43
yük geçişi, 230
Düğüm noktaları, 466, 550, 570–573, 585–586, 631–633
bilgisayar çözümlemesi ve, 631–633
kafes sistemler, 570–573
kirişler, 466, 585–586
koordinatlar, 550, 570–573, 632
kuvvet (esneklik) yöntemi, 466
matris yerdeğiştirme yöntemi ve, 550
serbestlik dereceleri ve, 466
tanımlanması, 466, 550, 585–586, 631
veri girişi, 632–633
Düğüm noktaları yöntemi, 96–99, 119, 137
Düğüm noktası birim yerdeğiştirme sabiti, 499
Düğüm noktası yükleri, kafes sistemler, 88, 234–237
Düşey yükler, 270–276, 302
bina çerçeveleri, 274–276, 302
kafes sistem çapraz-diyagonal bağlantı elemanı, 270–273
Düzgün yayılı yükler, 12–14, 190–195, 196, 209, 219
hareketli, 12–14
kablolar, 190–195, 209
kemerler, 196, 209
kirişler, 219
tesir çizgileri ve, 219
Düzlem kafes sitemler, 6, 89–115, 136–137
basit, 89, 92, 136
bileşik, 90, 92, 108–111, 136
çözümde izlenecek yol, 97, 104, 112–113
çubuk değiştirme yöntemi, 112–115, 137
çubuk düzeni, 6, 89–95
düğüm noktaları yöntemi, 96–99, 137
karmaşık, 90, 93, 112–115, 136–137
kesim yöntemi, 102–107, 137
sıfır kuvvet çubukları, 100–101

Eğilme, 277-287, 303, 304-347, 352. *Ayrıca bkz.* Sehim
birim şekil değiştirme enerjisi ve, 352
büküm noktası, 307
eğrilik yarıçapı (ρ), 311-312
elastik eğri, 305-311, 313-314, 320-329, 346
moment diyagramları, 307
portal çerçeveler ve kafes sistemler, 277–281
sehimler, 304-347
yaklaşık hesap, 282-287, 303

yatay çerçeve (portal) yöntemi, 282–287, 303
Eğilme momentleri (**M**), 139–149, 152–153, 185, 211–218, 242–243, 246–247, 248–252, 266–267, 307–319, 330–337, 346, 587–590, 605–606
belirli bir noktadaki maksimum etki, 242–243, 246–247, 267
belirlenmesi, 139–144, 185
çerçeve sistem yerdeğiştirmeleri ve, 605–606
çözümde izlenecek yol, 141, 146
elastik eğri ve, 307, 311–312
elastik-kiriş teorisi, 311–312
fonksiyonlar, 145–149, 185
işaret kabulü, 140, 152, 307, 313
kiriş boyunca değişim, 145–149
kirişler, 145–149, 587–590
matris yerdeğiştirme yöntemi ve, 587–590, 605–606
mutlak maksimum, 248–252, 267
sehimler ve, 307–319, 330–337, 346
tekil yükler ve, 242–243, 246–252, 267
tesir çizgileri, 211–218, 266
yük ve kesme kuvveti ile olan ilişkiler, 152–153
Eğilme rijitliği (*EI*), 312
Eğrilik merkezi (*O'*), 311
Eğrilik yarıçapı (ρ), 311–312
Ek matris, 647
Eksenel kuvvet, 88, 305, 352, 552-555, 605-606
çerçeve yerdeğiştirmeleri ve, 605-606
kafes çubuk yerdeğiştirmesi ve, 88, 552-555
kiriş sehimleri ve, 305, 352
matris yerdeğiştirme yöntemi ve, 552-555, 605-606
virtüel birim şekil değiştirme enerjisi üzerindeki etkisi 381,
Elastik birim şekil değiştirme enerjisi, 349. *Ayrıca bkz.* Birim şekil değiştirme enerjisi
Elastik eğri, 305–314, 320–329, 346–347
büküm noktası, 307
eğilme rijitliği (*EI*), 312
eğim ve, 306–307, 313, 320–329
eğrilik merkezi (*O'*), 311
eğrilik yarıçapı (ρ), 311–312
elastik-kiriş teorisi ve, 311–312
moment-alan teoremleri, 320–329, 347
sehim diyagramı olarak gösterimi, 306–307, 346
sehimler ve, 305–311, 313–314, 320–329, 346
Elastik eğri kirişi dönme açısı (ψ), 467
Elastik-kiriş teorisi, 311–312
Eleman (lokal) koordinat sistemi, 550, 553–555, 586, 632, 634
Eleman rijitlik etki katsayıları, 552–553
Eleman rijitlik matrisi, *bkz.* Rijitlik matrisi
Emniyet gerilmelerine göre tasarım (ASD) yöntemleri, 28
En küçük iş yöntemi, *bkz.* Castigliano teoremi
Enerji yöntemleri, 348–403
açısal yerdeğiştirmeler, 348–403
birim şekil değiştirme enerjisi ve, 349–353, 363–364, 381–386, 402
Castigliano teoremi (ikinci), 363–369, 387–392, 403
çerçeve sistem hesabı, 370–392, 403
çözümde izlenecek yol, 358, 365, 372, 388
dış kuvvetlerin işi, 349–353, 363–364, 402
enerjinin korunumu ilkesi, 349, 353, 402
iş ve enerji ilkesi, 353
kafes sistem hesabı, 356–362, 364–369, 402–403
kiriş hesabı, 370–392, 403
kuvvet yerdeğiştirmeleri (Δ), 350–380, 387–392, 402–403
moment yerdeğiştirmeleri (θ), 351–352, 355, 370–380, 387, 402–403
virtüel birim şekil değiştirme enerjisi ve, 381–386
virtüel iş ilkesi, 354–356, 370, 402
virtüel iş yöntemi, 356–362, 370–380, 402–403
yerdeğiştirmeler (sehimler), 348–403
Enerjinin korunumu ilkesi, 349, 353, 402
Esneklik yöntemi, *bkz.* Kuvvet yöntemi
Eşlenik-kiriş yöntemi, 330–337, 347, 535
çözümde izlenecek yol, 332
değişken kesitli çubuk elemanlar, 535
kiriş sehim hesabı, 330–337, 347
mesnetler, 330–331
sıfır yerdeğiştirme, 331
teoremler, 330
Etki alanı, 13
Etki çizgisi, 96

Finiküler kemer, 196
Fink tipi kafes sistemler, 84–85

Gauss yöntemi ile denklem sistemi çözümü, 649
Geçiş sayısı (GSF), 500, 502, 534–537
Geometrik uygunluk denklemleri, 51, 407–411, 432–433, 458
kuvvet yöntemi, 407–411, 432–433, 458
statikçe belirlilik ve, 51
Gergi çubukları, 4, 33, 625
Gergili kemerler, 196
Global (yapı) koordinat sistemi, 550, 553–555, 586, 632, 634
Guseler, 533–537. *Ayrıca bkz.* Değişken kesitli çubuk elemanlar

Handbook of Frame Constants, 535
Hareketli yükler, 12–28, 33, 210–267, 628–629
azaltılmış, 13–14
binalar, 12–14
çarpma katsayısı, 16
çözümde izlenecek yol, 212
deprem, 26–27
döşeme kirişleri, 230–233, 267
düzgün yayılı, 12–14
etki alanı, 13
kafes sistemler, 234–237, 267
kar, 25–26
kirişler, 219–229, 238–252, 266
köprüler, 15
modelleme ve, 628–629
mutlak maksimum kesme kuvveti ve moment, 248–252, 267
rüzgâr, 16–24, 629
tekil yük katarı, 238–247, 267
tesir çizgileri, 210–267
yapı sistemleri ve, 12–28, 33
Hidrostatik basınç (yükler), 27
Howe tipi kafes sistemler, 84–87

