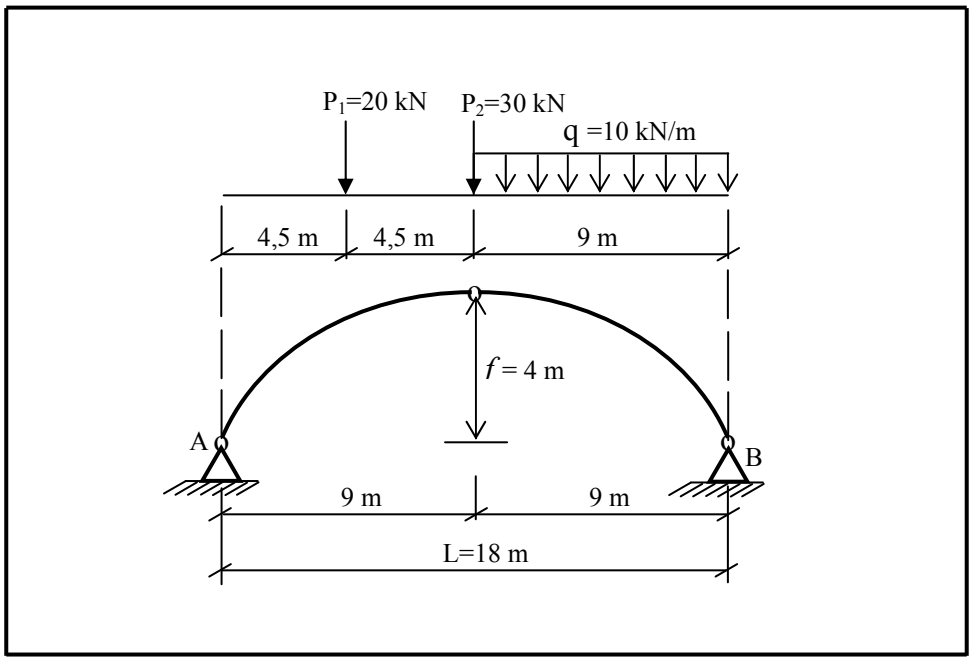
YAPI STATİĞİ I

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER



ZİREDDİN MEMMEDOV **M. ARİF GÜREL**

Harran Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümü

YAPI STATİĞİ I

ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER

ZİREDDİN MEMMEDOV **M. ARİF GÜREL**

Harran Üniversitesi Mühendislik Fakültesi
İnşaat Mühendisliği Bölümü

Şanlıurfa 2007

ÖNSÖZ

Yapı Mühendisliğinin başlıca amacının; yapı elemanlarının ve sistemlerinin yeterli bir güvenlik ve rijitlikle, ekonomik ve kullanım amacına uygun şekilde boyutlandırılması olduğunun, İnşaat mühendisleri ve bu dalda eğitim alan genç mühendis adayları tarafından iyi bilindiği kanaatindeyiz. Yapıların belirtilen koşullara uygun olarak boyutlandırılabilmesi için ilk yapılması gereken, dış etkilerden dolayı yapıda oluşan kesit tesirlerinin belirlenmesidir, ki bu, Yapı Statiği dersinin kapsamına girer.

Hazırlanmış olan Yapı Statiği I – Çözümlü Örnekler adlı bu kitapta İzostatik (statikçe belirli) sistemlerin dış yüklere göre hesabı ele alınmıştır. Bu amaçla, önce her bölümün başında gerekli bilgiler öz olarak verilmiş, ardından yeterli sayıda örnek açıklamalı olarak çözülmüştür. Örneklerin seçiminde farklı sistem ve yükleme durumları olmasına özen gösterilmiştir.

İnşaat Mühendisliği yapılarının önemli bir bölümü bilindiği üzere Hiperstatik (statikçe belirsiz) sistemlerdir. Bu tür sistemlerin dış yüklere göre hesabı, Yazarlar tarafından hazırlanması planlanan Yapı Statiği II – Çözümlü Örnekler adlı kitapta verilecektir. İzostatik sistemlerin hesabını iyice öğrenmiş ve özümsemiş bir öğrencinin Hiperstatik sistemlerin hesabında zorlanmayacağı açıktır.

Yazarlar, kitabın bilgisayar ortamında hazırlanması sırasındaki yardımlarından dolayı Arş. Gör. Makine Yüksek Mühendisi Mustafa Özen' e teşekkür ederler.

Kitabın, İnşaat Mühendisliği öğrencilerine ve uygulamada çalışan Mühendislere yararlı olması dileklerimizle.

Şanlıurfa, 2007

Zireddin MEMMEDOV **M. Arif GÜREL**

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
1. GİRİŞ …….	1
2. GERBER KİRİŞLERİ ……..	5
Gerber Kirişlerim Sabit Yüklere Göre Hesabı ve İç Kuvvetler Diyagramının Çizimi …….	5
Örnek 2.1. ……...	5
Örnek 2.2. ……...	10
Örnek 2.3. ……...	14
Örnek 2.4. ……...	17
Örnek 2.5. ……...	20
Örnek 2.6. ……...	26
Örnek 2.7. ……...	31
3. GERBER KİRİŞLERDE TESİR ÇİZGİLERİ ……..	36
Genel Bilgiler ……	36
Örnek 3.1. ……...	36
Örnek 3.2. ……...	40
Örnek 3.3. ……...	42
Örnek 3.4. ……...	43
Örnek 3.5. ……...	45
Örnek 3.6. ……...	47
Örnek 3.7. ……...	48
Örnek 3.8. ……...	50
4. İZOSTATİK ÇERÇEVELERİN HESABI …….	52
Genel Bilgiler ……	52
Örnek 4.1. ……...	52
Örnek 4.2. ……...	56
Örnek 4.3. ……...	60
Örnek 4.4. ……...	64
Örnek 4.5. ……...	70
Örnek 4.6. ……...	76
Örnek 4.7. ……...	81
5. KAFES SİSTEMLERİNİN HESABI ……..	89
Genel Bilgiler ……	89
Örnek 5.1. ……...	90
Örnek 5.2. ……...	93
Örnek 5.3. ……...	96
Örnek 5.4. ……...	99
Örnek 5.5. ……...	102
Örnek 5.6. ……...	106
Örnek 5.7. ……...	108
6. KAFES SİSTEMLERDE TESİR ÇİZGİLERİ ……..	113
Genel Bilgiler ……	113
Örnek 6.1. ……...	113
Örnek 6.2. ……...	118
Örnek 6.3. ……...	122
Örnek 6.4. ……...	126
Örnek 6.5. ……...	130

Örnek 6.6. ……... 133
7. ÜÇ MAFSALLI SİSTEMLER …… 138
Genel Bilgiler …… 138
Örnek 7.1. ……... 142
Örnek 7.2. ……... 147
Örnek 7.3. ……... 153
Örnek 7.4. ……... 159
Örnek 7.5. ……... 165
Örnek 7.6. ……... 171
8. ÜÇ MAFSALLI SİSTEMLERDE TESİR ÇİZGİLERİ 177
Genel Bilgiler …… 177
Örnek 8.1. ……... 177
Örnek 8.2. ……... 182
Örnek 8.3. ……... 184
Örnek 8.4. ……... 187
Örnek 8.5. ……... 190
KAYNAKLAR …….. 193

1. GİRİŞ

Taşıyıcı sistemler, üzerlerine gelen yükleri güvenlik sınırları içinde taşıyıp zemine ileten sistemlerdir. Bu sistemleri oluşturan elemanlara yapı elemanları denir.

İnşaat mühendisliğinin bina, köprü, baraj gibi çeşitli mühendislik yapılarının tasarımı ile uğraşan dalı *yapı mühendisliği* olarak adlandırılır. Yapı mühendisliğinin temel amacı, mühendislik yapılarının yeterli bir güvenlik ve rijitlikle, ekonomik şekilde boyutlandırılmasıdır. Bu iş için yapı mühendislerine gerekli olan bilgilerin önemli bir bölümü Yapı Statiği derslerinde verilir. Bu derslerde yapı sistemlerinin sabit ve hareketli yüklere göre hesaplama yöntemleri ele alınır.

Yapı sistemlerinin sınıflandırılması:

Yapı sistemleri kendilerini oluşturan yapı elemanlarına bağlı olarak
- bir boyutlu sistemler (çubuk sistemler: kirişler, kafes sistemler, çerçeveler ve kemerler)
- iki boyutlu sistemler (yüzeysel taşıyıcı sistemler: plaklar, levhalar ve kabuklar)
- üç boyutlu sistemler (uzaysal taşıyıcı sistemler: istinat duvarları, baraj gövdeleri, v.s.)

şeklinde sınıflandırılır. Bu kitapta sadece çubuk sistemler incelenmiştir.

Yükler

Yapı sistemlerinde iç kuvvet (kesit tesiri, kesit zoru), şekildeğiştirme ve yerdeğiştirme oluşturan tüm etkilere *yük* adı verilir. Dış yükler (yapıların kendi ağırlıkları, ilave yükler, kar yükü, rüzgar yükleri, deprem yükleri), mesnet çökmeleri, sıcaklık değişimleri, büzülme (rötre) ve yapım hatalarından kaynaklanan yükler başlıca yükler olarak belirtilebilir.

Yükler şekilleri bakımından
- Tekil yükler ve
- Yayılı yükler olarak sınıflandırılabilir.

Yayılı yükler aşağıdaki gibi sınıflandırılır (Şekil 1.1):

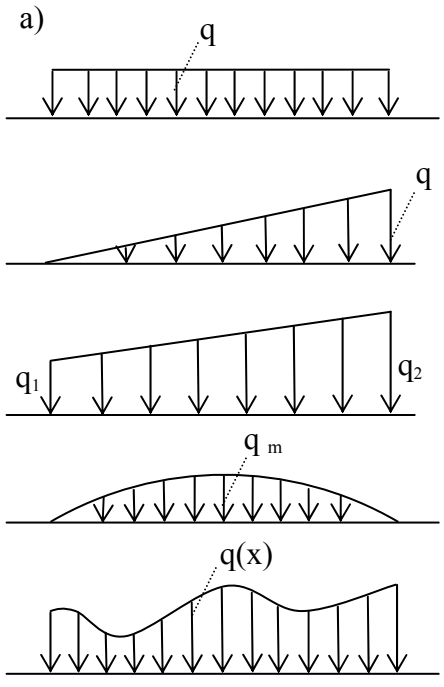
a) Düzgün (üniform) yayılı yük

b) Üçgen yayılı yük

c) Trapez yayılı yük

d) Parabolik yayılı yük

e) Gelişigüzel yayılı yük



Şekil 1.1. Yayılı yük çeşitleri

Yükler ayrıca

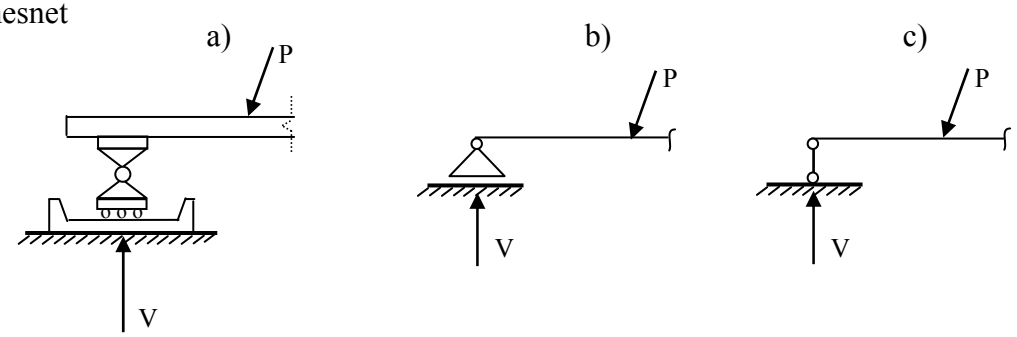
- Sabit yükler (taşıyıcı sistemlere daima etkiyen yükler),
- Hareketli yükler (taşıyıcı sistemler üzerinde yerleri değişebilen yükler),
- Statik yükler (sıfırdan başlayarak son hesap değerlerini alan yükler),
- Dinamik yükler (değerleri, yönleri veya yapı üzerindeki durumları hızla değişen yükler),
- Toplam yükler

olarak da sınıflandırılabilir.
Yapı sistemlerinin dinamik yüklere göre hesabı *Yapı Dinamiği* dersinin konusudur.

Mesnetler

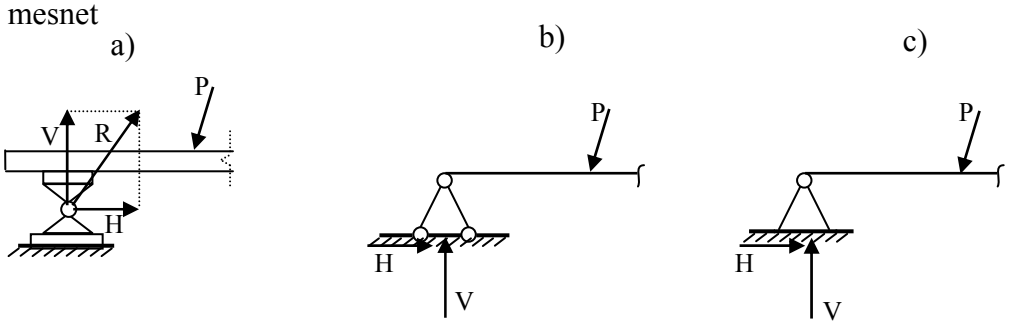
Yapı sistemlerinin dış ortamla (genellikle zemin ile) bağlandığı yerlere *mesnet* denir. Mesnetlerde hareketin kısıtlandığı doğrultularda tepkiler oluşur. Mesnetler aşağıdaki gibi sınıflandırılır.

a) Kayıcı mesnet



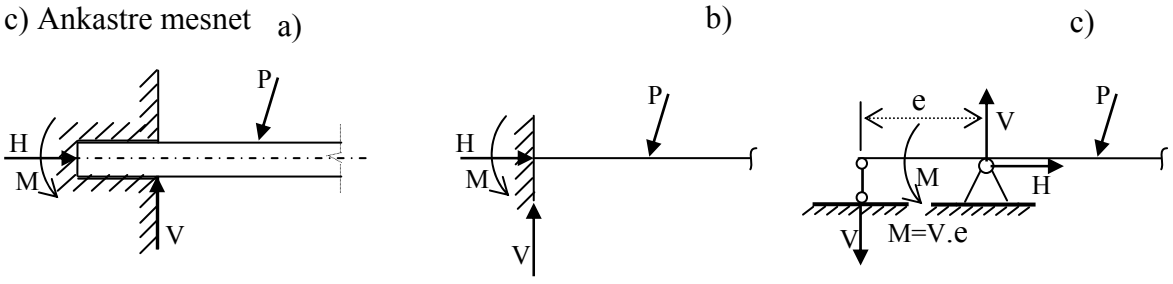
Şekil 1.2. a) Kayıcı mesnet, b) , c) Hesaplama şemaları.

b) Sabit mesnet



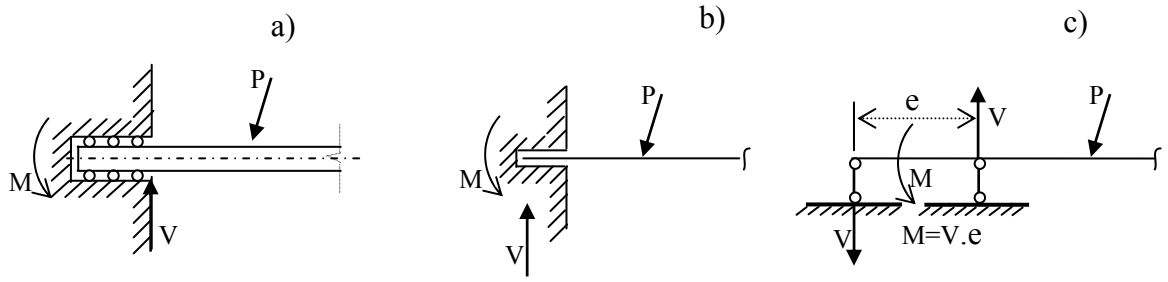
Şekil 1.3. a) Sabit mesnet, b) , c) Hesaplama şemaları.

c) Ankastre mesnet



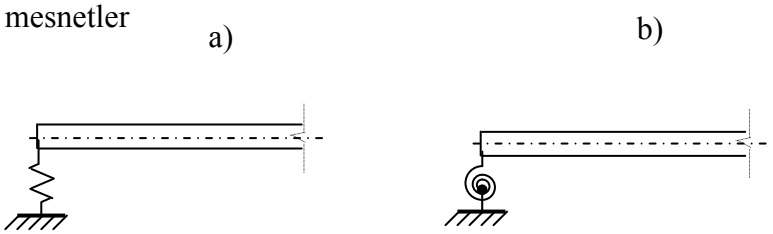
Şekil 1.4. a) Ankastre mesnet, b) , c) Hesaplama şemaları.

d) Kayıcı ankastre mesnet



Şekil 1.5. a) Kayıcı ankastre mesnet, b) , c) Hesaplama şemaları.

d) Elastik mesnetler



Şekil 1.6. Elastik mesnetler, a)Çökmeye karşı elastik mesnet, b) Dönmeye karşı elastik mesnet.

Düğüm hoktaları

Çubukların birbirleriyle birleştikleri noktalara *düğüm noktaları* denir. En yaygın düğüm noktaları şunlardır:
- Rijit düğüm noktaları



Şekil 1.7. Bir rijit düğüm noktası.

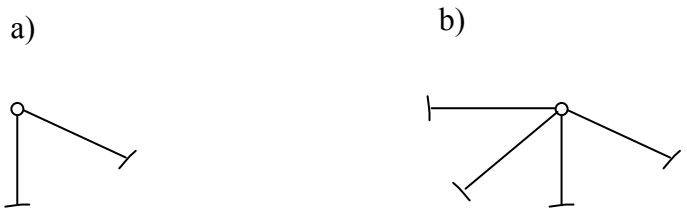
- Mafsallı düğüm noktaları



Şekil 1.8. Bir mafsallı düğüm noktası.

Çubukların mafsalla birleştiği uçlarında eğilme momenti sıfırdır. Mafsallı düğüm noktaları basit ve karmaşık diye ikiye ayrılır. İki çubuğun birleştiği mafsallı düğüm basit (Şekil 1.9a),

ikiden fazla çubuğun birleştiği mafsallı düğüm ise karmaşık düğüm (Şekil 1.9b) olarak adlandırılır.



Şekil 1.9. a) Basit, b) Karmaşık mafsallı düğüm.

Taşıyıcı Sistemlerin Genel Sınıflandırılması

Yapı Statiğinde taşıyıcı sistemler iki ana gruba ayrılırlar. Bunlar;
- İzostatik (statikçe belirli) sistemler ve
- Hiperstatik (statikçe belirsiz) sistemlerdir.

İzostatik sistemler, Statik'in üç temel denklemi olan $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$ *ve* $\sum M = 0$ ile hesaplanabilen sistemlerdir. Hiperstatik sistemler ise hesaplanabilmeleri için yukarıdaki üç temel denklemin yeterli olmadığı, ilave denklemlerin gerektiği sistemlerdir.

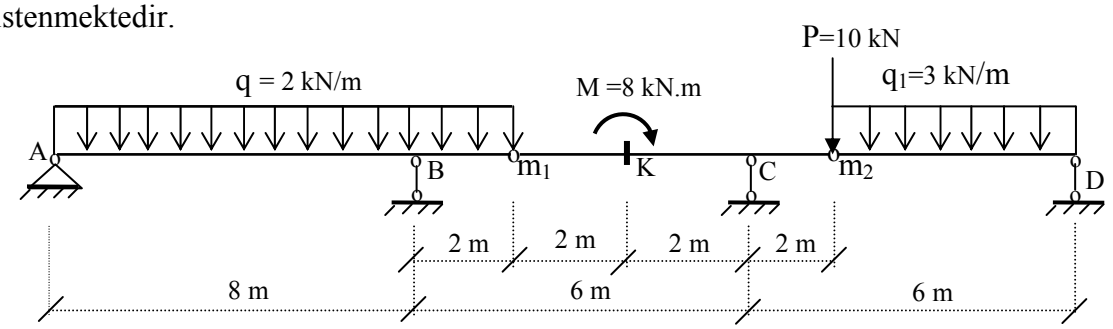
Bir taşıyıcı sistemin hesabı, gelen etkiler altında mesnet tepkilerinin, iç kuvvetlerin ve yerdeğiştirmelerin hesaplanması demektir. Bu kitapta yalnızca İzostatik sistemlerin hesabı ele alınmıştır. Bu bağlamda, kirişler, düzlem çerçeveler ve kafes sistemler, üç mafsallı çerçeveler ve kemerler incelenmiştir.

2. GERBER KİRİŞLERİ

Gerber Kirişlerin Sabit Yüklere Göre Hesabı ve İç Kuvvet Diyagramlarının Çizimi

İnşaat pratiğinde, örneğin çok açıklıklı köprülerde ve çatı aşıklarında, basit, konsol ve çıkmalı kirişlerin kendi aralarında mafsalla bağlanması sonucu elde edilen çok açıklıklı izostatik kirişler kullanılır. Böyle kirişler *Gerber kirişler* diye adlandırılır. Gerber kirişlerde ısı değişimlerinden ve mesnet çökmelerinden dolayı iç kuvvetler meydana gelmez. Bu kirişlerin hesabı Statiğin denge denklemleri kullanılarak yapılır. Gerber kirişlerin hesabı için gereken açıklamalar Örnek 2.1'in çözümünde verilmektedir.

Örnek 2.1 Boyutları ve yükleme durumu Şekil 2.1.1'de görülen Gerber kirişi için
a) Kinematik analizin yapılması,
b) Eğilme momenti (M) diyagramının çizimi,
c) Kesme kuvveti (T) diyagramının çizimi,
d) Çizilmiş diyagramların sağlamasının yapılması
istenmektedir.



Şekil 2.1.1

Çözüm :
a) Yapılar kullanımları süresince geometrik biçimlerini korumalı, yani geometrik değişmez olmalıdırlar. Bunun için sistemin serbestlik derecesi kontrol edilir. Bir sistemin serbestlik derecesi, W, aşağıdaki ifade ile belirlenir:

$$W = 3.P – 2.m - C_m$$

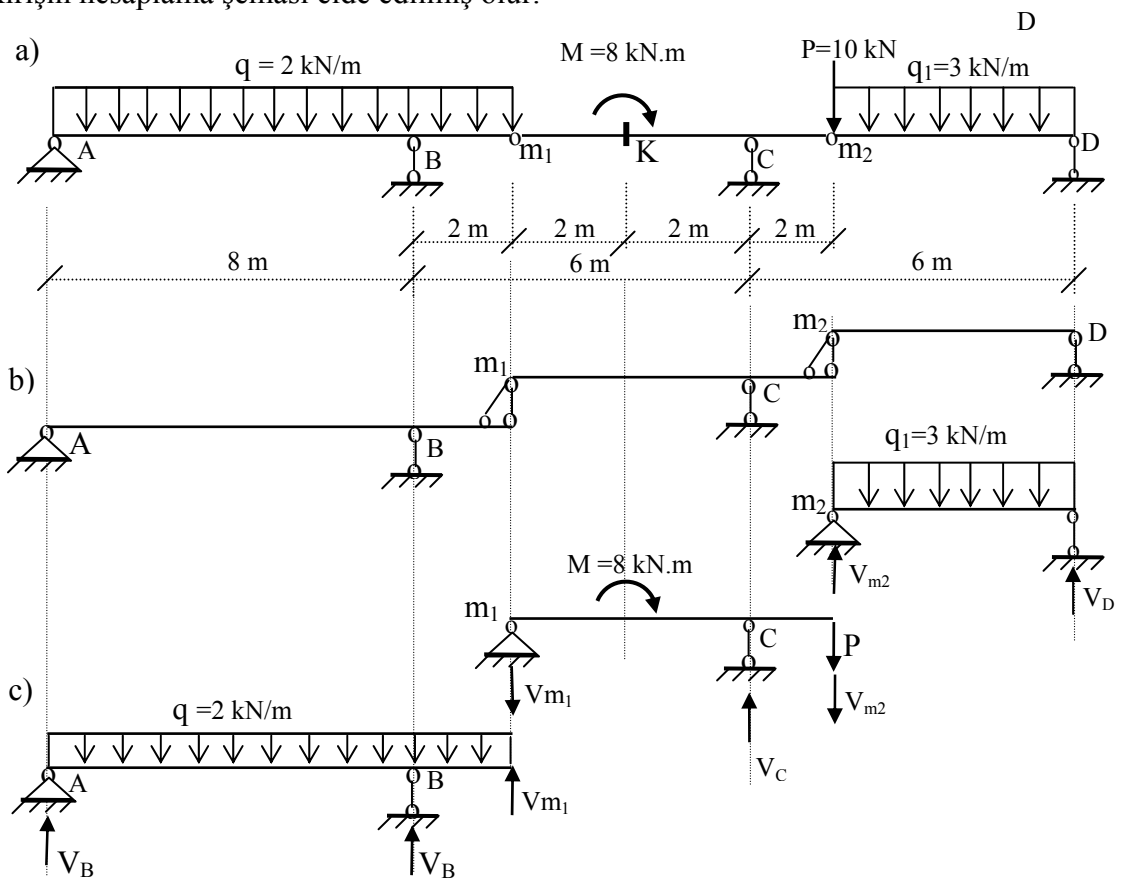
Burada, P : Gerber kirişi oluşturan parçaların sayısı,
m : parçaları birbirine bağlayan mafsal sayısı,
C_m : mesnet bağlarının sayısıdır.
W = 0 olması, sistemin geometrik değişmez olması için gerekli koşuldur, ancak tek başına yeterli değildir. Bununla birlikte sistemin yararlı bünyeye sahip olması (aşağıda açıklanmaktadır) şarttır.
W > 0 ise sistem geometrik değişendir, diğer bir deyişle *labil*'dir. İnşaat mühendisliğinde labil sistemlerin yeri yoktur.
W < 0 ise sistem geometrik değişmez olup, hiperstatik'dir.
Ele alınmış olan sistem için

$$W = 3.3 – 2.2 -5 = 0$$

değeri elde edilmektedir. Aynı zamanda bu sistem yararlı bünyeye sahiptir, yani, Şekil 2.1.1'den görüldüğü gibi AB kirişi temele birbirine paralel olmayan ve doğrultuları bir noktada kesişmeyen üç bağla bağlanmıştır. Sistemin bir parçası olan bu kiriş tek başına

geometrik değişmez olup, *esas* veya *taşıyıcı* kiriş olarak adlandırılır. Diğer, yani taşınan parçalar ise esas kirişe bir mafsal ve doğrultusu bu mafsaldan geçmeyen mesnet bağıyla bağlanmıştır.

Gerber sistemleri hesaplamak için *taşıma şeması* çizilmelidir. Bunun için kirişin parçalarını birbiriyle bağlayan mafsallar iki mesnet bağıyla değiştirilir (Şekil 2.1.2b). Hesaba en üstte bulunan parçadan (kirişten) başlanır. Sonraki kirişlerin hesabında üstte bulunan kirişin mesnet tepkileri onlar için zıt yönde, dış kuvvet gibi etki ettirilir. Böylece Gerber kirişin hesaplama şeması elde edilmiş olur.

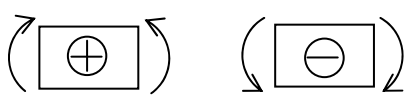


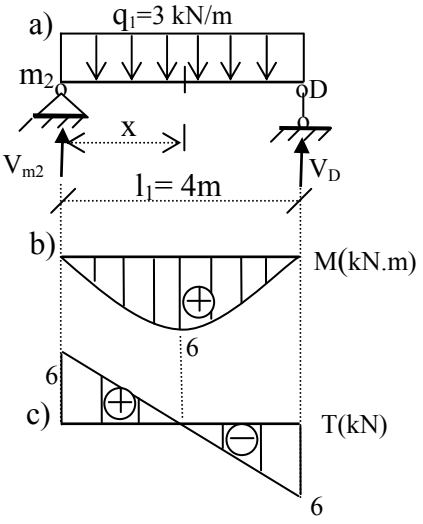
Şekil 2.1.2. a) Gerber kirişi, b) Taşıma şeması, c) Hesaplama şeması.

<u>m_2D kirişinin (Şekil 2.1.3a) hesabı :</u>
Mesnet tepkilerinin hesaplanması:
Düzgün yayılı yük için mesnet tepkileri birbirlerine eşit olur.

$$V_{m_2} = V_D = \frac{ql_1}{2} = \frac{3.4}{2} = 6\ kN$$

Eğilme momenti değerlerinin hesaplanması:
Eğilme momentinin işareti aşağıdaki gibidir.





Şekil 2.1.3. a) m_2D kirişi, b) M diyagramı, c) T diyagramı.

$0 \le x \le 4$ $\qquad M_x = V_{m_2}.x - q.\frac{x^2}{2}$,

$x = 0 \Rightarrow M_x = 0.$

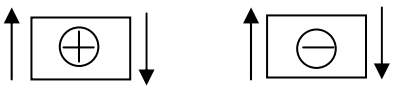
Eğilme momentinin maksimum değeri açıklığın ortasında olup

$$M_{\max} = \frac{ql_1^2}{8} = \frac{3.4^2}{8} = 6\,kN.m$$

olarak elde edilir.

Eğilme momentinin maksimum olduğu kesitte kesme kuvvetinin değeri sıfır olur veya işaretini değiştirir.

Kesme kuvveti değerlerinin hesaplanması:



Kesme kuvvetinin işareti yandaki gibidir.

$T_x = V_{m2} - q.x \;;\; x = 0 \Rightarrow T_x = V_{m2} = 6kN;$

$x = 2m \Rightarrow T_x = 6 - 3.2 = 0; \quad x = 4m \Rightarrow T_x = 6 - 3.4 = -6kN$

Elde edilmiş olan değerlere göre M ve T diyagramları çizilmiştir (Şekil 2.1.3b,c). Eğilme momenti diyagramı dış yük etkisi altında uzamış lifler tarafında çizilmiştir.

<u>m_1C kirişinin (Şekil 2.1.4a) hesabı :</u>

Mesnet tepkilerinin hesabı:

$\sum M_C = -V_{m1}.4 + M + P.2 + V_{m2}.2 = 0 \Rightarrow$

$$V_{m1} = \frac{8 + 10.2 + 6.2}{4} = 10\,kN.$$

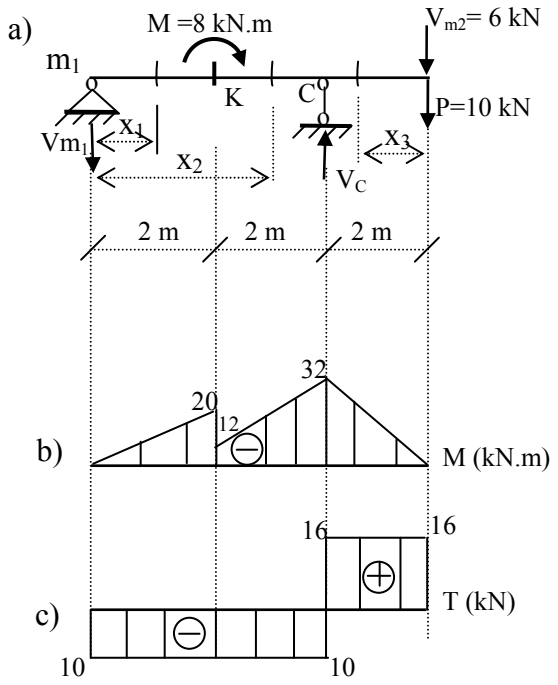
$\sum M_{m1} = P.6 + V_{m2}.6 - V_C.4 + 8 = 0 \Rightarrow$

$$V_C = \frac{10.6 + 6.6 + 8}{4} = 26\,kN$$

Sağlama:

$\sum Y = -V_{m1} + V_C - P - V_{m2} = 0 \Rightarrow$

-10 + 26 -10 – 6 = 0.



Şekil 2.1.4.
a) m_1C kirişi, b) M diyagramı,
c) T diyagramı.

Her bir bölgede eğilme momenti değerlerinin hesaplanması (Şekil 2.1.4a):

$0 \le x_1 \le 2$

$M_{x1} = -V_{m1}.x_1; \; x_1 = 0 \Rightarrow M_{x1} = 0,$

$x_1 = 2m \Rightarrow M_{x1} = -20\,kN.m$

$2 \le x_2 \le 4$

$M_{x2} = V_{m1}.x_2 + M \,;\, x_2 = 2m \Rightarrow M_{x2} = -12\,kN.m,$

$x_2 = 4m \Rightarrow M_{x2} = -32\,kN.m.$

$0 \le x_3 \le 2$

$M_{x3} = -P.x_3 - V_{m2}.x_3 \;;\; x_3 = 0 \Rightarrow M_{x3} = 0, \quad x_3 = 2\,m \Rightarrow M_{x3} = -10.2 - 6.2 = -32\,kN.m.$

Kiriş bölgelerinde kesme kuvveti değerlerinin hesaplanması (Şekil 2.1.4a):

$0 \le x_1 \le 2$

$T = -V_{m1} = -10\,kN$.

$2 \le x_2 \le 4$

$T = -V_{m1} = -10\,kN$.

$0 \le x_3 \le 2$

$T = P + V_{m2} = 10 + 6 = 16\,kN$.

Hesaplanmış değerlere uygun olarak eğilme momenti diyagramı Şekil 2.1.4b'de ve kesme kuvveti diyagramı Şekil 2.1.4c'de çizilmiştir.

AB kirişinin hesaplanması (Şekil 2.1.5a):

Mesnet tepkilerinin hesabı:

$\sum M_b = V_A.8 - q.8.4 + q.2.1 - V_{m1}.2 = 0 \Rightarrow$

$V_A = \dfrac{2.8.4 - 2.2.1 + 10.2}{8} = 10\,kN; \quad \sum M_A = -V_B.8 + q.10.5 - V_{m1}.10 = 0 \Rightarrow$

$V_B \dfrac{2.10.5 - 10.10}{8} = 0.$

Sağlama:

$\sum Y = V_A + V_B + V_{m1} - q.10 = 0 \;\Rightarrow\; 10 + 0 + 10 - 20 = 0.$

M değerlerinin hesaplanması:

$0 \le x_1 \le 10$

$M_{x1} = V_A.x_1 - q.\dfrac{x_1^2}{2};$

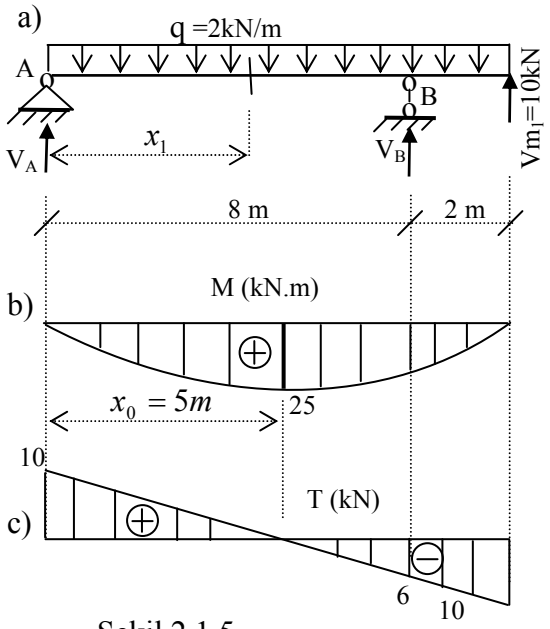
$x_1 = 0 \Rightarrow M_{x1} = 0\,; x_1 = 10\,m \Rightarrow$

$M_{x1} = 10.10 - 2.\dfrac{10^2}{2} = 0.$

$0 \le x_1 \le 10$ aralığında eğilme momentinin maksimum değerini bulmak için $T = 0$ kesitinin x_0 uzaklığının hesabı:

$T_0 = V_A - q.x_0 = 0 \Rightarrow 10 - 2.x_0 = 0 \Rightarrow$

$x_0 = 5\,m. \quad M_{\max} = 10.5 - 2.\dfrac{5^2}{2} = 25\,kN.m.$



Şekil 2.1.5
a) AB kirişi, b) M diyagramı,
c) T diyagramı.

T kesme kuvveti değerlerinin hesaplanması:

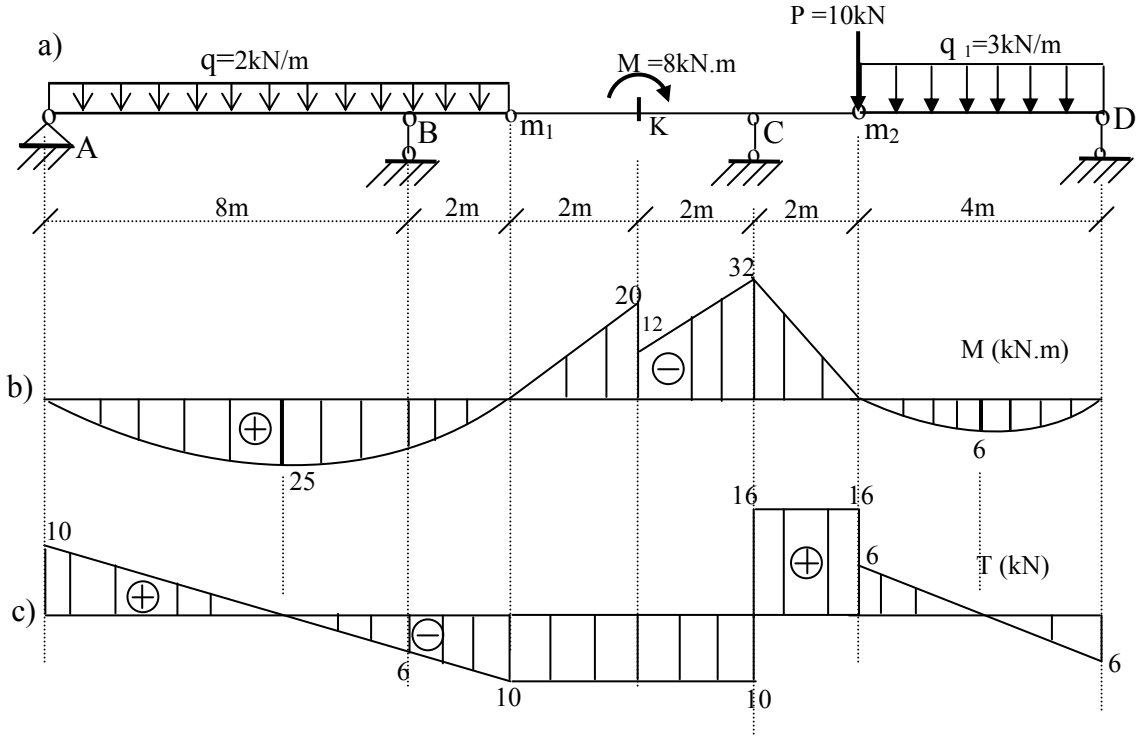
$0 \le x_1 \le 10$

$T_{x1} = V_A - q.x_1$

$x_1 = 0 \Rightarrow T_{x1} = 10\,kN; x_1 = 10\,m \Rightarrow T_{x1} = 10 - 2.10 = -10\,kN.$

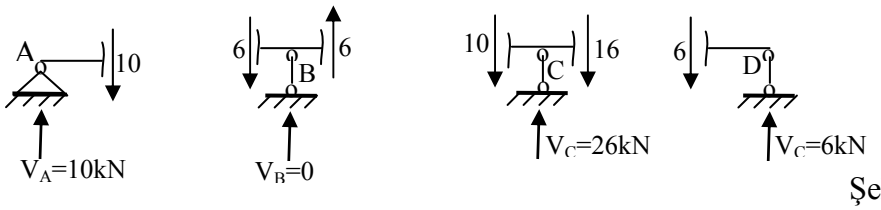
Elde edilmiş değerlere göre *M* (Şekil 2.1.5b) ve *T* (Şekil 2.1.5c) diyagramları çizilmiştir.

Gerber kirişin *M* eğilme momenti ve *T* kesme kuvveti diyagramları, kirişi oluşturan parçaların *M* ve *T* diyagramları aynı eksen üzerinde sırasıyla birleştirilerek elde edilir (Şekil 2.1.6).

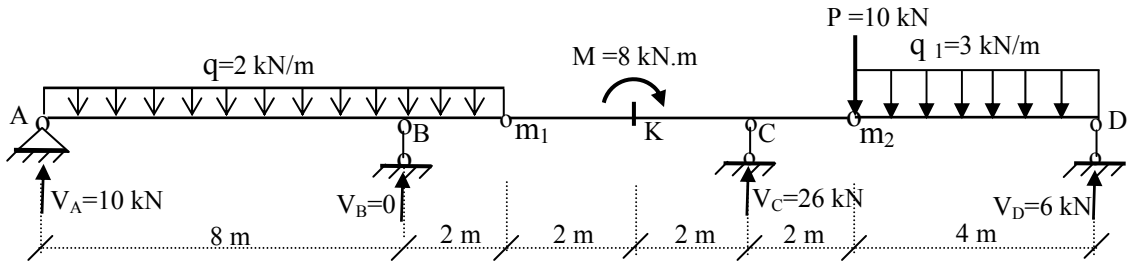


Şekil 2.1.6. a) Gerber kiriş, b) *M* diyagramı, c) *T* diyagramı.

Gerber kirişin *T* (Şekil 2.1.6c) diyagramına dayanarak, yeniden mesnet tepkileri bulunabilir (Şekil 2.1.7). Bundan sonra kirişin genel dengesinin sağlaması yapılabilir (Şekil 2.1.8).



Şekil 2.1.7



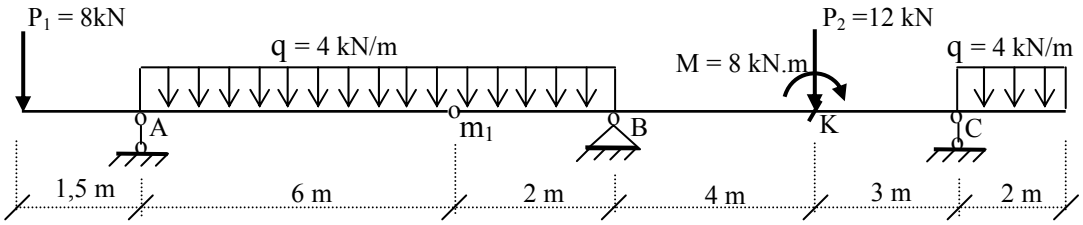
Şekil 2.1.8

$$\sum Y = V_A + V_B + V_C + V_D - q.10 - P - q_1.4 = 0 \quad \Rightarrow 10 + 0 + 26 + 6 - 10.2 - 3.4 = 0$$

$\sum M_{m1} = V_A.10 - q.10.5 + M - V_C.4 + P.6 + q.4.8 - V_D.10 = 0 \Rightarrow$

10.10 - 2.10.5 + 8 – 26.4 + 10.6 + 3.4.8 – 6.10 = 0.

Örnek 2.2. Boyutları ve yükleme durumu Şekil 2.2.1'de verilmiş olan Gerber kirişin kinematik analizini yapıp, eğilme momenti ve kesme kuvveti diyagramlarını çiziniz.

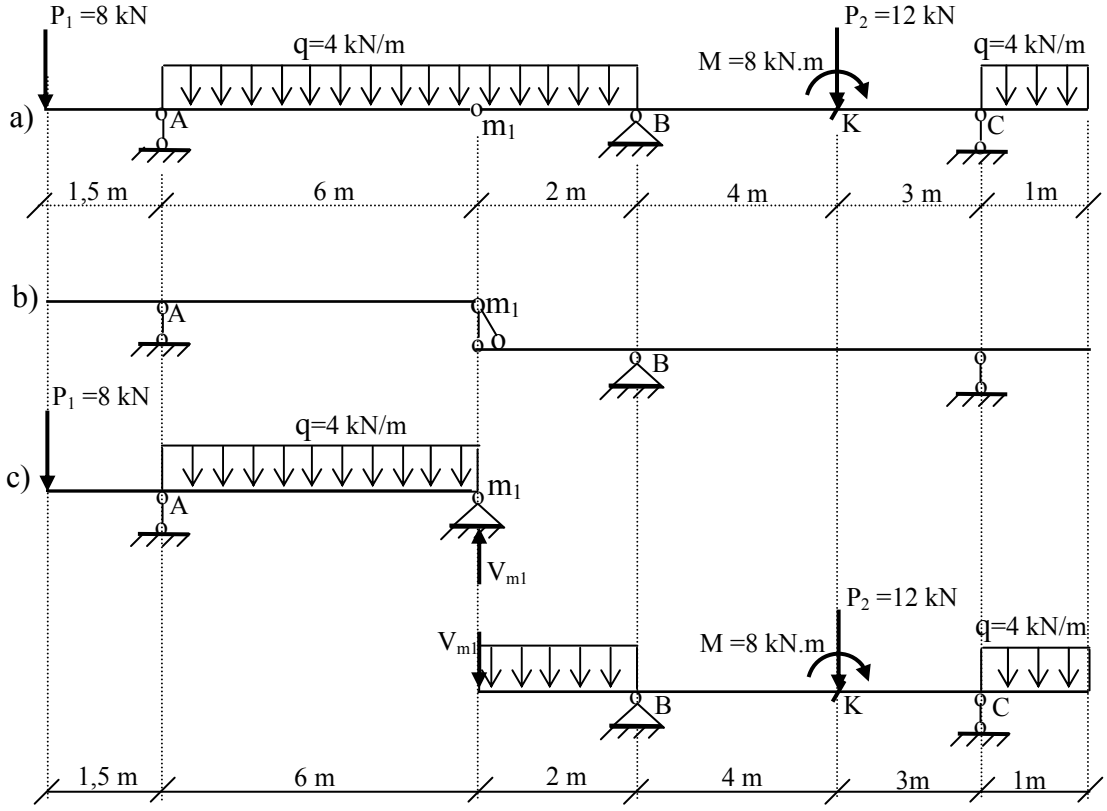


Şekil 2.2.1

Çözüm : Sistemin serbestlik derecesi

$W = 3P - 2m - C_m = 3.2 - 2.1 - 4 = 0$

olup, sistem aynı zamanda yararlı bünyeye sahiptir. Kirişin taşıma ve hesaplama şemaları aşağıda çizildiği gibidir (Şekil 2.2.2a,b).



Şekil 2.2.2. a) Gerber kiriş, b) Taşıma şeması, c) Hesaplama şeması.

Am$_1$ kirişinin (Şekil 2.2.3a) hesaplanması:

Mesnet tepkileri:

$$\sum M_{m_1} = -P_1.(7{,}5) + V_A.6 - q.6.3 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$V_A = \frac{8.(7{,}5) + 4.6.3}{6} = 22\,kN$$

$$\sum M_A = -V_{m1}.6 + q.6.3 - P_1.(1{,}5) = 0 \quad \Rightarrow$$

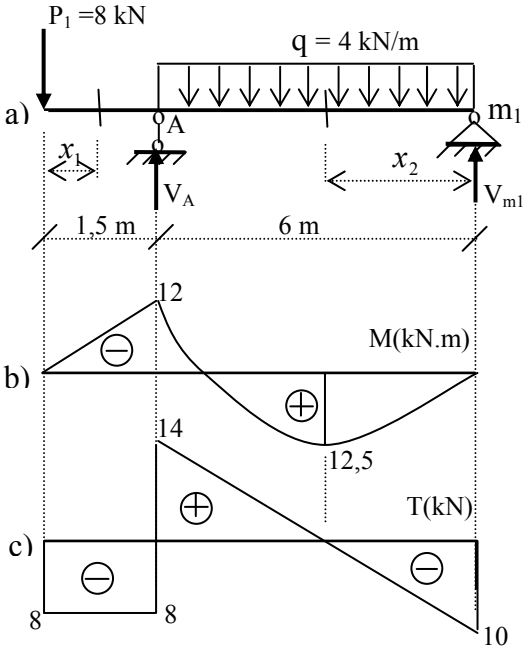
$$V_{m1} = \frac{4.6.3 - 8.(1{,}5)}{6} = 10\,kN$$

Sağlama :

$$\sum Y = -P_1 + V_A - q.6 + V_{m1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$-8 + 22 - 4.6 + 10 = 0.$$

Her bölge için (Şekil 2.2.3a) *M* ve *T* değerlerinin hesaplanması:



Şekil 2.2.3. a) Am$_1$ kirişi, b) M diyagramı, c) T diyagramı.

$$0 \le x_1 \le 1{,}5$$

$$M_{x1} = -P_1.x_1; \quad T_1 = -P_1 = 8\ kN.$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow M_{x1} = 0;\ x_1 = 1.5\ m \Rightarrow M_{x1} = -12\ kN.m.$$

$$0 \le x_2 \le 6$$

$$M_{x2} = V_{m1}.x_2 - q.\frac{x_2^2}{2}; \quad T_{x2} = -V_{m1} + x_2; \quad x_2 = 0 \Rightarrow M_{x2} = 0\,,\ T_{x2} = -10\,kN;$$

$$x_2 = 6\,m \Rightarrow M_{x2} = 10.6 - 4.\frac{36}{2} = -12\ kN.m\,, \quad T_{x2} = -10 + 4.6 = -14\ kN.$$

$0 \le x_2 \le 6$ aralığında eğilme momentinin maksimum değer aldığı kesitin x_0 uzaklığı:

$$T_{x0} = -10 + q.x_0 = 0 \Rightarrow \quad x_0 = \frac{10}{4} = 2{,}5m. \quad M_{\max} = 10.(2{,}5) - 4.\frac{(2{,}5)^2}{2} = 12.5\,kN.m$$

Hesaplanmış değerlere göre *M* (Şekil 2.2.3b) ve *T* (Şekil 2.2.3c) diyagramları çizilmiştir.

BC kirişinin (Şekil 2.2.4a) hesaplanması:

Mesnet tepkileri:

$$\sum M_C = -V_{m1}.9 - q.2.8 + V_B.7 - P.3 + M + q.1.(0{,}5) = 0 \Rightarrow$$

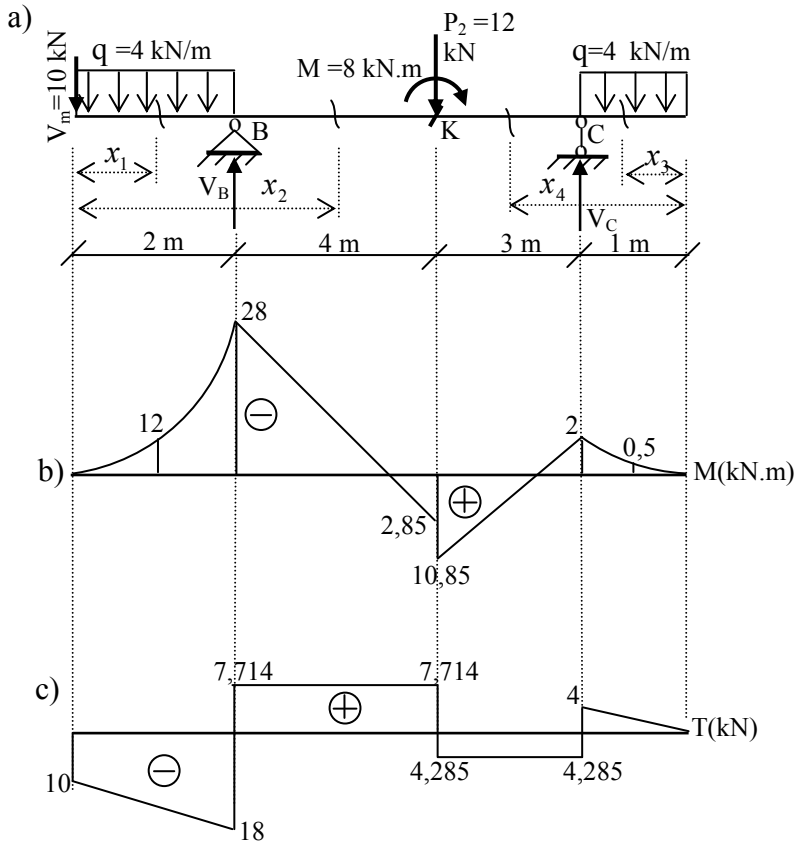
$$V_B = \frac{10.9 + 4.2.8 + 12.3}{7} - \frac{8 + 4.1.(0{,}5)}{7} = 25{,}7143\ kN.$$

$$\sum M_B = q.1.(7{,}5) - V_C.7 + P.4 + M - V_{m1}.2 - q.2.1 = 0 \Rightarrow$$

$$V_C = \frac{4.1.(7{,}5) + 12.4 + 8 - 10.2}{7} - \frac{4.2.1}{7} = 8{,}2857\,kN.$$

Sağlama:

$$\sum Y = -V_{m1} - q.2 + V_B - P + V_C - q.1 = 0 \Rightarrow -10 - 4.2 + 25{,}7143 - 12 + 8{,}2857 - 4.1 = 0$$



Şekil 2.2.4. a) BC kirişi, b) *M* diyagramı, c) *T* diyagramı.

Bölgeler (Şekil 2.2.4a) için *M* ve *T* değerlerinin hesaplanması.

$0 \le x_1 \le 2$

$M_{x1} = -V_{m1}.x_1 - q.\frac{x_1^2}{2}; \quad T_{x1} = -V_{m1} - q.x_1. \quad x_1 = 0 \Rightarrow M_{x1} = 0, T_{x1} = -10\ kN,$

$x_1 = 1\,m \Rightarrow M_{x1} = -12\ kN.m,$

$x_1 = 2\,m \Rightarrow M_{x1} = -10.2 - 4.\frac{2^2}{2} = -28\ kN.m; \quad T_{x1} = -10 - 4.2 = -18\ kN.$

$2 \le x_2 \le 6$

$M_{x2} = -V_{m1}.x_2 - q.2.(x_2 - 1) + V_B.(x_2 - 2);$

$T = -V_{m1} - q.2 + V_B \Rightarrow -10 - 4.2 + 25{,}7143 = 7{,}7143\ kN.$

$x_2 = 2\,m \Rightarrow M_{x2} = -10.2 - 4.2.1 = -28\ kN.m,$

$x_2 = 6\,m \Rightarrow \quad M_{x2} = -10.6 - 4.2.5 + (25{,}7143).4 = 2{,}857\ kN.m.$

$0 \le x_3 \le 1$

$M_{x3} = -q.\frac{x_3^2}{2}; \quad T_{x3} = q.x_3. \quad x_3 = 0 \Rightarrow \quad M_{x3} = 0; \quad T_{x3} = 0. \quad x_3 = 0{,}5m \Rightarrow$

$M_{x3} = -0{,}5\ kN.m. \quad x_3 = 1\,m \Rightarrow M_{x3} = -4.\frac{1^2}{2} = -2\ kN.m, \quad T_{x3} = 4.1 = 4\ kN.$

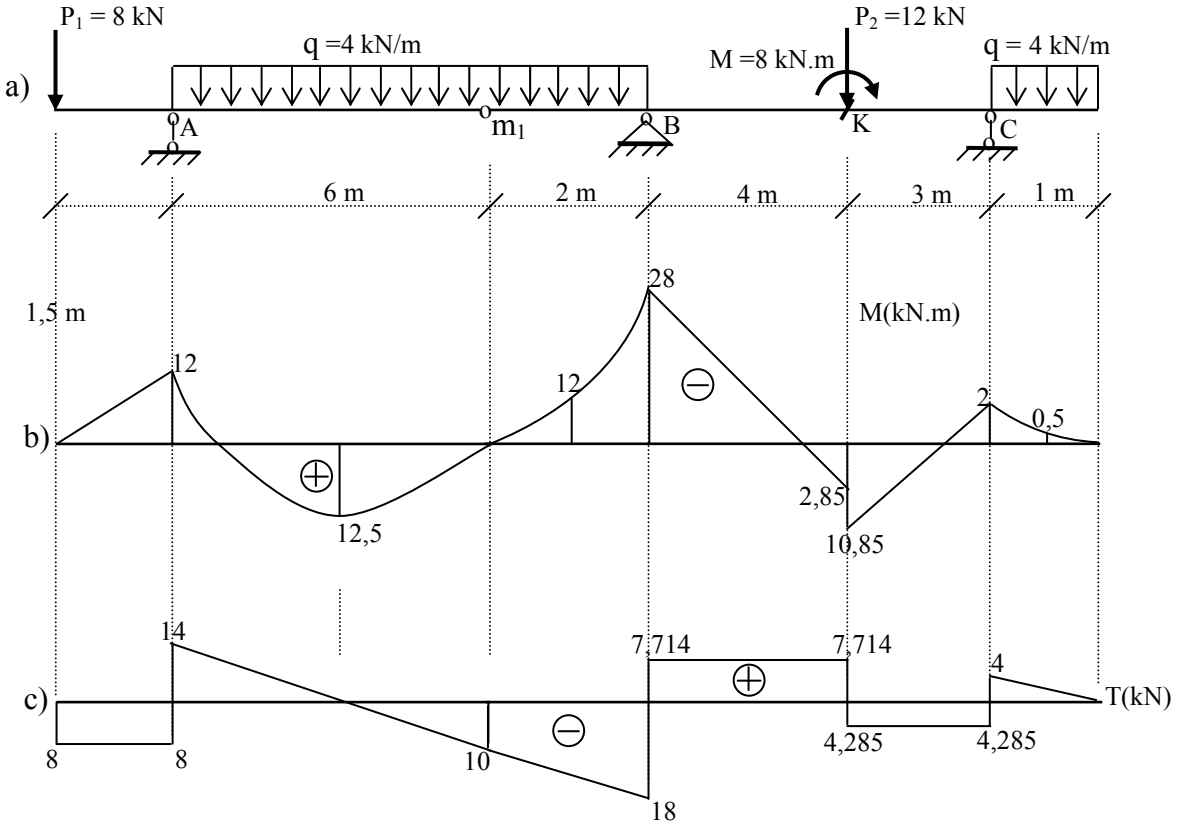
$1 \le x_4 \le 4$

$M_{x4} = -q.1.(x_4 - 0{,}5) + V_C.(x_4 - 1); \quad T = q.1 - V_C = 4.1 - 8{,}2857 = -4{,}2857\ kN.$

$x_4 = 1m \Rightarrow \quad M_{x4} = -2\ kN.m, \quad x_4 = 4m \Rightarrow \quad M_{x4} = -4.1.(3{,}5) + (8.2857).3 = 10{,}8571\ kN.m.$

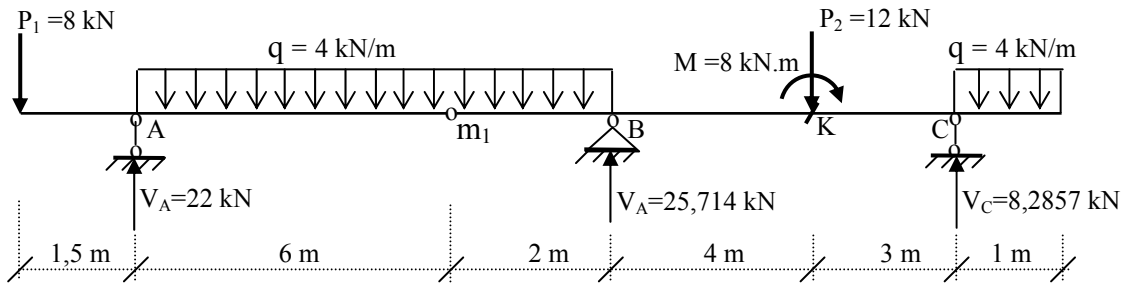
Belirlenen değerlere göre *M* (Şekil 2.2.4b) ve *T* (Şekil 2.2.4c) diyagramları çizilmiştir. *M* diyagramından görüldüğü gibi kirişin tekil eğilme momenti uygulanmış olan kesitinde, diyagramda bu momentin değeri kadar ve yönünde bir atlama vardır. *T* diyagramında ise kirişin tekil yük uygulanmış olan kesitinde bu kuvvetin yönünde kendi değeri kadar atlama oluşmuştur.

Gerber kirişi oluşturan basit kirişlerin *M* ve *T* diyagramları birleştirilip, kirişin *M* (Şekil 2.2.5a) ve *T* (Şekil 2.2.5b) diyagramları elde edilir.



Şekil 2.2.5. a) Gerber kiriş, b) *M* diyagramı, c) *T* diyagramı.

