Uygulamalı Lineer Cebir

Uygulamalı Lineer Cebir

Dokuzuncu Baskı

Bernard Kolman
Drexel Üniversitesi

David R. Hill
Temple Üniversitesi

Çeviri Editörü
Prof. Dr. Ömer Akın
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

PALME YAYINCILIK
Ankara, 2010

PALME YAYINLARI: 557
Uygulamalı Lineer Cebir **(Dokuzuncu Baskı)**, Bernard Kolman · David R. Hill
Çeviri Editörü: Prof. Dr. Ömer Akın
Palme Yayıncılık © 2010
Yayın Koordinatörü: H. İbrahim SOMYÜREK
Yayına Hazırlama: PALME Dizgi, Tasarım ve Grafik Birimi
Baskı: Özkan Matbaacılık Gazetecilik San. Tic. Ltd. Şti. Tel: (0 312) 395 48 91-92
ISBN: 978-605-5829-87-2

Kitabın Özgün Adı	: Elementary Linear Algebra with Applications (Ninth Edition)
Yazarları	: Bernard Kolman · David R. Hill
Editörler	: Marcia J. Horton , Holly Stark, Jennifer Lonschein
Yayıncı Firma	: Pearson Education, Inc, publishing as Prentice Hall, Copyright © 2008 Upper Saddle River, New Jersey 07458
Orijinal ISBN	: 0-13-229654-3

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission from Pearson Education, Inc

Türkçe basım : Turkish Language edition published by PALME YAYINCILIK, Copyright ©2010.

Bu kitabın Türkiye'deki her türlü yayın hakkı Palme Yayıncılık Ltd. Şti.'ne aittir, tüm hakları saklıdır. Kitabın tamamı ya da bir kısmı 5846 sayılı yasanın hükümlerine göre, kitabı yayınlayan firmanın önceden izni olmadan elektronik, mekanik, fotokopi ya da herhangi bir kayıt sistemiyle çoğaltılamaz, yayınlanamaz, depolanamaz.

Baş Yönetici Editör/Üretim Editörü: Scoot Disanno
Sanat Yönetmeni: Juan López
İmalat Alıcı: Lisa McDowell
Pazarlama Müdürü: Tim Galligan
Kapak Resmi: (c) Willams, Artist, 1969 Trane, 1969 Acrylic on canvas, 108'' × 84''
Charles Cowles'in Harlem'deki stüdyo müze koleksiyonundan hediyedir. New York

PALME
YAYIN, DAĞITIM, PAZARLAMA, İÇ VE DIŞ TİCARET LTD. ŞTİ.
Merkez: A. Adnan Saygun Cad. No: 10/A Sıhhiye-ANKARA
Tel: 0.312-433 37 57 • Fax: 0.312-433 52 72
e-mail: palmeyayin@superonline.com, palmeyayincilik@yahoo.com.tr
http://www.palmeyayinevi.com

Ankara Şubesi	: Olgunlar Sok. No: 4/5 Bakanlıklar/ANKARA	Tel: 0.312 417 95 28	Faks: 0.312 419 69 64
Antalya Şubesi	: Meltem Mah. Dumlupınar Blv. Başkent Sit. No: 4 ANTALYA	Tel: 0.242 238 32 09	Faks: 0.242 238 45 02
İzmir Şubesi	: Kazım Dirik Mah. Ankara Cad. No: 259/C Bornova/İZMİR	Tel: 0.232 343 10 77	Faks: 0.232 343 10 78

Lisa, Stephen
ve Lillie hatırasına
B. K.

Suzanne'ye
D. R. H.

İÇİNDEKİLER

Önsöz xi
Öğrenciye xvi

1 Lineer Denklemler ve Matrisler 1
1.1 Lineer Denklem Sistemleri 1
1.2 Matrisler 11
1.3 Matris Çarpımı 21
1.4 Matris İşlemlerinin Cebirsel Özellikleri 34
1.5 Özel Tipte Matrisler ve Parçalanmış Matrisler 42
1.6 Matris Dönüşümleri 55
1.7 Bilgisayar Grafikleri (Seçmeli) 63
1.8 Korelasyon Katsayısı (Seçmeli) 73
Ek Alıştırmalar 80

2 Lineer Sistemlerin Çözümü 86
2.1 Bir Matrisin Eşelon Şekli 86
2.2 Lineer Sistemlerin Çözümü 95
2.3 Elementer Matrisler; A^{-1} 117
2.4 Denk Matrisler 126
2.5 LU-Ayrışımı (Seçmeli) 130
Ek Alıştı-rmalar 137

3 Determinantlar 141
3.1 Tanım 141
3.2 Determinantların Özellikleri 146
3.3 Kofaktör Açılımı 157
3.4 Bir Matrisin Tersi 165
3.5 Determinantların Diğer Uygulamaları 169
3.6 Hesaplama Bakış Açısından Determinantlar 173
Ek Alıştırmalar 174

4 Reel Vektör Uzayları 177
4.1 Düzlemde ve 3-Boyutlu Uzayda Vektörler 177
4.2 Vektör Uzayları 188
4.3 Alt Uzaylar 197
4.4 Germe 209
4.5 Lineer Bağımsızlık 216

4.6 Taban ve Boyut 229
4.7 Homogen Sistemler 244
4.8 Koordinatlar ve İzomorfizmler 259
4.9 Bir Matrisin Rankı 270
Ek Alıştırmalar 285

5 İç Çarpım Uzayları 290
5.1 R^2 ve R^3'te Boy (Uzunluk) ve Yön 290
5.2 R^3'te Çapraz Çarpım (Seçmeli) 299
5.3 İç Çarpım Uzayları 307
5.4 Gram-Schmidt Yöntemi 320
5.5 Dik (Ortagonal) Tümleyenler 300
5.6 En Küçük Kareler (Seçmeli) 350
Ek Alıştırmalar 358

6 Lineer Dönüşümler ve Matrisler 363
6.1 Tanım ve Örnekler 363
6.2 Bir Lineer Dönüşümün Çekirdeği ve Görüntü Cümlesi 375
6.3 Bir Lineer Dönüşümün Matrisi 389
6.4 Matrislerin ve Lineer Dönüşümlerin Vektör Uzayı (Seçmeli) 399
6.5 Benzerlik 407
6.6 Homogen Koordinatlara Giriş (Seçmeli) 414
Ek Alıştırmalar 430

7 Özdeğerler ve Özvektörler 436
7.1 Özdeğerler ve Özvektörler 436
7.2 Köşegenleştirme ve Benzer Matrisler 453
7.3 Simetrik Matrislerin Köşegenleştirilmesi 463
Ek Alıştırmalar 477

8 Özdeğerler ve Özvektörlerin Uygulamaları (Seçmeli) 481
8.1 Bir Topluluktaki Kararlı Yaş Dağılımı Markov Yöntemleri (Seçmeli) 481
8.2 Spektral Ayrışım ve Singüler Değer Ayrışımı 488
8.3 Baskın Özdeğer ve Temel Parça Analizi (Seçmeli) 501
8.4 Diferansiyel Denklemler 515
8.5 Dinamik Sistemler 525
8.6 İkinci Dereceden Reel Şekiller 535

8.7 Konik Kesitleri 544
8.8 İkinci Dereceden Yüzeyler 552

9 Lineer Cebir İçin MATLAB 561
9.1 MATLAB'da Bilgi Giriş ve Çıkışı 562
9.2 MATLAB'da Matris İşlemleri 567
9.3 Matris Kuvvetleri ve Bazı Özel Matrisler 570
9.4 MATLAB'da Elementer Satır İşlemleri 573
9.5 MATLAB'da Matris Tersleri 583
9.6 MATLAB'da Vektörler 584
9.7 MATLAB'da Lineer Birleşimlerin Uygulaması 586
9.8 MATLAB'da Lineer Dönüşümler 590
9.9 MATLAB Komut Özeti 592

10 MATLAB Alıştırmaları 597

Ek A: Ön Bilgiler E-1
A.1 Cümleler E-1
A.2 Fonksiyonlar E-1

Ek B: Kompleks Sayılar E-5
B.1 Kompleks Sayılar E-5
B.2 Lineer Cebirde Kompleks Sayılar E-13

Ek C: İspatlara Giriş E-22
C.1 Mantık E-22
C.2 İspat Teknikleri E-27

Lineer Cebir İçin Sözlük E-31

Tek Numaralı Alıştırmaların Cevapları E-37

Dizin D-1

Lemmaların, Teoremlerin ve Sonuçların Sayfa Dizini D-11

Fotoğraf Hesapları F-1

ÇEVİRİ EDİTÖRÜNÜN ÖNSÖZÜ

Ülkemizde Türkçe öğretim yapan üniversitelerimizin en büyük problemlerinden birisi kaliteli ve öğrenciye iyi hitap edebilen kitap temin etme sıkıntısıdır. Fen, mühendislik, teknik eğitim ve meslek yüksek okullarının ilk yıllarında hemen her öğrenci Lineer Cebir dersini görmektedir. Ancak öğrencilerimiz dersi veren öğretim üyelerinin özel ders notları, çok az sayıda Türkçe kitap ve yabancı dil yetersizliği sebebiyle başarılı olmada sıkıntı çekmektedirler.

İşte bizler, çeşitli üniversitelerden bilim adamları olarak öğrencilerin başarılarını artırmalarında katkıda bulunmayı bir eğitim ve öğretim borcu bildik. Bunu gerçekleştirmek için, bilgisayar destekli olması nedeniyle de Lineer Cebir alanında en iyilerden birisi olduğunu düşündüğümüz elinizdeki bu kitabı Türkçe'ye kazandırmayı kararlaştırdık. Bu işin zorluğunu daha önceki MATEMATİK ANALİZ VE NALİTİK GEOMETRİ Cilt 1 ve Cilt 2 (2001), Uygulamalı Lineer Cebir(2002), Bilgisayar Destekli ve Matematiksel Modellemeli DİFERENSİYEL DENKLEMLER VE SINIR DEĞER PROBLEMLERİ (2008)adlı kitaplardaki deneyimimizden bilmemize rağmen öğrencilerimizin acil ihtiyaçlarını gidermemizin gerektiğine inandık. Kitapta adı geçen meslektaşlarımızın hepsi bu projeyi hiç bir karşılık beklemeksizin büyük bir ilgi ve istekle desteklediler. Kitabın çeviri ve düzenlenmesinde bu meslektaşlarımızın en iyiye ulaşma çabaları öğrencilerine, ülkemize ve güzel Türkçemize yararlı olma ülküsünün bir ifadesidir. Eğer böyle olmasaydı 614+97 sayfalık bir kitap ortaya çıkmazdı. Bu nedenle, katkıda bulunan herkese üniversite gençliği adına teşekkürlerimi sunuyorum.

On bölümden oluşan kitap sırasıyla Lineer Denklemler ve Matrisler, Lineer Sistemlerin Çözümleri, Determinantlar, Reel Vektör Uzayları, İç Çarpım Uzayları, Lineer Dönüşümler ve Matrisler, Özdeğerler ve Özvektörler, Özdeğer ve Özvektörlerin Uygulamaları, Lineer Cebir İçin MATLAB ve MATLAB Alıştırmaları konularını ele almıştır. Daha sonra Ek A ve Ek B ve Ek C' de temel kavramlar ve Lojik ile birlikte İspat Tekniklerine yer verilmiştir.

Kitapta anlatımın olabildiğince "Konuşulan Türkçe" olmasına ve yaygın olarak benimsenen matematik terimlerinin kullanılmasına çaba harcanmıştır. Bunun yanı sıra, Türkçe ortak bilimdilinin gelişmesine katkıda bulunmaya da özen gösterilmiştir. Ancak burada, çevirmenlerin dil ve anlatım birliğini sağlamanın zorluğunu değerli okurlarımızın takdirlerine bırakıyoruz.

Okuyucunun, büyük emeklerle ortaya konan bu kitaptan en kolay ve en iyi şekilde yararlanabilmesi, kitabın tanıtıldığı giriş sayfalarını okumasıyla doğru orantılıdır. Kitabın, tüm okuyuculara yararlı olacağını umarak, varlığını kaçınılmaz gördüğümüz dizgi, baskı ve çeviri hatalarını bize (omerakin@etu.edu.tr) bildirenlere şükranlarımızı sunarız.

Elinizdeki bu UYGULAMALI LİNEER CEBİR kitabını, aslına benzeterek birebir sayfa düzeninde renkli olarak hazırlayan, dizgi ve baskı zorluklarına sabırla göğüs geren, hiçbir fedakarlıktan kaçınmayarak Türkçeye böyle bir kitabı kazandıran PALME YAYINCILIK yetkililerine, dizgiyi özenle yapan Ahmet AKAY ve Nurcan KARABULUT'a teşekkür ederiz.

Bu çevirinin Türk Yüksek Öğretim Gençliğine yararlı olması en büyük dileğimizdir.

Prof. Dr. Ömer AKIN
omerakin@etu.edu.tr
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
Söğütözü-Ankara 2010

ÖNSÖZ

Lineer Cebir en az iki nedenden dolayı çok sayıdaki farklı öğrenci grupları için önemli bir derstir. Birincisi, matematiğin çok değişkenli analiz, diferensiyel denklemler ve olasılığın farklı alanlarda geniş bir uygulamaya sahip olmasıdır. Bu uygulamalar fizik örnek olduğu kadar, biyoloji, kimya ekonomi, finans, psikoloji , sosyoloji ve mühendisliğin alanları da örnek olarak verilebilir. İkincisi, Lineer Cebir, Üniversite ikinci sınıf öğrencilerine, soyut konuları nasıl kavrayabileceklerini öğrenmede mükemmel fırsatlar sunan bir derstir.

Bu kitap, üniversitenin ikinci sınıf seviyesindeki öğrencilerine lineer Cebirin temel düşüncelerine ve hesaplama tekniklerine bir giriş sunar. Aynı zamanda çok geniş bir anlamda dikkatlice seçilmiş uygulamaları içerir. Bu uygulamalar Google™ ve Yer Belirleyici Sistem (Global Positoning System) (GPS) gibi çağdaş konulardır. Kitap, öğrencilere soyut konularla çalışmayı da tanıtır. Konunun bilgisayar aracılığıyla hesaplanabilirliği ve geometriksel olarak kabul edilebilirliğiyle birlikte soyut fikirler dengeli olarak lineer cebirin temel konularıyla verilmiştir.

Bu baskı isteğe bağlı olarak MATLAB™ programının veya kitabın pedegojik temeline uygun başka yazılımların kullanımın devam ettirmeye sürdürmektedir.

Dokuzuncu Baskıda Yenilik Nedir?

Kitabın 38 yıllık basım hayatında ilk sekiz baskısının çok geniş çevrelerce kabul görmesi bizi mutlu etmektedir. Bu baskıyı hazırlamada, materyalin sunumu ve içeriğinin geliştirilmesinde öğrencilerden ve fakültelerden gelen çok sayıdaki öneriyi dikkate aldık. Çeşitli ülkelerdeki öğrencilerin ve fakültelerdeki elememanların bu kitabı kullanmaları özellikle bizi memnun etmektedir. Bu nedenle ilk sekiz basımdaki lineer cebir konularının öğrenciler tarafından kolaylıkla anlaşılabilir halde sunulması amacına bağlı kalmak kaydıyla bu baskıda büyük değişiklikler yapılmıştır. Bu hedefe ulaşmak için aşağıdaki özellikler bu baskıda gerçekleştirildi.

- Tartışma soruları Gözden Geçirme bölümüne eklendi. Bunların çoğu projeler yazma veya grup aktiviteleri için uygundur.
- Eski Kesim 2.1, iki ayrı kesime bölündü. Bunlar 2.1 *Bir Matrisin Eşelon Formu* ve 2.2 *Lineer Sistemlerin Çözümü*dür. Bu bölme işlemi bu önemli materyalin pedegojisini geliştirmeyi sağlayacaktır.
- Eski Bölüm 6, *Determinantlar*, şimdi Bölüm 3 oldu. Bunun nedeni bu materyalin erkenden yazılmasına izin verir.
- Eski Kesim 3.4, *Germe ve Lineer Bağımsızlık*, iki ayrı kesime ayrılmıştır. Bunlar 4.3 *Germe* ve 4.4 *Lineer Bağımsızlık*tır. Öğrencinin bu çok soyut konuları ile problem yaşadıklarından bu düzenleme bu materyalin daha yavaş adımlarla ve daha çok örneklerle sunulmasını sağlar.

- Bölüm 8, *Özdeğerler ve Özvektörlerin Uygulamaları*, bu formda bu baskıda yeni olarak verilmiştir. Bu bölüm eski Kesim 7.3, 7.6 ve 7.9 ile eski Kesim 7.5'in materyalinden ve eski Kesim 8.1 ve 8.2'den oluşur.
- Simetrik matrislerin köşegenleştirilmesi ve singüler değer ayrışımlarının tartışılması daha çok geometrik materyal ile yapıldı.
- Kesim 1.7. *Bilgisayar Grafikleri* genişletildi.
- Daha çok uygulama eklendi. Bu uygulamalar ağlar ve kimyasal denge denklemleridir.
- Çok yerde sonuçlar ve materyalin önemini göstermek için pedegojik bazı açıklamalar eklendi.
- GPS sisteminde lineer cebirin nasıl kullanıldığını göstermek için basitleştirilmiş tartışmalar eklendi.
- İndirgeme bağıntıları için daha çok materyal eklendi.
- Vektör uzaylarının çok çeşitli örnekleri verildi.
- Lineer cebirin dört temel altuzayı için tartışmaların yapıldığı materyal eklendi.
- Daha çok geometri eklendi.
- Daha çok resim eklendi.
- Her seviyede daha çok alıştırma eklendi.
- Gerçek dünyadaki örnekler veri cümlelerinde güncellendi.
- Daha çok MATLAB alıştırmaları eklendi.

ALIŞTIRMALAR

Alıştırmalar konunun tamamlayıcı kısmıdır. Alıştırmaların çoğu doğal olarak nümerik olup diğerleri teoriktir. İlk yedi bölümün sonuna eklenen tartışma alıştırmaları projeler yazma ve grup aktivitelerinde kullanılmak üzere bu baskıya yeni olarak konulmuştur. Bazı nümerik alıştırmalar gibi teorik ve tartışma alıştırmalarının çoğu da sözlü cevapları gerektirmektedir. Bu teknoloji çağında dikkatli ve eksiksiz biçimde yazabilmek bu tür alıştırmaların üstünlüğünü güçlendirmede özellikle önemlidir. Bu basım hemen hemen 200 tane yeni alıştırma içerir. Özel olarak  sembolüyle gösterilen bilgisayar alıştırmaları iki tiptir. İlk sekiz bölümde var olan alıştırmalar, çözümlerinin bulunmasında özel bir yazılım kullanılmasını gerektirmez. Bölüm 10'daki 147 alıştırma MATLAB'ın açıklama yeteneklerini geliştirmek için pedegojik rutinlerin bir cümlesi olan hesaplama prosedürlerini adım adım veren, grafikleri kullanarak geometrik olarak gösteren ve M-dosyaları olarak adlandırılan yazılımlar geliştirildi. MATLAB ve geliştirilen M-dosyaları öğrenci ve bilgisayar arasında öğrencinin teknolojik çalışmalara katılım için bir çok yoldan fırsat sunar. Bu bölümdeki alıştırmalar konunun kendi kesimlerinden ziyade konuya ait anahtardırlar. Bölüm 9'da MATLAB komutlarına verilen referanslar ve kısa başlıklar alıştırmaların bütünü hakkında bilgi sunar. Tek numaralı alıştırmaların cevapları kitabın arkasında yer alır. Yayıncıdan temin edilebilecek **Öğretici Çözümler El Kitabı** (ISBN:0-13-229655-1) bütün teorik alıştırmaların çözümlerini ve çift numaralı alıştırmaların cevaplarını içerir.

SUNUM

Üniversite ikinci sınıf seviyesindeki öğrencilere, soyut düşüncelerin sağlam temellere dayandırılarak basamak basamak verilmesi gerektiği deneyimlerden bilinmektedir. Bu nedenle Lineer Cebiri öğrenmede öğrencilerin bildikleri lineer denklem sistemlerinin çözümünde doğal olarak karşılaşılan sayıların oluşturduğu tabloların ortaya koyduğu matrisler büyük önem taşır. Bir basımdan bir sonraki basıma kitap içerisindeki konuları daha anlaşılır hale getirmek için kullanılan ifadeleri pedagojik anlamda daha da iyileştirmek için büyük bir gayret dikkatle sarfedilmiştir. Soyut düşünceler, konunun geometrik hesaplamalarla ilgili kesimlerine gerekli önem verilerek dikkatli bir şekilde dengelenmiştir. Ek C, *İspatlara Giriş*, matematikteki ispatların temelini öğrenciye hızlı bir şekilde verebilmek için kullanılabilir. Bu materyalin geniş bir hali Öğrenci Çözümleri El Kitabı Bölüm 0 ta bulunabilir.

KULLANILAN MATERYAL

Haftada dört saatlik bir Lineer Cebir dersinde bu kitabı kullanırken seçmeli kısımlar gözardı edilerek herhangi bir zorluk çekilmeden özdeğer ve özvektörler kolayca incelenir. Teorik materyali okumada harcanan zaman değiştikçe dersin basamağı ve seviyesi de değişir. Bu nedenle bu kitap, bir çok farklı dersin öğretilmesinde de kullanılabilir.

Bölüm 1 matrisler ve matrislerin özelliklerini içerir. Bu bölüm aynı zamanda istatistikdeki nokta çarpımının uygulamalarına ve matris dönüşümlerine erken bir giriştir. Lineer denklem sistemlerinin çözümü **Bölüm 2**'de tartışılmıştır. **Bölüm 3** determinantların temel özellikleri ve bazı uygulamalarının tanıtılmasından oluşmuştur. **Bölüm 4** daha soyut bir kavram olan reel vektör uzayını ele alır. Doğal olarak ortaya çıkan pek çok geometrik düşünce burada kullanılmaya başlamıştır. Böylelikle de, reel n-lilerden oluşan n-boyutlu vektör uzayı, reel elemanlı tüm $n \times 1$ tipindeki matrislerin R^n vektör uzayına izomorf olduğu ispatlanır. R^2 ve R^3'ün basit bir genelleştirmesi R^n olduğundan iki ve üç boyutlu uzaylar bölümün başlangıcında incelenmiştir. Bu ise başlangıçta verildiği gibi sonlu boyutlu reel uzay kavramının görüldüğü gibi uzak olmadığını gösterir. **Bölüm 5** iç çarpım uzaylarını kuvvetli bir geometrik uyuma (oryantasyona) sahip olarak içerir. **Bölüm 6** matrisler ve lineer dönüşümleri incelemekle beraber boyutla ilgili teoremler ve lineer denklem sistemlerinin çözümü ile ilgili uygulamalardan oluşmuştur. Bölüm 7 özdeğer ve özvektörleri gözönüne alır. Yine bu bölümde simetrik matrisler için köşegenleştirilme tamamıyla çözülmüştür. **Bölüm 8** (seçmeli) özdeğerler ve özvektörlerin bazı uygulamalarına bir giriş sunar. Kesim 8.3 *Baskın Özdeğer ve Temel Parça Analizi* lineer cebirdeki çok kullanışlı sonuçları içerir. Dolayısıyla Kesim 7.2'den, diferensiyel denklemlerinin çözümünden lineer cebirin nasıl kullanıldığının gösterildiği Kesim 8.4 *Diferensiyel Denklemler* kısmına gitmek mümkündür. Kesim 8-5, Dinamik sistemler kısmı modern uygulamalı matematiğin önemli bir alanına Lineer cebirin uygulanmasını verir. Aynı zamanda bu bölümde ikinci dereceden reel şekiller, konik kesitleri ve ikinci dereceden yüzeylerde tartışılmıştır. **Bölüm 9**, *Lineer Cebir* için MATLAB, MATLAB programına bu giriştir. **Bölüm 10**, MATLAB *Alıştırmaları*, MATLAB kullanılarak çözülmek üzere düzenlenen 147

alıştırmadan oluşmuştur. **Ek A**, cümleler ve fonksiyonlarla ilgili temel materyali oluşturur. İhtiyaç duyulduğunda başvurulabilir. **Ek B**, kompleks sayılar ve kompleks sayıların lineer cebirde kullanımını içerir. **Ek C**, matematikteki ispatlara kısa bir giriştir.

MATLAB YAZILIMI

Açıklamalı M-dosyaları bu kitapta verilen alıştırmaları çözmek amacıyla geliştirilmiştir. Özellikle Bölüm 9'da var olanlar aşağıdaki web sitesinden görülebilir. www.prenhall.com/kolman. Bu M-dosyaları MATLAB'ın var olan kapasitesini yeni pek çok özelliğini ders içeriklerine dönüştürebilmek için düzenlenmiştir. Hesaplarıyla ilgili alıştırmalar var olan pek çok sayıdaki yazılım paketleriyle çözülebilmesine rağmen bize göre bu amaç için en uygun paket MATLAB dır. MATLAB çok yönlü olup köşe taşını lineer cebirdeki kapasitesi oluşturur. Bu öğrencinin MATLAB ile içli dışlı olması eğitim ile sağlanır. Böylelikle, öğrenci problemin tüm basamaklarında düşünür ve sıkıcı olan hesaplamanın ağır yükünden, işlemlerden kurtarmak için MATLAB ı kullanır. Gerçekten de, uzun hesaplamalar yapılacağı problemi çözmek neredeyse mümkün değildir. Bu nedenle bu problemlerin çözümünde hesaplama yapabilecek yazılım önem taşır. Bu da lineer cebirde MATLAB (veya benzer herhangi bir paket) için ideal bir iştir. Böylece, eğitim verilerek ve MATLAB'ın gücünü serbest bırakarak öğrenci ile bilgisayar arasında kolej öncesi öğrenciye MATLAB gibi kuvvetli bir aracın tanıtılması, daha üst seviyedeki derslerde özellikle de fen ve mühendislikte diğer yazılımlar için öğrencinin yolunu açar.

MATLAB, lineer cebir hesaplamaları için bilgisayar rutinlerini içeren profesyonelce geliştirilmiş bir yazılımdır. MATLAB tarafından kullanılan kod C dilinde yazılmıştır ve piyasaya çıkan MATLAB'ın yeni sürümlerine (versiyon) güncellenebilir. MATLAB The Math Works Inc., 3 Apple Hill Drive, Natick, MA 01760, e-mail: info@mathwork.com, [508-647-7000]. Öğrenci sürümü *The Math Work*'ten ucuz bir fiyata temin edilebilir. MATLAB'ın öğrenci sürümü Maple™ nin bir sürümünü de içerir. Dolayısıyla sembolik hesaplama yeteneğine de sahiptir.

ÖĞRENCİ ÇÖZÜMLERİ EL KİTABI

Öğrenci çözümleri el kitabı Dennis R. Kletzing, Stetson Üniversitesi tarafından hazırlanmış olup nümerik ve teorik olan tüm tek numaralı alıştırmaların çözümlerini içerir.

TEŞEKKÜR

Biz, ilk dokuz baskının aşağıdaki inceleyenlerine teşekkür etmekten mutluluk duyarız: merhum Edward Norman, University of Central Florida; merhum Charles S. Duris ve Herbert J. Nicol, ikisi de Drexel University; Stephen D. Kerr, Weber State College; Norman Lee, Ball State University; William Briggs, University of Colorado; Richard Roth, Universty of Colorado; David Stanford, College of William and Mary; David L. Abrahamson, Rhode Island College; Ruth berger, Memphis State University; Michael A. Geraghty, University of lowa; You-feng Lin, University of South Florida; lothar Redlin, Pennsylvania State University, Abington; Richard Sot, University of Nevada, Reno; Raymond Soutwarth, Emekli Profesör, College of William and Mary; J.

Barry Turett, Oakland University, Gordon Brown, University of Colorado; Matt Insall, Rolla'da University of Missouri; Wolfgang Kappe, Binghamton'da State University of Nej York; Richard P. Kubelka, San Jose State Universit; James nation University of Hawaii; David Peterson, University Central Arkansas; Malcolm J. Sherman, Albany'de State University of New York; Alex Stanoyevitch, University of Hawaii; Barbara Tabak, Brandeis University; Loring W. Tu, Tufts University; Manferd Kolster, Mcmaster University; Daniel Cunningham, Buffalo State College; Larry K. Chu, Minot State University; Daniel King, Sarah Lajrence University; Kevin Vang, Minot State University; Avy Soffer, Rutgers University; mDavid Kaminski, University of Lethbridge, Patricia Beauliei, University of Louisiana, Will Murray, California State University at Long Beachdeki California State University ve dokuzuncu baskı için Wichita State University; Manuel Lopez, Rochester Institue of Technology, Thomas L. Scofield, Calvin Collage, Jim Gehramann, California State University, Juergen Gerlach, Radford University ve Martha Allen, Georgia College ve State University.

Çok sayıda öneri, yol gösterme ve kritik yapan kişiler materyalin geliştirilmesine katkıda bulunmuşlardır.

Öğrenci Çözümleri El Kitabı ve *Öğretici Çözümler El Kitabı*nı bilgisayarda yazan ve matematiksel bir çok noktayı doğrulayan Dennis R. Kletzing'e teşekkür ederiz. Onunla çalışmak büyük bir mutluluktu.

Alıştırmaların cevaplarını dikkatlice kontrol eden Blaisa deSesa'ya teşekkür ederiz. Bu baskının kapağına *Trane* görüntüsünü koymamıza izin veren William T. Williams'a teşekkür ederiz.

Aynı zamanda kritik ve dikkatli bir şekilde kitabın sayfa okumasını yapan Lilian N. Brady ve Nina Edelman'a ve Amerika Birleşik Devletleri ile diğer ülkelerde son 38 yıldır bu kitapları öğrencilere tavsiye eden ve öğretmenlerin değerli önerilerine teşekkür ederiz.

Son olarak kitap yönetici editörü Scott Disannno'ya baş editör Holly Stark'a, editör asistanı Jennifer Lonschein'e ve bu baskının pazarlanmasında, üretiminde, dizaynında emeği geçenlere ve başarısızlığa düşmeyen işbirlikçilerine en içten teşekkürlerimizi sunarız. Onlarla çalışmak gerçekten büyük bir mutluluktu.

B. K.
D. R. H.

ÖĞRENCİYE

İki önemli yoldan dolayı çalıştığınız bu ders matematiğin diğer derslerinden uzaktır. İlki, soyut kavramlara sizin ilk kez giriş yapmanızdır. İkincisi, sizin yeteneklerinizde çok güçlü etki yapabilen bir matematik dersidir.

Diğer matematik derslerinden farklı olarak bu ders, problemlerin kesin çözümleri için hesaplama tekniklerini ayırt edici bir yöntemi size vermeyecektir. Bunun yerine, teoremlerin ispatlanması ve özelliklerin belirlenmesi için yaratıcı prosedürler ve kesin tanımlamaların verildiği temel bir materyal geliştirecektir. Teorem ispatlama sizin hakimiyetinizi kazanmak için zaman alıcı bir beceridir. Böylelikle, matematiksel sonuçların çok dikkatli bir şekilde ispatlanması, sizin becerinizi geliştirecektir. Uygulamalar ve nümerik örneklerle açıklama becerisini yavaşça ve gerektiğinden çok örnekle size sunacağız. Bir çok hesaplama yapıyor olmanıza rağmen çok problemde "doğru" cevabı elde etmek mümkün olmayacak fakat sonucun nasıl yorumlanacağı ve cevabı nasıl elde ettiğinizi açıklamak mümkün olacaktır.

Lineer cebir hergün dünyada matematiğin diğer alanlarıyla birlikte fizik, biyoloji, kimya, mühendislik, istatistik, ekonomi, finans, psikoloji, ve sosyolojinin problemlerini çözmede kullanılır. Bilgi transferi, film ve video da özel efektler geliştirme, ses kaydı, internette web arama motorları, caps (konum belirleme sistemi) ve ekonomik analizler gibi uygulamalar lineer cebir kullanımını içerir. Böylelikle sizler lineer cebirin sizi nasıl derinden etkilediğini görebilirsiniz. Bu kitapta seçilmiş uygulamaların bir çoğu yer almaktadır. Eğer yeterli zaman bulunursa bu uygulamaların çoğu derste incelenebilir. Ek olarak uygulamaların bir çoğu da kendi çalışmalarınızla yapabileceğiniz projeler biçimde kullanılabilir. Bu uygulamaların bir listesi ön kapağın iç yüzünde yer almaktadır.

Bu kitapta dört farklı tip alıştırma mevcuttur. İlki, hesaplanabilir alıştırmalardır. Bu alıştırmaların bir çoğu hemen hemen hepsi elle yapılabilir bir şekilde dikkatlice seçilmiştir. Gerçek uygulamalar da lineer cebiri kullanırken problemlerin çok büyük boyutlarda olduğunu ve her zaman "güzel" olmadıklarını göreceksiniz. Bu problemleri çözmek için çok güçlü yazılımları her zaman için kullanacağınız problemlerin büyük olması sizin için problem değildir.

Çözümün tartışılacağı bir rapor hazırlama, çözümün adımlarını açıklama ve sonuçlarını yazma çok daha önemlidir. Bu tip alıştırmalar matematikte yazma deneyimini size verecektir. Matematik sadece sembolleri kullanmaz kelimeleri de kullanır.

Lineer Cebirde Nasıl Başarılı Olunur?

- Elinizde kağıt kalem ile birlikte yavaşça kitabı okuyunuz. Gerekli gördüğünüz kesimi birden fazla okumalısınız. Konu içindeki "doğruluğunu ispatlayınız" şeklinde işaretlenmiş adımı gerçekleştirmek için zaman harcayınız.
- Zamanında ev ödevlerinizi yaptığınızdan emin olunuz. Eğer sınıfta problemlerin açıklamasının yapılmasına kadar beklerseniz kendi kendinize bir problemin nasıl çözüleceğini öğrenme fırsatını kaçırırsınız. Eğer bir problemi tamamlayamıyorsanız bile çözmeye devam ediniz. Böylelikle bu problemi sınıfta çözdüğünüzü ve daha kolay anladığınızı göreceksiniz. Sınıfta kullanılan materyali ve bazı ev ödevlerini başka öğerncilerle çalışmak size yardımcı olacaktır.
- Bir şeyi anlamadığınız zaman hemen yardım istediğinizden emin olunuz. Bu dersteki her soyut fikir, bir evin inşası ve temelini oluşturmak gibi geçmişteki fikirleri geliştirme tabanına dayanır. Eğer herhangi bir fikir sizin için bulanık veya tam oturmamışsa yeterince güçlü olmayacaktır.
- Bu kitapta verilen pedegojik desteği kullanınız. İlk sekiz bölümdeki her kesimin sonunda anahtar kelimelerin bir listesini verdik. ilk yedi bölümün hepsinin sonunda bir bölüm gözden geçirme, ek alıştırmalar, bir bölüm kısa sınav ve tartışma alıştırmaları verdik. Kitabın sonunda tek numaralı alıştırmaların cevapları yer almaktadır. Öğrenci çözümleri el kitabı tek numaralı alıştırmaların çözümlerinin detayları ile birlikte teorik ve nümerik çözümlerin detaylarını da içerir.

Yayıncıdan satın alınabilir (ISBN 0-13-229(656-X) Lineer cebir öğrenmedeki sarf ettiğiniz çabanızın diğer derslerde ve profesyonel kariyerinizde size sağlayacağı büyük desteğe güveniyoruz.

Size lineer cebir çalışmanızda başarılar dileriz.

Bernard Kolman

David R. Hill

BÖLÜM

1 Lineer Denklemler ve Matrisler

1.1 Lineer Denklem Sistemleri

Lineer denklem sistemlerinin çözümü, sosyal bilimler, mühendisliğin tüm dallarında, fizik, kimya, biyoloji, ekonomi ve matematik gibi bir çok çalışma alanlarında pratik problemler olarak karşımıza çıkmıştır.

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ kompleks veya reel sabitler, $x_1, x_2, \ldots, x_n$'ler bilinmeyenler, eşitliğin sağındaki b de kompleks veya reel nicelik olmak üzere,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \qquad (1)$$

ifadesine bir lineer denklem adı verilir. Bir çok uygulamada verilen b değeri için (1) denklemini sağlayan $x_1, x_2, \ldots, x_n$'ler bulunur.

(1) lineer denklemini sağlayan $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$ olmak üzere, n terimli $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ dizisi (1) lineer denkleminin çözümüdür. Bundan dolayı $x_1 = 2, x_2 = 3$ ve $x_3 = -4$ sayıları aşağıdaki denklemin bir çözümüdür:

$$6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -13,$$

çünkü;

$$6(2) - 3(3) + 4(-4) = -13.$$

Daha genel olarak, n bilinmeyenli m lineer denklemin bir sistemi, her biri n bilinmeyenli m tane lineer denklemin bir cümlesidir.

Not: Ek A, cümleler ve fonksiyonlar ile ilgili temel kavramları özetlemektedir. İhtiyaç duyulduğunda, her zaman başvurulabilir.

Bir lineer sistem geleneksel olarak,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{2}$$

şeklinde yazılır. Bu sistemin i. denklemi

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

dir. (2) deki a_{ij}'ler bilinen sabitler, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ değerleri veriliyor. (2) deki her bir denklemi sağlayan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ değerlerini bulmak istiyoruz.

(2) lineer sisteminin **çözümü**, sistemde x_1 yerine s_1, x_2 yerine s_2, … , x_n yerine s_n yazdığımızda (2) denklem sağlanırsa $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sayı dizisi sistemin çözümü olacaktır. Eğer (2) nolu lineer sistem çözüme sahip değilse sistem **tutarsız**, sahipse **tutarlıdır** denir. Eğer (2) nolu sistemin sağındaki b_1 sabitlerinin hepsi sıfır ise bu denklem sistemine **homogen denklem sistemi** adı verilir. $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ daima homogen denklem sistemi için bir çözümdür. Bu çözüme **aşikar çözüm** diyeceğiz. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in hepsi birden sıfır değil ise bu çözüme de **aşikar olmayan** çözüm adı verilir.

(2) sisteminden başka bir n-bilinmeyenli r-lineer denklem sistemi gözönüne alalım;

$$\begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n &= d_1 \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n &= d_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad &\vdots \\ c_{r1}x_1 + c_{r2}x_2 + \cdots + c_{rn}x_n &= d_r. \end{aligned} \tag{3}$$

Eğer (2) ve (3) sistemlerinin her ikisinin de çözümleri tam olarak aynı iseler, (2) ve (3) sistemlerine **denk** sistemler adı verilir.

ÖRNEK 1

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= -7 \\ 2x_1 + x_2 &= 7 \end{aligned} \tag{4}$$

sistemi ve

$$\begin{aligned} 8x_1 - 3x_2 &= 7 \\ 3x_1 - 2x_2 &= 0 \\ 10x_1 - 2x_2 &= 14 \end{aligned} \tag{5}$$

sisteminin çözümü $x_1 = 2$ ve $x_2 = 3$ olup bu iki denklem sistemi denktir. ■

Lineer denklem sistemini çözmek için **yok etme metodunu** kullanacağız. Bu metot bir denklemin belirli bir katını diğer bir denkleme ekleyerek orijinal denkleme denk olan çözümü daha basit bir denkleme dönüştürme metodudur.

Okuyucular daha önceden muhtemelen $m = n$ durumundaki, yani denklem sayısı bilinmeyen sayısına eşit sistemlerle kendilerini sınırlandırmışlardır. Bu kitapta, $m = n$, $m < n$ ve $m > n$ şeklindeki sistemleriyle ilgilenerek bakış açımızı genişleteceğiz. Gerçekten, $m \neq n$ şeklinde sayısız uygulama vardır. Eğer iki, üç veya dört bilinmeyenle ilgilenirsek, onları çoğunlukla x, y, z ve w olarak yazacağız.

ÖRNEK 2

Bir kuruluş yöneticisi 100.000 $'lık kağıda sahiptir. Borsa kuralları gereğince bu kişi hem depozit (CD) ve hem de uzun vadeli bonoyu kullanmak zorundadır. Bu yöneticinin hedefi yılda 7800 $ kazanmaktır. Bu kazancı %5 CD ve %9'da bonodan olmak üzere, yönetici CD'deki Kârın x miktarını bonodaki kârın y miktarını aşağıdaki lineer denklem ile belirtmiştir.

$$\begin{aligned} x + \quad y &= 100{,}000 \\ 0.05x + 0.09y &= \quad 7800. \end{aligned} \tag{6}$$

Bu sistemde x'i yok etmek için birinci denklemi –0.06 ile çarpıp ikinci denkleme eklersek, x'e sahip olmayan

$$0.04y = 2800,$$

(ifadesini) elde ederiz. x bilinmeyenini yok ettik. Daha sonra

$$y = 70{,}000,$$

bu değeride (6)'daki birinci denklemde yerine yazarsak

$$x = 30{,}000$$

elde edilir. Böylece yönetici 70.000$ uzun vadeli bonodan 30.000$ CD'de yatırım yaptığı zaman kâr edecektir. ■

ÖRNEK 3

$$\begin{aligned} x - 3y &= -7 \\ 2x - 6y &= 7 \end{aligned} \tag{7}$$

lineer denklem sistemini gözönüne alalım. Yok etme metodu ile birinci denklemi –2 ile çarpıp topladığımızda

$$0 = 21$$

elde edilir. Bu, (7) sisteminin çözümünün olmadığını söyler. Biz, (7)'de ikinci denklemin, sol tarafının, birinci denklemin iki katı olduğunu ve sağ taraflarının böyle olmadığını görerek te aynı sonuca varabilirdik. ■

ÖRNEK 4

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6 \\ 2x - 3y + 2z &= 14 \\ 3x + y - z &= -2 \end{aligned} \tag{8}$$

denklem sistemini gözönüne alalım. Birinci denklemi (–2) ile çarpıp ikinci denklem ile sonra da birinci denklemi (–3) ile çarpıp üçüncü denklem ile toplarsak,

$$\begin{aligned} -7y - 4z &= 2 \\ -5y - 10z &= -20 \end{aligned} \tag{9}$$

elde ederiz. Şimdi (9) nolu sistemin ikinci denklemini $(-\frac{1}{5})$ ile çarparsak,

$$\begin{aligned} -7y - 4z &= 2 \\ y + 2z &= 4, \end{aligned}$$

buluruz. Burada denklemlerin yerini değiştirerek

$$\begin{aligned} y + 2z &= 4 \\ -7y - 4z &= 2 \end{aligned} \tag{10}$$

sistemini elde ederiz. (10) nolu sisteme yine yok etme metodunu uygularsak

$$10z = 30 \tag{11}$$

elde edilir. (10)'nun birinci denkleminde z değerini yerine yazarsak $y = -2$ bulunur. Daha sonra da (8)'in birinci denkleminde y ve z değerlerini yerine yazdığımızda da $x = 1$ bulunmuş olur. Böylece bu değerleri gözönüne alarak, yeni bir lineer denklem sistemini elde ederiz.

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6 \\ y + 2z &= 4 \\ z &= 3 \end{aligned} \tag{12}$$

şeklinde (8) ve (12) lineer sistemleri denktir. Ancak (12) lineer sisteminin çözümü daha kolaydır. ■

ÖRNEK 5

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= -4 \\ 2x + y - 3z &= 4 \end{aligned} \tag{13}$$

lineer denklem sistemini göz önüne alalım. Bu sistemin birinci denkleminin her iki tarafını (–2) ile çarpıp taraf tarafa toplayıp, x bilinmeyenini yok edersek,

$$-3y + 3z = 12 \tag{14}$$

buluruz. Şimdi (14)'ü çözmeliyiz. Çözüm $y = z - 4$'tür. z herhangi bir reel sayı olmak üzere çözüm

$$\begin{aligned} x &= -4 - 2y + 3z \\ &= -4 - 2(z - 4) + 3z \\ &= z + 4 \end{aligned}$$

(13)'ün ilk denkleminden bulunur. (13) sisteminin bir çözümü,

$$\begin{aligned} x &= z + 4 \\ y &= z - 4 \\ z &= \text{herhangi bir reel sayı} \end{aligned}$$

ile verilir. Böylece z'ye vereceğimiz her bir değer için sonsuz çoklukta çözüm elde edebiliriz. Örnek olarak $z = 1$ alınırsa,

$$x = 5, \quad y = -3, \quad \text{ve} \quad z = 1$$

elde edilir. Benzer şekilde $z = -2$ alınırsa,

$$x = 2, \quad y = -6 \quad \text{ve} \quad z = -2$$

çözümlerini bulabiliriz. . ■

Bu örneklerden de görüldüğü üzere bir lineer denklem sisteminin bir tek çözümü, çözümünün olmayışı ve sonsuz çoklukta çözümlerinin olabileceğini söyleyebiliriz.

x ve y iki bilinmeyenli, iki denklemden oluşan,

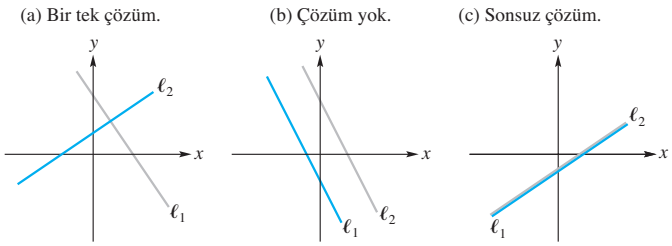
$$\begin{aligned} a_1x + a_2y &= c_1 \\ b_1x + b_2y &= c_2 \end{aligned} \tag{15}$$

lineer denklem sistemini göz önüne alalım.
Bu sistemi oluşturan denklemlerin grafikleri sırasıyla ℓ_1 ve ℓ_2 doğruları ile gösterilir. Eğer $x = s_1$, $y = s_2$, (15) lineer sisteminin bir çözümü ise (s_1, s_2) notası $\ell_1$ve ℓ doğrularının üzerinde yani doğruların kesişim noktası olacaktır. Diğer taraftan (s_1, s_2) noktası hem ℓ_1, hem de ℓ_2 doğrusu üzerinde ise, o zaman $x = s_1$, $y = s_2$ (15) lineer denklem sisteminin bir çözümüdür. Bu durum geometrik olarak Şekil 1.1'de gösterilmiştir.

x, y ve z üç-bilinmeyenli üç denklemden oluşan

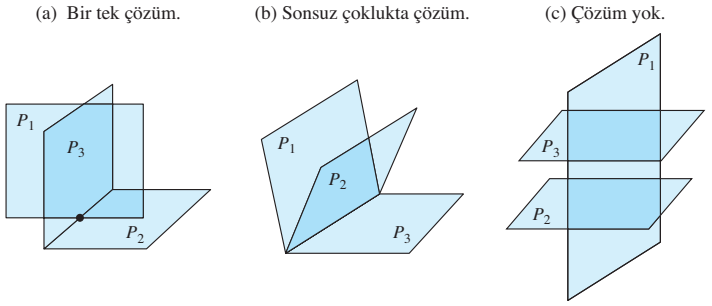
$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \tag{16}$$

lineer denklem sistemini gözönüne alalım. Bu denklemlerin grafikleri iki bilinmeyenli, iki denklemden oluşan lineer denklem sistemine benzer olarak sırasıyla, P_1, P_2 ve P_3 ile gösterilen düzlemlerdir. (16)'daki



ŞEKİL 1.1

lineer denklem sisteminde sonsuz çözüm, birtek çözüm veya çözümsüzlük olabilir. Bu durumlar aşağıda Şekil 1.2'de gösterilmiştir. Bu çözümleri hayalimizde şöyle de canlandırabiliriz (16) sisteminin bir tek çözümü varsa bunu, iki duvar ve tavanın kesişimi olan bir odanın köşesi gibi, sonsuz çoklukta çözümü varsa bunu kitabın bir doğru boyunca kesişen üç sayfası, hiç çözüm yoksa kapalı bir kitabın birbirine paralel üç sayfası gibi düşünebiliriz.



ŞEKİL 1.2

Eğer yok etme metodunu daha yakından tetkik edersek, aşağıdaki üç (elementer) işlemi yazabiliriz;

1. *i*. denklem ile *j*. denklem yer değiştirebilir.
2. Bir denklemi sıfırdan farklı bir sabit ile çarpabiliriz.
3. *j*. denklemin *c* katını *i*. denkleme ilave edebiliriz.

Yani $i \neq j$ için

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$$

olmak üzere,

$$(ca_{j1} + a_{i1})x_1 + (ca_{j2} + a_{i2})x_2 + \ldots + (ca_{jn} + a_{in})x_n = cb_j + b_i.$$

Bu elementer işlemleri gerçekleştirmek o kadar zor değildir. Gelecek örnekte ikinci tip operasyon verilecek, birinci ve üçüncü tip elementer operasyonlarda Alıştırma 24 ve 25'te sırasıyla kullanılacaktır.

ÖRNEK 6

(2) nolu lineer denklem sisteminin i. denklemini sıfırdan farklı bir c sabiti ile çarpalım.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 &+ a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 &+ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ ca_{i1}x_1 &+ ca_{i2}x_2 + \cdots + ca_{in}x_n = cb_i \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 &+ a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{aligned} \tag{17}$$

Eğer $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$ (2) sistemi için bir çözüm ise, bu çözüm belki i denklemi hariç (17)'deki her bir denklem için de bir çözümdür. i. denklem için

$$ca_{i1}s_1 + ca_{i2}s_2 + \cdots + ca_{in}s_n = cb_i$$

veya

$$c(a_{i1}s_1 + a_{i2}s_2 + \cdots + a_{in}s_n) = cb_i$$

sonucuna sahip oluruz. Böylece i. denklemde sağlanır.

Tersine (17)'nin her bir çözümü (2)'yi de sağlar. Böylece (2) ve (17) eşdeğer sistemlerdir. ■

Aşağıdaki örnek, üç bilinmeyenli iki denklemli bir sisteme götüren bir uygulama verir:

ÖRNEK 7

(Üretim Planlaması) bir imalatçı farklı üç türde kimyasal üretim yapıyor: A, B ve C. Her ürün iki işlem makinesinden geçmek zorundadır: X ve Y. Ürünler X ve Y makinelerinde aşağıdaki zamanlara ihtiyaç duymaktadır:

1. Bir ton A ürünü için X ve Y makinelerinde 2 saate,
2. Bir ton B ürünü için X makinesinde 3 saat, Y makinesinde 2
3. Bir ton C ürünü için X makinesinde 4 saate, Y makinesinde 3

saate ihtiyaç vardır. X makinesi haftada 80, Y makinesi 60 saat çalışabiliyor. Yönetici boş bekleyen pahalı X ve Y makinelerini bekletmek istemediğinden makineler tam kapasite kullanıldığında her üründen kaç ton üretileceğini bilmek istemektedir. İmalatçının ürettiği kadar malı satabildiği varsayılmaktadır.

Bu problemi çözmek için, x_1, x_2 ve x_3 sırası ile A, B ve C ürünlerinin ton miktarlarını gösterelim. X makinesi için kullanım saat sayısı

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

olup 80'e eşittir. Böylece, biz

$$2x_1 + 3x_3 + 4x_3 = 80.$$

Benzer şekilde Y makinesi için kullanım saat sayısı 60'tır. Yani

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 60$$

Matematiksel olarak, problemimiz

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 80 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 60. \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi sağlayacak şekilde negatif olmayan x_1, x_2 ve x_3 değerlerini bulmaktır.

Bu lineer denklem sisteminin sonsuz çoklukta çözümleri vardır. x_1, x_2 ve x_3'ün negatif olmayan değerlerini bulmak için Örnek 4'teki metodu uygulayarak aşağıdaki çözümleri elde edebiliriz.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{20 - x_3}{2} \\ x_2 &= 20 - x_3 \\ x_3 &= \text{herhangi bir reel sayı } (0 \le x_3 \le 20). \end{aligned}$$

Böylece $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ ve $x_3 \ge 0$ olur. $x_3 = 10$ olduğunda

$$x_1 = 5, \qquad x_2 = 10, \qquad x_3 = 10$$

$x_3 = 7$ olduğunda

$$x_1 = \tfrac{13}{2}, \qquad x_2 = 13, \qquad x_3 = 7 \qquad \blacksquare$$

Muhtemelen sizin de gözlemlediğiniz gibi, şimdiye kadar yok etme metodu genel olarak anlatıldı. Bu yüzden seçilen bilinmeyenleri yok edebilmek için herhangi bir kural göstermedik. Yok etme metodunun bir çok sistematik şeklini oluşturmadan önce, gelecek bölümde matris kavramını tanıtacağız. Lineer denklem sistemlerinden matrisleri kullanmak bir çok önemli uygulamalı problemlerin çözümlerini geliştirmede büyük kolaylıklar sağlayacaktır.

Anahtar Kelimeler

Lineer denklem
Bir lineer denklemin çözümü
Lineer sistem
Bilinmeyenler
Tutarlı olmayan sistem
Tutarlı sistem
Homogen sistem
Aşikar çözüm
Aşikar olmayan çözüm
Denk sistemler
Tek çözüm
Çözüm yok
Sayılamaz çoklukta
Lineer sistem üzerinde elementer işlem
Yok etme metodu

1.1 Alıştırmalar

Alıştırma 1-14'teki denklem sistemlerini yok etme medodu ile çözünüz.

1. $x + 2y = 8$
$3x - 4y = 4$

2. $2x - 3y + 4z = -12$
$x - 2y + z = -5$
$3x + y + 2z = 1$

3. $3x + 2y + z = 2$
$4x + 2y + 2z = 8$
$x - y + z = 14$

4. $x + y = 5$
$3x + 3y = 10$

5. $2x + 4y + 6z = -12$
$2x - 3y - 4z = 15$
$3x + 4y + 5z = -8$

6. $x + y - 2z = 5$
$2x + 3y + 4z = 2$

7. $x + 4y - z = 12$
$3x + 8y - 2z = 4$

8. $3x + 4y - z = 8$
$6x + 8y - 2z = 3$

9. $x + y + 3z = 12$
$2x + 2y + 6z = 6$

10. $x + y = 1$
$2x - y = 5$
$3x + 4y = 2$

11. $2x + 3y = 13$
$x - 2y = 3$
$5x + 2y = 27$

12. $x - 5y = 6$
$3x + 2y = 1$
$5x + 2y = 1$

13. $x + 3y = -4$
$2x + 5y = -8$
$x + 3y = -5$

14. $2x + 3y - z = 6$
$2x - y + 2z = -8$
$3x - y + z = -7$

15. $2x - y = 5$
$4x - 2y = t$
lineer denklemi sistemi verilmiş olsun.
(a) t'nin hangi değeri sistemi tutarlı eder?
(b) t'nin hangi değeri için sistem tutarlı değildir?
(c) b şıkkında t'nin kaç farklı değeri seçilir?

16. $3x + 4y = s$
$6x + 8y = t$ lineer denklemi sistemi verilmiş olsun.
(a) s ve t'nin hangi değerleri için verilen sistem tutarlıdır?
(b) s ve t'nin hangi değerleri için verilen sistem tutarlı değildir?
(c) Sistemin tutarlı olmasını garantilemek için s ve t değerleri arasında ne gibi bir bağıntı olması gerekir.

17. $x + 2y = 10$
$3x + (6 + t)\, y = 30$
lineer sistemi verilmiş olsun.
(a) t'nin hangi değeri için sistemin sayılamaz çoklukta çözümleri vardır?
(b) t'nin hangi değeri için sistemin bir tek çözümü vardır.
(c) b şıkkından t'nin kaç tane farklı değerleri seçilebilir?

18. Her bir homogen lineer sistem daima tutarlı mıdır? Açıklayınız.

19. $2x + 3y - z = 0$
$x - 4y + 5z = 0$
lineer sistem verilmiş olsun.
a) $x_1 = 1, y_1 = -1, z_1 = -1$ sistemin bir çözümüdür. Gerçekleyiniz.
b) $x_2 = -2, y_2 = 2, z_2 = 2$ sistemin bir çözümüdür. Gerçekleyiniz.
c) $x = x_1 + x_2 = -1, y = y_1 + y_2 = 1$ ve $z = z_1 + z_2 = 1$ lineer sistemin bir çözümü müdür?
d) c şıkkındaki x, y, z'ler için $3x$, $3y$ ve $3z$ lineer sistem için bir çözüm müdür?

20. Yok etme metodunu kullanmaksızın aşağıdaki lineer sistemi çözünüz.

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= -5 \\ 3y + z &= 7 \\ z &= 4 \end{aligned}$$

21. Yok etme metodunu kullanmaksızın aşağıdaki lineer sistemi çözünüz.

$$\begin{aligned} 4x &= 8 \\ -2x + 3y &= -1 \\ 3x + 5y - 2z &= 11 \end{aligned}$$

22. $x = 1, y = 2, z = r$ aşağıdaki sistemin bir çözümü olması için bir r değeri var mıdır? Bulunuz.

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 11 \\ x - y + 2z &= -7 \\ 4x + y - 2z &= 12 \end{aligned}$$

23. $x = r, y = 2, z = 1$ aşağıdaki lineer sistemin çözümü olması için bir r değeri var mıdır? Bulunuz.

$$\begin{aligned} 3x - 2z &= 4 \\ x - 4y + z &= -5 \\ -2x + 3y + 2z &= 9 \end{aligned}$$

24. (2)'deki iki denklemi karşılıklı değiştirerek (2)'ye denk olan bir lineer sistem elde edilir. Gösteriniz.

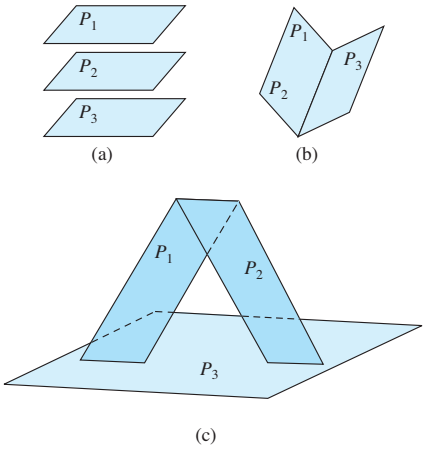
25. (2)'deki denklemlerden birinin belirli bir katını diğer denkleme eklediğimizde (2)'ye denk olan bir lineer sistem elde ettiğimizi gösteriniz.

26. Şekil 1.2'nin her üç şıkkında her üç düzleme ait olan ortak noktaların sayısını belirtiniz.

27. Şekil 1.3'ün her üç şıkkında her üç düzleme de ait olan ortak noktaların sayısını belirtiniz.

28. C_1 ve C_2 düzlemdeki çemberler olsunlar. C_1 ve C_2'nin mümkün olan ara kesit noktalarının sayısını belirtip bir şekil ile gösteriniz.

29. S_1 ve S_2 uzayda iki küre olsunlar. S_1 ve S_2'nin mümkün olan ara kesit noktalarının sayısını belirtip bir şekil ile gösteriniz.



ŞEKİL 1.3

30. Bir yağ rafinerisi yüksek ve düşük sülfürlü yakıt üretmektedir. Düşük sülfürlü yakıtın her bir tonu için 5 dakika fabrika karışımı ve 4 dakika fabrika ayrışımı gerekmektedir. Yüksek sülfürlü yakıt için fabrika karışımı için 4 dakika, ayrışımı için de 2 dakika gerekmektedir. Eğer fabrika karışımı 3 saat ve fabrika ayrışımı 2 saat çalışıyorsa tam kapasite çalışıldığında her bir yakıt türünden kaç ton üretilebilir?

31. Bir plastik üreticisi düzenli ve özel olmak üzere iki tip plastik üretmektedir. Düzenli plastiğin her bir tonu için 2 saat A fabrikası ve 5 saat B fabrikası, özel plastiğin her bir tonu için de 2 saat A fabrikası ve 3 saat B fabrikasının çalışması gerekmektedir. Eğer A fabrikası günde 8 saat ve B fabrikası da günde 15 saat çalışabiliyorsa tam kapasite çalışıldığında günlük olarak her bir plastik çeşidinden kaç ton üretilebilir?

32. Bir diyetisyen A, B ve C gıdalarını içeren bir öğün hazırlamaktadır. A gıdasının her bir onsu 2 birim protein, 3 birim yağ ve 4 birim karbonhidrat, B gıdasının her onsu, 3 birim protein, 2 birim yağ ve 1 birim karbonhidrat; C gıdasının her onsu da 3 birim protein, 3 birim yağ ve 2 birim karbonhidrat içermektedir. Eğer öğün tam olarak 25 birim protein, 24 birim yağ ve 21 birim karbonhidrat içermek zorunda ise her bir gıda türünden kaç ons kullanılmalıdır?

33. Bir üretici 2-dakika, 6-dakika ve 9-dakikalık film yıkayıcıları üretiyor. 2- dakikalık yıkayıcıların her bir tonu için 6-dakika A fabrikasına ve 24-dakika B fabrikasına, 6-dakikalık film yıkayıcıların her bir tonu 12-dakika A fabrikasına ve 12-dakika B fabrikasına, 9-dakikalık film yıkayıcılarının her tonu için 12 dakika A fabrikası ve 12-dakika B fabrikasına ihtiyaç duyulmaktadır. Eğer A fabrikası günde 10 saat ve B fabrikası da günde 16 saat çalışıyorsa tam kapasite çalışıldığında her bir yıkayıcıdan kaç ton üretilebilir?

34. (1, –5), (–1, 1) ve (2, 7), $p(x) = ax^2 + bx + c$ parabolu üzerinde üç nokta olsun.
(a) a, b ve c'yi bulmak için üç bilinmeyenli üç denklemden oluşan lineer denklem sistemini bulunuz.
(b) Bu lineer denklem sistemini çözünüz.

35. 24.000 TL'lık bir miras üç kişi arasında, ikinci kişi, birinci kişinin aldığı miktarın iki katını alacak şekilde bölünecektir. Üç kişi yıllık %9, %10 ve %6'lık faiz ödeyerek ilk yılın sonunda toplam faiz miktarı 2210 TL olacaktır. Buna göre her birine ne kadar para düşer?

36. Kullandığınız bilgisayar programı ile lineer denklem sistemini "otomatik" olarak çözen bir komut bulunuz.

37. Alıştırma 36'da bulduğunuz komutu, Alıştırma 3 ve 4'ü çözmek için kullanınız ve sonuçları yok etme metoduyla bulduğunuz sonuçlar ile karşılaştırınız.

38.
$$x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{3}z = 1$$
$$\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}y + \tfrac{1}{4}z = \tfrac{11}{18}$$
$$\tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{4}y + \tfrac{1}{5}z = \tfrac{9}{20}$$

lineer denklem sistemini bilgisayar programınızı kullanarak çözünüz. Elde ettiğiniz sonuçları $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = 1$ tam sonuçları ile karşılaştırınız.

39. Eğer bilgisayar programınız bir bilgisayar cebir sistemi (BCS)'ye sahip ise aşağıdakileri elde ediniz.
(a) Alıştırma 38'deki lineer sistem için $\frac{1}{2}$ kesrini eşdeğer olan 0,5 ile değiştiriniz. Bu sistemi bilgisayara programına giriniz. Bu sistemi çözmek için uygun BCS komutlarını kullanınız. Alıştırma 38'de bulduğunuz sonuçlar ile kıyaslayınız.
(b) Bazı BCS donanımlarındaki hesaplamalarda kullandığınız sayıların basamaklarını seçebelirsiniz (a) şıkkını 2, 4 ve 6 basamaklarını seçerek bu seçimlerin hesaplanan sonuçları üzerindeki etkisini gözlemleyiniz.

40. Eğer programınız BCS donanımına sahip ise ve hesaplamalarda sayıların basamaklarını seçebiliyorsanız. Aşağıdakileri yapınız.

$$0{,}71x + 0{,}21y = 0{,}92$$
$$0{,}23x + 0{,}58y = 0{,}81$$

lineer sistemini programa giriniz. Bilgisayar çözümünü 2, 5, 7 ve 12 basamak seçimleri ile elde ediniz. Ulaşılan sonuçlardaki farlılıkları kısaca tartışınız.

1.2 Matrisler

Kesim 1.1'de açıklanan yok etme metodunu incelersek aşağıdaki açıklamayı yapabiliriz: Yok etme metodunun adımları uygulandığında sadece $x_1, x_2,\ldots,x_n$ bilinmeyenlerinin katsayıları ve sağ yanındaki $b_1, b_2,\ldots, b_n$ sayıları değişir. Bu nedenle biz, lineer sistemi yazarken bilinmeyenleri her seferinde aynen yazmamızı gerektirmeyen bir yol bulmayı düşünebiliriz. Matrisler bize bunu yapma imkanı verir. Yani lineer sistemler kısa biçimde (formda) yazıldıktan sonra bilgisayar yazılımı kullanılarak yok etme metodu çok kolay bir şekilde uygulanır. Böylece çözüm için hızlı ve etkili bir süreç elde edilmiş olur. Bununla birlikte, matrislerin kullanımı tek uygun gösterim değildir. Şimdi matrisler üzerinde işlemler tanımlayacağız ve onlara uygulanacak kurallara göre matrisler ile çalışacağız. Bu da hızlı ve etkili olarak lineer sistemleri çözümü ve diğer hesaplama problemlerinin üstesinden gelmek için bize imkan sağlayacaktır. Matrisler için iyi bir tanım verirken hem eski problemlere yeni bir yol açılır, hem de daha bir çok yeni sorular ortaya konur. Bu soruların, bazılarını bu kitapta ele alıyoruz.

TANIM 1.1 *m* ve *n* pozitif tam sayılar olmak üzere, *A* bir $m \times n$ matrisi *mn* tane reel veya kompleks sayının sıralandığı *m* tane satır, *n* tane sütundan oluşan bir dikdörtgen düzenindedir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & a_{ij} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i.\ \text{satır} \\ \\ \\ \uparrow \\ j.\ \text{sütun} \end{matrix} \qquad (1)$$

A'nın *i*. satırı

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \qquad (1 \le i \le m);$$

A'nın *j*. sütununda

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \qquad (1 \le j \le n)$$

ile verilir. *A* matrisi *m* satır ve sütuna sahip ise ($m \times n$ olarak yazılır) *A*'ya $m \times n$ tipinde bir matristir deriz. $m = n$ ise *A* ya *n*. mertebeden bir **kare matris** ve $a_{11}, a_{22},\ldots,a_{nn}$ sayılarına da *A*'nın **esas köşegeni** denir. *A*'nın (i, j) elemanı veya $(\boldsymbol{i, j})$ girişini a_{ij} sayısıyla gösterir ve çoğu kez

$$A = [a_{ij}]$$

olarak yazarız.

ÖRNEK 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1+i & 4i \\ 2-3i & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisleri verilsin. O zaman A, $a_{12} = 2$, $a_{13} = 3$, $a_{22} = 0$ ve $a_{23} = 1$ ile bir 2×3 matrisidir; B $b_{11} = 1+i$, $b_{12} = 4i$, $b_{21} = 2 - 3i$, $b_{22} = -3$ ile bir 2×2 matrisi; C $c_{11} = 1$, $c_{21} = -1$ ve $c_{31} = 2$ ile bir 3×1 matris; D bir 3×3 matris; E 1×1 matris ve F de bir 1×3 matristir. D'de $d_{11} = 1$ $d_{22} = 0$ ve $d_{33} = 2$ esas köşegenin elemanlarıdır. ■

Konunun daha iyi anlaşılması için matrislerle ilgili uygun örnek ve alıştırmaları matrislerle ilgili olan 1–6 bölümlerinde vereceğiz. Bunlar sadece reel sayıları içeren örneklerdir. Kompleks sayıların kısa bir özeti Bölüm 7'de verildi. Ek B'de kompleks sayıların lineer cebirde nasıl kullanıldığını gösteren alıştırma ve örnekler bulunabilir.

Bir $n \times 1$ matrisine ayrıca bir ***n*-vektör** de denir ve küçük koyu harflerle gösterilir n anlaşıldığı zaman n-vektörler sadece **vektörler** olarak belirtiriz. Vektörler Kesim 4.1'de uzun bir şekilde anlatıldı.

ÖRNEK 2

$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ bir 4 vektör ve $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ bir 3-vektördür. ■

Bütün elemanları 0 olan bir n-vektör 0 ile gösterilir.

A bir $n \times n$ matrisi ise o zaman A'nın satırları $1 \times n$ matrisleri ve sütunları $n \times 1$ matrisleri olduğu açıktır. Reel elamanlı bütün n-vektörlerin cümlesi R^n ile ifade edilir. Benzer şekilde kompleks elemanlı n-vektörlerin cümlesinde C^n ile gösterilir. Bu kitabın ilk 6 bölümünde yapılan açıklamalarda sadece R^n'nin elemanları kullanıldı.

ÖRNEK 3

(Veri Tablosu) Aşağıdaki matriste işaret edilen şehirler arasındaki havayolu uzaklıkları mil cinsinden verildi.

	London	Madrid	New York	Tokyo
London	0	785	3469	5959
Madrid	785	0	3593	6706
New York	3469	3593	0	6757
Tokyo	5959	6706	6757	0

■

ÖRNEK 4

(Üretim) Bir üreticinin 4 fabrikası ve her fabrikada üç ürünün üretilmiş olduğunu kabul edelim. Bir haftada j fabrikası tarafından yapılan i ürününün üretim sayısı a_{ij} ise, o zaman

	Fabrika 1	Fabrika 2	Fabrika 3	Fabrika 4
Üretim 1	560	360	380	0
Üretim 2	340	450	420	80
Üretim 3	280	270	210	380

3×4 matrisi üreticinin haftalık üretimini verir. Örneğin, fabrika 2'de bir haftada ürün 3'ün üretimi 270'tir. ■

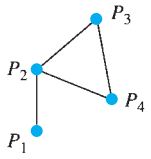
ÖRNEK 5 Aşağıdaki matris soğuk algınlığı tablosudur.

	°F					
mph	15	10	5	0	–5	–10
5	12	7	0	–5	–10	–15
10	–3	–9	–15	–22	–27	–34
15	–11	–18	–25	–31	–38	–45
20	–17	–24	–31	–39	–46	–53

Hava sıcaklığı ve rüzgar hızının bir bileşimi ve vücut sıcaklığının normalden daha soğuk olarak hissedilmesini sağlar. Örneğin, sıcaklık 10°F ve rüzgar saatte 15 mil olduğunda insan sıcaklığı rüzgarsız sıcaklıkta –18 °F düşük olarak hisseder. ■

ÖRNEK 6 Bir grafikten **kenar doğruları** tarafından birleştirilmiş olan **tepe** veya **düğüm** adı verilen noktaların bir cümlesini anlarız. Bu noktalar genelde $P_1, P_2, \ldots, P_k$ gibi harflerle işaretlenir ve bunları doğrularla birleştiririz. Grafiğin Matematiksel gösterimi için bir tablo yapılır. Örneğin aşağıdaki tablo gösterilen grafiği temsil eder.

	P_1	P_2	P_3	P_4
P_1	0	1	0	0
P_2	1	0	1	1
P_3	0	1	0	1
P_4	0	1	1	0



P_i noktasının P_j noktasında bağlayan bir doğru varsa (i, j) girdisi için 1 olur. aksi taktirde (i, j) girdisi 0'dır. Karşılık gelen A matrisi tabloda yer alan işaretler satır ve sütunları oluşturacak şekilde elde edilen bir $k \times k$ matrisidir. Yukarıdaki grafiğe karşılık gelen geliş matrisi aşağıdaki gibidir.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

■

İnternet arama motorları bilginin yerini, bilgi içerisindeki anahtar kelimeleri ve başka bir web sitesindeki yerini bulmak için matrisleri kullanırlar. Google arama motorunun etkisinin büyük ölçekli olması diğer siteler tarafından kaynak olarak gösterilen siteleri belirtmekte matrisleri kullanmasıdır. Yani bir şahsi araştırma konusu veya bir web sayfasının içeriğindeki bilgiyi direk olarak bulmak yerine, Google'ın matrsi yapısı araştırma konusuna uyan web sayfalarını bulmaya odaklanır ve o zaman onların önem derecesine göre sayfalarda bir liste oluşturur.

Belirli bir ay boyunca ulaşılabilir web sayfaları n olarak kabul edilsin. Google çalıştıran matris başlangıçta bütün satır ve sütunları 0 olan "bağlantı matrisi" adı verilen $n \times n$ tipinde bir A matrisidir. Bu matrisin çalışması şu şekildedir. j web sitesini i sitesine bağlanmış olduğu belirlendiğinde a_{ij} elamanı 1'e eşittir. n hayli büyük olduğunda A'nın elemanlarının çoğu sıfırdır. (Böyle bir matrise seyrek matris denir.) A'nın i satırının çoğu 1 içerir ise o zaman i sitesine bağlı çok site vardır. Diğer siteler tarafından bağlanılmış olan siteler Google arama motorunun sürücü yazılımları sayesinde en yüksek ranka sahip olduğu gözönüne alınır. Bu siteler i sitesindeki bilgiyle ilişkili konuların bir Google araştırmasında oluşturulan listelerde gözükürler. Google her ay bağlantı matrisini güncellediği için yeni linkler, siteler ve n nin ek zaman artışları bu matrise eklenir.

Bölüm 8'de siteleri derecelendirmek için kullanılan temel tekniğin bir kısmı üzerinde duracağız ve matrislerle ilişkili bir kaç örnek vereceğiz. Daha fazla bilgi aşağıdaki kaynaklardan bulunabilir.

1. Berry, Michael W., and Murray Browne. *Understanding Search Engines— Mathematical Modeling and Text Retrieval*, 2d ed. Philadelphia: Siam, 2005.
2. www.google.com/technology/index.html
3. Moler, Cleve. "TheWorld's Largest Matrix Computation: Google's PageRank Is an Eigenvector of a Matrix of Order 2.7 Billion," MATLAB *News and Notes*, October 2002, pp. 12–13.

Ne zaman Matematikte yeni bir konu verilse hangi iki nesnenin eşit olduğunu belirtmemiz gereklidir. Örneğin, Rasyonel sayılar cümlesinde $\frac{2}{3}$ ve $\frac{4}{6}$ sayıları farklı görünmelerine rağmen bu sayılar eşittir. $ad = bc$ olduğu zaman $\frac{a}{b}$'nin $\frac{c}{d}$ ye eşit olduğunu ifade ederiz. Bundan dolayı aşağıdaki tanımı verebiliriz.

TANIM 1.2 $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ iki $m \times n$ matrisler olmak üzere $a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ ve $j = 1, 2, \ldots, n$ ise A ve B matrislerine **eşittir** denir.

ÖRNEK 7

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & w \\ 2 & x & 4 \\ y & -4 & z \end{bmatrix}$$

matrislerin eşit olması için gerek ve yeter şart $w = -1$, $x = -3$, $y = 0$ ve $z = 5$ olmasıdır. ■

■ Matrislerde İşlemler

Verilen matrislerden yeni matrisler elde edecek işlemleri bu bölümde tanımlayacağız. Lineer sistemler ile uğraşırken, örneğin, sistemleri tekrar tekrar yazmak yerine bu sistemlere karşılık gelen matrisler üzerinde işlemler yapacağız. Ayrıca bu işlemler ve çalışmalar matrislerin diğer uygulamalarında faydalıdır.

Matrislerde Toplama

TANIM 1.3 $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ iki $m \times n$ matrisler olmak üzere $A + B$ toplamı $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$ olarak tanımlanan $C = [c_{ij}]$ $m \times n$ matrisidir.

ÖRNEK 8

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

O zaman

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+0 & -2+2 & 3+1 \\ 2+1 & -1+3 & 4+(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

■

ÖRNEK 9 **(Üretim)** Bir fabrikatör belli bir ürünün A, B ve *C* modellerini üretiyor. Her model Tayvan'daki F_1 fabrikasında kısmen yapıldıktan sonra Amerika'daki F_2 fabrikasında üretimi tamamlanıyor. Her ürünün toplam maliyeti gemi maliyeti ve fabrika maliyetinden oluşur. O zaman her fabrikanın dolar cinsinden maliyetleri F_1 ve F_2 3×2 matrisleriyle tanımlanır.

$$F_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Fabrika maliyeti} & \text{Gemi maliyeti} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 32 & 40 \\ 50 & 80 \\ 70 & 20 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{A Modeli} \\ \text{B Modeli} \\ \text{C Modeli} \end{array}$$

$$F_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Fabrika maliyeti} & \text{Gemi maliyeti} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 40 & 60 \\ 50 & 50 \\ 130 & 20 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{A Modeli} \\ \text{B Modeli} \\ \text{C Modeli} \end{array}$$

$F_1 + F_2$ matrisi her ürünün toplam fabrika ve gemi maliyetlerini verir. Böylece üretilen bir C modelinin toplam fabrika ve gemi maliyetleri sırasıyla 200 dolar ve 40 dolardır. ■

x bir *n*-vektör ise o zaman $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ olur. Burada 0 bütün bileşenleri sıfır olan *n*-vektördür. (Alıştırma 16'ya bakınız.)

A ve *B* matrislerinin satır ve sütun sayıları aynı olduğu zaman matris toplamı tanımlıdır. Yani *A* ve *B* aynı mertebeden olmalıdır.

Hem A hem de B aynı mertebeden matrisler olmak üzere bu matrislerin toplamı $A + B$ olarak ifade edilir.

Matris toplamının temel özellikleri gelecek kesimde gözönüne alındı ve bunlar reel sayılar tarafından sağlanan özelliklere benzerdir.

Skalar Çarpım

TANIM 1.4

$A = [a_{ij}]$ bir $m \times n$ matris ve r de bir reel sayı olsun. O zaman r ile A'nın **skalar çarpımı** A'nın her elemanının r ile çarpımıdır. Yani $C = [c_{ij}]$ $m \times n$ bir matris olmak üzere $c_{ij} = ra_{ij}$, $i = 1, 2,\ldots,m$; $j = 1, 2, \ldots, n$'dir.

ÖRNEK 10

$$-2\begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ 7 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2)(4) & (-2)(-2) & (-2)(-3) \\ (-2)(7) & (-2)(-3) & (-2)(2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -8 & 4 & 6 \\ -14 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$ ■

dır.

Bu zamana kadar sadece iki matrisin matris toplamı tanımlandı. Matrislerle ilgili çalışmalarımızda ikiden fazla matris eklenerek işlemler yapılmaktadır. Örneğin Kesim 1.4'te Teorem 1.1'deki Matrislerin toplamının birleşme özelliği $(A + B) + C = (A + B) + C$ olarak gösterilecektir.

A ve B iki $m \times n$ matris ise $A + (–1)\,B$ ifadesini $A – B$ olarak yazarız ve buna ***A* ve *B* matrisleri arasındaki fark** deriz.

ÖRNEK 11

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

olsun. O zaman

$$A - B = \begin{bmatrix} 2-2 & 3+1 & -5-3 \\ 4-3 & 2-5 & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$ ■

bulunur.

Uygulama

R^n'deki vektörler büyük veri miktarlarını ele almada kullanılır. Gerçekten MATLAB® gibi bilgisayar yazılım ürünleri yaygın olarak vektörleri kullanır. Aşağıdaki örnek bu fikirleri açıklamaktadır.

ÖRNEK 12

(Envanter Kontrolü) Bir mağazada 100 farklı ürünün var olduğunu kabul edelim. Hafta başında ürün envanteri R^{100}'de $\mathbf{u}$ envanter vektörüyle tanımlansın. Hafta sonunda satılan ürün sayısı R^{100}'de $\mathbf{v}$ vektörüyle gösterilsin ve

$$\mathbf{u} - \mathbf{v}$$

vektörü hafta sonundaki envanteri temsil etsin. Mağazaya yeni mallar gelir ve bu mallarda $\mathbf{w}$ 100-vektörü ile gösterilir ve o zaman malların yeni envanteri

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{w}$$ ■

olur.

Bazen toplam gösterimini kullanacağız ve şimdi kullanışlı ve kısa gösterimi kısaca gözden geçirelim.

$\sum_{i=1}^{n} a_i$ ifadesinden $a_1 + a_2 + ..., + a_n$ anlarız.

i harfine **toplamın indisi** denir. i yerine başka harfler de yazsak ifade değişmez. Bundan dolayı

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

yazabiliriz. Böylece

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4.$$

Toplam gösterimi aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. $\sum_{i=1}^{n} (r_i + s_i)a_i = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i + \sum_{i=1}^{n} s_i a_i$

2. $\sum_{i=1}^{n} c(r_i a_i) = c\sum_{i=1}^{n} r_i a_i$

3. $\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right)$

Özellik 3 şu şekilde yorumlanabilir. Sol yan her sütunun elemanlarının eklenmesi ve daha sonra elde edilen tüm sayılar toplanarak oluşur. Eşitliğin sağ yanındaki ifade de her satırın elemanlarının eklenmesi ve sonuçta oluşan bütün sayıların toplamı olur.

$A_1, A_2, \ldots, A_k$ $m \times n$ matrisler ve $c_1, c_2, \ldots, c_k$ reel sayılar olmak üzere

$$c_1A_1 + c_2A_2 + \ldots + c_kA_k \tag{2}$$

ifadesine bu matrislerin lineer birleşimi ve $c_1, c_2, \ldots, c_k$ sayılarına da katsayılar denir.

Ayrıca (2) ifadesi toplam gösterimi ile

$$\sum_{i=1}^{k} c_i A_i = c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_kA_k$$

olarak ifade edilebilir.

ÖRNEK 13 Aşağıdakiler matrislerin lineer birleşimleridir.

$$3\begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$2\begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -2 & 5 \end{bmatrix},$$

$$-0.5\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix} + 0.4\begin{bmatrix} 0.1 \\ -4 \\ 0.2 \end{bmatrix}.$$

Skalar çarpım ve matris toplamı kullanılarak bu lineer birleşimler hesaplanır ve sırasıyla aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & -10 & \frac{27}{2} \\ 3 & 8 & \frac{21}{2} \\ \frac{7}{2} & -5 & -\frac{21}{2} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} -17 & 16 \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} -0.46 \\ 0.4 \\ 3.08 \end{bmatrix}.$$

■

ÖRNEK 14

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 18.95 \\ 14.75 \\ 8.60 \end{bmatrix}$$

bir mağazadaki 3 ürünün satış fiyatlarını gösteren bir 3-vektör olsun. Mağazanın bu malların fiyatını %20 indirimle satışa sunduğunu kabul edelim.

(a) Malın fiyat değişimini veren bir 3-vektörü belirleyiniz.
(b) Bu malların yeni fiyatlarını veren 3-vektörü belirleyiniz.

Çözüm

(a) Her mal %20 indirimli olduğu için

$$-0.20\mathbf{p} = \begin{bmatrix} (-0.20)18.95 \\ (-0.20)14.75 \\ (-0.20)8.60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.79 \\ -2.95 \\ -1.72 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 3.79 \\ 2.95 \\ 1.72 \end{bmatrix}$$

3-vektör üç ürünün fiyat değişimini verir.
(b) Malların yeni fiyatları

$$\mathbf{p} - 0.20\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 18.95 \\ 14.75 \\ 8.60 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3.79 \\ 2.95 \\ 1.72 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.16 \\ 11.80 \\ 6.88 \end{bmatrix}.$$

ifadesinden elde edilir. Bu ifade benzer biçimde

$$\mathbf{p} - 0.20\mathbf{p} = 0.80\mathbf{p}$$

■

yazılabilir.

Şimdi matrislerde oldukça kullanışlı olan bir işlemi tanıyalım.

TANIM 1.5

$A = [a_{ij}]$ bir $m \times n$ matris ise o zaman A'nın **transpozu**, $a_{ij}^T = a_{ji}$ olmak üzere $A^T = [a_{ij}^T]$ olarak tanımlanan $n \times m$ matrisidir. Böylece A'nın transpozu satır ve sütunlarının yer değiştirmesiyle elde edilen bir matristir.

ÖRNEK 15

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

olsun. O zaman

$$A^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad D^T = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ve } E^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$ ■

Anahtar Kelimeler

Matris
Satırlar
Sütunlar
Bir matrisin mertebesi
Kare matris
Esas köşegen
Bir matrisin elemanı
Eşit matrisler
n-vektör (veya vektör)
R^n, C^n
0, sıfır vektörü
Google
Matris toplamı
Skalar çarpım
Matrislerin farkı
Toplam gösterimi
Toplamın indeksi
Lineer birleşim
Katsayılar
Transpoz

1.2 Alıştırmalar

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$,

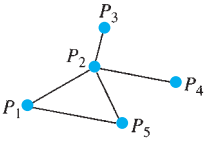
ve

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

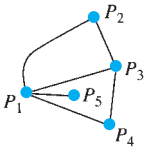
olsun.
(a) a_{12}, a_{22}, a_{23} nedir?
(b) b_{11}, b_{31} nedir?
(c) c_{13}, c_{31}, c_{33} nedir?

2. Aşağıdaki grafiklerin her biri ile eşlenebilen matrisleri belirleyiniz.

(a)



(b)



3. Aşağıdaki geliş matrisleri için bir grafik oluşturunuz. Tepe noktalarını $P_1, P_2, \ldots, P_5$ ile gösteriniz.

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} a+b & c+d \\ c-d & a-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$ ise

a, b, c ve d'yi bulunuz.

5. $\begin{bmatrix} a+2b & 2a-b \\ 2c+d & c-2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ ise

a, b, c ve d'yi hesaplayınız.

Alıştırma 6-9'da aşağıdaki matrisleri kullanınız.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

ve $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

6. Mümkünse, verilen lineer birleşimleri hesaplayınız.
(a) $C + E$ ve $E + C$ **(b)** $A + B$
(c) $D - F$ **(d)** $-3C + 5O$
(e) $2C - 3E$ **(f)** $2B + F$

7. Aşağıdaki lineer birleşimleri hesaplayınız.
(a) $3D + 2F$ **(b)** $3(2A)$ ve $6A$
(c) $3A + 2A$ ve $5A$
(d) $2(D + F)$ ve $2D + 2F$
(e) $(2 + 3)D$ ve $2D + 3D$
(f) $3(B + D)$

8. Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.
(a) A^T ve $(A^T)T$
(b) $(C + E)^T$ ve $C^T + E^T$
(c) $(2D + 3F)^T$ **(d)** $D - D^T$
(e) $2A^T + B$ **(f)** $(3D - 2F)^T$

9. Aşağıdaki matrisleri bulunuz.
(a) $(2A)^T$ **(b)** $(A - B)^T$
(c) $(3B^T - 2A)^T$ **(d)** $(3A^T - 5B^T)^T$
(e) $(-A)^T$ ve $-(A^T)$ **(f)** $(C + E + F^T)^T$

10. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ matrisini $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrislerinin bir lineer birleşimi olarak yazınız. Cevabınızın doğruluğunu ispatlayınız.

11. $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ matrisi $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrislerinin bir lineer birleşimi midir? Cevabınızın doğruluğunu gösteriniz.

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ ve $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

olsun. λ bir reel sayı ise $\lambda I_3 - A$'yı hesaplayınız.

13. A bir $m \times n$ matris ise $A - A^T$ matrisinin esas köşegen elemanları nedir? İspatlayınız.

14. Bir grafik ile birleştirilmiş her A giriş matrisinin A^T ye eşit olduğunu ispatlayınız.

15. A $n \times n$ matrisi A^T eşit olsun. Kısaca A'nın elemanlarını örnekle açıklayınız.

16. $\mathbf{x}$ bir n-vektör ise $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ olduğunun gösteriniz.

17. Toplam birleşiminin aşağıdaki özellikleri sağladığını ispat ediniz.

(a) $\sum_{i=1}^{n}(r_i + s_i)a_i = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i + \sum_{i=1}^{n} s_i a_i$

(b) $\sum_{i=1}^{n} c(r_i a_i) = c\left(\sum_{i=1}^{n} r_i a_i\right)$

18. $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\right)$ olduğunu gösteriniz.

19. Aşağıdaki ifadelerin doğru veya yanlış olduğunu belirleyiniz. Doğru ise sonucu ispatlayınız. Yanlış ise aksine bir örnek veriniz.

(a) $\sum_{i=1}^{n}(a_i + 1) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + n$

(b) $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} 1\right) = mn$

(c) $\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_j\right) = \left[\sum_{i=1}^{n} a_i\right]\left[\sum_{j=1}^{m} b_j\right]$

20. 2000 işçiye sahip bir çelik fabrikasında R^{2000} de bir $\mathbf{u}$ vektörünün bileşenleri her bir işçinin maaşına karşılık gelsin. İşçi maaşlarının %8'lik oranda artırılması onaylanırsa yeni maaşları veren ve $\mathbf{u}$ vektörünü de içeren bir ifade bulunuz.

21. Bir bilgisayar firması hergün IBM bilgisayarının fiyatının en yüksek ve en düşük değerlerini kaydediyor. Haftalık verilen verilere göre IBM'in en düşük ve en yüksek değerleri sırasıyla R^5'te $\mathbf{t}$ ve $\mathbf{b}$ ile gösterilsin. Haftanın 5 gününde IBM'in fiyatının ortalama günlük değerinin veren ifadeyi bulunuz.

22. Bilgisayar yazılımı yardımıyla bir matrisi, matrislerin toplamı, matrislerin bir skalarla çarpımı ve bir matrisin transpozunu bulmak için belirli komutlar kullanılır. Örnek 13'teki lineer birleşimi hesaplamak için bilgisayar yazılım komutlarını uygulayınız.

23. Bir bilgisayar cebir sistemini (BCS) içeren yazılımın kullanılıp ya da kullanılmayacağını belirtiniz. Eğer bu yazılım kullanılırsa aşağıdakileri yapınız.
(a) bir sembolik matrisi girmek için bir komut bulunuz. (Bu komut bir nümerik matrisi girmekten daha farklı olabilir.)
(b) $A = \begin{bmatrix} r & s & t \\ u & v & w \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$
gibi bir kaç sembolik matris giriniz. $A + B$, $2A$, $3A + B$, $A - 2B$, $A^T + B^T$ gibi ifadeleri

hesaplatınız. (Bazı sistemlerde yıldız işareti açıkça skalar çarpımı işaret etmelidir.)

24. Bilgisayar yazılımını kullanarak bir giriş matrisinin grafiğini gösterecek bir komutun var olup olmadığını belirtiniz. Eğer böyle bir komut var ise Örnek 3'te giriş matrisinin grafiğini gösteriniz ve elle çizilenle bunu karşılaştırınız. Bilgisayarın oluşturduğu grafikle elle yapılanın neden özdeş olmadığını açıklayınız.

1.3 Matris Çarpımı

Bu kesimde matris çarpımı işlemini tanıtacağız. Matris toplamının aksine, matris çarpımı reel sayıların çarpımından ayırt edilecek bazı özelliklere sahiptir.

TANIM 1.6

R^n'de n-vektörlerin **iç çarpımı** veya **nokta çarpımı**,

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i.^*$$

İç çarpım burada ve sonraki bölümlerde kullanacağımız önemli bir işlemdir.

ÖRNEK 1

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vektörlerin iç çarpımı

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1)(2) + (-2)(3) + (3)(-2) + (4)(1) = -6. \quad \blacksquare$$

ÖRNEK 2

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} x \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

olsun. Eğer $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -4$ ise x bulunuz.

Çözüm

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= 4x + 2 + 6 = -4 \\ 4x + 8 &= -4 \\ x &= -3. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

elde ederiz.

*C^n 'nin vektörlerinin iç çarpımı Ek B,2'de verildi.

ÖRNEK 3 **(Bir Dersin Ortalama Hesabı)** Bir öğretmen bir öğrenciyi bir dersten küçük sınav, iki ara sınav ve bir final sınavı yapıyor. Bu sınavda alınan notların sırasıyla %10, %30, %30 ve %30'unu alarak öğrencinin ders ortalamasını hesaplıyor. Eğer öğrenci bu sınavlardan sırasıyla 78, 84, 62 ve 85 almışsa

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.30 \\ 0.30 \\ 0.30 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 78 \\ 84 \\ 62 \\ 85 \end{bmatrix}$$

olmak üzere ders ortalaması

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{g} = (0.10)(78) + (0.30)(84) + (0.30)(62) + (0.30)(85) = 77.1$$

bulunur. Böylece öğrencinin ders ortalaması 77.1 olur. ■

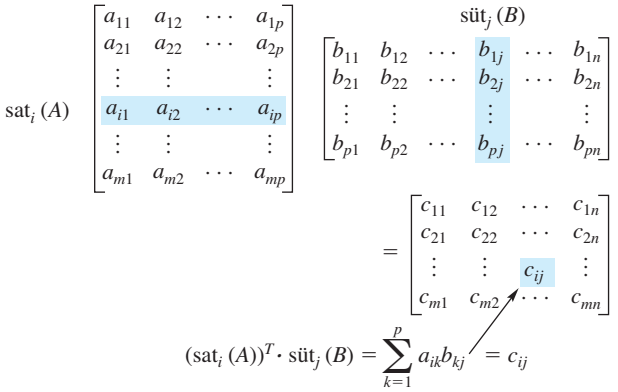
■ Matris Çarpımı

TANIM 1.7 Eğer $A = [a_{ij}]$ $m \times p$ matris ve $B = [b_{ij}]$ $p \times n$ matris ise AB olarak gösterilen A ve B'nin çarpımı

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} \\ &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \quad (1 \le i \le m, 1 \le j \le n) \end{aligned} \tag{1}$$

tarafından tanımlı $C = [c_{ij}]$ $m \times n$ matrisidir.

Denklem 1, matris çarpımının (i, j) elemanın A'nın i. satırının transpozu yani $(\text{sat}_i((A))^T$ ile B'nin $\text{süt}_j(B)$ j sütununun iç çarpımı olarak ifade edilir. Bu Şekil 1.45'te gösterilmiştir.



ŞEKİL 1.4

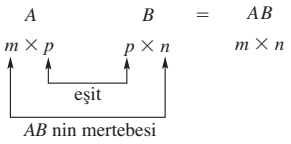
Şekil 1.5'te gösterildiği gibi A ve B'nin çarpımı sadece B'nin satır sayısı A'nın sütun sayısına eşit olduğunda tanımlıdır.

ÖRNEK 4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

olsun.

ŞEKİL 1.5



O zaman

$$AB = \begin{bmatrix} (1)(-2)+(2)(4)+(-1)(2) & (1)(5)+(2)(-3)+(-1)(1) \\ (3)(-2)+(1)(4)+(4)(2) & (3)(5)+(1)(-3)+(4)(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 16 \end{bmatrix}.$$

■

ÖRNEK 5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

olsun. AB çarpımının (3,2) elemanını bulunuz.

Çözüm

$AB = C$ ise o zaman AB'nin (3,2) elemanı $(\text{sat}_3(A))^T \cdot \text{süt}_2(B)$ olan c_{32}'dir. Buradan

$$(\text{sat}_3(A))^T \cdot \text{süt}_2(B) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -5.$$

■

ÖRNEK 6

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ y \end{bmatrix}$$

olsun.

$AB = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \end{bmatrix}$, ise x ve y'yi bulunuz.

Çözüm

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & x & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+4x+3y \\ 4-4+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

olur. O zaman

$$\begin{aligned} 2+4x+3y &= 12 \\ y &= 6 \end{aligned}$$

■

böylece $x = -2$ ve $y = 6$ bulunur.

Matris çarpımının temel özellikleri gelecek kesimde verilecektir. Bununla birlikte, matrislerin çarpımına matrislerin toplamından çok daha fazla dikkat edilmesi gerekir. Çünkü matris çarpımının cebirsel özellikleri reel sayıların özelliklerinden oldukça farklıdır. Problem olan kısım AB matrisinin sadece A'nın sütun sayısının B'nin satır sayısına eşit olduğu zamanda tanımlı olması yüzündendir. Böylece A bir $m \times p$ matris ve B bir $p \times n$ matris ise o zaman AB bir $m \times n$ matristir. Diğer taraftan BA nedir? Bunun için 4 durum söz konusudur:

1. Eğer $n \neq m$ ise BA tanımlı değildir.
2. Eğer AB $m = n$ olacak şekilde tanımlı ise o zaman AB $m \times m$ iken BA $p \times p$'dir. Böylece $m \neq p$ ise AB ve BA'nın mertebeleri farklıdır.
3. AB ve BA matrisleri aynı mertebeden iseler bu matrisler eşit olabilir.
4. AB ve BA her ikisinde mertebeleri aynı ise bunlar eşit olmayabilir.

ÖRNEK 7 A matris 2×3 tipinde, B'de 3×4 tipinde bir matris ise o zaman BA tanımsızken AB bir 2×4 matristir. ■

ÖRNEK 8 A 2×3 ve B 3×2 olsun. O zaman AB 2×2 iken BA 3×3 tipinde bir matristir. ■

ÖRNEK 9

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olsun.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

olur. Böylece $AB \neq BA$'dır. ■

Matris çarpımı çok fazla karmaşık görünürken, matris toplamı ve matris eşitliğinin daha basit bir yapıda tanımlı olması sorulabilir. Matrisler ve lineer dönüşümler arasındaki mevcut olan ilişki ve fonksiyonları bütünüyle anlamak ancak matris çarpımının tanımıyla mümkün olur. Bu konular kitabın sonraki bölümlerinde ele alınmıştır. Şimdi Örnek 10 matris çarpımı için güzel bir motivasyon sağlar.

ÖRNEK 10 **(Ekoloji)** Böcek zehiri zararlı böcekleri yok etmek için bitkilere sıkılır. Diğer yandan böcek zehirinden bir kısmı bitki tarafından emilir. Zehirin bir kısmını içine alan bitkiler otçul hayvanlar tarafından yenilerek bu zehiri hayvanlar yutmuştur. Bir otçul hayvan tarafından emilen zehirin miktarını belirtmek için yandaki süreci başlatırız. 4 bitki ve 3 böcek zehirine sahip olduğumuzu kabul edelim. i böcek zehirinin miligram cinsinden miktarı, j bitkinin emdiği zehir olacak şekilde a_{ij} tanımlansın. Bu bilgilere bağlı olarak

Bitki 1	Bitki 2	Bitki 3	Bitki 4	
2	3	4	3	Zehir 1
3	2	2	5	Zehir 2
4	1	6	4	Zehir 3

matrisi ifade edilsin. Diğer yandan 3 otçul hayvanın var olduğunu kabul edelim. b_{ij}, j tipinde bir hayvanın aylık yediği bitki, i de bitkilerin sayısını göstersin. Buradan da

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Hayvan 1} & \text{Hayvan 2} & \text{Hayvan 3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 20 & 12 & 8 \\ 28 & 15 & 15 \\ 30 & 12 & 10 \\ 40 & 16 & 20 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Bitki 1} \\ \text{Bitki 2} \\ \text{Bitki 3} \\ \text{Bitki 4} \end{array}$$

AB matrisinin (i, j) elemanı j hayvanının absorbe ettiği i tipindeki zehirin miktarını verir. Böylece $i = 2$ ve $j = 3$ ise AB matrisinin (2, 3) elemanı

$$\begin{aligned}(\text{sat}_2(A))^T \cdot \text{süt}_3(B) &= 3.8 + 2.15 + 2.10 + 5.20 \\ &= 174 \text{ mg}\end{aligned}$$

Eğer otçul hayvanları yiyen p etçilleri var ise o zaman her zehirin her etçil tarafından ne kadar absorbe edildiğini (yutulduğunu) bulmak için bu şekilde bir analiz yapabiliriz. ■

Bazen iki matrisin matris çarpımını yapmaksızın AB matris çarpımının bir sütununu bulmak oldukça faydalıdır. AB matris çarpımının j sütunu $A\text{süt}_j(B)$ matris çarpımına eşit olduğunu göstermek zor değildir (Alıştırma 46'ya bakınız)

ÖRNEK 11

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

olsun. O zaman AB'nin 2. sütunu

$$A\text{süt}_2(B) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 17 \\ 7 \end{bmatrix} \text{'dir.}$$

■

Hatırlatma $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ n-vektör ($n \times 1$ matrisler) ise o zaman bu vektörlerin iç çarpımı matris çarpımına bağlı olarak aşağıdaki gibi bulunur (Alıştırma 41)

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T\mathbf{v}$$

Bu inceleme Bölüm 5'te uygulanmaktadır.

■ Sütun Terimleri Cinsinden Yazılan Matris–Vektör Çarpımı

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

bir $m \times n$ matris ve

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

bir n-vektör yani $n \times 1$ matris olsun. A, $m \times n$ ve $\mathbf{c}$ $n \times 1$ olduğu için $A\mathbf{c}$ matris çarpımı

$$A\mathbf{c} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\text{row}_1(A))^T \cdot \mathbf{c} \\ (\text{row}_2(A))^T \cdot \mathbf{c} \\ \vdots \\ (\text{row}_m(A))^T \cdot \mathbf{c} \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n \\ \vdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n \end{bmatrix}$$

$m \times 1$ matrisidir. Bu son ifade

$$c_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + c_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$= c_1 \text{süt}_1(A) + c_2 \text{süt}_2(A) + \cdots + c_n \text{süt}_n(A)$$

olarak yazılabilir. Böylece $A\mathbf{c}$ çarpımı A'nın sütunlarının bir lineer birleşimi olarak ifade edilebilir. Burada katsayılar $\mathbf{c}$'nin elemanlarıdır.

Denklemlerin lineer sistemlerini çalışırken bu çarpımdan nasıl yararlandığımızı göstereceğiz. Bu yöntem lineer sistemlerin çözümü hakkında önemli bir yol almamızı sağlayacaktır.

ÖRNEK 12

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

olsun. O zaman

$$A\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \end{bmatrix}$$

■

bulunur.

A bir $m \times p$ matris ve B de $p \times n$ matrisi olsun. O zaman AB çarpımının j sütunu A matrisinin sütunlarının bir lineer birleşimi olarak

yazılabilir. Burada birleşimin katsayıları B matrisinin j sütununun elemanlarıdır:

$$\text{süt}j(AB) = A\text{süt}_j(B) = b_{1j}\text{süt}_1(A) + b_{2j}\text{süt}_2(A) + \ldots + b_{pj}\text{süt}_p(A)$$

ÖRNEK 13 A ve B Örnek 11'de tanımlı matrisler olsun.
O zaman

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 6 & 17 & 16 \\ 17 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. A'nın sütunlarının bir lineer birleşimi olarak AB'nin sütunları

$$\text{süt}_1(AB) = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 17 \end{bmatrix} = A\text{süt}_1(B) = -2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{süt}_2(AB) = \begin{bmatrix} 7 \\ 17 \\ 7 \end{bmatrix} = A\text{süt}_2(B) = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\text{süt}_3(AB) = \begin{bmatrix} 6 \\ 16 \\ 1 \end{bmatrix} = A\text{süt}_3(B) = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

■

■ Lineer Sistemler

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \tag{4}$$

n bilinmeyenli m denklemli lineer sistemi gözönüne alalım. Aşağıdaki matrisleri tanımlayabiliriz.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

O zaman

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}. \tag{5}$$

(5) denklemindeki $A\mathbf{x}$ çarpımının elemanları (4) denkleminin sol yanındaki ifadelerdir. Buradan (4) lineer denklemi

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

şeklinde yazılabilir. A matrisine (4) denkleminin **kat sayılar matrisi** denir ve A'ya $\mathbf{b}$ sütun matrisinin eklenmesiyle elde edilen

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right],$$

matrise (4) lineer sistemin **ilaveli matrisi** denir (4) ilaveli (artırılmış) matrisi $[A \mid \mathbf{b}]$ olarak yazılır. Diğer yandan birden fazla sütunu olan bir matris bir lineer sistemin ilaveli matrisi olarak düşünülebilir. İlaveli matrisler ve katsayılar lineer sistemleri çözmek için kullanacağımız metotlarda önemli rol oynar.

(4)'te

$$b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = b_m = 0$$

ise lineer sisteme bir **homogen sistem** denir. Bir homogen sistem

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

olarak yazılır. Burada A katsayılar matrisidir.

ÖRNEK 14

$$\begin{aligned} -2x \qquad + z &= 5 \\ 2x + 3y - 4z &= 7 \\ 3x + 2y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

lineer sistemini gözönüne alalım.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \text{ ve } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix},$$

olmak üzere verilen lineer sistem

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

matris şeklinde yazılır. Katsayılar matrisi A ve ilaveli matris

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -4 & 7 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

şeklinde yazılır. ■

ÖRNEK 15

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

matrisi

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 4 \\ 3x \quad\; + 2z &= 5 \end{aligned}$$

lineer sisteminin ilaveli matrisidir. ■

(2) ve (3) kullanarak (5)'in değişik bir biçimi aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{21}x_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12}x_2 \\ a_{22}x_2 \\ \vdots \\ a_{m2}x_2 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n}x_n \\ a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{mn}x_n \end{bmatrix} \\ &= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \\ &= x_1 \mathbf{süt}_1(A) + x_2 \mathbf{süt}_2(A) + \cdots + x_n \mathbf{süt}_n(A). \end{aligned}$$

Böylece $A\mathbf{x}$ katsayıları $\mathbf{x}$'in elemanları olan A'nın sütunlarının bir lineer birleşimidir. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistemi

$$x_1 \mathbf{süt}_1(A) + x_2 \mathbf{süt}_2(A) + \cdots + x_n \mathbf{süt}_n(A) = \mathbf{b}. \tag{6}$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Diğer yandan (6) denklemi (4) şeklindeki bir lineer sistem tanımlar.

ÖRNEK 16

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 6 \\ 0 & 7 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \text{ve} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

olmak üzere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistemini gözönüne alınsın. (6) denklemine bağlı olarak $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistemi A'nın sütunlarının bir lineer birleşimi şeklinde aşağıdaki gibi yazılır:

$$x_1\begin{bmatrix}3\\4\\0\\-1\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}1\\-5\\7\\2\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}2\\6\\-3\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\1\\0\\2\end{bmatrix}$$

(6) daki gibi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer denklem sistemini ifade etmek lineer sistemlerin çözümlerini, bulmada önemli bir katkı sağlayacaktır.

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sisteminin tutarlı olması için gerek ve yeter şart $\mathbf{b}$'nin A matrisinin sütunlarının bir lineer birleşimi olarak ifade edilmesidir.

Anahtar Kelimeler

İç çarpım
Matris–vektör çarpımı
Katsayılar matrisi
İlaveli (artırılmış) matris

1.3 Alıştırmalar

Alıştırma 1 ve 2 de $\mathbf{a}$ *ve* $\mathbf{b}$ *vektörlerinin iççarpımı yani* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$*'yi hesaplayınız.*

1. (a) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix}4\\-1\end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix}-3\\-2\end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix}4\\2\\-1\end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix}1\\3\\6\end{bmatrix}$

(d) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

2. (a) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}$

(d) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

3. $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \begin{bmatrix}-3\\2\\x\end{bmatrix}$. olsun $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 17$ ise x'i bulunuz?

4. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\-3\\4\\x\end{bmatrix}$ ve $\mathbf{w} = \begin{bmatrix}x\\2\\-1\\1\end{bmatrix}$ olsun. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ olacak şekilde x değerini hesaplayınız?

5. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}x\\1\\y\end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}$, ve $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}1\\8\\2\end{bmatrix}$ olsun $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ ve $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$ olmak üzere x ve y değerlerini belirtiniz.

6. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}x\\1\\y\end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix}x\\-2\\0\end{bmatrix}$, ve $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}0\\-9\\y\end{bmatrix}$ $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ ve $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$ olacak şekilde x ve y değerlerini bulunuz.

7. $\mathbf{w} = \begin{bmatrix}\sin\theta\\\cos\theta\end{bmatrix}$ ise $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}$ hesaplayınız.

8. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}x\\3\\4\end{bmatrix}$ ve $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 50$ olmak üzere x'in bütün değerlerini bulunuz.

9. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1$ ve $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\x\end{bmatrix}$ olacak şekilde x'in bütün değerlerini hesaplayınız.

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} y \\ x \\ 1 \end{bmatrix}$ olsun.

Eğer $AB = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$ ise x ve y'yi bulunuz.

Alıştırma 11-15'te aşağıdaki matriseri ele alınız.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ ve } F = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

11. Eğer mümkün ise aşağıdakileri hesaplayınız.
(a) AB **(b)** BA **(c)** F^TE
(d) $CB + D$ **(e)** $AB + D^2$, buradan $D^2 = DD$

12. Eğer mümkün ise aşağıdakileri hesaplayınız.
(a) $DA + B$ **(b)** EC **(c)** CE
(d) $EB + F$ **(e)** $FC + D$

13. Eğer mümkün ise aşağıdakileri hesaplayınız.
(a) $FD - 3B$ **(b)** AB – 2D
(c) $F^TB + D$ **(d)** 2F – 3(AE)
(e) $BD + AE$

14. Eğer mümkün ise aşağıdakileri hesaplayınız.
(a) $A(BD)$ **(b)** $(AB)D$
(c) $A(C + E)$ **(d)** $AC + AE$
(e) $(2AB)^T$ ve $2(AB)T$ **(f)** $A(C - 3E)$

15. Eğer mümkün ise aşağıdakileri hesaplayınız.
(a) A^T **(b)** $(A^T)^T$
(c) $(AB)^T$ **(d)** B^TA^T
(e) $(C + E)^TB$ ve $C^TB + E^TB$
(f) $A(2B)$ ve $2(AB)$

16. $A = [1\ \ 2\ \ -3]$, $B = [-1\ \ 4\ \ 2]$, $C = [-3\ \ 0\ \ 1]$ olsun. Aşağıdaki matrisleri hesaplayınız.
(a) AB^T **(b)** CA^T **(c)** $(BA^T)C$
(d) A^TB **(e)** CC^T **(f)** C^TC
(g) B^TCAA^T

17. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

olmak üzere AB çarpımının aşağıdaki elemanlarını hesaplayınız.
(a) (1,2) elemanı **(b)** (2,3) elemanı
(c) (3,1) elemanı **(d)** (3,3) elemanı

18. $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

ise DI_2 ve I_2D'yi bulunuz.

19. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

olsun. $AB \neq BA$ olduğunu gösteriniz.

20. A Örnek 4'teki matris ve O'da 3×2 tipinde bir sıfır matrisi ise AO matrisini hesaplayınız.

21 ve 22 alıştırmaları aşağıdaki matrislere göre cevaplayınız.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

ve

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -3 & 4 \\ 4 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

olsun.

21. Örnek 11'deki yöntemi kullanarak AB'nin aşağıdaki sütunlarını hesaplayınız.
(a) Birinci sütun **(b)** Üçüncü sütun

22. Örnek 11'deki metodu kullanarak AB'nin aşağıdaki sütunlarını hesaplayınız.
(a) İkinci sütun **(b)** Dördüncü sütun

23. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

A'nın sütunlarının bir lineer birleşimi olarak $A\mathbf{c}$ yi ifade ediniz.

24. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

olsun. A'nın sütunlarının bir lineer birleşimi olarak AB'nin sütunlarını yazınız.

25. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ olsun.

(a) $\mathbf{a}_j$, $j = 1, 2, 3$ için A'nın j'inci sütunu olmak üzere $AB = 3\mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3$ eşitliğinin doğru olduğunu gösteriniz.

(b) $AB = \begin{bmatrix} (\text{sat}_1(A))B \\ (\text{sat}_2(A))B \end{bmatrix}$

olduğunu ispat ediniz.

26. **(a)** $A = [r \;\; 1 \;\; -2]$, $B = [1 \;\; 3 \;\; -1]$ olsun. $AB^T = 0$ olacak şekilde r değerini bulunuz.

(b) Bu çarpımı değişik bir yolla veriniz.

27. $A = [1 \;\; r \;\; 1]$ ve $B = [-2 \;\; 2 \;\; s]$ olmak üzere $AB^T = 0$ olacak şekilde r ve s değerlerini hesaplayınız.

28. A herhangi bir satırı sıfır olan bir $m \times n$ matrisi olsun. B bir $n \times p$ matrisi ise o zaman

(a) AB'nin bir satırının sıfır olduğunu gösteriniz.

(b) BA'nın bir sütununun sıfır olduğunu gösteriniz.

29. $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{a}_j$ de A'nın j inci sütunu ($j = 1, 2, 3$) olsun.

$$A^T A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_3^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_3^T\mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3^T\mathbf{a}_3 \end{bmatrix}$$

olduğunu ispat ediniz.

30. Aşağıdaki lineer sistemi gözönüne alınız.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_3 + 3x_5 &= -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_4 &= 3 \\ x_3 + x_4 + x_5 &= 5. \end{aligned}$$

(a) Katsayılar matrisini yazınız.

(b) Matris şeklinde lineer sistemi ifade ediniz.

(c) İlaveli matrisi bulunuz.

31. İlaveli matrisi

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ -3 & 2 & 7 & 8 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

olan lineer sistemi yazınız.

32. Aşağıdaki lineer sistemi matris şeklinde yazınız.

$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 &= 5 \\ x_1 - 5x_2 &= 4 \end{aligned}$$

33. Aşağıdaki lineer sistemi matris şeklinde ifade ediniz.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 0 \\ 3x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

34. Aşağıda ilaveli matrisleri verilmiş olan lineer sistemi yazınız.

(a) $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -4 & 3 & 2 \end{array}\right]$.

(b) $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$.

35. Alıştırma 34 ile ilgili bir lineer sistemi nasıl elde ederiz?

36. Kat sayılar matrisinin sütunlarının bir lineer birleşimi olarak aşağıdaki lineer sistemleri yazınız.

(a) $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 &= -2 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 &= -2 \\ 3x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$

37. Aşağıda sütunların lineer birleşimi olarak verilmiş lineer sistemi (4) şeklinde yazınız.

(a) $x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

(b) $x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$

38. Aşağıdaki lineer sistemleri matris şeklinde yazınız.

(a) $x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

39. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$'nin çözümünün var olması için gerek ve yeter şart $\mathbf{b}$'nin A'nın sütunlarının bir lineer birleşimi olarak yazılması hakikatını kullanarak, aşağıdaki lineer sistemler için birer çözüm bulunuz.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix}$

40. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sisteminin bir çözümü olmak üzere A katsayılar matrisini bulunuz, burada $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Bu katsayılar matrisi tek midir? Açıklayınız.

41. $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ n-vektörler olmak üzere $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T\mathbf{v}$ olduğunu gösteriniz.

42. A bir $n \times n$ matris ve B'de $n \times p$ matrisi olsun

(a) A'nın bir sütunun elemanları sıfır

(b) B'nin bir satırının elemanları sıfır olduğu zaman AB matris çarpımı için ne söylenebilir.

43. $A = [a_{ij}]$ bir $n \times n$ matris olmak üzere A'nın esas köşegeni üzerindeki elemanlarının toplamına matrisin izi denir ve $\text{İz}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$'dir. Buna göre aşağıdaki ifadeleri ispatlayınız.

(a) $\text{İz}(cA) = c\text{İz}(A)$, c bir reel sayı

(b) $\text{İz}(A + B) = \text{İz}(A) + \text{İz}(B)$

(c) $\text{İz}(AB) = \text{İz}(BA)$

(d) $\text{İz}(A^T) = \text{İz}(A)$

(e) $\text{İz}(A^TA) \geq 0$

44. Alıştırma 43'deki tanıma göre aşağıdaki matrislerin izini hesaplayınız.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & -2 & -5 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

45. $AB - BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

olmak üzere A ve B'nin 2×2 tipinde matrisler olmadığını gösteriniz.

46. **(a)** $\mathbf{b}_j$ B'nin j.inci sütunu olmak üzere, AB matris çarpımının $A\mathbf{b}_j$ çarpımına eşit olduğunu gösteriniz. AB çarpımının

$AB = [A\mathbf{b}_1 \quad A\mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad A\mathbf{b}_n]$.

gibi sütunlarına göre yazıldığı anlaşılmalıdır.

(b) $\mathbf{a}_i$, A'nın i.inci satırı olmak üzere AB matris çarpımının $\mathbf{a}_iB$ matris çarpımına eşit olduğunu gösteriniz. AB çarpımının

$$AB = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1B \\ \mathbf{a}_2B \\ \vdots \\ \mathbf{a}_mB \end{bmatrix}$$

gibi satırlarına göre yazıldığı anlaşılmalıdır.

47. AB matris çarpımının j inci sütununu B'nin j.inci sütununun b_j elemanlarını katsayı olarak alan A'nın sütunlarının bir lineer birleşim olarak gösteriniz.

48. $$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 80 \\ 10 \end{bmatrix}$$

vektörü bir elektronik mağazasında mevcut olan uydu alıcıları, CD, hoparlör ve DVD oynatıcıların sayısını göstersin.

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 200 \\ 120 \\ 80 \\ 70 \end{bmatrix}$$

vektör sırasıyla uydu alıcıları, CD, hoparlör ve DVD oynatıcılarının fiyatlarını versin $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ iç çarpımı, mağaza sahibine ne anlatır?

49. ***(Üretici fiyatları)*** Bir mobilya üreticisi masa ve sandalyelerin montaj ve bitirme işlemlerini yapmaktadır. Bu işlemler için gerekli zaman saatlik olarak

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{Masa} \\ \text{Sandalye} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Montaj} & \text{Bitirme} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

matrisi tarafından verilsin. Üretici biri Salt Lake City ve diğeri Chicago'da olan bir fabrikaya sahiptir. Montaj ve bitirme işlemleri için saatlik fiyatlar dolar cinsinden

$$B = \begin{array}{c} \\ \text{Montaj} \\ \text{Bitirme} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Salt Lake City} & \text{Chicago} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matrisiyle verilsin. AB matris çarpımının elemanları üreticiye ne anlatır?

50. ***(Tıp)*** Bir diyet araştırma projesine çocuklar ve yetişkinler dahildir. Projedeki katılımcıların sayısı

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{Erkek} \\ \text{Kadın} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Yetişkin} & \text{Çocuklar} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 80 & 120 \\ 100 & 200 \end{bmatrix} \end{array}$$

matrisiyle verilsin. Her çocuk ve yetişkinde diyet sonucu tüketilen protein, yağ ve karbonhidratların günlük gramlarının sayısı

$$B = \begin{array}{c} \\ \text{Yetişkin} \\ \text{Çocuk} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Protein} & \text{Yağ} & \text{Karbonhidrat} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 20 & 20 & 20 \\ 10 & 20 & 30 \end{bmatrix} \end{array}$$

matrisi tarafından ifade edilsin.

(a) Tahminen erkekler günde kaç gram protein tüketir?
(b) Tahminen kadınlar günde kaç gram yağ tüketir?

51. $\mathbf{x}$ bir n-vektör olsun
(a) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ negatif olabilir mi? Açıklayınız.
(b) Eğer $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ ise $\mathbf{x}$ nedir?

52. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ve $\mathbf{c}$ n-vektör ve k reel bir sayı olsun.
(a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$'dır. Gösteriniz.
(b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$'dir. Gösteriniz.
(c) $(k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b}) = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$'dir. Gösteriniz.

53. A elemanları reel sayılar olan $m \times n$ tipinde bir matris olsun. Eğer $AA^T = 0$, (0, elemanları sıfır olan matris) ise o zaman $A = 0$'dır. Gösteriniz.

54. Alıştırma 11'deki A ve C matrislerini ve bilgisayarınızın yazılımındaki matris çarpımı komutunu kullanarak $A \cdot C$ ve $C \cdot A$ matrislerini bularak tartışınız.

55. Bilgisayarınızın yazımını kullanarak

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

matrisi için $B^T B$ ve BB^T matrislerini bulunuz.

1.4 Matris İşlemlerinin Cebirsel Özellikleri

Bu Kesimde, daha önce tanımlanan matris işlemlerinin cebirsel özellikleri gözönüne alınacaktır. Bu özelliklerin birçoğu reel sayılar için sağlanan özelliklere benzemektedir. Bununla birlikte, belirli işlemler altındaki matris cümlesi ve reel sayılar cümlesinin cebirsel davranışı arasında dikkat çekici farklılıklar mevcuttur. Örneğin çarpma işlemi altında (Kesim 1.3'te görüldüğü üzere). Birçok özelliğin ispatı alıştırma olarak okuyucuya bırakılacaktır.

Teorem 1.1 **Matrislerte Toplama İşleminin Özellikleri**

A, B ve C $m \times n$ tipinde matrisler olsun:
(a) $A + B = B + A$
(b) $A + (B + C) = (A + B) + C$
(c) Herhangi bir $m \times n$ tipindeki A matrisi için

$$A + O = A \tag{1}$$

olacak şekilde $m \times n$ tipinde bir tek O matrisi vardır. Buradaki O matrisine **sıfır matrisi** denir.
(d) Her bir $m \times n$ tipindeki A matrisi için;

$$A + D = O \tag{2}$$

olacak şekilde bir tek $m \times n$ tipinde D matrisi vardır. D matrisini $-A$ olarak yazabiliriz. Bu nedenle (2) ifadesi

$$A + (-A) = O$$

şeklinde yazılır. $-A$ matrisine, A matrisinin **negatifi** denir. Burada $-A_1$ (-1). A'dır.

İspat

(a)

$$A = [a_{ij}], \quad B = [b_{ij}],$$

$$A + B = C = [C_{ij}], \quad \text{ve} \quad B + A = D = [d_{ij}]$$

olsun $\forall$ i, j için $c_{ij} = d_{ij}$ şeklindedir. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ve $d_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$ olduğundan; $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$ olur. Bu da tüm i ve j'ler için $c_{ij} = d_{ij}$ olmasını gerektirir.

(c) $U = [u_{ij}]$ olsun. Bu durumda $A + U = A \Leftrightarrow a_{ij} + u_{ij} = a_{ij} \Leftrightarrow u_{ij} = 0$. Bu durumda U matrisi, satır ve sütunlarının tamamı 0 olan $m \times n$ tipinde bir matristir. U matrisi, O şeklinde gösterilir. ■

2×2 tipindeki sıfır matrisi;

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

ÖRNEK 1

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

şeklinde ise

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+0 & -1+0 \\ 2+0 & 3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

■

olur. 2×3 tipindeki sıfır matrisi;

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

ÖRNEK 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \text{ olması halinde } -A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

■

olur.

Teorem 1.2 **Matrislerde Çarpma İşlemimin Özellikleri**

(a) A, B ve C uygun tipteki matrisler ise

$$A(BC) = (AB)C$$

şeklindedir.

(b) Uygun tipteki A, B ve C matrisleri için

$$(A + B)C = AC + BC$$

şeklindedir.

(c) Uygun tipteki A, B ve C matrisleri için;

$$C(A + B) = CA + CB \tag{3}$$

İspat

A; $m \times n$, B; $n \times p$ ve C ise $p \times q$, tipindeki matrisler olsun. Bu sonucu $m = 2$, $n = 3$, $p = 4$ ve $q = 3$ özel hali için ispatlayacağız. Genel ispat tamamen benzerdir.

$A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $C = [c_{ij}]$, $AB = D = [d_{ij}]$, $BC = E = [e_{ij}]$, $(AB)C = F = [f_{ij}]$, ve $A(BC) = G = [g_{ij}]$, olsun $\forall\ i, j$ için $f_{ij} = g_{ij}$ olduğunu göstermeliyiz.

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^{4} d_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{4} \left(\sum_{r=1}^{3} a_{ir}b_{rk} \right) c_{kj}$$

[†]Ancak ve ancak = yalnız ve yalnız" bağlacı her iki ifadenin de doğru veya yanlış olmasını belirtir. Böylece (i) Eğer $A + U = A$ ise, o zaman $a_{ij} + u_{ij} = a_{ij}$ ve (ii) Eğer $a_{ij} + u_{ij} = a_{ij}$ ise, o zaman $A + U = A$ Ek C ye bakınız "İspatlara giriş".

şeklindedir. Toplam gösteriminin özelliğinden;

$$g_{ij} = \sum_{r=1}^{3} a_{ir} e_{rj} = \sum_{r=1}^{3} a_{ir} \left(\sum_{k=1}^{4} b_{rk} c_{kj} \right)$$

olur.

$$\begin{aligned} f_{ij} &= \sum_{k=1}^{4} (a_{i1} b_{1k} + a_{i2} b_{2k} + a_{i3} b_{3k}) c_{kj} \\ &= a_{i1} \sum_{k=1}^{4} b_{1k} c_{kj} + a_{i2} \sum_{k=1}^{4} b_{2k} c_{kj} + a_{i3} \sum_{k=1}^{4} b_{3k} c_{kj} \\ &= \sum_{r=1}^{3} a_{ir} \left(\sum_{k=1}^{4} b_{rk} c_{kj} \right) = g_{ij}. \end{aligned}$$

(b) ve (c)'nin ispatı Alıştırma 4 olarak okuyucuya bırakılmıştır. ■

ÖRNEK 3

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

ve

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda;

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 8 & -4 & 6 \\ 9 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 & 16 & 56 \\ 12 & 30 & 8 \end{bmatrix}$$

ve

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 19 & -1 & 6 & 13 \\ 16 & -8 & -8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 & 16 & 56 \\ 12 & 30 & 8 \end{bmatrix}.$$

■

ÖRNEK 4

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ ve } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda;

$$(A + B)C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 12 & 3 \end{bmatrix}$$

ve

$$AC + BC = \begin{bmatrix} 15 & 1 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 12 & 3 \end{bmatrix}$$

■

dur.

AB matrisinini, *BA* matrisine her zaman eşit olmak zorunda olmadığını gösteren Kesim1.3'teki Örnek 9'u hatırlayalım. Bu, reel sayılardaki çarpma işlemi ile matrislerdeki çarpma işlemi arasındaki en önemli farktır.

Teorem 1.3 **Skalarla Çarpımın Özellikleri**

(a) $r(sA) = (rs)A$
(b) $(r + s)A = rA + sA$
(c) $r(A + B) = rA + rB$
(d) $A(rB) = r(AB) = (rA)B$

İspat

Bu teoremin ispatı 13., 14., 16. ve 18. alıştırma olarak okuyucuya bırakılmıştır. ■

ÖRNEK 5

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda

$$2(3A) = 2\begin{bmatrix} 12 & 6 & 9 \\ 6 & -9 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 12 & 18 \\ 12 & -18 & 24 \end{bmatrix} = 6A$$

ve aynı zamanda;

$$A(2B) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & -10 & 16 \\ 0 & 0 & 26 \end{bmatrix} = 2(AB).$$

■

olur.

ÖRNEK 6

Skalarla çarpma işlemi, matristeki elemanların büyüklüğünü değiştirmek için kullanılır.

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda $k = \frac{1}{7}$ için, kA matrisinin en büyük terimi 1 olur. Aynı zamanda, A matrisinin elemanları sütunlardaki çarpımların büyüklüğünü gösteriyorsa, $k = 4$ için, kA matrisi bu sütunlardaki terimlerin büyüklüğünü gösterir. ■

Şu ana kadar, matrislerde toplama ve çarpma işlemlerinin, reel sayılardaki toplama ve çarpma işlemlerinden daha yaygın olduğunu gördük. Şimdi, transpozun bazı özelliklerini inceleyelim.

Teorem 1.4 **Transpozun Özellikleri**

r bir skalar, A ve B uygun tipteki matrisler olmak üzere

(a) $(A^T)^T = A$

(b) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(c) $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

(d) $(rA)^T = rA^T$

şeklindedir.

İspat

(a), (b) ve (d) şıkları Alıştırma 26 ve 27 olarak okuyucuya bırakılmıştır.

(c) $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$; $AB = C = [c_{ij}]$ olsun. $C^T{}_{ij}$'nin, B^T, A^T matrisinin (i, j) terimi olduğunu göstereceğiz.

$$c_{ij}^T = c_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}^T\, b_{ik}^T$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_{ik}^T\, a_{kj}^T = B^T A^T\text{'deki } (i, j) \text{ elemanıdır.}$$

■

ÖRNEK 7

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda;

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B^T = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Aynı zamanda

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad (A + B)^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T + B^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = (A + B)^T.$$

olur. ■

ÖRNEK 8

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda

$$AB = \begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad (AB)^T = \begin{bmatrix} 12 & 7 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

olur.

Öte yandan;

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} 12 & 7 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = (AB)^T$$

ifade edilir. ■

Burada matrislerde çarpma işleminin diğer iki özelliğini de ifade etmemiz gerekir. a ve b reel sayılar olmak üzere $ab = 0$ eşitliği ancak ve ancak a'ya da b'den en az birinin sıfır olması halinde gerçeklenir. Fakat bu matrisler için doğru değildir.

ÖRNEK 9

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

matrislerinden herhangi biri sıfır olmamasına rağmen

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dır. ■

Eğer, a, b ve c reel sayı, $a \neq 0$ olacak şekilde $ab = ac$ ise $b = c$'dir. Bunun anlamı sıfırdan farklı a reel sayısını bu eşitlikten kaldırabiliriz. Bununla birlikte, bir sonraki örnekte görüleceği üzere bu kural matrisler için sağlanmaz.

ÖRNEK 10

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{ve} \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

ise, o zaman

$$AB = AC = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 16 & 10 \end{bmatrix},$$

olur. Ancak, $B \neq C$. ■

Şimdi reel sayılardaki çarpma işlemi ve matrislerdeki çarpma işlemi arasındaki bazı farkları aşağıdaki gibi özetleyelim. Uygun tipteki A, B ve C matrisleri için;

1. AB her zaman BA'ya eşit olmayabilir.
2. $A \neq O$, $B \neq O$ olmak üzere, AB matrisi O'a eşit olabilir.
3. $B \neq C$ olmak üzere $AB \neq AC$ olabilir.

Bu bölümde matrisler ve transpozları hakkında birçok özellik verildi. Bundan sonraki problemlerde bu kavramlara gereksinim duyulursa, problemin çözümüne yardım etmek için bu özelliklerden bahsedebiliriz. Bu sonuçlar daha birçok sonucu geliştirmek için kullanılabilir.

Anahtar Kelimeler

Sıfır matrisi
Matrislerde toplama işleminin özellikleri
Matrislerde çarpma işleminin özellikleri
Skalarla çarpma işleminin özellikleri
Transpoz işleminin özellikleri

1.4 Alıştırmalar

1. Teorem (1.1)(b)'yi ispatlayınız.

2. Teorem (1.1)(d)'yi ispatlayınız.

3. Teorem (1.2)(a)'nın

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\text{ve } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

matrisleri için gerçeklendiğini gösteriniz.

4. Teorem 1.2(b) ve (c)'yi ispatlayınız.

5. Teorem 1.2(c)'nin aşağıdaki

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\text{ve } C = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

matrisleri için gerçeklendiğini gösteriniz.

6. $i \neq j$ iken $a_{ij} = 0$ ve $a_{ii} = k$ olarak tanımlamak üzere, $A = [a_{ij}]$ $n \times n$ tipindeki bir matris olsun. B, $n \times n$ tipinde herhangi bir matris olmak üzere $AB = kB$ olduğunu gösteriniz.

7. A, $m \times n$ tipinde ve C ise, $C = [c_1, c_2 \ldots c_m]$ olacak şekilde $1 \times m$ tipinde matrisler olsun. A_j, A matrisinin j. satırı olmak üzere;

$$CA = \sum_{j=1}^{m} c_j A_j,$$

olduğunu gösteriniz.

8. $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

olsun.

(a) A^2 matrisi için basit bir ifade bulunuz.

(b) A^3 matrisi için basit bir ifade bulunuz.

(c) k pozitif bir tamsayı olmak üzere A^k matrisi için basit bir ifade bulunuz.

(d) (c) de bulduğunuz eşitliğin doğru veya yanlış olduğunu ispatlayınız.

9. Örnek (9) dan farklı olmak koşulu ile, $AB = O$ olacak şekilde 2×2 tipinde birbirinden farklı A ve B matrisleri bulunuz.

10. $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olacak şekilde 2×2 tipinde iki farklı A matrisi bulunuz.

11. $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olacak şekilde 2×2 tipinde iki farklı A ve B matrisi bulunuz.

12. $A^2 = 0$ olacak şekilde iki tane farklı, 2×2 tipinde A matrisi bulunuz.

13. Teorem 1.3(a)'yi ispat ediniz.

14. Teorem 1.3(b)'yi ispat ediniz.

15. Teorem (1.3)(b)'nin $r = 4$, $s = -2$ ve $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ için gerçeklendiğini gösteriniz.

16. Teorem 1.3(c)'yi ispatlayınız.

17. Teorem 1.3(c)'nin; $r = -3$, $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ için gerçeklendiğini gösteriniz.

18. Teorem 1.3(d) ispatlayınız.

19. Teorem 1.3(d)'nin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix},$$

matrisleri ve $r = -3$ için doğru olduğunu gösteriniz.

20. A matrisi dünya üzerinde bir uzay gemisine sıkıştırılmış maddelerin ağırlıklarını içermektedir. Bu maddeler ayda ağırlıklarının $\frac{1}{6}$'sı olacak şekilde kullanılır. Ay üzerindeki bu maddelerin ağırlıklarını hesaplayan bir kA matrisi yazınız.

21.(a) A, 360×2 tipinde bir matristir. A matrisinin birinci sütunu cos0°, cos1°, …, cos359°, ikinci sütunu sin0°, sin1°, …, sin359° şeklindedir. Düzenlenmiş olan A'daki bu çiftler merkezi orijinde yarıçapı 1 birim olan çemberleri göstermektedir. Yarıçapı 3, merkezi orijinde olan bir daireyi gösteren çiftler için bir kA ifadesi yazınız

(b) (a) da daireler hakkındaki iddiaların nasıl ispatlanacağını açıklayınız.

22. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $Ax = rx$ olacak şekilde bir r skaları belirleyiniz.

23. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$

$Ax = rx$ olacak şekilde bir r skaları belirleyiniz.

24. Bir r skaları, $n \times n$ tipinde bir A matrisi ve $n \times 1$ tipindeki bir $\mathbf{x}$ matrisi için; $A\mathbf{x} = r\mathbf{x}$ ise, herhangi bir s skaları ispat ediniz. $\mathbf{y} = s\mathbf{x}$ olmak üzere $A\mathbf{y} = r\mathbf{y}$ şeklindedir. İspat ediniz.

25. $A\mathbf{x} = r\mathbf{x}$ iken; $A^2\mathbf{x} = s\mathbf{x}$ olacak şekilde bir s skaları belirleyiniz.

26. Teorem 1.4(a) yı ispatlayınız.

27. Teorem 1.4(b) ve (d)'yi ispatlayınız.

28. Teorem 1.4(a), (b) ve (d)'nin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

ve $r = -4$ için gerçeklendiğini gösteriniz.

29. Teorem 1.4(c)'nin $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ ve

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

için gerçeklendiğini gösteriniz.

30. $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}$, ve $C = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

olsun.

(a) $(AB^T)C$ matrisini hesaplayınız.

(b) B^TC matrisini hesaplayınız ve sonucu sağdan A matrisi ile çarpınız. (*Yol gösterme*: B^TC matrisi 1×1 tipindedir.)

(c) $(AB^T)C = (B^TC)A$ eşitliğinin nasıl gerçeklendiğini açıklayınız.

31. $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ olmak üzere

bir k skalar bulunuz $(kA)^T(kA) = 1$ olacak şekilde. k skalarının bu eşitlik için kullanılacak birden fazla değeri var mıdır?

32. $B \neq C$, $A \neq O$ olmak üzere $AB = AC$ olacak şekilde. 2×2 tipinde herhangi üç tane A, B, C matrisini bulunuz.

33. A $n \times n$ tipinde bir matris ve c bir reel sayı olsun. $cA = O$ ise $c = 0$ ya da $A = O$'dır. Gösteriniz.

34. 2×2 tipinde herhangi bir B matrisi için $AB = BA$ olacak şekilde 2×2 tipindeki bütün A matrislerini belirleyiniz.

35. $(A - B)^T = A^T - B^T$ olduğunu gösteriniz.

36. $\mathbf{x}_1$ ve $\mathbf{x}_2$ $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen lineer denklem sisteminin çözümleri olsun.

(a) $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$'nin de bir çözüm olduğunu gösteriniz.

(b) $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$'nin de bir çözüm olduğunu gösteriniz.

(c) Herhangi bir r skaları için $r\mathbf{x}_1$'in bir çözüm olduğunu gösteriniz.

(d) Herhangi r ve s skalarları için $r\mathbf{x}_1 + s\mathbf{x}_2$ nin bir çözüm olduğunu gösteriniz.

37. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin birden fazla çözümü varsa bu denklem sisteminin sonsuz tane çözümünün olduğunu gösteriniz. (*Yol gösterme*: Eğer $\mathbf{x}_1$ ve $\mathbf{x}_2$ veliren sistemin çözümleri ise $r + s = 1$ olmak üzere $\mathbf{x}_3 = r\mathbf{x}_1 + s\mathbf{x}_2$'dir.)

38. $\mathbf{x}_1$ ve $\mathbf{x}_2$ eğer $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer denklem sisteminin çözümleri ise $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen denklem sisteminin bir çözümüdür.

39. $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 0 & 13 & -16 \\ 0 & 8 & -11 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 10.5 \\ 21.0 \\ 10.5 \end{bmatrix}$

olsun.

(a) $A\mathbf{x} = r\mathbf{x}$ olacak şekilde bir r skaları belirleyiniz.

(b) (a)'da belirlenen r için; $A^T\mathbf{x} = r\mathbf{x}$ eşitliği doğru mudur?

40. Alıştırma (39)'u;

$$A = \begin{bmatrix} -3.35 & -3.00 & 3.60 \\ 1.20 & 2.05 & -6.20 \\ -3.60 & -2.40 & 3.85 \end{bmatrix}$$

ve $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 12.5 \\ -12.5 \\ 6.25 \end{bmatrix}$

matrisleri için tekrarlayınız.

41. $A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.01 \\ 0.001 & 0.0001 \end{bmatrix}$.

olsun. Bilgisayarınızda, mümkün olduğu kadar fazla ondalıklı basamağı gösterecek şekilde bir program kurun ve;

$B = 10 * A$

$$C = \underbrace{A + A + A + A + A + A + A + A + A + A}_{10 \text{ tane}},$$

$D = B - C$

matrislerini hesaplayınız. Eğer D sıfır değilse, pozitif bir tamsayı ile yapılan skalar çarpma ve ardışık toplamların, bilgisayar ortamında ayrı olmadığını göstermiş olursunuz. (Fakat, birçok bilgisayar programı, sadece tam aritmetik modelini kullandığı için $D \neq O$ olması doğal olmayan bir durum değildir. Tam aritmetik modeli, kayan nokta aritmetik olarak adlandırılır.)

42. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. olsun.

Bilgisayarınızda mümkün olduğu kadar çok ondalıklı basamak gösteren bir k program kurunuz. $A + 10^{-k} * A = A$ olacak şekilde bir pozitif tamsayısı bulmayı deneyiniz. Eğer böyle bir tamsayı bulursanız, bilgisayar ortamında O'ın rolünü oynayan birden fazla matris olduğunu göstermiş olursunuz.

1.5 Matrislerin Özel Tipleri ve Parçalanmış Matrisler

Daha önce tüm satır ve sütunları sıfır olan, O matrisini ifade ettik. Şimdi ise, daha özel yapıdaki, farklı özel ada sahip olan birçok matris tipini ele alacağız.

Eğer $i \neq j$ olmak üzere $a_{ij} = 0$ ise $n \times n$ tipindeki $A = [a_{ij}]$ matrisine **köşegen matris** denir. Böylece, köşegen bir matriste esas köşegenin elemanı olmayan tüm elemanlar sıfırdır. Sıfır matrisi de bir köşegen matristir. **Skalar matris** ise tüm köşegen elemanları eşit olan bir köşegen matristir. $i \neq j$ için; $d_{ij} = 0$ olmak üzere $I_n = [d_{ij}]$ skalar matrisine $n \times n$ tipinde **birim matris** denir.

ÖRNEK 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ ve } I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olsun. Burada A, B ve I_3 matrisi birer köşegen matris, B ve I_3 skalar matris, I_3 ise 3×3 tipinde bir birim matristir. ■

$m \times n$ tipindeki herhangi bir A matrisi için;

$$AI_n = A \text{ ve } I_m A = A$$

olduğunu göstermek kolaydır (Alıştırma 1).

Aynı zamanda eğer, A bir skalar matris ise, bazı r ve s skalarları için $A = rI_n$ olur.

A bir karesel matris olsun. Şimdi ise pozitif bir p tamsayısı için bir A matrisinin p kuvveti;

$$A^p = \underbrace{A \cdot A \cdot \cdots \cdot A}_{p \text{ tane}}$$

olarak tanımlanır.

Eğer A, $n \times n$ tipinde bir matris ise; $A^0 = I_n$ olur.

Negatif olmayan p ve q tamsayıları için; reel sayılar için bilinen üslü kurallar, bir A kare matrisinin çarpma işlemi için de ispatlanabilir. (Alıştırma 8):

$$A^p A^q = A^{p+q}, \ (A^p)^q = A^{pq}$$

Aynı zamanda;

$$(AB)^p = A^p B^p$$

şeklindeki kural, $AB = BA$ eşitliği sağlanmadıkça kare matrisler için sağlanmaz. (Alıştırma 9.)

$i > j$ olmak üzere, $a_{ij} = 0$ ise, $n \times n$ tipindeki bir $A = [a_{ij}]$ matrisine **üst üçgen matris** denir. $i < j$ olmak üzere eğer $a_{ij} = 0$ ise bu matrislere **alt üçgen matris** denir. Bir köşegen matris hem alt üçgen, hem de üst üçgen matristir.

ÖRNEK 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisi üst üçgen bir matris,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisi alt üçgen bir matristir. ■

TANIM 1.8 Tüm terimleri reel olan bir A matrisi için; $A^T = A$ oluyorsa bu A matrisine **simetrik matris** adı verilir.

TANIM 1.9 Tüm terimleri reel olan bir A matrisi için; $A^T = -A$ oluyor ise A matrisine **ters-simetrik matris** denir.

ÖRNEK 3

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ bir simetrik matristir. ■

ÖRNEK 4

$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ bir ters-simetrik matristir. ■

Ters-simetrik ve simetrik matrisler hakkında birkaç gözlem yapabiliriz.

Önceki tanımdan; Eğer A matrisi simetrik ya da ters-simetrik bir matris ise aynı zamanda bir karesel matristir. A matrisi simetrik ise, A matrisinin elemanları esas köşegene göre simetriktir. Aynı zamanda, A matrisinin simetrik olması için gerek ve yeter şart $a_{ij} = a_{ji}$ ve ters-simetrik olması için gerek yeter şart $a_{ij} = -a_{ji}$ olmasıdır. Bunun yanında, Eğer A matrisi ters-simetrik ise A'nın tüm esas-köşegen elemanları sıfırdır. Simetrik ve ters-simetrik matrislerin en önemli özelliklerinden biri aşağıdaki gibidir.

A, $n \times n$ tipinde bir matris, S ve K sırası ile simetrik ve ters-simetrik matrisler olmak üzere $A = S + K$'dır ve bu gösterim tektir. (Alıştırma 29.)

■ Parçalanmış Matrisler

$m \times n$ tipindeki bir $A = [a_{ij}]$ matrisinin, bazı satır ve sütunlarının silinmesi ile elde edilen matrise A matrisinin bir **alt matrisi** denir.

ÖRNEK 5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

olsun. A matrisinin ikinci satır ve üçüncü sütunu çıkarılırsa bu matrisin

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrisini elde ederiz. Bir A matrisi, satırları arasına yatay çizgiler, sütunların arasına dikey çizgiler çizilerek alt matrislere parçalanabilir. Elbette bu parçalanma birçok farklı yolla yapılabilir. ■

ÖRNEK 6

$$A = \left[\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

matrisi, daha önce gösterildiği gibi alt matrislere parçalanabilir. Aynı zamanda;

$$A = \left[\begin{array}{cc:cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \widehat{A}_{11} & \widehat{A}_{12} & \widehat{A}_{13} \\ \widehat{A}_{21} & \widehat{A}_{22} & \widehat{A}_{23} \end{bmatrix} \quad (1)$$

ifadesi ise A matrisinin başka bir parçalanışını verir. Bu nedenle, parçalanmış matrislerden bahsedebiliriz. ■

ÖRNEK 7

Kesim 1.3'te tanımlanan, lineer sistemin ilaveli matrisi, bir bölüm matristir. Bu nedenle eğer $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ise bu matrisini ilaveli matrisini $[A \mid \mathbf{b}]$ olarak yazabiliriz. ■

Eğer A ve B matrisleri aynı yol ile parçalanmış, $m \times n$ tipinde iki matrisi ise, bu durumda $A + B$ matrisi, A ve B'nin alt matrislerinin toplanmasıyla kolaylıkla elde edilir. Benzer şekilde, Eğer A bir parçalanmış matrisi ise cA skalar çarpım matrisi, her bir alt matrisin skalar ile çarpılması ile elde edilir.

A matrisi, (1)'de gösterildiği gibi parçalanmış bir matris ve

$$B = \left[\begin{array}{cc:c} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ \hdashline b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \\ \hdashline b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{bmatrix}$$

olacak şekilde, basit hesaplamalarla

$$AB = \left[\begin{array}{c:c} (\widehat{A}_{11}B_{11} + \widehat{A}_{12}B_{21} + \widehat{A}_{13}B_{31}) & (\widehat{A}_{11}B_{12} + \widehat{A}_{12}B_{22} + \widehat{A}_{13}B_{32}) \\ \hdashline (\widehat{A}_{21}B_{11} + \widehat{A}_{22}B_{21} + \widehat{A}_{23}B_{31}) & (\widehat{A}_{21}B_{12} + \widehat{A}_{22}B_{22} + \widehat{A}_{23}B_{32}) \end{array}\right]$$

olduğunu gösterebiliriz.

ÖRNEK 8

$$A = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ \hdashline 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

ve

$$B = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ \hdashline 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda

$$AB = C = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 3 & 3 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 6 & 12 & 0 & -3 & 7 & 5 \\ \hdashline 0 & -12 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ -9 & -2 & 7 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix},$$

olur. Burada

$C_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}$ şeklindedir. C_{11} için bu eşitliğin sağlandığını gösterebiliriz.

$$\begin{aligned} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 6 & 10 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 6 & 12 & 0 \end{bmatrix} = C_{11}. \end{aligned}$$

■

Parçalanmış matrislerin bu şekilde çarpılması metodu aynı zamanda **blok çarpma** olarak ta bilinir. Parçalanmış matrisleri kullanmak, matrislerin bir bilgisayarın hafıza kapasitesini aştığında büyük avantaj sağlar.

Böylece iki parçalanmış matris çarpılarak, bir tanesi diskte muhafaza edilir ve hafızaya sadece alt matrisler getirilir. Tabiki bu sonuçlar indirildiği formdadır. Bu parçalanma tanımlanan alt matrisler çarpılabilecek şekilde yapılmalıdır.

Bir matrisin parçalanması, bilgilerin bir alt bölümünü bloklara aktarır. Aksi yöntem matrislerin kendilerini blok olarak düşünmek ve onları bir parçalanma matrisi olarak birleştirmektir. Bloklar birleştirildikten sonra tek ihtiyaç tüm satır ve sütunların aynı sayıda terime sahip olmasıdır.

ÖRNEK 9

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } D = \begin{bmatrix} 9 & 8 & -4 \\ 6 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

olsun.

Bu durumda

$$[B \quad D] = \left[\begin{array}{c|ccc} 2 & 9 & 8 & -4 \\ 3 & 6 & 7 & 5 \end{array}\right], \quad \begin{bmatrix} D \\ C \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} 9 & 8 & -4 \\ \hdashline 6 & 7 & 5 \\ \hdashline 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

ve

$$\left[\begin{bmatrix} D \\ C \end{bmatrix} \quad C^T\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 8 & -4 & 1 \\ \hdashline 6 & 7 & 5 & -1 \\ \hdashline 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

elde edilir. ■

Matris bloklarının, bilgilerin yapısını genişletmek için birleştirilmesi, çok çeşitli uygulamalarda düzenli olarak yapılmaktadır. Bir alım-satım işinde bir yıllık alım-satım bilgisi 1×12 tipinde matris olarak tutulur ve yıllarca süren satış periyodunu gösteren matrisleri inşa etmek için bu çeşit matrisler birleştirilir. Benzer şekilde yeni elde edilen laboratuar deney sonuçları, arama kolaylığı için bir veri tabanını güncellemek için mevcut bilgiler birleştirilir.

Örnek 7'de, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer matris sisteminin bir parçalanmış matris olduğunu belirttik. Zaman zaman, katsayılar matrisi olan A matrisi aynı fakat sağ taraftaki $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ ve $\mathbf{d}$ katsayıları farklı olan birçok lineer denklem sistemini çözmek zorunda kalabiliriz. Bu durumlarda; $[\,A \,|\, \mathbf{b} \,|\, \mathbf{c} \,|\, \mathbf{d}\,]$ bölünmüş matrisini ele almanın daha kullanışlı olduğunu görürüz. (Kesim 4.8'e bakınız.)

■ Regüler (Singüler Olmayan) Matrisler

Şimdi ise karesel matrislerin özel bir halini ele alıp, sıfırdan farklı bir reel sayının tersi ile ilgili olan kavramı formülleştireceğiz.

TANIM 1.10 Eğer $AB = BA = I_n$ olacak şekilde $n \times n$ tipinde bir B matrisi mevcut ise $n \times n$ tipindeki A matrisine terslenebilir (singüler olmayan) matris denir. Böyle bir B matrisine ise A'nın **tersi** denir. Aksi taktirde A'ya **singülerdir** denir.

Açıklama Kesim 2.3, Teorem 2.11'de, $AB = I_n$ olması halinde $BA = I_n$ olduğunu göstermiştik. Bu nedenle, B'nin A'nın tersi olduğunu göstermek için sadece $AB = I_n$ olduğunu göstermek gerekir.

ÖRNEK 10 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ olsun. $AB = BA = I_2$ olduğu için B'nin, A matrisinin tersi olduğu sonucunu elde ederiz. ■

Teorem 1.5 Bir matrisin tersi mevcutsa, tektir.

İspat

Kabul edelim ki B ve C, A matrisinin tersi olsun. Bu durumda

$$AB = BA = I_n \text{ ve } AC = CA = I_n$$

olur. Buradan $B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C$ olur. Bu da matrisin tersi mevcutsa, tek olduğunu gösterir. ■

Bu teklikten dolayı, singüler olmayan bir A matrisinin tersini A^{-1} olarak yazabiliriz. Böylece;

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

olur.

ÖRNEK 11

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

olsun. Eğer A matrisinin

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

olacak şekilde tersi mecut ise

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve dolayısıyla

$$\begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olması gerekir. Bu iki matrisin elemanlarını eşitleyerek

$$\begin{matrix} a+2c=1 \\ 3a+4c=0 \end{matrix} \quad \text{ve} \quad \begin{matrix} b+2d=0 \\ 3b+4d=1 \end{matrix}$$

lineer sistemlerini elde ederiz. Çözümleri $a = -2$, $c = \frac{3}{2}$, $b = 1$ $d = \frac{1}{2}$ şeklindedir. (Gerçekleyiniz.) Bunun yanında;

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

matrisi

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

özelliğini sağladığı için A matrisinin singüler olmadığı ve

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

sonucunu elde ederiz. ■

ÖRNEK 12

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ olsun. Eğer A matrisinin $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ şeklinde tersi mevcut ise;

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olması ve dolayısı ile

$$\begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gerekir. İki matrisin elemanlarını eşitleyerek;

$$\begin{matrix} a+2c=1 \\ 2a+4c=0 \end{matrix} \quad \text{ve} \quad \begin{matrix} b+2d=0 \\ 2b+4d=1 \end{matrix}$$

lineer denklem sistemlerini elde ederiz.

Bu lineer denklem sistemlerinin çözümü yoktur. Bu nedenle A'nın, A^{-1} şeklinde tersi mevcuttur şeklindeki iddiamız yanlıştır. Böylece A singülerdir. ■

Bundan sonra matrislerin tersine ilişkin birçok özellik kanıtlayacağız.

Teorem 1.6 Eğer A ve B matrislerinin her ikisi $n \times n$ tipinde singüler olmayan matrisler ise, AB de singüler değil ve $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$'dir.

İspat

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = (AI_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n$ olur. Benzer şekilde $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$ olur. Bu nedenle AB singüler değildir. Matrislerin tersi tek olduğundan $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ sonucunu buluruz. ■

Sonuç 1.1 $A_1, A_2, \ldots, A_r$ $n \times n$ tipinde singüler olmayan matrisler ise

$$A_1A_2 \ldots A_r$$

matriside singüler değildir ve $(A_1A_2 \ldots A_r)^{-1} = A_r^{-1}A_{r-1}^{-1} \ldots A_1^{-1}$'dir.

İspat

Alıştırma 44. ■

Teorem 1.7 A singüler olmayan bir matris ise A^{-1}'de singüler değildir.

Ayrıca $(A^{-1})^{-1} = A$'dır.

İspat

Alıştırma 45. ■

Teorem 1.8 A singüler olmayan bir matris ise, A^T singüler değildir ve $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ dir.

İspat

$AA^{-1} = I_n$ ifadesinin her iki yanının transpozu alınırsa;

$$(A^{-1})^T A^T = I_n^T = I_n$$

elde edilir. $A^{-1}A = I_n$ eşitliğinin her iki tarafının transpozu alınırsa

$$A^T(A^{-1})^T = I_n^T = I_n$$

şeklinde benzer bir ifade bulunur. Bu iki denklemden;

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

olur. ■

ÖRNEK 13 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

ise, o zaman

Örnek 11'den;

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad (A^{-1})^T = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Aynı zamanda

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad (A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

■

olur. A matrisi singüler bir matris olmasın. Bu durumda $AB = AC$ olması $B = C$ olmasını gerektirir. (Alıştırma 50.) $AB = O$ olması $B = O$ olmasını gerektirir (Alıştırma 51.)

Teorem 1.8'den ise; Eğer A matrisi simetrik, singüler olmayan bir matrisi ise A^{-1} simetriktir, sonucu çıkar. (Alıştırma 54'e bakınız.)

■ Lineer Sistemler ve Tersleri

A matrisi $n \times n$ tipinde bir matris ise, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistemi, n bilinmeyenli n-tane denklemden oluşur. A singüler olmasın. Bu durumda A^{-1} mevcuttur. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denkleminin her iki yanını soldan A^{-1} ile çarparsak;

$$\begin{aligned} A^{-1}(A\mathbf{x}) &= A^{-1}\mathbf{b} \\ (A^{-1}A)\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \\ I_n\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \end{aligned} \tag{2}$$

olur. Bunun yanında $A^{-1}\mathbf{b}$ verilen lineer sistemin çözümüdür. A matrisi singüler değilse bir tek çözüm vardır. Vurgu yapmak için bu sonucu tekrar ifade ederiz:

Eğer A $n \times n$ tipinde bir matris ise, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistemi, $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ şeklinde bir tek çözüme sahiptir. Buna ilaveten eğer $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ise $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sisteminin tek çözümü $\mathbf{x} = \mathbf{0}$'dır.

A matrisi $n \times n$ tipinde singüler olmayan bir matris ise, (2) denklemi, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistemi farklı $\mathbf{b}$'ler için tekrar çözülmesi gerekiyorsa sadece A^{-1}'i hesaplamamızı ve $\mathbf{b}$ değiştikçe, $A^{-1}\mathbf{b}$ formatında $\mathbf{x}$ çözümünün bulunacağını gösterir. Fakat bu geçerli bir yaklaşım olmasına rağmen teorik bir yaklaşımdır. Bu sebeple bu tip problemleri çözmek için daha etkili bir yöntem Kesim 2.5'te verilmiştir.

ÖRNEK 14

A matrisi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

olacak şekilde Örnek 11'deki matris olsun. Eğer $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$ ise $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sisteminin çözümü;

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 9 \end{bmatrix}$$

olur. Öte yandan

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

ise bu durumda;

$$\mathbf{x} = A^{-1} \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

olur. ■

■ Uygulama A: İndirgeme Bağıntısı, Fibonacci Dizisi

1202 yılında, Fibonacci olarak bilinen Pisa'lı Leonardo kendisini oldukça şaşırtan aşağıdaki problemi konu edinen bir matematik kitabı yazdı. Yeni doğmuş bir çift tavşan 1 aylıkken doğurmaya başlar, daha sonra her ay iki yavru doğururlar. İki tane yeni doğmuş tavşan ile işe başlayalım. Yeni doğan tavşanların hiçbirisinin ölmediğini kabul edelim. Her ayın başında kaç çift tavşan olacaktır.

İlk ayın başında, sadece yeni doğan P_1 tavşan çifti mevcuttur ve bunlar halen daha doğum yapmamıştır. 2. ayın başında ise en baştaki P_1 tavşan çifti ve onların ilk yavruları olan P_2 tavşan çifti mevcuttur. 3. ayın başında ilk P_1 tavşan çifti, onların 2. ayın başında doğan P_2 çifti ve ikinci çocuk çifti olan P_3 mevcuttur. 4. ayın başında ise P_1, P_2, P_3 ün yanında P_1 ve P_2'nin yavruları olan P_4 ve P_5 vardır. n. ayın başındaki tavşan çifti sayısı u_n olsun. Böylece;

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 2, \quad u_3 = 3, \quad u_4 = 5, \quad u_5 = 8.$$

olur. Bu dizi hızlı bir şekilde artar ve

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

olur. u_n için bir formül elde etmede aşağıdaki yöntemi uygulayacağız. n. ayın başında hayatta olan tavşan çiftlerinin sayısı u_{n-1}'dir. Önceki ay hayatta kalan tavşan çiftleri ve n. ayın başında doğan tavşan çiftlerinin sayıları toplamıdır. Bir tavşan çifti yaşamının ikinci ayından itibaren doğurmaya başladığından, daha sonraki sayı u_{n-2}'dir. Böylece

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \tag{3}$$

*Pisa'lı Leonardo Fibonacci (1170-1250) Pisa şehrinde doğdu ve orada yaşadı. 20 yaşlarında iken babası İtalya'nın Kuzey Afrika'da şimdi Cezayir'in bir parçası olan Pisan'a ticaret direktörü olarak atandı. Leonardo, babası ile birlikte Afrika'ya gitti ve babası ile birlikte Akdeniz'de pekçok seyahata katıldı. Bu esnada, Hindu-Arap metodu sayı sayma, hesaplamayı öğrenip onu İtalya'ya taşıdı. Bu, onun 1202 de çıkan meşhur kitabı *Liber Abaci*'yi yazma sebebidir ve tavşan problemi de orada ifade edilmişti.

olur. Bu nedenle herbir sayı önceki iki sayının toplamıdır. Bu sayıların dizisi **Fibonacci dizisi** olarak adlandırılır. Fibanacci dizisinin, ağaç üzerindeki yaprakların dağılımı, ayçiçeği üzerindeki tohumların dağılımı, nümerik analizdeki araştırma teknikleri ve istatistikte gelişigüzel sayıların oluşturulması gibi çok çeşitli dikkate değer uygulamaları vardır. Fark denklemi ya da **indirgeme bağıntısındaki** u_n'i hesaplamak için $u_0, u_1, \ldots, u_{n-2}, u_{n-1}$'in hesaplanması gerekir. Fakat çok büyük n'ler için bu oldukça zordur. Biz şimdi u_n'i direkt olarak hesaplamak için bir formül geliştireceğiz.

(3) denklemine ek olarak,

$$u_{n-1} = u_{n-1},$$

yazabiliriz ve böylece

$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1} + u_{n-2} \\ u_{n-1} &= u_{n-1}, \end{aligned}$$

olur. Bu ifade matris şeklinde;

$$\begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{bmatrix} \tag{4}$$

olarak yazılır. Genel olarak;

$$\mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ldots, \quad \mathbf{w}_{n-2} = \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{w}_{n-1} = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{bmatrix}$$

olacak şekilde

$$\mathbf{w}_k = \begin{bmatrix} u_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} \text{ ve } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (0 \le k \le n-1)$$

olarak tanımlayalım. (4) eşitliği;

$$\mathbf{w}_{n-1} = A\mathbf{w}_{n-2}$$

olarak yazılabilir. Böylece;

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= A\mathbf{w}_0 \\ \mathbf{w}_2 &= A\mathbf{w}_1 = A(A\mathbf{w}_0) = A^2\mathbf{w}_0 \\ \mathbf{w}_3 &= A\mathbf{w}_2 = A(A^2\mathbf{w}_0) = A^3\mathbf{w}_0 \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_{n-1} &= A^{n-1}\mathbf{w}_0 \end{aligned}$$

olur. u_n i bulmak için, halen yeteri kadar büyük n'ler için hesaplanması zor olan A^{n-1}'i hesaplamalıyız. Bölüm 7'de köşegen matrisin kuvvetlerini içeren Fibonacci sayılarını hesaplamak için daha etkili bir yol verilecektir. (Bölüm 7'deki tartışma alıştırmalarına bakınız.)

Anahtar Kelimeler

Köşegen matris
Birim matris
Birim matrisin kuvvetleri
Alt üçgen matris
Üst üçgen matris
Simetrik matris
Ters-simetrik matris
Alt matris
Parçalanma
Parçalanmış matris
Singüler olmayan (tersi alınabilir) matris
Singüler (tersi alınamaz) matris
Singüler olmayan matrislerin özellikleri
Singüler olmayan katsayı matrisli lineer sistem
Fibonacci dizisi

1.5 Alıştırmalar

1. **(a)** A, $m \times n$ tipinde (herhangi) bir matris ise $I_m A = A$ ve $AI_n = A$ olduğunu gösteriniz.
(b) A, $n \times n$ tipinde skalar bir matris ise bu taktirde r reel sayısı için, $A = rI_n$ olduğunu gösteriniz.

2. Üst (alt) üçgen matrislerin, skalar matrislerin, köşegen matrislerin toplam, çarpım ve bir skalarla çarpımının meydana getirdiği matrislerin üst (alt) üçgen matris, skalar matris ve köşegen matris olduklarını gösteriniz.

3. A ve B, $n \times n$ tipinde köşegen matrisler ise $AB = BA$ olduğunu ispatlayınız.

4. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

olsun. $A + B$ ve AB matrislerinin üst üçgen matrisler olduğunu gösteriniz.

5. Bütün matrisleri hem üst hem de alt üçgen matrisler olarak tanımlayınız.

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

olsun. Aşağıdaki matrislerin herbirini hesaplayınız.
(a) A^2 **(b)** B^2 **(c)** $(AB)^2$

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

olsun. Aşağıdaki matrislerin herbirini hesaplayınız.
(a) A^3 **(b)** B^2 **(c)** $(AB)^3$

8. p ve q negatif olmayan tamsayılar ve A bir kare matris olsun.

$$A^p A^q = A^{p+q} \text{ ve } (A^p)^q = A^{pq}$$

olduğunu gösteriniz.

9. $AB = BA$ ve p bir negatif olmayan tamsayı olmak üzere $(AB)^p = A^p B^p$ olduğunu gösteriniz.

10. Negatif olmayan bir p tamsayısı ve bir c skaları için $(cA)^p = c^p A^p$ olduğunu gösteriniz.

11. Bir A kare matrisi ve negatif olmayan p tamsayısı için $(A^T)^p = (A^p)^T$ olduğunu gösteriniz.

12. Singüler olmayan bir A matrisi ve negatif olmayan p tamsayısı için; $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$ olduğunu gösteriniz.

13. Singüler olmayan A matrisi ve sıfırdan farklı k skaları için $(kA)^{-1} = n \frac{1}{k} A^{-1}$ olduğunu gösteriniz.

14. **(a)** Her skalar matrisin simetrik olduğunu gösteriniz.
(b) Her skalar matris singüler değil midir? Açıklayınız.
(c) Her köşegen matris bir skaler matris midir? Açıklayınız.

15. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$AB = BA$, $B \neq 0$ ve $B \neq I_2$ olacak şekilde 2×2 tipinde bir B matrisi bulunuz. Bu şekilde kaç tane B matrisi vardır.

16. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$AB = BA$, $B \neq O$, $B \neq I_2$ olacak şekilde 2×2 tipinde bir B matrisi bulunuz. Bu şekilde kaç tane B matrisi vardır.

17. $n \times n$ tipinde herhangi bir A matrisi için; $A^TA = AA^T$ doğru olup olmadığını ispatlayınız.

18. **(a)** A matrisinin simetrik olması için $\Leftrightarrow$ tüm i, j ler için $a_{ij} = a_{ji}$ olmasıdır.
(b) A anti-simetriktir $\Leftrightarrow$ tüm i, j'ler için $a_{ij} = -a_{ji}$
(c) A matrisi anti-simetrik olması halinde esas köşegen üzerindeki tüm elemanların sıfır olduğunu gösteriniz.

19. A matrisi simetrik ise, A^T de simetriktir gösteriniz.

20. Tüm anti-simetrik skalar matrisleri tanımlayınız.

21. A $m \times n$ tipinde bir matris ise AA^T ve A^TA'nın simetrik olduklarını gösteriniz.

22. A $n \times n$ tipinde herhangi bir matris olmak üzere;
(a) $A + A^T$ simetriktir. Gösteriniz.
(b) $A - A^T$ anti-simetriktir. Gösteriniz.

23. A bir simetrik matris olmak üzere,
A^k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, matrisi simetriktir. Gösteriniz.

24. A ve B simetrik matrisler olsunlar.
(a) $A + B$ matrisinin simetrik olduğunu gösteriniz.
(b) AB simetrik $\Leftrightarrow AB = BA$ olduğunu gösteriniz.

25. **(a)** A matrisi bir üst üçgen matris ise, A^T alt üçgen matristir. Gösteriniz.
(b) A matrisi bir alt üçgen matris ise, A^T üst üçgen matristir. Gösteriniz.

26. Eğer A matrisi anti-simetrik bir matris ise, A^T nasıl bir matristir? Cevabınızı doğrulayınız.

27. A bir anti-simetrik matris ise, A matrisinin tüm esas köşegen elemanları sıfırdır.

28. Eğer A anti-simetrik ise, herhangi bir pozitif tek k tamsayısı için A^k anti-simetriktir. (Gösteriniz.)

29. A matrisi $n \times n$ tipinde bir matris olmak üzere, $A = S + K$'dır. Burada S simetrik, K ise anti-simetrik matristir. Bu gösterim tektir. (Gösteriniz.) (*Yol gösterme*: Alıştırma 22'yi kullanınız.)

30. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

olsun. Alıştırma 29'da verilen S ve K matrislerini bulunuz.

31. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

matrisinin singüler olduğunu gösteriniz.

32. $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

olmak üzere D matrisinin tersini bulunuz.

33. Aşağıdaki matrislerin tersini bulunuz.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ **(b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

34. Tersi $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ olan ve singüler olmayan bir A matrisi bulunuz.

35. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ve $B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ olmak üzere $(AB)^{-1}$ matrisini bulunuz.

36. Farzedelim ki $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ olsun. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistemini aşağıdaki matrisler için çözünüz.

(a) $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 8 \\ 15 \end{bmatrix}$

37. A ve C matrisleri singüler olmayan matrisler

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $AC\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistem olsun. $\mathbf{x}$ çözümünü bulunuz.

38. A singüler olmayan bir matris,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $A^2\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistemini ile alalım. $\mathbf{x}$ çözümünü bulunuz.

39. A singüler olmayan bir matris ve

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $A^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistemini ele alalım. $\mathbf{x}$ çözümünü bulunuz.

40. A ve C matrisleri singüler olmayan matrisler,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $C^TA\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistem olsun. $\mathbf{x}$ çözümünü bulunuz.

41. A Alıştırma 33 (a) tanımlanan matrisi olmak üzere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistemini ele alalım.

(a) $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

için bu sistemin çözümünü bulunuz.

(b) $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

için bu sistemin çözümünü bulunuz.

42. Toplamları singüler olmayan iki tane 2×2 tipinde singüler matris bulunuz.

43. Toplamları singüler olan iki tane 2×2 tipinde singüler olmayan matris bulunuz.

44. Sonuç 1.1'i ispatlayınız.

45. Teorem 1.7'yi ispatlayınız.

46. $n \times n$ tipinde bir A matrisinin bir satır (veya sütununu) sıfırların tamamını içeriyorsa A singülerdir. (*Hatırlatma*: Farzedelim ki A singülerdeğildir, bu durumda öyle bir $n \times n$ tipindeki B matrisi vardır ki $AB = BA = I_n$'dir.

47. A matrisi köşegen elemanları sıfırdan farklı ve $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ şeklinde olan bir köşegen bir matris olmak üzere A singüler değildir ve A^{-1} matrisi köşegen elemanları $1/a_{11}, 1/a_{22}, \ldots, 1/a_{nn}$ olan köşegen matristir. İspatlayınız.

48. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

olmak üzere A^4'ü hesaplayınız.

49. A, köşegen elemanları, $a_{11}, a_{22}, \ldots, A_{nn}$ olan $n \times n$ tipinde köşegen matris olmak üzere negatif olmayan p tamsayısı için A^p matrisini hesaplayınız.

50. $AB = AC$ ve A singüler değilse $B = C$'dir, gösteriniz.

51. $n \times n$ tipinde B matrisi için, A bir singüler olmayan matris ve $AB = O$ ise $B = O$ şeklindedir. Gösteriniz.

52. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

olsun. A matrisi singüler değildir $\Leftrightarrow ad - bc \neq 0$

53. $n \times n$ tipinde bir matris olmak üzere $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sistemini ele alalım. Eğer A singüler değilse, aşikar olan tek çözüm $\mathbf{x} = \mathbf{0}$'dır.

54. A matrisi simetrik ise ve singüler değilse A^{-1} matrisi simetriktir, ispatlayınız.

55. Bölünmüş matrisleri toplam yöntemini formülleştirin ve metodunuzu iki farklı yol ile

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

matrislerini bölerek doğrulayınız ve toplamlarını bulunuz.

56. A ve B aşağıdaki matrisler olsun.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

AB matrisini, A ve B matrislerini bölerek iki farklı yol ile bulunuz.

57. Hangi tip matris, simetrik matrislerin bir lineer birleşimidir. Cevaplarınızı doğrulayınız.

58. Hangi tip matris, skalar bir matrisin bir lineer birleşimidir. Cevaplarınızı doğrulayınız.

59. $u_0 = 0, u_1 = 1, u_n = 5_{u-1} - 6\,u_{n-2}, \quad n \geq 2$
rekürans (yineleme) bağıntısının matris formu;

$$\mathbf{w}_{n-2} = \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_{n-1} = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{bmatrix},$$

ve $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$\mathbf{w}_{n-1} = A\mathbf{w}_{n-2}$ şeklindedir.

(a) $\mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ matrisini kullanarak $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ ve $\mathbf{w}_3$'ü hesaplayınız.

Daha sonra u_2, u_3, u_4 rekürans bağıntısının terimlerinin bir listesini yapınız.

(b) $\mathbf{w}_{n-1}$'i $\mathbf{w}_0$ matrisi türünden yazınız.

60. $u_0 = 1, u_1 = 2, u_n = 6u_{n-1} - 8u_n - 2, \quad n \geq 2$
yineleme bağıntısının matris formu

$$\mathbf{w}_{n-1} = A\mathbf{w}_{n-2}$$

$$\mathbf{w}_{n-2} = \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_{n-1} = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{bmatrix},$$

ve $A = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

olmak üzere $\mathbf{w}_{n-1} = A\mathbf{w}_{n-1}$ şeklindedir.

(a) $\mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ matrisini kullanarak $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ ve $\mathbf{w}_4$'ü hesaplayınız. Daha sonra u_2, u_3, u_4, u_5 rekürans terimlerinin bir listesini yapınız.

(b) $\mathbf{w}_{n-1}$'i, $\mathbf{w}_0$ matrisi cinsinden yazınız.

61. Kullandığınız bilgisayar için aşağıdaki verilenleri yapmak için komut belirleyiniz.

(a) Mevcut bir matris için bir satır ya da sütun eklemek

(b) Uygun tipteki sıfır matrislerini kullanarak mevcut A ve B matrislerin verilen $\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$ bölünmüş matrisini oluşturunuz.

(c) Mevcut bir matristen bir alt matris çıkarınız.

62. Lineer cebir için bir çok yazılım, bir matrisin alt üçgen, üst üçgen, köşegen kısmını çıkarmak için özel komutlara sahiptir. Kullandığınız yazılım için komutlar belirleyiniz ve bu komutları deneyiniz.

63. Kullandığınız yazılımda bir matrisin tersini hesaplamak için komut belirleyiniz. Genellikle böyle bir komut singüler bir matrise uygulanırsa, ekranda bir uyarı mesajı görünür. Bu matrisin tersini bulma komutunu kullanarak aşağıdaki matrislerin hangilerinin singüler olup olmadığını belirleyiniz.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

64. Eğer B, $n \times n$ tipindeki A matrisinin tersi ise, Tanım 1.10'dan $AB = BA = I_n$ olur. İfade edilemeyen varsayım ise tam işlemin kullanılmasıdır. Bilgisayar işlemi AB matrisini hesaplamak için kullanılırsa, bu durumda AB matrisinin I_n'e eşit olması gerekmez, aslında BA'nın da AB'ye eşit olması gerekmez. Bununla birlikte, AB ve BA, I_n'e yakın olmalıdır. Bilgisayarındaki yazılımda ters matris bulma komutunu kullan ve aşağıdaki matrislerin herbiri için AB ve BA matrislerini şekillendirin.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ **(b)** $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

65. Bölüm 1'de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistemlerini çözmek için yok etme metodunu ifade ettik. Bu bölümdeki (2) denkleminde, A matrisi singüler değilse, çözümün $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ olarak verildiğini gösterdik. Otomatik olarak lineer sistemleri çözmek için yazılım komutunu ve ters matris komutunu kullanınız. Aşağıdaki lineer sistemlerin her biri için iki çözüm tekniğini karşılaştırınız.

(a) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix}$

(b) $a_{ij} = \dfrac{1}{i + j - 1}$ olmak üzere

$A = [a_{ij}]$ ve $\mathbf{b}$, I_{10} matrisininin ilk sütunu.

$i, j = 1, 2, \ldots, 10$

66. Kullandığınız yazılımda, karesel bir A matrisinin A^2, A^3, … kuvvetlerini elde etmek için bir komut belirleyiniz ve daha sonra

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

matrisi için, $k = 2, 3, 4, 5, 6$, A^k matris dizisini hesaplayınız. $k \to \infty$ iken A^k'nın davranışını inceleyiniz.

67. Aşağıdaki matrislerin herbiri için $k \to \infty$ iken A^k matris dizisinin davranışını incelemek için bir yazılım kullanınız.

(a) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.6 Matris Dönüşümleri

Kesim 1.2'de elemanları reel sayılar olan n-vektörlerin cümlesi için R^n gösterimini verdik. Böylece R^2 tüm 2-vektörlerin cümlesi, R^3 ise tüm 3-vektörlerin cümlesidir. Fakat R^2 ve R^3 cümlelerinin elemanlarını geometrik olarak dik koordinat sisteminde göstermek gereklidir. Bu bölümdeki yaklaşımımız ve gelecek bölümde bazı ilginç geometrik uygulamaları göstermeyi mümkün kılacaktır. 2 ve 3-vektörlerin daha kesin ve dikkatli çalışmalarına Kesim 4.1'de tekrar döneceğiz.

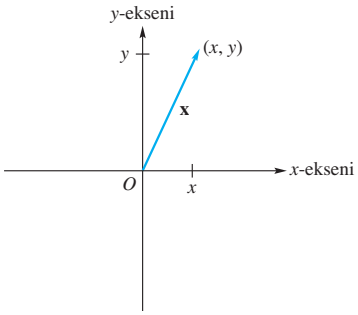
R^2'de

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

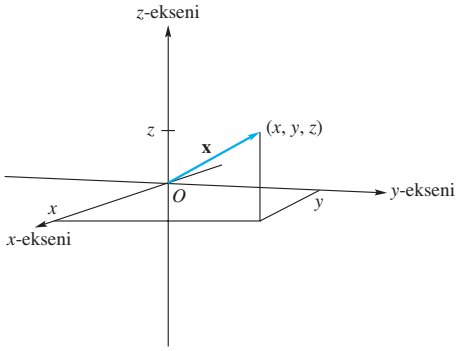
vektörü Şekil 1.6'da yönlü doğru parçası olarak temsil edilir.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

* Şüphesiz siz ön hesap veya hesap derslerinizde dik koordinat sistemlerini gördünüz.



ŞEKİL 1.6



ŞEKİL 1.7

vektörü ise Şekil 1.7'de yönlü doğru parçası ile gösterilir.

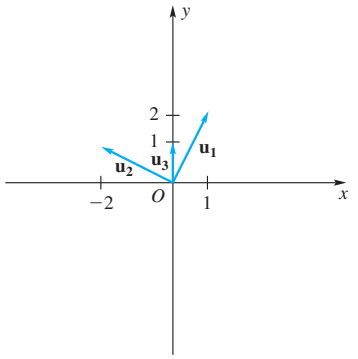
ÖRNEK 1 Şekil 1.8; 2-boyutlu dik koordinat sisteminde;

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

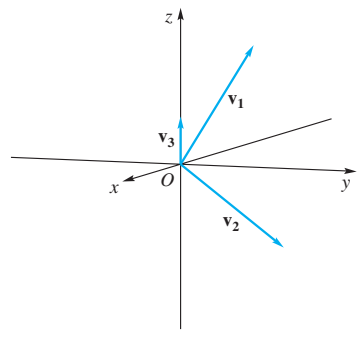
2-boyutlu vektörlerin geometrik ifadesini gösterir. Şekil 1.9

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vektörlerin 3-boyutlu dik koordinat sisteminde geometrik gösterimidir. ■



ŞEKİL 1.8



ŞEKİL 1.9

Fonksiyonlar matematiğin hemen hemen her uygulamasında ortaya çıkar. Bu kesimde R^n'den R^m'e tanımlı olan fonksiyonların bir geometrik özeti verilecektir. Biz matris dönüşümleri olarak isimlendirilen bu fonksiyonların resmini çizmek istediğimizden, bu bölümde tüm tartışmayı m ve n'nin 2 veya 3 olması durumu ile sınırlıyoruz. Bu bölümde m ve n'nin 2'ye eşit olması durumunda, düzlemde fonksiyonların bilgisayar grafikleri ile ilgili bir uygulama vereceğiz. Bölüm 6'da R^n'den R^m'e tanımlı bir lineer dönüşüm adı verilen daha genel fonksiyonlar detaylı olarak verilmiştir. Her matris dönüşümü aynı zamanda bir lineer dönüşüm olduğundan dolayı daha sonra matris dönüşümlerinin özelliklerini öğreneceğiz.

Lineer dönüşümler, matematiğin birçok alanında önemli olduğu gibi ekonomi, sosyal bilimler ve fiziksel bilimlerde birçok uygulamalı problemlerde önemli rol oynar.

A $m \times n$ tipinde bir vektör ve u bir n-vektör ise, bu durumda çarpımı bir m-vektördür. R^n'den R^m'e tanımlı bir f fonksiyonu $f : R^n \to R^m$† ile gösterilir. Bir **matris dönüşümü** $f : R^n \to R^m$ $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ olarak tanımlanan bir fonksiyondur. R^m'deki $f(\mathbf{u})$ vektörü, $\mathbf{u}$'nun **görüntüsü** olarak adlandırılır ve R^n'deki vektörlerin görüntülerinin cümlesi f'nin değer cümlesi olarak adlandırılır. Bu bölümde kendimizi sadece reel terimli vektör ve matrislerle sınırlamamıza rağmen, tamamen benzer bir çalışma, kompleks elemanlı vektör ve matrisler için geliştirilebilir. (Ek B.2'ye bakınız.)

ÖRNEK 2

(a) $f(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}$ ile tanımlanan bir matris dönüşümü olsun.

$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ in görüntüsü

$$f(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

tir ve $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$'nin görüntüsü $\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$ olur. (Gösteriniz.)

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$$

olarak tanımlanan matris dönüşümünü ele alalım. Bu durumda; $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ in görüntüsü $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, ve $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$'ün görüntüsü ise $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$'ün görüntüsü ise $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$'dır. (Gerçekleyiniz.) ■

Eğer A $m \times n$ tipinde bir matris ve $f : R^n \to R^m$ ise $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ olarak tanımlanan R^n'den R^m'ye tanımlı bir matris dönüşümü olmak üzere R^m'deki bir $\mathbf{w}$ vektörünün f'nin görüntü cümlesinde olması için gerek ve yeter şart $f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ olacak şekilde R^n'de bir $\mathbf{v}$ vektörünün bulunmasıdır.

† Ek A cümleler ve fonksiyonlarla ilgili olup gerek duyulduğunda bakılabilir.

ÖRNEK 3 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ ve $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ olarak tanımlanan bir matris dönüşümü olsun. $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ vektörünün f'nin değer cümlesinde olup olmadığına karar veriniz.

Çözüm

Soru $f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ olacak şekilde bir $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ vektörünün bulunup bulunmadığı sorusuna cevap bulmaya denktir.

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 + 2v_2 \\ -2v_1 + 3v_2 \end{bmatrix} = \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ya da

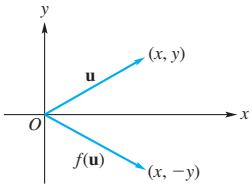
$$\begin{aligned} v_1 + 2v_2 &= 4 \\ -2v_1 + 3v_2 &= -1 \end{aligned}$$

olur. Bu denklemlerin lineer sistemini yok etme metodu ile çözersek $v_1 = 2$ ve $v_2 = 1$ olur. Böylece $\mathbf{w}$ f'nin değer cümlesindedir. Özel olarak eğer $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ise $f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ olur. ■

m ve n'nin 2 ve 3 olması halinde matris dönüşümü için, matris dönüşümünün etkilerini gösteren şekiller çizebiliriz. Bu aşağıdaki örneklerde gösterilecektir.

ÖRNEK 4 $f: R^2 \to R^2$, $f(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{u}$ olarak tanımlanan bir matris dönüşümü olsun. Eğer $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ise, bu durumda;

$$f(\mathbf{u}) = f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$



ŞEKİL 1.10 x-eksenine göre yansıma

olur. f matris dönüşümünün, ***R²'de x eksenine göre yansıma olarak*** adlandırılan etkisi Şekil 1.10'da gösterilmiştir. Alıştırma 2'de y-eksenine göre yansıma ele alınacaktır. ■

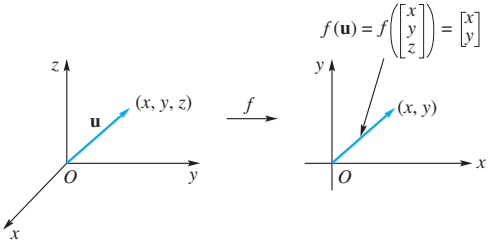
ÖRNEK 5 $f: R^3 \to R^2$,

$$f(\mathbf{u}) = f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanan bir matris dönüşümü olsun. Bu durumda;

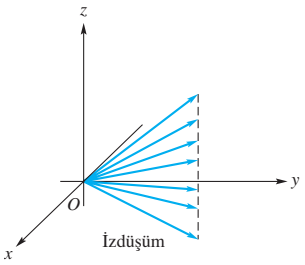
$$f(\mathbf{u}) = f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

olur.



ŞEKİL 1.11

Şekil 1.11 *xy*-düzlemine izdüşüm olarak adlandırılan matris dönüşümünün etkisini gösterir. (*Uyarı:* Şekil 1.11'deki eksenlere dikkat ediniz.)



ŞEKİL 1.12

s bir skalar olmak üzere;

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ s \end{bmatrix}$$

ise

$$f(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = f(\mathbf{u})$$

olduğunu gözlemleyiniz.

Böylece fazla sonsuz sayıda 3-vektör aynı görüntüye sahiptir. Şekil 1.12'ye bakınız.

Not edelim ki 3 boyutlu $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ vektörünün;

$$g(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}$$

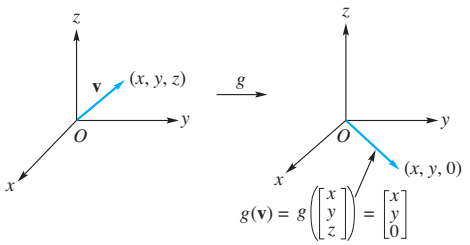
olarak tanımlanan $g : R^3 \to R^3$, matris dönüşümü altındaki görüntüsü $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$'dır. Bu matris dönüşümünün etkisi Şekil 1.13'te gösterilmektedir. Bunun şekli Şekil 1.11 ile hemen hemen aynıdır. Orada bir 2-vektör ($f(\mathbf{u})$ görüntüsü) *xy*-düzleminde kalır. Şekil 1.13'te ise bir 3-vektör ($g(\mathbf{v})$ görüntüsü) *xy*-düzleminde kalır. $f(\mathbf{v})$ nin $\mathbf{v}$ nin *xy*-düzlemi üzerine bir gölge olarak görüldüğüne dikkat ediniz. ■

ÖRNEK 6

r bir reel sayı olmak üzere

$$f(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

olarak tanımlanan $f : R^3 \to R^3$ matris dönüşümü ele alalım. $f(\mathbf{u}) = r\mathbf{u}$ olduğu kolayca görülebilir $r > 1$ ise f'e **genişleme**, $0 < r < 1$ ise f 'e

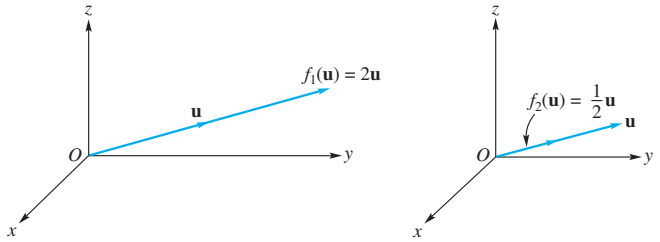


ŞEKİL 1.13

daralma denir. Şekil 1.14 (a), $f_1(\mathbf{u}) = 2\mathbf{u}$, Şekil 14(b) ise $f_2(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}$'u vektörünü gösterir. Böylece genişleme bir vektörü uzatır, daralma ise onu kısaltır. Benzer şekilde $g : R^2 \rightarrow R^2$ matris dönüşümünü

$$g(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \mathbf{u}.$$

olarak tanımlayabiliriz. Aynı zamanda $g(\mathbf{u}) = r\mathbf{u}$ olup tekrar $r > 1$ ise g'ye genişleme, $0 < r < 1$ ise g'ye daralma denir. ■



ŞEKİL 1.14

(a) Genişleme $r > 1$ ekseni (b) Daralma $0 < r < 1$ ekseni

ÖRNEK 7 Bir matbaacı bir kitabı; marka, kitap kulübü ve lüks olmak üzere üç baskısını yapmaktadır. Her bir kitap kaplamak için mukavva ve kağıda ihtiyaç duymaktadır. Bu ihtiyaçlar gram olarak;

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} \text{Marka} & \text{Kitap kulübü} & \text{Deluxe} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 300 & 500 & 800 \\ 40 & 50 & 60 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} \text{Kağıt} \\ \text{Mukavva} \end{matrix}$$

matrisi ile verilmektedir.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

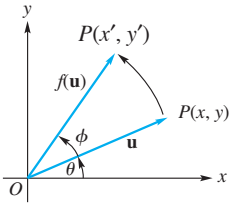
ise basılan marka, kitap kulübü ve lüks kitaplarının x_1, x_2 ve x_3 ile gösterilen üretimlerini göstermektedir. $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ olarak tanımlanan

$f: R^3 \to R^2$ matris dönüşümü

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

vektörünü verir. Burada y_1 ihtiyaç duyulan toplam kağıt, y_2 ise ihtiyaç duyulan toplam mukavva miktarıdır. ■

ÖRNEK 8 Farzedelim ki R^2 deki herbir nokta saat yönünün tersi yönünde dikdörtgensel koordinat sisteminde ϕ açısı kadar döndürülsün. Böylece P noktasının koordinatlar (x, y) ise döndürüldükten sonra (x', y') koordinatlarına sahip P' noktasını elde ederiz. P ve P' noktalarının arasındaki ilişkileri elde etmek için orijin ile $P(x, y)$ noktasını birleştiren ve $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ile gösterilen bir $\mathbf{u}$ vektörü alırız. Şekil 1.15'e bakınız. θ ise $\mathbf{u}$ vektörü ile x-ekseninin pozitif yönde yaptığı açı olsun.



ŞEKİL 1.15 Dönme

Burada r O noktası ile P noktası arasındaki uzaklıktır. Şekil 1.15'ten:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta \tag{1}$$

ve

$$x' = r\cos(\theta + \phi), \qquad y' = r\sin(\theta + \phi) \tag{2}$$

olduğunu görürüz. sinüs ve kosinüsün trigonometrik formüllerinden (2) denklemleri

$$x' = r\cos\theta\cos\phi - r\sin\theta\sin\phi$$
$$y' = r\sin\theta\cos\phi + r\cos\theta\sin\phi$$

olur. Eğer (1) ifadesi son iki denklemde yazılırsa,

$$x' = x\cos\phi - y\sin\phi, \qquad y' = x\sin\phi + y\cos\phi \tag{3}$$

olur. (3) denklemi x ve y'ye göre çözülürse;

$$x = x'\cos\phi + y'\sin\phi \quad \text{ve} \quad y = -x'\sin\phi + y'\cos\phi \tag{4}$$

elde edilir. (3) denklemi P''nün koordinatlarını P'nin koordinatları cinsinden (4) ise P'nin koordinatlarını P''nün koordinatları cinsinden verir. Bu tip bir dönme aşağıdaki

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

şeklindeki ikinci dereceden denklemi basitleştirmek için kullanılır. Yukarıda x ve y yerine x' ve y' yazılırsa;

$$a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2 + d'x' + e'y' + f' = 0$$

elde edilir. Anahtar nokta ϕ'yi $b' = 0$ olacak şekilde seçmektir. İkinci dereceden denklemi; daire, elips, parabol, hiperbol olarak sınıflandırma yaparız. Konu, Kesim 8.7'de incelendi.

Aynı zamanda koordinatların bu değişimine;

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{5}$$

ile tanımlanan $f : R^2 \to R^2$ matris dönüşümüne göz önüne alarak ifade edebiliriz. (5) denklemi (3) kullanılarak,

$$f(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} x\cos\phi - y\sin\phi \\ x\sin\phi + y\cos\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. $f(\mathbf{u})$ ise ϕ dan P''ne olan uzaklığı ifade eder. Böylece saat yönünün tersine olan dönme açısı bir matris dönüşümüdür. ■

Anahtar Kelimeler

Matris dönüşümü
Dönüşüm (fonksiyon) değer bölgesi
Açı
Görüntü
Yansıma
İzdüşüm
Genişleme
Daralma
Dönme

1.6 Alıştırmalar

1 - 8'de $\mathbf{u}$*'yu ve görüntüsünü verilen f matris dönüşümü altında çiziniz.*

1. $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
olarak tanımlanan $f : R^2 \to R^2$ dönüşümü

2. $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$
olarak tanımlanan (y eksenine göre yansıma) $f : R^2 \to R^2$

3. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ olmak üzere $f : R^2 \to R^2$, saat yönünün tersine 30°'lik dönme.

4. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ olmak üzere $f : R^2 \to R^2$, saat yönünün tersine $\frac{2}{3}\pi$ radyanlık dönme.

5. $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$
olarak tanımlanan $f : R^2 \to R^2$ dönüşümü.

6. $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$
olarak tanımlanan $f : R^2 \to R^2$ dönüşümü.

7. $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

olarak tanımlanan $f : R^2 \to R^3$ dönüşümü.

8. $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix};$

$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

olarak tanımlanan $f : R^3 \to R^3$ dönüşümü.

Alıştırma 9-14'te

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ *olarak tanımlanan matris dönüşümü* $f : R^2 \to R^3$ *olsun. Her bir* $\mathbf{w}$ *vektörünün* f *değer kümesinde olup olmadığını belirleyiniz.*

9. $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ **10.** $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **11.** $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

12. $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ **13.** $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ **14.** $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Alıştırma 15-17'de $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ *olarak tanımlanan* $f : R^2 \to R^2$ *matris dönüşümünün aşağıdaki her bir* A *matrisi için geometrik bir tasvirini veriniz.*

15. **(a)** $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

16. **(a)** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

17. **(a)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

18. Bazı f matris dönüşümleri $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ için $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{w})$ özelliğine sahiptir. Bunun anlamı farklı vektörlerin görüntüleri aynı olabilir. $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ olarak tanımlanan $f : R^2 \to R^2$ matris dönüşümleri için, verilen bir vektör w olmak üzere $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ olacak şekilde $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörlerini bulunuz.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$

19. $f : R^2 \to R^2$, $A = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$

olmak üzere $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ olarak tanımlanan lineer dönüşüm olsun. $\phi = 30°$ için; f, saat yönünün tersinde 30°'lik bir dönme tanımlar.

(a) $T_1(\mathbf{u}) = A^2\mathbf{u}$ ise $\mathbf{u}$ üzerinde T_1'in hareketini tanımlayınız.

(b) $T_2(\mathbf{u}) = A^{-1}\mathbf{u}$ ise $\mathbf{u}$ üzerindeki T_2'nin hareketini tanımlayınız.

(c) $T(\mathbf{u}) = A^k\mathbf{u} = \mathbf{u}$ eşitliğini sağlayan en küçük pozitif k değeri nedir?

20. A $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere; $f : R^n \to R^m$, $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ olarak tanımlanan bir matris dönüşümü olsun.

(a) R^n'de herhangi iki $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörü için $f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) = f(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ olduğunu gösteriniz.

(b) R^n de herhangi bir $\mathbf{u}$ vektörü ve $\mathbf{c}$ reel sayısı için $f(c\mathbf{u}) = cf(\mathbf{u})$ olduğunu gösteriniz.

(c) R^n de herhangi iki $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri ile herhangi c ve d reel sayıları için $f(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = cf(\mathbf{u}) + df(\mathbf{v})$ olduğunu gösteriniz.

21. A $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere, $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ olarak tanımlanan bir matris dönüşüm $f : R^n \to R^m$ olsun.

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$, R^n de $f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ ve $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ şeklinde vektörler ise herhangi c ve d reel sayıları için $f(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = \mathbf{0}$'dır, gösteriniz.

22. **(a)** O, $m \times n$ tipinde bir sıfır matrisi olmak üzere $O : R^n \to R^m$, $O(\mathbf{u}) = O\mathbf{u}$ olarak tanımlanan bir matris dönüşümü olsun. Tüm R^n'deki $\mathbf{u}$ vektörleri için $O(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ olduğunu gösteriniz.

(b) I_n birim matrisi olmak üzere $I(\mathbf{u}) = I_n\mathbf{u}$ olarak tanımlanan matris dönüşümü $I : R^n \to R^m$ olsun R^n'deki tüm $\mathbf{u}$ vektörleri için $I_n(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ olduğunu gösteriniz.

1.7 Bilgisayar Grafikleri (Seçmeli)

Film endüstrisindeki özel efektlere ve video oyun alanlarındaki bilgisayar grafikleriyle geliştirilmiş olan şaşırtıcı sonuçlara hepimiz aşinayız.

Bilgisayar grafikleri aynı zamanda iş dünyasında önemli bir rol oynar. Bilgisayar destekli tasarım, bir ürünün bilgisayar modeli tasarımı için kullanılır ve bilgisayar modelinin değişik testlere uygulanmasıyla mevcut tasarım değiştirilebilir ve gelişmiş bir tasarım elde etmede kullanılabilir. Bu uygulamanın dikkate değer başarılarından birisi otomobil endüstrisinde olmuştur. Burada bilgisayar modeli ile bir aracın en güzel ve en popüler sitilini elde etmek mümkündür; parçaların dayanıklığı, oturma konforu, yol güvenliği ve çarpma anındaki güvenlik test edilebilir.

Bu kesimde 2-boyutlu grafiklerde kullanışlı olan L: $R^2 \rightarrow R^2$ lineer dönüşümlerin şekillerini vereceğiz. L'nin matris gösterimini elde etmek için R^2'nin doğal tabanlarını kullanacağız. Aşağıdaki dört örnekten herbirinde, R^2'deki noktalar cümlesi üzerinde bir geometrik dönüşüm tanımladık ve $L : R^2 \rightarrow R^2$ lineer operatörüne karşılık gelen matris gösterimini bulduk.

ÖRNEK 1 $f : R^2 \rightarrow R^2$ matris dönüşümü x-eksenine göre bir yansıma olsun. (Kesim 1.6 da Örnek 4'e bakınız.) Bu takdirde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $f, f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ olarak tanımlanır.
O halde

$$f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

elde ederiz.

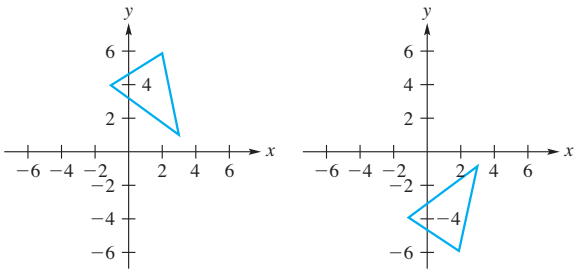
Bilgisayar grafiklerinde x-eksenine göre bir yansımayı göstermek için Şekil 1.16(a)'daki T üçgeni

$$(-1,4),\ (3,1) \quad \text{ve} \quad (2,6)$$

köşelerine sahip olsun. x-eksenine göre T yansıması için

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

alalım.



ŞEKİL 1.16

ve $f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2)$ ve $f(\mathbf{v}_3)$ görüntülerini hesaplayalım. Buna göre

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix},$$

$$A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$A\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Bu üç çarpım

$$A\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -4 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Bu yüzden T'nin görüntüsü

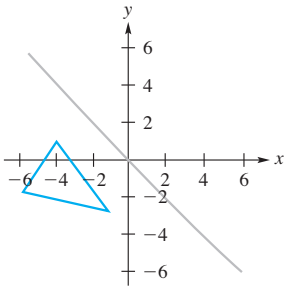
$$(-1, -4), (3,-1), \quad \text{ve} \quad (2, -6)$$

köşelerine sahiptir. Bu görüntü Şekil 1.16(b)'de gösterilmiştir. ■

ÖRNEK 2 $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere $y = -x$ doğrusuna göre yansıma belirten $f : R^2 \to R^2$ matris dönüşümü

$$f(\mathbf{v}) = B\mathbf{v}$$

olarak tanımlanır. $y = -x$ doğrusuna göre yansımayı göstermek için Örnek 1'de tanımlanan T üçgenini kullanalım. Buna göre



ŞEKİL 1.17

$$B\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 & -6 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Böylece T'nin görüntüsü

$$(-4,1), (-1, -3) \quad \text{ve} \quad (-6, -2)$$

köşelerine sahiptir. Bu görüntü Şekil 1.17'de gösterilmiştir. ■

$y = -x$ doğrusuna göre bir yansımaya uyan Örnek 1 deki T üçgeni üzerinde $y = -x$ doğrusuna göre yansımayı göstermek için

$$B(\mathbf{Av}_1), B(A\mathbf{v}_2), \quad \text{ve} \quad B(A\mathbf{v}_3)$$

değerlerini hesaplarız. Bu matris dönüşümlerinin sırası değiştirildiğinde farklı görüntülerin elde edileceğini göstermek zor değildir (gerçekleyiniz). Dolayısıyla grafiklerin dönüşüm sırası önemlidir. Matris çarpımı gerçel sayılardaki çarpımdan farklı olarak değişmeli olmadığından bu durum sürpriz değildir.

ÖRNEK 3 Düzlemdeki dönmeler Kesim 1.6'da Örnek 8'de tanımlanmıştı. Bu düzlem şekli,

$$A = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

olmak üzere $f : R^2 \to R^2$ $f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ matris dönüşümü ile tanımlanan bir θ açısı kadar saat yönünün tersine döndürülüyor. Şimdi, $y = x^2$ parabolüni saat yönünün tersine 50° döndürelim. Parabolden

$$(-2, 4), \quad (-1, 1), \quad (0, 0), \quad \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}\right), \text{ ve } (3, 9)$$

noktalarını seçelim [Şekil 1.18 (a)'ya bakınız.] bu noktaların görüntülerini hesaplayalım. Bunun için

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix},$$

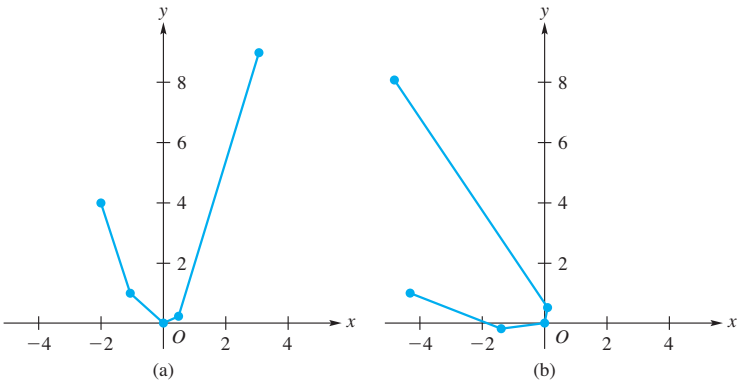
alarak

$$A\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.3498 & -1.4088 & 0 & 0.1299 & -4.9660 \\ 1.0391 & -0.1233 & 0 & 0.5437 & 8.0832 \end{bmatrix}$$

elde ederiz. (Gerçekleyiniz.)

$$(-4.3498, 1.0391), \quad (-1.4088, -0.1233), \quad (0, 0),$$
$$(0.1299, 0.5437), \quad \text{and} \quad (-4.9660, 8.0832)$$

görüntüyü noktaları (Şekil 18 (b) işaretlemiştir ve ardışık noktalar parabolün yaklaşık görüntüsünü göstermek için birleştirilmiştir. ■



ŞEKİL 1.18

Dönmeler özellikle, bilgisayar gösterimli canlandırmalarda ve pasaj oyunlarında karmaşık efektlerin görüntülenmesinde çok kullanışlıdır. Örneğin bisiklet tekerleğinin döndüğünü göstermek için tekerleğin jant teli θ_1 derece döndürülür sonra ikinci bir θ_2 açısı kadar daha döndürülür

ve bu şekilde devam edilir. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ 2-vektörü tekerleğin jantının teli olsun;

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}; \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $f : R^2 \to R^2$ ve $g : R^2 \to R^2$ matris dönüşümleri sırasıyla $f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ ve $g(\mathbf{v}) = B\mathbf{v}$ olarak tanımlansın. $\mathbf{u}$ jant telinin ardışık dönmeleri

$$g(f(\mathbf{u})) = g(A\mathbf{u}) = B(A\mathbf{u})$$

ile temsil edilir. $A\mathbf{u}$ çarpımı $\mathbf{u}$'nun θ_1 dereceli ilk dönmesini ve $B(A\mathbf{u})$ çarpımı ikinci dönmesini oluşturur.

$$B(A\mathbf{u}) = B\,(a_1 \text{süt}_1(A) + a_2 \text{süt}_2(A)) = a_1 B\text{süt}_1(A) + a_2 B\text{süt}_2(A)$$

elde ederiz ve $B\text{süt}_1(A)$ ve $B\text{süt}_2(A)$ sütun vektörlerinin doğrusal birleşimlerini

$$\begin{bmatrix} B\text{süt}_1(A) & B\text{süt}_2(A) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazabiliriz. Matris çarpımın tanımından
$[B\text{süt}_1(A)\ \ B\text{süt}_2(A)] = BA$ ve dolayısıyla

$$B(A\mathbf{u}) = (BA)\mathbf{u}$$

elde ederiz. Bundan dolayı f ve g dönüşümleri ardışık olarak uygulamaktansa BA matris çarpımını uygulayarak aynı sonucu elde ederiz ve bu kullanılarak tekerleğin jantının telinin matris dönüşümü tanımlanır.

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta_2\cos\theta_1 - \sin\theta_2\sin\theta_1 & -\cos\theta_2\sin\theta_1 - \sin\theta_2\cos\theta_1 \\ \sin\theta_2\cos\theta_1 + \cos\theta_2\sin\theta_1 & -\sin\theta_2\sin\theta_1 + \cos\theta_2\sin\theta_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. $g(f(\mathbf{u})) = BA\mathbf{u}$ olduğundan bu matris dönüşümü $\mathbf{u}$'nun $\theta_1 + \theta_2$ açılı dönmesidir. Böylece

$$BA = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

elde ederiz.

BA'nın iki matris çarpımındaki karşılık gelen elemanları eşitlenerek iki açının toplamının kosinüsünün ve sinüsünün trigonometrik özdeşliklerine sahip oluruz:

$$\begin{aligned} \cos(\theta_1 + \theta_2) &= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) &= \cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2 \end{aligned}$$

İlgili (benzer) sonuçlar için Alıştırma 16 ve 17'ye bakınız.

ÖRNEK 4 x-yönünde bir sapma (shear) k bir skalar olmak üzere

$$f(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{v},$$

matris dönüşümü ile tanımlanır. x-yönünde bir sapma (x, y) noktasını $(x + ky, y)$ noktasına götürür. Yani (x, y) noktası ile, ky miktarı kadar x-eksenine paralel hareket eder.

Şimdi Şekil 1.19 (a)'da gösterilen

$$(0,0)\ (0,2),\ (4,0),\ \text{ve}\ (4,2)$$

köşeli dikdörtgeni gözönüne alalım. $k = 2$ alırsak o zaman x-yönündeki sapma Şekil 1.19(b)'de gösterilen

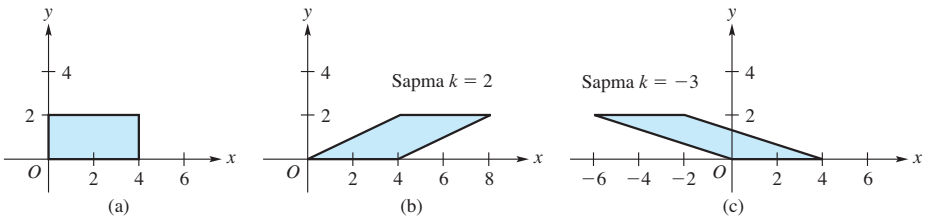
$$(0,0),\ (4,2),\ (4,0),\ \text{ve}\ (8,2)$$

köşeli paralelkenar olur. $k = -3$ olmak üzere x-yönündeki sapma (Şekil 1.19(c)'de gösterilen

$$(0,0),\ (-6,2),\ (4,0)\ \text{ve}\ (-2,2)$$

köşeli paralelkenarıdır.

Alıştırma 3'te y-yönündeki sapmalar gözönüne alınacaktır. ■



ŞEKİL 1.19

İki boyutlu bilgisayar grafiklerinde kullanılan diğer matris dönüşümler bu kesimin sonundaki alıştırmalarda gözönüne alınmıştır. Okuyucu bilgisayar grafikleri ile ilgili geniş bilgi için bu kesimin sonundaki kitaplara başvurabilir.

Örnek 1 ve 2'de matris dönüşümün üç köşe noktası ile belirtilen dönüşümünü Örnek 3'te şekil sonlu sayıda noktalarla ifade edemeyeceğimiz parabola dönüştü. Bu durumda, yaklaşık şekli parabol üzerinde sonlu sayıda noktalar seçip ve bu noktaların yaklaşık görüntüsünü hesapladık ve bunları birleştirdiğimizde parabolün yaklaşık şeklini verdi.

ÖRNEK 5 h ve k sıfırdan farklı ve $A = \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ olmak üzere $f : R^2 \to R^2$ skalar matris dönüşümü $f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ ile tanımlansın.

Bu matris dönüşümünü, merkezi başlangıç noktası (orijin) ve yarıçapı 1 olan çembere (birim çember) uygulamak istesek, malesef çember sonlu sayıda nokta ile gösterilemez. Buna rağmen, $0 \le \theta \le 2\pi$ olmak üzere çember üzerindeki her nokta $(\cos\theta, \sin\theta)$ sıralı ikililer olarak temsil edilir. Bu nedenle birim çember üzerindeki herhangi bir noktayı $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$ vektörü temsil eder. Böylece birim çemberin görüntüsü

$$f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h\cos\theta \\ k\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

ile verilen f matris dönüşümü uygulayarak elde edilir.

Hatırlanacağı gibi merkezi başlangıç noktası ve yarıçapı 1 olan çemberin denklemi

$$x^2 + y^2 = 1$$

dir. Pisagor (Pythagoras) özdeşliğinden $\cos^2\theta + \sin\theta^2 = 1$'dir. Bundan dolayı $(\cos\theta, \sin\theta)$ noktası birim çemberin çevresi üzerindedir. Şimdi birim çemberin görüntüsünün denklemini yazmak istiyoruz. Elimizde

$$x' = h\cos\theta \quad \text{ve} \quad y' = k\sin\theta$$

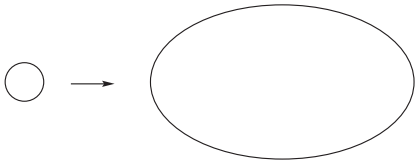
var. Dolayısıyla

$$\frac{x'}{h} = \cos\theta, \quad \frac{y'}{k} = \sin\theta$$

ve bunu takiben

$$\left(\frac{x'}{h}\right)^2 + \left(\frac{y'}{k}\right)^2 = 1,$$

elips denklemi elde edilir. Böylece birim çemberin f matris dönüşümü ile görüntüsü merkezi başlangıç noktası olan elipstir. Şekil 1.20'ye bakınız. ■



Birim çember Elips

ŞEKİL 1.20

İLERİ KAYNAKLAR

Cunningham, Steve. *Computer Graphics: Programming , Problem Solving, and Visual Communication*. Nej Jersey: Prentice Hall, 2007.

Foley, James D., Andries van Dam, Steven K. Feiner, and John F. Hughes. *Computer Graphics: Principles and Practice in C*, 2d ed. Reading , Masss.: Addison Wesley, 1996.

Rogers, D. F., and J. A. Adams. *Mathematical Elements for Computer Graphics* 2d ed. New York: McGraw-Hill, 1989.

Shirley, Peter, Michael Ashikhmin, Michael Gleicher, Stephen Marschner, Erik Reinhard, Kelvin Sung, William Thompson, and Peter Willemsen, *Fundamentals of Computer Graphics,* 2d ed. Natick, Mass.: A. K. Peters, Ltd., 2005.

Anahtar Kelimeler

Bilgisayar grafiği
Bilgisayar-destekli çizim (BDÇ)
Sapma (shear)
Dönme
Daralma
Genişleme
Görüntü

1.7 Alıştırmalar

1. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$f : R^2 \to R^2$ matris dönüşümü $f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ ile tanımlansın. Yani bu y-eksenine göre yansımadır. Köşe noktaları (1,1), (2,1), (1,3), ve (2,3) olan R dikdörtgeninin görüntüsünü bularak şeklini çiziniz.

2. R, köşeleri (1,1), (1,4), (3,1), ve (3,4) olan dikdörtgen olsun f'de $k = 3$ olmak üzere x-yönündeki sapma (shear) olsun. R'nin görüntüsünü bularak şeklini çiziniz.

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$

ve k skalar olmak üzere $f : R^2 \to R^2$ matris dönüşümü $f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ ile tanımlanır. R, Örnek 2'deki dikdörtgen ve f de $k = -2$ olmak üzere y-yönündeki sapma (shear) olsun. R'nin görüntüsünü bularak şeklini çiziniz.

4. $A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

ve k reel sayı olmak üzere $f : R^2 \to R^2$ $f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ ile tanımlanan matris dönüşümüne $k > 1$ ise genişleme ve $0 < k < 1$ ise daralma denir. Buna göre; daralma, vektörü küçültürken, genişleme vektörü uzatır. R, Örnek 2'deki dikdörtgen ise, aşağıdaki k değerleri için R'nin görüntüsünü bularak şeklini çiziniz.

(a) $k = 4$; **(b)** $k = \frac{1}{4}$

5. $A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ve k reel sayı olmak üzere $f : R^2 \to R^2$ $f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ ile tanımlanan matris dönüşümüne $k > 1$ ise x-yönünde bir genişleme ve $0 < k < 1$ ise x-yönünde bir daralma denir. Eğer R birim kare ve f'de $k = 2$ olmak üzere x-yönünde bir genişleme ise R'nin görüntüsünü bularak şeklini çiziniz.

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

ve k reel sayı olmak üzere $f : R^2 \to R^2$ $f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ ile tanımlanan matris dönüşümüne $k > 1$ ise y-yönünde bir genişleme ve $0 < k < 1$ ise y-yönünde bir daralma denir. Eğer R birim kare ve f'de $\frac{1}{2}$ olmak üzere y-yönünde bir daralma ise, R'nin görüntüsünü bularak şeklini çiziniz.

7. T köşeleri (5, 0), (0,3) ve (2, –1) olan bir üçgen olsun.

$$f(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{v}$$

ile tanımlanan f matris dönüşümü altında T'nin görüntüsünün köşelerinin koordinatlarını bulunuz.

8. T, köşeleri (1, 1), (–3, –3), ve (2, –1) olan bir üçgen olsun.

$$f(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{v}$$

ile tanımlanan f matris dönüşümü altında T'nin görüntüsünün köşelerinin koordinatlarını bulunuz.

9. f saat yönünün tersine 60°'lik dönme olsun. Eğer T alıştırma 8'de tanımlanan bir üçgen ise T'nin f altındaki görüntüsünü bularak şeklini çiziniz.

10. f_1, y-eksenine göre bir yansıma ve f_2'de saat yönünün tersine $\pi/2$ radyanlık bir dönme olsun. Önce f_2'yi daha sonra f_1'i uygulamakla elde edilen sonucun, önce f_1'yi daha sonra f_2'i uygulamakla elde edilen sonuca eşit olmadığını gösteriniz (yani $f_1 of_2 \neq f_2 of_1$ olduğunu gösteriniz.)

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ tekil (singuler) matris ve

T'de Alıştırma 8'de tanımlanan üçgen olsun. T'nin $f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ tanımlanan $f : R^2 \to R^2$ matris dönüşümü altındaki görüntüsünü bulunuz (Alıştırma 21'e de bakınız).

12. f, Örnek 5'te tanımlanan matris dönüşümü olsun. $h = 2$ ve $k = 3$ için köşeleri (0, 0), (1, 0), (1, 1) ve (0,1) olan dikdörtgenin görüntüsünü bularak çiziniz.

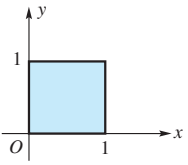
13. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$f : R^2 \to R^2$ $f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ ile tanımlanan matris dönüşümü olsun.

Alıştırma 14 ve 15 te f_1, f_2, f_3 ve f_4 aşağıdaki gibi tanımlansın:

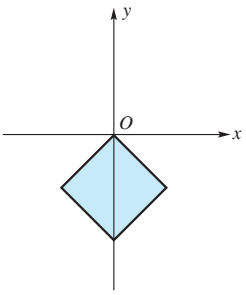
f_1 : *saat yönünün tersine ϕ derecelik bir dönme*
f_2 : *x-eksenine göre bir yansıma*
f_3 : *y-eksenine göre bir yansıma*
f_4 : *$y = x$ doğrusuna göre bir yansıma*

14. S, birim kare olsun.

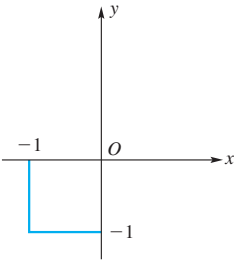


S'nin aşağıdaki görüntülerini veren, S üzerinde kullanılan matris dönüşümlerini farklı iki yol ile
belirleyiniz. Ardışık olarak birden fazla matris dönüşümü uygulayabilirsiniz.

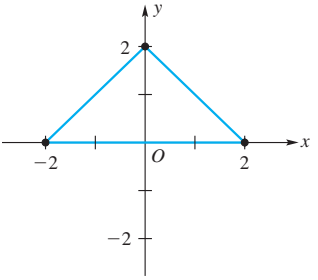
(a)



(b)

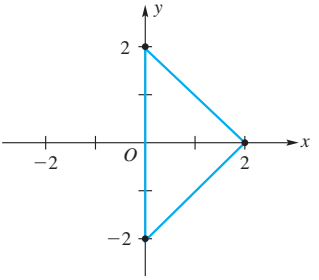


15. S, aşağıdaki şekilde gösterilen üçgen olsun.

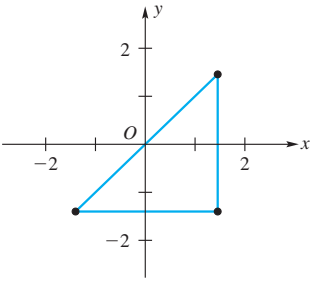


S'nin aşağıdaki görüntülerini veren, S üzerinde kullanılan matris dönüşümlerini farklı iki yol ile belirleyiniz. Ardışık olarak birden fazla matris dönüşümü uygulayabilirsiniz.

(a)



(b)



16. $A = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$

olmak üzere $f(f(\mathbf{u})) = A(A\mathbf{u})$ matris dönüşümünü kullanarak sinüs ve kosinüs için çift açı özdeşliklerini Örnek 3 ardından yapılan tartışmaları göz önüne alarak bulunuz.

17. Örnek 3'ün ardından yapılan tartışmalarda benzer yöntemleri kullanarak, iki açının farkını $\theta_1 - \theta_2$ sinüs ve kosinüs gösterimlerini bulunuz.

Alıştırma 18-21 için bilgisayar destekli yazılım kullanmak gereklidir.

18. Köşelerini belirleyerek bir T üçgenini tanımlayınız.

(a) y-eksenine göre T'nin yansımasını bulunuz ve grafiğini Şekil 1 gibi çiziniz.

(b) Şekil 1'i saat yönünün tersine 30° döndürünüz ve grafiğini Şekil 2'deki gibi çiziniz.

(c) $y = x$ doğrusuna göre T'nin yansımasını bulunuz ve şekli 2 kat x yönünde genişleterek yeni şekli çiziniz ve Şekil 3 deyiniz.

(d) Matris dönüşümlerinin sırasını değiştirerek (c)'de yapılanları tekrarlayınız ve şeklini çizerek Şekil 4 deyiniz.

(e) Şekil 3 ve Şekil 4'ü karşılaştırınız.

(f) Üçgene uyguladığımız matris dönüşümlerinin sırasını değiştirirseniz (e)'deki cevabınız ne olur?

19. Alıştırma 18'de tanımlanan üçgeni gözönüne alalım.

(a) x-eksenine göre T'nin yansımasını bulunuz. Uygula komutunu vermeden önce sonucu tahmin ediniz. Bu matris dönüşümüne L_1 deyiniz.

(b) (a)'da elde ettiğiniz şeklin y-eksenine göre yansımasını bulunuz. Uygula komutunu vermeden önce sonucu tahmin ediniz. Bu matris dönüşümüne de L_2 deyiniz.

(c) (a) ve (b)'de elde edilen sonuçların şeklini çiziniz.

(d) (b)'de elde ettiğiniz şekil ve T arasındaki ilişkiyi bulunuz. Aynı sonucu veren tek bir matris yazınız.

(f) Bu formülün genelde doğru olup olmadığını belirleyinceye kadar (e)'deki formülü deneyiniz. Deneyimlerinizi, gözlemlerinizi ve sonuçlarınızı kısa bir özet halinde yazınız.

20. S birim karesini gözönüne alalım ve S'yi kağıt üzerinde çizelim.

(a) S'yi x-eksenine göre yansıtınız ve Şekil 1'i elde ediniz. Şekil 1'i y-eksenine göre yansıtınız ve Şekil 2'yi elde ediniz. Son olarak Şekil 2'yi $y = -x$ doğrusuna göre yansıtınız ve Şekil 3'ü elde ederek şeklini çiziniz.

(b) S ile Şekil 3'ü karşılaştırınız. x-eksenine göre yansımayı L_1 ile, y-eksenine göre yansıtmayı L_2 ile $y = -x$ doğrusuna göre yansımayı da L_3 ile gösterelim. S üzerinde L_2, L_1'i; L_3 de L_2'yi takip ettiğinde karşılaştırmamız için hangi formülü önerirsiniz?

(c) $i = 1, 2, 3$ olmak üzere M_i matrisi L_i'yi tanımlar ise, $M_3M_2M_1$ matrisinin elemanlarını belirleyiniz. Bu sonuç (b)'deki sonucunuzla çakışıyor mu?

(d) Başka şekiller üzerinde de bu üç matris dönüşümünü uygulayınız.

21. Eğer bilgisayarınızın grafik yazılımı, bir matris dönüşümü kullanarak 2×2 tipinde herhangi matrisi seçmenize izin verirse aşağıdaki uygulamayı yapınız: Bir tekil matris seçiniz ve onu üçgene, birim kareye dikdörtgene ve beşgene uygulayanız. Tekil matris dönüşümlerinin davranışını gösteren sonuçları, gözlemlerinizi ve deneyimlerinizin kısa bir özetini yazınız.

22. $A = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}$ ve

$B = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix}$

olmak üzere $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ ve $g(\mathbf{v}) = B\mathbf{v}$ matris dönüşümleri olarak sırasıyla tanımlansın. Eğer yazılımınızda bilgisayar cebir sistemi (BCS) (Computer Algebra System) (CAS) mevcut ise bunu kullanarak

(a) BA sembolik matrisini bulunuz.

(b) BSC (CAS) komutlarını kullanarak BA'yı sadeleştirip

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

matrisini elde ediniz.

23. $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

olmak üzere ($f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ matris dönüşümü tanımlansın. Eğer yazılımınızda Bilgisayar cebir sistemi (BCS) = (Computer Algebra System) (CAS) mevcut ise bunu kullanarak:

(a) $f(f(\mathbf{u}))$ matris dönüşümünün matrisini (sembolik) bulunuz.

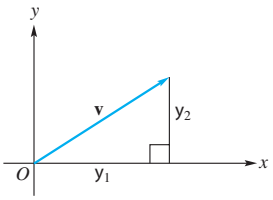
(b) BSC (CAS) komutlarını kullanarak (a) da elde edilen matrisi sadeleştirip, sinüs ve kosinüs için çift açı özdeşliğini elde edin.

24. $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

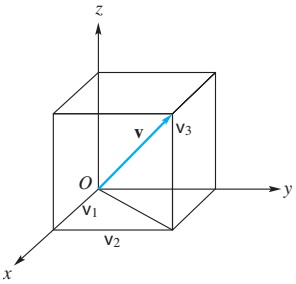
olmak üzere $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ matris dönüşümü tanımlansın. Eğer yazılımınızda bilgisayr cebir sistemi (BCS) = (Computer Algebra System) (CAS) mevcut ise bunu kullanarak:

(a) $f(f(f(f(\mathbf{u}))))$ matris dönüşümünün sembolik matrisini bulunuz.

(b) BSC (CAS) komutlarını kullanarak (a) da elde edilen matrisi sadeleştirip, sin (4θ) ve cos (4θ) için özdeşlik elde ediniz.



ŞEKİL 1.21 v'nin boyu.



ŞEKİL 1.22 v'nin boyu.

1.8 Korelasyon Katsayısı (Seçmeli)

Kesim 1.2'de gördüğümüz gibi bir n-vektörünü verilerin listelenmesini sağlamak için kullanabiliriz. Bu iki veri vektörü arasındaki doğrusal ilişkinin gücünü ölçebilmek için nokta çarpımın istatistiksel uygulamasını göstereceğiz.

Bu uygulamayı tanıtmaya başlamadan önce, vektörlerin iki ek özelliğini ele almalıyız. Bunlar: uzunluk (Büyüklük olarak da bilinir) ve yön. Bu kavramlar Bölüm 4'te daha ayrıntılı olarak işlenecektir. Biz bu kesimde ispat yapmadan sadece özellikleri vereceğiz.

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{bmatrix}$$

Bu n-vektörünün uzunluğu $\|\mathbf{v}\|$ ile gösterilir. ve

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_{n-1}^2 + v_n^2} \tag{1}$$

ile tanımlanır.

Eğer $n = 2$ ise, (1) denklemi ile verilen tanım kolayca şöyle gösterilir. Yönlendirilmiş doğru parçasının başlangıç noktasından (v_1, v_2) noktasına olan uzunluğunun $\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ olduğunu Şekil 1.21'den Pisagor (Pythagorean) teoreminin kullanarak görürüz. Bu doğru parçası $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ vektörü ile gösterildiğinden vektörün uzunluğu, $\|\mathbf{v}\|$, doğru parçasının uzunluğudur. Eğer $n = 3$ ise, benzer bir ispat Şekil 1.22'de Pisagor (Pythagorean) teoremini iki kez uygulayarak verilebilir.

Bir n-vektörünün yönü iki vektörün arasındaki açıyı tanımlayarak kolayca belirlenebilir. Kesim 5.1 ve 5.4'te sıfırdan farklı $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri arasındaki θ açısını

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|}$$

ifadesiyle belirlenen açı olarak tanımlamıştık.

Bu kesimlerde

$$-1 \leq \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|} \leq 1$$

olduğunu gösterdik. Bundan olayı, bu ifade $0 \leq \theta \leq \pi$ için θ açısının kosinüsü gibi görülebilir.

Şimdi istatistiksel uygulamamıza dönelim. İki n-veri vektörü x ve y yi aralarındaki θ açısını inceleyip karşılaştıralım. Paralel vektörler arasındaki açı 0 ve π radyan olduğundan, $\cos\theta$'nın -1 veya 1'e olan yakınlığı iki vektörün paralelliği ne kadar yakın olduğunu ölçer. İki vektörün paralelliğe çok yakın olması vektörler arasında güçlü bir ilişki olduğunu gösterir. $|\cos\theta|$ ne kadar küçükse vektörlerin paralelliği o kadar az olasıdır ve bu nedenle aralarındaki ilişki de zayıftır.

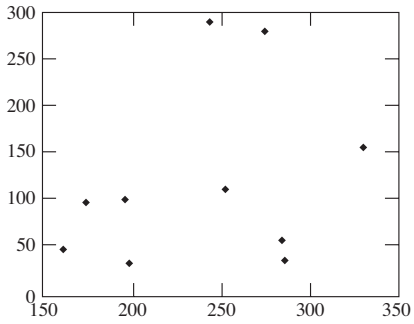
Tablo 1.1 en büyük on Amerikan şirketinin 2004 yılı için piyasa değerine göre sıralamasını ve ayrıca ortak geliri göstermektedir. Bütün değerler milyar dolar olarak verilmiş ve en yakın milyara yuvarlanmıştır.

TABLO 1.1

Şirket adı	*Piyasa Değeri (milyar $)*	*Gelir (milyar $)*
General Electiric Corp	329	152
Microsoft	287	37
Pfizer	285	53
Exxon Mobile	277	271
Citigroup	255	108
Wal-Mart Stores	244	288
Intel	197	34
American International Group	195	99
IBM Corp.	172	96
Johnson & Johnson	161	47

Kaynak: Time Almanac 2006, Bilgi için Pearson Education. Boston. Mass., 2005; ve htpp:www.geohive.com/chats

Tablo 1.1'deki verileri grafiksel olarak göstermek için, her bir şirketin piyasa değeri ve gelir verilerini sıralı ikililer olarak oluşturup bu sıralı ikililer kümesini çizeriz. Şekil 1.23'te gösterilen bu grafiğe **serpilme** (saçılma) **diyagramı** ve **noktasal grafiği** (scatter plot) denir. Bu gösterimde veriler yatay olarak değil daha çok dikey olarak dağılmıştır. Bundan dolayı gelirin, piyasa değerinden daha geniş alanda değişimi vardır.



ŞEKİL 1.23

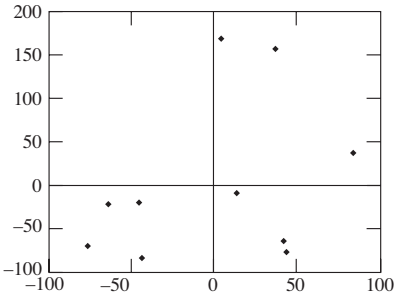
Eğer piyasa değerinin ve gelirin nasıl beraber gittiğinin sadece tek değerleriyle ilgilenseydik, grafiği kabaca taşır (öteleme) ve bundan dolayı noktaların şekli değişmez. Grafiğin merkezini başlangıç noktası (orijin) olarak almak çok sık kullanılan ötelemedir. Eğer noktaları sıralı ikililer şeklinde ağırlıkları olarak temsil ettiğini düşünürsek bu toplam miktarın kütlenin merkezini başlangıç noktasına ötelediğini görürüz. Bu taşımayı yapmak için piyasa değerini gözetleyip ortalamasını hesaplayalım ve her bir piyasa değerinden çıkaralım. Benzer şekilde gelirin ortalamasını hesaplayıp her bir gelir değerinden çıkaralım. Şunu elde ederiz (tamsayıya yuvarlandı).

Piyasa değerinin ortalaması = 240, gelirin ortalaması = 119.

Her bir gözlemden ortalamanını çıkarılması ile merkezsel veri elde edilir ve Tablo 1.2'de karşılık gelen merkezselleştirilmiş veri gösterilmitir. Merkezselleşmiş verinin serpilme diyagramı Şekil 1.24'te verilmiştir

TABLO 1.2

Merkezileştirilmiş Piyasa Değeri (milyar $)	*Merkezileştirilmiş Gelir (milyar $)*
89	33
47	–82
45	–66
37	152
15	–11
4	169
–43	–85
–45	–20
–68	–23
–79	–72



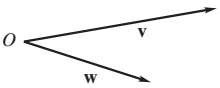
ŞEKİL 1.24

Şekil 1.23 ve 1.24'te noktaların düzeninin aynı olduğuna dikkat ediniz, karşılık gelen eksenlerin ölçüleri değişmiştir.

Serpilme diyagramı gözlenen verileri vurgular. Genel olarak değişkenlere ilgili değildir. Bizim, istediğimiz şey ise değişkenlere odaklanan bilgiyi göstermek için yeni bir yol bulmaktır. Burada ilgili değişkenler, piyasa değeri ve gelirdir. Bundan dolayı her bir şirket için bir eksen isteriz. Bu bizi kağıt üzerinde göstermemiz imkansız olan on eksenli bir çizime götürür. Buna rağmen bu durumu görselleştirebiliriz. 10-vektör düşünerek her şirket için bir on bileşenli vektör alırız. Bu nedenle

v vektörünü merkezsel piyasa değerleri ve **w** vektörü merkezsel gelir vektörü olarak tanımlanır.

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 89 \\ 47 \\ 45 \\ 37 \\ 15 \\ 4 \\ -43 \\ -45 \\ -68 \\ -79 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 33 \\ -82 \\ -66 \\ 152 \\ -11 \\ 169 \\ -85 \\ -20 \\ -23 \\ -72 \end{bmatrix}$$



ŞEKİL 1.25

Şematik olarak en iyi yapabildiğimiz **w** ve **v**'yi **0** ile gösterdiğimiz başlangıç noktasından (orijin) başlayan doğru parçaları gibi düşünmektir. (Şekil 1.25).

Şekil 1.25'teki gibi merkezsel bilginin vektör ile temsil edilmesine **vektör diyagramı** denir. İstatistikten aşağıdakilere sahibiz.

- Vektör diagramında, vektörün uzunluğu, vektöre karşılık gelen değişkenin değişebilirliğini gösterir.
- Vektör diayagramında, vektörler arasındaki açının ölçüsü, değişkenlerin diğerleriyle benzerlik ölçüsüdür.

İstatiksel terminolojide "diğerleriyle nasıl benzerdir" ifadesi "değişkenler nasıl yüksek ilişkilidir" demektir. Vektörler arasındaki açının küçük ya da π radyana yakın olması değişkenlerin yüksek ilişkili olduğunu gösterir. Vektörler neredeyse dik ise yani aralarındaki açı $\pi/2$'ye yakınsa değişkenlerin ilişkili olmadığını gösterir.

Aşağıdaki tablo istatistiksel terminolojinin vektör diyagramında vektörlerin geometrik karakterlerinin uygulamasını özetler.

Geometrik karakteristik	*İstatiksel Açıklaması*
Vektörün uzunluğu	Değişkenin değişkenliği
İki vektör arasındaki açı küçük	Vektörleri gösteren değişkenler pozitif olarak yüksek ilişkilidir.
İki vektör arasındaki açı π'ye yakın	Vektörleri gösteren değişkenler negatif olarak yüksek ilişkilidir.
İki vektör arasındaki açı $\pi/2$'ye yakın	Vektörleri gösteren değişkenler ilişkili değildir. Değişkenler diktir veya ortogonaldir denir.

İstatistikten $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ örneklem verilerinin aşağıdaki ölçülerine sahibiz.

Örneklem büyüklüğü $= n$, veri sayısı.

Örneklem ortalaması $= \overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ verinin ortalaması.

Korelasyon katsayısı: Eğer **x** ve **y** n-vektörleri merkezselleştirilmiş veri vektörleri ise, bu taktirde korelasyon katsayısı $K\,or\,(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$K\,or\,(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}$$

Geometrik olarak $K\,or\,(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, **x** ve **y** vektörleri arasındaki açının kosinüsüdür.

Tablo 1.2 deki merkezselleştirilmiş veriler için örneklem büyüklüğü $n = 10$, piyasa değeri değişkenin ortalaması 240 ve gelir değişkeninin ortalaması 119 dur **v** ve **w** için korelasyon katsayısı

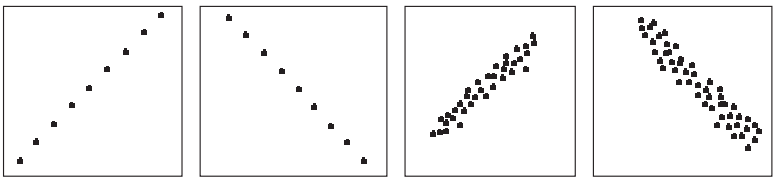
$$K\,or\,(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \cos\theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|} = 0.2994,$$

ile hesaplanır ve böylece

$$\theta = \arccos(0.2994) = 1.2667 \text{ radyan } \approx 72.6^\circ$$

Bu sonuç, piyasa değeri ve gelir değişkenlerinin yüksek ilişkili olmadığını gösterir. Finansal açıdan değişkenler fiziksel anlamda belirlenmiştir ve bu mantığa uygundur. 10 daha fazla şirket için veriler kullanılırsa piyasa değeri ve gelir arasındaki ilişkinin ölçüsü daha iyi sağlanabilir. Diğer bir yaklaşımda, çoğunluk olarak grupta bulunan verilerden uzak olan veriler atılarak serpilme diyagramı üzerinde inceleme yapılabilir. Bu tip verilere **sapan değerler (outliers)** denir. İstatiksel çalışmalarda bu çeşit yaklaşımların geçerliliği vardır.

Şekil 1.26'da korelasyon katsayısının değeri değişik durumlarda geometrik olarak serpilme diagramlarında gösterilmiştir. Bu, korelasyon katsayısı **x** ve **y** iki veri vektörleri arasındaki doğrusal ilişkinin ölçüsünü belirtir. Veriler arasındaki yüksek ilişki, bütün verilerin bir doğruya yakınlığıdır (diğer bir deyişle daha az serpilme).



ŞEKİL 1.26

(a) Mükemmel pozitif ilişki; $Kor\,(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1$

(b) Mükemmel negatif ilişki; $K\,or\,(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -1$

(c) Mükemmel pozitif ilişkiden daha az; $0 \le K\,or\,(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \le 1$

(d) Mükemmel negatif ilişkiden daha az; $-1 \le 1\ K\,or\,(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \le 0$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix}$$

olmak üzere, $i = 1, 2, \ldots, n$ için (x, y) sıralanmış ikililerin kümesinin korelasyon katsayılarını Tablo 1.3'teki adımları kullanarak hesaplayalım. Tablo 1.3'teki hesaplama işlemine İstatistikte Pearson moment çarpımı korelasyon katsayısı denir.

TABLO 1.3

1. Her bir veri vektörü için örneklem ortalamasının hesaplanması:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}.$$

2. $\mathbf{x}_c = \begin{bmatrix} x_1 - \bar{x} & x_2 - \bar{x} & \cdots & x_n - \bar{x} \end{bmatrix}^T$

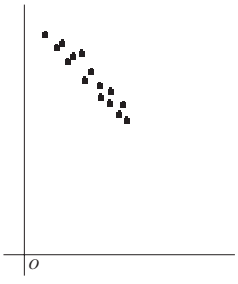
$\mathbf{y}_c = \begin{bmatrix} y_1 - \bar{y} & y_2 - \bar{y} & \cdots & y_n - \bar{y} \end{bmatrix}^T$

olmak üzere sırasıyla x_m ve y_m merkezsel x-veri ve merkezsel y-verileri tanımlanması

3. $Cor(\mathbf{x}_c, \mathbf{y}_c) = \dfrac{\mathbf{x}_c \cdot \mathbf{y}_c}{\|\mathbf{x}_c\| \, \|\mathbf{y}_c\|}$

korelasyon katsayısının hesaplanması

Korelasyon bir çok uygulamada bilgilendirici istatistik olabilir. Buna rağmen, veriler arasındaki ilişkilerin, sayısal tahiminini yorumlamakta dikkatli uygulanmalıdır. Bir çok uygulamada olduğu gibi, ilişkiler, ilk bakışta kavranmaktan çok daha karmaşık olabilir. Sebep, sonuç ilişkisinin karıştırılarak istatistiki verilerin yanlış yorumlanması konusunda dikkatli olunuz. Biz burada, istatistiksel çalışmalarda genellikle kullanılan hesaplama olan nokta çarpım ve vektörlerin uzunluğunu kullandık. Korelasyon katsayısını bilgilerin bir parçası gibi hipotez testleri için kullanmak daha fazla detaylı çalışmayı gerektirir. A. J. Jaffa ve H. F. Spirer tarafından yazılan *Misused Statistics* (Marcel Dekker, Inc., New York, 1987)'den alınan, aşağıda tartışılan uyarıları vurgulayalım.



ŞEKİL 1.27

Veriler, belli bölgedeki şehirlerden nüfusun her 1000'inin ölüm oranına karşılık nüfusun her 1000'inin boşanma oranı olarak toplandı. Verilerin serpilme diyagramı Şekil 1.27'de gösteriliyor. bu diyagram boşanma oranının, ölüm oranıyla yüksek

(negatif olarak) ilişkili olduğunu gösteriyor. Bu ilişkinin ölçüsü taban alınmak üzere,

(i) boşanmalar ölüm sebebi
(ii) boşanmaların oranı azaldığında, ölümlerin oranı azalır

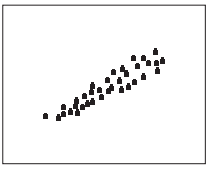
sonuçlarını açıklayabilir miyiz?
Açıkça sebep-sonuç ilişkisini ispatlamadık. Bu yüzden sadece sayısal verilere dayanarak sebep-sonuç arasındaki ilişkiyi açıklamada dikkatli olmalıyız.

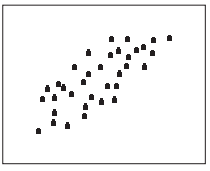
Anahtar Kelimeler

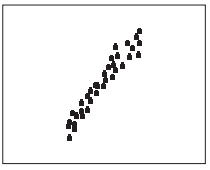
Nokta çarpım
Vektörün uzunluğu
Vektörün yönü
Vektörler arasındaki açı
Paralel vektörler
Dik vektörler
Serpilme diyagramı
Vektör diyagramı
İlişkili/ilişkili olmayan değişkenler
Örneklem büyüklüğü
Örneklem ortalaması
Korelasyon katsayısı
Sapma (outliers)

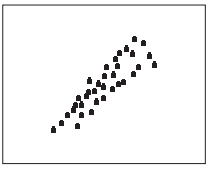
1.8 Alıştırmalar

1. A, B, C ve D şekillerinde gösterilmiş 0,97. 0.93, 0.88, 0.76 korelasyon katsayılarından birine sahiptir. Her bir şekli korelasyon katsayısı ile eşleyiniz.


Şekil A.


Şekil B.


Şekil C.

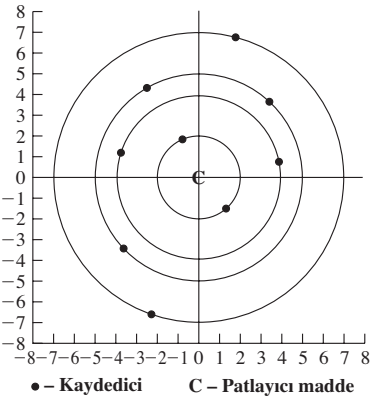

Şekil D.

2. Akış hızlarını ölçen alet ile teste $n = 8$ tane akışa ait akış hızları ölçülerek kaydedildi ve bunlar

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 2.1 \\ 3.3 \\ 3.9 \\ 5.2 \\ 6.1 \\ 6.9 \\ 7.7 \end{bmatrix}$$

olmak üzere sırasıyla akışların cümlesi ve akışlara karşılık gelen ölçüler olarak x ve y, 8-vektörleri ile gösterilsin. x'te girilen akışlara ve y'de okunan değerler arasındaki korelasyon katsayısını hesaplayın.

3. Patlayıcı madde patlatılarak belirli uzaklıklardan (uzaklıklar 100 metre) şok dalgalarının genişliği ölçülerek gözlendi. Kaydediciler için genel düzenleme yapılarak aşağıdaki şekilde gösterildi. Kaydedicinin, patlayıcı maddeden uzaklığı ve kaydedilen şok dalgasının genişliği aşağıdaki tabloda gösterilmiştir. Uzaklık ve genişlik arasındaki korelasyon katsayısını hesaplayınız.



Kaydedici	*Patlayıcı madde*
200	12.6
200	19.9
400	9.3
400	9.5
500	7.9
500	7.8
500	8.0
700	6.0
700	6.4

4. Nüfusu 25000 ile 75000 arası olan şehirlerde, on yaşından küçük üç çocuğu olan eşit sayıda ebeveyn aileleriyle görüşüldü. Görüşmelerde ev için (kira/rehinli ev alım ödemeleri) ve yiyecek, giyecek yıllık (ortalama) yapılan geçim harcamaları toplandı. Toplanan yaşam harcamaları en yakın 100 dolara yuvarlandı. nüfus ve yaşam harcamaları arasındaki korelasyon katsayısını aşağıda gösterilen tabloya göre hesaplayınız.

Şehir nüfusu (1000 lik)	*Ortalama yıllık yaşam harcaması (100 $'lık)*
25	72
30	65
35	78
40	70
50	79
60	85
65	83
75	88

Ek Alıştırmalar

1. Bir $k \times k$ tipindeki matrisin, k aşağıdaki şekilde verilmek üzere, asal köşegeninin üzerindeki veya asal köşegeninin yukarısındaki elemanları sayısını belirleyiniz.

(a) $k = 2$, **(b)** $k = 3$, **(c)** $k = 4$, **(d)** $k = n$

2. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ olsun.

(a) $k = 1, 2, 3, 4$ için $AB = O$ olacak şekilde $2 \times k$ tipinde bir $B \neq O$ matrisi bulunuz.

(b) (a)'daki matris tek midir? Açıklayınız.

3. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$

biçimindeki gerçek değişkenli 2×2 tipindeki $A^2 = I_2$ şartını sağlayan bütün matrisleri bulunuz.

4. B, gerçel değişkenli $n \times n$ tipinde bir matris olmak üzere $A^2 = B$ ise A'ya B'nin **karekökü** denir.

(a) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin karakökünü bulunuz.

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin karakökünü bulunuz.

(c) $B = I_4$ matrisinin karekökünü bulunuz.

(d) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin karekökünün olmayacağını gösteriniz.

5. A $m \times n$ tipinde bir matris olsun.
- **(a)** $A^T A$ matrisinin köşegen elemanlarını, A'nın sütunlarının terimleri cinsinden tanımlayınız.
- **(b)** $A^T A$'nın köşegen elemanlarını negatif olmadığını ispatlayınız.
- **(c)** $A^T A = O$ eşitliği ne zaman sağlanır.

6. A, $n \times n$ tipinde bir matris olmak üzere, herhangi bir k pozitif tamsayısı için $(A^k)^T = (A^T)^k$ olduğunu gösteriniz.

7. Her simetrik üst (alt) üçgen matrisin köşegen matris olduğunu gösterin.

8. A, $n \times n$ tipinde ters simetrik bir matris ve $\mathbf{x}$ n-vektör olsun. R^n de her $\mathbf{x}$ için $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0$ olduğunu gösteriniz.

9. A, üst üçgen matris olsun. A'nın tekil olmaması (nonsingular) için gerek ve yeter şart A'nın bütün köşegen elemanlarının sıfır olmamasıdır. Gösteriniz.

10. 2×2 tipindeki iki ters simetrik matrisin çarpımının köşegen matris olduğunu gösterin $n > 2$ olmak üzere $n \times n$ tipindeki ters simetrik matrisler içinde doğru olur mu?

11. İz $(A^T A) = 0$ ise $A = 0$ olduğunu gösteriniz.

12. A ve B, $n \times n$ tipinde matrisler olmak üzere $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ eşitliği ne zaman sağlanır?

13. $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

ve n bir pozitf tamsayı olsun. A^n matrisinin elemanlarının basit bir tanımını veriniz.

14. $B = P^{-1}AP$ ve k pozitif tamsayı olmak üzere, $B^2, B^3, \ldots, B^k$ matrislerini A, P ve P^{-1} matrisleri cinsinden ifade ediniz.

15. A, ters simetrik ve tekil olmayan bir matris ise A^{-1} matrisi de ters simetriktir.

16. A, $n \times n$ tipinde bir matris olsun, $n \times 1$ tipinde bütün $\mathbf{x}$ matrisleri için $A\mathbf{x} = O$ ise $A = O$ olduğunu gösteriniz.

17. A, $n \times n$ tipinde bir matris olsun, $n \times 1$ tipindeki bütün $\mathbf{x}$ matrisleri için $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ ise $A = I_n$ olduğunu gösteriniz.

18. A ve B, $n \times n$ tipinde matrisler olsun. $n \times 1$ tipindeki bütün $\mathbf{x}$ matrisleri için $A\mathbf{x} = B\mathbf{x}$ ise $A = B$ olduğunu gösteriniz.

19. A, $n \times n$ tipinde bir matris ve $A^2 = A$ ise A'ya **eşgüçlü (idempotent)** matris denir.
- **(a)** I_n ve O'nun eş güçlü olduğunu gösteriniz.
- **(b)** I_n veya O ya eşit olmayan eş güçlü matris bulunuz.
- **(c)** $n \times n$ tipinde tekil olmayan eş güçlü matrisin sadece I_n olduğunu gösteriniz.

20. A ve B, $n \times n$ eşgüçlü matrisler olsun (Alıştırma 19'a bakınız).
- **(a)** $AB = BA$ ise AB'nin eşgüçlü matris olduğunu gösteriniz.
- **(b)** A eşgüçlü matris ise A^T'nin de eşgüçlü matris olduğunu gösteriniz.
- **(c)** $A + B$ eşgüçlümüdür? Açıklayınız.
- **(d)** kA'nın da eşgüçlü olması için k'nın bütün değerlerinin bulunuz.

21. A, bir eşgüçlü matris olsun.
- **(a)** $n \geq 1$ tamsayıları için $A^n = A$ olduğunu gösteriniz.
- **(b)** $I_n - A$ matrisininde eşgüçlü olduğunu gösteriniz.

22. A, $n \times n$ tipinde bir matris ve k pozitif tamsayı olmak üzere $A^k = O$ ise A'ya **nilpotent** matris denir.
- **(a)** Her nilpotent matrisin tekil olduğunu gösteriniz.
- **(b)** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

  matrisinin nilpotent olduğunu gösteriniz.
- **(c)** A nilpotent matris ise $I_n - A$'nın tekil olmadığını gösteriniz. [*Yol gösterme*: $A^k = O$, $k = 1, 2, \ldots$. olduğunda $(I_n - A)^{-1}$ matrisini bulun. Bir örnek veriniz].

23. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ olsun.

$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = a + b + c + d$ olacak şekilde $\mathbf{w}$ vektörünü tanımlayınız. $\mathbf{v}$, n-vektör ise $\mathbf{w}$ nedir?

24. Alıştırma 23'teki sonucu kullanarak

$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ n-vektörünün elemanlarının

ortalaması için, nokta çarpımlarının oranı cinsinden bir formül bulunuz.

25. $n \times n$ tipinde bir A matrisi için, A'nın ters köşegen elemanları $a_{1n}, a_{2n-1}, \ldots, a_{n1}$'dir. ($a_{ij}$ ters köşegen elemanlarının $i + j = n + 1$ özelliğini sağladığına dikkat ediniz). Ters köşegen elemanlarının toplamı Tkt (A) ile gösterilir ve

$$\text{Tkt}\,(A) = \sum_{i+j=n+1} a_{ij}$$

toplamı, alt indislerin toplamı $n + 1$'i veren A'nın elemanlarının toplamıdır.
- **(a)** c gerçel bir sayı olmak üzere; Tkt (cA) = cTkt (A) olduğunu gösteriniz.
- **(b)** Tkt ($A + B$) = Tkt (A) + Tkt (B) olduğunu gösteriniz.
- **(c)** Tkt (AB)'nin Tkt (BA)'ye eşit olmadığını örnek vererek gösterin.

26. Bir $n \times n$ tipinde bir A matrisi A_{ii} karesel bloklar tarafından içerilen bütün sıfır elemanlarına göre bölünebilir ise **blok köşegen** adını alır.