İç kuvvetler, 138–185, 304–347, 590
belirli noktalardaki, 139–144, 185
çerçeve sistemler, 160–164, 305–307, 310
çözümde izlenecek yol, 141, 146, 154
eğilme momenti (**M**), 139–149, 185, 305–319, 330–337, 346
elastik eğri, 305–311, 313–314, 320–329, 346
iç eğilme momenti (*M*) and, 305–319, 330–337, 346
işaret kabulü, 140, 152
kesim yöntemi, 139–144
kesme kuvveti (**V**) ve, 139–149, 185, 330–337
kesme kuvveti ve moment diyagramları, 150–164, 185
kesme kuvveti ve moment fonksiyonları, 145–149, 158
kirişler, 150–159, 165–169, 304–347
lokal (eleman) koordinat sistemi, 590
moment diyagramları, 165–169
normal kuvvet (**N**) ve, 139–144, 185
sehimler, 304–347
süperpozisyon yöntemi, 165–169, 185
İçten kararlılık, 92–93, 116, 137
İdealize edilmiş yapı sistemleri, 35–47, 80
ana kirişler, 38, 40
birleşimler, 36–37
çerçeve planları, 40–41
çizgisel gösterimler, 40–41
kirişler, 36–37, 40–41
mesnetler ve birleşimler, 36–39, 80
modeller, 36–37
yük aktarımı, 42–47, 80
İki mafsallı kemerler, 196
İş, 349–364, 370–380, 402–403
açısal yerdeğiştirme ve, 349–364,
dış kuvvetlerin, 349–353, 363–364, 402
iş ve enerji ilkesi, 353
kuvvet ve, 350–353
moment (büyüklük), 350, 370–380, 402–403
sehim (açısal yerdeğiştirme) ve 349–364, 370–380, 402–403
virtüel, 354–362, 370–380, 402–403
İş ve enerji ilkesi, 353
İşaret kabulü, 140, 152, 160, 307, 313, 463, 498, 587
açı yöntemi, 463
çift integrasyon yöntemi, 313
eğilme momentleri, 140, 152, 307, 313
iç kuvvetler, 140, 152, 160
kesme kuvveti ve moment diyagramları, 152, 160
matris yerdeğiştirme yöntemi ve, 587
moment dağıtma yöntemi, 498
İvme tepki spektrumu, 27

K tipi kafes sistem, 86–87
Kablolar, 7, 33, 39, 187–195, 209
düzgün yayılı yükler ve, 190–195, 209
esneklik, 188
mesnetler ve birleşimler, 39
parabol şekilli, 191, 209
tekil yükler ve, 188–189, 209
uzamazlık özelliği, 188
yapı sistemleri, 7, 33, 187
zincir eğrisi, 191
Kabloların uzamazlık özelliği, 188
Kademeli guseler, 533
Kinematik belirsizlik, 462–463, 551, 586–587
Kiriş başlıkları, 5
Kabloların esnekliği, 188
Kafes sistemler, 6–7, 33, 82–137, 234–237, 267, 270–273, 279–281, 302, 356–362, 364–369, 402–403, 426–428, 548–583
açısal (kuvvet) yerdeğiştirmeler (Δ), 356–362, 364–369, 402
alt bölümlere ayrılmış, 86
bağlantı levhası, 83
basit, 89, 136
bileşik, 90, 108–111, 136
bilinmeyen kuvvetler, belirlenmesi, 96–97, 103
birim yerdeğiştirme, 553, 557
Castigliano teoremi, 364–369, 403
çatı sistemler, 84–85
çözümde izlenecek yol, 97, 104, 112–113, 119, 358, 365, 563
çubuk eleman doğrultu kosinüsleri, 554
çubuk yerdeğiştirme yöntemi, 112–115, 137
dış yükler ve, 356

düğüm noktaları, 550
düğüm noktaları yöntemi, 96–99, 119, 137
düğüm noktası yükleri, 88, 234–237
düzlem, 89–95
düzlemsel, 6, 83, 96–99, 137
eksenel yüklü çubuk eleman, 88, 552–555
eleman rijitlik matrisi (**k**), 551–553, 580–581
enerji yöntemleri, 356–362, 364–369, 402–403
imalat hataları, 357, 402, 574–579
kararlılık, 91–95, 116, 137
karmaşık, 90, 112–115, 136
kesim yöntemi, 102–107, 119, 137
kinematik belirsizlik, 550
koordinat sistemleri, 550, 553–555, 570–573
köprü, 86–87, 234–237, 270–273
kuvvet dönüşüm matrisi (**Q**), 551, 555, 574–579
kuvvet yöntemi, 426–428
mafsallı birleşimler, 88, 136
matris çözümleme, 557–573, 575–579, 581
matris yerdeğiştirme yöntemi, 548–583
mesnetler ve birleşimler, 88, 116–117
noktasal koordinatlar, 570–573
portal sistemler, 279–281
şehim, 356–362, 364–369, 402–403
serbestlik dereceleri, 551
sıcaklık etkileri, 357, 402, 574–579
sıfır kuvvet çubukları, 100–101, 118–119
sonlu elemanlar, 550
statikçe belirli, 82–137, 234–237, 267, 356–362, 364–369, 402–403
statikçe belirlilik, 91, 116, 136
statikçe belirsiz, 270–273, 279–281, 302, 426–428
ters şehim, 357
tasarım kabulleri, 88, 116, 136
tesir çizgileri, 234–237, 267
uzay, 6, 116–122, 580–581
X çaprazı şeklindeki bağlantı elemanı, 270–273, 302
virtüel iş yöntemi, 356–362, 402
yaklaşık hesap, 270–273, 279–281, 302
yapı rijitlik denklemi, 562–569
yapı rijitlik matrisi (**K**), 551, 557–561
yapı sistemleri, 6–7, 33
yerdeğiştirme dönüşüm matrisi (**T**), 551, 553–554
Kafes sistemlerde imalat hataları, 357, 402, 574–579
Kar yükleri, 25–26
Kare matris, 639
Karmaşık kafes sistemler, 90, 93, 112–115, 136–137
çubuk değiştirme yöntemi, 112–115, 137
çözümde izlenecek yol, 112–113
kararlılık, 93
sınıflandırılması, 90
yüklerin süperpozisyonu, 113
Kayıcı mafsallı mesnetler, 36, 38–39, 306, 311, 510
Kenar açıklıklar, mafsallı bağlı, 468
Kesin hesap, 270
Kesme kuvveti (**V**), 139–149, 152–153, 185, 211–218, 231, 240–241, 244–245, 248, 266–267, 381, 436, 587–590, 605–606
belirlenmesi, 139–144, 185
bir noktadaki maksimum, 240–241, 244–245
çerçeve sistemler, 605–606
çözümde izlenecek yol, 141, 146
döşeme kirişleri, 231
fonksiyonları, 145–149, 185
iç kuvvetler, 139–149, 185
işaret kabulü, 140, 152
matris yerdeğiştirme yöntemi ve, 587–590, 605–606
mutlak maksimum, 248, 267
kiriş boyunca değişim, 145–149
kiriş uçları, 587–590
kiriş noktaları, 436
panel, 231
tekil yüklerden oluşan yük katarı ve, 240–241
tesir çizgileri, 211–218, 266, 436
virtüel birim şekil değiştirme enerjisi, 381
yük ve moment ile ilişkisi, 152–153
Kesme kuvveti ve moment diyagramları, 150–164, 185
çerçeve sistemler, 160–164
çözümde izlenecek yol, 154
eğim, 151, 153, 185
iç kuvvetler ve, 150–164
işaret kabulü, 152, 160
kirişler, 150–159
yayılı yükler ve, 150–151
yük, kesme kuvveti ve moment arasındaki ilişkiler, 152–153
Kesme mafsalı, 436
Kiriş gövdesi, 5
Kiriş kolonlar, 6
Kirişler, 5, 33, 36–37, 40–41, 145–159, 165–169, 219–229, 238–252, 266, 304–347, 370–392, 403, 413–421, 435–438, 463–476, 498–515, 532–547, 584–603, 626–627
açı yöntemi, 463–468, 544-545
açıklık yüklemeleri, 590
açısal yerdeğiştirmeler (θ), 463–464, 587-588
ankastre mesnet, 306, 331
ankastrelik momentleri (ANKM), 466–468, 498, 501–504, 534-537, 541, 544,545
antisimetrik yükleme, 512, 540
basit kiriş, 167, 248–249
belirli noktalardaki mesnet tepkileri, 435
belirli noktalardaki momentler, 437
beton, 5
birleşimler, 36-37, 306
birim yerdeğiştirme, 588-589
birim yerdeğiştirme sabiti (K), 498-501, 510–515, 534-540
boyunca eğilme momenti (M) değişimleri (fonksiyonları), 145-149
boyunca kesme kuvveti (V) değişimleri (fonksyionları), 145-149
boyunca yayılı yükler, 150–151
büküm noktası, 307
Castigliano theoremi, 387–392, 403
çerçeve planları, 40-41
çift integrasyon yöntemi, 313–319, 346
çözümde izlenecek yol, 146, 154, 314, 322, 332, 372, 388, 438, 469, 505, 591
çubuk uç kuvvetleri, 590
dağıtma sayısı (DS), 499, 501
değişken kesitli çubuk elemanlar, 532–547
doğrusal yerdeğiştirmeler, (Δ), 463, 465, 587-588
donatı çubukları, 308-309
dönme açısı, 370-380, 387, 403, 544, 588
düğüm noktası tanımlanması, 466, 585-586
düğüm noktaları, 498-515
düzgün yayılı yükler, 219
eleman (lokal) koordinat sistemi, 586
eleman rijitliği (k), 467
eleman rijitlik matrisi (**k**), 587–588
elastik eğri, 305-311, 313-314, 320-329, 346
elastik-kiriş teorisi, 311-312
eşlenik-kiriş yöntemi, 330–337, 347
geçiş sayısı (GS), 500, 502, 534-537
global (yapı) koordinat sistemi, 586
göreli düğüm noktası ötelenmesi, 541, 544-545
hareketli yükler ve, 219-229, 238-252, 266
iç eğilme momenti (M) ve, 305–319, 330-337, 346
iç kuvvetler, 145–159, 165–169
iç virtüel moment, 370
idealize edilmiş yapı elemanları, 36-37, 40-41
işaret kabulü, 140, 152, 463, 498, 587
kayıcı mafsallı, 306, 331
kesme kuvveti (V) ve, 330-337, 436, 587-590
kesme kuvveti ve moment diyagramları, 150–159
kinematik belirsizlik, 586–587
kiriş başlıkları, 5
kiriş gövdesi, 4
kiriş tasarımında süperpozisyon ilkesi, 165-169
kiriş yerdeğiştirmeleri için enerji yöntemleri, 370-392, 403
kuvvet yöntemi, 413–421
konsol, 166, 248-249, 414
mafsallı, 331, 447
mafsallı bağlı, 306, 331, 437, 468, 510, 538
matris yerdeğiştirme yöntemi, 584–603
mesnetler ve birleşimler, 36-37, 306, 330-331, 538
modellenmesi, 626-627
moment-alan teoremleri, 320–329, 347
moment dağıtma yöntemi, 501-515, 538-543
moment diyagramları, 150-159, 165-169
mutlak maksimum kesme kuvveti ve moment, 248-252, 267
Müller-Breslau ilkesi, 222–229, 266, 435-438
rijitlik matrisi (**K**), 589
şehimler, 222–229, 266, 304–347, 370–392, 403
serbest, 331
simetrik, 511–512, 539–540
simetrik yüklemeler, 511, 539
statikçe belirli, 219-229, 238–252, 266, 304-347, 370-392, 403
statikçe belirsiz, 413–421, 435–438, 463-476, 498-515
sürekli, 414
tabakalı, 5
tekil kuvvetler, 219
tekil yüklerden oluşan yük katarı, 238-252
tesir çizgileri, 219–229, 238–252, 266, 435–438
virtüel birim şekil değiştirme ve, 381-386
virtüel iş yöntemi, 370–380, 403
yapı elemanları, 5, 33
yerdeğiştirme yöntemleri, 469–476, 498-515
yük, kesme kuvveti ve moment arasındaki ilişkiler, 152-153
Kirişlere etkiyen yayılı yükler, 150–151
Kemerler, 7, 33, 196–202,209
ankastre, 196
düzgün yayılı yükler ve, 196, 209
finiküler, 196
gergili, 196
iki mafsallı, 196
parabol şekilli, 196, 209
üç mafsallı, 196–202, 209
yapı sistemleri, 7, 33
Kesim yöntemi, 50, 102–107, 119, 137, 139–144
çözümde izlenecek yol, 104, 119, 141
düzlem kafes sistem hesabı, 102–107, 137
iç kuvvetler, 50, 139–144
uzay kafes sistem hesabı, 119
Kısmen ankastre bağlı portal çerçeveler, 278
Klavuzlu mesnetler, 39
Kolonlar, 6, 33, 230, 628
modelleme, 628
yapı elemanı olarak, 6, 33, 230
Kompozit yapı sistemleri, kuvvet yöntemi, 429–431
Konik geçişli guseler, 533, 536
Konsol çerçeve yöntemi, 288–293, 303
Konsol kiriş hesabı, 414
Konsol kirişler, 166, 248–249, 267, 414