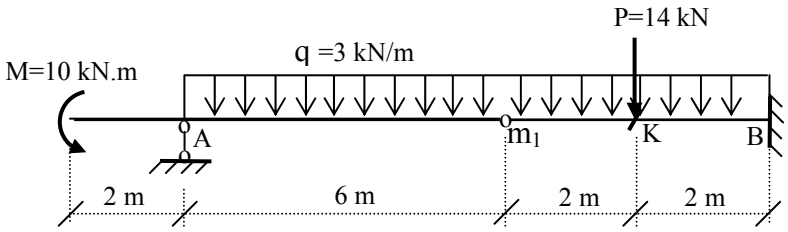
Kirişin tümünün denge kontrolü (Şekil 2.2.6):



Şekil 2.2.6

$$\sum Y = V_A + V_B + V_C - P_1 - q.8 - P - q.1 = 22 + 25{,}7143 + 8{,}2857 - 8 - 4.8 - 12 - 4.1 = 0$$
$$\sum M_{m1} = -P_1.(7{,}5) + V_A.6 - q.6.3 + q.2.1 - V_B.2 + P.6 + M - V_C.9 + q.1.(9{,}5) = 0 \Rightarrow$$
$$-8.(7{,}5) + 22.6 - 4.6.3 + 4.2.1 - (25{,}7143).2 + 12.6 + 8 - (8{,}2857).9 + 4.1.(9{,}5) = 0$$

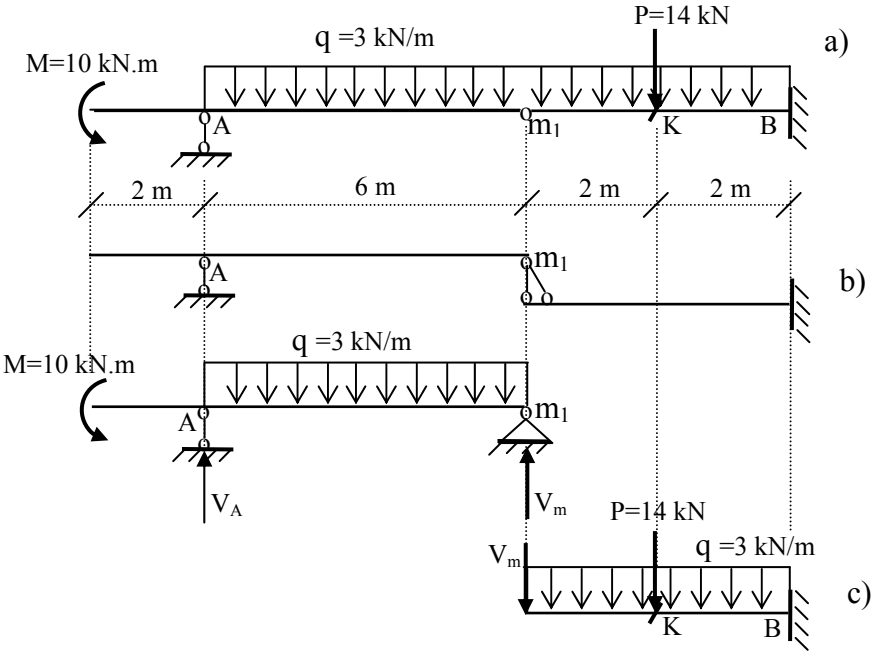
Örnek 2.3. Şekil 2.3.1'de görülen Gerber kirişin eğilme momenti ve kesme kuvveti diyagramlarının çizilmesi istenmektedir.



Şekil 2.3.1.

Çözüm :

Sistemin serbestlik derecesi:
W = 3.2 – 2.1 - 4 = 0'dır ve sistem yararlı bünyeye sahip olduğundan geometrik değinmezdir. Kirişin taşıma ve hesaplama şemaları Şekil 2.3.2' de çizilmiştir.



Şekil 2.3.2. a) Gerber kirişi, b) Taşıma şeması, c) Hesaplama şeması.

Am$_1$- kirişinin (Şekil 2.3.3a) hesaplanması :

Mesnet tepkilerinin bulunması:

$$\sum M_{m1} = -M + V_A.6 - q.6.3 = 0 \Rightarrow$$

$$V_A = \frac{10 + 3.6.3}{6} = 10{,}6667\, kN.$$

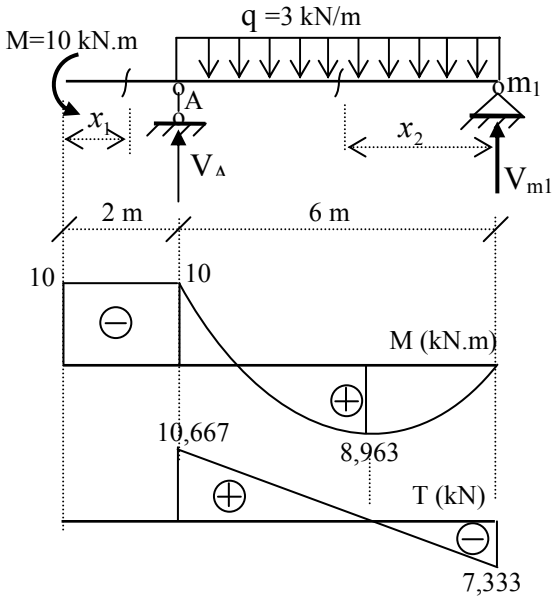
$$\sum M_A = -V_{m1}.6 + q.6.3 - M = 0 \quad \Rightarrow$$

$$V_{m1} = \frac{3.6.3 - 10}{6} = 7{,}3333\, kN.$$

Sağlama:

$$\sum Y = V_A + V_{m1} - q.6 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$10.6667 + 7.3333 - 3.6 = 0$$



Şekil 2.3.3. a) Am$_1$ kirişi, b) M diyagramı, c) T diyagramı.

Kirişin her bir bölgesi için (Şekil 2.3.3a) M ve T 'nin bağıntılarının yazılıp, değerlerinin hesaplanması.

$0 \le x_1 \le 2$

$M = -10\ kN.m; \quad T = 0.$

$0 \le x_2 \le 6$

$$x_2 = 6\, m \Rightarrow \quad M_{x2} = (7{,}3333).6 - 3.\frac{6^2}{2} = -10\, kN, \quad T_{x2} = -7{,}3333 + 3.6 = 10{,}6667\, kN.$$

İkinci bölgede M 'nin maksimum değer aldığı kesitin uzaklığı, bu kesitte kesme kuvveti değerinin sıfır olma şartından belirlenir.

$$T_{x2} = -V_{m1} + qx_2 = 0 \Rightarrow \quad x_2 = \frac{7{,}3333}{3} = 2{,}4444\, m.$$

$$M_{\max} = 7.3333.(2{,}4444) - 3.\frac{(2{,}444)^2}{2} = 8.963\, kN.m$$

Belirlenmiş değerlere uygun olarak basit kirişin M ve T diyagramları çizilmiştir (Şekil 2.3.3b,c).

m$_1$B kirişinin (Şekil 2.3.4a) hesaplanması: Konsol kirişlerin hesabına serbest uçtan başlanabilir. Her bir bölge için M ve T değerlerini belirlenmesi:

$0 \le x_1 \le 2$

$$M_{x1} = -V_{m1}.x_1 - q.\frac{x_1^2}{2}; \quad T_{x1} = -V_{m1} - q.x_1.$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow \quad M_{x1} = 0, \quad T_{x1} = -V_{m1} = -7{,}333\, kN.$$

$$x_1 = 2m \Rightarrow M_{x1} = -(7.333).2 - 3.\frac{2^2}{2} = -20{,}666\, kN.m$$

$$T_{x1} = -7{,}3333 - 3.2 = -13{,}3333\, kN.$$

$2 \le x_2 \le 4$

$$M_{x2} = -V_{m1}.x_2 - q.\frac{x_2^2}{2} - P.(x_2 - 2)\,;$$

$$T_{x2} = -V_{m1} - q.x_2 - P.$$

$$x_2 = 2\,m \Rightarrow \quad M_{x2} = -20{,}6666\ kN.m$$

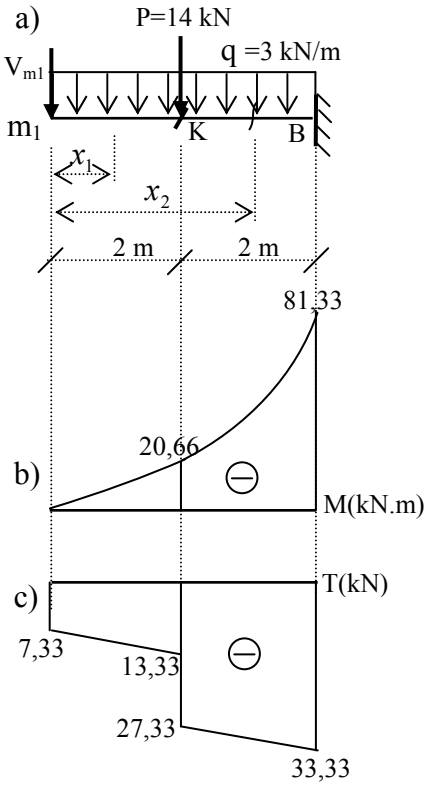
$$T_{x2} = -7{,}3333 - 3.2 - 14 = -27{,}3333\ kN.$$

$$x_2 = 4\,m \Rightarrow M_{x2} = -(7{,}333).4 - 3.\frac{4^2}{2} - 14.2 =$$

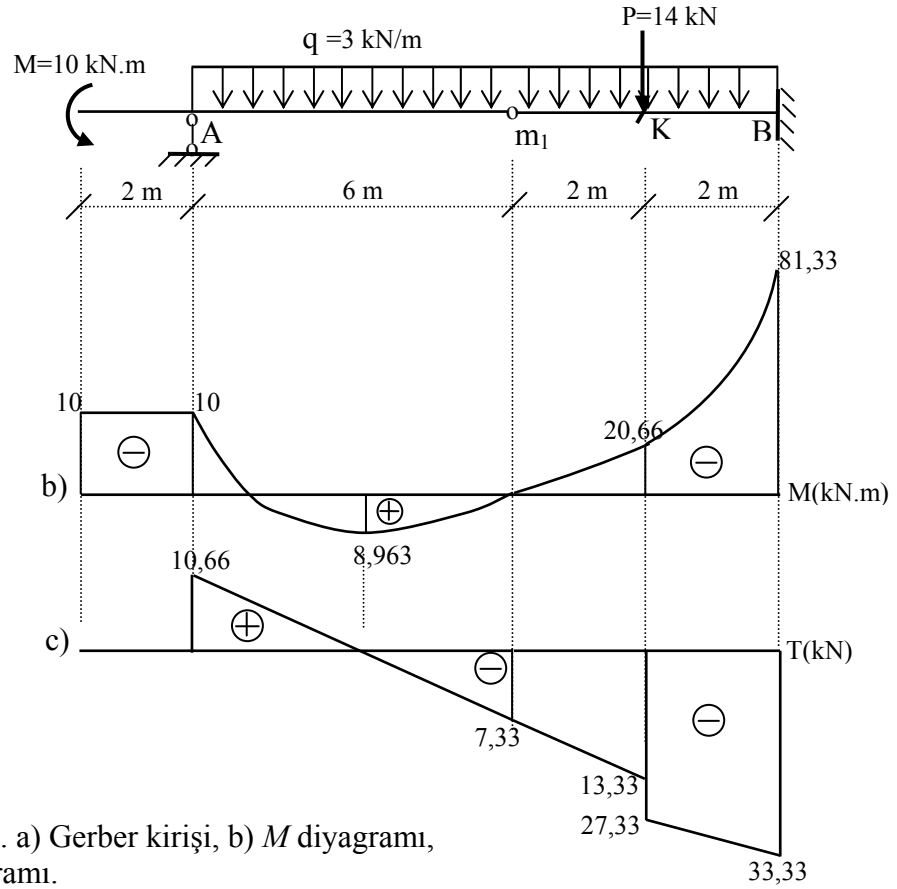
$$= -81{,}333\ kN.m$$

Hesaplanmış değerlere göre kirişin *M* (Şekil 2.3.4b) ve *T* (Şekil 2.3.4c) diyagramları çizilmiştir.

Basit kirişlerin *M* ve *T* diyagramlarının birleştirilmiş şekilde çizilmesiyle Gerber kirişin *M* (Şekil 2.3.5b) ve *T* (Şekil 2.3.5c) diyagramları elde edilmiş olur.

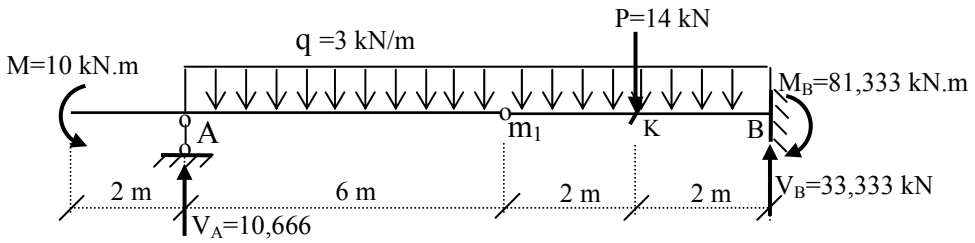


a) Şekil 2.3.4. a) m_1B kirişi, b) M diyagramı, c) T diyagramı.



Şekil 2.3.5. a) Gerber kirişi, b) *M* diyagramı, c) *T* diyagramı.

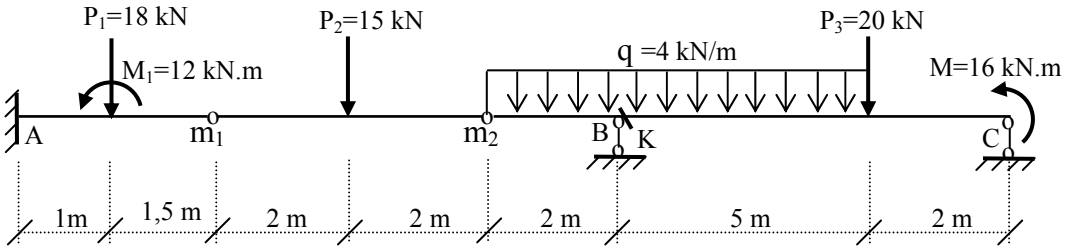
Kirişin tümünün denge kontrolü (Şekil 2.3.6):



Şekil 2.3.6

$$\sum Y = V_A _ q.10 - P - V_B = 0 \Rightarrow 10{,}6667 - 3.10 - 14 + 33{,}3333 = 0$$
$$\sum M_{m1} = -M + V_A.6 - q.6.3 + q.4.2 + P.2 - V_B.4 + M_B = 0 \Rightarrow$$
$$-10 + 10.6667.6 + 3.4.2 + 14.2 - (33{,}3333).4 + 81{,}3333 = 0$$

Örnek 2.4. Yükleme durumu ve boyutları Şekil 2.4.1'de görülen Gerber kirişin eğilme momenti ve kesme kuvveti diyagramlarını çiziniz.



Şekil 2.4.1

Çözüm :

W = 3.3 – 2.2 – 5 = 0

olduğundan ve sistem yararlı bünyeye sahip olduğu için geometrik değişmezdir. Önceki örneklerin çözümlerinde olduğu gibi Gerber kirişin taşıma ve hesaplama şemaları Şekil 2.4.2'de çizilmiştir.

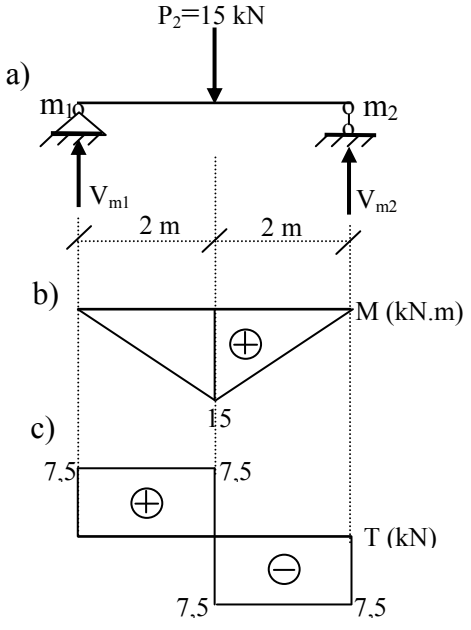
m_1 m_2 kirişinin (Şekil 2.4.3a) hesaplanması:

Kirişe etkiyen yük bir tekil yük olup açıklığın ortasına uygulandığından mesnet tepkileri ve iç kuvvetler aşağıdaki gibi olur.

$$V_{m1} = V_{m2} = \frac{P_2}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5\ kN.$$

Eğilme momentinin maksimum değeri açıklığın ortasında olup

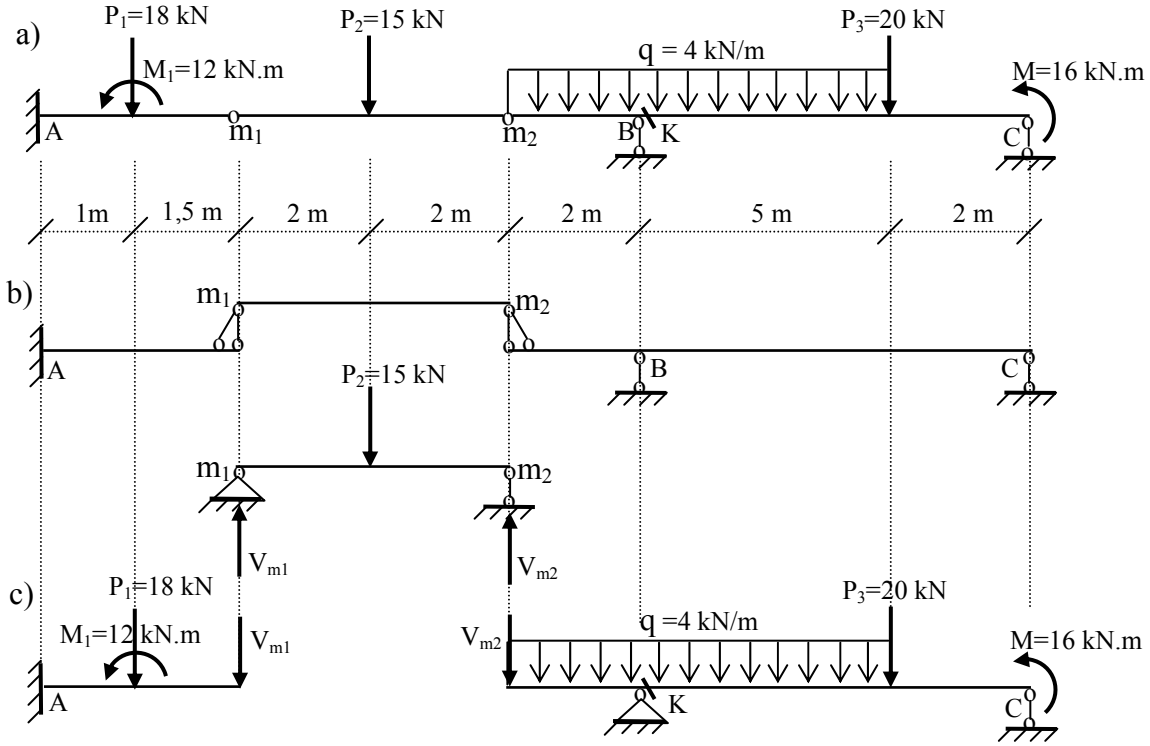
$$M_{\max} = \frac{p.l}{4} = \frac{15.4}{4} = 15\ kN.m'dir.$$



Şekil 2.4.3. a) m_1m_2 kirişi, b) *M* diyagramı, c) *T* diyagramı.

Kesme kuvveti değerleri : $T_{m1} = V_{m1} = 7{,}5\ kN;\quad T_{m2} = V_{m2} = -7{,}5\ kN.$

Bu değerlere uygun olarak kirişin M (Şekil 2.4.3b) ve T (Şekil 2.4.3c) diyagramları çizilmiştir.



Şekil 2.4.2. a) Gerber kirişi, b) Taşıma şeması, c) Hesaplama şeması.

Taşıma şemasından (Şekil 2.4.2b) görüldüğü gibi esas kirişlerin her ikisi de (Am_1 ve BC) aynı seviyede olduğundan, bu iki kirişin hesap sırası önemli değildir.

<u>BC kirişinin (Şekil 2.4.4a) hesaplanması:</u>

Mesnet tepkileri

$$\sum M_C = -V_{m2}.9 - q.7.(5{,}5) + V_B.7 - P_3.2 - M = 0$$

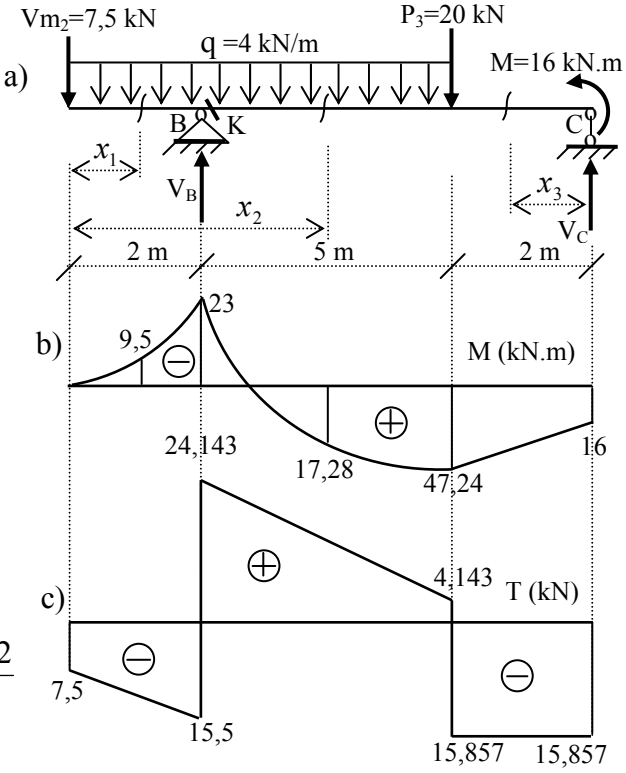
$$V_B = \frac{(7{,}5).9 + 4.7.(5{,}5) + 20.2 + 16}{7}$$

$$V_B = 39{,}64285\ kN.$$

$$\sum M_B = -M - V_C.7 + P_3.5 + q.5.(2{,}5) - q.2.1 - V_{m2}.2 = 0$$

$$V_C = \frac{-16 + 20.5 + 4.5.(2{,}5) - 4.2.1 - (7{,}5).2}{7}$$

$$V_C = 15{,}85714\ kN.$$



Şekil 2.4.4. a) BC kirişi, b) M diyagramı, c) T diyagramı.

Sağlama :

$$\sum Y = -V_{m2} - q.7 + V_B - P_3 + V_C = 0 \Rightarrow -7{,}5 - 4.7 - 20 + 39{,}643 + 15{,}857 = 0.$$

Her bir bölge için (Şekil 2.4.4a) M ve T 'nin ifadelerinin yazılıp, değerlerinin hesaplanması.

$0 \le x_1 \le 2$

$$M_{x1} = -V_{m2}.x_1 - q.\frac{x_1^2}{2}; \quad T_{x1} = -V_{m2} - q.x_1.$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow M_{x1} = 0, \quad T_{x1} = -7{,}5\ kN. \quad x_1 = 1\ m \Rightarrow M_{x2} = -(7{,}5).1 - 4.\frac{1}{2} = -9{,}5\ kN.m.$$

$$x_1 = 2\ m \Rightarrow M_{x1} = -(7{,}5).2 - 4.\frac{2^2}{2} = -23\ kN.m, T_{x1} = -7{,}5 - 4.2 = -15{,}5\ kN.$$

$2 \le x_2 \le 7$

$$M_{x2} = -V_{m2}.x_2 - q.\frac{x_2^2}{2} + V_B(x_2 - 2)\ ; \quad T_{x2} = -V_{m2} - q.x_2 + V_B.$$

$$x_2 = 2\ m \Rightarrow M_{x2} = --23\ kN.m, \quad T_{x2} = -7{,}5 - 4.2 + 39{,}64285 = 24{,}143\ kN.$$

$0 \le x_3 \le 2$

$$M_{x3} = M + V_C.x_3\ ; \quad T = -V_C = -15{,}857\ kN.$$

$$x_3 = 0 \Rightarrow M_{x3} = M = 16\ kN.m, x_3 = 2\ m \Rightarrow M_{x3} = 16 + (15{,}857).2 = 47{,}714\ kN.m.$$

Hesaplanmış bu değerlere göre BC kirişinin M (Şekil 2.4.4b) ve T (Şekil 2.4.4c) diyagramları çizilmiştir.

<u>Am_1 kirişi (Şekil 2.4.5a) için M ve T diyagramlarının çizimi:</u>

Kirişin bölgeleri için M ve T değerlerinin hesaplanması:

$0 \le x_1 \le 1{,}5$

$$M_{x1} = -V_{m1}.x_1\ ; \quad T = V_{m1} = 7{,}5\ kN.$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow \quad M_{x1} = 0, x_1 = 1{,}5\ m \Rightarrow$$

$$M_{x1} = -(7{,}5).1{,}5 = -11{,}25\ kN.m.$$

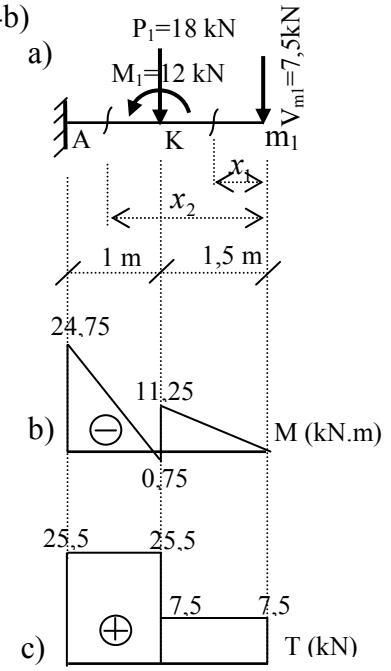
$1{,}5 \le x_2 \le 2{,}5$

$$M_{x2} = -V_{m1}.x_2 - P_1(x_2 - 1{,}5) + M_1$$

$$T = V_{m1} + P_1 = 7{,}5 + 18 = 25{,}5\ kN.$$

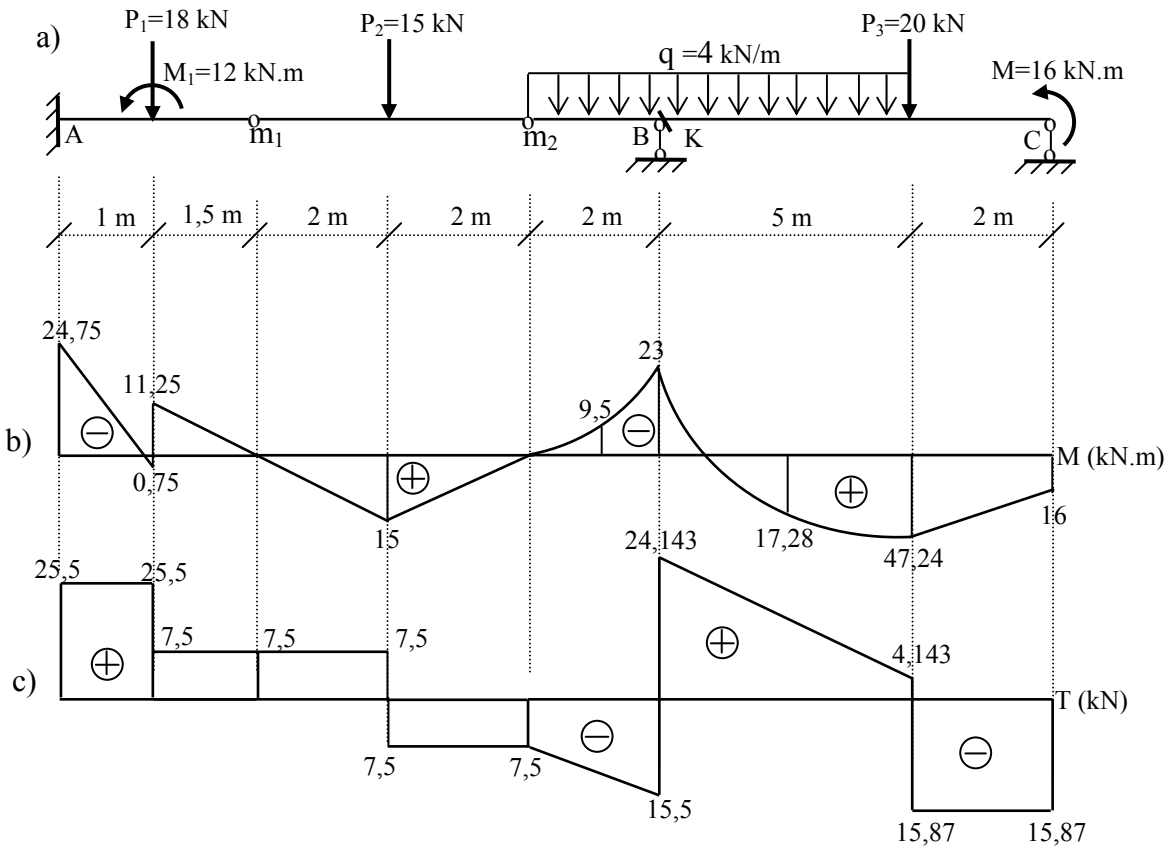
$$x_2 = 1{,}5\ m \Rightarrow M_{x2} = -(7{,}5).1{,}5 + 12 = 0{,}75\ kN.m$$

$$x_2 = 2{,}5\ m \Rightarrow M_{x2} = -7{,}5.(2{,}5) - 18.1 + 12 = -24{,}75\ kN.m.$$



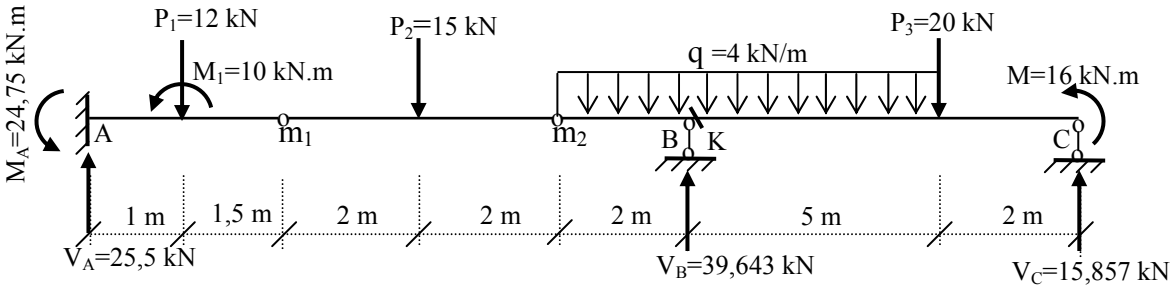
Şekil 2.4.5. a) Am_1 kirişi, b) M diyagramı, c) T diyagramı.

Bulunmuş değerlere göre kirişin M (Şekil 2.4.5b) ve T (Şekil 2.4.5c) diyagramları çizilmiştir. Basit kirişlerin M ve T diyagramlarını kullanarak Gerber kirişin M (Şekil 2.4.6b) ve T (Şekil 2.4.6c) diyagramları çizilmiştir.



Şekil 2.4.6. a) Gerber kirişi, b) *M* diyagramı, c) *T* diyagramı.

Verilmiş Gerber kirişin tümünün dengede olmasının kontrolü (Şekil 2.4.7):



Şekil 2.4.7

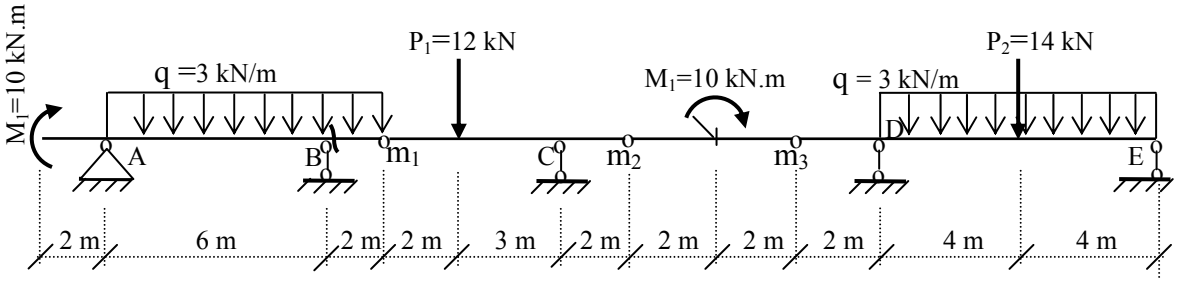
$$\sum Y = V_A - P_1 - P_2 - q.7 + V_B - P_3 + V_C = 0 \quad \Rightarrow$$

$$25{,}5 - 18 - 15 - 4.7 + 39{,}643 - 20 + 15{,}857 = 0$$

$$\sum M_{m2} = -M_A - M_1 - P_1.(5{,}5) - P_2.2 + q.7.(3{,}5) - V_B.2 + P_3.7 - V_C.9 - M + V_A.7 = 0 \Rightarrow$$

$$-37{,}5 + (22{,}5).7 - 12 - 18.(5{,}5) - 15.2 + 4.7.(3{,}5) - (39{,}643).2 + 20.7 - (15{,}857).9 - 16 = 0$$

Örnek 2.5. Yükleme durumu ve ölçüleri Şekil 2.5.1'de verilmiş olan Gerber kirişin eğilme momenti ve kesme kuvveti diyagramlarının çizilmesi istenmektedir.

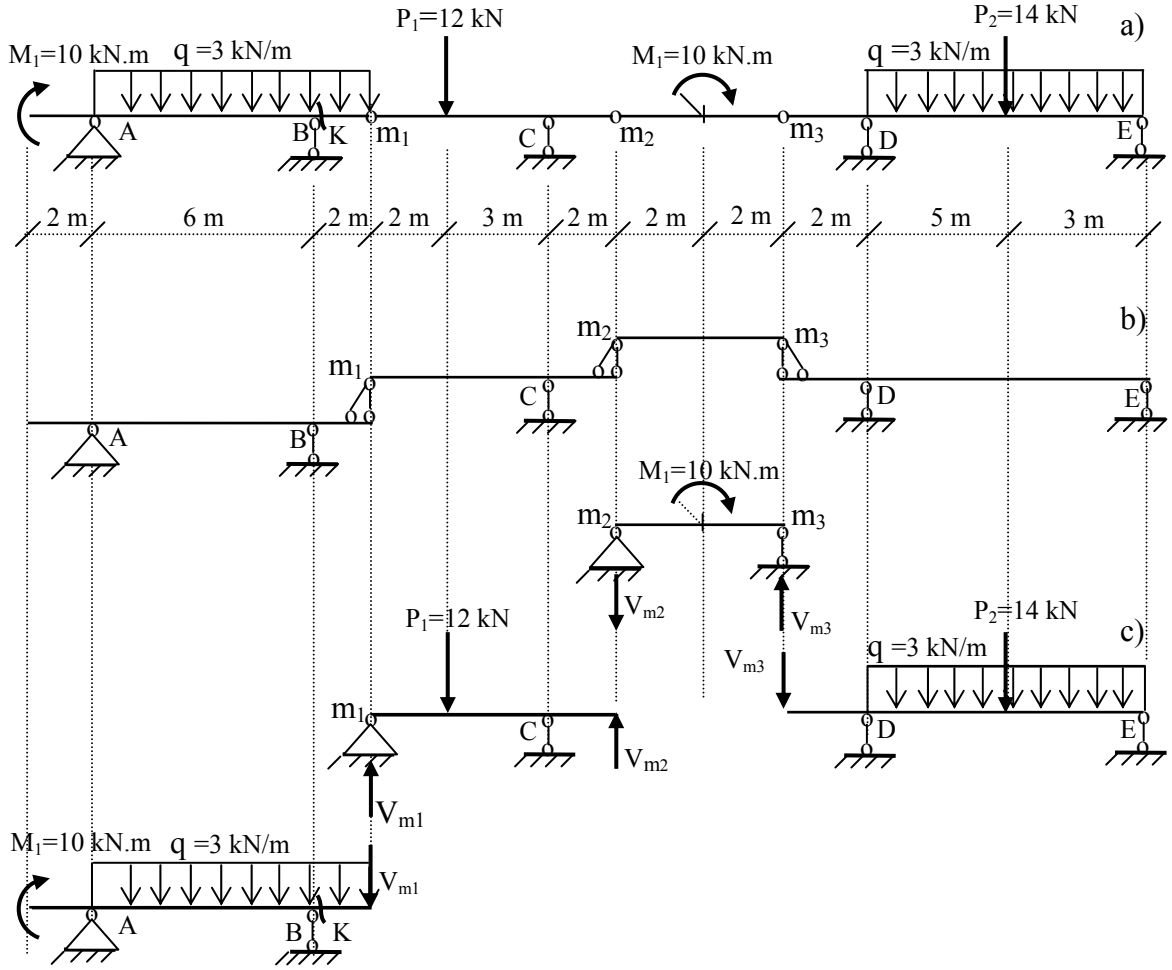


Şekil 2.5.1

Çözüm :

Serbestlik derecesi W = 3.P – 2.m – C_m= 3.4 -2.3 – 6 = 0'dır ve Şekil 2.5.1'den görüldüğü gibi kirişin yararlı bünyeye sahip olma şartları sağlanmıştır. Böylece kiriş geometrik değişmezdir.

Sistemin taşıma (Şekil 2.5.2b) ve hesaplama (Şekil 2.5.2c) şemaları çizildikten sonra her bir kirişin hesabı yapılır.



Şekil 2.5.2. a) Gerber kirişi, b) Taşıma şeması, c) Hesaplama şeması.

Hesaplamaya en üstteki kiriş olan $m_2\, m_3$ kirişinden (Şekil 2.5.3a) başlanır.

Bu tür yükleme durumunda, yani kiriş üzerinde sadece bir tekil moment olduğunda mesnet tepkileri ters işaretle birbirine eşittirler.

$$V_{m2} = V_{m3} = \frac{M}{4} = \frac{10}{4} = 2{,}5\ kN.$$

Kirişin bölgeleri için (Şekil 2.5.3a) M ve T değerleri şöyle hesaplanır:

$$0 \le x_1 \le 2$$

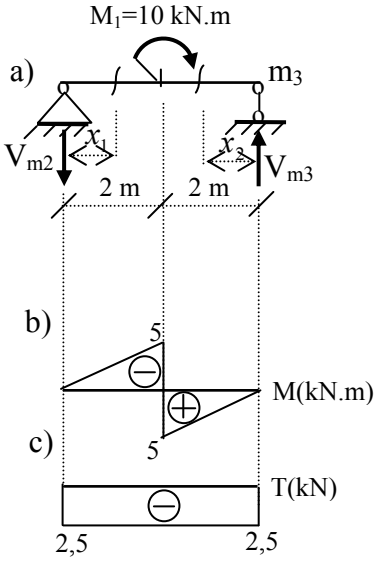
$$M_{x1} = -V_{m2}.x_1\ ; \quad T = -V_{m2} = -2{,}5\ kN.$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow M_{x1} = 0, \quad x_1 = 2\ m \Rightarrow M_{x1} = -(2{,}5).2 = -5\ kN.m$$

$$0 \le x_2 \le 2$$

$$M_{x2} = V_{m3}.x_2\ ; \quad T = -V_{m3} = -2{,}5\ kN.$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow M_{x2} = 0, \quad x_2 = 2\ m \Rightarrow M_{x2} = (2{,}5).2 = 5\ kN.m$$



Şekil 1.5.3
a) $m_2\, m_3$ kirişi ,b) M diyagramı,
c) T diyagramı.

Bu değerlere göre kirişin M (Şekil 1.5.3b) ve T (Şekil 1.5.3c) diyagramları çizilmiştir.

<u>DE kirişinin (Şekil 1.5.4a) hesabı:</u>

Mesnet tepkileri

$$\sum M_E = -V_{m3}.10 + V_D.8 - q.8.4 - P_2.3 = 0 \Rightarrow$$

$$V_D = \frac{(2{,}5).10 + 3.8.4 + 14.3}{8} = 20{,}375\ kN.$$

$$\sum M_D = -V_E.8 + q.8.4 + P_2.5 = 0 \Rightarrow$$

$$V_E = \frac{3.8.4 + 14.5 - (2{,}5).2}{8} = 20{,}125\ kN.$$

Sağlama :

$$\sum Y = -V_{m3} + V_D - q.8 - P_2 + V_E = 0 \Rightarrow$$

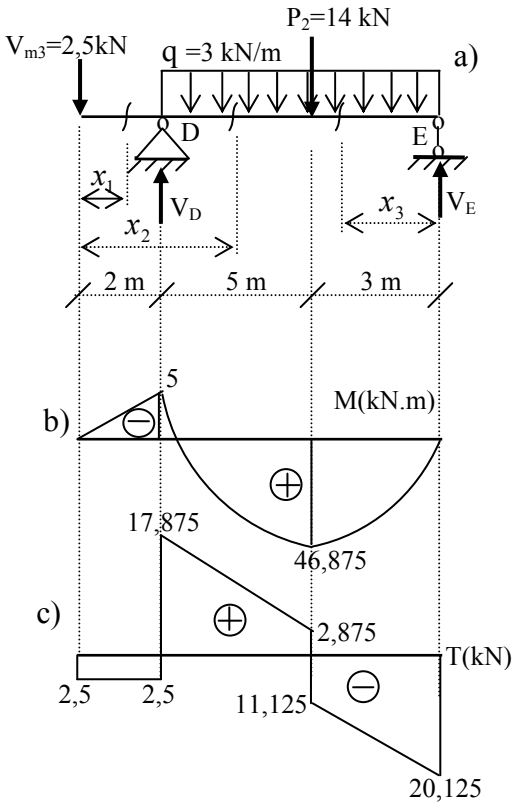
$$-2{,}5 + 20{,}375 - 3.8 - 14 + 20{,}125 = 0.$$

Bölgelere göre (Şekil 1.5.4a) M ve T değerlerinin bulunması :

$$0 \le x_1 \le 2$$

$$M_{x1} = -V_{m3}.x_1\ ; \ T = -V_{m3} = -2{,}5\ kN.$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow M_{x1} = 0,\ x_1 = 2\ m \Rightarrow M_{x1} = -5\ kN.m$$



Şekil 2.5.4. a) DE kirişi, b) M diyagramı,

c) T diyagramı.

$2 \le x_2 \le 7$

$M_{x2} = -V_{m3}.x_2 + V_D.(x_2 - 2) - q.\dfrac{(x_2-2)^2}{2}, \quad T_{x2} = -V_{m3} + V_D - q.(x_2 - 2).$

$x_2 = 2\,m \Rightarrow M_{x2} = -5\,kN.m, \; T_{x2} = -2{,}5 + 20{,}375 = 17{,}875\,kN.$

$x_2 = 4\,m \Rightarrow M_{x2} = -(2{,}5).4 + (20{,}375).2 - 3.\dfrac{(4-2)^2}{2} = 24{,}75\,kN.m$

$x_2 = 7\,m \Rightarrow M_{x2} = -(2{,}5).7 + (20{,}375).5 - 3.\dfrac{(7-2)^2}{2} = 46{,}875\,kN.m$

$T_{x2} = -2{,}5 + 20{,}375 - 3.5 = 2{,}875\,kN.$

$0 \le x_3 \le 3$

$M_{x3} = V_E.x_3 - q.\dfrac{x_3^2}{2}; \quad T_{x3} = -V_E + q.x_3. \Rightarrow x_3 = 0 \Rightarrow M_{x3} = 0, \; T_{x3} = -V_E = -20{,}125\ kN.$

$x_3 = 3\ m \Rightarrow M_{x3} = (20{,}125).3 - 3.\dfrac{3^2}{2} = 46{,}875\ kN.m, \; T_{x3} = -20{,}125 + 3.3 = -11{,}125\ kN.$

Bulunan değerlere uygun olarak M (Şekil 2.5.4b) ve T (Şekil2 .5.4c) diyagramları çizilmiştir.

<u>m_l C kirişinin (Şekil 2.5.5a) hesaplanması :</u>

Mesnet tepkileri

$\sum M_C = V_{m1}.5 - P_1.3 - V_{m2}.2 = 0 \Rightarrow$

$V_{m1} = \dfrac{12.3 + ('2{,}5).2}{5} = 8{,}2\,kN$

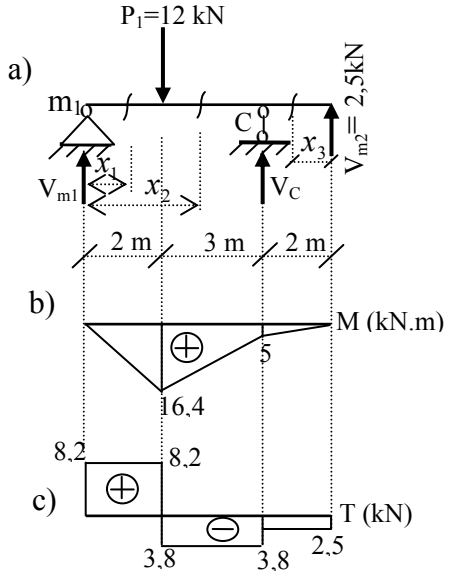
$\sum M_{m1} = -V_{m2} - V_C.5 + P_1.2 = 0 \Rightarrow$

$V_C = \dfrac{-(2{,}5).7 + 12.2}{5} = 1{,}3\ kN.$

Sağlama :

$\sum Y = V_{m1} - P_1 + V_C + V_{m1} = 0 \Rightarrow$

$8{,}2 - 12 + 1{,}3 + 2{,}5 = 0$



Şekil 2.5.5. a) m_1C kirişi, b) M diyagramı, c) T diyagramı.

Her bir bölgede (Şekil 1.5.5a) M ve T değerleri.

$0 \le x_1 \le 2$

$M_{x1} = V_{m1}.x_1 \; ; \quad T = V_{m1} = 8{,}2\ kN.$

$x_1 = 0 \Rightarrow M_{x1} = 0, \; x_1 = 2\,m \Rightarrow M_{x1} = 16{,}4\,kN.m.$

$2 \le x_2 \le 5$

$M_{x2} = V_{m1}.x_2 - P_1.(x_2 - 2), \quad T = V_{m1} - P_1 = 8{,}2 - P_1 = -3{,}8\ kN.$

$x_2 = 2\ m \Rightarrow \quad M_{x2} = 16{,}4\ kN.m, \; x_2 = 5\ m \Rightarrow \quad M_{x2} = (8{,}2).5 - 12.3 = 5\ kN.m.$

$0 \le x_3 \le 2$

$M_{x3} = V_{m2}.x_3$; $T = -2{,}5\ kN.$ $x_3 = 0 \Rightarrow M_{x3} = 0$, $x_3 = 2\ m \Rightarrow M_{x3} = 5\ kN.m$.

Bu değerlere göre *M* (Şekil 2.5.5b) ve *T* (Şekil 2.5.5c) diyagramları çizilmiştir.

AB kirişinin (Şekil 1.5.6a) hesabı:

Mesnet tepkileri

$$\sum M_B = M + V_A.6 - q.6.3 + \\ + V_{m2}.2 + q.2.1 = 0 \Rightarrow$$

$$V_A = \frac{-12 + 3.6.3 - (8{,}2).2 - 3.2.1}{6} = 3{,}2667\,kN$$

$$\sum M_A = V_{m1}.8 + q.8.4 - V_B.6 + M = 0 \Rightarrow$$

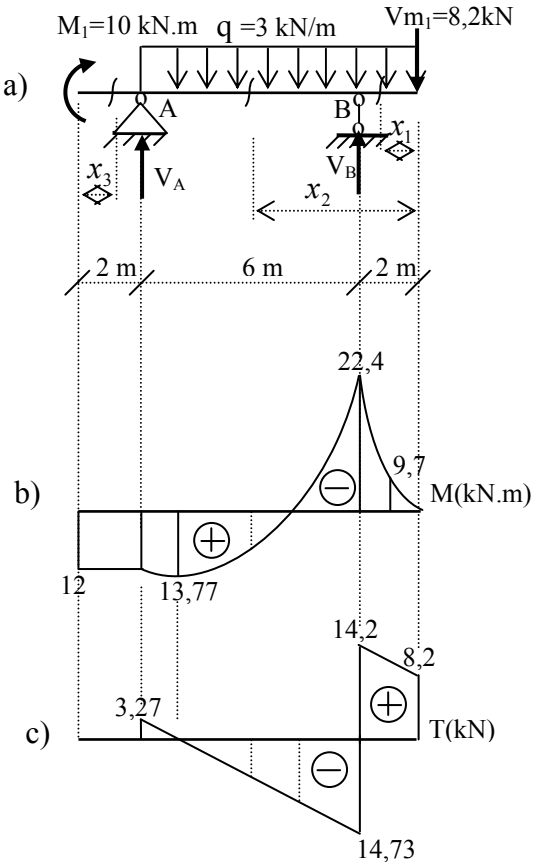
$$V_B = \frac{(8{,}2).8 + 3.8.4 + 12}{6} = 28{,}9333\ kN.$$

Sağlama :

$$\sum Y = V_A - q.8 + V_B - V_{m1} = 0 \Rightarrow$$

$$3{,}2667 - 3.8 + 28{,}9333 - 8{,}2 = 0$$

Bölgelere göre (Şekil 1.5.6a) *M* ve *T* değerlerinin bulunması:



Şekil 2.5.6. a) AB kirişi, b) *M*diyagramı, c) *T* diyagramı.

$0 \le x_1 \le 2$

$$M_{x1} = -V_{m1}.x_1 - q.\frac{x_1^2}{2}; \quad T_{x1} = V_{m1} + q.x_1 \Rightarrow$$

$x_1 = 0 \Rightarrow M_{x1} = 0$, $T_{x1} = 8{,}2\ kN$,

$$x_1 = 1\,m \Rightarrow M_{x1} = -(8{,}2).1 - 3.\frac{1}{2} = -9{,}7\,kN.m$$

$$x_1 = 2\,m \Rightarrow M_{x1} = -(8{,}2).2 - 3.\frac{2^2}{2} = -22{,}4\ kN.m,$$

$T_{x1} = 8{,}2 + 3.2 = 14{,}2\ kN.$

$2 \le x_2 \le 8$

$$M_{x2} = -V_{m1}.x_2 - q.\frac{x_2^2}{2} + V_B.(x_2 - 2); \quad T_{x2} = V_{m1} + q.x_2 - V_B\,.$$

$x_2 = 2\,m \Rightarrow M_{x2} = -22{,}4\,kN.m,$ $T_{x2} = 8{,}2 + 3.2 - 28{,}9333 = -14{,}7333\,kN.$

Bu bölgede eğilme momentinin maksimum değer alacağı kesitin yeri:

$$T_{x2} = 0 \Rightarrow \quad 8{,}2 + 3.x_0 - 28{,}9333 = 0 \Rightarrow x_0 = 6{,}9111\ m.$$

$$x_0 = 6{,}9111\ m \Rightarrow M_{\max} = -(8{,}2).(6{,}9111) - 3.\frac{(6{,}9111)^2}{2} + (28{,}9333).(4{,}9111) = 13{,}778\ kN.m$$

$$x_2 = 8m \Rightarrow M_{x2} = -(8{,}2).8 - 3.\frac{8^2}{2} + (28{,}9333).6 = 12\ kN.m,$$

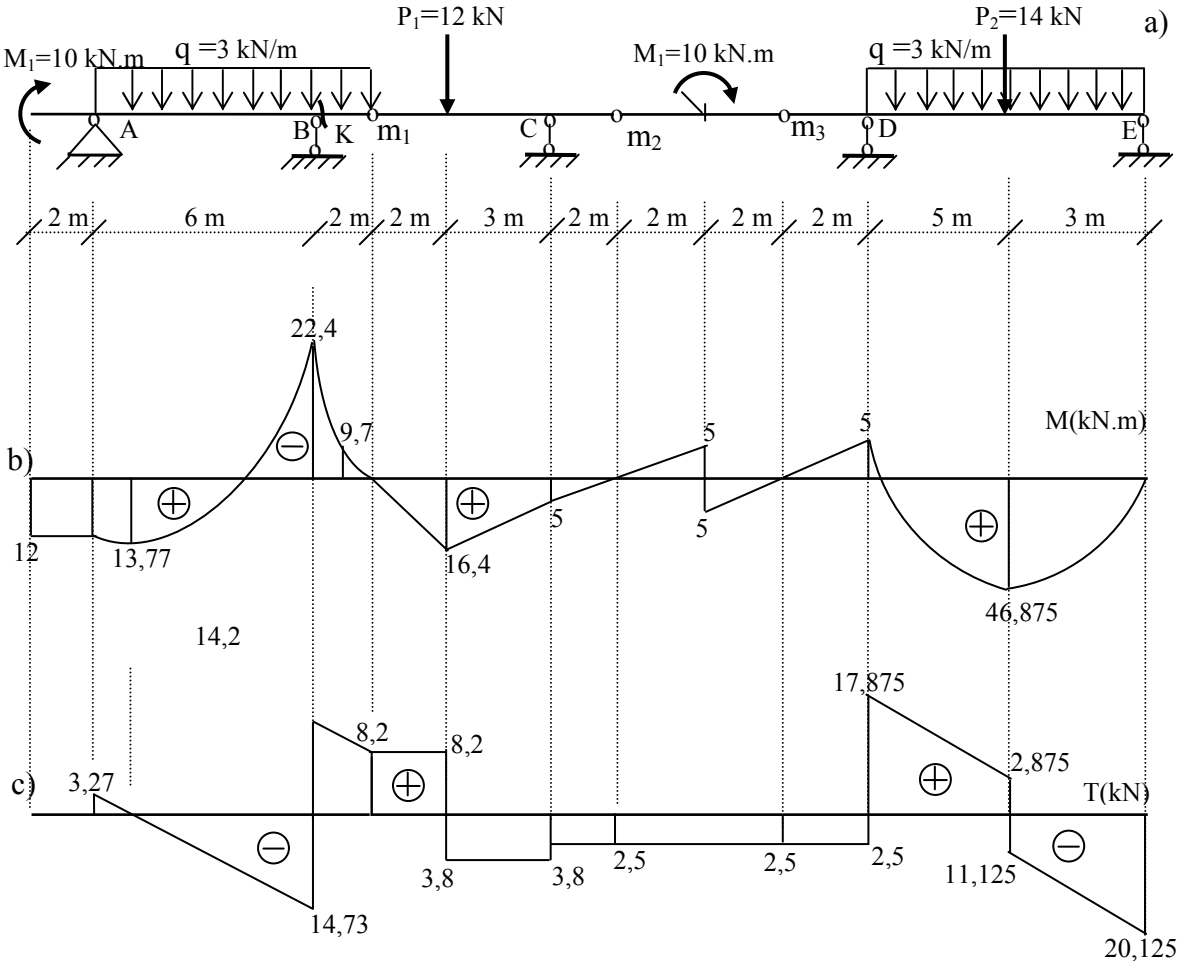
$$T_{x2} = 8{,}2 + 3.8 - 28{,}9333 = 3{,}2667\,kN.$$

$$0 \le x_3 \le 2$$

$$M = 12\ kN.m; \qquad T = 0.$$

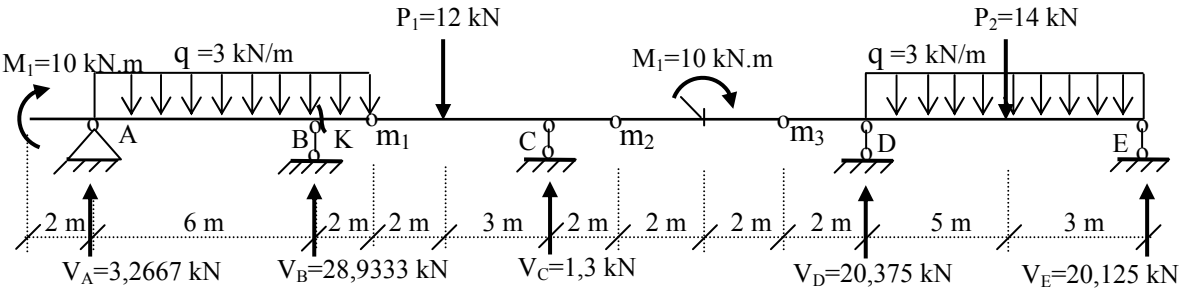
Hesaplanmış değerlere göre kirişin M (Şekil 2.5.6b) ve T (Şekil 2.5.6c) diyagramları çizilmiştir.

Gerber kirişi oluşturan kirişlerin M ve T diyagramları kullanılarak, tüm sistemin eğilme momenti (Şekil 2.5.7c) ve kesme kuvveti (Şekil 2.5.7c) diyagramları çizilmiştir.



Şekil 2.5.7. a) Gerber kiriş, b) M diyagramı, c) T diyagramı.

Kirişin tümüne ait denge kontrolü:



Şekil 2.5.8

$$\sum Y = V_A - q.8 + V_B - P_1 + V_C - q.8 + V_D - P_2 + V_E = 0 \Rightarrow$$

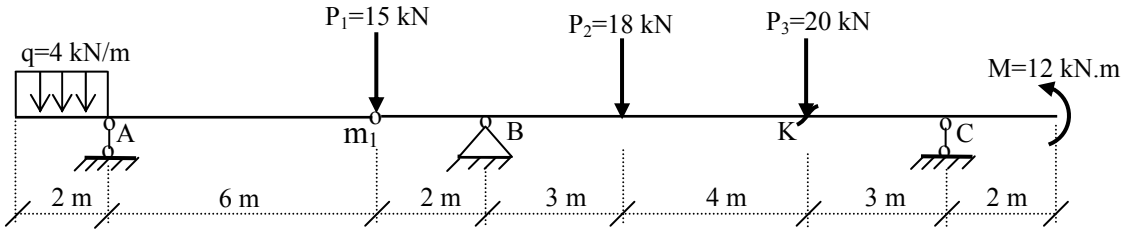
$$3{,}2667 - 3.8 + 28{,}9333 - 12 + 1{,}3 - 3.8 + 20{,}375 - 14 + 20{,}125 = 0$$

$$\sum M_{m2} = M + V_A.15 - q.8.11 + V_B.9 - P_1.5 + V_C.2 + M_1 + q.8.10 - V_D.6 - V_E.14 = 0 \Rightarrow$$

$$12 + (3{,}2667).15 - 3.8.11 + (28{,}9333).9 - 12.5 + (1{,}3).2 + 10 + 3.8.10 + 14.11 -$$

$$- (20{,}375).6 - (20{,}125).14 = 0$$

Örnek 2.6. Boyutları ve yükleme durumu Şekil 2.6.1'de verilmiş Gerber kirişin eğilme momenti ve kesme kuvveti diyagramlarını çizip, genel denge şartlarını kontrol ediniz.

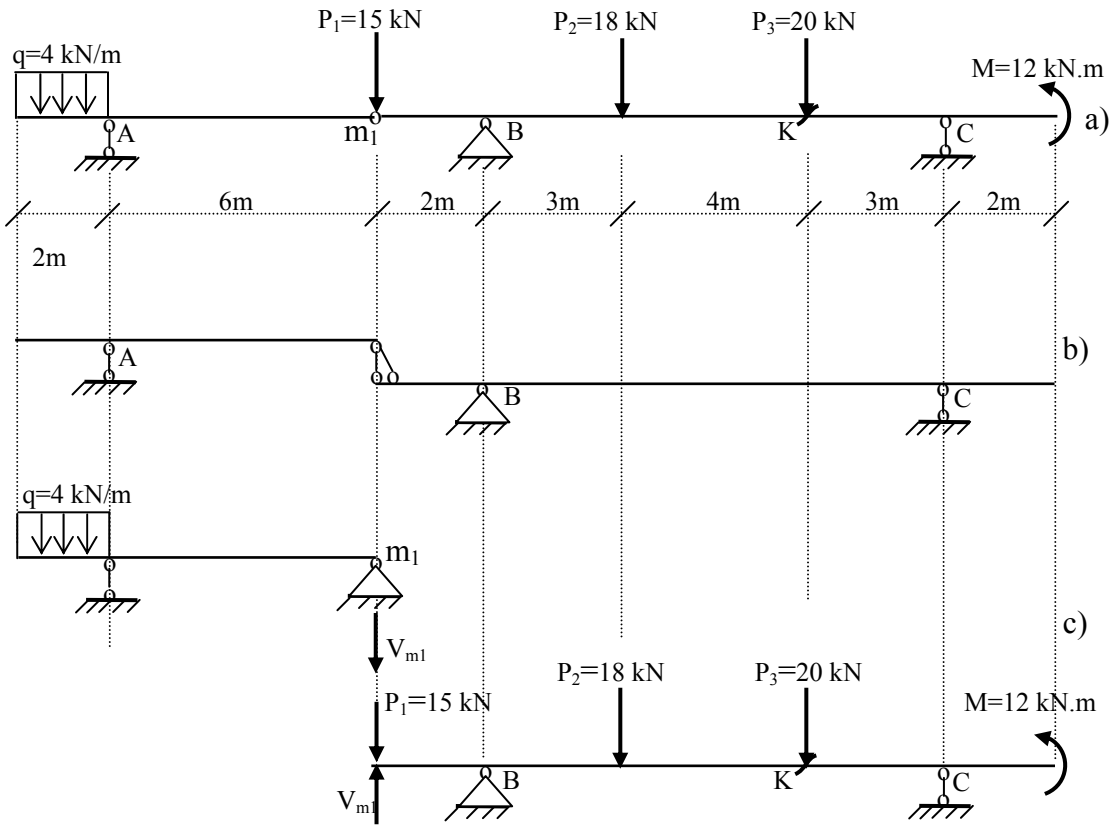


Sekil 2.6.1

Çözüm:

Serbestlik derecesi W = 3.P – 2.m – C_m= 3.2 -2.1 – 4 = 0'dır ve Şekil 2.6.1'den görüldüğü gibi sistem yararlı bünyeye sahiptir. Böylece kiriş geometrik değişmezdir.

