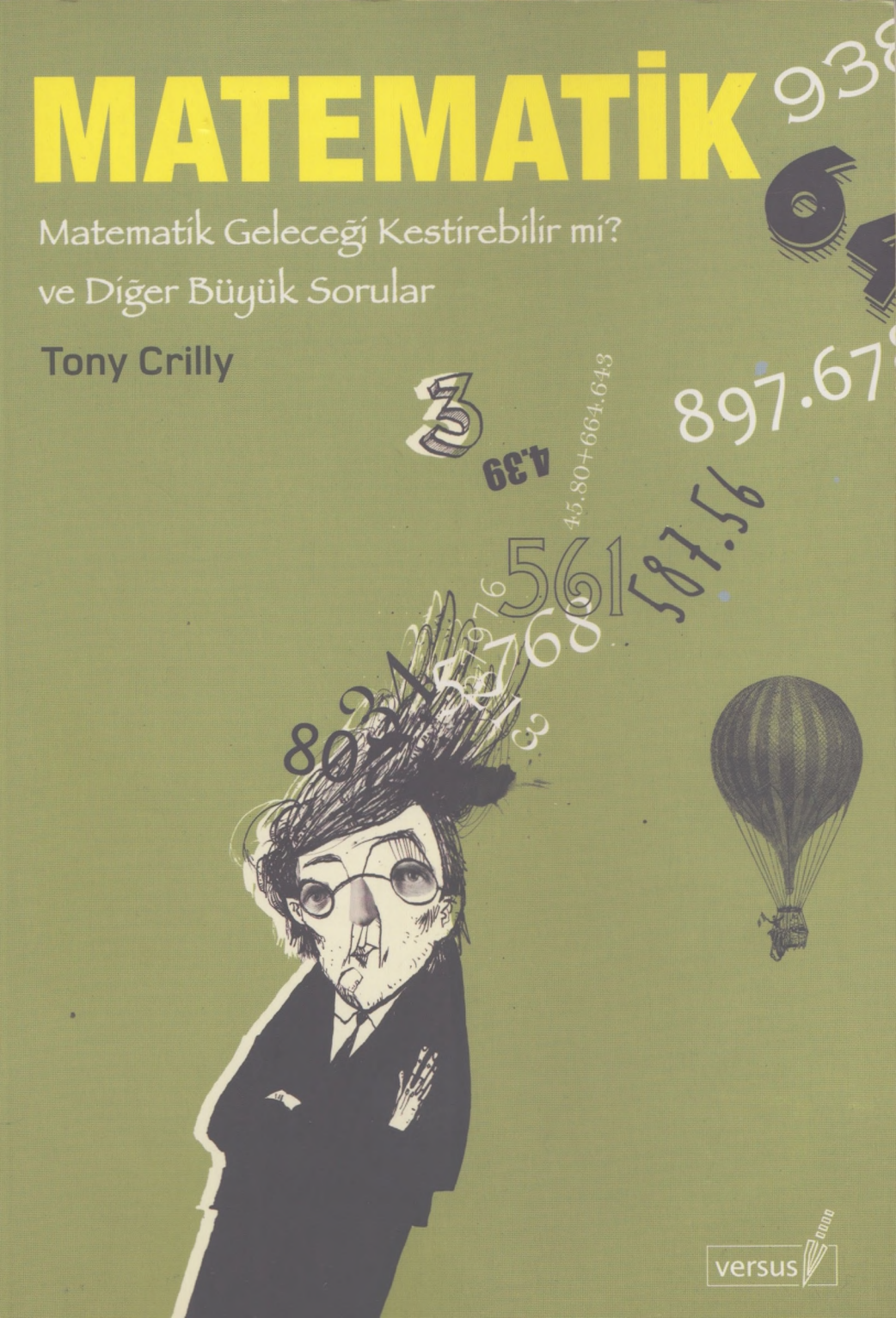
MATEMATİK

Matematik Geleceği Kestirebilir mi? ve Diğer Büyük Sorular

Tony Crilly



Büyük Sorular / Matematik
Tony Crilly

Özgün Künye
The Big Questions / Mathematics
© Quercus, 2011

VERSUS KİTAP
© Her hakkı mahfuzdur.

Çeviri: Ebru Kılıç
Kapak İllüstrasyonu: Sedat Girgin
Grafik Tasarım: Versus Yayınları

1. Baskı, Mart 2012
Versus Kitap: 134
ISBN: 978-605-5691-63-9

Baskı
Sertifika No: 25001
Deniz Ofset: 0212 613 30 06

VERSUS KİTAP
Sertifika No: 22806
Albay Faik Sözdener Sk.
Benson İş Merkezi No:21/2
Kadıköy / İstanbul 34710
Tel: 0 216 418 27 02 (pbx) Faks: 0 216 414 34 42

www.versuskitap.com
versuskitap@versuskitap.com

BÜYÜK SORULAR

Matematik

Matematik Gelecegi Kestirebilir mi?

ve diğer büyük sorular

Tony Crilly

versus

İçindekiler

GİRİŞ 7

MATEMATİK NE İÇİNDİR? 9
Amaçlarla ve gelecek ihtimalleriyle tanışalım

SAYILAR NEREDEN GELİYOR? 19
Kemiklerin üzerine atılmış çentiklerden on altı tabanlı sayılara

MATEMATİĞİN ATOMLARI NEDEN ASAL SAYILARDIR? 31
Yapıtaşları ve aritmetiğin temel teoremik

EN TUHAF SAYILAR HANGİLERİDİR? 41
Reel, irrasyonel ve aşkın sayılar

HAYALİ SAYILAR GERÇEKTEN DE HAYALİ Mİ? 52
"Hayali"nin işinden sekizeylere

SONSUZLUK NE KADAR BÜYÜKTÜR? 62
Küme kuramı ve sonsuzluk devrimi

PARALEL DOĞRULAR NEREDE BİRLEŞİR? 73
Yeni geometrilerin doğuşu

EVRENİN MATEMATİĞİ NASILDIR? 85
Veriler, kanıtlar ve "lanet yalanlar"

İSTATİSTİK YALANDAN MI İBARETTİR? 96
Yeni geometrilerin doğuşu

MATEMATİK ZENGİNLİĞİN GARANTİSİ MİDİR? 107
Belirsizlik, şans ve olasılık teorisi

HER ŞEYİN BİR FORMÜLÜ VAR MI? 117
Matematiksel reçeteler ve bilgi arayışı

ÜÇ BOYUT NEDEN YETERLİ DEĞİLDİR? 128
Daha üst boyutlar, canavar eğriler ve fraktallar

BİR KELEBEĞİN KANATLARI GERÇEKTEN DE FIRTINAYA YOL AÇABİLİR Mİ? 139
Kaos kuramı, hava durumu denklemleri ve garip çekiciler

KIRILAMAZ BİR ŞİFRE YARATABİLİR MİYİZ? 149
Şifreler, Enigma makinesi ve kuantum bilgisayarları

MATEMATİK GÜZEL MİDİR? 158
Müzik, sanat, altın sayılar ve Fibonacci dizisi

MATEMATİK GELECEĞİ KESTİREBİLİR Mİ? 169
Matematiksel modeller, simülasyonlar ve oyun teorisi

EVRENİN ŞEKLİ NASILDIR? 180
Topoloji, manifoldlar ve Poincaré sanısı

SİMETRİ NEDİR? 191
Örüntüler, ikilikler ve gerçekliğin temel niteliği

MATEMATİK DOĞRU MUDUR? 202
Platon'un gerçekliğinden Gödel'in eksiklik teoremlerine

ÇÖZÜLECEK BİR ŞEY KALDI MI? 212
Çözülmemiş büyük problemler ve matematiğin geleceği

SÖZLÜK 222

Giriş

Matematik hepimizin bilmesi gereken bir şeydir. Şu herkesi heyecanlandırmayan okul müfredatı başka, ama matematik çok daha fazlasını sunar. Bilimsel uygulamaların sessiz yoldaşı olan matematiğin sanatlarla da temel önemde ilişkileri vardır. İnsan mirasının bir parçası olarak matematik sapasağlam ayaktadır, sürekli sınırlarını genişletmektedir; ömrü "Büyük Sorular"la uzamaktadır.

Matematikteki büyük sorular çok çeşitlidir. Bazılarının başlangıcı, modern teknolojide sarsıntı yaratan değişmeler olmuştur, bazılarınınsa kökeni antik devirlere uzanır ve önemleri bugün de yankılanır. Bazı sorulara kesin cevaplar verilmiştir verilmesine, ama bunlar yerlerini yeni sorulara bırakmış; bazı sorularsa hiç geri çekilmeden, yüzyıllar sonra bile ön sırayı işgal ederek ısrarla varlıklarını sürdürmüşlerdir. Felsefi olanın yamacına yanaşan sorular hiçbir zaman sadece şu ya da bu biçimde çözülemez, yine de bu sorular hayret vermeyi sürdürür.

Matematiğin izlediği yol işte budur. İlginç bir gerçek de matematiğin yavaş yavaş ilerliyor olmasıdır. Akıldan yapılan aritmetikte, okulda görülen oyunlu küçük problemlerde hıza prim verilse de iş gerçek matematiğe geldiğinde hızlı olmak kesinlikle avantaj sağlamaz. Matematiğin ilerliyor olduğu inkâr edilemez; fakat bu ilerleme büyük bir dahinin "Evreka!" anından çok bir lav ırmağının yavaş yavaş gelişen kaçınılmazlığına benzer.

Matematiğin onu bilimden ayıran özgün bir doğası vardır. Bilimsel bir kuram inanılırlığını yitirdiğinde, tıpkı nesnelerin neden yandığının bir zamanlar sıklıkla "flojiston"la ya da ışığın aktarımının "ışıklı eter"le açıklanması örneklerinde olduğu gibi, bir kenara bırakılır. Bu gibi kuramlar miatlarını doldurmuş, antikacılar ilgilensin diye bilim tarihi kitaplarında yerlerini almışlardır. Matematikteyse işler başkadır. Kanıtlanmış bir sonucun yanlış olduğu ispatlanamaz; bu

yüzden de bir teoremin, kanıtlanmış matematiksel bir olgunun ömrü sonsuza uzanır. Pisagor'un dik açılı üçgenlerle ilgili kuramı her zaman doğrudur.

Bugün matematikçiler Öklit'in MÖ 300'de kaleme aldığı türden teoremlere katkıda bulunacak araştırmalar yazamazlar. Fakat Öklit'inki gibi eserler ilham verici olabilir, bu gibi temel metinlerde yeni düşünme biçimleri bulunabilir. Denklemler kuramıyla ilgili olarak Yunan matematikçi Diophantus'u okuyup ondan hâlâ bir şeyler öğrenebiliriz; çünkü Antik Yunan'daki bazı denklem tipleri bugüne çözülmeden ulaşmıştır.

Bütün bunlar, zamanın matematiksel kuram ve teoremler üzerinde bir etkisi olmadığı anlamına gelmez. Matematiksel kuram ve teoremler genellikle modern bir bağlama uygun olarak değiştirilir, inceleştirilir, şekillendirilir. Matematikte eğilim, sonuçların genellemelerin içine alınıp yutulmasıdır; nihayetinde de akıbetleri çöp tenekesini boylamak değil daha genel bir kuramın dipnotu olmak olur.

Bugün matematik açısından heyecan verici bir devirdeyiz. Bilgisayar çağının yeni soruları olmak zorunda. Bunun sebebi sırf bilgisayarların rakam sütunlarını toplamakta verimli olmaları değil, matematiksel kanıt kavrayışımıza meydan okumaları, matematiğin doğası hakkında sorular gündeme getirmeleridir. Cebirle uğraşabilir, geometrik şekilleri ve yüzeyleri yararlanılacak şekilde gösterebilirler.

Bu kitapta ele alınan Büyük Sorular büyük meselelere odaklanıp ele alınması gereken temel sorularla uğraşıyor. Bu sorular, matematiğin nereden geldiğini, nereden geçtiğini, nereye doğru yol alıyor olabileceğini gösteriyor. Hepsi de cevaplar doğuruyor. Fakat bu cevapların hiçbiri de kesin ve sonuca bağlanmış değildir. Buradaki büyük sorular, matematikçileri heyecanlandıran problemleri gündeme getiriyor, matematiğin yaşadığımız gerçek fiziksel dünya hakkında bizi nasıl bilgilendirdiğini anlatıyorlar. Hepsinden de önemlisi, matematiğin canlı, soluk alıp veren bir konu olduğunu gösteriyorlar.

MATEMATİK NE İÇİNDİR?

Amaçlarla ve gelecek ihtimalleriyle tanışalım

21. yüzyılda matematik engin, çok yönlü bir konudur. Öyle geniş bir etkinlik yelpazesini kapsamaktadır ki bütün görünümlerini tek bir konu başlığı altında toplamak pek mümkün görünmemektedir. Yelpazenin bir ucunda matematiksel hesaplama, zaman ve paranın gündelik hayatın işlemesini sağlayan inceliklerini tanımlar. Diğer ucundaysa matematik, büyük fildişi kulelerdeki zihinlerin devasa karmaşıklıkta muammalar ürettikleri, sonra da bunları çözmeye yıllarını adadıkları kapalı bir dünyaymış gibi görünebilir. Siyasetçilerimiz de bize sürekli daha fazla matematikçiye ihtiyacımız olduğunu söyler dururlar. Peki ama bütün bu matematik ne içindir? Dünyamızın neresine oturur?

Bugün hayatımızdaki matematiğin tohumları MÖ 3000 yılına kadar izi sürülebilen ilk sayısal kültürde atılmıştır. Hiç şaşırtıcı değil; bu başlangıç, pratik amaçlara hizmet etmeye yönelikti. Pazar yerindeki sorunlar, vergilerin ödenmesi, arazilerin ölçülmesi, yıldızların ve gezegenlerin anlaşılması, bir takvim geliştirilmesiyle ilgili problemlerdi bunlar; hepsi de rakamları, hesaplama yapmayı ve biraz ilkel geometriyi gerektiren uygulamalardı. Ama bin yıl sonra Mısırlılarla birlikte toplumlar, kendi rakam sistemlerinin belirgin uygulamalarla ilgisi olmayan özelliklerini araştırmaya başladılar. Ayrıca tıpkı bizlerin, gazetedeki Sudoku sayfasından zevk aldığımız gibi onlar da merak ettikleri için, entelektüel haz duydukları için

matematik bulmacaları yaratmaya başladılar. Matematik kendi içine bakmaya başladı. Matematikçi doğdu.

MÖ 500 civarında gerçek bir matematiksel düşünce kültürünün doğmasıyla birlikte Antik Yunanlılar devasa adımlar attılar. Onların ortaya çıkardıkları eserler asırlar boyunca etkili oldu; bu eserler bugün hâlâ incelenmektedir. Matematik, en iyinin en yüksek tezahürlerinden biri görüldü ve klasik eğitimin ayrılmaz bir parçasını oluşturdu. Pisagor, Platon, Arşimet, Öklit matematiği baştacı eden; yüzlerce, hatta binlerce yıl sonra da etkili olan Yunan filozofların bazılarıdır.

Hristiyanlığın ilk yüzyıllarında, sarkaç geriye doğru salındı; matematiğe meyilli olanların kendilerini kültürel dünyanın kıyısına itilmiş bir halde bulmaları işten bile değildi. MS 400 civarında Hippolu Aziz Augustinus "İyi Hristiyanın matematikçilere ve boş kehanetlerde bulunan herkese karşı tetikte olması gerektiği"ni ileri sürdü; matematikçileri "ruhu karartıp insanı Cehennem'in zincirlerine mahkum etmek için şeytanla anlaşma" yapmakla suçladı. O günlerde matematikçiler astrologların şaibeli faaliyetleriyle bağlantılı görülüyorlardı; kabul gören dogmalara aykırı olması muhtemel alçakça amaçlarla ilgili kuşkular uzunca bir süre boyunca matematiğin başının üzerinde dolanıp durdu.

16. yüzyılda filozof Francis Bacon "soyut matematiğin mükemmel kullanımının" iyi anlaşılmadığından yanıp yakınıyordu; ama Galileo'nun Padua Üniversitesi'nde matematik profesörü konumuna gelmesi işlerin iyiye gideceğine işaretti. Galileo'nun kendisinin bazı bulgularını inkâr eden Katolik Kilisesi'yle karşı karşıya gelmesi, matematiğe ve onun fizik ile astronomi alanlarındaki uygulamalarına gösterilen hoşgörünün sınırları olduğunu göstermişti. Fakat bu gelişme daha sonra, 17. yüzyılda Isaac Newton ve çağdaşlarıyla birlikte kültürel güç dengesini ebediyen değiştirecek olan matematiksel ve bilimsel bir devrimin önünü açtı. 18. yüzyılın son dönemlerinde, 19. yüzyılın başlarında

yaşamış romantikler bu yeni dünya görüşlerini kınamış olabilir; William Blake Newton'ı acı alaylarına konu etmiş olabilir; fakat bilimin dili olarak matematiğin geleceği güvence altındaydı. 19. yüzyılda her yerde üniversitelerde matematik kürsülerinin kurulmasına, yeni ve zorlayıcı işlerin sel gibi akmasına tanık olundu. Matematik hiçbir yere gitmiyordu.

Kullanışlılık ve Soyutluk

Matematik hakkında popüler bir tartışma vardır; matematiksel buluşların ihtiyaçtan mı doğduğu, yoksa yenilikçi matematiğin mi uygulama fırsatları yarattığı tartışılır. Tarihsel olarak matematiğin itici gücü pratiğe ilişkin değerlendirmelerdir; fakat konunun içsel ömrü ortaya açıldığında "soyut" matematiksel düşüncenin yeni uygulamalar için alan yaratması imkânı vardır. İyi matematik olası uygulamalardan nadiren uzaklaşmıştır; fakat bu uygulama anının ne zaman gelebileceği hiç bilinemez. Keskin bir kavrayış gelecek hafta benimsenebileceği gibi, 50 ya da 500 yıl boyunca uykuda da kalabilir.

Tarih, soyut matematiksel kuramın uygulamada ortağını bulduğu örneklerle doludur. Antik Yunanlılar konik kesitlere dair bir kuram geliştirmişlerdi; 17. yüzyılda Johannes Kepler ile Isaac Newton gezegenlerin elipsler halinde hareket ettiğini ileri sürdüklerinde bu kurama ihtiyaç duyulduğu anlaşıldı. "Matris cebri", çok boyutlu sayılar kuramı 1850'lerde matematiğin iç sorunlarıyla uğraşmak için geliştirilmişti; 70 yıl sonra, hızla ilerleyen kuantum kuramındaki "matris mekaniği" için tam da bu kurama ihtiyaç duyulmuştu. George Boole mantığı cebire çevirmeye yönelik bir sistem kurup bize "Boole cebri"ni verdiğinde bir yüzyıl sonraki bilgisayar programlamanın dilini geliştirdiğini bilmiyordu.

İngiliz matematikçi G. H. Hardy bundan sadece 50 yıl önce, "fikirleriyle pratik arasında bir alaka" kurma düşüncesiyle

sınırlanmaksızın matematiğin peşinden gittiğini yazmıştı. Gerçekten de Hardy, sayılar kuramının pratik uygulamalardan uzak olmasının sefasını sürüyordu. Onun sevdiği türde saf matematiğin bilgisayar güvenliği açısından son derece önemli olduğu bir dünyada böyle bir yalıtımın sefasını süremeyebilirdi. (Bakınız *Kırılamaz Bir Şifre Yarabilir Miyiz?* ve *Çözülecek Bir Şey Kaldı Mı?*) Bugün elimizde birçok boyut kuramı bulunuyor; ama 1970'lerde Benoit Mandelbrot dikkatimizi "fraktallara" çektiğinde pek az kişi bunların olası uygulama alanlarını tahmin edebilirdi. (Bakınız *Üç Boyut Neden Yeterli Değildir?*)

Fakat matematikçiler ihtiyaçlara da cevap verir. 18. yüzyılda James Watt'ın buhar makinesinde bir pistonun çizgisel hareketini döngüsel harekete çevirmek gibi bir problemi olmuş; sonuçta Sanayi Devrimi sırasında geometrik bağlantılar kuramı doğmuştu. İkinci Dünya Savaşı sırasında şifre kırıcılara ihtiyaç duyulduğunda (*Kırılamaz Bir Şifre Yaratabilir Miyiz?*) özel becerileri nedeniyle üniversitelerden matematikçiler işe alındı; sonuçta dünyanın ilk elektronik bilgisayarı inşa edildi.

Dolayısıyla soyut matematik ile uygulamalı matematik simbiyotik bir ilişki içindedirler; hiçbir zaman, elektronik çağında olduğu kadar böyle bir ilişki içinde olmamışlardır. Matematik olmazsa bilgisayarlar işe yaramaz, dijital fotoğraflar çekmek imkansız olur ve cep telefonları susar. Ama profesyonel matematikçinin "soyut" araştırması da artık bilgisayarların bilgi-işlem gücüyle artmıştır: "uygulamalı" matematik de "soyut" matematiği besler.

Matematiğin kendi varlığının bilincinde, felsefi olarak düşünümsel bir yanı da vardır. Bu düşünümün tarihi de Antik Yunan'da matematikçilerin önceden var olan hakikatleri su yüzüne çıkardığı yolundaki varsayımdan uzaklaşıldığını, matematikçinin rolünün yaratıcılık ve hayal gücünü de içerecek şekilde, daha büyük bir incelikle düşünülmesine yaklaşıldığını gösterir. (Bakınız *Matematik Doğru Mudur?*)

Modern matematikte ilerleme yolu, aksiyomlara ve mantıksal çıkarımlara dayanır. Yunanlılar aksiyomlarının gerçek olduğunu varsaymışlardır; ama bugün matematikçiler aksiyomlarının sadece tutarlı olmasını beklerler. 1930'larda Kurt Gödel, biçimsel bir aksiyomatik sistemde, sadece sistemin aksiyomları kullanılarak kanıtlanamayacak ya da yanlışlanamayacak bazı matematiksel ifadeler bulunduğunu söyleyen "eksiklik teoremleri"ni kanıtlayarak matematiği sarsmıştı. Başka bir deyişle matematik artık o şekilde kalması gereken kanıtlanamaz hakikatler içerebilirdi.

Modern matematik ne kadar büyük bir çeşitlilik gösterirse göstersin, ne kadar engin olursa olsun kökeninde okul müfredatındaki aritmetik, cebir ve geometri ayrımı yatar. Peki bunların kökeninde ne yatar ve ne işe yararlar?

Sayılar ve Özellikleri

Saymak için kullanılan sayılar matematiksel repertuvarın en önemli parçaları olmayı sürdürmektedir; matematikçi bunlarla işe başlar. Sayıların evriminin tarihi (Bakınız *Sayılar Nereden Geliyor?*) zengin bir tarihtir, 0'dan 9'a kadar sembollerin kullanıldığı "on tabanlı" bir sisteme gelmiş olmamız kesinlikle kaçınılmaz değildir. Bir kere şunu söyleyelim: Başlangıçta sıfır yoktu.

Asal sayıların, yani sadece kendilerine ve bire bölümleri bir başka tam sayı veren sayıların özellikleri büyüleyicidir. Şaşırtıcıdır, bu sayılar hakkında bilinmeyen çok şey vardır. Asal sayıların varlığını 2000 yılı aşkın bir süredir bildiğimiz için inanması zor olabilir, ama bu sayıların sayma sayıları arasına nasıl dağıldığını hâlâ bilmiyoruz. (Bakınız *Asal Sayılar Neden Matematiğin Atomlarıdır?* ve *Çözülecek Bir Şey Kaldı Mı?*) Sayma sayıları ve asal sayılar dışında repertuar yüzyıllar içinde eksi sayıları, kesirleri, hiçbir örüntü olmaksızın sonsuza doğru uzanan ondalık basamaklardan oluşan "irrasyonel sayıları" da kapsayarak genişlemiştir. Matematikçiler bütün bunlara "gerçek" sayılar derler. (Bakınız *En Tuhaf Sayılar Hangileridir?*)

Hepsi bu kadar da değil. "Gerçek" sayıların hepsi de tek boyutludur. Bir sayı dizisi üzerinde sola (eksi sayılar) ve sağa (artı sayılar) yayılıyormuş gibi düşünülebilirler. Matematikçilerin "karmaşık sayılar" dedikleri şeylerle iki boyutta gezinmeye başlamaları büyük bir atılım olmuştu. (Bakınız *Hayali Sayılar Gerçekten Hayali Midir?*) Karmaşık sayılar matematikçileri denklemleri çözmekte daha güçlü kılıp onlara yeni analiz kuramları sunuyordu. Bugün elektrik ve manyetizma gibi fenomenlerin incelenmesi açısından "karmaşık" sayılar vazgeçilmez önemdedir.

O halde birçok sayı tipi olduğunu söyleyebiliriz, ama bunun sonu nerededir? Çok eski devirlerden beri matematikçilerin sonsuzluk meselesiyle uğraşmaları gerekmiştir. Aristoteles'ten bu yana, "potansiyel sonsuzluk", asla ulaşılamayacak bir sonsuzluk olduğu varsayımında bulunulmuştur. Fakat 19. yüzyılda Georg Cantor başka bir sonsuzluk mefhumu getirmiş, böylece birçok sonsuzluktan bahsetmek mümkün hale gelmiştir. (Bakınız *Sonsuzluk Ne Kadar Büyüktür?*)

Geometri, Cebir ve Matematiksel Devrimler

Binlerce yıl boyunca geometri Antik Yunanlıların kölesi oldu; onların, bugüne dek okul çocuklarının hatmetmek zorunda oldukları birçok kuralı koyarak inkar edilemez bir otorite gösterdikleri bir alanmış gibi göründü. Özellikle de Öklit, çelikten mantığına dayanan bir geometrik bilgi bütünü inşa ederek bunu kanunlara dayalı hakikat olarak ortaya koydu. Fakat zaman içinde Öklit geometrisinde çatlaklar görülmeye başladı; nihayet iki, üç ve daha fazla boyutlu fenomenlerle ilgili *başka* geçerli geometrilerin de bulunduğu açıklık kazandı (Bakınız *Paralel Doğrular Nerede Birleşir?*); bu da "manifold" kavramının -farklı yerel ve genel geometrisi olan bir şekil- gelişmesine yol açtı. (Bakınız *Evrenin Şekli Nasıldır?*) Hatta, fizikçiler için çok zorlayıcı bir mesele olan "evrenin geometrisi" olma konusunda, bu geometriler Öklit geometrisinden daha fazla hak iddia edebilirler.

Fizikçiler maddenin ve evrenin sırlarını ele geçirme çabalarında geometriyi benimserlerken, biyologlar ve tıp araştırmacıları da farklı tipte bir geometriyi, "düğüm kuramı"nı benimseyerek DNA'yı çözme ve analiz etme girişiminde bulunurlar; adli tıpçıların DNA profili çıkarmasını sağlayan, insanın kimliğiyle ilgili meseleler ve suçların çözülmesi açısından önemli sonuçları olan bir uygulamadır bu. Sonuçta matematikçiler bilim insanlarına, ellerindeki işe uygun görünen malzemeyi seçebilecekleri bir aygıt çantası olarak farklı geometriler sunmuşlardır.

Bir noktada geometri cebir diline çevrilmiştir; 17. yüzyılda Descartes'a atfedilen bir gelişmedir bu. Daha sonra 20. yüzyılda, simetri geometrisinin de cebre çevrildiğine tanık olundu. Başka birçok şeyde olduğu gibi, matematiğe genellikle güzelliği betimlemek için dahil edilen o ele geçmez özellik, simetri, artık matematiksel olarak "grup teorisi"yle açıklanabiliyor. Modern cebrin merkezinde gruplar yatıyor; gruplar simetrinin de mikroskobik bir ölçekte incelenmesini sağlayacak bir araç sunuyor. (Bakınız *Simetri Nedir?*) Başlangıcı 19. yüzyıla uzanan devasa bir araştırma projesi çerçevesinde matematikçiler nihayet sonlu grupların sınıflandırılmasını 1981'de tamamladılar. "Devasa teorem" haline gelen bu kuram çerçevesinde hazırlanan haritaya göre, grupların bilinen ailelerin yanı sıra 26 tane tekil grup vardır; bu gruplardan en büyüğünün üye sayısı ise yaklaşık 8×10^{53}'tür (arkasında 53 tane sıfır olan bir 8). Grup kuramı bugün uzayın dönüşümlerinin grupları oluşturduğu kuramsal fizikte, simetrilerin devreye girdiği kimya ve kristalografide önemli bir yer işgal eder.

Bir cebir probleminde "x'in değerini bulmak" okul düzeyindeki her matematikçinin aşina olduğu bir şeydir. Bu tür "ters" problemler matematiğin mükemelliğe eriştiği, uygulamalarının geniş bir erim kazandığı alanlardır. Bu problemlerde genellikle bir "bilinmeyen"i bulmamız gerekir; ama önce sadece bilinmeyeni içeren bir ilişki ya da bir denklem bulabiliriz. Örneğin bir karenin kenarlarını üç metre

uzatırsak 400 metrekarelik bir alan elde edeceğimiz söylenirse ilk alanda bilinmeyen x uzunluğunu bulmayı ters bir problem olarak ele alabiliriz.

Cebir kullanmamız ve denklemi $(x+3)^2 = 400$ olarak açmamız bize $x = 17$ sonucunu verir. Önceki kuşaklardan matematikçilerin çalışmaları bu işleri gerçekleştirebilmemiz için bize bir formüller yelpazesi verdiğinde kestirmeden gitmenin zevkini sürebiliriz. (Bakınız *Her Şeyin Bir Formülü Var Mı?*)

Uzaya bir roket göndermek "diferansiyel" denklemlerle çalışmamızı; bu da "Kalkülüs" aygıtını gerektirir (Bakınız *Evrenin Matematiği Nedir?*); genellikle hız ve ivmelenme oranlarını ölçmek için kullanılan bir yöntemdir bu. Sağlam dayanakları olan bir kuramla desteklenen özel diferansiyel denklem türleri vardır; ama kesin çözümü engelleyen birçok "özel" denklem de vardır. Henri Poincaré diferansiyel denklemler kuramının yeni bir dalını, açıkça çözümleri bulmaktan çok çözümlerin özelliklerine odaklanan "niceliksellik kuramı" olarak yerleştirmiştir. Bu çalışma "kaos" kuramını doğurmuş (Bakınız *Bir Kelebeğin Kanatları Gerçekten de Fırtınaya Yol Açabilir Mi?*); yeni topoloji kuramına ayrı bir yön vermiştir, bu da şekillere bakma biçimimizden radikal bir kopuş olmuştur. (Bakınız *Evrenin Şekli Nasıldır?*)

Yeni ve Bilinmeyen Matematik

Matematikçi olmayan sıradan insanın dili "topoloji" kelimesine dönmeyebilir; ama nispeten sonradan geliştirilen iki terim çok daha tanıdıktır: Olasılık ve istatistik.

Matematiğin en çarpıcı modern eserlerinden biri olan olasılık kuramı (Bakınız *Matematik Zenginliği Garanti Eder Mi?*) belirsizliği niceliksel bir biçimde ele almamızı sağlar. Bu kuramın başlangıcı 17. yüzyılın eğlence matematiğine dayanır; kumar problemlerinin analiziyle başlamış, bugünse inceltilip geliştirilip kuvvetli bir hesaplama haline getirilmiş bu kuram, risk analizinin belkemiğidir.

İlgili bir alan olan istatistik (Bakınız *İstatikler Yalandan Mı İbarettir?*), olasılık kuramının verileri uygun bir biçimde ele almasını sağlar; deneyler gerçekleştirebileceği bağlamı sunar. İstatistiğin başlangıcı tarımsal deneylere de uzanır; ama artık yöntemleri o kadar yaygın bir biçimde kullanılmaktadır ki siyasetten tıbba kadar insan etkinliklerinde istatistikten bağımsız bir alan pek yoktur.

İstatistiğin ve başka matematiklerin sonuçlarını kullanmak doğal olarak tahminde bulunma, geleceği bilme arzusuna yol açar. (Bakınız *Matematik Geleceği Kestirebilir Mi?*) Demograf beş yıllık bir süre zarfında nüfusun ne olacağına dair makul bir tahminde bulunmayı ister. Borsacı istatistik kanıtlara ve ipuçlarına dayanarak borsayı tahmin etmeye çalışır. Peki bu nasıl yapılacaktır? Bunlar henüz çözülemeyen (Bakınız *Çözülecek Bir Şey Kaldı Mı?*) matematiksel denklemlere dayanan, zorlukları "kelebek etkisi"yle katlanan zor sorulardır. (Bakınız *Bir Kelebeğin Kanatları Gerçekten Bir Fırtınaya Yol Açabilir Mi?*)

Yani bir eski matematik bir de yeni matematik vardır. Arkamıza yaslanıp işlerin hemen hemen bittiğini düşünmek yerine, kendimize çözülmemiş matematik de olduğunu, hem de çok fazla olduğunu hatırlatmalıyız. Böyle olmasaydı matematik dalında kuruyup giderdi. Düşünürleri yıllarca uğraştırmış, çözülmemiş büyük sorular vardır; her ikisi de asal sayılarla ilgili olan Goldbach sanısı ve Riemann varsayımı gibi; ayrıca gürültülü bazı yeni problemler de vardır. Elbette ki ilerlemeler olmuş, bunların bazıları manşetlere çıkmıştır. Matematik Fermat'nın son teoreminin 1994'te çözülmesiyle birlikte (Bakınız *Matematik Güzel Midir?*) kamuoyunun dikkatini çekmiştir. Ondan önce de matematik ve bilgisayarlar "dört renk" teoremini çözmek için güçlerini birleştirmişlerdi. (Bakınız *Her Şeyin Bir Formülü Var Mı?*) Kısa süre önce de münzevi bir Rus matematikçi yüz yıllık Poincaré sanısını kanıtlayıp 1 milyon sterlinlik ödüle tenezzül etmeyerek bütün dünyayı şaşırttı.

Peki o halde matematik ne içindir? Bazı bakımlardan bu tuhaf bir sorudur. "Müzik ne içindir?" ya da "Edebiyat ne içindir?" diye

sormayız pek. Bunların insanların uğraştığı etkinlikler, düşünme süreçleri ve hayalgücü egzersizleri olduğunu kabul ederiz; her zaman öyle olmuşlardır, olacaklardır, çünkü olmaları gerekir. Uygulamaları görmek istiyorsanız bunların her tarafımızda yayılmakta olduğunu görebilirsiniz. Matematiğin dünyanın, evrenin, doğanın ve insan ilişkilerinin bilgisini verme biçimlerinde ilerleme kaydetmek istiyorsanız bunu da yapabilirsiniz. Matematikçilerin *yapabilecekleri* ve *yapmış oldukları* tahmin edilemeyecek kadar fazla şey vardır; böylece hayatı değişmesine önayak olmuşlardır. Ama en dibinde matematiği harekete geçiren şey insanlığın o temel, tanımlayıcı özelliğidir: Dindirilemez merak.

SAYILAR NEREDEN GELİYOR?

Kemiklerin üzerine atılmış çentiklerden on altı tabanlı sayılara

Gündelik hayatlarımızda sayılara gömülmüşüzdür. Uyanırız ve çapaklı gözlerimizle saatin yüzeyindeki sayı çemberini ya da daha büyük bir ihtimalle dijital alarmın ışıltısını içeriz; belki okula 134 numaralı otobüsle, belki de işe 08.32 treniyle gidiyoruzdur; öğle yemeğimizi almak için bozukluklarımızı sayar, günlüğümüzdeki tarihleri kontrol eder, cep telefonumuzun üstündeki tuşlara basarız; günün sonunda TV kanallarının baş döndürücü numaraları arasında tembelce geziniriz, sonra nihayet yatağa yollanır, saat neymiş diye son bir kez bakarız. Sayılar hayatlarımızın derinlerine o kadar işlemiştir, biz sayılar dünyasının derinlerine o kadar gömülmüşüzdür ki şöyle bir geri çekilip gerçekten ne kadar hayret verici şeyler olduklarına bakmayız. Sahi, sayılar nereden geliyor?

Elbette ki karşılaştığımız sayıların birçoğu sadece işaretler, etiketlerdir. Otobüs hatları, kuramsal olarak sayılardan başka biçimlerde de ifade edilebilir. Ünlü Heinz "57 Varieties" ya da Jack Daniels "Old No. 7" burbonu, aralarında ince farklılıklar bulunan konserve gıda ve viski dizileri olduğunu düşündürür; ama bunlar da aslında etikettir, markadır. Bu markalar bile etkili olabilmek için, insan toplumlarının nesneleri düzenleme ve sayma (birinci, ikinci, üçüncü vs.) amacıyla sayı sistemleri geliştirme biçimlerine dayanır.

Bugün neredeyse genel olarak insan türü, sayma ve düzenleme işini yapabilmek için 0'dan 9'a kadar sadece on sembolden oluşan

aynı sistemi benimsemiştir. Bu sembollerin bileşimleri, galaksiler arasındaki büyük mesafelerden tutun, bir atom çekirdeğinin çapının büyüklüğüne varıncaya dek çok şeyi ifade edecek ve bu ifadeleri farklı biçimlerde ortaya koyacak kadar çok yönlüdür. Matematik dışından biri Dünya'nın Güneş'e uzaklığının 93.000.000 ya da 93 milyon mil olduğunu yazabilir; matematikçiler ya da bilim insanları muhtemelen $9{,}3 \times 10^7$'nin (yani 10'un yedinci kuvvetiyle çarpılmış 9,3) zarafetini tercih edeceklerdir. Bir metrenin binde biri için elimizde üç seçenek bulunuyor: 0,001 metre, 1 milimetre ve 10^{-3} metre (yani 10 üssü -3); bir atom çekirdeğinin çapıysa şık bir biçimde 10^{-15} metre olarak ifade edilebilir.

Bu on sembol ne kadar zarif ve çok yönlü olurlarsa olsunlar hiçbir zaman kaçınılmaz olmamışlardır; iş sayı sistemlerine geldiğinde insanoğlunun icatlarının başlangıcı olmadıkları gibi sonu da değillerdir.

İlk Sayma Yöntemleri

Araştırmacılar ilk rakamların "çetele çubukları" (nicelikleri belirten işaretler taşıyan tahta çubuklar) üzerindeki kayıtlarına dair 30.000 yıl öncesine uzanan kanıtlar bulmuşlardır. Afrika ve Doğu Avrupa'da sayısal kayıtlar tutmak üzere çentilmiş kemikler de pratikte sayma işlemiyle nasıl uğraşıldığına dair başka kanıtlar oluşturur. Çetele çubukları İngiltere'de 13. yüzyılda vergi toplama amacıyla hâlâ kullanılmaktaydı; şaşırtıcıdır, bu geleneksel sistem kağıt kayıtların hakim olduğu 1820'lere kadar devam etmiştir. Çetele işaretleri, bir oyunda alınan puanların sayıya dökülmesi ya da istatistik araştırma verileri gibi sürekli artan bir niceliğin kaydedilmesi amacıyla bugün hâlâ kullanılmaktadır. Bilinen yöntemlerden biri de beşe kadar sayarak parmaklıklı bir kapıyı andıran bir işaret oluşturmaktır; göründüğü kadarıyla bunun kökeni çok eskilere uzanmaktadır.



ÜSTÜ ÇİZİLEN ÇETELE ÇUBUKLARI SİSTEMİ

Dünyanın her yerinde çetele yöntemlerine rastlanır. Güney Amerika'da görülen bir örnekte de beş çizgili bir sistem benimsenmiştir, fakat farklı bir şekil oluşturulmaktadır.



GÜNEY AMERİKA'YA ÖZGÜ BİR ÇETELE SİSTEMİ

Avustralya'nın yerli halkı arasında, ilkel sayma sistemleri küçük sayıların ötesinde genelleştirilmiştir. Tazmanya'da "bir", "iki" ve "çok" olarak tercüme edilebilecek bir sayma sistemi bulunur; ana karada, Queensland'de ise "bir", "iki", "bir ve iki", "iki iki" ve "çok" diye kayıt düşülmüştür.

Babilliler ve Mısırlılar

Uygun bir sayı sisteminin ortaya çıkması, "medeniyetlerin beşiği" Ortadoğu'da gerçekleşti. Babil medeniyeti Mezopotamya'da, bugünkü Irak'ta Dicle ile Fırat nehirleri arasında kalan bölgede serpilip gelişmişti; bu medeniyetin başkenti Babil bugünkü Bağdat'ın 50 mil (yaklaşık 80 km) güneyinde bulunuyordu. Babilliler MÖ üçüncü binyılda 60 sayısı etrafında dönen bir sayı sistemi kullanıyorlardı. Bu sistemin kalıntıları bugünkü kültürümüzde, örneğin zamanı ölçmemizde (bir dakika 60 saniye, bir saat 60 dakikadır) bulunmaktadır; Babilliler astronomilerinde matematiği kullandıklarından bugün tam bir çemberi ya da dönüşü oluşturan derecelerin sayısı olan 360'ta da bu sistemin kalıntıları karşımıza çıkar. 60 sayısına dayanan bir sistemin matematiksel bakımdan yararları vardır; bunlardan biri 60'ın kendisinden küçük 11 sayıya bölünebilecek olmasıdır, bunun da niceliklerin oranlanması açısından belirgin yararları vardır.

1 ve 60 kayıt için kullanılan kil tabletler üzerine yazması kolay olan iki sembolle belirtilmiştir; dik bir çizgi ve bir çentik. 1 rakamının sembolü çizgidir, 2 ile 59 arasındaki rakamlar da bu iki sembolün değişik bileşimleriyle belirtilmiştir. Babilliler yazılarını soldan sağa doğru okuyorlardı; sayı da sembollerin



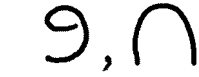
IKI BABİL SAYI SEMBOLÜ



BABİL SEMSOLLERİYLE 23 SAYISI

sıradaki konumuyla tanımlanıyordu; başka bir deyişle bugün bizim kullandığımız sistemin aynısıydı. 60'a geldiklerinde yeniden başa dönüyor ve 60 için de yine 1 için kullandıkları dikey çizgiyi kullanıyorlardı; hangi sayıyı ifade ettiklerini yorumlamanın tek yolu bağlama dayanmaktı; örneğin açılar ölçülüyorsa dikey çizginin 1 derece yerine 60 dereceyi ifade etmesi daha muhtemeldi. Babillilerin 0'a eşdeğer bir sembolleri yoktu.

Antik Mısırlılar, piramitlerin sıra dışı inşasında güçlü bir biçimde ifadesi bulan farklı ve daha incelikli bir sistem geliştirmişlerdi; piramitlerin inşası üç boyutlu geometri ve hayli doğru bir ölçüm gerektiren bir işti. Yaklaşık olarak MÖ 2700'de 10 rakamını taban alan sistem ortaya çıktı. Mısırlılar 9'a kadar sayılar için dikey çizgileri kullanıyorlardı, sonrası için de 10 ve 100 için kullandıkları iki farklı sembol vardı. Babillilerin tersine Mısırlılar sağdan sola doğru yazıyorlardı. Daha büyük sayıların sembolleriyse süslüydü: Örneğin 100.000 sayısı bir kuşla ifade ediliyordu.



10 VE 100 İÇİN ANTİK MISIR SEMBOLLERİ

Mısırlıların matematiği esasen pratik meselelere bağlıydı; ama incelikli bazı matematiksel numaraları da vardı. Çarpım yöntemleri dahiyaneydi. Bizim modern sistemimizde akıldan çarpma genelde okulda ezberle öğretilen çarpım tablomuzu bilmeyi gerektirir. Ama antik Mısır'da yaşayan çocukların sadece ikiler tablosunu bilmesi yeterliydi; çünkü çarpma yaparken abaküsün kullanılmasına dayalı bir yöntem kullanıyorlardı.



ANTİK MISIR SEMBOLLERİYLE 234 SAYISI

Vedik Aryanlar

Daha doğuda, MÖ ikinci binyılda Vedik Aryan medeniyeti Orta Asya'dan Hindistan'ın İndüs Vadisi'ne yayıldı; bu medeniyetin aritmetik yöntemine ait kayıtlar yaklaşık olarak MÖ 1000 tarihini taşır. Bu kültürde, Vedalar olarak bilinen antik Hindu metinlerinde şiirler, edebi metinler ve bilgece yazılar arasında 19 matematiksel "sutra", yani sözlü formül de bulunmaktaydı. Sutralar bir dizi matematiksel problem karşısında başvurulabilecek kestirme yollar ya da alternatif çözümler sunuyorlardı. Örneğin "dikey ve çapraz" sutra, tam sayıların çarpımına yardımcı oluyordu; bizim modern sayı sistemimize göre uzun bir zihinsel hesaplamaydı. Çarpma ve toplamanın bileşimiyle işliyordu. Diyelim ki 13'le 24'ü çarpmak istedik; bildiğimiz sembolleri kullanalım, önce dört kutucuklu bir karenin içinde 24'ün üzerine 13 yazıyoruz. "Dikey" sayılar çarpılır ve sonra çarpım sonuçları yan yana getirilerek 212 sayısı elde edilir: yani $(1\times2) + (3\times4) \rightarrow 2$ ve 12, yani 212. Daha sonra köşegen, yani "çapraz" terimler çarpılıp toplanır ve böylece 10'ların sayısı bulunur: $(1\times4)+(3\times2) \rightarrow 4+6 = 10$; 10 tane 10, yani 100.

1	3
2	4

Bir vedik aryan sayı tablosu

Sonra da 212 ile 100'ün toplanması doğru cevap olan 312'yi verir. Bu yöntem el sürçmesi gibi görünebilir; fakat geçerliliği iki sayıyı çarpmanın, yani ab × cd'nin aslında $(10a + b) \times (10c + d)$ çarpımını gerektirmesi ilkesinde yatar.

Sıfırın İcadı

Sıfır matematiksel bir sembol olarak sahneye sonradan çıkmıştır. İki temel işlevi vardır; bunların ilki kendisini bir yer tutucu olarak, 27 sayısını 207'den ayırt etmenin bir yolu olarak göstermesidir. Babillilerin, Mısırlıların, Yunanların, Romalıların sıfır için bir sembolleri yoktu; "hiçbir şeyi" ifade edecek bir şeyleri yoktu. Sıfırın ikinci işlevi gerçek bir rakam olmaktır; burada da kökenleri Hint matematikçi Brahmagupta'ya kadar uzanır; Brahmagupta MÖ 600 civarında sıfırı sayı sistemine dahil etme girişiminde bulunmuştur.

Sıfırın Latincesi *cifra*, daha sonra *zefro*'ya dönüşmüş, İtalyancada *zero* haline gelmişti. Fransızca *chiffre* de İngilizceye *cipher* olarak geçti; bu artık rastlanmayan bir kullanımdır. İngilizcede sıfırı ifade etmek için "hiçbir şey" (nothing) kelimesinden türemiş "nought"u kullanırız. "Nought" matematiksel olarak gerçekten de yanlış bir isimdir; çünkü 0 rakamını hiçbir şey olarak düşünmek yanlış olacaktır. Bir şey olduğu kesindir; modern rakam sistemimize büyük gücünü veren bir semboldür. Brahmagupta'nın da farkına vardığı gibi, matematiksel zorluk, araya giren 0 sayısını sayı sisteminin geri kalanıyla uyuşturmakta yatıyordu.

Sayı Tabanları ve Yirmi Tabanlı Miras

Matematikçiler farklı kültürlerin sayma sistemlerinden bahsederlerken "sayı tabanları" ifadesini kullanırlar. Sayı tabanları, bir sayma sisteminin temel birimleri ya da yapıtaşları olarak anlaşılabiliir. Bizim modern tabanımız ondur; 0'dan 9'a kadar 10 sembolün de yansıttığı üzere 10 tabanlı sistem kullanıyoruz. Fakat tarihte, kültürlerin sayıları kendi ihtiyaçlarına uyarladığına; 2, 3, 4, 5, 12, 20 tabanlarının ve tabii ki Babillilerin 60 tabanının kullanıldığına tanık olunmuştur. Bu karmaşık mirasın izleri bugünkü sistemimizde varlığını sürdürmektedir; rakamların dilinde olduğu gibi. Örneğin İngilizce'de "eleven" (on bir / Almanca elf)

ve "twelve" (on iki / Almanca zwölf) ona kadar sayılarla "on" kelimesinden türeyen "onlu" sayılar arasında bir kesinti yaratan dilsel tuhaflıklar olarak görülür. Bunlar 12 tabanlı bir sistemin kalıntılarıdır; onluk taban öncesinde bir şilinde 12 peni bulunması gibi.

> *"Evrenin yaratıcısı gizemli biçimde çalışır. Ama on tabanlı bir sayı sistemi kullanır ve yuvarlak sayıları da sever"*
>
> **SCOTT ADAMS, KARİKATÜRİST**

Bugünkü Guatemala ve güneydoğu Meksika'nın bulunduğu bölgede, işgale uğramadan önceki Maya uygarlığı 20 tabanlı bir sayı sistemi benimsemişti. (İlginçtir, Mayalar sıfır kavramına kucak açan bir yerleştirme sistemine dayalı rakamlar formüle eden ilk halklar arasındadırlar.) Bu gibi sistemlerin kökenleri genellikle on el, on ayak parmağımıza kadar uzanır; birçok kültürde 20 tabanlı sistemlerin kalıntıları bulunmaktadır. İngilizcede (Fransızca ve Almancada da) "onlu" sayılar ("teen"li sayılar) "on dokuz"da (nineteen) kesilir ve sonra özel bir kelime olan "twenty" (yirmi) gelir.

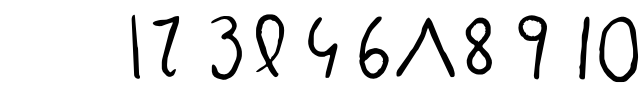
Bir nicelik olarak 20 dilimize ve kültürümüze başka biçimlerde de sızmıştır. "Score" kelimesi de aynı anlama gelir; bu kelime *Book of Common Prayers*'da (Anglikan Kilisesi'nde vaazlarda kullanılan dua kitabı) 70 yıllık bir ömrün "üç *score* ve on yıl" olarak tanımlanmasıyla unutulmaz bir biçimde kullanılmıştır. İngiliz ağırlık ölçülerinde *hundredweight* (cwt / yüz libre) de yer alır ve 20 cwt bir ton yapar. Tabii sterlinin on tabana uyarlandığı 1971 öncesinde bir sterlin 20 şilin ediyordu. Fransızcada sekseni ifade eden "quatre-vingt" kelimesinde 20 tabanlı sistemin bir kalıntısını görürüz.

On Tabanlı Sistem

Sayı sistemlerinin bu büyük çeşitliliğine rağmen bugün dünya on tabanlı sistem etrafında birleşmiştir.

Birçok bakımdan bu doğal bir insani tercihtir: Elimizde sayacağımız on parmak bulunur. Antik Romalılar tam sayılarla saymak için on tabanlı bir sistem kullanıyorlardı; ama kesir sistemleri kolaylık sunduğu için 12'yi taban alıyordu; çünkü 12 2,3,4 ve 6'ya bölünebilir. (Bazı tarihçiler her parmağımızda üç eklem bulunmasını, böylece başparmak hariç bir elde 12 eklem bulunmasını 12 tabanını açıklamak için kullanmıştır.) Aslında Romalıların matematiğin gelişmesine katkıları pek azdı. Fakat Latince modern Avrupa dillerinin birçoğuna evrildiğinden, bize rakamlar için kullandığımız kelimeleri vermiştir; Romalıların I, II, III, IV, V... X şeklinde ilerleyen rakam sistemi de kullandığımız "sıradan" basamaklara paralel olarak özellikle tarihlerin kayıt düşülmesinde varlığını sürdürmüştür.

Bugün kullandığımız rakamlar ilk kez Brahmagupta'nın devrinde Hint matematikçilerin kullandığı, sonra Arap alimlerin benimsediği rakamlardır. Bu semboller daha sonra Arap seyyahlar, tüccarlar ve fatihlerle başka yerlere taşınmış; Kuzey Afrika ve İber Yarımadası'na yayılmıştır. Arap matematik alimliği de 12. yüzyılda Batı'da yayılmaya başlamıştır: Dokuzuncu yüzyılda yaşamış matematikçi el-Harezmi'nin *Hint Rakamlarıyla Hesaplama Üzerine* adlı eserinin Latince çevirisi yapılmış, Pisalı Leonardo (Leonardo Fibonacci olarak da bilinir) 1202'de yayınlanan *Liber Abaci* ("Hesaplamalar Kitabı") adlı kitabında bu Hindu-Arap sayı sistemini tanıtmıştı. 13. yüzyılda İngiliz filozof, matematikçi ve yerleşik öğreti karşıtı keşiş Roger Bacon bu sembolleri kaydetmişti.



Roger Bacon'ın sayı sembolleri (13. Yüzyıl)

16. yüzyıla gelindiğinde yaygın olarak kullanılan on sembol, pek az değişiklikle bugün kullandıklarımıza benziyordu; matbaanın ve toplu basımın ilerlemesiyle birlikte standartlaşma da gelişti.

İki Tabanlı Sayılar

On tabanlı sistemin kuvvetli ve dayanıklı olduğu görülse de modern bilgisayar teknolojisi başka tür bir sistemi gerekli kıldı. Bir bilgisayardaki her "devre" ya "açık" ya "kapalı"dır; bu yüzden de bilgisayar teknolojisi sadece bu iki halin tanınmasına dayanır. Bu durum, alfabesi 0 ve 1 olan iki tabanlı bir sistem üretmiştir. Doğal olarak iki tabanlı sayılarla düşünmediğimizden on tabanlı sayıları iki tabanlı sayılara, iki tabanlıları on tabanlıya çevirmek için bir tekniğe ihtiyacımız vardı.

On Tabanlı	İki Tabanlı
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001

ON TABANLI SAYILARI IKI TABANLI SAYIYA ÇEVIRME TABLOSU

On tabanlı sistemde 10'un çarpanlarıyla düşünürüz; örneğin 312 sayısı, 3 tane 100'den, 1 tane 10'dan ve 2 tane de 1'den oluşur. İki tabanlı sistem içinse 2'nin çarpanlarıyla düşünmemiz gerekir: 1, 2, 4, 8, 16, 64, 128, 256, 512 vs.

Dolayısıyla 312 sayısının iki tabanlı bir sayıya çevrilmesi için, 2'nin 312'nin içinde olan en büyük katıyla, 256'ya bölünmesi sonra da aşağıya doğru inilmesi gerekir. Böylece 312 = 256 + 32 + 16 + 8 sonucunu buluruz. Ama sonra iki tabanlı sayıyı elde etmek için, 2'nin bu ifadede yer verilmeyen kuvvetlerini de dikkate almamız, var olan kuvvetlere "1", olmayanlara "0" vermemiz gerekir. Bu durum tam olarak şöyle bir sonuç üretir:

$$312 = (1 \times 256) + (0 \times 128) + (0 \times 64) + (1 \times 32) + (1 \times 16) + (1 \times 8) + (0 \times 4) + (0 \times 2) + (0 \times 1)$$

Başka bir deyişle 10 tabanlı 312 sayısı iki tabanlı 100111000 sayısını ortaya çıkarır; ya da tabanları belirten rakamları kullanarak yazarsak:

$$312_{10} = 100111000_2$$

Fakat on tabanlı bir sayıyı iki tabanlı bir sayıya çevirmenin, Antik Mısırlıların çarpımda kullandığı çiftleştirme yöntemine benzeyen iki aşamalı düzgün bir yolu vardır. Öncelikle çevirmek istediğimiz sayıyı bir tablonun en sağ köşesine yerleştirir sonra 1'e varıncaya kadar sayıyı 2'ye bölerek sola doğru ilerleriz; *bölme sonucu kalan olup olmadığına takılmayız*. Böylece 312 örneğinde, bir noktada 39'u ikiye bölmemiz gerekir; cevap olarak 19'u kaydetmeli, kalan 1'i umursamamalıyız. Bu işlem tablonun ilk sırasını verir. Daha sonra tablonun alt sırasında, üst sırada hangi sayıların tek ya da çift olduğunu belirtiriz; bütün tek sayılara "1", bütün çift sayılara "0" veririz. Alt sıradaki sıralama iki tabanlı sayıyı verir.

On tabanlı sayı	1	2	4	9	19	39	78	156	312
İkı Tabanlı Sayı	1	0	0	1	1	1	0	0	0

İKI TABANLI TAYILAR IÇIN BÖLME TABLOSU

Sekiz ve Daha Yüksek Tabanlı Sistemler

Hiç şaşırtıcı değil; iki tabanlı sayılarla ilgili sorunlardan biri bunların çok uzun sıfır ve bir dizileri yaratıp bilgisayarın değerli hafızasını kaplayacak olmalarıdır. Kuramda istediğimiz herhangi bir tabanı benimseyebiliriz; bu yüzden iki tabanlı sayıları kısaltmanın bir yolu sekiz tabanlı aritmetiği kullanarak onları çevirmektir. Bu sekiz tabanlı aritmetikte sekiz sembole ihtiyacımız vardır: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 ve 7.

Daha büyük iki tabanlı sayıları daha kısa ifadeler haline getirmenin sekiz tabanından sonraki yolu, on altı tabanını

kullanmaktır. Buna uygun sembol kümesi 16 sembolden oluşur: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F. A 10'a, B 11'e, C, 12'ye vs. tekabül eder. İki tabanlı bir sayıyı 16 tabanlı bir sayıya çevirmek için sağdan başlayarak dörtlü gruplar haline getiririz, örneğin:

$$312_{10} = (0001)(0011)(1000)_2$$

Yine on tabanlı – iki tabanlı tablomuza başvurarak (bol miktardaki sıfırları görmezden gelerek) şu sonuca varırız:

$$312_{10} = 138_{16}$$

Tümüyle harflerden oluşan 16 tabanlı bir sayı elde etmek de mümkündür; örneğin 10 tabanlı 2748, 16 tabanlı olarak şu hali alacaktır:

$$2748_{10} = 10 \times 16^2 \times 11 \times 16 \times 12 = ABC_{16}$$

Hikaye 16 tabanlı sayılarla sona ermiyor. Bilgisayarların gücü ilerliyor, artık 32 ve 64 tabanlı sistemlere de aşina hale geldik.

Sayıların Uzun Yolculuğu

Kemiklerin üzerindeki işaretlerden on altı tabanlılara ve ötesine sayıların aldığı yol çok çok uzun olmuştur. Bu yolculuk ilk olarak insan toplumlarının gündelik ihtiyaçlarıyla başlamıştır. Fakat antiklerin ilgisini çeken sadece sayıların kullanışlılığı değildir. MÖ 500 civarında Klasik Yunan yurttaşları pazar yeri için lojistik dedikleri sayı sistemine sahipken Pisagor ve Platon gibi düşünürler çoktan aritmetiği, sayı kuramını geliştirmeye başlamışlardı. Matematiğin bağımsız büyüleyiciliği ve güzelliği kendini erken tarihlerden itibaren hissettirmişti.

2500 yıl sonra Hindu-Arap on tabanlı sistemin, dünyanın matematiksel, bilimsel ve gündelik ihtiyaçları için en kalıcı, en yaygın sistem olduğu anlaşıldı. Fakat sayıların tarihi, farklı tarihlerde, farklı yerlerde medeniyetlerin kendilerinin nicelikleri ve düzeni akılcılaştırmaya yönelik yöntemlerine nasıl sarıldıklarını

da ortaya koyar. Matematik dili de dahil olmak üzere matematiksel mirasımız geçmişe borcumuzun tanığıdır; Babillilerin 60 tabanlı sistemi, Romalıların rakam sistemi, yirmi tabanlı sistemlerin mirası, hepsi de sayılarla ilgili söz dağarımıza katkıda bulunur. Zengin ve çok yönlü bir mirastır bu.

MATEMATİĞİN ATOMLARI NEDEN ASAL SAYILARDIR?

Yapıtaşları ve aritmetiğin temel teoremi

Sayma sayıları 1, 2, 3, 4, 5 vs.'nin arasında mücevheri andıran asal sayılar bulunur. Asal sayılar bütün sayı sisteminin yapıtaşlarıdır; onları bulma, ele geçmez özelliklerini keşfetme ihtimali eski çağlardan beri kuşaklar boyunca matematikçilerin hayallerini süslemiştir. Asal sayılar büyüleyicidir; çünkü çok temeldirler, ama matematiğin çözülmemiş en zor sorularını beraberlerinde getirirler.

Peki asal sayılar nelerdir? Öncelikle elimizde kavramsal "sayı dizisi" boyunca uzanıp giden tam sayılar vardır: 1, 2, 3, 4, 5, 6 vs. Bunlar matematiğin sayma sayılarıdır, ama aralarında "elmaslar", yaygın deyişle asal sayılar ya da "asallar" bulunur. Asallar 1 ve kendileri dışında hiçbir sayıya tam olarak bölünmeyen tam sayılardır. 5 asal bir sayıdır; çünkü onu 2, 3 ve 4'e bölmeye kalktığımızda geride hep bir kalan olur. 6 asal bir sayı değildir, çünkü 2'ye tam olarak bölünür. $6 = 2 \times 3$ ifadesi, 6'nın daha küçük sayılardan oluşabileceği anlamına gelir; matematikçiler asal olmayan bir sayı için *bileşik sayı* ifadesini kullanırlar. Bileşikler daha küçük "çarpanlar"a ayrılabilirler; ama 5 gibi bir asal sayı daha küçük çarpanlara ayrılamaz. Bir zamanlar atomların düşünüldüğü gibi o da bölünemezdir.

İlk birkaç asal sayı 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29'dur; asal sayılar sayma sayıları arasına düzenli bir biçimde dağılmış değillerdir. Onlar matematiğin harikalarıdır ve "rastgelelik" gösteriyormuş gibi

görünürler; gerçi bu matematikçilerin asal sayılar arasında örüntüler aramalarını, bir tekrarlılık ortaya çıkarma çabalarını engellememiştir.

İlerlemeden önce halletmemiz gereken küçük bir kural var. 1 sayısıyla ilgili bu kural. 1 asal bir sayı mıdır? Kendisinden başka hiçbir sayıya bölünemediği için asal sayı tanımına uyduğu kesindir. Gerçekten de büyük Leonhard Euler de dahil olmak üzere birçok matematikçinin 1'i asal bir sayı olarak tanıdığı doğrudur; gerçi bugünkü düşünme biçimi asal sayıları 2'yle başlatmaktan yanadır. (1'i asal sayı olarak kabul edecek olursak söyleyeceklerimiz ***bütün*** asal sayılar için geçerli olmayacaktır.)