(a) Aşağıdaki matrisi bir blok köşegen matris olarak yazınız.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

(b) A bir blok köşegen matris ise, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistemi ayrık adını alır. Çünkü sistem, eşitliğin sağ yanındaki $\mathbf{b}$ matrisinin uygun bir kısmı ve A_{ii} katsayı matrisli lineer sistemler gözönüne alarak çözülebilir. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistemini ayrıştırarak A matrisi 4×4 tipinde (a)'daki matris olmak üzere çözünüz.

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

27. 2×2 tipindeki iki ters simetrik matrisin çarpımının köşegen matris olduğunu gösteriniz. $n > 2$ olmak üzere $n \times n$ tipindeki ters simetrik matrisler için doğru olur mu?

28. $A = \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix}$

blok köşegen $n \times n$ matris olsun. A'nın tekil olmaması için gerek ve yeter şart A_{11} ve A_{22}'nin tekil olmayan matrisler olmasıdır. Gösteriniz.

29. $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix}$

parçalı matris olsun. A_{11} ve A_{22}'nin tekil olmayan matrisler ise A'nın tekil olmadığını gösteriniz ve A^{-1} için bir ifade bulunuz.

Alıştırma 30-32 de X ve Y $n \times 1$ tipinde elemanları sırasıyla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ve $y_1, y_2, \ldots, y_n$ olan matrisler olsun. X ve Y'nin ***dış çarpımı*** XY^T *matris çarpımın $\times n$ tipindeki*

$$\begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{bmatrix}$$

matrisini verir.

30. (a) $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ve $Y = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

olmak üzere X ve Y'nin dış çarpımı nedir?

(b) $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ve $Y = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

olmak üzere X ve Y'nin dış çarpımı nedir?

31. X ve Y'nin dış çarpımının Y ve X'in dış çarpımına eşit olup olmadığını ispatlayınız.

32. İz$(XY^T) = X^TY$ olduğunu ispatlayınız.

33. $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 9 \\ 5 & 11 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$.

olsun. $AB = \sum_{i=1}^{2} \text{sütun}_i(A)$ ile $\text{satır}_i(B)$ nin dış çarpımı olduğunu gösteriniz.

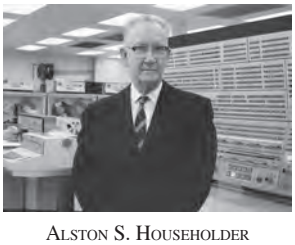
34. W matrisi $W^TW = 1$ olan $n \times 1$ tipinde bir matris olsun.

$$H = I_n - 2WW^T$$

$n \times n$ tipindeki matrise **Householder*** **matrisi** denir. (Bir Householder matrisinin, birim matrisle dış çarpımının skalar katının toplamı olduğuna dikkat ediniz.

(a) H'nin simetrik olduğunu gösteriniz.

(b) $H^{-1} = H$ olduğunu gösteriniz.



ALSTON S. HOUSEHOLDER

*Alston S. Householder (1904-1993) Rockford, IIIinois de doğdu ve Malibu, California da öldü. Horthwestern Üniversitesinden lisans ve Cornell Üniversitesinden yüksek lisans derecelerinin Felsefe bölümünden aldı. Chicago Üniversitesinden 1937 Matematik dalında doktorasını (Ph.D.) aldı. Matematikteki ilk çalışmaları matematiğin biyolojideki uygulamalarıdır. 1944 te II. Dünya Savaşı problemleri ile çalıştı. 1946 da Oak Ridge Ulusal Laboratuvarının Matematik bölümüne üye ve 1948 buraya yönetici oldu. Oak Ridge de çalışmalarını matematiksel biyolojiden, sayısal analize değiştirdi. Sayısal doğrusal cebir alanında çok önemli katkıları olduğu iyi bilinir. Buna ilaveten, Houselholder araştırmalarını, editörlük yaparak ve bugün de devam eden önemli Gatlinburg konferanslarını (Houselholder sempozyum olarak bilinir) düzenleyerek bir çok profesyonel organizasyonlar yapmıştır.

35. $C = \text{circ}(c_1, c_2, \ldots, c_n)$

$$= \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n \\ c_n & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_n & c_1 & \cdots & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_1 \end{bmatrix}$$

ile tanımlı $n \times n$ tipindeki matris n-inci mertebeden bir dairesel matristir. C'nin her bir satırının elemanları bir önceki satırlarındakinin aynısıdır, fakat sağ taraftaki bir ötelenir ve pozitif yönde tam olarak döndürülür.

(a) $C = \text{circ}\ (1, 2, 3)$ çevrimini oluşturunuz.

(b) $C = \text{circ}\ (1, 2, 5, -1)$ çevrimini oluşturunuz.

(c) $C = \text{circ}\ (1, 0, 0, 0, 0)$ çevrimini oluşturunuz.

(d) $C = \text{circ}\ (1, 2, 1, 0, 0)$ çevrimini oluşturunuz.

36. $C = \text{circ}\ (c_1, c_2, c_3)$ olsun. Hangi şartlar altında C simetriktir?

37. $C = \text{circ}\ (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ ve $\mathbf{x}$, $n \times 1$ tipinde bir matris olsun. $C\mathbf{x}$'in basit bir ifadesini bulunuz.

38. $C = \text{circ}\ (c_1, c_2, c_3)$ için $C^TC = CC^T$ olduğunu gösteriniz.

Bölüm Tekrarı

Doğru veya Yanlış

1. Üç denklemli doğrusal sistem tam üç tane farklı çözüme sahip olabilir.

2. A ve B elemanları sıfır olmayan $n \times n$ tipinde matrisler ise, $AB \neq O$'dır.

3. A, $n \times n$ tipinde bir matris ise $A + A^T$ matrisi simetriktir.

4. A, $n \times n$ tipinde bir matris ve $\mathbf{x}$, $n \times 1$ matris ise, $A\mathbf{x}$, A'nın sütunlarının bir doğrusal bileşimidir.

5. Homogen doğrusal sistemler her zaman bağdaşabilirdir.

6. $n \times n$ tipinde iki üst üçgen matrisin toplamı üst üçgen matristir.

7. $n \times n$ tipinde iki simetrik matrisin toplamı simetrik matristir.

8. Doğrusal sistem, tekil olmayan katsayılar matrise sahip ise, sistem tek çözüme sahiptir.

9. Tekil olmayan $n \times n$ tipindeki iki matrisini çarpımda tekil olmayan bir matristir.

10. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matris dönüşümü, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ vektörünün y-ekseni üzerine izdüşümünü tanımlar.

Küçük Sınav

1. Yok etme yöntemini kullanarak aşağıdaki doğrusal sistemin bütün çözümlerini bulunuz.

$$\begin{aligned} 4x + 3y &= -4 \\ 2x - y &= 8 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 3 \\ 4x + 5y - z &= -1 \\ 6x + y + 5z &= 5 \end{aligned}$$

doğrusal sistemin çözümünü $x = 1$, $y = -1$, $z = r$ olan bütün r değerlerini belirleyiniz.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & b \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$

olan bütün a ve b değerlerini bulunuz.

4. $L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ a & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ve

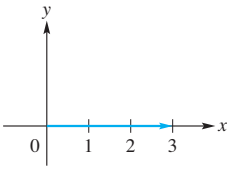
$U = \begin{bmatrix} 1 & 4 & b \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$

Alıştırma 18'de tanımlanan üçgeni gözönüne alalım.

(a) LU'nun (3, 2) elemanının 7 olması için a'nın bütün değerlerini belirleyiniz.

(b) LU'nun (2, 3) elemanının 0 olması için b, c'nin bütün değerlerini belirleyiniz.

5. $\mathbf{u}$, x-ekseni üzerindeki izi şekilde gösterilen R^2'de bir vektör olsun. $\mathbf{u}$'nun bütün bileşenlerini belirleyiniz.



Tartışma Alıştırmaları

1. Kesim 1.5'te kısaca, tekrarlayan ilişkileri tanıttık. Matris formu kullanarak Fibonacci dizisinin elemanlarının nasıl hesaplanabildiğini gösterdik. Ardışık matris çarpımlarıyla, dizinin elemanlarının çıkarılabildiğini 2×1 matrislere uyguladık. Bir başka yaklaşımda, dizinin bir önceki elemanını elde etmek, dizinin elemanlarını üreten bir formül bulmaktır. İki terimli tekrarlayan bağıntıyı $u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}$ şeklinde 2×2 denklem sistemini çözerek aşağıdaki gibi elde ederiz. Bu tekrarlayan bağıntının karakteristik polinomu ismi verdiğimiz $r^2 = ar + b$ ikinci dereceden polinomun formu ile düşünebiliriz. $r_1 \neq r_2$ olmak üzere r_1 ve r_2 bu polinomun kökleri olsun. Bu taktirde, u_n gelen terimi

$$u_n = C_1(r_1)^n + C_2(r_2)^n, \qquad (*)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada, C_1 ve C_2 sabitlerini (*) da $n = 0$ ve $n = 1$ koyarak elde edilen denklem sisteminin çözümüyle ve u_0 ve u_1 ile verilen başlangıç değerlerini kullanarak tekrarlı bağıntıyı bulmaya başlayabiliriz.

(a) Bu yaklaşımı kullanarak Fibonacci dizisinin n'inci elemanı için bir formül bulunuz.

(b) Fibonacci dizisinin elemanları tamsayı olduğundan (a)'daki formülün niçin şaşırtıcı olduğunu açıklayınız.

(c) Katsayıları a ve b olan, $u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}$ şeklinde iki terimli tekrarlı bağıntısı verilsin, (*)'daki C_1 ve C_2 sabit değerlerini tanımlamada kullanılabilen genel denklem sistemini bulunuz.

2. Kenarları 3″ ve 5″ olan indeks kartını uzayda bir düzlem (parçası) olarak kullanabiliriz. Böyle üç indeks kartı alın kenarı 5″ olan yerden yarıya kadar kesip bir yarık açın. Bu yarık, bir kartın diğer kartın kesildiği yerden geçerken iki düzlemin kesişmesine model olacaktır. Her bir kart $k = 1, 2, 3$ için $a_k x + b_k y + c_k z = d_k$ denklemleri ile belirlenebilir. Böylece üç bilinmeyenli üç denklemli bir sistem elde ederiz. Bu indeks kartlarını kullanarak dört farklı bağdaşabilir ve dört farklı bağdaşabilir olmayan sistemleri şekillendiriniz. Her bir şekli çizerek yaptığımız diyagramı kısaca açıklayın. (*Yol gösterme*: İki indeks kartının biri diğerinin tam üstünde yer alırsa, aynı düzlemi belirtir).

3. Kesim 1.3'te matris çarpımını tanımladık. A, $m \times p$ ve B, $p \times n$ matrisler ise, AB, $m \times n$ tipinde bir matristir. Burada A, $m \times 1$ ve B, $1 \times n$ olmak üzere özel durumu inceleyeceğiz.

(a) $m = 3$ ve $n = 4$ için, $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ ve $B = [3 \quad 4 \quad 6 \quad -1]$. AB'yi hesaplayınız.

(b) A'nın sıfır elemanı $m \times 1$ matris ve B, $1 \times n$ matris ise AB matrisinin n için sıfır satırı olduğunu açıklayınız.

(c) $m \times 1$ tipindeki A matrisinin ikinci bileşeninin sıfır olduğunu varsayalım. AA^T'de sıfırların yerini belirleyiniz.

(d) C, eşit sütunları olan 5×5 tipinde bir matris olsun. 5×1 tipinde bir A matrisi ile 1×5 tipinde bir B matrisinin çarpımını kullanarak C matrisinin nasıl elde edildiğini açıklayınız. (A ve B'nin elemanlarını açıkça belirtiniz.)

4. Kesim 1.6 ve 1.7'de matris dönüşümlerin düzlemdeki nesneler için kullanıldığını gösterdik. Örneğin, genişleme, daralma, dönme, yansıma ve sapma. Diğer bir uygulamada öteleme (translate) adı verdiğimiz yani nesnenin belirli bir uzaklığa kaydırılmasıdır. Düzlemdeki $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ vektörüne belirli bir $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ nü ekleriz. Bu hareket R^2 den R^2'ye

$$g(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathbf{a}$$

ile verilen g fonksiyonunu tanımlar. g'ye $\mathbf{a}$ vektörü ile yapılan öteleme fonksiyonu denir.

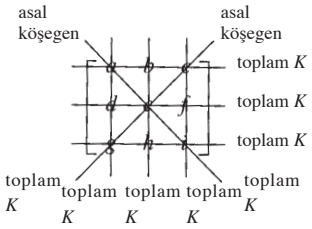
$\mathbf{a} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ için ötelemelerin neden matris dönüşümleri olmadığını açıklayınız.

5. Bölüm 1'de, düzlemdeki ve uzaydaki doğrusal denklem sistemlerinin cebirsel ifadeleri geometri ile irtibatlandırmak için tartıştık. Düzlemde bulanan iki doğrunun, sıfır, bir veya sonsuz tane kesişim noktalarının olabileceğini, benzer şekilde uzayda üç düzlem için de inceledik. Doğrusal olmayan denklem sistemleri için diğer bir çok kesişim noktalarının cümlesi var olabilir.

(a) $n = 1, 2, \ldots,$ için $f(x) = x^{2n}$ fonksiyonlarının cümlesi, çift kuvvet fonksiyonlar ailesidir. Bu ailede herhangi iki fonksiyonun kesişim noktalarının cümlesini belirleyiniz.

(b) $x \geq 0$ olmak üzere $y = f(x) = x^2$ fonksiyonu için, tam dört noktada kesişim noktası olacak şekilde başka bir $y = g(x)$ fonksiyonu belirleyiniz.

6. İnsanlar, sihirli karelere uzun zamandır ilgi duymuştur. Geçmişte, onlar daha çok doğaüstü ile birleştirildi ve bundan dolayı sihirli özelliklere sahip oldukları düşünüldü. Onlar bugün, matematiksel özellikleri gösterme ve ayrıca bulmacalar ve oyunlar olarakta incelenir. Sihirli kare şöyle tanımlanır. Sihirli kare, elemanları pozitif tamsayılar ve $n \times n$ matrisin her bir satırının, her bir sütununun ve her asal köşegenlerindeki (diyagrama bakınız) elemanların toplam aynı K sabitine eşittir.



A 3 × 3 sihirli kare

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisi sabiti $K = 15$ (sihirli) sihirli bir karedir (sağlayınız).

(a) 3×3 tipinde ve pozitif elemanlı diğer küçük kare A matrisleri için A'nın sihirli kare olup olmadığını kontrol eden metodu, A'yı özel matrislerle çarparak ve matrisler üzerinde tanımlanan bir işlem kullanarak kurunuz. Özellikle stratejinizi belirleyiniz ve önceki tanımın kısımlarının her birinin, nasıl kontrol edildiğini gösteriniz.

(b) (a)'da kurduğunuz tekniği $n \times n$ matrislerine nasıl genelleştireceğinizi kısaca tartışınız.

BÖLÜM

2 Lineer Sistemlerin Çözümü

2.1 Bir Matrisin Eşelon Şekli

Kesim 1.1'de lisede öğretilen, lineer sistemlerin çözümü için yok etme metodu tartışılmış ve Kesim 1.3'te bir lineer sistemin katsayılar matrisi ve ilaveli matrisi incelenmiştir. Bu Kesimde, bir matris üzerinde uygulanan işlemleri tartışacağız. Bu işlemler ilaveli matrise uygulandığında lineer sistemin çözümünün belirlenmesindeki basamaklar büyük bir oranda basitleştirilir. Kesim 2.2'de, lineer sistemlerin çözümü için, bu kesimdeki geliştirilmiş yapıları uygulayacağız.

TANIM 2.1

A, $m \times n$ tipinde bir matris olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyor ise A'ya **satırca indirgenmiş eşelon şekilde** bir matristir denir:

(a) A'nın bütün elemanları sıfır olan satırları varsa bunlar matrisin en alt satırlarındadır.

(b) Sıfırdan farklı bir satırın soldan itibaren sıfırdan farklı ilk elemanı 1'dir. Bu elemana bu satırın bir **ilk 1**'i denir.

(c) Sıfırdan farklı her bir satır için, ilk 1, önceki satırların herhangi ilk 1'lerinin sağında ve altında yer alır.

(d) Bir sütun bir ilk 1 içeriyorsa bu sütundaki diğer bütün elemanlar sıfırdır.

Satırca indirgenmiş eşelon şeklindeki bir matris, bu matrisin üst sol köşesinden azalan ilk 1'lerin bir merdiven ("eşelon") örneği olarak oluşur.

Yukarıdaki (a), (b) ve (c) özelliklerini sağlayan $m \times n$ tipinde bir matrise **satırca eşelon şekildedir** denir. Tanım 2.1'de hiç sıfır satır olmayabilir.

Benzer bir tanım, **sütunca indirgenmiş eşelon şekil** ve **sütunca eşelon şekil** için de yapılabilir.

ÖRNEK 1 Aşağıdaki matrisler, Tanım 2.1'deki (a), (b), (c) ve (d) özelliklerini sağladığından satırca indirgenmiş eşelon şeklindedir:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aşağıdaki matrisler ise satırca indirgenmiş eşelon şeklinde değildir. (Neden?)

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

■

ÖRNEK 2 Aşağıdaki matrisler, satırca eşelon şekildedir:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

■

Satırca indirgenmiş eşelon şeklindeki matrislerin faydalı bir özelliği (Örnek 9'a bakınız.); eğer A, $n \times n$ tipinde, I_n birim matrisinden farklı satırca indirgenmiş eşelon şeklinde bir matris ise A matrisi elemanları tamamen sıfır olan bir satıra sahiptir.

Biz şimdi, her matrisin belli satır (sütun) işlemlerini kullanarak, satırca (sütunca) eşelon şeklinde veya satırca (sütunca) indirgenmiş eşelon şeklinde ifade edilebileceğini göstereceğiz.

TANIM 2.2 Aşağıda verilen işlemlerin herhangi birine bir A matrisi üzerinde **elementer satır (sütun) işlemi (operasyonu)** denir:

(a) **Tip I:** Herhangi iki satırı (sütunu) yer değiştirmek.
(b) **Tip II:** Bir satırı (sütunu) sıfırdan farklı bir sayı ile çarpmak.
(c) **Tip III:** Bir satırın (sütunun) bir katını diğer bir satıra (sütuna) eklemek.

Şimdi, matrisler üzerindeki elementer satır ve sütun işlemleri için aşağıdaki gösterimleri vereceğiz:

- *i*. ve *j*. satırları (sütunları) yer değiştirmek, Tip I:
$$\mathbf{r}_i \leftrightarrow \mathbf{r}_j \quad (\mathbf{c}_i \leftrightarrow \mathbf{c}_j).$$
- *i*. satırın (sütunun) yerine, *i*. satırın (sütunun) *k* katını yazmak, Tip II:
$$k\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i \quad (k\mathbf{c}_i \rightarrow \mathbf{c}_i).$$
- *j*. satırın yerine, *i*. satırın (sütunun) *k* katı ile *j*. satırın toplamını yazmak, Tip III:
$$k\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j \rightarrow \mathbf{r}_j \quad (k\mathbf{c}_i + \mathbf{c}_j \rightarrow \mathbf{c}_j).$$

Bu gösterimleri kullanarak, bir matris üzerine uygulanan elementer satır ve sütun işlemlerin takip etmek kolaydır. Örneğin A matrisinin *i*. satırı ile *j*. satırının yer değiştirilmesini $A_{ri \leftrightarrow rj}$ ile göstereceğiz. Benzer olarak, sütun işlemleri içinde gösterilebilir.

Bir matris bir lineer sistemin ilaveli matrisi olarak göz önüne alınırsa, elementer satır işlemlerini, sırası ile iki denklemin yer değiştirilmesi, sıfırdan farklı bir sabit ile bir denklemin çarpılması ve bir denklemin bir katının diğer denkleme eklenmesi; şeklinde düşünülebilir. Yani, bunlar birbirine denktirler.

ÖRNEK 3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 6 & -9 \end{bmatrix}.$$

matrisi verilsin. A'nın 1. ve 3. satırlarının yer değiştirilmesiyle,

$$B = A_{\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_3} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 & -9 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

A'nın 3. satırının $\frac{1}{3}$ ile çarpılmasıyla,

$$C = A_{\frac{1}{3}\mathbf{r}_3 \rightarrow \mathbf{r}_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

A'nın 2. satırının (–2) katının 3. satıra eklenmesiyle,

$$D = A_{-2\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 \rightarrow \mathbf{r}_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

A matrisinden elde edilen D matrisine dikkat edilirse, A'nın 2. satırının değişmediği görülür. ■

TANIM 2.3 A ve B, $m \times n$ tipinde iki matris olsun. Eğer B, A'ya sonlu sayıda elementer satır (sütun) işlemlerinin uygulanması ile elde edilen bir matris ise B matrisi A matrisine **satırca (sütunca) denktir** denir.

ÖRNEK 4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisi verilsin.

A'nın 3. satırının 2 katının 2. satıra eklenmesi ile

$$B = A_{2\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -3 & 7 & 8 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece B matrisi A matrisine satırca denktir. B'nin 2. ve 3. satırlarını yer değiştirilmesiyle,

$$C = B_{\mathbf{r}_2\leftrightarrow\mathbf{r}_3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece C matrisi B matrisine satırca denktir. C'nin 1. satırını 2 ile çarparsak,

$$D = C_{2\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece D matrisi C matrisine satırca denktir. A matrisine art arda 3 elementer satır işlemi uygulayarak D matrisi elde edildiğinden D matrisi A matrisine satırca denktir. Elementer satır işlemleri notasyonları kullanarak,

$$D = A_{\substack{2\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_2\leftrightarrow\mathbf{r}_3 \\ 2\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_1}}$$

yazılabilir.

Belli bir düzene göre sıralanmış olan elementer satır işlemlerinin uygulanması yukarıda verilmiştir. ■

Şu sonuçları kolaylıkla gösterebiliriz: (a) Her matris kendisine satırca denktir; (b) Eğer B, A'ya satırca denk ise A da B'ye satırca denktir; (c) Eğer C, B'ye satırca denk ve B de A'ya satırca denk ise C de A'ya satırca denktir; (Örnek 104a bakınız). (b) şıkkından dolayı, "B, A'ya satırca denktir" ve "A, B'ye satırca denktir" ifadeleri yerine "A ve B matrisleri satırca denktir" denilir. Benzer durum, sütun denkliği için de geçerlidir.

Teorem 2.1 Sıfırdan farklı $m \times n$ tipindeki her $A = [a_{ij}]$ matrisi, satırca (sütunca) eşelon şeklindeki bir matrise satırca (sütunca) denktir.

İspat

A matrisinin satırca eşelon şeklindeki bir matrise satırca denk olduğunu ispat edeceğiz. Yani, sadece elementer satır işlemlerini kullanarak, A matrisini satırca eşelon şeklindeki bir matrise dönüştürebiliriz. Elementer sütun işlemlerini kullanarak tamamen benzer bir ispat sütunca denklik içinde verilebilir.

A matrisinde, sıfırdan farklı bir elemana sahip 1. sütunu göz önüne alalım. Bu sütuna **pivot sütunu** denir; pivot sütunundaki sıfırdan farklı ilk elemana **pivot** denir. Pivot sütununun j. sütun ve pivotun da i. satırda olduğunu kabul edelim. Şimdi eğer gerekirse 1. ve i. satırları yer değiştirerek $B = [b_{ij}]$ matrisini elde edelim. Bundan dolayı, b_{1j} pivotu sıfırdan farklıdır. B matrisinin 1. satırını pivotun çarpmaya göre tersi $1/b_{1j}$ ile çarparsak, $C = [c_{ij}]$ matrisi elde edilir. Burada $c_{1j} = 1$'dir. Eğer $2 \le h \le m$ olmak üzere c_{hj} sıfırdan farklı ise 1. satırın $(-c_{hj})$ ile çarpımını C'nin h. satırına ekleyelim. Bu işlem h'nın her bir değeri için yapalım. Buradan C'nin 2, 3, …, m-yinci satırında ve j. sütunundaki elemanların sıfır olduğu sonucu elde edilir. Bulunan matrisi D ile gösterelim.

Daha sonra, D'nin 1. satırının silinmesi ile elde edilen D matrisinin $(m-1) \times n$ tipindeki A_1 alt matrisini göz önüne alalım. Şimdi, bu işlemleri A matrisi yerine A_1 matrisini alarak tekrarlayalım. Bu şekilde devam edilirse, A matrisine satırca denk olan satırca eşelon şeklinde bir matris elde edilir. ■

ÖRNEK 5

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ \textcircled{2} & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

Pivot sütunu — Pivot

matrisi verilsin. A'nın 1. sütunu, sıfırdan farklı bir elemana sahip A'daki (soldan sağa doğru sayıldığında) ilk sütundur. Böylece 1. sütun A'nın pivot sütunudur. Pivot sütunundaki sıfırdan farklı (yukarıdan aşağıya doğru sayıldığında) ilk eleman 3. satırda olup pivot $a_{31} = 2$'dir.

A matrisinin 1. ve 3. satırları yer değiştirilirse

$$B = \begin{bmatrix} \textcircled{2} & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

elde edilir. B matrisinin 1. satırı $\frac{1}{b_{11}} = \frac{1}{2}$ ile çarpılırsa

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

elde edilir. C matrisinin 1. satırının (–2) katı C'nin 4. satırına eklenmesi

ile pivot sütununda sadece sıfırdan farklı elemanı $d_{11} = 1$ olan bir D matrisi elde edilir:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}.$$

D matrisinin 1. satırını silmek suretiyle elde edilen $\boldsymbol{D}$ matrisinin alt matrisi olarak A_1 matrisi verilsin: D'nin 1. satırı silinmesin. A'nın yerine A_1 matrisi alarak bundan önceki adımları tekrarlayalım.

$$\begin{matrix} \\ A_1 = \end{matrix} \begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \textcircled{2} & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

Pivot — Pivot sütunu

$(A_1)_{\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_2}$ uygulanırsa B_1 elde edilir.

$$\begin{matrix} \\ B_1 = \end{matrix} \begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

$(B_1)_{\frac{1}{2}\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_2}$ uygulanırsa C_1 elde edilir.

$$\begin{matrix} \\ C_1 = \end{matrix} \begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

$(B_1)_{\frac{1}{2}\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_2}$ uygulanırsa C_1 elde edilir.

$$\begin{matrix} \\ D_1 = \end{matrix} \begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \end{matrix}.$$

D_1 matrisinin 1. satırı silindiğinde A_2 matrisi elde edilir. Yukarıdaki işlemleri A matrisi yerine A_2 matrisini alarak tekrar edelim. Burada, A_2 matrisinin hiçbir satırının yer değiştirilmesi zorunlu değildir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \textcircled{2} & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = B_2$$

Pivot; A_2'nin Pivot sütunu

$(B_2)_{\frac{1}{2}\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_2}$ uygulanırsa C_2 elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Son olarak $(C_2)_{-2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2}$ uygulanırsa D_2 elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Böylece,

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi satırca eşelon şeklindedir ve A matrisine satırca denktir. ■

El ile hesaplama yapıldığında, kesirlerden kaçınmak için işlemlerdeki adımlarda uygun değişiklikler yapmak bazen mümkündür.

Teorem 2.2 Sıfırdan farklı $m \times n$ tipindeki her $A = [a_{ij}]$ matrisi satırca (sütunca) indirgenmiş eşelon şeklindeki bir tek matrise satırca (sütunca) denktir.

İspat

A matrisine satırca denk olan eşelon şeklindeki H matrisini elde ederek Teorem 2.1'deki gibi devam edelim. H'nın 1., 2.,…, r. satırlarının sıfırdan farklı ve bu satırlardaki "ilk 1"lerin $c_1, c_2, \ldots c_r$ sütunlarda olduğunu kabul edelim. Öyleyse $c_1 < c_2 < \ldots < c_r$ yazılabilir. H matrisinin en son sıfırdan farklı satırı ile başlayarak, bu satırın uygun katlarını bu satırın üstündeki bütün satırlara, r. satırdaki ilk 1'in üstündeki c_r. sütundaki bütün elemanları sıfır yapmak için, ekleyelim. İlk 1'in yukarısındaki bütün elemanları sıfır yaparak, $(r-1), (r-2),\ldots$ ve 2. satırla birlikte bu işlemleri tekrar edelim. Sonuçta elementer satır işlemleri yardımıyla H matri-

sinden elde edilmiş ve dolayısıyla H matrisine satırca denk olan satırca indirgenmiş eşelon şeklindeki bir K matrisi elde edilir. A matrisi H'ya satırca denk ve H'da K'ya satırca denk olduğundan A matrisi K matrisine satırca denktir. A matrisinin sütunca indirgenmiş eşelon şeklindeki bir matrise sütunca denk olduğunu gösteren benzer bir ispat verilebilir. Verilen bir matrise satırca denk olan satırca indirgenmiş eşelon şeklinde yalnız bir matrisin olduğu bazı zorluklara rağmen gösterilebilir. İspat için, "K. Hoffman ve R. Kunze, *Linear Algebra,* 2. baskı (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1971)" kitabına bakınız. ■

Uyarı Bir matrisin satırca eşelon şeklinin tek olmadığına dikkat ediniz.

ÖRNEK 6 Örnek 5'te verilen A matrisine satırca denk olan satırca indirgenmiş eşelon şeklinde bir matris bulunuz.

Çözüm

Örnek 5'te elde edilen A matrisine satırca denk olan satırca eşelon şeklindeki H matrisini ele alalım. İlk 1'in üstündeki bütün elemanları sıfırlamak için H matrisinin sıfırdan farklı her bir satırının uygun katlarını diğer satırlara ekleyelim:

Bundan dolayı, H'nın 3. satırının $(-\frac{3}{2})$ katını H'nın 2. satırına eklemekle başlayalım:

$$J_1 = H_{-\frac{3}{2}\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_2 = (J_1)_{\frac{5}{2}\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{19}{4} & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Son olarak, J_2'nin 2. satırının (–1) katı 1. satıra eklenirse,

$$K = (J_2)_{-1\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & \frac{19}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bulunan K matrisi satırca indirgenmiş eşelon şeklinde olup A matrisine satırca denktir. İkinci bir yol olarak, A'nın satırca indirgenmiş eşelon şekli

$$H_{\substack{-\frac{3}{2}\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2 \\ \frac{5}{2}\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_1 \\ -1\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_1}}$$

şeklinde de ifade edilebilir. ■

Uyarı Verilen bir A matrisine satırca denk olan satırca indirgenmiş eşelon şeklindeki bir K matrisini bulmak için burada kullanılan işlemler tek değildir. Örneğin, önce A'ya satırca denk olan satırca eşelon şeklindeki bir H matrisi elde edilir ve sonra H matrisini satırca indirgenmiş eşelon şekline dönüştürmenin yerine aşağıdaki işlemi uygulayabiliriz. İlk olarak ilk 1'in altındaki elemanları sıfırlanır ve sonra ilk 1'in üstündeki elemanları doğrudan doğruya sıfırlanır. Bu işlemler Örnek 6'da verilen işlemler kadar etkili değildir.

Anahtar Kelimeler

Yok etme metodu
Satırca indirgenmiş eşelon şekil
İlk eleman
Satırca eşelon şekil
Elementer satır (sütun) işlemi
Satırca (sütunca) denklik
Pivot sütun
Pivot

2.1 Alıştırmalar

1. Aşağıda verilen matrislerin her birinin bir satırca eşelon şeklini bulunuz. Elementer satır işlem gösterimlerini kullanarak satır işlemlerinizi yazınız.

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -2 & 7 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & -3 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

2. Aşağıda verilen matrislerin her birinin bir satırca eşelon şeklini bulunuz. Elementer satır işlem gösterimlerini kullanarak satır işlemlerinizi yazınız.

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & 1 & 1 & 10 \\ 4 & -6 & -4 & -2 & -14 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -2 & -1 & 10 \\ 4 & 3 & -12 \end{bmatrix}$

3. Aşağıdaki matrislerin her biri satırca eşelon şeklindedir. Bu matrislerin satırca indirgenmiş eşelon şeklini bulunuz. Ayrıca elementer satır işlem gösterimlerini kullanarak satır işlemlerinizi not ediniz.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. Aşağıdaki matrislerin her biri satırca eşelon şeklindedir. Bu matrislerin satırca indirgenmiş eşelon şeklini bulunuz. Ayrıca elementer satır işlem gösterimlerini kullanarak satır işlemlerinizi not ediniz.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

5. Aşağıda verilen matrislerin her birinin satırca indirgenmiş eşelon şeklini bulunuz. Ayrıca elementer satır işlem gösterimlerini kullanarak satır işlemlerinizi not ediniz.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & -5 \end{bmatrix}$

6. Aşağıda verilen matrislerin her birinin satırca indirgenmiş eşelon şeklini bulunuz. Ayrıca elementer satır işlem gösterimlerini kullanarak satır işlemlerinizi not ediniz.

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -2 & 7 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & -3 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

7. x, y, z ve w sıfırdan farklı reel sayılar olsun. Aşağıdaki matrislerin her birini eğer matrisler satır-

ca eşelon şeklinde ise REF, satırca indirgenmiş eşelon şeklinde ise RREF veya matrisler hem REF ve hem de RREF şeklinde değilse N ile adlandırınız.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & w & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & w & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. x, y, z ve w sıfırdan farklı reel sayılar olsun. Aşağıdaki matrislerin her birini eğer matrisler satırca eşelon şeklinde ise REF, satırca indirgenmiş eşelon şeklinde ise RREF veya matrisler hem REF hem de RREF şeklinde değilse N ile adlandırınız.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & y & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. A, $n \times n$ tipinde satırca indirgenmiş eşelon şeklinde bir matris olsun. $A \neq I_n$ ise A'nın tamamıyla sıfırlardan oluşan bir satıra sahip olduğunu ispatlayınız.

10. Aşağıda verilen her bir ifadeyi ispatlayınız.

(a) Her matris kendisine satırca denktir.

(b) Eğer B matris, A matrisine satırca denk ise A matrisi de B matrisine satırca denktir.

(c) C matrisi, B matrisine satırca denk ve B matrisi de A matrisine satırca denk ise C matrisi A matrisine satırca denktir.

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

matrisi verilsin.

(a) A'ya sütunca denk olan sütunca eşelon şeklinde bir matris bulunuz.

(b) A'ya sütunca denk olan sütunca indirgenmiş eşelon şeklinde bir matris bulunuz.

12. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

matrisi için Alıştırma 11'i tekrarlayınız.

13. $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

matrisinin satırca indirgenmiş eşelon şeklini bulunuz.

2.2 Lineer Sistemlerin Çözümü

Bu Kesimde, Kesim 1.1'de verilen yok etme metoduna kıyasla bir lineer denklem sisteminin çözümünü daha etkili olarak bulmak için Kesim 2.1'de verilen eşelon şekillerini kullanacağız. Bir eşelon şekille birlikte bir lineer sistemin ilaveli matrisini kullanarak n bilinmeyenli, m lineer denklemli bir sistemin çözümü için iki metot geliştireceğiz. Bu metotlarda, lineer sistemin ilaveli matrisine elementer satır işlemleri uygulayarak ve bir denk lineer denklem sistemini (yani, orijinal lineer denklem ile aynı çözüme sahip olan yeni bir sistem) temsil eden yeni bir matris elde edilir. Burada en son lineer sistemin daha kolay çözülebilir olması önemli noktadır.

İlaveli matrisi bir özel bir yapıda olan lineer sistemin pratik bir şekilde nasıl çözüleceğini görmek için

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

matrisinin bir lineer sistemin ilaveli matrisini temsil ettiğini kabul edelim. Öyleyse,

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ x_2 + x_3 &= 2 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}$$

denklemlerinden

$$\begin{aligned} x_3 &= -1 \\ x_2 &= 2 - x_3 = 2 + 1 = 3 \\ x_1 &= 3 - 2x_2 = 3 - 6 = -3 \end{aligned}$$

çözümü kolaylıkla bulunur.

Bu kesimin amacı, verilen bir lineer sistemi temsil eden ilaveli matrisi; çözümü kolaylıkla bulunabilen bir şekle dönüştürmektir.

Biz, şimdi, lineer sistemin çözümü için satır işlemlerini uygulayacağız.

Teorem 2.3 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ve $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ n bilinmeyenli m lineer denklemli iki lineer sistem olsun. Eğer $[A \mid \mathbf{b}]$ ve $[C \mid \mathbf{d}]$ ilaveli matrisleri satırca denk ise bu iki lineer sistem denktir, yani, sistemler tam olarak aynı çözüme sahiptirler.

İspat

İlaveli matrisler üzerine 3 elementer satır işleminin, denklem sistemlerinin verildiği Kesim 1.1'de tartışıldığı üzere, lineer sistem üzerinde 3 işlem olduğu gerçeği ve satırca denkliğin tanımından ispat yapılır. Eğer bir sistemin çözümü yoksa diğer sistemin de çözümü yoktur. ■

Kesim 1.1'de hatırlatıldığı gibi,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

şeklindeki lineer denklem sistemlerine bir homogen lineer sistem denir. Ayrıca (1) denklemi yerine

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{2}$$

matris şekli yazılabilir.

Sonuç 2.1 A ve C, $m \times n$ tipinde satırca denk iki matris ise $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ve $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen lineer sistemleri denktirler.

İspat

Okuyucuya bırakılmıştır. ■

Lineer sistemleri çözmek için iki basit metodun temel özelliklerini geliştirdiğimize dikkat edelim. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistemi ile birlikte başlangıçtan itibaren oluşan düşünce, $[A \mid \mathbf{b}]$ ilaveli matrise satırca denk olan ya satırca indirgenmiş eşelon şekilde ya da satırca eşelon şekilde $[C \mid \mathbf{d}]$ bölünmüş matrisi elde etmektir. Burada $[C \mid \mathbf{d}]$; bölünmüş matris yapısından dolayı gayet basit çözülebilir ve $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ lineer denklem

sistemini temsil eder. Bu sistemlerin çözümlerinin cümlesi tamamen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sisteminin çözümlerinin cümlesini verir; yani, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ve $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ lineer sistemleri denktir (Kesim 1.1'e bakınız.). $[\,C \mid \mathbf{d}\,]$ matrisini satırca eşelon şeklinde veren metoda **Gauss yok etme** ve $[\,C \mid \mathbf{d}\,]$ matrisini satırca indirgenmiş eşelon şeklinde veren metoda **Gauss*-Jordan† indirgeme metodu** denir. Kesin konuşmak gerekirse, orijinal Gauss-Jordan İndirgeme metodunu bir önceki uyarıda açıkladık.

Bu kitaptaki hazırlanan versiyon oldukça etkilidir. Esas (güncel) uygulamada, ne Gauss yok etme ne de Gauss-Jordan indirgeme metodu, Kesim 2.5'te tartışılan A'nın LU-ayrışımını içeren metot kadar kullanılmaz. Bununla beraber, Gauss yok etme ve Gauss-Jordan indirgeme metodu küçük problemler için uygundur ve bu kitap içerisinde oldukça kullanacağız.

Gauss yok etme metodu 2 adımdan oluşur:

Adım 1. $[\,A \mid \mathbf{b}\,]$ ilaveli matrisini elementer satır işlemleri kullanarak satırca eşelon şeklindeki $[\,C \mid \mathbf{d}\,]$ matrisine dönüştürülmesi

Adım 2. **Geriye yerine koyma (sondan başa doğru yerine koyma)** kullanarak $[\,C \mid \mathbf{d}\,]$ ilaveli matrisine karşılık gelen lineer sistemin çözümü

A, $n \times n$ tipinde bir kare matris olması durumunda $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistemi bir tek çözüme sahiptir ve $[\,C \mid \mathbf{d}\,]$ matrisi



CARL FRIEDRICH GAUSS



WILHELM JORDAN

*Dünyanın en ünlü matematikçilerinden birisi olan Carl Friedrich Gauss (1777–1855), fakir bir işçi ailenin çocuğu olarak Almanya'nın Brunswick şehrinde doğdu ve Almanya'nın Göttingen şehrinde öldü. Babasının dikkatini çekmemesine ve hata babası tarafından "dalgın çocuk" olarak isimlendirilmesine rağmen o dahice harika bir çocuktur. Onun öğretmenleri, yerel orta dereceli okulda okuması için Brunswick Dükünden Gauss'a bir burs sağlamışlardır. Gauss bir genç olarak orada, sayılar teorisinde orijinal buluşlar yapmış ve Öklidyen olmayan geometri hakkında da bazı düşünceler ortaya atmıştır. Onun bilimsel yayınları; sayılar teorisi, matematiksel astronomi, matematiksel coğrafya, istatistik, diferensiyel geometri ve magnatizma'ya önemli katkılar sağlamıştır. Gauss'un günlük defterinde ve özel notların da onun hiç yayınlanmamış bazı buluşları bulunmaktadır.

Birkaç arkadaşa sahip sade ılımlı bir insandı ve özel hayatında mutsuz olup bu özel kredinin bilimsel buluşları için verildiğinden çok kaygılıydı. Diğer bilim adamlarının sonuçlarına güvendiği zaman onları tanımaya dikkat ederdi ve diğerleri bağımsız olarak onun özel notlarındaki sonuçları bulduğunda o, çabucak öncelik iddia ederdi.

Araştırmalarında, Gauss, kendi adı ile anılan ve sonraki kuşakların matrislerin satırca indirgenmesine genelleştirdiği bir hesaplama metodu kullandı. Gerçi bu metot yaklaşık 2000 yıl önce Çinliler tarafından kullanılmaktaydı.

†Wilhelm Jordan (1842-1899), Güney Almanya'da doğdu. Almanya'daki Stuttgart kolejine devam etti ve 1868 yılında Almanya'nın Karlsruhe şehrinde teknik kolejde jeodezi profesörü oldu. Almanya'nın çeşitli bölgelerinde bulunmuştur. Jordan en büyük çalışması *Handbuchder Vermessungskunde* (*Handbook of Geodesy*) olan verimli bir yazardır. Ayrıca bu kitap Fransızca, İtalyanca ve Rusça'ya tercüme edildi. O görkemli bir yazar ve mükemmel bir öğretmendi. Ne yazık ki, Gauss-Jordan indirgeme metodu yaygın olarak ünlü Fransız Matematikçi Camile Jordan (1839–1922) adıyla anılmaktadır. Ayrıca bu metodun aynı dönemlerde Lüksembur'da yaşayan B. I. Clasen adlı bir papaz tarafından bilinenlerden bağımsız olarak keşfedildiği de söylenir. Büyük matematikçilere ait bu biyografi kesiti, "S. C. Althoen ve R. McLaughlin, *Gauss Jordan reduction*: *A brief history* MAA Montly, 94 (1987), 130–142" adlı mükemmel bir makaleye dayanmaktadır.

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & c_{12} & c_{13} & \cdots & & c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & c_{23} & \cdots & & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{n-1\,n} & d_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & d_n \end{array}\right]$$

şeklindedir. (Diğer durumlar Örnek 1'den sonra ele alınmıştır.) Bu ilaveli matris

$$\begin{aligned} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ \ldots \ + \ & c_{1n}x_n = d_1 \\ x_2 + c_{23}x_3 + \ \ldots \ + \ & c_{2n}x_n = d_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \vdots \quad\ \vdots \\ x_{n-1} + \ & c_{n-1\,n}x_n = d_{n-1} \\ & x_n = d_n \end{aligned}$$

lineer sistemini temsil eder.

Geriye yerine koyma kullanarak, n. denklemden yukarı doğru devam ederse her bir denklemden bir değişken çözülür:

$$\begin{aligned} x_n &= d_n \\ x_{n-1} &= d_{n-1} - c_{n-1\,n}x_n \\ &\vdots \\ x_2 &= d_2 - c_{23}x_3 - c_{24}x_4 - \cdots - c_{2n}x_n \\ x_1 &= d_1 - c_{12}x_2 - c_{13}x_3 - \cdots - c_{1n}x_n. \end{aligned}$$

ÖRNEK 1

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 9 \\ 2x - y + z &= 8 \\ 3x \quad - z &= 3 \end{aligned}$$

lineer sistemi

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

ilaveli matrise sahiptir. Bu matris satırca eşelon şekline dönüştürülürse,

$$[C \mid \mathbf{d}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

elde edilir. Geri koyma metodu uygulanırsa

$$\begin{aligned} z &= 3 \\ y &= 2 - z = 2 - 3 = -1 \\ x &= 9 - 2y - 3z = 9 + 2 - 9 = 2 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece çözüm $x = 2$, $y = 1$, $z = 3$ olup tektir. ■

A, $m \times n$ tipindeki genel durumda için de benzer şekilde çözülebilir, fakat, biz meydana gelebilecek değişik durumlar için açıklama yapmalıyız. Bundan dolayı, C, $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ lineer sistemini ve satırca eşelon şeklindeki $[\,C \mid \mathbf{d}\,]$ ilaveli matrisini göz önüne alalım. Bu durumda, örnek olarak, $[\,C \mid \mathbf{d}\,]$ ilaveli matrisi

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c}
1 & c_{12} & c_{13} & \cdots & & & c_{1n} & d_1 \\
0 & 0 & 1 & c_{24} & \cdots & & c_{2n} & d_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & & 0 & 1 & c_{k-1\,n} & d_{k-1} \\
0 & \cdots & & & \vdots & 0 & 1 & d_k \\
0 & \cdots & & & & \vdots & 0 & d_{k+1} \\
\vdots & & & & & & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & 0 & d_m
\end{array}\right]$$

şeklinde olabilir.

Bu ilaveli matris

$$\begin{array}{rcccccl}
x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + & \cdots & & + & c_{1n}x_n = d_1 \\
x_3 + c_{24}x_4 + & \cdots & + & c_{2n}x_n = d_2 \\
\vdots & & & & \\
& & x_{n-1} + & c_{k-1\,n}x_n = d_{k-1} \\
& & & x_n = d_k \\
0x_1 + \quad + & \cdots & & + & 0x_n = d_{k+1} \\
\vdots & \vdots & & & \vdots \\
0x_1 + \quad + & \cdots & & + & 0x_n = d_m
\end{array}$$

lineer sistemini temsil eder.

İlk olarak, $d_{k+1} = 1$ ise en azından bir denklem sistem sağlanmadığından $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ lineer sisteminin çözümü yoktur. $d_{k+2} = \ldots = d_m = 0$ anlamına gelen ($[\,C \mid \mathbf{d}\,]$ satır eşelon şekil olduğu kabul edildiğinden) $d_{k+1} = 0$ ise $x_n = d_k$, $x_{n-1} = d_{k-1} - c_{k-1n}x_n = d_{k-1} - c_{k-1n}d_k$ elde edilir ve her bir satırdaki "ilk 1" e karşılık gelen diğer bilinmeyenleri bulmak için geri yerine koyma uygulanarak devam edilir. Elbette, çözümde bilinmeyenlerinin bir kısmı herhangi bir değer alan diğerleri türünden ifade edilebilir. Bu sadece $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ sisteminin sonsuz çözümlere sahip olduğunu gösterir. Diğer taraftan, her bilinmeyen, çözümün tek olduğunu gösteren belirli bir değere sahip olabilir.

ÖRNEK 2

$$[\,C \mid \mathbf{d}\,] = \left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
0 & 1 & 2 & 3 & -1 & 7 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 7 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 9
\end{array}\right]$$

ilaveli matrisini alalım. Öyleyse,

$$x_4 = 9 - 2x_5$$
$$x_3 = 7 - 2x_4 - 3x_5 = 7 - 2(9 - 2x_5) - 3x_5 = -11 + x_5$$
$$x_2 = 7 - 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 2 + 5x_5$$
$$x_1 = 6 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 = -1 - 10x_5$$
$$x_5 = \text{herhangi reel sayı}$$

dır. O halde tüm çözümler

$$x_1 = -1 - 10r$$
$$x_2 = 2 + 5r$$
$$x_3 = -11 + r$$
$$x_4 = 9 - 2r$$
$$x_5 = r, \text{ herhangi reel sayı}$$

şeklindedir. r herhangi bir reel sayı seçildiğinden verilen lineer sistem sonsuz çözüme sahiptir. ■

ÖRNEK 3

Eğer

$$[C \mid \mathbf{d}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

ise $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ sisteminin çözümü yoktur. Çünkü son denklem

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1$$

şeklindedir ve hiçbir zaman sağlanmaz. ■

Gauss-Jordan indirgeme metodu kullanıldığında $[A \mid \mathbf{b}]$ ilaveli matrisi, satırca indirgenmiş eşelon şeklindeki $[C \mid \mathbf{d}]$ matrisine dönüşür. Bunun manası $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ lineer sistemini geri yerine koyma metodunu kullanmadan da ileriki örneklerde gösterildiği gibi, çözebiliriz. Fakat elbette, bu matrisi satırca indirgenmiş eşelon şekline dönüştürmek satırca eşelon şekline dönüştürmekten daha fazla çaba gerektirir. Bu kitapta anlatıldığı gibi, Gauss yok etme ve Gauss-Jordan indirgeme metotlarının tekniklerinin aynı sayıda işleme ihtiyaç duyduğu ortaya çıkmaktadır.

ÖRNEK 4

$$[C \mid \mathbf{d}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right]$$

ise tek çözüm

$$x_1 = 5$$
$$x_2 = 6$$
$$x_3 = 7$$
$$x_4 = 8$$

elde edilir. ■

ÖRNEK 5

$$[C \mid \mathbf{d}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ise çözüm x_2, x_3 ve x_5 herhangi reel sayı olmak üzere

$$x_4 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}x_5$$
$$x_1 = \tfrac{2}{3} - x_2 - 2x_3 + \tfrac{5}{2}x_5,$$

şeklindedir. O halde sistem sonsuz çözüme sahiptir. Bundan dolayı

$$x_1 = \tfrac{2}{3} - r - 2s + \tfrac{5}{2}t$$
$$x_2 = r$$
$$x_3 = s$$
$$x_4 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}t$$
$$x_5 = t,$$

elde edilir. ■

Şimdi, hem Gauss yok etme ve Gauss-Jordan indirgeme metotlarıyla bir lineer sistemi çözelim.

ÖRNEK 6

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6 \\ 2x - 3y + 2z &= 14 \\ 3x + y - z &= -2. \end{aligned}$$

lineer sistemini göz önüne alalım. Bu sistemi temsil eden ilaveli matris

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

dır. Bu ilaveli matrisin 1. satırın (–2) katı 2. satıra eklenirse

$$[A \mid \mathbf{b}]_{-2\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

1. satırının (–3) katı 3. satıra eklenirse

$$[A \mid \mathbf{b}]_{\substack{-2\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2 \\ -3\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3\to\mathbf{r}_3}} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & -10 & -20 \end{array}\right]$$

3. satırı $(-\frac{1}{5})$ ile çarpılır ve 2. satır ile 3. satır yer değiştirilirse

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{b} \end{array}\right]_{\substack{-2\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2\\ -3\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3\to\mathbf{r}_3\\ -\frac{1}{5}\mathbf{r}_3\to\mathbf{r}_3\\ \mathbf{r}_2\leftrightarrow\mathbf{r}_3}} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \end{array}\right]$$

2. satırın 7 katı 3. satıra eklenirse

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{b} \end{array}\right]_{\substack{-2\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2\\ -3\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3\to\mathbf{r}_3\\ -\frac{1}{5}\mathbf{r}_3\to\mathbf{r}_3\\ \mathbf{r}_2\leftrightarrow\mathbf{r}_3\\ 7\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3\to\mathbf{r}_3}} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 30 \end{array}\right]$$

3. satırı $\frac{1}{10}$ ile çarpılırsa

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{b} \end{array}\right]_{\substack{-2\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2\\ -3\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3\to\mathbf{r}_3\\ -\frac{1}{5}\mathbf{r}_3\to\mathbf{r}_3\\ \mathbf{r}_2\leftrightarrow\mathbf{r}_3\\ 7\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3\to\mathbf{r}_3\\ \frac{1}{10}\mathbf{r}_3\to\mathbf{r}_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

elde edilir. Bu matris satırca eşelon şeklindedir. O halde 3. satırdan $z = 3$ ve 2. satırdan

$$y + 2z = 4$$

olduğu görülür. Böylece

$$y = 4 - 2(3) = -2$$

bulunur. 1. satırdan

$$x + 2y + 3z = 6$$

yazılır ve buradan

$$x = 6 - 2y - 3z = 6 - 2(-2) - 3(3) = 1$$

bulunur. Bundan dolayı çözüm $x = 1$, $y = -2$, $z = 3$ elde edilir. Bunlar Gauss yok etme metodu kullanarak elde edilen çözümlerdir.

Verilen lineer sistemi Gauss-Jordan indirgeme metodu ile çözmek için son matris aşağıdaki adımları takip ederek satırca indirgenmiş eşelon şeklindeki $[\,C\,|\,\mathbf{d}\,]$ matrisine dönüştürülür:

3. satırın (–2) katı 2. satıra eklenirse

$$\left[\begin{array}{c|c} C & \mathbf{d} \end{array}\right]_{-2\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

3. satırın (–3) katı 1. satıra eklenirse

$$\left[\begin{array}{c|c} C & \mathbf{d} \end{array}\right]_{\substack{-2\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2\\ -3\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_1}} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

elde edilir. Sonuç olarak 2. satırın (–2) katı 1. satıra eklenirse

$$[C \mid \mathbf{d}]_{\substack{-2\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2\\ -3\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_1\\ -2\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_1}} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

elde edilir. Böylece $x = 1$, $y = -2$ ve $z = 3$ çözümü elde edilir. ■

Uyarılar

1. Elementer satır işlemlerini kullanırken, ilk n eleman sıfır ve $n + 1$ elemanı sıfırdan farklı olan satırca indirgenmiş eşelon şekle dönüştürülmüş ilaveli matrisinin bir satırı ile karşılaşabiliriz. Bu durumda, bir hesaplama yapamayabiliriz ve verilen lineer denklem sisteminin tutarsız olduğu sonucuna varırız.
2. Hem Gauss yok etme hem de Gauss-Jordan indirgeme metodunda, sadece satır işlemleri kullanabiliriz. Herhangi bir sütun işlem kullanmaya çalışmayacağız.

■ Uygulamalar

Lineer sistemler birçok uygulamada ortaya çıkmaktadır. Bu kesimde bunların bir kaçını inceleyeceğiz.

İkinci Dereceden (Kuadratik) İnterpolasyon

Bilim ve mühendislikte çeşitli yaklaşım teknikleri, verilen $[(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)]$ üç veri noktalarından geçen bir parabol kullanır. Burada, $i \neq j$ için $x_i \neq x_j$'dır. x-koordinatları hepsi farklı olduğundan bu noktalara **farklı noktalar** diyeceğiz. Bir $p(x) = ax^2 + bx + c$ ikinci dereceden polinomunun grafiği bir paraboldür ve verilen noktaları, a, b ve c katsayılarını belirlemek için aşağıdaki gibi kullanacağız. $p(x_i) = y_i (i = 1, 2, 3)$ olması bize bilinmeyenleri a, b, c olan üç lineer denklem verir:

$$\begin{aligned} p(x_1) = y_1 \quad &\text{veya} \quad ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ p(x_2) = y_2 \quad &\text{veya} \quad ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \\ p(x_3) = y_3 \quad &\text{veya} \quad ax_3^2 + bx_3 + c = y_3. \end{aligned} \tag{3}$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix}$$

katsayılar matrisi, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$. olsun. O zaman (3) denklemi $A\mathbf{v} = \mathbf{y}$ matris eşitliği şeklinde yazılabilir ve bu denklemin ilaveli matrisi aşağıdaki gibidir.

$$[A \mid \mathbf{y}] = \left[\begin{array}{ccc|c} x_1^2 & x_1 & 1 & y_1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 & y_2 \\ x_3^2 & x_3 & 1 & y_3 \end{array}\right]$$

a, b ve c değerlerini elde etmek için Gauss yok etme veya Gauss-Jordan indirgeme metodu ile bu lineer sistemi çözelim. Bu lineer sistemin tek bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart noktaların farklı olmasıdır. Verilen veri cümlesinin noktalarıyla uyumlu parabolün yapısına kuadratik interpolasyon denir ve parabole de kuadratik interpolant denir. Bu oluşum $n + 1$ noktaları ve n. dereceli polinomların farklı veri cümlelerine genelleştirilebilir. Biz aşağıdaki örnekle bu ikinci dereceden yapıyı açıklayacağız:

ÖRNEK 7 $[(1, -5), (-1, 1), (2, 7)]$ üç farklı nokta için kuadratik interpolanttı bulunuz.

Çözüm

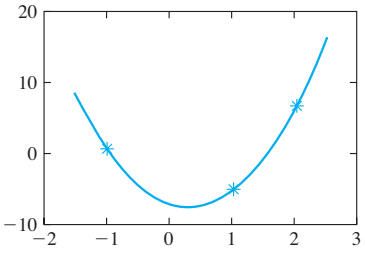
(3) lineer sistemini oluşturarak bu sistemin ilaveli matrisi

$$[A \mid \mathbf{y}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

şeklinde bulunur. (Gösteriniz.) Bu lineer sistemi çözersek

$$a = 5, \quad b = -3, \quad c = -7$$

elde edilir. Böylece kuadratik interpolant $p(x) = 5x^2 - 3x - 7$ şeklinde bulunur ve grafiği Şekil 2.1'deki gibidir. Yıldız işaretleri üç veri noktalarını gösterir. ■



ŞEKİL 2.1

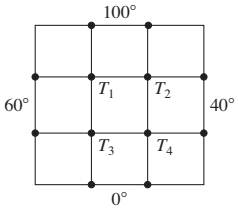
Sıcaklık Dağılımı

Bir kare levhadaki sıcaklık dağılımını tahmin etmek için basit bir model bir lineer denklem sistemi oluşturur. Uygun lineer sistemi kurmak için aşağıdaki bilgiyi kullanacağız: Kare levha, ısı akışı levha içinde olacak şekilde levhanın üstünden ve altından tam olarak izole edilir. Dörtkenarı farklı sıcaklıkta tutulur. Levhadaki bir noktadaki sıcaklığı tahmin etmek için dört sınır komşuluğundaki (batı, kuzey, doğu, güney) sıcaklıkların ortalaması olan kuralı uygulanır.

ÖRNEK 8 Şekil 2.2'de gösterilen levhadaki dört eşit aralıklı iç noktadaki $i = 1, 2, 3, 4$ için T_i sıcaklıklarını tahmin ediniz.

Çözüm

Şimdi sıcaklıkları tahmin etmek için lineer sistemi oluşturalım. Bu model için plaka sıcaklıklarına gereksinim duyduğumuz noktalar Şekil 2.2 de noktalarla belirtiliyor. Eğer bizim ortalama kuralı kullanırsak,



ŞEKİL 2.2

$$T_1 = \frac{60 + 100 + T_2 + T_3}{4} \quad \text{ya da} \quad 4T_1 - T_2 - T_3 = 160$$

$$T_2 = \frac{T_1 + 100 + 40 + T_4}{4} \quad \text{ya da} \quad -T_1 + 4T_2 - T_4 = 140$$

$$T_3 = \frac{60 + T_1 + T_4 + 0}{4} \quad \text{ya da} \quad -T_1 + 4T_3 - T_4 = 60$$

$$T_4 = \frac{T_3 + T_2 + 40 + 0}{4} \quad \text{ya da} \quad -T_2 - T_3 + 4T_4 = 40$$

denklemleri elde edilir.

Bu lineer sisteminin ilaveli matrisi

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & -1 & 0 & 160 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & 140 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 60 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 40 \end{array}\right]$$

dır. (Gösteriniz.) Gauss yok etme veya Gauss-Jordan indirgeme metotlarını kullanarak

$$T_1 = 65°, \quad T_2 = 60°, \quad T_3 = 40°, \quad T_4 = 35°$$

tek çözümü elde edilir (gösteriniz). ■

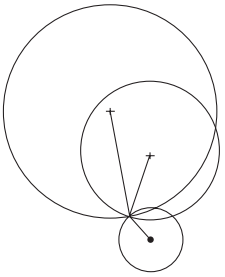
Küresel Konumlandırma Sistemi

Bir Küresel Konumlandırma Sistemi (GPS=Global Positioning System), uydudan yönlendirilen ve kullanıcıya konum belirleme hesaplarına gerek duymadan onun konumunun 3-boyutlu koordinatlarda belirlenmesine yardımcı olan bir uydu-tabanlı küresel sistemdir. Bu sistem hedeflerin yerini belirlemek için askeriye tarafından geliştirilmiştir ve U.S. Savunma Bakanlığı tarafından 1995 yılında hayata geçirilmiştir. Ayrıca GPS sistemlerinin deniz araçları, otomobiller ve uçaklara monte edilebilir ya da kişisel olarak taşınabilir modülleri vardır.

GPS uyduları sıralama esasına dayanır. Yani, bir alıcı ile üç ya da daha fazla uydunun konumu arasındaki uzaklığı hesaplama ve sonra bazı matematik uygulamaları esasına dayanır. Uyduların konumlarının bilindiği kabul edilerek alıcının konumu, uyduların her birinin alıcıya olan uzaklığını belirleyerek hesaplanabilir. GPS bu üç ya da daha fazla bilinen referans noktalarını ölçülen uzaklıkları ve alıcının konumunu "trilaterates" yapar. Trilateration bir nesnenin göreceli konumunu belirleme yöntemidir ve GPS durumda uyduların yörüngesidir. GPS hesaplamaları için üç x, y ve z konum değişkenleriyle birlikte dördüncü t zaman parametresi vardır. GPS alıcısının uydudan gelen sinyallerin uzaklığını belirlemek için hesaplarda kullanıldığından Zaman, mutlaka göz önünde bulundurulmalıdır. Hatta sinyaller ışık hızında hareket etse bile atmosfer şartlarına benzer diğer faktörlerle birlikte aktarma için küçük zaman gecikmeleri vardır. Bu doğru verinin toplanmış olduğundan emin olmak için açıklanmış olmalıdır. GPS'nin bu önemli tartışma-

sında, biz, GPS'de girmiş olan önemli modellerin bir kısmı olan lineer denklem sistemlerinin Matematiğe nasıl girdiğini görmek için basit bir model kullanacağız.

"Reel" GPS için, 3-boyuta göre düşünmeye ihtiyaç duyacağız. Bu bağlamda, her bir uydu bir küreyle temsil edilir ve alıcının yerini kürelerin bir arakesitini hesaplamayla bulabileceğimiz dört küreye ihtiyaç duyarız; yani, kürelerin kesişimi tek bir noktadır. Bizim tartışmamız için, 2-boyutta düşüneceğiz ve üç uyduyu göz önüne alacağız. Bunların her biri merkezinin koordinatları bilinen bir çember ile temsil edilsin. Bizim GPS alıcısının, onun bulunduğu yer ile uydunun konumu arasındaki uzaklığın tanımlanabilir olduğunu kabul edeceğiz; yani, her bir çemberin yarıçapı bilinsin. Öyleyse, cebirsel olarak (4) denkleminde gösterildiği gibi, (a_j, b_j) merkezli ve r_j yarıçaplı ($j = 1, 2, 3$) üç j çemberlerinin denklemine sahip oluruz:



ŞEKİL 2.3

$$\begin{aligned}(x-a_1)^2+(y-b_1)^2&=r_1^2\\(x-a_2)^2+(y-b_2)^2&=r_2^2\\(x-a_3)^2+(y-b_3)^2&=r_3^2\end{aligned} \tag{4}$$

Kurulan yapı itibariyle, GPS alıcısının yeri her bir çemberin uzunluğu üzerindedir. Böylece (4) denklemindeki her bir denklemi sağlayan (x, y) noktasının var olduğunu garanti eder. Bu noktada, GPS alıcısının koordinatlarını sağlar. Şekil 2.3'de (4) deki lineer olmayan denklem sistemlerini gösterir. [Niçin (4) bir lineer denklem sistemi değildir?]

(4)'teki denklemler lineer denklemler olmadığından nasıl çözüleceği bir sorun olarak ortaya çıkar. Bunun cevabını; önce her bir denklemi açarak cebirsel işlemlerle x^2 ve y^2 içeren terimleri yok ederiz. (5) denkleminde (4)'teki denklemlerin her birinin açılmış hali görünür; her bir denklemde x^2 ve y^2'nin olduğuna dikkat ediniz.

$$\begin{aligned}x^2-2a_1x+a_1^2+y^2-2b_1y+b_1^2&=r_1^2\\x^2-2a_2x+a_2^2+y^2-2b_2y+b_2^2&=r_2^2\\x^2-2a_3x+a_3^2+y^2-2b_3y+b_3^2&=r_3^2\end{aligned} \tag{5}$$

Şimdi, (6) denklemindeki ifadeleri elde etmek için (5)'teki her bir denklemi tekrar düzenleyelim.

$$\begin{aligned}x^2-2a_1x+a_1^2+y^2-2b_1y+b_1^2-r_1^2&=0\\x^2-2a_2x+a_2^2+y^2-2b_2y+b_2^2-r_2^2&=0\\x^2-2a_3x+a_3^2+y^2-2b_3y+b_3^2-r_3^2&=0\end{aligned} \tag{6}$$

Daha sonra, (6) denklemindeki 1. denklemin sol tarafını 2. denkleminin sol tarafına eşitlersek, benzer olarak, 2. ve 3. denklemler için yapılırsa (7) denklemindeki x ve y değişkenli lineer sistem elde edilir.

$$\begin{aligned}-2a_1x+a_1^2-2b_1y+b_1^2-r_1^2&=-2a_2x+a_2^2-2b_2y+b_2^2-r_2^2\\-2a_3x+a_3^2-2b_3y+b_3^2-r_3^2&=-2a_2x+a_2^2-2b_2y+b_2^2-r_2^2\end{aligned} \tag{7}$$

Sonuç olarak, (8)'deki denklemleri elde etmek için x ve y terimleri parantezine alınırsa

$$\begin{aligned}-2(a_1-a_2)x-2(b_1-b_2)y&=(r_1^2-r_2^2)+(a_2^2-a_1^2)+(b_2^2-b_1^2)\\-2(a_3-a_2)x-2(b_3-b_2)y&=(r_3^2-r_2^2)+(a_2^2-a_3^2)+(b_2^2-b_3^2)\end{aligned} \tag{8}$$

elde edilir. Sade bir hale getirmek için, (8)'deki her bir denklemi (–1) ile çarpalım ve (9)'da sonuçlanan 2×2 sistemi için matris gösterimini yazalım.

$$\begin{bmatrix} 2(a_1 - a_2) & 2(b_1 - b_2) \\ 2(a_3 - a_2) & 2(b_3 - b_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r_2^2 - r_1^2) + (a_1^2 - a_2^2) + (b_1^2 - b_2^2) \\ (r_2^2 - r_3^2) + (a_3^2 - a_2^2) + (b_3^2 - b_2^2) \end{bmatrix} \quad (9)$$

Böylece, üç çemberin yarıçapı ve merkezlerinin koordinatları verildiğinde 2-boyutlu modelde GPS alıcısının yeri bulunabilir.

ÖRNEK 9 Üç çemberin yarıçapları ve merkezlerinin koordinatları Tablo 2.1'te gösterilmiştir. Denklemlerin uygun sistemleri (10)'da verilmiştir (gösteriniz) ve bu sistemin çözümü $x = 6$ ve $y = 10$'dır. (Gösteriniz.) Bundan dolayı, bu üç çemberin 2-boyutlu sistemdeki GPS alıcısının koordinatları (6,10)'dır.

TABLO 2.1

Çember	*Merkez*	*Yarıçap*
1	(–3, 50)	41
2	(11, –2)	13
3	(13, 34)	25

$$\begin{bmatrix} -28 & 104 \\ 4 & 72 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 872 \\ 744 \end{bmatrix} \quad (10)$$

■

Daha sonra, 3-boyutlu GPS için bir yaklaşım sunacağız. Bu durumda, (4) de bunlara benzer olan sistemdeki her bir denklem $j = 1, 2, 3, 4$ için

$$(x - a_j)^2 + (y - b_j)^2 + (z - c_j)^2 = (\text{alıcıdan uyduya olan uzaklık})^2 \quad (11)$$

şeklindedir. Burada (a_j, b_j, c_j), j uydusunun konumudur. Alıcıdan j uydusuna olan uzaklık, j uydusundan alıcıya ulaşan sinyali alan zamanın ölçülmesiyle hesaplanmıştır. Uydu, sinyali alıcıya göndermiş olan zamanı gösteren bir saat mekanizmasını içerir. t'yi sinyali alan zaman olarak alacağız. Sinyal ışık hızında hareket ettiğinden, "uzaklık = hız $\times$ geçen zaman" temel formülünü kullanarak uzaklığa iyi bir yaklaşık değerini elde ederiz. Bundan dolayı, şimdi x, y, z ve t gibi 4 bilinmeyen vardır. Biz, (7) ve (8) denklemlerinde bunlara benzer olan ifadeleri elde etmek için cebirsel olarak devam edelim. Bu, (9)'daki sisteme benzer 4 bilinmeyenli 3 denklemli bir sistem meydana getirir. Biz t zamanına göre x, y ve z için bu sistemi çözeriz. t bilinmeyenini bulmak için x, y ve z'nin bu ifadelerini (11) denklemindeki herhangi birinde yerine koyalım ve t için sonuçlanan kuadratik polinomu çözelim. Sonuç olarak, 3-boyuttaki alıcının yerini bulmak için x, y ve z içeren ifadelerdeki t'nin sonuç değerini kullanırız. Bu yaklaşım sonsuz birçok çözüme sahip bir sistemi kullanır ve daha sonra ustalıkla t "serbest" değişkeni bulmak için temel fiziksel durumunu kullanır.

Gerçek hayat, 3-boyutta özetlenmiş bizim yaklaşımımızdan daha karışıktır. Uydular sürekli hareket ederler, bu yüzden onların yerleri zamanla değişir ve bu değişim sonucunda oluşan hatalar, hesaplamalar: farklı şekilde oluşan ölçmelerde gerçek değeri ile bizim ölçümümüzdeki farklardır. Alıcının konumunun son derece doğru tahmini bu dersin amacının ötesindedir. Fakat daha detaylı bilgi için internet üzerinde tartışmalar ve birçok kitap vardır. Biz lineer denklem sistemlerini içeren GPS hesaplamalarının bir temel parçası sunduk.

■ Homogen Sistemler

Şimdi, n bilinmeyenli m lineer denklemden oluşan $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sistemini inceleyeceğiz.

ÖRNEK 10 İlaveli matrisi

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

olan homogen sistemi göz önüne alalım. İlaveli matris satırca indirgenmiş eşelon şeklinde olduğundan r ve s herhangi reel sayılar olmak üzere çözüm

$$\begin{aligned} x_1 &= -2r \\ x_2 &= s \\ x_3 &= -3r \\ x_4 &= -4r \\ x_5 &= r, \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. ■

Örnek 10'da, $m < n$ ve A ilaveli matrisi satırca indirgenmiş eşelon şeklinde olmak üzere n (= 5) bilinmeyenli m(= 4) lineer denklemli bir homogen sistemi çözülmüştür. Biz, sıfır elemanlarını içeren ilaveli matrisinin bir satırını dikkate almayabiliriz. Bundan dolayı, A'nın 1., 2.,…,r. satırları sıfırdan farklı satırlar ve i. satırdaki 1, c_i. sütunda olsun. Öyleyse $r < n$ için, n bilinmeyenli r denklemden oluşan bir homogen sistemi çözelim ve bu özel durumda (A, satırca indirgenmiş eşelon şeklindedir) kalan n-r bilinmeyenlerine göre $x_{c1}, x_{c2},\ldots, x_{cr}$'leri çözebiliriz. Sonuncu halde herhangi reel değerler alabileceğinden, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sisteminin bir çok çözümü, özellikle aşikâr olamayan çözümü vardır. Şimdi, A matrisi satırca indirgenmiş eşelon şekilde olmak zorunda değildir ve $m < n$ olduğu durumlar için bu özelliğin geçerli olduğunu göstereceğiz.

Teorem 2.4 n bilinmeyenli m lineer denklemden oluşan bir homogen sistem $m < n$ iken yani, bilinmeyen sayısı denklem sayısından fazla ise daima aşikar olmayan bir çözüme sahiptir.

İspat

B, A matrisine satırca denk olan, satırca indirgenmiş eşelon şekilde bir matris olsun. Bu takdirde $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ve $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sistemleri denktir. Daha önce gösterildiği gibi, $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sistemi bir aşikâr olamayan çözüme sahiptir ve bu yüzden $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sistemi de bir aşikâr olamayan çözüme sahiptir. ■

Bu sonucu aşağıdaki denk şekilde kullanacağız: Eğer A, $m \times n$ tipinde bir matris ve $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sadece aşikar çözüme sahip ise $m \geq n$'dir.

ÖRNEK 11

$$\begin{aligned} x + \ \ y + z + w &= 0 \\ x \qquad\quad + w &= 0 \\ x + 2y + z \qquad &= 0 \end{aligned}$$

homogen sistemini göz önüne alalım. Bu sistemin

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ilaveli matrisi

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

matrisine satırca denktir (gösteriniz). Bundan dolayı r herhangi reel sayı olmak üzere

$$\begin{aligned} x &= -r \\ y &= \ \ r \\ z &= -r \\ w &= \ \ r, \end{aligned}$$ çözümü elde edilir. ■

■ Uygulama: Kimyasal Denge Denklemleri

Kimyasal reaksiyonlar, denklemler ile tarif edilebilir. Sol taraftaki ifadelere reaksiyona girenler (reaktantlar) ve sağ taraftaki ifadelere ise sol taraf üzerindeki kimyasal reaksiyonlardan elde edilmiş ürünler denir. Matematiksel denklemlerden farklı iki taraf bir okla ile ayrılır: ya ürünlerden reaktantlara olan gösterim "$\rightarrow$" ile ya da terslenebilir bir denklemi gösteren $\Leftrightarrow$ kullanılır", yani, ürünler oluşurken başlangıç ürünleri de ortamda bulunmaktadırlar. Bir kimyasal denklemin solundaki her bir atomlarının sayısının sağdaki atomlarının sayısı ile aynı olduğun da dengededir. Örnek 12, çözücüde ürünler ile reaktantlardaki atomları dengelemek için uygun değerleri sağlayan bir homogen denklem sisteminin nasıl kurulacağını gösterir.

ÖRNEK 12

Sülfürik asit (H_2SO_4) ile Sodyum hidroksit (NaOH) reaksiyona girdiğinde sodyum sülfat (Na_2SO_4) ve su (H_2O) oluşur ve kimyasal denklem ise

$$NaOH + H_2SO_4 \rightarrow Na_2SO_4 + H_2O.$$

şeklindedir. Bu denklemi dengelemek için

$$x\text{NaOH} + y\text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow z\text{Na}_2\text{SO}_4 + w\text{H}_2\text{O}$$

şekilde bir denklem elde ederek, yani, sol ve sağ taraftaki kimyasalları bilinmeyenler ile çarparız. Sonra, biz sağdaki sayılarla sol taraftaki sodyum (Na), oksijen (O), hidrojen (H) ve sülfür (S) atomlarının sayısını karşılaştıralım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \text{Na: } & x = 2z \\ \text{O: } & x + 4y = 4z + w \\ \text{H: } & x + 2y = 2w \\ \text{S: } & y = z \end{aligned}$$

dört lineer denklem elde edilir. Burada, alta yazılan sayıları kullandığımıza dikkat edelim. Çünkü onlar belirli bir elementin atomlarının sayısını verir. Standart şeklindeki bu denklemleri yeniden yazarak, 4 bilinmeyenli bir homogen lineer sisteme sahip oluruz:

$$\begin{aligned} x \qquad - 2z \qquad &= 0 \\ x + 4y - 4z - \ w &= 0 \\ x + 2y \qquad - 2w &= 0 \\ y - \ z \qquad &= 0. \end{aligned}$$

Bu sistemi matris şeklinde tekrar yazarsak

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ilaveli matrisi elde edilir. Böylece satırca indirgenmiş eşelon şeklindeki

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

matrisi ve bu matris den dolayı $x = w$, $y = \frac{1}{2}w$ ve $z = \frac{1}{2}w$ çözümü elde edilir. w, keyfi seçildiğinden ve biz atomlar ile birlikte ilişkili olduğumuzdan bütün bilinmeyenleri pozitif tamsayı olacak şekilde değerler seçmek uygundur. $x = 2$, $y = 1$ ve $z = 1$ çözümünü veren $w = 2$ seçimini yapalım. Bu durumda

$$2\text{NaOH} + \text{H}_2\text{SO}_4 \rightarrow \text{Na}_2\text{SO}_4 + 2\text{H}_2\text{O}$$

denge denklemi elde edilir. ■

Homogen Olmayan Lineer Sistemler ile Homogen Sistemler Arasındaki İlişki

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ tutarlı bir lineer sistem olsun. $\mathbf{x}_p$, verilen homogen olmayan sistemin bir özel çözümü ve $\mathbf{x}_h$, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen lineer sistemin bir çözümü ise $\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$'da verilen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sisteminin bir çözümüdür. Ayrıca, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ homogen olmayan lineer sisteminin her çözümü $\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$ olarak yazılabilir. Burada, $\mathbf{x}_p$ verilen homogen olmayan sistemin bir özel çözümü ve $\mathbf{x}_h$ ise $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sisteminin bir çözümüdür. İspat için, Alıştırma 29'a bakınız.

Kompleks Katsayılı Lineer Sistemlerin Çözümü

Gauss yok etme ve Gauus-Jordan indirgeme metotlarının her ikisi de kompleks elemanlı lineer sistemlerin çözümünde de kullanılabilir. Aşağıdaki örnekler, bu çözüm tekniklerini kullanarak kompleks katsayılı bir lineer sistemin nasıl çözüleceğini gösterir. (Kısalık için satır işlemlerine ait gösterim vermeyeceğiz.) Daha ileri gösterim ve Alıştırmalar Ek B.2'de verilmiştir.

ÖRNEK 13

$$\begin{aligned}(1-i)x + (2+i)y &= 2+2i\\ 2x + (1-2i)y &= 1+3i\end{aligned}$$

lineer sistemini Gauss yok etme metodu ile çözünüz.

Çözüm

Verilen lineer sistemin ilaveli matrisi

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1-i & 2+i & 2+2i \\ 2 & 1-2i & 1+3i \end{array}\right]$$

dır. Bu matrisi satırca eşelon şekline dönüştürmek için ilk olarak iki satırı yer değiştirelim (karışık kesirlerden kaçınmak için). Böylece

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1-2i & 1+3i \\ 1-i & 2+i & 2+2i \end{array}\right]$$

elde edilir. 1. satırı $\frac{1}{2}$ ile çarparsak:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \dfrac{1-2i}{2} & \dfrac{1+3i}{2} \\ 1-i & 2+i & 2+2i \end{array}\right]$$

1. satırın $-(1-i)$ katını 2. satıra eklersek:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \dfrac{1-2i}{2} & \dfrac{1+3i}{2} \\ 0 & \dfrac{5+5i}{2} & i \end{array}\right]$$

olur.

2. satırı $\frac{2}{5+5i}$ ile çarparsak:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1-2i}{2} & \frac{1+3i}{2} \\ 0 & 1 & \frac{2i}{5+5i} \end{array}\right]$$

elde edilir. Bu durumda

$$y = \frac{2i}{5+5i} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}i$$

bulunur. Geriye yerine koyma kullanılırsa

$$x = \frac{1+3i}{2} - \frac{1-2i}{2}y = \frac{1}{5} + \frac{8}{5}i \quad \text{(Gösteriniz.)}$$

buluruz. ■

ÖRNEK 14

İlaveli matrisi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} i & 2 & 1-i & 1-2i \\ 0 & 2i & 2+i & -2+i \\ 0 & -i & 1 & -1-i \end{array}\right]$$

olan lineer sistemi Gauss-Jordan indirgeme metoduyla çözünüz.

Çözüm

1. satırı $\frac{1}{i}$ ile çarparsak:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{i} & \frac{1-i}{i} & \frac{1-2i}{i} \\ 0 & 2i & 2+i & -2+i \\ 0 & -i & 1 & -1-i \end{array}\right]$$

2. satırı $\frac{1}{2i}$ çarparsak:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{i} & \frac{1-i}{i} & \frac{1-2i}{i} \\ 0 & 1 & \frac{2+i}{2i} & \frac{-2+i}{2i} \\ 0 & -i & 1 & -1-i \end{array}\right]$$

2. satırın i katını 3. satıra eklenirse:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{i} & \frac{1-i}{i} & \frac{1-2i}{i} \\ 0 & 1 & \frac{2+i}{2i} & \frac{-2+i}{2i} \\ 0 & 0 & \frac{4+i}{2} & \frac{-4-i}{2} \end{array}\right]$$

3. satırı $\left(\frac{2}{4+i}\right)$ ile çarparsak:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{i} & \frac{1-i}{i} & \frac{1-2i}{i} \\ 0 & 1 & \frac{2+i}{2i} & \frac{-2+i}{2i} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

3. satırın $\left(-\frac{2+i}{2i}\right)$ katı 2. satıra ve 3. satırın $\left(-\frac{1-i}{i}\right)$ katı 1. satıra eklenirse:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{i} & 0 & \frac{2-3i}{i} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

2. satırın $\left(-\frac{2}{i}\right)$ katı 1. satıra eklenirse:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

elde edilir. Böylece $x = -3$, $y = 1$, $z = -1$ çözümü bulunur. ■

Anahtar Kelimeler

Gauss yok etme
Gauss-Jordan indirgeme
Homogen sistem
Geriye yerine koyma
İkinci dereceden interpolasyon
İkinci dereceden interpolant
Küresel konumlandırma sistemi
Kimyasal denge denklemleri

2.2 Alıştırmalar

1. Verilen lineer sistemlerin her biri satırca eşelon şeklindedir. Bu sistemleri çözünüz.

(a) $\begin{aligned} x + 2y - z &= 6 \\ y + z &= 5 \\ z &= 4 \end{aligned}$ **(b)** $\begin{aligned} x - 3y + 4z + w &= 0 \\ z - w &= 4 \\ w &= 1 \end{aligned}$

2. Verilen lineer sistemlerin her biri satırca eşelon şeklindedir. Bu sistemleri çözünüz.

(a) $\begin{aligned} x + y - z + 2w &= 4 \\ w &= 5 \end{aligned}$ **(b)** $\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ y + 2z &= 0 \\ z &= 1 \end{aligned}$

3. Verilen lineer sistemlerin her biri satırca indirgenmiş eşelon şeklindedir. Bu sistemleri çözünüz.

(a) $\begin{aligned} x + y &= 2 \\ z + w &= -3 \end{aligned}$ **(b)** $\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 0 \\ z &= 1 \end{aligned}$

4. Verilen lineer sistemlerin her biri satırca indirgenmiş eşelon şeklindedir. Bu sistemleri çözünüz.

(a) $\begin{aligned} x - 2z &= 5 \\ y + z &= 2 \end{aligned}$ **(b)** $\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z - w &= 4 \end{aligned}$

5.
$$\begin{aligned} x + y + 2z &= -1 \\ x - 2y + z &= -5 \\ 3x + y + z &= 3. \end{aligned}$$

lineer sistemini göz önüne alalım.

(**a**) Eğer varsa, Gauss yok etme metodunu kullanarak bütün çözümlerini bulunuz.
(**b**) Eğer varsa, Gauss-Jordan indirgeme metodunu kullanarak bütün çözümlerini bulunuz.

6. Alıştırma 5'i aşağıdaki her bir sistem için tekrarlayınız.

(a)
$$\begin{aligned} x + y + 2z + 3w &= 13 \\ x - 2y + z + w &= 8 \\ 3x + y + z - w &= 1 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + y - 2z &= 3 \\ 2x + y + z &= 2 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 2x + y + z - 2w &= 1 \\ 3x - 2y + z - 6w &= -2 \\ x + y - z - w &= -1 \\ 6x + z - 9w &= -2 \\ 5x - y + 2z - 8w &= 3 \end{aligned}$$

Alıştırma 7-8 ve 9'da verilen ilaveli matrisli lineer sistemleri, mümkünse çözünüz.

7. (a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$ **(b)** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$

(c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 9 & 0 \end{array}\right]$ **(d)** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$

8. (a) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right]$

(b) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right]$

9. (a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 11 \\ 2 & 1 & 4 & 12 \end{array}\right]$ **(b)** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right]$

10. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

olsun. O halde $A\mathbf{x} = 4\mathbf{x}$ olacak şekilde elemanlarının hepsi sıfır olmayan 2×1 tipindeki $\mathbf{x}$ matrisini bulunuz. [*İpucu:* $A\mathbf{x} = 4\mathbf{x}$ matris denklemini $4\mathbf{x} - A\mathbf{x} = (4I_2 - A)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ şeklinde yeniden yazılır ve homogen lineer sistemi çözülür.]

11. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

olsun. O halde $A\mathbf{x} = 3\mathbf{x}$ olacak şekilde elemanlarının hepsi sıfır olmayan 2×1 tipindeki $\mathbf{x}$ matrisini bulunuz.

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

olsun. O halde $A\mathbf{x} = 3\mathbf{x}$ olacak şekilde elemanlarının hepsi sıfır olmayan 3×1 tipindeki $\mathbf{x}$ matrisini bulunuz.

13. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

olsun. O halde $A\mathbf{x} = 1\ \mathbf{x}$ olacak şekilde elemanlarının hepsi sıfır olmayan 3×1 tipindeki $\mathbf{x}$ matrisini bulunuz.

14.
$$\begin{aligned} x + y &= z = 2 \\ x + 2y &= z = 3 \\ x + y + (a^2 - 5)z &= a \end{aligned}$$

lineer sisteminin
(**a**) çözümünün olmaması
(**b**) tek bir çözümünün olması
(**c**) sonsuz çözümünün olması
için a'nın değerlerini bulunuz.

15.
$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ 2x + 3y + 2z &= 5 \\ 2x + 3y + (a^2 - 1)z &= a + 1 \end{aligned}$$

lineer sistemi için Alıştırma 14'ü tekrarlayınız.

16.
$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ x + 2y + z &= 3 \\ x + y + (a^2 - 5)z &= a \end{aligned}$$

lineer sistemi için Alıştırmalar 14'ü tekrarlayınız.

17.
$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + (a^2 - 8)y &= a \end{aligned}$$

lineer sistemi için Alıştırma 14'ü tekrarlayınız.

18. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

olsun. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ lineer sisteminin yalnızca aşikar çözümünün olması için gerek ve yeter şart $ad - bc \neq 0$ olmasıdır.

19. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisinin I_2'ye satırca denk olması için gerek ve yeter şart $ad - bc \neq 0$ olmasıdır.

20. $f: R^3 \to R^3$,

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan matris dönüşümü olsun.

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde x, y ve z'yi bulunuz.

21. $f: R^3 \to R^3$,

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan matris dönüşümü olsun.

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde x, y ve z'yi bulunuz.

22. $f: R^3 \to R^3$,

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan matris dönüşümü olsun..

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

olmak üzere x, y ve z yi değerlerini daima hesaplayacak şekilde a, b ve c arasında bir bağıntı bulunuz.

23. $f: R^3 \to R^3$,

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan matris dönüşümü olsun.

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

olmak üzere x, y ve z'yi değerlerini daima hesaplayacak şekilde a, b ve c arasında bir bağıntı bulunuz.

Alıştırma 24 ve 25 seçmelidir.

24. (**a**) Bir matrisin sütunca eşelon şekli ve sütunca indirgenmiş eşelon şeklinin tanımlarını formüle ediniz.

(**b**) $m \times n$ tipinde her matrisin sütunca eşelon şeklindeki bir matrise sütunca denk olduğunu gösteriniz.

25. $m \times n$ tipinde her matrisin sütunca indirgenmiş eşelon şeklindeki tek bir matrise sütunca denk olduğunu gösteriniz.

26.

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= a \\ 2x + 3y + 3z &= b \\ 5x + 9y - 6z &= c \end{aligned}$$

lineer sistemi a, b ve c'nin her bir değeri için tutarlı ve bu değerler lineer sistemi sağlayacak şekilde a, b ve c ile ilgili bir bağıntı bulunuz.

27.

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 3z &= a \\ 3x - y + 5z &= b \\ x - 3y + 2z &= c \end{aligned}$$

lineer sistemi a, b ve c'nin her bir değeri için tutarlı ve bu değerler lineer sistemi sağlayacak şekilde a, b ve c ile ilgili bir bağıntı bulunuz.

28.

$$\begin{aligned} (a - r)x + dy &= 0 \\ cx + (b - r)y &= 0 \end{aligned}$$

homogen sisteminin aşikar olmayan bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart r'nin $(a - r)(b - r) - cd = 0$ denklemini sağlamasıdır. Gösteriniz.

29. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ tutarlı bir lineer sistem olsun.

(**a**) Eğer $\mathbf{x}_p$ verilen homogen olmayan sistemin özel çözümü ve $\mathbf{x}_h$'de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sistemin bir çözümü ise $\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$'nın verilen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sisteminin bir çözümü olduğunu gösteriniz.

(**b**) $\mathbf{x}_p$ verilen homogen olmayan sistemin bir özel çözümü ve $\mathbf{x}_h$ de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sistemin bir çözümü olmak üzere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ homogen olmayan sisteminin her $\mathbf{x}$ çözümünün $\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$ şeklinde olduğunu gösteriniz. (*İpucu:* $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)$.

30. Verilen veri cümlelerinin her biri için ikinci dereceden ara değerini (ikinci dereceden interpolantını) bulunuz. Örnek 7'deki yöntemi takip ediniz.

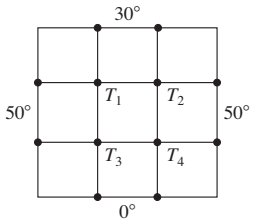
(**a**) {(0, 2), (1, 5), (2, 14)}

(**b**) {(–1, 2), (3, 14), (0, –1)}

31. (***Matematik Analiz Zorunlu***) $f(x) = e^{2x}$ olmak üzere $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$ ve $p''(0) = f''(0)$ şartlarını sağlayan bir $p(x) = ax^2 + bx + c$ ikinci dereceden polinomu bulmak için bir lineer sistem elde ediniz.

32. (***Matematik Analiz Zorunlu***) $f(x) = xe^{x-1}$ olmak üzere $p(1) = f(1)$, $p'(1) = f'(1)$ ve $p''(1) = f''(1)$ şartlarını sağlayan bir $p(x) = ax^2 + bx + c$ ikinci dereceden polinomu bulmak için bir lineer sistem elde ediniz.

33. Şekilde gösterilen levha için (i = 1, 2, 3, 4) T_i iç noktalarındaki ısıyı bulunuz. (Örnek 8'e bakınız.)



34. Aşağıdaki tablolarda verilen üç çemberin yarıçapı ve merkezlerinin koordinatlarını kullanarak bir GPS alıcısının düzlemsel (x,y) yerini bulunuz.

(a)

Çember	*Merkez*	*Yarıçap*
1	(–15, 20)	25
2	(5, –12)	13
3	(9,40)	41

(b)

Çember	*Merkez*	*Yarıçap*
1	(–10, 13)	25
2	(10, –19)	13
3	(14,33)	41

35. 2-boyutlu bir sistemde bir GPS alıcısının yeri (–4,3)'dır. Hesaplamalarda kullanılacak veri 1. çemberin yarıçapı eksik olmasının dışında tabloda verilmiştir. Verinin eksik parçasının değerini bulunuz.

Çember	*Merkez*	*Yarıçap*
1	(–16, 38)	?
2	(7, –57)	61
3	(32,80)	85

36. 2-boyutlu bir sistemdeki bir GPS alıcısının yeri (6,8)'dır. Hesaplamalarda kullanılacak veri 1. ve 2. çemberlerin yarıçapları eksik olmasının dışında tabloda verilmiştir. Verinin eksik parçalarının değerlerini bulunuz.

Çember	*Merkez*	*Yarıçap*
1	(3, 4)	?
2	(10, 5)	?
3	(18, 3)	13

37. C_1, C_2, C_3 şeklinde etiketlenmiş 3 özel butonu içeren 2-boyutlu sistem için bir "özel versiyon"lu GPS alıcısına sahip olduğunuzu kabul edelim. Her bir düğmeye (butona) basıldığında bir çember çizer ve bu çember verinin alındığı en yakın 3 uydudan birini temsil eder. Siz önce C_1 düğmesine sonra C_2 düğmesine basınız. Ekranda görünen, çemberler birbirine teğettir. GPS alıcısının yeri nedir? Açıklayınız.

38. Pas; oksijen ile demir arasında bir kimyasal reaksiyondan oluşur. Oluşan bu bileşik, demiri kaplayan kırmızımsı kahverengi şeklinde bir oluşumdur. Pas, kimyasal şekli Fe_2O_3 olan demir oksittir. Burada pas için kimyasal denklem

$$Fe + O_2 \rightarrow Fe_2O_3$$

şeklindedir. Bu denklemi dengeleyiniz.

39. Etan; metana benzeyen bir gaz olup oksijen ile yandığında karbondioksit gazı ve su buharı oluşur. Oluşan buhar, yoğunlaşırsa su damlacıkları oluşur. Bu reaksiyonun kimyasal denklemi

$$C_2H_6 + O_2 \text{ — } CO_2 + H_2O$$

olup bu denklemi dengeleyiniz.

Alıştırma 40 ve 41'de verilen her bir lineer sistemi çözünüz.

40.
$$\begin{aligned}(1-i)x + (2+2i)y &= 1\\ (1+2i)x + (-2+2i)y &= i\end{aligned}$$

41.
$$\begin{aligned}x + y &= 3 - i\\ ix + y + z &= 3\\ y + iz &= 3\end{aligned}$$

Alıştırma 42 ve 43'te ilaveli matrisleri verilen her bir lineer sistemi çözünüz.

42.
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1-i & 2+2i & i \\ 1+i & -2+2i & -2 \end{array}\right]$$

43.
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & -i & -2+2i \\ 2i & -i & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3i & 2i \end{array}\right]$$

44. Kullandığınız yazılımın, bir matrisin satırca indirgenmiş eşelon şeklini hesaplamak için bir komuta sahip olup olmadığını belirleyiniz. Eğer varsa, önceki alıştırmaların bir kısmı üzerinde bu komut ile deneyiniz.

45. Kullandığınız yazılımın, verilen bir sıralı ikililerin cümlesinde interpolasyon polinomlarını hesaplamak için bir komuta sahip olup olmadığını belirleyiniz. Eğer varsa, Alıştırma 30'daki veri cümleleri için ikinci dereceden polinomu belirlemede bu komutu kullanınız.

46. Kullandığınız yazılımın, interpolasyon polinomlarını hesaplamak için bir komutun parçası olarak bir grafik çizme seçeneğine sahip olup olmadığını veya interpolasyonu çizmek için kolay yolun olup olmadığını belirleyiniz. Eğer varsa, aşağıdakilere onu uygulayınız:

(a) Alıştırma 30'daki veri cümleleri için kuadratik interpolasyonların grafiklerini çiziniz. Grafiklerin çıktısını alınız ve grafik üzerinde veri noktalarını işaretleyiniz.

(b) $\{(0, 0), (1, 1), (4, 2)\}$ veri cümlesi için kuadratik interpolasyonu oluşturunuz ve $[0, 4]$ aralığı üzerinde grafiğini çiziniz. Grafiğin çıktısını alınız ve sonra grafik üzerinde veri noktalarını işaretleyiniz. Bu veri cümlesi $y = f(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonunun bir örneğidir. Dikkatlice fonksiyonun grafiğini çıktı üzerine çiziniz ve veri noktalardan geçtiğinden emin olunuz. Kısaca $\sqrt{2}$ ve $\sqrt{3}$ değerlerini tahmin etmek için, sırası ile $x = 2$ ve $x = 3$ noktalarında interpolant yaklaşık olarak hesaplandığında yapılan hataları tartışınız.

2.3 Elementer Matrisler; A^{-1} Ters-Matrisi Bulma

Bu Kesimde, bir matrisin eğer varsa, tersini bulmak için bir metot geliştireceğiz. Bu metodu kullanmak için A^{-1} tersinin olup olmadığını bilmek zorunda değiliz. A^{-1} ters matrisini bulmak için başlayalım. Eğer hesaplama sırasında belli bir durumla karşılaşırsak A^{-1}'nın olmadığını biliriz. Aksi takdirde, sona ulaşır ve A^{-1} matrisini elde ederiz. Bu metot, Tip I, II ve III elementer satır işlemlerinin (Kesim 2.1'e bakınız) A matrisi üzerinde uygulamasını gerektirir. Bu kavramları aşağıdaki tanımla başlayarak açıklayalım:

TANIM 2.4

I. tip, II. tip veya III. tip elementer satır veya elementer sütun işleminin I_n birim matrisine bir defa uygulanması ile elde edilen matrise sırası ile, I. tip, II. tip veya III. tip bir $n \times n$ **elementer matris** denir.

ÖRNEK 1

Aşağıda verilen matrisler birer elementer matrislerdir:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{ve} \quad E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

E_1 matrisi I_3 birim matrisinin 1. ve 3. satırlarının yer değiştirilmesi ile elde edilen I. tiptendir. E_2 matrisi I_3 birim matrisinin 2. satırının (–2) ile çarpılması ile elde edilen II. tiptendir. E_3 matrisi I_3 birim matrisinin 2. satırının 2 katının 1. satıra eklenmesi ile elde edilen III. tiptendir. E_4 matrisi I_3 birim matrisinin 1. sütununun 3 katının 3. sütununa eklenmesi ile elde edilen III. tipten bir matristir. ■

Teorem 2.5

A, $m \times n$ tipinde bir matris ve B'de I. tip, II. tip veya III. tip elementer satır (sütun) işlemlerinin A matrisine uygulanmasıyla elde edilen bir matris olsun. E, A üzerine uygulanan elementer satır (sütun) işlemlerinin aynısının I_m (I_n) birim matrislerine uygulanmasıyla elde edilen bir elementer matris olsun. Bu takdirde $B = EA$ ($B = AE$)'dır.

İspat

Alıştırma 1. ■

O halde Teorem 2.5'ten, A matrisi üzerine bir elementer satır işleminin uygulanması ile elde edilen matris ile E uygun elementer matrisiyle A matrisinin (soldan) çarpılması sonucunda elde edilen matrisin aynı olduğunu söyleyebiliriz. Benzer şekilde A matrisi üzerine bir elementer sütun işleminin uygulanması ile uygun elementer matrisinin A matrisiyle (sağdan) çarpılması sonucu aynıdır.

ÖRNEK 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ve $B = A_{-2\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_1}$ olsun. Bu durumda

$$B = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

bulunur. Şimdi $E = (I_3)_{-2\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_1\to\mathbf{r}_1}$ ise

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece $B = EA$ olduğu kolaylıkla gösterilir. ■

Teorem 2.6 A ve B, $m \times n$ tipinde iki matris ise A'nın B ye satırca (sütunca) denk olması için gerek ve yeter şart $B = E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1$ ($B = AE_1E_2 \ldots E_{k-1}E_k$) olacak şekilde $E_1, E_2, \ldots, E_k$ elementer matrislerinin var olmasıdır.

İspat

Teoremi sadece satırca denklik için ispatlayacağız. Eğer A, B ye satırca denk ise B matrisi A matrisine bir dizi elementer satır işleminin uygulanması ile elde edilir. Bu, $B = E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1$ ($B = AE_1E_2 \ldots E_{k-1}E_k$) olacak şekilde $E_1, E_2, \ldots, E_k$ elementer matrislerinin var olduğu anlamındadır.

Tersine, E_i elementer matrisler olmak üzere $B = E_k \ldots E_2E_1A$ ise B bir dizi elementer satır işleminin A'ya uygulanması ile elde edilen matristir. Böylece A, B'ye satırca denktir. ■

Teorem 2.7 Bir E elementer matrisi regülerdir (singüler olmayan) ve tersi aynı tip bir elementer matristir.

İspat

Alıştırma 6. ■

Bundan dolayı, bir elementer satır işlemi aynı tipten diğer bir elementer satır işlemiyle etkisiz hale getirilebilir.

Şimdi, eğer varsa A^{-1} matrisini bulmak için bir algoritma elde edeceğiz. İlk olarak aşağıdaki yardımcı teoremi ispat edeceğiz:

Yardımcı Teorem (Lemma) 2.1*

A, $n \times n$ tipinde bir matris olmak üzere $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sistemi sadece $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ aşikar çözüme sahip olsun. O halde A matrisi I_n birim matrisine satırca denktir. (Yani, A'nın satırca indirgenmiş eşelon şekli I_n'dir.)

İspat

B, A ya satırca denk olan satırca indirgenmiş eşelon şeklinde bir matris olsun. Bu takdirde $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ve $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sistemleri denktir ve bundan dolayı $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sistemi sadece aşikar çözüme sahiptir. Eğer r, B'nin sıfırdan farklı satırlarının sayısı ise $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sistemi B'nin sıfırdan farklı satırlardan oluşan $r \times n$ tipindeki katsayılar matrisli homogen sisteme denktir. Son homogen sistem sadece aşikar çözüme sahip olduğundan Teorem 2.4 gereğince $r \geq n$ elde edilir. B, $n \times n$ tipinde olduğundan $r \leq n$'dir. Bundan dolayı $r = n$ elde edilir. Bu ise B matrisinin sıfır satırlarının olmadığını gösterir. Böylece $B = I_n$ bulunur. ■

Teorem 2.8

A'nın $n \times n$ tipinde regüler bir matris olması için gerek ve yeter şart A'nın elementer matrislerin bir çarpımı olarak yazılmasıdır.

İspat

Eğer $A, E_1, E_2, \ldots, E_k$ elementer matrislerin çarpımına eşit ise $A = E_1E_2 \ldots E_k$ yazılır. Şimdi her bir elementer matris regüler ve Teorem 1.6'dan regüler matrislerin çarpımı da regüler bir matris olduğundan A regülerdir.

Tersine, A regüler ise $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ eşitliğinden $A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$ elde edilir. Böylece $I_n\mathbf{x} = \mathbf{0}$ veya $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bulunur. Bundan dolayı, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sistemi sadece aşikâr çözüme sahiptir.

Böylece Yardımcı Teorem 2.1'den A, I_n birim matrisine denktir. Bu ise

$$I_n = E_kE_{k-1} \cdots E_2E_1A$$

olacak şekilde $E_1, E_2, \ldots, E_k$ elementer matrislerinin var olduğu anlamındadır.

O halde $A = (E_kE_{k-1} \ldots E_2E_1)^{-1} = E_1^{-1}E_2^{-1} \ldots E_k^{-1}$ elde edilir. Elementer matrislerinin tersi de bir elementer matris olduğundan A matrisi elementer matrisinin bir çarpımı olarak yazılır. ■

Sonuç 2.2

A matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart A'nın I_n ye satırca denk olmasıdır. (Yani, A'nın satırca indirgenmiş eşelon şekli I_n'dir.)

İspat

Eğer A, I_n birim matrisine satırca denk ise $E_1, E_2, \ldots, E_k$ elementer matrisler olmak üzere $I_n = E_kE_{k-1} \ldots E_2E_1A$ yazılır. Buradan $A = E_1^{-1}E_2^{-1} \ldots E_k^{-1}$ elde edilir. Bir elementer matrisin tersi de elementer matris olduğundan Teorem 2.8 gereğince A regülerdir.

Tersine, eğer A regüler ise $A = E_kE_{k-1} \ldots E_2E_1$ olacak şekilde elementer matrislerin bir çarpımı olarak yazılır. Buradan $A = AI_n = E_kE_{k-1} \ldots E_2E_1I_n$ olduğundan A, I_n ye satırca denktir. ■

Yardımcı Teorem 2.1 ve Sonuç 2.2'den; A, $n \times n$ tipinde olmak üzere $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sistemi sadece $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ aşikar çözüme sahip ise A matrisinin regüler olduğunu görebiliriz. Tersine, A, $n \times n$ tipinde regü-

*Bir yardımcı teorem (Lemma) bir başka teoremi ispatlamak amacıyla kurulmuş bir teoremdir.

ler bir matris olmak üzere $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sistemini göz önüne alalım. Bu durumda A^{-1} vardır ve $A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ elde edilir. Ayrıca $A^{-1}(A\mathbf{x}) = (A^{-1}A)\mathbf{x} = I_n\mathbf{x} = \mathbf{x}$ bulunur. Bu yüzden homogen sistem sadece aşikar çözüme sahip olduğu anlamında $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ elde edilir. Böylece aşağıdaki önemli teoremi ispatlamış olduk.

Teorem 2.9 *n*-bilinmeyenli *n* lineer denklemden oluşan $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sistemin aşikar olmayan bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart A'nın regüler olmasıdır. (Yani, $A \neq I_n$ satırca indirgenmiş eşelon şeklindedir.) ■

ÖRNEK 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisi verilsin.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

matris şekliyle ifade edilen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sistemini göz önüne alalım. İlaveli matrisin satırca indirgenmiş eşelon şekli

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

şeklinde olup (gösteriniz). r herhangi bir reel sayı olmak üzere

$$x = -2r$$
$$y = r,$$

çözümü elde edilir. Bundan dolayı homogen sistem aşikâr olmayan bir çözüme sahiptir ve A singülerdir. ■

Kesim 1.5'te, eğer A, $n \times n$ tipinde regüler bir matris ise her $\mathbf{b}$, $n \times 1$ tipindeki matrisi için $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sisteminin tek çözüme sahip olduğu verilmiştir. Ayrıca bu ifadenin tersi de doğrudur. (Alıştırma 30'a bakınız.)

Bu noktada $n \times n$ tipinde bir A matrisi için aşağıdaki ifadelerin denk olduğunu gösterdiğimize dikkat edelim:

1. A regülerdir.
2. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sadece aşikar çözüme sahiptir.
3. A, I_n ye satırca (sütunca) denktir (A'nın satırca indirgenmiş eşelon şekli I_n'dır.)
4. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistemi her $\mathbf{b}$, $n \times 1$ tipindeki matrisi için bir tek çözüme sahiptir.
5. A elementer matrislerin çarpımıdır.

Yani, bu 5 durumun herhangi ikisi birbirine denktir. Örneğin, Sonuç 2.2'den 1. ve 3. durumlar denk iken Teorem 2.9'dan 1. ve 2. durumlar denktir. Bu beş ifadenin birbirine denk olmasının önemi, listedeki herhangi bir ifadenin yerine bir diğerinin her zaman alınabilir olmasıdır. Bu kitap boyunca göreceğiniz gibi verilen bir problem birçok farklı yollarla çözülebilir ve bazen bir çözüm diğerlerinden uygulama için daha kolaydır.

A^{-1} Ters Matrisi Bulma

Teorem 2.8'in ispatının sonunda, A regülerdir ve

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_{k-1}^{-1}E_k^{-1},$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$A^{-1} = (E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_{k-1}^{-1}E_k^{-1})^{-1} = E_kE_{k-1}\cdots E_2E_1$$

elde edilir. Bu, A^{-1} matrisinin bulunması için bir algoritma sağlar. Bundan dolayı, I_n birim matrisi elde edilene kadar A üzerine elementer satır işlemleri uygulanır ve E_kE_{k-1} ... E_2E_1 elementer matrislerin çarpımı A^{-1} matrisini verir. Hesaplama işlemlerini düzenleyen uygun bir yol, $[A \mid I_n]$ bölünmüş matrisini yazmaktır. Daha sonra,

$$\begin{aligned}(E_kE_{k-1}\cdots E_2E_1)[A \mid I_n] &= [E_kE_{k-1}\cdots E_2E_1A \mid E_kE_{k-1}\cdots E_2E_1]\\ &= [I_n \mid A^{-1}]\end{aligned}$$

elde edilir. Yani, regüler A matrisi için $[A \mid I_n]$ bölünmüş matrisini satırca indirgenmiş eşelon şekline dönüştürerek $[I_n \mid A^{-1}]$ elde edilir.

ÖRNEK 4

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 5 & 5 & 1\end{bmatrix}$$

olsun. A'nın regüler olduğunu kabul ederek

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

yazabiliriz. Şimdi $[A \mid I_3]$ matrisini $[I_3 \mid A^{-1}]$ matrisine dönüştüren elementer satır işlemlerini uygulayalım. 3×6 tipindeki $[A \mid I_3]$ matrisini göz önüne alalım ve A'nın bir satırına her ne işlem uygulanırsa I_3 birim matrisinin karşılık gelen satırına da aynı işlemi uygulayalım. Elementer matrislerin kullanımı yerine direkt olarak aşağıdaki şekilde elementer satır işlemlerini kullanarak kendi hesaplamalarımızı düzenleyelim:

A			I_3			
1	1	1	1	0	0	$-5\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3$ elementer satır işlemini uygula.
0	2	3	0	1	0	
5	5	1	0	0	1	
1	1	1	1	0	0	$\frac{1}{2}\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2$ elementer satır işlemini uygula.
0	2	3	0	1	0	
0	0	−4	−5	0	1	
1	1	1	1	0	0	$-\frac{1}{4}\mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3$ elementer satır işlemini uygula.
0	1	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	
0	0	−4	−5	0	1	
1	1	1	1	0	0	$-\frac{3}{2}\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2$ ve $-1\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1$ elemanter satır işlemini uygula.
0	1	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	
0	0	1	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	
1	1	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$-1\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1$ elementer satır işlemini uygula.
0	1	0	$-\frac{15}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	
0	0	1	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	
1	0	0	$\frac{13}{8}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	
0	1	0	$-\frac{15}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	
0	0	1	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	

elde edilir. Bundan dolayı,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

bulunur. Burada $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$ olduğunu kolaylıkla gösteririz. ■

A singüler olduğunda, bu noktada ne söyleneceği bir problem olarak ortaya çıkar. Bu problemin cevabı ise A'nın singüler olması için gerek ve yeter şart A'nın sıfırlı elemanlardan oluşan en az bir satıra sahip B matrisine satırca denk olmasıdır. Şimdi bu sonucu ispatlayalım.

Teorem 2.10 $n \times n$ tipindeki bir A matrisinin singüler olması için gerek ve yeter şart A'nın, bir satırı sıfır olan bir B matrisin satırca denk olmasıdır.

İspat

İlk olarak, A bir satırı sıfır olan bir B matrisine denk olsun. Kesim 1.5'teki Alıştırma 46'dan B singülerdir ve $E_1, E_2, \cdots, E_k$ elementer matrisler olmak üzere $B = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A$'dır. Eğer A regüler ise B'de regülerdir. Bu bir çelişkidir. O halde A singülerdir.

Tersine, A singüler ise Sonuç 2.2 gereğince A matrisi I_n birim matrisine satırca denk değildir. Bundan dolayı A, satırca indirgenmiş eşelon şeklindeki bir $B \neq I_n$ matrisine satırca denktir. Kesim 2.1'nin Alıştırma 9'dan B'nin bir sıfır satırına sahip olduğu elde edilir. ■

Bunun anlamı A^{-1} matrisini bulmak için, ters matrisin var olup olmadığını önceden bilinmesine gerek yoktur. Biz sadece A^{-1} matrisini hesaplamayla başlayalım: Eğer hesaplamada herhangi bir noktada A matrisine satırca denk olan ve sıfır satırlarına sahip bir B matrisi bulursak A^{-1} yoktur. Yani, $[A \mid I_n]$ bölünmüş matrisini, satırca indirgenmiş eşelon şekle dönüştürerek $[C \mid D]$ elde edilir. Eğer $C = I_n$ ise $D = A^{-1}$'dır. Eğer $C \neq I_n$ ise C sıfır satırına sahiptir ve A singülerdir.

ÖRNEK 5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

olsun. A^{-1} matrisini bulmak için aşağıdaki işlemler yapılır:

A			I_3			
1	2	−3	1	0	0	$-1\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_2$ elementer satır işlemini uygula.
1	−2	1	0	1	0	
5	−2	−3	0	0	1	
1	2	−3	1	0	0	$-5\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 \rightarrow \mathbf{r}_3$ elementer satır işlemini uygula.
0	−4	4	−1	1	0	
5	−2	−3	0	0	1	
1	2	−3	1	0	0	$-3\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 \rightarrow \mathbf{r}_3$ elementer satır işlemini uygula.
0	−4	4	−1	1	0	
0	−12	12	−5	0	1	
1	2	−3	1	0	0	
0	−4	4	−1	1	0	
0	0	0	−2	−3	1	

elde edilir. Bu noktada A matrisi

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisine satırca denktir. B bir sıfır satırına sahip olduğundan A singüler bir matristir. ■

Kesim 1.5'ten $AB = I_n$ ve $BA = I_n$ ise B $n \times n$ matrisinin, A $n \times n$ matrisinin tersi olduğunu tanımlamıştık. Şimdi bu denklemlerden birinin bir diğerinden elde edildiğini gösterelim.

Teorem 2.11 Eğer A ve B, $AB = I_n$ olacak şekilde $n \times n$ tipinde matrisler ise $BA = I_n$'dır. Bundan dolayı, $B = A^{-1}$.

İspat

İlk olarak, $AB = I_n$ ise A'nın regüler bir matris olduğunu gösterelim. A'nın singüler olduğunu kabul edelim. Öyleyse A, bir sıfır satırına sahip bir C matrisine satırca denktir ve $E_1, E_2, \cdots, E_k$ elementer matrisler olmak üzere $C = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A$'dır. Buradan $CB = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 AB$ yazılır ve AB, CB ye satırca denktir. CB, bir sıfır satırına sahip olduğundan Teorem 1.10'dan AB singülerdir. I_n regüler olduğundan $AB = I_n$ olması imkânsızdır. Bu çelişki A'nın regüler olduğunu gösterir ve böylece A^{-1} vardır. $AB = I_n$ eşitliğinin her iki yanını A^{-1} ile soldan çarparsak $B = A^{-1}$ elde edilir. (Gösteriniz.) ■

Uyarı Teorem 2.11 gereğince verilen bir B matrisinin A^{-1} olduğunu kontrol etmek için $AB = I_n$ veya $BA = I_n$ eşitliklerinin sadece birinin sağlanması yeterli olduğu anlamına gelir. Yani, her iki eşitliği kontrol etme zorunluluğu yoktur.

Anahtar Kelimeler

Elementer matris
Ters matris
Singüler olmayan (regüler) matris
Singüler matris

2.3 Alıştırmalar

1. Teorem 2.5'i ispatlayınız.

2. A, 4×3 tipinde bir matris olsun. A üzerine aşağıdaki elementer satır işlemlerinin uygulanmasıyla A'nın bir soldan çarpanı olan (EA gibi) E elementer matrisini bulunuz.
(a) A'nın 2. satırını (–2) ile çarpmak
(b) A'nın 3. satırının 3 katını A'nın 4. satırına eklemek
(c) A'nın 1. ve 3. satırlarını yer değiştirmek

3. A, 3×4 tipinde bir matris olsun. A üzerine aşağıdaki elementer satır işlemlerinin uygulanmasıyla A'nın bir sağdan çarpanı olan (AE gibi) E elementer matrisini bulunuz.
(a) A'nın 1. satırını (–4) katını 2. satırına eklemek
(b) A'nın 2. ve 3. sütunlarını yer değiştirmek
(c) A'nın 2. sütununu 4 ile çarpmak

4.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
olsun.
(a) A'ya satırca denk olan satırca indirgenmiş eşelon şeklindeki bir C matrisini bulunuz. Ayrıca kullandığınız satır işlemlerini yazınız.
(b) C'yi elde etmek için kullanılan elementer işlemleri I_3 birim matrisine uygulayınız ve bulunan matrisini B ile gösteriniz.
(c) A ve B arasındaki ilişki nedir? (*Yol gösterme:* AB ve BA matrislerini hesaplayınız.)

5.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$
olsun.
(a) A'ya satırca denk olan satırca indirgenmiş eşelon şeklindeki bir C matrisini bulunuz. Ayrıca kullandığınız satır işlemlerini yazınız.
(b) C'yi elde etmek için kullanılan elementer işlemleri I_3 birim matrisine uygulayınız ve bulunan matrisini B ile gösteriniz.
(c) A ve B arasındaki ilişki nedir? (*Yol gösterme:* AB ve BA matrislerini hesaplayınız.)

6. Teorem 2.7'yi ispatlayınız. (*Yol gösterme:* tip I, tip II ve tip III'nın elementer matrislerinin tersini bulunuz).

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulunuz.

9. Aşağıda verilen matrislerin hangileri singülerdir? Regüler olanların tersini bulunuz.
(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

10. Aşağıdaki matrislerin varsa tersini bulunuz.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

11. Aşağıdaki matrislerin varsa tersini bulunuz.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

12. Aşağıdaki matrislerin, varsa, tersini bulunuz.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

Alıştırma 13 ve 14'te verilen her bir A matrisinin regüler olduğunu ve elementer matrislerin bir çarpımı olarak yazıldığını ispatlayınız. (Yol gösterme: ilk olarak, tersini elementer matrislerin bir çarpımı olarak yazınız, sonra Teorem 2.7'yi uygulayınız.)

13. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **14.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

15. Eğer A, tersi $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ olan bir regüler matris ise A yı bulunuz.

16. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ise A matrisini bulunuz.

17. Aşağıda verilen homogen sistemlerinin hangileri aşikâr olmayan bir çözüme sahiptir?

(a)
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ 2y + 2z &= 0 \\ x + 2y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 0 \\ x - 2y - 3z &= 0 \\ -3x - y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 3x + y + 3z &= 0 \\ -2x + 2y - 4z &= 0 \\ 2x - 3y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

18. Aşağıda verilen homogen sistemlerinin hangileri aşikâr olmayan bir çözüme sahiptirler?

(a)
$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 0 \\ 2x + y + z &= 0 \\ 3x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 2x + y &= 0 \\ 2x - 2y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 2x - y + 5z &= 0 \\ 3x + 2y - 3z &= 0 \\ x - y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

19.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix}$$
matrisinin tersinin olması için a'nın bütün değerlerini bulunuz. Bu durumlar için A^{-1} nedir?

20.
$$\begin{aligned} (a-1)x + 2y &= 0 \\ 2x + (a-1)y &= 0 \end{aligned}$$
homogen sisteminin bir aşikâr olmayan çözümünün olması için a ne olmalıdır?

21.
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart $ad - bc \neq 0$ olmasıdır. İspatlayınız. Bu şart sağlandığında
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$
olduğunu gösteriniz.

22.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$
matrisi verilsin. A üzerine aşağıdaki elementer sütun işlemlerini uygulayarak A'nın bir sağdan çarpımı olan elementer matrisi bulunuz.

(a) A'nın 3. sütununu (–3) ile çarpmak

(b) A'nın 2. ve 3. sütunlarını yer değiştirmek

(c) A'nın 1. sütununun (–5) katını 3. sütununa eklemek

23. $m \times n$ tipinde olan iki A ve B matrisinin satırca denk olması için gerek ve yeter şart $B = PA$ olacak şekilde bir P regüler matrisinin var olmasıdır. İspatlayınız. (*Yol gösterme:* Teorem 2.6 ve 2.8'i kullanınız.)

24. A ve B satırca denk olan $n \times n$ tipinde iki matris olsun. A'nın regüler olması için gerek ve yeter şart B'nin regüler olmasıdır. İspatlayınız.

25. A ve B, $n \times n$ tipinde iki matris olsun. Eğer AB regüler ise A ve B'nin de regüler olması gerektiğini gösteriniz.

26. A, $m \times n$ tipinde bir matris olsun. A'nın O sıfır matrisine satırca denk olması için gerek ve yeter şart $A = O$ olmasıdır. Gösteriniz.

27. A ve B, $m \times n$ tipinde iki matris olsun. A'nın B'ye satırca denk olması için gerek ve yeter şart A^T'nin B^T'ye sütunca denk olmasıdır. İspatlayınız.

28. Sıfır elemanlarından oluşan bir satır veya bir sütuna sahip bir kare matrisin singüler olduğunu gösteriniz.

29. Aşağıdaki eşitliklerin doğru olup olmadığını araştırınız.

(**a**) $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$?

(**b**) $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$?

30. A, $m \times n$ tipinde bir matris ise A'nın regüler olması için gerek ve yeter şart $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sisteminin her $n \times 1$ tipindeki $\mathbf{b}$ matrisi için bir tek çözüme sahip olmasıdır. İspatlayınız.

31. Bir regüler üst (alt) üçgen matrisin tersinin de üst (alt) üçgen matris olduğunu gösteriniz.

32. Kullandığınız yazılım satırca indirgenmiş eşelon şekli hesaplamak için bir komuta sahip ise Alıştırma 9, 10, 11'deki A matrislerinin, $[A \mid \mathbf{I}_n]$ matrisine işlemler uygulayarak tersinin olup olmadığını bulmak için bu komutunuzu kullanınız. (Örnek 4'e bakınız.)

33. Kesim 1.5 Alıştırma 63'te verilen matrisler üzerinde Alıştırma 32'yi tekrarlayınız.

2.4 Denk Matrisler

Buraya kadar; bir B matrisi A matrisine sonlu sayıda elementer satır (sütun) işlemlerinin uygulanması ile elde ediliyorsa A'nın B'ye satırca (sütunca) denk olmasını göz önüne aldık. Bu düşüncenin doğal bir genişlemesi, elementer satır veya elementer sütun işlemlerinin sonlu sayıda A ya uygulanması ile elde edilen B matrisini göz önüne almaktı. Bu, bizi matrislerin denkliği kavramına götürür. Bu kesimde tartışılan konular Kesim 4.9'da kullanılmıştır.

TANIM 2.5 A ve B, $m \times n$ tipinde iki matris olmak üzere eğer B, A matrisine sonlu sayıda elementer satır veya elementer sütun işlemlerinin uygulanması ile elde edilen bir matris ise A, B'ye **denktir** denir.

Satırca denklik durumda gördüğümüz gibi (a) her matris kendisine denktir (b) B, A matrisine denk ise A'da B'ye denktir (c) C, B'ye denk ve B'de A'ya denk ise C'de A'ya denktir. Bunları gösterebiliriz (Alıştırma 1'e bakınız). (b)'den dolayı her iki "B, A matrisine denk" ve "A, B'ye denktir" ifadeleri yerine "A ve B denktirler" ifadesi kullanılır. Eğer iki matris satırca denk ise onların denk olduğu gösterilebilir. (Alıştırma 4'e bakınız.)

Teorem 2.11 Eğer A, $m \times n$ tipinde sıfırdan farklı herhangi bir matris ise A matrisi

$$\begin{bmatrix} I_r & O_{r\,n-r} \\ O_{m-r\,r} & O_{m-r\,n-r} \end{bmatrix}^{\dagger}$$

şeklindeki bir bölünmüş matrise denktir.

†Burada, $O_{r\,n-r}$; $r \times n - r$ tipinde sıfır matrisi, $O_{m-r\,r}$; $m - r \times r$ tipinde sıfır matrisidir vb.

İspat

Teorem 2.2'den, A matrisi satırca indirgenmiş eşelon şeklindeki bir B matrisine satırca denktir. I. tip elementer sütun işlemlerini kullanarak, r; B'deki sıfırdan farklı satırların sayısı olmak üzere B matrisinin

$$\begin{bmatrix} I_r & U_{r\,n-r} \\ O_{m-r\,r} & O_{m-r\,n-r} \end{bmatrix}$$

şeklindeki bir C matrisine denk olduğu elde edilir. III. tip elementer sütun işlemlerini kullanarak C matrisi

$$\begin{bmatrix} I_r & O_{r\,n-r} \\ O_{m-r\,r} & O_{m-r\,n-r} \end{bmatrix}$$

şeklindeki bir D matrisine denktir. Alıştırma 1'den A'nın B'ye denk olduğu elde edilir. ■

Elbette, Teorem 2.12'de r, m'ye eşit olabilir. Bu ise matrisin alt satırlarının sıfır satırı olmayacağı anlamındadır. ($r = n$ veya $r = m = n$ ise ne olur?)

Kesim 2.1'den elementer sütun işlemleri için aşağıdaki gösterimleri verdiğimizi hatırlatalım:

- i. ve j. sütunları yer değiştirmek: $\mathbf{c}_i \leftrightarrow \mathbf{c}_j$
- i. sütunun yerine i. sütunun k katını almak: $k\mathbf{c}_i \rightarrow \mathbf{c}_i$
- j. sütunun yerine i. sütunun k katını j. sütuna eklemek: $k\mathbf{c}_i \leftrightarrow \mathbf{c}_j \rightarrow \mathbf{c}_j$

ÖRNEK 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

olsun. Teorem 2.12'de tarif edildiği biçimde A matrisine denk olan bir matris bulmak için aşağıdaki işlemleri uygulayacağız. $-1\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_2$ satır işlemleri uygulanırsa

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$1\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 \rightarrow \mathbf{r}_3$
elementer satır işlemini uygula.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$-1\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4 \rightarrow \mathbf{r}_4$
elementer satır işlemini uygula.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$-1\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4 \rightarrow \mathbf{r}_4$
elementer satır işlemini uygula.

elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad -\tfrac{1}{3}\mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3 \text{ elementer satır işlemini uygula.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad -1\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3 \text{ elementer satır işlemini uygula.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad -1\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 \text{ elementer satır işlemini uygula.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad -3\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_3 \to \mathbf{c}_3 \text{ elementer satır işlemini uygula.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 2\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_4 \to \mathbf{c}_4 \text{ elementer satır işlemini uygula.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 1\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3 \to \mathbf{c}_3 \text{ elementer satır işlemini uygula.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad -1\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_4 \to \mathbf{c}_4 \text{ elementer satır işlemini uygula.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

istenilen matris bulunur. ■

Aşağıdaki teorem, matrislerin denkliğini araştırmada kullanışlı bir yoldur:

Teorem 2.13 $m \times n$ tipinde iki A ve B matrisinin denk olması için gerek ve yeter şart P ve Q regüler matrisleri için $B = PAQ$ olmasıdır.

İspat

Alıştırma 5. ■

Biz daha sonra Sonuç 2.2'ye benzer bir teorem vereceğiz.

Teorem 2.14 $n \times n$ tipindeki bir A matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart A'nın I_n birim matrisine denk olmasıdır.

İspat

Eğer A, I_n birim matrisine denk ise I_n matrisi, A matrisine bir dizi elementer satır işlemleri veya elementer sütun işlemleri uygulanmasıyla elde edilir. Bundan dolayı,

$$I_n = E_r E_{r-1} \cdots E_2 E_1 A F_1 F_2 \cdots F_s$$

olacak şekilde E_r, E_{r-1}, $\cdots$, E_2, E_1, F_1, F_2, $\cdots$, F_s elementer matrisleri vardır. $E_r E_{r-1} \cdots E_2 E_1 = P$ ve $F_1 F_2 \cdots F_s = Q$ olsun. O halde P ve Q regüler matrisler olmak üzere $I_n = PAQ$ yazılır. Öyleyse $A = P^{-1}Q^{-1}$ elde edilir. P^{-1} ve Q^{-1} regüler olduğundan A matrisi de regülerdir.

Tersine, A regüler ise Sonuç 2.2'den A matrisi I_n birim matrisine satırca denktir. Bundan dolayı A, I_n birim matrisine denktir. ■

Anahtar Kelimeler

Denk matris
Bölünmüş matris

2.4 Alıştırmalar

1. (**a**) Her A matrisinin kendisine denk olduğunu gösteriniz
(**b**) Eğer B matrisi A matrisine denk ise A'nın da B'ye denk olduğunu gösteriniz.
(**c**) Eğer C matrisi B matrisine denk ve B matrisi de A matrisine denk ise C'nin A'ya denk olduğunu gösteriniz.

2. Aşağıdaki matrislerin her biri için, bu matrislere denk olan ve Teorem 2.12'de tanımlanmış şekilde bir matris bulunuz.

(**a**) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (**b**) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(**c**) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (**d**) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & -3 \\ 7 & 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

3. Aşağıdaki matrisler için Alıştırma 2'yi tekrarlayınız.

(**a**) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ (**b**) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 5 & 6 & 4 \\ 5 & 8 & -1 \end{bmatrix}$

(**c**) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ (**d**) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

4. A ve B satırca denk matrisler ise bunların denk olduğunu gösteriniz.

5. Teorem 2.13'ü ispatlayınız.

6.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olsun. A matrisine denk olan ve Teorem 2.12'de tanımlanmış şekilde bir B matrisi bulunuz. Ayrıca, $B = PAQ$ olacak şekilde P ve Q regüler matrislerini bulunuz.

7.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & 7 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisi için Alıştırma 6'yı tekrarlayınız.

8. A, $m \times n$ tipinde bir matris olsun. A'nın O sıfır matrisine denk olması için gerek ve yeter şart $A = O$ olmasıdır. Gösteriniz.

9. A ve B, $m \times n$ tipinde iki matris olsun. A'nın B ye denk olması için gerek ve yeter şart A^T matrisinin B^T matrisine denk olmasıdır. Gösteriniz.

10. Aşağıdaki A matrislerin her biri için, A'ya denk olan bir $B \neq A$ matrisi bulunuz.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ **(b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

11. A ve B, denk kare matrisler olsun. A'nın regüler olması için gerek ve yeter şart B'nin regüler olmasıdır. İspatlayınız.

2.5 *LU*-Ayrışımı (Çarpanlarına Ayırma) (Seçmeli)

Bu kesimde, bir matrisin alt üçgen ve üst üçgen matrislerin çarpımı olarak yazılmasını sağlayan (Kesim 2.2'de sunulan) Gauss yok etme metodunun bir çeşidini tartışacağız. Bu ayrışım, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer denklem sisteminin çözümü için bir algoritma sunar. Bu, lineer bir sistemin çözümü için bilgisayarlarda yaygın şekilde kullanılan metottur. Bu metodun popüler şekilde kullanılmasının asıl sebebi; sağ tarafı sürekli olarak değiştirme şansına sahip olduğumuz lineer sistemin çözümü için en pratik yolu sağlamasıdır. Bu durum uygulamalı problemlerde sık olur. Örneğin; bir elektrik kamu şirketi, gerekli çıktıları (sağ taraf) üretmek için gerekli olan girdileri (bilinmeyenleri) belirlemek zorundadır. Girdiler ve çıktılar bir lineer sistem ile bağlanabilir. Şöyle ki; katsayılar matrisi sabit, sağ taraf günden güne ve saatten saate değişir. Bu Kesimde tartışılan ayrışım aynı zamanda lineer cebirdeki diğer problemlerin çözümünde de kullanışlıdır.

Köşegen elemanlarının hepsi sıfırdan farklı olan bir üst üçgen matris U olduğu zaman $U\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistemi, $[\,U\,|\,\mathbf{b}\,]$ ilaveli matrisini satırca indirgenmiş eşelon şekle dönüştürmeden çözülebilir. Bu tip sistemin ilaveli matrisi

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} & b_1 \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

şeklindedir. Çözüm aşağıdaki algoritma ile elde edilir:

$$x_n = \frac{b_n}{u_{nn}}$$

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - u_{n-1\,n}x_n}{u_{n-1\,n-1}}$$

$$\vdots$$

$$x_j = \frac{b_j - \displaystyle\sum_{k=n}^{j-1} u_{jk}x_k}{u_{jj}}, \qquad j = n, n-1, \ldots, 2, 1.$$

Bu işlem Kesim 2.2'deki Gauss Yok etme ile birlikte eşlemede kullandığımız **geriye yerine koyma metodu** (sondan başa doğru) dur.

Benzer bir yolla, eğer L köşegen elemanlarının hepsi sıfırdan farklı olan alt üçgensel matris ise o zaman $L\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer denklem sistemi aşağıdaki işlemleri içeren **ileri yerine koyma metodu** (baştan sona doğru) ile çözülebilir: İlaveli matris

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \ell_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 & \cdots & 0 & b_2 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} & \cdots & 0 & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & \ell_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

şeklindedir ve çözüm

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1}{\ell_{11}} \\ x_2 &= \frac{b_2 - \ell_{21}x_1}{\ell_{22}} \\ &\vdots \\ x_j &= \frac{b_j - \sum_{k=1}^{j-1} \ell_{jk}x_k}{\ell_{jj}}, \qquad j = 2, \ldots, n \end{aligned}$$

ile verilir. Yani, biz ilk denklemden aşağıya doğru her bir denklemdeki bilinmeyeni çözerek ilerleriz. İleri yerine koyma metodunu aşağıdaki örnekte gösterelim.

ÖRNEK 1

$$\begin{aligned} 5x_1 &= 10 \\ 4x_1 - 2x_2 &= 28 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 26 \end{aligned}$$

lineer sistemini çözmek için ileri yerine koyma metodunu kullanırız. Bir önceki algoritmadan

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{10}{5} = 2 \\ x_2 &= \frac{28 - 4x_1}{-2} = -10 \\ x_3 &= \frac{26 - 2x_1 - 3x_2}{4} = 13 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece verilen denklemlerin alt üçgen sisteminin çözümü

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \\ 13 \end{bmatrix}$$

olur. ■

Bu kesimdeki Örnek 1 ve Kesim 2.2'nin başındaki tartışmada örneklendirildiği gibi, alt üçgen veya üst üçgen katsayılar matrisli denklem sistemlerinin çözülebilir olduğu durum oldukça ilgi çekicidir. İleri ve geriye yerine koyma algoritmaları kullanım için hızlı ve basittir. Bunlar sonra lineer denklem sistemlerinin çözümü için geliştireceğimiz, diğer önemli Nümerik metotlarda kullanılırlar.

$n \times n$ tipindeki A matrisinin alt üçgen şeklindeki bir L ve üst üçgen şeklindeki U matrisinin çarpımı olarak yazılabileceğini kabul edelim. Yani,

$$A = LU$$

olsun. Bu durumda A'nın bir ***LU*-çarpanlarına ayırma** veya bir ***LU*-ayrışımına** sahip olduğunu söyleriz. Bir A matrisinin ***LU*-ayrışımı** $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistemini etkin bir şekilde çözmek için kullanılır. A yerine LU yazarsak,

$$(LU)\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

veya Kesim 1.4'teki Teorem 1.2'nin (a) şıkkından

$$L(U\,\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

yazılır. $U\mathbf{x} = \mathbf{z}$ alınırsa, bu matris denklemi

$$L\mathbf{z} = \mathbf{b}$$

şeklinde elde edilir.

L alt üçgen şeklinde olduğundan $\mathbf{z}$'yi doğrudan ileri yerine koyma ile çözeriz. U alt üçgen şeklinde olduğundan, $\mathbf{z}$'yi belirledikten sonra, $U\mathbf{x} = \mathbf{z}$'yi geri yerine koyma ile çözeriz. Özet olarak, eğer $n \times n$ tipindeki A matrisi LU-ayrışımına sahip ise $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$'nin çözümü bir ileri yerine koymayı takiben bir geriye yerine koyma ile bulunabilir. Aşağıdaki örnekte bunu gösterelim.

ÖRNEK 2

$$\begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 3x_1 - 3x_2 - 6x_3 + x_4 &= -4 \\ -12x_1 + 8x_2 + 21x_3 - 8x_4 &= 8 \\ -6x_1 - 10x_3 + 7x_4 &= -43 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemini göz önüne alalım. Bu lineer denklem sisteminin katsayılar matrisi

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad U = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

olmak üzere LU-ayrışımına sahip

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 3 & -3 & -6 & 1 \\ -12 & 8 & 21 & -8 \\ -6 & 0 & -10 & 7 \end{bmatrix}$$

dır. (Gösteriniz.) Bu LU-ayrışımını kullanarak verilen sistemi çözmek için, aşağıdaki gibi devam edeceğiz.

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 8 \\ -43 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sistemini $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$ şeklinde yazarak çözeriz. İlk olarak, $U\mathbf{x} = \mathbf{z}$ dersek

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 8 \\ -43 \end{bmatrix}$$

$L\mathbf{z} = \mathbf{b}$ sistemini çözmek için ileri yerine koyma kullanılır. Böylece

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 \\ z_2 &= -4 - \tfrac{1}{2}z_1 = -5 \\ z_3 &= 8 + 2z_1 + 2z_2 = 2 \\ z_4 &= -43 + z_1 - z_2 + 2z_3 = -32 \end{aligned}$$

bulunur. Sonra,

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \\ -32 \end{bmatrix}$$

$U\mathbf{x} = \mathbf{z}$ sistemini geri yerine koyma metoduyla çözelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{-32}{8} = -4 \\ x_3 &= \frac{2 + 2x_4}{5} = -1.2 \\ x_2 &= \frac{-5 + 4x_3 + x_4}{-2} = 6.9 \\ x_1 &= \frac{2 + 2x_2 + 4x_3 - 4x_4}{6} = 4.5 \end{aligned}$$

elde edilir. Bundan dolayı verilen sistemin çözümü

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4.5 \\ 6.9 \\ -1.2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. ■

Sonra, Kesim 2.2'den Gauss yok etme metodunda değişiklik yaparak bir matrisin *LU*-ayrışımını nasıl elde edeceğimizi göstereceğiz. Satır değişikliklerine izin verilmeyecek ve köşegen elemanlarının 1 değerine sahip olmasına ihtiyacımız yoktur. Bu Kesimin sonunda satırlar arası değişiklikleri gerekli olan matrislerle ilgili sunulan *LU*-ayrışım yapısının nasıl artırılacağını belirleyen bir kaynak sağlayacağız. Sadece bir satırın katını diğerine eklemeye izin veren elementer satır işlemine izin verildiğini gözlüyoruz.

LU-ayrışımını tanımlamak için aşağıdaki örnekte yöntemi adım adım sunacağız.

ÖRNEK 3

A, Örnek 2'deki lineer sistemin katsayılar matrisi olsun:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 3 & -3 & -6 & 1 \\ -12 & 8 & 21 & -8 \\ -6 & 0 & -10 & 7 \end{bmatrix}.$$

Sadece, bir satırın katının diğer bir satıra ekleme işlemini kullanarak köşegen elemanlarının altındaki elemanları "sıfırlama" işlemini yapacağız.

İşlem	Matrisler
Adım 1. A'nın ilk köşegen elemanının altında kalan elemanları "sıfırlayalım". A'nın ilk satırının $(-\frac{1}{2})$ katını A'nın 2. satırına ekleyelim. A'nın ilk satırının 2 katını A'nın 3. satırına ekleyelim. A'nın 1. satırının 1 katını A'nın 4. satırına ekleyelim. Elde edilen matrisi U_1 ile gösterelim.	$U_1 = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 4 & 13 & 0 \\ 0 & -2 & -14 & 11 \end{bmatrix}$
Satır işlemlerini kaydederek, esas köşegen üzerindeki elemanları 1 olan L_1 alt üçgensel matrisini oluşturarak başlayalım. Satır işlemlerinde kullanılan çarpanların negatiflerini, L_1'in ilk sütunundan L_1'in ilk köşegen elemanının altında olacak şekilde girelim.	$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -2 & * & 1 & 0 \\ -1 & * & * & 1 \end{bmatrix}$
Adım 2. U_1 in 2. köşegen elemanının altında kalan elemanları sıfırlayalım. U_1'in 2. satırının 2 katını U_1'in 3. satırına ekleyelim. U_1'in 2. satırının (–1) katını U_1'in 4. satıra ekleyelim. Yeni oluşan matrisi U_2 ile gösterelim.	$U_2 = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -10 & 12 \end{bmatrix}$

L_1'in ikinci köşegen elemanının altındaki satır işlemlerinden çarpanların negatiflerini işleme girelim. Yeni matrisi L_2 ile gösterelim.

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & * & 1 \end{bmatrix}$$

Adım 3. U_2'nin üçüncü köşegen elemanının altındaki elemanları sıfırlayalım. U_2'nin 3. satırının 2 katını 4. satırına ekleyelim. Elde edilen matrisi U_3 ile gösterelim.

$$U_3 = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

L_2'nin üçüncü köşegen elemanın altındaki çarpanın negatifini girelim. Elde edilen matrisi L_3 ile gösterelim.

$$L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$L = L_3$ ve $U = U_3$ olsun. O zaman *LU*-çarpımı orijinal A matrisini verir. (Gösteriniz.) Bu lineer sistem, şimdi elde ettiğimiz *LU*-ayrışımı kullanılarak Örnek 2'de çözüldü. ■

Uyarı Genel olarak, verilen matris birden fazla *LU*-ayrışımına sahip olabilir. Örneğin, A, Örnek 2'de düşünülen bir katsayı matrisi ise, o zaman diğer *LU*-ayrışımı

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad U = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Bir matrisin *LU*-ayrışımını elde etmek için Örnek 3'te tarif edilen çarpanların **depolanmasını** sağlayan yapının yanında pek çok metot vardır. Eğer $a_{11} = 0$ ise Örnek 3'te kullanılan işlemin başarısız olduğunu not etmek gerekir. Bunun yanında, U_1'in ikinci köşegen elemanı 0 ise veya U_2'nin üçüncü köşegen elemanı 0 ise yöntem başarısızdır. Öyle durumlarda, sistemin denklemelerini tekrar düzenlemeyi deneyebilir ve tekrar başlayabilir veya *LU*-ayrışımı için diğer metotlardan birini kullanabiliriz. *LU*-ayrışımı için pek çok bilgisayar programları çarpanların depolanmasında satır değişiklerini birleştirir ve yuvarlama hatalarının kontrolü için ek stratejiler kullanır. Eğer satır değişikleri gerekirse L ve U'nun çarpımı A olması gerekmez. A matrisi, A'nın satırlarının bir permutasyonudur. Örneğin, **[L,U] = lu(A)** şeklinde MATLAB'da **lu** komutunu kullanıldığında eğer satır değişiklikleri olursa, o zaman MATLAB aşağıdaki gibi sonuç verir: *LU*' yu meydana getiren matrisler L alt üçgen matris değil, U üst üçgen matristir ve $LU = A$'dır.

Anahtar Kelimeler

Alt üçgen matris
Üst üçgen matris
Ayrışım
Geri ve ileri yerine koyma
LU-Çarpanlara ayırma (-ayrışımı)
Çarpanların birikimi

2.5 Alıştırmalar

Alıştırma 1-4'e A katsayı matrisli LU-ayrışımlı $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *lineer sistemini çözünüz. Lineer sistemi bir ileri yerine koyma daha sonra bir geriye yerine koyma kullanarak çözünüz.*

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 18 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix}$

$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 8 & 12 & -4 \\ 6 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -36 \\ 11 \\ 16 \end{bmatrix},$

$L = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 3 \\ -2 & -6 & 7 & 7 \\ 8 & 9 & 5 & 21 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -16 \\ -66 \end{bmatrix}$

$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},$

$U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & -6 & 1 & 3 \\ 8 & 16 & -3 & -4 \\ 20 & 10 & 4 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 13 \\ -20 \\ 15 \end{bmatrix},$

$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$

$U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Alıştırma 5-10'da verilen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *lineer sisteminin katsayılar matrisinin bir LU-ayrışımı bulunuz. Bu lineer sistemleri bir ileri yerine koyma daha sonra geriye yerine koymayı kullanarak çözünüz.*

5. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 10 \\ 4 & 8 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 16 \\ 2 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -12 & 10 & -6 \\ 15 & 13 & 12 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 15 \\ 82 \\ -5 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 0 & 1 \\ -30 & 27 & 2 & 7 \\ 5 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -17 \\ -102 \\ -7 \\ -6 \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0.25 & -1 \\ -2 & -1.1 & 0.25 & 6.2 \\ 4 & 2.2 & 0.3 & -2.4 \end{bmatrix} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1.5 \\ 5.6 \\ 2.2 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0.25 & -0.5 \\ 0.8 & 0.6 & 1.25 & -2.6 \\ -1.6 & -0.08 & 0.01 & 0.2 \\ 8 & 1.52 & -0.6 & -1.3 \end{bmatrix},$

$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -0.15 \\ 9.77 \\ 1.69 \\ -4.576 \end{bmatrix}$

11. Kullandığınız yazılımda, bir matrisin bir *LU*-ayrışımını elde etmek için bir komut olup olmadığını araştırınız. Eğer varsa, Örnek 2'deki *A* matrisinin *LU*-ayrışımını bulmak için onu kullanınız. Sizin yazılımınızda elde edilen sonucun Örnek 2 veya 3'te verilmesine gerek yoktur. Çünkü böyle bir çarpanlara ayırma hesaplamak için birçok yol vardır. Ayrıca bazı yazılımlar *L* ve *U*'yu belirgin olarak göstermez. Fakat *L* ve *U* "kodları çözülmüş" bir matris verir. Daha fazla detay için sizin yazılımınız üzerindeki belgeye bakınız.

12. Kullandığınız yazılımda, ileri yerine koyma veya geriye yerine koyma yapmak için komutların olup olmadığını araştırınız. Örnek 2 ve 3'teki *L* ve *U*'yu kullanarak lineer sistemler üzerindeki böyle komutları kullanarak tecrübe ediniz.

Ek Alıştırmalar

1.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

olsun. Elementer matrisleri kullanarak, A matrisine satırca denk olan satırca indirgenmiş eşelon şeklinde bir B matrisi bulunuz.

2. Aşağıdaki lineer sistemlerinin çözümlerinin olması durumunda a'nın tüm değerlerini bulunuz:

(a) $x + 2y + z = a^2$
$x + y + 3z = a$
$3x + 4y + 7z = 8$

(b) $x + 2y + z = a^2$
$x + y + 3z = a$
$3x + 4y + 8z = 8$

3. Aşağıdaki homogen lineer sistemin aşikâr olamayan çözümlerinin olması durumunda a'nın tüm değerlerini bulunuz:

$$\begin{aligned} (1-a)x \quad\quad + z &= 0 \\ -ay + z &= 0 \\ y + z &= 0 \end{aligned}$$

4.

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

lineer sistemi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -10 \end{bmatrix}$$

matrisi için tutarlı olacak şekilde tüm a, b ve c değerlerini bulunuz.

5. A, $n \times n$ tipinde bir matris olsun.

(a) B matrisinin A'nın j. satırının $k \neq 0$ ile çarpılmasıyla A'dan elde edilen bir matris olduğunu kabul edelim. B'ye uygulandığında A'yı veren bir elementer satır işlemi bulunuz.

(b) C matrisinin A'nın i. ve j. satırlarının yer değiştirilmesi ile A'dan elde edildiğini kabul edelim. C ye uygulandığında A'yı veren bir elementer satır işlemi bulunuz.

(c) D matrisinin A'nın j. satırının k katının i. satırına eklenmesiyle elde edildiğini kabul edelim. D'ye uygulandığında A'yı veren bir elementer satır işlemi bulunuz.

6. Alıştırma 5, herhangi bir elementer satır işleminin sonucunun diğer (uygun) elementer işlemler vasıtasıyla tersine çevrilebilir olduğunu ifade eder.

(a) E_1 matrisinin I_n birim matrisinin j. satırının $k \neq 0$ ile çarpılmasıyla elde edilmiş bir matris olduğunu kabul edelim. E_1 matrisinin niçin regüler olduğunu açıklayınız.

(b) E_2 matrisinin I_n birim matrisinin i. ve j. satırlarının yer değiştirilmesi ile elde edilmiş bir matris olduğunu kabul edelim. E_2 matrisinin niçin regüler olduğunu açıklayınız.

(c) E_3 matrisinin I_n birim matrisinin j. satırının k katının i. satırına eklenmesiyle elde edildiğini kabul edelim. E_3 matrisinin niçin regüler olduğunu açıklayınız.

7.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinin tersini bulunuz.

8.

$$\begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinin tersini bulunuz.

9. Bir projenin üyesi olarak, iki öğrenci verilen 10×10 tipindeki bir A matrisinin inversini bulmak zorundalar. Her biri istenilen hesaplamaları yapar ve onlar, sırası ile A_1 ve A_2 sonuçlarını dersin hocasına sunarlar.

(a) Bu iki sonuç hakkında ne doğru olmak zorundadır? Niçin?

(b) Dersin hocası, hesaplamaları tekrar edilmeksizin öğrencilerin çalışmasını nasıl kontrol eder?

10.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix};$$

olmak üzere herhangi bir matrisin tersini hesaplamadan aşağıdaki ifadelerin her biri için $\mathbf{w}$ vektörünü bulunuz.

(a) $\mathbf{w} = A^{-1}(C + F)\mathbf{v}$ **(b)** $\mathbf{w} = (F + 2A)C^{-1}\mathbf{v}$

11.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & s & 2 \end{bmatrix}$$

regüler olacak şekilde s'nin tüm değerlerini bulunuz.

12.

$$A = \begin{bmatrix} s & 1 & 0 \\ 1 & s & 1 \\ 0 & 1 & s \end{bmatrix}$$

regüler olacak şekilde s'nin tüm değerlerini bulunuz.

13.

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

matrisinin regüler olduğunu gösteriniz ve tersini bulunuz.

14. **u** ve **v**, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen lineer sisteminin çözümleri olsun.
(**a**) **u + v**'nin de sistemin bir çözümü olduğunu gösteriniz.
(**b**) **u – v**'nin de sistemin bir çözümü olduğunu gösteriniz.
(**c**) Herhangi r skaları için $r\mathbf{u}$'nun da sistemin bir çözümü olduğunu gösteriniz.
(**d**) Herhangi r ve s skalarları için $r\mathbf{u} + s\mathbf{v}$'nin de sistemin bir çözümü olduğunu gösteriniz.

15. **u** ve **v**, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sisteminin çözümleri ise $\mathbf{u} - \mathbf{v}$'de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen lineer sisteminin çözümü olduğunu gösteriniz.

16. Kesim 2.2'de Örnek 6'dan sonraki Uyarı 1'i ispatlayınız.

17. Eğer A singüler ve $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ sistemi bir çözüme sahip ise bu çözümünün sonsuz çoklukta olduğunu gösteriniz. (*Yol gösterme:* Kesim 2.2'deki Alıştırma 29'u kullanınız.)

Alıştırma 18-20'de Kesim 2.5'teki bilgileri kullanınız.

18. $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ t & -2 \end{bmatrix}$ ve $U = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & s \end{bmatrix}$ olsun. $LU = A$ olacak şekilde s ve t skalarlarını bulunuz.

19.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 8 \\ 9 & 5 & 11 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ t & s & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ve

$$U = \begin{bmatrix} r & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}.$$

olsun. $LU = A$ olacak şekilde r, s, t ve p skalarlarını bulunuz.

20. A, bir LU-ayrışımına sahip olsun. L alt üçgen matris ve U üst üçgen matrislerini inceleyerek, $A\mathbf{x} = LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sisteminin bir tek çözüme sahip olmadığını açıklayınız.

21. X ve Y'nin dış çarpımının ya O sıfır matrisi ya da $(n–1)$ tane satırı sıfır olan bir matrise satırca denk olduğunu gösteriniz. (Bölüm 1'deki Ek Alıştırmalar 30'dan 32'ye kadar bakınız.)

Bölüm Tekrarı

Doğru veya Yanlış

1. Satırca eşelon şeklindeki her matris ayrıca satırca indirgenmiş eşelon şeklindedir.

2. İki lineer sistemin ilaveli matrisleri satırca denk ise sistemler tam olarak aynı çözümlere sahiptir.

3. Bir homogen lineer sistemde bilinmeyen sayısı denklem sayısından az ise sistem aşikar olmayan bir çözüme sahiptir.

4. Bir $3 \times n$ lineer sisteminin $[A \mid \mathbf{b}]$ ilaveli matris ile

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elementer matrisinin çarpımı sonucunda bu $3 \times n$ lineer sisteminin 1. ve 3. denklemleri yer değiştirir.

5. Regüler bir matrisin satırca indirgenmiş eşelon şekli bir birim matristir.

6. A, $n \times n$ tipinde ise $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen lineer sisteminin aşikâr olmayan bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart A'nın singüler olmasıdır.

7. Bir $n \times n$ tipindeki A'nın matrisi elementer matrislerin çarpımı olarak ifade edilebiliyorsa A regüler olmasıdır.

8. Singüler bir matrisin satırca indirgenmiş eşelon şekli bir sıfır satırına sahiptir.

9. Bir birim matrisine denk herhangi bir matris regülerdir.

10. A, $n \times n$ tipinde ve $[A \mid I_n]$ ilaveli matrisinin satırca indirgenmiş eşelon şekli $[C \mid D]$ ise $C = I_n$ ve $D = A^{-1}$.

Küçük Sınav

1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & -2 \\ -3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

matrisinin satırca indirgenmiş eşelon şeklini bulunuz.

2. Bazı elementer işlemlerden sonra, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistemin ilaveli matrisi

$$[C \mid \mathbf{d}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

dır.
(**a**) C satırca indirgenmiş eşelon şeklinde midir? Açıklayınız.
(**b** $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sisteminin kaç tane çözümü vardır?
(**c**) A regüler midir? Açıklayınız.
(**d**) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sistemine ait bütün olası çözümlerini bulunuz.

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & k \end{bmatrix}$ matrisinin singüler olması için k nedir? Bulunuz.

4.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

katsayılar matrisli homogen lineer sisteminin bütün çözümlerini bulunuz.

5. Eğer $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ise (eğer mümkünse) A^{-1} matrisini bulunuz.

6. A ve B, $n \times n$ tipinde regüler matrisler olsun. $PAQ = B$ olacak şekilde P ve Q regüler matrislerini bulunuz.

7. Aşağıdaki ifadedeki boşluğu doldurunuz:
Eğer A …….. ise A ve A^T matrisleri satırca denktir.

Tartışma Alıştırmaları

1. A'nın satırca indirgenmiş eşelon şekli I_3 olsun. Bu şekilde mümkün olan tüm A matrislerini belirleyiniz.

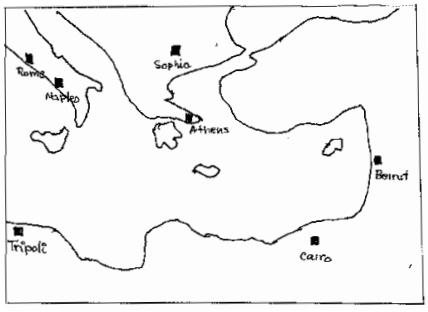
2. A'nın satırca indirgenmiş eşelon şekli

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olsun. Bu şekilde üç farklı A matrisi bulunuz. Bu matrisleri nasıl belirlediğinizi açıklayınız.

3. A, 2×2 tipinde bir reel matris olsun. $A^2 = I_2$ olacak şekilde A'nın elemanlarının sağlayacağı şartları belirleyiniz.

4. Bir ajan bir görev üzerinde fakat onun yerinden emin değildir. Doğu Akdeniz haritasının burada gösterilen bir kopyasını taşıyor.



Haritanın ölçeği yaklaşık 400 mil civarı için 1 inch'tir. Ajan'nın elle tutularak kullanılan GPS birimi kusurludur. Fakat onun radyo birimi çalışıyor. Radyo biriminin pili o kadar düşük ki, onu sadece kısa bir süre kullanabilir. Onu açarak üç radyo feneri ile kontak kurabilir. Bu kontak onun bulunduğu konumdan her bir radyo fenerine olan uzaklığı yaklaşık mesafeyi bulmak içindir. O hızlı bir şekilde aşağıdaki bilgiyi kayıt eder. Atina'dan 700 mil, Roma'dan 1300 mil ve Sofya'dan 900 mil'dir. Muhabirin yerini yaklaşık olarak belirleyen işleminizi açıklayınız.

5. Kesim 2.2 deki GPS ile ilgili Alıştırmalar, cevapları doğal sayılar veya doğal sayılara çok yakın olacak şekilde inşa edildi. İnşa işlemi tersine de çalışır. Şöyle ki, üç çemberi kesiştirmek istediğimiz yer olarak (x,y) koordinatları seçelim ve sonra bu noktada kesişen üç çemberin yarıçaplarını ve merkezlerini bulmayı açıklayalım. Biz çemberin merkezlerinin tamsayı sıralı ikilileri ve yarıçapları da pozitif tamsayı uzunluğuna sahip olmasını istiyoruz. Bu yapıyı tamamlamak için Doğal sayıların Pisagor üçlüsünü nasıl kullandığımızı tartışırız.

6. Kesim 2.2'deki Örnek 9'dan sonra,

$$(x - a_j)^2 + (y - b_j)^2 + (z - c_j)^2 = (\text{alıcının } j \text{ uydusuna uzaklığı})^2$$

şeklinde dört denklemin cümlesini kullanan 3-boyutta GPS için açık olarak bir yaklaşık taslak çizdik. Burada sağ taraftaki, uzaklık "uzaklık = hız × geçen zaman" açılımında gelir. Bu durumdaki hız ışık hızıyla ilgilidir. Bu durumun en güzel örneklerinden bir tanesi Dan Kalman'nın ("An Underdetermined Linear System for GPS," *The Collage Mathematics Journal*, vol. 33, no. 5, Nov. 2002, pp. 384-390) çalışmasında vardır. Bu makalede alıcıdan uyduya olan uzaklık 0.047 olarak t'nin cinsinden ifade edilmiştir. (t-uydu alıcı zamanı).
Burada 0.047 dünyanın yarıçap birimlerine taslak olarak ışığın hızıdır. Bundan dolayı, (a_j, b_j, c_j), j uydusunun yeri olmak üzere $j = 1, 2, 3, 4$ için dört denklem

$$(x - a_j)^2 + (y - b_j)^2 + (z - c_j)^2 =$$
$$0{,}0472\,(t\text{–uydudan alıcıya sinyalin ulaşma zamanı})^2$$

şekline sahiptir. Aşağıdaki tablodaki veriler için, küre üzerindeki GPS alıcının (x, y, z) yerini belirleyiniz. Adımlarınız dikkatlice belirleyiniz.

Uydu	*Koordinat* (a_j, b_j, c_j)	*Uydudan GPS alıcısına giden sinyalin zamanı*
1	(1,2,0)	19.9
2	(2,0,2)	2.4
3	(1,1,1)	32.6
4	(2,1,0)	19.9

7. Bir regüler katsayılar matrisli bir kare lineer sistemi için Gauss yok etme metodunda, üst üçgen matris olan satırca denk lineer sistemi elde etmek için geriye yerine koymayı kullanırız. Bir işin ham ölçümü çarpanların sayısını sayar ve üst üçgensel şekli elde etmek için gerekli olanlara böler. Sıfırdan farklı pivotlara sahip olmak için satırları değiştirme ihtiyacımızın olmadığını kabul edelim ve üst üçgen katsayılar matrisinin köşegen elemanlarının 1 olması gerekmediğini kabul edelim. Buradan k çarpanının uygun seçimi için sadece $k\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j \rightarrow \mathbf{r}_j$ satır işlemini kullanarak işlemi sürdürelim. Bu durumda her bir satır işlemi için kullanılan k çarpanı için

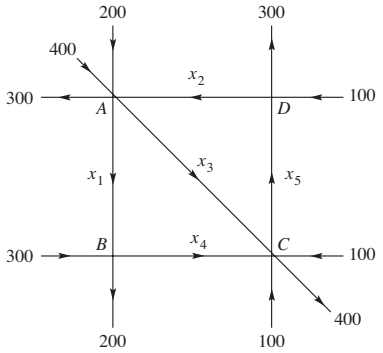
$$k = \frac{\text{elimine edilen girdi}}{\text{pivot}}$$

ifadesini verebiliriz. Pivotları 1 yapamadığımız için her bir satır işlemini kullandığımız seferde bölme işlemini sayalım.

(a) Katsayılar matrisinin 5×5 tipinde olduğunu kabul edelim. Çarpanlarının sayısını belirleyiniz ve katsayılar matrisi üst üçgen olan satırca denk lineer sistemi elde etmek için gerekli olanlara bölelim. İlaveli sütuna satır işlemlerini uygulamayı unutmayın.

(b) (a)'dan elde edilen sonuçları $n \times n$ lineer sistemine genelleştirin. Gerekli çarpanlar ve bölenlerin toplam sayısı için tam bir formül elde ediniz.

8. ***(Kavşak Analizi)*** Pek çok büyük şehrin merkezi iş alanı tek yönlü caddenin kavşağıdır. Bu tip işlek caddede trafiğin normal akışının bozulduğu trafik kazaları ve acil durumlar gibi anlar vardır. Tek yönlü caddelerde kavşaklar için basit bir kural vardır; bir caddeden kavşağa giren araçlar diğer caddenin kavşağından çıkmak zorundadır. (Parkın çok olduğunu ve garajların kavşak dışında yer aldığını kabul edeceğiz.) Buradan her bir kavşak için denge denklemine veya basitleştirerek, giren=çıkan eşitliğine sahibiz. Kavşaklardaki giriş ve çıkış yoğunluğunu içeren bilgi toplanmasından sonra şehir trafik komisyonu lineer sistemi içeren trafik akışı için kavşak modeli oluşturur. Şekil, cadde kavşağını gösterir. Burada trafik akışının yönü oklarla belirtilir ve caddenin yakınında beliren bir cadde üzerine her saatteki giren veya çıkan araçların ortalama sayısını gösterir.



(a) A'dan D'ye her bir kavşak için girdi-eşit-çıktı denklemi oluşturunuz. Sonra denklemleri matris şeklinde sistemi yazacak şekilde 1. sütundaki x_1, 2. sütunda x_2 ve bu şekilde devam ederek katsayıları kullanarak tekrar düzenleyiniz. İlaveli matrisi için satırca indirgenmiş eşelon şekli bulunuz ve ilk 1'e göre bilinmeyenleri çözünüz.

(b) Her bir $x_i \geq 0$ olduğunda bilinmeyenler üzerindeki kısıtlamaları belirleyiniz.

(c) B kavşağında C'ye cadde kapalı ise bu modelde ne olacağını açıklayınız.

9. Aşağıdaki matris denklemlerinin her birini çözünüz:

(a)
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $A\mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{b}$

(b)
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $A\mathbf{x} = A^2\mathbf{x} + \mathbf{b}$

BÖLÜM

3 Determinantlar

3.1 Tanım

Kesim 1.3'teki Alıştırma 43'te $(n \times n)$ tipindeki bir $A = [a_{ij}]$ kare matrisinin izini İz $(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ ile tanımladık. A kare matrisi ile ilgili diğer önemli bir sayı A'nın determinantıdır. Şimdi bunu tanımlayalım. Determinantlar ilk olarak lineer sistemlerin çözümünde ortaya çıktı. Bölüm 2'de verilen yöntemler, böyle sistemleri determinantları kullanarak çözmeden daha etkili olmasına rağmen, Bölüm 6'da bir $L : V \to V$ lineer dönüşümü üzerindeki daha ileri çalışmamız için determinantlar kullanışlı olacaktır. Determinant tanımında kullanacağımız için kısaca permütasyonları vereceğiz. Bu bölümün başından sonuna kadar **matris** terimi ile **kare matrisi** kastedeceğiz.

TANIM 3.1

$S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ artan sırada düzenlenmiş 1'den n'ye kadar tamsayıların kümesi olsun. S'nin elemanlarının $j_1 j_2 \ldots j_n$ biçiminde yeniden düzenlenmesine S'nin bir **permütasyonu** denir. S'nin bir permütasyonunu S'den S üzerine bire-bir bir dönüşüm olarak düşünebiliriz.

Yukarıdaki tanımı örnekle açıklamak için $S = \{1, 2, 3, 4\}$ alalım. Bu durumda 4231, S'nin bir permütasyonudur. Bu,

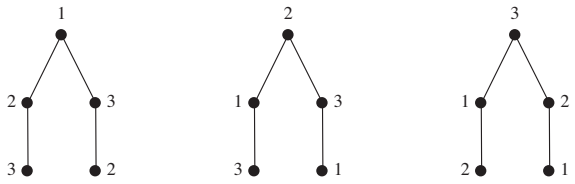
$$f(1) = 4$$
$$f(2) = 2$$
$$f(3) = 3$$
$$f(4) = 1$$

ile tanımlanan $f : S \to S$ fonksiyonuna karşılık gelir.

İlk durumda S'nin n elemandan herhangi birini, ikinci durumda geriye kalan $n - 1$ elemandan herhangi birini, üçüncü durumda geriye kalan $n - 2$ elemanından herhangi birini koyabiliriz. Bu şekilde devam edersek n. durumu yalnızca geriye kalan en son eleman ile doldurabili-

riz. Böylece S'nin $n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1 = n!$ permütasyonu vardır. S'nin bütün permütasyonlarının kümesini S_n ile gösteririz.

ÖRNEK 1 $S = \{1, 2, 3\}$ olsun. S'nin bütün permütasyonlarının S_3 kümesi $3! = 6$ tane 123, 132, 213, 231, 312 ve 321 permütasyonlarından oluşur. Şekil 3.1'deki diyagramı kullanarak S'nin bütün permütasyonlarını sayabiliriz. Buna göre Şekil 3.1(a)'da 1 etiketli düğümden iki daldan biri boyunca ilerleyerek hareket başlarsak; bir defa 1 düğümüne vardığımızda sonra sadece 3 düğümüne gidebiliriz. Benzer olarak ilk önce 1 düğümünden 3 düğümüne vardığımızda sonra sadece 2 düğümüne gidebiliriz. Böylece 123 ve 132 permütasyonlarını saymış oluruz. Şekil 3.1(b) deki diyagramı 213 ve 231 permütasyonlarını ve Şekil 3.1(c)'deki diyagram 312 ve 321 permütasyonlarını verir.



ŞEKİL 3.1

Şekil 3.1'de gösterilen metot $\{1, 2, \ldots, n\}$ cümlesinin tüm permütasyonlarını saymak için genelleştirilebilir.

Eğer daha büyük bir tamsayı j_r, daha küçük bir tamsayı j_s'den önce gelirse, $j_1 j_2 \ldots j_n$ permütasyonu bir **inversiyona** sahiptir denir. Eğer bir permütasyondaki inversiyonların toplam sayısı çift ise, ona **çift** permütasyon; permütasyondaki inversiyonların toplam sayısı tek ise permütasyona **tek** permütasyon denir. Eğer $n \geq 2$ ise S_n içinde $n!/2$ tek ve $n!/2$ çift permütasyon vardır.

ÖRNEK 2 S_1 yalnız $1! = 1$ permütasyona sahiptir. Bu permütasyon çifttir. Çünkü inversiyonları yoktur. ■

ÖRNEK 3 S_2, $2! = 2$ permütasyona sahiptir. 12 çift (inversiyon yok) ve 21 tektir. ■

ÖRNEK 4 S_4 içindeki 4312 permütasyonunda 4, 3'ten, 4, 1'den, 4, 2'den, 3, 1'den ve 3, 2'den önce gelir. Böylece bu permütasyondaki inversiyonların toplam sayısı 5'tir ve 4312 tektir. ■

ÖRNEK 5 S_3, $3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$ permütasyona sahiptir. Bunlardan 123, 231 ve 312 çift ve 132, 213 ve 321 tektir. ■

TANIM 3.2 $A = [a_{ij}]$ bir $n \times n$ tipinde matris olsun. Determinant fonksiyonu **det** ile gösterilir,

$$\det(A) = \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

ile tanımlanır. Burada toplam, $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ kümesinin tüm $j_1 j_2 \ldots j_n$ permütasyonları üzerindendir. $j_1 j_2 \ldots j_n$ permütasyonunun çift veya tek olmasına göre işaret + veya – olarak alınır.

det(A)'nın her bir $(\pm)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$ teriminde satır indisleri doğal sırada ve sütun indisleri $j_1 j_2 \ldots j_n$ sırasındadır. Böylece det(A)'nın her bir terimi onun uygun işareti ile A'nın her bir satırdan tam olarak bir eleman ve her bir sütundan tam olarak bir elemandan oluşan n elemanın çarpımıdır. S'nin tüm permütasyonları üzerinden aldığımızdan det(A), toplamda $n!$ terime sahiptir.

det(A) için bir başka gösterim de $|A|$'dır. Biz det(A) ve $|A|$'nın her ikisini de kullanacağız.

ÖRNEK 6 Eğer $A = [a_{11}]$, bir 1×1 tipinde matris ise, $\det(A) = a_{11}$'dir. ■

ÖRNEK 7 Eğer

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ise, det(A)'yı bulmak için $a_{1_}a_{2_}$ terimlerini ve S_2'nin mümkün olan bütün elemanlarını tire işaretlerinin yerine yazarız: İndisler 12 ve 21 olur. 12 bir çift permütasyon ve 21 bir tek permütasyondur. Böylece

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

dir. Buradan det(A) soldan sağa doğru olan çizgi üzerindeki elemanların çarpımı ile sağdan sola doğru olan çizgi üzerindeki elemanlarının çarpımının farkıyla bulunabileceğini görürüz.

$$\begin{matrix} a_{11} & & a_{12} \\ & \searrow\ \swarrow & \\ a_{21} & & a_{22} \end{matrix}$$

Böylece, eğer $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ ise, o zaman $|A| = (2)(5) - (-3)(4) = 22$ dir. ■

ÖRNEK 8

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ise, bu durumda det(A)'yı hesaplamak için $a_{1_}a_{2_}a_{3_}$, $a_{1_}a_{2_}a_{3_}$, $a_{1_}a_{2_}a_{3_}$, $a_{1_}a_{2_}a_{3_}$, $a_{1_}a_{2_}a_{3_}$, $a_{1_}a_{2_}a_{3_}$ altı terimi yazarız. S_3'ün tüm elemanlarını tire işaretlerinin yerine kullanırız ve tek veya çift permütasyon olup olmadığına göre + veya −'yi ilgili terimin başına getirerek

$$\begin{aligned} \det(A) = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ & - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned} \tag{1}$$

olduğunu buluruz (gerçekleyiniz).

$|A|$'yı aşağıdaki gibi de elde edebiliriz: A'nın birinci ve ikinci sütununu tekrar aşağıdaki gibi yazarız. Soldan sağa doğru olan çizgiler üzerindeki elemanların çarpımlarının toplamı ile sağdan sola doğru olan çizgiler üzerindeki elemanların çarpımlarının farkını alarak A'nın determinantını elde ederiz (gerçekleyiniz).

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

■

ÖRNEK 9

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

verilsin. $|A|$'yı hesaplayınız.

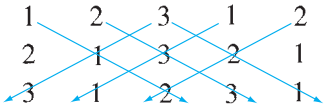
Çözüm

Eşitlik (1)'i kullanırsak,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (1)(1)(2) + (2)(3)(3) + (3)(2)(1) - (1)(3)(1) - (2)(2)(2) - (3)(1)(3) = 6$$

buluruz.

Aynı sonucu yukarıda verilen kolay metodu kullanarak aşağıdaki gibi bulabilirdik.



$$|A| = (1)(1)(2) + (2)(3)(3) + (3)(2)(1) - (3)(1)(3) - (1)(3)(1) - (2)(2)(2) = 6 \cdot$$

■

Uyarı Örnek 7–9'da det(A)'nın hesabı için kullanılan metotlar n ≥ 4 için kullanılmaz.

Büyük n değerleri için Tanım 3.2'yi kullanarak determinantları hesaplamanın çok uğraştırıcı bir yol olduğunu okuyucu göz önünde bulundurmalıdır. Gerçekten $10! = 3.6288 \times 10^6$ ve $20! = 2.4329 \times 10^{18}$ her biri büyük bir sayıdır. Kesim 3.2'de, zahmetli hesaplamaları büyük ölçüde kolaylaştıracak olan determinantların özelliklerini vereceğiz.

Permütasyonlar, soyut cebir derslerinin bazı konularında ve grup teorisi ile ilgili konularda çalışılır. Burada determinantları hesaplamak için permütasyonlara bağlı kalmadan metotlar geliştireceğiz. Bununla birlikte permütasyonların aşağıdaki önemli özelliğini kullanacağız. Eğer $j_1 j_2 \ldots j_n$ permütasyonunda iki sayıyı yerdeğiştirirsek., o zaman inversiyonların sayısı ya tek sayıda artar ya da tek sayıda azalır.

Eğer $j_1 j_2 \ldots j_n$ permütasyonunda iki ardışık sayı yer değiştirirse bu gerçeğin ispatı kolayca verilebilir. Bu durumda inversiyonların sayısı ya 1 artar ya da 1 azalır. Böylece $j_1 j_2 \ldots j_e j_f \ldots j_n$ ve $j_1 j_2 \ldots j_f j_e \ldots j_n$ permütasyonlarını göz önüne alalım. Eğer $j_e j_f$ bir inversiyon ise, bu takdirde $j_f j_e$ bir inversiyon değildir ve ikinci permütasyon birinciden daha az inversiyona sahiptir. Eğer $j_f j_e$ inversiyon değilse bu takdirde, $j_e j_f$ de bir inversiyondur ve bundan dolayı ikinci permütasyon birinciden bir fazla inversiyona sahiptir. Şimdi bir $j_1 j_2 \ldots j_n$ permütasyonunda herhangi iki sayı, ardışık sayıların birbiri ardı sıra gelen tek sayıda yer değiştirmelerinden her zaman elde edilir. Böylece eğer j_c ve j_k $(c < k)$ nın yerlerini değiştirmek istersek, j_c ve j_k arasında bir s sayısı vardır,

j_c'den j_k'ya kadar ardışık sayıların yerlerinin değiştirilmesiyle j_c'yi sağa hareket ettiririz. Buna j_c, j_k'dan hemen sonraya gelinceye kadar devam ederiz. Bu $s + 1$ adım gerektirir, sonra ardışık sayıların j_c'ye kadar yer değiştirilmesiyle j_k yı sola doğru hareket ettiririz. Bu s adım gerektirir. Böylece ardışık sayıların ardışık yer değiştirmelerin toplam sayısı $(s + 1) + s = 2s + 1$ olmasını gerektirir. Bu ise her zaman tektir. Her bir ardışık yer değiştirmede inversiyonların sayısı değişeceğinden ve tek sayıların toplamına 1 veya –1 sayıları eklendiğinde elde edilen sayı her zaman tek olacağından inversiyonların sayısının tek sayıda değiştiği sonucuna varırız. Böylece 54132'deki inversiyonların sayısı 8 ve 52134'teki inversiyonların sayısı 5'tir (2 ile 4'ün yerleri değiştirilerek elde edilir).

Anahtar Kelimeler

İz
Determinant (det)
Permütasyon (çift/tek)
İnversiyon

3.1 Alıştırmalar

1. $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$'in aşağıdaki permütasyonlarının her birindeki inversiyon sayısını bulunuz.
(a) 52134 (b) 45213 (c) 42135

2. $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$'in aşağıdaki permütasyonlarının her birindeki inversiyon sayısını bulunuz.
(a) 13542 (b) 35241 (c) 12345

3. $S = \{1, 2, 3, 4\}$'ün aşağıdaki permütasyonlarının her birinin tek veya çift olduğunu belirleyiniz.
(a) 4231 (b) 1243 (c) 1234

4. $S = \{1, 2, 3, 4\}$'ün aşağıdaki permütasyonlarının her birinin tek veya çift olduğunu belirleyiniz.
(a) 3214 (b) 1423 (c) 2143

5. Bir 5×5 tipindeki matrisin sütun indislerinin aşağıdaki permütasyonlarının her birine göre işaretini belirleyiniz.
(a) 25431 (b) 31245 (c) 21345

6. Bir 5×5 tipindeki matrisin sütun indislerinin aşağıdaki permütasyonlarının her birine göre işaretini belirleyiniz.
(a) 52341 (b) 31245 (c) 21345

7. (a) 436215 permütasyonundaki inversiyonların sayısını bulunuz.
(b) 416235 permütasyonundaki inversiyonlarının sayısını (a) şıkkındaki iki sayının yer değiştirmesiyle elde edilen yukarıdaki cevaptan farkının bir tek sayı olduğunu gösteriniz.

8. (a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$
determinantlarını hesaplayınız.

9. (a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}$
determinantlarını hesaplayınız.

10. $A = [a_{ij}]$, 4×4 matrisi olsun. $\det(A)$'nın genel ifadesini oluşturunuz.

11. (a) $\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right)$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$
(c) $\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$
hesaplayınız.

12. (a) $\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\right)$
(b) $\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right)$
(c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$
hesaplayınız.

13. (a) $\det\left(\begin{bmatrix} t-1 & 2 \\ 3 & t-2 \end{bmatrix}\right)$
(b) $\begin{vmatrix} t-1 & -1 & -2 \\ 0 & t & 2 \\ 0 & 0 & t-3 \end{vmatrix}$
hesaplayınız.

14. (a) $\begin{vmatrix} t & 4 \\ 5 & t-8 \end{vmatrix}$

(b) $\det\left(\begin{bmatrix} t-1 & 0 & 1 \\ -2 & t & -1 \\ 0 & 0 & t+1 \end{bmatrix}\right)$

hesaplayınız.

15. Alıştırma 13'teki matrislerin her biri için determinantı 0 yapan t değerini bulunuz.

16. Alıştırma 14'teki matrislerin her biri için determinantı 0 yapan t değerini bulunuz.

3.2 Determinantların Özellikleri

Bu kesimde determinantların hesaplanmasını basitleştirmek için bazı özelliklerini inceleyeceğiz.

Teorem 3.1 *Eğer A bir matris ise bu taktirde* $\det(A) = \det(A^T)$*'dır.*

İspat

$A = [a_{ij}]$ ve $A^T = [b_{ij}]$ olsun. Burada $b_{ij} = a_{ji}$'dir. Buradan

$$\det(A^T) = \sum(\pm)b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n} = \sum(\pm)a_{j_1 1}a_{j_2 2}\cdots a_{j_n n}$$

elde ederiz. Bu taktirde $b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n} = a_{j_1 1}a_{j_2 2}\cdots a_{j_n n} = a_{1k_1}a_{2k_2},\cdots a_{nk_n}$ yazılabilir. Bu ise $\det(A)$'nın bir terimidir. Böylece $\det(A^T)$'daki ve $\det(A)$'daki terimler özdeştir. Karşılıklı terimlerin işaretlerinin de özdeş olduğunu kontrol etmeliyiz. Soyut Cebir dersinde* tartışılan permütasyonların özellikleri ile $a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$ terimine bağlı olan işareti belirleyen $k_1, k_2\cdots k_n$ permütasyonundaki inversiyonların sayısının $b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n}$ terimine bağlı olan $j_1, j_2\cdots j_n$ permütasyonundaki inversiyonların sayısı ile aynı olduğu gösterilebilir. Bir örnek olarak,

$$b_{13}b_{24}b_{35}b_{41}b_{52} = a_{31}a_{42}a_{53}a_{14}a_{25} = a_{14}a_{25}a_{31}a_{42}a_{53}$$

de olduğu gibi 45123 permütasyonundaki inversiyonların sayısı 6 ve 34512 permütasyonundaki inversiyonların sayısı yine 6' dır. Karşılıklı terimlerin işaretlerinin özdeş olmasından $\det(A) = \det(A^T)$ sonucuna varırız. ■

ÖRNEK 1 A matrisi Kesim 3.1'de Örnek 9'daki matris olsun. Bu taktirde;

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Kesim 3.1'in (1) ifadesinde yerine konulursa (veya Kesim 3.1'deki Örnek 8'de verilen çizgiler metodu kullanılırsa)

$$|A^T| = (1)(1)(2) + (2)(1)(3) + (3)(2)(3) - (1)(1)(3) - (2)(2)(2) - (3)(1)(3) = 6 = |A|$$

■

buluruz. Determinantların toplamsal özelliklerinin çoğunda sütunla satırın yer değiştirmesini Teorem 3.1 sağlar. Bunun nasıl yapılacağını aşağıdaki teoremde görürüz.

*J. Fraleigh, *A First Course in Abstract Algebra*, 7. Baskı, Readign Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 2003; ve J. Gillian, Contemporary Abstract Algebra, 5. baskı, Lexington, Mass., D.C. Health and Company, 2002 adlı kitaplara bakınız.

Teorem 3.2 Eğer B matrisi A matrisinden A'nın iki satırının (sütununun) yer değiştirmesiyle elde edilirse, bu taktirde $\det(B) = -\det(A)$ olur.

İspat

B, A'nın r-inci ve s-inci satırlarının yer değiştirilmesiyle elde edilmiş olsun $r < s$ diyelim. Bu taktirde $i \neq r$, $i \neq s$ için $b_{ij} = a_{ij}$ ve $b_{sj} = a_{rj}$ ve $b_{rj} = a_{sj}$ elde ederiz. Şimdi

$$\begin{aligned}\det(B) &= \sum(\pm)b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{rj_r}\cdots b_{sj_s}\cdots b_{nj_n}\\ &= \sum(\pm)a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{sj_r}\cdots a_{rj_s}\cdots a_{nj_n}\\ &= \sum(\pm)a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{rj_s}\cdots a_{sj_r}\cdots a_{nj_n}\end{aligned}$$

olur. İki sayının yer değiştirilmesi ile $j_1j_2\ldots j_s\ldots j_r\ldots j_n$ permütasyonu $j_1j_2\ldots j_r\ldots j_s\ldots j_n$ permütasyonundan elde edilir ve önceki permütasyondaki inversiyonların sayısı sonrakinin inversiyonlarının sayısından tek sayı kadar farklıdır. Bu, $\det(B)$'deki her bir terimin işareti $\det(A)$'daki karşılık gelen terimin işaretinin negatifi olduğunu söyler. Böylece $\det(B) = -\det(A)$'dır.

Şimdi B, A'nın iki sütununun yer değiştirilmesiyle elde edilsin. Bu taktirde B^T, A^T'nin iki satırının yer değiştirmesiyle A^T'den elde edilir. Böylece $\det(B^T) = -\det(A^T)$ olur. Ancak $\det(B^T) = \det(B)$ ve $\det(A^T) = -\det(A)$'dır. Böylece $\det(B) = -\det(A)$'dır. ■

İspat aşağıdaki sonuçlarda yalnızca A'nın satırları için verilecektir. Sütunlara karşılık gelen durumlar için ispatlar Teorem 3.2'nin ispatının sonundaki gibi yapılacaktır.

ÖRNEK 2

$$\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix} = 7$$

■

Teorem 3.3 Eğer A'nın iki satırı (sütunu) eşit ise, bu taktirde $\det(A) = 0$ olur.

İspat

Farz edelim ki A'nın r-inci ve s-inci satırları eşittir. A'nın r-inci ve s-inci satırlarının yer değiştirmesiyle bir B matrisi elde edilir. Bu taktirde $\det(B) = -\det(A)$ olur. Diğer taraftan $B = A$'dır. Böylece $\det(B) = \det(A)$'dır. Buradan $\det(A) = 0$ olur. ■

ÖRNEK 3

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 7\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix} = 0$$ (Tanım 3.2'yi kullanarak gösteriniz.)

■

Teorem 3.4 Eğer A'nın bir satırındaki (sütunundaki) tüm elamanları sıfır ise, bu taktirde $\det(A) = 0$ olur.

İspat

A'nın i-inci satırının bileşenleri sıfır olsun. A'nın determinantı için Tanım 3.2'deki her bir terimi i-inci satırdan bir çarpan ihtiva ettiğinden $\det(A)$'daki her bir terim sıfırdır. Böylece $\det(A) = 0$ olur. ■

ÖRNEK 4

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$ (Tanım 3.2'yi kullanarak gösteriniz.) ■

Teorem 3.5 Eğer B, bir reel c sayısı ile A'nın bir satırının (sütunun) çarpılmasıyla elde ediliyorsa, bu taktirde $\det(B) = c\det(A)$ olur.

İspat

$B = [b_{ij}]$'yi elde etmek için $A = [a_{ij}]$'nin r-inci satırı c ile çarpılmış olsun. Bu taktirde $b_{ij} = a_{ij}$ ve eğer $i \neq r$ ise $b_{ij} = ca_{rj}$'dir. Tanım 3.2 kullanılarak,

$$\begin{aligned} \det(B) &= \sum (\pm) b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{rj_r} \cdots b_{nj_n} \\ &= \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots (ca_{rj_r}) \cdots a_{nj_n} \\ &= c\left(\sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{rj_r} \cdots a_{nj_n}\right) = c\det(A) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

ÖRNEK 5

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = (2)(3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6(4-1) = 18$$ ■

A'nın satır ve sütunlarının ortak çarpanları determinantın dışına çıkarılarak det$A$'nın hesaplanmasını basitleştirmek için Teorem 3.5 kullanılabilir.

ÖRNEK 6

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (2)(3)(0) = 0$$

Burada önce 3-üncü satırdan 2 ortak sayısını sonra da 3-üncü sütundan 3 ortak sayısını determinantın dışına çıkardık. Sonra 1-inci ve 3-üncü sütunlar eşit olduğundan Teorem 3.3'ü kullandık. ■

Teorem 3.6 $r \neq s$ olmak üzere $A = [a_{ij}]$ A'nın r-inci satırdaki (sütundaki) her bir elemanına A'nın s-inci satırına (sütun) karşılık gelen elemanı c ile çarpıp ilave ederek A'dan $B = [b_{ij}]$ elde edilirse o zaman, $\det(B) = \det(A)$ olur.

İspat

Satırlar için teoremi ispatlayalım. $i \neq r$ için $b_{ij} = a_{ij}$ ve $r \neq s$, $r < s$ diyelim, $b_{rj} = a_{rj} + ca_{sj}$'ye sahip oluruz. O zaman

$$\begin{aligned} \det(B) &= \sum (\pm) b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{rj_r} \cdots b_{nj_n} \\ &= \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots (a_{rj_r} + ca_{sj_r}) \cdots a_{sj_s} \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{rj_r} \cdots a_{sj_s} \cdots a_{nj_n} \\ &\quad + \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots (ca_{sj_r}) \cdots a_{sj_s} \cdots a_{nj_n} \end{aligned}$$

Son ifadede 2-inci terim

$$c\left[\sum(\pm)a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{sj_r}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{nj_n}\right]$$

iken ilk terim det(A)'dır.

$$\sum(\pm)a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{sj_r}\quad\cdots a_{sj_s}\cdots a_{nj_n}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow r\text{-inci satır} \\ \\ \leftarrow s\text{-inci satır} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

olduğuna dikkat ediniz. Bu matrisin iki satırı birbirine eşit olduğundan determinant sıfır olur. Bu yüzden det(B) = det(A) + 0 = det(A) olur. ■

ÖRNEK 7 Aşağıdaki birinci determinantın 2-inci satırını 2 ile çarpıp 1-inci satıra eklersek,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 9 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

elde ederiz. İkinci determinanta determinant tanımını uygularsak her ikisinin değerinin 4 olduğunu görürüz. ■

Teorem 3.7 Eğer $A = [a_{ij}]$ üst(alt) üçgen ise, o zaman det(A) = $a_{11} \cdot a_{22} \ldots a_{nn}$ olur. Yani bir üçgen matrisin determinantı esas köşegen üzerindeki elemanların çarpımıdır.

İspat

$A = [a_{ij}]$ üst üçgen (yani $i > j$ için $a_{ij} = 0$) olsun. O zaman det(A) için ifadedeki $a_{1j_1}, a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ terimi, yalnız $1 \le j_1, 2 \le j_2, \ldots, n \le j_n$ için sıfır olmayabilir. Şimdi $j_1 j_2 \ldots j_n$, $\{1, 2, \ldots n\}$ kümesinin bir permütasyonu veya yeniden düzenlenmesi olmalıdır. Buradan $j_1 = 1, j_2 = 2, \ldots, j_n = n$ elde ederiz. Böylece sadece det(A)'nın sıfırdan farklı olabilen terimleri A'nın esas köşegen üzerindeki elemanların çarpımıdır. Buradan det(A) = $a_{11} \cdot a_{22} \ldots a_{nn}$ olur.

Alt üçgensel durum için ispat okuyucuya bırakılmıştır. ■

Kesim 2.1'de matrisler üzerine elementer satır ve sütun işlemleri için kompakt gösterimler verilmişti. Bu bölümde de bir determinantın satır ve sütunları için benzer gösterimler kullanacağız.

- i-inci ve j-inci satırların (sütunların) yerleri değiştirilir:

$$r_i \leftrightarrow r_j \, (c_i \leftrightarrow c_j)$$

- i-inci satır (sütun) k ile çarpılarak tekrar i-inci satırın (sütunun) yerine yazılır:

$$kr_i \leftrightarrow r_i \, (kc_i \leftrightarrow c_i)$$

- i-inci satırı k ile çarpılıp j-inci satıra (sütuna) ilave edilerek j-inci satırın yerine yazılır:

$$kr_i + r_j \leftrightarrow r_j \, (kc_i + c_j \leftrightarrow c_j)$$

Şimdi bu söylediklerimize göre Teorem 3.2, 3.5 ve 3.6'yı aşağıdaki gibi açıklayabiliriz:

$$\begin{aligned} \det(A_{\mathbf{r}_i \leftrightarrow \mathbf{r}_j}) &= -\det(A), \quad i \neq j \\ \det(A_{k\mathbf{r}_i \to \mathbf{r}_i}) &= k \det(A) \\ \det(A_{k\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j \to \mathbf{r}_j}) &= \det(A), \quad i \neq j \end{aligned}$$

det(A)'nın terimlerindeki bu özellikleri aşağıdaki gibi yeniden yazmakta kullanışlıdır:

$$\det(A) = -\det(A_{\mathbf{r}_i \leftrightarrow \mathbf{r}_j}), \quad i \neq j$$

$$\det(A) = \frac{1}{k} \det(A_{k\mathbf{r}_i \to \mathbf{r}_i}), \quad k \neq 0$$

$$\det(A) = \det(A_{k\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j \to \mathbf{r}_j}), \quad i \neq j.$$

Teorem 3.2, 3.5 ve 3.6 determinantların hesaplanmasında çok kullanışlıdır. Yaptığımız elementer satır veya sütun işlemleriyle A'yı bir üçgen matrise dönüştürürüz. Elbette elementer satır veya sütun işlemlerini yaptığımızda oluşan matrislerin determinantlarının nasıl değiştiğini takip etmeliyiz.

ÖRNEK 8

$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ olsun. det(A)'yı hesaplayınız.

Çözüm

$$\det(A) = 2\det(A_{\frac{1}{2}\mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3}) \qquad \text{3.üncü satırı } \frac{1}{2} \text{ ile çarp.}$$

$$= 2\det\left(\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (-1)2\det\left(\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_3}\right) \quad \text{1.inci ve 3. satırı yer değiştir.}$$

$$= -2\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= -2\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{\substack{-3\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2\to\mathbf{r}_2 \\ -4\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_3\to\mathbf{r}_3}}\right) \quad \text{(1, 1) elemanının altını sıfır yap.}$$

$$= -2\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & -5 & -10 \end{bmatrix}\right)$$

$$= -2\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & -5 & -10 \end{bmatrix}_{-\frac{5}{8}\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3\to\mathbf{r}_3}\right) \quad \text{(2, 2) elemanının altını sıfır yap.}$$

$$= -2\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{30}{4} \end{bmatrix}\right).$$

Sonra üst üçgen matrisin determinantını hesaplarız. Teorem 3.7'den

$$\det(A) = -2(1)(-8)\left(-\frac{30}{4}\right) = -120$$

olur.

Seçilen bu işlemler en etkili değildir, fakat ilk birkaç adımda kesirlerden kaçınmalıyız. ■

Uyarı Örnek 8'de bir determinantı hesaplamakta kullanılan metot **üçgen şekle indirgeme yolu** ile hesaplama olarak belirtilecektir.

Şimdi I_n birim matrisinin determinantını hesaplayabiliriz: $\det(I_n) = 1$. Kesim 1.6'da tartışılan elementer matrislerin determinantlarını da aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz.

E_1, I tipli bir elementer matris olsun. Yani E_1 I_n'nin mesela i-inci ve j-inci satırlarını değiştirilmesiyle I_n'den elde edilsin. Teorem 3.2 ile $\det(E_1) = -\det(I_n) = -1$ elde ederiz. Şimdi E_2, II tipli bir elementer matris olsun. Yani E_2, I_n'nin i-inci satırıyla (sıfırdan farklı) $c \neq 0$'ın çarpılmasıyla I_n'den elde edilmiş olsun. Teorem 3.5 ile $\det(E_2) = c\det(I_n) = c$ elde ederiz. E_3, $r \neq s$ olmak üzere I_n'nin s-inci satırı ile c'nin çarpılıp I_n'nin r-inci satıra eklenmesiyle I_n'den elde edilmiştir. Teorem 3.6 gereğince $\det(E_3) = -\det(I_n) = 1$ elde ederiz. Böylece bir elementer matrisin determinantı asla sıfır olamaz.

Şimdi iki matrisin çarpımının determinantının, onların determinantlarının çarpımı olduğunu ve A'nın singüler olmayan bir matris olması için gerek ve yeter şartın $\det(A) \neq 0$ olduğunu ispat edeceğiz.

Lemma 3.1 Eğer E bir elementer matris ise o zaman $\det(EA) = \det(E)\det(A)$ ve $\det(AE) = \det(A)\det(E)$ olur.

İspat

Eğer E, I tipinde bir elementer matris ise o zaman EA, A'nın iki satırının yerinin değiştirilmesiyle A'dan elde edilmiştir. Böylece $\det(EA) = -\det(A)$ olur. $\det(E) = -1$'dir. Buradan $\det(EA) = \det(E)\det(A)$ olur.

Eğer E , II tipinde bir elementer matris ise o zaman EA, A'nın verilmiş bir satırı ile bir $c \neq 0$ sayısının çarpılmasıyla A' dan elde edilmiştir. O zaman $\det(EA) = c\det(A)$ ve $\det(E) = c$ olur. Böylece $\det(EA) = \det(E)\det(A)$ olur.

Son olarak eğer E, III tipinde bir elementer matris ise o zaman EA, A'nın bir satırının bir sayı ile çarpılıp farklı bir satıra ilave edilmesi ile A'dan elde edilmiştir. Böylece $\det(EA) = \det(A)$ ve $\det(E) = 1$ olur. Buradan $\det(EA) = \det(E)\det(A)$ yazılır.

Böylece bütün hallerde, $\det(EA) = \det(E)\det(A)$ olur. Benzer bir ispatla $\det(AE) = \det(A)\det(E)$ olduğunu gösterebiliriz. ■

Aynı zamanda, eğer $B = E_r E_{r-1} \ldots E_2 E_1 A$ ise o zaman

$$\begin{aligned}\det(B) &= \det(E_r(E_{r-1}\cdots E_2 E_1 A)) \\ &= \det(E_r)\det(E_{r-1}E_{r-2}\cdots E_2 E_1 A) \\ &\vdots \\ &= \det(E_r)\det(E_{r-1})\cdots\det(E_2)\det(E_1)\det(A)\end{aligned}$$

olduğu Lemma 3.1'den çıkar.

Teorem 3.8 Eğer A bir $n \times n$ tipinde matris ise o zaman *A'nın* singüler olmaması için gerek ve yeter şart $\det(A) \neq 0$ olmasıdır.

İspat

Eğer A singüler değilse o zaman A elementer matrislerin bir çarpımıdır (Teorem 1.16). Böylece $A = E_1 E_2 \ldots E_k$ verilsin. O zaman

$$\det(A) = \det(E_1 E_2 \ldots E_k) = \det(E_1)\det(E_2)\ldots\det(E_k) \neq 0$$

olur.

Eğer A singüler ise o zaman A, bir sıfır satıra sahip bir B matrisine denktir (Teorem 1.18). Bu durumda $A = E_1 E_2 \ldots E_r B$ olur. Burada $E_1, E_2, \ldots, E_r$ elementer matrisleridir. $\det(B) = 0$ olduğundan

$$\det(A) = (E_1 E_2 \ldots E_r B) = \det(E_1)\det(E_2)\ldots\det(E_r)\det(B) = 0$$

olduğu Lemma 3.1'den çıkar. ■

Sonuç 3.1 Eğer A, bir $n \times n$ tipinde matris ise o zaman $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$'ın aşikar olmayan bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart $\det(A) = 0$ olmasıdır.

İspat

Eğer $\det(A) \neq 0$ ise Teorem 3.8'den A singüler olmayan bir matristir ve böylece $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sadece aşikar çözüme sahiptir (Kesim 2.3'te Teorem 2.9 veya Kesim 1.5'te Alıştırma 14 öncesinde kutu içindeki uyarıdan).

Tersine $\det(A) = 0$ ise A singülerdir (Teorem 3.8). Kabul edelim ki A satırca eşelon forma indirgenmiş bir B matrisine satırca denktir. Kesim 2.3'deki Sonuç 2.2'den ve Kesim 2.1'deki Alıştırma 9'dan B bir sıfır satırına sahiptir.

$B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sistemi $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sistemi gibi aynı çözümlere sahiptir. C_1, B'nin sıfır satırı silinerek elde edilen bir matris olsun. Bu durumda $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sistemi $C_1\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sistemi gibi aynı çözümlere sahiptir. Bu ikinci denklem n-bilinmeyenli en fazla $(n-1)$ denklemin homojen sistemi olduğundan

bir tane aşikar olmayan çözüme sahiptir (Teorem 2.4). Böylece verilen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sistemi aşikar olmayan bir çözüme sahiptir. ■

ÖRNEK 9

A, $\det(A) = -2$ olan 4×4 tipinde bir matris olsun.

(a) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sistemi için bütün çözümlerin cümlesini tanımlayınız.

(b) Eğer A satırca eşelon formu B'ye indirgenmiş matris ise B nedir?

(c)
$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$
olmak üzere verilen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sisteminin çözümünü ifade ediniz.

(d) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistemi birden fazla çözüme sahip olabilir mi? Açıklayınız.

(e) A^{-1} mevcut mudur?

Çözüm

(a) $\det(A) \neq 0$ olduğundan Sonuç 3.1 den homogen sistem sadece aşikar çözüme sahiptir.

(b) $\det(A) \neq 0$ olduğundan Kesim 2.3'teki Sonuç 2.2 gereğince A singüler olmayan bir matristir ve Teorem 2.2 gereğince $B = I_n$ dir.

(c) Verilen sistemin çözümü $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ ile verilir.

(d) Hayır. (c)'de verilen çözüm bir tektir.

(e) Evet. ■

Teorem 3.9 Eğer A ve B, $n \times n$ tipinde verilen matrisler ise o zaman $\det(AB) = \det(A)\det(B)$'dir.

İspat

A singüler değilse, o zaman A, I_n'ye satırca denktir. Böylece
$$A = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 I_n = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1$$
olur. Burada $E_1, E_2, \ldots, E_k$ elementer matrislerdir. O zaman
$$\det(A) = \det(E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1) = \det(E_k)\det(E_{k-1}) \cdots \det(E_2)\det(E_1)$$
olur. Şimdi
$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 B) \\ &= \det(E_k)\det(E_{k-1}) \cdots \det(E_2)\det(E_1)\det(B) \\ &= \det(A)\det(B) \end{aligned}$$

Eğer A singüler ise o zaman Teorem 3.8'den $\det(A) = 0$'dır. Bundan başka A singüler ise o zaman A satır olarak, tamamen sıfırlardan oluşan bir satıra sahip bir C matrisine denktir (Teorem 1.18). Buradan $C = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A$, böylece
$$CB = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 AB$$
dir. Bu AB, CB'ye satırca denk olduğu anlamına gelir. CB satır olarak sıfırlardan ibaret bir satıra sahip olduğundan AB singülerdir. Buradan $\det(AB) = 0$ olur ve bu durumda $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ ifadesine de sahip oluruz. ■

ÖRNEK 10

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

verilsin. O zaman

$$|A| = -2 \quad \text{ve} \quad |B| = 5$$

olur. Diğer taraftan $|A| = -2$ ve $AB = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$ olur. ■

Sonuç 3.2 Eğer A singüler değilse, o zaman $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ olur.

İspat

Alıştırma 18. ■

Sonuç 3.3 Eğer A ve B benzer matrisler ise o zaman $\det(A) = \det(B)$ olur.

İspat

Alıştırma 33. ■

$n \times n$ tipindeki A ve B matrislerinin toplamının determinantı genelde, A ve B'nin determinanlarının toplamı değildir. Bu aşamada en iyi sonuç olarak şunu verebiliriz: Eğer A, B ve C, $n \times n$ tipinde matrisler k-ıncı satırı (sütunu) hariç diğer bütün satırları eşit ve C'nin k-ıncı satırı A ve B'nin k-ıncı satırlarının toplamı ise bu durumda $\det(C) = \det(A) + \det(B)$ olur. Bu sonucu ispatlamayacağız, fakat bir örnekle açıklayacağız.

ÖRNEK 11

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

ve

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olsun. O zaman $|A| = 8$, $|B| = -9$ ve $|C| = -1$ olur. Böylece $|C| = |A| + |B|$ bulunur. ■

Anahtar Kelimeler

Determinantın özellikleri
Elementer matris
Üçgen şekle indirgeme

3.2 Alıştırmalar

1. Aşağıdaki determinantları üçgen şekle indirgeme veya verilen özel teorem veya sonuçlarla hesaplayınız.

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \\ 8 & -2 & 6 & 4 \end{vmatrix}$

2. Aşağıdaki determinantları üçgen şekle indirgeme veya verilen özel teorem veya sonuçlarla hesaplayınız.

(a) $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

(f) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 11 & 8 & -4 & 6 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 3$ ise

$$\begin{vmatrix} a_1 + 2b_1 - 3c_1 & a_2 + 2b_2 - 3c_2 & a_3 + 2b_3 - 3c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

determinantını hesaplayınız.

4. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -2$ ise

$$\begin{vmatrix} a_1 - \frac{1}{2}a_3 & a_2 & a_3 \\ b_1 - \frac{1}{2}b_3 & b_2 & b_3 \\ c_1 - \frac{1}{2}c_3 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

determinantını hesaplayınız.

5. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 4$ ise

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 4a_3 - 2a_2 \\ b_1 & b_2 & 4b_3 - 2b_2 \\ \frac{1}{2}c_1 & \frac{1}{2}c_2 & 2c_3 - c_2 \end{vmatrix}$$

determinantını hesaplayınız.

6. Aşağıdakiler için $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ olduğunu doğrulayınız.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

7. (a) $\begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -5 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} t-1 & -1 & -2 \\ 0 & t-2 & 2 \\ 0 & 0 & t-3 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} t+1 & 4 \\ 2 & t-3 \end{vmatrix}$

determinantlarını hesaplayınız.

8. $\det(AB) = \det(BA)$ mıdır? Cevabınızı doğrulayınız.

9. $\det(AB) = 0$ ise $\det(A) = 0$ veya $\det(B) = 0$ mıdır? Cevabınız için nedenler veriniz.

10. Eğer c skalar ve A, $n \times n$ tipinde ise o zaman $\det(cA) = c^n\det(A)$ olduğunu gösteriniz

11. A, $n \times n$ tipinde, n tek ve A ters simetrik ise o zaman $\det(A) = 0$ olduğunu gösteriniz.

12. A her bir satırındaki veya sütunundaki elemanların yalnız bir tanesi sıfırdan faklı olan bir matris ise o zaman $\det(A) \neq 0$ olduğunu gösteriniz.

13. Sonuç 3.2'yi ispatlayınız.

14. $AB = I_n$ ise o zaman $\det(A) \neq 0$ ve $\det(B) \neq 0$ olduğunu gösteriniz.

15. (a) $A = A^{-1}$ ise, o zaman $\det(A) = \pm 1$ olduğunu gösteriniz.
(b) $A^T = A^{-1}$ ise, o zaman $\det(A)$'yı bulunuz.

16. A ve B kare matrisler ise, o zaman

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = |A|\,|B|$$ olduğunu gösteriniz.

17. A, $A^2 = A$ olacak şekilde singüler olmayan bir matris ise $\det(A)$ nedir?

18. Sonuç 3.3'ü ispatlayınız.

19. A , B ve C kare matris ise, o zaman

$$\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix} = |A|\,|B|$$

olduğunu gösteriniz.

20. A ve B her ikisi de $n \times n$ tipinde ise, o zaman

(a) $\det(A^T B^T) = \det(A)\det(B^T)$

(b) $\det(A^T B^T) = \det(A^T)\det(B)$

olduğunu gösteriniz.

21. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ için Alıştırma 16'nın sonucunu gerçekleyiniz.

22. Kesim 3.2'deki özellikleri kullanarak

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

olduğunu ispatlayınız. (*Yol gösterme*: Çarpanlara ayırmayı kullanınız). Bu determinant **Vandermond determinantı** olarak adlandırılır.

23. $\det(A) = 2$ ise $\det(A^5)$'i bulunuz.

24. Aşağıdaki matrislerin hangisinin singüler olmadığını belirlemek için Teorem 3.8'i kullanınız.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$. (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

25. Teorem 3.8'i kullanarak aşağıdaki matrislerin hangisinin singüler olmadığını belirleyiniz.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -7 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 7 \\ -2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \end{bmatrix}$

26. Aşağıdaki matrisler için rank $A = 3$ olup olmadığını bulmak için Sonuç 3.1'i kullanınız.

(a) $\begin{bmatrix} t & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} t & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & t \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} t & 0 & 0 & 1 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 1 & 0 & 0 & t \end{bmatrix}$

27. Aşağıdaki homogen sistemin bir sıfır çözüme sahip olup olmadığını göstermek için Sonuç 3.2' yi kullanınız. (*Çözmeyiniz.*)

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

28. Aşağıdaki homogen sistemler için Alıştırma 27'yi tekrarlayınız.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

29. $A = [A_{ij}]$ üst üçgen matris ise A'nın singüler olmaması için gerek ve yeter şartın $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ için $a_{ii} \neq 0$ olduğunu ispatlayınız.

30. A, 3×3 tipinde bir matris ve $\det(A) = 3$ olsun.

(a) A'ya satırca denk olan A'nın satır eşelon formu nedir?

(b) $Ax = 0$ homogen sistemi kaç tane çözüme sahiptir?

31. A, 4×4 tipinde bir matris ve $\det(A) = 0$ olsun.

(a) A'ya satırca denk olan eşelon formu ifade ediniz.

(b) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sistemi kaç çözüme sahiptir?

32. $A^2 = A$ olsun. Ya A'nın singüler olduğunu ya da $\det(A) = 1$ olduğunu ispatlayınız.

33. Sonuç 3.4'ü ispatlayınız.

34. $AB = AC$ olsun. Eğer $\det(A) \neq 0$ ise, o zaman $B = C$ olduğunu ispatlayınız.

35. Matrisin determinantını hesaplamak için kullandığınız bir program varsa işletiniz. Eğer çalışıyorsa, Örnek 8, 9 ve 10'u doğrulayınız. Örnek 1 ve 2'deki matrisleri kullanarak deneyiniz.

36. Bir matrisin determinantını hesaplamak için bir yazılıma sahip olduğunuzu kabul ederek kullanılan metodu belirlemek için ilave dökümantasyonları okuyunuz. Tanımlama Kesim 3.1'e mi, Kesim 3.2'deki Örnek 8'e mi yoksa Kesim 1.8'deki bilgilere mi en yakındır?

---

* Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796) Paris'te doğdu ve öldü. Babası oğlunun müzikte kariyer yapması için onu cesaretlendiren bir fizikçiydi. Vandermond babasının öğüdünü tutarak 35 yaşına kadar matematikle ilgilenmedi. Bütün matematik çalışmaları dört makaleden oluşur. Kimya ve çelik üretimi ile ilgili de yayınlanmış makaleleri vardır. Vandermonde determinantıyla ünlü olmasına rağmen bu dört makalesinde determinant geçmemektedir. Başka birisinin bu determinantı yanlışlıkla kendisine atfettiği düşünülmektedir. Bununla birlikte dördüncü makalesinde Vandermonde determinant teorisine ciddi katkılar yapmıştır. Kendisi Fransız Devrimini destekleyen bir cumhuriyetçiydi.

37. Uyarı: Teorem 3.8, det(A) için bütün hesaplamaların tam aritmetik kullanılarak yapıldığını varsayar. Önceden belirtildiği gibi, bu program yazılımında alışılmış bir durum değildir. Bu yüzden hesaplama singüler olmama durumunda sonucu test etmeyebilir. Aşağıdakini inceleyiniz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

olsun. Elle veya bir programı kullanarak det(A)'nın sıfır olduğunu gösteriniz. Bundan sonra, el hesaplamasıyla

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9+\epsilon \end{bmatrix}$$

olmak üzere $\det(B) = -3\epsilon$, olduğunu gösteriniz. Böylece teorik olarak, herhangi $\epsilon \neq 0$ için, B matrisi singüler değildir. Sizin programınızla $P = \pm 10^{-k}$, $k = 5, 6, \ldots 20$ için det(B)'yi hesaplayınız. Buradan elde edilen sonuçlarla teorik sonuçlar bağdaşır mı? Eğer bağdaşmazsa niçin böyle olduğunu açıklamak için bir düşünce ortaya koyunuz.

3.3 Kofaktör Açılımı

Şimdiye kadar determinantları, Tanım 3.2'yi ve Kesim 3.2'de tanımladığımız özellikleri kullanarak hesapladık. Şimdi $n \times n$ tipindeki bir matrisin determinantını hesaplamak için bir yöntem geliştireceğiz. Bu yöntem, problemi $(n-1)$ boyutlu matrislerin determinantını hesaplamaya indirger. Bu işlemi 2×2 tipindeki matrisleri elde edinceye kadar $(n-1) \times (n-1)$ matrisleri için tekrar edebiliriz.

TANIM 3.3 $A = [a_{ij}]$, bir $n \times n$ tipinde matris olsun. M_{ij}, A'nın j'inci sütun ve i'inci satırındaki elemanların silinmesiyle elde edilen $(n-1) \times (n-1)$ tipinde bir alt matrisi olsun. Bu durumda M_{ij}'nin determinantı det(M_{ij}), a_{ij}'nin "**minörü**" olarak adlandırılır.

TANIM 3.4 $A = [a_{ij}]$, bir $n \times n$ tipinde matris olsun. a_{ij}'nin A_{ij} **kofaktörü** $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$ olarak tanımlanır.

ÖRNEK 1

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

verilsin. Bu durumda

$$\det(M_{12}) = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 42 = -34, \quad \det(M_{23}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 7 = 10$$

ve

$$\det(M_{31}) = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -6 - 10 = -16$$

olur. Aynı zamanda

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \det(M_{12}) = (-1)(-34) = 34$$
$$A_{23} = (-1)^{2+3} \det(M_{23}) = (-1)(10) = -10$$

ve

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \det(M_{31}) = (1)(-16) = -16$$

olur. ■

Eğer $(-1)^{i+j}$ işaretini bir $n \times n$ tipindeki matrisin (i, j) durumu için düşünürsek, o zaman bu işaretler (1, 1) durumunda bir + işaretine sahip olan bir kontrol tablosu oluşturur.
$n = 3$ ve $n = 4$ için gösterimler aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

$n = 3$ $\qquad$ $n = 4$

Teorem 3.10 *$A = [a_{ij}]$ bir $n \times n$ tipinde matris olsun. O zaman*

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$
[det(A)'nın i-inci satır boyunca açılımı]

ve

$$\det(A) = a_{ij}A_{iJ} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$
[det(A)'nın j-inci sütun boyunca açılımı]

olur.

İspat

İlk formül Teorem 3.1 gereğince ikincisinden çıkar. Yani $\det(A^T) = \det(A)$ olduğu gerçeğinden çıkar. $A = [a_{ij}]$, 3×3 matrisini dikkate alıp, genel ispatı göz ardı edelim. Kesim 3.1'deki (1)'den

$$\begin{aligned} \det(A) = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned} \tag{1}$$

olur. Bu ifadeyi,

$$\begin{aligned} \det(A) = {} & a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) \\ & + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \end{aligned}$$

olarak yazabiliriz. Şimdi

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32})$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33})$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

olur. Bu nedenle

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

olur. Bu det(A)'nın ilk satır boyunca açılımıdır.

Eğer şimdi (1)'i

$$\det(A) = a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) + a_{23}(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}) + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$$

biçiminde yazarsak,

$$\det(A) = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

olduğunu gösterebiliriz. Bu $\det(A)$'nın 3. sütun boyunca açılımıdır. ■

ÖRNEK 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

determinantını hesaplamak için onu ya 3. satır ya da 2. sütun boyunca açmak en iyi yoldur. Çünkü onların her biri iki tane sıfır içerir. Açıkçası, sıfırların en fazla sayıda olduğu satır veya sütun boyunca determinantı açmak işlemin en iyi yoludur. Çünkü bu durumda $a_{ij}A_{ij} = (0)(A_{ij}) = 0$ olduğundan sıfır olan bu a_{ij}'lerin A_{ij} kofaktörleri değerlendirmeye alınmayacaktır. Böylece 3. satır boyunca açılım yapılırsa

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+1}(3)\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}(0)\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{3+3}(0)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+4}(-3)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (+1)(3)(20) + 0 + 0 + (-1)(-3)(-4) = 48$$

sonucunu elde ederiz. ■

Kesim 3.2'nin özelliklerini verilen bir satır veya sütundaki birçok sıfırı tanıtmak ve sonra bu satır veya sütun boyunca açmak için kullanabiliriz. Aşağıdaki örneği göz önüne alalım.

ÖRNEK 3

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}_{c_4+3c_1\to c_4} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 7 \\ -4 & 2 & 1 & -9 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+1}(1)\begin{vmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & -9 \\ 0 & -2 & 9 \end{vmatrix}_{r_1-r_2\to r_1}$$

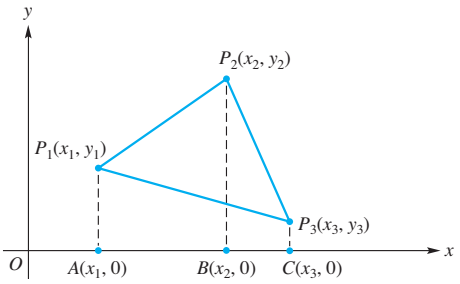
$$= (-1)^4(1)\begin{vmatrix} 0 & -4 & 16 \\ 2 & 1 & -9 \\ 0 & -2 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^4(1)(8) = 8$$

elde edilir. ■

■ Alan Hesaplamalarına Uygulama

Şekil 3.1'de gösterdiğimiz köşeleri (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) olan üçgeni göz önüne alalım.



ŞEKİL 3.2

Bu üçgenin alanını;

$$AP_1P_2B \text{ yamuğunun alanı} + BP_2P_3C \text{ yamuğunun alanı} - AP_1P_3C \text{ yamuğunun alanı}$$

olarak hesaplayabiliriz. Şimdi bir yamuğun alanının, yamuğun paralel kenarları uzunlukları toplamı ile, yamuğun paralel kenarları arasındaki uzunluk çarpımının yarısı olduğunu hatırlayalım. Böylece

$P_1P_2P_3$ üçgeninin alanı

$$= \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_1 + y_2) + \frac{1}{2}(x_3 - x_2)(y_2 + y_3) - \frac{1}{2}(x_3 - x_1)(y_1 + y_3)$$

$$= \frac{1}{2}x_2y_1 - \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_3y_2 - \frac{1}{2}x_2y_3 - \frac{1}{2}x_3y_1 + \frac{1}{2}x_1y_3$$

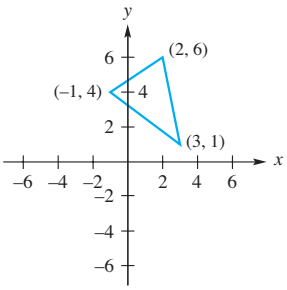
$$= \frac{1}{2}\det\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}\right) \tag{2}$$

bulunur. Noktalar düzlemin diğer çeyreklerinde olduğunda veya bu noktalar farklı bir sırada etiketlendirildiğinde bir önce elde edilen formül üçgenin alanının negatif işaretlisini verebilir. Bu yüzden köşeleri (x_1, y_1), (x_2, y_2) ve (x_3, y_3) olan bir üçgen için

$$\text{Üçgenin alanı} = \frac{1}{2}\left|\det\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}\right)\right| \tag{3}$$

olur (Alan determinantın mutlak değerinin yarısıdır).

ÖRNEK 4 Şekil 3.2'de gösterilen köşeleri (−1, 4), (3, 1) ve (2, 6) olan T üçgeninin alanını hesaplayınız.



ŞEKİL 3.3

Çözüm

Eşitlik (2)'den dolayı T'nin alanı

$$\frac{1}{2}\left|\det\left(\begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}\right)\right| = \frac{1}{2}|17| = 8.5$$

bulunur. ■

Şimdi Şekil 3.3'te gösterilen paralelkenarı aldığımızı farzedelim. Bir köşegen, paralelkenarı iki eşit üçgene böldüğü için (2)'den

$$\text{paralelkenarın alanı} = \left|\det\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}\right)\right| \tag{4}$$

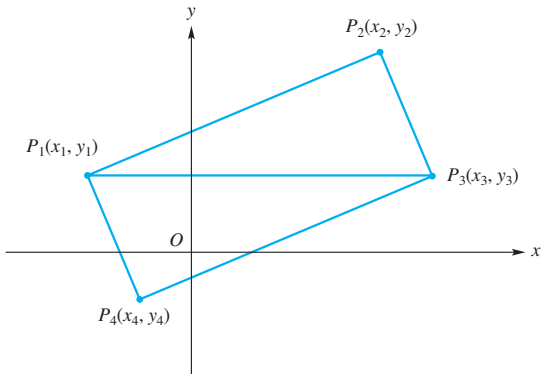
olur.

(4)'teki determinant aşağıdaki gibi de hesaplanabilir:

$$\det\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & 0 \end{bmatrix}\right) \quad \begin{matrix} \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3 \end{matrix}$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}\right)$$

Üçüncü sütun boyunca kofaktör açılımından



ŞEKİL 3.4

Bir keyfi 2×2 tipindeki matris, R^2'deki bir $\mathbf{v}$ vektörü için

$$L(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$$

ile bir $L : R^2 \to R^2$ lineer operatör tanımlar. f'yi T'ye uygulayarak elde edilen bir T üçgeni gibi kapalı bir şeklin görüntüsünün alanı, T'nin alanı ile nasıl karşılaştırılabilir? Böylece T'nin köşeleri (x_1, y_1), (x_2, y_2) ve (x_3, y_3) olan bir üçgen olduğunu farzedelim ve

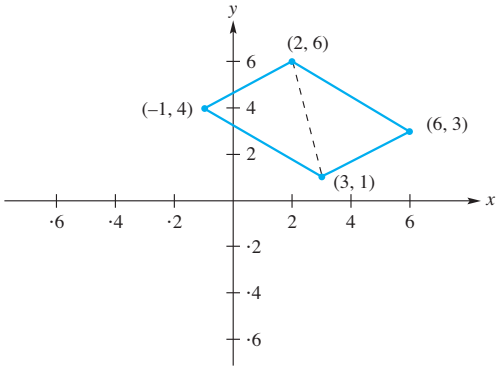
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

olsun. Alıştırma 19'da sizden önce $f(T)$'nin görüntüsünün koordinatlarını hesaplamanızı ve daha sonra

$$f(T)\text{'nin alanı} = |\det(A)| \cdot T\text{'nin alanı}$$

olduğunu göstermenizi istiyoruz.

ÖRNEK 5 Şekil 3.5'te gösterilen ve köşeleri (–1, 4), (3, 1),(2, 6) ve (6, 3) ile verilen P paralel kenarının alanını hesaplayınız.



ŞEKİL 3.5

Çözüm

Şekil 3.5 kesikli çizilen köşegen paralel kenarı iki eşit üçgene böler. Bu alan Örnek 4'te hesaplanmıştı. Buna göre paralel kenarın alanı 17'dir. ■

ÖRNEK 6

Örnek 4'te tanımlanan T üçgenini ve

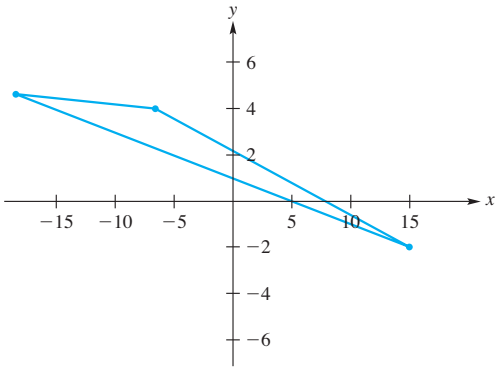
$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisini göz önüne alalım. A matrisi tarafından tanımlanan lineer operatörü kullanarak T'nin görüntüsünün, köşeleri $(-18, 5)$, $(15, -2)$ ve $(-6, 4)$ olan bir üçgendir. (Gösteriniz.) (Şekil 3.6'ya bakınız.) Bu üçgenin alanı (2)'den dolayı

$$\frac{1}{2}\left|\det\left(\begin{bmatrix} -18 & 5 & 1 \\ 15 & -2 & 1 \\ -6 & 4 & 1 \end{bmatrix}\right)\right| = \frac{1}{2}|51| = 25.5$$

olur. $\det(A) = 3$ olduğundan $3 \times T$ üçgeninin alanı = Görüntüsünün alanı olduğu görülür. ■

Uyarı Örnek 5'te tartışılan sonuç genelde doğrudur. Yani, eğer S, 2-boyutlu uzayda bir kapalı şekil (3-boyutlu) ise A uygun boyutlu bir matris ve L, A tarafından tanımlanmış lineer dönüşüm ise, o zaman görüntünün alanı = $|\det(A)|$. S'nin alanı (görüntünün hacm = $|\det(A)|$. S'nin hacmı) olur.



ŞEKİL 3.6

Anahtar Kelimeler

Minör
Kofaktör
Satır veya sütun boyunca açılım
Bir üçgenin alanı

3.3 Alıştırmalar

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

olsun. Aşağıdaki minörleri bulunuz.

(a) $\det(M_{13})$ **(b)** $\det(M_{22})$

(c) $\det(M_{31})$ **(d)** $\det(M_{32})$

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

olsun. Aşağıdaki minörleri bulunuz.

(a) $\det(M_{12})$ **(b)** $\det(M_{23})$

(c) $\det(M_{33})$ **(d)** $\det(M_{41})$

3. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

olsun. Aşağıdaki ko-faktörleri bulunuz.

(a) A_{13} **(b)** A_{21}

(c) A_{32} **(d)** A_{33}

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

olsun. Aşağıdaki kofaktörleri bulunuz.

(a) A_{12} **(b)** A_{23}

(c) A_{33} **(d)** A_{41}

5. Kesim 3.2'deki Alıştırma 1(a), 1(d) ve 1(e)'deki determinantları hesaplamak için Teorem 3.10'u kullanınız.

6. Kesim 3.2'deki Alıştırma 1(b), (c) ve (f)'de verilen determinantları hesaplamak için Teorem 3.10' u kullanınız.

7. Kesim 3.2'deki Alıştırma 2(a), (c) ve (f)'de verilen determinantları hesaplamak için Teorem 3.10' u kullanınız.

8. Kesim 3.2'deki Alıştırma 2(b), (d) ve (e)'de verilen determinantları hesaplamak için Teorem 3.10'u kullanınız.

9. Bir satır (sütun) açılımı ile, eğer $A = [\ a_{ij}]$ alt (üst) üçgen ise o zaman $\det(A) = a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}$ olduğunu gösteriniz.

10. Eğer $A = [a_{ij}]$ bir 3×3 tipinde matris ise $\det(A)$ için genel ifadeyi

(a) 2-inci sütun boyunca

(b) 3-inci satır boyunca

açınız.

Bu cevapları Bölüm 5'teki Örnek 8'de elde edilen cevaplarla karşılaştırınız.

11. Aşağıdakiler için t'nin bütün değerlerini hesaplayınız.

(a) $\begin{vmatrix} t-2 & 2 \\ 3 & t-3 \end{vmatrix} = 0$

(b) $\begin{vmatrix} t-1 & -4 \\ 0 & t-4 \end{vmatrix} = 0$

12.

$$\begin{vmatrix} t-1 & 0 & 1 \\ -2 & t+2 & -1 \\ 0 & 0 & t+1 \end{vmatrix} = 0$$

eşitliği sağlanacak şekildeki t'nin bütün değerlerini hesaplayınız.

13. A, $n \times n$ tipinde bir matris olsun.

(a) $f(t) = \det(tI_n - A)$ derecesi n olan t değişkenli bir polinomdur. Gösteriniz.

(b) $f(t)$'deki t^n'in katsayısı nedir?

(c) $f(t)$'deki sabit terim nedir?

14. Aşağıdaki matrisler ile Alıştırma 1.3'teki cevaplarınızı doğrulayınız.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

15. T köşeleri (3, 3), (−1, −1), (4, 1) olan üçgen olsun,

(a) T üçgeninin alanını bulunuz.

(b) $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

matrisi ile temsil edilen lineer operatör altındaki T'nin görüntüsünün köşelerinin koordinatlarını bulunuz.

(c) Köşeleri (b) şıkkında elde edilen üçgenin alanını hesaplayınız.

16. Köşeleri (2, 3), (5, 3), (4, 5), (7, 5) olan paralel kenarın alanını hesaplayınız.

17. Q, köşeleri (−2, 3), (1, 4), (3, 0) ve (−1, −3) olan dörtgen olsun. Q'nun alanını hesaplayınız.

18. Bir dönmenin (rotasyonun) bir üçgenin alanını değiştirmediğini ispat ediniz.

19. T, köşeleri (x_1, y_1), (x_2, y_2) ve (x_3, y_3) olan üçgen ve

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

olsun. f, R^2'deki bir $\mathbf{v}$ vektörü için $f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ ile tanımlanan lineer operatör olsun. İlk önce f altındaki T'nin görüntüsü olan $f(T)$'nin köşelerini hesaplayınız. Sonra $f(T)$'nin alanının, $|\det(A)| \cdot T$'nin alanı olduğunu gösteriniz.

3.4 Bir Matrisin Tersi

A'nın ya bir satır ya da bir sütun boyunca det(A) açılımı için Kesim 3.3'teki Teorem 3.10'da formüller elde edildiğini gördük. Böylece i-inci satır boyunca det(A)'nın açılımı $\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$ olur. $i \neq k$ için $a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn}$ ifadesinin ne olduğunu sormak ilginçtir. Çünkü bu soruyu cevaplar cevaplamaz singüler olmayan bir matrisin tersini bulmak için başka bir yöntem elde edeceğiz.

Teorem 3.11 Eğer $A = [a_{ij}]$ bir $n \times n$ tipinde matris ise o zaman

$$\begin{array}{llll} i \neq k & \text{için} & a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn} = 0 \\ j \neq k & \text{için} & a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{k2} + \ldots + a_{nj}A_{nk} = 0 \end{array}$$

İspat

Sadece ilk formülü ispatlarız. 2-inci formül Teorem 3.1 vasıtasıyla ilkinden çıkar.

A'nın i-inci satırı ile k-ıncı satırının yer değiştirmesiyle A'dan elde edilen B matrisini göz önüne alalım. Bu durumda B iki özdeş satıra (i-inci ve k-ıncı satırlar) sahip bir matristir böylece $\det(B) = 0$ olur. Şimdi det(B)'nin k-inci satır boyunca açılımını yapalım. B'nin k-ıncı satırının elemanları $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$, kofaktörleri ise $A_{k1}, A_{k2}, \ldots, A_{kn}$ olur. Böylece

$$0 = \det(B) = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn}$$

göstermek istediğimiz şeydir. ■

Bu teorem; eğer determinantın herhangi bir satırının elemanları ile herhangi diğer bir satırın karşılık gelen kofaktörleri çarpımlarından elde edilenleri toplarsak sıfırı elde edeceğimizi söyler.

ÖRNEK 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$ olsun. O zaman

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 19$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -14 \quad \text{ve} \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3$$

olur. Şimdi

$$a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23} = (4)(19) + (5)(-14) + (-2)(3) = 0$$

ve

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = (1)(19) + (2)(-14) + (3)(3) = 0$$

olur. ■

Yaptığımız açılımdaki sonuçları aşağıdaki gibi özetleyebiliriz.

$$\begin{array}{lll} a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = \det(A) & & \text{eğer } i = k \\ = 0 & & \text{eğer } i \neq k \end{array}$$

ve

$$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = \begin{cases} \det(A) & \text{eğer } i = j \\ 0 & \text{eğer } i \neq j \end{cases}$$

olur.

TANIM 3.5

$A = [a_{ij}]$ $n \times n$ tipinde bir matris olsun. A'nın **ek matrisi** (adjointi) diye adlandırılan $n \times n$ tipindeki ek A matrisinin (i, j)-inci elemanı, a_{ji}'nin A_{ji} kofaktörüdür. Böylece

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

olur.

Uyarı Ek matris teriminin yukarıdaki kullanımına ilaveten lineer cebirde diğer anlamlara sahip olduğuna dikkat edilmelidir.

ÖRNEK 2

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

olsun. ek A'yı hesaplayınız.

Çözüm

Önce A'nın kofaktörlerini hesaplayalım.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -18$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 17, \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -10, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -10$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 28$$

O zaman

$$\text{ek } A = \begin{bmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{bmatrix}$$

olur. ■

Teorem 3.12 Eğer $A = [a_{ij}]$, bir $n \times n$ tipinde matris ise o zaman $A(ek\ A) = (ek\ A)A = \det(A)I_n$ olur.

İspat

$$A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{j1} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{j2} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{jn} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

eşitliği yazılabilir.

A(ek A) çarpım matrisindeki (i, j)-inci eleman Teorem 3.10'dan dolayı

$$\begin{aligned} a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} &= \det(A) && \text{eğer } i = j \\ &= 0 && \text{eğer } i \neq j \end{aligned}$$

olur. Bu

$$A(\text{ek } A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)I_n$$

sonucunu ifade eder. A(ek A) çarpım matrisindeki (i, j) elemanı, Teorem 3.10'dan dolayı

$$\begin{aligned} A_{1i}a_{1j} + A_{2i}a_{2j} + \cdots + A_{ni}a_{nj} &= \det(A) && \text{eğer } i = j \\ &= 0 && \text{eğer } i \neq j. \end{aligned}$$

Böylece (ek A)$A = \det(A)I_n$ olur. ■

ÖRNEK 3 Örnek 2'deki matrisi göz önüne alalım. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -94 & 0 & 0 \\ 0 & -94 & 0 \\ 0 & 0 & -94 \end{bmatrix}$$

$$= -94 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} = -94 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. ■

Şimdi singüler olmayan bir matrisin tersini bulmak için yeni bir yönteme sahibiz. Bu yöntemi aşağıdaki sonuçta vereceğiz.

Sonuç 3.4 Eğer A $n \times n$ tipinde bir matris ve $\det(A) \neq 0$ ise, o zaman

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\text{ek } A) = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{\det(A)} & \frac{A_{21}}{\det(A)} & \cdots & \frac{A_{n1}}{\det(A)} \\ \frac{A_{12}}{\det(A)} & \frac{A_{22}}{\det(A)} & \cdots & \frac{A_{n2}}{\det(A)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{\det(A)} & \frac{A_{2n}}{\det(A)} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\det(A)} \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

İspat

Teorem 3.12'den dolayı $A(\text{ek } A) = \det(A)I_n$. Eğer $\det(A) \neq 0$ ise, o zaman

$$A\left(\frac{1}{\det(A)}(\text{ek } A)\right) = \frac{1}{\det(A)}(A(\text{ek } A)) = \frac{1}{\det(A)}(\det(A)I_n) = I_n$$

Sonuç olarak

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\text{ek } A)$$

olur. ■

ÖRNEK 4 Örnek 2'deki matrisi tekrar göz önüne alalım. O zaman $\det(A) = -94$ ve

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\text{ek } A) = \begin{bmatrix} \frac{18}{94} & \frac{6}{94} & \frac{10}{94} \\ -\frac{17}{94} & \frac{10}{94} & \frac{1}{94} \\ \frac{6}{94} & \frac{2}{94} & -\frac{28}{94} \end{bmatrix}$$

olur. ■

Sonuç 3.5'te verilen singüler olmayan bir matrisin tersini bulma yönteminin Bölüm 1'de verilen yöntemden daha az etkili olduğuna dikkat etmeliyiz. Sonuç 3.5'te verildiği gibi gerçekten determinantları kullanarak A^{-1}'in hesaplanması $n > 4$ için oldukça zahmetlidir. Determinantları hesaplama açısından ele aldığımız Kesim 3.6'da bu konuları tartışacağız. Bununla birlikte Sonuç 3.5 diğer yerlerde hala kullanışlıdır.

Anahtar Kelimeler

Ters (invers)
Ek (adjoint)

3.4 Alıştırmalar

1. $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

matrisi için $a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + a_{31}A_{32}$ işlemini yaparak Teorem 3.11'i doğrulayınız.

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

olsun.

(a) ek A'yı bulunuz.

(b) det(A)'yı hesaplayınız.

(c) Teorem 3.12'yi doğrulayınız.Yani,

$$A(\text{ek } A) = (\text{ek } A)A = \det(A)I_3$$

olduğunu gösteriniz.

3. $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 8 \\ -3 & 4 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ olsun.

Alıştırma 2'deki şıkları uygulayınız.

4. Sonuç 3.5'te verilen yöntem ile Alıştırma 2'deki matrisin tersini bulunuz.

5. Sonuç 3.5'te verilen yöntem ile Kesim 1.6'daki Alıştırma 11'i tekrar ediniz. Elde ettiğiniz sonuçları daha önce elde edilenlerle karşılaştırınız.

6. Eğer A bir simetrik matris ise o zaman ek A'nın da bir simetrik matris olduğunu ispatlayınız.

7. **(a)** $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

matrislerinin eğer varsa terslerini bulmak için Sonuç 3.5'te verilen metodu kullanınız.

8. Eğer A singüler bir olmayan üst üçgen matris ise bu durumda A^{-1}'in üst üçgen matris olduğunu ispatlayınız.

9. Eğer

$$ad - bc \neq 0 \text{ ise } \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

matrisinin tersini bulmak için Sonuç 3.5'te verilen yöntemi kullanınız.

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$

matrisinin tersini bulmak için Sonuç 3.5'te verilen yöntemi kullanınız. [*Yol gösterme*: Kesim 3.2'deki Alıştırma 22'ye bakınız. Orada det(A) hesaplanmıştır.]

11. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

matrisinin tersini bulmak için Sonuç 3.5'te verilen yöntemi kullanınız.

12. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

matrisinin tersini bulmak için Sonuç 3.5'te verilen yöntemi kullanınız.

13. Eğer A singüler ise ek A'da singülerdir. İspatlayınız. [*Yol gösterme*: İlk önce A singüler olduğunda $A(\text{ek } A) = 0$ olduğunu gösteriniz.]

14. Eğer A bir $n \times n$ tipinde matris ise $\det(\text{ek } A) = [\det(A)]^{n-1}$ olduğunu ispatlayınız.

15. Yazılımınız matrisin tersini hesaplamak için bir komuta sahip olsun. (Kesim 1.4'teki Alıştırma 47'ye bakınız.) Bu kullanılan yöntemi belirlemek için verilen yazılım dökümanlarını okuyunuz. Bu yöntem Sonuç 3.5'tekine mi yoksa Kesim 1.6'dakine mi daha yakındır?

3.5 Determinantların Diğer Uygulamaları

n bilinmeyenli n denklemden oluşan bir lineer denklem sistemini çözmek için başka bir metot elde edene kadar Teorem 3.12'de geliştirdiğimiz sonuçları kullanabiliriz. Bu metot **Cramer kuralı olarak** bilinir.

Teorem 3.13 **Cramer Kuralı**

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

n bilinmeyenli n denklemli bir sistem ve $A = [a_{ij}]$ katsayılar matrisi olsun. Böylece verilen sistemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ biçiminde yazabiliriz. Burada

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Eğer $\det A \neq 0$ ise sistemin

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

şeklinde bir tek çözümü vardır. Burada A_i, A'nın *i-inci sütununun* **b** ile yer değiştirmesiyle elde edilen matristir.

İspat

Eğer $\det(A) \neq 0$ ise Teorem 3.8 gereğince A singüler değildir. Böylece

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{\det(A)} & \frac{A_{21}}{\det(A)} & \cdots & \frac{A_{n1}}{\det(A)} \\ \frac{A_{12}}{\det(A)} & \frac{A_{22}}{\det(A)} & \cdots & \frac{A_{n2}}{\det(A)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{A_{1i}}{\det(A)} & \frac{A_{2i}}{\det(A)} & \cdots & \frac{A_{ni}}{\det(A)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{\det(A)} & \frac{A_{2n}}{\det(A)} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\det(A)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

olur. Bu $i = 1, 2, \ldots, n$ için

$$x_i = \frac{A_{1i}}{\det(A)}b_1 + \frac{A_{2i}}{\det(A)}b_2 + \cdots + \frac{A_{ni}}{\det(A)}b_n$$

anlamını taşır.



GABRIEL CRAMER

* Gabriel Cramer (1704-1752) İsviçre'nin Geneva şehrinde doğdu ve hayatı boyunca orada yaşadı. Bekar olduğu için çok seyahat etti. Calvin Akademisi'nde ders verdi ve sosyal faaliyetlere aktif olarak katıldı.

Lineer denklem sistemlerinin çözüm kuralı, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* kitabının ek kısmında yer almıştır. Bu kural diğer matematikçiler tarafından biliniyordu. Ancak Cramer'in etkileyici çalışmasına kadar geniş olarak bilinmiyordu ya da açık olarak ifade edilmemişti.

Şimdi

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,i-1} & b_1 & a_{1\,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,i-1} & b_2 & a_{2\,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\,i-1} & b_n & a_{n\,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

olsun. Eğer i-inci sütunun kofaktörleri boyunca açılımı ile $\det(A_i)$'yi hesaplarsak

$$\det(A_i) = A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \cdots + A_{ni}b_n$$

buluruz. Sonuç olarak

$$i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{için} \quad x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \tag{1}$$

olur. ■

Denklem (1)'de x_i için verilen ifadede A_i'nin determinantı $\det(A_i)$ istenen herhangi bir yöntemle hesaplanabilir. Bu yalnızca $\det(A_i)$'yi i. sütun boyunca açarak hesaplamak zorunda kaldığımız x_i için olan ifadenin elde edilmesinde gerekliydi.

ÖRNEK 1 Aşağıdaki lineer denklem sistemini ele alalım.

$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 &= -3 \end{aligned}$$

$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2$ elde ederiz. Bu durumda

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-6}{-2} = 3$$

ve

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-8}{-2} = 4$$

olur. ■

Cramer kuralının n bilinmeyenli n denklemli ve A katsayılar matrisinin singüler olmadığı bir sisteme sahip olduğumuz durumlarda uygulanabilir olduğuna dikkat ediniz. Eğer katsayılar matrisi singüler olan n bilinmeyenli n denklemden oluşan bir lineer denklem sistemini çözmek istersek o zaman Kesim 2.2'de elde edilen Gauss yoketme veya Gauss-Jordan indirgeme yöntemlerini kullanmalıyız. Cramer kuralı $n \geq 4$ için verimsizdir ve genellikle Gauss yoketme veya Gauss-Jordan indirgeme yöntemlerini kullanmak daha iyidir.

Bu noktada $n \times n$ tipindeki bir A matrisi için aşağıdaki ifadelerin denk olduğunu görmeliyiz:

1. A singüler değildir.
2. $A\mathbf{x} = 0$ sadece aşikar çözüme sahiptir.
3. A satırca (sütunca) I_n'e denktir.
4. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer denklem sistemi her $n \times 1$ tipindeki $\mathbf{b}$ matrisi için tek bir çözüme sahiptir.
5. A elementer matrislerin çarpımıdır.
6. $\det(A) \neq O$.

Anahtar Kelimeler

Cramer kuralı

3.5 Alıştırmalar

1. Eğer mümkünse aşağıdaki lineer sistemi Cramer kuralı ile çözünüz.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -5 \end{aligned}$$

2. Alıştırma 1'i

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

lineer sistem için tekrarlayınız.

3. Cramer kuralını kullanarak aşağıdaki lineer sistemi x_3 için çözünüz.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= -2 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= -4 \end{aligned}$$

4. Cramer kuralını kullanarak Kesim 2.2'de Alıştırma 5'i tekrarlayınız.

5. Aşağıdaki lineer sistem için Alıştırma 1'i tekrarlayınız.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

6. Kesim 1.2'deki Alıştırma 6(b)'yi Cramer kuralını kullanarak yeniden çözünüz.

7. Aşağıdaki lineer sistem için Alıştırma 1'i tekrarlayınız.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 0 \\ -2x_1 - 4x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

3.6 İşlemsel Açıdan Determinantlar

Bölüm 1'de bir lineer sistemi çözmek için üç yöntem tartıştık: Gauss eleme, Gauss Jordan indirgeme ve LU-ayrışım yöntemleri. Bu bölüm-

de bir fazla yol (metod) sunduk: Cramer kuralı. Biz singüler olmayan matrislerin tersini bulurken genellikle iki yöntem kullanırız: Kesim 1.6'da geliştirdiğimiz elementer matrisleri kullanan yöntem ve Kesim 3.4'te sunduğumuz determinantları kapsayan yöntem. Bu kesimde bu yöntemlerin biri veya diğeri seçildiğinde göz önünde bulundurulması gereken kıstasları ele alacağız.

Genel olarak sayısal (nümerik) cevapları araştırıyorsak o zaman $n \leq 4$ için determinantları kapsayan herhangi bir yöntem kullanılabilir. Gauss yoketme, Gauss Jordan indirgeme ve LU-ayrışımın hepsi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sisteminin çözümü için yaklaşık $n^3/3$ işlem gerektirir. Burada A $n \times n$ tipinde bir matristir. Şimdi bu yöntemleri Cramer kuralı ile kıyaslayalım. A, 25×25 tipinde olduğunda gerçek uygulama alanında bir küçük problemdir. (Bazı uygulamalarda A, $100{,}000 \times 100{,}000$ biçiminde olabilir.)

Eğer $\mathbf{x}$' i Cramer kuralı ile bulacaksak o zaman ilk önce det(A)'yı elde etmeliyiz. det(A) kofaktör açılımı ile hesaplansın. O zaman

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \ldots + a_{n1}A_{n1}$$

olur. Burada A'nın ilk sütunu boyunca açılımını yaptık. Eğer her bir A_{ij} kofaktörü mevcut ise, det(A)'yı hesaplamak için 25 çarpana ihtiyacımız vardır. Şimdi A_{ij}'nin her bir kofaktörü bir 24×24 tipindeki matrisin determinantıdır ve 24 çarpım gerektiren bir özel satır ve sütun boyunca açılabilir. Böylece det(A)'nın hesaplanması $25 \times 24 \times 23 \times \ldots \times 2 \times 1 = 25!$ den fazla işlem gerektirir (yaklaşık olarak 1.55×10^{25}). *Saniyede* (*yılda* 3.15×10^{19}) *on trilyon* (1×10^{12}) çarpım yapma kapasitesine sahip geleceğin süper bilgisayarlarını (çok fazla uzak değil) kullansak bile det(A)'yı hesaplamak *49.000 yıl* sürer. Bununla birlikte Gauss yoketme yöntemi yaklaşık $25^3/3$ çarpım alır ve bir saniyeden daha az zamanda çözümü elde ederiz. Elbette A'yı üçgen forma indirgemek için elementer satır işlemlerini ve Teorem 3.7'yi kullanarak det(A) daha etkili bir yöntemle hesaplanabilir (Kesim 3.2'deki Örnek 8'e bakınız). Bu yöntem uygulandığında Cramer kuralı bir $n \times n$ matrisi için Gauss yoketme yöntemindeki $n^3/3$ çarpımları ile kıyaslandığında yaklaşık n^4 çarpım gerektirir. Pratikte en yaygın kullanılan yöntem *LU*-ayrışım yöntemidir. Özellikle farklı yollarla birçok lineer sistemi çözmek istediğimizde bu yöntem en zahmetsizdir.

Açıkçası determinantların önemi, onların işlemsel kullanımından ibaret değildir. Determinantlar, ifadeler ve formüller vasıtasıyla bir matrisin tersinin ifade edilmesi ve bir n bilinmeyenli n lineer denklem sisteminin çözümlerine imkan vermektedir. Bir lineer sistemi çözmek için yukarıda bahsedilen diğer yöntemler ve elementer matrisleri kullanarak A^{-1}'i bulmak için kullanılan yöntem cevap için bir formül yazamayacağımız bir özelliğe sahiptir. Cevabı elde etmek için algoritmik olarak ilerlemek zorundayız. Bazan bir sayısal cevaba ihtiyaç duymayız fakat yalnızca cevap için bir ifadeye ihtiyaç duyarız. Çünkü cevabı daha fazla ele almak isteyebiliriz. Örneğin onu integralleriz.

Ek Alıştırmalar

1. Aşağıdakilerin her biri için $|A|$'yı hesaplayınız.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

2. Aşağıdakilerin her biri için $|A|$'yı hesaplayınız.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

3. Pozitif bir n tamsayısı için $A^n = O$ ise o zaman $\det(A) = 0$'dır. Gösteriniz. (A bir nilpotent matristir)

4. Teorem 3.2, 3.5, 3.6 ve elementer satır veya sütun işlemlerini kullanarak (determinantları açmadan) aşağıdakileri doğrulayınız.

(a) $\begin{vmatrix} a-b & 1 & a \\ b-c & 1 & b \\ c-a & 1 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & b \\ b & 1 & c \\ c & 1 & a \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

5. Eğer A bir $n \times n$ tipinde matris ise $\det(AA^T) \geq 0$ olduğunu gösteriniz.

6. Determinant fonksiyonunun, M_{nn}'den R^1'e bir lineer dönüşüm olup olmadığını ispatlayınız.

7. Eğer A singüler olmayan bir matris ise o zaman ek A'nında singüler olmadığını ve

$$(\text{ek } A)^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A = \text{ek}(A^{-1})$$

olduğunu gösteriniz.

8. Eğer $n \times n$ tipindeki A matrisinin iki satırı (sütunları) orantılı ise o zaman $\det(A) = 0$'dır. İspatlayınız.

9. Q, $n \times n$ tipinde her bir elemanı 1 olan reel matris olsun. $\det(Q - nI_n) = 0$ olduğunu gösteriniz.

10. A elamanları tamsayı olan $n \times n$ tipinde bir matris olsun. İspatlayınız. A'nın singüler olmaması ve A^{-1}'in tamsayı elamanlara sahip olması için gerek ve yeter şart $\det(A) = \pm 1$ olmasıdır.

11. A, elamanları tamsayı olan $n \times n$ tipinde bir matris ve $\det(A) = \pm 1$ olsun. Eğer $\mathbf{b}$'nin bütün elemanları tamsayı ise o zaman $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$'nin her çözümü tamsayılardan ibarettir. Gösteriniz.

Bölüm Tekrarı

Doğru veya Yanlış

1. $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$

2. $\det(A^{-1}B) = \dfrac{\det(B)}{\det(A)}$

3. Eğer $\det(A) = 0$ ise A en az iki eşit satıra sahiptir.

4. Eğer A bütün elemanları sıfır olan bir sütuna sahipse $\det(A) = 0$ dır.

5. A'nın singüler olması için gerek ve yeter şart $\det(A) = 0$ olmasıdır.

6. Eğer B, A'nın satırca indirgenmiş eşelon formu ise $\det(B) = \det(A)$'dır

7. Bir elementer matrisin determinantı daima 1 dir.

8. A singüler olmayan bir matris ise $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$ dır.

9. Eğer T, $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ile tanımlanan $R^2 \to R^2$ ye bir matris dönüşüm ise T altında düzlemde S kapalı şeklinin görüntüsünün alanı S'nin alanının altı katıdır.

10. Eğer $n \times n$ tipindeki bir A matrisinin bütün köşegen elemanları sıfır ise $\det(A) = 0$'dır

11. $\det(AB^TA^{-1}) = \det B$.

12. $\dfrac{1}{c}(\det cA) = \det(A)$.

Küçük Sınav

1. A, B ve C, 2×2 tipinde matrisler, $\det(A) = 3$, $\det(B) = -2$ ve $\det(C) = 4$ olsun. $\det(6A^TBC^{-1})$'i hesaplayınız.

2. 3×3 tipindeki A matrisi için eğer B, A'nın bütün elemanlarına 5 eklenmesiyle elde edilen bir matris ise $\det(B) = 5 + \det(A)$ olup olmadığını ispatlayınız.

3. B, A dan $2\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $4\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_3$ ve $-2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_4$ elementer işlemleri uygulandıktan sonra elde edilen matris olsun. Eğer $\det(B) = 2$ ise $\det(A)$'yı bulunuz.

4.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
matrisinin determinantını satır operasyonlarını kullanarak üst üçgensel hale getirip hesaplayınız.

5. A alt üçgensel bir matris olsun, A'nın singüler olması için gerek ve yeter şart A'nın köşegeni üzerindeki bazı elemanların sıfır olmasıdır. İspatlayınız.

6.
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
verilsin.
det(A)'yı satır veya sütun boyunca açılımı kullanarak hesaplayınız.

7.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$
için A^{-1}'i ek matrisi kullanarak hesaplayınız.

8.
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$
verilsin.
$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistemini Cramer kuralını kullanarak çözünüz.

Tartışma Alıştırmaları

1. a ve b herhangi reel sayılar ve $a \neq b$ olmak üzere
$$A = \begin{bmatrix} a+b & ab & 0 \\ 1 & a+b & ab \\ 0 & 1 & a+b \end{bmatrix}$$
olsun. $\det(A)$'nın $(a^4 - b^4) / (a - b)$ olduğunu gösteriniz. İspatınızda bütün adımları dikkatlice açıklayınız.

2.
$$A = \begin{bmatrix} a+b & ab & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 1 & a+b \end{bmatrix}$$
olsun.
(a) $\det(A)$ için bir formül tahmin ediniz. Bu tahmine nasıl vardığınızı açıklayınız.
(b) Tahmininizi ispatlayınız. (Eğer bir cebirsel sistemle birleştirilmiş bir yazılıma sahipseniz ispatınızda onu kullanınız.)