Gerber kirişin taşıma ve hesaplama şemaları sırasıyla Şekil 2.6.2b ve Şekil 2.6.2c'de çizilmiştir.



Şekil 2.6.2. a) Gerber kirişi, b) Taşıma şeması, c) Hesaplama şeması.

<u>Am$_1$ kirişinin (Şekil 2.6.3a) hesaplanması:</u>

Mesnet tepkileri

$$\sum M_{m1} = -q.2.7 + V_A.6 = 0 \Rightarrow$$

$$V_A = \frac{4.2.7}{6} = 9{,}333\ kN.$$

$$\sum M_A = V_{m1}.6 - q.2.1 = 0 \Rightarrow$$

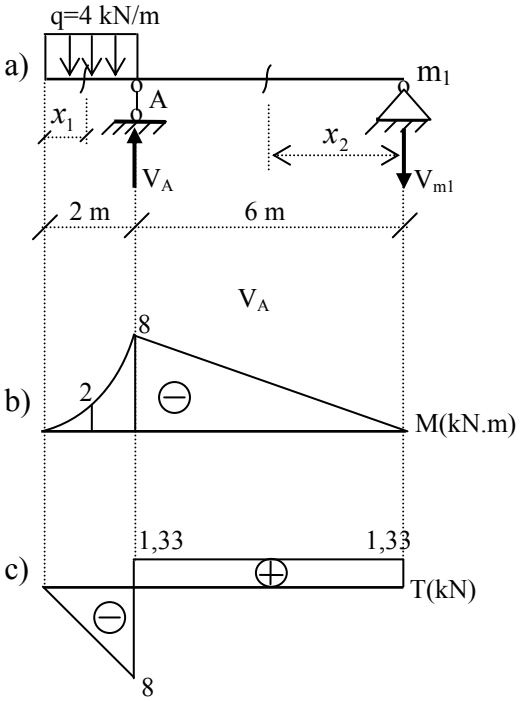
$$V_{m1} = \frac{4.2.1}{6} = 1{,}333\ kN.$$

Sağlama :

$$\sum Y = -q.2 + V_A - V_{m1} = 0 \Rightarrow$$

$$-4.2 + 9{,}333 - 1{,}333 = 0$$

Bölgelerde (Şekil 2.6.3a) *M* ve *T* 'nin değerlerinin hesaplanması:



Şekil 2.6.3. a) Am$_1$ kirişi, b) *M* diyagramı, c) *T* diyagramı.

$0 \le x_1 \le 2$

$M_{x1} = -q\dfrac{x_1^2}{2}$; $T_{x1} = -q.x_1 \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{x1} = 0, \quad T_{x1} = 0.$

$x_1 = 1\,m \Rightarrow \quad M_{x1} = -4.\dfrac{1^2}{2} = -2\ kN.m$; $x_1 = 2\,m \Rightarrow M_{x1} = -4.\dfrac{2^2}{2} = -8\ kN.m,$

$T_{x1} = -4.2 = -8\ kN.$

$0 \le x_2 \le 6$

$M_{x2} = -V_m.x_2$; $\quad T = V_m = 1{,}333\ kN. \quad x_2 = 0 \Rightarrow M_{x2} = 0$, $x_2 = 6\,m \Rightarrow M_{x2} = -8\ kN.m$

Bu değerlere göre Am_1 kirişinin *M* (Şekil 2.6.3b) ve *T* (Şekil2.6.3c) diyagramları çizilmiştir.

BC esas (taşıyıcı) kirişinin (Şekil 2.6.4a) hesaplanması:

Mesnet tepkileri

$$\sum M_C = -P_1.12 + V_m.12 + V_A.10 - P_2.7 - P_3.3 - M = 0 \Rightarrow$$

$$V_B = \frac{15.12 - (1{,}3333).12 + 18.7 + 20.3 + 12}{10} = 36{,}2\ kN$$

$$\sum M_B = -M - V_C.10 + P_3.7 + P_2.3 + V_m.2 - P_1.2 = 0 \Rightarrow$$

$$V_C = \frac{-12 + 20.7 + 18.3 + (1{,}333).2 - 15.2}{10} = 15{,}4666\ kN.$$

Sağlama :

$$\sum Y = -P_1 + V_m + V_A - P_2 - P_3 + V_C = 0 \Rightarrow \quad -15 + 1{,}333 + 36{,}2 - 18 - 20 + 15{,}4666 = 0$$

BC kirişinde olduğu gibi sadece tekil yüklerle yüklü kirişlerde tekil yüklerin uygulama noktaları arasındaki bölgelerde kesme kuvveti sabit kalır, eğilme momenti ise bir doğru şeklinde değişir. Buna göre de *M* ve *T* diyagramlarının çizilmesi için iç kuvvetlerin değerlerinin kritik kesitlerde hesaplanması yeterli olur.

Eğilme momenti için :

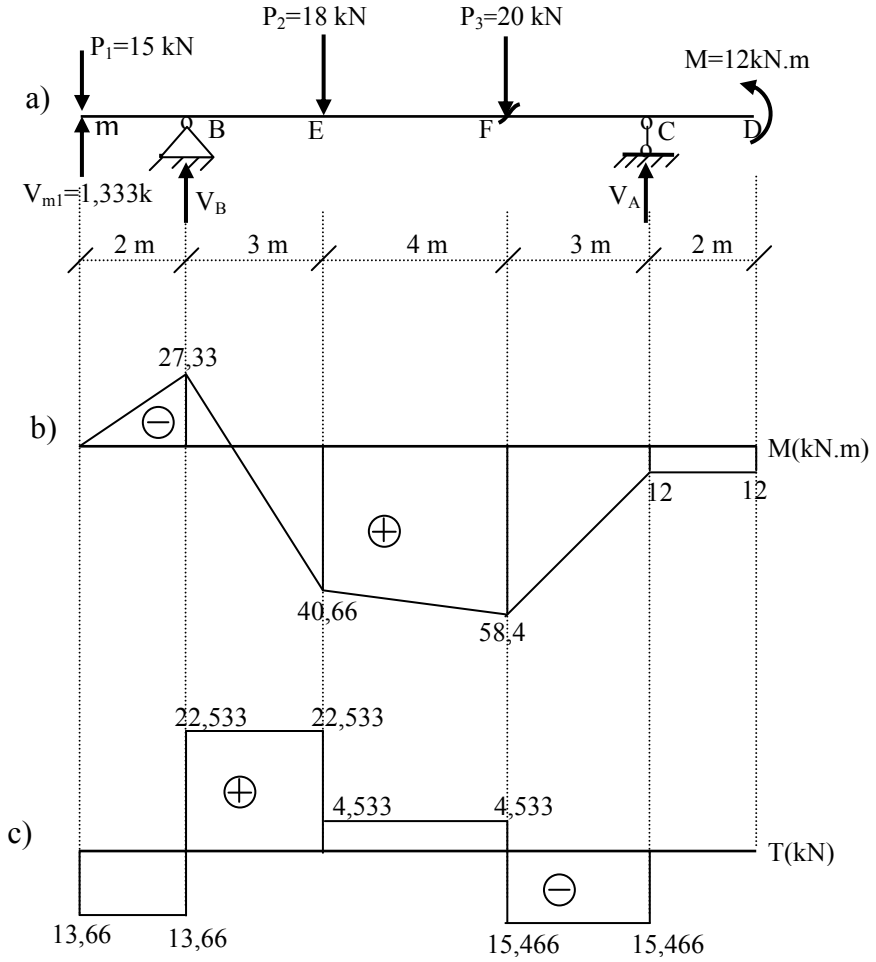
$M_{m1} = 0$; $M_B = -P_1.2 + V_m.2 = (-15 + 1{,}333).2 = -27{,}333\ kN.m$

$M_E = -P_1.5 + V_m.5 + V_B.3 = (-15 + 1{,}333). + (36{,}2).3 = 40{,}2666\ kN.m$

$M_F = -P_1.9 + V_m.9 + V_B.7 - P_2.4 = (-15 + 1{,}333).9 + (36{,}2).7 - 18.4 = 58{,}4\ kN.m$

Sağ uçtan bakılarsa

$M_D = M = 12\ kN.m$; $\quad M_C = M = 12\ kN.m$; $\quad M_F = M + V_C.3 = 12 + (15{,}466).3 = 58{,}4\,kN.m$



Şekil 2.6.4. a) BC kirişi, b) *M* diyagramı, c) *T* diyagramı.

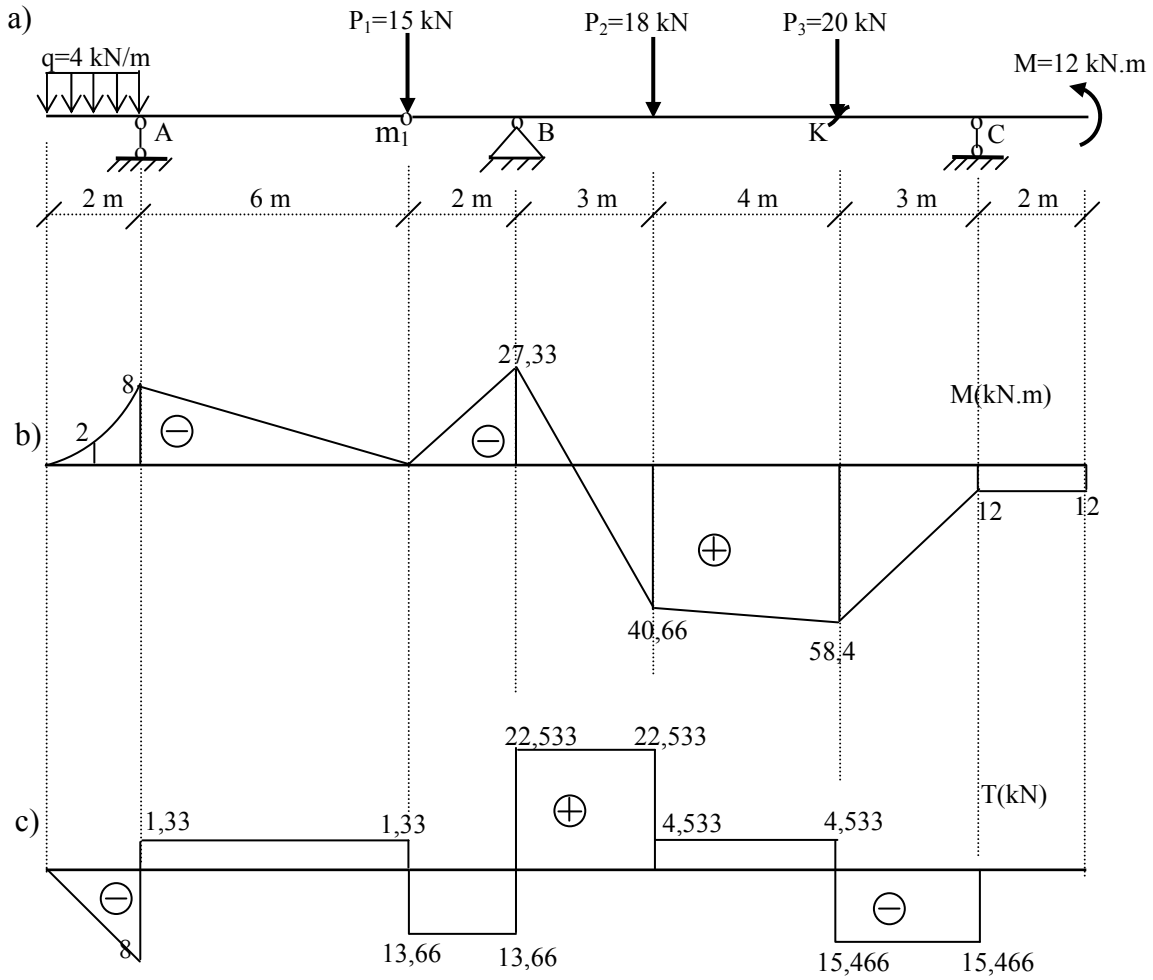
Kesme kuvveti için (Sol uçtan bakıldığında)

$$T_{m1} = -P_1 + V_{m1} = -15 + 1{,}3333 = -13{,}6667\ kN = T_A^{sol}$$
$$T_a^{sağ} - P_1 + V_{m1} + V_B = -15 + 1{,}3333 + 36{,}2 = 22{,}5333\ kN = T_E^{sol}$$
$$T_E^{sağ} = (-P_1 + V_{m1} + V_B) - P_2 = T_E^{sol} - 18 = 22{,}5333 - 18 = 4{,}5333\ kN = T_F^{sol}$$
$$T_F^{sağ} = (-P_1 + V_{m1} + V_B - P_2) - P_3 = T_F^{sol} - P_3 = 4{,}5333 - 20 = -15{,}4666\ kN$$

Sağ uçtan bakıldığında

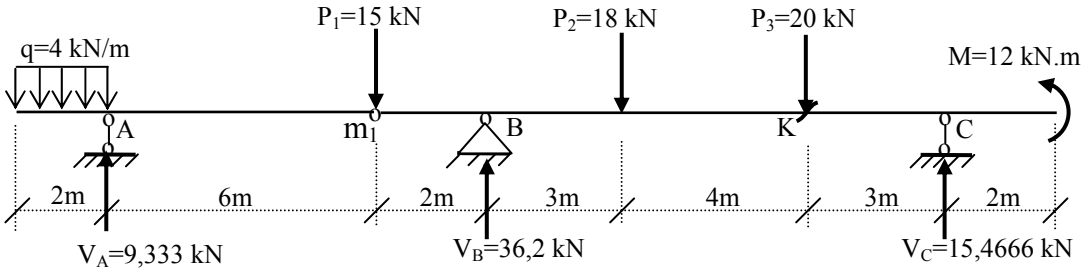
$$T_D = 0 = T_C^{sağ}\ ; \qquad T_C^{sol} = -V_C = -15{,}4666\,kN.$$

Bu değerlere göre kirişin *M* (Şekil 2.6.4b) ve *T* (Şekil 2.6.4c) diyagramları çizilmiştir. Am_1 ve BC kirişlerinin *M* (Şekil 2.6.3b, Şekil 1.6.4b) ve *T* (Şekil 2.6.3c, Şekil 2.6.4c) diyagramları birlikte çizilerek Gerber kirişin *M* (Şekil 2.6.5b) ve *T* (Şekil 2.6.5c) diyagramları elde edilir.



Şekil 2.6.5. a) Hesaplanan kiriş, b) *M* diyagramı, c) *T* diyagramı.

Gerber kirişin genel denge şartlarının kontrolü:



Şekil 2.6.6

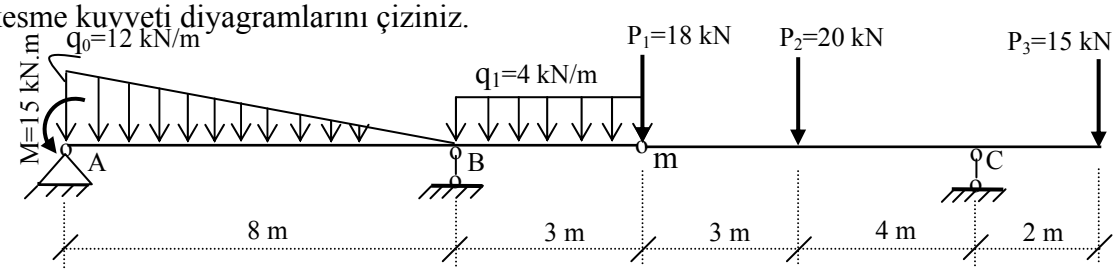
$$\sum Y = -q.2 + V_A - P_1 + V_B - P_2 - P_3 + V_C = 0 \Rightarrow$$

$$-4.2 + 9{,}3333 - 15 + 36{,}2 - 18 - 20 + 15{,}4666 = 0$$

$$\sum M_B = -q.2.9 + V_V.8 - P_1.2 + P_2.3 + P_3.7 - V_C.10 - 12 = 0 \Rightarrow$$

$$-4.2.9 + (9{,}3333).8 - 15.2 + 18.3 + 20.7 - (15{,}4666).10 - 12 = 0$$

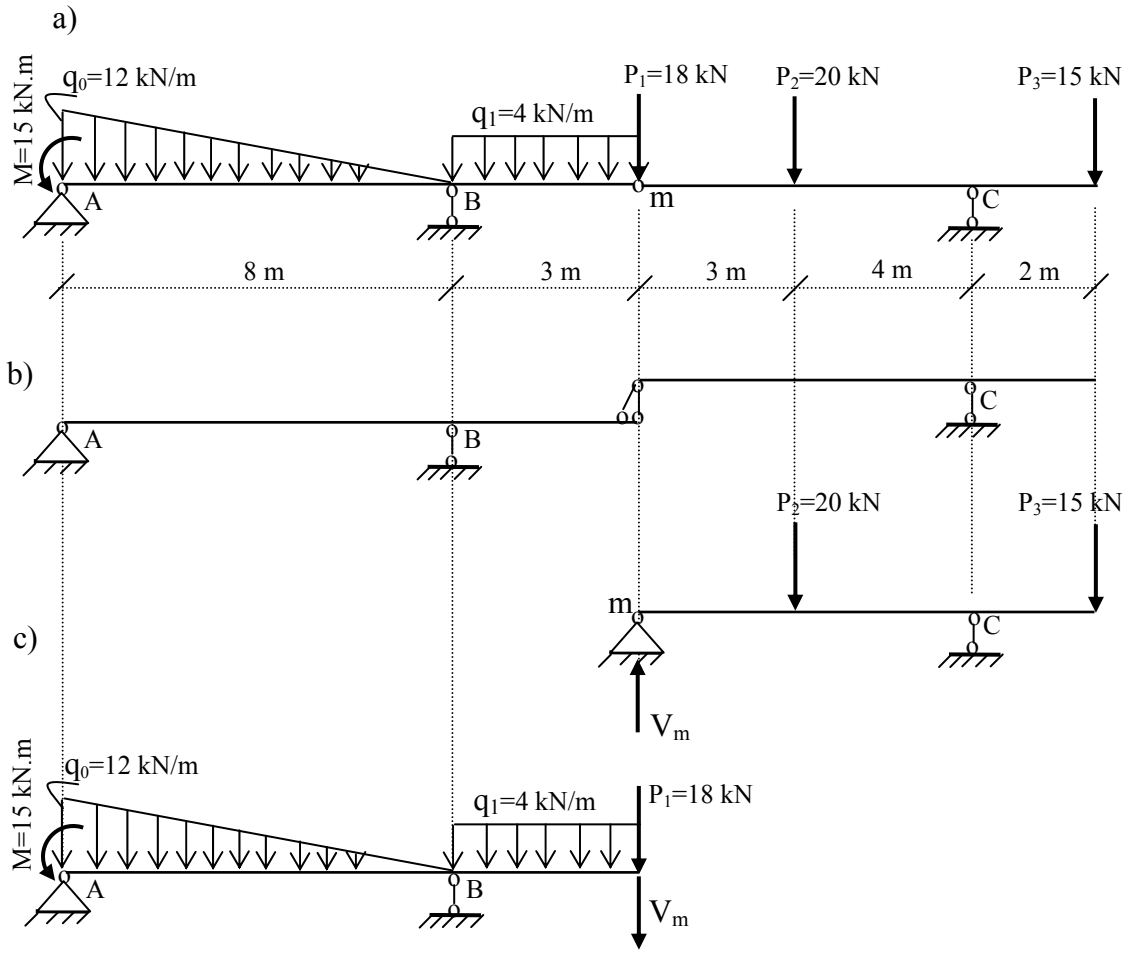
Örnek 2.7. Boyutları ve yükleme durumu Şekil 2.7.1'deki Gerber kirişin eğilme momenti ve kesme kuvveti diyagramlarını çiziniz.



Şekil 2.7.1

Çözüm:

Serbestlik derecesi W = 3.D – 2.m – C_m = 3.2 -2.1 – 4 = 0'dır ve Şekil 2.7.1'den görüldüğü gibi kiriş yararlı bünyeye sahiptir. Böylece sistem geometrik değişmezdir. Sistemin taşıma ve hesaplama şemaları sırasıyla Şekil 2.7.2b ve Şekil 2.7.2c'de gösterilmiştir.



Şekil 2.7.2. a) Gerber kirişi, b) Taşıma şeması, c) Hesaplama şeması.

mC kirişinin (Şekil 1.7.3a) hesaplanması:

Mesnet tepkileri

$$\sum M_C = V_m.7 - P_2.4 + P_3.2 = 0 \Rightarrow$$

$$V_m = \frac{20.4 - 15.2}{7} = 7{,}143\ kN.$$

$$\sum M_m = P_3.9 - V_C.7 + P_2.3 = 0 \Rightarrow$$

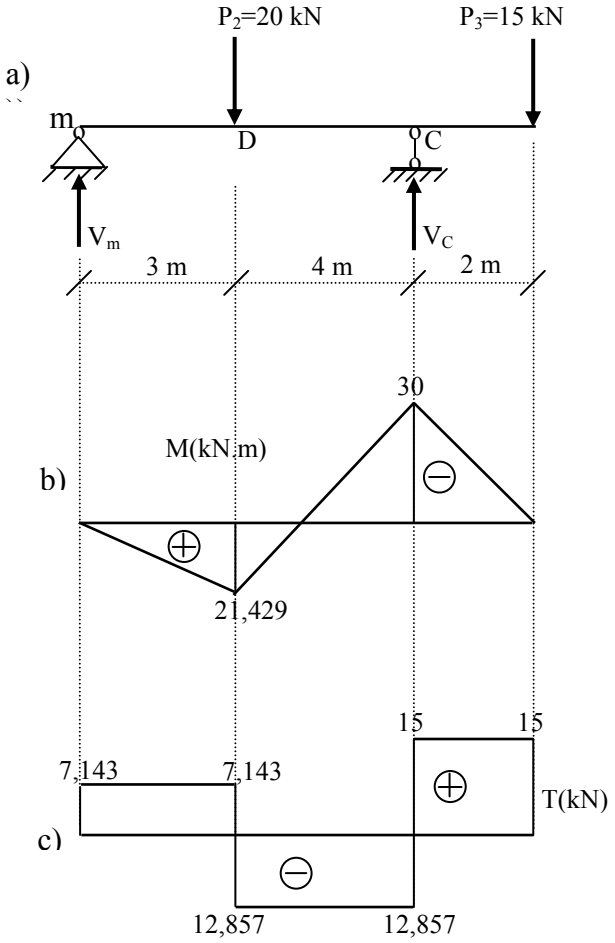
$$V_C = \frac{15.9 + 20.3}{7} = 27{,}857\ kN.$$

Sağlama :

$$\sum Y = V_m - P_2 + V_C - P_3 = 0 \Rightarrow$$
$$7{,}143 - 20 + 27{,}857 - 15 = 0$$

M ve *T* 'nin kritik kesitlerdeki değerleri
(Sol uçtan bakıldığında)

$$M_m = 0\ ;\quad T_m = V_m = 7{,}143\ kN.$$
$$M_D = V_m.3 = (7{,}143).3 = 21{,}429\ kN.m.$$
$$T_D^{sol} = V_m = 7{,}143 kN$$
$$T_D^{sağ} = V_m - P_2 = 7{,}143 - 20 = -12{,}857\ kN.$$
$$M_C = V_m.7 - P_2.4 = (7{,}143).7 - 20.4 =$$
$$= -30 kN.m$$
$$T_C^{sol} = V_m - P_2 = 7{,}143 - 20 = -12{,}857\ kN.$$



Şekil 2.7.3. a) mC kirişi, b) *M* diyagramı, c) *T* diyagramı.

C kesiti için sağ uçtan

$$M_C = -P_3.2 = -15.2 = -30\ kN.m$$
$$T_C = P_3 = 15\ kN.$$

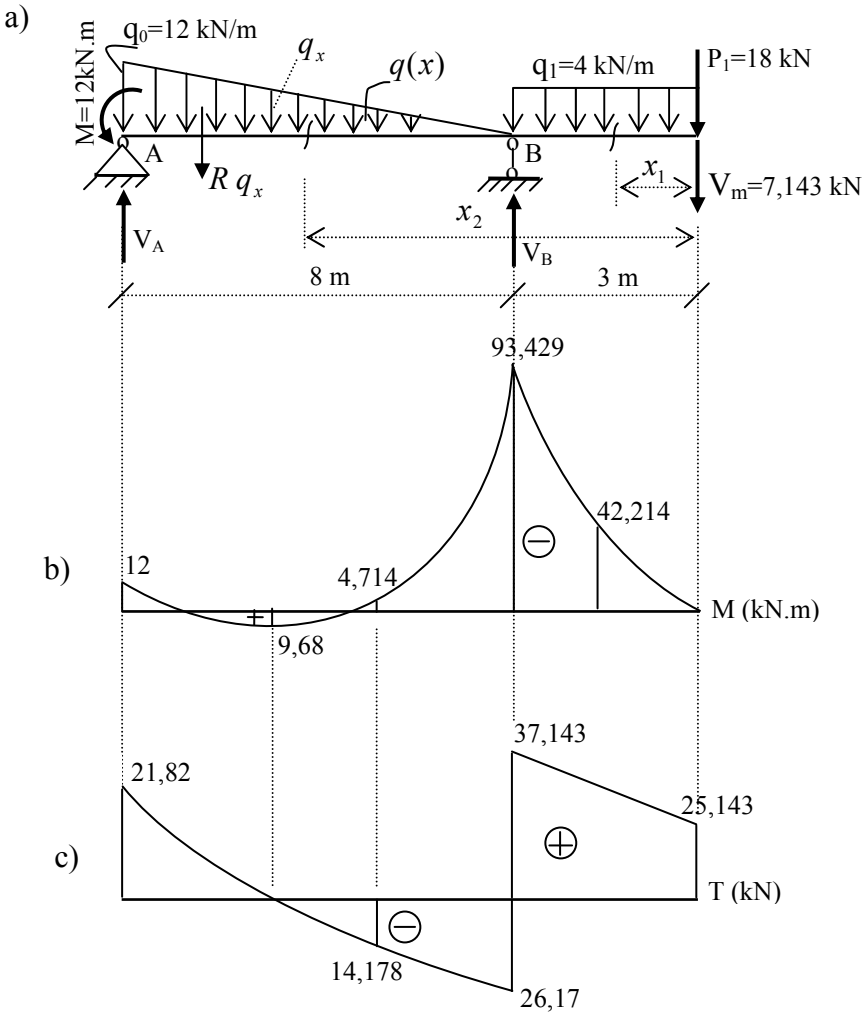
Elde edilmiş değerlere göre kirişin *M* (Şekil 2.7.3b) ve *T* (Şekil 2.7.3c) diyagramları çizilmiştir.

AB kirişinin (Şekil 2.7.4a) hesaplanması:

Mesnet tepkileri

$$\sum M_B = V_A.8 - M - \frac{q_0.8}{2}.\frac{2}{3}.8 + q.3.(1{,}5) + V_m.3 + P_1.3 = 0 \Rightarrow$$

$$V_A = \frac{12 + \frac{12.8}{2}.\frac{2}{3}.8 - 4.3.(1{,}5) + (7{,}143).3 - 18.3}{8} = 21{,}8214\ kN.$$



Şekil 2.7.4. a) AB kirişi, b) *M* diyagramı, c) *T* diyagramı.

$$\sum M_A = V_m.11 + P_1.11 + q.3.(9{,}5) - V_B.8 + \frac{q_0.8}{2}.\frac{8}{3} - M = 0 \quad \Rightarrow$$

$$V_B = \frac{(7{,}143).11 + 18.11 + 4.3.(9{,}5) + \dfrac{12.8.8}{2.3} - 12}{8} = 63{,}3216\ kN.$$

Sağlama :

$$\sum Y = V_A - \frac{q_0.8}{2} + V_B - q.3 - V_m - P_1 = 0 \Rightarrow 21{,}8214 - \frac{12.8}{2} + 63{,}3216 - 4.3 - 7{,}143 - 18 = 0.$$

AB kirişinin bölgelerinde (Şekil 2.7.4a) *M* ve *T* 'nin değerlerinin hesaplanması:

$0 \le x_1 \le 3$

$$M_{x1} = -P_1.x_1 - V_m.x_1 - q.\frac{x_1^2}{2}; \qquad T_{x1} = P_1 + V_m + q.x_1 ;$$

$x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{x1} = 0; \quad T_{x1} = 18 + 7{,}143 = 25{,}143 \; kN,$

$x_1 = 1{,}5\, m \Rightarrow M_{x1} = -18.(1{,}5) - (7{,}143).(1{,}5) - 4.\dfrac{(1{,}5)^2}{2} = -42{,}2145 \; kN.m$

$x_1 = 3\, m \Rightarrow M_{x1} = -18.3 - (7{,}143).3 - 4.\dfrac{3^2}{2} = -93{,}429 \; kN.m.$

$T_{x1} = 18 + 7{,}143 + 4.3 = 37{,}143 \; kN.$

$3 \le x_2 \le 11$

$q_x = \dfrac{12.(x_2 - 3)}{8} = 1{,}5.(x_2 - 3) \;\Rightarrow\; Rq_x = q_x.\dfrac{(x_2 - 3)}{2} = 0{,}75(x_2 - 3)^2$

$M_{x2} = -P_1.x_2 - V_m.x_2 - q.3.(x_2 - 1{,}5) + V_B.(x_2 - 3) - Rq_x.\dfrac{(x_2 - 3)}{3} \quad \Rightarrow$

$M_{x2} = -18.x_2 - (7{,}143).x_3 - 4.3(x_2 - 1{,}5) + (63{,}3216).(x_2 - 3) - 0{,}75.(x_2 - 3)^2.(_2 - 3)$,

$T_{x2} = P_1 + V_m + q.3 - V_B + Rq_x \quad \Rightarrow \quad T_{x2} = 18 + 7{,}143 - 63{,}3216 + 0{,}75(x_2 - 3)$.

$x_2 = 3\, m \Rightarrow M_{x2} = -18.3 - (7{,}143).3 - 3.4.(1{,}5) = -93{,}429 \; kN.m$,

$T_{x2} = 18 + 7{,}143 + 12 - 63{,}3216 = -26{,}1786\, kN.$

$x_2 = 7\, m \quad \Rightarrow M_{x2} = -18.7 - (7{,}143).7 - 4.3.(5{,}5) + (63{,}3216).4 - \dfrac{(0{,}75).4^3}{3} = -4{,}7146 \; kN.m,$

$T_{x2} = 18 + 7{,}143 + 4.3 - 63{,}3216 + (0{,}75).4^2 = -14{,}1786 \; kN.$

$x_2 = 11\, m \Rightarrow M_{x2} = -18.11 - (7{,}143).11 - 4.3.(9{,}5) + (63{,}3216).8 - (0{,}75).8^2.\dfrac{8}{3} = -12 \; kN.m$

$T_{x2} = 18 + 7{,}143 + 12 - 63{,}3216 + (0{,}75).8^2 = 21{,}8214 \; kN.$

Eğilme momentinin maksimum değer aldığı kesitin uzaklığı:

$T_{x2} = P_1 + V_m + q.3 - V_B + 0{,}75.(x_2 - 3)^2 = 0 \Rightarrow 18 + 7{,}143 + 12 - 63{,}3216 + 0{,}75.(x_2 - 3)^2 = 0$

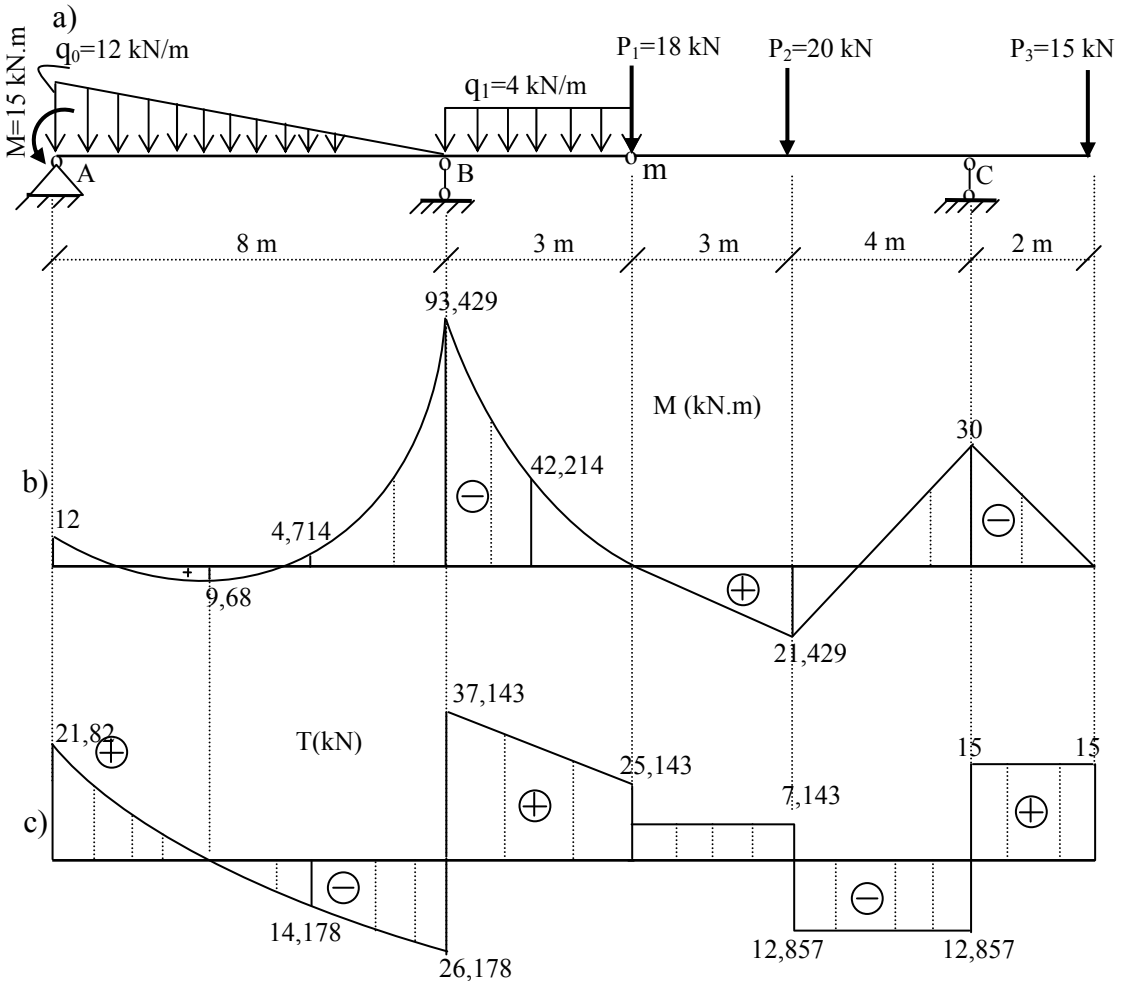
$0{,}75.(x_2 - 3)^2 = 26{,}1786 \quad \Rightarrow \; (x_2 - 3)^2 = 34{,}9048 \quad \Rightarrow x_2 - 3 = 5{,}908 \Rightarrow x_2 = 8{,}908m$

$M_{\max} = -18.(8{,}908) - 7{,}143.(8{,}9089 - 3.4.(8{,}908 - 1{,}5) + 63{,}3216.(8{,}908) -$

$0{,}75.\dfrac{(8{,}908 - 3)^3}{3} = 9{,}68 kN.m$

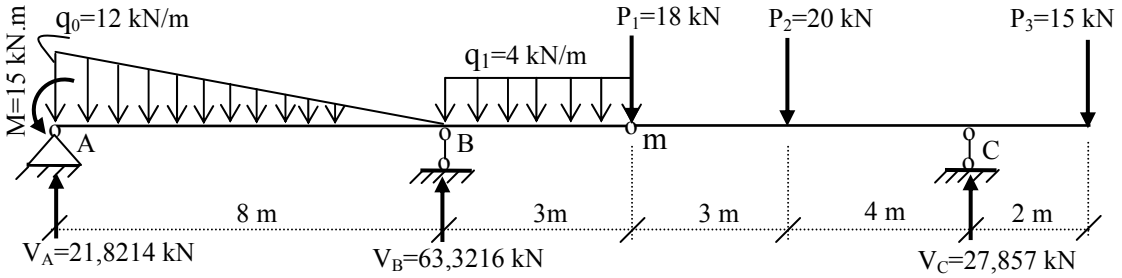
Belirlenmiş değerlere göre kirişin *M* (Şekil 2.7.4b) ve *T* (Şekil 2.7.4c) diyagramları çizilmiştir.

Her bir kiriş için çizilmiş *M*, *T* diyagramları bir doğru üzerinde çizilip, tüm kirişin *M* (Şekil 2.7.5b) ve *T* (Şekil 2.7.5c) diyagramları elde edilir.



Şekil 2.7.5. a) Gerber kirişi, b) *M* diyagramı, c) *T* diyagramı.

Sistemin genel denge şartlarının kontrolü:



Şekil 2.7.6

$$\sum Y = 21{,}8214 - \frac{12.8}{2} + 63{,}3216 - 4.3 - 18 - 20 + 27{,}857 - 15 = 0$$

$$\sum M_m = (21{,}8214).11 - 15 - \frac{12.8}{2}.(\frac{2.8}{3} + 3) + (63{,}3216).3 - 4.3.(1{,}5) + 20.3 -$$

$$(27{,}857).7 + 15.9 = 0.$$

3. GERBER KİRİŞLERDE TESİR ÇİZGİLERİ

Genel Bilgiler

Taşıyıcı sistemlerin hareketli yüklere göre hesabı tesir çizgileri yardımıyla yapılır. Tesir çizgileri (T.Ç.), yönü değişmeyen hareketli birim yük etkisi altında çizilir. Bunlar, P = 1 birim yükünün sistem üzerindeki durumuna bağlı olarak kesit tesirlerinin, mesnet tepkilerinin ve yer değiştirmelerin değişimini gösterirler. *Tesir çizgileri izostatik sistemlerde doğru parçalarından oluşurlar, hiperstatik sistemlerde ise eğriseldirler.*

Gerber kirişlerde tesir çizgilerini çizmek için basit kirişlerden bilinen kurallar kullanılır. Önce kirişin taşıma şeması çizilir. Tesir çizgisi çizilecek olan büyüklük (*R* : mesnet tepkisi, *M* : eğilme momenti, *T* : kesme kuvveti gibi) bu kirişin hangi parçasına ait ise hareketli birim yükün adı geçen parça üzerinde hareket etmesi göz önüne alınarak, söz konusu büyüklüğün bu durum için tesir çizgisi çizilir. Sonra, hareketli birim yük diğer parçaların üzerinde de dikkate alınır. Eğer bu parçalardan söz konusu büyüklüğün ait olduğu parçaya etki varsa ilk çizilen tesir çizgisi bu parçalar boyunca mafsallarda kırıklık yapacak ve mesnetlerin altında sıfırdan geçecek şekilde devam ettirilir.

Çizilmiş tesir çizgileri yardımı ile bunların ait oldukları büyüklüklerin (*S*) değerleri aşağıdaki formülle hesaplanır.

$$S = \sum_{i=1}^{n} P_i.y_i + \sum_{i=1}^{n} q_i.A_i + \sum_{i=1}^{n} M_i.tg\alpha_i \qquad (3.1)$$

Burada :

P_i : kirişe uygulanmış olan tekil yükler,

y_i : P_i tekil yükü altındaki T.Ç 'si ordinatıdır ve $P_i.y_i$ çarpımının işareti y_i 'nin işaretine bağlıdır,

q_i : kirişe uygulanmış olan düzgün (üniform) yayılı yüklerin şiddetleri (En sık karşılaşılan yayılı yükler bunlardır. Eğer sistem üzerinde düzgün yayılı yükten farklı yayılı yükler varsa bunlar için integral işlemi yapılır),

A_i : düzgün yayılı yükün etkidiği bölgenin altındaki tesir çizgisi alanıdır. $q_i.A_i$ çarpımının işareti A_i 'nin işaretine bağlıdır,

M_i : kirişe etkiyen tekil momentlerdir,

α_i : momentlerin uygulanmış olduğu kesitler altında tesir çizgisinin yatayla yaptığı açılardır. (T.Ç.'si eğrisel olduğunda bu eğriye çizilmiş teğetin yatayla yaptığı açılardır). Momentin yönü açıyı büyütürse $M_i.tg\alpha_i$ çarpımının işareti negatif, aksi halde pozitiftir.

Mesnet tepkileri ve kesme kuvvetlerinin tesir çizgilerinin ordinatları birimsizdir, eğilme momentlerininki ise uzunluk birimindedir. İzostatik sistemlerin tesir çizgilerinin herhangi bir ordinatının değeri üçgenlerin benzerliğinden elde edilebilir.

Örnek 3.1. Boyutları Şekil 3.1.1a'da verilen çıkmalı kirişin mesnet tepkilerinin ve K kesitinde M_K ve T_K'nın tesir çizgilerinin çizilmesi istenmektedir.

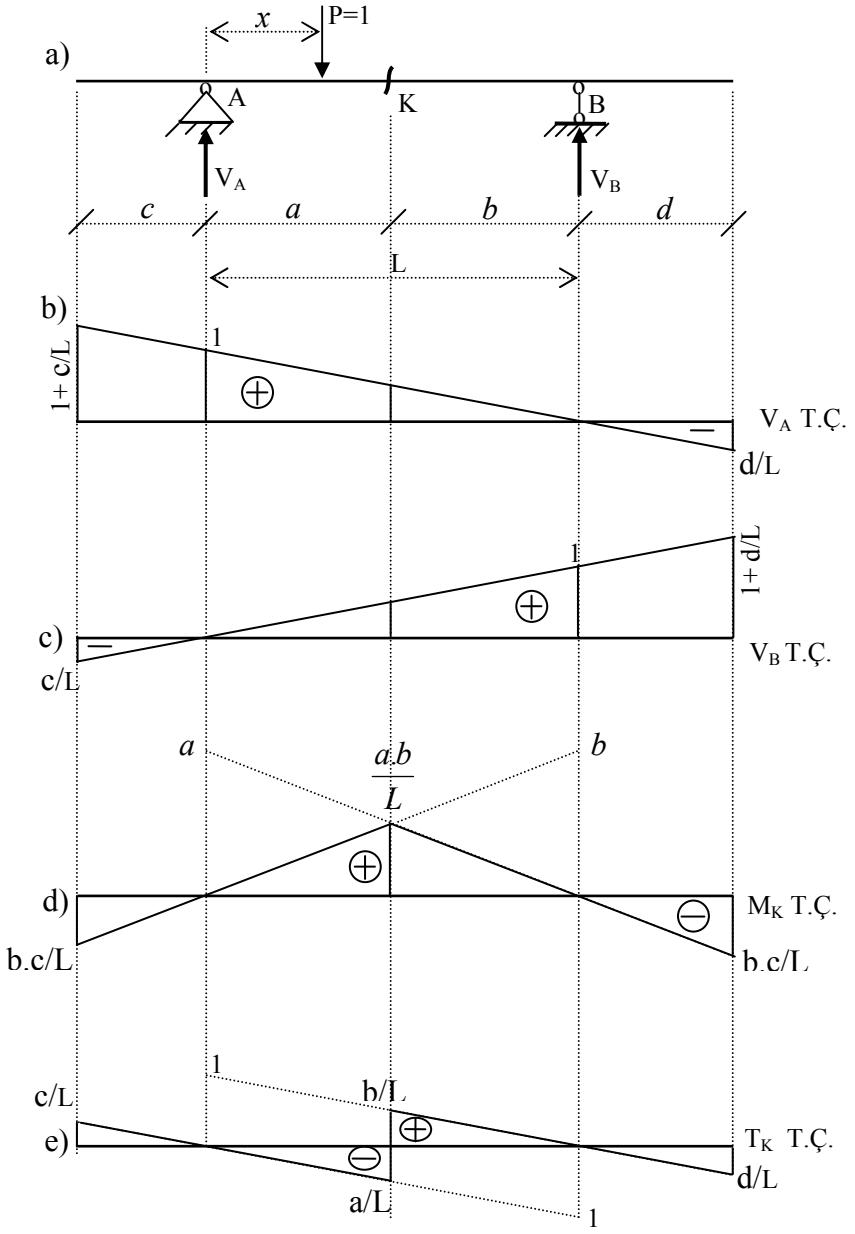
Mesnet tepkilerinin tesir çizgileri :

$$-c \le x \le (L+d)$$

$$\sum M_B = V_A.L - P.(L-x) = 0 \Rightarrow \quad V_A = \frac{P.(L-x)}{L}$$

$$\sum M_A = -V_B.L + P.x = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B = \frac{P.x}{L}$$

Görüldüğü gibi V_A ve V_B'nin tesir çizgilerinin denklemleri birer doğruyu ifade ederler. x'in değişme aralığında alabileceği değerler sırasıyla V_A ve V_B' nin tesir çizgisi denklemlerinde yerine konularak elde edilen değerlere göre V_A (Şekil 3.1.1b) ve V_B'nin (Şekil 3.1.1c) T. Ç.'leri çizilmiştir.



Şekil 3.1.1. a) AB kirişi, b) V_A'nın T.Ç., c) V_B'nin T.Ç., d) M_K'nın T.Ç., e) T_K' nın T.Ç.

K kesitinde eğilme momenti ve kesme kuvvetinin tesir çizgileri şöyle çizilir: Bu büyüklüklerin tesir çizgileri sağ ve sol çizgi olarak iki parçadan oluşur. Hareketli birim yükün

K kesitinin sağ tarafında hareket ettiği göz önüne alındığında, birim yükün olmadığı sol taraf dikkate alınarak T.Ç.'nin sağ parçasının ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$M_K^{sol} = V_A.a$$

Görüldüğü gibi M_K'nın T.Ç.'nin sağ parçası V_A'nın T.Ç.'nin ordinatlarının a ile çarpılmasıyla elde edilir.

Hareketli birim yükün K kesitinin sol tarafında hareket ettiği göz önüne alındığında, bu defa da birim yükün olmadığı sağ taraf dikkate alınarak, T.Ç.'nin sol parçası için ifade şöyle elde edilir:

$$M_K^{sağ} = V_B.b$$

M_K'nın T.Ç.'nin sol parçasının, V_B'nın T.Ç.'nin ordinatlarının b ile çarpılmasıyla elde edildiği görülmektedir. Bu tesir çizgisi parçalarının çizimi ölçekli olarak yapıldığında K kesitinin altında kesiştikleri görülür.

Kesme kuvvetinin tesir çizgisi de sağ ve sol olmak üzere iki parçadan oluşur. Bu parçaların ifadeleri eğilme momentinin tesir çizgisine benzer şekilde elde edilir:

$$T_K^{sol} = V_A$$

olup, tesir çizgisinin sağ parçası V_A'nın T.Ç.'nin aynısıdır.

$$T_K^{sol} = -V_B$$

olup, tesir çizgisinin sol parçası V_B'nin T.Ç.'nin ters işaretlisidir.

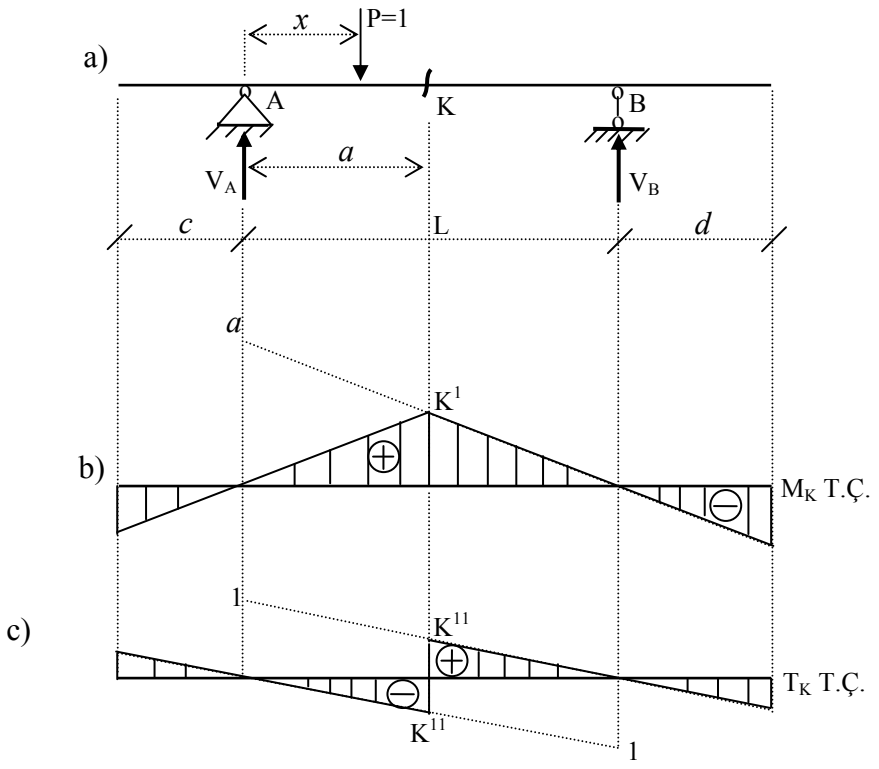
Bu sonuçlara uygun olarak kirişin açıklığı içerisinde (mesnetleri arasında) olan K kesitinde eğilme momentinin ve kesme kuvvetinin T. Ç.'leri sırasıyla Şekil 3.1.1d ve Şekil 3.1.1e'de çizilmiştir.

Kirişin açıklığı içindeki kesitlerde (K kesiti gibi) eğilme momentinin ve kesme kuvvetinin T.Ç.'lerinin çizimi aşağıda tarif edildiği gibi pratik şekilde de yapılabilir.

Eğilme momentinin T.Ç. : Sağ veya sol mesnetten kesite kadar olan mesafe mesnet hizasında artı işaretle bir ordinat olarak işaretlenir. Sonra bu ordinattan diğer mesnetin altında sıfırdan geçecek şekilde bir doğru çizilir. İlgili kesitin bu doğru üzerine izdüşümü alınır. Bu izdüşüm noktasından başta dikkate alınan mesnette sıfırdan geçen bir doğru çizilerek eğilme momentinin T.Ç. tamamlanmış olur (Şekil 3.1.2b).

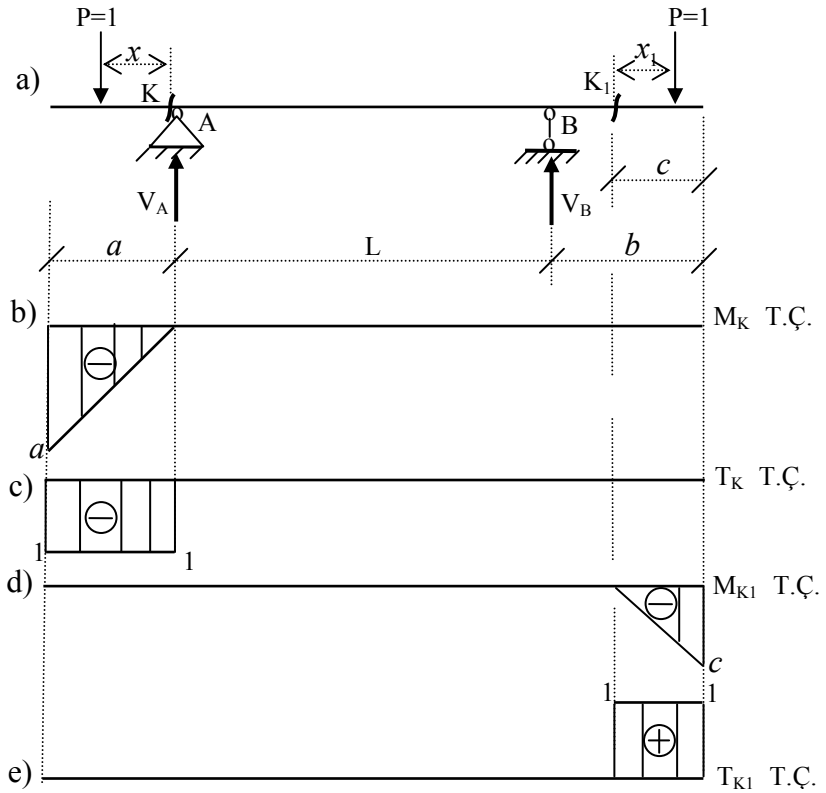
Kesme kuvvetinin T.Ç. : Önce V_A'nın ve zıt işaretle V_B'nin T.Ç.'leri çizilir. Sonra K kesitinin bu çizgiler üzerine izdüşümleri alınır. V_A'nın T.Ç.'nin izdüşümün sağında , V_B'nin T.Ç.'nin ise izdüşümün solunda kalan kısımları alınarak T_K'nın T.Ç.'si (Şekil 3.1.2c) elde edilir.

Açıklığın dışındaki, yani çıkmalar üzerindeki kesitlerin iç kuvvetlerinin tesir çizgilerinde sağ (çıkma sol tarafta ise) veya sol (çıkma sağ tarafta ise) çizginin ordinatları sıfırdır.



Şekil 3.1.2. a) AB kirişi, b) M_K tesir çizgisi, c) T_K tesir çizgisi.

Örnek olarak Şekil 3.1.3 a)'daki kirişin K ve K_1 kesitlerinde iç kuvvetlerin T.Ç.'lerini çizelim.



Şekil 3.1.3. a) AB kirişi, b) M_K'nın T.Ç., c) T_K' nın T.Ç., d) M_{K1}'in T.Ç., e) T_{K1}'in T.Ç.

K kesiti için iç kuvvetlerin tesir çizgilerinin sağ parçaları sıfırdır (çıkma sol tarafta olduğu için).

$0 \le x \le a$

$M_K = -P.x \ ; \quad T_K = -P = -1 \ ;$

$x\,'in$ değişme aralığı göz önüne alınarak M_K ve T_K'nın tesir çizgileri sırasıyla Şekil 3.1.3b ve Şekil 3.1.3c'de çizilmiştir.

K_1 kesiti için iç kuvvetlerin T.Ç.'lerinin sol parçaları sıfırdır (çıkma sağ tarafta olduğu için).
$0 \le x_1 \le c$

$M_{K1} = -P.x_1 \ ; \quad T_{K1} = P = 1 \, .$

$x_1\,'in$ değişme aralığı göz önüne alınarak M_{K1} ve T_{K1}'in tesir çizgileri sırasıyla Şekil 3.1.3d ve Şekil 3.1.3e'de çizilmiştir.

Açıklanmış olan bu kurallar Gerber kirişlerde tesir çizgilerinin çiziminde de geçerlidir.

Örnek 3.2. Yükleme durumu ve boyutları Örnek 2.1'de (Şekil 3.2.1a) verilmiş kiriş için
a) A mesnetinin V_A ve işaretli K kesitinin M_K, T_K tesir çizgilerini çiziniz,
b) Tesir çizgileri yardımıyla V_A, M_K ve T_K'nın değerlerini hesaplayınız,
c) V_A, M_K ve T_K'nın Örnek 2.1'de analitik olarak belirlenmiş değerlerini tesir çizgileri yardımıyla hesaplanan değerleri ile karşılaştırınız.

<u>Çözüm :</u>

a) V_A, M_K ve T_K tesir çizgileri sırasıyla Şekil 3.2.1c-e'de çizilmiştir.
b) Bu tesir çizgileri yardımıyla mesnet tepkisi ve iç kuvvetler (3.1) ifadesiyle hesaplanır. Bunun için gereken ordinatlar tesir çizgilerinde üçgenlerin benzerliğinden belirlenmiştir.

V_A' nın tesir çizgisinden

$$V_A = q_1.(A_1 - A_1^{'}) + M.tg\alpha + P.0{,}125 + q_2.A_2 = 2.(\frac{8.1}{2} - \frac{(0{,}25).2}{2}) + 8.\frac{0{,}25}{4} + 10.(0{,}125) +$$
$$3.\frac{(0{,}125).4}{2} = 8 - 0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}75 + 1{,}25 = 10\,kN.$$

M_K' nın tesir çizgisinden

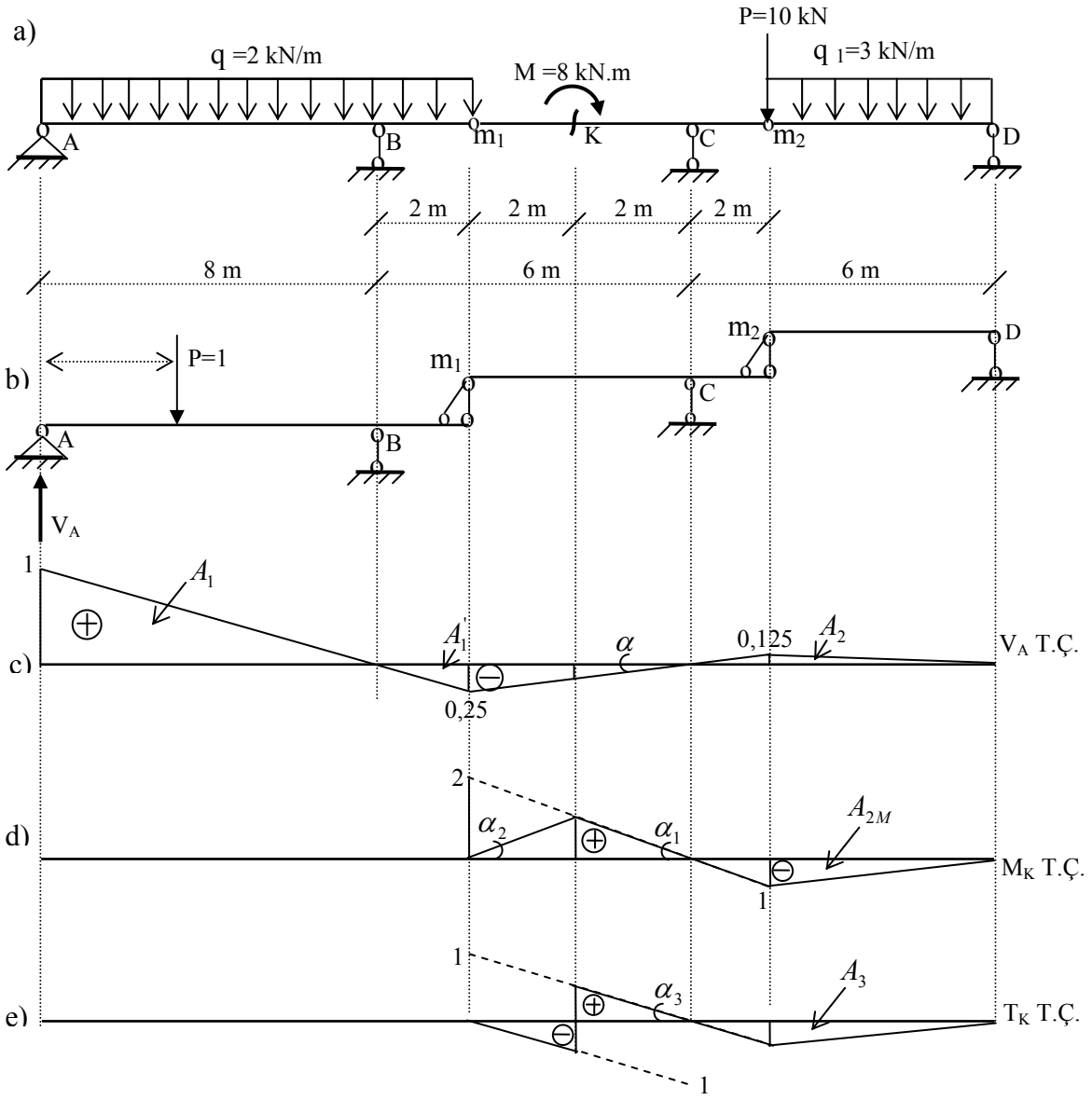
$$M_K^{Sol} = -M.tg\alpha_1 - P.1 - q_2.A_{2M} = -8.\frac{2}{4} - 10.1 - 3.\frac{1.4}{2} = -4 - 10 - 6 = -20\,kN.m$$

$$M_K^{Sağ} = M.tg\alpha_2 - P.1 - q_2.A_{2M} = 8.\frac{2}{4} - 10.1 - 3.\frac{1.4}{2} = -12\,kN.m$$

ve T_K'nın tesir çizgisinden

$$T_K = M.tg\alpha_3 - P.0{,}5 - q_2.A_3 = -8.\frac{1}{4} - 10.(0{,}5) - 3.\frac{(0{,}5).4}{2} = -10\,kN.$$

olarak elde edilir.