2'yi ilk asal sayı olarak kabul edebiliriz; ama onun da özel bazı nitelikleri vardır. Asal sayı olan tek çift sayıdır: Bütün çift sayılar 2'ye bölünebilir, bu yüzden 2'den büyük çift sayılar asal sayı olamazlar. O yüzden asal sayılara baktığımızda, 2'nin dışında, sadece tek sayıları değerlendirmeye almamız gerekir. Ayrıca birden fazla basamağı olan hiçbir asal sayı 0 ya da 5'le bitemez; çünkü bu sayılarla biten sayılar 5'e bölünebilir; bu yüzden 10'dan büyük bir asal sayının mutlaka 1, 3, 7 ya da 9'la bitmesi gerekir. Fakat bu, bu rakamlarla biten bütün sayıların asal sayı olduğu anlamına gelmez: 1'den 100'e kadar 1'le biten sayılardan 11, 31, 41, 61, 71 asal sayılardır; ama 21, 51, 81 ve 91 asal sayı değildir.

Asal Sayıların Temel Özellikleri

Asal sayılar hakkında bilinen muazzam miktarda sonuç vardır. Matematiğin en eski dalı "sayılar kuramı" iyice oturmuş teoremler ve gelecekte çözülebilecek zorluklarla doludur; matematiksel literatürde de her yıl yüzlerce yeni teorem belirmektedir. Önemli sonuçlar, büyük fikirler sadelikleri ve derinlikleriyle matematiksel uzamı aydınlatır.

Kritik önemdeki temel bilgilerden biri, bir tam sayının asal sayıların çarpımı olarak ifade edilebilecek olmasıdır. Örneğin 41.184

sayısını asalların çarpımı olarak $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 11 \times 13$ şeklinde ifade edebiliriz; bu ifade "kuvvetler"in ifadesi olarak şu şekilde sıkıştırılabilir: $41.184 = 2^5 \times 3^2 \times 11^1 \times 13^1$. Dolayısıyla asal sayılar tam sayılar sisteminin yapı taşlarıdır. Bununla ilgili bir başka özellik de bir tam sayıyı bu şekilde yazmanın kesinlikle sadece bir tek yolu olmasıdır: Farklı asal sayılardan oluşan bir kümenin çarpımı aynı tam sayıyı vermez. Bu benzersizlik, aritmetiğin temel teoremini oluşturur.

Temel teoremden yola çıkarak herhangi bir tam sayının en azından bir asal sayıya bölünebileceği söylenebilir. Tam sayıların en az bir tane, ama genellikle daha fazla asal sayı çarpanı vardır; örneğimiz 41.184 asal sayılar olan 2, 3, 11 ve 13'e bölünebilir.

"Bizler Samanyolu'nun dış sarmallarından birinde bulunan, ikili simetrisi olan, cinsel olarak farklılık gösteren, asal sayıları tanıyabilen... iki ayaklılarız"

NASA DERİN UZAY ARAŞTIRMALARINA EKLENMİŞ METİN

Bir Sayı Ne Zaman Asal Sayıdır?

Küçük bir sayının asal bir sayı olup olmadığını bulmak kolaydır. Ama daha büyük N sayısı verildiğinde birkaç hızlı kontrol yapabiliriz. Bir gözlemde bulunarak büyük çaba sarf etmekten de kurtulmuş oluruz. N sayısı bileşik bir sayıysa, yani $N = a \times b$ ise, a ile b çarpanlarının ikisi birden N'in kare kökünden büyük olamaz. İkisi de N'in kare kökünden büyük olsalardı bu sayıların çarpımı N'den daha büyük bir sayı verirdi. Dolayısıyla çarpanlardan birinin (diyelim ki a'nın) N'in kare kökünden küçük olduğunu varsayabiliriz. Aritmetiğin temel teoreminden, a'nın asal bir sayıya bölünmesi gerektiğini de biliyoruz. Bu gözlemleri bir araya

getirdiğimizde, N'in bileşik bir sayı olup olmadığını görmek için N'in kare köküne eşit ya da ondan küçük olan asal sayıların N'i bölüp bölmediğini görmemiz gerek. Hiçbiri bölmüyorsa o halde N'in asal bir sayı olması gerekir.

Örneğin 211 sayısını incelemek için öncelikle bu sayının kare kökünü bulmalıyız; 211 kare kökü yaklaşık olarak 14,5'tur. Şimdi 211'in 14'ten küçük asal sayılara bölünebilirliğini kontrol etmemiz gerekiyor; yani 2, 3, 5, 7, 11 ve 13'ün 211'i tam olarak bölüp bölemeyeceğini görmemiz lazım. Hesap makinesinde bu işlemleri gerçekleştirip geride hep kalan olduğunu gördüğümüzde 211'in asal sayı olduğuna karar veririz.

Açıktır ki bu yöntem, binlerce basamağı olan sayılar açısından pratik değildir; çok büyük bir sayının bileşik bir sayı mı yoksa asal bir sayı mı olduğunu kontrol etmek zorlayıcı bir problemdir; elimizde basit bir sınama yapmamızı sağlayacak pek az şey vardır. Fakat 2002'de büyük bir atılım gerçekleştirilmiştir. Üç Hintli matematikçi; Manindra Agrawal, Neeraj Kayal ve Nitin Saxena bir sayının asal bir sayı olup olmadığını sınamaya yarayacak etkili bir algoritma ya da bir reçete bulunduğunu kanıtlamışlardır. (Bakınız *Geriye Çözülecek Bir Şey Kaldı Mı?*)

Asal Sayılar Nerede Son Bulur?

Asal sayılar sınırsızdır. Bir asal sayılar sonsuzluğu olduğunu söyleyebiliriz; yani bir asal sayı yazıldığında, onun sonrasında bir tane daha asal sayı vardır. Bu olguyu gösteren çarpıcı teorem Öklit'in *Elementler*'inde (9. Kitap, 20. Önerme) "asal sayılar, asal sayılara atfedilen çokluktan fazladır) şeklinde ifade edilmiştir. Bunun kanıtındaki temel unsur, bugün "Öklit sayısı" denilen şeydir.

Bir Öklit sayısı, belli bir asal sayıya (P diyelim bu sayıya) kadarki bütün asal sayıların çarpılması ve sonra da bu çarpıma 1 eklenmesiyle elde edilir. Matematiksel terimlerle söyleyecek olursak,

bir Öklit sayısı olan N şu şekilde ifade edilir: $N = (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times ... \times P) + 1$

$P = 13$ dediğimizde, Öklit sayısı N'in asal bir sayı değil, bileşik bir sayı olduğunu görürüz.

$$N = (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13) + 1 = 30.031 = 59 \times 509$$

Aslına bakacak olursanız asal Öklit sayıları pek enderdir; bir başka asal Öklit sayısının ortaya çıkması için $P = 31$ olmasını beklememiz gerekir; $P = 31$ olursa $N = 2.000.560.490.131$ olur. Bundan sonra $P = 379$ olmasını beklememiz gerekir, bu durumda asal N sayısının yaklaşık 200 basamağı olacaktır. $P = 379$'dan sonraki asal Öklit sayılarını ardışık asallar ("ikiz asallar" denir) $P = 1019$ ve $P = 1021$ verir. Bu devasa Öklit sayılarını yazmak söz konusu değildir.

Asal P	İfade	Öklit sayısı N	Asal?
2	$2 + 1$	3	✓
3	$(2 \times 3) + 1$	7	✓
5	$(2 \times 3 \times 5) + 1$	31	✓
7	$(2 \times 3 \times 5 \times 7) + 1$	211	✓
11	$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11) + 1$	2,311	✓

P'NİN KÜÇÜK DEĞERLERİ İÇİN ÖKLİT SAYILARI

Artık Öklit'in asalların sayısının sonsuz olduğu yönündeki iddiasının dahiyaneliğini takdir edebiliriz. Bunun kanıtı şöyle ilerler: Herhangi bir asal P sayısı seçelim. Amacımız P'nin ötesinde bir asal sayı bulunduğunu kanıtlamaktır. Daha önce de gördüğümüz gibi Öklit sayısı $N = (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times ... \times P) + 1$ ya asaldır ya değildir; belirsiz bir P değeri için N'in asal mı yoksa bileşik mi olduğunu bilemeyiz. N asal bir sayıysa P'nin ötesinde bir asal sayımız vardır, çünkü N kesinlikle P'den büyüktür. Öte yandan N'in asal sayı olmaması halinde de kayıpta değilizdir. N'i 2, 3, 5, 7

... P asal sayılarından birine bölmemiz halinde de geriye her zaman 1 kalacaktır; yani bu sayıların hiçbiri N'i tam olarak, kalansız bölmez. Fakat aritmetiğin temel teoremine dayanarak N'in bir asal sayıya bölünmesi gerektiğini biliyoruz; bu asal sayı 2, 3, 5, 7... P olmadığından, P'den büyük olması gerekir. Bu sayı P'nin ötesinde varlığını araştırdığımız asal sayıdır.

Böylece herhangi bir asal P sayısının sonrasında her zaman başka bir asal sayı vardır; bu yüzden de asal sayıların sayısının sonsuz olması gerekir. Asal sayıların sayısı sonlu olsaydı elimizde tümüyle farklı, çok zayıf bir matematik dalı olurdu.

Özel Asal Sayılar

Sonsuz asal sayılar kümesi içinde bazı asal sayıların belirli bir biçimi vardır. Asal sayılarla ilgili bilgilerin merkezinde 16. yüzyıl matematikçisi Marin Mersenne'in adını taşıyan Mersenne sayıları yer alır.

Mersenne sayıları (n=herhangi bir sayı dersek) $M_n = 2^n - 1$ olarak ifade edilir. Her zaman tek sayılardır; çünkü çift bir sayı olan 2^n'den (2'nin n kere kendisiyle çarpılmasından) 1'in çıkarılmasıyla elde edilirler. Tek sayı olmalarına rağmen mutlaka asal sayı değillerdir. M_n'nin asal sayı olabilmesi için öncelikle n'in de asal sayı olması gerekir; fakat bu M_n'nin asal sayı olması için yeterli koşul değildir. $M_2 = 3$, $M_3 = 7$, $M_5 = 31$, $M_7 = 127$; hepsi asal olsalar da Mersenne sayısı M_{11} asal bir sayı değildir; 16. yüzyılda keşfedildiği üzere:

$$M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$$

Mersenne sayılarıyla ilgili genel bir örüntü varmış gibi görünmemektedir. M_{13}, M_{17}, M_{19} hepsi de asal sayılardır; ama M_{23} asal bir sayı değildir, çünkü:

$$M_{23} = 2^{23} - 1 = 8.388.607 = 47 \times 178.481$$

Aslında Mersenne sayılarının çoğu asal sayı değillerdir; bugüne kadar asal sayı olan sadece 47 Mersenne sayısı bulunmuştur. M_{11213}'ün asal sayı olduğunun bulunması 1963'te Illinois Üniversitesi için bir gurur kaynağı olmuştur. O zamandan bu yana çok daha büyük asal Mersenne sayıları keşfedilmiştir; bunlar arasında neredeyse 13 milyon basamağı bulunan $M_{43112609}$ da vardır!

Geleneksel matematikte asal Mersenne sayıları, mükemmel sayılar inşa etmekte kullanılabilir; mükemmel sayılar çarpanlarının toplamı olan sayılardır. 6 sayısı mükemmel bir sayıdır, çünkü 6 = 1 + 2 + 3; ondan sonraki mükemmel sayı 28'dir, çünkü 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14'tür. Matematikçiler Leonhard Euler ile Öklit'in çalışmalarını birleştirerek asal sayıları (p) kullanarak mükemmel sayıları tespit edebilecekleri bir formül oluşturmuşlardır; M_p'nin asal sayı olması koşuluyla $2^{p-1} \times M_p$ mükemmel bir sayı verir.

Asal Sayıların Sıklığı

Peki, belli bir aralıkta asal sayıların dağılımı nasıldır? Tam sayılar arasında ilerledikçe asal sayılar daha dağınık hale gelir. 1 ile 100 arasındaki sayıların dörtte biri asal sayılardır; ama 1 ile 1000 arasındaki sayıların sadece % 16'sı, 1 ile 10.000 arasındaki sayıların sadece % 12'si asaldır. Kısa süre önce, $n = 10^{23}$ olması halinde 1'den n'e kadar sayıların 1.925.320.391.606.803.968.923 tanesinin asal sayı olduğu doğrulanmıştır; bu da bu devasa aralıktaki sayıların sadece % 1.9'unun asal sayı olduğu anlamına gelir.

19. yüzyıl başlarında büyük matematikçi Carl Friedrich Gauss, asal sayı tablolarıyla büyülenmiş; çeşitli sayı aralıklarında kaç tane asal sayı bulunduğunu çözme işine koyulmuştu. Bu oran, yaygın deyişle asalların "yoğunluğu" şu hesaplamayla ortaya çıkarılır:

$$\frac{\textit{n'den küçük asal sayıların toplam sayısı}}{\textit{n'den küçük sayıların toplam sayısı}}$$

Gauss, uzun ve yorucu hesaplamalarına dayanarak bir formül biçiminde kuramsal bir *tahmin* geliştirmişti.

Sayı (n)	n'den küçük asal sayıların sayısı	Gerçek yoğunluk	Kurumsal tahmin
10	4	% 40.0	% 43.4
100	25	% 25.0	% 21.7
1000	168	% 16.8	% 14.5
10,000	1229	% 12.3	% 10.9
100,000	9,592	% 9.6	% 8.7
1,000,000	78,498	% 7.8	% 7.3
10,000,000	664,579	% 6.6	% 6.2
100,000,000	5,761,455	% 5.8	% 5.4
1,000,000,000	50,847,534	% 5.1	% 4.8

ASAL SAYILARIN GERÇEK VE KURAMSAL YOĞUNLUĞU

Gauss'un n'in logaritmasına dayanan formülü, deneysel kanıtlara dayanıyordu; 19. yüzyıl başlarında bu formülün matematiksel kanıtı ufukta görünmüyordu. Yüzyıl sonuna gelindiğinde, kuramsal tahmin için bir kanıt ortaya çıktı; fakat bazıları bu kanıttan tatmin olmadı; çünkü bu kanıt Diferansiyel ve İntegral hesabına dayanıyordu (Bakınız *Evrenin Matematiği Nasıldır?*), bu tür tekniklerin soyut "aritmetik"e sokulması yapay bir çaba olarak görülüyordu. 50 yıl sonra soyut aritmetiğe dayanan bir kanıtın üretilmesi sonucu bu eleştiri ortadan kalktı; gerçi bu kanıt da son derece teknik ve uzundu.

Yerleşiklik kazanmış, çok iyi bilinen bu teoreme bugün asal sayılar teoremi denir. Asal sayılar teoremi, asalların yoğunluğuyla kuramsal tahmin arasındaki farkı, n'i yeterince büyük varsayarak istediğimiz kadar küçültebileceğimizi söyler. Asal sayılar teoremi matematikçiler tarafından alanlarındaki en büyük teoremlerden biri olarak görülür; özellikle de en büyük kahramanlarından biri olan

Gauss'un adıyla anıldığı için. Gauss'un öğrencisi Bernhard Riemann, 1859'da kaleme aldığı ünlü makalede matematikçilere asal sayıların uzun vadeli dağılımının "Riemann zeta fonksiyonu"nun davranışına ve "Riemann varsayımı"na bağlı olduğunu göstermiştir.

Düzenlilik Arayışı

Öklit sayesinde asal sayıların sonsuzluğu matematikçilere sınırsız bir oyun sahası açtı. "Asalların belirişinde bir düzen var mıdır?" ya da "Sırf asal sayılar verecek formüller üretebilir miyiz?" gibi her tür sorunun doğmasına neden oldu.

18. yüzyılda Leonhard Euler meşhur bir formül geliştirdi: $n^2 + n + 41$. (Burada n, her zaman olduğu gibi herhangi bir sayıyı ifade eder). Özel bir formüldü bu; çünkü n = 1, 2, 3,... 39 dediğimizde, cevap her zaman bir asal sayı olur. Bunu sınamak için n'in 7 olduğunu kabul edersek sonuçta $7^2 + 7 + 41 = 97$'ye varırız ki bu sayı kesinlikle asal bir sayıdır. Aslında 40'a varıncaya kadar bu formül iyi işler; 40'ta cevap 41×41'e eşit olur, bu da asal bir sayı değildir.

Birçok değişkenin bulunduğu ifadelerde daha büyük başarı sağlanmıştır; kısa bir süre önce de biraz karmaşık olmasına rağmen *bütün* asal sayıları ifade edecek bir formül bulunduğu gösterilmiştir. Mesele şudur ki bu formülün on değişkeni vardır, değişkenlere eklenen bazı kuvvetler de çok büyük olabilir (10^{45} derecesinde). Bu formül asal olmayan sayılar da verecektir.

Basitçe dile getirilen farklı tür ifadelerle başka tür bir başarı elde edilmiştir. Hepsini olmasa da sadece asal sayılar verdiği düşünülen bu tür çarpıcı ifadelerden biri 1947'de William H. Mills tarafından keşfedilmiştir. Mills, aşağıdaki önermeyi sağlayan ve k olarak ifade edilen bir sayı olduğunu kanıtlamıştı:

> n'in değeri ne olursa olsun k^{3^n} hemen altındaki tam sayı her zaman asal bir sayıdır.

Buradaki tek güçlük, kimsenin k'nın değeri hakkında fazla bir şey bilmemesidir; sadece var olduğu bilinir ve k'nın birden fazla değeri olabilir. Bugün bu sayıya Mills sabiti denilir. Riemann varsayımı doğruysa k'nın olası en küçük değerinin yaklaşık 1,3063778838 olduğu düşünülmektedir. Asalların dağılımıyla ilgili sonuçların, Riemann varsayımının gerçekliğine dayanmasını isteriz. Gerçekten de asal sayılarla ilgili o kadar çok şey ve çok daha fazlası Riemann varsayımına dayanmaktadır ki bu hipotezin kanıtı hevesle beklenmektedir; bu soru matematiğin tamamı açısından hâlâ en zor sorulardan biridir. (Bakınız *Çözülecek Bir Şey Kaldı Mı?*)

Asalların Önde Gelirliği

Asal sayılarla ilgili tartışmamız sırasında sayılar kuramının sularına girdik; sayılar kuramının, matematiğin uygulamadan yoksun bir dalı olduğu ileri sürülmüştür. Bir zamanlar durum böyle olabilirdi, ama artık sayılar kuramı modern şifreleme ve bilgisayar güvenliği bilimlerinin merkezinde yer almaktadır. (Bakınız *Kırılamayacak Bir Şifre Yaratabilir Miyiz?*) Bilgisayarların güvenliği bu çapraşık konuya dayanmaktadır; Öklit, Mersenne, Euler ve 17. yüzyılda yaşamış avukat Pierre de Fermat'nın ve daha başka birçok kuramcının bu konudaki teoremleri yeni bir hayat bulmuştur.

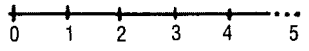
Asal sayılar basitçe tanımlanmıştır; fakat haklarında çok şey bilinmesine rağmen insanın kafasını karıştıran, onu önce umutlandırıp sonra hayal kırıklığına uğratan biçimlerde zorluklar çıkarmayı sürdürmektedirler. Asal sayılar dünyanın en büyük matematikçilerinin dikkatini çekmiştir; asal sayıların aritmetiğin yapıtaşları olduğu, birçok matematiksel girişimin kalbinde yattıkları inkâr edilemez. Onlara matematiğin "atomları" demek abartılı olmayacaktır; geride kalan gizemlerinin izlerini sürmek de matematiğin başlıca uğraşlarından biri olarak kalacaktır.

EN TUHAF SAYILAR HANGİLERİDİR?

Reel, irrasyonel ve aşkın sayılar

Sayma sistemimizin temelini ilk uygarlıklar atmıştır; hangi sembol sistemi benimsenirse benimsensin, 1,2,3'le başlayan tam sayı dizisinin paha biçilemez bir araç olduğu anlaşılmıştır. Fakat zamanla bu, matematiksel ihtiyaçlarımızı karşılamaya yetmemiştir. Yeni sayılara ihtiyaç duyulmuş; tam sayılardan küçük olan sayılar, yani kesirler ve sıfırdan küçük olan sayılar, yani negatif (eksi) sayılar kavrayışları doğmuştur. Sayı dizisinin incelenmesi burada da son bulmamış, gerçekten de çok gizemli bazı sayılar ortaya çıkmıştır.

Küçük çocukların öğrendiği sayma sayıları *tam* sayılardır (1,2,3 vs.). Matematikçiler birçok araştırmada bunların başlangıç noktası olduğunu kendilerine hatırlatmak için bunlara "doğal" sayılar deme eğilimindedir; bu sayılara "pozitif (*artı*) *integer*"ler de derler. ("İnteger" tam sayı anlamına gelir.) (Sıfıra da yer verildiğinde bu sisteme *negatif olmayan integerler* denir.) Kavramsal açıdan matematiğin bu yapı taşlarının bir "sayı dizisi" üzerinde yer aldığını düşünmek yararlıdır.

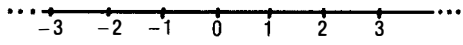


SAYI DOĞRUSU ÜZERİNDE SIFIR VE POZİTİF TAM SAYILAR

Fakat bu birçok matematiksel hesaplama açısından tek başına yetersizdir. Sayı dizisinin, en başta -1, -2, -3, -4, -5 gibi negatif sayılarla genişletilmesi gerekir.

Negatif sayılarla karşılaşmamızın en açık biçimi mali işlerimizde gerçekleşir; sıkıntıyla, banka hesabımızda diyelim ki "-250"

ifadesini gördüğümüzde borca girdiğimizi, bankaya bu meblağı borçlu olduğumuzu anlarız. Negatif sayılar, sıfırın altındaki ısıları ölçmekte de kullanılır. Negatif sayı ne kadar büyükse, hava o kadar soğuktur; yani -20 derece -10 dereceden daha soğuktur. Bu negatif sayıların düz bir sıralamasıdır ve $-20 < -10$ şeklinde yazılabilir. Negatif sayılar sayı dizisine alındıklarında, sayılar büyüdükçe sağdan sola doğru ilerlerler. "Pozitif" ve "negatif" tam sayılardan oluşan bileşik bir küme, matematikçilerin "düz tam sayılar" dediği şeyi ortaya çıkarır.



SAYI DİZİSİ ÜZERİNDE DÜZ TAM SAYILAR (EKSİ SAYILAR, SIFIR, ARTI SAYILAR)

Geçmişte varlıklarına karşı çıkanlar olmuşsa da bugün negatif sayıların varlığını memnuniyetle kabul ediyoruz. 18. yüzyılda matematikle amatörce uğraşan İngiliz diplomat Francis Maseres negatif sayıları anlamsız buluyordu. Bu sayıların "bütün denklem öğretilerini karartttığını" ileri sürmüştü. Fakat bu uçsuz bucaksız bir alanda atılmış bir çığlıktı; sonraki kuşaklar da onun yanıltıcı savlarını aşarak negatif sayıları matematiksel dokuya sağlam bir biçimde oturtabildiler.

Tam Sayılardan Kesirlere

Fakat negatif tam sayılar bir tam sayının parçalarının nasıl temsil edileceği sorununu çözemiyordu; böylece kesirler ortaya çıktı. Kesirleri genellikle tek bir bütünün parçaları olarak düşünürüz. Bir doğumgünü partisine 20 kişi katılırsa ve sadece bir tek doğumgünü pastası varsa misafirlerin her biri kuramsal olarak

"Tam sayılar matematiğin kaynağıdır."

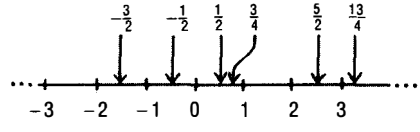
HERMANN MINKOWSKI, DIOPHANTINE APPROXIMATIONS (1907)

pastanın yirmide birinde hak sahibidir. Üstteki sayıya pay, alttaki sayıya payda denir. Kesirler genellikle matematikçiler tarafından rasyonel sayılar olarak anılır; içkin olarak sağduyuya hitap ettiklerinden değil, bir sayının bir başka sayıya bölünmesi olarak ifade edildiklerinden, yani bir "rasyo"yu, oranı gösterdiklerinden böyle anılırlar.

1'in herhangi bir tam sayının (cebirsel olarak "n" diye tanımlayabiliriz) üstünde belirdiği bu tür kesirlere *birim* kesirler denir. Antik Mısırlılar bunlarla hesap yapmanın ilginç biçimlerini geliştirmiş, bugüne kadar çözülemeyen matematiksel muammalar yaratmışlardı. Fakat sıradan kesirlerde üst kısımdaki sayı 1'le sınırlı değildir. Doğumgünü partisine gidenler, birbirinin aynı iki dilimle temsil edilirlerse her biri pastanın $\frac{2}{20}$'sini alacaktır. Bazen bu kesirler her iki tarafı da bölünerek sadeleştirilebilir; $\frac{2}{20}$'nin iki tarafı da 2'ye bölündüğünde, bir tek konuğa sunulan doğumgünü pastasının miktarı $\frac{1}{10}$ gibi eşdeğer bir kesirle ortaya çıkar. Böyle bir "sadeleştirme" işlemi başvurulabilecek yararlı bir araç ve kesirlerle uğraşma sanatının bir parçasıdır.

Görsel aygıtımız sayı dizisine dönelim; kesirleri sayı dizisi üzerinde de gösterebiliriz; kesirler tam sayılar arasında uygun yerlerine yerleştirilebilir: Örneğin $\frac{1}{2}$, 0 ile 1 arasında bir yerde olacaktır; üst kısmı ağır basan $\frac{5}{2}$ gibi bir kesirse 2 ile 3'ün arasında yer alacaktır.

Fakat sayı dizisi bir soru doğurur: Diziye kesirler eklemeye devam edebilir miyiz? Sayı dizisine kaç kesir sıkıştırabiliriz? Aslında hep daha fazla yer vardır; örneğin $\frac{2}{7}$ ve $\frac{5}{17}$'yi sayı dizisine yerleştirdiysek $\frac{7}{24}$ kesri (iki kesrin paylarını ve paydalarını toplayarak oluşturulmuş bir kesirdir) bu ikisinin ortasında yer alacaktır. Kesirlerin bütün sayı dizisini doldurduğunu, arada hiç boşluk kalmadığını düşünmek isteriz.



SAYI DİZİSİ ÜZERİNDE KESİRLER

Kesirler ve Pisagorcular

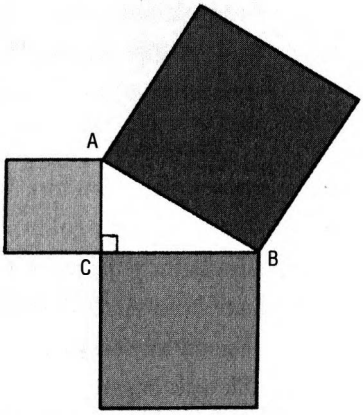
Yaklaşık olarak MÖ 550 yılında Pisagor öncülüğünde Yunan alimler sayıları doğanın *anahtarı* olarak görmeye başladılar. Onların bu bakışı bir açıdan yarı mistik bir yaklaşımdı; sayılara insani nitelikler yüklenmişti; çift sayılar dişi, tek sayılar eril olarak görülüyordu. Ama Yunanlılar bunları ele alırken, kesirlere odaklanan ölçüm kuramlarından belli olduğu üzere, sağlam bir yöntem kullanıyorlardı.

Pisagorcu ölçüm çerçevesinde ölçülecek uzunluk, daha küçük bir birime bölünür. Bu birim, bir inç, bir milimetre ya da başka bir şey olabilir; birimin *adının* kuramın sonuçları açısından hiçbir önemi yoktur. Birim, önce uzunluğun başına yerleştirilir; sonra da başından itibaren uzunluğun bir ucundan diğerine yerleştirilir; bu biraz bir mesafeyi, bir ayağı diğerinin önüne yerleştirip topuğu parmaklara dayayarak, yani adımlayarak ölçmeyi andırır. Eğer şanslıysanız uzunluğu oluşturan birimlerin sayısı bir tam sayıya, diyelim ki 14'e eşit olacaktır. Ama yerleştirilen son birim çok büyük ihtimalle, ölçülecek uzunluğun bitim noktasına denk gelmeyecektir. Bu durumda Pisagorcu geometri, birincinin aynısı olan *başka* bir uzunluk ekler ve "tam" bir uygunluk sağlayıncaya kadar ölçmeye devam eder.

Fakat bundan sonra uzunluklardan birinin ölçümünün alınması için bir bölme işlemi yapılması gerekecektir. Diyelim ki 27 birim, birbirine eşit iki uzunluğun sonuna tam denk geldiyse uzunluklardan birinin ölçümünü $\frac{27}{2}$, kesri verecektir; bu kesir $13\frac{1}{2}$ birime eşittir.

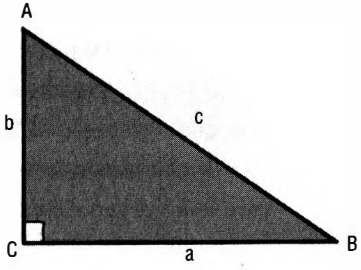
Pisagorcu ölçümün ilginçliği her zaman bir kesir olarak *ifade edilen* bir sonuç ortaya çıkarmasındadır.

Ortadan Kaybolan Kesir Vakası



DİK AÇILI BİR ÜÇGENİN KARELERİ

Matematikte Pisagor'un üçgenler için ileri sürdüğü kalıcı teorem, kendisini şöhrete kavuşturan başlıca şey olmuştu: Hipotenüsün (dik açılı bir üçgende, dik açının *karşısındaki* kenar) üzerinde duran karenin alanı, diğer iki kenarın üzerinde duran karelerin alanının toplamına eşittir. Bu ölçüm pratiği (ve kesirler) açısından getirisi olan bir kuramdı; Antik Yunanlılar salt kendisiyle çarpılan sayılarla değil, kelimenin tam anlamıyla karelerle, geometriyle düşünüyorlardı. Dolayısıyla Pisagor'un teoremi gerçek geometrik karelerin kenarlara eklendiği bir şemayla temsil ediliyordu. Bu teorem, üçgenin kenarlarına a, b ve c dendiği, $a^2 + b^2 = c^2$ formülüyle bilinir.



PİSAGOR'UN DİK AÇILI ÜÇGEN TEOREMİ

Fakat diyelim ki hem a'nın hem b'nin uzunlukları 1'e eşittir; bu demektir ki $1^2+1^2 = c^2$, yani $c^2 = 2$. Bu durumda hipotenüsün uzunluğu 2'nin kare kökü olmalıdır ($c = \sqrt{2}$ olarak yazılır); o da yaklaşık olarak 1,4142'ye eşittir, çünkü $1{,}4142 \times 1{,}4142 = 1{,}99996164$'tür. Bu 2'ye yakındır, ama tam olarak 2 *değildir.*

İşte şimdi şok geliyor. Pisagorcu ölçüm uyarınca, c kenarını (2'nin kare köküne eşit olması gerekir), bir uçtan bir uca yerleştireceğimiz birim olarak a = 1 kenarını kullanarak ölçmeye kalktığımızda, c uzunluğuna ne kadar ekleme yaparsak yapalım,

hiçbir zaman birimlerimiz, ölçülen uzunluğa tam denk gelmez. Bu demektir ki, 2'nin kare kökü olarak tanımlanan kenar uzunluğu bir kesir olamaz. Baskın ölçüm kuramına göre, bütün uzunlukların bir kesir olması gerekir. Fakat 2'nin kare kökü besbelli ki bu kurama uymamaktadır.

Pisagorcular bu sonuca ayak uyduramadılar. Efsaneye göre mensuplarından biri, Hippasus, 2'nin kare kökünün sırrını açıkladığı için denizde boğuldu; tanrılar onu ödüllendirmek yerine bu muhbire öfkelerini yönelttiler. Fakat Olimpos Dağı'nın sakinleri bile 2'nin kare köküyle ilgili tuhaf gerçekliği değiştiremediler. Aslında ortada inşa edilebilecek bir uzunluk vardı; iki kenarı birbirine eşit bir dik açılı üçgen yaratmaktan daha kolay ne olabilir ki? Gelgelelim üçgenin üçüncü kenarı mevcut kuramla ölçülemiyordu. Pisagor, ısrar etmemiz, kesirli bir sonuca varıncaya kadar daha fazla birim kullanmamız gerektiğini söyleyerek bu uygunsuzluğa omuz silkmiş olabilir. Fakat 2'nin kare kökünün bir kesir olmadığı, bu yüzden de ölçülemeyeceği yönünde mantıksal kanıtların ileri sürülmesiyle kuramı alt üst olmuştu. Bu yüzden Pisagor'un bu açıklamaya omuz silkmesi hiçbir biçimde mümkün olamazdı.

Daha fazla sıkıntı verecek açıklamalar vardı. 2'nin kare kökünün bir kesre çevrilememesinin ardından, bir kare köklü sayılar dizisinin aynı güçlüğü gösterdiği ortaya çıktı: $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}$ vs... Bunlar arasında sadece 4, 9, 16, 25 gibi tam kare sayıların kare kökleri yer almıyordu. Böylece sayı dizisinde tam sayılar ile kesirlerin (rasyonel sayılar) arasına bir de matematikçilerin irrasyonel sayı dediği sayılardan sonsuz sayıda ekleyebileceğimizi görürüz; kesirlerin arasında pırıldar bu sayılar.

Rasyonel sayılara irrasyonel sayıların eklenmesiyle oluşan sayı dizisi, matematikçilerin deyişiyle "reel sayı dizisi"ni oluşturur. Herhangi bir sayı bu diziye yerleştirilebilir. Fakat birşeyleri negatif olarak tanımlamak, irrasyonel bir sayının rasyonel *olmayan* bir sayı olduğunu söylemek onun nitelikleri hakkında fazla bir şey söylemez.

Richard Dedekind ile George Cantor on dokuzuncu yüzyılın ikinci yarısında bu meseleyi ele almışlar; her ikisi de matematikte kalıcı bir yer edinecek yararlı tanımlar geliştirmişlerdir. Dedekind reel bir sayıyı "Dedekind kesiği" olarak tanımlamıştır; böylece sayı çizgisinde bir "kesik" bir reel sayıyı, sayı çizgisini iki kısma ayıran bir sayı olarak betimler. Cantor ise reel sayıları rasyonel sayıların limitleri olarak tanımlamıştır; örneğin $\sqrt{2}$, 1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142... rasyonel sayı çizgisinin limitidir. Matematikçiler, yaptıkları çalışmalarla reel sayılarla ilgili meseleleri daha büyük bir kesinlikle ele alabilirler.

İrrasyonelden Aşkına

Matematikçilerin √2'nin (ve başka sayıların kare köklerinin) irrasyonelliğini belirlemek için geliştirdikleri kanıt çok zariftir. Fakat irrasyonel sayıların *doğasına* ilişkin pek az şey açıklar.

Rasyonel/irrasyonel terminolojisini kesen başka bir sınıflandırma vardır; *cebirsel sayılar* sınıfı. *Cebirsel bir sayı*, $x^2 - 4x + 1 = 0$ gibi x'in kuvvetlerini içeren bir denklemin çözümü olabilecek sayıdır.

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}$ ve $\sqrt{10}$, gibi irrasyonel sayılar cebirsel sayılardır; örneğin $\sqrt{2}$, $x^2 - 2 = 0$ denkleminin çözümüdür ($\sqrt{3}$' de $x^2 - 3 = 0$ denkleminin çözümüne karşılık gelir, diğerleri de böylece devam eder). Cebirsel sayılar sınıfı rasyonel sayı ve bazı irrasyonel sayı sınıflarını içerir.

Peki *bütün* sayılar cebirsel sayılar mıdır? Cevap "hayır"dır; çünkü cebirsel sayıların ötesinde "vahşi" irrasyonel sayılar uzanır. Bu sayılar hiçbir cebirsel denklemin çözümü değillerdir; böyle oldukları için de on sekizinci yüzyılda İsviçreli dahi Leonhard Euler tarafından "aşkın" olarak tanımlanmışlardır. Gayet basit bir şekilde "cebri aşarlar". Fakat bir sayının aşkın olduğunu, yani x'in kuvvetlerini içeren herhangi bir denklemin çözümü olmadığını göstermek ayrı bir güçlüktür; çünkü olumsuz bir özelliği kanıtlamak korkunç derecede zordur.

Aşkın sayılar sınıfı, matematiğin en tanınmış sayılarından ikisini içerir. Bunların en ünlüsü Yunan harfi pi (π) ile gösterilen, bir çemberin çevresinin çapına bölümünü ifade eden, 3,141592 değerine (sonsuz sayıdaki ondalık basamakların ilk altısı) eşit olan "pi"dir.

Aşkın sayılar şöhret salonunda π'den sonra e sabiti gelir. Sonsuza uzanan değeri ondalık basamakların ilk altısıyla 2,718281 olarak kabul edilen bu sayı, kendisini tanıtan matematikçinin ismiyle "Euler sayısı" olarak bilinir. Nüfus artışını belirlemek, finansal matematikle uğraşmak gibi problemlerde paha biçilemez bir değeri olduğu görülmüştür; olasılık kuramı ve istatistikte de karşımıza çıkar. e'nin aşkın olduğunu kanıtlayan on dokuzuncu yüzyılda Charles Hermite olmuştur. Ferdinand von Lindemann Hermite'in tekniğini değiştirerek π'nin de aşkın olduğunu bulmuş, böylece "asırlardır devam eden muamma"yı çözmüştü. Bu keşifle birlikte meşhur bir çıkmaz da onaylanmıştı: "Bir daireyi kareleştirmek" imkansızdı; yani sadece gönye ve pergel kullanarak belli bir dairenin alanıyla aynı alana sahip bir kare inşa etmek imkansızdı.

Lindemann'ın π'yle ilgili belirleyici araştırmalarını sürdürdüğü sıralarda George Cantor, matematiksel anlamı olan bir şey üretti. Matematikçiler kesirlere ve irrasyonel sayılara, e ve π gibi pek az aşkın sayıya aşinaydı. Cantor neredeyse bütün "reel" sayıların -ya rasyonel ya irrasyonel- sayıların aşkın olduğunu kanıtlayarak geleneksel sayı dizisinin yeniden düşünülmesini teşvik etti. Sayı dizisinin sadece kesirlerden ve tam sayılardan, bir de $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$, $\sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}$ vs. gibi sayılardan oluştuğunu düşünürsek bundan daha fazla yanılıyor olamayız. Aslında etraflarında kümelenmiş aşkın sayılarla kıyaslandıklarında bu sayılar pek nadirdir.

Aşkın sayıların, başka tür sayılardan çok daha fazla sayıda olduğunun ortaya çıkmasıyla birlikte, π ve e dışında aslında bunların birçoğunu belirleyemiyor olmamız meselesi ilginçliğini korumaktadır. Oyunlar oynayıp istersek bazı aşkın sayılar icat

edebiliriz; $7\pi, \pi^2 + 1, e^2, e^3 + 1$ gibi, fakat bu yüzeyi kazımaktan ileri gitmez. Dikkatli olmamız da gerekir. Aşkın sayıları keyfi bir biçimde karıştırmaya başlarsak zorluklarla karşılaşırız. Örneğin $e + \pi$ sayısının aşkın olup olmadığı bile bilinmemektedir. π^e aşkın bir sayıdır, fakat aynı şeyin e^π için söylenip söylenemeyeceği bilinmemektedir.

Yine de ilerlemeler olmuştur. 1900'de matematikçi David Hilbert, meslektaşlarını yeni yüzyılın "23 Problemi" ile yüz yüze getirmişti. Yedinci Problem, 2 üssü $\sqrt{2}$'nin aşkın olduğunu göstermekti. Bu problem otuz yıl sonra, koca koca aşkın sayı aileleri keşfeden Alesandr Gelfond tarafından çözüldü.

Ondalıkların Etkisi

Matematikçiler bazı sayıları ifade ederken e ve π gibi harfler, kare kök işaretleri kullanmaya meyillidir; fakat pratik amaçlarla ondalıklara ihtiyaç vardır. En basit ifadeyle, 1/4, 0,25, ya da $\frac{3}{5}$ 0,6 olarak ifade edilebilir. Ama çok sayıda kesir de bu kadar düzgün bir biçimde ondalık olarak çevrilemez. Örneğin $\left(\frac{1}{3}\right)$ ondalığa çevrildiğinde sonsuza uzanır: 0,3333..... Gelgelelim, bir kesirin ondalık genişlemesiyle ilgili olarak bir düzenlilik, *tekrarlanan* bir örüntü gösterdiğini söyleyebiliriz. Örneğin $\frac{2}{7}$ kesri, ondalık olarak ifade edildiğinde 0,285714285714285... haline gelir. 285714 sıralamasını sonsuza kadar tekrarlar.

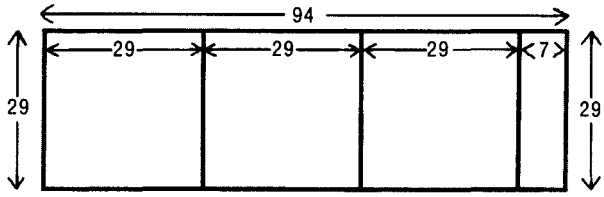
İrrasyonel sayıları temsil eden ondalık sayılar da sonsuzdur, ama *örüntüleri yoktur*; fakat bu farklılık cebirsel sayılar ile aşkın sayılar arasında bir ayrım oluşturmaya yetmez. Cebirsel sayı $\sqrt{2}$'nin de aşkın bir sayı olan π'nin de ondalık ifadesi örüntüsüz bir biçimde genişler:

$$\sqrt{2} = 1,414213562373095...$$

$$\pi = 3,141592653589793...$$

DNA Olarak Sürekli Kesirler

Sayıların sürekli kesir genişlemelerine bakmanın daha derin bir yönü vardır. Geometrik bir kuram olarak görülebilir. $5\frac{29}{94}$ 'ün sürekli kesir genişlemesine bakalım. Dikkatimizi $\frac{29}{94}$ kısmına yönelttiğimizde kısa kenarı 29, uzun kenarı 94 olan bir dikdörtgen düşünebiliriz.



$$94 = 3 \times 29 + 7$$
$$29 = 4 \times 7 + 1$$
$$7 = 7 \times 1 + 0$$

SAYILARIN SÜREKLİ KESİR GENİŞLEMESİ

Bu dikdörtgenden kenar uzunluğu 29 olan en fazla üç kare çıkarabiliyoruz, geriye kısa kenarı 7, uzun kenarı 29 olan bir dikdörtgen kalıyor. Bu işlemi geri kalan bölüm üzerinde tekrarladığımızda dört kare çıkarırız (çünkü $29 = 4 \times 7 + 1$'dir); son olarak yedi birim kare çıkarırız. $5\frac{29}{94}$ çıkarabileceğimiz kare sayısıyla belirlenir (3, 4, 7) ve [5; 3, 4, 7] olarak ifade edilir.

Bu sürekli kesirler bir sayının DNA'sı gibidirler. Bu mercek altında kök 2, düzenli bir sürekli kesirle ifade edilir:

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2...]$$

Bunun sebebi, her aşamada sadece iki kare çıkarabiliyor olmamız ve bunun sonunun hiç gelmiyor olmasıdır. Aşkın e sayısı da farklı bir örüntünün işaretlerini veren düzenli bir genişlemesi olan sürekli bir kesir gösterir:

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, 12, 1...]$$

Şu meşhur π, hâlâ bir muammadır. Son derece düzensiz bir

sürekli kesir genişlemesi vardır; bu vahşi sayı evcilleştirilme belirtisi göstermemektedir.

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1...]$$

Sayıların Genişleyen Ufku

İnsanlar sırf önlerindeki fiziksel varlıkların (hayvanlarının, ekinlerinin, topraklarının) niceliklerini belirlemek istediklerinde sıradan sayma sayılarının yeterli olacağını düşünmüşlerdi. Fakat kullanışlı bir kavramsal araç olan sayı dizisi yüzyıllar içinde büyük dönüşümler geçirdi. Negatif sayıların ortaya çıkması sayı dizisinin soldan sağa doğru genişlemekle kalmadığını, sağdan sola doğru sıfırın altına indiğini de gösteriyordu. $\sqrt{2}$'nin Yunan Pisagor okulu matematikçilerinin karşısına çıkardığı soru, rahat bir matematiksel kesir düşüncesini, matematikçinin rasyonel sayılarını yerle bir etti. Sayılar dünyası tuhaf ve belirsiz biçimler aldı; bugün "irrasyonel" sayılar denen sayılarla, hakkında birçok kuram olan ama nadiren tanımlanan aşkın sayılarla genişledi. Sayma çubuklarından bu yana epeyce yol alındı.

HAYALİ SAYILAR GERÇEKTEN DE HAYALİ Mİ?

"Hayali"nin i'sinden sekizeylere

İnsanın hayal gücüyle şahsi tecrübesini birleştiren Romantik şair Samuel Taylor Coleridge, matematiğe gelince temkinliydi; matematiğin "aklın beslendiği, hayal gücünün aç kaldığı" bir disiplin olduğunu düşünüyordu. Ama ondan iki yüz yıl önce filozof Descartes, "hayali" sayılar diye matematiksel bir alandan bahsetmişti. Başta son derece temkinli bir biçimde ele alınan "hayali" sayılar nihayet matematiksel dokunun bir parçası olarak kabul gördü.

Newton ile Leibniz'in değişim oranlarını hesaplamak için Kalkülüs çerçevesinde geliştirdiği yöntemler yeni bir biçim kazandı ve matematikçiler, güçlü bir geometri tekniği ve sayı kuramı olarak "karmaşık analiz" dedikleri şeyi geliştirdiler. "Hayali" olanın uzantıları olarak keşfedilen yeni cebir sistemleri cebrin niteliğiyle ilgili kavrayışlara meydan okuyordu. Herhalde en beklenmeyen gelişme de "hayali" sayıların reel uygulamalarda büyük bir yararı olduğunun görülmesiydi.

Peki ama bu hayali sayılar neresidir? Bazıları düşünebileceğimizden çok daha tanıdıktır. Bu fikri en basit biçimiyle göstermek için doğrudan sayma sayılarını kullanarak temel bir senaryoya bakabiliriz. Diyelim ki meyve kasesinde 5 elmamız var, bunlardan 4'ünü alırsak geriye 1 tane kalır. Ama 5'ini de alırsak geriye 0 elma kalır. Ama 6 elma alamayız, çünkü kasede 5 elma vardır.

Bankacılık işlemlerimizde farklı tipte bir kavramsal sayıya endişe verici derecede aşina olup çıkıyoruz: Bankaya olan borcumuza.

Diyelim ki hesabımızda 50 lira var, ama aynı zamanda bankadan hesabımızda olandan fazlasını çekme imkanımız da var. 70 lira çekiyoruz, bankaya 20 lira borçlanıyoruz; bu rakam hesap kesim belgesinde £20 lira olarak görülecektir. Eksi miktarı gerçekte göremeyiz ya da tutamayız, mevcut değildir; ama borcumuzu nasıl yorumlamamız gerektiğini biliriz, banka da bilir. Bu da hayali bir £20 lirayla etkili bir biçimde hesap yapabileceğimiz anlamına gelir; böylece ertesi gün 100 lira yatırdığımızda, banka borcumuzu kapatmak için 20 lirayı alacak, yeni bilançomuz 80 lira olacaktır. Matematiksel işaretlerle toplam $100 + (-20) = 80$'dir, bu $100 - 20 = 80$ demekle aynı şeydir.

Bu şekilde bakılınca negatif sayılar "hayali" olarak değerlendirilebilir; daha önce gördüğümüz gibi ilk ortaya çıktıklarında da böyle görülmüşlerdir (Bakınız *En Tuhaf Sayılar Hangileridir?*). Negatif sayılar artık tartışma konusu değildir; onları matematiğe kabul etmekle sayı sistemini işimize yarayacak şekilde genişlettik. Matematik kuramında eksi sayıları ve yararlarını denklemler bağlamında kavramsallaştırabiliriz. Sırf 0,1,2,3 vs. gibi artı sayılarla sınırlı olsaydık $x - 1 = 0$ gibi denklemleri çözebilirdik. Çözüm $x = 1$ olurdu. Ama $x + 1 = 0$ denklemini çözemezdik. x'in yerine 0, 1, 2, 3, vs.'yi koyduğumuzda sıfıra eşit bir sonuç alamazdık. Bir çözüm bulmak için artı sayıların *dışına* çıkmamız gerekirdi; çünkü ancak negatif sayıları kabul ettiğimizde çözüme varabiliriz, o da $x = -1$'dir. Bir negatif sayı kavramını hayal ederek matematiksel bir anlamda bu sayıya varlık kazandırmışızdır.

Kuadratik Denklemler ve Hayali "*i*"

Hayali sayılar "kuadratik denklem" bağlamında bir adım daha ileri giderler; "kuadratik denklem" birçok yetişkinin okul günlerinden kulaklarında çınlayan bir tabir olsa gerek. Antik Mısırlılar arazilerinin alanını eski bir problem tipi olan kuadratik denklemlerle

hesaplıyorlardı. Kuadratik bir denklemin belirleyici niteliği, karesi alınan bilinmeyen bir sayı içermesidir; bu sayının karesi x^2 olarak temsil edilir; böylece dört kenarlı bir kare fikrinden "kuadratik" tanımı doğmuştur. Kuadratik denklemler, gerçek fenomenlere uygulandıklarında çok fazla sorun çıkarmazlar.

Peki ama $x^2 + 1 = 0$ gibi bir kuadratik denklemde ne olur? Denklemin normal bir biçimde işlemesi için x^2'nin -1 olması gerekir ki 0 sonucunu alalım. Fakat böyle bir şey olamaz, çünkü x^2 asla eksi bir sayı *olamaz*. ($x = 5$'se $x^2 = 25$ olacaktır, $x = -5$'se x^2 yine 25 olacaktır!)

Bu problemin çözülebilmesi için hayalgücünün bir adım daha sıçraması gerekir. Bu sıçrama da $x^2 + 1 = 0$ problemine bir çözüm *icat edip* x'e bir isim vermektir; matematikçiler "hayali"yi (imaginary) "*i*" ile ifade etmişlerdir. Bunu bir çözüm olarak ilan ettiğimizden $i^2 + 1 = 0$, başka bir deyişle $i^2 = -1$ olur. "Hayali" kelimesi bu matematiksel bağlamda ilk kez 17. yüzyılda Descartes tarafından kullanılmıştır. Descartes bütün kuadratik denklemlerin çözümleri olması gerektiğini düşünüyordu; ama "birçok durumda insanın hayal ettiğine denk düşen nicelikler bulunmadığını" da kabul ediyordu.

i hakkında ileri sürdüğümüz tek şey i^2'nin -1'e eşit olduğudur, bilmemiz gereken tek şey de budur. *i*'nin niteliğiyle ilgili soruları cevaplamaya zaman harcamamız gerekmez. Bu yüzden de bazılarının yaptığı gibi işi bir adım daha ileri götürüp i'yi -1'in kare kökü olarak tanımlamak hata olacaktır. Çünkü bu sayı dizisi üzerinde reel bir sayı olarak varolduğu anlamına gelecektir; sanki bir hesap makinesine -1 yazıp kare kök tuşuna bastığımızda reel sayı olarak cevap alabilirmişiz gibi.

Bu sembol, çözümü gerçek değerler vermeyen bir dizi kuadratik denklem için çözüm üretmemizi sağlar. Örneğin $(x - 1)^2 = -4$ denklemi, şöyle yazılabilir:

$$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = -1$$

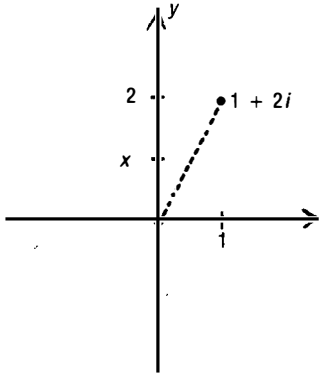
Bu da parantez içindeki ifadeyi hayali *i*'yle tanımlamamızı mümkün kılar, böylece $x = 1 + 2i$ sonucuna ulaşırız. Aslında bu denklemin iki çözümü vardır, diğeri de $x = 1 + (-2)i$'dir.

Karmaşık Sayılar

Matematikçiler biraz önce bulduğumuz tipte $x = 1 + 2i$ gibi çözümlere *karmaşık sayı* der. Genelleyecek olursak a ile b'nin reel sayıları temsil ettiği $a + bi$ formülü bu anlamda "karmaşık" bir sayıdır. Hayali problemlere hizmet etmek üzere icat edilmiş hayali çözümlerin alanına girip girmediğimizin merak edilmesi şu aşamada affedilebilir. Karmaşık sayıların geometride somut bir anlamları olduğu fark edildiğinde karmaşık sayıları sarmalayan gizem perdesi de kısmen aralanır. İrlandalı deha William Rowan Hamilton'ın çalışmaları bu gelişme açısından önemli olmuştur; Hamilton 1830'larda $a + bi$ karmaşık sayısını (a, b) çifti olarak ele alıp *i*'yi işin içinden sıyırma fikrini geliştirmişti.

Bu yüzden matematikçiler karmaşık bir sayıyı iki biçimde yazarlar. Pazar günleri karmaşık sayıları haklı çıkarmak istediklerinde (a, b) diye yazabilirler, ama iş günleri içinde $a + bi$ diye yazarlar ve bu şekilde ele alırlar.

Daha önce de gördüğümüz gibi (Bakınız *Matematiğin Atomları Neden Asal Sayılardır?*) reel sayılar tek boyutlu sayı dizisi üzerinde sola (eksi sayılar) ve sağa (artı sayılar) doğru uzanır. Ama karmaşık sayılar iki boyutludur. Karmaşık bir sayı bir düzlemde bir noktayla temsil edilebilir; bu durumda ortaya çıkan tabloya, 19. yüzyılda onu geliştiren amatör



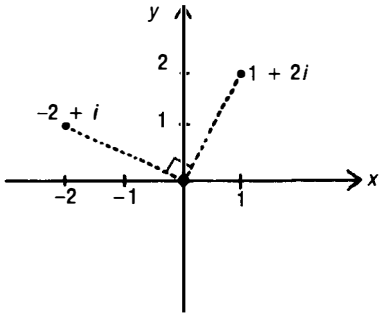
KARMAŞIK SAYI $1 + 2i$, İKİ BOYUTLU NOKTA

Fransız matematikçi Jean-Robert Argand'ın adıyla Argand şeması denir.

$1 + 2i$ karmaşık sayı örneğini kullanarak bu karmaşık sayıyı grafiksel olarak gösterebiliriz; grafiğimizde x koordinatındaki sayı 1'e, y koordinatındaki sayı 2'ye eşit olacaktır. Koordinatları yazma kuralları gereği bu nokta basitçe (1,2) olarak bilinecektir.

Fakat *i*'nin geometrik yararı burada son bulmaz, çünkü başka bir anlamı daha vardır. Karmaşık bir sayıyı *i* ile çarparsak, ilk sayıya dik açıda başka bir karmaşık sayı elde ederiz. Örneğin $1+2i$ örneğiyle devam edecek olursak:

$$i \times (1 + 2i) = i + 2i^2 = i - 2 = -2 + i$$



KARMAŞIK SAYI $-2 + i$ KARMAŞIK SAYI $1 + 2i$'NİN BİR ROTASYONUDUR

Dolayısıyla sayıyı *i*'yle çarpmanın etkisi (1,2) noktasını (-2,1) noktasına döndürmektir; grafiğe bakınız.

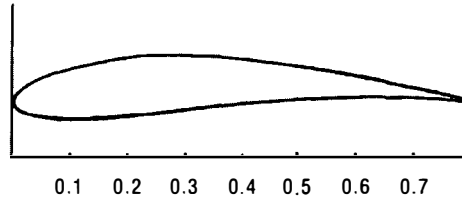
Böylece *i* sembolü iki geometrik anlam yaratır; düzlemde bir nokta ya da dik açılı bir dönüş anlamlarına gelir.

Sayı dizisi üzerindeki sayılar gibi karmaşık sayılar da toplanabilir, çıkarılabilir, çarpılabilir ve bölünebilir. Karmaşık sayılar sayı sistemimizin biraz daha zenginleşmesi anlamına gelir. Karmaşık sayılar dünyasından yepyeni bir matematik dalı, karmaşık analiz doğmuştur; öyle anlaşılıyor ki bu da reel sayılara dayanan kıyaslamalı teoriden daha zarif ve geniş erimlidir. Karmaşık analiz değişkenlerin karmaşık sayılar olduğu bir Kalkülüs biçimidir (Bakınız *Evrenin Matematiği Nasıldır?*); eski Kalkülüs'ün farkı değişkenlerin reel sayılar olmasıdır. Bu yeni kuramın geometri de dahil olmak üzere matematiğin diğer kısımlarıyla birçok bağı vardır; 19. yüzyılda Bernhard Riemann bu kuramı asal sayıların dağılımıyla ilgili kuramına uygulamıştır.

Ayrıca karmaşık analizin çok sayıda uygulama alanı ortaya çıkmıştır. Uçak tasarımı bunlardan biridir. z'yi Argand diyagramı üzerinde yarıçapı 1 olan bir daire üzerindeki bir nokta olarak düşünüp şu değerleri belirlersek Joukowski uçağının ana hatlarını çıkarabiliriz:

$$z + \frac{1}{z}$$

Karmaşık analizin en dikkat çekici, en vazgeçilmez, gerçek dünyayla en ilgili uygulaması elektrik ve elektronik mühendislerinin işlerinde bulunur; gerçi bu mühendisler elektrik akımını temsil ederken kullandıkları *i*'yle karışmasın diye karmaşık analizdeki *i* yerine *j*'yi kullanırlar.



JOUKOWSKİ UÇAĞININ ARGAND ŞEMASI

Karmaşık Sayılardan Dördeylere

Karmaşık sayılar kuramına önemli bir katkıda bulunan Hamilton daha sonra bunları çoğaltmanın, repertuvarı genişletmenin mümkün olup olmadığını merak etti. Matematikçiler sayı kavramını sayma sayılarından eksi sayılara doğru, reel sayılardan karmaşık sayılara doğru genişletmişlerdi. Daha da ileri gidebilirler miydi?

Hamilton'ın gördüğü kadarıyla önlerinde uzanan yol, iki boyutlu karmaşık sayılardan üç boyutlu sayılara doğru geçmekti. Yıllar süren düşünce süreci sonunda ortaya bir şey çıkmadı; ama 1843'te Hamilton'a bir ilham geldi. O zamana kadar yanlış yolda ilerlemişti, *üç* yerine *dört* boyutu denemeliydi. Sonuç, Hamilton'ın "dördeyleri" (kuaterniyonlar) oldu.

Bir dördey $a + bi + cj + dk$ şeklinde ifade edilir ve $a + bi$ karmaşık sayısının bir benzeridir. $i^2 = -1$ hayali sayısında olduğu

gibi, dördeylerdeki *i*, *j* ve *k*'nin özellikleri $i^2 = -1$, $j^2 = -1$, $k^2 = -1$ şeklindedir.

Dördeylerin çarpımına yardımcı olması açısından *i*, *j* ve *k* sembolleri geometrik olarak bir dairenin çevresi üzerinde yer alan noktalar olarak düşünülebilir; her harfin kendisinden sonra gelenle çarpımı üçüncü harfi verir. *Fakat,* saat yönünün tersine çarpım artı değer verirken, saat yönünde çarpım eksi değer verir; böylece (saat yönünün tersine) $i \times j = k$ iken (saat yönünde) $j \times i = -k$ olur.

Birçok matematikçinin kabul etmekte zorlandığı şey, çarpımın izlediği *sıranın* önemli olmasıdır. Sıradan aritmetikte 5 ile 7'yi çarptığımızda da 7 ile 5'i çarptığımızda da aynı sonucu alırız; aynı şey iki boyutlu karmaşık sayılar için de geçerlidir. Bu durumun yeniliği Hamilton'ın elini kolunu bağlamamış, gerçekten de çığır açıcı olduğu anlaşılmıştır. Dördeylerle birlikte yeni bir cebir doğmuştur.

Dördeylerin, karmaşık sayıların kilit bir özelliği olan rotasyonla nasıl bir ilişkisi olduğu sorusu hâlâ varlığını sürdürüyordu. Dördeyleri hareket ettirmenin biçimsel kurallarının yazıya dökülmesinden kısa bir süre sonra Hamilton, bu kuralların gerçekten de üç boyutta bir rotasyonu betimlemekte kullanılabileceğini buldu; bunu yapmanın yolu da bir dördeyin hayali kısmı $bi + cj + dk$ ile birlikte üç boyutlu bir nokta (b, c, d) belirlemekti.

Dördeylerden Sekizeylere

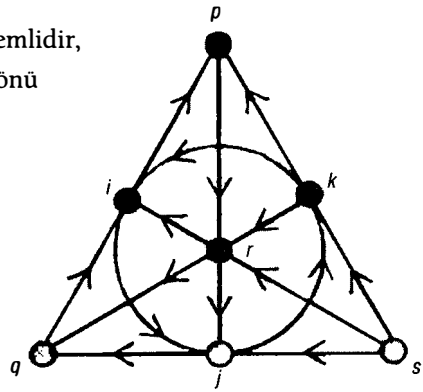
Dördeyler yerleşiklik kazandığında, başka sistemler kurma çabası başladı. Sayı dizisi üzerindeki reel sayılar tek boyutlu, karmaşık sayılar iki boyutlu ve dördeyler dört boyutludur. Bir, iki, dört şeklinde, her seferinde ikiye katlanarak gelişen bu ilerleme bir sonraki adıma dair bir ipucu veriyordu.

Cambridge'te eğitim görmüş genç bir matematikçi, Arthur Cayley dördeylerin cazibesine kapılmıştı; Hamilton'ın yaptığı keşfin ardından dördeylerin bir rotasyonu tanımlamak için nasıl kullanılabileceğini göstermişti. Cayley sekiz boyutlu sayıların çerçevesini oturtmaya girişti; bu sayılara sekizey ya da "Cayley sayıları" denir.

Sekizeyler (w), $w = a + bi + cj + dk + ep + fq + gr + hs$ şeklindedir; hayali sayıların yedisinin de (i, j, k, p, q, r, s) karesi -1'e eşittir. Sekizeylerin hayali sayıları Fano Düzlemi denilen, yedi doğru (merkezdeki daire doğru olarak alınır) ve yedi noktadan oluşan sonlu bir geometrinin kurallarına göre çarpılır. (Ayrıca Bakınız *Simetri Nedir?*)

Bu geometride, içerdeki dairenin çevresi üzerine yerleştirilmiş i, j ve k dördeylerin geometrisini temsil eder ve onlarla aynı biçimde, okların gösterdiği yönler dikkate alınarak çarpılır. $k \times p$'yi hesaplamak istiyorsak k ile p'yi içeren doğruyu arar, yönünü bulur ve uygun yön işareti doğrultusunda çarpımın üçüncü hayali sayıya, s'ye eşit olmasını sağlarız.