Koordinatlar, 550, 553–555, 570–573, 586, 632, 634
bilgisayar çözümelemesi ve, 632, 634
dönüşüm matrisleri, 553–555
eleman (lokal) sistemi, 550, 553–555, 586, 632, 634
global (yapı) sistemi, 550, 553–555, 586, 632, 634
kafes sistemler, 550, 553–555
kirişler, 586
matris yerdeğiştirme yönteminde kullanımı, 550
noktasal, 570–573, 632
Köprüler, 15, 86–87, 234–237, 414. *Ayrıca bkz.* Portal
boylama kirişleri, 86, 234
çerçeveler; Kafes sistemler
demiryolu, 15
düğüm noktası yüklemeleri, 234–237
enleme kirişleri, 86
kafes sistemler, 86–87, 234–237
karayolu, 15
konsol, 414
kuvvet yöntemi, 414
rüzgâr bağlantısı, 86
tabliye, 86
tesir çizgileri, 234–237
yük aktarımı, 234
yükler, 15
Köşegen matris, 639
Kuvvet, 4–5, 24, 38–40, 50, 88, 96–107, 118–119, 139–144, 145–149, 185, 211–219, 266, 350–380, 387–392, 402–403, 552–555, 587–590. *Ayrıca bkz.* Yükler
basınç kuvveti (*B*), 88, 96–97
bileşke kuvvet katsayıları, 24
bileşke (**F**) mesnet tepkileri, 38–40
bilinmeyen, belirlenmesi, 96–97, 103
birim şekil değiştirme enerjisi ve, 352
Castigliano teoremi, 363–369, 387–392, 403
çekme kuvveti (*Ç*), 4, 88, 96–97
denge, 50
dış kuvvetlerin işi (**P**), 350–351
düğüm noktaları yöntemi ve, 96–99
eksenel kuvvet, 88, 305, 352, 552–555
enerji yöntemleri ve, 350–380, 387–392, 402–403
etki çizgisi, 96
iç kuvvetler ve, 139–144, 145–149, 185
idealize edilmiş yapı sistemleri, 38–40
iş ve enerji ilkesi, 353
kafes sistem çubukları, 88, 96–107, 118–119
kesim yöntemi ve, 102–107
kesme kuvveti (**V**), 5, 139–144, 145–149, 185, 587–590
kuvvetin şiddeti, 96
matris yerdeğiştirme yöntemi ve, 552–555, 587–590
normal kuvvet (**N**), 38, 139–144, 185
sıfır kuvvet çubukları, 100–101, 118–119
tekil, 219
tepki kuvvetleri için tesir çizgileri, 211–218, 266
x, *y*, *z* kuvvet bileşenleri, 118
virtüel iş ve, 354–362, 370–380, 402–403
yapı elemanı, 4–5, 590
yerdeğiştirme (Δ), 350–380, 387–392, 402–403
Kuvvet çifti momentleri, 355, 387
Kuvvet dönüşüm matrisi (**Q**), 555, 574–579, 608
Kuvvet yöntemi, 58–60, 404–459, 549
açısal birim kuvvet sabiti, 409
Betti kanunu, 412–413
birim kuvvet matrisi, 432–433
birim kuvvet sabitleri, 408–410, 412–413, 432
birim kuvvete karşılık gelen yerdeğiştirme, 408
birim yük ve, 408–410
çerçeve sistem hesabı, 422–425, 439–445
çözümde izlenecek yol, 411
denge denklemleri for, 58–60
doğrusal birim kuvvet sabiti, 408–409
kafes sistem hesabı, 426–428
kiriş hesabı, 413–421, 435–438
kompozit yapı sistemleri, 429–431
kuvvet-yerdeğiştirme koşulları, 407, 458
Maxwell karşıt yerdeğiştirmeler teoremi, 412–413, 435–438, 458
simetrik yapı sistemleri, 433–434, 459
statikçe belirsiz yapı sistemleri, 404–459
tesir çizgileri, 435–445, 459
yerdeğiştirme geometrik uygunluk koşulu, 407–411, 432–433, 458
yerdeğiştirme yöntemi ile karşılaştırılması, 407, 549
yerdeğiştirmelerin dengesi, 407, 411, 458