Şekil 3.2.1. a) Gerber kirişi, b) Taşıma şeması, c) V_A'nın T.Ç., d) M_K'nın T.Ç., e) T_K'nın T.Ç.

c) V_A, M_K ve T_K için analitik ve tesir çizgileri yardımıyla belirlenmiş değerlerin karşılaştırma tablosu:

Büyüklük	Analitik yöntemle	T. Ç.'leri yardımıyla	Fark
V_A(kN)	10	10	0
M_K^{Sol}(kN.m)	- 20	- 20	0
$M_K^{Sağ}$(kN.m)	- 12	- 12	0
T_K (kN)	- 10	- 10	0

Örnek 3.3. Yükleme durumu ve boyutları Örnek 2.2'de (Şekil 3.3.1a) verilmiş olan Gerber kiriş için
a) V_B, M_K ve T_K tesir çizgilerini çiziniz,

b) Tesir çizgileri yardımıyla bu büyüklüklerin değerlerini hesaplayınız,
c) Bu büyükler için analitik yöntemle ve tesir çizgileri yardımıyla hesaplanmış değerleri karşılaştırınız.

Çözüm:

a) V_B, M_K ve T_K'nın T.Ç.'leri sırasıyla Şekil 3.3.1b, c ve d'de çizilmiştir.

b) Tesir çizgileri yardımıyla mesnet tepkisinin ve iç kuvvetlerin değerlerini yine (3.1) ifadesiyle hesaplanır.

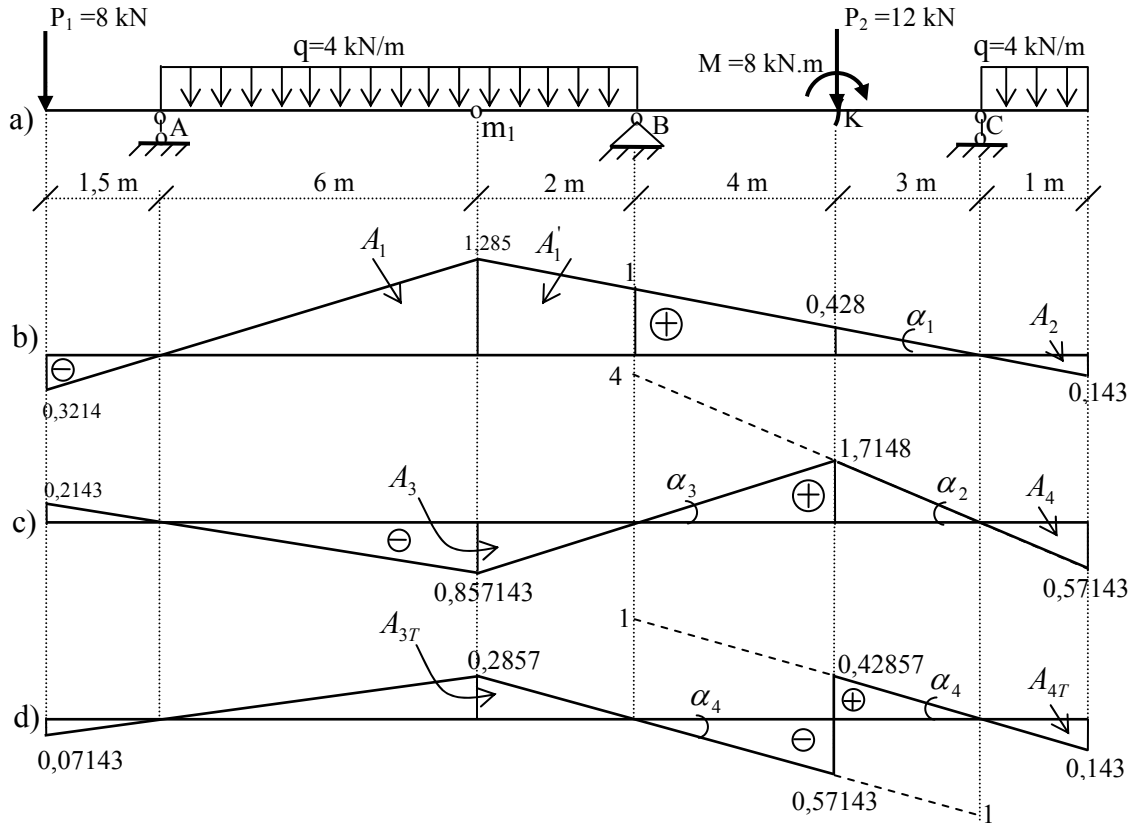
V_B'nin tesir çizgisinden

$$V_B = -P_1.0{,}321428 + q.A_1 + q.A_1^{'} + P_2.0{,}42857 - M.tg\alpha_1 - q.A_2 = -8.(0{,}321429) + 4.\frac{(1{,}2857).6}{2} + 4.\frac{(1{,}2857+1).2}{2} + 12.(0{,}42857) - 8.\frac{1}{7} - 4.\frac{1.(0{,}14286)}{2} = 25{,}7143\ kN.$$

M_K'nın tesir çizgisinden

$$M_K^{Sol} = P_1.0{,}214286 - q.A_3 - M.tg\alpha_2 + P_2.1{,}71428 - q.A_4 = 8.(0{,}214286) + 4.\frac{(0{,}857).8}{2} - 8.(0{,}571428) + 12.(1{,}71428) - 4.\frac{1.(0{,}571428)}{2} = 2{,}857\,kN.m$$

$$M_K^{Sağ} = P_1.0{,}214286 - q.A_3 + M.tg\alpha_3 + P_2.1{,}71428 - q.A_4 = 8.(0{,}214286) + 4.\frac{(0{,}857).8}{2} + 10.\frac{1{,}7143}{4} + 12.(1{,}71428) - 4.\frac{1.(0{,}571429)}{2} = 10{,}857\,kN.m$$



Şekil 3.3.1. a) Gerber kirişi, b) V_B'nin T. Ç., c) M_K'nın T.Ç. d) T_K'nın T. Ç.

T_K'nın tesir çizgisinden

$$T_K^{Sol} = -P_1.0{,}07143 + q.A_{3T} + M.tg\alpha_4 + P_2.0{,}42857 - q.A_{4T} = -8(0{,}07143) + 4.\frac{(0{,}2857).8}{2} -$$

$$-8.\frac{1}{7} + 12.(0{,}42857) - 4.\frac{1.(0{,}14286)}{2} = 7{,}7143\ kN$$

$$T_K^{Sağ} = -P_1.0{,}07143 + q.A_{3T} + M.tg\alpha_4 - P_2.0{,}57143 - q.A_{4T} = -8.(0{,}07143) + 4.\frac{(0{,}2857).8}{2} -$$

$$-10.\frac{1}{7} - 12.(0{,}57143) - 4.\frac{1.(0{,}2857)}{2} = -4{,}2857\,kN$$

olarak elde edilir.

c) V_B, M_K, ve T_K için analitik ve tesir çizgileri yardımıyla hesaplanmış değerlerin karşılaştırma tablosu:

Büyüklük	Analitik yöntemle	T. Ç.'leri yardımıyla	Fark
V_B(kN)	25,7143	25,7143	0
M_K^{Sol}(kN.m)	2,857	2,857	0
$M_K^{Sağ}$(kN.m)	10,857	10,857	0
T_K^{Sol} (kN)	7,7143	7,7143	0
$T_K^{Sağ}$(kN)	- 4,2857	-4,2857	0

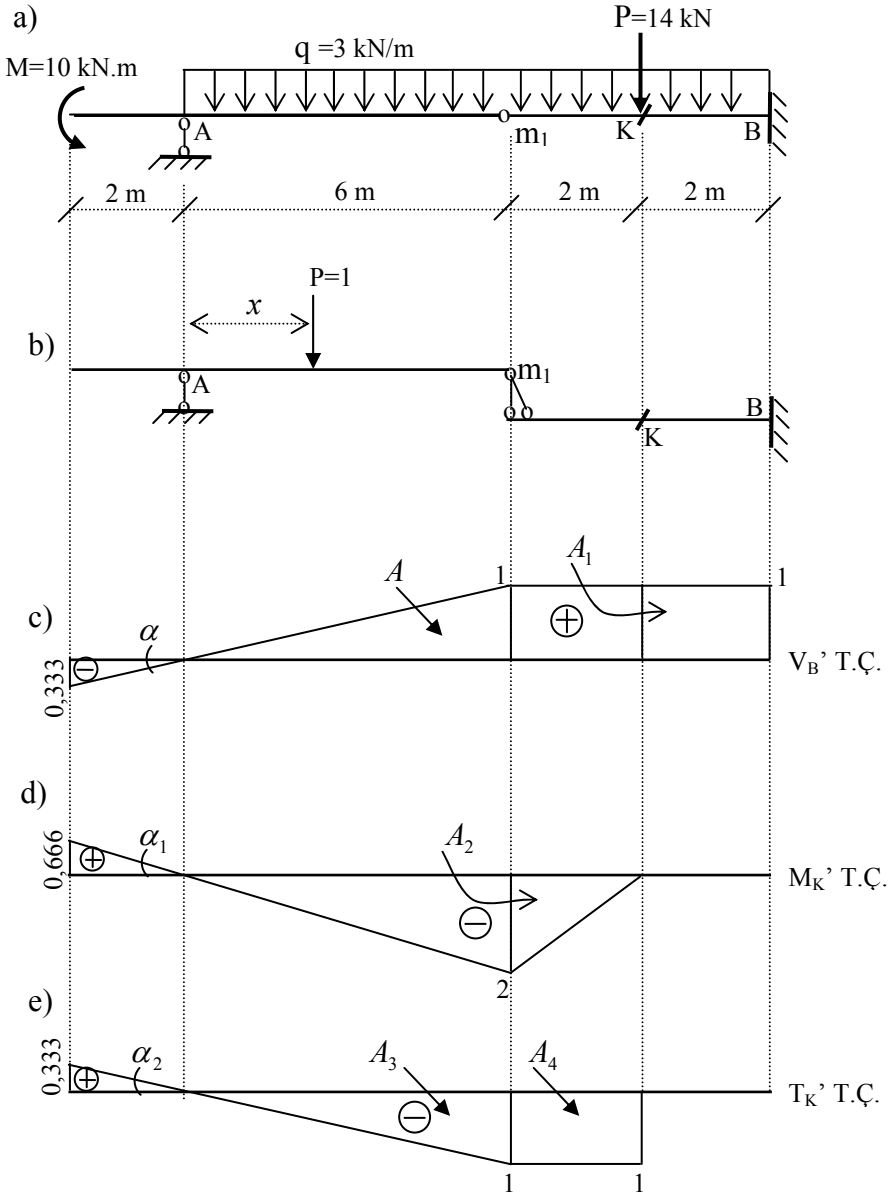
Örnek 3.4. Yükleme durumu ve boyutları Örnek 2.3'de (Şekil 3.4.1a) verilmiş Gerber kirişi için
a) V_B, M_K ve T_K tesir çizgilerini çiziniz,
b) Tesir çizgileri yardımıyla V_B, M_K ve T_K'yı belirleyiniz,
c) Bu büyükler için analitik yöntemle ve tesir çizgileri yardımıyla hesaplanmış değerleri karşılaştırınız.

Çözüm:

a) V_B, M_K ve T_K'nın tesir çizgileri sırasıyla Şekil 3.4.1c, d ve e'de çizilmiştir.
b) Çizilmiş tesir çizgileri yardımıyla mesnet tepkisi ve iç kuvvetlerin değerleri şöyle hesaplanır:

V_B'nin tesir çizgisinden

$$V_B = P.1 + q.(A + A_1) - M.tg\alpha = 14.1 + 3.(1.4 + \frac{1.6}{2}) - 10.\frac{1}{6} = 33{,}333\ kN$$



Şekil 3.4.1. a) Gerber kirişi, b) Taşıma şeması, c) V_B'nin tesir çizgisi, d) M_K' nın tesir çizgisi, e) T_K'nın tesir çizgisi.

M_K'nın tesir çizgisinden

$$M_K = -q.A_2 + M.tg\alpha_1 = -3.\frac{2.8}{2} + 10.\frac{2}{6} = -20{,}6666\ kN.m$$

ve T_K'nın tesir çizgisinden

$$T_K^{Sol} = -q.(A_3 + A_4) + M.tg\alpha_2 = -3.(1.2 + \frac{1.6}{2}) + 10.\frac{1}{6} = -13{,}333\ kN$$

$$T_K^{Sağ} = -q.(A_3 + A_4) + M.tg\alpha_2 - P.1 = -3.(1.2 + \frac{1.6}{2}) - 14.1 = -27{,}333\ kN.$$

olarak hesaplanmaktadır.

c) V_B , M_K, ve T_K için analitik ve T. Ç.'leri yardımıyla bulunmuş değerlerin karşılaştırma tablosu:

Büyüklük	Analitik yöntemle	T. Ç.'leri yardımıyla	Fark
V_B(kN)	33,3333	33,3333	0
M_K(kN.m)	-20,666	-20,666	0
T_K^{Sol} (kN)	-13,333	-13,333	0
$T_K^{Sağ}$(kN)	-27,3333	-27,3333	0

Örnek 3.5. Yükleme durumu ve boyutları Örnek 2.4'de (Şekil 3.5.1a) verilmiş Gerber kirişi için
a) V_C, M_K ve T_K tesir çizgilerini çiziniz,
b) T.Ç.'leri yardımıyla V_C, M_K ve T_K'yı belirleyiniz,
c) Bu büyükler için analitik yöntemle ve T.Ç.'leri yardımıyla belirlenmiş değerleri karşılaştırınız.

Çözüm:

a) V_C, M_K ve T_K'nın tesir çizgileri sırasıyla Şekil 3.5.1c, d ve e'de çizilmiştir.
b) Bu tesir çizgileri yardımıyla mesnet tepkisi ve iç kuvvetlerin hesabı:

V_C'nin tesir çizgisinden

$$V_C = -P_2.0{,}14286 - q.A' + P_3.0{,}7143 - M.tg\alpha = 15.(0{,}14286) - 4.\frac{(0{,}2857).2}{2} +$$

$$+ 20.(0{,}7143) - 16.\frac{1}{7} = 15{,}857\,kN.$$

M_K'nın tesir çizgisinden

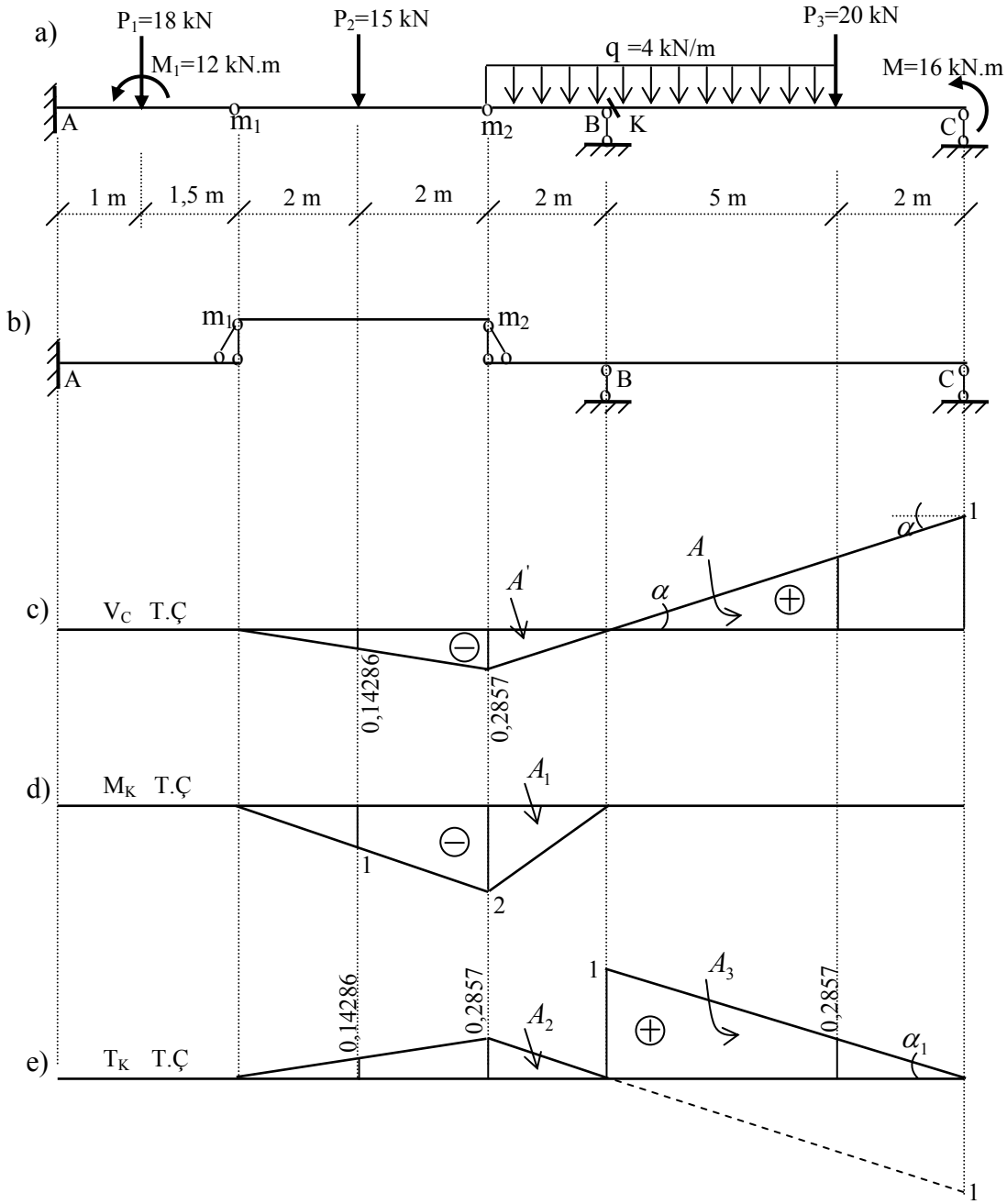
$$M_K = -P_2.1 - q.A_1 = -15.1 - 4.\frac{2.2}{2} = -23\ kN.m.$$

T_K'nın tesir çizgisinden

$$T_K = P_2.0{,}14286 + q.A_2 + q.A_3 + P_3.0{,}2857) + M.tg\alpha_1 = 15.(0{,}14286) +$$

$$+ 4.\frac{(0{,}2857).2}{2} + 4.\frac{(1+0{,}2857).5}{2} + 20.(0{,}2857) + 16.\frac{1}{7} = 24{,}143\ kN.$$

olarak belirlenir.



Şekil 3.5.1. a) Gerber kiriş, b) Taşıma şeması, c) V_C'nin tesir çizgisi, d) M_K'nın tesir çizgisi, e) T_K' nın tesir çizgisi.

c) V_B, M_K, ve T_K için analitik yöntemle ve tesir çizgileri yardımıyla hesaplanmış değerlerin karşılaştırma tablosu:

Büyüklük	Analitik yöntemle	T. Ç.'leri yardımıyla	Fark
V_C(kN)	15,857	15,857	0
M_K(kN.m)	-23	-23	0
T_K (kN)	24,143	24,143	0

Örnek 3.6. Yükleme durumu ve boyutları Örnek 2.5'de (Şekil 3.6.1a) verilmiş olan Gerber kirişi için
a) V_B, M_K ve T_K tesir çizgilerini çiziniz,
b) Tesir çizgileri yardımıyla V_B, M_K ve T_K büyüklüklerini belirleyiniz,
c) Bu büyüklükler için analitik yöntemle ve T.Ç.'leri yardımıyla hesaplanmış olan değerleri karşılaştırınız.

Çözüm:

a) V_B, M_K ve T_K tesir çizgileri sırasıyla Şekil 3.6.1c, d ve e'de çizilmiştir.
b) Bu tesir çizgileri yardımıyla mesnet tepkisi ve iç kuvvetleri (3.1) formülü ile hesaplanır. Gereken ordinatlar yine tesir çizgilerinde üçgenlerin benzerliğinden belirlenir.

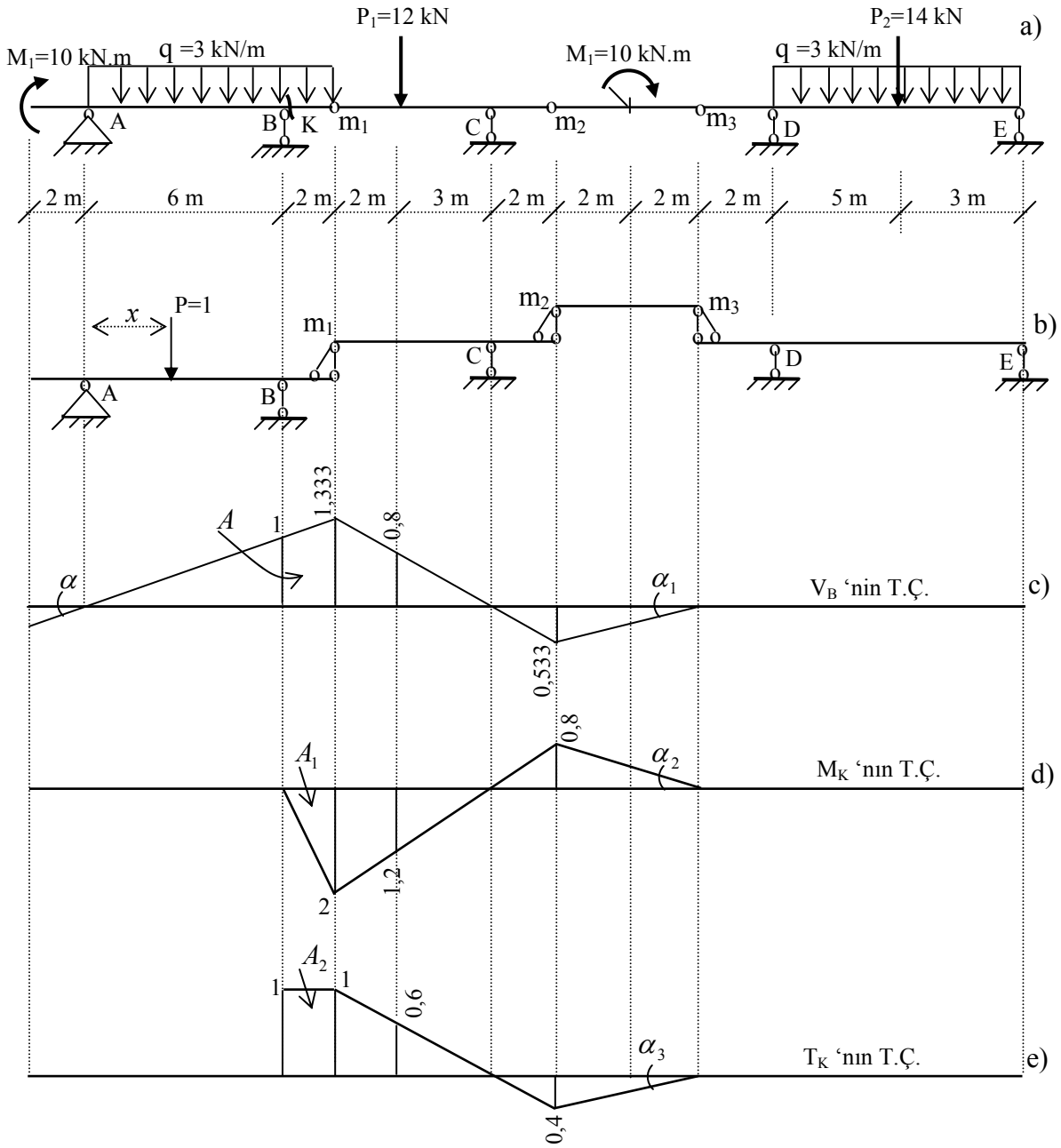
$$V_B = M.tg\alpha + q.A + P_1.y_1 + M_1.tg\alpha_1 = 12.\frac{1}{6} + 3.\frac{(1{,}333).8}{2} + 12.(0{,}8) + 10.\frac{0{,}5333}{4} = 28{,}9333\ kN$$

$$M_K = -q.A_1 - P_1.1{,}2 - M_1.tg\alpha_2 = -3.\frac{2.2}{2} - 10.\frac{0{,}8}{4} = -22{,}4\ kN.m$$

$$T_K = q.A_2 + P_1.0{,}6 + M_1.tg\alpha_3 = 3.1.2 + 12.(0{,}6) + 10.\frac{1}{10} = 14{,}2\ kN$$

c) Analitik yöntemle ve tesir çizgileri yardımıyla hesaplanmış değerlerin karşılaştırma tablosu:

Büyüklük	Analitik yöntemle	T. Ç.'leri yardımıyla	Fark
V_B(kN)	28,9333	28,9333	0
M_K(kN.m)	-22,4	-22,4	0
T_K (kN)	14,2	14,2	0



Şekil 3.6.1. a) Gerber kirişi, b) Taşıma şeması, c) V_B'nin T.Ç., d) M_K'nın T.Ç., e) T_K'nın T.Ç.

Örnek 3.7. Yükleme durumu ve boyutları Örnek 2.6'da (Şekil 3.7.1a) verilen Gerber kirişi için

a) V_C, M_K ve T_K tesir çizgilerini çiziniz,

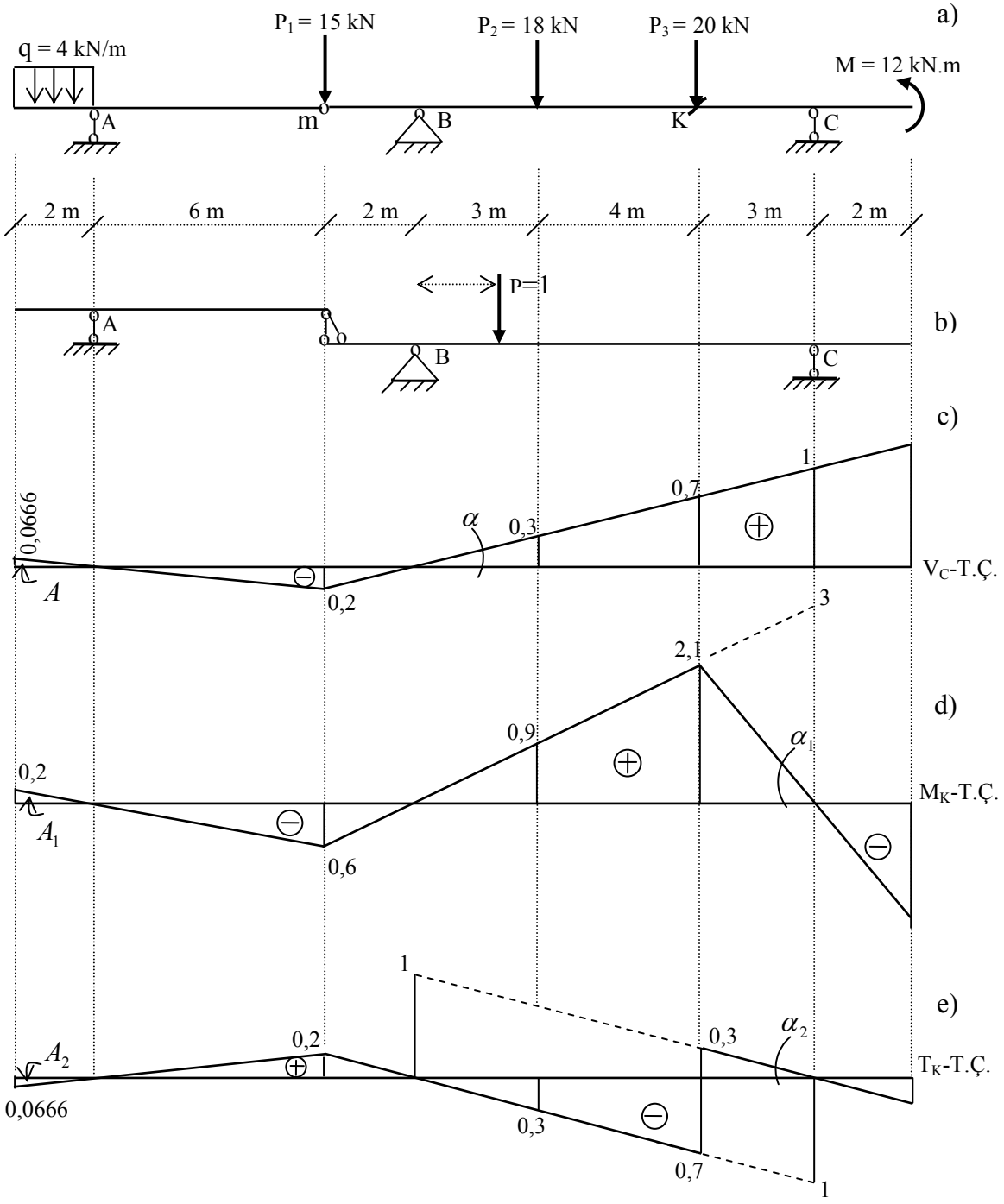
b) Tesir çizgileri yardımıyla V_C, M_K ve T_K'yı belirleyiniz,

c) Bu büyüklükler için analitik yöntemle ve tesir çizgileri yardımıyla hesaplanmış değerleri karşılaştırınız.

Çözüm:

a) İlgili büyüklüklerin tesir çizgileri Şekil 3.7.1c-e'de çizilmiştir.

b) Çizilen tesir çizgileri yardımıyla mesnet tepkisi ve iç kuvvetlerin hesabı:



Şekil 3.7.1. a) Gerber kirişi, b) Taşıma şeması, c) V_C'nin T.Ç., d)M_K'nın T.Ç., e) T_K'nın T.Ç.

$$V_C = q.A - P_1.0{,}2 + P_2.0{,}3 + P_3.0{,}7 - M.tg\alpha = 4.\frac{(0.0666).2}{2} - 15.(0{,}2) + 18.(0{,}3) +$$

$$+ 20.(0{,}7) - 12.\frac{1}{10} = 15{,}4666\ kN$$

$$M_K = q.A_1 - P_1.0{,}6 + P_2.0{,}9 + P_3.2{,}1 - M.tg\alpha_1 = 4.\frac{(0{,}2).2}{2} - 15.(0{,}6) + 18.(0{,}9) +$$

$$+ 20.(2{,}1) + 12.\frac{2{,}1}{3} = 58{,}4\ kN.m$$

$$T_K^{sağ} = -q.A_2 + P_1.0{,}2 - P_2.0{,}3 + P_3.0{,}7 + M.tg\alpha_2 = -4.\frac{(0{,}0666).2}{2} + 15.(0{,}2) -$$

$$-18.(0{,}3) - 20.(0{,}7) + 12.\frac{0{,}3}{3} = -15{,}4666\ kN$$

$$T_K^{sol} = -qA_2 + P_1.0{,}2 - P_2.0{,}3 + P_3.0{,}3 + M.tg\alpha_2 = -0{,}2666 + 3 - 5{,}4 + 1{,}2 = 4{,}5333\ kN$$

c) V_C, M_K, ve T_K için analitik yöntemle ve tesir çizgileri yardımıyla belirlenmiş değerlerin karşılaştırma tablosu:

Büyüklük	Analitik yöntemle	T. Ç.'leri yardımıyla	Fark
V_C(kN)	15,4666	15,4666	0
M_K(kN.m)	58,4	58,4	0
T_K^{Sol} (kN)	4,5333	4,5333	0
T_K^{Sol} (kN)	-15,4666	-15,4666	0

Örnek 3.8. Yükleme durumu ve boyutları Örnek 2.7'de (Şekil 3.8.1a)verilmiş olan Gerber kirişi için
a) V_A, M_K ve T_K'nın tesir çizgilerini çiziniz,
b) Tesir çizgileri yardımıyla V_A, M_K ve T_K'yı belirleyiniz,
c) Bu büyüklükler için analitik yöntemle ve tesir çizgileri yardımıyla hesaplanan değerleri karşılaştırınız.

Çözüm:

a) V_A, M_K ve T_K tesir çizgileri sırasıyla Şekil 3.8.1c, d ve e'de çizilmiştir.
b) Çizilen tesir çizgileri yardımı ile mesnet tepkisi ve iç kuvvetlerin hesabı (3.1) ile yapılmıştır.

$$V_A = \int_0^8 (1{,}5).x.\frac{x}{8}dx - q.A - P_1.\frac{3}{8} - P_2.\frac{3}{14} + P_3.\frac{3}{14} + Mtg\alpha = \frac{1{,}5}{8}.\frac{8^3}{3} - 4.\frac{3.3}{8.2} - 18.\frac{3}{8} -$$

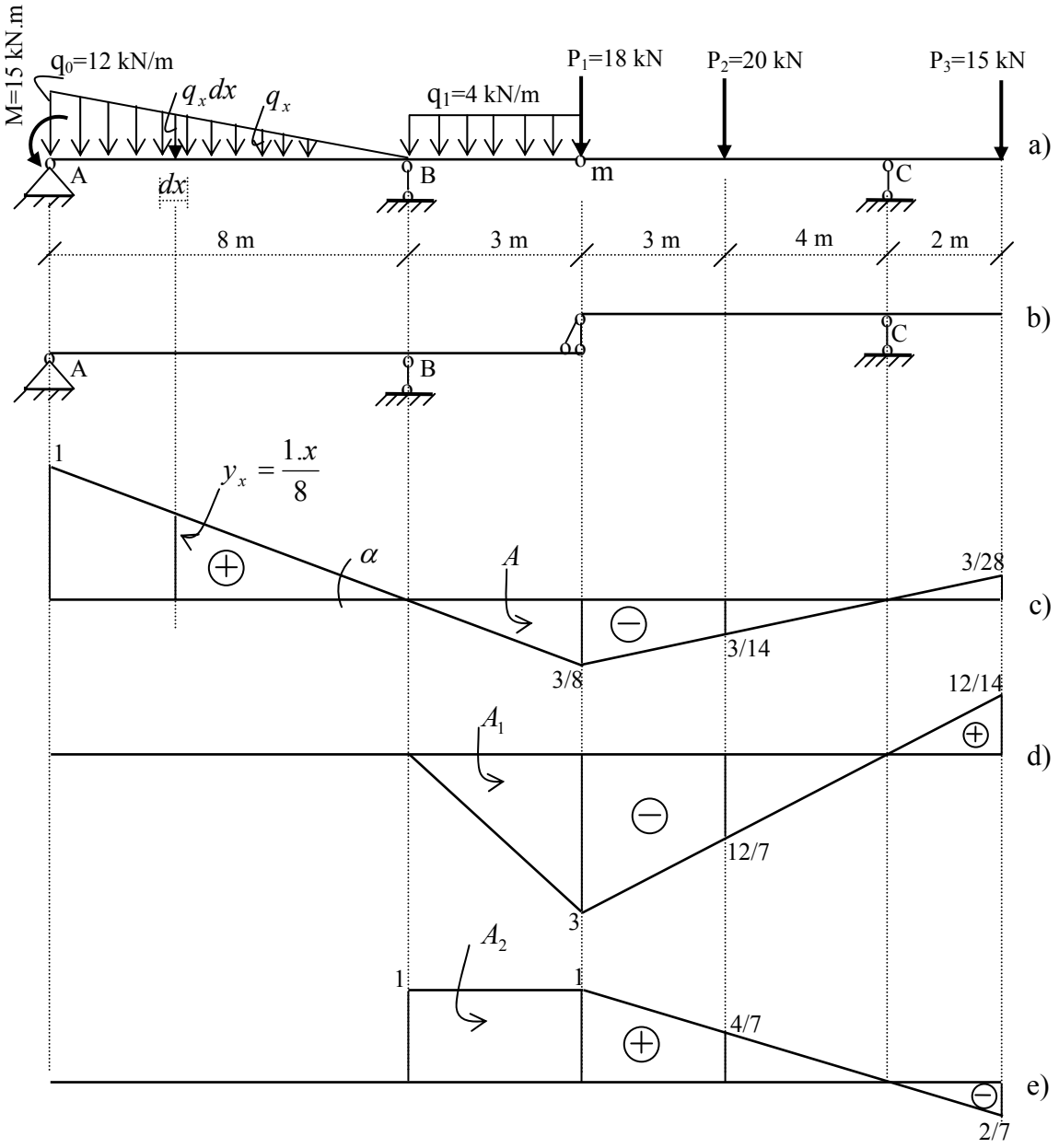
$$- 20.\frac{3}{14} + 15.\frac{3}{28} + 12.\frac{1}{8} = 21{,}8214\ kN$$

$$M_K = -q.A_1 - P_1.3 - P_2.\frac{12}{7} + P_3.\frac{12}{14} = -4.\frac{3.3}{2} - 18.3 - 20.\frac{12}{7} + 15.\frac{12}{14} = -93{,}4285\ kN.m$$

$$T_K = q.A_2 + P_1.1 + P_2.\frac{4}{7} - P_3.\frac{2}{7} = 4.1.3 + 18.1 + 20.\frac{4}{7} - 15.\frac{2}{7} = 37{,}1428\ kN$$

c) V_A, M_K ve T_K için analitik yöntemle ve tesir çizgileri ile belirlenmiş değerlerin karşılaştırma tablosu:

Büyüklük	Analitik yöntemle	T. Ç.'leri yardımıyla	Fark
V_A(kN)	21,8214	21,8214	0
M_K(kN.m)	-93,4285	-93,4285	0
T_K (kN)	37,1428	37,1428	0



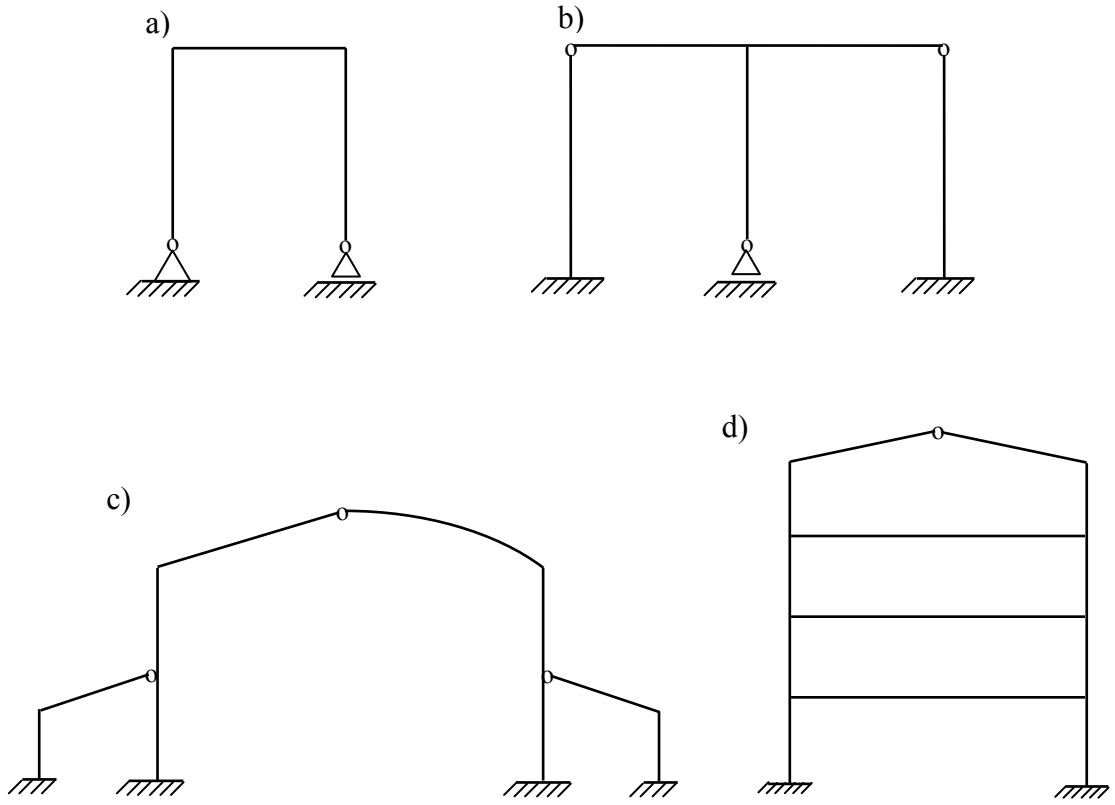
Şekil 3.8.1. a) Gerber kirişi, b) Taşıma şeması, c) V_A'nın T.Ç., d) M_K'nın T.Ç., e) T_K'nın T.Ç.

Not: Örneklerden görüldüğü gibi herhangi bir büyüklük için çizilen tesir çizgisinin ordinatları, hareketli birim yük her bir ordinat hizasında iken, söz konusu büyüklüğün aldığı değeri göstermektedir.

4. İZOSTATİK ÇERÇEVELERİN HESABI

Genel Bilgiler

Elemanları düğüm noktalarında rijit veya mafsallı olarak birleşen, geometrik değişmez çubuk sistemlere *çerçeve* denir. Çerçeveler bir açıklıklı, çok açıklıklı, bir katlı veya çok katlı olabilir. Çerçevelerin yatay elemanları *kiriş*, düşey elemanları ise *kolon* diye adlandırılır. Çerçevelerin kirişleri doğru, kırık veya eğri eksenli olabilir.

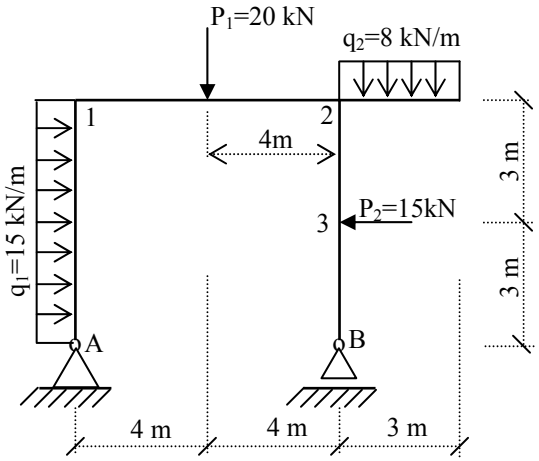


Şekil 4.1. a) Bir açıklıklı çerçeve (düğümler rijit), b) Çok açıklıklı çerçeve (bazı düğümleri mafsallı), c) Çok açıklıklı çerçeve (kiriş eğik / eğrisel), d) Bir açıklıklı, çok katlı çerçeve.

Çerçeve elemanlarındaki iç kuvvetlerin hesabı kirişlerde kullanılan yöntemlerin uygulanması ile yapılır. Eğilme momenti ve kesme kuvveti için işaretler kirişlerde olduğu gibidir. Normal kuvvet için bakılan kesitte çekme oluşturan kuvvet pozitif, basınç oluşturan ise negatif kabulü yapılmıştır.

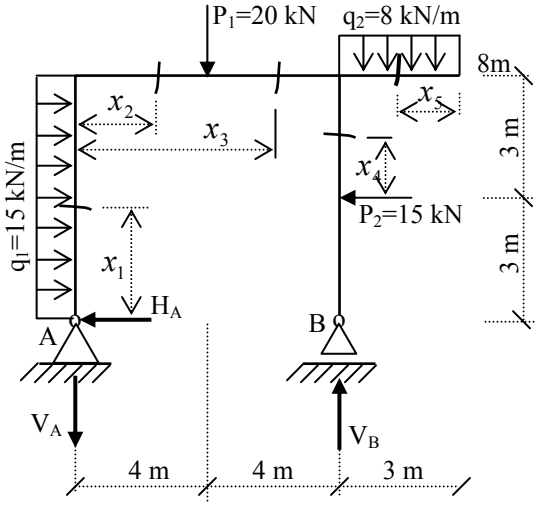
Örnek 4.1. Boyutları ve yükleme durumu Şekil 4.1.1'de verilen çerçeve için

a) Sabit yük etkisinden eğilme momenti, kesme kuvveti ve normal kuvvet diyagramlarını çiziniz,
b) Sistemin genel dengesini kontrol ediniz.



Şekil 4.1.1

Çözüm:
Çoğu yapı sistemlerinde olduğu gibi hesaplamaya mesnet tepkilerinin belirlenmesi ile başlanır (Şekil 4.1.2).



Şekil 4.1.2

$$\sum X = 0 \Rightarrow q_1.6 - H_A - P_2 = 0 \Rightarrow H_A = 15.6 - 15 = 75\,kN$$

$$\sum M_B = -V_A.8 + q_1.6.3 - P_1.4 + q_2.3.(1,5) - P_2.3 = 0 \Rightarrow$$

$$V_A = \frac{15.6.3 - 20.4 + 8.3.(1,5) - 15.3}{8} = 22,625\,kN$$

$$\sum M_A = q_2.3.(9,5) - P_2.3 - V_B.8 + P_1.4 + q_1.6.3 = 0$$

$$V_B = \frac{8.3.(9,5) - 15.3 + 20.4 + 15.6.3}{8} = 66,625\,kN$$

Sağlama:

$$\sum Y = -V_A - P_1 - q_2.3 + V_B = 0 \Rightarrow -22,625 - 20 - 8.3 + 66,625 = 0$$

Her bir bölge için (Şekil 4.1.2) eğilme momenti, kesme kuvveti ve normal kuvvetin ifadelerinin yazılıp, değerlerinin belirlenmesi:

$0 \le x_1 \le 6$

$M_{x1} = H_A.x_1 - q_1.x_1.\dfrac{x_1}{2}$; $T_{x1} = H_A - q_1.x_1$; $N = V_A = 22{,}625\,kN$

$x_1 = 0 \Rightarrow M_{x1} = 0$, $T_{x1} = H_A = 75\,kN.$

Eğilme momentinin maksimum değer aldığı kesitin yeri:

$T_{x1} = H_A - q_1.x_1 = 0 \Rightarrow \quad 75 - 15.x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 5\,m. \quad M_{x1}^{\max} = 75.5 - 15.\dfrac{5^2}{2} = 187{,}5\,kN.m$

$x_1 = 6\,m \quad \Rightarrow M_{x1} = 75.6 - 15.\dfrac{6^2}{2} = 180\,kN.m$, $\quad T_{x1} = 75 - 15.6 = -15\,kN.$

$0 \le x_2 \le 4$

$M_{x2} = H_A.6 - q_1.\dfrac{6^2}{2} - V_A.x_2 = 75.6 - 15.\dfrac{6^2}{2} - (22{,}625).x_2 = 180 - (22{,}625).x_2$

$T = -V_A = -22{,}625\,kN$; $\quad N = -q_1.6 + H_A = -15.6 + 75 = -15\,kN.$

$x_2 = 0 \Rightarrow \quad M_{x2} = 180\,kN.m$, $\quad x_2 = 4\,m \Rightarrow \quad M_{x2} = 180 - (22{,}625).4 = 89{,}5\,kN.m$

$4 \le x_3 \le 8$

$M_{x3} = 180 - V_A.x_3 - P_1.(x_3 - 4)$; $T = -V_A - P_1 = -22{,}625 - 20 = -42{,}625\,kN$; $N = -15\,kN.$

$x_3 = 4m \Rightarrow \quad M_{x3} = 89{,}5\,kN.m$, $x_3 = 8\,m \Rightarrow \quad M_{x3} = 180 - (22{,}625).8 - 20.4 = -81\,kN.m.$

B-3 bölgesinde, Şekil 4.1.1'den görüldüğü gibi

$M = 0$; $\quad T = 0$; $\quad N = -V_B = -66{,}625\,kN$ ' dur.

$0 \le x_4 \le 3$

$M_{x4} = -P_2.x_4$; $\quad T = P_2 = 15\,kN$; $\quad N = -V_B = -66{,}625\,kN$

$x_4 = 0 \Rightarrow \quad M_{x4} = 0$, $\quad x_4 = 3\,m \Rightarrow \quad M_{x4} = -15.3 = -45\,kN.m$

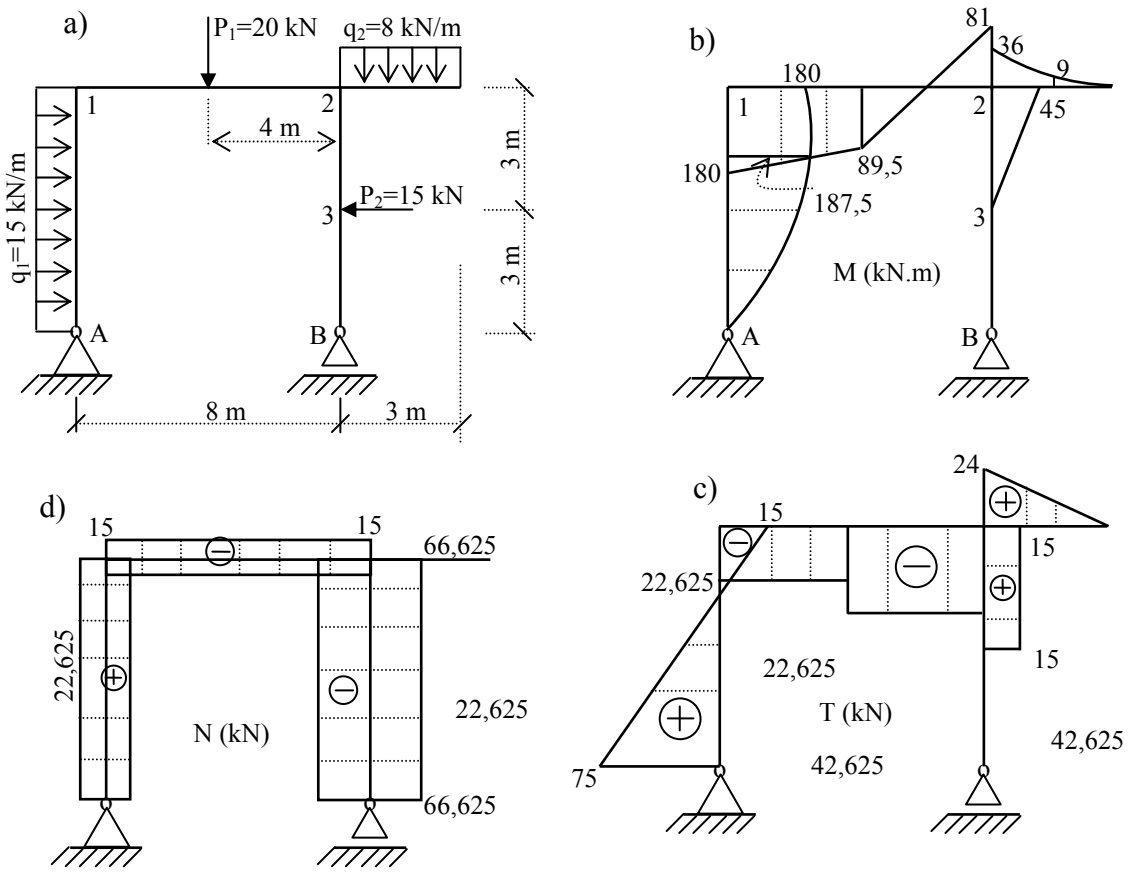
$0 \le x_5 \le 3$

$M_{x5} = -q_2.x_5.\dfrac{x_5}{2} = -q_2.\dfrac{x_5^2}{2}$; $\quad T_{x5} = q_2.x_5$; $\quad N = 0$

$x_5 = 0 \Rightarrow \quad M_{x5} = 0$; $\quad T_{x5} = 0$; $\quad x_5 = 1{,}5\,m \Rightarrow \quad M_{x5} = -8.\dfrac{(1{,}5)^2}{2} = -9\,kN.m$

$x_5 = 3\,m \Rightarrow \quad M_{x5} = -8.\dfrac{(3)^2}{2} = -36\,kN.m$; $\quad T_{x5} = 8.3 = 24\,kN$

Her bir bölge için elde edilmiş değerlere göre çerçevenin *M* (Şekil 4.1.3b), *T* (Şekil 4.1.3c) ve *N* (Şekil 4.1.3d) diyagramları çizilmiştir. Eğilme momenti diyagramı uzamış lifler tarafında çizilmiştir.

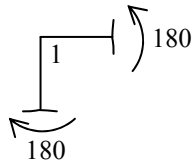


Şekil 3.1.3 a) Ele alınan çerçeve; b) M diyagramı; c) T diyagramı; d) N diyagramı.

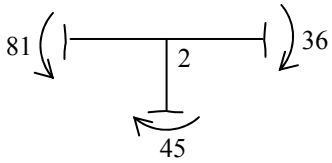
Çerçevenin genel denge kontrolü :

<u>*M* diyagramından</u>

$\sum M_1 = 180 - 180 = 0$



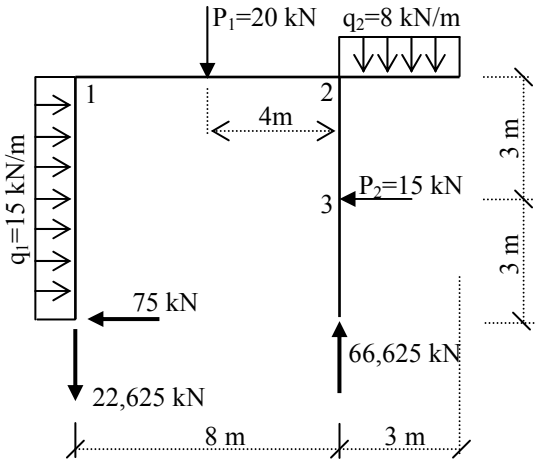
$\sum M_2 = 36 + 45 - 81 = 0$



T ve *N* diyagramlarında işaretlenmiş olan mesnet tepkilerinin (Şekil 4.1.4) değerleri de dikkate alındığında

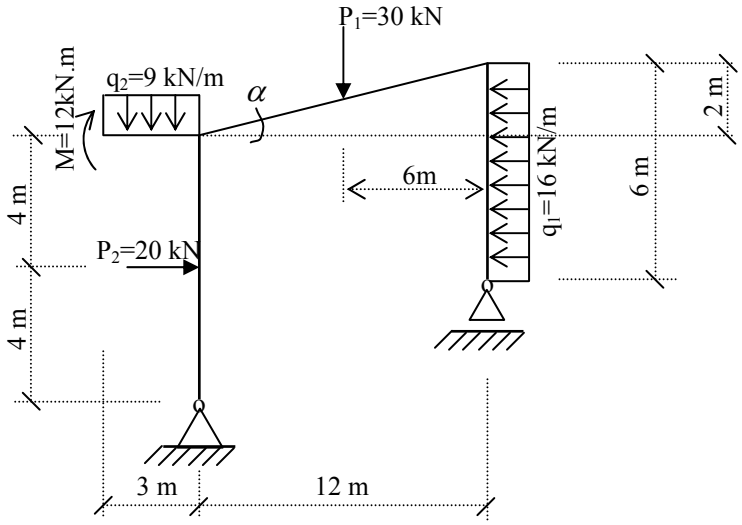
$\sum X = 15.6 - 75 - 15 = 0$; $\sum Y = -22{,}625 + 66{,}625 - 20 - 8.3 = 0$

olarak dengenin sağlanmış olduğu görülmektedir.



Şekil 4.1.4

Örnek 4.2. Boyutları ve yükleme durumu Şekil 4.2.1' de verilen çerçevenin *M*, *T*, *N* diyagramlarının çizimi ve genel denge kontrolünün yapılması istenmektedir.



Şekil 4.2.1

<u>*Çözüm*</u>: Hesaplamaya yine mesnet tepkilerinin belirlenmesiyle başlanır (Şekil 4.2.2).