Dördeylerde çarpımın sırası önemlidir, ama sekizey sisteminin devrimci yönü üç sekizeyin birbiriyle çarpımında ortaya çıkar. İlk olarak hangi iki sekizeyi çarptığınız önemlidir!



SEKİZEYLER İÇİN FONO DÜZLEMİ

Daha maceraperest matematikçiler matematiğin genel kurallarından bu sapmaları kabul etmişlerdir; 1840'lara gelindiğinde bir, iki, dört ve sekiz boyutta hayali sistemler bulunduğu görüşü yerleşiklik kazanmıştı. İkiye katlanma ilkesi uyarınca bu daha ileriye, 16 boyutlu bir sisteme götürülebilir miydi? Cevap yıllar

sonra geldi: 16 boyutlu bir cebir kurmaya çalışmanın bir anlamı yoktur. Reel sayılar, karmaşık sayılar, dördeyler ve sekizeyler toplama, çıkarma, çarpma ve bölmenin mümkün olduğu yegane sistemlerdir.

O zamandan bu yana dördeylerin rotasyonlarda kullanılması denizcilikte, robot geliştirme çalışmalarında ve bilgisayar oyunları tasarımında, hatta rotasyon hareketine gerek duyulan birçok teknolojik alanda uygulama alanı buldu. Fakat dördeyler ve sekizeylerin matematikçiler açısından asıl değeri başka cebir tiplerinin yer aldığı daha geniş çaplı bir manzarayı düşündürmelerinde yatmaktadır.

Clifford Cebirleri

Bölme işleminin her zaman yapılması gerektiği kuralını bir kenara bırakacak olursak başka olasılıklar doğar. 19. yüzyıl İngiliz matematikçisi William K. Clifford karmaşık sayıları ve dördeyleri almış, ama sekizeylere çıkan yoldan başka bir yol tutmuştur. Bir Clifford cebiri de kareleri -1'e eşit olan "hayali sayılarla" betimlenebilir. Clifford cebirleri fizik açısından temel önemdedir ve kuantum kuramında uygulama alanı bulmuştur. Paul Dirac 1928 tarihli "Elektronun Kuantum Kuramı" başlıklı makalesinde, ünlü elektron denkleminde, elektron spininin gizemlerini çözmek için bu hayali sayıları kullanmıştı.

Hayalden Uygulamaya

Karmaşık sayılardan hayali *i*'ye güvensizlikle başlayan şey, matematiği öyle akıl almaz biçimde değiştirmiştir ki, *i*'nin ortaya çıkması öncesinde var olan matematik tek boyutlu ve yoksul görünmektedir. Descartes "hayali" lafını çıkarmış olabilir; ama sonuçta ortaya çıkan, karmaşık sayıları ve onlarla ilgili genellemeleri içeren güzel yapı matematiği dönüştürmüş, fizik araştırmaları

üzerinde büyük bir etki yaratmış, yeni teknolojik alanlar açısından vazgeçilmez hale gelmiştir.

Hayali sayılar matematiğe kabul edilmeleriyle beraber kendi başlarına bir ömür sürmeye başlamışlardır. Cebir kavrayışlarına, neye izin verilebileceğiyle ilgili kavrayışlara meydan okumuşlardır. 19. yüzyılda cebirde meydana gelen başka gelişmelerle hayali sayılar arasında bağlar kurulmuştur; altın madeni hâlâ zenginliklerini ifşa etmeyi sürdürmektedir. Ama ayan beyan "akla yatkın" olanı askıya almaya, adımlarımızı karanlıkta atmaya hazırlıklı olmamız gerekiyor.

Gündelik hayatta kullandığımız sayıları içeren tek boyutlu sayı dizisi üzerinde yer almalarını beklersek hayali sayıların gerçek olmadığını görürüz. Ama iki boyuta izin verirsek hayali ve karmaşık sayılar da diğerleri kadar gerçektir. Matematikçiler bugün bu sayılar olmaksızın iş göremez. Fizikçiler bu sayılarda evren kuramlarının temel yapıtaşlarını bulmuşlardır. Bu anlamda hayali sayıların önemli sonuçları olmuştur. Coleridge'in kristal bir küreye bakma şansı olsaydı hayalgücü beslendiği *için* en nihayetinde aklın da besleneceğini görebilirdi.

SONSUZLUK NE KADAR BÜYÜKTÜR?

Küme kuramı ve sonsuzluk devrimi

Sonsuzluğu kafamızda oturtmak zordur. Bu kavram engin, dipsiz, sonuçta da sıkıntı verici görünür. Bir şeyden nasıl bitimsiz bir miktar olabilir? Her şey nihayetinde sınırlarına ulaşmaz mı? Ama eğer sınırlarına ulaşıyorsa ötesinde ne vardır? Sonsuzluk asırlar boyunca filozofların akıllarını karıştırmış; son dönemde de fizikçileri, astronomları ve kozmologları evreni anlama çabalarında büyülemiştir. Ama matematikçiler sonsuzluk kavramına yeni bir ışık tutmuş; bunun da ötesinde küme kuramıyla bir sonsuzluklar dizisi ihtimalini gündeme getirmişlerdir.

"Sonsuzluk" gizem dolu bir kelime. Sonu gelmeyen zaman, "ebediyet" onun yakın akrabası; ilk çağlardan beri bu zar zor kavranabilir fikirlerle uğraşıyoruz. Geleneksel olarak, aralarında birçok filozofun da bulunduğu dinsel zihniyetlere göre, bu bilinmeyenlerin atfedilebileceği daha yüksek bir güç olmuştur. Bu anlamda Tanrı *sonsuzluk ve ebediyettir*; onun dışında bir zaman ya da mekan yoktur.

Fakat matematiğin koşulları farklıdır, bu durumda sonsuzluğu *matematiksel olarak* nasıl açıklayıp tanımlarız? Kuramsal olarak sonsuzluğun ebediyetten daha kolay bir kavram olması *gerekir*, çünkü zaman unsuru devreden çıkarılmıştır.

Ulaşılamaz Sonsuz ve "Sınırsız Dünyalar"

Küçük bir çocuğa bildiği en büyük sayının ne olduğunu soracak

olursak 100 diye cevaplayabilir; birkaç yaş daha büyük, biraz daha özgüvenliyse bir trilyon diyebilir. Doğru yoldadırlar, ama 101'in, ya da bir trilyon artı birin daha büyük sayılar olduğunu söyleyerek onları cevaplayabiliriz. Bir süre sonra en büyük sayının olmadığına ikna olup bütün kuşkuları giderecek cevap olarak "sonsuz"a atlayabilirler. Aslında "sonsuz"un gerçek bir sayı olduğunu düşünmekle hayli devrimci bir yaklaşım sergiliyorlardır.

MÖ üçüncü yüzyılda yaşamış Antik Yunanlıların ve onları izleyen matematikçi lejyonlarının sonsuzluk kavrayışı bu değildi. Onlar "potansiyel bir sonsuzluk" düşünüyorlardı. Aristo ve diğerlerine göre sonsuzluk erişilemez bir şeydi, bu yüzden de gerçek bir sayı *değildi*. Geometrici Öklit bir "asal sayılar sonsuzluğu" olduğunu söylerken "asal sayıların bilinen asal sayı sayısından çok daha fazla" olduğunu söylemiş, bitimsiz bir nicelik fikrini uyandırmıştı.

Bu potansiyel sonsuzluğu ifade etmek için John Wallis'in 1650'lerde kullanıma soktuğu ∞ sembolünü kullanırız. Bu sembol Yunan alfabesinin son harfi omegadan (ω) türetilmiş olabilir, ama asıl kökeni bilinmemektedir. ∞'un bir sayı olmadığını vurgulamak için matematikçiler genellikle $n = \infty$ diye yazmazlar. Sonsuzluk n sayısının daha da genişlemesi anlamında kullanılır; matematikçiler de n'in sonsuza gittiğini söyleyip $n \rightarrow \infty$ diye yazarlar.

Sonsuzluk her ne kadar erişilemez olsa da matematikçilerin dünyasının merkezinde yer almayı sürdürmüştür. Sonsuzluğun anlamını açmak büyük bir fikir olmuştur; ama bu ancak bazı devrimci düşünceler sonrasında gerçekleştirilebilmiştir.

Başlangıç itibariyle, sonsuzluğun işler bir tanımı, matematik ders kitaplarında bulabileceğimiz türden bir tanımdır; sonsuzluk "sınırsız bir niceliği ifade eder." Bu tanım "büyük, daha da büyük" fikrine uyar, çünkü 1, 2, 3... tam sayıları sınırsız olarak sonsuza kadar devam eden niceliklerdir.

Seçilen bir sayı her zaman aşılabilir. Ama tam sayılar sonsuzsa, 1 sayısının kesirlerine ne demeli?

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}, \cdots$$

Bu kesirlerin sayısı da kesinlikle tam sayıların sayısı kadar mıdır? "Sınırsız" değillerdir, çünkü hepsinin 1'den küçük olduklarını biliyoruz. Ama bu kesirlerin sonsuz sayıda olduğu da doğrudur.

Küme Kuramı

Sonsuzluğun gizem perdesini kaldırabilmek için "sınırsız"dan daha incelikli sonsuzluk tanımlarına ihtiyacımız var gerçekten de; küme kuramı da burada işin içine girer. Bu matematiksel araştırma 1870'lerde George Cantor tarafından başlatılmıştır. Sezgilerimizle bir *kümenin* bir şeyler topluluğu olduğunu söyleyebiliriz. Örneğin pozitif tam sayıların tamamı bir küme oluşturur. Buna açıklık getirmek için parantez işaretleri {} kullanırız ve kümeye bir isim veririz; tam sayılar için bu *N*'dir; şöyle yazarız:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots\}$$

Böylece kümeyi tek bir oluşum olarak düşünebiliriz.

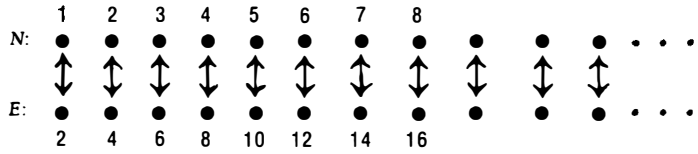
Ayrıca *N*'in alt kümelerinden bahsedebiliriz. Örneğin $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ diye bir alt kümemiz olabilir; en büyük elemanı 5'le sınırlı olduğundan buna *sonlu küme* deriz. Bu da bize sonsuz bir kümeyi *sonlu olmayan* bir küme olarak tanımlamak gibi bir çıkış yolu verir.

Kümelerin İlişkileri

N'in çarpıcı bir özelliği vardır. Naif bir soru soralım: $E = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots\}$ diye ifade edilen çift sayılar alt kümesinde pozitif tam sayılar kadar fazla *çift* sayı var mıdır? Sezgisel olarak buna hayır cevabı veririz; çünkü çift sayılar tam sayılar bütünlüğünün sadece bir kısmıdır. Peki ama "olduğu kadar" sözüyle ne demek istiyoruz?

Çünkü şurası kesin ki *E* ve *N* kümelerindeki elemanları sayıp cevapları karşılaştıramayız, ikisi de sonsuz kümelerdir!

Birebir eşleştirme mefhumu burada işe yarar. Her tam sayıya bir çift sayı "denk düşer", aynı şey tersi için de geçerlidir. Peki bu nasıl işler? Her tam sayı iki katına karşılık gelir; böylece *N* kümesindeki 1, *E* kümesindeki 2'yle eşleşir vs. Böylece her sayı bir sayıyla eşleşir.



N VE E KÜMELERİ ARASINDAKI EŞLEME

Ters yönden bakıp her çift sayının, yarısına eşit olan bir tam sayıyla eşleştiğini de söyleyebiliriz. Bu birebir eşleşme her iki küme için de mevcut olduğundan, matematikçiler bu kümeleri *denksayısal* olarak adlandırır.

Galileo, $G = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots\}$ olarak ifade edilen tam sayıların kareleri kümesiyle ilgili aynı tipte bir çıkarıma gitmişti; zira *G* ile *N* arasında birebir bir denklik bulunur. Çarpıcı derecede ender rastlanan başka bazı kümeler de *N*'le denktir. Örneğin tam sayıların sayı dizisi üzerinde ilerledikçe fazladan 0'lar aldıkları *T* kümesi gibi:

$$T = \{1, 20, 300, 4000, 50.000, 600.000, 7.000.000, 80.000.000, \ldots\}$$

N'in bu alt kümesinde sayılar arasındaki mesafe giderek açılmaktadır; ama *N* ile *T* arasında birebir bir denklik olduğu apaçıktır; bu iki küme de denk kümelerdir.

Yine de bu örnekler paradoksal niteliklerini korur. Sezgilere ters düşen ifadeler gibi görünürler, Antik Yunanlıların "bütün parçadan daha büyüktür" şeklinde anladığı yaygın kavrayışın suratına çarpıyormuş gibi gelirler.

Hilbert Oteli'ne Yerleşmek

Patronu matematikçi David Hilbert olan "Hilbert Oteli", sonsuz kümelerin bu sıradışı davranışını örnekleyen bir düşünce deneyidir. Bu kavramsal otelde sınırsız sayıda oda vardır. Bir akşam saat yedide otelin "dolduğunu" varsayarız; yani her n sayısı için n numaralı oda tutulmuştur. Sekizde yeni konuklar gelir. Hilbert ne yapacaktır? Yeni müşteriye "Otelimiz Doludur" tabelasını mı gösterecektir, yoksa fazladan oda mı bulmaya çalışacaktır? Patron matematikçi şapkasını takar ve mevcut misafirlerinin yerlerine el atar. 1 numaralı odadaki konuğuna 2 numaralı odaya geçmesini, 2 numaraya 3 numaraya geçmesini, 3 numaraya 4 numaraya geçmesini söyler, böylece konukların her biri odalarını değiştirerek yandaki odaya geçer, yeni konuksa artık boş olan 1 numaralı odaya yerleştirilir. Problem çözülmüştür!

Gece onda çok daha ciddi bir şey olur. Oda isteyen sınırsız sayıda insan taşıyan arabalar gelir. Hilbert sükunetin ta kendisidir. Tekrar konuklarına döner, bu kez oda numaralarını ikiye katlar. 1 numaralı odadaki konuk 2 numaralı odaya, 2 numaradaki 4 numaraya geçer, böylece devam edip gider. Bu yeni yerleşimin ardından tek numaralı odalar artık boştur; Hilbert memnuniyetle bunları arabalardan yeni inen konuklarına tahsis eder. Daha sonra sınırsız sayıda başka konuklar gelse bile, aynı işlemi tekrarlayarak onları otele yerleştirebilecektir. Hilbert Oteli'nde odaların sonu yoktur.

Patron David Hilbert çok düzenli bir insandır ve Hilbert Oteli'nde kalan insanların listesini çıkarmakta büyük yarar görmektedir. Böylece oda numarasının karşısına burada kalan kişinin ismini yazar. Doğru, bu sonsuz bir liste olacaktır; ama en azından odaların her birinde kimin kaldığını söyleyebilecektir.

Bir Liste Yapıp İki Kere Kontrol Etmek

Hilbert'ın uyandırdığı bir liste yapma fikrinin matematikçilerin sonsuzluğu anlayışı bakımından merkezi önemde olduğu anlaşıldı. *N* kümesi 1, 2, 3, 4 vs.'den oluşan bir küme olarak görülebilir. *N*'in alt kümelerinin de listesi yapılabilir, ama bir listesi yapılabilecek daha büyük kümeler de var mıdır acaba? Cevap evettir. *Eksi* ve artı tam sayıları içeren tam sayılar kümesi *Z*:

$$Z = \{\ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

Z'yi nasıl liste haline getiririz? Sayı dizisi boyunca *Z* -∞'dan ∞'a uzanır. *Z*'yi liste haline getirmenin bir yolu 0'ı başlangıç sayısı olarak almak, sonra 1'i ikinci sayı, -1'i üçüncü sayı yaparak bu şekilde, bir pozitif bir negatif sayı koyarak devam etmek olabilir; böylece listemiz şöyle olur:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, 6, \ldots$$

Daha da etkileyicisi, *Q* olarak belirtilmiş bütün kesirler kümesini de bir liste haline getirebiliriz. Sayısal bir sırası olmaz, ama yine de bir listedir. Tecrübelerimize dayanarak tam sayıları (paydaları 1'dir) yazabiliriz, bundan sonra paydaları 2, sonra paydaları 3 olanları yazar ve böylece devam ederiz:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, 6, \ldots$$

$$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \cdots \qquad \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \cdots$$

Bu bir liste midir? Listede hangi sayının birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü olduğunu söyleyebiliriz, peki ama $\frac{1}{2}$ kaçıncıdır? Sorun şu ki kategoriler arasında "..." şeklinde kısaltmalarla atlayamayız. Ama her şey elden gitmiş değildir. Öncelikle *Q*'daki kesirleri *iki boyutlu* bir dizgeye yerleştirebiliriz. En üst sırada tam sayılar yer alacaktır, sonraki sırada paydası 2 olan kesirler bulunacaktır ($\frac{4}{2}$ gibi sayılar

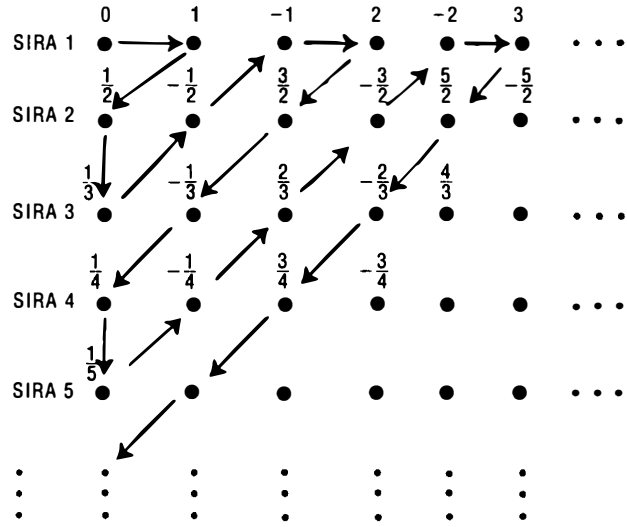
atlanacaktır; $\frac{4}{2}$ 2'ye eşittir ve yukarıdaki sırada zaten yer almaktadır). Üçüncü sıraya paydası 3 olan bütün kesirleri koyup tekrarlardan kaçınarak ilerleriz.

Şimdi, sol üst köşede 0'dan başlayıp 1'e doğru ilerleyip sonra $\frac{1}{2}$ 'ye doğru diyagonal bir hareket yaparak (grafiğe bakınız) bir liste hazırlayabiliriz. "Diyagonal hareket" listemizi şu şekilde yazmamızı sağlar:

$$0, 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{2}, -1, 2, \tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, -\tfrac{1}{4}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{3}{2}, -2, 3, \tfrac{5}{2}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \ldots$$

Her kesir bu listede bir yerdedir; bir kesrin nerede olduğunu her zaman söyleyebilir, ona denk düşen tam sayıyı belirtebiliriz. Listede sayısal bir düzen yoktur, ama listedir.

N de *Q* da sonsuz kümelerdir; liste halinde yazılabildiklerinden birbirlerine denksayısal kümelerdir. Dahası, liste haline getirilebilen bir sayılar kümesi *N*'e denktir.



İKİ BOYUTLU BİR YELPAZEDE *Q* KESİRLER KÜMESİ

Listesiz Bir Küme

Peki matematikçilerin reel sayılar dedikleri, sayı dizisi üzerinde düzenlenebilen *R* kümesi hakkında ne söylenebilir? *R*, π sabiti gibi, başka irrasyonel sayılar gibi sayıları içerir; bu kümeye reel sayı sürekliliği denir, çünkü sayı dizisinde boşluk yoktur. *Q* kümesi gibi, *R* sürekliliği de sonsuz bir kümedir; peki ama *R*'deki sayıları liste haline getirebilir miyiz? Getirebilirsek *R* kümesi *Q* kümesiyle denksayısal olur.

Georg Cantor 1870'lerde matematikteki en çarpıcı sonuçlardan birini keşfetti. Aslına bakarsanız, reel sayıların bir liste haline *getirilemeyeceğini* gösterdi. Cantor'un argümanı şöyledir: Her reel sayının bir ondalık açılımı vardır; bu yüzden örneğin elimizde 34, 8967494... gibi bir sayı olabilir. Bundan daha farklı bir sayı yaratmak istersek, 34 tam sayısını unutup ondalık virgülünden sonraki ilk sayıyı 1 yapabiliriz; böylece sayımız 34,1967494... olur. Bu sayının 34,8967494...'ten sadece *bir tek* ondalık basamakla ayrılması onu farklı bir sayı haline getirmeye yeter. (Ondalık virgülden sonraki ilk sayı 1 olsaydı, yerine 2 koyabilirdik.)

Şimdi elimizde *R* reel sayılarının eksiksiz bir listesi olduğunu düşünelim. Biraz önce anlattığımız yöntemi kullanarak ilk basamağı listedeki ilk sayının ilk basamağından farklı bir sayı, ikinci basamağı listedeki ikinci sayının ikinci basamağından farklı bir sayı vs. yapabiliriz; sonuçta ortaya çıkardığımız sayı listenin *hiçbir yerinde* olmayacaktır, çünkü listedeki bütün sayılardan farklıdır.

Kaçınılmaz sonuç şudur ki *R* reel sayılarının eksiksiz bir listesi olamaz. Kesirleri tam sayılar kümesi *N*'e ekleyerek daha geniş bir küme olan *Q*'yu oluşturduk, fakat bu *N*'yle aynı türde sonsuzluğu olan bir kümeydi. Fakat irrasyonel sayıları kesirlere eklersek, *R* kümesine daha üst mertebede bir sonsuzluk kazandırmış oluruz.

Bu devrimci bir düşünceydi. Bir sonsuzluk değil, iki sonsuzluk vardı; *Q*'nun sonsuzluk mertebesiyle, *R*'nin daha üst mertebedeki sonsuzluğu. Cantor'un kuramı bazı tanınmış matematikçilerin fikirlerine ters düşüyordu.

Sonsuzluk Düzenleri ve Süreklilik Hipotezi

Farklı sonsuzluk mertebeleriyle karşı karşıya kalan Cantor, bu mertebeleri birbirinden ayırmak için bir kardinal sayıdan yararlanma fikrini benimsedi. Bir kümenin kardinal sayısı, kümenin genişliğidir; örneğin (a, b, c, d, e) kümesinin kardinal sayısı 5'tir, çünkü kümenin 5 elemanı vardır. Peki ama sonsuz kümelerde ne yapacağız. Cantor *N*'in kardinal sayısını İbrani alfabesinin ilk harfi χ'le (alef) χ_0 olarak belirtmişti. χ_0 "alef sıfır" olarak okunur ve Cantor'un devrinden bu yana hiç değişmemiştir. *R* kümesinin kardinal sayısı "continuum"dan (süreklilik) hareketle c ile ifade edilir; *N*'in sonsuzluğu *R*'den daha geri bir sonsuzluk olduğu için $\chi_0 < c$ diye yazabiliriz.

χ_0 ile c arasına kardinal bir sayı sıkıştırabilir miyiz? Sıradan aritmetikte eşitsizlikler vardır, $\frac{1}{2} < \frac{4}{7}$, örneğine bakarsak bu iki kesir arasına her zaman bir başka kesir sıkıştırılabilir. Bunu yapmanın şık bir yolu payları ve paydaları toplayıp $\frac{1+4}{2+7} = \frac{5}{9}$ sonucuna varmaktır,

"Sonsuzluk korkusu, gerçek sonsuz en yüksek biçimiyle bizi yaratmış ve ayakta tutuyorsa da, ikincil sonlu ötesi biçimlerinde bütün çevremizde yer alsa da, hatta zihinlerimizi işgal etse de onu görme olasılığını mahveden bir tür miyopluktur."

GEORG CANTOR GERÇEK SONSUZLUK ÜZERİNE DENEME (1886)

daha sonra $\frac{1}{2} < \frac{5}{9} < \frac{4}{7}$ olduğunu görürürüz. $2 < 3$ gibi tam sayı eşitsizliklerini dikkate alırsak araya başka bir tam sayı sıkıştıramayız.

Bir hipoteze, süreklilik hipotezine göre χ_0 ile c arasında başka bir kardinal sayı yoktur; başka bir deyişle χ_0'dan sonraki kardinal sayı c'dir. Cantor süreklilik hipotezini kanıtlamaya çalıştı, fakat yıllarca süren çabanın ardından bunu başaramadı. Hipotezin yanlış olduğuna inanan Kurt Gödel de bunu kanıtlayamadı; ama daha sonra o ve Amerikalı meslektaşı Paul Cohen, küme kuramının standart çerçevesi içinde süreklilik hipotezini kanıtlamanın da yanlışlamanın da mümkün olmadığını gösterdiler. Bu, süreklilik hipotezinin küme kuramını tanımlayan olağan aksiyomlardan bağımsız olduğunu söylemek anlamına geliyordu.
Bu bir dönüm noktası oldu. Birçok farklı *tipte* geometri olduğu biliniyordu; şimdi de küme kuramıyla birlikte, süreklilik hipotezinin bağımsızlığı, farklı küme kuramlarının mümkün olabileceğini su yüzüne çıkarmıştı.

Bir Sonsuzluklar Dizisi

Cantor sonsuzun niteliğiyle ilgili başka keşiflerde de bulundu; bunların en meşhuru *sonlu ötesi* kardinal sayıların yaratılmasıdır. Cantor χ_0'dan başlayarak daha üst mertebede sonsuz bir küme kurdu. N'den başlayarak da N'in bütün alt kümelerini kapsayan N_1 kümesini kurdu ve bu kümenin N'den daha üst mertebede sonsuz olduğunu gösterdi. Bu kümenin kardinal sayısı χ_1 olarak yazılıyordu; dolayısıyla $\chi_0 < \chi_1$. Bu inşanın N_1 üzerinde tekrarlanması sonucu N_2 ortaya çıkar, onun kardinal sayısı da χ_2'dir; bu işlem defalarca tekrarlanıp çok daha üst mertebelerde bir "alefler" dizisi üretilebilir:

$$\chi_0 < \chi_1 < \chi_2 < \ldots < \chi_n < \ldots$$

Cantor her biri bir sonsuzluk düzenini temsil eden bir alefler dizisinin nasıl inşa edilebileceğini göstermekle sonsuz bir sonsuzluklar dizisinin nasıl kurulabileceğini göstermiştir. Kardinal sayıların toplanıp çarpılabildiği bir aritmetik plan artık mümkün olmuş; mantıkçılar ve matematikçilere zengin bir alan açılmıştı.

Sonsuzluğun niteliğini, ne kadar "büyük" olduğunu merak ederek başlamıştık. "Sonsuzluk" hayal edilemeyecek bir enginliği kucaklar; ama düşünülemeyecek küçüklük fikrini de kapsar; bunu bir şeyi sonsuz derecede küçük olarak betimlerken dile getiririz. Matematikte bu, tam sayıların sonsuza uzanması, ölçeğin öbür ucunda 1 sayısının hep daha küçük kesirlerini sonsuza dek yaratabilecek olmamız bilgisinde yansımasını bulur.

Fakat sonsuzluğu biraz daha inceleyerek tam sayılardan çok daha kalabalık sayı kümeleri olduğunu keşfettik. Bunun da ötesinde bir sonsuzluk kavrayışının üstünde daha yüksek başka bir sonsuzluğun yer alabileceğini gördük. Sadece bir sonsuzluk kavramının değil, sonsuz sayıda sonsuzluk kavrayışının mümkün olduğu sonucuna vardık.

PARALEL DOĞRULAR NEREDE BİRLEŞİR?

Yeni geometrilerin doğuşu

"Paralel doğrular nerede birleşir?" sorusuna kısaca "Hiçbir zaman birleşmezler" cevabı verilebilir; çünkü paralel doğrular birbirlerini kesmeyen doğrular olarak tanımlanır. Gelmiş geçmiş en verimli matematiksel tanımlardan biri olan bu tanımın ardında, bunu MÖ 300'de kaleme almış olan İskenderiyeli Öklit vardır. Ama hikaye burada bitmemiştir. Paralel doğruların niteliğini kanıtlama yönündeki girişimler, farklı bir geometriler dizisine açılmıştır. Bu geometriler matematiğe dair fikrimizi değiştirmiş, bize uzayın fiziğini araştırmanın araçlarını sunmuşlardır.

2000 yılı aşkın bir süre boyunca, 19. yüzyılın sonuna kadar Öklit'in *Elements* adlı kitabı geometriyle aynı anlama geliyordu. Geometri çalışmak istiyorsanız, Öklit'in geometri değerlendirmesini çalışıyordunuz; *Elements*'i hatmettiyseniz geometriyi en yüksek otoriteden öğrendiğinize emin oluyordunuz. Bir tek geometri vardı ve Öklit de onu "kutsal kitabı"nda anlatmıştı. Tıpkı Kitab-ı Mukaddes için olduğu gibi, bu kitabın müritleri de onu bölüm bölüm, satır satır alıntılayabiliyordu.

Bunun da ötesinde *Elements*'in 13 kitaptan oluşan yapısı katı bir mantık izliyordu; matematiğin nasıl yapılması gerektiğine örnek oluşturan bir eser haline gelmişti: Terimlerinizi tanımlıyor, varsayımlarınızı ortaya koyuyor, teoremleri kanıtlayarak sistematik bir biçimde bir bilgi bütünü kuruyordunuz. Öklit başka matematikçilerin eserlerini de kullanmıştı; ama dehası bu mantıksal ve tutarlı örgütlenmeyi kurmasında yatıyordu; bu yapı dahilinde,

söz gelimi Pisagor'un üçgenlerle ilgili teoremi birinci kitabın 47'inci önermesini ya da basitçe 1, 47'yi oluşturuyordu.

Paralellik Postülasının Gizemi

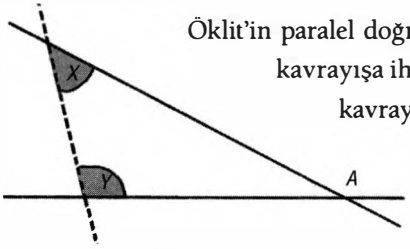
Elements'teki her önerme, beş "postüla"ya dayanarak kuvvetli bir biçimde kanıtlanıyordu; postülalar Öklit'in bunlara dayanarak yenilmez argümanlar kurduğunu düşündüğü varsayımlardı. Daha özele inecek olursak, postülalar noktalar, doğrular ve açıların temel özelliklerini, birlikte nasıl işlediklerini ortaya koyuyordu.

İlk dört postüla şöyleydi:

1) Herhangi bir noktadan herhangi bir noktaya düz bir doğru çizilebilir.
2) Sonlu bir doğru sürekli bir doğru haline getirilebilir.
3) Bir merkez ve yarıçapla bir daire kurulabilir.
4) Bütün dik açılar birbirine eşittir.

Buraya kadar tamam. Fakat Öklit'in biraz incelikli bir biçimde "paralellik postülası" denilen beşinci postülası hakkında bazı kuşkular vardı.

5) İki doğruyu kesen bir doğru, aynı tarafta iç açıların iki dik açıdan küçük olmasına neden oluyorsa, iki doğru tanımsız bir biçimde uzatıldıklarında iki dik açıdan küçük olan bu açıların bulunduğu tarafta birleşir.



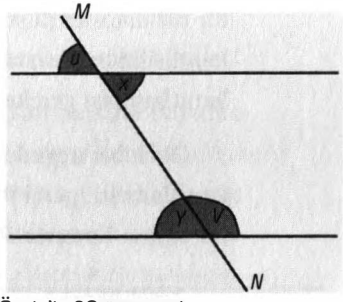
ÖKLİT'İN PARALELLİK POSTÜLASI

Öklit'in paralel doğruların ele alınma biçimine dair bir kavrayışa ihtiyacı vardı; beşinci postülayı da bu kavrayış oluşturuyordu. Peki ama bu postüla diğer dört postülayla kanıtlanabiliyor muydu? Eğer kanıtlanabiliyorsa, hiçbir kanıta ihtiyaç olmadan kesin olduğunu

varsaymamız gereken şeyler arasından çıkarılabilirdi. Birçok kişi denedi ve başaramadı; ama bu arayış nihayetinde geometriyi değiştirecek, fiziksel dünyaya dair anlayışımızı dönüştürecekti.

İlk dört postülanın kısa ve doğrudan olmasına rağmen beşinci postüla bir makale havasındadır; Öklit burada paralel doğruların ne olduklarından çok ne olmadıklarını söylemiştir. Bunu çizerek daha iyi gösterebiliriz: Noktalı çizgiyle belirtilmiş doğru, düz çizgiyle belirtilmiş iki doğruyu keserek X ve Y açılarını yaratır; bu iki açının toplamı 180 dereceden (iki dik açıdan) küçük, bu yüzden de düz çizgiyle belirtilmiş iki doğrunun, bu açılarla aynı tarafta olan bir noktada (A) nihayet birleşmesi gerekir.

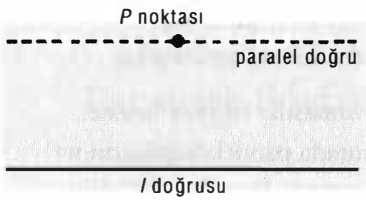
Öklit'in mantıksal şemasına neden bu kadar tuhaf bir postüla yerleştirdiğini merak edebiliriz; fakat böyle yapmış olması dehasının ölçüsünü verir. Bu postüla Öklit'in geometrik argümanları için gerekliydi; ama o bu postülayı ancak köşeye sıkışıp kullanmak zorunda kaldığında vermişti. Öklit bu postüla olmaksızın kanıtlayabileceği kadarını kanıtlamıştı; beşinci postüla ancak 29. önermenin kanıtlamasında karşımıza çıkar:



ÖKLİT'İN 29 ÖNERMESİ

Paralel doğruları kesen bir doğru [MN], birbirine eşit iç ters açılar yaratır [X = Y]; dış açı iç ve ters açıya eşittir [U = X], aynı taraftaki iç açıların toplamı iki dik açıya eşittir [X + V = 180].

Bundan yüzlerce yıl sonra Edinburghlu matematikçi John Playfair 1795'te Elements'in yeni basımını hazırlarken "paralellik postülası"nın Öklit'inkine eşdeğer, ama daha sezgisel bir formülasyonunu verecekti:



PLAYFAIR'IN POSTÜLASI

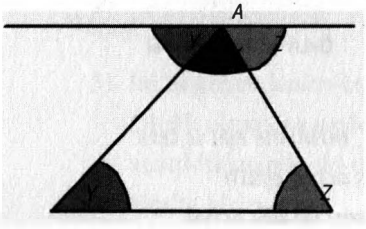
Verili bir noktadan verili bir doğruya paralel bir doğru çizilebilir.

Playfair'in postülası, sadeliği sayesinde popülerlik kazandı; *Elements*'in sonraki basımlarını yapanlar bu postülayı Öklit'in ağır tarzını hafifletmenin bir yolu olarak gördüler. Fakat ister Öklit'in deyişiyle ister Playfair'in deyişiyle söylensin bu postüla hâlâ tatmin edici bir matematiksel kanıttan yoksundu.

Bir Kanıt Arayışı

Paralellik postülası için kanıt arayışı, yıllar boyunca birçok büyük matematikçiyi uğraştırmıştır. Bu uğraşın olası zorluklarından biri bir tür dairesel düşünceye yenik düşmek, postülayı nihayetinde kendisine başvurarak kanıtlamaya girişmek; başka bir deyişle kanıtlanması gereken şeyi varsaymaktı.

Öklit bir üçgendeki açıların toplamının 180 derece olacağını kanıtlamıştı; gerçi Pisagor'un sunduğu kanıt daha şeffaftı. Önümüze bir üçgen konursa Playfair'in postülasını doğrudan uygulayarak A noktasındaki "köşe"den (tabanın karşısındaki nokta) geçen *benzersiz* paralel doğruyu kurabiliriz. Öklit'in ters açılar hakkındaki 29'uncu önermesini kullanarak şekilde Y ve Z açılarını işaretleriz; geri kalan açı da X açısı olur. Şimdi bu açılara iki biçimde bakabiliriz. Bir bakış açısı, bir doğru üzerindeki bir noktayla ilgili açıları oluşturduklarını söyler; öyle ki X + Y + Z = 180 derecedir; diğer bakış açısıysa X + Y + Z'nin üçgenin açılarının toplamı olduğunu gösterir. Kanıtlanmıştır.



BİR ÜÇGENİN AÇILARI = BİR NOKTAYLA İLGİLİ AÇILAR

Bu tersinden ifade de kanıtlanabilir: Bir üçgenin açılarının toplamı 180 dereceyse, tepe noktası A'dan çizilen bir doğruyla üçgenin kenarlarında Y ve Z açıları oluşturulursa, bu doğru üçgenin tabanına paraleldir.

Bir sonuç ve onun ters ifadesi kanıtlandığında, bunlar eşdeğer ifadelerdir. Bunun önemi şudur: Öklit'in paralellik postülası bir üçgenin açılarının toplamının 180 derece olduğunu söyleyen ifadenin eşdeğeridir. Beşinci postülayı kanıtlamaya girişen birinin, postülanın eşdeğerlerinden de haberdar olması gerekir; çünkü kanıtta bunlardan biri kullanılırsa argümanı dairesel olacak, geçerliliği kalmayacaktır. Postülanın inceliği eşdeğer ifadelerin örtülü olmasından anlaşılabilir; eşdeğer ifadelerin üstü örtülü gibidir, "paralel" sözcüğünü telaffuz bile etmezler:

> *Herhangi bir dik üçgende, Pisagor'un teoremi doğrudur.*
> *Açılarının her biri dik açı olan dört kenarlı bir şekil vardır.*

Paralellik postülasını kanıtlamak otuz yılı aşkın bir süre boyunca Adrien-Marie Legendre'in takıntısı olmuştu. Birinci sınıf bir düşünür olan Legendre'in ders kitabı *Eléments de géométrie* (1794) bir asır sonra hâlâ kullanılıyordu. Fakat Legendre bir üçgenin açılarının toplamının 180 derece olduğunu varsayarak dairesellik tuzağına düşmüştü.

Öklit "Bütün Kusurlardan Arınır"

Bu sorunu çözme konusunda 18. yüzyıl matematikçisi Giovanni Saccheri'nin çabaları önemli oldu. Saccheri, belli bir noktadan geçen doğruların belli bir doğruyla ilişkili olarak düşünülmesinde mantıksal olarak değerlendirilmesi gereken sadece üç mesele olduğunu savunuyordu:

1) Belli bir noktadan geçen, belli bir doğruya paralel *kesinlikle bir doğru* vardır. (Bu Öklit geometrisidir.)

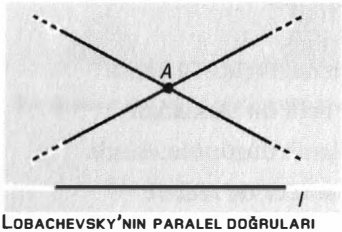
2) Belli bir noktadan geçen belli bir doğruya paralel birden fazla doğru vardır. (Yani paralel doğrular eşsiz değildir).
3) Belli bir noktadan geçen, belli bir doğruya paralel bir doğru yoktur. (Yani, paralel doğrular yoktur.)

Öklit'in paralellik postülasının yerini alan ikinci varsayımla birlikte Saccheri, açıklayamayacağı, daha önce hiç görmediği bazı tuhaf teoremlere vardı. Üçüncü varsayımla çelişkili bazı sonuçlar ortaya çıkardı. Ona göre, bu sapmalardan kurtulmanın tek yolu, ilk varsayımı, paralellik postülasını kabul etmekte yatıyordu. Vardığı sonuçları, kendinden emin *Euclid Vindicated from All Defects* (1733) (Öklit Bütün Kusurlardan Arınmıştır) başlıklı kitabında yayınladı; ama şöyle çelik gibi bir kanıt sunamamıştı.

Bir Paralel Doğrudan Birçok Paralel Doğruya

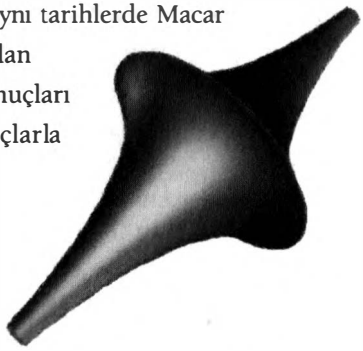
1830'larda genç bir Rus matematikçi, Nicholas Lobachevsky bir sonuca ulaştı: Parallellik postülasını kanıtlamakta en büyük matematikçiler dahi başarısız olmuştu; peki o zaman neden paralellik postülasının yerini bir başka postülanın aldığı *başka* geometriler olmasındı?

Lobachevsky, Saccheri'nin, paralel doğruların *eşsiz olmadığını* söyleyen ikinci postülasını seçmişti. Bu, elimizde belli bir doğru (l) ve bu doğru üzerinde bulunmayan bir nokta (A) olması halinde, bu noktadan geçmekle birlikte elimizdeki doğruyla *örtüşmeyen* birden fazla doğru olduğu anlamına gelir. Sağduyumuz gereği bu bize imkansız gibi görünür. Düz bir kağıt üzerine çizilecek, bir noktadan geçen birden fazla noktayı gösteren herhangi bir grafikte, mevcut, belli bir doğruya paralel birden fazla doğru kesinlikle görülemez. Bir aşamada, başka doğruların verili



LOBACHEVSKY'NIN PARALEL DOĞRULARI

doğruyu kesinlikle kesmesi gerekecektir. Aynı tarihlerde Macar János Bolyai de Öklit'in meseleyi ele alışından başka yolların izlenmesiyle doğabilecek sonuçları yayınlayarak Lobachevsky'nin vardığı sonuçlarla hemfikir olduğunu açıkladı.



BİR PSEUDOKÜRE VE BİRÇOK PARALEL DOĞRUSU (LOBACHEVSKY GEOMETRİSİ)

Bu düşünme biçiminin anahtarı, bir düzlemin ötesinde bükülmüş bir yüzey görebilmekte yatar. Bu bükülmüş yüzey sürekli bir artı yuvarlaklığı ya da büklümü olan bir küre değil, sürekli eksi bir büklümü olan bir yüzeydi. Lobachevsky ile Bolyai, aslında "pseudo-küre" ya da daha fazla kabul gören ismiyle söyleyecek olursak hiperbolik geometriyi yaratmışlardı. Bir pseudo-küre üzerindeki doğrular "jeodezik"tir; yani iki noktayı birleştiren en kısa uzunlukta eğri doğrulardır. Eugenio Beltrami sayesinde bu şekil, artık Öklit geometrisi olmayan bir geometrinin gerçek modelini sunuyordu.

Bu yeni geometrinin teoremleri Öklit'in bütün teoremleriyle çelişmiyordu; çünkü Lobachevsky ve Bolyai Öklit'in diğer dört postülasını korumuşlardı. Paralellik postülasına başvurmaksızın kanıtlanan teoremler korunmuştu (29. önermeye kadar). Fakat etkilenen şeylerden biri de üçgenin iç açılarının toplamıydı. Öklit geometrisinde, daha önce görmüş olduğumuz üzere bir üçgende iç açıların toplamının 180 derece olması paralellik postülasına eşdeğerdir. Paralellik postülasının yerine Lobachevsky ve Bolyai'nin yeni postülası geçirildiğinde üçgenin iç açılarının toplamı 180 dereceye eşit olamaz.

Aslına bakarsanız biraz şaşırtıcı bir biçimde, bu yeni geometride bir pseudo-kürenin üzerine çizilen bir üçgenin iç açıları toplamının 180 dereceden az olduğu sağlam bir biçimde kanıtlanmıştır. Şu da vardı: Bir üçgenin iç açılarının toplamı üçgenin *alanına* bağlıydı; dahası daha büyük bir alanı kaplayan üçgenlerin iç açılarının

toplamı daha az oluyordu; aynı şey tersi için de geçerliydi. Bu ilişki Öklit'e tamamen yabancıydı; Öklit'e göre üçgenin alanı ile iç açılarının toplamı arasında hiçbir ilişki yoktu. Öklit geometrisinde boyutları ne olursa olsun bir üçgenin iç açılarının toplamı 180 derecedir.

Kazan Üniversitesi'nde profesör olan Lobachevsky ile orduda subay olan Bolyai vardıkları sonuçları 1830'ların başında yayınladılar. Başarılarının büyüklüğüyle tanınacaklarına, bu çalışmaları görmezden gelindi. İşte tam bu noktada büyük Carl Friedrich Gauss, ölümünden sonra olsa da ikilinin yardımına koşacaktı. Bu alandaki çalışmaları bilinmeyen Gauss da benzer sonuçlara varmış; fakat Öklit'e hürmet edenlerin eleştirilerinden korkmuştu. Bu yüzden de vardığı sonuçları yayınlamamıştı. Ama Gauss 1855'te ölüp de kendisinin Öklitçi olmayan geometri üzerine yazışmaları yayınlandığında, saygınlığı sayesinde matematikçiler Lobachevsky ile Bolyai'nin onun çalışmasıyla bağlantılı olan yayınlarını da okudular.

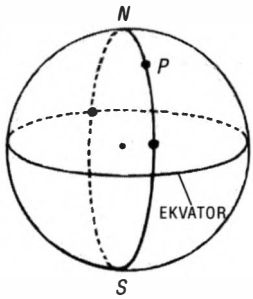
Bir Paralelden Hiç Paralele

Öklit'in her şeye muktedirliği bir darbe almıştı, ama daha kötüsü gelecekti. 19. yüzyılın sonraki yıllarında Bernhard Riemann Lobachevsky ile Bolyai'ninkilerden çok daha radikal önermeler ileri sürdü. Öklit'in "Sonlu bir düz doğru sürekli bir düz doğru olarak uzatılabilir" şeklindeki ikinci postülasını "Bütün doğrular sonlu uzunluktadır, ama sonları yoktur" şeklinde değiştirdi. Bu ifade gizemli görünse de bazı geometrilerde "doğru" olarak addedilen daire bu tanıma uyar. Uzunluğu, yani çevresi kesinlikle sonludur; ama tabii bir dairenin, sıradan bir doğru parçasınınki gibi bir sonu yoktur.

Riemann daha da ileri gitti; aslına bakarsanız Saccheri'nin sunduğu üçüncü seçeneğe, "belli bir noktadan geçen, belli bir doğruya paralel *hiçbir* doğru yoktur"a oynadı. Riemann paralel doğruların kaybolmasını nasıl sağlamıştı? Lobachevsky ile Bolyai

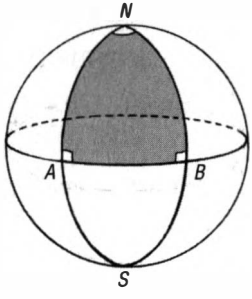
yeni geometrilerine pseudo-küreyi model alırken, Riemann gerçek bir küreye odaklanmıştı.

Küresel geometri yeni bir fenomen değildi; Antik Yunanlılar küresel geometriyi incelemişlerdi, ayrıca dünyamız bir küre olduğundan küresel geometri denizcilikte de önemli olmuştu. Riemann'ın geometrisinde kürelerin yüzeyindeki "büyük daireler", merkezleri kürenin merkezi olan daireler, doğrulardır. Bu geometride boylam doğruları, doğrulardır; ama enlem doğruları doğru değillerdir.



KÜRE: "HİÇ PARALEL YOK"

Bu geometride paralellik postülasının nasıl yorumlandığını anlamak için ekvatoru (bir "büyük daire") verili doğrumuz olarak alıp dünya üzerinde başka bir noktayı, örneğin Paris'i, bu doğrunun üzerinde yer almayan P noktası olarak düşünelim. P'den geçen bütün doğrular ("büyük daireler") ekvatoru iki noktada keser; bu geometride P'den geçip de verili doğruyu *kesmeyen* bir doğru bulamayız. Bu geometride paralel doğrular yoktur.



KÜRE: BİR ÜÇGENİN AÇILARININ TOPLAMI 180°'Yİ AŞAR

Öklit'in, ikinci postülası ya da beşinci postülası kullanılmaksızın doğruladığı teoremler Riemann'ın küresel geometrisinde hâlâ geçerli olacaktır. Fakat bu geometrinin Öklitçi genel kabullerin karşısına çıkaracağı başka sürprizler de vardır. Yerküre üzerinde Kuzey Kutbu N noktası ile taban doğrusu ekvatorun oluşturduğu bir üçgene bakarsak, NAB üçgeninin iki taban açısının dik açı olduğunu görürüz. Kuzey Kutbu'nda da bir açı olduğundan, Riemann'ın geometrisinde, bir üçgenin iç açılarının toplamı 180 dereceyi aşar.

Lobachevsky ve Bolyai'nin geometrisinde olduğu gibi, iç açıların toplamı bir üçgenin alanına dayanmaktadır; ama burada daha

> *"Kovboylar bir danayı ya da hırçın bir atı öyle bir bağlarlar ki hayvan kıpırdayamaz; ne hareket edebilir ne düşünebilir. Buna elini kolunu bağlamak denir, Öklit'in geometriye yaptığı da işte budur."*
>
> E. T. Bell, *Hakikat Arayışı* (1934)

geniş bir alanı kaplayan bir üçgenin iç açılarının toplamı daha fazladır. Grafik üzerinde Kuzey Kutbu'ndaki açı artırılır, böylece üçgenin açılarının toplamı artırılırsa, üçgenin alanı da açıktır ki artacaktır.

Aslında tarihe daha kapsamlı bir bakış attığımızda, Riemann'ın geliştirmekte olduğu Öklitçi olmayan geometrinin asırlardır insanın gözünün önünde olduğunu görürüz. İskenderiyeli Menelaus İÖ 100 civarında bu "eliptik" geometri çerçevesinde hesaplamalar yapmıştı. Ama insan bazen düz-dünyalıdır; dünyanın yuvarlak olduğunu bilinse de dünya düz görünür ve genellikle "düz" olarak deneyimlenir.

Geometri a la carte

Yeni geometrilerin çelişkiden azade olması, paralellik postülasının diğer postülalardan bağımsız olduğu anlamına geliyordu. Hiç kimse bu postülayı kanıtlayamayacaktı ve ileri sürülen herhangi bir kanıt da yanlış olacaktı. Matematikçiler paralellik postülasının yerine başka postülalar seçme özgürlüklerini kullanmışlar, sonuçta farklı türde geometriler türetmişlerdi.

Öklitçi ve Öklitçi olmayan yeni geometriler ayrı ayrı incelenebilir; ama Alman matematikçi Felix Klein aralarındaki ilişkileri göstererek bu geometrileri düzenlemenin yararlı bir yolunu bulmuştu.

Bugünse matematikçilerin lokal olarak Öklit geometrisine uyan, ama büyük tabloya bakıldığında daha karmaşık olan uzamları

	Geometri türü	Paralel doğrular	Üçgen açı toplamı
Lobachevsky, Bolyai	Hiperbolik geometri	Herhangi bir sayıda	180 dereceden az
Öklit	Öklit geometrisi	Bir paralel doğru	180 dereceye eşit
Riemann	Eliptik geometri	Hiç yok	180 dereceden fazla

KLEIN'S SINIFLANDIRMASI

incelemenin bir yolunu bulmaya ihtiyacı var. Riemann 1854'te "Geometrinin Dayandığı Hipotez Üzerine" başlıklı bir konferans vermiş, bu konferansta "manifold" kavramını kullanmıştı; "manifold" metaforik mikroskopla bakıldığında düz görünen karmaşık bir uzamdı. (Bakınız *Evrenin Şekli Nasıldır?*)

Evrenin Geometrisi

Bu yeni "Riemannıcı geometrinin" ilerlemesi zaman ve uzayın birbirlerine nasıl bağlandıklarının analizinde önemli olacaktı. Büyük kütlelerin etraflarındaki geometriyi değiştirebilmeleri, "manifold" kavramını gerektiriyordu; eğimin bütün noktalarda aynı olduğu bir kürenin tersine "manifold" düzlemde uzunluk, açı ve eğimin ölçümü bir noktadan diğerine farklılık gösterebiliyordu. Albert Einstein'ın Riemann'ın kavrayışına çok şey borçlu olması hiç de şaşırtıcı değildir; kendisi bu kavramlarla tanışmamış olsa "Görelilik kuramını hiç geliştiremezdim," demiştir.

Einstein'dan önce iki bin yılı aşkın bir süre boyunca Öklit'in *Elements*'i olağanüstü bir başarı olmuş, olağanüstü bir kalıcılık kazanmıştı. Nihayetinde Öklit'in paralellik postülasına öyle kuvvetle karşı çıkıldı ki sonunda yeni geometriler doğdu. Fakat bu geometriler Öklit geometrisini "yanlış" kılmaz; her ne kadar modern bakış açısıyla mantık dile getirilmeyen varsayımlarda bulunsa da. Pratik bakış açısıyla Öklit'i kullanarak mimari yapılar

dikmeye, köprüler yapmaya devam edebiliriz. Paralel doğrulara ilişkin gündelik kavrayışımız "Öklitçi" olmayı sürdürür; düz yüzeylerle karşı karşıya kaldığımızda güvenle bu büyük geometriciye başvururuz. Ne var ki paralellik postülasının hikayesi bizi yeni geometrilere getirmiştir. Riemann geometrisi ve "manifold" kavramı, insanın geometriyi doğru bir biçimde anlama, fiziksel uzayın gerçek niteliğini keşfetme girişimleri açısından hayati önemdedir.

EVRENİN MATEMATİĞİ NASILDIR?

Kalkülüs mucizesi

18. yüzyıl yazarlarından Alexander Pope, büyük bir yurttaşı hakkında övgüyle "Bırakın Newton olsun! Her şey ışık olacaktır!" diye yazmıştı. Bu övgüye Alman Gottfried Wilhelm Leibniz'i de dahil edebilirdi; çünkü bu iki doğa filozofu ve matematikçi Kalkülüs olarak bilinen, doğru astronomik hesaplamalar yapmanın ve daha fazlasının yolunu açan hesaplama yönteminin öncüsü olmuşlardı. Yıllar içinde geliştirilip inceltilen Kalkülüs'ün bütün bilimler açısından paha biçilmez değerde olduğu görüldü. Kalkülüs'ün uygulama alanları giderek genişlemekte; demografi, ekonomi, tıp, istatistik ve kuantum fiziği gibi çeşitli disiplinleri kapsamaktadır.

Kalkülüs insanın göğe bakıp güneş sisteminin ve ötesinin mekanizmasını anlama arzusu sonucu geliştirildi. Newton ile Leibniz'in ellerinde gezegenlerin hareketlerini hesaplayıp betimlemekte başarıyla kullanıldı. Onların devrinden beri de kendine sağlam bir yer edindi ve insanoğlunun *değişimi* betimlemeyi, ölçmeyi ve anlamayı istediği her yerde bir uygulama alanı buldu.

Matematikçi Newton aynı zamanda bilim insanı, deneyci ve astronom Newton'dır. Newton gençliğinde gezegenlerin hareketinden, gökleri izlemekte kullanılabilecek bilimsel aygıtlardan büyülenmişti. Daha 30 yaşındayken yaptığı bir yansıtıcı teleskop tasarımı Londra'da büyük bir sansasyon yaratmış, Newton Kraliyet Cemiyeti'ne bu başarısı üzerine seçilmişti.

Newton, "merkezcil" kuvvetin, yani bir noktaya çekilen bir cismin deneyimlediği kuvvetin niteliğine dayanarak o büyük genel

kütleçekim kuramını ve meşhur hareket yasalarını geliştirmişti. Bu kuramlar ve yasalardan yola çıkıp Kalkülüs'ü kullanarak gezegenlerin güneş etrafında eliptik yörüngelerde hareket ettiği çıkarımında bulunmuştu. Johannes Kepler eliptik gezegensel hareket kuramını deneysel verilere dayanarak postüle etmişti. Newton ise bir adım daha ileri giderek bunu, matematiksel "değişim" kuramından çıkarsamıştı. Newton Kalkülüs'te evrenin matematiksel anahtarını bulmuştu.

Akışkan Bir Dünya

Kalkülüsün -genel kabul gereği bu terim hep büyük harfle yazılır- temelinde etrafımızdaki hayatın akışkan, gayri sabit, hareket halinde olduğu algısı vardır. Her dakika bir öncekiden farklıdır; dünya bir akış halindedir. İÖ beşinci yüzyılda filozof Herakleitos bunu özetlemişti: "Her şey akar, hiçbir şey yerinde saymaz" şeklindeki şiarına iyi bir ölçü olarak "aynı nehirde iki kere yıkanamazsınız" diye eklemişti.

Bunu biliyoruz. Havaya atılan bir topun yüksekliğinden tutun bir roketin Dünya'dan uzaklaştığı mesafeye kadar, bir nüfusun büyüklüğünden bir salgının yayılmasına, manyetik bir nesnenin varlığında gözlenen elektrik akımına kadar hemen hemen her fenomen uzay ve zamanda değişime tabidir. Kalkülüs'ün temel fikri şudur: Değişimini ölçtüğümüz bir nicelik, *değişkenlerin* değerine dayanır. Başka bir deyişle, havaya atılan bir topun yüksekliği, büyük ölçüde, bırakılmasından sonra geçen zamana dayanır. (Topun yüksekliğinin, havanın direnci gibi başka etkenlere de dayanabileceği doğrudur, ama pratik değerlendirmeler gereği bazı etkenler kenara bırakılabilir.)

Değişimi değerlendirirken ele aldığımız bariz değişken zamandır; ama Kalkülüs her durumda her tür değişkeni ele alabilir. Kalkülüs problemleri olarak görülebilecek problemlerin izleri Antik Yunan'a kadar sürülebilir; ama Aristoteles ile Herakleitos değişimi matematiksel değil, felsefi terimlerle incelemişlerdi. Galileo ve bazı ortaçağ matematikçileri matematiksel yolda ilerlemeye başlamışlardı;

ama bu konu aslında modern dönemin iki aydınlatıcısı Newton ve Leibniz'le başladı. Newton ile Leibniz, Kalkülüs'ü keşfeden "ilk" matematikçiler olarak anılır; ama aslında Kalkülüs'ü birbirlerinden bağımsız olarak, üstelik de farklı matematiksel notasyonlarla tanımlamışlardı. Newton'ın notasyonu, işin içine hareketin dahil olduğu problemlerde yararlıdır; ama bugün daha revaçta olan Leibniz notasyonu kadar tanınır hale gelmemiştir.

Bu iki adamın geliştirdiği Kalkülüsün birbirini tamamlayan iki yönü vardır: "Diferansiyel Kalkülüs" ve "İntegral Kalkülüs". Aslında bunlar bir madalyonun iki yüzünü oluşturur; aralarında ters bir ilişki vardır. Diferansiyel Kalkülüs "ayırmak"la, İntegral Kalkülüs ise "birleştirmek"le ilgilidir.

Değişimi Ölçmek

Diferansiyel Kalkülüsün başlıca amacı *değişim oranını*, değişimin ne kadar hızlı ya da yavaş gerçekleştiğini ölçmektir; bu orana "türev" denir. Türevi bulma sürecine "diferansiyelini alma" denir.

Diferansiyel Kalkülüs ayrıca belli anlardaki değişim oranlarıyla, yani *anlık* değişim oranlarıyla ilgilenir. Bu yüzden ortalama değişimden çok farklıdır. Örneğin A şehri ile B şehri arasındaki uzaklık 330 km'yse, bir araba bu yolu 11 saatte alıyorsa, arabanın ortalama yol alma hızı 330'un 11'e bölünmesiyle saatte 30 km olarak bulunur. Ama bu bize yolculuğun herhangi bir anındaki hızı vermez. Araba bir an trafik ışıklarında duruyor olabilir; bir sonraki an otoyolda saatte 70 km hızla yol alıyor olabilir.

Cebirsel olarak ölçtüğümüz niceliğe y diyebiliriz; havaya atılan top örneğinde, y topun yerden yüksekliği olacaktır. y'nin değişim oranı, Diferansiyel Kalkülüsün kilit sorusudur.

Newton *anlık hız*, yani belli bir anda mesafedeki değişim oranı hakkında yazmıştı; ayrıca daha üst düzey bir kavram olan *anlık ivmelenme*, yani hızdaki değişim oranı üzerine de düşünmüştü.

Anlık değişime odaklanmak için Newton akış bağlamında düşünüyordu. Onun diliyle, y zaman içinde akıyorsa ona "akışkan" diyordu. Akışkanın değişme oranına "$\dot{y}$'nin akışı" diyordu. (Onun notasyonunda bu değer $\dot{y}$ ile gösteriliyordu.) Bir adım daha atarsak y'deki değişim $\dot{y}$ olarak yazılır. Dolayısıyla y mesafeyse, $\dot{y}$ hız, $\dot{y}$ ivmedir.

Gelgelelim Leibniz'in notasyonu anlık hızı daha iyi anlamamızı sağlar. Havaya atılan top örneğinde, zamanda iki nokta düşünmemiz gerekir: Zamanda bir an, bu an hızın ne olduğunu bilmek istediğimiz andır; bundan bir süre sonrasıysa sonraki bir an. Bu iki an arasındaki süre Δx olarak gösterilir. (Bu tek bir semboldür; Δ X X değildir, delta X diye okunur.) Bu süre zarfında top Δy *(delta ẏ)* olarak yazılan bir mesafe kat edecektir.

Bu süre zarfında topun ortalama hızı -alınan mesafe bölü sarf olunan zaman $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ olarak ifade edilir. Δx'in temsil ettiği süre ne kadar kısaysa $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, × anındaki *anlık* hıza o kadar yakın olacaktır.

İvmenin Çarpanını Alma

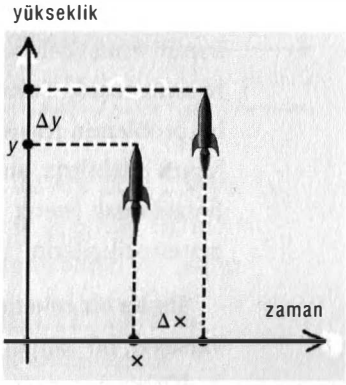
Diferansiyel Kalkülüsün somunlarının ve vidalarının nasıl birbirine geçtiğini anlamak için ateşlenmekte olan bir roket örneğini düşünelim. Bu örnek de havaya atılan top örneğine benzer, ama burada roket itilimini de değerlendirmemiz gerekiyor.