3. $j = 1, 2, 3, 4$ için a_j ve b_j herhangi reel sayılar c_1 ve d_1 herhangi reel sayılar olsun.
$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
olmak üzere $\det(A) = 0$ olduğunu gösteriniz. İspatınızda her adımı dikkatlice açıklayınız.

4.
$$A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 2 & x \end{bmatrix}$$
olmak üzere $\det(A) = 0$ olacak şekilde x'in bütün değerlerini belirleyiniz.

5.
$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
olsun.
(a) $p(x) = \det(A)$'yı belirleyiniz.
(b) $y = p(x)$ in grafiğini çiziniz. Eğer grafik x-eksenini herhangi bir noktada kesiyorsa bu değerler için $\det(A)$'yı belirleyiniz.

6. Düzlemdeki iki nokta $P(x_1, y_1)$ ve $Q(x_2, y_2)$ olsun. P ve Q dan geçen doğrunun denkleminin $\det(A) = 0$ ile verildiğini ispatlayınız.
Burada
$$A = \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix}$$
dir.

7. A_n, $n \times n$ tipinde

$$\begin{bmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & x \end{bmatrix}$$

şeklinde bir matris olsun. $n \geq 3$ için

$$\det(A_n) = x \det(A_{n-1}) - \det(A_{n-2})$$

olduğunu gösteriniz.

(*Not:* $A_1 = \begin{bmatrix} x \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{bmatrix}$.)

BÖLÜM

4 Reel Vektör Uzayları

Kesim 1.2, 1.3 ve 1.6'da 2-vektör ve 3-vektörlere ve özelliklerine informal olarak kısa bir bakış yaptık. Bu bölümde 2-vektör ve 3-vektörleri özellikleri ile birlikte dikkatli ve sistemli olarak geliştireceğiz. Bunun üstesinden gelmek için *n*-vektörleri anlama ve vektörü kavramının daha genel olarak tanıtıldığı Kesim 4.2'yi incelemektir. Üstelik *n*-vektör ve vektörün genel kavramı kitabın pek çok kısmında kullanılacaktır.

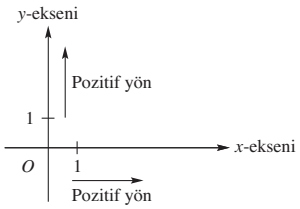
4.1 Düzlemde ve 3-Boyutlu Uzayda Vektörler

Bir çok uygulamada, basınç, kütle ve **sürat** gibi, büyüklüğü verilerek tam olarak tanımlanabilen çokluklarla karşılaşırız. Bunlara **"skalarlar"** denir ve *c, d, r, s* ve *t* gibi küçük *italik* harflerle gösterilir. Hız, kuvvet ve ivme gibi daha birçok ölçülebilen büyüklükler de vardır ve bunların tanımlanması için büyüklüğün yanında bir de yön kavramı gereklidir. Bunlara **"vektörler"** denir ve incelenmeleri bu bölümü kapsar. Vektörler küçük **kalın** harflerle gösterilir. Örneğin; **u, v, x, y, z** gibi. Okuyucu halihazırda temel fizik ve matematik analizde vektörlerle karşılaşmış olabilir.

■ Düzlemde Vektörler

Orijin olarak adlandırılan bir *O* noktasında dik kesişen bir çift doğru çizeriz. Bu doğrulardan biri, ***x*-ekseni,** genellikle yatay durumdadır. Diğer doğru, ***y*-ekseni,** dik durumda alınır. *x* ve *y* eksenlerine birlikte, **"koordinat eksenleri"** denir ve bir **dik** veya **kartezyen** (René Descartes'den* sonra) **koordinat sistemi** oluştururlar. Şimdi *x* ve *y* eksenleri üzerinde uzunluğun ve pozitif yönlerin birimlerini sabitlemek için, *x*-eksenin üzerinde *O*'ın sağında ve *y*-ekseni üzerinde *O*'ın yukarısında bir nokta seçelim. Her zaman değil, fakat çoğunlukla, bu noktalar

* René Descartes (1596–1650) zamanının en iyi bilinen fen-bilimcilerinden ve düşünürlerinden birisi idi. Hukukta üniversiteyi tamamladıktan sonra Paris'te askeriyede çalışırken kendisi özel olarak matematik çalışmaya başladı. Bunun yanı sıra gönüllü olarak



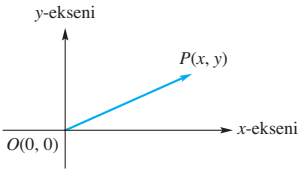
ŞEKİL 4.1

O'dan eşit uzaklıkta olacak şekilde seçilir. Böylece her iki eksen için de aynı uzunluk birimi kullanılır.

Düzlemdeki her P noktası ile reel sayılardan oluşan bir sıralı (x, y) ikilisini eşleştirebiliriz. Buna o noktanın **koordinatları** denir. Tersine her sıralı reel sayı ikilisini düzlemde bir noktayla eşleştirebiliriz. (x, y) koordinatlı P noktası $P(x, y)$ veya kısaca (x, y) ile gösterilir. Düzlemdeki tüm noktaların cümlesi R^2 ile gösterilir; buna **2-boyutlu uzay** denir.

2×1 matrisini ele alalım.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



ŞEKİL 4.2

Burada x ve y reeldir. X ile, başlangıç noktası orijin ve bitiş noktası $P(x, y)$ olan bir yönlü doğru parçasını eşleştirelim. O'dan P'ye çizilen yönlü doğru parçası $\overrightarrow{OP}$ ile gösterilir ve O: **başlangıç noktası** P: **bitim noktası** olarak adlandırılır. Başlangıç ve bitim noktasının üzerlerine bir ok koyarak ayırt ederiz. Bir yönlü doğru parçası bir **yöne** sahiptir ve üzerine konan bir okla işaret edilir. Bir yönlü doğru parçasının büyüklüğü onun uzunluğudur. Böylece bir yönlü doğru parçası kuvveti, hızı ve ivmeyi tanımlamak için kullanılabilir. Diğer yandan, $\overrightarrow{OP}$ yönlü doğru parçasıyla bir

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

matrisini eşleştirebiliriz. Burada $O(0, 0)$ başlangıç ve $P(x, y)$ bitim noktasıdır.

TANIM 4.1

Düzlemde bir vektör; 2×1 tipinde bir

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

matrisidir. Burada x, y reel sayılardır ve $\mathbf{x}$'in **bileşenleri** olarak adlandırılır. Düzlemde bir vektörü kısaca bir **vektör** ya da **2-vektör** olarak belirtiriz.

Böylece, herbir vektörle bir yönlü doğru parçasını eşleştirebiliriz. Tersine, her yönlü doğru parçasını da bir vektörle eşleştirebiliriz. Sıklıkla yönlü doğru parçası ve vektör kavramları birbirlerinin yerine kullanılır ve bir yönlü doğru parçası bir **vektör** olarak adlandırılır.



RENÉ DESCARTES

Hollanda Bayvera ve Fransa ordularında kısa süreler çalıştı, 1649'da İsveç Kraliçesi Christina'dan özel danışmanlık ve Bilimler akademisini kurma davetini aldı. Malesef, bu projeyi tamamlayamadan 1650'de zatürreden öldü.

1619'da gördüğü rüyada gerçeği (doğruyu) elde etmenin en iyi yolunun matematik metod olduğunun farkına vardı. Buna rağmen, onun tek basılmış eseri *La Géométrie* idi. Bu "Bilimde Doğruyu Arama ve Bulma Metodu Üzerine" adlı araştırmasının ek kısımında yayınlanmıştır. "*La Géométrie*" de cebirsel olarak geometri yapmadaki temel düşüncesini açıklar: Bir eğriyi cebirsel olarak ifade etmek için uygun bir başlangıç doğrusu ve üzerinde bir başlangıç noktası seçilir. Eğer y, eğri üzerindeki herhangi bir noktanın başlangıç doğrusuna uzaklığını ve x'de doğru boyunca başlangıç noktasına uzaklığı gösterirse, x ve y arasında eğriyi gösteren bir denklem vardır.

Bir vektör bir matris olduğundan eğer $x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ ise

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

vektörlerine **eşittir** denir. Yani, eğer karşılıklı bileşenleri eşitse iki vektör eşittir.

ÖRNEK 1 Eğer

$$a + b = 3$$
$$a - b = 2,$$

ise; yani $a = \frac{5}{2}$ ve $b = \frac{1}{2}$ olmak koşuluyla.

$$\begin{bmatrix} a+b \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ a-b \end{bmatrix}$$

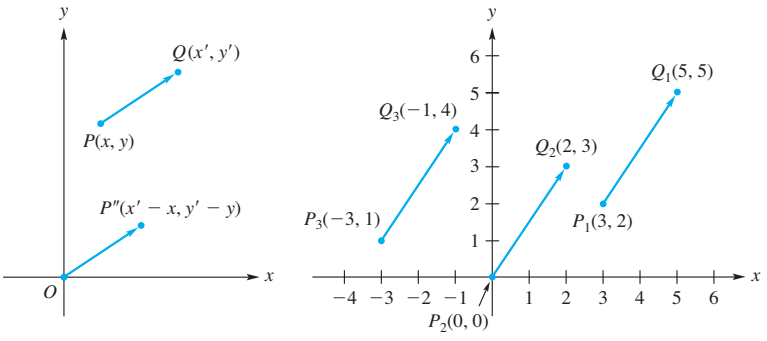
vektörleri eşittir. ■

Fiziksel uygulamalarda, çoğunlukla Şekil 2.3(a)'da gösterildiği gibi orijinden farklı $P(x, y)$ noktasından $Q(x' y')$ noktasına bir yönlü doğru parçasıyla ilgilenmek gerekir. Bu şekilde bir doğru parçasına da **düzlemde bir vektör** ya da kısaca bir **vektör** denir. $P(x, y)$ **başlangıç** $Q(x', y')$ **bitim noktasıdır.** Böyle bir vektörün bileşenleri $x' - x$ ve $y' - y$ dir. Yani şekil 2.3(a)'daki $\overrightarrow{PQ}$ vektörü aynı zamanda

$$\begin{bmatrix} x' - x \\ y' - y \end{bmatrix}$$

vektörüyle de gösterilebilir. Burada O, başlangıç ve P'' $(x' - x,\ y' - y)$ ise bitim noktasıdır.

Şekil 2.3(b)'de gösterildiği gibi $P_1(3, 2)$ ve $Q_1(5, 5)$, $P_2(0, 0)$ ve $Q_2(2, 3)$, $P_3(-3, 1)$ ve $Q_3(-1, 4)$ noktalarını birleştiren, sırasıyla $\overrightarrow{P_1Q_1}$, $\overrightarrow{P_2Q_2}$ ve $\overrightarrow{P_3Q_3}$ vektörlerini ele alalım. Hepsi aynı bileşenlere sahip olduklarından birbirine eşittir.



(a) Aynı vektörü gösteren, farklı yönlü doğru parçaları.

(b) Düzlemde vektörler.

ŞEKİL 4.3

Ayrıca,

$$\overrightarrow{P_4Q_4} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \overrightarrow{P_2Q_2}$$

vektörünün $P_4(-5, 2)$ başlangıç noktası ile, $Q_4(x_4', y_4')$ bitim noktası şöyle belirlenebilir. Biz, $x_4' - (-5) = 2$ ve $y_4' - 2 = 3$'e sahip olmalıyız. Böylece $x_4' = 2 - 5 = -3$ ve $y_4' = 3 + 2 = 5$ olur. Benzer şekilde

$$\overrightarrow{P_5Q_5} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

vektörünün Q_5 (8, 6) bitim noktasıyla $P_5(x_5, y_5)$ başlangıç noktası şöyle belirlenir. $8 - x_5 = 2$ ve $6 - y_5 = 3$ olmalıdır. Böylece $x_5 = 8 - 2 = 6$ ve $y_5 = 6 - 3 = 3$'tür.

Her

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

vektörüyle bir ve yalnız bir $P(x, y)$ noktasını eşleştirebiliriz. Tersine her $P(x, y)$ noktasıyla bir ve yalnız bir

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

vektörünü eşleştirebiliriz.

Bu nedenle $\mathbf{x}$ vektörünü aynı zamanda (x, y) olarak da yazarız. Elbette bu eşleştirme $\overrightarrow{OP}$ yönlü doğru parçası vasıtasıyla gösterilir. Burada O orijin ve P koordinatları (x, y) olan noktadır (Şekil 2.2).

Böylece düzlem tüm noktaların cümlesi olarak veya tüm vektörlerin cümlesi olarak görülebilir. Bu sebeple, ve konuya (içeriğe) bağlı olarak R^2'yi bazan tüm (x, y) sıralı ikililerinin cümlesi olarak bazan da tüm

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2×1 tipindeki matrislerin cümlesi olarak alabiliriz.

TANIM 4.2

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

düzlemde iki vektör olsun. $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörlerinin toplamı $\mathbf{u} + \mathbf{v}$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix}$$

olur.

Uyarı Vektör toplamının, matris toplamının özel bir durumu olduğuna dikkat ediniz.

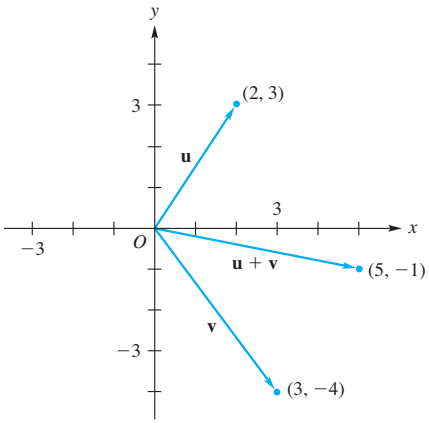
ÖRNEK 2

$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ olsun.

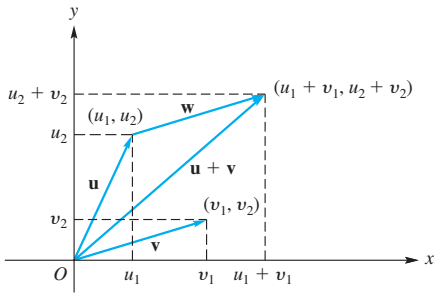
Buradan

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 + 3 \\ 3 + (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olur. Şekil 2.4'e bakınız. ■

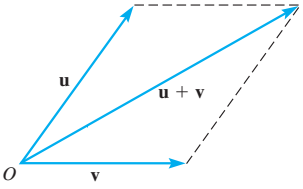


ŞEKİL 4.4

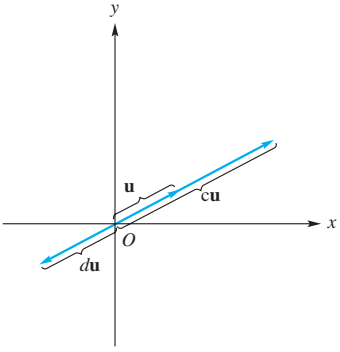


ŞEKİL 4.5 Vektör toplamı.

Vektör toplamını geometrik olarak aşağıdaki şekilde yorumlayabiliriz. Şekil 2.5'te **"w"** yönlü doğru parçası **"v"** ye paraleldir, **"v"** ile aynı uzunluğa sahiptir ve başlangıç noktası **u**'nun bitim noktası olan (u_1, u_2) dir. Böylece **"w"** nin bitim noktası $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ olur. Yani başlangıç noktası O ve bitim noktası $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ olan vektör $\mathbf{u} + \mathbf{v}$'dir. Şekil 2.6'da gösterildiği gibi $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ yi aynı zamanda **u** ve **v** ile tanımlanan paralel kenarın köşegeni olarakta tanımlayabiliriz.



ŞEKİL 4.6 Vektör toplamı.



ŞEKİL 4.7 Skalar çarpım.

TANIM 4.3 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ bir vektör ve c bir skalar (reel sayı) ise, **u**'nun c ile **skalar çarpımı** $c\mathbf{u} = \begin{bmatrix} cu_1 \\ cu_2 \end{bmatrix}$ vektörüdür. Böylece skalar çarpım $c\mathbf{u}$, **u**'nun her bileşenini c ile çarparak elde edilir. Eğer $c > 0$ ise $c\mathbf{u}$, **u** ile aynı yöndedir, diğer yandan eğer, $d < 0$ ise **u** ile $d\mathbf{u}$ ters yöndedir (Şekil 4.7).

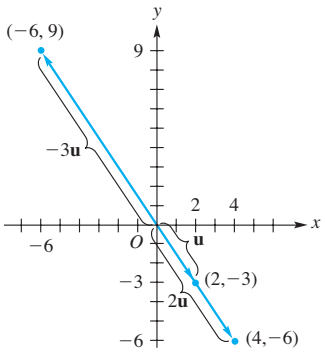
ÖRNEK 3 Eğer $c = 2$ $d = -3$ ve $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ ise

$$c\mathbf{u} = 2\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(2) \\ 2(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

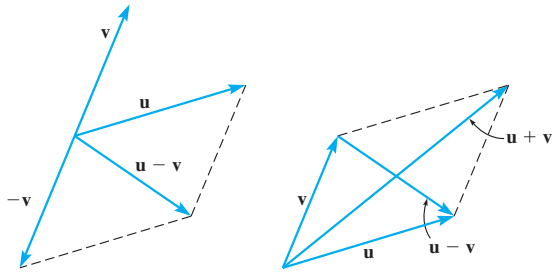
ve

$$d\mathbf{u} = -3\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3)(2) \\ (-3)(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

olur. (Şekil 2.8'e bakınız.) ■



ŞEKİL 4.8



(a) Vektörler arasındaki fark. (b) Vektör toplamı ve vektör farkı.

ŞEKİL 4.9

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vektörü **"sıfır vektörü"** olarak adlandırılır ve **0** ile gösterilir. Eğer **u** herhangi bir vektör ise

$$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$$

olduğu açıktır (Alıştırma 21). Aynı zamanda

$$\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

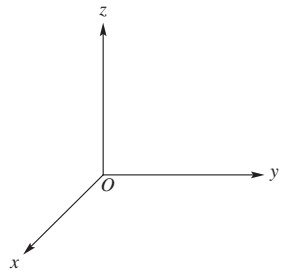
olduğunu gösterebiliriz (Alıştırma 22) ve $(-1)\mathbf{u}$ vektörünü $-\mathbf{u}$ olarak yazarız ve ona **u**'nun **negatifi** deriz. Ayrıca, $\mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}$ ifadesini $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ olarak yazarız ve **u** ile **v arasındaki fark** olarak adlandırırız. Bu şekil 2.9(a)'da gösterilmektedir. Vektör toplamının bir paralel kenarın bir köşegenini verirken, vektör farkının da diğer köşegeni verdiğine dikkat etmeliyiz. [Şekil 2.9(b)'ye bakınız.]

■ Uzayda Vektörler

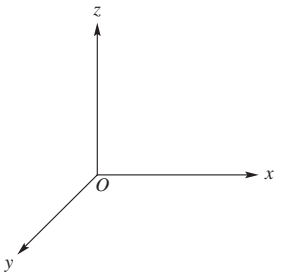
Şu ana kadar incelenen düzlemde vektörler kavramı, uzayda vektörlere şöyle genelleştirilebilir. İlk olarak "Orijin" olarak adlandırılan belirli bir nokta ve herbiri bu noktadan geçen **koordinat eksenleri** olarak

adlandırılan herbiri diğer ikisine dik üç doğru seçerek bir **"koordinat sistemi"** belirleriz. Bu doğrular x-, y- ve z-eksenleri olarak adlandırılır. Bu eksenlerin herbirinin üzerinde uzunluk birimlerini ve koordinat eksenlerindeki pozitif yönleri belirleyerek (sabitleyerek) bir nokta seçeriz. Çoğunlukla, fakat her zaman değil, tüm koordinat eksenleri için aynı uzunluk birimi kullanılır. Şekil 4.10'da muhtemel birçok koordinat sistemden iki tanesini gösteriyoruz.

Şekil 4.10(a)'da gösterilen koordinat sistemi **sağ-el koordinat sistemi** ve Şekil 4.10(b)'deki **sol-el koordinat sistemi** olarak adlandırılır. Sağ el sistemi şu şekilde karakterize edilir. Eğer sağ el parmaklarını pozitif x-ekseninden, pozitif y-eksenine 90°'lik bir açı kadar döndürürsek baş parmak pozitif z-ekseninin yönünü gösterecektir (Şekil 4.11).

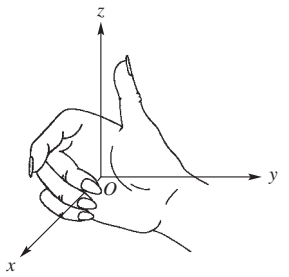


(a) Sağ-el koordinat sistemi.



(b) Sol-el koordinat sistemi.

ŞEKİL 4.10



ŞEKİL 4.11

Eğer x-eksenini, y-eksenine doğru saat yönünün tersinde döndürürsek, sağ-el pozitif z-yönünde hareket edecektir (Şekil 4.11'e bakınız).

Uzaydaki her bir P noktasını, reel sayılardan oluşan ve o noktanın koordinatları olarak adlandırılan bir (x, y, z) sıralı üçlüsüyle eşleştirebiliriz. Tersine reel sayılardan oluşan her sıralı üçlüyü uzayda bir noktayla eşleştirebiliriz. x, y, z koordinatlarına sahip P noktası $P(x, y, z)$ yada kısaca (x, y, z) ile gösterilir. Uzaydaki bu tüm noktaların cümlesi **3-uzay** olarak adlandırılır ve R^3 şeklinde gösterilir.

Uzayda bir vektör ya da kısaca **vektör**

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

şeklinde 3×1 tipinde bir matristir. Burada x, y, z reel sayıları $\mathbf{x}$'in **bileşenleri** olarak adlandırılır. Eğer karşılıklı bileşenleri eşitse uzayda iki vektöre **eşittir** denir.

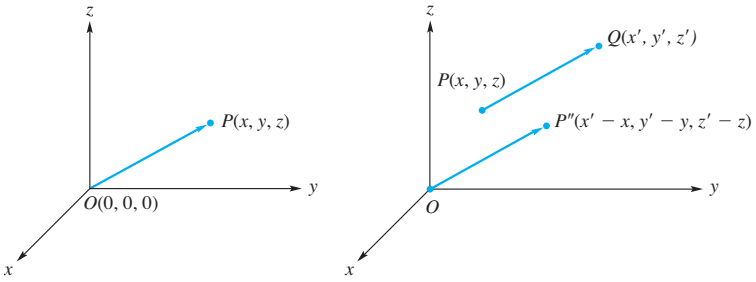
Düzlemde olduğu gibi

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

vektörüyle, $O(0, 0, 0)$ başlangıç noktası ve $P(x, y, z)$ bitim noktası olmak üzere $\overrightarrow{OP}$ yönlü doğru parçasını eşleştiririz. Tersine bu şekil-

deki her yönlü doğru parçasını **x** vektörüyle eşleştirebiliriz (bakınız Şekil 4.12(a). Dolayısıyla, **x** vektörünü (x, y, z) şeklinde de yazabiliriz. Yine düzlemde olduğu gibi, fiziksel uygulamalarda sıkça $P(x, y, z)$ (orijin değil) noktasından $Q(x', y', z')$ noktasına yönlendirilmiş bir $\overrightarrow{PQ}$ doğru parçasıyla karşılaşırız (Şekil 2.12(b)). Bu şekildeki bir doğru parçasını da ***R*³'te bir vektör** ya da kısaca **vektör** olarak adlandırabiliriz. Burada $P(x, y, z)$ başlangıç noktası ve $Q(x', y', z')$ bitim noktasıdır. Böyle bir vektörün bileşenleri $x' - x$, $y' - y$ ve $z' - z$ dir. R^3-te eğer karşılıklı bileşenleri eşitse bu şekilde tanımlanan iki vektöre **eşittir** denir. Böylece Şekil 2.12(b)'deki $\overrightarrow{PQ}$ vektörü O (orijin) başlangıç noktası ve $P''(x' - x, y' - y, z' - z)$, bitim noktası olacak şekilde

$\begin{bmatrix} x' - x \\ y' - y \\ z' - z \end{bmatrix}$ vektörüyle de gösterilebilir.



ŞEKİL 4.12

(a) R^3 de bir vektör.

(b) Farklı yönlü doğru parçaları aynı vektörü gösteriyor.

Eğer $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ R^3'te vektörler ve c bir skalar ise $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ **toplamı** ve $c\mathbf{u}$ **skalar çarpımı** sırasıyla

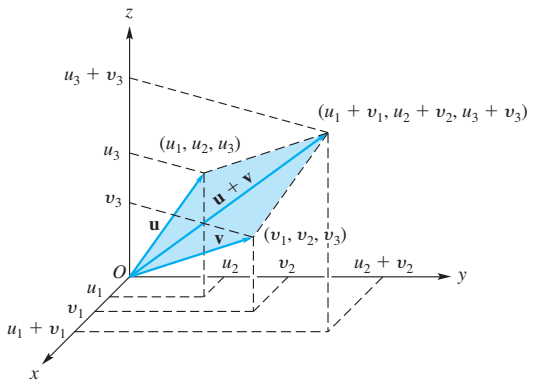
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad c\mathbf{u} = \begin{bmatrix} cu_1 \\ cu_2 \\ cu_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. Toplam Şekil 4.5'e benzeyen Şekil 4.13'te gösterilirken, skalar çarpım Şekil 4.8'e benzeyen Şekil 4.14'te gösteriliyor.

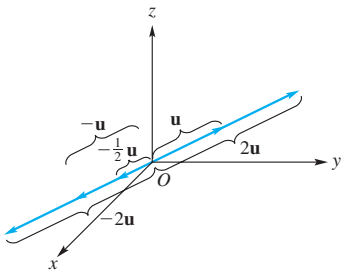
ÖRNEK 4

$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$

olsun. (a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$; (b) $-2\mathbf{u}$; (c) $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$ vektörlerini hesaplayınız.



ŞEKİL 4.13 Vektör toplamı.



ŞEKİL 4.14 Skalar çarpım.

Çözüm

$$\text{(a)}\quad \mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{bmatrix}2+3\\3+(-4)\\-1+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-1\\1\end{bmatrix}$$

$$\text{(b)}\quad -2\mathbf{u}=\begin{bmatrix}-2(2)\\-2(3)\\-2(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\-6\\2\end{bmatrix}$$

$$\text{(c)}\quad 3\mathbf{u}-2\mathbf{v}=\begin{bmatrix}3(2)\\3(3)\\3(-1)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2(3)\\2(-4)\\2(2)\end{bmatrix}$$

■

R^3'te sıfır vektörü

$$\mathbf{0}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

dır ve $\mathbf{0}$, şeklinde gösterilir. $\mathbf{0}$ vektörü, R^3'teki her $\mathbf{u}$ vektörü için

$$\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$$

özelliğini sağlar. $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}$ vektörünün negatifi $-\mathbf{u}=\begin{bmatrix}-u_1\\-u_2\\-u_3\end{bmatrix}$

olur ve

$$\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$$

dır.

Düzlemde bir vektörü bir sıralı reel ikili veya 2×1'lik bir matris olarak tanımladık. Benzer şekilde, uzayda bir vektör bir sıralı reel üçlü veya 3×1'lik bir matristir. Ancak, fizikte vektör, genellikle yönlü doğru parçası olarak tanımlanır. Bu nedenle bir vektörün üç ayrı gösterimi vardır ve neden her üçünün de geçerli olduğu sorulabilir. Yani, neden bir sıralı reel ikili, bir 2×1 matris ve yönlü doğru parçası aynı isimle çağrılır, "vektör"?

Bu soruyu cevaplamak için, öncelikle matematik diliyle, bizi ilgilendiren tek şeyin bizim "vektör" dediğimiz nesnenin davranışı olduğunu gözlemlememiz gerekir. Her üç nesne de cebirsel açıdan bakıldığında tamamen aynı davranışı gösterir. Yine cebirsel açıdan bakıldığında uygulamalı problemlerde doğal olarak karşımıza çıkan pek çok başka nesne de yukarıda bahsedilen nesnelerle aynı şekilde hareket eder. Bir matematikçi için bu mükemmel bir durumdur. Şimdi tüm bu nesnelerin ortak özelliklerini ortaya koyabilir (tüm bu nesnelerin aynı şekilde hareket etmelerini sağlayan özellikleri) ve yeni bir yapı tanımlayabiliriz. Bunu yapmanın en büyük avantajı tüm bu nesnelerin özelliklerinden bu nesnelerin herhangi birine işaret etmeden genel olarak söz edebilmektir. Bu herbir nesnenin özelliklerini ayrı ayrı incelemekten kuşkusuz daha verimlidir. Örneğin aşağıdaki teorem aynı düzlemde ve aynı uzaydaki vektörlerin toplama ve skalar çarpma işlemlerinin özelliklerini özetler. Üstelik bu teorem, aynı düzlemde veya uzaydaki tüm vektörlerin cümlesinin daha soyut bir tanıma genellenmesi için bir model olarak hizmet edecektir.

Teorem 4.1 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ R^2 veya R^3'te tanımlı vektörler, c ve d reel sabitler ise;

(a) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$

(b) $\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$

(c) $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$

(d) $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$

(e) $c(\mathbf{u}+\mathbf{v})=c\mathbf{u}+c\mathbf{v}$

(f) $(c+d)\mathbf{u}=c\mathbf{u}+d\mathbf{u}$

(g) $c(d\mathbf{u})=(cd)\mathbf{u}$

(h) $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

ifadeleri geçerlidir.

İspat

(a) $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$'nin R^2'de tanımlı vektörler olduğunu kabul edelim. Yani

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{v}=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

olsun.

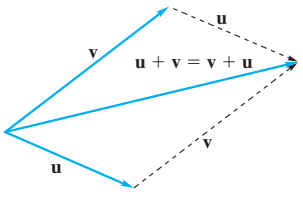
$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{v}+\mathbf{u}=\begin{bmatrix} v_1+u_1 \\ v_2+u_2 \end{bmatrix}$$

olur. $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$'nin bileşenleri reel sayılar olduğu için $u_1+v_1=v_1+u_1$ ve $u_2+v_2=v_2+u_2$ dir. Bu nedenle

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$$

olur. $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ R^3'te tanımlı vektörler olduğunda da benzer bir ispat yapılabilir.

Özellik (a) geometrik olarak da Şekil 2.15'te gösterildiği gibi inşa edilebilir. Diğer özelliklerin ispatı alıştırma olarak bırakılmıştır. Tüm özelliklerin cebirsel veya geometrik yaklaşımla ispatlanabileceğini hatırlayınız. ■



ŞEKİL 4.15
Vektörel toplama.

Anahtar Kelimeler

Vektörler
Dik koordinat sistemi
Koordinat eksenleri
x-ekseni, y-ekseni, z-ekseni
Başlangıç
Koordinatlar
2-uzay, R^2
Vektörün başlgınç noktası
Vektörün bitim noktası
Yönlü doğru parçası
Bir vektörün büyüklüğü
Düzlemde vektör
Bir vektörün bileşenleri
Eşit vektörler
Bir vektörün skalar çarpımı
Vektör toplamı
Sıfır vektörü
Vektörlerin farkı
Sağ-sol koordinat sistemi
3-uzay, R^3
Uzayda vektör

4.1 Alıştırmalar

1. R^2'de aşağıdaki herbir vektörü temsil eden yönlü doğru parçasını çiziniz.

(a) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ **(b)** $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$ **(d)** $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ vektörünün başlangıcı $(-3, 2)$ noktası ise bitim noktasını bulunuz. Şeklini çiziniz.

3. Bitimi $(1, 2)$ noktası olan $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ vektörünün başlangıç noktasını bulunuz. Şeklini çiziniz.

4. Bitimi $(3, -2, 2)$ noktası olan $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ vektörünün başlangıç noktasını bulunuz.

5. a ve b'nin hangi değerleri için $\begin{bmatrix} a-b \\ 2 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 4 \\ a+b \end{bmatrix}$ vektörleri birbirine eşit olur?

6. a, b ve c'nin hangi değerleri için $\begin{bmatrix} 2a-b \\ a-2b \\ 6 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ a+b-2c \end{bmatrix}$ vektörleri eşittir.

Alıştırma 7 ve 8'de $\overrightarrow{PQ}$ vektörünün bileşenlerini bulunuz.

7. **(a)** $P(1, 2)$, $Q(3, 5)$
(b) $P(-2, 2, 3)$, $Q(-3, 5, 2)$

8. **(a)** $P(-1, 0)$, $Q(-3, -4)$
(b) $P(1, 1, 2)$, $Q(1, -2, -4)$

Alıştırma 9 ve 10'da başlangıcı orijin olan ve $\overrightarrow{PQ}$ vektörünü temsil eden vektörü bulunuz.

9. **(a)** $P(-1, 2)$, $Q(3, 5)$
(b) $P(1, 1, -2)$, $Q(3, 4, 5)$

10. **(a)** $P(2, -3)$, $Q(-2, 4)$
(b) $P(-2, -3, 4)$, $Q(0, 0, 1)$

11. **(a)** $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$;

(b) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$;

(c) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

ise, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $2\mathbf{u}$ ve $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$ vektörlerini hesaplayınız.

12. **(a)** $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$;

(b) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$;

(c) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

ise, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$ ve $\mathbf{0} - 3\mathbf{v}$ vektörlerini hesaplayınız.

13. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$c = -2$ ve $d = 3$ ise aşağıdakileri hesaplayınız:
(a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$
(b) $c\mathbf{u} + d\mathbf{w}$
(c) $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$
(d) $c\mathbf{u} + d\mathbf{v} + \mathbf{w}$

14. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} r \\ 4 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ s \end{bmatrix}$ olsun.

(a) $\mathbf{z} = 2\mathbf{x}$, **(b)** $\frac{3}{2}\mathbf{u} = \mathbf{y}$, **(c)** $\mathbf{z} + \mathbf{u} = \mathbf{x}$.

olacak şekilde r ve s'yi bulunuz.

15. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} r \\ -1 \\ s \end{bmatrix}$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ t \\ 2 \end{bmatrix}$$

olsun.

(a) $\mathbf{z} = \frac{1}{2}\mathbf{x}$, **(b)** $\mathbf{z} + \mathbf{u} = \mathbf{x}$, **(b)** $\mathbf{z} + \mathbf{u} = \mathbf{x}$

olacak şekilde r, s ve t'yi bulunuz.

16. Eğer mümkün ise

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde c_1 ve c_2 sabitlerini bulunuz.

17. Eğer mümkün ise

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde c_1, c_2 ve c_3 sabitlerini bulunuz.

18. Eğer mümkün ise

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde ikisi birden sıfır olmayan c_1 ve c_2 sabitlerini bulunuz.

19. Eğer mümkün ise

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan c_1, c_2 ve c_3 sabitlerini bulunuz.

olsun. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix}$ vektörü

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$$

olacak şekildeki c_1, c_2 ve c_3 sabitlerini bulunuz.

21. $\mathbf{u}$, R^2 veya R^3'te tanımlı bir vektör iken $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ olduğunu gösteriniz.

22. $\mathbf{u}$, R^2 veya R^3'te tanımlı bir vektör iken $\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = \mathbf{0}$ olduğunu gösteriniz.

23. Teorem 2.1'in (b) ve (d) ile (h) arasındaki maddelerini ispatlayınız.

24. Kullandığınız yazılımın grafik desteği olup olmadığını araştırınız. Eğer varsa, R^2'deki vektörleri yerleştirmeyi deneyiniz. Genellikle, vektörün başlangıç ve bitim koordinatlarını göstermeniz ve yazılıma bu noktaları birleştirmesini söylemeniz gerekir. Alıştırma 7(a) ve 8(a) daki noktalar bunun için kullanılabilir.

25. Kullandığınız yazılımın grafik desteği olduğunu varsayarak (Alıştırma 24'e bakınız), aşağıdaki durumlar için aynı koordinat eksenlerinde

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

vektörünü yerleştiriniz.

(a) $\mathbf{v}$'nin bitim noktası (1, 1) ise

(b) $\mathbf{v}$'nin bitim noktası (2, 3) ise

26. Kullandığınız yazılımın 3 boyutlu grafik desteği olup olmadığını kontrol ediniz. Yani R^3'teki noktaları yerleştiriniz. Eğer varsa, noktaları yerleştirin ve birleştirerek R^3'te vektörler oluşturunuz.

4.2 Vektör Uzayları

Matematikte ve diğer disiplinlerde uygun bir yol sınıflandırmayı kapsar. Yani biz nesnelerin sahip oldukları ortak özellikler üzerine kurulan bir yapı oluşturunuz. Bu bize sınıfın tüm elemanlarını birtek birim olarak inceleme imkanı verir. Böylece, sınıfın herbir elemanıyla ilgilenmek yerine, kavramları sınıfın ortak özellikli tüm elemanlarına uygularız. Pek çok yolla bu bize daha soyut ve detaylı çalışma imkanı

verir. Lineer cebir kendisinde, çok önemli hale gelen böyle bir sınıflandırma yapısına sahiptir. Bu kavram **vektör uzayı**dır. Bir vektör uzayı belirli nesnelerin cümlesinden oluşur ve bu nesneler üzerindeki işlem belirli özelliklere sahiptir. Biz bir vektör uzayına sahip isek tüm vektör uzayları otomatik olarak bu özelliklere sahiptir. Böylece yeni bir vektör uzayı ile karşılaşırsak belirtilenin dışında bir özelliğin sağlanması gerekmez. "Vektör uzayı" ismi Kesim 4.1'de tartılışdığı gibi düzlem veya 3-uzaydan alınan yönlü doğru parçalarının görüntüsünden gelir. Bu elbette sınıflandırmanın adıdır. Matrisler ve n-vektörlerin vektör uzaylarına örnekler verdiğini görürüz. Ayrıca polinomlar, fonksiyonlar ve çeşitli tipten denklemlerin çözümleri gibi birleşimleride birer vektör uzayı olacaktır. Özel vektör uzayları için cümlenin elemanları ve bu elemanlar üzerindeki işlemler değişebilir, fakat işlemlerin sağladığı özellikler daima aynıdır.

TANIM 4.4

Bir reel vektör uzayı, V üzerinde tanımlı $\oplus$ ve $\odot$ işlemleri ile birlikte aşağıdaki özellikleri sağlayan elemanların cümlesidir:

(a) Eğer $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$, V'nin herhangi iki elamanı ise $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}$ de V'nin bir elemanıdır. (V, $\oplus$ işlemi altında **kapalıdır**).
  (1) V'deki her $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ için $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}$.
  (2) V deki her $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ için $\mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w}$.
  (3) V'deki her $\mathbf{u}$ için $\mathbf{u} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{0} \oplus \mathbf{u} = \mathbf{u}$ olacak şekilde V'de bir $\mathbf{0}$ elemanı bulunur.
  (4) V'deki her bir $\mathbf{u}$ için $\mathbf{u} \oplus -\mathbf{u} = -\mathbf{u} \oplus \mathbf{u} = \mathbf{0}$ olacak şekilde V'de bir $-\mathbf{u}$ elemanı bulunur.

(b) c reel bir sabit ve $\mathbf{u}$, V'nin herhangi bir elemanı ise $c \odot \mathbf{u}$ da V'nin bir elemanıdır (Yani V, $\odot$ işlemi altında kapalıdır).
  (5) Herhangi bir c reel sayısı ve V'deki her $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ için $c \odot (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = c \odot \mathbf{u} \oplus c \odot \mathbf{v}$.
  (6) Herhangi c ve d reel sayıları ve V'deki her $\mathbf{u}$ için $(c + d) \odot \mathbf{u} = c \odot \mathbf{u} \oplus d \odot \mathbf{u}$.
  (7) Herhangi c ve d reel sayıları ve V'deki her $\mathbf{u}$ için $c \odot (d \odot \mathbf{u}) = (cd) \odot \mathbf{u}$.
  (8) V'deki her $\mathbf{u}$ için $1 \odot \mathbf{u} = \mathbf{u}$.

V'nin elemanlarına **vektör**; Reel sayılar cümlesi R'nin elemanlarına **skalar** denir. $\oplus$ işlemi **vektörel toplama,** $\odot$ işlemi **skalar çarpım** adını alır. (3). özellikteki $\mathbf{0}$ vektörüne **sıfır vektör** denir. Özellik (4)'teki $-\mathbf{u}$ vektörüne **u'nun negatifi** denir. $\mathbf{0}$ ve $-\mathbf{u}$'nun tek oldukları gösterilebilir (Alıştırma 15 ve 16'ya bakınız).

Skalarların kompleks (karmaşık) sayılar olmasına izin verirsek, **karmaşık vektör uzayı**nı elde ederiz. Daha genel olarak, skalar bir F cisminin elemanları olabilirler ve F üzerinde bir vektör uzayı elde ederiz. Böyle uzaylar matematikteki ve fiziki bilimlerdeki pekçok uygulamada önemlidir. Ek B'de karmaşık vektör uzaylarına kısa bir giriş veriyoruz. Fakat, bu kitapta incelemelerimiz reel vektör uzaylarıyla sınırlıdır.

---

*Bir cisim reel, kompleks ve rasyonel sayıların sağladığı aritmetik özelliklere sahip cebirsel bir yapıdır. Cisimler, soyut cebir dersinde ayrıntılarıyla incelenecektir.

Bir vektör uzayını belirlemek için, bir V cümlesine ve tanımdaki tüm özellikleri sağlayan $\oplus$ ve $\odot$ işlemlerine sahip olmalıyız. Reel vektör uzayını kısaca **vektör uzayı** olarak kullanacağız. Böylece bir **vektör** şimdi bir vektör uzayının elemanıdır ve bundan sonra yönlendirilmiş bir doğru parçası olarak gösterilmek ihtiyacında değildir. Örneklerimizde bu ismin ne kadar doğal bir şekilde geldiğini göreceğiz. Şimdi vektör uzayların bazı örneklerini inceleyelim ve Tanım 2.4'ün tüm özelliklerinin sağlandığını okuyucuya bırakalım.

ÖRNEK 1

$n \times 1$ tipindeki reel elemanlı

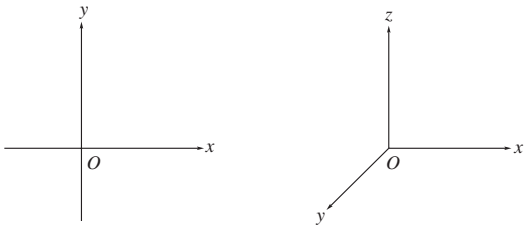
$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

şeklindeki tüm matrislerin cümlesi olan R^n'yi düşünelim. Şimdi $\oplus$ işlemi matris toplamını ve $\odot$ işlemi de bir matrisin bir reel sayıyla çarpımını göstersin (skalar çarpım).

Kesim 1.3'te incelenen matrislerin özelliklerini kullanarak ve Tanım 2.4'teki özelliklerin sağlandığını gerçekleyerek R^n'nin bir vektör uzayı olduğunu göstermek zor değildir. Böylece $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ matrisi, şimdi R^n'nin bir elemanı olan, bir *vektör* olarak adlandırılır. Kesim 2.1'de R^2 ve R^3'ü halihazırda incelemiş bulunuyoruz. R^2 ve R^3'ün geometrik gösterimi için Şekil 2.16'ya bakınız. Sonradan, uzunluk ve vektörler arasındaki açı gibi birçok geometrik kavramın R^n'de $n > 3$ için tanımlanabileceğini gösterecek olmamıza rağmen, bu durumlarda resim çizemeyiz. ■

ÖRNEK 2

Matris toplamını $\oplus$ ve bir matrisin bir reel sayı ile çarpımını $\odot$ alındığında, tüm $m \times n$ matrislerinin cümlesi bir vektör uzayı olur (gösteriniz). Bu vektör uzayını M_{mn} ile gösteririz. ■



R^2 R^3

ŞEKİL 4.16

ÖRNEK 3

$\oplus$ işlemini reel sayıların bilinen toplamı ve $\odot$ işlemini de reel sayıların bilinen çarpımı olarak kabul edersek, tüm reel sayıların cümlesi bir vektör uzayıdır (doğrulayınız). Bu durumda reel sayılar hem vektörle-

rin hem de skalarların rollerini oynar. Bu vektör uzayı Örnek 1'deki $n = 1$ durumudur. ■

ÖRNEK 4

R_n, tüm $1 \times n$ tipindeki $[a_1\ a_2 \ldots a_n]$ matrislerinin cümlesi olsun. Burada $\oplus$ işlemini $[a_1\ a_2 \cdots a_n] \oplus [b_1\ b_2 \cdots b_n] = [a_1 + b_1\ \ a_2 + b_2 \cdots a_n + b_n]$ olarak ve $\odot$ işlemini

$$c \odot [a_1\ a_2 \cdots a_n] = [ca_1\ ca_2 \cdots ca_n]$$

olarak tanımlıyoruz. Bu durumda R_n bir vektör uzayıdır (doğrulayınız). Bu Örnek 2'nin sadece bir özel durumudur. ■

ÖRNEK 5

V, 2×2 tipinde izi sıfır olan tüm matrislerin cümlesi olsun. Yani İz$(A) = a + d = 0$ olmak üzere V de $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olsun. (Bir matrisin izinin tanımı ve özellikleri için Kesim 1.3'teki Alıştırma 43'e bakınız.) $\oplus$ standart matrisi toplamı, $\odot$ matrislerin standart skalar çarpımı olsun. O zaman V bir vektör uzayıdır. Biz Tanım 4.4 (a), (3), (4), (b) ve (7) özellikleri gerçekleriz. Geri kalan özellikleri gerçeklemek öğrenciye bırakılmıştır.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ ve } B = \begin{bmatrix} r & s \\ t & p \end{bmatrix}$$

V'nin herhangi elemanları olsun. Bu taktirde, İz$(A) = a + d = 0$, İz$(B) = r + p = 0$'dır. (a) özelliği için, biz

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} a + r & b + s \\ c + t & d + p \end{bmatrix}$$

ve

$$\text{İz}(A \oplus B) = (a + r) + (d + p) = (a + d) + (r + p) = 0 + 0 = 0,$$

sonuçlarına sahibiz. Dolayısıyla $A \oplus B \in V$ yani V, $\oplus$ işlemi altında kapalıdır. (3) özelliğini gerçeklemek için $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin izi 0'dır. Bu nedenle V'dedir. Bu durumda $\oplus$'nın tanımında (3) özelliği V'de geçerlidir. Dolayısı ile $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ sıfır vektörüdür ve biz onu 0 olarak gösteririz. (4)'ü gerçeklemek için, önceki gibi $A \in V$ ve $C = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$ olsun. Öncelikle, $C \in V$ yani C'nin V'de olduğunu gösterelim.

$$\text{İz}(C) = (-a) + (-c) = -(a + c) = 0$$

O zaman

$$A \oplus C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

Yani $C = -A$'dır. (b) özelliği için k herhangi bir reel sayı olsun. Biz

$$k \odot A = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

ve

$$\text{İz}(k \odot A) = ka + kd = k(a + d) = 0.$$

sonuçlarına sahibiz. Dolayısıyla $k \odot A \in V$. Yani V $\odot$ işlemi altında kapalıdır (7) Özelliği için k, m herhangi reel sayılar olsun. O zaman,

$$k \odot (m \odot A) = k \odot \begin{bmatrix} ma & mb \\ mc & md \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kma & kmb \\ kmc & kmd \end{bmatrix}$$

ve

$$(km) \odot A = \begin{bmatrix} kma & kmb \\ kmc & kmd \end{bmatrix}.$$

Buradan $k \odot (m \odot A) = (km) \odot A$ sonucu çıkar. ■

ÖRNEK 6 Örneklerin diğer bir kaynağı polinomlar cümlesidir. Dolayısıyla bu tip fonksiyonlar hakkında iyi bilinen bazı gerçekleri yeniden ele alacağız. Bir **polinom** (t cinsinden)

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

şeklinde ifade edilebilen bir fonksiyondur. Burada $a_0, a_1, \cdots, a_n$ reel sayılar ve n negatif olmayan bir tamsayıdır. Eğer $a_n \neq 0$ ise $p(t)$'ye **n. dereceye** sahiptir deriz. Yani bir polinomun derecesi, sıfırdan farklı katsayılı en yüksek kuvvettir.

$p(t) = 2t + 1$'in derecesi 1'dir. $p(t) = 3$'ün derecesi 0'dır. 0 ile gösterilen **sıfır polinomunun** bir derecesi yoktur. Şimdi P_n sıfır polinomunu içeren ve derecesi $\leq n$ olan tüm polinomların cümlesi olsun. Eğer $p(t)$ ve $q(t)$, P_n'de iseler

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

ve

$$q(t) = b_n t^n + b_{n-1} t^{n-1} + \cdots + b_1 t + b_0$$

şeklinde yazabiliriz. $p(t) \oplus q(t)$'yi şöyle tanımlarız:

$$p(t) \oplus q(t) = (a_n + b_n)t^n + (a_{n-1} + b_{n-1})t^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)t + (a_0 + b_0)$$

Eğer c bir skalar ise, $c \odot p(t)$'yi şöyle tanımlarız:

$$c \odot p(t) = (ca_n)t^n + (ca_{n-1})t^{n-1} + \cdots + (ca_1)t + (ca_0)$$

Şimdi P_n'nin bir vektör uzayı olduğunu göstereceğiz.

$p(t)$ ve $q(t)$, P_n'nin yukarıdaki gibi elemanları olsun. Yani bunlar derecesi $\leq n$ olan polinomlar veya sıfır polinomudur. Buradan $\oplus$ ve $\odot$

işlemlerinin yukarıdaki tanımları $p(t) \oplus q(t)$ ve $c \odot q(t)$; her c skaları için; derecesi $\leq n$ veya sıfır polinom olduğunu gösterir. Yani $p(t) \odot q(t)$ ve $c \odot q(t)$ polinomları da P_n'dedir. Dolayısıyla, Tanım 2.4'teki (a) ve (b) sağlanır. Özellik (1)'i doğrulamak için, görüyoruz ki

$$q(t) \oplus p(t) = (b_n + a_n)t^n + \cdots + (b_1 + a_1)t + (b_0 + a_0)$$

ve $a_i + b_i = b_i + a_i$ tüm reel sayılar için doğru olduğundan; $p(t) \oplus q(t) = q(t) \oplus p(t)$ olduğunu görürüz. Benzer şekilde özellik (2)'yi doğrularız. Sıfır polinomu özellik (3)'te ihtiyaç duyulan **0** elemanıdır. Eğer $p(t)$ yukarıda verildiği gibiyse; bunun negatifi, $-p(t)$

$$-a_n t^n - a_{n-1}t^{n-1} - \cdots - a_1 t - a_0$$

dır. Şimdi özellik (6)'yı doğrulayacağız ve diğer özelliklerin doğrulanmasını okuyucuya bırakacağız. Buna göre,

$$\begin{aligned}(c + d) \odot p(t) &= (c + d)a_n t^n + (c + d)a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + (c + d)a_1 t \\ &\quad + (c + d)a_0 \\ &= ca_n t^n + da_n t^n + ca_{n-1}t^{n-1} + da_{n-1}t^{n-1} + \cdots + ca_1 t \\ &\quad + da_1 t + ca_0 + da_0 \\ &= c(a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0) \\ &\quad + d(a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0) \\ &= c \odot p(t) \oplus d \odot p(t)\end{aligned}$$

dır. ■

Uyarı P_n vektör uzayının cebirsel olarak tamamen R^{n+1} ile aynı özelliklere sahip olduğunu daha sonra göstereceğiz.

Her n doğal sayısı için, sıfır polinomla birlikte derecesi $\leq n$ olan tüm polinomların, P_n vektör uzayını tanımlamış olduk. Aynı zamanda, sıfır polinomla birlikte tüm polinomların (her dereceden) P uzayını da ele alabilirdik. Burada P; tüm P_n vektör uzaylarının matematiksel birleşimidir. n inci dereceden $p(t)$ ve m inci dereceden $q(t)$ polinomlarının P'deki toplamı, P_r deki ile aynı şekilde yapılır. Burada r sayısı m ve n sayılarının en büyüğüdür (maksimumudur). O zaman p bir vektör uzayıdır (Alıştırma 2).

Sıradan (alışılmış) reel sayı aritmetiğinde olduğu gibi, $\odot$ ve $\oplus$'nın ikisini de kapsayan bir ifadede, $\odot$ işlemi ilk sırada yapılır. Ayrıca, bilinen aritmetik kurallar parantezlerle karşılaşıldığında da uygulanır.

ÖRNEK 7

V, R^1 üzerinde tanımlı tüm reel-değerli ve sürekli fonksiyonların cümlesi olsun. Eğer f ve g, V'nın elemanı ise, $f \oplus g$ işlemi $(f \oplus g)(t) = f(t) + g(t)$ şeklinde tanımlanır. Bu durumda V bir vektör uzayıdır (ispat ediniz) ve $C(-\infty, \infty)$ şeklinde gösterilir. ■

ÖRNEK 8

k herhangi bir reel sayı olmak üzere e^{kx} biçimindeki üstel fonksiyonların bütün reel çarpımlarının cümlesi V olsun. V üzerinde vektör toplamı ve skalar ile çarpma işlemleri sırasıyla $\oplus$ ve $\odot$ olup

$$c_1 e^{kx} \oplus c_2 e^{mx} = c_1 c_2 e^{(k+m)x}$$

ve

$$r \odot c_1 e^{kx} = r c_1 e^{kx}$$

biçiminde tanımlanır. Böylece $\oplus$ ve $\odot$ işlemlerinin tanımından V'nin bu işlemlere göre kapalı oldukları görülür. Bu nedenle (1) ve (2) özellikleri sağlanır. Benzer şekilde (3)'ün sağlandığını göstermek için $e^{0x} = 1$ özelliği kullanılır. Buradan $c_1e^{kx} \oplus 1 = 1 \oplus c_1e^{kx} = c_1e^{kx}$ bulunur. Böylece sıfır vektörü 1 sayısıdır. Şimdi (4) özelliğinin sağlandığını gösterelim. c_1e^{kx} vektörü için

$$c_1^{\,kx} \oplus c_2e^{mx} = c_1c_2e^{(k+m)x} = 1$$

olacak şekilde bir başka c_2e^{mx} vektörü tanımlanabilir. Bununla birlikte $0e^{kx} = 0$'da V'nin elemanıdır. Fakat V vektör uzayında 0 ile toplamı 1'e eşit olan bir vektör yoktur. Bu nedenle V cümlesi $\oplus$ ve $\odot$ işlemleri ile birlikte bir vektör uzayı oluşturamaz.

ÖRNEK 9

V, üzerinde $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ ($\oplus$ bilinen çıkarma) ve $c \odot \mathbf{u} = c\mathbf{u}$ ($\odot$ bilinen çarpma) işlemleri, tanımlı tüm reel sayıların cümlesi olsun. V bir vektör uzayı mıdır? Eğer değilse, Tanım 2.4'ün hangi özellikleri sağlanmaz?

Çözüm

Eğer $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$, V'nın elemanı ve c bir skalar ise, $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}$ ve $c \odot \mathbf{u}$ da V'nin elemanı olur. Bu nedenle Tanım 2.4'ün (a) ve (b) özellikleri sağlanır. Bununla birlikte

$$\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{v} \text{ ve } \mathbf{v} \oplus \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$$

olup her zaman birbirine eşit olmadığı için ($\mathbf{u} - \mathbf{v} \neq \mathbf{v} - \mathbf{u}$ olacak şekilde birer $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ değeri bulunuz) Özellik (1) sağlanmaz. Ayrıca, Özellik (2), (3) ve (4)'ün sağlanmadığı da gösterilebilir. (5), (7), (8) özellikleri sağlanır, ancak (6) sağlanmaz:

$$(c + d) \odot \mathbf{u} = (c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$$

ve

$$c \odot \mathbf{u} \oplus d \odot \mathbf{u} = c\mathbf{u} \oplus d\mathbf{u} = c\mathbf{u} - d\mathbf{u}$$

olup her zaman birbirine eşit değildir. Sonuç olarak V bir vektör uzayı değildir. ■

ÖRNEK 10

V, üzerinde $(x, y, z) \oplus (x', y', z') = (x', y + y', z + z')$ ve $c \odot (x, y, z) = (cx, cy, cz)$ işlemleri tanımlı tüm sıralı reel üçlülerin cümlesi olsun. Tanım 2.4'teki Özellik (1), (3), (4) ve (6)'nın sağlanmadığı kolayca gösterilebilir. Örneğin, $\mathbf{u} = (x, y, z)$ ve $\mathbf{v} = (x', y', z')$ ise

$$\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = (x, y, z) \oplus (x', y', z') = (x', y + y', z + z')$$

ve

$$\mathbf{v} \oplus \mathbf{u} = (x', y', z') \oplus (x, y, z) = (x, y' + y, z' + z)$$

olur ve $x \neq x'$ iken birbirine eşit değildir. Dolayısıyla Özellik (1) sağlanmaz. Ayrıca,

$$\begin{aligned}(c + d) \odot \mathbf{u} &= (c + d) \odot (x, y, z)\\ &= ((c + d)x, (c + d)y, (c + d)z)\\ &= (cx + dx, cy + dy, cz + dz)\end{aligned}$$

Halbuki,

$$\begin{aligned} c \odot \mathbf{u} \oplus d \odot \mathbf{u} &= c \odot (x, y, z) \oplus d \odot (x, y, z) \\ &= (cx, cy, cz) \oplus (dx, dy, dz) \\ &= (dx, cy + dy, cz + dz). \end{aligned}$$

Bu nedenle $cx \neq 0$ olduğu zaman Özellik (6) sağlanmaz. Sonuç olarak V bir vektör uzayı değildir. ■

ÖRNEK 11

V bütün tamsayıları kapsayan bir cümle olsun. $\oplus$ bilinen toplama, $\odot$ bilinen çarpma şeklinde tanımlansın. Burada V vektör uzayı değildir. Çünkü, eğer $\mathbf{u}$, V'de herhangi bir sıfır olmayan vektör ise ve $c = \sqrt{3}$ ise, o zaman $c \odot \mathbf{u}$, V'de olmaz. Sonuçta (b) sağlanmaz. ■

Verilen bir V cümlesinin $\oplus$ ve $\odot$ işlemleri ile reel vektör uzayı olduğunu doğrulamak için Tanım 2.4'teki bütün özellikleri sağladığını göstermemiz gereklidir. İlk olarak (a) ve (b)'nin sağlanıp sağlanmadığına bakmamız gereklidir. Eğer bunlar sağlanmıyorsa vektör uzayına sahip değiliz demektir. Eğer (a) ve (b) sağlanıyorsa, (3)'ün yani sıfır elemanının varlığının, doğrulanması tavsiye edilir. Doğal olarak eğer (3) sağlanmıyorsa, vektör uzayına sahip değiliz demektir ve sonraki özellikleri kontrol etmemize gerek kalmaz.

Aşağıdaki teorem bütün vektör uzaylarının ortak özelliklerini göstermektedir:

Teorem 4.2 *Eğer V bir vektör uzayı ise bu taktirde,*

(a) V'deki herhangi bir $\mathbf{u}$ vektörü için $0 \odot \mathbf{u} = \mathbf{0}$,
(b) Herhangi bir c skaları için $c \odot \mathbf{0} = \mathbf{0}$,
(c) Eğer $c \odot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ ise $c = 0$ veya $\mathbf{u} = \mathbf{0}$'dır.
(d) V'deki herhangi bir $\mathbf{u}$ vektörü için $(-1) \odot \mathbf{u} = -\mathbf{u}$ dur.

İspat

Biz, Tanım 2.4'teki (6) gereğince
(a)

$$0 \odot \mathbf{u} = (0 + 0) \odot \mathbf{u} = 0 \odot \mathbf{u} + 0 \odot \mathbf{u} \qquad (1)$$

sonucuna sahibiz. Tanım 2.4'teki (6) ya göre $-0 \odot \mathbf{u}$'yu Denklem (1)'de iki tarafa eklersek Tanım 2.4'teki (2), (3) ve (4) ü elde ederiz.

$$0 \odot \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Alıştırma 21 olarak bırakılmıştır.
(d) $(-1) \odot \mathbf{u} \oplus \mathbf{u} = (-1) \odot \mathbf{u} \oplus 1 \odot \mathbf{u} = (-1 + 1) \odot \mathbf{u} = 0 \odot \mathbf{u} = \mathbf{0}$.
$-\mathbf{u}$ bir tek olduğu için

$$(-1) \odot \mathbf{u} = -\mathbf{u}$$

sonucuna varırız. (b) ve (c) ■

Bu kesimdeki örneklerde bazı cümleler (kümeler) için gösterimler verdik. Bu gösterimler, kitabın kalan kısmındaki alıştırma ve örneklerde kullanılacaktır. Aşağıdaki tablo bu gösterim ve açıkladıkları cümleleri özetler.

R^n	$n \times 1$ tipindeki matrislerin cümlesi (kümesi)
R_n	$1 \times n$ tipindeki matrislerin cümlesi
M_{nn}	$m \times n$ tipindeki matrislerin cümlesi
P_n	sıfır polinomu ile birlikte derecesi n veya daha küçük olan polinomların cümlesi
P	Polinomlar cümlesi
$C(-\infty, \infty)$	Tanım cümlesi tüm reel sayılar olan, tüm reel değerli, sürekli fonksiyonların cümlesi.

Eğer V bir vektör uzayı ise elemanlarının yapısı dikkate alınmaksızın tüm elemanlarının vektör olarak adlandırıldığını vurgulamak istiyoruz.

Anahtar Kelimeler

Reel vektör uzayı	Kapalı	Polinom	M_{mn}
Vektörler	Sıfır vektörü	Bir polinomun derecesi	P_n
Skalarlar	Bir vektörün negatifi	Sıfır polinomu	P
Vektör toplamı	Kompleks vektör uzayı	R^n	$C(-\infty, \infty)$
Skalar çarpım	Cisim	R^n	

4.2 Alıştırmalar

1. V derecesi (kesin) 2 olan polinomlar cümlesi toplama ve skalar çarpım tanımları da Örnek 6'daki gibi olsun.
(a) V'nin toplama altında kapalı olduğunu gösteriniz.
(b) V skalar çarpım altında kapalı mıdır? Açıklayınız.

2. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 2×2 matrislerinin cümlesi olsun. $\oplus$ standart matris toplama ve $\odot$ standart matris skalar çarpım olsun.
(a) V toplama işlemi altında kapalı mıdır?
(b) V skalar çarpım altında kapalı mıdır?
(c) V cümlesinde sıfır vektörü nedir?
(d) V'deki her A matrisinin V'de bir negatifi var mıdır? Açıklayınız.

3. V, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 2b & d \end{bmatrix}$ şeklinde tüm 2×2 matrislerinin cümlesi olsun, $\oplus$ standart matris toplamı ve $\odot$ standart matris skalar çarpımı olsun.
(a) V toplama altında kapalı mıdır?
(b) V skalar çarpım altında kapalı mıdır?
(d) V'deki her bir A matrisinin V'de kalan bir negatifi var mıdır?
(e) V vektör uzayı mıdır? Açıklayınız.

4. $|v_1 + v_2|$ çift tamsayı ve v_1, v_2 tam sayılar olmak üzere V, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ 2×1 matrislerinin cümlesi olsun. Örnek olarak $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ -8 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ gibi tüm vektörler V'nin elemanıdır. $\oplus$ standart matris toplamı ve $\odot$ standart matris skalar çarpım olsun. V bir vektör uzayı mıdır? Açıklayınız.

5. R^n'nin bir vektör uzayı olduğunu detayları ile açıklayınız.

6. Tüm polinomların cümlesi olan P'nin bir vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

Alıştırma 7-11'de verilen cümle işlemlerle birlikte bir vektör uzayı değildir. Tanım 4.4'teki özelliklerden geçerli olmayanları işaretleyiniz.

7. $\oplus$ alışılmış toplama ve $\odot$ alışılmış çarpma işlemi olmak üzere tüm pozitif reel sayıların cümlesi.

8. $(x, y) \oplus (x' \cdot y') = (x + x', y + y')$ ve $r \odot (x, y) = (x, ry)$ işlemleri ile birlikte reel sayıların tüm sıralı çiftlerinin cümlesi.

9. $(x, y, z) \oplus (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$ ve $r \odot (x, y, z) = (x, 1, z)$ işlemleriyle birlikte tüm reel sayı üçlülerinin cümlesi.

10. $x \leq 0$ olmak üzere R^2'deki alışılmış işlemlerle birlikte $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 2×1 matrislerinin cümlesi.

11. $(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y)$ ve $r \odot (x, y) = (0, 0)$ işlemleri ile birlikte tüm reel sayı ikililerinin cümlesi.

12. V tüm pozitif reel sayıların cümlesi olsun. $\oplus$ işlemi $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{uv}$ ($\oplus$ alışılmış çarpım) ve $\odot$ işlemi de $c \odot \mathbf{v} = \mathbf{v}^c$ ile tanımlansın. V'nin bir vektör uzayı olduğunu ispatlayınız.

13. V, tüm reel değerli sürekli fonksiyonların cümlesi olsun. Eğer $f, g \in V$ ise $(f \oplus)(t) = f(t) + g(t)$ tanımlayalım. f, V de ise $(c \odot f)(t) = cf(t)$ tanımlayalım. V'nin bir vektör uzayı olduğunu ispatlayınız. (Bu Örnek 7'de tanımlanan vektör uzayıdır).

14. V, sadece $\mathbf{0}$ elemanının oluşturduğu cümle olsun $\mathbf{0} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{0}$ ve $c \oplus \mathbf{0} = \mathbf{0}$ olsun. V'nin bir vektör uzayı olduğunu ispatlayınız.

15. (Hesap gereklidir) $y'' - y' + 2y = 0$ diferensiyel denklemini düşünelim. Çözüm, denklemi sağlayan reel değerli bir f fonksiyonudur. V verilen bu diferensiyel denklemi sağlayan tüm çözümlerin cümlesi olsun $\oplus$ ve $\odot$ işlemlerini Alıştırma 13'teki gibi tanımlayınız. V'nin bir vektör uzayı oluğunu ispatlayınız (Kesim 8.5'e de bakınız).

16. V bütün pozitif reel sayılar cümlesi olsun ve $\oplus$, $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{uv} - 1$ ve $c \odot \mathbf{v} = \mathbf{v}$ olarak tanımlansın. V vektör uzayı mıdır?

17. V bütün pozitif reel sayılar cümlesi olsun ve $\oplus$, $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{uv}$ ve $\odot$'yı $c \odot \mathbf{u} = c + \mathbf{u}$ olarak tanımlansın. V vektör uzayı mıdır?

18. V bütün pozitif reel sayılar cümlesi olsun ve $\oplus$, $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = 2\mathbf{u} - \mathbf{v}$ ve $\odot$'yı $c \odot \mathbf{u} = c\mathbf{u}$ olarak tanımlansın. V vektör uzayı mıdır?

19. Vektör uzayının sadece bir tane sıfır vektörü olduğunu ispatlayınız.

20. Bir vektör uzayındaki vektörün sadece bir tane negatifi $(-\mathbf{u})$ olduğunu ispatlayınız.

21. Teorem 4.2'nin (b) ve (c) kısımlarını ispatlayınız.

22. Alıştırma 13'te tanımlandığı gibi V'nin bütün reel değerli fonksiyonlarının vektör uzayı olduğunu ispatlayınız.

23. $-(-\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ olduğunu ispatlayınız.

24. $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{u} \oplus \mathbf{w}$ ise $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ olduğunu ispatlayınız.

25. Eğer $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ve $a \odot \mathbf{u} = b \odot \mathbf{u}$ ise $a = b$ olduğunu ispatlayınız.

26. Örnek 6, derecesi $\leq n$ olan polinomların P_n vektör uzayını tartışır. P_n'nin $p(t)$ polinomunu $n + 1$ boyutlu bir satır matrisinin lineer cebirdeki yazılımıyla eşleyerek işlemler polinomlar üzerinde gerçekleştirilsin ve satır matrisi

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 \rightarrow [a_n \; a_{n-1} \; \cdots \; a_1 \; a_0]$$

kullanılarak $p(t)$'nin katsayılarının oluşturduğu satır matrisi olsun. Eğer $p(t)$'nin herhangi bir terimi açık olarak yoksa, katsayısı için sıfır kullanılır. O zaman polinomların toplamı matris toplamına, bir polinomun bir skalarla çarpımı matrislerin skalarla çarpımına karşılık gelir. Yazılımınızda, açıklanan matris eşlemesini kullanarak polinomlar üzerinde aşağıdaki işlemleri gerçekleyiniz. $n = 3$ ve

$$p(t) = 2t^3 + 5t^2 + t - 2, \; q(t) = t^3 + 3t + 5$$

olsun.

(a) $p(t) + q(t)$. **(b)** $5\,p(t)$. **(c)** $3\,p(t) - 4q(t)$.

4.3 Alt uzaylar

Bu kesimde bir vektör uzayının yapısını analiz etmeye başlayacağız. İlk olarak verilen vektör uzayının aynı işleme göre yine bir vektör uzayı olan alt cümlesine bir isim vermek uygun olacaktır. Bu nedenle biz aşağıdaki tanımı veririz.

TANIM 4.5

V bir vektör uzay ve W, V'nin boş olmayan bir alt cümlesi olsun. Eğer W, V'deki işlemlere göre bir vektör uzayı ise o zaman W, V'nin bir **alt uzayı** olarak adlandırılır.

Tanım 4.5'ten bir V vektör uzayının W alt cümlesinin V'nin bir alt uzayı olması için Tanım 4.4'ün (1)-(8) özelliklerini ve (a), (b)'yi sağladığını kontrol etmek gerektiği çıkar. Bununla birlikte aşağıdaki

teorem sadece (a) ve (b)'nin geçerli olup olmadığını kontrol etmenin yeterli olduğunu söyler (a) özelliği $\oplus$ için kapalılığı, (b) özelliği $\odot$ için kapalılığıdır.

Teorem 4.3 V, $\oplus$ ve $\odot$ işlemleriyle birlikte bir vektör uzay ve W, V'nin boş olmayan bir alt cümlesi olsun. O zaman, W'nin V'ye ait bir alt uzay olması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerin sağlanmasıdır:

(a) Eğer $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, W'de herhangi vektörler ise $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$.

(b) Eğer c herhangi bir reel sayı ve $\mathbf{u}$, W'de herhangi bir vektör ise, o zaman $c \odot \mathbf{u} \in W$.

İspat

Eğer W, V'nin bir alt uzayı ise aynı zamanda bir vektör uzayıdır ve dolayısıyla Tanım 2.4'teki (a) ve (b) sağlanır. Bunlar kesinlikle teoremdeki (a) ve (b)'dir.

Tersine, (a) ve (b) sağlansın. Biz W'nin V'ye ait bir alt uzay olduğunu göstermeliyiz. İlk olarak, (b)'den biz herhangi bir $\mathbf{u} \in W$ için $(-1) \odot \mathbf{u} \in W$'ya sahibiz (a) dan $\mathbf{u} \oplus (-1) \odot \mathbf{u} \in W$'ya sahibiz. Ancak $\mathbf{u} \oplus (-1) \odot \mathbf{u} = 0$ olduğundan $0 \in W$'dır. Bu durumda, herhangi bir $\mathbf{u} \in W$ için $\mathbf{u} \oplus 0 = \mathbf{u}$ olur. Son olarak, (1), (2), (5), (6), (7) ve (8) özellikleri V'de geçerli olduğundan W'da da geçerlidir. Bu nedenle W, V'nin bir alt uzayıdır. ■

ÖRNEK 1 Her vektör uzayı, kendisi ve sadece sıfır vektöründen oluşan $\{\mathbf{0}\}$ alt uzayı olmak üzere en az iki alt vektör uzayına sahiptir (Herhangi bir vektör uzayında $\mathbf{0} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{0}$ ve $c \odot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ olduğunu hatırlatalım). $\{\mathbf{0}\}$ alt uzayı **sıfır alt uzayı** olarak adlandırılır. ■

ÖRNEK 2 P_2, derecesi ≤ 2 olan tüm polinomlar ve sıfır polinomunun oluşturduğu bir cümle olsun. P_2, tüm polinomların vektör uzayı olan P'nin bir altcümlesidir. P_2'nin P'nin bir alt uzayı olduğunu gerçeklemek kolaydır. Genel olarak P_n derecesi $\leq n$ olan tüm polinomlar ve sıfır polinomunun oluşturduğu cümle olmak üzere P'nin bir alt uzayıdır. Yine, P_n, P_{n+1}'in bir alt uzayıdır. ■

ÖRNEK 3 V, derecesi 2 olan tüm polinomların cümlesi olsun. V, P'nin bir alt cümlesidir. Ancak $2t^2 + 3t + 1$ ve $-2t^2 + t + 2$ polinomlarının toplamı birinci dereceden bir polinom olduğu için V de olmadığından, V, P'nin bir alt uzayı değildir. ■

ÖRNEK 4 Aşağıdaki R^2'nin hangi alt cümleleri R^2'deki vektör toplama ve çarpma işlemine göre alt uzay oluştururlar.

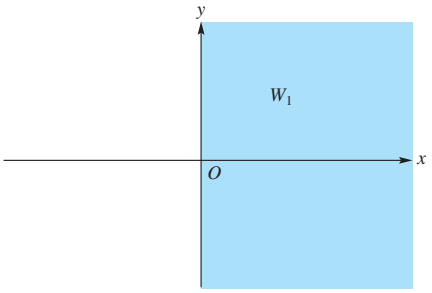
(a) W_1, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $x \geq 0$ biçimindeki tüm vektörlerin cümlesi

(b) W_2, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ biçimindeki tüm vektörlerin cümlesi

(c) W_3, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $x = 0$ biçimindeki tüm vektörlerin cümlesi

Çözüm

(a) W_1 cümlesi xy-düzleminin sağ yarı kısmı olsun (Şekil 4.17'ye bakınız). Bu R^2'nin alt uzayı değildir.



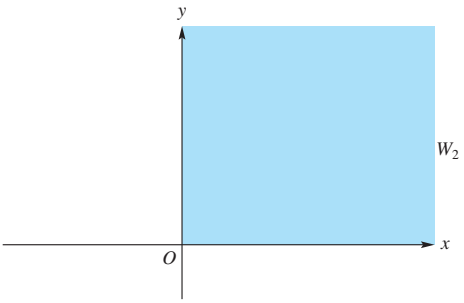
ŞEKİL 4.17

Çünkü $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ vektörü W_1'in elemanı olup

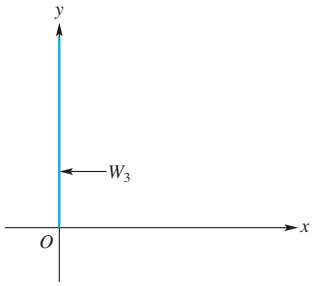
$$-3 \odot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -9 \end{bmatrix}$$

skalar çarpımı W_1'in elemanı değildir. Bu nedenle Teorem 4.3'ün (b) şıkkı sağlanmaz.

(b) W_2 cümlesi xy-düzlenin ilk çeyreğidir. (Şekil 4.18'e bakınız.) Böylece (a) şıkkındaki aynı vektör toplama ve skalar çarpma ile W_2'nin alt uzayı olmadığı görülür.



ŞEKİL 4.18



ŞEKİL 4.19

(c) W_3, xy-düzleminde y-eksenidir. (Şekil 4.19'a bakınız.) W_3'ün alt uzayı olduğunu göstermek için W_3'te

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

vektörlerini alalım. O zaman,

$$\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix}$$

dır. Bu nedenle Teorem 4.3'ün (a) kısmı sağlanır. Bununla birlikte c, b skalar olmak üzere

$$c \odot \mathbf{u} = c \odot \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ cb_1 \end{bmatrix},$$

olduğundan bu da Teorem 4.3'ün (b) şıkkını sağlandığını ifade eder. Böylece W^2 cümlesi R^2'nin bir alt uzayıdır. ■

ÖRNEK 5 a, b herhangi reel sayılar olmak üzere R^3'te $\begin{bmatrix} a \\ b \\ a+b \end{bmatrix}$ şeklindeki vektörlerin cümlesi W olsun. Teorem 2.3 (a) ve (b)'yi gerçeklemek için

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_1+b_1 \end{bmatrix} \text{ve } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ a_2+b_2 \end{bmatrix}\text{'yi}$$

W'da iki vektör olarak alalım. O zaman

$$\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \\ (a_1+b_1)+(a_2+b_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2 \\ (a_1+a_2)+(b_1+b_2) \end{bmatrix}$$

W'dadır. Zira, vektörlerin üçüncü bileşenleri ilk ikisinin toplamıdır. Benzer şekilde

$$c \odot \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_1+b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_1 \\ cb_1 \\ c(a_1+b_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_1 \\ cb_1 \\ ca_1+cb_1 \end{bmatrix}$$

vektörü de W'dadır. Bu yüzden, W, R^3'ün bir alt uzayıdır. ■

Bundan böyle, genellikle $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}$ ve $c \odot \mathbf{u}$'yu V vektör uzayında sırasıyla $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ve $c\mathbf{u}$ ile göstereceğiz.

Biz yine, bir V vektör uzayının boş olmayan bir W alt cümlesinin V'nin bir alt uzayı olması için gerek ve yeter şartın $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ ve c, d herhangi skalarlar olmak üzere, $c\mathbf{u} + d\mathbf{v} \in W$ olduğunu göstereceğiz.

ÖRNEK 6 Bir vektör uzayında bir alt uzay elde etmenin basit bir yolu şöyledir: Bir V vektör uzayında $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$ sabit iki vektör ve a_1, a_2 keyfi reel sayılar olmak üzere W, V'deki

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2$$

biçimindeki vektörlerin cümlesi olsun. W'nın, V'nin bir alt uzayı olduğunu göstermek için Teorem 2.3'teki (a) ve (b) özelliklerini sağlatırız. Buna göre

$$\mathbf{w}_1 = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 \text{ ve } \mathbf{w}_2 = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2$$

W da iki vektör olsun. O zaman

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = (a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2) + (b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2) = (a_1+b_1)\mathbf{v}_1 + (a_2+b_2)\,\mathbf{v}_2$$

olarak elde edilir. Böylece $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ vektörü W'nın bir elemanı olur. Diğer taraftan c bir skalarsa

$$c\mathbf{w}_1 = c(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2) = (ca_1)\mathbf{v}_1 + (ca_2)\mathbf{v}_2$$

olup $c\mathbf{w}_1$ de W'nın bir elemanıdır. Dolayısıyla W, V'nin bir alt uzayıdır. ■

Örnek 6'da iki vektör için yapılanlar daha çok vektör için de yapılabilir. Şimdi aşağıdaki tanımı düşünelim.

TANIM 4.6 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektörleri bir V vektör uzayında olsun. $a_1, a_2, \ldots, a_k$ reel sabitleri için

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k = \sum_{j=1}^{k} a_j\mathbf{v}_j$$

ise V'deki $\mathbf{v}$ vektörüne $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektörlerinin bir lineer birleşimidir denir.

Uyarı Toplama gösterimi Kesim 1.2'de matrislerin lineer birleşimi için tanıtıldı ve özellikleri Kesim 1.2'teki alıştırmalarda görüldü.

Uyarı Tanım 4.6 vektörlerin sonlu sayıdaki cümlesi için ifade edildi. Ancak bir vektör uzayındaki sonsuz sayıdaki vektörlerin S sonsuz cümlesine karşılık sonsuz toplamlar gösterimi kullanılır.

ÖRNEK 7 Örnek 5'te W alt uzayını $\begin{bmatrix} a \\ b \\ a+b \end{bmatrix}$ şeklinde R^3'ün elemanlarından oluştuğunu göstermiştik. Ayrıca

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere W'nin herbir elemanı $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$'nin lineer bileşenleri olarak

$$a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ a+b \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir. ■

ÖRNEK 8 Örnek 2'de P_2'nin derecesi ≤ 2 olan tüm polinomları ve sıfır polinomların oluşturduğu bir vektör uzayı olduğunu göstermiştik. Bu nedenle P_2'nin herbir elemanı $at^2 + bd + c$ şeklinde olduğundan bu vektörler t^2, t ve 1'in lineer birleşimi olarak ifade edilir. ■

ÖRNEK 9 R^3'te

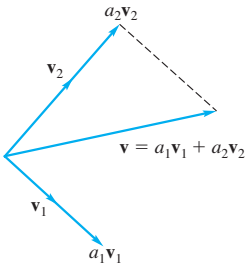
$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olsun.

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

vektörü,

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}$$



ŞEKİL 4.20 İki vektörün lineer birleşimi.

olacak şekilde a_1, a_2 ve a_3 reel sayıları bulunabilirse $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ ve $\mathbf{v}_3$ vektörlerinin lineer birleşimi olacaktır. $\mathbf{v}$ için $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ ve $\mathbf{v}_3$ vektörleri yerlerine yazılırsa

$$a_1\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} + a_3\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\\5\end{bmatrix}$$

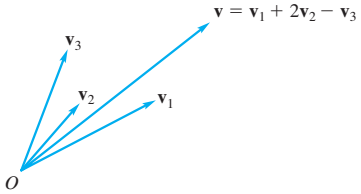
eşitliği elde edilir. Buradan hareketle,

$$\begin{aligned} a_1 + \ a_2 + a_3 &= 2\\ 2a_1 \qquad + a_3 &= 1\\ a_1 + 2a_2 \qquad &= 5. \end{aligned}$$

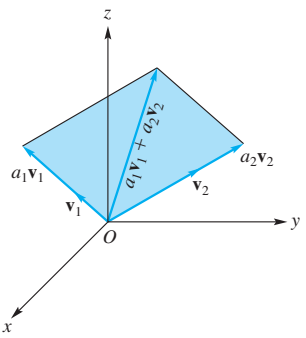
lineer denklem sistemine ulaşılır. Bu sistem Bölüm 1'deki metotlarla çözülürse $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ ve $a_3 = -1$ elde edilir. Buna göre $\mathbf{v}$; $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ ve $\mathbf{v}_3$'ün lineer birleşimi olarak

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$$

olarak ifade edilir. Şekil 2.18 $\mathbf{v}$'yi $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ ve $\mathbf{v}_3$'ün lineer birleşimi olarak göstermektedir. ■



ŞEKİL 4.21



ŞEKİL 4.22

Şekil 4.22'de biz R^2'de aynı doğru üzerinde olmayan $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$ vektörlerinin lineer birleşimler cümlesinin bir kısmını gösteriyoruz. $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$ vektörlerinin tüm lineer birleşimlerinin cümlesi orijinden geçen ve bu vektörleri kapsayan bir düzlemdir.

ÖRNEK 10

A, $m \times n$ tipinde bir matris ise katsayıları A matrisi ile gösterilen n bilinmeyenli m tane denklemli bir homogen sistem; $\mathbf{x}$, R^n'de bir vektör ve $\mathbf{0}$, sıfır vektörü olmak üzere

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

şeklinde yazılır. Bu durumda bütün çözümlerin cümlesi R^n'nin W alt cümlesi ise W'nın R^n'nin bir alt uzayı (homogen sistemin **çözüm uzayı** veya A matrisinin **sıfır uzayı** olarak bilinir) olduğu Teorem 2.3 kullanılarak gösterilecektir. $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ iki çözüm olsun. O zaman

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ ve } A\mathbf{y} = \mathbf{0}$$

dır. Şimdi

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

olup $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ sistemin bir çözümüdür. Öte yandan c bir skalar ise

$$A(c\mathbf{x}) = cA(\mathbf{x}) = c\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

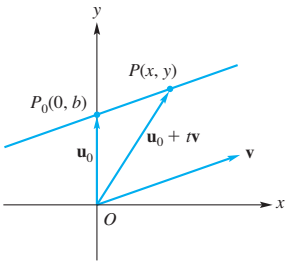
olduğundan $c\mathbf{x}$ de sistemin bir çözümüdür. Böylece W, vektör toplamı ve skalarla çarpma işlemlerine göre R^n'de kapalıdır ve dolayısıyla R^n'nin bir alt uzayıdır. ■

Burada $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sisteminin çözümü olan vektörlerin cümlesinin ($\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$) R^n'nin bir alt uzayı olmadığı not edilmelidir. (Alıştırma 15'e bakınız.)

R^1'in bütün alt uzaylarının $\{\mathbf{0}\}$ ve R'nin kendisi olduğunun gösterilmesi alıştırma olarak bırakılmıştır (Alıştırma 20). R^2'nin alt uzayları, $\{\mathbf{0}\}$, R^2 ve sıfırdan farklı bir vektörün skalarla çarpımlarını ihtiva eden herhangi bir cümledir (Alıştırma 21). Yani orijinden geçen herhangi bir doğrudur. Kesim 2.5'teki Alıştırma 43'te, R^3'ün bütün alt uzaylarının, kendisi, $\{\mathbf{0}\}$ ve orijinden geçen bütün doğrularla bütün düzlemlerden ibaret olduğunun gösterilmesi istenmiştir.

■ R^3'te Doğrular

Hatırlayacağınız gibi xy-düzleminde yani R^2'de bir doğru, m doğrunun eğimi ve b'de doğrunun y-eksenini kestiği noktanın ordinatı (yani doğru y-eksenini $P_0(0, b)$ noktasında keser) olmak üzere $y = mx + b$ şeklinde verilir. R^2'de vektörler cinsinden bir doğru, doğru üzerindeki bir nokta ve doğrultusu ile tamamen belirlenir. $\mathbf{v}$, doğrunun doğrultusunu veren vektör ve



ŞEKİL 4.23

$\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$, P_0 $(0, b)$ noktasının yer vektörü olsun. O zaman konumları $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ vektörü ile verilen P (x, y) noktalarını içeren P_0'dan geçen $\mathbf{v}$ vektörüne paralel olan doğrunun denklemi

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + t\mathbf{v}, \quad -\infty < t < +\infty$$

şeklinde ifade edilir. (Şekil 2.20'ye bakınız.)

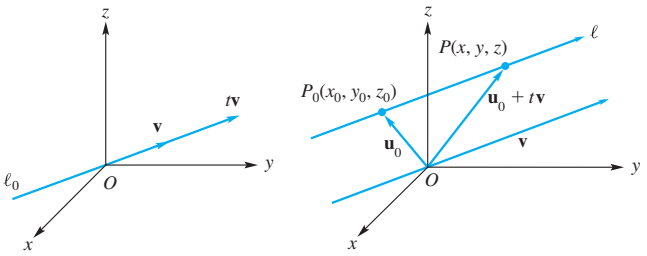
R^3'teki doğrulara dönülürse, R^3'te de bir doğru, üzerindeki bir nokta ve doğrultusu ile kesin olarak belirlenir. R^3'te sıfırdan farklı bir $\mathbf{v}$ vektörü

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

ise orijinden geçen ve $\mathbf{v}$ vektörüne paralel olan bir ℓ_0 doğrusu, konum vektörü $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ olan ve $\mathbf{u} = t\mathbf{v}$, $(-\infty < t < \infty)$ denklemini sağlayan $P\ (x, y, z)$ noktalarından oluşur. (Şekil 2.21(a)'ya bakınız). ℓ_0'ın R^3'ün bir alt uzayı olduğu kolayca gösterilebilir. $P_0\ (x_0, y_0, z_0)$ R^3'te bir nokta ve $\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$, P_0'ın yer vektörü ise P_0'dan geçen ve $\mathbf{v}$'ye paralel olan ℓ doğrusu

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + t\mathbf{v}, \quad -\infty < t < \infty \tag{1}$$

denklemi ile verilen ve yer vektörü $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ olan $P\ (x, y, z)$ noktalarından oluşur. (Şekil 2.21(b)'ye bakınız.)



ŞEKİL 4.24 R^3'te doğru.

Denklem (1) herhangi bir reel sayıyı temsil eden t parametresini içerdiğinden bu denkleme ℓ'nin parametrik denklemi adı verilir. Denklem (1), bileşenler cinsinden

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ta \\ y &= y_0 + tb \qquad -\infty < t < \infty, \\ z &= z_0 + tc, \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemlere ℓ'nin **parametrik denklemleri** denir.

ÖRNEK 11 $P_0(-3, 2, 1)$ noktasından geçen $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ vektörüne paralel olan doğrunun parametrik denklemleri

$$\begin{aligned} x &= -3 + 2t \\ y &= 2 - 3t \qquad -\infty < t < \infty \\ z &= 1 + 4t \end{aligned}$$

denklemleridir. ■

ÖRNEK 12 $P_0(2, 3, -4)$ ve $P_1(3, -2, 5)$ noktalarından geçen ℓ doğrusunun parametrik denklemlerini bulunuz.

Çözüm

Aranılan doğru $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_0P_1}$ vektörüne paraleldir. Buna göre

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 - 2 \\ -2 - 3 \\ 5 - (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. P_0, doğru üzerinde olacağından ℓ'nin parametrik denklemleri aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned} x &= 2 + t \\ y &= 3 - 5t \qquad -\infty < t < \infty \\ z &= -4 + 9t \end{aligned}$$

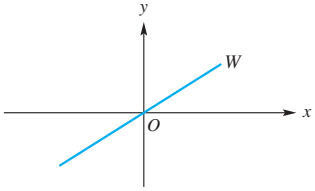
Şüphesiz P_0 yerine P_1 noktası da kullanılabilirdi. Aslında, ℓ'nin bir parametrik denklemi için doğru üzerindeki herhangi bir nokta kullanılabilir. Buna göre bir doğru sonsuz sayıda parametrik denklemle temsil edilebilir. ■

Anahtar Kelimeler

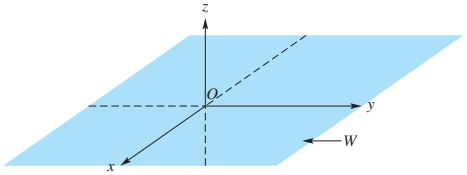
Altuzay
Sıfır altuzayı
Alt cümle
Kapalılık özelliği
Lineer birleşim
Sıfır (çözüm) uzayı
Parametrik denklem

4.3 Alıştırmalar

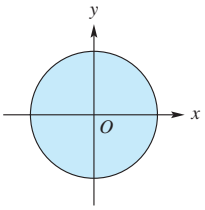
1. R^2'de (x, x) şeklindeki noktaların oluşturduğu doğruyu W cümlesi ile gösterelim. W, R^2'de bir alt uzay mıdır? Açıklayınız.



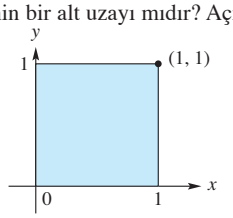
2. R^3'teki noktalardan xy-düzleminde kalanların oluşturduğu cümle W olsun. W, R^3'te bir alt uzay mıdır? Açıklayınız.



3. xy-düzleminde $x^2 + y^2 = 1$ denklemine sahip olan çemberi ele alalım. Başlangıç noktaları orijinde, bitim noktaları bu çemberde veya çember içinde olan tüm vektörlerin cümlesi W olsun. W, R^2'nin bir alt uzayı mıdır? Açıklayınız.



4. Aşağıdaki şekilde gösterilen birim kareyi ele alalım. $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ olmak üzere $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ şeklindeki tüm vektörlerin oluşturduğu cümle W olsun. Yani W başlangıcı orijinde, bitimi karenin üzerinde veya içinde olan vektörlerin cümlesidir. W, R^2'nin bir alt uzayı mıdır? Açıklayınız.



Alıştırma 5 ve 6'da verilen R^3'ün alt cümlelerinden hangileri R^3'ün alt uzaylarıdır.

5. **(a)** $\begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} a \\ b \\ a+2b \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(d) $a + 2b - c = 0$ olmak üzere, $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ şeklindeki tüm vektörlerin cümlesi.

6. **(a)** $\begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ $a > 0$ **(c)** $\begin{bmatrix} a \\ a \\ c \end{bmatrix}$

(d) $2a - b + c = 1$ olmak üzere $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ şeklindeki tüm vektörler cümlesi.

Alıştırma 7 ve 8'de verilen R_4'ün alt cümlelerinden hangileri R_4'ün alt uzayıdır.

7. **(a)** $a - b = 2$ olmak üzere, $[a\ b\ c\ d]$;
(b) $c = a + 2b$ ve $d = a - 3b$ olmak üzere, $[a\ b\ c\ d]$;
(c) $a = 0$ ve $b = -d$ olmak üzere, $[a\ b\ c\ d]$

8. **(a)** $a = b = 0$ olmak üzere, $[a\ b\ c\ d]$
(b) $a = 1$, $b = 0$ ve $a + d = 1$ olmak üzere, $[a\ b\ c\ d]$;
(c) $a > 0$ ve $b < 0$ olmak üzere, $[a\ b\ c\ d]$.

Alıştırma 9 ve 10'da verilen M_{23}'ün alt cümlelerinden hangileri M_{23}'ün alt uzayıdır?

9. **(a)** $b = a + c$ olmak üzere, $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $c > 0$ olmak üzere, $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $a = -2c$ ve $f = 2e + d$ olmak üzere, $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$

10. **(a)** $a = 2c + 1$ olmak üzere, $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$

(c) $a + c = 0$ ve $b + d + f = 0$ olmak üzere, $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$

11. W, izi sıfır olan 3×3 tipindeki matrislerin cümlesi olsun. W'nın, M_{33}'ün bir alt uzayı olduğunu gösteriniz.

12. W, $\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{bmatrix}$ şeklindeki 3×3 matrislerinin cümlesi olsun. W, M_{33}'ün bir alt uzayıdır. Gösteriniz.

13. W, $a + b + c + d = 0$ olmak üzere $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ şeklindeki 2×2 matrislerinin cümlesi olsun. W, M_{22}'nin bir alt uzayı mıdır? Açıklayınız.

14. $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $A\mathbf{z} = \mathbf{0}$ olmak üzere W, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ şeklindeki 2×2 matrislerin cümlesi olsun. W, M_{22}'nin bir alt uzayı mıdır? Açıklayınız.

Alıştırma 15 ve 16'da verilen P_2'nin alt cümlelerinden hangileri P_2'nin alt uzayıdır?

15. **(a)** $a_0 = 0$ olmak üzere, $a_2t^2 + a_1t + a_0$
(b) $a_0 = 2$ olmak üzere, $a_2t^2 + a_1t + a_0$
(c) $a_2 + a_1 = a_0$ olmak üzere, $a_2t^2 + a_1t + a_0$

16. **(a)** $a_1 = 0$ ve $a_0 = 0$ olmak üzere, $a_2t^2 + a_1t + a_0$
(b) $a_1 = 2a_0$ olmak üzere, $a_2t^2 + a_1t + a_0$
(c) $a_1 + a_2 + a_0 = 2$ olmak üzere, $a_2t^2 + a_1t + a_0$

17. Aşağıdaki cümlelerden hangileri M_{nn}'nin birer alt uzayıdır?
(a) $n \times n$ tipindeki simetrik matrislerin cümlesi.
(b) $n \times n$ tipindeki köşegen matrislerin cümlesi.
(c) $n \times n$ tipindeki singüler olmayan matrislerin cümlesi.

18. Aşağıda verilen alt cümlelerden hangileri M_{nn}'nin alt uzayıdır?
(a) $n \times n$ tipindeki singüler matrislerin cümlesi,
(b) $n \times n$ tipindeki üst üçgen matrislerin cümlesi,
(c) $n \times n$ tipindeki ters-simetrik matrislerin cümlesi.

19. (**Matematik analiz bilgisi isteniyor.**) Aşağıdaki cümlelerden hangileri Kesim 4.2 Örnek 7'de tanımlanan $C(-\infty, \infty)$ vektör uzayının alt uzayıdır?
(a) Negatif olmayan fonksiyonların tamamı,
(b) Bütün sabit fonksiyonlar,
(c) $f(0) = 0$ şartını sağlayan bütün fonksiyonlar,
(d) $f(0) = 5$ şartını sağlayan bütün fonksiyonlar,
(e) Bütün diferensiyellenebilir fonksiyonlar,

20. (**Matematik analiz bilgisi isteniyor.**) Aşağıdaki cümlelerden hangileri Kesim 4.2, Örnek 7'de tanımlanan $C(-\infty, \infty)$ vektör uzayının alt uzayıdır.
(a) İntegrallenebilen fonksiyonların cümlesi,
(b) Sınırlı fonksiyonların cümlesi,
(c) $[a, b]$ aralığı üzerinde integrallenebilen fonksiyonlar,
(d) $[a, b]$ aralığı üzerinde sınırlı fonksiyonlar

21. P'nin Kesim 4.2 Örnek 7'de tanımlanan $C(-\infty, \infty)$ vektör uzayının bir alt uzayı olduğunu gösteriniz.

22. P_2'nin P_3'ün bir alt uzayı olduğunu ispatlayınız.

23. $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ olmak üzere $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineer sistemin çözümlerinin cümlesinin R^n'nin bir alt uzayı olmadığını gösteriniz.

24. A, singüler olmayan bir matris ise A'nın sıfır uzayı ne olur?

25. t herhangi bir reel sayı olmak üzere R^3'te $\begin{bmatrix} t \\ -t \\ t \end{bmatrix}$ şeklindeki herbir vektörün $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin sıfır uzayında olduğunu gösteriniz.

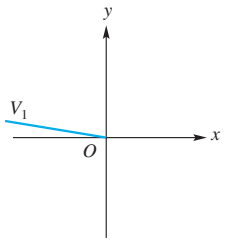
26. $\mathbf{x}_0$, bir V vektör uzayında sabit bir vektör olsun. $\mathbf{x}_0$'ın skalarla çarpımları $c\mathbf{x}_0$'ların cümlesi olan W'nin V'nin bir alt uzayı olduğunu gösteriniz.

27. A, bir $m \times n$ tipinde matris olsun. R^n'de $\mathbf{Ax} \neq \mathbf{0}$ şartını sağlayan $\mathbf{x}$ vektörlerinin cümlesi olan W, R^n'nin bir alt uzayı mıdır? Cevabınızı gerçekleyiniz.

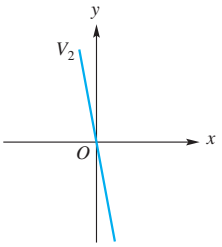
28. R^1'in bütün alt uzaylarının, kendisi ve $\{\mathbf{0}\}$'dan ibaret olduğunu gösteriniz.

29. R^2'nin bütün alt uzaylarının sadece $\{\mathbf{0}\}$, kendisi ve sıfırdan farklı her bir vektörün bütün skalarlarla çarpımlarının cümlesi olduğunu gösteriniz.

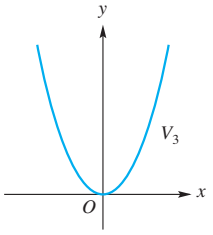
30. R^2'nin aşağıda verilen alt cümlelerinden hangilerinin bir alt uzay tanımladığını belirleyiniz.
(a) V_1



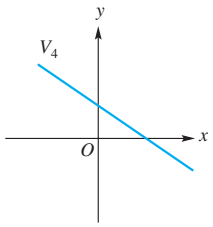
(b) V_2



(c) V_3



(d) V_4



31. $c = a + b$ olmak üzere W, $\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 2×3 matrislerinin cümlesi olsun. W, M_{23}'ün bir alt uzayı mıdır? W içindeki herbir vektörün

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

in lineer birleşimi olduğunu gösteriniz.

32. Tüm 2×2 simetrik matrislerin W cümlesi. M_{22}'nin bir alt uzayıdır. W'deki herbir vektör $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ ve $\mathbf{v}_3$'ün lineer birleşimi olacak şekilde üç tane $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ 2×2 matrislerini bulunuz.

33. Aşağıda verilen R^3'teki vektörlerden hangileri

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vektörlerinin lineer birleşimi olarak ifade edilir.

(a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

34. Aşağıda verilen R_4'teki vektörlerden hangileri

$\mathbf{v}_1 = [1\ \ 2\ \ 1\ \ 0]$, $\mathbf{v}_2 = [4\ \ 1\ \ -2\ \ 3]$,
$\mathbf{v}_3 = [1\ \ 2\ \ 6\ \ -5]$, $\mathbf{v}_4 = [-2\ \ 3\ \ -1\ \ 2]$

vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazılabilir?

(a) $[3\ \ 6\ \ 3\ \ 0]$ **(b)** $[1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$
(c) $[3\ \ 6\ \ -2\ \ 5]$ **(d)** $[0\ \ 0\ \ 0\ \ 1]$

35. **(a)** R^3'te orijinden geçen bir ℓ_0 doğrusunun R^3'ün bir alt uzayı olduğunu gösteriniz.
(b) R^3'te, orijinden geçmeyen bir ℓ doğrusunun R^3'ün bir alt uzayı olmadığını gösteriniz.

36. Aşağıda verilen noktalardan hangilerinin

$$\begin{aligned} x &= 3 + 2t \\ y &= -2 + 3t \qquad -\infty < t < \infty \\ z &= 4 + 3t \end{aligned}$$

ile verilen doğrunun üzerinde bulunduğunu ifade ediniz.

(a) $(1, 1, 1)$ **(b)** $(1, -1, 0)$
(c) $(1, 0, -2)$ **(d)** $\left(4, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

37. Aşağıda verilen noktalardan hangilerinin

$$\begin{aligned} x &= 4 - 2t \\ y &= -3 + 2t \qquad -\infty < t < \infty \\ z &= 4 - 5t \end{aligned}$$

doğrusu üzerinde bulunduğunu ifade ediniz.
(a) (0, 1, –6) **(b)** (1, 2, 3)
(c) (4, –3, 4) **(d)** (0, 1, –1)

38. $P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve $\mathbf{v}$ vektörüne paralel olan doğrunun parametrik denklemlerini bulunuz.

(a) $P_0(3, 4, -2)$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$

(b) $P_0(3, 2, 4)$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

39. Aşağıda verilen noktalardan geçen doğrunun parametrik denklemlerini bulunuz.
(a) $(2, -3, 1)$, $(4, 2, 5)$
(b) $(-3, -2, -2)$, $(5, 5, 4)$

40. Yazılımdaki sayısal (nümerik) denemeler bir V cümlesinin $\oplus$, $\odot$ işlemleri ile birlikte bir vektör uzayı veya vektör alt uzayı olduğunu gerçeklemede kullanılamaz. Bu gerçekleme (sağlatma) bütün ihtimaller gözönüne alınarak "soyut" olarak yapılmalıdır. Bununla birlikte sayısal denemeler bir V cümlesinin bir vektör uzayı veya alt uzayı olmadığını göstermek için aksine örnek oluşturmada kullanılabilir. Aşağıdaki şıklarda verilen cümlelerin matrislerin toplamı ve matrislerin skalarla çarpımı işlemleri ile birlikte M_{22}'nin bir alt uzayı olmadığını aksine örnek bularak gösteriniz:
(a) (1, 1) girdisi 3'e eşit olan simetrik matrislerin cümlesi,
(b) 1. sütunu $[0\ 1]^T$ olan matrislerin cümlesi,
(c) $ad - bc \neq 0$ olmak üzere $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrislerinin cümlesi.

41. R^n'de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektörlerinin bir lineer birleşimi Tanım 4.6'da verildiği gibi, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ katsayılarıyla birlikte

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k$$

şeklinde verilir. Yazılımda bir lineer birleşim

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_k \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{c} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix}$$

olmak üzere matris çarpımı $\mathbf{v} = A\boldsymbol{c}$ ile hesaplanabilir. Yani A matrisi, sütun$_j$ $(A) = \mathbf{v}_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$ sütunlarına sahiptir. Yazılımınızı bu tür lineer birleşimler için deneyiniz.

(a) Örnek 7'deki $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ vektörlerini kullanarak

$$5\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3$$

vektörünü hesaplayınız.

(b) $\mathbf{v}_1 = 2t^2 + t + 2$, $\mathbf{v}_2 = t^2 - 2t$, $\mathbf{v}_3 = 5t^2 - 5t + 2$ ve $\mathbf{v}_4 = -t^2 - 3t - 2$

$$3\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3 + 2\mathbf{v}_4$$

vektörünü hesaplayınız (Kesim 1.3 Alıştırma 46'ya bakınız).

42. Alıştırma 33'teki vektörlerin R_4'te olduğunu kabul ederek R_4'teki vektörlerin lineer birleşimleri için matris çarpımını kullanan bir yol geliştiriniz.

4.4 Germe

Şimdiye kadar, reel vektör uzayı olarak adlandırılan bir matematiksel yapıyı tanımladık ve bazı özelliklerini not ettik. Kesim 4.3'teki Örnek 6 da, bir V vektör uzayından alınan iki belirli $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$ vektörlerinin tüm lineer birleşimlerinin V'nin bir W alt uzayı verdiğini gösterdik. Daha ileri olarak, sonlu sayıda vektöre sahip tek vektör uzayının $\mathbf{0}$ uzayı olduğunu gözlemledik. $\mathbf{v} \neq 0$, V vektör uzayında bir vektör ise o zaman Kesim 4.2'deki Alıştırma 25 gereğince, c, c' farklı reel sayılar ise $c \odot \mathbf{v} \neq c' \odot \mathbf{v}$ ve dolayısı ile V sonsuz çoklukta vektöre sahiptir. Yine Kesim 4.3'teki Örnek 1'den ve V vektör uzayı $\{\mathbf{0}\}$ alt uzayına sahiptir. Önceki tartışmamızdan $\{\mathbf{0}\}$ vektör uzayı hariç bir V vektör uzayının sonsuz çoklukta vektöre sahip olduğunu biliyoruz. Bununla birlikte, bu kesimde ve sonrakilerde pek çok V vektör uzayı içinde bulunan, sonlu sayıda vektör içeren bir vektör alt cümlesi tarafından V'nin tüm vektörlerinin ifade edilebileceğini gösteririz. Genel olarak V'deki herbir vektörü ifade etmek için kullanılan alt cümlenin birden fazla olduğu not edilmelidir. Şimdi bu düşünceleri formüle etmeye dönelim. Bir V vektör uzayında vektör toplamı $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}$ ve skalar çarpımı $c \odot \mathbf{u}$'nin sırası ile $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ ve $c\mathbf{u}$ ile göstereceğimizi hatırlayınız.

Vektör uzaylarının ifadesinde lineer birleşimler önemli bir rol oynar. Kesim 4.3'teki Örnek 6'da, V vektör uzayındaki vektör çiftlerinin mümkün olan tüm lineer birleşimlerinin V'nin bir alt uzayını oluşturduğunu gözlemledik. Bu oluşumlara yardım etmek üzere aşağıdaki tanıma sahibiz.

TANIM 4.7 $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ bir V vektör uzayında vektörlerin bir cümlesi ise S deki vektörlerin bütün lineer birleşimlerinden oluşan V'deki vektörlerin cümlesi

$$\text{Sp } S \text{ veya Sp } \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$$

ile gösterilir.

Uyarı Tanım 4.7 sonlu bir vektör cümlesi için ifade edilir. Ancak bir vektör uzayındaki sonsuz sayıda vektörlerin oluşturduğu bir S cümlesine de uygulanır.

ÖRNEK 1 2×3 matrislerinin

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

şeklinde verilen S cümlesi gözönüne alınsın. Bu durumda SpS a, b, c ve d reel sayılar olmak üzere

$$a\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b&0\\0&c&d\end{bmatrix},$$

biçimindeki bütün matrislerin M_{23} cümlesidir. Yani SpS a, b, c ve d reel saılar olmak üzere

$$\begin{bmatrix}a&b&0\\0&c&d\end{bmatrix},$$

biçimindeki matrislerin tamamının oluşturduğu M_{23} cümlesidir. ■

ÖRNEK 2

(a) S^2'nin alt cümlesi $S = \{t^2, t, 1\}$ olsun. span $S = P_2$'dir. (Kesim 4.3'teki Örnek 8'e bakınız.)

(b) R^3'te bir S alt cümlesi

$$S=\left\{\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$$

şeklinde tanımlansın. span S cümlesi $\begin{bmatrix}a\\b\\0\end{bmatrix}$, şeklindeki R^3'ün tüm vektörlerinde oluşur. Burada a, b reel sayılardır.

(c) Kesim 4.3'teki Şekil 4.22'deki span $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ cümlesi orijinden geçen ve $\mathbf{v}_1$ ile $\mathbf{v}_2$'yi içeren bir düzlemdir. ■

Aşağıdaki Teorem Kesim 4.3'teki Örnek 6'nın bir genelleştirilmiştir.

Teorem 4.4 V vektör uzayının elemanlarından oluşan bir cümle $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n\}$ olsun. Bu takdirde span S cümlesi V'nin bir alt uzayıdır.

İspat

Herhangi $a_1, a_2, \ldots, a_4$ ve $b_1, b_2, \ldots, b_4$ reel sayıları için

$$\mathbf{u}=\sum_{j=1}^{k}a_j\mathbf{v}_j \quad \text{ve} \quad \mathbf{w}=\sum_{j=1}^{k}b_j\mathbf{v}_j$$

tanımlansın. Böylece Kesim 1.2'de Alıştırma 17 (a) ve (b) yardımıyla

$$\mathbf{u}+\mathbf{w}=\sum_{j=1}^{k}a_j\mathbf{v}_j+\sum_{j=1}^{k}b_j\mathbf{v}_j=\sum_{j=1}^{k}(a_j+b_j)\mathbf{v}_j,$$

dir. Ayrıca herhangi c reel sayısı için

$$c\mathbf{u}=c\left(\sum_{j=1}^{k}a_j\mathbf{v}_j\right)=\sum_{j=1}^{k}(ca_j)\mathbf{v}_j$$

dir. Sonuç olarak $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ ve $c\mathbf{u}$ vektörleri S deki vektörlerin lineer birleşimleri olarak elde edildiğinden span S, V'nin bir alt uzayıdır. ■

ÖRNEK 3 $S = \{t^2, t\}$ cümlesi P_2 vektör uzayının bir alt cümlesi olsun. Bu takdirde span $\{S\}$ cümlesi $at^2 + bt$ şeklindeki tüm polinomların oluşturduğu bir alt uzaydır. Burada $a, b \in R$'dir. ■

ÖRNEK 4

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Cümlesi M_{22} vektör uzayının bir alt cümlesi olsun. Bu takdirde span $\{S\}$ 2×2 tipindeki tüm köşegen matrislerin oluşturduğu bir vektör alt uzayıdır. ■

Tam olarak bir V vektör uzayını tanımlamak için aşağıdaki tanımda ifade edildiği gibi germe kavramını kullanmalıyız.

TANIM 4.8 S cümlesi V vektör uzayının vektörlerinden oluşsun. Eğer V'deki her bir vektör S'deki vektörlerin lineer birleşimlerinden oluşuyor ise S cümlesi V'yi geriyor ya da V uzayı S ile geriyor denir ve span $\{S\} = V$ ile gösterilir.

Açıklama span $\{S\} = V$ ise S cümlesi V'nin geren cümlesi olarak adlandırılır. Bir vektör uzayı birçok geren cümlelere sahip olabilir. Örneklerimizde sonlu sayıda vektörlerle gerilen S cümlelerini kullandık, fakat bazı vektör uzayları sonsuz sayıda vektörlerin gerdiği cümlelerden oluşabilir. Örnek 5'e bakınız.

ÖRNEK 5 P cümlesi tüm polinomlardan oluşan bir vektör uzayı olsun. $S = \{1, t, t^2 \ldots\}$ olsun; yani negatif olmayan t'nin tam üslerinden oluşsun. Bu takdirde span $\{S\} = P$'dir. P vektör uzayının her bir geren cümle sonsuz sayıda vektörlerden oluşacaktır. ■

Açıklama Bu kitaptaki örneklerde ele alınan vektör uzaylarının büyük çoğunluğu sonlu sayıda vektörlerin gerdiği cümlelerden oluşur.

Bizim ele alacağımız diğer soru şudur: Bir V vektör uzayının verilen bir S alt cümlesi için V'nin bir $\mathbf{w}$ elemanı span $\{S\}$'nin de bir elemanı mıdır? Aşağıdaki örneklerde verilen sonlu vektörlerden oluşan S cümleleri için bu soruların cevaplarını lineer denklem sistemlerini çözerek vereceğiz:

ÖRNEK 6 R^3'te

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

vektörleri verilsin. Böylece

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

vektörünün span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$'nin bir elemanı olup olmadığını gösterelim.

Çözüm

Eğer $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$

olacak şekilde a_1 ve a_2 gerçel sayıları bulabilirsek $\mathbf{v}$'nin span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$'ye

ait olduğunu göstermiş oluruz. Böylece $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$ yerine yazılırsa

$$a_1\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\5\\-7\end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu ifade

$$\left[\begin{array}{cc:c}2&1&1\\1&-1&5\\1&3&-7\end{array}\right]$$

ilaveli matrisinden oluşan bir lineer denklem sistemine karşılık gelir (gösteriniz).

Bu matrisi satırca indirgenmiş eşelon biçime indirgersek

$$\left[\begin{array}{cc:c}1&0&2\\0&1&-3\\0&0&0\end{array}\right]$$

elde edilir (gösteriniz). Bu da bize sistemin tutarlı olduğunu gösterir ve $a_1 = 2$, $a_2 = 3$'tür. Böylece $\mathbf{v}$ vektörü span $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$'nin bir elemanıdır. ■

ÖRNEK 7 P_2'de

$\mathbf{v}_1 + 2t^2 + t + 2$ $\quad \mathbf{v}_2 = t^2 - 2t$ $\quad \mathbf{v}_3 = 5t^2 - 5t + 2$ $\quad \mathbf{v}_4 = -t^2 - 3t - 2$ vektörleri verilsin.

$$\mathbf{v} = t^2 + t + 2$$

vektörünün span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$'nin bir elemanı olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm

Biz

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_3 + a_3\mathbf{v}_3 + a_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}$$

tanımlandığında $\mathbf{v}$'nin span $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ cümlesinin elemanı olacak şekilde a_1, a_2, a_3, a_4 skalar değerlerini bulmalıyız. Böylece $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ ve $\mathbf{v}_4$ yerine yazılırsa

$$a_1(2t^2 + t + 2) + a_2(t^2 - 2t) + a_3(5t^2 - 5t + 2) + a_4(-t^2 - 3t - 2) = t^2 + t + 2$$

ya da

$$(2a_1 + a_2 + 5a_3 - a_4)t^2 + (a_1 - 2a_2 - 5a_3 - 3a_4)t + (2a_1 + 2a_3 - 2a_4) = t^2 + t + 2$$

elde edilir. Bu durumda eşitliğin her iki tarafındaki katsayılar eşitlenirse

$$\begin{aligned}2a_1 + a_2 + 5a_3 - a_4 &= 1\\ a_1 - 2a_2 - 5a_3 - 3a_4 &= 1\\ 2a_1 + 2a_3 - 2a_4 &= 2\end{aligned}$$

bulunur. Bununla birlikte yukarıdaki denklem sisteminin ilaveli matrisi satırca indirgenmiş eşelon matris haline getirilirse

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

bulunur. Bu da bize sistemin tutarsız olduğunu gösterir. Yani, sistemin bir çözümü yoktur. Böylece $\mathbf{v}$ vektörü span $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$'nin elemanı değildir. ■

Açıklama Genel olarak bir vektörün span $\{S\}$'ye ait olduğunu göstermek için uygun lineer sistemin tutarlı olduğunu araştırırız.

ÖRNEK 8

V uzayı R^3 vektör uzayı olsun.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vektörlerinin V'yi germesi için V'de bir $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ vektörü (a, b ve c keyfi gerçel sabitler) ve

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}$$

olacak şekilde a_1, a_2 ve a_3 gerçel sabitlerin olup olmadığını göstermeliyiz. Bu da bize

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= a \\ 2a_1 + a_3 &= b \\ a_1 + 2a_2 &= c \end{aligned}$$

lineer sistemini verir (gösteriniz). Bu sistemin bir çözümü

$$a_1 = \frac{-2a + 2b + c}{3}, \quad a_2 = \frac{a - b + c}{3}, \quad a_3 = \frac{4a - b - 2c}{3}$$

dir (gösteriniz). Böylece $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ vektörleri vektörleri V'yi gerer. Buradan span $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = R^3$ olduğu görülür. ■

ÖRNEK 9

V vektör uzayı olarak P_2'yi seçelim. $\mathbf{v}_1 = t^2 + 2t + 1$ ve $\mathbf{v}_2 = t^2 + 2$ için $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ cümlesi V'yi gerer mi?

Çözüm

V'deki herhangi bir vektör
$\mathbf{v} = at^2 + bt + c$, $a, b, c \in R$ olmak üzere

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$$

ya da

$$a_1(t^2 + 2t + 1) + a_2(t^2 + 2) = at^2 + bt + c$$

olacak şekilde a_1, a_2 reel sabitleri elde edilebileceğini göstermeliyiz. Böylece

$$(a_1 + a_2)t^2 + (2a_1)t + (a_1 + 2a_2) = at^2 + bt + c$$

dir. Eşitliğin her iki tarafındaki katsayıların eşitliğinden

$$\begin{aligned} a_1 + \ a_2 &= a \\ 2a_1 \qquad &= b \\ a_1 + 2a_2 &= c \end{aligned}$$

bulunur. İlaveli matrisin eşelon şekle indirgenmesinden

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2a - c \\ 0 & 1 & c - a \\ 0 & 0 & b - 4a + 2c \end{array}\right]$$

elde edilir. Eğer $b - 4a + 2c \neq 0$ ise sistem tutarsızdır ve çözüm yoktur. Böylece $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ V'yi gerekmez. ■

ÖRNEK 10

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & -1 & 9 \end{bmatrix}$$

matrisi için $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ biçimindeki homogen lineer denklem sistemini ele alalım. Kesim 4.3'teki Örnek 10'dan $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$'nin tüm çözümleri R^4'ün bir alt uzayını oluşturur. Bu homogen sistemin çözüm uzayının gerdiği cümleyi bulmak için oluşturulan satırca indirgenmiş eşelon matris

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

dır. (Gösteriniz.)

Genel çözüm

$$x_1 = -r - 2s, \quad x_2 = r, \quad x_3 = s \quad x_4 = s$$

olacaktır. Burada r ve s reel sayılardır. Çözüm uzayının herhangi bir elemanı

$$\mathbf{x} = r \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde matris gösterime sahiptir. Böylece

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vektörlerinin çözüm uzayını gerdiği görülür. ■

Anahtar Kelimeler

Bir cümlenin gereni
V vektör uzayının *S* gerenler cümlesi
V, *S* cümlesi tarafından gerilir
Tutarlı (bağdaşabilir) sistem
Tutarsız (bağdaşamaz) sistem

4.4 Alıştırmalar

1. Aşağıdaki herbir vektör uzayı için farklı iki geren cümle veriniz.
(a) R^3 **(b)** M_{22} **(c)** P_2

2. V vektör uzayı için aşağıda verilen S cümlelerinin V'yi niçin germediğini açıklayınız.
(a) $S = \{t^3, t^2, t\}$, $V = P_3$
(b) $S = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\}$, $V = R^2$
(c) $S = \left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\right\}$, $V = M_{22}$

3. P_2 vektör uzayında verilen

$$p_1(t) = t^2 + 2t + 1, \quad p^2(t) = t^2 + 3,$$
$$p^3(t) = t - 1$$

vektörleri için aşağıda verilen her bir $p(t)$ vektörünün span $\{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$'nin elemanı olduğunu gösteriniz.
(a) $p(t) = t^2 + t + 2$
(b) $p(t) = 2t^2 + 2t + 3$
(c) $p(t) = -t^2 + t - 4$
(d) $p(t) = -2t^2 + 3t + 1$

4. M_{22} vektör uzayında verilen

$$A_1 = \begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 3\end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{bmatrix},$$
$$\text{ve } A_3 = \begin{bmatrix}2 & 2\\-1 & 1\end{bmatrix}$$

vektörleri için aşağıda verilen herbir A vektörünün span $\{A_1, A_2, A_3\}$ cümlesinin elemanı olup olmadığını gösteriniz.

(a) $A = \begin{bmatrix}5 & 1\\-1 & 9\end{bmatrix}$ **(b)** $A = \begin{bmatrix}-3 & -1\\3 & 2\end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix}3 & -2\\3 & 2\end{bmatrix}$ **(d)** $A = \begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{bmatrix}$

5. Aşağıdaki vektörlerden hangileri R_2'yi gerer?
(a) [1 2], [–1 1]
(b) [0 0], [1 1], [–2 –2]
(c) [1 3], [2 –3], [0 2]
(d) [2 4], [–1 2]

6. Aşağıdaki vektör cümlelerinden hangileri R^4'ü gerer?

(a) $\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$

(b) $\left\{\begin{bmatrix}3\\2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

(c) $\left\{\begin{bmatrix}3\\2\\-1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\0\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\2\\-1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\6\\-3\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\4\\-2\\-1\end{bmatrix}\right\}$

(d) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\2\\-1\end{bmatrix}\right\}$

7. Aşağıdaki vektör cümlelerinden hangileri R_4'ü gerer?

(a) [1 0 0 1], [0 1 0 0], [1 1 1 1], [1 1 1 0]

(b) [1 2 1 0], [1 1 –1 0], [0 0 0 1]

(c) [6 4 –2 4], [2 0 0 1], [3 2 –1 2], [5 6 –3 2], [0 4 –2 –1]

(d) [1 1 0 0], [1 2 –1 1], [2 1 2 1], [0 0 1 1]

8. Aşağıdaki polinom cümlelerinden hangileri P_2'yi gerer?

(a) $\{t^2 + 1, t^2 + t, t + 1\}$

(b) $\{t^2 + 1, t - 1, t^2 + t\}$

(c) $\{t^2 + 2, 2t^2 - t + 1, t + 2, t^2 + t + 4\}$

(d) $\{t^2 + 2t - 1, t^2 - 1\}$

9. $t^3 + 2t + 1$, $t^2 - t + 2$, $t^3 + 2$, $-t^3 + t^2 - 5t + 2$ polinomları P_3'ü gerer mi?

10. $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ cümlesi M_{22}'yi gerer mi?

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ denkleminin çözüm uzayını geren vektörlerin cümlesini bulunuz.

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$'ın

sıfır uzayını geren vektörlerin cümlesini bulunuz.

13. İzi sıfıra eşit olan 2×2 tipindeki matrislerin cümlesi W olsun. W, M_{22}'nin bir alt cümlesidir.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

olmak üzere span $S = W$ olduğunu gösteriniz.

14. 3×3 tipinde izi sıfıra eşit olan matrislerin cümlesi W olsun. (Kesim 4.3'teki Alıştırma 11'e bakınız.) span $S = W$ olacak şekilde W'nin bir S alt cümlesi tanımlayınız.

15. 3×3 tipindeki

$$\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{bmatrix}$$

şeklinde verilen matrislerin cümlesi W olsun. W cümlesi M_{33}'ün bir alt uzayıdır. Kesim 4.3 Alıştırma 12'ye bakınız. span$S = W$ olacak şekilde W'nin bir S alt cümlesini tanımlayınız.

16. A ve B $n \times n$ tipinde matrisler olmak üzere T cümlesi $AB - BA$ biçimindeki matrislerin cümlesi olsun. Bu durumda span$T$'nin M_{nn}'ye eşit olmadığını gösteriniz. (*Yol gösterme:* İzin özelliklerini kullanınız.)

17. Bir A matrisinin sıfırlık uzayını hesaplayan bir program tanımlayınız. (Kesim 4.3'teki Örnek 10). Bu programı çalıştırmak için Örnek 10'daki matrisi kullanarak kıyaslayınız. Ayrıca Alıştırma 11 ve 12'deki örnekleri kullanınız.

4.5 Lineer Bağımsızlık

Kesim 4.4'te bir vektör uzayı veya bir alt uzayı veya bir alt uzayın cümlelerini geren vektörlerin cümlesi kavramını geliştirdik. Geren cümle S ile gösterilerek vektör uzayının her bir elemanı S'deki vektörlerin bir lineer birleşimi olarak ifade edilebilir. Bir vektör uzayının farklı germe cümlelerinin olabileceğini gösterdik ve bu cümlelerin vektör sayılarının da farklı olabileceğini söyledik. Bu durumu Örnek 1'de açıklayalım.

ÖRNEK 1

Kesim 4.3'teki Örnek 5'te

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ a+b \end{bmatrix} \quad a, b \in R$$

vektörlerinden oluşan W cümlesinin R^3'ün bir alt cümlesi olduğunu gösterdik. Aşağıdaki cümlelerin herbiri W'yi gerecektir. (Gösteriniz);

$$S_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$$

$$S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \qquad S_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

■

Görüldüğü üzere S_3 cümlesi iki vektörden oluşmaktadır. Böylece W'nin her bir elemanı bu iki vektörün lineer birleşimi olarak ifade edilir. Böylece bir V vektör uzayını geren minimum sayıdaki vektörlerin birleşimleri yardımıyla bu uzayın her bir elemanı oluşturulabilir.

Örnek 1'deki S_3 cümlesi W uzayını gerecektir ve S_3 cümlesi S_1 ve S_2'nin alt cümlesidir. Böylece S_1'deki

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

vektörü S_3'teki vektörlerin lineer birleşimi olarak yazılabilir. Benzer şekilde S_2'deki

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

vektörleri S_3'teki vektörlerin lineer birleşimi olarak yazılabilir. Böylece

$$3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$$0\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

dir. Ayrıca S_1 cümlesi için

$$3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ve S_2 cümlesi için

$$0\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dir. Eğer span $S = S$ ise S deki vektörlerin lineer birleşiminden (katsayıların hepsi sıfıra eşit olmamak şartıyla) oluşan S'nin bazı alt cümleleri de V'yi gerecektir.

Uyarı Önceki tartışma aşağıdaki tanımı teşvik eder. Bu tartışmada, S_3'ün S_1 ve S_2'nin alt cümlesi gözlemini kullandık. Bununla birlikte, bu gözlem bir vektör uzayını geren cümleler için uygulandığı için özel haldir.

TANIM 4.9

Bir V vektör uzayındaki $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektörleri için

$$\sum_{j=1}^{k} a_j \mathbf{v}_j = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0} \tag{1}$$

olacak şekilde tamamı sıfıra eşit olmayan bazı $a_1, a_2, \ldots, a_k$ sabitleri bulunabiliyorsa bu vektörlere **lineer bağımlıdır** denir. Bu durumda; $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektörleri için

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$$

olduğunda $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$ oluyorsa bu vektörlere **lineer bağımsızdır** denir. Eğer $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ alındığında $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektörlerinin durumuna göre S cümlesi lineer bağımlı ya da bağımsızdır denir.

Herhangi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektörleri için $a_1, a_2, \ldots, a_k$ skalarlarının tamamı sıfıra eşit ise (1) denklemi her zaman sağlanır. Önemli nokta en azından sıfırdan farklı bir skalar için bu denklemin sağlanmasıdır.

Uyarı Tanım 4.9 sonlu sayıdaki vektörler için verildi. Ancak bir vektör uzayının sonsuz elemanlı S cümlesi için bu tanım sonsuz toplam kullanılarak uygulanır.

Uyarı Tanım 4.9'u Kesim 4.6'da ifade edilen germe cümlesi "etkinliği" ile ilişkilendirebiliriz.

Vektörlerin lineer bağımlı ya da bağımsız olduğunu (51) denklemi ile belirleyebiliriz. Bu nedenle (1) denkleminden homogen lineer denklem sistemi oluşturulur. Ayrıca $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$ her zaman bir çözüm olacağından tutarlıdır.

Bununla birlikte, Tanım 4.9'daki temel fikir aşikar olmayan çözümün olup olmadığıdır.

ÖRNEK 2

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

vektörlerinin lineer bağımsız olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm

(1) denkleminden

$$a_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

yardımıyla

$$\begin{aligned} 3a_1 + a_2 - a_3 &= 0 \\ 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 &= 0 \\ a_1 - a_3 &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Karşılık gelen ilaveli matris

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

dır. Ayrıca satırca indirgenmiş eşelon matris

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

olacaktır (gösteriniz). Böylece

$$\begin{bmatrix} k \\ -2k \\ k \end{bmatrix}, \quad k \neq 0$$

şeklinde sıfırdan farklı bir çözüm vardır. Bu da bize vektörlerin lineer bağımlı olduklarını gösterir. ■

ÖRNEK 3 R_4'teki $\mathbf{v}_1 = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 2]$, $\mathbf{v}_2 = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 2]$, $\mathbf{v}_3 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 3]$ vektörleri lineer bağımlı ya da bağımsız mıdır?

Çözüm

(1) denkleminden,

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

yardımıyla

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 &= 0 \\ a_2 + a_3 &= 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \\ 2a_1 + 2a_2 + 3a_3 &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Karşılık gelen ilaveli matris

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

dır. Ayrıca satırca indirgenmiş eşelon matris

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

olacaktır (gösteriniz). Böylece sadece $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ şeklinde aşikar çözüm vardır. Bu da bize vektörlerin lineer bağımsız olduklarını gösterir. ■

ÖRNEK 4 M_{22} vektör uzayındaki

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

vektörleri lineer bağımsız mıdır?

Çözüm

(1) denklemi yardımıyla

$$a_1 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dır. Buradan

$$\begin{bmatrix} 2a_1 + a_2 & a_1 + 2a_2 - 3a_3 \\ a_2 - 2a_3 & a_1 + a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Eşit matrislerin tanımından

$$\begin{aligned} 2a_1 + a_2 &= 0 \\ a_1 + 2a_2 - 3a_3 &= 0 \\ a_2 - 2a_3 &= 0 \\ a_1 + a_3 &= 0 \end{aligned}$$

lineer sistemi bulunur. Karşılık gelen ilaveli matris

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

olacaktır (gösteriniz). Ayrıca satırca indirgenmiş eşelon matris

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

dır. Böylece

$$\begin{bmatrix} -k \\ 2k \\ k \end{bmatrix}, \quad k \neq 0$$

şeklinde sıfırdan farklı bir çözüm vardır, yani vektörler lineer bağımlıdır. ■

ÖRNEK 5 R^3'teki $\mathbf{v}_1 = [1 \quad 0 \quad 0]$, $\mathbf{v}_2 = [0 \quad 1 \quad 0]$ ve $\mathbf{v}_3 = [0 \quad 0 \quad 1]$ vektörlerin lineer bağımlı ya da bağımsız olduklarını göstermek için

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0},$$

denklemini oluşturmalı ve a_1, a_2, a_3 için çözmeliyiz. Bu durumda $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ elde edileceğinden (gösteriniz), verilen vektörler lineer bağımsızdır. ■

ÖRNEK 6 P_2 vektör uzayındaki $\mathbf{v}_1 = t^2 + t + 2$, $\mathbf{v}_2 = 2t^2 + t$ ve $\mathbf{v}_3 = 3t^2 + 2t + 2$ vektörlerinin lineer bağımlı mi? ya da lineer bağımsız mıdır?

Çözüm

(1) Eşitliğinden

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 + 3a_3 &= 0 \\ a_1 + a_2 + 2a_3 &= 0 \\ 2a_1 \quad\quad + 2a_3 &= 0, \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. (Gösteriniz.) Bir özet çözüm $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ ve $a_3 = -1$ dir. Bu nedenle

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

dır. Böylece verilen vektörler lineer bağımlıdır. ■

ÖRNEK 7 R^3'teki

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{ve} \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vektörlerinden oluşan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ cümlesi lineer bağımlı ya da bağımsız mıdır?

Çözüm

(1) Eşitliğinden,

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 - 3a_3 + 2a_4 &= 0 \\ 2a_1 - 2a_2 + 2a_3 \quad\quad &= 0 \\ -a_1 + a_2 - a_3 \quad\quad &= 0, \end{aligned}$$

homogen denklem sistemi elde ederiz. Teorem 2.4'ten aşikar olmayan bir çözümün varlığından emin oluruz. Böylece S cümlesi lineer bağımlıdır. Aslında, sonsuz sayıdaki çözümlerden ikisi

$$\begin{aligned} a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 1, \quad a_4 = 0; \\ a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = -1 \end{aligned}$$

dir. ■

ÖRNEK 8 Kesim 4.4'teki Örnek 10'da verilen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$'nin çözüm cümlesi geren

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vektörlerinin lineer bağımlı ya da bağımsız olduklarını gösteriniz.

Çözüm

(1) denklemini oluşturarak

$$a_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}-a_1-2a_2&=0\\ a_1+0a_2&=0\\ 0a_1+a_2&=0\\ 0a_1+a_2&=0,\end{aligned}$$

homogen denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin sadece $a_1 = a_2 = 0$ şeklinde bir çözümü vardır (gösteriniz). Bu nedenle, verilen vektörler lineer bağımsızdır. ■

R_n ya da R^n'de verilen n vektörler cümlesinin lineer bağımsız olduklarını göstermek için determinant kullanabiliriz.

Teorem 4.5 $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ cümlesi R^n ya da R_n'de verilen vektörlerden oluşsun. Satırları ya da sütunları S'deki vektörlerden oluşan bir matris A olsun. Bu taktirde, S cümlesinin lineer bağımsız olması için gerek ve yeter şart $\det(A) \neq 0$'dır.

İspatı sütun vektörleri için vereceğiz. Satır vektörleri için ispat benzerdir.

İspat

S cümlesi lineer bağımsız olsun. Bu takdirde A'nın satırca indirgenmiş eşelon biçimi I_n'dir. Böylece A matrisi I_n'ye satırca denktir ve $\det(A) \neq 0$'dır.

Tersine, $\det(A) \neq 0$ ise, A matrisi I_n ye satırca denktir. A matrisinin satırları lineer bağımlı olsun. Bu taktirde, A'nın satırca indirgenmiş eşelon biçimi bir sıfır satıra sahiptir, bu da A'nın I_n'ye satırca denk olması ile çelişir. Böylece, A'nın satırları lineer bağımsızdır. ■

ÖRNEK 9 $S = \{[1 \quad 2 \quad 3], [0 \quad 1 \quad 2], [3 \quad 0 \quad 1]\}$ cümlesi R^3'te lineer bağımsız mıdır?

Çözüm

Satırları S'nin vektörlerinden oluşan bir A matrisi

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 3 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

dir. Böylece $\det(A) = 2$ olduğundan (gösteriniz) S cümlesi lineer bağımsızdır. ■

Teorem 4.6 S_1 ve S_2 bir V vektör uzayının sonlu alt cümleleri ve S_1 cümlesi de S_2'nin bir alt cümlesi olsun. Bu takdirde aşağıdaki önermeler doğrudur:

(a) S_1 lineer bağımlı ise S_2'de lineer bağımlıdır.
(b) S_2 lineer bağımsız ise S_1'de lineer bağımsızdır.

İspat

$S_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ ve $S_2 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ olsun. İlk önce a)'yı ispatlayalım. S_1 lineer bağımlı olduğunda $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ sağlanacak şekilde $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (tamamı sıfıra eşit olmayan) sabitleri vardır.

Böylece

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_k\mathbf{v}_k + 0\mathbf{v}_{k+1} + \ldots + 0_{vm} = \mathbf{0} \qquad (2)$$

elde edilir. Buradan, (2) eşitliğindeki katsayıların tamamı sıfıra eşit olmadığından S_2'de lineer bağımlıdır.

(b) önermesi (a)'nın denk önermesidir. Bu yüzden mantıklı olarak (a) ya denktir. S_2 lineer bağımsız olsun. Bu nedenle S_1 lineer bağımlı ise (a) gereğince S_2'de lineer bağımlıdır. Bu bir çelişkidir, bu nedenle S_1'de lineer bağımsız olmalıdır. ■

Böylece aşağıdaki sonuçlar ortaya koyduk:

- $S = \{0\}$ cümlesi lineer bağımlıdır. Örneğin, $50 = 0$ ve $5 \neq 0$'dır.
- Bu nedenle eğer S cümlesi 0'ı içeren vektörlerden melydana gelirse bu cümle lineer bağımlıdır.
- Sıfırdan farklı bir tek vektörden ibaret olan vektörlerin cümlesi lineer bağımsızdır (gösteriniz).
- Bir V vektör uzayında verilen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektörlerin herhangi ikisi birbirine eşit olarak verildiğinde bu vektörler lineer bağımlıdır (gösteriniz).

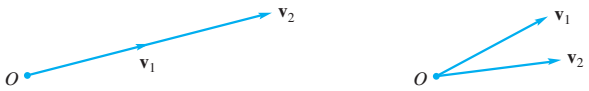
Devam eden kısımda R^2 ve R^3'de lineer bağımsızlıktan bahsedilecektir. $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$ R^2'de lineer bağımlı vektörler olsun. Bu takdirde her ikisi birden sıfıra eşit olmayan a_1, a_2 sabitleri vardır ve

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

dır. Eğer $a_1 \neq 0$ ise $\mathbf{v}_1 = \left(-\frac{a_2}{a_1}\right)\mathbf{v}_2$ dir. Eğer $a_2 \neq 0$ $\mathbf{v}_2 = \left(-\frac{a_1}{a_2}\right)\mathbf{v}_1$ dir. Böylece herhangibir vektör diğerinin bir katıdır. Tersine $\mathbf{v}_1 = a_1\mathbf{v}_2$ olsun. Bu takdirde

$$1\mathbf{v}_1 - a\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

dır. Katsayıların her ikisi de sıfırdan farklı olduğundan $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$ lineer bağımlıdır. Böylece $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$ R^2'de lineer bağımlıdır ancak ve ancak herhangi bir vektör diğerinin bir katı [Şekil 4.25(a)]. Yani, R^2'de iki vektör lineer bağımlıdır ancak ve ancak her iki vektör orijinden geçen doğru üzerinde ise [Şekil 4.25(a)].



ŞEKİL 4.25 **(a)** R^2'de lineer bağımlı vektörler. **(b)** R^2'de lineer bağımsız vektörler

R^3'te $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ ve $\mathbf{v}_3$ vektörleri lineer bağımlı olsun. Bu takdirde

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 = 0$$

olacak şekilde tamamı sıfıra eşit olmayan a_1, a_2 ve a_3 sabitleri vardır. Farz edelim ki $a_2 \neq 0$ olsun. Bu takdirde

$$\mathbf{v}_2 = \left(-\frac{a_1}{a_2}\right)\mathbf{v}_1 - \left(\frac{a_3}{a_2}\right)\mathbf{v}_3,$$

dir. Yani, $\mathbf{v}_2$ vektörü $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_3$ ile gerilen W alt uzayının bir elemanıdır.

Bu durumda, W alt uzayı ($\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_3$ lineer bağımsız ise) orijinden geçen düzlem, ($\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_3$ lineer bağımlı ise) orijinden geçen doğru ya da $W = \{0\}$'dır. Orijinden geçen bir doğru, orijinden geçen bir düzlem içinde yatar. Bu nedenle $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ ve $\mathbf{v}_3$ vektörlerinin tamamı orijinden geçen düzlem içinde kalır. Tersine, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ ve $\mathbf{v}_3$ vektörlerinin tamamı orijinden geçen bir düzlem içinde yatar ise bu vektörlerin ya tamamı sıfır vektörüdür ya orijinden geçen doğru üzerindedir ya da $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_3$ ile gerilen ve orijinden geçen düzlem içinde yatarlar. Böylece tüm durumlarda $\mathbf{v}_2$ vektörü $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_3$'ün lineer bileşimi olarak yazılabilir:

$$\mathbf{v}_2 = c_1\mathbf{v}_1 + c_3\mathbf{v}_3$$

dir. Böylece,

$$c_1\mathbf{v}_1 - 1\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

olacaktır. Buradan, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ ve $\mathbf{v}_3$'ün lineer bağımlı oldukları görülür. Böylece, R^3'teki üç vektör lineer bağımlıdır ancak ve ancak bu vektörlerin tamamı orijinden geçen bir düzlem içinde ise [Şekil 4.26(a)].



ŞEKİL 4.26 **(a)** R^3'te lineer bağımlı vektörler. **(b)** R^3'te lineer bağımsız vektörler.

Daha genel olarak, $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri bir V vektör uzayının sıfırdan farklı vektörleri olsun. Gösterebiliriz ki (Alıştırma 8), $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ lineer bağımlıdır ancak ve ancak $\mathbf{v} = k\mathbf{u}$ olacak şekilde bir k skaları mevcut ise buna denk olarak, $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ lineer bağımsızdır. Ancak ve ancak bir vektör diğerinin lineer katı değilse.

Teorem 4.7 Bir V vektör uzayında sıfırdan farklı $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vektörlerinin lineer bağımlı olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $\mathbf{v}_j$ $(j \geq 2)$ vektörü diğer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \ldots, \mathbf{v}_{j-1}$ vektörlerinin bir lineer birleşimi olmasıdır.

İspat

Eğer $\mathbf{v}_j$ vektörü $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{j-1}$ vektörlerinin bir lineer birleşimi yani,

$$\mathbf{v}_j = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{j-1}\mathbf{v}_{j-1},$$

ise

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{j-1}\mathbf{v}_{j-1} + (-1)\mathbf{v}_j + 0\mathbf{v}_{j+1} + \cdots + 0\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

dir. Böylece en azından bir katsayı (–1) sıfırdan farklı olduğundan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \ldots, \mathbf{v}_n$ lineer bağımlıdır.

Tersine, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ lineer bağımlı olsun. Bu takdirde $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ sağlanacak şekilde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tamamı sıfır olmayan skalarları vardır.

$a_j \neq 0$ için j en büyük indis olsun. Eğer $j \geq 2$ ise bu takdirde

$$\mathbf{v}_j = -\left(\frac{a_1}{a_j}\right)\mathbf{v}_1 - \left(\frac{a_2}{a_j}\right)\mathbf{v}_2 - \cdots - \left(\frac{a_{j-1}}{a_j}\right)\mathbf{v}_{j-1}$$

elde edilir. Eğer $j = 1$ ise $a_1\mathbf{v}_1 = 0$ olup, $\mathbf{v}_1 = 0$'dır. Bu da hipotezde ifade edilen vektörlerin tamamının sıfırdan farklı olmasıyla çelişir. Böylece vektörlerden biri $\mathbf{v}_j$, diğerleri $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{j-1}$'nin lineer birleşimi olarak ifade edilebilir. ■

ÖRNEK 10 $V = R^3$ ve $\mathbf{v}_1 = [1 \quad 2 \quad -1]$, $\mathbf{v}_2 = [1 \quad -2 \quad 1]$, $\mathbf{v}_3 = [-3 \quad 2 \quad -1]$ ve $\mathbf{v}_4 = [2 \quad 0 \quad 0]$ olsun.

Bu takdirde

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$$

dır (gösteriniz). Bu nedenle $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ ve $\mathbf{v}_4$ lineer bağımlıdır. Böylece

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3$$ ■

dir.

Uyarılar

1. Gözlemlerimizden, Teorem 4.7'de her bir $\mathbf{v}$ vektörünün diğer vektörlerin lineer birleşimi olarak yazılabileceği anlaşılmamalıdır. Böylece, Örnek 10'dan $\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + 0\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$ yazılabilir. Bu denklemin, $\mathbf{v}_4$'ün diğerlerinin bir lineer birleşimi olarak çözümü yoktur. Çünkü $\mathbf{v}_4$'ün katsayısı sıfıra eşittir.
2. Eğer $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ cümlesi V vektör uzayının vektörlerinden oluşursa, S'nin lineer bağımlı olması için gerek ve yeter şart S'deki herhangi bir vektörün, S'deki diğer vektörlerin tamamının lineer birleşimi olmasıdır. Bunu ispatlayabiliriz (Alıştırma 19'a bakınız). Örneğin, Örnek 10'dan

   $$\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2 - 0\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4; \quad \mathbf{v}_2 = -\tfrac{1}{2}\mathbf{v}_1 - \tfrac{1}{2}\mathbf{v}_3 - 0\mathbf{v}_4$$

   dır.
3. Bir V vektör uzayında verilen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektörleri lineer bağımsız ise bu vektörler sıfırdan ve birbirlerinden farklıdırlar.

$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ cümlesi bir V vektör uzayını gersin. Eğer $\mathbf{v}_j$ vektörü S'deki diğer vektörlerin lineer birleşimi olarak yazılabilirse

$$S_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_{j+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\},$$

cümlesi de V'yi gerecektir. Bu sonucu ispatlamak için V'deki herhangi bir $\mathbf{v}$ vektöri için S cümlesi V'yi gerdiğinden

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{j-1}\mathbf{v}_{j-1} + a_j\mathbf{v}_j + a_{j+1}\mathbf{v}_{j+1} + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$$

sağlanacak şekilde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ skaları bulunabilir.

Eğer

$$\mathbf{v}_j = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_{j-1}\mathbf{v}_{j-1},$$

alınırsa

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{j-1}\mathbf{v}_{j-1} + a_j(b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_{j-1}\mathbf{v}_{j-1}) \\ &\quad + a_{j+1}\mathbf{v}_{j+1} + \cdots + a_n\mathbf{v}_n \\ &= c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{j-1}\mathbf{v}_{j-1} + c_{j+1}\mathbf{v}_{j+1} + \cdots + c_n\mathbf{v}_n,\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan span $S_1 = V$'dir.

ÖRNEK 11 R^4'de $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ vektörlerin cümlesi ve burada

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix}2\\1\\1\\0\end{bmatrix}$$

biçiminde verilsin. Ayrıca span S = W olsun. Böylece

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

olduğundan $S_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ için span $S_1 = W$'dir. ■

Anahtar Kelimeler

Tutarlı sistem
Tutarsız sistem
Homogen sistem
Lineer bağımsız cümle
Lineer bağımlı cümle

4.5 Alıştırmalar

1. $S = \left\{\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}10\\0\\10\end{bmatrix}\right\}$

cümlesinin R^2'de lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

2. $S = \left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

cümlesinin R^3'te lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

3. $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

cümlesinin R^4'te lineer bağımsız olup olmadığını gösteriniz.

4. $S = \{[3 \quad 1 \quad 2], [3 \quad 8 \quad -5], [-3 \quad 6 \quad -9]\}$ cümlesinin R^3'te lineer bağımsız olup olmadığını gösteriniz.

Alıştırma 5-8'de verilen her bir ilaveli matris (1) denkleminden elde edilmiştir.

5. $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 8 & 5 & 0 \end{array}\right]$

S cümlesi lineer bağımsız mıdır?

6. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

S cümlesi lineer bağımsız mıdır?

7. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$

S cümlesi lineer bağımsız mıdır?

8. A matrisi 5×5 tipinde ve singüler olmayan matris olsun. Bu takdirde $[A \mid O]$ için S cümlesi lineer bağımsız mıdır?

9. $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

vektörleri $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$'ın çözüm uzayına ait olsun. Bu takdirde $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ cümlesi lineer bağımsız mıdır?

10. $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

vektörleri A matrisinin sıfır uzayının elemanları olsun $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ cümlesi lineer bağımsız mıdır?

11. R_3'ün elemanları olan aşağıdaki vektörlerden hangileri lineer bağımlıdır? Bunlardan lineer bağımlı olanlardan herhangi bir vektörü diğerlerinin lineer birleşimi olarak yazınız.
(a) [1 1 0], [0 2 3], [1 2 3], [3 6 6]
(b) [1 1 0], [3 4 2]
(c) [1 1 0], [0 2 3], [1 2 3], [0 0 0]

12. M_{22} vektör uzayını ele alalım. Alıştırma 11'de çözülen soruları aşağıdaki vektörleri kullanarak çözünüz.
(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$
(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

13. P_2 vektör uzayını ele alalım. Alıştırma 11'deki soruları aşağıdaki vektörler için çözünüz.
(a) $t^2 + 1, t - 2, t + 3$ **(b)** $2t^2 + t, t^2 + 3, t$
(c) $2t^2 + t + 1, 3t^2 + t - 5, t + 13$

14. V vektör uzayı tüm reel değerli sürekli fonksiyonların cümlesinden oluşsun. Alıştırma 11'deki soruları aşağıdaki vektörler için çözünüz.
(a) $\cos t, \sin t, e^t$ **(b)** $t, e^t, \sin t$
(c) t^2, t, e^t **(d)** $\cos^2, \sin 2t, \cos 2t$

15. R^3 vektör uzayını ele alalım. Alıştırma 11'deki soruları aşağıdaki vektörler için çözünüz.
(a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$
(b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

16. R^3'te verilen $[-1 \quad 0 \quad -1]$, $[2 \quad 1 \quad 2]$ ve $[1 \quad 1 \quad c]$ vektörleri hangi $c \in R$ değeri için lineer bağımlıdır?

17. P_1'de verilen $t + 3$ ve $2t + c^2 + 2$ vektörleri hangi $c \in R$ değeri için lineer bağımsızdır?

18. $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri bir V vektör uzayının sıfırdan farklı elemanları olsun. Gösteriniz ki, $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ lineer bağımlıdır ancak ve ancak $\mathbf{v} = k\mathbf{u}$ olacak şekilde bir $k \in R$ skaları varsa. Denk olarak; $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri lineer bağımsızdır ancak ve ancak bir vektör değerinin bir katı değilse.

19. $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ cümlesi bir V vektör uzayının elemanlarından oluşsun. S cümlesi lineer bağımlıdır ancak ve ancak S'nin bir vektörü diğerlerinin lineer birleşimi olarak yazılabilirse ispatlayınız.

20. $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ cümlesi bir V vektör uzayının lineer bağımsız vektörlerinden oluşsun. Böylece, $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ ve $\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3$ olmak üzere $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ cümlesinin lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

21. $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ cümlesi bir V vektör uzayının lineer bağımsız vektörlerinden oluşsun. Böylece $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$ ve $\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ olmak üzere $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ cümlesi lineer bağımlı ya da bağımsız mıdır? Cevabınızı ispatlayınız.

22. $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ cümlesi bir V vektör uzayının lineer bağımlı vektörlerinden oluşsun. $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$, $\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ olmak üzere $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ cümlesi lineer bağımlı veya lineer bağımsız mıdır? Cevabınızı ispat ediniz.

23. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ lineer bağımsız ve $\mathbf{v}_3 \notin$ span $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ ise $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$'in lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

24. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ cümlesi R^n'in lineer bağımsız vektörlerinden oluşsun. Eğer, A $n \times n$ tipinde singüler olmayan matris ise $\{A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_n\}$'nin de lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

25. A, $m \times n$ tipinde satırca indirgenmiş eşelon biçimde bir matris olsun. Böylece A'nın sıfırdan farklı satır vektörlerinin R_n'de lineer bağımsız bir cümle oluşturduğunu gösteriniz.

26. $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots. \mathbf{u}_k\}$ cümlesi bir V vektör uzayının elemanlarından oluşsun. Böylece herbir $\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ vektörü S'nin vektörlerinin lineer birleşimlerinden ibaret olacak şekilde $T = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ verilsin. Bu takdirde

$$W = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \ldots + b_m\mathbf{v}_m$$

nin S deki vektörlerin bir lineer birleşimi olduğunu gösteriniz.

27. S_1 ve S_2 vektör uzayının sonlu alt cümleleri ve S_1 de S_2'nin alt cümlesi olsun. S_2 lineer bağımlı ise S_1 in lineer bağımlı olup olmadığını açıklayınız ve bir örnek veriniz.

28. S_1 ve S_2 vektör uzayının sonlu alt cümleleri ve S_1 de S_2'nin alt cümlesi olsun. S_1 lineer bağımsız ise S_2'nin lineer bağımsız olup olmadığını açıklayını ve bir örnek veriniz.

29. A bir $m \times m$ matrisi olsun. A'nın sütunlarının alt alta yazılması ile A ile eşlenen $\mathbf{w}$ marisi R^{mn}'de olsun.
Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ ile eşlenen vektör } \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

dır.
Yazılımınızın böyle bir komuta sahip olup olmadığını belirleyiniz. Eğer sahip ise, bağımlı olduğunu göstermek için Örnek 4'teki vektörleri ve yazılımınızın satırca eşelon komutunu kullanınız. Bu tekniği Alıştırma 12'yi çözmek için uygulayınız.

30. Kesim 4.4'teki Örnek 7'den sonra not edildiği gibi SpS'ye ait özel bir vektörü belirlemek için uygun homogen olmayan $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistemin bağdaşabilirliği (uygunluğu) araştırılır. İlave olarak vektörlerin bir cümlesinin lineer bağımsız olup olmadığını belirlemek için de uygun $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ lineer homogen sisteminin sıfır uzayı araştırılır. Bu araştırmalar, eğer uygun ise, eşelon biçime indirgeme komutu kullanılarak yapılabilir. Böyle durumlarda eşelon biçime indirgeme komutunun nasıl kullanılacağı aşağıdaki gibi özetlenebilir: RREF (C), C matrisinin satırca indirgenmiş eşelon biçimini temsil etsin.

(i) $\mathbf{v}$ sıfırdan farklı bir vektörü temsil etmek üzere RREF ([A ⋮ **b**]) [0 ⋯ 0 ⋮ *] şeklinde bir satır ihtiva etmiyorsa $\mathbf{v}$ vektörü SpS'ye aittir.

(ii) RREF ([A ⋮ **0**]) birim matristen satırlar ile bazı satırları tamamen sıfırlardan oluşuyorsa o zaman vektörlerin cümlesi lineer bağımsızdır.

4.4'teki Örnek 8 ve Örnek 3, 5, 6 ve 7'deki verileri kullanarak bu yaklaşımı yazılımınızda deneyiniz.

31. **Uyarı:** Alıştırma 30'da verilen strateji (yöntem) hesaplamaların tam aritmetiğin kullanılması ile yapıldığını farz etmektedir. Çoğu yazılımlar kayan-nokta aritmetiği olarak bilinen bir metot kullanır ve dolayısıyla böyle durumlarda satırca indirgenmiş eşelon biçimi kullanmak, yanlış sonuçların elde edilmesine neden olabilir. Hesaplama ile ilgili olarak "doğrular arasındaki" lineer bağımsızlık ve lineer bağımlılık görülemeyebilir. Yazılımınızda burada verilen R^2'deki vektörler için satırca indirgenmiş eşelon biçimi kullanarak deneyiniz. Lineer bağımlı mı? Lineer bağımsız mı? Burada bulduklarınızla teorik cevapları karşılaştırınız.

(a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \times 10^{-5} \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \times 10^{-10} \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \times 10^{-16} \end{bmatrix}$

4.6 Taban ve Boyut

Bu bölümde, bir V vektör uzayındaki vektörlerin tam olarak V'yi tanımlayabileceğini ele alacağız. Böylece Bölüm 4.4'teki germe ve Bölüm 4.5'teki lineer bağımsızlık konularını birlikte ele alacağız.

Taban

TANIM 4.10

Bir V vektör uzayının $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ elemanları verilsin.
(a) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ V'yi geriyor. (b) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ lineer bağımsızdır.
şartları sağlandığında $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ vektörleri V'nin bir tabanını oluşturur.

Uyarı $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ vektörleri V'nin bir tabanını oluşturursa bu vektörler birbirinden ve sıfırdan farklı olmak zorundadır.

Uyarı Tanım 4.10'da verilen vektör uzayı sonludur. Fakat benzer şekilde sonsuz boyutlu vektör uzayı için de taban tanımı verilebilir.

ÖRNEK 1

$V = R^3$ olsun. Böylece $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ vektörleri R^3'ün bir tabanını oluşturur. Bu vektörlere R^3'ün doğal tabanı ya da standart tabanı denir. Benzer şekilde $[1 \quad 0 \quad 0]$, $[0 \quad 1 \quad 0]$, $[0 \quad 0 \quad 1]$ vektörleri de R^3'ün doğal tabanını oluşturur. Genel olarak R^n veya R_n'nin doğal tabanı tanımlanabilir. ■

R^n'nin doğal tabanı $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ ile ifade edilir. Burada

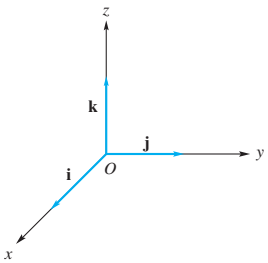
$$\mathbf{e}_i = \begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} \leftarrow i.\text{ satır}$$

dir. Yani, $\mathbf{e}_i$ vektörü $n \times 1$ tipinde bir matris olup i. satırı 1 diğerleri sıfırdır.

R^3'ün doğal tabanı genel olarak

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

ile ifade edilir. Bu vektörler Şekil 4.27'de gösterilmiştir. Böylece R^3 deki $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$ vektörü



ŞEKİL 4.27 R^3'ün doğal tabanı.

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

şeklinde ifade edilir

ÖRNEK 2 $S = \{ r^2 + 1, t - 1, 2t + 2\}$ cümlesinin P_2 vektör uzayı için bir taban olduğunu gösteriniz.

Çözüm

Bunu yapmak için S cümlesinin V vektör uzayını gerdiğini ve lineer bağımsız olduğunu göstermeliyiz. S'nin V'yi gerdiğini göstermek için, V de bir vektör, yani $at^2 + bt + c$ polinomunu alıp

$$\begin{aligned} at^2 + bt + c &= a_1(t^2 + 1) + a_2(t - 1) + a_3(2t + 2) \\ &= a_1t^2 + (a_2 + 2a_3)t + (a_1 - a_2 + 2a_3) \end{aligned}$$

olacak biçimde a_1, a_2 ve a_3 sabitlerini bulmalıyız. İki polinom aynı mertebeden terimlerin katsayıları eşit olması durumunda t'nin bütün değerleri için eşit olacağından

$$\begin{aligned} a_1 &= a \\ a_2 + 2a_3 &= b \\ a_1 - a_2 + 2a_3 &= c \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sistemi çözülürse,

$$a_1 = a, \quad a_2 = \frac{a + b - c}{2}, \quad a_3 = \frac{c + b - a}{4}$$

elde edilir. Bundan dolayı, S cümlesi V'yi gerer.

Bu sonucu örnekle açıklamak için, $2t^2 + 6t + 13$ vektörünün verildiğini kabul edelim. Burada $a = 2$, $b = 6$ ve $c = 13$. a, b ve c'nin bu değerleri yukarıdaki eşitliklerde yerlerine yazılırsa,

$$a_1 = 2, \quad a_2 = -\tfrac{5}{2}, \quad a_3 = \tfrac{17}{4}$$

bulunur.

S'nin lineer bağımsızlığını göstermek için

$$2t^2 + 6t + 13 = 2(t^2 + 1) - \tfrac{5}{2}(t - 1) + \tfrac{17}{4}(2t + 2)$$

bağıntısını alalım. Bu taktirde,

$$a_1(t^2 + 1) + a_2(t - 1) + a_3(2t + 2) = 0$$

bu eşitlik

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_2 + 2a_3 &= 0 \\ a_1 - a_2 + 2a_3 &= 0 \end{aligned}$$

olması halinde t'nin bütün değerleri için sağlanır. Bu homogen lineer denklem sisteminin tek çözümü $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ olup, S'nin lineer bağımsız olması anlamına gelir. Böylece, S P_2'nin bir tabanıdır. ■

$\{t^n, t^{n-1}, \ldots, t, 1\}$ cümlesi P_n'nin bir tabanı olup, P^n'nin doğal veya standart tabanı adını alır.

ÖRNEK 3

$$\mathbf{v}_1 = [1\ \ 0\ \ 1\ \ 0],\quad \mathbf{v}_2 = [0\ \ 1\ \ -1\ \ 2]$$
$$\mathbf{v}_3 = [0\ \ 2\ \ 2\ \ 1],\ \text{ve}\ \ \mathbf{v}_4 = [1\ \ 0\ \ 0\ \ 1]$$

olmak üzere, $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ cümlesinin R_4 için bir taban oluşturduğunu gösteriniz.

Çözüm

S'nin lineer bağımsız olduğunu göstermek için

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 + a_4\mathbf{v}_4 = 0$$

denklemini alalım ve a_1, a_2, a_3 ve a_4 katsayıları için çözelim. Bu denklemde $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ ve $\mathbf{v}_4$ yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} a_1 \qquad\quad &+ a_4 = 0 \\ a_2 + 2a_3 \quad &= 0 \\ a_1 - a_2 + 2a_3 \quad &= 0 \\ 2a_2 + a_3 + a_4 &= 0 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir ve bu sistemin tek çözümü $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ (gerçekleyiniz). Bu işe S'nin lineer bağımsız olduğunu gösterir. Yukarıdaki lineer denklem sisteminin katsayılar matrisinin sütunlarının (veya kolonlarının) $\mathbf{v}_1^T$, $\mathbf{v}_2^T$, $\mathbf{v}_3^T$, ve $\mathbf{v}_4^T$ olduğuna dikkat ediniz.

S'nin R_4'ü gerdiğini göstermek için, R_4'de herhangi bir $[a\ \ b\ \ c\ \ d]$ vektörünün alalım.

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 + a_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}.$$

olacak şekilde a_1, a_2, a_3 ve a_4 sabitlerini araştıralım. $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ ve $\mathbf{v}_4$ vektörleri yerlerine yazılırsa, elde edilen lineer denklem sisteminin a_1, a_2, a_3 ve a_4 için bir çözümü bulunur (gerçekleyiniz). Bu durumda S, R_4'ü gerer ve S, R_4 için bir tabandır. ■

ÖRNEK 4

İzi sıfıra eşit olan tüm 2×2 tipinden matrislerin W cümlesi, M_{22}'nin bir alt uzayıdır.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\ \text{ve}\ \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ cümlesinin W'nin bir tabanı olduğunu gösteriniz.

Çözüm

Bunun için $W = \text{Span}\ S$ ve S'nin lineer bağımsız olduğunu göstermeliyiz. $W = \text{Span}\ S$ olduğunu göstermek için,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$$

olacak biçimde W'nın herhangibir $\mathbf{v}$ vektörünü alalım ve

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}$$

olacak şekilde a_1, a_2 ve a_3 sabitlerini bulalım.

$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ ve $\mathbf{v}$ vektörlerinin yerlerine yazılması ve sol tarafta matris işlemlerinin uygulanması ile,

$$\begin{bmatrix} a_3 & a_1 \\ a_2 & -a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$$

bulunur (gerçekleyiniz). Karşılıklı elemanların eşitliğinden $a_1 = b$, $a_2 = c$ ve $a_3 = a$ elde edilir. Böylece, S cümlesi W'yi gerer. Eğer $\mathbf{v}$ vektörü yerine sıfır matrisi alınırsa, benzer yöntemle $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ bulunur. Böylece, S lineer bağımsız cümledir. Bundan dolayı, S cümlesi W'nin bir tabanıdır. ■

ÖRNEK 5 P_2'nin $c = a - b$ olacak şekilde $at^2 + bt + c$ biçimdeki bütün vektörlerini içeren bir V alt uzayının bir tabanını bulunuz.

Çözüm

V vektör uzayının

$$at^2 + bt + a - b$$

biçimindeki her vektörü

$$a(t^2 + 1) + b(t - 1)$$

olarak yazılabilir. Böylece $t^2 + 1$ ve $t - 1$ vektörleri V uzayını gerer. Üstelik, bu vektörlerden biri diğerinin bir katı olmadığından, bu iki vektör lineer bağımsızdır. Bu yargıya, denklemi

$$a_1(t^2 + 1) + a_2(t - 1) = 0$$

veya

$$a_1t^2 + a_2t + (a_1 - a_2) = 0$$ ■

yazmak suretiyle de ulaşılabilir. Bir V vektör uzayının tabanı olacak şekilde sonlu bir alt cümlesi varsa, bu vektör uzayına sonlu boyutlu vektör uzayı denir. Eğer V'nin böyle sonlu bir alt cümlesi yoksa, V'ye sonsuz boyutlu vektör uzayı denir.

Şimdi, sonlu boyutlu vektör uzaylarının, bir tabanındaki vektör sayısını söyleyecek, farklı iki tabanını karşılaştıracak ve tabanların özelliklerini verecek bazı sonuçlar ortaya koyacağız. İlk olarak, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ cümlesi bir ve vektör uzayının tabanı ise, $c \neq 0$ üzere $\{c\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ cümlesinin de $\mathbf{v}$'nin bir tabanı olduğu incelenebilir (Alıştırma 35). Böylece, sıfırdan farklı bir vektör uzayı için bir taban asla tek değildir.

Teorem 4.8 $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ bir V vektör uzayının tabanı ise, V'deki her vektör S deki vektörlerin lineer birleşimi olarak tek türlü yazılabilir.

İspat

İlk olarak; S cümlesi V'yi gerdiğinden dolayı V deki her $\mathbf{v}$ vektörü S'deki vektörlerin lineer birleşimi olarak yazılabilir. Şimdi,

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$$

ve

$$\mathbf{v} = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \ldots + b_k\mathbf{v}_k$$

olsun. $i = 1, 2, \ldots, n$ için $a_i = b_i$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\mathbf{0} = \mathbf{v} - \mathbf{v} = (a_1 - b_1)\mathbf{v}_1 + (a_2 - b_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + (a_n - b_n)\mathbf{v}_n.$$

yazılabilir.

S lineer bağımsız olduğundan

$$a_i - b_i = 0, \quad r = 1, 2, \ldots, n$$ ■

sonucu elde edilir.

$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ bir V vektör uzayında sıfırdan farklı vektörlerinin bir cümlesi ve V'deki her vektör S deki vektörlerin bir lineer birleşimi olarak yazılabiliyorsa, bu taktirde S'nin bir tabanı olduğu da ispat edilebilir.

Sıfırdan farklı bir vektör uzayı sonsuz sayıda eleman içerse bile, bir sonlu tabanlı vektör uzayı, bir anlamda sonlu sayıda vektör, yani tabanındaki vektörler yardımıyla tamamen belirlidir.

Teorem 4.9 Bir V vektör uzayında sıfırdan farklı vektörlerin bir cümlesi $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ ve $W = \text{span } S$ olsun. Bu taktirde S'nin bir alt cümlesi W'nin bir tabanıdır.

İspat

I Hal S lineer bağımsız ise, S, W'yi gerdiğinden, S'nin W için bir tabanı olduğu söylenebilir.

II Hal S lineer bağımlı ise bu taktirde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ katsayılarının hepsibirden sıfır olmamak üzere

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \qquad (1)$$

Böylece, bir $\mathbf{v}_j$ vektörü S de kendisinden önce gelen vektörlerin bir lineer birleşimidir. (Teorem 4.7). S cümlesinden $\mathbf{v}_j$ vektörü atıldığında, S'nın bir S_1 alt cümlesi elde edilir. O halde, Kesim 4.5'in sonunda yapılan gözlem vasıtası ile, $S_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_{j+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ cümlesininde W'yi gerdiği sonucuna varılır. S_1 lineer bağımsız ise bu taktirde S_1 bir tabandır. S_1 lineer bağımlı ve S_1'in kendisinden önce gelen vektörlerin bir lineer birleşimi olan bir vektörü atılırsa, W'i geren bir yeni S_2 cümlesi elde edilir. Devam edilirse, S sonlu cümlesi için, sonunda W'yı geren ve S'nin bir alt cümlesi olan T cümlesi bulunur. O halde, T cümlesi W'nın bir tabanıdır.

$V = R^m$ veya $V = R_m$, $n \geq m$, olduğu zaman alternatif geliştirici ispat Kesim 4.7'de verilen sonuçlar yardımıyla, bu ispat $V = P_m$ veya $n \geq pq$ olması halinde uygulanabilir.) S'deki vektörleri $m \times 1$ tipinden matrisler olarak (1) denklemini oluşturalım. Bu denklem, bilinmeyenleri $a_1, a_2, \ldots, a_n$ olan n-bilinmeyenli bir homogen lineer denklem sistemini verir. Bu sistemin $m \times n$ tipinden A katsayılar matrisinin sütunları $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. A matrisini, $1 \leq r \leq m$ olmak üzere sıfırdan farklı r tane satıra sahip satırca indirgenmiş bir B matrisine dönüştürebilir. Genelliği bozmaksızın, B'nin sıfırdan farklı r tane 1'in, ilk r sütunda olduğunu kabul edebiliriz. Böylece

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{1\,r+1} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{2\,r+1} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{3\,r+1} & \cdots & b_{3n} \\ & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r\,r+1} & \cdots & b_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

yazılabilir. b matrisinde ilk eleman 1'lere karşılık gelen bilinmeyenler için çözersek, $a_1, a_2, \ldots, a_r$ bilinmeyenlerinin diğer $a_{r+1}, a_{r+2}, \ldots, a_n$

cinsinden çözülebildiğini görürüz. Böylece, a_{r+1}, a_{r+2},..., a_n keyfi reel değerler olmak üzere

$$\begin{aligned} a_1 &= -b_{1\,r+1}a_{r+1} - b_{1\,r+2}a_{r+2} - \cdots - b_{1n}a_n \\ a_2 &= -b_{2\,r+1}a_{r+1} - b_{2\,r+2}a_{r+2} - \cdots - b_{2n}a_n \\ &\vdots \\ a_r &= -b_{r\,r+1}a_{r+1} - b_{r\,r+2}a_{r+2} - \cdots - b_{rn}a_n \end{aligned} \tag{2}$$

(2) denkleminde

$$a_{r+1} = 1,\ a_{r+2} = 0,\ \ldots,\ a_n = 0$$

alınır ve bu değerler (1) denkleminde kullanılırsa

$$-b_{1\,r+1}\mathbf{v}_1 - b_{2\,r+1}\mathbf{v}_2 - \ldots\ b_{r\,r+1}\mathbf{v}_r + \mathbf{v}_{r+1} = 0$$

elde edilir. Bu ise, $\mathbf{v}_{r+1}$ vektörünün $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_r$ vektörlerinin bir lineer birleşimi olduğunu ifade eder. Kesim 4.5'in sonunda yapılan uyarı ile, S den $\mathbf{v}_{r+1}$ vektörünün atılmasıyla elde edilen vektörlerin cümlesi W'yi gerer. Benzer şekilde, $a_{r+1} = 0, a_{r+2}, \ldots, a_n = 0$ alınırsa, $\mathbf{v}_{r+2}$ vektörü $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ...,$\mathbf{v}_r$ vektörlerinin bir lineer kombinasyonu olarak elde edilir ve $\mathbf{v}_{r+1}$ ile $\mathbf{v}_{r+2}$ vektörlerinin atılmasıyla S'den elde edilen cümle W'yi gerer. Bu şekilde devam edilirse, $\mathbf{v}_{r+3}$, $\mathbf{v}_{r+4}$,..., $\mathbf{v}_n$ vektörleri $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,..., $\mathbf{v}_r$ vektörlerinin bir lineer birleşimidir. Böylece $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ cümlesi W'yi geçer. Şimdi $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ cümlesinin lineer bağımsız olduğunu göstereceğiz.

B matrisinde ilk eleman 1'leri içermeyen tüm sütunların atılması ile elde edilen bir B_D matrisini gözönüne alalım. Bu taktirde, B_D B'nin ilk r sütununu içerir. Böylece,

$$B_D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

B_D matrisini elde etmek için B matrisinden atılan sütunlara karşılık gelen sütunların A matrisinden silinmesiyle elde edilen matrisi A_D olsun. Bu durumda

$$A_D\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ ve } B_D\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

homogen sistemleri denktir. $B_D\mathbf{x} = 0$ homogen denklem sistemi,

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_r$ B_D matrisinin sütunları olmak üzere

$$x_1\mathbf{y}_1 + x_2\mathbf{y}_2 + \ldots + x_r\mathbf{y}_r = \mathbf{0} \tag{3}$$

biçiminde yazılabilir. B_D matrisinin sütunları R^m lineer bağımsız cüm-

le meydana getirdiğinden, (3) denklemi sadece aşikar çözüme sahiptir. Bundan dolayı, $A_D\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen denklem sistemi de aşikar çözüme sahiptir. ■

Teorem 4.9'un ilk ispatı; T, span S'nin bir tabanı olacak şekilde S'nin bir T alt cümlesinin elde etmek için bir basit yöntem verir. Bir V vektör uzayının sıfırdan farklı vektörlerinin bir cümlesi $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ olsun. W = span S için bir taban alan S'nin bir alt cümlesini bulmak için aşağıdaki yol izlenirse

Adım 1. (1) de verilen

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

denkleminden $a_1, a_2, \ldots, a_n$ katsayıları çözülür. Bu katsayıların hepsi sıfır ise bu taktirde S lineer bağımsızdır. O halde S, W için bir tabandır.

Adım 2. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ katsayılarının hepsi birden sıfır değilse, bu taktirde S deki lineer bağımlıdır. Böylece S'deki vektörlerden biri, kabul edelim ki $\mathbf{v}_j$ vektörü S de kendisinden önce gelen vektörlerin bir lineer birleşimidir. S'den $\mathbf{v}_j$ vektörü atılırsa, W'yi geren bir S_1 alt cümlesi bulunur.

Adım 3. S'nin yerine S_1 alınarak Adım 1 tekrarlanır. S'nin vektörleri atılmaya devam edilirse, S'nin W'yi geren ve lineer bağımsız olan bir T alt cümlesi bulunur. Böylece, T W'nın bir tabanıdır. Bu yöntem, her seferinde S den bir vektör atmayı ve bir lineer denklem sistem çözmeyi gerektiğinden çok sıkıcı olabilir. Kesim 4.9'da, W = span S'nin bir tabanını bulmak için çok daha etkili bir yöntem verilecek, fakat elde edilen tabanın S'nin bir alt cümlesi olduğu garanti değildir. Çoğu zaman, W = span S'nin elde edilen tabanı herhangi bir diğer tabanı kadar kullanışlı olduğundan bir soruna neden olmaz. Bununla beraber, S'nin vektörlerinin bazı özel özelliklerinin olması ve W = span S'nin bir tabanının da aynı özelliklere sahip olmasının istenildiği durumlar var olduğundan tabanın S'nin bir alt cümlesi olması istenir. Eğer $V = R^m$ veya $V = R_m$ ise, Teorem 4.9'un diğer ispatı S'nin vektörlerinden oluşan W = span S'nin bir tabanını bulmak için oldukça etkili bir yöntem verir. (Örnek 6'ya bakınız.)

$V = R^m$ veya $V = R_m$ ve V'nin sıfırdan farklı vektörlerinin bir cümlesi $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ olsun. W = span S'nin bir tabanı olan S'nin bir T alt cümlesini bulmak aşağıdaki yöntem izlenir.

Adım 1. (1) denkleminden

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

Adım 2. (1) denkleminin homogen sistemine karşılık gelen ilaveli matris oluşturulur ve bu matrisi satıra indirgenmiş eşelon biçime dönüştürülür.

Adım 3. İlk eleman 1'leri içeren sütunlara karşılık gelen vektörler W = span S'nin bir T tabanını oluşturur.

Teoremin diğer ispatından hatırlanacağı üzere, genelliği bozmaksızın B'nin sıfırdan farklı r satırında bulunan 1'lerin ilk r sütunu oluşturduğu kabul edilmiştir. Böylece $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6\}$ ve ilk eleman 1'leri içeren sütunlar 1, 3 ve 4 ise, bu taktirde $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ cümlesi span S'nin bir tabanıdır.

Uyarı Yukarıdaki yöntemin 2. adımında, ilaveli matrisi satırca indirgenmiş eşelon şekle dönüştürmek yeterlidir.

ÖRNEK 6 $V = R_3$ ve $\mathbf{v}_1 = [1\ \ 0\ \ 1]$, $\mathbf{v}_2 = [0\ \ 1\ \ 1]$, $\mathbf{v}_3 = [1\ \ 0\ \ 1]$, $\mathbf{v}_4 = [1\ \ 2\ \ 1]$, olmak üzere $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$ olsun. S cümlesi R_3'ü gerer (gerçekleyiniz) ve şimdi R_3'ün bir tabanı olacak şekilde S'nin bir alt cümlesini araştıralım. Yukarıda geliştirilen yöntem kullanılarak aşağıdaki yol izlenir.

Adım 1. $a_1 = [1\ \ 0\ \ 1] + a_2 = [0\ \ 1\ \ 1] + a_3 = [1\ \ 1\ \ 2] + a_4 = [1\ \ 2\ \ 1] + a_5 = [-1\ \ 1\ \ 2] = [0\ \ 0\ \ 0]$,

Adım 2. Karşılıklı bileşenler eşitlenir

$$\begin{aligned} a_1 \quad\quad + a_3 + a_4 - a_5 &= 0 \\ a_2 + a_3 + 2a_4 + a_5 &= 0 \\ a_1 + a_2 + 2a_3 + a_4 - 2a_5 &= 0. \end{aligned}$$

homogen sistemi elde edilir. Bu sistemi ilaveli matrisinin satıra indirgenmiş eşelon matrisi

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

olarak bulunur. (Gerçekleyiniz.)

Adım 3. İlk eleman 1'lere karşılık gelen sütunlar 1, 2 ve 4 olduğundan, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$ cümlesi R_3'ün bir tabanı olur. ■

Uyarı Teorem 4.9'un diğer ispatında, S cümlesindeki vektörlerin sırası için V için elde edilen tabanı belirler. Örneğin, $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_5$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_4$, $\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3$, $\mathbf{w}_4 = \mathbf{v}_4$ ve $\mathbf{w}_5 = \mathbf{v}_1$ olmak üzere $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4, \mathbf{w}_5\}$ için Örnek 6 yeniden gözönüne alınırsa, bu durumda ilaveli matrisin satırca indirgenmiş eşelon matrisi

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

olarak bulunur. (Gerçekleyiniz.) Bu taktirde, $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\} = \{\mathbf{v}_5, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_3\}$ cümlesi R_3 için bir tabandır.

Şimdi farklı iki tabandaki vektörlerin sayısını veren, bu kesimin en temel sonucu (Teorem 4.10'nun devamındaki Sonuç 4.1) verilecektir.

Teorem 4.10 Bir V vektör uzayının bir tabanı $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ve V'nin lineer bağımsız bir cümlesi $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r\}$ ise bu taktirde $r \le n$.

İspat

$T_1 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ olsun. S, V'yi gerdiği için T_1 cümlesi de V'yi gerer. $\mathbf{w}_1$, S'nin vektörlerinin bir lineer birleşimi olduğu için T_1 lineer bağımlıdır. O halde Teorem 4.7'den dolayı, $\mathbf{v}_j$ T_1'de kendinden önce gelen vektörlerin bir lineer birleşimidir. Bu $\mathbf{v}_j$ vektörünün T_1 cümlesinden atalım. $S_1 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_{j+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ olsun. Dikkat edilirse, S_1 cümlesi $\mathbf{v}$ yi gerer. Şimdi $T_2 = \{\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_{j+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ alalım. Bu taktirde, T_2

lineer bağımlı olup, T_2'nin bir vektörü T_2'de kendinden önce gelen vektörlerin bir lineer birleşimidir. T lineer bağımsız olduğu için bu vektör $\mathbf{w}_1$ olamaz, böylece bu vektör $i \neq j$ için $\mathbf{v}_j$ dir. Bu işlem ardışık olarak tekrar edilirse, her seferinde T cümlesinin kullanılabilir yeni bir $\mathbf{w}$ vektörü vardır ve S cümlesini V vektörlerinden birini atmak mümkündür. Böylece, $\mathbf{w}$ vektörlerinin sayısı olan r, $\mathbf{v}$ vektörlerinin sayısı olan n den büyük olmaz. Yani, $r \leq n$. ■

Sonuç 4.1 $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ve $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ bir V vektör uzayının tabanları ise bu takdirde $m = n$.

İspat

S bir taban ve T lineer bağımsız olduğu için, Teorem 4.10'dan $n \leq m$'dir. Bundan dolayı $m = n$. ■

Bir vektör uzayı veya alt uzay çok sayıda farklı tabanlara sahip olabilir. Örneğin,

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

R^2'nin bir doğal tabanıdır, fakat

$$B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

cümlesi de R^2'nin bir tabanıdır (gerçekleyiniz). Teorem 4.8'den R^2'nin her vektörü B_1 ve B_2 cümlelerine ait vektörlerin bir lineer birleşimi olarak tek türlü yazılabilirler. R_2'nin herhangi bir

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

vektörü için

$$\mathbf{v} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bununla beraber, $\mathbf{v}$ vektörü B_2'nin vektörlerinin bir lineer birleşimi olarak

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılırsa, c_1 ve c_2 skalarları bulunabilir. Çözümü c_1 ve c_2 olan lineer denklem sisteminin ilaveli matrisi

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & b \end{array}\right]$$

olarak bulunur (gerçekleyiniz). Bu lineer sistemin çözümü $c_1 = 2a - b$ ve $c_2 = b - a$ (Gerçekleyiniz.) Böylece

$$\mathbf{v} = (2a - b) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (b - a) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Bu durumda, R^2'nin bütün vektörlerini temsil ederken katsayılarını belirlemek için herhangi bir lineer sistemin çözümünü gerektirmediğinden R^2'nin doğal tabanını kullanmak çok elverişlidir. Bölüm 8'in bazı uygulamalarında, doğal tabanın dışında bir diğer tabanı daha kullanışlıdır. Bundan dolayı, bir vektör uzayı için taban seçimi bu uzaydaki vektörlerin temsil edilmesinde önemli olabilir. Kesim 4.8'de farklı tabanlara göre bir vektörün temsil edilmesi ayrıntılı olarak incelendi ve bir sıralı tabana giren bir vektörün koordinatlarından söz edildi.

■ Boyut

Bir vektör uzayı birden fazla tabana sahip olmasına rağmen, bütün tabanlarından aynı sayıda vektör olduğu gösterildi. O halde aşağıdaki tanımı yazabiliriz.

TANIM 4.11 Sıfırdan farklı bir V vektör uzayının boyutu bir tabanındaki vektör sayısıdır. V'nin boyutu genellikle boy V ile gösterilir. $\{\mathbf{0}\}$ aşikar vektör uzayının boyutu sıfır olarak tanımlanır.

ÖRNEK 7 $S = \{t^2, t, 1\}$ cümlesi P^2'nin bir tabanı olup, boy $P^2 = 3$ dir. ■

ÖRNEK 8 $\mathbf{v}_1 = [0 \;\; 1 \;\; 1]$, $\mathbf{v}_2 = [1 \;\; 0 \;\; 1]$ ve $\mathbf{v}_3 = [1 \;\; 1 \;\; 2]$ olmak üzere R^3'ün $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ cümlesi tarafından gerilen bir alt uzayı V olsun. O halde, a_1, a_2 ve a_3 keyfi reel sayılar olmak üzere, V'nin her vektörü

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3$$

biçimindedir. S cümlesi lineer bağımlı ve $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ olarak bulunur (gerçekleyiniz). Böylece, $S_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ cümlesi $\mathbf{v}$'yi gerer S_1 lineer bağımsız olduğundan V'nin bir tabanıdır ve boy $V = 2$'dir. ■

TANIM 4.12 S, bir V vektör uzayının vektörlerinin bir cümlesi olsun. S'nin lineer bağımsız bir T alt cümlesi S'nin diğer lineer bağımsız alt cümleleri tarafından kapsanmıyor ise T'ye S'nin bir maksimal bağımsız alt cümlesi denir.

ÖRNEK 9 $V = R^3$ ve

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere, $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ olsun. Bu takdirde

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}, \quad \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}, \quad \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\} \quad \text{ve} \quad \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$$

cümleleri S'nin maksimal alt cümleleridir. ■

Sonuç 4.2 V, n-boyutlu bir vektör uzayı ise V'nin vektörlerinin bir maksimal alt cümlesinde n vektör vardır.

İspat

$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ V'nin bir maksimal alt cümlesi olsun. $V \neq \text{span } S$ ise V'nin $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektörlerinin bir lineer birleşimi olarak yazılamayan bir $\mathbf{v}$ vektörü vardır. Teorem 4.7'den $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}\}$ cümlesinin lineer bağımsızdır. Fakat bu S'nin V vektör uzayının bir maksimal bağımsız alt cümlesi olduğu kabulüyle çelişir. Bundan dolayı, $V = \text{span } S$ olup, S, V'nin bir tabanıdır ve Sonuç 4.1'den $k = n$ dir. ■

Sonuç 4.3 V, n-boyutlu bir vektör uzayı ise bu takdirde V'yi geren bir minimal* alt cümlesi de n vektör içerir.

İspat

Okuyucuya bırakılmıştır (Alıştırma 38). ■

Sonuç 4.2 ve Sonuç 4.3 teorik olarak çok önemli olmalarına karşın pratik değildirler. Yukarıdaki sonuçlardan, aşağıdaki değerlendirmeler yapılabilir:

V, n-boyutlu bir vektör uzayı ise bu takdirde V'nin $(n + 1)$ tane vektörünün herhangi bir cümlesi daima lineer bağımlıdır ve V'nin $(n - 1)$ tane vektörünün herhangi bir cümlesi de V yi geremez.

Daha genel olan aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 4.4 V, n–boyutlu bir vektör uzayı ise $m > n$ tane vektörün her alt cümlesi lineer bağımlı olmak zorundadır.

İspat

İspat okuyucuya bırakılmıştır (Alıştırma 39). ■

Sonuç 4.5 V n-boyutlu bir vektör uzayı ise, $m < n$ tane vektörünün hiç bir alt cümlesi V'yi geremez.

İspat

İspat okuyucuya bırakılmıştır (Alıştırma 40). ■

Kesim 4.5'te, $\{\mathbf{0}\}$ cümlesinin lineer bağımlı olduğu ifade edilmiştir. Bu sebepten dolayı, Tanım 4.11'de, $\{\mathbf{0}\}$ aşikar uzayın boyutu sıfır olarak tanımlanmıştı.

Böylece, R^3 3-boyutlu, R_2 2-boyutlu ve R^n ile R^n'nin her ikisi de n-boyutlu vektör uzaylarıdır. Benzer şekilde, P_3'ün bir tabanı $\{t^3, t^2, t, 1\}$ olduğundan boyutu 4 dür. Genel olarak, P_n $(n + 1)$– boyutludur. Bu kitapta göz önüne alınan çok sayıda vektör uzayı sonlu boyutludur. Sonsuz boyutlu vektör uzayları matematik ve fizikte çok büyük öneme sahip olmasına karşın, bu tip vektör uzaylarının incelenmesi bu kitabın kapsamı dışında kalır. Bütün polinomların P vektör uzayı sonsuz boyutlu bir vektör uzayıdır (Alıştırma 36).

Kesim 4.3 R^2'nin alt uzaylarının $\{\mathbf{0}\}$ ve R^2'nin kendisi ve orijinden geçen herhangi bir doğru olduğunun gösterilmesi bir alıştırma (Alıştırma 29) olarak verilmişti. Şimdi bu bölümde olgunlaştırdığımız bilgileri kullanarak, bu sonucu yorumlayabiliriz. İlk olarak $\{\mathbf{0}\}$ ve R^2, sırası

---

* S bir V vektör uzayını geren vektörlerin cümlesi olsun. Eğer S, V'yi geren bir diğer cümleyi kapsamıyorsa, S'ye V'nin bir minimal geren cümlesi denir.

ile R^2'nin boyutları 0 ve 2 olan aşikar alt uzaylarıdır. R^2'nin bir $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vektörü tarafından verilen V alt uzayı, R^2'nin 1-boyutlu alt uzayı olup, V orijinden geçen bir doğrudur. Buna göre R^2'nin alt uzayları, $\{\mathbf{0}\}$, R^2 ve orijinden geçen bütün doğrulardır. Benzer düşünce ile, bu kesimin sonundaki alıştırma 43'te, sizden R^3'ün alt uzaylarının $\{\mathbf{0}\}$, R^3 ve orijinden geçen doğrular ile düzlemleri olduğunun gösterilmesi istenmektedir. Şimdi, lineer bağımsız vektörlerin verilen cümlesini kapsayan bir tabanın bulunmasında sıkça kullanacağımız bir teoremi ispat edelim.

Teorem 4.11 Sonlu boyutlu bir V vektör uzayının lineer bağımsız vektörlerinin bir cümlesi ise bu takdirde V'nin S cümlesini kapsayan bir T tabanı vardır.

İspat

$m < n$ olmak üzere, n-boyutlu V vektör uzayının lineer bağımsız vektörlerinin bir cümlesi $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ olsun. Şimdi, $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ cümlesinin V'nin bir tabanı ve $S_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ olduğunu kabul edelim. S_1 V vektör uzayını gerdiği için, Teorem 4.9 dan, S_1 V'nin bir T tabanını kapsar. T'nin, kendisinden önce gelen tüm vektörlerin S den atılması ile elde edildiğini hatırlayalım. S lineer bağımsız olduğu için, S'nin hiçbir $\mathbf{v}_i$ vektörü diğer $\mathbf{v}_j$ vektörlerinin lineer birleşimi olamaz ve bu yüzden S cümlesinden atılamaz. Bu nedenle T, S cümlesini kapsar. ■

ÖRNEK 10 R_4'ün

$$\mathbf{v}_1 = [1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0] \text{ ve } \mathbf{v}_2 = [-1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0]$$

vektörlerini içeren bir tabanını araştıralım.

Teorem 4.11'i aşağıdaki gibi kullanırız. İlk olarak,

$$\mathbf{e}_1' = [1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0],\ \mathbf{e}_2' = [0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0],\ \mathbf{e}_3' = [0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0],$$

ve

$$\mathbf{e}_4' = [0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1]$$

olmak üzere R_4'ün $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3', \mathbf{e}_4'\}$ doğal tabanını alalım. O halde, $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3', \mathbf{e}_4'\}$, $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3', \mathbf{e}_4'\}$ cümlesi R_4'ü gerdiğinden, S cümlesi de R_4'ü gerer. Şimdi S'nin R_4'ün bir tabanı olacak şekilde bir alt cümlesini bulmak için, Teorem 4.9'un diğer ispatını kullanacağız. Bu nedenle (1) denklemi

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{e}_1' + a_4\mathbf{e}_2' + a_5\mathbf{e}_3' + a_6\mathbf{e}_4' = [0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]$$

biçiminde yazılırsa,

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 + a_3 &= 0 \\ -a_2 + a_4 &= 0 \\ a_1 - a_2 + a_5 &= 0 \\ a_6 &= 0. \end{aligned}$$

homogen denklem sistemi elde edilir. İlaveli matris satıra indirgenmiş eşelon şekle dönüştürülürse,

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

elde edilir. (Gerçekleyiniz.)

İlk eleman 1'lere karşılık gelen sütunlar 1, 2, 3 ve 6 olduğu için, $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$ vektörlerini içeren R_4'ün bir tabanının $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_4'\}$ olduğu görülür. ■

Eğer W, sonlu boyutlu bir V vektör uzayının bir alt uzayı ise W'nin sonlu boyutlu ve boy $W \leq$ boy V olduğu gösterilebilir (Alıştırma 41),

Daha önce tanımlandığı gibi, bir V vektör uzayının verilen bir S cümlesi V'yi geriyor ve lineer bağımsız ise V'nin bir tabanıdır. Bununla beraber ek olarak V'nin boyutunun n olduğu verilirse, iki şarttan sadece birinin sağlanması gereklidir. Bu durum aşağıdaki teorem ile ifade edilmektedir.

Teorem 4.12 V, n-boyutlu bir vektör uzayı olsun.

(a) $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, V'nin vektörlerinin bir lineer bağımsız cümlesi ise S, V'nin bir tabanıdır.

(b) $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ cümlesi V vektör uzayının geriyorsa, S, V'nin bir tabanıdır.

İspat

İspat okuyucuya bırakılmıştır (Alıştırma 45). Teorem 4.12'nin özel bir uygulamasını verdim. ■

R^n (R_n)'nin bir S alt cümlesinin R^n (R_n)'nin bir tabanı olup, olmadığını belirlemek için, ilk olarak S'nin eleman sayısına bakılır. Eğer S'nin eleman sayısı n ise Teorem 4.12'nin ya (a) şıkkı ya da (b) şıkkı kullanılır. Eğer S cümlesi n tane elemana sahip değilse R^n,(R_n)'nin bir tabanı değildir. (Niçin?) Aynı düşünce, boyutu bilinen bir vektör uzayına veya bir alt uzaya uygulanabilir.

ÖRNEK 11 Örnek 6'da, boy $R_3 = 3$ ve S cümlesi beş vektör içerdiğinden, Teorem 4.12'den S'nin R_3'ün bir tabanı olmadığı sonucu çıkarılır. Örnek 3'te, boy $R_4 = 4$ ve S cümlesi dört vektör içerdiğinden, S cümlesi R_4'ü bir tabanı olabilir. Eğer S lineer bağımsız veya R_4'ü geriyorsa, S, R_4'ü bir tabanıdır, aksi halde R_4'ün bir tabanı değildir. Böylece Teorem 4.12'nin şartlarının ikisini değil, yalnızca bir tanesini kontrol etmek gerekir. ■

Şimdi R_n, (R_n)'nin n tane vektöründen oluşan bir S cümlesi lineer bağımszı ise S cümlesi R^n (R_n)'i gerer ve tersine S cümlesi R^n (R_n)'i geriyorsa, S'nin lineer bağımsız olduğunu hatırlayalım. Bu durumda, Kesim 4.5'teki Teorem 4.5'in koşulu [yani det $A \neq 0$] S'nin R^n, (R_n)'i germesi için gerek ve yeterlidir.

Teorem 4.13 V vektör uzayının geren sonlu bir cümle S olsun. S'nin bir maksimal bağımsız T alt cümlesi V'nin bir tabanıdır.

İspat

İspat okuyucuya bırakılmıştır (Alıştırma 46). ■

Anahtar Kelimeler

Bir vektör uzayının tabanı
Doğal (standart taban)
Sonlu boyutlu vektör uzayı
Sonsuz boyutlu vektör uzayı
Bir alt uzayın boyutu
Maksimal bağımsız cümle
Minimal geren cümle

4.6 Alıştırmalar

1. Aşağıdaki vektör cümlelerinden hangileri R^2 için tabandır? Gösteriniz.

(a) $\left\{\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right\}$ **(b)** $\left\{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}\right\}$

(c) $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\right\}$ **(d)** $\left\{\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\6\end{bmatrix}\right\}$

2. Aşağıdaki vektör cümlelerinden hangileri R^3 için tabandır? Gösteriniz.

(a) $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$

(b) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\right\}$

(c) $\left\{\begin{bmatrix}3\\2\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

(d) $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

3. Aşağıdaki vektör cümlelerinden hangileri R_4 için tabandır? Gösteriniz.

(a) $\{[1\ 0\ 0\ 1], [0\ 1\ 0\ 0], [1\ 1\ 1\ 1], [0\ 1\ 1\ 1]\}$.

(b) $\{[1\ -1\ 0\ 2], [3\ -1\ 2\ 1], [1\ 0\ 0\ 1]\}$

(c) $\{[-2\ 4\ 6\ 4], [0\ 1\ 2\ 0], [-1\ 2\ 3\ 2], [-3\ 2\ 5\ 6], [-2\ -1\ 0\ 4]\}$

(d) $\{[0\ 0\ 1\ 1], [-1\ 1\ 1\ 2], [1\ 1\ 0\ 0], [2\ 1\ 2\ 1]\}$

4. Aşağıdaki vektör cümlelerinden hangileri P_2 için tabandır? Gösteriniz.

(a) $\{-t^2 + t + 2, 2t^2 + 2t + 3, 4t^2 - 1\}$

(b) $\{t^2 + 2t - 1, 2t^2 + 3t - 2\}$

(c) $\{t^2 + 1, 3t^2 + 2t + 1, 6t^2 + 6t + 3\}$

(d) $\{3t^2 + 2t + 1, t^2 + t + 1, t^2 + 1\}$

5. Aşağıdaki vektör cümlelerinden hangileri P_3 için tabandır? Gösteriniz.

(a) $\{t^3 + 2t^2 + 3t^3 + 1, 6t^3 + 8t^2 + 6t + 4, t^3 + 2t^2 + t + 1\}$

(b) $\{t^3 + t^2 + 1, t^3 - 1, t^3 + t^2 + t\}$

(c) $\{t^3 + t^2 + t + 1, t^3 + 2t^2 + t + 3, 2t^3 + t^2 + 3t + 2, t^3 + t^2 + 2t + 2\}$

(d) $\{t^3 - t, t^3 + t^2 + 1, t - 1\}$

6. $\left\{\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\right\}$

matrisler cümlesine M_{22} vektör uzayı için bir taban olduğunu gösteriniz.

Alıştırma 7 ve 8'de verilen cümlelerin hangisinin R^3'ün bir tabanı olduğunu belirtiniz. $\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$ *vektörünü R^3'ün tabanı olan cümlenin vektörlerinin bir lineer birleşimi olarak yazınız.*

7. (a) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

(b) $\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$

8. (a) $\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\5\\1\end{bmatrix}\right\}$

(b) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\\-1\end{bmatrix}\right\}$

Alıştırma 9 ve 10 verilen cümlelerin hangisinin P_2 için bir taban olduğunu belirtiniz. $5t^2 - 3t + 8$ vektörünü P_2'nin tabanı olan cümlenin vektörlerinin bir lineer birleşimi olarak yazınız.

9. (a) $\{t^2 + t, t - 1, t + 1\}$ **(b)** $\{t^2 + 1, t - 1\}$

10. (a) $\{t^2 + t, t^2, t^2 + 1\}$ **(b)** $\{t^2 + 1, t^2 - t + 1\}$

11. R^3'ün

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}11\\10\\7\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}7\\6\\4\end{bmatrix}\right\}$$

vektör cümlesi tarafından gerilen bir W alt uzayını bulunuz.
W alt uzayının boyutu nedir? Araştırınız.

12. R_4'ün
$\{[1\ \ 1\ \ 0\ \ -1], [0\ \ 1\ \ 2\ \ 1],$
$[1\ \ 0\ \ 1\ \ -1], [1\ \ 1\ \ -6\ \ -3],$
$[-1\ \ -5\ \ 1\ \ 0]\}.$
vektör cümlesi tarafından gerilen bir W alt uzayı için bir taban bulunuz.
boy W nedir? Araştırınız.

13. P_3'ün
$\{t^3 + t^2 - 2t + 1, t^2 + 1, t^3 - 2t, 2t^3 + 3t^2 - 4t + 3\}$
W'nın bir tabanını bulunuz. W alt uzayının boyutu nedir? Araştırınız.

14. $S = \left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\right\}$
olsun. M_{22}'nin W= span S alt uzayının bir tabanını bulunuz.

15. $\{[a^2\ \ 0\ \ 1], [0\ \ a\ \ 2], [1\ \ 0\ \ 1]\}$ cümlesi R_3'ün bir tabanı olacak şekilde a'nın bütün değerlerini bulunuz.

16. M_{33}'ün bütün simetrik matrislerinin W alt uzayı için bir taban bulunuz.

17. M_{33}'ün bütün köşegen matrislerinin alt uzayı için bir taban bulunuz.

18. Bütün sürekli reel değeri fonksiyonların uzayının $\{\cos^2 t, \sin^2 t, \cos^2 t\}$ cümlesi tarafından gerilen alt uzayı W olsun. W'nın bir tabanını bulunuz. W'nın boyutu nedir? Araştırınız.

Alıştırma 19 ve 20 de, R^3 ve R^4'ün verilen alt uzaylarının bir tabanını bulunuz.

19. **(a)** $b = a + c$ olacak şekilde, $\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$ biçimindeki bütün vektörler,

(b) $b = a$ olacak şekilde, $\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$ biçimindeki

(c) $2a + b - c = 0$ olacak şekilde $\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$ biçimindeki bütün vektörler

20. **(a)** $a = 0$ olacak şekilde $\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$ biçimindeki bütün vektörler

(b) $\begin{bmatrix}a + c\\ a - b\\ b + c\\ -a + b\end{bmatrix}$ biçimindeki bütün vektörler,

(c) $a - b + 5c = 0$ olacak şekilde $\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$ biçimindeki bütün vektörler

21. P_2 $c = 2a - 3b$ olacak şekilde $at^2 + bt^2 + ct +$ d biçimindeki bütün vektörlerinin bir alt uzayı için bir taban bulunuz.

22. P_3, $b = 5a + 3d$ ve $c = 2a - 3b$ olacak şekilde $at^3 + bt^2 + ct + d$ biçimindeki bütün vektörlerinin bir alt uzayı için bir taban bulunuz.

Alıştırma 23 ve 24'te, R^4'ün verilen alt uzaylarının boyutlarını bulunuz.

23. **(a)** $d = a + b$ olacak şekilde $[a\ \ b\ \ c\ \ d]$ biçimindeki bütün vektörler.
(b) $c = a - b$ ve $d = a + b$ olacak şekilde $[a\ \ b\ \ c\ \ d]$ biçimindeki bütün vektörler.

24. **(a)** $a = b$ olacak şekilde $[a\ \ b\ \ c\ \ d]$ biçimindeki bütün vektörler.
(b) $[a + c\ \ \ a - b\ \ \ b + c\ \ \ -a + b]$ biçimindeki bütün vektörler.

25. R^2'nin, Alıştırma 1'de verilen vektörler tarafından gerilen alt uzaylarının boyutlarını bulunuz.

26. R^3'ün, Alıştırma 2'de verilen vektörler tarafından gerilen alt uzaylarının boyutlarını bulunuz.

27. R^4'ün, Alıştırma 3'te verilen vektörler tarafından gerilen alt uzaylarının boyutlarını bulunuz.

28. R^3'ün aşağıda verilen vektörleri içeren bir tabanını bulunuz.

(a) $\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 2\end{bmatrix}$ vektörü,

(b) $\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 2\end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 3\end{bmatrix}$ vektörleri

29. P_3'ün, $t^3 + t$ ve $t^2 - 1$ vektörlerini içeren bir tabanını bulunuz.

30. M_{23}'ün bir tabanını bulunuz. M_{23} uzayının boyutu nedir? Araştırınız.
Bu problemi M_{mn} uzayı için genelleştiriniz.

31. P_2'nin, $c = b - 2a$ olacak şekilde $at^2 + bt + c$ biçimindeki tüm vektörleri içeren alt uzayının boyutunu bulunuz.

32. P_3'ün, $b = 3a - 5d$ ve $c = d + 4a$ olacak şekilde $at^3 + bt^2 + ct + d$ biçimindeki tüm vektörleri içeren alt uzayının boyutunu bulunuz.

33. R^4'ün bir 2-boyutlu alt uzayın için bir örnek veriniz.

34. P_3'ün bir 2- boyutlu alt uzayı için bir örnek veriniz.

35. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ bir V vektör uzayının bir tabanı ise bu takdirde $c \neq 0$ için $\{c\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ cümlesinde V'nin bir tabanıdır. İspat ediniz.

36. Bütün polinomların P vektör uzayının sonlu boyutlu olmadığını ispat ediniz. [*Yol gösterme*: $\{p_1(t), p_2(t), \ldots, p_k(t)$ cümlesinin P'nin bir sonlu tabanı olduğunu kabul ediniz. $p_j(t)$ polinomunun derecesi d_j olsun. Bir çelişki elde ediniz.]

37. V, n-boyutlu bir vektör uzayı olsun. V'de $(n + 1)$-tane vektörün oluşturduğu cümlenin lineer bağımlı olduğunu gösteriniz.

38. Sonuç 4.3'ü ispat ediniz.

39. Sonuç 4.4'ü ispat ediniz.

40. Sonuç 4.5'i ispat ediniz.

41. W, sonlu boyutlu bir V vektör uzayının bir alt uzayı ise, W'nın sonlu boyutlu ve boy $W \leq$ boyu olduğunu gösteriniz.

42. W, sonlu boyutlu bir V vektör uzayının bir alt uzayı ve boy V = boy W ise, $V = W$ olduğunu gösteriniz.

43. R^3'ün, $\{\mathbf{0}\}$ ve R^3 alt uzaylarının orijinden geçen herhangi bir doğru veya düzlem olduğunu ispat ediniz.

44. Bir V vektör uzayının sıfırdan farklı vektörlerinin cümlesi $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ olsun ve V'deki her vektör S'nin vektörlerinin bir lineer birleşimi olarak tek türlü yazılabilsin. Bu durumda S'nin V için bir taban olduğunu ispat ediniz.

45. Teorem 4.12'i ispat ediniz.

46. Teorem 4.13'ü ispat ediniz.

47. R^n'nin bir tabanının $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ olduğunu kabul edelim. A $n \times n$ tipinden singüler olmayan bir matrisi ise $\{A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_n\}$ cümlesinin R^n için bir taban olduğunu gösteriniz. *Yol gösterme*: Kesim 4.5'teki Alıştırma 24'e bakınız.

48. R^n'nin vektörlerinin bir lineer bağımsız cümlesinin $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ve A'nın bir singüler matris olduğunu kabul edelim. $\{A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_n\}$ cümlesinin lineer bağımsız olup, olmadığını ispat ediniz.

49. İzi sıfıra eşit olan 3×3 tipinden bütün matrislerin W alt uzayının bir tabanını bulunuz. Boy W nedir? Araştırınız.

4.7 Homogen Sistemler

Kesim 2.2'deki Örnek 12'de, kimyasal denge denklemlerinin çözümünün nasıl bir homogen lineer denklem sisteminin çözümünü gerektirdiği gösterilmişti. Gerçekten, homogen sistemler lineer cebirde merkezi bir rol oynar. Bölüm 7'de görüleceği gibi, konunun esası tamamıyla geniş ve değişik uygulamalara sahip temel problemlerden bir tanesinin çözümünden ibarettir. Bu kesimde, Bölüm 7'de karşılaşılacak olan homogen sistemleri içeren çeşitli problemlerle ilgilenilecektir. Burada, Bölüm 7'deki ek bilgiler kullanılmaksızın bu problemin çözümüne yoğunlaşılacaktır.

A, $m \times n$ tipinden bir matris olmak üzere

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

sistemini göz önüne alalım. Kesim 4.3'teki Örnek 10'da görüldüğü gibi, homogen sistemlerin bütün çözümlerinin cümlesi R^n'nin bir alt uzayıdır. Bölüm 7'de tekrar ele alınacağı üzere, buradaki en önemli problem bu çözüm uzayının bir tabanını bulmaktır. Böyle bir tabanı bulmak için, Kesim 2.2'de verilen Gauss-Jordan indirgeme yöntemi kullanılacaktır. B matrisi sıfırdan farklı $1 \leq r \leq m$; tane satıra sahip olmak üzere, sistemin $[A \mid \mathbf{0}]$ ilaveli matrisi satırca indirgenmiş olan $[B \mid \mathbf{0}]$ matrisine dönüştürülür. Genelliği bozmaksızın, ilk eleman 1'lere

karşılık gelen sıfırdan farklı r satırın, ilk r sütunda yer alacağı kabul edilecektir. Eğer $r = n$ ise, bu takdirde

$$[B \mid \mathbf{0}] = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{n} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} r = n \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m$$

ve $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sistemin tek çözümü aşikar çözümdür. Çözüm uzayının tabanı yoktur and boyutu sıfırdır.

Eğer $r < n$ ise bu takdirde

$$[B \mid \mathbf{0}] = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{1\,r+1} & \cdots & b_{1n} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{2\,r+1} & \cdots & b_{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r\,r+1} & \cdots & b_{rn} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{n} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} r \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m$$

$x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$, keyfi s_j, $j = 1,2, \ldots, p$ ve $p = n - r$ reel değerlerini almak üzere, ilk eleman 1'lere karşılık gelen çözüm

$$\begin{aligned} x_1 &= -b_{1\,r+1}x_{r+1} - b_{1\,r+2}x_{r+2} - \cdots - b_{1n}x_n \\ x_2 &= -b_{2\,r+1}x_{r+1} - b_{2\,r+2}x_{r+2} - \cdots - b_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x_r &= -b_{r\,r+1}x_{r+1} - b_{r\,r+2}x_{r+2} - \cdots - b_{rn}x_n, \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_{1\,r+1}s_1 - b_{1\,r+2}s_2 - \cdots - b_{1n}s_p \\ -b_{2\,r+1}s_1 - b_{2\,r+2}s_2 - \cdots - b_{2n}s_p \\ \vdots \\ -b_{r\,r+1}s_1 - b_{r\,r+2}s_2 - \cdots - b_{rn}s_p \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_p \end{bmatrix}$$

$$= s_1 \begin{bmatrix} -b_{1\,r+1} \\ -b_{2\,r+1} \\ \vdots \\ -b_{r\,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s_2 \begin{bmatrix} -b_{1\,r+2} \\ -b_{2\,r+2} \\ \vdots \\ -b_{r\,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + s_p \begin{bmatrix} -b_{1n} \\ -b_{2n} \\ \vdots \\ -b_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$s_1, s_2, \ldots, s_p$ keyfi, reel değerlere karşılık geldiği için bu değerler aşağıda olduğu gibi

$$\begin{array}{llll} s_1 = 1, & s_2 = 0, & \ldots, & s_p = 0, \\ s_1 = 0, & s_2 = 1, & \ldots, & s_p = 0, \\ & & \vdots & \\ s_1 = 0, & s_2 = 0, & \ldots, \quad s_{p-1} = 0, & s_p = 1. \end{array}$$

olarak seçilebilir. Bu değerler için

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -b_{1\,r+1} \\ -b_{2\,r+1} \\ \vdots \\ -b_{r\,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -b_{1\,r+2} \\ -b_{2\,r+2} \\ \vdots \\ -b_{r\,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \qquad \mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} -b_{1n} \\ -b_{2n} \\ \vdots \\ -b_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

çözümleri elde edilir.

$$\mathbf{x} = s_1\mathbf{x}_1 + s_2\mathbf{x}_2 + \ldots + s_p\mathbf{x}_p$$

olduğundan $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p\}$ cümlesinin $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sisteminin çözüm uzayını gerer.

Bundan başka,

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \ldots + a_p\mathbf{x}_p = \mathbf{0}$$

denklemi düzenlenirse, bu denklemin katsayılar matrisi sütunları $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p$ olan bir matris olduğu görülür. Bu matrisin $r + 1, r + 2, \ldots, n$ satırları gözönüne alınırsa,

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_p = 0$$

olduğu kolayca görülebilir. Bundan dolayı, $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p\}$ cümlesi lineer bağımsız olup, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sisteminin çözüm uzayı (A'nın sıfır uzayı) için bir tabandır.

A $m \times n$ matris olmak üzere, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sisteminin çözüm uzayı veya A'nın sıfır uzayının bir tabanını bulmak için aşağıdaki yol izlenir.

Adım 1. Gauss-Jordan indirgeme yöntemi ile verilen homogen sistem çözülür. Eğer, çözüm keyfi sabitler içermiyorsa çözüm uzayı $\{\mathbf{0}\}$ olup, bir tabanı yoktur ve çözüm uzayının boyutu sıfırdır.

Adım 2. $\mathbf{x}$ çözümü keyfi sabitler içeriyorsa, $\mathbf{x}$ vektörü katsayılar $s_1, s_2, \ldots, s_p$ olmak üzere

$$\mathbf{x} = s_1\mathbf{x}_1 + s_2\mathbf{x}_2 + \ldots + s_p\mathbf{x}_p$$

olacak şekilde $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p$ vektörlerinin bir lineer birleşimi olarak yazılabilir.

Adım 3. $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p\}$ vektörler cümlesi $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sistemin çözüm uzayının bir tabanı olup, boyutu p.

Uyarı Adım 1'de, $[A \mid \mathbf{0}]$ ilaveli matrisinin satırca indirgenmiş eş olan matrisinin sıfırdan farklı r tane satıra sahip olduğunu kabul edelim (r, ilk eleman 1'lerin sayısı). Bu durumda $p = n - r$. Yani, çözüm uzayının boyutu $n - r$. Bundan başka, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sisteminin bir $\mathbf{x}$ çözümü $(n - r)$ tane keyfi sabite sahiptir.

A, $m \times n$ tipinde matris ise, A'nın sıfır uzayının boyutu A'nın **sıfırlığı** olarak adlandırılır ve sıfırlık A ile gösterilir.

ÖRNEK 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

homogen sisteminin W çözüm uzayının bir tabanını ve boyutunu bulunuz.

Çözüm

Adım 1. Verilen sistemi Gauss-Jordan indirgeme yöntemi ile çözmek için, ilaveli matris satırca indirgenmiş eşelon matrise dönüştürülürse

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

elde edilir. (Gerçekleyiniz.) s ve t reel sayılar olmak üzere sistemin her çözümü

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2s - t \\ -2s + t \\ s \\ -2t \\ t \end{bmatrix} \tag{1}$$

biçimindedir. (Gerçekleyiniz.)

Adım 2. W'nin hir vektörü bir çözümdür ve (1) denklemi ile verilir. Böylece, W'nin her vektörü

$$\mathbf{x} = s \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

olarak yazılabilir. s ve t keyfi reel değerler olabildiğinden, ilk olarak $s = 1$. $t = 0$ ve sonra da $s = 0$, $t = 1$ alındığında (2) denkleminden

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

çözümleri elde edilir.

Adım 3. $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ cümlesi W'nin bir tabanıdır. Üstelik, boy $W = 2$. ■

Bölüm 7'de sıklıkla çözülen bir problem tipini aşağıdaki örnekle açıklayalım.

ÖRNEK 2 $\lambda = -2$ ve

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

matrisi için $(\lambda I_3 - A)\mathbf{x} = 0$ homogen sisteminin çözüm uzayının bir tabanını bulunuz.

Çözüm

$-2I_3 - A$ matrisi için

$$-2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu son matris homogen sistemin katsayılar matrisidir. Böylece

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ilaveli matrisi satırca indirgenmiş eşelon matrise dönüştürülürse,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

bulunur. (Gerçekleyiniz.) s keyfi bir reel sayı olmak üzere sistemin her çözümü

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -s \\ \frac{2}{3}s \\ s \end{bmatrix}$$

biçimindedir. (Gerçekleyiniz.) Çözüm uzayının her vektörü

$$\mathbf{x} = s\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

olup, $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ cümlesi çözüm uzayının bir tabanıdır. ■

Bölüm 7'de sık olarak çözülen bir diğer önemli bir problemi aşağıdaki örnekle açıklayalım.

ÖRNEK 3 $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

matrisi için $(\lambda I_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sisteminin aşikar olmayan bir çözüme sahip olması için λ'nın alacağı reel değerleri bulunuz.

Çözüm

$\lambda I_2 - A$ matrisi için

$$\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -5 \\ -3 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$$

O halde $(\lambda I_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sistemi

$$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -5 \\ -3 & \lambda + 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Kesim 3.2'deki Sonuç 3.1'den, bu homogen sistemin aşikar olmayan bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şartın

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -5 \\ -3 & \lambda + 1 \end{bmatrix}\right) = 0,$$

yani, gerek ve yeter şartın

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1) - 15 = 0$$
$$\lambda^2 - 16 = 0$$
$$\lambda = 4 \text{ veya } \lambda - 4$$

olduğu söylenebilir. Böylece, $\lambda = 4$ veya $(\lambda I_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ olduğundan verilen bir A matrisi için $(\lambda I_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sistemi aşikar olmayan bir çözüme sahiptir. ■

■ Homogen Olmayan Lineer Sistemler ve Homogen Sistemler Arasındaki Bağıntı

Kesim 4.3'te belirtildiği gibi, A $m \times n$ tipinden bir matris ise $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, lineer sisteminin bütün çözümlerinin cümlesi R^n'nin bir alt uzayı değildir. Aşağıdaki örnekte $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, homogen olmayan sistem ile $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sistemin bütün çözümlerinin bir cümlesi arasındaki bir geometrik bağıntı açıklanmıştır.

ÖRNEK 4

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & 6 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

lineer sistemini gözönüne alalım. Bu lineer sistemin bütün çözümlerinin cümlesi bütün

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 - 2r + 3s \\ r \\ s \end{bmatrix}$$

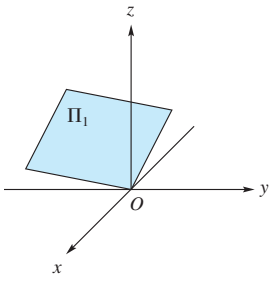
vektörlerini içerir (gerçekleyiniz), öyle ki bu vektör

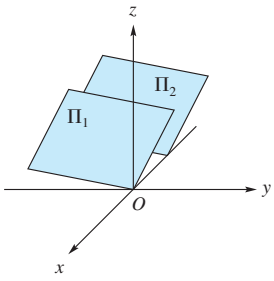
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. Bu sisteme karşılık gelen homogen sistemin bütün çözümlerinin cümlesi, R^3'ün bütün

$$\mathbf{x} = r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

biçimindeki vektörlerini içeren iki boyutlu alt uzayıdır. Bu alt uzay orijinden geçen Π_1 düzlemidir, verilen homogen olmayan sistemin bütün çözümlerinin cümlesi orijinden geçmeyen bir Π_2 düzlemidir ve Π_1 düzlemini kendisine paralel olacak şekilde hareket ettirilmesiyle bulunur. Bu durum Şekil 4.28'de açıklanmıştır. ■





ŞEKİL 4.28 Π_1, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sisteminin çözüm uzayı. Π_2, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sisteminin bütün çözümlerinin cümlesi.

Aşağıdaki sonuç, Kesim 2.2'de verilen diferensiyel denklemlerin incelenmesinde önemlidir ve ispatı aynı kesimde Alıştırma 29 (b)'de okuyucuya bırakılmıştır.

$\mathbf{x}_p$, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ homogen olmayan sistemin bir özel çözümü ve $\mathbf{x}_h$, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sistemin bir çözümü ise $\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$ verilen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sisteminin bir çözümüdür. Üstelik, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ homogen olmayan sistemin her $\mathbf{x}$ çözümü, $\mathbf{x}_p$ verilen homogen olmayan sistemin bir özel çözümü ve $\mathbf{x}_h$ $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sistemin çözümü olmak üzere $\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$ olarak yazılabilir. Böylece Örnek 4'te r ve s keyfi reel sayılar olmak üzere

$$\mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{x}_h = r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir.

Anahtar Kelimeler

Homogen sistem
Çözüm (sıfır) uzayı
Boyut
Sıfırlık
Keyfi sabitler

4.7 Alıştırmalar

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 4 \\ -8 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

(a) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sisteminin bütün çözümlerini bulunuz.

(b) Sistemin her bir çözümünü R_3'ün iki vektörünün lineer birleşimi olarak ifade ediniz.

(c) Çözüm uzayının orijinden geçen bir düzlem olduğunu göstermek için bu vektörleri üç boyutlu koordinat sisteminde çiziniz.

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ olsun.

(a) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sisteminin bütün çözümlerini bulunuz.

(b) Her bir çözümü R_3'ün iki vektörünün bir lineer birleşimi olarak yazınız.

(c) Çözüm uzayının orijinden geçen bir düzlem olduğunu göstermek için bu vektörleri üç boyutlu bir koordinat sisteminde çiziniz.

Alıştırma 3-10. verilen homogen sistemlerin çözüm uzayının bir tabanını ve boyutunu bulunuz.

3. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

5. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 &= 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0 \end{aligned}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 6 & 2 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 & 3 & 3 & 4 \\ -2 & -4 & 6 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & -3 & -2 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Alıştırma 11. ve 12.'de verilen her A matrisinin sıfır uzayının bir tabanını bulunuz.

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$

Alıştırma 13-14'te verilen λ skaları ve A matrisi için $(\lambda I_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sistemin çözüm uzayının bir tabanını bulunuz.

13. $\lambda = 1, A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

14. $\lambda = -3, A = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

15. $\lambda = 1, A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

16. $\lambda = 3, A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Alıştırma 17.-20'de $(\lambda I_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sistemi aşikar olmayan çözüme sahip olacak şekilde bütün λ reel sayılarını bulunuz.

17. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ **18.** $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

19. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

20. $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

Alıştırma 21 ve 22'de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sisteminin çözümünü bulunuz ve bu çözümü $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$ biçiminde yazınız.

21. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$

22. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

23. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sisteminin bir çözüm cümlesi $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ olsun. span S'nin her vektörünün $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sisteminin bir çözümü olduğunu gösteriniz.

24. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sisteminin $n \times n$ tipinden katsayılar matrisinin herhangi bir satır veya sütun elemanları sıfır ise $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sisteminin aşikar olmayan bir çözüme sahip olduğunu gösteriniz.

25. **(a)** Sıfır uzayının boyutu 3 olan 3×3 tipinden biricik matrisin sıfır matrisi olduğunu gösteriniz.

(b) A sıfırdan farklı 3×3 tipinde bir matris ve $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sisteminin aşikar olmayan bir çözüme sahip olduğunu kabul edelim. A'nın sıfır uzayının boyutunu 1 veya 2 olduğunu gösteriniz.

26. A ve B $m \times n$ tipinden matrisler ve bu matrislerin satırca indirgenmiş eşolon biçimleri aynıdır. A ve B matrislerinin sıfır uzayları arasındaki bağıntı nedir? Araştırınız.

4.8 Koordinatlar ve İzomorfizmler

Koordinatlar

V, n-boyutlu bir vektör uzayı ise V, n vektörden oluşan bir S tabanına sahip olduğunu biliyoruz ve şimdiye kadar S tabanındaki vektörlerin sıralı olmasına dikkat etmedik. Bununla beraber, bu kesimin değerlendirilmesinde V'nin bir $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ sıralı tabanından söz edeceğiz. Bu durumda $S_1 = \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ cümlesi V'nin farklı bir sıralı tabanıdır.

n-boyutlu V vektör uzayının bir sıralı tabanı $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ise, bu takdirde Teorem 4.8'den V'nin her $\mathbf{v}$ vektörü $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reel sayılar olmak üzere

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$$

olacak şekilde tek türlü ifade edilebilir.

S sıralı tabanına göre $\mathbf{v}$'nin koordinat vektörü

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

biçiminde gösterilecektir. $[\mathbf{v}]_S$ vektörünün bileşenlerine S sıralı tabanına göre V vektörünün koordinatları adı verilir.

ÖRNEK 1 P_1 vektör uzayını gözönüne alalım ve P_1'in bir sıralı tabanı $S = \{t, 1\}$ olsun. Eğer $\mathbf{v} = p(t) = 5t - 2$ ise S sıralı tabanına göre $\mathbf{v}$'nin koordinat vektörü

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Diğer taraftan, P_1 in sıralı tabanı $T = \{t + 1, t - 1\}$ ise,
$\mathbf{v} = p(t) = 5t - 2 = \frac{3}{2}(t + 1) + \frac{7}{2}(t - 1)$ olup, koordinat vektörü

$$[\mathbf{v}]_T = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

■

Dikkat edilirse $[\mathbf{v}]_S$ koordinat vektörü S sıralı tabanında vektörlerin sırasına bağlı olup, bu sıradaki bir değişim $\mathbf{v}$'nin S'ye göre koordinatlarını değiştirebilir.

ÖRNEK 2 R_3 vektör uzayını gözönüne alalım ve

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde R_3'ün bir sıralı tabanı $S = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ olsun

$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$ ise $[\mathbf{v}]_S$ koordinat vektörünü hesap ediniz.

Çözüm

$[\mathbf{v}]_S$ koordinat vektörünü bulmak için

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}$$

olacak şekilde a_1, a_2 ve a_3 sabitlerinin bulunması gerekir. Bu bize ilaveli matrisi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \end{array}\right]$$

veya buna eşdeğer olarak,

$$[\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3 | \mathbf{v}]$$

olan bir lineer sistem verir.
(1)'deki matris satırca indirgenmiş eşelon biçime dönüştürülürse

$$a_1 = 3, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = -2$$

çözümü elde edilir. Böylece,

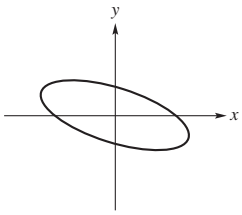
$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

bulunur. ■

Kesim 1.7'deki Örnek 5'te sıfırdan farklı h ve k için

$$A = \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

olmak üzere $f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ ile tanımlanan $f : R^2 \to R^2$ matris dönüşümü birim çemberi merkezi orijinde olan bir elipse dönüştürür. Bölüm 8'deki teknikler kullanılarak, reel katsayılı 2×2 tipinden bir A matrisi için $f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ ile tanımlanan bir $f : R^2 \to R^2$ matris dönüşümü birim çemberi merkezi orijinde olan bir elipse dönüştürür. 2×2 tipinden bir genel matrisle elips asal ve yedek eksenleri koordinat eksenlerine paralel olmayacak şekilde döndürülebilir (Şekil 4.29'a bakınız).



ŞEKİL 4.29

Birim çember üzerindeki herhangi bir noktanın koordinatları $x = \cos(\theta)$, $y = \sin(\theta)$ ve orijinden (x, y) noktasına bir $\mathbf{v}$ vektörü

$$\mathbf{v} = \cos(\theta)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \sin(\theta)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde R^2'nin doğal tabanının bir lineer birleşimi olarak yazılabilir. f matris dönüşümü altında (x, y) noktasının görüntüsünün koordinatları

$$f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = A\begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

eşitliğinden hesap edilebilir.

Birim çemberin ardışık olarak n defa görüntüsü alınırsa, f matris dönüşümü kullanılarak (x, y) noktasının koordinatları

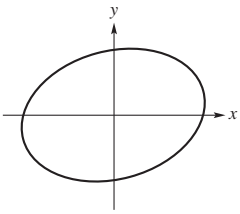
$$A^n \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

matris çarpımından hesap edilir ve bu oldukça karışık ifade olabilir. Bununla birlikte, A matrisinin özel özellikleri kullanıldığı takdirde tabanların değişim böyle koordinatların hesap edilmesini çok basit hale getirebilir. Örnek 3'te bu durumu açıklayacağız. Bölüm 7'de böyle tabanların nasıl belirlenebileceğini açıklayacağız.

ÖRNEK 3

$$A = \begin{bmatrix} 0.97 & 0.12 \\ 0.03 & 0.88 \end{bmatrix}$$

$f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ biçiminde tanımlanan bir matris dönüşümü olsun. Bu matris dönüşümü vasıtası ile birim çemberin görüntüsü Şekil 4.30'da gösterilmiştir.



ŞEKİL 4.30

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} f : R^2 \to R^2 \text{ olsun. O halde,}$$

$A\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$ ve $A\mathbf{v}_2 = 085\mathbf{v}_2$ olduğunu görürüz. Bundan başka, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ bir lineer bağımsız cümledir (gerçekleyiniz) ve böylece R^2'nin bir tabanıdır. (Açıklayınız.) Birim çember üzerinde, orijinden bir $(x, y) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ noktasına bir $\mathbf{v}$ vektörü $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$ vektörlerinin bir lineer birleşimi olup,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} = \frac{\cos(\theta) + \sin(\theta)}{5}\mathbf{v}_1 + \frac{\cos(\theta) - 4\sin(\theta)}{5}\mathbf{v}_2$$

bu takdirde $f(\mathbf{v})$,

$$\begin{aligned} A\mathbf{v} &= \frac{\cos(\theta) + \sin(\theta)}{5}A\mathbf{v}_1 + \frac{\cos(\theta) - 4\sin(\theta)}{5}A\mathbf{v}_2 \\ &= \frac{\cos(\theta) + \sin(\theta)}{5}\mathbf{v}_1 + \frac{\cos(\theta) - 4\sin(\theta)}{5}0.85\mathbf{v}_2, \end{aligned}$$

olarak verilir. Böylece, $f(\mathbf{v})$ vektörünün $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ tabanına göre koordinatları

$$\left(\frac{\cos(\theta) + \sin(\theta)}{5}, \frac{\cos(\theta) - 4\sin(\theta)}{5}0.85\right)$$

f matris dönüşümünün n defa uygulanmasından sonra, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ tabanına göre birim çember üzerindeki (x, y)'nin görüntüsünün koordinatları

$$\left(\frac{\cos(\theta) + \sin(\theta)}{5}, \frac{\cos(\theta) - 4\sin(\theta)}{5}(0.85)^n\right)$$

olup, bu hesap ardışık matris çarpımı yapmayı gerektirmediğinden oldukça kolaydır. ■

Bir V vektör uzayının bir sıralı tabanı $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ve V

$$[\mathbf{v}]_S = [\mathbf{w}]_S$$

olacak biçimde herhangi iki vektörü $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ olsun. Şimdi $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ olduğunu göstereceğiz.

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \text{ ve } [\mathbf{w}]_S = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

olsun.

$[\mathbf{v}]_S = [\mathbf{w}]_S$ olduğundan,

$$a_i = b_i, \quad i = 1,2, \ldots,n.$$

elde edilir. O halde

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$$

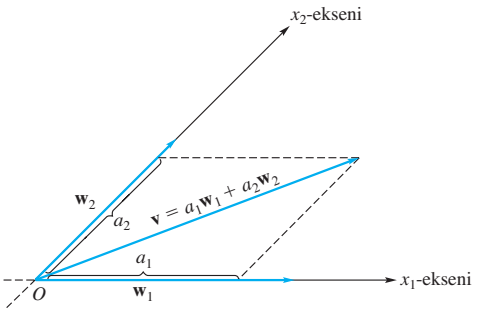
ve

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_n\mathbf{v}_n \\ &= a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n \\ &= \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Beklenildiği gibi, $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$, V vektör uzayının iki vektörü ve $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ ise, bu takdirde de S, V'nin bir sıralı tabanı olmak üzere $[\mathbf{v}]_S = [\mathbf{w}]_S$.

Böylece, bir V vektör uzayının bir $\mathbf{v}$ vektörü ve V'nin sabit bir S sıralı tabanına göre $\mathbf{v}$'nin $[\mathbf{v}]_S$ koordinat vektörü arasında bire bir eşleme vardır.

Bir sıralı taban seçimi ve V'nin her $\mathbf{v}$ vektörüne bir koordinat vektörünün karşılık getirilmesi sonucu bize vektör uzayını "resmetme" imkanını tanır. Örnek 1'i kullanmak suretiyle bu notasyonu açıklayacağız. R^2 düzleminde sabit bir O noktasını seçelim ve O notkasından P_1'in $S = \{t, 1\}$ sıralı tabanındaki t ve 1 taban vektörlerini temsil eden $\mathbf{w}_1$ ve $\mathbf{w}_2$ yönlü doğru parçalarını çizelim. (Şekil 4.31'e bakınız.) $\mathbf{w}_1$ ve $\mathbf{w}_2$'nin doğrultuları, sırası ile, x_1 ve x_2 eksenleri adı verilen iki doğru belirtir. x_1-ekseni üzerindeki pozitif yön $\mathbf{w}_2$'in yönlü, x_1-ekseni üzerindeki negatif yön ise $\mathbf{w}_1$ vektörünün yönüdür.



ŞEKİL 4.31

Benzer şekilde, x_2-ekseni üzerindeki pozitif yön $\mathbf{w}_2$'nin yönü, x_2-ekseni üzerindeki negatif yön ise $-\mathbf{w}_2$ vektörünün yönüdür. $\mathbf{w}_1$ ve $\mathbf{w}_2$ vektörlerinin uzunlukları sırasıyla x_1 ve x_2 eksenleri üzerindeki ölçüleri belirtir. $\mathbf{v}$, P_1'in bir vektörü ise, $\mathbf{v}$ vektörü $\mathbf{v} = a_1\mathbf{w}_1 + a_2\mathbf{w}_2$ olarak tek türlü yazılır. x_1 ekseni üzerindeki $|a_1|$ uzunluğunda bir doğru parçasını (a_1 pozitif ise pozitif yönde, negatif ise negatif yönde) işaretleyelim ve bu doğru parçasının uç noktasından $\mathbf{w}_2$'ye paralel bir doğru çizelim. Benzer şekilde, x_2-ekseni yönünde $|a_2|$ uzunluğuna sahip bir doğru parçasını (a_2 pozitif ise pozitif yönde, a_2 negatif ise negatif yönde) işaretleyelim ve bu doğru parçasının uç noktasından $\mathbf{w}_1$ vektörüne paralel bir doğru çizelim. O noktasından bu iki doğrunun kesim noktasına bir yönlü doğru parçası çizelim. Bu yönlü doğru parçası $\mathbf{v}$ vektörünü gösterir.

İzomorfizmler

$\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$, $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ sıralı tabanına sahip n-boyutlu bir V vektör uzayının iki vektörü ise, $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ vektörleri

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n, \qquad \mathbf{w} = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \ldots + b_n\mathbf{v}_n.$$

olarak tek türlü yazılabilir. Böylece, $\mathbf{v}$ ile $\mathbf{w}$ vektörlerini, R_n'nin $[\mathbf{v}]_S$ ve $[\mathbf{w}]_S$ elemanlarına karşılık getirilebilir; yani

$$\mathbf{v} \rightarrow [\mathbf{v}]_S$$
$$\mathbf{w} \rightarrow [\mathbf{w}]_S$$

$\mathbf{v} + \mathbf{w}$ ile gösterilen $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (a_1 + b_1)\mathbf{v}_1 + (a_2 + b_n)\mathbf{v}_2 + \ldots + (a_n + b_n)\mathbf{v}_n$ vektörü

$$[\mathbf{v} + \mathbf{w}]_S = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} = [\mathbf{v}]_S + [\mathbf{w}]_S$$

vektörüne karşılık getirilir. Böylece

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} \rightarrow [\mathbf{v} + \mathbf{w}]_S = [\mathbf{v}]_S + [\mathbf{w}]_S$$

Yani, V'nin $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ vektörleri toplanıldığında $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ vektörüne R^n'de karşılık gelen $[\mathbf{v} + \mathbf{w}]_S$ koordinat vektörünü bulmak için, bu vektörlerin $[\mathbf{v}]_S$ ve $[\mathbf{w}]_S$ koordinat vektörleri toplanmalıdır.

Benzer şekilde, c bir reel sayı ise, bu takdirde

$$c\mathbf{v} = (ca_1)\mathbf{v}_1 + (ca_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + (ca_n)\mathbf{v}_n$$

olup,

$$[c\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ \vdots \\ ca_n \end{bmatrix} = c[\mathbf{v}]_S$$

anlamına gelir. O halde,

$$c\mathbf{v} \rightarrow [c\mathbf{v}]_S = c[\mathbf{v}]_S$$

yazılabilir ve böylece bir c skaları ile bir $\mathbf{v}$ vektörü çarpıldığında $c\mathbf{v}$ vektörüne R^n'de karşılık gelen koordinat vektörünü bulmak için $\mathbf{v}$ ile $[\mathbf{v}]_S$ koordinat vektörü çarpılmalıdır.

Cebirsel açıdan bakıldığında önerilen bu tartışma V ile R^n'nin oldukça benzer olduğudur. Şimdi bu kavramı açıklayalım.

L, bir V vektör uzayından br $\mathbf{w}$ W vektör uzayına bir fonksiyon olsun. $\forall\ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbf{v}$ için $L(\mathbf{v}_1) = L(\mathbf{v}_2)$ iken $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ oluyorsa L'nin birebir olduğunu hatırlayalım. Aynı zamanda, her $\mathbf{w} \in W$ için $L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ olacak şekilde en az bir $\mathbf{v} \in V$ varsa L fonksiyonu örtendir. Böylece,

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlanan $L : R^3 \to R^2$ dönüşümü örtendir. Bunu görmek için $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ olduğunu kabul edelim ve

$$L(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} = \mathbf{w} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde bir $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ vektörünü araştıralım. Böylece, a_3 keyfi olmak üzere $a_1 = b_2$, $a_2 = b_1 - b_2$ çözümü bulunur. Bununla beraber,

$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ için

$$L(\mathbf{v}_1) = L(\mathbf{v}_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olmasına karşın $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$ olduğundan L dönüşümü birebir değildir.

TANIM 4.13

V, $\oplus$ ve $\odot$ işlemleri ile birlikte bir reel vektör uzayı ve W, $\boxplus$ ve $\odot$ işlemleri ile birlikte bir reel vektör uzayı olsun. Aşağıdaki (a) ve (b) koşullarını sağlayan birebir ve örten $L : V \to W$ fonksiyonuna V'den W'ya bir izomorfizm denir. (Yunancada isos = aynı ve masphos = yapı anlamına gelir.)

(a) $\forall\ \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ için $L(\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) = L(\mathbf{v}) \boxplus L(\mathbf{w})$

(b) $\forall\ \mathbf{v} \in \mathbf{V}$, $c \in R$ için $L(c \odot \mathbf{v}) = c \boxdot L(\mathbf{v})$

bu durumda V, **W'ya izomorftur** denir.

L, V'den W'ya bir izomorfizm ise Tanım 4.13'den V'nin vektörleri $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ ve $a_1, a_2, \ldots, a_k$ skalarlar olmak üzere

$$L(a_1 \odot \mathbf{v}_1 \oplus a_2 \odot \mathbf{v}_2 \oplus \ldots \oplus a_k \odot \mathbf{v}_k) = a_1 \boxdot L(\mathbf{v}_1) \boxplus a_2 L(\mathbf{v}_2) \boxplus \ldots \boxplus a_k \boxdot L(\mathbf{v}_k)$$

yazılabilir (Alıştırma 27(c)'ye bakınız).

Uyarı Tanım 4.13'ün (a) ve (b) koşullarını sağlayan bir V vektör uzayından bir W vektör uzayına bir L fonksiyonuna lineer dönüşüm

*Birebir ve örten fonksiyonlar hakkında daha fazla bilgi edinmek için Ek A'ya bakınız.

adı verilir. Bu fonksiyonlar Bölüm 6'da incelenecektir. Böylece bir V vektör uzayından bir W vektör uzayına bir izomorfizm birebir ve örten bir lineer dönüşümdür.

Teorem 4.15'in bir sonucu olarak "V, W'ya izomorftur" ve "W, V4ye izomorftur" ifadeleri yerine "V ve W izomorfturlar" ifadesi kullanılabilir.

İzomorf vektör uzaylarının sadece elemanları farklı olup, cebirsel yapıları aynıdır. Yani, V ve W bir L izomorfizmi altında izomorf iki vektör uzayı ise V'nin her $\mathbf{v}$ vektörü için $L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ olacak şekilde W'nin bir tek $\mathbf{w}$ vektörü ve tersine W'nin her $\mathbf{w}$ vektörü için $\mathbf{w} = L(\mathbf{v})$ olacak şekilde V'nin bir tek $\mathbf{v}$ vektörü vardır. Şimdi V'in her bir elemanı ile L altındaki görüntüsü ve $\oplus$ ve $\odot$ ile $\boxplus$ ise $\boxdot$ işlemleri yer değiştirirlerse tamamı ile W vektör uzayı elde edilir. İzomorf vektör uzaylarına ait en önemli örnek aşağıdaki teorem ile verilmektedir.

Teorem 4.14 V n-boyutlu bir vektör uzayı ise V R^n'e izomorftur.

İspat

V'nin sıralı tabanı $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ve

$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$ olmak üzere bir $L : V \to R^n$ fonksiyonu

$$L(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

olarak tanımlansın.

L'nin bir izomorfizm olduğunu göstereceğiz. İlk olarak L'nin birebir olduğunu gösterelim.

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \text{ ve } [\mathbf{w}]_S = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ olsun ve}$$

$L(\mathbf{v}) = L(\mathbf{w})$ olduğunu kabul edelim. O halde, $[\mathbf{v}]_S = [\mathbf{w}]_S$ ve ilk uyarı gözönüne alınırsa $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ olarak elde edilir.

R^n'de verilen bir vektör $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

ve $\mathbf{v} = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \ldots + b_n\mathbf{v}_n$ ise, $L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ olduğundan L örtendir.

Sonuç olarak L Tanım 4.13'teki (a) ve (b) koşullarını sağlar. $\mathbf{v}$ ve W, V vektör uzayının

$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ ve $[\mathbf{w}]_S = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ olacak şekilde iki vektörü olsun.

Önceden de gösterildiği gibi,

$$L(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = [\mathbf{v} + \mathbf{w}]_S = [\mathbf{v}]_S + [\mathbf{w}]_S = L(\mathbf{v}) + L(\mathbf{w})$$

ve

$$L(c\mathbf{v}) = [\,c\mathbf{v}]_S = [\,c\mathbf{v}]_S = cL(\mathbf{v}).$$

bundan dolayı V ve R^n izomorftur. ■

Bir diğer izomorfizm örneği, bu bölümün başında tartışılan düzlemde bir noktadan çıkan yönlü doğru parçalarının vektör uzayı R^2 ve bütün sıralı reel sayı ikililerinin vektör uzayı R^2 arasında verilebilir. R^3 için karşılık gelen bir izomorfizm mevcuttur. İzomorfizmin bazı önemli özellikleri Teorem 4.15'de verilmiştir.

Teorem 4.15 **(a)** Her V vektör uzayı kendisine izomorftur.

(b) V, W'ya izomorf ise W'da V'ye izomorftur.

(c) U, V'ye izomorf ve V'de W'ya izomorf ise U da W'ya izomorftur.

İspat

İspat okuyucuya bırakılmıştır (Alıştırma 28). [(a) ve (c) şıklarını göstermek zor değildir, (b) şıkkı biraz daha zordur ve aslında Teorem 6.7'de ispat edilecektir.] ■

Aşağıdaki teorem, aynı boyutlu bütün vektör uzaylarının cebirsel olarak benzer, tersine izomorf vektör uzaylarının aynı boyutlu olduğunu ifade eder.

Teorem 4.16 Sonlu boyutlu iki vektör uzayının izomorf olması için gerek ve yeter şart boyutlarının eşit olmasıdır.

İspat

V ve W n-boyutlu iki vektör uzayı olsun. V ile R^n ve W ile R^n izomorf olduklarından, Teorem 4.15'ten V ile W vektör uzaylarının izomorf olduğu söylenebilir.

Tersine, V ve W izomorf sonlu boyutlu iki vektör uzayı ve $L : V \to W$ bir izomorfizm olsun. boy $V = n$ olduğunu kabul edelim ve V'nin bir tabanı $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ olsun.

Şimdi W'nın bir tabanının $T = \{L(\mathbf{v}_1), L(\mathbf{v}_2), \ldots, L(\mathbf{v}_n)\}$ olduğunu ispat edeceğiz. İlk olarak, T W'yı gerer W'nın bir vektörü $\mathbf{w}$ ise, V'nin en az bir $\mathbf{v}$ vektörü için $\mathbf{w} = L(\mathbf{v})$. S, V'nin bir tabanı için, a_j, $1 \le j \le n$ tek olarak belirli reel sayılar olmak üzere $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$ yazılır. Böylece

$$\begin{aligned} L(\mathbf{v}) &= L(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n) \\ &= L(a_1\mathbf{v}_1) + L(a_2\mathbf{v}_2) + \cdots + L(a_n\mathbf{v}_n) \\ &= a_1L(\mathbf{v}_1) + a_2L(\mathbf{v}_2) + \cdots + a_nL(\mathbf{v}_n) \end{aligned}$$

Bundan dolayı, T W'yı gerer.

Şimdi kabul edelim ki

$$a_1L(\mathbf{v}_1) + a_2L(\mathbf{v}_2) + \ldots + a_nL(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}_W.$$

Alıştırma 29 (a)'dan $L(\mathbf{0}V) = 0_W$. L birebir olduğu için $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}_V$. S lineer bağımsız olduğundan $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ bulunur. Bu ise T'nin lineer bağımsız olmasını ifade eder. Bundan dolayı T, W'nin bir tabanıdır ve boy $W = n$. ■

Teorem 4.16'nın bir sonucu olarak, R^n ve R^m vektör uzaylarının izomorf olması için gerek ve yeter şart $m = n$ olmasıdır. (Alıştırma 30'a bakınız.) Üstelik, P_n ve R^{n+1} vektör uzayları izomorftur .(Alıştırma 32'ye bakınız.)

Şimdi Teorem 4.14'ün karşıtını aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

Sonuç 4.6 V, R^n'e izomorf olan sonlu boyutlu bir vektör uzayı ise boy $V = n$.

İspat

Bu sonuç, Teorem 4.16'dan elde edilir. ■

$L : V \to W$ bir izomorfizm ise L birebir örten dönüşüm olduğu için L^{-1} tersi vardır. [Bu Teorem 6.7'de gösterilecektir.) $L^{-1} : W \to V$ fonksiyonunda bir izomorfizm olduğu gösterilebilir. (Bu da aslında Teorem 6.7'de gösterilecektir.)

Üstelik, Teorem 4.16'nın ispatında gösterildiği gibi, $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ cümlesi V'nin bir tabanı ise $T = L(S) = \{L(\mathbf{v}_1), L(\mathbf{v}_2),\ldots, (\mathbf{v}_n)\}$ cümlesi de W'nin bir tabanıdır.

İzomorfizmlere örnek olarak, her biri dört boyutlu olan P_3, R_4 ve R^4 vektör uzaylarının birbirine izomorf olması verilebilir.

Bu kesimde sonlu boyutlu uzay fikrinin ilk bakışta soyut görünmesine karşın o kadar anlaşılmaz olmadığı gösterilmiştir. Gerçekten, böyle bir vektör uzayı cebirsel davranış bakımından R^n'de çok farklı değildir.

■ Geçiş Matrisleri

Şimdi aynı $\mathbf{v}$ vektörünün farklı tabanlara göre iki koordinat vektörü arasındaki ilişkiye bakalım. O halde, $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ ve $T = \{\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\ldots,\mathbf{w}_n\}$ cümleleri n-boyutlu V vektör uzayının sıralı iki tabanı olsun.

V'nin herhangi bir vektörü $\mathbf{v}$ ise, bu takdirde

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_n\mathbf{w}_n \text{ ve } [\mathbf{v}]_T = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

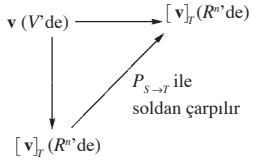
Ayrıca,

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}]_S &= [c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_n\mathbf{w}_n]_S \\ &= [c_1\mathbf{w}_1]_S + [c_2\mathbf{w}_2]_S + \cdots + [c_n\mathbf{w}_n]_S \\ &= c_1[\mathbf{w}_1]_S + c_2[\mathbf{w}_2]_S + \cdots + c_n[\mathbf{w}_n]_S . \end{aligned} \tag{2}$$

$\mathbf{w}_j$ vektörünün S tabanına göre koordinat vektörü

$$[\mathbf{w}_j]_S = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

ile gösterilsin. Bu takdirde j.inci sütunu $[\mathbf{w}_j]_S$ olan $n \times n$ tipinden matrise, T-tabanından S-tabanına geçiş matrisi denir ve $P_{S\leftarrow T}$ ile gösterilir. (2)



ŞEKİL 4.32

denklemi matris biçiminde

$$[\mathbf{v}]_S = P_{S \leftarrow T}[\mathbf{v}]_T$$

olarak yazılabilir.

Böylece, T-tabanından S-tabanına geçiş matrisini bulmak için, ilk olarak T-tabanına ait her bir elemanın S-tabanına göre koordinat vektörü hesap edilmelidir. Bu vektörleri, sırası ile, sütunlara yazmak suretiyle elde edilen matris geçiş matrisidir. (3) denklemi V'nin S-tabanına göre koordinat vektörü, $P_{S \leftarrow T}$ geçiş matrisi ile V'nin T-tabanına göre koordinat vektörünün çarpımı olduğunu ifade etmektedir. Şekil 4.32 (3) denklemini açıklamaktadır.

ÖRNEK 4

$V = R^3$ ve

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

olmak üzere sıralı iki taban

$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ve $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ olsun.

(a) T-tabanından S-tabanına $P_{S \leftarrow T}$ geçiş matrisini hesap ediniz.

(b) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}$ vektörü için (3) denklemini gerçekleyiniz.

Çözüm

(a) $P_{S \leftarrow T}$ geçiş matrisini hesaplamak için

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_1$$

koşulunu sağlayan a_1, a_2, a_3 katsayılarını bulunması gerekir. Bu denklem bize ilaveli matrisi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{w}_1 \end{array}\right]$$

olan, üç bilinmeyen ve üç denklemden oluşan bir lineer sistem verir. Yani ilaveli matris

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

olarak yazılır. Benzer şekilde,

$$b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + b_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_2$$
$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_3$$

olacak şekilde b_1, b_2, b_3 ve c_1, c_2, c_3 katsayılarının bulunması gerekir. Bu vektör denklemleri ilaveli matrisleri

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{w}_2 \end{array}\right] \quad \text{ve} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{w}_3 \end{array}\right]$$

veya

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \text{ ve } \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

olan üç bilinmeyen ve üç denklemden oluşan iki lineer sistem verir. Bütün üç lineer sistemin katsayılar matrisi $[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3]$ olduğu için bu üç ilaveli matrisi satırca indirgenmiş eşelon biçime getirmek için uygulanan operasyonlar

$$[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3 \quad \mathbf{w}_1 \mid \mathbf{w}_2 \mid \mathbf{w}_3]$$

bölünmüş matrisine eş zamanlı uygulanmak suretiyle satırca indirgenmiş eşelon şekil elde edilebilir. Böylece

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 2 & 1 & 1 & 6 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

matrisi satırca indirgenmiş şekle dönüştürülürse

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

bulunur. (Gerçekleyiniz.) Böylece T-tabanından S-tabanına geçiş matrisi

$$P_{S \leftarrow T} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}$ ise, $\mathbf{v}$ vektörü T-tabanına göre

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılır. Böylece,

$$[\mathbf{v}]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Bu takdirde

$$[\mathbf{v}]_S = P_{S \leftarrow T} [\mathbf{v}]_T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eğer $[\mathbf{v}_S]$ direkt olarak hesap edilirse,

$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ bulunur.