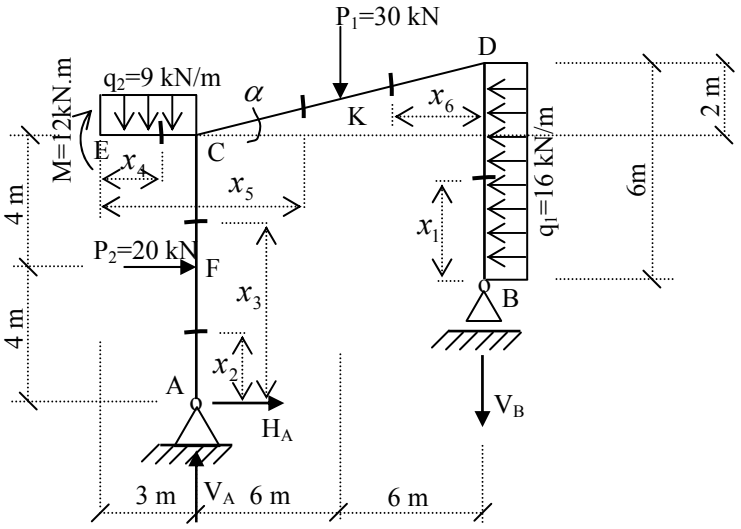
$$\sum X = H_A + P_2 - q_1.6 = 0 \Rightarrow \quad H_A = 16.6 - 20 = 76\,kN$$

$$\sum M_B = V_A.12 + M - q_2.3.(13{,}5) - H_B.4 - P_1.6 - q_1.6.3 = 0 \Rightarrow$$

$$V_A = \frac{-12 + 9.3.(13{,}5) + 76.4 + 30.6 + 16.6.3}{12} = 93{,}70833\,kN.$$

$$\sum M_A = M - q_2.3.(1{,}5) + P_2.4 + P_1.6 - q_1.6.7 + V_B.12 = 0 \Rightarrow$$

$$V_B = \frac{-12 + 9.3.(1{,}5) - 20.4 - 30.6 + 16.6.7}{12} = 36{,}70833\,kN$$



Şekil 4.2.2

Sağlama :

$$\sum Y = -q_2.3 + V_A - P_1 - V_B = -9.3 + 93{,}70833 - 30 - 36{,}70833 = 0$$

Her bir bölge için *M*, *T* ve *N*'nin değerlerinin hesabı:

1. bölge (BD kolonu) $0 \le x_1 \le 6$

$$M_{x1} = -q_1.x_1.\frac{x_1}{2} = -q_1.\frac{x_1^2}{2}\,; \quad T = q_1.x_1\,; \quad N = V_B = 36{,}70833\,kN$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow \quad M_{x1} = 0\,, \quad T_{x1} = 0\,; \quad x_1 = 3\,m \Rightarrow \quad M_{x1} = -16.\frac{3^2}{2} = -72\,kN.m$$

$$x_1 = 6\,m \Rightarrow M_{x1} = -16.\frac{6^2}{2} = -288\,kN.m\,; \quad T_{x1} = 16.6 = 96\,kN.$$

2.bölge (AC kolonunun AF parçası) $0 \le x_2 \le 4$

$$M_{x2} = -H_A.x_2\,; \quad T = -H_A = -76\,kN\,; \quad N = -V_A = -93{,}70833\,kN$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow \quad M_{x2} = 0\,; \quad x_2 = 4\,m \Rightarrow \quad M_{x2} = -76.4 = -304\,kN.m$$

3.bölge (AC kolonunun FC parçası) $4 \le x_3 \le 8$

$$M_{x3} = -H_A.x_3 - P_2.(x_3 - 4)\,; \quad T = -H_A - P_2 = -76 - 20 = -96\,kN\,; \quad N = -V_A = -93{,}70833\,kN$$

$$x_3 = 4\,m \Rightarrow \quad M_{x3} = -304\,kN.m\,, \; x_3 = 8\,m \Rightarrow \quad M_{x3} = -76.8 - 20.4 = -688\,kN.m$$

4.bölge (EC konsolu) $0 \le x_4 \le 3$

$$M_{x4} = M - q_2, \frac{x_4^2}{2} = 12 - 9.\frac{x_4^2}{2}; \quad T_{x4} = -q_2.x_4 = -9.x_4; \quad N = 0$$

$$x_4 = 0 \Rightarrow \quad M_{x4} = 0; \quad T_{x4} = 0; \quad x_4 = 1{,}5\,m \Rightarrow \quad M_{x4} = 12 - 9.\frac{(1{,}5)^2}{2} = 1{,}875\,kN.m$$

$$x_4 = 3\,m \Rightarrow M_{x4} = 12 - 9.\frac{3^2}{2} = -28{,}5\,kN.m \;;\; T_{x4} = -9.3 = -27\,kN$$

5.bölge (CD kirişinin CK parçası) $3 \le x_5 \le 9$

$$M_{x4} = M - q_2, \frac{x_4^2}{2} = 12 - 9.\frac{x_4^2}{2}; \quad T_{x4} = -q_2.x_4 = -9.x_4; \quad N = 0$$

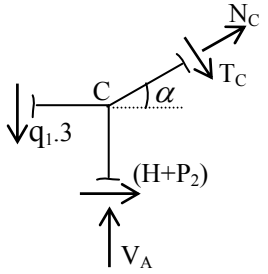
$$x_4 = 0 \Rightarrow \quad M_{x4} = 0; \quad T_{x4} = 0; \quad x_4 = 1{,}5\,m \Rightarrow \quad M_{x4} = 12 - 9.\frac{(1{,}5)^2}{2} = 1{,}875\,kN.m$$

$$x_4 = 3\,m \Rightarrow M_{x4} = 12 - 9.\frac{3^2}{2} = -28{,}5\,kN.m \;;\; T_{x4} = -9.3 = -27\,kN$$

Bu bölgede

$$\cos\alpha = \frac{12}{\sqrt{12^2 + 2^2}} = 0{,}9864; \quad \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{12^2 + 2^2}} = 0{,}1664$$

C kesitinde (Şekil 4.2.3)



Şekil 4.2.3

$$M_C = M - q_2.3.(1{,}5) - P_2.4 - H_A.8 = 12 - 0.3.(1{,}5) - 20.4 - -76.8 = -716{,}5\,kN.m$$

$$T_C = V_A.\cos\alpha - q_2.\cos\alpha - (H_A + P_2).\sin\alpha = (93{,}70833).(0{,}9864) -$$
$$- 9.3.(0{,}9864) - (76 + 20).(0{,}1664) = 49{,}8267\,kN$$

$$N_C = -((V_A - q_2.3).\sin\alpha + (H_A + P_2).\cos\alpha) =$$
$$- ((93{,}70833 - 9.3).(0.1664) + (76 + 20).(0{,}9864)) = -105{,}7946\,kN$$

K kesitinde (Şekil 4.2.3)

$$M_K = M - q_2.3.(7{,}5) - P_2.5 - H_A.9 + V_A.6 = 12 - 27.(7{,}5) - 100 - (93{,}70833).6 = -412{,}25\,kN.m$$

$$T_K^{Sol} = T_C = 49{,}8267\,kN; \quad T_K^{Sağ} = T_C - P_1.\cos\alpha = 49{,}8267 - 30.(0{,}9864) = 20{,}2347\,kN$$

$$N_K^{Sol} = N_C = -105{,}7946\,kN; \; N_K^{Sağ} = -(N_C - P_1.\sin\alpha) = -105{,}7946 + 30.(0{,}1664) = -100{,}806\,kN$$

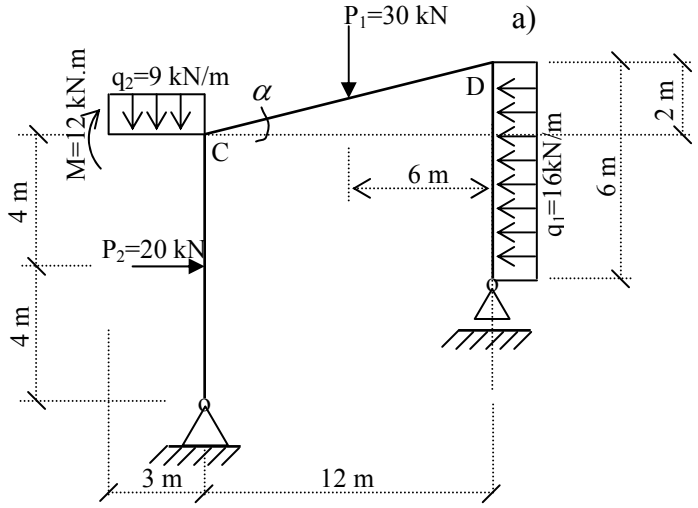
6.bölge (DC kirişinin DK parçası) $0 \le x_6 \le 6$

$$M_{x6} = -q_2.\frac{6^2}{2} - V_B.x_6 \; ; \; x_6 = 0 \Rightarrow M_{x6} = -16.18 = -288\,kN.m \; ; \; x_6 = 6\,m \Rightarrow M_{x6} = -412{,}25\,kN.m$$

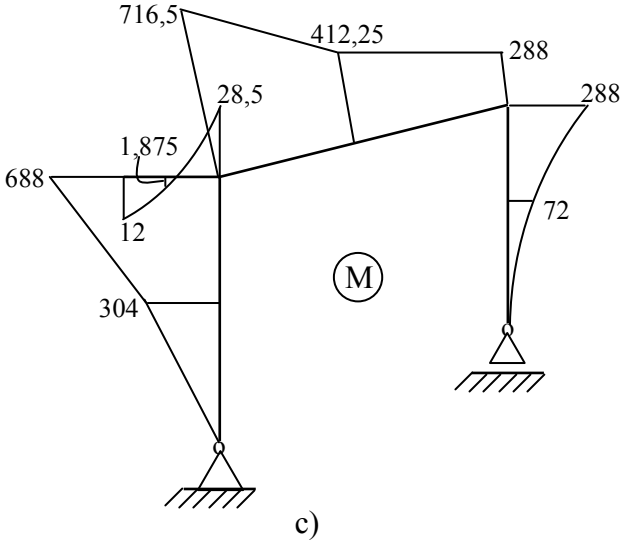
$$T = V_B.\cos\alpha + q_2.6.\sin\alpha = (36{,}70833).(0{,}9864) - 16.6.(0{,}1664) = 20{,}234\,kN$$

$$N = -(V_B.\sin\alpha + q_2.6.\cos\alpha) = -(36{,}70833.(0{,}1664) + 16.6.(0{,}9864)) = -100{,}80266\,kN$$

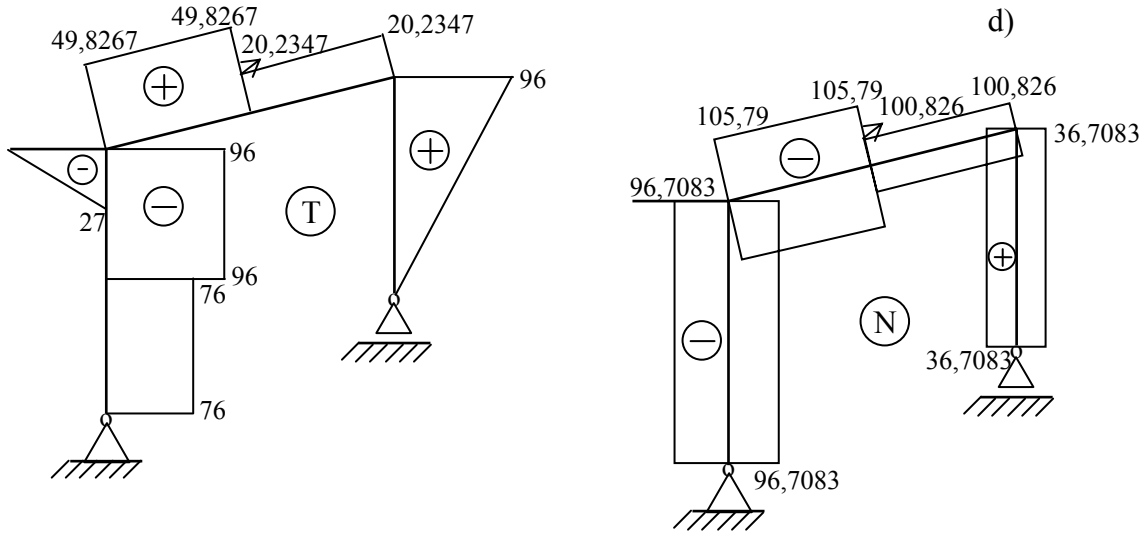
Elde edilmiş değerlere göre çerçevenin *M* (Şekil 4.2.4b), *T* (Şekil 4.2.4c) ve *N* (Şekil 4.2.4d) diyagramları çizilmiştir.



b)



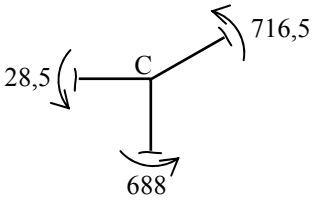
c)

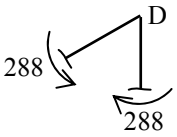


Şekil 4.2.4. a) Verilen çerçeve, b) *M* diyagramı, c) *T* diyagramı, d) *N* diyagramı.

Çerçevenin genel denge kontrolü:

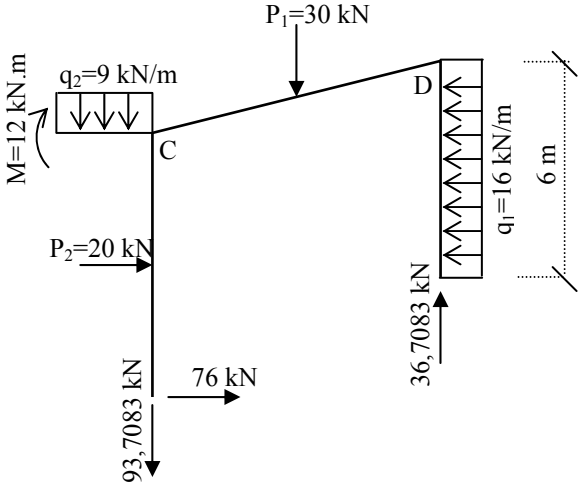
$$\sum M_C = 716{,}5 - 688 - 28{,}5 = 0$$





$$\sum M_D = 288 - 288 = 0$$

Şekil 4.2.5



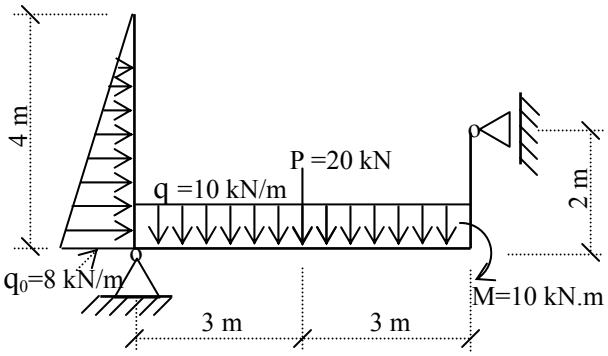
Şekil 4.2.6

$$\sum X = 76 + 20 - 16.6 = 0$$

$$\sum Y = -9.3 + 93{,}7083 - 30 - 36{,}7083 = 0$$

Örnek 4.3. Boyutları ve yükleme durumu Şekil 4.3.1'de verilmiş çerçeve için

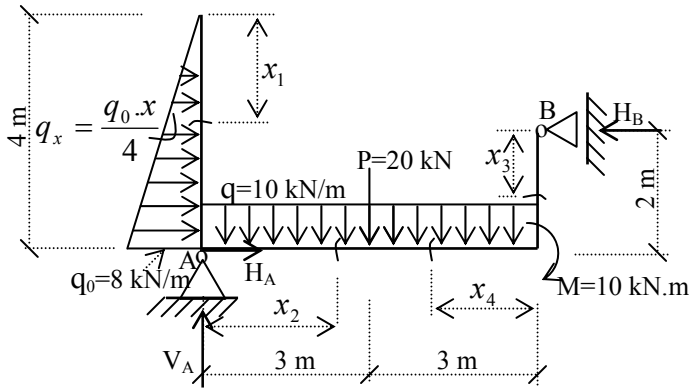
a) Eğilme momenti, kesme kuvveti ve normal kuvvet diyagramlarını çiziniz,
b) Çerçevenin genel denge kontrolünü yapınız.



Şekil 4.3.1

Çözüm:

Mesnet tepkilerinin belirlenmesi (Şekil 4.3.2):



Şekil 4.3.2

$$\sum Y = 0 \Rightarrow \quad V_A - P - q.6 = 0 \;\Rightarrow\; V_A = 20 + 10.6 = 80\ kN$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \quad -H_B.2 + M + q.6.3 + P.3 + \frac{q_9.4}{2}.\frac{1}{3}.4 = 0$$

$$H_B = \frac{10 + 10.6.3 + 20.3 + \frac{8.4}{2}.\frac{1}{3}.4}{2} = 135{,}6667\,kN$$

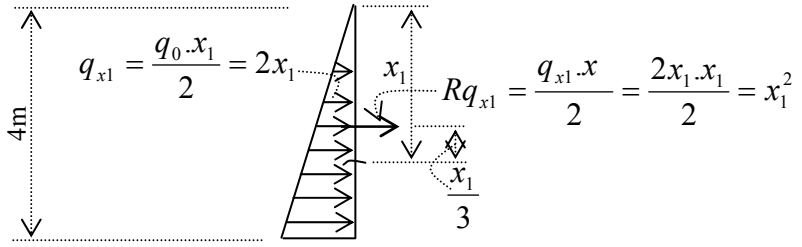
$$\sum M_B = -\frac{q_0.4}{2}.(\frac{2.4}{3} - 2) + V_A.6 - q.6.3 - P.3 + M - H_A.2 = 0$$

$$H_A = \frac{-\frac{8.4}{2}.(0{,}66667) + 80.6 - 10.6.3 - 20.3 + 10}{2} = 119{,}6667\,kN$$

Sağlama :

$$\sum X = \frac{q_0.4}{2} + H_A - H_B = 0 \Rightarrow \frac{8.4}{2} + 119{,}6667 - 135{,}6667 = 0$$

Çerçevenin bölgeleri için *M*, *T* ve *N*'nin değerlerinin hesaplanması (Şekil 4.3.2):



Şekil 4.3.3

$0 \le x_1 \le 4$

$$M_{x1} = -R\,q_{x1}.\frac{x_1}{3} = -x_1^2.\frac{x_1}{3} = -\frac{x_1^3}{3}\,; \quad T_{x1} = R\,q_{x1} = x_1^2\,; \quad N = 0.$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow M_{x1} = 0\,;\ T_{x1} = 0\,;\ x_1 = 2\,m \Rightarrow M_{x1} = -\frac{2^3}{2} = -2{,}666\,kN.m\,; T_{x1} = 4\,kN.$$

$$x_1 = 4\,m \Rightarrow M_{x1} = -\frac{4^3}{3} = -21{,}333\,kN.m \quad T_{x1} = 16\,kN.$$

$0 \le x_3 \le 2$

$M_{x3} = H_B.x_3\,; \quad T = -H_B = -135.6667\,kN\,; \quad N = 0.$

$x_{x3} = 0 \Rightarrow \quad M_{x3} = 0\,; \quad x_3 = 2\,m \Rightarrow \quad M_{x3} = (135{,}6667).2 = 271{,}3333\,kN.m$

$0 \le x_4 \le 3$

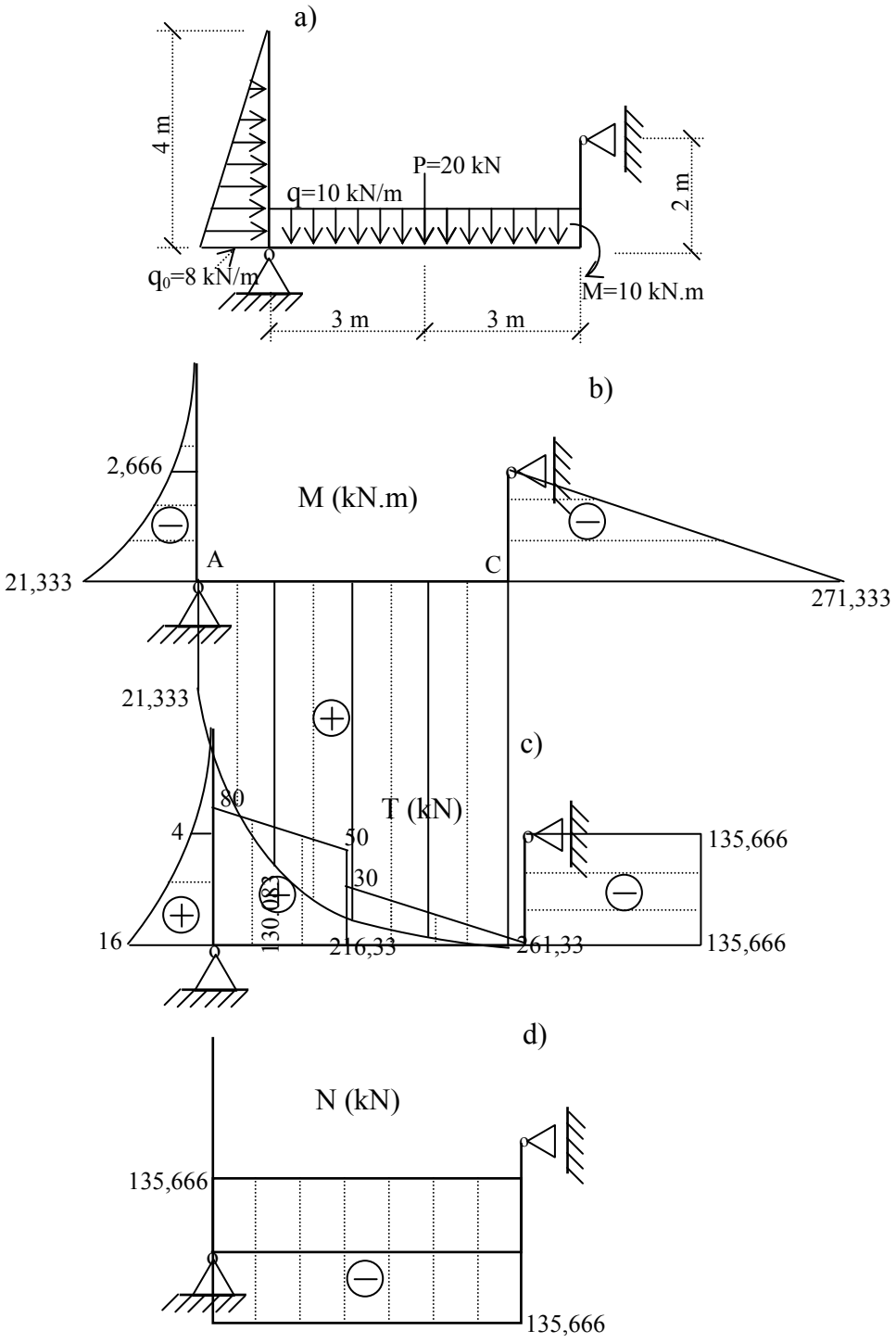
$$M_{x4} = H_b.2 - M - q.\frac{x_4^2}{2} = 271{,}333 - 10 - 10.\frac{x_4^2}{2} = 261{,}333 - 5.x_4^2\ ;$$

$T = q.x_4\ ; \quad N = -H_B = -135{,}666\,kN.\ x_4 = 0 \Rightarrow M_{x4} = 261{,}333\,kN.m\ ; \quad T_{x4} = 0\ ;$

$x_4 = 1{,}5\,m \Rightarrow \quad M_{x4} = 261{,}3333 - 5.(1{,}5)^2 = 250{,}08333\,kN.m\ ;$

$x_4 = 3\,m \Rightarrow \quad M_{x4} = 261{,}333 - 5.(3)^2 = 216{,}333\,kN.m\ ; \quad T_{x4} = 10.3 = 30\,kN.$

Bölgeler için belirlenmiş değerlere göre *M* (Şekil 4.3.4b), *T* (Şekil 4.3.4c) ve *N* (Şekil 4.3.4d) diyagramları çizilmiştir.

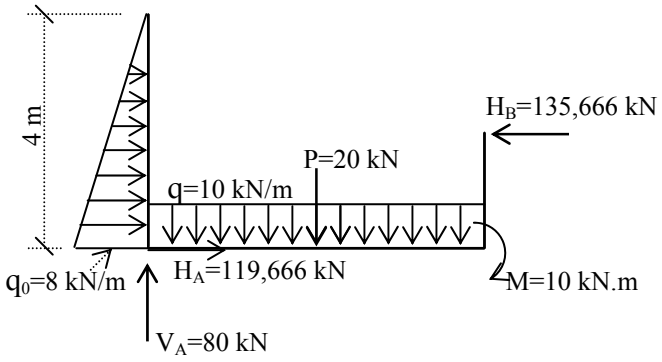


Şekil 4.3.4. a) Verilen çerçeve, b) *M* diyagramı, c) *T* diyagramı, d) *N* diyagramı.

Çerçevenin genel denge kontrolü (Şekil 4.3.5):



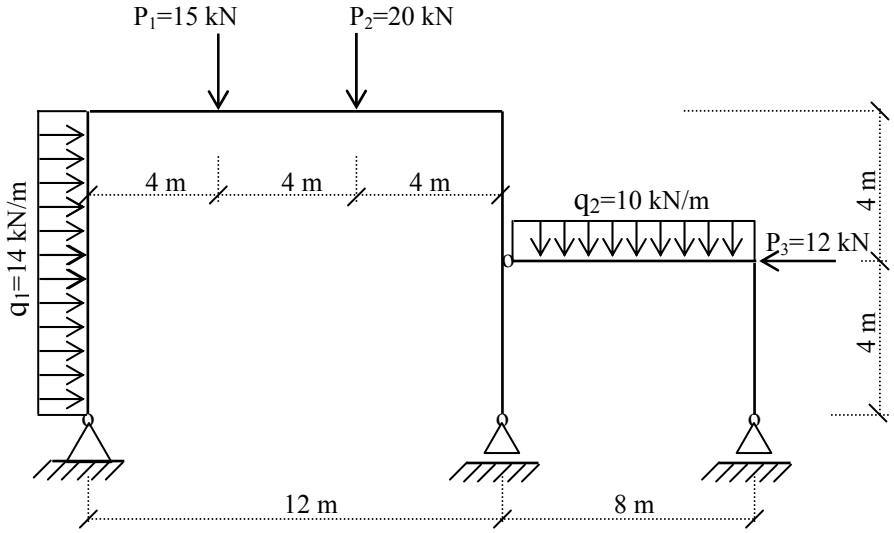
$$\sum M_A = 21{,}333 - 21{,}333 = 0 \qquad \sum M_C = 261{,}333 + 10 - 271{,}333 = 0$$



Şekil 4.3.5

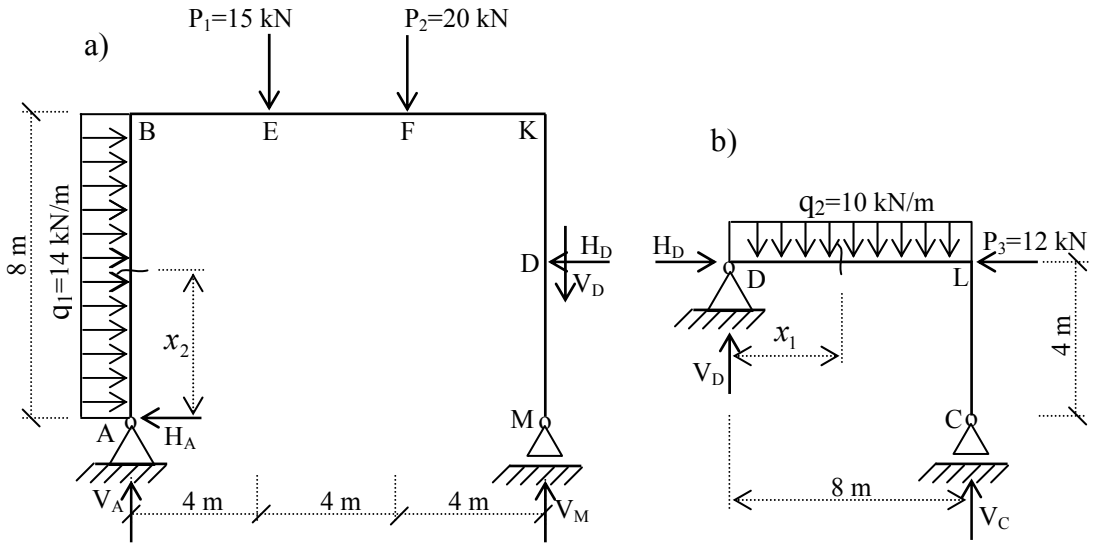
$$\sum X = H_A + \frac{q_0.4}{2} - H_B = 119{,}666 + \frac{8.4}{2} - 135{,}666 = 0$$
$$\sum Y = V_A - q.6 - P = 80 - 10.6 - 20 = 0$$

Örnek 4.4. Boyutları ve yükleme durumu Şekil 4.4.1'de görülen çerçeve için eğilme momenti, kesme kuvveti, normal kuvvet diyagramlarını çiziniz ve genel denge kontrolünü yapınız.



Şekil 4.4.1

Çözüm :
Sistemin kinematik analizi : W = 3.2 – 2.1 – 4 = 0 ve yararlı bünyeye sahiptir. Çerçevenin hesaplama şeması Şekil 4.4.2'de çizilmiştir.



Şekil 4.4.2. a) Esas (taşıyıcı) çerçeve, b) Yardımcı çerçeve.

Bu tür sistemlerde önce yardımcı çerçeve (Şekil 4.4.2 b) hesaplanır. Hesaplamaya mesnet tepkilerinin belirlenmesi ile başlanılır:

$$\sum X = H_D - P_3 = 0 \Rightarrow \quad H_D = P_3 = 12\,kN\,; \quad V_D = V_C = \frac{q_2.8}{2} = \frac{10.8}{2} = 40\,kN.$$

Bölgeler için iç kuvvetlerin (*M*, *T* ve *N*) değerlerinin hesabı:.

DL bölgesi $0 \le x_1 \le 8$

$$M_{x1} = V_D.x_1 - q_2.\frac{x_1^2}{2}\,; \quad T_{x1} = V_A - q_2.x_1\,; \quad N = -H_D = -12\,kN.$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow \quad M_{x1} = 0\,; \quad T_{x1} = V_D = 40\,kN$$

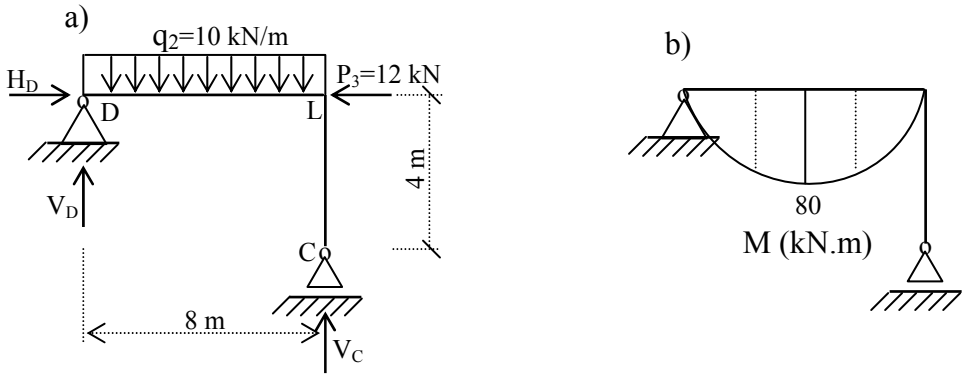
$$x_1 = 4\,m \Rightarrow \quad M_{x1}^{\max} = \frac{q_2.8^2}{2} = \frac{10.64}{2} = 80\,kN.m\,; \quad T_{x1} = 0.$$

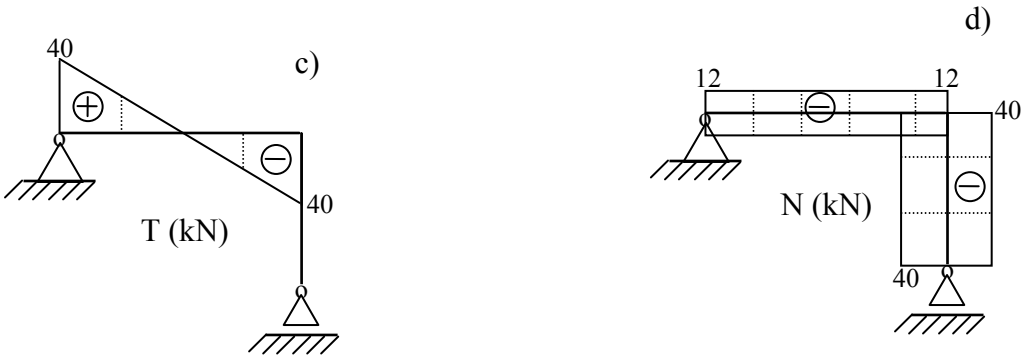
$$x_1 = 8\,m \Rightarrow \quad M_{x1} = 40.8 - 10.\frac{8^2}{2} = 0\,; \quad T_{x1} = 40 - 10.8 = -40\,kN.$$

CL bölgesinde

$$M = 0\,; \quad T = 0\,; \quad N = -V_C = -40\,kN.$$

Elde edilmiş değerlere göre *M*, *T* ve *N* diyagramları çizilmiştir (Şekil 3.4.3 b-d).





Şekil 4.4.3. a) Yardımcı çerçeve, b) *M* diyagramı, c) *T* diyagramı, d) *N* diyagramı.

Taşıyıcı çerçevenin (Şekil 4.4.2a) hesaplanması .
Mesnet tepkileri

$$\sum X = q_1.8 - H_A - H_D = 0 \Rightarrow \quad H_A = 14.8 - 12 = 100\,kN$$

$$\sum M_D = V_A.12 + q_1..8.4 - P_1.8 - P_2.4 - H_D.4 = 0 \Rightarrow$$

$$V_A = \frac{-14.8.4 + 15.8 + 20.4 + 12.4}{12} = -16{,}6667\,kN$$

$$\sum M_A = -V_M.12 - H_D.4 + P_1.4 + P_2.8 + q_1.8.4 + V_D.12 = 0 \Rightarrow$$

$$V_M = \frac{-12.4 + 15.4 + 20.8 + 14.8.4 + 40.12}{12} = 91{,}6667\,kN.$$

Sağlama :

$$\sum Y = V_A - P_1 - P_2 - V_D + V_M = -16{,}6667 - 15 - 20 - 40 + 91{,}6667 = 0$$

Taşıyıcı çerçevenin bölgeleri için *M*, *T* ve *N*'nin değerlerinin hesabı .

AB bölgesi $0 \le x_2 \le 8$

$$M_{x2} = H_A.x_2 - q_1.\frac{x_2^2}{2}; \quad T_{x1} = H_A - q_1.x_2; \quad N = -V_A = -(-16{,}666) = 16{,}6667\,kN$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow \quad M_{x2} = 0; \quad T_{x2} = H_A = 100\,kN.$$

$$x_2 = 4\,m \Rightarrow \quad M_{x2} = 100.4 - 14.\frac{4^2}{2} = 288\,kN.m$$

$$x_2 = 8\,m \Rightarrow \quad M_{x2} = 100.8 - 14.\frac{8^2}{2} = 352\,kN.m; \quad T_{x2} = 100 - 14.8 = -12\,kN.$$

Eğilme momentinin maksimum değer aldığı kesitin yeri

$$T_{x2} = 100 - 14.x_0 = 0 \Rightarrow \quad x_0 = 7{,}142857\,m$$

$$M_{\max} = 100.(7{,}142857) - 14.\frac{(7{,}142857)^2}{2} = 357{,}142857\,kN.m$$

BK bölgesi Bu bölgede iç kuvvetlerin karakteristik kesitlerde belirlenmesi diyagramların çizimi için yeterlidir.

Çerçeve kirişinin B kesitinde

$$M_B = H_A.8 - q_1.\frac{8^2}{2} = 100.8 - 14.\frac{64}{2} = 352\,kN.m$$

$$T_B = V_A = -16{,}6667\,kN = T_E^{sol}$$

$$N = H_A - q_1.8 = 100 - 14.8 = -12\,kN$$

E kesitinde

$$M_E = H_A.8 - q_1.\frac{8^2}{2} + V_A.4 = 100.8 - 14.\frac{64}{2} - (16{,}6667).4 = 285{,}333\,kN.m$$

$$T_E^{sağ} = V_A - P_1 = -16{,}6667 - 15 = 31{,}6667\,kN = T_F^{sol}$$

F kesitinde

$$M_F = H_A.8 - q_1.\frac{8^2}{2} + V_A.8 - P_1.4 = 100.8 - 14.\frac{64}{2} - (16{,}666).8 - 15.4 = 158{,}666\,kN.m$$

$$T_F^{sağ} = V_A - P_1 - P_2 = -16{,}6667 - 15 - 20 = -51{,}6667\,kN = T_K$$

K kesitinde

$$M_K = H_A.8 - q_1.\frac{8^2}{2} + V_A.12 - P_1.8 - P_2.4 = 100.8 - 14.32 - (16{,}6667).12 -$$
$$15.8 - 20.4 = -48\,kN.m$$

MK kolonu için :

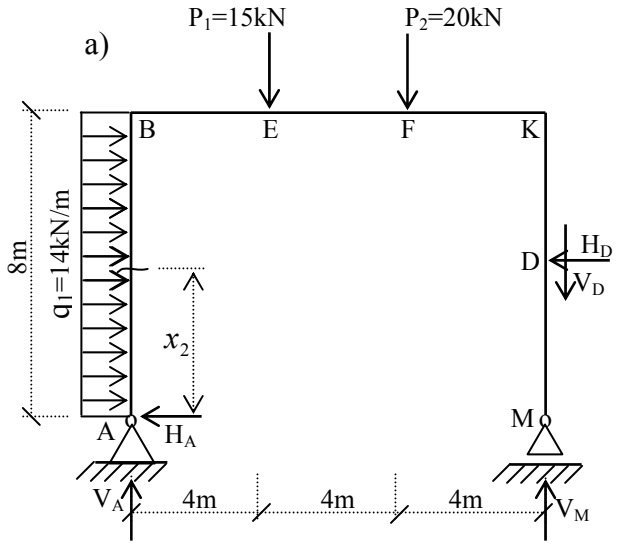
MD bölgesinde $M = 0;\quad T = 0;\quad N = -V_M = -91{,}6667\,kN$

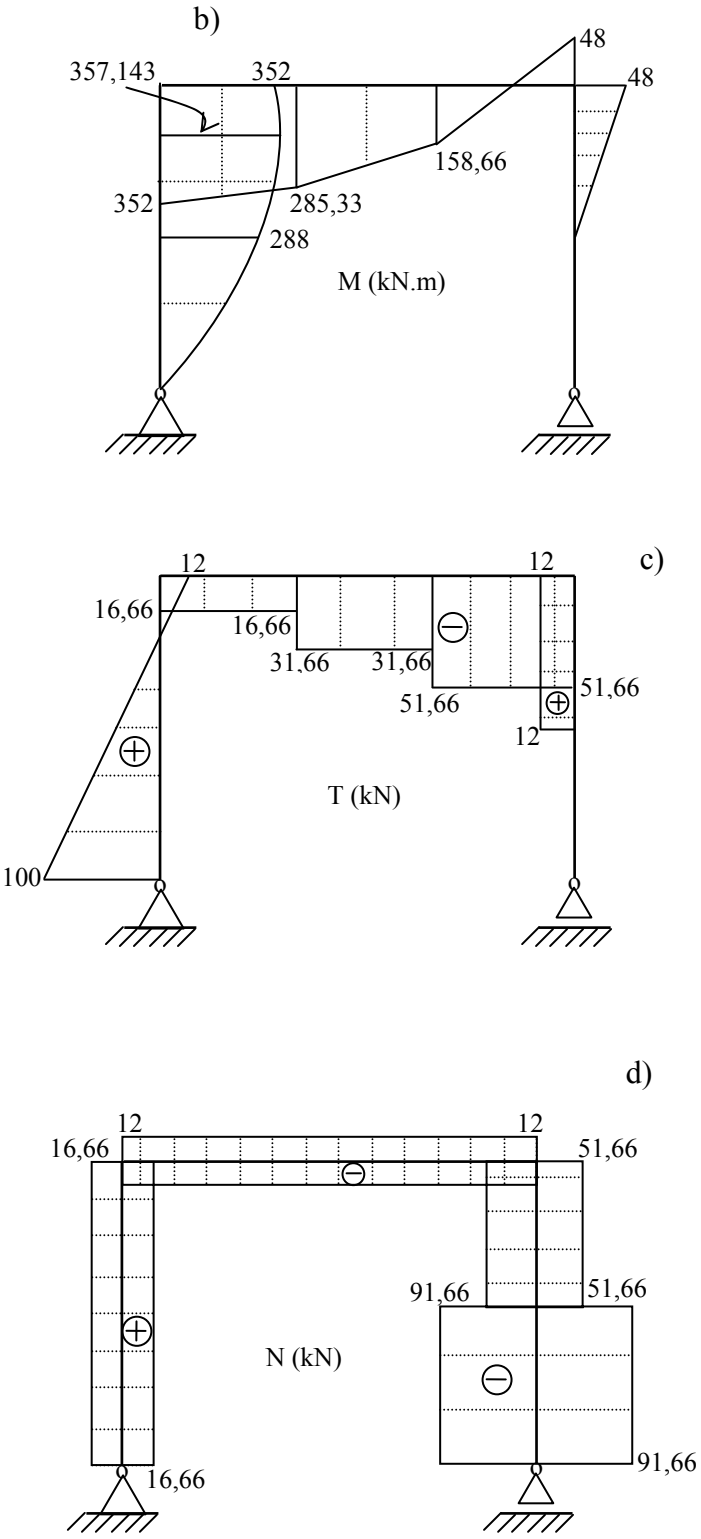
DK bölgesinde

$M_K = -H_B.4 = -12.4 = -48\,kN$; $T_{DK} = H_D = 12\,kN$;

$N_{DK} = -V_M + V_D = -91{,}6667 + 40 = -51{,}6667\,kN$

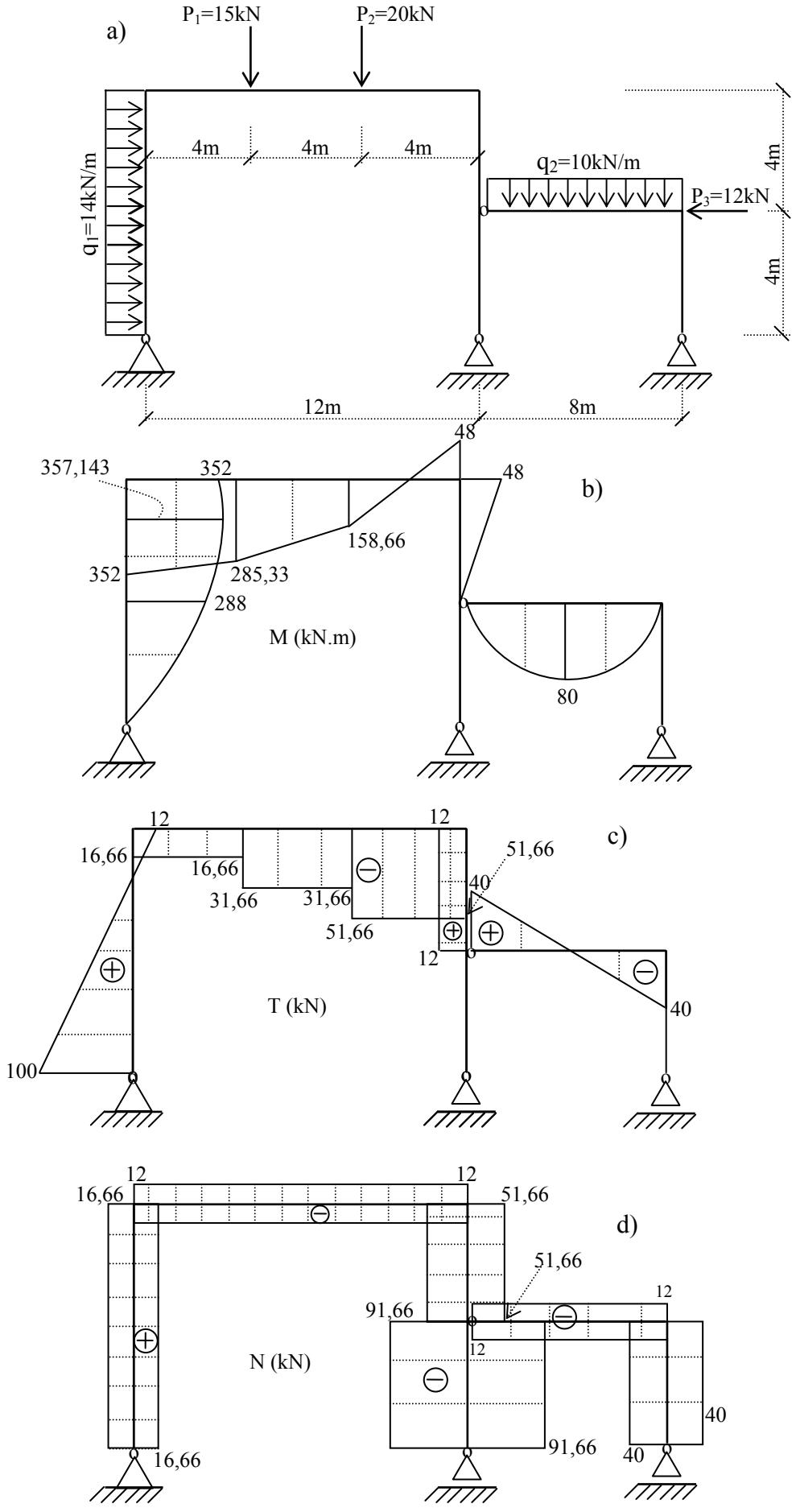
Elde edilmiş değerlere göre taşıyıcı çerçevenin *M*, *T* ve *N* diyagramları Şekil 4.4.4b-d'de çizilmiştir.





Şekil 4.4.4. a) Taşıyıcı çerçeve, b) *M* diyagramı, c) *T* diyagramı, d) *N* diyagramı.

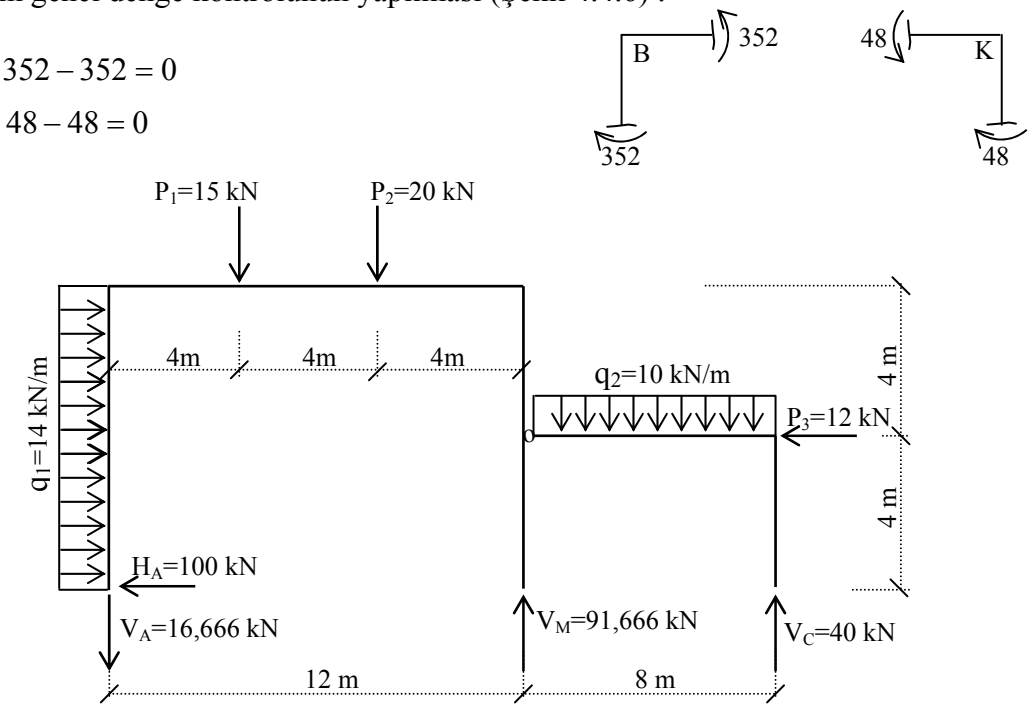
Esas ve yardımcı çerçeveler için çizilen *M*, *T* ve *N* diyagramları aynı ölçekle birleştirilip, tüm çerçevenin *M*, *T* ve *N* diyagramları elde edilir (Şekil 4.4.5b-d).



Şekil 4.4.5. a) Verilmiş çerçeve, b) *M* diyagramı, c) *T* diyagramı, d) *N* diyagramı.

Çerçevenin genel denge kontrolünün yapılması (Şekil 4.4.6) :

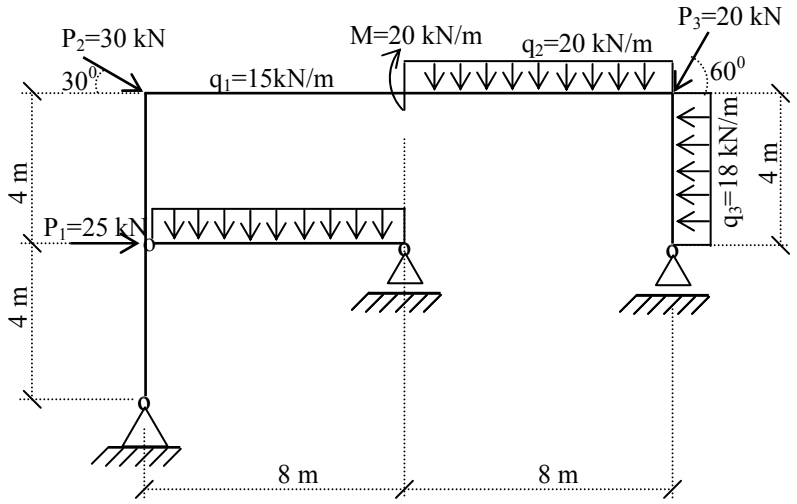
$$\sum M_B = 352 - 352 = 0$$
$$\sum M_K = 48 - 48 = 0$$



Şekil 4.4.6

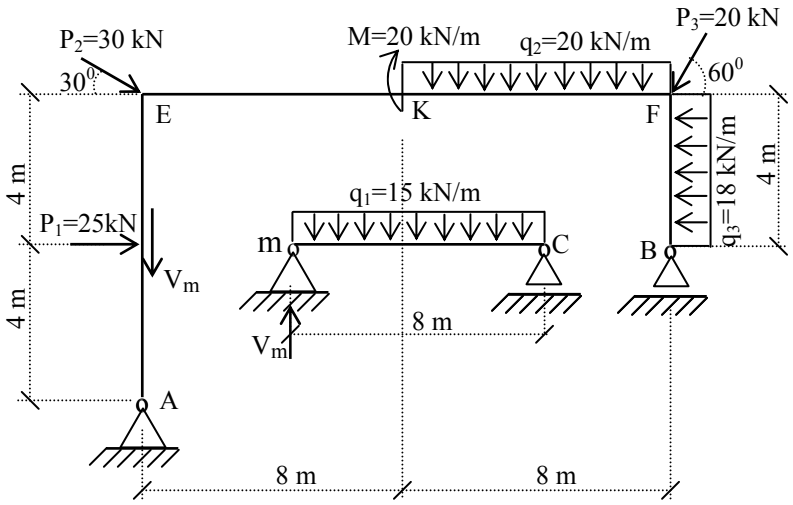
$$\sum X = q_1.8 - H_A - P_3 = 14.8 - 100 - 12 = 0$$
$$\sum Y = -V_A - P_1 - P_2 + V_M - q_2.8 + V_C = 16{,}666 - 15 - 20 + 91{,}666 - 10.8 + 40 = 0$$

Örnek 4. 5. Boyutları ve yükleme durumu Şekil 4.5.1 'de verilmiş çerçeve için
a) Eğilme momenti, kesme kuvveti ve normal kuvveti diyagramlarının çizilmesi,
b) Çizilmiş diyagramlara dayanarak çerçevenin genel denge kontrolünün yapılması istenmektedir:



Şekil 4.5.1

Çözüm : Kinematik analiz yapıldığında W = 3.2 – 2.1 -4 = 0 olduğu görülmekte ve şekilden sistemin yararlı bünyeye sahip olduğu anlaşılmaktadır. Hesaplama şeması Şekil 4.5.2' de çizilmiştir.



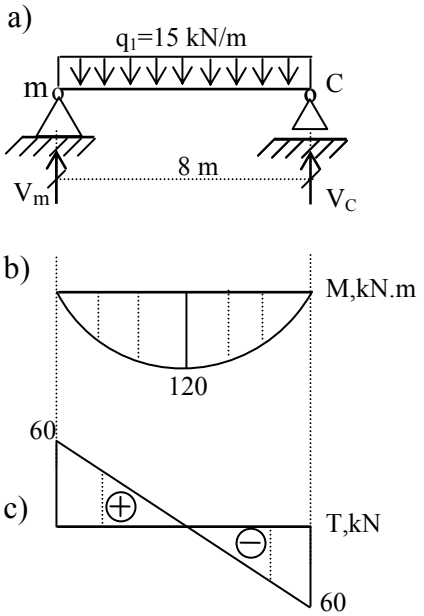
Şekil 4.5.2

mC basit kirişinin *M* ve *T* diyagramları daha önce çözülmüş problemlere benzer şekilde çizilmiştir (Şekil 4.5.3b,c).

$$V_m = V_C = \frac{q_1.8}{2} = \frac{15.8}{2} = 60\,kN$$

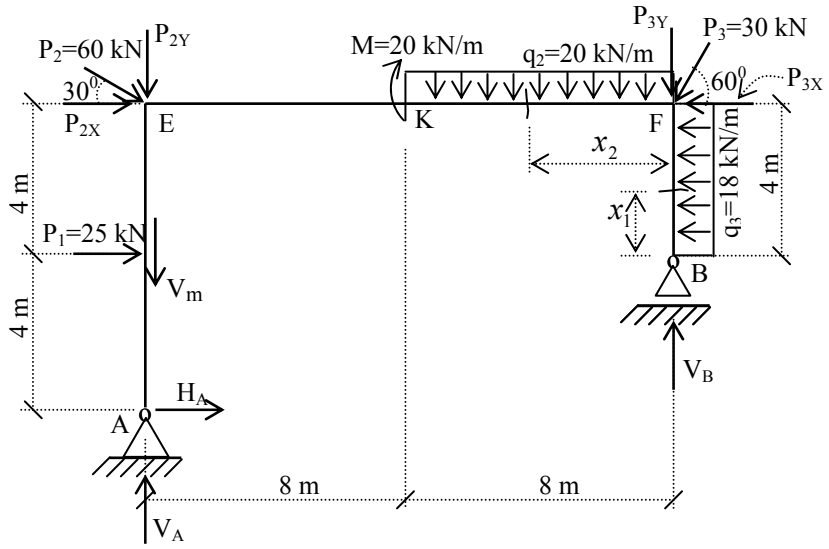
Maksimum eğilme momenti açıklığın ortasında oluşur.

$$M_{\max} = \frac{q_1.8^2}{8} = \frac{15.64}{8} = 120\,kN.m\,; \quad T_m = V_m = 60\,kN\,; \quad T_C = -V_C = -60\,kN\,.$$



Şekil 4.5.3. a) mC kirişi, b) *M* diyagramı, c) *T* diyagramı.

Taşıyıcı çerçevenin (Şekil 4.5.4) hesaplanması:



Şekil 4.5.4

Mesnet tepkileri:

$$\sum X = P_{2X} + P_1 + H_A - P_{3X} - q_3.4 = 0 \Rightarrow H_A = -60.\cos 30^0 - 25 + 30.\cos 60^0 + 18.4 = 10.04\,kN$$

$$\sum M_B = V_A.16 - H_A.4 - V_m.16 - P_{2Y}.16 + P_{2X}.4 + M - q_2.8.4 - P_{3X}.4 - q_3.4.2 = 0 \Rightarrow$$

$$V_A = \frac{(10{,}04).4 + 60.16 + (60.\sin 30^0).16 - (60.\cos 30^0).4 - 20 + 30.8.4 + (30.\cos 60^0).4 + 18.4.2}{16}$$

$$V_A = 151{,}02\,kN$$

$$\sum M_A = -V_B.16 - q_3.4.6 - P_{3X}.8 + P_{3Y}.16 + q_2.8.12 + M + P_{2X}.8 + P_1.4 = 0$$

$$V_B = \frac{-18.4.6 - (30.\cos 60^0).8 + (30.\sin 60^0).16 + 30.8.12 + 20 + (60.\cos 30^0).8 + 25.4}{16} \Rightarrow$$

$$V_B = 204{,}96\,kN$$

Sağlama :

$$\sum Y = V_A - V_m - P_{2Y} - P_{3Y} + V_B - q_2.8 = 0$$

$$151.02 - 60 - 60.(0{,}5) - 30.(0{,}8666) + 204{,}96 - 30.8 = 0$$

Taşıyıcı çerçevenin (Şekil 4.5.4) karakteristik kesitlerinde M ve T 'nin değerleri:

AE kolonunun karakteristik kesitlerinde:

$M_A = 0\,;\quad T_A = -H_A = -10{,}04\,kN = T_m^{sol}\,;\quad N_A = -V_A = -151{,}02\,kN = N_m^{sol}$

$M_m = -H_A.4 = -(10{,}04).4 = -40{,}16\,kN.m\,;\quad T_m^{sağ} = -H_A - P_1 = -10{,}04 - 25 = -35{,}04\,kN = T_E$

$N_m^{sağ} = -V_A + V_m = -151{,}02 + 60 = -91{,}02\,kN = N_E$

$M_E = -H_A.8 - P_1.4 = (-10{,}04).8 - 25.4 = -180{,}32\,kN.m$

EK bölgesi için

$M_E = -180{,}32\ kN.m$

$T_E = V_A - V_m - P_{2Y} = 151{,}02 - 60 - 60.\sin 30^0 = 61.02\ kN = T_K$

$N_E = -H_A - P_1 - P_{2X} = -10{,}04 - 25 - 60.\cos 30^0 = -87{,}036\ kN$ (*kiriş boyu sabit*)

$M_K^{sol} = V_A.8 - H_A.8 - P_1.4 - V_m.8 - P_{2Y}.8 = (151{,}02).8 - (10{,}04).8 - 25.4 - 60.8 - (60.\sin 30^0).8$

$= 307{,}84\ kN.m$

BF bölgesi için $0 \le x_1 \le 4$

$M_{x1} = -q_3.\dfrac{x_1^2}{2}\,;\quad T_{x1} = q_3.x_1\,;\quad N = -V_B = -204{,}96\,kN.$

$x_1 = 0 \Rightarrow\quad M_{x1} = 0\,;\quad T_{x1} = 0.$

$x_1 = 2\,m \Rightarrow\quad M_{x1} = -18.\dfrac{2^2}{2} = -36\,kN.m$

$x_1 = 4\,m \Rightarrow\quad M_{x1} = -18.\dfrac{4^2}{2} = -144\,kN.m\,;\quad T_{x1} = 18.4 = 72\,kN.$

FK bölgesi için $0 \le x_2 \le 8$

$M_{x2} = V_B.x_2 - q_3.4.2 - P_{3Y}.x_2 - q_2.\dfrac{x_2^2}{2} = 204{,}96.x_2 - 18.4.2 - 30.(\sin 60^0).x_2 - 30.\dfrac{x_2^2}{2}$

$T_{x2} = -V_B + P_{3Y} + q_2.x_2 = -204{,}96 + 30.\sin 60^0 + 30.x_2 = -178{,}86 + 30.x_2$

$N = -q_3.4 - P_{3X} = -18.4 - 30.\cos 60^0 = -87{,}036\,kN$

$x_2 = 0 \Rightarrow\quad M_{x2} = -144\,kN.m\,;\quad T_{x2} = -178{,}96\,kN.$

$x_2 = 8\,m \Rightarrow\quad M_{x2} = (204{,}96).8 - 144 - (25{,}98).8 - 30.\dfrac{8^2}{2} = 327{,}84\,kN.m$

$T_{x2} = -178{,}96 + 30.8 = 61{,}02\,kN.$

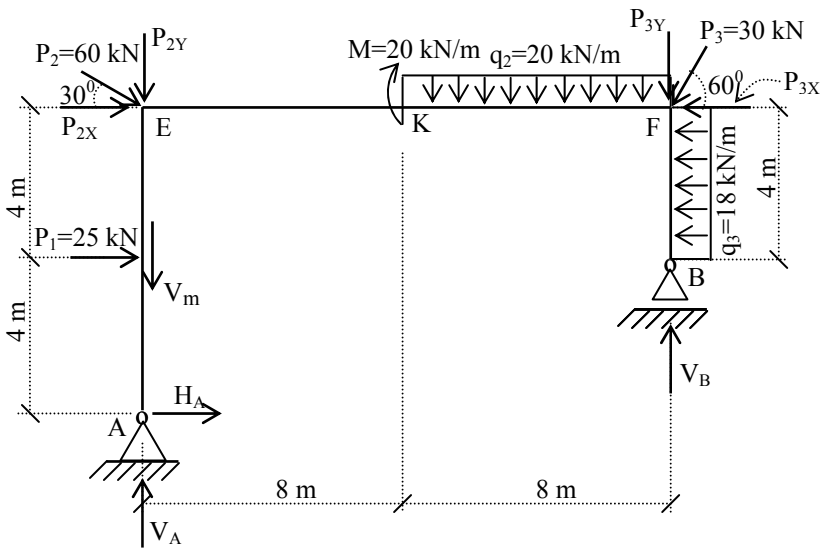
Bu bölgede eğilme momentinin maksimum değer aldığı kesitin x_0 mesafesi:

$T_{x0} = -178{,}96 + 30.x_0 = 0 \Rightarrow\quad x_0 = 5{,}9653\,m$

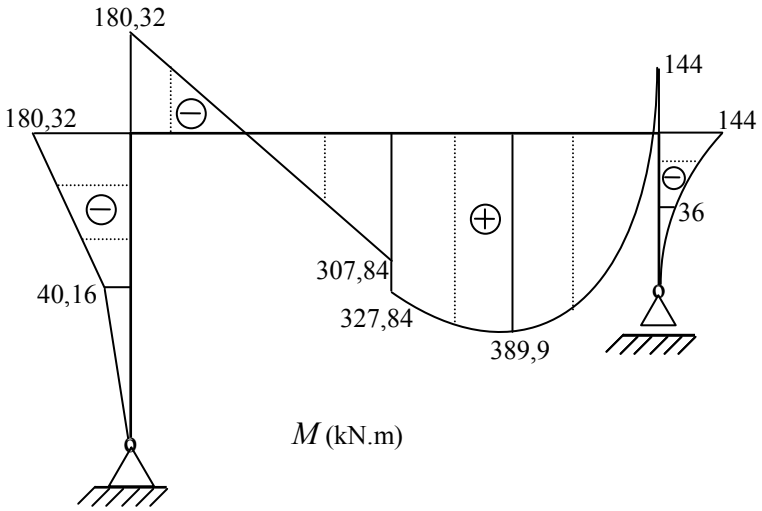
$M_{\max} = (204{,}96).(5{,}9653) - 144 - (25{,}98).(5{,}9653) - 30.\dfrac{(5{,}9653)^2}{2} = 389{,}9\,kN.m.$

Hesaplanmış değerlere göre taşıyıcı çerçevenin *M, T* ve *N* diyagramları (Şekil 4.5.5b-d) çizilmiştir.

a)

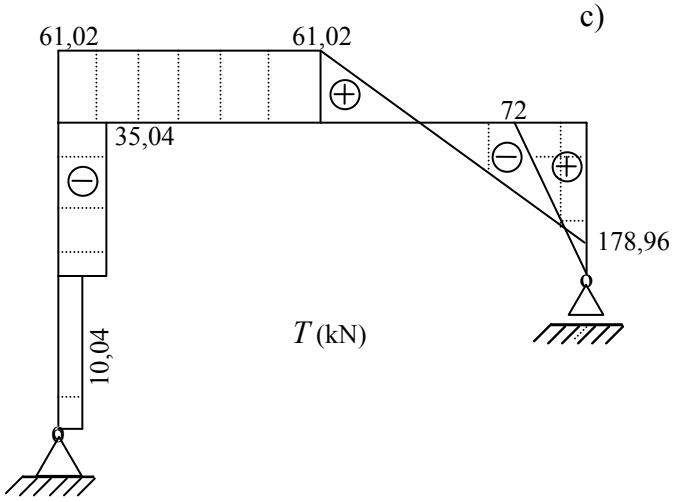

P2=60 kN
P2Y
30⁰
P2X
E
M=20 kN/m
q2=20 kN/m
K
P3Y
P3=30 kN
60⁰
P3X
F
q3=18 kN/m
4 m
4 m
P1=25 kN
Vm
B
VB
HA
A
8 m
8 m
VA

b)

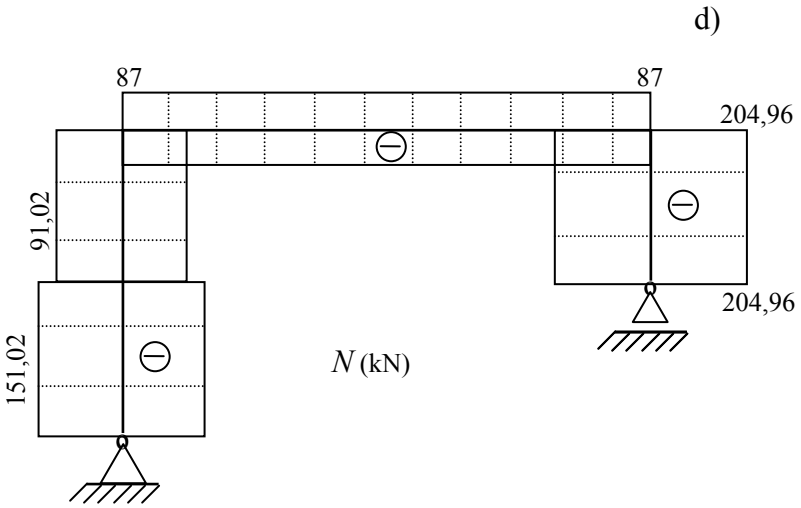

180,32
144
180,32
144
36
307,84
40,16
327,84
389,9

M (kN.m)

c)

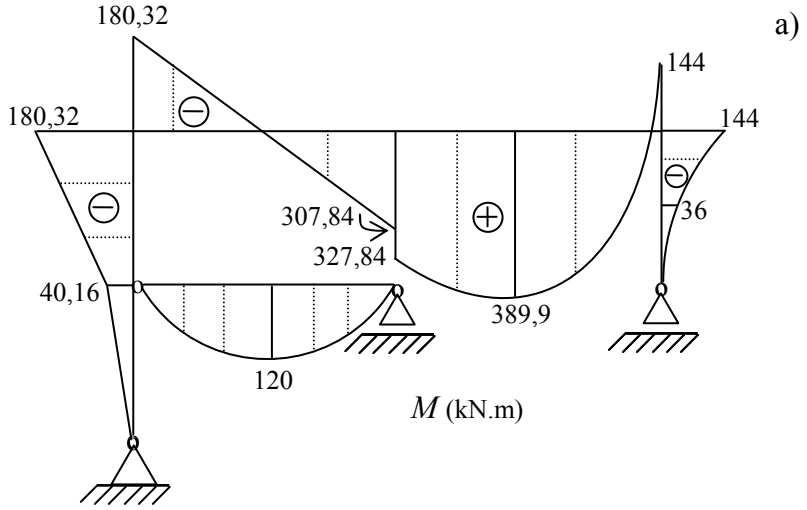

61,02
61,02
72
35,04
178,96
10,04

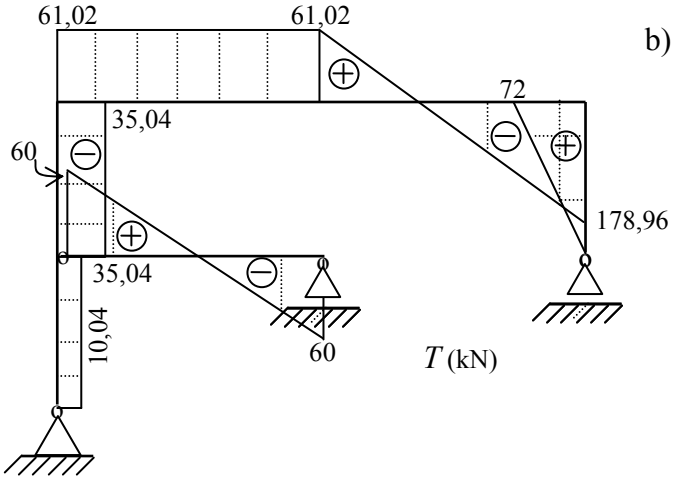
T (kN)

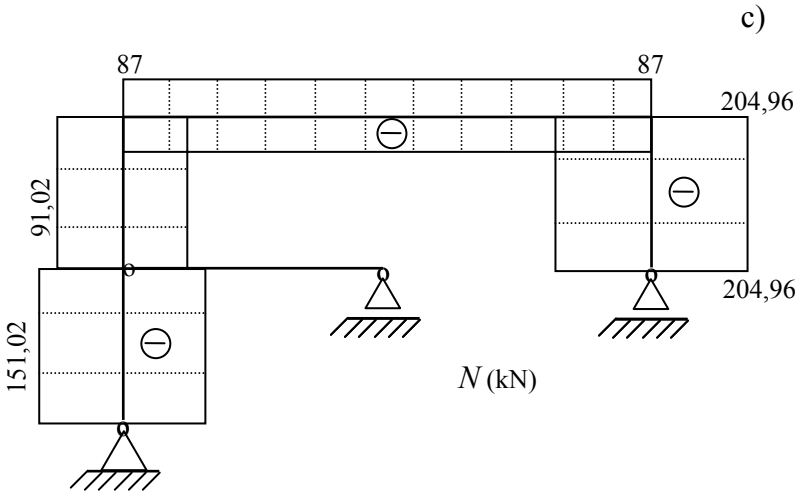


Şekil 4.5.5. a) Taşıyıcı çerçeve, b) *M* diyagramı, c) *T* diyagramı, d) *N* diyagramı.