Diyelim ki x dakika sonra roketin anlık hızını öğrenmek istiyoruz. Hız sabit olursa, örneğin dakikada 10 km olursa tektip hareket olurdu; bu hız herhangi bir andaki anlık hız olurdu. Fakat bir roketin hareketi böyle değildir. Hiçbir şeyden başlar, başta yavaşça hareket eder ve ivmelendikçe daha fazla hız kazanır.

Gerçekte kat edilen mesafe ile sarf olunan süre arasındaki ilişki, roketle ilgili her tür etkene bağlı olacaktır; örneğin roketteki yakıtın miktarına, havanın direncine, roket uzaya yükselirken Dünya'nın çekiminde meydana gelen azalmaya. Gelgelelim, alınan

kilometreleri y, geçen süreyi x olarak düşünürsek $y = x^2$ şeklinde bir ilişki varsayabiliriz. Bu çok basitleştirilmiş bir denklem olabilir, ama ivmeyi kapsaması itibarıyla roket hareketinin bütün temel özelliklerine sahiptir: Roketin 1 dakika sonra 1 km, ama beş dakika sonra 25 km yol aldığı anlamına gelecektir.

Roketin havalanmasından 5 dakika sonraki anlık hızını hesaplayabilmek için, öncelikle Leibniz'in sembolleriyle $\frac{\Delta y}{\Delta x}$'yi kullanarak kısa Δx süresi zarfındaki ortalama hızı hesaplamamız gerekiyor.



KALKÜLÜSÜ KULLANARAK ROKET HIZININ ÖLÇÜLMESİ

$\Delta x = 0{,}01$ dakika diyelim (bu bir saniyeden daha kısa bir süredir); bu demektir ki zamanda (x) aldığımız iki nokta 5 dakika ile 5,01 dakikadır. $y = x^2$ varsayımını kullanarak bu süre zarfında kat edilen mesafenin 0,1001 km olduğunu bulabiliriz; bu sonuca $5{,}01^2$den 5^2'yi çıkararak ulaşırız.

Bu, bu süre zarfında, ortalama hızın $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, 0,1001 km'nin 0,01 dakikaya bölünmesiyle dakikada 10,01 km olarak hesaplanabileceğini buluruz. Daha bile kısa zaman aralıklarını dikkate alırsak, yani Kalkülüs'ün ardındaki temel fikir olan limit sürecini uygularsak, ortalama hız, roketin havada geçirdiği 5'inci dakikadaki anlık hızı olan 10 km'ye yaklaşacaktır.

Aslında varsayımımız, $y=x^2$ "ifadesi" temelinde, x zamanı için *hangi değeri seçersek seçelim* anlık hız yine x'in iki katı olan sayıya eşit olacaktır. Leibniz bu sonucu $\frac{dy}{dx} = 2x$ şeklinde ifade etmiştir; burada $\frac{dy}{dx}$, $y=x^2$'nin *türevidir*. Leibniz bu ifade biçiminin, çok küçük bir dy'nin çok küçük bir dx'e bölünmesi anlamına geldiğini düşünmüştü; fakat bugünkü matematiksel düşünce türev $\frac{dy}{dx}$'in sadece bir sembol olduğunda ısrarlıdır.

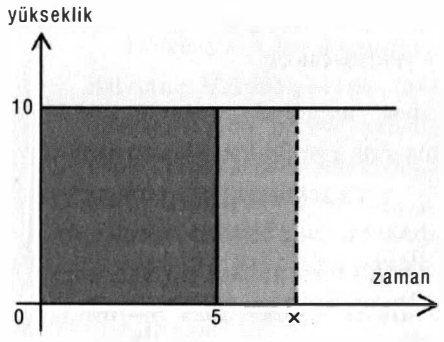
Diferansiyel Kalkülüs'ün kalbinde türevin bulunması, yani diferansiyelin alınması yatar. Türev başka matematiksel ifadelerle de hesaplanabilir: Örneğin $y = x$ ifadesinin türevi $\frac{dy}{dx} = 1$ olacaktır, $y = x^3$ ifadesinin türevi ise $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ olacaktır.

Madalyonun Öbür Yüzü

Roket örneğinde roketin aldığı yolu belirtmek için bir ifade benimsemiş, Diferansiyel Kalkülüsü kullanarak roketin hızını hesaplamıştık. Fakat madalyonun öbür yüzünde İntegral Kalkülüs bu problemin ters kurulmuş biçimini çözmemizi sağlar: Roketin hızını bilebiliriz, ama bu kez de belli bir anda almış olduğu mesafeyi hesaplamak isteriz. Bu hesaplama hızın *integralini* bulmaya dayanır; matematikçilerin "integralini alma" dedikleri süreçtir.

Başka bir roketin dakikada 10 km gibi sabit bir hızı (v) olduğunu varsayar, bir zaman ve hız çizelgesi oluşturursak bu grafikte, $v = 10$'dan geçen, (x zamanı ekseninde) herhangi bir anda roketin hızının bu olduğunu söyleyen düz bir doğru olacaktır.

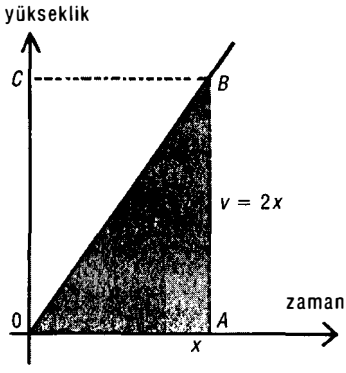
Peki 5 dakika sonra roketin yüksekliği ne olur? Sabit bir hızla dakikada 10 km yol aldığından $5 \times 10 = 50$ km'dir. Bunu bir grafikle ifade edecek olursak bu mesafenin *alan* olarak yorumlanabileceğini, alanın da 5×10'a eşit olduğunu görürüz.



DEĞİŞMEYEN BİR HIZLA ALINAN YOLUN ALAN OLARAK TEMSİLİ

Başka bir deyişle ters kurulmuş İntegral Kalkülüs problemini çözerken yüksekliği bulabilmek için *alanı* hesaplarız. Tabii ki ivmelenme yüzünden roketimiz yukarı doğru sabit bir hızla yol almıyordur. Bu yüzden v hızının değişmekte olduğunu, herhangi bir anda, bir saatte alınan km sayısının, o ana kadar sarf edilen

sürenin iki katı olacağını, yani v = 2 x olduğunu varsayalım. Bu x ilerledikçe roketin daha hızlı hareket ettiği anlamına gelir. Peki v = 2x'e denk gelen bir grafik çizdiğimizde ne olur?



İVMELENMEYLE ALINAN YOLUN ALAN OLARAK TEMSİLİ

Daha önceki grafikte olduğu gibi burada da kat edilen mesafeyi alan, OAB üçgeninin alanı verecektir. Grafiğin de gösterdiği gibi bu alan, OABC dikdörtgeninin alanının yarısına tekabül etmektedir. Dolayısıyla mesafeyi bulmak için OA × OC yapmamız gerekir; bu da × x 2x = 2 x^2'ye eşittir. Üçgenin alanıysa bunun yarısına, yani x^2'ye eşittir. Hızın v= 2x denklemine dayandığını varsayıyorsak roketin aldığı yol budur.

Bir grafiğin altında kalan alanı bulmak İntegral Kalkülüs'ün başlıca fikri, Newton ile Leibniz'in başlıca saikleridir. Kendi başına alındığında bir grafiğin altında kalan alanı bulmak, küçük dikdörtgenlerin, *vdx* alanının toplanmasıdır; bunun için de tarihsel olarak "toplam" anlamına gelen "sum" kelimesi kullanılmıştır. Bu kelime tek bir harf, S olarak kısaltılmış, sonra da Leibniz'in matematiksel notasyonunda uzatılmış S (∫) ile ∫vdx olarak ifade edilmiş ve buna v'nin integrali denmiştir. ∫2xdx = x^2 ya da eşdeğer bir biçimde (2'ye bölerek) ∫xdx = $\frac{x^2}{2}$ olduğunu bulmuştuk.

Türevde olduğu gibi, integrallerle de $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$, $\int x^3 dx = \frac{x^4}{2}$ gibi başka matematiksel ifadeler de hesaplanabilir.

Diferansiyel-İntegral İlişkileri ve "Limit"

Peki Diferansiyel ve İntegral Kalkülüs etkili bir biçimde nasıl bir araya gelir? Örnekteki roketimizin yüksekliği (y) verilirse Leibniz'in $\frac{dx}{dy}$ formülüyle Diferansiyel Kalkülüsü kullanarak roketin hızını, tersi olursa, hızı (v) verilirse İntegral Kalkülüsü

kullanıp $\int v dx$'i hesaplayarak yüksekliğini bulabiliriz. Matematiksel terimler kullanılarak örneklerimizin birbirleriyle ilişkisi Kalkülüs denklemleriyle gösterilebilir:

Diferansiyel Kalkülüs (hızı bulmak için): $y = x^2$ veriliyse $\frac{dy}{dx} = 2x$ olduğunu buluruz.

İntegral Kalkülüs (kat edilen mesafeyi bulmak için): $v = 2x$ veriliyse $\int v dx = x^2$'yi buluruz.

Newton'ın da Leibniz'in de fark ettiği üzere diferansiyeli alma ve integrali alma işlemleri birbirlerine ters işlemlerdir. (Gerçekten de integral bazen aradaki bu ilişkiyi vurgulamak için *ters-türev* olarak anılır.)

Elbette ki Kalkülüs, Newtoncu-Leibnizci doğumu sırasında tam anlamıyla oluşmuş değildi. Güçlü, fakat hantal bir biçimle dünyaya gelmişti. Temelleri güçlendirmek için başka bir kavrama, *limit* kavramına ihtiyaç vardı. Nihayet bu kavram, Newton ve Leibniz'ten sonra, önde gelen birçok matematikçinin Kalkülüs'ü güçlendirme çabalarının hüsrana uğramasından sonra ortaya çıktı. 19. yüzyılda Augustin-Louis Cauchy bu dikenli dalı kavrayarak mükemmel bir limit kavramı ortaya koydu ve koskoca Kalkülüs kuramını daha güvenli bir zemine oturttu.

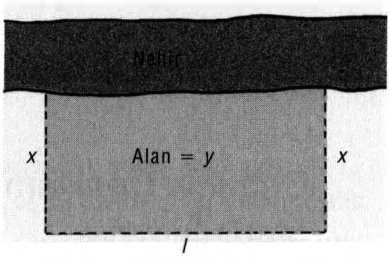
Kalkülüs ve Optimizasyon

Kalkülüs'ün paha biçilmez değerde olduğu uygulama alanlarından biri, bir niceliğin istenen minimum ve maksimum değerini bulmaktır. Bunu başka bir örnek üzerinde, bu kez göklere çıkmak yerine yerde kalarak anlayabiliriz.

Diyelim ki bir çiftçinin 800 metre çiti var ve düz bir nehre bitişik dikdörtgen bir alanı çitle çevirmek istiyor. Bu sonlu miktardaki çiti, en fazla yararı ve kârı sağlayabilmek için en geniş arazi parçasını çevirmekte nasıl kullanacağını görmek istiyor. Nehri, dikdörtgenin

eni yerine uzun kenarlardan biri olarak almanın çiftçinin yararına olacağı açıktır. Daha sonra bu bulmacayı çizerek ya da elindeki 800 metre çite uyacak çeşitli enleri ve boyları deneyerek çözebilir. Ama Kalkülüs çiftçimizin tahminleri bir kenara bırakıp doğruca çözüme varmasını sağlar.

Çiftçi dikdörtgen tarlanın enini x ve boyu olacak tek kenarı l olarak tanımlarsa, l uzunluğu 800 − 2x olarak ifade edilebilir.

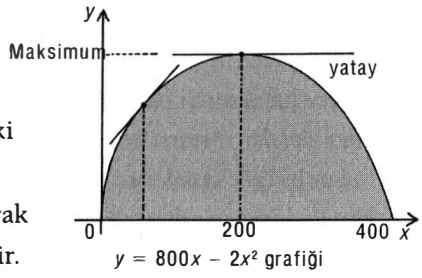


ÇİFTÇİNİN NEHİR KENARINDAKİ TARLASI

Tarlanın x × l'e eşit olan alanı, $y = x \times (800 - 2x)$ olarak yeniden yazılabilir; bu da $y = 800x - 2x^2$ anlamına gelecektir. Örneğin çiftçi tarlanın eni için x = 100 demeyi tercih ederse y alanı $100 \times (800 - 200) = 60.000$ metrekare olacaktır.

Ama daha iyisini yapıp en geniş tarlayı verecek x değerini bulabilir mi acaba? Şimdi bu problemi çiftçinin dünyasından çıkarıp matematikçinin dünyasına sokalım. Farklı x değerleri için y alanının değişen boyutlarını, yukarıdaki denklemi bir grafiğe çevirerek gösterebiliriz. Bu grafikte x genişliği 0'dan yukarıya doğru çıkarken, y alanı da maksimum değerine ulaşacak, bu noktadan sonra yeniden azalmaya başlayacaktır; grafik bize bir eğri verir.

$\frac{dy}{dx}$ türeviyle roketimizin hızı bağlamında karşılaşmıştık; ama türevin bir başka değerli yorumu, bir eğrinin eğimini vermesidir. Bir eğri üzerindeki bir noktanın dikliği, bu noktadaki teğet doğrusunun eğimi olarak tanımlanır. Bu eğim yaklaşık olarak $(\frac{\Delta y}{\Delta x})$'tir ve kesinlikle $\frac{dy}{dx}$'e eşittir.



$y = 800x - 2x^2$ grafiği

KALKÜLÜSLE EN GENİŞ ALANIN BULUNMASI

Eğrinin en yüksek noktasında, bizim istediğimiz noktada, diklik sıfırdır, çünkü teğet yataydır. Dolayısıyla y'nin türevini hesaplayıp 0'a eşitlersek elimizde bilinmeyen x değerini verecek bir denklem olur.

$800x - 2x^2$'nin türevi $800 - 4x$'tir; $800 - 4x = 0$ denklemini çözerek $x = 200$'ün optimum değer olduğunu, bize 80.000 metrekarelik bir alan verdiğini buluruz.

Doğanın Denklemlerinden Matematik Modellemeye

"Doğanın denklemleri" denilen denklemler bazı terimlerin türev, yani değişim oranı olduğu denklemlerdir; bu yüzden de diferansiyel denklemler olarak düşünülürler. Örnek olarak $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ önermesi alınabilir; burada problem denklemin sağ ve sol kısımlarını birbirine eşit kılacak şekilde y'yi bulmaktır.

Diferansiyel denklemler çok geniş bir çalışma alanıdır; matematikçilerin yanı sıra fizik kuramlarıyla ilgilenen fizikçileri, kimyasal reaksiyonların oranlarıyla ilgilenen kimyagerleri, hastalıkların ne hızla yayıldığını bulmak isteyen biyologları da kendine çekmektedir. Bu sorular matematiksel modelleme çerçevesinde incelenir; bir süreci anlamak için sadeleştirici varsayımlara başvurulur. Kalkülüs'ün uygulandığı birçok alanda, uzay *ve* zaman gibi birden fazla değişkenin bulunduğu nicelikler vardır. Bu değişkenleri bulmak için matematikçiler değişkenlerin her birinin birbirinden bağımsız kabul edilmesiyle bulunan *kısmi türev* kavramına başvurmuşlardır. Bu da bizi *kısmi diferansiyel denklemler* alanına getirir; bunlar arasında gerçek hayatta uygulaması olan birçok klasik örnek vardır. 19. yüzyılda iki kişinin geliştirdiği, hava durumu tahmininde ve okyanus akıntıları gibi akışkanların hareketini tahmin etmek için kullanılan Navier-Stokes denklemleri; yine 19. yüzyıldan elektrik ile manyetik alanlarını birbiriyle

ilişkilendirmekte kullanılan (James Clerk) Maxwell denklemleri ve Albert Einstein'ın genel görelilik denklemleri vardır.

Kısmi diferansiyel denklemler ekonomi alanında da uygulanır; borsa fiyatlarını tahmin etmekte kullanılan, ABD'li ekonomistler Fischer Black ve Myron Scholes'un geliştirdikleri Black-Scholes denklemi bunlara bir örnektir. Isının dağılımıyla ilgili klasik denklem üzerine çalışmaları, yazarlarına 1997 Nobel Ekonomi Ödülü'nü kazandırmıştır.

Kalkülüs Newton ile Leibniz'in bugünlere kalan mirasıdır. Bilimin, sosyal bilimlerin, istatistiğin ya da herhangi bir mühendislik dalının, Kalkülüsün 17. yüzyıldaki muhteşem mucitlerine ve onların gezegenlerin eliptik hareketi hakkındaki düşüncelerine borçlu olmayan bir tek köşesi bile yoktur.

İSTATİSTİK YALANDAN MI İBARETTİR?

Veriler, kanıtlar ve "lanet yalanlar"

Kamuoyu yoklamalarının öncüsü George Gallup, şu meşhur sözünde, Tanrı'nın varlığını istatistikle kanıtlayabileceğini söylemişti. 19. yüzyılın şüpheci tarihçisi Thomas Carlyle da insanın istediği her şeyi kanıtlamasını sağlamalarından dolayı istatistikleri suçlamasıyla meşhurdur. Bunlar aşırıya kaçan, ama insanın dikkatini çeken iddialardır. Ne var ki ister beğenin ister beğenmeyin bugün istatistiğe doymuş bir dünyada yaşıyoruz; araştırmacı orduları veri toplama ve bunlardan çıkarımda bulunma işiyle uğraşıyor. Peki ama hangi matematiksel araçları kullanıyorlar ve istatistikle bir şey ortaya konabilirse eğer o şey nedir?

İstatistik genellikle hakkındaki kötü sözlerin sıkıntısını çeker; bir meseleyi tartışırken başvurulan yanıltıcı bir araç olma töhmeti altında kalır; özellikle de "istatistik" teriminin türediği siyaset alanında. Mark Twain'e bakılırsa "yalanlar, lanet yalanlar ve istatistik" suçlaması Benjamin Disraeli'nin ağzından çıkmıştır; Victoria dönemi devlet adamının bu tabiri kullanıp kullanmadığı kuşkulu olsa da o zamandan bu yana verilerle "desteklenen" şaibeli argümanlar karşısında duyulan hoşnutsuzluğu ifade eden bir söz olmuştur.

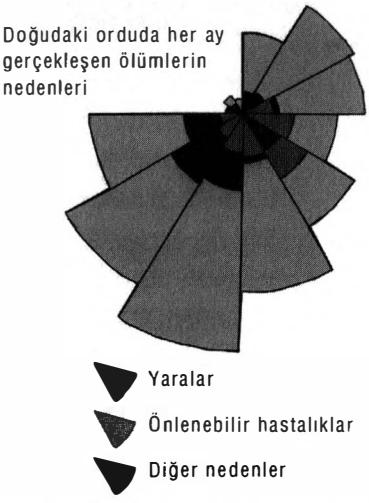
Peki ama bu haklı bir şöhret mi? Kesinlikle, ama buna rağmen modern toplum ve ekonomi istatistik olmadan işleyemez; istatistik hükümetlerin, ulusal ve uluslararası örgütlerin, orta ve büyük ölçekli

şirketlerin kararlarının ardında yatar. Bu yüzden de istatistikçiler epeyce aranan kişilerdir. Pratik uygulamalara çok fazla bağlıymış gibi görünen matematiksel uygulamalarda da soyut olmayan, rahatlatıcı bir şeyler var gibidir.

Pasta Grafikleri ve Lambalı Kadın

İstatiksel rakamlar ile bir argümanı ilerletme hedefi arasındaki ilişki, sunumun önemli bir rol oynadığı anlamına gelir. İstatistik bir grafikler ve şemalar yelpazesi yaratarak genellikle insanın gözünü yıldıracak miktarda sayısal veriyi, özümsenebilir, ikna edebilen görsel malzemeye çevirir. Bu ders çok erken devirlerde alınmıştır; 1850'lerde Kırım Savaşı'nda İngiliz ordusu için bir hastane yöneten Florence Nightingale de bu dersi alanlardan biriydi. Nightingale İngiliz askerlerin hangi zor koşullarda hizmet ettiğini göstermek için istatistikleri peş peşe dizmiş, hastalık yüzünden kaybedilen askerlerin sayısının savaş ve yaralanma yüzünden ölen asker sayısından çok daha fazla olduğunu ileri sürmüştü. Ölüm sebeplerini etkileyici bir biçimde göstermek için kendisinin "varasa kanadı" dediği bir tür pasta grafiği hazırlamıştı.

Nightingale'in her ay yaşanan ölümleri ortaya koyan grafiklerinde ölüm sebepleri üç ayrı renkle gösterilerek sınıflanmıştır: önlenebilir hastalıklar, savaş yaraları ve diğer sebepler; dilimlerin alanları da ölü sayısıyla doğru oranlıdır. Önlenebilir hastalık grubunun her ay en geniş grubu oluşturduğu açıkça görülmektedir. Bu grafikler ikna etmeyi, "söz geçirmez kulaklardan içeri sokamadıklarımızı gözlerle anlatma"yı amaçlıyordu. Bu örnekte istatistik



FLORENCE NIGHTINGALE'IN "YARASA KANADI" KIRIM SAVAŞI TABLOSU

gerçekten de makul bir okuma ortaya koymuş, görsel temsil de bu okumayı güçlü bir biçimde yakalamıştır. Nightingale'in çağdaşı Dr. John Snow da kolera vakalarını Londra haritası üzerinde göstermek suretiyle başka bir istatistiki temsil biçimi getirmişti. Belirgin hale gelen dağılım örüntüleri, Snow'un vardığı sonucu; hastalığın, yaygın olarak inanıldığı üzere "kötü hava"yla değil halka açık çeşmelerden akan kokuşmuş sularla yayıldığı görüşünü destekliyordu. Bu iki yaklaşım da istatistiği çok basit bir biçimde kullanmış olmakla birlikte meramlarını gayet iyi ortaya koymuşlardır.

> *"Kelimenin esas anlamıyla 'İstatistik' devlet işleri bilimi demektir: On sekizinci yüzyılın siyasi aritmetikçisi için istatistiğin işlevi merkezi hükümetin gözleri ve kulakları olmaktı."*
>
> R. A. FISHER, İSTATİKÇİ

Ortalamalarla İlgili Kanunlar

Kırım Savaşı'nın ve Londra'daki kolera vakalarının belgelenmesinde, verilerin bütününe dağılım ve sebepler üzerinden bakılmış, sonra da görülenler grafikler ve haritalarla gösterilmiştir. Ne var ki istatistikte genellikle sayfalar dolusu veri önemli tek bir ölçüte, örneğin "ortalama"ya indirgenir. Ama "ortalama" ne anlama gelir? Bir şirkette ortalama maaş 45.000 sterlinse bu herkesin bu meblağı kazandığı anlamına gelebileceği gibi çoğunluğun bundan daha az kazandığı, ama şirket yönetim kurulu başkanının 200.000 sterlinlik maaşının da hesaba dahil edildiği anlamına gelebilir. İkinci söylediğimiz daha muhtemeldir, ama bilinemez.

Çoğu kişinin "averaj" olarak düşündüğü şey, genellikle ortalamadır; verilerin toplanıp toplam veri sayısına bölünmesiyle elde edilen rakamdır. Burada sorun, tek başına çok yüksek bir değerin ya da alçak bir değerin teknik olarak doğru olsa bile, genellikle yanlış bir izlenim bırakan bir "averaj" ortaya çıkarmasıdır.

Averaj, medyan ise, yani verilerin sayısal değerlerine göre sıralanması sonrasında görülen "orta değer"se, averaj çok yüksek ve çok alçak değerlere duyarsız olabilir. Ne var ki averaj tipik değer (mode) ise, yani verilerde sıklıkla görülen değerse bu durumda şirkette çoğu kişinin aldığı maaşı bilebiliriz.

"Hertfordshire'ın bu kısmının havasında özellikle heyecanlandırıcı bir şey mi var bilemiyorum; ama devam eden nişanların sayısı, istatistiklerin rehberlik olsun diye verdikleri uygun ortalamanın hatırı sayılır miktarda üstündeymiş gibi görünüyor bana."

LADY BRACKNELL, OSCAR WILDE'IN
The Importance of Being Earnest adlı kitabında (1895)

Averajı üretirken istatistikçiler genellikle rakamların averajdan ne ölçüde saptığıyla da ilgilenirler. En basit haliyle (örneğimizi kullanırsak) ortalama değerden sapma, maaşlarda 45.000 sterlinden itibaren tek tek bütün sapmaların (40.000 sterlinlik bir maaş 5000 sterlinlik bir sapma demektir) toplanmasıyla elde edilir. Daha sonra elde edilen bu toplam rakam, okunan veri sayısına bölünerek sapma ortalaması bulunur. İstatistikçiler daha incelikli bir hesaplamayla, Yunancada σ (sigma) harfiyle gösterilen "standart sapma"yla özellikle ilgilidirler. Genellikle görünürdeki rakamların ardındaki farklı bir hakikati, örneğin bir grup insan zenginleşiyor olsa da aralarındaki eşitsizliğin artıyor olduğunu ortaya çıkarabilecek şey, sapma istatistiğidir.

Örneklem Çıkarma

Belli bir fenomen için, bütün verileri toplamak, örneğin nüfusun tamamından veri almak genellikle pratik olmayan, verimsiz bir

girişimdir: Bir hükümetin halkı hakkında bir şeyler öğrenmek istediği her seferinde bir nüfus sayımına gitmesi pek kolay bir iş değildir. Bu yüzden istatistik araştırmalarının hayati önemde bir yönü, güvenilebilir bir örneklem grubu tanımlayıp sonuçlardan çıkarımda bulunmakla ilgilidir.

Diyelim ki bir nüfusun ortalama boyunu bulmak istiyoruz. İstatistikçiler, herhangi bir eğilimden kaçınmak için rastgele bir örneklem grubu oluşturmaya dikkat edeceklerdir. Çocuk sayısının ortalamanın üstünde olduğu yerlerden örneklem çıkarmanın bir anlamı olmayacaktır. İstatistikçiler 1936'daki ABD başkanlık seçimlerinden çok ufuk açıcı bir ders almışlardı; tahminler başa baş bir yarış olacağını öngörüyordu; ama Franklin D. Roosevelt ezici çoğunlukla seçimi kazandı. Bu örnekte telefon rehberlerine, araba sahibi listelerine bakılarak bir örneklem oluşturulmuş ve kaçınılmaz olarak da nispeten varlıklı bir sosyo-ekonomik gruba meyleden bir örnekleme varılmıştı.

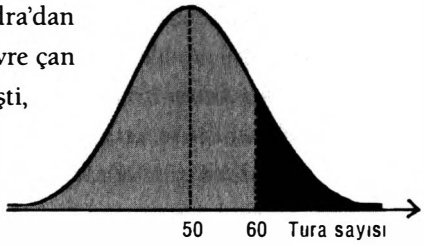
Nüfusun ortalama boyunu bulabilmek için istatistikçilerin nüfus ortalamasını (mean) alması gerekir; bu değer Yunan alfabesinde "mu" olarak okunan μ harfiyle gösterilir. Örneklem grubu iyi oluşturulmuşsa, örneklemdeki insanların ortalama boyunun, istatistikçilerin $\bar{x}$ (x bar olarak okunur) olarak gösterdikleri değer, büyük ihtimalle nüfus ortalamasına dair iyi bir tahmin olacaktır.

Titiz bir tahminde bulunmak, istatistikçinin cephaneliğindeki hayati aygıtın sahneye çıktığı yerdir: Merkezi limit teoremi tekrar tekrar örneklem alındığında örneklem ortalamaları $\bar{x}$ ın "normal dağılım" denilen şeye uygun olması gerektiğini söyler.

Çan Eğrisi

Grafik olarak temsil edilen "normal dağılım" şu meşhur çan şeklindeki eğridir. Doğru, matematik açısından ne kadar temel önemdeyse çan eğrisinin de istatistik için o kadar önemli olduğu

söylenmiştir. Ailesi 16. yüzyılda Londra'dan Fransa'ya göç eden Abraham De Moivre çan eğrisinin temel özelliklerini keşfetmişti, ama eğri "normal dağılım" tanımını başkalarının eline geçtikten sonra aldı. (Bazen Carl Friedrich Gauss'un 19. yüzyılda yaptığı çalışmalara dayanarak Gaussçu dağılım olarak da bilinir.)



ATILAN PARALARIN NORMAL DAĞILIMI

De Moivre geleneksel yazı-tura problemine benzer bir problemi çözmüştü. Bir bozuk parayı belli sayıda, örneğin n kere havaya fırlatırsak x sayıda tura gelmesi olasılığını hesaplayabiliriz. De Moivre paranın havaya çok kere fırlatıldığını düşünmüş, bu olasılıkları çıkarmak için kolay bir yol bulmuştu; çünkü olasılıklar normal dağılımı izliyorlardı.

"Bazı insanlar istatistiğin adından bile nefret eder, ama ben istatistiği güzelliklerle dolu ve ilginç buluyorum. İstatistik insanın Bilim'inin peşinde olanların yolunu kesen o kalın zorluklar duvarında bir delik açabilecek tek aygıttır."

FRANCIS GALTON,
Doğal Kalıtım (1889)

Bir parayı 100 kere havaya atarsak tura geldiği durumların ortalama dağılımı 50'dir. Bu pek şaşırtıcı değildir; çünkü tura gelme olasılığına eşittir. De Moivre, bize bu olasılığı çan eğrisinin altında kalan alanı hesaplayarak ölçebileceğimizi göstermiştir. Örneğin, 60 turadan fazla gelmesi olasılığı, çan eğrisinin altında 60'ın sağında

kalan alana denktir. (Aslında istatistikçiler bu gibi amaçlarla normal dağılım tablolarına başvurabilmektedirler.) 60 ya da daha fazla kere tura gelmesi olasılığının 0,0228 olduğunu buluruz; parayı tekrar tekrar, 100'er kere fırlatmaya devam edersek bu tekrarların yüzde 2'sinde 60 turadan fazla gelmesini bekleyebiliriz.

Örneklem uygulamasını normal dağılımla birleştiren şey merkezi limit teoremidir. Bu teorem, rastgele örneklemlerin ortalamalarının (mean), yani $\bar{x}$ larının ortalama μ'yu merkez alan normal bir dağılım gösterdiğini; büyük bir örneklemin μ'ya ilişkin tahminimizde, küçük bir örnekleme göre bize daha geçerli bir cevap vereceğini söyler. Teoreme göre nüfustaki boy varyasyonları bilinirse, örneklem ortalamalarının, $\bar{x}$ ların varyasyonu $\frac{1}{\sqrt{n}}$, kadar azaltılır; böylece rastgele örneklem ne kadar büyük olursa nüfus ortalaması μ'ya dair tahmin de o kadar iyi olacaktır. Bu istatistiğin bir bilim olarak kullanılmasıdır.

İstatistik Bilimi

Florence Nightingale'in hazırladığı grafik bir mesaj veriyor, bir meseleyi etkili bir biçimde vurguluyordu; ama istatistik kuramından yararlanılarak hazırlanmamıştı. İstatistik bilimiyse tersine, matematiksel kuramın örneklemlere dayanarak nüfus hakkında çıkarımlarda bulunmak için kullanılmasıdır.

Dahası istatistiğin doğası kurama dayanarak beklediğimiz şeyle bir deneyin sonucu olarak aslında elde ettiğimiz şey arasında niceliksel bir bağ kurmaktır. Dolayısıyla yazı-tura atma örneğinde, 100 kerede 50 tura gelmesini bekliyorduk, bu sayıdan sapmaları da ölçebiliriz. Önde gelen İngiliz matematikçi R. A. Fisher, Statistical Method for Research Workers (1925) adlı kitabında bu tür analizleri ele almaya yönelik bir yöntem betimlemişti; bu kullanışlı kılavuzda "anlamlılık testleri"ni tanımlıyordu.

Fisher'ın anlamlılık testine verdiği meşhur örnek, çay koyma sanatıyla ilgiliydi. Çayın fincana konmuş süte mi eklenmesi gerekir,

yoksa fincana önce çay konur da arkasından mı süt eklenir? Fisher'in bir hanım ahbabı aradaki farkı bilebileceğini iddia ediyordu. Şüpheci davranan Fisher ise hanımefendinin böyle bir becerisi olmadığı varsayımını kurdu. Sonra da onun bu iddiasını çay tatma deneyiyle test etti. Hanımefendi sekiz denemenin sekizinde de başarılı olursa Fisher, böyle bir sonuç salt şans eseri elde edilemeyeceği için sonucun istatistiki olarak anlamlı olacağını söyleyecekti. Sonra da varsayımının ihtimal dışı olduğunu söyleyecek, çay yapmanın kendisinin bilmediği başka yönleri olduğunu teslim edecekti.

Peki Fisher anlamlılık testlerini yazı-tura problemine nasıl uygulayacaktı? Bir hilenin düzenli olup olmadığına nasıl karar veririz? Para tartılabilir, ama kurcalamayalım diye böyle bir tetkike izin verilmiyor diyelim. Fisher deneyi kurmak için, "parada hile yoktur" varsayımını kuracaktı; o buna fizikçilerden alınan bir terimle "geçersiz varsayım"ı sınamak diyordu; fizikçiler hiçbir okuma vermeyen başarılı bir deneye "geçersiz" diyorlardı. Geçersiz varsayım genellikle H_0 şeklinde ifade ediliyordu. Dolayısıyla Fisher ya H_0'ı kabul edecekti ya da büyük bir güvenle bunu reddedecekti.

Diyelim ki uç bir sonuç elde ettik: Bozuk parayı 100 kere fırlattık, her seferinde de tura geldi. Paranın ağır çektiği ve hileli olduğu sonucuna varabilir miyiz? Böyle kesin bir sonuca varamayız, çünkü şans eseri de 100 kere tura gelmiş olabilir. Gelgelelim H_0'ın doğru olması halinde bu sonuç çok ihtimal dışı olur. Hilesiz bir parayla 100 kere tura gelmesi olasılığı, aslında 0,5'in kendisiyle 100 kere çarpımına eşittir; sonuç çok küçük bir rakamdır, yaklaşık 8×10^{-31}'dir (yani ondalık virgülünden sonra otuz tane 0 vardır). Bundan sonra makul bir biçimde ilerleyerek paranın hilesiz olma ihtimalinin de bu oranda küçük olduğu sonucuna varabiliriz.

Sonuçta 60 kere tura gelmesi halinde de aynı sonuca varabilir miyiz? Başka bir deyişle, deney sonucunun beklediğimiz oran olan 50'den ne kadar sapması şüphe doğurur? Paranın hilesiz olmasına dayanarak tura sayısının 60 ya da daha fazla olması yaklaşık yüzde 2'dir; Fisher'a paranın hilesiz olup olmadığını sorgulatacak kadar düşüktür.

Varsayımları test etmeye yönelik rakip bir yöntem 1930'larda Jerzy Neyman ve Egon Pearson tarafından geliştirilmişti; bu yöntem nihayetinde Fisher'le bu iki bilim adamı arasında tatsız bir uyuşmazlığa neden olmuştu. Fisher'ın kuramında yalnızca bir varsayım vardır; dikkatimizi bu varsayımın reddedilmesine yoğunlaştırırız. Neyman-Pearson kuramındaysa birbirine rakip iki varsayım vardır. İkilinin karar verme modeli alternatif bir hipotez olan H_1'in değerlendirilmesine varır. Neyman ve Pearson bizim bozuk para örneğimizde şu varsayımları ileri sürebilirler:

> *"İstatistik onurlu olması gereken bir bilimdir; birçok çok önemli bilimin temelidir... fakat onu taşıyacak bilge bir ele gerek vardır."*
>
> **THOMAS S. CARLYLE**
> *Eleştirel ve Çeşitli Denemeler* (1860)

H_0: para hilesizdir
H_1: para hilelidir

Ya da deneyin amacına bağlı olarak şu varsayımları geliştirebilirler:

H_0: para hilelidir
H_1: para turaya eğilimlidir

Bu yaklaşımda bir deney yapılmadan önce bir karar kuralı verilir. İhtimal dışı bir şey buluncaya dek beklemeyiz. Dahası bir hata yapma yolunda iki olasılık da kurama dahil edilir:

Para hilesizken (H_0 doğruyken) paranın hileli olduğu sonucuna varma (H_0'ı reddetme) olasılığı

Para hileliyken (H_0 yanlışken) paranın hilesiz olduğu sonucuna varma (H_0'ı kabul etme) olasılığı

Neyman-Pearson kuramı açıkça olasılığa hitap ettiğinden, bir hata yapma konusundaki bu iki olasılık arasındaki "denge"nin etkili bir biçimde kullanılmasından ötürü itibar kazandı.

Fisher'ın tilmizleri, Neyman-Pearson yaklaşımının takipçileriyle bu meseleleri tartışmayı sürdürüyor. Bir de 18. yüzyıl din adamı ve matematikçisi Thomas Bayes'in adını taşıyan, "Bayesçi" ikna biçiminin yandaşlarının savunduğu yöntemler vardır. Bayesçiler bir varsayımın doğru olduğu yönündeki ilk olasılığı korumayı; "paranın hileli olma olasılığı elde ettiğimiz değerlere dayanarak şu şu şudur" şeklindeki ifadelerden çıkarılacak sonuçları sınırlamayı benimserler. Tartışma sürmektedir.

İstatistikler, Kanıt ve Hakikat

İstatistikçilerin bulgularının güvenilirliğini güçlendirmek için benimsedikleri yöntemler ne olursa olsun, vardıkları sonuçlar hayatlarımıza nüfuz eder. Hükümetler politikalarını suç, göç, işsizlik ve daha başka birçok istatistiğe göre haklı çıkarırlar. Deneysel psikologlar algıyı, hafızayı ya da dikkat aralığını araştırırken istatistiği kullanırlar. Piyasa araştırmacıları bize sürekli içinde bulunduğumuz koşulları ve tercihlerimizi sorarlar, aldıkları cevaplar bize ürün satmayı isteyen ticari şirketlerin büyük meblağlar ödemesini gerektirir. Sosyologlar ve demograflar örneklem çıkararak geniş ölçekli deneyler gerçekleştirirler; termodinamik ve mekaniğin bazı dalları gibi "ağır bilimler" de istatistikle uğraşır. Astronomi alanında Gauss gözlemden kaynaklanan hataların en aza indirilmesi için "en küçük kareler" tekniğinin kullanılmasında öncü olmuştur. Gauss'un yaptığı çalışmalar gözlemlerden elde edilen verileri analiz etmesini, Güneş'in gölgesinde kalan küçük Ceres gezegeninin yerinin başarıyla yeniden tespit edilmesini mümkün kılmıştır; fakat "en küçük kareler" tekniği modern istatistik kuramı açısından küçük bir gezegenin bulunmasından çok daha büyük bir değer taşımaktadır.

Nihayetinde istatistik neyi kanıtlayabilir? Her zaman olduğu gibi, bu, sorulan soruya bağlıdır; istatiksel yöntemlerin güvenilir bir biçimde gösterdiği ve gösterebileceği çok şey vardır. Fakat istatistik nedenselliği kanıtlayamaz. Daha ziyade bir bağıntıyı

gösterir. Örneklerimize dönecek olursak uzun boylu insanların zengin semtlerde yaşadıkları anlaşılırsa, gelir ile boy arasında bir bağıntı gösterilmiş olabilir; ama birinin diğerinin sebebi olduğunu savunmak için bir sıçrama daha yapmak gerekir.

Gelgelelim bazı durumlarda, ileri istatiksel incelemeler bir argümanı daraltabilir, hatta sağlama bağlayabilir. Sigara kullanımına karşı seferberlik sırasında sigara kullanımı ile kanser arasında nedensel bir bağ kesin olarak hiç kurulamadı; dumanın ciğerlere girmesinin kanser başlangıcına yol açan fizyolojik bir neden olduğu kanıtlanmadı. Fakat sigara içen grupları içmeyen kontrol gruplarıyla karşılaştırarak istatistiksel olarak anlamlı bir bağıntı kuruldu. Her yıl akciğer kanserinden ölenlerin, muhafazakar bir tahminle, yüzde 80'inin sigara içtiği gösterildi; bu da yeterli kanıt olarak iş gördü.

1936'da ABD'deki başkanlık seçimlerinde olduğu gibi bazı istatiksel çabalar fena halde geri tepebilirse de istatistikçiler dikkat çekici derecede doğru cevaplar da alabilirler. Bugün, sandıkların kapanması sonrasında seçmen örneklem gruplarından alınan cevaplarla yapılan seçim yoklamaları genellikle son derece doğru sonuçlar vermektedir. 2010'da Britanya'da yapılan genel seçimlerde, seçim sonrası yoklamaları kaba tahminler oldukları varsayılarak başta siyaset bilimcilerin alaylarıyla karşılaşmış; fakat sonra seçim sonuçlarının istatistikleri haklı çıkardığı görülmüştü.

Kuru istatistik, hiçbir şeyi önüne geçilemez bir kesinlikle kanıtlamaz; istatistikler yanlış ellerde kötüye kullanılabilir. Fakat insan ilişkilerinde kesinlik pek kolay elde edilmez; pratikte ancak, doğru olma olasılıklarını dikkate alarak bazı sonuçlar çıkarabiliriz. İyi tasarlanmış istatistiksel araştırmalarla hayatın belirsizliğini sınırlamayı umabiliriz. Bu anlamda istatistiksel yöntem ahmakça olmaktan uzaktır, yalan değildir. Birçok durumda elimizdeki tek şeydir.

MATEMATİK ZENGİNLİĞİN GARANTİSİ MİDİR?

Belirsizlik, şans ve olasılık teorisi

İnsanlar her zaman ihtimalleri daraltmayı istemişlerdir. En geniş ve temel anlamıyla bu, çevremizin efendisi olma; riskleri, hasadın kötü olmasını, doğal felaketleri, kazaları ve gündelik hayatın talihsizliklerini en aza indirme yönündeki ebedi çabadır. Fakat bu çabanın, insanın oyunculuğunu, rekabetçi ruhunu, para söz konusu olduğunda zenginlik beklentisini yansıtan daha hafif bir yanı da vardır. Modern olasılık kuramı, matematikçilerin ihtimalleri daraltma çabası, 17. yüzyıl kumarbazlarının oynadığı şans oyunlarıyla nispeten geç bir tarihte başlamıştır. Fakat zar ve oyun kağıtları, bugün riski değerlendirme ve belirsizliğe ayak uydurma biçimimizin kalbinde yatan modern bir kuramın mahmuzu olmuştur.

Kumar bizi zenginleştirebilir. Her hafta ulusal ve uluslararası piyango sonuçları açıklandığında bunu görüyoruz, milyonerlerin sayısı artıyor. Yüksek finans dünyasında incelikli bahisler servetler yaratır; arada sırada şans oyunları oynayan birinin at yarışında ya da Las Vegas'ta geçirdiği kayıtsız bir haftasonunda şansı yaver gidebilir. Ama bir kazanana bir kaybeden gerekir. Yarış öncesinde kazanacağına kesin gözüyle bakılan ama sonuncu gelen atlar ne alemde peki? Borsada çökenlere ne demeli? Kumarhaneden akşamın erken saatlerinde "gömleğini de kaybederek" dönen kumarbaz nerede peki?

> *"Bütün bilgi çözülüp olasılık haline gelir."*
>
> **DAVID HUME**
> ***İnsan Doğası Üzerine Bir Deneme***

Kumarın çeşitli biçimleri farklı güçlükler çıkarır. Piyangoda şansa ihtiyacınız vardır; çünkü geçmiş geleceğin rehberi olamaz pek. Fakat bu durum şirketlerin kayıtlarını izleyip duran borsa simsarı için geçerli değildir. Sporlara para yatıran akıllı bir kumarbazın bu oyunların nasıl oynandığını, katılımcıların formda olup olmadıklarını, bahislerin nasıl yığıldığını bilmesi gerekir. Las Vegas'ta tatilini geçiren birinin de kazandığı bir damar yakalamışken oyundan çıkacak akıllılığı göstermeyi hatırlaması gerekir.

Bilgi ve sezginin büyük yardımı olabilir; ama nihayetinde makul bahisler ileri sürmenin, şansımızdan en iyi biçimde yararlanmanın, bahisler büyükse olası bir felaketten kaçınmanın bir yolu var mıdır? Bu soruyu cevaplarken atılacak ilk adım tuhaflıkların nasıl hesaplanacağına dair uygun bir anlayış kazanmaktır. Bu da matematik, özellikle de "olasılık" matematiği anlamına gelir.

Kartlar ve Zarlarla Oynamak

Basit kumar problemlerinin örneği yazı-turadır. Havaya bir bozuk para atarsak ya tura (T) ya yazı (Y) gelecektir. Doğru, para kenarı üzerinde *durabilir*; ama bu uzak bir olasılıktır, o atışı saymaz, parayı yeniden atarız. Paranın tura gelme şansının ikide bir olduğunu ya da teknik olarak eksiksiz bir tabirle "tura gelme olasılığının $\frac{1}{2}$ olduğunu" makul bir biçimde ileri sürebiliriz. Benzer şekilde yazı gelmesi olasılığı da $\frac{1}{2}$'dir; bu eşitlik yazı-turayı, spor müsabakalarının başında ekiplerin kurulması ya da oyuncuların belirlenmesi konusunda karar vermenin adil bir yolu haline getirmiştir.

Olasılık hesaplarının ilginç bir yönü sezgi ve beklentilere ters düşebilmeleridir. Bozuk para örneğimizden ayrılmadan bunu

açıklayabiliriz. Paramızı havaya kaç kere atarsak sonuçta iki kez tura gelmesi daha muhtemeldir; üç kez mi atarsak dört kez mi? Sezgisel olarak ikinci tercihten yana meylederiz, çünkü kesinlikle bize daha fazla şans verecektir. Paramızı üç kez atarsak $2 \times 2 \times 2 = 8$ olası sonuç vardır. Üç sonuç TTY, TYT, YTT sonuçlarında iki tura elde ederiz, bu yüzden iki tura elde etme olasılığımız $\frac{3}{8}$'dir.

Şimdi parayı dört kez atalım. Bu durumda $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ olası sonuç olacak; altı sonuç TTYY, TYTY, TYYT, YTTY, YTYT, YYTT istediğimiz gibi iki tura veren sonuçlar olacaktır. Bu durumda olasılık $\frac{6}{16}$'dır ve $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$'dir, tıpkı daha önce olduğu gibi! Paramızı havaya attığımızda daha fazla sonuç elde ederiz, ama olasılık, başarılı sonuçların toplam sonuç sayısına *oranıdır*; bu da neden aynı cevaba vardığımızı açıklar.

17. yüzyılda yaşamış amatör matematikçi Antoine Gombaud kendisini bir zar problemine adamıştı; bir zarın dört kere atılması halinde *şeşe* (altıya) oynamanın mı yoksa *iki* zarın 24 kere atılması halinde *düşeşe* oynamanın mı daha iyi bir bahis olduğunu merak ediyordu. O sıralarda genel kabul gören görüşe göre, ikinci bahis, düşeş gelmesi, zar çok kereler atıldığından daha muhtemel görünüyordu. Matematik bu soruyu çözebilir miydi?

Tek bir atışta altı gelmemesi olasılığı $\frac{5}{6}$'dır; dolayısıyla dört atışta altı gelmemesi olasılığı şu olur:

$$\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

Mantıklı olasılıklar ya hiç altı atamayacağımız ya da en az bir kez altı atacağımız yönündedir: Bu sonuçlardan birinin gerçekleşeceği kesindir. Olması kesin bir şeyin olasılığı 1'dir; dolayısıyla altı atamamamız olasılığı ile en azından bir kere altı atmamız olasılığının *toplamının* 1'e eşit olduğunu söyleriz. Bu da en azından bir kere altı atma olasılığının 1 eksi altı atmama olasılığı olduğu anlamına gelir:

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}5177 \text{ (ya da yaklaşık olarak yüzde \% 51)}$$

İki zarı birlikte atarsak her atışta 36 olası sonuç olacaktır. Çünkü birinci zardaki bir sonucu, ikinci zardaki herhangi bir sonuçla birleştirebiliriz (altı sonuç eder), birinci zarda ikinci bir sonucu ikinci zarda yine herhangi bir sonuçla birleştirebiliriz (yine altı sonuç eder); böylece devam ettiğimizde toplamda 36 sonuç olur. Bu kombinasyonlardan 35'i düşeş değildir; dolayısıyla düşeş atamama olasılığımız $\frac{35}{36}$'dır. Bu da 24 atışta düşeş atamama olasılığının $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$ olduğu anlamına gelir.

Tek zar için yaptığımız hesaplamayı buraya uygulayacak olursak en azından bir kez düşeş atma olasılığımız şu olur:

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^{24} = 0{,}4914 \text{ (ya da yaklaşık olarak \% 49)}$$

Başka bir deyişle 24 atışta bir kez düşeş atma olasılığımız biraz daha düşüktür; % 51'e karşılık % 49'dur.

Piyango Humması

Bir bozuk para ya da bir çift zarla yapılabilecek olası permütasyonların sayısı, modern ulusal ve uluslararası piyango çekilişlerindeki sayılarla kurulabilecek permütasyon sayısının yanında sönük kalır. Bazı insanlar alaycı bir tavırla bu tür bir piyangoda kazanma şansımızın kafamıza bir göktaşının vurması kadar olası olduğu gözleminde bulunmuşlardır; yine de genellikle kazanan bir şanslı, bir anda milyoner oluveren biri vardır ve bu da kazanma *olasılığının* somutlaşmasını sağlar. Peki ama bunun ihtimali nedir?

Britanya Ulusal Piyangosu iyi bir örnektir, burada oyuncular 1'den 49'a kadar sayılardan altısını seçerler; eğer bu sayılar makinenin rastgele seçtiği sayılara uyarsa şanslı bilet sahibi bahsi kazanır. Olasılık kuramıyla sayıların piyangoda çıkma olasılığını

> *"Anladım ki oynasanız da oynamasanız da piyangonun size vurması ihtimali aynı."*
>
> **FRAN LEBOWITZ**

hesaplayabiliriz. İlk sayı için 49 olasılık vardır. İkinci sayı aynısı olamayacağından, ikinci sayı için olasılıklar 48'dir. Böylece ilk iki sayının olasılıkları toplam 49x48'dir. Bunu altı sayı için de sürdürdüğümüzde olasılık sayısı şu olur:

$$49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44$$

Bu hesaplama, sayıların seçilme biçiminde bir sıralamayı dikkate alır, ama piyangoda sıralama önemli değildir. Altı sayı olduğunu dikkate alırsak bunları düzenlemenin $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ yolu vardır; bunların hepsini bir araya getirirsek şu sonuç ortaya çıkar:

$$\frac{49 \times 48 \times 47 \times 46 \times 45 \times 44}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 13.983.816$$

Bu sayı, altı sayının kombinasyonlarının toplamıdır; bunlardan sadece bir tanesi kazanabilir. Bu da kazanma şansının çok küçük olduğu anlamına gelir: $\frac{1}{13,983,816}$ 'ya ya da yaklaşık olarak % 0.00000715'e eşittir!

Kazanmayı garantileyebilmemizin bir yolu vardır. Bütün olası sayı kombinasyonlarını kapsayacak kadar fazla bilet alabiliriz. Bilet fiyatının 1 sterlin olduğu düşünülürse bu 13.983.816 sterline mal olacaktır. Ama burada bile bir risk vardır; çünkü herhangi bir sayı kombinasyonunun tek sahibi değilizdir; kazandıklarımızı kazanan sıralamayı elinde bulunduran bir başka kişiyle paylaşmak zorunda kalabiliriz. Bahis dünyasında "kesin bir şey" yoktur.

Monty Hall Bulmacası

Piyango kazanma şansı şaşırtıcı derecede küçük olsa da olasılık hesaplamaları mantıklı görünüyor. Fakat bazı olasılık bilmeceleri mantığa aykırıdır. Matematikçiler kadar matematik dışından insanlar için de şaşırtıcı olan bilmecelerden birinin esin kaynağı 1960'larda ABD'de yarışmacıların bazı kutular seçerek ödül kazanabildiği *Let's Make a Deal* adlı programıyla televizyon ekranlarını vuran Monty Hall'du.

Yarışma şöyleydi. Kapalı kutuların her birinde (A, B ve C) bir parça kağıt vardı. Kutulardan ikisinde kağıt parçası boştu; üçüncüsündeki kağıt oyuncuya bedava tatil kazandırıyordu. Yarışmacının şansını deneyip kazanan kutuyu bulması gerekiyordu.

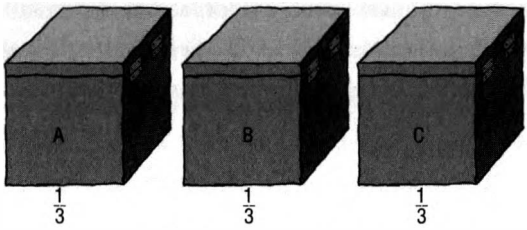
> *"Neyin doğru olduğunu belirlemek bizim kudretimiz dahilinde değilse neyin en olası olduğuna göre hareket etmemiz gerekir."*
>
> **RENE DESCARTES,**
> *Discourse on Method*

Bir kutu seçeriz; ama kutuların içinde ne olduğunu bilen Monty hemen açmamıza izin vermez. Onun yerine şanslı kutuyu açmamaya dikkat ederek *başka bir* kutuyu açar ve bizim nihai bir karara varmamıza izin vermez. Yakıcı soru şudur: İlk tercihimize sadık mı kalmalıyız, yoksa açılmamış kutuyu mu tercih etmeliyiz?

Verilebilecek bir tavsiye "değiştirmeyin" olacaktır. Çünkü Monty içinde boş kağıt olan kutulardan birini açmıştır; geri kalan kutulardan birinde tatil ödülünün bulunduğunu artık biliyoruzdur. Kesinlikle yarı yarıya şansımız varken tercih değiştirmenin ne anlamı olacaktır ki? Bir bakıma bu sağlam bir akıl yürütmedir: Tatil ödülünün hangi kutuda olduğunu bilemeyiz, bu yüzden de kararımızı ancak hangisinin daha muhtemel olduğuna dair anlayışımıza dayandırabiliriz.

Buradaki paradoks tercihi *değiştirmemenin*, kazanma ihtimalini azaltmasıdır. Mantık şöyledir: Üç kutu da kapalıyken tatil ödülünün bulunduğu kutuyu seçme olasılığı $\frac{3}{8}$'tür; çünkü bir kutuyu diğerine tercih etmemizi sağlayacak bir gerekçemiz yoktur.

Diyelim ki tatil ödülü C kutusunda (Monty bunu biliyor elbette), ama biz A kutusunu seçerek başlıyoruz. Monty'nin bize artık B kutusunu göstermesi gerekecek, çünkü ödüllü C kutusunu gösteremez. Artık A kutusuna sadık kalmakla C kutusuna yönelmek arasında bir tercih yapmamız gerekecek. C kutusuna yönelirsek kazanan şanslı biz olacağız. Başta B kutusunu tercih etmiş olmamız halinde de aynı argüman geçerli olacaktır. Bu durumda Monty bize A kutusunu gösterecektir ve bizim de başta olduğu gibi B kutusunda diretmek ile C kutusuna yönelmek arasında bir tercih yapmamız gerekecektir; C kutusuna yönelirsek de kazanan şanslı olacağız. Kutu değiştirmemiz halinde kazanma olasılığımız $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ olarak ifade edilebilir.



MONTY HALL BULMACASI

Oysa tersine C kutusunu seçerek başlarsak Monty'nin bize A kutusu ya da B kutusunu göstermesi gerekecektir. Bu durumda, ilk seçtiğimiz kutuyu değiştirirsek kaybederiz, kazanma olasılığımız yine $\frac{1}{3}$'tür. Dolayısıyla olası senaryoları değerlendirip başta $\frac{1}{3}$ olan tatil ödülü kazanma olasılığımızı kutumuzu değiştirerek $\frac{2}{3}$'e çıkarırız. Burada Monty'nin bize bilgi vermiş olması söz konusudur; kutuların sayısı ikiye indirildiğinde tam bir habersizlikle oynamayız.

Poker Oyuncuları ve Kart Sayanlar

Bugünün sıradan kumarbazının bir TV programı yarışmacısı olması ya da bir kumarhanenin, bahis merkezinin yolunu tutması gerekmiyor. 21. yüzyıl online pokerin sanal dünyasının kapılarını açtı. Ciddi kumarbazların geleneksel oyunu pokerin tuhaf isimleri olan birçok versiyonu var; ama Vahşi Batı'da oynanan asıl pokerde beş kart çekilir. Bu oyunda oyuncuların her birine beş kart dağıtılır ve ellerindeki kartlardan çıkarıp yeni kartlar çekmelerine izin verilir.

Oyuncular ellerini niteliğin belirlediği bir hiyerarşiye göre değerlendirirler. En üstte royal floş vardır; aynı rengin ası, papazı, kızı, valesi ve onlusu. Onun ardından floş gelir; aynı renkten sıralı beş kart. Sonra da kare gelir; aynı kartın farklı renkleri. Oyuncu, eli diğer oyuncuların ellerinden kaliteliyse kazanır. Hiyerarşinin en alt basamağında oyuncu kazanmak için elinde sadece en yüksek kartın bulunuyor olmasına dayanmak zorundadır.

Uyanık bir poker oyuncusu ya da bu tür bir zorluğu göğüslemeyi düşünen biri, çeşitli kart kombinasyonlarının matematiksel olasılıklarını değerlendirmekle akıllılık edecektir. 52 kartlık bir desteden beş kartlık bir el,olası kombinasyon sayısının şu olacağı anlamına gelir:

$$\frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 2.598.960$$

Bir destede sadece dört tane royal floş vardır. Dolayısıyla bir royal floş çıkarma olasılığı 4 / 2.598.960 = 1 / 649.740'tır (% 0,00015'tir), gerçekten de çok küçüktür. Kumarbazlar belli bir eli alma şansını "üstünlük" olarak ifade etmeyi severler; bu durumda 649.739:1 üstünlük olacaktır. Başka bir biçimde söylersek royal floş olmayan el sayısı 649.739'dur; insanın aklını başına getiren bir düşünce. Yelpazenin öbür ucunda, hiyerarşiye *hiç uymayan* beş kart çekme olasılığıysa % 50'dir.

İyi bir kombinasyon olasılığının düşük olması rakip oyuncuların elleri için de geçerlidir; sizin gibi onların da elinde hiçbir şey bulunmama olasılığı yüksektir. Başarılı bir poker oyuncusu olmak için başka niteliklere de gerek vardır, çünkü oyunda blöf yapmak da vardır; nihayetinde agresif bahisler ileri sürmek, rakiplerin psikolojik özellikleri kartların üzerindeki sayılardan çok daha fazla işe yarayabilir.

Fakat matematik incelikli biçimlerde bu oyuna dahil olur. Profesyonel kumarbazlar destede kalan kartları tahmin etmek için "kart sayma" teknikleri kullanırlar; böylece bahsi ne zaman yükselteceklerine, kazanma şanslarını ne zaman artıracaklarına karar verirler. Aslına bakarsanız şanslarını artırmak için olasılık kuramını kullanırlar; bazıları bunda o kadar başarılı olmuştur ki kumarhanelere girmeleri yasaklanmıştır.

Kuramın Gelişi

Öncüler işleyen bir olasılık kuramı kullanmış olsalar da olasılık kuramının temelleri tatmin edici bir biçimde ancak 1930'larda atıldı.

Burada karşımıza çıkan önemli kişilik Rus matematikçi Andrei Kolmogorov'dur. Tıpkı Antik Yunanlılarının geometrinin temel aksiyomlarını ve postülalarını ortaya koyması gibi, Kolmogorov da olasılık kuramı için sağlam temeller attı. Kolmogorov'un çalışmasıyla birlikte kuram soyut bir hal aldı ve şans oyunlarında yatan tarihinden uzaklaştı. Bu Rus matematikçinin katkısıyla olasılık kuramı, başka matematikçilerin de katkıda bulunabileceği bileşik bir kuram haline geldi; birbirinden ayrı bir fikirler seçkisi olmaktan çıktı.

Şans oyunlarıyla olasılıklar yakalanabilir. Fakat genel olarak belirtilmiş *olaylara* olasılık atfetmek önemli güçlükler doğurur. "Gelecek hafta yağmur yağması olasılığı nedir?" sorusunu nasıl cevaplarız? İki sonuç vardır: Ya yağmur yağacaktır ya da yağmayacaktır; ama yazı-turada olduğunun tersine bunlar

aynı derecede olası değillerdir. Matematikçilerin benimsediği yaklaşımlardan biri "inanç derecesi" olarak öznel bir olasılık belirlemek; bunu kanıtlara dayanarak yeniden düzenlemektir.

Bu tür güçlükler bir yana olasılık kuramı daha geniş bir uygulama alanı bulmuştur. Bilim insanlarına göre "kinetik gaz kuramı" moleküllerin hareketini olasılık bakımından ele alır. Gündelik hayatta olasılık, modern risk değerlendirme çabalarımızda temel bir aygıttır; şirketler sigorta planlarını dayandıracakları olasılıkları işlemek için sigorta uzmanları tutarlar. Ciddi davalarda jürilerin DNA uygunluğu olasılığını nasıl yorumlayacaklarını bilmeleri gerekir; suçluluk ya da masumiyet kararlarını sıklıkla "olasılık dengesine" dayanarak alırlar.

Ebedi İyimserlik

Belirsizlik söz konusu olduğunda, şansımızı ölçmek için olasılık kuramına ihtiyacımız vardır. Olasılığı kesin bir rakamla belirtmek her zaman mümkün olmayabilir; fakat olasılıkların nasıl birleşecekleri bilgisi, edinmeye değer bir bilgidir. Bu anlamda şans oyunları matematikçileri sağlam bir kuram geliştirmeye itmiştir. Elbette ki bu kuramın gücünü ve sınırlılıklarını da anlamamız gerekiyor. Olasılık kuramını çok bilmemiz piyangoda kazanmamızı ya da voliyi vurmamızı sağlamaz; ama ihtimalleri biliriz ve bu da tıpkı Monty Hall kutuyu açtığında yarışmacıların bilgilenmesinde olduğu gibi (bunun farkında olsalar da olmasalar da) bizim de bilgilenmemizi sağlar.

Biraz önce de gördüğümüz gibi matematiksel olasılıkların sezgilere ters düşmesi bir güçlüktür; gündelik hayatımızda çoğumuz karar vermemiz gerektiğinde önsezilerimize güveniriz. Kağıt oyuncusunun ve piyango çekilişçisinin aklında iyimser bir olasılık hissi varlığını sürdürür. Matematiğin zenginlik *garanti edemeyeceğini* biliyoruz. Yine de talihimiz yaver gidebilir!