Böylece $[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Bundan dolayı,

$$[\mathbf{v}]_S = P_{S\leftarrow T}[\mathbf{v}]_T. \quad \blacksquare$$

T-tabanından S-tabanına geçiş matrisi $P_{S\leftarrow T}$'nin singüler olmadığını gösterelim. Herhangi bir $\mathbf{v} \in V$ için $P_{S\leftarrow T}[\mathbf{v}]_T = \mathbf{0}_{Rn}$ olduğunu kabul edelim. (3) denkleminden

$$P_{S\leftarrow T}[\mathbf{v}]_T = [\mathbf{v}]_S = 0_{R^n}$$

$\mathbf{v} = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \ldots + b_n\mathbf{v}_n$ ise,

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = [\mathbf{v}]_S = \mathbf{0}_{R^n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

olur. Böylece,

$$\mathbf{v} = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \ldots + 0\mathbf{v}_n$$

Bundan dolayı $[\mathbf{v}]_T = \mathbf{0}_{R^n}$ böylece, $P_{S\leftarrow T}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sistemi sadece aşikar çözüme sahiptir. Teorem 2.9'dan $P_{S\leftarrow T}$ geçiş matrisi singüler değildir.

Doğal olarak

$$[\mathbf{v}]_T = P_{S\leftarrow T}^{-1}[\mathbf{v}]_S$$

yazılabilir. Yani, $P_{S\leftarrow T}^{-1}$ S-tabanından T-tabanına geçiş matrisi olup $P_{S\leftarrow T}^{-1}$ matrisini j.inci sütunu $[\mathbf{v}_j]_T$

Uyarı 39–40. Alıştırmalarda S ve T, R^n vektör uzayının sıralı iki tabanı ise, M_S j.inci sütunu $\mathbf{v}_j$ olan $m \times n$ tipinden bir matris ve M_T j.inci sütunu $\mathbf{w}_j$ olan $n \times n$ tipinden bir matris olmak üzere

$$P_{S\leftarrow T} = M_S^{-1}M_T$$

olduğunu göstermemiz istenilecektir. Bu formül $P_{S\leftarrow T}$ matrisinin singüler olmadığını ifade eder ve bu kesimdeki y tabanı alıştırmaların çözümünde kolaylık sağlar.

ÖRNEK 5 Örnek 4'te tanımlandığı gibi R^3'ün sıralı iki tabanı S ve T olsun. S-tabanından T-tabanına $Q_{T\leftarrow S}$ geçiş matrisini indirekt hesaplayınız ve $Q_{T\leftarrow S} = P_{S\leftarrow T}^{-1}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$Q_{T\leftarrow S}$ matrisinin sütunları

$$\begin{aligned} a_1\mathbf{w}_1 + a_2\mathbf{w}_2 + a_3\mathbf{w}_3 &= \mathbf{v}_1 \\ b_1\mathbf{w}_1 + b_2\mathbf{w}_2 + b_3\mathbf{w}_3 &= \mathbf{v}_2 \\ c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + c_3\mathbf{w}_3 &= \mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

denklemlerinden elde edilen lineer sistemlerin çözüm vektörleridir. Örnek 4'te olduğu gibi, bu lineer sistemler

$$\left[\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \mathbf{w}_3 \,\middle|\, \mathbf{v}_1 \,\middle|\, \mathbf{v}_2 \,\middle|\, \mathbf{v}_3\right]$$

bölünmüş matrisini satırca indirgenmiş eşelon şekle dönüştürmek suretiyle çözülebilir. Yani,

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 6 & 4 & 5 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

matrisi satırca indirgenmiş eşelon şekle dönüştürülürse

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

elde edilir. (Gerçekleyiniz.) Böylece $Q_{T\leftarrow S}$ geçiş matrisi

$$Q_{T\leftarrow S} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. $Q_{T\leftarrow S}$ ile $P_{S\leftarrow T}$ matrisleri çarpılırsa $Q_{T\leftarrow S}P_{S\leftarrow T} = I_3$ elde edilir. (Gerçekleyiniz.) Böylece $Q_{T\leftarrow S} = P_{S\leftarrow T}^{-1}$ ■

ÖRNEK 6

$V = P_1$ ve

$$\mathbf{v}_1 = t, \quad \mathbf{v}_2 = t - 3, \quad \mathbf{w}_1 = t - 1, \quad \mathbf{w}_2 = t + 1$$

olmak üzere P_1'in sıralı iki tabanı $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ ve $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ olsun.

(a) T-tabanından S-tabanına $P_{S\leftarrow T}$ geçiş matrisini hesap ediniz.

(b) $\mathbf{v} = 5t + 1$ için (3) denklemini gerçekleyiniz.

(c) S-tabanından T-tabanına $Q_{T\leftarrow S}$ geçiş matrisini hesap ediniz ve $Q_{T\leftarrow S} = P_{S\leftarrow T}^{-1}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

(a) $P_{S\leftarrow T}$ matrisini hesap etmek için

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_1$$
$$b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2$$

vektör denklemlerini, ortaya çıkan

$$\left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

bölünmüş matrisini satırca indirgenmiş eşelon şekle dönüştürmek suretiyle çözmek gerekir. (Gerçekleyiniz.) Bu durumda elde edilen sonuç

$$\left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

olup,

$$P_{S\leftarrow T} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

(b) $\mathbf{v} = 5t + 1$ ise $\mathbf{v}$ vektörü T, tabanı cinsinden

$$\mathbf{v} = 5t + 1 = 2(t - 1) + 3(t + 1)$$

olarak yazılabilir. (Gerçekleyiniz.) Böylece

$$[\mathbf{v}]_T = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

O halde,

$$[\mathbf{v}]_S = P_{S \leftarrow T}[\mathbf{v}]_T = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$[\mathbf{v}]_S$ koordinat vektörü direkt hesaplanırsa

$$\mathbf{v} = 5t + 1 = \tfrac{16}{3}t - \tfrac{1}{3}(t - 3), \qquad [\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} \frac{16}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Bundan dolayı,

$$[\mathbf{v}]_S = P_{S \leftarrow T}[\mathbf{v}]_T$$

(c) S-tabanından T-tabanına $Q_{T \leftarrow S}$ geçiş matrisi

$$\left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

bölünmüş matrisini

$$\left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{array}\right]$$

satıra indirgenmiş şekle dönüştürmek suretiyle elde edilir. (Gerçekleyiniz.)

Böylece

$$Q_{T \leftarrow S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

$Q_{T \leftarrow S}$ ile $P_{S \leftarrow T}$ matrisleri çarpılırsa $Q_{T \leftarrow S} P_{S \leftarrow T} = I_2$ bulunur. (Gerçekleyiniz.) Bundan dolayı $Q_{T \leftarrow S} = P_{S \leftarrow T}^{-1}$ ■

Anahtar Kelimeler

Sıralı taban
Bir vektörün bir sıralı tabana göre koordinatları
Koordinatlar
Birebir fonksiyon
Örten fonksiyon
İzomorfizm
İzomorf vektör uzayları
Geçiş matrisi

4.8 Alıştırmalar

Alıştırma 1–6'da V'nin verilen bir sıralı tabanına göre **v***'nin koordinat vektörünü hesap ediniz.*

1. $V = R^2,\ S = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\},\ \mathbf{v} = \begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}.$

2. $V = R_3,\ S = \{[1\ -1\ 0], [0\ 1\ 0], [1\ 0\ 2]\},$ $\mathbf{v} = [2\ -1\ -2]$,

3. $V = P_1,\ S = \{t + 1, t - 2\},\ \mathbf{v} = t + 4$

4. $V = P_2,\ S = \{t^2 - t + 1, t + 1, t^2 + 1\},\ \mathbf{v} = 4t^2 - 2t + 3.$

5. $V = M_{22}$

$$S = \left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\},$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1&0\\-1&2\end{bmatrix}.$$

6. $V = M_{22}$

$$S = \left\{\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0\\-1&0\end{bmatrix}\right\}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1&3\\-2&2\end{bmatrix}.$$

Alıştırma 7–12'de V'nin verilen herhangi bir S sıralı tabanına göre koordinat vektörü $[\mathbf{v}]_S$ *olan* **v** *vektörünü hesap ediniz.*

7. $V = R^2\ \ S = \left\{\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right\}, [\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}.$

8. $V = R_3,$

$$S = \{[0\ \ 1\ \ -1], [1\ \ 0\ \ 0], [1\ \ 1\ \ 1]\},$$

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}.$$

9. $V = P_1,\ S = \{t, 2t - 1\}, [\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}.$

10. $V = P_2$

$$S = \{t^2 + 1, t + 1, t^2 + t\}, [\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix}3\\-1\\-2\end{bmatrix}.$$

11. $V = M_{22}$

$$S = \left\{\begin{bmatrix}-1&0\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2&2\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\2&3\end{bmatrix}\right\},$$

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix}2\\1\\-1\\3\end{bmatrix}$$

12. $V = M_{22}$

$$S = \left\{\begin{bmatrix}1&-2\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1&3\\0&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\right\},$$

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\2\end{bmatrix}.$$

Alıştırma 3'te bir uygun taban seçiminin $A\mathbf{v}$, $A^2\mathbf{v}$, $A^3\mathbf{v}$, … *biçimindeki bir dizinin değerlerinin hesabını büyük ölçüde basitleştirdiği gösterilmişti. Alıştırma, 13 ve 14'te Örnek 3'teki yönteme benzer bir yaklaşımı uygulayınız.*

13. $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \left\{\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}\right\},$

$$A = \begin{bmatrix}-0.85&-0.55\\1.10&0.80\end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{v} = \begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}.$$

(a) S'nin R^2 için bir taban olduğunu gösteriniz.

(b) $[\mathbf{v}]_S$ koordinat vektörünü bulunuz.

(c) $A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$ olacak şekilde bir λ_1 skalasını belirleyiniz.

(d) $A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2$ olacak şekilde bir λ_2 skalarını belirleyiniz.

(e) S tabanını ve (b).–(d). şıkları $A^n\mathbf{v}$'nin bir ifadesinin $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$ vektörlerinin bir lineer birleşimi olduğunu belirlemek için kullanınız.

(f) n artarken $A\mathbf{v}$, $A^2\mathbf{v}$, $A^3\mathbf{v}$, …, $A^n\mathbf{v}$,… dizisinin limit konumundaki davranışını tanımlayınız.

14. $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \left\{\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}\right\},$

$$A = \begin{bmatrix}-1&-2\\3&4\end{bmatrix} \text{ve } \mathbf{v} = \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}.$$

olsun. Alıştırma 13'teki (a).–(f). şıklardaki soruları cevaplayınız.

15. $S = \left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ ve $T = \left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right\}$

R^2'nin sıralı iki tabanı ve $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}$

olsun.

(a) **v** ve **w** vektörlerinin T tabanına göre koordinat vektörlerini bulunuz.

(b) T-tabanından S-tabanına $P_{S\leftarrow T}$ geçiş matrisi nedir? Araştırınız.

(c) $P_{S\leftarrow T}$ matrisini kullanarak, **v** ile **w** vektörlerinin S tabanına göre koordinatlarını bulunuz.

(d) **v** ve **w** vektörlerinin S tabanına göre koordinat vektörlerini direkt olarak hesap ediniz.

(e) S-tabanından T-tabanına $Q_{T\leftarrow S}$ geçiş matrisini bulunuz.

(f) $Q_{T\leftarrow S}$ matrisini kullanarak **v** ve **w** vektörlerinin koordinat vektörlerini bulunuz.

Bunları (a) şıkkında elde ettiğiniz sonuçlarla karşılaştırınız.

16. $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

ile

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

R^3ün sıralı iki tabanı ve $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix}$

olsun.

Alıştırma 15 in (a).–(f). şıklarını cevaplayınız.

17. $S = \{t^2 + 1, t - 2, t + 3\}$ ile $T = \{2t^2 + t, t^2 + 3, t\}$ P_2'nin sıralı iki tabanı ve $\mathbf{v} = 8t^3 - 4t + 6$, $\mathbf{w} = 7t^2 - t + 9$ olsun. Alıştırma 15'in (a).–(f) şıklarını cevaplayınız.

18. $S = \{[1\ \ 1\ \ 1], [1\ \ 2\ \ 3], [1\ \ 0\ \ 1]\}$ ile $T = \{[0\ \ 1\ \ 1], [1\ \ 0\ \ 0], [1\ \ 0\ \ 1]\}$ R_3'ün sıralı iki ve $\mathbf{v} = \{[-1\ \ 4\ \ 5], \mathbf{w} = [2\ \ 0\ \ 6]$ olsun.

Alıştırma 15'in (a). – (f). şıklarını cevaplayınız.

19. $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

M_{22} sıralı iki tabanı ve

$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ olsun.

Alıştırma 15'in (a). –(f). şıklarını cevaplayınız.

20. $S = \{[1\ \ -1], [2\ \ 1]\}$ ile $T = \{[3\ \ 0], [4\ \ -1]\}$

R_2'nin sıralı iki tabanı olsun. Eğer $V \in R_2$ ve $[\mathbf{v}]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ise $[\mathbf{v}]_S$'yi bulunuz.

21. $S = \{t + 1, t - 2\}$ ve $T = \{t - 5, t - 2\}$ P_1 in sıralı iki tabanı olsun $V \in P_1$ ve $[\mathbf{v}]_T = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ise $[\mathbf{v}]_S$ koordinat vektörünü bulunuz.

22. $S = \{[-1\ \ 2\ \ 1], [0\ \ 1\ \ 1], [-2\ \ 2\ \ 1]\}$ ve $T = \{[-1\ \ 1\ \ 0], [0\ \ 1\ \ 0], [0\ \ 1\ \ 1]\}$

R_3'ün sıralı iki tabanı olsun. $\mathbf{v} \in R_3$ ve $[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ise $[\mathbf{v}]_T$ koordinat vektörünü bulunuz.

23. P_2'nin **v** vektörünün $T = \{t^2, t - 1, 1\}$ sıralı tabanına göre koordinat vektörü $[\mathbf{v}]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ise $S = \{t^2 + t + 1, t + 1, 1\}$ sıralı tabanına göre $[\mathbf{v}]_S$ koordinat vektörü nedir? Araştırınız.

24. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

olmak üzere R_3'ün sıralı iki tabanı $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ve $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ olsun. T tabanından S-tabanına geçiş matrisinin

$$P_{S\leftarrow T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğunu kabul edelim. T tabanını bulunuz.

25. $\mathbf{w}_1 = t$, $\mathbf{w}_2 = t - 1$ olmak üzere P_1'in sıralı iki tabanı $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ ve $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ olsun.

S tabanından T tabanına geçiş matrisi $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ise S tabanını bulunuz.

26. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere, R^2'nin sıralı iki tabanı $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ ve $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ olsun. S tabanından T tabanına geçiş matrisi $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, ise T tabanını bulunuz.

27. $\mathbf{w}_1 = t - 1$, $\mathbf{w}_2 = t + 1$ olmak üzere P_1'in sıralı iki tabanı $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ ve $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ olsun. T tabanından S tabanına geçiş matrisi $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, ise S tabanını bulunuz.

28. Teorem 4.15'in (a) ve (c) şıklarını ispat ediniz.

29. V vektör uzayından W vektör uzayına bir izomorfizm $L : V \longrightarrow W$ olsun.

(a) $L(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.

(b) $L(\mathbf{v} - \mathbf{w}) = L(\mathbf{v}) - L(\mathbf{w})$ olduğunu gösteriniz.

(c) $L(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_k\mathbf{v}_k) = a_1L(\mathbf{v}_1) + a_2L(\mathbf{v}_2) + \ldots + a_k(\mathbf{v}_k)$ olduğunu gösteriniz.

30. R^n ve R^m in izomorf olması için gerek ve yeter şart $m = n$ olmasıdır. İspat ediniz.

31. Bir $L : R_n \longrightarrow R^n$ izomorfizmi bulunuz.

32. Bir $L : P_2 \longrightarrow R^3$ izomorfizmi bulunuz. Genel olarak P_n ve R^{n+1} uzaylarının izomorf olduğunu gösteriniz.

33 **(a)** M_{22}'nin R^4'e izomorf olduğunu gösteriniz.
(b) Boy M_{22} nedir? Araştırınız.

34. Bütün reel değerli sürekli fonksiyonların vektör uzayının bir alt uzayı V ve V'nin bir tabanı $S = \{e^t, e^{-t}\}$ olsun. V'nin R^2'ye izomorf olduğunu gösteriniz.

35. $S = \{\cos^2 t, \sin^2 t, \cos 2t\}$ cümlesi tarafından gerilen V, bütün reel değerli fonksiyonların vektör uzayının alt uzayı olsun. V ile R^2'nin izomorf olduğunu gösteriniz.

36. V ve W izomorf vektör uzayı olsunlar. V_1 V'nin bir alt uzayı ise, V_1, W'nin bir W_1 alt uzayına izomorf olduğunu ispat ediniz.

37. $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ n-boyutlu V vektör uzayının bir sıralı tabanı ve $\mathbf{v}$ ile $\mathbf{w}$'de V'nin iki vektörü olsun.

38. S bir n-boyutlu bir V vektör uzayının bir sıralı tabanı, $\mathbf{v}$ ile $\mathbf{w}$ V'nin vektörleri ve c bir skalar ise

$$[\mathbf{v} + \mathbf{w}]_S = [\mathbf{v}]_S + [\mathbf{w}]_S$$

ve

$$[c\mathbf{v}]_S = c[\mathbf{v}]_S$$

olduğunu gösteriniz.

Alıştırma 39–41'de $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ve $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ *R^n'nin sıralı iki tabanı olsun.*

39. M_S j.inci sütünü $\mathbf{v}_j$ olan $n \times n$ tipinden bir matris ve M_T j.inci sütunu $\mathbf{w}_j$ olan $n \times n$ tipinden bir matris olsun. M_S ve M_T matrislerinin singüler olmadığını gösteriniz. (*Yol gösterme:* $M_S\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ve $M_T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sistemlerini gözönüne alınız.)

40. V'nin bir vektörü $\mathbf{v}$ ise

$$\mathbf{v} = M_S[\mathbf{v}]_S \quad \text{and} \quad \mathbf{v} = M_T[\mathbf{v}]_T$$

olduğunu gösteriniz.

41. **(a)** $P_{S \leftarrow T} = M_S^{-1}M_T$. olduğunu göstermek için (3) denklemi ile Alıştırma 39 ve 40'ı kullanınız.

(b) $P_{S \leftarrow T}$ matrisinin singüler olmadığını gösteriniz.

(c) Örnek 4'ün (a) şıkkındaki sonucu gerçekleyiniz.

42. S, n-boyutlu V vektör uzayının bir sıralı tabanı olsun. $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ V'nin vektörlerinin bir lineer bağımsız cümlesi ise

$$\left\{[\mathbf{w}_1]_S, [\mathbf{w}_2]_S, \ldots, [\mathbf{w}_k]_S\right\}$$

cümlesinin de R^n'de lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

43. $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ n-boyutlu bir V vektör uzayının bir sarıl tabanı olsun.

$$\left\{[\mathbf{v}_1]_S, [\mathbf{v}_2]_S, \ldots, [\mathbf{v}_n]_S\right\}$$

cümlesinin R^n'nin bir sarıl tabanı olduğunu gösteriniz.

4.9 Bir Matrisin Rankı

Bu kesimde, verilen bir $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ cümlesi tarafından gerilen bir V vektör uzayının bir tabanını bulmak için daha başka bir etkili metod bulacağız. Kesim 4.6'da, S'nin bir alt cümlesi olacak şekilde V'nin bir tabanını bulmak için bir teknik geliştirdik (Teorem 4.9). Bu kesimde verilen metod V'nin bir tabanını üretir, fakat S'nin bir alt cümlesi olduğunu garanti etmez. A matrisine bir tek sayı ekleyecek ve sonra katsayılar matrisi A olan bir homogen sistemin çözüm uzayının boyutu hakkında bize bilgi verdiğini göstereceğiz.

TANIM 4.14 $m \times n$ tipinden bir matris

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

olsun. R_n'nin vektörleri olarak gözönüne alınan A matrisinin satırlarının germiş olduğu R_n'nin alt uzayına A matrisinin **satır uzayı** denir. Benzer şekilde, R^m'in vektörleri olarak gözönüne alınan A matrisinin sütunlarının germiş olduğu R^m'in alt uzayına A matrisinin **sütun uzayı** denir.

Teorem 4.17 A ve B satırca (sütunca) denk olan $m \times n$ tipinden iki matrisi ise A ve B matrislerini satır (sütun) uzayları eşittir.

İspat

A ve B satırca denk ise, B'nin satırları sonlu sayıda üç elemanter satır işlemi yardımıyla A matrisinin satırlarından elde edilir. Böylece B'nin her bir satırı A'nın satırlarının bir lineer birleşimidir. Bundan dolayı A'nın satır uzayı B'nin satır uzayını kapsar. ■

Elementer satır operasyonlarının tersleri B matrisine uygulanırsa, A matrisi elde edilir. Böylece, B'nin satır uzayı A'nın satır uzayını kapsar. Bundan dolayı A ile B'nin satır uzayları özdeştir. Sütun uzayları için ispat benzerdir.

ÖRNEK 1

$$\mathbf{v}_1 = [1 \ -2 \ 0 \ 3 \ -4], \ \mathbf{v}_2 = [3 \ 2 \ 8 \ 1 \ 4]$$
$$\mathbf{v}_4 = [2 \ 3 \ 7 \ 2 \ 3] \text{ ve } \mathbf{v}_4 = [-1 \ 2 \ 0 \ 4 \ -3]$$

olmak üzere $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ cümlesi tarafından gerilen, R_4'ün bir V alt uzayının bir tabanını bulunuz.

Çözüm

Verilen vektörleri satır kabul eden

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 8 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 7 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

matrisinin satır uzayının V olduğuna dikkat ediniz.

Elementer satır işlemleri kullanılarak satırca indirgenmiş eşelon biçimi

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olan matrise A'nın satırca denk olduğunu buluruz. (Gerçekleyiniz.) A ve B'nin satır uzayları özdeştir ve B'nin satır uzayının bir tabanı

$$\mathbf{w}_1 = [\,1\ 0\ 2\ 0\ 1\,],\ \mathbf{w}_2 = [\,0\ 1\ 1\ 0\ 1\,] \text{ ve}$$
$$\mathbf{w}_3 = [\,0\ 0\ 0\ 1\ -1\,]$$

vektörlerini içerir. (Kesim 4.5'teki Alıştırma 25'e bakınız.) Bundan dolayı, $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ cümlesi V'nin bir tabanıdır. ■

A ya satırca denk olan satırca indirgenmiş eşelon biçimdeki bir B matrisini bulmak gerekli değildir. Tüm istenilen A'ya satırca denk bir B matrisinin varlığı ve bu yolla B'nin satır uzayının bir tabanının kolayca elde edilebileceğidir. Çoğu kez, böyle bir B matrisini elde etmek için A matrisini tamamen satırca indirgenmiş eşelon biçime dönüştürmek zorunda değiliz. Eğer A matrisi bir B matrisine satırca denk ise, bu takdirde B matrisinin sıfırdan farklı satırlarının A'nın satır uzayını bir tabanını meydana getirdiğini gösterebiliriz.

Şüphesiz, Örnek 1'de kullanılan yöntem ile elde edilen taban verilen geren cümlenin bir alt cümlesi olmayabilir. Kesim 4.6 Örnek 6'da kullanılan metod daima geren cümlenin bir alt cümlesi olacak şekilde bir tabanını verir. Bununla beraber, Örnek 1'deki yöntem ile elde edilen R^n'nin bir V alt uzayının tabanı basitlikte R^n doğal tabanına benzer. Böylece,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

V'nin bir vektörü ve ilk eleman 1'lerin oluşturduğu sütunlar $j_1, j_2, \ldots, j_k$ olmak üzere Örnek 1'de kullanılan yöntemle elde edilen taban $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ olmak üzere

$$\mathbf{v} = a_{j1}\,\mathbf{v}_1 + a_{j2}\,\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{jk}\mathbf{v}_k$$

olduğu gösterilebilir (Alıştırma 42).

ÖRNEK 2 V Örnek 1'deki alt uzay olsun. V uzayının

$$\mathbf{v} = [\,5\ 4\ 14\ 6\ 3\,]$$

vektörünü Örnek 1'de tanımlanan taban vektörlerinin bir lineer birleşimi olarak yazınız.

Çözüm

$j_1 = 1, j_2 = 2$ ve $j_3 = 4$ olduğundan $\mathbf{v} = 5\mathbf{w}_1 + 4\mathbf{w}_2 + 6\mathbf{w}_3$ olarak elde edilir. ■

Uyarı Aşağıdaki Örnek R^n veya R_n'den farklı bir vektör uzayının bir alt uzayının bir tabanını bulmak için Örnek 1'de verilen yöntemin nasıl kullanılacağını gösterecektir.

ÖRNEK 3 $\mathbf{v}_1 = t^4 + t^2 + 2t + 1$, $\mathbf{v}_2 = t^4 + t^2 + 2t + 2$, $\mathbf{v}_3 = 2t^4 + t^3 + t + 2$ ve $\mathbf{v}_4 = t^4 + t^3 - t^2 - t$ olmak üzere $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ cümlesi tarafından gerilen P_4'ün bir alt uzayı V olsun. V'nin bir tabanını bulunuz.

Çözüm

P_4 uzayı

$$L(at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e) = [a \;\; b \;\; c \;\; d \;\; e]$$

ile tanımlanan bir L izomorfizmi altında R_5 uzayına izomorf olduğu için $L(\mathbf{v})$ R_5'in bir W alt uzayına izomorftur. Teorem 4.16'nın ispatında görüldüğü gibi $\{L(\mathbf{v}_1), L(\mathbf{v}_2), L(\mathbf{v}_3), L(\mathbf{v}_4)\}$ cümlesi W alt uzayını gerer. Şimdi Örnek 1 deki yöntemle W'nın bir tabanını bulalım. Böylece W

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin satır uzayı olup, A matrisi

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisine satırca denktir. (Gerçekleyiniz.)

Bu yüzden W'nin bir tabanı $\mathbf{w}_1 = [1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 0]$, $\mathbf{w}_2 = [0 \;\; 1 \;\; -2 \;\; -3 \;\; 0]$ ve $\mathbf{w}_3 = [0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1]$ olmak üzere $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ cümlesidir. V'nin bir tabanı da

$$\{L^{-1}(\mathbf{w}_1), L^{-1}(\mathbf{w}_2), L^{-1}(\mathbf{w}_3)\} = \{t^4 + t^2 + 2t, t^3 - 2t^2 - 3t, 1\}$$ ■

TANIM 4.15 A matrisinin satır (sütun) uzayının boyutuna A'nın satır (sütun) rankı denir.

Eğer A ve B matrisleri satırca denk iseler, satır rank A = satır rank B ve eğer A ve B matrisler sütunca denk iseler sütun rank A = sütun rank B. Bu yüzden, bir $m \times n$ tipinden A matrisini alır ve A'ya satırca denk bir B matrisini bulursa, A ile B matrislerinin rankları eşit olur. Fakat B matrisinin satır rankının sıfırdan farklı satır sayısı olduğu açıktır. Böylece verilen bir A matrisinin satır rankını bulmak için çok iyi bir metoda sahibiz.

ÖRNEK 4 Örnek 1'in çözümünde tanımlanan A matrisinin sadece satır vektörlerinden oluşan satır uzayının bir tabanını bulunuz.

Çözüm

Teorem 4.9'un diğer ispatındaki yol kullanılarak

$$a_1[1\ -2\ 0\ 3\ -4]+a_2[3\ 2\ 8\ 1\ 4]+a_3[2\ 3\ 7\ 2\ 3],$$
$$+a_4[-1\ 2\ 0\ 4\ -3]=[0\ 0\ 0\ 0\ 0]$$

ve

$$\left[\begin{array}{rrrr:r} 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ -4 & 4 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right] = [A^T \mid \mathbf{0}]; \tag{1}$$

denklemi oluşturulur, yani katsayılar matrisi A^T'dir. (1) denklemindeki $[A^T \mid \mathbf{0}]$ ilaveli matrisi satırca indirgenmiş eşelon şekle dönüştürülürse

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{24} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{49}{24} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{2}$$

matrisi elde edilir. (Gerçekleyiniz.)

(2) Denkleminde ilk eleman 1'ler 1., 2. ve 3'ncü sütunlarda bulunduğu için A'nın ilk üç satırı A matrisinin satır uzayını bir tabanını meydana getirirler. Yani, A'nın satır uzayının bir taban

$$\{[1\ -2\ 0\ 3\ -4], [3\ 2\ 8\ 1\ 4], [2\ 3\ 7\ 2\ 3]\}$$

cümlesidir. A matrisinin satır rankı 3. ■

ÖRNEK 5 Örnek 1'in çözümünde tanımlanan A matrisinin sütun uzayının bir tabanını bulunuz ve A'nın sütun rankını hesap ediniz.

Çözüm 1

A'nın sütunlara satır vektörleri olarak yazıldığında A^T matrisi elde edilir, A^T matrisi satırca indirgenmiş eşelon şekle dönüştürülürse

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{24} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{49}{24} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

matrisi elde edilir. (Örnek 4'te görüldüğü gibi.)

Böylece $[1\ \ 0\ \ 0\ \ \frac{11}{24}]$, $[0\ \ 1\ \ 0\ \ -\frac{49}{24}]$ ve $[0\ \ 0\ \ 1\ \ \frac{7}{3}]$ vektörleri A^T matrisinin satır uzayının bir tabanını oluşturur. Bu nedenle,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{11}{24} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{49}{24} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

vektörleri A matrisinin sütun uzayının bir tabanını oluşturur, bu ise A'nın sütun rankının 3 olduğunu ifade eder.

Çözüm 2

A'nın sütun uzayının sadece A'nın sütun vektörlerinden oluşan bir tabanını bulmak istenilirse, Teorem 4.9'un ispatında geliştirilen yöntem takip edilirse ilaveli matrisi $[A \mid \mathbf{0}]$ olan

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + a_5 \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

denklemi oluşturulur. Bu matris satırca indirgenmiş eşelon biçime dönüştürülürse,

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

bulunur (Örnek 1 deki gibi).

İlk eleman 1'ler 1., 2. ve 4. üncü sütunlarda bulunduğu için, A'nın birinci, ikinci ve dördüncü sütunları A'nın sütun uzayının bir tabanını oluşturur. Yani, A'nın sütun uzayının bir tabanı

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

O halde A'nın sütun rankı 3'dür. ■

A $m \times n$ tipinden bir matris ve P $m \times m$ tipinden singüler olmayan bir matris ise, satırca denk olan A ve PA matrisleri çin satır rankı (PA) = satır rank A olduğu söylenebilir (Kesim 2.2 Alıştırma 23). Benzer şekilde, Q $n \times n$ tipinden singüler olmayan matris ise sütun rank (AQ) = sütun rank A. Üstelik, boy $R^n = n$ için satır rank $A \leq n$ olduğunu gösterdik. Ayrıca A'nın satır uzayı m tane vektör tarafından gerildiği için satır rank $A \leq$ minimum $\{m, n\}$.

Örnek 4 ve 5'te bir A matrisinin satır ve sütun ranklarının eşit olduğunu gözlemledik. Bu her zaman doğrudur ve lineer cebirde çok önemli bir sonuçtur. Şimdi bu teoremin ispatına dönebiliriz.

Teorem 4.18 $m \times n$ tipinden bir $A = [a_{ij}]$ matrisinin satır ve sütun rankı eşittir.

İspat

$\mathbf{v}_i = [a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{in}]$, $\quad i = 1, 2, \dots, m$ olmak üzere A matrisinin satır vektörleri $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ olsun. Satır rank $A = r$ ve $i = 1, 2, \dots, r$ için $\mathbf{w}_i = [b_{i1} \quad b_{i2} \quad \dots \quad b_{in}]$, olmak üzere A'nın satır uzayının bir tabanı $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_r\}$ cümlesi olsun. Şimdi, c_{ij} tek türlü belirlenebilen reel sayılar olmak üzere, A'nın her bir satır vektörü $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$ vektörlerinin lineer birleşimi olarak

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= c_{11}\mathbf{w}_1 + c_{12}\mathbf{w}_2 + \cdots + c_{1r}\mathbf{w}_r \\
\mathbf{v}_2 &= c_{21}\mathbf{w}_1 + c_{22}\mathbf{w}_2 + \cdots + c_{2r}\mathbf{w}_r \\
&\vdots \\
\mathbf{v}_m &= c_{m1}\mathbf{w}_1 + c_{m2}\mathbf{w}_2 + \cdots + c_{mr}\mathbf{w}_r
\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. İki matrisin eşit olması için gerek ve yeter şart bu iki matrisin karşılıklı elemanlarının eşit olmasının gerektiği hatırlanır ve bu vektör denklemleri eşitlenirse, $j = 1, 2, \dots, n$ için

$$\begin{aligned}
a_{1j} &= c_{11}b_{1j} + c_{12}b_{2j} + \cdots + c_{1r}b_{rj} \\
a_{2j} &= c_{21}b_{1j} + c_{22}b_{2j} + \cdots + c_{2r}b_{rj} \\
&\vdots \\
a_{mj} &= c_{m1}b_{1j} + c_{m2}b_{2j} + \cdots + c_{mr}b_{rj}
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = b_{1j} \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{bmatrix} + b_{2j} \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + b_{rj} \begin{bmatrix} c_{1r} \\ c_{2r} \\ \vdots \\ c_{mr} \end{bmatrix}$$

elde edilir.

A'nın her sütunu r tane vektörün bir lineer birleşimi olduğu için A'nın sütun uzayının boyutu en fazla r olup, sütun rank $\leq r$ = satır rank A benzer şekilde satır rank $A \leq$ sütun rank A olduğu elde edilebilir. Bundan dolayı, A matrisinin satır ve sütun rankları eşittir.

Alternatif (ikinci) İspat: $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$, A matrisinin sütunları olsunlar. A'nın sütun uzayının boyutunu belirlemek için Teorem 4.9'un diğer ispatındaki yöntem izlenecektir. Bu yüzden,

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \dots + c_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

denklemini ele alalım.

Bu homogen sistemin $[A \mid \mathbf{0}]$ ilaveli matrisini satırca indirgenmiş eşelon şekle dönüştürelim. İlk eleman 1'lerin bulunduğu sütunlara karşılık gelen vektörler A'nın sütun uzayının bir tabanını meydana getirir. Bu yüzden A'nın sütun rankı ilk eleman 1'lerin sayısıdır. Fakat, bu sayı A'ya satırca denk olan satırca indirgenmiş eşelon şekildeki matrisin sıfırdan farklı satırlarının sayısıdır, böylece bu sayı A'nın satır rankıdır. Bu yüzden

satır rank A = sütun rank A ■

Bir matrisin satır ve sütun rankları eşit olduğu için, şimdi sadece bir matrisin rankından söz edeceğiz. rank $I_n = n$ olduğuna dikkat edelim. Teorem 2.13, A'nın B'ye denk olması için gerek ve yeter şart $B = PAQ$ olacak biçimde singüler olmayan P ve Q matrislerin varlığını ifade eder. A, B'ye denk ise bu takdirde rank B = rank (PAQ) = rank (PA) = rank A olup, rank A = rank B

Kesim 2.4'ten, A $m \times n$ tipinden bir matrsi ise A matrisinin bir $C = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$ matrisine denk olduğunu hatırlayalım. O halde rank A = rank $C = r$. Bunu, rankları eşit olan $m \times n$ tipinden A ve B matrislerinin denk olduğu sonucunu ispatlamak için kullanacağız. O halde, rank $A = r$ = rank B olsun. Bu takdirde

$$P_1 A Q_1 = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix} = P_2 B Q_2$$

olacak biçimde singüler olmayan P_1, Q_1, P_2 ve Q_2 matrisleri vardır. Bu durumda $P = P_2^{-1} P_1$'e $A Q_1 Q_2^{-1} = B$. $P = P_2^{-1} P_1$ ve $Q = Q_1 Q_2^{-1} P_1$ alınırsa, P ile Q nun singüler olmadığı ve $B = P + Q$ bulunur. Bundan dolayı, A ve B denktir.

A, $m \times n$ tipinden bir matris ise A'nın sıfır uzayının, yani $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sisteminin çözüm uzayının boyutu A'nın sıfırlığı olarak tanılanmıştı. (Kesim 4.7'ye bakınız.) A matrisi sıfırdan farklı r tane satıra sahip olan satırca indirgenmiş biçimdeki bir B matrisine dönüştürülebiliyorsa, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sisteminin çözüm uzayının boyutunun $n - r$ olduğunu biliyoruz. A'nın rankı r olduğu için A'nın sıfırlığı ve rankı arasındaki bir temel bağıntı bulunmuş olur. Aşağıdaki teorem bu durumu ifade etmektedir.

Teorem 4.19 A $m \times n$ tipinden bir matris ise, rank A + sıfırlık $A = n$. ■

ÖRNEK 6

Kesim 4.7'de Örnek 1'de tanımlandığı gibi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olsun. A'nın indirgenmiş eşelon şekli

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dur. Bu durumda rank $A = 3$ ve sıfırlık $A = 2$. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sisteminin çözüm uzayının boyutunu 2 olarak bulduğumuzdan, bu sonuç Kesim 4.7'deki Örnek 1'in çözümünden elde edilen sonuç ile aynıdır. Böylece, Teorem 4.19 gerçeklenmiş olur. ■

Aşağıdaki örnek önceden tartışılan bazı fikirleri geometrik olarak açıklamaktadır.

ÖRNEK 7 $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ matrisi verilsin.

Satırca indirgenmiş eşelon şekle dönüştürülürse

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. (Gerçekleyiniz.) Böylece aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

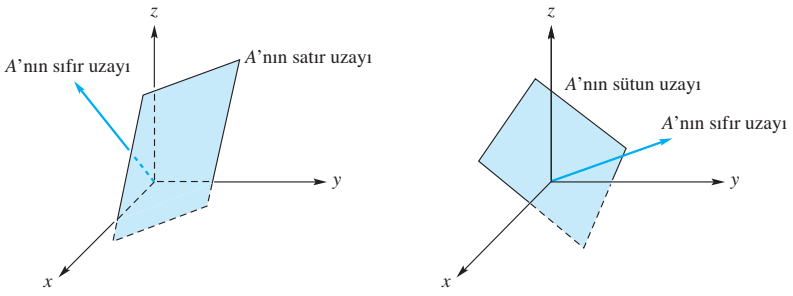
- Rank $A = 2$
- Boy satır uzayı $A = 2$ olduğundan A'nın satır uzayı R^3'ün bir alt uzayı olup, orijinden geçen bir düzlem belirtir.

A'nın satırca indirgenmiş eşelon şeklinden, r keyfi bir sabit olmak üzere $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sistemin her çözümü

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -r \\ -r \\ r \end{bmatrix}$$

biçiminde olup, bu sistemin çözüm uzayı veya A'nın sıfır uzayı orijinden geçen bir doğrudur. Ayrıca, A'nın sıfır uzayının boyutu veya A'nın sıfırlığı 1'dir. Böylece Teorem 4.19 gerçeklenmiş olur.

Şüphesiz, A'nın sütun uzayının boyutunun 2 olduğunu biliyoruz. bu sonuç A'nın sütun uzayının iki vektörünü içeren bir tabanını bumak suretiyle de elde edilebilir. Böylece, A'nın sütun uzayı R^3'ün bir iki boyutlu alt uzayı olup, orijinden geçen bir düzlem belirtir. Bu sonuçlar Şekil 4.33'te gösterilmiştir. ■



ŞEKİL 4.33 (a) R^3 (b) R^3

Bölüm 5'te bir matrisle birleşen alt uzaylar arasındaki bağıntıyı araştıracağız. Bununla birlikte, Örnek 7 kullanılarak bir matrisle birleşen alt uzayları halimizde canlandırmanın bir yolunu sunan aşağıdaki saptamaları yapabiliriz.

- $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ için
$$\textbf{satır}_j(A)\mathbf{x} = 0, \quad j = 1, 2, 3$$
veya buna denk olarak
$$(\textbf{satır}_j(A))^T \cdot \mathbf{x} = 0, \quad j = 1, 2, 3$$
elde edilir.
- $\mathbf{v}$, A'nın satır uzayına ait herhangi bir vektör ise, $\mathbf{v}$ A'nın satırlarının bir lineer birleşimidir. Buradan hareketle
$\mathbf{v} = c_1\,\textbf{satır}_1(A) + c_2\textbf{satır}_2(A) + c_3\textbf{satır}_3(A)$ olacak biçimde c_1, c_2 ve c_3 skalarlarını bulabiliriz.
O halde
$$\mathbf{v}^T \cdot \mathrm{x} = 0$$
sonucu çıkarılabilir (gerçekleyiniz).
Bölüm 5'te, A'nın sıfır uzayı ile A'nın satır uzayı arasındaki bu bağıntının bir geometrik açıklaması olarak bu uzayların dik (ortogonal) olduğu ifade edilmişti. Bu nedenle, Şekil 4.33 (a)'da, A'nın satır uzayını temsil eden düzlem ile A'nın sıfır uzayını temsil eden yönlü doğru parçası bir dik açı ile kesişir.
- A^T'nin satırca indirgenmiş eşelon şekli
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
olarak elde edilir. (Gerçekleyiniz.) Böylece, A^T'nin satır uzayı R^3'de orijinden geçen bir düzlemdir (A^T'nin satır uzayı Anın sütun uzayıdır). A^T'nin sıfır uzayı, r keyfi bir sabit olmak üzere
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -r \\ -2r \\ r \end{bmatrix}$$
biçimindeki bütün $\mathbf{x}$ vektörlerini içerir. A matrisi için ifade edildiği gibi, A^T'nin sıfır uzayı A^T'nin satır uzayına diktir (Şekil 4.33 (b)'ye bakınız).
- A matrisine karşılık gelen satır ve sıfır uzaylarının A^T matrisine karşılık satır ve sıfır uzaylarından farklı olduğu söylenebilir.

■ Rank ve Singülerlik

Bir kare matrisinin rankı matrisin singüler olup, olmadığını belirlemek için kullanılabilir.

Teorem 4.20 A $n \times n$ tipinden matris olsun. rank $A = n$ olması için gerek ve yeter şart A'nın I_n matrisine satırca denk olmasıdır.

İspat

rank $A = n$ ise, A matrisi satırca indirgenmiş biçimdeki bir B matrisine satırca denktir ve rank $B = n$. rank $B = n$ olduğu için B'nin satırlarının sıfırdan farklı olduğunu söyleyebiliriz. Bu ise $B = I_n$ olması anlamına gelir. (Kesim 2.1 Alıştırma 9.)

Tersine, A I_n matrisine satırca denk ise rank A = rank $I_n = n$ olur. ■

Sonuç 4.7 A matrisinin singüler olmaması için gerek ve yeter şart rank $A = n$ olmasıdır.

İspat

Teorem 4.20 ve Sonuç 2.2'den sonuç elde edilir. Pratik açıdan bakıldığında bu sonuç çok kullanışlı değildir. Çoğu zaman, A'nın singüler olup, olmadığın bilmek yetmez, ancak A'nın tersini de bilmek isteriz. Bölüm 1 de geliştirilen yöntem, bize A'nın tersinin varlığı hakkında bilgi verir ve A^{-1} matrisini bulmak için kolaylık sağlar. A^{-1} varsa, bu yöntemle A^{-1} matrisini elde edemeyiz. Bu matrisi başka yöntemlerle elde ederiz. ■

Sonuç 4.8 A $n \times n$ tipinden bir matris olsun. rank $A = n$ olması için gerek ve yeter şart $\det(A) \neq 0$ olmasıdır.

İspat

Sonuç 4.7'den, A'nın singüler olmaması için gerek ve yeter şartın rank $A = n$ ve Teorem 3.8'den, A'nın singüler olmaması için gerek ve yeter şartın $(A) \neq 0$ olduğunu biliyoruz. ■

Bu sonuç hesaplama açısından çok kullanışlı değildir, çünkü A'nın rankını direkt olarak bulmak, $\det(A)$'yı hesap etmekten daha basittir.

Sonuç 4.9 A $n \times n$ tipinden bir matris olmak üzere, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sisteminin aşikar olmayan bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart rank $A < n$ olmasıdır.

İspat

Sonuç 4.7 ve $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$'ın aşikar olmayan çözüme sahip olması için gerek ve yeter şartın A'nın singüler olmasıdır (Teorem 2.9) gerçeğinden istenilen elde edilir. ■

Sonuç 4.10 A $n \times n$ tipinden bir matris olsun. Her $n \times 1$ tipinden $\mathbf{b}$ matrisi için $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sisteminin bir tek çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart rank $A = n$ olmasıdır.

İspat

Okuyucuya bırakılmıştır (Alıştırma 43). R^n'de n tane vektörün cümlesi $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ve j. inci satırı $\mathbf{v}_j$ olan bir matris A olsun. ■

S'nin lineer bağımsız olması için gerek ve yeter şart rank $A = n$ ve gerek ve yeter şart $\det(A) \neq 0$ olduğu gösterilmişti (Alıştırma 37). Benzer şekilde R^n'nin n tane vektörünün cümlesi $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ve j.inci satırı $\mathbf{v}_j$ olan bir matris A olsun. S'nin lineer bağımsız olması için gerek ve yeter şart rank $A = n$ ve gerek ve yeter şart $\det(A) \neq 0$ olduğu gösterilmişti (Alıştırma 38). Bundan başka R^n (R_n)'nin vektörlerinin bir $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ cümlesi R^n (R_n) uzayını germesi için gerek ve yeter şart j. inci sütunu (j, inci satırı) $\mathbf{v}_j$ olan bir A matrisinin rankının n olması için gerek ve yeter şart $\det(A) \neq 0$ olduğu görülebilir (Alıştırma 49).

ÖRNEK 8 R^3'ün bir $\{[1\ \ 2\ \ 3], [0\ \ 1\ \ 2], [3\ \ 0\ \ -1]\}$ cümlesi lineer bağımsız mıdır? Araştırınız.

Çözüm

S'nin vektörlerini satır kabul eden matris

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

olsun. $\det(A) = 3$ (gerçekleyiniz) için S cümlesinin lineer bağımsız olduğu söylenebilir. $\det(A) = 2$ olduğundan sonucu yorumlayınız. ■

ÖRNEK 9

$S = \{t^2 + t, t + 1, t - 1\}$ cümlesinin P_2'nin bir tabanı olduğunu gösterelim.

P_2'nin $L(at^2 + bt + c) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ile tanımlı bir $L : P_2 \to R^3$ dönüşümü

altında üç boyutlu R^3 vektör uzayına izomorf olduğunu biliyoruz. Bu nedenle, S, P_2'nin bir olması için gerek ve yeter şart $T = \{L(t^2 + t), L(t + 1), (L(t - 1)\}$ cümlesi R^3'ün bir tabanı olmasıdır. A matrisinin sütunları, sırası ile, $L(t^2 + t)$, $L(t + 1)$, $L(t - 1)$ olsun. O halde,

$$L(t^2 + t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L(t + 1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad L(t - 1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Rank $A = 3$ (gerçekleyiniz) veya $\det(A) = -2$ (gerçekleyiniz) olduğu için T'nin lineer bağımsız olduğu söylenebilir. Bundan dolayı, S lineer bağımsız ve boy $P_2 = 3$ olduğu için S P_2'nin bir tabanıdır. ■

■ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ Lineer Sisteminin Rankının Uygulamaları

Sonuç 4.9'da, A'nın rankı bir $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sistemin aşikar olmayan çözümlerinin varlığı hakkında bir bilgi verdiğini görmüştürk. Şimdi, $\mathbf{b}$ $n \times 1$ tipinden keyfi bir matris olmak üzere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistemin çözümleri hakkında bilgi elde etmek için A'nın rankını kullanarak bazı sonuçlar bulacağız.

$\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ olduğunda lineer sistemin homogen olmadığı söylenebilir.

Teorem 4.21 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sisteminin bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart rank A = rank $[A \mid \mathbf{b}]$, yani, gerek ve yeter şart katsayılar ve ilaveli katsayılar matrislerinin ranklarının eşit olmasıdır.

İspat

İlk olarak, $A = [a_{ij}]$ $m \times n$ tipinden bir matris ise verilen sistem

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad (3)$$

olarak yazılabilir.

Şimdi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sisteminin bir çözümünün varlığını kabul edelim. Bu takdirde, (3) denklemini sağlayan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ çözümleri mevcuttur. Böylece, $\mathbf{b}$ A matrisinin sütunlarının bir lineer birleşimi olup, A'nın sütun uzayına aittir. Bundan dolayı, rank A = rank $[A \mid \mathbf{b}]$

Tersine, rank A = rank $[A \mid \mathbf{b}]$ olsun. O halde, $\mathbf{b}$ A'nın sütun uzayındadır. Bunun anlamı (3) denklemini sağlayan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ değerleri bulunabilmesidir. ■

Bu nedenle, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sistemi bir çözüme sahiptir.

ÖRNEK 10

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

lineer sistemi verilsin. rank A = rank $[A \mid \mathbf{b}] = 3$ (gerçekleyiniz) olduğundan sistemin bir çözümü vardır. ■

ÖRNEK 11

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

lineer sisteminin çözümü yoktur. Çünkü rank $A = 2$ ve rank $[A \mid \mathbf{b}] = 3$ (gerçekleyiniz). ■

Bir $n \times n$ tipinden A matrisi için aşağıdaki ifadeler denktir.

1. A singüler değildir.
2. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sadece aşikar çözüme sahiptir.
3. A satırca (sütunca) I_n'e denktir.
4. R^n'nin her be vektörü için $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sistemi bir tek çözüme sahiptir.
5. A elementer matrislerin çarpımıdır.
6. $\det(A) \neq 0$
7. rank $A = n$
8. Sıfırlık $A = 0$
9. A'nın satırları R_n'nin vektörlerinin bir lineer bağımsız cümlesini oluşturur.
10. A'nın sütunları R^n'nin vektörlerinin lineer bağımsız cümlesini oluşturur.

Anahtar Kelimeler

Bir matrisin satır uzayı
Bir matrisin sütun uzayı
Satır (sütun) rankı
Rank
Singüler/singüler olmayan matrisler
Homogen olmayan lineer sistemler
İlaveli matris

4.9 Alıştırmalar

1. R^3'ün

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

cümlesi tarafından gerilen V alt uzayının bir tabanını bulunuz ve aşağıdaki vektörlerin her birin bu taban vektörleri cinsinden yazınız.

(a) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$

2. P_3'ün
$S = (t^3 + t^2 + 2t + 1, t^3 - 3t + 1, t^2 + t + 2, t + 1, t^3 + 1\}$
cümlesi tarafından gerilen alt uzayının bir tabanını bulunuz.

3. M_{22}'nin

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

cümlesi tarafından gerilen alt uzayının bir tabanını bulunuz.

4. R_2'nin

$$S = \{[1 \quad 2], [2 \quad 3], [3 \quad 1], [-4 \quad 3]\}$$

cümlesi tarafından gerilen alt uzayının bir tabanını bulunuz.

Alıştırma 5 ve 6'da, A'nın satır uzayının (a) A'nın satır vektörlerinden oluşmayan, ve (b) A'nın satır vektörlerinden oluşan, bir tabanını bulunuz.

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 9 & -1 \\ -3 & 8 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$

Alıştırma 7 ve 8'de, A'nın sütun uzayının (a) A'nın sütun vektörlerinden oluşmayan, (b) A'nın sütun vektörlerinden oluşan, bir tabanını bulunuz.

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & 7 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & 8 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 8 & 4 \\ 4 & -2 & 1 & -5 & -7 \end{bmatrix}$

Alıştırma 9 ve 10'da verilen matrislerin rankını bulunuz.

9. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & -2 & 1 \\ 7 & 8 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & 8 & 9 & 1 & -2 & 2 \\ 9 & 9 & 4 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

10. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -3 & 7 & 1 \\ 3 & -9 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

11. A $m \times n$ tipinden satırca eşelon şekilde olsun rank A = A'nın sıfırdan farklı satırlarının sayısı olduğunu gösteriniz.

12. Aşağıdaki her matrisin satır ve sütun rankını hesaplayarak Teorem 4.18'i gerçekleyiniz.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 7 & -8 & 3 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 7 & -8 & 3 \\ 5 & -7 & 0 \end{bmatrix}$

13. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & -8 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 10 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

14. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & -5 & 10 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & -5 & 8 & -16 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

15. Aşağıdaki matrislerin hangileri denktir? Araştırınız.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & -5 \\ 7 & 8 & -5 & -1 \\ 10 & 14 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & -4 & 3 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 4 & 7 & -4 & 1 \\ 7 & 12 & -4 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & -5 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 & -5 \\ -2 & -6 & -7 & 10 \\ -2 & -3 & -2 & 5 \\ 0 & -6 & -10 & 10 \end{bmatrix}$$

Alıştırma 16 ve 17'de, verilen lineer sistemlerin katsayılar ve ilaveli matrislerin ranklarını karşılaştırmak suretiyle hepsinin bağdaşabilir olduğunu belirleyiniz.

16. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -13 \\ 3 \end{bmatrix}$

17. **(a)** **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 4 & -1 & -5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Alıştırma 18 ve 19'da, Sonuç 4.7'yi kullanarak verilen matrislerden hangilerinin singüler olmadığını bulunuz.

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

18. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

19. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 6 & 12 & -4 \end{bmatrix}$

Alıştırma 20 ve 21'de, Sonuç 4.8'i kullanarak verilen her matris için rank $A = 3$ olup, olmadığını gösteriniz.

20. **(a)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -9 & 15 & 0 \end{bmatrix}$

21. **(a)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$

Alıştırma 22 ve 23'te, Sonuç 4.7'yi kullanarak verilen sistemlerin hangilerinin aşikar olmayan bir çözüme sahip olduğunu bulunuz.

22. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

23. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Alıştırma 24 ve 25'te, A'ya denk olan $\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$ *biçimindeki bir matrisi elde etmek suretiyle rank A'yı bulunuz.*

24. (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

25. (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & 6 & 8 \\ 4 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

Alıştırma 26 ve 27'de, Sonuç 4.10'u kullanarak 3×1 *tipinden her* **b** *matrisi için* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *lineer sisteminin bir tek çözüme sahip olup, olmadığını belirtiniz.*

26. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 8 & -7 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

27. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

28.–33'ü rank kavramını kullanarak çözünüz.

28. R_3'ün vektörlerinin

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

cümlesi lineer bağımsız mıdır? Araştırınız.

29. R_3'ün vektörlerinin

$$S = \{[4 \quad 1 \quad 2], [2 \quad 5 \quad -5], [2 \quad -1 \quad 3]\}$$

cümlesi lineer bağımsız mıdır? Araştırınız.

30. $S = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

cümlesi R_3 uzayını gerer mi? Araştırınız.

31. $S = \{t^3 + t + 1, 2t^2 + 3, t - 1, 2t^3 - 2t^2\}$ cümlesi R_3'ün bir tabanı mıdır? Araştırınız.

32. $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right\}$

cümlesi M_{22}'nin bir tabanı mıdır? Araştırınız.

33. c'nın hangi değerleri için $\{t + 3, 2t + c^2 + 2\}$ cümlesi lineer bağımsızdır? Araştırınız.

34. (a) A, 3×4 tipinden bir matris ise, rank A'nın mümkün olan en büyük değeri nedir? Araştırınız.

(b) A, 4×6 tipinden bir matris ise A'nın sütunlarının lineer bağımlı olduğunu gösteriniz.

(c) A, 5×3 tipinden bir matris ise A'nın satırlarının lineer bağımlı olduğunu gösteriniz.

35. A rankı 3 olan 7×3 tipinden bir matris olsun.

(a) A'nın satırları lineer bağımlı veya lineer bağımsız mıdır? Cevabınızı doğrulayınız.

(b) A'nın sütunları lineer bağımlı mı veya lineer bağımsız mıdır? Cevabınızı doğrulayınız.

36. A 3×5 tipinden bir matris olsun.

(a) A'nın rankı için mümkün olan bütün değerleri veriniz.

(b) A'nın rankı 3 ise A'nın sütun uzayının boyutu nedir? Araştırınız.

(c) A'nın rankı 3 ise $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sisteminin çözüm uzayının boyutu nedir? Araştırınız.

37. R_n'nin n tane vektörünün bir cümlesi $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ve j. inci satırı $\mathbf{v}_j$ olan bir matris A olsun. S'nin lineer bağımsız olması için gerek ve yeter şartın rank $A = n$ olduğunu gösteriniz.

38. R^n'nin n tane vektörünün bir cümlesi $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ve j.inci sütunu $\mathbf{v}_j$ olan matris A olsun. S'nin lineer bağımsız olması için gerek ve yeter şartın rank $A = n$ olduğunu gösteriniz.

39. A $n \times n$ tipinden bir matris olsun. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sisteminin aşikar olmayan bir çözümünün olması için gerek ve yeter şartın A'nın sütunlarının lineer bağımlı olduğunu gösteriniz.

40. A $n \times n$ tipinden bir matris olsun. rank $A = n$ olması için gerek ve yeter şartın A'nın sütunlarının lineer bağımsız olduğunu gösteriniz.

41. A $n \times n$ tipinden bir matris olsun. A'nın satırlarının lineer bağımsız olması için gerek ve yeter şartın A'nın sütunlarının R^n uzayının getirdiğini ispat ediniz.

42. Örnek 1'deki metotla elde edilen, R_n'nin bir V alt uzayının bir tabanı $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ olsun.

$$\mathbf{v} = [a_1 \;\; a_2 \;\; \ldots \;\; a_n]$$

V alt uzayına ait ve Örnek 1'deki metottan satırca indirgenmiş eşelon biçimdeki ilk eleman 1'ler $j_1, j_2, \ldots, j_k$ sütunlarda bulunuyorsa,

$$\mathbf{v} = a_{j1}\mathbf{v}_1 + a_{j2}\mathbf{v}_2 + \ldots + a_{jk}\mathbf{v}_k.$$

olduğunu gösteriniz.

43. Sonuç 4.10'u ispat ediniz.

44. A $m \times m$ tipinden bir matris olsun. Her $m \times 1$ tipinden bir $\mathbf{b}$ matrisi için $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sisteminin bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart rank $A = m$ olduğunu gösteriniz.

45. $m \neq n$ olmak üzere, $m \times n$ tipinden bir matris A olsun. A'nın satır veya sütunlarının lineer bağımlı olduğunu gösteriniz.

46. A $m \times n$ tipinden bir matris olmak üzere, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sisteminin bağdaşabilir (yani bir çözüme sahip) olduğunu kabul edelim. Çözümün tek olması için gerek ve yeter şartın rank $A = n$ olduğunu ispat ediniz.

47. 8 denklem ve 10 bilinmeyenden oluşan bir homogen sistemin çözüm uzayının boyutu hakkında ne söyleyebilirsiniz?

48. 5 denklem ve 7 bilinmeyenden oluşan bir homogen sistemin tüm aşikar olmayan çözümlerinin birbirinin katı olması mümkün müdür? Açıklayınız.

49. R^n (R_n)'nin vektörlerinin bir cümlesi $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$'nin R^n (R_n) uzayının germesi için gerek ve yeter şartın j. inci sütunu (j.inci satırı) $\mathbf{v}_j$ olan matrisin rankının n olduğunu gösteriniz.

50. Yazılımınızda bir matrisin rankını hesap eden bir komutun olup, olmadığını belirtiniz. Eğer varsa, Örnek 4-5 ve Alıştırmalar 13-14'te verilen A matrisi için uygulayınız.

51. Tam aritmetiğin kullanldığını kabul edildiğinde rank A, A'nın satırca indirgenmiş eşelon biçimindeki sıfırdan farklı satırların sayısıdır.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \times 10^{-j} \end{bmatrix}, \qquad j = 5, 10, 16.$$

biçimindeki matrisilere, satırca indirgenmiş eşelon şekil ve rank komutunu kullanmak suretiyle elde ettiğiniz sonuçları karşılaştırınız.

Ek Alıştırmalar

1. $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlanan bütün reel değerli ve sürekli fonksiyonların cümlesi $C[a, b]$ ile gösterilsin $f, g \in C[a, b]$ ise, $t \in [a, b]$ için, $f \oplus g$ işlemi $(f \oplus g)(t) + g(t)$ olarak tanımlanır. $f \in C[a, b]$ ve c bir skalar ise $\forall t \in [a, b]$ için $c \odot f$ işlemin $(c \odot f)(t) = cf(t)$ ile tanımlanır.

(a) $C[a, b]$'nin bir reel vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

(b) $f(a) = k$ olacak şekilde $C[a, b]$'deki bütün fonksiyonların cümlesi $W(k)$ olsun. $W(k)$ k'nın hangi değerleri için $C[a, b]$ bir alt uzayıdır? Araştırınız.

(c) $[a, b]$'deki noktaların sabit bir cümlesi $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ olsun. $t_1, t_2, \ldots, t_n$ i kök, kabul eden, yani $i = 1, 2, \ldots, n$ için $f(t_i) = 0$ olan $C[a, b]$'nın bütün f fonksiyonlarının bir alt uzay oluşturduğunu gösteriniz.

2. R^4'ün, $a_4 - a_3 = a_2 - a_1$ koşulunu sağlayan bütün

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

vektörlerinin bir alt cümlesi W olsun

(a) W'nın R^4'ün bir alt uzayı olduğunu gösteriniz.

(b) $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

cümlesinin R^4'ü gerdiğini gösteriniz.

(c) S'nin W'nin bir tabanı olan bir alt cümlesini bulunuz.

(d) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$ vektörünü (c)'de elde edilen taban vektölerinin bir lineer birleşimi olarak ifade ediniz.

3. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

vektörleri verilsin. Her bir $\mathbf{v}$ vektörünün span $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ uzayına ait olup, olmadığını belirtiniz.

(a) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ **(c)** $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix}$

4. $n \times n$ tipinde sabit bir matris A ve $AB = BA$ olacak biçimde $n \times n$ tipinden tüm B matrislerinin cümlesi $C(A)$ olsun. $C(A)$, M_{nn} uzayının bir alt uzayı mıdır? Araştırınız.

5. W ve U, V'nin iki alt uzayı olsun.
- **(a)** W ya veya U ya ait bütün $\mathbf{v}$, vektörlerinin $W \cup U$ cümlesi her zaman V'nin bir alt uzayı olmadığını gösteriniz.
- **(b)** $W \cup U$ ne zaman V'nin alt uzayı olur? Araştırınız.
- **(c)** W ve U cümlelerinin her ikisine birden ait tüm $\mathbf{v}$ vektörlerinin $W \cap U$ cümlesinin V'nin bir alt uzayı olduğunu gösteriniz.

6. R^3'ün bir W alt uzayının R^3 ile çakışması gerek ve yeter şartın W'nın $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektörlerini içermesi olduğunu ispat ediniz.

7. A $m \times n$ tipinden sabit bir matris ve çözüme sahip bir $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistemi için R^m'de $m \times 1$ tipinden tüm $\mathbf{b}$ matrislerinin bir alt cümlesi W olsun.
- **(a)** W R^m'in bir alt uzayı mıdır? Araştırınız.
- **(b)** W ile A'nın sütun uzayı arasındaki ilişki nedir? Açıklayınız.

8. R_2 vektör uzayını gözönüne alınız.
- **(a)** Hangi m ve b değerleri için $[x \;\; mx + b]$ biçimindeki tüm vektörlerin cümlesi R_2'nin alt uzayı olur? Araştırınız.
- **(b)** Hangi r değerleri için $[x \;\; rx^2]$ biçimindeki vektörlerin cümlesi R_2'nin alt uzayı olur? Araştırınız.

9. Bir V vektör uzayının boş olmayan bir alt cümlesi W olsun. W'nin V'nın bir alt uzayı olması için gerek ve yeter şartın $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in W$ ve r ile S skalarları için $r\mathbf{u} + s\mathbf{v}$ W olduğunu ispat ediniz.

10. λ bir skalar ve A $n \times n$ tipinden bir matris olsun $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ olacak biçimde R^n'nin tüm $\mathbf{x}$ vektörlerini içeren W cümlesinin R^n'nin bir alt uzayı olduğunu gösteriniz.

11. a'nın hangi değerleri için $\begin{bmatrix} a^2 \\ -3a \\ -2 \end{bmatrix}$ vektörü $\text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ uzayının bir elemanıdır? Araştırınız.

12. a'nın hangi değerleri için $\begin{bmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{bmatrix}$ vektörü $\text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ uzayının bir elemanıdır? Araştırınız.

13. k'nın hangi değerleri için,

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ k \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

cümlesi R^6'nın bir tabanıdır? Araştırınız.

14. R^4'ün bir

$$W = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

alt uzayı verilsin.
- **(a)** W'nın bir tabanı olacak şekilde geren cümlenin bir S alt cümlesini belirtiniz.
- **(b)** W'nın geren cümlenin bir alt cümlesi olmayan bir T tabanını bulunuz.
- **(c)** $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektörünün (a) ve (b) şıklarından elde edilen tabanlara göre koordinat vektörünü bulunuz.

15. V vektör uzayının bir W alt uzayının tabanı S = $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ ise V'nin S cümlesini kapsayan bir tabanının var olduğunu ispat ediniz.

16. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere $V = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ olsun. R^3'ün $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$ vektörlerini içeren bir S tabanını bulunuz. (*Yol gösterme:* Teorem 4.9'un ikinci ispatını kullanınız.)

17. Bağdaşabilir $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistemi için R^3'ün bütün $\mathbf{b}$ vektörlerinin cümlesini belirleyiniz.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -7 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

18. Verilen λ sakaları ve A matrisi için, $(\lambda I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sistemin çözüm uzayının bir tabanını bulunuz.

(a) $\lambda = 1, A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $\lambda = 3, A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

19. $m \times n$ tipinde A matrisi için rank A = rank A^T olduğunu gösteriniz.

20. $m \times n$ tipinden satırca denk iki matris A ve B olsun.
- **(a)** rank A = rank B olduğunu ispat ediniz.
- **(b)** $\mathbf{x} \in R^n$ için, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ olması için gerek ve yeter şartın $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ olduğunu ispat ediniz.

21. A $m \times n$ ve B $m \times k$ tipinden iki matris olsun.
- **(a)** rank $(AB) \leq$ min{rank A, rank B} olduğunu ispat ediniz.
- **(b)** rank $(AB) \leq$ min {rank A, rank B} olacak biçimde A ve B matrislerini bulunuz.
- **(c)** $k = n$ ve B singüler olmayan bir matris ise rank (AB) = rank B olduğunu ispat ediniz.
- **(d)** $m = n$ ve A singüler olmayan bir matris ise rank (AB) = rank A olduğunu ispat ediniz.
- **(e)** Singüler olmayan P ve Q matrisleri için rank (PAQ) nedir? Araştırınız.

22. $m \times n$ tipinden bir A matrisi için, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ olacak şekilde R^n'nin tüm $\mathbf{x}$ vektörlerinin cümlesi $NS(A)$ ile gösterilsin. Kesim 4.3 Örnek 10'da R^n'nin alt uzayı olduğu gösterilen bu cümle A'nın sıfır uzayı adını alır.
- **(a)** rank A + boyut $NS(A) = n$ olduğunu ispat ediniz.
- **(b)** $m = n$ için A'nın singüler olmaması için gerek ve yeter şartın boyut $NS(A) = 0$ olduğunu ispat ediniz.

23. $m \times n$ tipinden bir matris A ve $m \times m$ tipinden singüler olmayan matris B olsun $NS(BA) = NS(A)$ olduğunu ispat ediniz (Alıştırma 22'ye bakınız.)

24. Aşağıdaki her matrisi için boyut $NS(A)$ ı bulunuz. (Alıştırma 22'ye bakınız.)

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 10 & 1 \end{bmatrix}$

25. Bir $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ sıralı tabanında bir diğer $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sıralı tabanına singüler olmayan 3×3 tipinde geçiş matrisi P ile gösterilsin ve

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

olsun.

(a) $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ise T sıralı tabanını bulunuz.

(b) $\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ise S sıralı tabanını bulunuz.

26. Bölüm 1'de 30.–32. $n \times 1$ tipinden iki sütun matrisi X ve Y'nin dış çarpımı XY^T olarak tanımlanmıştı. Dış çarpımın rankını belirleyiniz.

27. $n \times n$ tipinden bir matrisin A ve $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ olacak şekilde bir $\mathbf{x} \in R^n$'nin var olmadığını kabul edelim. $A - I_n$ matrisinn singüler olmadığını gösteriniz.

28. $m \times n$ tipinde bir matris A olsun. $A^T A$ singüler olmayan bir matris ise rank $A = n$ olduğunu ispat ediniz

29. Aşağıdaki verilerin doğru olmadığını göstermek için ya aksine bir örnek bulunuz ya da ispat ediniz.
- **(a)** rank $(A + B) \leq$ maks {rank A, rank B}
- **(b)** rank $(A + B) \geq$ min {rank A, rank B}
- **(c)** rank $(A + B)$ = rank A + rank B

30. $n \times n$ tipinden bir matris A ve R^n vektörlerinin lineer bağımsız cümlesi $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ olsun. $A\mathbf{v}_1$, $A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_k$ vektörleri R^n'de lineer bağımlı veya lineer bağımsız mıdır? Cevabınızı gerçekleyiniz.

31. $m \times n$ tipinden matris A olsun. Her $m \times 1$ tipinden $\mathbf{b}$ matrisi için $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sisteminin en çok bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şartın $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sisteminin sadece aşikar çözüme sahip olmasıdır. Gösteriniz.

32. $m \times n$ tipinden bir matris A olsun. Her $m \times 1$ tipinden $\mathbf{b}$ matris için $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sisteminin en çok bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart A'nın sütunlarının lineer bağımsız olmasıdır. Gösteriniz.

33. A'nın rankı bilinmeyen sayısından küçük ise homogen olmayan tutarlı $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sisteminin çözümleri hakkında ne söyleyebilirsiniz?

34. Bir V vektör uzayının iki alt vektör uzayı W_1 ve W_2 olsun. $\mathbf{w}_1 \in W_1$ ve $\mathbf{w}_2 \in W_2$ olmak üzere $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ olacak biçimde V'nin tüm $\mathbf{v}$ vektörlerinin cümlesi $W_1 + W_2$ olsun. $W_1 + W_2$, V'nin bir alt vektör uzayıdır. Gösteriniz.

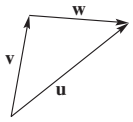
35. $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ olmak üzere V vektör uzayının iki alt uzayı W_1 ve W_2 olsun. $W_1 + W_2$ Alıştırma 34'te tanımlandığı gibi olsun. $V = W_1 + W_2$ olduğunu kabul edelim. $\mathbf{w}_1 \in W$, ve $\mathbf{w}_2 \in W_2$ olmak üzere V'nin bütün vektörlerinin $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ olacak şekilde tek türlü yazılabileceğini ispat ediniz. $V = W_1 \oplus W_2$ olması durumunda, V'ye W_1 ve W_2 alt uzaylarının direkt toplamı denir.

36. Bir V vektör uzayının vektörlerinin bir cümlesi $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ ve V'nin S'yi kapsayan bir alt uzayı W olsun. W'nın span S cümlesini kapsadığını gösteriniz.

Bölüm Tekrarı

Doğru veya Yanlış

1. Ekteki şekilde $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$.



2. V bir reel vektör uzayı ise V'nin her $\mathbf{u}$ vektörü için 0 skaları ile $\mathbf{u}$'nun çarpımı V'nin sıfır vektörünü verir.

3. V, R^2 vektör uzayı olsun. Başlangıç ve uç noktası $y = 2x + 1$ doğrusu üzerinde bulunan tüm vekötrlerin cümlesi R^2'nin bir alt uzayıdır.

4. W, V'nin bir alt uzayı ise, V deki vektörlerin her lineer birleşimi aynı zamanda W'ya aittir.

5. Bir S cümlesini geren cümle ile S'deki vektörlerin bütün lineer birleşimlerinin cümlesi aynıdır.

6. R^3'ün her alt uzayı sonsuz sayıda vektör içerir.

7. $m \times n$ tipinden bir matris A ise, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sisteminin bütün çözümlerinin cümlesi R^n'nin bir alt uzayıdır.

8. S cümlesi bir V vektör uzayının bir W alt uzayını geriyorsa, W'nın her vektörü S'deki vektörlerin bir lineer birleşimi olarak yazılabilir.

9. Biri, diğerinin bir sakalar ile çarpımı olan iki vektör lineer bağımlıdır.

10. Lineer bağımsız bir cümlenin her alt cümlesi lineer bağımlıdır.

11. Sıfır vektörünü içeren bir cümle lineer bağımlıdır.

12. Bir V vektör uzayının bir tabanı V'yi geren bir lineer bağımsız cümledir.

13. R^n sonsuz sayıda vektör içeriyorsa, sonsuz boyutlu olduğu söylenebilir.

14. R^n'nin bir alt uzayının iki tabanı aynı sayıda vektör içermek zorundadır.

15. Bir alt uzayı geren her cümle alt uzayın bir tabanını içerir.

16. A matrisinin sıfır uzayının boyutu $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ lineer sisteminin çözümlerindeki keyfi sabitlerin sayısıdır.

17. Homogen olmayan bir 3×3 tipinden $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ liner sistemi, $\mathbf{x}_h$ keyfi iki sabiti içermek üzere $\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p$ çözümüne sahip ise, çözümlerin cümlesi orijinden geçmeyen bir düzlemdir.

18. Bir V vektör uzayının bir tabanı $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ve V'nin $\mathbf{u}$ vektörünün koordinat vektörü

$$[\mathbf{u}]_S = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

ise $\mathbf{u} = k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3$.

19. rank A, A'nın satırca indirgenmiş biçimindeki sıfır satırlarının sayısıdır.

20. rank $A = 4$ olmak üzere 4×4 tipinden bir matris A ise, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sistemi tam dört çözüme sahiptir.

21. A $n \times n$ tipinden bir singüler matris ise rank $A \le n - 1$

22. rank $A = n - 1$ olacak biçimde $n \times n$ tipinden bir matris A ise, A matrisi singülerdir.

Küçük Sınav

1. $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad \\ bc \end{bmatrix}$

ve

$$k \odot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka \\ kb \end{bmatrix}$$

işlemleri ile birlikte bütün 2×1 tipinden matrislerin cümlesi V olsun. V bir vektör uzayı mıdır? Açıklayınız.

2. Standart matris toplamı ve

$$k \odot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k(a+b) \\ k(a+b) \end{bmatrix}$$

işlemleri ile birlikte 2×2 tipinden matrislerin cümlesi V olsun. V bir vektör uzayı mıdır? Araştırınız.

3. $a, b \in R$ olmak üzere $\begin{bmatrix} a \\ b \\ -a \end{bmatrix}$ biçimindeki tüm vektörlerin cümlesi R^3'ün bir W alt uzayı mıdır? Açıklayınız Eğer alt uzay ise, W'nin bir tabanını bulunuz.

4. $a, b, c \in R$ ve $a + b + c > 0$ olmak üzere, $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ biçimindeki tüm vektörlerin cümlesi R^3'ün bir W alt uzayı mıdır? Açılayınız. Eğer alt uzay ise W'nin bir tabanını bulunuz.

5. $p(0) = 0$ olacak şekilde P_2'nin bütün $p(t)$ vektörlerinin cümlesi W olsun, W'nin P_2'nin bir alt uzayı olduğunu gösteriniz ve W'nin bir tabanını bulunuz.

6. $S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix} \right\}$ olsun

$S = R^3$ olup, olmadığını belirtiniz.

7. $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

olsun. $= R^3$ olduğunu gösteriniz ve S'nin vektörlerini içeren R^3'ün bir tabanını bulunuz.

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

matrisinin sıfır uzayının bir tabanını bulunuz.

9. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$

matrisinin satır uzayının bir tabanını belirtiniz.

10. rank $A = 2$ olmak üzere 3×3 tipinden bir matris A ise, A'nın sıfır uzayının boyutunun 1 olduğunu gösteriniz.

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}$

üzere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sisteminin bir çözümünü belirtiniz ve bu çözümü $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$ biçiminde yazınız.

12. $\{t + 3, 2t + c^2 + c\}$ cümlesinin lineer bağımsız olacak şekilde c'nin alabileceği tüm değerleri belirtiniz.

Tartışma Alıştırmaları

1. a_j, b_j, $j = 1, 2, 3, 4, 5$ ile c_j, d_j ve e_j, $j = 1,2$ reel sayıları olsun.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 & d_2 & 0 \\ 0 & e_1 & 0 & e_2 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisini alalım. Determinantı hesap etmeksizin $\det(A) = 0$ olduğunu nasıl göstereceğimizi tartışınız.

2. k, 1 ve –2 dışındaki reel sayılar olsun.

$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ cümlesinin R^3'ün bir tabanı olduğunu gösteriniz.

3. $S = \{[k \ 1 \ 0], [1 \ k \ 1], [0 \ 1 \ k]\}$ olsun. S lineer bağımlı bir cümle olacak şekilde k'nın bütün değerlerini belirtiniz.

4. $A^{-1} = A^T$ olacak şekilde bütün $n \times n$ tipinden A matrislerinin cümlesi W olsun. W'nın M_{nn}'nin bir alt uzayı olup olmadığını ispat ediniz.

5. $A^2 = I_n$ ise $n \times n$ tipinden A matrisine involutif matris denir. $n \times n$ tipinden involutif matrislerin cümlesinin M_{nn}'nin bir alt uzayı olup, olmadığını ispat ediniz.

6. Kesim 1.5'de, Fibonacci dizisi tartışıldı ve hesabı $\mathbf{w}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere $\mathbf{w}_{n-1} = A^{n-1}\mathbf{w}_0$ bir matris çarpımı olarak ifade edilen tekrarlamalı bir bağıntının kullanılmasıyla örnekle izah edildi.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ olsun

(a) S'nin R^2 için bir taban olduğnu gösteriniz.

(b) $A\mathbf{v}_1$'in $\mathbf{v}_1$ vektörünün bir skalar ile çarpımı, yani $\lambda_1\mathbf{v}_1$ olduğunu gösteriniz ve λ_1 skalarını belirleyiniz.

(c) $A\mathbf{v}_2$'nin $\mathbf{v}_2$ vektörünü bir skalarla çarpın, yani $\lambda_2\mathbf{v}_2$ olduğunu gösteriniz ve λ_2 skalarını belirleyiniz.

(d) $\mathbf{w}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ olacak şekilde c_1 ve c_2 skalarlarını bulunuz.

(e) (d) şıklarındaki sonucu kullanarak $\mathbf{w}_{n-1} = A^{n+1}\mathbf{w}_0$ ifadesini oluşturunuz ve mümkün olduğunca basitleştiriniz.

(f) (e) şıkkındaki sonucu kullanarak λ_1 ve λ_2'nin kuvvetlerine bağlı olarak u_n'nin ifadelerini bulunuz. Hesaplamanızdaki tüm adımları açıklayınız.

BÖLÜM

5 İç Çarpım Uzayları

Bölüm 4'te belirttiğimiz gibi Fizikçiler R^2 ve R^3'te vektörlerden sözettikleri zaman genellikle büyüklük ve yöne sahip olan nesneleri işaret ederler. Ancak biz vektör uzaylarını incelerken bu kavramların tartışılmasından kaçındık. Bu bölümde yön ve büyüklük kavramları ile ilgileneceğiz.

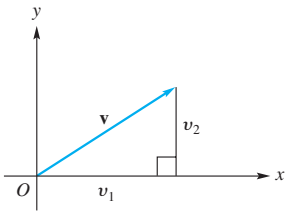
5.1 R^2 ve R^3'te Uzunluk ve Yön

Uzunluk

Bu bölümde R^2 ve R^3'te yön ve büyüklük kavramların inceleyeceğiz ve bir sonraki kesimde de bunları R^n'ye genelleştireceğiz. R^2 ve R^3'ü alışılmış kartezyen koordinat sistemiyle düşüneceğiz. R^2'de $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ vektörünün uzunluk ya da büyüklüğü $\|\mathbf{v}\|$ ile gösterilirse Pisagor teoreminden

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \tag{1}$$

şeklinde yazılır. (Şekil 5.1'e bakınız.)



ŞEKİL 5.1 v'nin uzunluğu.

Not: Bu bölüm, içindeki bilgilerin kullanıldığı Kesim 7.3'ten önceye de alınabilir.

ÖRNEK 1

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

ise o zaman eşitlik (1)'den

$$\sqrt{(2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$

olur. ■

Şimdi Şekil 5.3 (a)'da gösterildiği gibi $P_1(u_1, u_2)$ ve $P_2(v_1, v_2)$ noktalarını gözönüne alalım. P_1RP_2 üçgenine Pisagor teoremi uygulanarak P_1'in P_2'ye uzaklığını, yani P_1 ve P_2 doğru parçasının

$$\sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2}.$$

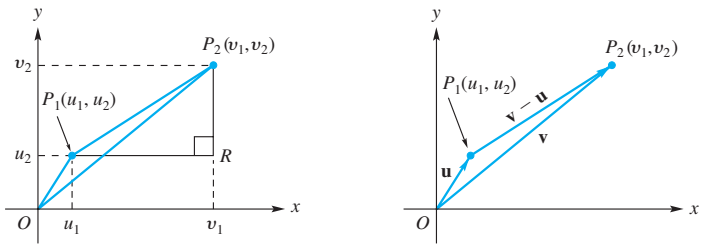
ile verilen uzunluğunu buluruz.

Eğer $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ Şekil 5.2 (b)'de gösterildiği gibi R_2'de vektörler ise, o zaman bu vektörlerin bitiş noktaları sırasıyla $P_1(u_1, u_2)$ ve $P_2(v_1, v_2)$'dir. Böylece $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri arasındaki uzaklığı, P_1 ve P_2 noktaları arasındaki uzaklık gibi tanımlarız. Bu uzaklık yardımıyla

$$\mathbf{v} - \mathbf{u} = \begin{bmatrix} v_1 - u_1 \\ v_2 - u_2 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2} = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| \qquad (2)$$

olur.



ŞEKİL 5.2

(a) $P_1(u_1, u_2)$ ve $P_2(v_1, v_2)$ noktaları arasındaki uzaklık.

(b) $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri arasındaki uzaklık.

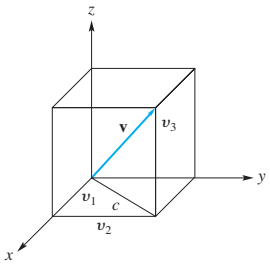
ÖRNEK 2 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ vektörleri arasındaki uzaklığı hesaplayınız.

Çözüm

Denklem (2)'den $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ arasındaki uzaklık

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| = \sqrt{(3 + 1)^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

olur. ■



ŞEKİL 5.3 **v**'nin uzunluğu.

Şimdi $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ R^3'te bir vektör olsun. Pisogor teoremi iki kez kullanılarak (Şekil 5.3) $\|\mathbf{v}\|$ ile gösterilen **v**'nin uzunluğu

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{c^2 + v_3^2} = \sqrt{\left(\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\right)^2 + v_3^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \qquad (3)$$

olarak bulabiliriz. Sıfır vektörünün uzunluğunun sıfır olduğu Denklem (3)'ten elde edilir. Uzunluğu sıfır olan vektörün sadece sıfır vektörü olduğunu göstermek kolaydır.

Eğer $P_1(u_1, u_2, u_3)$ ve $P_2(v_1, v_2, v_3)$ R^3'te noktalar ise o zaman R^2'deki gibi P_1 ve P_2 arasındaki uzaklık

$$\sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2}$$

ile verilir. Yine R^2'deki gibi $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ R^3'te vektörler ise, bu durumda **u** ve **v** arasındaki uzaklık

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2} \qquad (4)$$

ile verilir.

ÖRNEK 3 $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ vektörünün uzunluğu hesaplayınız.

Çözüm

Denklem (3)'ten **v**'nin uzunluğu

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^3} = \sqrt{14}\text{'tür.}$$ ■

ÖRNEK 4 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ vektörleri arasındaki uzaklığı hesaplayınız.

Çözüm

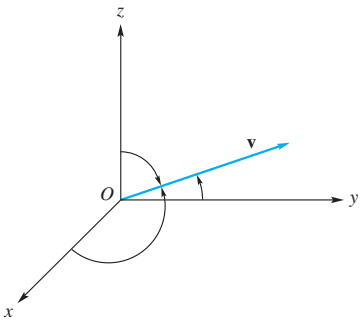
Denklem (4) gereğince **u** ve **v** arasındaki uzaklık

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| = \sqrt{(-4 - 1)^2 + (3 - 2)^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{30}$$ ■

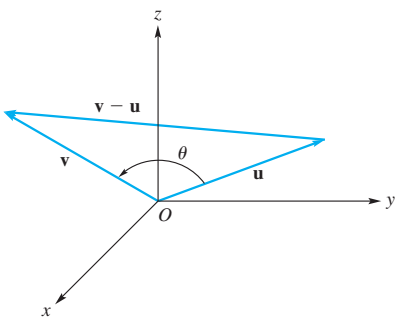
olur.

■ Yön

R^2'de bir vektörün yönü vektörün meyil veya eğim açısı ile belirlenir. R^3'te **v** vektörünün yönü vektörün pozitif x, y ve z-eksenleri ile yaptığı açıların verilen kosinüsleri ile belirlenir. (Şekil 5.4'de bakınız) Bunlar **yön kosinüsleri** olarak adlandırılır.



ŞEKİL 5.4



ŞEKİL 5.5

R^3'te bir vektör için açıların kosinüslerini veya R^2'de bir vektör için eğim açısını bulma özel problemi yerine daha genel bir problem olan R^2 veya R^3'te sıfır olmayan iki vektör arasında θ, $0 \le \theta \le \pi$ açısının belirlenmesini gözönüne alacağız. Şekil 5.5'te gösterildiği gibi

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

R^3'te iki vektör olsun.

Kosinüs kuralından

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos\theta$$

elde edilir. Böylece

$$\cos\theta = \frac{\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2}{2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} = \frac{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) + (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}{2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}$$

$$- \frac{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2}{2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}$$

$$= \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}.$$

olur. O halde

$$\cos\theta = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}, \quad 0 \le \theta \le \pi \tag{5}$$

olur.

Benzer yolla, eğer $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ R^2'de sıfırdan farklı vektörler ve θ, $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ arasındaki açı ise o zaman

$$\cos\theta = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}, \quad 0 \le \theta \le \pi \tag{6}$$

olur.

R^2 veya R^3'te sıfır vektörü belirli bir yöne sahip değildir. Yukarıda ifade edilen kosinüs kuralı herhangi θ açısı için $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ve $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ise doğrudur 0 halde sıfır vektörü herhangi bir yönü gösterebilir.

ÖRNEK 5 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ olsun. $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ arasındaki θ açısı.

$$\cos\theta = \frac{(1)(0) + (1)(1) + (0)(1)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}.$$

ile belirlenir. $0 \leq \theta \leq \pi$ olduğundan $\theta = 60°$'dir. ■

R^2 ve R^3'te sıfır olmayan iki vektör arasındaki bir açının kosinüsü ve bir vektörün uzunluğu Kesim 1.3'te tanımlandığı gibi iç çarpım cinsinden ifade edebilir. Şimdi sonraki kesimde verilen nokta çarpımının bir genelleştirmesini tahmin için farklı bir bakış açısından bu tanımı hatırlatacağız.

Standart iç çarpım ya da nokta çarpımı $R^2(R^3)$ üzerindeki

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \left(\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right)$$

vektör çiftlerine $u_1v_1 + u_2v_2$ $(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)$

sayısını karşılık getiren bir fonksiyondur. Böylece $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ çarpımı şeklinde tanımlanır.

Uyarı Eğer $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörlerine R^2 veya R^3'te birer matris olarak bakarsak bu durumda $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$'nin nokta çarpımını, $\mathbf{u}^T\mathbf{v}$ matris çarpımı olarak yazılabileceğimizi gözlemlemeliyiz. Burada $\mathbf{u}^T\mathbf{v}$ matrisi 1×1 tipinde olduğundan parantezler ihmal edilir. (Kesim 1.3'teki Alıştırma 41'e bakınız)

Eğer (1) ve (3) denklemlerini gözönünde alırsak R^2 veya R^3'teki bir $\mathbf{v}$ vektörü için

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$$

yazabiliriz.

Keza (5) ve (6) denklemlerinden R^2 ve R^3'teki sıfır olmayan $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri arasındaki θ açısının kosinüsü

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi \tag{7}$$

olarak yazabiliriz.

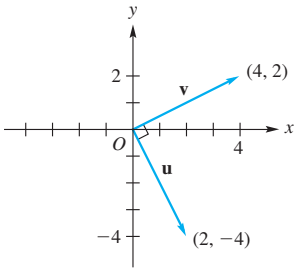
Kesim 5.3'te

$$-1 \leq \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \leq 1. \tag{8}$$

olduğu gösterilir.

Böylece R^2 veya R^3'te $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ gibi iki vektörün dik olması için gerek ve yeter şartın $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ olduğu bulunur.

ÖRNEK 6 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ vektörleri $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (2)(4) + (-4)(2) = 0.$ olduğundan birbirine diktir. Şekil 5.6'ya bakınız. ■



ŞEKİL 5.6

R^2 ve R^3'teki standart iç çarpımın aşağıdaki özelliklerinin bizi bundan sonraki kesime hazırlayacağını belirtelim.

Teorem 5.1 **u**, **v** ve **w**, R^2 veya R^3'te vektörler ve c bir skalar olsun. R^2 veya R^3 üzerindeki standart iç çarpım aşağıdaki özellikler sahiptir.

(a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \geq 0$; $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\mathbf{u} = 0$ olmasıdır.
(b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
(c) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
(d) Herhangi bir c skaları için $c\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$'dir.

İspat:
Alıştırma 13'e bakınız. ■

■ Birim Vektörler

R^2 veya R^3'te bir **birim vektör**, uzunluğu 1 olan bir vektördür. Eğer **x** sıfırdan farklı herhangi bir vektör ise, o zaman

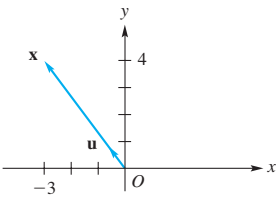
$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x}$$

vektörü **x**'in yönünde bir birim vektördür (Alıştırma 34).

ÖRNEK 7 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ alalım. Bu durumda $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$ dir. Böylece

$$\mathbf{u} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

olduğundan

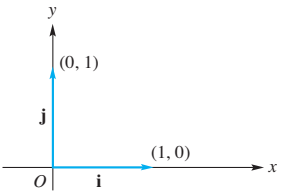


ŞEKİL 5.7

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9+16}{25}} = 1$$

vektörü bir birim vektördür. Ayrıca **u**'nun **x**'in yönünü gösterdiğini de işaret edelim. (Şekil 5.7) ■

R^2'de özel öneme sahip iki birim vektör vardır. Bunlar sırasıyla Şekil 5.8'de gösterilen **x** ve **y** pozitif eksenleri boyunca $\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ birim vektörleridir. **i** ve **j**'nin dik olduğuna dikkat ediniz. Bu vektörler R^2 için doğal baz (taban) oluşturduğundan R^2'deki her bir vektör **i** ve *j* dik vektörlerinin lineer birleşimi olarak tek bir şekilde yazılabilir. Böylece, eğer $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ R^2'de bir vektör ise, O zaman



ŞEKİL 5.8

$$\mathbf{u} = u_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$$

olur.

Benzer şekilde R^3 için doğal baz (taban) vektörleri

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{ve} \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

birbirine dik olan birim vektörlerdir. Böylece, eğer $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ R^3'te bir vektör ise, bu durumda $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ dır.

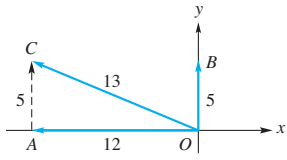
■ Bileşke Kuvvet ve Hız

Bir cisim üzerine bir çok kuvvet etki ettiği zaman bunlara eşdeğer etkiye sahip olan ve bileşke kuvvet olarak adlandırılan bir tek kuvvet bulabiliriz. Bileşke kuvvet bu vektörler kullanılarak belirlenebilir. Aşağıdaki örnek bu yöntemi gösterir.

ÖRNEK 8

Bir cisme 12 paundluk bir kuvvet negatif *x*-ekseni boyunca ve 5 paundluk bir kuvvet pozitif *y*-ekseni boyunca uygulanmış olsun. Bileşke kuvvetin yönünü ve büyüklüğünü bulunuz.

Çözüm

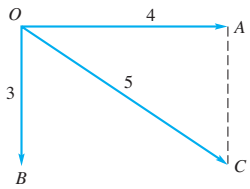


ŞEKİL 5.9

Şekil 5.9 da negatif *x*-ekseni boyunca olan kuvvet $\overrightarrow{OB}$ vektörü ve pozitif *y*-ekseni boyunca olan kuvveti $\overrightarrow{OB}$ vektörü ile gösterdik. Bileşke kuvvet $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ vektörüdür. O halde bileşke kuvvetin büyüklüğü 13 paund ve yönü şekilde gösterildiği gibidir. ■

Vektörler aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi fizikte hız problemlerinde de kullanılır.

ÖRNEK 9 Bir bot, bir nehirde doğu yönünde saatte 4 mil hızla hareket ederken, nehir saatte 3 mil hızla güney yönde akmaktadır. Botun bileşke kuvvetini bulunuz.



ŞEKİL 5.10

Çözüm

Şekil 5.10 da botun hızı $\overrightarrow{OA}$ vektörü, nehirin akış hızı $\overrightarrow{OB}$ vektörü ile gösterilmiştir. Bileşke hız $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ vektörüdür. Böylece bileşke hızın büyüklüğü saatte 5 mil olup, yönü şekilde gösterildiği gibidir. ■

Anahtar Kelimeler

Bir vektörün uzunluğu (büyüklüğü)
Vektörler arasındaki uzaklık
Yön kosinüsleri (doğrultman kosinüsleri)
Kosinüsler kuralı
Standart iç çarpım
Nokta çarpım
Dik (ortagonal) vektörler
Birim vektörler

5.1 Alıştırmalar

Alıştırma 1 ve 2'deki her bir vektörün uzunluğunu bulunuz.

1. (a) $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

2. (a) $\begin{bmatrix}0\\-2\\0\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}-1\\-3\\-4\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}1\\-2\\4\end{bmatrix}$

Alıştırma 3 ve 4'te $\|\mathbf{u}\text{-}\mathbf{v}\|$'yi hesaplayınız.

3. (a) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

4. (a) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}-1\\-2\\-3\end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix}-4\\-5\\-6\end{bmatrix}$

Alıştırma 5 ve 6'da $\mathbf{u}$ *ile* $\mathbf{v}$ *arasındaki uzaklığı bulunuz.*

5. (a) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix}-4\\-5\end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix}4\\-5\end{bmatrix}$

6. (a) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}-1\\-2\\-3\end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$

Alıştırma 7 ve 8'de verilen şartları sağlayan c'nin bütün değerlerini bulunuz.

7. $\|\mathbf{u}\| = 3$ for $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}2\\c\\0\end{bmatrix}$

8. $\|\mathbf{u}\| = 1$ for $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}\frac{1}{c}\\\frac{2}{c}\\-\frac{2}{c}\end{bmatrix}$

9. Alıştırma 5'teki her $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektör çifti için $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri arasındaki açının kosinüsünü bulunuz.

10. Alıştırma 6'daki her bir vektör çifti için $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ arasındaki θ açısının kosinüsünü bulunuz.

11. Aşağıdaki her bir $\mathbf{v}$ vektörü için yön kosinüsünü (x, y ve 2-eksenlerini ve $\mathbf{v}$ vektörü arasındaki açıların kosinüslerini) bulunuz.

(a) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ (b) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ **(d)** $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

12. P ve Q, R^3 sırasıyla (3, –1, 2) ve (4, 2, –3) koordinatları ile verilen noktalar olsun. PQ doğru parçanın uzunluğunu bulunuz.

13. Teorem 5,1'i ispatlayınız.

14. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

ve $c = -3$ için Teorem 5.1'in sağlandığı gösteriniz.

15. R^2'de
(a) $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$; **(b)** $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$
olduğuna göre

16. R^3'de
(a) $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$;
(b) $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$
olduğunu gösteriniz.

17. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{v}_6 = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \end{bmatrix}$

vektörlerinin hangileri
(a) Birbirine diktir? **(b)** Aynı yöndedir?
(c) Zıt yöndedir?

18. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$,

$\mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_6 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

vektörlerinden hangileri
(a) Birbirine diktir? **(b)** Aynı yöndedir?
(c) Zıt yöndedir?

19. (***Seçmeli***) Aşağıdaki doğru çiftlerinin hangisi birbirine diktir?

(a) $x = 2 + 2t$, $y = -3 - 3t$, $z = 4 + 4t$ ve $x = 2 + t$, $y = 4 - t$, $z = 2 - t$

(b) $x = 3 - t$, $y = 4 + 4t$, $z = 2 + 2t$ ve $x = 2t$, $y = 3 - 2t$, $z = 4 + 2t$

20. (***Seçmeli***) (3, –1, –3) noktasından geçen (3, –2, 4) ve (0, 3, 5) noktalarının belirlediği doğruya dik olan doğrunun parametrik denklemlerini bulunuz.

21. Bir gemi 300 paundluk kuvvetle bir römorkör ile negatif y-ekseni boyunca itiliyor. Aynı anda başka bir römorkör ile de 400 poundluk bir kuvvetle negatif x-ekseni boyunca itiliyor. Bileşke kuvvetin büyüklüğünü bulunuz ve yönünü gösteren şekli çiziniz.

22. Bir uçağın saatte 260 km hava hızı ile uçtuğunu kabul edelim. Aynı anda rüzgar batıdan saatte 100 km hızla esiyor. Uçağın güney yönünde uçması için uygun yönlü bir şekil çiziniz. Bileşke hız ne olur?

23. R^3'te koordinatları sırasıyla (1, 2, 3), (–2, 3, 5), (0,3,6) ve (3, 2, 4) olan *A, B, C* ve *D* noktaları verilmiş olsun. *ABCD*'nin bir paralelkenar olduğunu gösteriniz.

24. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ c \end{bmatrix}$ vektörü $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, vektörüne dik olacak şekildeki c'yi bulunuz.

25. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ c \\ 3 \end{bmatrix}$ vektörü $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektörüne dik olacak şekilde c'yi bulunuz.

26. Eğer mümkün ise $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ vektörü, hem $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve hem de $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektörüne dik olacak şekilde a, b ve c değerlerini bulunuz.

27. Eğer mümkün ise $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 2 \end{bmatrix}$ vektörü, hem $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve hem de $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektörüne dik olacak şekilde a ve b'yi bulunuz.

28. $\begin{bmatrix} c \\ 4 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ vektörleri paralel olacak şekilde c'yi bulunuz.

29. θ, R^2 ve R^3 da sıfırdan farklı $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri arasındaki açı olsun. Eğer $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ paralel ise $\cos\theta = \pm 1$ olduğunu gösteriniz.

30. R^2 ve R^3'te her bir vektöre dik olan tek $\mathbf{x}$ vektörünün sadece sıfır vektörü olduğunu gösteriniz.

31. $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ ve $\mathbf{x}$, R^2 veya R^3'te vektörler olsun. $\mathbf{v}$, hem $\mathbf{w}$ ye hem de x'e dik ise o zaman $\mathbf{v}$'nin Sp {$\mathbf{w}$, $\mathbf{x}$}'deki ($\mathbf{w}$ ve x'i geren uzaydaki) her vektöre dik olduğunu gösteriniz.

32. $\mathbf{u}$, R^2 veya R^3'te belirli vektör olsun. $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ birbirine dik olmak üzere R^2(R^3)'teki bütün v vektörlerinin V cümlesi R^2 ve (R^3)'ün bir altuzayıdır. İspat ediniz.

33. R^2 veya R^3'te $\mathbf{v}$ bir vektör ve c bir skalar ise, $\|c\mathbf{v}\| = |c|\,\|\mathbf{v}\|$ olduğunu gösteriniz.

34. $\mathbf{x}$, R^2 veya R^3'de sıfır olmayan bir vektör ise, o zaman, $\mathbf{u} = \dfrac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x}$'in, $\mathbf{x}$ yönünde bir birim vektör olduğunu gösteriniz.

35. $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ R^3'te sıfır olmayan ve herhangi ikisi dik vektörlerin bir cümlesi olsun. S'nin linerer bağımsız olduğunu ispatlayınız.

36. R^2 veya R^3'teki herhangi $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ vektörleri için

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}.$$

37. R^2 veya R^3'teki herhangi $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ vektörleri ve bir c skaları için

(a) $(\mathbf{u} + c\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + c(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$

(b) $\mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}) = c \cdot (\mathbf{u}.\ \mathrm{v})$

(c) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (c\mathbf{w}) = c \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) + c(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$

eşitliklerinin geçerli olduğunu gösteriniz.

38. Bir dikdörtgenin köşegenlerinin uzunluklarının eşit olduğunu gösteriniz. (*Yol gösterme:* dikdörtgenin köşelerini (0, 0), (0, b), (a, 0) ve (a, b) olarak alınız.)

39. Bir ikizkenar üçgenin taban açılarının eşit olduğunu gösteriniz.

40. Bir paralelkenarın dört kenarı eşit olan bir eşkenar dörtgen olması için gerek ve yeter şart köşegenlerin birbirine dik olmasıdır. İspatlayınız.

41. R^2 veya R^3'teki $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektör çiftlerinin nokta çarpımını, bilgisayarınızda matris çarpımını kullanarak aşağıdaki gibi hesaplayınız. $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörlerinin sırasıyla sütun metrislerini U ve V olsun. Bu durumda $\mathbf{u}$. $\mathbf{v}$ nokta çarpımı U^T ve V'nin (veya V^T ve U'nun) çarpımıdır. Alıştırma 7 ve 8'deki vektörlerle denenebilir. (Yazılımınızın, nokta çarpım için özellikle bir komuta sahip olup olmadığını belirleyiniz.)

42. Yazılımınızda, bir vektörün uzunluğunu hesaplamak için bir komut olup olmadığını belirleyiniz. Eğer var ise, Örnek 3'teki vektörler üzerinde onu kullanın ve Örnek 4'teki vektörler arasındaki uzaklığı hesaplayınız.

43. Yazılımınızın bir vektör uzunluğunu hesaplama için bir komuta sahip olduğunu kabul edelim. (Alıştırma 42'ye bakınız.) Aşağıdaki her bir vektör için $\mathbf{v}$'nin yönündeki birim vektörü belirleyiniz.

(a) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ **(b)** $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ **(c)** $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

44. Alıştırma 41'i referans alarak dik vektörler için yazılımınızı nasıl kontrol edebilirsiniz?

5.2 R^3'te Çapraz Çarpım (Seçmeli)

Bu kesimde sadece R^3'te anlamlı olan bir işlemi tartışacağız. Bu kısıtlamaya rağmen, bu işlem bir kaç önemli uygulamaya sahip olup, bunların bazılarını bu kısımda tartışacağız. $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ ve $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ vektörler olsun. Hem u ve hem de v'ye dik olan bir $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ vektörü bulmak istiyoruz. Böylece $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ ve $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ olmasını istiyoruz. Bu bizi ,

$$\begin{aligned} u_1x + u_2y + u_3z &= 0 \\ v_1x + v_2y + v_3z &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

lineer sistemine götürür.

(1) denkleminin bir çözümünün

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix}$$

olduğu gösterilebilir. Şüphesiz $\mathbf{w}$ vektörü

$$\mathbf{w} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k} \qquad (2)$$

olarak yazılabilir. Bu vektöre $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$'nin çapraz (vektörel) çarpımı denir ve $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ile gösterilir. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ çapraz çarpımının bir vektör, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ nokta

çarpımının bir skalar veya bir sayı olduğunu işaret edelim. Eğer $n \neq 3$ ise R^n üzerinde çapraz tanımlanmamasına karşın bir çok uygulamaya sahiptir. R^3'te düzlemleri çalıştığımızda onu kullanacağız.

ÖRNEK 1 $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ve $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ alalım. (2) den

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

■

$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$, R^3'te vektörler ve c bir sabit olsun. Çapraz çarpım işlemi aşağıdaki özellikleri sağlar. Bunların sağlandığını göstermek okuyucuya bırakılmıştır.

(a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
(b) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$
(c) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$
(d) $c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (c\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (c\mathbf{v})$
(e) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
(f) $\mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$
(g) $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$
(h) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}$

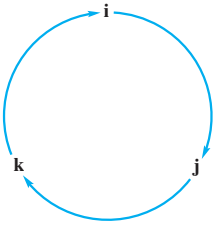
ÖRNEK 2

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0},$$
$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

olduğu (2)'den elde edilir.

Ayrıca

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$



ŞEKİL 5.11

dir. Bu kurallar Şekil 5.11'de gösterildiği şekilde hatırlanabilir. Çember üzerinde saat yönünde hareket edildiğinde, iki vektörün çapraz çarpımın gösterildiği gibi sıralı üçüncü vektöre eşit olduğu, saatin ters yönünde hareket edildiğinde çapraz çarpımın sıralı üçüncü vektörün negatifine eşit olduğunu görürüz. Vektörlerin kendileri ile çapraz çarpımı sıfır vektörüdür. ■

Reel sayılara ait bilinen özelliklerin bir çoğu çapraz çarpım için elde edilmesine rağmen iki önemli özelliğin çapraz çarpımda geçerli olmadığına dikkat edilmelidir. Bunlar değişme ve birleşme özelliğidir. Gerçekten; $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$ ve $\mathbf{i} \times \mathbf{i}$ $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$ iken $(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$ dır.

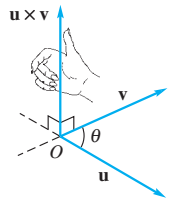
Şimdi çapraz çarpımın geometrik özelliklerine yakından bakalım, ilk olarak ispatı okuyucuya bırakılmış olan aşağıdaki ilave özelliği gözlemleyelim.

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \qquad \text{(Alıştırma 7)} \qquad (3)$$

ÖRNEK 3 $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ Örnek 1'deki gibi ve $\mathbf{w} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ olsun. Böylece

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 5\mathbf{k} \quad \text{ve} \quad (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = 8$$
$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = 3\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 7\mathbf{k} \quad \text{ve} \quad \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 8$$

olur. Denklem (3)'te gösterildiği gibi eşitlik sağlanır. ■



ŞEKİL 5.12

$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$'nin inşasında, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ vektörü hem $\mathbf{u}$ ya hem de $\mathbf{v}$'ye diktir. Yani

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{4}$$

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{5}$$

olur. Bu denklemler $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ve nokta çarpımının tanımları kullanılarak veya çapraz çarpımın (a) ve (e) özellikleri ve Denklem (3) kullanılarak da doğrudan gerçekleştirilebilir. O halde $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$'nin belirlemiş olduğu düzleme de diktir. Eğer $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$'nin arasındaki açı θ ise, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$'nin yönü aşağıdaki gibi belirlenir. Eğer sağ elimizin parmaklarını $\mathbf{u}$'dan $\mathbf{v}$'ye θ açısının dönme yönünde bükersek, bu durumda baş parmağımız $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$'nin yönünü gösterir (Şekil 5.12).

$\mathbf{u} \times \mathbf{v}$'nin büyüklüğü aşağıdaki gibi belirlenir. Kesim 5.1'deki denklem (7)'den

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u} \times \mathbf{v}).(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \\
&= \mathbf{u} \cdot [\mathbf{v} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v})] && \text{(3'ten)} \\
&= \mathbf{u} \cdot [(\mathbf{v}.\mathbf{v})\mathbf{u} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v}] && \text{Çapraz çarpım için (g) özelliğinde} \\
&= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) && \text{Teorem 4.1'de (d) ve (b)'den} \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 && \text{Kesim 4.1'de Denklem (7)} \\
& && \text{ve Teorem 4.1'deki (b)'den}
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Kesim 5.1'deki Denklem (8)'den

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos\theta,$$

elde edilir. Burada θ, $\mathbf{u}$ ile $\mathbf{v}$'nin arasındaki açıdır.

Böylece

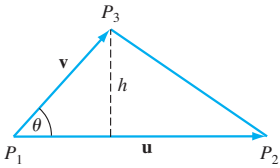
$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \cos^2\theta \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 (1 - \cos^2\theta) \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \sin^2\theta
\end{aligned}$$

eşitliğin her iki yanının karekökü alınarak

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin\theta, \qquad 0 \le \theta \le \pi \tag{6}$$

olur. $\sin\theta$, $0 \le \theta \le \pi$ için negatif olmadığında (6)'da $|\sin\theta|$ yazmak zorunda olmadığımıza dikkat edelim. Buradan $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörlerinin paralel olması için gerek ve yeter şartın $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ olduğu görülür (Alıştırma 9).

Şimdi vektörel çarpımın bir kaç uygulamasını yapalım



ŞEKİL 5.13

■ Bir Üçgenin Alanı

Köşeleri P_1, P_2 ve P_3 olan üçgeni gözönüne alalım (Şekil 5.13). b taban ve h yükseklik olmak üzere bu üçgenin alanı $\frac{1}{2}bh$'dir. Eğer P_1 ve P_2 arasındaki doğru parçasını taban olarak alır ve $\overrightarrow{P_1P_2}$'yi $\mathbf{u}$ vektörü ile gösterirsek, bu durumda $b = \|\mathbf{u}\|$ olur.

$\overrightarrow{P_1P_3} = \mathbf{v}$ alınırsa h yüksekliğinin

$$h = \|\mathbf{v}\| \sin\theta$$

olduğunu buluruz. Böylece (6)'dan üçgenin alanı

$$A_T = \tfrac{1}{2}\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \sin\theta = \tfrac{1}{2}\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$$

olur.

ÖRNEK 4 Köşeleri $P_1(2, 2, 4)$, $P_2(-1, 0, 5)$ ve $P_3(3, 4, 3)$ olan üçgenin alanını bulunuz.

Çözüm

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$
$$\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_3} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

olsun. Bu durumda

$$A_T = \tfrac{1}{2}\|(-3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})\|$$
$$= \tfrac{1}{2}\|-2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}\| = \|-\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\| = \sqrt{5}$$

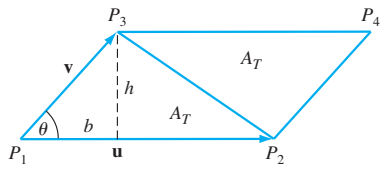
elde edilir. ■

■ Paralelkenarın Alanı

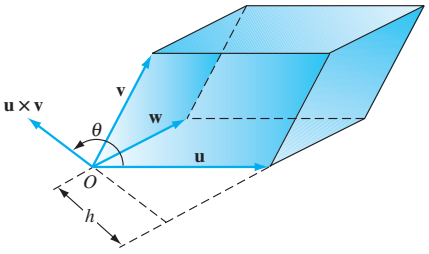
u ve **v** kenarlarının birleştirilmesi ile elde edilen paralelkenarın (Şekil 5.14) A_P alanı $2A_T$'dir. Dolayısıyla

$$A_P = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$$

ÖRNEK 5 Eğer P_1, P_2 ve P_3 noktaları Örnek 4'teki gibi ise, bu durumda $\overrightarrow{P_1P_3}$ ve $\overrightarrow{P_1P_3}$ kenarların birleştirilmesi ile oluşan paralelkenarın alanı $2\sqrt{5}$'dir (sağlayınız.). ■



ŞEKİL 5.14



ŞEKİL 5.15

■ Bir Paralelyüzün Hacmi

Bir köşesi orijinde ve kenarları, **u**, **v** ve **w** olan bir paralelyüz gözönüne alalım (Şekil 5.15). Paralelyüzün V hacmi ve **v** ve **w**'yi kapsayan yüzeyin alanı ve buna paralel olan yüzey arasındaki h uzaklığının çarpımından şimdi **u**, θ ve $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ arasındaki açı olmak üzere

$$h = \|\mathbf{u}\| \, |\cos\theta|$$

$\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ ile belirlenen yüzeyin alanı $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$'dır.
Böylece

$$V = \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| \|\mathbf{u}\| \, |\cos\theta| = |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$$

olur.

ÖRNEK 6 Bir köşesi orijinde ve kenarları $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ve $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ olan bir paralel yüzü gözönüne alalım. Bu durumda

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = 5\mathbf{i} - 5\mathbf{k}$$

olur. Bu nedenle $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) - 10$ olur. Böylece V hacmi

$$V = |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| = |-10| = 10$$

ile verilir. ■

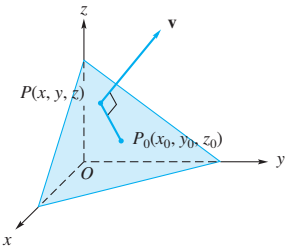
■ Düzlemler

R^3'te bir düzlem, düzlemde tanımlanmış bir nokta ve düzleme dik olan bir vektör ile belirlenebilir. Bu vektör düzlemin normali olarak adlandırılır.

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasından geçen ve sıfır olmayan $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ normaline sahip düzlemin denklemini bulmak için aşağıdaki yolu izleyiniz. Bu $P(x, y, z)$ noktasının düzlemde olması için gerek ve yeter şart $\overrightarrow{P_0P}$ vektörünün $\mathbf{v}$'ye dik olmasıdır (Şekil 5.16). Böylece, $P(x, y, z)$ noktasının düzlemde olması için gerek ve yeter şart

$$\mathbf{v} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 \tag{7}$$

olmasıdır.



ŞEKİL 5.16

$$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$$

olduğundan (7) ifadesi

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{8}$$

olarak yazılır.

ÖRNEK 7 (3, 4,–3) noktasından geçen ve $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ vektörüne dik olan düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm

(8)'de yerine koyarak düzlemin denklemini

$$5(x - 3) - 2(y - 4) + 4(z + 3) = 0$$

olarak bulunuz. ■

Bir düzlem aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi aynı doğru üzerinde olmayan ve düzlemde bulunan üç nokta ile de belirlenir.

ÖRNEK 8 $P_1(2, -2, 1)$, $P_2(-1, 0, 3)$ ve $P_3(5, -3\ 4)$ noktalarından geçen düzlemin denklemini bulalım.

Çözüm

P_1, P_2 ve P_3 noktaları düzlemde olduğundan $\overrightarrow{P_1P_2} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ve $\overrightarrow{P_1P_3} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ paralel olmayan vektörleri düzlemdedir.

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = 8\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

vektörü $\overrightarrow{P_1P_2}$ ve $\overrightarrow{P_1P_3}$ vektörlerinin her ikisine de dik olduğundan düzlemin bir normalidir. (8)'de $\mathbf{v}$ vektörü ve $P_1(2, -2, 1)$ noktasını kullanarak düzlemin denklemini

$$8(x - 2) + 15(y + 2) - 3(z - 1) = 0 \tag{9}$$

olarak buluruz. ■

(8) ifadesi çarpma işlemi sonunda gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{10}$$

şeklinde yazılır.

ÖRNEK 9 Örnek 8'deki düzlemin denklemini Denklem (10)'daki gibi yeniden

$$8x + 15y - 3z + 17 = 0 \tag{11}$$

olarak yazabiliriz. ■

a, b, c ve d sabitler (a, b ve c'nin hepsi birden sıfır değil) olmak üzere, (10)'da verilen denklemin, grafiğinin normali $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ olan düzlem olduğunu göstermek zor değildir (Alıştırma 24). Üstelik $d = 0$ ise bu düzlem R^3'ün iki boyutlu bir altuzayıdır.

ÖRNEK 10 Örnek 8 için farklı bir çözüm aşağıdaki gibidir: İstenilen düzlemin denklemi

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{12}$$

olsun. Burada a, b, c ve d belirlenmesi gereken sabitlerdir. P_1, P_2 ve P_3 düzlemde olduklarından, bunların koordinatları (12)'deki düzlemin denklemini sağlar. Böylece aşağıdaki lineer denklem sistemini buluruz.

$$\begin{aligned} 2a - 2b + c + d &= 0 \\ -a \quad\quad + 3c + d &= 0 \\ 5a - 3b + 4c + d &= 0 \end{aligned}$$

r herhangi bir reel sayı olmak üzere, bu sistemin çözümünden

$$a = \tfrac{8}{17}r, \quad b = \tfrac{15}{17}r, \quad c = -\tfrac{3}{17}r, \quad \text{ve} \quad d = r,$$

değerlerine sahibiz. Eğer $r = 17$ alınırsa,

$$a = 8, \quad b = 15, \quad c = -3, \quad \text{ve} \quad d = 17,$$

bulunur. Bu ilk çözüm olarak (11)'i sağlar. ■

ÖRNEK 11

$$\Pi_1 : 2x + 3y - 2z + 4 = 0 \quad \text{ve} \quad \Pi_2 : x - y + 2z + 3 = 0$$

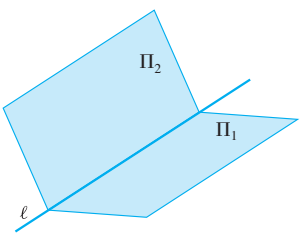
düzlemlerinin ara kesiti olan doğrunun parametrik denklemlerini bulunuz.

Çözüm

Π_1 ve Π_2 denklemlerinden oluşan lineer sistemi çözerek

$$\begin{aligned} x &= -\tfrac{13}{5} - \tfrac{4}{5}t \\ y &= \tfrac{2}{5} + \tfrac{6}{5}t \qquad -\infty < t < \infty \\ z &= 0 + t \end{aligned}$$

ifadelerini elde ederiz (Gerçekleyiniz). Bunlar düzlemlerin arakesiti olan ℓ doğrusunun parametrik denklemleridir (Kesim 4.3) ve Şekil 5.17'ye bakınız). ■



ŞEKİL 5.17

Belirttiğimiz gibi vektörel çarpım R^n'e genelleştirilemez. Fakat uzunluk, yön ve standart iç çarpım kavramlarını doğal olarak R^n'e genelleştirebiliriz. Ancak kontrol edilebilecek bazı hususlar vardır. Örneğin eğer R^n'de sıfırdan farklı $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri arasındaki θ açısının kosinüsünü

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}$$

olarak tanımlarsak, $-1 \le \cos\theta \le 1$ olduğunu kontrol etmeliyiz. Aksi taktirde bu kesri $\cos\theta$'yı alarak tanımlamamız yanlış olabilir. Şimdi R^n için bu özelliğin sağlanmasından ziyade bundan sonraki kesimde, herhangi bir reel vektör uzayda iç çarpım kavramını tanımlayarak bu sonucu buluruz.

■ Determinantlar ve Çapraz Çarpım (Seçmeli)

Determinatlar çapraz çarpımları hesaplamak için uygulanabilir. R^3'te $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ ve $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2 j + v_3\mathbf{k}$ vektörlerinin $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ çapraz çarpımlarını

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}$$

olduğunu hatırlayınız. Eğer

$$C = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

matrisini yazar ve C'nin determinantını ilk satıra göre açarsak

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \det(C) = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

olur.

Şüphesiz C gerçekte bir matris değildir ve $\det(C)$ gerçekte bir matris değildir fakat bu şekilde hesaplama düşüncesi uygundur.

ÖRNEK 12 $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ve $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ vektörleri verilsin.

$$C = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinatı 1. satıra göre açılırsa Örnek 1'de olduğu gibi $\det(C) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ bulunur. ■

Anahtar Kelimeler

Çapraz çarpım (vektörel çarpım)
Birim vektörler **i, j, k**
Dik (ortagonal) vektörler
Paralel vektörler
Bir vektörün uzunluğu
Bir üçgenin alanı
Paralelkenarın alan
Paralelkenarın hacmi

5.2 Alıştırmalar

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$'yi hesaplayınız.

(a) $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$

(b) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$

(c) $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$

(d) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{u}$

2. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$'yi hesaplayınız.

(a) $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{k}$

(c) $\mathbf{u} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{u}$

(d) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

3. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{i} + \mathbf{k}$ $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ve $c = -3$ olsun. Vektörel çarpım için (a) – (h) özelliklerinin sağlandığını gösteriniz.

4. Vektörel çarpım için (a)-(h) özelliklerini ispatlayınız.

5. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ ve $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ için Denklem (3)'ün sağlandığını gösteriniz.

6. Alıştırma 1'de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ çapraz çarpımlarını herbirinin $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$'nin ikisine de dik olduğunu gösteriniz.

7. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ olduğunu gösteriniz.

8. Alıştırma 1'deki her vektör çifti için Eşitlik (6)'nın sağlandığını gösteriniz.

9. $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$'nin paralel olmaları için gerek ve yeter şart $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = 0$ olmasıdır. Gösteriniz.

10. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2$ olduğunu gösteriniz.

11. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} + (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{u} + (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$

Jacobi özdeşliğini ispatlayınız.

12. Köşeleri $P_1(1, -2, 3)$, $P_2(-3, 1, 4)$ ve $P_3(0, 4, 3)$ olan üçgenin alanını bulunuz.

13. $\overrightarrow{P_1P_2} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ve $\overrightarrow{P_1P_2} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ olmak üzere köşeleri P_1, P_2, P_3 olan üçgenin alanını bulunuz.

14. Kenarları $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ve $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$ olan paralelkenarın alanını bulunuz.

15. Bir köşesi orjinde ve kenarları $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ve $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ olan paralel yüzün hacmini bulunuz.

16. Alıştırma 15'i $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$, ve $\mathbf{w} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ için çözünüz.

17. Aşağıdaki noktaların hangisinin

$3(x - 2) + 2(y + 3) - 4(z - 4) = 0$

düzleminde olduğunu bulunuz.

(a) $(0, -2, -3)$ **(b)** $(1, -2, 3)$

18. **(a)** $(0, -2, -3)$ $3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

(b) $(-1, 3, 2)$, $\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

verilen noktadan geçen ve verilen vektöre dik olan düzlemin denklemini bulunuz.

19. Aşağıda verilen noktalardan geçen düzlemin denklemini bulunuz.

(a) $(0, 1, 2)$, $(3, -2, 5)$, $(2, 3, 4)$

(b) $(2, 3, 4)$, $(1, -2, 3)$, $(-5, -4, 2)$

20. Aşağıda verilen düzlemlerin arakesiti olan doğrunun parametrik denklemlerini bulunuz.

(a) $2x + 3y - 4z + 5 = 0$ ve
$-3x + 2y + 5z + 6 = 0$

(b) $3x - 2y - 5z + 4 = 0$ ve
$2x + 3y + 4z + 8 = 0$

21. $(-2, 3, 4)$ noktasından geçen ve $2x - 3y + 4z + 7 = 0$ düzlemine dik olan doğruyu bulunuz.

22.
$$x = 2 - 3t$$
$$y = 4 + 2t \qquad -\infty < t < \infty,$$
$$z = 3 - 5t$$

doğrusu ve $2x + 3y + 4z + 8 = 0$ düzleminin kesişim noktasını bulunuz.

23. $(-2, 5, -3)$ noktasından geçen ve $2x - 3y + 4z + 7 = 0$ düzlemine dik olan bir doğru bulunuz.

24. **(a)** a, b ve c'nin hepsi birden sıfır olmamak üzere (10)'daki biçimde verilen denklemin grafiğinin normali $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ olan düzlem olduğunu gösteriniz.

(b) $ax + by + cz = 0$ düzlemi üzerindeki bütün noktaların cümlesinin R^3'ün bir alt cümlesi olduğunu gösteriniz.

(c) $2x - 3y + 4z = 0$ düzlemi ile verilen altuzay için bir taban bulunuz.

25. $3x + 2y + 5z = 0$ düzlemi ile verilen altuzay için bir taban bulunuz.

26. R^3 de $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ ve $\mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}$ vektörleri verilsin.

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

olduğunu gösteriniz.

27. Herbir $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ vektörünü Örnek 12'deki yöntemle hesaplayınız.

(a) $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$

(b) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$
(c) $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$
(d) $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{k}$

28. Eğer (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) düzlemde farklı noktalar ise $(x_1, y_1$ ve (x_2, y_2)'den geçen doğrunun denkleminin

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

olduğunu gösteriniz. Bu sonucu üç noktanın kolineerliğine (aynı bir doğru üzerinde olduğuna) bir test oluşturmak için kullanınız.

29. 3– uzayda $P_i\ (x_i, y_i, z_i)$ $i = 1, 2, 3$ noktaları verilsin. P_i, $i = 1, 2, 3$ noktalarından geçen bir düzlemin denkleminin

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

olduğunu gösteriniz. (Kesim 5.2'ye bakınız.)

30. Yazılımınızın vektörel çarpımları hesaplamak için bir komuta sekiz olup olmadığını belirleyiniz. Eğer sahipse Alıştırma 1 ve 2'deki sonuçlarınızı kontrol ediniz.

5.3 İç Çarpım Uzayları

Bu kesimde R^3'teki standart iç çarpım veya nokta çarpımın Teorem 5.1'de listelenmiş özelliklerini kullanarak bu kavramı herhangi bir reel vektör uzayı için genelleştireceğiz. Burada V, boyutunun sonlu olması gerekmeyen bir reel vektör uzayıdır.

TANIM 5.1

V herhangi bir reel vektör uzayı olan V üzerinde bir iç çarpım V'deki $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vektörlerinin sıralı herbir çiftleri için $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ reel sayısını karşılık getiren ve aşağıdaki özellikleri sağlayan bir fonksiyondur;
(a) $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \mathbf{0}$; $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ ve $\mathbf{u} = 0_V$
(b) V de herhangi $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ için $(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$
(c) V de herhangi $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ için $(\mathbf{u} + \mathbf{u}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{v}, \mathbf{w})$
(d) V de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ve c reel sayısı için $(c\mathbf{u}, \mathbf{v}) = c(\mathbf{u}, \mathbf{v})$

Bu özelliklerden $(\mathbf{u}, c\mathbf{v}) = (c\mathbf{v}, \mathbf{u}) = c(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = c(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ olduğu için $(\mathbf{u}, c\mathbf{v}) = c(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ sonucu elde edilir. Ayrıca $(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u}, \mathbf{w})$ olur.

ÖRNEK 1

Kesim 3.1'de R^n üzerinde standart iç çarpım ya da nokta çarpımı, her bir

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

vektör çiftine

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n.$$

ile verilen sayıyı karşılık getiren bir fonksiyondur. Şüphesiz bu fonksiyonu Tanım 5.1'i sağladığını göstermeliyiz. ■

Uyarı

1. Skalarlar karmaşık sayılara kısıtlandığı zaman keyfi bir V vektör uzayı üzerinde iç çarpım için Ek B.2'ye bakınız.
2. Eğer R^n'deki $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörlerini $n \times 1$ matrisler olarak göz önüne alırsak, matris çarpımı cinsinden standart iç çarpımı

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T\mathbf{v} \tag{1}$$

biçiminde yazabiliriz. Burada 1×1 tipinde olan $\mathbf{u}^T\mathbf{v}$ matrisinin parantezini yazmayız.

ÖRNEK 2

V sonlu boyutlu bir vektör uzayı ve $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_n\}$'de V'nin sıralı bir tabanı olsun. Eğer

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_n\mathbf{u}_n$$

ve

$$\mathbf{w} = b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + \cdots + b_n\mathbf{u}_n$$

ise

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \left([\mathbf{v}]_S, [\mathbf{w}]_S\right) = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

olarak tanımlarız. Bu tanımı V üzerinde bir iç çarpım belirlediğini sağlamak güç değildir. (Alıştırma 4.) V üzerinde bir iç çarpım olarak $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$'nin bu tanımı R^n üzerinde standart iç çarpımı kullanılır. ■

Örnek 2 herhangi bir sonlu boyutlu vektör uzayı üzerinde bir iç çarpım tanımlayabileceğimizi gösterir. Şüphesiz Örnek 2'de V için tabanı değiştirirsek farklı bir iç çarpım elde ederiz.

ÖRNEK 3

$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ R^2'de vektörler olsun

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1v_1 - u_2v_1 - u_1v_2 + 3u_2v_2$$

tanımlayalım. Bunun, R^2'de bir iç çarpım olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= u_1^2 - 2u_1u_2 + 3u_2^2 = u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2 + 2u_2^2 \\ &= (u_1 - u_2)^2 + 2u_2^2 \geq 0\end{aligned}$$

olur. Ayrıca eğer $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ ise bu durumda $u_1 = u_2$ ve $u_2 = 0$ olur. Böylece $\mathbf{u} = 0$ olur. Karşıt olarak eğer $\mathbf{u} = 0$ ise, o zaman $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ olur. Tanım 5.1'in geriye kalan üç özelliğinin (Alıştırma 2'ye bakınız) sağlandığı gösterilebilir. Şüphesiz bu iç çarpım R^2 üzerinde bir standart iç çarpım değildir. ■

Örnek 3, R^2 üzerinde bir standart iç çarpımı sahip olmasından dolayı bir vektör uzayı üzerinde birden fazla iç çarpımın var olabileceğini gösteriniz.

ÖRNEK 4 [0, 1] birim aralığı üzerinde tanımlı bütün reel değerli sürekli, fonksiyonların vektör uzayı V olsun. f, g V için $(f, g) = \int_0^1 f(t)\, g(t)dt$ tanımlansın. Şimdi bunun V üzerinde bir iç çarpım olduğunu, yani Tanım 5.1'in özelliklerini sağladığını gösteriniz.

Matematik analizin sonuçlarını kullanarak $f = 0$ sıfır fonksiyonu için

$$(f, f) = \int_0^1 (f(t))^2\, dt \geq 0$$

yazabiliriz. Üstelik eğer $(f. f) = 0$ ise, o zaman $f = 0$ olur. Tersine olarak, eğer $f = 0$ ise $(f, f) = 0$ olur. Ayrıca

$$(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)\, dt = \int_0^1 g(t)f(t)\, dt = (g, f)$$

olur. Sonra

$$(f + g, h) = \int_0^1 (f(t) + g(t))h(t)\, dt = \int_0^1 f(t)h(t)\, dt + \int_0^1 g(t)h(t)\, dt$$
$$= (f, h) + (g, h)$$

ve

$$(cf, g) = \int_0^1 (cf(t))g(t)\, dt = c\int_0^1 f(t)g(t)\, dt = c(f, g)$$

elde edilir. Böylece eğer f ve g fonksiyonları $f(t) = t + 1$, $g(t) = 2t + 3$ şeklinde tanımlanmış ise, o zaman

$$(f, g) = \int_0^1 (t + 1)(2t + 3)\, dt = \int_0^1 (2t^2 + 5t + 3)\, dt = \tfrac{37}{6}$$

bulunur. ■

ÖRNEK 5 $V = R^2$ olsun. $\mathbf{u} = [u_1, u_2]$ ve $\mathbf{v} = [v_1, v_2]$, V de vektörler olmak üzere $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1v_1 - u_2v_1 - u_1v_2 + 5u_2v_2$ fonksiyonu tanımlayalım. Bu fonksiyonun bir iç çarpım olduğunu göstermek Örnek 3'e tamamen benzerdir (Alıştırma 5). ■

ÖRNEK 6 $V = P$ olsun. Eğer $p(t)$ ve $q(t)$, P de polinomlar ise

$$(p(t), q(t)) = \int_0^1 p(t)q(t)\, dt$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyonun bir iç çarpım olduğunu sağlanan Örnek 4 için verilen çözüm ile aynıdır (Alıştırma 6). ■

Şimdi sonlu boyutlu vektör uzayı V üzerinde verilen bir taban cinsinden her iç çarpımının belli bir matrisle tam olarak belirtilebileceğini göstereceğiz.

Teorem 5.2 $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_n\}$ sonlu boyutlu bir V vektör uzayı için sıralı bir taban olsun ve V üzerinde bir iç çarpımın verildiğini kabul edelim. $c_{ij} = (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$ ve $C = [c_{ij}]$ alalım. Bu durumda,

(a) C, bir simetrik matristir.

(b) C, V'deki her $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ için $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ ifadesini belirler.

İspat

(a) Alıştırma olarak yapınız.

(b) V'de $\mathbf{w}$ ve $\mathbf{v}$ herhangi iki vektör olsun. Bu taktirde,

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_n\mathbf{u}_n$$
$$\mathbf{w} = b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + \cdots + b_n\mathbf{u}_n$$

olup

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad [\mathbf{w}]_S = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

yazılır. Böylece $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ iç çarpımı aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{u}_i, \mathbf{w}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{w}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\mathbf{u}_i, \sum_{j=1}^{n} b_j\mathbf{u}_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} b_j(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i c_{ij} b_j \\ &= [\mathbf{v}]_S^T C [\mathbf{w}]_S\end{aligned}$$

o halde

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = [\mathbf{v}]_S^T C [\mathbf{w}]_S \tag{2}$$

olur. Bu da C'nin, V'deki her $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ vektörleri için $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$'yi belirlemesi demektir. ■

Böylece Denklem (2)'deki iç çarpım; üç matrisin çarpımıdır. Bundan sonra (2)'deki iç çarpımın R^n üzerindeki standart iç çarpım cinsinden ifade edilebileceğini göstereceğiz. İlk olarak R^n üzerinde standart iç çarpım için aşağıdaki sonucu elde edelim.

Eğer $A = [a_{ij}]$ $n \times n$ tipinde bir matris ve $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ R^n'de vektörler ise, bu durumda

$$(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A^T\mathbf{y}) \tag{3}$$

olur. Şimdi Denklem (1) ile birlikte, matris çarpımının birleşmeli olması ve Teorem 1.4 (c) kullanılarak (3) ispatlanabilir;

$$(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (A\mathbf{x})^T\mathbf{y} = (\mathbf{x}^T A^T)\mathbf{y} = \mathbf{x}^T(A^T\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A^T\mathbf{y})$$

eşitlik (1) kullanarak (2)'yi

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \left([\mathbf{v}]_S, C[\mathbf{w}]_S\right) \tag{4}$$

olarak yazabiliriz. Burada soldaki iç çarpım V'dedir ve sağdaki standart iç çarpım R^n'dedir. (1) ve C'nin simetriği kullanılarak

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \left(C[\mathbf{v}]_S, [\mathbf{w}]_S\right) \tag{5}$$

sonucuna varılır (Gerçekleyiniz). Böylece C, V'de her $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ için $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$'yi tanımlar. Özet olarak, bir sonlu boyutu V reel vektör uzayı üzerinde bir iç çarpım, (4) veya (5)'teki gibi R^n üzerinde standart iç çarpım kullanılarak hesaplanır.

Teorem 5.2'deki C matrisi, **sıralı S tabanına göre iç çarpımının matrisi** olarak adlandırılır. Eğer iç çarpım Örnek 2'deki gibi tanımlanmış ise bu durumda $C = I_n$'dir (Gerçekleyiniz).

İç çarpımın matrisi tarafından sağlanan başka bir önemli özelliği vardır. Eğer $\mathbf{u}$, R^n de sıfırdan farklı bir vektör ise, bu durumda $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$ olur. Böylece $\mathbf{x} = [\mathbf{u}]_s$ alındığında Eşitlik (2), R^n'de sıfırdan farklı her $\mathbf{x}$ için

$$\mathbf{x}^T C\mathbf{x} > 0$$

olduğunu ifade eder.

İç çarpım matrisinin bu özelliği, böyle matrislerin tanımlanmasında özellikle çok önemlidir. R^n'de sıfırdan farklı her $\mathbf{x}$ vektörü için $\mathbf{x}^T C\mathbf{x} > 0$ özellikli $n \times n$ tipindeki simetrik C matrisi pozitif tanımlı olarak adlandırılır. Bir pozitif tanımlı C matrisi singüler değildir. Eğer C singüler ise bu durumda $C\mathbf{x} = 0$ homogen sistemi aşikâr olmayan bir $\mathbf{x}_0$ çözümüne sahiptir. O taktirde $\mathbf{x}_0^T C\mathbf{x}_0 = 0$ olması sıfırdan farklı herhangi bir $\mathbf{x}$ için $x^T C\mathbf{x} > 0$ olması ile çelişir.

Eğer $C = [c_{ij}]$ $n \times n$ pozitif tanımlı bir matris ise, bu durumda C'yi V üzerinde bir çarpım tanımlamak için kullanabiliriz. Önceden olduğu gibi aynı gösterimi kullanarak

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \left([\mathbf{v}]_S, C[\mathbf{w}]_S\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i c_{ij} b_j$$

tanımlarız. Bunun V üzerinde bir iç çarpım tanımladığını göstermek çok zor değildir (Gösteriniz). Yukarıdaki tartışmada tek açık reel simetri marisin ne zaman pozitif tanımlı olacağının hala iyi bilinmemesidir. Tanımı sağlattırmak için çabaların uygun ve verimli olmamasından Kesim 3.6'da (Teorem 8.11'e bakınız) pozitif tanımlı matrislerin bir karakterizasyonunu ispatlayacağız.

ÖRNEK 7 $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda C'nin pozitif tanımlı olduğunu aşağıdaki gibi gösterebiliriz. $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ise

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T C\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)^2 > 0 \end{aligned}$$

olur. ■

Şimdi P_1 üzerinde $S = \{t, 1\}$ sıralı tabanına göre matrisi C olan bir iç çarpım tanımlarız. Bu suretle $p(t) = a_1 t + a_2$ ve $q(t) = b_1 t + b_2$, P_1'de

herhangi iki vektör olsun. $(p(t), q(t)) = 2a_1b_1 + a_2b_1 + a_2b_1 + a_1b_2$ olarak tanımlayalım $(p(t), q(t)) \geq 0$ olduğunu yani $2a_1^2 + 2a_1a_2 + 2a_2^2 \geq 0$ olduğunu gerçeklemeliyiz. Biz şimdi

$$2a_1^2 + 2a_1a_2 + 2a_2^2 = a_1^2 + a_2^2 + (a_1 + a_2)^2 \geq 0$$

ifadesine sahip oluruz. Ayrıca eğer $p(t) = 0$ ise, yani $a_1 = 0$ ve $a_2 = 0$ ise, bu durumda $(p(t), q(t)) = 0$ olur. Tersine olarak eğer $(p(t), q(t)) = 0$ ise bu durumda $a_1 = 0$ ve $a_2 = 0$ dır. Böylece $p(t) = 0$'dir. Geriye kalan özellikleri göstermek zor değildir.

TANIM 5.2 Üzerinde bir iç çarpıma sahip reel bir vektör uzayına bir iç çarpım uzayı denir. Eğer uzay sonlu boyutlu ise, bu uzaya öklid uzayı denir.

Eğer V bir iç çarpım uzayı ise, bu durumda V'nin boyutu ile, bir reel vektör uzayı olarak V'nin boyutu demek istiyoruz ve S cümlesine eğer S reel vektör uzayı V için bir taban ise V için bir tabandır denir. 1'den 6'ya kadar olan örnekler iç çarpım uzaylardır. 1'den 5'e kadar olan örnekler de öklid uzaylarıdır.

Bir iç çarpım uzayında bir $\mathbf{u}$ vektörünün uzunluğu $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}$ ile tanımlarız. Uzunluğun bu tanımı eğer $u \neq 0$ ise $\|\mathbf{u}\| > 0$ olduğundan geçerlidir. $\|\mathbf{u}\| = 0$ olduğunu gösterebiliriz. (Alıştırma 7'ye bakınız.)

Şimdi V iç çarpım uzayında sıfır olmayan $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri arasındaki açının kosinüsü için kullanışlı bir tanım vermeyi sağlayacak bir sonuç ispatlayacağız. Bu sonuç matematikte bir çok önemli uygulaması olan **Cauchy*-Schwarz† eşitsizliği**'dir. Bunun ispatı zor olmamasına rağmen çok doğal da değildir ve ispat zekice bir başlangıç olarak görülür.

Teorem 5.3 **Cauchy*–Schwarz Eşitsizliği**



AUGUSTIN-LOUS CAUCHY

Eğer $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$, V iç çarpım uzayında herhangi iki vektör ise bu durumda

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}$$

dir.

İspat

Eğer $\mathbf{u} = 0$ ise bu durumda $\|\mathbf{u}\| = 0$ olur. Alıştırma 7(b)'den $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ olduğundan eşitsizlik sağlanır. Şimdi $\mathbf{u}$'nun sıfır olmadığını kabul edelim. r bir skalar olmak üzere $r\mathbf{u} + \mathbf{v}$ vektörünü gözönüne alalım. Bir vektörün kendisiyle iç çarpımı daima pozitif olduğundan

$$0 \leq (r\mathbf{u} + \mathbf{v}, r\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u})r^2 + 2r(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{v}, \mathbf{v}) = ar^2 + 2br + c.$$

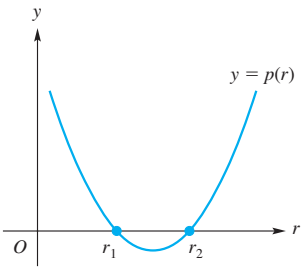


KARL HERMANN AMANDUS SCHWARZ

*Augustin–Luis Cauchy (1789–1857) Paris'in varoşlarında yetişmiştir. Ecole Polytechnique ve Ecole des Ponts et Chaussées'de zamanın ünlü matematikçilerinin yanına asistan olarak girmiş, aynı zamanda stajyer mühendis olarak çalışmıştır. O dindar bir Roman Katoliğidir, ayrıca krallığa da bağlıydı. Özellikle Fransa'da Napolyon'un yenilgisi sonrası hüküm sürmüş Bourban Krallığına X. Charles Prago sürgün edildiğinde, Cauchy'de onunla gönüllü sürgün olarak Prag'a gitmiştir.

Cauchy matematiğin tüm dallarına değinecek kitap ve 700 den fazla çeşitli sayıda makale yazmıştır. O, ilk determinat teorisine, özdeğerler teorisine, adi ve kısmi türevli denklemleri çalışmalarına, permütasyon grupları teorisine, analizin kuruluşuna önemli yardımlarda bulunmuş, kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisini de bulmuştur.

Karl Herman Amandus Schwarz (1843-1921) Polanya'da doğmuş fakat Almanya'da eğitim ve öğrenimini yapmıştır. Karl Weierstrass ve kızıyla evlendiği Ernst Eduard Kummer'in himayesine girmiştir. Analizin geometrik görünüşü konform tasvirleri ve minimal yüzeyler üzerindeki yaptığı çalışmalar matematiğe yaptığı temel yardımlardar. Çalışmalarında diferensiyel denklemlerle ilgili olan belirli sayılar üzerine çalışmış; bu sayılar daha sonra öz değer olarak adlandırılmıştır. Yukarda verilen eşitsizlik, bu sayıların araştırılmasında kullanılmıştır.



ŞEKİL 5.18

ifadesine sahip oluruz. Burada $a = (\mathbf{u}, \mathbf{u})$, $b = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ve $c = (\mathbf{v}, \mathbf{v})$. Eğer u ve **v** sabitse, bu durumda $ar^2 + 2br + c = p(r)$ r'nin ikinci dereceden bir polinomu olup, r'nin bütün değerleri için negatif değildir. Bunun anlamı $p(r)$ polinomu en fazla reel köke sahiptir. Eğer İki farklı r_1 ve r_2 reel köküne sahip ise polinom r_1 ve r_2 arasında negatif olabilir. (Şekil 5.18). İkinci derece denklemin köklerini veren formülden $p(r)$'nin kökleri

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} \quad \text{ve} \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

ile hesaplanır ($\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ olduğundan $a \neq 0$'dır. Böylece $b^2 - ac \leq 0$ eşitsizliğine sahip oluruz. Bu da $b^2 \leq ac$ O halde $b^2 \leq ac$'dir. Bu eşitsizliğin karekökünü alırsak $|b| \leq \sqrt{a}\sqrt{c}$ olur. a, b ve c'nin değerlerini bu eşitsizlikte yerine yazarsak istenilen eşitsizlik elde edilmiş olur. ■

Uyarı Çoğunlukla Cauchy-Schwarz eşitsizliği olarak bilinen bu sonuç (Teorem 5.3) milliyetçilik duygularının bilme girişinde iyi bir örnek oluşturur. Çünkü bu sonuç Rusya'da genellikle Bungakovsky‡ eşitsizliği olarak bilinir. Fransa'da *Cauchy eşitsizliği*, Almanya'da Schwarz Eşitsizliği olarak ifade edilmesi milliyetçilik duygularındadır. Bu sonucun üç yazar arasında paylaştırıldığı düşünülürse, bu eşitsizliğe CBS eşitsizliği denilebilir.

ÖRNEK 8 Standart iç çarpım ile R^3 öklid uzayında $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ iki vektör olsun. Bu durumda $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -5$, $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{14}$ ve $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{17}$'dir. O halde $|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$'dir. ■

Eğer **u** ve **v**, V iç çarpım uzayında sıfır olmayan herhangi iki vektör ise, Cauchy-Schwarz Eşitsizliğinden

$$-1 \leq \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \leq 1$$

olarak yazılabilir. Bu durumda

$$\cos\theta = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

olacak şekilde bir ve yalnız bir θ açısı vardır. Bu açıyı **u** ve **v** vektörlerin arasındaki açı olarak tanımlarız.

Üçgen eşitsizliği; Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden görülen çok kolay bir sonuçtur.



VIKTOR YAKOLEVICH BUNYAKOVSKY

‡Victor Yakovlevich Bunyakovsky (1804–1889) Ukrayna'nın Bar kentinde doğmuştur. 1825 yılında Paris'te doktorasını yapmıştır. St. Petesburg'da çalışmalarına devam emiş, uzun bir kariyer yaşamından sonra profesör olmuştur? Bunyokovsky; sayılar teorisine katkıda bulunmuş ayrıca mekanikte ve hidrostatikte kullanılan geometri üzerine çalışmalar yapmıştır. Onun 25 yıl önce Schwarz tarafından çalışılmış olan ispat, 1859 yılında yapmış olduğu çalışmasında ortaya çıkan, Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin kanıtıdır. Bunyakovsky St. Petersburg'da ölmüştür.

Sonuç 5.1 **(Üçgen Eşitsizliği)**
Eğer $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$, V iç çarpım uzayında herhangi vektörler ise bu durumda

$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$,dir.

İspat $$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v}) = (\mathbf{u},\mathbf{u}) + 2(\mathbf{u},\mathbf{v}) + (\mathbf{v},\mathbf{v})$$
$$= \|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2$$

sonucuna sahip oluruz. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin ifadesinden $(\mathbf{u},\mathbf{v}) \leq |(\mathbf{u},\mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$. olur. Böylece

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 = (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2$$

elde edilir. Bu ifadenin karekökü alınırsa

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

bulunur. ■

Şimdi Cauchy-Schwarz eşitsizliği ifadesini iç çarpım uzayları için örneklerimizin bir çoğuna uygulayabiliriz. Örnek 2'de, eğer

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

ise, bu durumda

$$|(\mathbf{u},\mathbf{v})| = \left|\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right| \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}\right)\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}\right) = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$$

dir. Örnek 4'te eğer f ve g; $[0, 1]$ üzerinde sürekli fonksiyonlar ise, o zaman

$$|(f,g)| = \left|\int_0^1 f(t)g(t)\,dt\right| \leq \left(\sqrt{\int_0^1 f^2(t)\,dt}\right)\left(\sqrt{\int_0^1 g^2(t)\,dt}\right)$$

olur.

ÖRNEK 9 $V = P_2$ Öklid uzayı Örnek 6'daki gibi tanımlanmış iç çarpımlı uzay olsun. Eğer $p(t) = t + 2$ ise bu durumda $p(t)$'nin uzunluğu

$$\|p(t)\| = \sqrt{(p(t), p(t))} = \sqrt{\int_0^1 (t+2)^2\,dt} = \sqrt{\frac{19}{3}}$$

tür.

Eğer $q(t) = 2t - 3$ ise o zamanda $p(t)$ ve $q(t)$ arasında kalan θ açısının kosinüsünü bulmak için aşağıdaki yolu izleriz. İlk olarak

$$\|q(t)\| = \sqrt{\int_0^1 (2t-3)^2\,dt} = \sqrt{\frac{13}{3}}$$

olur. Sonra

$$(p(t), q(t)) = \int_0^1 (t+2)(2t-3)\,dt = \int_0^1 (2t^2 + t - 6)\,dt = -\frac{29}{6}$$

hesaplanır. Böylece

$$\cos\theta = \frac{(p(t), q(t))}{\|p(t)\|\,\|q(t)\|} = \frac{-\frac{29}{6}}{\sqrt{\frac{19}{3}}\sqrt{\frac{13}{3}}} = \frac{-29}{2\sqrt{(19)(13)}}$$

bulunur. ■

TANIM 5.3 Eğer V bir iç çarpım uzayı ise, V'deki $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri arasındaki uzaklığı $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ olarak tanımlarız.

TANIM 5.4 V bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer V'deki $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri için $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ ise $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri **diktir** denir.

ÖRNEK 10 $V = R^4$ standart iç çarpımlı Öklid uzayı olsun. Eğer

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ise bu durumda $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$'dır. Böylece $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri diktir. ■

ÖRNEK 11 $V = P_2$ Örnek 10'da gözönüne alınan iç çarpım uzayı olsun t ve $t - \frac{2}{3}$ vektörleri,

$$\left(t, t - \frac{2}{3}\right) = \int_0^1 t\left(t - \frac{2}{3}\right) dt = \int_0^1 \left(t^2 - \frac{2t}{3}\right) dt = 0$$

sonuç sebebiyle birbirlerine diktir. ■

Şüphesiz V iç çarpım uzayında $\mathbf{0}_V$ vektörü, V'deki herbir vektöre diktir (Alıştırma 7*b*'ye bakınız.) ve V de sıfırdan farklı iki vektör eğer aralarındaki θ açısı $\pi/2$ ise diktir. Ayrıca V'de basit bir vektöre dik olan V'deki vektörlerin alt cümlesi V'nin bir altuzayıdır (Alıştırma 23'e bakınız).

Matematik analizde R^3 için koordinat eksenlerinin herhangi bir cümlesi ile çalışabileceğimizi biliyoruz. Fakat kartezyen koordinatlarla çalışma daha az sıkıcı olur. Bir iç çarpım uzayında karşılaştırılabilirlik kavramı vektörleri karşılıklı olarak birbirine dik olan tabandır. Şimdi bu düşünceyi aşağıdaki şekilde formüle ederiz.

TANIM 5.5 V bir iç çarpım uzayı olsun. V'deki vektörlerin bir S cümlesi, eğer S de farklı herhangi iki vektör birbirine dik ise S dik olarak adlandırılır. Ayrıca, eğer S'de her bir vektör birim uzunlukta ise, bu durumda S birim dik (ortanormal) olarak adlandırılır.

Burada ifade edelim ki eğer bir iç çarpım uzayında $\mathbf{x}$ sıfırdan farklı bir vektör ise, o zaman $\mathbf{x}$ ile aynı doğrultuda olan birim uzunluklu bir vektörü (**birim vektör** olarak adlandırılır) daima bulabiliriz. $\mathbf{u} = \dfrac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x}$ alalım. Bu durumda,

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})} = \sqrt{\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x}, \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x}\right)} = \sqrt{\frac{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{x}\|}} = \sqrt{\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{x}\|}} = 1,$$

ve $\mathbf{x}$ ile $\mathbf{u}$'nun arasındaki açının kosinüsü 1'dir. Böylece $\mathbf{x}$ ile $\mathbf{u}$ aynı yöne sahiptir.

ÖRNEK 12 Eğer $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, ve $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ise, bu durumda $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ bir dik cümledir (gösteriniz).

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

vektörleri sırasıyla $\mathbf{x}_1$ ve $\mathbf{x}_2$ yönünde birim vektörlerdir. Ayrıca $\mathbf{x}_3$ birim vektör olduğundan, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$'ün birim dik bir cümle olduğunu görebiliriz. ■

ÖRNEK 13 R^n ve R_n için doğal tabanlar bu vektör uzayları üzerinde standart iç çarpımlara göre birim dik cümlelerdir. ■

İç çarpım uzaylarında vektörlerin dik cümleleri hakkında önemli bir sonuç aşağıdadır:

Teorem 5.4 $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_n\}$, V iç çarpım uzayında sıfırdan farklı vektörlerin sonlu dik (ortogonal) cümlesi olsun. Bu durumda S lineer bağımsızdır.

İspat

$$a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda bu eşitliğin her iki tarafının $\mathbf{u}_i$ ile iç çarpımını alalım.

$$(a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_i\mathbf{u}_i + \cdots + a_n\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_i) = (\mathbf{0}, \mathbf{u}_i) = 0$$

olur. Bu ifadenin sol tarafı

$$a_1(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_i) + a_2(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_i) + \cdots + a_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) + \cdots + a_n(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_i)$$

olup, S dik olduğundan, bu $a_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)$'dir. Böylece $a_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) = 0$ olur. $\mathbf{u}_i \neq 0$ olduğundan $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i) \neq 0$ olup $a_i = 0$ buluruz. Bu da S'nin lineer bağımsız olması demektir. ■

ÖRNEK 14 $[-\pi, \pi]$ üzerinde tanımlı bütün reel değerli sürekli fonksiyonların vektör uzayı V olsun V'de f ve g için

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt$$

alalım. Bunun V üzerinde bir iç çarpım uzayı olduğu gösterilmişti. (Örnek 4'e bakınız.) V'de açık olarak var olan

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots, \cos nt, \sin nt, \ldots, \qquad (6)$$

fonksiyonlarını gözönüne alalım.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt\, \cos nt\, dt = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mt\, \cos nt\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mt\, \sin nt\, dt = 0 \quad \text{if } m \neq n$$

bağıntıları (6)'daki f ve g fonksiyonları farklı olduğu zaman $(f, g) = 0$ olduğunu gösterir. Böylece (6)'daki fonksiyonların herhangi sonlu alt cümlesinin Lineer bağımsız olduğu Teorem 5.4'ten görülür. (6)'daki fonksiyonlar Fransız matematikçi Jean Baptiste Joseph Fourier tarafından çalışılmıştır. Kesim 5.5'te bu fonksiyonları daha yakından inceleyeceğiz. ■

Anahtar Kelimeler

Reel vektör uzayı
İç çarpım uzayı
R^n üzerinde S standart iç (Nokta) çarpım uzayı
Sıralı tabana göre iç çarpımın matrisi
Pozitif tanımlı matris
Vektörler arasındaki uzaklık
Dik (ortogonal) vektörler
Dik (ortogonal) cümle
Birim vektörler
Birim dik (ortonormal) cümle
Öklid uzayı
Boyut
Taban (baz)
Cauchy-Schwarz eşitsizliği
Üçgen eşitsizliği

5.3 Alıştırmalar

1. R^n üzerinde standart iç çarpımın Tanım 5.1'in özelliklerini sağladığını gösteriniz.

2. Örnek 3'teki fonksiyonun Tanım 5.1'in geriye kalan üç özelliği sağladığını gösteriniz.

3. $V = M_{nn}$ bütün $n \times n$ tipindeki matrislerin reel vektör uzayı olsun. Eğer A ve B, V'de ise İz Kesim 1.3'teki Alıştırma 4.3'te tanımlanan İz fonksiyonu olmak üzere $(A, B) = \text{İz}(B^TA)$ şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyonun V üzerinde bir iç çarpım olduğunu gösteriniz.

4. Örnek 2'de V üzerinde tanımlanan fonksiyonun bir iç çarpım olduğunu gösteriniz.

5. Örnek 5'te R_2 üzerinde tanımlanan fonksiyonun bir iç çarpım olduğunu gösteriniz.

6. Örnek 6'da P üzerinde tanımlanan fonksiyonun bir iç çarpım olduğunu gösteriniz.

7. V bir iç çarpım uzayı olsun. Aşağıdakileri gösteriniz.
- **(a)** $\|\mathbf{0}\| = 0$
- **(b)** V'deki herhangi $\mathbf{u}$ için $(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = (\mathbf{0}, \mathbf{u}) = 0$ dır.
- **(c)** V'deki her $\mathbf{v}$ için $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ ise bu durumda $\mathbf{u} = 0$'dır.
- **(d)** V'deki her $\mathbf{w}$ için $(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = (\mathbf{v}, \mathbf{w})$ ise bu durumda $\mathbf{u} = \mathbf{v}$'dir.
- **(e)** V'deki her $\mathbf{w}$ için $(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = (\mathbf{w}, \mathbf{v})$ ise bu durumda $\mathbf{u} = \mathbf{v}$'dir.

Alıştırma 8 ve 9'da $V = R_4$ standart iç çarpımlı Öklid uzayı olsun. $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$*'yi hesaplayınız.*

8. **(a)** $\mathbf{u} = [1 \quad 3 \quad -1 \quad 2], \mathbf{v} = [-1 \quad 2 \quad 0 \quad 1]$
- **(b)** $\mathbf{u} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1], \mathbf{v} = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$
- **(c)** $\mathbf{u} = [-2 \quad 1 \quad 3 \quad 4], \mathbf{v} = [3 \quad 2 \quad 1 \quad -2]$

9. **(a)** $\mathbf{u} = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4], \mathbf{v} = [-1 \quad 0 \quad -1 \quad -1]$
- **(b)** $\mathbf{u} = [0 \quad -1 \quad 1 \quad 4], \mathbf{v} = [2 \quad 0 \quad -8 \quad 2]$
- **(c)** $\mathbf{u} = [0 \quad 0 \quad -1 \quad 2], \mathbf{v} = [2 \quad 3 \quad -1 \quad 0]$

Alıştırma 10 ve 11 için Örnek 44te tanımlanan $[0,1]$ *üzerindeki sürekli fonksiyonların iç çarpım uzayını kullanarak aşağıdakiler için* (f, g)*'yi bulunuz.*

10. **(a)** $f(t) = 1 + t, g(t) = 2 - t$
- **(b)** $f(t) = 1, g(t) = 3$
- **(c)** $f(t) = 1, g(t) = 3 + 2t$

11. **(a)** $f(t) = 3t, g(t) = 2t^2$
- **(b)** $f(t) = t, g(t) = e^t$
- **(c)** $f(t) = \sin t, g(t) = \cos t$

Alıştırma 12 ve 13'te; V, örnek 3'teki Öklid uzayı olsun. V'deki herbir vektör çifti arasındaki açının kosinüsünü bulunuz.

12. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

13. **(a)** $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Alıştırma 14 ve 15'te V Örnek 6'daki iç çarpım uzayı olsun V'deki herbir vektör çifti arasındaki açının kosinüsünü bulunuz.

14. **(a)** $p(t) = t, q(t) = t - 1$
(b) $p(t) = t, q(t) = t$
(c) $p(t) = 1, q(t) = 2t + 3$

15. **(a)** $p(t) = 1, q(t) = 1$
(b) $p(t) = t^2, q(t) = 2t^3 - \frac{4}{3}t$
(c) $p(t) = \sin t, q(t) = \cos t$

16. Bir iç çarpım uzayında her hangi iki vektör için paralel kenar kuralını isaptlayınız?

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$$

17. V deki iç çarpım uzayı olsun; Herhangi bir u vektörü ve herhangi bir c skaları için $\|c\mathbf{u}\| = |c|\,\|\mathbf{u}\|$ olduğunu gösteriniz.

18. Örnek 3, Örnek 5 ve Alıştırma 3'te tanımlanan iç çarpım uzayları için Cauchy-Schwarz eşitsizliğini ifade ediniz.

19. V bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$, V'de herhangi vektörler ise bu durumda $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ olmak için gerek ve yeter şart $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ olmasıdır. Yani, $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$'nin birbirine dik olmasıdır. Bu sonuç, Pisagor (Phythagoream) teoremi olarak bilinir.

20. $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$, V iç çarpım uzayındaki vektörlerin birim dik cümlesi olsun. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2$'yi hesaplayınız.

21. V iç çarpım uzayı olsun. Eğer $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$, V'de vektörler ise,

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \tfrac{1}{4}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \tfrac{1}{4}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$$

olduğunu gösteriniz.

22. $V = R_4$ Alıştırma 8'de gözönüne alınan Öklid uzayı olsun. Verilen vektör çiftlerinin dik olanlarını bulunuz.

23. V bir iç çarpım uzayı ve $\mathbf{u}$, V'de belirli bir vektör olsun. $\mathbf{u}$'ya dik olan V'deki bütün vektörlerin cümlesinin V'nin bir altuzayı olduğunu ispatlayınız.

24. Örnek 3 ve Örnek 5'te tanımlanan iç çarpımların her biri için, vektör uzayın alt sıralı bir S tabanını seçiniz ve S'ye göre iç çarpım matrisini bulunuz.

25.

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

olsun. R_2 üzerinde doğal sıralı tabanına göre matrisi C olan bir iç çarpımı tanımlayınız.

26. Eğer V bir iç çarpım uzayı ise, her bir $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$, V'de vektörler olmak üzere, Tanım 5,3'ün uzaklık fonksiyonunun aşağıdaki özellikleri sağladığını ispatlayınız.

(a) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$
(b) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ olmasıdır.
(c) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$
(d) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$

Alıştırma 27 ve 28'de V Örnek 4'teki iç çarpım uzayı olsun. Verilen vektörler arasındaki uzaklığı hesaplayınız.

27. **(a)** $\sin t, \cos t$ **(b)** t, t^2

28. **(a)** $2t + 3, 3t^2 - 1$ **(b)** $3t + 1, 1$

Alıştırma 29 ve 30'daki R^3 için verilen standart iç çarpımlı vektörlerin cümlelerinin birbirine dik, birim dik ya da hiç biri olup olmadığını gösteriniz.

29. **(a)** $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

30. **(a)** $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\}$

(c) $\left\{ \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \right\}$

Alıştırma 31 ve 32'de V Örnek 6'daki iç çarpım uzayı olsun.

31. $p(t) = 3t + 1$ ve $q(t) = at$ olsun. a'nın herhangi değerleri için $p(t)$ ve $q(t)$ diktir?

32. $p(t) = 3t + 1$, $q(t) = at + b$ olsun. a ve b'nin hangi değerleri için $p(t)$ ve $q(t)$ diktir?

Alıştırma 33 ve 34'te $V = R^3$ standart iç çarpımlı Öklid uzayı olsun.

33. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ olsun. a'nın hangi değerleri için $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ birbirine diktir?

34. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ -1 \\ -b \end{bmatrix}$ olsun. a ve b nin hangi değerleri için $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ birim normal bir cümledir?

35. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ olsun. A ve B Alıştırma 3'te tanımlanan iç çarpım uzayında dik olacak şekilde 2×2 tipinde $B \neq O$ matrisini bulunuz. A'ya dik olan birden fazla B matrisi bulunabilir mi?

36. V, Örnek 4'teki iç çarpım uzayı olsun.
(a) Eğer $p(t) = \sqrt{t}$ ise $p(t)$ ve $q(t)$ birbirine dik olacak şekilde $q(t) = a + bt \neq 0$ bulunuz.
(b) Eğer $p(t) = \sin t$ ise $p(t)$ ve $q(t)$ birbirine dik olacak şekilde $q(t) = a\,be^t \neq 0$ bulunuz.

37. $C = [c_{ij}]$, $n \times n$ tipinde pozitif tanımlı simetrik matris ve V, $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_n\}$ sıralı tabanına sahip n boyutlu vektör uzayı olsun. V de $\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \ldots + a_n\mathbf{u}_n$ ve $\mathbf{w} = b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + \ldots + b_n\mathbf{u}_n$ için $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i c_{ij} b_j$. $a_i c_{ij} b_j$ tanımlansın. Bunun V üzerinde bir iç çarpım tanımladığını gösteriniz.

38. Eğer A ve B, $n \times n$ tipinde matrisler ise, standart iç çarpımlı R^n Öklid uzayındaki herhangi $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri için $(A\mathbf{u}, B\mathbf{v}) = (u, A^TB\mathbf{v})$ olduğunu gösteriniz.

39. Standart iç çarpımlı R^n Öklid uzayında $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T\mathbf{v}$ olduğunu ispatlayınız.

40. Standart iç çarpımlı R^4 Öklid uzayını gözönüne alalım ve

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olsun.
(a) $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$'nin her ikisine dik olan R^4'teki bütün vektörlerden oluşan W cümlesinin R^4'ün bir altuzayı olduğunu gösteriniz.
(b) W için bir taban bulunuz.

41. V bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer $\mathbf{v}$; $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k$'ya dik ise bu durumda $\mathbf{v}$, $SP\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_k\}$ daki her vektöre diktir gösteriniz.

42. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$'nin standart iç çarpımlı R^n'de bir birim dik cümle olduğunu kabul edelim. A matrisi $A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n]$ ile verilmiş olsun. A'nın singüler olmadığını ve tersinin hesaplanabileceğini gösteriniz. R^2 ve R^3'te bu şekilde matrislere üç farklı örnek veriniz.

43. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, standart iç çarpımlı R^n'de bir dik cümle olsun. j.inci sütunu $\mathbf{v}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ olan A matrisi verilmiş olsun. Bu durumda A'nın singüler olup olmadığını ispatlayınız.

44. Eğer A singüler değil ise, A^TA'nın pozitif tanımlı olduğunu gösteriniz.

45. Eğer C pozitif tanımlı ve bir k skaları için $\mathbf{x} \neq 0$ olmak üzere $C\mathbf{x} = k\mathbf{x}$ ise $k > 0$ olduğunu gösteriniz.

46. Eğer C pozitif tanımlı ise bunun köşegen elemanlarının pozitif olduğunu gösteriniz.

47. C pozitif tanımlı r herhangi bir sabit olsun. rC'nin pozitif tanımlı olup olmadığını ispatlayınız.

48. Eğer B ve C, $n \times n$ tipinde pozitif tanımlı matrisler ise $B + C$'nin de pozitif tanımlı olduğunu ispatlayınız.

49. S, $n \times n$ tipinde pozitif tanımlı matrislerin cümlesi olsun S, M_{nn}'nin bir altuzayı mıdır?

50. R^n'de $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektör çiftlerinin standart iç çarpımını hesaplamak için yazılımınızda aşağıdaki gibi matris çarpım işlemini kullanınız. U ve V'yi sırasıyla $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri için sütun matrisleri olsun. Bu durumda $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = U^T$ ve V'nin çarpımıdır. (veya V^T ile U'nun çarpımıdır.) Örnek 1 ve Alıştırma 8 ve 9'daki vektörlerle deneyiniz. (Alıştırma 39'a bakınız.)

51. Kesim 5.1'de Alıştırma 41'i, R^n'ye veya R_n'ye herhangi bir yazılımla genelleştirebiliriz. Yazılımınız için bu durumu belirleyiniz ve kullanınız.

52. Kesim 5.1'deki Alıştırma 43, R^n'ye veya R_n'ye herhangi bir yazılımla genelleştirilebilir. Bilgi sayarınızdaki yazılım için bu durumun kullanılıp kullanılmayacağını belirleyiniz.

53. Eğer bilgisayar cebir sistemi ile ilişkili yazılımınız belirli integralleri hesaplıyor ise bu durumda Örnek 9 ve 14'teki gibi fonksiyonların iç çarpımını hesaplayabilirsiniz. Alıştırma 10 ve 11'deki sonuçlarınızı kontrol etmek için bilgisayar yazılımınızı kullanınız.

5.4 Gram*–Schmidt† Yöntemi

Bu kesimde her V Öklid uzayı için birim dik bir cümle olacak şekilde bir S tabanı bulunacaktır. Bu şekildeki tabana **birim dik taban** adı verilecektir. Bu işlem için kullanılan yönteme de **Gram-Schmidt Yöntemi** diyeceğiz. Çalışmalarımızdan R^2, R^3 ve genel olarak R^n'deki doğal tabanlardan bu çeşit tabanların mevcut olduğunu biliyoruz. Hesaplamalar minimum olarak muhafaza edilmiştir. Hesaplamalardaki indirgeme birim dik tabanla ilgilenme gerçeği yüzündendir. Örneğin, eğer $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ n-boyutlu V Öklid uzayı için bir taban ise $\mathbf{v} \in V$ olmak üzere

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n$$

yazabiliriz. $c_1, c_2, \ldots, c_n$ katsayıları n-bilinmeyen ve n denklemli bir lineer denklem sisteminin çözümüyle elde edilir.

Üstelik S birim dik ise bazı sonuçları çok az bir çalışma ile bulabiliriz. Bu aşağıdaki teoremle düzenlenmiştir.

Teorem 5.5 $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, V öklid uzayının birim dik bir tabanı ve $\mathbf{v}$ de V'nin keyfi bir vektörü olsun. Bu durumda

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n$$

olmak üzere

$$c_i = (\mathbf{v}, \mathbf{u}_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

dir.

İspat ■

Alıştırma 19.



JÖRGEN PEDERSEN GRAM



ERHARD SCHMIDT

ÖRNEK 1

R^3'ün bir tabanı $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ olsun.

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad \text{ve} \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

dir. Burada S birim dik tabandır.

*Jörgen Pedersen Gram (1850-1916) Danimarkada doğdu ve burada Matematikte derece aldı. 1875 de Hafnia Sigorta Şirketinde kariyerine başladı. 1910 yılına kadar orada çalıştı. Giderek önemli pozisyonlara geldi. Hafnia için çalışmaya devam ederken 1884'te kendi sigorta şirketini kurdu. Orman yönetiminde maksimum yararlar için matematiksel modeller üzerine dikkate değer çalışmalar yaptı. Çalışmalarına ilaveten Actuorial bilme ve olasılık teorisine bir çok matematiksel katkı yaptı.

†Erhard Schmidt (1876 – 1959) önde gelen Alman Üniversitelerinde ders verdi. Hem Nerman'ın Amandus Schwarz ve hem de David Hilbert'in öğrencisi idi. O, integral denklemler; kısmi türevli denklemler ve bu kitabın bir parçası olarak 1907'de birim dik taban bulma metodunu bularak önemli katkıda bulundu. 1908'de sonsuz çoklukta bilinmeyeni olan sonsuz çokluktaki lineer denklemler üzerine bir makale yazdı. Bu makalede buradaki, kendi metodunu kullanarak Hilbert uzayları teorisini kurdu.

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

vektörünü S'deki vektörlerin lineer birleşimi olarak yazınız.

Çözüm

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3$$

yazabiliriz. Teorem 5.5'ten c_1, c_2 ve c_3 skalarlarını üç bilinmeyenli üç denklemli lineer denklem sisteminin çözümüne gerek kalmaksızın bulabiliriz. Böylece

$$c_1 = (\mathbf{v}, \mathbf{u}_1) = 1, \quad c_2 = (\mathbf{v}, \mathbf{u}_2) = 0, \quad c_3 = (\mathbf{v}, \mathbf{u}_3) = 7$$

olduğundan $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + 7\mathbf{u}_3$ olur. ■

Teorem 5.6 **Gram-Schmidt Yöntemi**

V bir iç çarpım uzayı ve $W \neq \{\mathbf{0}\}$, *V*'nin *m*-boyutlu bir altuzayı olsun. Bu taktirde *W* için bir $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ birim dik tabanı vardır.

İspat

İspatın amacı istenilen *T* tabanının oluşturmaktır. Bununla birlikte *W* için bir $T^* = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ dik (ortogonal) tabanını buluruz.

W için herhangi bir taban $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ olsun. *S*'deki vektörlerden herhangi birini seçerek başlayalım. Örneğin bu $\mathbf{u}_1$ olsun ve bunu $\mathbf{v}_1$ ile gösterelim. Böylece $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$'dir. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ tarafından gerilin *W*'nin W_1 altuzayında W_1'e dik olan bir $\mathbf{v}_2$ vektörü arıyoruz. $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) = 0$ olacak şekilde a_1 ve a_2 katsayıları bulmalıyız. Burada $0 = (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) = (a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) = a_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) + a_2(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1)$'dir. $\mathbf{v}_1 \neq 0$ (Niçin ?) olduğundan $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) \neq 0$ olur. Böylece

$$a_1 = -a_2\frac{(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1)}{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1)}$$

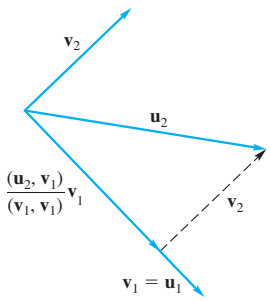
dir. a_2'ye sıfırdan farklı keyfi bir değer verebiliriz. Böylece $a_2 = 1$ alınırsa

$$a_1 = -\frac{(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1)}{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1)}$$

elde edilir. Buradan

$$\mathbf{v}_2 = a_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1)}{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1)}\mathbf{v}_1$$

yazabiliriz. Böylece *W*'nin bir dik $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2\}$ alt cümlesine sahip oluruz (Şekil 5.19).



ŞEKİL 5.19

Şimdi $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ tarafından gerilen *W*'nin W_2 altuzayında $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$ vektörlerinin her ikisine de dik olan bir $\mathbf{v}_3$ vektörü arıyoruz. Şüphesiz W_2, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sistemi tarafından gerilen bir altuzaydır. Böylece

$\mathbf{v}_3 = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + b_2\,\mathbf{u}_3$'dir. Burada $(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2) = 0$ ve $(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1) = 0$ olacak şekilde b_1, b_2 ve b_3 katsayılarını bulmaya çalışacağız. Buradan

$$0 = (\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1) = (b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + b_3\mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1) = b_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) + b_3(\mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1)$$
$$0 = (\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2) = (b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + b_3\mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2) = b_2(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2) + b_3(\mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2)$$

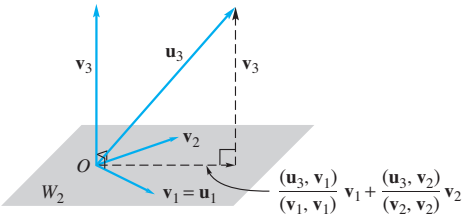
dir. Burada $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$ dır (Neden?). b_1 ve b_2 katsayıları hesaplanırsa,

$$b_1 = -b_3\frac{(\mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1)}{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1)} \quad \text{ve} \quad b_2 = -b_3\frac{(\mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2)}{(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2)}.$$

elde edilir. Böylece b_3'e sıfırdan farklı keyfi değerler verebiliriz. Sonuç olarak $b_3 = 1$ alınırsa,

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{(\mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1)}{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1)}\mathbf{v}_1 - \frac{(\mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2)}{(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2)}\mathbf{v}_2$$

elde edilir. Bu noktada W'nin bir dik $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ alt cümlesini elde etmiş oluruz (Şekil 5.20).



ŞEKİL 5.20

Şimdi $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ ve benzer şekilde $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ sistemleri tarafından gerilen W_3 alt uzayının bir vektörü $\mathbf{v}_4$'ü tanımlayalım. Böylece bu vektör

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_4 - \frac{(\mathbf{u}_4, \mathbf{v}_1)}{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1)}\mathbf{v}_1 - \frac{(\mathbf{u}_4, \mathbf{v}_2)}{(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2)}\mathbf{v}_2 - \frac{(\mathbf{u}_4, \mathbf{v}_3)}{(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3)}\mathbf{v}_3.$$

olarak elde edilir. Bu işleme

$$T^* = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$$

dik sistemini bulana kadar devam edilir. Teorem 5.4'ten T'ın W için bir taban olduğun söyleyebiliriz. Eğer $1 \leq i \leq m$ için $\mathbf{w}_i = \dfrac{1}{\|\mathbf{v}_i\|}\mathbf{v}_i$ alırsak $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ sistemi W için bir birim dik taban olur. ■

Uyarı Eğer $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ bir iç çarpım uzayında $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ olacak şekilde vektörler ise, c herhangi bir skalar olmak üzere $(\mathbf{u}, c\mathbf{v}) = 0$ olduğunu göstermek zor değildir. (Alıştırma 31.) Bu sonuç Gram-Schmidt yönteminde yapılan işlemleri basitleştirmede kullanılabilir. Adım 2'de $\mathbf{v}_i$ vektörü bulunduğunda paydaları basitleştirmek için bir uygun skalar ile çarpılabilir. Bu yaklaşımı Gram-Schmidt yöntemindeki hesaplamalarda kullanacağız.

ÖRNEK 2 Üzerinde standart iç çarpım tanımlı R^4 Öklid uzayının altuzayı W ve W'nin bir tabanı $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ olsun. Burada

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

dir. S tabanını $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ birim dik tabanına dönüştürünüz.

Çözüm

$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$ olsun. O taktirde

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1)}{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1)}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(-\frac{2}{3}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

buluruz. Kesirlerden kurtulmak için $\mathbf{v}_2$'yi 3 ile çarparsak,

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

elde ederiz. Bunu şimdi $\mathbf{v}_2$ vektörü olarak seçebiliriz. Böylece $\mathbf{v}_3$ vektörünü hesaplarsak.

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{(\mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1)}{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1)}\mathbf{v}_1 - \frac{(\mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2)}{(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2)}\mathbf{v}_2$$

bulunuruz. Ayrıca $\mathbf{v}_3$'ü kesirlerden kurtarmak için 5 ile çarparsak

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \left(-\frac{1}{3}\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \left(-\frac{2}{15}\right)\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

W için bir dik tabandır. S'deki her bir vektörü uzunluğuna bölmek suretiyle W için

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right\}$$

$$T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{15}} \\ \frac{2}{\sqrt{15}} \\ -\frac{1}{\sqrt{15}} \\ \frac{3}{\sqrt{15}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{4}{\sqrt{35}} \\ \frac{3}{\sqrt{35}} \\ \frac{1}{\sqrt{35}} \\ -\frac{3}{\sqrt{35}} \end{bmatrix} \right\}$$

birim dik tabanını elde ederiz. ■

Uyarı Örnek 2'nin çözümünde, bir vektörü hesaplar hesaplamaz onun kesrini yok etmek için uygun bir skalar ile çarptık. Bu keyfi adım, el ile çalışıldığı zaman daima basit hesaplamalar sağlar. Gram-Schmidt yönteminin bilgisayarla yapılan hesaplamalarında, örneğin MATLAB ile geliştirilenler, kesirleri sadeleştirmez.

ÖRNEK 3 V, Kesim 5.3'teki Örnek 6'da tanımlanmış iç çarpımlı P_3 Öklid uzayı olsun. W, $S = \{t^2, t\}$ tabanına sahip P_3'ün altuzayı olsun. W için bir birim dik taban bulunuz.

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1)}{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1)}\mathbf{v}_1 = t - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}}t^2 = t - \frac{5}{4}t^2$$

olup, burada

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) = \int_0^1 t^2 t^2\, dt = \int_0^1 t^4\, dt = \frac{1}{5}$$

ve

$$(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1) = \int_0^1 t t^2\, dt = \int_0^1 t^3\, dt = \frac{1}{4}$$

dir. Böylece

$$(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2) = \int_0^1 \left(t - \frac{5}{4}t^2\right)^2 dt = \frac{1}{48}$$

olduğundan, W için bir birim dik taban $\{\sqrt{5}\, t^2, \sqrt{48}\, (t - \frac{5}{4}t^2)\}$'dir. Eğer $\mathbf{u}_1 = t$, $\mathbf{u}_2 = t_2$ seçerek, o zaman W için $\{\sqrt{3}\, t^2, \sqrt{30}\, (t^2 - \frac{1}{2}t)\}$ birim dik tabanını elde ederiz. ■

Teorem 5.6'nın ispatında aşağıdaki sonuçları gösterdik. Gram-Schmidt yönteminin her bir aşamasında, sıralı $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ cümlesi

$$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}, \qquad 1 \leq k \leq n.$$

tarafından gerilen altuzay için bir birim dik tabanı verilen S tabanındaki vektörlerin sıralanmasına bağlıdır. Böylece eğer S'deki vektörlerin sırasını değiştirirsek W için farklı bir T birim dik tabanı elde edebiliriz.

Uyarı Gram-Schmidt yöntemi hakkında bir son gözlem yapabiliriz. Teorem 5.6'nın ispatında ilk önce T^* dik tabanını elde ettik ve T^* daki vektörleri normalleştirmek suretiyle T birim dik tabanını bulduk. Elbette hareketin bir alternatif yönü, her vektörü üretildiği gibi normalleştirmektir. Bununla birlikte, sonunda normalleştirme basit el hesaplamaları için daha kolaydır.

Üzerinde keyfi bir iç çarpım tanımlı V Öklid uzayında birim dik bir tabanı elde etmenin faydalı sonuçlarından biri, birim dik tabana göre vektörün koordinatlarını ifade ettiğimiz zaman, R^n'de standart iç çarpım gibi davranmasıdır.

Teorem 5.7 V, n–boyutlu Öklid uzayı ve $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$'de V için bir birim dik taban olsun. Eğer $\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + \ldots + a_n\mathbf{u}_n$ ve $\mathbf{w} = b_1\mathbf{u}_1 + \ldots + b_n\mathbf{u}_n$ ise o zaman

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

dir.

İspat

İlk önce, sıralı S tabanına göre verilen iç çarpımın $C = [c_{ij}]$ matrisini hesaplamalıyız. Biz

$$c_{ij} = (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j. \end{cases}$$

sonucuna sahibiz. Böylece $C = I_n$ birim matristir. Kesim 5.3'teki Denklem (2)'den

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = [\mathbf{v}]_S^T C [\mathbf{w}]_S = [\mathbf{v}]_S^T I_n [\mathbf{w}]_S = [\mathbf{v}]_S^T [\mathbf{w}]_S$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n,$$

olduğunu biliyoruz. Bu da istenen sonucu verir. ■

Henüz ispatını yaptığımız teoreme bazı ilave katkılar yapılabilir. Standart iç çarpımlı R_3 Öklid uzayını gözönüne alalım ve W'de $S = \{[2 \quad 1 \quad 1], [1 \quad 1 \quad 2]\}$ sıralı tabanı ile verilen altuzay olsun. $\mathbf{u} = [5 \quad 3 \quad 4]$, W'da bir vektör olsun. O zaman

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

olur ve böylece $[5 \quad 3 \quad 4]\,S = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ dir. Ayrıca **u**'nun uzunluğu ise

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{5^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{25 + 9 + 16} = \sqrt{50}$$

dir. S tabanına göre koordinat vektörlerini kullanmak suretiyle **u** vektörünün uzunluğu hesaplanabilir. Bu nedenle $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ tir. Aşikar olarak yanlış bir cevaba sahip oluruz. Bununla beraber W için verilen S tabanını Gram-Schmidt yöntemini kullanarak T birim dik tabanına dönüştürelim. Gram-Schmidt işlemleriyle W için

$$\left\{\left[2 \quad 1 \quad 1\right], \left[-\tfrac{4}{6} \quad \tfrac{1}{6} \quad \tfrac{7}{6}\right]\right\}$$

dik taban oluşturur. (Gösteriniz.) Alıştırma 31'de kesir kısmı sadeleştirilirse,

$$\left\{\left[2 \quad 1 \quad 1\right], \left[-4 \quad 1 \quad 7\right]\right\}$$

dik taban, elde edilir ve böylece W için

$$T = \left\{\left[\frac{2}{\sqrt{6}} \quad \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \frac{1}{\sqrt{6}}\right], \left[-\frac{4}{\sqrt{66}} \quad \frac{1}{\sqrt{66}} \quad \frac{7}{\sqrt{66}}\right]\right\}$$

birim dik tabanını buluruz.

Koordinat vektörlerini kullanarak **u**'nun uzunluğunu hesaplarsak

$$[\mathbf{u}]_T = \begin{bmatrix} \frac{17}{6}\sqrt{6} \\ \frac{1}{6}\sqrt{66} \end{bmatrix}$$

bulunur.

Bir iç çarpım uzayında T birim dik taban ise

$$\|\mathbf{u}\|_T = \sqrt{\left(\frac{17}{6}\sqrt{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\sqrt{66}\right)^2} = \sqrt{\frac{1800}{36}} = \sqrt{50}$$

$[\mathbf{v}]_T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$ olduğunu göstermek zor değildir. (Alıştırma 21.)

■ *QR*-Ayrışımı

Kesim 2.3'te bir matrisin LU ayrışımını tartıştık ve bir lineer sistemin çözümü için bizi çok etkili bir yönteme götürdüğünü gördük. Şimdi bir A matrisi için bir diğer ayrışım şeklini tartışacağız ve buna A'nın ***QR*-ayrışımı** adını vereceğiz. Bu ayrışım tipi, en küçük kareler yaklaşımlarını bulmak. Lineer sistemleri çözmek ve bir matrisin özdeğerlerini bulmak için bilgisayar kod sistemlerinde kullanılır.

Teorem 5.8 A lineer bağımsız sütun vektörlerine sahip $m \times n$ tipindeki matris ise o zaman $A = QR$ olarak ifade edilebilir. Burada Q, A'nın sütun uzayı için bir birim dik tabandan elde edilen sütun vektörlerine sahip $m \times n$ tipinde bir matris ve R'de singüler olmayan $n \times n$ tipinde üst üçgen matristir.

İspat

$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$'ler A'nın sütun uzayı için bir taban olan lineer bağımsız sütun vektörlerini göstersin. Gram-Schmidt yöntemini kullanarak A'nın sütun uzayı için bir birim dik $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ tabanını elde edebiliriz. Hatırlanacağı gibi bu birim dik tabanın nasıl elde edildiğini biliyoruz. Önce aşağıdaki gibi, bir $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ dik tabanını inşa ederiz: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$ ve $i = 2, 3, \ldots, n$ için

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i - \frac{(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_1)}{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1)}\mathbf{v}_1 - \frac{(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_2)}{(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2)}\mathbf{v}_2 - \cdots - \frac{(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_{i-1})}{(\mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i-1})}\mathbf{v}_{i-1} \qquad (1)$$

elde edilir. Sonuç $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ için $\mathbf{w}_i = \dfrac{1}{\|\mathbf{v}_i\|}\mathbf{v}_i$'dir. Şimdi her bir $\mathbf{u}$ vektörü $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$'nin liner birleşimi olarak yazılabilir

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= r_{11}\mathbf{w}_1 + r_{21}\mathbf{w}_2 + \cdots + r_{n1}\mathbf{w}_n \\
\mathbf{u}_2 &= r_{12}\mathbf{w}_1 + r_{22}\mathbf{w}_2 + \cdots + r_{n2}\mathbf{w}_n \\
&\vdots \\
\mathbf{u}_n &= r_{1n}\mathbf{w}_1 + r_{2n}\mathbf{w}_2 + \cdots + r_{nn}\mathbf{w}_n
\end{aligned} \qquad (2)$$

dir. Teorem 5.5'ten

$$r_{ji} = (\mathbf{u}_i, \mathbf{w}_j)$$

dir. Denklem (1)'den $\mathbf{u}_i$ vektörünün

$$\text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i\} = \text{span}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_i\}$$

uzaylarında olduğunu söyleyebiliriz. Buradan $j > i$ için $\mathbf{w}_j$ vektörü $\text{Sp}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ uzayına dik olduğundan $\mathbf{u}_i$'yi de diktir. Böylece $j > i$ için $r_{ji} = 0$'dır. Sütun vektörleri $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_j$ olan bir matris Q olsun.

$$\mathbf{r}_j = \begin{bmatrix} r_{1j} \\ r_{2j} \\ \vdots \\ r_{nj} \end{bmatrix}$$

alalım. O zaman (2)'deki denklemler matris şeklinde

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q\mathbf{r}_1 & Q\mathbf{r}_2 & \cdots & Q\mathbf{r}_n \end{bmatrix} = QR$$

şeklinde yazılabilir. Burada R; $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$ sütun vektörlerinin oluşturduğu matristir.

Böylece

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

dir. Şimdi R'nin singüler olmadığını gösterebiliriz. $\mathbf{x}$, $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$ lineer sistemini bir çözümü olsun. Bu denklem soldan Q ile çarpılır ise

$$Q(R\mathbf{x}) = (QR)\mathbf{x} = A\mathbf{x} = Q\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

elde edilir. Kesim 1 ve 2'den $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sisteminin

$$x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0}$$

şeklinde yazılabildiğini biliyoruz. Burada $x_1, x_2, \ldots, x_n$'ler $\mathbf{x}$ vektörünün bileşenleridir. A matrisinin sütun vektörleri lineer bağımsız olduğundan

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

dir. Böylece $\mathbf{x}$ bir sıfır vektörü olmak zorundadır. O zaman, Teorem 2.9 R'nin singüler olmadığını garanti eder. Alıştırma 36, R'nin r_{ij} köşegen elemanlarının sıfırdan farklı olduğunu göstermektedir. Önce $\mathbf{u}_i$'yi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i$'nin lineer birleşimi olarak ifade eder ve daha sonra $r_{ii} = (\mathbf{u}_i, \mathbf{w}_i)$'yi hesaplayınız. Bu R'nin singüler olmadığının diğer bir ispatıdır. ■

ÖRNEK 4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisinin QR-ayrışımını bulunuz.

Çözüm

Örnek 2'de tanımlandığı gibi sırasıyla, A'nın sütun vektörleri $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ ve $\mathbf{u}_3$ olsun. Aynı Örnekte olduğu gibi A'nın sütun uzayı için bir birim dik taban

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{15}} \\ \frac{2}{\sqrt{15}} \\ -\frac{1}{\sqrt{15}} \\ \frac{3}{\sqrt{15}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{4}{\sqrt{35}} \\ \frac{3}{\sqrt{35}} \\ \frac{1}{\sqrt{35}} \\ -\frac{3}{\sqrt{35}} \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. O zaman

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{15}} & -\frac{4}{\sqrt{35}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{15}} & \frac{3}{\sqrt{35}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{15}} & \frac{1}{\sqrt{35}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{15}} & -\frac{3}{\sqrt{35}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.5774 & -0.2582 & -0.6761 \\ 0.5774 & 0.5164 & 0.5071 \\ 0.5774 & -0.2582 & 0.1690 \\ 0 & 0.7746 & -0.5071 \end{bmatrix}$$

ve

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix}$$

olup, burada $r_{ji} = (\mathbf{u}_i, \mathbf{w}_j)$'dir. Böylece

$$R = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{15}} & -\frac{2}{\sqrt{15}} \\ 0 & 0 & \frac{7}{\sqrt{35}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.7321 & -1.1547 & -0.5774 \\ 0 & 1.2910 & -0.5164 \\ 0 & 0 & 1.1832 \end{bmatrix}$$

dir. Kısaca $A = QR$ olduğu gerçekleştirilebilir. ■

Uyarı $R = [r_{ij}]$, $m \times n$ tipinde bir matris ve Q'da $m \times m$ tipinde bir matris olmak üzere, $(m \times n)$ tipindeki A matrisinin QR-ayrışımı bilgisayar sayesinde değişik biçimde yazılabilir. (MATLAB'da olduğu gibi). Burada $i > j$ ise $r_{ij} > 0$'dir. Böylece eğer A, 5×3 tipinde bir matris ise

$$R = \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dır.

Anahtar Kelimeler

Birim dik taban
Gram-Schmidt Yöntemi
QR-Ayrışımı

5.4 Alıştırmalar

Alıştırmaların bu kısmında üzerinde standart iç çarpım tanımlı Öklid uzaylarını R_n ve R^n ile göstereceğiz. Kesim 5.3'teki Örnek 6'da tanımlanmış Öklid iç çarpımı uzayı P_n ile göstereceğiz.

1. R^2, Öklid uzayında verilen $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}\right\}$ tabanını Gram-Schmidt yöntemini kullanarak

(a) Bir dik tabana

(b) Bir dik tabana dönüştürünüz.

2. R^3, Öklid uzayında W altuzayı için verilen $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$ tabanını Gram-Schmidt yöntemini kullanarak;

(a) Dik bir tabana

(b) Birim dik bir tabana dönüştürünüz.

3. R_4 Öklid uzayının bir altuzayı W ve W'nun bir $S = \{[1\ \ 1\ \ -1\ \ 0], [0\ \ 2\ \ 0\ \ 1]\}$ olsun. Gram-Schmidt yöntemini kullanarak W için bir dik taban elde ediniz.

4. R_3 Öklid uzayının bir altuzayı W ve W'nin bir tabanı

$$S = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$$

olsun. Gram-Schmidt yöntemini kullanarak W için bir birim dik taban elde ediniz.

5. $S = \{t, 1\}$, P_2 Öklid uzayının bir W altuzayı için bir taban olsun. W için bir birimdik taban elde ediniz.

6. $S = \{t + 1, t - 1\}$ P_2 Öklid uzayının bir W alt uzayı için bir birim dik taban bulunuz.

7. Kesim 5.3'teki Örnek 4'te verilen iç çarpım uzayına ait W altuzayının bir tabanı $S = \{t, \sin 2\pi t\}$ olsun. W için bir birim dik taban bulunuz.

8. Kesim 5.3'te ve Örnek 4'teki iç çarpım uzayının W altuzayının bir tabanı $S = \{t, e^t\}$ olsun. W için bir birim dik taban bulunuz.

9. R^3 Öklid uzayı için

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

vektörlerini içeren bir birim dik taban bulunur.

10. R^3 Öklid uzayının

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

tabanını Gram-Schmidt yöntemini kullanarak bir birim dik tabana dönüştürünüz.

11. R^3 Öklid uzayına ait

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

sisteminin gerdiği W altuzayı için Gram-Schmidt yöntemini kullanarak bir birim dik taban bulunuz.

12. R^3 Öklid uzayının

$$\{[1 \quad -1 \quad 1], [-2 \quad 2 \quad -2], [2 \quad -1 \quad 2], [0 \quad 0 \quad 0]\}.$$

sistemi tarafından gerilen W altuzayı için Gram-Schmidt yöntemini kullanarak bir birim dik taban bulunuz.

13. R^3'ün

$$\begin{bmatrix} a \\ a+b \\ b \end{bmatrix}$$

biçimindeki tüm vektörlerini içeren altuzayı için bir birim dik taban bulunuz.

14. R^3'ün

$$[a \quad a+b \quad c\, b+c]$$

biçimindeki bütün vektörlerini içeren altuzayı için bir birim dik taban bulunuz.

15. R^3'ün $a + b + c = 0$ olacak şekildeki bütün

$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ biçimindeki vektörlerinin oluşturduğu altuzay için bir birimdik tabanbulunuz.

16. R_4 uzayının

$$a - b - 2c + d = 0$$

olacak şekildeki bütün $[a \ b \ c \ d]$ vektörlerini oluşturduğu altuzay için bir birim dik taban bulunuz.

17.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - \ x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

homogen denklem sisteminin çözüm uzayı için bir birim dik taban bulunuz.

18.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

homogen sistemini çözüm uzayı için bir birimdik taban bulunuz.

19. Teorem 5.5'i ispatlayınız.

20. R_3 öklid uzayın W altuzayının bir tabanı

$$S = \{[1 \quad -1 \quad 0], [1 \quad 0 \quad -1]\}$$

olsun.

(a) Gram-Schmidt yöntemini kullanarak W için birim dik bir taban elde ediniz.

(b) Teorem 5.5'i kullanarak $u = [5 \ -2 \ -3]$ vektörünü (a) şıkkında elde edilen vektörlerin lineer birleşimi olarak yazınız.

21. Öklid uzayı için bir taban T ve

$$[\mathbf{v}]_T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

ise $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$

olduğunu ispatlayınız.

22. R_3 Öklid uzayında W altuzayının bir tabanı

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

olsun.

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

de W'da herhangi bir vektör olsun.

(a) V vektörünün uzunluğunu doğrudan bulunuz.

(b) Gram-Schmidt yöntemini kullanarak S tabanını W için bir T birim dik tabanına dönüştürünüz.

(c) T'ye göre V'nin koordinat vektörlerini kullanarak V'nin uzunluğunu bulunuz.

23. **(a)** R^3 Öklid uzayının bir birim dik tabanının

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right\}$$

olduğunu gösteriniz.

(b) Teorem 5.5'i kullanarak S'ye göre

$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 15 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ vektörünün koordinat vektörünü bulunuz.

(c) (b) şıkkındaki koordinat vektörünü kullanarak $\mathbf{v}$'nin uzunluğunu bulunuz.

24. ***(Matematik Analiz gereklidir.)*** P_2 Öklid uzay, için $\{1, t, t^2\}$ tabanına Gram-Schmidt metodunu uygulayarak bir birim dik taban bulunuz.

25. 2×2 tipindeki bütün matrislerin Öklid uzayı V ve V üzerinde iç çarpım $(A, B) = \text{iz}\,(B^TA)$ olsun.

(a) $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

sisteminin V için bir birim dik taban olduğunu ispatlayınız.

(b) Teorem 5.5'i kullanarak S'ye göre

$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ vektörünün koordinat vektörünü bulunuz.

26. Alıştırma 25'te tanımlanmış Öklid uzayına ait W altuzayının bir tabanı

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

olsun. Gram-Schmidt yöntemini kullanarak W için bir birim dik taban bulunuz.

27. Alıştırma 25'te tanımlanmış Öklid uzayına ait W altuzayının bir tabanı

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

olsun. Gram-Schmidt yöntemini kullanarak W için bir birimdik taban bulunuz.

28. R^3'ün bir birim dik tabanı

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

olsun. Teorem 5.5'i kullanarak $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektörünün S deki vektörlerin lineer birleşimi olarak yazınız.

Alıştırma 29 ve 30'daki A'nın QR ayrışımını bulunuz.

29. **(a)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ **(b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

30. **(a)** $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

31. İç çarpım uzayında $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ dik vektörler ve c de herhangi bir skalar ise $(\mathbf{u}, c\mathbf{v}) = 0$ olduğunu gösteriniz.

32. $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$'ler R^n'de vektörler olsun. Eğer $\mathbf{u}$ vektörü $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ vektörlerine dik ise $\text{Sp}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ deki her bir vektöre de diktir. Gösteriniz.

33. $\mathbf{u}$, R^n'de sabit vektör olsun. $\mathbf{u}$'ya dik olan R^n'deki bütün vektörlerin cümlesinin R^n'de bir altuzay olduğunu ispatlayınız.

34. n boyutlu W altuzayı için bir birim dik taban $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$, $k > n$ olsun. S'nin dahil olduğu V için bir birim dik tabanın nasıl inşa edildiğini tartışınız.

35. V Öklid uzayının bir birim dik tabanı $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ ve hiçbiri sıfır olmayan skalarların herhangi bir cümlesi $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ olsun. V için $T = \{a_1\mathbf{v}_1, a_2\mathbf{v}_2, \ldots, a_k\mathbf{v}_k\}$'nin bir birim dik taban olduğunu ispatlayınız. V için T bir birim dik taban olacak şekilde $a_1, a_2, \ldots, a_k$ skalarlarını nasıl seçmeliyiz?

36. Teorem 5.8'in ispatında, $r_{ii} = (\mathbf{u}_i, \mathbf{w}_i)$ hesabında ve $\mathbf{u}_i$'nin $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i$'nin lineer birleşimi olarak ifade edildiğinden yararlanarak r_{ii}'nin sıfırdan farklı olduğunu gösteriniz.

37. Her singüler olmayan matrisin QR ayrışımına sahip olduğunu gösteriniz.

38. Kullanmış olduğumuz yazılımlarda, R^n'deki lineer bağımsız vektörlerin cümlesinden dik vektörlerin cümlesini elde etmek için gerekli olan komutun olup olmadığını belirleyiniz (Standart iç çarpımın kullanıldığı kabul edilir). Eğer bilgisayar programımızda, böyle komtu varsa bu komutla elde edilen sonucu Örnek 2'deki ile karşılaştırınız. Daha fazla yardım için Alıştırma 2, 7, 8, 11 ve 12'yi kullanınız.

39. Kullanmış olduğmuz yazılımda, verilen bir matrisin OR'yi oluşturan çarpanlarını elde etmek için gerekli olan komutların olup olmadığını belirleyiniz. Eğer böyle komut varsa bu komutla elde edilen sonucu Örnek 4'te elde edilen sonuç ile karşılaştırınız. Alıştırma 29 ve 30 ile daha fazla deneyim kazanınız. Örnek 4'ü izleyen uyarıdan, günümüzde bir çok programın verilen bir matrisin farklı QR-ayrışımını verdiğini hatırlayınız.

5.5 Dik (Ortogonal) Tümleyenler

Bölüm 4 Ek Alıştırma 34 ve 35'te, bir V vektör uzayının altuzayları W_1 ve W_2 olduğunda, $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$'nin de ($\mathbf{w}_1$ vektörü W_1'de $\mathbf{w}_2$ vektörü W_2'de ve $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ olmak üzere W'daki tüm $\mathbf{v}$ vektörler cümlesinin) V vektör uzayının bir altuzayı olduğunun gösterilmesi istenmiştir. Ayrıca, $V = W_1 + W_2$ ve $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ olması halinde $V = W_1 \oplus W_2$ olur; yani V, W_1 ve W_2'nin direkt toplamıdır. Bu da V'deki her vektörün, $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ gibi tek bir şekilde yazılabildiği anlamına gelir. Bu kesimde, V bir iç çarpım uzayı ve W, V'nin sonlu-boyutlu bir altuzayı ise, W ile V'nin diğer bir altuzayının doğrudan toplamı olarak V'nin yazılabildiğini göstereceğiz. Bu altuzay bir matrisle ilgili dört vektör uzayı arasındaki bir temel bağıntıyı incelemekte kullanılacaktır.

TANIM 5.6

Bir V iç çarpım uzayının altuzayı W olsun. Eğer V'deki bir $\mathbf{u}$ vektörü W'daki her vektöre **dik** (ortogonal) ise, $\mathbf{u}$ vektörü W'ya diktir denir. W'daki tüm vektörlere dik olan V'deki tüm vektörler cümlesine W'nin V'deki **dik tümleyeni** adı verilir ve $W^\perp$ ile gösterilir, "W dik diye okunur."

ÖRNEK 1

R^3'te

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

vektörünün tüm katlarından oluşan altuzayı W olarak alalım. Böylece $W = \text{span}\{\mathbf{w}\}$ olur. Dolayısıyla W kendisinin bir-boyutlu bir altuzaydır. Bu durumda R^3'teki bir $\mathbf{u}$ vektörü, herhangi bir c skaları için, ancak ve ancak $c\mathbf{w}$ vektörüne dikse $W^\perp$'te bulunur. Geometrik olarak; $W^\perp$, normali $\mathbf{w}$ vektörü olan düzlemdir. Aynı zamanda $W^\perp$, R^3'te

$$2x - 3y + 4z = 0$$

denklemini sağlayan tüm $P(x, y, z)$ noktalar cümlesi olarak ta tanımlanabilir. ■

Eğer W, V iç çarpım uzayının bir altuzayı ise, V'nin sıfır vektörünün daima $W^\perp$'e ait olduğunu görürüz. (Alıştırma 2.4). Bundan başka, V'nin dik tümleyeni sıfır altuzayıdır ve sıfır altuzayının dik tümleyeni V'nin kendisidir (Alıştırma 25).

Teorem 5.9 Bir V iç çarpım uzayının altuzayı W olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(a) $W^\perp$, V'nin bir altuzayıdır.

(b) $W \cap W^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

İspat

(a) $\mathbf{u}_1$ ve $\mathbf{u}_2$ vektörleri $W^\perp$'te olsun. O zaman bu vektörler W'daki herbir $\mathbf{w}$ vektörüne dik olur ve

$$(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}_1, \mathbf{w}) + (\mathbf{u}_2, \mathbf{w}) = 0 + 0 = 0$$

elde edilir. O halde $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, $W^\perp$ de bulunur. Aynı zamanda $\mathbf{u}$ $W^\perp$ içinde ve c bir reel skalar olursa W içindeki bir $\mathbf{w}$ vektörü için

$$(c\mathbf{u}, \mathbf{w}) = c(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = c\,0 = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $c\mathbf{u}$, W içindedir. Bu da $W^\perp$'in, vektör toplamı ve skalar çarpıma göre kapalı olduğunu ve böylece V'nin bir altuzayı olduğunu ifade eder.

(b) $\mathbf{u}$, $W \cap W^\perp$'te bir vektör olsun. O zaman $\mathbf{u}$, W ve $W^\perp$ in her ikisinide de bulunur; böylece $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ ve Tanım 5.1'den $\mathbf{u} = 0$ olur. ■

Bir S vektörler cümlesi ile gerilen V iç çarpım uzayının bir altuzay W olmak üzere; V deki bir $\mathbf{u}$ vektörü, ancak ve ancak S'deki her vektöre dik olduğunda, $W^\perp$ uzayına ait olur. Alıştırma 26'da bahsedilen bu sonuç, aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi, $W^\perp$ uzayını bulmada yararlı olabilir.

ÖRNEK 2

Kesim 5.3, Örnek 6'da

$$(p(t), q(t)) = \int_0^1 p(t)q(t)\,dt$$

ile tanımlanan iç çarpım ile beraber P_3 Öklid uzayı V olsun, P_3'ün $\{1, t^2\}$ tabanlı altuzayı W olsun. $W^\perp$ uzayı için bir taban bulalım.

Çözüm

$W^\perp$ uzayının bir elemanı $p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ olsun. $p(t)$'nin, W için verilen tabandaki vektörlerin herbirine dik olması gerektiği koşulunda

$$(p(t), 1) = \int_0^1 (at^3 + bt^2 + ct + d)\,dt = \frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + d = 0$$

$$(p(t), t^2) = \int_0^1 (at^5 + bt^4 + ct^3 + dt^2)\,dt = \frac{a}{6} + \frac{b}{5} + \frac{c}{4} + \frac{d}{3} = 0$$

homogen denklem sistemi bulunur ve çözümü

$$\frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + d = 0$$
$$\frac{a}{6} + \frac{b}{5} + \frac{c}{4} + \frac{d}{3} = 0$$

olarak elde edilir (doğrulayınız). Bu durumda

$$a = 3r + 16s, \quad b = -\frac{15}{4}r - 15s, \quad c = r, \quad d = s$$

elde edilir.

Böylece

$$p(t) = (3r + 16s)t^3 + \left(-\frac{15}{4}r - 15s\right)t^2 + rt + s$$

$$= r\left(3t^3 - \frac{15}{4}t^2 + t\right) + s(16t^3 - 15t^2 + 1)$$

olur. Bu nedenle $3t^3 - \frac{15}{4}t^2 + t$ ve $15t^2 + 1$ vektörleri $W^\perp$ uzayını gerer. Bu vektörler, her biri diğerinin katı olmadığından, lineer bağımsızdırlar ve böylece $W^\perp$ için bir taban oluştururlar. ■

Teorem 5.10 Bir V iç çarpım uzayının sonlu-boyutlu bir altuzayı W olsun. Bu durumda

$$V = W \oplus W^\perp$$

olur.

İspat

Boy $W = m$ olsun. O zaman W, m vektörden oluşan bir tabana sahip olur. Bu tabanı, Gram-Schmidt işlemi yardımı ile, birim dik bir tabana dönüştürebiliriz. Bu amaçla, W için birimdik tabanı $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \ldots, \mathbf{w}_m\}$ alalım. Eğer V uzayında bir vektör $\mathbf{v}$ ise,

$$\mathbf{w} = (\mathbf{v}, \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 + \cdots + (\mathbf{v}, \mathbf{w}_m)\mathbf{w}_m \tag{1}$$

ve

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w} \tag{2}$$

alabiliriz. $\mathbf{w}$, S cümlesindeki vektörlerin bir lineer birleşimi olduğunda $\mathbf{w}$, W olur. Bundan sonra, $\mathbf{u}$ vektörünün S'deki her vektöre birim dik ve S'nin W için bir taban olmasından $W^\perp$'de bulunduğunu ispatlarız. Gerçekten S cümlesindeki herbir $\mathbf{w}_i$ için $(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j)$ $i \neq j$ ve $(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i) = 1$, $1 \leq i \leq m$ olduğundan

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}, \mathbf{w}_i) &= (\mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{w}_i) = (\mathbf{v}, \mathbf{w}_i) - (\mathbf{w}, \mathbf{w}_i)\\ &= (\mathbf{v}, \mathbf{w}_i) - ((\mathbf{v}, \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 + \cdots + (\mathbf{v}, \mathbf{w}_m)\mathbf{w}_m, \mathbf{w}_i)\\ &= (\mathbf{v}, \mathbf{w}_i) - (\mathbf{v}, \mathbf{w}_i)(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_i)\\ &= 0,\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\mathbf{u}$, W uzayındaki her vektöre diktir ve dolayısıyla $W^\perp$ uzayında bulunur.

O halde

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{u}$$

olur. Bu da $V = W + W^\perp$ olduğu anlamına gelir. Teorem 5.9-(b)'den

$$V = W \oplus W^\perp$$

sonucu çıkar. ■

Uyarı Bu kesimin başında belirtildiği gibi (1) ve (2) denklemleriyle tanımlı $\mathbf{w}$ ve $\mathbf{u}$ vektörlerin tek olduğu sonucuna varılır.

Teorem 5.11 V iç çarpım uzayının sonlu-boyutlu bir altuzayı W ise, bu durumda

$$(W^\perp)^\perp = W$$

dir.

İspat

W uzayındaki herhangi bir vektör $\mathbf{w}$ ise, o zaman $\mathbf{w}$, $W^{\perp}$ uzayındaki her $\mathbf{u}$ vektörüne diktir. Dolayısıyla w, $W^{\perp}$ uzayındaki her $\mathbf{u}$ vektörüne diktir. Dolayısıyla $\mathbf{w}$ vektörü $(W^{\perp})^{\perp}$'te bulunur. Böylece W, $(W^{\perp})^{\perp}$'in bir altuzayıdır. Tersine, $(W^{\perp})^{\perp}$'teki keyfi bir vektör $\mathbf{v}$ ise $\mathbf{w}$ vektörü W'da ve $\mathbf{u}$ vektörü $W^{\perp}$'te olmak üzere, $\mathbf{v}$ vektörü

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{u}$$

olarak yazılabilir. $\mathbf{u}$, $W^{\perp}$'te bulunduğu için $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ vektörlerine diktir. Böylece,

$$0 = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w} + \mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w}) + (\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u})$$

veya

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$$

olur. Bu da $\mathbf{u} = 0$ olduğunu ifade eder. Bu durumda $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ ise $\mathbf{v} \in W$ olur. Böylece $(W^{\perp})^{\perp} = W$ bulunur. ■

Uyarı W, $W^{\perp}$'in dik tümleyeni ve aynı zamanda $W^{\perp}$'te W'nun dik tümleyeni olduğundan, W ve $W^{\perp}$ uzaylarının dik tümleyenler olduğunu söyleyebiliriz.

■ Bir Matris ile İlgili Temel Altuzaylar Arasındaki Bağlantılar

Verilen bir $m \times n$ matrisi A ile aşağıdaki dört temel altuzay arasında ilişki kuracağız: A'nın çekirdek uzayı, A'nın satır uzayı, A^T'nin çekirdek uzayı ve A'nın sütun uzayı. Aşağıdaki teorem, bu dört altuzay ikililerinin dik tümleyenler olduğunu gösterir.

Teorem 5.12 A, verilen bir $m \times n$ matrisi ise, bu durumda;
(a) A'nın çekirdeki uzayı A'nın satır uzayının dik tümleyenidir.[†]
(b) A^T'nin çekirdek uzayı A'nın sütun uzayının dik tümleyenidir.

İspat

(a) Önce, göstermek istediğimiz iki vektör uzayının eşit boyuta sahip olduğunu doğrulayalım. Eğer A'nın rankı r ise A'nın çekirdek uzayının boyutu $n-r$'dir (Teorem 4.19). A'nın satır uzayının boyutu r olduğundan, Teorem 5.10'dan, bunun dik tümleyeninin boyutu da $n-r$'dir. R^n'deki $\mathbf{x}$ ektörü A'nın çekirdek uzayında olursa, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ olur. R^n de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_n$ vektörleri A'nın satırlarını gösterir. O zaman $m \times 1$ matrisi $A\mathbf{x}$'in elemanları $\mathbf{v}_1\mathbf{x}$, $\mathbf{v}_2\mathbf{x}$, …, $\mathbf{v}_m\mathbf{x}$ olur. Böylece

$$\mathbf{v}_1\mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{v}_2\mathbf{x} = 0, \quad \ldots, \quad \mathbf{v}_m\mathbf{x} = 0 \tag{3}$$

elde ederiz. $\mathbf{v}_i\mathbf{x} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{x}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ olduğundan, A'nın satır uzayını geren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …$\mathbf{v}_m$ vektörlerine $\mathbf{x}$'in dik olduğu, sonucu çıkar. Bu durum-

[†] Kesin ifade ile satır uzayının vektörleri R_n'deki vektörlerden oluştuğu halde R^m'deki vektörlerin –yani sütun vektörlerinin– oluşturduğu uzay A'nın çekirdeği (sıfır uzayı) dir. Böylece satır uzayının dik tümleyeni yine satır vektörlerinden oluşmalıdır. Bununla birlikte, Kesim 4.8'deki Teorem 4.14 gereğince R^n ve R_n izomorf olduklarından bir n-vektöre bir satır vektörü veya bir sütun vektörü olarak bakılabilir.

da, A'nın satır uzayındaki her vektöre $\mathbf{x}$ vektörün dik olduğu görülür. Dolayısıyla $\mathbf{x}$, A'nın satır uzayının dik tümleyeninde bulunur. Böylece A'nın çekirdek uzayı A'nın satır uzayının dik tümleyeninde bulunur.

Tersine, eğer $\mathbf{x}$ vektörü A'nın satır uzayının dik tümleyeninde ise, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ vektörlerine dik olur ve $A\mathbf{x} = 0$ olduğunu ifade eder, (3) bağıntıları bulunur. Böylece $\mathbf{x}$, A'nın çekirdek uzayına ait olur ve A'nın satır uzayının dik tümleyeni A'nın çekirdek uzayında bulunur. Sonuç olarak A'nın çekirdek uzayı ile A'nın satır uzayının dik tümleyeni eşit olur.

(b) A^T'nin çekirdek uzayının, A^T'nin satır uzayının dik tümleyeni olduğunu göstermek için (a)'nın ispatında A yerine A^T koyarız. A^T'nin satır uzayı A'nın sütun uzayı olduğundan Teoremin (b) ispatı tamamlanmış olur. ■

Kesim 4.9'dan, bir matrisle ilgili altuzaylar arasındaki bağıntıyı tartışmış ve Şekil 4.33'te de bu bağıntıları açıklamıştır. Teorem 5.10 ve 5.12'yi kullanarak, bir $m \times n$ matrisi A için, bu altuzaylar arasında daha fazla bağıntı çıkarabiliriz.

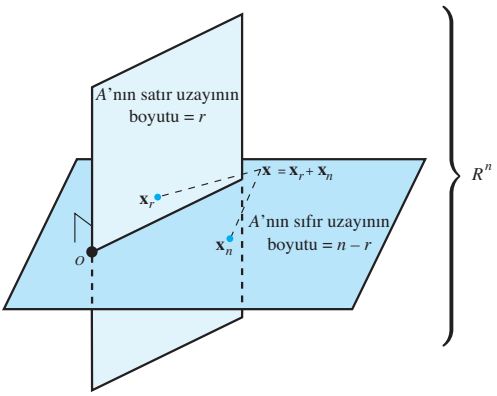
A'nın satır ve çekirdek uzayı için aşağıdaki bilgilere başvurabiliriz:

- A'nın satır uzayındaki her vektör A'nın çekirdek uzayındaki her vektöre diktir. [Teorem 5.12 (a).]
- A'nın satır uzayına ve çekirdek uzayına ait olan tek vektör sıfır vektörüdür.
- A'nın rankı r ise, A'nın satır uzayının boyutu r ve çekirdek uzayının boyutu $n-r$'dir. Böylece

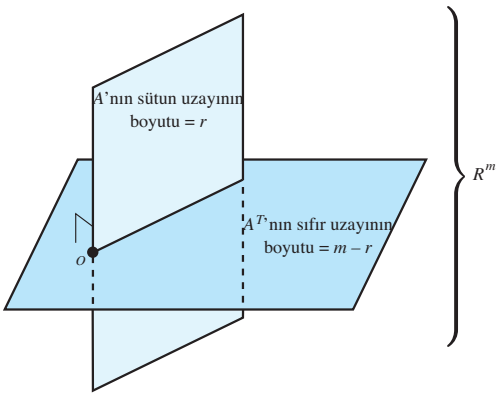
A'nın satır uzayı $\oplus$ A'nın çekirdek uzayı $= R^n$

yazabiliriz ve dolayısıyla R^n'deki her vektör, A'nın satır uzayındaki bir vektörlü sütun uzayındaki bir vektörün toplam, olarak tek bir şekilde ifade edilebilir. (Teorem 5.10) Bu durum Şekil 5.21'de açıklanmıştır.

Teorem 5.12 (b) bize; A'nın sütun uzayı ile A^T'nin çekirdek uzayı arasındaki ilişkiyi açıklar.



ŞEKİL 5.21



ŞEKİL 5.22

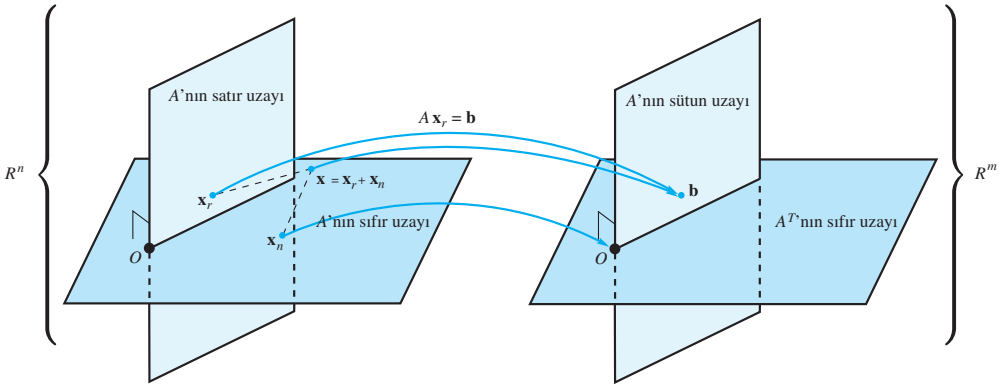
Şekil 5.21 ve 5.22'de gösterilen altuzaylar arasında bir ilgi kurabilmek için matris çarpımlarını kullanırız.

- $\mathbf{x}_r$, A'nın satır uzayında olsun. Bu durumda $A\mathbf{x}_r = \mathbf{b}$, A'nın sütunlarının bir lineer birleşimidir. Böylece A'nın sütun uzayında bulunur. (Şekil 5.23'e bakınız.)
- $\mathbf{x}_n$, A'nın çekirdek uzayında olsun. Bu durumda $A\mathbf{x}_n = 0$, R^n'de sıfır vektörü olur. Şekil 5.23'e bakınız.

R^n'de keyfi bir $\mathbf{x}$ vektörü için Teorem 5.10,

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_r + \mathbf{x}_n$$

olacak şekilde, A'nın satır uzayındaki bir $\mathbf{x}_r$ vektörünün ve A'nın çekirdek uzayındaki bir $\mathbf{x}_n$ vetörünün var olduğunu belirtir. Burada $A\mathbf{x} = A\mathbf{x}_r = \mathbf{b}$ olduğu sonucu çıkar. Şekil 5.23'e bakınız



ŞEKİL 5.23†

Özel olarak R^n uzayındaki herhangi bir $\mathbf{x}$ vektörü için $A\mathbf{x}$, A'nın sütun uzayında bulunur ve bu durum, uygun bir $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ homogen olmayan sis-

†Bu önemli bilgi Glibet Strang*'ın çalışmasına dayandırılır; daha detaylı bilgi için "The Fundamental Thevrem of Linear Algebra", *American Mathematical Monthly*, 100 (1993), pp.848-855" makalesine bakınız.



GILBERT STRANG

*Gilbert Strang (1934–) Chicago, Illionis'de doğdu. Lisans derecesini 1955 yılında MIT den aldı ve Belliol College, Oxford'da bir Rodes burslu öğrencisi oldu. Doktora derecesini 1959 da UCLA'dan aldı ve daha sonra MIT'de ders verdi. 1966-67 de bir sloan Bursu ve 1980-81 yıllarında California Teknoloji Enstitüsünde bir Farchild Bursu aldı. 1985'de Amerikan Sanat ve Bilimler Akademisinin bir üyesi yapıldı. MIT'de matematik profesörü olarak çalıştı ve Balliol Collage in bir şeref kişisi oldu. 1999-2000 yıllarında SIAM'ın başkanı idi ve Birleşik Matematikciler Kurulu başkanı oldu. ABD uygulamalı Mekanik Birliğinin Von Neumann Madalyasını kazandı 2007 de Uluslar arası Endüstriyel ve Uygulamalı Matematik Kongresinde Birinci Su Buchin ödülünü aldı ve Amerikan Matematik kurumunun Haimo ödülünü alarak dünya çapında öğretmene dair katkıları için ödüllendirildi. Dr. Strang, çok sayıda önemli dergide editörlük yaptı, takdir alan kitapla yayınlandı ve 150'nin üzerinde makale çıkardı. Lineer Cebir ve uygulamalarına katkıları öğretimde olduğu kadar araştırmada da geniş etki yaptı.

temine karşılık gelir. $\mathbf{x}$ vektörünün, A'nın çekirdek uzayında bulunması durumunda buna karşı gelen lineer sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sistemidir.

ÖRNEK 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 5 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisi ile ilgili dört temel vektör uzayını hesaplayalım ve Teorem 5.12'yi doğrulayalım.

Çözüm

Önce A matrisini satırca indirgenmiş

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

eşelon matrisine çevirirız. $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ lineer sistemini çözerek, A matrisinin çekirdek uzayı için bir tabanı

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

olarak buluruz. Bundan başka A'nın satır uzayı için bir taban

$$T = \{[1 \quad 0 \quad 7 \quad 2 \quad 4], [0 \quad 1 \quad 3 \quad 1 \quad 1]\}$$

olur. S ve T'deki vektörler dik olduğu için, S'deki vektörleri satır vektörleri olarak aldığımızda S, A'nın satır uzayının dik tümleyeni için bir taban olacaktır. Şimdi

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisini alalım. $A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$ lineer sisteminin çözümünde

$$S' = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

vektörler cümlesinin A matrisinin çekirdek uzayı için bir taban olduğunun görünüz. A^T matrisini satırca indirgenmiş eşelon matrisine

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak dönüştürürüz. Bu durumda, C matrisinin sıfır olmayan satırları, (dikey olarak okuyunuz) A'nın sütun uzayı için

$$T' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

tabanı veririz. S_1 ve T_1'deki vektörler dik olduğundan, A'nın sütun uzayının dik tümleyeni için S_1 bir taban olur. ■

ÖRNEK 4 R_5 uzayının

$$\mathbf{w}_1 = [2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2], \quad \mathbf{w}_2 = [1 \quad 3 \quad 1 \quad -2 \quad -4],$$
$$\mathbf{w}_3 = [3 \quad 2 \quad 1 \quad -1 \quad -2], \quad \mathbf{w}_4 = [7 \quad 7 \quad 3 \quad -4 \quad -8],$$
$$\mathbf{w}_5 = [1 \quad -4 \quad -1 \quad -1 \quad -2].$$

vektörleriyle gerilen W altuzayının dik tümleyeni için bir taban bulalım.

Çözüm

$W^{\perp}$ uzayındaki keyfi bir vektör $\mathbf{u} = [a\ b\ c\ d\ e]$ olsun. $\mathbf{u}$ vektörü, $W^{\perp}$ geren verilen vektörlerin herbirine dik olduğu için, katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 7 & 7 & 3 & -4 & -8 \\ 1 & -4 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

olan, beş bilinmeyenli beş denklemli bir lineer sisteme sahip oluruz. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sistemini çözerek, çözüm uzayı için

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

tabanını elde ederiz. Bu vektörler, yatay biçime alınıp, $W^{\perp}$ için bir taban oluşturur.

Çözüm 2

Satırları, verilen vektörler olan matrisi kuralım. Çözüm 1'de gösterildiği gibi bu matris A'dır. Dolayısıyla A'nın satır uzayı W'dir. $W^{\perp}$ uzayı, teorem 5.12'den, A'nın çekirdek uzayı olur. Böylece $W^{\perp}$ için, Çözüm 1'deki gibi aynı tabanı elde ederiz. ■

Aşağıdaki örnek Teorem 5.12'yi geometrik olarak, açıklamak için kullanılacaktır.

ÖRNEK 5

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

matrisi verilsin. Bu matrisi satırca indirgenmiş eşelon biçimine dönüştürürsek

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde ederiz. Böylece A'nın satır uzayı, tabanı $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ olan R_3'ün iki boyutlu bir altuzayıdır. Yani orijinden geçen bir düzlemdir. A'nın çekidek uzayı, R^3 uzayının tabanı

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

ve boyutu 1 olan altuzaydır. Bu taban vektörü, verilen A matrisinin satır uzayının iki taban vektörüne dik olduğundan, A'nın çekirdek uzayı A'nın satır uzayına diktir. Yani A'nın çekirdek uzayı A'nın satır uzayının dik tümleyenidir.

Şimdi, A^T matrisini satırca indirgenmiş eşelon biçimine dönüştürerek

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisini elde ederiz. Burada da A^T'nin çekirdek uzayı için bir tabanın

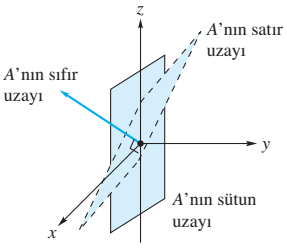
$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

olduğu sonucu çıkar. Böylece A^T'nin çekirdek uzayı orijinden geçen bir doğrudur.

Bundan başka, A^T'nin sütun uzayı için

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

vektörler cümlesi bir tabandır; bu nedenle A^T'nin sütun uzayı orijinden geçen bir düzlemdir. A^T'nin çekirdek uzayının her taban vektörü A^T'nin sütun uzayının her taban vektörüne dik olduğu için A^T'nin çekirdek uzayının A^T'nin sütun uzayının dik tümleyeni olduğu sonucunu çıkarırız. Bu sonuçlar Şekil 5.24'te açıklanmıştır. ■



ŞEKİL 5.24

İzdüşümler ve Uygulamalar

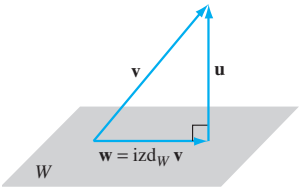
Bir V iç çarpım uzayının birimdik tabanı $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ olan sonlu-boyutlu bir altuzayı W ise ve V'deki herhangi bir vektör $\mathbf{v}$ ise,

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{u}$$

olacak şekilde W'da birtek $\mathbf{w}$ vektörü ile V'de bir tek $\mathbf{u}$ vektörü vardır. Bu sonuç, Teorem 5.10 ve bu teoremi izleyen uyarıda verilmişti. Bundan başka, (1) denkleminde gördüğümüz

$$\mathbf{w} = (\mathbf{v}, \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 + \cdots + (\mathbf{v}, \mathbf{w}_m)\mathbf{w}_m$$

denklemine, $\mathbf{v}$ vektörünün W üzerindeki **dik izdüşümü** denir ve $\text{izd}_W\mathbf{v}$ ile gösterilir. W, R^3'te iki-boyutlu bir altuzay (orijinden geçen bir düzlem) olduğunda, Teorem 5.10 Şekil 5.25 ile açıklanmıştır.



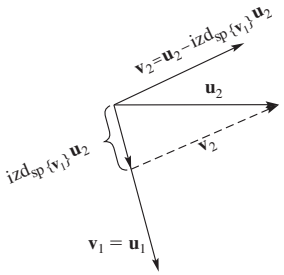
ŞEKİL 5.25

Çoğu kez, bir birimdik taban birçok kesire sahiptir; bu nedenle W bir dik tabana sahip olduğunda, $\text{izd}_W\mathbf{v}$ ifadesini veren bir formülü elde etmek için bu kesir yararlıdır. Eğer W için $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ bir taban ise, bu durumda

$$\text{izd}_W\mathbf{v} = \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1)}{(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1)}\mathbf{w}_1 + \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)}{(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2)}\mathbf{w}_2 + \cdots + \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{w}_m)}{(\mathbf{w}_m, \mathbf{w}_m)}\mathbf{w}_m$$

olduğunu, Alıştırma 29'da, göstermeniz istenmektedir.

Uyarı Teorem 5.6'da anlatılan Gram-Schimidt işlemi, herbir adımda izdüşümler cinsinden farklı biçimde de ifade edilebilir. Böylece (Gram-Schmidt işleminin ilk adımı) Şekil 5.19 aşağıdaki gibi tekrar sınıflandırılabilir.



ŞEKİL 5.29
(Tekrar sınıflandırma)

ÖRNEK 6

R^3'ün, dik taban vektörleri

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

olan iki-boyutlu altuzayı W olsun. R^3'te standart iç çarpımı kullanarak,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

vektörünün W üzerinde dik izdüşümünü ve W'deki her vektöre dik olan $\mathbf{u}$ vektörünü bulalım.

Çözüm

(1) denkleminden

$$\mathbf{w} = \text{izd}_W \mathbf{v} = (\mathbf{v}, \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 = -1\mathbf{w}_1 + \frac{5}{\sqrt{2}}\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} \frac{11}{6} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{19}{6} \end{bmatrix}$$

ve

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

■

elde ederiz. Şekil 2.2'den açıkça görülürki $\mathbf{v}$ vektöründen W düzlemine olan uzaklık $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$ vektörünün uzunluğu ile, yani

$$\|\mathbf{v} - \text{izd}_W \mathbf{v}\|$$

ile verilir. Genel olarak bu sonucu Teorem 5.13'te ispatlayacağız.

ÖRNEK 7 R^3'ün Örnek 6'da tanımlanan altuzayı W olsun ve $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ olsun. $\mathbf{v}$ vektöründen W düzlemine uzaklığı bulalım.

Çözüm

Sırası ile aşağıdaki hesaplamaları yaparız.

$$\text{izd}_W \mathbf{v} = (\mathbf{v}, \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 = \frac{1}{3}\mathbf{w}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} \frac{13}{18} \\ -\frac{1}{9} \\ \frac{5}{18} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} - \text{izd}_W \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{13}{18} \\ -\frac{1}{9} \\ \frac{5}{18} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{18} \\ \frac{10}{9} \\ -\frac{5}{18} \end{bmatrix}$$

$$\|\mathbf{v} - \text{izd}_W \mathbf{v}\| = \sqrt{\frac{25}{18^2} + \frac{400}{18^2} + \frac{25}{18^2}} = \frac{15}{18}\sqrt{2} = \frac{5}{6}\sqrt{2},$$

dır. Böylece $\mathbf{v}$'den W'ya olan uzaklık $\frac{5}{6}\sqrt{2}$ olur. ■

Örnek 7'de, $\mathbf{v}$ ve W düzlemine uzaklık $\|\mathbf{v}-\text{izd}_W\mathbf{v}\|$ ile gösterildi. Bu uzaklık kavramını, V'deki bir vektörden V'nin bir W altuzayına uzaklığı için genelleyebiliriz. Aslında W'da $\mathbf{v}$'ye en yakın vektörün $\text{izd}_W\mathbf{v}$ olduğunu, dolayısı ile $\mathbf{v}$ den W'ya uzaklığın $\|\mathbf{v}-\text{izd}_W\mathbf{v}\|$ olduğunu gösterebilir.

Teorem 5.13 V iç vektör uzayının sonlu-boyutlu bir altuzayı W olsun. Bu durumda, $\mathbf{v}$ V için, W'da $\mathbf{v}$'ye en yakın vektör $\text{izd}_W\mathbf{v}$'dir. Yani, $\mathbf{w}$ W için, $\mathbf{w} = \text{izd}_W\mathbf{v}$ olduğunda $\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|$ uzunluğu minimumdur.

İspat

W'daki herhangi bir vektör $\mathbf{w}$ olsun. O zaman

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = (\mathbf{v} - \text{izd}_W\mathbf{v}) + (\text{izd}_W\mathbf{v} - \mathbf{w})$$

olur. $\mathbf{w}$ ve $\text{izd}_W\mathbf{v}$'nin herikisi de W uzayında bulunduğu için; $\text{izd}_W\mathbf{v}$–$\mathbf{w}$, W içinde bulunur. Teorem 5.10'dan W'daki her vektöre $\mathbf{v}$–$\text{izd}_W\mathbf{v}$ vektörü diktir; Böylece

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 &= (\mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w}) \\ &= ((\mathbf{v} - \text{izd}_W\mathbf{v}) + (\text{izd}_W\mathbf{v} - \mathbf{w}), (\mathbf{v} - \text{izd}_W\mathbf{v}) + (\text{izd}_W\mathbf{v} - \mathbf{w})) \\ &= \|\mathbf{v} - \text{izd}_W\mathbf{v}\|^2 + \|\text{izd}_W\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2.\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $\mathbf{w} \neq \text{izd}_W\mathbf{v}$ ise, $\|\text{izd}_w\mathbf{v}-\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2$ pozitiftir ve

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 > \|\mathbf{v} - \text{izd}_W\mathbf{v}\|^2$$

olur. Böylece, $\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2$'yi minumum yapan W'daki vektörün $\text{izd}_W\mathbf{v}$ olduğu sonucu çıkar. ■

Örnek 6'da, $\mathbf{w} = \text{izd}_W\mathbf{w} = \text{izd}_W\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{11}{6} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{19}{6} \end{bmatrix}$ vektörü $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ vektörüne en yakın olan $W = \text{Sp}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ uzayındaki vektördür.

■ Fourier Serileri (Matematik Analiz Gereklidir)

Kalkülüs çalışmasında, karşılaşılan en uygun fonksiyonlar, bir $t = t_0$ noktasında her mertebeden türeve sahip olan $f(t)$ fonksiyonlarıdır. Bunların Taylor serisi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k \tag{4}$$

ile tanımlanır. Buna f fonksiyonunun t_0'daki (veya t_0 civarındaki) Taylor serisi adı verilir. $t_0 = 0$ olduğunda, Taylor serisi bir Maclaurin serise adını alır. Taylor ve Maclaurin seri açılımının katsayıları, verilen fonksiyonun açılımının katsayıları, verilen fonksiyonun açılımının katsayıları, verilen fonksiyonun açılımın merkezinde hesaplanılan ardışık türler değerlerini içerir. Eğer (4)'deki serinin ilk $(n + 1)$ terimini alırsak,

verilen fonksiyona yaklaşan n dereceden bir Taylor veya Maclaurin polinomunu elde ederiz.

$f(t) = |t|$ fonksiyonunun $t_0 = 0$ da bir Taylor seri (Maclaurin seri) açılımı yoktur; çünkü f fonksiyonunun $t = 0$'da türevi yoktur. Dolayısıyla böyle bir açılımın katsayılarını hesaplamak mümkün değildir. (4)'teki ifade 1, t, t_2 … fonksiyonları cinsinden yazılabilir. Ayrıca, bu şekilde bir fonksiyonun seri açılımını farklı tipte bir açılım kullanarak bulmak mümkündür. Böylece önemli olan bir açılım, kısaca, Kesim 5.3 Örnek 14'te tartışacağımız,

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots, \cos nt, \sin nt, \ldots,$$

fonksiyonlar cümlesini içerir. Fransız matematikçi **Jean Babtiste Joseph Fourier**[*] $[-\pi, \pi]$ aralarında tanımlanan her fonksiyonun (sürekli veya sürekli değil)

$$\tfrac{1}{2}a_0 + a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + \cdots + a_n \cos nt + b_1 \sin t + b_2 \sin 2t + \cdots + b_n \sin nt + \cdots$$

biçiminde bir seri ile gösterilebildiğini ispat etti. Böylece $[-\pi, \pi]$ aralığında tanımlanan (sürekli veya sürekli olmayan) her f fonksiyonuna, yeterince büyük n için,

$$\tfrac{1}{2}a_0 + a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + \cdots + a_n \cos nt + b_1 \sin t + b_2 \sin 2t + \cdots + b_n \sin nt \tag{5}$$

biçiminde bir fonksiyonla istediğimiz kadar yakın yaklaşılabildiği sonucu çıkar. (5)'teki fonksiyona bir **trigonometrik polinom** denir ve eğer a_n ve b_n katsayılarının herikisi birden sıfır değilse, bu polinomun n, **dereceden** olduğunu söyleriz. Fourier serisi konusu bu kitabın faaliyet alanı dışındadır. Bir fonksiyonun trigonometrik polinomlarla en iyi yaklaşımını nasıl elde edeceğimiz üzerine kendimizi kısa bir tartışmayla sınırlarız.



JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER

[*]Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) Auxere, Fransa'da doğdu. Babası bir terziydi. Fourier, ilk eğitiminin çoğunu, Benedictine hükümdarlığında (döneminde) yerel askeri okulunda aldı ve 19. yaşında papazlık için çalışmaya karar verdi. Onun matematiğe olan aşırı ilgisi 13 yaşında gelişmeye başladı ve papazlık için çalıştığı esnada artarak devam etti. İki yıl sonra rahip (papaz) olmaktan vazgeçti ve daha önce okuduğu askeri okulda öğretmen olmaya karar verdi.

Fourier, Fransız devrimi ve devamındaki çalkantılı dönemde Fransız siyasetinde etkili oldu. 1795'te, tanınmış Ecole politeknik'te bir göreve atandı. 1798'de Fourier, bir bilimsel danışman olarak Napolyon'a Mısır istilasında eşlik etti. Fransa'ya döndükten sonra 12 yıl boyunca ise bölümünde yüksek bir rütbede hizmet etti ve Grenoble'de yaşadı. Bu dönemde önce çalışmasını ısı teorisi üzerine yaptı. Bu çalışmada. Her fonksiyonun trigometrik polinomlar serisi ile ifade edilebildiğini gösterdi. Böyle bir seriye, bugün, bir Fourier serisi denir. 1830'da Fourier Paris'te öldü.

Aşağıdaki integralleri hesaplamak zor değildir.

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dt = 2\pi, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt\,dt = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt\,dt = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin mt\,dt = 0 \quad (n \neq m), \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt\,dt = 0 \quad (n \neq m),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \cos mt\,dt = 0 \quad (n \neq m), \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin nt\,dt = \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos nt\,dt = \pi.$$

Yol gösterme: Bilgisayar cebirsel sistemi kullanılabilir:

$[-\pi, \pi]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyonların vetör uzayı V olsun. Eğer f ve g fonksiyonları V vektör uzayına ait ise, Kesim 5.3-Örnek 14'teki gibi $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,g(t)\,dt$ V üzerinde bir iç çarpım tanımlar. Bu bağıntılardan aşağıdaki vektörler cümlesinin V uzayında bir birimdik cümle olduğu görülür. Bu durumda,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2t, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2t, \quad \ldots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt, \quad \ldots.$$

vektörleri V'nin birim dik vektörlerini oluşturur. Böylece

$$W = \operatorname{span}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2t, \quad \ldots,\right.$$

$$\left.\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt\right\}$$

V uzayının sonlu boyutlu bir alt uzayı olur. Teorem 5.13, V'de verilen bir f fonksiyonuna n. dereceden bir trigonometrik polinomla en iyi yaklaşımın f 'nin W üzerindeki izdüşümü ile, $\text{izd}_W f$ ile verildiğini belirtir. Bu **polinoma, *f*'nin *n* dereceden Fourier polinomu** denir.

ÖRNEK 8 $f(t) = |t|$ fonksiyonunun 1 ve 3 dereceli Fourier polinomlarını bulalım.

Çözüm

Önce 1. dereceden Fourier polinomunu hesaplarız. Teorem 5.10 yardımı ile, $\mathbf{v} = |t|$ vektörü için, $\text{izd}_W f$ izdüşümünü

$$\text{izd}_W |t| = \left(|t|, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \left(|t|, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t\right)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t$$

$$+ \left(|t|, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t\right)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t$$

olarak hesaplanır. Burada

$$\left(|t|, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) = \int_{-\pi}^{\pi} |t| \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{0} -t\, dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\pi} t\, dt = \frac{\pi^2}{\sqrt{2\pi}},$$

$$\left(|t|, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos t\right) = \int_{-\pi}^{\pi} |t| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos t\, dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{0} -t \cos t\, dt + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\pi} t \cos t\, dt$$
$$= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} = -\frac{4}{\sqrt{\pi}},$$

iç çarpım sonuçları, $\text{İzd}_W f$ 'de yerine yazılırsa

$$\left(|t|, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin t\right) = \int_{-\pi}^{\pi} |t| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin t\, dt$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{0} -t \sin t\, dt + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\pi} t \sin t\, dt$$
$$= -\sqrt{\pi} + \sqrt{\pi} = 0.$$

$$\text{izd}_W |t| = \frac{\pi^2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos t = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos t$$

elde çekilir.

Teorem 5.10 yardımı ile, 3. dereceden Fourier polinomunu aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\begin{aligned}\text{izd}_W |t| = {} & \left(|t|, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ & + \left(|t|, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos t\right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos t + \left(|t|, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin t\right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin t \\ & + \left(|t|, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2t\right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2t + \left(|t|, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2t\right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2t \\ & + \left(|t|, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 3t\right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 3t + \left(|t|, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 3t\right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 3t.\end{aligned}$$

dir. Burada

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2t\, dt = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} |t| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2t\, dt = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |t| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 3t\, dt = -\frac{4}{9\sqrt{\pi}}, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} |t| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 3t\, dt = 0$$

integralleri kullanılarak,

$$\text{izd}_W \mathbf{v} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\cos t - \frac{4}{9\pi}\cos 3t$$

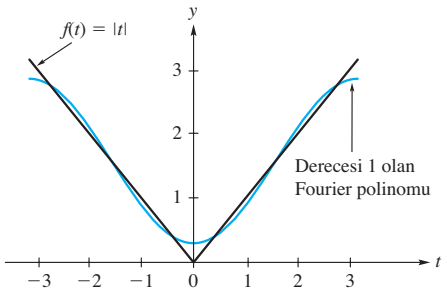
elde edilir.

Şekil 15.26'da f fonksiyonunun ve 1. dereceden Fourier polinomun grafiği, Şekil 5.27'de, f'nin ve 34. dereceden Fourier polinomunun grafiği gösterilmektedir.

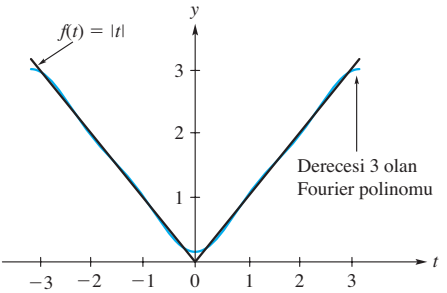
Şekil 5.28'de de

$$\left||t| - \left(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{4}{\pi}\cos t\right)\right| \quad \text{ve} \quad \left||t| - \left(\tfrac{\pi}{2} - \tfrac{4}{\pi}\cos t - \tfrac{4}{9\pi}\cos 3t\right)\right|$$

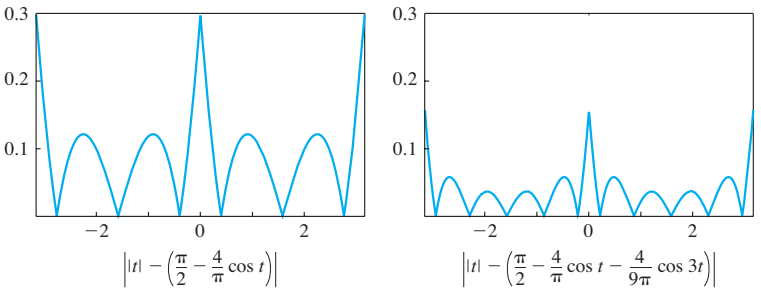
fonksiyonlarının grafiği gösterilmiştir. Sonuçta, 3. dereceden biri Fourier polinomu ile yaklaşımın ne kadar iyi olduğunu gözlemleyiniz. ■



ŞEKİL 5.26



ŞEKİL 5.27



ŞEKİL 5.28

Fourier serileri, ısı dağılımı çalışmaları ve ses dalgaları analizinde önemli bir rol oynar. İzdüşüm konusu, uygulamalı matematiğin birçok alanında önemlidir. Bunu, **kararsız** sistemlerle ilgili bir teknik olan en küçük kareler konusunu ele alarak Kesim 5.6'da açıklayacağız.

Anahtar Kelimeler

Altuzayların kesişimi
Altuzayların doğrudan toplamı
Bir altuzaya dik vektör
Bir altuzayın dik tümleyeni
A matrisinin çekirdek uzayı
Dik izdüşüm
Dik taban
Fourier serileri
Taylor ve Maclaurin serileri
Trigonometrik polinom
Fourier polinomu

5.5 Alıştırmalar

1. R^3,

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vektörü ile gerilen altuzay W olsun.

(a) $W^\perp$ için bir taban bulunuz.

(b) $W^\perp$ uzayını geometrik olarak yorumlayınız (Sözel veya grafiksel bir tanımlama yapabilirsiniz).

2. W uzayı

$$W = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$$

olarak verildiğine göre

(a) $W^\perp$ için bir taban bulunuz.

(b) $W^\perp$ uzayını geometrik olarak yorumlayınız (Sözel veya grafiksel bir tanımlama yapabilirsiniz).

3. R^5'te

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 5 & -4 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{w}_4 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{w}_5 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

vektörleri ile gerilen altuzay W olsun. $W^\perp$ için bir taban bulunuz.

4.

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_4 = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

vektörleri ile gerilen R^4'ün bir altuzayı W ise, $W^\perp$ için bir taban bulunuz.

5. ***(Matematik Analiz Gerekli)*** Örnek 2'de tanımlanan iç çarpımlı P_3 Öklid uzayı V olsun. P_3'ün $\{t-1, t^2\}$ ile gerilen altuzay W olsun. $W^\perp$ için bir taban bulunuz.

6. Örnek 2'de tanımlanan iç çarpımlı P_4'ün altuzayı V olsun. P_4'ün $\{1, t\}$ ile gerilen altuzayı $W^\perp$ ise için taban bulunuz.

7. R^3'te $3x + 2y - z = 0$ düzlemin W olsun. $W^\perp$ için bir taban bulunuz.

8. Kesim 1.3–Örnek 43'te tanımlanan iz fonksiyonu iz ile gösterilmek üzere $(A, B) = \text{İz}(B^T A)$ ile tanımlanan iç çarpım ile beraber tüm 2×2 matrislerinin Öklid uzayı V olsun.

$$W = \text{sp}\left\{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}$$

olduğuna göre, W için bir taban bulunuz.

Alıştırma 9 ve 10'da, A ile ilgili dört temel vektör uzayını hesaplayınız ve Teorem 5.12'yi doğrulayınız.

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & -4 & -6 \\ 4 & 7 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -9 & 5 \end{bmatrix}$

Alıştırma 11-14'te, verilen $\mathbf{v}$ *vektörü ve* W *altuzayı için* $\text{İzd}_W \mathbf{v}$*'yi bulunuz.*

11. R^3 Öklid uzayı V ve tabanı

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

(a) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ **(b)** $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ **(c)** $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

olan altuzay W olsun.

12. R^4 Öklid uzayı V ve

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tabanı altuzay W olsun.

(a) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

13. V, $[-\pi, \pi]$ aralığında real değerli sürekli fonksiyonların vektör uzayı, olsun ve $W = \text{span}\{1, \cos t, \sin t\}$ olsun.

(a) $\mathbf{v} = t$ **(b)** $\mathbf{v} = t^2$ **(c)** $\mathbf{v} = e^t$

14. R^3'te $x + y - 27 = 0$ düzlemi ile verilen düzlem W olsun.

(a) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ **(b)** $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ **(c)** $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

15.

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

olmak üzere, R^3'ün birim dik tabanı $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ olan altuzayı W olsun. $\mathbf{w}$, W ve $\mathbf{u}$, $W^\perp$'te olmak üzere

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

vektörünü $\mathbf{w} + \mathbf{u}$ şeklinde yazınız.

16.

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

vektörleri verildiğine göre, R^4'ün $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ otonormal tabanlı alt uzayı W olsun. $\mathbf{w}$, W'da ve $\mathbf{u}$, $W^\perp$'te olmak üzere

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

vektörünü $\mathbf{w} + \mathbf{u}$ olarak ifade ediniz.

17. Alıştırma 13'te tanımlanan $[-\pi, \pi]$ aralığında sürekli fonksiyonların altuzayı W olsun. $\mathbf{v} = t - 1$ vektörünü, $\mathbf{w}$, W'da ve $\mathbf{u}$, $W^\perp$'te, olmak üzere $\mathbf{w} + \mathbf{u}$ olarak yazınız.

18. R^3'te $x - y - z = 0$ denklemi ile verilen düzlem W olsun. $\mathbf{w}$, W'da ve u, $W^\perp$'te olmak üzere $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektörünü $\mathbf{w} + \mathbf{u}$ olarak ifade ediniz.

19. R^3'ün Alıştırma 15'te tanımlanan, altuzay W olsun ve $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ verilsin.

$\mathbf{v}$ vektöründen W altuzayına olan uzaklığı bulunuz.

20. R^4 altuzayı, Alıştırma 16'da tanımlanan W olsun ve $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$. verilsin. $\mathbf{v}$ vektöründen W'ya olan uzaklığı bulunuz.

21. $[-\pi, \pi]$ aralığında sürekli fonksiyonların altuzayı, Alıştırma 13'te tanımlanan, W olsun ve $\mathbf{v} = t$ alınsın. $\mathbf{v}$'den W'ya olan uzaklığı bulunuz.

Alıştırma 22 ve 23'te, f fonksiyonun için 2. dereceden Fourier polinomunu bulunuz.

22. (***Matematik Analiz Gerekli***) $f(t) = t^2$

23. (***Matematik Analiz Gerekli***) $f(t) = e^t$

24. V bir iç çarpım uzayı ve W, V'nin bir alt uzayı ise, bu durumda V'nin sıfır vektörü, $W^\perp$ uzayına ait olur. Gösteriniz.