Taşıyıcı çerçevenin *M*, *T* ve *N* diyagramlarına mC kirişinin *M*, *T*, *N* diyagramları eklenerek tüm çerçevenin eğilme momenti, kesme ve normal kuvvet diyagramları elde edilir (Şekil 4.5.6a-c).







Şekil 4.5.6. a) *M* diyagramı, b) *T* diyagramı, c) *N* diyagramı.

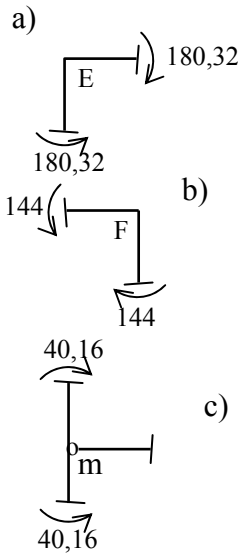
Verilmiş sistemin genel denge kontrolü (Şekil 4.5.7a-d):
M diyagramından

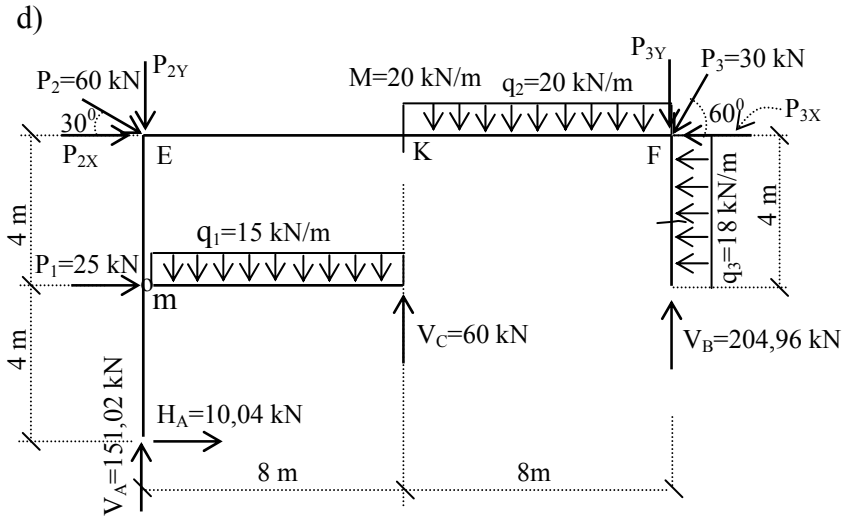
$M_E = 180{,}32 - 180{,}32 = 0$

$M_F = 144 - 144 = 0$

$M_m = 40{,}16 - 40{,}16 = 0$

sağlandığı görülmektedir.



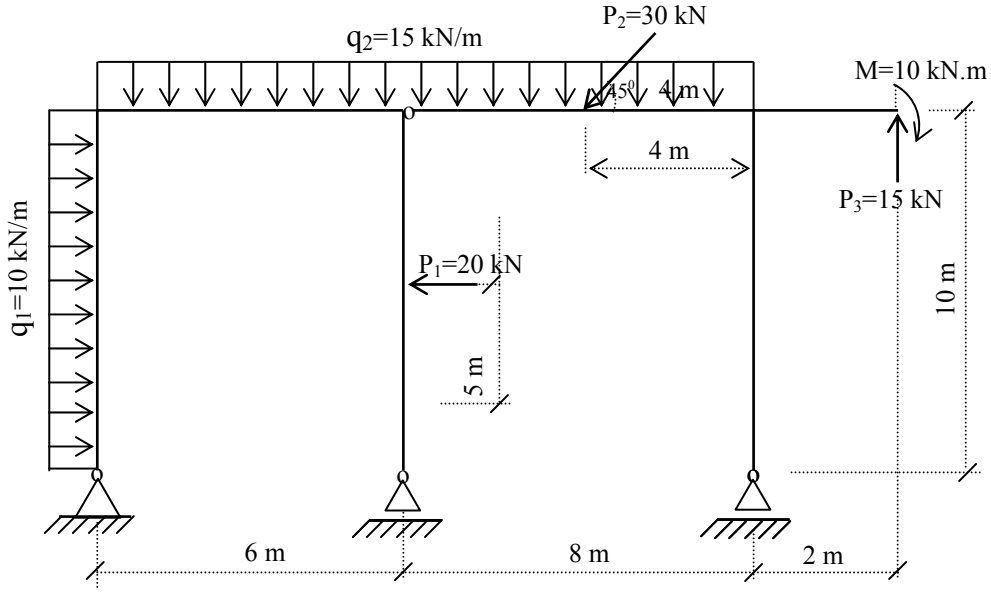


Şekil 4.5.7. a) E düğümü, b) F düğümü, c) m düğümü, d) Tüm çerçeve.

$$\sum X = H_A + P_1 + P_2.\cos 30^0 - q_3.4 - P_3.\cos 60^0 = 10{,}04 + 25 + 60.(0{,}8666) - 18.4 - 30.(0{,}5) = 0$$

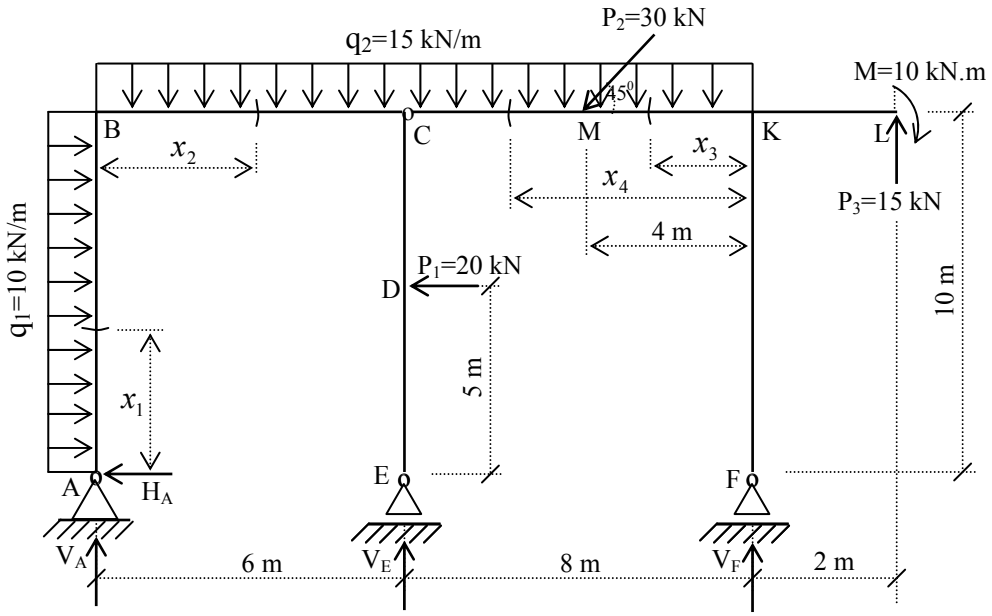
$$\sum Y = V_A + V_C + V_B - q_1.8 - q_2.8 - P_2.\sin 30^0 - P_3.\sin 60^0 = 151{,}02 + 60 + 204{,}96 - 15.8 - 30.8 - 60.(0{,}5) - 30.(0{,}866) = 0$$

Örnek 4.6. Boyutları ve yükleme durumu Şekil 4.6.1'de verilmiş olan sistem için
a) Eğilme momenti, kesme ve normal kuvvet diyagramlarını çiziniz,
b) Diyagramlara dayanarak sistemin genel denge kontrolünü yapınız.



Şekil 4.6.1

<u>*Çözüm*</u>: Önce her zaman olduğu gibi mesnet tepkileri hesaplanır (Şekil 4.6.2).



Şekil 4.6.2

$$\sum X = q_1.10 - H_A - P_1 - P_2.\cos 45^0 = 0 \Rightarrow \quad H_A = 10.10 - 20 - 30.(0{,}7071) = 58{,}787\,kN$$

$$\sum M_C^{Sağ} = -V_F.8 - P_3.10 + M + q_2.8.4 + P_2.(\cos 45^0).4 = 0 \Rightarrow$$

$$V_F = \frac{-15.10 + 10 + 15.8.4 + 30.(0{,}7071).4}{8} = 53{,}1065\ \ kN$$

$$\sum M_C^{Sol} = V_A.6 - q_1.10.5 + H_A.10 - q_2.6.3 + P_1.5 = 0 \Rightarrow$$

$$V_A = \frac{10.10.5 - (58{,}787).10 + 15.6.3 - 20.5}{6} = 13{,}68833\,kN$$

$$\sum M_F = V_A.14 + q_1.10.5 - P_1.5 - P_2.(\cos 45^0).10 - q_2.14.7 + V_E.8 - P_2.(\sin 45^0).4 - P_3.2 + M = 0 \Rightarrow$$

$$V_E = \frac{-(13{,}6883).14 - 10.10.5 + 20.5 + 30.(0{,}7071).10 + 15.14.7 + 30.(0{,}7071).4 + 15.2 - 10}{8} = 149{,}418117\,kN$$

Sağlama:

$$\sum Y = V_A + V_E + V_F - q_2.14 + P_3 - P_2.\sin 45^0 = 0 \Rightarrow$$

$$13{,}68833 + 149{,}418117 + 53{,}1065 - 5.14 + 15 - 30.(0{,}7071) = 0$$

Çerçevenin bölgeleri için *M*, *T* ve *N* 'nin ifadelerinin yazılıp, değerlerinin hesaplanması:

AB bölgesi $0 \le x_1 \le 10$

$$M_{x1} = H_A.x_1 - q_1.\frac{x_1^2}{2}; \quad T_{x1} = H_A - q_1.x_1; \quad N = -V_A = -13{,}68833\,kN.$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow \quad M_{x1} = 0; \quad T_{x1} = H_A = 58{,}787\,kN.$$

$$x_1 = 10\,m \Rightarrow \quad M_{x1} = (58{,}787).10 - 10.\frac{10^2}{2} = 87{,}87\,kN; T_{x1} = 58{,}787 - 10.10 = -41{,}213\,kN.$$

Kesme kuvvetinin sıfır olduğu kesitin yeri:

$$T_{x0} = 58{,}787 - 10.x_0 = 0 \Rightarrow \quad x_0 = 5{,}8787\ \ m.$$

Bu kesitte eğilme momenti maksimum değer alacaktır.

$$M_{\max} = 58{,}787.(5{,}8787) - 10.\frac{(5{,}8787)^2}{2} = 172{,}7956\,kN.m$$

BC bölgesi (Sol taraftan bakılmıştır) $0 \le x_2 \le 6$

$$M_{x2} = V_A.x_2 + H_A.10 - q_1.\frac{10^2}{2} - q_2.\frac{x_2^2}{2} = (13{,}6883).x_2 + (58{,}787).10 - 15.\frac{x_2^2}{2},$$

$$T_{x2} = V_A - q_2.x_2 = 13{,}6883 - 15.x_2\ , \quad N = -q_1.10 + H_A = -10.10 + 58{,}787 = -41{,}213\,kN.$$

$$x_2 = 0 \Rightarrow \quad M_{x2} = 87{,}87\,kN.m\ , \quad T_{x2} = 13{,}6883\,kN\ .$$

$$x_2 = 6\,m \Rightarrow \quad M_{x2} = 82{,}1298 + 87{,}87 - 270 = -100\,kN.m\ , \quad T_{x2} = 13{,}6883 - 90 = -76{,}3117\,kN.$$

Kesme kuvvetinin sıfır olduğu kesitin uzaklığı

$T_{x0} = 13,6883 - 15.x_0 = 0 \Rightarrow \quad x_0 = 0,912553\,m$,

$M_{\max} = (13,6883).(0,912553) + 87,87 - 15.\dfrac{(0,912553)^2}{2} = 94,1157\,kN.m$

FK bölgesi için

$M = 0$, $T = 0$, $N = -V_F = -53,1065\,kN.$

LK bölgesinde sağ uçtan bakılmıştır ve değerler karakteristik kesitlerde belirlenmiştir.

$M_L = -M = -10\,kN.m$, $M_K = -M + P_3.2 = -10 + 15.2 = 20\,kN.m$,

$T = -P_3 = -15\,kN$ ($bö\lg e\ için\ sabittir$) , $N = 0.$

KM bölgesinde $0 \le x_3 \le 4$

$M_{x3} = P_3.(x_3 + 2) - M + V_F.x_3 - q_2.\dfrac{x_3^2}{2} = 15.(x_3 + 2) - 10 + (53,1065).x_3 - 15.\dfrac{x_3^2}{2}$,

$T_{x3} = -P_3 - V_F + q_2.x_3 = -15 - 53,1065 + 15.x_3 = -68,1065 + 15.x_3$, $N = 0.$

$x_3 = 0 \Rightarrow \quad M_{x3} = 20\,kN.m$, $T_{x3} = -68,1065\,kN.$

$x_3 = 4\,m \Rightarrow \quad M_{x3} = 15.6 - 10 + 212,426 - 15.8 = 172,426\,kN.m$

$T_{x3} = -68,1065 + 15.4 = -8,1065\,kN.$

MC bölgesi için $4 \le x_4 \le 8$

$M_{x4} = P_3.(x_4 + 2) - M + V_F.x_4 - q_2.\dfrac{x_4^2}{2} - P_2.(\sin 45^0).(x_4 - 4) = 15.(x_4 + 2) - 10 +$

$(53,1065).x_4 - 15.\dfrac{x_4^2}{2} - 30.(0,7071).(x_4 - 4)$

$T_{x4} = -P_3 - V_F + q_2.x_4 + P_2.\sin 45^0 = -15 - 53,1065 + 15.x_4 + 30.(0,7071) =$

$46,8935 + 15.x_4$

$N = -P_2.\sin 45^0 = -30.(0,7071) = -21,213\,kN.$

$x_4 = 4\,m \Rightarrow \quad M_{x4} = 15.6 - 10 + (53,1065).4 - 15.\dfrac{4^2}{2} = 172,426\,kN.m$,

$T_{x4} = -46,8935 + 60 = 13,1065\,kN.$

.

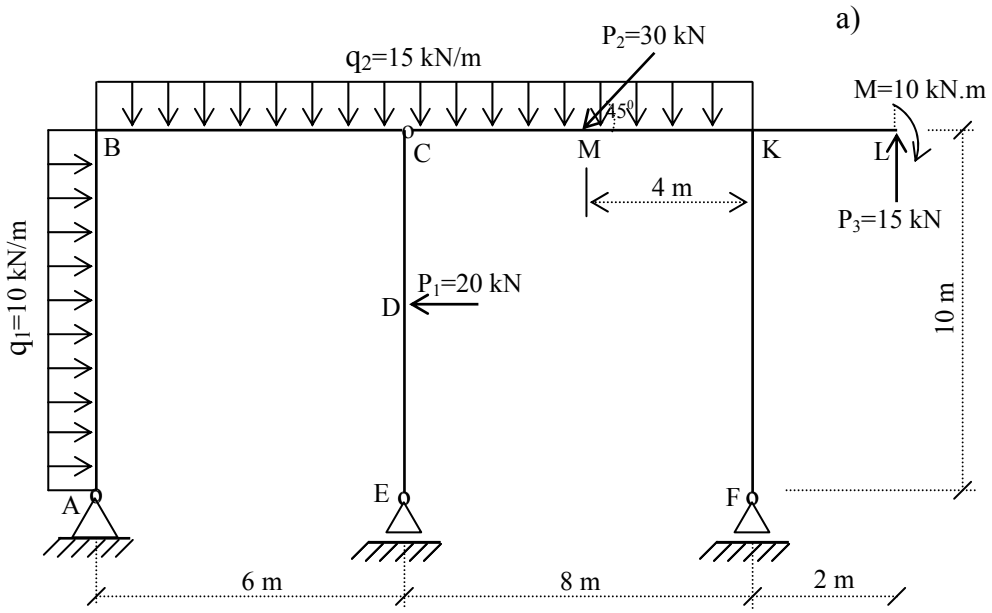
$x_4 = 8\,m \Rightarrow \quad M_{x4} = 15.10 - 10 + (53.1065).8 - 15.\dfrac{8^2}{2} - 30.(0,7071).4 = 0$,

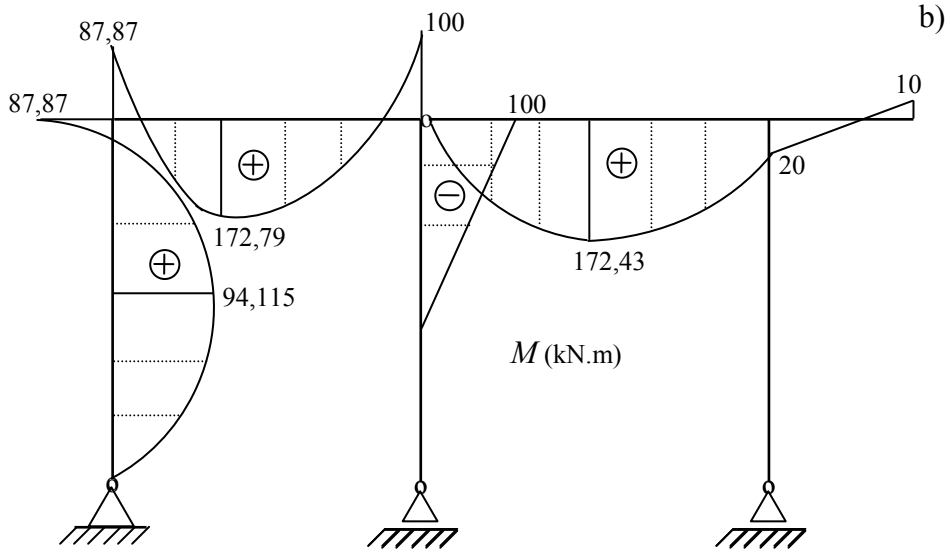
$T_{x4} = -46,8935 + 15.8 = 73,1065\,kN.$

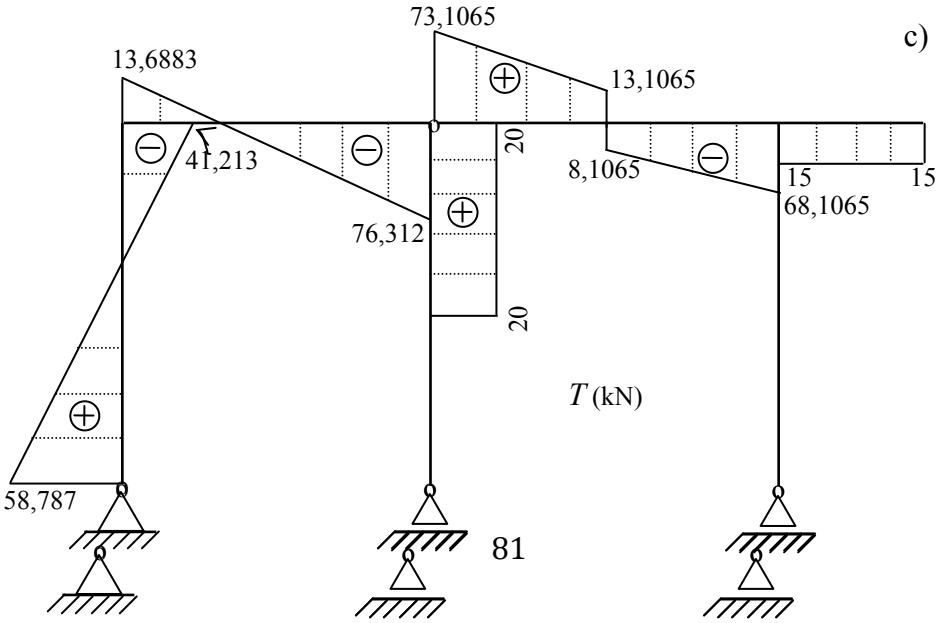
ED bölgesi için $M = 0$, $T = 0$, $N = -V_E = -149,4181\,kN.$

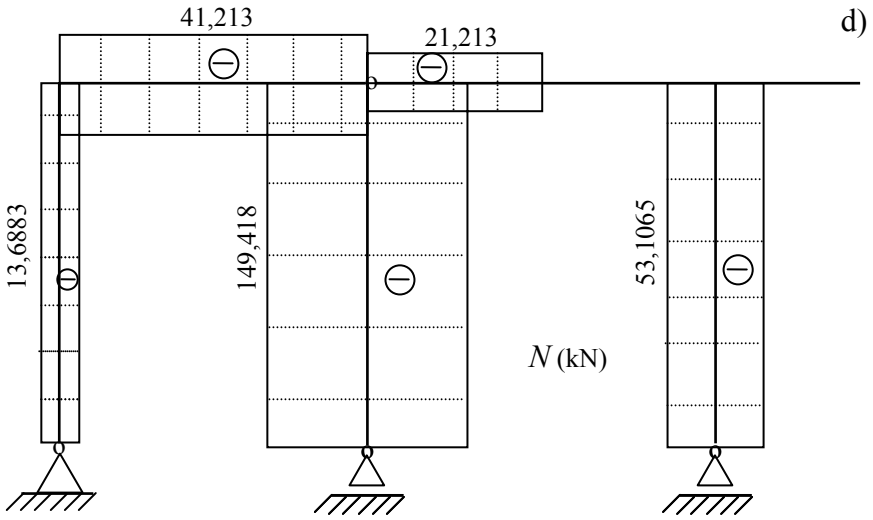
DC bölgesi için $M_C = -P_1.5 = -20.5 = -100\,kN.m$, $T = P_1 = 20\,kN$, $N = -149,4181\,kN.$

Bu değerlere göre çerçevenin *M*, *T* ve *N* diyagramları (Şekil 4.6.3 b-d) çizilmiştir.









Şekil 4.6.3. a) Hesaplanan sistem, b) *M* diyagramı, c) *T* diyagramı, d) *N* diyagramı.

Sistemin tümünün genel denge kontrolü (Şekil 4.6.4a-c):

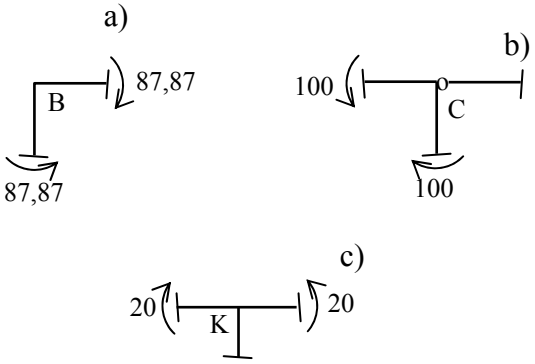
M diyagramına bakıldığında

$$\sum M_B = 87{,}87 - 87{,}87 = 0$$

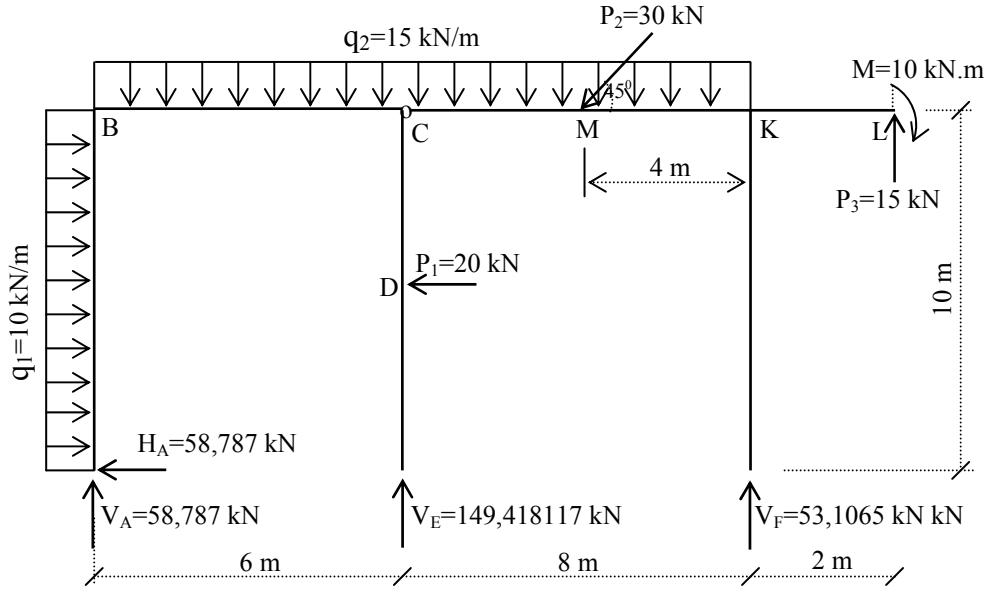
$$\sum M_C = 100 - 100 = 0$$

$$\sum M_K = 20 - 20 = 0$$

koşulları sağlanmaktadır.



Şekil 4.6.4. a) B düğümü, b) C düğümü, c) K düğümü.



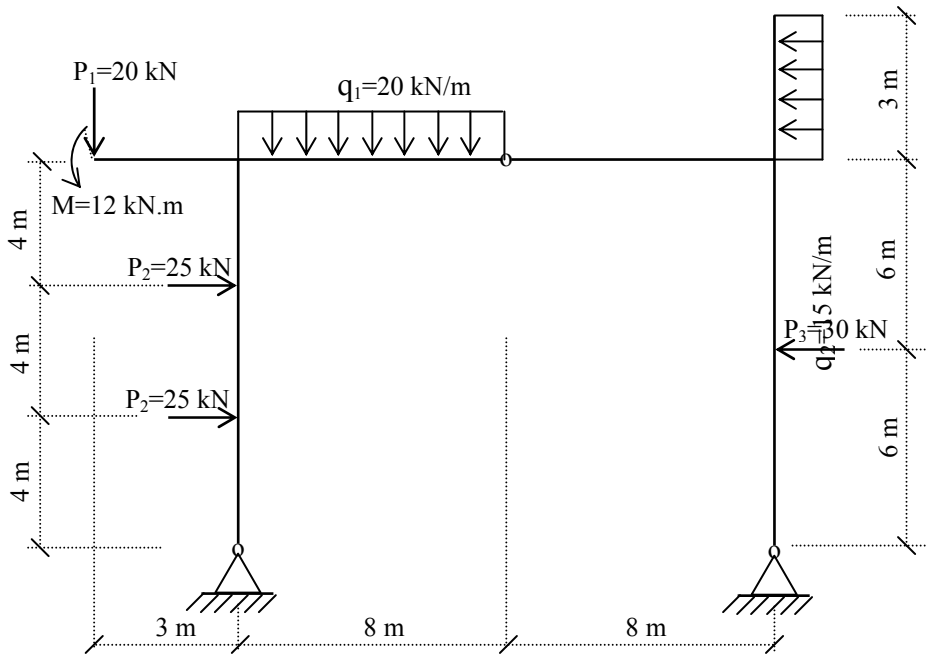
Şekil 4.6.5

T ve *N* diyagramlarından (Şekil 4.6.5)

$$\sum X = q_1.10 - P_1 - H_A - P_2.\cos 45^0 = 10.10 - 20 - 58{,}787 - 30.(0{,}7071) = 0$$

$$\sum Y = -q_2.14 - P_2.\sin 45^0 + P_3 + V_A + V_E + V_F = -15.14 - 30.(0{,}7071) + 15 + 13{,}68833 + 149{,}418117 + 53{,}1065 = 0$$

Örnek 4.7. Boyutları ve yükleme durumu Şekil 4.7.1'de verilmiş olan çerçeve için
a) Eğilme momenti, kesme ve normal kuvvet diyagramlarını çiziniz,
b) Çizilen diyagramlara dayanarak sistemin tümünün dengesini kontrol ediniz.



Şekil 4.7.1

<u>*Çözüm* :</u>
Sistemin kinematik analizi yapıldığında W = 3.2 – 2.1 -4 = 0 değeri elde edilmekte ve şekilden sistemin yararlı bünyeye sahip olduğu açıkça görülmektedir. Hesaba yine mesnet tepkilerinin belirlenmesi ile başlanır (Şekil 4.7.2).

$$\sum M_B = V_A.16 - M - P_1.19 + P_2.8 + P_2.4 - q_1.8.12 - q_2.3.(13{,}5) - P_3.6 = 0 \Rightarrow$$

$$V_A = \frac{12 + 20.19 - 25.8 - 25.4 + 20.8.12 + 15.3.(13{,}5) + 30.6}{16} = 174{,}96875\,kN$$

$$\sum M_A = -V_B.16 - P_3.6 - q_2.3.(13{,}5) + q_1.8.4 - P_1.3 - M + P_2.8 + P_2.4 = 0 \Rightarrow$$

$$V_B = \frac{-30.6 - 15.3.(13{,}5) + 20.8.4 - 20.3 - 12 + 25.8 + 25.4}{16} = 5{,}03125\,kN$$

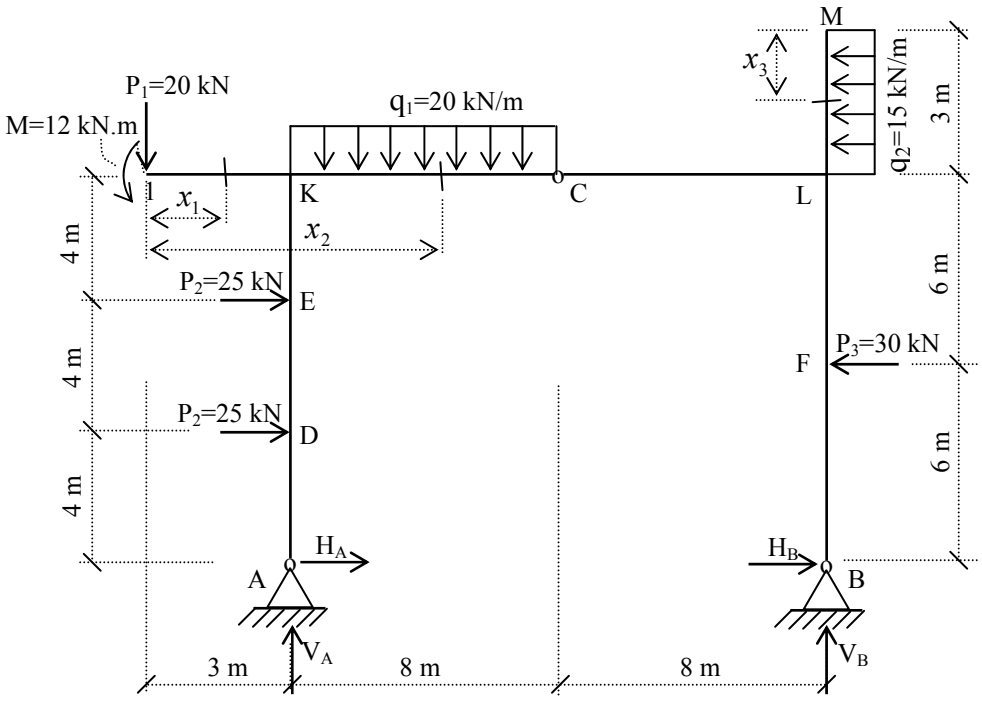
Sağlama:

$$\sum Y = -P_1 - q_1.8 + V_A + V_B = -20 - 20.8 + 174{,}96875 + 5{,}03125 = 0$$

Yatay tepkiler

$$\sum M_C^{Sol} = -M - P_1.11 - P_2.4 - P_2.8 + V_A.8 - q_1.8.4 - H_A.12 = 0 \Rightarrow$$

$$H_A = \frac{-12 - 20.11 - 25.4 - 25.8 + (174{,}96875).8 - 20.8.4}{12} = 18{,}97816\,kN$$



Şekil 4.7.2

$$\sum M_C^{Sağ} = -V_B.8 + P_3.6 - q_2.3.(1{,}5) - H_B.12 = 0 \Rightarrow$$

$$H_B = \frac{-(5{,}03125).8 + 30.6 - 15.3.(1{,}5)}{12} = 6{,}02083\,kN$$

Sağlama:

$$\sum X = 2P_2 + H_A + H_B - P_3 - q_2.3 = 2.25 + 18.97816 + 6{,}02083 - 30 - 15.3 = 0$$

Çerçevenin her bir bölgesi için (Şekil 4.7.2) *M*, *T* ve *N* 'nin değerlerinin hesaplanması:

AK kolonunda iç kuvvetlerin karakteristik kesitlerde hesaplanması yeterlidir.

A kesitinde

$M_A = 0$, $T_A = -H_A = -18{,}96875\,kN = T_D^{Sol}$, $N = -V_A = -174{,}96875\,kN.$

D kesitinde

$M_D = -H_A.4 = -(18{,}97816).4 = -75{,}912\,kN.m$, $T_D^{Sağ} = -H_A - P_2 = -18{,}97816 - 25 =$
$-43{,}97816\,kN = T_E^{Sol}$

E kesitinde

$M_E = -H_A.8 - P_2.4 = -(18{,}97816).8 - 25.4 = -251{,}825\,kN$, $T_E^{Sağ} = -H_A - P_2 - P_2 =$
$-18{,}97816 - 25 - 25 = -68{,}97816\,kN = T_K$.

K kesitinde

$M_K = -H_A.12 - P_2.8 - P_2.4 = -(18{,}97816).12 - 25.8 - 25.4 = -527{,}74\,kN.m$

Çerçeve kirişinin 1K parçası için $0 \le x_1 \le 3$

$M_{x1} = -M - P_1.x_1$, $T = -P_1 = -20\,kN$, $N = 0.$

$x_1 = 0 \Rightarrow \quad M_{x1} = -M = -12\,kN.m.$ $x_1 = 3\,m \Rightarrow M_{x1} = -12 - 20.3 = -72\,kN.m$

KC parçası için $3 \le x_2 \le 11$

$$M_{x2} = -M - P_1.x_2 - H_A.12 - P_2.8 - P_2.4 + V_A.(x_2 - 3) - q_1.\frac{(x_2 - 3)^2}{2} =$$

$$-539{,}74 - 20.x_2 - 20.\frac{(x_2 - 3)^2}{2} + (174{,}96875)\,(x_2 - 3)\,,$$

$T_{x2} = -P_1 + V_A - q_1.(x_2 - 3) = -20 + 174{,}96875 - 20.(x_2 - 3)$,

$N = -H_A - P_2 - P_2 = -18{,}97816 - 25 - 25 = -68{,}97816\,kN$.

$x_2 = 3\,m \Rightarrow \quad M_{x2} = -539{,}74 - 20.3 = -599{,}74\,kN.m$, $T_{x2} = 154{,}96875\,kN.$

$x_2 = 11\,m \Rightarrow \quad M_{x2} = -539{,}74 - 20.11 - 10.8^2 + (174{,}96875).8 = 0$, $T_{x2} = -5{,}03125\,kN.$

Kesme kuvvetinin sıfır olduğu kesitin uzaklığı

$$T_{x0} = 154{,}96875 - 20.(x_0 - 3) = 0 \Rightarrow \quad x_0 = \frac{154{,}96875}{20} + 3 = 10{,}748\,m$$

$M_{x0} = -539{,}74 - 20.(10{,}748 - 3) - 10.(10{,}748 - 3)^2 + (174{,}96875).(7{,}748) = 6\,kN.m$

BL kolonu için

B kesitinde

$M_B = 0$, $T_B = -H_B = -6{,}02\,kN = T_F^{Sağ}$, $N = -V_B = -5{,}03125\,kN\,(kolon\ boyunca\ sabittir)$

F kesitinde

$M_F = H_B.6 = (6{,}020833).6 = 36{,}125\,kN.m$, $T_F^{Sol} = -H_B + P_3 = -6.02 + 30 = 23{,}98\,kN = T_L^{Sağ}$

L kesitinde

$M_L = H_B.12 - P_3.6 = (6.020833).12 - 30.6 = -107{,}75\,kN.m$

ML bölgesi (çıkma) için $0 \le x_3 \le 3$

$M_{x3} = -q_2.\frac{x_3^2}{2}$, $T_{x3} = -q_2.x_3$, $N = 0.$

$x_3 = 0 \Rightarrow \quad M_{x3} = 0$, $T_{x3} = 0$; $x_3 = 1{,}5\,m \Rightarrow \quad M_{x3} = -16{,}875\,kN.m$

$x_3 = 3\,m \Rightarrow \quad M_{x3} = -67{,}5\,kN.m$, $T_{x3} = -15.3 = -45\,kN$.

Çerçeve kirişinin LC bölgesi için

L kesitinde

$M_L = H_B.12 - P_3.6 - q_2.\frac{3^2}{2} = (6{,}020833).12 - 30.6 - 15.\frac{9}{2} = -40{,}25\ kN.m$,

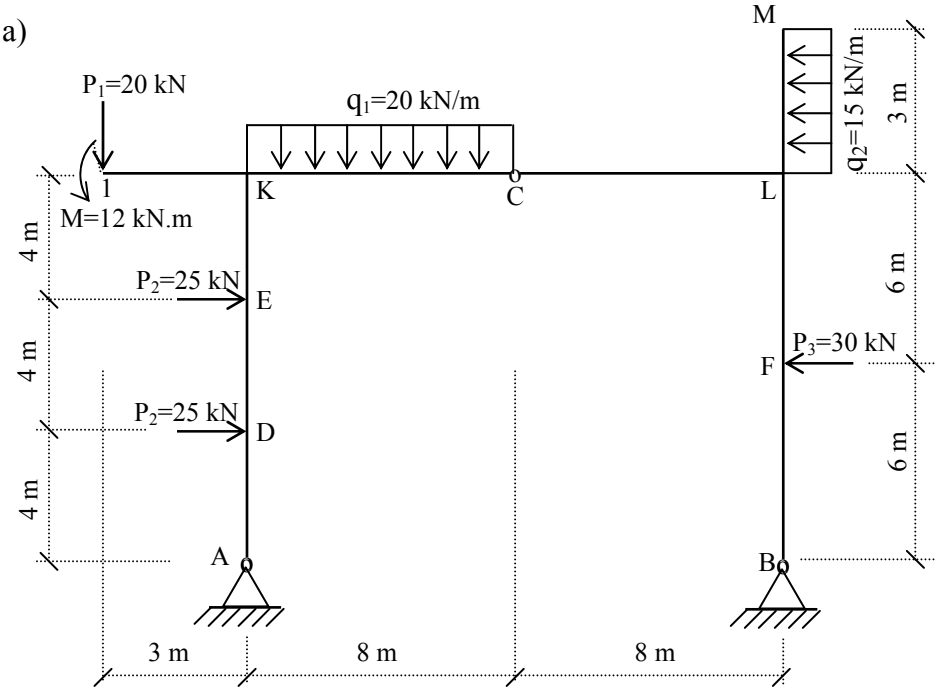
$T_L = -V_B = -5{,}03125\,kN$, $N = H_B - P_3 - q_2.3 = 6{,}020833 - 30 - 15.3 = -68{,}9794\,kN$.

(*Kesme kuvveti ve normal kuvvetin değerleri bölge boyunca sabittir).*

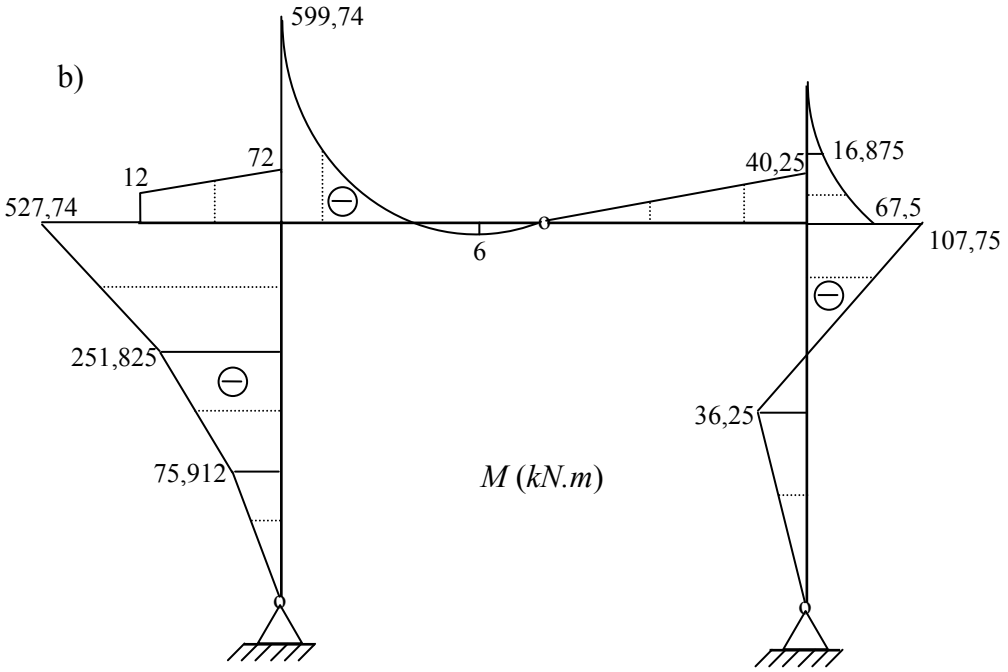
C kesitinde (mafsalında) $M_C = -40.25 + V_B.8 = -40{,}25 + (5{,}03125).8 = 0$

Hesaplanmış değerlere göre çerçevenin *M*, *T* ve *N* diyagramları sırasıyla Şekil 4.7.3b-d'de çizilmiştir.

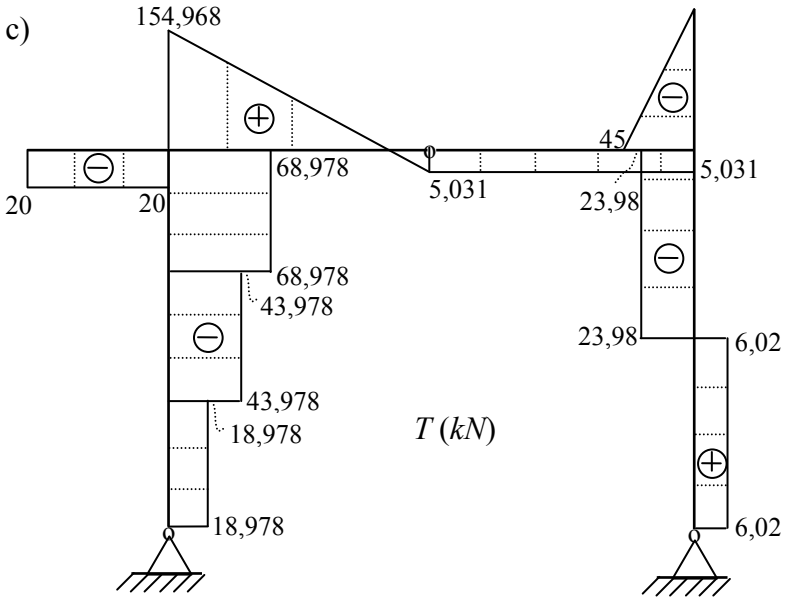
a)

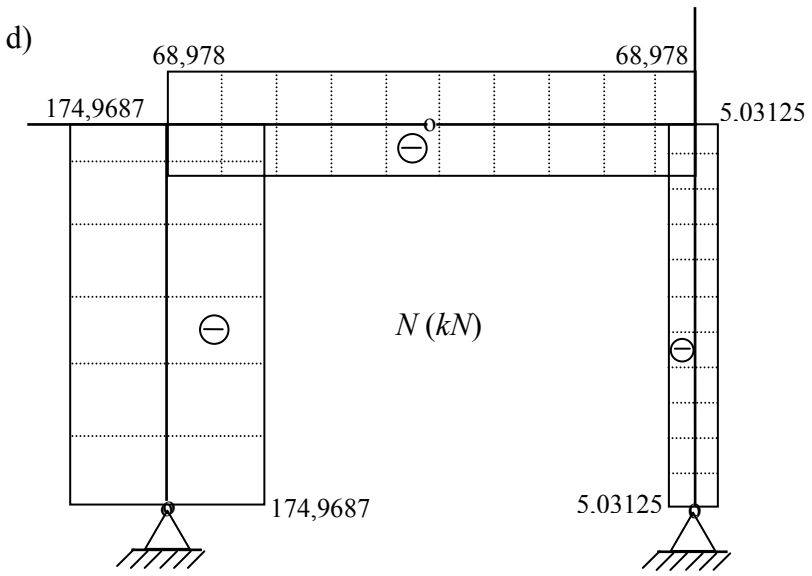


b)


599,74
12
72
527,74
40,25
16,875
67,5
107,75
6
251,825
36,25
75,912
M (kN.m)

c)


154,968
45
20
20
68,978
5,031
23,98
5,031
68,978
43,978
23,98
6,02
43,978
18,978
T (kN)
18,978
6,02



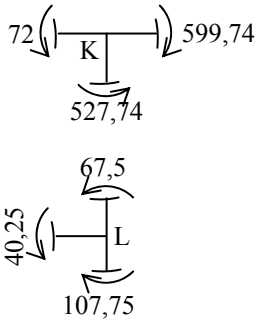
Şekil 4.7.3. a) Verilen sistem, b) *M* diyagramı, c) *T* diyagramı, d) *N* diyagramı.

Eğilme momenti diyagramından

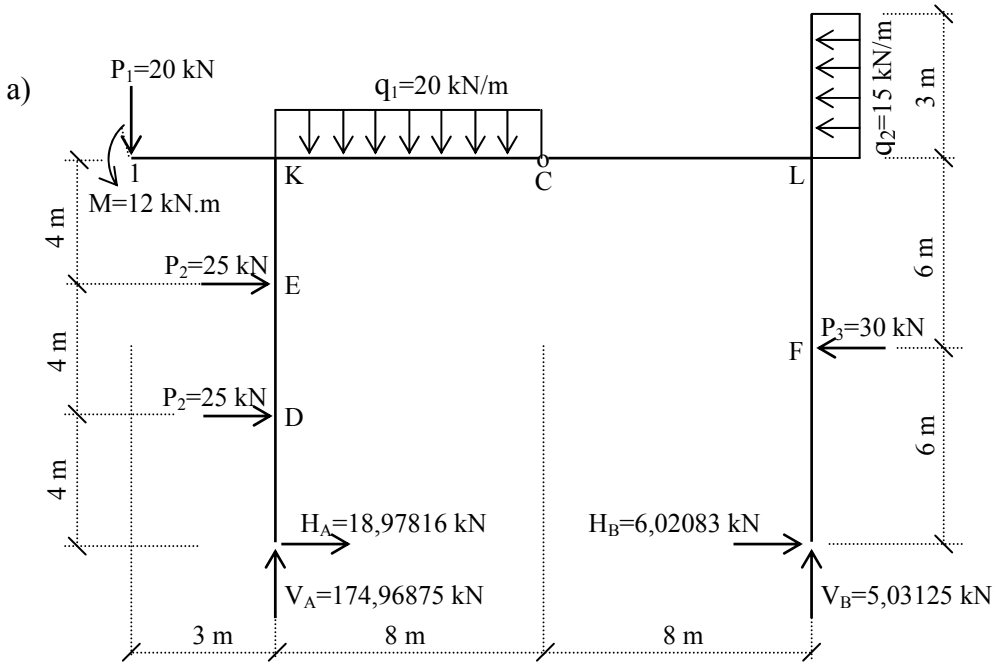
$$\sum M_K = 599{,}74 - 72 - 527{,}74 = 0$$

$$\sum M_L = 107{,}75 - 40{,}25 - 67{,}5 = 0$$

olduğu görülmektedir.



T ve *N* diyagramlarından (Şekil 4.7.4)



Şekil 4.7.4

$$\sum X = H_A + H_B + P_1 + P_2 - P_3 - q_2.3 = 18{,}97816 + 6{,}02083 + 25 + 25 - 30 - 15.3 = 0$$
$$\sum Y = V_A + V_B - P_1 - q_1.8 = 174{,}96875 + 5{,}03125 - 20 - 20.8 = 0$$

***Not*:** İncelenmiş olan sistemler için çizilen kesit tesiri diyagramlarında aşağıdaki hususlara dikkat edilmelidir:

► Düşey tekil kuvvet, uygulandığı kesitte eğilme momenti diyagramında eğim değişimine, kesme kuvveti diyagramında ise kendi yönünde ve büyüklüğünde bir atlamaya neden olmaktadır. Tekil kuvvet eksene göre eğik durumda olduğunda, kesme kuvveti diyagramındaki bu atlama kuvvetin düşey bileşeni yönünde ve bu bileşenin büyüklüğü kadardır. Eğik tekil kuvvet normal kuvvet diyagramında ise yatay bileşeninin değerine eşit bir atlama meydana getirir.

► Tekil eğilme momenti, uygulandığı kesitte eğilme momenti diyagramında etkime yönüne bağlı ve kendi büyüklüğünde bir atlamaya neden olur, kesme kuvveti ve normal kuvvet diyagramlarında ise bir değişikliğe yol açmaz.

► $dT/dx = -q$ ve $dM/dx = T$ bağıntılarının mevcut olmasından dolayı, kesme kuvveti diyagramı yayılı yük fonksiyonundan bir derece daha büyük bir fonksiyon, eğilme momenti diyagramı ise kesme kuvveti fonksiyonundan bir derece daha büyük bir fonksiyon durumundadır. Buna bağlı olarak, örneğin yayılı yükün sıfır olduğu bir bölgede kesme kuvveti diyagramı sabit, eğilme momenti diyagramı ise birinci dereceden (doğrusal) bir fonksiyon olmaktadır.

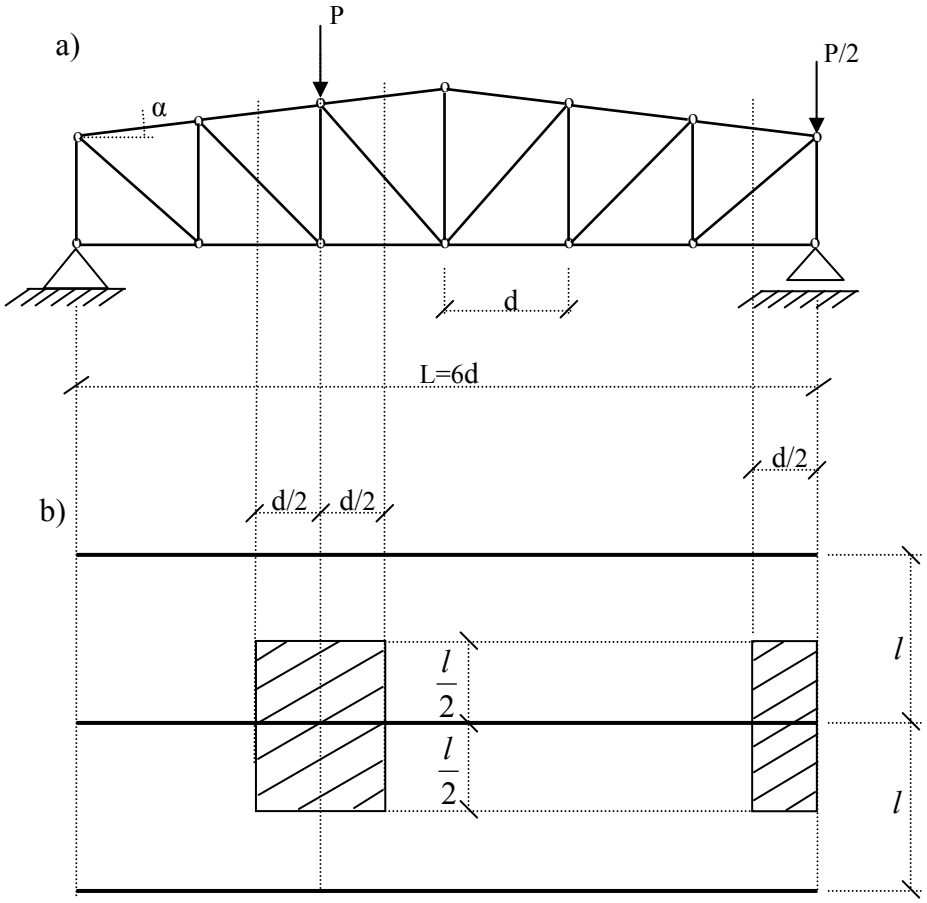
5. KAFES SİSTEMLERİN HESABI

Genel Bilgiler

Kafes sistemlerin çubukları çekme veya basınç etkisindedir, yani sistemin çubuklarında yalnızca normal kuvvetler oluşur. Çubuklarda eğilme momenti ve kesme kuvveti oluşmaması için aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır:

1. Çubuklar doğru eksenli olmalı ve eksenleri kafes düğümlerinin merkezinde kesişmelidir.
2. Çubukların eksenleri ve dış yükler aynı düzlemde bulunmalıdır.
3. Hesapta düğüm noktaları mafsallı kabul edilip, dış kuvvetler düğüm noktalarına uygulanmalıdır.

Çatı kafes sistemlerinde çatıdan gelen yüklerin düğüm noktalarına aktarılması Şekil 5.1 'de gösterilmiştir.



Şekil 5.1. a) Çatı kafes sistemi, b) Kafes sistemlerin üstten görünüşü.

$$P = q.l.(\frac{d}{\cos\alpha}) \qquad (5.1)$$

Burada:

d : kafes sistemin düğümleri arasındaki yatay mesafe,

l : kafes sistemler (çatı makasları) arasındaki mesafe,

q : çatıdan gelen üniform düşey yükün şiddeti, ve

α : çatının eğim açısıdır.

Kafes sistemlerin kullanım yerlerine bağlı olarak yükler üst başlıkta (çatı kafes sistemlerinde), alt başlıkta (bir çok köprü kafes sistemlerinde) veya her iki başlıkta uygulanmış olabilir.

Kafes sistemlerde dış yükler etkisi ile çubuklarda oluşan iç kuvvetler başlıca aşağıdaki yöntemlerle hesaplanır.

1. Düğüm kesme yöntemi (Düğüm noktalarının dengesi yöntemi): Bu yöntemin çoğu zaman özel halleri kullanılır.
2. Kesim (Ritter) yöntemi (Moment noktaları yöntemi).
3. İzdüşüm alma yöntemi.
4. Bileşke (birden fazla) kesimler yöntemi.

Bunların dışında grafik bir yöntem olan Cremona – Maxwell diyagramı da kullanılır. Karmaşık kafes sistemler de dahil bütün kafes sistemlerin hesabı için Sonlu Elemanlar Yöntemine dayanan bilgisayar programlarının kullanımı kafes sistemlerin hesabını büyük ölçüde kolaylaştırır.

Bir kafes sistemin kinematik analizi hesaplamaya başlamadan önce yapılmalıdır. Sistemin izostatik ve geometrik değişmez olması için aşağıdaki şart sağlanmalıdır.

$$n = 2.d - c_m \tag{5.2}$$

Burada

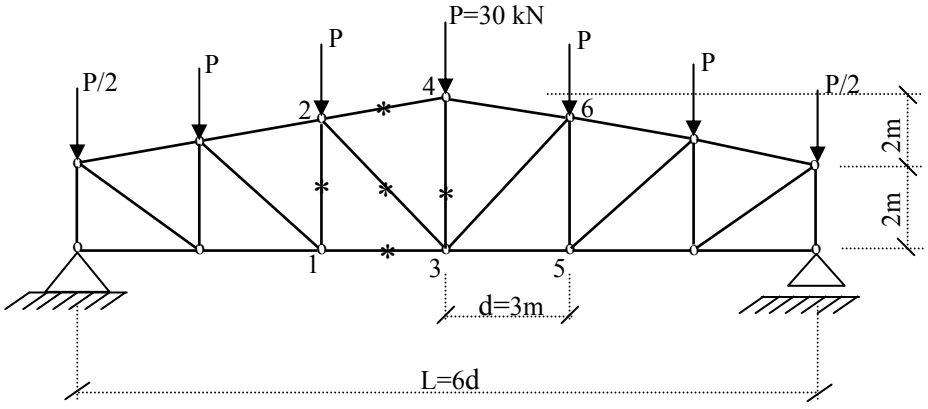
n : kafes sistemin çubuklarının sayısı,

d : sistemin düğümlerinin sayısı, ve

c_m : mesnet bağlarının sayısıdır.

Bu şartın sağlanması sistemin geometrik değişmez olması için gereklidir, fakat yeterli değildir. Bu şartla birlikte sistem taşıyıcı bünyeye de sahip olmalıdır.

Örnek 5.1. Boyutları ve yükleme durumu Şekil 5.1.1'de verilmiş olan kafes sistemin işaretlenmiş çubuklarındaki iç kuvvetleri hesaplayınız.