HER ŞEYİN BİR FORMÜLÜ VAR MI?

Matematiksel reçeteler ve bilgi arayışı

Herkes kestirmeden gitmeyi sever. Basitçe baktığımızda matematiksel formüller tam da bu işe yarar; önceki kuşakların düşünüp ortaya çıkardığı bu kesin reçeteler sayesinde, x, y veya z "değişkenleri"nin kesin değerlerini yerine koymaktan başka bir şey yapmamız gerekmez. Fakat mesele bununla kalmaz. Bir formül bulma arzusu bilimlerin ve matematiğin itici gücü olmuştur. Bilim insanı için bir formül teoriye itibar kazandırır, bilgiyi dünyaya taşır. Matematikçi içinse formül bir soruyu yanıtlar ve matematiksel bir hakikati tesis eder.

Genel olarak bakıldığında "formül" kelimesi belli bir düzen, hazır bir kombinasyon, az çok tahmin edilebilir bir yol anlamına gelir. "Formüller" ve "denklemler" terimleri genellikle birbirinin yerine geçirilerek kullanılır; ama kesinlikle aynı şey değillerdir. Bir denklemde, denklemin sol tarafını sağ tarafına eşitleyecek şekilde bir değişkenin değerini bulmamız istenir. Formülse bir değişkenin, bir ya da birkaç değişkenle ifade edilmesidir.

Formüller her şekilde, her boyuttadırlar. Bazıları güçleriyle çarpıcıdır; bazıları hayret verici, hatta bir araya getirdiği sembollerle güzeldir; bazılarıysa sadece yararlıdır. Dünyanın en bilinen formülü, Einstein'ın $E=mc^2$'si enerji ile kütlenin ilişkisini özlü bir biçimde ifade ettiğinden insanda huşu uyandırır. Einstein'ın formülü bu

"Formüllerin yararlı olmaları gerekir. Değillerse şaşırtıcı, zarif, aydınlatıcı, basit olmalıdırlar ya da başka bir saygın özellikleri olmalıdır."

UNDERWOOD DUDLEY,
Mathematics Magazine (1983)

sahnenin ışıltılı yıldızıdır, ama hayati önemde işler yapan başka formüller de vardır.

Sahne Arkası Ekibi

Gündelik kullanımda gerçekten yararlı olan formüller hiç düşünmeden kullandığımız, otomatik bir biçimde hesaplamalarımızı yapmamızı sağlayan dolap beygirleridir. Belimizde böyle bir formülle "söküp takabiliriz"; bir değişkenin değerini veririz, biraz işleriz, sonra ihtiyacımız olan değişkenin değerini elde ederiz.

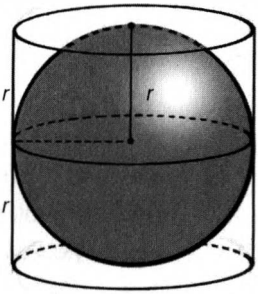
En yaygın kullanılan ısı ölçü birimleri Fahrenheit (F) ile Celcius ya da santigratı (C) hemen örnek gösterebiliriz. Bu birimler 18. yüzyılda onları bulan Daniel Fahrenheit ile Anders Celcius'un isimlerini taşır; bilimsel çalışmalarda Fahrenheit geride kaldıysa da hava tahminlerinde hâlâ yaygın olarak kullanılmaktadır, bu yüzden de iki ölçü birimini birbirine çevirmeye yarayan bir formül yararlı bir aygıttır.

Fahrenheit ölçeğinde su 32 derecede donar ve 212 derecede kaynar, bu iki nokta arasında 180 ısı derecesi bulunmaktadır. Santigrat ölçeğinde ise su 0 derecede donar, 100 derecede kaynar, yani bu ölçekte bu iki noktayı ayıran 100 ısı derecesi vardır. Dolayısıyla Santigrat ölçeğinde her derece Fahrenheit ölçeğinde $\frac{180}{100} = \frac{9}{5}$ dereceye tekabül eder; Fahrenheit ölçeğinde ısıyı bulmak istiyorsak Santigrat derecesini $\frac{9}{5}$'le çarpmamız gerekir. Fahrenheit ölçeğindeki donma noktası F = 32, C=0'a denk geldiğinden, F 32 ile başlar ve bu yüzden de formül şöyledir:

$$F = \left(\frac{9}{5} \times C\right) + 32$$

Bazı formülleri kurmak daha zordur. Bir kürenin hacminin yarıçapına bağlı olduğunu biliriz; yarıçapı büyütürsek kürenin hacmi de büyür. Peki ama bu bağlılığın kesin niteliği nedir? Tabanında bir daire bulunan bir silindirin hacmini bulmak daha kolaydır. Tabandaki dairenin alanını (yarıçapın karesini π'yle çarparak buluruz bu alanı; yani πr^2'dir) silindirin yüksekliğiyle çarparak silindirin hacmini buluruz. Fakat aynı şey kürenin hacmi açısından geçerli değildir.

Kürenin hacminin formülü Arşimet tarafından, tam bir ilham anında keşfedilmiştir. Arşimet, kürenin hacminin onu çevreleyen silindirin hacminin üçte ikisine eşit olduğunu belirtmişti. Silindirin yüksekliği çapa, yani 2r'ye eşittir; kürenin hacmi de bu durumda $\frac{2}{3} \times \pi r^2 \times 2r$ olacaktır; böylece kürenin hacminin formülü de $\frac{4}{3} \pi r^3$ olur.



KÜRENİN HACMİ: $\frac{4}{3} \pi r^3$

Bu parlak küçük formül, artık İntegral Kalkülüste hemen yapılan bir işlemdir (Bakınız *Evrenin Matematiği Nasıldır?*).

Uzunluk, alan ve hacim formüllerini bulmak gibi temel sorular, genellikle matematiksel ilerlemenin kaynağı olmuştur. Antik Yunanlılar daire ve elips gibi eğriler konusunda uzmanlardı; 17. yüzyılda da Rene Descartes'ın cebiri bize bu eğrilerin formüllerini vermişti. Bir dairenin alanı ve çevresinin, bir elipsin alanının formüllerini bilsek de bir elipsin çevresinin formülünü bulmak kolay değildir; elipsin çevresinin özelliklerini anlama girişimi eliptik integraller ve eliptik fonksiyonlarla ilgili büyük alanların doğmasına yol açmıştır.

Bilgisayarların gündelik hayatın her yerinde karşımıza çıkması, matematiğin nesnelerin olası kombinasyonlarını hesaplayan dalı "kombinatoriks" bağlamında çok sayıda formüle ihtiyaç doğurmuştur. Üç nesne, diyelim ki a, b ve c nesneleri,

$3 \times 2 \times 1 = 6$ kombinasyon yaratacaktır (abc, acb, bac, bca, cab, cba); bunun için formüle pek gerek yoktur. Ama 10 nesneyle çalışıyor olsak olası kombinasyonların sayısı 3.628.800'e çıkacaktır; 100 nesne söz konusu olduğundaysa kombinasyon sayısı $9,33 \times 10^{157}$ ile dudak uçuklatacaktır. Burada açıktır ki bir formül bizi büyük bir zahmetten kurtaracaktır. İskoç matematikçi James Stirling'in adını taşıyan "Stirling formülü" işte tam bu noktada yardımımız koşar:

$$\sqrt{2\pi n} \times n^n \times e^{-n}$$

Burada n nesne sayısını ifade eder. Bu formülün π sabiti ile Euler'in *e* sabitini (değeri yaklaşık 2,718...'dir) de içermesi şaşırtıcıdır. Genellikle daireyle ilişkilendirilen π'nin ve büyümeyle ilişkilendirilen *e*'nin varlıkları, matematiğin üzerimize boca ettiği hayret verici bağlantıları bize hatırlatır;özellikle de en başta problemimiz sadece tam sayıların çarpımıyla ilgili olduğundan böyle hissederiz. Fakat bu formül gerçek değere yaklaşıklığı ile dikkat çekicidir; 100 nesne söz konusu olduğunda sadece % 0,083'lük bir sapma göstermektedir.

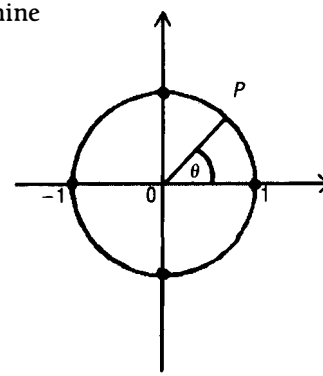
Bir Sahne Güzeli

π'nin ve *e*'nin tersine "hayali" *i* hesap makinesine yazılıp hesaplanamaz; çünkü gerçek bir sayı değildir (Bakınız *Hayali Sayılar Gerçekten Hayali Midir?*). Bu üç sembol sık sık matematik sahnesini süsler; fakat kökenleri dikkate alındığında birbirleriyle bağlantısız görünmektedirler. Bunlara 0 ve 1'i de eklersek bütün meşhur matematiksel sabitler karşımıza çıkar: 0, 1, *e*, π, *i*. Matematiğin bu sabitlerin hepsinden yararlanılan en "güzel" formülü kesinlikle şudur:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Bu formül günışığına ilk kez 18. yüzyılda çıkmış ve Leonhard Euler ile ilişkilendirilmiştir. Peki ama nasıl ortaya çıkmıştır? Bunu

görebilmek için "kökleri" bulabilme problemine geri dönmemiz gerekiyor. 1 sayısının iki tane kare kökü vardır; 1 ve –1; bunları bir dairenin çapının karşıt uçlarında kavramlaştıralım. Bu "güzel" daire, bu güzel formülün anahtarını elinde tutar.



$e^{i\pi} + 1 = 0$ FORMÜLÜNÜN GEOMETRİSİ

Mesele, iki boyutlu düzlemde noktalarla temsil edilebilen karmaşık sayılara uzanmaktadır (Bakınız *Hayali Sayılar Gerçekten Hayali Midir?*). Yarıçapı 1 olan bir daire, merkezdeki O'dan belli bir birim uzakta konumlanmış bütün P karmaşık sayılarından oluşuyormuş gibi düşünülebilir. OP doğrusunun yatay eksenle θ açısını oluşturması halinde $e^{i\theta}$ 'nın bu karmaşık sayıları ifade etmenin uygun bir yolu olduğu keşfedilmiştir.

1'in kare kökü -1 daire üzerinde θ açısının 180 dereceye (bu da dairesel ölçümde 'π radyan'a eşittir) eşit olduğu bölümde konumlandığından $-1 = e^{i\pi}$ anlamına gelir. Nihayetinde $-1 + 1 = 0$ olduğundan, karşımıza o güzel $e^{i\pi} + 1 = 0$ formülü çıkar.

$$e^{\frac{2\pi i}{3}} + e^{\frac{4\pi i}{3}} + 1 = 0$$

Artık bir dizi dikkat çekici formül mümkündür. Şimdiye kadar 1'in kare köklerini değerlendirdik, ama küp köklerini değerlendirdiğimizde 1'in üç kökünün daire üzerinde 0 derece, 120 derece ve 240 derecedeki açılarda bulunduğunu görürüz (sırasıyla $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ radyanları) ve karşımıza şu formül çıkar:

1'in dördüncü dereceden, beşinci dereceden vs. köklerini alarak benzer formüller üretilebilir. Bu da "en güzel" formülümüzün uzun bir zincirin ilk halkası olduğu anlamına gelir.

Renkli Bir Aktör

Geometride de güzel formüller vardır, ama bunlar her zaman istenen cevabı almakta kullanılamaz. Matematiğin meşhur problemlerinden biri 1850'lerde su yüzüne çıkmıştır: Siyasi bir haritayı bitişik ülkelerin hep farklı renklerde olmasını sağlayacak şekilde dört renkle renklendirmek mümkün müdür? Birbirine bitişik dört şekille yapılacak bir deney bunu üç renkle gerçekleştirmenin imkansız olduğunu gösterir. Bakılan bütün haritalarda dört renk yeterli görünmektedir; fakat bu her harita için doğru mudur? Bir matematikçi için "herhangi" bir harita bilinen herhangi bir harita değil, bir düzleme yerleştirilmiş yapay şekillerle oluşturulabilecek bir harita anlamına gelir. Bu, "dört renkli birleştirme" olarak bilinir.

Hiç kimse bunu belirleyici bir biçimde kanıtlayamamıştı; ama 1890'ların sonlarında İngiliz matematikçi Percy Heawood, bununla ilişkili bir problemi çözmeyi başardı. Heawood, simit şekli olarak bilinen "torus" gibi delikli yüzeyleri düşünmüştü. Bir simit şeklinin üzerine çizilen herhangi bir haritanın doğru bir biçimde renklendirilmesi kaç renkle mümkün olabilirdi? Heawood bir formül ortaya koyarak dikkat çekici bir başarı kazandı. Üzerinde r kadar delik olan bir simit şeklinin üzerine çizilmiş bir haritanın doğru biçimde, bitişik hiçbir şeklin aynı renkte olmayacağı şekilde renklendirilebilmesi için c kadar renk gerekiyordu.

$$c = \text{'nin tam kısmı } \frac{1}{2}(7 + \sqrt{1 + 48r})$$

Bu durumda yüzey bir deliği olan bir simit şekliyse, yani r = 1'se, c, $\frac{1}{2}(7 + \sqrt{49})$'un tam kısmı, yani 7 olacaktı; torus üzerindeki herhangi bir şekil yedi renkle renklendirilebilirdi. Yüzey üzerinde üç delik varsa, c = 9,6033'ün tam kısmı = 9 olacaktı; böylece bu yüzeyin üzerine çizilmiş herhangi bir haritayı renklendirmek için dokuz renk yeterli olacaktı.

Heawood'un formülü, yüzeyde *en az* bir delik bulunduğunun kesin olarak kabul edilmesiyle türetilmişti. Başka bir deyişle

formülde r yerine 0 koymak kabul edilemezdi; gerçi bunu yaparsak şaşırtıcı bir biçimde c'nin 4'e eşit olduğunu buluruz. Maalesef, normal, düz bir harita tam da böyledir, r = 0'dır; ayrıca kartografi alanında bir torus şekilli harita kıtlığı olduğu da kabul edilmelidir.

1976'da düz yüzey üzerine çizilen haritalarla ilgili problem nihayet çözülmüştü. Ama ortada bir formül yoktu; Heawood'un bu meselede kullandığına benzer bir formül bulunup bulunmadığı yönünde de ciddi şüpheler mevcuttu. 1936 kritik harita biçiminin kontrol edilmesiyle herhangi bir haritanın dört renkle renklendirilebileceği gösterilmişti. Bu bilgisayar kullanılarak yapılmıştı; dört renk teoreminin kanıtı bir makineye dayanan ilk matematiksel kanıtlardan biri oldu.

Yardımcı Oyuncular

Formüller ile denklemler arasındaki ince çizgiyi göstermiştik. Ama bu ikinci bir soru doğuruyor: Bir denklemi çözmenin her zaman bir formülü mü vardır?

Çeşitli biçimleriyle kuadratik denklemler MÖ yaklaşık 2000'lerde Babillilerden beri biliniyor. Bu yüzden de kuadratik denklemlerle uğraşmanın uzun bir tarihi var. $x^2 - 7x + 10 = 0$ gibi kuadratik bir denklemi çözebilmek için denklemin sağ tarafının 0 olmasını sağlayacak x değerini bulmalıyız. Genel olarak denklem çözme problemi zor olabilir, fakat özelde kuadratik denklem kuramında çözüm için bir formül vardır:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Buradaki a, b ve c harfleri, $ax^2 + bx + c = 0$ şeklindeki genel bir kuadratik denklemde yer alan sayılardır. Bu gayet iyi bilinen formül sadece temel toplama, çıkarma, çarpma, bölme ve kare kök alma işlemlerini gerektirir.

Rönesans dönemi matematikçileri dikkatlerini kübik, ilk terimin x^3 olduğu denklemlere ve kuartik, ilk terimin x^4 olduğu denklemlere çevirmişlerdi. Her iki örnek için de formüller bulunuyordu. Kuartik denklemlerde formül uzun ve yorucu olsa da sadece temel işlemleri gerektiriyordu.

x^5'le başlayan beşinci dereceden denklemler, kuantik denklemler için bir formül aramaktan daha doğal ne olabilir? Fakat bunu söylemek yapmaktan kolaydır. 300 yıl boyunca matematikçiler böyle bir formül aramış, ama bulamamışlardır. Bu arayış matematiğin çözülmemiş en büyük problemlerinden biri haline gelmiştir. *Yaklaşık* çözümler veren yöntemler mümkündü; fakat matematikçiler *kesin* çözümler veren bir formül bulmak istiyordu. 1820'lerde genç Norveçli Niels Abel beşinci dereceden bütün denklemlere uygulanabilecek bir formül *olmadığını* bularak bütün spekülasyonlara son verdi. Örneğin $x^5 - 2x - 1 = 0$ denklemini çözecek bir formül yoktu. Birkaç cesur yürek bu yolda devam etti; fakat Abel'in vardığı, mihenk taşı niteliğindeki sonuç bu meseleyi büyük ölçüde çözdü.

Işıltılı Yıldızlar

Denklemleri çözmeye yönelik formüller soyut matematikçiler açısından hayati önemdedir; matematikçi olmayan birçoklarına da okul günlerini hatırlatır. Fakat formüllerin asıl ışıltılılarını bulmak

"Herhalde böyle büyük bir doğal olgular kitlesini, Newton'ın Principia Mathematica'sındaki evrensel kütleçekim kanunu kadar sade bir biçimde birleştiren bir doğa kanunu daha yoktur."

E. T. BELL,
Men of Mathematics

için matematikten çıkıp bilim dünyasının sularına girmek gerekir. Matematiğin bilime en büyük katkısı formüllere odaklanmaktan gelmiştir.

Böylece Galileo dikkatini bir taşın *neden* yere düştüğü sorusundan, taşın düştüğü mesafeyi ölçmeye yarayacak formülün bulunmasına, bu niceliksel soruya yöneltmiştir. Bu mesafe hangi değişkene ya da değişkenlere dayanır? Galileo'nun dehası düşen bir topun hızının, Aristoteles'in düşündüğü gibi kütlesine bağlı olmadığını bulmak olmuştur. Ağır nesneler hafif nesnelerden daha hızlı düşmezler. Galileo deneylerle, düşüşte x saniye sonra alınan d mesafesinin $d = 16\ x^2$ formülüyle bulunabileceğini keşfetmiştir. (Formülde 16 faktörü bulunmaktadır, çünkü fiziksel zaman birimlerinin saniye, mesafenin de ayak olarak ölçülmesi tercih edilmiştir.) Galileo'nun yaptığı büyük atılım, bir tek formülün hareketi betimleyip cevaplar verebilmesiydi. Bu formülü kullanarak biz de x saniye sonra taşın düşerek aldığı mesafeyi hesaplayabiliriz.

Bütün formüllerin en büyüklerinden biri Isaac Newton'ın kütleçekim kuramıdır. Bu kuram olmasaydı Ay'a insan gönderemez, uzay yolculuklarına başlayamaz, fiziksel dünyayı anlayamazdık.

Newton kütleleri m_1 ve m_2 olan iki nesnenin birbirlerine $m_1 \times m_2$'nin d^2'ye bölünmesine oranlı bir F kuvvetiyle çekildiğini kuramlaştırmıştı. Meşhur formülü şuydu:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$$

Bu formüle "evrensel kütleçekimin ters kare kanunu" denir; buradaki G kütleçekim sabitidir; değeri seçilen ölçü birimlerine bağlıdır. Newton'ın formülü bir "ters kare kanunu"ydu; çünkü d^2'ye bölüyorduk; bu yüzden de iki nesne arasındaki mesafe ne kadar büyük olursa aralarında kuvvet de o kadar zayıf oluyordu. Gezegenler söz konusu olduğunda m_1 ve m_2 çok büyüktür; birbirlerini çekerken uyguladıkları güç de önemli bir güç olacaktır.

Galileo ile Newton'ın başarıları evrenin işleyişinin mekanik bir saatin işleyişi gibi olduğunu, tam anlamıyla önceden belirlendiğini düşündürüyordu. Bu güçlü bir fikirdi; gözlem çalışmaları sonrasında, şansları yaver giderse aynen kütleçekim kanunu gibi saygın bir bilimsel kanun olabilecek bir formül bulmayı isteyen bilim insanlarını motive eden bir fikirdi. Pierre-Simon Laplace 18. ve 19. yüzyıllarda bu kavrayışın başlıca savunucusu olmuştu. Geleceği bilebilmek için gereken tek şeyin atomların, kuvvetlerin bütün hareketlerini, gezegenlerin hareketini, doğanın tek bir andaki bütün verilerini bir araya getirebilecek devasa bir zeka olduğunu söylemişti; daha sonra bu akıl dünyanın gelecekteki halini eksiksiz olarak belirleyecek bir formüle çevrilebilecekti. Böylece belirlenimci bir evrene duyulan inanç da her şeyin cevabını veren bir formülün cazibesine dayanıyordu.

19. yüzyılda Michael Faraday manyetizma ve elektriğin çok yakından bağlantılı olduğunu deneylerle öğrenmişti. Bir mıknatıs bir tel bobininin üstünde geçirilirse bobinden bir elektrik akımı geçer; tam tersi de geçerlidir, bir tel bobininden bir elektrik akımı geçtiğinde bobinin içindeki bir demir parçası da mıknatısa dönüşür. Elektrik motorunun temelinde de bu ilişki vardır; ama bu bir formülde toplanabilir miydi? Matematiksel fizikçi James Clerk Maxwell'in dehası da işte bu noktada devreye girdi; kendisi bu fenomeni betimleyen "Maxwell'in Denklemleri"ni yazmakla kalmamış, yeni bir matematik de icat etmişti. Elektrik ve manyetizmanın karışmasıyla ilgili formülü oluşturan dört denklem son derece önemlidir.

Fiziksel olayları betimleyen formüller bir gazın basıncı ve hacminin birbirine ters orantılı olduğunu gösteren Boyle Kanunu ($P = k / V$) gibi şaşırtıcı derecede kısa olabilirler. Fiziğin ikonlaşmış formülü, Einstein'ın görelilik kuramının bir ürünü olan $E = mc^2$ derin öneminin altını çizen, insanın aklını başından alan bir sadelik sergilemektedir. Fakat birkaç değişkene dayanan formüller de vardır;

mercek yapımcısının bir merceğin odaksal uzunluğunu ışığın kırılma endeksi, bükeylik ve kalınlıkla ifade eden formülü gibi.

"Görelilikten sonra fizikçiler, koca evreni dışarıdan gözleyen bir cinden artık bahsedemez oldu; ama Einstein'ın ileri sürdüğü gibi hile de yapmayan zar da atmayan üstün bir matematikçiyi hâlâ düşünebiliyorlar. Bu matematikçide, doğanın eksiksiz bir tanımını içeren bir evren formülü vardır."

ILYA PRIGDGINE,
***Kaostan Düzen* (1984)**

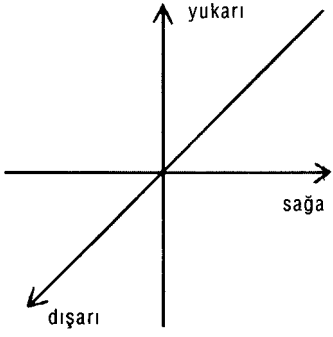
Sihirli Formül

Matematikte ve bilimde her şeyi açıklayacak sihirli bir formülün varlığı aldatıcıdır. Matematikte beşinci dereceden bütün denklemleri çözecek bir cebir formülü olmadığını biliyoruz örneğin. Aslına bakarsanız Kurt Gödel'in 1930'larda ortaya koyduğu "eksiklik teoremleri" formel matematiksel sistemlerde doğru, fakat karar verilemeyen; teoremler yumurtlayacak bir "makine"yi ya da basit bir formülü devre dışı bırakan ifadeler olduğunu göstermiştir. Fakat bu konuda arzular varlığını sürdürmektedir, matematikçiler de düzen ve formüller aramayı sürdürmektedirler. Bilim insanları temel bir şemayı ortaya koyup koymadığını görmek için verileri gözlerler, başarılı bir formülün önkoşulu budur. Bugünün bilim insanları belirlenimciliğin o kadar esiri olmasalar da yeni bir formül keşfetmeye can atmaktadırlar. Böyle bir formül bilimsel bir kanun haline gelip kuramlarına bir sahicilik kazandırabilir, onlara başarının ödülünü verebilir: Tarihte kalıcı bir yer.

ÜÇ BOYUT NEDEN YETERLİ DEĞİLDİR?

Daha üst boyutlar, canavar eğriler ve fraktallar

Yüzyıllardır sadece üç boyut tanıyorduk; bu kadarı yeterliydi, bu boyutlar sorgulanmıyordu. Ama sonra fizikçiler dünyayı ve kozmosu gereği gibi anlayabilmek için boyutların sayısını artırmamız gerektiğini ileri sürdüler. Kısa süre önce de bilgisayarların canlı grafikler yaratma gücü, bir boyutun bir tam sayı bile olması gerekmediği bir yeraltı dünyasına götürdü bizi. Koskoca "boyut" kavramı tanıdık olunandan ele geçmez olana doğru yol aldı.

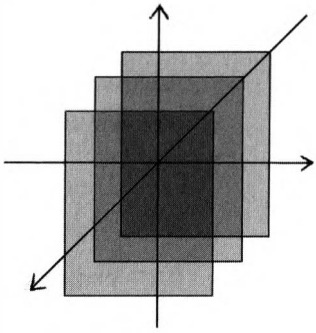


GELENEKSEL ÜÇ BOYUT

İçinde yaşadığımız dünyayı üç boyutlu bir dünya olarak tanımlamak hâlâ yaygındır. Nerede olursak olalım bu üç boyut *boyunca*, üç boyut *üstüne* ya da *dışına* ya da bu üçünün bir bileşimi şeklinde hareket edebiliriz. Kültürümüzde üç boyut kavramı dilimize ve hayalgücümüze çok güçlü bir biçimde işlemiştir: üç boyutlu şekiller, üç boyutlu haritalar, üç boyutlu sinema.

Antik Yunanlılar boyutu hiyerarşik bir biçimde düşünüyorlardı. Bir *nokta* "sıfır boyutlu" olduğu düşünülen geometrik bir yapı taşıydı. Nokta toplulukları bir doğruyu

oluşturuyorlardı; bu yüzden de doğrular tek boyutluydu. Bir araya getirilen doğrular düzlemleri (iki boyutlu) oluşturuyorlardı; son olarak da bir araya getirilen düzlemler üç boyutlu bir uzam oluşturuyorlardı. Bu hiyerarşik bakışta sürekli bir hareket gizlidir: noktalar bir doğru oluşturur, doğrular bir düzlemde bir araya gelir, düzlemler de birleşerek bir uzam oluşturur.



PEŞ PEŞE DÜZLEMLERLE OLUŞTURULAN ÜÇ BOYUTLU UZAM

Boyut gibi temel bir kavram matematikçiler ve bilim insanlarının keşiflerine hazır bir kavramdır. Aristoteles Fizik'te uzayın altı boyutlu olduğundan bahsetmişti: Hareketin zıtlıklarını sunmanın gayet doğal olduğunu düşünüyordu; böylece *ön*, *yukarı* ve *dışarı* arka/ön, aşağı/yukarı, içeri/dışarı ikilileri haline geldi. Fakat Rönesans sırasında Leonardo da Vinci resim biliminin üç boyutlu geometriyle başladığını ileri sürerek altı boyutu reddetti. Yunan geometricilerin izinden giderek noktanın temel olduğunu, onu doğrunun izlediğini, düzlemin üçüncü sırada geldiğini, onu düzlemlerin "giysisi" uzamın izlediğini savundu. Leonardo geometrisini biliyor, öğrencilerinin de bu geometriyi bilmesinin uygun olduğunu düşünüyordu.

Bir asrı aşkın bir süre sonra René Descartes geometriyi cebire çevirerek gometride bir devrim yarattı. Daha sonra "Kartezyen eksenler" adını alacak olan x, y ve z eksenlerinin kullanılmasıyla uzaydaki bir nokta üç koordinata (x, y, z) verilen rakamlarla belirtilebiliyordu. Örneğin (3, 1, 20) 3 birim öne giden, 1 birim yukarı çıkan, 20 birim dışarı uğrayan bir noktayı temsil eder. Geometrinin bu şekilde cebire dönüşmesi geometrik nesnelerin denklemlerle betimlenip ele alınabileceği anlamına geliyordu. Örneğin $x + y + z = 0$ bir düzlem denklemiydi; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ise yarıçapı 1 olan bir küreyi ifade eden denklemdi. Bunlar üç boyutlu

uzamdaki geometrik nesnelerdir; ama düzlem ve küre (bir topun yüzeyi) aslında iki boyutludur. Yüzeylerde yaşıyor ve yol alıyor olsaydınız iki boyutlu bir uzayda yaşadığınızı düşünebilirdiniz. Cebirin kullanılmasıyla daha büyük bir kesinlik sağlanabiliyordu; geometri artık geometrik bir figürün ya da şeklin "görülmesi"ne dayanmıyordu. Matematikçileri geometrinin cebirsel semboller olmadan fark edemeyecekleri yönlerini keşfettiler.

Daha Üst Boyutlara Yolculuk

Başta olağandışı olarak görülen daha üst uzay boyutları "hipergeometri" olarak niteleniyordu("hiperdüzlem", "hiperküre" buradan çıkmıştı); fakat aslında daha üst boyutları denklemlere aktarmak nispeten kolaydır. Dört boyut için mevcut üç değişkene bir tane daha ekleriz; beş boyut içinse iki değişken daha. Böylece $x + y + z + w = 0$ dört boyutlu bir hiperdüzlemin denklemidir; $x + y + z + w + u = 0$ ise beş boyutlu bir hiperdüzlemin denklemidir. Aynı şekilde $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ dört boyutlu bir hiperkürenin denklemi, $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + u^2 = 1$ ise beş boyutlu bir hiperkürenin denklemidir (Bakınız *Evrenin Şekli Nasıldır?*).

Düşünebileceğimiz boyutların bir sınırı yoktur; Oxfordlu evrim biyologu Richard Dawkins bir "genetik uzay" mefhumu önerirken çok önceden var olan hayvanlardan gelecekteki enkarnasyonlara

"... bir düğüm atmak için, kendi üzerine sıkılan ve ayrılmayan bir düğüm atabilmek için üç boyuttan aşağısı da yukarısı da kurtarmaz; nihai parçacıklar bunlardır, uzay-zamanda düğümler. İki boyutta bir düğüm atamazsınız, çünkü üzeri ya da alt diye bir şey yoktur..."

JOHN UPDIKE, (1986)

doğru kuşaklar arasında nasıl yol alınacağını gösteren bir bilgisayar modeli kurmuştu. Değerlendirdiği hayvanların bağımsız her genine bir boyut hesabıyla binlerce boyuta ihtiyacı olmuştu.

Bazı matematikçiler ilk karşılaştıklarında hiperteorilere bir hevesle yaklaşır. Arthur Cayley 1840'larda n sayıda (n herhangi bir sayı anlamına gelir) boyut üzerine makaleler yazmıştı; dolayısıyla 105 boyutu, isterse 10.500 boyutu düşünmesinin önünde bir engel yoktu. Yine de derinlerde matematikçiler *olağan* uzay mefhumunu bırakmaya gönülsüzdür; içinde yaşadığımız fiziksel uzay üç boyutlu kalmış, daha üst boyutlar ancak soyut bir matematiksel uzay için geçerli olmuştur.

Peki ama fiziksel uzayı üç boyutlu olarak görmekte gerçekten diretebilir miyiz? Einstein dört boyutun doğru sayı olduğunu ileri sürmüştür; zamanı bağımsız bir boyut olarak düşünen Newton'ın tersine Einstein zaman ve uzayın birbirini etkilediği bir uzay-zaman sürekliliği içinde düşünmüştür.

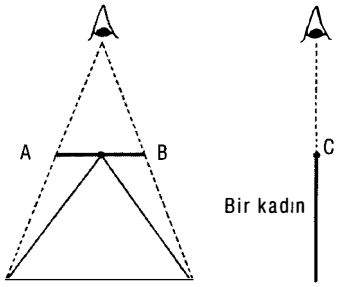
Düzdiyar, İki Boyutlu Bir Dünya

Dört boyutlu bir dünyayı resmetmekteki zorluklarımızı değerlendirmek istersek en iyisi Düzdiyar'a, 1880'lerde öğretmen Edwin A. Abbott'ın toplumsal hicvi *Flatland: A Romance of Many Dimensions* adlı eserinde icat ettiği bu kavramsal ülkeye gitmek olacaktır. Abbott bu dünyayı kurmak için üç uzay koordinatını sadece ikiye indirmiştir. Düzdiyar'da insanlar hayatlarını düz bir yüzey üzerinde yaşamaya mahkumdur, yükseklik yoktur. Kaçamazlar, dahası dünyalarına *tepeden* bakamazlar. Düzdiyar'da "yukarısı" yoktur.

Düzdiyar'daki bütün nesneler ve insanlar iki boyuta indirgenmiştir; hikayenin kurgusal zamanında hareket edebilirler, ama sayfadan kaçamazlar. İnsanlar şekillerle; üçgen, kare, sekizgen ve başka simetrik şekillerle temsil edilir; şekiller de katı bir sınıfsal

yapıyı yansıtır. Kenar sayısı az olan şekiller toplumsal hiyerarşinin alt katında yer alır; bu hiyerarşide yukarı çıktıkça şekillerin de kenar sayısı artar. Düzdiyar'da herkes bir düzlemde yaşadığından farklı şekillerin birbirlerinden ayırt edilebilmesi çok güçtür. Düzdiyar sakinlerinin birbirlerini tanımak için incelikli yollar geliştirmeleri gerekir.

Bir üniversite hocasını örnek alalım; eşkenar bir üçgendir. Düzdiyar sakinlerinin hepsi iki boyutta yaşadığından öğrencileri üçgenin tepe noktasını göremeyeceklerdir: Gördükleri tek şey AB doğrusu olacaktır; tabii görüşleri ışık ve gölgeyle bozulmazsa. Kadınlar Düzdiyar'ın toplumsal hiyerarşisinde en alt katta yer alır. Düzdiyar'da "düz doğrular" olarak temsil edilirler; bir kadının statüsünü yükseltmesinin bir yolu yoktur, toplumsal hiyerarşide ilerleyip bir üçgen haline gelemez. Ama kadınların benzersiz bir niteliği vardır. Doğru olduklarından neredeyse görünmez hale gelebilirler: Onlarla yüz yüze gelindiğinde görülebilecek tek şey tek bir noktadır.



DÜZDİYAR'IN İKİ BOYUTLU KARAKTERLERİ: BİR PROFESÖR VE BİR KADIN

Toplumsal hiciv bir kenara bırakıldığında Düzdiyarlıların yaşadığı algısal ve kavramsal zorluklar, bırakın daha üst boyutları dört boyutlu bir dünyayı gözümüzün önüne getirmeye çalışırken yaşadığımız zorlukların aynısıdır. Peki bir hiperdüzlemi ya da hiperküreyi nasıl "görürüz"?

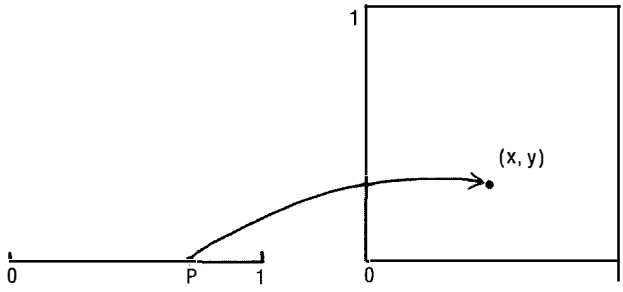
Cantor'un Şaşkınlığı

1870'lerde yaşamış geometriciler boyut kavramını anladıklarını düşünmüşlerdiyse şaşkınlığa uğramak üzereydiler. Boyut sezgisel olarak kavranmıştı, fakat henüz kesin bir tanımı yoktu. Sonra, Halle

Üniversitesi'nde çalışmakta olan George Cantor dudakları uçuklatan bir keşif yaptı. Geleneksel olarak, bir karenin iki boyutlu niteliğini, doğruların birim uzunluk boyunca birbiri üzerinde birikmesi fikrinden aldığı düşünülüyordu. Birim uzunlukta tek boyutlu bir doğru işaretlenebilecek çok sayıda bağımsız nokta içeriyorsa bu durumda *çok sayıda* doğrudan oluşan bir karenin de içinde birçok nokta olduğu düşünülebilirdi.

Cantor bu kavrayışa karşı çıktı. Birim uzunluktaki bir doğru üzerindeki noktaları birim karedeki noktalarla birebir eşleştirdi. Başka bir deyişle doğru üzerindeki bütün noktaların eşinin karenin içinde bulunduğunu, karedeki bütün noktaların eşlerinin de doğrunun üzerinde bulunduğunu söyledi.

Peki Cantor bunu nasıl yaptı? Önce doğru üzerindeki bir noktayı ondalık sayı olarak ifade etti: örneğin 0,19762543 noktası. Sonra da kare içinde (x, y) koordinatlarını, noktayı oluşturan sayının basamaklarını x ve y'ye sırayla dağıtarak belirledi; burada x = 0,1724... ve y = 0,9653... Tersinden gidersek, bize kare içinde bir nokta (x, y) verilirse x ve y'nin basamaklarını birbirine geçirerek doğru üzerinde bu koordinatlara denk düşen noktayı veren ondalık ifadeyi bulabiliriz.



CANTOR'UN DOĞRU VE KAREYİ BİREBİR EŞLEŞTİRMESİ

Cantor'un yaptığı şey sezgilere, kendi sezgilerine bile ters düşüyordu. 1877'de Richard Dedekind'e "Görüyorum, ama inanmıyorum" diye yazmıştı. O zamana kadar geometriciler tek

boyutlu ve iki boyutlu nesneleri kökten farklı nesneler olarak ele almışlardı. Fakat Cantor'un attığı adım, bu birebir eşleştirme yoluyla bu nesnelerin *aynı* sayıda nokta içerdiğini göstermişti. Cantor, bir doğru ile üç boyutlu bir küp arasında bile bire bir bir eşleştirme yapabiliyordu (aynı yöntemi kullanıyor ve her üçüncü değeri alıyordu), hatta aynı işlemi daha üst boyutlu küplerde de tekrarlayabiliyordu.

Matematikçilere göre Cantor'un geliştirdiği birebir eşleştirme yönteminde eksik olan bir yön vardır. Süreklilik taşıyan bir birebir eşleştirme değildir; Cantor doğru üzerinde seçilmiş bir noktanın yakınındaki noktaların hepsinin birim karede bu kareye denk düşen noktanın yakınındaki noktalara dönüşeceğini garanti edemiyordu. Bundan yirmi beş yıl sonra Hollandalı filozof ve matematikçi Luitzen Brouwer farklı boyuttaki nesneleri sürekli bir birebir dönüşüm ile birbirine çevirmenin mümkün olmadığını gösterdi.

Eğriler ve "Canavar" Eğriler

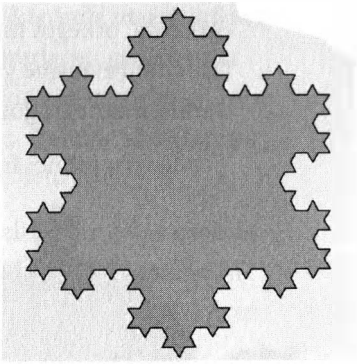
Bir boyutun ne olduğu ve onlarca boyutu tanımlama problemleriyle iç içe geçerek varlığını sürdürmüş bir soru vardır: Eğri nedir? Antik Yunanlılar daireler, elipsler, hiperboller, spiraller ve başka özel eğrilerle uğraşmışlardı. Peki bu klasik çerçeveye uymayan eğrileri ne yapacağız? 1880'lerde Camille Jordan bir eğriyi sürekli hareket eden bir nokta olarak tanımlamıştı.

Bu tanımın yararı, kesintisiz "parmak izi" gibi hayli karmaşık görüntülerin eğri olarak ele alınabilmesini sağlamasıdır. Sorun, bu tanımın çok fazla şeyi içine alıyor olmasıdır; ona bakarsanız bu tanıma göre bir kare de bir eğri olabilir. Nasıl olur da "tek boyutlu" bir eğri "iki boyutlu" bir nesne olabilir? Bu akıl alacak şey değildir. Alternatif tanımlar bulmaya girişen matematikçiler çok tuhaf özellikleri olan, istemeden normalde karşılaştığımız eğri sınıfının tümüyle dışında kalan "eğriler" üretmeye başlamışlardı. Bunlara gayet yerinde bir

tabirle "canavar" eğriler dendi. Eğrilerle ilgili bu araştırmalar, farklı, fakat birbirleriyle ilişkili boyut kavrayışları da ortaya çıkardı.

19. yüzyılın başında ortaya çıkarılan canavar eğrilerden biri İsveçli matematikçi Helge von Koch'un ismini taşıyan Koch eğrisiydi. Görünümü bakımından değil, özellikleri bakımından "canavar" bir eğriydi; çünkü sık sık çoğaltılan kar tanesi eğrisiydi. Bunu ortaya çıkarmak için eşkenar bir üçgenle başlarsınız (buna "0 aşaması" denir), her kenara üçgen şeklinde bir "değişiklik" eklenir, sonra bu süreç tekrarlanır, aşamaların sınırını veren n aşama sonra, kar tanesi eğrisi ortaya çıkar. Eğri böylece tekrar yoluyla üretilir. *Asıl* kar tanesi eğrisini çizmek mümkün değildir; ama bu eğri aşamalarından biriyle temsil edilebilir.

Değişiklikler eklendikçe kar tanesinin sınırı artar, aslında nihai kar tanesi eğrisinin uzunluğu sınırsızdır. Çünkü şekil her zaman, sonlu bir alanı olan bir daire içinde kalır; bu yüzden sonlu bir alanı olan, sınırı sonsuz olan bir eğridir.



KAR TANESİ EĞRİSİNİN AŞAMASI

Peki ama kar tanesi eğrisinin boyutu nedir? Bu boyutu nasıl ölçebiliriz; birçok boyut tanımından hangisini kullanmamız gerekir? Alman matematikçi Felix Hausdorff'un fikirleri işte bu noktada yararlı olmuştur. Bilindiği şekliyle "Hausdorff boyutu" normal şekillerin "olağan" nomenklaturasıyla örtüşür; böylece doğrunun boyutu 1, karenin boyutu 2, küpün boyutu 3'tür. Böyledir, çünkü Hausdorff boyutu *(d)* uzunluk ve alanın ölçülmesine dayanır. Bir karenin her kenarı 3 kat büyütülecek olursa ortaya çıkan yeni alan önceki değerin dokuz katı büyüklüğünde olacaktır. $9 = 3^2$ olduğundan, iki boyutlu bir karenin Hausdorff boyutu kuvvettir, yani $d = 2$'dir. Bu tabii ki bir kareden beklediğimiz değerdir. Kuvvet, Hausdorff boyutunun anahtarıdır.

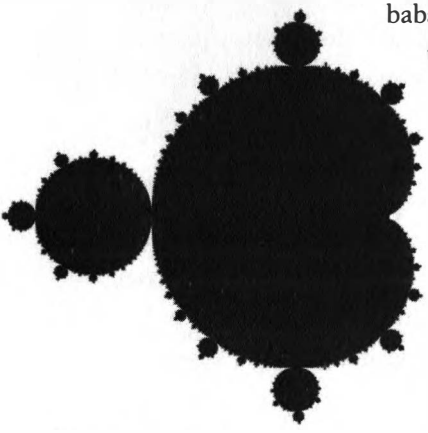
Kar tanesi eğrisini üreten unsur bir doğru parçasıdır; bu doğruyu 3 kat büyütüp değişiklik olarak ekleyecek olursak baştakinden dört kat uzun bir doğrumuz olur. Bu yüzden $4 = 3^d$ olduğunda d'nin değerinin ne olduğunu bulmamız gerekir. d'nin değerinin 1 ile 2 arasında olması gerekir; çünkü 4, 3^1 ile 3^2 arasında yer alır ve aslında $d = 1{,}29224...$

Bu yeni bir şeydir. Boyutu tam sayı olmayan, kesirli bir boyutu olan bir eğrimiz var. Aslına bakarsanız, bundan 50 yıl sonra "fraktaller" olarak bilinen eğrileri içerecek olan dünyaya girmiş bulunuyoruz.

Fraktaller ve Mandelbrot Kümesi

Koch eğrisine büyüteçle baktığımızda ilginç bir şey görürüz. Büyüteç altında büyüteçsiz göründüğü gibi görünür. Biraz daha yakından baktığımızda da aynı şeyi görürüz. Koch eğrisi tekrarlarla üretilmiş olması sonucu kendi kendisine benzeme özelliğine sahiptir. Olağan eğrilerde, örneğin bir dairede karşımıza çıkan bir şey değildir bu. Dairenin çevresine yakından bakacak olursak yakınlaştığımız ölçüde düzleşen bir eğri görürüz; birçok küçük dairecik görmeyiz.

Modern bilinci fraktal bilimiyle tanıştırdığı için "fraktallerin babası" matematikçi Benoit Mandelbrot'ya teşekkür edebiliriz. Fraktal, kendi kendine benzemeyi ve boyutların Hausdorff boyutuyla ölçümünü birleştiren bir tür parçalı ya da kırık eğri ya da şekildir. Koch eğrisi olağan boyutu 1 olan düz doğrularla oluşturulmuştur; ama Koch eğrisinin Hausdorff boyutu $d = 1,\ 29224...$'tür ve bu boyutun olağan boyutu aşması fraktalin tipik bir özelliğidir.



MANDELBROT KÜMESİ

En iyi bilinen fraktal Mandelbrot kümesidir. Mandelbrot'nun bilgi işlem laboratuvarında 1980'de keşfettiği bu küme Koch eğrisinden de tuhaftır. Mandelbrot kümeyi ilk kez yazıcısında gördüğünde kümenin inceliği karşısında hayrete kapılmıştı. Hiç beklenmedik bir şeydi; temel bir durumdan ortaya çıkarıldığı için de bütün fraktallerin sembolü haline geldi. Mandelbrot bu kümeyi Koch eğrisinde olduğu gibi tekrarla değişiklikler üreterek değil, temel bir cebir formülünün tekrarlanması yoluyla keşfetmişti.

Mandelbrot kümesi de kendi kendisine benzer; bir kısmına yakından bakacak olursak milyonlarca minyatür Mandelbrot kümesi görürüz. Bunların her birine yakından bakacak olursak milyonlarca küme daha görürüz. Ama boyutunu ölçtüğümüzde başka sürprizlerle de karşılaşırız. Mandelbrot kümesinin sınırı bir kareye hiç benzemez, ama Hausdorff boyutu 2'ye eşittir; karenin Hausdorff boyutunun aynısıdır; bu da boyutun kendisinin tuhaf niteliğine bir kez daha ışık tutar.

Fraktaller yaygın olarak tanınır hale geldiklerinde matematiksel ve bilgisayara dayalı modelleme yapmanın sınırlarını genişlettiler. Bulut oluşumlarının modelini, Öklit geometrisinin nesnelerini kullanarak çıkarma girişiminde bulunulamaz. Bulutlar dairelere ya da elipslere pek benzemezler, ama fraktallere benzerler.

Fraktaller pratik sorunlara, örneğin coğrafi harita çıkarmaya da yeni bir ışık tutmuşlardır. Bir sahil şeridinin uzunluk ölçümünün doğrudan, tartışmasız bir sonuç vermesini bekleriz. Fakat aldığınız cevap ölçümde kullandığınız birime bağlıdır. Sahili kilometre birimiyle ölçerseniz aldığınız cevap, metre birimiyle ölçtüğünüzde aldığınızdan çok daha kısa olur. Bunun sebebi küçük birimin sahil şeridindeki girintilere, çıkıntılara daha iyi uyacak olmasıdır. Ölçüm birimi bir atomun çapına eşitse, sahil şeridinin uzunluğu gerçekten çok uzun çıkacaktır. Kar tanesi üretiminin her aşamasında değişiklikler kısalır, ama toplam uzunluk uzar.

Çok Boyutlu Dünyamız

Bir, iki ve üç boyutu sayan Antik Yunanlılardan yola çıkan matematikçiler çok daha fazla boyutun, hatta kesirli boyutların sahneye çıktığı senaryolar ve kavrayışlar ortaya çıkarmıştır. "Soyut" matematikçiler artık istedikleri kadar boyuta sahip olabilirler; uygulamalı bilimlerle uğraşan bilim insanları da kendilerine üç boyutu dayatan dünyadan bir kaçış ihtiyacı hissetmişlerdir. Dahası 21. yüzyılda dünyanın her yerinde, çeşitli üniversitelerde görev yapan kuramsal fizikçiler Einstein'ın dört boyutlu uzay-zaman sürekliliğinden yola çıkarak her şeyi kapsayan bir fiziksel kuram oluşturma çabasına girişmişlerdir. Evrenin 11 boyutlu olduğu, "titreşen küçük sicimlerden" oluştuğu kavrayışına dayanan bu araştırmalar kendilerini çok ilginç bir şaşırtıcılığı olduğu kadar kanıtlanamaz da olan (en azından bugüne kadar kanıtlanamamış olan) sicim kuramında göstermişlerdir. Matematikte ve ötesinde boyut kavramının araştırmacı zihin üzerinde büyük bir etkisi vardır.

BİR KELEBEĞİN KANATLARI GERÇEKTEN DE FIRTINAYA YOL AÇABİLİR Mİ?

Kaos kuramı, hava durumu denklemleri ve garip çekiciler

En güzel kelebek türlerinden bir kırlangıç kuyruğu, Amazon'un balta girmemiş yukarı bölgelerinde bir çalının üstünde duruyor. Kanatlarını çırpıyor ve Brezilya güneşinin tadını çıkarmaya devam ediyor. Bu minicik hareketin, kilometrelerce ötede kuzeyde bir fırtınaya yol açacağını bilmiyor. "Kaos kuramı"nın sunumunda cesur bir kare haline gelmiş olan bu canlı imge kamuoyunun imgelemine yerleşmiştir. Görelilik ve kuantum mekaniğiyle birlikte bilim ve matematikte 20. yüzyılın büyük adımlarından biri olarak baş tacı edilen yeni bir araştırma alanının yaratılmasına katkıda bulunmuştur.

Gelin bir deney yapalım. Sabah bir saati 07.00'a ayarlayıp çalışmaya bırakalım, aynı anda başka bir saati de 07.01'e ayarlayalım. Gün içinde ikinci saat, birinciden bir dakika ileri olacaktır; bunda şaşırtıcı bir şey yok. Mekanik evreni böyle düşünürüz, saat gibi çalıştığını hayal ederiz. Fakat bütün sistemler aynı biçimde işlemez. Örneğin ikizlerin gelişimi o kadar öngörülebilir değildir. Doğumda, görünümleri ve davranışlarında pek az farklılık olabilir. Hayatlarının ilk birkaç yılı benzer bir biçimde geçecek; fakat yavaş yavaş bireysel kişilikleri doğacak, hayatlarında izleyecekleri yollar farklılaşacaktır.

İkizler yetişkin olduklarında birbirinden hayli farklı hayatlar sürüyor olabilirler.

Zaman içinde sistemlerin evrim geçirdikleri bir yol izleyeceklerini, başlangıç koşullarındaki küçük değişiklikler ya da farklılıklar sonucu farklılaşacaklarını öngören "kaos kuramı"nı kaba taslak da olsa özetlemiş bulunuyoruz. Evrim kuramı doğada, kaos kuramının dünyamızdaki en büyük anlatısını ileri sürer. Fakat matematiksel olarak konuşacak olursak kaos kuramının popülerleştirilmesi bizim devrimize Darwin'in devrine olduğundan daha yakındır.

Kahve Molaları ve Kelebekler

Amerikalı matematikçi ve meteorolog Edward Lorenz 1960'larda, hava tahminlerinde kullanılan Navier-Stokes denklemleri üzerine çalışıyordu. Bu denklemler hava akımlarının hızını üç boyutta x, y, z koordinatlarıyla ifade ediyordu; bu yüzden de bu denklemlerin çözülmesi bu noktaların izlediği yolların bulunması anlamına geliyordu. Lorenz'in bilgisayara dayalı bir çözüm bulması gerekiyordu; çünkü çözümün kesin bir biçimde ortaya çıkmasının başka bir yolu yoktu. Bilgisayarı sayısal tekniklerin gerektirdiği milyonlarca hesaplamayı halledecek şekilde ayarladı; x, y ve z'nin ilk sayısal değerlerini girdi ve sonra da bir kahve molası vermeye gitti.

"Kaos kelimesi elbette birçok yazar tarafından biraz muğlak bir anlamda kullanılmıştır; fakat fizikte kaos, özel bir olguyu, çizgisel olmayan bir sistemde sonucun baştaki koşullarda yapılan küçük değişikliklere genellikle sonsuzca, keyfice duyarlı olduğu anlamına gelir."

MURRAY GELL-MANN,
Fizik Nobel Ödülü Sahibi (1969)

Döndüğünde bilgisayarın evrilen bir yol örüntüsü çıkardığını gördü, ama bir sorun vardı. Bu yol, aynı denklemleri kullanarak yaptığı benzer bir deneyde elde ettiğinden farklı görünüyordu.

Lorenz meseleye biraz kafa yordu, birden ikinci deneyde ilk x, y ve z değerlerini yuvarladığı aklına geldi. Başta x için (diyelim ki) 5,8904533 değerini kullanmışken, kahve molası vermeden önce bu değeri yuvarlayıp ondalık basamak sayısını azaltmış ve 5,89045 olarak girmişti. Aslına bakılırsa bilgisayar azıcık fark gösteren değerlere dayanarak evrilen iki yol hesaplamıştı.

Lorenz'in 1972'de verdiği "Öngörülebilirlik: Brezilya'da Bir Kelebeğin Kanat Çırpışı Texas'ta Bir Fırtına Başlatır mı?" başlıklı konferansında incelikle işlediği akıldan çıkmayacak benzetmenin ardında bu minicik matematiksel farklılık vardı. İfade etmeye çalıştığı kilit fikir *duyarlılıktı*. Yukarıda bahsettiğimiz, 07.00'a ve 07.01'e ayarladığımız mekanik saatler bu duyarlılığa sahip değildir; çünkü zaman ilerledikçe ona ayak uydururlar. (Elbette ki *gerçek* dünyada mekanik hatanın devreye girmesi gerektiğini, bir saatin öbüründen uzun süre dayanıp çok daha sonra kurulmasının gerekeceğini biliyoruz, ama bu meseleleri bir kenara bırakabiliriz: Burada asıl mesele saat gibi işlemektir, mekanik ilkedir.) Fakat ikizler örneğinde belirttiğimiz gibi doğumdaki küçük farklılıklar, zaman ilerledikçe büyür. Tam terminolojiyi kullanarak söylersek "baştaki koşullara duyarlılık", başlangıç noktasındaki küçük farklılıkların daha sonra büyük farklılıklara yol açabileceği anlamına gelir. Lorenz meteoroloji alanında bazı hava durumu denklemlerinin, baştaki değerler birbirine çok yakın olduğunda çok farklı hava tahminleri ortaya çıkarabileceğine dikkat çekmiştir.

Poincaré ve Kaosun Kökleri

Aslında "kelebek etkisi" Lorenz'in konferansından önce de gayet iyi biliniyordu. Henri Poincaré yaklaşık 60 yıl önce bunu biliyordu;

şu satırları yazarken de hava tahminlerini düşünüyordu: "İlk koşullardaki küçük farklılıklar nihai olgularda çok büyük farklılıklar ortaya çıkarabilir... İlkinde yapılan küçük bir hata, ikincisinde muazzam bir hataya dönüşecektir." Bilgisayarların hesaplama becerilerinin yardımını görmeyen Poincaré'ye göre bu "küçük farklılıklar" tahmin becerisini güçlendirmek yerine baltalıyordu: "Tahmin etmek imkansız hale gelir."

Poincaré bu gözlemleri üç cismin hareketiyle ilgili astronomik çalışmalarını sürdürdüğü sırada yapmıştı. İki cismin peş peşe hareketini, örneğin Ay'ın Dünya'nın etrafında dönmesini matematiksel olarak betimleme problemi düz bir problemdi. Poincaré'nin halletmek istediği şey, aynısını üç cisme uygulamaktı; bu hareket Ay, Dünya ve Güneş'in dinamikleri ya da atom altı düzeyde çekirdeği ve yörüngede dönen iki elektronuyla helyum atomunun dinamikleri olarak özetlenebilir.

"Meteorologlar havayı kesin olarak tahmin etmekte neden böyle zorluk çekmiştir?... Bir noktadaki değer bir derecenin onda biri kadar az ya da çok olsun, kasırga orada değil de burada patlak verir ve felaketini esirgeyeceği diyarların üzerine salar."

HENRI POINCARE

Poincaré incelediği dinamiklerde aslında "kaos"la karşılaşmıştı. Zaman içinde, üç cismin hareketi önceki yollarından pek az bir farklılık gösteriyordu. Poincaré'nin çalışması yeni bir matematiksel olgu ileri sürüyordu; çok geçmeden diğerleri bu olguyu ileri taşıyacaklardı. ABD'de George Birkhoff, dinamik sistemler üzerindeki çalışmaları topolojiye taşıdı; noktaların birbirine bağlanma biçimleriyle, bir yüzeyin bir başkasına dönüşüp dönüşemeyeceğiyle ilgili saf matematiksel bir geometriydi bu. (Bakınız *Evrenin Şekli Nasıldır?*)

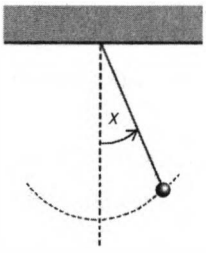
Fakat kaos tümüyle soyut bir inceleme alanı değildir. Poincaré kaosla astronomik araştırmaları sırasında karşılaşmış olabilirdi; fakat kaos, etkilerini pratik konularda da gösteriyordu. Denklemleri model alan bir elektrik diyodu ilk değerlere bir duyarlılık gösteriyordu. Böylece yeni bir araştırma alanı olarak kaos kuramı ortaya çıktı; mekanik, radyo salınımları, kontrol kuramı ve soyut matematik gibi birbiriyle alakasız konular arasında bağlar kuran bir alandı bu.

Garip Çekiciler

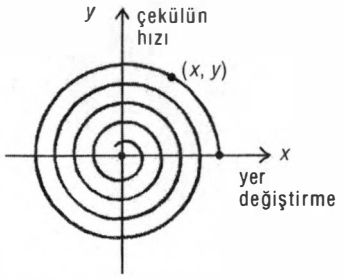
Poincaré dinamik bir sistemde farklı hareket fazlarını betimlerken soyut bir noktalar uzayında yeni bir tür grafik kullanmıştı. Ona göre bu faz-uzay dinamiklerine açılan hayati önemde bir pencereydi; bu yüzden biz de sıradan sarkaca bakalım ve nasıl işlediğini görelim.

Basit sarkaç bir ucundan sabit bir yere bağlanmış, diğer ucunda bir çekül bulunan kaba bir çubuktur; ileri geri sallanır. Sarkacın hareketini betimleyen değişkenler dikeyle yapılan açıyı belirten x ve çekülün açısal hızını belirten y'dir. Başta y değeri 0 olacaktır. Sarkacı S konumundan başlatır, sallanmaya bırakırsak bir süre sonra yavaş yavaş enerjisini kaybedip duracaktır; bu yüzden zaman içinde x=0 ve y=0 olur. Sarkacın hareketi (x,y) noktalarını birleştiren iki noktada izlenen yollarla da betimlenebilir. Çekülün başlangıç noktası S ne olursa olsun, sarkaç yavaşlayıp salınımı azaldıkça bu yolun yavaş yavaş (0, 0) noktasına ulaşacağı tam anlamıyla öngörülebilir.

Bu örnekte "çekici" sarkacın durduğu noktadır; iki boyutlu uzayda hareketin sıfır, hızın sıfır olduğu başlangıçtaki (0,



SABİT SARKAÇ



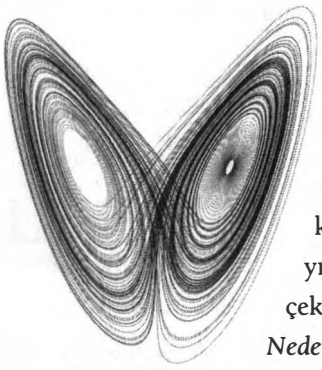
SABİT SARKACIN İKİ BOYUTLU FAZ-UZAYI

0) noktasıdır. Sarkacın herhangi bir başlangıç noktası için bu nokta sarkacın hareketini betimleyen herhangi bir helezonu *çeker.*

Eski bir duvar saatinin sarkacı biraz farklıdır, çünkü hiç durmadan ileri geri hareket eder. Bu sarkacın hareketini betimleyen yol helezonlar çizerek başlangıca dönmek yerine bir daire içinde hareket eder. Sarkacın hareketine bir parça müdahale edilirse, örneğin saat bir darbe alırsa hareketi betimleyen yol da dairenin gerisine doğru çekilecektir.

Bu iki tip sarkaç da matematiksel anlamda "garip"e uymaz. Bu sıfat, ne bir nokta ne de bir daire olan, alanın öncülerinden David Ruelle'nin tabiriyle uzayda hareketlerini dokuyan yolları çeken "tuhaf bir nokta kümesi" olan çekicileri belirtmek için kullanılır. Ruelle kasten matematiksel olmayan bir dil kullanarak bazen "galaksileri ya da havai fişekleri" çağrıştıran "nokta bulutları" betimlemiştir. Onun gözünde "garip çekici", "hakkında pek az şey anladığımız bu şaşırtıcı nesnelere gayet güzel uyan" bir terimdir. Bu tabir tutmuş, bilim camiasının ve kamuoyunun imgelemine hemen yerleşmiştir.

Lorenz'in meteorolojik araştırmaları bağlamında hava tahmini denklemlerinin belirlediği çözüm yolları üç boyutlu uzayda böyle bir "tuhaf" noktalar kümesi etrafında dolanıyordu. Ortaya çıkan görüntü -Lorenz çekicisi- bu yeni kaos biliminin sembolü haline geldi.



LORENZ ÇEKİCİSİ

Fakat geriye kalan dikkat çekici bir problem olmuştu: Lorenz çekicisi gerçekten *var mıydı*? Lorenz denklemlerine içkin bir özellik olmak yerine sayısal yöntemlerin yarattığı yapay bir kurgu muydu? Bu soru Lorenz'in keşfinden otuz yıl sonra yanıtlandı. Doğrulanmıştı: Lorenz'in garip çekicisi vardı ve bir fraktaldi. (Bakınız *Üç Boyut Neden Yeterli Değildir?*) Bu ortaya konduğunda, sonraki

adım çekicinin fraktal boyutlarını ölçmekti; bunun da yaklaşık 2,05 olduğu bulundu.