25. V bir iç çarpım uzayı olduğunda, V'nin dik tümleyeni sıfır altuzayıdır ve sıfır altuzayının dik tümleyeni V'nin kendisidir. Gösteriniz.

26. Bir S vektörler cümlesi ile gerilen V iç çarpım uzayının bir altuzayı W ise, V'deki bir $\mathbf{u}$ vektörü ancak ve ancak S'deki her vektöre ortogonal ise $W^\perp$'e ait olur. Gösteriniz.

27. A bir $m \times n$ matrisi olsun. $\mathbf{w}$, A'nın çekirdek uzayında ve $\mathbf{u}$, A^T'nin sütun uzayında olmak üzere, R^n'deki her V vektörün $\mathbf{w} + \mathbf{u}$ olarak tek bir biçimde yazılabildiğini gösteriniz.

28. V bir Öklid uzayı ve W, V'nin bir altuzayı olsun. W için $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ bir taban ve $W^\perp$ için $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_s$ bir taban ise, $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_s$ V için bir taban olur ve boy V = boy W + boy W olur. Gösteriniz.

29. Bir V iç çarpım uzayının altuzayı W ve W için bir taban $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ olsun. Eğer V'de bir vektör $\mathbf{v}$ ise, bu durumda

$$\text{izd}_W \mathbf{v} = \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{w}_1)}{(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1)}\mathbf{w}_1 + \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{w}_2)}{(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2)}\mathbf{w}_2 + \cdots + \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{w}_m)}{(\mathbf{w}_m, \mathbf{w}_m)}\mathbf{w}_m.$$

olduğunu gösteriniz.

5.6 En Küçük Kareler (Seçmeli)

Bölüm 1'den, bir $m \times n$ lineer sistemi $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$'nin çözümü yoksa tutarsız olduğunu hatırlarız. Kesim 4.9. Teorem 4.21'in ispatından ancak ve ancak $\mathbf{b}$, A'nın sütun uzayında ise $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sisteminin uyumlu olduğunu göstermiştik. Diğer bir deyişle, ancak ve ancak b, A'nın sütun uzayında değilse $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tutarsızdır. Tutarsız sistemler aslında birçok durumlarda ortaya çıkar ve bunlarla nasıl ilgileneceğimizi belirlemeliyiz. Yaklaşımımız, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ matris denkleminin sağlanmasına gerek duyulmayacak şekilde, problemi değiştirmektir. Yani R^n'den $A\mathbf{x}$ in mümkün olduğu kadar $\mathbf{b}$ ye yakın olmasını sağlayan bir $\hat{\mathbf{x}}$ vektörünü ararız.

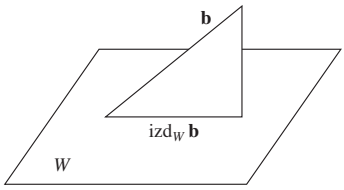
Eğer W, A'nın sütun uzayı ise, Kesim 5.5 Teorem 5.13'den, uzayında $\mathbf{b}$'ye en yakın vektörün $\text{İzd}_W\mathbf{b}$ olacak şekilde $\hat{\mathbf{x}}$ vektörünün bulursak, o zaman $\|\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}\|$ ifadesinin mümkün olduğu kadar küçük olacağını önceden garanti etmiş oluruz. Teorem 5.13'ün ispatında gösterildiği gibi $\mathbf{b} - \text{izd}_W\mathbf{b} = \mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}$ vektörü W daki her vektöre dikdir. (Şekil 5.29'a bakınız.) Bu durumda, $\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}$ vektörü A'nın herbir sütununa diktir. Bir matris denklemi olarak

$$A^T(A\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) = \mathbf{0},$$

veya eşdeğeri

$$A^T A\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b} \tag{1}$$

alabiliriz. (1) denkleminin herhangi bir çözümüne $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sisteminin bir **en küçük kareler çözümü** denir. (**Uyarı:** Genelde $A\hat{\mathbf{x}} \neq \mathbf{b}$'dir.) (1) denklemine, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ile ilgili denklemlerin **normal sistemi** veya kısaca **normal sistem** denir. Eğer A tekil olmayan bir matris ise, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$'nin en küçük kareler çözümü ile $\mathbf{x} = A^{-1}$, $\mathbf{b}$ çözümünün aynı olduğunu gözleriz. (Alıştırma 1'e bakınız.)



ŞEKİL 5.29 $W = A$'nın sütun uzayı.

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sisteminin bir en küçük kareler çözümü $\hat{\mathbf{x}}$ vektörünü hesaplamak için aşağıdaki gibi ilerleyebiliriz: Önce, Kesim 5.5'teki (1) denklemini kullanarak $\text{izd}_W\mathbf{b}$'yi hesaplarız ve sonra $A\hat{\mathbf{x}} = \text{izd}_W\mathbf{b}$ denklemini çözeriz. $\text{İzd}_W\mathbf{b}$'yi hesaplamak için, A'nın sütun uzayı olan W için bir birimdik tabana sahip olmamız gerekir. İlkönce A^T'nin satırca indirgenmiş eşelon biçimini belirleyerek ve sıfır olmayan satırların transpozesini olarak, W için bir taban bulabiliriz. Daha sonra, W'nin birim dik bir tabanını bulmak için, bu tabana Gram-Schmidt işlemini uygularız. Aritmetik işlemler kullanıldığında, anahtarı ile verilen yol teorik olarak geçerlidir. Bununla birlikte, küçük yuvarlama hataları bile sonuçta ters etki yapabilir. Böylece nümerik uygulamalar için çok iyi bilinen loga-

ritmalara gerek duyulur. Burada genel hale devam etmeyeceğiz; fakat dikkatimizi aşağıdaki önemli bir özel hale çevireceğiz.

Uyarı İzd$_W$**b**'yi bulmak için değişik bir yol şu şekildedir. (1) denkleminden **x**'yi çözünüz, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sisteminin en küçük kareler çözümünü bulunuz. Bu durumda $A\mathbf{x}$ ile izd$_W$**b** eşit olacaktır.

Teorem 5.14 A matrisi rank $A = n$ olan bir $m \times n$ matrisi ise, bu durumda A^TA tekil olmayan bir matristir ve $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sisteminin $\hat{\mathbf{x}} = (A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}$ ile verilen tek bir en küçük kareler çözümü vardır.

İspat

A matrisinin rankı n ise, o zaman A'nın sütunları lineer bağımsızdırlar. $A^TA\mathbf{x} = \mathbf{0}$ lineer sistemi yalnız sıfır çözüme sahip olması şartı ile, A^TA matrisi tekil değildir. Böylece $A^TA\mathbf{x} = 0$ denkleminin her iki tarafını soldan X^T ile çarparak ve R^n'de standart iç çarpım kuralını kullanarak

$$\mathbf{0} = \mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x} = (A\mathbf{x})^T(A\mathbf{x}) = (A\mathbf{x}, A\mathbf{x}),$$

elde edilir. Kesim 5.3 – Tanım 5.1 (a)'dan $A\mathbf{x} = 0$ olduğu sonucu çıkar. Fakat bu, A'nın lineer bağımsız sütunlarının lineer birleşimin sıfır olduğu anlamına gelir; böylece $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ olur. Dolayısıyla A^TA tekil değildir ve (1) denkleminin tek çözümü $\hat{\mathbf{x}} = (A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}$ olur. ■

ÖRNEK 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

verildiğine göre $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sisteminin en küçük kareler çözümünü bulalım.

Çözüm

Satır indirgeme işlemini uygulayarak rank $A = 4$ olduğunu gösterebiliriz. (Gerçekleyiniz.) Teorem 5.14'ü kullanarak $A^TA\hat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}$ normal sistemini

$$\begin{bmatrix} 26 & 5 & -1 & 5 \\ 5 & 23 & 13 & 17 \\ -1 & 13 & 24 & 6 \\ 5 & 17 & 6 & 23 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 24 \\ 4 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

olarak oluştururuz. Gauss yok etme işlemi ile bir tek en küçük kareler çözümünü elde ederiz.

$$\hat{\mathbf{x}} \approx \begin{bmatrix} 0.9990 \\ -2.0643 \\ 1.1039 \\ 1.8902 \end{bmatrix}$$

Eğer A'nın sütun uzayı W ise, O zaman

$$\text{izd}_W \mathbf{b} = A\hat{\mathbf{x}} \approx \begin{bmatrix} 1.4371 \\ 4.8181 \\ -1.8852 \\ 0.9713 \\ 2.6459 \\ 5.2712 \end{bmatrix}$$

olur.

Bu vektör W uzayında $\|\mathbf{b} - \mathbf{y}\|$, W'da $\mathbf{y}$'nin ifadesinin minumum yapılmasını sağlayan vektördür. Bunun diğer bir anlamı

$$\min_{\mathbf{y} \in W} \|\mathbf{b} - \mathbf{w}\| = \|\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}\|$$

dir. ■

A matrisi rankı n olan bir $m \times n$ matrisi olduğunda, (1) denklemini Gauss yok etme yöntemi ile çözmek, $(A^TA)^{-1}$ ifadesini belirleyip $(A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}$ çarpımını oluşturmaktan, hesap yönünden, daha etkilidir. Daha iyi bir yaklaşım, aşağıdaki gibi QR-çarpanlara ayrılışı $A = QR$ olduğunu varsayalım. A'nın bu ifadesini (1) denkleminde yerine koyarak,

$$(QR)^T(QR)\hat{\mathbf{x}} = (QR)^T\mathbf{b}$$

veya

$$R^T(Q^TQ)R\hat{\mathbf{x}} = R^TQ^T\mathbf{b}$$

elde ederiz. Q'nun sütunları otonormal bir cümle oluşturdukları için $Q^TQ = I_m$; dolayısıyla

$$R^TR\hat{\mathbf{x}} = R^TQ^T\mathbf{b}$$

olur. R^T tekil olmayan bir matris olduğundan

$$R\hat{\mathbf{x}} = Q^T\mathbf{b}$$

elde ederiz. R'nin üst üçgen matris olmasını kullanarak, bu lineer sistemi geriye yerine yolu ile hemen çözebiliriz.

ÖRNEK 2 A matrisinin QR-çarpımlarına ayırma işlemini kullanarak Örnek 1'i çözelim.

Çözüm

MATLAB da tüm hesaplamaları yaparak, Gram-Schmidt işlemini kullanırız; Q, R ve $Q^T\mathbf{b}$ matrislerini sırasıyla

$$Q = \begin{bmatrix} -0.1961 & -0.3851 & 0.5099 & 0.3409 \\ -0.3922 & -0.1311 & -0.1768 & 0.4244 \\ 0.3922 & -0.7210 & -0.4733 & -0.2177 \\ -0.7845 & -0.2622 & -0.1041 & -0.5076 \\ 0 & -0.4260 & 0.0492 & 0.4839 \\ -0.1961 & 0.2540 & -0.6867 & 0.4055 \end{bmatrix}$$

ve

$$R = \begin{bmatrix} -5.0990 & -0.9806 & 0.1961 & -0.9806 \\ 0 & -4.6945 & -2.8102 & -3.4164 \\ 0 & 0 & -4.0081 & 0.8504 \\ 0 & 0 & 0 & 3.1054 \end{bmatrix}$$

$$Q^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4.7068 \\ -0.1311 \\ 2.8172 \\ 5.8699 \end{bmatrix}$$

olarak elde ederiz. (Doğrulayınız.)

Son olarak

$$R\hat{\mathbf{x}} = Q^T\mathbf{b},$$

sistemini çözerek, Örnek 1'deki ayın $\hat{\mathbf{x}}$ çözümünü buluruz. ■

Uyarı Bir matrisin *QR*-çarpanlara ayırma işlemi ile ilgili tartışmada gözleneceği gibi, Örnek 2'deki *A* matrisinin *QR*-çarpanlara ayırma ifadesini bulmak için MATLAB veya bir başka bilgisayar programı kullanabilirsiniz; bu durumda *Q* matrisi, ilk dört sütunu çözümümüzde bulduğumuz *Q* ile uyuşan bir 6×6 matrisi ve *R* matrisi, ilk dört satırı çözümde bulduğumuz *R* ile uyuşan ve son iki satırı tamamen sıfır olan bir 6×4 matrisi olacaktır.

Ayrıca $m > n$ olmak üzere, bir $D = \{(t_i, y_i), i = 1, 2, \ldots, m\}$ veri cümlesi için

$$y(t) = x_1 f_1(t) + x_2 f_2(t) + \cdots + x_n f_n(t) \tag{2}$$

biçiminde bir matematik model kurmaya çalıştığımızda, sık sık en küçük kareler problemleri ortaya çıkar. Aslında istediğimiz, her bir t^i, $i = 1, 2, \ldots, m$ veri noktası için,

$$y_i = x_1 f_1(t_i) + x_2 f_2(t_i) + \cdots + x_n f_n(t_i)$$

sistemini sağlayan $x_1, x_2, \ldots, x_n$'leri belirlemektir. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistemi,

$$A = \begin{bmatrix} f_1(t_1) & f_2(t_1) & \cdots & f_n(t_1) \\ f_1(t_2) & f_2(t_2) & \cdots & f_n(t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1(t_m) & f_2(t_m) & \cdots & f_n(t_m) \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T, \text{ ve } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{bmatrix}^T$$

olmak üzere, matris biçiminde yazılabilir. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sisteminin tutarsız olması durumunda; çoğu kez, sistemin bir $\hat{\mathbf{x}}$ en küçük kareler çözümüne niyetleniriz. Eğer (2) model denkleminde $x_i = \hat{x}_i$ alırsak,

$$\hat{y}(t) = \hat{x}_1 f_1(t) + \hat{x}_2 f_2(t) + \cdots + \hat{x}_n f_n(t)$$

denkleminin *D* veri cümlesi için bir en küçük kareler modeli belirlediği söyleyebilir. Genellikle $\hat{y}(t_i) \neq y_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$'dir. (Bunlar eşit olabi-

lir, fakat garanti yoktur.) D veri cümlesi için $y(t)$ bir matematiksel model olarak kullanıldığında, t_i noktasında karşılaşılan hata $e_i = y_i - y(t_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ ile gösterilsin. Eğer

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_m \end{bmatrix}^T$$

ise, bu durumda

$$\mathbf{e} = \mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}},$$

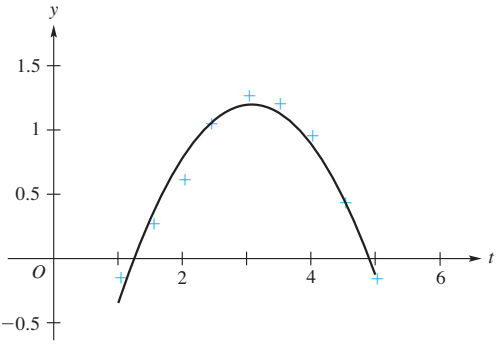
olur ve Kesim 5.5'teki Teorem 5.13, $\|e\| = \|\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}\|$'nin mümkün olduğu kadar küçük olduğunu garanti eder. Yani,

$$\|\mathbf{e}\|^2 = (\mathbf{e}, \mathbf{e}) = (\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^{m} \left[y_i - \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_j f_j(t_i) \right]^2$$

değeri minumum yapılmış olur. En küçük karaler çözümü $\hat{\mathbf{x}}$'nin, model denklemle önceden belirlenen $\hat{y}(t_i)$ değerleri ve y_i gözlemleri arasındaki farkların karelerinin toplamını, minumum yaptığını söyleyebiliriz:

ÖRNEK 3 Aşağıdaki veriler (bir EPA standardına göre) yarım-saat aralıklarda ölçülen t_i zamanlarındaki y_i hava kirliliklerini göstermektedir.

t_i	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
y_i	–0.15	0.24	0.68	1.04	1.21	1.15	0.86	0.41	–0.08



ŞEKİL 5.30

Şekil 5.30'da gösterildiği gibi, işaretlenen veriler noktaları,

$$y(t) = x_1 + x_2 t + x_3 t^2$$

İkinci derece polinomunun bu veriler için iyi bir model olabileceği izlenimini vermektedir. $f_1(t) = 1, f_2(t) = t$ ve $f_3(t) = t_2$ ile (3) denklemi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1.5 & 2.25 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2.5 & 6.25 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 3.5 & 12.25 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 4.5 & 20.25 \\ 1 & 5 & 25 \end{bmatrix}, \qquad \widehat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -0.15 \\ 0.24 \\ 0.68 \\ 1.04 \\ 1.21 \\ 1.15 \\ 0.86 \\ 0.41 \\ -0.08 \end{bmatrix}$$

matrislerini verir. Buna göre A'nın rankı 3'tür ve normal sistem

$$\begin{bmatrix} 9 & 27 & 96 \\ 27 & 96 & 378 \\ 96 & 378 & 1583.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.36 \\ 16.71 \\ 54.65 \end{bmatrix}$$

olur. Gauss yüketme yöntemini kullanarak

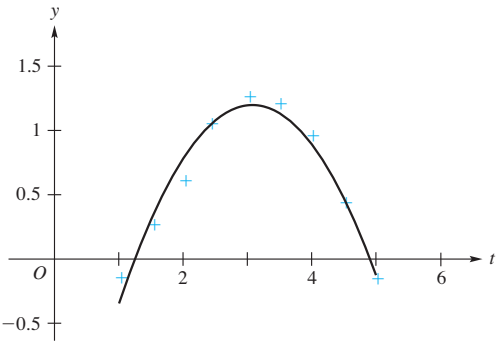
$$\widehat{\mathbf{x}} \approx \begin{bmatrix} -1.9317 \\ 2.0067 \\ -0.3274 \end{bmatrix}$$

matrisini ve dolayısıyla

$$y(t) = -1.9317 + 2.0067t - 0.3274t^2$$

ikinci derece polinom modelini elde ederiz.

Şekil 5.31, $y(t)$'nin bir grafiğini ve + ile işaretlenen veri cümlesini göstermektedir. Buradan, $y(t)$'nin herbir veri noktasına yakın olduğunu, fakat tüm noktalardan geçmesinin zorunlu olmadığını görürüz. ■



ŞEKİL 5.31

Anahtar Kelimeler

Tutarsız lineer sistem
En küçük kareler çözümü
Denklemlerin normal sistemi
İzdüşüm
QR-Çarpanlara ayırma

5.6 Alıştırmalar

1. A, $n \times n$ ve singüler olmayan bir matris olsun. (1) deki denklemlerin normal sisteminden, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$'nin en küçük kareler çözümünün $\hat{\mathbf{x}} = A^{-1}\mathbf{b}$ olduğunu gösteriniz.

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

olmak üzere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$'nin en küçük kareler çözümünü belirleyiniz.

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

verildiğine göre $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$'nin en küçük kareler çözümünü belirleyiniz.

4. A'nın QR, çarpanlara ayırma işlemini kullanarak Alıştırma 2'yi çözünüz.

5. A'nın QR-çarpanlara ayırma işlemini kullanarak. Alıştırma 3'ü çözünüz.

6. Z ürününün yapımında, üründe mevcut A bileşeninin miktarı, inceltme işleminde kullanılan B karışım maddesi miktarı ile kontrol ediliyor. Z'nin bir litresinin yapımında kullanılan B'nin miktarı kaydediliyor; aşağıdaki veri elde ediliyor?

Kullanılan (gram/litre)	2	4	6	8	10
Verilen (gram/litre)	3.5	8.2	10.5	12.9	14.6

veriye göre en küçük kareler doğrusunu belirleyiniz. [(2) denkleminde $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = t$ kullanınız] $\|\mathbf{e}\|$ normunu da hesaplayınız.

7. Alıştırma 6'da $D = \{(t_i, y_i), i = 1, 2, \ldots, m\}$ veri cümlesine göre en küçük kareler doğrusudur.

$$E_1 = \sum_{i=1}^{m} [y_i - (x_1 + x_2 t_i)]^2.$$

toplamını minumum yapan, $y = \hat{x}_1 + \hat{x}_2 t$ doğrusudur. Benzer şekilde, D veri cümlesine en küçük kareler ikinci derece denklemi (Örnek 2'ye bakınız),

$$E_2 = \sum_{i=1}^{m} [y_i - (x_1 + x_2 t_i + x_3 t_i^2)]^2$$

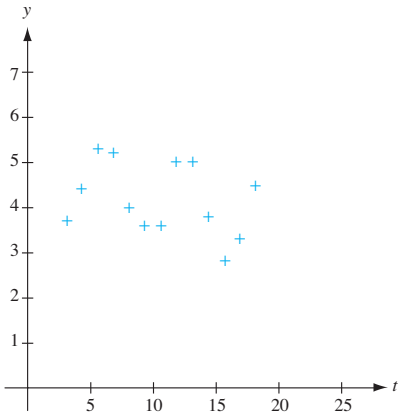
toplamını minumum yapan, $y = \hat{x}_1 + \hat{x}_2 t + \hat{x}_3 t^2$ parabolüdür. $E_2 \le E_1$ olduğunu göstermek için bir vektör uzayı yorumu yapınız.

8. Aşağıdaki tablo, t_i ayları ve y_i milyonlarca insanı göstermek üzere, yaklaşık 2 yılı aşkın bir süredeki mevsimlik işçi istihdam verisine ait (t_i, y_i) örnek cümlesidir. Veri cümlesine ait çizim aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$y(t) = x_1 + y_2 t + x_3 \cos t$$

şeklinde bir en küçük kareler matematiksel modelinin geliştirilmesine karar verilir. En küçük kareler modelini belirleyiniz; sonuç $y(t)$ fonksiyonunu ve veri cümlesini aynı koordinat sisteminde çiziniz.

t_i	y_i	t_i	y_i
3.1	3.7	11.8	5.0
4.3	4.4	13.1	5.0
5.6	5.3	14.3	3.8
6.8	5.2	15.6	2.8
8.1	4.0	16.8	3.3
9.3	3.6	18.1	4.5
10.6	3.6		



9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

olmak üzere $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ veriliyor.

(a) Rank $A = 2$ olduğunu gösteriniz.

(b) Rank $A \neq$ kolonların sayısı olduğundan, en küçük kareler çözümü $\hat{\mathbf{x}}$'yi belirlemek için Teorem 5.14 kullanılmaz. En küçük kareler çözümünü bulmak için Teorem 5.14'ten önceki prosedürü izleyiniz. Çözüm tek midir?

10. Kişi başına sağlık harcamaları (U.S $ cinsinden) gösterilen aşağıdaki veriler ulusal sağlık istatistik merkezince hazırlanan (http://www.cdc.gov/nchs/hus.htm) "the 2002 Chartbook ons Trends in the Healt of Americans" belgesinde mevcuttur.

Yıl	*Kişi Başına Harcama Miktarları*
1960	143
1970	348
1980	1,067
1990	2,738
1995	3,698
1998	4,098
1999	4,302
2000	4,560
2001	4,914
2002	5,317

(a) Verilen verilere göre en uygun doğruyu belirleyiniz.

(b) 2008, 2010 ve 2015 yılları için kişi başına harcamaları tahmin ediniz.

11. Aşağıdaki veri, U.S.nin kişi başına ($ cinsinden) düşen devlet borçlarını göstermektedir. Bu bilgi devlet borçları ve tahmin edilen nüfus verisi federal yönteminden temin edilmiştir.

(a) Verilen verilere en uygun doğruyu belirleyiniz.

(b) 2008, 2010 ve 2015 yılları için kişi başına düşen borcu tahmin ediniz.

Yıl	*Kişi Başına Borç*
1996	20,070
1997	20,548
1998	20,774
1999	21,182
2000	20,065
2001	20,874
2002	22,274
2003	24,077
2004	25,868
2005	27,430

12. Alıştırma 11'de verilen veri için, en küçük kareler ikinci derce polinom yaklaşımını, bulunuz. Bu modeli elde edilen modelle, herbir halde hatayı hesaplayarak karşılaştırınız.

13. Geyç av tüfeği kalibresinin bir ölçüsüdür. Geyç sayıları, kurşunun hamlesinden ortaya çıkabilen, tüfeğin namlusuna eşit çaptaki kurşunu topların sayısı ile belirlenir. Böylece 16-Geyç bir tüfeğin kalibresi 12-Geyç tüfeğinkinden daha küçük olmaktadır. (*Ref., The Wordld Almana and Book of Fats 1993*, Pharos Books, Ny, 1992, P. 290) Bugün uluslararası anlaşmaya göre herbir geyç'e milimetre ölçümleri karşılık getirilir. Aşağıdaki tablo av tüfekleri için herkesçe bilinen geyçlerle ilgili bilgi vermektedir:

x	*y*
Kafes	*Çap genişliği (mm cinsinden)*
6	23.34
10	19.67
12	18.52
14	17.60
16	16.81
20	15.90

$y = re^{sx}$ biçiminde bir modeli geliştirmek istiyoruz. Burada her iki tarafın doğal logaritmasını alarak

$$\ln y = \ln r + sx$$

elde ederiz. $c_1 = \ln r$ ve $c_2 = S$ olsun. Tabloda çekilen veri (*) denkleminde yerine konularak, iki bilinmeyenli altı denklemden oluşan bir lineer sistem elde ederiz.

(a) Bu sistemin tutarsız olduğunu gösteriniz.

(b) Bu sistemin en küçük kareler çözümünü bulunuz.

(c) r ve s'yi belirleyiniz.
(d) 18-geyç tüfek için kalibre çapını tahmin ediniz.

14. Bir yazılımda bir lineer denklem sistemini çözmek için kullanılan komutlar matris kare, matris olmadığı veya singüler olmaması halinde küçükkareler çözümünü verir. Kullandığınız programda bunun olup olmadığını belirleyiniz. Eğer varsa programınızda elde ettiğiniz sonuç ile Alıştırma 1'deki sonucu karşılaştırınız. Daha fazla deneyim için Alıştırma 9'u kullanınız.

Ek Alıştırmalar

1. R^n'de sabit bir u vektörüne ortogonal olan tüm vektörler cümlesinin, R^n'in bir altuzayını oluşturduğu Kesim 5.4-Alıştırma 33'te gösterilmiştir. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektörü için, R^3'te $\mathbf{u}$ vektörüne birim dik olan vektörlerin altuzayı için dik bir taban bulunuz.

$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.]

($\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$) = 0 lineer sistemini çözünüz)

2. Gram-Schmidt işlemini kullanarak, R^4'ün

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

tabanlı altuzayı için bir birim dik taban bulunuz.

3. R^3'de

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right\}$$

birim dik tabanı verildiğine göre $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

vektörünü S'deki vektörlerin bir lineer birleşimi olarak yazınız.

4. Gram-Schmidt işlemini kullanarak, R^4'ün

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

tabanlı altuzayı için birim dik bir taban bulunuz.

5. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ vektörü ve
$\mathbf{w}_1 = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ve $\mathbf{w}_2 = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
vektörleri ile tanımlanan P düzlemi verildiğine göre, P düzleminde V vektörü ve $\mathbf{v}$ den P'ye uzaklığı bulunuz.

6. (2, 3, –1) noktasından $3x - 2y + z = 0$ düzlemine uzaklığı bulunuz. (*Yol gösterme*: Önce düzlemin birim dik tabanını bulunuz.)

7. $(f, g) = \int_0^{\pi} f(t)g(t)\,dt$

ile tanımlanan bir iç çarpımla beraber $[0, \pi]$ aralığında sürekli reel değerli fonksiyonların vektör uzayı verilsin. $n = 1, 2, \ldots$ için sinnt fonksiyonlar topluluğunun dik bir cümle oluşturduğunu gösteriniz.

8. Kesim 5.5 Alıştırma 13'te tanımlanan iç çarpım uzayı V olsun.
(a) – (c)'de verilen $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ birimdik vektörleri ile gerilen altuzayı W olsun V uzayındaki V vektörü için $\text{İzd}_W\mathbf{v}$'yi bulunuz.

(a) $\mathbf{v} = t + t^2, \mathbf{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t, \mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2t$

(b) $\mathbf{v} = \sin\frac{1}{2}t, \mathbf{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t$

(c) $\mathbf{v} = \cos^2 t, \mathbf{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t,$
$\mathbf{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2t$

9. A'nın her bir çekirdek uzayı için birim dik bir taban bulunuz.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

10. Verilen herbir A matrisi için QR-çarpanlara ayırma işlemini yapınız.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

11. R^3'te $W = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

olsun.
(a) W'nın dik tümleyeni için bir taban bulunuz.

(b) $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$

vektörleri de berabere (a)'daki W'nin ortogonal tümleyeninin tabanı, R^3'te bir taban oluşturur; gösteriniz.

(c) Verilen her $\mathbf{v}$ vektörünü $\mathbf{w} \in W$ ve $\mathbf{u} \in W^{\perp}$ olmak üzere, $\mathbf{w} + \mathbf{u}$ olarak ifade ediniz.

(i) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ **(ii)** $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

12. A'nın çekirdeki uzayının dik tümleyenini bulunuz.

(a) $A = \begin{bmatrix}1 & -2 & 2\\2 & 3 & 2\\4 & -1 & 6\end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix}1 & -1 & 3 & 2\\1 & -4 & 7 & 8\\2 & 1 & 2 & -2\end{bmatrix}$

13. $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt$ iç çarpımına göre P_2'nin birim dik bir tabanını bulmak için, P_2'nin $\{1, t, t_2\}$ standart tabanı ile başlayarak Gram-Schmidt işlemini kullanınız. Böylece elde edilen polinomlara **Legendre*** polinomları denir.

14. $[-1, 1]$ aralığında tanımlanan reel değerli sürekli, fonksiyonların vektör uzayının bir altuzayı olarak P_2 göz önüne alınsın. P_2 için bir taban olarak Alıştırma 13'teki Legendre polinomunu kullanarak

(a) $\mathbf{v} = t^3$ **(b)** $\mathbf{v} = \sin \pi t$

(c) $\mathbf{v} = \cos \pi t$

vektörlerinin herbiri için $\text{İzd}_{P_2}\mathbf{v}$'yi bulunuz.

15. $[-1, 1]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyonların vektör uzayı olarak P_2 alınsın; P_2 için birim dik taban olarak Legendre polinomlarını kullanarak $\mathbf{v} = t^3 + 1$'den P_2'ye olan uzaklığı bulunuz.

16. $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, g(t)\, dt$ ile tanımlı iç çarpımlı $[-\pi, \pi]$ aralığında reel değerli sürekli fonksiyonların iç çarpım uzayı V olsun. (Kesim 4.5 – Alıştırma 13'e bakınız.) sin nx ve cosmx arasındaki uzaklığı bulunuz.

17. A, $n \times n$ matrisi olsun ve R^n'in standart iç çarpıma sahip olduğu kabul edilsin. R^n'deki tüm $\mathbf{u}$ için $(\mathbf{u}, A\mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u})$ ise $A = In$ olduğunu ispatlayınız.

18. R^n'de tüm $\mathbf{x}$'ler için $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \geq 0$ ise, $n \times n$ simetrik matrisi A pozitif yarı tanımlıdır.

Aşağıdakileri ispatlayınız.

(a) Her pozitif tanımlı matris pozitif yarı tanımlıdır.

(b) A tekil ve pozitif yarı tanımlı ise, A pozitif tanımlı değildir.

(c) Bir A köşegen matrisi ancak ve ancak $i = 1, 2, \ldots, n$ için $a_i + \geq 0$ ise pozitif tanımlıdır.

19. Dik matris fikri Bölüm 7'de tartışılır. Ancak ve ancak; $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ile gösterilen $n \times n$ P matrisinin sütunları R^n'de birim dik bir cümle oluştururusa, standart iç çarpımı kullanarak, P'nin dik olduğu gösterilebilir.

(a) Teorem 5.7 yardımı ile R^n'deki $\mathbf{x}$ vektörü için $\|P\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ olduğunu ispatlayınız.

(b) $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleri R^n'de olmak üzere, $P\mathbf{x}$ ve $P\mathbf{y}$ arasındaki açının $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ arasındaki açı ile aynı olduğunu ispatlayınız.

20. A, $n \times n$ tipinde ters simetris bir matrsi olsun. Her $\mathbf{x} \in R^n$ için $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0$ olduğnu ispatlayınız.

21. Birim dik sütunları $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ olan bir $m \times n$ matrisi B olsun.

(a) $m \geq n$ olduğunu ispatlayınız.

(b) $B^TB = In$ olduğunu ispatlayınız.

22. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ V Öklid uzayı, $S = \text{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ ve $T = \text{span}\{\mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ için birim dik tabak olsun S'deki herhangi bir $\mathbf{x}$ ve T'deki herhangi bir y için $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ olduğunu gösteriniz.



ADRIEN-MARIE LEGENDRE

*Adrien-Marie Legendre (1752-1833) Paris'te varlıklı bir ailede doğdu ve Paris'te öldü. Legendre, Paris'te askeri okulda (Ecole Militaine'de) birçok yıl çalıştıktan sonra, 1782 de Berlin Akademisine sunduğu, hava direncini hesaba katarak, bir merminin aldığı yolu belirleyen bir makale ile prestijli bir ödül kazandı. Önemli katkılarını gök mekaniği ve sayılar teorisi üzerine yaptı, ve ağırlıkları ve ölçüleri standardize eden bir komisyonun üyesi oldu. Aynı zamanda, logaritmik ve trigonometrik tabloları yapan bir büyük projenin yöneticisi oldu. 1794'te Legendre, 100 yıl boyunca Avrupa ve ABD'de büyük ün kazanan geometri üzerine temel bir ders kitabını yayınladı. Legendre, aynı zamanda verilen bir veri cümlesine uygun bir eğriyi elde etmede kullanılan en küçük kareler yöntemini geliştirdi.

23. V, bir Öklid uzayı ve W, V'nin bir altuzayı olsun. Kesim 5.5–Alıştırma 28'i kullanarak $(W^{\perp})^{\perp} = W$ olduğunu gösteriniz.

24. Bazı $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ olan bir Öklid uzayı V olsun. S'deki her vektöre V'de dik olan bir vektör $\mathbf{u}$ ise, $\mathbf{u} = 0$ olduğunu gösteriniz.

25. AA^T tekil olmamak üzere A, bir $m \times n$ matrisi ise, rank $A = m$'dir. Gösteriniz.

26. Bir V iç çarpım uzayında $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri verilsin. Eğer $((\mathbf{u} - \mathbf{v}), (\mathbf{u} + \mathbf{v})) = 0$ ise $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$ olduğunu gösteriniz.

27. Sonlu boyutlu bir V iç çarpım uzayı için bir birim dik tabanı $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ olsun ve

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad [\mathbf{w}]_S = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

olmak üzere V'deki vektörler $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ olsun.

$$d(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}$$

olduğunu gösteriniz.

Alıştırma 28-33 için aşağıdaki bilgileri gözönüne alınız.

R^n üzerinde bir **vektör normu**, R^n'deki herbir $\mathbf{v}$ vektörüne negatif olmayan bir reel sayıyı atayan bir fonksiyondur; $\mathbf{v}$'nin normu adı verilir ve $\|\mathbf{v}\|$ ile gösterilir, aşağıdaki koşulları sağlar;

(a) $\|\mathbf{v}\| \geq$, ve $\|\mathbf{v}\| = 0$, $\mathbf{v} = 0$;

(b) *Herhangi bir c reel skaları ve $\mathbf{v}$ vektörü için* $\|c\mathbf{v}\| = c\|\mathbf{v}\|$'dir

(c) *Her $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri için* $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$*'dir.* (*üçgen eşitsizliği*)

Lineer cebirin uygulamalarında yaygın olarak kullanılan üç normal vardır; Bunlara ***1-norm***, ***2-norm*** *ve* ∞ ***norm*** *denir;*
Sırası ile $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$, $\| \ \|_\infty$ *ile gösterilir ve R^n'de bir vektör*

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$
$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$
$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$$

olarak tanımlanır. $\|\mathbf{x}\|_2$, *normunun, Kesim 5.1'de tanımlandığı gibi* $\mathbf{x}$ *vektörünün uzunluğu olduğunu görürüz.*

28. R^2'de aşağıda verilen herbir vetör için $\|\mathbf{x}\|_1$, $\|\mathbf{x}\|_2$, $\|\mathbf{x}\|_\infty$, normlarını hesaplayınız?

(a) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}$

29. R_3'de verilen aşağıdaki herbir vektör için $\|\mathbf{x}\|_1$, $\|\mathbf{x}\|_2$, $\|\mathbf{x}\|_\infty$, normlarını hesaplayınız?

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

30. $\| \ \|_1$'in bir norm olduğunu doğrulayınız.

31. $\| \ \|_\infty$'un bir norm olduğunu doğrulayınız.

32. Aşağıdaki özellikleri ispatlayınız.

(a) $\|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\mathbf{x}\|_1^2$ **(b)** $\dfrac{\|\mathbf{x}\|_1}{n} \leq \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|$

33. R^2'deki noktalar cümlesini aşağıda verilen koşullara göre kısaca açıklayınız.

Bölümün Gözden Geçirilmesi

Doğru veya Yanlış

1. $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri arasındaki uzaklık, bunların farkının uzunluğudur.

2. $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri arasındaki açının kosinüsü $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ile verilir.

3. $\mathbf{v}$ vektörünün uzunluğu $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ ile verilir.

4. Herhangi bir $\mathbf{v}$ vektörü için aynı yönde bir birim vektör bulabiliriz.

5. Cauchy-Schwarz eşitsizliği; bir vektörler çiftinin iç çarpımının, uzunluklarının çarpımına eşit veya daha küçük olduğunu ifade eder.

6. $\mathbf{v}$ vektörü $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{w}$ vektörlerini herikisine ortogonalse, $\mathbf{v}$ vektörü, span$\{\mathbf{u}, \mathbf{w}\}$'daki her vektöre diktir.

7. Birim dik bir cümle sıfır vektörünü kapsayabilir.

8. İç çarpım uzayındaki lineer bağımsız bir cümle aynı zamanda bir birim dik bir cümledir.

9. Herhangi bir vektörler cümlesi verildiğinde, Gram-Schmidt işlemleri birim dik bir cümle ortaya çıkaracaktır.

10. **x** herhangi bir reel sayısı olmak üzere,

$$W = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

ise bu durumda W_1 uzayı $\begin{bmatrix}0\\x\\0\end{bmatrix}$ biçimindeki tüm vektörlerdir.

11. V'nin bir altuzayı W ise, bu durumda, V'deki **v** için $\text{izd}_W\mathbf{v}$ vektörü, W uzayında **v**'ye en yakın vektördür.

12. V'nin bir altuzayı W ise, V'deki **v** vektörü için $\mathbf{v}–\text{izd}_W\mathbf{v}$ vektörü W'ya diktir.

Küçük Sınav (Quiz)

1. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ **ve** $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}0\\b\\c\end{bmatrix}$.

Vektörleri verilsin, **u** ve **v** vektörleri arasındaki açı 60° olacak şekilde R^3'teki bütün **v** birim vektörlerini belirleyiniz.

2. R^4'te

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\2\\-2\end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}2\\1\\1\\2\end{bmatrix}$$

vektörlerinin herbirisindeki olan vektörleri bulunuz.

3. [0,1] aralığında sürekli reel değerli tüm fonksiyonların vektör uzayı V olsun. $(f, g) = \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt$ tanımlı iç çarpım için $f(t) = t + 1$'e dik olan birinci derece veya daha az dereceli tüm polinomları belirleyeniz.

4. **(a)** Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin, bir iç çarpım uzayındaki **u** ve **v** vektörleri çifti için nasıl garanti ettiğini sözle açıklayınız.

(b) Cauch-Schwarz eşitsizliğinden türetilen bir ilk temel geometrik sonucu kısaca açıklayınız.

5.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}0\\2\\-1\\-1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}-3\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

olmak üzere $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ verilsin.

(a) S'nin dik bir cümle olduğunu gösteriniz.

(b) Sp S = Sp T olacak şekilde birim dik bir T cümlesini belirleyiniz.

(c) S'ye dik olan sıfırdan farklı bir $\mathbf{v}_4$ vektörü bulunuz ve $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ cümlesinin R^4 için bir taban olduğunu gösteriniz.

6.

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

olmak üzere $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ cümlesi verilsin.

(a) S'nin R^3 için bir birim dik taban olduğunu gösteriniz.

(b)

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

vektörünü, S'deki vektörlerin bir lineer birleşimi olarak ifade ediniz.

(c) $V = \text{Sp}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ olduğuna göre,

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}$$

vektörünün V üzerindeki dik izdüşümünü belirleyiniz ve **w** vektörünün V uzayına uzaklığını hesaplayınız.

7. Gram-Schimidt işlemini kullanarak

$$W = \text{sp}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\-2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

için bir birim dik taban belirleyiniz.

8.

$$W = \text{sp}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

uzayının dik tümleyeni için bir taban bulunuz.

9. Sonlu-boyutlu bir V iç çarpım uzayında S bir vektörler cümlesi olsun. Eğer W = Span S ise ve S lineer bağımsız ise, bu durumda. W ve $W^\perp$ konusunda bilgimizin nasıl geliştirileceğine ilişkin detaylı bir taslak veriniz.

10. V bir iç çarpım uzayı ve W, V'nin $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ birim dik tabanlı, sonlu-boyutlu bir altuzayı olsun. V uzayındaki **u** ve **v** vektörleri için $\text{izd}_W(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \text{izd}_W u + \text{izd}_W\mathbf{v}$ olduğunu ispat ediniz veya aksiniispatlayınız.

Tartışma Alıştarmaları

1. $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, V Öklid uzayı için bir taban ve $T = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, V için bir birim dik taban olsun. V'nin belirli bir $\mathbf{w}$ vektörü için, $[\mathbf{w}]_S$ ve $[\mathbf{w}]_T$'yi hesaplama ile alakalı çalışmadaki farkı gösteren bir tartışma hazırlayınız.

2. V Öklid uzayında, span $S = V$ olması halinde, bir vektör cümlesi

$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ olsun. S cümlesini kullanarak V'nin ortogonal bir tabanını tayin etmek için yöntemi genel hatları ile açıklayan bir tartışma hazırlayınız.

3. A tekil olmayan bir matris olmak üzere, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer denklemler sistemini gözönüne alalım ve $A = QR$ biçiminde çarpanlara ayrıldığını kabul edelim.

(a) Niçin $r_{jj} = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$ olduğunu açıklayınız.

(b) QR-çarpanlarına ayırma işlemini kullanarak lineer sistemin nasıl çözüleceğini açıklayınız.

4. $|v_j| \leq 1$, $j = 1, 2$ olması koşulu ile R^2'de bir vektör

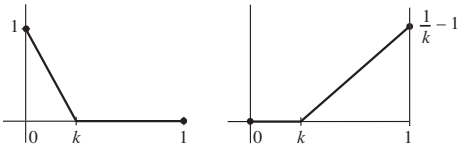
$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

olsun.

(a) $\mathbf{v}$ vektörüne karşı gelen noktanın, merkezi orijinde olan birim çemberin içinde bulunup bulunmadığının nasıl tayin edileceğini açıklayınız.

(b) R^2'de $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri verilsin ve bunların karşılıklı noktaları orijin merkezli birim çember içinde bulunsun. Merkezi söz konusu noktaları birleştiren doğru parçasının orta noktası olan ve bu parçayı çap kabul eden çemberin, merkezi orijinde olan birim çember içinde tamamen bulunup bulunmadığını, nasıl belirtilebileceğini açıklayınız.

5. (0,1) aralığında bir reel sayı k olsun, [0, 1] aralığında tanımlanan fonksiyon aşağıdaki şekil (a)'da f ile ve şekil (h)'de g ile gösterilmiştir. f ve g'nin herikisi de [0, 1]'de süreklidir. Kesim 5.3 Örnek 4'te tanımlanan iç çarpımı kullanarak f ve g'nin iç çarpımını tartışınız.



(a) f. (b) g.

6. [0, 1] aralığında tüm diferensiyellenebilir reel değerli fonksiyonların vektör uzayı W olsun. W uzayındaki f ve g fonksiyonları için

$$(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx + \int_0^1 f'(x)g'(x)\,dx$$

ifadesini tanımlayınız. (f, g)'nin W üzerinde bir iç çarpım olduğun gösteriniz.

BÖLÜM

6 Lineer Dönüşümler ve Matrisler

6.1 Tanım ve Örnekler

Daha önceden belirtildiği gibi matematik analizin büyük bir kısmı fonksiyonların özelliklerinin incelenmesi ile ilgilidir. Gerçekten fonksiyonların özellikleri lineer cebir dahil matematiğin her dalında büyük öneme sahiptir. Kesim 1.6'da R^n vektör uyazından R^m vektör uzayına matris dönüşümlerinden söz edilmişti. Kesim 4.8'de vektör uzayları arasında izomorfizmler verilmişti. Eğer, bir vektör uzayı üzerinde tanımlı bir fonksiyonun izomorfizm belirtmesi için gerekli şartların bazıları ihmal edilirse, fonksiyonların önemli bir tipi olan ve lineer dönüşüm olarak adlandırılan dönüşümler elde edilir. Lineer dönüşümler matematiğin bir çok dalında, fizikte, sosyal bilimlerde ve ekonomide önemli rol oynar. Kesim 1.6'da matris dönüşümleri f ile Kesim 4.8'de izomorfizmler L ile gösterilmişti. Bu bölümde bir vektör uzayından diğer bir vektör uzayına bir dönüşüm L ile gösterilecektir.

TANIM 6.1

V ve W birer vektör uzayı olmak üzere $L : V \to W$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa V'den W'ya bir lineer dönüşüm olarak adlandırılır.

(a) Her $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ için $L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v})$.
(b) c herhangi bir reel sayı olmak üzere, her $\mathbf{u} \in V$ için $L(c\mathbf{u}) = cL(\mathbf{u})$.

Eğer $V = W$ ise $L : V \to W$ lineer dönüşümü V üzerinde bir ***lineer operatör*** olarak adlandırılır.

Hepsi olmasa bile vektör uzaylarının çoğu sonlu boyutlu olarak göz önüne alınır.

Tanım 6.1'de, (a)'daki $\mathbf{u} + \mathbf{v}$'nin + işlemi V'deki toplama işlemi iken $L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v})$'deki + işlemi W'daki toplama işlemidir. Benzer olarak, (b)'deki $c\mathbf{u}$ skalar ile çarpma işlemi V'deki skalar ile çarpma işlemi iken, $cL(\mathbf{u})$ skalar ile çarpma işlemi W'daki skalar ile çarpma işlemidir.

Kesim 4.8'de belirtildiği gibi izomorfizm bire-bir ve örten olan bir lineer dönüşümdür. Lineer dönüşümler ile sık sık karşılaşılır. Şimdi

aşağıdaki örneklere bakalım. (Bu noktada Kesim Ek 2'deki bilgilere bakılması faydalı olur.) $L : V \to W$ dönüşümünün lineer olması için gerek ve yeter şartın, her $a, b \in R$ ve her $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ için $L(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aL(\mathbf{u}) + bL(\mathbf{v})$ olduğu gösterilebilir. (Alıştırma 6.)

ÖRNEK 1

A, $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere, Kesim 1.6'da matris dönüşümleri $L : R^n \to R^m$, $L(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ olarak tanımlanmıştı. Şimdi matris dönüşümlerinin Tanım 6.1'deki şartları sağlayan lineer dönüşüm olduğunu gösterelim.

Eğer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in R^n$ ise,

$$L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v})$$

ve c bir skalar ise,

$$L(c\mathbf{u}) = A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u}) = cL(\mathbf{u})$$

elde edilir. Böylece her matris dönüşümü lineer dönüşümdür. ■

Şimdi, uygunluk olması açısından Kesim 1.6'da verilen matris dönüşümlerini aşağıdaki gibi özetleyelim.

***x*-eksenine göre yansıma:** $L : R^2 \to R^2$,

$$L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 \\ -u_2 \end{bmatrix}$$

***xy*-düzlemine göre simetri:** $L : R^3 \to R^2$,

$$L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm.

Genişleme: $r > 1$, için $L : R^3 \to R^3$, $L(\mathbf{u}) = r\mathbf{u}$ şeklinde tanımlanan dönüşüm.

Daralma: $0 < r < 1$ için $L : R^3 \to R^3$, $L(\mathbf{u}) = r\mathbf{u}$ şeklinde tanımlanan dönüşüm.

Saat yönünde ϕ açısı kadar dönme: $L : R^2 \to R^2$,

$$L(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}\mathbf{u}.$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm.

ÖRNEK 2

$L : R^3 \to R^2$,

$$L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 + 1 \\ 2u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlansın. L'nin lineer dönüşüm olup olmadığını göstermek için,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

olsun. Bu takdirde,

$$L(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) = L\left(\begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ u_3+v_3 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix} (u_1+v_1)+1 \\ 2(u_2+v_2) \\ u_3+v_3 \end{bmatrix}$$

yazılır. Diğer yandan,

$$L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} u_1+1 \\ 2u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1+1 \\ 2v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_1+v_1)+2 \\ 2(u_2+v_2) \\ u_3+v_3 \end{bmatrix}$$

dır. $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = -2$, $v_1 = 2$, $v_2 = 4$ ve $v_3 = 1$ alınırsa, $L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \neq L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v})$ olduğu görülür. Böylece, L'nin lineer dönüşüm olmadığı sonucuna varılır. ■

ÖRNEK 3

$L : R_2 \to R_2$,

$$L\left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1^2 & 2u_2 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlansın. L dönüşümü lineer midir?

Çözüm

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$$

olsun. Bu takdirde,

$$L(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = L\left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}\right)$$
$$= L\left(\begin{bmatrix} u_1+v_1 & u_2+v_2 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix} (u_1+v_1)^2 & 2(u_2+v_2) \end{bmatrix}$$

ve diğer yandan,

$$L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} u_1^2 & 2u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1^2 & 2v_2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} u_1^2+v_1^2 & 2(u_2+v_2) \end{bmatrix}$$

yazılır. Buna göre, $L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \neq L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v})$ olacak şekilde u ve v elemanları bulunabileceğinden L'nin lineer dönüşüm olmadığı sonucuna varılır. ■

ÖRNEK 4

$L : P_1 \to P_2$,

$$L[p(t)] = tp(t)$$

olarak tanımlansın. L'nin lineer dönüşüm olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$p(t)$ ve $q(t)$, P_1'de vektörler ve c bir skalar olmak üzere,

$$\begin{aligned} L[p(t)+q(t)] &= t[p(t)+q(t)] \\ &= tp(t)+tq(t) \\ &= L[p(t)]+L[q(t)] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} L[cp(t)] &= t[cp(t)] \\ &= c[tp(t)] \\ &= cL[p(t)] \end{aligned}$$

olur. O halde, L lineer dönüşümdür. ■

ÖRNEK 5

W tüm reel değerli fonksiyonların vektör uzayı ve V tüm diferensiyellenebilen fonksiyonların bir alt uzayı olsun. f', f'nin türevi olmak üzere, $L : V \to W$

$$L(f) = f'$$

olarak tanımlansın. Türev alma özellikleri kullanılarak L'nin lineer dönüşüm olduğu gösterilebilir. (Alıştırma 24.) ■

ÖRNEK 6

$V = C[a, b]$, $[a, b]$ kapalı aralığında integrallenebilen tüm reel değerli fonksiyonların vektör uzayı ve $W = R^1$ olsun. $L : V \to W$,

$$L(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

olarak tanımlansın. İntegral alma özellikleri kullanılarak L'nin lineer dönüşüm olduğu gösterilebilir. (Alıştırma 25.) ■

n-boyutlu bir V vektör uzayı R^n'ye izomorf olduğundan, V deki n tane vektörden oluşan $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ cümlesinin V için bir taban teşkil edip etmediği, $\{L(\mathbf{v}_1), L(\mathbf{v}_2), \ldots, L(\mathbf{v}_n)\}$ cümlesinin R^n için bir taban teşkil edip etmediği kontrol edilerek belirlenebilir. Aşağıdaki örnek bu yaklaşımı ortaya koyar.

ÖRNEK 7

$S = \{t^2 + t, t + 1, t - 1\}$ cümlesinin P_2 için bir taban teşkil ettiğini göstermek için, $L : P_2 \to R^3$, $L(at^2 + bt + c) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ olarak tanımlanan dönüşüme göre P_2'nin üç boyutlu R^3 uzayına izomorf olduğuna dikkat etmek gerekir. Böylece, $S = \{t^2 + t, t + 1, t - 1\}$ cümlesinin P_2 için bir taban teşkil etmesi için gerek ve yeter şart $T = \{L(t^2 + t), L(t + 1), L(t - 1)\}$ cümlesinin R^3 için bir taban olmasıdır. Bunun böyle olduğuna karar vermek için Teorem 4.8 uygulanır. Buna göre, A sütunları sırası ile

$$L(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

olan matris olsun. O halde,

$$L(t^2 + t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L(t + 1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad L(t - 1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

olur. $\det(A) = -2$ olduğundan (görünüz) T cümlesi lineer bağımsız olur. Böylece, S cümlesi lineer bağımsız ve boy$P_2 = 3$ olduğundan S, P_2 için bir taban olur. Aynı sonuca, $\text{rank}(A) = 3$ olduğu gösterilerek de varılabilir (görünüz). ■

Şimdi lineer dönüşümlerin bazı genel özelliklerini verelim.

Teorem 6.1 $L : V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler vardır.

(a) $L(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.

(b) $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ için $L(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) - L(\mathbf{v})$.

İspat

(a)
$$\mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V + \mathbf{0}_V$$

ve L lineer olduğundan,

$$L(\mathbf{0}_V) = L(\mathbf{0}_V + \mathbf{0}_V)$$
$$L(\mathbf{0}_V) = L(\mathbf{0}_V) + L(\mathbf{0}_V)$$

yazılır. Bu son eşitliğin her iki yanına $-L(\mathbf{0}_V)$ eklenirse,

$$L(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$$

elde edilir.

(b) L lineer olduğundan,

$$\begin{aligned} L(\mathbf{u} - \mathbf{v}) &= L(\mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) + L((-1)\mathbf{v}) \\ &= L(\mathbf{u}) + (-1)L(\mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) - L(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Uyarı Örnek 2'de,

$$L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olduğu göz önüne alınarak, Teorem 6.1 (a)'dan L'nin lineer dönüşüm olmadığı görülebilir.

ÖRNEK 8 V, n-boyutlu bir vektör uzayı ve $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ cümlesi V için bir taban olsun. Eğer, $\mathbf{v} \in V$ ise $\mathbf{v}$ vektörü,

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$$

şeklinde tek türlü yazılır. Burada $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ ve Kesim 4.8'de $\mathbf{v}$ vektörünün S tabanına göre koordinat vektörü olarak adlandırılmış ve

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilmişti. Buna göre, $L : V \to R^n$,

$$L(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_S$$

olarak tanımlanan dönüşümün lineer dönüşüm olduğunu göstermek zor değildir. (Alıştırma 29.) ■

ÖRNEK 9

V, n-boyutlu bir vektör uzayı ve $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ve $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ cümleleri V için birer sıralı taban olsun. Eğer $\mathbf{v} \in V$ ise Kesim 4.8'deki (3) denkleminden, $\mathbf{v}$ vektörünün S ve T tabanlarına göre koordinat vektörleri arasındaki bağıntı,

$$[\mathbf{v}]_S = P_{S \leftarrow T}[\mathbf{v}]_T$$

şeklinde olur. Burada, $P_{S \leftarrow T}$, P tabanından S tabanına geçiş matrisidir. $\mathbf{v} \in R^n$ olmak üzere $L : R^n \to R^n$, $L(\mathbf{v}) = P_{S \leftarrow T}\mathbf{v}$ şeklinde tanımlansın. Böylece, L bir matris dönüşümü olur. Bu da L'nin bir lineer dönüşüm olduğunu gösterir. ■

Matematik analizden, bir fonksiyonun tanım cümlesindeki her bir elemanı değer cümlesindeki yalnız bir elemana bir formül ile eşleştirildiği bilinmektedir. Diğer yandan, bir fonksiyon, tanım cümlesindeki elemanlar ile değer cümlesinde eşleştirildikleri elemanlar listelenerek de ifade edilebilir. Bunun bir örneği, bir mağaza müşterileri ile hesap numaralarının eşleştirilerek listelenmesidir. İlk bakışta, V sonsuz sayıda eleman ihtiva ettiğinden $V \neq \{0\}$ vektör uzayından W vektör uzayına $L : V \to W$ lineer dönüşümü tanımlamak imkansız gibi görünüyor. Ancak, aşağıdaki çok faydalı olan teorem; V vektör uzayının bir tabanı verildiğinde L lineer dönüşümünün kuralının tam olarak nasıl belirlendiğini ifade eder. Bu kitapta çoğunlukla sonlu boyutlu vektör uzayları ele alındığından, tanım cümlesi olan V'nin sonlu sayıdaki elemanının görüntüleri verilerek L'yi belirlemek mümkündür.

Teorem 6.2 $L : V \to W$, n-boyutlu V vektör uzayından W vektör uzayına bir lineer dönüşüm olmak üzere, $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ cümlesi de V için bir taban olsun. Eğer $\mathbf{v} \in V$ ise, $L(\mathbf{v})$ tam olarak $\{L(\mathbf{v}_1), L(\mathbf{v}_2), \cdots, L(\mathbf{v}_n)\}$ ile belirlenir.

İspat

$a_1, a_2, \cdots, a_n \in R$ olmak üzere, $\mathbf{v} \in V$ olduğundan $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$ şeklinde tek türlü yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} L(\mathbf{v}) &= L(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n) \\ &= L(a_1\mathbf{v}_1) + L(a_2\mathbf{v}_2) + \cdots + L(a_n\mathbf{v}_n) \\ &= a_1L(\mathbf{v}_1) + a_2L(\mathbf{v}_2) + \cdots + a_nL(\mathbf{v}_n) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $L(\mathbf{v})$ tam olarak $L(\mathbf{v}_1), L(\mathbf{v}_2), \ldots, L(\mathbf{v}_n)$ vektörleri ile belirlenmiş olur. ■

Teorem 6.2 aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir: $L : V \to W$ ve $L' : V \to W$, n-boyutlu V vektör uzayından W vektör uzayına birer lineer dönüşüm olmak üzere, $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ cümlesi V için bir taban olsun. Eğer, $i = 1, 2, \ldots, n$ için $L'(\mathbf{v}_i) = L(\mathbf{v}_i)$ ise her $\mathbf{v} \in V$ için, $L'(\mathbf{v}) = L(\mathbf{v})$ olur. Yani, L ve L', V'nin bir tabanında aynı ise bunlar özdeş lineer dönüşümler olur.

ÖRNEK 10 $L : R_4 \to R_2$ bir lineer dönüşüm ve $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ cümlesi R_4 için bir taban olsun. Burada, $\mathbf{v}_1 = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$, $\mathbf{v}_2 = [0 \quad 1 \quad -1 \quad 2]$, $\mathbf{v}_3 = [0 \quad 2 \quad 2 \quad 1]$, $\mathbf{v}_4 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$'dir.

$$L(\mathbf{v}_1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad L(\mathbf{v}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$L(\mathbf{v}_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad L(\mathbf{v}_4) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğunu kabul edelim. Buna göre,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

için $L(\mathbf{v})$'yi bulunuz.

Çözüm

İlk olarak, $\mathbf{v}$, S'deki vektörlerin lineer birleşimi olarak,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & -5 & 0 \end{bmatrix} = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4$$

şeklinde yazılır. (Görünüz.) Bu takdirde Teorem 6.2'den,

$$\begin{aligned} L(\mathbf{v}) &= L(2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4) \\ &= 2L(\mathbf{v}_1) + L(\mathbf{v}_2) - 3L(\mathbf{v}_3) + L(\mathbf{v}_4) = \begin{bmatrix} 4 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olarak bulunur. ■

A, $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere, $\mathbf{x} \in R^n$ için $L : R^n \to R^m$, $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ olarak tanımlanan dönüşümün bir lineer dönüşüm olduğunu biliyoruz. Bir sonraki örnekte, Eğer $L : R^n \to R^m$ bir lineer dönüşüm ise L'nin matris dönüşümü olduğu gösterilecektir.

Teorem 6.3 $L : R^n \to R^m$ bir lineer dönüşüm olmak üzere R^n'nin $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ standart tabanını göz önüne alalım. A, j. sütunu $L(e_j)$ olan $m \times n$ tipinde bir matris olsun. A matrisi aşağıdaki özelliğe sahiptir: Eğer, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ise

$$L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \tag{1}$$

olur. A, (1) denklemini sağlayan tek matristir ve L'nin standart matris gösterimi olarak adlandırılır.

İspat

$\mathbf{x}$, R^n'nin standart tabanının lineer birleşimi olarak yazılırsa,

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n;$$

ve Teorem 6.2'den

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}) &= L(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) \\ &= x_1L(\mathbf{e}_1) + x_2L(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_nL(\mathbf{e}_n) \end{aligned} \tag{2}$$

elde edilir. A, j. sütunu $L(e_j)$ olan $m \times n$ tipinde bir matris olduğundan (2) denklemi matris şeklinde

$$L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

olarak yazılabilir.

A matrisinin tekliğinin gösterilmesi alıştırma olarak okuyucuya bırakılmıştır. (Alıştırma 37.) ■

ÖRNEK 11 $L : R^3 \to R^2$,

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_2 - 2x_3 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanan bir lineer dönüşüm olsun. L'nin standart matris gösterimini bulunuz.

Çözüm

$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, R^3'nin standart tabanı olsun. Bu taktirde $j = 1, 2, 3$ için,

$$L(\mathbf{e}_1) = L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$L(\mathbf{e}_2) = L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$L(\mathbf{e}_3) = L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

olur. Böylece,

$$A = \begin{bmatrix} L(\mathbf{e}_1) & L(\mathbf{e}_2) & L(\mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. ■

ÖRNEK 12 (***Kriptoloji***) Kriptoloji eski Yunan çağına dayanan ve mesajları şifreleme ve deşifre etme tekniğidir. Basit bir şifreleme, alfabedeki her bir harfi farklı bir numara ile kodlamaktır. Örneğin,

A	B	C	D	⋯	X	Y	Z
↕	↕	↕	↕		↕	↕	↕
1	2	3	4	⋯	24	25	26

şeklindedir. Mark'ın Susan'a

MEET TOMORROW

mesajını göndermek istediğini kabul edelim. Yukarıda verilen kodlamaya göre, Mark bu mesajı;

13 5 5 20 20 15 13 15 18 18 15 23

olarak gönderir. Bu şekildeki bir şifreleme kolayca kırılacağı için aşağıdaki gibi bir yöntem takip edilir. İlk olarak deşifre matrisi olarak adlandırılan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

gibi singüler olmayan 3×3 tipinde bir matris göz önüne alınır. Daha sonra Mark mesajı R^3'te dört vektör şeklinde bloklandırır. (Eğer bu bloklama tam olarak yapılamaz ise mesajın sonuna anlamı bozulmayacak şekilde harfler eklenir.) Böylece vektörler,

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 15 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 13 \\ 15 \\ 18 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 18 \\ 15 \\ 23 \end{bmatrix}$$

şeklinde olur. Şimdi Mark, $L : R^3 \to R^3$, $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ şeklinde bir lineer dönüşüm tanımlar ve böylece mesaj,

$$A\begin{bmatrix} 13 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 \\ 28 \\ 15 \end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 105 \\ 70 \\ 50 \end{bmatrix},$$

$$A\begin{bmatrix} 13 \\ 15 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 97 \\ 64 \\ 51 \end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix} 18 \\ 15 \\ 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 117 \\ 79 \\ 61 \end{bmatrix}$$

olur. O halde, Mark mesajı,

38 28 15 105 70 50 97 64 51 117 79 61

olarak gönderir. Şimdi Mark'ın Susan'dan

77 54 38 71 49 29 68 51 33 76 48 40 86 53 52

mesajını aldığını ve aynı A anahtar matrisi ile deşifre etmek istediğini kabul edelim. Mesajı deşifre etmek için Mark mesajı R^3'te beş vektör olarak

$$\begin{bmatrix} 77 \\ 54 \\ 38 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 71 \\ 49 \\ 29 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 68 \\ 51 \\ 33 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 76 \\ 48 \\ 40 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 86 \\ 53 \\ 52 \end{bmatrix}$$

şeklinde bloklandırır ve x_1 için

$$L(\mathbf{x}_1) = \begin{bmatrix} 77 \\ 54 \\ 38 \end{bmatrix} = A\mathbf{x}_1$$

denklemini çözer. A singüler olmadığından,

$$\mathbf{x}_1 = A^{-1}\begin{bmatrix} 77 \\ 54 \\ 38 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 77 \\ 54 \\ 38 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 8 \\ 15 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Benzer olarak,

$$\mathbf{x}_2 = A^{-1}\begin{bmatrix}71\\49\\29\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}20\\15\\7\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_3 = A^{-1}\begin{bmatrix}68\\51\\33\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}18\\1\\16\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}_4 = A^{-1}\begin{bmatrix}76\\48\\40\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8\\16\\12\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_5 = A^{-1}\begin{bmatrix}86\\53\\52\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\14\\19\end{bmatrix}.$$

bulunur. Buna göre, yukarıdaki harf ve rakamların eşleştirmelerini kullanarak Mark

PHOTOGRAPH PLANS ■

mesajını almış olur.

KRİPTOLOJİDE DAHA İLERİ KAYNAKLAR

Elemantary presentation

Kohn, Bernice. *Secret Codes and Ciphers*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1968 (63 pages).

Advanced presantation

Fisher, James L. *Applications-Oriented Algebra*. New York: T. Harper & Row, Publishers, 1977 (Chapter 9, "Coding Theory").

Garret, Paul. *Making, Breaking Codes*. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, Inc., 2001.

Hardy, Darel W., and Carol L. Jalker, *Applied Algebra, Codes, Ciphers and Discrete Algorithms*. Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, Inc., 2002.

Kahn, David. *The Codebreakers*: New York: The New American Library Inc., 1973.

Anahtar Kelimeler

Lineer dönüşüm
Lineer operatör
Yansıma
Dik izdüşüm
Genişleme
Daralma
Dönme
Bir lineer dönüşümü gösteren standart matrisi
Öteleme

6.1 Alıştırmalar

1. Aşağıdaki fonksiyonlardan hangileri lineer dönüşümdür?
(a) $L : R_2 \to R_3$, $L([u_1 \;\; u_2]) = [u_1 + 1 \;\; u_2 \;\; u_1 + u_2]$ şeklinde tanımlanan dönüşüm.
(b) $L : R_2 \to R_3$, $L([u_1 \;\; u_2]) = [u_1 + u_2 \;\; u_2 \;\; u_1 - u_2]$ şeklinde tanımlanan dönüşüm.

2. Aşağıdaki fonksiyonlardan hangileri lineer dönüşümdür?
(a) $L : R_3 \to R_3$, $L([u_1 \;\; u_2 \;\; u_3]) = [u_1 \;\; u_2^2 + u_3^2 \;\; u_3^2]$ şeklinde tanımlanan dönüşüm.
(b) $L : R_3 \to R_3$, $L([u_1 \;\; u_2 \;\; u_3]) = [1 \;\; u_3 \;\; u_2]$ şeklinde tanımlanan dönüşüm.
(c) $L : R_3 \to R_3$, $L([u_1 \;\; u_2 \;\; u_3]) = [0 \;\; u_3 \;\; u_2]$ şeklinde tanımlanan dönüşüm.

3. Aşağıdaki fonksiyonlardan hangileri lineer dönüşümdür? (Burada, $p'(t)$, $p(t)$'nin t ye göre türevidir.)
(a) $L : P_2 \to P_3$, $L(p(t)) = t^3p'(0) + t^2p(0)$ şeklinde tanımlanan dönüşüm.
(b) $L : P_1 \to P_2$, $L(p(t)) = tp(t) + p(0)$ şeklinde tanımlanan dönüşüm.
(c) $L : P_1 \to P_2$, $L(p(t)) = tp(t) + 1$ şeklinde tanımlanan dönüşüm.

4. Aşağıdaki fonksiyonlardan hangileri lineer dönüşümdür?
(a) $L : M_{nn} \to M_{nn}$, $L(A) = A^T$ şeklinde tanımlanan dönüşüm.
(b) $L : M_{nn} \to M_{nn}$, $L(A) = A^{-1}$ şeklinde tanımlanan dönüşüm.

5. Aşağıdaki fonksiyonlardan hangileri lineer dönüşümdür?
(a) $L : M_{nn} \to R^1$, $L(A) = \det(A)$ şeklinde tanımlanan dönüşüm.
(b) $L : M_{nn} \to R^1$, $L(A) = \text{İz}(A)$ şeklinde tanımlanan dönüşüm (Kesim 1.3'te Alıştırma 43).

6. V, W birer vektör uzayı olmak üzere, $L : V \to W$ bir dönüşüm olsun. L'nin lineer dönüşüm olması için gerek ve yeter şart herhangi a, $b \in R$ ve $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$ için $L(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aL(\mathbf{u}) + bL(\mathbf{v})$olmasıdır. Gösteriniz.

Alıştırma 7 ve 8'de verilen lineer dönüşümlerin standart matris gösterimlerini bulunuz.

7. **(a)** $L : R^2 \to R^2$, $L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ şeklinde tanımlanan dönüşüm.

(b) $L : R^2 \to R^2$, $L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{bmatrix}$ şeklinde tanımlanan dönüşüm.

(c) $L : R^3 \to R^3$, $L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ şeklinde tanımlanan dönüşüm.

8. **(a)** $L : R^2 \to R^2$, $L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -u_2 \\ -u_1 \end{bmatrix}$ şeklinde tanımlanan dönüşüm.

(b) $L : R^2 \to R^2$, $L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 + ku_2 \\ u_2 \end{bmatrix}$ şeklinde tanımlanan dönüşüm.

(c) $L : R^3 \to R^3$, $L(\mathbf{u}) = k\mathbf{u}$ şeklinde tanımlanan dönüşüm.

9. $A \in M_{34}$ olmak üzere $L : M_{34} \to M_{24}$, $L(A) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ şeklinde tanımlanan fonksiyonu göz önüne alalım.

(a) $L\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\right)$'nin karşılığını bulunuz.

(b) L'nin lineer olduğunu gösteriniz.

10. Aşağıda verilen lineer dönüşümlerin standart matris gösterimlerini bulunuz.
(a) R^3'ten xy-düzlemine izdüşüm fonksiyonu.
(b) R^3'ten R^3'e genişleme fonksiyonu.
(c) R^2'ten R^2'ye x-eksenine göre yansıma fonksiyonu

11. Aşağıda verilen lineer dönüşümlerin standart matris gösterimlerini bulunuz.
(a) $L : R^2 \to R^2$, $L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{bmatrix}$ şeklinde tanımlanan dönüşüm.
(b) $L : R^2 \to R^3$,

$$L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 - 3u_2 \\ 2u_1 - u_2 \\ 2u_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm.
(c) $L : R^3 \to R^3$,

$$L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 + 4u_2 \\ -u_3 \\ u_2 + u_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm.

12. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ matrisi, $L : R^3 \to R^3$, lineer dönüşümlerin standart matris gösterimi olsun. Buna göre,

(a) $L\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$'nin karşılığını bulunuz.

(b) $L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right)$ ifadesini bulunuz.

13. $L : R^3 \to R^2$,

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix},$$

$$L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

özelliğine sahip bir lineer dönüşüm olsun.

(a) $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$'nin karşılığı nedir?

(b) $L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right)$'nin karşılığı nedir?

14. $L : R_2 \to R_2$,

$$L([1 \quad 1]) = [1 \quad -2]$$
$$L([-1 \quad 1]) = [2 \quad 3].$$

özelliğine sahip bir lineer dönüşüm olsun.

(a) $L([-1 \quad 5])$'in karşılığı nedir?

(b) $L([u_1 \quad u_2])$'nin karşılığı nedir?

15. $L : P_2 \to P_3$, $L(1) = 1$, $L(t) = t^2$, $L(t^2) = t^3 + t$ özelliğine sahip bir lineer dönüşüm olsun.

(a) $L(2t^2 - 5t + 3)$'nin karşılığını bulunuz.

(b) $L(at^2 - bt + c)$'nin karşılığını bulunuz.

16. A, 3×3 tipinde bir matris ve $\mathbf{x} \in M_{33}$ olmak üzere, $L : M_{33} \to M_{33}$, $L(A) = A\mathbf{x} - \mathbf{x}A$ olarak tanımlanan dönüşümün lineer olduğunu gösteriniz.

17. a, b , $\mathbf{v} \in R$ olmak üzere $L : V \to R$, $L(\mathbf{v}) = a\mathbf{v} + b$ olarak tanımlansın. L lineer olacak şekildeki tüm a, b değerlerini bulunuz.

18. V bir iç çarpım uzayı ve $\mathbf{w}$, V'de sabit bir vektör olsun. $\mathbf{v} \in V$ olmak üzere, $L : V \to R$, $L(\mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{w})$ olarak tanımlanan dönüşümün lineer olduğunu gösteriniz.

19. Aşağıdaki lineer dönüşümleri geometrik olarak gösteriniz.

(a) $L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$

şeklinde tanımlanan dönüşüm.

(b) $L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -u_1 \\ -u_2 \end{bmatrix}$

şeklinde tanımlanan dönüşüm.

(c) $L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{bmatrix}$

şeklinde tanımlanan dönüşüm.

20. $L : P_1 \to P_1$, $L(t + 1) = 2t + 3$, $L(t - 1) = 3t - 2$ özelliğine sahip bir lineer dönüşüm olsun.

(a) $L(6t - 4)$'nin karşılığını bulunuz.

(b) $L(at - b)$ 'nin karşılığını bulunuz.

21. V ve W birer vektör uzay olmak üzere, $0 : V \to W$, $0(\mathbf{v}) = 0_W$ şeklinde tanımlanan ve *sıfır dönüşüm* olarak adlandırılan dönüşümün bir lineer dönüşüm olduğunu gösteriniz.

22. $I : V \to V$, $I(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ şeklinde tanımlanan ve V üzerinde *birim dönüşüm* olarak adlandırılan dönüşümün bir lineer dönüşüm olduğunu gösteriniz.

23. $L : M_{22} \to R^1$,

$$L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm lineer midir?

24. W reel değerli tüm fonksiyonların vektör uzayı ve V diferansiyellenebilen tüm fonksiyonların alt uzayı olsun. $L : V \to W$, $L(f) = f'$ şeklinde tanımlanan dönüşüm lineer dönüşüm olduğunu ispatlayınız. Burada f' , f 'nin türevidir.

25. $V = C[a, b]$, $[a, b]$ kapalı aralığında integrallenebilen tüm reel değerli fonksiyonların vektör uzayı ve $W = R^1$ olsun. $L : V \to W$, $L(f) = \int_a^b f(x)dx$ şeklinde tanımlanan dönüşüm lineer dönüşüm olduğunu ispatlayınız.

26. A, $n \times n$ tipinde bir matris ve $\mathbf{x} \in M_{nn}$ olmak üzere, $L : M_{nn} \to M_{nn}$, $L(A) = A\mathbf{x}$ olarak tanımlanan dönüşümün lineer olduğunu gösteriniz.

27. A, $n \times n$ tipinde bir matris olmak üzere, $L : M_{nn} \to R^1$, $L(A) = a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$ olarak tanımlanan dönüşüm lineer midir?

28. b, V de sıfırdan farklı sabit bir vektör ve $\mathbf{v} \in V$ olmak üzere, $T : V \to W$, $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + b$ olarak tanımlanan fonksiyon lineer midir? Açıklayınız. Bu T dönüşümü $\mathbf{v}$ vektörü ile taşıma olarak adlandırılır.

29. Örnek 8'deki L fonksiyonun bir lineer dönüşüm olduğunu gösteriniz.

30. Örnek 10'da tanımlanan lineer dönüşüm için $L([a \quad b \quad c \quad d])$'yi bulunuz.

31. V, n-boyutlu bir vektör uzayı ve $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, V için bir taban ve $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ cümlesi V'deki vektörlerin bir cümlesi olsun. Bu takdirde, $i = 1, 2, \ldots, n$ için $L(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ olacak şekilde $L : V \to V$ tek bir lineer dönüşümün olduğunu gösteriniz. (*Yol gösterme*: L, $L(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ olacak şekilde V'den V'ye bir dönüşüm olsun. Daha sonra L'nin nasıl lineer olacağını göster)

32. V, W birer vektör uzayı olmak üzere $L : V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun. V'nin bir V_1 alt uzayının görüntüsü,

$$L(V_1) = \{\mathbf{w} \in W \mid \mathbf{w} = L(\mathbf{v}), \mathbf{v} \in V\}$$

olarak tanımlanır. Buna göre $L(V_1)$'in W'nın bir alt uzayı olduğunu gösteriniz.

33. V, W birer vektör uzayı olmak üzere $L_1 : V \to W, L_2 : V \to W$ birer lineer dönüşüm olsun. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, V için bir taban olsun. Eğer $i = 1, 2, \ldots, n$ için $L_1(\mathbf{v}_i) = L_2(\mathbf{v}_i)$ ise herhangi bir $\mathbf{v} \in V$ için $L_1(\mathbf{v}) = L_2(\mathbf{v})$ olduğunu gösteriniz.

34. V, W birer vektör uzayı olmak üzere $L : V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun. W'nın bir W_1 alt uzayının ters görüntüsü,

$$L^{-1}(W_1) = \{\mathbf{v} \in V \mid L(\mathbf{v}) \in W_1\}$$

olarak tanımlanır. Buna göre $L^{-1}(W_1)$'in V'nin bir alt uzayı olduğunu gösteriniz.

35. $O : R^n \to R^n$, $O(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ olarak tanımlanan sıfır lineer dönüşümünün standart matris gösterimini bulunuz.

36. $L : R^n \to R^n$, $I(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ olarak tanımlanan birim lineer dönüşümünün standart matris gösterimini bulunuz.

37. A matrisinin tek olduğunu göstererek Teorem 6.3'ün ispatını tamamlayınız. (*Yol gösterme*: $\mathbf{x} \in R^n$ için $L(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ olacak şekilde başka bir B matrisinin olduğunu kabul ediniz. $j = 1, 2, \ldots, n$ için $L(e_j)$'yi göz önüne alınız ve $A = B$ olduğunu gösteriniz.)

38. Örnek 12'deki eşleştirme ve A deşifre matrisini kullanarak;

(a) "ONA PARA GÖNDER" mesajını şifreleyiniz.

(b) 67 44 41 49 39 19 113 76 62 104 69 55 mesajını deşifre ediniz.

39. Örnek 12'deki eşleştirme ve

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

deşifre matrisini kullanarak;

(a) "ÇALISMAK ZOR" mesajını şifreleyiniz.

(b) 93 36 60 21 159 60 110 43 mesajını deşifre ediniz.

6.2 Bir Lineer Dönüşümün Çekirdeği ve Değer Cümlesi

Bu kesimde lineer dönüşümlerin bazı özel tipleri üzerinde durulacak, bire-bir lineer dönüşüm ve örten lineer dönüşüm kavramları formülüze edilecektir. Ayrıca, verilen bir lineer dönüşümün bire-bir veya örten olup olmadığını belirlemek için metotlar ve bunların bazı uygulamaları verilecektir.

TANIM 6.2 Eğer $L : V \to W$ lineer dönüşümü, bire-bir bir fonksiyon ise ***bire-bir*** olarak adlandırılır. Yani, $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$ olması $L(\mathbf{v}_1) \neq L(\mathbf{v}_2)$ olmasını gerektiriyorsa L'ye ***bire-bir*** lineer dönüşüm denir. Bu tanıma denk bir ifade de şu şekildedir; $L(\mathbf{v}_1) = L(\mathbf{v}_2)$ olması $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ olmasını gerektiriyorsa L'ye ***bire-bir*** lineer dönüşüm denir. (Ek A'da Şekil A.2'ye bakınız.)

ÖRNEK 1 $L : R^2 \to R^2$,

$$L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 + u_2 \\ u_1 - u_2 \end{bmatrix}$$

olsun. L'nin lineer olup olmadığını belirlemek için,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

olsun. Buna göre eğer $L(\mathbf{v}_1) = L(\mathbf{v}_2)$ ise,

$$u_1 + u_2 = v_1 + v_2$$
$$u_1 - u_2 = v_1 - v_2$$

olur. Bu denklemler toplanırsa, $2u_1 = 2z_1$ veya $u_1 = z_1$ elde edilir ve bu da $u_2 = z_2$ olmasını gerektirir. O halde L, bire-bir olur. ■

ÖRNEK 2 $L : R^3 \to R^2$,

$$L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan lineer dönüşüm (bir izdüşüm) olsun. $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}\right)$'dir. Ancak $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ olduğundan L bire-bir değildir. ■

Şimdi verilen bir lineer dönüşümün bire-bir olup olmadığını belirlemek için daha etkili yöntemler geliştirilecektir

TANIM 6.3 V, W birer vektör uzayı olmak üzere $L : V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun. $L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$ olacak şekildeki tüm $\mathbf{v}$ vektörlerinden oluşan V'nin alt cümlesine L'nin **çekirdeği** denir ve çek$L$ ile gösterilir.

$L : V \to W$ bir lineer dönüşüm olmak üzere, Teorem 6.1'den $L(0_V) = 0_W$ olacağından $0_V \in$ çek$L$ olur. O halde, çek$L$ asla boş cümle olamaz.

ÖRNEK 3 $L : R^3 \to R^3$ Örnek 2'de tanımlanan dönüşüm olsun. $L\left(\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ olduğundan $\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}$ vektörü çek$L$'nin bir elemanıdır. Ancak, $L\left(\begin{bmatrix}2\\-3\\4\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$ olduğundan $\begin{bmatrix}2\\-3\\4\end{bmatrix}$ vektörü çek$L$'nin bir elemanı değildir. çek$L$'yi bulmak için R^3'te $L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{R^2}$ özelliğini sağlayan $\mathbf{v}$'leri tespit etmeliyiz. Yani,

$$L(\mathbf{v}) = L\left(\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \mathbf{0}_{R^2}$$

olacak şekildeki $\mathbf{v}$'ler aranır. Buna göre, L'nin verilişinden ve çek$L$'nin tanımından $L(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ yazılır. Böylece, $\mathbf{v}_3$ herhangi bir reel sayı olmak üzere $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = 0$ olarak bulunur. Buradan çek$L$, a herhangi bir reel sayı olmak üzere R^3'ün $\begin{bmatrix}0\\0\\a\end{bmatrix}$ şeklindeki elemanlarını ihtiva eder. çek$L$'nin üç boyutlu R^3 uzayında z-ekseni üzerindeki (x, y, z) vektörlerini ihtiva ettiği açıktır. ■

çek$L$'deki elemanların incelenmesi, L'nin bire-bir olup olmadığına karar vermede yardımcı olur.

Teorem 6.4 V, W birer vektör uzayı olmak üzere $L : V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun. Bu taktirde,

(a) çek$L$, V'nin bir alt uzayıdır.

(b) L'nin bire-bir olması için gerek ve yeter şart çek$L = \{0_V\}$ olmasıdır.

İspat

(a) c herhangi bir reel sayı olmak üzere, eğer $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in$ çek$L$ ise $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in$ çek$L$ ve $c\mathbf{v} \in$ çek$L$ olduğunu göstereceğiz. Eğer $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in$ çek$L$ ise, $L(\mathbf{v}) = 0_W$ ve $L(\mathbf{w}) = 0_W$ yazılır.

Buna göre L lineer dönüşüm olduğundan,

$$L(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = L(\mathbf{v}) + L(\mathbf{w}) = \mathbf{0}_W + \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W$$

olur. O halde $\mathbf{v}+\mathbf{w} \in$ çek$L$ elde edilir. Benzer olarak,

$$L(c\mathbf{v}) = cL(\mathbf{v}) = c\,\mathbf{0}_W = \mathbf{0}$$

olduğundan $c\mathbf{v} \in$ çek$L$ ve böylece çek$L$, V'nin bir alt uzayı olur.

(b) L bire-bir olsun. çek$L = \{0_V\}$ olduğunu gösterelim. $\mathbf{v} \in$ çek$L$ olsun. Bu taktirde, $L(\mathbf{v}) = 0_W$ yazılır. Ayrıca, $L(0_V) = 0_W$ olduğundan $L(\mathbf{v}) = L(0_V)$ olur. L bire-bir olduğundan $\mathbf{v} = 0_V$ elde edilir. Böylece, çek$L = \{0_V\}$ olur.

Tersine, çek$L = \{0_V\}$ olsun. L'nin bire-bir olduğunu gösterelim. Bunun için, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ olmak üzere, $L(\mathbf{v}_1) = L(\mathbf{v}_2)$ olsun. Bu taktirde,

$$L(\mathbf{v}_1) - L(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0}_W$$

yazılır. L lineer dönüşüm olduğundan, $L(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \mathbf{0}_W$ olur. Bu da $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \in$ çek$L$ demektir. O halde, $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}_V$ olup $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ elde edilir. Böylece L bire-bir olur. ■

Dikkat edilirse, Teorem 6.4 (b) aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir. L'nin bire-bir olması için gerek ve yeter şart boy çek$L = 0$ olmasıdır.

Teorem 6.4'ün ispatı aşağıda ifade edilen Sonuç 6.1'i verir.

Sonuç 6.1 Eğer $L(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ ve $L(\mathbf{y}) = \mathbf{b}$ ise, $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in$ çek$L$ olur. Diğer bir deyiş ile, $L(\mathbf{x}) = b$'nin herhangi iki çözümü bir birinden çek$L$'nin bir elemanı kadar farklıdır.

İspat

Alıştırma 29 olarak okuyucuya bırakılmıştır. ■

ÖRNEK 4 $L : P_2 \to R$,

$$L(at^2 + bt + c) = \int_0^1 (at^2 + bt + c)\,dt$$

olarak tanımlanan lineer dönüşüm olsun.
(a) çek$L$'yi bulunuz.
(b) boy çek$L$'yi bulunuz.
(c) L bire-bir midir?

Çözüm

(a) çek$L$'yi bulmak için $L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_R = 0$ olacak şekildeki $\mathbf{v} = at^2 + bt + c \in P_2$ elemanlarını bulmalıyız. Buna göre,

$$L(\mathbf{v}) = \frac{at^3}{3} + \frac{bt^2}{2} + ct\Big|_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c.$$

olur. Böylece, $c = -a/3 - b/2$ olarak bulunur. O halde çek$L$, $a, b \in R$ olmak üzere, P_2'de $at^2 + bt - a/3 - b/2$ şeklindeki bütün polinomları ihtiva eder. Yani, çek$L = \{at^2 + bt - a/3 - b/2 \mid a, b \in R\}$ şeklinde olur.

(b) boy çek$L$'yi bulmak için çek$L$ için bir taban bulmalıyız. çek$L$'deki herhangi bir vektör,

$$at^2 + bt + \left(-\frac{a}{3} - \frac{b}{2}\right) = a\left(t^2 - \frac{1}{3}\right) + b\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece, P_2'deki $(t^2 - \frac{1}{3})$ ve $(t - \frac{1}{2})$ elemanları çek$L$ yi gerer. Diğer yandan bu elemanlar birbirinin katı olmadığından lineer bağımsız elemanlardır. O halde, $\{(t^2 - \frac{1}{3}), (t - \frac{1}{2})\}$ cümlesi çek L için bir taban teşkil eder ve boy çek$L$ = 2 olarak bulunur.

(c) boy çek $L = 2$ olduğundan L bire-bir değildir. ■

TANIM 6.4

V, W birer vektör uzayı olmak üzere $L : V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun. V'nin elemanlarının L altındaki görüntülerinin oluşturduğu cümleye L'nin görüntü cümlesi veya V'nin L altındaki görüntüsü denir ve im$L$ veya görL ile gösterilir. Yani, im$L = \{L(\mathbf{v}) = \mathbf{w} \mid \mathbf{v} \in V\} \subset W$ şeklindedir. Eğer im$L = W$ ise, L örtendir denir.

Teorem 6.5

V, W birer vektör uzayı olmak üzere $L : V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun. Bu takdirde, im$L$, W'nın alt uzayıdır.

İspat

$\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in$ im$L$ olsun. Bu taktirde $L(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$ ve $L(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$ olacak şekilde $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ vardır. Şimdi,

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = L(\mathbf{v}_1) + L(\mathbf{v}_2) = L(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$$

yazılır. Bu da $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in$ im$L$ olduğunu ifade eder. Ayrıca, $\mathbf{w} \in$ im$L$ ise $L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ olacak şekilde $\mathbf{v} \in V$ vardır. Bu takdirde, c bir skalar olmak üzere $c\mathbf{w} = cL(\mathbf{v}) = L(c\mathbf{v})$ olup $c\mathbf{w} \in$ im$L$ elde edilir. O halde im$L$, W'nın alt uzayı olur. ■

ÖRNEK 5

Bu bölümdeki Örnek 2'yi tekrar göz önüne alalım. L izdüşümü örten midir?

Çözüm

R^2'de herhangi bir $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ vektörü için $L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ olacak şekilde bir $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ vektörü bulmalıyız. Buna göre, $L(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ olup eğer $v_1 = c$ ve $v_2 = d$ ise $L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ olur. Bu yüzden L örten ve boy im$L$ = 2 olur. ■

ÖRNEK 6

Bu bölümdeki Örnek 4'ü tekrar göz önüne alalım. L örten midir?

Çözüm

Verilen bir $\mathbf{w} \in R$ için $L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ olacak şekilde bir $\mathbf{v} = at^2 + bt + c \in P_2$ vektörü bulunabilir mi? sorusuna cevap arıyoruz.

$$L(\mathbf{v}) = \int_0^1 (at^2 + bt + c)\,dt = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c$$

olduğundan, $a = b = 0$ ve $c = r$ alınabilir. O halde L örten ve üstelik boy im$L$ = 1 olur. ■

ÖRNEK 7

$L : R^3 \to R^3$,

$$L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlansın.
(a) L örten midir?
(b) im$L$ için bir taban bulunuz.
(c) çek$L$'yi bulunuz.
(d) L bire-bir midir?

Çözüm

(a) Verilen bir $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ için $L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ olacak şekilde bir $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ vektörü bulunabilir mi? sorusuna cevap arıyoruz. Bunun için,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

lineer denklem sisteminin çözümü bulunur. Buradan, sistemin katsayılar ve ikinci yan matrisi,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & c-b-a \end{array}\right]$$

şeklinde satırca eşelon şekle indirgenir. (Gösteriniz.) Böylece, bu sistemin bir çözümü sadece $c - b - a = 0$ için vardır. O halde L örtendir.

(b) Dikkat edilirse,

$$L\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + v_3 \\ v_1 + v_2 + 2v_3 \\ 2v_1 + v_2 + 3v_3 \end{bmatrix}$$

$$= v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + v_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

olduğundan,

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

cümlesi im$L$'yi L'nin görüntü cümlesi gerer. Yani, im$L$, L'nin tanımlanışında verilen matrisin sütunları tarafından gerilir ve R^3'ün alt uzayıdır.

Bu cümledeki ilk iki vektör birbirinin katı olmadığından lineer bağımsızdır. Üçüncü vektör ise ilk iki vektörün toplamıdır. O halde, ilk iki vektör im$L$ için bir taban oluşturur ve boy im$L$ = 2 olur.

(c) çek$L$'yi bulmak için, $L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{R^3}$ olacak şekildeki $\mathbf{v} \in R^3$ vektörleri bulmalıyız. Buna göre, oluşan homogen lineer denklem sistemi çözülürse $v_1 = -v_3$ ve $v_2 = -v_3$ bulunur. (Gösteriniz.) Böylece, çek$L$, $a \in R$ olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} -a \\ -a \\ a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklindeki elemanlardan oluşur ve üstelik boy çek$L = 1$ olur.

(d) cek$L \neq \{\mathbf{0}_{R^3}\}$ olduğundan Teorem 6. 4(b)'den dolayı L bire-bir değildir. ■

çek$L$ için bir taban bulunması problemi daima bir homogen sistemin çözüm uzayı için bir taban bulunması problemine indirgenir. Homogen sistemin çözüm uzayı için bir taban bulunması problemi Kesim 4. 7'de çözülmüştü.

Eğer im$L$, R^m veya R_m'nin bir alt uzayı ise im$L$ için bir taban, Teorem 4. 9'da verilen metot veya Kesim 4.9'da yöntem ile elde edilebilir. Bu yaklaşımların her ikisi de aşağıdaki örnekte açıklanacaktır.

ÖRNEK 8

$L : R_4 \to R_3$,

$$L\left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 + u_2 & u_3 + u_4 & u_1 + u_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. im$L$ için bir taban bulunuz.

Çözüm

$$L\left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{bmatrix}\right) = u_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + u_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + u_4 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

yazılır. Böylece,

$$S = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

cümlesi im$L$'yi gerer. im$L$ için bir taban olacak S'nin bir alt cümlesini bulmak için Teorem 4.9'daki gibi ilk olarak,

$$u_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + u_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + u_4 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak yazılır. Buradan elde edilen homogen sistemin katsayılar matrisi,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

şeklinde satırca eşelon şekle indirgenir. (Gösteriniz.) Böylece, ilk 1'ler 1., 2. ve 3. sütunlarda görüldüğü için S'deki ilk üç vektör im$L$ için bir taban olur. Böylece,

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

im$L$ için bir taban olur.

Alternatif olarak, Kesim 4.9'daki gibi satırları verilen vektörler olan matris,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde oluşturulur. Bu matris satırca eşelon şekle getirilir ise,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. (Gösteriniz.) Böylece $\{[1 \quad 0 \quad 0], [0 \quad 1 \quad 0], [0 \quad 0 \quad 1]\}$ im$L$ için bir taban olur. ■

Bir lineer dönüşümün bire-bir veya örten olduğunu göstermek için, bir lineer sistem çözmeliyiz. Bu lineer cebirde pek çok soruya cevap vermek için lineer sistemlerin çözülmesi gerektiğinin önemli bir göstergesidir. Son olarak, Örnek 7'den boy çek$L$ = 1, boy im$L$ = 2 ve L'nin tanım cümlesinin boyutu 3 olmak üzere,

$$\text{boy}R^3 = \text{boy çek}L + \text{boy im}L$$

eşitliği sağlanır. Çok faydalı olan bu sonuç her zaman doğrudur ve aşağıdaki teoremde ispatlanacaktır.

Teorem 6.6 $L : V \to W$, n-boyutlu bir V vektör uzayından bir W vektör uzayına tanımlanan bir lineer dönüşüm ise,

$$\text{boy}V = \text{boy çek}L + \text{boy im}L$$

dir.

İspat

k = boy çek$L$ olsun. Eğer $k = n$ ise çek$L = V$ olur. (Kesim 4.6'da Alıştırma 42). Bu da her $\mathbf{v} \in V$ için $L(\mathbf{v}) = 0_W$ olmasını gerektirir. Böylece, im$L = \{0_W\}$, boy im$L = 0$ olup sonuç sağlanır. Şimdi, $1 \le k < n$ olduğunu kabul edelim. boy im$L = n - k$ olduğunu göstereceğiz. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, çek$L$ için bir taban olsun. Teorem 4.11'den dolayı bu taban V'nin

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$$

tabanına genişletilebilir. $T = \{L(\mathbf{v}_{k+1}), L(\mathbf{v}_{k+2}), \ldots, L(\mathbf{v}_n)\}$ cümlesinin im$L$ için bir taban oluşturduğunu ispatlayacağız.

İlk olarak T'nin im$L$'yi gerdiğini gösterelim. $\mathbf{w}$, im$L$'de herhangi bir vektör olsun. Bu taktirde, $\mathbf{v} \in V$ olmak üzere $L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ olur. S, V'nin bir tabanı olduğundan $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$ olacak şekilde tek türlü belirlenen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reel sayılarının cümlesini bulabiliriz. Bu takdirde,

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = L(\mathbf{v}) &= L(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k + a_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + a_n\mathbf{v}_n) \\ &= a_1L(\mathbf{v}_1) + a_2L(\mathbf{v}_2) + \cdots + a_kL(\mathbf{v}_k) + a_{k+1}L(\mathbf{v}_{k+1}) + \cdots + a_nL(\mathbf{v}_n) \\ &= a_{k+1}L(\mathbf{v}_{k+1}) + \cdots + a_nL(\mathbf{v}_n) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde, T, im$L$'yi gerer.

Şimdi T'nin lineer bağımsız olduğunu gösterelim. Bunun için,

$$a_{k+1}L(\mathbf{v}_{k+1}) + a_{k+2}L(\mathbf{v}_{k+2}) + \cdots + a_nL(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}_W$$

olduğunu kabul edelim. Buradan,

$$L(a_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + a_{k+2}\mathbf{v}_{k+2} + \cdots + a_n\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}_W$$

yazılır. O halde, $a_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \ldots + a_n\mathbf{v}_n \in$ çek$L$ olup, $b_1, b_2, \ldots, b_k$ tek türlü belirlenmiş reel sayılar olmak üzere,

$$a_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + a_{k+2}\mathbf{v}_{k+2} + \cdots + a_n\mathbf{v}_n = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_k\mathbf{v}_k$$

yazılabilir. Buradan da,

$$b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_k\mathbf{v}_k - a_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} - a_{k+2}\mathbf{v}_{k+2} - \cdots - a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}_V$$

yazılır. S lineer bağımsız olduğundan,

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_k = a_{k+1} = \cdots = a_n = 0$$

elde edilir. Böylece, T lineer bağımsız olur ve im$L$ için bir taban teşkil eder.

Eğer $k = 0$ ise çek$L$ bir tabana sahip olmaz. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, V için bir taban olsun. Bu takdirde, ispat yukarıdaki gibi yapılır. ■

çek$L$'nin boyutu L'nin ***sıfırlığı*** olarak da adlandırılır. Kesim 6.5'te, L'nin rankı tanımlandı ve bunun boy çek$L$'ye eşit olduğu gösterildi. Bu terminoloji ile Teorem 6.6'nın sonucu, Teorem 4.19'un sonucu ile çok benzerdir. Bir sonraki kesimde L'ye L'nin özelliklerini yansıtan bir tek $m \times n$ tipinde bir matrisin nasıl karşılık getirildiğini göstereceğimiz için bu bir rastlantı değildir.

Aşağıdaki örnek, Teorem 6.6'yı grafikle açıklar.

ÖRNEK 9

$L : R^3 \to R^3$,

$$L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 + u_3 \\ u_1 + u_2 \\ u_2 - u_3 \end{bmatrix}$$

bir lineer dönüşüm olsun. Eğer,

$$L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ise $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \in$ çek$L$'dir. Bu takdirde, çek$L$'nin bir tabanını bulmak için,

$$\begin{aligned} u_1 + \quad & u_3 = 0 \\ u_1 + u_2 \quad & = 0 \\ u_2 - u_3 &= 0 \end{aligned}$$

homogen sisteminin çözüm uzayının bir tabanını bulmalıyız. Bu çözülürse, $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ cümlesinin çek$L$'nin bir tabanı olduğu görülür. (Görünüz.)

Böylece, boy çek$L$ = 1 ve çek$L$ orjinden geçen bir doğru olur. Diğer taraftan im$L$'deki her vektör,

$$\begin{bmatrix} u_1 + u_3 \\ u_1 + u_2 \\ u_2 - u_3 \end{bmatrix}$$

şeklindedir ve

$$u_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + u_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

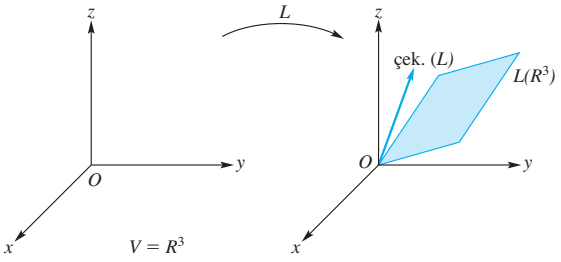
olarak yazılabilir. Bu takdirde, im$L$'nin bir tabanı,

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

olur. (Açıklayınız.) Böylece, boy im$L$ = 2 ve im$L$ orjinden geçen bir düzlem olur. Bu sonuçlar Şekil 6.1'de gösterilmiştir. Üstelik,

$$\text{boy}R^3 = 3 = \text{boy çek } L + \text{boy im}L = 1 + 2$$

dir. ■



ŞEKİL 6.1

ÖRNEK 10 $L : P_2 \to P_2$,

$$L(at^2 + bt + c) = (a + 2b)t + (b + c)$$

olarak tanımlanan bir lineer dönüşüm olsun.
(a) çek$L$ için bir taban bulunuz.
(b) im$L$ için bir taban bulunuz.
(c) Teorem 6.6'yı sağlatınız.

Çözüm

(a) Eğer

$$L(at^2 + bt + c) = \mathbf{0}$$

ve

$$(a + 2b)t + (b + c) = 0$$

ise $at^2 + bt + c \in$ çek$L$'dir. Bu taktirde,

$$\begin{aligned} a + 2b &= 0 \\ b + c &= 0 \end{aligned}$$

homogen sistemi yazılır. Buradan elde edilen homogen sistemin katsayılar matrisi, satırca eşelon şekle indirgenirse, çözüm uzayı ve dolayısıyla çek$L$ için

$$\{2t^2 - t + 1\}$$

tabanını buluruz. (Gösteriniz.)

(b) im$L$'deki her vektör,

$$(a + 2b)t + (b + c)$$

şeklinde olduğundan t ve 1 vektörleri im$L$ yi gerer. Bu vektörler aynı zamanda lineer bağımsız olduklarından im$L$ için bir taban oluştururlar.

(c) (a) dan boy çek$L$ = 1 ve (b) den boy im$L$ = 2 dır. Böylece,

$$\text{boy çek}L + \text{boy im}L = \text{boy } P_2 = 1 + 2 = 3$$ ■

elde edilir.

Bir lineer dönüşümün bire-bir olmasının örten olmasını gerektirmediğini ya da örten olmasının bire-bir olmasını gerektirmediğini gördük. Bununla birlikte, eğer V, W aynı boyutlu iki vektör uzayı ise, aşağıdaki sonuç bu özelliklerin birbirini gerektirdiğini gösterir.

Sonuç 6.2 boy$V$ = boy$W$ olmak üzere $L : V \to W$ bir lineer dönüşüm ise, aşağıdaki ifadeler doğrudur:
(a) Eğer L bire-bir ise örtendir.
(b) Eğer L örten ise bire-birdir.

İspat

Alıştırma 31 olarak okuyucuya bırakılmıştır. ■

V ve W birer vektör uzayı olmak üzere, eğer $L : V \to W$ lineer dönüşümü tersi olan bir fonksiyon ise L'ye terslenebilirdir (veya terse sahiptir) denir. Yani, $L \circ L^{-1} = I_W$ ve $L^{-1} \circ L = I_V$ olacak şekilde tek bir $L : V \to W$ dönüşümü var ise L ye terslenebilirdir (veya terse sahiptir) denir. Burada, I_V, V üzerinde özdeş lineer dönüşüm ve I_V, W üzerinde özdeş lineer dönüşümdür. Şimdi aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 6.7 Bir $L : V \to W$ lineer dönüşümünün tersinin olması için gerek ve yeter şart L'nin bire-bir ve örten olmasıdır. Üstelik, L^{-1} bir lineer dönüşümdür ve $(L^{-1})^{-1} = L$'dir.

İspat

L, bire-bir ve örten olsun. $H : W \to V$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım. Eğer, $\mathbf{w} \in W$ ise L örten olduğundan bazı $\mathbf{v} \in V$ elemanları için $L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ olur. Diğer taraftan L bire-bir olduğundan $L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ olacak şekildeki $\mathbf{v}$ tektir. $H(\mathbf{w}) = \mathbf{v}$ olsun; H bir fonksiyondur ve $L(H(\mathbf{w})) = L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ olup $L \circ H = I_W$ yazılır. Ayrıca, $H(L(\mathbf{v})) = H(\mathbf{w}) = \mathbf{v}$ olup $H \circ L = I_V$ yazılır. Böylece, H, L'nin tersidir. Şimdi H'nın tek olduğunu gösterelim. Bunun için, $H_1 : W \to V$, ve $L \circ H_1 = I_W$ ve $H_1 \circ L = I_V$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. Bu takdirde, herhangi bir $\mathbf{w} \in W$ için, $L(H(\mathbf{w})) = L(\mathbf{v}) = \mathbf{w} = L(H_1(\mathbf{w}))$ olur. L bire-bir olduğundan, $H(\mathbf{w}) = H_1(\mathbf{w})$ sonucu elde edilir. Buradan, $H = H_1$ olur. Böylece, $H = L^{-1}$ olup L terse sahiptir.

Tersine, L'nin tersi var olsun. Yani, $L \circ L^{-1} = I_W$ ve $L^{-1} \circ L = I_V$ olsun. L'nin bire-bir ve örten olduğunu gösterelim. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ olmak üzere $L(\mathbf{v}_1) = L(\mathbf{v}_2)$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde, $L^{-1}(L(\mathbf{v}_1)) = L(L^{-1}(\mathbf{v}_1))$ ve buradan da $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ elde edilir. Bu da L'nin bire-bir olduğunu gösterir. Ayrıca, $\mathbf{w} \in W$ ise $L(L^{-1}(\mathbf{w})) = \mathbf{w}$ ve $L^{-1}(\mathbf{w}) = \mathbf{v}$ ise $L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ yazılır. O halde L örten olur.

Şimdi, L^{-1}'in lineer olduğunu gösterelim. $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$ olmak üzere, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ için $L(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$, $L(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_2$ olsun. Bu takdirde, a, b reel sayıları için,

$$L(a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2) = aL(\mathbf{v}_1) + bL(\mathbf{v}_2) = a\mathbf{w}_1 + b\mathbf{w}_2$$

olduğundan,

$$L^{-1}(a\mathbf{w}_1 + b\mathbf{w}_2) = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2 = aL^{-1}(\mathbf{w}_1) + bL^{-1}(\mathbf{w}_2)$$

yazılır. Bu da L^{-1}'in lineer olduğunu ifade eder.

Son olarak, $L \circ L^{-1} = I_W$ ve $L^{-1} \circ L = I_V$ ve ters dönüşüm tek olduğundan $(L^{-1})^{-1} = L$ elde edilir. ■

Uyarı Eğer $L : V \to V$ lineer operatörü bire-bir ve örten ise, L izomorfizm olarak adlandırılır. (Kesim 4.8 Tanım 4.13'e bakınız.)

ÖRNEK 11

$L : R^3 \to R^3$,

$$L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanan lineer operatörü göz önüne alalım. çek$L = \{0\}$ olduğundan (Görünüz) L, bire-bir ve Sonuç 6.2'den L örten olur. Böylece, L terse sahip olur. L^{-1}'i elde etmek için aşağıdaki yol izlenir. $L^{-1}(\mathbf{w}) = \mathbf{v}$ olduğundan, $\mathbf{v} \in V$ için $L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ denklem sistemi çözülür. Buna göre,

$$L(\mathbf{v}) = L\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} v_1 + v_2 + v_3 \\ 2v_1 + 2v_2 + v_3 \\ v_2 + v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

yazılır. Buradan,

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 &= w_1 \\ 2v_1 + 2v_2 + v_3 &= w_2 \\ v_2 + v_3 &= w_3 \end{aligned}$$

lineer sistemi elde edilir. Bu lineer sistem çözülürse,

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{v} = L^{-1}(\mathbf{w}) = L^{-1}\left(\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} w_1 - w_3 \\ -2w_1 + w_2 + w_3 \\ 2w_1 - w_2 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. (Gösteriniz.) ■

Aşağıdaki önemli teorem; bire-bir lineer dönüşümlerin, lineer bağımsız vektörlerin lineer bağımsızlıklarını koruduğunu gösterir. Yani bu teorem, lineer bağımsız vektörlerin, bire-bir lineer dönüşümler altındaki görüntülerinin de lineer bağımsız olduğunu gösterir. Üstelik, eğer bu özellik sağlanırsa L bire-bir olur.

Teorem 6.8 Bir $L : V \to W$ lineer dönüşümünün bire-bir olması için gerek ve yeter şart V'deki lineer bağımsız vektörlerin her cümlesinin L altındaki görüntüsünün W'da lineer bağımsız vektörlerin bir cümlesi olmasıdır.

İspat

$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, V'de lineer bağımsız vektörlerin bir cümlesi ve $T = \{L(\mathbf{v}_1), L(\mathbf{v}_2), \ldots, L(\mathbf{v}_n)\} \subset W$ olsun. L'nin bire-bir olduğunu kabul edip T cümlesinin lineer bağımsız olduğunu gösterelim. $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ olmak üzere,

$$a_1 L(\mathbf{v}_1) + a_2 L(\mathbf{v}_2) + \cdots + a_k L(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0}_W$$

olsun. Bu takdirde,

$$L(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k) = \mathbf{0}_W = L(\mathbf{0}_V)$$

yazılır. L bire-bir olduğundan

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}_V$$

olur. S lineer bağımsız olduğundan bu son eşitlik sadece $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ için sağlanır. O halde T lineer bağımsız olur.

Tersine, V'deki lineer bağımsız vektörlerin her cümlesinin L altındaki görüntüsünün W'da lineer bağımsız vektörlerin bir cümlesi olduğunu kabul edelim. $\mathbf{v} \neq 0_V$ olmak üzere, $\{\mathbf{v}\}$ cümlesi V'nin lineer bağımsız bir alt cümlesi olsun. $L(\mathbf{v}) \neq 0_W$ olduğundan $\{L(\mathbf{v})\}$ lineer bağımsız olup çek$L = \{0_V\}$ olarak bulunur. Böylece, L bire-bir olur. ■

Bu teoremden aşağıdaki ifade ortaya çıkar: *Eğer $L : V \to W$ bir lineer dönüşüm ve boy$V$ = boy$W$ ise, L bire-birdir ve dolayısıyla tersinin olması için gerek ve yeter şartın V'nin bir tabanının L altındaki görüntüsünün W için bir taban olmasıdır.* (Alıştırma 18.)

A, $n \times n$ tipinde bir matris olmak üzere, $A\mathbf{x} = b$ lineer sistemi için son bir uyarı yapalım. $\mathbf{x} \in R^n$ olmak üzere, $L : R^n \to R^n$, $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ olarak tanımlanan lineer dönüşümü tekrar göz önüne alalım. Eğer A singüler olmayan bir matris ise, boy im$L$ = rank$A = n$ ve buradan boy çek$L = 0$ olur. Böylece, L bire-bir ve örten olur. Bu da verilen lineer sistemin tek bir çözüme sahip olduğu anlamına gelir. Şimdi, A'nın singüler bir matris olduğunu kabul edelim. Bu takdirde, rank$A < n$ olur. Bu da, boy çek$L = n$ – rank$A > 0$ ve dolayısıyla L'nin bire-bir ve örten olmadığını ifade eder. O halde, $A\mathbf{x} = b$ lineer sistemi için çözüm olmayan bir $b \in R^n$ vektörü vardır. Üstelik, A singüler bir matris olduğundan $A\mathbf{x} = 0$ sistemi aşikar olmayan bir x_0 çözümüne sahiptir. Eğer $A\mathbf{x} = b$, bir y çözümüne sahip ise $x_0 + y$'de $A\mathbf{x} = b$ için bir çözümdür. (Gösteriniz.). Böylece, A singüler bir matris olduğundan $A\mathbf{x} = b$ sisteminin bir çözümü varsa bu çözüm tek değildir.

Aşağıdaki ifadeler denktir:

1. A singüler olmayan bir matristir.
2. $A\mathbf{x} = 0$ sistemi sadece aşikar çözüme sahiptir.
3. A satırca (sütunca) I_n'ye denktir.
4. Her $b \in R^n$ vektörü için $A\mathbf{x} = b$ lineer sistemi tek bir çözüme sahiptir.
5. A elementer matrislerin bir çarpımıdır.
6. $\det(A) \neq 0$'dır.
7. $\text{rank}A = n$'dır.
8. A'nın satırları (sütunları), $R_n(R^n)$'de lineer bağımsız vektörlerin bir cümlesini oluşturur.
9. $A\mathbf{x} = 0$ sisteminin çözüm uzayının boyutu sıfırdır.
10. $x \in R^n$ olmak üzere, $L : R^n \to R^n$, $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ olarak tanımlanan lineer dönüşüm bire-bir ve örtendir.

n-boyutlu bir V vektör uzayından kendisine (veya daha genel olarak n-boyutlu bir W vektör uzayına) tanımlanan bir lineer dönüşümün bir terse sahip olmasını aşağıdaki bir birine denk şartlardan biri ile özetleyebiliriz.

1. L'nin tersi vardır.
2. L bire-birdir.
3. L örtendir.

Anahtar Kelimeler

Bire-bir
Çekirdek (çek$L$)
Görüntü cümlesi
Bir lineer dönüşümün görüntüsü
Üzerine (örten)
Boyut
Sıfırlık
Tersi alınabilir lineer dönüşüm

6.2 Alıştırmalar

1. $L : R^2 \to R^2$,

$$L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan bir lineer dönüşüm olsun.

(a) $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ vektörü çek$L$'nin elemanı mıdır?

(b) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ vektörü çek$L$'nin elemanı mıdır?

(c) $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektörü im$L$'nin elemanı mıdır?

(d) $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ vektörü im$L$'nin elemanı mıdır?

(e) çek$L$'yi bulunuz.

(f) im$L$'yi bulunuz.

2. $L : R^2 \to R^2$,

$$L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan bir lineer dönüşüm olsun.

(a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ vektörü çek$L$'nin elemanı mıdır?

(b) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ vektörü çek$L$'nin elemanı mıdır?

(c) $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ vektörü im$L$'nin elemanı mıdır?

(d) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ vektörü im$L$'nin elemanı mıdır?

(e) çek$L$'yi bulunuz.

(f) im$L$ için bir geren cümlesi bulunuz.

3. $L : R_4 \to R_2$,

$$L\left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 + u_3 & u_2 + u_4 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan bir lineer dönüşüm olsun.

(a) [2 3 –2 3] vektörü çek$L$'nin elemanı mıdır?
(b) [4 –2 –4 2] vektörü çek$L$'nin elemanı mıdır?
(c) [1 2] vektörü im$L$'nin elemanı mıdır?
(d) [0 0] vektörü im$L$'nin elemanı mıdır?
(e) çek$L$'yi bulunuz.
(f) im$L$ için bir geren cümlesi bulunuz.

4. $L : R_2 \to R_3$,
$L\left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 & u_1 + u_2 & u_2 \end{bmatrix}$
şeklinde tanımlanan bir lineer dönüşüm olsun.
(a) çek$L$'yi bulunuz.
(b) L bire-bir midir?
(c) L örten midir?

5. $L : R_4 \to R_3$,
$$L\left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 + u_2 & u_3 + u_4 & u_1 + u_3 \end{bmatrix}$$
şeklinde tanımlanan bir lineer dönüşüm olsun.
(a) çek$L$ için bir taban bulunuz.
(b) im$L$ için bir taban bulunuz.
(c) boy im$L$ nedir?

6. $L : P_2 \to P_3$, $L(p(t)) = t^2 p'(t)$ şeklinde tanımlanan bir lineer dönüşüm olsun.
(a) çek$L$'nin bir tabanını ve boyutunu bulunuz.
(b) im$L$'nin bir tabanını ve boyutunu bulunuz.

7. $L : M_{23} \to M_{33}$,
$$L(A) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} A$$
şeklinde tanımlanan bir lineer dönüşüm olsun.
(a) çek$L$'nin boyutunu bulunuz.
(b) im$L$'nin boyutunu bulunuz.

8. $L : P_2 \to P_1$, $L(at^2 + bt + c) = (a + b)\,t + (b - c)$ şeklinde tanımlanan bir lineer dönüşüm olsun.
(a) çek$L$ için bir taban bulunuz.
(b) im$L$ için bir taban bulunuz.

9. $L : P_2 \to R_2$, $L(at^2 + bt + c) = [a \quad b]$ şeklinde tanımlanan bir lineer dönüşüm olsun.
(a) çek$L$ için bir taban bulunuz.
(b) im$L$ için bir taban bulunuz.

10. $L : M_{22} \to M_{22}$,
$$L(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} A - A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
şeklinde tanımlanan bir lineer dönüşüm olsun.
(a) çek$L$ için bir taban bulunuz.
(b) im$L$ için bir taban bulunuz.

11.
$$L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a + b & b + c \\ a + d & b + d \end{bmatrix}$$
şeklinde tanımlanan bir lineer dönüşüm olsun.
(a) çek$L$ için bir taban bulunuz.
(b) im$L$ için bir taban bulunuz.

12. $L : V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun.
(a) boy im$L \le$ boy V olduğunu gösteriniz.
(b) Eğer L örten ise boy$W \le$ boy$V$ olduğunu ispatlayınız.

13. Aşağıda tanımlanan lineer dönüşümlerin Teorem 6.6'yı sağladığını gösteriniz.
(a) $L : P_2 \to P_2$, $L(p(t)) = tp'(t)$ şeklinde tanımlanan bir lineer dönüşüm olsun.
(b) $L : R_3 \to R_2$,
$L\left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 + u_2 & u_1 + u_3 \end{bmatrix}$
şeklinde tanımlanan bir lineer dönüşüm olsun.
(c) $A \in M_{22}$ için $L : M_{22} \to M_{23}$
$$L(A) = A \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$
şeklinde tanımlanan bir lineer dönüşüm olsun.

14. Alıştırma 11'de verilen lineer dönüşümlerin Teorem 6.5'i sağladığını gösteriniz.

15. A, $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere, $L : R^n \to R^m$, $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ şeklinde tanımlanan bir lineer dönüşüm olsun.
$$\text{im}L = A\text{'nın sütun uzayı}$$
olduğunu gösteriniz.

16. $L : R^5 \to R^4$
$$\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}$$
şeklinde tanımlanan bir lineer dönüşüm olsun.
(a) çek$L$'nin bir tabanını ve boyutunu bulunuz.
(b) im$L$'nin bir tabanını ve boyutunu bulunuz.

17. $L : R_3 \to R_3$,
$$L(\mathbf{e}_1^T) = L\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$L(\mathbf{e}_2^T) = L\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
ve
$$L(\mathbf{e}_3^T) = L\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
şeklinde tanımlanan bir lineer dönüşüm olsun.
$$\left\{L(\mathbf{e}_1^T), L(\mathbf{e}_2^T), L(\mathbf{e}_3^T)\right\} = \left\{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$
cümlesi R_3 için bir taban mıdır?

18. $L : V \to W$ bir lineer dönüşüm ve boy$V$ = boy$W$ olsun. L'nin tersinin olması için gerek ve yeter şart V'nin bir tabanının L altındaki görüntüsünün W için bir taban olmasıdır. Gösteriniz.

19. $L : R^3 \to R^3$

$$L\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \quad L\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$L\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}.$$

şeklinde tanımlanan bir lineer dönüşüm olsun.

(a) L'nin terslenebilir olduğunu ispatlayınız.

(b) $L^{-1}\left(\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}\right)$ ifadesini bulunuz.

20. $L : V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun. $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ cümlesi V deki vektörlerin bir cümlesi olsun. $T = \{L(\mathbf{v}_1), L(\mathbf{v}_2), \ldots, L(\mathbf{v}_n)\}$ cümlesi lineer bağımsız ise S cümlesinin de lineer bağımsız olduğunu ispatlayınız. Bu ifadenin tersi hakkında ne söyleyebilirsiniz?

21. Aşağıdaki homogen sistemin çözüm uzayının boyutunu bulunuz.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\2 & 1 & -1 & 2\\1 & 0 & 0 & -1\\4 & 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

22. $S = \{[1 \quad -1 \quad 2], [3 \quad 1 \quad -1]\}$ cümlesi im$L$ için taban olacak şekilde bir $L : R_2 \to R_3$ lineer dönüşümü bulunuz.

23. $L : R^3 \to R^3$

$$L\left(\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 2\\1 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan bir lineer dönüşüm olsun.

(a) L'nin terse sahip olduğunu ispatlayınız.

(b) $L^{-1}\left(\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}\right)$ ifadesini bulunuz.

24. $L : V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun. L'nin birebir olması için gerek ve yeter şart boy im$L$ = boy$V$ olmasıdır. İspatlayınız.

25. $L : R^4 \to R^6$, bir lineer dönüşüm olsun.

(a) Eğer boy çek$L$ = 2 ise boy im$L$ nedir?

(b) Eğer boy im$L$ = 3 ise boy çek$L$ nedir?

26. $L : V \to R^5$, bir lineer dönüşüm olsun.

(a) Eğer L örten ve boy çek$L$ = 2 ise boy$V$ nedir?

(b) Eğer L bire-bir ve örten ise boy$V$ nedir?

27. L, Kesim 6.1'deki Alıştırma 24'te tanımlanan lineer dönüşüm olsun. Aşağıdaki ifadelerin doğru olup olmadıklarını ispatlayınız.

(a) L bire-birdir.

(b) L örtendir.

28. L, Kesim 6.1'deki Alıştırma 25'te tanımlanan lineer dönüşüm olsun. Aşağıdaki ifadelerin doğru olup olmadıklarını ispatlayınız.

(a) L bire-birdir.

(b) L örtendir.

29. Sonuç 6.1'i ispatlayınız.

30. $L : R^n \to R^m$, $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ şeklinde tanımlanan bir lineer dönüşüm olsun. L'nin örten olması için gerek ve yeter şart rank$A = m$ olmasıdır. İspatlayınız.

31. Sonuç 6.2'yi ispatlayınız.

6.3 Bir Lineer Dönüşümün Matrisi

Kesim 6.2'de A, $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere, $x \in R^n$ için $L : R^n \to R^m$, $L(x) = Ax$ şeklinde bir lineer dönüşüm tanımlayabileceğimizi gördük. V, n-boyutlu ve W, m-boyutlu birer vektör uzayı olmak üzere, $L : V \to W$ bir lineer dönüşüm ve V ile W için birer taban seçersek, $x \in V$ için matris çarpımı ile $L(x)$'i bulmamızı sağlayacak şekilde L ye tek bir $m \times n$ tipinde A matrisi eşleyebileceğiz.

Teorem 6.9 V, n-boyutlu ve W, m-boyutlu ($n, m \neq 0$) birer vektör uzayı olmak üzere, $L : V \to W$ bir lineer dönüşüm ve $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ sırası ile V ve W'nın birer sıralı tabanı olsun. Bu takdirde, j. sütunu $L(\mathbf{v}_j)$'nin T tabanına göre $[L(\mathbf{v}_j)]_T$ koordinat vektörü olan $m \times n$ tipindeki A matrisi, $x \in V$ olmak üzere

$$\left[L(\mathbf{x})\right]_T = A\left[\mathbf{x}\right]_S \tag{1}$$

özelliğine sahiptir. Üstelik, A bu özelliği sağlayan tek matristir.

İspat

A matrisini nasıl oluşturacağımızı göstereceğiz. $j = 1, 2, \ldots, n$ için $\mathbf{v}_j \in V$ vektörünü göz önüne alalım. $L(\mathbf{v}_j) \in W$ ve T, W için bir sıralı taban olduğundan bu $L(\mathbf{v}_j)$ vektörünü T'deki vektörlerin lineer kombinasyonu olarak tek türlü yazabiliriz. Yani,

$$L(\mathbf{v}_j) = c_{1j}\mathbf{w}_1 + c_{2j}\mathbf{w}_2 + \cdots + c_{mj}\mathbf{w}_m \tag{2}$$

şeklinde tek türlü yazılır. Bu da, $L(\mathbf{v}_j)$'nin T tabanına göre koordinat vektörünün

$$\left[L(\mathbf{v}_j)\right]_T = \begin{bmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{bmatrix}$$

olduğu anlamına gelir. Kesim 4.8'den hatırlanacağı gibi $[L(\mathbf{v}_j)]_T$ koordinat vektörünü bulmak için bir lineer sistemin çözülmesi gerekir. Şimdi, j. sütunu $[L(\mathbf{v}_j)]_T$ olan $m \times n$ tipinde bir A matrisi tanımlayarak bu matrisin teoremde belirtilen özellikleri sağladığını gösterelim.

x, V'deki herhangi bir vektör olsun. Bu takdirde, $L(x) \in W$ olur. Şimdi,

$$\left[\mathbf{x}\right]_S = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \left[L(\mathbf{x})\right]_T = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

olsun. Bu da $\mathbf{x} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$ demektir. O halde,

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}) &= a_1L(\mathbf{v}_1) + a_2L(\mathbf{v}_2) + \cdots + a_nL(\mathbf{v}_n) \\ &= a_1(c_{11}\mathbf{w}_1 + c_{21}\mathbf{w}_2 + \cdots + c_{m1}\mathbf{w}_m) \\ &\quad + a_2(c_{12}\mathbf{w}_1 + c_{22}\mathbf{w}_2 + \cdots + c_{m2}\mathbf{w}_m) \\ &\quad + \cdots + a_n(c_{1n}\mathbf{w}_1 + c_{2n}\mathbf{w}_2 + \cdots + c_{mn}\mathbf{w}_m) \\ &= (c_{11}a_1 + c_{12}a_2 + \cdots + c_{1n}a_n)\mathbf{w}_1 + (c_{21}a_1 + c_{22}a_2 + \cdots + c_{2n}a_n)\mathbf{w}_2 \\ &\quad + \cdots + (c_{m1}a_1 + c_{m2}a_2 + \cdots + c_{mn}a_n)\mathbf{w}_m. \end{aligned}$$

yazılır. Diğer taraftan, $L(\mathbf{x}) = b_1\mathbf{w}_1 + b_2\mathbf{w}_2 + \cdots + b_m\mathbf{w}_m$ olduğundan,

$$b_i = c_{i1}a_1 + c_{i2}a_2 + \cdots + c_{in}a_n$$

olur.

Şimdi (1) denkleminin doğru olduğunu gösterelim.

$$A\left[\mathbf{x}\right]_S = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11}a_1 + c_{12}a_2 + \cdots + c_{1n}a_n \\ c_{21}a_1 + c_{22}a_2 + \cdots + c_{2n}a_n \\ \vdots \\ c_{m1}a_1 + c_{m2}a_2 + \cdots + c_{mn}a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \left[L(\mathbf{x})\right]_T$$

elde edilir.

Son olarak, $A = [c_{ij}]$'nin bu özelliği sağlayan tek matris olduğunu gösterelim. Bunun için A ile aynı özelliklere sahip başka bir $A^* = [c^*_{ij}]$ matrisinin varlığını ve $A \neq A^*$olduğunu kabul edelim. Bu takdirde, A ve A^*'ın bütün elemanlar eşit olamaz. Dolayısıyla k. sütunları eşit olmasın. $\mathbf{v}_k$'nın S tabanına göre koordinat vektörü

$$\left[\mathbf{v}_k\right]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow k.\ \text{sat.}$$

olur. Buna göre,

$$\left[L(\mathbf{v}_k)\right]_T = A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix} = A\text{'nın } k.\text{ sütunu}$$

ve

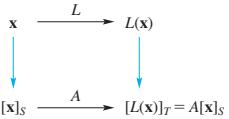
$$\left[L(\mathbf{v}_k)\right]_T = \hat{A} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{1k} \\ \hat{a}_{2k} \\ \vdots \\ \hat{a}_{mk} \end{bmatrix} = \hat{A}\text{'nın } k.\text{ sütunu}$$

olur. Bu da $L(\mathbf{v}_k)$'nın aynı sıralı tabana göre, farklı iki koordinat vektörüne sahip olduğunu ifade eder ki bu mümkün değildir. Böylece, A matrisi tektir. ■

Şimdi, $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ sırası ile V ve W'nun birer sıralı tabanı olmak üzere, bir $L : V \to W$ lineer dönüşüm için Teorem 6.9'daki gibi bir matrisin bulunması işlemlerini özetleyelim.

1. Adım $j = 1, 2, \ldots, n$ için $L(\mathbf{v}_j)$ hesaplanır.

2. Adım $L(\mathbf{v}_j)$'nin T tabanına göre koordinat vektörü bulunur. Bunun manası, $L(\mathbf{v}_j)$ vektörünün T'deki vektörlerin lineer birleşimi olarak tek türlü yazılabilmesidir. (Denklem (2)'ye bakınız.) Bu da bir lineer sistemin çözülmesini gerektirir.



ŞEKİL 6.2

3. Adım S ve T sıralı tabanlarına göre L lineer dönüşümünün A matrisi oluşturulur. Burada A, $1 \le j \le n$ için j. sütunu $[L(\mathbf{v}_j)]_T$ olan $m \times n$ tipinde bir matristir.

Şekil 6.2 Denklem (1)'in yani Teorem 6.9'un grafiksel bir yorumunu ortaya koyar. Burada, üstteki yatay ok, n-boyutlu V vektör uzayından m-boyutlu W vektör uzayına L lineer dönüşümünü belirtir ve V deki bir x vektörüne W'daki bir $L(x)$ vektörünü karşılık getirir. Alttaki yatay ok, A matrisini belirtir. $L(x)$'in R^m'deki koordinat vektörü olan $[L(x)]_T$, x'in R^n'deki koordinat vektörü olan $[x]_S$ ile A matrisinin soldan çarpılması ile elde edilir. Böylece, lineer dönüşümlerden ziyade matrisler ile çalışabiliriz.

ÖRNEK 1 $L: P_2 \to P_1$, $L(p(t)) = p'(t)$ lineer dönüşümü ve P_2, P_1'in sırası ile $S = \{t^2, t, 1\}$, $T = \{t, 1\}$ sıralı tabanları verilsin.

(a) L ye karşılık gelen A matrisini bulunuz.

(b) $p(t) = 5t^2 - 3t + 2$ için $L(p(t))$'yi doğrudan ve A matrisini kullanarak hesaplayınız.

Çözüm

(a)

$$L(t^2) = 2t = 2t + 0(1), \quad \text{yani } [L(t^2)]_T = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L(t) = 1 = 0(t) + 1(1), \quad \text{yani } [L(t)]_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$L(1) = 0 = 0(t) + 0(1), \quad \text{yani } [L(1)]_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olur. Böylece, $L(t^2)$, $L(t)$, $L(1)$'nin T tabanına göre koordinatları kolayca bulunmuş olur. O halde,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

(b) $p(t) = 5t^2 - 3t + 2$ olduğundan $L(p(t)) = 10t - 3$ olur. Bununla beraber A matrisini kullanarak $L(p(t))$'yi aşağıdaki gibi bulabiliriz.

$$[p(t)]_S = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

olup,

$$[L(p(t))]_T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \end{bmatrix}$$

bulunur. Bu da $L(p(t)) = 10t - 3$ demektir. ■

Uyarı Teorem 6.9 ve Örnek 1; verilen bir $L : V \to W$ lineer dönüşümü için, V'deki herhangi bir $\mathbf{v}$ vektörünün $L(\mathbf{v})$ görüntüsünü basit bir matris çarpımı ile bulabileceğimizi gösterir. Yani, $L(\mathbf{v})$'nin sıralı T tabanına göre $[L(\mathbf{v})]_T$ koordinat vektörünü bulmak için A matrisini $\mathbf{v}$'nin sıralı S tabanına göre $[\mathbf{v}]_S$ koordinat vektörü ile çarparız. Daha sonra, $L(\mathbf{v})$'yi hesaplamak için $[L(\mathbf{v})]_T$ ve T'yi kullanırız.

ÖRNEK 2 $L: P_2 \to P_1$, $L(p(t)) = p'(t)$ lineer dönüşümü ve P_2, P_1'in sırası ile $S = \{1, t, t^2\}$, $T = \{t, 1\}$ sıralı tabanları verilsin. Bu takdirde, L'ye karşılık gelen A matrisini $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ olarak bulunuz. (Gösteriniz.) Dikkat edilirse S ve T tabanlarındaki vektörlerin sırası değiştiğinde matris değişebilir. ■

ÖRNEK 3 $L: P_2 \to P_1$, $L(p(t)) = p'(t)$ lineer dönüşümü ve P_2, P_1'in sırası ile $S = \{t^2, t, 1\}$, $T = \{t + 1, t - 1\}$ sıralı tabanları verilsin.

(a) L'ye karşılık gelen A matrisini bulunuz.

(b) $p(t) = 5t^2 - 3t + 2$ için $L(p(t))$'yi bulunuz.

Çözüm

(a)

$$L(t^2) = 2t$$

dir. $L(t^2)$'nin T tabanına göre koordinat vektörünü bulmak için $L(t^2)$, T'deki vektörlerin lineer birleşimi olarak

$$L(t^2) = 2t = a_1(t + 1) + a_2(t - 1)$$

şeklinde yazılır. Buradan,

$$a_1 + a_2 = 2$$
$$a_1 - a_2 = 0$$

lineer sistemi elde edilir ve bu sistemin çözümü ise $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ olarak bulunur. (Gösteriniz.) Böylece,

$$[L(t^2)]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olur. Benzer olarak,

$$L(t) = 1 = \tfrac{1}{2}(t + 1) - \tfrac{1}{2}(t - 1), \quad \text{yani} \quad [L(t)]_T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$L(1) = 0 = 0(t + 1) + 0(t - 1), \quad \text{yani} \quad [L(1)]_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. O halde,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

olur.
(b)

$$[L(p(t))]_T = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{13}{2} \end{bmatrix}$$

olup, $L(p(t)) = \frac{7}{2}(t+1) + \frac{13}{2}(t-1) = 10t - 3$ şeklinde Örnek 1'deki sonucu elde ederiz. ■

Dikkat edilirse, Örnek 1, 2 ve 3'teki L aynı olmasına rağmen, L'ye karşılık gelen matrisler farklıdır. Kesim 6. 5'te bu üç matrisin herhangi ikisi arasındaki ilişki tartışılacaktır.

A matrisine ***S* ve *T* sıralı tabanlarına göre *L*'nin gösterimi** denir. Ayrıca, A matrisi ***S* ve *T* sıralı tabanlarına göre *L*'yi gösterir** de denir. Buna göre, L yerine A ve x yerine $[\mathbf{x}]_S$ yazılırsa $A[\mathbf{x}]_S = [L(\mathbf{x})]_T$ elde edilir. Böylece, W'da $L(\mathbf{x})$'i elde etmek için, V'de $\mathbf{x}$'e L'yi uygulayarak bulunan sonuç, $[\mathbf{x}]_S$ ile A çarpılarak bulunabilir. Yani, lineer dönüşümlerden ziyade matrisler ile çalışabiliriz. Fizikçiler ve başka bilim adamları daha çok lineer dönüşümlerin matris gösterimlerini kullanarak hesaplamalarını yaparlar. Çünkü, bilgisayarda matrisler ile çalışmak bir lineer dönüşümün soyut tanımı ile çalışmaktan daha kolaydır. Lineer dönüşümler ile matrisler arasındaki ilişki, basit bir hesaplamadan daha güçlüdür. Bir sonraki bölümde, n-boyutlu bir V vektör uzayından m-boyutlu bir W vektör uzayına tanımlanan tüm lineer dönüşümlerin cümlesinin $m \times n$ tipindeki tüm matrislerin M_{mn} uzayına izomorf bir vektör uzayı olduğunu göstereceğiz.

Eğer, $L : R^n \to R^m$ bir lineer dönüşüm ise L'nin matris gösterimi bulma işini kolaylaştıran R^n ve R^m'nin doğal (standart) tabanları sık sık kullanılır.

ÖRNEK 4

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan bir lineer dönüşüm ve

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{e}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{ve} \quad \bar{\mathbf{e}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olsun. O halde, $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, $T = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ sırası ile R^3 ve R^2'nin doğal (standart) tabanları olur. Buna göre,

$$L(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\bar{\mathbf{e}}_1 + 1\bar{\mathbf{e}}_2, \; [L(\mathbf{e}_1)]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$L(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1\bar{\mathbf{e}}_1 + 2\bar{\mathbf{e}}_2, \; [L(\mathbf{e}_2)]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$L(\mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 1\bar{\mathbf{e}}_1 + 3\bar{\mathbf{e}}_2, \; [L(\mathbf{e}_3)]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Dikkat edilirse T, R^2'nin doğal (standart) tabanı olduğundan $L(\mathbf{e}_1)$, $L(\mathbf{e}_2)$, $L(\mathbf{e}_3)$'ün T tabanına göre koordinat vektörleri kolayca hesaplandı. Buna göre, L'nin S ve T tabanlarına göre matris gösterimi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

biçiminde olur. A matrisinin L'nin verilişindeki matris ile aynı olmasının sebebi, R^3 ve R^2'nin doğal (standart) tabanlarının kullanılmasıdır. ■

ÖRNEK 5

$L : R^3 \to R^2$ dönüşümü Örnek 4'teki gibi tanımlansın. Sırasıyla R^3 ve R^2'deki

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{ve} \quad T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

sıralı tabanlarını ele alalım. Buna göre

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Benzer şekilde

$$L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

olur.

S tabanındaki vektörlerin görüntülerinin S tabanına göre koordinat vektörlerini bulmak için $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \mathbf{b},$$

lineer sistemlerini çözmeliyiz. Bu işlem Kesim 4.8'deki gibi

$$\left[\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 5 & 3 \end{array}\right]$$

bölünmüş matrisi dönüştürülerek yapılır.

Dolayısıyla, satırca indirgenmiş eşelon şekil

$$\left[\begin{array}{cc|c|c|c} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

yazılır. (Gerçekleyiniz.) Bu matrisin son üç sütunu, S tabanındaki vektörlerin görüntülerinin T tabanına göre koordinat vektörleridir. Yani, son üç sütun S ve T tabanlarına göre L'nin A matris gösterimini verir. Böylece,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Dikkat edilirse, bu matris L'nin verilişindeki matristen farklıdır. Böylece, bir A matrisi bir L lineer dönüşümünün tanımlanışında ihtiva edilmesine rağmen, L için bir matris gösterimi olması gerekmez. ■

Örnek 5'te, $L : R^n \to R^m$, bir lineer dönüşüm olmak üzere R^n'nin sıralı $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ tabanına ve R^m'nin sıralı $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ tabanına göre L'ye karşılık gelen A matrisinin aşağıdaki şekilde oluşturulduğunu gördük.

$$\left[\begin{array}{cccc|c|c|c|c} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \cdots & \mathbf{w}_m & L(\mathbf{v}_1) & L(\mathbf{v}_2) & \cdots & L(\mathbf{v}_n) \end{array}\right]$$

parçalı matrisi satırca eşelon biçime indirgenir ve eşelon şekildeki bu matrisin son n tane sütunu A matrisini oluşturur.

Eğer $L : V \to V$, n-boyutlu bir V vektör uzayı üzerinde bir lineer operatör ise, L'nin bir matris gösterimini elde etmek için V'nin S, T gibi sabit iki tane sıralı tabanı seçilir ve S, T tabanlarına göre L'nin A matris gösterimi bulunur. Bu durumda çoğunlukla $S = T$ olarak alınır ve A matrisi S tabanına göre L'nin matris gösterimi olarak ifade edilir. Eğer $L : R^n \to R^n$ bir lineer operatör ise, R^n'nin standart (doğal) tabanına göre L'nin matris gösterimi Kesim 6.1, Teorem 6.3'te tartışıldı ve L'nin standart matris gösterimi olarak adlandırıldı.

Ayrıca, n-boyutlu bir vektör uzayı üzerinde tanımlı birim operatörün herhangi bir tabana göre matris gösteriminin I_n birim matrisi olduğu gösterilebilir. (Kesim 6.1, Alıştırma 22.)

$I : V \to V$ n-boyutlu bir V vektör uzayı üzerinde birim operatör ve $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ve $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$, V'nin iki tane sıralı tabanı olsun. S, T tabanlarına göre birim operatöre karşılık gelen matrisin S tabanından T tabanına geçiş matrisi olduğu gösterilebilir. (Kesim 6.1, Alıştırma 23.)

Eğer $L : V \to V$ tersi olan bir lineer operatör ve A, V'nin sıralı bir S tabanına göre L'nin matris gösterimi ise, A^{-1}, S tabanına göre L^{-1}'in matris gösterimidir. Bu noktada doğrudan ispatlanabilecek bu durum Kesim 6.4'te açık bir şekilde ortaya çıkacaktır.

$L : V \to W$ bir lineer dönüşüm ve A matrisi de V ve W uzaylarının sıralı tabanlarına göre L'nin matris gösterimi olsun. Bu takdirde, çek$L$'nin bulunması problemi $Ax = 0$ homogen sisteminin çözüm uzayının bulunması problemine indirgenir. Üstelik, im$L$'nin bulunması problemi de A'nın sütun uzayının bulunması problemine indirgenir.

n-boyutlu bir V vektör uzayından kendisine (veya daha genel olarak n-boyutlu bir W vektör uzayına) tanımlanan bir L lineer dönüşümünün hangi şartlar altında bir terse sahip olduğunu aşağıdaki birbirine denk ifadeler ile özetleyebiliriz:

1. L'nin tersi vardır.
2. L bire-birdir.
3. L örtendir.
4. V ve W'nın sıralı S, T tabanlarına göre L'nin matris gösterimi olan A matrisi singüler değildir.

Anahtar Kelimeler

Bir lineer dönüşümün matris gösterimi
Sıralı taban
Değişmez (invaryant) alt uzay

6.3 Alıştırmalar

1. $L : R^2 \to R^2$

$$L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 + 2u_2 \\ 2u_1 - u_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. S, R^2'nin doğal tabanı ve

$$T = \left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

olsun. L'nin aşağıdakilere göre ifadesini (gösterimini) bulunuz:

(a) S **(b)** S ve T **(c)** Tve S **(d)** T

(e) L'nin tanımını kullanarak ve yine (a)-(d) şıklarında elde edilen matrisleri kullanarak $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$'yi bulunuz.

2. $L : R_4 \to R_3$

$$L\left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 + u_3 & u_3 + u_4 \end{bmatrix}$$

ile tanımlansın. S ve T sırasıyla R_4 ve R_3 için doğal tabanlar olsun. $S' = \{[1\ 0\ 0\ 1], [0\ 0\ 0\ 1], [1\ 1\ 0\ 0], [0\ 1\ 1\ 0]\}$ ve $T' = \{[1\ 1\ 0], [0\ 1\ 0], [1\ 0\ 1]\}$ olsun.

(a) L'nin S ve T'ye göre gösterimini bulunuz.

(b) L'nin S' ve T'ye göre gösterimini bulunuz.

(c) (a) ve (b) şıkkında elde edilen matrisleri kullanarak $L[2\ 1\ -1\ 3]$'ü bulunuz ve L'nin tanımından elde edilen ile bu cevabı karşılaştırınız.

3. $L: R^4 \to R^3$

$$L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. R^4 ve R^3'ün doğal tabanları sırasıyla S ve T olsun. R^4 ve R^3'ün sırasıyla

$$S' = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

ve

$$T' = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

sıralı tabanlarını gözönüne alalım. (a) S ve T; (b) S' ve T' ye göre L'nin ifadesini bulunuz.

4. L: $R^2 \to R^2$ bir ϕ açısıyla saatin tersi yönünde R^2'yi döndüren lineer dönüşüm olsun. R^2'nin doğal tabanına göre L'nin ifadesini bulunuz.

5. $L: R^3 \to R^3$

$$L\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\quad L\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix},$$

$$L\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlansın.

(a) R^3'ün S doğal tabanına göre L'nin gösterimini bulunuz.

(b) L'nin tanımını kullanarak ve yine (a) şıkkında elde edilen matrisi kullanarak

$L\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right)$'ü bulunuz.

6. L: $R^3 \to R^3$ Örnek 5'teki gibi tanımlansın. $T = \{L(\mathbf{e}_1), L(\mathbf{e}_2), L(\mathbf{e}_3)\}$ R^3 için sıralı bir taban ve S R^3 için bir doğal taban olsun.

(a) S ve T'ye göre L'nin gösterimini bulunuz.

(b) (a) şıkkında elde edilen matrisi kullanarak

$L\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right)$'ü bulunuz.

7. $L: R^3 \to R^3$

$$\begin{bmatrix}1&3&1\\1&2&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

matrisi ile gösterilen lineer dönüşüm olsun. R^3'ün doğal tabanına göre:

(a) $L\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right)$ **(b)** $L\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right)$

'i bulunuz.

8. $L: M_{22} \to M_{22}$

$$L(A)=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}A$$

şeklinde tanımlansın. M_{22} için

$$S=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$$

ve

$$T=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right\}$$

sıralı tabanlarını gözönüne alalım.

(a) S **(b)** T **(c)** S ve T **(d)** T ve S

'ye göre L'nin gösterimini bulunuz.

9. (***Analiz Gereklidir***) V, $S = \{1, t, e^t, te^t\}$ tabanı ile verilmiş vektör uzayı olsun ve L: $V \to V$, $L(f) = f' = df/dt$ ile tanımlanan bir lineer operatör olsun. S'ye göre L'nin gösterimini bulunuz.

10. L: $P_1 \to P_2$, $L(p(t)) = tp(t) + p(0)$ ile tanımlansın. P_1 için $S = \{t,1\}$ ve $S' = \{t + 1, t - 1\}$ ve P_2 için $T = \{t^2, t, 1\}$ ve $T' = \{t^2 + 1, t - 1, t + 1\}$ sıralı tabanlarını gözönüne alalım.

(a) S ve T **(b)** S' ve T'

(c) L'nin tanımını ve (a) ve (b) şıkkında elde edilen matrisleri kullanarak $L(-3t-3)$'ü bulunuz.

11. $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ olsun ve L: $M_{22} \to M_{22}$ ve

$X \in M_{22}$ için $L(X) = AX - XA$ ile tanımlanan lineer dönüşüm olsun. S ve T Örnek 8'de tanımlandığı gibi M_{22} için sıralı tabanlar olsun.

(a) S **(b)** T **(c)** S ve T **(d)** T ve S

şıklarına göre L'nin ifadesini bulunuz.

12. $L : V \to V$ bir lineer operatör olsun. Eğer $L(U) \subset U$ ise V'nin bir boş olmayan U alt uzayına L altında **değişmezdir** (invaryanttır) denir. L, U değişmez alt uzayıyla bir lineer operatör olsun. Eğer boy $U = m$ ve boy $V = n$ ise, o zaman L'nin $\begin{bmatrix}A&B\\O&C\end{bmatrix}$ şeklinin V için bir S tabanına göre bir gösteriminin varolduğunu gösteriniz. Burada $A, m\times m$ tipinde $B, m\times(n-m)$ tipinde, O, $(n - m) \times m$ tipinde sıfır matristir ve C $(n - m) \times (n - m)$ tipinde matristir.

13. $L: R^2 \to R^2$

$$L\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}x\\-y\end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan x-ekseni etrafında bir yansıma olsun. R^2 için $T=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right\}$ sıralı tabanını ve S doğal tabanını gözönüne alalım.

(a) S. **(b)** T. **(c)** S ve T. **(d)** T ve S ye göre L'nin gösterimini bulunuz.

14. Eğer L: $R_3 \to R_2$ lineer dönüşüm ise L'nin R_3 ve R_2'nin doğal tabanlarına göre gösterimi

$$\begin{bmatrix}1&-1&2\\2&1&3\end{bmatrix}$$

dür. Buna göre

(a) $L([1 \quad 2 \quad 3])$ **(b)** $L([-1 \quad 2 \quad -1])$

(c) $L([0 \quad 1 \quad 2])$ **(d)** $L([0 \quad 1 \quad 0])$

(e) $L([0 \quad 0 \quad 1])$'i bulunuz.

15. Eğer $O : V \to W$ sıfır lineer dönüşümü ise, V için herhangi sıralı tabanlara göre O'ın matris gösterimini ve $n =$ boy V ve $m =$ boy W olmak üzere W'nın $m \times n$ tipinde sıfır matrisi olduğunu gösteriniz.

16. I: $V \to V$, V'de ve V için $I(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ ile tanımlanan lineer özdeşlik operatörün ise V için herhangi S sıralı tabanına göre I'nın matris gösteriminin I_n olduğunu ispatlayınız. Burada boy $V = n$'dir.

17. I: $R_2 \to R_2$ R_2'de özdeşlik lineer operatör olsun. $S = \{[1 \quad 0], [0 \quad 1]$ ve $T = \{[1 \quad -1], [2 \quad 3]\}$ R_2 için sıralı tabanlar olsunlar.

(a) S. **(b)** T. **(c)** S ve T. **(d)** T ve S. ye göre I'nın gösterimini bulunuz.

18. (***Analiz Gereklidir***) V, $S = \{e^t, e^{-t}\}$ tabanıyla reel-değerli sürekli fonksiyonların vektör uzayı olsun. S'ye göre $L(f) = f'$ ile tanımlanan L: $V \to V$ lineer operatörünün gösterimini bulunuz.

19. V, $S = \{\sin t, \cos t\}$ sıralı tabanıyla reel-değerli sürekli fonksiyonların vektör uzayı olsun. S'ye göre $L(f) = f'$ ile tanımlanan L: $V \to V$ lineer oparötürünün gösterimini bulunuz.

20. (***Analiz Gereklidir***) V, $S = \{\sin t - \cos t\}$ sıralı tabanıyla reel-değerli sürekli fonksiyonların vektör uzayı olsun ve V'nin $T = \{\sin t - \cos t, \sin t + \cos t\}$ başka bir sıralı tabanını gözönüne alalım. $L(f) = f'$ ile tanımlanan L: $V \to V$ lineer operatörünün gösterimini

(a) S **(b)** T **(c)** S ve T **(d)** T ve S ye göre bulunuz.

21. $L : V \to V$, $L(\mathbf{v}) = c\mathbf{v}$ ile tanımlanan bir lineer operatör olsun. V için herhangi bir sıralı tabana göre L'nin gösteriminin skalar bir matris olduğunu ispatlayınız. (Kesim 1.4'e bakınız.)

22. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

olmak üzere $L : R^3 \to R^2$'nin $S = \{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3\}$ ve $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ sıralı tabanlarına göre gösterimi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olsun.

(a) $[L(\mathbf{v}_1)]_T$, $[L(\mathbf{v}_2)]_T$ ve $[L(\mathbf{v}_3)]_T$'yi hesaplayınız.

(b) $L(\mathbf{v}_1)$, $L(\mathbf{v}_2)$ ve $L(\mathbf{v}_3)$'ü hesaplayınız.

(c) $L\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$'i hesaplayınız.

23. $I : V \to V$ n-boyutlu V vektör uzayı üzerinde bir özdeşlik operatörü olsun ve $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ve $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$, V için sıralı tabanlar olsun. S ve T'ye göre özdeşlik opreatörünün matrisinin S-tabanından T-tabanına geçiş matrisi olduğunu gösteriniz. Kesim 2.7'ye bakınız.

6.4 Lineer Dönüşümlerin ve Matrislerin Vektör Uzayı (Seçmeli)

Bütün $m \times n$ matrislerin M_{mn} cümlesinin, matris toplamı ve skalar çarpımı işlemleri altında bir vektör uzayı olduğunu Kesim 4.2'de gördük. Bu kesimde ise bir n-boyutlu V vektör uzayından m-boyutlu W vektör uzayına olan tüm lineer dönüşümlerin cümlesinin, aynı zamanda uygun tanımlanmış işlem altında bir U vektör uzayı olduğunu ve U ve M_{mn} arasındaki bağıntıyı araştıracağız.

TANIM 6.5

V ve W sırasıyla n ve m boyutlu iki vektör uzayı olmak üzere $L_1 : V \to W$ ve $L_2 : V \to W$ lineer dönüşümleri olsun. $\mathbf{x} \in V$ için $L(\mathbf{x}) = L_1(\mathbf{x}) + L_2(\mathbf{x})$ ile bir $L : V \to W$ dönüşümü tanımlayalım. Burada +, W'daki vektör toplamıdır. L'ye L_1 ve L_2 **toplamı** denir ve $L = L_1 \boxplus L_2$ ile gösterilir. Ayrıca eğer $L_3 : V \to W$ bir lineer dönüşüm ve c bir reel sayı ise, $\mathbf{x} \in V$ için $H(\mathbf{x}) = cL_3(\mathbf{x})$ ile bir $H : V \to W$ dönüşümü tanımlayalım. Burada sağ taraftaki işlem W'da skalar çarpımdır. H'ye c ile L_3'ün **skalar çarpımı** denir ve $H = c \boxdot L_3$ ile gösterilir.

ÖRNEK 1 $V = R_3$ ve $W = R_2$ olmak üzere $L_1 : R^3 \to R^2$ ve $L_2 : R^3 \to R^2$ dönüşümleri

$$L_1(\mathbf{x}) = L_1\left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 + u_2 & u_2 + u_3 \end{bmatrix}$$

ve

$$L_2(\mathbf{x}) = L_2\left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 + u_3 & u_2 \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlanmış olsun. Bu takdirde

$$(L_1 \boxplus L_2)(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2u_1 + u_2 + u_3 & 2u_2 + u_3 \end{bmatrix}$$

ve

$$(3 \boxdot L_1)(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3u_1 + 3u_2 & 3u_2 + 3u_3 \end{bmatrix}$$

olur. ■

Eğer L, L_1, L_2 ve L_3, V'den W'ye lineer dönüşümler ve c bir reel sayı ise, o zaman $L_1 \boxplus L_2$ ve $c \boxdot L_1$'in dönüşüm olduğunu göstermek okuyucuya bırakılmıştır. (Bu kesimdeki alıştırmalara bakınız.) V'den W'ye bütün lineer dönüşümlerin, U cümlesinin $\boxplus$ ve $\boxdot$ işlemleri altında bir vektör uzay olduğunu göstermek de okuyucuya bırakılmıştır. $x \in V$ için $O(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_W$ ile tanımlanan $O : V \to W$ lineer dönüşümü U'da bir sıfır vektördür. Yani herhangi bir $L \in U$ ise o zaman $L \boxplus (-1 \boxdot L) = O$ olur. Buradan da $(-1) \boxdot L = -L$ yazılabilir. Elbette, $S = \{L_1, L_2, \ldots, L_k\}$ cümlesinin U'da bir lineer bağımlı cümle olduğunu söylemek için, O sıfır lineer dönüşüm olmak üzere

$$(a_1 \boxdot L_1) \boxplus (a_2 \boxdot L_2) \boxplus \cdots \boxplus (a_k \boxdot L_k) = O,$$

olacak şekilde hepsi sıfır olmayan k tane $a_1, a_2, \ldots, a_k$ skalarlarının mevcut olmasıdır.

ÖRNEK 2 $L_1 : R_2 \to R_3$, $L_2 : R_2 \to R_3$ ve $L_3 : R_2 \to R_3$ dönüşümleri

$$L_1\left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 + u_2 & 2u_2 & u_2 \end{bmatrix},$$
$$L_2\left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_2 - u_1 & 2u_1 + u_2 & u_1 \end{bmatrix},$$
$$L_3\left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3u_1 & -2u_2 & u_1 + 2u_2 \end{bmatrix}.$$

biçiminde tanımlanmış olsun. Buna göre $S = \{L_1, L_2, L_3\}$ cümlesinin lineer bağımsız olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm

a_1, a_2 ve a_3 reel sayılar olmak üzere

$$(a_1 \boxdot L_1) \boxplus (a_2 \boxdot L_2) \boxplus (a_3 \boxdot L_3) = O,$$

olsun. O zaman $e_1^T = [1 \quad 0]$ için

$$((a_1 \boxdot L_1) \boxplus (a_2 \boxdot L_2) \boxplus (a_3 \boxdot L_3))(\mathbf{e}_1^T) = O(\mathbf{e}_1^T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

olur. Böylece,

$$(\mathbf{e}_1^T) + a_2 L_2(\mathbf{e}_1^T) + a_3 L_3(\mathbf{e}_1^T)$$
$$= a_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buna göre

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

homogen denklemi çözülürse $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ bulunur. (Gerçekleyiniz.) Bu yüzden S lineer bağımsızdır. ■

Teorem 6.10 $n \neq 0$ ve $m \neq 0$ olmak üzere $\boxplus$ ve $\boxdot$ işlemleri altında bir n-boyutlu vektör uzayından bir m-boyutlu W vektör uzayına giden bütün lineer dönüşümlerin vektör uzayı U olsun. Bu takdirde U, bütün $m \times n$ matrislerin M_{mn} vektör uzayına izomorftur.

İspat

$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ve $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ sırasıyla, V ve W için sıralı tabanlar olsun. S ve T tabanlarına göre L'yi gösteren matris $M(L)$ olacak şekilde bir $M : U \to M_m$ fonksiyonu tanımlayalım. Şimdi M'nin bir izomorfizm olduğunu göstereceğiz.

Önce M birebirdir. Eğer L_1 ve L_2, U'da iki farklı eleman ise, o zaman herhangi $j = 1, 2, \ldots, n$ için $L_1(\mathbf{v}_j) \neq L_2(\mathbf{v}_j)$ olur. Bu ise $L_1(\mathbf{v}_j)$ ve $L_2(\mathbf{v}_j)$'nin koordinat vektörleri olan $M(L_1)$ ve $M(L_2)$'nin j-inci sütunlarının, T'ye göre farklı olması demektir. Yani $M(L_1) \neq M(L_2)$'dir. Böylece M birebirdir. Sonra M örtendir. $m \times n$ tipinde bir $A = [a_{ij}]$ matrisi verilmiş olsun. Yani, $A \in M_{mn}$ olsun. O zaman bir $L : V \to W$ fonksiyonu

$$L(\mathbf{v}_i) = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}\mathbf{w}_k, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

biçiminde tanımlansın. $x = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n$ ise,

$$L(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i L(\mathbf{v}_i).$$

olur. L'nin bir lineer dönüşüm olduğunu göstermek zor değildir; üstelik S ve T tabanlarına göre L'yi gösteren matris $A = [a_{ij}]$'dir. Bu yüzden $M(L) = A$'dır ve böylece M örtendir.

Şimdi $M(L_1) = A = [a_{ij}]$ ve $M(L_2) = B = [b_{ij}]$ olsun. $M(L_1 \boxplus L_2) = A + B$ olduğunu gösterelim. İlk olarak $M(L_1 \boxplus L_2)$'in j-inci sütunun $A + B$ olduğunu gösterelim. İlk olarak j-inci sütunun

$$\left[(L_1 \boxplus L_2)(\mathbf{v}_j)\right]_T = \left[L_1(\mathbf{v}_j) + L_2(\mathbf{v}_j)\right]_T = \left[L_1(\mathbf{v}_j)\right]_T + \left[L_2(\mathbf{v}_j)\right]_T$$

olduğunu belirtelim. Böylece $M(L_1 \boxplus L_2)$'nin j-inci sütunu, $M(L_1) = A$ ve $M(L_2) = B$ matrislerinin j-inci sütunları toplamıdır. Bu yüzden $M(L_1 \boxplus L_2) = A + B$'dir. ■

Son olarak $M(L) = A$ ve c de bir reel sayı olsun. Önceki paragraftaki düşünceyi takip ederek $M(c \boxplus L) = cA$ olduğunu gösterebiliriz. Böylece U ve M_m izomorftur.

Bu teorem, boy $M_{mn} = mn$ için U'nun boyutunun mn olduğunu gerektirir. Aynı zamanda, sonlu boyutlu vektör uzayları ele alındığında, bütün lineer dönüşümlerin matrisler ile gösterilebileceği ve sadece matrisler ile çalışılabileceği anlamına gelir.

ÖRNEK 3 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ R^3 ve R^2 için doğal tabanlar sırasıyla, $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ve $T = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ olsun.

(a) S ve T tabanına göre gösterimi A olan $L : R^3 \to R^2$ lineer dönüşümünü bulunuz.

(b) $S' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ve $T' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ sırasıyla R^3 ve R^2'nin sıralı tabanları olsun. S' ve T''ye göre gösterimi A olan $L : R^3 \to R^2$ lineer dönüşümünü belirleyiniz.

(c) (b)'den bulunan L lineer dönüşümünü kullanarak $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$'i hesaplayınız.

Çözüm

(a)

$$L(\mathbf{e}_1) = 1\bar{\mathbf{e}}_1 + 2\bar{\mathbf{e}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$L(\mathbf{e}_2) = 2\bar{\mathbf{e}}_1 - 1\bar{\mathbf{e}}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$L(\mathbf{e}_3) = -\bar{\mathbf{e}}_1 + 3\bar{\mathbf{e}}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

olsun. Eğer $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ $\mathbf{x} \in R^3$ ise $L(\mathbf{x})$,

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}) &= L(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) \\ &= a_1 L(\mathbf{e}_1) + a_2 L(\mathbf{e}_2) + a_3 L(\mathbf{e}_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}) &= a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 + 2a_2 - a_3 \\ 2a_1 - a_2 + 3a_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

$$L(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix},$$

olduğu görülür. Böylece $x \in R^3$ için L; $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ ile tanımlanmış oldu. Bunu, S ve T doğal taban olduklarında yapabiliriz.

(b) $$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 1\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix},$$

$$L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = -1\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix}$$

olsun. O zaman eğer $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, ise x'i S' tabanına göre

$$\mathbf{x} = b_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b_3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Böylece $[\mathbf{x}]_{S'} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ olur.

$$L(\mathbf{x}) = b_1 L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + b_2 L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + b_3 L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$
$$= b_1\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + b_2\begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix} + b_3\begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix},$$

ile tanımlanır, bu yüzden

$$L(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 5b_1 + 5b_3 \\ b_1 + 7b_2 - 6b_3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

olur.

(c) $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$'ü bulmak için önce

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ eşitliğini gerçeklemeliyiz.

Böylece $\left[\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right]_{S'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ olur. Sonra,

$b_1 = 1$, $b_2 = 0$ ve $b_3 = 2$ ifadelerini (1) denkleminde kullanarak,

$$L\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}15\\-11\end{bmatrix}$$

elde ederiz. ■

Örnek 3'te elde edilen lineer dönüşümler R^2 ve R^3 için sıralı tabanlara bağlıdır. Bu yüzden L, (a)'daki gibi ise, o zaman

$$L\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\9\end{bmatrix},$$

olur ki bu, (b)'deki lineer dönüşüm (a)'dakinden farklı olduğu için (c)'de elde edilen cevaptan farklıdır.

Şimdi V_1, n-boyutlu, V_2, m-boyutlu ve V_3, p-boyutlu vektör uzayları olsun. $L_1 : V_1 \to V_2$ ve $L_2 : V_2 \to V_3$ lineer dönüşümler olmak üzere $\mathbf{x} \in V_1$ için $L_2 \circ L_1 : V_1 \to V_3$ bileşke fonksiyonunu $(L_2 \circ L_1)(\mathbf{x}) = L_2(L_1(\mathbf{x}))$ ile tanımlayabiliriz. $L_2 \circ L_1$ bir lineer dönüşümdür. Eğer $L : V \to V$ ise o zaman $L \circ L = L^2$ yazılır.

ÖRNEK 4

$L_1 : R^2 \to R^2$ ve $L_2 : R^2 \to R^2$ dönüşümleri;

$$L_1\left(\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}u_1\\-u_2\end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad L_2\left(\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}u_2\\u_1\end{bmatrix}$$

ile tanımlansın. O zaman,

$$(L_1 \circ L_2)\left(\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}\right) = L_1\left(\begin{bmatrix}u_2\\u_1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}u_2\\-u_1\end{bmatrix},$$

iken

$$(L_2 \circ L_1)\left(\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}\right) = L_2\left(\begin{bmatrix}u_1\\-u_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-u_2\\u_1\end{bmatrix}$$

olur. Bu yüzden $L_1 \circ L_2 \neq L_2 \circ L_1$'dir. ■

Teorem 6.11 V_1, V_2 ve V_3 sırasıyla n-boyutlu, m-boyutlu ve p-boyutlu vektör uzayları olmak üzere $L_1 : V_1 \to V_2$ ve $L_2 : V_2 \to V_3$ lineer dönüşümler olsun. Eğer P, S ve T sırasıyla V_1, V_2 ve V_3 için seçilen sıralı tabanlar ise o zaman $M(L_2 \circ L_1) = M(L_2)M(L_1)$'dir.

İspat

V_1 ve V_2'nin P, S sıralı tabanlarına göre $M(L_1) = A$ ve V_2 ve V_3'ün S, T sıralı tabanlarına göre $M(L_2) = B$ olsun. Herhangi bir $x \in V_1$ vektörü için $[L_1(\mathbf{x})]_S = A[\mathbf{x}]_P$ ve $y \in V_2$ vektörü için $[L_2(\mathbf{y})]_T = B[\mathbf{y}]_S$'dir.

O zaman

$$\begin{aligned}\left[(L_2 \circ L_1)(\mathbf{x})\right]_T &= \left[L_2(L_1(\mathbf{x}))\right]_T \\ &= B\left[L_1(\mathbf{x})\right]_S = B\left(A\left[\mathbf{x}\right]_P\right) = (BA)\left[\mathbf{x}\right]_P\end{aligned}$$

elde edilir.

Bir lineer dönüşüm sıralı tabanlara göre bir tek gösterime sahip olduğundan (Teorem 6.9'a bakınız), $M(L_2 \circ L_1) = BA$ olur ve bu da

$$M(L_2 \circ L_1) = M(L_2)M(L_1)$$

sonucu verir.

Böylece iki lineer dönüşümün bileşkesi, matris gösterimlerin çarpımına karşılık gelir. ■

A ve B matrisleri için AB'nin BA'ya eşit olması gerekmediği için, $L_2 \circ L_1$ lineer dönüşümüyle aynı olmasına gerek olmaması sürpriz değildir.

Eğer $L : V \to V$ tersi olan bir lineer operatör ve eğer A, V için bir S sıralı tabanına göre L'nin bir gösterimi ise, o zaman $L \circ L^{-1}$ birim operatörünün gösterimi I_n birim matrisidir. Böylece, S'ye göre L^{-1}'in gösteriminin A^{-1} olduğu anlamına gelen $M(L)M(L^{-1}) = I_n$ olur.

Anahtar Kelimeler

Lineer dönüşümlerin toplamı
Lineer dönüşümün skalar çarpımı
Lineer dönüşümlerin vektör uzayı
Lineer dönüşümlerin bileşkesi

6.4 Alıştırmalar

1. L_1, L_2 ve L, V'den W'ye lineer dönüşümler olsun. Buna göre aşağıdakileri ispatlayınız:

(a) $L_1 \boxplus L_2$ V'den W'ye bir lineer dönüşümdür.

(b) Eğer c bir reel sayı ise, o zaman $c \boxdot L$ V'den W'ye bir lineer dönüşümdür.

(c) Eğer A, V' ve W için sırasıyla S ve T sıralı tabanlarına göre L'nin gösterimi ise, o zaman cA, S ve T'ye göre $c \boxdot L$'nin gösterimidir. Burada c bir reel sayıdır.

2. V'den W'ye bütün dönüşümlerin cümlesi U ve her $x \in V$ için $O(x) = O_W$ ile tanımlanan sıfır lineer dönüşümü de O: $V \longrightarrow W$ olsun.

(a) Herhangi $L \in U$ için $O \boxplus L = L \boxplus O = L$ olduğunu ispatlayınız.

(b) Eğer $L \in U$ ise $L \boxplus (-1) \boxdot L) = O$ olduğunu gösteriniz.

3. $L(\mathbf{e}_1^T) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, L_2(\mathbf{e}_1^T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$,
$L_1(\mathbf{e}_2^T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $L_2(\mathbf{e}_2^T) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$,
$L_1(\mathbf{e}_3^T) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, L_2(\mathbf{e}_3^T) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$,
olacak şekilde $L_1 : R_3 \longrightarrow R_3$ ve $L_2 : R_3 \longrightarrow R_3$ lineer dönüşümleri verilsin. Burada $S = \{\mathbf{e}_1^T, \mathbf{e}_2^T, \mathbf{e}_3^T\}$ R_3 için doğal tabandır. Buna göre aşağıdakileri bulunuz.

(a) $(L_1 \boxplus L_2)$ $([u_1 \quad u_2 \quad u_3])$

(b) $(L_1 \boxplus L_2)([2 \quad 1 \quad -3])$

(c) S'ye göre $L_1 \boxplus L_2$'nin gösterimi

(d) $(-2 \boxdot L_1)([u_1 \quad u_2 \quad u_3])$

(e) $(-2 \boxdot L_1) \boxplus (4 \boxdot L_2)([2 \quad 1 \quad -3])$

(f) S'ye göre $(-2 \boxdot L_1) \boxplus (4 \boxdot L_2)$'nin gösterimi

4. V'den W'ye bütün lineer dönüşümlerin U cümlesinin $\boxplus$ ve $\boxdot$ işlemleri altında bir vektör uzay olduğunu gösteriniz.

5. $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ ve $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ -2 & -2 & -4 \end{bmatrix}$
olmak üzere, $i = 1, 2$ için, $L_i : R^3 \longrightarrow R_3$ lineer dönüşümü $L_i(x) = A_i(x)$ biçiminde tanımlanmış olsun.

(a) $\mathbf{x} = [3 \quad -2 \quad 1]^T$ için $(L_1 \boxplus L_2)(\mathbf{x})$'i bulunuz.

(b) çek L_1, çek L_2 ve çek $L_1 \cap L_2$ ifadelerini hesaplayınız.

(c) çek $L_1 \cap$ çekL_2 ile çek $(L_1 \boxplus L_2)$ arasındaki ilişki nedir?

6. V_1, V_2 ve V_3 sırasıyla n, m ve p boyutlu vektör uzayları olsun. Aynı zamanda $L_1 : V_1 \longrightarrow V_2$ ve $L_2 : V_2 \longrightarrow V_3$ lineer dönüşümler olmak üzere $L_2 \circ L_1 : V_1 \longrightarrow V_3$'ün bir lineer dönüşüm olduğunu ispatlayınız.

7. ***(Matematik analiz gerekli)*** $L_1(p(t) = p(t)$ ile tanımlı $L_1 : P_1 \longrightarrow P_2$ lineer dönüşümü ve $L_2(p(t) = t^2 p'(t)$ ile tanımlı $L_2 : P_2 \longrightarrow P_3$ lineer dönüşümü olsun. P_1, P_2 ve P_3 için sıralı tabanlar, sırasıyla, $R = \{t + 1, t - 1\}$, $S = \{t^2, t - 1, t + 2\}$ ve $T = \{t^3, t^2 - 1, t, t + 1\}$ olsun.

(a) R ve T'ye göre $L_2 \circ L_1$'in C gösterimini bulunuz.

(b) R ve S'ye göre L_1'in A gösterimini, S ve T'ye göre L_2'nin B gösterimini hesaplayınız. BA matrisinin (a)'da elde edilen C matrisi olduğunu doğrulayınız.

8. L_1, L_2 ve S, Alıştırma 3'teki gibi olsun. Aşağıdakileri bulunuz.

(a) $(L_1 \circ L_2)([u_1 \quad u_2 \quad u_3])$

(b) $(L_2 \circ L_1)([u_1 \quad u_2 \quad u_3])$

(c) $L_1 \circ L_2$'nin S'ye göre gösterimi

(d) $L_2 \circ L_1$'in S'ye göre gösterimi

9. Eğer $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ R^3 için S ve T sıralı tabanlarına göre, $L : R^3 \longrightarrow R^3$ lineer dönüşümünün matris gösterimi ise

(a) $2 \boxdot L$ **b)** $2 \boxdot L \boxplus L \circ L$

lineer dönüşümlerinin S ve T ye göre gösterimini bulunuz.

10. $L_1([u_1 \quad u_2 \quad u_3]) = [u_1 + u_2 \quad u_1 - u_3])$, $L_2([u_1 \quad u_2 \quad u_3]) = [u_1 - u_2 \quad u_3]$ ve $L_3([u_1 \quad u_2 \quad u_3]) = [u_1 \quad u_2 + u_3]$ ile tanımlı L_1, L_2 ve L_3, R_3'ten R_2'ye lineer dönüşümler olsun. R^3'ten R^2'ye bütün lineer dönüşümlerin U vektör uzayında $S = \{L_1, L_2, L_3\}$ cümlesinin lineer bağımsız olduğunu ispatlayınız.

11. Aşağıdakilerin her birisi için V'den W'ya bütün lineer dönüşümlerin U vektör uzayının boyutunu bulunuz.

(a) $V = R^2$, $W = R^3$ **(b)** $V = P_2$, $W = P_1$

(c) $V = M_{21}$, $W = M_{32}$ **(d)** $V = R_3$, $W = R_4$

12. Aşağıdakilerin her birisi için Alıştırma 11'i tekrarlayınız.

(a) $V = W$, $\{\sin t, \cos t\}$ tabanlı bir vektör uzayıdır.

(b) $V = W\{1, t, e^t, te^t\}$ tabanlı bir vektör uzayıdır.

(c) V, tabanı $\{1, t, 2t\}$ olan bir vektör uzayı ve W, tabanı $\{t^2, t, 1\}$ olan bir vektör uzayıdır.

13. V ve W, sırasıyla n ve m boyutlu vektör uzayları olmak üzere bir $A = [a_{ij}]$, $m \times n$ matrisi verilsin. $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, V'nin bir sıralı tabanı ve $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ W'nin bir sıralı tabanı olsun.

$$L(\mathbf{v}_i) = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}\mathbf{w}_k, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \text{ve eğer}$$

$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n$ ise, $L(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i L(\mathbf{v}_i)$ tanımlayalım.

(a) L'nin lineer dönüşüm olduğunu gösteriniz.

(b) A'nın S ve T tabanlarına göre L'nin gösterimi olduğunu gösteriniz.

14. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ olsun. S, R^3 için doğal taban, T, R^2 için doğal taban olsun.

(a) A ile belirlenen $L : R^3 \longrightarrow R^2$ lineer dönüşümünü bulunuz.

(b) $L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right)$ ifadesini bulunuz.

(c) $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$ ifadesini bulunuz.

15. A, Alıştırma 14'teki gibi olsun. P_2 ve P_1 için sırasıyla $S = \{t^2, t, 1\}$ ve $T = \{t, 1\}$ sıralı tabanlarını göz önüne alalım.

(a) A ile belirlenen $L : P_2 \longrightarrow P_1$ lineer dönüşümünü bulunuz.

(b) $L(at^2 + bt + c)$

(c) $L(2t^2 - 5t + 4)$ ifadelerini bulunuz.

16. $L_2 \circ L_1 \neq L_1 \circ L_2$ olacak şekilde $L_1 : R^2 \longrightarrow R^2$, $L_2 : R^2 \longrightarrow R^2$ lineer dönüşümlerini bulunuz.

17. $L^2 = L \circ L = I$ birim operatör olacak şekilde $L : R^2 \longrightarrow R^2$ lineer dönüşümünü bulunuz. Burada $L \neq I$'dır.

18. $L^2 = 0$ ve $L \neq 0$ olacak şekilde $L : R^2 \longrightarrow R^2$ lineer dönüşümünü bulunuz.

19. $L^2 = L$ olacak şekilde, $L \neq I$, $L \neq 0$, $L : R^2 \longrightarrow R^2$ lineer dönüşümünü bulunuz.

20. $L : R^3 \longrightarrow R^3$, Kesim 6.2 Alıştırma 19'da tanımlanan lineer dönüşüm olsun. R^3'ün doğal tabanına göre L^{-1}'i gösteren matrisi bulunuz.

21. $L : R^3 \longrightarrow R^3$, Kesim 6.2 Alıştırma 23'te tanımlanan lineer dönüşüm olsun. R^3'ün doğal tabanına göre L^{-1}'i gösteren matrisi bulunuz.

22. $L : R^3 \longrightarrow R^3$, R^3'ün bir sıralı tabanına göre

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

ile gösterilen, tersi olan bir lineer dönüşüm olsun. S'ye göre L^{-1}'in gösterimini bulunuz.

23. Y'nin bir sıralı S tabanına göre, A matrisi ile gösterilen bir lineer dönüşüm $L : V \to V$ olsun. A^2'nin, S tabanına göre $L^2 = L \circ L$'yi gösterdiğini ispat ediniz. Ayrıca, k bir pozitif tam sayı ise, A^k'nın S tabanına göre $L^k = L \circ L \circ \ldots \circ L$'yi gösterdiğini ispat ediniz.

24. P_1'in bir S sıralı tabanına göre $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ile gösterilen, tersi olan bir lineer dönüşüm olsun. S'ye göre L^{-1}'in gösterimini bulunuz.

6.5 Benzerlik

Kesim 6.3'te, n-boyutlu V vektör uzayından m-boyutlu W vektör uzayına olan bir lineer dönüşümü gösteren matrisin, V ve W'den seçtiğimiz sıralı tabanlara nasıl bağlı olduğunu gördük. Şimdi de bu matrisin, V'nin ve W'nin tabanları değiştirildiğinde nasıl değiştiğini göreceğiz. Basit olması için, bu kesimde $P_{S \leftarrow S'}$ ve $Q_{T \leftarrow T'}$ geçiş matrislerini sırasıyla P ve Q olarak göstereceğiz.

Teorem 6.12 n-boyutlu bir V vektör uzayından m-boyutlu bir W vektör uzayına bir lineer dönüşüm $L : V \to W$ olsun. S''den S'ye geçiş matrisi P olmak üzere $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ve $S' = \{\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \ldots, \mathbf{v}'_n\}$, V'nin sıralı tabanları olsun. T''den T'ye geçiş matrisi Q olmak üzere $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ ve $T' = \{\mathbf{w}'_1, \mathbf{w}'_2, \ldots, \mathbf{w}'_m\}$, W'nin sıralı tabanları olsun. S ve T tabanına göre, L'nin gösterimi $Q^{-1}AP$'dir.

İspat

Kesim 4.8'den, geçiş matrisinin ilk olarak verildiğini hatırlayınız. Eğer P, S''den S'ye geçiş matrisi ve x, V'de bir vektör ise, o zaman

$$[\mathbf{x}]_S = P[\mathbf{x}]_{S'}, \tag{1}$$

olur. Burada P'nin j'inci sütunu, S'ye göre, $\mathbf{v}'_j$'nin $[\mathbf{v}'_j]_S$ koordinat vektörüdür. Benzer olarak Q, T' den T'ye geçiş matrisi ve $\mathbf{y}$, W'den bir vektör ise, o zaman

$$[\mathbf{y}]_T = Q[\mathbf{y}]_{T'}, \tag{2}$$

olur. Burada Q'nun j'inci sütunu, T'ye göre, $\mathbf{w}'_j$'nin $[\mathbf{w}'_j]_T$ koordinat vektörüdür. Eğer A, S ve T'ye göre L'nin gösterimi ise, $\mathbf{x} \in V$ için

$$[L(\mathbf{x})]_T = A[\mathbf{x}]_S \tag{3}$$

olur. (2)'de y yerine $L(x)$ yazılırsa, $[L(\mathbf{x})]_T = Q[L(\mathbf{x})]_{T'}$ elde edilir. Şimdi, önce (3)'ü sonra (1)'i bu son denklemde koyularak,

$$Q[L(\mathbf{x})]_{T'} = AP[\mathbf{x}]_{S'},$$

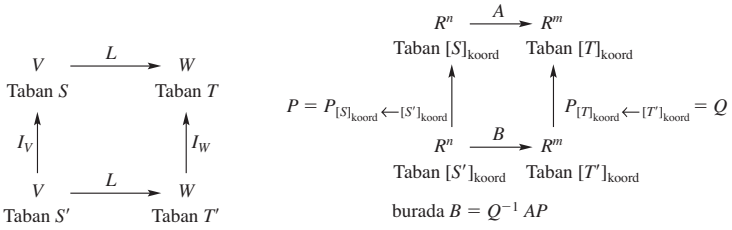
elde ederiz. Böylece

$$[L(\mathbf{x})]_{T'} = Q^{-1}AP[\mathbf{x}]_{S'}$$

bulunur. Bu da S' ve T''ye göre L'nin gösteriminin $Q^{-1}AP$ olması demektir. ■

Teorem 6.12 aşağıdaki diyagramla anlatılabilir: Şekil 6.3(a)'yı göz önüne alalım. Burada, $I_V : V \to V$, V'de birim operatör, ve $I_W : W \to W$, W'de birim operatördür.

$[S]_{\text{koord}}$, S'deki her bir vektörün koordinat vektörlerini içeren bir cümle olsun, ve benzer olarak $[T]_{\text{koord}}$, $[S']_{\text{koord}}$ ve $[T']_{\text{koord}}$ tanımlansın. Matris gösterimi olarak, Şekil 6.3(a), Şekil 6.3(b) haline gelir.



ŞEKİL 6.3 (a) (b)

Teorem 2.13 kullanılarak, farklı taban çiftlerine göre bir lineer dönüşümün iki gösteriminin eşit olduğu görülür.

ÖRNEK 1 $L : R^3 \to R^3$, dönüşümü $L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 + u_3 \\ u_2 - u_3 \end{bmatrix}$ ile tanımlansın.

R^3 için,

$$S = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \quad \text{ve} \quad S' = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

ve, R^2 için,

$$T = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \quad \text{ve} \quad T' = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$$

sıralı tabanlarını göz önüne alalım. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$'nın S ve T'ye göre, L'nin matris gösterimi olduğunu gerçekleyebiliriz.

S''den S'ye P geçiş matrisi, j'inci sütunu S'ye göre S' tabanındaki j'inci vektörünün koordinat vektörü olan matristir. Bu yüzden $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ olur ve T''den T'ye Q geçiş matrisi $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ dür.

Şimdi $Q^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ olur (Aynı zamanda Q^{-1}'i, T'den T''ye geçiş matrisi olarak elde edebiliriz). Sonra S' ve T''ye göre L'nin gösterimi şu şekildedir:

$$B = Q^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

Diğer yandan, S' ve T' tabanlarına göre L'nin gösterimini doğrudan hesaplayabiliriz.

$$L\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} \text{ olduğundan } \left[L\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)\right]_{T'} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$L\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \frac{3}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} \text{ olduğundan } \left[L\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right)\right]_{T'} = \begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$L\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} \text{olduğundan } \left[L\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)\right]_{T'} = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$$

yazılır. Böylece S' ve T''ye göre L'nin gösterimi

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix},$$

olur. Bu da önceki sonuçla bağdaşır. ■

Teorem 6.11'de $V = W$ alarak, Sonuç 6.3 olarak vereceğimiz önemli bir sonucu elde edebiliriz.

Sonuç 6.3 n-boyutlu bir vektör uzayı üzerinde lineer bir dönüşüm $L : V \to V$, olsun. S''den S'ye P geçiş matrisli V'nin sıralı tabanları $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ve $S' = \{\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \ldots, \mathbf{v}'_n\}$ olsun. Eğer A, S'ye göre L'nin gösterimi ise, o zaman S''ye göre L'nin gösterimi $P^{-1}AP$'dir. ■

Bir $L : V \to W$ lineer dönüşümünün rankını (rank$L$), L'yi gösteren herhangi bir matrisin **rankı** olarak tanımlayabiliriz. Eğer A ve B, L'yi gösteriyorsa, o zaman A ve B denk olduğundan bu tanım bir anlam ifade eder (Kesim 2.4'e bakınız). Denk matrislerin aynı ranka sahip olduklarını Kesim 4.9'dan biliyoruz.

Şimdi Teorem 6.6'yı aşağıdaki gibi yeniden ifade edebiliriz: Eğer $L : V \to W$ bir lineer dönüşüm ise o zaman

$$\text{sıfırlık}L + \text{rank}L = \text{boy}V$$

Eğer $L : R^n \to R^m$, $\mathbf{x} \in R^n$ için, A bir $m \times n$ matris olmak üzere $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ ile tanımlı bir lineer dönüşüm ise, o zaman sıfırlıkL = sıfırlıkA sonucu ortaya çıkar (Kesim 4.7'ye bakınız).

Teorem 6.13 $L : V \to W$ bir lineer dönüşüm olsun. O zaman rank$L$ = boy $[L(\mathbf{v})]$ L'dir.

İspat

$N = \text{boy}V$, $m = \text{boy}W$ ve $r = \text{boy}(L(\mathbf{v}))$ olsun. O zaman, Teorem 6.6'dan, $\text{boy}(\text{çek}L) = n - r$'dir. çek$L$'nin bir tabanı $\mathbf{v}_{r+1}, \mathbf{v}_{r+2}, \ldots, \mathbf{v}_n$ olsun. Teorem 4.11 ile, $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, L'nin bir tabanı olacak şekilde V'de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ vektörleri vardır. $\mathbf{w}_1 = L(\mathbf{v}_1)$, $\mathbf{w}_2 = L(\mathbf{v}_2)$, $\ldots$, $\mathbf{w}_r = L(\mathbf{v}_1)$ vektörleri $L(\mathbf{v})$'nin bir tabanını oluşturur (Açıkça $\mathbf{w}_1,\ldots,$ $\mathbf{w}_r$'ler $L(\mathbf{v})$'yi gerer ve bunlardan r tane vardır, bu yüzden Teorem 4.12 uygulanır). Yine Teorem 4.11 ile, $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r, \mathbf{w}_{r+1}, \ldots, \mathbf{w}_m\}$, W'nin bir tabanı olacak şekilde W'da $\mathbf{w}_{r+1}, \mathbf{w}_{r+2}, \ldots, \mathbf{w}_m$ vektörleri vardır. A, S ve T'ye göre L'yi gösteren $m \times n$ tipinde bir matris olsun. A'nın sütunları (Teorem 6.9) aşağıdaki gibidir:

$$\left[L(\mathbf{v}_i)\right]_T = \left[\mathbf{w}_i\right]_T = \mathbf{e}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, r$$

ve

$$\left[L(\mathbf{v}_j)\right]_T = \left[\mathbf{0}_W\right]_T = \mathbf{0}_{R^m}, \qquad j = r+1, r+2, \ldots, n$$

Böylece

$$A = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

dir. Bu yüzden

$$\text{rank}L = \text{rank}A = r = \text{boy}L(\mathbf{v})$$

olur. ■

TANIM 6.6

Eğer A ve B, $n \times n$ matrisler ve $B = P^{-1}AP$ olacak şekilde singüler olmayan bir P matrisi varsa B, A'ya benzerdir denir.

(Alıştırma 1) B, A'ya benzer ise A'nın da B'ye benzer olduğunu kolayca gösterebiliriz. Bu yüzden "A, B'ye benzerdir" ve "B, A'ya benzerdir" ifadeleri yerine "A ve B benzerdir" ifadesini kullanırız.

Sonuç 6.3'ten bir $L : V \to V$ lineer operatörünün herhangi iki gösteriminin benzer olduğunu anlıyoruz. Bunun tersi olarak, $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ benzer $n \times n$ matrisler ve V'de bir n-boyutlu vektör uzayı olsun (V'yi R^n olarak alabiliriz). A ve B'nin farklı tabanlara göre aynı $L : V \to V$ lineer dönüşümünü gösterdiğini ispatlamak istiyoruz. A ve B benzer olduğundan, singüler olmayan $P = [p_{ij}]$ matrisi için $B = P^{-1}AP$'dir. $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, V'nin sıralı bir tabanı olsun.

Teorem 6.10'un ispatından, S'ye göre A ile gösterilen bir $L : V \to V$ lineer dönüşümünün var olduğunu biliyoruz. Öyleyse

$$\left[L(\mathbf{x})\right]_S = A\left[\mathbf{x}\right]_S \tag{4}$$

dir. B'nin aynı zamanda V'nin bir tabanına göre L'yi gösterdiğini ispatlamak istiyoruz.

$$\mathbf{w}_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\mathbf{v}_i \tag{5}$$

olsun. İlk önce $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$'nin aynı zamanda V'nin de bir tabanı olduğunu göstereceğiz.

$$a_1\mathbf{w}_1 + a_2\mathbf{w}_2 + \cdots + a_n\mathbf{w}_n = \mathbf{0}$$

olsun. O zaman (5) ifadesinden

$$a_1\left(\sum_{i=1}^{n} p_{i1}\mathbf{v}_i\right) + a_2\left(\sum_{i=1}^{n} p_{i2}\mathbf{v}_i\right) + \cdots + a_n\left(\sum_{i=1}^{n} p_{in}\mathbf{v}_i\right) = \mathbf{0}$$

elde ederiz. Bu ifade aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} p_{1j}a_j\right)\mathbf{v}_1 + \left(\sum_{j=1}^{n} p_{2j}a_j\right)\mathbf{v}_2 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{n} p_{nj}a_j\right)\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \qquad (6)$$

S lineer bağımsız olduğundan, (6)'daki katsayıların her biri sıfırdır. Bu yüzden

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}a_j = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

veya buna denk olan

$$P\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

elde edilir. Burada $\mathbf{a} = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]^T$'dir.

Bu, katsayılar matrisi P olan $a_1, a_2, \ldots, a_n$, n-bilinmeyenli n denklemden oluşan bir homogen sistemidir. P singüler olmadığından bu sistemin çözümü sadece aşikar çözümdür. Üstelik (5) denklemi, T'den S'ye geçiş matrisinin P olduğunu gösterir. (Kesim 4.8'e bakınız.) Böylece

$$[\mathbf{x}]_S = P[\mathbf{x}]_T \qquad (7)$$

dir. (7)'de, x yerine $L(x)$ alırsak,

$$[L(\mathbf{x})]_S = P[L(\mathbf{x})]_T$$

(4)'ü kullanarak

$$A[\mathbf{x}]_S = P[L(\mathbf{x})]_T$$

ve (7)'de

$$AP[\mathbf{x}]_T = P[L(\mathbf{x})]_T$$

elde ederiz. Buradan,

$$[L(\mathbf{x})]_T = P^{-1}AP[\mathbf{x}]_T$$

bulunur. Bu da T'ye göre L'nin gösteriminin $B = P^{-1}AP$ olması demektir. Bu sonuçları aşağıdaki teoremle özetleyebiliriz.

Teorem 6.14 V, herhangi bir n-boyutlu vektör uzayı, A ve B, $n \times n$ tipinde matrisler olsun. O zaman A ve B'nin benzer olması için gerek ve yeter şart A ve B'nin, V'nin sıralı iki tabanına göre aynı $L : V \to V$ lineer dönüşümünü göstermesidir. ■

ÖRNEK 2 $L : R_3 \to R_3$ dönüşümü

$$L([u_1 \quad u_2 \quad u_3]) = [2u_1 - u_3 \quad u_1 + u_2 - u_3 \quad u_3]$$

şeklinde tanımlanmış olsun. R_3'ün $S = \{[1\ \ 0\ \ 0],[0\ \ 1\ \ 0],[0\ \ 0\ \ 1]\}$ doğal tabanına göre L'nin gösterimi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Şimdi R_3'te

$$S' = \{[1\ \ 0\ \ 1], [0\ \ 1\ \ 0], [1\ \ 1\ \ 0]\}$$

Sıralı tabanı göz önüne alalım. S''den S'ye P geçiş matrisi $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$'dir. Böylece $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ olur. Bu yüzden S''ye göre L'nin gösterimi şu şekilde olur:

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Aynı sonuç doğrudan da hesaplanabilir. A ve B matrisleri benzerdir. ■

Örnek 2'de elde edilen B'nin köşegen olduğunu gözlemleyiniz. Şimdi bununla ilgili birkaç soru sorabiliriz. Birincisi, $L : V \to V$ verildiğinde, S'ye göre L'nin gösterimi köşegen matris olacak şekilde V'nin bir S tabanını ne zaman seçebiliriz? Örnek 2'de, S' tabanını keyfi seçtik. Eğer L'nin bir gösterimini veren bir tabanı köşegen olacak şekilde seçmezsek, köşegen matrise görünüşte yakın olan bir matrisi veren bir taban seçebilir miyiz? Böyle basit gösterimlere sahip olmakla ne elde ederiz? İlk olarak, eğer A, V'nin sıralı bir S tabanına göre $L : V \to V$'nin gösterimi ise o zaman A^k'nın, S'ye göre $L \circ L \circ L \circ \ldots \circ L = L^k$'nın bir gösterimi olduğunu Kesim 6.4'ten zaten biliyoruz. Şimdi eğer A, B'ye benzerse o zaman B^k'da L^k'yı gösterir. Şüphesiz, eğer B köşegen matris ise o zaman B^k'yı hesaplamak kolaydır: B^k'nın köşegen elemanları k. ıncı mertebeden B'nin elemanlarıdır. Şimdi de A'nın bir köşegen matrise benzer olup olmadığını bulalım. O zaman sabit katsayılı homogen lineer diferensiyel denklem sistemini kolayca çözebiliriz. Bu soruların cevapları Bölüm 7'de detaylı olarak ele alınmaktadır.

Benzer matrisler güzel özelliklere sahiptirler. Örneğin, eğer A ve benzer ise, o zaman $\text{iz}(A) = \text{iz}(B)$'dir (Alıştırma 8). (İz'in tanımı için Kesim 1.3'te Alıştırma 43'e bakınız.) Aynı zamanda, eğer A ve B benzer ise, o zaman A^k ve B^k herhangi bir pozitif k sayısı için benzerdir (Alıştırma 6). Benzer matrisler üzerine son bir sonucu elde ederiz.

Teorem 6.15 Eğer A ve B, $n \times n$ benzer matrisler ise, o zaman $\text{rank}A = \text{rank}B$'dir.

İspat

Teorem 6.14'ten, A ve B'nin farklı tabanlara göre aynı $L : R^n \to R^n$ lineer dönüşümünü gösterdiğini biliyoruz. Bu yüzden rank$A$ = rank$L$ = rank$B$ olur. ■

Anahtar Kelimeler

Geçiş matrisi
Denk gösterimler
Lineer dönüşümün rankı
Benzer matrisler

6.5 Alıştırmalar

1. A, B ve C kare matrisler olsun. Aşağıdakileri gösteriniz.
- **(a)** A, A'ya benzerdir.
- **(b)** Eğer B, A'ya benzer ise o zaman A'da B'ye benzerdir.
- **(c)** C, B'ye benzer ve B'de A'ya benzer ise o zaman C, A'ya benzerdir.

2. L, Kesim 6.3 Alıştırma 3'te tanımlanan lineer dönüşüm olsun.
- **(a)** S''den S'ye P geçiş matrisini bulunuz.
- **(b)** S''den S'ye geçiş matrisini bulunuz ve bunun P^{-1} olduğunu gösteriniz.
- **(c)** T''den T'ye Q geçiş matrisini bulunuz.
- **(d)** T' ve T''ye göre L'nin gösterimini bulunuz.
- **(e)** boy$L(V)$=?

3. Geçiş matrislerini kullanarak Kesim 6.3 Alıştırma 1(d)'yi yapınız.

4. Geçiş matrislerini kullanarak Kesim 6.3'te Alıştırma 8(b)'yi yapınız.

5. $L : R^2 \to R^2$ dönüşümü $L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 \\ -u_2 \end{bmatrix}$ ile tanımlansın.
- **(a)** R^2'nin S doğal tabanına göre L'nin gösterimini bulunuz.
- **(b)** $T = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ sıralı tabanına göre L'nin gösterimini bulunuz.
- **(c)** (a) ve (b)'de elde edilen matrislerin benzer olduğunu gösteriniz.
- **(d)** (a) ve (b)'de elde edilen matrislerin rankının eşit olduğunu gösteriniz.

6. Eğer A ve B benzer matrisler ise o zaman herhangi bir pozitif k tamsayısı için A^k ve B^k'nın benzer olduğunu gösteriniz. (*Yol gösterme:* $B = P^{-1}AP$ ise, $B^2 = BB$'yi bulunuz.)

7. A ve B benzer matrisleri ise A^T ve B^T'nin benzer olduğunu gösteriniz.

8. A ve B benzer matrisler ise iz(A) = iz(B) olduğunu ispatlayınız. (*Yol gösterme:* İz'in tanımı için Kesim 1.3 Alıştırma 43'e bakınız.)

9. S = {[1 0 −1], [0 2 0], [1 2 3]} ve T={[1 −1], [2 0]} sıralı tabanlarına göre gösterimi $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ olan bir lineer dönüşüm $L : R_3 \to R_2$ olsun. R_3 ve R_2'nin doğal tabanlarına göre L'nin gösterimini bulunuz.

10. $L : R^3 \to R^3$ lineer dönüşümünün R^3'ün doğal tabanına göre gösterimi $A = [a_{ij}]$ olsun.

$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere L'yi gösteren $B = P^{-1}AP$ matrisine göre R^3'ün bir T tabanını bulunuz. (*Yol gösterme:* Alıştırma 2'nin çözümüne bakınız.)

11. A ve B matrisleri benzer olsun.
- **(a)** A singüler değilse, B'nin de singüler olmadığını gösteriniz.
- **(b)** A singüler değilse, o zaman A^{-1} ve B^{-1}'in benzer olduğunu gösteriniz.

12. Geçiş matrislerini kullanarak Kesim 6.3 Alıştırma 13(b)'yi yapınız.

13. Geçiş matrislerini kullanarak Kesim 6.3 Alıştırma 17(b)'yi yapınız.

14. Geçiş matrislerini kullanarak Kesim 6.3 Alıştırma 10 (b)'yi yapınız.

15. Geçiş matrislerini kullanarak Kesim 6.3 Alıştırma 20(b)'yi yapınız.

16. A ve O matrislerinin benzer olması için gerek ve yeter şart $A = O$ olmasıdır. İspatlayınız.

17. A ve B matrisleri benzer ise, $\det(A) = \det(B)$ olduğunu gösteriniz.

6.6 Homogen Koordinatlara Giriş (Seçmeli)

Bilgisayar grafiklerini destekleyen matematik, matris çarpımı ile yakından bağlantılıdır. Hem 2-uzay hem de 3-uzayda dönmeleri, yansımaları veya ölçekleme işlemlerini (genişlemeler veya daralmalar) matris dönüşümleri aracılığıyla gerçekleştiririz. Burada dönüşüm, sırasıyla 2×2 veya 3×3 olan standart A matrisi ile tanımlanır. Dönüşümün etkisi, bir görüntüyü üretmek için, veri cümlesi şeklinde görünen f fonksiyonu şeklinde tanımlanır:

$$f\,(resim) = görüntü.$$

Resmi gösteren veriler tam olarak düzenlendiğinde, f fonksiyonunun işlemi, A matrisi kullanılarak bir matris çarpımı ile gerçekleştirilir:

$$f\,(resim) = A * resim = görüntü$$

Maalesef, genel bir dönüşüm sadece dönmeler, yansımalar ve ölçeklemeleri içermekle kalmaz, ayrıca öteleme veya kaymaları (kullanıldığı yerden yani bir konuma bozulma olmadan resmi ileten) da kapsar. Böyle bir genel dönüşüm, 2×2 veya 3×3 boyutlu birleşik standart matris kullanılarak ifade edilemeyebilir. Ötelemelerde matris çarpımını kullanmak için, bu kesimde anlatacağımız, homogen koordinat kavramını ortaya koyacağız ve resmi gösteren eden verilerin genişletilmiş bir gösterimini elde edeceğiz.

■ 2D ve 3D Dönüşümler

Kesim 1.6 ve 1.7'deki matris dönüşümleri ve bilgisayar grafikleri ile ilgili önceki tartışmalarımızda, karmaşık ilkeleri göstermek için iki boyutlu grafikler kullandık. Bunlar dönmeler (rotasyonlar), yansımalar, ölçeklemeler ve kaymalar içeren, 2D dönüşümler diye adlandırılan R^2 den R^2'ye dönüşümler şeklinde örneklerdir. Matris dönüşümünü gösteren, her bir dönüşümle birleşik 2×2 bir A matrisidir ve $\mathbf{x}$ vektörünün görüntüsüdür. $A\mathbf{x}$ matris çarpımıdır. Birleşik dönüşümler başarılı matris çarpımları ile gerçekleştirilir. Böyle dönüşümlerin bir dizisini gerçekleştirecek tek bir matrisi elde etmek için, ilgili matrislere karşılık gelen çarpımlarını hesaplamamız gerekir.

ÖRNEK 1

2D dönüşümlerle ilgili olan matrisler:

- Birim dönüşümler: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- x-eksenine göre yansıma: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
- y-eksenine göre yansıma: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

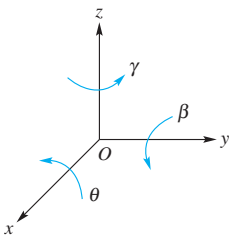
- $y = x$ doğrusuna göre yansıma: $y = x$: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- Q pozitif açısıyla saatin tersi yönünde dönme: θ: $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$
- x-yönünde h ve y-yönünde k ile ölçekleme: $\begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$
- k çarpanı ile x-yönünde kayma: $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- k çarpanı ile y-yönünde kayma: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$ ■

R^3'ten R^3'e matris dönüşümleri için, 3D dönüşümler diye adlandırılan, ilgili A matrisi 3×3'tür. 2D dönüşümlerinde olduğu gibi, bir 3D dönüşüm altında $\mathbf{x}$ vektörünün görüntüsü, $A\mathbf{x}$ matris çarpımıdır; birleşik dönüşümler başarılı matris çarpımları ile gerçekleştirilir. Bazı 3D dönüşümlerle iş birliğinde olan matrisler Örnek 2'de verilmiştir.

ÖRNEK 2

3D dönüşümlerle ilgili olan matrisler:

- Birim dönüşümler: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- x-yönünde h, y-yönünde k, z-yönünde m ile ölçekleme:
$$\begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$
- x-ekseni etrafında pozitif bir θ açısı ile saatin tersi yönünde dönme:
$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$
- y-ekseni etrafında pozitif bir β açısı ile saatin tersi yönünde dönme:
$$R_y = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$
- z-ekseni etrafında pozitif bir γ açısı ile saatin tersi yönünde dönme:
$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ■



ŞEKİL 6.4

Örnek 2'de verilen dönmeler için matrisler, sağ el koordinat sistemi ile birbirini tutar. Bunu Şekil 6.4'te gösterdik. 2D ve 3D dönüşümler, matris dönüşümleri olduğundan, lineer dönüşümlerdir.

■ Ötelemeler

Bir nokta cümlesi ile tanımlanan nokta, vektör veya nesnenin ötelemesi, aynı Δx büyüklüğünü her bir x-koordinatına, aynı Δy büyüklüğünü her bir y-koordinatına ve üç boyutta aynı Δz'nin eşit olma zorunluluğunun olmadığını ve pozitif, negatif veya sıfır olabileceğini vurgulayalım. Bunu R^3'te bir nokta için Şekil 6.5'te gösterelim. Burada ötelenen noktanın koordinatları

$$(x^*, y^*, z^*) = (x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$$

olur. (x, y, z) noktası aynı zamanda

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

vektörü olarak ta yorumlanabilir. Eğer

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix},$$

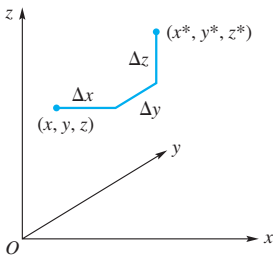
vektörünü tanımlarsak, o zaman $\mathbf{v}$ vektörünü $\mathbf{t}$ vektörü ile ötelemesi,

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{v} + \mathbf{t} = \begin{bmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ z + t_z \end{bmatrix}$$

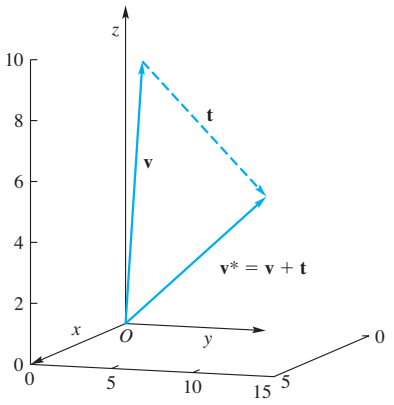
olur. Şekil 6.6'da

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}^* = \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \\ 5 \end{bmatrix}$$

gösterilmiştir.



ŞEKİL 6.5

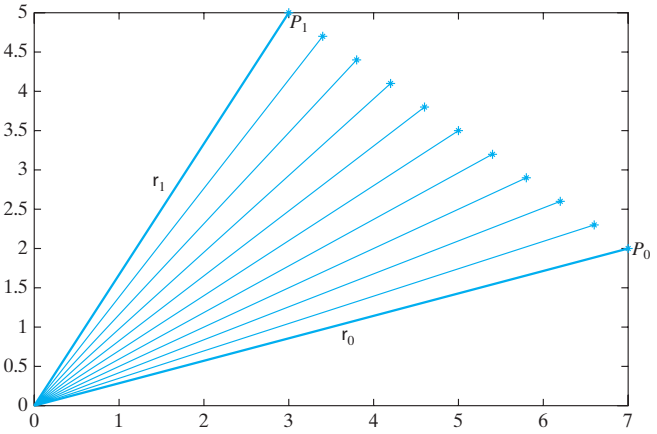


ŞEKİL 6.6

Bir doğru parçası iki P_0 ve P_1 noktasını birleştirir ve $sP_1 + (1 - s)P_0$ ifadesi ile verilen nokta cümlesi olarak görülebilir. Burada s, $0 \le s \le 1$ olan bir parametredir. Eğer orijinden P_0'a olan vektör $\mathbf{r}_0$ ve orijinden P_1'e olan vektör $\mathbf{r}_1$ ise, o zaman

$$s\mathbf{r}_1 + (1 - s)\mathbf{r}_0, \quad 0 \le s \le 1$$

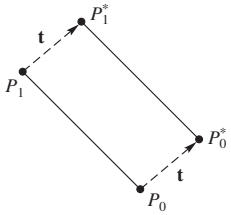
Lineer kombinasyonu, P_0 ve P_1 arasındaki doğru parçasını süpürür. Bunu 2-uzayda, Şekil 6.7'de gösterelim. Burada *, P_0 ve P_1 arasındaki doğru parçası üzerindedir.



ŞEKİL 6.7

Bir doğru parçasının ötelemesi uzunluğunu ve yönünü korur. Bir doğru parçasının ötelemesini gerçekleştirmek için, basitçe onun bitim noktalarını öteleriz. 2-uzayda, Şekil 6.7'de gösterildiği gibi, eğer $P_0 = (x_0, y_0)$, $P_1 = (x_1, y_1)$ ve bu noktaları bağlayan doğru parçası

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix},$$



ŞEKİL 6.8

ile öteleniyor ise, o zaman ötelenmiş doğru parçasının bitim noktaları $P_0^* = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ ve $P_1^* = (x_1 + \Delta x, y_1 + \Delta y)$ olur. İlgili vektör ifadesi de $0 \le s \le 1$ için $s\mathbf{r}_1 + (1 - s)\mathbf{r}_0 + \mathbf{t}$ dır. Şekil 6.8'e bakınız. Örnek 1'de verilen listedeki diğer 2D dönüşümlerle ötelemelerin kullanılması Örnek 3'te verilmiştir.

ÖRNEK 3

$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ olsun.

(a) $\mathbf{v}$ vektörünün $y = x$ doğrusuna göre yansımasını bulunuz ve sonra elde edilen vektörü $\mathbf{t}$ ile öteleyiniz.

(b) $\mathbf{v}$ vektörünü $-\frac{1}{2}$ çarpımı ile ölçekleyiniz, sonucu t vektörü ile öteleyiniz ve sonucu orijin etrafında $\frac{\pi}{6}$ radyan açısı kadar döndürünüz.

Çözüm

(a) $y = x$ doğrusuna göre yansımayı tanımlayan matris

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dır. O zaman istenen $\mathbf{w}$ vektörü,

$$\mathbf{w} = A\mathbf{v} + \mathbf{t} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ile verilir. Şekil 6.9(a)'ya bakınız.

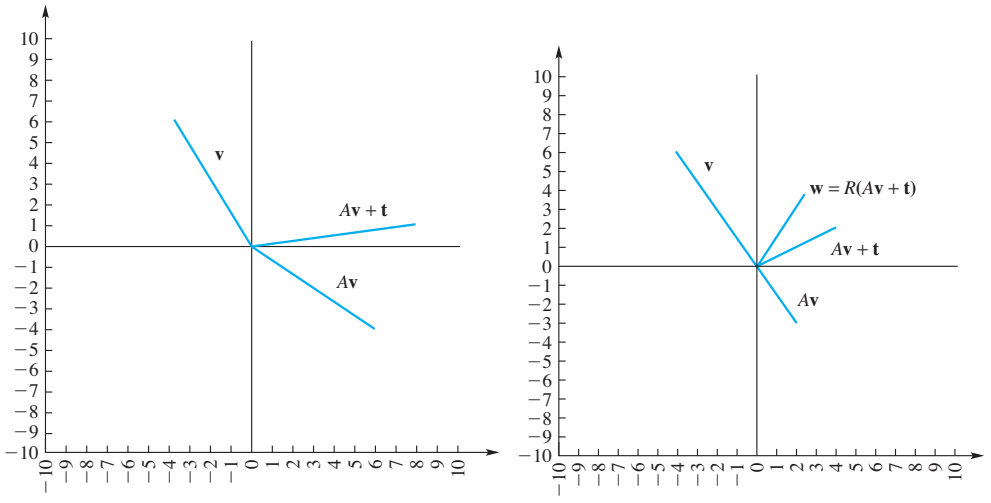
(b) $-\frac{1}{2}$ ile ölçeklemeyi tanımlayan matris

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ve dönmeyi tanımlayan matris

$$R = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{bmatrix}$$

dır. O zaman $\mathbf{w}$ sonuç vektörü $\mathbf{w} = R(A\mathbf{v} + \mathbf{t})$ ile hesaplanır. Şekil 6.9(b)'ye bakınız. ■



(a) (b)

ŞEKİL 6.9

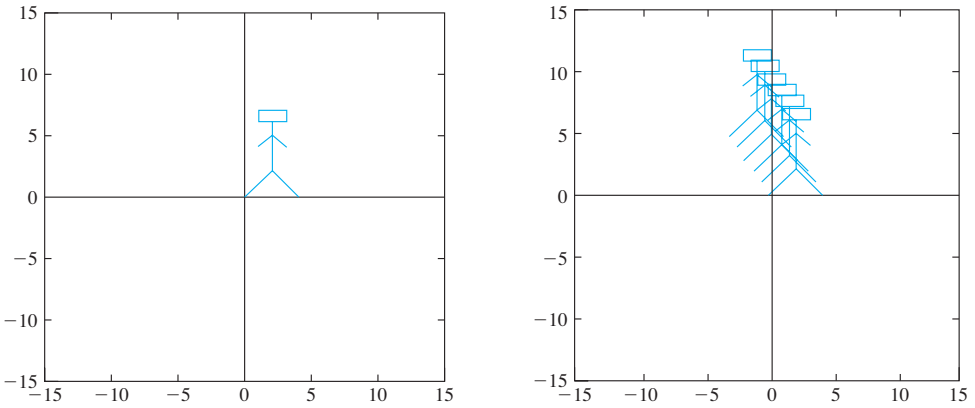
Örnek 3(b)'de, eğer dönmeyi takiben sadece ölçeklemeye gerek duyarsak, $B = RA$ matris çarpımını hesaplarız ve istenen $\mathbf{w}$ vektörünü $\mathbf{w} = B\mathbf{v}$ ile elde ederiz.

ÖRNEK 4

Şekil 6.10(a)'da, bir grup köşe noktaların gösterildiği gibi doğru parçaları ile birleştirilmesi ile tanımlanan, kutubaşlı olarak adlandırılan bir nesne gösterilmiştir. Kutubaşlı

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

vektörü ile ötelemek için, nesnenin her bir köşesini öteleyip yeni köşe noktaları aynı sırada tekrar birleştiriniz. Fakat, ötelemeyi aşağıdaki gibi şeklin bir dizi basamakları şeklinde de gösterebiliriz. Kutu başlı köşelerinin $2 \times n$ matrisi, B olsun. O zaman t vektörü ile kutubaşı ötelemek için, B'nin her bir sütununa t vektörünü ekleriz. Bu da, bir $2 \times n$ B^* matrisinde yeni köşeleri verir. Eğer t vektörünün n tekrarını içeren matris $T = [\mathbf{t} \quad \mathbf{t} \quad \cdots \quad \mathbf{t}]$ ise, o zaman $B^* = B + T$ olur. B^*'de köşeleri bir yol boyunca hareket ettirdiğimizde oluşturacağımız yeni kutubaş için, $0 \le s \le 1$ için $sB^* + (1 - s)B$ parametrik ifadesini kullanırız. Şekil 6.10(b)'de $s = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ için kutu başın öteleme yolundaki hareketi gösterilmiştir. S'nin her bir değeri için, verilen parametrik ifadeyle köşeler işaretlenmiş ve birleştirilmiştir. ■



ŞEKİL 6.10

Maalesef, 2×2 matrisleri kullanılarak bir öteleme bir matris çarpımı ile gerçekleştirilemez. Örnek 1 ve 2'de olduğu gibi, bu, hantal ötelemelerle matris dönüşümlerini birleştirir. Başarılı matris dönüşümlerinin kullanımı, vektör veya nesneye dönüşüm uygulama öncesinde ilgili matrislerin çarpımı ile (doğru sırada, çünkü matris değişmeli değildir) yapılabilir.

Fakat ötelemeler serpiştirildiğinde, bu uygunluk kaybolur. Önceki örnekler düzlemde yani 2-uzayda iken, karşılık gelen davranış 3-uzayda gerçekleşir.

■ Homogen Koordinatlar

Ölçeklemeler, projeksiyonlar ve öteleme ile birbirini düzgün etkileyen rotasyonları yapmak için, çalıştığımız vektör uzayını değiştiririz.* Örnek 1'de belirtildiği gibi, 2D dönüşümler R^2'den bir **v** vektörü alınır ve bir 2×2 matrisle çarpılarak R^2'de bir başka vektör olarak görüntüsü hesaplanır. Basitçe Örnek 2'den, 3D dönüşümler, 3×3 matris kullanılarak bir matris çarpımı oluşturulur. Örnek 3 ve 4'te gösterildiği gibi, ötelemeyi yapmak ve eklemeden kaçınmak için matris çarpımını kullanmak amacı ile vektörlere bir başka bileşeni bitiştirir ve matrisleri bir başka satır ve sütun ile sınırlandırırız. Bu değişim, homogen koordinatları kullanmak içindir. Homogen koordinatları kullanmak için, aşağıdaki tanımları yaparız:

R^2'de bir $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ vektörü, R^3'te $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ vektörü ile tanımlanır. İlk iki bileşen aynıdır, üçüncü bileşen 1'dir. Benzer olarak R^3'te bir

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

vektörü, R^4'te

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

vektörü ile tanımlanır. Eğer

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

homogen koordinatlarda bir nokta olarak göz önüne alınırsa, o zaman sadece (x, y) sıralı ikilisini kullanırız. Benzer olarak homogen koordinatlarda

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

noktası için, (x, y, z) sıralı üçlüsünü kullanırız. Örnek 1'deki matris dönüşümleri ile ilgili her bir A matrisi,

$$\begin{bmatrix} A & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde 3×3 matrisi ile tanımlanır.

*Dört boyutlu vektörleri kullanarak, kolay bir biçimde 3-uzayda dönüşümler gerçekleştirebileceğimizi görebiliriz.

ÖRNEK 5

(a) R^2 için homogen koordinatları kullanırken,

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3×3 matrisi ile y-eksenine göre bir yansıma tanımlanır.

(b) R^2 için homogen koordinatları kullanırken,

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■

3×3 matrisi ile θ açısı ile bir dönme tanımlanır. Örnek 2'de R^3'ten R^3'e matris dönüşümleri ile ilgili her bir A matrisi,

$$\begin{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ A & & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde bir 4×4 matrisi ile tanımlanır.

ÖRNEK 6

(a) R^3 için homogen koordinatları kullanırken,

$$\begin{bmatrix} h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4×4 matrisi ile x, y, z doğrultularında sırasıyla h, k ve m ile bir ölçekleme tanımlıdır.

(b) R^3 için homogen koordinatları kullanırken,

$$\begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■

4×4 matrisi ile z ekseni etrafında γ açısı ile bir dönme tanımlıdır.

Homogen koordinatları kullanırken R^2'de $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$'nin $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$ ile bir ötelemesi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \Delta x \\ y + \Delta y \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

(Üçüncü elemanların eklenmediğine dikkat ediniz.) Bu öteleme,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3×3 matrisi kullanılarak matris çarpımı ile gerçekleştirilebilir.

O zaman

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \Delta x \\ y + \Delta y \\ 1 \end{bmatrix}$$

olur. Basitçe R^3'te bir öteleme,

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ 1 \end{bmatrix},$$

homogen koordinatlar kullanılarak,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & 0 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi ile çarpılarak oluşturulur.

Böylece homogen koordinatlar, hem R^2'de hem de R^3'te ölçekleme, dik izdüşüm, dönme ve ötelemelerin birleşimini oluşturmada başarılı matris çarpımlarını kullanmak için kolay bir yol sağlar.

ÖRNEK 7 Homogen koordinatları kullanarak, Örnek 3(b)'deki işlemler birleşimi, $\mathbf{w} = R(T(A\mathbf{v})) = RT\,A\mathbf{v}$ şeklinde ifade edilebilir. Burada

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vektörünün ötelenmesi ile bulunan homogen biçimdeki matris,

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. Burada $\mathbf{v}$, A ve R'de homogen biçimde ifade edilmektedir. (RTA matrisini oluşturunuz ve sonucu doğrulayınız.)

ÖRNEK 8 Düzlemde sol alt köşede orijinde birim kare, S olsun. S, saatin tersi yönünde 45° ($\pi/4$ radyan) ile döndürülüyor ve sonra $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektörü ile öteleniyor. Bu dönüşümlerin birleşimi oluşturan, homogen şekildeki 3×3 matrisi bulmak için, R dönme matrisini hesaplarız ve T öteleme

matrisi ile (soldan) çarparız. Böylece

$$M = TR = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) & 0 \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

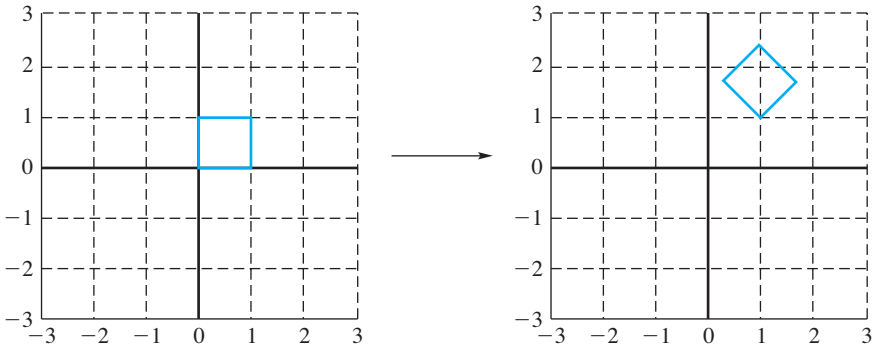
olur. Eğer S,

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

matrisinin sütunları şeklinde düzenlenen, homogen biçimde köşelerinin koordinatları ile tanımlanır ise, o zaman birim karenin görüntüsü, MQ matris çarpımı ile verilir. Bu da,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+\sqrt{2}/2 & 1 & 1-\sqrt{2}/2 \\ 1 & 1+\sqrt{2}/2 & 1+\sqrt{2} & 1+\sqrt{2}/2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

olur. Şekil 6.11'de dönüşümün sonucu gösterilmiştir. ■

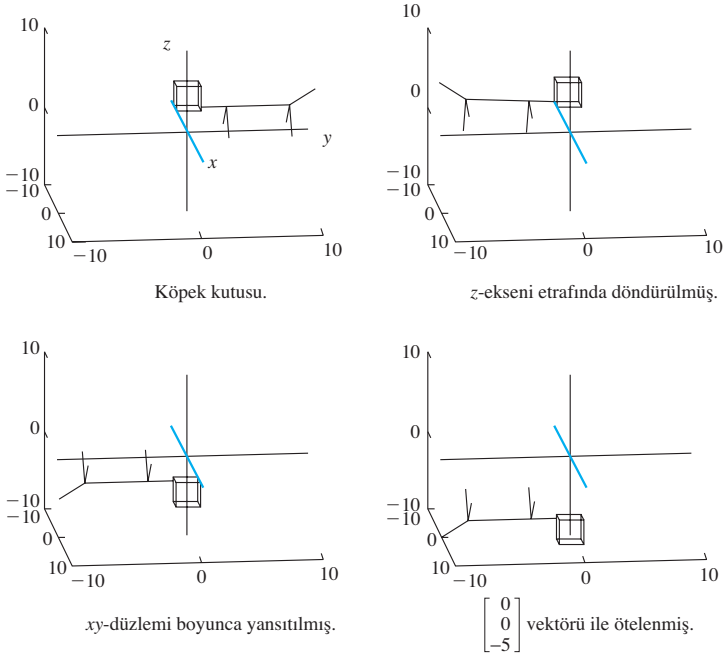


Birim kare.

M matrisi ile dönüşüm kullanılarak görüntüsü

ŞEKİL 6.11

ÖRNEK 9 Şekil 6.12'de, 3-uzayda doğru parçaları ile birleştirilmiş bir grup köşe noktası ile tanımlı, kutu başlı köpek olarak isimlendirilen bir nesne gösterilmiştir. Başarılı çerçevelerde, z-ekseni etrafında döndürülen, sonra xy-düzlemine göre yansıtılan ve son olarak $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$ vektörü ile ötelenen kutu başlı köpeğin birleşik görüntüleri görülmektedir.



ŞEKİL 6.12

Şekil 6.12'deki çerçeveler dizisi, 3-uzayda vektörler için homogen koordinat gösterimleri kullanılarak ve dönme, yansıma ve ötelemeyi gerçekleyen uygun R, F ve T dönüşüm matrislerini çarparak elde edilmiştir. Burada,

$$R = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■

şeklinde tanımlanır.

Anahtar Kelimeler

Görüntü
2D dönüşümler
Yansıma
Dönme
Ölçekleme
Kayma
3D dönüşümler
Öteleme
Homogen koordinatlar
Geometrik tarama
Vida dönüşümü

6.6 Alıştırmalar

1. Örnek 8'e bakınız.

(a) İlk önce ötelemeyi ve sonra dönmeyi gerçekleyen homogen biçimde M matrisini bulunuz.

(b) Bir koordinat düzleminde S birim kareyi ve ikinci bir koordinat düzleminde M matrisiyle gösterilen dönüşüm ile onun görüntüsünü çiziniz.

(c) Şekil 6.11'de gösterilen ve (b) şıkkında bulunan görüntüler aynı mı? Nedenini açıklayınız.

2. $S = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin sütunları, düzlemde bir üçgenin köşe koordinatlarının homogen şekli olsun. Şeklin kapalı bir bölgede olduğunu gösteren, birinci ve sonuncu sütunların aynı olduğuna dikkat ediniz.

(a) Bir koordinat düzleminde, S ile bulunan üçgeni çiziniz. Köşelerini düzgün doğru parçalarıyla birleştiriniz.

(b) S ile bulunan üçgen, hem x- hem de y-yönünde $\frac{1}{2}$ ile ölçekleniyor. Sonra $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ile öteleniyor. Ölçeklemeyi ve sonra ötelemeyi gerçekleyen birleşik dönüşümleri gösteren homogen şekildeki 3×3 M matrisini bulunuz.

(c) (b) şıkkındaki M matrisini kullanarak üçgenin görüntüsünü bulunuz ve bir koordinat düzleminde çiziniz.

(d) Önce ötelemeyi sonra ölçeklemeyi gerçekleyen homogen şekildeki Q matrisini bulunuz.

(e) (d) şıkkında bulduğunuz Q matrisini kullanarak üçgenin görüntüsünü bulunuz ve bir koordinat düzleminde çiziniz.

(f) (c) ve (e) şıkkındaki görüntüler aynı mı? Nedenini açıklayınız.

3. $S = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin sütunları, düzlemde bir üçgenin köşe koordinatlarının homogen şekli olsun. Şeklin kapalı bir bölgede olduğunu gösteren, birinci ve sonuncu sütunların aynı olduğuna dikkat ediniz.

(a) Bir koordinat düzleminde, S ile bulunan üçgeni çiziniz. Köşelerini düzgün doğru parçalarıyla birleştiriniz.

(b) S ile bulunan üçgen, saatin tersi yönünde 30^o döndürülüyor ve sonra yine saatin tersi yönünde 90^o döndürülüyor. Bu iki rotasyonun bileşik dönüşümünü gösteren homogen biçimdeki 3×3 M matrisini bulunuz.

(c) (b) şıkkındaki M matrisini kullanarak üçgenin görüntüsünü bulunuz ve bir koordinat düzleminde çiziniz.

(d) Önce 90^o döndürmeyi ve sonra 30^o döndürmeyi gerçekleyerek homogen biçimdeki Q matrisini bulunuz.

(e) Üçgenin görüntüsünü bulmak için (d)'den Q matrisini kullanınız.bulunuz ve bir koordinat düzleminde çiziniz.

(f) (c) ve (e) şıkkındaki görüntüler aynı mı? Nedenini açıklayınız.

4. Bir S düzlem şekli, önce $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ile öteleniyor ve sonra elde edilen şekil $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ ile öteleniyor.

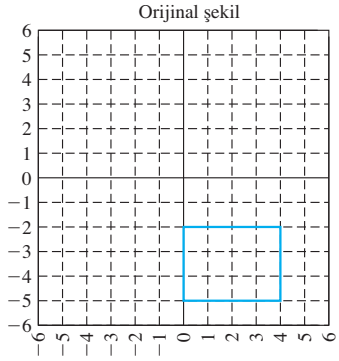
(a) Bu bir birleşimi gerçekleyen homogen şekildeki 3×3 M matrisini bulunuz.

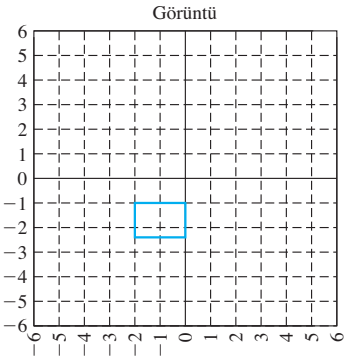
(b) Dönüşümler tersine çevrilebilir mi? Yani (a) şıkkındaki görüntüyü orijinal hale getirecek bir P matrisi bulmak mümkün müdür? Eğer mümkünse, P matrisini bulunuz. P'nin yapısını açıklayınız.

5. 3×3 tipinde bir A matrisi; homogen şekilde bir düzlem şeklini x-eksenine göre yansıtan bir matris, bir B matrisi de; bir düzlem şeklini $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ vektörü ile öteleyen homogen şekilde bir 3×3 matris olsun. Dönüşümlerin gerçekleşme sırası ne olursa olsun, görüntü aynı olur mu? Açıklayınız.

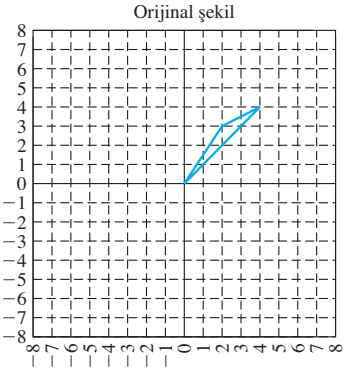
6. Bir düzlem şeklini $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$ ile öteleyen homogen şekilde 3×3 matris A ve bir düzlem şeklini $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ vektörü ile öteleyen homogen şekilde 3×3 matris B olsun. Dönüşümlerin gerçekleşme sırası ne olursa olsun, görüntü aynı olur mu? Açıklayınız.

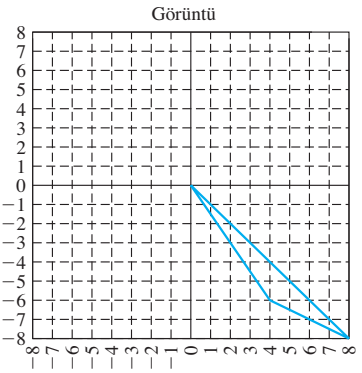
7. Aşağıdaki resimde gösterilen dikdörtgenin görüntüsünü üreten homogen şekildeki matrisi bulunuz.



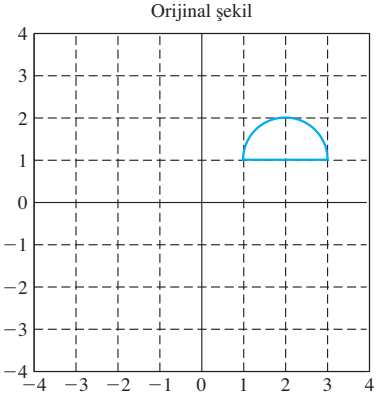


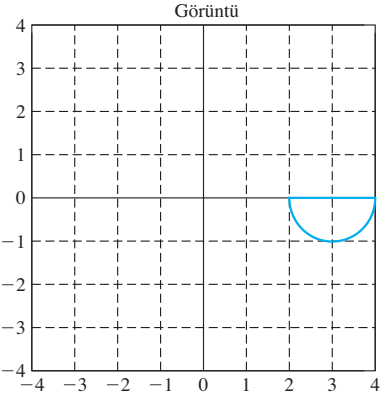
8. Aşağıdaki resimde gösterilen üçgenin görüntüsünü üreten homogen şekildeki matrisi bulunuz.



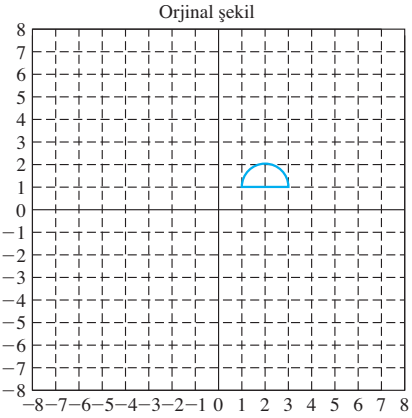


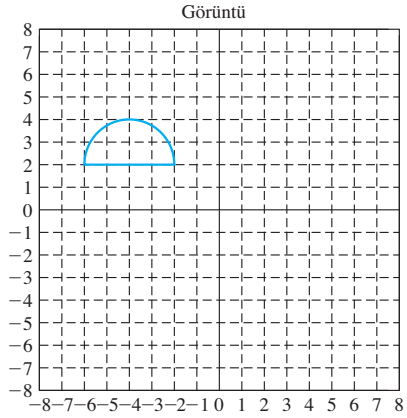
9. Aşağıdaki resimde gösterilen yarı dairenin görüntüsünü üreten homogen şekildeki matrisi bulunuz.



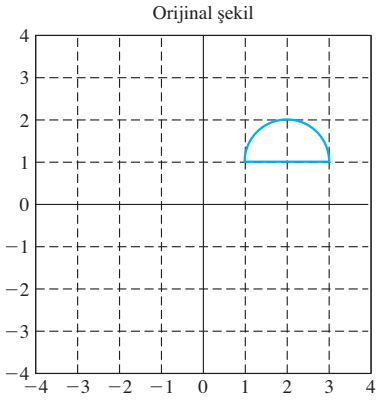


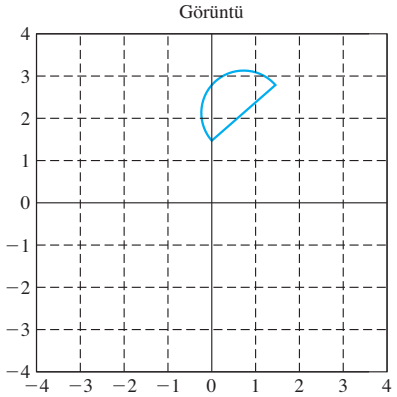
10. Aşağıdaki resimde gösterilen yarı dairenin görüntüsünü üreten homogen şekildeki matrisi bulunuz.



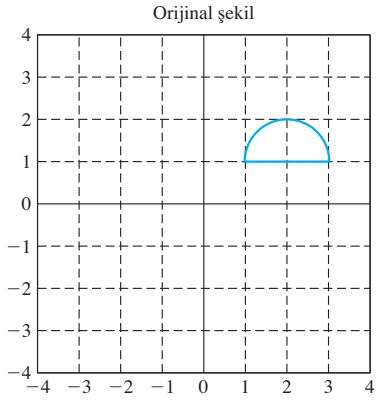


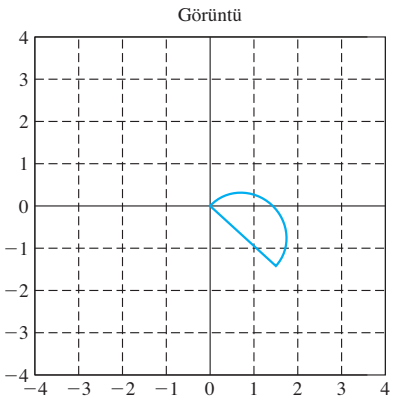
11. Aşağıdaki resimde gösterilen yarı dairenin görüntüsünü üreten homogen şekildeki matrisi bulunuz.





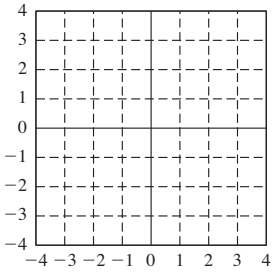
12. Aşağıdaki resimde gösterilen yarı dairenin görüntüsünü üreten homogen şekildeki matrisi bulunuz.





13. Alıştırma 12'deki orijinal resimde gösterilen yarı daire, (1, 1) noktası etrafında saatin ters yönünde 90° döndürülüyor.

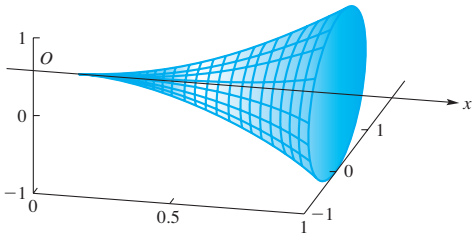
(a) Yarı dairenin görüntüsünü çiziniz.



(b) Dönüşümler kullanarak yarı daireyi orijine ötelemeliyiz, döndürmeliyiz ve sonra orijinal haline geri ötelemeliyiz. Bu dönüşümü gerçekleyen homogen şekildeki 3×3 tipindeki M matrisini bulunuz.

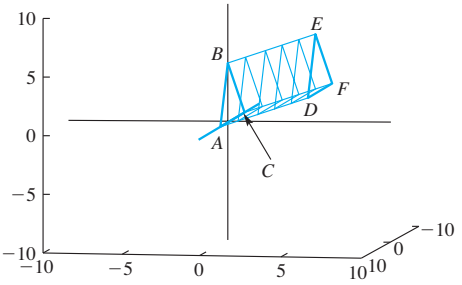
(c) Yarı dairenin yatay çapının bitim noktalarının görüntüsünü hesaplayarak M matrisinizin doğru olduğunu gösteriniz.

14. Taramalar Analizde bir cismin dönel yüzeyi, $[a, b]$ aralığında tanımlı bir $y = f(x)$ eğrisini, dönel cismin ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşturulur. Örneğin, $[0,1]$ aralığında $y = x^2$ eğrisinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzey Şekil 6.13'te gösterilmiştir. Biz eğrinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle "yüzey taranmıştır" diyebiliriz.



ŞEKİL 6.13

Bir şeklin birleşik dönüşümlerinin sürekli bir dizisi, bir geometrik tarama üretmek demektir. Uygulanan dönüşümler grubuna bir geometrik tarama dönüşümü denir. Şekil 6.14'te, bir üçgensel tüpün taranmış yüzeyi gösterilmiştir. $A(3, 0, 0)$, $B(0, 0, 5)$ ve $C(-6, 0, 0)$ köşelerinden oluşan orijinal üçgen, köşeleri $D(6, 6, 3)$, $E(6, 6, 8)$ ve $F(-3, 6, 3)$ olan bir üçgenle sonlandırılacak şekilde bir tüp taramak üzere ötelenmiştir.



ŞEKİL 6.14

Şekilde, tarama işleminin bazı ara adımları gösterilmiştir. Tüp ABC üçgenini

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vektörü ile öteleyerek oluşturulmuştur. Tüpün son yüzü *DEF* üçgenidir. Şekil 6.14'teki üçgensel tüp, aşağıda verilen W matrisi olan geometrik tarama dönüşümü ile taranmıştır.

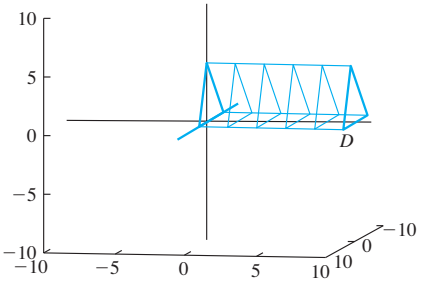
$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & s_{j+1}t_x \\ 0 & 1 & 0 & s_{j+1}t_y \\ 0 & 0 & 1 & s_{j+1}t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Taramanın adımlarını oluşturan matris ifadesi,

$$T_{j+1} = WT_j \qquad (*)$$

Burada $j = 0, 1, 2, 3, 4$ ve $S_{j+1} = (0.2)(j + 1)$ ile verilmiştir. Burada T_0, *ABC* üçgenini, T_5'te *DEF* üçgenini gösterir. S_j parametresinin değerleri, *ABC* üçgeninden *DEF* üçgenine kadarki taramada ara üçgenlerin konumunu ifade eder. Taramadaki adımların sayısı (burada beş tanedir), $s_1 < s_2 < \ldots < s_5 = 1$ gereksinimleri ile j indisinin genişliği ile bulunur.

(a) Şekil 6.15'te, *ABC* üçgeninin y-ekseni boyunca ötelenmesiyle oluşan taranmış yüzey gösterilmiştir. Şekil 6.15'teki D noktası, (3, 10, 0) koordinatındadır. Bu geometrik tarama dönüşümüne karşılık gelen W matrisini bulunuz.

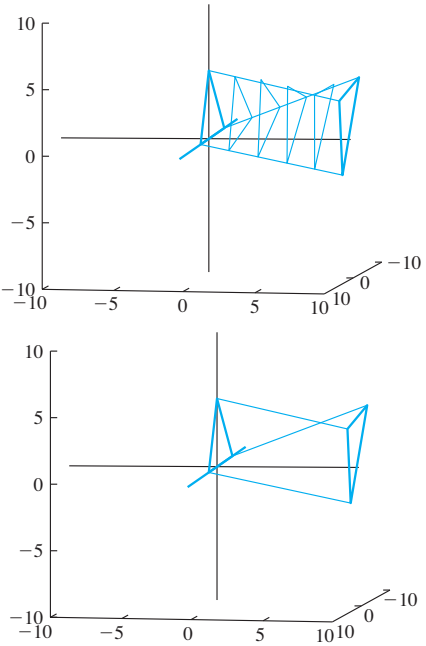


ŞEKİL 6.15

(b) Taramanın her bir adımında parametreli bir dönme uygularsak bir burkulmalı tarama elde ederiz. Eğer T_0 yüzünü y-ekseni etrafında bir θ açısıyla döndürmek istersek T_5 yüzünü elde etmek için taradığımız gibi, (*) denkleminde ortaya çıkan öteleme için kullanılan matrise benzer olarak dönme matrisi

$$\begin{bmatrix} \cos(s_{j+1}\theta) & 0 & \sin(s_{j+1}\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(s_{j+1}\theta) & 0 & \cos(s_{j+1}\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

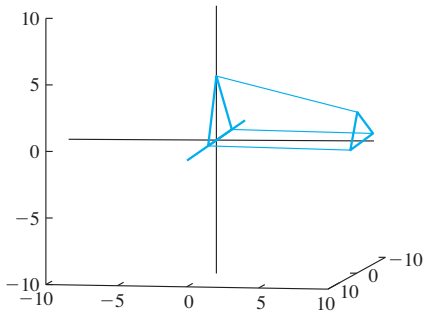
şeklinde olur. Burada $j = 0, 1, 2, 3, 4$ ve $s_{j+1} = (0.2)(j + 1)$. Öteleme taraması ve parametreleştirilmiş dönmenin birleşik dönüşümünün sonucu, $\theta = \pi/4$ kullanılarak Şekil 6.16'da gösterilmiştir. Şekil 6.16(a)'da taramanın adımları, Şekil 6.16(b)'de tüpün son hali gösterilmiştir.



ŞEKİL 6.16

Şekil 6.16'da gösterildiği gibi, bir burkulmaya sahip taramayı oluşturacak bileşik parametreleştirilmiş tarama matrisini bulunuz.

(c) Tarama işlemi, herhangi bir dönüşüm tipi ile kullanılabilir. Şekil 6.17'de gösterildiği gibi, z-doğrultusunda $\frac{1}{2}$ ile ölçeklemeli taramayı oluşturacak parametreleştirilmiş tarama matrisini bulunuz.

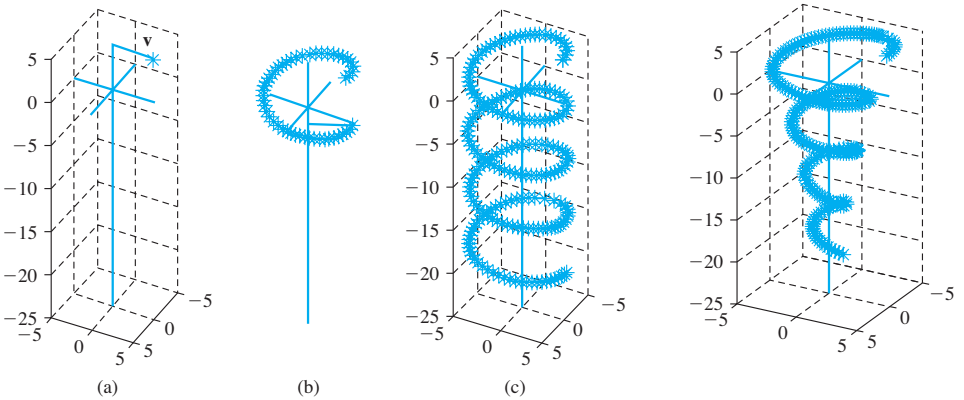


ŞEKİL 6.17

15. (Vida dönüşümü) Bir vida dönüşümü, ötelemenin yönüne paralel bir eksen etrafında bir dönme ile birlikte bir öteleme içeren üç boyutlu bir dönüşümdür. (İki boyutta karşılaştırılabilecek bir şey yoktur.) Eğer dönme bir θ açısı kadarsa, o zaman öteleme $k\theta$ dır. Burada k, sabit bir değerdir. Vida sonucunu göstermek için, açı değerlerini 0 dan θ ya $j = 0, 1, 2, \ldots, n$ için $j = s_j\,\theta$ şeklinde parametreleştiririz. Sonra dönme ve ötelemenin başarılı birleşik dönüşümlerini uygularız. Şekil 6.18(a)'da, bir **v** vektörü alıp, θ_j adımlarında z-ekseni etrafında döndürüyoruz ve $k\theta_j$ adımlarında z-ekseni boyunca öteliyoruz. Burada $k = -1$'dir. Açı $\theta = 8\pi$'dir. İşlemi görmek için, **v** vektörünün görüntülerinin son noktasını işaretlemek için bir * koyuyoruz. Şekil 6.18(b)'de, 2π açı ile izin oluşumu ve şekil 6.18(c)'de de bu dönüşümün vida sonucu görülmektedir.

(a) Şekil 6.19'da gösterilen vida dönüşümünün bir adımı için parametreleştirilmiş matrisi bulunuz.

(b) Şekil 6.19'da, vida dönüşümünün bir adımı için parametreleştirilmiş matris ile beraber bir başka dönüşüm koyduk. Böyle bir davranışı oluşturacak dönüşümün tipini tartışınız.



ŞEKİL 6.18

ŞEKİL 6.19

Ek Alıştırmalar

1. Bir $n \times n$ A matrisi için, A'nın izi, İz(A), A'nın köşegen elemanlarının toplamı ile tanımlanır. (Kesim 1.3'te Alıştırma 43'e bakınız). İz'in, M_{nn}'den tüm reel sayıların vektör uzayına bir lineer dönüşüm tanımladığını ispatlayınız.

2. $L : M_{nn} \longrightarrow M_{nn}$ fonksiyonu $A \in V$ için $L(A) = A^T$ (A'nın transpozu) şeklinde tanımlansın. L, lineer bir dönüşüm müdür? Cevabınızı doğrulayınız.

3. V, tüm $n \times n$ matrislerin vektör uzayı ve $L : V \longrightarrow V$ fonksiyonu, $A \in V$ için

$$L(A) = \begin{cases} A^{-1} & \text{Eğer } A \text{ singüler olmayan} \\ 0 & \text{Eğer } A \text{ singüler} \end{cases}$$

ile tanımlı olsun. L, lineer bir dönüşüm müdür? Cevabınızı doğrulayınız.

4. $L([1 \quad 0 \quad 1]) = [1 \quad 2 \quad 3]$,
$L([0 \quad 1 \quad 2]) = [1 \quad 0 \quad 0]$,
$L([1 \quad 1 \quad 0]) = [1 \quad 0 \quad 1]$.
ve ile verilen $L : R_3 \to R_3$ bir lineer dönüşüm olsun.
(a) $L([4 \quad 1 \quad 0])$?
(b) $L([0 \quad 0 \quad 0])$?
(c) $L([u_1 \quad u_2 \quad u_3])$?

5. $L : P_1 \to P_1$ lineer dönüşümü $L(t-1) = t + 2$ ve $L(t+1) = 2t + 1$ ile tanımlı olsun.
(a) $L(5 + 1) = ?$
(b) $L(at + b)$?

6. $L : P_2 \to P_2$ lineer dönüşümü $L(at^2 + bt + c) = (a + c)t^2 + (b + c)t$ ile tanımlı olsun.
(a) $t^2 - t - 1$ çek L'de midir?
(b) $t^2 + t - 1$ çek L'de midir?
(c) $2t^2 - t$ L'nin görüntü cümlesinde midir?
(d) $t^2 - t + 2$ L'nin görüntü cümlesinde midir?
(e) çek L'nin bir tabanını bulunuz.
(f) Görüntü L'nin bir tabanını bulunuz.

7. $L : P_3 \to P_3$ lineer dönüşümü $L(at^3 + bt^2 + ct + d) = (a - b)t^3 + (c - d)t$ ile tanımlı olsun.
(a) $t^3 + t^2 + t - 1$ çek L'de midir?
(b) $t^3 - t^2 + t - 1$ çek L'de midir?
(c) $3t^3 + t$ L'nin görüntü cümlesinde midir?
(d) $3t^3 - t^2$ L'nin görüntü cümlesinde midir?
(e) çek L'nin bir tabanını bulunuz.
(f) L'nin görüntü cümlesinin bir tabanını bulunuz.

8. $L : M_{22} \to M_{22}$ lineer dönüşümü $L(A) = A^T$ ile tanımlı olsun.
(a) çek L'nin bir tabanını bulunuz.
(b) L'nin görüntü cümlesinin bir tabanını bulunuz.

9. $L : M_{22} \to M_{22}$, $L(A) = A^T$ ile tanımlı olsun. M_{22}'nin tabanları

$$S = \left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

ve

$$T = \left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

olmak üzere
(a) S **(b)** S ve T **(c)** T ve S
(d) T'ye göre L'nin matrislerini bulunuz.

10. Kesim 6.1'de Alıştırma 24'ün L lineer dönüşümü ve V vektör uzayı için, çek L'nin bir tabanını bulunuz.

11. [0,1] aralığında gerçel-değerli sürekli fonksiyonların vektör uzayı V olsun ve $f \in V$ için $L : V \to \mathrm{R}$, $L(f) = f(0)$ ile verilsin.
(a) L'nin lineer dönüşüm olduğunu gösteriniz.
(b) L'nin çekirdeğini tanımlayınız ve çek L'ye ait olan polinom, polinom kesirleri ve trigonometrik fonksiyonların örneklerini veriniz.
(c) L'yi $L(f) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ ile tekrar tanımlarsak, yine de lineer dönüşüm olur mu? Açıklayınız.

12. (Analiz gereklidir) $L : P_1 \to R$ lineer dönüşümü $L(p(t)) = \int_0^1 p(t)\,dt$ ile tanımlansın.
(a) çek L'nin bir tabanını bulunuz.
(b) L'nin görüntü cümlesinin bir tabanını bulunuz.
(c) L için Teorem 6.6'yı gerçekleyiniz.

13. $L : P_2 \to P_2$ lineer dönüşümü $L(at^2 + bt + c) = (a + 2c)t^2 + (b - c)t + (a - c)$ ile tanımlansın. P_2 için sıralı tabanlar $S = \{1, t, t^2\}$ ve $T = \{t^2 - 1, t, t - 1\}$ olsun.
(a) S ve T'ye göre L'nin matrisini bulunuz.
(b) Eğer $p(t) = 2t^2 - 3t + 1$ ise $L(p(t))$ yi, (a) şıkkında elde edilen matrisi kullanarak hesaplayınız.

14. $L : P_1 \to P_1$ lineer dönüşümü $S = \{p_1(t), p_2(t)\}$ tabanına göre $A = \begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ matrisi ile gösterilen bir dönüşüm olsun. Burada $p_1(t) = t - 2$ ve $p_2(t) = t + 1$
(a) $L(p_1(t))$ ve $L(p_2(t))$'yi hesaplayınız.
(b) $[L(p_1(t))]_S$ ve $[L(p_2(t))]_S$'yi hesaplayınız.
(c) $L(t + 2)$ 'yi hesaplayınız.

15. $L : P_3 \to P_3$,
$L(at^3 + bt^2 + ct + d) = 3at^2 + 2bt + c$ ile tanımlı olsun. P_3 için $S = \{t^3, t^2, t, 1\}$ tabanına göre L'nin matrisini bulunuz.