Şekil 5.1.1

Çözüm:

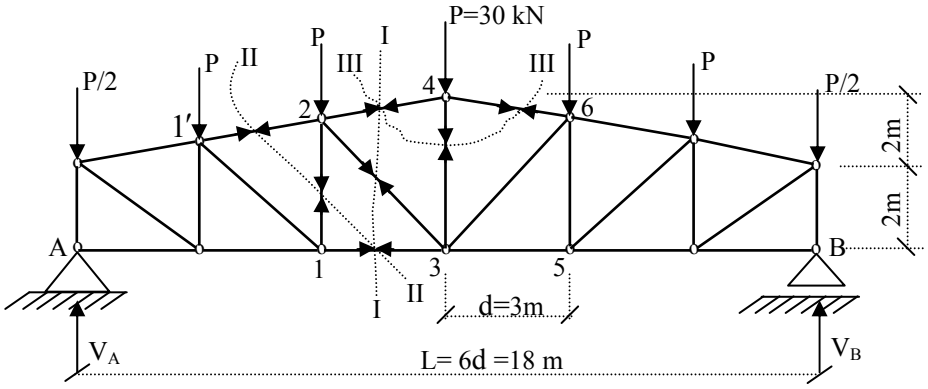
Kafes sistemin çubuklarındaki iç kuvvetlerin hesaplanmasına diğer sistemlerde olduğu gibi kinematik analiz ve mesnet tepkilerinin belirlenmesi ile başlanır. Bundan sonra iç kuvvetleri hesaplamak için yöntemlerden uygun olan biri kullanılır. Burada, tüm örneklerin çözümünde Kesim Yöntemi kullanılmıştır. Bu yöntemle hesaplama aşağıdaki sırayla yapılır: Sistem hayalen kesilerek iki parçaya ayrılır. Kesimde dikkat edilmesi gereken, kesilmiş çubuk sayısının üçten fazla olmaması ve doğrultularının bir noktada kesişmemesidir. Ayrılan

parçalardan biri dikkate alınarak, dış kuvvetlerin ve bilinmeyen iç kuvvetlerin etkisi altında bu parçanın dengesi incelenir. Kesim yöntemiyle, dikkate alınan parçanın denge denklemi, kesilmiş üç çubuk içinde, iç kuvveti belirlenmek istenen çubuk dışındaki iki çubuğun veya onların doğrultularının kesişme noktasına, yani moment noktasına göre yazılır. Bu denklemden istenen iç kuvvet belirlenir.

Kesilmiş üç çubuktan ikisi paralel ise (paralel başlıklı kafes sistemlerde veya üst ve alt başlık çubukları paralel olan kafes sistem panellerinde) dikme ve köşegen çubukların iç kuvvetlerinin hesabında izdüşüm alma yöntemi kullanılır.

Kinematik analiz: $n = 2.14 - 3 = 25$. Ayrıca Şekil 5.1.1 'den görüldüğü gibi sistemin çubuk sayısı 25 olup, taşıyıcı özelliğe sahiptir.

Mesnet tepkilerinin belirlenmesi (Şekil 5.1.2).

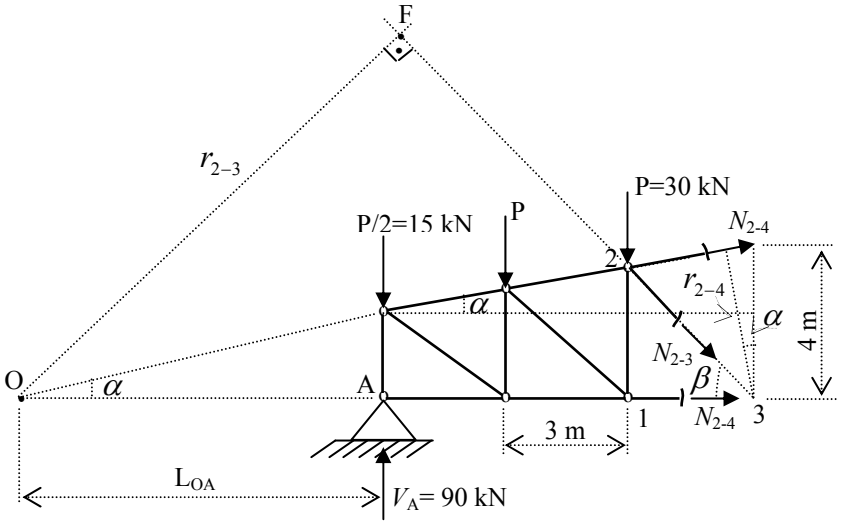


Şekil 5.1.2

Sistem ve yüklemesinin simetrik olduğu bu tür durumlarda mesnet tepkileri birbirine eşittir:

$$V_A = V_B = \frac{\sum P_i}{2} = \frac{6P}{2} = 3.30 = 90\,kN$$

Bundan sonra iç kuvvetlerin hesaplanmasına geçilebilir. İç kuvvetler çubuk numarasına uygun olarak N ile ($N_{2\text{-}4}$, $N_{1\text{-}2}$, $N_{2\text{-}3}$ vb.) işaretlenmiştir. Bununla beraber iç kuvvetler aşağıdaki gibi de işaretlenebilir. Örneğin üst başlık çubuğundaki $O_{2\text{-}4}$, alt başlık çubuğundaki $U_{1\text{-}3}$, diyagonal çubuğundaki $D_{2\text{-}3}$, ve dikme çubuğundaki ise $V_{1\text{-}2}$ gibi. Şekil 5.1.2'de görüldüğü gibi $N_{1\text{-}2}$, $N_{2\text{-}4}$, $N_{2\text{-}3}$ ve $N_{1\text{-}3}$ kuvvetleri, 1-1 kesiminin solunda kalan parçasında (Şekil 5.1.3) moment noktalarına göre yazılacak denklemlerden hesaplanır.



Şekil 5.1.3

$N_{2\text{-}4}$ – için moment noktası "2-3" ve "1-3" çubuklarının kesişme noktası olan "3" düğümüdür.

$$\sum M_3 = V_A.9 - \frac{P}{2}.9 - P.6 - P.3 + N_{2-4}.r_{2-4} = 0.$$

Moment noktasının iç kuvvetin doğrultusuna dik uzaklığı *r* ile gösterilmiştir.

$$\cos\alpha = \frac{9}{\sqrt{2^2+9^2}} = \frac{9}{9{,}219544} = 0{,}97618, \quad \sin\alpha = \frac{2}{9{,}219544} = 0{,}21693$$

$$r_{2-4} = 4.\cos\alpha = 4.(0{,}97618 = 3{,}9047\,m\,,\ N_{2-4} = \frac{-90.9 + 15.9 + 30.6 + 30.3}{3{,}9047} = -103{,}721\ kN$$

$N_{1\text{-}3}$ için moment noktası "2-4" ve "2-3" çubuklarının kesişme noktası olan "2" düğümüdür.

$$\sum M_2 = V_A.6 - \frac{P}{2}.6 - P.3 - N_{1-3}.r_{1-3} = 0\,, \quad r_{1-3} = l_{1-2} = 2 + 2.\frac{2}{3} = 3{,}333\,m$$

$$N_{1-3} = \frac{90.6 - 90 - 90}{3{,}333} = 108\,kN$$

$N_{2\text{-}3}$ için ise moment noktası "O" noktasıdır. ("2-4" ve "1-3" çubuklarının doğrultularının kesişme noktası).

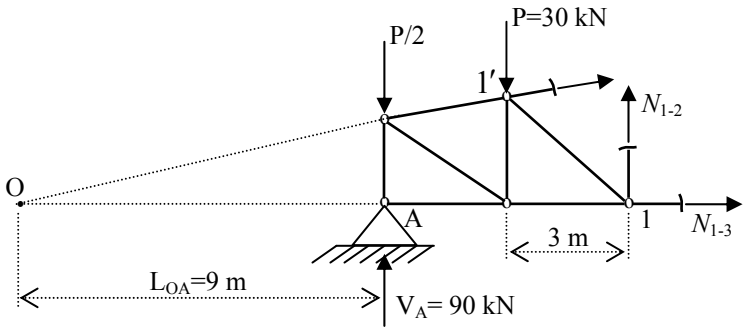
$$\sum M_O = -V_A.L_{OA} + \frac{P}{2}.L_{OA} + P.(L_{OA}+3) + P.(L_{OA}+6) + N_{2-3}.r_{2-3} = 0$$

$$L_{OA} = \frac{2}{tg\alpha}\,, \quad tg\alpha = \frac{2}{9} = 0{,}2222 \Rightarrow \quad L_{OA} = \frac{2}{0{,}2222} = 9\,m$$

$$\overset{\Delta}{3FO} - dan \quad r_{2-3} = (L_{OA}+9).\sin\beta\,, \quad \overset{\Delta}{312} - den \quad \sin\beta = \frac{l_{1-2}}{l_{2-3}} = \frac{3{,}333}{\sqrt{(3{,}333)^2+3^2}} = 0{,}743294$$

$$r_{2-3} = 18.(0{,}743294) = 13{,}3793\,m\,, \quad N_{2-3} = \frac{90.9 - 15.9 - 30{,}12 - 30.15}{13{,}3793} = -10{,}0902\,kN.$$

"1-2" çubuğunda oluşan $N_{1\text{-}2}$ iç kuvveti II-II kesiminden belirlenir (Şekil 5.1.2).

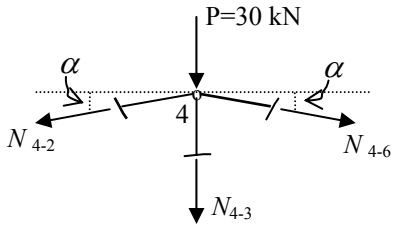


Şekil 5.1.4

$N_{1\text{-}2}$ için moment noktası "O" ("$1'-2$" ve "1-3" çubuk doğrultularının kesişme noktası) noktası olacaktır (Şekil 5.1.4).

$$\sum M_O = -V_A.9 + 15.9 + 30.12 - N_{1-2}.15 = 0 \Rightarrow \quad N_{1-2} = \frac{-90.9 + 135 + 360}{15} = -21\,kN$$

Yukarıda verilmiş olan açıklamaya göre, "4-3" çubuğunun dahil olacağı bir kesimde kesilecek çubukların sayısı üçten fazla olduğu için bu çubukta oluşan iç kuvvet düğüm kesme yöntemiyle hesaplanır (III – III kesimi).



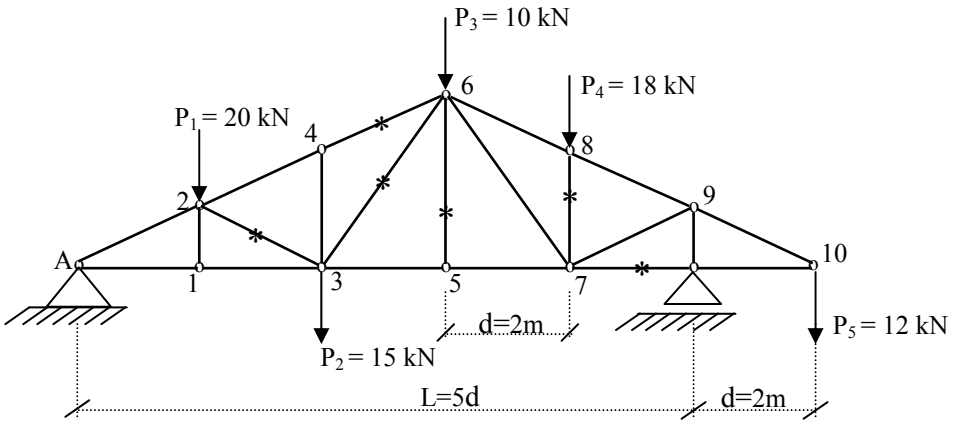
Şekil 5.1.5

$$\sum X = N_{4-6}.\cos\alpha - N_{4-2}.\cos\alpha = 0 \Rightarrow \quad N_{4-6} = N_{4-2}\,.$$
$$\sum Y = -P - N_{4-3} - 2.N_{4-2}.\sin\alpha = 0 \Rightarrow \quad N_{4-3} = -30 - 2.(-103{,}721).(021693) = 15\,kN$$

Böylece belirlenen iç kuvvetler aşağıdaki tabloda toplu halde verilmiştir.

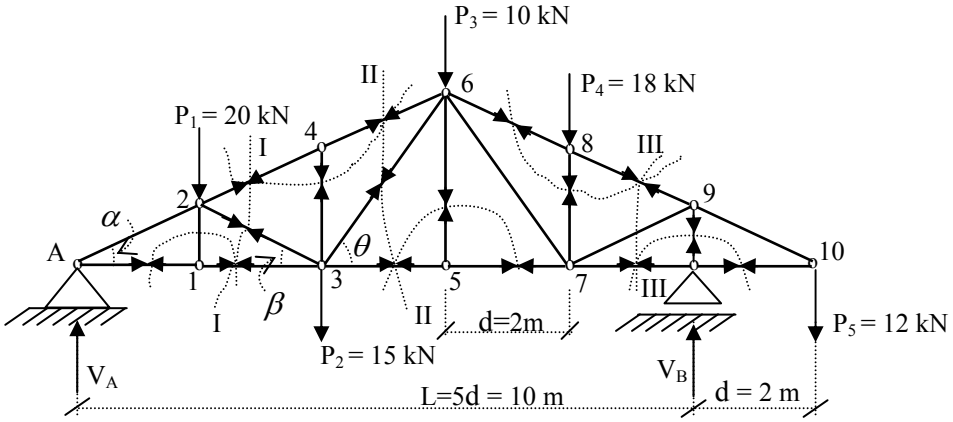
İç Kuvvetler	Değerleri (kN)	
$N_{2\text{-}4}$	- 103,721	Basınç
$N_{1\text{-}3}$	108	Çekme
$N_{2\text{-}3}$	- 10,0902	Basınç
$N_{1\text{-}2}$	-21	Basınç
$N_{4\text{-}3}$	15	Çekme

Örnek 5.2. Boyutları ve yükleme durumu Şekil 5.2.1'de görülen üçgen kafes sistemin işaretlenmiş çubuklarında oluşan iç kuvvetleri hesaplayınız.



Şekil 5.2.1

Çözüm:
Kafes sistemin kinematik analizi: $n = 2.12 - 3 = 21$.
Şekil 5.2.1'den görüldüğü gibi sistem 21 adet çubuktan oluşmuş ve taşıyıcı bünyeye sahiptir.
Mesnet tepkileri aşağıdaki gibi belirlenir (Şekil 5.2.2).



Şekil 5.2.2

$$\sum M_B = V_A.10 - P_1.8 - P_2.6 - P_3.4 - P_4.2 + P_5.2 = 0 \Rightarrow$$

$$V_A = \frac{20.8 + 15.6 + 10.4 + 18.2 - 12.2}{10} = 30{,}2\,kN$$

$$\sum M_A = P_5.12 - V_B.10 + P_4.8 + P_3.6 + P_2.4 + P_1.2 = 0 \Rightarrow$$

$$V_B = \frac{12.12 + 18.8 + 10.6 + 15.4 + 20.2}{10} = 44{,}8\,kN$$

Sağlama : $\sum Y = V_A - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 + V_B - P_5 = 0 \Rightarrow$

$$30{,}2 - 20 - 15 - 10 - 18 + 44{,}8 - 12 = 0$$

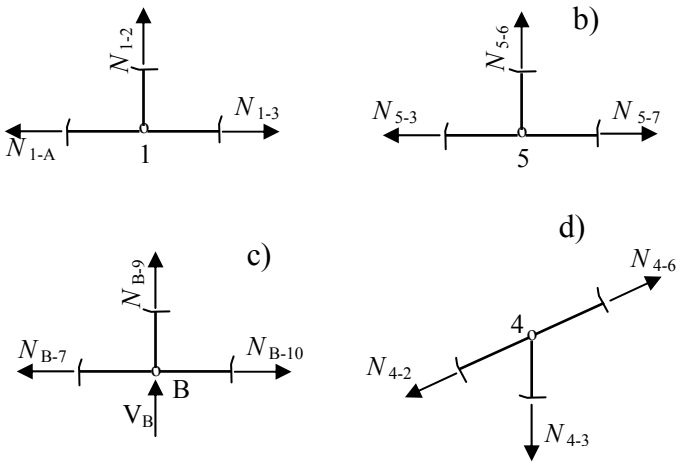
Verilmiş kafes sistemin dikme çubuklarında iç kuvvetler düğüm kesme yönteminin özel hallerine uygun olarak belirlene bilir.

"1" düğümünden (Şekil 5.2.3 a)
$N_{1\text{-}A} = N_{1\text{-}3}$, $N_{1\text{-}2} = 0$

"5" düğümünden (Şekil 5.2.3 b)
$N_{5\text{-}3} = N_{5\text{-}7}$, $N_{5\text{-}6} = 0$

"B" düğümünden (Şekil 5.2.3 c)
$N_{B\text{-}10} = N_{B\text{-}7}$, $N_{B\text{-}9} = -V_B = -44{,}8$ kN

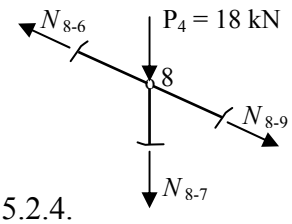
"4" düğümünden (Şekil 4.2.3 d)
$N_{4\text{-}2} = N_{4\text{-}6}$, $N_{4\text{-}3} = 0$.



Şekil 5.2.3

"8" düğümünden (Şekil 5.2.4)

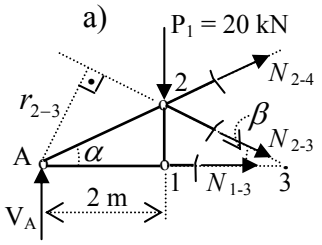
$N_{8\text{-}6} = N_{8\text{-}9}$, $N_{8\text{-}7} = -P_4 = -18$ kN.



Şekil 5.2.4.

Şekil 5.2.2'de görüldüğü gibi işaretlenmiş çubuklardaki iç kuvvetler (N_{2-3}, N_{4-6}, N_{3-6}, N_{3-5}, N_{7-5}) moment noktalarına göre yazılacak denklemlerden belirlenir.

I-I kesiminin solunda kalan parçanın (Şekil 5.2.5a) denge şartından



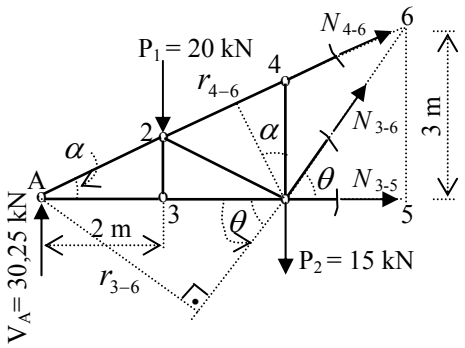
$$\sum M_A = P_1.2 + N_{2-3}.r_{2-3} = 0$$

$$r_{2-3} = 4.\sin\beta, \quad \sin\beta = \frac{l_{1-2}}{l_{2-3}} = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}} = 0{,}4472$$

$$r_{2-3} = 4.(0{,}4472) = 1{,}7889\,m, \quad N_{2-3} = \frac{20.2}{1{,}7889} = -22{,}36\,kN$$

b)

II-II kesiminin solunda kalan parçanın (Şekil 5.2.5b) denge şartlarından aşağıdaki iç kuvvetler hesaplanır.



Şekil 5.2.5

$$\sum M_6 = V_A.6 - P_1.4 - P_2.2 - N_{3-5}.l_{5-6} = 0 \Rightarrow$$

$$N_{3-5} = \frac{(30{,}2).6 - 20.4 - 15.2}{3} = 23{,}733\,kN$$

$$\sum M_3 = V_A.4 - P_1.2 + N_{4-6}.r_{4-6} = 0$$

$$r_{4-6} = l_{3-4}.\cos\alpha, \quad \cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{3^2+6^2}} = 0{,}8944$$

$$r_{4-6} = 2.(0{,}8944) = 1{,}7888\,m, \quad N_{4-6} = \frac{-(30{,}2).4 + 20.2}{1{,}7888} = -45{,}1699\,kN.$$

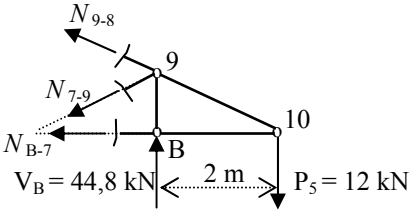
$$\sum M_A = P_2.4 + P_1.2 - N_{3-6}.r_{3-6} = 0, \quad r_{3-6} = 4.\sin\theta, \quad \sin\theta = \frac{3}{\sqrt{3^2+2^2}} = 0{,}832$$

$$r_{3-6} = 4.(0{,}832) = 3{,}3282\,m, \quad N_{3-6} = \frac{15.4 + 20.2}{3{,}3282} = 30{,}046\,kN$$

"7-B" çubuğunda oluşan iç kuvvet, sistemin III-III kesiminin (Şekil 5.2.2) sağ tarafında kalan parçasının (Şekil 5.2.6) denge şartından belirlenir.

$$M_9 = P_5.2 + N_{B-7}.l_{B-9} = 0$$

$$N_{B-7} = -\frac{12.2}{1} = -24\,kN$$

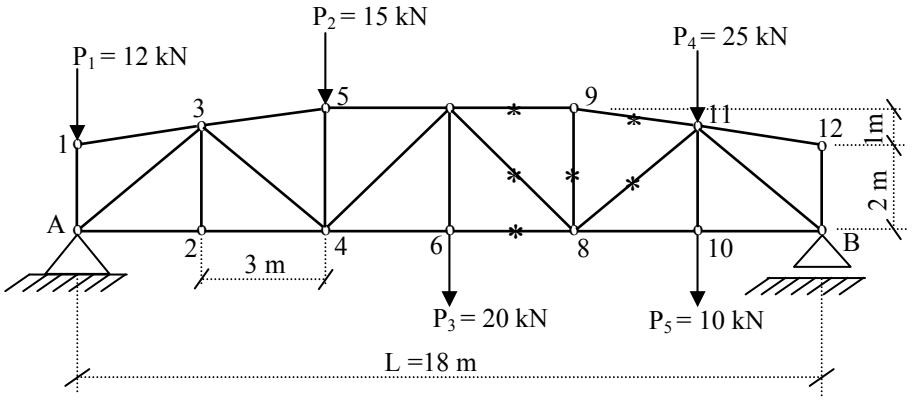


Şekil 5.2.6

Böylece belirlenen çubuk kuvvetleri aşağıdaki tablodadır.

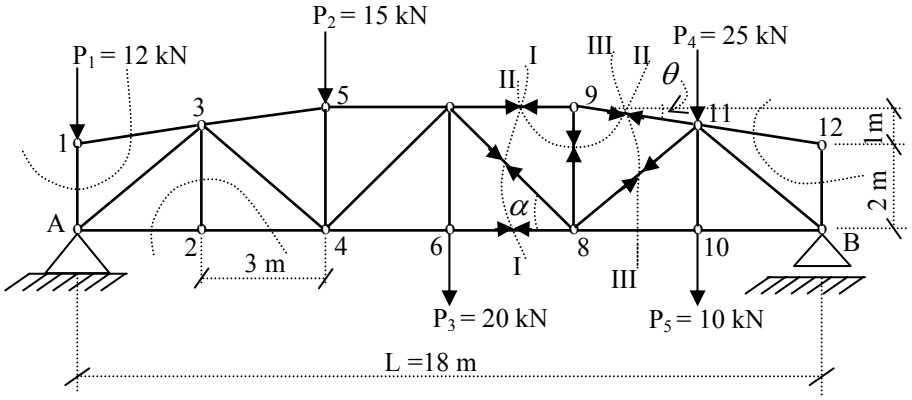
İç Kuvvetler	Değerleri (kN)	
N_{2-3}	- 22,36	Basınç
N_{3-5}	23,733	Çekme
N_{4-6}	- 45,1699	Basınç
N_{B-7}	-24	Basınç
N_{3-6}	30,046	Çekme

Örnek 5.3. Boyutları ve yükleme durumu Şekil 5.3.1'de verilmiş olan kafes sistemin sıfır kuvvet çubuklarını belirleyiniz ve işaretlenmiş çubuklardaki iç kuvvetleri hesaplayınız.



Şekil 5.3.1

Çözüm:
Hesaplamaya sistemin kinematik analiziyle başlanır. n = 2.14 – 3 = 25. Şekil 5.3.1'den de görülmektedir ki sistem 25 adet çubuktan oluşmaktadır ve taşıyıcı bünyeye sahiptir. Mesnet tepkileri statiğin denge denklemleriyle belirlenir (Şekil 5.3.2).



Şekil 5.3.2

$$\sum M_B = V_A.18 - P_1.18 - P_2.12 - P_3.9 - P_4.3 - P_5.3 = 0 \Rightarrow$$

$$V_A = \frac{12.18 + 15.12 + 20.9 + 25.3 + 10.3}{18} = 37{,}8333\,kN\,,$$

$$\sum M_A = -V_B.18 + (P_4 + P_5).15 + P_3.9 + P_2.6 = 0 \Rightarrow$$

$$V_B = \frac{(25+10).15 + 20.9 + 15.6}{18} = 44{,}1666\,kN\,.$$

Sağlama:

$$\sum Y = V_A - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 - P_5 + V_B = 0 \Rightarrow$$

$$37{,}8333 - 12 - 15 - 20 - 25 - 10 + 44{,}1666 = 0$$

Sıfır kuvvet çubukları düğüm kesme yönteminin özel hallerinden belirlenir.

"1" düğümünden (Şekil 5.3.3a)

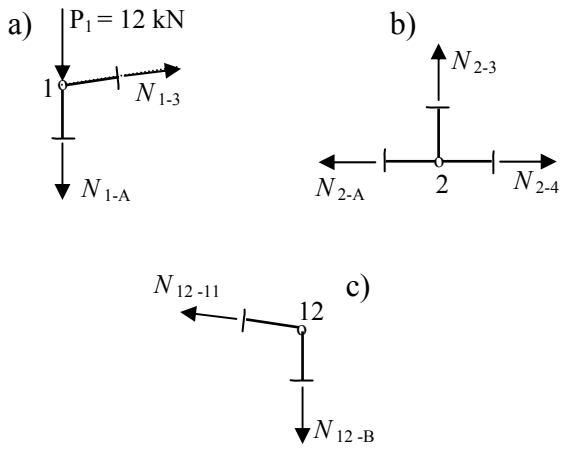
$N_{1-3} = 0$, $N_{1-A} = -P_1 = -12\,kN$

"2" düğümünden (Şekil 5.3.3b)

$N_{2-A} = N_{2-4}$, $N_{2-3} = 0.$

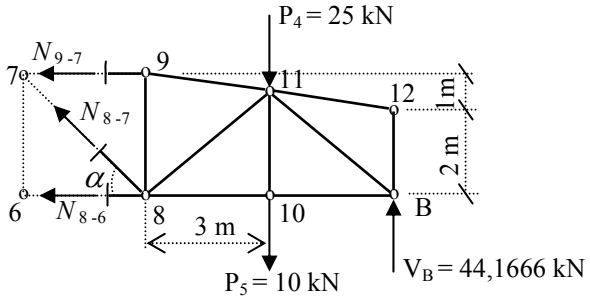
"12" düğümünden (Şekil 5.3.3c)

$N_{12-11} = 0$, $N_{12-B} = 0.$



Şekil 5.3.3

İşaretlenmiş çubuklardaki iç kuvvetlerin hesabı moment noktaları ve izdüşüm denge denklemleri ile yapılır. Bu iç kuvvetler kafes sistemin I-I kesiminin (Şekil 5.3.2) sağ tarafında kalan parçasının (Şekil 5.3.4) denge şartlarından belirlenir.



Şekil 5.3.4

N_{7-9} için moment noktası "8-6" ve "8-7" çubuklarının kesişme noktası olan "8" düğümüdür.

$$\sum M_8 = -V_B.6 + (P_4 + P_5).3 - N_{7-9}.r_{7-9} = 0\,, \quad r_{7-9} = l_{8-9} = 3\,m$$

$$N_{7-9} = \frac{-(44{,}1666).6 + (10+25).3}{3} = -53{,}333\,kN$$

N_{8-6} için moment noktası "7" düğümüdür.

$$\sum M_7 = -V_B = .9 + (P_4 + P_5).6 + N_{8-6}.r_{8-6} = 0\,, \quad r_{8-6} = l_{8-6} = 3\,m$$

$$N_{8-6} = \frac{-(44{,}1666).9 - (25+10)}{3} = 62{,}5\,kN.$$

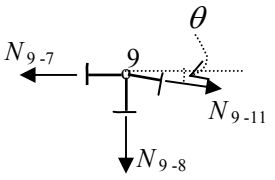
I-I kesimiyle kesilmiş üst ve alt başlık çubukları birbirine paralel oldukları için kesişme noktası sonsuzdadır. Buna göre de N_{8-7}'nin hesabı izdüşüm denkleminden yapılır.

$$\sum Y = V_B - P_4 - P_5 + N_{8-7}.\sin\alpha = 0\,, \quad \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{3^2+3^2}} = 0{,}7071$$

$$N_{8-7} = \frac{-44{,}1666 + 25 + 10}{0{,}7071} = -12{,}9636\,kN$$

N_{9-8}'in hesabı "9" düğümünün denge şartından yapılır (Şekil 5.3.5). Şekil 5.3.2'den görüldüğü gibi

$$\cos\theta = \frac{6}{\sqrt{1^2+6^2}} = 0{,}9264\,, \quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1^2+6^2}} = 0{,}1644$$



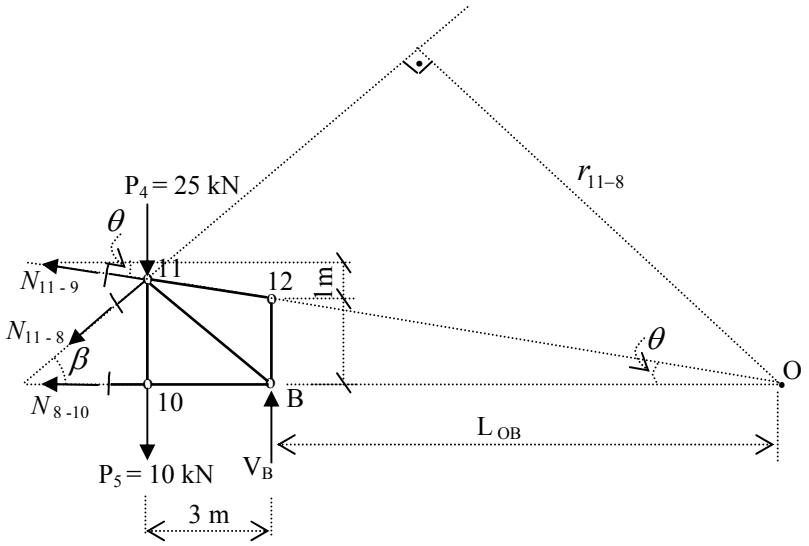
Şekil 5.3.5

$$\sum X = -N_{9-7} + N_{9-11}.\cos\theta = 0\,, \quad N_{9-11} = \frac{N_{9-7}}{\cos\theta}$$

$$N_{9-11} = \frac{-53{,}333}{0{,}9864} = -54{,}068\,kN\,.$$

$$\sum Y = -N_{9-8} - N_{9-11}.\sin\theta = 0 \Rightarrow \quad N_{9-8} = -N_{9-11}.\sin\theta = 54{,}068.(0{,}1644) = 8{,}88\,kN\,.$$

11-8 çubuğundaki iç kuvveti sistemin III-III kesiminin (Şekil 5.3.2) sağ tarafında kalan parçasının (Şekil 5.3.6) moment noktasına göre denge şartından hesaplanır. N_{11-8} için moment noktası 11-9 ve 10-8 çubuk doğrultularının kesişme noktası olan "O" noktasıdır.



Şekil 5.3.6

$$L_{OB} = \frac{l_{B-12}}{tg\theta}\,, \quad tg\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{0{,}1644}{0{,}9864} = 0{,}1666\,, \quad L_{OB} = \frac{2}{0{,}1666} = 12\,m\,,$$

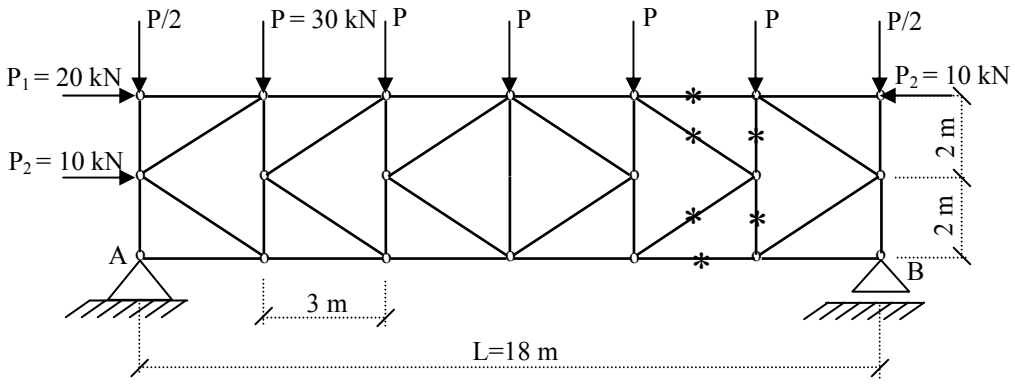
$$r_{11-8} = l_{O8}.\sin\beta\,, \quad \sin\beta = \frac{l_{10-11}}{l_{8-11}} = \frac{2{,}5}{\sqrt{(2{,}5)^2+3^2}} = 0{,}64\,, \quad r_{11-8} = (12+6).0{,}64 = 11{,}52\,m$$

$$\sum M_O = V_B.12 - (P_4+P_5).15 - N_{11-8}.r_{11-8} = 0\,, \quad N_{11-8} = \frac{(44{,}1666).12 - 35.15}{11{,}52} = 0{,}434\,kN\,.$$

Kafes sistemin işaretlenmiş çubuklarındaki iç kuvvetlerin değerleri ve sıfır kuvvet çubukları aşağıdaki tablodadır.

İç Kuvvetler	Değerleri (kN)	
$N_{1\text{-}3}$	0	
$N_{2\text{-}3}$	0	
$N_{12\text{-}11}$	0	
$N_{12\text{-}B}$	0	
$N_{7\text{-}9}$	-53,333	Basınç
$N_{8\text{-}6}$	62,5	Çekme
$N_{8\text{-}7}$	-12,9636	Basınç
$N_{9\text{-}8}$	8,88	Çekme
$N_{9\text{-}11}$	-54,068	Basınç
$N_{11\text{-}8}$	0,434	Çekme

Örnek 5.4. Boyutları ve yükleme durumu Şekil 5.4.1'de verilmiş olan yarım diyagonal çubuklu (K tipi) kafes sistemin işaretlenmiş çubuklarındaki iç kuvvetlerin belirlenmesi istenmektedir.



Şekil 5.4.1

<u>Çözüm</u>: Kafes sistemin kinematik analizi önceki kafes sistemlerde yapıldığı gibidir. Sistem n = 2.20-3 = 37 adet çubuktan oluşmuştur ve Şekil 5.4.1'den görüldüğü gibi taşıyıcı yapıya sahiptir.
Mesnet tepkilerinin hesabı (Şekil 5.4.2).

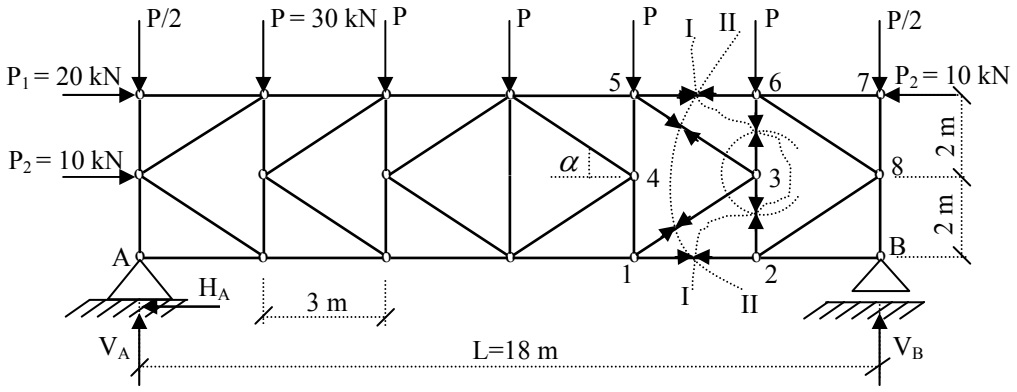
$$\sum X = P_1 + P_2 - P_2 - H_A = 0 \Rightarrow \quad H_A = 20 + 10 - 10 = 20\,kN$$

$$\sum M_B = V_A.18 - \frac{P}{2}.18 - P.(15+12+9+6+3) + P_1.4 + P_2.2 - P_2.4 = 0 \Rightarrow$$

$$V_A = \frac{15.18 * 30.45 - 20.4 - 10.2 + 10.4}{18} = 86{,}667\,kN$$

$$\sum M_A = -V_B.18 - P_2.4 + \frac{P}{2}.18 + P.(15+12+9+6+3) + P_1.4 + P_2.2 = 0 \Rightarrow$$

$$V_B = \frac{-10.4 + 15.8 + 30.45 + 20.4 + 10.2}{18} = 93{,}333\,kN$$



Şekil 5.4.2

$$\sum X = 0 \Rightarrow P_1 + P_2 - H_A = 0 \Rightarrow H_A = 20 + 10 = 30\,kN.$$

Sağlama:

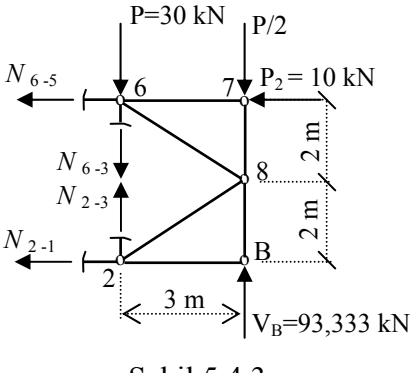
$$\sum Y = V_A - 2.\frac{P}{2} - 5.P + V_B = 0\,, \quad 86{,}667 - 2.15 - 5.30 + 93{,}333 = 0.$$

Bu türlü kafes sistemlerin çubuklarında oluşan iç kuvvetler birden fazla kesimin uygulanmasıyla hesaplanır (Şekil 5.4.2). $N_{6\text{-}5}$ ve N_{2-1} kafes sistemin I-I kesiminin sağ tarafında kalan parçasının (Şekil 5.4.3), bu iç kuvvetlerin moment noktalarına göre denge şartlarından belirlenir. $N_{6\text{-}5}$ için moment noktası 1-2 çubuğuyla her ikisi aynı doğru üzerinde olan 6-3 ve 2-3 çubuklarının kesişme noktası olan "2" düğümüdür.

$$\sum M_2 = -V_B.3 - P_2.4 + \frac{P}{2}.3 - N_{6-5}.4 = 0$$

$$N_{6-5} = \frac{-(93{,}333).3 - 10.4 + 15.3}{4} = -68{,}75\,kN$$

$N_{2\text{-}1}$ için moment noktası "6-5" çubuğuyla her ikisi aynı doğru üzerinde olan "6-3" ve "2-3" çubuklarının kesişme noktası olan "6" düğümüdür.



Şekil 5.4.3

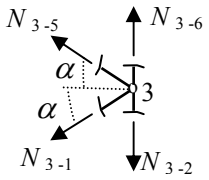
$$\sum M_6 = -V_B.3 + \frac{P}{2}.3 + N_{2-1}.4 = 0 \Rightarrow$$

$$N_{2-1} = \frac{(93{,}333).3 - 15.3}{4} = 58{,}75\,kN.$$

İşaretlenmiş diğer çubuklardaki iç kuvvetlerin hesaplanması için "3" düğümünü kesip (Şekil 5.4.4) denge şartından

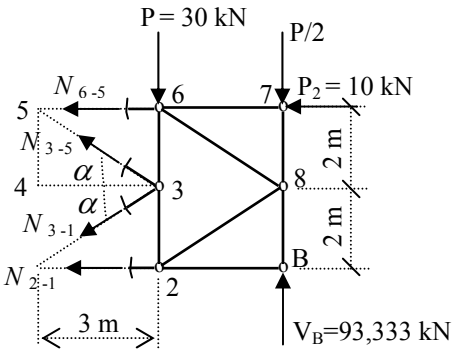
$\sum X = -N_{3-5}.\cos\alpha - N_{3-1}.\cos\alpha = 0 \Rightarrow \quad N_{3-5} = -N_{3-1}\,(1)$

olduğu elde edilir.



Şekil 5.4.4

Bundan sonra II-II kesimi ile (Şekil 5.4.2) dört adet çubuk kesilmesine rağmen, $N_{3-5} = -N_{3-1}$ olduğu için izdüşüm denklemleri kullanılabilir (Şekil 5.4.5).



Şekil 5.4.5

$$\sum Y = V_B - \frac{P}{2} - P + N_{3-5}.\sin\alpha - N_{3-1}.\sin\alpha = 0 \quad (2)\,,$$

(1) , (2) '*de yerine konursa*

$$\sum Y = V_B - 1{,}5P - 2.N_{3-1}.\sin\alpha = 0\,, \quad N_{3-1} = \frac{V_B - 1{,}5P}{2.\sin\alpha}\,,$$

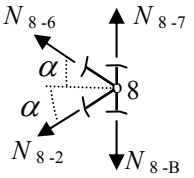
$\overset{\Delta}{345}$ '*den* $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{3^2+2^2}} = 0{,}5547$,

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}} = 0{,}832$$

$$N_{3-1} = \frac{93{,}333 - 45}{2.(0{,}5547)} = 43{,}567\,kN\,, \quad N_{3-5} = -43{,}567\,kN$$

"8" düğümü kesildiğinde (Şekil 5.4.6)
"3" düğümüne benzer şekilde düğüm denge denkleminden

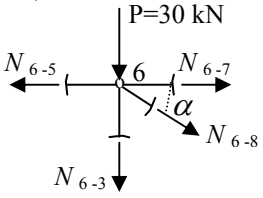
$$\sum X = -N_{8-6}.\cos\alpha - N_{8-2}.\cos\alpha = 0 \Rightarrow$$
$$N_{8-6} = -N_{8-2}$$



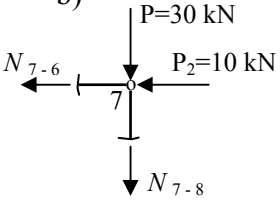
Şekil 5.4.6

olduğu belirlenir.
Kafes sistemin işaretlenmiş "6-3" ve "3-2" çubuklarındaki iç kuvvetler sırasıyla kesilmiş "6" (Şekil 5.4.7a) ve "2" (Şekil 5.4.7c) düğümlerinin denge şartlarından belirlenebilir.

a)



b)





Şekil 5.4.7

"6" düğümünün denge şartından (Şekil 5.4.7a)
$\sum X = -N_{6-5} + N_{6-8}.\cos\alpha + N_{6-7} = 0$ yazılır ve
"7" düğümünden (Şekil 5.4.7b) düğüm kesme yönteminin özel durumu ile $N_{6-7} = 10\ kN$ elde edilir. Buna göre

$$N_{6-8} = \frac{N_{6-5} - N_{6-7}}{\cos\alpha} = \frac{-68{,}75 + 10}{0{,}832} = -70{,}613\,kN\ , \quad N_{2-8} = -N_{6-8} = 70{,}613\,kN$$

$$\sum Y = -P - N_{6-3} - N_{6-8}.\sin\alpha = 0\ , \quad N_{6-3} = -30 - (-70{,}613).(0{,}5547) = 9{,}169\,kN$$

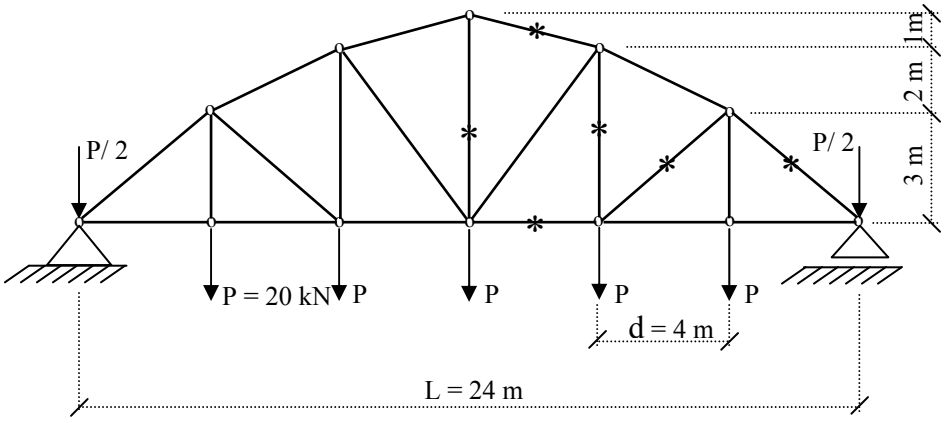
değerleri elde edilir.
N_{2-3} "2" düğümünün (Şekil 5.4.7c) denge şartlarından belirlenir. "B" düğümünden (Şekil 5.4.7d) $N_{B-2} = 0$ değeri bulunur. Dolayısıyla

$$\sum X = -N_{2-1} + N_{2-8}.\cos\alpha = 0 \Rightarrow \quad N_{2-8} = \frac{58{,}75}{0{,}832} = 70{,}613\,kN\,,$$

$$\sum Y = N_{2-3} + N_{2-8}.\sin\alpha = 0 \Rightarrow \quad N_{2-3} = -(70{,}613).(0{,}5547) = -39{,}169\,kN$$

olarak N_{2-8} ve N_{2-3} de belirlenmiş olur.

Örnek 5.5. Boyutları ve yükleme durumu Şekil 5.5.1'de verilmiş olan kafes sistemin işaretlenmiş çubuklarındaki iç kuvvetleri hesaplayınız.



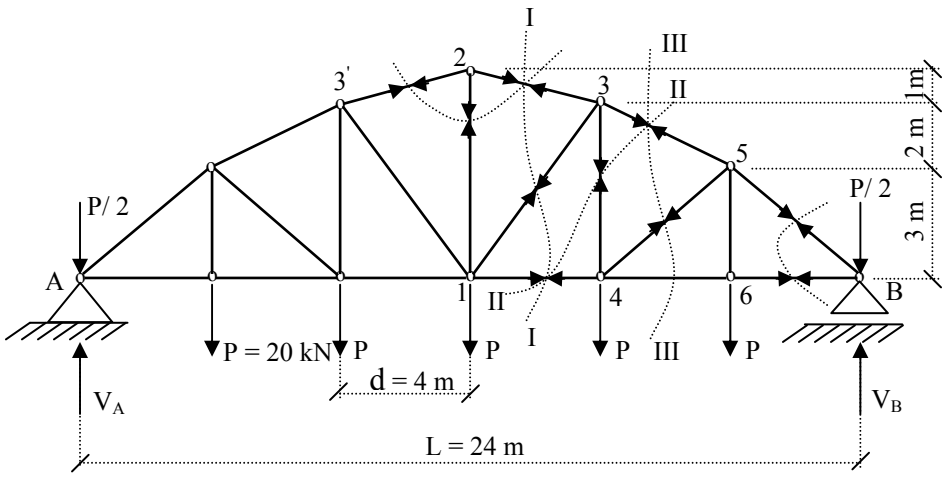
Şekil 5.5.1

Çözüm:
Sistemin kinematik analizi bilinen formülle yapılır: n = 2.12 – 3 = 21. Şekil 5.5.1'den görüldüğü gibi kafes sistem 21 adet çubuktan oluşmaktadır ve taşıyıcı bünyeye sahiptir.

Kafes sistemin ve etkiyen yüklerin simetrisinden mesnet tepkileri aşağıdaki gibi belirlenir:

$$V_A = V_B = \frac{\sum P}{2} = \frac{6P}{2} = 3.20 = 60\,kN.$$

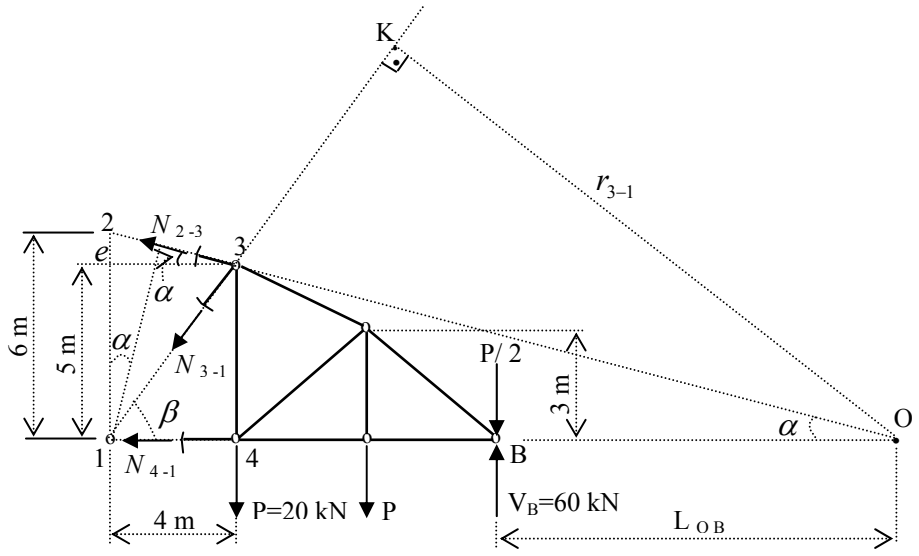
İç kuvvetlerin hesaplanması için gereken kesimler Şekil 5.5.2'de yapılmıştır.



Şekil 5.5.2

İşaretlenmiş "1-3", "2-3" ve "1-4" çubuklarındaki iç kuvvetler, kafes sistemin I-I kesiminin sağ tarafında kalan parçasının (Şekil 5.5.3) denge şartlarından, moment noktaları yöntemi ile belirlenir.

N_{3-2} için moment noktası "1-3" ve "1-4" çubuklarının kesişme noktası olan "1" düğümüdür (Şekil 5.5.3).



Şekil 5.5.3

$$\sum M_1 = -V_B.12 + \frac{P}{2}.12 + P.8 + P.4 - N_{3-2}.r_{3-2} = 0\,, \quad r_{3-2} = l_{1-2}.\cos\alpha\,,$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{1^2+4^2}} = 0{,}9701\,, \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2+4^2}} = 0{,}24253\,, \quad r_{3-2} = 6.(0{,}9701) = 5{,}8208\,m$$

$$N_{3-2} = \frac{-60.12 + 10.12 + 20.8 + 20.4}{5{,}8208} = -61{,}847\,kN.$$

N_{3-1} için moment noktası "3-1" ve "4-1" çubuk doğrultularının kesişme noktası olan "O" noktasıdır (Şekil.5.5.3).

$$\sum M_O = V_B.L_{oB} - \frac{P}{2}.12 - P.16 - P.20 - N_{3-1}.r_{3-1} = 0$$

$$3\overset{\Delta}{e}2\,'den \quad tg\alpha = \frac{1}{4} = 0{,}25\,, \quad O\overset{\Delta}{4}3'den \quad (L_{OB}+8) = \frac{l_{4-3}}{tg\alpha}\,, \quad L_{OB}+8 = \frac{5}{0{,}25} = 20\,m$$

$$L_{OB} = 12\,m. \quad 1\overset{\Delta}{4}3\,'den \quad \sin\beta = \frac{5}{\sqrt{5^2+4^2}} = 0{,}78086\,, \quad O\overset{\Delta}{K}1'den \quad r_{3-1} = (L_{OB}+12).\sin\beta\,,$$

$$r_{3-1} = 24.(0{,}78086) = 18{,}74\,m \quad N_{3-1} = \frac{60.12 - 10.12 - 20.16 - 20.20}{18{,}74} = -6{,}4\,kN.$$

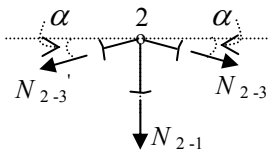
"2" düğümünü kesip (Şekil 5.5.4) düğüm kesme yöntemi kullanılarak "2-1" çubuğunda oluşan iç kuvvet aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$\sum X = N_{2-3}.\cos\alpha - N_{2-3'}.\cos\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$N_{2-3} = N_{2-3'} = -61{,}847\,kN\,,$$

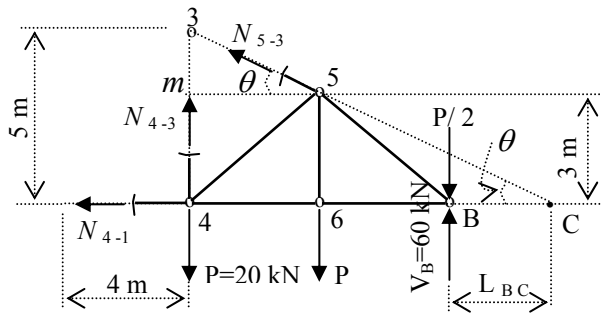
$$\sum Y = -N_{2-1} - 2.N_{2-3}.\sin\alpha = 0 \Rightarrow$$

$$N_{2-1} = -2.(-61{,}947).(0{,}24253) = 30\,kN$$



Şekil 5.5.4

"3-4" çubuğundaki iç kuvvet kafes sistemin II-II kesiminin sağ tarafında kalan parçasının (Şekil 5.5.2) denge şartlarından, yine moment noktaları esasına göre hesaplanır. Bu iç kuvvet, $N_{4\text{-}3}$, için moment noktası "3-5" ve "4-1" çubuk doğrultularının kesişme noktası olan C noktasıdır (Şekil 5.5.5).



Şekil 5.5.5

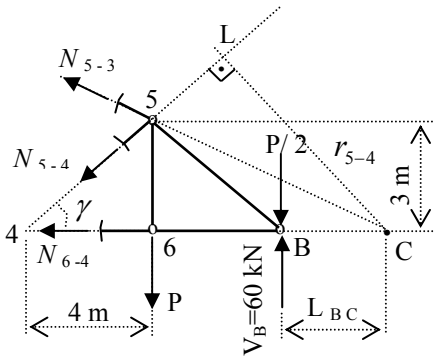
$$\sum M_C = V_B.L_{BC} - \frac{P}{2}.L_{BC} - P.(L_{BC}+4) - P.(L_{BC}+8) + N_{3-4}.(L_{BC}+8) = 0$$

$\overset{\Delta}{5m3}'den \;\; tg\theta = \dfrac{2}{\sqrt{2^2+4^2}} = 0{,}4472$, $\overset{\Delta}{C65}'den \;\; (L_{BC}+4) = \dfrac{l_{5-6}}{tg\theta} = \dfrac{3}{0{,}4472} = 6{,}7084\,m$,

$$L_{BC} = 2{,}7084\,m.$$

$$N_{4-3} = \frac{-60.(2{,}7084) + 10.(2{,}7084) + 20.(6{,}7084) + 20.(10{,}7084)}{10{,}7084} = 19{,}883\,kN.$$

"4-5" çubuğunda oluşan iç kuvvet, kafes sistemin III-III kesiminin (Şekil 5.5.2) sağ tarafında kalan parçasının (Şekil 5.5.6) denge şartından belirlenir.



Şekil 5.5.6

N_{5-4} için de moment noktası yine C noktasıdır ("4-5" ve "6-4" çubuk doğrultularının kesişme noktası).

$$\sum M_C = V_B.L_{BC} - \frac{P}{2}.L_{BC} - P.(L_{BC}+4) - N_{5-4}.r_{5-4} = 0\,.$$

$\overset{\Delta}{CL4}'den \quad r_{5-4} = (L_{BC}+8).\sin\gamma$, $\quad \overset{\Delta}{465}'den \quad \sin\gamma = \dfrac{3}{\sqrt{3^2+4^2}} = 0{,}6.$

$$r_{5-4} = (8+2{,}7084) = 6{,}425\,m, \quad N_{5-4} = \frac{60.(2{,}7084) - 10.(2{,}7084) - 20.(6{,}7084)}{6{,}425} = 0{,}1948\,kN$$

"B-5" ve "B-6" çubuklarındaki iç kuvvetler düğüm kesme yöntemi ile belirlenir. Bunun için "B" düğümü (Şekil 5.5.2) kesilip, denge şartları yazılır (Şekil 5.5.7).

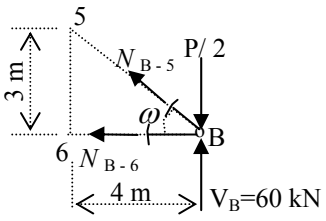
$\sum X = -N_{B-6} - N_{B-5}.\cos\omega = 0 \Rightarrow \quad N_{B-6} = -N_{B-5}.\cos\omega,$

$\overset{\Delta}{B65}'den \quad \cos\omega = \dfrac{4}{\sqrt{4^2+3^2}} = 0{,}8$, $\quad \sin\omega = \dfrac{3}{5} = 0{,}6.$

$N_{B-6} = -0{,}8N_{B-5}$.

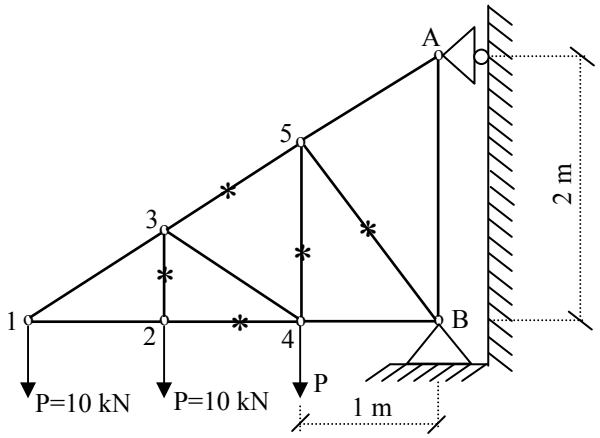
$$Y = -\frac{P}{2} + V_B + N_{B-5}.\sin\omega = 0 \Rightarrow \quad N_{B-5} = \frac{-60+10}{0{,}6} = -83{,}333\,kN$$

$$N_{B-6} = -(-83{,}333).(0{,}8) = 66{,}666\,kN\,.$$



Şekil 5.5.7

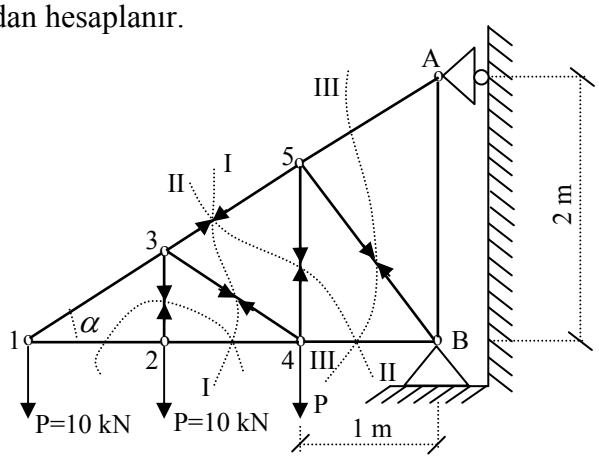
Örnek 5.6. Boyutları ve yükleme durumu Şekil 5.6.1'de verilmiş olan konsol kafes sistemin işaretlenmiş çubuklarındaki iç kuvvetleri hesaplayınız.



Şekil 5 .6.1

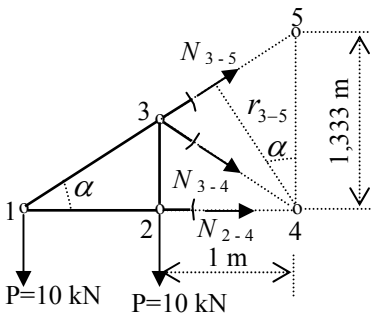
Çözüm:

Konsol kafes sistemlerin kinematik analizi de (5.2) bağıntısıyla yapılır. Sistemde n = 2.7-3 = 11 çubuk olmalıdır. Şekil 5.6.1'e bakıldığında sistemin 11 çubuktan oluştuğu görülmektedir. Ayrıca, taşıyıcı özelliğe sahip, yani geometrik değişmez ve izostatik olduğu da açıktır. Konsol kafes sistemlerin çubuklarındaki iç kuvvetler bilinen yöntemlerle, kafes sistemin yapılan kesimlerle, işlemlerin kolaylığı için serbest, diğer bir deyişle mesnet olmayan tarafta kalan parçasının denge şartlarından hesaplanır.



Şekil 5.6.2

İşaretlenmiş "3-5" ve "2-4" çubuklarındaki iç kuvvetler kafes sistemin I-I kesiminin (Şekil 5.6.2) sol tarafında kalan parçasının (Şekil 5.6.3) denge şartlarından, moment denklemleri ile hesaplanır.



Şekil 5.6.3

N_{2-4} için moment noktası "3-5" ve "3-4" çubuklarının kesişme noktası olan "3" düğümüdür (Şekil 5.6.3).

$$\sum M_3 = -P.1 - N_{2-4}.l_{2-3} = 0\,, \quad l_{2-3} = \frac{2}{3} = 0{,}666\,m\,, \quad N_{2-4} = \frac{-10.1}{0{,}666} = -15\,kN.$$

N_{3-5} için moment noktası "3-4" ve "2-4" çubuklarının kesişme noktası olan "4" düğümüdür (Şekil 5.6.3).