Laplace açılımı, 645

Mafsallı birleşimler, 36–37, 39, 88, 277, 279, 303, 306, 331, 437, 468, 510, 538
açı-yerdeğiştirme denklemi, 468
birim yerdeğiştirme sabiti (*K*) değişiklikleri, 510
değişken kesitli çubuk elemanlar, 538
idealize edilmiş yapı sistemleri, 36–37, 39
kafes sistemler, 88, 279
kenar açıklıklar, 468
kirişler, 36–37, 39, 306, 331, 468, 510
moment dağıtma, 510, 538
portal çerçeveler, 277, 303
sehim ve, 306, 311
tesir çizgileri, 437
Makas aralığı, 84
Makas biçimli kafes sistem, 84–85
Matris determinatı, 644–646
Matris elemanları, 638
Matris tersi, 646–648
Matris yöntemler, 432–433, 549–551
birim kuvvet (kuvvet yöntemi) matrisi, 432–433
düğüm noktası tanımlanması, 466, 550
karşılaştırılması, 407, 549
kinematik belirsizlik ve, 551
koordinat sistemleri, 550
rijitlik (yerdeğiştirme yöntemi) matrisi, 549–551
Matrisin ayrıştırılması, 643–644
Matris yerdeğiştirme yöntemi, 548–583, 584–603, 604–621
açıklık yüklemeleri ve, 590
birim yerdeğiştirme, 553
çerçeve sistem hesabı, 604–621
çözümde izlenecek yol, 563, 591, 610–611
çubuk uç kuvvetleri ve, 590
düğüm noktası tanımlanması, 550, 585–586
eğilme momentleri ve, 587–590, 605–606
eksenel kuvvetler ve, 552–555, 605–606
eleman (lokal) koordinat sistemi, 550, 553–555, 586
eleman rijitlik matrisi (**k**), 551–553, 556–557, 587–588, 605–606, 609
global (yapı) koordinat sistemi, 550, 553–555, 586
imalat hataları ve, 574–579
kafes sistem hesabı, 548–583
kesme kuvveti ve, 587–590, 605–606
kinematik belirsizlik ve, 551, 586–587
kiriş hesabı, 584–603
kuvvet dönüşüm matrisi (**Q**), 555, 574–579, 608
matris çözümleme, 557–573, 575–579, 581
noktasal koordinatlar, 570–573
serbestlik dereceleri, 551
sıcaklık değişimleri ve, 574–579
uzay kafes sistem hesabı, 580–581
yapı rijitlik denklemi, 562–569
yapı rijitlik matrisi (**K**), 550–551, 557–561, 589, 610–611
yerdeğiştirme dönüşüm matrisi (**T**), 551, 553–554, 607
yerdeğiştirmeler ve, 553–555, 585–586, 605–607
yük-yerdeğiştirme bağıntıları, 552–555, 587–590, 605–606
Matrisler, 432–433, 550–561, 574–579, 581, 587–588, 605–611, 638–653. *Ayrıca bkz.* Rijitlik matrisi ayrıştırma, 643–644
birim, 641
birim kuvvet, 432
çerçeve sistemler, 605–611
determinant, 644–646
dönüşüm, 553–555
ek, 647
eleman rijitlik (**k**), 551–553, 556–557, 581, 587–588, 605–606, 609
Gauss yöntemi ile denklem sistemi çözümü, 649
kafes sistemler, 550–553, 556–561
kare, 639
köşegen, 639
kuvvet dönüşüm (**Q**), 551, 555, 574–579, 608
kuvvet yöntemi ve, 432–433
matris elemanları, 638
matris tersi, 646–648
matrisin mertebesi, 638
matrislerin çarpımı, 640–642
matrislerin eşitliği, 640
satır, 638
simetrik, 581, 639
skaler ve, 640
sütun, 639
toplama ve çıkarma, 640
transpoze, 642–643
yapı rijitlik (**K**), 550–551, 557–561, 589, 610–611
yapısal çözümleme ve, 638–653
yerdeğiştirme dönüşüm (**T**), 551, 553–554, 607
Maxwell karşıt yerdeğiştirmeler teoremi, 412–413, 435–438, 458
Mesnetler ve birleşimler, 36–39, 80, 88, 116–117, 277–281, 303, 306, 330–331, 435–437, 468, 510, 538, 633
açı denklemi, 468
ana kirişler, 38
ankastre, 36–37, 39, 80, 278, 303, 306, 331
bilgisayar çözümlemesi için veri girişi, 633
birim yerdeğiştirme sabiti (*K*) değişiklikleri, 510
birleşimler, 36–37, 306
değişken kesitli çubuk elemanlar, 538
dönme ve, 80, 278
düğüm noktaları, 88, 116–117
eşlenik-kiriş, 330–331
kablo, 39
kafes sistemler, 88, 116–117
kayıcı mafsallı mesnetler, 36, 38–39, 116–117, 306, 331, 510
kenar açıklıklar, 468
kesme mafsalı, 436
kısmen ankastre, 278
kirişler, 36–37, 306, 330–331, 435–437, 468, 510, 538
klavuzlu, 39
küresel mafsal, 117
mafsal, 36–37, 39, 80, 277, 303, 306, 331, 437, 468, 510, 538

portal çerçeveler ve kafesler, 277–281, 303
sehim (düşey yerdeğiştirme) ve, 306, 330–331
serbest, 331
sıfır yerdeğiştirme, 331
tesir çizgileri, 435–437
uzay kafes sistemler, 116–117
yaylar, 37
Mesnetlerdeki sıfır yerdeğiştirmeler, 331
Modelleme, *Bkz.* Yapısal modelleme
Moment-alan teoremleri, 320–329, 347
birinci teorem, 320
çözümde izlenecek yol, 322
ikinci teorem, 321
kiriş sehim hesabı, 320–329, 347
Moment dağıtma yöntemi, 496–531, 538–543
ankastrelik momentleri (ANKM), 498, 501–504, 519, 541
birim yerdeğiştirme sabiti (*K*), 498–501, 510–515, 531, 538–540
çerçeve sistemler, 496–500, 516–525
çözümde izlenecek yol, 505
dağıtma sayısı (DS), 499, 501
değişken kesitli çubuk elemanlar, 538–543
düğüm noktaları hareketli, 518–525
düğüm noktaları ve, 496–531
geçiş sayısı (GS), 500, 502,
göreli düğüm noktası ötelenmesi, 541
ilkeleri, 497–500
işaret kabulü, 498
kirişler, 463–476, 498–515, 538–543
mafsallı bağlı kirişler, 510, 538
simetrik kirişler, 511–512, 539–540
statikçe belirsiz yapı sistemleri, 496–531
yerdeğiştirme yöntemi, 496–531
Moment diyagramları, 150–169, 185
basit kirişler, 167
çerçeve sistemler, 160–164
çizim yöntemi, 154
eğim, 151, 153, 185
kirişler, 150–159
konsol kirişler, 166
süperpozisyon, çizim yöntemi, 165–169, 185
Momentler (**M**), 139–149, 152–153, 166–167, 185, 211–218, 242–243, 248–252, 267, 305–319, 330–337, 346, 351–352, 355, 370–380, 387–392, 402–403, 437, 587–590, 605–606.
Ayrıca bkz. Eğilme momentleri; Ankastrelik momentleri (ANKM)
bileşke, 139, 167
bir noktadaki maksimum moment, 242–243, 246–247
birim şekil değiştirme enerjisi ve, 352
Castigliano teoremi ve, 387–392, 403
dış kuvvetlerin işi ve, 351, 402
eğilme, 139–149, 185, 211–218, 242–243, 246–247, 248–252, 266–267, 587–590, 605–606
iç eğilme, 305–319, 330–337, 346
iç kuvvetler, 139–149, 185, 305–319, 330–337, 346
enerji yötemleri, 351–352, 355, 370–380, 387–392, 402–403
iş (büyüklük), 351
işaret kabulü, 140, 152, 307
kiriş noktaları, 437
kuvvet çifti, 355, 387
matris yerdeğiştirme yöntemi ve, 587–590, 605–606
mutlak maksimum, 248–252, 267
sehim ve, 305–319, 330–337, 346
süperpozisyon ve, 166–167
tesir çizgileri ve, 211–218, 242–243,248–252, 267, 437
virtüel iş yöntemi, 370–380, 403
yerdeğiştirmeler (θ), 351–352, 355, 370–380, 387,402–403
yük ve kesme kuvveti ile ilişkisi, 152–153
Müller-Breslau ilkesi, 222–229, 266, 435–438
kayıcı düzeneğin yerdeğiştirmesi, 222–224
mafsal yerdeğiştirmesi, 224
Maxwell karşıt yerdeğiştirmeler teoremi ve, 435–438
sehim ve, 222–229, 266
statikçe belirli kirişler, 222–229, 266
statikçe belirsiz kirişler, 435–438
tesir çizgileri ve, 222–229, 266, 435