16. R^n'i, standart iç çarpım ile bir iç çarpım uzayı olarak göz önüne alalım ve $L : R^n \rightarrow R^n$, bir lineer operatör olsun. R^n'de herhangi bir $\mathbf{u}$ vektörü için, $\|L(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{u}\|$ olması için gerek ve yeter şart $(L(\mathbf{u}), L(\mathbf{v})) = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$'dır. İspatlayınız. Böyle bir lineer operatör, korumalı **iç çarpımdır.**

17. $L_1 : V \rightarrow V$ ve $L_2 : V \rightarrow V$, V vektör uzayı üzerine lineer dönüşümler olsun.
$(L_1 + L_2)^2 = L_1^2 + 2L_1 \circ L_2 + L_2^2$ olması için gerek ve yeter koşul $L_1 \circ L_2 = L_2 \circ L_1$'dir. İspatlayınız (Kesim 6.4'te Alıştırma 23'e bakınız).

18. $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$, R^n de sıfır olmayan vektörler olsun. Kesim 5.3'te, $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ ve arasındaki θ açısını

$$\cos\theta = \frac{(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|}, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

şeklinde tanımladık. Eğer $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ arasındaki açı $L(\mathbf{u})$ ve $L(\mathbf{v})$ arasındaki açı ile aynı ise $L : R^n \rightarrow R^n$'ye **açı korumalı** denir. Eğer L, iç çarpımı koruyan korumalı (Alıştırma 16'ya bakınız) ise o zaman açıyı koruyandır. İspatlayınız.

19. $L : R^n \rightarrow R^n$, iç çarpımları koruyan bir lineer operatör olsun (Alıştırma 16'ya bakınız) ve R^n için bazı sıralı S tabanlarına göre L'yi gösteren matrisi $n \times n$ A matrisi olsun

(a) çek $L = \{\mathbf{0}\}$ dır. İspatlayınız.
(b) $AA^T = I_n$'dir. İspatlayınız. (*Yol gösterme*: Bölüm 5'teki Ek Alıştırma 17'yi kullanınız)

20. $L : V \rightarrow W$, bir lineer dönüşüm olsun. Eğer $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, V'yi gererse $\{L(\mathbf{v}_1), L(\mathbf{v}_2), \ldots, L(\mathbf{v}_k)\}$'nın da $L(V)$'yi gerdiğini gösteriniz.

21. V, n-boyutlu vektör uzayı ve V'nin bir tabanı $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ olsun. Eğer R^n'de bir vektör

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \text{ ise,}$$

$L(\mathbf{w}) = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$ olacak şekilde bir $L : R^n \rightarrow V$ tanımlansın.
(a) L, bir lineer dönüşümdür
(b) L, bire-birdir
(c) L, örtendir
gösteriniz.

22. V, bir n-boyutlu vektör uzayı olsun. V'den R^1'e tüm lineer dönüşümlerin vektör uzayı, dual uzay olarak adlandırılır ve V^* ile gösterilir. boy V = boy V^*'dır. İspatlayınız. Bu neyi gösterir?

23. Eğer A ve B singüler olmayan matrisler ise, AB ve BA'nın benzer olduğunu gösteriniz.

Bölüm Tekrarı

Doğru veya Yanlış

1. Eğer, $L : V \rightarrow W$ bir lineer dönüşüm ise, o zaman $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ için, $L(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = L(\mathbf{v}_1) - L(\mathbf{v}_2)$ dır.

2. Eğer $L : R^2 \rightarrow R^2$ lineer dönüşümü $L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, ile tanımlı ise, o zaman L birebirdir.

3. $L : V \rightarrow W$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$, çek L'de ise, o zaman span$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$'dir.

4. Eğer $L : V \rightarrow W$ bir lineer dönüşüm ise, o zaman W'de herhangi bir $\mathbf{w}$ vektörü için V'de, $L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ olacak şekilde bir vektör vardır.

5. Eğer $L : R^4 \rightarrow R^3$ bir lineer dönüşüm ise, o zaman boy çek $L = 1$ ve boy$L(\mathbf{v}) = 2$ mümkündür.

6. Bir lineer dönüşümün tersinir olması için gerek ve yeter koşul birebir ve örten olmasıdır.

7. Benzer matrisler, farklı sıralı tabanlara göre aynı lineer dönüşümü gösterir.

8. Eğer bir lineer dönüşüm $L : V \rightarrow W$, örtense o zaman V'nin görüntüsü W'nin bütünüdür.

9. Eğer bir lineer dönüşüm $L : R^3 \rightarrow R^3$ örtense o zaman L, ters çevrilebilirdir.

10. Eğer $L : V \rightarrow W$ bir lineer dönüşüm ise, o zaman V'de lineer bağımsız vektörlerin bir cümlesinin görüntüsü W'de lineer bağımsız bir cümledir.

11. Benzer matrisler, aynı determinanta sahiptir.

12. 3×3 matrislerin determinantı, M_{33}'ten R^1'e bir lineer dönüşüm tanımlar.

Küçük Sınav

1. $L : M_{22} \longrightarrow R$ (dönüşümü)

$$L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a - d + b - c$$

ile tanımlansın. L dönüşümü lineer midir? Açıklayınız.

2. k ile sabitlenmiş reel skalar olsun.

(a) $L_k\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ ka + b \end{bmatrix}$ ile tanımlanan L_k lineer bir dönüşüm olduğunu gösteriniz.

(b) L_k yı gösteren standart matrisi bulunuz.

3. Eğer, $L : R^3 \longrightarrow R^3$ (dönüşümü) $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ ile tanımlansın. Burada A, sıfırdan ve birbirinden farklı elemanlardan oluşan 3×3 tipinde bir matristir.

(a) çek $L\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ olacak şekildeki bir A matrisini bulunuz.

(b) A singüler olmayacak şekilde seçilebilir mi? Açıklayınız.

4. $L : R^3 \longrightarrow R^3$ (dönüşümü)

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ile tanımlansın.

$L\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}\right)$'i bulunuz.

5. $L : R^2 \longrightarrow R^2$

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ 2x_1 + x_2 \end{bmatrix},$$

ile tanımlansın.

S, R^2'nin doğal tabanı ve

$$T = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

olsun.

L'nin T ve S'ye göre gösterimini bulunuz.

6. $L : R^2 \longrightarrow R^2$,

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \\ 2x_1 \end{bmatrix}$$

ile tanımlanan bir lineer dönüşüm olsun. S, R^2 için doğal taban ve diğer bir taban da

$$S' = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

olsun. T, R^3 için bir doğal tabanı ve diğer bir tabanda

$$T' = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

olsun. R^3

(a) S'den S'ye P dönüşüm matrisin bulunuz.

(b) L'nin S ve T'ye göre A gösterimini bulunuz.

(c) T' den T ye Q dönüşüm matrisini bulunuz.

(d) L'nin S' ve T''ye göre B gösterimini bulunuz.

Tartışma Alıştırmaları

1. $L : V \longrightarrow W$ bir lineer dönüşüm olsun. Aşağıdaki ifadenin anlamını açıklayınız.

L lineer dönüşümün hareketi, tamamen dönüşümün V'nin bir tabanı üzerindeki hareketi ile bulunur.

2. V ve W özel sıralı tabanına göre L'yi gösteren $m \times n$ matris A olacak şekilde bir $L : V \longrightarrow W$ lineer dönüşüm olsun. A'nın sıfır uzayı ve L'nin özellikleri arasındaki bağlantıyı açıklayınız.

3. Bir A matrisi ve aynı zamanda $A \neq B$ olacak şekilde bir B matrisi ile gösterilen $L : V \longrightarrow W$ bir lineer dönüşüm olsun. Bunun nasıl mümkün olabileceğini açıklayınız.

4. R^2'de bir öteleme, $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \mathbf{b}$ ile tanımlı R^2'den R^2'ye bir T dönüşümüdür. Burada $\mathbf{v}$; R^2'de herhangi bir vektör ve $\mathbf{b}$; R^2'de sabit bir vektördür.

(a) $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ iken T neden bir lineer dönüşüm değildir? Açıklayınız.

(b) Merkezi orijin olan birim çember üzerinde tüm noktaların cümlesi S olsun. Aşağıdaki her bir b ifadesi için S üzerinde T ötelemesinin uygulanmasının sonucunu dikkatlice açıklayınız.

(i) $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$

(iii) $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

5. A, bir özel 2×2 matris, $\mathbf{v}$, R^2'de herhangi bir vektör ve $\mathbf{b}$ de, R^2'de bir sabit vektör olmak üzere $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} + \mathbf{b}$ ile tanımlı $T : R^2 \longrightarrow R^2$ dönüşümüne afin dönüşümü denir.

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ olsun.
$T(\mathbf{v})$'yi dikkatlice açıklayınız.

(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ olsun.
$T(\mathbf{v})$'yi dikkatlice açıklayınız.

(c) Ne zaman bir afin dönüşüm bir lineer dönüşümdür? Bulunuz.

(d) $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ için bir öteleme ve bir afin dönüşüm arasındaki geometrik farkları açıklayınız.

6. Bir V vektör uzayının bir W vektör uzayına olan herhangi bir dönüşüm lineer dönüşüm değilse bu dönüşüme lineer olmayan dönüşüm denir. $V = W = M_{nn}$ ve V'de bir vektör A olsun. Aşağıdaki dönüşümlerden hangilerinin lineer olmadığını bulunuz.

(a) $T(A) = A^T$

(b) $T(A) = A^2$

(c) $T(A) = A - I_n$

(d) M_{nn}'de sabit bir singüler olmayan P matrisi için $T(A) = P^{-1}AP$

(e) M_{nn}'de B ve C sabit matrisleri için $T(A) = BAC$

(f) $T(A) = \begin{cases} O_n, \text{ eğer } A \text{ singüler ise} \\ A^{-1}, \text{ eğer } A \text{ singüler değilse} \end{cases}$

7. $T : R^n \longrightarrow R^n$, bir lineer olmayan dönüşüm olduğunu düşünün (Tartışma Alıştırma 6'ya bakınız.) T'nin hareketinin, neden tamamen bir $n \times n$ matrisle çarpımı olarak tanımlanamayacağını açıklayınız.

8. R^2'de orijin merkezli birim dairenin üzerinde veya içindeki noktaların cümlesi V olsun. V'de herhangi bir nokta $\mathbf{v} = (a, b)$ ve V'ye en yakın birim dairenin çevresi üzerindeki nokta $T(\mathbf{v})$ olsun. T'nin ne bir lineer ne de bir lineer olmayan dönüşüm olmadığının nedenini açıklayınız.

9. Bir afin dönüşümünün neden bir doğru parçasından bir doğru parçasına dönüşüm olduğunu açıklayınız. (Alıştırma 5'e bakınız.)

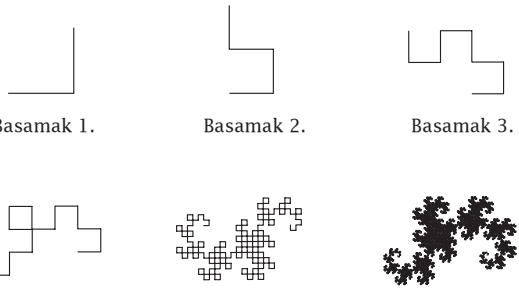
10. Tartışma Alıştırma 9 'dan, afin dönüşümler biraz basit görünür. Fakat, farklı afin dönüşümlerin bileşkeleri, sürpriz bir şekilde fraktallar olarak söylenen karmaşık örneklere neden olabilirler. Basit bir fraktalı fiziksel olarak oluşturmak için, aşağıdaki gibi ilerleyiniz;

(a) 12 inç uzunluğunda ve 1 inç genişliğinde bir kağıt şeridi alınız. Yarısından katlayınız; sonra yarılar arasında bir dik açı oluşacak şekilde açınız. Şekil 6.20'de Adım 1'e bakınız.

(b) Sonra, orijinal şeridi önceki gibi yarıdan katlayınız ve sonra aynı yönde yeniden yarıdan katlayınız. Parçaların arasında dik açı oluşacak şekilde açınız. Bu Adım 2'deki gibi.

(c) Adım 3 için, yarıdan katlama işini başarıyla tekrarlayınız, aynı doğrultuda ve parçalar arasında dik açılar oluşturacak şekilde açınız.

(d) Adım 4'ü oluşturunuz. Şekilde birkaç adım gösterilmiştir. Birçok sayıdaki adımlardan sonra, sonuçtaki şekil ejderhaya benzemektedir. Bu yüzden bu fraktala bir dragon eğrisi denir.



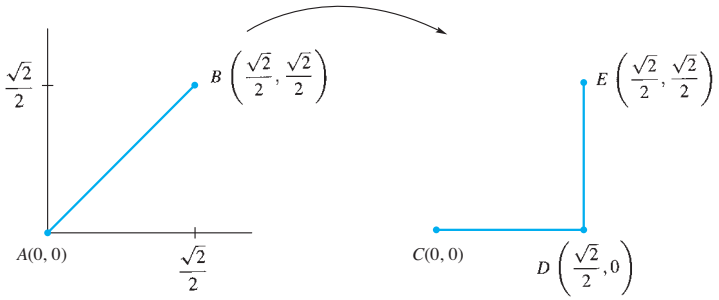
ŞEKİL 6.20

11. Tartışma Alıştırma 10'daki kağıt katlaması yerine lineer cebiri kullanmak için, aşağıdaki yaklaşımı kullanırız: Kağıdın orijinal şeridi, $A(0,0)$ noktasını $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ noktasına bağlayan doğru parçası ile gösterilsin. Birinci katlama, AB hipotenüsüne sahip bir ikizkenar dik üçgenin ayakları ile gösterilir (Şekil 6.21'e bakınız). AB parçasının görüntüsü olan iki doğru parçasının birleşimi olarak görürüz.

(a) AB'den CD'ye dönüşüm yapan bir T_1 afin dönüşümü oluşturunuz (*Yol gösterme*: CD'nin uzunluğu $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ve -45° ile döndürülürken, AB'nin uzunluğu 1'dir).

(b) AB'den DE'ye bir T_2 afin dönüşümü oluşturunuz (Yol gösterme: DE'nin uzunluğu $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ve 45° ile döndürülürken ve bir ötelemeye maruz iken AB'nin uzunluğu 1'dir).

(c) Böylece 1. Adım $T_1(AB)$ ve $T_2(CD)$'nin birleşimidir. 2. Adım $T_1(CD)$, $T_2(CD)$, $T_1(DE)$ ve $T_2(DE)$'nin birleşimidir. Görüntülerin bir birleşimi olarak bir sonraki adımı elde etmek için dragon eğrisinin bir adımının her bir parçasına, her iki T_1 ve T_2 dönüşümü uygulanır. Bu işlemin 10 adımının yapıldığını düşünün. 10. Adım[†] elde etmek için çizilmesi gereken doğru parçalarının toplam sayısını bulunuz.



ŞEKİL 6.21

[†]Dragon eğrisinin dönmesi, AB orijinal parçasının seçimine bağlı olarak değişebilir. Dragon eğrisi üzerine bir web taraması ek bilgi olarak verilecektir. Fraktalar üzerine daha fazla bilgi internette mevcuttur. Tavsiye edilen bir site ise http://math.bu.edu/DYSYS/applets/.

BÖLÜM

7 Özdeğerler ve Özvektörler

7.1 Özdeğerler ve Özvektörler

■ Tanımlar ve Örnekler

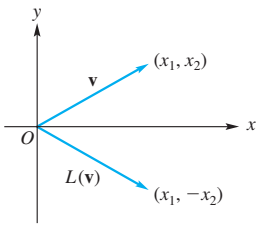
$L : V \to V$, n-boyutlu bir V vektör uzayından V'nin kendi içine tanımlı bir lineer dönüşüm (V üzerinde bir lineer operatör) olsun. O halde L, V'deki herhangi bir $\mathbf{v}$ vektörünü V'deki başka bir $L(\mathbf{v})$ vektörüne eşleyecektir. $L(\mathbf{0})$'ın $\mathbf{v}$'nin herhangi bir katına eşit olup olmadığı sorusuna çeşitli uygulama alanlarında çok sık karşılaşılır. V vektör uzayının R^n ya da C^n olması durumunda, bu soru $L(\mathbf{v})$'nin $\mathbf{v}$'ye paralel olup olamayacağını belirlemeye dönüşür. Eğer $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ise, o zaman $L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ olur, böylece $L(\mathbf{0})$ vektörü $\mathbf{0}$ vektörünün herhangi bir katı olup $\mathbf{0}$ vektörüne paraleldir. Bu yüzden bizim V'nin yalnızca sıfırdan farklı vektörlerini göz önüne almamız gerekir.

ÖRNEK 1

x-eksenine göre bir yansıma olan $L : R^2 \to R^2$ lineer dönüşümü

$$L(\mathbf{v}) = L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. Bunu Kesim 1.6'daki Örnek 4'te göz önüne almıştık. Şekil 7.1'e bakınız.



ŞEKİL 7.1

Eğer $L(\mathbf{v})$'nin sıfırdan farklı bir $\mathbf{v}$ vektörüne paralel olmasını istiyorsak

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

olmalıdır, Burada λ herhangi bir skalardır. Böylece

$$\lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{aligned} \lambda x_1 &= x_1 \\ \lambda x_2 &= -x_2 \end{aligned}$$

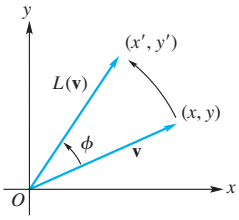
dir. Öte yandan, $\mathbf{v}$ vektörü sıfırdan farklı olduğundan, x_1 ve x_2'nin her ikisi birden sıfır olamaz. Eğer $x_1 \neq 0$ ise o zaman birinci denklemden $\lambda = 1$ ve ikinci denklemden de $x_2 = 0$ elde ederiz. Böylece $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$, $r \neq 0$, olur. Bu da x-ekseni boyunca herhangi bir vektördür. Eğer $x_2 \neq 0$ ise, o zaman da ikinci denklemden $\lambda = -1$ ve birinci denklemden de $x_1 = 0$ buluruz. Böylece $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix}$ $s \neq 0$, olur. Bu da y-ekseni boyunca herhangi bir vektörü gösterir. Bu yüzden, x-ekseni veya y-ekseni boyunca herhangi bir $\mathbf{v}$ vektörü için, $L(\mathbf{v})$ vektörü $\mathbf{v}$ vektörüne paralel olacaktır. ■

ÖRNEK 2

$L : R^2 \to R^2$ lineer operatörü ϕ, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, Kesim 1.6'daki Örnek 8'de tanımlandığı gibi, saat yönünün tersinde bir açı olmak üzere

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

şeklinde bir dönme olarak tanımlansın. Şekil 7.2'ye bakınız.



ŞEKİL 7.2

Eğer $\phi \neq 0$ ve $\phi \neq \pi$ ise o zaman her $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ vektörü için, $L(\mathbf{v})$'nin yönü $\mathbf{v}$'nin yönünden farklı olur. Böylece $L(\mathbf{v})$ ile $\mathbf{v}$ hiçbir zaman paralel olmazlar. Eğer $\phi = 0$ ise, bu durumda $L(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ olacaktır (doğrulayınız), bu da $L(\mathbf{v})$ ile $\mathbf{v}$'nin aynı yönde ve bundan dolayı da paralel olmaları demektir. Eğer $\phi = \pi$ olursa o zaman $L(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$ olacaktır (doğrulayınız). Böylece $L(\mathbf{v})$ ile $\mathbf{v}$'nin yönleri zıttır ve bundan dolayı da paraleldirler. ■

Örnek 1 ve 2'den de anlaşıldığı gibi, verilen bir $L : V \to V$ lineer operatörü tarafından $\mathbf{v}$'nin herhangi bir katına eşleştirilen n-boyutlu bir V vektör uzayındaki bütün $\mathbf{v}$ vektörlerini belirleme problemi basit görünmemektedir. Şimdi bu önemli problemi incelemek için birkaç terminolojiyi açık ve kesin bir biçimde ifade edelim.

TANIM 7.1

$L : V \to V$, n-boyutlu bir V vektör uzayından V'nin kendi içine tanımlı bir lineer dönüşüm (V üzerinde bir lineer operatör) olsun. Eğer V'nin sıfırdan farklı herhangi bir $\mathbf{x}$ vektörü için

$$L(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x} \tag{1}$$

ise, bu durumda λ sayısına L'nin bir **özdeğer**'i denir. (1) denklemini sağlayan sıfırdan farklı her $\mathbf{x}$ vektörüne de L'nin, λ **özdeğerine karşılık gelen**, bir **özvektör**'ü denir. *Özdeğer* birleşik bir kelimedir.

(Almanca'daki *öz* kelimesi, İngilizce'de *has* anlamına gelir). Özdeğerler aynı zamanda **has değerler**, **karakteristik değerler** veya **gizil değerler** olarak da adlandırılır. Bundan dolayı özvektörler de **has vektörler** vs, olarak adlandırılırlar.

Uyarı Tanım 7.1'de geçen λ sayısı reel veya karmaşık, $\mathbf{x}$ vektörü de reel veya karmaşık bileşenlere sahip olabilir.

Tanım 7.1'deki $\mathbf{x}$ vektörünün sıfırdan farklı olduğunu kabul etmemiş olsaydık, bu durumda $L(\mathbf{0}) = \mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$ olduğundan, *her* λ sayısı bir özdeğer olacaktı. Böyle bir tanım ilginç olmazdı. Bu sebeple $\mathbf{x}$ vektörünün sıfırdan farklı olması gerektiği konusunda ısrar ediyoruz.

ÖRNEK 3 $L : V \to V$ lineer operatörü $L(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}$ şeklinde tanımlansın. $\lambda = 2$'nin L'nin tek özdeğeri olduğunu ve V'deki sıfırdan farklı her vektörün de L'nin $\lambda = 2$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektör olduğunu görebiliriz. ■

Örnek 3 herhangi bir λ özdeğerine karşılık gelen birden fazla farklı özvektör olabileceğini gösterir. Gerçekten de, eğer L'nin λ özdeğerine karşılık gelen bir özvektör $\mathbf{x}$ ise [yani, $L(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$ ise], bu durumda herhangi bir r reel sayısı için

$$L(r\mathbf{x}) = rL(\mathbf{x}) = r(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(r\mathbf{x})$$

olacaktır. Bu nedenle, eğer $r \neq 0$ ise, o zaman $r\mathbf{x}$ vektörü de L'nin λ özdeğerine karşılık gelen bir özvektördür ve böylece özvektörlerin sayısı hiçbir zaman tek değildir.

ÖRNEK 4 $L : R^2 \to R^2$ lineer operatörü

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlansın. L'nin özdeğerlerini ve karşılık gelen özvektörlerini bulmak için şu şekilde hareket ederiz: Öncelikle

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

eşitliğini sağlayan bir λ sayısını bulmamız gerekir. O halde

$$\begin{bmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

olup bundan

$$-a_2 = \lambda a_1$$
$$a_1 = \lambda a_2$$

elde edilir ki

$$-a_2 = \lambda^2 a_2$$

olur. Eğer $a_2 \neq 0$ ise, o zaman $\lambda^2 = -1$'dir. Bu yüzden

$$\lambda^2 = i \text{ ve } \lambda^2 = -i$$

dir. Bu da $L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right)$ vektörü $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ vektörüne paralel olacak şekilde R^2'de bir $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ vektörünün bulunamayacağı anlamına gelir. Eğer şimdi

L'yi C^2'den C^2'ye ve yukarıda tanımlandığı gibi göz önüne alacak olursak, o zaman $\lambda = i$ sayısı L'nin bir özdeğeri ve $\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$'de karşılık gelen özvektörü olacaktır. (Doğrulayınız.) Aynı şekilde $\lambda = -i$ sayısı da L'nin bir özdeğeri ve $\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$'de karşılık gelen özvektörü olacaktır. (Doğrulayınız.) ■

ÖRNEK 5

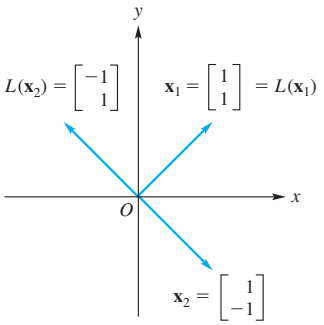
$L : R^2 \to R^2$ lineer operatörü

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$L\left(\begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix}\right) = 1\begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad L\left(\begin{bmatrix} r \\ -r \end{bmatrix}\right) = -1\begin{bmatrix} r \\ -r \end{bmatrix}$$

dir. Böylece, r sıfırdan farklı herhangi bir sayı olmak üzere, $\begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix}$ şeklindeki herhangi bir vektör, örneğin $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, L'nin $\lambda = 1$ özdeğeri ne karşılık gelen bir özvektördür. Aynı şekilde, r sıfırdan farklı herhangi bir sayı olmak üzere, $\begin{bmatrix} r \\ -r \end{bmatrix}$ şeklindeki herhangi bir vektör de, örneğin $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, L'nin $\lambda = -1$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektördür. (Şekil 7.3'e bakınız.) ■



ŞEKİL 7.3

ÖRNEK 6

$L : R^2 \to R^2$ lineer operatörü, Örnek 2'de tanımlandığı gibi, saat yönünün tersinde bir açı olmak üzere ϕ, $(0 \le \phi \le 2\pi)$ bir dönme (rotasyon) olarak tanımlansın. Örnek 2'deki tartışmamızdan anlaşıldığı üzere L'nin özdeğerlere sahip olması sadece $\phi \neq 0$ ve $\phi \neq \pi$ durumunda gerçekleşir. Bu yüzden, eğer $\phi \neq 0$ ise, o zaman L'nin tek özdeğeri $\lambda = 1$'dir ve R^2'deki sıfırdan farklı herhangi bir vektör de L'nin $\lambda = 1$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü olacaktır. Örnek 2'deki geometrik yaklaşım gösteriyor ki $\phi = \pi / 4$ olması durumunda L'nin reel özdeğerleri ve karşılık gelen öz-

vektörleri bulunmamaktadır. Şimdi de cebirsel olarak yaklaşalım ve lineer operatörü de Örnek 2'de tanımlandığı gibi fakat C^2'den C^2'ye göz önüne alalım. Bu durumda,

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

sayısının L'nin bir özdeğeri ve $\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ vektörünün de karşılık gelen bir özvektörü olduğunu buluruz. (Doğrulayınız.) Aynı şekilde,

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

sayısının da L'nin bir özdeğeri ve $\begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix}$ vektörünün de karşılık gelen bir özvektörü olduğunu buluruz. (Doğrulayınız.) ■

ÖRNEK 7

$L : R_2 \to R_2$ lineer operatörü $L([x_1 \quad x_2]) = [0 \quad x_2]$ olarak tanımlansın. Böylece

$$L([r \quad 0]) = [0 \quad 0] = 0[r \quad 0]$$

olduğunu görebiliriz. O halde, r sıfırdan farklı herhangi bir sayı olmak üzere, $[r \ 0]$ şeklindeki herhangi bir vektör, örneğin $[2 \ 0]$, L'nin $\lambda = 0$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektördür. Aynı zamanda,

$$L([0 \quad r]) = [0 \quad r] = 1[0 \quad r]$$

olup, r sıfırdan farklı herhangi bir sayı olmak üzere, $[0 \ r]$ şeklindeki herhangi bir vektörde, örneğin $[0 \ 1]$, L'nin $\lambda = 1$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektördür. ■

Tanım gereği sıfır vektörü bir özvektör olamaz. Ancak, Örnek 7'de gösterildiği gibi sıfır skaları bir özdeğer olabilir.

ÖRNEK 8

(***Matematik Analiz Gerekli***) Her ne kadar bu bölümde V'nin n-boyutlu bir vektör uzayı olması gerektiğini istemiş olsak da, özdeğerler ve özvektörler kavramları sonsuz-boyutlu vektör uzayları için de dikkate alınabilir. Bu örnekte, böylesi bir durumu inceleyeceğiz.

Her basamaktan türevlere sahip, tek değişkenli ve reel-değerli fonksiyonların bir vektör uzayı V olsun. Ayrıca, $L : V \to V$ lineer operatörü de

$$L(f) = f'$$

şeklinde verilsin. O halde Tanım 7.1'deki problemi şu şekilde ifade edebiliriz:

$$L(f) = \lambda f \tag{2}$$

olacak şekilde bir λ sayısı ve V'de bir $f \neq 0$ fonksiyonu bulabilir miyiz? Eğer $y = f(x)$ ise, o zaman (2) denklemi

$$\frac{dy}{dx} = \lambda y \tag{3}$$

olarak yazılabilir. (3) denklemi y niceliğinin x değişkenine göre değişim oranının y'nin kendisi ile doğru orantılı olduğunu ifade eder. (3) denklemini sağlayan bir niceliği içeren fiziksel olaylara örnekler verecek

olursak, bunlar insan nüfusunun artışı, bakteri ve diğer organizmaların artışı, yatırım problemleri, radyoaktif bozunma, karbon tarihlenmesi ve bir ilacın vücuttaki derişimidir.

Matematik analiz kullanarak, her λ sayısına (L'nin bir özdeğerine) karşılık gelen

$$f(\mathbf{x}) = Ke^{\lambda x}$$

şeklinde bir özvektör elde ederiz. Burada K sıfırdan farklı keyfi bir sabittir. ■

(3) denklemi basit bir diferensiyel denklem örneğidir. Diferensiyel denklemler konusu matematiğin ana dallarından biridir. Kesim 8.4'de homogen lineer diferensiyel denklem sistemlerine kısa bir giriş yapacağız.

L, n-boyutlu bir V vektör uzayından V'nin kendi içine tanımlı bir lineer dönüşüm olsun. Eğer $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ cümlesi V'nin bir tabanı ise, o zaman L'yi S'ye göre gösteren $n \times n$ tipinde bir A matrisi vardır. (Kesim 6.3'e bakınız.) L'nin bir λ özdeğerini ve buna karşılık gelen bir $\mathbf{x}$ özvektörünü belirlemek için

$$L(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$$

denklemini çözeriz. Öte yandan, Teorem 6.9'u kullanarak, buna özdeş

$$A[\mathbf{x}]_S = \lambda[\mathbf{x}]_S$$

şeklinde bir matris denkleminin varlığını görebiliriz. Bu formül, R^n'deki lineer sistemleri çözme işinde, L'nin özdeğer-özvektör çiftlerini belirlemek için bize bazı teknikler kullanmamızı sağlayacaktır.

ÖRNEK 9 $L : P_2 \to P_2$ lineer operatörü,

$$L(at^2 + bt + c) = -bt - 2c$$

olarak tanımlansın. L adına öz-problem, L'nin P_2'ye ait özel bir tabana göre matris gösterimi kullanılarak formüle edilebilir. P_2'ye ait $S = \{1 - t, 1 + t, t^2\}$ ve $T = \{t - 1, 1, t^2\}$ tabanlarının her birine karşılık gelen matris öz-problemi bulunuz.

Çözüm

L'yi S tabanına göre gösteren A matrisini bulmak için şu hesaplamaları yaparız (doğrulayınız),

$L(1 - t) = t - 2 = -\frac{3}{2}(1 - t) - \frac{1}{2}(1 + t) + 0t^2$ böylece

$$[L(1 - t)]_S = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}\text{'dir.}$$

$L(1 + t) = -t - 2 = -\frac{1}{2}(1 - t) - \frac{3}{2}(1 + t) + 0t^2$ böylece

$$[L(1 + t)]_S = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}\text{'dir.}$$

$L(t^2) = 0 = 0(1 - t) + 0(1 + t) + 0t^2$ böylece $[L(t^2)]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$'dır.

O halde

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olup, L'nin S'ye göre matris öz-problemi de

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

denklemini sağlayan bir λ sayısını ve R^3 veya C^3 'de sıfırdan farklı bir $\mathbf{x}$ vektörünü bulmak olacaktır. Benzer bir şekilde L'yi T tabanına göre gösteren B matrisinin de

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğunu (doğrulayınız), ve L'nin T'ye göre matris öz-probleminin

$$B\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$$

olduğunu gösterebiliriz. Bu yüzden L için matris öz-problemi V'deki tabanın seçilişine bağlıdır. Kesim 7.2'de L'nin özdeğerlerinin L'nin matris gösterimine bağlı olmadığını ispatlayacağız. ■

Örnek 9'da gördüğümüz gibi, bir lineer dönüşüm adına öz-problem L'nin matris gösterimine göre ifade edilebilir. Şimdi *herhangi bir* kare matris için özdeğer ve özvektör kavramlarını formüle edeceğiz. Eğer A matrisi $n \times n$ tipinde ise Kesim 6.1'de olduğu gibi, R^n (C^n)'deki bir $\mathbf{x}$ vektörü için $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ olarak tanımlanan $L : R^n \to R^n$ ($C^n \to C^n$) lineer operatörünü göz önüne alabiliriz. Eğer λ herhangi bir skalar (reel veya karmaşık) ise ve R^n (C^n)'deki herhangi bir $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektörü için

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \tag{4}$$

oluyorsa, o zaman λ sayısına A'nin bir **özdeğer**'i ve $\mathbf{x}$ vektörüne de A'nın, λ **özdeğerine karşılık gelen**, bir **özvektör**'ü denir. Yani, λ sayısı L'nin bir özdeğeri ve $\mathbf{x}$ vektörü de L'nin λ'ya karşılık gelen bir özvektörüdür.

Uyarı Her ne kadar bir lineer operatörün özdeğerlerini ve karşılık gelen özvektörlerini bulma problemi ile bu bölüme başlamış olsak da, şu andan itibaren $n \times n$ boyutlu bir matrisin özdeğerlerini ve karşılık gelen özvektörlerini bulma problemi üzerinde duracağız.

■ Özdeğerlerin ve Özvektörlerin Hesaplanması

Şu ana kadar verilen bir lineer dönüşümün özdeğerlerini ve karşılık gelen özvektörlerini, yoklama, geometrik inceleme veya çok basit cebirsel yöntemlerle bulduk. Aşağıdaki örnekte, bir matrisin özdeğerlerini ve karşılık gelen özvektörlerini daha sistematik bir metodla hesaplayacağız.

ÖRNEK 10 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ matrisi verilsin. A'nın özdeğerlerini ve karşılık gelen özvektörleri bulmak istiyoruz. Bu nedenle (4) denklemini sağlayan tüm λ değerlerini ve sıfırdan farklı tüm $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ vektörlerini bulmak istiyoruz: O halde

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{5a}$$

denklemi,

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 &= \lambda x_1 \\ -2x_1 + 4x_2 &= \lambda x_2 \end{aligned} \quad \text{veya} \quad \begin{aligned} (\lambda - 1)x_1 - \ \ x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (\lambda - 4)x_2 &= 0 \end{aligned} \tag{5b}$$

denklemlerini verecektir. İki bilinmeyenli iki denklemden oluşan bu homogen sistemin aşikar olmayan bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart katsayı matrisinin determinantının sıfır olmasıdır. Böylece

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0$$

dır. Bu da

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 = (\lambda - 3)(\lambda - 2)$$

olması ve bundan dolayı da $\lambda_2 = 2$ ve $\lambda_2 = 3$ sayılarının A'nın özdeğerleri olacağı anlamına gelir. Yani, (5b) denklemi aşikar olmayan bir çözüme sadece $\lambda = 2$ veya $\lambda_2 = 3$ olduğu zaman sahip olacaktır. A'nın $\lambda_1 = 2$ özdeğerine karşılık gelen tüm özvektörlerini bulmak için, $\lambda_1 = 2$ değerini (5a) denkleminde yerine koyarız: O zaman

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

denklemi,

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 &= 2x_1 \\ -2x_1 + 4x_2 &= 2x_2 \end{aligned} \quad \text{veya} \quad \begin{aligned} (2 - 1)x_1 - \ \ x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (2 - 4)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{veya} \quad \begin{aligned} x_1 - \ \ x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

denklemini verecektir. Bu son homogen sistemi $\lambda_1 = 2$ değerini (5b)'de yerine koyarak da elde edebilirdik. Bu son sistemin tüm çözümleri

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ x_2 &= \text{herhangi bir } r \text{ sayısı} \end{aligned}$$

olarak verilir. Bundan dolayı $\lambda_1 = 2$ özdeğerine karşılık gelen tüm öz vektörler, r sıfırdan farklı herhangi bir sayı olmak üzere, $\begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix}$ şeklindeki vektörlerdir. Özel olarak, $r = 1$ için, $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektörü $\lambda_1 = 2$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektördür. Benzer biçimde, $\lambda_2 = 3$ değerini (5b) denkleminde yerine yazacak olursak

$$\begin{aligned} (3 - 1)x_1 - \ \ x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (3 - 4)x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{veya} \quad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu son sistemin tüm çözümleri

$$x_1 = \tfrac{1}{2}x_2$$
$$x_2 = \text{herhangi bir } s \text{ sayısı}$$

olarak verilir. Bundan dolayı $\lambda_2 = 3$ özdeğerine karşılık gelen tüm özvektörler, s sıfırdan farklı herhangi bir sayı olmak üzere, $\begin{bmatrix} \frac{s}{2} \\ s \end{bmatrix}$ şeklindeki vektörlerdir. Özel olarak, $s = 2$ alınırsa, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ vektörü $\lambda_2 = 3$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektördür. ■

Şimdi Örnek 10'da izlediğimiz metodu, verilen bir matrisin özdeğerlerini ve onlara karşılık özvektörlerini bulma işleminde standart metodumuz olarak kullanacağız. Öncelikle bazı terminolojiyi verelim.

TANIM 7.2

$n \times n$ tipinde bir $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ matrisi verilsin. Bu durumda

$$\lambda I_n - A = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantına A'nın **karakteristik polinom**'u denir. Ayrıca

$$p(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = 0$$

denklemine de A'nın **karakteristik denklem**'i denir.

$n \times n$ tipinde bir A matrisinin determinantının açılımındaki her terimin, her satırdan sadece bir bileşen ve her sütundan da sadece bir bileşeni içermek üzere, matrisin n bileşeninin çarpımından oluştuğunu Bölüm 3'ten hatırlayalım. Bu yüzden, $\det(\lambda I_n - A)$ determinantını açacak olursak derecesi n olan bir polinom elde ederiz. A'nın karakteristik polinomunda λ^n terimini içeren ifade

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn})$$

çarpımından gelecektir ve bu yüzden de λ^n teriminin katsayısı 1'dir. O halde

$$\det(\lambda I_n - A) = p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

olarak yazabiliriz. Eğer hem $\det(\lambda I_n - A)$ ifadesinde hem de sağdaki ifadede $\lambda = 0$ alırsak, o zaman $\det(-A) = a_n$ $\det(-A) = a_n$ elde ederiz. Bu yüzden A'nın karakteristik polinomunun sabit terimi $a_n = (-1)^n \det(A)$ olur.

ÖRNEK 11

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

olsun. A matrisinin karakteristik polinomu

$$p(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -4 & 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$$

olacaktır. (Doğrulayınız.) ■

Şimdi aşağıdaki teoremde bir matrisin özdeğerleriyle karakteristik polinomu arasındaki ilişkiyi vereceğiz:

Teorem 7.1 $n \times n$ tipinde bir A matrisi verilsin. A'nın özdeğerleri karakteristik polinomunun kökleridir.

İspat

R^n'deki bir $\mathbf{x}$ vektörü A'nın λ özdeğerine karşılık gelen bir özvektör olsun. O halde

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad \text{veya} \quad A\mathbf{x} = (\lambda I_n)\mathbf{x} \quad \text{veya} \quad (\lambda I_n - A)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

dır. Bu n denklemden oluşan n bilinmeyenli bir homogen sistemdir; aşikar olmayan bir çözümün var olması için gerek ve yeter şart $\det(\lambda I_n - A) = 0$ olmasıdır. Bu yüzden λ, A'nın karakteristik polinomunun bir köküdür.

Karşıt olarak, eğer λ, A'nın karakteristik polinomunun bir kökü ise, o zaman $\det(\lambda I_n - A) = 0$'dır, Bu da $(\lambda I_n - A)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sisteminin aşikar olmayan bir çözüme sahip olması demektir. Bu yüzden λ, A'nın bir özdeğeridir. ■

Böylece, verilen bir A matrisinin özdeğerlerini bulmak için, A'nın $p(\lambda)$ karakteristik polinomunun köklerini bulmalıyız. Bir polinomun köklerini bulmak için birçok metod vardır, bazıları diğerlerinden daha sonuç vericidir. Bu bağlamda bazen yararlı olan iki sonuç şu şekildedir: (1) $p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$ olan bir polinomun tüm köklerinin çarpımı $(-1)^n a_n$'dir; ve (2) Eğer $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tamsayılar ise, o zaman $p(\lambda)$ polinomu tamsayı olmayan rasyonel bir köke sahip olamaz. Bu yüzden $p(\lambda)$'nin olası rasyonel kökleri için a_n'nin sadece tamsayı çarpanlarını denememiz gerekir. Elbette $p(\lambda)$ polinomu irrasyonel köklere veya karmaşık köklere de sahip olabilir.

Hesaplama yükünü azaltmak ve okuyucuya rahatlık sağlamak amacıyla *bu bölümün kalan kısmındaki çözülmesi gereken karakteristik polinomların çoğu yalnızca tamsayı köklere sahip olacak* ve bu köklerin her biri de A'nın karakteristik polinomuna ait sabit terimin bir çarpanı olacaktır. Karşılık gelen özvektörler de, λ sayısı

$$(\lambda I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{6}$$

matris denkleminde yerine yazılarak ve ortaya çıkan homogen sistem çözülerek elde edilir. Bu tip problemlerin çözümleri Kesim 4.7'de çalışıldı.

ÖRNEK 12 Örnek 11'de tanımlanan A matrisinin özdeğerlerini ve karşılık gelen özvektörlerini hesaplayınız.

Çözüm

Örnek 11'de A'nın karakteristik polinomunu

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$$

olarak bulduk. $p(\lambda)$'nın olası tamsayı kökleri $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ ve ± 6'dır. Bu sayıları $p(\lambda)$'da yerine koyarak, $p(1) = 0$ buluruz. Böylece $\lambda = 1$ sayısı $p(\lambda)$'nın bir köküdür. Bu yüzden $(\lambda - 1)$, $p(\lambda)$'nın bir çarpanıdır. $p(\lambda)$'yı $\lambda - 1$'e bölerek,

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda 5 + 6)$$

elde ederiz (doğrulayınız). $(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$ ifadesini çarpanlarına ayırarak,

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

buluruz. O halde A'nın özdeğerleri $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ ve $\lambda_3 = 3$'tür. $\lambda_1 = 1$ özdeğerine karşılık gelen bir $\mathbf{x}_1$ özvektörünü bulmak için, (6) denkleminde $\lambda = 1$ yazarak,

$$\begin{bmatrix} 1-1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & 1-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. r herhangi bir sayı olmak üzere $\begin{bmatrix} -\frac{r}{2} \\ \frac{r}{2} \\ r \end{bmatrix}$ vektörü bir çözümdür. Bu yüzden $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ vektörü A'nın $\lambda_1 = 1$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektördür. ($r = 2$ alındı.)

$\lambda_2 = 2$ özdeğerine karşılık gelen bir $\mathbf{x}_2$ özvektörünü bulmak için de, (6) denkleminde $\lambda_2 = 2$ yazarak,

$$\begin{bmatrix} 2-1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & 2-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. r herhangi bir sayı olmak üzere $\begin{bmatrix} -\frac{r}{2} \\ \frac{r}{4} \\ r \end{bmatrix}$ vektörü bir çözümdür. Bu yüzden $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ vektörü A'nın $\lambda_2 = 2$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektördür. ($r = 4$ alındı.)

$\lambda_3 = 3$ özdeğerine karşılık gelen bir $\mathbf{x}_3$ özvektörünü bulmak için de, (6) denkleminde $\lambda = 3$ yazarsak,

$$\begin{bmatrix} 3-1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -4 & 4 & 3-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -4 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. r herhangi bir sayı olmak üzere $\begin{bmatrix} -\frac{r}{4} \\ \frac{r}{4} \\ r \end{bmatrix}$ vektörü bir çözümdür. Bu yüzden $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ vektörü A'nın $\lambda_3 = 3$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektördür. ($r = 4$ alındı.) ■

ÖRNEK 13

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerlerini ve karşılık gelen özvektörlerini hesaplayınız.

Çözüm

A matrisinin karakteristik polinomu

$$p(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 0 & 0 & -3 \\ -1 & \lambda - 0 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda - 3$$

dür (doğrulayınız). $p(\lambda)$'nın bir kökünün $\lambda = 3$ olduğunu buluruz. $p(\lambda)$'yı $(\lambda - 3)$ ifadesine bölerek $p(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda^2 + 1)$ elde ederiz. O halde A'nın özdeğerleri

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = i, \quad \lambda_3 = -i$$

olacaktır. $\lambda_1 = 3$ özdeğerine karşılık gelen bir $\mathbf{x}_1$ özvektörünü hesaplamak için, (6) denkleminde $\lambda = 3$ yazarak,

$$\begin{bmatrix} 3-0 & 0 & -3 \\ -1 & 3-0 & 1 \\ 0 & -1 & 3-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

elde ederiz. Herhangi bir r sayısı için, $\begin{bmatrix} r \\ 0 \\ r \end{bmatrix}$ vektörünün bir çözüm olduğunu buluruz. (Doğrulayınız.) $r = 1$ alarak,

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vektörünün A'nın $\lambda_1 = 3$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektör olduğu sonucuna varırız. $\lambda_2 = i$ özdeğerine karşılık gelen bir $\mathbf{x}_2$ özvektörünü elde etmek için de, (6) denkleminde $\lambda = i$ yazarak,

$$\begin{bmatrix} i-0 & 0 & -3 \\ -1 & i-0 & 1 \\ 0 & -1 & i-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

elde ederiz. $\begin{bmatrix} (-3i)r \\ (-3+i)r \\ r \end{bmatrix}$ vektörünün, r herhangi bir sayı olmak üzere, bir çözüm olduğunu buluruz. (Doğrulayınız.) $r = 1$ koyarak,

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -3i \\ -3+i \\ 1 \end{bmatrix}$$

vektörünün A'nın $\lambda_2 = i$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektör olduğu sonucuna varırız. Benzer şekilde,

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 3i \\ -3-i \\ 1 \end{bmatrix}$$

vektörünün A'nın $\lambda_3 = -i$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektör olduğunu buluruz. ■

ÖRNEK 14 L, Örnek 9'da tanımlandığı gibi, P_2 üzerinde bir lineer operatör olsun. O örnekte elde edilen ve L'yi P_2'nin $\{t-1, 1, t^2\}$ tabanına göre gösterimi olan B matrisini kullanarak L'nin özdeğerlerini ve karşılık gelen özvektörlerini bulunuz.

Çözüm

$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin karakteristik polinomu $p(\lambda) = \lambda(\lambda+2)(\lambda+1)$'dir. (Doğrulayınız.) Böylece L'nin özdeğerleri $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$ ve $\lambda_3 = -1$ olacaktır. Karşılık gelen özvektörler de

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dır (doğrulayınız). Bunlar L'nin özvektörlerinin koordinat vektörleridir. Bu yüzden L'nin karşılık gelen özvektörleri, sırasıyla

$$0(t-1)+0(1)+1(t^2)=t^2$$
$$1(t-1)+1(1)+0(t^2)=t$$

ve

$$0(t-1)+1(1)+0(t^2)=1,$$

olacaktır. ■

Bir matrisin özdeğerlerini ve karşılık gelen özvektörlerini bulma işleminde izlenmesi gereken adımları şu şekilde sıralayabiliriz:
1. Adım $p(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ karakteristik polinomunun köklerini belirleyiniz. Bu kökler A'nın özdeğerleridir.
2. Adım Her λ değeri için, $(\lambda I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sisteminin tüm aşikar olmayan çözümlerini bulunuz. Bu çözümler A'nın λ özdeğerine karşılık gelen özvektörler olacaktır.

Bir matrise ait karakteristik polinomun bazı kökleri karmaşık olabilir ve hatta, Örnek 13'te görüldüğü gibi, reel kökleri de olmayabilir. Ancak, önemli bir durum olan simetrik matrisler söz konusu olduğunda karakteristik polinomun tüm kökleri reel olacaktır. Bunun ispatını Kesim 7.3 (Teorem 7.6)'te vereceğiz.

Özdeğerler ve özvektörler çok sayıda önemli ve ilginç özelliklere sahiptir. Örneğin, eğer bir A matrisi üst (alt) üçgen matris ise, o zaman A'nın esas köşegenindeki bileşenler A'nın özdeğerleri olacaktır (Alıştırma 11). Diğer özellikler bu kesimin alıştırmalar bölümünde işlenecektir.

Determinant hesabı gerektirdiğinden dolayı bir lineer dönüşümün veya bir matrisin özdeğerlerini karakteristik polinomun reel köklerini elde ederek bulma metodu $n > 4$ değeri için kullanışlı değildir. Özdeğerleri ve karşılık gelen özvektörlerini bulmak için elverişli nümerik metodlar geliştirilmiştir ve bunlar nümerik analiz derslerinde işlenmektedir.

Uyarı Özdeğerleri ve karşılık gelen özvektörleri bulurken önce A'yı satır eşelon şekle indirgenmiş bir B matrisine dönüştürmek ve sonra da B'nin özdeğerlerini ve özvektörlerini bulmak gibi çok yapılan bir hataya düşmeyelim. Bu yaklaşımın geçersiz olduğunu hemen görmek için Örnek 10'da tanımlanan A matrisini göz önüne alalım. A'nın özdeğerleri $\lambda_1 = 2$ ve $\lambda_2 = 3$'tür. A matrisi singüler olmayan bir matris olduğundan, A'yı satır eşelon şekle indirgenmiş bir B matrisine dönüştürdüğümüzde, $B = I_2$ elde ederiz. Fakat, I_2 'nın özdeğerleri $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_2 = 1$'dir.

Anahtar Kelimeler

Özdeğer
Özvektör
Has değer
Karakteristik değer
Gizli değer
Karakteristik polinom
Karakteristik denklem
Karakteristik polinomun kökleri

7.1 Alıştırmalar

1. $L : R^2 \to R^2$ saat yönünün tersinde π açılı bir dönme olsun. L'nin özdeğerlerini ve karşılık gelen özvektörlerini bulunuz.

2. $L : P_1 \to P_1$ lineer operatörü $L(at + b) = bt + a$ olarak tanımlansın. L'nin özdeğerlerini ve karşılık gelen özvektörlerini, L'nin P_1'in $\{1, t\}$ tabanına göre matris gösterimini kullanarak bulunuz.

3. $L : P_2 \to P_2$ lineer operatörü $L(at^2 + bt + c) = c - at^2$ olarak tanımlansın. L'nin özdeğerlerini ve karşılık gelen özvektörlerini, L'nin P_2'nin $\{t^2 + 1, t, 1\}$ tabanına göre matris gösterimini kullanarak bulunuz.

4. $L : R_3 \to R_3$ dönüşümü

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2a_1 + 3a_2 & -a_2 + 4a_3 & 3a_3 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlansın. R_3'ün doğal tabanını kullanarak L'nin özdeğerlerini ve karşılık gelen özvektörlerini bulunuz.

5. Aşağıdaki her bir matrisin karakteristik polinomunu bulunuz:

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

6. Aşağıdaki her bir matrisin karakteristik polinomunu, özdeğerlerini ve karşılık gelen özvektörlerini bulunuz:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

7. Aşağıdaki her bir matrisin karakteristik polinomunu, özdeğerlerini ve karşılık gelen özvektörlerini bulunuz:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

8. Aşağıdaki her bir matrisin tüm özdeğerlerini ve karşılık gelen özvektörlerini bulunuz:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 0 & -9 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 1 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

9. Aşağıdaki her bir matrisin karakteristik polinomunu, özdeğerlerini ve karşılık gelen özvektörlerini bulunuz:

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} -2 & -4 & -8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2-i & 2i & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

10. Aşağıdaki her bir matrisin tüm özdeğerlerini ve karşılık gelen özvektörlerini bulunuz:

(a) $\begin{bmatrix} -1 & -1+i \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

11. Eğer bir A matrisi üst (alt) üçgen matris ise, o zaman A'nın esas köşegenindeki bileşenlerin A'nın özdeğerleri olduğunu ispatlayınız.

12. A ve A^T matrislerinin aynı özdeğerlere sahip olduklarını ispatlayınız. A ve A^T matrislerinin karşılık gelen özvektörleri hakkında, eğer söylenecek bir şey varsa, ne söyleyebiliriz?

13. $L : M_{22} \to M_{22}$ lineer dönüşümünün

$$S = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

tabanına göre matris gösterimi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

olsun. L'nin özdeğerlerini ve karşılık gelen özvektörlerini bulunuz.

14. V, n-boyutlu bir vektör uzayı olmak üzere bir $L : V \to V$ lineer operatörü verilsin. λ sayısı da L'nin bir özdeğeri olsun. V'nin, $\mathbf{0}_V$ vektörü ve

L'nin λ'ya karşılık gelen tüm özvektörlerinden oluşan, bir altcümlesini göz önüne alalım. Bu altcümlenin V'nin bir altuzayı olduğunu ispatlayınız. Bu altuzaya λ'ya karşılık gelen **özuzay** (karakteristik uzay) denir.

15. $n \times n$ tipindeki bir A matrisinin herhangi bir özdeğeri λ olsun. R^n(C^n)'nin, sıfır vektörü ve A'nın λ'ya karşılık gelen tüm özvektörlerinden oluşan, bir altcümlesini göz önüne alalım. Bu altcümlenin R^n(C^n)'nin bir altuzayı olduğunu ispatlayınız. Bu altuzaya λ'ya karşılık gelen **özuzay** denir (Bu sonuç, Alıştırma 14'ün doğal bir sonucudur).

16. Alıştırma 14 ve 15'te, neden $\mathbf{0}_V$ vektörünü L'nin λ'ya karşılık gelen tüm özvektörlerinden oluşan cümleye dahil etmek zorunda kaldık?

Alıştırma 17-18'de, her bir matris için λ'ya karşılık gelen özuzayın (Alıştırma 15'e bakınız) bir tabanını bulunuz.

17. **(a)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda = 1$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \lambda = 2$

18. **(a)** $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \lambda = 3$

(b) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \lambda = 2$

19. $\begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisini göz önüne alalım.

(a) $\lambda_1 = 2i$ özdeğerine karşılık gelen özuzayın bir tabanını bulunuz.

(b) $\lambda_2 = -2i$ özdeğerine karşılık gelen özuzayın bir tabanını bulunuz.

20. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

matrisini göz önüne alalım.

(a) $\lambda_1 = 1$ özdeğerine karşılık gelen özuzayın bir tabanını bulunuz.

(b) $\lambda_2 = 2$ özdeğerine karşılık gelen özuzayın bir tabanını bulunuz.

21. λ sayısı bir A matrisinin herhangi bir özdeğeri ve karşılık gelen özvektör de $\mathbf{x}$ olsun. Bu durumda, k pozitif bir tamsayı olmak üzere, λ^k sayısının

$$A^k = A \cdot A \cdot \cdots A \quad (k \text{ çarpan})$$

matrisinin bir özdeğeri ve karşılık gelen özvektörün de $\mathbf{x}$ olduğunu ispatlayınız.

22. Alıştırma 8(a)'daki $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ matrisini göz önüne alalım. A^2 matrisinin özdeğerlerini ve özvektörlerini bulunuz ve Alıştırma 21'i doğrulayınız.

23. Pozitif bir k tamsayısı için, eğer $A^k = O$ ise [yani, A matrisi nilpotent ise (Bölüm 1'deki Ek Alıştırma 22'ye bakınız)], o zaman A matrisinin tek özdeğerinin 0 olduğunu ispatlayınız. (*Yol gösterme*: Alıştırma 21'i kullanınız.)

24. $n \times n$ tipinde bir A matrisi verilsin.

(a) A'nın karakteristik polinomunun tüm köklerinin çarpımının $\det(A)$ olduğunu ispatlayınız.

(b) Gösteriniz ki A'nın singüler bir matris olması için gerek ve yeter şart 0 sayısının A'nın bir özdeğeri olmasıdır.

(c) Ayrıca bir lineer dönüşüm için şu benzer ifadeyi ispatlayınız: $L : V \to V$ bir lineer dönüşüm olsun. 0 sayısının L'nin bir özdeğeri olması için gerek ve yeter şart L'nin bire-bir olmamasıdır. Gösteriniz.

(d) Eğer A matrisi nilpotent (Bölüm 1'deki Ek Alıştırma 22'ye bakınız) ise, o zaman A matrisi tekildir. Gösteriniz.

25. $L : V \to V$, tersi olan bir lineer operatör olsun. λ sayısı L'nin bir özdeğeri ve karşılık gelen özvektör de $\mathbf{x}$ olsun.

(a) $1/\lambda$ sayısının L^{-1} operatörünün bir özdeğeri ve karşılık gelen özvektörün de $\mathbf{x}$ olduğunu gösteriniz.

(b) Matrisler için de benzer bir ifadeyi belirtiniz ve ispatlayınız.

26. λ_1 ve λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olmak şartıyla, $n \times n$ tipinde bir A matrisinin özdeğerleri olsun. λ_1 ve λ_2'ye karşılık gelen özuzaylar da, sırasıyla, S_1 ve S_2 olsun. Böyle bir durumda S_1 ve S_2'nin her ikisinde de bulunan tek vektörün neden yalnızca sıfır vektörü olduğunu açıklayınız.

27. A'nın bir özdeğeri λ ve karşılık gelen özvektörü de $\mathbf{x}$ olsun. Bu durumda $\lambda + r$ sayısının da $A + rI_n$ matrisinin bir özdeğeri ve karşılık gelen özvektöründe $\mathbf{x}$ olduğunu gösteriniz. Bu yüzdendir ki, bir A matrisine birim matrisin bir skalar katını eklemek A matrisinin özdeğerlerini sadece skalar kadar öteler.

28. A, $n \times n$ tipinde bir matris olsun. L lineer operatörü, R^n üzerinde $L(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ olarak tanımlansın. Burada $\mathbf{u}$ vektörü R^n'de bir vektördür. Ayrıca R^n'nin bir altuzayı W olsun. Eğer W'daki herhangi bir $\mathbf{w}$ vektörü için $L(\mathbf{w})$ vektörü yine W'da kalıyorsa, o zaman W'ya L altında **değişmezdir** (invaryanttır) denir. Şimdi de A'nın herhangi bir özuzayının L altında değişmez olduğunu gösteriniz.

29. $n \times n$ tipinde A ve B matrisleri verilsin. Ayrıca $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ ve $B\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}$ olsun. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz:

(a) $(A + B)\mathbf{x} = (\lambda + \mu)\mathbf{x}$

(b) $(AB)\mathbf{x} = (\mu)\mathbf{x}$

30. **Cayley*-Hamilton† teoremi** her matrisin kendi karakteristik denklemini sağladığını ifade eder; yani, $n \times n$ tipindeki bir A matrisinin karakteristik polinomu

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

ise, o zaman

$$A^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A + a_nI_n = O$$

olacaktır. Bu teoremin ispatı ve uygulamaları maalesef kitabımızın kapsamı dışındadır. Şimdi de Cayley-Hamilton teoremini aşağıdaki matrisler için doğrulayınız:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

31. $n \times n$ tipindeki bir A matrisinin karakteristik polinomu

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

olsun. Eğer A matrisi tekil değilse, o zaman

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_n}(A^{n-1} + a_1A^{n-2} + \cdots + a_{n-2}A + a_{n-1}I_n)$$

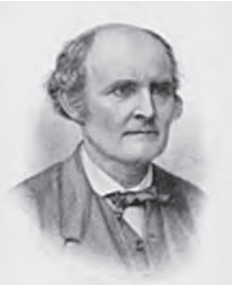
olduğunu gösteriniz. [*Yol gösterme*: Cayley-Hamilton teoremini kullanınız (Alıştırma 30)].

32. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisi verilsin. A matrisinin $p(\lambda)$ karakteristik polinomunun

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\lambda + \det(A)$$

olduğunu ispatlayınız, burada $\mathrm{Tr}(A)$ sayısı A matrisinin izini göstermektedir (Kesim 1.3'teki Alıştırma 43'e bakınız).

33. Eğer bir A matrisinin tüm sütunlarının toplamı 1 ise, o zaman $\lambda = 1$ sayısı A'nın bir özdeğeridir. Gösteriniz. (*Yol gösterme*: $A^T\mathbf{x}$ çarpımını göz önüne alınız ve Alıştırma 12'yi kullanınız, burada $\mathbf{x}$ vektörü bileşenleri toplamı 1 olan bir vektördür.)



ARTHUR CAYLEY



WILLIAM ROWAN HAMILTON

*Arthur Cayley (1821-1895), İngiltere'nin Surrey şehrine bağlı Richmond kasabasında, donanımlı ve hünerli bir ailede doğdu, Cambridge'de öldü. Gençlik döneminde matematikte olağanüstü yetenek gösterdi. Bir tüccar olarak aile işine girmek yerine, onun Cambridge'e gitmesi için öğretmenleri babasını ikna ettiler. Cambridge'de yaptığı çalışmalarla kendini ünlendirdi ve bir lisans öğrencisiyken çok sayıda makale yayınladı. Mezun olduktan sonra, Cambridge'deki Trinity Üniversitesinden yükseköğrenim bursu kazandı ancak hukuk çalışmayı bıraktı. Başarılı bir avukat olarak 14 yıl çalışmış olmakla beraber, hala matematiğe yeterince zaman ayırabiliyordu ve bu süre zarfında da 200 civarında makale yayınladı. 1863'te, Cambridge Üniversitesine profesör olarak atandı. Matris teorisi ve lineer cebirin diğer alanlarında yaptığı üretken çalışmalar konunun gelişmesinde çok büyük öneme sahiptir. Ayrıca, soyut cebir, geometri, ve modern matematiğin diğer alanlarına da birçok önemli katkısı oldu.

†William Rowan Hamilton (1805-1865), İrlanda'nın Dublin kentinde doğdu ve orada öldü. Daha 5 yaşında, Yunanca, Latince ve İbranice öğrenecek kadar dahi bir çocuktu. Matematiğe olan olağanüstü yeteneği 12 yaşına gelince göze çarpar oldu. Dublin'de Trinity Üniversitesinde okudu, seçkin bir öğrenciydi. Lisans öğrencisiyken, İrlanda Kraliyet Gökbilimcisi, Dunsink Gözlemevi Yöneticisi ve Astronomi Profesörü olarak atandı. İlk makalelerinde optik konusuna çok önemli katkılarda bulundu. Deneysel olarak doğruladığı ve optikte koniksel kırınma olarak bilinen matematiksel teorisini inşa ettikten sonra kendisine 30 yaşında şövalye ünvanı verildi. Hamilton, belirli cebirsel özellikleri sağlayan dörtlülerin oluşturduğu bir cümle olan kuaterniyonlar cebrini keşfetmesiyle de bilinir. Hayatının kalan 20 yılını koaterniyonlar ve onların özellikleri üzerinde çalışarak geçirdi.

34. Bir $n \times n$ tipindeki bir A matrisinin k-yıncı satırı I_n birim matrisinin k-yıncı satırı ile aynı ise, o zaman 1 sayısı A matrisinin bir özdeğeridir. Gösteriniz.

35. A bir kare matris olsun.

(a) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sisteminin aşikar olmayan bir $\mathbf{x} = \mathbf{u}$ çözümüne sahip olduğunu kabul edelim. $\mathbf{u}$ vektörünün A matrisinin bir özvektörü olduğunu gösteriniz.

(b) 0 sayısı A matrisinin bir özdeğeri ve karşılık gelen özvektörün de $\mathbf{v}$ olduğunu kabul edelim. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sisteminin aşikar olmayan bir çözüme sahip olduğunu gösteriniz.

36. Yazılımınızın bir A matrisine ait karakteristik polinomu bulmaya yarayan bir komuta sahip olup olmadığını araştırınız. Eğer böyle bir komut varsa, yazılımınızın çıktısını Örnek 10 ve 13'teki sonuçlarla karşılaştırınız. Karakteristik polinomu veren bir yazılımın çıktısı, çoğu zaman, λ'nın kuvvetleri ihmal edilerek sadece katsayılardan oluşan bir cümleden oluşur. Katsayıların listelenmesindeki sırayı dikkatlice inceleyiniz. Ayrıca, Örnek 5 ve 6'daki matrislerle de deneyiniz.

37. Eğer yazılımınız bir A matrisine ait karakteristik polinomu bulmaya yarayan bir komuta sahip ise (Alıştırma 36'ya bakınız), o zaman muhtemelen polinomların köklerini bulmaya yarayan başka bir komuta da sahiptir. Bu komutların yazılımınızda nasıl kullanıldıklarını öğreniniz. A'nın karakteristik polinomunun kökleri A'nın özdeğerleri olacaktır.

38. Yazılımınızın Alıştırmalar 36 ve 37'de tartışılan komutlara sahip olduğunu kabul edersek, bu komutları $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerini bulmak için uygulayınız. Eğer yazılımınız bunu başarırsa, sonuçlar $\lambda = i, -i$ olmalıdır, burada $i = \sqrt{-1}$'dir (Ek Bölüm B'ye bakınız). (**Dikkat**: Bazı yazılımlar karmaşık köklerle başa çıkamazlar ve bir matrisin karmaşık bileşenlere sahip olmasını kabul etmezler. Bu durumu kullandığınız yazılım için inceleyiniz.)

39. Çoğu lineer cebir yazılımı bir matrisin özdeğerlerini otomatik olarak bulan bir komuta sahiptir. Yazılımınızda böyle bir komutun olup olmadığını belirleyiniz. Belirlediğiniz komutu Örnek 12 ve 13 üzerinde test ediniz. Genel olarak, böyle bir komut karakteristik polinomun köklerini bulmaktan ziyade farklı teknikler kullanır. Yazılımınızın kullandığı tekniği yazılıma ait belgelere başvurarak belirleyiniz. (**Uyarı**: Kesim 7.3'teki bazı fikirleri veya daha sofistike işlemleri kapsayabilir.)

40. Alıştırma 39'daki fikirleri izleyerek yazılımınızda bulunan ve bir matrisin özvektörlerini elde etmeye yarayan komutu belirleyiniz. Bu komut, çoğu zaman özdeğer komutunun bir varyasyonudur. Komutu, Örnek 10 ve 12'deki matrisler üzerinde test ediniz. Bu örnekler bu derste sık sık karşılaşacağınız özvektörlerin farklı tipteki durumlarını kapsamaktadır.

7.2 Köşegenleştirme ve Benzer Matrisler

Eğer $L : V \to V$, n-boyutlu bir V vektör uzayı üzerinde bir lineer operatör ise, daha önce Kesim 7.1'de gördüğümüz gibi, o zaman L'nin özdeğerlerini ve karşılık gelen özvektörlerini L'nin V'nin bir tabanına göre bir matris gösterimini kullanarak bulabiliriz. Yapılacak hesaplamanın adımları L'yi gösteren matrisin seçimine bağlıdır. İdeal bir durum şu şekilde olacaktır: L'nin V'nin belirli bir tabanına göre bir A matrisi ile gösterildiğini kabul edelim. V'nin öyle bir tabanını bulunuz ki L'nin bu tabana göre matris gösetirimi A ile aynı özdeğerlere sahip bir D köşegen matrisi olsun. Elbette bu çok istenen bir durumdur, çünkü D'nin özdeğerleri yalnızca esas köşegeni oluşturan bileşenlerdir. Şimdi Kesim 6.5'teki Teorem 6.14'ten hatırlayalım ki A ve D'nin V'nin iki tabanına göre aynı $L : V \to V$ lineer operatörünü göstermesi için gerek ve yeter şart benzer olmalarıdır-yani, gerek ve yeter şart $D = P^{-1}AP$ olacak şekilde singüler olmayan bir P matrisinin var olmasıdır. Bu kesimde bu durumun gerçekleştiği türden lineer döüşümleri ve matrisleri inceleyeceğiz. Kolaylık için tüm bileşenleri ve özdeğerleri sadece reel sayılar olan matrislerle çalışacağız.

Uyarı Bir A matrisinin kuvvetlerini hesaplama (Kesim 1.5'e bakınız.) ihtiyacı, uygulamalarda çok sık karşılaşılan bir durumdur. (Kesim 1.5'te

geçen Fibonacci sayıları ile ilgili tartışmaya ve Kesim 1.5 ve 8.1'in alıştırmalarında geçen indirgeme bağıntılarına bakınız.) Eğer A matrisi köşegen bir D matrisine benzer ise, o zaman uygun bir P matrisi için $D = P^{-1}AP$'dir. Diğer yandan $A = PDP^{-1}$'dir (doğrulayınız) ve $A^k = PD^kP^{-1}$'dir. (Doğrulayınız.) D köşegen matris olduğundan, D^k da köşegen matris ve köşegen bileşenleri de d_{jj}^k'dir. Bu yüzden A^k matrisini hesaplamak kolaydır. Kesim 8.4'te köşegen matrislere benzer olan matrisleri içeren ve hızlı çözülebilen problemlerden oluşan başka bir örnek göreceğiz.

TANIM 7.3

$L : V \to V$, n-boyutlu bir V vektör uzayı üzerinde bir lineer operatör olsun. Eğer V'nin bir S tabanı varsa öyle ki L, S tabanına göre bir D köşegen matrisi ile gösteriyorsa, bu durumda L'ye **köşegenleştirilebilir**'dir veya **köşegenleşebilir**'dir diyoruz.

ÖRNEK 1

Kesim 6.5'e ait Örnek 2'de

$$L\left(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2u_1 - u_3 & u_1 + u_2 - u_3 & u_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan $L : R_3 \to R_3$ lineer dönüşümünü göz önüne almıştık. O örnekte R_3'ün

$$S' = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

tabanını kullanmış ve L'nin S' tabanına göre bir gösteriminin de

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

olduğunu ispatladık. Bu yüzden L köşegenleştirilebilir bir lineer dönüşümdür. ■

Şimdi de benzer matrislerin aynı özdeğerlere sahip olduklarını göstereceğiz.

Teorem 7.2 Benzer matrisler aynı özdeğerlere sahiptir.

İspat

A ve B matrisleri benzer olsun. O halde, singüler olmayan bir P matrisi için, $B = P^{-1}AP$'dir. A ve B'nin aynı karakteristik polinomlara, sırasıyla, $p_A(\lambda)$ ve $p_B(\lambda)$, sahip olduklarını ispatlayacağız. Bunun için

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det(\lambda I_n - B) = \det(\lambda I_n - P^{-1}AP) \\ &= \det(P^{-1}\lambda I_n P - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(\lambda I_n - A)P) \\ &= \det(P^{-1})\det(\lambda I_n - A)\det(P) \\ &= \det(P^{-1})\det(P)\det(\lambda I_n - A) \\ &= \det(\lambda I_n - A) = p_A(\lambda) \end{aligned} \tag{1}$$

elde ederiz. Böylece $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$ olduğundan, A ve B matrislerinin aynı özdeğerlere sahip olduğu sonucu ortaya çıkar. ■

Teorem 7.2'nin ispatında $\det(P^{-1})$ ve $\det(P)$'nin çarpımının 1 olduğunu ve determinantların sayı oldukları ve dolayısıyla çarpma işleminde çarpan olarak sıralarının bir önem arz etmediği gerçeklerini kullandığımıza dikkat ediniz.

$L : V \to V$, n-boyutlu bir V vektör uzayı üzerinde köşegenleştirilebilir bir lineer operatör ve $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ cümlesi de V'nin bir tabanı, L'nin S'ye göre gösterimi de

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

köşegen matrisi olsun. Burada $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ reel skalarlardır. Şimdi eğer D matrisi L'nin S'ye göre bir gösterimi ise, o zaman D'nin j-inci sütun $L(\mathbf{x}_j)$'nin S'ye göre koordinat vektörü olan $L[(\mathbf{x}_j)]_S$ vektörü olduğunu anımsayınız. Bu yüzden

$$\left[L(\mathbf{x}_j)\right]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow j.\ \text{satır}$$

elde ederiz. Bu da

$$L(\mathbf{x}_j) = 0\mathbf{x}_1 + 0\mathbf{x}_2 + \cdots + 0\mathbf{x}_{j-1} + \lambda_j\mathbf{x}_j + 0\mathbf{x}_{j+1} + \cdots + 0\mathbf{x}_n = \lambda_j\mathbf{x}_j$$

olması demektir.

Karşıt olarak, $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ cümlesi de

$$L(\mathbf{x}_j) = \lambda_j\mathbf{x}_j = 0\mathbf{x}_1 + 0\mathbf{x}_2 + \cdots + 0\mathbf{x}_{j-1} + \lambda_j\mathbf{x}_j + 0\mathbf{x}_{j+1} + \cdots + 0\mathbf{x}_n \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

olmak üzere V'nin bir tabanı olsun. Şimdi L'nin S'ye göre matrisini bulalım. Bu matrisin j-inci sütunu gösteren

$$\left[L(\mathbf{x}_j)\right]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

dir. Bu yüzden

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ & & & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

bir köşgen matris olup, L'yi S'ye göre gösterir. Böylece L köşegenleştirilebilirdir.

Şimdi de, ispatı az önce verilen teoremi aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

Teorem 7.3 $L : V \to V$, n-boyutlu bir V vektör uzayı üzerinde bir lineer operatör olsun. O halde L'nin köşegenleştirilebilir olması için gerek ve yeter şart V'nin, L'nin özvektörlerinden oluşan bir S tabanına sahip olmasıdır. Bundan başka, eğer D, L'nin S'ye göre gösterimi olan bir köşegen matris ise, o zaman D'nin esas köşegenindeki bileşenler L'nin özdeğerleridir. ■

Matrisler söz cinsinden, Teorem 7.3'ü aşağıdaki gibi yeniden ifade edebiliriz:

Teorem 7.4 $n \times n$ tipindeki bir A matrisinin bir köşegen D matrisine benzer olması için gerek ve yeter şart A'nın n tane lineer bağımsız özvektöre sahip olmasıdır. Dahası, D'nin esas köşegenini oluşturan bileşenler A'nın özdeğerleridir. ■

Uyarı Eğer bir A matrisi köşegen bir matrise benzer ise, A'ya **köşegen leştirilebilir**'dir veya **köşegenleşebilir**'dir diyoruz.

Teorem 7.4'ü kullanmak için A'nın sadece n tane lineer bağımsız özvektöre sahip olduğunu göstermemiz gerekir.

ÖRNEK 2 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ matrisi verilsin. Kesim 7.1'deki Örnek 10'da A'nın özdeğerlerinin $\lambda_1 = 2$ ve $\lambda_2 = 3$ ve karşılık gelen özvektörlerin de, sırasıyla,

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

olduklarını bulmuştuk. O halde

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

lineer bağımsız olduğundan (doğrulayınız), A matrisi köşegenleştirilebilirdir. Böylece, Teorem 7.4'ten, A'nın $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ matrisine benzer olduğu sonucunu çıkarırız. ■

ÖRNEK 3 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ verilsin. A matrisi köşegenleştirilebilir mi?

Çözüm

A üst üçgensel matris olduğundan, özdeğerleri esas köşegenindeki bileşenlerdir (Kesim 7.1'deki Alıştırma 11'e bakınız). Bu yüzden, A'nın özdeğerleri $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_2 = 1$'dir. Böylece, Kesim 7.1'deki (6) denklemi, yani $(\lambda I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\lambda = 1$ ile birlikte,

$$\begin{aligned} (1-1)x_1 - \quad x_2 &= 0 \\ (1-1)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

homogen sistemine dönüşecektir. r herhangi bir sayı olmak üzere, $\begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$ vektörü bu sistemin bir çözümüdür. Bu nedenle, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektörünün katları A'nın tüm özvektörlerini oluşturacaktır. O halde A matrisi lineer bağımsız iki özvektöre sahip olmadığından köşegenleştirilemezdir. ■

Eğer $n \times n$ tipindeki bir A matrisi köşegen bir D matrisine benzer ise, o zaman $P^{-1}AP = D$ olacak şekilde tekil olmayan bir P matrisi vardır. Şimdi böyle bir matrisi nasıl inşaa edeceğimizi tartışacağız. $AP = PD$ olduğunu biliyoruz. $j = 1, 2, \ldots, n$ için $\mathbf{x}_j$ vektörü P'nin j-inci sütunu ve D matrisi de

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & & 0 \\ \vdots & 0 & & & \vdots \\ & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

olsun. AP'nin j-inci sütununun $A\mathbf{x}_j$, ve PD'nin j-inci sütunun da $\lambda_j\mathbf{x}_j$ olduğuna dikkat ediniz. (Kesim 1.3'teki Alıştırma 46'ya bakınız.). Böylece

$$A\mathbf{x}_j = \lambda_j\mathbf{x}_j$$

olur ki bu da λ_j'nin A'nın bir özdeğeri ve karşılık gelen özvektörün de $\mathbf{x}_j$ olduğu anlamına gelir.

Karşıt olarak, eğer $n \times n$ tipindeki bir A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (n tane) ve karşılık gelen lineer bağımsız özvektörleri de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ ise, o zaman P'yi j-inci sütunu $\mathbf{x}_j$ vektörü olan bir matris olarak oluştururuz. Bu durumda, rank $P = n$ olacaktır. Böylece Sonuç 4.7'den, P'nin tekil olmadığını görürüz. Öte yandan, $j = 1, 2, \ldots, n$ olduğu için, $AP = PD$ veya $P^{-1}AP = D$'dir. Bu da A'nın köşegenleştirilebilir olduğu anlamına gelir. Bu nedenle, eğer bir A matrisinin (n tane) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ özvektörü lineer bağımsız bir cümle oluştururursa, o zaman P'yi j-inci sütunu $\mathbf{x}_j$ vektörü olan bir matris olarak alıp A'yı köşgenleştirebiliriz ve $P^{-1}AP = D$ buluruz. Burada D matrisi, esas köşegeni A'nın karşılık gelen özdeğerlerinden oluşan bir köşegen matristir. Elbette, P'nin sütunlarının sırası D'nin köşegenindeki bileşenlerin sırasını belirleyecektir.

ÖRNEK 4 Örnek 2'deki A matrisini ele alalım. O halde, özdeğerler $\lambda_1 = 2$ ve $\lambda_2 = 3$, ve karşılık gelen özvektörler de, sırasıyla,

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

dir. Bu yüzden,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ ve } P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. (Doğrulayınız.) Bu durumda

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

elde ederiz. Diğer yandan, $\lambda_1 = 3$ ve $\lambda_2 = 2$ alırsak, o zaman

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},$$

olur ve böylece

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

dir. ■

Aşağıda vereceğimiz teorem, köşegenleştirilebilir matrislerin büyük bir sınıfını belirlemekte oldukça yararlıdır.

Teorem 7.5 Eğer $n \times n$ tipindeki bir A matrisine ait karakteristik denklemin tüm kökleri birbirinden farklı ise, o zaman A matrisi köşegenleştirilebilirdir.

İspat

A'nın birbirinden farklı özdeğerlerinin cümlesi $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$, ve karşılık gelen özvektörlerinin cümlesi de $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ olarak verilsin. S'nin lineer bağımsız olduğunu göstermek istiyoruz.

Aksine, S'nin lineer bağımlı olduğunu kabul edelim. O halde Teorem 4.7'ye göre S'deki bir $\mathbf{x}_j$ vektörü kendisinden önceki vektörlerin bir lineer birleşimidir. $S_1 = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{j-1}\}$ cümlesinin lineer bağımsız olduğunu kabul edebiliriz, aksi durumda, S_1'deki vektörlerden biri kendisinden önceki vektörlerin bir lineer birleşimi olacaktır ve böylece yeni bir S_2 cümlesi seçebiliriz, vs. Bu sonuçla S_1 cümlesi lineer bağımsızdır ve $a_1, a_2, \ldots, a_j$ skalarlar olmak üzere

$$\mathbf{x}_j = a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_{j-1}\mathbf{x}_{j-1} \tag{2}$$

dir. Bu da

$$\begin{aligned} A\mathbf{x}_j &= A(a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_{j-1}\mathbf{x}_{j-1}) \\ &= a_1A\mathbf{x}_1 + a_2A\mathbf{x}_2 + \cdots + a_{j-1}A\mathbf{x}_{j-1} \end{aligned} \tag{3}$$

demektir. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j$ sayıları özdeğerler ve $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_j$ vektörleri de karşılık gelen özvektörler olduğundan, $i = 1, 2, \ldots, n$ için $A\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$ olduğunu biliyoruz. Bunları (3)'te yerlerine yazarak

$$\lambda_j\mathbf{x}_j = a_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_{j-1}\lambda_{j-1}\mathbf{x}_{j-1} \tag{4}$$

elde ederiz. (2) eşitliğinin her iki tarafını λ_j ile çarparsak

$$\lambda_j\mathbf{x}_j = \lambda_j a_1\mathbf{x}_1 + \lambda_j a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_j a_{j-1}\mathbf{x}_{j-1} \tag{5}$$

elde ederiz. Ayrıca (5) eşitliğini (4) eşitliğinden taraf tarafa çıkarırsak

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \lambda_j\mathbf{x}_j - \lambda_j\mathbf{x}_j \\ &= a_1(\lambda_1 - \lambda_j)\mathbf{x}_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_j)\mathbf{x}_2 + \cdots + a_{j-1}(\lambda_{j-1} - \lambda_j)\mathbf{x}_{j-1} \end{aligned}$$

elde ederiz. Öte yandan, S_1 cümlesi lineer bağımsız olduğundan,

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_j) = 0, \quad a_2(\lambda_2 - \lambda_j) = 0, \quad \ldots, \quad a_{j-1}(\lambda_{j-1} - \lambda_j) = 0$$

olmalıdır. Şimdi de, λ sayılarının farklı olması

$$(\lambda_1 - \lambda_j) \neq 0, (\lambda_2 - \lambda_j) \neq 0, \ldots, (\lambda_{j-1} - \lambda_j) \neq 0$$

olmasını gerektirdiğinden

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{j-1} = 0$$

olacaktır. Bu $\mathbf{x}_j = \mathbf{0}$ olması demektir. Bu da $\mathbf{x}_j$'nin özvektör olması ile çelişir. O halde S cümlesi lineer bağımsızdır. Bu yüzden de A matrisi köşegenleştirilebilirdir. ■

Uyarı Teorem 7.5'in ispatında aslında biraz daha kuvvetli olan şu sonucu çıkarmış olduk: $n \times n$ tipindeki bir A matrisinin birbirinden farklı k tane özdeğeri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ ve karşılık gelen özvektörleri de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ olsun. O halde $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ vektörleri lineer bağımsızdır. (Alıştırma 25.)

Eğer A'nın karakteristik polinomunun tüm kökleri birbirinden farklı değilse, o zaman A matrisi köşegenleştirilebilir olabilir veya olmayabilir. A'nın karakteristik polinomu, λ_0 sayısı karakteristik polinomun bir kökü olmak üzere, $\lambda - \lambda_0$ şeklindeki n tane çarpanın çarpımı olarak yazılabilir. Şimdi, A'nın özdeğerlerinin A'ya ait karakteristik polinomun kökleri olduğunu biliyoruz. Bu yüzden, karakteristik polinom

$$(\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{k_r}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sayıları A'nın birbirinden farklı özdeğerleri ve $k_1, k_2, \ldots, k_r$ sayıları da toplamları n olan tamsayılardır. k_i tamsayısına λ_i özdeğerinin **katlılığı** denir. Böylece, Örnek 3'teki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisine ait $\lambda = 1$ özdeğerinin katlılığı 2'dir. Gösterilebilir ki; A matrisinin köşegenleştirilebilir olması için gerek ve yeter şart, her k katlı λ özdeğeri için, k tane lineer bağımsız özvektörün bulunabilmesidir. Bu da $(\lambda I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sisteminin çözüm uzayının k boyutlu olması demektir. Ayrıca gösterilebilir ki; eğer λ sayısı A'nın k katlı bir özdeğeri ise, o zaman λ'ya karşılık gelen ve k'dan fazla sayıda olacak şekilde lineer bağımsız özvektörleri hiçbir zaman bulamayız.

ÖRNEK 5

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi verilsin A'nın karakteristik polinomu $p(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2$ olup (doğrulayınız), A'nın özdeğerleri de $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ ve $\lambda_3 = 1$'dir. Bu yüzden $\lambda_2 = 1$ özdeğerinin katlılığı 2'dir. Şimdi $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri dikkate alacağız. Bu özvektörler de $(1I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ [Kesim 7.1'deki (6) denklemi] homogen sistemi çözülerek hesaplanır: Söz konusu homogen sistemin matris şekli

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Çözümler, r herhangi bir sayı olmak üzere, $\begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix}$ şeklindeki vektörlerdir. Böylece $(1I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ denkleminin çözüm uzayının boyutu 1 olacaktır (Niçin?). Lineer bağımsız iki özvektör bulmak mümkün değildir. Bu yüzden A matrisi köşegenleştirilemezdir. ■

ÖRNEK 6 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisini göz önüne alalım. A'nın karakteristik polinomu $p(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2$'dir. (Doğrulayınız), A'nın özdeğerleri de $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ ve $3 = 1$'dir. Bu yüzden $\lambda_2 = 1$ sayısı yine katlılığı 2 olan bir özdeğerdir. Şimdi $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri dikkate alacağız. Bu özvektörler de $(1I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ [Kesim 7.1'deki Denklem (6)] homogen sistemi çözülerek hesaplanır: Söz konusu homogen sistemin matris şekli

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Çözümler, r ve s herhangi sayılar olmak üzere, $\begin{bmatrix} 0 \\ r \\ s \end{bmatrix}$ formundaki vektörlerdir. Böylece, özvektörler $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ olarak bulunur. Bundan sonra, $\lambda_1 = 0$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektör arayacağız. Bunun için

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

homogen sistemini çözmemiz gerekecektir. Çözümler, r herhangi bir sayı olmak üzere, $\begin{bmatrix} r \\ 0 \\ -r \end{bmatrix}$ şeklindeki vektörlerdir. Böylece, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ vektörü $\lambda_1 = 0$ özdeğerine karşılık gelen bir özvektör olacaktır. Sonuç olarak $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ cümlesi lineer bağımsız olduğundan, bu örneğimizdeki A matrisi köşegenleştirilebilir bir matristir. ■

Bu sonuçla birlikte, ancak $n \times n$ tipindeki bir A matrisinin n tane lineer bağımsız özvektörü yoksa, o zaman A matrisinin köşegenleştirilemeyeceğini söyleyebiliriz.

Şimdi de bir $L : V \to V$ lineer operatörünün **karakteristik polinomu**'nu L'yi gösteren herhangi bir matrisin karakteristik polinomu olarak tanımlayalım; Teorem 7.2'den dolayı, L'yi gösteren tüm matrisler aynı karakteristik polinoma sahip olacaktır. Bundan şu sonuç çıkar: Bir λ skalarının L'nin özdeğeri olması için gerek ve yeter şart λ'nın L'ye ait karakteristik polinomun bir kökü olmasıdır.

ÖRNEK 7 Kesim 7.1'deki Örnek 14'te, $L : P_2 \to P_2$ lineer operatörüne göre matris özproblemi oluşturduk. Aynı kesimdeki Örnek 9'da, L'yi $L(at^2 + bt + c) = -bt - 2c$ şeklinde tanımladık ve P_2'nin $\{t-1, 1, t^2\}$ tabanına göre L'nin bir gösterimi olan

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisini göz önüne aldık. Ayrıca B'nin karakteristik polinomunu $p(\lambda) = \lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2)$ olarak hesapladık. Böylece bu aynı zamanda L'nin de bir karakteristik polinomu olacaktır. Özdeğerler birbirinden farklı olduğundan, B ve L köşegenleştirilebilirdir. Burada, elbette ki, B'nin yerine L'yi gösteren başka bir matris de kullanılabilirdi. ■

Anahtar Kelimeler

Köşegenleştirilebilir
Köşegenleştirilmiş
Benzer matrisler
Karakteristik polinom
Özdeğerler/özvektörler
Birbirinden farklı özdeğerler
Bir özdeğerin katlılığı

7.2 Alıştırmalar

1. $L : P_2 \to P_2$ lineer operatörü, P_2'deki her $p(t)$ için, $L(p(t)) = p'(t)$ şeklinde tanımlansın. L köşegenleştirilebilir mi? Eğer öyle ise, o zaman P_2'nin öyle bir S tabanını bulunuz ki L'nin bu tabana göre gösterimi bir köşegen matris olsun.

2. $L : P_1 \to P_1$ lineer operatörü $L(at + b) = -bt - a$ olarak tanımlansın. Eğer mümkünse, P_1'in öyle bir tabanını bulunuz ki L'nin bu tabana göre gösterimi köşegen bir matris olsun.

3. $L : P_2 \to P_2$ lineer operatörü $L(at^2 + bt + c) = at^2 - c$ biçiminde tanımlansın. Eğer mümkünse, P_2'nin öyle bir tabanını bulunuz ki L'nin bu tabana göre gösterimi köşegen bir matris olsun.

4. (***Matematik Analiz Gerekli***) V, sürekli fonksiyonlardan oluşan bir vektör uzayı ve $\{\sin t, \cos t\}$ cümlesi de bir tabanı olsun. $L : V \to V$ lineer operatörünü $L(g(t)) = g'(t)$ olarak tanımlayalım. Bu durumda L köşegenleştirilebilir mi?

5. $L : P_2 \to P_2$ lineer operatörü

$$L(at^2 + bt + c) = (2a + b + c)t^2 + (2c - 3b)t + 4c$$

olarak verilsin. L'nin özdeğerlerini ve karşılık gelen özvektörlerini bulunuz. L köşegenleştirilebilir mi?

6. Aşağıdaki matrislerden hangileri köşegenleştirilebilirdir?

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

7. Aşağıdaki matrislerden hangileri köşegenleştirilebilirdir?

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

8. Özdeğerleri 2 ve -3, karşılık gelen özvektörleri de, sırasıyla, $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ olan köşegensel olmayan 2×2 tipinde bir matris bulunuz.

9. Özdeğerleri –2, –2 ve 3, karşılık gelen özvektörleri de, sırasıyla, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ olan köşegensel olmayan 3×3 tipinde bir matris bulunuz.

10. Aşağıdaki her bir matris için, eğer mümkünse, $P^{-1}AP$ köşegen matris olacak şekilde singüler olmayan bir P matrisi bulunuz.

(a) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

11. Aşağıdaki her bir matris için, eğer mümkünse, $P^{-1}AP$ köşegensel matris olacak şekilde singüler olmayan bir P matrisi bulunuz.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

12. Özdeğerleri 3 ve 4, karşılık gelen özvektörlerinde, sırasıyla, $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ olan 2×2 tipinde bir A matrisi verilsin. Hesaplama yapmaksızın, A'ya benzer olacak şekilde köşegen bir D matrisi, $P^{-1}AP = D$ olacak şekilde de singüler olmayan bir P matrisi bulunuz.

13. Özdeğerleri –3, 4 ve 4, karşılık gelen özvektörlerinde, sırasıyla, $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ olan 3×3 tipinde bir A matrisi verilsin. Hesaplama yapmaksızın, A'ya benzer olacak şekilde köşegen bir D matrisi ve $P^{-1}AP = D$ olacak şekilde de tekil olmayan bir P matrisi bulunuz.

14. Aşağıdaki matrislerden hangileri köşegen bir matrise benzerdir?

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

15. Aşağıdaki her bir matrisin köşegenleştirilebilir olduğunu gösteriniz ve her bir matrise benzer olan köşegen bir matris bulunuz?

(a) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

16. Aşağıdaki matrislerden hiçbirinin köşegenleştirilebilir olmadığını gösteriniz.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 10 & 11 & 3 \\ -3 & -4 & -3 \\ -8 & -8 & -1 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

17. Eğer bir A matrisi $m > 1$ katlı bir λ özdeğerine sahipse öyle ki karşılık gelen özuzay m'den daha az sayıda vektörden oluşuyorsa; yani, λ'ya karşılık gelen özuzayın boyutu m'den küçükse, o zaman A matrisi **hatalıdır** (eksiktir) denir. Aşağıdaki matrislerin verilen özdeğerlerini kullanarak hangilerinin hatalı olduğunu belirleyiniz:

(a) $\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, \lambda = 8, 8$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \lambda = 3, 3, 5$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}, \lambda = 0, 0, 3$

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda = 1, 1, -1, -1$

18. $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ matrisi verilsin. D^9 matrisini hesaplayınız.

19. $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ matrisi verilsin. A^9 matrisini hesaplayınız. (*Yol gösterme:* $P^{-1}AP$ matrisi köşegenel bir D matrisi olacak şekilde bir P matrisi bulunuz ve $A^9 = PD^9P^{-1}$ olduğunu gösteriniz.)

20. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisi verilsin. A'nın köşegenleştirilebilir olması için gerek ve yeter şartları bulunuz.

21. $n \times n$ tipinde singüler olmayan A ve B matrisleri verilsin. AB ve BA matrislerinin aynı özdeğerlere sahip olduklarını gösteriniz.

22. (***Matematik Analiz Gerekli***) V, sürekli fonksiyonlardan oluşan bir vektör uzayı ve $\{e^t, e^{-t}\}$ cümlesi de bir tabanı olsun. $L : V \to V$ lineer operatörünü, V'deki $g(t)$ fonksiyonu için, $L(g(t)) = g'(t)$ olarak tanımlayalım. L'nin köşegenleştirilebilir olduğunu gösteriniz.

23. Eğer A matrisi köşegenleştirilebilir ise o zaman **(a)** A^T matrisi de köşegenleştirilebilirdir, **(b)** k pozitif bir tamsayı olmak üzere, A^k matrisi de köşegenleştirilebilirdir. Gösteriniz.

24. Eğer A matrisi singüler olmayan ve köşegenleştirilebilir ise, o zaman A^{-1} matrisi de köşegenleştirilebilirdir. Gösteriniz.

25. $n \times n$ tipindeki bir A matrisinin birbirinden farklı k tane özdeğeri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ ve karşılık gelen özvektörleri de $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ olsun. O halde $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ vektörlerinin lineer bağımsız olduğunu ispatlayınız. (*Yol gösterme*: Teorem 7.5'in ispatına bakınız.)

26. $n \times n$ tipinde tekil olmayan A ve B matrisleri verilsin. AB^{-1} ve $B^{-1}A$ matrislerinin aynı özdeğerlere sahip olduklarını gösteriniz.

27. Eğer bir A matrisi bir köşegen D matrisine benzer ise, o zaman $\text{İz}(A) = \text{İz}(D)$'dir, burada $\text{İz}(A)$ sayısı A'nın izidir. [*Yol gösterme*: Kesim 1.3'de Alıştırma 43'e bakınız, (c) şıkkında $\text{İz}(AB) = \text{İz}(BA)$ olduğu ispatlanmaktadır.]

28. $n \times n$ tipinde bir A matrisi verilsin. $B = P^{-1}AP$ matrisi de A'ya benzer olsun. Gösteriniz ki eğer $\mathbf{x}$ vektörü A'nın λ özdeğerine karşılık gelen A'nın bir özvektörü ise, o zaman B'nin λ özdeğerine karşılık gelen B'nin bir özvektörü de $P^{-1}\mathbf{x}$ vektörüdür.

7.3 Simetrik Matrislerin Köşegenleştirilmesi

Bu kesim simetrik bir matrisin (yani, bir A matrisi öyle ki $A = A^T$) köşegenlemesini göz önüne alacağız. Genel matrislerden daha kolay çalışıldığı ve pek çok uygulama problemlerinde ortaya çıktıklarından dolayı, dikkatimizi simetrik matrislerle sınırlandıracağız. Bu uygulamalardan biri Kesim 8.6'da ele alındı. Tanım gereği, simetrik bir matrisin tüm elemanları reel sayılardır.

Eğer $n \times n$ tipindeki bir A matrisi n tane birbirinden farklı özdeğerlere sahip ise, o zaman A matrisinin köşegenleştirilebilirliğini Teorem 7.5 bize garantieder;eğeröyleolmazsa,Amatrisininköşegenleştirilebilirliğigerçekleşmeyebilir. Ancak, simetrik her matris köşegenleştirilebilirdir; yani, eğer A matrisi simetrik ise, o zaman singüler olmayan bir P matrisi vardır öyle ki $P^{-1}AP = D$'dir. Burada D köşegen bir matristir. Dahası, P dikkate değer bazı özelliklere sahiptir. Bu nedenledir ki bu kesimda simetrik matrislerin incelenmesine dönüyoruz.

İlk olarak simetrik bir matrise ait karakteristik polinomun tüm köklerinin reel sayılar olacağını ispatlayacağız. Ek Bölüm B.2 karmaşık özdeğerlere sahip fazladan matris örnekleri içermektedir. Ek Bölüm B.1'de de karmaşık aritmetiğin tekrarı verilmektedir.

Teorem 7.6 Simetrik bir matrise ait karakteristik polinomun tüm kökleri reel sayılardır.

İspat

Bu sonucun iki ispatını vereceğiz. Her ikisi de karmaşık sayılara dair bazı gerçekleri gerektirirler ki bunlar Ek Bölüm B.1'de incelenmiştir. İlk ispat bu gerçeklerin çok azını kullanır. Ancak daha fazla hesaplama içerir ve uzundur. $\lambda = a + bi$ sayısının A'nın karakteristik polinomunun herhangi bir kökü olduğunu kabul edelim. Bu durumda $b = 0$ olacağını ispatlayacağız ki bu da λ'nın reel sayı olması demektir. Şimdi

$$\det(\lambda I_n - A) = 0 = \det((a + bi)I_n - A)$$

olduğunu görelim. Bu da

$$((a + bi)I_n - A)(\mathbf{x} + \mathbf{y}i) = \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}i \tag{1}$$

homogen sisteminin $\mathbf{x} + \mathbf{y}i$ şeklinde aşikar olmayan bir çözüme sahip olması demektir. Burada $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$, her ikisi de sıfır vektörü olmayan, R^n'nin vektörleridir. (1)'deki hesaplamayı yaparsak

$$(aI_n\mathbf{x} - A\mathbf{x} - bI_n\mathbf{y}) + i(aI_n\mathbf{y} + bI_n\mathbf{x} - A\mathbf{y}) = \mathbf{0} + \mathbf{0}i \tag{2}$$

elde ederiz. Reel ve sanal kısımları $\mathbf{0}$ vektörüne eşitleyerek

$$\begin{aligned} aI_n\mathbf{x} - A\mathbf{x} - bI_n\mathbf{y} &= \mathbf{0} \\ aI_n\mathbf{y} - A\mathbf{y} + bI_n\mathbf{x} &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3}$$

buluruz. (3)'teki ilk denklemin her iki tarafının $\mathbf{y}$ ile iç çarpımını ve (3)'teki ikinci denklemin de her iki tarafının $\mathbf{x}$ ile iç çarpımını alacak olursak

$$\begin{aligned} (\mathbf{y}, aI_n\mathbf{x} - A\mathbf{x} - bI_n\mathbf{y}) &= (\mathbf{y}, \mathbf{0}) = 0 \\ (aI_n\mathbf{y} - A\mathbf{y} + bI_n\mathbf{x}, \mathbf{x}) &= (\mathbf{0}, \mathbf{x}) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

veya

$$\begin{aligned} a(\mathbf{y}, I_n\mathbf{x}) - (\mathbf{y}, A\mathbf{x}) - b(\mathbf{y}, I_n\mathbf{y}) &= 0 \\ a(I_n\mathbf{y}, \mathbf{x}) - (A\mathbf{y}, \mathbf{x}) + b(I_n\mathbf{x}, \mathbf{x}) &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

buluruz. Şimdi, Kesim 5.3'teki (3) denkleminden, $(I_n\,\mathbf{y}, \mathbf{x}) = (\mathbf{y}, I_n^T, \mathbf{x}) = (\mathbf{y}, I_n\,\mathbf{x})$ ve $(A\mathbf{y}, \mathbf{x}) = (\mathbf{y}, A^T\mathbf{x}) = (y, A\mathbf{x})$ olduğunu görüyoruz. Burada $I_n^T = I_n$ ve A matrisi simetrik olduğu için $A^T = A$ oldukları gerçeğini kullandık. (4)'teki denklemleri taraf tarafa çıkarırsak

$$-b(\mathbf{y}, I_n\mathbf{y}) - b(I_n\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \tag{5}$$

veya

$$-b[(\mathbf{y}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{x})] = 0 \tag{6}$$

elde ederiz. Öte yandan $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$'nin her ikisi de sıfır vektörü olmadığından, $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ veya $(\mathbf{y}, \mathbf{y}) > 0$'dır. Böylece, (6)'dan $b = 0$ sonucunu çıkarırız. Bu nedenle A'ya ait karakteristik polinomun her kökü bir reel sayıdır.

Alternatif İspat

λ sayısı A'ya ait karakteristik polinomun herhangi bir kökü olsun. veya $\lambda = \overline{\lambda}$ olduğunu göstererek λ'nın reel olduğunu ispatlayacağız. Burada $\overline{\lambda}$ sayısı λ'nın karmaşık eşleniğini göstermektedir. Öncelikle

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

olduğunu biliyoruz. Bu denklemin her iki tarafını soldan $\overline{\mathbf{x}}^T$ ile çarpmakla

$$\overline{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}}^T \lambda\mathbf{x}$$

elde ederiz. Her iki tarafın eşlenik transpozunu alırsak

$$\overline{\mathbf{x}}^T \overline{A}^T \mathbf{x} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{x}$$

veya

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x} &= \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{x} \qquad (A = A^T \text{ olduğundan}) \\ \lambda\,\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{x} &= \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{x} \end{aligned}$$

olacaktır. Böylece

$$(\lambda - \overline{\lambda})(\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{x}) = 0$$

dir. Öte yandan $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ olduğundan, $\overline{\mathbf{x}}^T\mathbf{x} \neq 0$'dır. Bu nedenle $\lambda - \overline{\lambda} = 0$ veya $\lambda = \overline{\lambda}$'dir. ■

Bu sonuca ulaştığımıza göre, bundan böyle simetrik matrislerin köşegenleştirilmesi problemlerinde karmaşık sayıların yer almama sebebini biliyoruz demektir.

Teorem 7.7 Eğer A matrisi simetrik ise, o zaman A'nın birbirinden farklı özdeğerlerine karşılık gelen özvektörler diktir.

İspat

λ_1 ve λ_2 sayıları A'nın farklı iki özdeğeri ve karşılık gelen özvektörler de $\mathbf{x}_1$ ve $\mathbf{x}_2$ olsun. O halde

$$A\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1 \text{ ve } A\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2$$

dir. Şimdi, Kesim 5.3'teki (3) denklemini ve A matrisi simetrik olduğundan $A = A^T$ olduğu gerçeğini kullanarak.

$$\begin{aligned} \lambda_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= (\lambda_1\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &&= (A\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ &= (\mathbf{x}_1, A^T\mathbf{x}_2) &&= (\mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_2) \\ &= (\mathbf{x}_1, \lambda_2\mathbf{x}_2) &&= \lambda_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu yüzden

$$\lambda_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \lambda_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$$

dir ve

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - \lambda_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0$ sonucunu çıkarırız. ■

ÖRNEK 1 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ matrisi verilsin. A'nın karakteristik polinomu

$$p(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 4)(\lambda + 1)$$

dir. (Doğrulayınız). Bu yüzden A'nın özdeğerleri $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$ ve $\lambda_3 = -1$ olacaktır. Karşılık gelen özvektörler de

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda + 2 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

homogen sisteminin [Kesim 7.1'deki Denklem (6)] aşikar olmayan çözümleridir. $\lambda_1 = -2$ için r sıfırdan farklı bir sayı olmak üzere, $\mathbf{x}_1$'in $\begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix}$ şeklinde bir vektör olduğunu buluruz. (Doğrulayınız.) Böylece $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ alabiliriz. $\lambda_2 = 4$ için, r sıfırdan farklı bir sayı olmak üzere, $\mathbf{x}_2$'nin $\begin{bmatrix} -\frac{r}{2} \\ 0 \\ r \end{bmatrix}$ şeklinde bir vektör olduğunu buluruz (doğrulayınız). Böylece $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ alabiliriz. $\lambda_3 = -1$ için, r sıfırdan farklı bir sayı olmak üzere, $\mathbf{x}_3$'ün $\begin{bmatrix} 2r \\ 0 \\ r \end{bmatrix}$ şeklinde bir vektör olduğunu buluruz. (Doğrulayınız.) Böylece $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ alabiliriz. Diğer yandan $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ kümesinin ortogonal ve lineer bağımsız olduğu açıktır. Bu yüzden A matrisi $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ matrisine benzerdir. ■

Eğer A matrisi köşegenleştirilebilir ise, o zaman $P^{-1}AP$ matrisi köşegensel olacak biçimde tekil olmayan bir P matrisi vardır. Dahası, P'nin sütunları A'nın özvektörleridir. Şimdi, eğer A'nın özvektörleri ortogonal bir S cümlesi oluştursa, A'nın simetrik ve özdeğerlerinin de farklı olması durumundaki gibi, o zaman A'nın bir özvektörünün sıfır-

dan farklı bir skalar katı da yine A'nın bir özvektörü olacağından, A'nın özvektörlerinden oluşan birim dik bir $T = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ cümlesi elde etmek için S'yi normalize edebiliriz. P'nin j-inci sütunu $\mathbf{x}_j$ özvektörü olsun. Şimdi P'nin ne tür bir matris olması gerektiğini göreceğiz. P'yi $P = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{x}_n]$ şeklinde parçalanmış bir matris olarak yazabiliriz.

O zaman $P^T = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \mathbf{x}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^T \end{bmatrix}$'dir. Burada $\mathbf{x}_i^T$, $n \times 1$ tipindeki $\mathbf{x}_i$ matrisinin (veya vektörünün) transpozudur. Böylece $P^T P$ matrisinin (i, j) bileşeninin $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ olduğunu buluruz. Öte yandan $i = j$ için $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = 1$ ve $i \neq j$ için $(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = 0$ olduğundan $P^T P = I_n$ elde ederiz. Bu da $P^T = P^{-1}$ olması demektir. Böyle matrisler özel bir isme sahip olacak kadar önemlidir.

TANIM 7.4 Reel bir A kare matrisi için, eğer $A^{-1} = A^T$ ise, o zaman A'ya **dik** (ortogonal)'tir denir. Elbette, $A^T A = I_n$ olması durumunda da A'ya diktir diyebiliriz.

ÖRNEK 2 $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ matrisi verilsin. $A^T A = I_3$ olduğunu görmek kolaydır. Bu yüzden A matrisi diktir. ■

ÖRNEK 3 A matrisi Örnek 1'de tanımlandığı gibi olsun. Özvektörlerden oluşan

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

cümlesinin dik olduğunu daha önceden biliyoruz. Eğer bu vektörleri normalize edersek,

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \right\}$$

cümlesinin R^3 için birim dik (ortonormal) bir taban olduğunu buluruz. $P^{-1} AP$ matrisi köşegensel olacak şekilde bir P matrisi sütunları T'nin vektörlerinden oluşan bir matristir. Bu nedenle

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

dir. P'nin dik ve

$$P^{-1}AP = P^TAP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

olduğunu doğrulama işini okuyucuya bırakıyoruz. ■

Aşağıdaki teoremi ispatlamak zor değildir:

Teorem 7.8 $n \times n$ tipindeki bir A matrisinin dik olması için gerek ve yeter şart A'nın sütunlarının (satırlarının) birim dik bir cümle oluşturmasıdır.

İspat

Alıştırma 5. ■

Eğer A matrisi dik ise, o zaman $\det(A) = \pm 1$ olduğunu gösterebiliriz (Alıştırma 8). Şimdi dik matrislerin bazı geometrik özelliklerine bakacağız. Eğer $n \times n$ tipindeki bir A matrisi dik ise, $L : R^n \to R^n$ lineer operatörünü R^n'deki her $\mathbf{x}$ vektörü için $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ olarak tanımlayalım (Bölüm 6'yı hatırlayınız). Eğer $\det(A) = 1$ ve $n = 2$ ise o zaman L'nin saat yönünün tersinde bir dönme olduğu sonucu ortaya çıkar. Ayrıca gösterilebilir ki eğer $\det(A) = -1$ ise o zaman L, önce x-eksenine göre bir yansıma arkasından da saat yönünün tersinde bir dönmedir (Alıştırma 32'ye bakınız).

Tekrar, $n \times n$ tipindeki bir A matrisi dik olsun ve $L : R^n \to R^n$ lineer operatörü de R^n'deki her $\mathbf{x}$ vektörü için $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ olarak tanımlansın. Şimdi, R^n'deki standart iç çarpımı kullanarak, R^n'deki her $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörü için $(L(\mathbf{x}), L(\mathbf{y}))$ iç çarpımını hesaplayacağız. Bunu yapmak için Kesim 5.3'teki (3) denklemini kullanarak,

$$(L(\mathbf{x}), L(\mathbf{y})) = (A\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A^TA\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A^{-1}A\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, I_n\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (7)$$

elde ederiz. Bu da L'nin iki vektörün iç çarpımını koruduğu ve sonuç olarak da uzunluğu koruduğu anlamına gelir (Niçin?). Ayrıca eğer R^n'deki $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleri arasındaki açı θ ise, o zaman $L(\mathbf{x})$ ve $L(\mathbf{y})$ arasındaki açının da yine θ olacağı sonucu ortaya çıkar. (7) denklemini sağlayan, $(L(\mathbf{x}), L(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, bir lineer dönüşüme **izometri** (Anlamı Yunanca'da *eşit uzunluk*'tan gelir.) denilmektedir. Karşıt olarak, $L : R^n \to R^n$ bir izometri olsun, böylece R^n'deki her $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörü için $(L(\mathbf{x}), L(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$'dir. L'yi gösteren eden standart matris de A olsun. O zaman $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$'tir. Şimdi

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (L(\mathbf{x}), L(\mathbf{y})) = (A\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A^TA\mathbf{y})$$

dir. Bu eşitlik R^n'deki her $\mathbf{x}$ için sağlandığından, Kesim 5.3'teki Alıştırma 7(e)'yi kullanarak, R^n'deki herhangi bir $\mathbf{y}$ için $A^TA\mathbf{y} = \mathbf{y}$ olacağı sonucunu çıkarırız. O halde $A^TA = I_n$ olur (Alıştırma 36), bu yüzden A matrisi diktir. Dik matrislerin ve izometrilerin diğer özellikleri alıştırmalar kısmında incelenmiştir. (Aynı zamanda Bölüm 6'daki Alıştırma 16 ve 18'e bakınız.)

Şimdi simetrik bir matris için genel duruma dönüyoruz; A matrisi katlılığı birden büyük özdeğerlere sahip olsa bile, A'yı hala köşegensel yapabileceğimiz ortaya çıkmaktadır. Bir sonraki teoremin ispatını vermiyoruz. İspat için, J. M. Ortega, *Matrix Theory*: *A Second Course*, New York: Plenum Pres, 1987'ye bakınız.

Teorem 7.9 Eğer $n \times n$ tipindeki bir A matrisi simetrik ise, o zaman $P^{-1}AP = P^TAP = D$ olacak şekilde dik bir P matrisi vardır. Burada D köşegen bir

matristir. A'nın özdeğerleri D'nin esas köşegenini oluştururlar. ■

Ayrıca gösterilebilir ki (önceden sözünü ettiğimiz Ortega'nın kitabına bakınız) eğer simetrik bir A matrisi k katlı bir λ özdeğerine sahipse, o zaman $(\lambda I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ [Kesim 7.1'deki (6) denklemi] homogen sistemine ait çözüm uzayının boyutu k'dır. Bu da λ'ya karşılık gelen A'nın k tane lineer bağımsız özvektörünün var olması demektir. Gram-Schmidt metodunu kullanarak, bu çözüm uzayı için birim dik bir taban seçebiliriz. Böylece λ'ya karşılık gelen k tane birim dik özvektörden oluşan bir cümle elde ederiz. Birbirinden farklı özdeğerlere karşılık gelen özvektörler dik olduğundan, eğer tüm özvektörlerden oluşan cümleyi oluşturacak olursak, o zaman birim dik bir cümle elde ederiz. Bundan dolayıdır ki sütunları özvektörlerden oluşan P matrisi diktir.

ÖRNEK 4 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ matrisini göz önüne alalım. A'nın karakteristik polinomu $p(\lambda) = (\lambda + 2)^2(\lambda - 4)$ olup (doğrulayınız), A'nın özdeğerleri de $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -2$ ve $\lambda_3 = 4$ tür. Yani, -2 özdeğerinin katlılığı 2'dir. -2 özdeğerine karşılık gelen özvektörleri bulmak için, $(-2I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sistemini çözeriz: Bu sistemin matris şekli

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

dır. (8)'in çözüm uzayına ait bir taban

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

özvektörlerinden oluşur. (Doğrulayınız.) Şimdi $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \neq 0$ olduğundan, $\mathbf{x}_1$ ve $\mathbf{x}_2$ vektörleri dik değildir. (8)'in çözüm uzayına (-2 özdeğerine karşılık gelen özuzaya) ait bir birim dik taban elde etmek için Gram-Schmidt metodunu aşağıda olduğu gibi kullanabiliriz: Bunun için $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1$ ve

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \left(\frac{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{y}_1}{\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_1}\right)\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

olsun. Kesirleri yok etmek için

$$\mathbf{y}_2^* = 2\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

alalım. $\{\mathbf{y}_1\ \mathbf{y}_2^*\}$cümlesi dik vektörlerin bir cümlesidir. Bu cümleyi normalize edersek,

$$\mathbf{z}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{y}_1\|}\mathbf{y}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{z}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{y}_2^*\|}\mathbf{y}_2^* = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix}$$

elde ederiz. $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2\}$ cümlesi $\lambda = -2$ özdeğerine karşılık gelen özuzay için birim dik bir taban oluşturur. Şimdi de $(4I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sistemini çözerek $\lambda = 4$ özdeğerine karşılık gelen özuzay için bir taban bulacağız: Bu sistemin matris şekli

$$\begin{bmatrix}4 & -2 & -2\\-2 & 4 & -2\\-2 & -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \tag{9}$$

dir. Bu özuzaya ait bir taban

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

vektöründen oluşur. (Doğrulayınız.) Bu vektörü normalize ederek,

$$\mathbf{z}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

özvektörünü $\lambda = 4$ özdeğerine karşılık gelen özuzayın bir tabanı olarak elde ederiz. Öte yandan birbirinden farklı özdeğerlere karşılık gelen özvektörler dik olduğundan, $\mathbf{z}_3$'ün hem $\mathbf{z}_1$'e hem de $\mathbf{z}_2$'ye dik olduğunu gözlemleriz. Bu yüzden A'nın özvektörlerinden oluşan $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3\}$ cümlesi R^3 için bir birim dik taban oluşturur. P matrisi j-inci sütunu $\mathbf{z}_j$ olan matristir: O halde

$$P = \begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

dir. Öte yandan

$$P^{-1}AP = P^TAP = \begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\0 & -2 & 0\\0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

olduğunu doğrulamayı da okuyucuya bırakıyoruz. ■

ÖRNEK 5

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\2 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 2\\0 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

matrisi verilsin. Ya doğrudan hesaplamayla

ya da Kesim 3.2'deki Alıştırma 16'yı kullanarak, A'nın karakteristik polinomunun

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 3)^2$$

olduğunu buluruz. Böylece A'nın özdeğerleri

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 3 \text{ ve } \lambda_4 = 3$$

olacaktır. Şimdi karşılık gelen özvektörleri ve P dik matrisini hesaplayacağız. Katlılığı 2 olan -1 özdeğerine karşılık gelen özuzay $(-1I_4 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sisteminin çözüm uzayıdır. Yani, bu sistemin matris şekli

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olup çözümleri de

$$\begin{bmatrix} r \\ -r \\ s \\ -s \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

şeklindeki tüm vektörlerdir. Burada r ve s reel sayılar olarak alınmıştır. Bu yüzden

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

özvektörleri -1 özdeğerine karşılık gelen özuzay için bir taban oluştururlar ve bu özuzayın boyutu da 2'dir. Ayrıca

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

özvektörlerinin dik olduklarına dikkat ediniz. Bu özuzay için bir birim dik taban aradığımızdan dolayı,

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

vektörlerini, sırasıyla, λ_1 ve λ_2'ye karşılık gelen özvektörler olarak alırız. O zaman $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ cümlesi –1 özdeğerine karşılık gelen özuzay için bir birim dik taban oluşturur. Katlılığı 2 olan 3 özdeğerine karşılık gelen özuzay da $(3I_4 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sisteminin çözüm uzayıdır. Yani, bu sistemin matris şekli

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olup çözümleri de

$$\begin{bmatrix} r \\ r \\ s \\ s \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklindeki tüm vektörlerdir. Burada r ve s reel sayılar olarak alınmıştır. Bu yüzden

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

özvektörleri 3 özdeğerine karşılık gelen özuzay için bir taban oluştururlar ve bu özuzayın boyutu da 2'dir. Bu özvektörler dik olduğundan dolayı, onları normalize ederiz. Bu yüzden

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

vektörlerini, sırasıyla, λ_3 ve λ_4'ye karşılık gelen özvektörler olarak alırız. O zaman $\{\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\}$ cümlesi 3 özdeğerine karşılık gelen özuzay için bir birim dik taban oluşturur. Şimdi birbirinden farklı özdeğerlere karşılık gelen özvektörler diktir. Bu yüzden $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\}$ cümlesi R^4 için bir birim dik tabandır. P matrisi, j-inci sütunu $\mathbf{x}_j$, $j = 1, 2, 3, 4$ vektörü olan bir matristir. Bu nedenle

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

dir. Öte yandan P'nin dik matris ve

$$P^{-1}AP = P^TAP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

olduğunu doğrulama işini okuyucuya bırakıyoruz. ■

Bir matrisin özdeğerlerini ve karşılık gelen özvektörlerini bulma işleminde izlenmesi gereken adımları şu şekilde sıralayabiliriz:

1. Adım. A'nın $p(\lambda) = \det(I_n - A)$ karakteristik polinomunu oluşturunuz.

2. Adım A'nın karakteristik polinomuna ait kökleri bulunuz.

3. Adım A'nın k_j katlılığına sahip her λ_j özdeğeri için, $(\lambda_j I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (λ_j'ye karşılık gelen özuzay) homogen sisteminin çözüm uzayına ait bir taban bulunuz. Eğer özuzayın boyutu k_j'den küçükse, o zaman A matrisi köşegenleştirilebilir değildir. Böylece A'nın n tane lineer bağımsız özvektörünü belirleriz. Kesim 4.7'de homogen bir sistemin çözüm uzayına ait bir tabanı bulma problemini çözdük.

4. Adım P matrisi sütunları 3. Adım'da belirlenen n tane lineer bağımsız özvektörden oluşan bir matris olsun. O zaman $P^{-1}AP = D$'dir. Burada D matrisi, köşegen bileşenleri P'nin sütunlarına karşılık gelen A'nın özdeğerlerinden oluşan köşegen bir matristir.

Eğer $n \times n$ tipindeki bir A matrisi simetrik ise, o zaman $P^{-1}AP$ matrisi köşegensel olacak şekilde dik bir P matrisi bulabileceğimizi biliyoruz. Karşıt olarak, A öyle bir matris olsun ki $P^{-1}AP = D$ matrisi köşegensel olacak şekilde dik bir P matrisi bulabildiğimizi kabul edelim. O halde A ne tür bir matristir? $P^{-1}AP = D$ olduğundan $A = PDP^{-1}$'dir. Ayrıca, P matrisi dik olduğundan $P^{-1} = P^T$'dir. Bu durumda

$$A^T = (PDP^T)^T = (P^T)^T D^T P^T = PDP^T = A$$

olur ki bu da A'nın simetrik bir matris olması demektir.

■ Uygulama: Birim Çemberin Simetrik bir Matrise göre Görüntüsü

Kesim 1.7 Örnek 5'te birim çemberin köşegen matrisli bir matris dönüşümüne göre görüntüsünün orijin merkezli, esas ve ikincil eksenleri de koordinat eksenlerine paralel olan, yani standart konumda, bir elips olduğunu gösterdik. Burada, birim çemberin simetrik matrisli bir matris dönüşümüne göre görüntüsünü inceleyeceğiz. Görüntünün boyutunu ve yönünü belirlemede A'nın özdeğerlerinin ve karşılık gelen özvektörlerinin oynadığı temel rolü göstereceğiz.

2×2 tipinde simetrik bir A matrisi verilsin. O zaman Teorem 7.9'a göre dik bir $P = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2]$ matrisi vardır öyle ki,

$$P^TAP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

dir. Burada λ_1 ve λ_2 sayıları A'nın özdeğerleri ve karşılık gelen özvektörleri de, sırasıyla, $\mathbf{p}_1$ ve $\mathbf{p}_2$'dir. Dahası, $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}$ cümlesi diktir. Böylece $A = PDP^T$ sonucu çıkar. (Doğrulayınız.)

R^2'deki birim çember üzerinde bulunan herhangi bir nokta

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad 0 \le t < 2\pi$$

vektörü (veya noktası) ile gösterilir. Bu nedenle birim çemberin görüntüsü

$$A\mathbf{v}(PDP^T)\,\mathbf{v}$$

şeklindeki vektörlerden (veya noktalardan) oluşur. Görüntü noktalarının matris dönüşümlerinin bir bileşkesinden elde edildiğini; yani,

$$A\mathbf{v} = P(D(P^T\mathbf{v})) \tag{10}$$

olduğunu düşünmek uygun olacaktır. Bu da ardışık üç matris dönüşümüne karşılık gelir.

Bu görüntünün şeklini veya biçimini belirlemek için aşağıdaki gerçeği kullanırız:

Eğer Q matrisi 2×2 tipinde dik bir matris ise o zaman bir φ reel sayısı vardır öyle ki

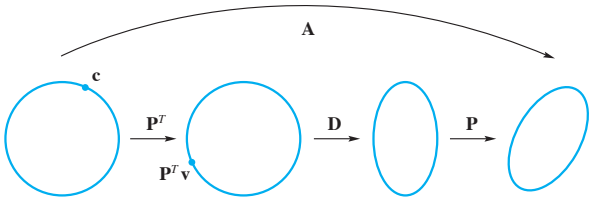
$$Q = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad \text{veya} \quad Q = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}$$

dir. Birinci durumda Q bir dönme matrisidir; Kesim 1.7'ye bakınız. İkinci durumda Q bir yansıma (x-eksenine, y-eksenine, $y = x$ doğrusuna, veya $y = -x$ doğrusuna göre) veya önce bir dönme arkasından da x-eksenine göre bir yansıma gerçekleştirir.

Bu bilgiyi ve Kesim 1.7 Örnek 5'in sonucunu kullanarak, birim çembere ait görüntünün geometrik şeklini belirleyebiliriz. (10) denkleminde gösterilen bileşke şeklini kullanarak, şu davranışları belirleriz:

P^T birim çemberi başka bir birim çembere götürür,
D bu birim çemberi standart konumdaki bir elipse götürür ve (11)
P elipse dönme veya yansıma uygular.

Bu nedenle birim çemberin simetrik bir matrise göre görüntüsü orijin merkezli bir elipstir. Ancak muhtemelen elipsin eksenleri koordinat eksenlerine paralel olmayacaktır. (Şekil 7.4'e bakınız.)



ŞEKİL 7.4 Birim çember. Görüntü; bir elips.

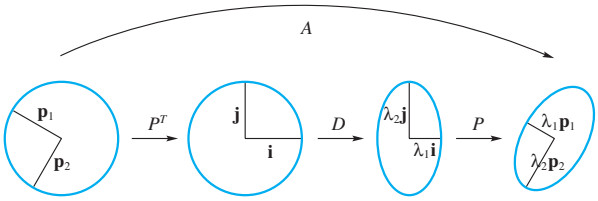
Bundan sonra, A'nın özdeğerlerinin ve karşılık gelen özvektörlerinin eliptik görüntüyü tam anlamıyla nasıl belirlediklerini göstereceğiz. $\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ birim vektörleri birim çember üzerindedir. O halde $P\mathbf{i} = \mathbf{p}_1$ ve $P\mathbf{j} = \mathbf{p}_2$'dir. (Doğrulayınız.) Ancak, P dik bir matris olduğundan $\mathbf{p}_1$ ve $\mathbf{p}_2$'de birim çemberin üzerindedir. Bu yüzden

$$P^{-1}\mathbf{p}_1 = P^T\mathbf{p}_1 = \mathbf{i} \quad \text{ve} \quad P^{-1}\mathbf{p}_2 = P^T\mathbf{p}_2 = \mathbf{j}$$

dir. Şimdi (10)'da $\mathbf{v} = \mathbf{p}_1$ alalım; o zaman

$$A\mathbf{p}_1 = P(D(P^T\mathbf{p}_1)) = P(D(\mathbf{i})) = P(\lambda_1\mathbf{i}) = \lambda_1 P\mathbf{i} = \lambda_1\mathbf{p}_1 \tag{12}$$

olur ve ayrıca $A\mathbf{p}_1 = \lambda\mathbf{p}_2$'dir. Ancak tabii ki biz, bunu biliyorduk, çünkü λ_1 ve λ_2 sayıları A'nın özdeğerleri ve karşılık gelen özvektörleri de, sırasıyla, $\mathbf{p}_1$ ve $\mathbf{p}_2$'dir. Bununla birlikte, bu adımlar dizisi gösteriyor ki, orijinal birim çember üzerinde bulunan A'nın özvektörleri eliptik görüntüde kendilerinin katları olmaktadır. Dahası, $\mathbf{p}_1$ ve $\mathbf{p}_2$ dik olduğundan, $A\mathbf{p}_1$ ve $A\mathbf{p}_2$'de diktir (Niçin?) ve bunlar eliptik görüntünün eksenleridir. Bu durumu grafiksel olarak Şekil 7.5'de gösteriyoruz. Böylece A'nın özdeğerlerinin ve karşılık gelen özvektörlerinin elipsel görüntüyü tam anlamıyla belirledikleri sonucu ortaya çıkmaktadır.

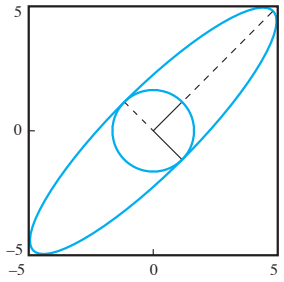


ŞEKİL 7.5 Birim çember. Görüntü; bir elips.

ÖRNEK 6 $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ matrisi verilsin. O zaman A'nın özdeğerleri $\lambda_1 = -1$ ve $\lambda_2 = 7$ olup karşılık gelen birim dik özvektörler de

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

dir. (Doğrulayınız.) Şekil 7.6'da birim çember $\mathbf{p}_1$ ve $\mathbf{p}_2$ (kesiksiz doğru parçaları) ile birlikte ve birim çemberin eliptik görüntüsü de eksenler (kesikli doğru parçaları) ile birlikte gösterilmiştir. ■



ŞEKİL 7.6

Elde ettiğimiz önceki sonuçlar ve verdiğimiz bu örnek aşağıdaki gerçekleri göstermektedir:

1. Özdeğerler eksenlerin gerilmesini belirler.
2. Özvektörler eksenlere ait görüntülerin yönünü belirler.

Bu yüzden, gerçekten de, özdeğerler ve karşılık gelen özvektörler görüntüyü tam anlamıyla belirlerler. Bu sonuçlar $n \times n$ tipindeki simetrik matrislere de genelleştirilir. Birim n-kürenin görüntüsü n-boyutlu bir elipstir. $n = 3$ için, görüntü bir elipsoid olacaktır.

Bu noktadan itibaren simetrik olmayan matrislere dair bazı görüşleri sıralayacağız. Eğer karakteristik denklemin tüm kökleri birbirinden farklı ise o zaman $n \times n$ tipindeki bir A matrisinin köşegenleştirilebilirliğini Teorem 7.5 bize garanti eder. Ayrıca, Kesim 7.2'de, katlı (tekrarlı)özdeğerlere sahip köşegenlenleştirilebilir simetrik olmayan matrisleri (Örnek 7'ye bakınız.) ve köşegenlenleştirilebilir olmayan diğer matris örneklerini çalıştık. (Örnek 3 ve 6'ya bakınız.) Simetrik ve simetrik olmayan durumlar arasında dikkat çekici bazı farklar vardır. Şimdi de onları özetleyelim. Eğer A matrisi simetrik değilse, o zaman karakteristik polinomuna ait tüm köklerin reel sayı olması gerekmez. Eğer λ özdeğeri k katlılığına sahip ise, o zaman $(\lambda I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sistemine ait çözüm uzayının boyutu k'dan küçük olabilir. Eğer A'ya ait karakteristik polinomun tüm kökleri reel ise, o zaman A'nın n tane lineer bağımsız özvektöre sahip olması mümkün olmayabilir. Birbirinden farklı özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerin dik olması gerekmez. Bu nedenle, Kesim 7.2'deki Örnek 6'da, $\lambda_1 = 0$ ve $\lambda_3 = 1$ özdeğerlerine karşılık gelen $\mathbf{x}_1$ ve $\mathbf{x}_3$ özvektörleri dik değildir. Eğer bir A matrisi köşegenlenleştirilebilir yapılamazsa, o halde çoğu zaman A'ya benzer olan ve "neredeyse köşegenel" olan bir B matrisi bulabiliriz. B matrisine "**Jordan kanonik şekil**dedir" denir. Böylesi matrislerin çalışılması bu kitabın kapsamı dışındadır. Ancak lineer cebir konusunda yazılmış daha ileri seviyedeki kitaplarda incelenmişlerdir (örneğin, K. Hoffman and R. Kunze, *Lineer Algebra*, 2d ed., Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1971); lineer cebirin çoğu uygulamalarında anahtar rol oynarlar.

Çoğu uygulamalarda, verilen bir A matrisine benzer olacak şekilde bizim sadece köşegen bir D matrisi bulmamız gerektiği kaydedilmektedir. Yani, $P^{-1}AP = D$ eşitliğini sağlayan P matrisini açıkça bilmek zorunda değiliz.

Özdeğer problemleri titreşim içeren bütün uygulamalarda ortaya çıkarlar; hava dinamiği, elastisite, nükleer fizik, mekanik, kimya mühendisliği, biyoloji, diferensiyel denklemler, vs. Uygulama problemlerinde ortaya çıkan ve köşegensel yapılması gereken matrislerin birçoğu ya simetriktir ya da karakteristik denklemlerine ait tüm kökler reeldir. Elbette ki, determinant hesabı gerektirdiğinden dolayı, bu bölümde sunulan özdeğerleri bulma metodları daha büyük tipdeki matrisler için tavsiye edilmez.

Anahtar Kelimeler

Simetrik matris
Köşegenleştirme
Özdeğerler/özvektörler
Birbirinden farklı özdeğerler
Dik matris
Birim dik cümle
Gram-Schmidt metodu

7.3 Alıştırmalar

1. $P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

matrisinin dik olduğunu doğrulayınız.

2. Aşağıdaki dik matrislerin tersini bulunuz.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

3. Eğer A ve B matrisleri dik ise o zaman AB matrisi de diktir. Gösteriniz.

4. Eğer A matrisi dik ise, o zaman A^{-1} matrisi de diktir. Gösteriniz.

5. Teorem 7.8'i ispatlayınız.

6. Alıştırma 2'deki matrisleri kullanarak Teorem 7.8'i doğrulayınız.

7. Örnek 3'teki P matrisinin dik ve

$$P^{-1}AP = P^TAP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

olduğunu doğrulayınız.

8. Eğer A matrisi dik ise, o zaman $\det(A) = \pm 1$'dir. Gösteriniz.

9. (a) $\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$ matrisinin dik olduğunu doğrulayınız.

(b) İspatlayınız ki eğer 2×2 tipindeki bir A matrisi ortogonal ise, o zaman ya

$$A = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

ya da

$$A = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{bmatrix}$$

olacak şekilde bir ϕ reel sayısı vardır.

10. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

ortogonal matrisini göz önüne alalım. R^2'deki her $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörü için, $(A\mathbf{x}, A\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\mathbf{y})$ olduğunu doğrulayınız.

11. $n \times n$ tipindeki bir A matrisi dik ve karşılık gelen lineer operatör de $L : R^n \to R^n$ olsun. Yani, R^n'deki her $\mathbf{x}$ için, $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$'dir. R^n'deki $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleri arasındaki açı θ olsun. $L(\mathbf{x})$ ve $L(\mathbf{y})$ arasındaki açının da θ olduğunu ispatlayınız.

12. Eğer $(L(\mathbf{x}), L(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ise, bu durumda $L : V \to V$ lineer operatörüne **dik**'tir denir. Burada V, n-boyutlu bir Öklid uzayıdır. S cümlesi V'nin birim dik bir tabanı ve L dik lineer operatörünün S'ye göre bir gösterimi de A matrisi olsun. A matrisinin dik olduğunu ispatlayınız.

13. $L : R^2 \to R^2$ lineer operatörü saat ile ters yönde $\pi / 4$ açısıyla bir dönme ve R^2'nin doğal tabanına göre L'nin matris gösterimi de A olsun. A matrisinin dik olduğunu ispatlayınız.

14. $n \times n$ tipinde bir A matrisi verilsin. Ayrıca $B = P^{-1}AP$ matrisi de A'ya benzer olsun. Eğer A'nın λ özdeğerine karşılık gelen özvektör $\mathbf{x}$ ise, o zaman B'nin λ özdeğerine karşılık gelen özvektör de $P^{-1}\mathbf{x}$'dir. İspatlayınız.

Alıştırma 15-20'de, verilen her bir matrisi köşegenleştiriniz ve $P^{-1}AP$ matrisi köşegen olacak şekilde dik bir P matrisi bulunuz.

15. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

16. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

17. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

19. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

20. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

Alıştırma 21-28'de, verilen her bir matrisi köşegenleştiriniz.

21. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

22. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

23. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

24. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

25. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

25. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

27. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

28. $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

29. Teorem 7.9'da geçen A matrisi 2×2 tipinde olsun. Böylece A'nın karakteristik polinomunun köklerine ait olası iki durumu göz önüne alarak bu teoremi ispatlayınız.

30. V, n-boyutlu bir Öklid uzayı olmak üzere $L : V \to V$ ortogonal lineer operatörünü (Alıştırma 12'ye bakınız) göz önüne alalım. Gösteriniz ki eğer λ sayısı L'nin bir özdeğeri ise, o zaman $|\lambda| = 1$'dir.

31. $L : R^2 \to R^2$ lineer dönüşümünü

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

olarak tanımlayalım. L'nin R^2'de bir izometri olduğunu gösteriniz.

32. A matrisi dik olmak üzere, $L : R^2 \to R^2$ lineer operatörünü, R^2'deki her $\mathbf{x}$ için, $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ olarak tanımlayalım.

(a) İspatlayınız ki eğer $\det(A) = 1$ ise o zaman L saat yönünün tersine bir dönmedir.

(b) İspatlayınız ki eğer $\det(A) = -1$ ise, o zaman L önce x-eksenine göre bir yansıma arkasından da saat yönünün tersine bir dönmedir.

33. $L : R^n \to R^n$ lineer operatörünü göz önüne alalım.

(a) İspatlayınız ki eğer L bir izometri ise, o zaman, R^n'deki her $\mathbf{x}$ için, $\|L(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$'dir.

(b) Eğer L bir izometri ve R^n'deki $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörleri arasındaki açı θ ise, o zaman $L(\mathbf{x})$ ve $L(\mathbf{y})$ arasındaki açı da θ olacaktır. İspatlayınız.

34. $L : R^n \to R^n$ lineer operatörü, R^n'deki her $\mathbf{x}$ için, $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ olarak tanımlansın. Eğer L bir izometri ise o zaman L^{-1}'de bir izometridir. İspatlayınız.

35. $L : R^n \to R^n$ bir lineer operatör ve $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ cümlesi de R^n'nin bir birim dik tabanı olsun. L'nin bir izometri olması için gerek ve yeter şart $T = \{L(\mathbf{v}_1), L(\mathbf{v}_2), \ldots, L(\mathbf{v}_n)\}$ cümlesinin R^n'nin bir birim dik tabanı olmasıdır. İspatlayınız.

36. Eğer R^n'deki her $\mathbf{y}$ için $A^T A\mathbf{y} = \mathbf{y}$ ise, o zaman $A^T A = I_n$'dir. Gösteriniz.

37. Eğer A matrisi dik ise o zaman A^T matrisi de diktir. Gösteriniz.

38. Dik bir A matrisi verilsin. cA'nın dik olması için gerek ve yeter şart $c = \pm 1$ olmasıdır. Gösteriniz.

39. Kullandığınız yazılımın özdeğerler ve özvektörleri bulmaya yarayan bir komuta sahip olduğunu varsayalım (Kesim 7.1'deki Alıştırma 39 ve 40'a bakınız). Simetrik bir A matrisini girdiğinizde, çıktınızın bir birim dik özvektörler cümlesi olup olmadığını belirleyiniz. (Teorem 7.9'a bakınız.) Örnek 4 ve 5'teki matrislerle deneyinizi yapınız.

40. Eğer Alıştırma 39'a verdiğiniz cevap hayır ise, o zaman özvektörlerden oluşan birim dik bir cümleyi oluşturmak için Gram-Schmidt metodunu kullanabilirsiniz. (Kesim 5.4'teki Alıştırma 38'e bakınız.) Gerekirse Örnek 4 ve 5'teki matrislerle deneyinizi yapınız.

Ek Alıştırmalar

1. Bölüm 3'teki Ek Alıştırma 2'de verilen her bir matris için özdeğerleri ve karşılık gelen özvektörleri bulunuz. Bu matrislerden hangileri köşegensel bir matrise benzerdir?

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ matrisini göz önüne alalım.

(a) A'nın özdeğerlerini ve karşılık gelen özvektörlerini bulunuz.

(b) A matrisi köşegenel bir matrise benzer midir? Eğer öyleyse, o zaman $P^{-1}AP$ matrisi köşegenel olacak şekilde tekil olmayan bir P matrisi bulunuz. P matrisi tek midir? Açıklayınız.

(c) A^{-1} matrisinin özdeğerlerini bulunuz.

(d) A^2 matrisinin özdeğerlerini ve karşılık gelen özvektörlerini bulunuz.

3. $n \times n$ tipinde bir A matrisi verilsin.

(a) A'nın karakteristik polinomunda bulunan λ^{n-1} teriminin katsayısının $-\text{İz}(A)$ olduğunu ispatlayınız.

(b) $\text{İz}(A)$'nın A'nın özdeğerleri toplamı olduğunu ispatlayınız.

(c) A'nın karakteristik polinomundaki sabit terimin A'nın özdeğerlerinin çarpımının ± 1 katı olduğunu ispatlayınız.

4. Şu ifadenin doğruluğunu veya yanlışlığını ispatlayınız: Tekil olmayan her matris köşegen bir matrise benzerdir.

5. x değişkenine göre bir $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k$ polinomunu göz önüne alalım. Bu durumda $p(A) = a_0I_n + a_1A + a_2A^2 + \ldots + a_kA^k$ matrisinin özdeğerlerinin $p(\lambda_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, olduğunu gösteriniz. Burada λ_i sayıları A'nın özdeğerleridir.

6. A_{11} matrisinin karakteristik polinomu $p_1(\lambda)$, ve A_{22} matrisinin karakteristik polinomu da $p_2(\lambda)$ olsun. Aşağıdaki parçalanmış matrislerin karakteristik polinomları nedir?

(a) $A = \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix}$ **(b)** $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ O & A_{22} \end{bmatrix}$

(*Yol gösterme*: Kesim 3.2'deki Alıştırma 16 ve 19'a bakınız.)

7. $L: P_1 \to P_1$ lineer operatörü $L(at + b) = \dfrac{a+b}{2}t$ olarak tanımlansın. $S = \{2 - t, 3 + t\}$ cümlesi de P_1'in bir tabanı olsun.
(a) $[L(2 - t)]_S$ ve $[L(3 + t)]_S$'yi bulunuz.
(b) L'yi S tabanına göre gösteren bir A matrisi bulunuz.
(c) A'nın özdeğerlerini ve karşılık gelen özvektörlerini bulunuz.
(d) L'nin özdeğerlerini ve karşılık gelen özvektörlerini bulunuz.
(e) L'nin her bir özdeğerine karşılık gelen özuzayı tanımlayınız.

8. $V = M_{22}$ ve $L : V \to V$ lineer operatörü de, V'deki her A için, $L(A) = A^T$ olarak tanımlansın. $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ cümlesi de V'nin bir tabanı olsun. Burada

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\text{'dir.}$$

(a) $i = 1, 2, 3, 4$ için $[L(A_i)]_S$'yi bulunuz.
(b) L'yi S tabanına göre gösteren B matrisinin bulunuz.
(c) B'nin özdeğerlerini ve karşılık gelen özvektörlerini bulunuz.
(d) L'nin özdeğerlerini ve karşılık gelen özvektörlerini bulunuz.
(e) Özuzaylardan birinin tüm 2×2 tipindeki simetrik matrislerin cümlesi diğerinin de tüm 2×2 tipindeki ters-simetrik matrislerin cümlesi olduğunu gösteriniz.

9. (***Matematik Analiz Gerekli***) V, $a + b\sin x + c\cos x$ şeklindeki trigonometrik polinomların oluşturduğu *reel* bir vektör uzayı olsun. $L : V \to V$ lineer operatörü de $L(\mathbf{v}) = \dfrac{d}{dx}[\mathbf{v}]$ olarak tanımlansın. L'nin özdeğerlerini ve karşılık gelen özvektörlerini bulunuz. (*Yol gösterme*: V'nin $S = \{1, \sin x, \cos x\}$ tabanını kullanınız.)

10. V, $a + b\sin x + c\cos x$ şeklindeki trigonometrik polinomların *karmaşık* bir vektör uzayı olsun. Alıştırma 9'da tanımlanan L'nin özdeğerlerini ve karşılık gelen özvektörlerini bulunuz.

11. İspatlayınız ki eğer A matrisi köşegen bir matrise benzer ise, o zaman A matrisi A^T matrisine de benzerdir.

Bölüm Tekrarı

Doğru veya Yanlış

1. Eğer A'nın bir özvektörü $\mathbf{x}$ ise o zaman herhangi bir k için $k\mathbf{x}$'de bir özvektördür.
2. Sıfır asla bir matrisin özdeğeri değildir.
3. Bir matrisin karakteristik polinomuna ait kökler o matrisin özdeğerleridir.
4. A'nın bir $\lambda = 4$ özdeğeri verilsin, o halde karşılık gelen özvektör de $(4I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sisteminin aşikar olmayan bir çözümüdür.
5. Eğer $n \times n$ tipindeki bir A matrisi reel ise o zaman tüm özdeğerleri de reeldir.
6. Eğer 3×3 tipindeki bir A matrisinin özdeğerleri $\lambda = 1, -1, 3$ ise o zaman A matrisi köşegenlenleştirilebilirdir.
7. Eğer A'nın λ özdeğerine karşılık gelen özvektörler $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ ise o zaman span$\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$'deki sıfırdan farklı her $\mathbf{w}$ vektörü için $A\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$'dır.
8. Eğer P tekil olmayan ve D de köşegensel ise, o zaman $A = P^{-1}DP$'nin özdeğerleri D'nin köşegen bileşenleridir.
9. Eğer A matrisi 3×3 tipinde ve özvektörleri de R^3 için bir taban oluşturuyorsa o zaman A matrisi köşegenlenleştirilebilirdir.
10. A^2 matrisinin özdeğerleri A matrisinin özdeğerlerinin karesidir.
11. $n \times n$ tipindeki her matrisin n tane özdeğeri vardır. Bu yüzden her kare matris köşegenlenleştirilebilirdir.
12. Eğer A matrisi üst üçgen bir U matrisine benzer ise, o zaman A'nın özdeğerleri U'nın köşegen bileşenlerini oluştururlar.
13. Simetrik her matris köşegenleştirilebilirdir.
14. Dik bir matrisin tersi kendisinin transpozudur.
15. Eğer A matrisi 4×4 tipinde ve dik ise, o zaman A'ya ait herhangi farklı iki sütununun iç çarpımı sıfırdır.
16. Eğer A matrisi 4×4 tipinde ve dik ise o zaman A'nın sütunları R^4'ün bir tabanını oluşturur.
17. Eğer A matrisi 4×4 tipinde ve simetrik ise, o zaman R^4'ün bir tabanını oluşturacak şekilde A'nın özvektörlerini bulabiliriz.
18. $L : R^3 \to R^3$, A matrisi tarafından gösterilsin. Eğer A'nın bir özvektörü $\mathbf{x}$ ise o zaman $L(\mathbf{x})$ ve $\mathbf{x}$ vektörleri paraleldir.
19. Eğer A matrisi köşegenlenleştirilebilir ve mutlak değerce 1'den küçük özdeğerlere sahip ise, o zaman $\lim_{k\to\infty} A^k = O$'dır.
20. Eğer A matrisi dik ise, o zaman $|\det(A)| = 1$'dir.

Küçük Sınav

1. $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ matrisinin özdeğerlerini ve karşılık gelen özvektörlerini bulunuz.

2. $L : P_2 \to P_2$ operatörü $L(at^2 + bt + c) = ct + b$ olarak tanımlansın.
- **(a)** L'nin $S = \{t^2, 2 + t, 2 - t\}$ tabanına göre matris gösterimini bulunuz.
- **(b)** L'nin özdeğerlerini ve karşılık gelen özvektörlerini bulunuz.

3. A'nın karakteristik polinomu $p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^3 + 4$ olsun. A'nın özdeğerlerini bulunuz.

4. Eğer $\lambda = 2$ sayısı A'nın bir özdeğeri ve karşılık gelen özvektör de $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ise, o zaman $B = A^3 - A + 3I_2$ matrisinin de bir özdeğerini ve karşılık gelen özvektörünü bulunuz.

5. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi verilsin.

A'nın $\lambda = 2$ özdeğerine karşılık gelen özuzay için bir taban bulunuz.

6. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisine benzer olan köşegen bir matris bulunuz.

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

matrisi köşegenleştirilebilir mi? Açıklayınız.

8. $i \neq j$ için $\text{col}_j(A)^T \text{col}_i(A) = 0$ olmak üzere 3×3 tipinde bir A matrisi verilsin. A matrisi dik midir? Açıklayınız.

9. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektörleri verilsin.
- **(a)** $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$'nin her ikisine de dik olan sıfırdan farklı bir $\mathbf{z}$ vektörü bulunuz.
- **(b)** $A = [\mathbf{x} \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{z}]$ olsun. $A^T A$ matrisini hesaplayınız. Sonuçlanan matrisi tanımlayınız ve her bir bileşeninin anlamını açıklayınız.
- **(c)** (b) şıkkındaki bilgiyi kullanarak A'ya ilişkin dik bir matris oluşturunuz. Uyguladığınız işlemi açıklayınız.
- **(d)** Şu ifadeyi tamamlamak için bir varsayım oluşturunuz: Eğer $n \times n$ tipindeki bir A matrisinin karşılıklı sütunlar dik ise o zaman $A^T A$ matrisi _____.
- **(e)** Varsayımınızı ispatlayınız.

10. Şu ifadenin doğruluğunu veya yanlışlığını ispatlayınız: Eğer bir kare matrisin iki satırını yer değiştirirsek, o zaman özdeğerleri değişmez.

11. 3×3 tipindeki bir A matrisinin ilk satırı $[k \quad 0 \quad 0]$ olsun. Burada k sıfırdan farklı reel bir sayıdır. k sayısının A'nın bir özdeğeri olduğunu ispatlayınız.

12. $A = \begin{bmatrix} 9 & -1 & -2 \\ -1 & 9 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

matrisini göz önüne alalım.
- **(a)** $\lambda = 4$ ve $\lambda = 10$ sayılarının A'nın özdeğerleri olduğunu gösteriniz ve karşılık gelen özuzayların tabanını bulunuz.
- **(b)** $P^T AP$ matrisi köşegensel olacak şekilde ortogonal bir P matrisi bulunuz.

Tartışma Alıştırmaları

1. Belirli bir A matrisi ve 5 skaları verilsin. 5'in A'nın bir özdeğeri olup olmadığının nasıl belirleneceğini tartışınız.

2. Belirli bir A matrisi ve bir $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektörü verilsin. $\mathbf{x}$'in A'nın bir özvektörü olup olmadığının nasıl belirleneceğini tartışınız.

3. 5×5 tipindeki bir A matrisinin $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5\}$ cümlesinden oluşan beş adet lineer bağımsız özvektörünün olduğunu kabul edelim.
- **(a)** S'nin R^5'in bir tabanı olmasının nedenini açıklayınız.
- **(b)** $P^{-1} AP$ matrisi köşegensel olacak şekilde tekil olmayan bir P matrisinin nasıl elde edileceğini açıklayınız. Böyle bir P matrisi birden fazla olabilir mi? Açıklayınız.
- **(c)** A'nın özdeğerleri hakkında bilinenleri tartışınız.
- **(d)** A matrisi tekil olmayan mıdır? Açıklayınız.
- **(e)** S cümlesini kullanarak, R^5 için birim dik bir tabanın nasıl belirleneceğini açıklayınız.

4. Özuzayın tanımında (Kesim 7.1'deki Alıştırma 14'e bakınız), sıfır vektörünün dahil edilmesi gerektiği konusunda açıkça ısrar etmemizin nedenini açıklayınız.

5. $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ ve

$\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1$ olsun. Burada $A\mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{x}_1$ ve $A\mathbf{x}_2 = \lambda_2 \mathbf{x}_2$'dir. Ayrıca, λ_1'e karşılık gelen özuzay V_1 ve λ_2'ye karşılık gelen özuzay da V_2 olsun. Aşağıdaki ifadenin geçerliliğini tartışınız ve kararınızın gerekçelerini belirtiniz:
Eğer R^2'deki bir vektör $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ ise o zaman $\mathbf{y}$ vektörü ya V_1'e ya da V_2'ye aittir.

6. 4×4 tipindeki bir A matrisinin karakteristik polinomu $p(\lambda)$ olsun. Cebirsel işlem kullanarak, $p(\lambda)$ 'nın köklerini r_1 ,r_2, r_3 ve r_4 olarak bulduğunuzu kabul edelim. A matrisini kullanarak bulduğunuz köklerin doğru olup olmadığını nasıl belirleyeceğinizi tartışınız.

7. $A = I_n$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olsun.

Aşağıdaki ifadenin geçerliliğini tartışınız ve kararınızın gerekçelerini belirtiniz:

Eğer A ve B matrisleri aynı ize, determinanta, ranka, ve özdeğerlere sahipse, o zaman bu matrisler benzerdir.

8. $n \times n$ tipindeki bir A matrisinin birbirinden farklı iki özvektörü $\mathbf{x}_1$ ve $\mathbf{x}_2$ olsun. Bu durumda, span$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$'deki sıfırdan farklı herhangi bir vektörün A'nın bir özvektörü olması için sağlanması gereken şartları tartışınız.

9. 3×3 tipindeki simetrik bir A matrisinin özdeğerleri λ_j, $j = 1, 2, 3$ olsun öyle ki her j için $|\lambda_j| < 1$ şartı sağlansın. Böylece A, A^2, A^3,..., A^n matris dizisinin $n \to \infty$ olduğunda göstereceği davranışı tartışınız.

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisini göz önüne alalım.

(a) A'nın özdeğerlerini ve karşılık gelen özvektörlerini bulunuz.

(b) A'ya benzer olacak şekilde köşegen bir D matrisini belirleyiniz.

(c) Kesim 1.5'de Fibonacci sayılarını kısaca tartışmıştık. n-yinci Fibonacci sayısını belirlemek amacıyla (b) şıkkındaki D matrisinin nasıl kullanılacağını tartışınız.

BÖLÜM

8 Özdeğerler ve Öz Vektörlerin Uygulamaları (Seçmeli)

8.1 Bir Topluluktaki Kararlı Yaş Dağılımı; Markov İşlemleri

Bu kesimde, özdeğerler ve özvektörlerin iki uygulaması ile ilgileneceğiz. Bu uygulamalar, hayvansal kaynaklardan elde edilen ürünlerin ve toplu ulaşım sistemlerinin günlük değişimi için kullanılır.

■ Bir Topluluktaki Kararlı Yaş Dağılımı

En fazla n yıl (ya da herhangi bir zaman birimi) yaşayabilen hayvanlar topluluğunu düşünelim. Topluluktaki erkeklerin sayısı ile dişilerin sayılarının yüzde oranının her zaman sabit kaldığını kabul edelim. Böylece, bütün topluluğun gelişimini incelerken, erkek topluluğuna önem vermeyip, bütün dikkatimizi dişi topluluğuna yoğunlaştıracağız. Dişi topluluğu aşağıdaki gibi $n + 1$ parçaya bölelim:

$x_i^{(k)} =$ k-zamanında yaşayan, i-yaşındaki dişilerin sayısı, $0 \le i \le n$;

$f_i =$ bir yıl sonra hayatta kalacak i-yaşındaki dişilerin oranı;

$b_i =$ i-yaşındaki bir dişiden doğan dişilerin ortalama sayısı.

$$\mathbf{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} x_0^{(k)} \\ x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} \qquad (k \ge 0)$$

k-zamanındaki yaş dağılım vektörünü göstersin.

$k+1$ zamanında, birinci yaş grubundaki (sıfır yaş) dişilerin sayısı, sadece k zamanından $k+1$ zamanına kadar doğan dişilerin toplam sayısıdır. k zamanında birinci yaş grubunda $x_0^{(k)}$ dişi vardır ve bunların herbiri, ortalama olarak b_0 sayıda dişi meydana getirir. Bunun için birinci yaş grubu, toplam $b_0 x_0^{(k)}$ dişi meydana getirecektir. Benzer şekilde, ikinci yaş grubundaki (1 yaş) x_1^k dişileri toplam $b_1 x_1^{(k)}$ dişilerini meydana getirir. Böylece

$$x_0^{(k+1)} = b_0 x_0^{(k)} + b_1 x_1^{(k)} + \cdots + b_n x_n^{(k)} \tag{1}$$

yazılabilir. $k+1$ zamanında ikinci yaş grubundaki dişilerin $x_1^{(k+1)}$ sayısı, k-zamanındaki birinci yaş grubundan bir yıl sonra yaşayanların sayısıdır. Böylece

$$x_1^{(k+1)} = \begin{pmatrix} \text{birinci yaş grubunda bir} \\ \text{yıl sonra da yaşayacak} \\ \text{dişilerin kesri} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{birinci yaş grubundaki} \\ \text{dişilerin sayısı} \end{pmatrix}$$

veya

$$x_1^{(k+1)} = f_0 x_0^{(k)}$$

ve genel olarak

$$x_j^{(k+1)} = f_{j-1} x_{j-1}^{(k)} \qquad (1 \le j \le n) \tag{2}$$

bulunur. (1) ve (2)'yi matris gösterimi ile

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = A\mathbf{x}^{(k)} \qquad (k \ge 1), \tag{3}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada

$$A = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ f_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & f_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

dır. $k+1$ zamanındaki yaş gruplarıyla bir topluluk dağılımı belirlemek için Denklem (3)'ü kullanabiliriz. Böylece $k+1$ zamanında herbir yaş grubundaki dişilerin sayısı, k zamanında 0 yaş grubuna karşılık gelen sayının sabit bir katı olacaktır. Yani, λ bir çarpan ise

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \lambda \mathbf{x}^{(k)}$$

veya

$$A\mathbf{x}^{(k)} = \lambda \mathbf{x}^{(k)}$$

olur. Böylece λ, A'nın bir özdeğeri ve $\mathbf{x}^{(k)}$'da buna karşılık gelen bir özvektördür. Eğer $\lambda = 1$ ise herbir yaş grubundaki dişilerin sayısı bir yıl sonrakilerle aynı olacaktır. Eğer $\lambda = 1$ özdeğerine karşılık gelen bir $\mathbf{x}^{(k)}$ özvektörü bulabilirsek, kararlı bir **yaş dağılımına** sahibiz deriz.

ÖRNEK 4 En fazla iki yıl yaşayabilen bir böcek düşünelim. Bunun popülasyon dinamiği

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

matrisiyle temsil edilir.

A'nın $\lambda = 1$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir.

Üç gruptaki dişilerin sayıları 6:3:1 şeklinde orantılı ise, bir kararlı yaş dağılımına sahip oluruz. Yani, eğer birinci yaş grubunda 600, ikinci yaş grubunda 300 ve üçüncü yaş grubunda 100 dişiye sahipsek, herbir yaş grubundaki dişilerin sayısı her bir yıl sonra aynı kalacaktır. ■

Uyarı Örnek 1'de gözönüne alınan topluluğun gelişim problemleri hayvan yetiştiriciliğinde uygulamalara sahiptir.

■ Markov İşlemleri

Bir **Markov*** **zinciri** veya **Markov işlemi** (prosesi), bir sistemin, verilen herhangi bir gözlem periyodundaki durumu ile bir önceki gözlem periyodundaki durumu arasında nasıl bir oluşumun var olduğu ihtimalini veren bir metoddur.

Bu sistemin, mümkün olan n duruma sahip olduğunu kabul edelim. Her $i = 1, 2, \ldots, n$ ve $j = 1, 2, \ldots, n$ için, eğer sistem başlangıç gözlem periyodunda j durumunda ise bir sonraki gözlem periyodunda i durumunda olacaktır. Bu ihtimali t_{ij} ile gösterelim; t_{ij}'ye **geçiş ihtimali** denir. Hatta t_{ij} her zaman periyoduna uygulanır. Yani zamanla değişmez. t_{ij} bir ihtimal olduğundan

$$0 \le t_{ij} \le 1 \quad (1 \le i, j \le n)$$

olmalıdır. Hatta sistem, başlangıç gözlem periyodunda j halinde ise, bir sonraki gözlem periyodunda n durumundan herhangi birisinde olur (j halinde de kalabilir). Böylece

$$t_{1j} + t_{2j} + \ldots + t_{nj} = 1 \tag{4}$$

olur.



ANDREI ANDREYEVICH MARKOV

Geçiş ihtimallerini, Markov işleminin **geçiş matrisi** olarak adlandırılan $n \times n$ tipindeki $T = [t_{ij}]$ matrisi olarak düzenlemek uygundur. Geçiş matrisinin diğer adları **Markov matrisi, Stochastic matris (Tahmini Matris)** veya **ihtimal matrisi** dir. Görüldüğü gibi T'nin sütunla-

*Andrei Andreyevich Markov (1856-1922) Rusya'da Ryazan'da doğdu ve St. Petersburg'da öldü. St. Petersburg üniversitesinden mezun olduktan sonra 1893'te aynı üniversitede profesör oldu. Aynı zamanda çarlık rejimine karşı olduğunu açıkladı ve bağımsızlık eylemleri içinde yer aldı. Matematiğe ilk katkısı analiz ve sayılar teorisi idi. İhtimal (olasılık) teorisine başladı ve daha sonraları Markov, literatürdeki konuları analiz etmek için alanı Markov zincirleri ile genişletti. Markov zincirleri bugün modern fizik borsa fiatlarının dalgalanması ve genetik gibi pekçok alanda genişçe uygulanmaktadır.

rındaki elemanlar negatif değildir ve Denklem (4)'ten her bir sütunun elemanları toplamı 1'dir.

Markov işleminin geçiş matrisini, sistemin gelecekte n-durumlarından herhangi birinin olma ihtimalini elde etmek için kullanacağız.

$$\mathbf{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} p_1^{(k)} \\ p_2^{(k)} \\ \vdots \\ p_n^{(k)} \end{bmatrix} \qquad (k \geq 0)$$

vektörü, Markov işleminin k periyodundaki konum vektörünü göstersin. Burada $p_j^{(k)}$, k periyodunda sistemin j halde olması ihtimalini belirtmektedir. 0 başlangıç periyodundaki $\mathbf{x}^{(0)}$ vektörüne **başlangıç konum vektörü** denir.

Bir Markov metodunun geçiş matrisi T ise $(k + 1)$ periyottaki $\mathbf{x}^{(k+1)}$ konum vektörü, k. periyottaki $\mathbf{x}^{(k)}$ konum vektörüyle

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = T\mathbf{x}^{(k)} \tag{5}$$

gibi belirlenebileceği olasılık (ihtimaller) Teoreminin temel özelliklerinden gösterilebilir.

(5)'den

$$\mathbf{x}^{(1)} = T\mathbf{x}^{(0)}$$
$$\mathbf{x}^{(2)} = T\mathbf{x}^{(1)} = T(T\mathbf{x}^{(0)}) = T^2\mathbf{x}^{(0)}$$
$$\mathbf{x}^{(3)} = T\mathbf{x}^{(2)} = T(T^2\mathbf{x}^{(0)}) = T^3\mathbf{x}^{(0)},$$

ve genel olarak

$$\mathbf{x}^{(n)} = T^n\mathbf{x}^{(0)}$$

elde ederiz. Böylece, geçiş matrisi ve başlangıç konum vektörü, bütün diğer konum vektörlerini tamamıyla belirlemektedir.

Markov işlemlerinin bazı tiplerinde, gözlemlenen periyotların sayısı arttığında, konum vektörleri **sabit** bir vektöre yaklaşır. Bu durumda Markov işleminin **dengeye ulaştığını** söyleriz. Buradaki sabit vektöre **sabit konum vektörü** denir. Markov işlemleri genelde, belli bir sistemin uzun bir zaman içindeki davranışlarını belirlemek için kullanılır. Örneğin, bir imalatçının, sürekli bir temel üzerinde tutmak isteyebileceği bir pazarın parçası. Böylece bir Markov işleminin dengeye ulaşıp ulaşamayacağı sorusu oldukça önemlidir. Markov işleminin dengeye ulaşan bir sınıfını tanımlamak için birkaç ilave bilgiye ihtiyacımız vardır.

Eğer $u_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq n)$ ve

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

ise

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 1$$

vektörü bir **ihtimal vektörü** olarak adlandırılır.

Bir Markov işleminin T geçiş matrisinin bütün elemanları pozitif ise Markov işlemine **regüler**dir denir. Bir regüler Markov işleminin daima dengeye ulaştığı ve sabit-durum vektörünün bir ihtimal vektörü olduğu gösterilebilir. Sabit-konum vektörü, keyfi bir $\mathbf{x}$ ihtimal vektörü için birbirini izleyen $T^n\mathbf{x}$ kuvvetlerinin limitinin alınmasıyla bulunabilir. Eğer $\mathbf{u}$, T geçiş matrisli bir Markov işleminin sabit-konum vektörü ise T'nin $\mathbf{u}$ özdeğerine karşılık gelen bir özdeğeri $\lambda = 1$ olmak üzere $T\mathbf{u} = \mathbf{u}$ olacağına dikkat ediniz ($\mathbf{u}$ bir ihtimal vektörü).

ÖRNEK 2

Bir şehrin yağmurlu ya da kuru olmasını düşünelim. Alınan geniş bilgiler sonucunda kuru günden sonra yağmurlu günün olması ihtimali $\frac{1}{3}$ ve yağmurlu gün sonrasında kuru günün olması ihtimali $\frac{1}{2}$ dir. Kuru gün için K'yı, yağmurlu gün için Y'yi kullanalım. Bu durumda Markov işleminin geçiş matrisi

$$T = \begin{matrix} \\ \text{K} \\ \text{Y} \end{matrix}\!\!\begin{matrix} \begin{matrix} \text{K} & \text{Y} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

olarak yazılır.

T'nin bütün elemanları pozitif olduğundan bir regüler Markov işlemi ile ilgileneceğiz. Dolayısıyla bu işlem dengeye ulaşır. Gözleme başladığımızda havanın kuru olduğunu kabul edersek (0. gün) ilk konum vektörü olan

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

vektörü bir ihtimal vektörüdür. Bu durumda 1. gündeki konum vektörü (gözlemimizin ilk gününden sonraki gün)

$$\mathbf{x}^{(1)} = T\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.67 & 0.5 \\ 0.33 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.67 \\ 0.33 \end{bmatrix}$$

olur. Burada, sırasıyla $\frac{2}{3}$ ve $\frac{1}{3}$ yerlerine 0.67 ve 0.33 yazılmıştır. Böylece 1. gün yağmur yağmama ihtimali 0.67 ve yağmur yağma ihtimali 0.33'tür. Benzer şekilde,

$$\mathbf{x}^{(2)} = T\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.67 & 0.5 \\ 0.33 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.67 \\ 0.33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.614 \\ 0.386 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(3)} = T\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.67 & 0.5 \\ 0.33 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.614 \\ 0.386 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.604 \\ 0.396 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(4)} = T\mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.67 & 0.5 \\ 0.33 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.604 \\ 0.396 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.603 \\ 0.397 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(5)} = T\mathbf{x}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.67 & 0.5 \\ 0.33 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.603 \\ 0.397 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.603 \\ 0.397 \end{bmatrix}.$$

4. günden sonra konum vektörünün daima aynı kalacağı görülmektedir ve dolayısıyla bu

$$\begin{bmatrix} 0.603 \\ 0.397 \end{bmatrix}$$

vektörü, sabit-konum vektörü olacaktır.

Bu, 4. günden sonra havanın yaklaşık %60 oranında kuru, geriye kalan %40 oranında yağışlı olacağını ifade eder.

Bu sabit-konum vektörü aşağıdaki şekilde de bulunabilir. $\lambda = 1$ t'nin bir özdeğeri iken bu değere karşılık gelen $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ özvektörü,

$$T\mathbf{u} = \mathbf{u}$$

veya

$$(I_2 - T)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

denkleminin çözümüyle bulunur. Yukarıdaki son homogen denklem sistemini çözerek elde edilen çözümlerden $\mathbf{u}$'nun bileşenlerinin toplamının 1 olmasını kullanarak birtek $\mathbf{u}$ vektörü buluruz ($\mathbf{u}$, ihtimal vektörü olduğundan). Bu durumda

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}u_1 - \tfrac{1}{2}u_2 &= 0 \\ -\tfrac{1}{3}u_1 + \tfrac{1}{2}u_2 &= 0. \end{aligned}$$

homogen sistemini çözmeliyiz. Buradan $u_2 = \frac{2}{3}\, u_1$ bulunur. Bunu

$$u_1 + u_2 = 1$$

denkleminde yerine koyarsak $u_1 = 0.6$ ve $u_2 = 0.4$ elde ederiz. ■

Anahtar Kelimeler

Kararlı yaş dağılımı
Markov zinciri
Markov işlemi
Regüler Markov işlemi
Markov matrisi
Stokastik matris
İhtimal matrisi
Geçiş ihtimali
Denge sabiti
Konum vektörü
İhtimal vektörü
Başlangıç konum vektörü

8.1 Alıştırmalar

1. En fazla 2 yıl yaşayabilen bir canlı organizmayı gözönüne alalım. Bunun matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

ise kararlı yaş dağılımını bulunuz.

2. En fazla 2 yıl yaşayabilen ve matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

olan bir canlı organizmanın kararlı yaş dağılımını bulunuz.

3. Aşağıdakilerden hangileri bir Markov işleminin geçiş matrisidir?

(a) $\begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.8 & 0.5 & 0.7 \\ 0.0 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0.55 & 0.33 \\ 0.45 & 0.67 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.0 & 0.8 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$

4. Aşağıdakilerden hangileri ihtimal vektörüdür?

(a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} \\ \frac{2}{10} \end{bmatrix}$

5.
$$T = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

geçiş matrisini gözönüne alalım.

(a) $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ise $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$ ve $\mathbf{x}^{(3)}$'ü üç ondalıklı olarak hesaplayınız.

(b) T'nin regüler olduğunu ve sabit-konum vektörü olduğunu gösteriniz.

6.
$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.0 \\ 0 & 0.3 & 0.3 \\ 1 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix}$$

geçiş matrisini gözönüne alalım.

(a)
$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ise $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$ ve $\mathbf{x}^{(3)}$'ü üç ondalıklı olarak hesaplayınız.

(b) T'nin regüler olduğunu ve sabit-konum vektörü olduğunu gösteriniz.

7. Aşağıdaki geçiş matrislerinden hangileri regülerdir?

(a) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{5} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

8. Aşağıdaki geçiş matrislerinin herbirinin denge haline ulaşacağını gösteriniz.

(a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0.8 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}$

9. Aşağıdaki regüler matrislerin herbirinin sabit-konum vektörünü bulunuz.

(a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 \\ 0.7 & 0.9 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 0.4 & 0.0 & 0.1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}$

10. ***(Psikoloji)*** Bir fare A ve B gibi iki kapısı olan bir kafesin içindedir. Fare hergün, elektrik şokunun bulunduğu A kapısına veya yiyeceğin bulunduğu B kapısına gidebilir. Farenin hangi kapıdan geçeceğini tespit etmek için kapılara kaydediciler konulmuştur. Gözlemin başlangıcında, Pazartesi günü, farenin A veya B kapısına gitme ihtimalleri hemenhemen eşittir. A kapısına gittikten ve şoka uğradıktan sonra, bir sonraki gün yine aynı kapıya gitme ihtimali 0,3'tür. B kapısına gittikten ve yiyeceğe ulaştıktan sonra, bir sonraki gün aynı kapıya gitme ihtimali 0,6'dır.

(a) Markov işlemi için geçiş matrisini yazınız.

(b) Farenin Çarşamba günü A kapısına gitme ihtimali nedir (gözlemin başlangıcı 3. gün)?

(c) Sabit konum vektörü nedir?

11. (***Sosyoloji***) Bir araştırma sonucunda, bir gencin mesleği, babasının mesleğine ve aşağıda geçiş matrisi ile verilen P, F ve L faktörlerine bağlıdır.

		Babanın mesleği		
		P	F	L
Oğulun mesleği	P	0.8	0.3	0.2
	F	0.1	0.5	0.2
	L	0.1	0.2	0.6

Burada P; profesyonel, F; çiftçi, L; laboratuvar teknisyenliğidir. Böylece profesyonel babanın bir oğlunun profesyonel olma ihtimali 0,8 dir v.s.

(a) Bir profesyonelin torununun profesyonel olma ihtimali nedir?

(b) Uzun süre sonra nüfusun çiftçi olması oranı nedir?

12. (Genetik) Bir bitkinin çiçeklerinin kırmızı (K), pembe (P) veya beyaz (B) olabileceğini düşünelim. Bu yapı, KK, KB ve BB gen tiplerine bağlıdır. Bütün bu gen tiplerinin herbirini KB gen tipi ile çiftleştirdiğimiz zaman aşağıdaki geçiş matrisini buluruz.

$$\begin{array}{l} \\ \text{Döl bitkinin çiçekleri} \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \text{Ana bitkinin çiçekleri} \\ \begin{array}{ccc} \text{K} & \text{P} & \text{B} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.25 & 0.0 \\ 0.5 & 0.50 & 0.5 \\ 0.0 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{K} \\ \text{P} \\ \text{B} \end{array}$$

Ardarda gelen herbir neslin, yalnız KB gen tipli bitkilerle döllenerek oluştuğunu düşünelim. Bu metod dengeye ulaştığı zaman bitkiler hangi oranda, kırmızı, pembe veya beyaz çiçekli olurlar?

13. ***(Toplu Taşıma)*** Yeni bir toplu taşıma sistemi uygulamaya konmuştur. Taşıma otoriteleri, hergün evden işe gidip gelen kişilerin toplu taşıma araçlarını kullanma (M) yüzdesini ve otomobil kullanma (A) yüzdesini tahmin edecek çalışmalar yapmaktadırlar. Bu çalışma sonucunda aşağıdaki geçiş matrisi elde edilmiştir:

$$\begin{array}{l} \\ \text{Gelecek yıl} \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \text{Bu yıl} \\ \begin{array}{cc} \text{M} & \text{A} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{M} \\ \text{A} \end{array}$$

Birim alandaki nüfusun sabit olduğunu ve başlangıçta toplu taşıma araçlarını kullananların oranının %30, otomobil kullananların oranının %70 olduğunu kabul edelim.

(a) 1 yıl sonra toplu taşıma araçlarını kullananların yüzdesi nedir? 2 yıl sonrası için nedir?

(b) Uzun süre içinde toplu taşıma araçlarını kullananların yüzdesi nedir?

8.2 Spektral Ayrışım ve Singüler Değer Ayrışımı

Teorem 7.9 $n \times n$ tipindeki bir simetrik A matrisinin

$$A = P\,D\,P^T \tag{1}$$

matris çarpımı şeklinde yazılabileceğini ifade eder. Burada D bir köşegen matris ve P bir dik matristir. D'nin köşegen elemanları A'nın $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ özdeğerleridir ve P'nin sütunları birimdik $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ özvektörlerinin birleşimidir. (1) gösterimi A'nın spektral ayrışımı olarak adlandırılır. (1) ifadesini aşağıdaki biçimde yazmak yararlı olur:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \mathbf{x}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^T \end{bmatrix} \tag{2}$$

(2) gösterimi, Kesim 8.6'da gösterildiği gibi ikinci dereceden şekiller hakkında bilgi edinmek için kullanılabilir ve A'nın özdeğerlerinin yapısı diğer uygulamalar için de yararlı olabilir. Bununla birlikte (1) ve (2)'yi A matrisinin içerdiği bilgilerin durumunu ortaya koymak için kullanabiliriz. Özel olarak A matrisini, A hakkındaki özellikleri görme kolaylığı sağlayan daha basit görünümlü simetrik matrislerin lineer birleşimi olarak ifade edebiliriz. Bu simetrik matrisler bize A ile ilgili tüm

bilgileri verir. $D\,P^T$ çarpımı hesaplanabilir ve

$$DP^T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \mathbf{x}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{x}_1^T \\ \lambda_2\mathbf{x}_2^T \\ \vdots \\ \lambda_n\mathbf{x}_n^T \end{bmatrix}$$

şeklinde verilir. Böylece (2)

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1\mathbf{x}_1^T \\ \lambda_2\mathbf{x}_2^T \\ \vdots \\ \lambda_n\mathbf{x}_n^T \end{bmatrix} \tag{3}$$

olur. (3)'ün sağ tarafındaki çarpımın dikkatli bir analizi, A'yı $\mathbf{x}_j\mathbf{x}_j^T$ matrislerinin bir lineer birleşimi olarak yazabileceğimizi ve katsayıların A'nın özdeğerleri olduğunu ortaya koyar. Yani

$$A = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T = \lambda_1\mathbf{x}_1\mathbf{x}_1^T + \lambda_2\mathbf{x}_2\mathbf{x}_2^T + \cdots + \lambda_n\mathbf{x}_n\mathbf{x}_n^T \tag{4}$$

dır. (4)'ün formel ispatı oldukça yorucudur. Örnek 1'de $n = 2$ hali için (4)'ten elde edilen işlemi göstereceğiz. Ortaya konan örnekteki adımlar genel durum için izlenebilir.

ÖRNEK 1 A, 2×2 tipinde özdeğerleri λ_1 ve λ_2 olan simetrik bir matris ve $\mathbf{x}_1$ ve $\mathbf{x}_2$ ilgili birimdik özvektörler olsun. $P = [\mathbf{x}_1\ \mathbf{x}_2]$ ve işlemleri el ile daha kolay yapmak ve görmek için $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ olsun. A simetrik olduğundan bir dik matris kullanarak köşegenleştirilebilir.

$$P^T A P = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

elde ederiz ve böylece

$$A = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} P^T$$

olur.

Bundan sonra aşağıdaki matris ve cebirsel işlemler uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 a & \lambda_1 b \\ \lambda_2 c & \lambda_2 d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 a^2 + \lambda_2 c^2 & \lambda_1 ab + \lambda_2 cd \\ \lambda_1 ab + \lambda_2 cd & \lambda_1 b^2 + \lambda_2 d^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \lambda_1 a^2 & \lambda_1 ab \\ \lambda_1 ab & \lambda_1 b^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_2 c^2 & \lambda_2 cd \\ \lambda_2 cd & \lambda_2 d^2 \end{bmatrix} \\
&= \lambda_1 \begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} c^2 & cd \\ cd & d^2 \end{bmatrix} \\
&= \lambda_1 \begin{bmatrix} a\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \\ b\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} c\begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \\ d\begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
&= \lambda_1 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix} \\
&= \lambda_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1^T + \lambda_2 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_2^T
\end{aligned}
$$

olur. ■

(4)'teki ifade (1)'deki spektral ayrışıma eşdeğerdir. Fakat özdeğer ve özvektör gösterimleri, farklı biçiminde bir bilgi verir. Örnek 2, her iki şekildeki spektral ayrışımı gösterir.

ÖRNEK 2

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

olsun. A'nın spektral gösterimini belirlemek için, ilk olarak onun özdeğerlerini ve özvektörlerini elde ederiz. A'nın üç farklı $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ ve $\lambda_3 = -1$ özdeğerlerine sahip olduğunu ve sırasıyla bu özdeğerlere karşılık

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

özvektörlerini buluruz. (Doğrulayınız.) Özdeğerler farklı olduğundan, karşılık gelen özvektörlerin bir dik cümle şeklinde olduğunu garanti ederiz. (Teorem 7.7'ye bakınız.) Bu vektörleri normalize ederek birim uzunluklu özvektörlerin birim dik bir cümlesini

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde ederiz.

Bu durumda A'nın spektral gösterimi

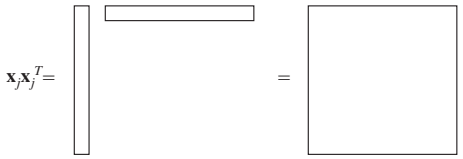
$$
\begin{aligned}
A &= \lambda_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1^T + \lambda_2 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_2^T + \lambda_3 \mathbf{x}_3 \mathbf{x}_3^T \\
&= 1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\
&\quad + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= 1\left(\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 3\left(\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= 1 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

dir. ■

Örnek 2'de A'nın özdeğerleri farklıydı. Bu nedenle ilgili özvektörler dik bir cümle oluşturdu. Eğer simetrik bir matris katlı bir özdeğere sahip olursa, katlı özdeğere karşılık gelen lineer bağımsız özvektörlerin dik bir cümlesi olmasına gerek yoktur. Bununla birlikte dik özvektörlerin bir cümlesini elde etmek için, katlı bir özdeğere karşılık gelen lineer bağımsız özvektörlere Gram-Schmidt yöntemini uygulayabiliriz.

Şunu belirtelim ki (4), simetrik A matrisinin, $\mathbf{x}_j$, $n \times 1$ ve $\mathbf{x}_j^T$, $1 \times n$ tipinde olduğundan $n \times n$ tipindeki $\mathbf{x}_j\mathbf{x}_j^T$ matrislerinin bir lineer birleşimi olarak yazılabileceğini açıklar. $\mathbf{x}_j\mathbf{x}_j^T$ matrisi Şekil 8.1'de gösterildiği gibi basit bir yapıya sahiptir.

ŞEKİL 8.1



$\mathbf{x}_j\mathbf{x}_j^T$'yi bir **dış çarpım** olarak adlandırırız (Bölüm 1'deki Ek Alıştırmalara 27'ye bakınız). Her satırın $\mathbf{x}_j^T$'nin bir katı olduğu gösterilebilir. Buradan $\mathbf{x}_j\mathbf{x}_j^T$'nin indirgenmiş eşelon şekli [**rref** $(\mathbf{x}_j\mathbf{x}_j^T)$ ile gösterilir] sıfırdan farklı bir satıra sahiptir ve böylece rankı 1'dir. (4)'te bunun anlamının, her $\mathbf{x}_j\mathbf{x}_j^T$ dış çarpımının A matrisinin inşaası için gerekli bilginin sadece bir parçasına katkıda bulunmak, olduğunu açıklarız. Böylece spektral ayrışımın A matrisi hakkında temel bilgiyi kesinlikle ortaya koyduğunu söyleyebiliriz.

(4)'teki A'nın spektral ayrışımı; A'yı, özvektörlerinin dış çarpımlarının bir lineer birleşimi olarak ifade eder. Burada lineer birleşimin katsayıları A'nın özdeğerleridir. Her dış çarpımın rankı 1 olduğundan, A matrisinin oluşturulmasında onların "eşit değere" sahip olduklarını

söyleyebiliriz. Bununla birlikte λ_j özdeğerinin büyüklüğü, $\mathbf{x}_j\mathbf{x}_j^T$ dış çarpımında bulunan "ağırlığı" belirler. Sezgisel olarak, eğer özdeğerleri $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$ şeklinde belirlersek,

$$A = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j^T = \lambda_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1^T + \lambda_2 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_2^T + \cdots + \lambda_n \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T$$

toplamındaki başlangıç terimleri, daha küçük özdeğerlere karşılık gelen sonraki terimlere göre daha fazla bilgi verir. Eğer herhangi bir özdeğer sıfır olursa, onun özvektörü A'nın inşaasına hiç bir katkıda bulunmaz. Bu bir singüler simetrik matris halidir.

ÖRNEK 3

Örnek 2'den $|3| \geq |-1| \geq |1|$ şeklinde sıralanmış özdeğerlere sahibiz. Böylece, 3'e karşılık gelen özvektör daha tesirli olduğu halde -1 ve 1 özdeğerlerine karşılık gelen özvektörlerin katkısı eşit olarak düşünülebilir. Özvektörlerin büyüklük sırasına göre sıralanmış terimleri kullanarak spektral ayrışımı yeniden yazarsak, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\begin{aligned} A &= 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\quad + 1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 3\left(\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 1\left(\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

■

Örnek 3'teki kısmi toplamların terimlerine ayrı ayrı bakarak aşağıdaki matrisleri elde ederiz:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = A.$$

Bu (4)'teki spektral ayrışımın kısmi toplamlarını kullanarak A matrisindeki bilgilere yaklaşabileceğimizi önerir. Gerçekten, bu tip gelişmeler matematikte yaklaşım işlemlerinin sayısının temelidir.

■ Uygulama: Birim Çemberin 2 × 2 Matris ile Gösterimi

A, 2×2 tipinde herhangi bir reel matris olsun. O zaman $U = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2]$ ve $V = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2]$ 2×2 tipinde dik iki matris olmak üzere A matrisinin $A = USV^T$ biçiminde bir singüler değer ayrışımına sahip olduğunu biliyoruz. S matrisi köşegen elemanları A'nın singüler değerleri olan 2×2 tipinde köşegen matristir. Bu durumda birim çemberin gösterim biçiminin analizi özvektörler yerine A'nın singüler vektörlerini kullanmamız dışında Kesim 7.3'teki ile hemen hemen aynıdır. Görüntü yine bir elipstir. O halde aşağıdaki önemli denklik bağıntılarını elde ederiz.

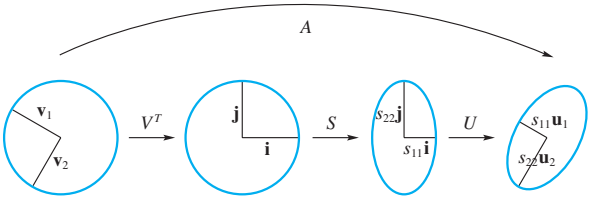
$A = USV^T$ bağıntısı $AV = US$ bağıntısına denktir. (Açıklayınız.)

$AV = US$ bağıntısı $A[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2] = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2]\begin{bmatrix} s_{11} & 0 \\ 0 & s_{22} \end{bmatrix}$

bağıntısınına denktir.

$A[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2] = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2]\begin{bmatrix} s_{11} & 0 \\ 0 & s_{22} \end{bmatrix}$ bağıntısı $A\mathbf{v}_1 = s_{11}\mathbf{u}_1$ ve $A\mathbf{v}_2 = s_{22}\,\mathbf{u}_2$ bağıntısına denktir.

Böylece V'nin sütunlarının görüntüsü U nun sütunlarının skalar çarpımıdır. Bunlar, Kesim 7.3'teki özvektörler ve özdeğerler için benzer sonuçların hatırlatır. V dik olduğundan sütunları da dik vektörlerdir ve $V^T = V^{-1}$ dir. Böylece $V^T\mathbf{v}_1 = \mathbf{i}$ ve $V^T\mathbf{v}_2 = \mathbf{j}$ olur. Şekil 8.2, Kesim 7.3'teki Şekil 7.5'e, öz vektörler yerine singüler vektörler kullanılmasıyla benzer olur.



ŞEKİL 8.2

Birim çember. Görüntü; bir elips.

ÖRNEK 4

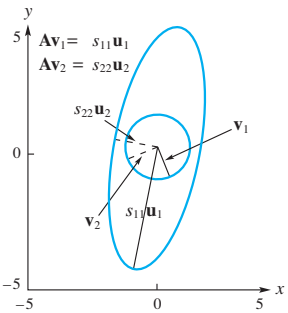
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $A = USV^T$ singüler değer ayrışımını hesaplayabiliriz. Burada

$$U = \begin{bmatrix} -0.1091 & -0.9940 \\ -0.9940 & 0.1091 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 4.4966 & 0 \\ 0 & 1.3343 \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} 0.4179 & -0.9085 \\ -0.9085 & -0.4179 \end{bmatrix}$$

dur.



ŞEKİL 8.3

Şekil 8.3 $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_2$ vektörleri ile oluşturulmuş birim çemberi ve sırasıyla $s_{11}\mathbf{u}_1$ ve $s_{22}\mathbf{u}_2$ ile gösterilen büyük (majör) ve küçük (minör) eksenli eliptik resmi göstermektedir. ■

■ Uygulama: Simetrik Şekiller

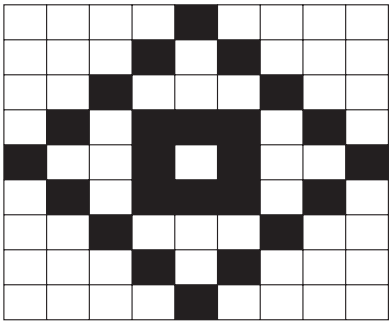
Hızlı bir şekilde iletilmesi gereken bilgiye ait büyük bir simetrik A matrisine sahip olduğumuzu varsayalım. Bilginin iletilebilmesi için aslında içeriğin büyük bir kısmı gerekmektedir. Bu durum, simetrik matris*, bir şablonu veya bir fotoğrafı gösterdiğinde, ortaya çıkabilir. Aynı zamanda basit ilişkili matrisin özdeğerlerinin ve özdeğerlere ilişkin özvektörlerinin hesaplanabildiğini kabul edelim. Matrisin spektral ayrışımı kullanılarak, tüm özdeğerler ve özvektörlerin yerine kısmi toplamları kullanarak yaklaşık görüntüyü elde edebiliriz. Bunu yapmak için özdeğerleri özvektörlerde içerilen bilginin ağırlığı (önemi) olarak gözönüne alacağız ve özdeğerlerin

$$|\lambda_1| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$$

şeklinde olduğunu kabul edeceğiz.

O zaman $k \leq n$ için $A \approx \lambda_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1^T + \lambda_2 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_2^T + \ldots + \lambda_k \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T$ olur. Bu şema önce daha geniş özdeğerlerle ilgili bilgiyi kullanır ve sonra daha küçük özdeğerli bilgiyle eşleştirir.

ÖRNEK 5 Şekil 8.4'te siyah blok için 1 ve beyaz blok için 0 olacak şekilde numaralandırılmış geometrik şablonu gözönüne alalım. *A*'da, Şekil 8.5'teki gibi sıfırlar ve birler içeren 9×9 tipinde bir matris olsun.



ŞEKİL 8.4

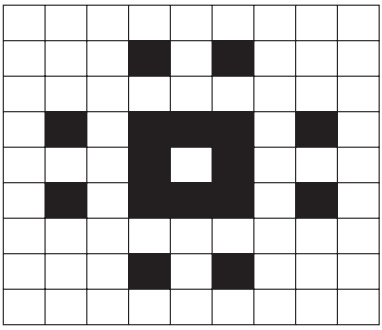
0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0

ŞEKİL 8.5

Spektral gösterimin kısmi toplamlarını kullanarak geometrik şekli tahmin edebiliriz. MATLAB kullanarak özdeğerlerin ondalık büyüklüklerinin sırasıyla 3.7, 2, –2, 1.1, –0.9, 0 0, 0, 0 olduğunu gösterebiliriz. Yaklaşımları dijital olarak göstermek yerine, girdi mutlak değer olarak $\frac{1}{2}$ ye eşit veya daha büyük olduğunda siyah kareyle, diğer durumlarda beyaz kare ile resimli bir gösterim kullanılır. İlk iki kısmî toplamı sırasıyla Şekil 8.6 ve Şekil 8.7'de gösteriyoruz. Üçüncü kısmî toplam yine Şekil 8.7'yi gösterir ve dördüncü kısmî toplam Şekil 8.4'ün orijinal şablonudur. Şablona bir siyah ve beyaz yaklaşım inşa etmek için yeterli bilgi transferi yapmak zorunda isek, sadece ilk dört özdeğer ve bunlara ilişkin özvektörleri gönderebiliriz. Bu 4 + (4)9 = 40 nümerik değerdir. Bu da 81 değer gerektiren *A* matrisinin tamamının transferi ile kıyaslanırsa önemli bir tasarruftur. ■

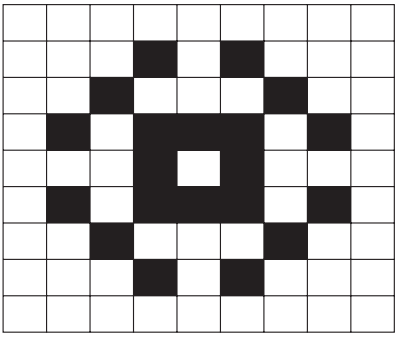
*(4)'te *n* terimden daha azı birleştirilirse, buna spektral gösterimin kısmî toplamı deriz.

$A \approx 3.7\mathbf{p}_1\mathbf{p}_1^* \Rightarrow$



ŞEKİL 8.6

$A \approx 3.7\mathbf{x}_1\mathbf{x}_1^* + 2\mathbf{x}_2\mathbf{x}_2^* \Rightarrow$



ŞEKİL 8.7

Bir simetrik matrisin faydası bilginin gösterimi bakımından biraz sınıflandırıldığında, spektral biçimdeki ayrışımının keyfi büyüklükte matrislere genelleştirilmesi kısmî toplamlar ile yaklaşım yönteminin kullanılabilirliğini genişletir. Daha genel olan bu ayrışımı gelecek kesimlerde vereceğiz. İspatı bu bölümün sonundaki kaynaklar listesinde bulunabilecek olan şu sonucu verelim.

Bir Matrisin Singüler Değer Ayrışımı

A, $m \times n$ tipinde reel bir matris olsun. Bu taktirde

$$A = U\,S\,V^T \tag{5}$$

olacak şekilde $m \times m$ tipinde U ve $n \times n$ tipinde V dik matrisleri vardır. Burada S, köşegende olmayan bütün elemanları sıfır ve $s_{11} \geq s_{22} \geq \ldots \geq s_{pp} \geq 0$, $p = \min\{m, n\}$ olan $m \times n$ tipinde bir matristir.

S'nin köşegen elemanları A'nın **singüler değerleri,** U'nun sütunları A'nın **sol singüler vektörleri**, V'nin sütunları A'nın **sağ singüler vektörleri** olarak adlandırılır. Denklem (4)'te verilen bir simetrik matrisin spektral gösterimi ile aynı şekle sahip olan A'nın (5)'teki singüler değer

ayrışımı aşağıdaki lineer birleşim olarak yazılabilir:

$$A = \text{süt}_1(U)s_{11}\text{süt}_1(V)^T + \text{süt}_2(U)s_{22}\text{süt}_2(V)^T + \cdots + \text{süt}_p(U)s_{pp}\text{süt}_p(V)^T, \tag{6}$$

(5)'te verilen singüler değer ayrışımında bulunan U, S ve V matrislerini bulmak için, aşağıdaki şekilde hareket ederiz. A ile ilgili simetrik bir $n \times n$ matris $A^T A$ matrisidir. Teorem 7.9 gereğince,

$$V(A^T A)V^T = D$$

olacak şekilde $n \times n$ tipinde dik bir V matrisi vardır. Burada D, λ_1, λ_2, . . . , λ_n köşegen elemanları $A^T A$ matrisinin özdeğerleri olan bir köşegen matristir. Eğer $\mathbf{v}_j$, V'nin j-inci sütununu gösterirse, $(A^T A)\mathbf{v}_j = \lambda_j \mathbf{v}_j$ olur. Bu ifadenin her iki tarafı soldan $\mathbf{v}_j^T$ ile çarpılırsa,

$$\mathbf{v}_j^T(A^T A)\mathbf{v}_j = \lambda_j \mathbf{v}_j^T \mathbf{v}_j \quad \text{ve} \quad (A\mathbf{v}_j)^T(A\mathbf{v}_j) = \lambda_j \mathbf{v}_j^T \mathbf{v}_j \ \text{veya} \ \|A\mathbf{v}_j\|^2 = \lambda_j \|\mathbf{v}_j\|^2$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir. Bir vektörün boyu negatif olmayacağı için, son ifadeden $\lambda_j \geq 0$ olduğu elde edilir. Eğer gerekirse $A^T A$'nın özdeğerleri $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ şeklinde yeniden sıralanır. Sonra $s_{jj} = \sqrt{\lambda_j}$ tanımlanır. V bir birim dik matris olduğundan sütunlarının her biri bir birim vektördür. $\|\mathbf{v}_j\| = 1$'dir. Böylece $s_{jj} = \|A\mathbf{v}_j\|$ olur. (Doğrulayınız.) Buradan, A'nın singüler değerleri $A^T A$'nın özdeğerlerinin kare kökleridir.

Son olarak $m \times m$ tipinde dik U matrisini belirleriz. (5)'teki matris eşitliğini kabul ederek U'nun sütunlarının neye benzeyeceğine bakalım.

- U, dik olduğundan sütunları birim dik bir cümle olmalıdır. Böylece sütunlar $m \times 1$ tipinde lineer bağımsız vektörlerdir.
- S matrisi

$$S = \left[\begin{array}{cccc:c} s_{11} & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & s_{22} & \ddots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & O_{p,n-p} \\ 0 & \cdots & 0 & s_{pp} & \\ \hdashline \multicolumn{4}{c:}{O_{m-p,p}} & O_{m-p,n-p} \end{array}\right],$$

burada $O_{r,s}$ $r \times s$ tipinde sıfır matrisini göstermektedir.

şekline (blok köşegen) sahiptir.

- (5)'ten $AV = US$ olduğundan

$$A\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_m\end{bmatrix}\left[\begin{array}{cccc:c} s_{11} & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & s_{22} & \ddots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & O_{p,n-p} \\ 0 & \cdots & 0 & s_{pp} & \\ \hdashline \multicolumn{4}{c:}{O_{m-p,p}} & O_{m-p,n-p} \end{array}\right]$$

olur. Bu $j = 1, 2, \ldots, p$ için $A\mathbf{v}_j = s_{jj}\mathbf{u}_j$ olması gerektiğini gösterir. (Gerçekleyiniz.)

- Bununla beraber U, m tane birim dik sütuna sahip ve $m \geq p$ olmalıdır. U'yu oluşturmak için, ilk p vektörü $\mathbf{u}_j = \dfrac{1}{s_{jj}} A\mathbf{v}_j$ olan R^m'nin ortonormal bir tabanına ihtiyacımız vardır. Teorem 4.11'de bir vektör uzayının herhangi lineer bağımsız alt cümlesinin bir tabana nasıl genişletildiğini gösterdik. Burada bu tekniği U'nun kalan $m - p$ sütununu elde etmek için kullanırız (Bu sadece $m > p$ ise gereklidir). $m - p$ sütun tek olmadığından, U matrisi tek değildir. ($A^T A$'nın özdeğerlerinden hiç birisi tekrar etmiyorsa V'de tek değildir).

Önceki yapının $A = U\,SV^T$ olacak şekilde bize U, S ve V matrislerini verdiği gösterilebilir. Böylece $A = U\,SV^T$ olur. Bu yöntemi Örnek 6'da göstereceğiz.

ÖRNEK 6 $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 2 \\ -4 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$'nın singüler değer ayrışımını bulmak için yukarıdaki adımları kullanacağız. İlk olarak A^TA'yı hesapladıktan sonra onun özdeğerlerini ve özvektörlerini hesaplayalım.

$$A^T A = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 36 \end{bmatrix}$$

elde ederiz (doğrulayınız) ve köşegen matris olduğundan onun özdeğerlerinin köşegen elemanları olduğunu biliyoruz. İşleme 25 özdeğerine karşılık $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ özvektörünü ve 36 özdeğerine karşılık $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ özvektörünü bularak devam edilir. (Doğrulayınız.) Özdeğerleri büyükten küçüğe doğru $\lambda_1 = 36$ ve $\lambda_2 = 25$ şeklinde sıralayarak bunlara karşılık gelen özvektörleri de sırasıyla $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ şeklinde tanımlayalım. Böylece

$$V = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } s_{11} = 6 \text{ ve } s_{22} = 5$$

olur. Buradan,

$$S = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{O_2} \end{bmatrix} \qquad (O_2,\ 2 \times 2 \text{ tipinde sıfır matrisidir.})$$

elde edilir. Bundan sonra ilk iki sütundan başlayarak U matrisini belirleyelim:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{s_{11}} A\mathbf{v}_1 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{s_{22}} A\mathbf{v}_2 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Geriye kalan sütun, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ lineer bağımsız vektörlerinin R^4'ün bir tabanına tamamlanması ve Gram-Schmidt metodunun uygulanması ile

bulunur. Yönteme aşağıdaki şekilde devam ederiz. İlk olarak satırca eşelon şekle indirgeriz (Doğrulayınız.):

$$\mathbf{rref}\left(\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & I_4\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Bu bize $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ cümlesinin R^4'ün bir tabanı olduğunu gösterir. Bundan sonra dik U matrisini bulmak için, Gram-Schmidt metodunu uygularız. Sonucu altı ondalıklı alırsak,

$$U = \begin{bmatrix} & & 0.628932 & 0 \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & 0.098933 & 0.847998 \\ & & 0.508798 & 0.317999 \\ & & 0.579465 & -0.423999 \end{bmatrix}$$

matrisini elde ederiz.

Böylece A'nın singüler değer ayrışımını elde ederiz ve

$$A = USV^T = \begin{bmatrix} & & 0.628932 & 0 \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & 0.098933 & 0.847998 \\ & & 0.508798 & 0.317999 \\ & & 0.579465 & -0.423999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5 \\ \hline & O_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2\end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{5} & 0.628932 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{5} & 0.098933 & 0.847998 \\ 0 & -\frac{4}{5} & 0.508798 & 0.317999 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{5} & 0.579465 & -0.423999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^T$$

olur. ■

Bir A matrisinin singüler ayrışımı, A matrisine ait bilgiler için en faydalı araçlardan biri olarak adlandırılır. Örneğin daha önce Kesim 4.9'da A'nın rankını, A'nın satırca indirgenmiş eşelon şeklindeki sıfırdan farklı satırların belirlenmesi ile hesaplayabileceğimizi gösterdik. Bu ifadedeki gerçek, satır işlemlerindeki bütün adımların işlemlerde yuvarlatma yapmadan temel aritmetik işlemlerin kullanılmasıdır. Maalesef birçok bilgisayar ortamında satır işlemleri oluşturduğumuzda tam aritmetik (işlemlerde yuvarlama yapmadan) kullanılmaz. Bunun yerine tam aritmetiğin bir modeli olan kayan nokta aritmetiği kullanılır. Bunu yaparken duyarlığı kaybedebiliriz. Çünkü, aritmetik adımlarda küçük yuvarlatma hataları birikerek büyüyecektir. Bazı durumlarda bu tamlığın kaybı, rankın hesaplanması için bir şüphe getirmeye yeterlidir. İspatsız vereceğimiz aşağıdaki iki sonuç, matrisin rankının hesaplanmasında bir matrisin singüler değer ayrışımının nasıl kullanılacağını gösterir.

Teorem 8.1 A $n \times n$ bir tipinde matris ve B, C sırasıyla $m \times m$, $n \times n$ tipinde singüler olmayan matrisler olsun. O zaman

$$\text{rank } BA = \text{rank } A = \text{rank } AC$$

sağlanır. ■

Sonuç 8.1 *A*'nın rankı, *A*'nın sıfırdan farklı singüler değerlerinin sayısıdır (Katlı singüler değerler, katlılığına göre hesaplanır).

İspat

(Alıştırma 7'ye bakınız). ■

Bir singüler değer ayrışımına ait U ve V matrisleri ortogonal olduğundan, kayan nokta aritmetiği kullanılarak oluşan hataların bir çoğunun singüler değerlerin hesaplanmasında ortaya çıktığı gösterilebilir. A matrisinin boyutu ve kayan nokta aritmetiğinin karekteristikleri çoğunlukla bir eşik değeri belirlemek için kullanılır. Eşik değerden küçük singüler değerler sıfır olarak alınır. Bu tartışma bize, singüler değerlerin ve singüler değer ayrışımının, A matrisinin rankının hesaplanması için güvenebileceğimiz bir yol verdiğini ifade eder.

Rankı belirlemeye ilave olarak, bir matrisin singüler değer ayrışımı bir lineer denklem sistemi ile eşleştirilmiş temel alt uzaylar için, birim dik tabanlar verir. Aşağıdaki Teoremi ispatsız veriyoruz.

Teorem 8.2 A, $m \times n$ tipinde, $U\,SV^T$ singüler değer ayrışımına sahip, rankı r olan reel elemanlı bir matris olsun. Bu taktirde:

(a) U'nun ilk r sütunu, A'nın sütun uzayı için birim dik bir taban oluşturur.

(b) V'nin ilk r sütunu, A'nın satır uzayı için birim dik bir taban oluşturur.

(c) V'nin son $n - r$ sütunu, A'nın sıfır uzayı için birim dik bir taban teşkil eder.

■

Singüler değer ayrışımı, en küçük kareler yaklaşımının hesaplanmasında da geçerli bir araçtır ve dijital görüntüler için de kullanılabilir. Bu uygulamaların örnekleri için bu kesim sonundaki referanslara bakınız.

KAYNAKLAR

Hern, T. and C. Long, Viewing Some Concepts and Applications in Linear Algebra, in *Visualization in Teaching and Learninge Mathematics*, MAA Notes Number 19, pp. 173-190, The Mathematical Association o America, 1991.

Hill, D., *Experiments in Computational Matrix Algebra*, Random House, N.Y., 1988 (distributed by McGraw-Hill).

Hill, D., Nuggets of Information, in *Using MATLAB in the Classroom*, pp. 77-93, Prentice Hall, Upper Saddlee River, N.J., 1993.

Kahaner, D., C. Moler, and S. Nash, *Numerical Methods and Software*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 1989.

Stewart, G., *İntroduction to Matrix Computations*, Academic Press, N.Y., 1973.

Anahtar Kelimeler

Köşegen matris
Dik matris
Spektral ayrışım
Dış çarpım
Singüler değer ayrışımı
Singüler değerler
Singüler vektörler (sol/sağ)
Simetrik görüntü
Gram-Schmidt işlemi
Rank
Birim dik taban (baz)

8.2 Alıştırmalar

1. Aşağıdaki matrislerin herbirinin singüler değerlerini bulunuz.

(a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ **(b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ matrisinin singüler değer ayrışımını belirleyiniz.

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin singüler değer ayrışımını belirleyiniz.

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin singüler değer ayrışımını belirleyiniz.

5. MATLAB'da bir matrisin singüler değer ayrışımını hesaplayan **svd** komutu vardır. **svd(A)** şekli A'nın singüler değerlerinin listesinin çıktısı için kullanılır. **[U, S, V] = svd(A)** şeklinde $A = USV^T$ olacak şekildeki U, S ve V matrislerini elde ederiz. Aşağıdaki matrislerin herbirinin singüler değerlerini belirlemek için bu komutu kullanınız.

(a) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 3 & 12 & -10 \\ 1 & -1 & 5 \\ -2 & -8 & 5 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$

6. A, $m \times n$ tipinde bir matris olsun. Eğer rank $A = \min\{m, n\}$ ise A'ya **tam ranka** (full rank) sahiptir denir. Singüler değer ayrışımı tam ranka sahip olmayan A için bir ölçü verir. Eğer en az bir singüler değer sıfır ise, A tam ranka sahip değildir. Eğer $s_{mn} \neq 0$, A'nın en küçük singüler değeri ise, $r = \min\{m, n\} - 1$ rankına sahip olan matrislerin cümlesinin A'ya uzaklığı s_{mn}'dir. Aşağıdaki matrislerin herbirinin $\min\{m, n\} - 1$ rankına sahip olan aynı boyutlu matrislerden olan uzaklığını belirleyiniz (Singüler değerleri bulmak için MATLAB kullanınız.).

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

7. Teorem 8.1'i ve singüler değer ayrışımını kullanarak Sonuç 8.1'i ispat ediniz.

Alıştırma 8 ve 9'da bu kitap için oluşturulan ek MATLAB *komutlarını kullanınız. Kesim 9.9'a bakınız.*

8. Örnek 5'tekine benzer olarak siyah ve beyaz karelerle oluşturulan geometrik yaklaşımı göstermek için MATLABı aşağıdaki şekilde kullanınız. Siyah blok için 1 ve beyaz blok için 0, kullanarak matris içine dört harflik bir kelime koyarız. Amaç Denklem (6)'dan kısmi toplamı oluşturmak için mümkün oldukça az sayıda singüler değer ve singüler vektör kullanarak kelimeyi belirlemektir. **Picken** rutininde ekranda beliren komutları takip ediniz. Aşağıdaki MATLAB komutlarını kullanınız. **load svdword1** ← Bu, 0 ve 1 kullanarak bir matriste kodlanan kelimeyi yükleyecektir. **picgen (svdword1)** ← Bu, Denklem (6)'da görülen singüler değer ve singüler vektörlerle belirlenen kısmi toplam görüntülerini gösterecektir.

9. **load svdword2**
picgen (svdword2)
komutlarını kullanarak Alıştırma 8'deki işlemleri takip ediniz.
(*Yol gösterme*: Harfler bu halde bir açı üzerinde yazılmış olacaktır.)

8.3 Baskın Özdeğer ve Temel Bileşen Analizi

■ Baskın Özdeğer

Bölüm 2'de simetrik bir matrisin spektral ayrışımını inceledik ve örneklendirdik. A, $n \times n$ tipinde bir simetrik matris ise A'yı özdeğerleri ve bunlara ilişkin özvektörleri kullanarak rankı bir olan matrislerin lineer birleşimi olarak şu şekilde ifade edebileceğimizi gösterdik: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ A'nın özdeğerleri ve $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ bunlara ilişkin birimdik özvektörlerin bir cümlesi olsun. O zaman A'nın spektral ayrışımı

$$A = \lambda_1 \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_1^T + \lambda_2 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_2^T + \ldots + \lambda_n \mathbf{x}_n \mathbf{x}_n^T \qquad (1)$$

ile verilir.

Ayrıca özdeğerleri

$$|\lambda_1| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$$

şeklinde alırsak, spektral ayrışımın kısmî toplamlarını kullanarak A matrisine yaklaşımlar kurabiliriz. Bu yaklaşımları sıfır ve bir matrislerini kullanarak siyah ve beyaz blokların matrisleri ile gösterilen resimlere benzeterek örneklendirdik. Kesim 8.2'de belirtildiği gibi (1) kısmi toplamındaki en büyük değerli özdeğerler kullanılarak oluşturulan terimler, A matrisi ile gösterilen "bilgi"nin büyük bir parçasını oluştururlar. Bu bölümde en büyük özdeğer ve buna ilişkin özvektörün önemli bilgiyi sağladığı iki durumu inceleyeceğiz.

TANIM 8.1

$A, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ reel özdeğerli $n \times n$ tipinde reel bir matris ise mutlak değerce en büyük özdeğere A'nın **baskın özdeğeri** denir.

ÖRNEK 1

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & -14 \\ -2 & 1 & 2 \\ 6 & 6 & -11 \end{bmatrix}$$

olsun. A'nın özdeğerleri 3, 1 ve –5 dir. (Gösteriniz.) Böylece A'nın baskın özdeğeri $|-5| > 1$ ve $|-5| > 3$ olduğundan –5 dir. ■

Uyarı $i = 1,2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$ için $|\lambda_j| \geq |\lambda_i|$ sağlanıyorsa λ_j'nin A'nın baskın özdeğeri olduğuna dikkat ediniz. Bir matrisin birden fazla baskın özdeğeri olabilir.

Örneğin

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

matrisi için 4 ve –4'ün her ikisi de baskın özdeğerlerdir.

A, $i = 1, 2, \ldots, n$ için $|\lambda_1| > |\lambda_i|$ olacak şekilde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ reel özdeğerlerine sahip $n \times n$ tipinde reel bir matris olsun. O halde A tek bir baskın özdeğere sahiptir. Ayrıca A, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ lineer bağımsız özvektörler ile köşegenleştirilebilir olsun. Böylece $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$, R^n'de bir bazdır ve R^n'deki her $\mathbf{x}$ vektörü S'deki vektörlerin lineer bir birleşimi olarak ifade edilebilir. $c_1 \neq 0$ olmak üzere

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \ldots + c_n\mathbf{x}_n$$

olsun ve $A\mathbf{x}$, $A^2\mathbf{x}$, $A^3\mathbf{x}$, …, $A^k\mathbf{x}$, … vektörlerinin dizisi hesaplansın. Bu durumda aşağıdakileri elde ederiz.

$$\begin{aligned}
A\mathbf{x} &= c_1A\mathbf{x}_1 + c_2A\mathbf{x}_2 + \cdots + c_nA\mathbf{x}_n = c_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\lambda_n\mathbf{x}_n \\
A^2\mathbf{x} &= c_1\lambda_1A\mathbf{x}_1 + c_2\lambda_2A\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\lambda_nA\mathbf{x}_n = c_1\lambda_1^2\mathbf{x}_1 + c_2\lambda_2^2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\lambda_n^2\mathbf{x}_n \\
A^3\mathbf{x} &= c_1\lambda_1^2A\mathbf{x}_1 + c_2\lambda_2^2A\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\lambda_n^2A\mathbf{x}_n = c_1\lambda_1^3\mathbf{x}_1 + c_2\lambda_2^3\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\lambda_n^3\mathbf{x}_n \\
&\vdots \\
A^k\mathbf{x} &= c_1\lambda_1^k\mathbf{x}_1 + c_2\lambda_2^k\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\lambda_n^k\mathbf{x}_n \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned}
A^k\mathbf{x} &= \lambda_1^k\left(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\frac{\lambda_2^k}{\lambda_1^k}\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\frac{\lambda_n^k}{\lambda_1^k}\mathbf{x}_n\right) \\
&= \lambda_1^k\left(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{x}_n\right),
\end{aligned}$$

buluruz ve λ_1 A'nın baskın özdeğeri olduğundan $i > 1$ için $\left|\dfrac{\lambda_i}{\lambda_1}\right| < 1$ olur. Böylece $k \to \infty$ iken

$$A^k\mathbf{x} \to \lambda_1^k c_1\mathbf{x}_1 \tag{2}$$

olur. Bu sonucu kullanarak şu incelemeleri yapabiliriz. Tüm özdeğerleri reel ve bir tek baskın λ_1 özdeğerine sahip köşegenleştirilebilir bir A matrisi için aşağıdakiler gerçerlidir:

(a) $|\lambda_1| < 1$ şartı sağlanırsa $A^k\mathbf{x}$, herhangi $\mathbf{x}$ vektörü için sıfıra yaklaşır.
(b) $|\lambda_1| > 1$ şartı sağlanırsa $A^k\mathbf{x}$ vektörler dizisi yakınsak değildir.
(c) Eğer $|\lambda_1| = 1$ ise $A^k\mathbf{x}$ vektörler dizisinin limiti λ_1 özdeğerine ilişkin bir özvektör olur.

Sayısal lineer cebirdeki belirli ardışık tekrarlı **(iteratif)** yöntemlerde $A^k\mathbf{x}$ şeklindeki vektörlerin dizisi sık olarak ortaya çıkar. Dizinin yakınsaklığını belirlemek için baskın özdeğerin 1'den küçük ya da büyük olduğunun belirlenmesi önemlidir. Özdeğerlerin hesaplanmasından ziyade baskın özdeğerler için bir üst sınır belirlemek daha kolaydır. Şimdi böyle bir yaklaşımı inceleyelim.

Bölüm 5'teki Ek Alıştırmalar 28-33'te, R^n'de bir $\mathbf{x}$ vektörünün **1-normunu** onun bileşenlerinin mutlak değerlerinin bir toplamı olarak

$$\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

şeklinde tanımlamıştık. $n \times n$ tipinde bir A matrisi için bu tanımı genişletebilir ve onun sütunlarının 1-normlarının maksimum olması için A matrisinin 1-normunu tanımlayabiliriz. A matrisinin 1-normunu $\|A\|_1$ ile göstereceğiz ve

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,2,\ldots,n} \{\|\text{süt}_j(A)\|_1\}$$

şeklinde ifade edeceğiz.

ÖRNEK 2 Örnek 1'deki gibi

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & -14 \\ -2 & 1 & 2 \\ 6 & 6 & -11 \end{bmatrix}$$

olsun. O halde $\|\mathbf{x}\|_1 = \text{maks}\{17, 13, 27\} = 27$ olur. ■

Teorem 8.3 $n \times n$ tipindeki bir A matrisi için A'nın baskın özdeğerinin mutlak değeri $\|\mathbf{x}\|_1$ den küçük ya da eşittir.

İspat

$\mathbf{x}$ herhangi bir n boyutlu vektör olsun. O halde $A\mathbf{x}$ çarpımı A'nın sütunlarının bir lineer birleşimi olarak

$$\|A\mathbf{x}\|_1 = \|x_1\text{süt}_1(A) + x_2\text{süt}_2(A) + \cdots + x_n\text{süt}_n(A)\|$$

biçiminde ifade edilebilir.

Norm özelliklerini kullanarak:

$$A\mathbf{x} = x_1\text{süt}_1(A) + x_2\text{süt}_2(A) + \cdots + x_n\text{süt}_n(A)$$

(Her iki yanın 1-normu hesaplanır.)

$$\leq \|x_1\text{süt}_1(A)\|_1 + \|x_2\text{süt}_2(A)\|_1 + \cdots + \|x_n\text{süt}_n(A)\|_1$$

(1-normun üçgen eşitsizliği kullanıldı.)

$$= |x_1|\|\text{süt}_1(A)\|_1 + |x_2|\|\text{süt}_2(A)\|_1 + \cdots + |x_n|\|\text{süt}_n(A)\|_1$$

(Normun skalarla çarpımı kullanıldı.)

$$\leq |x_1|\|A\|_1 + |x_2|\|A\|_1 + \cdots + |x_n|\|A\|_1$$

($\|\text{süt}_j(A)\| \leq \|A\|_1$ kullanıldı.)

$$= \|\mathbf{x}\|_1\|A\|_1$$

elde ederiz. Daha sonra $\mathbf{x}$ in A'nın λ baskın özdeğerine ilişkin özvektör olduğunu kabul edelim ve $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ olarak alalım. O zaman

$$\|A\mathbf{x}\|_1 = \|\lambda\mathbf{x}\|_1 = |\lambda|\|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{x}\|_1\|A\|_1$$

elde ederiz. $\mathbf{x}$ bir özvektör olduğundan $\|\mathbf{x}\|_1 \neq 0$ dir ve

$$|\lambda| \leq \|A\|_1$$

olur. Böylece baskın özdeğerin mutlak değeri A'nın 1-norm matrisi ile "üstten sınırlı"dır. ■

ÖRNEK 3 Örnek 1'deki gibi

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & -14 \\ -2 & 1 & 2 \\ 6 & 6 & -11 \end{bmatrix}$$

olsun. O halde

$$|A\text{'nın baskın özdeğeri}| \le \|A\|_1 = \text{maks}\,\{17, 13, 27\} = 27$$

dir. Örnek 1'den $|A$'nın baskın özdeğeri$| = 5$ olduğu bilinmektedir. ■

Teorem 8.4 Eğer $\|A\|_1 < 1$ ise $A^k\mathbf{x}$ vektörlerinin dizisi herhangi bir $\mathbf{x}$ vektörü için sıfıra yaklaşır.

İspat

Alıştırma 9 ■

Kesim 8.1 de $T^n\mathbf{x}$ biçimindeki vektörlerin dizilerinin Markov yönteminin analizinde ortaya çıktığını gördük. Eğer T bir geçiş matrisi ise (aynı zamanda Markov matrisi olarak adlandırılır) $\|T\|_1 = 1$'dir. O halde Teorem 8.3'e göre T'nin baskın özdeğerinin mutlak değeri 1'den küçük ya da eşittir. Bununla birlikte daha güçlü bir sonuç şöyledir:

Teorem 8.5 Eğer T, Markov yönteminin bir geçişme matrisi ise T'nin baskın özdeğeri 1 dir.

İspat

$\mathbf{x}$ tüm birlerin n boyutlu vektörü olsun. O halde $T^T\mathbf{x} = \mathbf{x}$'tir. (Sağlayınız.) Böylece 1 T^T'nin bir özdeğeridir. Bir matris ve transpozu aynı özdeğerlere sahip olduğundan $\lambda = 1$ aynı zamanda T'nin bir özdeğeridir. O halde Teorem 8.3 ve bu teoremden önceki paragraftaki ifadeye göre T geçiş matrisinin baskın özdeğerinin 1 olduğu sonucuna varırız. ■

Baskın özdeğer ile ilgili önceki sonuçlar doğal olarak cebirseldi. Şimdi baskın özdeğer ve buna ilişkin özvektörün etkilerine grafiksel bir açıdan bakalım.

(2)'den $A\mathbf{x}$, $A^2\mathbf{x}$, $A^3\mathbf{x}$, … vektörlerinin dizisinin n-boyutlu uzayda baskın özdeğere ilişkin bir özvektöre paralel olan bir doğruya yaklaştığını söyleyebiliriz. Bu sonuca ilişkin uygun bir örnek aşağıdaki Örnek 4'tür.

ÖRNEK 4 L, R^2'den R^2'ye lineer bir dönüşüm olsun. Bu dönüşüm R^2'deki doğal tabana göre

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi ile gösterilsin. 2-boyutlu bir $\mathbf{x}$ vektörü için $k = 1, 2, \ldots, 7$ alarak $A^k\mathbf{x}$ terimlerini hesaplarız. R^2'deki vektörlerin cümlesinin yönü ile ilgilendiğimizden bu vektörleri R^2'de basitçe göstermek için önce $A^k\mathbf{x}$ vek-

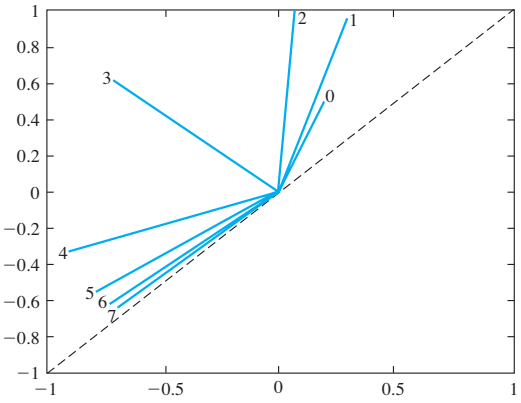
törlerinin herbirini birim vektör olacak şekilde ayarlayalım. **x** vektörü

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

olarak alınır ve vektörlerin cümlesini hesaplayarak aşağıdakileri elde ederiz.

x	$A\mathbf{x}$	$A^2\mathbf{x}$	$A^3\mathbf{x}$	$A^4\mathbf{x}$	$A^5\mathbf{x}$	$A^6\mathbf{x}$	$A^7\mathbf{x}$
0.2	0.2941	0.0688	–0.7654	–0.9397	–0.8209	–0.7667	–0.7402
0.5	0.9558	0.9976	0.6436	–0.3419	–0.5711	–0.6420	–0.6724

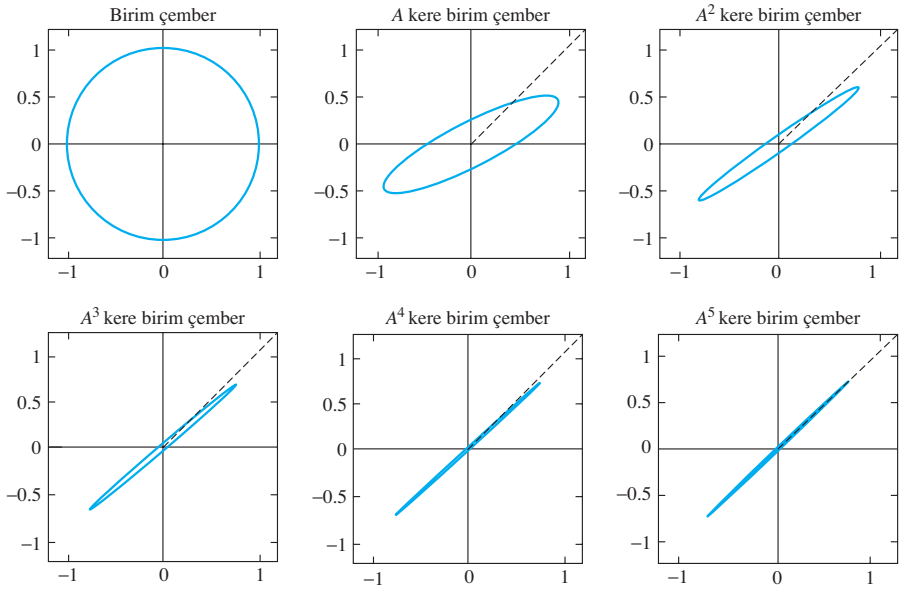
Burada sadece 4 ondalık gösterdik. **x**, 0 ile ve $A^k\mathbf{x}$ vektörleri de k değeri ile adlandırıldığında R^2'deki bu vektörler Şekil 8.8'deki gibi gösterilir. ■



ŞEKİL 8.8

Baskın özdeğere ilişkin bir özvektör kesikli çizgi ile gösterilmiştir. **x** vektörünün seçimi hemen hemen keyfidir. Bu anlamda **x** baskın olmayan özdeğere ilişkin bir özvektör olamaz. Çünkü bu durumda $A^k\mathbf{x}$ dizisi daima özvektörün yönünde olmalıdır.

ÖRNEK 5 Örnek 4'teki lineer dönüşüm için birim çemberin ardışık şekillerini bulalım. Yani $A^k\mathbf{x}$ (birim çember). (Özel durum için Kesim 1.7'deki Örnek 5'e bakınız.) İlk görüntü bir elipstir ve $k = 2, 3, \ldots$ için ardışık şekillerdir. Şekil 8.9'da beş şekil görünmektedir. (Grafikte görülen her nokta R^2'de bir birim vektöre ölçeklenmiş bir vektörün varış noktasıdır.) Yine baskın özdeğerle ilgili bir özvektörün yönünde şekillerin sıralaması görülür. Bu özvektör kesikli çizgi ile gösterilmiştir. ■



ŞEKİL 8.9

$A\mathbf{x}$, $A^2\mathbf{x}$, $A^3\mathbf{x}$, … vektörlerinin dizisi, bir A matrisinin baskın özdeğerini tahmin etmek için kullanılan, kuvvet metodu olarak adlandırılan nümerik metod için taban oluşturur. Bu metodun ayrıntıları D. R. Hill and B. Kolman, *Modern Matrix Algebra,* Upper Seddle River, NJ: Prentice Hall, 2001 kaynağında nümerik analiz ve nümerik lineer cebir yayınlarındaki kadar ayrıntılı şekilde bulunabilir.

■ Temel Bileşen Analizi

Baskın özdeğer ve onun özvektörünü içeren ikinci uygulama, çok değişkenli uygulamalı istatistikten alınmıştır ve temel bileşen analizi olarak adlandırılır ve **TBA (PCA)** şeklinde kısaltılır. Bu konuya bir temel hazırlamak için istatistikten bazı terimleri kısaca tartışalım ve istatistiksel analizde kullanılan bir matris içeren bazı sonuçları belirtelim.

Çok değişkenli istatistik, birkaç değişkenin ölçüldüğü konular, hastalar, nesneler, maddeler veya diğer kazanç varlıklarının sayılarının veri analizi ile ilgilenir. Analizin amacı değişkenler arasındaki ilişkilerin: bağımsız olarak nasıl değiştiklerini, birlikte nasıl değiştiklerini ve değişkenlerin karşılıklı ilişkilerini ifade eden bir cebirsel modelin nasıl geliştirileceğini anlamaktır.

Değişkenlerin gözlemlerinin cümleleri yani veriler bir matris ile gösterilebilir. x_{jk}, j. madde de gözlemlenen k değişkenin özel değerini göstersin. n gözlemlenen maddelerin sayısı ve p ölçülen değişkenlerin

sayısı olsun. Bu veriler düzenlenir ve bir **çok değişkenli veri** matrisi olan

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{j1} & x_{j2} & \cdots & x_{jk} & \cdots & x_{jp} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix},$$

biçimindeki bir dikdörtgen matris ile gösterilir. X matrisi tüm değişkenler üzerindeki tüm gözlemleri içerir. Her bir sütun farklı bir değişken için veriyi göstermektedir ve gözlemlerin cümlesinin lineer birleşimleri, $\mathbf{c}$ $p \times 1$ tipinde bir matris olmak üzere $X\mathbf{c}$ matris çarpımı ile oluşturulur. Yararlı cebirsel modeller, $\mathbf{c}$ katsayı vektörünün elemanlarının seçimi için bazı optimizasyon kriterleri yükleme yoluyla elde edilir.

Tek değişkenli durumda X matrisi $n \times 1$ tipinde olduğundan sınav sonuçları gibi, veriler sıkça aritmetik ortalama veya örneklem ortalaması ve dağılım ölçüsü veya değişim (varyasyon) hesaplanarak özetlenir. Bu özet hesaplamalardan, tanımlayıcı istatistik olarak da bahsedilmektedir. Bu durumda

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

için

$$\textbf{örneklem ortalaması} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$$

ve

$$\textbf{örneklem varyansı} = s^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2$$

dir. Ayrıca örneklem varyansın karekökü örneklem standart sapması olarak bilinmektedir.

ÖRNEK 6 Eğer

$$X = \begin{bmatrix} 97 & 92 & 90 & 87 & 85 & 83 & 83 & 78 & 72 & 71 & 70 & 65 \end{bmatrix}^T$$

matrisi lineer cebir sınavından 100 üzerinden alınan sonuçların cümlesi ise o zaman bu cümleye ilişkin tanımlayıcı istatistikler $\bar{x} \approx 81$, $s^2 \approx 90.4$ve standart sapma $s \approx 9.5$ olarak hesaplanır. ■

Bu tanımlayıcı (betimsel) istatistikler, çok değişkenli veri matrisinde her bir değişkenlerin gözlemlerinin cümlesine de uygulanabilir. Bunları daha sonra, değişkenlerin çiftleri arasındaki ilişkinin bir ölçüsünü sağlayan istatistikle birlikte,

$$k.\text{ değişken için örneklem ortalaması} = \bar{x}_k = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{jk}, \quad k = 1, 2, \ldots, p$$

$$k.\text{ değişken için örneklem varyansı} = \bar{x}_k = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{jk}, \quad k = 1, 2, \ldots, p$$

şeklinde tanımlayacağız.

Uyarı Örneklem varyansı, teorik nedenlerden dolayı, özellikle örneklerin sayısı olan n küçük olduğu durumda, n yerine $(n - 1)$ böleni ile tanımlanır. Birçok değişkenli istatistik yayınlarında iki durum arasındaki farklılığı kullanan geleneksel bir yöntem vardır. Kolaylık olması açısından çok değişkenli istatistik hakkındaki özetlerde önceden verilen gösterimi kullanacağız.

Şimdi değişken çiftleri arasındaki ilişkinin istatistiğini içeren bir matris tanımlayalım. Matris gösteriminin kolaylığı için $k.$ değişkenin varyansını değişik olarak s_{kk} gösterimi kullanarak göstereceğiz. Yani

$$s_{kk} = s_k^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_{jk} - \bar{x}_k)^2, \quad k = 1, 2, \ldots, p$$

biçiminde tanımlayacağız.

Değişken çiftleri arasındaki lineer ilişkinin bir ölçüsü, örnek kovaryansın gösterimi ile sağlanır. X çok değişkenli veri matrisinde $i.$ ve $k.$ değişkenler arasındaki ilişkinin ölçüsü, ayrı ayrı örneklem ortalamasından sapmaların ortalama çarpımı olan

$$\text{Örnek kovaryans} = s_{ik} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_{ji} - \bar{x}_i)(x_{jk} - \bar{x}_k), \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, p, \\ k = 1, 2, \ldots, p, \end{matrix}$$

ile verilir. Her i ve k için $s_{ik} = s_{ki}$ ve $i = k$ için örneklem kovaryans sadece varyanstır, $s_k^2 = s_{kk}$.

Şimdi çok değişkenli veri matrisinden

$$\text{Örneklem ortalaması matrisi} = \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \end{bmatrix}$$

$$\text{Örneklem varyans ve kovaryans matrisi} = S_n = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix}$$

matrislerine betimsel istatistikleri düzenleyeceğiz. S_n matrisi, köşegen elemanları örneklem varyansları olan simetrik bir matristir ve n alt indisi varyans ve kovaryansları hesaplamakta kullanılan n bölenini hatırlatan gösterimsel ifadedir. Kolaylık için S_n matrisi sıkça kovaryans matrisi olarak adlandırılır.

ÖRNEK 7 Bir süpermarketten seçilen altı makbuz, yiyecek satışları durumunu incelemek için toplanmıştır. Her bir makbuzda, alınan malın ücreti ve sayısı bulunmaktadır. Birinci değişken, lira cinsinden alınan malın ücretini ve ikinci değişken de sayısını göstermektedir. İlgili çok değişkenli veri matrisi

$$X = \begin{bmatrix} 39 & 21 \\ 59 & 28 \\ 18 & 10 \\ 21 & 13 \\ 14 & 13 \\ 22 & 10 \end{bmatrix}$$

dir. Nümerik değerleri tek ondalık olarak kaydeden ve bu yaklaşımı sonraki hesaplamalarda kullanan örneklem istatistikleri belirleyiniz.

Çözüm

Örneklem ortalamaları

$$\bar{x}_1 \approx 28.8 \quad \text{ve} \quad \bar{x}_2 \approx 15.8,$$

olarak buluruz ve böylece örneklem ortalaması matrisini

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 28.8 \\ 15.8 \end{bmatrix}$$

olarak alırız. Örneklem varyanslar:

$$s_{11} \approx 243.1 \quad \text{ve} \quad s_{22} \approx 43.1;$$

örneklem kovaryanslar

$$s_{12} = s_{21} \approx 97.8$$

dir. Böylece kovaryans matrisini

$$S_n = \begin{bmatrix} 243.1 & 97.8 \\ 97.8 & 43.1 \end{bmatrix}$$

olarak alırız. ■

Daha genel olarak X çok değişkenli veri matrisi düzenlenerek, elemanları rasgele değişkenler olan bir matris alınır. Bu düzenlemede betimsel istatistiklerin matrisleri olasılık dağılımları ve beklenen değer kullanılarak hesaplanır. Bu durumu göz önüne almayacağız, fakat ortalamaların vektörünün ve kovaryans matrisinin benzer şekilde hesaplanabileceğine dikkat edeceğiz. Özel olarak kovaryans matrisi, önceki örnekteki gibi simetriktir.

Şimdi yeni değişkenli bir cümle tanımlamada kovaryans matrisinin nasıl kullanılacağını gösteren birkaç kuralı verelim. Bu yeni değişkenler, X veri matrisinin sütunları ile gösterilen orijinal değişkenlerin lineer birleşimleridir. Bu tekniğe temel bileşen analizi, TBA (PCA), denir ve çok değişkenli tekniklerin en eski ve en yaygın kullanılanıdır. Yeni değişkenler önem derecesinin azalmasından elde edilir. Böylece iki birinci temel bileşen olarak adlandırılır. Orijinal veride değişimin müm-

kün oldukça fazla değişim olmasını açıklar. İkinci yeni değişken, ikinci temel bileşen olarak adlandırılır, değişimin farklı fakat daha küçük parçasını açıklar ve bu şekilde devam eder. p değişkenli durumda tüm çeşitliliğin açıklanabilmesi için p bileşen gerekir ama sıkça çeşitliliğin çoğu temel içeriğin küçük bir sayısı ile açıklanabilir. Böylece TBA varyasyonun izahı ve veri azaltma konusunda bir amaca sahip olur.

TBA'nın tanımı Kesim 8.2'de tartışılan simetrik matrisin spektral ayrışımının simetrik şekillere uygulanmasının kullanımına benzerdir. Aslında temel bileşenleri oluşturmak ve bunlar hakkında bilgi elde etmek için S_n kovaryans matrisinin özdeğerleri ve bunlara ilişkin birim dik özvektörler kullanılır. İspatı vermeden şu sonuçları elde ederiz.

Teorem 8.6 S_n, çok değişkenli X veri matrisine ilişkin $p \times p$ tipinde kovaryans matrisi olsun. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \lambda_p \geq 0$ olmak üzere S_n in özdeğerleri $j = 1, 2, \ldots, p$ için λ_j olsun ve $j = 1, 2, \ldots, p$ için bunlara ilişkin birim dik özvektörler $\mathbf{u}_j$ olsun. O zaman i. temel bileşen $\mathbf{y}_i$, katsayıları $\mathbf{u}_i$ özvektörünün elemanları olan X in sütunlarının lineer birleşimi olarak

$$\mathbf{y}_i = i\text{, temel bileşen} = X\mathbf{u}_i$$

ile verilir.

Buna ilave olarak $\mathbf{y}_i$'nin varyansı λ_i; $\mathbf{y}_i$ ve $\mathbf{y}_k$'nin kovaryansı $i \neq k$ iken sıfırdır. (Eğer bazı özdeğerler tekrarlanırsa, ilgili özvektörlerin seçimleri tek değildir; böylece temel bileşenler tek değildir.) ■

Teorem 8.7 Teorem 8.6'nın hipotezi altında $\sum_{i=1}^{p} s_{ii}$ ile verilen X in toplam varyansı S_n kovaryans matrisinin özdeğerlerinin toplamı ile aynıdır.

İspat

Alıştırma 18. ■

Bu sonuç

$$\left(\begin{array}{l} k.\text{ temel bileşene bağlı toplam varyans kısmı} \end{array}\right) = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_p}, \quad k = 1, 2, \ldots, p \qquad (3)$$

olduğunu ifade eder.

Böylece eğer $\lambda_1 > \lambda_2$ ise λ_1'in kovaryans matrisin baskın özdeğeri olduğunu görürüz. Bundan dolayı birinci temel bileşen, diğer temel bileşenlerden daha fazla çeşitlilik "açıklayan" yeni bir değişkendir. Eğer p sayıda geniş sütunlu bir veri matrisi için toplam varyansın büyük yüzdesi ilk birkaç temel bileşenle bağlanabilirse yeni değişkenler önemli bilgi kaybı olmadan orijinal p değişkenlerinin yerini alabilir. Böylece veride önemli bir indirgeme başarılabilir.

ÖRNEK 8 Örnek 7'de verilen X veri matrisi için birinci temel bileşeni hesaplayınız.

Çözüm

S_n kovaryans matrisi Örnek 7'de hesaplanmıştı. Bu nedenle özdeğerleri ve bunlara ilişkin birim dik özvektörlerini belirleyelim. (Burada, sayısal değerleri dört ondalıklı olarak yazacağız.) Özdeğerleri

$$\lambda_1 = 282.9744 \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = 3.2256$$

ve bunlara ilişkin özvektörleri

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0.9260 \\ 0.3775 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0.3775 \\ -0.9260 \end{bmatrix}$$

olarak elde ederiz. Daha sonra Teorem 8.7'yi kullanarak

$$\mathbf{y}_1 = 0.6260\text{süt}_1(X) + 0.3775\text{süt}_2(X)$$

olarak buluruz. Buradan $\mathbf{y}_1$'in, X'in toplam değişimin

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad \text{(yaklaşık \%98.9)}$$

oranını belirttiğini görürüz. (Sağlayınız.) ■

ÖRNEK 9 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ ile gösterilen üç sütunlu çok değişkenli bir X veri matrisini ele alalım ve kovaryans matris (değerler dört ondalıklı olarak alınıyor)

$$S_n = \begin{bmatrix} 3.6270 & 2.5440 & 0 \\ 2.5440 & 6.8070 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olsun. $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ ve $\mathbf{y}_3$ temel bileşenlerini elde ediniz.

Çözüm

Özdeğerleri ve bunlara ilişkin birim dik özvektörleri

$$\lambda_1 = 88{,}2170, \quad \lambda_2 = 82{,}2170 \quad \text{ve} \quad \lambda_3 = 1$$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0.4848 \\ 0.8746 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -0.8746 \\ 0.4848 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olarak buluruz.

Böylece temel bileşenler

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 &= 0.4848\mathbf{x}_1 + 0.8746\mathbf{x}_2 \\ \mathbf{y}_2 &= -0.8746\mathbf{x}_1 + 0.4848\mathbf{x}_2 \\ \mathbf{y}_3 &= \mathbf{x}_3 \end{aligned}$$

olur. Daha sonra (3)'ten görürüz $\mathbf{y}_2$ ve $\mathbf{y}_3$ sırasıyla toplam değişimin %19,39 ve %8,75'ini belirtirken $\mathbf{y}_1$ %78,61'ini belirtmektedir. ■

TBA ile ilgili hesaplardan elde edilebilen değişkenler arasındaki ilişki ve etkileri ile ilgili daha fazla bilgi vardır. TBA ile ilgili daha fazla bilgi için kaynaklara bakınız.

Şimdi TBA'nın geometrik yapısı ile ilgili birkaç inceleme yapalım. S_n kovaryans matrisinin simetrik olması, $U^TS_nU = D$ bir köşegen matris olmak üzere, S_n'in özvektörlerinden oluşan birim dik bir U matrisini bulabileceğimizi ifade eder. Bu sonucun geometrik önemi, p orjinal değişkenlerin temel bileşenler olarak adlandırılan yeni p dik değişkenlere dönüştürülmesidir. Üstelik bu temel bileşenler orijinal değişkenlerin lineer birleşimleridir. (Diklik $i \neq k$ için $\mathbf{y}_i$ ve $\mathbf{y}_k$'nın kovaryansının sıfır olması gerçeğinden ortaya çıkar) Bundan dolayı temel bileşenlerin hesabı, karşılıklı dik eksenler ile yeni koordinat sistemine karşılıklı dik olmayabilen eksenleri içeren bir koordinat sistemine dönüştürmekle aynı anlama gelir. Yeni koordinat sistemi, temel bileşenler orijinal değişkenleri daha düzenli ve daha elverişli yoldan gösterir. Dik bir koordinat sistemi, değişkenler arasındaki ilişkiler hakkında daha fazla bilgi elde etmek için izdüşümlerin daha kolay kullanılmasını sağlar. Ayrıntı için aşağıdaki referanslara başvurunuz.

KAYNAKLAR

Johnson, Richard A., and Dean W. Wichern. *Applied Multivariate Statisical Analysis*, 5th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.

Jolliffe, I. T. *Principal Component Analysis*. New York: Springer-Verlag, 1986.

Wickens, Thomas D. *The Geometry of Multivariate Statistics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1995.

Coğrafyada yollarla ilgili önemli bir uygulama için Philip D. Straffin, "Linear Algebra in Geography: Eigenvectors of Networks," *Mathematics Magazine*, vol. 53, no, 5 Nov. 1980, pp. 269-276.'ya bakınız."

■ Google ile Aramak: Baskın Özdeğer Kullanmak

Kesim 1.2'de, Örnek 6'dan sonra, Google arama motorundaki yazılım tarafından kullanılan A bağlantı matrisini tanıttık. A matrisi, eğer j. web sitesine bağlanırsa $a_{ij} = 1$ ve diğer durumlarda $a_{ij} = 0$ olacak şekilde 1 ve 0 bileşenlerine sahip bir matristir.

ÖRNEK 10 Yedi tane çalışanı olan bir şirket, işlerin çeşitliliği için web sitesi kullanımı teşvik etmektedir. Her bir çalışan bir web sitesine sahip ve belirli çalışanlar iş arkadaşlarının sitelerine kendi sitelerinden bağlantı vermektedir. Bu küçük şirket için bağlantı matrisi şu şekildedir.

$$A = \begin{array}{c|ccccccc} & \boldsymbol{E_1} & \boldsymbol{E_2} & \boldsymbol{E_3} & \boldsymbol{E_4} & \boldsymbol{E_5} & \boldsymbol{E_6} & \boldsymbol{E_7} \\ \hline \boldsymbol{E_1} & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{E_2} & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \boldsymbol{E_3} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \boldsymbol{E_4} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \boldsymbol{E_5} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \boldsymbol{E_6} & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \boldsymbol{E_7} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Burada çalışanları göstermek için isimlerine karşılık $k = 1, 2, \ldots, 7$ olmak üzere E_k alıyoruz. E_3 olarak adlandırılan sütundan, bu işçinin E_2, E_4 ve E_6 arkadaşlarının sitesine bağlantı verdiğini görüyoruz. ■

Örnek 10 daki bağlantı matrisini inceleyerek, kendisine bağlantı verilmiş sitelerin adedini sadece saymakla bir çalışan web sitesine bir derece atamaya çalışabiliriz. Ama bu strateji verilen siteye bağlanan web sitesinin derecesini hesaba katmaz.

Önemlilik sırasına göre nesnelerin takımların veya insanların derecelerini kullanan bir çok uygulama vardır. Dereceleme stratejisine bir yaklaşım da, bir bağlantı matrisi oluşturmak ve baskın özdeğerini ve ilgili özvektörünü hesaplamaktır. Bu tür problemlerin geniş bir sınıfı için özvektörün elemanlarının tümü pozitif alınabilir ve onların karelerinin toplamının 1 olduğu görülebilir. Böyle durumlarda, eğer *k*. eleman en büyük ise derecelendirilen *k*. terimin en önemli olduğu göz önünde bulundurulur; yani o en yüksek dereceye sahiptir. Diğer terimler özvektörün göz önüne alınan büyüklüğüne göre derecelendirilir.

ÖRNEK 11 Örnek 10 daki bağlantı matrisi için baskın özdeğere ilişkin bir özvektör

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0.4261 \\ 0.4746 \\ 0.2137 \\ 0.3596 \\ 0.4416 \\ 0.4214 \\ 0.2137 \end{bmatrix}$$

olsun. Buradan Maks $\{v_1, v_2, \ldots, v_7\} = 0{,}4746$'dır. Böylece 2 numaralı çalışan en yüksek dereceli web siteye sahiptir ve bunu 5 numaralı ve 1 numaralı çalışanlar izlemektedir. Dikkat edilirse 6 numaralı çalışanın sitesi 1. çalışan veya 5. çalışandan daha fazla sayıda referans edilmiştir ama derecelendirmede altta kalmıştır. ■

Google araştırması uygulamasında web sitelerin derecelendirilmesi, sorgulamaya cevap sitelerin düzenini belirleyen göze çarpan bir gerçektir. Derecelendirme stratejisi, eğer diğer yüksek dereceli siteler bağlanırsa bir sitenin derecesinin yüksek olduğu temel fikrini kullanır. Çok büyük bağlantı matrisleri için Google'ın derecelendirme mekanizmasının bir parçası olan bu stratejinin gerçekleştirilebilmesi için Örnek 10'daki baskın özdeğer/özvektör fikrinin farklılıkları kullanılır. Algoritmalarında Google takımı bir sitenin derecesini belirlerler, böylece bağlantı kuran tüm sitelerin derecelerinin toplamı ile orantılıdır. Bu yaklaşım, Örnek 11'de örneklendirilenden daha genel biçimde bağlantı matrisini kullanan büyük bir özdeğer/özvektör problemini ortaya çıkarır.

KAYNAKLAR

Moler, Cleve. "The World's Largest Matrix Computation: Google's PageRank Is an Eigenvector of a Matrix of Order 2.7 Billion." *MATLAB News and Notes*, October 2002, pp. 12–13.

Wilf, Herbert S. "Searching the Web with Eigenvectors." *The UMAP Journal*, 23(2), 2002, pp. 101–103.

Anahtar Kelimeler

Simetrik matris
Temel bileşen analizi (TBA)
Birinci temel bileşen
Birim dik özvektörler
Çok değişkenli veri matrisi
İkinci temel bileşen
Baskın özdeğer
Tanımlayıcı (betimsel) istatistik
Toplam varyans
Ardışık işlem
Örneklem ortalaması
Google
1-norm
Örneklem varyansı
Bağlantı matrisi
Markov işlemi
Örneklem standart sapması
Kuvvet metodu
Kovaryans matrisi

8.3 Alıştırmalar

1. Aşağıdaki matrislerin baskın özdeğerlerini bulunuz.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

2. Aşağıdaki matrislerin baskın özdeğerlerini bulunuz.

(a) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. Aşağıdaki matrislerin 1-normunu bulunuz.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 6 \\ -3 & 4 & 8 & 1 \end{bmatrix}$

4. Aşağıdaki matrislerin 1-normunu bulunuz.

(a) $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & -3 \\ -3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

5. Alıştırma 1'deki herbir matris için baskın özdeğerin mutlak değeri için bir sınır belirleyiniz.

6. Alıştırma 2'deki herbir matris için baskın özdeğerin mutlak değeri için bir sınır belirleyiniz.

7. A simetrik ise $\|A\|_1 = A^T$ olduğunu ispatlayınız.

8. $\|A\|_1 = \|A^T\|$ olan fakat simetrik olmayan bir A matrisi belirleyiniz.

9. Teorem 8.4'ü ispatlayınız.

10. A_1'in 1'den büyük olabileceğini ve $A^k\mathbf{x}$ vektörler dizisinin sıfır vektörüne yaklaşabileceğini açıklayınız.

11. $X = [\,56 \quad 62 \quad 59 \quad 73 \quad 75\,]^T$ aynı kişinin aynı kepçeyi kullanmasıyla elde edilen kuş yeminin kepçesinin ons türünden ağırlığı olsun. Bu verilen örneklem ortalamasını, varyansını ve standart sapmasını bulunuz.

12. $X = [\,5400 \quad 4900 \quad 6300 \quad 6700\,]^T$ aynı eve çatı yerleştirmenin dolar olarak tahmini ücreti olsun. Bu verilerin örneklem ortalamasını, değişim ve standart sapmasını bulunuz.

13. 2002'de Birleşik Devletlerdeki en kalabalık beş şehir için suç bilgileri şu şekildedir: 100.000 evden polise bildirilen şiddet suçları için X veri matrisinin birinci sütununda hırsızlıklar, ikinci sütununda ağır saldırıların sayısı bulunmaktadır. (Değerler en yakın sayıya yuvarlatılmıştır.)

$$X = \begin{bmatrix} 337 & 425 \\ 449 & 847 \\ 631 & 846 \\ 550 & 617 \\ 582 & 647 \end{bmatrix}$$

Örnek ortalamasının vektörünü ve kovaryans matrisini belirleyiniz (veriler TIME Almanac 2006 dan alınmıştır, bilgi için lütfen LLC, Pearson Education, Boston, MA).

14. 2002 yılında Birleşik Devletlerdeki en kalabalık beş şehir için suç bilgileri şu şekildedir:100.000 evden polise bildirilen mal suçları için X veri matrisinin birinci sütununda soygun ve ikinci sütününda motorlu taşıt hırsızlığı sayısı bulunmaktadır. (Değerler en yakın sayıya yuvarlatılmıştır.)

$$X = \begin{bmatrix} 372 & 334 \\ 662 & 891 \\ 869 & 859 \\ 1319 & 1173 \\ 737 & 873 \end{bmatrix}$$

Örnek ortalamasının vektörünü ve kovaryans matrisini belirleyiniz. (Veriler TIME Almanak 2006'dan alınmıştır, bilgi için lütfen LLC, Pearson Education, Boston, MA)

15. Alıştırma 13'teki veri için birinci temel bileşeni belirleyiniz.

16. Alıştırma 14'teki veri için birinci temel bileşeni belirleyiniz.

17. Bölüm 5.3'te, R^n'de sıfırdan farklı her $\mathbf{y}$ vektörü için $\mathbf{y}^T C\mathbf{y} > 0$ olmak üzere C simetrik kare matrisi gibi belirli bir pozitif matrisi tanımlayalım. Belirli pozitif matrisin herhangi özdeğerinin pozitif olduğunu ispatlayınız.

18. S_n, Teorem 8.6'nın hipotezlerini sağlayan bir kovaryans matris olsun. Teorem 8.7'yi ispatlamak için şu yollar izlenir:

(a) S_n'in izinin toplam varyans olduğunu gösteriniz. (iz tanımı için Kesim 1.3, Alıştırma 43'e bakınız).

(b) $P^T S_n P = D$ köşegen matris olacak şekilde dik bir P matrisinin var olduğunu gösteriniz.

(c) S_n'in izinin D'nin izine eşit olduğunu gösteriniz.

(d) İspatı tamamlayınız.