Nüfuslar ve Kaos İlkesi

Kaos zaman içindeki gelişmelerle ilgilidir. Lorenz'in hava tahmini denklemlerinde, zaman sürekli akar. Fakat kaos kuramına, zamanın 0, 1, 2, 3 vs. gibi ayrı değerler olarak, 0 yılı, 1 yılı gibi ölçüldüğü başka denklemlerde de rastlanmıştı. Nüfus artışı uzun zamandır denklemlerle kuramlaştırılıyordu; ama o zamana kadar kimse bu denklemlere kaos perspektifinden bakmamıştı.

En doğrudan nüfus modeli, belli bir yılın başlangıcındaki nüfusu, önceki yılın başlangıcındaki nüfusun katı olarak verir. Katlanma ya da artma oranı $r=2$ ise (diyelim ki), bir yılın başlangıcındaki nüfus yarım milyon, sonraki yılın başlangıcındaki nüfus bunun iki katı, yani bir milyonsa; sonraki yılın başlangıcında nüfus iki milyon olacaktır. Bu adım adım ilerleyen mekanizmada zamanı $n = 0, 1, 2, 3$ vs. yıl olarak sayarız. Aslında matematiksel simgelerle, bir yılki P_{n+1} nüfusunu, önceki yılki P_n nüfusundan hareketle şu temel denklemi adım adım kullanarak buluyoruz:

$$P_{n+1} = r \times P_n$$

Fakat bu tip bir denklem gerçekçi olmayan bir sonuç verir. Nüfus oranlı olarak arttığından (bu denklem bu yüzden lineer bir denklem olarak tanımlanır), sonsuza kadar artmaya devam eder. Nüfus sayımları ve tarih bunun gerçek dışı olduğunu göstermiştir. Daha iyi bir denkleme ihtiyaç vardır.

Daha incelikli bir denklem şu olabilir:

$$P_{n+1} = (r - sP_n) \times P_n$$

Buradaki yeni büyüme oranı $(r - sP_n)$ nüfusun halihazırdaki büyüklüğüne dayanır ve nüfus arttıkça azalır. Daha önce olduğu

gibi başta nüfus yarım milyonsa, $r = 2$'yse ve $s = 0{,}04$ dersek bu denklemden yola çıkarak bir sonraki yılın başında nüfusun 990.000, ondan sonraki yılın başında da 1.940.706 olacağını hesaplayabiliriz. Bu değerlerin temel modeldeki bir milyon ve iki milyon öngörüsünden az olduğunu görüyoruz.

Bu denklemle, denklemin daha incelikli, (meşhur) lojistik biçimini geliştirmek mümkündür:

$$x_{n+1} = r(1 - x_n)\,x_n$$

Burada x_n değişkeni 0'dan 1'e kadar bir ölçekte ölçülür; fakat gerekirse, nüfusun gerçek büyüklüğünü bulduğumuz cevapları r'nin s'ye oranıyla, burada 2 / 0,04 = 50'yle çarparak yeniden elde edebiliriz. Fakat burada daha çok denklemin kendisiyle ilgileniyoruz. Bizi kaosun alanına götürüyor.

x_n ve $1 - x_n$'in çarpımı denklemi lineer olmaktan çıkarıyor; bu denklemle birlikte artık kaos kuramıyla uğraşmaya başlamamızın sebebi de bu. Matematiksel olarak kaos non-lineer (lineer, çizgisel olmayan) denklemlerin bir özelliğidir.

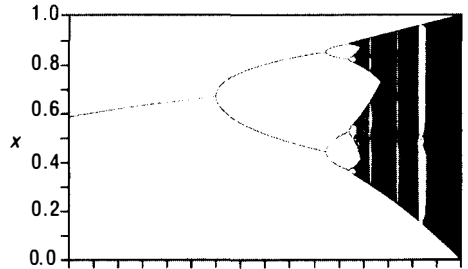
Daha önce olduğu gibi $r = 2$ dersek, 0 yılında baştaki değer neyse, yani x_0 neyse onu buluruz; nüfus değerleri her yıl 0,5 olan tutarlı bir uzun dönem değere doğru kayacaktır. (Örneğin x_0 = 0,6'ysa, adım adım alacağımız cevaplar $x_1 = 0,480$, $x_2 = 0,499$ vs. olacak, bu durum çabucak 0,5 değerine yerleşecektir.) Kaos kuramının diliyle konuşacak olursak benzersiz 0,5 değeri bütün değer dizilerini kendisine "çeker"; çekicidir.

Lojistik denklemdeki r değerini 3'ün biraz ötesine itersek bir tane değil, iki tane uzun dönem değeri olduğunu görürüz; öyle ki nüfus değerleri her yıl bu ikisi arasında salınır. Bunun sebebi bu r değerinin (sözde!) sabit noktasının istikrarsızlığıdır. Örneğin $r = 3{,}2$ olursa, iki çekici nokta yaklaşık 0,513 ve 0,799 olur; yine $x_0 = 0{,}6$ dersek lojistik denklem, birbirini izleyen yıllarda

0,768; 0,570; 0,784; 0,541; 0,795 vs. sonuçlarını verecek, bu iki çekici nokta arasında salınacaktır.

r'nin değerini biraz daha artırırsak çekici noktasının ikiye katlandığını görürüz; *r*'nin değerini daha da artırdığımızda çekici nokta sayısı da 4, 8, 16, 32 diye artar. Fakat çekici nokta değerleri bu kadar fazlalaştığında tahminde bulunmak zorlaşır. $r = 3{,}57$'ye varıp ötesine geçtiğimizde, 4'e ulaştığımızda, artık ayırt edilebilir bir örüntü yoktur, tahminde bulunmak imkansızdır. *r*'nin değerini artırmak, damlatan bir musluğu açmaya benzer. Başta damlalar düzenlidir, belirlenebilir; ama musluk biraz daha açıldığında damlalar seçilemez bir akış halini alır.

r'nin değerinin yüksek olduğu hallerde kelebek etkisi gerçekten de varlığını gösterir; nüfusun baştaki büyüklüğüne çok yakın değerler zaman ilerledikçe dikkat çekici derecede farklı biçimlerde gelişebilir. $r=4$ dersek ve bunu yakın, fakat birbirinin aynısı olmayan $x_0 = 0{,}600$ ve $x_0 = 0{,}610$ değerlerine uygularsak ilk birkaç değerden sonra bile altıncı yılda (x_6) bu iki değerin 0,025 ve 0,529'a vardığını görürüz.



KAOTİK FARKLILAŞMAYI GÖSTEREN ÇATALLANMA GRAFİĞİ

"Kaotik" farklılaşma örüntüsünün şekli bir "çatallanma grafiği"nde gösterilebilir. Grafik, birbirinden ayrı çekici noktaların r değerinin artmasıyla birlikte nasıl doğduğunu göstermektedir. Dikey eksende ölçülen başlangıçtaki x_0 değeri için (yine $x_0 = 0{,}6$) grafik farklı r değerlerinde sabit noktanın neredeyse ikiye ayrılan bir çatal şekli almaya başladığını gösteriyor. Dolayısıyla r'nin 3'e kadar olan değerleri için yaklaşılabilecek bir tek yer vardır; ama 3'ten sonra çekicilerin sayısı, ikiye, dörde, sekize ve... kaosa çıkar!

Bir Kaos Patlaması

Kaos gün ışığına çıktığından beri yayınlanmış eser sayısında muazzam bir artış oldu; o zamandan bu yana kaos geniş erimli, çeşitlilik gösteren bir kuram haline geldi; hâlâ da gelişmeyi sürdürüyor. Kaos kuramının matematiksel modellemeye uygulanmasında da bir bolluk oldu. Bugün açık denizlerde gemilerin hareketine hükmeden çizgisel olmayan denklemleri izleyen mühendisler yalpalama ve sarsılma örüntüsünü çıkarabiliyor; gemilerin alabora olmasına karşı önlemler alabiliyorlar. Kaos kuramı ve çizgisel olmayan denklemler finans piyasalarının hareketinden tutun kalbin ritmine varıncaya kadar kendilerini göstermiş durumdalar.

Bu uygulamalar ne kadar etkileyici olsa da kaosun hayal gücü üzerindeki etkisi ne kadar kuvvetli olsa da bazı sınırlar vardır. Baştaki koşulların duyarlılığına dayanan kaos ilkesi *bazı* fiziksel süreçlerin kuramsal bakımdan imkansız olarak öngörülmesi gerektiğini ileri sürer. Uzun vadeli hava tahminleri bu gruba girer, çünkü zamanın bir noktasında hava koşullarının *kesin* olarak bilinmesine bağlıdır; bundan da hiçbir zaman emin olamayız. Kaçınılmaz hatalar tahminin yanlış çıkması için yeterli olacaktır.

Başka bir deyişle, kanatlarını çırpmak ya da çırpmamak tamamen şu Brezilya'daki kırlangıç kuyruğun bileceği iştir.

KIRILAMAZ BİR ŞİFRE YARATABİLİR MİYİZ?

Şifreler, Enigma makinesi ve kuantum bilgisayarları

Sanatçı ve girişimci Samuel Morse 1843'te Washington'dan Baltimore'a ilk şifreli mesajını, "Tanrı neler yaptı!" cümlesini gönderdiğinde parlak bir şifre icat etmiş bulunuyordu. Bu şifre tüm dünyada, telgraf teknolojisinin bulunduğu her yerde kullanılacaktı. Bu elbette ki anlaşılabilir olmayı hedefleyen bir şifreydi; somut, pratik bir mesaj iletme yoluydu. Ama tarihte de gizli şifrelere ait başka bir dünya olmuştur; bu dünya karşısında büyüleniriz. İlk savaş donanımlarından 21. yüzyılın bilgisayar sistemlerine, sayılar şifre kurmada ve şifre kırmada hayati bir rol oynamışlardır.

İnsan deneyiminin merkezinde iletişimin yattığını söylemek bilinen bir gerçeği dile getirmek olacaktır; ama bizler sosyal hayvanlar olduğumuzdan iletişimsiz bir dünya hayal edilemez. Bildiğimiz diller şifrelerdir; kimin o dili anlayacağını kimin anlayamacağını belirleyen kuralları olan uylaşımlardır. Oysa "şifre" dendiğinde genellikle başka bir şey aklımıza gelir: Bir amaç uğruna, kasten sıradan dillerden ayrılmış; genellikle hedefi daha belirgin, ağzı sıkı, hatta gizli bir şey. Bu anlamda şifre belli gruplar ile bireyler arasında (bilgisayar çağındaysa makineler arasında), izleyen gözlerin hoş karşılanmadığı bir ortamda iletişimin bir yolu haline gelir.

Anahtardan Şifreye

Şifre yaratmanın tarihsel olarak popüler bir yöntemi anahtar kullanmaktı. Bu, bir mesajdaki harflerin belli bir sisteme göre ya da yerlerine sembollerin geçirilmesi yoluyla değiştirilmesi anlamına gelir. Mesaj, yani "şifresiz metin" (plaintext) şifreli bir metne çevrilir, daha sonra da alıcı tarafından şifresi çözülür.

Anahtarın ilk örneklerinden biri Jül Sezar'ın kullandığı "üçlü kaydırma sistemi"ydi. Bir mesajı şifrelemek için, şifresiz metindeki her harfin yerine, alfabede o harfin üç harf ilerisindeki harf yazılıyordu. Örneğin a harfinin yerine d konuyor, b'nin yerine e, böylece devam ediyordu. z harfine geldiğimizde, alfabe tükendiğinde, alfabe yeniden başlıyormuş gibi a koyuyorduk. Örneğin "düşman bir sonraki kasabada" mesajının şifreli hali "gxvpdqeluvrqudnlndvdegd" oluyordu. *(Çeviri sırasında Türkçe karakterler kullanılmamıştır.)

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
d	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*l*	*m*	*n*	*o*	*p*	*q*	*r*	*s*	*t*	*u*	*v*	*w*	*x*	*y*	*z*	*a*	*b*	*c*

ÜÇ KAYDIRMALI ŞİFRE SİSTEMİ

Sade bir mantığı olan "Sezar kaydırması" şifresi daha bilinir hale gelip emniyetsiz bir hal aldıkça, yeni ve daha incelikli şifreleme yöntemlerinin geliştirilmesi gerekti. Daha güvenli şifrelerde, harfler alfabeyi kaydırmaktan çok daha dahiyane biçimlerde yönlendiriliyordu.

Şifreleme, kelimelerin tamamı ya da kelime grupları için harfler kullanılmasını öngördüğünde teknik olarak "şifre"den (kod) bahsediyor oluruz. Anahtardan farklı olarak şifre (kod), şifre kelimelerin bir "sözlüğü"nü gerektirir, bu sözlük hem gönderende hem alıcıda bulunmalıdır. Gündelik kullanımda ise şifre, anahtar, kod sözcükleri arasındaki ayrım bulanıktır.

Şifreler, Anahtarlar ve Yunan Bir Tarihçi

Şifre kurmanın ileri yöntemleri yaygınlaştıkça, uzmanlaşmış şifre kırıcıların hizmetleri bir gereklilik halini aldı. Tipik bir şifre kırıcının matematikçi, istatistikçi, dil bilimci ve bulmaca çözücü karışımı biri olması gerekir. Hayal gücü geniş, yöntemli, hafızası kuvvetli biri olmalıdır; ufacık bir ipucunu çıkarıp bir şifrenin çözülmesinde kullanabilme becerisine sahip olmalıdır. Şifre kırıcıların şifreleyicilerin hilelerini anlayabilmeleri, şifreleme eğilimlerini yakından takip ediyor olmaları gerekir.

Şifre kırıcılar bir şifrenin işe yaraması için kurallar gerektiğini, zayıflığının da burada yattığını bilirler; kurallar bulunabilirse şifreyi çözme ihtimali vardır. Harflerin yerine rastgele harflerin geçirilmesiyle bir mesaj şifrelenebilir, ama bu mesajın şifresi alıcı tarafından çözülemeyecektir; sonuçta boşa zaman harcanmış olacaktır. Genellikle kurallar bir "anahtar"a çevrilir; anahtar, bir şifrenin işleyişini açığa çıkaran ilke ya da plandır. Tarihsel olarak önemli başka bazı şifrelere bakarak anahtarların nasıl işlediğini görmeye değer.

Birinci Dünya Savaşı sırasında şifre kurucular "Polybus'un 5'e 5 karesi"ne bayılırdı; Yunan tarihçi Polybus, kendi adını taşıyan bu kareyi harfleri sayı *çiftleriyle* şifrelemek için kullanmıştı. Bu karede her harf, biri sıradan biri sütundan bir çift rakama denk gelir. Örneğin E, 1'inci sırada 5'inci sütundadır; bu yüzden de 15'e karşılık gelir. Polybus karesi kullanıldığında, "enemy" (düşman) sözcüğü 1533153254 şeklinde şifrelenecektir. Açıktır ki elinde Polybus karesi bulunan biri bu mesajın şifresini çözebilir; bu kare aynı zamanda sistemin anahtarıdır.

	1	2	3	4	5
1	A	B	C	D	E
2	F	G	H	I/J	K
3	L	M	N	O	P
4	Q	R	S	T	U
5	V	W	X	Y	Z

5'E 5 POLYBUS KARESİ

1918'de Albay Fritz Nebel, Polybus karesinin 1, 2, 3, 4, 5 rakamları yerine A, D, F, G, x harfleriyle yazıldığı

bir versiyonunu geliştirdi. Bu harflerin Morse şifresinde sesleri farklıdır; bu yüzden aktarıldıklarında başka seslerle karıştırılmaları pek mümkün değildir. Polybus karesinin "güvenliği artırılırken", tablodaki alfabe de rastgele düzenlenmişti.

"Enemy in next town" (düşman bir sonraki kasabada) mesajı şu şekilde şifrelenebilir: XDGAXDFXDXDGGAGAXDADFAFADAAFGA. Biraz daha süslemek için, şifrelenmiş mesajı göndermeden önce karıştıracak *ikinci* bir anahtar daha konulabilir. Fakat bu tip anahtarları olan şifrelerin kendilerine özgü açıkları vardır ve neredeyse hemen kırılabilirler.

		D	F	G	X
A	B	X	W	K	C
D	O	Z	A	I/J	Y
F	T	F	U	P	M
G	N	L	Q	H	R
X	S	E	V	D	G

FRITZ NEBEL'IN GELİŞTİRDİĞİ POLYIUS KARESİ

Makineler ve Matematikçiler

Bir mesajı Polybus karesi gibi bir grafik kullanarak elle şifrelemek uzun zaman alan bir süreçtir, özellikle de savaş koşullarında gerçekleştiriliyorsa hatalar yapılabilir. Mekanik bir süreçtir bu, neden gerçekten de makine kullanılmasın ki? "Enigma" (Yunanca bilmece anlamına gelir) bir Alman aygıtıydı; gün ışığına ilk kez 1923'te çıkmış, askeri kullanım için değil de ticari olarak hassas bilgileri aktarmanın bir yolu olarak pazarlanmıştı. Daha sonra İkinci Dünya Savaşı sırasında Bletchley Park'taki şifre kırma çabalarına konu olacak; nihayetinde sırları kriptograflar tarafından açığa çıkarılacaktı.

Enigma makinesi, bir mekanik bileşenler ve elektrik devresi bileşimi, yani elektro-mekanik bir aygıt kullanarak verileri değiştiriyordu. Makine tek bir eksen üzerinde düzenlenmiş üç diske (rotor) dayanıyordu; disklerin her birinde alfabenin 26 harfi bulunuyordu. Her diskin bir kenarındaki elektrik teması diskin öteki

kenarındaki temas noktasına iletiliyordu; her diske farklı bir akım veriliyordu.

Makinede alfabedeki harflerin bulunduğu bir klavye ve ışıklandırılabilen harflerin bulunduğu bir küme vardı. A harfine basıldığında farklı bir harf, diyelim ki P yanıyordu; ilk disk bir adım dönüyordu. 26 tuşlamadan sonra ilk disk bir devir yapıyor, ikinci disk bir adım dönüyordu; 26 tuşlamanın ardından üçüncü disk hareket etmeye başlıyordu. Ne zaman bir tuşa basılsa makinede farklı bir devre yaratılıyordu. Mesajı gönderenin A'ya daha sonra bir daha basması gerektiğinde, bu kez farklı bir şifreleme gerçekleşiyor, ille de P harfi yanmıyordu. Enigma makinesini karmaşıklaştıran, şifre kırıcılara karşı kuvvetli kılan da bu "çok alfabeli" yer değiştirmeydi. Hesaplara göre, ana modelde elektrik devreleri $26 \times 26 \times 26 = 17.576$ tuşlamadan sonra tekrarlanmaz; sınırlı bir olasılıklar yelpazesidir bu.

İdeal olan, bir şifreleme makinesinin bir şifre kırıcının yararlanabileceği özellikler göstermemesidir. Enigma'nın zayıf düştüğü yer de burası olmuştu. Şifrelemenin diskler sayesinde döngüsel bir nitelikte olması dışında makinenin iki zaafı daha vardı:

- Bir harf, kendisi olarak şifrelenemiyordu; dolayısıyla A'nın şifresi A'dan başka bir şey olmalıydı.
- Enigma tersine çevrilebiliyordu. A, P olarak şifrelendiyse, P tuşuna basmak (disklerin aynı konumda olması halinde) A sonucunu veriyordu. Bunun alıcıya yararı oluyordu, ama şifre kırıcıya da yararı dokunuyordu.

Mesajı gönderen kişi, diskler üzerinde üç harfi en üste getirerek, örneğin RSM yaparak makineyi en başta ayarlayabiliyordu. Diyelim ki gönderen "Enemy in next town" (Düşman bir sonraki kasabada) şifresiz metnini göndermek istiyor, alıcı da karıştırılmış PBNTAMJGLQWDLFZ şifreli metnini alıyor. Alıcı bu metni çözebilmek için kendi Enigma makinesini RSM'ye ayarlıyor ve tersten işliyordu; asıl şifresiz metni bulabilmek için şifreli metni tuşluyordu. Alıcının, gönderenin hangi anahtarla başladığını bilmesi açıkça hayati

önemdeydi; alıcının kullanacağı bu anahtar, her gün kullanılacak anahtarların bulunduğu bir şifre kitabında belirtiliyordu.

17.576 başlangıç konumunun yeterince güvenli olduğu düşünülmemiş olsaydı, şifre kırmanın karşısındaki güçlükler de kısa sürede ciddi biçimde artmazdı. Matematik işte burada devreye giriyordu. Üç disk sabitlendiğinde, başlangıç konumlarının sayısı artırılmış oluyordu; disklerin eksen üzerinde $6 = 3 \times 2 \times 1$ olası yerleşimi arasında bir *tercih* yapılması mümkündü. Böylece başlangıç konumlarının sayısı artarak $6 \times 17.576 = 105.456$ oldu. Beş disk arasından üçünü seçme imkanı getirildiğinde, bir artış daha oldu ve başlangıç konumlarının sayısı $10 \times 105.456 = 1.054.560$'a çıktı.

Bunların hepsi de Enigma makinesinin ön kısmına bir parça yerleştirilmesi öncesindeydi. Bu parça üzerindeki değişim devreleri, alfabedeki bazı harflerin çiftler halinde yer değiştirmesini sağlıyordu. Her başlangıç konumu için üç çift harfi bağlamanın 3.453.450 yolu vardı, her başlangıç konumu için on çift harfi bağlamanınsa 150 milyon farklı yolu vardı!

Bu şifreleme olasılıklarının çapı dikkate alındığında, şifre kırıcılar için bir "yem", anahtara dair ipucu verebilecek, yanlış denemelerin bir kenara bırakılmasını sağlayacak bir başlangıç kelimesi kullanılması temel önemdeydi. Örneğin bir mesaj "Çok Gizli" ya da "Heil Hitler" ibareleriyle başlayabilirdi.

Alman üst düzey komuta mensupları arasındaki iletişimler Lorenz makinesiyle şifreleniyordu; bu da teleks trafiğiyle birlikte kullanılan bir şifreleme makinesiydi. En az 12 diski vardı. Bu mesajları çözebilmek için İngiliz telekomünikasyon mühendisi Tommy Flowers dünyanın ilk programlanabilir bilgisayarı Colossus'u yapmıştı.

Açık Anahtarlı Şifreleme

Mekanik ya da başka türlü bir anahtarın varlığı şifreler için bir güvenlik zaafı yaratıyorsa çözüm ne olabilirdi? Cevap, büyük bir

şaşkınlık yaratmıştı: Şifreyi duyur! Eh, o kadar da değil, çünkü sadece alıcının bileceği hayati önemde bazı bilgiler olacaktı.

"Açık anahtarlı şifreleme" olarak bilinen bu yöntem, seçilmiş sayıların dağıtılmasıyla başlar. Bunu bir örnekle gösterebiliriz: Diyelim ki 3 ve 55 sayılarını herkes biliyor. Bunlar bir radyoda yayınlanmış ya da yerel kütüphanelerde bulunuyor olabilir. Şu bizim meşhur gizli mesajımız "düşman bir sonraki kasabada" her yerde bulunan bir şifre kitabında "18" olarak şifrelenmiş. Haberleşmeyi dinleyenler mesajın "18" olduğunu biliyorlarsa çözmek için şifre kitabına başvurabilirler.

Ne var ki 3 ve 55 sayılarını kullanarak "18" mesajını şifreleyip gönderebiliriz; böylece "18" dinleyiciden saklanmış olur. Çok eski bazı sayı kuramları, bir zamanlar dünyevi bir uygulaması olmadığı düşünülen kuramlar işte burada devreye girer. 3 sayısını kullanarak önce şu hesabı yaparız:

$$18^3 = 18 \times 18 \times 18 = 5832$$

Şimdi bu sayıyı 55'e bölelim ve bölmeden sonra kalan sayı üzerinde çalışalım. $5832 = 106 \times 55 + 2$ olduğundan, kalan sayı 2'dir. Şimdi bu 2 sayısını "18"in şifresi olarak alır, bunu iletiriz; 3 ve 55 sayılarını herkes bildiğinden herkesin mesajları çözebileceğini unutmayız.

Böylece alıcı mesaj olarak 2'yi okur, bu mesajı çözmesi gerekir. Alıcı 55 hakkında herkesin bilmediği bir şeyi bilmektedir; bu sayının iki asal sayının $p = 5$ ile $q = 11$'in çarpımı olduğunu bilmektedir. İşte burada Pierre de Fermat'nın keşfettiği bir teorem, Çin kalan teoremiyle birlikte devreye girmiş, saf sayı kuramı büyüsünün güçlü bir bileşimi yaratılmıştır.

Herkesin bildiği diğer sayıyı, 3'ü de kullanarak x sayısının, $3 \times$ x'in $(p - 1) \times (q - 1)$'e bölünmesi halinde kalanın 1 olduğu bir değere sahip olmasını sağlarız. Alıcının $p = 5$, $q = 11$ değerleri için $(5\text{-}1) \times (11\text{-}1) = 40$ olması halinde bu değeri bulması gerekir.

Böyle bir sayının var olduğunu biliyoruz; fakat yine de bulmamız gerekiyor. Böyle küçük sayıların söz konusu olduğu bizim örneğimizde $3 \times 27 = 81$ olduğunu, 81'i 40'a böldüğümüzde kalanın 1 olduğunu görürüz; bu demektir ki x'in değeri 27'dir. Mesajda "2" sayısını aldığımızda şifresini bu sayıyla çözmemiz gerekir.

Bunu yapabilmek için $2^{27} = 134.217.778$ hesabını yaparız. Bu sayıyı 55'e böldüğümüzde sonuç 2.440.322 olur, kalan da 18'dir, çünkü:

$$134.217.728 = 2.440.322 \times 55 + 18$$

Kalan, artık şifresi çözülmüş olan ilk mesajımız "18"dir.

"Dünyanın bütün kişisel bilgisayarları, yaklaşık 260 milyon bilgisayar Ç[ok] G[izli] Ş[ifrelenmiş] bir mesajı çözmek için işe koşulsaydı tek bir mesajı kırmak bile tahminen evrenin yaşının 12 milyon katını alırdı."

WILLIAM CROWELL,
ABD Ulusal Güvenlik Ajansının Müdür yardımcısı, 1997'de PGP açık anahtar aifreleme aistemini anlatıyor

Açık anahtar şifreleme yönteminin güvenliği, alıcının gizli bir unsuru bilmesine, bizim örneğimizde $55 = 5 \times 11$ olduğunu bilmesine dayanır. 55 gibi küçük bir sayı söz konusu olduğunda asal çarpanların 5 ve 11 olduğunu bulmak kolaydır. Fakat normalde uygulandığı gibi 1000 basamaklı bir sayı söz konusu olduğunda, asal çarpanları bulmak neredeyse imkansızdır. İki asal sayıyı çarpmak, işlemi tersten gerçekleştirip belli bir sayının asal çarpanlarını bulmaktan daha kolaydır. Herhangi bir sayı söz konusu olduğunda "Bu bir asal sayı mı?" sorusunu etkili bir bilgisayar algoritmasıyla cevaplamak mümkündür. Fakat asal çarpanları *bulmak* tümüyle farklı bir problemdir ve bu problemi çözmek için bilinen etkili

bir bilgisayar algoritması yoktur. (Bakınız *Asal Sayılar Neden Matematiğin Atomlarıdır?*) Bir ev bilgisayarı 20 basamaklı bir sayıyı çarpanlarına ayırabilir, fakat aynı işlemi 100 basamaklı bir sayıda gerçekleştirmeye çalışmak ciddi güçlüklere yol açacaktır. Bilgisayarlar daha etkili hale gelirken açık anahtarlı şifreleme mevcut teknolojinin çarpanlara ayırma gücünün dışında kalan daha büyük sayılara yönelebilir. Peki ama bunu her zaman yapabilir miyiz?

1978'lerde geliştirilen McEliece kripto sisteminde verilen açık anahtar tek bir sayı ya da sayı çifti değil, büyük bir sayı *blokuydu*. Kullanımıyla ilgili olarak ('matriks' denilen) bu blokun 644 sırası 1024 sütunu olması salık verilmişti. Bu blok mesajı şifrelemekte kullanılır; ama alıcı bu bloku üç ayrı bloka nasıl ayıracağını da bilir; sayının asal çarpanlara ayrılmasına denk düşen bir bilgidir bu. McEliece şifreleme sistemi pratikte kullanılacak kadar verimli olmasa da telafi edici bir özelliği vardır: Mevcut yöntemlerle uzaktan şifresi kırılamaz.

Kuantum Şifre Kırıcılar

Açık anahtarlı şifreleme, şifreleme teknikleriyle ilgili olarak yolun sonu gibi görünebilir. Ama ne kadar uzağa gidebiliriz? Gizliliği daha da mı artırmamız gerekiyor? Kuantum bilgisayarları, açık anahtarlı şifrelemede asal sayı yönteminin pabucunu dama atacak bir teknoloji *olabilir*. "Klasik" bilgisayarlar çok büyük sayıların asal çarpanlarını bulamıyorlar, ama planlama aşamasındaki kuantum bilgisayarı asalları ortaya çıkarabilecek bir verimlilik artışı sunuyorlar. Bunu yapabilmeleri çok ciddi bir mesele olacak; çünkü bu, bugün e-postaların güvenliği ve web sayfalarını korumak için kullanılan şifreleme sistemlerinin kırılabileceği anlamına gelecek.

Peki, kırılamaz bir şifre yaratabilir miyiz? Şimdilik cevabımız "evet", yaratmış da bulunuyoruz: McEliece şifreleme sistemi hâlâ emniyetli, kuramsal kuantum bilgisayarına karşı bile. Fakat "Gözün burada olsun!" denmesi de gerekiyor. Şifre kurucular ve şifre kırıcılar arasındaki savaşta bahisler hep yükseliyor.

MATEMATİK GÜZEL MİDİR?

Müzik, sanat, altın sayılar ve Fibonacci dizisi

Matematikte güzellik fikri herhalde ilginç bir fikirdir. Bir Leonardo da Vinci çiziminin ya da bir Mozart bestesinin güzelliğini hemen takdir ederiz; ama bırakın sayfalar dolusu bilinmeyen sembolü bilimsel bir teorinin güzelliği nerededir ki? Matematik şaşkınlık verebilir, zorluklar çıkarabilir, çözümden doğan bir tatmin sunabilir, bir formülün özlü ifadesini beraberinde getirebilir. Ama güzellik sunabilir mi? Kesin olan iki şey var. Birincisi matematikçiler sağlam bir güzellik hissi geliştirir; ikincisi sanat tarihi güzellik fikri ile matematiksel ilkeler arasında bir dizi bağlantıyı ortaya koyar.

"Matematik güzeldir" sözü, çarpım tabloları ve yüzdelerle uğraşan bir okul çocuğuna pek bir şey ifade etmeyecektir. Bir matematikçi matematiksel bir kurgunun ya da teoremin güzelliği karşısında kendinden geçtiğinde, durumu onun algıladığı gibi algılamak genellikle bakış açısında radikal bir değişim gerektiriyormuş gibi görünür. Birbiriyle çekişen bütün anlam katmanlarıyla "güzel" kelimesi gerçekten de matematiğe uygulanabilir mi?

Problemler güzelliğin tanımlanmasıyla başlar. Bugün birçok kişi güzelliğin öznel olduğu kanısındadır. Filozof David Hume, "şeylerdeki güzelliğin yalnızca onları düşünen zihinde bulunduğu" uyarısında bulunmuştu; Platon'un "güzellik görenin gözlerindedir" sözünün farklı bir ifadesidir bu. Fakat estetikçiler ile düşünürler her zaman aynı fikirde olmamışlardır.

Immanuel Kant'a göre güzellik nesnel bir özelliktir ve evrenseldir; mesele kedi gibi yürüyen modellere ve jönlere geldiğinde kamusal hayatta, üzerinde uzlaşma sağlanmış bir "güzel" sınıfı kesinlikle varmış gibi görünmektedir. Sekizeyleri ortaya çıkaran 19. yüzyıl matematikçilerinden Arthur Cayley (Bakınız *Hayali Sayılar Gerçekten Hayali midir?*), Platon'u rehberlik eden bir fener olarak görüyordu; fakat bu özel tartışmadan kaçınıyor, "Her şey için söz konusu olan durum matematiksel bir kuram için de geçerlidir; güzellik algılanabilir ama açıklanamaz," diyordu.

Açıklamak ne kadar zor olsa da güzelliğe karşı estetik bir duyarlılık bilim insanları ve matematikçileri motive eden güçlü bir etken olmuştur. 20. yüzyılın en büyük matematiksel fizikçilerinden Paul Dirac "İnsanın denklemlerinin güzel olması, o denklemlerin deneylere uymasından daha önemlidir" diyecek kadar ileri gitmişti. Belki aşırıya kaçan bir görüştü, ama Dirac bunu söyleyebilecek çaptaydı: Ne de olsa kendisi kuantum mekaniği tarihindeki en önemli olaylardan biri olan bir denklem bulmuştu.

Fakat tamamen bir ölçülemezler deryasının ortasında bulunmuyoruz. Müzikten mimariye ve resme, sanatların yüzeyini biraz kazırsak güzellik açısından genellikle hayati önemde görülen, esasen matematiksel olan ilkelerle karşılaşıyoruz; herhalde bunların hiçbiri simetri ve orandan daha matematiksel değildir.

Müzik ve Matematik

Müzik ve matematik genellikle birbiriyle bağlantılı uğraşlar ve beceriler olarak görülür; hatta bu alanlardaki beceriler beyinde aynı alanlara atfedilmiştir. Antik Yunan'da Pisagor ekolünden alimler sesin ve titreşen tellerin temel fiziğini biliyorlardı; müzikal ölçekler ile tam sayıların oranları arasındaki bağı kurmuşlardı. $\frac{2}{1}$ oranında en yüksekten en alçağa doğru seslerin değeri Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si, Do notalarından oluşan bir oktav oluşturur; yüksek Do'nun ses

dolgunluğu, alçak oktavdaki Do'nun ses dolgunluğunun iki katıdır. İkisinin arasında Do Majör akoru oluşturan notaların – Do, Mi, Sol – ses dolgunlukları Do'yla ilişkili olarak $\frac{5}{4}$ ve $\frac{3}{2}$ oranlarındadır. Hertzle ölçersek, alçak Do'nun ses dolgunluğu 261 hertzse, $\frac{3}{2}$ oranındaki Sol'ün ses dolgunluğu 391,5 hertzdir.

Oranların değiştirilmesiyle, müzik uyum ya da uyumsuzluk yaratabilir; uyum, müzikten aldığımız zevkin ana yönlerinden biridir. Müzik bilginleri müziğin yapılanma biçiminde, alımına hükmeden başka matematiksel ilkeler bulmuşlar, simetrinin -matematiksel bir ilkedir, böyle ilkeler varsa- kuvvetli bir rol oynadığını görmüşlerdir. Müziğin kuvveti ve çekiciliği genellikle tekrarlanan bir örüntüde yatar; bir örüntünün bir kez belirmesi tekrara nazaran kulağa zayıf gelecektir.

İlginç bir örnekte matematikçiler ve besteciler açıkça iç içe geçmiştir: Kampanolojide, yani çan çalma konusunda. Burada çanların belli bir sırayla çalınma biçimleri bestelerin niteliğini belirler. "Değişiklikler"in matematiksel örüntülerinin modern cebirdeki permütasyon grupları kuramıyla birçok ortak noktası vardır!

"Müzikten aldığımız zevk saymaktan, ama bilincinde olmadan saymaktan gelir. Müzik bilincinde olunmayan aritmetikten başka bir şey değildir."

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ

Güzellik ve Şekil

Müziği tartışırken oran ve simetriye değindik. Bu etkenler şekil ve yapı matematiğinin de hayati önemdeki bileşenleridir. Genellikle en basit halleriyle çok çekicidirler; sıradan bir dikdörtgen ve özellikleri örneğinde olduğu gibi.

En güzel şekilli dikdörtgen hangisidir? Kare, diyebiliriz;

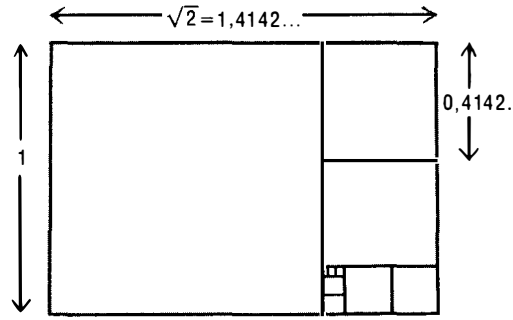
bütün kenarları eşit bir dikdörtgen. Bu tartışılır; çünkü kare simetri gösterir, ayrıca kendine has bazı özellikleri vardır: Örneğin köşegenler doğru açılarla kesişir.

Ama bir dikdörtgeni incelemenin başka yolları da vardır; oranlarını değerlendiririz. Dikdörtgen bir kağıt parçasını yarıya katlayıp kat yerinden kesersek elimizde iki dikdörtgen parça olur.

Bu dikdörtgenin uzun ve kısa kenarları $\sqrt{2}$ = 1,4142...'ye 1 oranındaysa, küçük dikdörtgenlerin kenarları da *kesinlikle* aynı oranlarda olacaktır. Britanya'da kağıt ölçmekte kullanılan "A" yönteminin temeli budur. A boyutlu bir kağıda 2'nin kare köküyle bağlantısından ötürü "$\sqrt{2}$ dikdörtgeni" denir.

$\sqrt{2}$ dikdörtgeni içinden "kare çıkararak" da incelenebilir. Kenarları 1'e $\sqrt{2}$= 1,4142.... olan $\sqrt{2}$ dikdörtgeninden bir kare çıkarırsak geride kısa kenarı 0,4142 uzun kenarı 1 olan bir dikdörtgen kalır.

Bu dikdörtgenden kenarları 0,4142... olan iki kare çıkarabiliriz; geride kısa kenarı 0,1716..., uzun kenarı 0,4142... olan bir dikdörtgen kalır. Bundan iki kare daha çıkarabiliriz; dikdörtgenden kare çıkarma işlemi sonsuza dek tekrarlanabilir. Bunun matematiksel olarak başka bir ifadesi şöyledir: [1;2,2,2,2,2...] Bu $\sqrt{2}$'nin sürekli kesir genişlemesidir. O halde $\sqrt{2}$ dikdörtgeninde tatmin edici bir simetri vardır; ama bu dikdörtgen o kadar da mükemmel değildir.

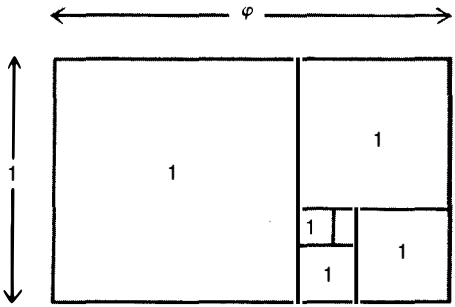


BİR İKİ DİKDÖRTGENDEN KARELER ÇIKARMAK

Altın Dikdörtgenler ve Altın Oranlar

Bütün dikdörtgenler arasında baş köşe "altın dikdörtgen"e aittir. Altın dikdörtgende oran $\sqrt{2}=1,4142....$ değil, φ'dir (fi). φ'nin değeri

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033...$$

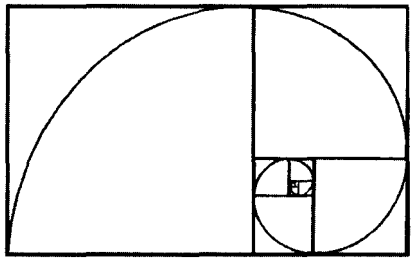


ALTIN BİR DİKDÖRTGEN VE KARELERİ

Altın sayı ya da altın oran denilen φ sayısı bütün matematikte karşımıza çıkar.

Altın bir dikdörtgenden bir kare çıkarırsak geriye kalan dikdörtgen *de* altın bir dikdörtgendir. Her aşamada bir kare çıkardığımızda φ'nin sürekli kesir genişlemesinin biraz özel olduğunu görürüz: [1:1,1,1,1....]

Altın bir dikdörtgende karelerin birleşme noktalarından geçen bir eğri çizdiğimizde, zarif bir görüntü karşımıza çıkar. Bu eğri dikdörtgenin geometrik özelliklerini ortaya çıkaran "logaritmik spiral"i verir ve başlı başına bir güzelliktir.



LOGARİTHMİK SARMAL

Matematikçilere göre φ'de hiçbir açıklama, hiçbir uygulama gerektirmeyen içkin bir güzellik vardır. Kendi başına yeterlidir. Fakat matematiğin ötesine geçtiğimizde altın oran φ'nin Batı kültürünün temelinde olduğunu görürüz. Bu sayının birçok özelliği olduğundan Luca Pacioli'nin *De divina proportione* (1509) adlı eserinin ardından "ilahi oran" olarak anılmıştır: Pacioli φ'yi insan bedeninin oranlarıyla, örneğin bedenin uzunluğunun baştan ayak parmaklarına kadar uzunluğa oranıyla açıklıyordu.

Sanatta, Leonardo da Vinci doğada beliren bir oran olarak ϕ'ye çok bağlıydı. Ondan yüzyıllar sonra da Section d'Or sanatçıları, kübist genel kabulden uzaklaşarak φ'nin mistik niteliklerini, her zaman simgelediği düzen duygusunu baştacı ettiler. Birçok sanatçı da altın sayı perspektifinden incelenmiştir. Sürrealist Salvador Dali'nin çok bilinen *Sacrament of the Last Supper* adlı eseri altın bir üçgenden oluşur; Dali bu resimde matematiksel figürler kullanmıştı. Önde gelen "dikdörtgen sanatçısı" Piet Mondrian'ın bir şekilde φ'nin büyüsünden kaçmayı başarmış olması, eserlerinde bu oranlara özel bir bağlılık göstermemesi bu yüzden ironiktir.

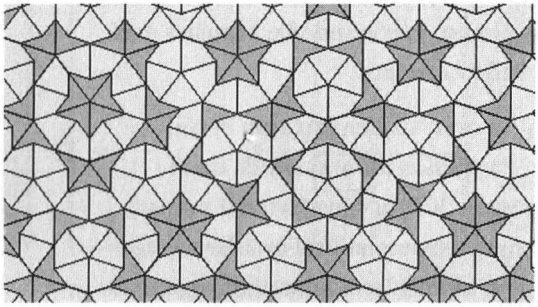
Bazen "altın kesit" ya da "altın orta" da denilen altın oranın en ileri giden, en kalıcı etkileri Parthenon'un oranları da dahil olmak üzere mimaride görülmüştür. 20. yüzyılda İsviçreli mimar Le Corbusier modernist yaklaşımıyla matematiksel oranları açıkça baştacı etmişti; "Modüler" kuramı tasarımların altın dikdörtgen planlarına dayanmasını öneriyordu.

Mozaik Döşemeleri ve Geometri

Sanatta matematiğin açık bir örneği, mozaik döşemeleri denilen türde düzenli dekoratif örüntülerde karşımıza çıkar: Düz bir yüzey üzerinde tam olarak birbirlerine uyarak ilerleyen şekil ya da karo düzenlemelerinde.

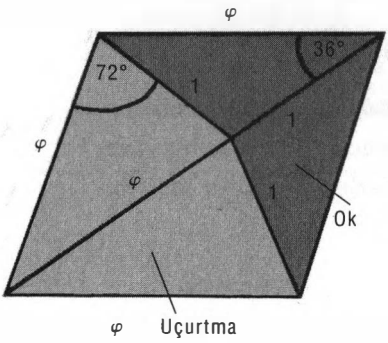
İslam geleneğindeki kültürel etkenler mozaiklerde etkili olmuştur. İslam geleneği genellikle Hz. Muhammed ve diğer dini kişiliklerin sanatta ve binalarda resmedilmesine karşı ağırlığını koymuştur. Sonuçta canlı ve zengin bir geometrik desen geleneği ortaya çıkmıştır. İspanya'da, Granada'da 14. yüzyıldan, Mağribi istilası döneminden kalma Elhamra sarayında etkileyici mozaikler bulunur. Avrupa sanatında mozaik döşemenin "ustası" olan Maurits C. Escher'in 1920'de İspanya'yı ziyareti sırasında bu örneklerden etkilendiği düşünülmektedir.

Bir döşeme, örneğin sekizgenlerden oluşan bir döşeme kendisini tekrarladığında buna "periyodik" döşeme denir. Bu tür döşemelerde *öteleme simetrisi* vardır: Bunları düz bir yüzey üzerinde kaydırdığımızda önceki görüntünün üzerine tam olarak otururlar. Periyodik olmayan bir döşemede öteleme simetrisi yoktur. Örüntü kendi kendisini tekrarlamaz; gerçi bu tür döşemelerde de "rotasyonel" simetri vardır. (Bakınız *Simetri Nedir?*)



PERİYODİK OLMAYAN PENROSE DÖŞEMESİNE İNCELİKLİ BİR ÖRNEK

Sir Roger Penrose periyodik olmayan birkaç döşeme keşfetmiştir; bunlardan biri sadece iki şekle dayanmaktadır: bir uçurtma ve bir mızrak. İki şekil de kenarları birbirine eşit ve paralel olan bir eşkenar dörtgenden elde edilmiştir. Uçurtma ve mızrağın kenarlarının altın sayı oranında olması da şekle ayrı bir ağırlık vermektedir.



ALTIN ORANLARLA UÇURTMA VE OK

Bu periyodik olmayan döşemeler güzellikleri bir yana, yeni bir bilim olan "kristalimsiler" alanında da ciddi araştırmalara konu olmaktadır.

Sayıların Güzelliği

Buraya kadar belli tür oranlara, bu oranların güzelliğin estetiğinde oynadıkları role, sonuçta ortaya çıkan nesnelere baktık. Fakat matematikte güzellik genellikle öze dair bir şey olarak algılanır: Şaşırtıcı bir sorunun, mantıksal bir kanıtın, zarif bir formülün, tatmin edici bir denklemin güzelliği olarak. Bunların en yalınları genellikle en çekici olanlardır.

Pierre de Fermat'nın meşhur son teoremi, sadeliğiyle bu güzel sorulardan biridir. 1630'larda formüle edilen bu teorem $x^n + y^n = z^n$ denkleminde 2'den büyük bir n sayısı için x, y ve z'nin değerlerinin tam sayı olamayacağını ileri sürüyordu. 6, 8 ve 9 tam sayıları $x^3 + y^3 = z^3$ denklemini neredeyse doğrular; çünkü $6^3 + 8^3 = 216 + 512 = 728$'dir, 9^3 de 729'a eşittir; fakat denklemin sol tarafını sağ tarafına *kesinlikle* eşit kılacak tam sayılar bulamayız. Teoremin güzelliği bozulmamış, şaşırtıcı niteliğinde de yatar; hiçbir zaman bulunamayacakmış gibi görünen bir kanıttan uzak olmasında da yatar. Teoremin doğruluğu ancak 350 yılı aşkın bir süre sonra, 1990'larda kanıtlanmıştır.

Sonra bir de sayılar vardır. Matematiksel zihinler sayıların kendisinde, çeşitliliklerinde, düzenlenme ve dizilimlerinde keskin bir güzellik algılar. "Fibonacci dizisi" en basit tam sayı dizilerinden biridir; matematik ilmine 1202'de (Pisalı Leonardo olarak da bilinen) Fibonacci tarafından katılmıştır. Fibonacci dizisinin durumuna adanmış akademik bir dergi vardır; dizinin yeni özellikleri de keşfedilmeye devam etmektedir. Müzik bestecilerinin bestelerini bu diziye dayandırdığı bile iddia edilmiştir.

Standart Fibonacci dizisinin güzelliği matematiğinde yatar. Diziyi yazabilmek için tek hatırlamamız gereken 1, 1 sayılarıyla başladığını hatırlamaktır. Üçüncü terim bunların toplamı, yani 1+1=2'dir, böylece dizi 1,1,2 olur. Dördüncü terim *önceki* iki terimin toplamı, yani 1+2=3'tür, böylece dizi 1,1,2,3 olur. Her terim önceki iki terimin toplamıdır, böylece Fibonacci dizisini oluşturabiliriz:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610...

Fakat bundan fazlası söz konusudur. Dizi altın sayı φ'yle bağlantılıdır. Her terimin kendisinden öncekine bölünmesiyle alınan oranlara baktığımızda, şöyle bir dizi elde ederiz:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \cdots$$

ondalıklar halinde ifade ettiğimizde bu dizi şu hale gelir:

1; 2; 1,5; 1,666; 1,600; 1,625; 1,615; 1,619....

Bu ondalık dizide, sayılar altın oran φ'nin 1,618033...'e eşit olan değerinin bir *altına inerek* bir *üstüne çıkarak* ilerler; dizideki terimlerin sayısı arttıkça oranların da φ'nin değerine daha fazla yaklaştığını görürüz. Böyle bir denklik tam da bir matematikçinin takdir edebileceği türden düzenli bir güzelliktir.

İcadın Güzelliği

Büyük matematikçilerin, kendi keşiflerinden hangilerinin en güzeli olduğuna dair bir fikri vardır; tercihleri de her zaman en açık, en incelikli olandan yana değildir. MÖ üçüncü yüzyılda yaşamış olan Siraküzalı Arşimet antik devirlerin en incelikli matematikçisi olarak bilinirdi. Hem soyut hem uygulamalı matematiğe katkıda bulunmuştu; fakat en değerli kabul edilen çalışmaları küre ve silindirle ilgili keşifleriydi; daha açık bir deyişle, bir silindir bir küreyi kapladığında, onunla aynı yükseklikte olup kürenin kenarlarına dokunduğunda kürenin yüzey alanının da hacminin de silindirin yüzey alanı ve hacminin $\frac{2}{3}$'üne eşit olacağıydı. (Bakınız

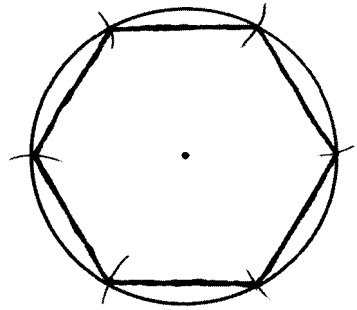
"Matematik, düzgün bakıldığında, sadece hakikati değil, ulvi bir güzelliği barındırır; heykelin güzelliği gibi soğuk ve ağırbaşlı, doğamızın zayıf yönlerine hiç hitap etmeyen, resmin ya da müziğin güzel tuzaklarından yoksun, ama ulvi bir saflığı olan, ancak en büyük sanatın gösterebileceği keskinlikte bir mükemmelliğe kadir bir güzellik."

BERTRAND RUSSELL,
The Study of Mathematics (1902)

Her Şeyin Bir Formülü Var mı?) Arşimet'in formüle dökülmemiş bu keşfi bütün yalınlığıyla onu büyülemişti.

Antik Yunan'da küre ve silindir geometrinin yapıtaşları olarak görülüyordu. Bundan yaklaşık 2000 yıl sonra kıta Avrupa'sının post-empresyonist ressamları bunu şiar olarak benimseyecek, temsili sanatı geometrik resimlere dönüştüreceklerdi. Önde gelen post-empresyonist ressamlardan Paul Cézanne sanatçı bir dostuna "doğayı silindirle, küreyle, koniyle ele alması" tavsiyesinde bulunmuştu; Picasso ve Braque gibi kübistler ise bu anlayışı yeni zirvelere taşımışlardı.

Arşimet ve Newton ile birlikte matematik aristokrasisi arasında sayılan, 19. yüzyılın önde gelen matematikçilerinden Carl Friedrich Gauss geometrik kurgularında birkaç fikri birden birleştirebilmiş; zarafetleri ve kuvvetleriyle matematikçilerin çok sevdiği kanıtlar ortaya koymuştu. Gauss, (mesafe ölçmek için değil) doğrular çizmek için bir gönyeden, daire ya da daire parçaları çizmek için bir pergelden başka bir şey kullanılmasına izin verilmeyen inşalar kurmaya odaklanmıştı.



PERGEL VE GÖNYEYLE ÇİZİLMİŞ BİR ALTIGEN

Bu şekilde eşkenar bir üçgen, bir kare, eşkenar bir beşgen, eşkenar bir altıgen oluşturmak çok zor değildir. Örneğin bir altıgen oluşturmak için bir r yarıçapı belirleriz; pergelin bacaklarını r kadar ayırarak önce bir daire çizeriz. Dairenin çevresine aynı düzende yayları işaretleriz ve böyle altı işaret koyduktan sonra başladığımız noktaya geri dönmüş oluruz. İşaretlediğimiz noktaları birleştiririz ve altıgenimiz ortaya çıkmış olur.

Öklit bu şekillerin nasıl yapıldığını biliyor olsa da eşkenar bir yedigen çizememişti. Bu problemi gençliğinde inceleyen Gauss

bunun mümkün olmadığını kanıtlamıştı. 11 kenarlı ya da 13 kenarlı eşkenar bir şekil çizmek de mümkün değildi. Gauss bu şekilleri çizememiş değildi; bu şekillerin çizilemeyeceğini *kanıtlamıştı*. Olumsuz bir sonucu kanıtlamıştı.

Gauss'un vardığı bu sonucun olumlu bir yönü de vardı. Matematikçimiz 17 kenarlı eşkenar bir şekil çizmişti. Dahasını da yapmıştı, çünkü 17 sayısının özel bir biçimi vardı. Şu şekilde yazılabiliyordu:

$$2^{2^n} + 1$$

Çünkü $n = 2$ olması halinde, $2^2 = 2 \times 2 = 4$'tü, $2^4 + 1$ ise $2 \times 2 \times 2 \times 2 + 1 = 17$'ydi. Gauss bu biçimin bir asal sayı vermesi halinde, o sayı kadar kenarı olan bir çokkenarlının oluşturulabileceğini göstermişti. Bu biçim sayılar (Fermat sayıları denir) $n = 0, 1, 2, 3, 4$ değerleri için sırasıyla 3, 5, 17, 257, 65.537 olan asal sayılardı; fakat n'in başka değerleri için bir asal sayı söz konusu olup olmadığını kimse bilmiyor. Örneğin $n = 5$ için Fermat sayısı 4.294.967.297'dir, fakat bu asal bir sayı değildir; çünkü:

$$4{,}294{,}967{,}297 = 641 \times 6{,}700{,}417$$

Güzellik Meselesi

O halde matematiği güzellikle ilişkilendirmek için elimizde birçok sebep vardır. Matematik müzik, sanat ve mimariyi, oran, simetri ve perspektifle beslemektedir. Matematikçiler bu alanlarda yaratıcılık gösterenlerden çok mu farklıdır? Matematik de kendine özgü bir biçimde estetik ilkeler üzerine kurulmuştur. "Görenin gözü" bir tarafa, matematikte güzellik olduğunu inkar edenler budala şüpheciler olmaktan öteye gidemeyeceklerdir.

MATEMATİK GELECEĞİ KESTİREBİLİR Mİ?

Matematiksel modeller, simülasyonlar ve oyun teorisi

1865'te, Amerika'da İç Savaş bitmeye yüz tutmuşken Abraham Lincoln bu parçalanmış ülkenin başkanı olarak ikinci kez başkanlık koltuğuna oturmaya hazırlanıyordu. Görevi alırken yaptığı konuşmada "gelecekten çok umutlu olduğu"nu dile getirdi; fakat bilgece bir tavırla "geleceğe ilişkin bir öngörüde bulunmaya cüret edilemeyeceği" uyarısında bulundu. Sonradan görüldüğü üzere, bu konuşmanın üzerinden bir ay geçmemişti ki Lincoln'ün şahsi tarihi bir suikastçinin mermisiyle karara bağlandı; gerçi ülkesi refah yolunda adımlar atmaya devam etti. Matematiğin uygulanması onun bu akıbetten kaçınmasını sağlayabilir miydi? Bu soru kulağa saçma geliyor, ama matematiksel "öngörü" yolları, siyasetten tutun hava tahminine, hisse paylaşımına dek çok çeşitli alanlarda bütün insan davranışlarına ve girişimlerine uygulanmıştır.

Sanki denklemler ve semboller kristal küreler haline gelebilirmiş gibi matematiği kullanarak öngörüde bulunulabileceği varsayımını hemen burun kıvırıp çöpe atabiliriz. 2008'de dünyayı sallayan küresel mali kriz matematiksel kibir hakkında utanç verici bir hüküm kesmiş gibi görünüyordu. Bundan önce mali kurumlar, gelişmeleri öngörsünler diye birkaç yıldır matematikçileri ("kuvant" deniyordu onlara) işe alıyorlardı. Eleştirmenlere göre,

matematikçilerin olasılığı ve istatistiği kullanarak geliştirdikleri bütün o ezoterik matematiksel modellerinin sonucu daha önce hiç görülmemiş bir çapta mali bir erime olmuştu.

Ama kaş yaparken göz çıkarmamak gerekir. Küresel bankacılık sisteminin son derece büyük risklerini, *koskoca* matematiksel modelleme alanıyla bir tutmak bir hata olacaktır. Modelleme çok daha gürültüsüz birçok biçimde yıllardır devam ediyor, çok daha akla yatkın, geçerli sonuçlar veriyordu. İş bir mali danışmana güvenmeye geldi mi bir kez daha düşünebiliriz; ama 21 Ağustos 2017'de gerçekleşmesi öngörülen güneş tutulmasının dakikası dakikasına gerçekleşeceğine güvenebiliriz.

Hayatın Modelini Çıkarma

Matematiksel bir model, gerçek hayattaki bir durumun matematik diliyle, değişkenler ve denklemler lügatine çevrilerek betimlenmesinin bir biçimidir. Model, neyin önemli olduğuna dair varsayımlarda bulunarak, gözardı edilebilecek bazı yönleri görmezden gelerek bir durumun *esas bileşenlerini* yakalamayı amaçlar. Bir matematiksel mekanizma kurulur ve sonra bu mekanizmanın geçerli olup olmadığı, modelin gerçek hayattaki durumu yansıtıp yansıtmadığı kontrol edilir.

> *"Tahmin etmek çok zordur; özellikle de gelecekle ilgiliyse."*
>
> NIELS BOHR VE DİĞERLERİ

Matematiksel modellerin geleneksel olarak fiziğe uygulandığı görülmüştür. Newton'ın, gezegenlerin hareketinin modeli olabilecek kütleçekim kuramı; manyetizma ile elektrik arasındaki ilişkinin modeli olan Maxwell denklemleri başlıca örneklerdir. (Bakınız *Her Şeyin Formülü Var Mı?*) Fakat bugün demografi, ekonomi, coğrafya, psikoloji, biyoloji, tıp, mühendislik vs. birçok alandaki durumların modelini

çıkarmak için çok geniş bir yelpazede matematiksel teknikler kullanılıyor. Örneğin bu yolla, şehirlerin büyümesi ve nüfusların artışı matematikçinin mikroskobuna yerleştiriliyor. Benzer şekilde genel nüfustan, hastaların bedenlerine kadar hastalıkların yayılması incelenebiliyor. Modellemenin alanı hiç olmadığı kadar genişliyor.

Modellemenin geniş çaplı tezahürleri dikkate alındığında, çok geniş bir yelpazede, şaşmaz bir biçimde olasılık, istatistik, küme kuramı ve "optimizasyon" teknikleri gibi incelikli matematiksel kavramlar kullanan çeşitli tekniklerin ortaya çıkmış olması hiç şaşırtıcı değildir.

Görelilik kuramının ışığında Newton'ın kütleçekim kuramı "yaklaşık" olarak görülebilir, fakat bu kuramdan çıkarılan model, tutulmaların tahmin edilmesinde hâlâ yeterlidir. Mali piyasaların modelinin çıkarılması konusunda hazır, kesin bir kuram yoktur; herhalde bu da insanların davranışlarını kestirmenin gezegenlerin davranışlarını kestirmekten çok daha zor olduğunu göstermektedir. Fakat sayısal veriler ortadadır; analistler istatistik teknikleri kullanarak temel eğilimleri değerlendirme çabasıyla denklemler formüle edebilirler.

Bilgisayarların artan gücüyle birlikte artık bütün alan genişlemiştir. Fakat teknolojinin ardında, bir modelin gerçekliği ne kadar *iyi* yansıttığını belirleyen matematiksel dayanaklar vardır.

Nüfusların Modelini Çıkarmak

Bir modelin ne kadar *iyi* işlediği sorusu elbette ki hayati önemde, fakat zor bir sorudur: Modelleme sorularının nihai cevapları nitelikleri gereği bir süre boyunca, gerçek olaylar onlara yetişinceye kadar doğrulanabilir olmayabilirler. Fakat nüfus araştırmaları, daha geçerli tahminlerde bulunmak üzere yeni tekniklerin eski modeller üzerine kurulduğu bir alana iyi bir örnektir.

Muhterem Thomas Malthus 19. yüzyılda *Nüfus İlkesi Üzerine Deneme* adlı eserinde nüfus artışına dair meşhur matematiksel modelini formüle etmişti. Malthus bu denemede karamsar bir sonuca, artan nüfusun yeryüzünün yiyecek üretme kapasitesini aşacağı sonucuna varıyor; salgın hastalıklar, veba, cüzam nüfusun geniş kesimlerini öldürmezse "muazzam boyutlarda bir açlığın" aynı sonuca yol açacağını söylüyordu.

Modelleme açısından Malthus'un kuramı nüfusun her 25 yılda bir ikiye katlandığı varsayımında bulunuyordu; bu yüzden örneğin N nüfusu 25 yıl sonra $2 \times N$ olacaktı; 25 yıl daha sonraysa $4 \times N$. Nüfus artışı çarpanları 25 yıllık aralıklarla şöyle olacaktı:

1, 2, 4, 8, 16, 32....

Malthus başta nüfusa yetecek kadar yiyecek (Y) olduğunu varsayarak yiyecek üretimine müsait araziler sınırlı olduğundan yiyecek miktarının nüfus kadar hızlı artmasının düşünülemez olduğunu savunuyordu. Dolayısıyla her 25 yıl için Y'yi topluyordu; böylece 25 yıl sonra $F + F = 2 \times F$ yiyecek olacaktı, 50 yıl sonraysa yiyecek miktarı $F + F + F = 3 \times F$ olacak, böylece devam edecekti. Bu kurama göre yiyecek artışı çarpanları şöyleydi:

1, 2, 3, 4, 5, 6...