Normal kuvvet (**N**), 139–144, 185

Panel bölgesi, 230
Panel noktaları, 230–233
Panel kesme kuvveti, 231
Parabol şekiller, 191, 196, 209
Parabolik guseler, 533, 537
Parker tipi kafes sistem, 86–87
Pivot denklemi, 649
Portal çerçeveler, 277–281, 303
ankastre mesnetli, 278, 303
kafes sistemler, 279–281
kısmen ankastre, 278
mafsallı, 277, 303
yaklaşık hesap, 279–283, 297
Pratt tipi kafes sistem, 84–95
Program işleyişi, 632

Rijitlik matrisi (**K**), 550–553, 557–561, 580–581,588–589, 605–606, 609–611
açısal yerdeğiştirme ve, 588
açısal yerdeğiştirmeler ve, 587–588
çerçeve-eleman, 605–606, 609
çerçeve-yapı, 610–611
doğrusal yerdeğiştirmeler ve, 587–588
eleman (**k**), 551–553, 580–581, 587–588, 605–606, 609
eleman rijitlik etki katsayıları, 551–553, 556–557, 587–588
global, 556–557, 609
kafes-eleman, 552–553
kafes-yapı, 557–561
kiriş-eleman, 587–588
kiriş-yapı, 589
matris yerdeğiştirme yöntemi, 550–551
uzay kafes sistemler, 580–581
yapı (**K**), 550–551, 557–561, 589, 610–611
Rüzgâr bağlantısı, 86
Rüzgâr yükleri, 16–24, 629
basınç, 21–24
bileşke kuvvet katsayıları, 24
binalar üzerindeki doğrultu etkisi, 16–17
dinamik yaklaşım, 20–21
hortum, 16
işaret levhaları, 24
kapalı binalar, 21–23
kasırga, 16
modelleme ve, 629
statik yaklaşım, 18–20
yanal ötelenme, 17, 629
Rüzgârın neden olduğu yanal ötelenme, 17, 629

Sabit yükler, 10–11, 33, 628
modelleme ve, 628
özgül ağırlıklar, 10
tasarım standartları, 10–11, 33
Satır matris, 638
Sehimler, 222–229, 266, 304–347, 348–403, 533.
Ayrıca bkz. Yerdeğiştirme açısal (yerdeğiştirme), 351–352, 355, 370–380, 387, 402–403
büküm noktası, 307, 310
Castigliano teoremi (ikinci), 363–369, 387–392, 403, 533
çerçeve sistemler, 305–310, 370–392, 403
çift integrasyon yöntemi, 313–319, 346
çözümde izlenecek yol, 314, 322, 332, 358, 365, 372, 388
değişken kesitli çubuk elemanlar, 533
diyagramlar, 305–310, 346
donatı çubukları, 308–309
eğilme, 304–347
eğilme rijitliği (M/EI), 312
eğrilik yarıçapı (ρ), 311–312
eksenel kuvvetler ve, 305
elastik eğri, 305–311, 313–314, 320–329, 346
elastik-kiriş teorisi, 311–312
enerji yöntemleri, 348–403
enerjinin korunumu ilkesi, 349, 353, 402
eşlenik-kiriş yöntemi, 330–337, 347
iç eğilme momenti (M) ve, 305–319, 330–337, 346
kafes sistemler, 356–362, 364–369, 402–403
kesme kuvveti (V) ve, 330–337
kirişler, 222–229, 266, 304–347, 370–392, 403
kuvvet ve, 348–403
mesnetler ve, 306, 330–331
moment-alan teoremleri, 320–329, 347
moment diyagramları, 307
Müller-Breslau ilkesi, 222–229, 266
tesir çizgileri, 222–229, 266
virtüel iş yöntemi, 224, 356–362, 370–380, 402–403, 533
Serbest cisim diyagramları, 50, 58–67
çözümde izlenecek yol, 60
denge denklemleri ve, 50, 58–67
kesim yöntemi, 50
önemi, 61
Serbestlik dereceleri, 462–463, 459, 551, 586
kafes sistemler, 551
kinematik belirsizlik ve, 462–463, 551, 586
kirişler, 586
matris yerdeğiştirme yöntemi ve, 551, 586
tutulmamış, 551, 586
tutulmuş, 551, 586
yerdeğiştirme yöntemi ve, 462–463, 459
Sıcaklığın kafes sistemlere etkisi, 357, 402, 574–579
Sıcaklık değişimleri ve virtüel birim şekil değiştirme enerjisi, 382–383
Sıfır kuvvet çubukları, 100-101, 118–119
Simetrik kirişler, 511–512, 539–540
antisimetrik yükleme, 512, 540
birim yerdeğiştirme sabiti (K) değişiklikleri, 511–512, 539–540
değişken kesitli çubuk elemanlar, 539–540
moment dağıtma yöntemi, 511–512, 539–540
simetrik yükleme, 511, 539
Simetrik matris, 581, 639
Simetrik yapı sistemleri, kuvvet yöntemi, 433–434, 459
Sonlu elemanlar, 550
Statikçe belirli esas sistem, 408
Statikçe belirli yapı sistemleri, 51–54, 58–67, 81, 82–137, 210–267, 348–403
açısal yerdeğiştirmeler, 348–403
çerçeve sistemler, 370–392, 403
çözümde izlenecek yol, 60, 212
denge koşulları, 51, 58–67, 81
döşemeler, 230–233, 267
enerji yöntemleri, 348–403
kafes sistemler, 82–137, 234–237, 267, 356–362, 364–369, 402–403
kirişler, 219–229, 238–252, 266, 304–347, 370–392, 403
kuvvet yöntemi, 58–60
statikçe belirlilik, 51–54
tesir çizgileri, 210–267
Statikçe belirlilik, 51–54, 91, 116, 136, 462–463
denge denklemleri, 51–54, 91, 116

derecesi, 51, 91
durumunun belirlenmesi, 51–54
geometrik uygunluk denklemleri, 51
kafes sistemler, 91, 116, 136
kinematik belirsizlik, 462–463
serbestlik dereceleri ve, 462–463
Statikçe belirsiz yapı sistemleri, 51–54, 81, 268–303, 404–459, 460–495, 496–531
açı yöntemi, 463–468, 495
Betti kanunu, 412–413
bina çerçeveleri, 274–293, 302–303
birim yerdeğiştirme sabiti (K), 498–501, 510–515, 531, 534–537, 538–540
çerçeve sistemler, 422–425, 439–445, 477–489, 516–525
çözümde izlenecek yol, 411, 438, 469
denge koşulları, 51, 81, 407
düşey yükler, 270–276, 302
geometrik uygunluk koşulları, 407
kafes sistemler, 270–273, 279–281, 302, 426–428
kesin hesap, 270
kirişler, 413–421, 435–438, 469–476, 489–515
kompozit yapı sistemleri, 429–431
konsol çerçeve yöntemi, 288–293, 303
kuvvet (esneklik) yöntemi, 404–459
kuvvet-yerdeğiştirme koşulları, 407
Maxwell karşıt yerdeğiştirmeler teoremi, 412–413, 458
modeller, 269–270
moment dağıtma yöntemi, 496–531
portal çerçeveler ve kafesler, 277–281, 303
simetrik yapı sistemleri, 433–434, 459
statikçe belirlilik, 51–54, 405
tesir çizgileri, 435–445, 459
üstünlükleri ve sakıncaları, 406
yaklaşık hesap, 268–303
yanal ötelenme, 482–489, 518–252
yatay çerçeve (portal) yöntemi, 282–287, 303
yatay yükler, 282–293, 303
yerdeğiştirme yöntemi, 407, 460–495, 496–531, 532–547
Statikçe belirsizlik derecesi, 51, 91
Süperpozisyon, 49, 81, 113, 165–169
ilkesi, 49, 81
karmaşık kafes sistem hesabı, 113
kiriş tasarımı ve, 165–169
yöntemiyle moment diyagramı çizimi, 165–169
Sürekli kirişler, 414
Sütun matris, 639