8.4 Diferensiyel Denklemler

Bir diferensiyel denklem, bilinmeyen bir fonksiyon ve onun türevlerini kapsayan denklemdir. Bir diferensiyel denklemin önemli ve en basit bir örneği r bir sabit olmak üzere

$$\frac{d}{dt}x(t) = rx(t)$$

denklemidir. Burada amaç, verilen denklemi sağlayacak bir $x(t)$ fonksiyonunu bulmaktır. Bu diferensiyel denklem aşağıda ayrıntılı olarak tartışılacaktır. Diferensiyel denklemler, fen ve mühendislik bilimlerinin tüm dallarında çok sık ortaya çıkar. Lineer cebir, diferensiyel denklemlerin formüle edilmesinde ve çözümünde oldukça yardımcı olur. Bu kesimde sadece kısa bir özet yapılacak olup diferensiyel denklemlerin konularını içeren kapsamlı kitaplar ve okuyucu için daha ileri incelemeler bu kesimin sonunda verilecektir.

Lineer Homogen Sistemler

a_{ij}'ler bilinen sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t), \end{aligned} \tag{1}$$

lineer homogen diferensiyel denklem sistemini gözönüne alalım. Reel doğru üzerinde tanımlı türevlenebilir ve (1)'i sağlayan $x_1(t)$, $x_2(t)$, . . . , $x_n(t)$ fonksiyonlarını araştıracağız.

$x(t)$ ve A yı,

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

biçiminde alarak ve $\mathbf{x}'(t)$'yi de

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlayarak (1)'i

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) \tag{2}$$

şeklinde bir matris şeklinde yazabiliriz. (2)'yi çoğunlukla daha kısa olarak

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

şeklinde yazacağız. Bu gösterim ile, (2)'yi sağlayan

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

bir n-vektör fonksiyonu, verilen sistemin bir çözümü olarak adlandırılır. $\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t), \ldots \mathbf{x}^{(n)}(t)$ (2)'nin tüm çözümleri ise

$$\mathbf{x}(t) = b_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + b_2\mathbf{x}^{(2)}(t) + \cdots + b_n\mathbf{x}^{(n)}(t) \tag{3}$$

lineer birleşimi (2)'nin bir çözümüdür. Bunun sağlatılmasını okuyucuya bırakıyoruz.

(2) Lineer homogen diferensiyel denklem sisteminin tüm çözümlerinin cümlesinin, türevlenebilir reel değerli n-vektör fonksiyonlarının vektör uzayının bir alt uzayı olduğu gösterilebilir (Alıştırma 4).

Eğer (1)'in her çözümü (3) biçiminde yazılabiliyorsa $\{\mathbf{x}^{(1)}(t), \mathbf{x}^{(2)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)\}$ vektör fonksiyonlarının cümlesine (1) için bir **Temel sistem** denir. Bu durumda $b_1, b_2, \ldots, b_n$'ler keyfi sabitler olmak üzere (3) ün sağ tarafına (2)'nin **genel çözümü** denir.

(2) biçimindeki herhangi bir sistemin bir temel sisteme (gerçekte sonsuz çoklukta) sahip olduğu gösterilebilir. (Boyce ve DiPrima'nın kitabı ya da daha ileri kaynaklar kısmındaki Cullen'e ait kitaba bakınız)

Genel olarak, diferensiyel denklemlerle fiziksel problemlerin çözümünde karşılaşılır. Tipik olarak diferensiyel denklemin genel çözümü elde edildikten sonra, problemin fiziksel şartları genel çözümdeki keyfi sabitlerin belirli değerler almasını sağlar ve bir **özel çözüm** verir. Bir önemli özel çözüm, $\mathbf{x}_0$ verilen bir vektör olmak üzere $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ **başlangıç şartı** sağlanacak şekilde elde edilen (2)'nin bir $\mathbf{x}(t)$ çözümüdür. Bu problem bir **Başlangıç Değer Problemi** olarak adlandırılır. Eğer (3) genel çözümü bilinirse, bu durumda başlangıç değer problemi; (3)'te $t = 0$ alınarak ve $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sabitlerini

$$\mathbf{x}_0 = b_1\mathbf{x}^{(1)}(0) + b_2\mathbf{x}^{(2)}(0) + \cdots + b_n\mathbf{x}^{(n)}(0)$$

olacak şekilde belirleyerek çözülebilir. Aslında, bunun b_1, b_2, …, b_n bilinmeyenli $n \times n$ tipinde bir lineer sistem olduğu kolayca görülebilir. Bu lineer sistem,

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ve C de sütunları sırasıyla, $\mathbf{x}^1(0), \ldots \mathbf{x}^n(0)$ olan $n \times n$ boyutlu sabit bir matris olmak üzere

$$C\,\mathbf{b} = \mathbf{x}_0 \tag{4}$$

biçiminde de yazılabilir. Eğer $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$, (1) için bir temel sistem oluşturuyorsa o zaman C'nin singüler olmadığı ve de (4)'ün daima bir tek çözüme sahip olduğu kolayca gösterilebilir. (Boyce ve DiPrima'nın kitabına veya daha ileri kaynaklar kısmındaki Cullen'e ait kitaba bakınız.)

ÖRNEK 1 (1) şeklindeki en basit sistem, a bir sabit olmak üzere

$$\frac{dx}{dt} = ax \tag{5}$$

tek denklemidir. Matematik analiz gereğince bu denklemin çözümleri

$$x = be^{at} \tag{6}$$

biçimindedir. Yani bu (5)'in genel çözümüdür.

$$\frac{dx}{dt} = ax, \qquad x(0) = x_0,$$

başlangıç değer problemini çözmek için, (6)'da $t = 0$ koyarsak $b = x_0$ elde ederiz. Böylece başlangıç değer probleminin çözümü

$$x = x_0 e^{at}$$

dir. ■

A, köşegen matris ise sistem (2)'ye **köşegen** sistemdir denir. Bu durumda (1),

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_{11}x_1(t) \\ x_2'(t) &= \qquad a_{22}x_2(t) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= \qquad\qquad a_{nn}x_n(t) \end{aligned} \tag{7}$$

şeklini alır. Her bir denklem tek başına çözülebilir olduğundan bu sistemi çözmek kolaydır. (7)'deki her bir denkleme Örnek 1'in sonuçlarını uygulayarak $b_1, b_2, \ldots, b_n$'ler keyfi sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned} x_1(t) &= b_1 e^{a_{11}t} \\ x_2(t) &= b_2 e^{a_{22}t} \\ &\vdots \qquad\quad \vdots \\ x_n(t) &= b_n e^{a_{nn}t} \end{aligned} \tag{8}$$

elde ederiz. (8)'i vektör şeklinde yazmak bize

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} b_1 e^{a_{11}t} \\ b_2 e^{a_{22}t} \\ \vdots \\ b_n e^{a_{nn}t} \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} e^{a_{11}t} + b_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} e^{a_{22}t} + \cdots + b_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{a_{nn}t}$$

ifadesini verir. Bu

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} e^{a_{11}t}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} e^{a_{22}t}, \quad \ldots, \quad \mathbf{x}^{(n)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{a_{nn}t}$$

vektör fonksiyonlarının (7) köşegen sistemi için bir temel sistem oluşturduğunu ifade eder.

ÖRNEK 2

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{9}$$

köşegen sistemi

$$\begin{aligned} x_1' &= 3x_1 \\ x_2' &= -2x_2 \\ x_3' &= 4x_3 \end{aligned}$$

şeklinde üç denklem olarak yazılabilir. Bu denklemleri çözerek b_1, b_2 ve b_3 keyfi sabitler olmak üzere

$$x_1 = b_1 e^{3t}, \qquad x_2 = b_2 e^{-2t}, \qquad x_3 = b_3 e^{4t}$$

elde ederiz. Böylece

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} b_1 e^{3t} \\ b_2 e^{-2t} \\ b_3 e^{4t} \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t} + b_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-2t} + b_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t}$$

(9) un genel çözümüdür ve

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-2t}, \qquad \mathbf{x}^{(3)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t}$$

fonksiyonları (9) için bir temel sistem oluşturur. ■

Eğer (2) sistemi köşegen değilse, o zaman önceki örnekteki sistem gibi basit bir şekilde çözülemez. Bununla birlikte, A matrisinin köşegen biçime dönüştürülebilmesi durumunda genel çözümü veren bu metodun bir genişletmesi vardır. A, köşegen biçime dönüştürülebilen bir matris olsun. D_1 köşegen matris olmak üzere

$$P^{-1}AP = D \tag{10}$$

olacak şekilde P, singüler olmayan (regüler) matris olsun. O zaman, verilen,

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

sistemi soldan P^{-1} ile çarpılırsa,

$$P^{-1}\mathbf{x}' = P^{-1}A\mathbf{x}.$$

elde edilir. $P^{-1}P = I_n$ olduğundan bu son denklemi,

$$P^{-1}\mathbf{x}' = (P^{-1}AP)(P^{-1}\mathbf{x}). \tag{11}$$

biçiminde yazabiliriz. Şimdilik

$$\mathbf{u} = P^{-1}\mathbf{x} \tag{12}$$

olsun. P^{-1} sabit matris olduğundan

$$\mathbf{u}' = P^{-1}\mathbf{x}' \tag{13}$$

dür. Böylece (10), (12) ve (13), (11)'de yerine yazılırsa

$$\mathbf{u}' = D\mathbf{u} \tag{14}$$

ifadesini elde ederiz. Denklem (14) bir köşegen sistemdir ve biraz önce incelenen yukarıdaki metotla çözülebilir. Bununla birlikte işlemden önce Teorem 7.4'ü hatırlayacak olursak $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$'ler A'nın özdeğerleri olmak üzere D matrisi

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

şeklindedir. P de, sütunları sırasıyla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ özdeğerlerine karşılık gelen A'nın lineer bağımsız özvektörlerinden oluşan matristir. Köşegen sistemler için biraz önce bahsedilenler yardımıyla (14)'ün genel çözümü, $b_1, b_2, \ldots, b_n$'ler keyfi sabitler ve

$$\mathbf{u}(t) = b_1\mathbf{u}^{(1)}(t) + b_2\mathbf{u}^{(2)}(t) + \cdots + b_n\mathbf{u}^{(n)}(t) = \begin{bmatrix} b_1e^{\lambda_1 t} \\ b_2e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ b_ne^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbf{u}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t},\ \mathbf{u}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t},\ \ldots,\ \mathbf{u}^{(n)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\lambda_n t} \tag{15}$$

dir. Denklem (12)'den $\mathbf{x} = P\mathbf{u}$ olduğundan verilen $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ sisteminin genel çözümü

$$\mathbf{x}(t) = P\mathbf{u}(t) = b_1 P\mathbf{u}^{(1)}(t) + b_2 P\mathbf{u}^{(2)}(t) + \cdots + b_n P\mathbf{u}^{(n)}(t) \quad (16)$$

şeklindedir. Bununla birlikte (15)'teki sabit vektörler birim matrisin sütunları ve $P\,I_n = P$ olduğundan, (16),

$$\mathbf{x}(t) = b_1\mathbf{p}_1 e^{\lambda_1 t} + b_2\mathbf{p}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + b_n\mathbf{p}_n e^{\lambda_n t}, \quad (17)$$

biçimde yazılabilir. Burada, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$'ler P matrisinin sütunları ve dolayısıyla A'nın $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$'lere karşılık gelen özvektörleridir.

Teorem 8.8 Eğer $n \times n$ tipindeki A matrisi; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ özdeğerlerine sırasıyla karşılık gelen, $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ n tane lineer bağımsız özvektöre sahip ise, bu durumda

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

lineer homogen diferensiyel denklem sisteminin genel çözümü (17) ile verilir. ■

ÖRNEK 3

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

denklem sistemi için

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisi $\lambda_1 = 2$ ve $\lambda_2 = 3$ özdeğerlerine sahip olup karşılık gelen özvektörler

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

dir. (Gerçekleyiniz.) Özvektörler; farklı özdeğerlere karşılık geldiklerinden lineer bağımsızdır. (Teorem 7.5'in ispatı.) Böylece verilen sistemin genel çözümü

$$\mathbf{x}(t) = b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} + b_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{3t}$$

dir. Bu da, bileşenler cinsinden

$$x_1(t) = b_1 e^{2t} + b_2 e^{3t}$$
$$x_2(t) = -b_1 e^{2t} - 2b_2 e^{3t}$$

biçiminde yazılabilir. ■

ÖRNEK 4

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -14 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

lineer homogen denklem sistemini gözönüne alalım. A'nın karakteristik polinomu

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8$$

ya da

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 4)$$

olup (gerçekleyiniz) özdeğerleri $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ ve $\lambda_3 = 4$'tür. Karşılık gelen özvektörler sırasıyla

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix}$$

dır. O zaman genel çözüm, b_1, b_2 ve b_3 keyfi sabitler olmak üzere

$$\mathbf{x}(t) = b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + b_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} e^{2t} + b_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix} e^{4t},$$

ile verilir. ■

ÖRNEK 5 Örnek (4)'teki lineer sistem için, $x_1(0) = 4$, $x_2(0) = 6$ ve $x_3(0) = 8$ başlangıç şartları ile tanımlı, başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 e^t \\ b_2 e^{2t} \\ b_3 e^{4t} \end{bmatrix}$$

olmak üzere, genel çözümü $\mathbf{x} = P\mathbf{u}$ biçiminde yazarız. Şimdi,

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 e^0 \\ b_2 e^0 \\ b_3 e^0 \end{bmatrix}$$

ya da

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} \tag{18}$$

dir. Gauss—Jordan indirgeme yöntemi ile (18)'i çözerek

$$b_1 = \tfrac{4}{3}, \qquad b_2 = 3, \qquad b_3 = -\tfrac{1}{3}$$

elde ederiz. Böylece başlangıç değer probleminin çözümü

$$\mathbf{x}(t) = \tfrac{4}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} e^{2t} - \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix} e^{4t}$$

dir. ■

Şimdi Bölüm 7'den bazı gerçekleri hatırlayalım. Eğer A matrisi farklı özdeğerlere sahip değilse, A köşegenleştirilebilir ya da köşegenleştirilemeyebilir. λ, A'nın k katlı bir özdeğeri olsun. Bu durumda, A'nın köşegenleştirilebilmesi için gerek ve yeter şart λ'ya karşılık gelen özuzayın boyutunun k olması yani $(\lambda I_n - A)$ matrisinin rankının $n - k$ olmasıdır (Sağlayınız.) $(\lambda I_n - A)$ matrisinin rankı $n - k$ ise bu durumda A matrisinin λ'ya karşılık gelen k tane lineer bağımsız özvektörünü bulabiliriz.

ÖRNEK 6

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

lineer sistemini gözönüne alalım. A'nın özdeğerleri $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ve $\lambda_2 = 5$'tir. (Gösteriniz.)

$$(1I_3 - A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

matrisinin rankı 1'dir. 1 özdeğerine karşılık gelen lineer bağımsız özvektörler

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

özvektörü 5 özdeğerine karşılık gelir. (Gerçekleyiniz.) b_1, b_2 ve b_3 keyfi sabitler olmak üzere verilen sistemin genel çözümü

$$\mathbf{x}(t) = b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + b_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + b_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{5t}$$

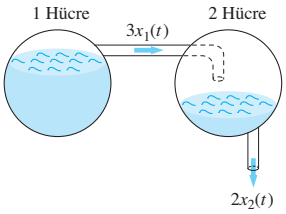
dir.

Eğer örneklerde olduğu gibi A'yı köşegenselleştiremezsek işimiz daha zordur. Daha ileri kitaplarda böyle problemlerin detayı için metotlar tartışılmıştır. (İleri Kaynaklar'a bakınız.) ■

■ Uygulama —Bir Yayılma Süreci

Aşağıdaki örnek, Derrick ve Grossman'ın *Elementary Differential Equations with Applications* adlı kitabında (İleri Kaynaklar'a bakınız.) yer alan bir örneğin uyarlamasıdır.

ÖRNEK 7



ŞEKİL 8.10

Bir geçirgen zar ile birbirinden ayrılmış yanyana iki hücreyi gözönüne alalım ve birinci hücreden ikinci hücreye doğru (dakikada mililitrelerce) hızla yani birinci hücredeki sıvının hacmının (mililitrelerce) üç katına yaklaşık olarak eşit sıvının aktığını varsayalım. Bu durumda ikinci hücreden de, (dakikada mililitrelerce) hızla yani ikinci hücredeki sıvının hacmının iki katına yaklaşık olarak eşit sıvı dışarı akmış olsun. $x_1(t)$ ve $x_2(t)$, sırasıyla t zamanında birinci ve ikinci hücredeki sıvıların hacımları olsun. Başlangıçta birinci hücre 40 mililitre sıvıya, ikinci hücre de 5 mililitre sıvıya sahip olsun. Bir t anında birinci ve ikinci hücredeki sıvıların hacimlerini bulunuz. Şekil 7.1'e bakınız.

Çözüm

Her hücredeki sıvının hacmindeki değişim, akarak gelen miktar ile akarak giden miktar arasındaki farktır. Birinci hücreye sıvı akışı olmadığından

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -3x_1(t)$$

olup (−) işareti sıvının hücreden dışarı aktığını göstermektedir. İkinci hücreye birinci hücreden $3x_1(t)$ sıvı akışı olurken ikinci hücreden de dışarıya $2x_2(t)$ sıvı akışı olmaktadır. Böylece ikinci hücredeki sıvının hacmindeki değişim

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = 3x_1(t) - 2x_2(t)$$

ile verilebilir. Bu durumda

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -3x_1(t)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = 3x_1(t) - 2x_2(t)$$

lineer sistemini elde etmiş oluruz. Bu sistem

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

olarak matris şeklinde yazılabilir.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -2$ dir (gerçekleyiniz) ve karşılık gelen özvektörler

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir. (Gerçekleyiniz.) Dolayısıyla genel çözüm

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{-3t} + b_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

ile verilir. Başlangıç şartlarını kullanarak

$$b_1 = 40, \qquad b_2 = 125$$

buluruz. (Gösteriniz.) Böylece t zamanda herbir hücredeki sıvının hacmi

$$x_1(t) = 40e^{-3t}$$
$$x_2(t) = -120e^{-3t} + 125e^{-2t}$$

ile verilir. ■

Pek çok diferensiyel denklemin çözümü için bir formül yazılamayacağından, çözülemeyeceği belirtilmelidir. Diferensiyel denklemlerin nümerik çözümlerini elde etmek için Nümerik Analizde incelenen nümerik metodlar mevcuttur. Bu metodların bazıları için bilgisayar programları çok kullanışlıdır.

KAYNAKLAR

Boyce, W. E., and R. C. RIPRIMA. *Elementary Differential Equations,* 6th ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1996

Cullen, C. G. *Linear Algebra and Differential Equations,* 2nd ed. Boston: PWS-Kent, 1991.

Derrick, W. R., and S.I. Grossman. *Elementary Differential Equations with Applications,* 2nd ed. Reading, Mass.: Addison-Wesle, 1981.

Dettman, J. H. *Introduction to Linear Algebra and Differential Equations*. New York: Dover, 1986.

Goode, S. W. *Differential Equations and Linear Algebra*, 2d ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, Inc., 2000.

Rabenstein, A. L. *Elementary Differential Equations With Linear Algebra*, 4th ed. Philadelphia: W. B. Saunders, 1992.

Anahtar Kelimeler

Diferensiyel denklem
Diferensiyel denklemlerin homogen sistemi
Başlangıç değer problemi
Başlangıç şartı
Temel sistem
Özel çözüm
Yayılma süreci
Genel çözüm
Özvektörler

8.4 Alıştırmalar

1.

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

lineer diferensiyel denklem sistemini gözönüne alalım.

(a) Genel çözümünü bulunuz.

(b) $x_1(0) = 3$, $x_2(0) = 4$, $x_3(0) = 5$ başlangıç koşullarıyla verilmiş başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

2.

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

lineer diferensiyel denklem sistemini gözönüne alalım.

(a) Genel çözümünü bulunuz.

(b) $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 7$, $x_3(0) = 20$ başlangıç koşullarıyla verilmiş başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

3.

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

lineer diferensiyel denklem sisteminin genel çözümünü bulunuz.

4. A, $n \times n$ tipinde matris olmak üzere $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ lineer homogen diferensiyel denklem sisteminin tüm çözümlerinin cümlesinin, reel değerli türevlenebilir tüm n-vektör fonksiyonlarının vektör uzayının bir alt uzayı olduğunu ispat ediniz. Bu alt uzay, verilen lineer sistemin **çözüm uzayı** olarak adlandırılır.

5.

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

lineer diferensiyel denklem sisteminin genel çözümünü bulunuz.

6.

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

lineer diferensiyel denklem sisteminin genel çözümünü bulunuz.

7.

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

lineer diferensiyel denklem sisteminin genel çözümünü bulunuz.

8.

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

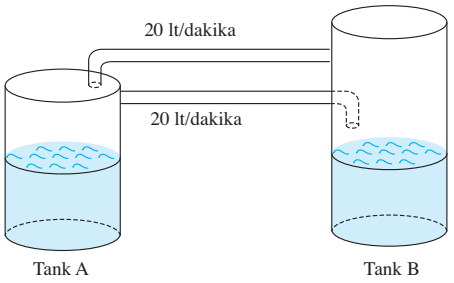
lineer diferensiyel denklem sisteminin genel çözümünü bulunuz.

9. Aynı ormanda birbiriyle rekabet halinde yaşayan iki canlı türü gözönüne alalım. $x_1(t)$, $x_2(t)$, sırasıyla t zamanındaki türlerin sayısını (nüfusunu) göstersin. Başlangıçta $x_1(0) = 500$ ve $x_2(0) = 200$ olduğunu varsayalım. Türlerin gelişme hızları

$$x_1'(t) = -3x_1(t) + 6x_2(t)$$
$$x_2'(t) = x_1(t) - 2x_2(t),$$

ile verilse, t zamanında her bir türün sayısı nedir?

10. Birbirine bağlı olan ve herbiri tuzlu su bulunduran bir sisteme sahip olduğumuzu kabul edelim. A tankı 200 litrelik tuzlu suda $x(t)$ pound tuz ve B tankı 300 galonluk tuzlu suda $y(t)$ kg tuz kapsamaktadır. $t = 0$ iken, A dan B'ye ve B'den A'ya 20 (lt/dakika) tuzlu su pompalanıyor. Eğer $x(0) = 10$, $y(0) = 40$ ise t zamanında herbir tanktaki tuz miktarını bulunuz.



8.5 Dinamik Sistemler

Kesim 7.1'de başlangıç şartına sahip lineer homogen denklem sistemlerinin nasıl çözülebileceğini inceledik. Bu tip sistemleri başlangıç değer problemleri olarak adlandırdık ve

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{1}$$

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{1}$$

biçiminde yazdık. A'nın köşegenleştirilebilir olması durumunda (1) in bir özel çözümünü oluşturmak için A'nın özdeğer ve özvektörlerini kullandık.

Bu kesimde dikkatimizi $n = 2$ haline odaklayacağız ve kolaylık olması için x_1 ve x_2 yerine x ve y'yi kullanacağız. Diferensiyel denklemlerin bu tip bir lineer homogen sistemi, a, b, c ve d'ler reel sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy \end{aligned} \tag{2}$$

biçiminde ya da $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$\mathbf{x}'(t) = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A\mathbf{x}(t) \tag{3}$$

biçiminde yazılabilir. Sistem (2) ve (3) için diferensiyel denklemin kendisini esas alarak çözümün özelliklerini belirlemeye (açıklamaya) çalışacağız. Bu alan, diferensiyel denklemlerin kalitatif teorisi olarak adlandırılır ve J.H. Poincaré tarafından kapsamlı olarak çalışılmıştır.*

$\frac{dx}{dt}$ ve $\frac{dy}{dt}$ değişim hızları açık olarak sadece x ve y değişkenlerine bağlı, t bağımsız değişkenine bağlı olmadığından Sistem (2) ve (3) **otonom** diferensiyel denklem sistemi olarak adlandırılır. Amaçlarımız için, t bağımsız değişkenini **zaman** değişkeni olarak adlandıracağız ve buna bağlı olarak Sistem (2) ve (3)'e zaman-bağımsız sistemler diyeceğiz. Bu kesimde tartışmalarımız boyunca bu terminolojiyi kullanacağız. Bu kabul altında Sistem (2) ve (3), zamana göre değişen x ve y için bir model oluşturur. Bundan dolayı, böyle sistemler **Dinamik sistemler** olarak adlandırılır.



JULES HENRI POINCARÈ

*Jules Henri Poincaré (1854–1912) Fransa hükümetinin pek çok organında önemli rol oynayan varlıklı bir ailenin çocuğu olarak Fransa'nın Nancy şehrinde doğdu. Bir genç olarak çelimsiz ve ahmak görünüşlü olmasına rağmen matematikte büyük bir kabiliyet gösterdi. 1873 yılında Politeknik okuluna (Ecole Polytechnique) girdi ve burada doktorasını tamamladı. Daha sonra 1881'de Paris Üniversitesine katılarak üniversitede meslek hayatına başladı. Ölünceye kadar burada çalıştı. Poincare matematiğin her dalında (pür ve uygulamalı) çalışan son kişi olarak kabul edilir. Doktora tezi diferensiyel denklemlerin çözümlerinin varlığıyla ilgiliydi. Uygulamalı matematikte optik alanları, elektrik, esneklik, termodinamik (ısı iletişimi), kuantum mekaniği, rölalitive (izafiyat) teorisi ve kozmoloji (var oluş teorisi)'ye katkılarda bulundu. Pür matematikte cebirsel topolojinin belli başlı (esas) kurucularından olup cebirsel geometriye, analitik fonksiyonlara ve sayılar teorisine çok sayıda makale ve yazılarıyla katkıda bulunmuştur. Astronomideki çalışmasıyla kaosla ilgili olarak düşünen ilk kişiydi. Son yıllarında, matematiği herkese sevdirebilmek için pekçok kitap yazdı. Bu kitapların tabanları matematiksel buluşlardaki düşünce basamakları ve matematiğin estetik yapısını kapsamaktadır.

Dinamik sistemlerin kalitatif (nitel) analizi, aşağıda verilen bazı soruları irdeler:

- Sabit çözümler var mı?
- Sabit çözümler varsa, yaklaşık çözümler sabit çözüme doğru mu yoksa sabit çözümden uzağa mı hareket eder?
- $t \to \pm\infty$ için çözümler nasıl davranır?
- Salınımlı çözümler var mıdır?

Bu soruların her biri bir geometrik niteliğe sahiptir. Bundan dolayı dinamik sistemlerin davranışını (yapısını) incelemek için yardımcı bir araca ihtiyaç duyarız. Eğer zamanı gösteren t'yi, bir parametre olarak kabul edersek, $x = x(t)$ ve $y = y(t)$ xy–düzleminde bir eğri ifade eder. Böyle bir eğriye (2) ve (3) sistemlerinin bir **rotası** (**trajectory**) veya **yörünge**si (**orbit**) ve xy–düzlemine de bu dinamik sistemin **faz düzlemi** (**phase plane**) denir.

ÖRNEK 1

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) \quad \text{veya} \quad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -x \end{aligned}$$

sisteminin genel çözümü*

$$\begin{aligned} x &= b_1 \sin(t) + b_2 \cos(t) \\ y &= b_1 \cos(t) - b_2 \sin(t) \end{aligned} \tag{4}$$

dir.

Bu yörüngeler†, $c^2 = b_1^2 + b_2^2$ olmak üzere $x^2 + y^2 = c^2$ denklemini sağlarlar. Dolayısıyla, bu dinamik sistemin yörüngeleri merkezi orijin olan faz düzlemindeki çemberlerdir. $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$ başlangıç şartı için, (4)'te $t = 0$ yazılırsa $\begin{aligned} b_1 \sin(0) + b_2 \cos(0) &= k_1 \\ b_1 \cos(0) - b_2 \sin(0) &= k_2 \end{aligned}$ lineer denklem sistemi elde edilir.

Bu denklem sisteminin çözümü $b_1 = k_2$ ve $b_2 = k_1$'dir. O halde $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$, başlangıç değer problemine karşılık gelen özel çözüm $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$ dir. Bu özel çözüm $x^2 + y^2 = k_1^2 + k_2^2$; yörüngesini belirtir. Bu yörünge merkezi orijin olan $\sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ yarıçaplı bir çemberdir. ■

Faz düzlemindeki bir dinamik sistemin yörüngelerinin grafiğine (sketch) **faz portresi** (**phase portrate**) adı verilir. Bir faz portresi bir-

---

*Genel çözümü bu bölümün sonunda elde edeceğiz.

†Bu yörüngeleri, ilk olarak $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$'den t parametresini yok edip, daha sonra $y\,dy = -x\,dx$'yi integre ederek elde edebiliriz. Bu durumda, $\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + k^2$, veya denk olarak $x^2 + y^2 = c^2$ buluruz.

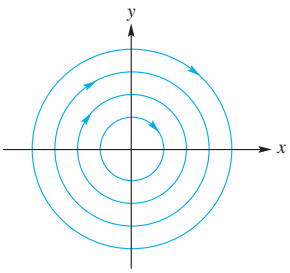
kaç yörünge grafiği ve eğrinin üzerinde kalan yönlendirme göstergesi içerir. Bu yönlendirmeyi gösteren ok uçları t'nin aralıkta artımıyla birlikte (x, y) noktasının hareket ettiği yönü ifade edecek şekilde yörüngenin üzerine yerleştirilir. Bu yönlendirme

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{bmatrix}$$

hız vektörü ile belirlenir.

Örnek 1 deki dinamik sistem için $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$'dir. O halde $x > 0$ ve $y > 0$ için, faz düzlemindeki $\mathbf{v}$ vektörü sağa ve aşağıya doğru yönlendirilmiş olur. Yani, bu yörüngeler Şekil 8.11'de görüldüğü gibi saat yönünde yer alırlar. (**Uyarı:** Farklı bir dinamik sistemde, yörünge eğrilerinin tümü aynı yönlendirmeye sahip olmayabilir.)

Akla gelen ilk sorulardan biri muhakkak sabit çözümlerin varlığıdır. Bir dinamik sistemin (bu sistemi x ve y'nin zamana bağlı değişimini gösteren bir model olarak ele alacağız) sabit bir çözüme sahip olması için, $\dfrac{dx}{dt}$ ve $\dfrac{dy}{dt}$'nin sıfır olması gerekir. Yani, bu sistem değişmezdir. Sabit çözümlere karşılık gelen faz düzlemindeki noktalar



ŞEKİL 8.11

$$\frac{dx}{dt} = ax + by = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = cx + dy = 0$$

homogen lineer sistemini gösteren

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sisteminin çözülmesiyle elde edilir. Bu lineer sistemin bir çözümü $x = 0$, $y = 0$'dır ve bu sistemin başka çözümünün olması için gerek ve yeter şart A'nın determinantının 0 olmasıdır. Örnek 1'de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \det(A) = 1$$

dir.

Böylece, Örnek 1'deki bu dinamik sistem için sabit çözüme karşılık gelen faz düzlemindeki tek nokta $x = 0$, $y = 0$, yani orijindir.

TANIM 8.2

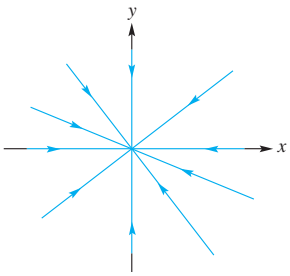
$\dfrac{dx}{dt}$ ve $\dfrac{dy}{dt}$'nin sıfır olması durumunda faz düzlemindeki nokta, bu dinamik sistemin **denge (equilibrium) noktası** veya **sabit (fixed) noktası** diye adlandırılır.

Bir denge noktasının civarındaki yörüngelerin davranışı, denge noktalarının farklı türlerini karakterize etme vazifesi görür. Eğer bir denge noktasının civarındaki bütün noktalardan geçen yörüngeler bu denge noktasına yakınsak ise, bu denge noktasına **kararlı** (**stable**) veya **çekici** (**attractor**) nokta adı veriler.

Bu durum orijin noktası için Şekil 8.12'de gösterilmiştir. Burada yörüngeler orijine doğru yönlendirilmiş doğrulardır. Şekil 8.12'deki faz portresini ifade eden dinamik sistem

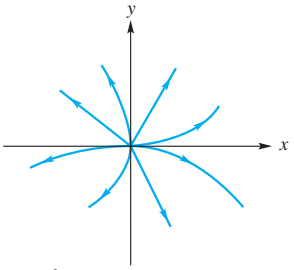
$$\frac{dx}{dt} = -x$$

$$\frac{dy}{dt} = -y$$

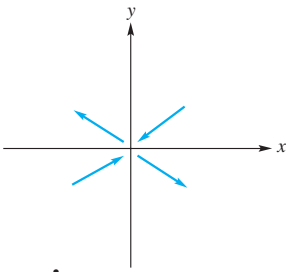


ŞEKİL 8.12
(0, 0) noktasındaki kararlı denge noktası.

dir. Bu sistem daha sonra Örnek 3'te ele alınacaktır. Şekil 8.11'de gösterilen diğer durumda tek denge noktası orijindir. Bu durumda denge noktasının civarındaki noktalardan geçen yörüngeler küçük uzaklıkta yer alırlar. Bu durumda denge noktasına **sıradışı kararlı** (**marginally stable**) nokta adı verilir. Diğer durumda komşu yörüngeler denge noktasından uzaklaşmaya meyillidirler. Böyle bir durumda denge noktasına **kararlı olmayan** (**unstable**) veya **itici** (**repelling**) nokta denir. (Şekil 8.13'e bakınız.) Ayrıca, komşu yörüngelerden biri denge noktasına doğru ve diğeri denge notasından dışa doğru hareket eder konumda olabilir. Bu tür denge noktasına **eyer** (**saddle**) noktası adı verilir. (Şekil 8.14'e bakınız.)



ŞEKİL 8.13 (0, 0) noktasındaki kararlı olmayan denge noktası.



ŞEKİL 8.14 (0, 0) noktasındaki eyer noktası.

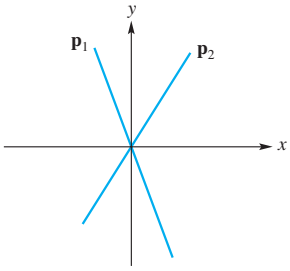
Kesim 8.4'teki elde edilenlerden, dinamik sistemi belirten $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ katsayılar matrisinin özdeğerlerinin ve özvektörlerinin, bu sistemin faz portresinin özelliklerini ortaya çıkarabileceğini düşünebiliriz. Kesim 8.4'teki (17) denkleminden,

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = b_1\mathbf{p}_1 e^{\lambda_1 t} + b_2\mathbf{p}_2 e^{\lambda_2 t} \tag{5}$$

dir. Burada λ_1 ve λ_2, A matrisinin özdeğerleri ve p_1 ve p_2 de, sırasıyla, bu özdeğerlere karşılık gelen öz vektörlerdir. Üstelik λ_1 ve λ_2'yi sıfırdan farklı kabul edebiliriz. * Dolayısıyla A matrisi regüler olur (Nedenini açıklayınız). Böylece tek denge noktası $x = 0$, $y = 0$; yani orijindir.

*A matrisinin özdeğerleri sıfır ise (5)'te verildiği gibi (2)'nin çözümleri ya sabitlerden ya da sabitler ve doğrulardan oluşur. Ayrıca, A matrisinin özdeğerlerinden biri sıfır diğeri sıfırdan farklı ise denge noktaları bir doğru üzerinde yer alır. Daha fazla bilgi için bu kesimin sonundaki ileri kaynaklara bakınız.

Faz portresinin oluşturulmasında A matrisinin özdeğerleri ve özvektörlerinin nasıl kullanılacağını göstermek için, kompleks özdeğerlerdeki durumu, reel özdeğerlerdeki durumdan ayrı tutarak inceleyeceğiz.



ŞEKİL 8.15

■ λ_1 ve λ_2 özdeğerlerinin reel olması durumu

Reel özdeğerler (ve özvektörler) için, (5) denkleminin faz düzlem ifadesi, $x(t)$'nin p_1 ile p_2'nin gerdiği düzlemde yer aldığını gösterir. O halde p_1 ve p_2 yörüngelerdir. p_1 ve p_2 özvektörlerinin faz düzleminde orijinden geçen doğrular veya ışınlar olduğu gösterilebilir. Bu durum için faz portresi, Şekil 8.15'te gösterilen genel şekildedir. Bu faz portresini tamamlamak için, öz yönlere karşılık gelen daha çok özel yörüngeye ihtiyaç vardır. Bu bahsedilen yörüngeler λ_1 ve λ_2'nin değerlerine bağlıdır.

Özdeğerler negatif ve farklı: $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

(5)'ten, $t \to \infty$, için $x(t)$ küçülür. O halde, $t \to \infty$, için bütün yörüngeler orijinde denge noktasına doğru yönelirler. Örnek 2 ve Şekil 8.16'ya bakınız.

ÖRNEK 2

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

dinamik sisteminin faz düzlem portresini oluşturalım.

İlk olarak işe, A matrisinin özdeğerlerini ve özvektörlerini bularak başlayacağız. A matrisinin özdeğerleri ve özvektörlerinin

$$\lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = -3, \quad \text{ve} \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

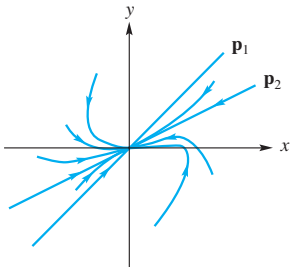
olduğu kolayca görülebilir. (Gerçekleyiniz.)

Buradan

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = b_1\mathbf{p}_1 e^{-4t} + b_2\mathbf{p}_2 e^{-3t}$$

olarak elde edilir ve $t \to \infty$ için $x(t)$ küçülür. Bu son denklemi aşağıdaki biçimde yazmak yararlı olacaktır:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = b_1\mathbf{p}_1 e^{-4t} + b_2\mathbf{p}_2 e^{-3t} = e^{-3t}(b_1\mathbf{p}_1 e^{-t} + b_2\mathbf{p}_2)$$



ŞEKİL 8.16

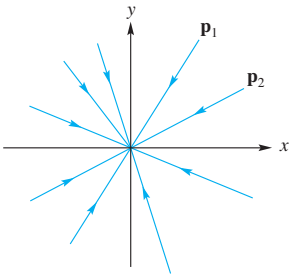
$b_2 \neq 0$ olmak üzere $b_1 p_1 e^{-t}$ terimi, $b_2 p_2$ ye kıyasla ihmal edilebilirdir. Bu bize, $t \to \infty$, için tüm yörüngelerin p_1 den başlayıp, orijine yaklaştıkça p_2'nin yönünde sıralanacaklarını gösterir. O halde faz portresi, Şekil 8.16 da verildiği gibi görünecektir. Orijin bir çekici (attractor) noktadır. ■

Özdeğerler pozitif ve farklı: $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$

(5) ten, $t \to \infty$, için $x(t)$ büyür. O halde $t \to \infty$, için bütün yörüngeler, orijinde denge noktasından dışa doğru yönelirler. Bu tür dinamik sistemlerin faz portresi Şekil 8.16'daki gibidir. Fakat ok uçları şekildekinin zıt yönünde yer alırlar. Bu durumda (0, 0) noktasına, **kararlı olmayan** (**unstable**) denge noktası adı verilir.

Özdeğerler negatif fakat eşit: $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$

Tüm yörüngeler orijinde kararlı denge noktasına gider. Fakat yörüngeler Şekil 8.16'da çizili yörüngelerden farklı şekilde bükülürler. Bu yörüngelerin davranışı A matrisinin lineer bağımsız özvektörlerinin sayısına bağlıdır. Eğer lineer bağımsız iki özvektör varsa $x(t)$, $b_1p_1 + b_2p_2$ sabit vektörünün bir katıdır ve $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda_1 t}(b_1\mathbf{p}_1 + b_2\mathbf{p}_2)$, olur. Dolayısıyla, bütün yörüngeler orijinden geçen doğrulardır ve $\lambda_1 < 0$ olduğundan yörüngeler boyunca hareket orijine doğrudur. Şekil 8.17'ye bakınız. Örnek 3'te bu durum ele alınmıştır.



ŞEKİL 8.17

ÖRNEK 3

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

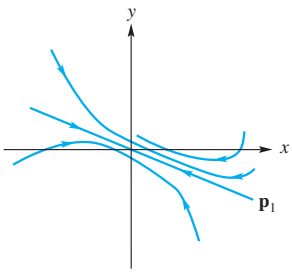
dinamik sisteminin A matrisi, $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ özdeğerlerine sahiptir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler, sırasıyla,

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir. (Gerçekleyiniz.)

O halde

$$\mathbf{x}(t) = e^{-t}(b_1\mathbf{p}_1 + b_2\mathbf{p}_2) = e^{-t}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$



ŞEKİL 8.18

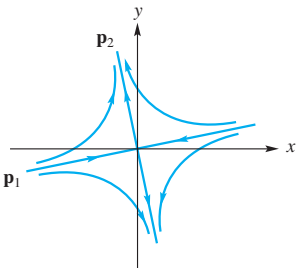
biçiminde elde edilir. Yani, $x = b_1e^{-t}$ ve $x = b_2e^{-t}$ dir. Eğer $b_1 \neq 0$ ise $y = \dfrac{b_2}{b_1}x$ olur. Eğer $b_1 = 0$ ise p_2'nin yönündeki yörüngeyi elde ederiz. Dolayısıyla bütün yörüngeler Şekil 8.12 ve Şekil 8.17'deki gibi orijinden geçen doğrulardır. ■

Eğer sadece bir lineer bağımsız özvektör varsa, bu özvektörün üzerinde olmayan noktalardan geçen tüm yörüngeler orijinde bu özvektöre teğet konumda sıralanırlar. Bu durumu daha fazla irdelemeyeceğiz. Fakat faz portresi Şekil 8.18'e benzerdir. Özdeğerlerin pozitif ve eşit olması durumunda, faz portreleri okların yön değiştirmesi dışında Şekil 8.17 ve Şekil 8.18'deki gibidir.

Bir pozitif özdeğer ve bir negatif özdeğer: $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

(5)'ten, $t \to \infty$, için terimlerden biri küçülürken diğeri büyür. Bu, bir özvektörün yönünde olmayan bir yörüngenin orijine doğru yönlenmesine ve t büyüdükçe bükülmesine sebep olur.

Bu durumda orijin, **eyer noktası** diye adlandırılır. Faz portresi Şekil 8.19'a benzerdir.



ŞEKİL 8.19

ÖRNEK 4

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

dinamik sisteminin faz düzlem portresini belirleyiniz.

İlk olarak işe, A matrisinin özdeğerlerini ve bu özdeğerlere karşılık gelen öz vektörlerini bularak başlayacağız. Bu özdeğerler ve özdeğerlere karşılık gelen özvektörlerin

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \text{ve} \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Bu durumda orijin bir eyer noktasıdır ve

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = b_1\mathbf{p}_1e^{-t} + b_2\mathbf{p}_2e^{2t}$$

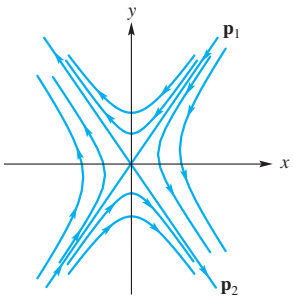
olarak elde edilir.

Eğer $b_1 = 0$ ve $b_2 = 0$ ise hareket orijine doğru ve $\mathbf{p}_1$ özvektörünün yönündedir (doğrultusundadır). Benzer şekilde, $b_2 \neq 0$ ve $b_1 = 0$ ise hareket orijinden dışa doğru ve $\mathbf{p}_2$ özvektörünün yönündedir (doğrultusundadır). Orjinal sistemin bileşenlerini ele alır ve t-yi yok edersek,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y - x}.$$

buluruz. (Gerçekleyiniz.) Bu ifade bize, faz düzlemindeki yörüngeler boyunca eğimi ifade eder. Bu ifadenin incelenmesiyle, aşağıdaki yorumları yapabiliriz:

- y–eksenini kesen tüm yörüngelerin yatay teğetleri vardır.
- Bir yörünge $y = x$ doğrusunu kesiyorsa, bu yörüngenin dik teğeti vardır.
- Bir yörünge x– eksenini kesiyorsa, eğimi –2'dir.



ŞEKİL 8.20

Şekil 8.19'da gösterilen bir eyer noktasının genel şeklini kullanarak, bu dinamik sistem için bir tam faz portresi oluşturabiliriz. Bu portre Şekil 8.20'de gösterilmiştir. ■

■ Her İki Özdeğer Kompleks Sayı

2×2 mertebeli reel her A matrisi için, $\det(\lambda I_2 - A) = 0$ karakteristik denklemi, ikinci dereceden bir polinomdur. Bu denklemin λ_1 ve λ_2 kökleri kompleks sayı ise bu köklerden biri diğerinin eşleniğidir. (Ek B.2'ye bakınız.) Yani, α ve $\beta \neq 0$ reel sayılar olmak üzere, $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ ise $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - \beta i$ olur. O halde (5) denklemindeki bir kompleks sayının üstel ifadesi:

$$e^{\lambda_1 t} = e^{(\alpha+\beta i)t} = e^{\alpha t} e^{\beta i t}$$

dir.

Burada $e^{\alpha t}$ terimi standart bir üstel fonksiyondur, fakat $i = \sqrt{-1}$ olduğundan $e^{\beta i t}$ terimi tamamen farklı anlamdadır. Yine de, bu terimi çok kullanışlı fonksiyonlar yardımıyla bir üstel fonksiyon gibi ifade etmenin bir yolu vardır. Eğer

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

Euler özdeşliğini (ispatsız) kullanırsak,

$$e^{\lambda_1 t} = e^{(\alpha+\beta i)t} = e^{\alpha t} e^{\beta i t} = e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t))$$

ve

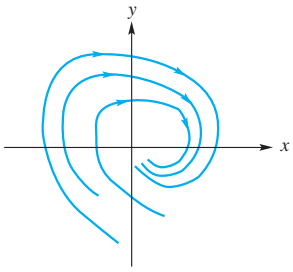
$$\begin{aligned} e^{\lambda_2 t} = e^{(\alpha-\beta i)t} &= e^{\alpha t} e^{-\beta i t} \\ &= e^{\alpha t}(\cos(-\beta t) + i \sin(-\beta t)) \\ &= e^{\alpha t}(\cos(\beta t) - i \sin(\beta t)) \end{aligned}$$

ifadelerine sahip oluruz.

Dolayısıyla (5)'te verilen sistem, $x(t)$ ve $y(t)$ bileşenleri $e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ ve $e^{\alpha t}\sin(\beta t)$'nin lineer birleşimleri olacak şekilde yazılabilir. Buradaki lineer kombinasyon reel katsayılıdır. $\beta \neq 0$ olduğundan, bu yörüngelerin davranışı α'nın işareti ele alınarak analiz edilebilir.

Kompleks özdeğerler: $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ ve $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$

Bu durumda, $x(t)$ ve $y(t)$ bileşenleri $\cos(\beta t)$ ve $\sin(\beta t)$'nin lineer bileşimleridir. Yörüngelerin asal ve yedek eksenleri özvektörler ile belirli olan elipsler olduğu gösterilebilir. (Özel durum için Örnek 1 e bakınız.). Yörüngeler kapalı eğriler olduğundan bu hareket periyodiktir. Orijine yakın noktalardan geçen yörüngeler çok uzaklara yayılmadığından, orijin marjinal kararlı denge noktasıdır. (Şekil 8.11'e bakınız.)



ŞEKİL 8.21

Kompleks özdeğerler: $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ ve $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$

Bu durumda, $x(t)$ ve $y(t)$ bileşenleri $e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ ve $e^{\alpha t}\cos(\beta t)$'nin lineer bileşimleridir. Yörüngelerin spiraller olduğu gösterilebilir. Eğer $\alpha > 0$ ise spiral orijinden uzaklaşarak dışa doğru hareket eder. O halde orijin kararlı olmayan bir denge noktasıdır. Eğer $\alpha < 0$ ise spiral içe doğru orijine yaklaşarak hareket eder. O halde orijin kararlı bir denge noktasıdır. Faz portresi, Şekil 8.21'de gösterildiği gibi spirallerin bir koleksiyonudur. Burada ok uçları uygun şekilde portreye yerleştirilmiştir.

(2)'deki dinamik sistem özel bir durum gibi görünebilir. Ancak, şu ana kadar çalışılan kalitatif analizden elde edilen deneyim

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

şeklindeki lineer olmayan dinamik sistemlerinin davranışını anlamak için bir anahtar oluşturur.

Faz düzlemi ve faz portrelerinin lineer olmayan sistemlere genişletilmesi bu tanıtımın dışında tutulacaktır. Bu tür konular diferensiyel denklemler sahasının bir parçasıdır ve fazladan okunacaklar listesindeki kitaplarda bulunabilir.

KAYNAKLAR

Boyce, W. E. *Elementary Differential Equations*, 9th ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2007.

Campbell, S. L. *An Introduction to Differential Equations and Their Applications*, 2d ed. Belmont, CA: Wadsworth Publishing Co., 1990.

Farlow, S. J. *An Introduction to Differential Equations and Their Applications*. New York: McGraw-Hill, Inc., 1994.

Anahtar Kelimeler

Kalitatif teori
Otonom diferensiyel denklem
Dinamik sistem
Faz portresi
Denge noktası
Sabit nokta
Çekici
Marjinal kararlı
Kararsız nokta
İtici nokta
Eyer noktası
Özdeğerler
Kompleks özdeğerler

8.5 Alıştırmalar

Alıştırma 1-10'da, verilen her bir dinamik sistem için orijindeki denge noktasının cinsini bulunuz ve faz portesini ifade ediniz.

1. $\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$

2. $\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$

3. $\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$

4. $\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$

5. $\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$

6. $\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$

7. $\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$

8. $\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$

9. $\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 3 & -13 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$

10. $\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$

8.6 İkinci Dereceden (Kuadratik) Reel Şekiller

Analize giriş ve analiz derslerinden, a, b, c ve d birer reel sayı olmak üzere

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = d \tag{1}$$

denkleminin belirttiği grafiğin, merkezi iki boyutlu uzaydaki bir dik koordinat sisteminin orijini olan bir **konik kesiti** gösterdiğini biliyoruz. Benzer şekilde, a, b, c, d, e, f ve g birer reel sayı olmak üzere

$$ax^2 + 2dxy + 2exz + by^2 + 2fyz + cz^2 = g \tag{2}$$

denkleminin grafiği, merkezi üç boyutlu uzaydaki bir dik koordinat sisteminin orijini olan ikinci dereceden bir yüzey (**kuadrik yüzey**) belirtir. Eğer konik kesitinin veya ikinci dereceden yüzeyin merkezi orijin değilse, bu konik kesiti veya ikinci dereceden yüzeyin denklemi, (1) ve (2)'de verilen denklemlerden çok daha karmaşıktır.

Verilen bir denklemin grafiği olan bir konik kesiti veya ikinci dereceden yüzeyin, ne tür bir eğri ya da ne tür bir yüzey olduğunu belirlemek için temel metod, koordinat eksenlerinin döndürülmesi ve ötelenmesidir. Kesim 8.7 ve Kesim 8.8'de incelenen bu metod, matrislerin özdeğerleri ve özvektörlerinin güzel bir uygulaması olarak anlaşılabilir.

(1) ve (2) denklemlerinin sol taraflarındaki ifadeler, ikinci dereceden şekillere örnek teşkil ederler. İkinci dereceden şekiller, istatistikte, mekanikte ve fiziğin; ikinci dereceden programlama alanında, çok değişkenli fonksiyonların maksimum ve minimumlarının incelenmesinde ve diğer uygulamalı problemlerde ortaya çıkar. Bu bölümde, matrislerin özdeğerleri ve özvektörlerini kullanarak elde ettiğimiz sonuçları kullanarak, n-değişkenli reel ikinci dereceden şekilleri kısaca tanıtacağız. Bu sonuçları, Kesim 8.7'de konik kesitlerinin sınıflandırılmasına ve Kesim 8.8'de de ikinci dereceden yüzeylerin sınıflandırılmasına uygulayacağız.

TANIM 8.3

A simetrik bir matris olmak üzere,

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x},$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

şeklinde tanımlı $g: R^n \to R^1$ fonksiyonuna (R^n üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyondur), $x_1, \ldots x_n$ değişkenlerine sahip bir ***n*-değişkenli reel ikinci dereceden şekli** denir. A matrisine **ikinci dereceden *g* matrisi** adı verilir. Burada ikinci dereceden şekli $g(x)$ ile göstereceğiz.

ÖRNEK 1

(1) denkleminin sol tarafını, x ve y değişkenli bir ikinci dereceden şekli olarak yazalım.

Çözüm

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

Bu durumda, (1) denkleminin sol tarafı

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$$

ikinci dereceden şeklidir. ■

ÖRNEK 2 (2) denkleminin sol tarafını, x, y ve z değişkenlerinin bir ikinci dereceden şekli olarak yazınız.

Çözüm

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}$$

olsun.

Bu durumda, (2) denkleminin sol tarafı

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$$

ikinci dereceden şeklidir. ■

ÖRNEK 3 Aşağıdaki ifadeler birer ikinci dereceden şekil gösterir:

(a) $3x^2 - 5xy - 7y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

(b) $3x^2 - 7xy + 5xz + 4y^2 - 4yz - 3z^2 = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{7}{2} & 4 & -2 \\ \frac{5}{2} & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

■

$g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ ikinci dereceden şekil olsun. Bu ikinci dereceden şekli basitleştirmek için, x_1, x_2, ..., x_n değişkenlerinden y_1, y_2, ..., y_n değişkenlerine geçiş yaparız. Burada eski değişkenlerin, P bir dik matris olmak üzere, $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ dönüşümü yardımıyla yeni değişkenlerle bağıntılı olduğunu kabul edeceğiz. Bu durumda,

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = (P\mathbf{y})^T A(P\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T (P^T AP)\mathbf{y} = \mathbf{y}^T B\mathbf{y},$$

olarak ifade edilebilir. Burada, $B = P^TAP$'dir. "A bir simetrik matris ise P^TAP matrisi de simetriktir" önermesinin doğruluğunu gerçeklemek size bırakılmıştır (Alıştırma 25). Dolayısıyla,

$$h(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T B\mathbf{y}$$

ifadesi de ikinci dereceden şekil ve $g(\mathbf{x}) = h(\mathbf{y})$'dir.

Bu durum, aşağıdaki tanımları formülleştirmek için önemlidir:

TANIM 8.4 A ve B, $n \times n$ mertebeli iki matris olsun. P singüler olmayan bir matris olmak üzere $B = P^TAP$ ise B matrisine A ya **kongruent**tir denir.

Alıştırma 26'nın ışığında, "B, A'ya kongruenttir" ve "A, B'ye kongruenttir" yerine sadece "A ve B kongruenttir" denilebilir.

TANIM 8.5 g ve h, sırasıyla, A ve B matrisleriyle ifade edilmiş iki ikinci dereceden şekli olsun. Eğer A ve B matrisleri kongruent ise g ve h ikinci dereceden şekilleri **denk**tir denir.

Matrislerin kongruentliği ve ikinci dereceden şekillerin denkliği benzerlik kavramından daha genel kavramlardır. Çünkü P matrisinin sadece singüler olmaması yeterlidir. (Diklik gerekli değildir.) Şimdi, P matrisinin dik olması, kısıtlanmış durumunu ele alacağız.

ÖRNEK 4

$$g(\mathbf{x}) = 2x^2 + 2xy + 2y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{3}$$

biçiminde tanımlı x ve y değişkenli ikinci dereceden şekli ele alalım. Şimdi, x ve y değişkenlerinden x' ve y' değişkenlerine geçiş yapacağız. Eski değişkenlerin,

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \quad \text{ve} \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \tag{4}$$

denklemleriyle yeni değişkenlerle bağıntılı olduğunu kabul edelim. (4) ile ifade edilen geçiş denklemleri matris şeklinde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P\mathbf{y},$$

dir. Burada dik matris singüler olmadığından

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

dir.

Bu P matrisinin neden ve nasıl seçildiğine yakında değineceğiz. (3) denkleminde, bu verilenler yerine yazılırsa,

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = (P\mathbf{y})^T A(P\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T P^T AP\mathbf{y}$$

$$= \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = h(\mathbf{y})$$

$$= 3x'^2 + y'^2$$

elde ederiz.

Böylece,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisleri kongruenttir. Dolayısıyla, g *ve* h ikinci dereceden şekilleri denk olurlar. ■

Şimdi, P matrisinin nasıl seçileceği sorusuna geri dönelim.

Teorem 8.9 **Asli Eksenler Teoremi**

n-değişkenli bir $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ ikinci dereceden şekli, bir P dik matrisi yardımıyla, $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$, ikinci dereceden şekline denktir. Burada,

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

dir ve $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$; g ikinci dereceden şeklini ifade eden A matrisinin özdeğerleridir.

İspat

Eğer A, bir g ikinci dereceden şeklinin matrisi ise A simetriktir ve Teorem 7.9'dan A matrisi bir dik matris yardımıyla köşegenleştirilebilirdir. Yani, $D = P^{-1}AP$ köşegen matris olacak şekilde bir P dik matrisi vardır. P dik bir matris olduğundan $P^{-1} = P^T$ dir. Böylece D matrisi $D = P^T AP$ şeklinde yazılabilir. Ayrıca, D matrisinin esas köşegeni üzerindeki bileşenler A matrisinin $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ile gösterilen özdeğerleridir ve bu özdeğerler birer reel sayıdır. Bu durumda, D matrisiyle belirli ikinci dereceden şekil

$$h(\mathbf{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2;$$

biçimindedir ve g ile h ikinci dereceden şekilleri denk olurlar. ■

ÖRNEK 5

x, y ve z değişkenli

$$g(\mathbf{x}) = 2x^2 + 4y^2 + 6yz - 4z^2$$

ikinci dereceden şeklini ele alalım. g'ye denk olan Teorem 8.9'daki h ikinci dereceden şeklini elde edelim.

Çözüm

g'nin matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix},$$

ve bu matrisin özdeğerleri

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 5, \quad \text{ve} \quad \lambda_3 = -5$$

dir. (Gerçekleyiniz.) h; x', y' ve z' değişkenli

$$h(\mathbf{y}) = 2x'^2 + 5y'^2 - 5z'^2$$

biçiminde tanımlı bir ikinci dereceden şekil olsun. O zaman g ile h ikinci dereceden şekilleri bir dik matris yardımıyla denktir. Üstelik, $\hat{h}(\mathbf{y}) = -5x'^2 + 2y'^2 + 5z'^2$ de g'ye denktir. ■

Örnek 5'te gösterildiği gibi, verilen bir ikinci dereceden şekli köşegenleştirmek amacıyla Teorem 8.9'u uygulamak için A matrisinin özvektörlerini (ve P matrisini) bilmeye gerek yoktur. A'nın özdeğerlerini bilmek yeterlidir.

Teorem 8.9'un önemini daha iyi anlamak için, iki ve üç değişkenli ikinci dereceden şekiller üzerinde duracağız. Bu bölümün başında bahsedildiği gibi; x, R^2'de bir vektör ve A, 2×2 mertebeli bir simetrik matris olmak üzere

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 1$$

denkleminin grafiği, xy–düzleminde merkezi orijin olan bir konik kesiti gösterir. Teorem 8.9'dan, a ve b birer reel sayı olmak üzere, bu konik kesitinin denklemi

$$ax'^2 + by'^2 = 1$$

şeklindedir ve bu denklem aracılığıyla xy–düzleminde bir dik koordinat sisteminin varlığı gösterilebilir. Benzer şekilde, x, R^3'te bir vektör ve A, 3×3 mertebeli bir simetrik matris olmak üzere

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 1$$

denkleminin grafiği, xyz–kartezyen koordinat sisteminde merkezi orijin olan ikinci dereceden bir yüzeydir. Teorem 8.9'dan, a, b ve c birer reel sayı olmak üzere, bu ikinci dereceden yüzeyin denklemi

$$ax'^2 + by'^2 + cz'^2 = 1$$

şeklindedir ve bu denklem aracılığıyla uzayda bir dik koordinat sisteminin varlığı gösterilebilir. Konik kesitinin veya ikinci dereceden yüzeyin asli eksenleri, yeni koordinat eksenlerinde yer aldıklarından, Teorem 8.9'a **Asli Eksenler Teoremi** adı verilir.

ÖRNEK 6

Denklemi

$$g(\mathbf{x}) = 2x^2 + 2xy + 2y^2 = 9$$

olan konik kesitini ele alalım.

Örnek 4 yardımıyla bu konik kesitini

$$h(\mathbf{y}) = 3x'^2 + y'^2 = 9$$

veya

$$\frac{x'^2}{3} + \frac{y'^2}{9} = 1$$

biçiminde düzenleyebiliriz.

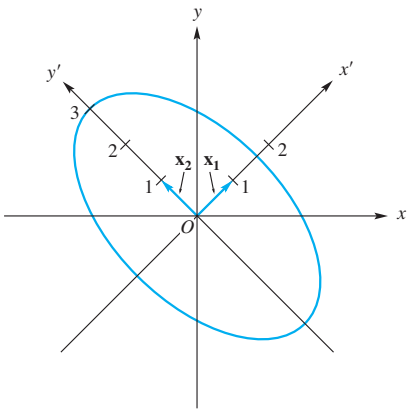
Bu denklemin grafiği, asal ekseni y'– ekseni olan bir elipstir (Şekil 8.22). Bu elipsin asal eksen uzunluğu 6, yedek eksen uzunluğu $2\sqrt{3}$ tür. (3)'ün matrisinin özvektörleri ve x'– ile y'– eksenlerinin konumları arasında çok yakın bir ilişki vardır.

$\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, olduğundan, $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x} = P^T\mathbf{x} = P\mathbf{x}$. elde ederiz. ($P$ dik ve üstelik bu örnekte simetriktir.) O halde,

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \quad \text{ve} \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y$$

dir. Bu ise

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$



ŞEKİL 8.22

vektörünün, x'– ekseni üzerinde üzerinde ve

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

vektörünün y'–ekseni üzerinde yattığı anlamına gelir. x_1 ve x_2,

$$P = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

matrisinin sütunlarıdır ve (3)'ün matrisinin özvektörlerine karşılık gelirler. (Şekil 8.22'ye bakınız.) ■

Örnek 6 da ifade edilen bu durum, genel durumda da doğrudur. Yani, bir konik kesiti veya ikinci dereceden yüzeyin asli eksenleri ikinci dereceden şeklin matrisinin özvektörleri üzerinde yatarlar.

$g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$, n-değişkenli bir ikinci dereceden şekil olsun. Bu durumda, g'nin

$$h(\mathbf{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

ikinci dereceden şekline denk olduğunu biliyoruz. Burada $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ g'yi belirten A simetrik matrisinin özdeğerleridir ve herbiri bir reel sayı gösterir. A'nın özdeğerlerini, ilk olarak pozitif özdeğerler, sonra negatif özdeğerler ve son olarak sıfır olan özdeğerler diye sınıflandırabiliriz. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ pozitif, $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \ldots, \lambda_r$ negatif ve $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots, \lambda_n$ sıfır olsun. Şimdi, son $n - r$ tanesi olan

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}}, \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{p+1}}}, \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{p+2}}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{-\lambda_r}}, 1, 1, \ldots, 1,$$

esas köşegen bileşenlerine sahip bir H köşegen matrisini tanımlayalım. D, esas köşegen bileşenleri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n$; olan bir köşegen matris olsun. A ve D matrisleri kongruenttir. $D_1 = H^T DH$, köşegen elemanları 1, …, 1, –1, …, –1, 0, …, 0 olan bir matris olsun (p tane bir, $r - p - 1$ tane eksi bir ve $n - r$ tane sıfır). O zaman D ve D_1 kongruenttir. Alıştırma 26'dan A ve D_1'in kongruentliği görülebilir. İkinci dereceden şekillere uygun şekilde, Teorem 8.10 aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

Teorem 8.10 n-değişkenli ikinci dereceden bir $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ şekli,

$$h(\mathbf{y}) = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - y_{p+2}^2 - \cdots - y_r^2$$

ikinci dereceden şekline denktir. ■

D_1 matrisinin rankının, D_1'in sıfırdan farklı esas köşegen bileşenlerinin sayısı olduğu açıktır. Kongruent matrislerin ranklarının eşit olduğu gösterilebilir. (J. L. Goldberg, *Matrix Theory with Applications*, New York: McGraw-Hill, Inc., 1991'e bakınız.) D_1 matrisinin rankı r olduğundan, A'nın rankı da r'dir. Üstelik, r'yi matrisi A olan g ikinci dereceden şeklinin rankı olarak ifade edebiliriz. Teorem 8.10'da verilen h ikinci dereceden şeklindeki pozitif terimlerin p sayısı tek olarak belirli olduğu gösterilebilir. (Goldberg'in yukarıda belirtilen kitabına bakınız.) Yani, verilen g ikinci dereceden şeklini, denk bir ikinci dereceden şekil elde etmek için basitleştirirsek, sonuçta elde ettiğimiz şekilde, p tane pozitif terime sahip olur. Dolayısıyla, Teorem 8.10'daki h ikinci dereceden şekli tek şekilde bellidir ve bu ikinci dereceden şekle n-değişkenli bir ikinci dereceden şeklin **kanonik şekli** adı verilir. Pozitif özdeğerlerin sayısı ile negatif özdeğerlerin sayısı arasındaki fark $s = p - (r - p) = 2p - r$'dir. Bu farka ikinci dereceden şeklin **imzası** (**signature**) denir. O halde, g ve h iki denk ikinci dereceden şekil ise bu iki ikinci dereceden şekil aynı ranka ve işarete sahiptir. Ayrıca, eğer g ve h eşit ranka ve işarete sahip ise bu iki şeklin denk olduğu gösterilebilir. (Goldberg'in kitabına bakınız.)

ÖRNEK 7 x_1, x_2 ve x_3 değişkenli

$$g(\mathbf{x}) = 3x_2^2 + 8x_2x_3 - 3x_3^2$$

$$= \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ikinci dereceden şeklini ele alalım. A'nın özdeğerleri,

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = -5, \quad \text{ve} \quad \lambda_3 = 0$$

dır. Bu durumda, A matrisi

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ye kongruenttir.

Eğer

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

alırsak

$$D_1 = H^T D H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ile A matrisi kongruenttir ve verilen ikinci dereceden şekli

$$h(\mathbf{y}) = y_1^2 - y_2^2$$

kanonik şekline denk olur.

g'nin rankı 2 ve $p = 1$ olduğundan, imzası $s = 2p - r = 0$ 'dır. ■

İkinci dereceden şekillere son bir örnek vermek için, pozitif tanımlı simetrik matrisleri ele alacağız. Kesim 5.3'te bahsettiğimiz gibi R^n'te sıfırdan farklı her $\mathbf{x}$ vektörü için $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ ise $n \times n$ mertebeli A simetrik matrisine pozitif tanımlı denir.

Eğer A simetrik matris ise $g(\mathbf{x}) = x^T A\mathbf{x}$ ikinci dereceden bir şeklidir ve Teorem 8.9'dan g ikinci dereceden şekli h'ye denktir. Burada,

$$h(\mathbf{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_p y_p^2 + \lambda_{p+1} y_{p+1}^2 + \lambda_{p+2} y_{p+2}^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2$$

dir.

A'nın pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter şart her $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ için $h(\mathbf{y}) > 0$ olmasıdır. Başka bir deyişle, A'nın pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter şart $h(\mathbf{y})$ deki tüm katsayıların pozitif ve $r = n$ olmasıdır. Bu açıklamalar ışığında aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 8.11 Simetrik bir A matrisinin pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter koşul A'nın tüm özdeğerlerinin pozitif olmasıdır. ■

Bir ikinci dereceden şeklin matrisi pozitif tanımlı ise bu ikinci dereceden şekle **pozitif tanımlı**dır denir.

Anahtar Kelimeler

Konik kesiti
İkinci dereceden yüzey
İkinci dereceden şekil (form)
İkinci dereceden şeklin matrisi
Kongruent matrisler
Eşdeğer (denk) şekiller
Asli (anal) eksenler teoremi
Kanonik şekil
İmza
Pozitif tanımlı matris

8.6 Alıştırmalar

Alıştırma 1 ve 2'de, ikinci dereceden her bir şekli $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$*, şeklinde yazınız. Burada A bir simetrik matristir.*

1. **(a)** $-3x^2 + 5xy - 2y^2$

(b) $2x_1^2 + 3x_1x_2 - 5x_1x_3 + 7x_2x_3$

(c) $3x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2 + x_1x_2 - x_1x_3 - 4x_2x_3$

2. **(a)** $x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_2x_3$

(b) $4x^2 - 6xy - 2y^2$

(c) $-2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$

Alıştırma 3 ve 4'te, verilen her bir A simetrik matrisi için A'ya kongruent olan bir köşegen matrisi bulunuz.

3. **(a)** $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

4. **(a)** $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Alıştırma 5-10'da, verilen ikinci dereceden şekle denk olan ve Teorem 8.9'da verilen biçimde bir ikinci dereceden şekil bulunuz.

5. $2x^2 - 4xy - y^2$ **6.** $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3$

7. $2x_1x_3$ **8.** $2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_2x_3$

9. $-2x_1^2 - 4x_2^2 + 4x_3^2 - 6x_2x_3$

10. $6x_1x_2 + 8x_2x_3$

Alıştırma 11-16'da, verilen ikinci dereceden şekle denk olan ve Teorem 8.10'da verilen biçimde bir ikinci dereceden şekil bulunuz.

11. $2x^2 + 4xy + 2y^2$

12. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2$

13. $2x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 10x_2x_3$

14. $2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_2x_3$

15. $-3x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_2x_3$

16. $-3x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 8x_1x_3$

17. $g(\mathbf{x}) = 4x_2^2 + 4x_3^2 - 10x_2x_3$ üç değişkenli bir ikinci dereceden şekil olsun. g'ye denk olan ve Teorem 8.10'da verilen biçimde bir ikinci dereceden şekil bulunuz. g'nin rankı kaçtır? g'nin imzası kaçtır?

18. $g(\mathbf{x}) = 3x_1^2 - 3x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_2x_3$ üç değişkenli bir ikinci dereceden şekil olsun. g'ye denk olan ve Teorem 8.10'da verilen biçimde bir ikinci dereceden şekil bulunuz. g'nin rankı kaçtır? g'nin imzası kaçtır?

19. Teorem 8.10'da verilen biçimdeki iki değişkenli tüm $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ ikinci dereceden şekilleri ifade ediniz. $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 1$ denklemleri hangi konikleri gösterir?

20. Teorem 8.10'da verilen biçimdeki 1 ranklı ve iki değişkenli tüm $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ ikinci dereceden şekilleri ifade ediniz. $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 1$ denklemleri hangi konikleri gösterir?

Alıştırma 21 ve 22'de, verilen 3 değişkenli ikinci dereceden şekillerden hangileri denktir?

21. $g_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2$
$g_2(\mathbf{x}) = 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_3$
$g_3(\mathbf{x}) = 3x_2^2 - 3x_3^2 + 8x_2x_3$
$g_4(\mathbf{x}) = 3x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_2x_3$

22. $g_1(\mathbf{x}) = x_2^2 + 2x_1x_3$
$g_2(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$
$g_3(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$
$g_4(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 + 10x_1x_3$

Alıştırma 23 ve 24'de, verilen matrislerden hangileri pozitif tanımlıdır?

23. **(a)** $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

24. **(a)** $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

25. A simetrik bir matris ise $P^T AP$'de simetriktir. İspatlayınız.

26. A, B ve C, $n \times n$ tipinde simetrik matrisler olsun. Aşağıdakileri ispatlayınız:
(a) A matrisi A'ya kongruenttir.
(b) B matrisi A'ya kongruent ise A matrisi de B'ye kongruenttir.
(c) C matrisi B'ye kongruent ve B matrisi de A'ya kongruent ise C matrisi A'ya kongruenttir.

27. A bir simetrik matris ise A matrisi bir D köşegen matrisine kongruenttir. İspatlayınız.

28. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$, 2×2 tipinde bir simetrik matris olsun. A'nın pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter şart $\det(A) > 0$ ve $a > 0$ olmasıdır. İspatlayınız.

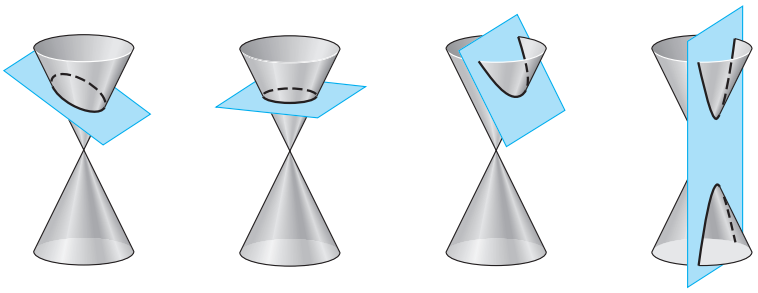
29. Bir A matrisinin pozitif tanımlı olması için gerek ve yeter şart bir singüler olmayan P matrisi için $A = P^T P$ olmasıdır. İspatlayınız.

8.7 Konik Kesitleri

Bu kesimde, düzlemde konik kesitlerinin sınıflandırılmasını inceleyeceğiz. x ve y değişkenli bir ikinci dereceden denklem

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{1}$$

şeklindedir. Burada a, b, c, d, e ve f birer reel sayıdır. (1) denkleminin grafiği bir **konik kesiti**dir ve bir düzlem ile bir dik dairesel koninin arakesiti olduğu için bu isimle adlandırılır. Şekil 8.23'te, bir düzlem ile bir koninin arakesitinin, bir çember, elips, parabol veya hiperbol olduğu gösterilmiştir.

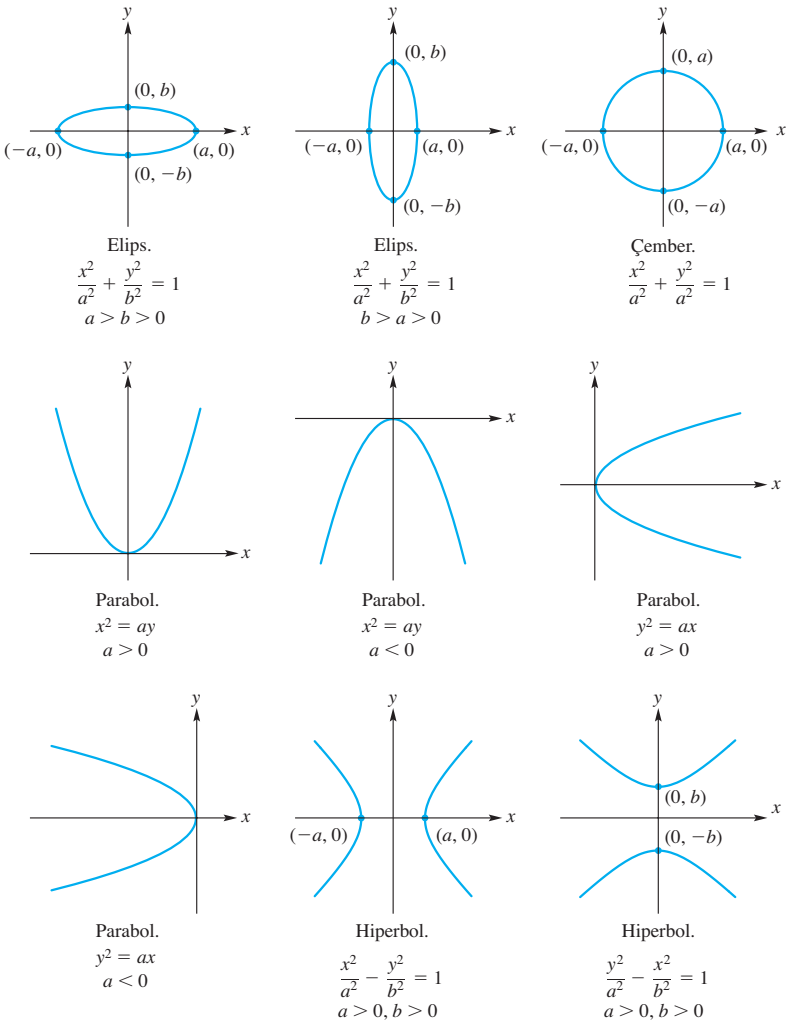


ŞEKİL 8.23 Dejenere olmamış (bozulmamış) konik kesitleri

Dejenere olmamış koniklerin grafikleri ve denklemleri, Şekil 8.24'te verilenlere uyuyorsa bu koniklere **standart konum**dadır denir. Bu denkleme de **standart şekil** adı verilir.

ÖRNEK 1 Verilen her bir denklemin grafiğini belirleyiniz.

(a) $4x^2 + 25y^2 - 100 = 0$
(b) $9y^2 - 4x^2 = -36$
(c) $x^2 + 4y = 0$
(d) $y^2 = 0$
(e) $x^2 + 9y^2 + 9 = 0$
(f) $x^2 + y^2 = 0$



ŞEKİL 8.24 Standart konumdaki konik kesitleri.

Çözüm

(a) Verilen denklemi

$$\frac{4}{100}x^2 + \frac{25}{100}y^2 = \frac{100}{100}$$

veya

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

olarak yazabiliriz. Bu denklemin belirttiği grafik standart konumda a'sı 5 ve b'si 2 olan bir elipstir. Bu elips x–eksenini (5,0) ve (–5,0) noktalarında, y–eksenini (0,2) ve (0,–2) noktalarında keser.

(b) Verilen denklem

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

olarak düzenlenebilir. Bu denklemin belirttiği grafik standart konumda a'sı 3 ve b'si 2 olan bir hiperboldür. Bu hiperbol x–eksenini (3,0) ve (–3,0) noktalarında keser.

(c) Verilen denklem

$$x^2 = -4y$$

olarak düzenlenebilir. Bu denklemin belirttiği grafik standard konumda a'sı –4 olan bir paraboldür. Bu parabolün kolları aşağıya doğrudur.

(d) Verilen denklemi sağlayan her bir noktanın y–koordinatı sıfır olmak zorundadır. O halde bu denklemin grafiği x–ekseni üzerindeki tüm noktaları içerir.

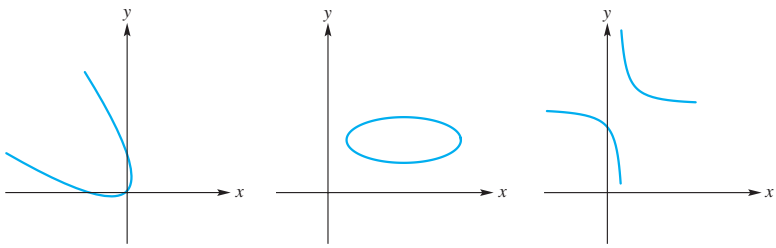
(e) Verilen denklem

$$x^2 + 9y^2 = -9$$

olarak düzenlenebilir. Düzlemde bu denklemi sağlayan koordinatlara sahip hiçbir noktanın olmadığı sonucuna varırız.

(f) Bu denklemi sağlayan tek nokta (0,0)'dır. Yani, bu denklemin grafiği sadece orijinden oluşur. ■

Şimdi, standart konumda olmayan grafiğe sahip konik kesitlerini inceleyelim. İlk olarak belirtmeliyiz ki, standart konumda grafiğe sahip olan konik kesitlerinin denklemi xy–li terim çapraz çarpım olarak adlandırılır (**cross-product**). Eğer bir denklemde çapraz-çarpımı terimi varsa, grafik, bu denklemin standard konumundan döndürülerek elde edilmiş bir konik kesitini gösterir. [Şekil 8.25 (a)'ya bakınız]. Şekil 8.24'teki denklemlerin hiç birinin x^2'li ve x'li terim veya y^2'li ve y'li terim içermediğine dikkat ediniz. Eğer bu terimler denklemde yer alıyor fakat xy–li terim yer almıyorsa, grafik standart şeklinin ötelenmesiyle elde edilmiş bir konik kesitidir. [Şekil 8.25 (b)'ye bakınız.] Başka bir deyişle, eğer denklemde xy–li terim yer alıyorsa, grafik döndürülme ve muhtemelen öteleme yapılmış bir konik kesitidir.



(a) Döndürülmüş bir parabol.

(b) Ötelenmiş bir elips.

(c) Döndürülmüş ve ötelenmiş bir hiperbol.

ŞEKİL 8.25

Grafiği standart konumda olmayan dejenere olmamış bir konik kesitinin hangi tür eğri olduğunu belirlemek için aşağıdaki yolları takip ederiz:

1. Verilen denklemde bir çapraz-çarpım terimi varsa, sonuç denklemde xy-li terim yok edilecek şekilde bir dik lineer dönüşüm aracılığıyla xy-koordinat eksenleri döndürülür.
2. Verilen denklemde xy-li terim yok fakat x^2'li ve x'li terim veya y^2'li ve y'li terim varsa sonuç denklemin grafiği yeni koordinat sisteminin orijinine göre standart konumda olacak şekilde denklem tam kareye tamamlama ile düzenlenerek xy-eksenleri ötelenir.

Dolayısıyla, verilen denklemde xy-li terim varsa ilk olarak xy-koordinat eksenleri döndürülür, daha sonra gerekli ise bu döndürülen eksenler ötelenir. Aşağıdaki örnekte, sadece eksenlerin ötelenmesi gereken durum incelendi.

ÖRNEK 2

$$x^2 - 4y^2 + 6x + 16y - 23 = 0 \tag{2}$$

denkleminin grafiğini ve cinsini belirleyiniz. Ayrıca, standart şekildeki denklemini elde ediniz.

Çözüm

Denklemde çapraz-çarpım terimi bulunmadığından, sadece eksenlerin ötelenmesine gerek duyacağız. Verilen denklem x- ve y-'ye göre tam kare olarak düzenlenirse,

$$x^2 + 6x + 9 - 4(y^2 - 4y + 4) - 23 = 9 - 16$$

$$(x + 3)^2 - 4(y - 2)^2 = 23 + 9 - 16 = 16 \tag{3}$$

elde ederiz.

$$x' = x + 3 \quad \text{ve} \quad y' = y - 2$$

alınırsa (3) denklemi

$$x'^2 - 4y'^2 = 16$$

veya standart şekilde

$$\frac{x'^2}{16} - \frac{y'^2}{4} = 1 \tag{4}$$

olarak yazılabilir.

Eğer xy-koordinat sistemi, orijini (–3,2) noktası olan $x'y'$–koordinat sistemine ötelenirse, $x'y'$-koordinat sistemine göre (4) denkleminin grafiği standart konumdaki bir hiperboldür. (Şekil 8.26'ya bakınız.) ■

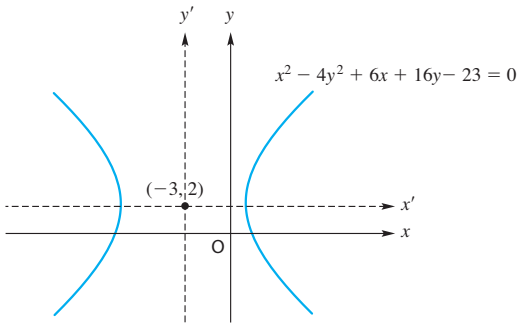
Şimdi (1) denkleminin grafiğini belirleme problemine geri dönelim. Burada $b \neq 0$ olduğunu, yani çapraz-çarpım terimin denklemde bulunduğunu kabul edeceğiz. (1) denklemi matris şeklinde

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + B\mathbf{x} + f = 0 \tag{5}$$

olarak yazılabilir. Burada,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}$$

dir.



ŞEKİL 8.26

A simetrik matrisinin bir P dik matrisi yardımıyla köşegenleştirilebilir olduğunu Kesim 7.3'ten biliyoruz. O halde

$$P^T AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

dir. Burada λ_1 ve λ_2, A matrisinin özdeğerleridir. Ayrıca P matrisinin sütunları, sırasıyla, A matrisinin λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen x_1 ve x_2 birim dik özvektörlerinden oluşur.

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\mathbf{x} = P\mathbf{y}$$

alınırsa (5) denklemi

$$(P\mathbf{y})^T A(P\mathbf{y}) + B(P\mathbf{y}) + f = 0$$
$$\mathbf{y}^T (P^T AP)\mathbf{y} + B(P\mathbf{y}) + f = 0$$

veya

$$\begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + B(P\mathbf{y}) + f = 0 \qquad (6)$$

olarak yazılabilir. Daha açık bir ifadeyle bu deklem

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0 \qquad (7)$$

şeklindedir.

(7) denklemi, verilen konik kesitinin sonuç denklemidir ve çapraz-çarpım terimi içermez.

Kesim 8.6'da ifade edildiği gibi x' ve y' koordinat eksenleri, sırasıyla, x_1 ve x_2 özvektörleri üzerinde yer alırlar. P bir dik matris olduğundan $detP = \pm 1$'dir ve eğer gerekli ise detP = 1 olması için P'nin sütunları (A'nın x_1 ve x_2 özvektörleri) yer değiştirilir veya P'nin herhangi bir sütunu –1 ile çarpılır. Kesim 7.3'te ifade edildiği gibi, P; R^2'de θ açısı kadar pozitif yönde (saat yönünün tersi yönde) dönme yaptıran bir matristir. Burada θ açısı aşağıdaki şekilde hesaplanabilir: Eğer

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{bmatrix}$$

ise

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x_{21}}{x_{11}}\right)$$

dir. Bu, analize giriş derslerinde sık sık ifade edilen bir sonuçtur.

ÖRNEK 3

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 24\sqrt{2}\,x + 8\sqrt{2}\,y + 56 = 0 \qquad (8)$$

denkleminin grafiğini ve cinsini belirleyiniz. Ayrıca, standart şekildeki denklemini elde ediniz.

Çözüm

Verilen denklemi matris şeklinde düzenlersek,

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -24\sqrt{2} & 8\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 56 = 0$$

elde ederiz. Şimdi,

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerlerini bulalım.

$$\begin{aligned} |\lambda I_2 - A| &= \begin{bmatrix} \lambda - 5 & 3 \\ 3 & \lambda - 5 \end{bmatrix} \\ &= (\lambda - 5)(\lambda - 5) - 9 = \lambda^2 - 10\lambda + 16 \\ &= (\lambda - 2)(\lambda - 8) \end{aligned}$$

olduğundan A'nın özdeğerleri

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 8$$

dir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler

$$(\lambda I_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

homogen sisteminin çözümünden elde edilir. O halde, $\lambda_1 = 2$ için

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

denkleminden $\lambda_1 = 2$ özdeğerine karşılık gelen özvektör

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir. Benzer şekilde, $\lambda_2 = 8$ için

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

denkleminden $\lambda_2 = 8$ özdeğerine karşılık gelen özvektör

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Bu özvektörleri birim hale getirirsek

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

dik matrisini elde etmiş oluruz. Bu durumda,

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

olur. $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ alınırsa, (6) denklemi ile verilen konik kesitinin bu dönüşümden sonraki denklemi,

$$2x'^2 + 8y'^2 - 16x' + 32y' + 56 = 0$$

veya

$$x'^2 + 4y'^2 - 8x' + 16y' + 28 = 0$$

dır.

Bu denklemin grafiğini belirlemek için, eksenleri öteleriz. Yani, son elde edilen denklemi tam kare haline dönüştürürüz. Bu durumda

$$(x' - 4)^2 + 4(y' + 2)^2 + 28 = 16 + 16$$

$$(x' - 4)^2 + 4(y' + 2)^2 = 4$$

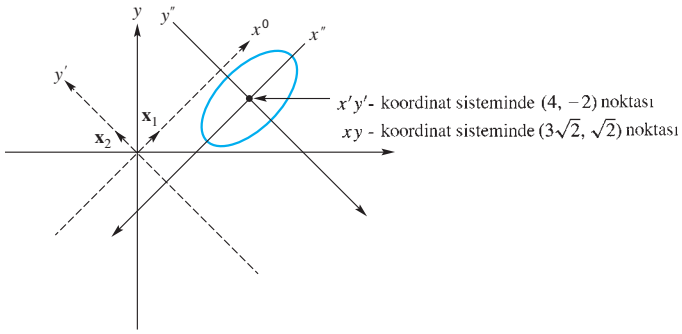
$$\frac{(x' - 4)^2}{4} + \frac{(y' + 2)^2}{1} = 1 \tag{9}$$

elde edilir.

(9) denkleminde $x'' = x' - 4$ ve $y'' = y' + 2$ alınırsa,

$$\frac{x''^2}{4} + \frac{y''^2}{1} = 1 \tag{10}$$

bulunur. Bu denklemin grafiği Şekil 8.27'de gösterildiği gibi $x''y''$–eksenlerine göre standart konumlu bir elipstir. Burada $x''y''$–koordinat sisteminin orijini, $x'y'$–koordinat sisteminde (4,-2) noktası, $x\ y$–koordinat sisteminde $(3\sqrt{2}, \sqrt{2})$ noktasıdır.



ŞEKİL 8.27 $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 24\sqrt{2}x + 8\sqrt{2}y + 56 = 0$

(10) denklemi bu elipsin denkleminin standart şeklidir. x_1 özvektörü

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

olduğundan xy– koordinat eksenleri

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = \tan^{-1} 1$$

yani, $\theta = 45°$ kadar döndürülmüştür. Şekil 8.27'de görüldüğü gibi, x' ve y' eksenleri, sırasıyla,

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

özvektörleri üzerinde yer alırlar. ■

Verilen x ve y değişkenli bir ikinci dereceden denklemin grafiği, eksenlerin döndürülmesinden sonra elde edilen (6) ve (7) denklemlerinden belirlenebilir. Bu iki denklem yardımıyla, verilen konik kesitinin belirlenmesi Tablo 8.1'de gösterilmiştir.

TABLO 8.1 Konik Kesitlerinin Belirlenmesi

λ_1 *ve* λ_2*'nin ikisi de sıfırdan farklı ise*		λ_1 *ve* λ_2*den sadece biri sıfır ise*
$\lambda_1 \lambda_2 > 0$	$\lambda_1 \lambda_2 < 0$	
Elips	Hiperbol	Parabol

Anahtar Kelimeler

İkinci dereceden denklem
Konik kesiti
Çember
Elips
Parabol
Hiperbol
Standart konum
Standart biçim (form)
Eksenlerin dönmesi

8.7 Alıştırmalar

Alıştırma 1-10'da, her bir denklemin grafiğini belirleyiniz.

1. $x^2 + 9y^2 - 9 = 0$
2. $x^2 = 2y$
3. $25y^2 - 4x^2 = 100$
4. $y^2 - 16 = 0$
5. $3x^2 - y^2 = 0$
6. $y = 0$
7. $4x^2 + 4y^2 - 9 = 0$
8. $-25x^2 + 9y^2 + 225 = 0$
9. $4x^2 + y^2 = 0$
10. $9x^2 + 4y^2 + 36 = 0$

Alıştırma 11-18'de, her bir denklemin grafiğini belirlemek için eksenleri öteleyiniz ve standart biçimdeki denklemi yazınız.

11. $x^2 + 2y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$
12. $x^2 - y^2 + 4x - 6y - 9 = 0$
13. $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$
14. $x^2 - 4x + 4y + 4 = 0$
15. $y^2 - 4y = 0$
16. $4x^2 + 5y^2 - 30y + 25 = 0$
17. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10 = 0$
18. $2x^2 + y^2 - 12x - 4y + 24 = 0$

Alıştırma 19-24'de, her bir denklemin grafiğini belirlemek için eksenleri döndürünüz ve standart biçimdeki denklemi yazınız.

19. $x^2 + xy + y^2 = 6$
20. $xy = 1$
21. $9x^2 + y^2 + 6xy = 4$
22. $x^2 + y^2 + 4xy = 9$
23. $4x^2 + 4y^2 - 10xy = 0$
24. $9x^2 + 6y^2 + 4xy - 5 = 0$

Alıştırma 25-30'da, her bir denklemin grafiğini belirleyiniz ve standart biçimdeki denklemi yazınız.

25. $9x^2 + y^2 + 6xy - 10\sqrt{10}\,x + 10\sqrt{10}\,y + 90 = 0$
26. $5x^2 + 5y^2 - 6xy - 30\sqrt{2}\,x + 18\sqrt{2}\,y + 82 = 0$
27. $5x^2 + 12xy - 12\sqrt{13}\,x = 36$
28. $6x^2 + 9y^2 - 4xy - 4\sqrt{5}\,x - 18\sqrt{5}\,y = 5$
29. $x^2 - y^2 + 2\sqrt{3}\,xy + 6x = 0$
30. $8x^2 + 8y^2 - 16xy + 33\sqrt{2}\,x - 31\sqrt{2}\,y + 70 = 0$

8.8 İkinci Dereceden Yüzeyler

Kesim 8.7'de konik kesitleri, iki değişkenli (kuadratik) şekillere geometrik modeller oluşturmak için kullanıldı. Bu kesimde üç değişkenli ikinci dereceden şekilleri inceleyecek ve geometrik modeller olarak ikinci dereceden yüzeyler adını alan özel yüzeyleri kullanacağız. İkinci dereceden yüzeyler genellikle analitik geometri ve analiz derslerinde çalışılan ve grafikleri çizilen yüzeylerdir. Burada, ikinci dereceden yüzeylerin sınıflandırma şemasını oluşturmak için Teorem 8.9 ve Teorem 8.10'u kullanacağız.

x,y ve z değişkenli bir **ikinci-derece polinom denklemi**

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + gx + hy + iz = j \qquad (1)$$

şeklindedir. Burada a, b, c, d, e, f katsayıları hepsi birden sıfır olmayan reel sayıları gösterir. Ayrıca, (1)'in diğer katsayıları olan g, h, i ile j'de birer reel sayıdır. (1) denklemi matris şeklinde

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + B\mathbf{x} = j \qquad (2)$$

olarak ifade edilebilir. Burada

$$A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} g & h & i \end{bmatrix}, \qquad \text{ve} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

dir.

$\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ ifadesine, (1) denklemindeki **ikinci-derece polinoma karşılık gelen (üç değişkenli) ikinci dereceden şekil** diyeceğiz. Kesim 8.6'da ifade edildiği gibi, A matrisine ikinci dereceden şeklin matrisi denir.

R^3'te (1) denkleminin grafiği, bir **ikinci dereceden yüzey** olarak adlandırılır. Kesim 8.7'deki konik kesitlerinin sınıflandırılması durumunda olduğu gibi, (1)'in bilinen yüzey türlerine göre sınıflandırılması

da A matrisine bağlıdır. Kesim 8.7'deki düşünce tarzını kullanırsak, ikinci dereceden bir yüzeyin basit bir denklemini elde etmek için aşağıdaki stratejileri takip ederiz:

1. Eğer A köşegen bir matris değil ise xy, xz veya yz'li çapraz-çarpım terimlerini ortadan kaldırmak için eksenler döndürülür.
2. Eğer $B = [\,g \;\; h \;\; i\,] \neq \mathbf{0}$ ise birinci derece terimleri yok etmek için ötelemе yapılır.

Bu durumda, sonuç denklem

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \lambda_3 z''^2 = k$$

standart şekle veya

$$\mathbf{y}^T C \mathbf{y} = k \tag{3}$$

matris şekline dönüşür. Burada, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{bmatrix}$ matrisini, k bir reel sabiti ve C köşegen bileşenleri A matrisinin λ_1, λ_2 ve λ_3 özdeğerleri olan köşegen matrisi gösterir.

Şimdi ikinci dereceden yüzeylerin sınıflandırılmasına geri dönelim.

TANIM 8.6

A $n \times n$ simetrik bir matris olsun. A'nın **eylemsizliği (inertia)**

$$(\text{poz, neg, sıf}).$$

sıralı sayı üçlüsüdür ve $h(A)$ ile gösterilir. Burada *poz*, *neg* ve *sıf*, sırasıyla, A matrisinin pozitif, negatif ve sıfır olan özdeğerlerinin sayısıdır.

ÖRNEK 1

Aşağıdaki matrislerin her birinin eylemsizliğini bulalım:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Çözüm

Verilen matrislerin özdeğerleri ve eylemsizlikleri;

$\det(\lambda I_2 - A_1) = \lambda(\lambda - 4) = 0$, yani $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4$ ve Ey $(A_1) = (1, 0, 1)$

$\det(\lambda I_2 - A_2) = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$, yani $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$ ve Ey $(A_2) = (2, 0, 0)$

$\det(\lambda I_3 - A_3) = (\lambda + 2)^2(\lambda - 4) = 0$, yani $\lambda_1 = \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 4$ ve Ey $(A_3) = (1, 2, 0)$

dır. (Gösteriniz.) ■

Kesim 8.6 dan, $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ ikinci dereceden şeklinin imzası, A'nın pozitif özdeğerlerinin sayısı ile negatif özdeğerlerinin sayısı arasındaki farktır. Eylemsizlik aracılığıyla, $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$'nin imzası s = poz – neg ile verilebilir.

İkinci dereceden yüzeylerin (veya konik kesitlerinin) sınıflandırılmasında eylemsizliği kullanabilmek için, n-değişkenli ikinci dereceden şekli belirten A matrisinin özdeğerlerinin

$$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_{\text{poz}} > 0$$
$$\lambda_{\text{poz}+1} \leq \cdots \leq \lambda_{\text{poz}+\text{neg}} < 0$$
$$\lambda_{\text{poz}+\text{neg}+1} = \cdots = \lambda_n = 0$$

ile gösterildiğini kabul edeceğiz. En büyük pozitif özdeğer λ_1 ve en küçük pozitif özdeğer λ_{poz}'dir. Ayrıca, gereksiz ve önemsiz durumları ortadan kaldırmak için (2) denkleminde $\lambda_1 > 0$ ve $j \geq 0$ olduğunu kabul edeceğiz. Örneğin, eğer

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad j = 5$$

ise $-x^2 - 2y^2 - 3z^2 = 5$ ikinci derece polinomunun çözüm cümlesi boş cümledir. Yani, verilen yüzeyi sağlayan nokta mevcut değildir. Fakat, eğer $j = -5$ alınırsa, $-x^2 - 2y^2 - 3z^2 = -5$ ikinci derece polinomu $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 5$ polinomuna özdeştir. $\lambda_1 > 0$ ve $j \geq 0$ kabulü, bu tür gereksiz durumlardan kaçınmamızı sağlar.

ÖRNEK 2

A matrisinin belirttiği iki değişkenli bir ikinci dereceden şekli ele alalım ve Kesim 8.7'deki (1) nolu denklemde $\lambda_1 > 0$ ve $f \geq 0$ olsun. Bu durumda A'nın eylemsizliği için sadece üç durum söz konusudur. Bu üç durum aşağıdaki gibi özetlenebilir:

1. $(A) = (2, 0, 0)$ ise ikinci dereceden bir elipstir.
2. $(A) = (1, 1, 0)$ ise ikinci dereceden bir hiperboldür.
3. $(A) = (1, 0, 1)$ ise ikinci dereceden bir paraboldür.

Hesaplamada kullanılan kabuller doğrultusunda, bu yapılan sınıflandırma bu kesimin sonundaki Tablo 8.2'de verilenle özdeştir. ■

Örnek (2)'deki konik kesitlerine ait bu sınıflandırmanın, özel durumlar arasındaki ayrımı ortaya çıkarmadığını örneğin, $y = x^2$ ve $x = y^2$ denklemlerinin her ikisi de $(1, 0, 1)$ eylemsizliğine sahiptir.

Eylemsizliği kullanarak ikinci dereceden yüzeyleri sınıflandırmadan önce, analitik geometri ve analizde karşılaşılan standard biçimdeki ikinci dereceden yüzeyleri tanıtacağız. (Aksi söylenmediği sürece a, b ve c pozitif kabul edilecektir.)

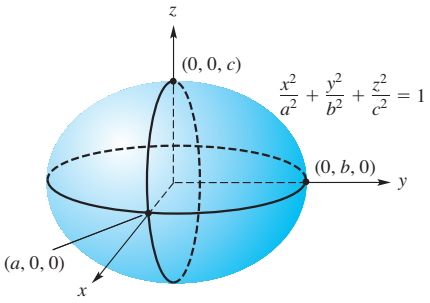
Elipsoid (Şekil 8.28'e bakınız.)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

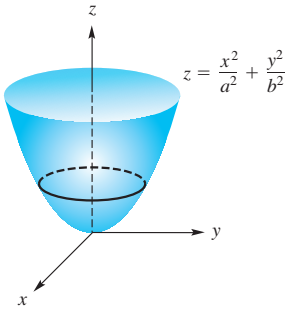
$a = b = c$ özel durumunda bir küredir.

Eliptik Paraboloid (Şekil 8.29'a bakınız.)

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \qquad y = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}, \qquad x = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$



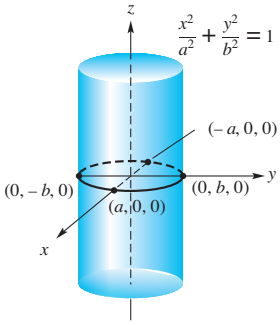
ŞEKİL 8.28 Elipsoit.



ŞEKİL 8.29 Eliptik paraboloit.

Bir parabolün dejenere hali bir doğrudur. Benzer şekilde, bir eliptik paraboloidin dejenere hali

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



ŞEKİL 8.30 Eliptik silindir.

denklemleriyle ifade edilen bir **eliptik silindir**dir. (Şekil 8.30'a bakınız.)

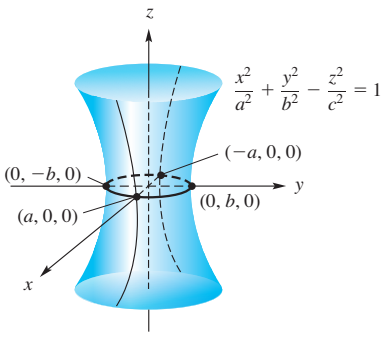
Bir Kanatlı Hiperboloit (Şekil 8.31'e bakınız.)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

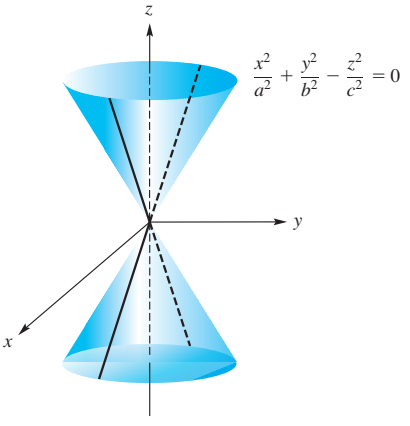
Bir hiperbolün dejenere hali orijinden geçen bir doğru çiftidir. Benzer şekilde, bir kanatlı hiperboloidin dejenere hali

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0, \qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

denklemleri ile ifade edilen bir **koni**dir. (Şekil 8.32'ye bakınız.)



ŞEKİL 8.31 Bir kanatlı hiperboloit.



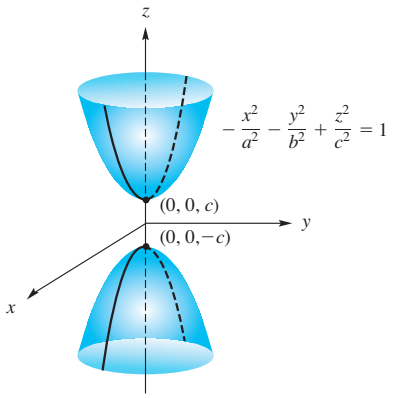
ŞEKİL 8.32 Koni.

İki Kanatlı Hiperboloit (Şekil 8.33'e bakınız.)

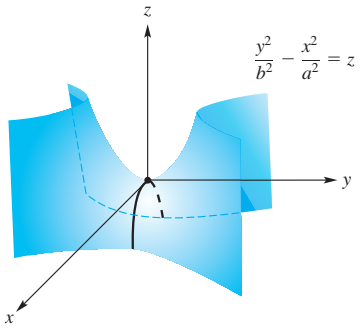
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Hiperbolik Paraboloit (Şekil 8.34'e bakınız.)

$$\pm z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \qquad \pm y = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}, \qquad \pm x = \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2}$$



ŞEKİL 8.33 İki kanatlı hiperboloit.

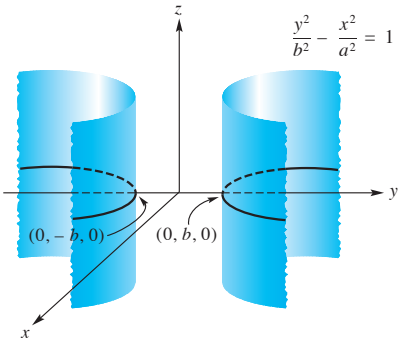


ŞEKİL 8.34 Hiperbolik paraboloit.

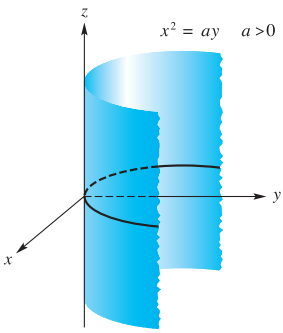
Parabolün dejenere hali bir doğrudur. Benzer şekilde, hiperbolik paraboloidin dejenere hali

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1, \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = \pm 1, \qquad \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = \pm 1$$

denklemleri ile ifade edilen bir hiperbolik silindirdir. (Şekil 8.35'e bakınız.)



ŞEKİL 8.35 Hiperbolik silindir.



ŞEKİL 8.36
Parabolik silindir.

Parabolik Silindir (Şekil 8.36'ya bakınız.) a ve b'den biri sıfırdan farklıdır.

$$x^2 = ay + bz, \qquad y^2 = ax + bz, \qquad z^2 = ax + by$$

(2) de $\lambda_1 > 0$ ve $j \geq 0$ kabulleri altında A matrisinin belirttiği üç değişkenli ikinci dereceden bir şekil için A'nın eylemsizliğine bağlı olarak altı olası durum söz konusudur. Tablo 8.2'de bu durumlar verilmiştir. Örnek 2'deki konik kesiti sınıflandırılmasında olduğu gibi, Tablo 8.2 de verilen sınıflandırmada da özel durumlar arasındaki ayrım fark edilemez.

TABLO 8.2 İkinci Dereceden Yüzeylerin Belirlenmesi

Ey $(A) = (3, 0, 0)$	Elipsoit
Ey $(A) = (2, 0, 1)$	Eliptik paraboloit
Ey $(A) = (2, 1, 0)$	Bir kanatlı hiperboloit
Ey $(A) = (1, 2, 0)$	İki kanatlı hiperboloit
Ey $(A) = (1, 1, 1)$	Hiperbolik paraboloit
Ey $(A) = (1, 0, 2)$	Parabolik silindir

ÖRNEK 3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

olmak üzere $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 3$ ikinci dereceden şeklinin ifade ettiği ikinci dereceden yüzeyin ne belirttiğini bulunuz.

Çözüm

Örnek 1'den, Ey(A)=(1, 2, 0)'dır. Dolayısıyla, bu ikinci dereceden yüzey iki kanatlı hiperboloittir. ■

ÖRNEK 4

$$2x^2 + 4y^2 - 4z^2 + 6yz - 5x + 3y = 2.$$

denklemiyle verilen ikinci dereceden yüzeyin ne belirttiğini bulalım.

Çözüm

Verilen ikinci dereceden şeklin matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

ve bu matrisin özdeğerleri $\lambda_1 = 5$, $\lambda_1 = 2$ ve $\lambda_3 = -5$'tir. O halde, Ey$(A) = (2, 1, 0)$ olur ve ikinci dereceden yüzey bir kanatlı hiperboloid gösterir. ■

Bir ikinci dereceden yüzeyi sınıflandırmak, bu ikinci dereceden yüzeyi analitik geometri ve analizde kullanılan standart şekillere dönüştürmekten çok daha kolaydır. (1) ile verilen ikinci derece polinom

denkleminden, standart biçimde bir denklem oluşturmak için izlenen cebirsel adımlar, daha önce bahsedildiği gibi, eksenlerin ötelenmesi ve döndürülmesinden oluşur. Dönme için, ikinci dereceden şekli belirten A matrisinin özdeğerlerini ve özvektörlerini bilmek gerekir. A'nın özdeğerleri, determinantı 1 olan dik P matrisini oluşturmak için kullanılır. Böylece, $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ değişken değiştirmesi yapılarak bir dönme elde edilebilir. Bu şekilde elde edilen ikinci dereceden şekil, asli eksenler teoreminde elde edilendir. Yani, tüm çapraz-çarpım terimler yok edilmiş demektir. Şimdi vereceğimiz örnekte bu durumu irdeleyeceğiz.

ÖRNEK 5 Örnek 4'teki ikinci dereceden yüzey için

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} + \begin{bmatrix} -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} = 2$$

denklemindeki çapraz-çarpım terimlerini yok edecek şekilde bir dönme belirleyiniz.

Çözüm

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -5$ ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler, sırasıyla,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

dür.

$\mathbf{v}_i$ özvektörleri birbirlerine diktir. Çünkü bu özvektörler bir simetrik matrisin farklı özdeğerlerine karşılık gelirler (Teorem 7.7'e bakınız). Bu özvektörleri birimleştirirsek,

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2, \qquad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

buluruz ve böylece $P = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 \end{bmatrix}$ matrisi elde edilmiş olur. Burada $\det P = 1$'dir. Dolayısıyla, verilen denkleme $x = Py$ dönüşümü uygulandığında

$$(P\mathbf{y})^T A(P\mathbf{y}) + \begin{bmatrix} -5 & 3 & 0 \end{bmatrix} P\mathbf{y} = 2$$
$$\mathbf{y}^T (P^T AP)\mathbf{y} + \begin{bmatrix} -5 & 3 & 0 \end{bmatrix} P\mathbf{y} = 2$$

gösterimini elde ederiz. $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ alınır ve $P^T AP = D$ olduğu göz önünde tutulursa,

$$\mathbf{y}^T D\mathbf{y} + \begin{bmatrix} -5 & 3 & 0 \end{bmatrix} P\mathbf{y} = 2$$

veya

$$\mathbf{y}^T \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{y} + \begin{bmatrix} \frac{9}{\sqrt{10}} & -5 & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}\mathbf{y} = 2$$

[Eğer det$P = -1$ ise determinant 1 olacak şekilde P'nin sütunlarını yer değiştirerek yeniden tanımlayabiliriz] veya

$$5x'^2 + 2y'^2 - 5z'^2 + \frac{9}{\sqrt{10}}x' - 5y' + \frac{3}{\sqrt{10}}z' = 2 \qquad \blacksquare$$

bulunur.

Standart şekle dönüştürmeyi tamamlamak için, değişken değiştirme yaparız. Bu değişken değiştirme birinci derece terimleri yok eden bir ötelemeyi uygulamak anlamını taşır. Cebirsel olarak, bu üç değişkenin her birine göre tam kareli ifadeleri düzenleriz.

ÖRNEK 6 Birinci derece terimleri yok etmek amacıyla Örnek 5'i devam ettirelim.

Çözüm

Örnek 5'teki ikinci dereceden yüzeyin son ifadesi

$$5x'^2 + \frac{9}{\sqrt{10}}x' + 2y'^2 - 5y' - 5z'^2 + \frac{3}{\sqrt{10}}z' = 2$$

olarak yazılabilir. Her bir değişken için tam kareler düzenlenirse

$$\begin{aligned} 5\left(x'^2 + \frac{9}{5\sqrt{10}}x' + \frac{81}{1000}\right) + 2\left(y'^2 - \frac{5}{2}y' + \frac{25}{16}\right) - 5\left(z'^2 - \frac{3}{5\sqrt{10}}z' + \frac{9}{1000}\right) \\ = 5\left(x' + \frac{9}{10\sqrt{10}}\right)^2 + 2\left(y' - \frac{5}{4}\right)^2 - 5\left(z' - \frac{3}{10\sqrt{10}}\right)^2 \\ = 2 + \frac{405}{1000} + \frac{50}{16} - \frac{45}{1000} = \frac{5485}{1000} \end{aligned}$$

elde ederiz.

$$x'' = x' + \frac{9}{10\sqrt{10}}, \qquad y'' = y' - \frac{5}{4}, \qquad z'' = z' - \frac{3}{10\sqrt{10}},$$

alınırsa bu ikinci dereceden yüzeyin denklemi

$$5x''^2 + 2y''^2 - 5z''^2 = \frac{5485}{1000} = 5.485$$

olarak yazılabilir. Son ifade, standart şekilde

$$\frac{x''^2}{\frac{5.485}{5}} + \frac{y''^2}{\frac{5.485}{2}} - \frac{z''^2}{\frac{5.485}{5}} = 1$$

biçimindedir. $\blacksquare$

Anahtar Kelimeler

İkinci-derece polinom
İkinci dereceden şekil
İkinci dereceden yüzey
Simetrik matris
Eylemsizlik
İkinci dereceden yüzeylerin sınıflandırılması
Elips
Parabol
Elipsoit
Eliptik silindir
Eliptik paraboloit
Bir kanatlı hiperboloit
İki kanatlı hiperboloit
Koni
Hiperbolik paraboloit
Dejenere durum
Silindir

8.8 Alıştırmalar

Alıştırma 1-14'te, denklemi verilen her ikinci dereceden bir yüzeyi sınıflandırmak için eylemsizliğini kullanınız.

1. $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy - 4xz - 4yz + 4x = 8$
2. $x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 6x - 6y + 4z - 2 = 0$
3. $z = 4xy$
4. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy = 4$
5. $x^2 - y = 0$
6. $2xy + z = 0$
7. $5y^2 + 20y + z - 23 = 0$
8. $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 4xz + 4yz = 16$
9. $4x^2 + 9y^2 + z^2 + 8x - 18y - 4z - 19 = 0$
10. $y^2 - z^2 - 9x - 4y + 8z - 12 = 0$
11. $x^2 + 4y^2 + 4x + 16y - 16z - 4 = 0$
12. $4x^2 - y^2 + z^2 - 16x + 8y - 6z + 5 = 0$
13. $x^2 - 4z^2 - 4x + 8z = 0$
14. $2x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 2xy - 2xz - 2yz + 3x - 5y + z = 7$

Alıştırma 15-28'de, denklemi verilen her ikinci dereceden bir yüzeyi sınıflandırınız ve standart şeklini elde ediniz.

15. $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2yz = 1$
16. $x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 4xz + 4yz = 16$
17. $2xz - 2z - 4y - 4z + 8 = 0$
18. $x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 4yz = 9$
19. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy = 8$
20. $-x^2 - y^2 - z^2 + 4xy + 4xz + 4yz = 3$
21. $2x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 4xy - 8xz - 8yz + 8x = 15$
22. $4x^2 + 4y^2 + 8z^2 + 4xy - 4xz - 4yz + 6x - 10y + 2z = \frac{9}{4}$
23. $2y^2 + 2z^2 + 4yz + \frac{16}{\sqrt{2}}x + 4 = 0$
24. $x^2 + y^2 - 2z^2 + 2xy + 8xz + 8yz + 3x + z = 0$
25. $-x^2 - y^2 - z^2 + 4xy + 4xz + 4yz + \frac{3}{\sqrt{2}}x - \frac{3}{\sqrt{2}}y = 6$
26. $2x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2yz + 2x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z = \frac{3}{8}$
27. $x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 4y - 4z + 1 = 0$
28. $-8x^2 - 8y^2 + 10z^2 + 32xy - 4xz - 4yz = 24$

BÖLÜM

9 Lineer Cebir İçin MATLAB

Giriş

MATLAB, özünde lineer cebir kabiliyeti olan bilgisayar yazılımının çok yönlü bir parçasıdır. MATLAB, MATrix LABoratory ismini simgelemektedir. MATLAB, lineer cebir hesaplamaları için kaliteli bilgisayar programlarının profesyonelce geliştirilmiş projelerin parçalarını birleştirmektedir. MATLAB tarafından geliştirilen kod, C programlama dilinde yazılmıştır; fakat, birçok program parçası ve fonksiyon MATLAB dilinde yazılmış ve MATLAB'ın yeni sürümleri çıktıkça geliştirilmiştir. MATLAB, Microsoft Windows, Linux platformu, Macintosh bilgisayar işletim sistemleri ve Unix Workstations ile uyumludur.*

MATLAB geniş bir kabiliyet alanına sahiptir. Bu kitapta, özelliklerinden sadece birkaçını kullanacağız. MATLAB komut yapısının, cebirsel ifadeler ve lineer cebir işlemleri için oldukça uygun olduğunu göreceğiz. MATLAB komutlarının pek çoğunun isimleri, işlemlerin isimlerine ve lineer cebirin içeriğine tamamen paraleldir. Bu dersle doğrudan ilgili olan MATLAB komutları ve özelliklerinin tanımları üzerinde duracağız. MATLAB komutları hakkında daha detaylı bilgi, programın beraberinde bulunan *The* MATLAB *User's Guide* kullanıcı rehberliğinde, David R. Hill ve Bernard Kolman (Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, Inc., 2001)'ın *Modern Matrix Algebra*; David R. Hill (New York: Random House, 1988)'in *Experiments in Computational Matrix Algebra*; ve David R. Hill ve David E. Zitarelli (Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, Inc., 2004)'nin *Linear Algebra LABS with* MATLAB, 3rd ed. kitaplarında bulunabilir. Alternatif olarak, MATLAB programı, **help** komutu ile hazır ekran açıklamalarını kullanıcıya sunar.

help

yazılarak, komutlar ve veri cümlelerine karşılık gelen dosyaları içeren MATLAB alt dizinleri ve alternatif dizinlerin bir listesi görüntülenir. *İsim*, bir komutun adı olmak üzere, **help** *isim* yazıldığında, adı belirtilen komut hakkında bilgi görülür. Bazı durumlarda, görüntülenen tanımlar bu ders için ihtiyacımızdan daha fazla olabilir. Bu yüzden, **help** ile gö-

*MATLAB için bu kitaptaki tanımlamalar Microsoft Windows'ta çalışır.

rüntülenen bütün tanımlamaları tam olarak anlamayabilirsiniz. Kesim 9.9'da, bu kitapta kullanılan MATLAB komutlarının çoğunun bir listesi sunulmuştur.

İlk olarak MATLAB programına başlayınca MATLAB logosunu ve sonra >> MATLAB işaretini göreceksiniz. >> işareti, MATLAB'ın sizden bir komut beklediğini belirtir. Kesim 9.1'de, MATLAB'ta matrislerin nasıl girildiğini ve bazı komutların açıklamalarını vereceğiz. Bununla birlikte, Kesim 9.1'de anlatılanlara başlamadan önce, bilmeniz gereken belirli MATLAB özellikleri vardır.

- *Bir komutun yürütülmesine başlamak*.
  Bir komutun ismini ve gerekli herhangi değişken ya da veriyi yazdıktan sonra, yürütmeden önce ENTER tuşuna basmanız gerekir.
- *Komut yığını*.
  Komutları girdiğinizde, MATLAB bir yığındaki belli bir sayıda en son kullanılan komutları kaydeder. Yığında kaydedilen önceki komutlar, **yukarı ok (up arrow)** tuşu ile veya fareyle yukarı kaydırarak geri çağrılabilir. Yığına kaydedilen komutların sayısı, komutların uzunluğu ve diğer faktörlere bağlı olarak değişmektedir.
- *Hataları düzeltme*.
  Eğer komutu yürütmek için ENTER tuşuna bastığınızda MATLAB bir hatayı fark ederse, o zaman hatayı tanımlamaya yardım eden bir mesaj ve bir bip sesi ile cevap verir. Komut satırını yeniden çağırabilir ve düzenleyebilirsiniz.
- *Komutları devam ettirmek*.
  Bir tek satıra sığmayan MATLAB komutları, üç nokta (...) ve ardından ENTER tuşu kullanılarak bir sonraki satırdan devam edebilir.
- *Bir komutu durdurmak*.
  Bir MATLAB komutunun yürütülmesini durdurmak için **Ctrl** ve **C** tuşlarına aynı anda basınız ve sonra ENTER tuşuna basınız. Bazen bu dizinin tekrarlanması gerekir.
- *Çıkış*.
  MATLAB'tan çıkmak için **exit** veya **quit** yazıp ENTER tuşuna basınız.

9.1 MATLAB'ta Girdi (Input) ve Çıktı (Output)

Matris Girdisi

MATLAB'ta bir matrisi tanımlamak için, köşeli parantezlerle [...] kapalı kısma, elemanlar arasına bir boşluk (veya virgül) bırakılıp, satırların sonuna noktalı virgül (;) yazılarak giriş yapılır. Böylece;

$$\begin{bmatrix} 9 & -8 & 7 \\ -6 & 5 & -4 \\ 11 & -12 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi

[9 −8 7;−6 5 −4;11 −12 0]

şeklinde girilir ve

```
ans =
     9    −8     7
    −6     5    −4
    11   −12     0
```

şeklinde görüntü alınır. Görüntüde köşeli parantezin bulunmadığına ve MATLAB'ın bu matrisi **ans** ismiyle atadığına dikkat ediniz. MATLAB'ta her matrisin bir ismi olmalıdır. Eğer bir matrise bir isim atamazsanız, o zaman MATLAB matrisin ismini **ans** olarak atar. Buna **geçerli değişken ismi (default variable)** denir. Bir matrise isim atamak için, atama operatörü olan = işaretini kullanırız. Örneğin;

A = [4 5 8;0 −1 6]

matrisi ekranda

```
A =
     4     5     8
     0    −1     6
```

şeklinde görünür.

(**Uyarı:**

1. Bütün satırlar aynı sayıda girişe sahip olmalıdır.
2. MATLAB'ta büyük/ küçük harf ayrımı vardır.
3. Bir matris ismi tekrar kullanılabilir. Bu durumda "eski" içerik kaybolur.)

Bir matrisi elemanları ekranda görünmeyecek şekilde girmek için,] köşeli parantezden sonra noktalı virgül konulur. Böylece

A = [4 5 8;0 −1 6];

ifadesi, **A** isimli aynı matrisi önceki gibi atar, fakat görüntü vermez. Tanımlanmış bir matrise yeni bir isim atamak için, = atama işareti kullanılır. **Z = A** komutu, *A*'nın içeriğini *Z*'ye atar. **A** matrisi hala tanımlıdır.

Kullanımdaki matris isimlerini belirlemek için **who** komutunu kullanırız. Bir matrisi silmek için, **clear** komutunu kullanırız. **clear** komutundan sonra bir boşluk bırakarak matrisin ismini yazarız. Örneğin,

clear A

komutu *A* ismini ve içeriğini MATLAB'tan siler. Sadece **clear** komutu, tanımlanmış bütün matrisleri siler.

Bir matristeki satır ve sütunların sayısını belirlemek için, **size** komutunu kullanırız. *A* matrisinin silinmediğini düşünürsek

size(A)

komutunun görüntüsü

```
ans =
     2     3
```

olur. Bunun anlamı, *A* matrisinde 2 satır ve 3 sütunun bulunmasıdır.

Bir matrisin tüm bileşenlerini görmek için matrisin ismini yazınız. Eğer matris büyükse, görüntü sütunların alt cümlelerine ayrılarak verilir. Örneğin,

hilb(9)

komutu, 8. ve 9. sütunlar tarafından takip edilen ilk yedi sütunu görüntüler. (**hilb** komutu hakkında bilgi için **help hilb** komutunu kullanınız.) Eğer matris çok büyük ise, görüntü ekranı matrisi görmeniz için çok hızlı bir şekilde kayacaktır. Matrisin bir parçasını görmek için, **more on** komutunu yazıp ENTER tuşuna basınız, sonra matris ismini veya oluşturacak bir komut yazınız. Matrisin daha fazlasını görmek için boşluk tuşuna basınız. Ekranın altında "--more--" ifadesinden başka bir şey görünmeyinceye kadar boşluk tuşuna basmaya devam ediniz. Bunu **hilb(20)** ile deneyiniz. Bu görüntüleme özelliğini iptal etmek için, **more off** komutunu yazınız. Görüntünün önceki bölümlerini görmek için fareyi kullanarak liste çubuğunu (scroll bar) hareket ettirebilirsiniz.

MATLAB'ta, bir matrisin bir parçasını görmek için aşağıdaki ifadeler kullanılabilir. Gösterimlerin amaçları için, MATLAB'ta A matrisinin 5×5 matris olarak girildiğini kabul ediniz.

- *A*'nın (2,3) elemanını görmek için,

A(2,3)

- *A*'nın dördüncü satırını görmek için,

A(4,:)

- *A*'nın ilk sütununu görmek için,

A(:,1)

yazınız. Yukarıdaki durumlarda, : "tümü" anlamındadır. ":" aynı zamanda satırların veya sütunların bir aralığını göstermede de kullanılır. Örneğin,

2:8

yazılırsa,

```
ans =
     2     3     4     5     6     7     8
```

görünür. Bu özelliği bir matrisin satır veya sütunlarının bir alt cümlesini görüntülemek için de kullanabiliriz. Bir gösterim olarak, **A** matrisinin 3'ten 5'e kadar satırlarını görmek için

A(3:5,:)

yazarız. Benzer olarak 1'den 3'e kadar sütunları görmek için de

A(:,1:3)

yazarız. ":" operatörünün kullanılışı ile ilgili daha fazla bilgi için **help colon** yazınız. MATLAB'ta ":" operatörü çok yönlüdür, fakat bu operatörün tüm özelliklerini kullanmak zorunda değiliz.

■ Görüntü Biçimleri (Formatları)

MATLAB, matrisleri ondalıklı biçimde saklar ve bir ondalık-tip aritmetik kullanarak aritmetik hesaplamalarını yapar. Bu ondalık biçim yaklaşık 16 basamak tutar, fakat bütün basamakların ekranda görünmesi gerekmez. Makinede neyin yürütüldüğü ile ekranda ne görüldüğü arasında, sayıları görüntü için dönüştüren veya biçimleyen programlar çalışır. Burada, kullanacağımız görüntü biçimlerine bir göz atacağız. (Daha fazla bilgi için, MATLAB *User's Guide*'a bakınız veya **help format** yazınız.)

- Eğer matris tüm tamsayıları kapsıyorsa, o zaman bütün matris tamsayı değerler olarak görüntülenir. Yani, ondalık kısımlar gözükmez.
- Eğer matristeki herhangi bir eleman tam olarak bir tamsayı şeklinde gösterilmemişse, o zaman bütün matris **format short** olarak bilinen biçimde görüntülenir. Böyle bir görüntüde ondalık kısımda dört basamak görünür ve son basamak yuvarlanmış olabilir. Sıfır buna istisnadır. Eğer bir eleman tam sıfır ise, o zaman bir sıfır tamsayısı görünür. MATLAB'ta

Q = [5 0 1/3 2/3 7.123456]

matrisini giriniz. Görüntü

```
Q =

    5.0000    0    0.3333    0.6667    7.1235
```

şeklinde olur.

(**Uyarı:** Eğer bir değer 0.0000 olarak görüntüleniyorsa, o zaman bu değer tamamen sıfır değildir. Aşağıda inceleyeceğimiz **format long** biçimine değiştirip matrisi tekrar görüntüleriz.)

- Dört basamaktan daha fazla görmek için, görüntü biçimini değiştiriniz. Bunu yapmak için bir yol, on beş basamağı görüntüleyen

format long

komutunu kullanmaktır. Format long biçimindeki Q matrisi

```
Q =
    Columns 1 through 4
    5.00000000000000   0   0.33333333333333   0.66666666666667
    Column 5
    7.12345600000000
```

şeklindedir. Diğer görüntü biçimleri 10'un bir kuvvetini kullanır. Bunlar **format short e** ve **format longe**dir. Bu e-formatlar bilimsel gösterimin bir şeklidir ve daha çok sayısal analizde kullanılır. Bu formatları Q matrisiyle deneyiniz.

■ MATLAB değerleri rasyonel şekilde görüntüleyebilir. **format rat** komutu, rasyonel görüntü için kısa olanıdır. Aşağıdaki MATLAB komutlar dizisinin çıktısını kontrol ediniz:

format short
V = [1 1/2 1/6 1/12]

yazıldığında

```
V =
    1.0000    0.5000    0.1667    0.0833
```

görüntülenir ve

```
format rat
V
```

yazıldığında

```
V =
     1    1/2    1/6    1/12
```

görüntülenir.

Son olarak, bir ondalık görüntüleme şekline dönmek için **format short** yazınız.

Ondalık elemanlı bir *P* matrisi girildiğinde veya hesaplamalar sonucunda ortaya çıktığında, *P*'nin **format rat**'ta görüntüsü, her elemanı küçük tamsayıların bir oranına yaklaştırılmış bir matrisi verir. MATLAB'ta **pi** yazıldığında, π'nin bir ondalık yaklaşımı ve **exp(1)** komutu ile *e* sayısına bir ondalık yaklaşım görüntülenir. **format long**'ta,

```
>> pi
ans =
   3.14159265358979
```

```
>> exp(1)
ans =
   2.71828182845905
```

görülür. **format rat** kullanıldığında, aşağıdaki komutlar ondalık elemanların yaklaşımını küçük sayıların bir oranı şeklinde görüntüler:

```
>>format rat
>>P=[pi exp(1)]
P=
   355/113  1457/536
```

Görüntülenen oranları **format long**'ta hesaplarsak,

```
>>format long
>>355/113
ans=
     3.14159292035398
>>1457/536
ans=
     2.71828358208955
```

elde ederiz. Oranların orijinal ondalık değerlere sadece bir yaklaşım olduğu kolayca görülür.

MATLAB başladığında, geçerli biçim **format short**'tur. Eğer formatı değiştirirseniz, başka bir format komutu girinceye kadar yenisi geçerli olur. Bazı MATLAB programları program içinde biçimi değiştirebilir.

9.2 MATLAB'ta Matris İşlemleri

MATLAB'ta matrislerin toplama, çıkarma ve çarpma işlemlerinde Kesim 1.2 ve 1.3'teki tanımların aynısı izlenir. Eğer A ve B matrisleri $m \times n$ tipinde matrisler olarak MATLAB'a girilmişse o zaman MATLAB'ta bunların toplamı

A+B

komutu kullanılarak ve bu matrislerin farkı da

A−B

komutu ile hesaplanır. (+ veya – işaretinin herhangi iki tarafında boşluk kullanılabilir.) Eğer A, $m \times n$ tipinde, C de $n \times k$ tipinde matrisler ise MATLAB'ta A ve C matrisinin çarpımı

A∗C

ile yazılmalıdır. MATLAB'*ta, * işareti, çarpılacak matrislerin isimlerinin arasına özellikle konulmalıdır*. MATLAB'ta, AC yazmak, belirtilen çarpma işlemini gerçekleştirmez. Gerçekte, MATLAB, AC'yi yeni bir matris ismi olarak dikkate alır ve eğer AC daha önceden tanımlanmamışsa, işlem bir hata ile sonuçlanır. Eğer ilgili matrisler belirtilen işlem için uygun değilse, o zaman bir hata mesajı görüntülenir. Toplama ve çıkarma için uygunluk, matrislerin aynı tipten olması demektir. Eğer birinci matrisin sütun sayısı ile ikinci matrisin satır sayısı aynı ise, matrisler çarpma işlemi için uygundur.

ÖRNEK 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

matrislerini MATLAB'ta giriniz ve aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız. MATLAB'taki sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Çözüm

(a) **A+C** görüntüsü

```
ans =

     4    -3
     7     6
```

(b) **A*C** görüntüsü

```
ans =

    13    -1
    26    -2
```

(c) **b*A** görüntüsü

```
??? Error using ==> mtimes
    Inner matrix dimensions must agree.
```

şeklindedir. ■

MATLAB'*ta skalar çarpım, * çarpım sembolünün kullanımını gerektirir.* Örnek 1'deki A matrisi için, MATLAB'ta skalar çarpım için **5*A** yazmak gerekirken bu kitapta 5*A* ile belirtilir.

MATLAB'ta, transpoz operatörü (veya sembolü), tek tırnak işareti veya " ′ " işaretidir. MATLAB'ta, Örnek 1'deki matrisleri kullanarak

$\mathbf{Q = C'}$ görüntüsü

```
Q =
     3     5
    -5     2
```

ve

$\mathbf{p = b'}$ görüntüsü

```
p =
    -3     1
```

şeklinde olur. Kolaylık için, MATLAB'ta sütun matrislerini " ′ " kullanarak girebiliriz.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}$$

matrisini girmek için ya

$$\mathbf{x = [1;3;-5]}$$

komutunu ya da

$$\mathbf{x = [1 \quad 3 \quad -5]'}$$

komutunu kullanabiliriz.

Katsayılar matrisi *A* ve sağ taraftaki **b** matrisi MATLAB'a girilmek üzere, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sisteminin verildiğini kabul edelim. $\left[\, A \mid \mathbf{b} \,\right]$ ilaveli matrisini MATLAB'ta

$$\mathbf{[A \quad b]}$$

yazarak veya bunu **aug** ile isimlendirmek istersek,

$$\mathbf{aug = [A \quad b]}$$

yazarak girebiliriz. Katsayılar matrisinden sağ tarafı ayırmak için " ⋮ " işareti kullanılmaz. Örnek 1'deki *A* ve **b** matrislerini kullanarak $A\mathbf{x=b}$ sistemi için MATLAB'ta ilaveli matrisi oluşturunuz.

MATLAB'ta, ilaveli matris oluşturmak matris yapısının özel bir halidir. Aslında, matrislerin büyüklüğü uygun olduğu sürece "birlikte yapıştırabiliriz". Örnek 1'deki *A*, **b** ve *C* matrislerini kullanarak bazı örnekler verelim:

[A C] görüntüsü

```
ans =
     1     2     3    -5
     2     4     5     2
```

[A;C] görüntüsü

```
ans =
     1     2
     2     4
     3    -5
     5     2
```

[A b C] görüntüsü

```
ans =
     1     2    -3     3    -5
     2     4     1     5     2
```

[C A;A C] görüntüsü

```
ans =
     3    -5     1     2
     5     2     2     4
     1     2     3    -5
     2     4     5     2
```

şeklindedir.

MATLAB'ta sadece köşegen elemanları girerek oluşturulan köşegen matris için bir komut bulunmaktadır. Bu komut **diag** komutudur ve

D = diag([1 2 3]) görüntüsü

```
D =
     1     0     0
     0     2     0
     0     0     3
```

şeklindedir. **diag** komutu aynı zamanda bir matrisin köşegen elemanlarını "ayırmak" için de kullanılır. Eğer

$$R = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -3 & 7 & 0 \\ 6 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

matrisi MATLAB'a girilirse, o zaman

diag(R) görüntüsü

```
ans =
     5
     7
    -8
```

olur.

diag(diag(R)) görüntüsü

```
ans =
     5     0     0
     0     7     0
     0     0    -8
```

olduğuna dikkat ediniz. **diag** ile ilgili daha fazla bilgi için **help** komutunu kullanınız. **diag** ile ilgili komutlar **tril** ve **triu** dur.

9.3 Matris Kuvvetleri ve Bazı Özel Matrisler

MATLAB'ta, bir matrisin bir kuvvetini almak için " ^ " üs operatörü kullanılmalıdır. Eğer A kare matris ve k bir pozitif tam sayı ise o zaman MATLAB'ta A^k,

A^k

ile belirtilir. Bu da A matrisinin kendisiyle k defa çarpılması anlamına gelir. Kesim 1.5'te verilen, kuvvetler için kurallar MATLAB'ta uygulanır. Özel olarak;

A^0

A ile aynı tipten bir birim matrisi gösterir.

ÖRNEK 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

matrislerini MATLAB'a girip aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız. MATLAB sonuçları verilmiştir.

Çözüm

(a) **A^2** görüntüsü

```
ans =
     0    -2
     2     0
```

(b) **(A*B)^2** görüntüsü

```
ans =
    -8     6
    -6    -8
```

(c) **(B-A)^3** görüntüsü

```
ans =
     0     1
    -1     0
```

şeklindedir.

Bu kitapta $n \times n$ tipindeki birim matris I_n ile gösterilmektedir. MATLAB'ta, gerektiğinde I_n'i üretmek için bir komut vardır. Bu komut **eye** komutudur ve aşağıdaki gibi işlem yapar:

eye(2)	2×2 tipinde birim matrisi,
eye(5)	5×5 tipinde birim matrisi,
t = 10;eye(t)	10×10 tipinde birim matrisi ve
eye(size(A))	A ile aynı tipten birim matrisi görüntüler.

Diğer iki MATLAB komutu olan **zeros** ve **ones**, benzer şekilde işlem yaparlar. **zeros** komutu, bütün elemanları sıfır olan ve **ones** komutu da bütün elemanları bir olan bir matris üretir. $m \times n$ tipinde dikdörtgen matrisler

zeros(m,n), ones(m,n)

ifadeleri ile oluşturulabilirler. Burada, m ve n, MATLAB'ta önceden tanımlanmış pozitif tam sayı değerlerdir. Bu kuralı kullanarak,

zeros(4,1)

komutu ile dört tane sıfırlı bir sütun oluşturabiliriz. Cebirden x'in

$$4x^3 - 5x^2 + x - 3 \qquad \text{ve} \qquad x^4 - x - 6$$

gibi polinomlarını biliyoruz. Bir x'in bir değerindeki böyle polinomların hesaplanması, MATLAB'ta **polyval** komutu ile çabucak gerçekleştirilir. Polinomun katsayılarını bir vektör (bir satır veya sütun vektör) ile tanımlayalım. Bu vektör önce en yüksek kuvvetli terimin katsayısı ile başlayıp daha sonra ikinci büyük kuvvetli terimin katsayısı ve bu şekilde sabit terime kadar katsayılar yazılarak oluşturulsun. Eğer bir kuvvet polinomda bulunmuyorsa, katsayı vektöründe ona karşılık gelen konuma katsayısı sıfır yazılmalıdır. MATLAB'ta, yukarıda verilen polinomlar için, sırasıyla katsayı vektörleri

v = [4 −5 1 −3] ve **w = [1 0 0 −1 −6]**

şeklindedir.

polyval(v,2)

komutu, birinci polinomu $x = 2$ değerinde hesaplayıp, 11 değerini görüntüler. Benzer şekilde,

t = −1;polyval(w,t)

komutu da, ikinci polinomu $x = -1$ değerinde hesaplayıp –4 değerini görüntüler.

Bir A kare matrisinin polinomu

$$5A^3 - A^2 + 4A - 7I$$

şeklindedir. Bir matris polinomundaki sabit terimin, A ile aynı tipten bir birim matris olduğuna dikkat ediniz. Eğer herhangi bir sıradan polinomda sabit terimin, x^0'ın katsayısı olduğunu hatırlarsak matris polinomunda da $A^0 = I$'nın katsayısı olması doğaldır. $p(x) = x^4 - x - 6$ gibi standart bir polinomu $n \times n$ tipinde bir A matrisi için hesaplarken genellikle matris polinomları ile karşılaşırız. Sonuç matris polinomu

$$p(A) = A^4 - A - 6I_n$$

olur. Matris polinomları, MATLAB'ta, **polyvalm** komutu ile hesaplanabilir. A kare matrisini ve $p(x)$ için katsayı vektörünü

w = [1 0 0 −1 −6]

ile MATLAB'ta tanımlayalım. O zaman

polyvalm(w,A)

komutu ile A ile aynı tipten bir matris olan $p(A)$ değeri hesaplanır.

ÖRNEK 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{ve} \qquad p(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2x + 3.$$

olsun. MATLAB'ta $p(A)$'yı hesaplamak için, aşağıdaki komutları kullanınız (komutlardan sonra, MATLAB görüntüsü verilmiştir):

```
A = [1   −1   2;−1   0   1;0   3   1];
v = [2   −6   2   3];
Q = polyvalm(v,A)

Q =

   −13   −18    10
    −6   −25    10
     6    18   −17
```

■

Bazı matris bağıntılarını test etmede kullanmak için tamsayı elemanlı bir matris istediğiniz zaman, MATLAB komutları böyle matrisleri kolaylıkla üretebilir.

```
C = fix(10*rand(4))
```

yazıldığında, tamsayı elemanlı 4×4 tipinde bir C matrisi görüntülenecektir. Bu komutun ne yaptığını incelemek için **fix** ve **rand** komutları ile **help** komutunu kullanınız.

ÖRNEK 3 MATLAB'ta, $k = 3, 4, 5$ için $k \times k$ tipinde A matrislerini üretip $B = A + A^T$'yi gösteriniz. Gösterilen matrisleri inceleyip bu matrislerin paylaştığı ortak bir özelliği belirlemeye çalışınız. Aşağıda böyle birkaç matris gösteriyoruz. Rastgele sayı üreteci olan **rand** komutu nedeniyle sizin sonuçlarınız aynı olmayabilir.

```
k = 3;
A = fix(10*rand(k));
B = A+A'
```

Görüntü

```
B =

     4     6    11
     6    18    11
    11    11     0
```

olur. **Up arrow** (yukarı ok) tuşunu kullanarak, her bir komuttan sonra ENTER tuşuna basarak, bir kez daha önceki komutları çalıştırabiliriz. Bu kez görüntülenen matris

```
B =

     0     5    10
     5     6     6
    10     6    10
```

olabilir. Kesim 1.5'teki Alıştırma 22(a)'ya bakınız. ■

9.4 MATLAB'ta Elementer Satır İşlemleri

Kesim 2.2'de incelediğimiz gibi, lineer denklem sistemlerinin çözümünde, ilaveli matrisleri satırca denk olan lineer sistemler dizisini elde etmek için elementer satır işlemleri kullanılır. Satırca denk lineer sistemler aynı çözümlere sahiptir. Bu nedenle, çözümü zor olmayan satırca denk sistemler üretmek için elementer satır işlemlerini seçeriz. **Satırca indirgenmiş eşelon şekildeki** lineer sistemlerin Gauss-Jordan metodu ile çabucak çözüldüğü ve **satır eşelon şeklindeki** sistemlerin geriye yerine koymalı Gauss yok etme metodu ile çözüldüğü gösterilmişti. Bu yollardan herhangi birini kullanmak, lineer sistemin ilaveli matrisindeki elemanları sıfır yapmaya yönelik satır işlemleri oluşturmayı gerektirir. MATLAB ile böyle satır işlemlerinin nasıl oluşturulacağını göstereceğiz. MATLAB paket programıyla aritmetik işlemler yapılır ve satırca indirgenmiş eşelon şekil veya satır şekil üretme stratejisi üzerinde yoğunlaşırız.

Bir $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistemi verildiğinde, A katsayı matrisini ve $\mathbf{b}$ sağ taraf matrisini MATLAB'a girelim. İlaveli matrisi (Kesim 9.2'ye bakınız.)

$$\mathbf{C = [A \quad b]}$$

şeklinde oluşturalım. Şimdi C ilaveli matrisine satır işlemleri uygulamaya hazırız. Her bir satır işlemi, var olan bir satırı yeni bir satır ile değiştirir. Stratejimiz, yeni elde edeceğimiz satırlarla satırca indirgenmiş eşelon şekil veya satır eşelon şekil hedefine götürecek şekilde satır işlemleri oluşturmaktır. $[A \vdots \mathbf{b}]$ matrisini bu şekillerden birine dönüştüren satır işlemleri dizisi yapabilmek için birçok farklı seçim bulunur. Doğal olarak, en az sayıda satır işlemi kullanmaya çalışalım, fakat özellikle, hesaplamaları elle yaparken, kesirler elde etmekten (mümkünse) kaçınmak çoğu zaman uygun olur. MATLAB, bizim için aritmetik işlemleri yapıyor olacağından, kesirleri düşünmemize gerek yoktur. Fakat, görsel olarak bunlardan kaçınmak her zaman iyidir.

Kesim 2.1'de tanımlandığı gibi, üç satır işlemi vardır:

- İki satırın yerlerini değiştirmek.
- Bir satırı sıfırdan farklı bir sayı ile çarpmak.
- Bir satırın bir katını diğer satıra eklemek.

MATLAB'ta bu işlemleri bir $C = [A \mid \mathbf{b}]$ ilaveli matrisinde gerçekleştirmek için, Kesim 9.1'de verilen sütun işlemini uygularız. Tekniği, Kesim 2.2'de Örnek 1'deki lineer sistemde gösterelim. İlaveli matris MATLAB'a girildiğinde,

```
C =

     1     2     3     9
     2    -1     1     8
     3     0    -1     3
```

elde edilir. Satırca indirgenmiş eşelon şekli üretmek için aşağıdaki işlemleri yaparız:

Tanımlama	**MATLAB** ***Komutları ve Görüntü***
1. satırın (–2) katını 2. satıra ekleyiniz	**C(2,:) = −2 * C(1,:) + C(2,:)**
[MATLAB komutunun açıklaması: 2. satır; 1. satırın (–2) katı ile 2. satırın toplamıyla yer değiştirir (veya eşittir).]	C = 1 2 3 9 0 −5 −5 −10 3 0 −1 3
1. satırın (–3) katını 3. satıra ekleyiniz	**C(3,:) = −3 * C(1,:) + C(3,:)**
	C = 1 2 3 9 0 −5 −5 −10 0 −6 −10 −24
2. satırı $(-\frac{1}{5})$ ile çarpınız	**C(2,:) = (− 1/5) * C(2,:)**
[MATLAB komutunun açıklaması: 2. satır; 2. satırın $(-\frac{1}{5})$ katı ile yer değiştirir (veya eşittir).]	C = 1 2 3 9 0 1 1 2 0 −6 −10 −24
2. satırın (–2) katını 1. satıra ekleyiniz	**C(1,:) = −2 * C(2,:) + C(1,:)**
	C = 1 0 1 5 0 1 1 2 0 −6 −10 −24
2. satırın (6) katını 3. satıra ekleyiniz	**C(3,:) = 6 * C(2,:) + C(3,:)**
	C = 1 0 1 5 0 1 1 2 0 0 −4 −12
3. satırı $(-\frac{1}{4})$ ile çarpınız	**C(3,:) = (− 1/4) * C(3,:)**
	C = 1 0 1 5 0 1 1 2 0 0 1 3
3. satırın (–1) katını 2. satıra ekleyiniz	**C(2,:) = −1 * C(3,:) + C(2,:)**

```
C  =
     1     0     1     5
     0     1     0    -1
     0     0     1     3
```

3. satırın (–1) katını 1. satıra ekleyiniz $\mathbf{C(1,:) = -1 * C(3,:) + C(1,:)}$

```
C  =
     1     0     0     2
     0     1     0    -1
     0     0     1     3
```

Bu son ilaveli matris, lineer sistemin çözümünün $x = 2$, $y = -1$, $z = 3$ olduğunu gösterir.

İlaveli matrisin yukarıdaki satırca indirgenmiş eşelon şekle indirgenmesinde, satırların yer değiştirmesi gerekli olmamıştır. Herhangi bir aşamada *C* ilaveli matrisinin 2. ve 3. satırlarının yer değiştirdiğini kabul edelim. Bunu yapmak için, geçici bir saklama alanı kullanırız. (Bu alanın ismini burada **temp** seçeceğiz.) MATLAB'ta aşağıdaki işlemleri yaparız:

Tanımlama	MATLAB *Komutları*
2. satırı geçici saklamaya atayınız.	**temp = C(2,:);**
3. satırın içeriğini 2. satıra atayınız.	**C(2,:) = C(3,:);**
Geçici saklamadaki 2. satır içeriğini 3. satıra atayınız.	**C(3,:) = temp;**

(Her bir komutun sonundaki noktalı virgüller, sadece, içeriğin görüntüsünü gizli tutar.)

Yukarıdaki gibi "=" atama operatörünü ve sütun operatörünü kullanarak, bir matrisin satırca indirgenmiş eşelon şekli veya satır eşelon şeklini elde etmek amacıyla satır işlemlerini oluşturmak için MATLAB'ı yapılandırabiliriz. MATLAB bu aritmetiği yapar ve biz indirgemeyi gerçekleştirecek satır işlemlerini seçmek üzerine yoğunlaşırız. Aynı zamanda uygun MATLAB komutlarını girmeliyiz. Eğer bir çarpanı veya satır numarasını yanlış yazarsak, hata düzeltilebilir, fakat düzeltme işlemi belli bir sayıda adım gerektirir. İndirgeme yöntemi için satır işlemlerini seçmede tamamen yoğunlaşmaya izin veren, bu kitabın kullanıcılarına uygun olan yardımcı MATLAB rutinlerinin bir grubunda **reduce** isimli bir rutin vardır. Bir kez bu rutinleri MATLAB'a dahil ettiyseniz, **help reduce** yazarak aşağıdaki görüntüyü görebilirsiniz:

```
REDUCE  Perform row reduction on matrix A by explicitly
        choosing row operations to use. A row operation
        can be "undone," but this feature cannot be
        used in succession. This routine is for small
        matrices, real or complex
        Use the form ===> reduce <=== to select a
        demo or enter your own matrix A
        or in the form ===> reduce(A) <===
```

reduce rutini, bütün komut yazımlarını azaltır ve ilgili aritmetiği oluşturmak için MATLAB'ı yapılandırır. **reduce** kullanmak için, sistemin *C* ilaveli matrisini önceden incelediğimiz gibi giriniz ve

reduce(C)

yazınız. Kesim 2.2 Örnek 1 için **reduce**'nin ilk üç adımını göstereceğiz. Bulunan matrisler, yukarıda MATLAB'ta satır işlemlerini oluşturmada sütun işleminin doğrudan kullanımını yaptığımız, indirgeme yönteminin ilk üç adımında elde ettiğimiz matrislerle aynı olacaktır. Ekran görüntüleri aşağıda artı işaretli satırların arasında gösterilmiş, bütün girdiler kutucuklar içinde belirmiştir.

```
++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

       ***** "REDUCE" a Matrix by Row Reduction *****

The current matrix is:

A =
    1   2   3   9
    2  -1   1   8
    3   0  -1   3


               OPTIONS
 <1>  Row(i) <===> Row(j)
 <2>  k*Row(i)     (k not zero)
 <3>  k*Row(i)+Row(j) ===> Row(j)
 <4>  Turn on rational display.
 <5>  Turn off rational display.
<-1>  "Undo" previous row operation.
 <0>  Quit reduce!
      ENTER your choice ===> [3]

Enter multiplier. [-2]

Enter first row number. [1]

Enter number of row that changes. [2]
```

(Yorum: Yukarıdaki menüde 3. seçeneğin anlamı **add a multiple of one row to another row** ile aynıdır. Yukarıdaki girdi, işlemi multipler * (first row) + (second row) şeklinde gerçekleştirir.)

```
++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

   ***** Replacement by Linear Combination Complete *****

The current matrix is:

A =
    1    2    3    9
    0   -5   -5  -10
    3    0   -1    3

                OPTIONS
 <1>   Row(i) <===> Row(j)
 <2>   k * Row(i)     (k not zero)
 <3>   k * Row(i) + Row(j) ===> Row(j)
 <4>   Turn on rational display.
 <5>   Turn off rational display.
<-1>   "Undo" previous row operation.
 <0>   Quit reduce!
       ENTER your choice ===> 3

Enter multiplier. -3

Enter first row number. 1

Enter number of row that changes. 3

++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

   ***** Replacement by Linear Combination Complete *****

The current matrix is:

A =
    1    2    3    9
    0   -5   -5  -10
    0   -6  -10  -24

                OPTIONS
 <1>   Row(i) <===> Row(j)
 <2>   k * Row(i)     (k not zero)
 <3>   k * Row(i) + Row(j) ===> Row(j)
 <4>   Turn on rational display.
 <5>   Turn off rational display.
<-1>   "Undo" previous row operation.
 <0>   Quit reduce!
       ENTER your choice ===> 2

Enter multiplier. -1/5

Enter row number. 2
```

```
++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

            ***** Multiplication Complete *****

The current matrix is:

A =
    1    2    3    9
    0    1    1    2
    0   -6  -10  -24

                OPTIONS
 <1>   Row(i) <===> Row(j)
 <2>   k * Row(i)     (k not zero)
 <3>   k * Row(i) + Row(j) ===> Row(j)
 <4>   Turn on rational display.
 <5>   Turn off rational display.
<-1>   "Undo" previous row operation.
 <0>   Quit reduce!
       ENTER your choice ===>
++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
```

Bu noktada **reduce** kullanarak, bu matrisin satırca indirgenmiş eşelon şekle indirgenmesini tamamlamanız gerekir.

1. **reduce**deki 1'den 3'e kadar seçenekler sembol şeklinde görünmesine rağmen, bu kesimin başlangıcında, satır işlemlerini tanımlamak için kullanılan deyimlerle aynı anlamdadır.<3> seçeneği, bir satırı yer değiştirmek için *satırların bir lineer birleşimi*ni oluşturur. Bu terminoloji, bu derste daha sonra kullanılacak ve **reduce**nin kesin görüntülerinde belirecektir. (Kesim 9.7 ve 2.2'ye bakınız.)
2. **reduce** rutininde, satır işlemlerinin gerçekleştiği matrisin ismi, sizin girdi matrisinizin ismi ne olursa olsun, *A*'dır.

ÖRNEK 1 **reduce** kullanarak, aşağıdaki lineer sistemi çözünüz:

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = \frac{13}{6}$$
$$\frac{1}{7}x + \frac{1}{9}y = \frac{59}{63}$$

Çözüm

İlaveli matrise *C* ismi vererek MATLAB'ta giriniz.

```
C = [1/3    1/4    13/6;1/7    1/9    59/63]

C =
    0.3333    0.2500    2.1667
    0.1429    0.1111    0.9365
```

Sonra

```
reduce(C)
```

yazınız.

reduce'den sonraki adımlar aşağıda görüntülenmiştir. Eğer <4> rasyonel görüntü seçeneğini seçmezseniz adımlar ondalıklı şekilde görüntülenir. Açıklayıcı bilgi amacıyla, örneklerde karşılık gelen rasyonel görüntüler parantez içinde gösterilmiştir. Genellikle, ondalıklı ve rasyonel görüntüler aynı anda gösterilmez.

```
++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

       ***** "REDUCE" a Matrix by Row Reduction *****

The current matrix is:

A =
    0.3333    0.2500    2.1667            {1/3    1/4    13/6 }
    0.1429    0.1111    0.9365            {1/7    1/9    59/63}

               OPTIONS
 <1>  Row(i) <===> Row(j)
 <2>  k * Row(i)     (k not zero)
 <3>  k * Row(i) + Row(j) ===> Row(j)
 <4>  Turn on rational display.
 <5>  Turn off rational display.
<-1>  "Undo" previous row operation.
 <0>  Quit reduce!
      ENTER your choice ===> [2]

Enter multiplier. [1/A(1,1)]

Enter row number. [1]

++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

          ***** Row Multiplication Complete *****


The current matrix is:

A =
    1.0000    0.7500    6.5000            {1      3/4    13/2 }
    0.1429    0.1111    0.9365            {1/7    1/9    59/63}

               OPTIONS
 <1>  Row(i) <===> Row(j)
 <2>  k * Row(i)     (k not zero)
 <3>  k * Row(i) + Row(j) ===> Row(j)
 <4>  Turn on rational display.
 <5>  Turn off rational display.
<-1>  "Undo" previous row operation.
 <0>  Quit reduce!
      ENTER your choice ===> [3]

Enter multiplier. [-A(2,1)]
```

```
++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

   ***** Replacement by Linear Combination Complete *****

The current matrix is:

A =
    1.0000    0.7500    6.5000            {1    3/4      13/2 }
         0    0.0040    0.0079            {0    1/252    1/126}

                OPTIONS
 <1>   Row(i) <===> Row(j)
 <2>   k * Row(i)     (k not zero)
 <3>   k * Row(i) + Row(j) ===> Row(j)
 <4>   Turn on rational display.
 <5>   Turn off rational display.
<-1>   "Undo" previous row operation.
 <0>   Quit reduce!
       ENTER your choice ===> 2

Enter multiplier. 1/A(2,2)

Enter row number. 2

++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

          ***** Row Multiplication Complete *****

The current matrix is:

A =
    1.0000    0.7500    6.5000            {1    3/4    13/2}
         0    1.0000    2.0000            {0    1      2   }

                OPTIONS
 <1>   Row(i) <===> Row(j)
 <2>   k * Row(i)     (k not zero)
 <3>   k * Row(i) + Row(j) ===> Row(j)
 <4>   Turn on rational display.
 <5>   Turn off rational display.
<-1>   "Undo" previous row operation.
 <0>   Quit reduce!
       ENTER your choice ===> 3

Enter multiplier. -A(1,2)

Enter first row number. 2

Enter number of row that changes. 1
```

```
++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

   ***** Replacement by Linear Combination Complete *****

The current matrix is:

A =
    1.0000         0    5.0000              {1    0    5}
         0    1.0000    2.0000              {0    1    2}

                OPTIONS
 <1>   Row(i) <===> Row(j)
 <2>   k * Row(i)     (k not zero)
 <3>   k * Row(i) + Row(j) ===> Row(j)
 <4>   Turn on rational display.
 <5>   Turn off rational display.
<-1>   "Undo" previous row operation.
 <0>   Quit reduce!
       ENTER your choice ===> 0

      **** ===> REDUCE is over.  Your final matrix is:

   A =

        1.0000         0    5.0000
             0    1.0000    2.0000

++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
```

Buradan lineer sistemin çözümünün $x = 5$, $y = 2$ olduğu görülür. ■

reduce rutini, sizi satır indirgeme yöntemi stratejisi üzerine yoğunlaşmaya zorlar. Bir kez **reduce**'yi birkaç lineer sistemde kullandıysanız, indirgeme yöntemi oldukça çekici sistematik hesaplama haline gelir. **reduce** rutini, MATLAB'ta metin ekranını kullanır. Değişik (alternatif) bir rutin de, **reduce** ile aynı işlevselliğe sahip olan fakat grafik ekranını ve MATLAB'ın grafiksel kullanıcı ara yüzünü kullanan **rowop** rutinidir. **help rowop** komutu aşağıdaki açıklamayı görüntüler:

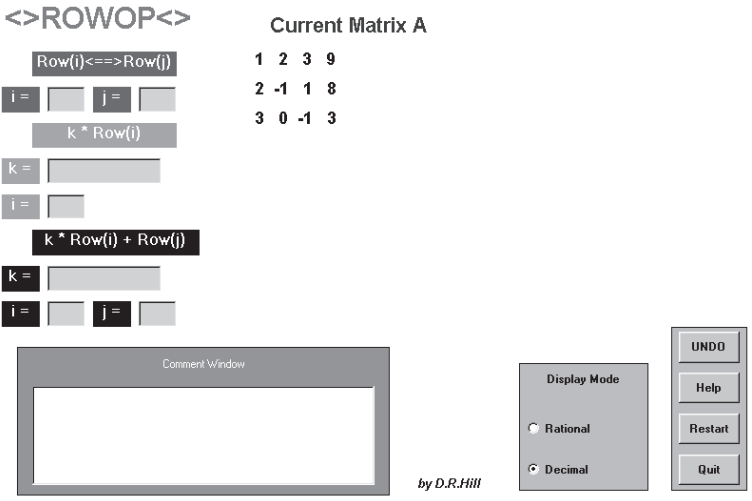
```
ROWOP   Perform row reduction on real matrix A by
        explicitly choosing row operations to use.
        A row operation can be "undone", but this
        feature cannot be used in succession. Matrices
        can be at most 6 by 6.

        To enter information, click in the gray boxes
        with your mouse and then type in the desired
        numerical value followed by ENTER.

        Use in the form ===> rowop <===

        If the matrix A is complex, the routine REDUCE
        is called.
```

rowop'ta bir matris girildikten sonra, aşağıdaki ekran görüntülenir (burada gri tonlamalı olarak verilmiştir, fakat MATLAB'ta renklidir):



Bir matrisin satırca indirgenmiş eşelon şekli, lineer cebirde birçok yerde ilgili kavramlarda bilgi sağlamada kullanılır. Böylece, bir matrisin satırca indirgenmiş eşelon şekli, hesaplamalı yöntemlerin çok istenen bir adımı haline gelmiştir. Bu nedenle, MATLAB, satırca indirgenmiş eşelon şekli elde etmek için otomatik bir yol sağlar. Bu komut, **rref** komutudur. Göz önüne alınan bir A ilaveli matrisi bir kez girilip, sadece

rref(A)

yazıldığında MATLAB, A matrisinin satırca indirgenmiş eşelon şeklini görüntüleyecektir.

ÖRNEK 2 Kesim 2.2, Örnek 11'de

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 \qquad\quad + x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad &= 0 \end{aligned}$$

homogen sisteminin çözümü sorulmuştur.

```
C =

     1     1     1     1     0
     1     0     0     1     0
     1     2     1     0     0
```

elde etmek için MATLAB'ta C ilaveli matrisini oluşturunuz. Sonra,

rref(C)

yazınız ve MATLAB,

```
ans =

     1     0     0     1     0
     0     1     0    -1     0
     0     0     1     1     0
```

görüntüsünü verecektir. x_4 bilinmeyeni keyfi olarak herhangi bir r sayısı seçildiğinde, çözüm,

$$x_1 = -r, \qquad x_2 = r, \qquad x_3 = -r, \qquad x_4 = r$$ ■

olarak bulunur.

9.5 MATLAB'ta Matris Tersleri (İnversleri)

Kesim 2.3'te incelendiği gibi, singüler olmayan bir A kare matrisinin satır eşelon şekli birim matris olmak zorundadır. Bu nedenle MATLAB'ta, A'nın singüler veya singüler olmayan matris olup olmadığını, **reduce** veya **rref** kullanarak A'nın satırca indirgenmiş eşelon matrisini hesaplayarak araştırabiliriz. Böyle bir hesaplama, matrisin tersinin olup olmadığını da araştırır, fakat eğer tersi varsa, tam olarak tersini hesaplayamaz. A matrisinin tersini hesaplamak için, Kesim 2.3'teki gibi işlem yaparız ve $[A \mid I_n]$ ilaveli matrisinin satırca indirgenmiş eşelon şeklini buluruz. MATLAB'ta, A singüler olmayan matrisi bir kez girildiğinde,

reduce([A eye(size(A))])

kullanarak veya

rref([A eye(size(A))])

kullanarak adım adım matrisin tersi bulunabilir. Örneğin, eğer Kesim 2.3, Örnek 4'teki A matrisini kullanırsak, o zaman

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. A matrisini MATLAB'ta girip

rref([A eye(size(A))])

komutunu yazarsak, görüntü

```
ans =
    1.0000         0         0    1.6250   -0.5000   -0.1250
         0    1.0000         0   -1.8750    0.5000    0.3750
         0         0    1.0000    1.2500         0   -0.2500
```

şeklinde olur. Ters matrisi çekip çıkartmak için,

Ainv = ans(:,4:6)

komutunu kullanırız ve

```
Ainv =

    1.6250   -0.5000   -0.1250
   -1.8750    0.5000    0.3750
    1.2500         0   -0.2500
```

elde ederiz. Sonucu rasyonel olarak görüntülemek istersek,

format rat
Ainv

komutlarını kullanırız

```
Ainv =

    13/8    -1/2    -1/8
   -15/8     1/2     3/8
     5/4       0    -1/4
```

görüntüsü elde edilir. Rasyonel görüntüyü kapatmak için

format short

komutunu yazınız. Böylece, daha önceki MATLAB komutları, Kesim 2.3'te belirtilen el ile hesaplama yoluna benzer tarzda kullanılabilir.

Kolaylık için, tersleri doğrudan hesaplayan bir rutin vardır. Bu, **invert** komutudur. Önceki *A* matrisi için

invert(A)

yazabiliriz ve sonuç **rref** komutu ile **Ainv**'de oluşturulan matrisle aynı olacaktır. Eğer matris kare değil veya singüler ise, bir hata mesajı görünecektir.

9.6 MATLAB'ta Vektörler

MATLAB'ta *n*-elemanlı bir **x** vektörü (Kesim 1.2 veya 4.2'ye bakınız.),

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

şeklinde *n*-elemanlı bir sütun matris ile veya

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

şeklinde *n*-elemanlı bir satır matris ile gösterilebilir. Farklı bir problem

veya alıştırmada, n-elemanlı vektörlerin gösteriminde yukarıdaki bir yolu seçip bu şekilde kalınız.

Kesim 4.2'deki vektör işlemleri, $n \times 1$ tipinde matrislerde veya sütunlarda işlemlere karşılık gelir. Eğer n-vektörü MATLAB'ta satır matrisleri ile gösterilirse, vektör işlemleri $1 \times n$ tipindeki matrisler üzerindeki işlemlere karşılık gelir. Bunlar, Kesim 9.2'de belirtilen, matrislerde toplama, çıkarma ve skalarla çarpma işlemlerinin sadece özel durumlarıdır.

MATLAB'ta **x** vektörünün boyu veya uzunluğu,

norm(x)

komutu ile bulunur. Bu komut, Kesim 5.1'de incelendiği gibi, $\|\mathbf{x}\|$'e eşit olan, **x**'in bileşenlerinin karelerinin toplamının kare kökünü hesaplar.

MATLAB'ta R^n'de **x** ve **y** vektörleri arasındaki uzaklık,

norm(x-y)

ile bulunur.

ÖRNEK 1

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olsun. R^4'teki bu vektörleri MATLAB'ta sütunlar şeklinde giriniz. O zaman,

norm(u)

komutu ile

```
ans =

    2.6458
```

görüntülenirken

norm(v)

komutu ile

```
ans =

    3.7417
```

görüntülenir ve

norm(u-v)

komutu ile

```
ans =

    1.7321
```

sonucu çıkar. ■

R^n'deki **u** ve **v** vektör çiftinin iç çarpımı (nokta çarpımı) MATLAB'ta,

dot(u,v)

komutu ile hesaplanır.

Örnek 1'deki vektörler için, MATLAB'ta iç çarpım

```
ans =
     9
```

şeklindedir.

Kesim 5.1'de incelendiği gibi, iç çarpım kavramı, n-vektörlerin arasındaki açıyı tanımlamak için kullanışlıdır. Kesim 5.1'deki (8) denkleminde, **u** ve **v** arasındaki θ açısının kosinüsü

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}$$

şeklindedir. MATLAB'ta, **u** ve **v** arasındaki açının kosinüsü

dot(u,v)/(norm(u)*norm(v))

komutu ile hesaplanır. θ açısı, bu ifadenin değerinin arkkosinüsü (arccos) alınarak hesaplanabilir. MATLAB'ta arkkosinüs fonksiyonu **acos** ile belirtilir. Sonuç radyan cinsinden bir açı olacaktır.

ÖRNEK 2 Örnek 1'deki **u** ve **v** vektörleri arasındaki açı,

```
c = dot(u,v)/(norm(u)*norm(v));
angle = acos(c)
```

ile hesaplanır ve görüntüsü

```
angle =
    0.4296
```

şeklindedir. Bu da, yaklaşık 24.61°'dir.

9.7 MATLAB'ta Lineer Birleşimlerin Uygulamaları

Kesim 1.2 ve 4.3'te incelendiği gibi, bir lineer birleşim kavramı, lineer cebirde konuların geniş bir kısmına temel niteliktedir. Germe, lineer bağımsızlık, lineer bağımlılık ve taban fikirleri, vektörlerin lineer birleşimler oluşturmasına dayanır. Ayrıca, Kesim 2.1 ve Kesim 9.4'te incelenen elementer satır işlemleri, aslında "var olan bir satırı, satırların bir lineer birleşimi ile yer değiştirme" şeklindedir. Bir satırın bir çarpımını diğer bir satıra eklediğimiz durum bunun açıkça göstergesidir. (Kesim 9.4'teki **reduce** rutinindeki menüye bakınız.) Bu bakımdan, satırca indirgenmiş eşelon şekil ve satır eşelon şekli, bir matrisin satırlarının lineer birleşimlerini gerçekleştiren işlemlerdir. Bu nedenle, MATLAB rutinleri olan **reduce** ve **rref**, lineer birleşimler içeren problemleri çözmede çok kullanışlıdır.

Burada, lineer birleşimler, germe, lineer bağımsızlık, lineer bağımlılık ve tabanlarla ilgili problemlerin MATLAB'ta nasıl çözüleceğini araştıracağız. Temel strateji, problemle ilgili bir lineer sistem kurmak ve "Bir çözüm var mı?" veya "Tek çözüm, aşikar çözüm müdür?" gibi sorular sormaktır.

■ Lineer Birleşim Problemi

V bir vektör uzayı ve V'de $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ vektör cümlesi verildiğinde, V'ye ait $\mathbf{v}$ vektörünün, S'nin elemanlarının bir lineer birleşimi şeklinde ifade edilip edilemeyeceğini belirleyiniz. Yani,

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k = \mathbf{v}?$$

olacak şekilde $a_1, a_2, \ldots, a_k$ skalarların bir cümlesini bulabilir miyiz?

Birkaç yaygın durum vardır.

DURUM 1 Eğer S'deki vektörler sütun matrisler ise o zaman A katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_k \end{bmatrix}$$

ve sağ tarafı $\mathbf{v}$ olacak şekilde bir lineer sistem kurarız (Kesim 4.3 Örnek 9'da gösterildiği gibi). $c = [c_1 \quad c_2 \quad \ldots \quad c_k]^T$ ve $\mathbf{b} = \mathbf{v}$ olsun. O zaman $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$ lineer sistemini, MATLAB'ta **reduce** veya **rref** kullanarak dönüştürelim. Eğer, sistem hiçbir satırı $[0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \mid q]$, $q \neq 0$ formunda olmayacak şekilde tutarlı olduğu gösterilebilirse, o zaman $\mathbf{v}$ vektörü, S'deki vektörlerin bir lineer birleşimi olarak yazılabilir. Bu durumda, lineer sistemin çözümü katsayıların değerlerini verir.

(**Uyarı:** Çoğu zaman $\mathbf{v}$'nin, S'deki vektörlerin bir lineer birleşimi olup olmadığına karar vermek için sadece sistemin tutarlı olup olmadığını araştırmamız gerekir. Soruyu dikkatlice okuyunuz.)

ÖRNEK 1 Kesim 4.3 Örnek 9'a MATLAB'ı uygulamak için, aşağıdakileri gerçekleyiniz.

```
A = [1  2  1;1  0  2; 1  1  0]'
b = [2  1  5]'
```

tanımlayınız. O zaman

```
rref([A  b])
```

komutunu kullanırsanız

```
ans =
     1     0     0     1
     0     1     0     2
     0     0     1    -1
```

görüntüsü elde edilir. Bu görüntünün, ilaveli matrisin satırca indirgenmiş eşelon şeklini gösterdiğini hatırlayınız. Buradan,

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 2, \qquad a_3 = -1$$

çözümü ile karşılık gelen lineer sistemin tutarlı olduğu görülür. Bu nedenle, $\mathbf{v}$ vektörü, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ ve $\mathbf{v}_3$'ün bir lineer birleşimidir. ■

DURUM 2 Eğer S'deki vektörler satır matrisleri ise, o zaman

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T & \mathbf{v}_2^T & \cdots & \mathbf{v}_k^T \end{bmatrix}$$

katsayılar matrisini yapılandırırız ve $\mathbf{b} = \mathbf{v}^T$ yi oluştururuz. Yöntem, Durum 1'de tanımlandığı gibidir.

DURUM 3 Eğer S'deki vektörler polinomlarsa, o zaman her bir polinom ile katsayıların bir sütununu eşleştiriniz. Polinomda herhangi bulunmayan terimlerin bir sıfır katsayısı ile eşleştiğinden emin olunuz. Uygulanacak bir yol; en yüksek kuvvetli terimin katsayısı sütunun birinci elemanı, ikinci yüksek kuvvetli terimin katsayısı sütunun ikinci elemanı ve böyle devam edecek şekilde yazılmasıdır. Örneğin,

$$t^2 + 2t + 1 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t^2 + 2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad 3t - 2 \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

şeklinde alınır. Şimdi lineer birleşim problemi, Durum 1'deki gibi çözülür.

DURUM 4 Eğer S deki vektörler $m \times n$ tipinde matrisler ise her bir A_j matrisini sütunlarının alt alta yazılması ile oluşturulan $\mathbf{v}_j$ sütunu ile eşleştiriniz. MATLAB'da bu dönüşüm **reshape** komutu kullanılarak yapılır. Daha sonra Durum 1 deki gibi devam edilir.

ÖRNEK 2

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

matrisi verilsin. Yukarıda tanımlandığı gibi, MATLAB'ta, bir sütun matrisi eşleştirmek için önce P matrisini MATLAB'a giriniz, o zaman

v = reshape(P,6,1)

komutunu yazınız,

```
v =

     1
     4
     2
     5
     3
     6
```

görüntüsünü verir. Daha fazla bilgi için, **help reshape** yazınız.

■ Germe Problemi

Germeyle ilgili problemlerin iki yaygın tipi vardır. Birincisi aşağıdaki gibidir:

> Bir V vektör uzayında $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ vektör cümlesi ve $\mathbf{v}$ vektörü verildiğinde, $\mathbf{v}$, S'nin gerdiği alt uzayda mıdır?

Bu, yukarıda verilen lineer birleşim problemi ile aynıdır. Çünkü, $\mathbf{v}$'nin, S'nin elemanlarının bir lineer birleşimi olup olmadığını bilmek istiyoruz. Önceden gösterildiği gibi, bu problemi çözmek için bir çok durumda MATLAB'ı kullanabiliriz.

Germeyle ilgili problemin ikinci tipi aşağıdaki gibidir:

> Bir V vektör uzayında $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$
> vektör cümlesi verildiğinde, ger S (span$S$) $= V$ midir?

Burada, bize sorulan, V'deki her bir vektörün S'deki vektörlerin bir lineer birleşimi olarak yazılıp yazılamayacağıdır. Bu durumda, oluşturulan lineer sistem, V'de keyfi bir vektöre karşılık gelen keyfi değerler içeren bir sağ tarafa sahiptir. (Kesim 4.4'te Örnek 8'e bakınız.) MATLAB, **reduce** ve **rref** gibi rutinlerde sadece sayısal değerleri işlediğinden, burada bu soruyu cevaplamak için (tam olarak) MATLAB'ı kullanamayız.

Germe sorusunun ikinci tipi için, sıkça ortaya çıkan ve MATLAB'ta ele alınabilen özel bir durum vardır. Kesim 4.6'da, bir vektör uzayının boyutu kavramı incelenmiştir. Bir V vektör uzayının boyutu, V'yi gerebilen vektörlerin en küçük sayısı olan, bir tabandaki vektör sayısıdır. (Kesim 4.6'ya bakınız.) Eğer, V'nin k boyutlu olduğunu ve S cümlesinin k tane vektörü olduğunu biliyorsak, o zaman ger $S = V$ olup olmadığını görmek için aşağıdaki yöntemi kullanabiliriz: Germe sorusu ile ilgili bir $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$ lineer sistemi geliştiriniz. Eğer, $\mathbf{0}$ tüm sıfırların bir alt matrisi olmak üzere, A katsayılar matrisinin satırca indirgenmiş eşelon şekli

$$\begin{bmatrix} I_k \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

şeklinde ise, o zaman V'deki herhangi bir vektör S'nin elemanları cinsinden ifade edilebilir. Gerçekten, S, V için bir tabandır. MATLAB'ta, **reduce** veya **rref** rutinini A matrisi üzerinde kullanabiliriz. Eğer A, kare matris ise, aynı zamanda **det** komutunu da kullanabiliriz. Bu stratejiyi Kesim 4.4 Örnek 8 üzerinde deneyiniz.

Bir başka germe problemi, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen denklem sisteminin çözüm cümlelerini geren bir cümlenin bulunmasını kapsar. MATLAB'ta strateji,

rref(A)

komutunu kullanarak, [A ⋮ 0] matrisinin satırca indirgenmiş eşelon biçimini bulmaktır. (Hepsi sıfır olduğundan, ilaveli sütunu almaya gerek yoktur.) O halde, lineer sistemin genel çözümünü bulunuz ve bunu sütunların bir lineer birleşimi olarak ifade ediniz. Sütunlar, lineer sistemin çözüm cümlesi için bir geren cümle oluşturur. Kesim 4.4'te Örnek 10'a bakınız.

■ Lineer Bağımsızlık / Bağımlılık Problemi

$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ vektör cümlesinin lineer bağımsızlığı veya bağımlılığı, bir lineer birleşim problemidir. Sadece $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$ iken $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k$ lineer birleşimi sıfır vektörü veriyor ise S cümlesi lineer bağımsızdır. Katsayıların herhangi biri $c_j \neq 0$ ise S lineer bağımlıdır. Lineer birleşim problemleri üzerine incelemeyi takip ederek, ilgili lineer sistemi

$$A\mathbf{c} = \mathbf{0}$$

şeklinde üretiriz. Bu lineer sistemin homogen olduğuna dikkat ediniz. O zaman aşağıdaki sonuç elde edilir:

> S'nin lineer bağımsız olması için gerek ve yeter koşul
> $A\mathbf{c} = \mathbf{0}$ sisteminin sadece aşikar çözümünün olmasıdır.

Aksi takdirde, S lineer bağımlıdır. Kesim 4.5'te Örnek 3 ve 7'ye bakınız. $A\mathbf{c} = \mathbf{0}$ homogen sistemine sahip olduğumuzdan, lineer sistemin

aşikar olmayan bir çözüme sahip olup olmadığını analiz etmek için **reduce** veya **rref** MATLAB rutinini kullanabiliriz.

Eğer boyutu k olan bir V vektör uzayında bir S cümlesinde k tane vektöre sahip isek, özel bir durum ortaya çıkar. (Kesim 4.6'ya bakınız.) Tüm sıfırların bir altmatrisi **0** olmak üzere,

S'nin lineer bağımsız olması için gerek ve yeter şartın,
A'nın satırca indirgenmiş eşelon şeklinin, $\begin{bmatrix} I_k \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ olduğu

gösterilebilir. Gerçekte, S'nin, V için bir taban olduğunu söylemek için bunu daha da genişletebiliriz. (Teorem 4.12'ye bakınız.) MATLAB'ta, böyle bir durumun analizinde yardımcı olmak için A üzerinde **reduce** ve **rref** rutinlerini kullanabiliriz.

9.8 MATLAB'ta Lineer Dönüşümler

$L : R^n \to R^m$ lineer dönüşümlerinin özel durumunu göz önüne alalım. Böyle lineer dönüşümler $m \times n$ tipinde bir A matrisi ile gösterilebilirler. (Kesim 6.3'e bakınız.) O zaman, R^n'de $\mathbf{x}$ vektörü için, R^m'de, $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ olur. Örneğin,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -5 & -6 \\ 1 & -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

olmak üzere, $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ ile verilen bir $L : R^4 \to R^3$ dönüşümü verilmiş olsun. L altında

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

vektörünün görüntüsü

$$L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -5 & -6 \\ 1 & -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olur.

L **lineer dönüşümünün görüntü cümlesi,** R^n'deki vektörlerin tüm görüntülerinin cümlesini içeren, R^m'in altuzayıdır.

$$L(R^n) = A\text{'nın sütun uzayı}$$

olduğu kolayca gösterilebilir. (Kesim 6.2'de Örnek 7'ye bakınız.) A'nın sütun uzayının bir tabanı biliniyorsa "L'nin görüntü uzayının biliniyor" olduğu görülür. A'nın sütun uzayının bir tabanını bulmak için iki basit yol vardır:

1. **rref(A')**'nın sıfır olmayan satırlarının transpozları sütun uzayının bir tabanını oluşturur. (Kesim 4.9'da Örnek 5'e bakınız.)
2. **rref(A)**'nın 1'lerini kapsayan sütunlar $k_1 < k_2 < \ldots < k_r$ ise, o zaman A'nın k_1 , k_2 , ... , k_r sütunları A'nın sütun uzayının bir tabanıdır. (Kesim 4.9'da Örnek 5'e bakınız.)

Yukarıda verilen A matrisi için

$$\mathbf{rref(A')} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur ve böylece L'nin görüntü uzayının bir tabanı, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ olur. 2. metot ile,

$$\mathbf{rref(A)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. Bu nedenle, A'nın 1. ve 2. sütunları A'nın sütun uzayının ve böylece L'nin görüntü uzayının bir tabanıdır. Ayrıca, **lisub** rutini de kullanılabilir. Yönergeler için **help** komutunu kullanınız.

Bir lineer dönüşümün çekirdeği, R^m'deki görüntüleri sıfır vektörü olan, R^n'deki tüm vektörlerin altuzayıdır. Bu,

$$L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

özelliğini sağlayan tüm **x** vektörlerinin cümlesine karşılık gelir. Bu nedenle, A'nın sıfır uzayı olan, L'nin çek L ile belirtilen çekirdeği,

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

homogen denklem sisteminin bütün çözümlerinin cümlesidir. Böylece, A'nın sıfır uzayının bir tabanı biliniyorsa, "L'nin çekirdeği de bilinir". A'nın sıfır uzayının bir tabanını bulmak için, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ denkleminin genel çözümünü bularak, "genel çözümdeki keyfi sabitleri kullanarak sütunların bir lineer birleşimi şeklinde ayırırız". Elde edilen sütunlar, A'nın sıfır uzayı için bir taban oluşturur. Bu işlemde, **rref(A)** komutu kullanılır. A matrisi için,

$$\mathbf{rref(A)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. 1'i olmayan sütunlara karşılık gelen değişkenleri keyfi seçersek, $x_3 = r$ ve $x_4 = t$ olur. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ denkleminin genel çözümü

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ -r - 2t \\ r \\ t \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ile verildiği görülür. Bu nedenle,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sütunları çek L'nin bir tabanını oluşturur. Bir homogen denklem sisteminin genel çözümünü görüntüleyen **homsoln** rutinine de bakınız. Ay-

rıca, **null** komutu, bir matrisin sıfır uzayı için bir birim dik (ortonormal) tabanını üretir. Bu komutlarla ilgili diğer bilgiler için **help** komutunu kullanınız.

Özet olarak, MATLAB'ta **rref** komutunun uygun kullanımı, $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ lineer dönüşümünün hem çekirdeğinin hem de görüntü uzayının tabanlarını verecektir.

9.9 MATLAB Komut Özeti

Bu kesimde, bu kitapta kullanılan temel MATLAB komut ve operatörlerinin listesini vereceğiz. Liste iki kısma ayrılmıştır: MATLAB programı ile gelen komutlar ve bu kitabın kullanıcıları için uygun olan özel öğretici rutinler. Kaynağın kolaylığı için, bu kitabın kullanıcıları için uygun olan her yapısal rutinin kısa bir açıklaması verilmiştir. Bu açıklamalar, bir kez yükleme işlemleri tamamlandıktan sonra, MATLAB'ın **help** komutundan da bulunabilir. Herhangi bir MATLAB komutunun bir açıklaması, **help** komutu kullanılarak elde edilebilir. (Bu bölümün girişine bakınız.)

MATLAB içinde var olan komutlar

ans	**inv**	**root**
clear	**norm**	**rref**
conj	**null**	**size**
det	**ones**	**sqrt**
diag	**pi**	**sum**
dot	**poly**	**tril**
eig	**polyval**	**triu**
exit	**polyvalm**	**zeros**
eye	**quit**	\
fix	**rand**	;
format	**rank**	:
help	**rat**	′ (üs)
hilb	**real**	+ , – , * , / , ^
image	**reshape**	

Tamamlayıcı Öğretici Komutlar

adjoint	**forsub**	**picgen**
bksub	**gschmidt**	**planelt**
circimages	**homsoln**	**reduce**
cofactor	**invert**	**rowop**
crossprd	**lsqline**	**vec2demo**
crossdemo	**lupr**	**vec3demo**

rref ve **reduce** komutlarının her ikisi de, birçok kesimde kullanılmıştır. Tamamlayıcı komutlar tarafından istenen bazı yararlı komutlar, **arrowh, mat2strh, scan, svdword1, svdword2** ve **blkmat** dır. Aşağıda verilen açıklamalar, **help** komutuna verilen cevapların görüntüleridir. Bazı komutların açıklamalarında, gösterimle bu metindekinden biraz farklı olabilir.

Öğretici Komutların Açıklaması

ADJOINT

A kare matrisinin klasik adjoint matrisini hesaplar. Eğer A kare matris değilse, boş bir matris olarak geri döner.
*** Bu rutin, sadece, öğrenciler tarafından adjoint hesaplamaları kontrol etmede kullanılmalı ve inversleri hesaplamada bir rutinin parçası olarak kullanılmamalıdır. invert veya inv komutlarına bakınız.

Kullanış şekli ==> adjoint(A) <==

BKSUB

Ax = b üst üçgensel sisteminde geriye yerine koyma işlemi gerçekleştirir. Eğer A kare, üst üçgensel ve singüler değilse, bir hata mesajı görüntülenir. Bir hata durumunda geri dönen sonucun tamamı sıfır olur.

Kullanış şekli ==> bksub(A,b) <==

CIRCIMAGES

Birim çemberin görüntülerinin bir 2×2 tipinde matris ile dönüştürüldüğündeki bir gösterimi

Kullanış şekli ==> circimages(A) <==

Çıktısı k = 1,2,...,6 için A^k*(birim çember) için 6 grafikten oluşan bir cümledir. Görüntüler, aynı boyutta grafik kutusunda olacak şekilde ölçeklenir.

COFACTOR

A matrisinin (i,j)-kofaktörünü hesaplar. Eğer A kare matris değilse, bir hata mesajı görüntülenir.
*** Bu rutin, öğrenciler tarafından sadece kofaktör hesaplamalarını kontrol etmede kullanılmalıdır.

Kullanış şekli ==> cofactor(i,j,A) <==

CROSSDEMO

Üç boyutlu vektörlerin bir çiftini ve vektörel çarpımını (çapraz çarpımı) görüntüler.

u ve v girdi vektörleri, üç boyutlu bir perspektifte vektörel çarpımı ile birlikte görüntülenir. Canlandırma amacı ile 3-D koordinat ekseni gösterilir.

Kullanış şekli ==> crossdemo(u,v) <==

veya bir demo veya girdi için hazırlık için ==> crossdemo <==

CROSSPRD

3-boyutlu uzayda x ve y vektörlerinin vektörel çarpımını hesaplar. Çıktı, her iki orijinal x ve y vektörlerine dik bir vektördür. Çıktı, i, j, k sırasıyla x,y, ve z doğrultularındaki birim vektörler olmak üzere, v1*i + v2*j + v3*k şeklinde belirlenen üç bileşenli [v1 v2 v3] bir satır matrisi şeklinde geri döner.

Kullanış şekli ==> v = crossprd(x,y) <==

FORSUB

Bir Ax = b alt üçgensel sistemi üzerinde ileri yerine koyma işlemi gerçekleştirir. Eğer A kare, alt üçgensel ve singüler değilse, bir hata mesajı görüntülenir. Bir hata durumunda çözümün hepsi sıfır olarak döner.

Kullanış şekli ==> forsub(A,b) <==

GSCHMIDT — x matrisinin sütunları üzerinde Gram-Schmidt yöntemi. y'nin sadece bir dik taban içerdiği durumda, ikinci bir argüman olmadığı zaman y'nin sütunlarında birim dik taban görünür. İkinci argüman herhangi bir değer alabilir.

Kullanış şekli ==> y = gschmidt(x) <==

veya ==> y = gschmidt(x,v) <==

HOMSOLN — Bir homogen denklem sisteminin genel çözümünü bulur. Rutin, Ax = 0'ın sıfır uzayı için taban vektörlerin bir cümlesi olarak döner.

Kullanış şekli ==> ns = homsoln(A) <==

Eğer ikinci bir bileşen varsa, genel çözüm görüntülenir.

Kullanış şekli ==> homsoln(A,1) <==

Bu seçenek, genel çözümün en fazla 10 tane keyfi sabite sahip olduğunu kabul eder.

INVERT — [A I] matrisine satırca indirgenmiş eşelon şekil uygulanmasını kullanarak bir A matrisinin tersini hesaplar. Eğer A singüler ise, bir uyarı verilir.

Kullanış şekli ==> B = invert(A) <==

LSQLINE — Bu rutin, sıralı çiftlerin bir girdi cümlesine en küçük kareler doğrusunun denklemini kuracak ve sonra doğrunun ve girdi cümlesinin grafiğini çizecektir. Noktalardaki doğrunun denklemini hesaplamayı içeren kısa bir seçenek mönüsü mevcuttur.

Kullanış şekli ==> c = lsqline(x,y) veya lsqline(x,y) <==

Burada, x, x-koordinatlarını içeren bir vektör ve y, y-koordinatlarını içeren bir vektördür. Çıktıda, c, en küçük kareler doğrusunun katsayılarını kapsar:

$$y = c(1)*x + c(2)$$

LUPR — Satır işlemlerini kullanarak A matrisini LU çarpanlarına ayırma işlemini gerçekleştirir. Satırların kendi aralarında yer değiştirmesine izin verilmez. Bundan dolayı çarpanlarına ayırma bulunamayabilir. L ve U matrislerinin görüntüleri mümkün olan tüm ondalık yerleri göstermediğinden, -U(3,2) / U(2,2) gibi, U matrisinin elemanları cinsinden çarpanların yapılandırılması tavsiye edilir. Bir satır işlemi "yapılmamış" olabilir, fakat bu özellik ardışıklıkta kullanılmayabilir.

Bu rutin, mat2strh ve blkmat deyimlerini kullanır.

Kullanış şekli ==> [L,U] = lupr(A) <==

PICGEN — A'da bulunan şeklin sayısallaştırılmış bir görüntüsünün singüler değer ayrışımını kullanarak bir düşük rank yaklaşımı oluşturur.

npic, oluşturulmuş son yaklaşımı kapsar.

(rutin taraması gereklidir)

Kullanış şekli ==> npic = picgen(A) <==

PLANELT

Lineer düzlem dönüşümlerinin gösterimi:

Dönmeler (Rotasyonlar), Yansımalar, Genişlemeler/Sıkıştırmalar, Kaymalar.

Veya kendi dönüşümünüzü belirtebilirsiniz.

Katlı bir pencere görüntüsü kullanılarak ardışık düzlem lineer dönüşümlerinin grafiksel sonuçları görülebilir. Standart şekiller seçilebilir veya kendi şeklinizi seçebilirsiniz.

Kullanış şekli ==> planelt <==

REDUCE

Satır işlemlerini kullanarak A matrisinde satır indirgeme gerçekleştirir. Bir satır işlemi "yapılmamış" olabilir, fakat bu özellik ardışıklıkta kullanılmayabilir. Bu rutin, reel veya kompleks olan küçük matrisler içindir.

Bir demo seçmek için Kullanış şekli ==> reduce <==

veya kendi A matrisinizi girerek Kullanış şekli

==> reduce (A) <==

ROWOP

Satır işlemlerini kullanarak reel bir A matrisinde satır indirgeme gerçekleştirir. Bir satır işlemi "yapılmamış" olabilir, fakat bu özellik ardışıklıkta kullanılmayabilir. Matrisler en fazla 6 × 6 tipinden olabilir.

Bilgiyi girmek için, fareyle gri kutucuklara tıklayınız ve istenen sayısal değeri yazarak ENTER'a basınız.

Kullanış şekli ==> rowop <==

Eğer A matrisi kompleks ise, REDUCE rutini çağrılır.

SCAN

Boşluklar ve X'ler içeren bir görüntü matris resmi oluşturmak için A girdi matrisini eleman eleman tarar. Eğer sadece bir argüman varsa, kemer (tol) 0.5 ten başlar ve görüntü oluşturma için

```
eğer A(i,j) > tol ise pic(i,j)=X
       değilse pic(i,j)=boşluk
```

kuralı kullanılır.

Kullanış şekli ==> pic = scan(A) <==

veya ==> pic = scan(A,tol) <==

UYARI: Doğru görüntü için kullanılan komut pencere fontu sabit genişlikte bir font olmalıdır. fixedsys veya courier new fontu deneyiniz.

VEC2DEMO

İki boyutlu vektörler için vektör işlemlerinin bir grafiksel gösterimi.

u = [x1 x2] ve v = [y1 y2] vektörlerini seçiniz. Toplamları, farkları, ve bir skalar çarpımı ile birlikte grafiksel olarak görüntülenecektir.

Kullanış şekli ==> vec2demo(u,v) <==

veya ==> vec2demo <==

Son durumda, giriş için hazır hale gelecektir.

```
VEC3DEMO        Üç boyutlu vektörlerin bir çiftini, toplamlarını,
                farklarını ve skalarla çarpımlarını görüntüler.

                u ve v girdi vektörleri, toplamları, farkları, ve
                seçilen skalarla çarpımları ile birlikte 3-boyutlu bir
                perspektifte görüntülenir. Canlandırma amacıyla 3-D
                koordinat ekseni görünür.

                Kullanış şekli ==> vec3demo(u,v) <==

                bir demo, veya girdi için hazırlık seçmede ==>
                vec3demo <==
```

BÖLÜM

10 MATLAB Alıştırmaları

10.1 Giriş

Bölüm 9'da elementer Lineer Cebir derslerinde kullanmak için MATLAB ve onun kullanımı hakkında kısa bir bilgi verdik. Bu bölüm, MATLAB kullanarak çözebileceğimiz şekilde düzenlenmiş alıştırmalardan oluşmaktadır. Ancak, burada okuyucudan program yazması istenmemektedir. Sadece belirli sayısal problemlerin MATLAB yardımıyla çözmesi istenmektedir.

Bu bölümde yer alan alıştırmalar Bölüm 1'den Bölüm 8'e kadar anlatılanları tamamlayıcı nitelikte olup, MATLAB'ın sayısal hesaplamalarda ne kadar yetenekli olduğunu ortaya koymaktadır. MATLAB'ı daha etkin kullanmak amacıyla simgeler veya M-dosyaları diyeceğimiz bir kavram cümlesi geliştirdik. Bunlar, hesaplamaları adım adım gösteren akış şemaları ve grafik kullanılarak konuların geometrik yönünü belirten kavramların mantıksal bir dizisinin oluşturduğu cümlelerdir. MATLAB sayesinde geliştirdiğimiz M-dosyalarının kullanılması öğrencilerin bilgisayarla ortak çalışmalarına olanak vererek 21. yüzyılın teknolojik iş gücüne katılımlarını da sağlamaktadır.

Bu bölümdeki alıştırmalar konunun parçalarından ziyade bütününe yöneliktir. Alıştırmalar hakkında bilgi vermek için konuların başında kısa açıklamalar yapılmış ve Bölüm 9'da yer alan MATLAB komutlarından gerekli olanları belirtilmiştir.

Temel Matris Özellikleri

Bu kesimde MATLAB*'ı kullanmadan önce* MATLAB *ve* MATLAB*'da matris işlemleri ile ilgili temel bilgilerin verildiği Kesim 9.1 ve 9.2 okunmalıdır. Alıştırmalara geçmeden önce, Kesim 9.1 ve 9.2'de yer alan* MATLAB *komutlarına ilişkin örneklerin yapılması önerilir.*

ML.1. MATLAB'da aşağıdaki matrisleri giriniz:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 4*2 & 2/3 \\ 1/201 & 5-8.2 \\ 0.00001 & (9+4)/3 \end{bmatrix}.$$

MATLAB komutlarını kullanarak aşağıdakileri görüntüleyiniz.

(a) a_{23}, b_{32}, b_{12}

(b) satır$_1(A)$, sütun$_3(A)$, satır$_2(B)$

(c) MATLAB'da **format long** komutunu yazınız ve B matrisini görüntüleyiniz. B matrisinin (a) daki elemanlarıyla yeni elde edilen görüntüdeki elemanlarını karşılaştırınız. **format short** komutunun dördüncü ondalık basamaktan sonrasını yuvarladığını belirtelim. Şimdi **format short**'u yeniden başlatınız.

ML.2. MATLAB'da **H = hilb(5);** komutunu yazınız. (Bu komuttaki son karakter olan noktalı virgülün H matrisinin elemanlarının görüntülenmesini engellediğine dikkat ediniz. Kesim 9.1'e bakınız.) **hilb** komutu ile ilgili daha fazla bilgi için, **help hilb** yazınız. MATLAB komutlarını kullanarak aşağıdakileri yapınız:

(a) H'nın büyüklüğünü belirleyiniz.

(b) H'nın elemanlarını görüntüleyiniz.

(c) İlk üç sütununu bir matris olarak oluşturunuz.

(d) Son iki satırını bir matris olarak oluşturunuz.

ML.3. Bazen bir matrisin elemanlarını rasyonel sayılarla göstermek daha uygun olur.

(a) MATLAB'da aşağıdaki komutları yazınız:

format rat
H = hilb(5)

Elemanlar olarak ortaya çıkan kesirleri not ediniz.

(b) Uyarı: **format rat** komutu sadece görüntüleme amaçlıdır. Bütün MATLAB hesaplamaları ondalık karakterli ifadeler kullanır. Ayrıca, **format rat** komutu sadece yaklaşık olarak gösterebilir. MATLAB'da aşağıdaki komutları yazınız:

format rat
pi
format long
pi-355/113

format rat ile gösterilen değer π'nin sadece bir yaklaşık değeridir.

Matris İşlemleri

ML.1. MATLAB'da **clear** komutunu yazdıktan sonra aşağıdaki matrisleri giriniz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 \\ 1/5 & 1/6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 5/4 & 9/4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

MATLAB komutlarını kullanarak, eğer mümkünse, aşağıdakileri hesaplayınız. Üs işaretinin MATLAB'da transpozu gösterdiğini hatırlayınız.

(a) $A*C$ **(b)** $A*B$

(c) $A+C'$ **(d)** $B*A-C'*A$

(e) $(2*C-6*A')*B'$ **(f)** $A*C-C*A$

(g) $A*A'+C'*C$

ML.2. MATLAB'da

$$\begin{aligned} 2x+4y+6z &= -12 \\ 2x-3y-4z &= 15 \\ 3x+4y+5z &= -8 \end{aligned}$$

denklem sisteminin katsayılar matrisini giriniz ve bu matrisi A ile gösteriniz. Denklem sisteminin sağ tarafını giriniz ve bunu **b** ile gösteriniz. **[A b]** MATLAB komutunu kullanarak, bu lineer denklem sisteminin ilaveli matrisini oluşturunuz. İlaveli matrise **aug** gibi bir isim vermek için **aug = [A b]** komutunu kullanınız. (Periyodu yazmayınız!) MATLAB'da katsayılar matrisi ile sağ taraf arasındaki çizginin görünmediğine dikkat ediniz.

ML.3. Yukarıdaki alıştırmada yapılanları aşağıdaki lineer denklem sistemi için tekrarlayınız:

$$\begin{aligned} 4x-3y+2z-w &= -5 \\ 2x+y-3z &= 7 \\ -x+4y+z+2w &= 8. \end{aligned}$$

ML.4. MATLAB'da aşağıdaki matrisleri giriniz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

ve

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -3 & 4 \\ 4 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) MATLAB komutlarını kullanarak, satır$_2(A)$'yı **R** ve sütun$_3(B)$'yi **C** ile gösteriniz. **V = R∗C** olsun. **V**, **A∗B** çarpımının bileşenleri cinsinden nedir?

(b) MATLAB komutlarını kullanarak, sütun$_2(B)$'yi **C** ile gösterip **V = A∗C'**yi hesaplayınız. **V**, **A∗B** çarpımının bileşenleri cinsinden nedir?

(c) MATLAB komutlarını kullanarak, satır$_3(A)$'yı **R** ile gösteriniz ve **V = R∗B'**yi hesaplayınız. **V**, **A∗B** çarpımının bileşenleri cinsinden nedir?

ML.5. MATLAB'da **diag** komutunu kullanarak aşağıda verilen köşegen matrisleri teşkil ediniz. **diag** komutu kullanılarak, köşegen matrisleri diğer bütün bileşenlerini yazmadan teşkil edebiliriz. (**diag** komutu hakkında bilgilerinizi yenilemek için MATLAB'ın **help** komutunu kullanınız.)

(a) Esas köşegeni [1 2 3 4] olan 4×4 köşegen matris

(b) Esas köşegeni $\left[0 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4}\right]$ olan 5×5 köşegen matris

(c) Köşegeni üzerindeki bütün elemanları 5 olan 5×5 skaler matris

ML.6. MATLAB, +, – ve ∗ işlemlerinin standart tanımlarından oldukça farklı işleyen bazı komutlara sahiptir. MATLAB'da aşağıdaki matrisleri giriniz:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 9 & 4 \\ 7 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

Aşağıdaki komutların her birini uyguladıktan sonra yapılan işlemleri tarif ediniz.

(a) A.∗B

(b) A./B ve **B./A**

(c) A.∧2

Bir Matrisin Kuvvetleri

Bu kesimde MATLAB *kullanmak için, öncelikle Bölüm 9'u Kesim 9.3'e kadar okumuş olmalısınız.*

ML.1. MATLAB'ı kullanarak, aşağıdaki her bir hal için en küçük pozitif k tamsayısını bulunuz.

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ için $A^k = I_3$

(b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ için $A^k = A$

ML.2. MATLAB'ı kullanarak aşağıdaki her bir durum için A matrisini görüntüleyiniz. A^k bir sıfır matris olacak şekildeki en küçük k değerini bulunuz. Burada, **tril**, **ones**, **triu**, **fix** ve **rand** MATLAB komutlarıdır. (Bunların tanımlarını görmek için **help** komutunu kullanınız.)

(a) A = **tril**(**ones**(**5**), **–1**)

(b) A = **triu**(**fix**(**10∗rand**(**7**)), **2**)

ML.3. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ olsun. MATLAB'da **polyvalm** komutunu kullanarak aşağıdaki matris polinomlarını hesaplayınız:

(a) $A^4 - A^3 + A^2 + 2I_3$

(b) $A^3 - 3A^2 + 3A$

ML.4. $A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$ olsun. MATLAB'ı kullanarak aşağıdaki matris ifadelerinin her birini hesaplayınız:

(a) $(A^2 - 7A)(A + 3I_3)$

(b) $(A - I_3)^2 + (A^3 + A)$

(c) $A, A^2, A^3, \ldots, A^8, \ldots$ matris dizisine bakınız. Bu dizi bir matrise yakınsıyor mu? Eğer yakınsıyorsa, bu matris nedir?

ML.5. $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ olsun. MATLAB'ı kullanarak $A, A^2, A^3, \ldots, A^k, \ldots$ matris dizisinin elemanlarını belirleyiniz ve bu dizinin karakterini yazınız.

ML.6. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$ olsun. Alıştırma ML.5'tekileri tekrarlayınız.

ML.7. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ olsun. MATLAB'ı kullanarak aşağıdakileri yapınız:

(a) A^TA ve AA^T matrislerini hesaplayınız. Bu matrisler eşit midir?
(b) $B = A + A^T$ ve $C = A - A^T$ matrislerini hesaplayınız. B matrisinin simetrik ve C matrisinin antisimetrik olduğunu gösteriniz.
(c) $B + C$ ve A matrisleri arasındaki ilişkiyi belirleyiniz.

Satır İşlemleri ve Eşelon Şekiller

Bu kesimde MATLAB*'ı kullanmak için, öncelikle Bölüm 9'u Kesim 9.4'e kadar okumuş olmalısınız.* (**reduce** *komutu yerine*, **rowop** *komutu kullanılabilir*.)

ML.1.
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

olsun. A matrisine aşağıdaki satır işlemlerini ardışık olarak uygulayarak elde edilen matrisleri bulunuz. Satır işlemlerini doğrudan doğruya sütun işlemi olarak kullanınız.
(a) 1. satırı $\frac{1}{4}$ ile çarpınız.
(b) 1. satırın 3 katını 2.satıra ekleyiniz.
(c) 1. satırın (–1) katını 3.satıra ekleyiniz.
(d) 1. satırın (–5) katını 4.satıra ekleyiniz.
(e) 2. ve 4. satırları yer değiştiriniz.

ML.2.
$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

olsun. Aşağıdaki satır işlemlerini A matrisine ardışık olarak uygulamak suretiyle elde edilen matrisleri bulunuz. Satır işlemlerini doğrudan doğruya sütun işlemi olarak kullanınız.
(a) 1. satırı 2 ile çarpınız.
(b) 1. satırın $(-\frac{1}{3})$ katını 2. satıra ekleyiniz.
(c) 1. satırın (–1) katını 3. satıra ekleyiniz.
(d) 2. ve 3. satırları yer değiştiriniz.

ML.3. **reduce** komutunu kullanarak Alıştırma ML.1'deki A matrisinin satırca indirgenmiş eşelon şeklini bulunuz.

ML.4. **reduce** komutunu kullanarak Alıştırma ML.2'deki A matrisinin satırca indirgenmiş eşelon şeklini bulunuz.

ML.5. **reduce** komutunu kullanarak Kesim 2.2'de Alıştırma 6(a)'daki lineer denklem sisteminin bütün çözümlerini bulunuz.

ML.6. **reduce** komutunu kullanarak Kesim 2.2'de Alıştırma 7(b)'deki lineer denklem sisteminin bütün çözümlerini bulunuz.

ML.7. **reduce** komutunu kullanarak Kesim 2.2'de Alıştırma 8(b)'deki lineer denklem sisteminin bütün çözümlerini bulunuz.

ML.8. **reduce** komutunu kullanarak Kesim 2.2'de Alıştırma 9(a)'daki lineer denklem sisteminin bütün çözümlerini bulunuz.

ML.9.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

olsun. **reduce** komutunu kullanarak
$$(5I_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$
homogen sisteminin aşikar olmayan bir çözümünü bulunuz.
[*Yol Gösterme*: MATLAB'da A matrisini girdikten sonra **reduce(5*eye(size(A))–A)** komutunu kullanınız.]

ML.10.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

olsun. **reduce** komutunu kullanarak
$$(-4I_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$
homogen sisteminin aşikar olmayan bir çözümünü bulunuz.
[*Yol gösterme*: MATLAB'da A matrisini girdikten sonra **reduce(–4*eye(size(A))–A)** komutunu kullanınız.]

ML.11. MATLAB'da **rref** komutunu kullanarak, Kesim 2.2'de Alıştırma 8'deki lineer sistemleri çözünüz.

ML.12. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ şeklindeki karesel lineer sistemlerin çözümü için MATLAB doğrudan bir komuta sahiptir. A katsayılar matrisini ve A'yi MATLAB'da girdikten sonra, eğer A regüler ise,
$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\backslash\mathbf{b}$$
komutu sistemin çözümünü verecektir. \ komutu satırca indirgenmiş eşelon şeklini kullanmaz, fakat Kesim 2.5'te kısaca değindiğimiz sayısal metotları başlatır. Bu komutun detayları için, D. R. Hill, *Experiments in Computational Matrix Algebra,* New York: Random House, 1988'e bakınız.
(a) Kesim 2.2'de Alıştırma 8(a)'yı çözmek için, \ komutunu kullanınız.
(b) Kesim 2.2'de Alıştırma 6(b)'yi çözmek için, \ komutunu kullanınız.

ML.13. \ komutu **rref** komutundan farklıdır.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
olmak üzere, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sistemini çözmek için \ ve **rref** komutlarının her ikisini de kullanınız.

LU-Ayrışımı

lupr *komutu* MATLAB*'da Kesim 2.5'te ele aldığımız LU-ayrışımını elde etmek için adım adım basit bir yöntem sağlar. LU-ayrışımını elde edince, ileri ve geri yer değiştirme yapmak için sırasıyla* ***forsub*** *ve* ***bksub*** *komutları kullanılabilir. Bunlar hakkında daha fazla bilgiye sahip olmak için* ***help*** *komutunu kullanınız.*

ML.1. MATLAB'da **lupr** komutunu kullanarak

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

matrisinin bir LU-ayrışımını bulunuz.

ML.2. MATLAB'da **lupr** komutunu kullanarak

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 3 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisinin bir LU-ayrışımını bulunuz.

ML.3. MATLAB'da **lupr**, **forsub** ve **bksub** komutlarını kullanarak, Kesim 2.5'te Alıştırma 2'deki lineer denklem sistemini çözünüz. Kesim 2.5'te Örnek 3'ü kullanarak bulduğunuz LU-ayrışımını kontrol ediniz.

ML.4. MATLAB'da **lupr**, **forsub** ve **bksub** komutlarını kullanarak, Kesim 2.5'te Alıştırma 7 ve 8'i çözünüz.

Matrislerin Tersleri

Bu kesimde MATLAB*'ı kullanmak için öncelikle Bölüm 9'u Kesim 9.5'e kadar okumuş olmalısınız.*

ML.1. MATLAB'ı kullanarak aşağıdaki matrislerin hangilerinin regüler olduğunu belirleyiniz. **rref** komutunu kullanınız.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

ML.2. MATLAB'ı kullanarak aşağıdaki matrislerin hangilerinin regüler olduğunu belirleyiniz. **rref** komutunu kullanınız.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ **(b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ML.3. MATLAB'ı kullanarak aşağıdaki matrislerin terslerini bulunuz. **rref**([**A eye**(**size**(**A**))]) komutunu kullanınız.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ **(b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

ML.4. MATLAB'ı kullanarak aşağıdaki matrislerin terslerini bulunuz. **rref**([**A eye**(**size**(**A**))]) komutunu kullanınız.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ **(b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ML.5. MATLAB'ı kullanarak ($tI - A$) matrisi singüler olacak şekilde bir t pozitif tamsayısı bulunuz.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

Satırca İndirgeme ile Determinantlar

Bu kesimde MATLAB*'ı kullanmak için öncelikle Bölüm 9'u Kesim 9.5'e kadar okumuş olmalısınız.*

ML.1. Satır işlemleri yapmak için **reduce** komutunu kullanınız ve Kesim 3.2'de Örnek 8'deki gibi determinantta meydana gelen değişimleri izleyiniz.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ML.2. Satır işlemleri yapmak için **reduce** komutunu kullanınız ve Kesim 3.2'de Örnek 8'deki gibi determinantta meydana gelen değişimleri izleyiniz.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

ML.3. Bir matrisin determinantının değerini MATLAB'da bulmak için **det** komutunu kullanınız. Bunun için sadece **det**(**A**) yazınız. **det** komutunu kullanarak aşağıdaki matrislerin determinantlarını bulunuz.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

ML.4. Aşağıdakilerin her birinin determinantını hesaplamak için **det** komutunu (Alıştırma ML.3'e bakınız.) kullanınız.

(a) **5∗eye(size(A))–A**,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(b) **(3*eye(size(A))–A)^2**,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

(c) **invert(A)∗A**,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ML.5.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

olmak üzere **det(t∗eye(size(A)) – A) = 0** olacak şekilde bir t pozitif tamsayısı bulunuz.

Kofaktör Açılımı ile Determinantlar

ML.1. MATLAB'da bir matrisin (i, *j*)-kofaktörünü **cofactor** komutu ile hesaplarız. Bu komutun kullanılması için gerekli yönlendirmeleri görmek için **help cofactor** yazınız. Kesim 3.4'te Alıştırma 1'deki A matrisi için yaptığınız hesaplamaları **cofactor** komutunu kullanarak kontrol ediniz.

ML.2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinin ikinci satır elemanlarının kofaktörlerini hesaplamak için **cofactor** komutunu (Alıştırma ML.1'e bakınız.) kullanınız.

ML.3. Teorem 3.10'u kullanarak,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantını hesaplamak için **cofactor** komutunu kullanınız.

ML.4. Teorem 3.10'u kullanarak,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantını hesaplamak için **cofactor** komutunu kullanınız.

ML.5. MATLAB'da bir matrisin eki'ni hesaplamak için **adjoint** komutu vardır. Bu komutun kullanılması için gerekli yönlendirmeleri görmek için **help adjoint** yazınız. Kesim 3.4'te Alıştırma 7'deki matrislerin terslerini **adjoint** komutu yardımıyla bulunuz.

Vektörler (Geometrik Olarak)

Alıştırma ML.1-ML.3 için düzlemdeki vektörlerin grafik gösterimini veren **vec2demo** *komutunu kullanınız.* $\mathbf{u} = (x_1, y_1)$ *ve* $\mathbf{v} = (x_2, y_2)$ *vektör çifti için* **vec2demo** *komutuyla* **u**, **v**, **u + v**, **u – v** *ve bunların bir skaler ile çarpımın grafiğini çizebiliriz.* MATLAB*'da* **u** *ve* **v** *vektörlerini girip*

vec2demo(u, v)

yazınız. Daha fazla bilgi için **help vec2demo** *yazınız.*

ML.1. Aşağıdaki vektör çiftlerinin her biri için **vec2demo**'yu kullanınız. (MATLAB'da köşeli parantezler kullanılır.)

(a) $\mathbf{u} = [2 \quad 0], \mathbf{v} = [0 \quad 3]$

(b) $\mathbf{u} = [-3 \quad 1], \mathbf{v} = [2 \quad 2]$

(c) $\mathbf{u} = [5 \quad 2], \mathbf{v} = [-3 \quad 3]$

ML.2. Aşağıdaki vektör çiftlerinin her biri için **vec2demo**'yu kullanınız.

(a) $\mathbf{u} = [2 \quad -2], \mathbf{v} = [1 \quad 3]$

(b) $\mathbf{u} = [0 \quad 3], \mathbf{v} = [-2 \quad 0]$

(c) $\mathbf{u} = [4 \quad -1], \mathbf{v} = [-3 \quad 5]$

ML.3. **u** ve **v** vektörlerini kendiniz seçerek **vec2demo**'yu kullanınız.

ML.4. R^3'teki vektör işlemlerini **vec3demo** komutu yardımıyla görüntüleriz. Bu komut 3-boyutlu uzayda vektörlerin grafik gösterimlerini sağlar. **u** ve **v** vektör çifti için **vec3demo** komutu yardımıyla **u**, **v**, **u + v**, **u – v** ve bunların bir skaler ile çarpımının grafiğini çizebiliriz. R^3'te bir vektör çiftini MATLAB'da giriniz ve

vec3demo(u, v)

yazınız.

R^3'te verilen aşağıdaki vektör çiftleri için **vec3demo** komutunu kullanınız. (MATLAB'da köşeli parantezler kullanılır.)

(a) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}^T, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -5 \end{bmatrix}'$

(b) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 4 \end{bmatrix}^T, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -2 \end{bmatrix}'$

(c) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -5 \end{bmatrix}^T, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}'$

Vektör Uzayları

Bu kesimde ele alacağımız kavramlar MATLAB*'da kolayca çalışılamayacaktır. Tanım 4.4'teki özellikler bütün vektörler için sağlanmalıdır. Çünkü Tanım 4.4'teki bir özelliğin birkaç vektör için* MATLAB*'da gerçekleniyor olması bu özelliğin diğer bütün vektörler için sağlanmasını gerektirmez. O nedenle böylesi bir hataya düşmemek için dikkatli olmalısınız. Ancak, eğer özel bir vektör çifti için bir özellik* MATLAB*'da gerçeklenmiyor ise o zaman bu özelliğin diğer bütün hallerde de gerçeklenemeyeceğini söyleyebiliriz. Böylece özelliğin yanlış olduğu düşünülür. Bu şekilde bir cümlenin, bir vektör uzayı yapısına sahip olamayacağını gösterebiliriz.*

ML.1. V, aşağıdaki MATLAB komutlarıyla verilen işlemlerle birlikte 2×2 tipinden bütün matrislerin cümlesi olsun:

$A \oplus B$ işlemi $A .* B$
$k \odot A$ işlemi $k + A$

V cümlesi bir vektör uzayı mıdır? (*Yol gösterme:* 2×2 tipinden birkaç matris giriniz ve Tanım 4.4'teki koşulları kontrol etmeden önce MATLAB komutlarıyla bunların davranışlarını anlamayı deneyiniz.)

ML.2. Kesim 4.2'de Örnek 6 yardımıyla n. veya daha küçük dereceden polinomların P_n vektör uzayını ele alalım. P_n'nin bir $p(t)$ polinomunu $(n + 1)$ mertebeli bir satır matrisi ile göstererek, n. dereceden polinomlar üzerindeki işlemleri yapabiliriz.

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 \rightarrow \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

şeklinde bir eşleme ile $p(t)$'nin katsayılarından bir satır matrisi oluşur. Eğer $p(t)$'nin herhangi bir terimi yoksa, onun katsayısı için sıfır kullanılır. Böylece, polinomların toplamı işlemi matrislerin toplama işlemine ve bir skalar ile bir polinomun çarpımı işlemi de matrislerin skalar ile çarpımı işlemine karşılık gelir. Tanımlanan bu eşlemeyi kullanarak, aşağıdaki polinom işlemlerini MATLAB ile yapınız. $n = 3$ ve

$$p(t) = 2t^3 + 5t^2 + t - 2,$$
$$q(t) = t^3 + 3t + 5.$$

olsun.

(a) $p(t) + q(t)$ **(b)** $5p(t)$

(c) $3p(t) - 4q(t)$

Alt Uzaylar

ML.1. $V = R^3$ ve V'nin $\begin{bmatrix} 2 & a & b \end{bmatrix}$ şeklindeki vektörlerinden oluşan alt cümlesi W olsun. Burada a ve b herhangi reel sayılardır. W cümlesi V'nin bir alt uzayı mıdır? Bu soruyu cevaplamak için aşağıdaki MATLAB komutlarını kullanınız.

```
a1 = fix(10 * randn);
a2 = fix(10 * randn);
b1 = fix(10 * randn);
b2 = fix(10 * randn);
v = [2  a1  b1]
w = [2  a2  b2]
v + w
3 * v
```

ML.2. $V = P_2$, a ve b keyfi reel sayılar olmak üzere V'nin $ax^2 + bx + 5$ şeklindeki vektörlerinden oluşan alt cümlesi W olsun. W cümlesindeki her bir polinomu R^3'teki $\begin{bmatrix} a & b & 5 \end{bmatrix}$ vektörü ile eşleyelim. Alıştırma ML.1'deki komutları kullanarak W'nin V'nin bir alt uzayı olmadığını gösteriniz.

Aşağıdaki MATLAB *alıştırmalarını çözmeden önce Kesim 9.7'yi okumuş olmalısınız.*

ML.3. MATLAB'ı kullanarak $\mathbf{v}$ vektörünün S cümlesindeki vektörlerin bir lineer birleşimi olup olmadığını belirleyiniz.

(a) $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$
$= \{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\}$
$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

ML.4. MATLAB'ı kullanarak $\mathbf{v}$ vektörünün S cümlesindeki vektörlerin bir lineer birleşimi olup olmadığını belirleyiniz. Eğer öyleyse, $\mathbf{v}$'yi S'nin elemanları cinsinden ifade ediniz.

(a) $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$
$= \{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 8 & 3 \end{bmatrix}\}$
$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 & 14 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $S = \{A_1, A_2, A_3\}$

$$= \left\{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

$\mathbf{v} = I_2$

ML.5. MATLAB'ı kullanarak $\mathbf{v}$ vektörünün S cümlesindeki vektörlerin bir lineer birleşimi olup olmadığını belirleyiniz. Eğer öyleyse, $\mathbf{v}$'yi S'nin elemanları cinsinden ifade ediniz.

(a) $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$

$$= \left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix}0\\-1\\1\\-2\\1\end{bmatrix}$$

(b) $S = \{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$

$= \{2t^2 - t + 1, t^2 - 2, t - 1\}$

$\mathbf{v} = p(t) = 4t^2 + t - 5$

ML.6. $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$

$= \{[1 \quad 1 \quad 0 \quad 1], [1 \quad -1 \quad 0 \quad 1], [0 \quad 1 \quad 2 \quad 1]\}$

olmak üzere, aşağıdaki $\mathbf{v}$ vektörlerinin her birinin S'nin gerdiği uzaya ait olup olmadığını belirleyiniz.

(a) $\mathbf{v} = [2 \quad 3 \quad 2 \quad 3]$

(b) $\mathbf{v} = [2 \quad -3 \quad -2 \quad 3]$

(c) $\mathbf{v} = [0 \quad 1 \quad 2 \quad 3]$

ML.7. $S = \{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$

$= \{t - 1, t + 1, t^2 + t + 1\}$

olmak üzere, aşağıdaki $p(t)$ polinomlarının her birinin S'nin gerdiği uzaya ait olup olmadığını belirleyiniz.

(a) $p(t) = t^2 + 2t + 4$

(b) $p(t) = 2t^2 + t - 2$

(c) $p(t) = -2t^2 + 1$

Lineer Bağımsızlık/Bağımlılık

ML.1. Aşağıdaki S cümlelerinin lineer bağımlı veya lineer bağımsız olup olmadığını belirleyiniz.

(a) $S = \{[1 \quad 0 \quad 0 \quad 1], [0 \quad 1 \quad 1 \quad 0], [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]\}$

(b) $S = \left\{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$

(c) $S = \left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$

(d) $S = \{2t^2 - t + 3, t^2 + 2t - 1, 4t^2 - 7t + 11\}$

ML.2.

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 5 & 7\\ 0 & 2 & -2 & -2\end{bmatrix}$$

olmak üzere, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin çözüm uzayını geren bir cümle bulunuz.

ML.3.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}4\\-7\\1\end{bmatrix}$$

olsun. Aşağıdaki her bir $\mathbf{v}$ vektörünün $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ cümlesinin gerdiği uzayda olup- olmadığını belirleyiniz. Eğer öyleyse, $\mathbf{v}$'yi $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ve $\mathbf{v}_3$'ün bir lineer birleşimi şeklinde ifade ediniz.

(a) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ **(b)** $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}4\\-2\\6\end{bmatrix}$

Tabanlar ve Boyut

Bu kesimde MATLAB*'ı kullanmak için Kesim 9.7'yi okumuş olmalısınız. Aşağıdaki alıştırmalarda Kesim 9.7'deki teoriyi* MATLAB*'da hesaplama yöntemlerine uyguluyoruz.*

Bir $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ *cümlesinin bir* V *vektör uzayının bir tabanı olup olmadığını belirlemek için tanıma göre* S*'nin lineer bağımsız ve* V*'yi gerdiğini göstermemiz gerekir. Eğer* boy$V = k$ *olduğu biliniyorsa o zaman Teorem 4.12'ye göre bunlardan sadece birisini göstermek yeterli olacaktır. Bu durumda, lineer bağımsızlık* MATLAB*'ın* **rref** *komutu ile kolayca araştırılabilir. Lineer bağımsızlık/bağımlılık sorusunu cevaplamak için* $A\mathbf{c} = \mathbf{0}$ *şeklinde homogen denklem sistemi oluşturulur. Böylece,* S*'nin lineer bağımsız olması için gerek ve yeter şart*

$$\mathbf{rref}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix}\mathbf{I}_k\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}$$

olmasıdır. Alıştırma ML.1-ML.6'da eğer S *cümlesi bu özel hal için gerekli şartları sağlıyorsa,*

MATLAB'ın **rref** *komutunu uygulayınız. Aksi takdirde, S'nin V için bir taban olup olmadığını alışılagelmiş biçimde belirleyiniz.*

ML.1. $V = R_3$ ve
$S = \{[1 \quad 2 \quad 1], [2 \quad 1 \quad 1], [2 \quad 2 \quad 1]\}$

ML.2. $V = P_2$ ve
$S = \{2t - 2, t^2 - 3t + 1, 2t^2 - 8t + 4\}$

ML.3. $V = R_4$ ve
$S = \{[1 \quad 1 \quad 0 \quad 0], [2 \quad 1 \quad 1 \quad -1], [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1], [1 \quad 2 \quad 1 \quad 2]\}$

ML.4. $V = \text{ger}S$ ve
$S = \{[1 \quad 2 \quad 1 \quad 0], [2 \quad 1 \quad 3 \quad 1], [2 \quad -2 \quad 4 \quad 2]\}$

ML.5. $V = \text{ger}S$ ve
$S = \{[1 \quad 2 \quad 1 \quad 0], [2 \quad 1 \quad 3 \quad 1], [2 \quad 2 \quad 1 \quad 2]\}$

ML.6. V, R_3'ün $b = 2a - c$ olmak üzere $[a \quad b \quad c]$ şeklindeki bütün vektörlerinden oluşan alt uzayı ve
$S = \{[0 \quad 1 \quad -1], [1 \quad 1 \quad 1]\}$

Alıştırma ML.7-ML.9'da MATLAB'ın ***rref*** *komutunu kullanarak, S'nin gerdiği uzay için bir taban olacak şekilde S'nin bir alt cümlesini bulunuz. Kesim 4.6'da Örnek 5'e bakınız.*

ML.7. $S = \{[1 \quad 1 \quad 0 \quad 0], [-2 \quad -2 \quad 0 \quad 0], [1 \quad 0 \quad 2 \quad 1], [2 \quad 1 \quad 2 \quad 1], [0 \quad 1 \quad 1 \quad 1]\}$
$boy(\text{ger}S) = ?$ $\text{ger}S = R_4$ müdür?

ML.8. $S = \left\{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & 4\\ 2 & 4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$.
$boy(\text{ger}S) = ?$ $\text{ger}S = M_{22}$ midir?

ML.9. $S = \{t - 2, 2t - 1, 4t - 2, t^2 - t + 1, t^2 + 2t + 1\}$
$boy(\text{ger}S) = ?$ $\text{ger}S = P_2$ midir?

Kesim 4.6'da Teorem 4.11 ile V vektör uzayının lineer bağımsız bir S alt cümlesi V'nin bir tabanına tamamlanabilir. Alıştırma ML.10-ML.12'de MATLAB'ın ***rref*** *komutunu kullanarak Kesim 4.6'da Örnek 10'daki gibi S'yi V'nin bir tabanına tamamlayınız.*

ML.10. $S = \{[1 \quad 1 \quad 0 \quad 0], [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]\}$, $V = R_4$

ML.11. $S = \{t^3 - t + 1, t^3 + 2\}$, $V = P_3$

ML.12. $S = \{[0 \quad 3 \quad 0 \quad 2 \quad -1]\}$, ve V;
$c = a$, $b = 2d + e$ olmak üzere R_5'in $[a \quad b \quad c \quad d \quad e]$ şeklindeki bütün vektörlerinden oluşan alt uzayı.

Koordinatlar ve Taban Değişimi

Bir tabana göre bir vektörün koordinatlarını bulmak bir lineer birleşim problemidir. Böylece, karşılık gelen lineer sistem oluşturulduktan sonra MATLAB'ın ***reduce*** *veya* ***rref*** *komutlarını kullanarak sistemin çözümü bulunur. Bu çözüm bize vektörün istenen koordinatlarını verir. (Gerekli lineer sistemin oluşturulmasında Kesim 9.7'deki bilgiler yardımcı olacaktır.)*

ML.1. $V = R^3$ ve
$$S = \left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}\right\}$$
olsun. S'nin V için bir taban olduğunu gösteriniz ve aşağıdaki her bir vektör için $[\mathbf{v}]_S$'yi bulunuz.

(a) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}8\\4\\7\end{bmatrix}$ **(b)** $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}2\\0\\-3\end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}4\\3\\3\end{bmatrix}$

ML.2. $V = R_4$ ve $S = \{[1 \quad 0 \quad 1 \quad 1], [1 \quad 2 \quad 1 \quad 3], [0 \quad 2 \quad 1 \quad 1], [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]\}$
olsun. S'nin V için bir taban olduğunu gösteriniz ve aşağıdaki her bir vektör için $[\mathbf{v}]_S$'yi bulunuz.

(a) $\mathbf{v} = [4 \quad 12 \quad 8 \quad 14]$

(b) $\mathbf{v} = [\frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0]$

(c) $\mathbf{v} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad \frac{7}{3}]$

ML.3. V, 2×2 tipindeki bütün matrislerin uzayı ve
$$S = \left\{\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right\}$$
olsun. S'nin V için bir taban olduğunu gösteriniz ve aşağıdaki her bir vektör için $[\mathbf{v}]_S$'yi bulunuz.

(a) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ **(b)** $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}2 & \frac{10}{3}\\ \frac{7}{6} & 2\end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

T tabanından S tabanına $P_{S\leftarrow T}$ geçiş matrisini bulmak da bir lineer birleşim problemidir. $P_{S\leftarrow T}$, sütunları T'deki vektörlerin S tabanına göre koordinatlarından oluşan matristir. Kesim 4.8'de Örnek 4'teki yolu izleyerek ***reduce*** *veya* ***rref*** *komutunun kullanılmasıyla $P_{S\leftarrow T}$ matrisini bulabiliriz. Bunun için sütunları S'deki vektörlere karşılık gelen bir*

A matrisi ve sütunları T'deki vektörlere karşılık gelen bir B matrisi oluşturulur. Bu takdirde, MATLAB*'da* **rref**([**A** **B**]) *komutu* [**I** $\mathbf{P}_{S\leftarrow T}$]'yi verir.

Yukarıda tanımlanan MATLAB *tekniklerini kullanarak, Alıştırma ML.4-ML.6'da T tabanından S tabanına $P_{S\leftarrow T}$ geçiş matrisini bulunuz.*

ML.4. $V = R^3$,

$$S = \left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\},$$

$$T = \left\{\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$$

ML.5. $V = P_3, S = \{t-1, t+1, t^2+t, t^3-t\}$, $T = \{t^2, 1-t, 2-t^2, t^3+t^2\}$

ML.6. $V = R_4, S = \{[1\ \ 2\ \ 3\ \ 0], [0\ \ 1\ \ 2\ \ 3]$ $[3\ \ 0\ \ 1\ \ 2], [2\ \ 3\ \ 0\ \ 1]\}$,

T = doğal taban

ML.7. $V = R^3$ uzayında

$$S = \left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\},$$

$$T = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right\},$$

ve

$$U = \left\{\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\right\}$$

tabanları veriliyor.

(a) U'dan T'ye P geçiş matrisini bulunuz.
(b) T'den S'ye Q geçiş matrisini bulunuz.
(c) U'dan S'ye Z geçiş matrisini bulunuz.
(d) $Z = PQ$ veya $Z = QP$ midir?

Homogen Lineer Sistemler

Alıştırma ML.1-ML.3'te MATLAB*'ın* **rref** *komutunu kullanarak A'nın sıfır uzayı için bir taban bulunuz. Bunu* **homsoln** *komutu yardımıyla da yapabilirsiniz. Bilgi için* **help** *komutunu kullanınız.*

ML.1. $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 1\\2 & 0 & 4 & 2 & 4\\1 & 1 & 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$

ML.2. $A = \begin{bmatrix}2 & 2 & 2\\1 & 2 & 1\\3 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

ML.3. $A = \begin{bmatrix}1 & 4 & 7 & 0\\2 & 5 & 8 & -1\\3 & 6 & 9 & -2\end{bmatrix}$

ML.4. $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}$

matrisi ve $\lambda = 3$ için $(\lambda I_2 - A)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sistemi aşikar olmayan bir çözüme sahiptir. MATLAB komutlarını kullanarak böyle bir çözüm bulunuz.

ML.5. $A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\\2 & 1 & 3\end{bmatrix}$

matrisi ve $\lambda = 6$ için $(\lambda I_3 - A)\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen lineer sistemi aşikar olmayan bir çözüme sahiptir. MATLAB komutlarını kullanarak böyle bir çözüm bulunuz.

Bir Matrisin Rankı

Bir A matrisi verildiğinde **rref**(**A**)*'nın sıfırdan farklı satırları A'nın satır uzayı için ve* **rref**(**A**′)*'nün sıfırdan farklı satırları sütunlara dönüştürüldüğünde A'nın sütun uzayı için bir taban oluşturur.*

ML.1. MATLAB kullanarak, Kesim 4.9'daki 1'den 4'e kadar olan Alıştırmaları çözünüz.

A'nın satırlarından oluşan satır uzayının bir tabanını bulmak için **rref**(**A**′)*'yü hesaplarız. Burada önde olan 1'lerin işaret ettiği A'nın orijinal satırları satır uzayının bir tabanını verecektir. Kesim 4.9'da Örnek 4'e bakınız.*

ML.2. A'nın satır uzayının ortak hiçbir vektöre sahip olmayan iki tabanını bulunuz.

(a) $A = \begin{bmatrix}1 & 3 & 1\\2 & 5 & 0\\4 & 11 & 2\\6 & 9 & 1\end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix}2 & 1 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\1 & 2 & 2 & 1\\4 & 5 & 6 & 2\\3 & 3 & 4 & 1\end{bmatrix}$

ML.3. Alıştırma ML.2'yi sütun uzayları için tekrarlayınız.

MATLAB*'da bir A matrisinin rankını hesaplamak için* **rank**(**A**) *komutunu kullanınız.*

ML.4. Aşağıdaki matrislerin rankını ve sıfır uzayının boyutunu yani sıfırlık derecesini hesaplayınız.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

ML.5. Sadece **rank** komutunu kullanarak, aşağıdaki lineer denklem sistemlerinden hangilerinin tutarlı olduğunu belirleyiniz.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

Standart İç Çarpım

Bu kesimde MATLAB*'ı kullanmak için Kesim 9.6'yı okumuş olmalısınız.*

ML.1. MATLAB'da iki vektörün iç çarpımı **dot** komutu kullanılarak hesaplanabilir. **v** ve **w** vektörleri MATLAB'da satırlar veya sütunlar şeklinde girilirse, bunların iç çarpımı MATLAB'da **dot**(**v**,**w**) komutu ile hesaplanır. Eğer vektörler aynı sayıda bileşene sahip değilse bir hata mesajı ortaya çıkar.

(a) Aşağıdaki vektör çiftlerinin iç çarpımını bulmak için **dot** komutunu kullanınız.

(i) $\mathbf{v} = [1 \quad 4 \quad -1]$, $\mathbf{w} = [7 \quad 2 \quad 0]$

(ii) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{a} = [3 \quad -2 \quad 1]$ olsun. **a** ile $\mathbf{b} = [k \quad 1 \quad 4]$ vektörünün iç çarpımı sıfır olacak şekilde bir k değeri bulunuz. Sonucunuzu MATLAB'da doğrulayınız.

(c) Aşağıdaki her bir **v** vektörü için MATLAB'da **dot**(**v**,**v**)'yi hesaplayınız.

(i) $\mathbf{v} = [4 \quad 2 \quad -3]$

(ii) $\mathbf{v} = [-9 \quad 3 \quad 1 \quad 0 \quad 6]$

(iii) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$

Bu iç çarpımların her birinin işareti nedir? Bunun hemen hemen bütün **v** vektörleri için pozitif olmasının nedenini açıklayınız. Bu durum ne zaman doğru değildir?

ML.2. MATLAB'ı kullanarak aşağıdaki vektörlerin normunu veya uzunluğunu bulunuz.

(a) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ **(b)** $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

ML.3. MATLAB'ı kullanarak aşağıdaki vektör çiftleri arasındaki uzaklığı bulunuz.

(a) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{u} = [2 \quad 0 \quad 0 \quad 1], \mathbf{v} = [2 \quad 5 \quad -1 \quad 3]$

(c) $\mathbf{u} = [1 \quad 0 \quad 4 \quad 3], \mathbf{v} = [-1 \quad 1 \quad 2 \quad 2]$

ML.4. R^3'te köşe noktaları **A**(1, 3, –1), **B**(4, –1, 0), **C**(1, 1, 2), olan *ABC* üçgeninin kenar uzunluklarını bulunuz. (*Yol gösterme*: Her bir kenar için bir vektör belirleyip onun uzunluğunu hesaplayınız.)

ML.5. MATLAB kullanarak aşağıdaki vektör çiftlerinin iç çarpımını hesaplayınız.

(a) $\mathbf{u} = [5 \quad 4 \quad -4], \mathbf{v} = [3 \quad 2 \quad 1]$

(b) $\mathbf{u} = [3 \quad -1 \quad 0 \quad 2]$
$\mathbf{v} = [-1 \quad 2 \quad -5 \quad -3]$

(c) $\mathbf{u} = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5], \mathbf{v} = -\mathbf{u}$

ML.6. Bir vektörün normu veya uzunluğu iç çarpım kullanılarak aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}.$$

Yukarıdaki ifadenin sağ tarafı MATLAB'da

sqrt(dot(u, u))

komutu ile hesaplanır. Bu metodu Alıştırma ML.2'deki vektörler için kullanarak doğruluğunu kanıtlayınız.

ML.7. *n*-bileşenli **u** ve **v** vektörleri MATLAB'da sütunlar şeklinde girilirse,

$$\mathbf{u}'*\mathbf{v} \quad \text{veya} \quad \mathbf{v}'*\mathbf{u}$$

u ve **v** vektörlerinin iç çarpımını verecektir. Bunu Alıştırma ML.5'deki vektörleri kullanarak gerçekleyiniz.

ML.8. Aşağıdaki vektör çiftleri arasındaki açıyı bulmak için MATLAB'ı kullanınız. (Açıyı radyan'dan derece'ye çevirmek için 180/pi ile çarpınız.)

(a) $\mathbf{u} = [3 \quad 2 \quad 4 \quad 0], \mathbf{v} = [0 \quad 2 \quad -1 \quad 0]$

(b) $\mathbf{u} = [2 \quad 2 \quad -1], \mathbf{v} = [2 \quad 0 \quad 1]$

(c) $\mathbf{u} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 2], \mathbf{v} = [0 \quad 3 \quad -4 \quad 0]$

ML.9. MATLAB'ı kullanarak, Alıştırma ML.2'deki vektörler doğrultusundaki birim vektörleri bulunuz.

Vektörel Çarpım

Bu kesimde MATLAB*'ın iki komutu kullanılacaktır. Bunlardan biri 3-boyutlu iki vektörün vektörel çarpımını hesaplayan* **cross** *komutu, diğeri ise vektörleri ve onların vektörel çarpımlarını çizen* **crossdemo** *komutudur.* **cross** *ile birlikte* **dot** *komutunu kullanarak Kesim 5.2'de Örnek 6'daki hesaplamaları yapabiliriz. (*MATLAB *komutlarının kullanımı hakkında bilgi için* **help** *komutundan sonra bir boşluk bırakarak komutun adını yazınız.)*

ML.1. MATLAB'da **cross** komutunu kullanarak aşağıdaki vektör çiftlerinin vektörel çarpımını bulunuz.

(a) $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

(b) $\mathbf{u} = [1 \quad 0 \quad 3], \mathbf{v} = [1 \quad -1 \quad 2]$

(c) $\mathbf{u} = [1 \quad 2 \quad -3], \mathbf{v} = [2 \quad -1 \quad 2]$

ML.2. Aşağıdaki vektörlerin vektörel çarpımını bulmak için **cross** komutunu kullanınız.

(a) $\mathbf{u} = [2 \quad 3 \quad -1], \mathbf{v} = [2 \quad 3 \quad 1]$

(b) $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{v} = 2\mathbf{u}$

(b) $\mathbf{u} = [1 \quad -2 \quad 1], \mathbf{v} = [3 \quad 1 \quad -1]$

ML.3. MATLAB'da **crossdemo** komutunu kullanarak aşağıdaki **u**, **v** vektörleri ve onların vektörel çarpımlarını görüntüleyiniz.

(a) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{u} = [-2 \quad 4 \quad 5], \mathbf{v} = [0 \quad 1 \quad -3]$

(c) $\mathbf{u} = [2 \quad 2 \quad 2], \mathbf{v} = [3 \quad -3 \quad 3]$

ML.4. MATLAB'ı kullanarak köşesi orijin ve kenarları

$\mathbf{u} = [3 \quad -2 \quad 1], \mathbf{v} = [1 \quad 2 \quad 3]$,
$\mathbf{w} = [2 \quad -1 \quad 2]$.

olan paralelyüzün hacmini bulunuz.

ML.5. 3-boyutlu uzayda iki düzlem arasındaki açı bu düzlemlerin normalleri arasındaki açı ile aynıdır.

$$\mathbf{x} = [2 \quad -1 \quad 2], \quad \mathbf{y} = [3 \quad -2 \quad 1]$$

$$\mathbf{v} = [1 \quad 3 \quad 1], \quad \mathbf{w} = [0 \quad 2 \quad -1]$$

olmak üzere, **x** ve **y**'nin belirlediği Π_1 düzlemi ile **v** ve **w**'nin belirlediği Π_2 düzlemi arasındaki açıyı bulunuz.

Gram-Schmidt Yöntemi

Gram-Schmidt yöntemi V'nin bir W alt uzayının bir S tabanını alarak bundan W'nin bir T birim dik (ortonormal) tabanını elde etmek için kullanılır. T birim dik tabanını MATLAB*'da elde etmek için kullanılan algoritma* **gschmidt** *komutu ile yerine getirilir. Detay için* **help gschmidt** *yazınız.*

ML.1. **gschmidt** komutunu kullanarak R^3'ün

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

tabanından bir birim dik taban elde ediniz. Cevabınız ondalık şekilde olacaktır, onu $\sqrt{2}$ cinsinden tekrar yazınız.

ML.2. **gschmidt** komutunu kullanarak R_4'ün

$S = \{[1 \quad 0 \quad 1 \quad 1],$
$[1 \quad 2 \quad 1 \quad 3], [0 \quad 2 \quad 1 \quad 1], [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]\}.$

tabanından bir birim dik taban elde ediniz.

ML.3. R_3'de $S = \{[0 \quad -1 \quad 1], [0 \quad 1 \quad 1],$
$[1 \quad 1 \quad 1]\}$ tabanı veriliyor. *S*'yi kullanarak bir *T* birim dik tabanı bulunuz ve sonra aşağıdaki her bir vektör için $[\mathbf{v}]_T$'yi bulunuz.

(a) $\mathbf{v} = [1 \quad 2 \quad 0]$ **(b)** $\mathbf{v} = [1 \quad 1 \quad 1]$

(c) $\mathbf{v} = [-1 \quad 0 \quad 1]$

ML.4. *a, b, c* herhangi reel sayılar olmak üzere R_4'ün

$$[a \quad 0 \quad a+b \quad b+c]$$

şeklindeki vektörlerin oluşturduğu alt uzayı için bir birim dik taban bulunuz.

ML.5. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ olsun.

(a) **v**'ye dik olan sıfırdan farklı bir **w** vektörü bulunuz.

(b)

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 / \text{norm}(\mathbf{v})$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{w} / \text{norm}(\mathbf{w})$$

vektörlerini hesaplayınız ve

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \end{bmatrix}$$

matrisini teşkil ediniz. $\mathbf{U}' * \mathbf{U}$'yu hesaplayınız. **U** ile $\mathbf{U}'$ arasında nasıl bir ilişki vardır?

(c) R^2'de sıfırdan farklı herhangi bir **x** vektörü seçiniz. **x** ile $\mathbf{U} * \mathbf{x}$ vektörlerinin uzunluğunu karşılaştırınız.

(d) R^2'de sıfırdan farklı bir **x** ve **y** vektör çifti seçiniz. **dot** (**x**, **y**) ile **dot** ($\mathbf{U} * \mathbf{x}$, $\mathbf{U} * \mathbf{y}$)'yi karşılaştırınız.

İzdüşümler

ML.1. **v**'nin **w** vektörü üzerine izdüşümünü bulunuz. (MATLAB'da **dot** ve **norm** komutlarının mevcut olduğunu hatırlayınız.)

(a) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ML.2.

$$\mathbf{w1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{w2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $S = \{\mathbf{w1}, \mathbf{w2}\}$ ve $W = \text{ger}S$ olsun.

(a) S'nin W için bir dik (ortogonal) taban olduğunu gösteriniz.

(b)

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $\text{izd}_{\mathbf{w1}}\mathbf{v}$'yi hesaplayınız.

(c) (b) şıkkındaki **v** vektörü için $\text{izd}_W\mathbf{v}$'yi hesaplayınız.

ML.3.

$$\mathbf{w1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{w2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

olmak üzere R^3'teki Π düzleminin dik (ortogonal) tabanı {**w1, w2**} olsun.

(a)

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

vektörünün Π üzerine izdüşümünü bulunuz.

(b) **v**'den Π düzlemine olan uzaklığı bulunuz.

ML.4. R^4'de W alt uzayının bir tabanı

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{ve} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olsun.

(a) $\text{izd}_W\mathbf{v}$'yi bulunuz.

(b) **v**'den W'ye olan uzaklığı bulunuz.

ML.5.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

olsun.

(a) $T\mathbf{x} = \mathbf{b}$ denklem sisteminin tutarsız olduğunu gösteriniz.

(b) $T\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sistemi tutarsız olduğundan **b,** T**'**nin sütun uzayında değildir. Yaklaşık bir çözüm bulmak için $T\mathbf{y}$ mümkün olduğunca **b**'ye yakın olacak şekilde T**'**nin sütun uzayında bir **y** vektörü bulunur. Bunu, **b** vektörünün T'nin sütun uzayı üzerine **p** izdüşümünü bularak yapabiliriz. Buna göre, **p** izdüşümünü bulunuz (ki bu $T\mathbf{y}$ olacaktır).

En Küçük Kareler Yöntemi

MATLAB'da **lsqline** *komutu, girdiğiniz veri için en küçük karelerden oluşan değerleri verecek ve hem bu değerlerin hem de girdiğimiz veri değerlerinin grafiğini çizecektir.* **lsqline** *komutunu kullanmak için verilerin x-koordinatlarını bir* **x** *vektörü ile ve bunlara karşılık gelen y-koordinatlarını bir* **y** *vektörü ile gösterdikten sonra* **lsqline**(**x**,**y**) *yazınız. Daha fazla bilgi için* **help lsqline** *komutunu kullanınız.*

ML.1. **lsqline**'yi kullanarak Kesim 5.6'daki Örnek 6'yı MATLAB'da çözünüz.

ML.2. Kesim 5.6'da Örnek 11'in çözümünü bulmak için **lsqline** komutunu kullanınız.

ML.3. Yeni dizayn edilmiş bir kap içindeki bir sıvının sıcaklığını ölçen bir deney yapılmış ve aşağıdaki veriler elde edilmiştir:

Zaman (dakika)	0	2	3	5	9
***Sıcaklık* (°F)**	185	170	166	152	110

(a) En küçük kareler doğrusunu belirleyiniz.

(b) $x = 1, 6, 8$ dakikalarındaki sıcaklığı tahmin ediniz.

(c) Sıvının sıcaklığının 160°F olacağı zamanı tahmin ediniz.

ML.4. $t = 0$ anında bir cisim, bir sıvının üstündeki 1 metre yükseklikten bırakılıyor. Bir kayıt cihazı da $\frac{1}{2}$ saniye aralıklarla cismin sıvı yüzeyinden yüksekliğini kaydediyor. Negatif değerler cismin sıvı yüzeyinin altında olduğunu göstermektedir. Bu deneye ilişkin sonuçlar aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Zaman (Saniye)	*Derinlik (Metre)*
0	1
0.5	0.88
1	0.54
1.5	0.07
2	–0.42
2.5	–0.80
3	–0.99
3.5	–0.94
4	–0.65
4.5	–0.21

(a) En küçük karelerin 2. dereceden polinomunu bulunuz.

(b) $t = 5$ ve $t = 6$ saniyelerindeki derinliği tahmin ediniz.

(c) Cismin sıvı yüzeyine ikinci kez ulaşacağı zamanı tahmin ediniz.

ML.5. Aşağıdaki tablodaki veriler için en küçük karelerin 2. dereceden polinomunu bulunuz. $x = 7$ için y'nin değerini bu veriler yardımıyla tahmin ediniz.

x	y
–3	0.5
–2.5	0
–2	–1.125
–1.5	–1.875
–1	–1
0	0.9375
0.5	2.8750
1	4.75
1.5	8.25
2	11.5

Lineer Dönüşümler

MATLAB, vektör uzayları arasında tanımlanan bir fonksiyonun bir lineer dönüşüm olduğunu göstermek için kullanılamaz. Ancak, MATLAB bir fonksiyonun bir lineer dönüşüm olmadığını gösteren bir örnek teşkil etmek için kullanılabilir. Aşağıdaki alıştırmalar bu noktaya işaret eder:

ML.1. $L: R^n \rightarrow R^1$ dönüşümü $L(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|$ ile tanımlansın.

(a) R^2'de

$$L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \neq L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v})$$

olacak şekilde bir **u** ve **v** vektör çifti bulunuz. Hesaplamaları yapmak için MATLAB'ı kullanınız. Buradan L'nin bir lineer dönüşüm olmadığı görülür.

(b) R^3'te

$$L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \neq L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v})$$

olacak şekilde bir **u** ve **v** vektör çifti bulunuz. Hesaplamaları yapmak için MATLAB'ı kullanınız.

ML.2. $L: M_{nn} \rightarrow R^1$ dönüşümü $L(A) = \det(A)$ ile tanımlansın.

(a) $L(A + B) \neq L(A) + L(B)$ olacak şekilde 2×2 tipinden bir A ve B matris çifti bulunuz. Hesaplamaları yapmak için MATLAB'ı kullanınız. Buradan L'nin bir lineer dönüşüm olmadığı görülür.

(b) $L(A + B) \neq L(A) + L(B)$. olacak şekilde 3×3 tipinden bir A ve B matris çifti bulunuz. Buradan L'nin bir lineer dönüşüm olmadığı görülür. Hesaplamaları yapmak için MATLAB'ı kullanınız.

ML.3. $L: M_{nn} \rightarrow R^1$ dönüşümü $L(A) = \text{rank } A$ ile tanımlansın.

(a) $L(A + B) \neq L(A) + L(B)$.

olacak şekilde 2×2 tipinden bir A ve B matris çifti bulunuz. Buradan L'nin bir lineer dönüşüm olmadığı görülür. Hesaplamaları yapmak için MATLAB'ı kullanınız.

(b) $L(A + B) \neq L(A) + L(B)$.
olacak şekilde 3×3 tipinden bir A ve B matris çifti bulunuz. Buradan L'nin bir lineer dönüşüm olmadığı görülür. Hesaplamaları yapmak için MATLAB'ı kullanınız.