Nüfus artışı çarpanları geometrik bir artış gösterirken (her seferinde 2'ye *katlanırken*) yiyecek artışı çarpanları aritmetik bir artış gösteriyordu (her seferinde 1 *artıyordu*). Malthus dolayısıyla artan nüfus için yeterli yiyecek olmayacağı sonucuna varmıştı.

Malthus'un çıkardığı bu model o devirde muazzam derecede etkili olmuştu; fakat geriye dönüp de bakıldığında bu kuramın çok yanlış olduğu görülür. Örneğin Birleşik Krallık'ın bugünkü nüfusunu tahmin etmek için kullanılmış olsaydı bazı tuhaf sonuçlarla karşılaşırdık. Malthus'un yazdığı dönemde, 1800 civarında Birleşik Krallık nüfusu 10 milyondu; onun kuramına göre 2000 yılına gelindiğinde bu nüfus yaklaşık 256 milyon, yani bugünkü rakamın dört katı olacaktı.

Hakkını yemeyelim; Malthus doğum kontrolü, göç, iç göç ve gıda teknolojisi gibi modern gelişmeleri dikkate alamazdı. Malthusçu model bir zaman kaybı değildir. Daha iyi varsayımlar kurulmasının, orijinal modelin geliştirilebileceği daha incelikli yaklaşımların önünü açmıştır. Artık nüfus artarken nüfus artış oranının gerilemesini sağlayabiliyoruz; bununla birlikte nüfusun büyüklüğü için bir cam tavan belirlenmiş oluyor. (Bakınız *Bir Kelebeğin Kanat Çırpması Gerçekten Bir Fırtınaya Yol Açabilir Mi?*)

Tahminler ve Sınırları

Günlük hayatın bazı alanlarında, gelecekte neler yattığını bilme iştahımızın karşısına araştırdığımız fenomenlerin düpedüz kararsızlık göstermesi dikilir. Para hareketleri, hava durumu, modellemenin gayretle uygulandığında sınırlılıklar gösterdiği alanlara iyi örneklerdir.

Finans dünyasında, borsa tahminleri profesyonel bir yatırımcının zamanının büyük bölümünü alır. Büyük merkezlerdeki borsa fiyat endeksleri -Dow Jones, FTSE 100, Nikkei- hepsi de hisselerden seçilen bir bileşime dayanır, her gün işlemler sonrasında bileşik bir figür yayınlanır. Ertesi günün endeksini tahmin etmek milyonlar kazanmak ya da kaybetmek anlamına gelebilir. Elbette ki zorluklardan biri finans piyasalarının, soyut "güven" mefhumundan, yani bazen finansla son derece ilgisiz görünebilen, yine de onu etkileyebilecek fenomenlere insanların verecekleri tepkilerle ilgili tahminlerden korkunç derecede etkilenmeleridir.

Matematiksel modellemede her zaman olduğu gibi burada da başlangıç noktası tarihsel verilerdir. Burada verilerin ele alınma biçimi, hükümlerin de devreye girdiği noktadır. Basit bir borsa fiyat modelinde önceki günün kapanış rakamlarına bakılabilir. Örneğin pazartesi, salı ve çarşamba günleri endekslerin sırasıyla 3700, 3900 ve 4100 olduğunu bilirsek bu endeksler perşembe gününe dair

tahmin yürütmenin dayanağı olarak kullanılabilir. Başka yararlı bilgiler yoksa bu okumaların ortalamasını alıp perşembe gününe dair tahminde bulunabiliriz:

$$\frac{3700 + 3900 + 4100}{3} = \frac{11.700}{3} = 3900$$

Bu tekniğe (basit) hareketli ortalama yöntemi denir. Hareketli denir, çünkü perşembe gününün endeksi alındığında, pazartesinin verisi bırakılır ve salı, çarşamba, perşembe günlerinin ortalamaları cuma gününe dair tahmini verir. Gelgelelim yükselen bir piyasada ortalama yöntemi her zaman bir batma noktası gösterir; baskın koşulları yansıtmadığını düşünen borsacılar bu yöntemi göz ardı edebilir. Bu durumu kısmen telafi etmek için eğilimi daha iyi yansıtmak amacıyla birkaç günlük tarih yerine çok yakın tarihe ağırlık verilebilir. Günlere ağırlık vermek başlı başına bir yargı meselesidir; farklı endeksler farklı modeller yansıtabilir. Gerçek hayatta tabii ki borsacılar belli bir grup şirket hakkında genel tahmini besleyebilecekleri özel bazı bilgilere sahiptir. Fakat tabii ki hiçbir tahmin modeli borsanın çökeceğini tahmin edemez.

Hava tahmini de hâlâ kesinlikten uzak bir bilimdir. (Bakınız *Bir Kelebeğin Kanat Çırpışı Bir Fırtınaya Yol Açabilir Mi?*) Bir doğruluk derecesi olan tahminler birkaç günle sınırlıdır; o zaman bile gerçek olayların ortaya çıkmasıyla birlikte son dakika değişikliklerine tabidirler. Zorluk şudur ki atmosferdeki ve okyanuslardaki akımların modelini veren, dolayısıyla hava durumuna hükmeden Navier-Stokes denklemlerini şimdiki zamanda kesin olarak çözmek imkansızdır. (Bakınız *Geriye Çözülmesi Gereken Bir Şey Kaldı Mı?*) Yaklaşık çözümlere dayanmamız gerekir; ama bunlar da karmaşıktır ve çok sayıda bilgisayar hesaplaması yapılmasını gerektirir.

Hava tahmini dışında, bir kuyruğun ne kadar hızlı oluşacağı sorusu gibi basit bir gündelik durum bile formüller anlamında kesin çözümlere direnen denklemlere yol açar. Mümkün olsa bile bir çözüm, ancak modellemenin başlangıcında yapılması gereken

varsayımlara dayalı bir ideal durum açısından geçerli olabilir. Yine de matematikçiler bu gibi durumları simülasyon yöntemiyle aşmaya çalışmışlardır.

Simülasyon matematiksel bir modelle deneyler yapıp gözlemlerde bulunmak anlamına gelir. Günün farklı zamanlarında işlenmesi gereken süpermarket çıkışlarının sayısını nasıl tahmin edebiliriz? Farklı hava koşullarında uçakların bir havaalanının üstünde nasıl daireler çizerek uçması gerekir? Bunlar simülasyonla yaklaşılan tipte sorulardır. Matematiksel deneyci modelin parametrelerini değiştirerek -süpermarket örneğinde gün içinde işlem yapılan zamanları; uçak örneğinde hava koşullarını "değiştirerek"- çeşitli durumlarda neler olduğunu "görebilir"; kesin çözümler çıkmasa bile. Tamam mükemmel değildir; ama tahmin ve doğaçlamaya nazaran daha iyidir; ne de olsa uçaklar örneğinde basit tahminler ve doğaçlama feci sonuçlar doğurabilir!

Oyunlardan Alınan Dersler

Bazı matematikçiler tahminde bulunma yolu olarak "oyun kuramı"nı benimsemişlerdir. Bu matematiksel kuramın öncüsü 1940'larda John von Neumann olmuştur; Neumann iki kişilik bir "ya kazanırsın ya kaybedersin" oyununu incelerken bu kuramı geliştirmiştir. Bu oyunlar iki oyuncu arasındaki rekabet durumunun modeliydi; oyuncular bilinen bir kar-zarar tablosuna göre akılcı tercihlerde bulunuyorlardı. Kuram, katılımcıların kendileri için bireysel olarak en iyisi neyse ona dayanarak akılcı eylemlerde bulunacağı yolunda bazı psikolojik varsayımlarda bulunur. "Ya kazanırsın ya kaybedersin" bir oyuncu kazanırsa diğerinin mecburen kaybedeceği anlamına gelir. Bu da demektir ki iki oyuncunun birbiriyle işbirliği yapmasının hiçbir anlamı yoktur.

"Ya kazanırsın ya kaybedersin" unsurunun varsayılmadığı oyunlar da vardır; burada da olası işbirliği meselesi devreye *sokulur.*

Buna iyi bir örnek Albert Tucker'ın tasarladığı "mahkumun ikilemi" problemidir. Bu problemde iki kişi, Alan (A) ve Bruce (B) otobanda bir soyguna karıştıkları şüphesiyle polis tarafından tutuklanır; fakat polisin ikili aleyhine kanıtları yetersizdir. Mahkumları nasıl ifade verecekleri konusunda fikir alışverişinde bulunmasınlar diye iki ayrı hücreye koyarlar. İki mahkum bir savunma stratejisi kurmak için iletişim kuramadıkları bu durumda hücrelerinde oturup kendileri için en iyi olan neyse onun planını yaparlar.

Alan ve Bruce'un "zararı" hapis cezasıdır; fakat bu cezalar da sadece polis sorgusunda bireysel olarak nasıl davrandıklarına değil, *ortak olarak* nasıl davrandıklarına da bağlıdır; biri itiraf eder de diğeri etmezse polis itirafçıyı, onun suç ortağından daha hafif cezalandırılmasını isteyerek "ödüllendirecektir": On yıl yerine bir yıl hapis cezası. Ama polise göre de iki mahkumun birden itiraf etmesi çok uygundur; bu durumda her ikisi için de dört yıl hapis cezası istenecek ve dava bu şekilde kapanmış olacaktır.

Mahkumun ikilemi problemi		Bruce	
		İtiraf eder	*İtiraf etmez*
Alan	*İtiraf eder*	4, 4	1, 10
	İtiraf etmez	10, 1	0, 0

Alan'ın ne yapması gerekir? İtiraf ederse alacağı en yüksek ceza Bruce'un da itiraf etmesi halinde dört yıl hapis cezası olacaktır. İtiraf etmezse, alacağı en yüksek ceza on yıl hapis olacaktır. Alan akılcı bir insan olduğundan itiraf etmeyi tercih eder; izlediği strateji en fazla olası cezayı, en aza indirme stratejisidir; buna "mini-max" stratejisi denir. Bruce da bu probleme aynı şekilde bakar ve o da itiraf etmeyi tercih eder; nihayetinde ikisi de dört yıl hapis cezasına çarptırılır. Alan ile Bruce aynı hücreyi paylaşıyor olup işbirliği yapabilselerdi,

sonuç muhtemelen farklı olacaktı. Aleyhlerinde yeterli kanıt bulunmadığından her ikisi de "suçsuz" olduklarını iddia edebilir, özgürlüklerine kavuşabilirlerdi.

Oyun Kuramı ve Nükleer Tehlikeye Atılma

Bu iki adi suçlunun kurgusal kaderi bir şeydir. Gerçek hayatta Ekim 1962'de Küba Füze Krizi dünyayı bir Soğuk Savaş nükleer patlamasının eşiğine getirdiğindeyse ortadaki bahis ölçülemeyecek kadar yüksekti. Fakat bu mesele de oyun kuramı açısından incelenmiş, karar almanın temel ilkeleriyle ilgili klasik bir örnek olup çıkmıştır. 1962'de Sovyetler Birliği'nin Küba'da, ABD anakarasını vurabilecek füzeler ateşleyebilecek füze ateşleme merkezleri kurduğu istihbarat raporlarıyla ortaya konmuştu. Sovyet nakliye gemilerinin füze yükleriyle Küba yolunda olduğu gözlemi, tehdidin düzeyini artırmıştı.

Oyun kuramı açısından ABD Başkanı John F. Kennedy ile Sovyet lideri Nikita Kruşçev'in seçenekleri nelerdi? Bu karmaşık bir durumdu, liderlerin ikisi de diğerinin ne yapacağını bilmiyordu. Geri dönüp bakıldığında bu meseleyi incelemenin bir yolu "ya kazanırsın ya kaybedersin oyunu" değilmiş gibi "aceleyle" düşünmektir. ABD'nin Küba'ya ambargo mu uygulayacağına yoksa bir hava saldırısı mı düzenleyeceğine karar vermesi gerekiyordu; Sovyetler Birliği'ninse Küba'dan çekileceğine mi yoksa orada kalmaya devam mı edeceğine karar vermesi gerekiyordu. Peki ama zararları ne olacaktı? Karamsar sonuçları sayısal biçime nasıl sokarız? Bunun bir yolu onlara sayısal değerler vermektir; feci bir sonucun değeri 1, tatmin etmeyen bir sonucun değeri 5 olacak, arada da kaybetme dereceleri yer alacaktır. Örneğin 5,2'lik bir zarar ABD açısından tatmin edici olmayacaktır, ama Sovyetler Birliği açısından gerçekten kötü olacaktır; bu anlamda bir "ABD zaferi" olacaktır. Durum ne kadar berbat olursa olsun sayılar *düzenlemeye*, bir anlamda da ölçmeye hizmet eder.

O gergin günlerde gerçekte olduğu gibi, her iki ülke de eşikte durmayı, savaşı tetikleyecek bir hareketten kaçınmayı başarmışlardır. ABD ambargo uygulamış, Sovyetler Birliği füzeleri Küba'dan çekmeye ve başka tavizlere razı olmuş, bir uzlaşma sağlanmıştı.

Küba füze krizi		Sovyetler Birliği	
		Geri çekilme	*Kalma*
ABD	*Abluka*	3, 3 (uzlaşma)	2, 5 (ABD yenilgisi)
	Hava saldırısı	5, 2 (ABD zaferi)	1, 1 (nükleer savaş)

Oyun kuramı artık ikiden fazla oyuncunun bulunduğu durumlara, oyuncular arasında işbirliğine ve grup kurmaya izin verilen, örneğin iki oyuncunun üçüncüye karşı ittifak kurabildiği oyunlara uygulanmaktadır. ABD'li matematikçi ve ekonomist John Nash'in geliştirdiği, kendisine 1994'te Nobel Ödülü kazandıran etkili çalışmada görüldüğü üzere oyun kuramı araştırmaları da ilerlemiştir.

Tahmin: Bir Sağlık Uyarısı

Zamanında yapılmış doğru tahminlerin felaketleri önleyebileceği durumları tahayyül etmek o kadar da zor değildir. Salgınlar, tsunamiler, depremler, volkanik patlamalar bu gruba girer; fakat bu tehditlerin üstesinden gelebilme becerilerimiz hatırı sayılır bir farklılık göstermektedir. Bu sismik olaylar başladığında yayılmaları tahmin edilebilir; fakat başlamadan önce ne zaman, nerede, hangi çapta başlayacaklarını tahmin etmek kutsal kaseyi bulmaya benzer. Sıklıkla tahminlerini olasılıkla birleştiren belirsiz bir öngörüye razı olmamız gerekir (Bakınız *Matematik Zenginliği Garanti Edebilir mi?*): "% 70 fırtına olacak" ya da "ekonominin % 1 ilâ % 3 büyümesi olasılığı yaklaşık % 40'tır" gibi. İklim değişikliğinin tahmin edilmesi gibi

dikenli bir konu, tahminlerin ancak genellikle tartışmalı olasılıklara dayanarak yapılabileceği kilit alanlardan biridir. Matematiği ve istatistiği temel aygıtları olarak kullanıp iklim değişikliği modelleri çıkaranlar tahminleri konusunda haklı olarak temkinlidirler. Olguların tahminlere uyup uymadığını ancak zaman söyleyecektir.

Newton'ınki gibi bazı matematiksel modeller bağlamlarının niteliği gereği mükemmele yakın sonuçlar verseler de bazı modeller kararsız çözümler doğuran denklemler içerirler. Bunlar kaos kuramını içeren türden modellerdir. (Bakınız *Bir Kelebeğin Kanatları Gerçekten de Bir Fırtınaya Yol Açabilir Mi?*) Bu modellerde birbirine yakın ilk değerlerden tümüyle farklı çözümler çıkarılabilir; bu ilk değerler genellikle belirsiz olduklarından tahminler de kesinlikten son derece uzak olur.

Körlerin ülkesinde tek gözlüler kral olurmuş diyormuşuz gibi gelebilir. Bir ölçüde bu doğrudur; fakat tek gözlünün görme gücü hep gelişmektedir. Geleceği tahmin etme konusunda başarılı bir girişimde bulunmanın anahtarı tatmin edici bir bilimsel kurama dayanan matematiksel bir modeldir. Matematik ve istatistik *kendi başlarına* pek işe yaramazlar; ama bilimsel kanıtlarla birleştiklerinde daha güçlenirler, daha amaca odaklı hale gelirler.

Matematik geleceği öngörebilir mi? Bazen, doğru bağlamlarda, doğru hükümlerle. Unutmamamız gereken bir yarar vardır. Nihayetinde kullanılabilir tahminler elde etsek de etmesek de matematiksel bir model kurmak kendi başına değerli bir egzersizdir. Değişkenleri belirleyip etkileşme biçimlerini belirleyebilirsek bu süreç bizi problem hakkında daha derinden düşünebileceğimiz bir konuma yerleştirir; problemi analiz etmek için daha iyi bir konumda oluruz. Özellikle de kullandığımız varsayımların geçerliliğine daha incelikle uyarlanmış oluruz; doğru varsayımlar olmazsa hiçbir tahminin geçerli olması beklenemez.

EVRENİN ŞEKLİ NASILDIR?

Topoloji, manifoldlar ve Poincaré sanısı

Gezginler, uzun yürüyüşçüler topografiyle, yürüdükleri arazilerin ayırt edici özellikleriyle, örneğin tepelerle ve vadilerle başa çıkmaya alışıktırlar. Kökeninde, Yunanca "yer" anlamına gelen "topos" sözcüğünün bulunduğu, geleneksel geometriden farklı olan "topoloji"de matematiğin bir dengi karşımıza çıkar. Değerli ve nispeten genç olan topoloji küme kuramı ve cebir kullanır. Hatırı sayılır bir başarı elde etmiş olan topoloji evrenin şekliyle uğraşma konusunda en büyük güçlüklerden biriyle yüzleşmiştir.

Topolojide, matematikçilerin uzunlukları, açıları, alanları ya da hacimleri ölçmeleri gerekmez. Onun yerine daha çok tek tek noktaların birbirine nasıl bağlandığı, yüzeylerin üzerinde delikler olup olmadığı, şekillerin başka şekillere dönüşüp dönüşemeyeceği gibi sorularla ilgilenirler. Topoloji nokta kümelerinin, eğrilerin, şekillerin, yüzeylerin ve uzayların özelliklerine yoğunlaşır.

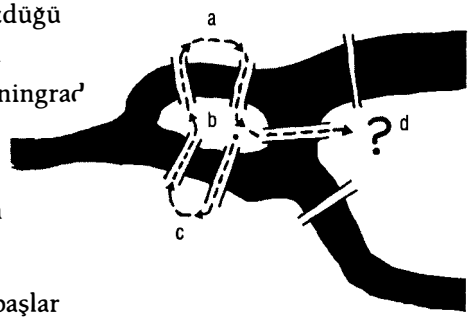
Doğru Bağlantıların Kurulması

Londra ya da New York ya da Paris metrosunun grafik haritasına şöyle bir baktığımızda hangi istasyonların hangileriyle bağlantılı olduğunu söyleyebiliriz. Bu bir haritadır; fakat istasyonların konumlandırılmasının aslında coğrafi açıdan nerede oldukları üzerinde çok genel bir etkisi vardır; onları birleştiren hatların

uzunluğunun da mesafelerle bir ilgisi yoktur. Bu harita bize demiryolu ağı içinde nasıl hareket edebileceğimizi gösterir; ne kadar uzağa gideceğimizi ya da yolculuğumuzun ne kadar süreceğini söylemez. Bize sadece bilmemiz gerekeni söyler.

Demiryolu haritası topolojik grafiğe bir örnektir. Topolojide bir grafik (yani ağ) köşe noktalarının (*vertice*, noktalar), burada istasyonların, birbirine "kenarlar"la (burada demiryolu hatlarıyla) birleştirildiği bir şemadır. Terminolojik bir başka ayrım yapacak olursak topolojideki grafikler kareli grafik kağıdı üzerine çizilmiş, bir nicelik ile diğeri arasındaki farkları gösteren geleneksel grafiklerin aynısı değildir.

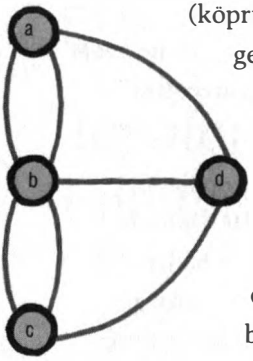
Topolojinin başlangıcı genellikle 1735'e, Leonard Euler'in "Königsberg köprü problemi"ni çözdüğü tarihe götürülür. Doğu Prusya şehri Königsberg'i (bugün Rusya'nın Kaliningrad şehridir) yedi köprüsünün her birinden sadece bir kere geçerek dolaşmak mümkün müdür? Çözüm üzerine düşünebiliriz.



KÖNIGSBERG KÖPRÜ PROBLEMİ

Fakat bu yürüyüşü planlamaya başlar başlamaz güçlüklerle karşılaşırız. Köprülerin altısını aşabiliriz, fakat bunu yaptığımızda daha önce geçtiğimiz bir köprüden geçmeksizin yedinci köprüden geçmemiz mümkün olmaz. Mümkün olan iki çıkarım vardır. Ya izleyeceğimiz yolu iyi planlamıyoruzdur ya da böyle bir şey yapılamaz. Euler yardımımıza yetişmiş, bir yol bulunmasının *imkansız* olduğunu kanıtlamıştır. Fakat aslında bundan daha fazlasını yapmıştır. Herhangi bir şehirde, herhangi bir köprü düzeninde bir yolu izlemenin mümkün olup olmadığını çabucak kontrol etmemizi mümkün kılan ölçütler üretmiştir.

Euler'in kanıtının devrimci yönü grafik kuramını kullanmış olmasıdır; çünkü gerçek Königsberg haritasının yerine kenarlar



TOPOLOJİK BİR GRAFİK OLARAK KÖNIGSBERG KÖPRÜLERİ

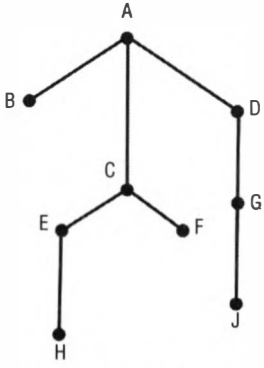
(köprüler) ve noktalardan (toprak alanlar) oluşan bir grafik geçirmiştir. Yararlandığı kavramlardan biri de bir köşenin derecesi olmuştur, yani bir köşede "buluşan" kenarların sayısı. Örneğin b'nin derecesi 5'tir (şemaya bakınız).

Euler'in sonuçta vardığı teorem, en fazla iki nokta dışında, bütün noktaların aynı derecede olması halinde bir şehrin bütün köprülerinden sadece bir kez geçilerek şehrin gezilebileceğini söylüyordu.

18. yüzyılda yapılan bu başlangıcın ardından grafik kuramı 19. yüzyılda gerçekten gelişti; o zamandan beri de her alana uygulandı. Bugün insanlar (noktalar) arasındaki milyarlarca bağlantının (kenarların) her saniye değişen bir grafik oluşturduğu "world wide web"de çalışıyoruz.

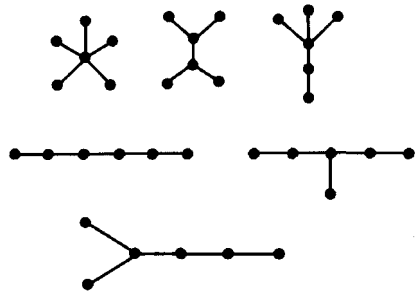
Ağaçlar ve Kökleri

Topolojide bir *ağaç*, özel bir grafik türüdür; burada metro sisteminin tersine bir köşeden diğerine bir tek yol vardır. Geleneksel bir aile ağacı bu sınıfta yer alır; "köklü" bir ağaçtır çünkü bir kök köşesi, ağacın tepesine yerleştirilmiş bir başlangıç noktası vardır. Bu tip köklü ağaçlar soy kütüğüyle ilgili kullanımlarının yanı sıra Charles Darwin'in türlerin evrimini gösteren "hayat ağacı" için seçtiği tipte köklü ağaçlardır. Köklü ağaçlar dip ebeveynlerle, ebeveynlerle, çocuklarla, ayrıca birinci dereceden ve ikinci dereceden kuzenlerle ilgilendiğimiz aile ağaçlarını betimlemek açısından yararlıdır. Veri depolamakta kullanılan bilgisayar sistemlerinde benimsenen klasör/dosya hiyerarşisi sayesinde bu ağaçların bir versiyonuna aşinayızdır.



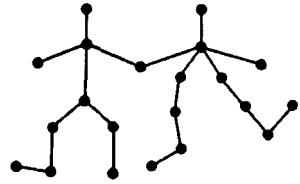
TOPOLOJİK BİR KÖKLÜ AĞAÇ

Fakat bazı ağaçlar köksüzdür. Tercih edilmiş bir kökleri yoktur; bu yüzden de bunlar için açık bir hiyerarşi bulunmaz. Belli sayıda noktadan yaratılabilecek köksüz ağaçları saymak uzun zamandır varlığını sürdüren bir problemdir. Altı noktayla yaratılabilecek, mümkün olan toplam altı köksüz ağaç olduğunu biliyoruz. (Doğruları ve noktaları yeniden düzenleyerek farklı görünen köksüz ağaçlar yapmak mümkündür, fakat bağlantılar bakımından sadece altı yapı mevcuttur.) Nokta sayısı fazla olduğunda ağaç çeşitliliği de şaşırtıcı olur. Örneğin 21 nokta olduğunda 2.144.505 farklı ağaç konfigürasyonu söz konusu olur.



ALTI NOKTASI OLAN KÖKSÜZ AĞAÇLAR

Köksüz ağaçlar kuramının organik kimyada uygulamaları vardır; organik kimyada bu ağaçlar moleküllerin oluşumunu betimler. Noktalar atomları, kenarlar da atomlar arasında kurulan ilişkileri ifade eder. Önemli olan sadece bir moleküldeki atomların sayısı değildir; atomların düzenlenme biçimleri, topolojik karakterleri de önemlidir. Aynı türden belli sayıda atomu farklı biçimde düzenlerseniz sonuçta farklı bir kimyasal bileşke elde edersiniz; yapısal izomeri olarak bilinen olgudur bu.

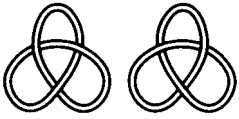


21 NOKTALI 2.144.505 KONFİGÜRASYONDAN BİRİ

Matematikçi Arthur Cayley 1870'lerde, kimyasal formülü $C_5H_{11}OH$ olan amil alkollerin atomlarının, o sıralarda kimyagerler sadece iki tanesini biliyor olsa bile, sekiz farklı şekilde düzenlenebileceğini hesaplamıştı. O tarihten bu yana, kuramsal olarak mümkün bütün amil alkollerin var olduğu bulundu. Cayley, laboratuarda deneysel olarak bulunmalarından çok önce matematiğin gücünü

kullanarak bu kimyasal bileşiklerin varlığını kanıtlamıştı; tıpkı dostu J. C. Adams'ın Neptün gezegeninin varlığını astronomik olarak belirlenmesinden önce matematiksel olarak çıkarsadığı gibi. Her iki kavrayış da matematiğin taşıyabildiği gücü göstermektedir.

Düğümlü Problemler



EŞDEĞER OLMAYAN DÜĞÜMLER

19. yüzyılın sonuna doğru, kuramcılar düğüm problemini halledip de düğümleri nasıl sınıflandıracaklarını bulduklarında topoloji de noktalar ve kenarların ötesinde bir genişleme gösterdi. Matematiksel bir düğüm gerçek bir düğümden farklıdır; boşta kalan bir ucu olmadığından çeşitli biçimlerde iç içe geçmiş tek bir doğruya benzer. Matematiğin ilgisi, iki düğümün "eşdeğer" olup olmadığında, yani bir düğümün kesilip biçilmeksizin bir başka düğüme çevrilip çevrilemeyeceğinde yatar. Örneğin birbirinin eşdeğeri olmayan iki yonca düğümü vardır.

19. yüzyılın ortasında büyük düğüm masaları toplanmış, on kesişme noktası olan 165 farklı düğüm olduğu gösterilmiştir. Çok kısa bir süre önce düğüm kuramı DNA"nın "düğümlülüğü"ne de uygulandı. Uygulamada DNA karmakarışık düğümler halinde bulunur; fakat düğümler çözüldüğünde kopyalama daha verimli olur; matematik de işte bu noktada katkıda bulunmaktadır.

Sabit Noktalar ve Tüylü Toplar

Topolojinin en önemli sonuçlarının ardında diskler yatmaktadır. "Brouwer sabit nokta teoremi" 20. yüzyıldaki Hollandalı mucit Luitzen E. J. Brouwer'in ismini taşır. Şu gözlemle başlarız: Bir disk bir masanın üzerine yerleştirilir de bir açıyla döndürülürse diskin bir noktası, merkezi hariç bütün noktaları hareket eder. Bu çok şaşırtıcı değildir, fakat Brouwer'ın sabit nokta teoremi bundan da fazlasını söyler ve çok geniş bir uygulanabilirliği bulunmaktadır.

Bu teoreme göre diski alır, masa üzerinde sınırlarını çıkarır, sonra diski çeker, küçültür, istediğimiz gibi katlar, elimizdeki sonucun belirlenmiş sınırlar dahilinde kalmasını sağlarsak her zaman ilk konumunun üstüne denk gelen bir nokta olur; bu yüzden de bu noktaya "sabit nokta" denir. Böyle birçok nokta olabilir; ama Brouwer böyle en az bir nokta olacağını söylemiştir. Teoremin partilerde eğlence olsun diye sunulabilecek ifadesine göreyse bir parça düz kağıt buruşturulup masadaki eski yerine konursa, kağıdın buruşturulmadan önceki halinde aynı yere denk gelen bir nokta olur.

Bu teorem katı bir topa, küplere, hatta çok boyutlu nesnelere uygulanabilecek şekilde genelleştirilebilir. Çok geniş bir alana yayılmıştır. Amerikalı matematikçi John Nash oyun kuramını araştırırken (Bakınız *Matematik Geleceği Tahmin Edebilir Mi?*) bu teoremi ikiden fazla oyuncunun söz konusu olduğu durumlarda denge stratejilerinin varlığını kanıtlamak için kullanmıştır ("Nash dengesi"). Sabit nokta teoremi ekonomide, bir piyasa ekonomisinde bazı fiyatların arzı ve talebi dengelemek gibi bir etkisi olduğunu göstermekte kullanılmıştır.

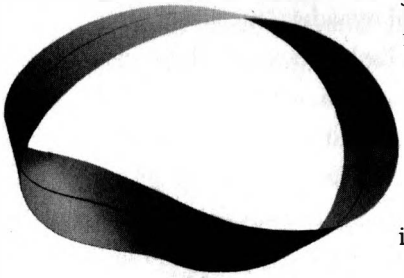
Brouwer'in teoremi bir *varoluş* teoremine örnektir. Bir şeyin varlığını iddia eder, ama bundan öteye gitmez. Bu gibi teoremler hesaplamalar ve ölçümlerin küçük bir rol oynadığı "niceliksel matematiksel kuram"a katkıda bulunur. Başka bir topolojik örnekse dikkat çekici "tüylü top teoremi"dir. Bu teorem, üstündeki her noktadan tüyler çıkan bir topumuz varsa bu tüyleri sürekli bir hareketle düz taramanın imkansız olacağını, en az bir tüyün dik duracağını (genellikle bir döngünün merkezindeki tüy) söyler. *Hangi* tüyün dik duracağını bilemeyiz, sadece birinin dik duracağını biliriz. Bu teorem bütün geometrik nesnelere uygulanamaz; çünkü bir torus şeklinde bütün tüyleri bir tanesini bile dik bırakmadan aşağı doğru taramak gayet mümkündür.

Önemsiz gibi görünen bu teoremin rüzgar örüntülerini incelemesi açısından bazı sonuçları vardır. Topu Dünya, aşağı

taranmış tüyleri de esen rüzgarın bir ölçüsü olarak düşünebiliriz. Bir tüyün yönü, o noktada Dünya yüzeyindeki rüzgarın yönü olacaktır; tüyün uzunluğu da rüzgarın kuvvetini verecektiir. Tüylü top teoremi Dünya üzerinde hiç rüzgar görmeyen bir yer olması gerektiğini söyler.

Manifold Şekiller ve Möbius Şeritleri

Bir "manifold", lokal yapısı, tek boyutlu bir nesne örneğinde sıradan doğru parçasına ya da iki boyut örneğinde sıradan bir diske benzeyen geometrik bir nesnedir. Bu örnekler n boyutlu bir manifold haline getirilebilir. Küre iki boyutlu bir manifold örneğidir; fakat bir deliği olan bir torus da başka bir manifolddur ve birden fazla deliği olan birçok torus olabilir. Manifoldlar bütünlükleri içinde bakıldığında karmaşık gibi görünebilecek geometrik nesnelerdir; ama bir kısımlarına bakıldığında o kadar da karmaşık görünmezler. Mesele küresel tablo ile lokal tablo arasındaki farktır; küre örneğinde bu fark, "düz" bir yerde durmakla küresel Dünya'yı uzaydan görmek arasındaki fark olarak ele alınabilir. Manifoldların geometrisiyle uğraşan da topolojidir.



MÖBIUS ŞERİDİ — HARİKA BİR MANİFOLD

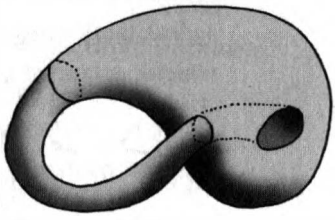
Şu da var: Küre ve torus yüzeyleri dönen manifoldlardır. Küre üzerinde bir noktaya diyelim ki dışarıyı gösteren bir ok takarsak, bu noktayı yüzeyin etrafında hareket ettirirsek ok her zaman dışarıyı gösterecektir; aynı şey torus manifoldları için de geçerlidir.

Fakat böyle bir şeyin söz konusu olmadığı aykırı manifoldlar da vardır. Meşhur Möbius şeridi bunlardan biridir; bir kağıt şeridinin kıvrılıp uçlarının birleştirilmesiyle oluşturulmuş iki boyutlu bir yüzeydir bu. Tek taraflıdır; üstüne yüzeye 90 derece açıyla dışarıyı gösteren bir

ok yapıştırıp bu oku şerit boyunca ilerletirseniz başlangıç noktasına geldiğinizde okun ters yönü işaret ettiğini görürsünüz.

Klein şişesi dönebilir olmayan manifoldlara bir başka ünlü örnektir. Bir Möbius şeridinden bile yapılabilir! Tekerlemede dediği gibi:

Klein diye bir matematikçi
Düşündü ki Möbius şeridi ilahi
Dedi ki: "Yapıştırırsanız
Kenarlarından iki şeridi
Tuhaf bir şişeniz olur
Benimki gibi



KLEİN ŞİŞESİ

Klein şişesini doğru düzgün görmek için dört boyut gerekecektir; dolayısıyla en iyi etkiyi şişeyi kesitlerle üç boyutlu olarak düşünerek sağlarız.

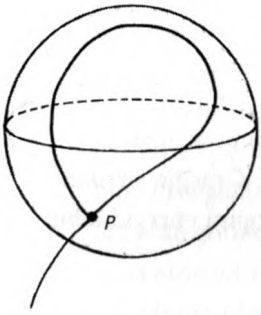
Bu manifoldların hepsi de -farklı özellikleri olan küre, torus, Möbius şeridi, Klein şişesi- iki boyutlu yüzeylerdir. Örneğin sıradan küre topun sınırıdır; top üç boyutlu olsa da küre topun yüzeyidir, bu yüzden de iki boyutludur.

Dönmeyen manifoldları, sonsuz uzunlukta silindirler gibi manifoldları bir kenara bırakır da düzgün şekilli manifoldları ele alırsak böyle iki boyutlu bir manifoldun bir küre ya da r sayıda deliği olan bir torus haline getirilebileceği görülür. Bu da iki boyutlu manifoldların bir biçimde sınıflandırılmasını beraberinde getirir.

Üç boyutlu manifoldların sınıflandırılma hikayesi çok farklıdır. En basit üç boyutlu manifold üç boyutlu küredir. Sıradan küreye benzer bir biçimde, üç boyutlu küre de dört boyutlu bir topun yüzeyidir; ya da dört boyutta merkezden eşit uzaklıktaki noktalar bütünüdür. Dört boyutu kolayca gözlerimizin önüne getiremediğimiz dikkate alınırsa üç boyutlu küreyi düşünerek üç boyutlu manifoldların karmaşıklığını anlamaya başlayabiliriz.

Bu konuda ilerlemeler kaydedilmiş olsa da üç boyutlu manifoldlar sınıflandırılmamıştır. Üç boyutlu manifoldların birçok tipinin belirlenmesinin getirisi çok büyük olacaktır; çünkü görünürde farklı olan soyut matematik ve uygulamalı matematik alanları ile bu manifoldlar arasındaki ilişkiler belirgin hale gelecektir. Büyük ödülse, böyle bir sınıflandırmanın evrenin şeklini aydınlatacak olmasıdır. Üç boyutlu manifoldları sınıflandırmaya yönelik araştırma programı son derece önemlidir.

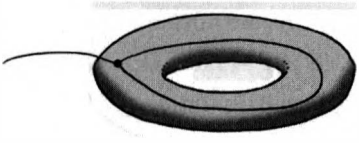
Üç boyutlu manifoldlar tarihsel olarak meşhur Poincaré sanısıyla iç içe geçmişlerdir.



İKİ BOYUTLU BİR KÜRE BASİT BAĞLANTILIDIR

Basit Bağlantılar ve Poincaré Sanısı

"Basit bağlantılı" manifoldlar Henri Poincaré'nin ileri sürdüğü meşhur sanının konusudurlar. Burada atıfta bulunduğumuz noktaları şöyle gösterebiliriz: Sıradan bir küre üzerinde bir nokta (P) düşünelim; bu noktaya bir ilmek iliştirdiğimizi ve ilmeği yüzeyin üzerinde gezdirdiğimizi hayal edelim. Bunu nasıl yaparsak yapalım yüzeyle bağlantımızı koruyarak bu ilmeği aşağı çekmemizi engelleyecek bir şey yoktur. Bu, bütün noktalar ve bütün ilmekler için geçerlidir; kürenin "basit bağlantılı" olduğunu söylememizi sağlayan şey de bu özelliktir. Oysa tersine torusun deliğinin etrafına yerleştirilmiş bir ilmek bu özelliğe sahip değildir; çünkü delik ipin bağlı olduğu noktaya kadar çekilmesini engelleyecektir.



TORUS BASİT BAĞLANTILI DEĞİLDİR

Daha önce belirttiğimiz üzere düzenli bir iki boyutlu manifold ya bir küreye ya da r sayıda deliği olan bir torusa denk olduğundan ve bu şekiller arasında basit

bağlantılı olan yalnızca küre olduğundan, herhangi bir iki boyutlu, basit bağlantılı manifoldun iki boyutlu bir küreye denk olması gerektiği sonucuna varabiliriz. Buraya kadar her şey tamam. Peki ya üç boyutlu benzeri?

İşte bu Poincaré sanısıdır: Üç boyutlu bir manifold basit bağlantılıysa üç boyutlu bir küreye denk mi olmalıdır? Üç boyutlu manifoldları sınıflandırabilseydik bu soruyu cevaplayabilir durumda olurduk; fakat bu sınıflandırma henüz tamamlanmamıştır.

Poincaré'nin 20. yüzyılın başında ortaya attığı bu soru matematiğin büyük sanılarından biri haline gelmişti. 1960'larda bu varsayımın n boyutlu bir versiyonu, n'nin 5'ten büyük ya da 5'e eşit olduğu örneklerde çözülebildi; bunun ardından da $n=4$ olması halinde varsayım kanıtlandı. Çözülememiş tek örnek üç boyutlu olan, $n=3$ versiyonuydu. Bunun da çok kısa bir süre önce münzevi Rus matematikçi Grigori Perelman tarafından çözülmesi büyük sansasyon yarattı. Çözümde kullanılan teknikler olağan topoloji alanının çok dışındaydı; ısı yayılımının matematiğine dayanıyordu. Perelman'ın Clay Enstitüsü'nün Poincaré sanısının çözülmesi için koyduğu milyon dolarlık ödülü kazandığı açıklandı, fakat matematikçi şimdiye kadar bu ödülü kabul etme konusunda bir girişimde bulunmadı. Öyle görünüyor ki bütün istediklerine sahip, mahremiyete değer veren ve şöhretle ilgilenmeyen biri.

Evrenin Şekli

Topoloji 20. yüzyılın başında öne çıktı; zengin bir biçimde genişleyerek kendisinin matematiğin yararlı bir dalı olduğunu gösterdi. Peki ya o büyük soru? Topoloji şekillerin, yüzeylerin ve uzayların içkin özelliklerinin geometrisiyse evrenin şekli ve boyutları nasıldır?

İnsan ölçeğinde yaklaşıldığında fiziksel evren kesinlikle çok geniştir. Bizim bulunduğumuz küçük kısım, güneş sistemimizden

oluşur; Güneş bize 8 ışık dakikası uzakta olan en yakın yıldızdır; ışığın Güneş'ten bize gelmesi 8 dakika sürer. Ondan sonraki yakın yıldız olan kızıl cüce Proxima Centauri ise yaklaşık 4,24 ışık yılı uzaktadır. Gözlediğimiz yıldızların çoğu bizim galaksimiz olan Samanyolu'ndadır; ama onun ötesinde aynı büyüklükte milyarlarca galaksi vardır. Edwin Hubble bu galaksilerin uzaklaştığını, ne kadar uzaklaşırlarsa o kadar hızlandıklarını göstermişti. Bu, Aleksandr Friedmann'ın değiştirdiği biçimiyle Einstein'ın genel görelilik denklemleriyle uyuşur. Evrenin Büyük Patlama anında yaratıldığı ve hâlâ genişlediği artık genel bir kabul görmektedir. Peki ama şekli nasıldır?

Evrenin şekli meselesi bizi manifold fikrine, yani görünen evrenin lokal perspektifine karşılık evrenin tamamının geniş çaplı perspektifi meselesine geri götürür. Lokal geometri bükülmeyi gerektirir; çünkü Einstein'ın genel görelilik kuramına göre büyük kütlelerin varlığı uzay-zamanı büker. Bernhard Riemann'ın kuramlaştırdığı, bükülmenin bir yerden diğerine farklılık gösterdiğini söyleyen geometriye (Bakınız *Paralel Doğrular Nerede Birleşir?*) başvurmamız gerekir. Geride o büyük soru, evrenin tamamının şeklinin nasıl olduğu sorusu kalır, burada da topolojinin yardımına ihtiyaç duyarız.

Fizikçi Ed Witten bu soru üzerine düşünürken topolojinin önemini teslim etmiş, "Topoloji bir şeyin, hiçbir şeyi kırmayacak şekilde o şeyi gerdiğinizde ya da büktüğünüzde değişmeyen özelliğidir," demişti; Einstein'ın genel görelilik kuramında uzay-zamanın yapısı değişebilir, ama topolojisi değişmez. Evrenin tamamı için dört boyutlu uzay-zaman yapısı, onu betimleyen üç boyutlu manifoldu belirlemeyi gerektirir.

Başka bir deyişle evrenin şeklini anlama çabamızda topoloji kuramı asli bir unsur olacaktır.

SİMETRİ NEDİR?

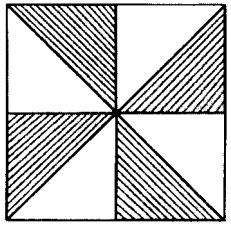
Örüntüler, ikilikler ve gerçekliğin temel niteliği

Simetri etrafımızda her yerdedir. Binalardadır, çiçeklerdedir, insan gövdesindedir. Simetriyi hemen tanırız; çünkü insan beyni gözlenen şeylerde düzenliliği ayırt etme eğilimindedir. Antik devirlerden beri hep, şaşırtıcı derecede çeşitli desenleri olan kar tanelerindeki gibi, doğadaki simetrinin güzellikle bir olduğu yolunda genel bir kabul olmuştur. Peki simetriyi nasıl tanımlarız? İnsanın aklına genellikle "denge" ve "örüntü" geliyor; simetri "üstün kararlılık" olarak bile tanımlanmıştır. Bu tanımlar estetik ve sanatsal duyarlılıklarımıza hitap etseler de matematik için farklı bir dile ihtiyacımız var.

Tek bir simetri tanımına varmak güç. Hiç kuşkusuz çoğu insanın bu terimle ilişkilendireceği özellikler vardır: Eşleşme fikri, bir şeklin tekrarlanması hissi, tekrarlanan bir örüntü. Simetri matematikte ve bilimlerde değişik kılıklarda beliren, çeşitlilik gösteren bir kavramdır.

Rotasyonel ve Yansıma Simetrisi

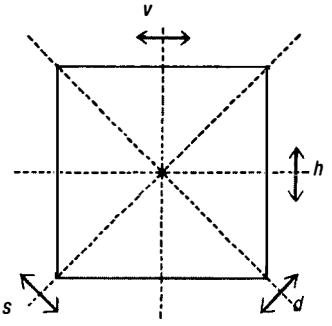
Şekillerin simetrisi genellikle rotasyonel ve yansıma simetrisi açısından tartışılır. Rotasyonel simetride bir rotasyon sonucu nereden bakılırsa bakılsın nesnenin aynı görüneceği (ya da matematikçilerin tabiriyle "nesneyi kendi kendisiyle örtüştüren") bir eksen saptamakla ilgileniriz. İki boyutlu bir diskte ve üç boyutlu



RÜZGAR GÜLÜ DESENLİ BİR KARE

bir kürede böyle bir simetri vardır. Bir diskte de bir kürede de sonsuz sayıda rotasyonel simetri bulunur.

Sonlu sayıda simetrisi olan şekiller, örneğin üzerinde rüzgar gülü örüntüsü olan iki boyutlu bir kare daha ilginçtir. Rotasyonel simetrisi vardır; çünkü bu şekli merkezinden geçen bir eksen etrafında saat yönünün tersine 90 derece döndürürsek "kendisiyle tekrar örtüşür"; rüzgar gülü desenindeki gölgeli alanlar yeniden üst üste gelir. Bu karenin dört rotasyonel simetrisi vardır; bu simetrilerin elde edilmesi için 90 derece, 180 derece, 270 derece ve 360 derece (bu 0 dereceye ya da hiç döndürülmemeye denk gelir) döndürülmesi gerekir.



DÜZ BİR KAREDE BULUNAN SEKİZ SİMETRİ

Rüzgar gülü karesinde eksenlerin hiçbirinde *yansıma simetrisi* yoktur. Fakat rüzgar gülü desenini oluşturan gölgeli alanları çıkarır, kareyi boş bırakırsak yansıma simetrisi de olacaktır. Bu durumda bir matematikçinin bakış açısına göre dört tane yansıma simetrisi doğrusu vardır: dikey bir doğru, yatay bir doğru, sol üst köşeden sağ alt köşeye inen köşegen, sağ üst köşeden sol alt köşeye inen köşegen. Düz karede yansıma ve rotasyonel simetriler de dahil olmak üzere sekiz simetri vardır.

Sabitlerin Simetrisi

Karemizin alanını ölçersek alanın döndürmemiz ya da yansıtmamızdan sonra aynı olduğunu görürüz; germemiz halindeyse böyle bir durum söz konusu olmayacaktır. Alan, kendimizi belli simetrilerle sınırlı tutmamız halinde sabit kalacak değerlere verebileceğimiz bir örnektir.

Bu da fizikçilerin simetriyi fiziksel sistemlerin uygun simetriler altında (bir atıf noktasını değiştirmek gibi) değişmeyen nicelikleri ya da nitelikleri açısından görmesine yol açmıştır.

Dolayısıyla fizikçiler simetriyi değişmezlikle tanımlarlar. Galileo bir nesnenin laboratuarda yere bırakıldığında da bir gemiden atıldığında da sabit bir hızla ve dikey olarak düştüğünü gözlemiştir; burada simetri vardır. Newton'ın hareket kanunlarındaki denklemler de aynı simetriye uyar. Einstein bir adım ileri giderek ışık hızının *bütün* atıf çerçeveleri için sabit olduğunu söylemiş ve simetriyi özel görelilik kuramının tam merkezine yerleştirmiştir.

> *"Anlamını ne kadar geniş, ne kadar dar tanımlarsanız tanımlayın simetri çağlar boyunca insanın düzen, güzellik ve mükemmelliği anlamaya ve yaratmaya çalışırken kullandığı bir fikirdir."*
>
> **HERMANN WEYL**

Bir fizikçi değişkenler dönüştüğünde hareket denklemlerinin sabit olduğunu söyleyecektir; bu dönüşüm farklı atıf çerçevelerine tekabül eder. Böylece Galileocu, Newtoncu ve Einsteincı şemalarda fizik kanunları simetriktir.

Simetriyi Ölçmek

Matematikçiler ve fizikçiler simetrinin "ölçülmesi" ve yönlendirilmesi üzerine çalışırlarken grup kuramı denilen disiplini kullanırlar. Grup kuramının kökeni 19. yüzyılın başında genç matematikçi Évariste Galois'nın denklemler kuramı üzerine çalışmasına uzanır. Galois 20 yaşında bir düelloda ölünceye dek matematiğin en güzel kuramlarından biri (fiziği ve kimyayı da etkilemiş bir kuram) için fikirler kaleme almıştı. Peki o zaman matematiksel bir grup nedir?

Rüzgar gülü desenli karemizle bir örnek vermiştik. Bu örneğe geri dönelim ve r ile 90 derecelik bir rotasyonu ifade edelim, bunu bir kere daha uyguladığımızda 180 derecelik bir rotasyon gerçekleşmiş olur. İki rotasyonun bu şekilde birleşmesini $r \times r$ olarak, kısaca r^2 diye ifade ederiz. Kareyi 90 derece daha döndürmek r^3 işlemidir; r^4 ise karenin 360 derece döndürülmesidir; bu durumda başladığımız yere döneriz.

$\times$	e	r	r^2	r^3
e	e	r	r^2	r^3
r	r	r^2	r^3	e
r^2	r^2	r^3	e	r
r^3	r^3	e	r	r^2

BİR KARENİN ROTASYONEL SİMETRİSİ İÇİN ÇARPIM GRUBU TABLOSU

Rotasyonların birleştirilmesi "çarpma" olarak düşünülebilir; bu da simetri rotasyonlarından bir "çarpım tablosu" kurmamızı mümkün kılar. örneğin kareyi önce 270 derece, sonra 180 derece döndürmek istersek bunu $r^3 \times r^2$ olarak ifade ederiz. $270^0 + 180^0 = 450^0$'lik bu rotasyon aslında $450^0 - 360^0 = 90^0$'lik bir rotasyondur; bu durumda $r^3 \times r^2 = r$ diye yazmamız gerekir. Karenin 0^0 döndüğü özel simetri e ile gösterilmiştir; böylece $r^4 = e$ diye de yazabiliriz.

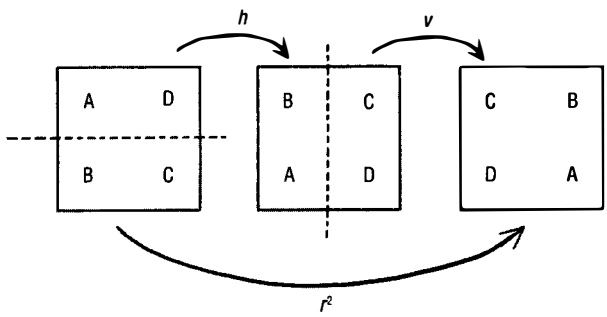
Bir karenin yansıma simetrileri -yatay, dikey, sağ köşegen ve sol köşegen- h, v, d ve s olarak gösterilmiştir; böylece rotasyonel simetrilerle birleştirilebilirler. Dikey bir yansımanın izlediği yatay bir yansıma, yani $h \times v$ aslında karenin 180^0 döndürülmesine eşdeğerdir; dolayısıyla $h \times v = r^2$.

Geniş "kare grubu"nun sekiz yansıma ve rotasyon simetrisinden oluşan eksiksiz çarpım tablosu hazırlanabilir.

Gruplar ve Simetri

Genelde bir grup "öğeler"den oluşur; öğelerin ikisi bir araya getirilip benzer türde bir öğe oluşturulabilir. Simetriler söz konusu olduğunda iki simetri birleşerek bir başka simetri oluşturur. Bir

birleşmenin geçerli olması için bazı kurallara uyması gerekir: Grubun her öğesi için o öğenin tam tersi olan başka bir öğe olmalıdır; üç öğe birleştiklerinde önce hangi iki öğeyi birleştirdiğimiz önemli değildir. Matematikçi lejyonları bu koşullar çerçevesinde kapsamlı bir kuram oluşturmuşlardır.



$h \times v = r^2$'NİN YANSIMA VE ROTASYON EŞDEĞERLİĞİ

Bir grupta sonlu sayıda öğe varsa bu öğelerin sayısı grubun mertebesidir; bu yüzden düz karemizin sekiz simetrili bir mertebesi vardır. Bu grup için çarpım tablosu rotasyonel simetri için $\{e, r, r^2, r^3\}$, yatay ve dikey yansımalar için $\{e, r^2, h, v\}$, köşegen yansımaları için $\{e, r\ 2, d, s\}$ alt gruplarını gösterir. Son iki grubun çarpım tabloları aynı sonuçları verir; yani farklı harflerle belirtilmiş

×	e	r	r^2	r^3	h	v	d	s
e	e	r	r^2	r^3	h	v	d	s
r	r	r^2	r^3	e	d	s	h	v
r^2	r^2	r^3	e	r	v	h	s	d
r^3	r^3	e	r	r^2	s	d	v	h
h	h	s	v	d	e	r^2	r^3	r
v	v	d	h	s	r^2	e	r	r^3
d	d	v	s	h	r	r^3	e	r^2
s	s	h	d	v	r^3	r	r^2	e

KARENİN DİHEDRAL GRUBU

olmalarına rağmen çarpım tabloları birbirinin aynısıdır ve bu gruba da "Klein dörtlü grubu" denir. Bir Klein dörtlü grubu ile rotasyon grubu, dört öğeli bir grup için mümkün olan yegane grup tipleridir.

Grup kuramında problemlerden biri belli bir mertebede kaç tane farklı grup olduğunu bulmaktır. Örneğin düzen 4 mertebeli iki grup vardır. Bir grubun mertebesi asal sayıysa sadece bir tane grup vardır. Mertebe bileşik bir sayıysa (asal olmayan bir sayıysa) problem daha da ilginç olur. Örneğin 8. mertebede beş farklı grup vardır. Biri daha önce gördüğümüz gibi karenin grubudur; diğeriyse dördey "hayaliler"den, yani 1, *i*, *j*, *k*, -1, *-i*, *-j*, *-k*'den oluşan gruptur. (*Bakınız Hayali Sayılar Gerçekten Hayali Mi?*)

Bir şeklin simetrisi simetri gruplarıyla ölçülür; bu yüzden bizim düz karemiz 8. mertebedeki tam grubuyla (dihedral grup), Klein dörtlü grubuyla ve rotasyon grubuyla "ölçülür."

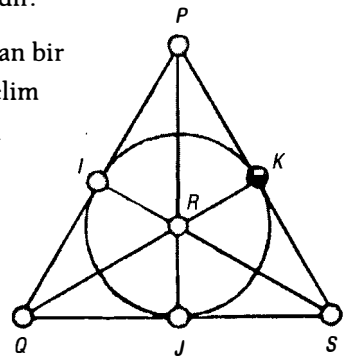
Ayna Simetrisi

"Öteleme" ve ayna simetrilerini de dahil ederek simetri dağarcığını genişletebiliriz. Yansıma simetrisini düşünürken yatay, dikey ve köşegen aynaları düşündük; ama şimdi bir aynanın karşısında olacağız. Ayna simetrisinde, beklenebileceği üzere bir nesne aynadaki görüntüsüyle karşı karşıya gelir. Elbette ki ayna simetrisi genellikle söz konusu nesneye bağlı olarak ters çevirmeleri gerektirir. Bir aynaya tutulmuş düz bir kürenin ayna imgesinde belirgin bir farklılık olmaz; düz bir kürenin ayna simetrisi vardır. Ama sağ elinizi aynanın karşısına getirirseniz sol ele benzeyen bir görüntüyle karşılaşırsınız. "Aynalar diyarı"nda orijinal hallerinden bu biçimde farklılaşan nesneler "kiral" (üst üste çakışmaz) diye bilinir. Kimyada kiralite (üst üste çakışmazlık) özelliği önemlidir. Örneğin limonun kabuğundaki bir hidrokarbon doğal olarak limon kokar, ama limonen denilen "kiral ikiz" molekülü portakal gibi kokar. Fizik alanında araştırmacılar yaygın deyişle parçacıklar arasındaki "zayıf etkileşimler"le ilgili araştırmalarda kiralitenin

varlığı karşısında hayrete kapılmışlardır. Nihayetinde, zayıf etkileşimler kuramını işlerken ayna yansımalarının engellenmesi gerektiği sonucuna varmışlardır.

Eşlekliklerin Simetrisi

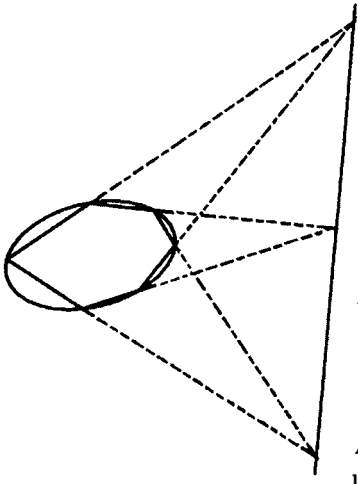
Matematikçiler sembollere, teoremlere ve cebre uygulanabilecek türde bir simetriyi tanımlayan eşleklik ve ikiz kavramlarına bayılırlar. Bu kavramların gücü matematiksel durumları betimlemek için kullanılan dilde ve terimlerde yatmaktadır.



FANO DÜZLEMİ

Bir üçgenin geometrisi, eşlekliğe doğrudan bir örnek oluşturur. Bir üçgende üç nokta (diyelim ki A, B ve C noktaları) ve üç doğru (diyelim ki a, b ve c doğruları) bulunur; bu noktalar ile doğrular arasında simetri olduğundan "herhangi iki noktanın tek bir doğruyu belirlediği"ni söyleyebileceğimiz gibi, terimlerin yerlerini değiştirerek "herhangi iki doğrunun tek bir noktayı belirlediği"ni de söyleyebiliriz. Bu ifadelerde eşleklik vardır. Bu geometrik eşlekliğin yararı noktalar ve doğrularla yazılan bir teoremin doğrular ve noktalarla yazılan bir teoreme otomatikman çevrilebilecek olmasıdır; noktalar ve doğrular çiftler halinde belirir.

Fano düzlemi diye bilinen yedi noktalı ve yedi doğrulu geometri daha zengin bir örnek olacaktır. (Bakınız *Hayali Sayılar Gerçekten Hayali Mi?*) Yedi doğruya daire de dahildir. Bu geeometride "herhangi üç nokta bir doğruyu belirler" teoreminin "herhangi üç doğru bir noktayı belirler" gibi eş bir teoremi vardır. Sıradan üçgende olduğu gibi bu geometri de kesin sayıda noktalar ve doğrulardan oluşur, ama eşleklik, düzenli geometride de karşımıza çıkar.



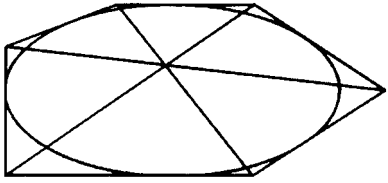
PASCAL TEORİMİ

Geleneksel geometrideki en ünlü *eşlek* teoremler Pascal'ın teoremiyle Brianchon'un teoremidir. Bu teoremler 150 yıl arayla keşfedilmişlerdir; bu yüzden birbirlerinin eşleği oldukları geri dönüp bakıldığında anlaşılmıştır. Pascal'ın teoremi bir elipsle çevrelenmiş bir altıgenle ilgilidir ve şöyle der:

Altıgenin karşıt kenarlarından çizilen doğruların kesiştiği üç *nokta* düz bir *doğru* üzerinde yer alır.

Brianchon'un teoremiyse şöyle der:

Altıgenin karşıt kenarları üzerindeki teğetlerin kesişme noktalarını birleştiren *doğrular* bir *noktada* birleşir.

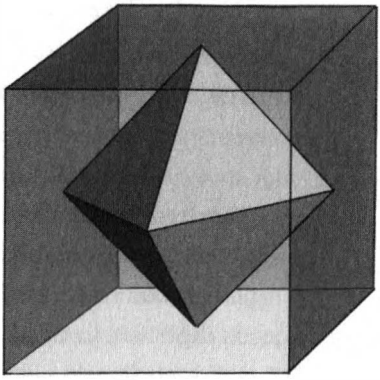


BRİANCHON TEORİMİ

Geometride eşleklik simetrisi hayli yaygındır; antik Yunanlıların "Platonik katılar" dediği beş cisimde; tetrahedron, küp, oktahedron, dodekahedron ve ikozahedronda da mevcuttur. Örneğin bir küpü alır, altı yüzünün orta noktasını belirler, sonra bu noktaları bitişik yüzlerdeki noktalarla birleştirirsek, bu doğrular küpün içinde bir oktahedron oluşturur. Başka bir deyişle oktahedron küpün eşidir ve bu ikilik yüzlerin yerine köşeleri geçirerek sağlanmıştır. Bir kübün altı yüzü ve sekiz köşesi vardır; bir oktahedronun ise altı köşesi ve sekiz yüzü vardır. Benzer şekilde 12 kenarlı dodekahedron 20 kenarlı ikosahedronun eşleğidir; böylece geriye bir tek tetrahedron kalır, o da kendi kendisinin eşleğiidir.

İkilik mantıkta ve cebirde her yerde karşımıza çıkar; dilin simetrisini, YA DA ve VE gibi basit bağlaçların kullanılma biçimlerini gösterir. Örneğin mantıkta YA DA "Bir köpeğim var", "Bir kedim var" gibi mantıksal önermeleri "Bir köpeğim YA DA bir

kedim var" şeklinde birleştirmek için kullanılabilir. (Gündelik dilde "ya da" genellikle her ikisinin birden varlığını mümkün kılmaz; ama matematik "YA DA"yı kapsayıcı anlamda kullanır, böylece bileşik önerme iki hayvana da sahip olduğum anlamına gelebilir.)



KÜP VE OKTAHEDRON EŞLEKLİĞİ

Mantıkta temel önermeler YA DA, VE ve DEĞİL (YOK) sözcükleriyle biraz daha geliştirilebilir; şöyle diyebiliriz:

"Bir köpeğim YA DA kedim YOK."

Bunu demek şunu demekle aynıdır:

"Bir köpeğim YOK VE bir kedim YOK."