Şed çatı tipi kafes sistem, 84–85
Şiddet, 96

Tabakalı kirişler, 5
Tabliye, 86
Tekil yükler, 188–189, 209, 219, 238–252, 267
bir noktadaki maksimum etki, 238–247
kablolar, 188–189, 209
kesme kuvveti ve, 240–241, 248, 267
kirişler, 219, 238–252, 266–267
moment ve, 242–243, 248–252, 267
mutlak maksimum moment ve kesme kuvveti, 248–252, 267
tekil yük katarı, 238–247
tesir çizgileri ve, 219, 238–252, 267
Ters sehim, 357
Tesir çizgileri, 210–267, 435–445, 459
bir noktadaki maksimum etki, 238–247
birim yük, 212, 219
birleşim düzenekleri, 435–457
çerçeve sistemler, 439–445
çizimi, 211–218, 266
çözümde izlenecek yol, 212, 438
döşeme kirişleri, 230–233, 267
düzgün yayılı yükler, 219
eğilme momentleri (**M**) ve, 211–218, 242–243, 246–247, 248–252, 266–267
hareketli yükler ve, 210–267
kafes sistemler, 234–237, 267
kesme kuvveti (V) ve, 211–218, 231, 240–241, 244–245, 248, 266–267, 436
kirişler, 219–229, 238–252, 266, 435–438
maksimum tesir çizgileri diyagramı, 249
Maxwell karşıt yerdeğiştirmeler teoremi ve, 435–438
moment (M) ve, 242–243, 248–252, 267, 437
mutlak maksimum kesme kuvveti ve moment, 248–252, 267
Müller-Breslau ilkesi, 222–229, 266, 435–438
niteliksel, 222–229, 266, 439–445
sehim ve, 222–229, 266, 435–439
statikçe belirli yapı sistemleri, 210–267
statikçe belirsiz yapı sistemleri, 435–445, 459
tekil yükler, 219, 238–247, 267
tekil yüklerden oluşan yük katarı ve, 238–252, 267
tepki kuvvetleri ve, 211–218, 266, 435
Toprak basıncı (yükler), 27
Transpoze matris, 642–643
Tutulmamış serbestlik dereceleri, 551, 586
Tutulmuş serbestlik dereceleri, 551, 586

Uzay kafes sistemler, 6, 116–122, 580–581
çözümde izlenecek yol, 119
eleman rijitlik matrisi (**k**), 580–581
kararlılık, 116
matris yerdeğiştirme yöntemi, 580–581
mesnetler ve birleşimler, 116–117
sıfır kuvvet çubukları, 118–119
statikçe belirlilik, 116
x, y, z kuvvet bileşenleri, 118
tasarım kabulleri, 116

Üç mafsallı kemerler, 85, 196–202, 209

X çaprazı şeklindeki bağlantı elemanı, 270–273, 302
x, y, z kuvvet bileşenleri, 118

Veri girişi, 632–634. *Ayrıca bkz.* Bilgisayar çözümlemesi
Virtüel birim şekil değiştirme enerjisi, 381–386
Virtüel iş, 222–224, 354–362, 370–386, 402–403, 412–413, 533
açısal yerdeğiştirme, 356–362, 370–380, 402–403
çerçeve sistemler için, 70–380, 403
çözümde izlenecek yol, 358, 372
değişken kesitli çubuk elemanlar, 533
ilkesi, 354–356
kafes sistemler için, 356–362, 402
kirişler için, 370–380, 403
Maxwell karşıt yerdeğiştirmeler teoremi, 412–413
Müller-Breslau ilkesi, 222–224
sehim ve, 222–224, 354–362, 370–386, 402–403
tablolaştırılmış yöntem, 371
tesir çizgileri ve, 222–224
virtüel birim şekil değiştirme enerjisi uygulamaları, 383–386
virtüel iş yöntemi, 356–362, 370–380, 402–403
Virtüel kuvvet yöntemi, 355
Virtüel yerdeğiştirme yöntemi, 356

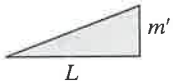
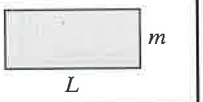
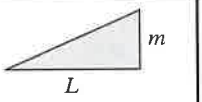
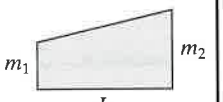
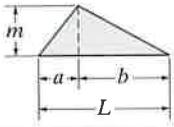
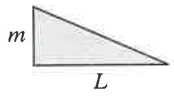
Warren tipi kafes sistemler, 84–87

Yaklaşık hesap, 268–303
bina çerçeveleri, 274–293, 302–303
düşey yükler, 270–276, 302
kabuller, 274-275, 283, 289
kafes sistemler, 270–273, 279–281, 302
konsol çerçeve yöntemi, 288–293, 303
kullanılan modeller, 269-270
portal çerçeveler ve kafes sistemler, 277–281, 303
yatay çerçeve (portal) yöntemi, 282–287, 303
yatay yükler, 282–293, 303
Yanal ötelenme, 482–489, 518–525
açı yöntemi, 482–489
moment dağıtma yöntemi, 518–525
Yapı rijitlik matrisi, *bkz.* Rijitlik matrisi
Yapı sistemleri, 2–33, 34–81, 138–185, 187, 196–202, 210–267, 268–303
ana kirişler, 5, 38, 40
bina ve tasarım yönetmelikleri, 9
çerçeve sistemler, 8, 40–41, 274–293, 302–303
çözümde izlenecek yol, 60, 212
denge denklemleri, 50, 58–67, 81
eksik bağlı sistemler, 55
eleman iç kuvvetleri, 138–185
elemanları, 4–6
geometrik uygunluk denklemleri, 51
gergi çubukları, 4, 33
hesabı, 3–4
idealize edilmiş, 35–47, 80
kablolar, 7, 187
kafes sistemler, 6–7, 82–137, 270–274, 298, 302
kararlılık, 55–57
kemerler, 7, 196–202
kirişler, 5, 36–37, 40–41
kolonlar, 6
kuvvet yöntemi, 58–60
mesnetler ve birleşimler, 36–39, 80
serbest cisim diyagramları, 50, 58–67
sınıflandırılması, 4–8
statikçe belirli, 51–54, 58–67, 81, 82–137, 210–267
statikçe belirlilik, 51–54, 81
statikçe belirsiz, 51–54, 81, 268–303
süperpozisyon ilkesi, 49, 80
tasarımı, 28
tesir çizgileri, 210–267
türleri, 6–8
yaklaşık hesabı, 268–303
yetersiz bağlı sistemler, 55
yük aktarım hattı, 48–49
yük aktarımı, 42–47, 80
yükler ve, 9–28, 33
yüzeysel, 8
Yapı sistemlerinin kararlılığı (stabilitesi), 55–57, 81, 91–95, 116, 137
denge denklemleri ve, 55–56
dıştan, 91, 116, 137
eksik bağlı sistemler, 55, 81
gözlem yoluyla incelenerek, 56
içten, 92–93, 116, 137
kafes sistemler, 91–95, 116, 137
mesnet tepkileri ve, 81
sınıflandırılması, 55–57
yetersiz bağlı sistemler, 55, 81
Yapısal modelleme, 36–37, 622–638
ana kirişler, 626–627
bilgisayar çözümlemesi, 630–638
çözümleme, 623–624
genel yapı sistemi, 628–630
gergi çubukları, 625
idealize edilmiş yapı sistemleri, 36–37
kirişler, 626–627
kolonlar, 628
malzeme özellikleri ve, 630