Bir Lineer Dönüşümün Çekirdeği ve Görüntü Uzayı

Bu kesimde MATLAB*'ı kullanmak için öncelikle Kesim 9.8'i okumuş olmalısınız. Aşağıdaki her bir A matrisi için* $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ *lineer dönüşümünün çekirdeğinin ve görüntü uzayının birer tabanını bulunuz.*

ML.1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 5 \\ -2 & -3 & -8 & -7 \end{bmatrix}$

ML.2. $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -7 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

ML.3. $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 & 1 & 11 \\ -4 & -4 & 7 & -2 & -19 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

Bir Lineer Dönüşümün Matrisi

MATLAB*'da* $L: R^n \to R^m$ *dönüşümünün matrisini bulmak için Kesim 6.3'te verilen adımları takip ediniz. Koordinatlar ve taban değişimi ile ilgili* MATLAB *alıştırmalarında kullanılan çözüm tekniği burada yararlı olacaktır.*

ML.1. $L: R^3 \to R^2$ dönüşümü

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x - y \\ x + y - 3z \end{bmatrix}$$

ile verilsin.

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$$

ve

$$T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

tabanlarına göre L'yi gösteren A matrisini bulunuz.

ML.2. $L: R^3 \to R^4$ dönüşümü

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

olmak üzere $L(\mathbf{v}) = C\mathbf{v}$ ile verilsin.

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$$

ve

$$T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

tabanlarına göre L'yi gösteren A matrisini bulunuz.

ML.3. $L: R^2 \to R^2$ dönüşümü

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x + 2y \\ 3x - y \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanıyor. R^2'nin iki tabanı

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

ve

$$T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\} = \left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

olsun.

(a) S tabanına göre L'yi gösteren A matrisini bulunuz.

(b) T tabanına göre L'yi gösteren B matrisini bulunuz.

(c) T'den S'ye P geçiş matrisini bulunuz.

(d) $B = P^{-1}AP$ olduğunu gerçekleyiniz.

Düzlemdeki Geometrik Şekiller Üzerinde Lineer Dönüşümler

MATLAB*'da* **planelt** *rutini* R^2*'den* R^2*'ye lineer dönüşümler olan* **düzlemin lineer dönüşümleri** *için standart cebirsel yaklaşımları gösteren geometrik bir şekil elde etmeye yarar. Şüphesiz bu isim düzlemdeki noktaların karşılık gelen düzlemdeki noktalara resmedilmesi gerçeğinden gelir.*

MATLAB*'da*

planelt

komutunu yazınız. Bu komutun bir tarifi görüntülenir. Bunu okuduktan sonra ENTER tuşuna basınız.

Bu durumda genel talimatların bir cümlesi görülür. Bunları dikkatlice okuduktan sonra tekrar ENTER tuşuna basınız. Şekillerden oluşan seçenekler görüntülenecektir. Aşağıdaki alıştırmalarda yapacağınız gibi gerekli olan şekilleri ayrı bir kağıda yazınız. (Her bir menü seçiminden sonra ENTER tuşuna basınız. Grafikler görüntülendiğinde menüye dönmek için ENTER'a basınız.)

ML.1. **planelt**'de #4 (üçgen) şeklini seçtikten sonra #1 seçeneğini seçiniz (üçgene bakınız). Menüye dönünüz ve #2 seçeneğini seçiniz (bu şekli kullanınız). Daha sonra aşağıdaki lineer dönüşümleri gerçekleştiriniz:
- **(a)** Üçgenin y-eksenine göre yansımasını alınız ve şekli kaydediniz.
- **(b)** Yukarıda elde edilen şekli 60° döndürünüz ve şekli kaydediniz.
- **(c)** Menüye dönerek ilk şekli yeniden yükleyiniz ve onun $y = x$ doğrusuna göre yansımasını alarak x-ekseni doğrultusunda 2 kat genişletiniz. Şekli kaydediniz.
- **(d)** Lineer dönüşümlerin sırasını değiştirerek (c)'dekileri tekrarlayınız ve şekli yine kaydediniz.
- **(e)** (c) ve (d)'den elde edilen sonuçlar aynı mıdır? Kaydettiğiniz iki şekli karşılaştırınız.
- **(f)** (e) şıkkındaki cevabınız üçgene uygulanan lineer dönüşümlerin sırası hakkında neyi göstermektedir?

ML.2. Alıştırma ML.1'de seçilen ilk üçgeni yeniden yükleyiniz.
- **(a)** x-eksenine göre yansımasını alınız. ENTER'a basmadan önce sonucu tahmin ediniz. (Bu lineer dönüşümü L_1 ile gösteriniz.)
- **(b)** (a)'dan elde edilen şeklin y-eksenine göre yansımasını alınız. ENTER'a basmadan önce sonucu tahmin ediniz. (Bu lineer dönüşümü L_2 ile gösteriniz.)
- **(c)** (a) ve (b)'den elde edilen şekilleri kaydediniz.
- **(d)** İlk şekil ile şimdiki şekil arasındaki ilişkiyi araştırınız. Hangi (tek) dönüşüm sizce aynı sonucu verir? (Dönüşüm menüsünde ortaya çıkan isimleri kullanınız. Seçtiğiniz lineer dönüşümü L_3 ile gösteriniz.)
- **(e)** x-eksenine göre L_1 yansımasını, y-eksenine göre L_2 yansımasını ve (d)'de sizin gördüğünüz ilişkiyi ifade eden L_3 dönüşümünü içeren bir formül yazınız.
- **(f)** (e) şıkkında bulduğunuz formülün genel olarak doğru olup olmadığını belirleyene kadar muhtelif şekiller için bu formülü deneyiniz. Deney, gözlem ve sonuçlarınızı kısaca yazınız.

ML.3. Şekil olarak birim kareyi seçiniz.
- **(a)** Bu şeklin x-eksenine göre yansımasını alınız. Elde edilen şeklin y-eksenine göre yansımasını aldıktan sonra sonucun $y = -x$ doğrusuna göre tekrar yansımasını alınız. Şekli kaydediniz.
- **(b)** İlk şekil ile son şekli karşılaştırınız. x-eksenine göre yansımayı L_1, y-eksenine göre yansımayı L_2 ve $y = -x$ doğrusuna göre yansımayı L_3 ile gösteriniz. Şekle sırasıyla L_1, L_2 ve L_3 dönüşümleri uygulandığında, yaptığınız karşılaştırmada bu lineer dönüşümlerle ilgili nasıl bir formül önerirsiniz?
- **(c)** (b)'deki L_i lineer dönüşümlerinin standart matris gösterimleri M_i ile gösterilirse, $M_3 * M_2 * M_1$ matrisi neye eşittir? Bu sonuç (b) şıkkında elde ettiğiniz sonuçla aynı mıdır?
- **(d)** Bu üç lineer dönüşümü diğer şekiller üzerine ard arda uygulayınız.

ML.4. **planelt** komutunda istediğiniz herhangi bir şekli girebilir ve o şekle lineer dönüşümler uygulayabilirsiniz. Kendi şeklinizi girdikten sonra komutları izleyerek bu şekil üzerinde çeşitli lineer dönüşümleri uygulayınız. Önce bir grafik kağıdı üzerine şekli çizmeniz ve onun köşelerinin koordinatlarını belirlemeniz önerilir.

ML.5. **planelt** komutu bir şekil üzerinde herhangi bir 2×2 matris seçerek onu bir lineer dönüşüm gibi kullanmanıza imkan verir. Aşağıdaki uygulamayı yapınız: Bir singüler matris seçerek, onu yüklenmiş şekillerin her birine uygulayınız. Singüler lineer dönüşümlerin davranışları hakkında deney, gözlem ve sonuçlarınızın kısa bir özetini yazınız.

Özdeğerler ve Özvektörler

Bir matrisin karakteristik polinomunu ve özdeğerlerini bulmak için MATLAB*'da kullanılan iki komut vardır.* **poly**(**A**) *komutu A matrisinin karakteristik polinomunun azalan kuvvetlere göre katsayılarını verir. Eğer* **v**=**poly**(**A**) *deyip* **roots**(**v**) *komutunu kullanırsak, A matrisinin karakteristik polinomunun köklerini elde ederiz.*

A'nın bir λ *özdeğeri bilindiğinde* $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *lineer denklem sisteminden* λ*'ya karşılık gelen bir özvektör bulmak için* **rref** *veya* **homsoln** *komutunu kullanabiliriz.*

ML.1. MATLAB'ı kullanarak, aşağıdaki matrislerin her birinin karakteristik polinomlarını bulunuz.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

ML.2. MATLAB'da **poly** ve **roots** komutlarını kullanarak aşağıdaki matrislerin özdeğerlerini bulunuz.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

ML.3. Aşağıdaki her durum için λ özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü MATLAB'ı kullanarak bulunuz.

(a) $\lambda = 3, A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $\lambda = -1, A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $\lambda = 2, A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

ML.4. MATLAB'ı kullanarak A'nın köşegenleştirilebilir olup olmadığını belirleyiniz. Eğer köşegenleştirilebilir ise $P^{-1}AP$ bir köşegen matris olacak şekilde regüler bir A matrisi bulunuz.

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

ML.5.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisi veriliyor. MATLAB'ı ve Kesim 7.2'de Alıştırma 19'daki yol göstermeyi kullanarak A^{30} matrisini hesaplayınız.

ML.6.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1.5 & -1.5 \\ -2 & 2.5 & -1.5 \\ -2 & 2.0 & -1.0 \end{bmatrix}$$

matrisi için Alıştırma ML.5'i tekrarlayınız. Cevabınızı hem **format short** hem de **format long** ile görüntüleyiniz.

ML.7. Alıştırma ML.5'teki A matrisi için MATLAB'ı kullanarak

$$A, A^3, A^5, \ldots \quad \text{ve} \quad A^2, A^4, A^6, \ldots$$

dizilerini inceleyiniz. Bu dizilerin davranışlarını kısaca yazarak $\lim_{n\to\infty} A^n$'i bulunuz.

Köşegenleştirme

MATLAB'da **eig** *komutu simetrik bir A matrisinin özdeğerlerini ve birim dik (ortonormal) özvektörlerin bir cümlesini bulmak için kullanılır. Bu komut*

[V, D] = eig(A)

şeklinde kullanılır. V matrisi birim dik (ortonormal) özvektörleri içeren ve D matrisi de bunlara karşılık gelen özdeğerlerden oluşan köşegen matris olacaktır.

ML.1. Aşağıdaki herbir A matrisinin özdeğerlerini ve $P^{-1}AP$ köşegen matris olacak şekilde bir P dik (ortogonal) matrisini bulmak için **eig** komutunu kullanınız.

(a) $A = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

ML.2. **eig** komutu herhangi bir matrise uygulanabilir, ancak özvektörlerin V matrisi dik olmak zorunda değildir. Aşağıdaki matrislerin her biri için **eig** komutunu kullanarak, hangileri için V'nin dik olduğunu belirleyiniz. Eğer V dik değilse, bunlardan hangilerinin özvektörlerin oluşturduğu bir dik (ortogonal) matris ile değiştirilip değiştirilemeyeceğini kısaca tartışınız.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Baskın (Dominant) Özdeğer

ML.1. R^2'de birim çemberin ard arda gelen görüntülerinin baskın özdeğere karşılık gelen özvektöre doğru yönlendiğini Kesim 8.3'de Örnek 4 ve 5'te gösterdik. Aşağıda verilen matrislerin her biri için, MATLAB'ın **eig** komutunu kullanarak özdeğer ve özvektörleri bulunuz. Baskın özdeğeri ve buna karşılık gelen özvektörü belirleyiniz. Daha sonra, **circimages** komutunu kullanarak, birim çemberin ard arda gelen geometrik görüntülerini elde ediniz.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **(b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$

EK

A Önbilgiler

Bu ekte, ihtiyaç duyulduğunda kullanabileceğimiz, bölüm 4, 5, 6 ve 7'de de kullanılan cümleler ve fonksiyonlar hakkında temel bilgiler verilecektir.

A.1 Cümleler

Bir cümle nesnelerin bir kolleksiyonu, sınıfı, birleşimi veya bir ailesidir. Cümlesi oluşturan nesnelerin herbirine cümlenin **elemanı** veya **üyesi** denir. Bir cümle büyük harfle, cümlenin bir elemanı da küçük harfle gösterilir. Bir S cümlesi, cümlenin herbir elemanının tanımlanmasıyla veya cümlenin elemanlarının neler olduğunu tam olarak belirleyecek bir özelliğin verilmesiyle tanımlanır. $S = \{1, 2, 3\}$ cümlesi 4'ten küçük pozitif tamsayılar cümlesi olsun. Böylece S cümlesi iki farklı şekilde tanımlanmış oldu. A ve B iki cümle olmak üzere, A'nın her bir elemanı B'de varsa ve B'nin her bir elemanı da A'da varsa bu iki cümleye eşit cümleler denir ve $A = B$ yazılır. Böylece $\{1,2,3\} = \{3,2,1\} = \{2,1,3\}$ vb. A cümlesinin her elemanı B cümlesinde varsa, A'ya B'nin bir **alt cümlesi** denir. Rasyonel sayılar cümlesi reel sayılar cümlesinin bir alt cümlesidir, ikiz kenar üçgenlerin cümlesi, üçgenler cümlesinin bir alt cümlesidir. Her cümle kendisinin bir alt cümlesidir. Hiç bir elemanı olmayan bir cümleye de **boş cümle** denir. Karesi -1'e eşit olan tüm reel sayıların cümlesi boş cümledir. Çünkü hiçbir reel sayının karesi negatif olamaz.

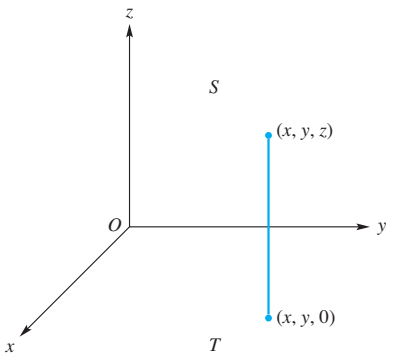
A.2 Fonksiyonlar

Bir S cümlesinden bir T cümlesine tanımlanan bir f fonksiyonu, S'nin tüm s elemanlarını, T'nin tek bir t elemanıyla eşleyen bir kuraldır. f fonksiyonu $f : S \to T$ ile gösterilir ve $t = f(s)$ yazılır. Fonksiyonlar, analiz ve matematiğin diğer dallarının temel taşını oluşturur. S cümlesine f'nin **tanım cümlesi**, T cümlesine de f'nin **görüntü cümlesi** denir. S'nin her s elemanı için $f(s)$ elemanlarından oluşan T'nin $f(s)$ alt cümlesine f'in **resmi** veya S'nin f altındaki **resmi** denir. Aşağıda fonksiyonlar için örnekler verilmiştir.

1. $S = T$ = tüm reel sayılar cümlesi olsun $f : S \to T$ fonksiyonu $s \in S$ için $f(s) = s^2$ kuralı ile tanımlansın.

2. S = tüm reel sayılar cümlesi ve T = tüm negatif olmayan reel sayılar cümlesi olmak üzere; $f : S \to T$ fonksiyon $s \in S$ için $f(s) = s^2$ kuralı ile tanımlansın.

3. S her bir noktası x-, y-, z- koordinatları yardımıyla (x, y, z) şeklinde tanımlanan üç-boyutlu uzay olsun. T, S'nin bir alt cümlesi olan (x, y) düzlemi olmak üzere $f : S \to T$ fonksiyonu $f(x, y, z)) = (x, y, 0)$ kuralıyla verilsin. f in nasıl çalıştığını görmek için, S'den bir (x, y, z) noktası alırız, bu noktadan (x, y) düzlemine yani T'ye dik olacak şekilde bir doğru çizeriz. Bu doğru ile (x, y) düzleminin kesişimi olan nokta $(x, y, 0)$ noktasıdır. Bu nokta (x, y, z) noktasının f altındaki görüntüsüdür. Bu şekilde tanımlanan f fonksiyonuna izdüşüm fonksiyonu denir (Şekil A.1).



ŞEKİL A.1

4. $S = T$ tüm reel sayılar cümlesi olsun $f : S \to T$ fonksiyonu $s \in S$ için $f(s) = 2s + 1$ kuralı ile tanımlansın.

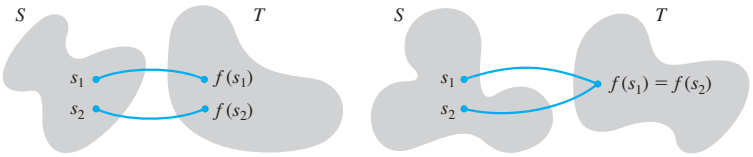
5. $S = (x, y)$ düzlemindeki x-ekseni ve $T = (x, y)$ düzlemi olsun. $f : S \to T$ fonksiyon $s \in S$ için $f((s,0)) = (s,1)$ kuralı ile tanımlansın.

6. S = tüm reel sayılar cümlesi ve T = tüm pozitif reel sayılar cümlesi olsun $f : S \to T$ fonksiyonu $s \in S$ için $f(s) = e^s$ kuralı ile tanımlansın.

Bir birinden ayırt etmemiz gereken fonksiyonların iki özelliği vardır. Bir $f : S \to T$ fonksiyonu için $s_1 \neq s_2$ olmak üzere $f(s_1) \neq f(s_2)$ ise f'e bire-bir'dir denir. Buna göre f birebir ise S'nin farklı iki elemanı f yardımıyla T de aynı elemanla eşleşemez. Buna denk olarak $f(s_1) = f(s_2)$ ise $s_1 = s_2$ olmalıdır (Şekil A.2'ye bakınız.) $f : S \to T$ fonksiyonu için f'in görüntü cümlesi T'nin tamamıysa bir başka ifadeyle tüm t T için $f(s) = t$ olacak şekilde en az bir $s \in S$ varsa f'e **örten**dir denir. (Şekil A.3'e bakınız.)

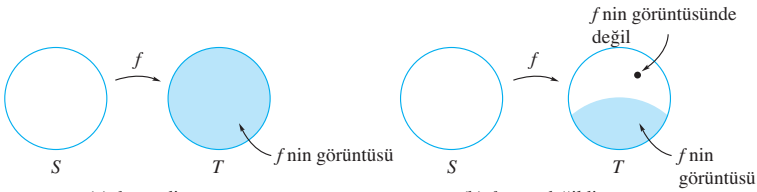
Şimdi yukarıda listelediğimiz fonksiyonları inceleyelim.

1. f birebir değildir. Çünkü $f(s_1) = f(s_2)$ eşitliği $s_1 = s_2$ eşitliğini gerektirmez $[f(2) = f(-2) = 4]$ f in görüntü cümlesi tüm negatif olmayan reel sayılar cümlesi olduğundan f örten değildir. Eğer $t = -4$ alınırsa $f(s) = -4$ olacak biçimde bir S elemanı yoktur.



(a) f is bire-birdir. (b) f bire-bir değildir.

ŞEKİL A.2



(a) f örtendir. (b) f örten değildir.

ŞEKİL A.3

2. f bire-bir değildir fakat örtendir. Eğer t verilen negatif olmayan bir reel sayı ise S'de $f(s) = t$ olacak biçimde $s = \sqrt{t}$ elemanı vardır.
1 ve 2'de verilen formüller aynı olmasına rağmen, fonksiyonlar farklıdır. Bu fark fonksiyonların görüntü cümlelerinden kaynaklanmaktadır.

3. $f((a_1, a_2, a_3)) = f((b_1, b_2, b_3))$ eşitliğinden $(a_1, a_2, 0) = (b_1, b_2, 0)$ olur. Buradan da $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ elde edilir. Bununla birlikte $a_3 = b_3$ olmak zorunda değildir. Yani f bire-bir değildir f in görüntü cümlesi T olduğundan örtendir. T'nin herhangi bir elemanı $(x_1, x_2, 0)$ olsun $f(a_1, a_2, a_3) = (x_1, x_2, 0)$ olacak şekilde S'nin bir (a_1, a_2, a_3) elemanının bulabilir miyiz? $a_1 = x_1$, $a_2 = x_2$ ve a_3 yerine istenilen herhangi bir reel sayı, örneğin $a_3 = 5$, alınarak S'nin bir elemanı bulunabilir. Yani f örtendir.

4. $f(s_1) = f(a_2)$ ise $2s_1 + 1 = 2s_2 + 1$ ve buradan $s_1 = s_2$ olduğundan f bire-bir'dir. Ayrıca f örtendir. Verilen bir t reel sayısı için $f(s) = t$ olacak biçimde bir s reel sayısı aranırsa, $2s + 1 = t$ eşitliğinden $s = \frac{t-1}{2}$ bulunur.

5. f bire-bir dir fakat örten değildir. Çünkü T'deki her elemanın y-koordinatı 1 değildir.

6. $s_1 \neq s_2$ ise $e^{s_1} \neq e^{s_2}$'dir. Verilen herhangi bir pozitif t için $t = e^s$'den $s = \text{In}t$ olarak bulunur.

Buna göre f bire-bir ve örtendir. $f : S \to T$ ve $g : T \to U$ fonksiyonlar ise $s \in S$ için $(g \circ f)(s) = g(f(s))$ olacak biçimde yeni bir $g \circ f$ fonksiyonu tanımlayabilirz. $g \circ f : S \to U$ fonksiyonu f ve g'nin bileşkesi olarak adlandırılır. Eğer f ve g yukarıda 4 ve 6 ile verilen fonksiyonlar ise $g \circ f$ fonksiyonu $(g \circ f)(s) = g(f(s)) = e^{2s} + 1$ şeklinde $f \circ g$ fonksiyonu da $(f \circ g)(s) = f(g(s)) = 2e^s + 1$ şeklinde tanımlanır. S'nin her s elemanı için $i(s) = S$ kuralı ile verilen $i : s \to S$ fonksiyonuna S'de **birim fonksiyon** denir. bir $f : S \to T$ fonksiyonu için $g \circ f = i_s$, S'de birim fonksiyon ve

$f \circ g = i_T$, T'de birim fonksiyon olacak şekilde bir $g : T \to S$ fonksiyonu varsa f **tersinebilir fonksiyon**, g'ye de f'nin **tersi** denir. Bir fonksiyonun en fazla bir tane tersinin olduğu gösterilebilir. Bir $f : S \to T$ fonksiyonu, yalnız ve yalnız f bire-bir ve örten olduğunda tersinebilirdir, bunu Bölüm 6'da özel bir durum için yaptığımız gibi kolayca gösterebiliriz. Eğer f'nin tersi varsa f^{-1} ile gösterilir. Eğer f tersinebilir ise f^{-1}'de bir bir ve örten dir. Burada "yalnız ve yalnız" ifadesi hem ifadenin, hem de bu ifadenin tersinin doğru olduğunu belirtir. Yani $f : S \to T$ fonksiyonu tersinebilir ise f bire-bir ve örtendir $f : S \to T$ fonksiyonu bire-bir ve örten ise f tersinirdir (Ek C'ye bakınız). 4 ve 6'da verilen fonksiyonlar tersinebilirdir; 4'te verilen fonksiyonun tersi $g : T \to S$, $g(t) = \frac{1}{2}(t - 1)$ ile tanımlanır. 6'da verilen fonksiyonun tersi ise $g : T \to S$, $g(t) = \ln t$ ile tanımlanır.

EK

B Kompleks Sayılar

B.1 Kompleks Sayılar

Kompleks sayılar genellikle cebir derslerinde

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ikinci derece denkleminin çözümünü tamamlamak için ortaya konmuştur.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

formülünün kullanımında, $b^2 - 4ac < 0$ durumunun negatif sayıların karekökünü alamadıkça çözümü yoktur. 16. yüzyılda matematikçiler ve bilim adamları ikinci dereceden denklemlerin çözümünün bu şekilde tamamlanmasını sezgisel olarak doğrulamışlardır. Doğal olarak karşıt düşüncelerde ortaya çıkmıştır. Bazı matematikçiler bu sayıların varlığını inkar ederken diğerleri de bu sayıları reel sayılar ile birlikte kullanmaya devam etmişlerdir. Kompleks sayıların kullanımı hiçbir çelişkiye sebep olmamıştır ve ispatlanan bu düşünce matematiğin gelişiminde önemli bir dönüm noktası olmuştur.

Bir c kompleks sayısı a, b reel sayılar ve $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere $c = a + bi$ formundadır. Burada a'ya c'nin **reel kısmı**, b'ye de c'nin **sanal** (imajiner) **kısmı** denir. "Sanal veya imajiner kısmı" kavramı kompleks sayıların başlangıcındaki gizemlilikten gelmesine rağmen bu sayılar reel sayılar kadar reeldir.

ÖRNEK 1

(a) $5 - 3i$ kompleks sayısının reel kısmı 5, sanal kısmı –3'tür.
(b) $-6 + \sqrt{2}\, i$ kompleks sayısının reel kısmı –6, sanal kısmı $\sqrt{2}$'dir. ■

$i = \sqrt{-1}$ gösterimi $i^2 = -1$ özelliğine sahiptir. Bu özellik yardımıyla aşağıdaki ilişkileri yazabiliriz:

$$i^3 = -1, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = \text{i}, \quad i^6 = -1, \ldots$$

Bu sonuçlar kompleks sayıları içeren işlemlerin sadeleştirilmesinde çok kullanışlıdır. $c_1 = c_1 + b_1 i$ ve $c_2 = a_2 + b_2 i$ iki kompleks sayı olmak üzere eğer bu sayıların reel ve sanal kısımları birbirlerine eşit ise yani, $a_1 = a_2$ ve $b_1 = b_2$ ise bu sayılara eşittir denir. Doğal olarak, her reel a sayısı sanal kısmı sıfır olan bir kompleks sayıdır: $a = a + 0i$

■ Kompleks Sayılar Üzerinde İşlemler

$c_1 = a_1 + b_1 i$ ve $c_2 = a_2 + b_3 i$ kompleks sayılar olmak üzere, bu sayıların toplamı

$$c_1 + c_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

ve farkı

$$c_1 - c_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i.$$

şeklindedir. Diğer bir ifadeyle, iki kompleks sayının toplamı; reel kısımların kendi aralarında, sanal kısımlarında kendi aralarında toplanmasıyla elde edilir c_1 ve c_2'nin çarpımı

$$\begin{aligned} c_1 c_2 &= (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i + b_1 b_2 i^2 \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i. \end{aligned}$$

c_1 reel sayı olduğunda kompleks sayıların çarpımında özel bir durum oluşur. Bu durumda,

$$c_1 c_2 = c_1 \cdot (a_2 + b_2 i) = c_1 a_2 + c_1 b_2 i.$$

basit sonucu elde edilir.

$c = a + bi$ bir kompleks sayı ise, c'nin eşleniği $c = a - bi$ kompleks sayısı olur. c ve d kompleks sayıları için aşağıdaki temel özelliklerin doğrulukları kolayca gösterilebilir

1. $\overline{\overline{c}} = c$.
2. $\overline{c + d} = \overline{c} + \overline{d}$.
3. $\overline{cd} = \overline{c}\,\overline{d}$.
4. c'nin reel olması için gerek ve yeter şartı $\overline{c} = c$ olmasıdır.
5. $c\overline{c}$ negatif olmayan bir reel sayı ve $c\overline{c} = 0$ olması için gerek ve yeter şart $c = 0$ olmasıdır.

Burada 4. özelliği ispatlayıp, diğerlerini alıştırma olarak bırakacağız. $\overline{c} = a + bi$ olsun. Böylece $c = a - bi$ olur. $c = \overline{c}$ ise $a + bi = a - bi$ eşitliğinden $b = 0$ olur. Bu durumda c reeldir. Diğer taraftan c reel ise, $c = a$ ve $c = a$ olur. Buna göre $c = c$'dir.

ÖRNEK 2 $c_1 = 5 - 3i$, $c_2 = 4 + 2i$ ve $c_3 = -3 + i$ olsun.

(a) $c_1 + c_2 = (5 - 3i) + (4 + 2i) = 9 - i$

(b) $c_2 - c_3 = (4 + 2i) - (-3 + i) = (4 - (-3)) + (2 - 1)i = 7 + i$

(c) $c_1 c_2 = (5 - 3i) \cdot (4 + 2i) = 20 + 10i - 12i - 6i^2 = 26 - 2i$

(d) $$\begin{aligned} c_1 \overline{c}_3 &= (5 - 3i) \cdot \overline{(-3 + i)} = (5 - 3i) \cdot (-3 - i) \\ &= -15 - 5i + 9i + 3i^2 \\ &= -18 + 4i \end{aligned}$$

(e) $3c_1 + 2\bar{c}_2 = 3(5 - 3i) + 2\overline{(4 + 2i)} = (15 - 9i) + 2(4 - 2i)$
$= (15 - 9i) + (8 - 4i) = 23 - 13i$

(f) $c_1 \bar{c}_1 = (5 - 3i)\overline{(5 - 3i)} = (5 - 3i)(5 + 3i) = 34$ ■

Kompleks katsayılı lineer denklem sistemlerini gözönüne aldığımızda, çözüm sürecini tamamlayabilmek ve uygun bir şekilde çözüm elde edebilmek için kompleks sayıları bölmemiz gerekecektir. $c_1 = a_1 + b_1 i$ ve $c_2 = a_2 + b_2 i$ olmak üzere, $c_2 \neq 0$ ise yani $a_2 \neq 0$ veya $b_2 \neq 0$ ise c_1'i c_2'ye bölebiliriz.

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i}.$$

Kompleks sayıların "reel kısım + sanal kısım · i" şeklindeki alışılmış formuna benzetmek için c_1 / c_2 ifadesini sadeleştirmeliyiz. Bu kompleks bölümü sadeleştirmek için pay ve paydayı, paydanın eşleğini ile çarparız. Böylece c_1'in c_2'ye bölümü

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} - \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_2^2 + b_2^2} i$$

kompleks sayısını verir.

ÖRNEK 3

$c_1 = 2 - 5i$ ve $c_2 = -3 + 4i$ olsun. Böylece,

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{2 - 5i}{-3 + 4i} = \frac{(2 - 5i)(-3 - 4i)}{(-3 + 4i)(-3 - 4i)} = \frac{-26 + 7i}{(-3)^2 + (4)^2} = -\frac{26}{25} + \frac{7}{25} i$$

■

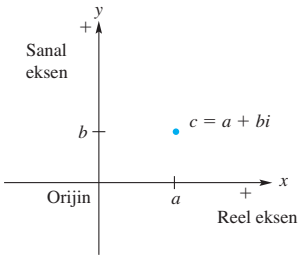
Bir kompleks sayının çarpmaya göre tercihinin bulunuşu kompleks sayılarda bölme işleminin özel bir durumudur; $c = a + bi$, $c \neq 0$ ise;

ÖRNEK 4

(a) $\dfrac{1}{2 + 3i} = \dfrac{2 - 3i}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \dfrac{2 - 3i}{2^2 + 3^2} = \dfrac{2}{13} - \dfrac{3}{13} i$

(b) $\dfrac{1}{i} = \dfrac{-i}{i(-i)} = \dfrac{-i}{-i^2} = \dfrac{-i}{-(-1)} = -i$ ■

Özet olarak, kompleks sayılar üzerlerinde toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemlerinin tanımlandığı matematiksel nesnelerdir. Bu işlemler, reel sayılar üzerinde özel haller olarak elde edilebilir. Gerçekte kompleks sayıların adına cisim dediğimiz matematiksel bir yapıya sahip olduğu gösterilebilir.



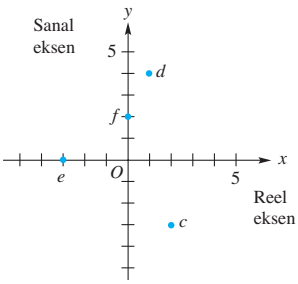
ŞEKİL B.1

■ Kompleks Sayıların Geometrik Gösterimi

Bir $c = a + bi$ kompleks sayısı reel sayıların (a, b) sıralı ikilisi olarak alınabilir. Bu sıralı ikiliye düzlemde bir nokta karşılık gelir. Bu tür bir eşleşme $a + bi$ kompleks sayısını **kompleks düzlemde** bir nokta olarak gösterebileceğimizi ifade eder. Burada yatay eksen c'nin reel kısmını ve düşey eksende c'nin sanal kısmını göstermek için kullanılır. Kolaylık olması için bu eksenleri sırasıyla **reel eksen** ve **sanal eksen** olarak adlandırabiliriz. (Şekil B.1'e bakınız.)

ÖRNEK 5 $c = 2 - 3i$, $d = 1 + 4i$, $e = -3$ ve $f = 2i$ kompleks düzlemde gösteriniz.

Çözüm



ŞEKİL B.2

Şekil B.2'ye bakınız. ■

Reel sayıların eşitsizliğiyle ilgili kurallar, örneğin küçüktür, büyüktür, kompleks sayılara uygulanamaz. Kompleks sayıları büyüklüklerine göre sıralamanın hiçbir yolu yoktur. Bununla birlikte kompleks düzlemdeki geometrik gösterimi kullanarak, bir kompleks sayının orijine olan uzaklığını ölçerek bu sayılar için bir büyüklük kavramı ekleyebiliriz. $c = a + bi$'nin orijinden olan uzaklığına kompleks sayının mutlak değeri veya modülü denir ve $|c| = |a + bi|$ şeklinde gösterilir. reel sayıların sıralı ikilileri arasındaki uzaklık formülü

$$|c| = |a + |bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

elde ederiz. Buradan $c\bar{c} = |c^2|$ olur. (Gösteriniz.)

ÖRNEK 6 Örnek 5'e dönersek; $|c| = \sqrt{13}$; $|d| = \sqrt{17}$, $|e| = 3$; $|f| = 2$ ■

Bir kompleks sayının farklı fakat ilgili bir yorumuda $c = a + bi$ sayısı ile $O\ P$ vektörü arasında bir ilişki kurarak elde edilir. Burada O noktası (0, 0 orijin ve P ise (a, b) noktasıdır. Kesim 4.1'de gözden geçirdiğimiz gibi düzlemdeki vektörler ile bu gösterim arasında açık bir benzerlik vardır.

Bir vektör gösterimi kullanılarak kompleks sayıların toplama ve çıkarması, buna karşılık gelen vektör işlemleri ile yapılabilir. Bu işlemler Şekil 4.5, 4.6 ve 4.9'da gösterilmiştir. Biz, burada kompleks sayılarla ilgili işlemlerin vektör işlemleriyle yapılması yolunu takip etmeyeceğiz. Ancak, bu tarz bakış açısı kompleks değişkenlerin çalışılmasında ve gelişiminde önemlidir.

■ Kompleks Elemanlı Matrisler

Bir matrisin elemanları kompleks sayılar ise matrislerin toplama, çıkarma, çarpma ve skalarla çarpım işlemlerini aynı reel matrislerde olduğu gibi yapabiliriz. Bu kitapta, reel matrisler için yapılan ispatlar ve kompleks sayılardaki aritmetik özellikler kullanılarak bu işlemlerin geçerliliği doğrulanabilir. Aşağıdaki örnekte bu kavramları açıklayacağız.

ÖRNEK 7

$$A = \begin{bmatrix} 4+i & -2+3i \\ 6+4i & -3i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2-i & 3-4i \\ 5+2i & -7+5i \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1+2i & i \\ 3-i & 8 \\ 4+2i & 1-i \end{bmatrix}.$$

olmak üzere;

$$\text{(a)}\quad A + B = \begin{bmatrix} (4+i)+(2-i) & (-2+3i)+(3-4i) \\ (6+4i)+(5+2i) & (-3i)+(-7+5i) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 1-i \\ 11+6i & -7+2i \end{bmatrix}$$

b) $B - A = \begin{bmatrix} (2-i)-(4+i) & (3-4i)-(-2+3i) \\ (5+2i)-(6+4i) & (-7+5i)-(-3i) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -2-2i & 5-7i \\ -1-2i & -7+8i \end{bmatrix}$$

c) $CA = \begin{bmatrix} 1+2i & i \\ 3-i & 8 \\ 4+2i & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4+i & -2+3i \\ 6+4i & -3i \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} (1+2i)(4+i)+(i)(6+4i) & (1+2i)(-2+3i)+(i)(-3i) \\ (3-i)(4+i)+(8)(6+4i) & (3-i)(-2+3i)+(8)(-3i) \\ (4+2i)(4+i)+(1-i)(6+4i) & (4+2i)(-2+3i)+(1-i)(-3i) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2+15i & -5-i \\ 61+31i & -3-13i \\ 24+10i & -17+5i \end{bmatrix}$$

(d) $(2+i)B = \begin{bmatrix} (2+i)(2-i) & (2+i)(3-4i) \\ (2+i)(5+2i) & (2+i)(-7+5i) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 10-5i \\ 8+9i & -19+3i \end{bmatrix}$$

■

Bir kompleks sayının eşleniğini hesapladığımız gibi bir matrisin eşleniği de her elemanın eşleniğini hesaplayarak bulabiliriz. Bir A matrisinin eşleniği $\overline{A}$ ile gösterilir ve $\overline{A} = \left[\overline{a_{ij}}\right]$ şeklinde yazarız.

ÖRNEK 8

Örnek 7'ye dönersek;

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 4-i & -2-3i \\ 6-4i & 3i \end{bmatrix} \text{ ve } \overline{B} = \begin{bmatrix} 2+i & 3+4i \\ 5-2i & -7-5i \end{bmatrix}$$

■

Aşağıdaki özellikler bir matrisin eşleniği için geçerlidir.

1. $\overline{\overline{A}} = A$
2. $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$
3. $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$
4. Herhangi reel k sayısı için, k, $\overline{kA} = k\,\overline{A}$'dır.
5. Herhangi kompleks c sayısı için, c, $\overline{cA} = \overline{c}\,\overline{A}$'dır.
6. $(\overline{A})^T = A^T$.
7. Eğer A singüler değilse, $(\overline{A})^{-1} = (A^{-1})$'dir.

5 ve 6. özellikleri ispatlayıp, diğerlerini alıştırma olarak bırakacağız. İlk olarak 5. özelliği ispatlayalım. Eğer c kompleks ise $\overline{cA}$'nın (i, j) elemanı (i, j) elemanı $\overline{ca_{ij}} = \overline{c}\,\overline{a_{ij}}$'dir ve bu $\overline{c}\,\overline{A}$'nın (i, j) elemanıdır. Şimdi de 6. özelliği ispatlayalım: $(\overline{A})^T$ matrisinin $(i, j$ elemanı $(\overline{A})^T$'dir ve bu $\overline{a_{ji}}$ matrisini (i, j) elemanıdır.

■ Kompleks Matrislerin Özel Tipleri

Daha önceden gördüğümüz gibi reel matrislerin belirli tipleri bazı önemli özellikleri sağlar. Aynı durum kompleks matrisler içinde geçerlidir. Şimdi bu tip matrislerin bazılarını inceleyelim.

Bir $n \times n$ tipinde kompleks A matrisi

$$\overline{A^T} = A$$

eşitliğini sağlar ise Hermityen† diye adlandırılır. Bu ise tüm i, j'ler için $\overline{a_{ji}} = a_{ij}$ olmasıyla denktir. Tüm reel simetrik matrisler Hermityendir. [(Alıştırma 11(c).] Böylece Hermityen matrisleri, reel simetrik matrisler gibi düşünebiliriz.

ÖRNEK 9

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3+i \\ 3-i & 5 \end{bmatrix} \text{ matrisi,}$$

$$\overline{A^T} = \overline{\begin{bmatrix} 2 & 3-i \\ 3+i & 5 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 2 & 3+i \\ 3-i & 5 \end{bmatrix} = A$$

olduğundan Hermityendir. ■

Bir $n \times n$ tipinde kompleks A matrisi

$$(\overline{A^T})A = A(\overline{A^T}) = I_n$$

eşitliğini sağlar ise **üniter** diye adlandırılır. Diğer bir ifadeyle, $\overline{A^T} = A^{-1}$'dir. Böylece üniter matrisleri, reel dik matrisler gibi düşünebiliriz.

ÖRNEK 10

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1-i}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

matrisi için

$$(\overline{A^T})A = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1-i}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1+i}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1-i}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = I_2$$

olduğundan üniterdir. Benzer şekilde eşitliğide $A(\overline{A^T}) = I_2$ sağlanır.



CHARLES HERMITE

†Charles Hermite (1822-1901) Dieuze, Lorraine-Fransa orta halli bir ailenin çocuğu olarak doğmuş ve Pariste ölmüştür. Ecole Polytechhnique'da yalnızca bir yıl çalışmıştır ve onun genç yaşta sahip olduğu üstün yeteneklerin farkına varan zamanın önde gelen matematikçilerinin teşvikiyle matematik çalışmaya devam etmiştir. Geometriden hoşlanmamasına rağmen sayılar teorisinden, cebirde, lineer cebirde birçok önemli katkıda bulunmuştur. Bu katkılardan başlıca ikisi: beşinci dereceden polinom denklemin çözümünün eliptik fonksiyonlar yardımıyla çözülebileceğini ve e sayısının (doğal logoritma sistemi için tabandır) transandantal olduğunu yani e'nin bir tam katsayılı polinom denkleminin kökü olamayacağını göstermesidir.

Kompleks matrislerin önemli bir tipi daha vardır. Bir $n \times n$ tipinde kompleks A matrisi

$$(\overline{A^T})\,A = A\,(\overline{A^T})$$

eşitliğini sağlıyorsa **normal** diye adlandırılır.

ÖRNEK 11

$$A = \begin{bmatrix} 5-i & -1+i \\ -1-i & 3-i \end{bmatrix} \text{ matrisi}$$

$$(\overline{A^T})\,A = A\,(\overline{A^T}) = \begin{bmatrix} 28 & -8+8i \\ -8-8i & 12 \end{bmatrix}$$

sağlandığında normaldir. (Gösteriniz.) Ayrıca $\overline{A^T} \neq A$ olduğunda A matrisi Hermityen değildir. (Gösteriniz.)

■ Kompleks Sayılar ve Polinomların Kökleri

Reel katsayılı n-inci dereceden bir polinomun n tane kompleks kökü vardır. Bu köklerden bazıları reeldir, tümü reeldir veya hiçbiri reel değildir. Böylece $f_1(x) = x^4 - 1$ polinomunun kökleri i, $-i$, 1 ve -1, $f_2(x) = x^2 - 1$ polinomunun kökleri 1 ve -1 ve $f_3(x) = x^2 + 1$ polinomunun kökleri i ve $-i$'dir.

B.1 Alıştırmalar

1. $c_1 = 3 + 4i$, $c_2 = 1 - 2i$ ve $c_3 = -1 + i$ olsun. Aşağıdakileri mümkün olduğu kadar sade biçimde hesaplayınız.

(a) $c_1 + c_2$ **(b)** $c_3 - c_1$
(c) $c_1 c_2$ **(d)** $c_2 \overline{c_3}$
(e) $4c_3 + \overline{c_2}$ **(f)** $(-i) \cdot c_2$
(g) $\overline{3c_1 - ic_2}$ **(h)** $c_1 c_2 c_3$

2. Aşağıdakileri $a + bi$ şeklinde yazınız.

(a) $\dfrac{1+2i}{3-4i}$ **(b)** $\dfrac{2-3i}{3-i}$
(c) $\dfrac{(2+i)^2}{i}$ **(d)** $\dfrac{1}{(3+2i)(1+i)}$

3. Herbir kompleks sayıyı, kompleks düzlemde bir nokta ve bir vektör olarak gösteriniz.

(a) $4 + 2i$ **(b)** $-3 + i$
(c) $3 - 2i$ **(d)** $i(4 + i)$

4. Alıştırma 3'te verilen herbir kompleks sayının modülünü hesaplayınız.

5. $c = a + bi$ ise, c'nin reel kısının Re(c) ve sanal kısmını da Im(c) ile gösterebiliriz.

(a) Herhangi $c_1 = a_1 + b_1 i$, $c_2 = a_2 + b_2 i$ kompleks sayıları için $\text{Re}(c_1 + c_2) = \text{Re}(c_1) + \text{Re}(c_2)$ ve $\text{Im}(c_1 + c_2) = \text{Im}(c_1) + \text{Im}(c_2)$ olduğunu ispatlayınız.

(b) Herhangi k reel sayısı için $\text{Re}(kc) = \text{Re}(c)$ olduğunu ispatlayınız.

(c) k bir kompleks sayı ise (b) şıkkı doğru mudur?

(d) $\text{Re}(c_1 c_2) = \text{Re}(c_1)\text{Re}(c_2)$ ifadesinin doğru olup olmadığını araştırınız.

6. $c_2 + 3i$ ve $c = -1 + 4i$ için c ve $\overline{c}$'ye karşılık gelen vektörleri kompleks düzlemde çiziniz. Geometrik olarak $\overline{c}$ vektörünün c'nin reel eksene göre yansıması olduğunu söyleyebiliriz. (Kesim 1.6 daki Örnek 4'e bakınız.)

7. $A = \begin{bmatrix} 2+2i & -1+3i \\ -2 & 1-i \end{bmatrix}$,

$B = \begin{bmatrix} 2i & 1+2i \\ 0 & 3-i \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2+i \\ -i \end{bmatrix}$

matrisleri verilsin. Aşağıdakilerini hesaplayınız ve $a + bi$ şeklinde yazınız.

(a) $A + B$ **(b)** $(1 - 2i)C$ **(c)** AB
(d) BC **(e)** $A - 2I_2$ **(f)** $\overline{B}$
(g) $A\,\overline{C}$ **(h)** $\overline{(A + B)}C$

8. A ve B $m \times n$ tipinde kompleks matrisler c de $n \times n$ tipinde singüler olmayan bir matris olsun.

(a) $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$ olduğunu ispatlayınız.

(b) Herhangi k reel sayısı için $k, \overline{kA} = k\overline{A}$ olduğunu ispatlayınız.

(c) $(\overline{C})^{-1} = \overline{C^{-1}}$ olduğunu ispatlayınız.

9. $A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ ise, A^2, A^3 ve A^4'ü hesaplayınız.

n bir pozitif sayı olmak üzere A^n için genel bir formül veriniz.

10. Aşağıda verilen matrislerden hangileri Hermityen, üniter veya normaldir?

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 2+i \\ 2-i & 4 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 2 & 1-i \\ 3+i & -2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 3-i & 4-i \\ 3+i & -2 & 2+i \\ 4+i & 2-i & 3 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 3 & \frac{3-i}{2} & \frac{4-i}{2} \\ \frac{3-i}{2} & -2 & 2+i \\ \frac{4-i}{2} & 2-i & 5 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 3+2i & -1 \\ -i & 2+i \end{bmatrix}$ **(h)** $\begin{bmatrix} i & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1-i}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

(j) $\begin{bmatrix} 4+7i & -2-i \\ 1-2i & 3+4i \end{bmatrix}$

11. **(a)** Bir Hermityen matrisini köşegen elemanlarının reel olmak zorunda olduğunu ispatlayınız.

(b) B reel ve simetrik bir matris, C reel ve ters simetris bir matris olmak üzere (Tanım 1.9'a bakınız) her Hermityen A matrisinin $A = B + iC$ şeklinde yazılabileceğini ispatlayınız. [*Yol gösterme*: $B = (A+\overline{A})/2$ ve $C = (A-\overline{A})/2i$ şeklinde düşününüz.]

(c) Herbir reel simetrik matrisin Hermityen olduğunu ispatlayınız.

11. **(a)** Herbir reel dik matrisin üniter olduğunu gösteriniz.

(b) A üniter bir matris ise A^T'nin de üniter olduğunu gösteriniz.

(c) A üniter bir matris ise A^{-1}'nin de üniter olduğunu gösteriniz.

13. A, $n \times n$ tipinde bir kompleks matris olsun

(a) B ve C Hermityen olmak üzere, $A = A + iC$ şeklinde yazılabileceğini gösteriniz.

(b) A'nın normal olması için gerek ve yeter şartın

$$BC = CB$$

olduğunu gösteriniz.

[*Yol gösterme:* $B = (A+\overline{A^T})/2$ ve $C = (A-\overline{A^T})2i$ şeklinde düşününüz.]

14. **(a)** Herbir Hermityen matrisin normal olduğunu ispatlayınız.

(b) Herbir üniter matrisin normal olduğunu ispatlayınız.

(c) Ne Hermityen ne de üniter olan 2×2 tipinde bir normal matris bulunuz.

15. $n \times n$ tipinde bir kompleks A matrisi

$$\overline{A^T} = -A$$

eşitliğini sağlar ise ters–Hermityen diye adlandırılır. B ve C reel matrisler olmak üzere $A = B + iC$ matrisinin ters Hermityen olması için gerek ve yeter şart B'nin ters simetrik C'nin de simetrik olmasıdır.

16. Aşağıdakilerin tüm köklerini bulunuz.

(a) $x^2 + x + 1 = 0$

(b) $x^3 + 2x^2 + x + 2 = 0$

(c) $x^5 + x^4 - x - 1 = 0$

17. $p(x)$ bir polinom ve A bir kare matris olsun. $p(A)$'ya "matris polinomu" veya "A matrisindeki polinom" denir. $p(x) = 2x^2 + 5x - 3$ için $p(A) = 2A^2 + 5A - 3I_n$ değerini aşağıdaki matrisler için hesaplayınız.

(a) $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ **(b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ **(d)** $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

18. $p(x) = x^2 + 1$ olsun

(a) $p(A) = 0$ sağlayan kI_2 şeklinde 2×2 tipinde iki farklı A matrisi bulunuz.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ için $p(A) = O$ olduğunu gösteriniz.

19. $p(x) = x^2 - x - 2$ polinomu için $p(A) = 0$ sağlayan kI_2 şeklinde 2×2 tipindeki bütün A matrislerini bulunuz.

20. Bölüm 1'deki Alıştırma 4'te reel elemanlı bir matrisin karakökü kavramının vermiştik. Matrisin kompleks elemanlı olduğunu kabul ederek karekök kavramını genelleştirebiliriz.

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ marisinin kompleks karekökünü hesaplayınız.

(b) $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ matrisinin kompleks karekökünü hesaplayınız.

B.2 Lineer Cebirde Kompleks Sayılar

Bu ekin asıl amacı, lineer cebirde kompleks, sayılara kolay bir geçişi sağlamaktır. Bu durum, reel elemanlı matrislerde ortaya çıkan kompleks özdeğer ve özvektörlerin anlatıldığı Bölüm 7'de özel bir öneme sahiptir. Bu yüzden temel teoremleri kompleks durum için tekrar ifade edeceğiz ve bu geçiş için gerekli olan asıl düşüncelere ait örnekleri ortaya koyacağız. El ile yapıldığında, kompleks aritmetikteki işlemlerin ne kadar çok sabır gerektirdiğini ve sıkıcı olacağını göstereceğiz.

■ Kompleks Elemanlı Lineer Sistemlerin Çözümü

Bölüm 2'de lineer sistemlerin çözümü için geliştirdiğimiz ilgili teknik ve sonuçlar doğrudan kompleks katsayılı lineer sistemlere taşınabilir. Satır işlemlerini ve Gauss-Jordan indirgemesi ile bu tip sistemlerin eşolon şekillerini kompleks aritmetik kullanarak inceleyeğiz.

ÖRNEK 1 Aşağıda verilen lineer sistemi Gauss-Jordan indirgemesiyle çözünüz.

$$\begin{aligned}(1+i)x_1 + (2+i)x_2 &= 5\\ (2-2i)x_1 + \quad ix_2 &= 1+2i\end{aligned}$$

Çözüm

İlaveli matrisi oluşturalım ve satırca indirgenmiş eşelon şekle indirgemek için elementer satır işlemlerini kullanalım, İlaveli $[A \mid B]$ matrisi için

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1+i & 2+i & 5 \\ 2-2i & i & 1+2i \end{array}\right]$$

ilk satırı $1/(1+i)$ ile çarparsak

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2}-\frac{1}{2}i & \frac{5}{2}-\frac{5}{2}i \\ 2-2i & i & 1+2i \end{array}\right]$$

elde ederiz.
Birinci satırın $-(2-2i)$ katını ikinci satıra eklersek

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2}-\frac{1}{2}i & \frac{5}{2}-\frac{5}{2}i \\ 0 & -2+5i & 1+12i \end{array}\right]$$

bulunuz. İkinci satırı $1/(-2+5i)$ ile çarparsak,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{3}{2}-\frac{1}{2}i & \frac{5}{2}-\frac{5}{2}i \\ 0 & 1 & 2-i \end{array}\right]$$

Satır eşelon şeklini elde ederiz. İnirgenmiş eşelon şeklini kalmak için, ikinci satırın $-\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i\right)$ katını birinci satıra eklersek,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2-i \end{array}\right]$$

Böylece çözüm $x_1 = 0$ ve $x_2 = 2 - i$ olur.

Yukarıdaki örnekte, satır işlemlerindeki aritmetikte, sistem sadece iki denklem ve iki bilinmeyenden oluşmasına rağmen kompleks aritmetiğin sıkıcılığını hissedebiliriz. Kompleks katsayılı lineer sistemlerde geri-yerine koymalı Gauss yok etme yöntemi de uygulanabilir.

ÖRNEK 2 Bir lineer sistemin ilaveli matrisi, satır eşelon şeklinde aşağıdaki matrise dönüştürülmüş olsun.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1+i & -1 \\ 0 & 1 & 3i & 2+i \\ 0 & 0 & 1 & 2i \end{array}\right]$$

Yerine koyma işlemi

$$\begin{aligned} x_3 &= 2i \\ x_2 &= 2 + i - 3i(2i) = 2 + i + 6 = 8 + i \\ x_1 &= -1 - (1+i)(2i) = -1 - 2i + 2 = 3 - 2i \end{aligned}$$

değerlerini verecektir.

Kompleks aritmetiğin sıkıcılığını, kompleks elemanlı lineer sistemleri çözmek için bilgisayar kullanarak giderebiliriz. Bununla beraber reel elemanlı aynı boyutlu sistemlere göre yaklaşık iki kat işlem zamanı gerektiğini unutmayalım. Bunu kompleks katsayılı $n \times n$ tipinde bir lineer sistemi, sadece reel katsayılı $2n \times 2n$ tipinde bir lineer sisteme nasıl dönüştürdüğümüzü göstererek inceleyebiliriz.

ÖRNEK 3

$$\begin{aligned} (2+i)x_1 + \ (1+i)x_2 &= 3 + 6i \\ (3-i)x_1 + (2-2i)x_2 &= 7 - i. \end{aligned}$$

lineer sistemini gözönüne alalım. $x_1 = a_1 + b_1 i$ ve $x_2 = a_2 + b_2 i$ olsun. Burada a_1, a_2, b_1, b_2 reel sayılardır.
Buradan sistemi

$$\begin{bmatrix} 2+i & 1+i \\ 3-i & 2-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 + b_1 i \\ a_2 + b_2 i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+6i \\ 7-i \end{bmatrix}$$

olarak matris şeklinde yazabiliriz. Verilen sistemi

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

şeklinde tekrar yazalım. Çarpım açılırsa,

$$\begin{aligned} &\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}\right) \\ &\qquad + i\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.

Her iki tarafın reel ve sanal kısımları birbirlerine eşit olacağından

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu ise

$$\begin{aligned} 2a_1 + a_2 - b_1 - b_2 &= 3 \\ 3a_1 + 2a_2 + b_1 + 2b_2 &= 7 \\ a_1 + a_2 + 2b_1 + b_2 &= 6 \\ -a_1 - 2a_2 + 3b_1 + 2b_2 &= -1 \end{aligned}$$

lineer sistemini verir. Bunu

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

şeklinde de yazabiliriz. Bu dört bilinmeyenli, dört denklemden oluşan sistem Bölüm 3'te olduğu gibi çözülebilir. Çözüm $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $b_1 = 2$, $b_2 = -1$'dir (doğrulayınız). Böylece $x_1 = 1 + 2i$, $x_2 = 2 - i$ çözümü verilen lineer sistem çözümüdür. ■

■ Kompleks Matrislerin Determinantları

Bölüm 3'te ortaya koyduğumuz determinant kavramı ve ilgili tüm özellikler kompleks elemanlı matrislerde uygulanır. Aşağıdaki örnek bunu gösterir.

ÖRNEK 4 A Örnek 3'te verilen katsayılar matrisi olsun. $|A|$'yı hesaplayınız.

Çözüm

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2+i & 1+i \\ 3-i & 2-2i \end{vmatrix} &= (2+i)(2-2i) - (3-i)(1+i) \\ &= (6-2i) - (4+2i) \\ &= 2 - 4i \end{aligned}$$

■

■ Kompleks Vektör Uzayları

Bir kompleks vektör uzayı, Tanım 4.4'te verilen bir reel vektör uzayı tanımıyla özellik 5-8'deki skalarlar kompleks sayı olabileceği farkıyla aynıdır.

Kompleks vektör uzayı ve reel vektör uzayı terimleri skalarların seçildiği cümleyi vurgular. Skalar çarpımın kapalılık özelliğinin [Tanım 4.4(b)] bir kompleks vektör uzayında sağlanması için, çoğu örnekte, kompleks sayıları içeren vektörleri gözönüne almalıyız.

Bölüm 4'teki çoğu reel vektör uzayı, kompleks vektör uzayına benzer.

ÖRNEK 5

(a) Tüm kompleks elemanlı $n \times 1$ tipindeki matrislerin cümlesi olan C^n'i göz önüne alalım.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

$\oplus$ işlemi matris toplamı ve $\odot$ işlemi de bir matrisin bir kompleks sayı ile çarpımını göstersin. Kesim 1.4'te inşa edilen matris özelliklerini ve Kesim B.1'de inşa edilen kompleks aritmatik özellikleri kullanarak C^n'nin bir kompleks vektör uzayı olduğunu ispatlayınız. ($\odot$ işlemi bir matrisin, reel bir sayı ile çarpımı olarak alınırsa, C^n vektörleri kompleks bileşenli olan reel vektör uzayı olur).

(b) $m \times n$ tipindeki kompleks elemanlı matrislerin cümlesi, $\oplus$ matris toplamı, $\odot$ bir matrisin, kompleks bir sayı ile çarpımı işlemleri ile birilkte bir kompleks vektör uzayıdır (ispatlayınız). Bu vektör uzayı Cmn ile gösterilir.

(c) Kompleks katsayılı polinomların cümlesi, $\oplus$ polinomların toplamı, $\odot$ bir polinomun bir kompleks sayı ile çarpım işlemleri ile birlikte bir kompleks vektör uzayıdır. İspat, Kesim 4.2'de verilen Örnek 6'ya benzer şeklide yapılabilir.

(d) $[a, b]$ aralığında tanımlı, kompleks değerli sürekli fonksiyonların cümlesi bir diğer ifadeyle, f_1 ve f_2 $[a, b]$ aralığında tanımlı, reel değerli sürekli fonksiyonlar olmak üzere $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ formundaki f 'lerin cümlesi) $\oplus$ işlemi $f \oplus g)(t) = f(t) + g(t)$ ve $\odot$ işlemi $(c \odot f)(t) = cf(t)$, c bir kompleks sayı şeklinde tanımlanan bu işlemlerle birlikte bir kompleks vektör uzayıdır $(-\infty, \infty)$ aralığı için karşılık gelen reel vektör uzayı Kesim 4.2'de Örnek 7 ile verilmişti. ■

Kompleks bir V vektör uzayının, kompleks bir W vektör alt uzayı tanımı sadece reel skalarlar yerine kompleks skalarlar alarak Tanım 4.5'te verilen tanım ile aynıdır. Teorem 4.3'ün kompleks karşılığı olarak ispatlanabilir ki; Bir kompleks vektör uzayı V'nin boş olmayan bir W alt cümlesinin bir kompleks alt vektör uzayı olması için gerek ve yeter şartları

(a) $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$, W daki herhangi iki vektör use $\mathbf{u} \in \mathbf{v} \oplus W$

(b) c herhangi bir kompleks sayı ve $\mathbf{u}$, W'daki herhangi vektör ise $c \odot \mathbf{u} \in W$ olmasıdır.

ÖRNEK 6

(a) a ve b kompleks sayılar olmak üzere $\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ b \end{bmatrix}$ şeklindeki c_{31}'in tüm vektörlerinin cümlesi W olsun. Buradan

$$\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ b \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} d \\ 0 \\ e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+d \\ 0 \\ b+e \end{bmatrix}$$

W'ya aittir ve herhangi bir c kompleks sayısı için

$$c \odot \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca \\ 0 \\ cb \end{bmatrix}$$

W'ya aittir. Böylece W, C_{31}'in kompleks alt vektör uzayıdır.

(b) C_{mn}'deki tüm reel elemanlı vektörlerin cümlesi W olsun. Eğer $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$, W'ya ait ise $A \oplus B$'de W'ya ait olacaktır. Çünkü a_{ij} ve b_{ij} reel ise toplamlarıda reeldir. $C \oplus A = c\,A$'nın ca_{ij} elemanları reel olmak zorunda olmadığından $c \odot A$, W'ya ait olmak zorunda değildir. Dolayısıyla W bir kompleks alt vektör uzayı değildir. ■

■ Kompleks Vektör Uzaylarında Lineer Bağımsızlık ve Taban

Lineer birleşim, geren cümle, lineer bağımlılık, lineer bağımsızlık ve taban kavramları sadece kompleks skalarların kullanılması durumu hariç kompleks vektör uzayları içinde aynen geçerlidir. (Kesim 4.4 ve 4.6'ya bakınız.)

ÖRNEK 7

V ve C^3 kompleks vektör uzayı olsun.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 1+i \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

alınırsa

(a) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3+3i \\ -4+i \end{bmatrix}$ vektörünün $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ ve $\mathbf{v}_3$'ün bir lineer birleşimi olup olmadığını belirleyiniz.

(b) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$'ün C^3'ü gerip germediğini belirleyiniz.

(c) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$'ün C^3'ün bir lineer bağımsız alt cümlesi olup olmadığını belirleyiniz.

(d) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ cümlesi C^3 için bir bağmıdır?

Çözüm

(a) İşlemleri Kesim 4.4'teki Örnek 8 gibi yapalım. a_1, a_2, a_3 bilinmeyen katsayılarla $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$'ün bir lineer birleşimini oluşturup $\mathbf{v}$'ye eşitleyelim.

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}$$

bu ifadede, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ ve $\mathbf{v}$ vektörlerini yazarsak

$$\begin{aligned} a_1 + \quad & ia_2 + a_3 = -1 \\ ia_1 \quad & + a_3 = -3 + 3i \\ & (1+i)a_2 + a_3 = -4 + i. \end{aligned}$$

lineer sistemi elde edilir. (Doğrulayınız.)

Elementere satır işlemlerini uygulayarak bu sistemin ilaveli matrisini ya satır eşelon ya da indirgenmiş satır eşelon şekline dönüştürerek lineer sistemin bağdaşabilirliğini araştıralım.

Satır eşelon şekli

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1-i & -3+4i \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

olarak bulunur. (Doğrulayınız.) Bu sistemin bağdaşabilirliğini gösterir. Böylece $\mathbf{v}$ vektörü $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ ve $\mathbf{v}_3$'ün bir lineer birleşimidir. Gerçekten yerine konulursa $a_1 = 3$, $a_2 = i$ ve $a_3 = -3$ olur. (Doğrulayınız.)

(b) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$ C^3'ün herhangi bir vektörü olsun. Lineer birleşimi

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}$$

şeklinde oluşturup a_1, a_2 ve a_3 için çözersek; lineer sistem

$$\begin{aligned} a_1 + \quad & ia_2 + a_3 = c_1 \\ ia_1 \quad & + a_3 = c_2 \\ & (1+i)a_2 + a_3 = c_3. \end{aligned}$$

bulunur. İlaveli matris satırca eşelon şekle döşütrürüsek

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 1 & c_1 \\ 0 & 1 & 1-i & c_2 - ic_1 \\ 0 & 0 & 1 & -c_3 + (1+i)(c_2 - ic_1) \end{array}\right]$$

olarak buluruz. (Doğrulayınız.) Böylece a_1, a_2, a_3 bilinmeyenlerin herhangi c_1, c_2, c_3 kompleks sayıları için çözebiliriz. Buna göre $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ cümlesi C^3'ü gerer.

(c) Kesim 4.5'teki Örnek 7'de olduğu gibi

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 = 0$$

denklemini oluşturup a_1, a_2 ve a_3 için çözersek, sonuçta bulunan homojen sistem,

$$\begin{aligned} a_1 + \quad & ia_2 + a_3 = 0 \\ ia_1 \quad & + a_3 = 0 \\ & (1+i)a_2 + a_3 = 0. \end{aligned}$$

olur. İlaveli matrisi, satırca eşelon şekle indirgersek,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

buluruz. Sonuç olarak $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ bulunur bu ise $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$'ün lineer bağımsız olduğunu gösterir.

(d) $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ve $\mathbf{v}_3$, C^3'ü gerdiğinden [(b) şıkkı] ve bunlar lineer bağımsız olduklarından [(c) şıkkı] cevap "evet" tir. ■

Tıpkı reel vektör uzaylarında olduğu gibi, bir kompleks vektör uzayında geren cümle, lineer bağımlı ve lineer bağımsız cümleler ve taban problemleri uygun bir lineer sistem kullanılarak çözülür. Bir kompleks uzayın boyut tanımı tıpkı Tanım 4.11'deki gibidir. C^n gibi bir kompleks vektör uzayının boyutunu tartışırken sezgisel ifademiz de uygulamamız gerekir. Örneğin C^1 sıfırdan farklı tek bir vektörün tüm kompleks katlarını içerir. Bu kolleksiyon, kompleks sayılarla birebir eşleştirilebilir. Yani, kompleks düzlemdeki tüm noktalarla (Şekli B.1'e bakınız.) iki boyutlu bir reel vektör uzayı R^2'nin noktalarıyla bire-bir eşleştirilebildiği gibi (Kesim 4.1'e bakınız.) bir boyutlu bir kompleks vektör uzayı, iki boyutlu reel vektör uzayının geometrik modeliyle birebir eşleşen bir geometrik modele sahiptir. Benzer şekilde, iki boyutlu bir kompleks vektör uzayı geometrik olarak dört boyutlu bir reel vektör uzayıyla aynıdır.

■ Kompleks İç Çarpımlar

V bir kompleks vektör uzayı olsun. V'deki bir iç çarpım; V'nin her $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ vektörlerinin sıralı ikilisini $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ kompleks sayısına götüren ve aşağıdaki şartları sağlayan bir fonksiyondur.

(a) $(\mathbf{u},\mathbf{v}) \geq 0$; $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ ise ancak ve ancak $\mathbf{u} = 0$'dır.

(b) Herhangi $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ için $\overline{(\mathbf{v}, \mathbf{u})} = (\mathbf{u},\mathbf{v})$'dir.

(c) Herhangi $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ için $(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, \mathbf{w})+(\mathbf{v}, \mathbf{w})$'dir.

(d) Herhangi $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ ve bir c kompleks skarları için $c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = c(\mathbf{u},\mathbf{v})$ dir.

Uyarı Verilen bu tanımın Tanım 5.1'deki bir reel iç çarpım tanımına ne kadar benzer olduğuna dikkat ederiz.

ÖRNEK 8

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$ C^n'nin elemanları olmak üzere;

C^n de standart iç çarpımı

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1\overline{v}_1 + u_2\overline{v}_2 + \cdots + u_n\overline{v}_n$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Bu son eşitlik

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1\overline{v}_1 + u_2\overline{v}_2 + \cdots + u_n\overline{v}_n$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Böylece, eğer

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 - i \\ 2 \\ -3 + 2i \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 + 2i \\ 3 - 4i \\ -3i \end{bmatrix}$$

vektörleri C^3'ün elemanları ise

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= (1 - i)\overline{(3 + 2i)} + 2\overline{(3 - 4i)} + (-3 + 2i)\overline{(-3i)} \\ &= (1 - 5i) + (6 + 8i) + (-6 - 9i) \\ &= 1 - 6i.\end{aligned}$$

olur. ■

Üzerinde kompleks iç çarpım tanımlı olan kompleks vektör uzayına **kompleks iç çarpım uzayı** denir. V bir kompleks iç çarpım uzayı ise V deki bir $\mathbf{u}$ vektörünün uzunluğunu aynen reel durumda olduğu gibi,

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}$$

şeklinde tanımlarız. Ayrıca V'nin $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ eşitliğini sağlıyorlarsa, **dik vektörler** olarak adlandırılır.

■ Kompleks Özdeğerler ve Özvektörler

Kesim 7.3'te verilen ve özel matrislerin oynadığı rolü gösteren teoremlerin, kompleks matris durumundaki benzerleri aşağıda verilmiştir.

Teorem B.1 A bir Hermityen matris ise A'nın özdeğerleri reeldir. Ayrıca farklı özdeğerlere karşılık gelen özvektörler birbirlerine diktir. (Teorem 7.6 ve 7.7'nin kompleks benzeri). ■

Teorem B.2 A bir Hermityen matris ise, D köşegen bir matris olmak üzere $U^{-1}AU = D$ olacak şekilde bir üniter U matrisi vardır. A'nın özdeğerleri D'nin esas köşegeni üzerindedir (Teorem 7.9'un kompleks benzeri). ■

Kesim 7.3'te A bir reel simetrik matris ise D köşegen matris olmak üzere $P^{-1}AP = D$ olacak şekilde bir P ortogonal matrisinin var olduğunu ve tersine $P^{-1}AP$ bir köşegen matris olacak şekilde P matrisi varsa A'ın bir simetrik matris olduğunu ispatladık. Durum, kompleks matrisler için daha karışıktır. Teorem B.2'nin tersi doğru değildir. Yani A matrisi U üniter bir matris olmak üzere $U^{-1}AU = D$ köşegen matris ise A, Hermityen bir matris olmak zorunda değildir. İfade normal matrisler için doğrudur. Aşağıdaki sonuç ifade edilebilir.

Teorem B.3 A normal bir matris ise $U^{-1}AU = D$ köşegen matris olacak şekilde bir U üniter matrisi vardır. Tersine, A matrisi U üniter bir matris olmak üzere $U^{-1}AU = D$ köşegen matris, eşitliğini sağlıyorsa A matrisi normal bir matristir. ■

B.2 Alıştırmalar

1. Gauss–Jordan indirgemesini kullanarak, aşağıdakileri çözünüz.

(a)
$$\begin{aligned}(1+2i)x_1 + (-2+i)x_2 &= 1-3i\\ (2+i)x_1 + (-1+2i)x_2 &= -1-i\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}2ix_1 - (1-i)x_2 &= 1+i\\ (1-i)x_1 + x_2 &= 1-i\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}(1+i)x_1 - x_2 &= -2+i\\ 2ix_1 + (1-i)x_2 &= i\end{aligned}$$

2. Aşağıda verilen ilaveli matrisleri satırca eşelon forma dönüştürünüz ve geri yerine koyma metodu ile çözünüz.

(a)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & i & 0 & 1-i \\ 0 & 3i & -2+i & 4 \\ 0 & 0 & 2+i & 2-i \end{array}\right]$$

(b)
$$\left[\begin{array}{ccc|c} i & 2 & 1+i & 3i \\ 0 & 1-i & 0 & 2+i \\ 0 & 0 & 3 & 6-3i \end{array}\right]$$

3. Gauss yoketme ve yerine koyma metodu ile aşağıdakileri çözünüz.

(a)
$$\begin{aligned}ix_1 + (1+i)x_2 &= i\\ (1-i)x_1 + x_2 - ix_3 &= 1\\ ix_2 + x_3 &= 1\end{aligned}$$

(b) $\begin{aligned} x_1 + ix_2 + (1-i)x_3 &= 2+i \\ ix_1 + (1+i)x_3 &= -1+i \\ 2ix_2 - x_3 &= 2-i \end{aligned}$

4. Aşağıdaki determinantları hesaplayınız ve mümkün olduğu kadar sadeleştiriniz.

(a) $\begin{vmatrix} 1+i & -1 \\ 2i & 1+i \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 2-i & 1+i \\ 1+2i & -(1-i) \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 1+i & 2 & 2-i \\ i & 0 & 3+i \\ -2 & 1 & 1+2i \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 2 & 1-i & 0 \\ 1+i & -1 & i \\ 0 & -i & 2 \end{vmatrix}$

5. Eğer varsa aşağıdaki matrislerin tersini bulunuz.

(a) $\begin{bmatrix} i & 2 \\ 1+i & -i \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 2 & i & 3 \\ 1+i & 0 & 1-i \\ 2 & 1 & 2+i \end{bmatrix}$

6. Aşağıda verilen C_{22}'nin W alt cümlelerinin kompleks bir alt vektör uzayı olup olmadığını araştırınız.

(a) W, esas köşeginde sıfır elemanların olan tüm 2×2 tipindeki kompleks matrislerin cümlesi

(b) W, köşegen elemanların reel kısmı sıfır olan tüm 2×2 tipindeki kompleks matrislerin cümlesi

(c) W, 2×2 tipindeki tüm simetrik kompleks matrislerin cümlesi

7. **(a)** Tüm $m \times n$ tipindeki Hermityen matrislerin cümlesi W'nın C_{mn}'in bir kompleks alt vektör uzayı olup olmadığını gösteriniz.

(b) Tüm $n \times n$ tipindeki Hermityen matrislerinin cümlesi W'nın $n \times n$ tipindeki kompleks matrislerinin reel vektör uzayının bir reel alt vektör uzay olup olmadığını gösteriniz.

8. $n \times n$ tipindeki üniter matrisler cümlesi W'nın C_{nn}'in bir kompleks alt vektör uzayı olup olmadığını gösteriniz.

9. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1+i \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \\ i \end{bmatrix}$,

$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -5+2i \\ -1-3i \\ 2-3i \end{bmatrix}$ olmak üzere

$W = \text{sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ olsun.

(a) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ W'ya ait midir?

(b) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ cümlesi lineer bağımlı mı yoksa lineer bağımsız mıdır?

10. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, V kompleks vektör uzayının bir tabanı olsun. W'nın $\text{sp}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$'de olup olmadığını belirleyiniz.

(a) $\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= i\mathbf{v}_1 + (1-i)\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 \\ \mathbf{w}_2 &= (2+i)\mathbf{v}_1 + 2i\mathbf{v}_2 + (3-i)\mathbf{v}_3 \\ \mathbf{w} &= (-2-3i)\mathbf{v}_1 + (3-i)\mathbf{v}_2 + (-2-2i)\mathbf{v}_3 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= 2i\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + (1-i)\mathbf{v}_3 \\ \mathbf{w}_2 &= 3i\mathbf{v}_1 + (1+i)\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3 \\ \mathbf{w} &= (2+3i)\mathbf{v}_1 + (2+i)\mathbf{v}_2 + (4-2i)\mathbf{v}_3 \end{aligned}$

11. Aşağıdaki kompleks matrislerin özdeğerlerini ve bunlara ait özvektörleri bulunuz.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ **(b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & i \\ 0 & -i & 2 \end{bmatrix}$

12. Alıştırma 11'deki herbir şık için, $P^{-1}AP = D$ köşegen matris olacak biçimde bir P matrisi bulunuz. (c) şıkkı için, A'yı köşegenleştiren üç farklı P matrisi bulunuz.

13. **(a)** A, Hermityen ise özdeğerlerinin reel olduğunu ispatlayanız.

(b) Alıştırma 11(c)'deki A matrisini Hermityen olduğunu gösteriniz.

(c) Hermityen bir matrisin bir özdeğerine ait özvektörleri reel vektörler olmak zorunda mıdır? Açıklayınız.

14. A'nın satırları (veya sütunları) C^n'deki standart iç çarpıma göre bir birim dik cümle oluşturur ancak ve ancak, $n \times n$ tipindeki kompleks A matrisi üniterdir. İspatlayınız. (*Yol gösterme*: Teorem 7.8'e bakınız.)

15. A bir ters Hermityen matris (Kesim B.1'deki Alıştırma 15'e bakınız.) ve A'nın bir özdeğeri λ ise, λ'nın reel kısmı sıfırdır ispatlayınız.

EK

C İspat Yöntemlerine Giriş

C.1 Mantık

Mantık, akıl yürütme yöntemleriyle ilgilenen bir bilim dalıdır. Verilen idida'nın doğru olup olmadığını belirleyecek yöntemleri ve kuralları ortaya koyar. Mantıksal akıl yürütme, matematikte teoremleri ispatlamak için kullanılır.

Önerme doğru veya yanlış değerinden yalnızca birini alabilen fakat aynı anda iki değeri birden alamayan kesin hüküm bildiren cümlelerdir.

ÖRNEK 1

Aşağıdakilerden hangileri önermedir?

(a) Nero öldü.

(b) Her üçgen bir karedir.

(c) İngilizce konuşur musunuz?

(d) Her x reel sayısı için $x^2 \geq 0$'dır.

(e) $4 + 3 = 7$.

(f) Beni yarın ara.

(g) $x^2 - 3x + 2 = 0$

Çözüm

(a), (b), (d) ve (e) ifadeleri birer önermedir. (a), (d) ve (c) doğru önermeler olup (b) önermesi yanlıştır. (c) bir soru cümlesi, (f)'de bir emir cümlesi oldukları için birer önerme değildir. (g) bir hüküm cümlesi olup x'in bazı değerleri için doğru, bazı değerleri için yanlıştır. ■

Eğer p bir önerme ise "p değil" önermesine p'nin değili denir ve $\sim p$ ile gösterilir. p'nin değili ayrıca p'nin tersi olarak da adlandırılır $\sim p$ önermesi, p yanlış iken doğrudur. $\sim p$'nin, p ye göre doğruluk değerleri Tablo C.1'de verilmiştir. Bu tabloya **doğruluk tablosu** denir.

*Bu ek bölümün genişletilmiş halini, Problem Çözüm kitabının, Bölüm 0'da bulabilirsiniz.

TABLO C.1

p	$\sim p$
D	Y
Y	D

ÖRNEK 2 Aşağıda verilen her bir önermenin değilini bulunuz.
(a) p : $2 + 3 > 1$
(b) q : 0'soğuktur.

Çözüm

(a) $\sim p$: 2 + 3 1'den büyük değildir. Yani $\sim p$: $2 + 3 \leq 1$. p doğru olduğundan $\sim p$ yanlıştır.
(b) $\sim q$: 0 soğuk değildir. ■

p ve q önermeleri belirli bağlaçlar yardımıyla birleştirilebilir ve bu önermelerden birleşik bir önerme elde edilebilir. Burada en önemli mantıksal bağlaçları inceleyelim.

p ve q önermeler olmak üzere

1. "p ve q" önermesi "$p \wedge q$" ile gösterilir ve p ve q önermelerinin kesişimi olarak adlandırılır. $p \wedge q$ önermesi yalnızca p ve q doğru iken doğrudur. $p \wedge q$ önermesinin doğruluk tablosu Tablo C.2'de verilmiştir.
2. "p ve q" önermesi "$p \vee q$" ile gösterilir ve p ve q önermelerinin birleşimi olarak adlandırılır. $p \vee q$ önermesi, p veya q önermelerinden en az biri doğru olduğunda doğrudur. $p \vee q$ nun doğruluk tablosu Tablo C.3'te verilmiştir.

TABLO C.2

p	q	$p \vee q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	Y

TABLO C.3

p	q	$p \wedge q$
D	D	D
D	Y	D
Y	D	D
Y	Y	Y

ÖRNEK 3 p : $2 < 3$ ve q : $-5 > -8$ önermelerinin kesişimini bulunuz.

Çözüm

$p \wedge q$: $2 < 3$ ve $-5 > -8$ olup, bu önerme doğrudur. ■

ÖRNEK 4 p : –2 bir negatif tamsayıdır ve q : $\sqrt{3}$ bir rasyonel sayıdır, önermelerinin birleşimin bulunuz.

Çözüm

p q : –2 bir negatif tamsayıdır ve $\sqrt{3}$ bir rasyonel sayıdır. Bu önerme doğrudur (Niçin?). ■

Veya bağlacı ve bağlacından daha karmaşıktır. "Parise, pazartesi gideceğim veya salı günü gideceğim" önermesi p : Parise pazartesi günü gideceğim ve q : Parise salı günü gideceği, önermelerinin birleşimidir. Burada iki ihtimalden yalnız biri gerçekleşebilecektir. Sonuç olarak veya bağlacı harici anlamda kullanılmaktadır. Diğer taraftan "Fransızcadan kaldım veya Matematik'ten geçtim" önermesinde her iki ihtimalin gerçekleşmesi mümkün olduğundan veya bağlacı dahili anlamda kullanılmaktadır.

Matematik ve Bilgisayar birimlerinde veya bağlacı her zaman dahili anlamada kullanılır.

Eğer iki önermenin doğruluk değerleri aynı ise bu önermelere **denk önermeler** denir. Bunun anlamı, bir ispatta veya bir hesaplamada verilen bir önermeyi bu önermeye denk başka bir önermeyle değiştirebileceğimizdir. Böylece

1 ile çarpmak, $\frac{5}{5}$ ve $x \neq 3$ için $\frac{x-3}{x-3}$ ile çarpmak ile denktir.

2 ile bölmek, $\frac{1}{2}$ ile çarpmak ile denktir.

Daha sonra üzerinde duracağımız gibi, denk önermeler genellikle ispat işlemlerinde kullanılırlar.

p ve q önermeler olmak üzere "p ve q" önermesi $p \Longrightarrow q$ şeklinde gösterilir ve şartlı önerme olarak adlandırılır. Burada p'ye **hipotez**, q'ya da **sonuç** denir. "ise" bağlacı "$\Longrightarrow$" sembolü ile gösterilir.

ÖRNEK 5 Aşağıdakiler birer şartlı önermedir.

(a) $\underbrace{\text{İki doğru paralel}}_{p}$ ise $\underbrace{\text{doğrular kesişmezler}}_{q}$

(b) Eğer $\underbrace{\text{açsam}}_{p}$, $\underbrace{\text{yerim}}_{q}$.

■

$p \Longrightarrow q$ şartlı önermesi hipotez önermesi yanlış olduğunda veya sonuç önermesi doğru olduğunda doğrudur. $p \Longrightarrow q$'nun doğruluk değerleri Tablo C.4'de verilmiştir.

TABLO C.4

p	q	$p \Longrightarrow q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	D

Bir şartlı önerme farklı şekillerde de karşımıza çıkabilir. Aşağıdakilerin her biri $p \Longrightarrow q$ önermesine denktir. p, q'yu gerektirir;

Eğer p ise q;
p, q için yeterdir;
q, p için gereklidir;
Eğer p ise q'dir.

Matematikteki temel hedeflerden biri de $p \Longrightarrow q$ şartlı önermesinin doğruluğunu yani p doğru iken q'nun da doğru olmak zorunda olduğunu göstermektedir.

Eğer $p \Longrightarrow q$ bir şartlı önerme ise bu önermenin **karşıt tersi** $\sim q \Longrightarrow \sim p$ de bir şartlı önermedir. Bu önermenin doğruluk değerleri Tablo C.5'de verilmiştir. Tablo C.5 ile Tablo C.4'ün aynı olduğuna dikkat ediniz.

TABLO C.5

p	q	$\sim q \Longrightarrow \sim q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	D

TABLO C.6

p	q	$q \Longrightarrow q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	D
Y	Y	D

Eğer $p \Longrightarrow q$ bir şartlı önerme ise bu önermenin **karşıtı** $q \Longrightarrow p$ de bir şartlı önermedir. $q \Longrightarrow p$'nin doğruluk değerleri Tablo C.6'da verilmiştir. $p \Longrightarrow q$'nun karşıtının hipotez ve sonuç önermelerinin yer değiştirmesiyle elde edildiğine dikkat ediniz.

ÖRNEK 6 Aşağıda verilen şartlı önermelerin karşıt terslerini ve karşıtlarını bulunuz.

(a) İki farklı doğru paralel ise doğrular kesişmezler.

(b) a ve b pozitif sayılar ise ab pozitiftir.

(c) $n + 1$ tek ise, n çifttir.

Çözüm

(a) Karşıttersi: Eğer iki farklı doğru kesişirlerse bu doğrular paralel değildirler. Verilen şartlı önerme ve karşıttersi doğru önermelerdir.

Karşıtı: Eğer iki farklı doğru kesişmezlerse paraleldirler. Bu durumda verilen şartlı önerme ve karşıtı doğru önermelerdir.

(b) Karşıttersi: Eğer ab pozitif değil ise a ve b'nin her ikisi de pozitif değildir. Verilen şartlı önerme ve karşıttersi doğru önermelerdir.

Karşıtı: Eğer ab pozitif ise a ve b pozitiftir. Bu durumda verilen şartlı önerme doğrudur fakat karşıtı doğru değildir ($a = -1$ ve $b = -2$ alındığında $ab = 2$ olduğuna dikkat ediniz).

(c) Karşıttersi: n tek ise $n + 1$ çifttir. Verilen şartlı önerme ve karşıt tersi doğru önermelerdir.

Karşıtı: Eğer n çift ise $n + 1$ tektir. Bu durumda verilen şartlı önerme ve karşıtı doğrudur. ■

TABLO C.7

p	q	$p \Longleftrightarrow q$
D	D	D
D	Y	Y
Y	D	Y
Y	Y	D

p ve q önermeler olmak üzere "sadece ve sadece p ise q" bileşik önermesi $p \Longleftrightarrow q$ şeklinde gösterilir ve çift yönlü şartlı önerme diye adlandırılır. Çift yönlü şartlı önerme bağlacı $\Longleftrightarrow$ sembolü ile gösterilir $p \Longleftrightarrow q$'nun doğruluk değerleri Tablo C.7'de verilmiştir. $p \Longleftrightarrow q$'nun p ve q önermelerinin aynı anda doğru veya yanlış olduklarında doğru olduğuna dikkat ediniz. Çift yönlü şartlı önerme $p \Longleftrightarrow q$, p, q için gerek ve yeter şarttır şeklinde ifade edilebilir.

ÖRNEK 7 Aşağıdakilerden herbiri çift yönlü şartlı önermedir.

(a) Sadece ve sadece $a > b$ ise $a - b > 0$'dır.

(b) Sadece ve sadece n tam sayısı asal ise bölenleri kendisi ve 1'dir. ■

ÖRNEK 8 Sadece ve sadece $3 > 2$ ise $0 < 3 - 2$'dir. Çift taraflı şartlı önermesi doğru mudur?

Çözüm

$p \iff q$ önermesi p ve q denk önermeler olduğunda doğrudur. $p \iff q$ nun doğruluğunu ispatlamak için hem $p \iff q$ hem de $q \iff p$ önermelerini doğru olduklarını göstermek zorundayız. ■

İspat yöntemleri hakkında kısa bir özet verelim. İlk olarak Tablo C.8'de bazı denklikleri sunulmuştur. Böylece herhangi bir ispatta, herhangi bir önermeyi, bu önermeye denk başka bir önermeyle değiştirebiliriz.

TABLO C.8

p	*Önerme*	*Denk Önerme*
(a)	$\sim(\sim p)$	p
(b)	$\sim(p \vee q)$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$
(c)	$\sim(p \wedge q)$	$(\sim p) \vee (\sim q)$
(d)	$\sim(p \Longrightarrow q)$	$(\sim p) \vee q$
(e)	$\sim(p \Longrightarrow q)$	$\sim q \Longrightarrow \sim p$
(f)	$\sim(p \iff q)$	$(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)$
(g)	$\sim(p \Longrightarrow q)$	$p \wedge \sim q$
(h)	$\sim(p \iff q)$	$(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q)$
(i)	$\sim(p \Longrightarrow q)$	$((p \wedge (\sim q)) \Longrightarrow c$, burada c her zaman yanlış olan bir önermedir.

Sonuç olarak Tablo C.9'da bazı önerme kalıpları sunulmuştur. Bunlardan bazıları, ispat yöntemlerinden çok kullanışlıdır.

TABLO C.9

(a)	$\sim(p \wedge q) \Longrightarrow p$
(b)	$\sim(p \wedge q) \Longrightarrow q$
(c)	$p \Longrightarrow \sim(p \vee q)$
(d)	$q \Longrightarrow \sim(p \vee q)$
(e)	$\sim p \Longrightarrow (p \Longrightarrow q)$
(f)	$\sim(p \Longrightarrow q) \Longrightarrow p$
(g)	$(p \wedge (p \Longrightarrow q)) \Longrightarrow q$
(h)	$(\sim p \wedge (p \vee q)) \Longrightarrow q$
(i)	$(\sim q \wedge (p \Longrightarrow q)) \Longrightarrow \sim p$
(j)	$((p \wedge q) \wedge (p \wedge r)) \Longrightarrow (p \Longrightarrow r)$

C.2 İspat Teknikleri (Yöntemleri)

Bu kesimde $p \Longrightarrow q$ şartı önermelerinin ispat yöntemlerinin inşaa edilişini tartışacağız. $p \Longrightarrow q$'yu ispatlamak için p doğru olduğunda q'nunda doğru olduğunu matematik dilini kullanarak bir mantıksal düşünceyle göstermek zorundayız.

Bu mantıksal düşüncenin inşaası oldukça zor olabilir. Biz bu mantıksal düşünceye ispat diyeceğiz. Kavramsal olarak $p \Longrightarrow q$'nun ispatı p'yi q'ya mantıksal olarak birleştirecek adımların bir dizisidir. Bu bağlantı içerisindeki her bir adımın doğruluğu ispatlanmış olmayı veya geçerliliği, daha önceden verilmiş bir tanıma, bir özelliğe doğruluğu bilinen bir aksiyoma, ispatlanmış bir teoreme ve hatta aynı ispat içerisindeki bir önceki adıma dayanmalıdır. Böylece p ve q'yu bilinen veya kabul edilen doğrular yardımıyla birleştirebiliriz. Çoğunlukla hangi doğruları kullanarak ispata nasıl ve hangi yolla başlayacağımız açık değildir. Ne yazık ki, p hipotezini ve q sonucunu dikkatlice okunup anlaşılmasından başka tavsiye edebileceğimiz bir yol yoktur. Sadece bu yolla p ve q arasındaki ilişkiyi aramaya başlayabiliriz. İspatın herhangi bir adımında, bir önermeyi, bu önermeye denk ve ihtiyaç duyulan başka bir önermeyle değiştirebiliriz. İspatın inşaasında p ve q arasındaki bağlantı adım adım kurulur. Eğer $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ile, mantıksal bağlantının inşaasındaki adımları gösterirsek kavramsal olarak bizim ispatımız,

$$p \Longrightarrow b_1 \Longrightarrow b_2 \Longrightarrow \ldots \Longrightarrow b_n \Longrightarrow q$$

şeklini alır. Burada herbir şartlı önerme ispatlanmak zorundadır. Bu yaklaşım direk ispat olarak bilinir. Bu yaklaşım direk ispat olarak bilinir. Bu yöntemin uygulaması Örnek 1'de verilmiştir.

ÖRNEK 1 m ve n çift tamsayılar ise $m + n$ çifttir. İspatlayınız.

Çözüm

p : "m ve n çift tamsayılardır" önermesi ve q : "$m + n$ çift tamsayıdır" önermesi olsun. p'nin doğruluğunu kabul ederek başlarsak, bildiğimiz hangi doğrular bizi q'ya götürür sorusunu sorarsak p ve q'nun her ikisi de çift tam sayı olduğundan

$$\underbrace{p \Longrightarrow m = 2k,\ n = 2j}_{b_2} \text{ tabanı } k \text{ ve } j \text{ tamsayıları için}$$

q' $m + n$ toplamıyla ilgilendiğinden, bu toplamı b_2'de oluştururursak,

$$\underbrace{b_1\ m + n = 2k + 2\,j = 2(k + j).}_{b_2}$$

Buradan $m + n$ toplamının 2'nin bir katı olduğunu görürüz. Böylece $m + n$ bir çift tamsayıdır. Bu q'nun kendisidir. Böylece $b_2 \Longrightarrow q$ elde ettik. Özetlersek,

$$p \Longrightarrow b_1 \Longrightarrow b_2 \Longrightarrow q \qquad (1)$$

■

Örnek 1'de p'den q'ya bir köprü inşaa etmek için ileriye doğru ilerledik. Buna **ileri inşaa** diyelim. Alternatif olarak q ile başlayıp, hangi b_n gerçeği bizi q'ya ulaştırır, hangi b_{n-1} gerçeği bizi b_n'e ulaştırır sorularını p'ye ulaşıncaya kadar sormaya devam edebilirdik. (Açıklama (1)'e bakınız.) Böyle bir mantıksal köprüye **geriye inşaa** olarak adlandıracağız. Verilen bu iki yöntem birleştirilebilir. İleri bir kaç adım inşaa edilir, geri birkaç adım inşaa edilir ve bunlar mantıksal olarak birleştirilmeye çalışılır.

Pratikte, ispatların inşaası bir sanattır ve gözlem ve deneyim olmaksızın öğrenilmelidir. Uygun adımların ve bunları ortaya çıkaracak yöntemlerin seçilmesi tam olarak tanımlanamayan yaratıcı faaliyetlerdir. Diğer bir ispat yöntemide orijinal $p \Longrightarrow q$ önermesinin bir denk önermeyle değiştirilmesi ve bu önermenin ispatlanmasıdır. Böyle bir ispat yöntemi **dolaylı ispat yöntemi** olarak adlandırılır. Bir dolaylı yöntemde $p \Longrightarrow q$ ve unun karşıt tersi $\sim q \Longrightarrow \sim p$ arasındaki denklik kullanılır [Tablo C.8 (e)]. Karşıttersin ispatı doğrudan yapıldığında buna **karşıtters yardımıyla ispat** diyoruz. Karşıttersiyle dolaylı ispat yönteminin başarılı olacağını önceden tahmin edemeyiz. Bu durumlarda $\sim q$'da olmayan bir ifadenin ortaya çıkışı, bu yöntemi denememiz için bir öneridir. Bununla birlikte bu yöntemin çalışılacağı garanti değildir. Karşıtters yardımıyla ispat yöntemi Örnek 2'de gösterilmiştir.

ÖRNEK 2 n bir tamsayı olsun. n^2 tek ise n'de tektir. İspatlayınız.

Çözüm

p : n^2 tek sayıdır ve q : n tek sayıdır. Önermeler olmak üzere, $p \Longrightarrow q$ nun doğru olduğunu ispatlamalıyız. Bunun yerine karşıttersi olan $\sim q \Longrightarrow \sim p$'yi ispatlayalım. Bu durumda kabul edelim ki n tek olmasın, bu durumda n çifttir. Böylece bir k tamsayı için $n = 2k$'dır. Burada $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ olur ki, n^2 çifttir. Böylece n çift ise n^2 çift olduğunu göstermiş olduk. Bu ise verilen önermenin karşıt tersidir. Sonuç olarak verilen önermenin ispatı karşıt ters yardımıyla gerçekleştirilmiş oldu.

İspat için ikinci bir dolaylı ispat yöntemide $p \Longrightarrow q$ önermesiyle $(p \wedge (\sim q)) \Longrightarrow c$, c her zaman doğruluk değeri yanlış olan bir önerme [Tablo C.8 (i)] önermesi arasındaki denkliği kullanan **çelişki bulma yöntemiyle ispatıdır.** Bu yöntemin Tablo C.4'te işaret edildiği gibi nasıl çalıştığını görebiliriz. $p \Longrightarrow q$ şartlı önermesi, p hipotezinin doğru ve q sonucunun yanlış olduğunda yanlıştır. Çelişki bulma yöntemiyle ispat yöntemi p'nin doğru olduğunun kabulüyle başlar. p'nin doğru olduğunu göstermek istiyoruz. Bu yüzden q'nun yanlış olduğunu kabul edip her zaman yanlış olduğu bilinen bir önermeyle arasında bir mantıksal köprü kurmaya çalışalım. Bunu başardığımızda bir çelişki elde etmiş oluruz. Yani ek hipotezimiz olan q'nun yanlışlığı doğru değildir. Bu yüzden q doğru olmak zorundadır. Eğer her zaman yanlış olan bazı önermelere mantıksal bir köprü kurmayı başarabilirsek q'nun yanlış olduğu sonucunu çıkaramayız. Belki de doğru bir köprü kurması başaramamışızdır. Karşıtters yardımıyla ispat yönteminde olduğu gibi, çelişki bulma yöntemiyle ispat yönteminde başarılı olacağını önceden söyleyemeyiz.

ÖRNEK 3 $\sqrt{2}$'nin irrasyonel olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$p : x = \sqrt{2}$ ve $q : x$ bir irrasyonel sayı olsun. p'nin doğru olduğunu kabul edip q'nun da doğru olduğunu göstermeye ihtiyacımız vardır. İspatı, çelişki bulma yöntemiyle yapmaya çalışalım. Bu yüzden $\sim p$'in doğru olduğunu kabul edelim.
Dolayısıyla, $x = \sqrt{2}$ ve x rasyonel olduğunu kabul etmiş oluruz. Daha sonra,

$x = \sqrt{2} = \dfrac{n}{d}$, burada n ve d ortak bölenleri olmayan tamsayılardır. Yani

$\dfrac{n}{d}$ en küçük terimlidir.

Bu durumda

$$2 = \frac{n^2}{d^2} \text{ ve } 2d^2 = n^2 \text{ elde edilir.}$$

Bir çift sayının karesi çift olduğundan, n çifttir. Böylece $n = 2k$, k bir tamsayı ve $2d^2 = n^2 = (2k)^2$ olur. Böylece $2d^2 = 4k^2$ ve $d^2 = 2k^2$ olup bir çift sayıdır. Sonuç olarak d de bir çift sayıdır. Yani hem n hem de d birer çift sayı olduklarından 2 ortak bölendir. Bu ise $\dfrac{n}{d}$'nin en küçük terimli oluşuyla çelişir. Dolayısıyla $\sim q$ kabulümüz gerçersizdir. Bu dumuda q doğrudur. ■

Sonuç olarak belirtelim ki, bir çok matematiksel sonuç, belirli tip nesneler için doğru olan önermeler meydana getirir. Örneğin "m ve n tamsayılar olmak üzere; $n^2 = m^2$ ancak ve ancak $m = n$ veya $m = -n$'dir." önermesi aslında "tüm m, n tamsayıları için $n^2 = m^2$'dir. Ancak ve ancak $m = n$ veya $m = -n$'dir." şeklindedir. Bu sonucu ispatlamaki için ispattaki her adımın her m ve n'nin belirli değerleri için yapamayız. Diğer taraftan belirli bir özelliğin belirli bir tipin tüm nesneleri için sağlandığını iddia eden bir sonucun yanlış olduğunu göstermek için verilen özelliği sağlamaya bir örnek bulmamız yeterli olacaktır.
Böyle bir örneğe **karşıt örnek** adı verilir.

ÖRNEK 4 x ve y reel sayılar ise

$$(x^2 = y^2) \Longleftrightarrow (x = y)$$

olup olmadığını ispatlayınız.

Çözüm

$x = -2$ ve $y = 2$ olsun. Bu durumda $x^2 = y^2$ olmasına rağmen $x \neq y$'dir. Dolayısıyla iki yönlü şartlı önerme yanlıştır. Sonucun yanlış olduğunu karşıt örnek yardımıyla gösterdik. Benzer şekilde birçok karşıt örnekte kullanılabilir. ■

Bu bölümde verilen kavramlarla ilgili daha geniş bilgiyi, Problem Çözüm kitabı, Bölüm 0'da bulabilirsiniz.

LİNEER CEBİR İÇİN EK SÖZLÜK

Alt matris: Bir A matrisinin tabanı satır ve/veya sütunlarının silinmesiyle elde edilen matrisdir.

Altuzay: Bir V vektör uzayının bir alt cümesi W toplam ve skalarla çarpma işlemlerine göre kapalıysa V'nin alt uzayı olarak adlandırılır.

Alt üçgen matris: Bir kare matrisin esas köşegeninin üst tarafındaki elemanların tümü sıfır ise bu matrise alt üçgen matris denir.

Aşikar çözüm: $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homojen sistemlerinin aşikar çözümü sıfır vektörüdür.

Aşikar olmayan çözüm: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistemin aşikar olmayan bir çözümü, bileşenlerinden en az biri sıfırdan farklı olan ve $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ eşitliğini sağlayan $\mathbf{x}$ vektörüdür.

Benzer matrisler: P singüler olmayan bir matris olmak üzere $A = P^{-1}BP$ ise A ve B matrislerine benzer matrisler denir.

Bir determinantın üçgen biçime indirgenerek hesaplanması: $n \times n$ tipinde bir A matrisinin determinantı det(A veya $|A|$ ile gösterilir ve elemanter satır işlemleri yardımıyla şu şekilde hesaplanır: Elementer satır işlemleri yardımıyla matris üst üçgen matris haline getirilir bu durumda determinant köşegen elemanlarının çarpımıdır.

Birebir fonksiyon: Bir $f : S \to T$ fonksiyonu, S'nin farklı s_1, s_2 elemanları için $f(s_1) \neq f(s_2)$ ise birbir diye adlandırılır $L : V \to W$ bir lineer dönüşüm olmak üzere; L birebir fonksiyon ise L lineer dönüşümüne bire-bir'dir denir.

Bir fonksiyonun değer cümlesi: $f : S \to T$ fonksiyonun değer cümlesi, $S \in S$ için $f(s) = t$ eşitliğini sağlayan T'nin t elemanlarının cümlesidir. $L : V \to W$ lineer dönüşümünün değer cümlesi ise her biri V'nin vektörlerinin L altındaki resmi olan W'nın tüm vektörlerinin cümlesidir.

Bir homojen sistemin çözümü: Bir homojen sistemin çözümü $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ eşitliğini sağlayan $\mathbf{x}$ vektörüdür.

Birim dik cümle: Üzerinde bir iç çarpım tanımlı bir V vektör uzayının vektörlerinin bir cümlesi olan $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ cümlesinin herbir vektörünün boyu 1 ve farklı iki vektörün iç çarpımı sıfır ise S cümlesine birim dik cümle denir.

Birim matrisi: $n \times n$ tipindeki bir birim matris köşegen elemanlarının hepsi 1 olan bir köşegen matrisdir ve I_n ile gösterilir.

Birim vektör: Boyu 1 olan vektöre denir.

Bir lineer dönüşümün matris gösterimi: $L : V \to W$, n-boyutlu bir V vektör uzayından m-boyutlu W vektör uzayına bir lineer dönüşüm olsun, V'nın bir tabanı $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ve W'nın bir tabanı $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ olsun. O zaman $m \times n$ tipindeki bir A matrisin j sütunu T ye göre $[L(\mathbf{v}_j)]$'nin $[L(\mathbf{v}_j)]_T$ koordinat vektörü $\forall \mathbf{x} \in V$ için $[L(\mathbf{x})]_T = [L\mathbf{x}]_S$ biçiminde hesaplanır. A'ya L lineer dönüşümüne karşılık gelen matris denir.

Bir lineer dönüşümün tersi: Tersi alınabilir lineer dönüşüme bakınız.

Bir lineer sistemin çözümü: Bir lineer sistemin çözümü $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ eşitliğini sağlayan $\mathbf{x}$ vektörüdür.

Bir matrise karşılık gelen temel vektör uzayları: Eğer A, $m \times n$ tipinde verilen bir matris ise, A ya karşılık gelen dört temel alt uzay şu şekildedir:

(1) R^n'in bir alt uzayı olan A'nın sıfır uzayı;
(2) R^n'in bir alt uzayı olan A'nın satır uzayı;
(3) R^m'in bir alt uzayı olan A^T'nin sıfır uzayı;
(4) R^m'in bir alt uzayı olan A'nın sütun uzayı;

Bir matrisin eki: $n \times n$ tipindeki, $A = [a_{ij}]$ matrisini ek matrisi, herbir elemanı A matrisinin A_{ij} kofaktörlerinden oluşan matrisin transpozudur ve ek A ile gösterilir. Buna göre ek $A = [A_{ji}]$'dir.

Bir matrisin esas köşegeni: $n \times n$ tipindeki bir A matrisinin esas köşegeni $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ elemanlarının cümlesidir.

Bir matrisin kuvvetleri: A karesel bir matris ve k, negatif olmayan bir tam sayı olmak üzere, A'nın k-yıncı kuvvetin; A'nın k defa kendisiyle çarpılmasıyla elde edilen A^k matrisidir. Buna göre $A^k = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$'dır.

Bir matrisin pozitif tanımlılığı: Eğer bir A matrisi simetrik ve tüm özdeğerleri reel sayı ise A matrisine pozitif tanımlıdır denir.

Bir matrisin sıfırlığı: Bir A matrisinin sıfırlığı, A'nın sıfır uzayının boyutudur.

Bir matrisin skalarla çarpımı: Bir $A = [a_{ij}]$, $m \times n$ tipindeki matrisin bir r skalarıyla çarpımı $m \times n$ tipinde $rA = [ra_{ij}]$ matrisidir.

Bir matrisin tersi: A, $n \times n$ matris için $AB = BA = I$ olacak şekilde $n \times n$ tipinde bir B matrisi varsa A'ya tersi vardır denir. B'ye A'nın tersi denir ve A^{-1}'li gösterilir. Bu durumda A'ya singüler olmayan matris denir.

Bir matrisin toplamaya göre tersi: $m \times n$ tipindeki bir A matrisinin toplamaya göre tersi $A + B = 0$ eşitliğini sağlayan $m \times n$ tipindeki B matrisidir. böyle bir B matrisine, A'nın negatifi denir ve $-A$ ile gösterilir. Burada $-A = (-1)A$'dır.

Bir matrisin transpozu: $m \times n$ tipinde bir A

matrisinin transpozu, satır ve sütun vektörlerinin yer değiştirmesiyle elde edilen $n \times m$ tipindeki matrisdir. A matrisinin transpozu A^T ile gösterilir.

Bir özdeğerin katlılığı: Karesel bir A matrisinin bir λ özdeğerinin katlılığı, λ'nın kaç kere A'nın karekteristik polinomunun kökü olduğunu belirten sayıdır.

Bir vektörün bileşenleri: R^n'in bir $\mathbf{v}$ vektörünün bileşenleri bu vektörü oluşturan elemanlardır; yani

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Bir vektörün boyu: R^n'in bir $\mathbf{v}$ vektörünün boyu $\|\mathbf{v}\|$ ile gösterilir ve $\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$ ile hesaplanır. Üzerinde bir iç çarpım (nokta çarpımı) tanımlı bir V vektör uzayının bir $\mathbf{v}$ vektörünün boyu $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$ şeklinde hesaplanır.

Bir vektörün negatifi: Bir $\mathbf{u}$ vektörünün negatifi $\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$ eşitliğini sağlayan $\mathbf{w}$ vektörüdür. $\mathbf{u}$'nun negatifi $-\mathbf{u} = (-1)\,\mathbf{u}$ ile gösterilir.

Bir vektörün skalarla çarpımı: V reel vektör uzayında bir V vektörünün bir skalar olarak bir k reel sayısı ile çarpımı $k\mathbf{v}$ ile gösterilir. Eğer $V = R^n$ ise $k\mathbf{v} = (kv_1, kv_2, \ldots, kv_n)$ olarak tanımlanır.

Boyut: Sıfırdan farklı bir V vektör uzayının tabanını oluşturan vektörlerin sayısına V vektör uzayının boyutu denir. $\{0\}$ vektör uzayının boyutu sıfır olarak tanımlanır.

Cauchy-Schwarz eşitsizliği: R^n'nin $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri için Cauchy-Schwarz eşitsizliği; $\mathbf{u}$ ile $\mathbf{v}$'nin iç çarpımının mutlak değeri $\mathbf{u}$ ile $\mathbf{v}$'nin boylarının çarpımında küçük veya eşit olduğunu söyler. Buna göre $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}| \le \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{u}\|$'dır.

Çözüm uzayı: $m \times n$ tipinde $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homojen sistemin çözüm uzayı; $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ eşitliğini sağlayan n-bileşeni bir $\mathbf{x}$ vektörlerinin oluşturduğu W cümlesidir. W, R^n'nın bir alt uzayıdır.

Determinant: $n \times n$ tipindeki bir A matrisinin determinantı det (A) veya $|A|$ ile gösterilir ve det(A)'nın herbir satırdan tam olarak bir eleman ve her bir sütundan tam olarak bir elemandan oluşan n elemanın belirli işaretli çarpımların toplamıdır.

Dik cümle: Üzerinde bir iç çarpım tanımlı bir V : vektör uzayının vektörlerinin bir cümlesi olan $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ cümlesinin tüm vektörleri sıfırdan farklı ve farklı iki vektörün iç çarpımı sıfır ise S cümlesine dik cümle denir.

Dik izdüşüm: V vektör uzayında bir V vektörünün V'nin $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ birim dik tabanına sahip W altuzayı üzerine izdüşümü W'nın bir $\mathbf{w}$ vektörüdür. Buradan $\mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 + \ldots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_k)\mathbf{w}_k$ olup W içinde $\mathbf{v}$'ye en yakın vektördür.

Dik matris: Karesel bir P matrisi için $P^{-1} = P^T$ ise P'ye dik matris denir.

Dik olarak köşegenleştirilebilir matris: Karesel bir A matrisi için $P^{-1}AP$ bir köşegen matris olacak biçimde bir dik P matrisi mevcut ise A'ya dik olarak köşegenleştirilebilirdir denir. Bir diğer ifadeyle A, bir P dik matris yardımıyla bir köşegen matrise benzerdir.

Dik (Ortogonal) taban: V vektör uzayı için bir taban olan bir cümle aynı zamanda bir dik cümle ise bu tabana dik taban denir.

Dik tümleyen: Bir V vektör uzayında bir S cümlesinin dik tümleyeni; V'nin S'nin tüm vektörlerine dik olan vektörlerin cümlesidir.

Dik vektörler: Bir vektör çiftinin iç çarpımı sıfır ise bu vektörlere dik vektörler denir.

Dik (veya ortogonal) vektörler: Bir vektör çiftinin iç çarpımın veya nokta çarpımı sıfır ise bu vektöreler dik veya ortogonal vektörler denir.

Doğal (veya standart) taban: R^n'in doğal tabanı $n \times n$ tipindeki birim matrisin $\mathbf{e}_j$, j-sütun (veya j.satır) vektörlerinin cümlesidir. Burada $j = 1, 2, \ldots, n$

Dönme: $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

lineer dönüşümüne düzlemde saatin ters yönünde θ açılık dönme denir.

Eksik (detective = bozulmuş) matris: Bir A matrisi $m > 1$ katlı bir λ özdeğerine sahip ve bu değere karşılık gelen öz uzay m den daha az sayıda vektörlerin oluşturduğu bir tabana sahipse, A matrisine eksik (defektive) matris denir.

Elementer satır işlemleri: Bir matris üzerinde elementer satır işlemleri aşağıdaki üç işlemden birisidir:

(1) Herhangi iki satır yer değiştirebilir, (2) Bir satır sıfırdan farklı bir sayı ile çarpılabilir. (3) Bir satırın bir katının diğer bir satıra eklenmesi

Eşit matrisler: $m \times n$ tipindeki A, B matrislerine, bileşen-bileşene eşit iseler yani $i = 1, 2, \ldots, m$ ve $j = 1, 2, \ldots, n$ için $a_{ij} = b_{ij}$ ise eşittir denir ve $A = B$ ile gösterilir.

Eşit vektörler: $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$, R^n'in iki vektörü olmak üzere, bu vektörlerin karşılıklı bileşenleri eşit ise bu vektörlere eşit vektörler denir ve $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ yazılır.

Gauss-Jordan indirgeme yöntemi: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistemi için genişletilmiş matris $[\,A \mid \mathbf{b}\,]$'dir. Genişletilmiş matrisin indirgenmiş satırca eşelon biçimi hesaplanırsa, çözüm geriye yerine koyma yöntemiyle hesaplanabilir.

Gauss yoketme yöntemi: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistemi

için genişletilmiş matris $[A \mid \mathbf{b}]$'dir. Genişletilmiş matrisin satırca eşelon biçimi hesaplanırsa; çözüm geriye yerine koyma yöntemiyle hesaplanabilir.

Geçiş matrisi: n-boyutlu V vektör uzayının iki tabanı $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ ve $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ olsun. T tabanında S tabanına geçin matrisi $P_{S \leftarrow T}$ ile gösterilir, $\mathbf{v}$'nin T tabanına göre koordinatlara çevirir; yani: $[\mathbf{v}]_S = P_{S \leftarrow T}[\mathbf{v}]_T$

Genel çözüm: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tutarlı lineer sistemin genel çözümü, sistemin tüm çözümlerinden oluşan bir cümledir. Eğer $\mathbf{b} = 0$ ise $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ homogen sistemin genel çözümü tüm çözümlerin oluşturduğu cümledir ve bu cümle $\mathbf{x}_h$ ile gösterilir. Eğer $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ ise homogen olmayan sistemin genel çözümü $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$'nin özel çözümlerinden oluşan cümledir, bu cümle $\mathbf{x}_p$ ile gösterilir. Bu durumda genel çözüm $\mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p$'dir.

Germe: Bir V vektör uzayında bir $W = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ cümlesinin germesi $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k$ vektörlerinin muhtemel tüm lineer birleşimlerinin cümlesidir ve sp$W$ ile gösterilir sp W, V'nın bir altuzayıdır.

Geriye doğru yerine koyma işlemi: $U = [u_{ij}]$ tüm köşegen elemanları sıfırdan farklı bir üst üçgen matris ise $U\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sisteme geriye doğru yerine koyma işlemiyle çözülebilir. Bu süreçte, son denklemden;

$$x_n = \frac{b_n}{u_{nn}};$$

elde edilir ve bu değer sondan bir önceki denklemde kullanılırsa;

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - u_{n-1\,n}x_n}{u_{n-1\,n-1}}$$

elde edilir. Bu süreç j-denkleme kadar devam ettirilirse,

$$x_j = \frac{b_j - \sum_{k=n}^{j+1} u_{jk}x_k}{u_{jj}}$$

olarak hesaplanır.

Genişleme: $L : R^n \to R^n$ lineer dönüşümü için $L(\mathbf{v}) = k\mathbf{v}$, $k > 1$ ise L'ye genişleme dönüşümü denir.

Gram-Schmidt metodu: Gram-schmidt metodu, bir alt uzay için verilen bir tabanı, aynı altuzay için birim dik tabana dönüştüren bir metoddur.

Hermityen matrisi: $n \times n$ tipinden bir kompleks A matrisi $\overline{A}^T = A$ eşitliğini sağlarsa A'ya Hermityen matris denir.

Homogen olmayan sistem: Bir $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistemde, eğer $\mathbf{b}$ sıfırdan farklı bir vektör ise bu sisteme homogen olmayan sistem denir.

Homogen sistem: Bir lineer sistemi oluşturan herbir denklemin sağ tarafı sıfır ise böyle bir sisteme homogen sistem denir ve $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ biçiminde gösterilir.

İç çarpım: R^n'in $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ vektörlerinin içi çarpımı, nokta çarpım olarak da bilinir ve $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ ile gösterilir;

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1w_1 + \ldots + v_nw_n$$

şeklinde hesaplanır.

İç çarpım (nokta çarpım): R^n'in $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ vektörlerinin nokta çarpımı veya bir diğer adıyla iç çarpımı $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ ile gösterilir ve

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1w_1 + \ldots + v_nw_n$$

şeklinde hesaplanır.

İlaveli (genişletilmiş) matris: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistemin genişletilmiş matrisi; A katsayılar matrisinde sağ tarafa $\mathbf{b}$ vektörünün yazılmasıyla elde edilir ve $[A \mid \mathbf{b}]$ şeklinde gösterilir.

İleri doğru yerine koyma işlemi: Eğer $L = [l_{ij}]$ köşegen elemanları sıfırdan farklı olan bir alt üçgen matrisi ise $L\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistemi ileri doğru yerine koymayla çözülebilen bir sistemdir. Bu işlem birinci denklemden $x_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$'in elde edilmesiyle başlar. Elde edilen bu sonucun ikinci denklemde kullanılmasıyla, $x_2 = \frac{b_2 - l_{21}x_1}{l_{22}}$ elde edilir,

Bu işlem süreci devam ettirilirse, j denklemden

$$x_j = \frac{b_j - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}x_k}{l_{jj}} \text{ bulunur.}$$

İnvaryant altuzayı: W, bir V vektör uzayının alt uzayı olsun. $L : V \to V$ bir linerer dönüşüm olmak üzere; W'nın her $\mathbf{v}$ vektörü için $L(\mathbf{v})$, W'nin bir elemanı ise, W'ya L dönüşümü altında invaryanttır denir.

İzdüşüm: Bir düzlemdeki P noktasının aynı düzlemdeki bir L doğrusu üzerine izdüşümü P'den geçen ve L'yi dik olarak kesen doğrunun L'yi kestiği Q noktasıdır. $L : R^3 \to R^2$, $L(x, y, z) = (x, y)$ lineer dönüşümüne R^3'ten, R^2'ye izdüşüm denir (ayrıca bakınız; ortogonal izdüşüm).

İzometri: Vektör çiftleri arasındaki uzaklığı koruyan L lineer dönüşüme bir izometri denir. Bu durumda her $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri için $\|L(\mathbf{v}) - L(\mathbf{u})\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$'dır.

İzometri uzaklıkları koruduğundan boylarıda korur; yani her $\mathbf{v}$ vektörü için $\|L(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|$'dir.

Kapalılık özelliği: V elemanları vektörler olan bir cümle ve bu cümle üzerinde tanımlanan iki işlem sırasıyla $\oplus$ ile gösterilen toplama işlemi ve $\odot$ ile gösterilen, skalarla çarpma işlemleri olsun. V'nin $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ elemanları için $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}$, V'nin elemanı ise V, $\oplus$ işlemine göre kapalıdır denir. Benzer şekilde V'nin bir $\mathbf{u}$ elemanı ve bir k reel sayısı için $k \odot \mathbf{u}$, V'nin elamanı ise, V $\odot$ işlemine göre

kapalıdır denir.

Karakteristik denklem: Bir A karasel matrisin karakteristik denklemi $f(t) = \det(A - tI) = 0$ şeklindedir.

Karakteristik polinom: Bir A karesel matrisin karakteristik polinomu $f(t) = \det(A - tI)$ şeklindedir.

Karakteristik polinomun kökleri: Bir A karesel matrisin $f(t) = \det(A - tI)$ karakteristik polinomun kökleri A matrisini özdeğerleridir.

Karesel matris: Satır ve sütun sayısı eşit olan matrise denir.

Katsayılar matrisi: m denklem ve n bilinmeyenden oluşan bir lineer sistem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

şeklindedir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrisine verilen lineer sistemin katsayılar matrisi denir.

Kofaktör: $A = [A_{ji}]$, $n \times n$ tipinde bir matris olsun a_{ij}'nin A_{ij} kofaktörü $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$ şeklinde tanımlanır. Burada M_{ij}, A matrisinin ij-minörüdür.

Kompleks alt vektör uzayı: V kompleks vektör uzayının alt cümlesi W, $\oplus$, $\odot$ işlemlerine göre kapalı ise W ya kompleks altvektör uzayı denir.

Kompleks vektör uzayı: Bir kompleks vektör uzayı V, elemanları vektörler olan bir cümle ve bu cümle üzerindeki iki işlem $\oplus$ ile gösterilen toplama ve $\odot$ ile gösterilen skalarla çarpma işlemleri olmak üzere; V'nin $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ elemanları için $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}$, V'nin bir elemanıdır yani V, $\oplus$ işlemine göre kapalıdır. k herhangi bir kompleks sayı ve $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$'nin bir elemanı olmak üzere $k \odot \mathbf{u}$, V'nin bir elemanıdır yani V, $\odot$ işlemine göre kapalıdır. Bununla birlikte V, $\oplus$, $\odot$ işlemlerine göre diğer 8 özelliği sağladığında V'ye kompleks vektör uzayı denir.

Koordinatlar: Bir V vektör uzayında bir $\mathbf{v}$ vektörünün $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ tabanına göre koordinatları $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n$ eşitliğini sağlayan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ katsayılarıdır. $\mathbf{v}$'nin S tabanına göre koordinatları $[\mathbf{v}]_S$ ile gösterilir ve

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}_{VV}$$

Köşegen matris: $A = [a_{ij}]$ kare matrisi için $i \neq j$ iken $a_{ij} = 0$ oluyorsa A matrisine köşegen matris denir.

Köşegenleştirilebilir matris: Bir A kare matrisi, eğer bir D köşegen matrisine benzer ise yani bir P singüler olmayan matris için $P^{-1}AP = D$ ise A'ya köşegenleştirilebilir matris denir.

Lineer bağımlılık: $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ vektörlerin cümlesi olmak üzere; hepsi birden sıfır olmayan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sabitleri için $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n = 0$ oluyorsa, S'ye lineer bağımlıdır denir.

Lineer bağımsızlık: $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ vektörlerin cümlesi olmak üzere, $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n = 0$ eşitliğinin sağlanması $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ olması ile mümkünse S'ye lineer bağımsızdır denir.

Lineer birleşim: Bir V vektör uzayında $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektörlerinin lineer birleşimi $c_1, c_2, \ldots, c_k$ skalarler olmak üzere $c_1\mathbf{v}_1 + \ldots, c_k\mathbf{v}_k$ şeklindedir.

Lineer dönüşüm: Bir $L : V \to W$ lineer dönüşümü, V'nin herbir $\mathbf{v}$ vektörünü W'nin $L(\mathbf{v})$ vektörüne karşılık getiren bir fonksiyon olup aşağıdaki iki özelliği sağlar: (1) $\forall\ \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ için $L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v})$; (2) $\forall\ \mathbf{v} \in V$ ve her k skaları için $L(k\mathbf{v}) = kL(\mathbf{v})$'dir.

Lineer dönüşümlerin bileşkesi: $L_1 : V \to W$ ve $L_2 : W \to U$ iki lineer dönüşüm olmak üzere bu dönüşümlerin bileşkesi L_2 o $L_1 : (\mathbf{v}) = L_2(L_1(\mathbf{v}))$'dir.

Lineer operatör: Herhangi bir V vektör uzayından kendisine tanımlı L lineer dönüşümüne, $L : V \to V$, bir lineer operatör denir.

Lineer sistem: Herbiri $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gibi n-bilinmeyenden oluşan m tane denkleme bir lineer sistem denir. Lineer sistemleri $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ biçiminde matris biçiminde de ifade edebiliriz. Burada A katsayılar matrisini, $\mathbf{x}$ bilinmeyenleri vektörü ve $\mathbf{b}$ de lineer denklemlerin sağ tarafındaki sabitlerden oluşan bir vektördür (katsayılar matirisine bakınız.)

Lineer sistemin tutarlılığı: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistemin en az bir çözümü varsa bu sisteme tutarlıdır denir.

LU-ayrışımı: Bir A kare matrisin LU-ayrışımı şu şekilde ifade edilir. L altüçgen, U'da üst üçgen matris olmak üzere $A = LU$'dır.

Matris: Bir $m \times n$ tipindeki A matrisi $m \cdot n$ elemanın m satır ve n sütun içerisinde düzenlenip bir dikdörtgen içerisinde sunulmasıdır.

Matris dönüşümü: $m \times n$ tipindeki bir A matrisi için f fonksiyonu $\mathbf{u} \in R^n$ için $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ şeklinde tanımlanır ve R^m'den R^n'e A matrisi yardımıyla tanımlanan matris dönüşümü denir.

Matris toplamı: Eğer $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ ikisi de $m \times n$ tipinde matrisler ise $A + B$ toplamı karşılıklı bileşenlerin toplamıyla bulunur. Buna göre $A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}]$'dir.

Matrislerin farkı: $m \times n$ tipindeki A, B matrislerin farkı $A - B$ ile gösterilir ve bu fark $A + (-1)B$ toplamına eşittir. $A - B$ matrisinde $m \times n$ tipinde olup elemanları, A ve B'nin karşılıklı elemanlarının farkından oluşur.

Minör: $A = [a_{ij}]$ bir $n \times n$ tipinde matris olsun. M_{ij}, A'nın j sütun ve i.nci satırındaki elemanların silinmesiyle elde edilen $(n-1) \times (n-1)$ tipinde bir alt matris olsun. Bu durumda M_{ij}'nin determinantı det(M_{ij})'ye a_{ij}'nin minörü denir.

Noktalar (veya vektörler) arasındaki uzaklık: $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n)$ ve $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ noktaları arasındaki uzaklık $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ ve $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ olmak üzere $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ vektörünün boyu olup

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$$

şeklinde hesaplanır. R^n'de vektörler arasındaki uzaklıkta $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|$'dir.

Normal matris: $n \times n$ tipindeki bir kompleks A matrisi için, $(\overline{A}^T)\,A = A\,(\overline{A}^T)$ eşitliği sağlanıyorsa, A'ya normal matris denir.

***n*–uzay:** n-vektörlerin cümlesine, n-uzay denir. Bileşenleri reel sayılardan oluşan vektörleri için n-uzay R^n ile gösterilir. Özel bir hal olarak 2, uzaya bakınız.

***n*-vektör:** $1 \times n$ veya $n \times 1$ tipindeki bir matrise bir n-vektör denir.

Örten fonksiyon: $f : S \to T$ fonksiyonu, eğer tüm $t \in T$ ler için $f(s) = t$ olacak şekilde enaz bir $s \in S$ varsa, f'e örtendir denir. $L : V \to W$ bir lineer dönüşüm olmak üzere; L örten bir fonksiyon ise L lineer dönüşümüne örtendir denir.

Öteleme: $T : V \to V$, $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \mathbf{b}$, $\mathbf{v} \in V$ ve $\mathbf{b}$,V'nin sabit bir vektörü olmak üzere bu şekilde tanımlanan dönüşümü $\mathbf{b}$ vektörüyle yapılan öteleme denir.

Özdeğer: Bir $n \times n$ A matrisinin bir özdeğeri sıfırdan farklı bir $\mathbf{x}$ vektörü için $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ eşitliğini sağlayan λ değeridir. Burada $\mathbf{x}$ vektörün de λ'ya karşılık gelen özvektör denir.

Özel çözüm: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tutarlı lineer sisteminin bir özel çözümü, rastgele sabitlerden oluşmayan ve $A\mathbf{x}_p = b$ eşitliğini sağlayan bir $\mathbf{x}_p$ vektörüdür.

Özuzay: Bir A kare matris olmak üzere A'nın belirli bir λ özdeğerine karşılık gelen bütün özvektörlerin cümlesi sıfır vektörüyle birlikte bir altuzay oluşturur. Bu altuzaya λ'ya karşılık gelen özuzay denir.

Özvektör: $n \times n$ tipinde bir A matrisini bir özvektörü sıfırdan farklı bir $\mathbf{x}$ vektörü olup $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ eşitliğini sağlar. Burada λ skalarına A'nın bir özdeğeri denir.

Paralel vektörler: Sıfırdan farklı iki vektör için eğer biri diğerinin belli bir katı ise bu vektörlere paraleldir denir.

Parçalanmış (bölünmüş) matris: Bir A matrisinin satırları arasına yatay çizgiler çizerek ve/veya sütunları arasına dikey çizgiler çizerek alt matrislere ayırabiliriz. Bu bölme işlemi pek çok farklı yolla yapılabilir.

Pivot: Elementer satır işlemlerinde, ilk sütununda sıfırdan farklı elemana sahip olan bir A matrisini gözönüne aldığımızda bu sütuna pivot sütunu, pivot sütunundaki sıfırdan farklı ilk elemana da pivot adı verilir.

Rank: A'nın satır rankı = A'nın sütun rankı, olduğundan A matrisinin rankı rank A ile gösterilir. Buna göre rank$A$ A matrisinin lineer bağımsız satır (veya sütun) vektörlerinin sayısıdır.

Reel vektör uzayı: Bir reel vektör uzayı V; elemanları vektörler olan bir cümle ve bu cümle üzerindeki iki işlem $\oplus$ ile gösterilen toplama ve $\odot$ ile gösterilen skalarla çarpam işlemleri olmak üzere, V'nin $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ elemanları için $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}$ V'nin bir elemanıdır. Yani V, $\oplus$ işlemine göre kapalıdır. k herhangi bir reel sayı ve $\mathbf{u}$, V'nin bir elemanı olmak üzere $k \odot \mathbf{u}$, V'nin bir elemanıdır. Yani V, $\odot$ işlemine göre kapalıdır. Bununla birlikte V, $\oplus$, $\odot$, işlemlerine göre diğer 8 özelliği sağladığında V ye bir vektör uzayı denir.

Sapma (shear) dönüşümü: x-yönünde sapma matris dönüşümüyle $L(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ şeklinde tanımlanır. Burada k bir skalardır. Benzer şekilde y-yönünde sapmada; $L(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ şeklinde tanımlanır.

Satır eşelon şekil: Satırca indirgenmiş eşelon şekil tanımında verilen (1), (2) ve (3) nolu özellikleri sağlayan A matrisine satırca eşelon şekildedir denir.

Satırca denklik: A ve B $m \times n$ tipindek matrisler olmak üzere eğer A'dan bir dizi elementer satır işlemleri sonucunda B matrisini elde edebiliyorsak, A ve B matrislerine satırca denk matrisler denir.

Satırca indirgenmiş eşelon şekil: Bir A matrisi aşağıdaki özellikleri sağlaması durumunda satırca indirgenmiş eşelon şekle sahiptir denir. (1) Eğer matriste tüm elemanları sıfır olan satırları varsa bunlar matrisin en alt satırları olmalıdır. (2) Matrisin sıfırdan farklı ilk satırının ilk elemanı 1 olmalıdır. Bu elemana bu satırın ilk elemanı denir (3) Sıfırdan farklı herbir satırdaki ilk eleman bir önceki satıra göre sağ doğru bir kaymak suretiyle yer alır. (4) Eğer matrisin sütununun birisi bu ilk elemanı bulunduruyorsa, o sütundaki diğer elemanların hepsi sıfırdır.

Satır rank: Bir A matrisinin satır uzayının boyutuna veya buna denk bir ifadeyle lineer bağımsız satır vektörlerinin sayısına A matrisin satır rankı denir.

Satır uzayı: $m \times n$ tipindeki bir A matrisin satır uzayı R^n'in A'nın satır vektörleri tarafından gerilen bir alt uzayıdır.

Sıfır altuzay: Bir vektör uzayının sadece sıfır vektöründen oluşan altuzayına denir.

Sıfır matris: Tüm bileşenleri sıfır olan matrise denir.

Sıfır polinom: Tüm katsayıları sıfır olan polinoma denir.

Sıfır vektör: Tüm bileşenleri sıfır olan vektöre sıfır vektör denir.

Sıralı taban: $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ cümlesi için eğer S, V için taban ise ve S'nin elemanları farklı sıralandığında oluşan yeni sıralı cümle de V'nin farklı bir tabanı ise S'ye $\mathbf{v}$'nin sıralı tabanı denir.

Simetrik matris: Karesel bir A matrisi, $A^T = A$ eşitliğini sağlıyor ise simetrik olarak adlandırılır.

Singüler (veya tersi olmayan) matris: Tersi olmayan bir A matrisine singüler matris denir. Herhangi bir karesel matrisin indirgenmiş satır eşelon şekli birim matris değil ise bu matrise singüler matris denir.

Singüler olmayan (veya tersi alınabilir) matris: $AB = BA = I_n$ olacak biçimde bir B matrisi mevcut ise, $n \times n$ tipindeki bir A matrisine singüler değildir veya tersi alınabilir denir. Böyle bir B matrisine de A'nın tersi denir ve A^{-1} ile gösterilir.

Skalar: Bir V reel vektör uzayında skalarlar reel sayılardır. $\mathbf{v}$, V'nin bir elemanı olmak üzere $k\mathbf{v}$ sakalarla çarpma şeklinde kullandığımız k bir skalardır. Vektörlerin lineer birleşimlerindeki katsayılarda birer skalardır.

Skalar matris: Bir A köşegen matrisin tüm elemanları eşit ise bu matrise skalar matris denir.

Sonlu boyutlu vektör uzayı: Bir V vektör uzayının bir tabanı olacak biçimde sonlu bir alt cümlesi varsa V'ye sonlu boyutludur denir.

Sonsuz boyutlu vektör uzayı: Bir V vektör uzayının; bir tabanı olacak biçimde sonlu boyutlu bir alt cümlesi yoksa V'ye sonsuz boyutlu vektör uzayı denir.

Standart iç çarpımı: R^n'nin $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ vektörlerinin standart iç çarpımı yanı zamanda $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$'nın nokta çarpımı olarak da adlandırılır ve $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ ile gösterilir. Buna göre $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n$ şeklinde tanımlanır.

Sütun rank: Bir A matrisin sütun rankı, A'nın sütun uzayının boyutudur. Bir diğer ifadeyle A'nın lineer bağımsız sütun vektörlerinin sayısıdır.

Sütun uzayı: $m \times n$ tipindeki bir A matrisinin sütun uzayı R^m'in, A'nın sütun vektörleri tarafından gerilen altuzayıdır.

taban (baz): Bir V vektör uzayının, vektörlerinin bir cümlesi $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ olmak üzere; eğer S, V'yi gerer ve lineer bağımsız bir cümle ise S'ye V için bir tabandır denir.

Tersi alınabilir lineer dönüşüm: $L : V \to W$ lineer dönüşümü için $\forall \mathbf{v} \in V$ için $L^{-1}(L(\mathbf{v})) = \mathbf{v}$ ve $\forall\ \mathbf{w} \in W$ için $L(\ L^{-1}(\mathbf{w})) = \mathbf{w}$ olacak şekilde bir L^{-1} lineer dönüşümü varsa L'ye tersi alınabilir denir.

Ters simetrik matris: Karesel bir A matrisi için $A = -A^T$ ise bu matrise ters simetrik matris denir.

Toplam sembolü: Bir $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ cümlesinde a_1 den a_n'e kadar olan toplamı gösteren sembol-

dür. Toplam sembolü kullanılarak, $\sum_{i=1}^{n} a_i$ şeklinde gösterilir.

Tutarsız sistem: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineer sistemin hiçbir çözümü yoksa bu sisteme tutarsız sistem denir.

2-uzay: Tüm 2–vektörlerinin cümlesine 2–uzay denir. Bileşenlere reel sayılardan oluşan vektörleri için 2–uzay R^2 ile gösterilir.

Üniter matris: $n \times n$ tipinde kompleks bir A matrisi için $A^{-1} = A^T$ ise, A'ya üniterdir denir.

Üst üçgensel matris: Esas köşegen altındaki tüm bileşenleri sıfır olan karesel matrise denir.

Vektör: Bir vektör uzayının herbir elemanını genel ismidir. (Ayrıca, 2–vektör, n-vektör kavramlarına bakınız.)

Vektörel çarpım: R^3'ün $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektör çiftinin vektörel çarpımı $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ile gösterilir ve

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$ determinantı yardımıyla hesaplanır. Burada i, j, k sırasıyla x-, y- ve z- yönündeki birim vektörlerdir.

Vektörler arasındaki açı: R^n'de sıfırdan farklı $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ vektörleri arasında θ açısı

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

şeklinde hesaplanır.

Vektörlerin farkı: V vektör uzayında $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$ vektörlerinin farkı $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ ile gösterilir ve bu fark $\mathbf{v} + (-1)\ \mathbf{w}$ toplamına eşittir. Eğer $V = R^n$ ise $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ farkı $\mathbf{v}$ ve $\mathbf{w}$'nın karşılıklı elemanlarının farkından oluşur.

Vektörlerin toplamı: İki vektörün toplamı, vektör toplamı olarak da adlandırılır. R^n'de iki vektörün toplamı vektörlerin karşılıklı bileşenlerinin toplanmasıyla elde edilir. Bir V vektör uzayında $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}$ işlemi, $\oplus$ işleminin tanımana göre yapılır.

Vektör toplamı: İki vektörün toplamı, vektör toplamı olarak da adlandırılır. R^n'de karşılıklı bileşenlerin toplamı bize vektör toplamını verir.

Yansıma: $L : R^2 \to R^2$, $L(x, y) = (x_1 - y)$ şeklinde tanımlı lineer dönüşümlerine x-eksenine göre yansıma denir. Benzer şekilde $L(x, y) = (-x, y)$ dönüşümüde y-eksenine göre yansımadır.

TEK NUMARALI ALIŞTIRMALARIN CEVAPLARI

BÖLÜM 1

Kesim 1.1, Sayfa 8

1. $x = 4, y = 2$.

3. $x = -4, y = 2, z = 10$

5. $x = 2, y = -1, z = -2$.

7. $x = -20, y = \left(\frac{1}{4}\right)z + 8$, z herhangi bi reel sayı.

9. Bu lineer sistemin çözümü yoktur. Tutarsızdır.

11. $x = 5, y = 1$

13. Bu lineer sistemin çözümü yoktur. Tutarsızdır.

15. **(a)** $t = 10$ **(b)** Bir değeri, $t = 3$

(c) (b) de $t = 3$ seçimi keyfidir. $t = 10$ dışındaki tüm t seçimleri, sistemi tutarsız yapar. Böylece (b)'deki t'nin değerini seçmek için sonsuz yol vardır.

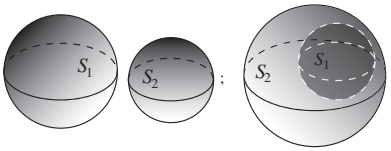
17. **(a)** $t = 0$ **(b)** $t = 1$ **(c)** Herhangi $t \neq 0$.

21. $x = 2, y = 1, z = 0$.

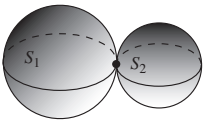
23. r'nin böyle bir değeri yoktur.

27. Sıfır, sonsuz, sıfır.

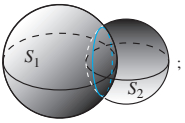
29. Hiçbir kesişim noktaları yoktur.



Bir noktada kesişirler



Sonsuz noktada kesişirler



Kesişim bir çemberdir.



Kesişim bir $S_1 (= S_2)$ çemberdir.

31. 1,5 ton alışılmış ve 2,5 ton özel plastik

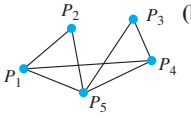
33. 2-dakika film yıkayıcıda 20 ton, 6-dakika, 9-dakika film yıkayıcılarda toplam 40 ton.

35. 7000 \$, 14.000 \$, 3000 \$

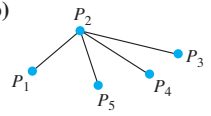
Kesim 1.2, Sayfa 19

1. **(a)** –3, –5, 4 **(b)** 4, 5 **(c)** 2, 6, –1

3. **(a)**



(b)



5. $a = 0, b = 2, c = 1, d = 2$

7. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 10 & 18 \end{bmatrix}$.

(b) $3(2A) = 6A = \begin{bmatrix} 6 & 12 & 18 \\ 12 & 6 & 24 \end{bmatrix}$.

(c) $3A + 2A = 5A = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 10 & 5 & 20 \end{bmatrix}$.

(d) $2(D + F) = 2D + 2F = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 8 & 14 \end{bmatrix}$.

(e) $(2 + 3)D = 2D + 3D = \begin{bmatrix} 15 & -10 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}$.

(f) İmkansız.

9. **(a)** $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$. **(b)** İmkansız.

(c) $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. **(d)** İmkansız.

(e) $(-A)^T = -(A^T) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$.

(f) İmkansız.

11. Hayır **13.** Sıfır

15. Bileşenler, esas köşegene göre simetriktirler.

19. **(a)** Doğru. **(b)** Doğru **(c)** Doğru.

21. $\frac{1}{2}$ **(t + b)**

Kesim 1.3, sayfa 30.

1. (a) 2 **(b)** 1 **(c)** 4 **(d)** 1

3. ± 2 **5.** $x = 4, y = -6$

7. 1 **9.** $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

11. **(a)** $\begin{bmatrix} 14 & 8 \\ 16 & 9 \end{bmatrix}$. **(b)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 10 \\ 7 & 8 & 17 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 7 & 10 & -2 \\ 19 & 6 & 31 \end{bmatrix}$.

(d) İmkansız **(e)** $\begin{bmatrix} 19 & -8 \\ 32 & 30 \end{bmatrix}$.

13. **(a)** $\begin{bmatrix} -2 & 12 \\ 2 & 17 \\ 10 & 13 \end{bmatrix}$. **(b)** $\begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 12 & -1 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 27 & 19 \end{bmatrix}$.

(d) İmkansız **(e)** İmkansız

15. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. **(b)** $(A^T)^T = A$.

(c) $\begin{bmatrix} 14 & 16 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$. **(d)** (c) ile aynı

(e) $(C + E)^T B = C^T B + E^T B = \begin{bmatrix} 28 & 14 \\ 8 & 8 \\ 38 & 17 \end{bmatrix}$.

(f) $A(2B) = 2(AB) = \begin{bmatrix} 28 & 16 \\ 32 & 18 \end{bmatrix}$.

17. **(a)** 4 **(b)** 13 **(c)** 3 **(d)** 12

19. $AB = \begin{bmatrix} -4 & 7 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$.

21. **(a)** $\begin{bmatrix} 6 \\ 25 \\ 10 \\ 25 \end{bmatrix}$. **(b)** $\begin{bmatrix} 12 \\ 11 \\ 17 \\ 20 \end{bmatrix}$.

23. $2\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

27. Sonsuz seçim yapmak mümkündür. Örneğin, $r = 1, s = 0$ veya $r = 0, s = 2$; veya $r = 10, s = 18$

31.
$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 + 4x_4 &= 5 \\ -3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 8x_4 &= 3 \\ x_1 + 2x_4 &= 4 \\ 3x_1 + x_3 + 3x_4 &= 6. \end{aligned}$$

33. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

35. Lineer sistemler denktir. Yani aynı çözümlere sahiptirler.

37. **(a)**
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 4 \\ 3x_2 &= 2. \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 5 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 8. \end{aligned}$$

39. **(a)** Çözüm, sadece $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$'dir.

(b) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ bir çözümdür. Diğer bir çözüm $\begin{bmatrix} -9 \\ 11 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$'dir.

49. AB çarpımı, herbir şehirdeki her bir ürünün toplam maliyetini verir.

S. Lake City	Chicago	
38	44	Sandalye
67	78	Masa

Kesim 1.4 Sayfa 40

9. Böyle bir ikili

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

diğer bir ikili

$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$'dir.

Bir diğer ikili de $A = 0$ ve B'de en az bir bileşeni sıfırdan farklı 2×2 tipinde bir matris. Böylelikle sonusz çoklukta matris çifti bulunur.

11. Sonsuz çoklukta matris çifti vardır. Örneğin

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ veya

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Ayrıca belirtelimki $A \neq B$, ± 1 için $A = k\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \left(\frac{1}{k}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olup

$A \neq B$ ve $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$'dir.

21. (a) $3A = 3\begin{bmatrix} \cos 0^\circ & \sin 0^\circ \\ \cos 1^\circ & \sin 1^\circ \\ \vdots & \vdots \\ \cos 359^\circ & \sin 359^\circ \end{bmatrix}$

(b) A'dan elde edilen sıralı çiftler (x_i, y_i)=(3 cos i, 3 sin i), $i = 0, 1, \ldots, 359$ $x_i^2 + y_i^2 = 9$ olduğundan (x_i, y_i) noktası $x^2 + y^2 = 9$ çemberi üzerindedir.

23. $r = 2$ **25.** $s = r^2$ **31.** $k = \pm\sqrt{\frac{1}{6}}$.

Kesim 1.5, Sayfa 52

7. (a) $\begin{bmatrix} -7 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$. **(b)** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ -5 & 25 & 100 \\ -13 & 25 & 100 \end{bmatrix}$.

15. $AB = BA$ olmak üzere $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ bu şekilde sonsuz çoklukta B matrisi vardır.

33. (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{5}{13} & -\frac{1}{13} \end{bmatrix}$. **(b)** $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

35. $\begin{bmatrix} 11 & 19 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$. **37.** $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 15 \\ 9 \end{bmatrix}$. **39.** $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

41. (a) $\begin{bmatrix} \frac{6}{13} \\ \frac{11}{13} \end{bmatrix}$. **(b)** $\begin{bmatrix} \frac{8}{13} \\ \frac{19}{13} \end{bmatrix}$.

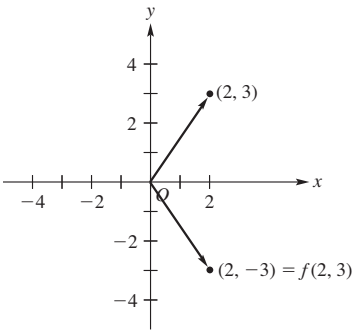
43. Muhtemel cevap $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$.

59. (a) $\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 19 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 65 \\ 19 \end{bmatrix}$, $u_2 = 5$, $u_3 = 19$, $u_4 = 65$.

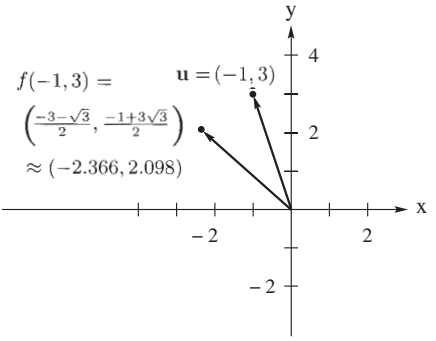
(b) $\mathbf{w}_{n-1} = A^{n-1}\mathbf{w}_0$.

Kesim 1.6, sayfa 62

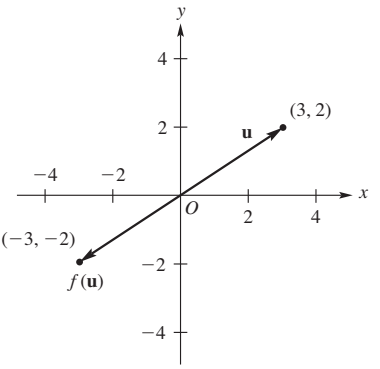
1.



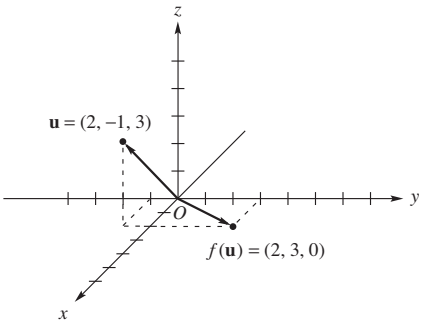
3.



5.



7.



9. Evet **11.** Evet **13.** Hayır

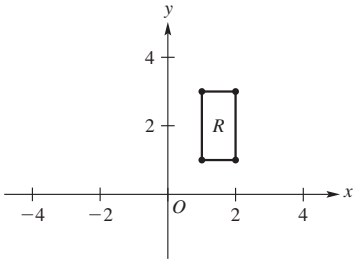
15. (a) y-eksenine göre yansıma
(b) saatin tersi yönünde $\frac{\pi}{2}$ lik dönme

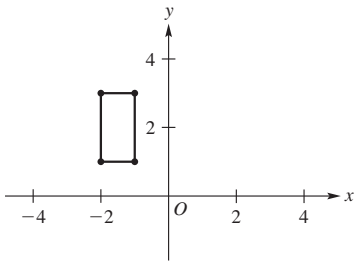
17. (a) x-ekseni üzerine izdüşüm
(b) y-ekseni üzerine izdüşüm

19. (a) saatin ters yönünde 60° dönme
(b) saat yönünde 30° dönme
(c) 12

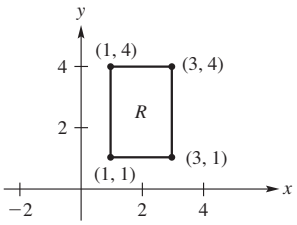
Kesim 1.7, sayfa 70

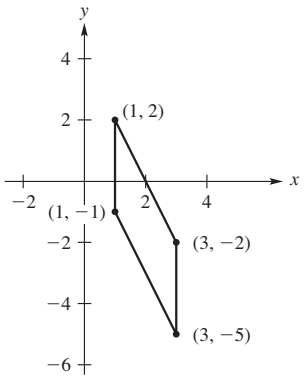
1.



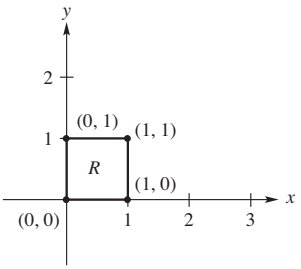


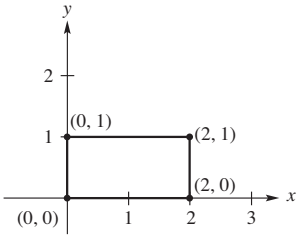
3.





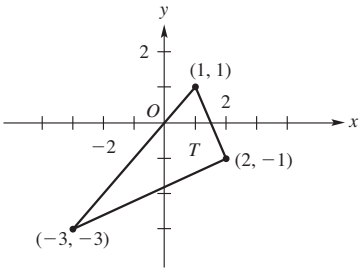
5.

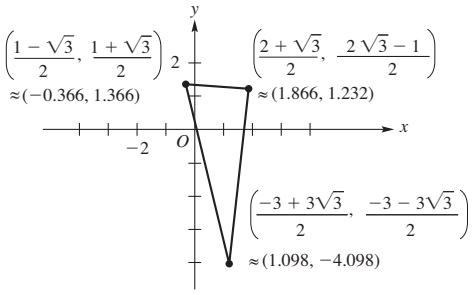




7. (−10, 15), (3, 12), (−5, 2).

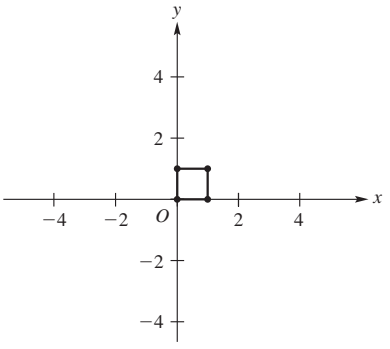
9.

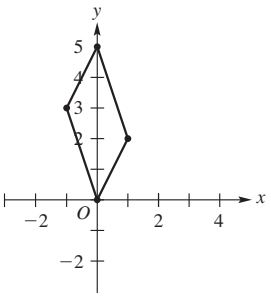




11. T köşelerinin L altındaki görüntüleri (–9, –18), (0, 0) ve (3, 6) noktalarından oluşur. Böylece T'nin L altındaki görüntüsü bir doğru parçasıdır.

13.





15. (a) Muhtemel cevap: ilk olarak f_1 uygulanır (saatin ters yönünde 90° dönme) daha sonra f_3

(b) Muhtelem cevap: f_1(saatin ters yönünde –135° lik dönme) uygulanır.

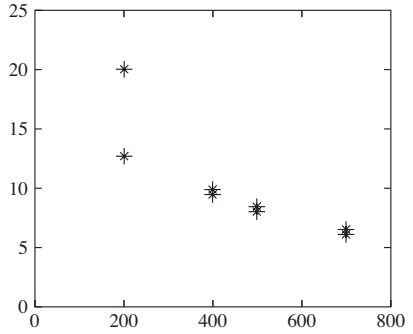
Kesim 1.8 sayfa 79

1. A, 0.93 korelasyon katsayısına sahiptir
B, 0.76 korelasyon katsayısına sahiptir.
C, 0.97 korelasyon katsayısına sahiptir.
D, 0.88 korelasyon katsayısına sahiptir

3.

Mesafe	200	200	400	400	500	500	500	700	700
Genişlik	12.6	19.9	9.3	9.5	7.9	7.8	8.0	6.0	6.4

Korelasyon sabiti = –0.8482
Radyan cinsinden açı = 2.5834
Derece cinsinden açı = 148.0161°
Kısmen olumsuz yönde ilişkili olarak.



Ek Alıştırmalar, Sayfa 80

1. **(a)** 3. **(b)** 6. **(c)** 10. **(d)** $\frac{n}{2}(n+1)$.

3. Herhangi bir b reel sayısı için

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

23. $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Bölümü Gözden Geçirme, Sayfa 83

Doğru / Yanlış

1. Y. **2.** Y. **3.** D. **4.** D. **5.** D.
6. D. **7.** D. **8.** D. **9.** D. **10.** D.

Küçük Sınav

1. $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$. **2.** $r = 0$. **3.** $a = b = 4$.

4. $a = 2$, $b = 10$, c herhangi bir reel sayı

5. r, herhangi bir reel sayı olmak üzere $\begin{bmatrix} 3 \\ r \end{bmatrix}$

BÖLÜM 2

Kesim 2.1, sayfa 94

(a) Muhtemel cevap:

$\mathbf{r}_1 \to -\mathbf{r}_1$
$\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 - 2\mathbf{r}_1$
$\mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3 - 2\mathbf{r}_1$
$\mathbf{r}_2 \to \frac{1}{3}\mathbf{r}_2$
$\mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3 - 2\mathbf{r}_2$
$\mathbf{r}_3 \to -3\mathbf{r}_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Muhtemel cevap:

$\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 - 3\mathbf{r}_1$
$\mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3 - 5\mathbf{r}_1$
$\mathbf{r}_4 \to \mathbf{r}_4 + 2\mathbf{r}_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. (a) $\begin{matrix}\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 + 2\mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 - 4\mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 - 2\mathbf{r}_2\end{matrix}$ $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

(b) $\begin{matrix}\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 + 4\mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 - 5\mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 - 3\mathbf{r}_3\end{matrix}$ $\begin{bmatrix}1 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

5. (a) $\begin{matrix}\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 + 2\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3 - 3\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3 - 2\mathbf{r}_2\end{matrix}$ $\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

(b) $\begin{matrix}\mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_4 \to \mathbf{r}_4 + 2\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \to \frac{1}{2}\mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_4 \to \mathbf{r}_4 - 7\mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \to 2\mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_4 \to \mathbf{r}_4 - \frac{1}{2}\mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_1 \to \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3\end{matrix}$ $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

7. (a) N **(b)** REF **(c)** RREF.

11. (a) Muhtemel cevap: $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0\\ 2 & -\frac{1}{2} & 3 & 1\end{bmatrix}$

(b) $I_4 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

Kesim 2.2, Sayfa 113

1. (a) $x = 8, y = 1, z = 4.$

(b) $x = -21 + 3t, y = t, z = 5, w = 1.$

3. (a) $x = 2 - s, y = s, z = -3 - t, w = t.$

(b) $x = 3, y = 0, z = 1.$

5. (a) $x = 1, y = 2, z = -2.$

(b) $x = 1, y = 2, z = -2.$

7. (a) $x = -1, y = 4, z = -3.$

(b) $x = y = z = 0.$

(c) r, herhangi bir reel sayı olmak üzere $x = r, y = -2r, z = r$

(d) r, herhangi bir reel sayı olmak üzere; $x = -2r, y = r, z = 0$

9. (a) $x = 1, y = 2, z = 2.$

(b) $x = y = z = 0.$

11. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}r\\ r\end{bmatrix}, r \neq 0.$ **13.** $\mathbf{x} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}r\\ \frac{1}{2}r\\ r\end{bmatrix}, r \neq 0.$

15. (a) $a = \pm\sqrt{3}.$ **(b)** $a \neq \pm\sqrt{3}.$

(c) Bu sistemin sonsuz çözüme sahip olacak şekilde a'nın böyle bir değeri yoktur.

17. (a) $a = -3.$ **(b)** $a \neq \pm 3.$ **(c)** $a = 3.$

21. r, herhangi bir reel sayı olmak üzere $x = -2 + r, y = 2 - 2r, z = r$

23. $c - b - a = 0$

27. $-a + b - c = 0$

31. $2x^2 + 2x + 1$

33. $T_1 = 36.25°, T_2 = 36.25°, T_3 = 28.75°, T_4 = 28.75°$

35. Yarıçap = 37

39. Bir çözüm $2C_2H_6 + 7O_2 \to 4CO_2 + 6H_2O$

41. $\begin{bmatrix}1 - i\\ 2\\ -i\end{bmatrix}$. **43.** $\begin{bmatrix}i\\ 2i\\ -1\end{bmatrix}$.

Kesim 2.3, sayfa 124

3. (a) $\begin{bmatrix}1 & -4 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$. **(c)** $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

5. (a) $C = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

(b) $B = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -2\\ 2 & -1 & -1\end{bmatrix}$.

(c) A ve B birbirlerinin tersleridir.

7. $A^{-1} = \begin{bmatrix}-2 & \frac{3}{2}\\ 1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

9. (a) Singüler **(b)** $A^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12}\end{bmatrix}$.

(c) $A^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$. **(d)** Singüler

11. **(a)** $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

(d) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

(c) Singüler

(d) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

(e) Singüler

13. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

15. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$.

17. (a) ve (b)

19. $a \neq 0$ için A^{-1} vardır. O zaman,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{2}{a} & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{bmatrix}.$$

Kesim 2.4, sayfa 129

3. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **(b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **(d)** I_3.

7. $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Kesim 2.5, sayfa 136

1. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. **3.** $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$.

5. $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

7. $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & -1.5 & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3.5 \\ 0 & 0 & 5.5 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

9. $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0.2 & 1 & 0 \\ 2 & -0.4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$,

$U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & -0.5 & 0.25 & 1 \\ 0 & 0 & 0.2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2 \\ -2 \\ 1.5 \end{bmatrix}$.

Ek Alıştırmalar, sayfa 137

1. $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **3.** $a = \pm 1$.

5. **(a)** B'nin j. satırının $\frac{1}{k}$ ile çarpılması

(b) B'nin i ve j satırlarının yer değiştirmesi

(c) B'nin j satırının $-k$ katın i. satıra eklenmesi

7. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

9. **(a)** Ters tek olduğundan, sonuçlar eşit olmalıdır.

(b) AA_1 ve AA_2 hesaplanır. Eğer sonuç I_{10} ise öğrenciler tarafından sunulan cevap doğrudur.

11. $s \neq \frac{5}{4}$. **19.** $r = 3, s = 1, t = 3, p = -2$.

Bölümü Gözden Geçirme; Sayfa 138
Doğru /Yanlış

1. Y. **2.** D. **3.** Y. **4.** D. **5.** D.
6. D. **7.** D. **8.** D. **9.** D. **10.** Y.

Ara Sınav

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2. (a) Hayır. İkinci satırda önde gelen birim üzerindeki terim sıfır değildir.
(b) Sonsuz çoklukta
(c) Hayır. A'yı indirgenmiş satır eşelon şekle dönüştürürsek I_4 matrisini elde edemeyiz.
(d) r ve s herhangi reel sayılar olmak üzere

$$\begin{bmatrix} -6+2r+7s \\ r \\ -3s \\ s \end{bmatrix},$$

3. $k = 6$

4. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. **5.** $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

6. $P = A^{-1}, Q = B$

7. Köşegen, sıfır veya simetrik

BÖLÜM 3

Kesim 3.1, sayfa 145

1. (a) 5. **(b)** 7. **(c)** 4.

3. (a) Çift **(b)** Tek **(c)** Çift

5. (a) –. **(b)** +. **(c)** –.

7. (a) 9
(b) 416235 de inversiyonların sayısı 6, 436215 deki inversiyonların sayısı 9

9. (a) 0. **(b)** 0.

11. (a) 9. **(b)** 0. **(c)** 144.

13. (a) $t^2 - 3t - 4$. **(b)** $t^3 - 4t^2 + 3t$.

15. (a) $t = 4, t = -1$. **(b)** $t = 1, t = 0, t = 3$.

Kesim 3.2, sayfa 154

1. (a) 3. **(b)** 2. **(c)** 24. **(d)** 29.
(e) 4. **(f)** -30.

3. 3. **5.** 8.

7. (a) 2. **(b)** -120.
(c) $(t-1)(t-2)(t-3) = t^3 - 6t^2 + 11t - 6$.
(d) $t^2 - 2t - 11$.

23. 32 **25.** (b) singüler değildir.

27. Sistem aşikar olmayan bir çözüme sahiptir.

Kesim 3.3, sayfa 164

1. (a) 1. **(b)** 7. **(c)** 2. **(d)** 10.

3. (a) -2. **(b)** 9. **(c)** -2. **(d)** -1.

5. (a) 3. **(d)** 29. **(e)** 4.

7. (a) 4. **(c)** -30. **(f)** 0.

11. (a) $t = 0, t = 5$. **(b)** $t = 1, t = 4$.

15. (a) 6. **(b)** $(3, -6), (-1, 2), (13, -14)$.
(c) 24.

17. $\frac{41}{2}$.

Kesim 3.4, sayfa 169

3. (a) $\begin{bmatrix} 24 & -42 & -30 \\ 19 & -2 & -30 \\ -4 & 32 & 30 \end{bmatrix}$. **(b)** 150.

5. (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

(c) Singüler **(d)** $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

(e) Singüler

7. (a) $-\frac{1}{28}\begin{bmatrix} -30 & -5 & 9 & 46 \\ -32 & 4 & 4 & 36 \\ -12 & -2 & -2 & 24 \\ 16 & -2 & -2 & -32 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} \frac{3}{14} & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ -\frac{1}{14} & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$. **(c)** $\begin{bmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$.

9. $\begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$.

11. $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Kesim 3.5, sayfa 172

1. $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 1$

3. $x_3 = ?$

5. $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

7. det $A = 0$ olduğundan Cramer yöntemini kullanamayız.

Ek Alıştırmalar, sayfa 174

1. (a) 5 **(b)** 4 **(c)** 36 **(d)** 5

Bölüm Gözden Geçirme, Sayfa 174

Doğru/Yanlış

1. Y. **2.** D. **3.** Y. **4.** D.

5. D. **6.** Y. **7.** Y. **8.** D.

9. D. **10.** Y. **11.** D. **12.** Y.

Küçük Sınav

1. –54 **3.** –1 **4.** –2 **6.** 19

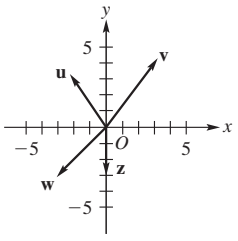
7. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

8. $x_1 = \frac{11}{7}, x_2 = -\frac{4}{7}, x_3 = -\frac{5}{7}$.

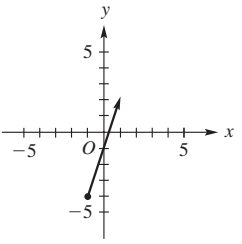
BÖLÜM 4

Kesim 4.1, sayfa 187

1.



2. Başlangıç noktası (–1, –4).



5. $a = 3, b = -1$.

7. (a) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. **(b)** $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

9. (a) $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$. **(b)** $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$.

11. (a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}, \mathbf{u} - \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$,
$2\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, 3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(b) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{u} - \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$,
$2\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}, 3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \end{bmatrix}$.

(c) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}, \mathbf{u} - \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$,
$2\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \end{bmatrix}, 3\mathbf{u} - 2\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 14 \end{bmatrix}$.

13. (a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$. **(b)** $\begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$. **(d)** $\begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 13 \end{bmatrix}$.

15. (a) $r = \frac{1}{2}, s = \frac{3}{2}$.

(b) $r = -2, s = 1, t = -1$.

(c) $r = -2, s = 6$.

17. İmkansız

19. Muhtemel cevap $c_1 = -2, c_2 = -1, c_3 = 1$

Kesim 4.2, sayfa 196

1. **(b)** Hayır; $0 \odot p(t) = 0$, olduğundan derecesi 2 olamaz.

3. **(a)** Evet **(b)** Evet **(c)** $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) Evet $\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & d \end{bmatrix}$'nin negatifi $\begin{bmatrix} -a & -b \\ -2b & -d \end{bmatrix}$'dir.

(e) Evet, Tanım 4.4'te verilen tüm özellikleri sağlar.

7. (3), (4), (b), (5), (6) ve (7) özellikler

9. (5), (6) ve (8) özellikler

11. (8) özellik

17. Hayır

Kesim 4.3, sayfa 205

1. Evet, Teorem 4.3'ün (a) ve (b) özellikleri sağlanır.

3. Hayır, W'daki bir vektörün bir skalarla çarpımı W da olmayabilir.

5. (b), (c) ve (d)

7. (b) ve (c)

9. (a) ve (c)

13. Evet

15. (a) ve (c)

17. (a) ve (b)

19. (b), (c) ve (e)

33. (b) ve (c)

37. (a) ve (c)

39. **(a)** Muhtemel cevap:
$x = 2 + 2t$, $y = -3 + 5t$, $z = 1 + 4t$.
(b) Muhtelem cevap:
$x = -3 + 8t$, $y = -2 + 7t$, $z = -2 + 6t$.

Kesim 4.4, sayfa 215

1. **(a)** Muhtemel cevaplar

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(b) Muhtemel cevaplar

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(c) Muhtemel cevaplar
$\{t^2, t + 1, t - 1\}$, $\{t^2 + t, t^2 - t, t + 1\}$

3. **(a)** Evet **(b)** Hayır **(c)** Evet **(d)** Hayır

7. (a) ve (d)

9. Hayır

11. Muhtemel cevap $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

15. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$

Kesim 4.5, sayfa 226

3. Evet.

5. Hayır.

7. Evet.

9. Hayır.

11. (a) ve (c) lineer bağımlı, (b) lineer bağımsızdır

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 6 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

13. (a) ve (b) lineer bağımsızdır. (c) lineer bağımlıdır.
$(t + 13 = 3(2t^2 + t + 1) - 2(3t^2 + t - 5)$

15. (b) lineer bağımlıdır

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

17. $c \neq \pm 2$

Kesim 4.6, sayfa 242

1. (a) ve (d)

3. (a) ve (d)

5. (c)

7. (a) R^3 için bir tabandır ve

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

9. (a) bir tabandır.
$5t^2 - 3t + 8 = 5(t^2 + t) - 8(t - 1)$.

11. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$; boyut $W = 2$.

13. $\{t^3 + t^2 - 2t + 1, t^2 + 1\}$, boyut $W = 2$

15. $a \neq -1, 0, 1$ için

17. $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

19. **(a)** $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. **(b)** $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

21. $\{t^2 + 2, t - 3\}$.

23. **(a)** 3. **(b)** 2.

25. **(a)** 2. **(b)** 1. **(c)** 2. **(d)** 2.

27. **(a)** 4. **(b)** 3. **(c)** 3. **(d)** 4.

29. $\{t^3 + \mathrm{t}, t^2 - t, t^3, 1\}$, **31.** 2.

33. Muhtemel cevap: a, b reel sayılar olmak üzere $\begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ biçimindeki tüm vektörlerin cümlesi.

49. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$; boyut $W = 8$

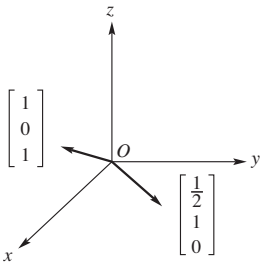
Kesim 4.7, sayfa 251

1. (a) r ve s herhangi reel sayılar olmak üzere,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}r + s \\ r \\ s \end{bmatrix}\text{'dir.}$$

(b) $\mathbf{x} = r \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(c)



3. $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$; boyut =2

5. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{8}{3} \\ -\frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$; boyut = 1

7. $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$; boyut = 2

9. $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$; boyut = 2

11. $\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

13. $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

15. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

17. $\lambda = 3$ veya -4 **19.** $\lambda = 0$ veya 1

21. $\mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, r herhangi bir reel sayı olmak üzere

$$\mathbf{x}_h = r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Kesim 4.8, sayfa 267

1. $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$. **3.** $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. **5.** $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

7. $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$. **9.** $4t - 3$. **11.** $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$.

13. **(b)** $[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \end{bmatrix}$.

(c) $\lambda_1 = -0.3$.

(d) $\lambda_2 = 0.25$.

(e) $\mathbf{v} = 10\lambda_1^n \mathbf{v}_1 - 8\lambda_2^n \mathbf{v}_2$.

(f) Dizi, sıfır vektörüne yaklaşır.

15. **(a)** $[\mathbf{v}]_T = \begin{bmatrix} -7 \\ 4 \end{bmatrix}; [\mathbf{w}]_T = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(b) $P_{S \leftarrow T} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

(c) $[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}; [\mathbf{w}]_S = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix}$.

(d) (c) ile aynı.

(e) $Q_{T \leftarrow S} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(f) (a) ile aynı

17. **(a)** $[\mathbf{v}]_T = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}; [\mathbf{w}]_T = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$.

(b) $P_{S \leftarrow T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$.

(c) $[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}; [\mathbf{w}]_S = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(d) (c) ile aynı

(e) $Q_{T \leftarrow S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$.

(f) $[\mathbf{v}]_T = Q_{T \leftarrow S}[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}$.

$[\mathbf{w}]_T = Q_{T \leftarrow S}[\mathbf{w}]_S = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$;

19. **(a)** $[\mathbf{v}]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; [\mathbf{w}]_T = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(b) $P_{S \leftarrow T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$.

(c) $[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}; [\mathbf{w}]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

(e) $Q_{T \leftarrow S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

(f) (a) ile aynı

21. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. **23.** $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

25. $S = \{t + 1, 5t - 2\}$ **27.** $S = \{-t + 5, t - 3\}$

Kesim 4.9, sayfa 282

1. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

olmak üzere muhtemel bir tabanı $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$'dir.

(a) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix} = 3\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2 + 12\mathbf{v}_3$.

(b) $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$.

(c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 6\mathbf{v}_3$.

3. Muhtemel bir cevap

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

5. **(a)** $\{[1 \quad 0 \quad -1], [0 \quad 1 \quad 0]\}$.

(b) $\{[1 \quad 2 \quad -1], [1 \quad 9 \quad -1]\}$.

7. **(a)** $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\\frac{1}{5}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\\frac{3}{5}\end{bmatrix}\right\}$.

(b) $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\3\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\-1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\5\\3\end{bmatrix}\right\}$.

9. **(a)** 3 **(b)** 5.

13. **(a)** rank = 2, sıfırlık = 2.
(b) rank =3, sıfırlık 1.

15. *B* ve *C* denktirler. *A*, *D* ve *E* denktir.

17. Hiçbiri.

19. (b).

21. **(a)** Evet. **(b)** Hayır

23. (b).

25. **(a)** 2. **(b)** 3.

27. Bir tek çözüme sahiptir.

29. Lineer bağımlıdır.

31. Evet.

33. $c \neq \pm 2$.

35. **(a)** Lineer bağımlı **(b)** Lineer bağımsız

Ek Alıştırmalar, Sayfa 285

1. (b) k=0

3. **(a)** Hayır **(b)** Evet **(c)** Evet

11. $a = 1$ veya $a = 2$

13. $k \neq 1, -1$

17. **(a)** $\mathbf{b} = \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$, burada $b + c - 3a = 0$'dır.

(b) Herhangi bir b

25. **(a)** $T = \left\{\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\4\\4\end{bmatrix}\right\}$.

(b) $S = \left\{\begin{bmatrix}\frac{6}{5}\\-\frac{2}{5}\\\frac{13}{5}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\frac{2}{5}\\\frac{1}{5}\\-\frac{4}{5}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-\frac{1}{5}\\\frac{2}{5}\\-\frac{3}{5}\end{bmatrix}\right\}$.

Bölüm Gözden Geçirme, Sayfa 288

Doğru/Yanlış

1. D. **2.** D. **3.** Y. **4.** Y. **5.** D.
6. Y. **7.** D. **8.** D. **9.** D. **10.** Y.
11. Y. **12.** D. **13.** Y. **14.** D. **15.** D.
16. D. **17.** D. **18.** D. **19.** Y. **20.** Y.
11. D.

Küçük Sınav

1. Hayır, Tanım 4.4'ün 1. özelliği sağlanmaz.

2. Hayır. Tanım 4.4'ün 5-8 özellikleri sağlanmaz.

3. Evet, Tanım 4.4'ün tüm özellikleri sağlanır.
$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$; boyut = 2

4. Hayır. Tanım 4.4'ün (b) özelliği sağlanmaz.

5. $p(t)$ ve $q(t)$ W'nın elemanları ise ve c bir skalarsa,

$$(p + q)(0) = p(0) + q(0) = 0 + 0 = 0$$

ve

$$(cp)0 = c[p(0] = c0 = 0$$

Taban = $\{t^2, t\}$

6. Hayır S lineer bağımlıdır.

7. Muhtemel cevap:

Taban (baz) $= \left\{\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$.

8. $\left\{\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$.

9. $\{[1 \quad 0 \quad 2], [0 \quad 1 \quad -2]\}$.

10. Sıfır uzayının boyutu = n – rank A = 3 – 2 = 1

11. $\mathbf{x}_p = \begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{7}{6}\\0\\0\end{bmatrix}$ r herhangi bir reel sayı olmak üzere $\mathbf{x}_h = r\begin{bmatrix}-1\\-\frac{1}{4}\\\frac{3}{2}\\1\end{bmatrix}$

BÖLÜM 5

Kesim 5.1, Sayfa 297

1. (a) 1. (b) 0. (c) $\sqrt{5}$.

3. (a) 1. (b) $\sqrt{2}$.

5. (a) $\sqrt{74}$. (b) $\sqrt{58}$.

7. $c = \pm\sqrt{5}$.

9. (a) $\dfrac{-14}{\sqrt{5}\sqrt{41}}$. (b) $\dfrac{-6}{\sqrt{5}\sqrt{41}}$.

11. (a) 1, 0, 0.

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{14}}, \dfrac{3}{\sqrt{14}}, \dfrac{2}{\sqrt{14}}$.

(c) $\dfrac{-1}{\sqrt{14}}, \dfrac{-2}{\sqrt{14}}, \dfrac{-3}{\sqrt{14}}$.

(d) $\dfrac{4}{\sqrt{29}}, \dfrac{-3}{\sqrt{29}}, \dfrac{2}{\sqrt{29}}$.

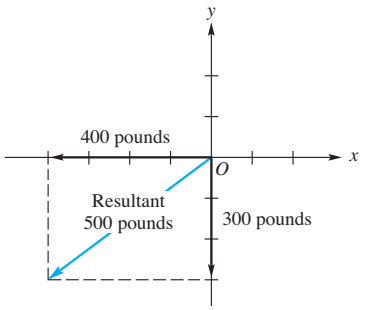
17. (a) $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_4$, $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_6$, $\mathbf{v}_3$ ve $\mathbf{v}_4$, $\mathbf{v}_3$ ve $\mathbf{v}_6$, $\mathbf{v}_4$ ve $\mathbf{v}_5$, $\mathbf{v}_5$ ve $\mathbf{v}_6$

(b) $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_5$, $\mathbf{v}_4$ ve $\mathbf{v}_6$

(c) $\mathbf{v}_1$ ve $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_3$ ve $\mathbf{v}_5$

19. (b)

21.



25. $\frac{5}{2}$. **27.** $a = -2, b = 2$.

Kesim 5.2, Sayfa 306

1. (a) $-15\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$. (b) $-3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

(c) $7\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$. (d) $0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$.

5. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = 24$.

13. $\frac{3}{2}\sqrt{10}$. **15.** 1. **17.** (a).

19. (a) $x - z + 2 = 0$.

(b) $3x + y - 14z + 47 = 0$.

21. $4x - 4y + z + 16 = 0$.

23. $x = -2 + 2t, y = 5 - 3t, z = -3 + 4t$.

25. $\left\{\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

27. (a) $-15\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$. (b) $-3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

(c) $7\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$. (d) $3\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Kesim 5.3, sayfa 317

9. (a) -8. (b) 0. (c) 1.

11. (a) $\frac{3}{2}$. (b) 1. (c) $\frac{1}{2}\sin^2 1$.

13. (a) 2. (b) $2\sqrt{5}$. (c) $2\sqrt{2}$.

15. (a) 1. (b) 0. (c) $\dfrac{2\sin^2 1}{\sqrt{4 - \sin^2 2}}$.

25. Eğer $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$,

$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 3u_1v_1 - 2u_1v_2 - 2u_2v_1 + 3u_2v_2$.

27. (a) $\sqrt{1 - \sin^2 1}$. (b) $\sqrt{\frac{1}{30}}$.

29. (a) Birim dik (b) Hiçbiri

(c) Hiçbiri.

31. $a = 0$ **33.** $a = 5$

35. $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$

$$b_{11} + 3b_{21} + 2b_{12} + 4b_{22} = 0.$$

Kesim 5.4, sayfa 329

1. (a) $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$.

(b) $\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

3. $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{33}}\begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}\right\}$.

5. $\left\{\sqrt{3}\,t, 2 - 3t\right\}$.

7. $\left\{\sqrt{3}\,t, \dfrac{\sin 2\pi t + \left(\frac{3}{2\pi}\right)t}{\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{3}{4\pi^2}}}\right\}$.

9. $\left\{\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}\right\}$.

11. Muhtemel cevap:

$\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$.

13. $\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}\right\}$.

15. $\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}\right\}$.

17. $\left\{\frac{1}{\sqrt{26}}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

23. (b) $\begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}$. **(c)** $\|\mathbf{v}\| = 9\sqrt{3}$.

25. (b) $[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

27. Muhtemel cevap

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right\}.$$

29. (a) $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.7071 & 0.7071 \\ -0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}$,

$$R = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.4142 & 0.7071 \\ 0 & 3.5355 \end{bmatrix}.$$

(b) $Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.5774 & 0.4082 \\ -0.5774 & -0.4082 \\ 0.5774 & -0.8165 \end{bmatrix}$,

$$R = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \frac{5}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1.7321 & 2.8868 \\ 0 & 0.8165 \end{bmatrix}.$$

(c) $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{4}{\sqrt{21}} & -\frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{21}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{21}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \end{bmatrix} \approx$

$$\begin{bmatrix} 0.4082 & 0.8729 & -0.2673 \\ 0.8165 & -0.2182 & 0.5345 \\ -0.4082 & 0.4364 & 0.8018 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} \frac{6}{\sqrt{6}} & -\frac{8}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{7}{\sqrt{21}} & \frac{1}{\sqrt{21}} \\ 0 & 0 & \frac{19}{\sqrt{14}} \end{bmatrix} \approx$$

$$\begin{bmatrix} 2.4495 & -3.2660 & 0.4082 \\ 0 & 1.5275 & 0.2182 \\ 0 & 0 & 5.0780 \end{bmatrix}.$$

Kesim 5.5, sayfa 348

1. (a) $\left\{\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

(b) $2x - 3y + z = 0$ eşitliğini sağlayan tüm $P(x, y, z)$ noktalarının cümlesi $W^{\perp}$, normali $\mathbf{w}$ olan bir düzlemdir.

3. $\left\{\begin{bmatrix} -\frac{17}{5} & \frac{6}{5} & 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{8}{5} & \frac{1}{5} & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$.

5. $\left\{\frac{45}{14}t^3 - \frac{55}{14}t^2 + t, \frac{130}{7}t^3 - \frac{120}{7}t^2 + 1\right\}$.

7. $\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

9. A'nın sıfır uzayının tabanı $\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

A'nın satır uzayı için taban
{[1 0 –2 –3], [0 1 1 2]}

A^T'nin sıfır uzayının tabanı $\left\{\begin{bmatrix} -\frac{7}{5} \\ -\frac{13}{10} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

A^T'nin sütun uzayı için taban $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{13}{10} \end{bmatrix}\right\}$.

11. **(a)** $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. **(b)** $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$. **(c)** $\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

13. **(a)** $2 \sin t$.

(b) $\dfrac{\pi^2}{3} - 4 \cos t$.

(c) $\left(\dfrac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}\right) + \left(\dfrac{e^{-\pi} - e^{\pi}}{2\pi}\right) \cos t + \left(\dfrac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}\right) \sin t$.

15. $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ 2 \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ 0 \\ -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$.

17. $\mathbf{w} = 2 \sin t - 1, \mathbf{u} = t - 1 - [2 \sin t - 1] = t - 2 \sin t$.

19. $\frac{3}{5}\sqrt{5}$.

21. $\sqrt{\dfrac{2\pi^3}{3} - 4\pi} \approx 2.847$.

23. $\text{proj}_W e^t = \dfrac{1}{2\pi}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right) + \dfrac{1}{\pi}\left(-\dfrac{1}{2}e^{\pi} + \dfrac{1}{2}e^{-\pi}\right)\cos t + \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{1}{2}e^{\pi} - \dfrac{1}{2}e^{-\pi}\right)\sin t + \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{1}{5}e^{\pi} - \dfrac{1}{5}e^{-\pi}\right)\cos 2t + \dfrac{1}{\pi}\left(-\dfrac{2}{5}e^{\pi} + \dfrac{2}{5}e^{-\pi}\right)\sin 2t$.

Kesim 5.6, Sayfa 356

3. $\hat{\mathbf{x}} \approx \begin{bmatrix} -1.5333 \\ -1.8667 \\ 4.2667 \end{bmatrix}$.

9. **(b)** $\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{11} \\ \frac{4}{11} \\ 0 \end{bmatrix}$ çözüm tektir.

11. **(a)** $y = 752x - 1{,}482{,}059.80$.

(b

Yıl	Tüm dolarlar için yuvarlanmış tahmin edilen değer
2008	27,956
2010	59,460
2015	33,220

13. **(b)** $\ln y = -0.0272x + 3.2709$.

(c) $r = 26.3350, s = -0.0272$.

(d) 16.14 mm.

Ek Alıştırmalar, Sayfa 358

1. $\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

3. $\mathbf{v} = -\sqrt{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\sqrt{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

5. P'de $\mathbf{v}$'ye en yakın vektör $\dfrac{1}{122}\begin{bmatrix} 59 \\ 271 \\ 50 \end{bmatrix}$; uzaklık $\dfrac{9}{\sqrt{122}}$.

9. **(a)** Muhtemel cevap:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

(b) Muhtemel cevap:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{255}}\begin{bmatrix} -5 \\ -14 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}\right\}.$$

11. **(a)** $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

(c) (i) $\mathbf{w} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = -\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$;

(ii) $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

13. $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\dfrac{3}{2}}\,t, \sqrt{\dfrac{5}{8}}\,(3t^2 - 1)\right\}$.

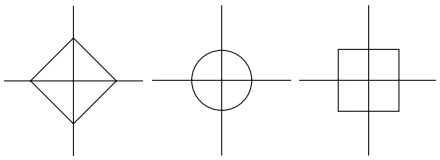
15. $\sqrt{\dfrac{8}{175}} \approx 0.214$.

29. **(a)** 7, 4.1231, 3.

(b) 5, 3.6055, 3.

(c) 2, 2, 2.

33.



(a) $\|\mathbf{x}\|_1 \nabla 1$ (b) $\|\mathbf{x}\|_2 \nabla 1$ (c) $\|\mathbf{x}\|_\infty \nabla 1$

Bölüm Gözden Geçirme, Sayfa 360

Doğru / Yanlış

1. D. **2.** Y. **3.** Y. **4.** Y.
5. D. **6.** D. **7.** Y. **8.** Y.
9. Y. **10.** Y. **11.** D. **12.** D.

Küçük Sınav

1. $b = \frac{\sqrt{2}}{2}, c = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. r ve s herhangi reel sayılar olmak üzere

$$r\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

3. $a = -\frac{5}{9}b$ olmak üzere $a + bt$.

4. (b) **u** ve **v** arasındaki açının konisünün değeri –1 ile 1 arasındadır.

5. **(b)** $\left\{\frac{1}{2}\mathbf{v}_1, \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{v}_2, \frac{1}{\sqrt{12}}\mathbf{v}_3\right\}$.

(c) $\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

6. **(b)** $\mathbf{w} = \frac{5}{3}\mathbf{u}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{u}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{u}_3$.

(c) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^T$; $\frac{2}{3}\sqrt{6}$.

7. $\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

8. $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

9. *Yol gösterme:* İşleme başlamak için W_1 için bir tabanın inşaasını göz önüne alınız.

BÖLÜM 6

Kesim 6.1, sayfa 372

1. (b)

3 **(a) ve (b)**

5. (b)

7. **(a)** $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. **(b)** $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

9. **(a)** $\begin{bmatrix} 15 & 5 & 4 & 8 \\ -5 & -1 & 10 & 2 \end{bmatrix}$.

11. **(a)** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

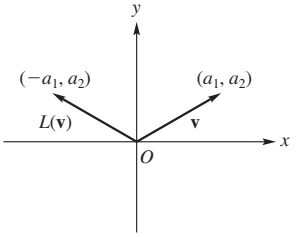
13. **(a)** $\begin{bmatrix} 2 \\ 15 \end{bmatrix}$. **(b)** $\begin{bmatrix} 2u_1 + 3u_2 + 2u_3 \\ -4u_1 - 5u_2 + 3u_3 \end{bmatrix}$.

15. **(a)** $2t^3 - 5t^2 + 2t + 3$.

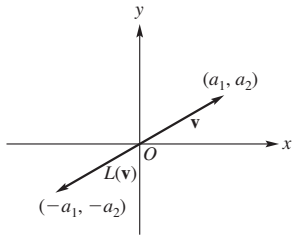
(b) $at^3 + bt^2 + at + c$.

17. a = herhangi bir reel sayı, $b = 0$

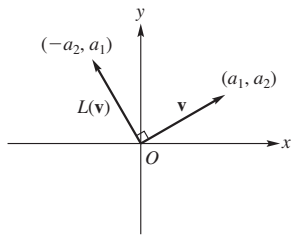
19. **(a)** y-eksenine göre yansıma



(b) orijine göre yansıma



(c) saatin ters yönünde $\pi / 2$ radyanlık dönme



23. Evet **27.** Hayır **35.** $n \times n$ sıfır matrisi

Kesim 6.2, sayfa 387

1. **(a)** Evet **(b)** Hayır **(c)** Evet **(d)** Hayır

(e) a, herhangi bir reel sayı olmak üzere $\begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}$, şeklindeki tüm vektörler, bir değer ifadeyle y-ekseni

(f) a, herhangi bir reel sayı olmak üzere $\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$, şeklindeki tüm vektörler, bir diğer ifadeyle x-ekseni

3. **(a)** Hayır **(b)** Evet **(c)** Evet **(d)** Evet

(e) r ve s reel sayılar olmak üzere $[-r \;\; -s \;\; r \;\; s]$ şeklindeki tüm vektörler

(f) $\{[1\ \ 0], [0,\ 1]\}$

5. **(a)** $\{\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\}$. **(b)** 1.

(c) $\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\}$.

(d) 3.

7. **(a)** 0. **(b)** 6.

9. **(a)** $\{1\}$ **(b)** $\{1 \quad 0], [0 \quad 1]\}$

11. **(a)** $L = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$, dolayısıyla, tabanı yoktur.

(b) $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}$.

13. **(a)** boy (çek L) = 1, boy (L'nin görüntü uzayı) = 2

(b) boy (çek L) = 1, boy (L'nin görüntü uzayı) = 2

(c) boy (çek L) = 0, boy (L'nin görüntü uzayı) = 4

17. Hayır

19. **(b)** $L^{-1}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. **21.** 1.

23. **(b)** $\begin{bmatrix} -2u_1 - u_3 \\ -2u_1 - u_2 + 2u_3 \\ -2u_1 + u_2 - u_3 \end{bmatrix}$.

25. **(a)** 2. **(b)** 1.

Kesim 6.3, sayfa 397

1. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. **(b)** $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$. **(d)** $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$.

(e) $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$.

3. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ -5 & -3 & -4 & -5 \end{bmatrix}$.

5. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. **(b)** $\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$.

7. **(a)** $\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$. **(b)** $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

9. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

11. **(a)** $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & -9 & -2 & -6 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & -6 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

13. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. **(b)** $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. **(d)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

17. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. **(b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$. **(d)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

19. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Kesim 6.4, Sayfa 405

3. (a) $\begin{bmatrix} -u_1 + 4u_2 - u_3 & 3u_1 - u_2 + 3u_3 \\ 4u_1 + 3u_2 + 5u_3 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 5 & -4 & -4 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} 2u_1 + 2u_3 & -4u_1 - 2u_2 - 2u_3 \\ -2u_1 - 4u_2 - 6u_3 \end{bmatrix}$.

(e) $\begin{bmatrix} 14 & -28 & 14 \end{bmatrix}$.

(f) $\begin{bmatrix} 2 & 16 & 2 \\ 0 & -10 & 6 \\ 10 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

5. (a) $\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(b) Çek $L_1 = \begin{bmatrix} -r - s \\ r \\ s \end{bmatrix}$ şeklindeki tüm vektörler

çek $L_2 = \begin{bmatrix} -r - 2s \\ r \\ s \end{bmatrix}$ şeklindeki tüm vektörler.

çek $L_1 \cap$ çek $L_2 = \begin{bmatrix} -r \\ r \\ 0 \end{bmatrix}$ şeklindeki tüm vektörler

(c) $\begin{bmatrix} -r \\ r \\ 0 \end{bmatrix}$ şeklindeki tüm vektörler

(d) Hepsi aynı

7. (a) $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

9. (a) $\begin{bmatrix} 2 & 8 & -2 \\ 4 & 2 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$. **(b)** $\begin{bmatrix} 10 & 17 & 7 \\ 11 & 8 & 13 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$.

11. (a) 6. **(b)** 6. **(c)** 12. **(d)** 12.

15. (a) $L(t^2) = t + 3, L(t) = 2t + 4, L(1) = -2t - 1$.

(b) $(a + 2b - 2c)t + (3a + 4b - c)$.

(c) $-16t - 18$.

17. Muhtemel cevap: $L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{bmatrix}$.

$L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -u_1 \\ -u_2 \end{bmatrix}$

19. Muhtemel cevap: $L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$L\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{u_1 + u_2}{2} \\ \frac{u_1 + u_2}{2} \end{bmatrix}$.

21. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Kesim 6.5, Sayfa 413

3. $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$.

5. (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. **(b)** $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

(c) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

9. $\begin{bmatrix} \frac{13}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

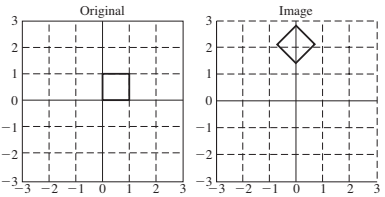
13. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

15. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Kesim 6.6, sayfa 425

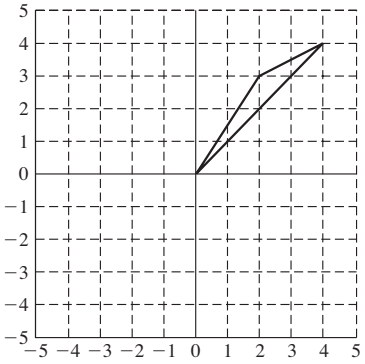
1. (a) $M = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b)



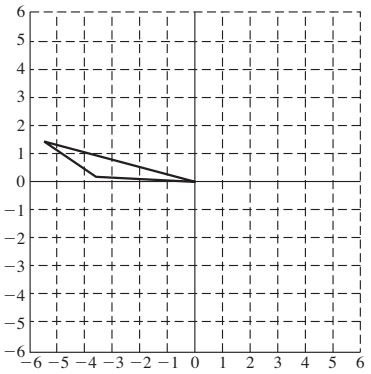
(c) Hayır.

3. (a)



(b) $M = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(c)



(d) $Q = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(e) **(c)** kısmıyla aynı

(f) $M = Q$ olduğundan aynıdırlar. Dönmeler değişmelidir.

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$AB \neq BA$ gereğince görüntüler aynı olmayacaktır.

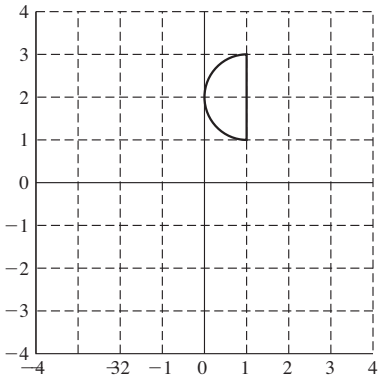
7. $M = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

9. $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

11. $M = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

13. (a)



(b) $M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) $M \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $M \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

15. (a) $\begin{bmatrix} \cos\theta_j & -\sin\theta_j & 0 & 0 \\ \sin\theta_j & \cos\theta_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k\theta_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) bir vektörün boyu vida hareketi sırasında azalır.

Ek Alıştırmalar, Sayfa 430

3. Hayır

5. (a) $8t + 7$. **(b)** $\frac{1}{2}(3a + b)t + \frac{1}{2}(3a - b)$.

7. (a) Hayır **(b)** Hayır **(c)** Evet **(d)** Hayır
(e) $\{t^2 + t^2, t + 1\}$. **(f)** $\{t^3 + t\}$.

9. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

11. (b) çek $L = f(0) = 0$ olacak şekilde $[0, 1]$ üzerinde sürekli tam f fonksiyonlarının cümlesi
(c) Evet

13. (a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. **(b)** $4t^2 - 4t + 1$.

15. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Bölümü Gözden Geçirme, Sayfa 432

Doğru / Yanlış

1. D. **2.** Y. **3.** D. **4.** Y. **5.** Y.
6. D. **7.** D. **8.** D. **9.** D. **10.** Y.

Ara Sınav

1. Evet **2. (b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$. **3.** (b) Hayır

4. $\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$. **5.** $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

6. (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. **(b)** $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. **(d)** $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

BÖLÜM 7

Kesim 7.1, Sayfa 450

1. L'nin tek özdeğeri $\lambda = -1$'dir. R^2'de sıfırdan farklı her vektör λ'ya karşılık gelen L'nin bir özvektörüdür.

3. Özdeğerler $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 0$ karşılık gelen özvektörler de sırasıyla, 1, t^2 ve t'dir.

5. (a) $p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 7$.
(b) $p(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 7$.
(c) $p(\lambda) = (\lambda - 4)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = \lambda^3 - 9\lambda^2 + 26\lambda - 24$.
(d) $p(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda + 6$.

7. (a) $p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$ özdeğerler $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_2 = 3$'tür. Karşılık gelen özvektörler

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(b) $p(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 14 > -8$ özdeğerler $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ ve $\lambda_3 = 4$ karşılık gelen özvektörler

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ ve}$$

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(c) $p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 2\lambda + 18$ özdeğerler $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ ve $\lambda_3 = 4$ karşılık gelen özvektörler

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(d) $p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 6\lambda + 8$. Özdeğerler $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 4$ ve $\lambda_3 = 1$. Karşılık gelen özvektörler

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ -12 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

9. **(a)** $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$. Özdeğerler $\lambda_1 = i$ ve $\lambda_2 = -i$. Karşılık gelen özvektörler

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

(b) $p(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda + 8$. Özdeğerler $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2i$ ve $\lambda_3 = -2i$. Karşılık gelen özvektörler

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2i \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ -2i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(c) $p(\lambda) = \lambda^3 + (-2 + i)\lambda^2 - 2i\lambda$. Özdeğerler $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -i$ ve $\lambda_3 = 2$. karşılık gelen özvektörler

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(d) $p(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 17$. Özdeğerler $\lambda_1 = 4 + i$ ve $\lambda_2 = 4 - i$. Karşılık gelen özvektörler

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 + i \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 - i \end{bmatrix}$$

13. A'nın karakteristik polinomu $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 0)(\lambda - 2)$'dir. L'nin özdeğerleri $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$ ve $\lambda_4 = 2$ olup bu değerlere karşılık gelen özvektörler:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } \begin{bmatrix} -29 & -7 \\ -9 & 3 \end{bmatrix}.$$

17. **(a)** $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. **(b)** $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

19. **(a)** $\left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ 2i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. **(b)** $\left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ -2i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Kesim 7.2, sayfa 461

1. L köşegenleştirilemezdir. L'nin özdeğerleri $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$'dır. Karşılık gelen özvektörlerin cümlesi p_2'nin bir tabanı şekline getirilemez.

3. $\{t^2, t, 1\}$.

5. L'nin özdeğerleri $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$ ve $\lambda_3 = 4$. Karşılık gelen özvektörleri t^2, $t^2 - 5t$ ve $9t^2 + 4t + 14$. L köşegenleştirilebilir.

7. **(a)** Köşegenleştirilemez.
(b) Köşegenleştirilebilir.
(c) Köşegenleştirilemez.
(d) Köşegenleştirilemez.

9. $\begin{bmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 5 & 3 & -5 \\ 5 & 5 & -7 \end{bmatrix}$.

11. **(a)** $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

(b) $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) **(c)** Mümkün değil
(d) Mümkün değil

13. $D = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

15. **(a)** $D = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. **(b)** $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$.

(c) $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

17. **(a)** Eksik (defektive).

(b) Eksik değil (not defektive).

(c) Eksik değil.

(d) Eksik değil.

19. $\begin{bmatrix} 768 & -1280 \\ 256 & -768 \end{bmatrix}$.

Kesim 7.3, Sayfa 475

7. $P^T p = I_3$

9. **(a)** Eğer B verilen bir matris ise $B^T B = I_2$ olduğu görülür.

15. $A,\ D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ ve $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

matrislerine benzerdir.

17. $A,\ D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ve

$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

matrislerine benzerdir.

19. $A,\ D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ve

$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$.

matrislerine benzerdir.

21. $A,\ D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisine benzerdir.

23. $A,\ D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisine benzerdir.

25. $A,\ D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ matrisine benzerdir.

27. $A,\ D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. matrisine benzerdir.

Ek Alıştırmalar, Sayfa 477

1. **(a)** $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 4$ karşılık gelen özvektörler:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(b) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = -1$ karşılık gelen özvektörler

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(c) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$; karşılık gelen özvektörler

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

(d) $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$; karşılık gelen özvektörler:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

7. **(a)** $\begin{bmatrix} -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{6}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$.

(b) $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

(c) Özdeğerler $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{1}{2}$ karşılık gelen özvektörler: $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

(d) Özdeğerler $\lambda_1 = 0$ ve $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ karşılık gelen özvektörler; $p_1(t) = 5t - 5$ ve $p_2(t) = 5t$

(e) $\lambda_1 = 0$ için özuzay p_1 in altuzayı olup tabanı $\{5t - 5\}$'dir. $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ için özuzay p_1'in altuzayı olup tabanı $\{5t\}$'dir.

9. Özdeğer yalnızca $\lambda_1 = 0$'dır. Buna karşılık gelen özvektör $p_1(x) = 1$'dir.

Bölümü Gözden Geçirme, Sayfa 478

Doğru / Yanlış

1. D. **2.** Y. **3.** D. **4.** D. **5.** Y.
6. D. **7.** D. **8.** D. **9.** D. **10.** D.
11. Y. **12.** D. **13.** D. **14.** D. **15.** D.
16. D. **17.** D. **18.** D. **19.** D. **20.** D.

Küçük Sınav

1. $\lambda_1 = 1, \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$\lambda_2 = 3, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

2. (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \end{bmatrix}$.

(b) $\lambda_1 = 0, \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$\lambda_2 = 1, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$\lambda_3 = -1, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.

3. $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ ve $\lambda_3 = 2$

4. $\lambda = 9, \mathbf{x}$.

5. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

6. $D = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

7. Hayır **8.** Hayır

9. (a) Muhtemel cevap: $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

12. (a) $\lambda_1 = 4, \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

$\lambda_2 = 10, \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(b) Muhtemel cevap $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$

BÖLÜM 8

Kesim 8.1, sayfa 486

1. $\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. **2. (b)** ve **(c)**

5. (a) $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.61 \\ 0.39 \end{bmatrix}, \mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.583 \\ 0.417 \end{bmatrix}$.

(b) T'nin tüm elemanları pozitif olduğundan regülerdir $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0.571 \\ 0.429 \end{bmatrix}$.

7. (a) ve **(d)**

9. (a) $\begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{4}{7} \end{bmatrix}$. **(b)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{7}{8} \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} \frac{4}{11} \\ \frac{4}{11} \\ \frac{3}{11} \end{bmatrix}$. **(d)** $\begin{bmatrix} \frac{1}{11} \\ \frac{4}{11} \\ \frac{6}{11} \end{bmatrix}$.

9. (a) **(b)** **(c)** **(d)**

11. (a) 0,69

(b) Nüfusun %20.7'si çiftçi olabilir

13. (a) % 35, %37,5

(b) %40

Kesim 8.2, sayfa 500

1. (a) 5, 1. **(b)** 2, 0.

(c) $\sqrt{5}, \sqrt{6}$. **(d)** $0, 0, 1, \sqrt{5}$.

3. $A = USV^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

5. (a) 10.8310, 0.8310.

(b) 18.9245, 3.8400, 0.3440.

(c) 25.4368, 1.7226, 0.

Kesim 8.3, Sayfa 514

1. **(a)** 3. **(b)** 3.

3. **(a)** 7. **(b)** 10. **(c)** 13.

5. **(a)** 5. **(b)** 7.

11. Örneklem ortalaması = 65 varyasyon = 58
Standart sapma ≈ 7.6158

13. Örneklem ortalaması $\approx \begin{bmatrix} 509.8 \\ 676.4 \end{bmatrix}$.
Kovaryans matrisi
$\approx \begin{bmatrix} 11{,}014.96 & 9{,}822.88 \\ 9{,}822.88 & 25{,}092.64 \end{bmatrix}$.

15. Birincil asli bileşen $\approx \begin{bmatrix} 951.0 \\ 1{,}345.5 \\ 1{,}716.3 \\ 826.7 \\ 746.9 \end{bmatrix}$.

Kesim 8.4, sayfa 524

1. **(a)** $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 e^{-3t} \\ b_2 e^{4t} \\ b_3 e^{2t} \end{bmatrix}$
$= b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-3t} + b_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{4t} + b_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}.$

(b) $\begin{bmatrix} 3e^{-3t} \\ 4e^{4t} \\ 5e^{2t} \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-3t} + 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{4t} + 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}.$

3. $\mathbf{x}(t) = b_1 \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} e^{4t} + b_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-5t} + b_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}.$

5. $\mathbf{x}(t) = b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{5t} + b_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{5t} + b_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-5t}.$

7. $\mathbf{x}(t) = b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-2t} + b_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t} + b_3 \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t}.$

9. $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 440 + 60e^{-5t} \\ 220 - 20e^{-5t} \end{bmatrix}.$

Kesim 8.5, Sayfa 534

1. Orijin kararlı bir dengedir. Faz portresi, orijine doğru yönelen tüm yörüngeleri gösterir.

3. Orijin kararlı bir dengedir. Faz portresi, orijindeki özvektöre teğet olarak sıralanan özvektörler üzerinde olmayan noktalardan geçen, orijine doğru yönelen tüm yörüngeleri gösterir.

5. Orijin bir semer noktasıdır. Faz portresi orijine doğru yönlenmiş bir özdeğer doğrultusunda olmayan fakat $\to \infty$ iken büyüyen yörüngeleri gösterir.

7. Orijin kararlı bir dengededir. Faz portresi orijine doğru yönelmiş tüm yörüngeleri gösterir.

9. Orijin anorjinal kararlı diye adlandırılır.

Kesim 8.6, sayfa 542

1. **(a)** $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$

(b) $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{7}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{7}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$

(c) $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$

3. **(a)** $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

(c) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$

5. $3x'^2 - 2y'^2.$

7. $y_1^2 - y_3^2.$

9. $-2y_1^2 + 5y_2^2 - 5y_3^2.$

11. $y'^2.$

13. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2.$

15. $y_1^2 - y_2^2.$

17. $y_1^2 - y_2^2$, rank =2, işaret (signature) = 0.

21. g_1, g_2, ve g_4

23. (a), (b) ve (c)

Kesim 8.7, Sayfa 551

1. Elips

3. Hiperbol

5. Kesişen iki doğru

7. Çember

9. Nokta

11. $\frac{x'^2}{2} + y'^2 = 1.$

13. Çember $\frac{x'^2}{5^2} + \frac{y'^2}{5^2} = 1.$

15. Paralel doğru çifti : $y' = 2$, $y' = -2$, $y'^2 = 4$.

17. (1, 3) noktası $x'^2 + y'^2 = 0$.

19. Muhtemel cevap: elips; $\frac{x'^2}{12} + \frac{y'^2}{4} = 1.$

21. Muhtemel cevap: paralel doğru çifti: $y' = \frac{2}{\sqrt{10}}$ ve $y' = -\frac{2}{\sqrt{10}}$.

23. Muhtemel cevap; kesişen iki doğru; $y' = 3x'$ ve $y' = -3x'$; $9x'^2 - y'^2 = 0$

25. Muhtemel cevap; parabol; $y''^2 = -4x''$

27. Muhtemel cevap; hiperbol, $\frac{x''^2}{4} - \frac{y''^2}{9} = 1.$

29. Muhtemel cevap; hiberbol; $\frac{x''^2}{\frac{9}{8}} - \frac{y''^2}{\frac{9}{8}} = 1.$

Kesim 8.8, sayfa 560

1. Tek kanatlı hiperboloid

3. Hiperbolik paraboloid

5. Parabolik silindir

7. Parabolik silindir

9. Elipsoid

11. Eliptik paraboloid

13. Hiperbolik

15. Elipsodi; $x'^2 + y'^2 + \frac{z'^2}{\frac{1}{3}} = 1.$

17. Hiperbolik paraboloid; $\frac{x''^2}{4} - \frac{y''^2}{4} = z''.$

19. Eliptik paraboloid; $\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{8} = 1.$

21. Tek kanatlı hiperboloid; $\frac{x''^2}{2} + \frac{y''^2}{4} - \frac{z''}{4} = 1.$

23. Parabolik silindir; $x''^2 = \frac{4}{\sqrt{2}} y''.$

25. İki kanatlı hiperboloid; $\frac{x''^2}{\frac{7}{4}} - \frac{y''^2}{\frac{7}{4}} - \frac{z''^2}{\frac{7}{4}} = 1.$

27. Koni $x''^2 + y''^2 - z''^2 = 0$

BÖLÜM 10

Temel Matris Özellikleri; Sayfa 598

ML.1. **(a)** Komutlar; **A(2,3), B(3,2), B(1,2).**

(b) Satır$_1$ **(A)** için, **A(1, :)** komutunu kullanınız.

Sütun$_3$ **(A)** için, **A(:, 3)** komutunu kullanınız.

Satır$_2$ **(B)** için **B(2, :)** komutunu kullanınız. (Burada colon "hepsi" anlamındadır.)

(c) *B* matrisini uzun formatı

Matris İşlemleri, Sayfa 598

ML. 1 **(a)** $\begin{bmatrix} 4.5000 & 2.2500 & 3.7500 \\ 1.5833 & 0.9167 & 1.5000 \\ 0.9667 & 0.5833 & 0.9500 \end{bmatrix}$.

(b) `??? hata kullanımı ==> * İç matris boyutları aynı olmalıdır.`

(c) $\begin{bmatrix} 5.0000 & 1.5000 \\ 1.5833 & 2.2500 \\ 2.4500 & 3.1667 \end{bmatrix}$

(d) `??? hata kullanımı ==> * İç matris boyutları aynı olmalıdır.`

(e) `??? hata kullanımı ==> * İç matris boyutları aynı olmalıdır.`

(f) `??? hata kullanımı ==> - İç matris boyutları aynı olmalıdır.`

(g) $\begin{bmatrix} 18.2500 & 7.4583 & 12.2833 \\ 7.4583 & 5.7361 & 8.9208 \\ 12.2833 & 8.9208 & 14.1303 \end{bmatrix}$.

ML.3 $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 7 \\ -1 & 4 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$.

ML.5 **(a)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2500 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Bir matrisin kuvvetleri Sayfa 599

ML. 1. **(a)** $k = 3$ **(b)** $k = 5$

ML. 3. **(a)** $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

ML. 5. Dizi aşağıdaki matrise yakınsar gibidir.

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & 0.7500 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

ML.7. **(a)** $A^T A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -3 & 9 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$,

$$AA^T = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

(b) $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$,

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c) $B + C = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$,

$B + C = 2A$.

Satır İşlemleri ve Eşelon Şekiller, Sayfa 600

ML.1. **(a)** $\begin{bmatrix} 1.0000 & 0.5000 & 0.5000 \\ -3.0000 & 1.0000 & 4.0000 \\ 1.0000 & 0 & 3.0000 \\ 5.0000 & -1.0000 & 5.0000 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 1.0000 & 0.5000 & 0.5000 \\ 0 & 2.5000 & 5.5000 \\ 1.0000 & 0 & 3.0000 \\ 5.0000 & -1.0000 & 5.0000 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 1.0000 & 0.5000 & 0.5000 \\ 0 & 2.5000 & 5.5000 \\ 0 & -0.5000 & 2.5000 \\ 5.0000 & -1.0000 & 5.0000 \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} 1.0000 & 0.5000 & 0.5000 \\ 0 & 2.5000 & 5.5000 \\ 0 & -0.5000 & 2.5000 \\ 0 & -3.5000 & 2.5000 \end{bmatrix}$.

(e) $\begin{bmatrix} 1.0000 & 0.5000 & 0.5000 \\ 0 & -3.5000 & 2.5000 \\ 0 & -0.5000 & 2.5000 \\ 0 & 2.5000 & 5.5000 \end{bmatrix}$.

ML.3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

ML. 5. r herhangi bir reel sayı olmak üzere,
$x = -2 + r, y = -1, z = 8 - 2r, w = r$

ML. 7. r herhangi bir reel sayı olmak üzere,
$x_1 = -r + 1, x_2 = r + 2, x_3 = r - 1, x_4 = r$

ML.9. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.5r \\ r \end{bmatrix}$.

ML. 11. **(a)** r herhangi bir reel sayı olmak üzere,
$x_1 = 1 - r, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = \mathrm{r}$
(b) r herhangi bir reel sayı olmak üzere,
$x_1 = 1 - r, x_2 = 2 + r, x_3 = -1 + r, x_4 = r$

ML. 13 \ komutu kararsız bir sistemi gösteren bir matris verir. **rref** komutu sonucun büyük yuvarlama hataları içerebileceğinin uyarısını gösteren bir komuttur.

LU–Ayrışımı, Sayfa 601

ML.1. $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.3333 & 1 \end{bmatrix}$,

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

ML.3 $L = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5000 & 1.0000 & 0 & 0 \\ -2.0000 & -2.0000 & 1.0000 & 0 \\ -1.0000 & 1.0000 & -2.0000 & 1.0000 \end{bmatrix}$,

$$U = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -4 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \\ -32 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4.5000 \\ 6.9000 \\ -1.2000 \\ -4.0000 \end{bmatrix}.$$

Matrisin Tersleri, Sayfa 601

ML.1. **(a)** ve **(c)**.

ML.3. **(a)** $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

ML. 5. **(a)** $t = 4$ **(b)** $t = 3$

Satır İndirgemeyle Determinantlar, sayfa 601

ML. 1 **(a)** −18 **(b)** 5

ML. 3. **(a)** 4 **(b)** 0

ML. 5. $t = 3, t = 4$

Kofaktör Açılımıyla Determinantlar, sayfa 602

ML. 1. $A_{11} = -11, A_{23} = -2, A_{31} = 2$

ML. 3. 0

ML.5. **(a)** $\frac{1}{28}\begin{bmatrix} 30 & 5 & -9 & -46 \\ 32 & -4 & -4 & -36 \\ 12 & 2 & 2 & -24 \\ -16 & 2 & 2 & 32 \end{bmatrix}$.

(b) $\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 \\ 2 & 10 & -8 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

(c) $\frac{1}{18}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$.

Altuzaylar, sayfa 603

ML.3. **(a)** Hayır **(b)** Evet

ML.5. **(a)** $0\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 = \mathbf{v}$.

(b) $p_1(t) + 2p_2(t) + 2p_3(t) = p(t)$.

ML. 7. **(a)** Evet **(b)** Evet **(c)** Evet

Lineer Bağımsızlık / Bağımlılık, sayfa 604

ML. 1. **(a)** Lineer bağımlı

(b) Lineer bağımsız

(c) Lineer bağımsız

Tabanlar (Bazlar) ve Boyut, sayfa 604

ML.1. Baz.

ML. 3. Baz

ML.5. Baz

ML.7. boy (sp S) = 3, sp $S \neq \mathrm{R}^4$

ML.9. boy (sp S) = 3, sp S = P_2

ML. 11. $\{t^3 - t + 1, t^3 + 2, t, 1\}$.

Koordinatlar ve Taban Değişimi, Sayfa 605

ML.1. **(a)** $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. **(b)** $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$. **(c)** $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

ML.3. **(a)** $\begin{bmatrix} 0.5000 \\ -0.5000 \\ 0 \\ -0.5000 \end{bmatrix}$. **(b)** $\begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0.5000 \\ 0.3333 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 0.5000 \\ 0.1667 \\ -0.3333 \\ -1.5000 \end{bmatrix}$.

ML. 5. $\begin{bmatrix} -0.5000 & -1.0000 & -0.5000 & 0 \\ -0.5000 & 0 & 1.5000 & 0 \\ 1.0000 & 0 & -1.0000 & 1.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \end{bmatrix}$.

ML.7. **(a)** $\begin{bmatrix} 1.0000 & -1.6667 & 2.3333 \\ 1.0000 & 0.6667 & -1.3333 \\ 0 & 1.3333 & -0.6667 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. **(d)** QP.

Homogen Lineer Sistemler, sayfa 606

ML.1. $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

ML.3. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

ML. 5. t sıfır olmayan herhangi bir reel sayı olmak üzere $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix}$.

Bir Matrisin Rankı, Sayfa 606.

ML. 3. **(a)** A'nın orijinal sütunları ve

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(b) A'nın ilk iki sütunu ve

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

ML. 5. **(a)** Tutarlı **(b)** Tutarsız **(c)** Tutarsız

Standart İç Çarpım, Sayfa 607

ML. 3. **(a)** 2.2361. **(b)** 5.4772. **(c)** 3.1623.

ML. 5. **(a)** 19. **(b)** –11. **(c)** –55.

ML. 9. **(a)** $\begin{bmatrix} 0.6667 \\ 0.6667 \\ -0.3333 \end{bmatrix}$ veya rasyonel şekilde $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0.8000 \\ -0.6000 \\ 0 \end{bmatrix}$ veya rasyonel şekilde $\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 0 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 0.3015 \\ 0 \\ 0.3015 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Vektörel Çarpım, sayfa 608

ML. 1. **(a)** $\begin{bmatrix} -11 & 2 & 5 \end{bmatrix}$. **(b)** $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. **(c)** $\begin{bmatrix} 1 & -8 & -5 \end{bmatrix}$.

ML. 5. 2.055 rad veya 117.7409°

Gram-Schmidt Yöntemi, sayfa 608

ML.1. $\left\{ \begin{bmatrix} 0.7071 \\ 0.7071 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.7071 \\ -0.7071 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.0000 \end{bmatrix} \right\}$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

ML.3. **(a)** $\begin{bmatrix} -1.4142 \\ 1.4142 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$. **(b)** $\begin{bmatrix} 0 \\ 1.4142 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 0.7071 \\ 0.7071 \\ -1.0000 \end{bmatrix}$.

ML.5. **(a)** $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

(b) $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

İzdüşümler, sayfa 609

ML.1. **(a)** $\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{5}{6} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{5}{6} \end{bmatrix}$. **(b)** $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$.

ML.3. **(a)** $\begin{bmatrix} 2.4286 \\ 3.9341 \\ 7.9011 \end{bmatrix}$.

(b) $\sqrt{(2.4286-2)^2 + (3.9341-4)^2 + (7.9011-8)^2} \approx 0.4448.$

ML.5. $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0.8571 \\ 0.5714 \\ 1.4286 \\ 0.8571 \\ 0.8571 \end{bmatrix}$.

En Küçük Kareler, sayfa 609.

ML. 1. y=1.87+1.345t.

Ml. 3. **(a)** $T = -8.278t + 188.1$, t = zaman

(b) $T(1) = 179.7778$ °F

$T(6) = 138.3889$ °F

$T(8) = 121.8333$ °F

(c) 3.3893 dakika

ML. 5. $y = 1.0204x^2 + 3.1228x + 1.0507$'dir.
$x = 7$ iken $y = 72.9169$ olur.

Lineer Dönüşümlerin Değer Bölgesi ve Çekirdeği, sayfa 611

ML.1. çek L için taban L: $\left\{\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-3\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$.

L'nin değer bölgesi için taban
L: $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$.

ML.3. çek L için taban L: $\left\{\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\-2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$.

L'nin değer bölgesi için taban
L: $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$.

Bir Lineer Dönüşümün Matrisi, sayfa 611

ML.1. $A = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 3\\ 1 & 0 & -2\end{bmatrix}$.

ML.3. **(a)** $A = \begin{bmatrix}1.3333 & -0.3333\\ -1.6667 & -3.3333\end{bmatrix}$.

(b) $B = \begin{bmatrix}-3.6667 & 0.3333\\ -3.3333 & 1.6667\end{bmatrix}$.

(c) $P = \begin{bmatrix}-0.3333 & 0.6667\\ 1.6667 & -0.3333\end{bmatrix}$.

Özdeğerler ve Özvektörler Sayfa 612

ML.1. **(a)** $\lambda^2 - 5$. **(b)** $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 4\lambda + 8$.
(c) $\lambda^4 - 3\lambda^3 - 3\lambda^2 + 11\lambda - 6$.

ML.3. **(a)** $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$. **(b)** $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$. **(c)** $\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$.

ML.5. $\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

ML.7. $A, A^3, A^5, \ldots$ dizisi $\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ -2 & 2 & -1\\ -2 & 2 & -1\end{bmatrix}$
matrisine yakınsar

$A^2, A^4, A^6, \ldots$ dizisi $\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$
matrisine yakınsar

Köşegenleştirme, sayfa 613

ML. 1. **(a)** $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 12$; $P = \begin{bmatrix}0.7071 & 0.7071\\ -0.7071 & 0.7071\end{bmatrix}$.

(b) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 5$;
$P = \begin{bmatrix}0.7743 & -0.2590 & 0.5774\\ -0.6115 & -0.5411 & 0.5774\\ -0.1629 & 0.8001 & 0.5774\end{bmatrix}$.

(c) $\lambda_1 = 5.4142, \lambda_2 = 4.0000, \lambda_3 = 2.5858$.
$P = \begin{bmatrix}0.5000 & -0.7071 & -0.5000\\ 0.7071 & -0.0000 & 0.7071\\ 0.5000 & 0.7071 & -0.5000\end{bmatrix}$.

Baskın (dominant) Özdeğerler, sayfa 614

ML.1. **(a)** $\lambda_1 \approx 7.6904, \mathbf{x}_1 \approx \begin{bmatrix}-0.7760\\-0.6308\end{bmatrix}$
$\lambda_2 \approx -1.6904, \mathbf{x}_2 \approx \begin{bmatrix}-0.8846\\0.4664\end{bmatrix}$.
λ_1 baskındır.

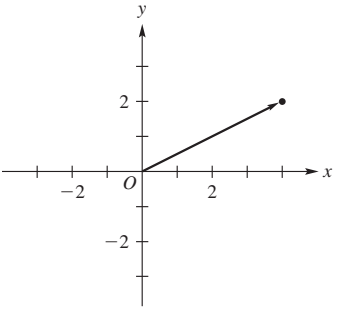
(b) $\lambda_1 \approx 8.8655, \mathbf{x}_1 \approx \begin{bmatrix}-0.6065\\-0.7951\end{bmatrix}$
$\lambda_2 \approx -5.8655, \mathbf{x}_2 \approx \begin{bmatrix}-0.6581\\0.7530\end{bmatrix}$.
λ_1 baskındır.

EK B

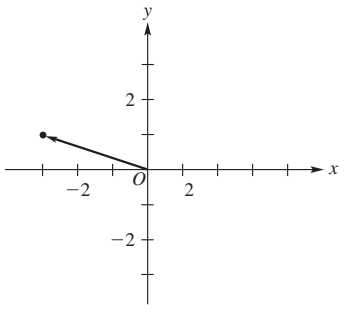
Kesim B.1, Sayfa A-11

1. **(a)** $4 + 2i$. **(b)** $-4 - 3i$. **(c)** $11 - 2i$.
(d) $-3 + i$. **(e)** $-3 + 6i$. **(f)** $-2 - i$.
(g) $7 - 11i$. **(h)** $-9 + 13i$.

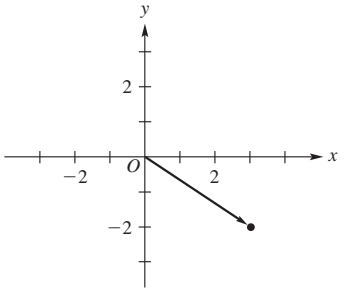
3. **(a)**



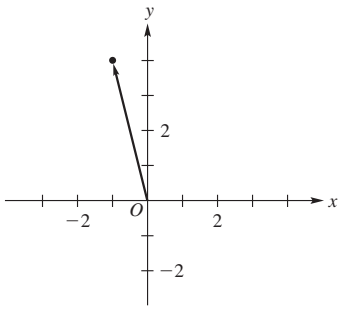
(b)



(c)



(d)



7. **(a)** $\begin{bmatrix} 2+4i & 5i \\ -2 & 4-2i \end{bmatrix}$. **(b)** $\begin{bmatrix} 4-3i \\ -2-i \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} -4+4i & -2+16i \\ -4i & -8i \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} 3i \\ -1-3i \end{bmatrix}$. **(e)** $\begin{bmatrix} 2i & -1+3i \\ -2 & -1-i \end{bmatrix}$.

(f) $\begin{bmatrix} -2i & 1-2i \\ 0 & 3+i \end{bmatrix}$. **(g)** $\begin{bmatrix} 3+i \\ -3+3i \end{bmatrix}$.

(h) $\begin{bmatrix} 3-6i \\ -2-6i \end{bmatrix}$.

9. $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$,
$A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^{4n} = I_2$, $A^{4n+1} = A$,
$A^{4n+2} = A^2 = -I_2$, $A^{4n+3} = A^3 = -A$.

17. **(a)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. **(b)** $\begin{bmatrix} 4 & 18 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} -5 & 5i \\ 5i & -5 \end{bmatrix}$. **(d)** $\begin{bmatrix} 4 & 7i \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$.

19. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Kesim B.2, Sayfa A-20

1. **(a)** Çözüm yok. **(b)** Çözüm yok.

(c) $x_1 = \frac{3}{4} + \frac{5}{4}i$, $x_2 = \frac{3}{2} + i$.

3. **(a)** $x_1 = i$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1 - i$.

(b) $x_1 = 0$, $x_2 = -i$, $x_3 = i$.

5. **(a)** $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2+i & 2-4i \\ 3-i & -2-i \end{bmatrix}$.

(b) $\frac{1}{6}\begin{bmatrix} i & 1-3i & 1 \\ -2-3i & 2i & 3+2i \\ 1 & 2i & -i \end{bmatrix}$.

9. **(a)** Evet **(b)** Lineer bağımsız

11. **(a)** Özdeğerler $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$'dir. Bunlara karşılık gelen özvektörler:

$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$'dir.

(b) Özdeğerler $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$'dir. Bunlara karşılık gelen özvektörler:

$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$'dir.

(c) Özdeğerler $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Bunlara karşılık gelen özvektörler:

$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}$

DİZİN

A

Açıyı koruyan lineer dönüşüm, 432
Adjoint, 166
Afin dönüşüm, 434
Alışılmış vektör, 437
Alt cümle, E-1, 197
Alt matris, 43
Alt uzayların direkt toplamı, 287, 334, 336
Alt üçgen matrisi, 43
Altuzay(lar), 193
Ana sistem, 526
Asli (ana) eksenler teoremi, 538
Atraktor (çekici), 528
Ayrık lineer sistem, 437
Ayrışımı, E-23

B

Bağdaşabilir lineer sistem, 108
Bağdaşabilir olmayan lineer sistem, 82
Başlangıç (orijin), 177, 182
Başlangıç değer problemi, 516
Başlangıç durum vektörü için Markov metodu, 484
Başlangıç durum vektörü, 484
Başlangıç şartı, 521
Baz değişim matrisi, 261
Baz vektör(ler), 229
Bazın değişimi, 261
Benzer matrisler, 410
Bileşke fonksiyon, E-3
Bileşke kuvvet, 296, 298
Bileşke lineer dönüşüm, 404
Bilgisayar grafikleri, 63
Bilinmeyenler, 1
Bir fonksiyon altında görüntü, E-1
Bire bir lineer dönüşüm, 375
Bire-bir fonksiyon, E-2, 258
Bire-bir lineer dönüşüm, 375
Birim çember, 69, 472, 493
Birim dik taban, 320
Birim dik vektör, 315
Birim fonksiyon, E-3
Birim lineer dönüşüm, 374
Birim matris, 42
Birim vektör, 295, 315
Birinci mertebeden lineer diferensiyel denklemlerin homogen sistemi, 515
Blok köşegen matris, 81
Boş cümle, E-1
Bölünmüş matrisler, 43
Bölünmüş matrislerin çarpımı, 43
Bunyakovsky, Viktor Yakovlevich, 313

C

Cauchy-Augustin-Louis, 312
Cauchy-Schwarz eşitsizliği, 312
Cayley, Arthur, 452
Cayley-Hamilton teoremi, 452
CBS eşitsizliği, 313
Cisim, 189
C^n üzerinde standart iç çarpım, E-19
C^n'de standart iç çarpım, 529
Cramer Kuralı, 170
Cramer, Gabriel, 170
Cümle(lerin) eşitliği, E-1
Cümleler, E-1
Cümlenin elemanı, E-1

Ç

Çapraz çarpım terimi, 546
Çapraz çarpımın özellikleri, 300
Çarpanların depolanması, 135
Çarpım matrisi, 22
Çarpım, LU, 132
Çarpımların depolandığı matris, 135
Çekirdek, 376
Çember, 104
Çembersel, 83
Çift kanatlı hiperboloid, 556
Çift permütasyon, 142
Çözüm uzayı, 203
1-Uzayı, 183
2-Uzayı, 178
3-Uzayı, 183

D

Daire, 104
Dairesel matris, 456
Daralma, 453
Değer cümlesi, E-1
Denge eyer noktası, 529
Denge kararlı nokta, 519
Denge kararsız nokta, 529
Denge noktası, 528
Denk matrisler, 89
Descarters, Rene, 177
Determinant, 142
Determinantların özellikleri, 146
Dış çarpım, 491
Diferensiyel denklem için özel çözüm, 516
Diferensiyel denklem sisteminin genel çözümü, 516
Diferensiyel denklem, 515
Diferensiyel denklemlerin başlangıç şartları, 516
Diferensiyel denklemlerin homogen lineer sistemi, 515
Diferensiyel denklemlerin kalitatif teorisi, 526
Diferensiyel denklemlerin lineer homogen sisteminin genel çözümü, 516
Dik taban, 322
Dik izdüşüm, 341
Dik koordinat sistemi, 177
Dik lineer dönüşüm, 476
Dik matris, 466
Dik tümleyen, 332
Dik vektör, 76, 294
Dik vektörlerin cümlesi, 315
Dinamik sistem, 526
Doğal taban, 229
Doğruların parametrik denklemleri, 204
Doğrunun parametrik denklemi, 204
Dönme, 61, 66, 364

Dönmenin lineer dönüşümü, 61, 66, 364
Dönüşüm, 57
Dragon eğrisi, 434
Dual uzay, 432
Düzlem denklemi, 303
Düzlemde vektör, 178
Düzlemin normali, 303
Düzlemler, 303

E

Elementer matrisler, 117
Elementer satır işlemleri, 87
Elementer sütun işlemleri, 87
Elips, 69, 473, 493, 551
Elipsoid, 554
Eliptik paraboloid, 554
Eliptik silindir, 555
Eş güçlü (idempotent) matris, 81
Eşdeğer kuadratik şekilleri, 536
Eşdeğer lineer sistemler, 2
Eşelon şekilde sütunca indirgeme, 86
Eşelon şeklinde satırca indirgeme, 86
Eşgüçlü matris, 81
Eşit cümleler, E-1
Eşit matrisler, 14
Eşit vektörler, 179, 183, 184
Euclid uzayı, 312

F

Faz düzlemi, 527
Faz portresi, 528
Fibonacci dizisi, 51, 480
Fonksiyon altında görüntü, E-1
Fonksiyon, E-1
Fonksiyonun bileşkesi, E-3
Fonksiyonun değer cümlesi, E-1
Fonksiyonun tanım cümlesi, E-1
Fonksiyonun tersi, E-3
Fourier polinomu, 345
Fourier serisi, 343
Fourier, Jean Baptiste Joseph, 317, 344
Fraktallar, 434

G

Gauss Jordan indirgeme, 97,
Gauss yok etme metodu, 97
Gauss, C.F., 97
Geçiş ihtimali, 256
Genel çözüm, 516
Genişleme, 60, 70, 255, 311, 364
Geren vektörler cümlesi, 211
Geriye yerine koyma, 97, 131
Germe, 209
Google, 14, 512
Gram, Jorgen Pederson, 320
Gramer kuralı, 344
Gramer, Gabriel, 344
Gram—Schmidt metodu, 321

H

Hamiltan William Rowen, 452
Has (öz) değer, 438
Has (öz) vektör, 437
Hausholder matris, 82
Hermityen matris, E-10
Hız vektörü, 296
Hiperbol, 551
Hiperbolik paraboloid, 556
Hiperbolik silindir, 556
Hipotez, E-24
Homogen koordinatlar, 420
Homogen lineer sistem, 2, 28, 108, 244
Homogen lineer sistemin çözüm uzayı, 203
Homogen olmayan lineer sistem, 111, 280
House holder, Alston, 82

İ

I., II. veya III. tip elementer matris, 117
İç çarpım uzayı için taban, 312
İç çarpım uzayı, 312
İç çarpım uzayında uzunluk, 312
İç çarpım uzayının boyutu, 312
İç çarpım, 21, 307
İç çarpımı koruyan lineer dönüşümler, 432
İdempotent (eş güçlü) matris, 81
İki matrisin farkı, 16
İkinci dereceden denklem, 544
İkinci dereceden şeklin kanonik şekli, 541
İkinci dereceden polinom denklemi, 552
İkinci dereceden şekiller, 541
İkinci dereceden şekillerin eşitliği, 541
İkinci dereceden şeklin işareti, 541
İkinci dereceden şeklin kanonik şekli, 541
İkinci dereceden şeklin matrisi, 535
İkinci dereceden şeklin rankı, 541
İkinci dereceden yüzey, 535, 552
İlaveli matris, 28
İleri yerine koyma, 131, 97
İnterpolasyon polinom, 104
İnvaryant alt uzay, 398
i-yinci satır, 11
İz, 33, 480
İzdüşüm fonksiyonu, 480
İzometri, 467
İzomorfik vektör uzayları, 258
İzomorfizm, 258

J

j.inci sütun, 11
Jacobi özdeşliği, 306
Jordan Kanonik şekli, 475
Jordan, W., 97

K

Kapalı, 189
Kapalılık özelliği, 189, 198
Karakteristik değer, 437
Karakteristik denklem, 444
Karakteristik polinom, 444
Karakteristik polinomun kökleri, 445
Karakteristik vektör(ler), 437
Kararlı nokta, 528
Kararlı yaş dağılımı, 482
Kararsız nokta, 529
Kare matris, 11
Kare matrisin mertebesi, 11
Kartezyen koordinat sistemi, 177
Katsayılar matrisi, 28
Kavşak analizi, 140
Kenarlar, 13
Kısmi toplamlar, 494

Kimyasal denge denklemleri, 109
Kofaktör, 157
Kompleks alt vektör uzayı, 189, E-16
Kompleks düzlem, E-7
Kompleks iç çarpım uzayı, E-20
Kompleks iç çarpım, E-19
Kompleks matrislerin determinantı, E-15
Kompleks matrislerin özdeğerleri, E-20
Kompleks sayı(lar)nın sanal kısmı, E-5
Kompleks sayılar, E-5
Kompleks sayıların bölümü, E-7
Kompleks sayıların çarpımı, E-6
Kompleks sayıların eşitliği, E-6
Kompleks sayıların eşleniği, E-6
Kompleks sayıların farkı, E-6
Kompleks sayıların modülü, E-8
Kompleks sayıların mutlak değeri, E-8
Kompleks sayıların reel kısmı, E-5
Kompleks sayıların toplamı, E-6
Kompleks uzayda iç çarpım, E-19
Kompleks vektör uzay(lar)ı, E-15
Kompleks vektör uzayı, E-15
Kongruent matrisler, 536
Koni, 555
Konik kesitleri, 535, 544
Konum vektörü için Markov metodu, 484
Konum vektörü, 484
Koordinat eksenleri, 177, 182
Koordinat sistemi, 177
Koordinat(lar), 178, 253
Koordinatların değişimi, 262
Korelasyon katsayısı, 77
Kosinüs kuralı, 203
Köşegen matris, 42
Köşegen sistem, 526
Köşegenleşirilebilir lineer dönüşüm, 454
Köşegenleştirilebilir matrisler, 456
Kuvvet metodu, 506
Küre, 554

L

Legendre polinomları, 359
Legendre polinomu, 359
Legendre-Adrian-Morie, 359
Lineer bağımlılık, 218
Lineer bağımsızlık, 218, E-17
Lineer birleşim, 301
Lineer denklem sistemi, 1, 2; *Lineer sisteme* de bakınız.
Lineer denklemler için çözüm, 1
Lineer denklemler, 1
Lineer denklemlerin tutarlılığı (bağdaşabilirliği), 2
Lineer diferensiyel denklem sisteminin çözüm uzayı, 516
Lineer diferensiyel denklem sisteminin genel çözümü, 516
Lineer dönüşüm, 255
Lineer dönüşüm altında görüntü, 378
Lineer dönüşüm, 363
Lineer dönüşümde yansıma, 364
Lineer dönüşümlerin matrisi, 389
Lineer dönüşümlerin toplamı, 339
Lineer dönüşümün bileşkesi, 404
Lineer dönüşümün çekirdeği, 376
Lineer dönüşümün değer cümlesi, 378
Lineer dönüşümün görüntüsü, 378
Lineer dönüşümün gösterim (temsili) matrisi, 389
Lineer dönüşümün karakteristik değeri, 437
Lineer dönüşümün karakteristik polinomu, 444, 460
Lineer dönüşümün köşegenleştirilmesi, 454
Lineer dönüşümün matris gösterimi, 389
Lineer dönüşümün özdeğeri, 437
Lineer dönüşümün özvektörü, 437
Lineer dönüşümün rankı, 409
Lineer dönüşümün sıfırlığı, 382
Lineer dönüşümün skalarla çarpımı, 399
Lineer dönüşümün standart matris gösterimi, 389
Lineer dönüşümün tersi, 384
Lineer dönüşümün uzunluğu koruması, 467
Lineer homogen diferensiyel denklem sistemi, 516
Lineer sistem çözümünde Gauss—Jordan metodu, 97
Lineer sistem için Cramer kuralı, 170
Lineer sistem için yoketme metodu, 2
Lineer sistem, 1, 27
Lineer sistemin aşikar çözümü, 2
Lineer sistemin aşikar olmayan çözümü, 2
Lineer sistemin çözümü, 2
Lineer sistemin en küçük karelerle çözümü, 350
Lineer sistemin ilaveli matrisi, 28
Lineer sistemin katsayı matrisi, 28
Lineer sistemin sıfır uzayı, 203
Lineer sistemlerin tutarsızlığı (bağdaşabilir olmaması), 2
LU-ayrışımı, 132

M

$m \times n$ tipinde bir matris, 11
Maclaurin serileri, 343
Maksimal bağımsız alt cümle, 238
Marjinal denge noktası, 529
Marjinal kararlı, 529
Markov matrisi, 483
Markov metodu, 483
Markov metodunda başlangıç durum vektörü, 484
Markov metodunda denge, 484

Markov metodunun regülerliği, 485
Markov, Andrei Andreyevich, 483
MATLAB komutları, 592
Matris ayrışımı, 462
Matris çarpımı, 22
Matris çarpımının özellikleri, 35
Matris dönüşümü, 57
Matris fonksiyonu, 43
Matris gösterimi, 43
Matris polinomu, E-11
Matris toplamı, 15
Matris toplamının özellikleri, 34
Matris, 15
Matrise karşılık gelen ana vektör uzayları, 230
Matrise uygulanan tip I, tip II, tip III işlemi, 117
Matrisi sağdan çarpma, 22
Matrisi soldan çarpma, 23
Matrisin (i, j)-inci elemanı, 11
Matrisin (i, j)-inci girdisi, 11
Matrisin blok çarpımı, 45
Matrisin determinantı, 142
Matrisin elemanı, 11
Matrisin elementer satır işlemleri, 87
Matrisin elementer sütun işlemi, 87
Matrisin esas köşegeni, 11
Matrisin eşleniği, E-9
Matrisin herhangi bir satırının ilk elemanı, 41
Matrisin izi, 33
Matrisin karakteristik denklemi, 444
Matrisin karakteristik polinomu, 444
Matrisin karekökü, 80
Matrisin mertebesi, 11
Matrisin negatifi, 34
Matrisin özdeğeri, 442
Matrisin özvektörü, 442
Matrisin *QR*-ayrışımı, 326
Matrisin rankı, 272
Matrisin satır rankı, 272
Matrisin satır uzayı, 270
Matrisin satırca eşelon şekle indirgemesi, 86
Matrisin satırları, 11
Matrisin sıfırlığı, 247
Matrisin skalar çarpımı, 16
Matrisin skalar katı, 28
Matrisin spektral ayrışımı, 488
Matrisin standart gösterimi, 369
Matrisin sütun rankı, 272
Matrisin sütun uzayı, 270
Matrisin sütunca eşelon biçimi, 86
Matrisin sütunu, 11
Matrisin tersi, 48
Matrisin transpozu, 18
Matrisin transpozunun özellikleri, 38
2×2 matrisinin determinantı, 143
3×3 matrisinin determinantı, 143
Matrislerin çarpımı, 22
Matrislerin eşitliği, 14
Matrislerin farkı, 16
Matrislerin girdisi, 11
Matrislerin satır eşitliği, 89
Matrislerin skalar çarpımının özellikleri, 37
Matrislerin skalar çarpımlarının özellikleri, 16
Matrislerin sütun eşitliği, 84
Matrislerin toplamı, 15
Minimal geren cümlenin matrisi, 239
Minimal germe cümlesi, 239
Minör, 157

N

Nilpotent matris, 81
Nokta çarpımı, 21
Nokta çarpımının özellikleri, 295
Nokta, 178
Norm, 360
1-Normu, 360, 563
2-Normu, 360
∞ Norm, 360
Normal taban, 229
Normal matris, E-11
Normal sistem, 350
n-Uzayı, 190
n-vektör

O

Olasılık matrisi, 483
Olasılık vektörü, 484
Orbit, 527
Orijin 117, 182
Otonom sistem, 526

Ö

Öklit uzayı, 312
Ön (soldan) çarpım, 299
Ön çarpma, 299
Ön görüntü, E-11
Örten fonksiyon, E-2, 258
Örten lineer dönüşüm, 378
Özdeğer, E-20
Özdeğerin katlılığı, 459
Özel çözüm, 516
Özuzay, 451
Özvektör, 437

P

Parabol, 551
Parabolik silindir, 557
Paralel yüzün hacmı, 302
Paralelkenar kuralı, 318
Paralelkenarın alanı, 162, 302
Parametrik denklem(ler), 204
Permütasyon, 141
Permütasyonun işareti, 142
Pisagor teoremi, 318
Pivot sütunu, 90
Pivot, 90
Poincare, Jules Henri, 526
Polinom, 444
Polinomun derecesi, 192
Polinomun ikinci dereceden şekli, 542
Polinomun kökleri, E-11
Pozitif tanımlı ikinci dereceden şekil(ler), 542
Pozitif tanımlı matris, 311
Pozitif yarıtanımlı matris, 359
QR-ayrışımı, 326, 352

R

R^2 üzerinde nokta çarpımı, 294
R^2 üzerinde standart iç çarpım, 294
R^3'te doğrular, 203
R^3 üzerinde nokta çarpım, 294
R^3 üzerinde standart iç çarpım, 294
Reel eksen, E-7
Reel iç çarpım uzayı, 312
Reel ikinci dereceden şekil, 535
Reel vektör uzayı, 189

Regüler Markov metodu, 483
R^n üzerinde nokta çarpımı, 21
R^n üzerinde standart iç çarpım, 21

S
Sabit konum vektörü için Markov metodu, 484
Sabit konum vektörü, 484
Sabit nokta, 528
Sabit olmayan nokta, 528
Sağ el koordinat sistemi, 183
Sağ singüler vektör, 495
Sanal eksen, E-7
Sapma(lar) (shear), 68, 70
Satır uzayı, 270
Satırca eş değer matris, 89
Satırca eşelon şekil, 86
Satırın ilk elemanı, 86
Schmidt, Erhard, 320
Schwarz, Hermann Amandus, 312
Sıfır alt uzayı, 198
Sıfır lineer dönüşümü, 374
Sıfır matrisi, 34
Sıfır polinomu, 192
Sıfır uzayı, 203
Sıfır vektör uzayı, 198
Sıfır vektörü, 15, 182, 185, 189
Sıralı taban, 253
Sıralı tabanlara göre iç çarpım matrisi, 311
Simetrik matris, 43
Simetrik matris, 43
Simetrik matrisin eylemsizliği (inertia), 553
Singüler değer, 495
Singüler matris, 410
Singüler olmayan matris, 46
Singüler vektörler, 495
Sistem, 526
Skalar çarpım, 16
Skalar katsayı, 16
Skalar matris, 42
Skalarlar, 177
Sol el koordinat sistemi, 183
Sol singüler vektör, 495
Sonlu boyut, 312
Sonlu boyutlu vektör uzayı, 232
Sonsuz boyutlu vektör uzayı, 232
Sonuç, E-24
Spektral ayrışım, 488
Standart taban, 229
Standart durum denklemi, 544
Standart durum, 544
Standart iç çarpım, 294, E-19
Stokastik matris, 483
Strong, Gilbert, 337
Sütun işlemleri, 87
Sütun uzayı, 270
Sütunca (satırca) eşelon şekle indirgeme, 86
Sütunca denk matris, 43
Şart, E-24

T
Tanım cümlesi, E-1
Tek kanatlı hiperboloid, 552
Tek permütasyon, 142
Temel sistem, 350
Ters dönüşüm, 384
Ters Hermityen matris, E-10
Ters lineer dönüşüm, 384
Ters matris, 46; *Singüler olmayan matrise* de bakınız.
Ters permütasyon, 142
Ters simetrik matris, 43
Tersi alınabilir fonksiyon, E-3
Tersi alınabilir lineer dönüşüm, 384
Tersi alınabilir matris, 46
Tersi alınamaz matris, 46; *Singüler matrise* de bakınız.
Tip I işlemi, 117
Tip I, II veya III elementer işlem, 117
Tip I, II veya III elementer matris, 117
Tip I, II veya III matrisleri, 117
Tip II işlemi, 117
Tip III işlemi, 117
Toplam gösterimi, 17
Toplam indisi, 17
Transpozun özellikleri, 38
Trigonometrik polinom, 344
Trigonometrik polinomun derecesi, 344

U
Uzaklaştırıcı nokta, 178
Uzayda vektör(ler), 183
Uzayın normali, 303

Ü
Üç değişkenli ikinci dereceden şekil(ler), 552
Üçgen eşitsizliği, 214
Üçgen matris, 43, 131
Üçgen şekle indirgeme ile determinant hesabı, 151
Üçgen şekle indirgeme, 151
Üçgenin alanı, 160, 30
Üniter matris, E-10
Üst üçgen matris, 43, 130
Üstel fonksiyon, E-1

V
Vandermanda, Alexandre-Theopule, 156
Vandermonde determinantı, 156
Vektör cümlelerinin lineer bağımlılığı, 218
Vektör cümlelerinin lineer bağımsızlığı, 218
Vektör uzay(lar)ı, 183
Vektör uzay(lar)ında iç çarpım, 312
Vektör uzay(lar)ının altuzayı, 197, E-16
Vektör uzay(lar)ının tabanı, 209
Vektör uzayı, 189, E-15
Vektör uzayının boyutu, 238
Vektör(ler) ve yönlü doğru parçası, 178
Vektör(ler), 12, 177
Vektör(ler)ün bileşenleri, 178, 179, 183
Vektör(ler)ün bitimi, 178
Vektör(ler)ün dik tümleyeni, 332
Vektör(ler)ün koordinatları, 178
Vektör(ler)ün negatifi, 182, 185, 189
Vektör(ler)ün normu, 360
Vektör(ler)ün yön kosinüsleri, 292
Vektörler arasındaki açı, 73, 293, 313
Vektörler arasındaki fark, 182
Vektörler arasındaki uzaklık, 291, 315
Vektörler cümlesinin lineer bağımsızlığı, 218
Vektörleri geren cümlesi, 211

Vektörlerin birim dik cümlesi, 315
Vektörlerin büyüklüğü, 178, 290
Vektörlerin çapraz çarpımı, 299
Vektörlerin çapraz çarpımının özellikleri, 300
Vektörlerin eşitliği, 179
Vektörlerin geren cümlesi, 211
Vektörlerin iç çarpım uzayı, 312
Vektörlerin lineer birleşimi, 201
Vektörlerin nokta çarpımı, 21
Vektörlerin skalar çarpımı, 181, 184, 186, 189
Vektörlerin toplamı, 183, 186, 189
Vektörlerin uzunluğu, 73, 290, 292
Vektörün başlangıcı, 178
Vektörün bitimi, 179
Vektörün negatifi, 182, 184, 189
Vektörün skalar katı, 181, 184, 186

X

x ekseni, 177
$x_1 - x_2$ eksenleri, 256

Y

y ekseni, 177
Yansıma, 58, 62, 364
Yayılma süreci, 522
Yok etme metodu, 2, 14
Yön kosinüsleri, 292
Yönlü doğru parçası ve vektörler, 178
Yönlü doğru parçası, 178
Yönlü doğru parçasının başlangıcı, 178
Yönlü doğru parçasının bitimi, 178
Yönlü doğru parçasının büyüklüğü, 178
Yönlü doğru parçasının yönü, 178
Yörünge, 554

Z

z ekseni, 183
Zaman, 526
∞-normu, 360

Lemmaların, Teoremlerin ve Sonuçların Sayfa İndeksi

		Sayfa
Lemma	2.1	119
	3.1	151
Teorem	1.1	34
	1.2	35
	1.3	37
	1.4	38
	1.5	46
	1.6	48
	1.7	48
	1.8	48
Teorem	2.1	89
	2.2	92
	2.3	96
	2.4	108
	2.5	117
	2.6	118
	2.7	118
	2.8	119
	2.9	120
	2.10	122
	2.11	124
	2.12	126
	2.13	128
	2.14	129
Teorem	3.1	146
	3.2	147
	3.3	147
	3.4	147
	3.5	148
	3.6	148
	3.7	149
	3.8	152
	3.9	153
	3.10	158
	3.11	165
	3.12	167
	3.13	170
Teorem	4.1	186
	4.2	195
	4.3	198
	4.4	210
	4.5	222
	4.6	223
	4.7	225
	4.8	232
	4.9	233
	4.10	236
	4.11	240
	4.12	241
	4.13	241
	4.14	259
	4.15	260
	4.16	261
	4.17	270
	4.18	275
	4.19	276
	4.20	278
	4.21	280
Teorem	5.1	295
	5.2	309
	5.3	312
	5.4	316

		Sayfa
Teorem	5.6	321
	5.7	325
	5.8	326
	5.9	332
	5.10	334
	5.11	334
	5.12	335
	5.13	343
	5.14	351
Teorem	6.1	367
	6.2	368
	6.3	369
	6.4	376
	6.5	378
	6.6	381
	6.7	384
	6.8	386
	6.9	389
	6.10	401
	6.11	404
	6.12	407
	6.13	409
	6.14	411
	6.15	412
Teorem	7.1	445
	7.2	454
	7.3	456
	7.4	456
	7.5	458
	7.6	463
	7.7	464
	7.8	467
	7.9	467

		Sayfa
Teorem	8.1	498
	8.2	499
	8.3	503
	8.4	504
	8.5	504
	8.6	510
	8.7	510
	8.8	520
	8.9	538
	8.10	541
Sonuç	1.1	48
Sonuç	2.1	96
	2.2	119
	3.1	152
	3.2	154
	3.3	154
	3.4	168
Sonuç	4.1	237
	4.2	238
	4.3	239
	4.4	239
	4.5	239
	4.6	261
	4.7	279
	4.8	279
	4.9	279
	4.10	279
Sonuç	5.1	314
Sonuç	6.1	377
	6.2	384
	6.3	409
Sonuç	8.1	499

FOTOĞRAFLAR

Bölüm 1
Sayfa 82
Alston Houselolder: Oak Ridge Ulusal Laboratuvarı

Bölüm 2
Sayfa 97
Carl Friedrich Gauss: Corbis
Wilhelm Jordan:Bavarian Devlet Kütüphanesi, Münih

Bölüm 3
Sayfa 170
Gabriel Cramer: Bibliothèque publique et universitaire, Genè ve, Collections iconographiques

Bölüm 4
Sayfa 178
René Descartes: Bilimler Akademisi

Bölüm 5
Sayfa 312
Augustin-Lous Cauchy: Bilimler Akademisi
Karl Hermann Amandus Schwarz: Humboldt Üniversitesi Berlin
Sayfa 313
Viktor Yakovlevich Bunyakovsky: Bilimsel Resimler
Sayfa 320
Jörgen Pedersen Gram: Institut Mittag-Leffler, Royal İsveç Bilimler Akademisi
Erhard Schmidt: Humboldt Üniversitesi Berlin
Sayfa 337
Gilbert Strang: Gilbert Strang
Sayfa 344
Jean Baptiste Joseph Fourier: Bilimler Akademisi
Sayfa 359
Adrien-Marie Legendre: Bavarian Devlet Kütüphanesi, Münih

Bölüm 7
Sayfa 452
Arthur Cayley: Corbis
William Rowan Hamilton: Corbis
Sayfa 483
Andrei Andreyevich Markov: Margarita Ivanovna Markova (Andrey I. Bovykin den yardımla)

Bölüm 8
Sayfa 526
Henri Ponicaré: Corbis

Ek B
Sayfa 624
Charles Hermite: Bilimler Akademisi