Mantıkta $\vee$, $\wedge$, $\neg$, sembolleri YA DA, VE, DEĞİL (YOK) için kullanılır, dolayısıyla P ve Q'nun tek tek önermeleri ifade etmesi halinde ilk önerme $\neg(P \vee Q)$, ikinci önerme $\neg P \wedge \neg Q$ olarak yazılabilir. İki önermenin eşitliği De Morgan kanununu verir:

$$\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$$

Katı	İkilik	Yüzler	Noktalar	Köşeler
tetrahedron	Kendine eş	4	4	6
küp	Oktahedronun eşi	6	8	12
Oktahedron	Küpün eşi	8	6	12
dodecahedron	İkozahedronun eşi	12	20	30
İkozahedron	Dodekahedron eşi	20	12	30

BEŞ PLATONİK KATININ SİMETRİK ÖZELLİKLERİ

Burada eşleklik simetrisi YA DA ile VE arasındadır; herhangi bir doğru ifadede bunların yerlerini değiştirebiliriz. De Morgan kanunu bağlamında, ikinci bir kanun daha vardır:

$$\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$$

Benzer bir düzenleme küme kuramında da karşımıza çıkar. (Bakınız *Sonsuzluk Ne Kadar Büyüktür?*) Bir küme nesneler topluluğudur ve A ve B diye iki kümenin birleşmesi de bir kümede ya da diğerinde ya da her ikisinde birde olan nesnelerin toplamıdır. A ve B kümelerinin kesişmesi ise A ve B kümelerinin her ikisinde de olan şeylerin toplamıdır. A kümesinin tümleyeni A'da olmayan nesnelerin kümesidir.

Birleşme, kesişme ve tümlemeyi $\cup$, $\cap$, ^{c}, şeklinde ifade ederiz; $\cup$ ile $\cap$ arasında eşleklik vardır; De Morgan kanunlarının küme kuramına uygulanmış şekli de şöyle olur:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

bu kanunun "ikizi" de şöyledir:

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Eşleklikler sıklıkla çiftler halinde karşımıza çıkar. Eşin eşini alacak olursak, örneğin ikinci De Morgan kanununun eşini bulduğumuzda birinci De Morgan kanununa geri dönmüş oluruz; eşleklik simetrisinin başka bir özelliği de budur.

Atomaltı Simetri

Son dönem fizikçiler doğanın etkileşim içindeki dört temel kuvvetini birbirine bağlayan kanunları ortaya koyan birleşik bir alan kuramı yaratma girişiminde bulunuyorlar; bu girişimlerinde de simetrinin öneminin farkındalar.

Fizikçilerin de "eşleklik"e dair bir fikirleri vardır; parçacık fiziği alanında, "bozonlar" ve "fermiyonlar" olarak bilinen temel parçacıklar bağlamında *süpersimetri* fikrini ileri süren son derece spekülatif bir kuramda kendini göstermiştir bu fikir. Süpersimetri her bozon için ona eş bir fermiyon olduğunu, aynı şeyin tersi için de geçerli olduğunu söyler. Higgs bozonu, farklı bozon tipleri arasında en meşhurudur; fakat parçacık fiziğindeki standart model Higgs bozonunu ancak varsayım düzeyinde ifade etmiştir; Higgs bozonunun varolup olmadığını kimse bilmiyor. İsviçre'de yeraltına inşa edilmiş Büyük Hadron Çarpıştırıcısı'nın bu meseleyi çözeceği yönünde umutlar vardır. Yaygın deyişle bu "Tanrı parçacığı" varsa standart modelde parçacık etkileşimlerini açıklamak üzere kullanılan simetriler geçerlilik kazanacak, bizler de gerçekliğin temel doğasını anlamaya biraz daha yaklaşmış olacağız.

Simetrinin Çeşitliliği

Matematikçiler sürekli bütün biçimleriyle simetriyle uğraşır, simetriyi kuramlarının doğruluğu için bir rehber olarak kullanırlar. Matematikçilere göre, genellikle anahtar grup kuramındadır; grup simetrisi de matematiksel manzaranın daha geniş çaplı bir görünümünü sunmak üzere tanımlanabilir ve kullanılabilir. Peki ama simetri nedir? Herhalde bu soruyu en iyi biçimde cevaplamanın yolu, kolektif bir cevaptan geçiyor. Bu kolektif cevap, çeşitli biçimlerde tanımlanmış benzerliğin karelerin dönüşü ve yansımasından tutun, cebirdeki eşlekliklere varıncaya kadar, Pascal ve Brianchon'un eşlek teoremlerinde ve onların da ötesinde, fizikçiler haklıysa maddenin doğasında tezahürüdür.

MATEMATİK DOĞRU MUDUR?

Platon'un gerçekliğinden Gödel'in eksiklik teoremlerine

Şair Coleridge 1791'de kardeşine yazdığı bir mektupta matematiği "hakikatin özü" olarak tanımlıyordu. Antik Yunanlıların taşıdığı, yüzyıllar içinde kuşaklardan kuşaklara aktarılan, kendisinin Cambridge'de öğrenim görürken özümsediği bir görüşü yansıtıyordu. Ama Coleridge sadece kendi alanı olan edebiyatta değil, matematikte de bir devrimin zirvesinde oturuyordu. Matematiğin "hakikatin feneri" olarak sahip olduğu konum yoğun bir incelemeden geçmek üzereydi ve büyük bir meydan okumayla karşı karşıyaydı.

Sayıların sadece sayı olduklarını düşünmek caziptir; düz, tartışmasız, hatta banal ve ihlal edilemez. 2 + 3 = 5'in doğru olduğunda, başka bir sayıya eşit olamayacağında hemfikir değil miyiz? Bir üçgende 181^0 ya da başka bir değer değil de 180^0 yok mudur? Bu matematiksel "gerçekler" çok küçük yaşlardan itibaren zihinsel donanımımıza kazınırlar, doğru olup olmadıklarını genellikle sorgulamayız. Düşüncenin başka alanlarının tartışmalar ve çekişmelerle dolu olduğunu otomatikman kabul ederiz; ama matematik, bir şekilde bunların üzerindeymiş gibi görünür. Coleridge'in aklında böyle bir saflık vardı; 19. yüzyılın başlarına kadar da bu refleks, üniversite eğitimi görmüş, antik Yunan'ı özümsemiş yüzlerce genç adama işlenmiş ortodoks konumu yansıtıyordu.

Bugün bazı matematikçiler son derece teknik problemler çözerler ya da matematik eserleri arasında çok yükseklerde yer alan bilimsel kuramlar inşa ederler ve bunları destekleyen matematiksel bilginin temellerini sorgulamayabilirler. Fakat felsefeye eğilimli, "Matematiksel gerçeği doğru kılan nedir?" sorusuna kafa yoran başka matematikçiler de vardır. Bu matematikçiler matematiğin bodrum katında çalışırlar; temelleri desteklemekle, matematiksel önermeleri ikna edici kılmakla uğraşırlar.

Matematiksel hakikatin niteliği aslında nedir? Matematikçiler önceden var olan fenomenleri keşfeden bilim insanlarına mı benzerler? Yoksa aslında istedikleri gibi doldurabilecekleri boş bir tuvalle işe koyulan sanatçılar gibi midirler?

Matematiği ilk öğrendiğimizde, rahat bir hareket alanı yokmuş gibi görünür. Çıkarma, çarpma, toplama ve bölme her seferinde bir tek doğru cevap verir. Bu, matematiğin dünyayı betimleme konusunda muğlaklıktan uzak bir dil olduğunu düşündürür. Buna göre, matematikçinin görevi sağlam ilkeleri ve kusursuz mantığı kullanarak matematiksel hakikatleri bulup çıkarmak, "orada olanı" keşfetmek; sonra da bunları matematiksel bilginin kolektif kitabına yerleştirmektir. Hakikatler biriktikçe bilgimiz de artar ve matematik ilminin kitabı genişler. Bu kesinlik havası geometrik olgular için de aynı şekilde geçerlidir; Öklit'in, kendinden menkul hakikatler ve teoremlerle başlayıp bunlardan çıkarsamalar yaparak ilerleyen bir eser olan *Elements* adlı kitabı 2000 yılı aşkın bir süre otorite olmuştur.

Hakikati Arayanlar

Çoğu matematikçinin kendisini önceden mevcut hakikatlerin kaşifi olarak gördüğü akla yatkın bir tahmindir. Matematiksel hakikatleri arayanlar, ayrı bir alemde, "Platonik bir dünyada" var olan ideal formlardan bahseden Platon'un izinden giderler. Sayılar kendi

başlarına, Platonik biçimler olarak görülebilir; değişmez, ebedi ve ezeli.

Yeryüzünde keşfettiklerimizle ideal formlar hakkında doğru olanlar arasındaki farklılık Platon'un meşhur mağara alegorisinde özetlenmiştir; mağarada sırtlarını ateşe vermiş oturan mahkumlar ancak dışarıda var olan gerçekliklerin gölgelerini görebilirler. Mağaranın içindeki gölgeler, mahkumların görebildiği yegane gerçekliği oluşturur; bilgilenip de mağaranın ağzına getirilinceye kadar; mağaranın ağzına geldiklerinde "gerçekten gerçek olanı" algılayabilirler.

Kusurlu dünyamızda istediğimiz bütün üçgenleri çizebiliriz; ama bunların her biri hiç büyüklüğü olmayan noktalar ve hiç kalınlığı olmayan doğrulardan oluşan Platonik bir üçgen biçiminin bir yaklaşığı olacaktır. Öklit'in bize söylediği budur; bunu söylemesi de gayet anlaşılır, çünkü matematiği Atina'da Platon'un öğrencilerinden öğrenmiştir. Öklit *Elements*'te iki eşit kenarı olan üçgenler (eşkenar üçgenler) hakkındaki teoremleri, taban açılarının eşit olduğunu göstererek ispatlamıştı; fakat bunu yaparken bir kitapta görebileceğimiz eskizlerle ilgili bir gerçeği değil, Platon'un alemindeki "gerçek" üçgenle ilgili bir gerçeği kanıtlıyordu. Platon gerçek şeylerin ancak "akıl gözüyle" görülebileceğini söylemişti.

Platoncu felsefenin asırlar boyunca matematiksel düşünce üzerinde güçlü bir etkisi olmuştur. Platoncu felsefe matematiksel arayışlara manevi bir boyut katar. İngiliz matematikçi G. H. Hardy bu görüşü benimsemiş, *A Mathematician's Apology* adlı eserinde şöyle yazmıştı: "Matematiksel gerçekliğin bizim dışımızda yattığına, bizim işlevimizin onu keşfetmek ya da gözlemek olduğuna; kanıtladığımız, tumturaklı bir biçimde "yaratımız" olarak tanımladığımız teoremlerin gözlemlerimize dair notlar olduğuna inanıyorum."

Öğrenci: Yani bütün aritmetik ve hesaplama ayılarla mı olmak zorunda?
Öğretmen: Evet.
Öğrenci: Ve bunlar zihni hakikate götürüyormuş gibi görünüyor, öyle mi?
Öğretmen: Evet, çok dikkat çekici bir biçimde.
Öğrenci: O zaman bu bilgi aradığımız türden bir bilgi.

PLATONİK BİR DİYALOG

Hakikati Yaratanlar

Matematikçilerin matematiksel bilgiyi bulanlar değil de bu bilginin yaratıcıları ya da mucitleri olması olasılığı 19. yüzyılın sonuna doğru, matematikçilerin yaptıkları şey üzerine yeniden düşünmeleriyle birlikte yükselmişti. Doğada sayılar var mıdır? Bir anlamda açıkçası yoktur; çünkü sayılar sembollerdir, dilin veçheleridir. Buradan yola çıkarak ihtiyaç duyduğumuz matematiği yarattığımız söylenebilir. Bu düşünme biçimi Platon'a dayanan matematik felsefesinden daha farklı bir felsefeye yol açmıştı.

Alman Leopold Kronecker şu meşhur sözü sarf etmişti: "Doğal (yani tam) sayılar Tanrı'dan gelir, gerisi insan işidir." Kronecker her şeyi aritmetiğe, nihayetinde tam sayılara indirgemek istiyordu. Bütün matematiksel akıl yürütmenin sonlu sayıda kuvvetli akıl yürütmelerle gerçekleşmesi gerektiğine inanıyor; matematiksel nesnelerin ancak tam sayılardan bu şekilde inşa edildilerse var olmalarına izin veriyordu. Bu yüzden de π sabiti yoktu, çünkü Kronecker'e göre bu sonsuz ifadedeki *bütün* terimleri bilmemiz mümkün değildi:

$$\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

Ferdinand von Lindemann π'nin aşkın bir sayı olduğunu kanıtladığında (Bakınız *En Tuhaf Sayılar Hangileridir?*) Kroenecker bu güzel kanıtı için onu övdü; fakat π olmadığından bu kanıtın hiçbir şeyi kanıtlamadığını da sözlerine ekledi. Bu Yunanlılardan alındığı haliyle geleneksel matematiksel bakışa bir saldırıydı; bu geleneksel bakışa göre π daireyle ilgili sayıydı, bu da var olması için yeterli kanıttı.

19. yüzyılda matematik alanında akademik araştırmalarda hızlı bir büyümeye tanık olundu; bu hızlı gelişme üniversitelerde kürsüler açılması, konunun genel olarak meslekileştirilmesi ve yeni dergilerin yayın hayatına başlamasında ifadesini bulmuştu. Bütün bunların topyekün etkisi damla damla akan matematiksel sonuçların bir sele dönüşmesi oldu. Yeni gelişmeler, matematikçileri "hakikati" gün yüzüne çıkaran insanlar olarak gören bakışa karşı şüpheleri artırdı; matematiğin temelleri de yeniden değerlendirildi. Matematikçiler $a \times b$ ile $b \times a$'nın farklı sonuçlar verdiği yeni bir çarpım hakkında makaleler yazıyor (Bakınız *Hayali Sayılar Gerçekten Hayali Mi?*), cebir yeni yönlere doğru yol alıyor, Öklit geometrisinden farklı geometriler ileri sürülüyordu. (Bakınız *Paralel Doğrular Nerede Birleşir?*)

Matematikçiler giderek konularının ve tanımının bilincine

"Bütün Matematiğin Sembolik Mantık olması çağımızın en büyük keşiflerinden biridir; bu gerçek ortaya konduğunda matematiğin geri kalan ilkeleri Sembolik Mantığın analizinden oluşur."

BERTRAND RUSSELL,
Matematiğin İlkeleri (1903)

varıyorlardı. Amerikalı matematikçi Benjamin Peirce "Matematik gerekli sonuçlara varan bilimdir," tanımını ileri sürdü. Peirce matematiği mantıkla bir tutuyordu ve bunda yalnız değildi. Bertrand Russell, *Principles of Mathematics* (1903) adlı eserinde soyut matematiğe " '*p* ise *q*' biçimindeki bütün önermeler sınıfı" diye meşhur bir tanım getirmişti. Russell'a göre önemli olan *p* ve *q*'nun gerçekten olup olmaması değil, mantıksal yapılarıydı; bu onun daha sonra matematiği "neden bahsettiğimizi de söylediğimiz şeyin doğru olup olmadığını da asla bilmediğimiz konu" olarak özetlemesine neden olacak bir düşünceydi.

Yeni Bir Yön

Bütün bunlar matematiği nereye getirip bırakmıştı? Bazı yerlerde bu Neo Platoncular ile Jön Türkler arasında bir mücadeleydi; bir zamanlar muğlak olan "hakikat" insan elinden çıkma, hatta rekabet halinde şaşırtıcı bir hakikatler yelpazesine dönüşüyordu. Almanya'da Georg Cantor bir kümeler kuramı yaratmıştı; bu kuramın matematiğe uygun bir temel kazandıracağı umuluyordu.

Bir küme, bir öğeler topluluğudur. Matematikte, örneğin tam sayılar hakkında bir şey bilmek istiyorsak tam sayılar kümesinden bahsederiz. Küme sorunsuz bir kavram olarak görünmektedir; fakat Russell bu kuramı bir iç çelişki üreterek, Russell Paradoksu olarak bilinen bir sonuç ortaya çıkararak daha doğarken neredeyse mahvetmişti.

Russell Paradoksu'nu incelemek için kendi kendisinin öğesi olan bir kümeye ihtiyacımız vardır. Bütün soyut şeyleri kapsayan *A* kümesini alalım örneğin. Soyut şeylerin kümesi olan A kümesinin kendisi de soyut bir şeydir; bu yüzden *A* kümesi kendi kendisinin de üyesidir. Bu ilişki $A \in A$ olarak ifade edilir, $\in$ işareti "üyesidir" anlamına gelir. Ama şimdi kendi kendisinin üyesi olmayan kümelerin hepsi olarak düşündüğümüz *S* kümesine bakarsak burada bir paradoks

ortaya çıkar. Paradoks şöyle gelişir. S'nin S'nin üyesi olduğunu düşünelim (yani $S \in S$); S kümesini tanımlayan ilişkiye mantıksal olarak uyması gerekir; fakat bu ilişki S'nin, S'nin üyesi olamayacağını söyler. Matematikçiler $S \notin S$ diye yazar. Fakat $S \notin S$ ile başlarsak, bu özellik gereği S tanıma uymaz, böylece $S \in S$'ye geri döneriz.

Sonuç Russell Paradoksudur: S kendi kendisinin üyesi olmaması koşuluyla kendi kendisinin üyesidir! Çok iyi bilinen berber paradoksuna benziyor: Köy berberine köyde kendi kendisini traş etmeyen bütün erkekleri traş etmesi söylenmiş. Kendisini de traş etmesi gerekir mi? Kendisini traş ediyorsa etmemelidir; etmiyorsa etmelidir. Bir kuramın böyle bir iç çelişkiden kaçınması gerekir.

Bu zorluğu aşmanın bir yolu, küme kuramı için paradoks gerektiren türde kümeleri dışarda bırakan bir aksiyomlar listesinin çerçevesini çizmektir. Ernst Zermelo ve Abraham Fraenkel böyle bir liste geliştirmiş; bu listeye 20. yüzyılın ilk yıllarında bir "seçim aksiyomu" eklemiştir. Bu yararlı bir liste olarak genel kabul görmüş, paradokslara karşı bir koruma sağlamıştır. Fakat geride sorular kalmıştır. Sistem bütün çelişkilerden uzak olan bu aksiyomlar listesiyle mi tanımlanıyordu? Ortaya çıkmayı bekleyen öngörülmemiş başka paradokslar da var mıydı?

"...Matematikte hatırı sayılır ölçüde tartışma mevcut. Soyut matematikçiler uygulamalı matematikçilerin kanıtlarını sahiplenmiyor, mantıkçılar da soyut matematikçilerin kanıtlarını reddediyor. Mantıkçılar biçimcilerin kanıtlarına burun kıvırıyor; bazı sezgiciler de mantıkçıların ve biçimcilerin kanıtlarını horgörüyle bir kenara bırakıyor."

IMRE LAKATOS,
Matematik, Bilim ve Epistemoloji

Biçimciler

Alman matematikçi David Hilbert, matematiğe sağlam bir temel sağlama amacıyla "klasik" matematiğin aksiyomatik bir biçimde ele alınması gerektiğini ileri sürdü; sonlu argümanlar yoluyla aksiyomlardan mantıksal olarak teoremler çıkarsanacaktı. Öklit geometriyle ilgili teoremlerini kanıtlamak için iki bin yıl önce aynı yöntemi kullanmıştı; ama o zamanlar Öklit'in aksiyomları ya da "postülaları" kendinden menkul hakikatler olarak görülüyordu. Hilbert'in biçimciliği çerçevesinde semboller anlamdan yoksun bırakılmıştı, sadece aksiyomlar listesine göre hareket ediyorlardı. Sembollerin bir şeyi temsil etmesi gerekmiyordu; Hilbert bu noktayı vurgulamak için geometrinin sonuçlarının "noktalar ve doğrular" sözcüklerinin yerine "masalar ve sandalyeler" sözcüklerini geçirerek çıkarsanabileceğini ileri sürmüştü.

Bu "biçimci" yaklaşımı benimsersek sonlu sayıda adımda teorem zincirleri çıkarsayan aksiyomlar ve mantık kurallarıyla programlanmış bir bilgisayar tahayyül etmemiz gerekir. Önemli olan sembollerin aksiyomlar ve kurallar çerçevesinde işlemesidir. Öklit geometrisinde bir noktayı ve bir doğruyu tanımlamaya özen gösterilir; nokta kısmı olmayan şeydir, doğruysa uzunluğu olmayan genişliktir; ama modern matematiği şekillendirmek için çok şey yapmış biçimci tarzda matematiksel nesneleri çok yakından tanımlamamız gerekmez. Hilbert biçimciliğin matematiğe tatmin edici bir model sunacağından çok umutluydu.

Sezgiciler ve Eksiklik Teoremleri

Hilbert ve Russell'ın fikirlerine muhalefet Hollandalı Luitzen E. J. Brouwer'dan geldi. Brouwer matematiğin Russell'ın belirttiği çizgiler doğrultusunda mantıkla özdeşleştirilmesine karşı çıkıyor; matematik nesnelerini uymaları gereken aksiyomların bir listesini belirleyerek tanıyabileceğimize de inanmıyordu. Brouwer matematiğin mantıktan

önce geldiğini, matematiksel nesnelerin "sezgi" yoluyla bilindiğini düşünüyordu. O ve takipçileri matematiksel nesnelerin "sezildiğini" söylerlerken sonsuz kümelerin ele alınması konusunda şüpheli olduklarını gösteriyorlardı. Özellikle de antik Yunan devrinden kalma bir mantık ilkesi olan "dışlanmış orta kanunu"na karşı çıkıyorlardı. Bu ilke bir önermenin ya doğru olduğunu ya da onun tersinin doğru olduğunu söyler. Hilbert gibi biçimciler sezgicilerin duruşu karşısında dehşete kapılıyorlardı; çünkü dışlanmış orta ilkesinin tehlikeye girmesi halinde klasik matematiğin güvenle matematiksel bilgi deposuna kaldırılmış birçok sonucunun terk edilmesi gerektiğini biliyorlardı. Öklit'in asal sayıların sonlu olduğunu gösteren kanıtı da dahil birçok teorem silinecekti.

"Gödel'in teoremi saf matematiğin tükenmez olduğunu ima eder. Ne kadar çok problem çözersek çözelim her zaman mevcut kurallarla çözülemeyecek başka problemler olacaktır."

FREEMAN DYSON

Hilbert'in matematiğin biçimsel aksiyomatik sistemlere dayandırılması çağrısı 1931'de, Avusturyalı matematikçi ve filozof Kurt Gödel'in "eksiklik teoremleri"ni kanıtlamasıyla ölümcül bir darbe aldı. Gödel, doğal sayılar 1, 2, 3, 4...'ün aritmetiğini betimleyen biçimsel bir sistemde, doğruluğu ya da yanlışlığı kanıtlanamayacak önermeler olduğunu kanıtladı. Bu ifadeler karara bağlanmadan kalıyor, biçimsel sistem de böylece eksik oluyordu. Gödel bunu izleyen bir teoreminde aksiyomatik bir sistem tutarlıysa bu tutarlılığın sistemin içinden gelerek kanıtlanamayacağını da kanıtladı.

Gödel, matematiksel hakikat fikrinin zorluklarla dolu olduğunu göstermiştir; çünkü biçimsel aritmetikte bilgisayar işlemlerini andıran sonlu sayıda adımda kanıtlanamayacak sonuçlar vardır. Bu, Hilbert'in doğru ifadelerin kanıtlanabilir olması gerektiği yönündeki

inancına aykırıdır. Gödel'in çalışmalarının bir etkisi, matematikteki bazı zor soruların çözülemez olduğuna inanmaya başlamamızdır. Ama yüzlerce yıl almış olsa da bazı dikenli problemlerin nihayet çözüldüğünü de biliyoruz: Fermat'ın son teoreminin kanıtlanmasına (Bakınız *Matematik Güzel Midir?*) ve Poincaré sanısına bir bakın (*Evrenin Şekli Nasıldır?*). Herhalde buradan alınacak asıl ders, nihayetinde insan zihninin dahiyane güçlerinin bir makinenin bilgi işlem kapasitesini her zaman aşabilecek olmasıdır.

Matematiksel Hakikat: Bir Çelişki Mi?

Peki ya bizim matematiksel hakikat kitabımız? Gödel bize bu kitabın bir zamanlar düşünüldüğü kadar emniyette olmadığını göstermiştir. Macaristan doğumlu filozof İmre Lakatos da başka bir dilde, kesin matematiksel bilgi diye bir şey olmadığını, uygulandıkları kavramların anlamları değiştikçe teoremlerin de sürekli değiştiğini savunmuştur.

"Matematik doğru mudur?" sorusunu yönelttiğimizde kastettiğimiz şey 20. yüzyılda bir değişimden geçmiştir. Richard Courant ve Herbert Robbins'in köşetaşı niteliğindeki *What is Mathematics?* adlı kitaplarında söyledikleri üzere " 'Birşeyleri kendi içinde' anlamak, 'nihai hakikati' öğrenmek hedefinden vazgeçmek ileriye doğru atılmış büyük bir adımdır." Gödel mantıksal hakikatin yanıltıcı olduğunu göstermiştir; fakat bu bazı bakımlardan matematikçileri keşifler yapmakta özgürleştirmiştir. Tıpkı güzellik gibi hakikatin de bakanın gözünde olabileceği düşüncesinin özgürleştirici bir yönü vardır; bugünkü matematikçilerin de gördükleri biçimiyle hakikatin peşinde oldukları söylenebilir.

ÇÖZÜLECEK BİR ŞEY KALDI MI?

Çözülmemiş büyük problemler ve matematiğin geleceği

Bir öğrencinin alıştırma kitabında doğru ve yanlış işaretleriyle bezenmiş kesin ve kuru cevaplar, matematiğin bir bütün olarak sınırlı ve sabit olduğunu düşündürebilir. Elbette ki bu hakikatten çok uzaktır. Kuşaklar boyunca çözüm arayanların takıntısı haline gelmiş, onları hayal kırıklığına uğratmış, meşhur ve hâlâ kafa karıştıran muammalar vardır. Çözülen her problem de olası yüzlerce problem daha doğurarak matematiği canlı, hep yaşayan bir organizma haline getirir.

Çözülmemiş problemler matematiğe yarar, böyle birçok problem vardır. Bazıları asırlardır çözülememiştir; ama doğmakta olan yeni kuramlar da yeni zorluklar ileri sürmektedir. Matematikçiler düzenli aralıklarla çözülmemiş kilit problemlerden oluşan "alışveriş listeleri" yaratırlar; bunlara en iyi bilinen örnek de David Hilbert'in 1900'de yeni yüzyılın matematikçilerinin önüne koyduğu "23 Problem"dir. Bu problemlerin bazıları özel problemlerdi; bazılarıysa açık uçlu programlardı. Fakat Hilbert'in matematik dünyasındaki yüksek mevkii dikkate alındığında, epeyce dikkat çekmişlerdir; bu 23 problemin hepsi de bir asrı aşkın bir süre boyunca matematik sahnesini aydınlatmıştır. Dünyanın en iyi matematikçilerinin ortak eyleminin odak noktası haline gelmiştir.

Teşvik olsun diye, seçilmiş zor problemler için kanıtlar ya da çözümler ileri sürebilen matematikçiler için büyük ödüller ileri sürülmüştür. İlk ödüllerden biri, Alman işadamı Paul Wolfskehl'in

Fermat'ın son teoreminin ilk geçerli kanıtı için koyduğu 100.000 marklık Wolfskehl ödülüydü. (Bakınız *Matematik Güzel Midir?*) Bu teoremin doğruluğu nihayet 1994'te Sir Andrew Wiles tarafından kanıtlandı. İngilizce konuşulan dünyadaysa en bilinen ödüller herhalde, matematiksel bilgiyi yaymaya kendini adamış özel bir vakıf olan Clay Enstitüsü'nün koyduğu ödüllerdir. 21. yüzyılda matematiğin ilerlemesi açısından önemli addedilen yedi alanın her birinde yapılacak atılımlar için 1 milyon dolar ödül konmuştur. Bu problemlerden geometrik nesnelerin topolojisiyle ilgili olan Poincaré sanısı artık kanıtlanmıştır. (Bakınız *Evrenin Şekli Nasıldır?*)

Bugün geride kalan muammalardan her matematikçinin sevdiği bir tane vardır. Fakat kaymak tabakasını oluşturan problemlerin neler olduğu konusunda da genel bir fikir birliği vardır ve bu grupta Goldbach sanısı, Riemann varsayımı, Navier-Stokes denklemleri ve özlü bir biçimde $P=NP$ olarak ortaya konmuş problem vardır. Sırayla hepsine bir göz atmaya değer.

Goldbach Sanısı

18. yüzyılın ortasında formüle edilmiş olan Goldbach sanısı Christian Goldbach'ın adını taşır. Hilbert'in listesinde de bahsedilen bu problem bütün kanıtlama girişimlerine direnmiştir. Matematiğin tamamının özünde sayı kuramı yatar; sayı kuramı en zor problemlerden bazılarını doğurmuştur; Goldbach sanısı bunların simgesidir. Sayı kuramının problemlerini ifade etmek kolay, kanıtlamak zordur.

Bu tip birçok problemde olduğu gibi Goldbach sanısı da sayıların asal sayıların toplamı olarak ifade edilmesini gerektirir:

4'ten büyük ya da 4'e eşit bütün çift tam sayılar iki asal sayının toplamı olarak yazılabilir.

Bunu sınamak için rastgele bir çift sayı seçelim, söz gelimi 407.308'le bu varsayımı doğrulamaya çalışalım. Gerçekten de

407.308'in iki asal sayının toplamı olduğunu görürüz: 17 + 407.291. Şimdiye kadar hiç kimse Goldbach sanısına bir istisna bulamadığı gibi, hiç kimse bunu kanıtlamayı da başaramamıştır; bu yüzden bu önerme varsayımsal, sanısal niteliğini korumaktadır.

Sayısal sonuçlar bu varsayımın 10^{18}'e kadar bütün sayılar için doğru olduğunu göstermektedir, bu yüzden bundan küçük sayılar arasında bir istisna aramanın alemi yoktur.

Riemann Varsayımı

Goldbach sanısı çetin cevizdir. Ama meşhur Riemann varsayımının gerçekten de matematiksel bir ağırlığı vardır. Hilbert'in listesinde sekizinci problem olarak yer alan bu varsayım matematikte en şevkle kanıt aranan problemdir; başaranı şöhret beklemektedir, ayrıca bir de çok işe yarar bir 1 milyon dolar. Sayı kuramında birçok sonuç bu varsayımın doğruluğuna dayanır; matematik detektiflerinin gözünden de kaçmış değildir.

Riemann varsayımı "Riemann zeta fonksiyonu" olarak bilinen şeyin çerçevesine oturtulabilir. Bu varsayım 19. yüzyılın ortasında Bernhard Riemann tarafından geliştirilmiş, Yunan alfabesinin altıncı harfi zetayla (ζ) adlandırılmıştır. Fonksiyon şöyle ifade edilir:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots$$

Bir ζdeğeri seçerek çözülebilir; diyelim ki $s = 2$'yse fonksiyon şu değeri verir:

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

Bu dizinin π sabitiyle ilişkili olması için bir sebep görünmemektedir; fakat Leonhard Euler'in bulduğu meşhur sonuç $\zeta(2)$' nin $\frac{\pi^2}{6}$ olduğunu göstermektedir.

Riemann zeta fonksiyonunun en dikkat çekici yönlerinden biri asal sayılarla bağlantısıdır. Euler π'nin asal sayı olması halinde bu fonksiyonun $\frac{p^s}{p^s - 1}$ biçimindeki bütün sayıların çarpımına eşit olduğunu keşfetmişti. Örneğin:

$$\zeta(2) = \frac{2^2}{2^2 - 1} \times \frac{3^2}{3^2 - 1} \times \frac{5^2}{5^2 - 1} \times \ldots = \frac{4}{3} \times \frac{9}{8} \times \frac{25}{24} \times \ldots$$

Riemann "Belli Bir Büyüklükten Küçük Olan Asal Sayıları Sayısı Üstüne" adlı, 1859 tarihli ünlü makalesinde s'in bir "karmaşık sayı", yani iki boyutlu bir sayı olma ihtimalini ortaya koymuştu. (Bakınız *En Tuhaf Sayılar Hangileridir?*)

Karmaşık bir sayı, *a* ve *b* sayıları için $a + bi$ biçimdedir (i, "hayalidir"; Bakınız *Hayali Sayılar Gerçekten Hayali Mi?*); Riemann $\zeta(s) = 0$'ı oluşturan sayıları bulmaya koyulmuştu. İlk üç değer yaklaşık olarak şöyleydi:

$$\frac{1}{2} + 14i, \frac{1}{2} + 21i, \frac{1}{2} + 25i$$

Bu değerler sonsuz sayıdadır; fakat hesaplananların hepsinde (milyarlarcasında) birinci bileşen $\frac{1}{2}$'dir. Riemann varsayımı bunun *bütün* değerlerin özelliği olduğunu söyler. Şimdiye kadar sonsuz sayıda değerin bu özelliği gösterdiği kanıtlanmıştır. Sorun şudur ki, mantıken bu, sonsuz sayıda çözümün de bu özelliği *göstermediği* olasılığını sıfırlamaz.

Riemann bu sanının asal sayıların sayı dizisine dağılma biçimiyle ilişkili olduğunu göstermişti. Asal sayılar (diyelim ki) ilk yüz sayı arasında yoğundurlar; ama sayı dizisinin engin genişliği içinde bazı asal sayılar arasında çok büyük boşluklar bulunur. Rieamann sayısı, bu dağılımı ayrıntılarıyla kesin olarak öğrenmemizin anahtarını taşımaktadır.

Navier-Stokes Denklemleri

Uçakta giderken ya da gemideyken havada ya da suda türbülansa girme şanssızlığına uğramış olabiliriz. Su da hava da akışkanlar olarak sınıflandırılmıştır; matematikçiler ve bilim insanları asırlardır akışkanların özelliklerini incelemektedirler. 19. yüzyılın ilk yarısında Fransız fizikçi Claude-Louis Navier ile İrlanda doğumlu matematikçi George Gabriel Stokes bağımsız olarak akışkanları inceliyorlardı. Bugün bu iki adamın ismini taşıyan denklemlerle türbülansın matematiksel modeli çıkarılmıştır.

Bu denklemler kütle ve momentumun korunmasıyla ilgili fiziksel ilkelerden türetilmiştir. Sorun şudur ki henüz bu denklemleri açıkça çözemiyoruz, ayrıca matematiksel teorinin herhangi bir çözümün niteliğini açıklaması yolunda da pek bir şey yoktur. İlerleme kaydedilebilirse, hava tahmini bir sanattan ziyade bilim haline gelecek ve bunun başka uygulamalara da faydası dokunabilecek. Dumanın kıvrılma hareketi, ateşteki alevlerin örüntüleri hava türbülansının hareketiyle aynı fiziksel özellikleri gösterirler; bu denklemleri kullanarak bunların hepsinin de modelleri çıkarılabilir.

Navier-Stokes denklemlerinin çözümü, matematiğin kutsal kaselerinden ve Clay Enstitüsü'nün listesinde geri kalan altı problemden biridir. Ödül için denklemlerin niteliğiyle ilgili, akışkanlar dinamiğinin yeni, derin bir matematiksel kuramını beraberinde getirecek ciddi bir kavrayışa gerek vardır.

Yaklaşık sayısal yöntemlerle epeyce yol katedilmiştir; hesaplamalı akışkanlar dinamiği (computational fluid dynamics / CFD) olarak bilinen yeni bir alan, son derece faal bir araştırma alanıdır. Hesaplamalı akışkanlar dinamiğiyle birlikte bilgisayar grafiği de türbülanslı akışların görsel hale getirilip modellenmesini sağlamıştır; bu da özellikle havacılık ve gemi tasarımı açısından yararlı olmuştur. Bilgisayar grafiği böylece fiziksel rüzgar tünellerinin yerine sanal rüzgar tünellerini geçirebilir; bunlar da ciddi pratik yararlar sağlar;

örneğin bir kanadın üzerindeki hava akımı ya da bir geminin gövdesi üzerindeki su akımı gerçek zamanda simüle edilebilir. Bu demektir ki sanal uçakların ya da gemilerin hızını değiştirip bunun etkisini hemen tasarım üzerinde görebiliriz. Basit bir canlandırma değildir bu; çünkü akım örüntüsü doğrudan denklemlerden gelmektedir. Bilgisayarların hızı ilerlediğikçe bu simülasyonlar da daha gerçekçi bir hal alacaktır.

P=NP Midir?

Gizemli bir görünümü olan şu "*P, NP*'ye eşit midir?" sorusu, bilgisayar biliminin matematikle buluştuğu yerde ortaya çıkmış bir problemdir. "Hesaplamalı karmaşıklık kuramı'nın bir parçası olarak bu problem bilgisayarların yapabilecekleri şeylerin sınırlarıyla ilgilidir. Bu problem de Clay Enstitüsü'nün "en aranan" çözümler ve kanıtlar listesinde yer almaktadır. 21. yüzyılın hayati önemdeki problemlerinden biridir, çünkü bilgisayar güvenliği açısından sonuçları vardır ve sayı kuramında kullanılan *algoritmaları* taşır. Bilgisayarlar ancak algoritmalarla, yani yerine getirilecek emir dizileriyle çalışabilir; bazı algoritmaları gerçekleştirmek sadece mikro saniyeler alırken, bazılarını gerçekleştirmek bugünkü hızla milyarlarca asır alır.

Burada kilit fikir, bir algoritmanın verimliliğidir. Bilgisayarların aşina olduğu işlerden biri isimleri alfabetik sıraya göre ayırıp yerleştirmek ya da sayıları yükselen bir diziye yerleştirmektir. Söz gelimi 5, 3, 4, 2, 1 sayılarını insanların doğru bir sırayla dizmesi istenseydi bu son derece basit bir görev olurdu; hangi sırada olmaları gerektiğini *biliyoruz*. Peki bir bilgisayar bu işi nasıl gerçekleştirebilir? Kullanılan yöntemlerden biri "balon" ayıklamadır; yani ardışık sayı çiftlerini sistematik bir biçimde tarayan, biri diğerinden büyükse yerlerini değiştiren, sıralamaları doğruysa çiftlere dokunmayan bir algoritmadır.

Bilgisayar 5,3,4,2,1 dizisini ilk taradığında önce 5 ile 3'ün yerini değiştirir; böylece dizi 3,5,4,2,1 haline gelir. Bilgisayar ikinci çifte bakar, 5 ile 4'ün yerini değiştirir ve işlem böylece devam eder. Böyle dört karşılaştırmadan oluşan ilk taramadan sonra 5 sayısı "balonlanıp" dizinin sonundaki doğru yerine gönderilir. Bundan sonraki taramada bilgisayar yalnızca 3,4,2,1 sayılarıyla uğraşacaktır. Bilgisayarın doğru sıralamaya ulaşmak için on karşılaştırma yapması gerekir.

Bunu genişletip elimizde dizilmesi gereken n sayı olduğunda, yapılan karşılaştırmaları da aynı biçimde sayabileceğimizi söyleyebiliriz. Gerekli adımların bir sınırı olacaktır; n^2'den kesinlikle az sayıda olacaktır bu adımlar. (Tıpkı örneğimizde, atılan on adımın $5^2 = 25$'ten küçük olması gibi.) Adım sayısının n'in bir kuvveti gibi olduğu bir algoritmanın "polinom" zamanda çözüleceği söylenir. Bilgisayarlar bu tür problemleri kolayca halledebilir; bu algoritmalar da verimli algoritmalardır.

Şimdi bir bilgisayarın "gezgin satıcı problemi"ni nasıl çözebileceğine bakalım. Bu problemde belli sayıda şehir; şehirler arasında seyahat etmenin farklı maliyetleri vardır. Bir satıcının bütün şehirlerden geçen bir yol izlemesi istenirse, soru, daha ucuz bir yol olup olmadığı sorusu olur. Problemin bu biçiminde girdi, n sayıda şehirdir; çıktı da "evet" ya da "hayır" kararı olacaktır. Daha ucuz bir yol bulmak için kaç bilgisayar adımına gerek vardır? Kabaca kuvvetli bir yaklaşım olası bütün yolların değerlendirilmesi olabilir.

Yaklaşık 100 şehir varsa, elimizde saniyede 10^{18} işlem yapabilecek geleceğe özgü bir bilgisayar bulunuyorsa problemin yukarıda bahsettiğimiz yaklaşımla çözülmesi 4000 yüzyıl alacaktır. Bu yüzden bu problemi çözmek için verimli bir algoritmanın olması harika olurdu; bilgisayarların ele almakta rahat olduğu polinom zamanla yetinebilecek bir algoritma. Baloncuk algoritmasının verimliliğine sahip bir algoritma olsaydı; bu gibi süper bilgisayarlar gezgin satıcı problemini bir mikrosaniyeden daha kısa sürede çözebilirlerdi.

Verimliliği aklımızda tutalım; değerlendirilmesi gereken iki önemli problem sınıfı vardır; *P* ve *NP* problemleri:

- *P*, sıralama problemi gibi polinom zamanda *çözülebilecek* problemler sınıfını oluşturur.
- *NP*, polinom zamanda doğrulanabilecek problemler sınıfıdır. Gezgin satıcı problemi bunlardan biridir. Gezgin satıcı problemi için bir çözüm *bulmak* son derece zorlu olsa da yolun verilen yoldan daha ucuz olup olmadığını doğrulamak için yapılan hesaplama hızlıdır. Mesele samanlıkta iğne bulmanın zorluğuyla o iğneyi bulduğunu doğrulamak arasındaki farkta yatar.

P sınıfındaki her problem *NP* sınıfındadır; çünkü polinom zamanda çözümü bulmak kendi kendisinin doğrulamasıdır. Yakıcı soru şudur: Bütün *NP* problemleri *P* sınıfı bir problem midir? Başka bir deyişle her *NP* problemi için bir polinom zaman algoritması bulmak mümkün müdür? Öte yandan bir *NP* problemi ve bu problem için verimli bir algoritma olamayacağının kanıtını bulursak *P* sınıfı, *NP*'ye eşit olamaz.

Gezgin satıcı problemi işte burada önem kazanıyor. Zor bir problemdir; *NP* sınıfındaki başka bütün problemler de bu probleme çevrilebilir. Sadece bu problem için verimli bir algoritma bulabilseydik $P = NP$ olurdu. Bu sonuç, bütün *NP* problemlerinin verimli bir biçimde çözülebileceği anlamına gelirdi.

P=NP'nin başarılı bir biçimde kanıtlanmasının sonuçlarından biri, büyük bir sayının asal çarpanlarını verimli bir bilgisayar algoritmasıyla bulabilecek olmamızdır. Modern kriptoloji (Bakınız *Kırılamaz Bir Şifre Yaratabilir Miyiz?*) bu problemin zorluğuna dayanır; elektronik ticaretin, bilgisayar ağlarının bütünlüğünün dayandığı güvenliği bu problem sağlar. Başka bir deyişle başarılı bir kanıt, internet korsanlarına ve siber hırsızlara meydanı boş bırakacaktır. Talihe bakın ki makinelerin bütün problemleri verimli bir biçimde çözmesi ihtimal dışı görülür ve *P*'nin *NP*'ye eşit olmadığı kanaati yaygındır.

Matematiğin Geleceği

Bu büyük problemleri çözme yolunda süren çabalar, hiç kuşkusuz gelecek yıllarda matematikçileri epeyce meşgul edecektir. Çözümlerin ve kanıtların sahneye birden çıkmasındansa yavaş yavaş ortaya çıkması söz konusu olabilir; matematik genelde böyle ilerler: incele incele, süzüle süzüle. Kavramlar bilenir, geçen yıldan kalma labirentsi hesaplamalar atılır, esrarengiz argümanlar lüzumsuz hale gelir, birçok alana giden yol düzleştirilir. İnsan düşüncesinin başka alanlarında olduğu gibi moda ve eğilimler de üstlerine düşen rolü oynar. Matematiğin bütün alanları ayakta kalamaz; kuramlar kuruldukça büyük girişim alanları silinir gider. Bazıları en iyi ihtimalle tarihe düşülmüş dipnotlar haline gelir.

Yakın geçmiş geleceğe dair ipuçları veriyor mu? En azından bir şekilde bu sorunun cevabı kesinlikle "evet"tir. 20. yüzyılın ikinci yarısında bilgisayar çağına tanık olundu; bilgisayar çağı matematiği ve başka her şeyi derinden etkiledi. "Dört renkli" harita varsayımının 1970'lerde bilgisayar kullanılarak ispat edilmesi (Bakınız *Her Şeyin Bir Formülü Var Mıdır?*) bu devre damgasını vurmuştur. Bugünün matematikçileri, kırk-elli yıl önce düşünülemez olan bir hesaplama kapasitesine yaslanabiliyor. Matematikçi artık daha çok bir laboratuvardaki bilim insanı. Fikirler sınanıp matematiksel deneyler gerçekleştirilebiliyor. Sadece aritmetik hesaplamalar değil, cebir de fazla sıkıntıya girmeksizin "bilgisayarlaştırılabiliyor"; güçlü grafikler çok geniş bir şekiller ve yüzeyler yelpazesinin görülmesini mümkün kılıyor. Matematikçilerin her zaman fiziksel modelleri olmuştur; ama bilgisayar grafiği daha iyisini yapar. Yine de yarının matematikçilerinin daha ileri bilgisayar kaynaklarıyla bugünkü becerilerimizi zayıf bulacağını varsayabiliriz.

Yine de matematik devrinin üstümüzde olduğundan hiç kuşku yoktur. Bundan otuz yıl önce matematik, mühendislik ve fiziğe uygulanabilir görülüyordu. Bugün kanatlarını yeni alanlara açmış, bu alanlar da yeni bir matematiği gerekli kılmıştır. Bilgisayar

biliminin matematiğe ihtiyacı olduğu açıktır; ama sadece üç örnekle yetinecek olursak kimyanın, biyolojinin, psikolojinin de matematiksel girdilere dayanır hale geleceği o kadar açık değildi. Gerçekten de matematik alanı engin genişliktedir; bazı bakımlardan balta girmemiş bir disiplindir.

Bütün bunların sonucu olarak da bugün profesyonel matematikçi sadece matematiğin bir dalında değil, o dalın küçük bir köşesinde son derece uzmanlaşmış biridir. Bu atomizasyon bilginin, kuramın, teknolojinin ve matematiksel uygulamaların yayılmasının kaçınılmaz bir sonucudur. Dünyanın önde gelen matematikçilerinin bir araya gelmesi, oturup canlı bir sohbete girişmeleri (aynı dili konuştuklarını varsayalım), ortak bir entelektüel ufku paylaşıp birbirlerini anlayabiliyor olmaları bundan birkaç yüzyıl önce hayal edilebilir bir şeydi. Bugün böyle bir deneyim kendi uzmanlık alanlarında derin bir bilgiye sahip olan, fakat meslektaşlarının nelerle uğraştığından büyük ölçüde habersiz bireylerin gruplaşmasına neden olabilir. Herhalde bu da ilerlemenin bedelidir.

Gelecek nereye uzanıyor? Aslında her zaman uzandığı yerde uzanıyor: Meraklı bir zihin, bir kalem ve bir defter (belki bugün bir bilgisayar); bir de henüz çözülmemiş olanı çözme hevesi. Yapılacak hâlâ çok şey var.

SÖZLÜK

Açık anahtarlı şifreleme
Bir mesajı şifrelemekte kullanılan mesajların halka açıldığı sistem. Mesajı alıp şifresini çözecek olan kişide, anahtarla ilgili olası bir korsanın edinemeyeceği başka bilgiler mevcuttur.

Algoritma
Matematiksel bir reçete; bir problemi çözmek için belirlenmiş rutin.

Altın oran
Her yerde karşımıza çıkan "altın sayı" φ; değeri şudur:
$\varphi = 1 + \sqrt{5} / 2 = 1,6180339887...$

Argand Diyagramı
Karmaşık sayıların iki boyutlu düzlemini göstermekte kullanılan görsel bir yöntem.

Asal sayı
Kendisi ve 1 dışında, kalan olmaksızın başka bir sayıya bölünemeyen tam sayı. Örneğin 7 asal bir sayıdır, ama 6 değildir, çünkü 6 kalan bırakmaksızın 2'ye bölünebilir; 2 ilk asal sayıdır.

Aşkın sayı
$ax^2 + bx + c = 0$ gibi, a, b ve c'nin tam sayı olduğu bir denklemde ya da x'in daha yüksek kuvvetlerinin bulunduğu denklemlerde denklemin çözümü olamayacak sayı.

Bire bir eşleşme
Bir kümedeki bir nesnenin, başka bir kümedeki başka bir nesneye tamamen tekabül etmesiyle kurulan ilişki.

Birim kesirler
Payın 1'e eşit olduğu kesirler.

Boş küme
Elemanı olmayan küme. Geleneksel olarak Ø ile gösterilen boş küme, küme kuramında yararlı bir kavramdır.

Cebir
Aritmetiği genişletmek için sayılar yerine harflerle uğraşan cebir, artık matematiğin tamamına ve uygulamalarına uygulanabilen genel bir yöntemdir. İngilizce "algebra" sözcüğü dokuzuncu yüzyıla ait Arapça metinlerde kullanılan "el cebr" kelimesinden türemiştir.

Clifford cebri
Kuantum mekaniğinde yararlı olduğu anlaşılan bir tür n-boyutlu cebir. Matematikçi W. K. Clifford'ın adını taşır.

Çekici
Dinamik bir sistemde hareket eğrilerini çeken bir nokta. Durmaya yaklaşan bir sarkaçta hareket eğrisi ya da yörünge yerinden etmenin 0, hızın 0 olduğu tek bir noktaya doğru çekilir.

Karmaşık dinamik sistemlerde çeken bir fraktal oluşturabilir; bu durumda çekiciye "garip çekici" denir.

Daireyi kareleştirmek
Düz doğrular çizmek için bir cetvel ve daire çizmek için bir pergel kullanarak belli bir dairenin alanıyla aynı alana sahip bir kare kurma problemi. Çözülemiyor.

Diferansiyel alma
Kalkülüs'te değişim oranını ya da türevini veren temel bir işlem. Örneğin mesafenin zamana nasıl dayandığı betimleyen bir ifadede türev hızı temsil eder. Hız ifadesinin türevi ivmeyi temsil eder.

Diferansiyel denklem
Hız, ivme ve diğer değişiklik oranları gibi Kalkülüs kavramlarını gerektiren denklem. Maxwell denklemleri ve Navier-Stokes denklemleri önde gelen örneklerdir.

Dizi
Birbirine eklenen sayılar ya da sembollerden oluşan (sonsuz olabilecek) sıra.

Dördeyler
1840'larda W.R. Hamilton'ın keşfettiği dört boyutlu sayılar.

Döşeme
Düz bir yüzeyi bir ya da daha fazla şekille, şekillerin birbirine tam olarak uyacağı şekilde doldurmak. Örneğin sadece altıgen kullanarak bir döşeme yaratmak mümkündür, ama sadece beşgen kullanılarak yapılamaz.

e
Euler'in *e*'si π'den sonra ikinci önemli sabittir. Özellikle büyüme problemlerinde karşımıza çıkar. *e*'nin on tabanında değeri yaklaşık 2,7182818285...'tir.

Eliptik geometri
Bir üçgendeki açıların toplamının 180^0'den fazla olduğu Öklitçi olmayan bir geometri.

Enigma
İkinci Dünya Savaşı sırasında mesajları şifrelemekte kullanılmış, sofistike bir elektrikli mekanik aygıt.

Fano düzlemi
Yedi nokta ve yedi doğrudan oluşan bir geometri.

Fermat'nın son teoremi
Bu teorem *n*'in 2'den büyük bir tam sayı olması halinde $x^n + y^n = 2^n$'de *x*, *y* ve *z*'nin tam sayı değerler alamayacağını söyler.

Fibonacci dizisi
Her terimin kendinden önceki iki terimin toplamı olduğu 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55... şeklindeki sayı dizisi.

Fraktal
Mikroskobik ölçeklerde aynı görünen "kaba" bir şekil; fraktallerin özelliği kendilerine benzemeleridir. Mandelbrot Kümesi ikonlaşmış bir örnektir.

Geometri
Doğruların, şekillerin ve uzayların özellikleriyle uğraşan geometri, üçüncü yüzyılda Öklit'in *Elements*'inde resmiyet kazanmıştır. Geometri bütün matematiğe nüfuz etmiştir ve artık kısıtlı olan tarihsel anlamını yitirmiştir.

Grup
Birleştirilip aynı türde bir öğe çıkarabilecek, belli bazı özelliklere sahip öğelerden oluşan matematiksel bir yapı: Örneğin her öğe için ters bir öğe vardır ve bununla ilişkili $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$ kanunu geçerlidir.

Hausdorff boyutu
Boyutu ölçmenin, kesirli bir değer verebilecek bir yolu. Hausdorff boyutu fraktal incelemelerine özellikle uygulanabilir.

Hayali sayılar
Hayali olan $i = \sqrt{-1}$ sayısını içeren sayılar. Bu sayılar olağan (ya da 'gerçek') sayılarla birleştiklerinde karmaşık sayıların oluşmasını sağlarlar.

Hiperbolik geometri
Bir üçgenin açılarının toplamının 180^0'den az olduğu Öklitçi olmayan bir geometri.

İki tabanlı sayı
İki sembole, 0 ve 1'e dayanan sayı. İki tabanlı sayılar bilgisayarların işlemesi açısından temel önemdedir.

İkilik
İki kavram arasındaki karşılıklı ilişki; geometride nokta ve doğru, mantıkta VEYA ile VE arasındaki ilişki gibi.

İkiz asallar
En fazla bir sayıyla ayrılmış iki asal sayı: Örneğin 11 ve 13 ikizleri gibi. Bu ikizlerin sonsuza dek uzanıp uzanmadığı bilinmemektedir.

İntegral alma
Kalkülüs'te alan ölçmeye yarayan temel bir işlem. Diferansiyel almanın tersi bir işlem olduğu gösterilebilir.

İrrasyonel sayılar
Bir kesir olarak ifade edilemeyen sayılar (örneğin 2'nin kare kökü).

Kaos kuramı
Rastgele ortaya çıkan, ama temellerinde düzenlilik bulunan dinamik sistemler kuramı.

Kalan
Bir tam sayı başka bir tam sayıya bölündüğünde geride kalan sayıya kalan denir. 17 sayısı 3'e bölündüğünde sonuç 5, kalan da 2 olur.

Kardinal sayı
Bir kümedeki elemanları sayısı. {*a, b, c, d, e*} kümesinin kardinal sayısı 5'tir; ama kardinal sayı kavramı sonsuz kümeleri de kapsayacak şekilde genişletilebilir.

Kare kök
Kendi kendisiyle çarpıldığında belli bir sayıya eşit olan sayı. Örneğin 3, 9'un kare köküdür, çünkü 9 = 3 x 3.

Kare sayı
Bir tam sayıyı kendisiyle çarpmanın sonucu. 9 sayısı bir kare sayıdır; çünkü 9 = 3 × 3'tür. Kare sayılar 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64...'tür.

Karmaşık sayı
a+ib biçiminde, *a* ve *b*'nin sıradan gerçek sayılar, hayali *i* sayısının da $i^2 = -1$ özelliğine sahip olduğu bir sayı. Karmaşık sayı 2 + 3*i* örnek verilebilir.

Kelebek etkisi
En başta alınan başlangıç noktalarının birbirine çok yakın olmasına rağmen ortaya tümüyle farklı yörüngelerin çıkması.

Kesir
Bir başka tam sayıya bölünmüş bir tam sayı, örneğin 3/7.

Küme
Bir öğeler topluluğu. Bazı ülkelerin isimlerinden oluşan küme: C = {İngiltere, Rusya, Amerika Birleşik Devletleri, Hindistan, Avustralya}. Pozitif çift sayılar kümesi, E = {2, 4, 6, 8...}

Küre
Sıradan bir küre bir topun iki boyutlu yüzeyidir. *x, y, z* değişkenleriyle $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ denklemiyle ifade edilir. *n* boyutlu bir kürede aynı denklem (*n* + 1) değişkenleriyle geçerlidir.

Limit
x'li bir ifadeyi, *x* belli bir sayıya giderek yaklaşırken sınırlayan değer.

Lojistik denklem
Bir yıldan ertesi yıla nüfus artışının modelini oluştururken kullanılan denklem: $x_{n+1} = r\,(1-x_n)x_n$

Manifold
Karmaşık olabilecek, fakat küçük bir kısmı incelendiğinde Öklit geometrisinin geçerli olduğu geometrik bir nesne. Torus, bir deliği olan bir yüzeydir; fakat küçük bir parçası deliği olmayan sıradan bir disk gibi görünür.

Null hipotezi, H_0
İstatistikçilerin sınadığı hipotezin ismi.

Olasılık
0'dan (imkansız) 1'e (kesin) kadar bir ölçekte şansın ölçümü.

On altı tabanlı sayı
16 tabanlı, 16 sembole dayanan bir

sayı sistemi: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E ve F. Bu sistem bilgisayara dayalı hesaplamalarda yaygın olarak kullanılır.

On tabanlı sistem
0, 1, 2..., 9 şeklinde 10 sembole dayanan, yaygın olarak kullandığımız sayı sistemi.

Öklit geometrisi
Öklit'in 300'de yazılmış *Elements*'te sunduğu geleneksel geometri. Bu geometride bir üçgenin açılarının toplamı 180^0'ye eşittir.

Pay
Bir kesrin üst kısmı. 3/7 kesrinde 3 paydır.

Payda
Bir kesirin alt kısmı. 3/7'de payda 7'dir.

Pi, π
İlk kez daireyle ilişkili olarak ortaya çıkan bu çok meşhur sabit, matematiğin bütün alanlarında karşımıza çıkar. π'nin değeri yaklaşık olarak 22/7'dir, yani on tabanlı olarak 3,1415926535...

Pisagor teoremi
Dik açılı bir üçgenin kenar uzunlukları x, y ve z'yse, z'nin dik açının karşısındaki en uzun kenar olması halinde $x^2 + y^2 = z^2$.

Polihedron
Birçok yüzü olan katı bir cisim. Örneğin bir tetrahedronun dört tane üçgen yüzeyi, küpün altı tane kare yüzeyi vardır.

Rasyonel sayılar
Ya tam sayı ya kesir olan sayılar.

Sekans
Sayı ya da sembollerden oluşan (sonsuz olabilecek) bir sıra.

Sekizeyler, Cayley sayıları
1840'larda keşfedilmiş sekiz boyutlu "hayali" sayılar.

Taban
Bir sayı sisteminin temeli. Babilliler sayı sistemlerini 60'a dayandırmışlardı; modern taban ise 10'dur.

Teorem
Bir sonucu olan, kabul gören bir olgu için kullanılan terim.

Ters kare kanunu
Newton'ın kütleçekim kanunu m_1 ve m_2 kütlelerine sahip iki nesnenin birbirine şu oranda bir kuvvetle çekildiğini ortaya koyar:
$m_1 \times m_2 / d^2$

Toplam sıfır
Oyun kuramı açısından geçerlidir. Bir oyuncunun kazandığını $(+k)$ diğeri kaybeder $(-k)$; böylece kazanç $(+k)$ ve kaybın $(-k)$ net toplamı 0 olur.

Topoloji
"Plastik çarşaf" geometrisi olarak da bilinir; yüzeylerin, kesmeyle değil de gerilme ve büzüşmeyle değiştiklerinde korunan özelliklerine odaklanır. Uzunluk ve açı ölçümlerinin, olağan geometride olduğu gibi topolojide yeri yoktur.

Üç cisim problemi
Birbirlerine çekilen üç cismin, örneğin Ay, Dünya ve Güneş'in hareketlerini analiz etme girişim.

Üs
Aritmetikte kullanılan bir işaret. Bir sayının kendisiyle çarpımı, örneğin 5×5, 2 üssüyle 5^2 olarak yazılır; $5 \times 5 \times 5$ ise 5^3 ve böyle devam eder. Bu notasyonun kullanım alanı genişletilebilir. Örneğin $5^{1/2}$, 5'in kare kökü anlamına gelir. Kuvvet ve endeks de üsle aynı anlama gelen terimlerdir.

***x*-*y* eksenleri**
Rene Descartes'ın noktaların bir *x* koordinatı (yatay eksen) bir de *y* koordinatı (dikey eksen) olduğunu düşünmesinden ileri gelen fikir.

Yer-değer sistemi
Bir sayının büyüklüğü hangi basamakta bulunduğuna bağlıdır. 73'te 7'nin yer değeri "7 tane on", 3'ünki "3 birim" anlamına gelir.

BÜYÜK SORULAR: MATEMATİK

Tony Crilly

BÜYÜK SORULAR dizisi okurun gündemine tarih boyunca insanların aklını kurcalamış temel felsefi ve bilimsel soruları taşıyor. Bu sorulara en büyük düşünürlerin verdiği cevapları sunuyor. *Büyük Sorular: Matematik* başlığında Tony Crilly bilinen ilk sayılardan kaos teorisine kadar matematiğin tam kalbinde yatan ve içinde yaşadığımız dünyayı anlamamız için elzem olan 20 temel soruyu tartışıyor.

MATEMATİK NE İÇİNDİR?
SAYILAR NEREDEN GELİYOR?
MATEMATİĞİN ATOMLARI NEDEN ASAL SAYILARDIR?
EN TUHAF SAYILAR HANGİLERİDİR?
HAYALİ SAYILAR GERÇEKTEN DE HAYALİ Mİ?
SONSUZLUK NE KADAR BÜYÜKTÜR?
PARALEL DOĞRULAR NEREDE BİRLEŞİR?
EVRENİN MATEMATİĞİ NASILDIR?
İSTATİSTİK YALANDAN MI İBARETTİR?
MATEMATİK ZENGİNLİĞİN GARANTİSİ MİDİR?
HER ŞEYİN BİR FORMÜLÜ VAR MI?
ÜÇ BOYUT NEDEN YETERLİ DEĞİLDİR?
BİR KELEBEĞİN KANATLARI GERÇEKTEN DE FIRTINAYA YOL AÇABİLİR Mİ?
KIRILAMAZ BİR ŞİFRE YARATABİLİR MİYİZ?
MATEMATİK GÜZEL MİDİR?
MATEMATİK GELECEĞİ KESTİREBİLİR Mİ?
EVRENİN ŞEKLİ NASILDIR?
SİMETRİ NEDİR?
MATEMATİK DOĞRU MUDUR?
ÇÖZÜLECEK BİR ŞEY KALDI MI?



versus

ISBN 978-605-5691-63-9