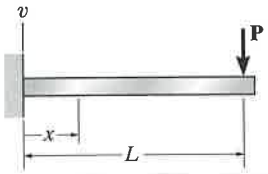
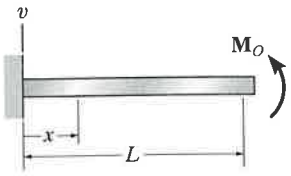
veri girişi, 632–634
yük etkileri, 628–629
Yatay çerçeve (Portal) yöntemi, 282–287, 303
Yatay yükler, 282–293, 303
bina çerçeveleri, 282–293, 303
dönme (devrilme), 288–293
eğilme, 282–287
konsol çerçeve yöntemi, 288–293, 303
yatay çerçeve (portal) yöntemi, 282–287, 303
Yay biçimli kafes sistem, 84–85
Yaylı mesnetler ve birleşimler, 37
Yelpaze (fan) tipi kafes sistem, 85
Yerdeğiştirme dönüşüm matrisi (**T**), 551, 553–554, 607
Yerdeğiştirme yöntemi, 407, 460–495, 496–531, 532–547, 549. *Ayrıca bkz.* Matris yerdeğiştirme yöntemi
açı yöntemi, 460–495
ankastrelik momentleri (ANKM), 466–468, 498, 501–504, 519, 534–537, 541, 544–545
birim yerdeğiştirme sabiti (K), 498–501, 510–515, 531, 534–537, 538–540
çerçeve sistem hesabı, 477–489, 496–500, 516–525
çözümde izlenecek yol, 469, 505
değişken kesitli çubuk elemanlar, 532–547
geçiş sayısı (GS), 500, 502
göreli düğüm noktası ötelenmesi, 541, 544
kiriş hesabı, 469–476, 498–515
kuvvet yöntemi ile karşılatırılması, 407, 549
moment dağıtma yöntemi, 496–531
serbestlik dereceleri, 462–463, 495
simetrik kiriş hesabı, 511–512, 539–540
statikçe belirsiz yapı sistemleri, 407, 460–495
yanal ötelenme etkileri ve, 482–489, 518–525
Yerdeğiştirmeler, 348–403, 405–413, 432–433, 458, 461–465, 482–489, 518–525, 551, 586–589, 605–606. *Ayrıca bkz.* Sehimler; Yerdeğiştirme yöntemi; Enerji yöntemleri; Kuvvet yöntemi
açı yöntemi, 463–465, 518–525
açısal (θ), 463–464, 587–588
birim, 553, 557, 588–589
birim kuvvet sabitleri, 408–410, 412–413, 432
birim kuvvete karşılık gelen yerdeğiştirme, 408
birim şekil değiştirme enerjisi ve, 352, 381–386
birim yerdeğiştirme sabiti (K), 498–501, 510–515, 531
Castigliano teoremi (ikinci), 363–369, 387–392, 403
çerçeve sistemler, 370–380, 387, 403, 482–489, 518–525, 605–606
denge, 407, 411, 458
dış kuvvetlerin işi ve, 350–351
doğrusal (Δ), 463, 465, 587–588
dönme, 370–380, 387, 403, 544, 588
düğüm noktaları, 466, 482–489, 518–525
geometrik uygunluk denklemleri, 407–411, 432–433, 458
hesap yöntemleri, 405–407, 461–463
serbestlik dereceleri, 462–463, 459, 551, 586
kafes sistemler, 356–362, 364–369, 402, 551, 553, 557
kirişler, 370–380, 387, 403, 463–465, 586–589
kuvvet (Δ), 350–380, 387–392, 402–403
kuvvet-yerdeğiştirme koşulları, 407, 458
kuvvet yöntemi, 407–411, 432–433, 458
matris yerdeğiştirme yöntemi, 605–606
Maxwell karşıtlık teoremi, 412–413, 458
moment (θ), 351–352, 355, 370–380, 387, 402–403
moment dağıtma yöntemi, 518–525
rijitklik matrisi, 553, 557, 588–589
statikçe belirli yapı sistemleri, 348–403
statikçe belirsiz yapı sistemleri, 405–407, 412–413, 458, 461–465, 482–489, 518–525
virtüel iş yöntemi, 356–362, 370–380, 402–403, 412–413
yanal ötelenme, 482–489, 518–525
Yük aktarımı, 42–47, 80
iki doğrultuda çalışan (döşeme) sistemi, 44–45, 80
tek doğrultuda çalışan (döşeme) sistemi, 42–43, 80
üçgen şeklinde, 46
yamuk şeklinde, 47
Yük ve dayanım katsayılarıyla tasarım (LRFD), 28
Yük-yerdeğiştirme bağıntıları, 552–555, 587–590, 605–606
birleşik eksenel kuvvet, eğilme momenti ve kesme kuvveti,
eğilme momentleri, 587–590
eksenel kuvvetler, 552–555 605–606
kesme kuvvetleri, 587–590
Yükler, 9–28, 33, 42–49, 80, 88, 138–185, 188–196, 209, 212, 219, 238–252, 267, 268–303, 356, 408–410, 511–512, 533–537, 539–540, 544, 552–555, 590, 628–629, 633–634. *Ayrıca bkz.* Kuvvet; Tesir çizgileri
açıklık yüklemeleri, 590
bilgisayar çözümlemesi için veri girişi, 633–634
bina ve tasarım yönetmelikleri, 9
binalar, 12–14
birim, 212, 219, 408–410, 435
birim yerdeğiştirme sabiti (K) değişiklikleri, 511–512
çarpma, 16
çerçeve sistemler, 274–293, 302–303
değişken kesitli çubuk elemanlar, 533–537, 539–540, 544
demiryolu köprüleri, 15
deprem, 26–27
dış yükler, 356
doğal, 25–28
düşey, 270–276, 302
düzgün yayılı, 12–14, 190–196, 209, 219
eksenel, 552–555
guseler, 533–537
hareketli, 12–28, 33, 628–629
hesap kabulleri, 268–303
hidrostatik, 27
iç yükler, 138–185
idealize edilmiş yapı sistemleri, 42–49, 80
kablolu yapı sistemleri, 188–195, 209
kafes düğüm noktaları, 88
kafes sistemler, 270–273, 279–281, 302, 356, 552–555
kar, 25–26
karayolu köprüleri, 15
kemerler, 196, 209
kirişler, 150–151, 219, 238–252, 266–267, 539–540, 544, 590
matris yerdeğiştirme yöntemi ve, 552–555
modelleme ve, 628–629
Portland Çimneto Birliği yayınları, 535–537
rüzgâr, 16–24
sabit, 10–11, 33, 628
simetrik kirişlerde antisimetrik yükler, 512, 540
simetrik kirişlerde simetrik yükler, 511, 539
tekil, 188–189, 209, 238–252, 267
tesir çizgileri ve, 212, 219, 408–410, 435
toprak basıncı, 27
yapı elemanlarında, 138–185
yapı sistemleri ve, 9–28, 33
yatay, 282–293, 302–303
yayılı, 150–151
yük aktarım hattı, 48–49
yük aktarımı, 42–47, 80
yük katarı, 238–247

Zincir eğrisi, 191

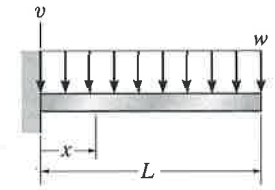
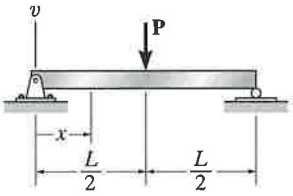
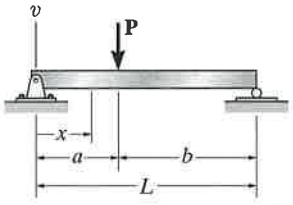
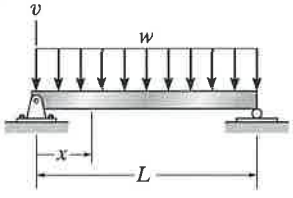
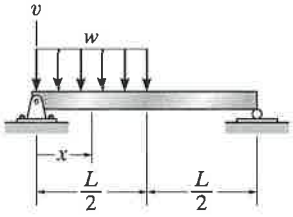
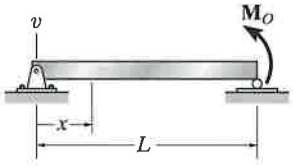
Çarpım Tablosu $\int_0^L m\,m'\,dx$

				
	$mm'L$	$\frac{1}{2}mm'L$	$\frac{1}{2}m(m'_1 + m'_2)L$	$\frac{2}{3}mm'L$
	$\frac{1}{2}mm'L$	$\frac{1}{3}mm'L$	$\frac{1}{6}m(m'_1 + 2m'_2)L$	$\frac{5}{12}mm'L$
	$\frac{1}{2}m'(m_1 + m_2)L$	$\frac{1}{6}m'(m_1 + 2m_2)L$	$\frac{1}{6}[m'_1(2m_1 + m_2) + m'_2(m_1 + 2m_2)]L$	$\frac{1}{12}[m'(3m_1 + 5m_2)]L$
	$\frac{1}{2}mm'L$	$\frac{1}{6}mm'(L + a)$	$\frac{1}{6}m[m'_1(L + b) + m_2(L + a)]$	$\frac{1}{12}mm'\left(3 + \frac{3a}{L} - \frac{a^2}{L^2}\right)L$
	$\frac{1}{2}mm'L$	$\frac{1}{6}mm'L$	$\frac{1}{6}m(2m'_1 + m'_2)L$	$\frac{1}{4}mm'L$

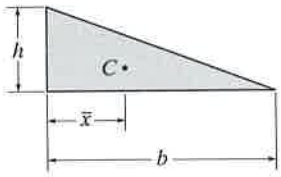
Kiriş Sehim ve Eğimleri

Yükleme	v + ↑	θ + ↶	Denklem + ↑ + ↶
	$x = L$'de $v_{max} = -\frac{PL^3}{3EI}$	$x = L$'de $\theta_{max} = -\frac{PL^2}{2EI}$	$v = \frac{P}{6EI}(x^3 - 3Lx^2)$
	$x = L$'de $v_{max} = \frac{M_O L^2}{2EI}$	$x = L$'de $\theta_{max} = \frac{M_O L}{EI}$	$v = \frac{M_O}{2EI}x^2$

Kiriş Sehim ve Eğimleri (devam)

	$x = L$'de $v_{max} = -\frac{wL^4}{8EI}$	$x = L$'de $\theta_{max} = -\frac{wL^3}{6EI}$	$v = -\frac{w}{24EI}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)$
	$x = L/2$'de $v_{max} = -\frac{PL^3}{48EI}$	$x = 0$ veya $x = L$'de $\theta_{max} = \pm \frac{PL^2}{16EI}$	$v = \frac{P}{48EI}(4x^3 - 3L^2x)$, $0 \le x \le L/2$
		$\theta_L = -\frac{Pab(L + b)}{6LEI}$ $\theta_R = \frac{Pab(L + a)}{6LEI}$	$v = -\frac{Pbx}{6LEI}(L^2 - b^2 - x^2)$ $0 \le x \le a$
	$x = \frac{L}{2}$ 'de $v_{max} = -\frac{5wL^4}{384EI}$	$\theta_{max} = \pm \frac{wL^3}{24EI}$	$v = -\frac{wx}{24EI}(x^3 - 2Lx^2 + L^3)$
		$\theta_L = -\frac{3wL^3}{128EI}$ $\theta_R = \frac{7wL^3}{384EI}$	$v = -\frac{wx}{384EI}(16x^3 - 24Lx^2 + 9L^3)$ $0 \le x \le L/2$ $v = -\frac{wL}{384EI}(8x^3 - 24Lx^2 + 17L^2x - L^3)$ $L/2 \le x \le L$
	$v_{max} = -\frac{M_O L^2}{9\sqrt{3}EI}$	$\theta_L = -\frac{M_O L}{6EI}$ $\theta_R = \frac{M_O L}{3EI}$	$v = -\frac{M_O x}{6EIL}(L^2 - x^2)$

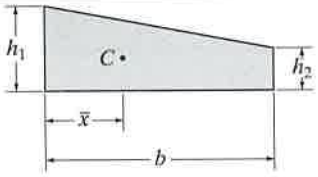
Alanların Geometrik Özellikleri



Üçgen

$$A = \frac{1}{2}bh$$

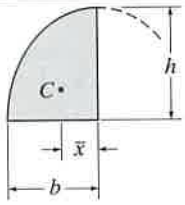
$$\bar{x} = \frac{1}{3}b$$



Yamuk

$$A = \frac{1}{2}b(h_1 + h_2)$$

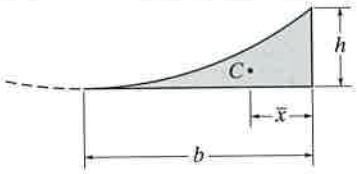
$$\bar{x} = \frac{b(2h_2 + h_1)}{3(h_1 + h_2)}$$



Yarım Parabol

$$A = \frac{2}{3}bh$$

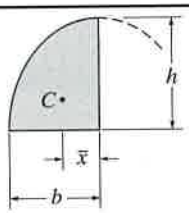
$$\bar{x} = \frac{3}{8}b$$



Parabol parçası

$$A = \frac{1}{3}bh$$

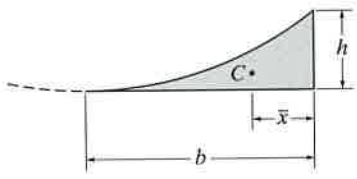
$$\bar{x} = \frac{1}{4}b$$



n'nci dereceden yarım eğri parçası

$$A = bh\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$\bar{x} = \frac{b(n+1)}{2(n+2)}$$

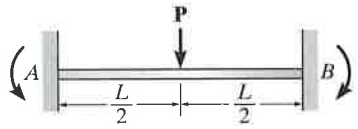


n'nci dereceden eğri parçası

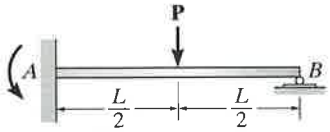
$$A = bh\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\bar{x} = \frac{b}{n+2}$$

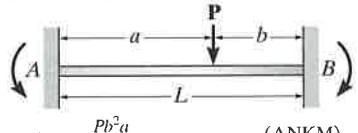
Ankastrelik Momentleri



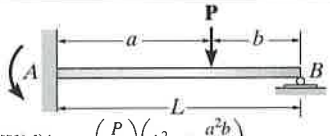
$(ANKM)_{AB} = \frac{PL}{8}$ $(ANKM)_{BA} = \frac{PL}{8}$



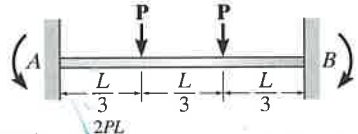
$(ANKM)'_{AB} = \frac{3PL}{16}$



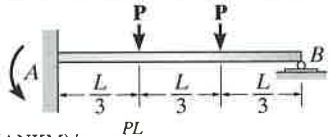
$(ANKM)_{AB} = \frac{Pb^2a}{L^2}$ $(ANKM)_{BA} = \frac{Pa^2b}{L^2}$



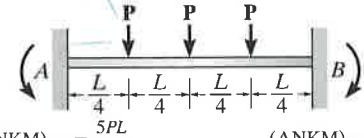
$(ANKM)'_{AB} = \left(\frac{P}{L^2}\right)\left(b^2a + \frac{a^2b}{2}\right)$



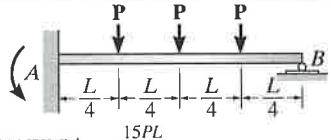
$(ANKM)_{AB} = \frac{2PL}{9}$ $(ANKM)_{BA} = \frac{2PL}{9}$



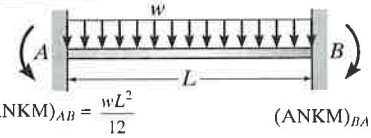
$(ANKM)'_{AB} = \frac{PL}{3}$



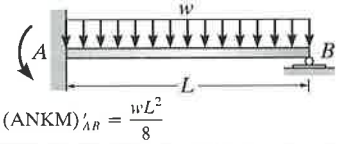
$(ANKM)_{AB} = \frac{5PL}{16}$ $(ANKM)_{BA} = \frac{5PL}{16}$



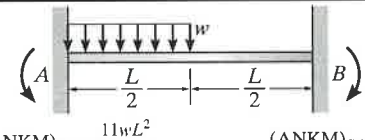
$(ANKM)'_{AB} = \frac{15PL}{32}$



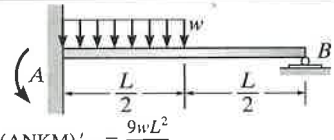
$(ANKM)_{AB} = \frac{wL^2}{12}$ $(ANKM)_{BA} = \frac{wL^2}{12}$



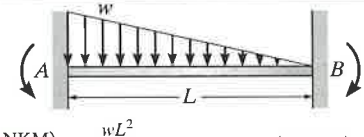
$(ANKM)'_{AB} = \frac{wL^2}{8}$



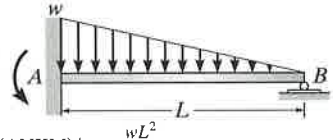
$(ANKM)_{AB} = \frac{11wL^2}{192}$ $(ANKM)_{BA} = \frac{5wL^2}{192}$



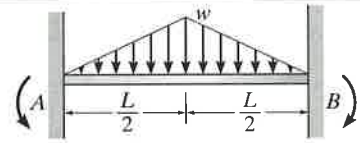
$(ANKM)'_{AB} = \frac{9wL^2}{128}$



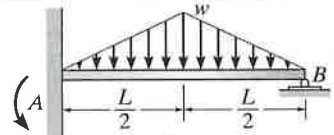
$(ANKM)_{AB} = \frac{wL^2}{20}$ $(ANKM)_{BA} = \frac{wL^2}{30}$



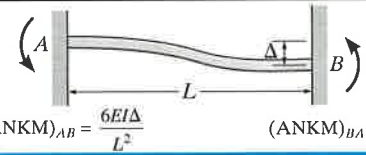
$(ANKM)'_{AB} = \frac{wL^2}{15}$



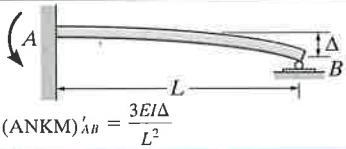
$(ANKM)_{AB} = \frac{5wL^2}{96}$ $(ANKM)_{BA} = \frac{5wL^2}{96}$



$(ANKM)'_{AB} = \frac{5wL^2}{64}$



$(ANKM)_{AB} = \frac{6EI\Delta}{L^2}$ $(ANKM)_{BA} = \frac{6EI\Delta}{L^2}$



$(ANKM)'_{AB} = \frac{3EI\Delta}{L^2}$