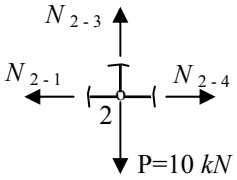
$$\sum M_4 = -P.2 - P.1 + N_{3-5}.r_{3-5} = 0\,, \quad r_{3-5} = l_{4-5}.\cos\alpha\,,$$

$\overset{\Delta}{1}2\overset{'}{3}$ *den* $\quad \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1^2 + (0{,}666)^2}} = 0{,}832$

$$r_{3-5} = (1{,}3333).(0{,}832) = 1{,}109\,m\,, \quad N_{3-5} = \frac{10.2 + 10.1}{1{,}109} = 27{,}05\,kN.$$

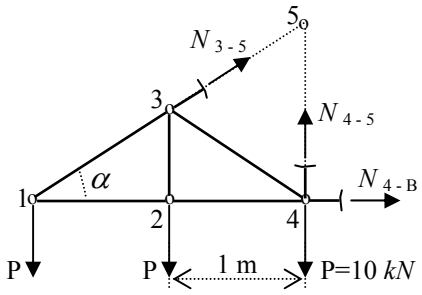
N_{2-3}, "2" düğümü kesilerek, düğüm kesme yönteminin özel durumundan belirlenir (Şekil 5.6.4).

$$N_{1-2} = N_{2-4}\,, \quad N_{2-3} = P = 10\,kN.$$



Şekil 5.6.4

N_{4-5} ve N_{4-B} kafes sistemin II-II kesiminin (Şekil 5.6.2) sol tarafında kalan parçasının (Şekil 5.6.5) denge şartlarından, moment noktası yöntemi ile hesaplanır.



Şekil 5.6.5

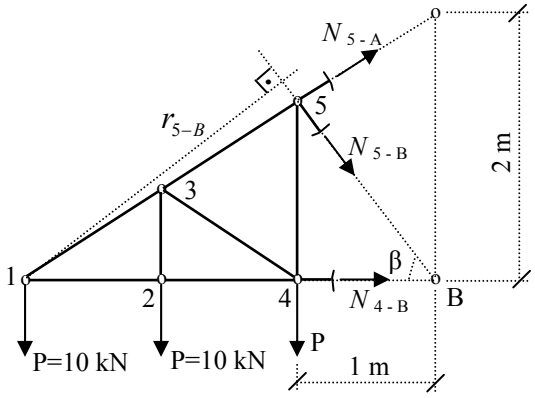
N4-5 için moment noktası "1" düğümüdür ("3-5" ve "4-B" çubuk doğrultularının kesişme noktası) (Şekil 5.6.5).

$$\sum M_1 = P.1 + P.2 - N_{4-5}.2 = 0 \Rightarrow \quad N_{4-5} = \frac{10.1 + 10.2}{2} = 15\,kN.$$

N4-B için moment noktası "5" düğümüdür ("3-5" ve "4-5" çubuklarının kesişme noktası) (Şekil 5.6.5).

$$\sum M_1 = -P.2 - P.1 - N_{4-B}.l_{4-5} = 0 \Rightarrow \quad N_{4-B} = \frac{-10.2 - 10.1}{1{,}333} = -22{,}5\,kN.$$

Kafes sistemde (Şekil 5.6.2) III-III kesiminin sol tarafında kalan parçanın denge şartından, N_{5-B} de moment denklemi yazılarak belirlenebilir. N_{5-B} için moment noktası üst ve alt başlık doğrultularının kesişme noktası olan "1" düğümüdür (Şekil 5.6.6).



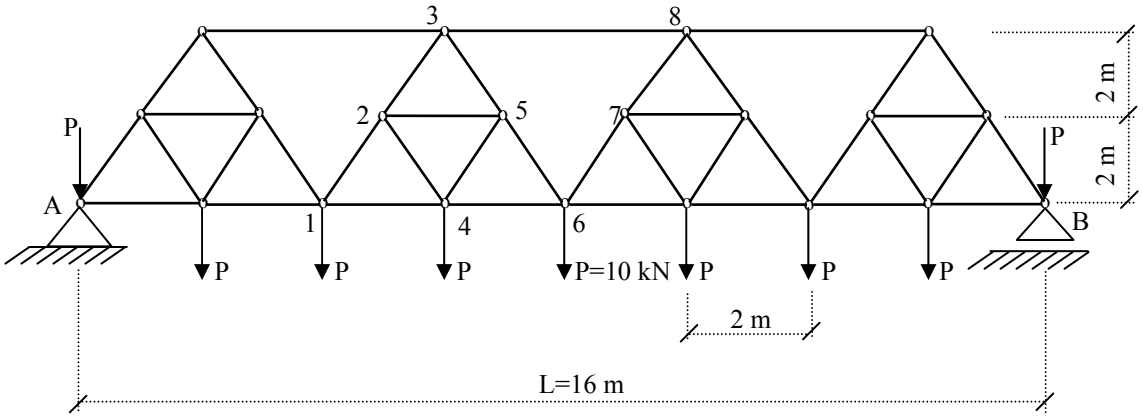
Şekil 5.6.6

$$\sum M_1 = P.1 + P.2 + N_{5-B}.r_{5-B} = 0\,, \quad \overset{\Delta}{B41'}den \quad r_{5-B} = 3.\sin\beta\,,$$

$$\sin\beta = \frac{l_{5-4}}{l_{5-B}} = \frac{1{,}333}{\sqrt{(1{,}333)^2 + 1^2}} = 0{,}8 \Rightarrow \quad r_{5-B} = 3.(0{,}8) = 2{,}4\,m\,,$$

$$N_{5-B} = \frac{-10.1 - 10.2}{2{,}4} = -12{,}5\,kN\,.$$

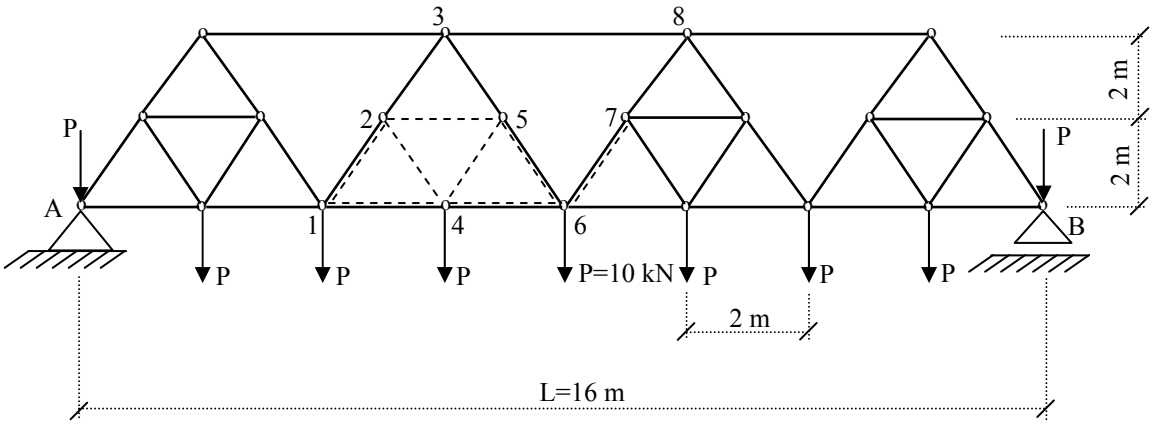
Örnek 5.7. Boyutları ve yükleme durumu Şekil 5.7.1'de verilmiş olan karmaşık kafes sistemin soldan 2.panel (kafes sistemin üst ve alt başlıkları üzerinde iki komşu düğüm arasında kalan parçası) çubuklarındaki iç kuvvetleri hesaplayınız.



Şekil 5.7.1

Çözüm: Kafes sistemlerin daha fazla yük taşıması amacıyla, yüklenmiş üst veya alt başlık çubuklarına küçük kafes sistemler eklenmesiyle karmaşık kafes sistemler elde edilir.

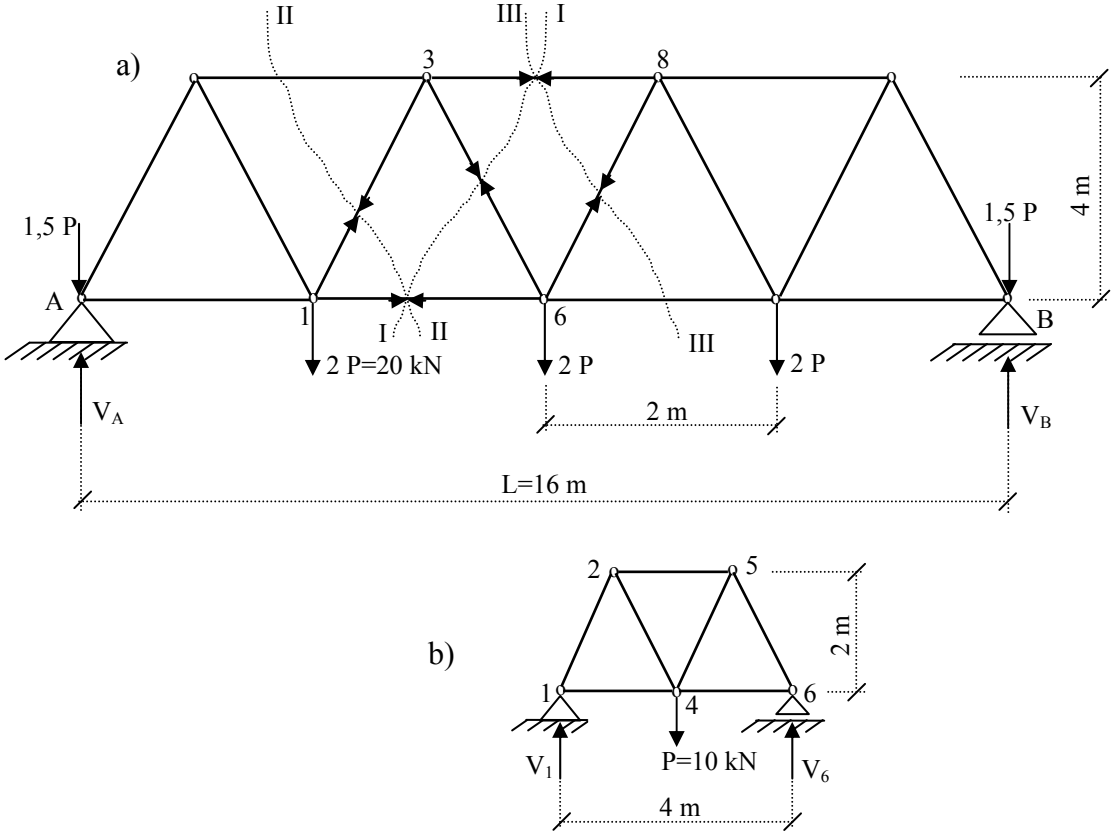
Karmaşık kafes sistemlerin çubukları Şekil 5.7.2'de görüldüğü gibi aşağıdaki türlere ayrılır:
1. Yalnız esas kafes sisteme ait olan çubuklar: "3-8", "2-3", "3-5", "8-7"(Şekil 5.7.2'de sürekli çizgiyle gösterilmişlerdir).



Şekil 5.7.2

2. Yalnız ilave kafes sistemlere ait olan çubuklar: “2-5, “2-4”, “4-5” (Şekil 5.7.2’de kesik çizgiyle gösterilmişlerdir).
3. Esas ve ilave kafes sistemlere ait olan çubuklar: “1-2”, “1-4”, “4-6”,”6-5”, “6-7” (Şekil 5.7.2’de birbirine paralel olan kesik ve sürekli çizgilerle gösterilmişlerdir).

Karmaşık kafes sistem, hesabı kolaylaştırmak amacıyla esas (Şekil 5.7.3a) ve ilave (Şekil 5.7.3b) kafes sistem olmak üzere ikiye ayrılır. Her iki kafes sistemin çubuklarındaki iç kuvvetler bilinen yöntemlerle hesaplanır.



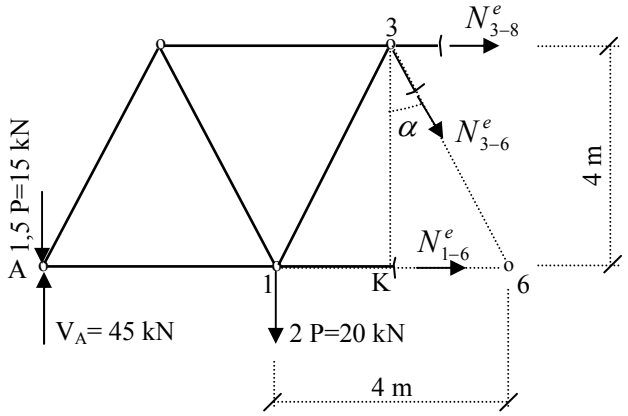
Şekil 5.7.3. a) Esas kafes sistem, b) İlave kafes sistem.

Esas kafes sistem için mesnet tepkileri kafes sistemin ve yüklemenin simetrisinden (Şekil .5.7.3a) birbirine eşit olup, şu değerdedir: $V_A = V_B = \frac{9P}{2} = 4{,}5\,P = 45\,kN$. I-I kesimi ile kesilmiş çubuklardaki iç kuvvetler (N^e_{3-8}, N^e_{3-6} *ve* N^e_{1-6}) esas kafes sistemin kesimin sol tarafında kalan parçasının denge şartlarından belirlenebilir (Şekil 5.7.4). N^e_{3-8} için moment noktası "3-6" ve "1-6" çubuklarının kesişme noktası olan "6" düğümüdür.

$$\sum M_6 = V_A.8 - 1{,}5P.8 - 2P.4 + N^e_{3-8}.4 = 0 \Rightarrow \quad N^e_{3-8} = \frac{-45.8 + (1{,}5).10.8 + 2.10.4}{4} = -40\,kN.$$

N^e_{1-6} için moment noktası "3" düğümüdür ("3-8" ve "3-6" çubuklarının kesişme noktası) (Şekil 5.7.4).

$$\sum M_3 = V_A.6 - 1{,}5P.6 - 2P.2 - N^e_{1-6}.4 = 0 \Rightarrow \quad N^e_{1-6} = \frac{45.6 - (1{,}5).10.6 - 2.10.2}{2} = 35\,kN.$$



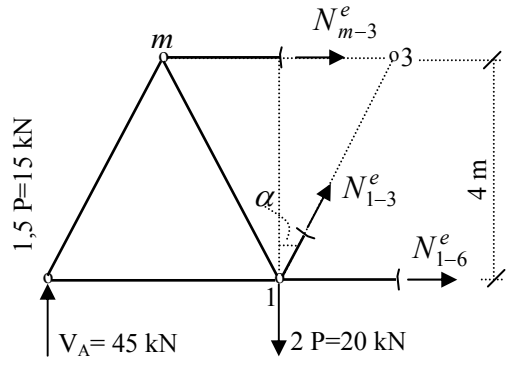
Şekil 5.7.4

Köşegen (diyagonal) çubuklardaki iç kuvvetler üst ve alt başlık çubukları birbirine paralel oldukları için izdüşüm denklemleri ile hesaplanır.

$$\sum Y = V_A - 1{,}5P - 2P - N^e_{3-6}.\cos\alpha = 0, \quad \cos\alpha = \frac{l_{3-K}}{l_{3-1}} = \frac{4}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = 0{,}8944$$

$$N^e_{3-6} = \frac{45 - 15 - 20}{0.8944} = 11{,}18\,kN$$

Esas kafes sistemin II-II kesiminin (Şekil 5.7.3) solunda kalan parçasının (Şekil 5.7.5) denge şartından N^e_{3-4}'ın belirlenmesine benzer şekilde N^e_{1-3} hesaplanır.

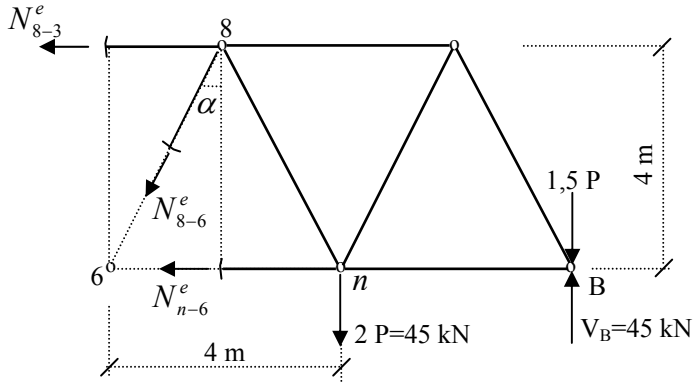


Şekil 5.7.5

$$\sum Y = V_A - 1{,}5P - 2P + N^e_{1-3}.\cos\alpha = 0 \Rightarrow \quad N^e_{1-3} = \frac{-45+15+20}{0{,}8944} = -11{,}18\,kN.$$

Esas kafes sistemin "6-8" çubuğunda oluşan N^e_{6-8} iç kuvveti, kafes sistemin III-III kesiminin (Şekil 5 .7.3a) sağ tarafında kalan parçasının (Şekil 5.7.6) denge şartından belirlenir.

$$\sum Y = V_B - 1{,}5P - 2P - N^e_{8-6}.\cos\alpha = 0 \Rightarrow \quad N^e_{8-6} = \frac{45-15-20}{0{,}8944} = 11{,}18\,kN.$$



Şekil 5.7.6

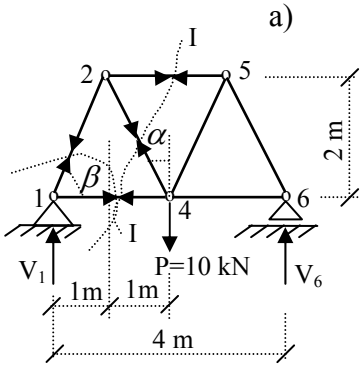
İlave kafes sistemin çubuklarındaki iç kuvvetlerin hesabı (Şekil 5.7.7a):
İlave ve esas kafes sistemler aynı şekle sahip oldukları için çubuklarındaki iç kuvvetlerin belirlenmesi de aynı yöntemlerle, benzer şekilde yapılır.
Ele alınan kafes sistem simetrik olduğundan

$V_1 = V_6 = 5\ kN$,

$N^i_{1-2} = N^i_{6-5}$, $\quad N^i_{2-4} = N^i_{4-5}$, $\quad N^i_{1-4} = N^i_{4-6}$.

yazılabileceği açıktır.

a)

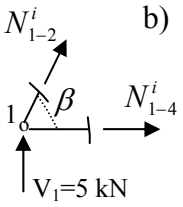


Kafes sistemin I-I kesiminin solunda kalan parçasının denge şartlarından çubuklardaki iç kuvvetler hesaplanır (Şekil 5.7.7).

$$\sum M_4 = V_1.2 + N^i_{2-5}.2 = 0 \Rightarrow \quad N^i_{2-5} = \frac{-5.2}{2} = -5\,kN$$

$$\sum M_2 = V_1.1 - N^i_{1-4}.2 = 0 \Rightarrow \quad N^i_{1-4} = \frac{5.1}{2} = 2{,}5\,kN = N^i_{4-6}.$$

b)



Şekil 5.7.7

"1"düğümü kesilip denge denklemlerinden N^i_{1-2} *ve* N^i_{1-4} belirlenebilir (Şekil 5.7.7b).

$$\sum Y = V_1 - N^i_{2-4}.\cos\alpha = 0 \Rightarrow \quad N^i_{2-4} = \frac{V_1}{\cos\alpha} = \frac{5}{0{,}8944} = 5{,}59\,kN = N^i_{4-5}\,,$$

$$\sum X = N^i_{1-2}.\cos\beta + N^i_{1-4} = 0 \Rightarrow \quad N^i_{1-2} = -\frac{N^i_{1-4}}{\cos\beta}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}} = 0{,}4472\,,$$

$$N^i_{1-2} = -\frac{2{,}5}{0{,}4472} = -5{,}59\,kN = N^i_{5-6}.$$

Esas ve ilave kafes sistemlerin çubuklarında iç kuvvetler yukarıdaki gibi belirlendikten sonra karmaşık kafes sistemin çubuklarındaki iç kuvvetler aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$N_{1-2} = N^e_{1-3} + N^i_{1-2} = -11{,}18 - 5{,}59 = -16{,}77\,kN\,, \quad N_{2-3} = N^e_{1-3} = -11{,}18\,kN\,,$$

$$N_{3-8} = N^e_{3-8} = -40\,kN, \quad N_{3-5} = N^e_{3-6} = 11{,}18\,kN\,, \quad N_{2-5} = N^i_{2-5} = -5\,kN\,,$$

$$N_{5-6} = N^e_{3-6} + N^i_{5-6} + 11{,}18 - 5{,}59 = 5{,}59\,kN, \quad N_{7-8} = N^i_{6-8} = 11{,}18\,kN,$$

$$N_{1-4} = N_{4-6} = N^e_{1-6} + N^i_{1-4} = 35 + 2{,}5 = 37{,}5\,kN, \quad N_{2-4} = N_{4-5} = N^i_{2-4} = 5{,}59\,kN,$$

$$N_{6-7} = N^e_{6-8} + N^i_{6-7} = 11{,}18 - 5{,}59 = 5{,}59\,kN.$$

6. KAFES SİSTEMLERDE TESİR ÇİZGİLERİ

Genel Bilgiler

Kafes sistemlerin de hareketli yüklere göre hesabı tesir çizgileri (T. Ç.) ile yapılır. Kafes sistem çubuklarındaki kuvvetlerin T. Ç.'leri, üst veya alt başlıkta hareket eden, yönü değişmeyen $P = 1$ birim yükünün durumuna bağlı olarak bu kuvvetlerin değerlerinin değişimini gösteren grafiklerdir. Hareketli birim yükün de sabit yüklerdeki gibi düğümlerde uygulanacağı göz önünde bulundurulmalıdır. Çubuk kuvvetlerinin T. Ç.'leri, kirişlerde eğilme momenti ve kesme kuvvetinin T. Ç.'lerinde olduğu gibi doğru parçalarından oluşur. Tesir çizgilerini çiziminde, sabit yükler için analitik yöntemle, çubuk kuvvetlerinin hesabında yapılmış işlemler ve uygulanmış olan yöntemler aynen tekrarlanır. Kafes sistemde bir çubuk kuvvetinin tesir çizgisinin sağ doğrusunun ifadesi, hareketli birim yükü, yapılmış kesimin sağ tarafında göz önüne alarak, sol tarafın denge şartları ile sol mesnet tepkisine bağlı olarak elde edilir. Sol doğrusunun ifadesi ise hareketli birim yükü, yapılmış kesimin sol tarafında göz önüne alarak, sağ tarafın denge şartlarından sağ mesnet tepkisine bağlı olarak belirlenir. Konsol kafes sistemlerde bir çubuk kuvvetinin T. Ç.'nin her iki doğrusunun ifadesi de, kafes sistemin serbest, yani mesnet olmayan tarafının denge denklemlerinden elde edilir. Böyle kafes sistemlerde T. Ç.'leri doğrularından biri, hareketli birim yük mesnetlenmiş tarafta göz önüne alındığı için sıfır olur.

Elde edilen ifadelere bağlı olarak çubuk kuvvetlerinin T. Ç.'lerinin sol ve sağ doğruları çizilir. Bundan sonra, yapılmış kesimin sol ve sağ tarafında kalan ilk düğümlerden (hareketli birim yükün hangi başlık üzerinde hareket ettiğine bağlı olarak) sol ve sağ doğrular üzerine izdüşümler alınır. Sağ doğrunun izdüşümünün sağında, sol doğrunun ise izdüşümünün solunda kalan kısımları ele alınır. Daha sonra düğümlerin bu iz düşümleri bir doğruyla birleştirilerek, ki bu doğru geçit çizgisi olarak adlandırılır, dikkate alınmış olan çubuktaki iç kuvvetin tesir çizgisi elde edilmiş olur.

Alt ve üst başlık üzerinde kesimin sol ve sağ tarafındaki ilk düğümler aynı bir düşey doğru üzerinde iseler, $P = 1$ birim yükünün hangi başlık üzerinde hareket ettiğine bağlı olmaksızın, çubuk kuvvetlerinin tesir çizgileri aynı olur. Ancak, söz konusu düğümler farklı düşey doğrular üzerinde iseler, tesir çizgileri doğal olarak birbirinden farklı olur.

Bu bölümde ele alınan kafes sistemler düzlem kafes sistemlerdir, yani kafes sistemin çubuklarının eksenleri ve düğümlere uygulanmış tekil yükler aynı bir düzlem üzerindedirler. Böyle kafes sistemlerin mesnet tepkilerinin T. Ç.'leri kirişlerdeki gibidir.

Çizilmiş tesir çizgileri yardımıyla iç kuvvetlerin hesaplanması aşağıdaki bağıntıyla yapılır.

$$N = \sum P_i . y_1 \qquad (6.1)$$

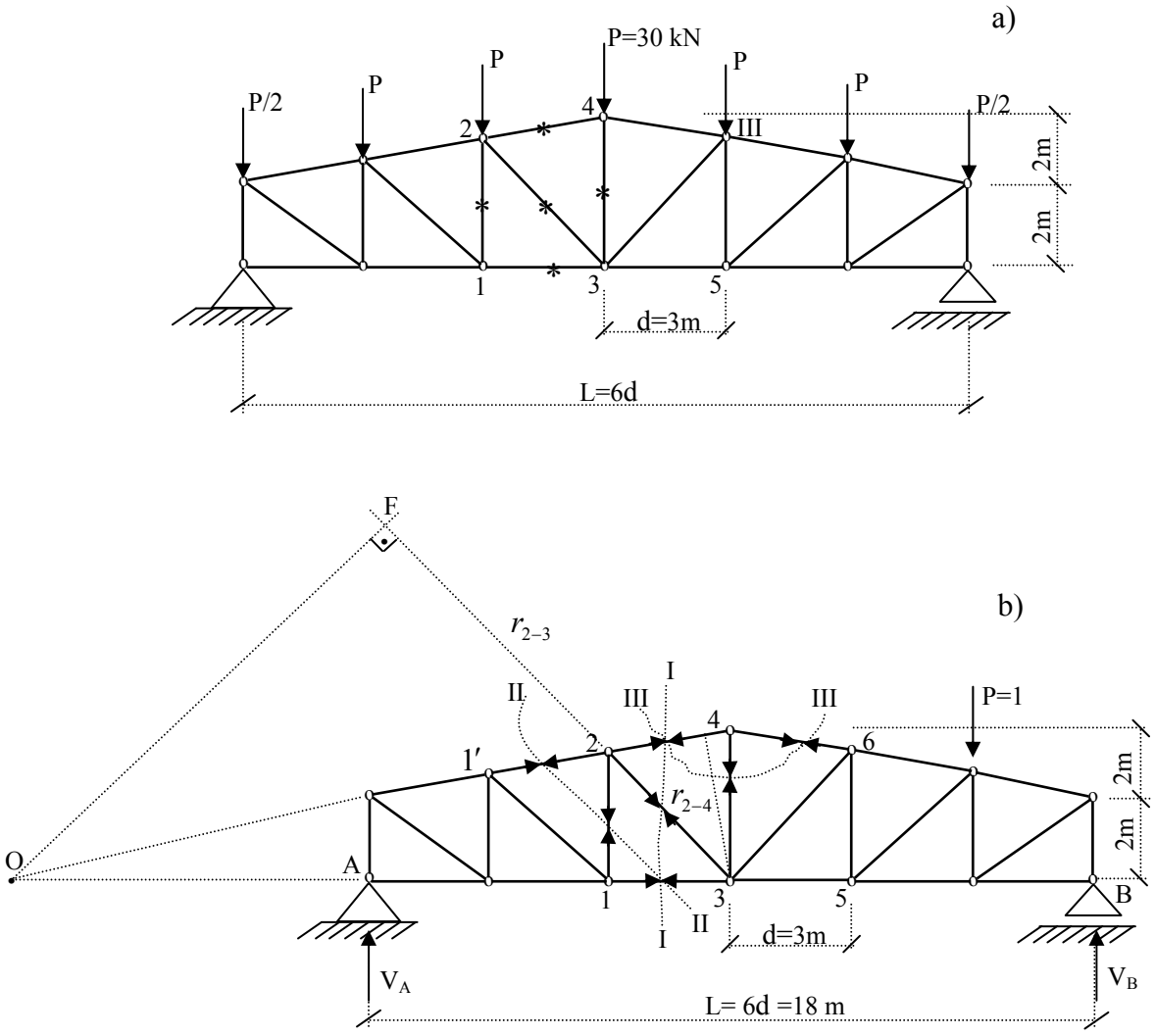
Burada

P_i : kafes sistemin üst ve alt başlık düğümlerine uygulanmış tekil yükler,

y_i : çizilmiş tesir çizgisinde her bir P_i tekil yükünün altındaki ordinattır.

Kafes sistemin üst başlık düğümlerinde uygulanmış P_i tekil yükleri, $P = 1$ yükünün üst başlıkta hareket etmesine uygun çizilmiş T. Ç.'nin ordinatları ile, alt başlık düğümlerinde uygulanmış P_i tekil yükleri ise $P = 1$ yükünün alt başlıkta hareket etmesine uygun olarak çizilmiş T. Ç.'nin ordinatları ile çarpılır. $P_i . y_i$ çarpımının işareti y_i ordinatının işaretine bağlıdır.

Örnek 6.1. Boyutları ve sabit yükle yükleme durumu Örnek 5.1'de verilmiş olan kafes sistemin (Şekil 6.1.1a) işaretli çubukları için çubuk kuvvetlerinin tesir çizgilerini çizerek, bunlar yardımıyla çubuk kuvvetlerini hesaplayınız. Bu kuvvetleri önceki bölümde analitik yöntemle belirlenmiş değerlerle karşılaştırınız.



Şekil 6.1.1

<u>*Çözüm*</u>: Kafes sistemin işaretlenmiş çubuklarındaki (Şekil 6.1.1a) kuvvetlerin tesir çizgilerinin çiziminde de Örnek 5.1'de yapılmış işlemler (Şekil 6.1.1b) ve kullanılmış yöntemler olduğu gibi kalacaktır.

● "2-4" çubuğundaki kuvvetin (N_{2-4}) T. Ç.'nin çizimi:

Bunun için önce T.Ç.'nin her iki doğrusunun ifadelerinin yazılması gerekir.

N_{2-4}' ün T. Ç.'nin sağ doğrusunun ifadesi, P = 1 hareketli yükü I-I kesiminin (Şekil 6.1.1b) sağ tarafında göz önüne alınarak, sistemin bu kesimin sol tarafında kalan parçasının denge şartından elde edilir.

$\sum M_3^{Sol} = V_A.9 + N_{2-4}.r_{2-4} = 0$. Örnek 5.1'in çözümünden $r_{2-4} = 3{,}9047\,m$ olduğu bilinmektedir.

$N_{2-4} = -\dfrac{9}{3{,}9047}.V_A = -(2{,}305).V_A$ (Sağ doğru V_A'nın T. Ç.'nin ordinatları -2,305 ile çarpılarak elde edilir).

N_{2-4}'ün tesir çizgisinin sol doğrusunun ifadesi, P = 1 hareketli yükü I-I kesiminin (Şekil 6.1.1b) sol tarafında dikkate alınarak, kafes sistemin, kesimin sağ tarafında kalan parçasının denge şartından elde edilir.

$$\sum M_3^{Sağ} = -V_B.9 - N_{2-4}.r_{2-4} = 0 \Rightarrow \quad N_{2-4} = -\frac{9}{3{,}9047}.V_B = -2{,}305.V_B \; nin\; T.Ç.$$

Görüldüğü gibi sol doğru V_B'nin T. Ç.'nin ordinatları -2,305 ile çarpılarak elde edilir. Bu ifadelere göre $N_{2\text{-}4}$'ün tesir çizgisi Şekil 6.1.2e'de çizilmiştir. Çizilmiş T. Ç. yardımıyla kafes sisteme etkiyen sabit yüklerden $N_{2\text{-}4}$ (6.1) formülü ile hesaplanabilir. "2'-4'" çizgisi sol doğru üzerindedir. Tesir çizgisinde kafes sistemin düğümlerine uygulanmış P_i tekil yüklerinin altındaki y_i ordinatları üçgenlerin benzerliğinden bulunur.

$$N_{2-4} = -P.((0{,}384166 + 0{,}76833).2 + 1{,}1525) = -30.(3{,}4575) = -103{,}725\,kN.$$

Kafes sistemin işaretlenmiş (Şekil 6.1.1a) diğer çubuklarındaki kuvvetlerin tesir çizgilerinin çizimi "2-4" çubuğundakine benzer şekilde yapılır.

- N_{1-3} 'ün tesir çizgisinin çizimi (Şekil 6.1.1.b):

N_{1-3} 'ün tesir çizgisinin sağ doğrusunun ifadesi, P = 1 hareketli yükü I-I kesiminin (Şekil 6.1.1b) sağ tarafında göz önüne alınarak, sistemin bu kesimin sol tarafında kalan parçasının denge şartından elde edilir.

$$\sum M_2^{Sol} = V_A.6 - N_{1-3}.r_{1-3} = 0, \quad Örnek\ 5.1'den \quad r_{1-3} = 3{,}333\,m'\ dir.$$

$N_{1-3} = \frac{6}{3{,}3333}.V_A = 1{,}8.V_A$ Sağ doğru V_A'nın T. Ç. ordinatları 1,8 ile çarpılarak elde edilir.

$N_{1-3}'ün$ tesir çizgisinin sol doğrusunun ifadesi, P = 1'i kesimin solunda dikkate alarak, kafes sistemin, kesimin sağ tarafında kalan parçasının denge denkleminden elde edilir.

$$\sum M_2^{Sağ} = -V_B.12 + N_{1-3}.r_{1-3} = 0 \Rightarrow \quad N_{1-3} = \frac{12}{3{,}333}.V_B = 3{,}6V_B'nin\ T.Ç.$$ Sol doğru,

V_B'nin tesir çizgisi ordinatları 1,8 ile çarpılarak elde edilir. "2'-4'" geçit çizgisi sağ doğru üzerindedir. Elde edilmiş bu ifadelere göre "1-3" çubuğundaki kuvvetin tesir çizgisi Şekil 6.1.2f'de çizilmiştir.
(6.1) ifadesini kullanarak, çizilmiş tesir çizgisi yardımıyla, verilmiş yükleme durumu için $N_{1\text{-}3}$ aşağıdaki gibi belirlenebilir.

$$N_{1-3} = P.(0{,}6 + 1{,}2 + 0{,}9 + 0{,}6 + 0{,}3) = 30.(3{,}6) = 108\,kN.$$

- $N_{2\text{-}3}$'ün tesir çizgisinin sağ doğrusu için ifadeyi, kafes sistemin I-I kesiminin (Şekil 6 .1.1a) sağ tarafında kalan parçasının, P = 1 yükünü kesimin sağ tarafında dikkate alarak, uygun olan denge denkleminden aşağıdaki gibi elde edilir.

$\sum M_O^{Sol} = -V_A.l_{OA} + N_{2-3}.r_{2-3} = 0$, $Örnek\ 5.1'in\ çözümünde\ L_{OA} = 9\,m\ ve\ r_{2-3} = 13.3793\,m$ old uğu belirlenmiştir.

$N_{2-3} = \frac{9}{13{,}3793} V_A = 0{,}67268 . V_A$ Yani, sağ doğru V_A'nın T. Ç.'si ordinatları 0,67268 ile çarpılarak elde edilir. Diğer tesir çizgileri için de bu açıklama geçerlidir.

Sol doğrunun ifadesi P = 1 yükü kesimin sol tarafında alınarak sistemin, kesimin sağında kalan parçasının denge şartından şöyle elde edilir.

$$\sum M_O^{Sağ} = -V_B . (l_{OA} + 18) - N_{3-2} . r_{3-2} = 0 \Rightarrow \quad N_{2-3} = -\frac{27}{13{,}3793} V_B = -2{,}018 V_B$$

Elde edilmiş olan bu ifadelere göre N_{2-3}'ün T. Ç.'si Şekil 6.1.2g'de çizilmiştir. (6.1) formülü kullanılarak, çizilmiş T. Ç.'si yardımıyla sabit yükleme durumu için N_{2-3} belirlenir.

$$N_{2-3} = -P . (0{,}33633 + 0{,}672666) + P(0{,}336333 + 0{,}224226 + 0{,}1121133) =$$
$$-30 . (1{,}009) + 30 . (0{,}672673) = -10{,}089\, kN.$$

● "4-3" çubuğundaki kuvvetin tesir çizgisi, analitik yöntemle hesaplamada olduğu gibi düğüm kesme yöntemi (III-III kesimi) kullanılarak çizilir (Şekil 6.1.1b). Örnek 5.1 'in çözümünde olduğu gibi
$N_{4-3} = -P - 2N_{4-2} . \sin\alpha$' dır, $\sin\alpha = 0{,}21693.$

P = 1 hareketli yükü "4" düğümü dışında olduğu sürece

$N_{4-3} = -2(\sin\alpha) . N_{4-2}$ 'dir.

Buna uygun olarak N_{4-3}'ün T. Ç.'si Şekil 6.1.2h'da çizilmiştir. Bu tesir çizgisi yardımıyla N_{4-3} aşağıda hesaplanmıştır.

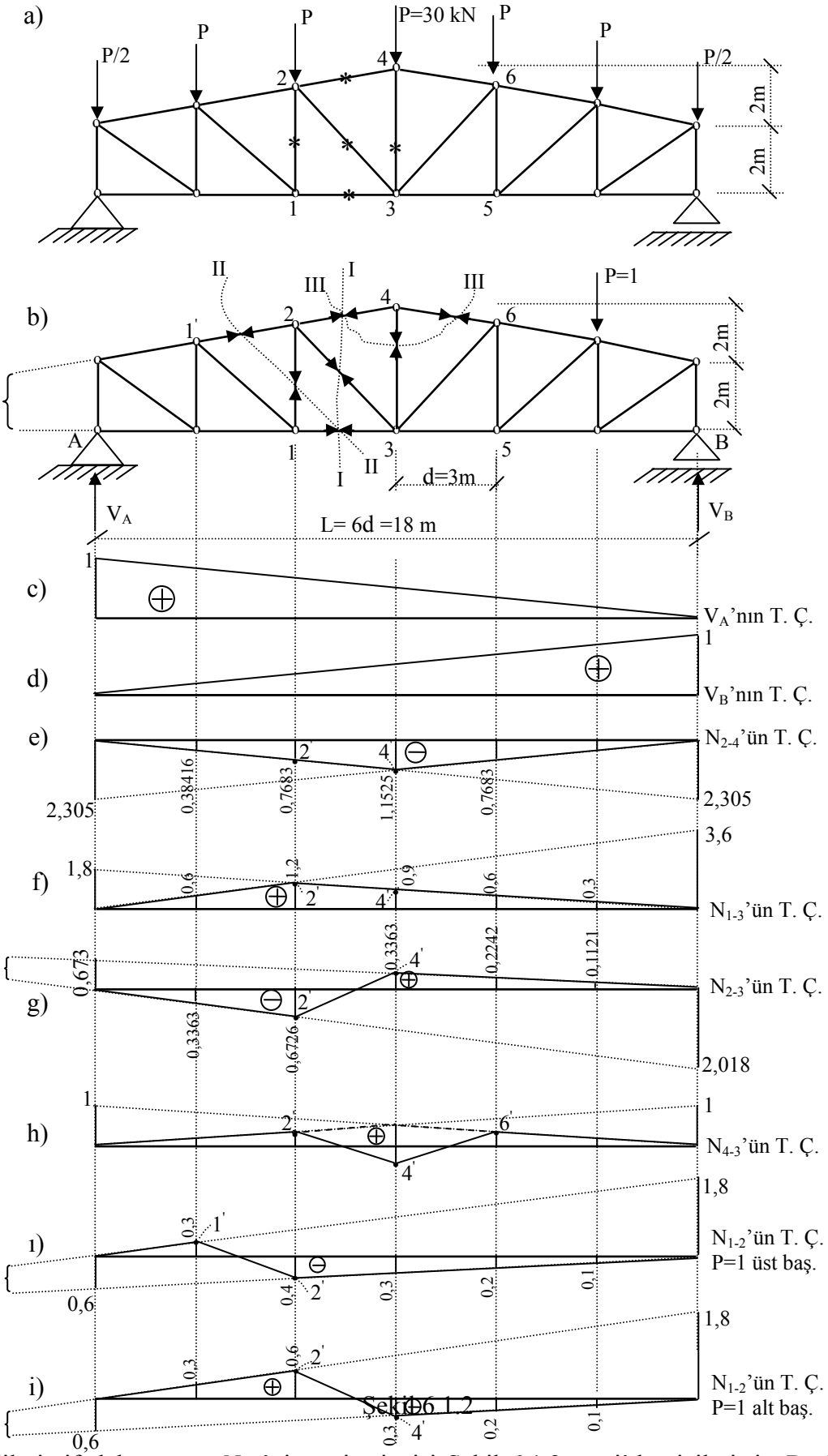
$$N_{4-3} = P . (\frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6}) - P . 0{,}5 = 30 . 1 - 30 . (0{,}5) = 15\, kN.$$

● "1-2" çubuğundaki kuvvetin (N_{1-2}) tesir çizgisinin sağ doğrusunun ifadesi, kafes sistemin II-II kesiminden (Şekil 6.1.1b) solda kalan parçasının denge şartından elde edilir.

$$\sum M_O^{Sol} = -V_A . l_{OA} - N_{1-2} . (l_{OA} + 6) = 0 \Rightarrow \quad N_{1-2} = -\frac{9}{15} . V_A = -0{,}6 . V_A$$

N_{1-2} 'nin T. Ç.'nin sağ doğrusu için ifade, kafes sistemin II-II kesiminin (Şekil 6.1.1b) solunda kalan parçasının denge şartından aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\sum M_O^{Sağ} = -V_B . (l_{OA} + 18) + N_{2-1} . (l_{OA} + 6) = 0 \Rightarrow \quad N_{1-2} = \frac{27}{15} . V_B = 1{,}8 . V_B$$



Şekil 6.1.2

Elde edilmiş ifadelere göre $N_{1\text{-}2}$'nin tesir çizgisi Şekil 6.1.2ı ve i'de çizilmiştir. Bu T.Ç.'leri yardımıyla kafes sistemin üzerindeki yükleme altında oluşan $N_{1\text{-}2}$ kuvveti aşağıda

hesaplanmıştır. Sabit yükler üst başlıkta uygulandığı için Şekil 6.1.2ı'da çizilmiş tesir çizgisi kullanılır.

$$N_{1-2} = P.0{,}3 - P.(0{,}4 + 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}1) = 30.(0{,}3) - 30.1 = 21kN.$$

Kafes sistemin ilgili çubuklarında analitik yöntem ve tesir çizgileri yardımıyla belirlenmiş değerlerin karşılaştırma tablosu aşağıdadır.

İç kuvvetler	Analitik yöntemle (kN)	T. Ç. yardımıyla (kN)	Fark
$N_{2\text{-}4}$	-103,721	-103,725	0,004
$N_{1\text{-}3}$	108,00	108,00	0
$N_{2\text{-}3}$	-10,09	-10,09	0
$N_{1\text{-}2}$	-21,00	-21,00	0

Çizilmiş tesir çizgilerinin analizinden aşağıdaki sonuçlara varılmaktadır:

► Moment noktası yöntemi ile çizilmiş tesir çizgilerinin sağ ve sol doğru olarak adlandırılan parçaları moment noktasının altında kesişirler. Bu sonuca dayanılarak moment noktası yöntemiyle çizilecek tesir çizgilerinin bir doğrusu (sağ veya sol) çizildikten sonra ikinci doğru, moment noktasının çizilmiş doğru üzerine alınmış izdüşümünden başlayıp mesnetin (moment noktasının izdüşümü tesir çizgisinin sağ doğrusu üzerinde ise sol, sol doğrusu üzerinde ise sağ mesnetin) altında sıfırlanarak, çıkma varsa çıkmanın sonuna kadar devam ettirilerek elde edilir. Moment noktası kafes sistemin açıklığı içindeki düğümlerinden biri ise (sınırındaki düğümler hariç), yapılmış kesimden solda ve sağda kalan ilk düğümlerin iz düşümlerini birleştiren çizgi tesir çizgisi doğrularından birinin üzerinde olur. Moment noktası kafes sistemin açıklık sınırlarında veya dışında ise bu düğümlerin izdüşümlerini birleştiren çizgi, tesir çizgisi çizilmiş çubuk eksenine çapraz olur.

► Ayrıca, bu problemde kullanılmamış olsa da, izdüşüm alma yöntemiyle çizilen tesir çizgilerinde sağ ve sol doğrular birbirine paralel olur ve düğümlerin izdüşümlerini birleştiren çizgi yine tesir çizgisi çizilen çubuk eksenine çapraz olur.

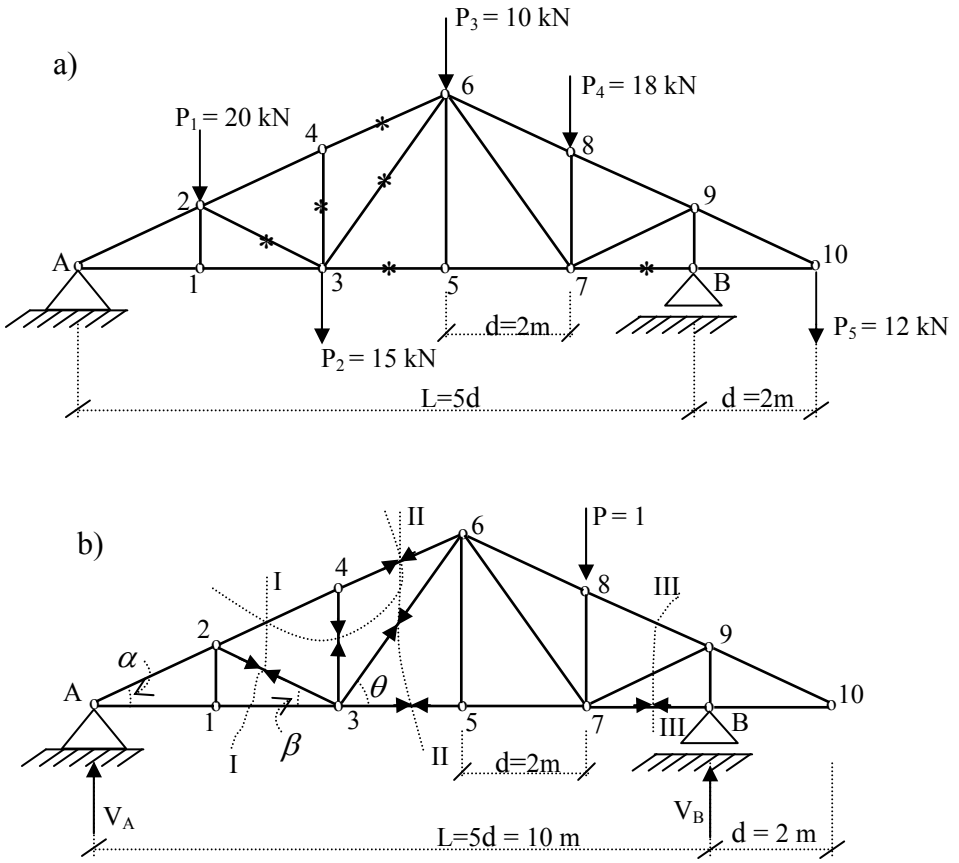
Bu sonuçlara dayanarak kafes sistemin çubuklarındaki iç kuvvetlerin tesir çizgilerinin bir doğrusu hesaplama ile çizildikten sonra ikincisi hesaplamasız çizilebilir.

Örnek 6.2. Boyutları ve sabit yükle yükleme durumu Örnek 5.2'de verilmiş olan üçgen şekilli kafes sistemin (Şekil 6.2.1a) işaretlenmiş çubukları için

a) İç kuvvetlerin tesir çizgilerini çiziniz,

b) Tesir çizgileri yardımıyla sabit yükleme durumundan oluşan çubuk kuvvetlerini hesaplayınız.

c) Kuvvetlerin analitik yöntem ve tesir çizgileri yardımıyla belirlenmiş olan değerlerini karşılaştırınız.



Şekil 6.2.1

Çözüm:

a) Örnek 6.1'in çözümündeki açıklamalara dayanarak çubuklardaki kuvvetlerin tesir çizgilerinin çizimi aşağıdaki gibi yapılır.

● "4-6" çubuğundaki kuvvetin ($N_{4\text{-}6}$) tesir çizgisinin çizimi (II-II kesiminden, Şekil 6.2.1b):

Tesir çizgisinin sağ doğrusunun ifadesi aşağıdaki denge şartından (Şekil6 .2.1b, II-II kesiminden) elde edilir.

$$\sum M_3^{Sol} = V_A.4 + N_{4-6}.r_{4-6} = 0, \; Örnek\ 5.2'nin\ çözümünden\ r_{4-6} = 1{,}7888\,m \text{ 'dir.}$$

$$N_{4-6} = -\frac{4}{1{,}7888}V_A = -2{,}23613.V_A$$

Tesir çizgisinin sol doğrusu, Örnek 6.1 'deki açıklamaya uygun olarak sağ doğru üzerinde moment noktası olan "3" düğümünün izdüşümünden başlayıp A mesnetinin altında sıfırlanarak elde edilen doğru olur. "4'-6'"çizgisi sağ doğru üzerindedir. Böylece $N_{4\text{-}6}$'nın tesir çizgisi çizilmiş olur (Şekil 6.2.2d).

● "3-5"çubuğundaki (Şekil 6.2.1b, II-II kesimi) kuvvetin tesir çizgisi benzer şekilde çizilir.

Tesir çizgisinin sağ doğrusunun ifadesi

$$\sum M_6^{Sol} = V_A.6 - N_{3-5}.3 = 0 \;\Rightarrow\; N_{3-5} = \frac{6}{3}V_A = 2.V_A \text{ 'dır.}$$

Tesir çizgisinin. sol doğrusu ise moment noktası olan "6" düğümünün sağ doğru üzerindeki izdüşümünü "A" mesneti altında sıfırlamakla elde edilir. "4'-6' " çizgisi sol doğru üzerindedir (Şekil 6.2.2e). Yapılanlara uygun tesir çizgisi Şekil 6.2.2e'de görüldüğü gibi çizilmiştir.

● “3-6” çubuğundaki kuvvetin tesir çizgisinin çizimi (II-II kesimi, Şekil 6.2.1b): T.Ç.’nin sağ doğrusunun ifadesi aşağıdaki denge denkleminden elde edilir (Şekil 6.2.2b).

$\sum M_A^{Sol} = V_A.0 - N_{3-6}.r_{3-6} = 0$, yani bu doğrunun tüm ordinatları sıfırdır.

Tesir çizgisinin sol doğrusunun ifadesi aşağıdaki denge şartından elde edilir (Şekil 6.2.2b).

$\sum M_A^{Sağ} = -V_B.10 + N_{3-6}.r_{3-6} = 0$, $r_{3-6} = 3{,}3282\,m$ (*Örnek* 5.2'*nin çözümünden*)

$$N_{3-6} = \frac{10}{3{,}3282}.V_B = 3{,}004 V_B.$$

Elde edilmiş ifadeler uygun olarak $N_{3\text{-}6}$‘nın tesir çizgisi çizilmiştir (Şekil 6.2.2f). Görüldüğü gibi “$4^{'}$-$6^{'}$“ çizgisi “3-6” çubuğunun eksenine çaprazdır.
● Kafes sistemin “4-3” dikme çubuğundaki $N_{4\text{-}3}$ kuvvetinin T. Ç.’si IV-IV kesiminden, (Şekil 6.2.1b) düğüm kesme yönteminin özel durumuna dayanarak çizilir. Hareketli P = 1 yükü alt başlıkta hareket ettiğinde, birim yükün “4” düğümünde uygulanması söz konusu olmayacağından $N_{4\text{-}3}$ = 0’dır. Yani kuvvetin T. Ç.’si sıfır doğrusudur (Şekil 6.2.2g). Birim yük üst başlıkta hareket ettiğinde “4” düğümü üzerinde olma hali için $N_{4\text{-}3}$ = -1, kalan durumları için ise $N_{4\text{-}3}$ = 0’dır. Bunlara uygun olarak iç kuvvetin tesir çizgisi çizilmiştir (Şekil 6.2.2h).
● Sistemin “2-3” çubuğundaki kuvvetin ($N_{2\text{-}3}$) tesir çizgisinin çizimi:
Moment noktası A mesnetinin üzerinde olduğu için $N_{2\text{-}3}$’ün tesir çizgisinin sağ doğrusu sıfır doğrusudur. Sol doğrusu için ifade, sistemin II-II kesiminin sağ tarafında kalan parçasının denge şartından elde edilir.

$\sum M_A^{Sağ} = -V_B.10 - N_{2-3}.r_{2-3} = 0$, *Örnek* 5.2'*nin çözümünden* $r_{2-3} = 1{,}7898\,m$ ’dir.

$$N_{2-3} = -\frac{10}{1{,}7898}.V_B = -(5{,}59).V_B \text{ '}nin\ T.Ç.$$

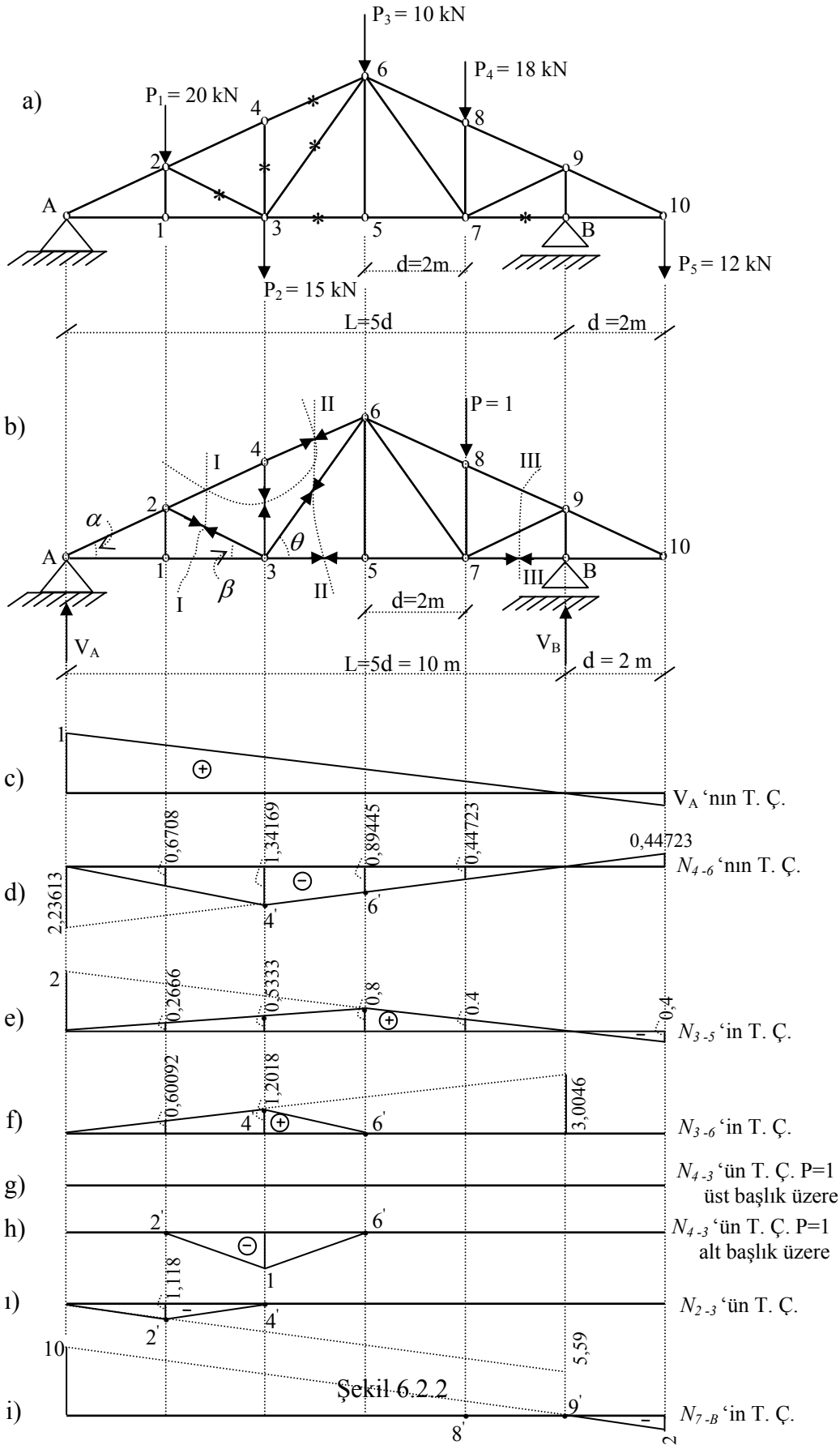
Bu ifadelere uygun olarak $N_{2\text{-}3}$’ün tesir çizgisi Şekil 6.2.2ı’da çizilmiştir.
● “7-B” çubuğundaki kuvvetin tesir çizgisi kafes sistemde yapılmış III-III kesiminin (Şekil 6.2.1b) solunda (T. Ç.’nin sağ doğrusu) ve sağında (T. Ç.’nin sol doğrusu) kalan parçaların denge şartlarından elde edilen ifadelere göre çizilir.
Sol doğrunun ifadesi

$\sum M_9^{Sol} = V_A.10 - N_{7-B}.1 = 0 \Rightarrow \quad N_{7-B} = 10.V_A$

Sağ doğrunun ifadesi

$\sum M_9^{Sağ} = V_B.0 + N_{B-7}.1 = 0 \Rightarrow \quad N_{B-7} = 0.$

Elde edilmiş ifadelere göre $N_{7\text{-}B}$ ‘nin T. Ç.’si Şekil 6.2.2i ‘de çizilmiştir.



Şekil 6.2.2

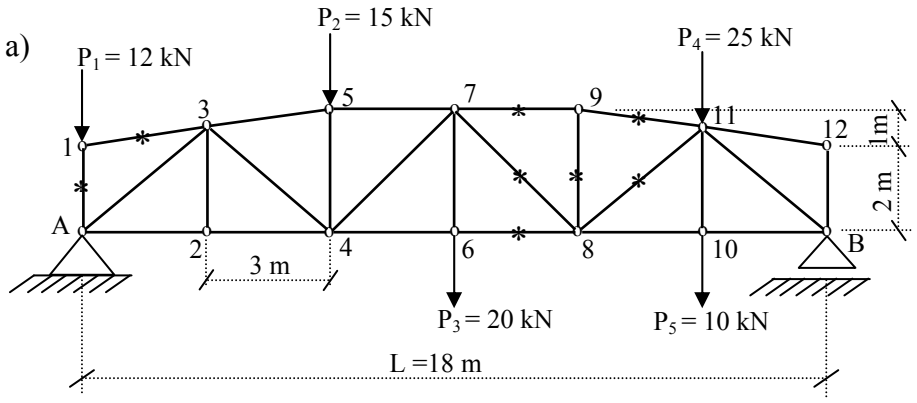
b) Çizilmiş tesir çizgileri yardımıyla kafes sistemin sabit yükleme durumu için işaretli çubuklarında oluşan kuvvetlerin hesaplanması:

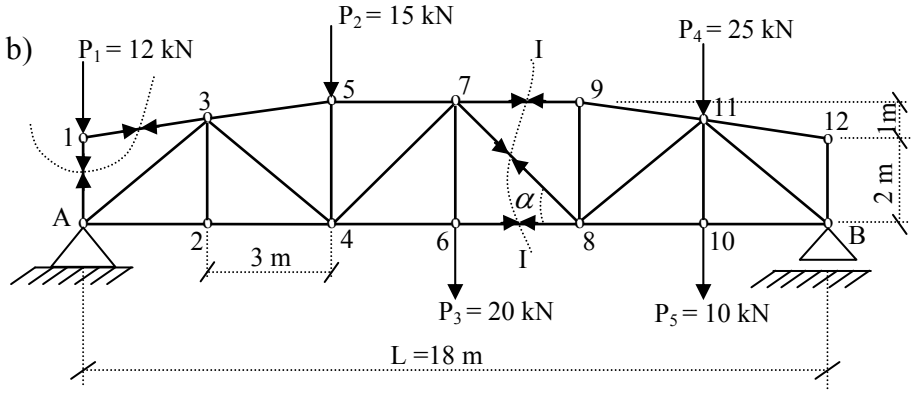
$$N_{4-6} = -P_1.(0{,}67045) - P_2.(1{,}3416) - P_3.(0{,}89443) - P_4.(0{,}4472) + P_5.0{,}4472 =$$
$$-20.(0{,}67045) - 15.(1{,}3416) - 10.(0{,}89443) - 18.(0{,}4472) + 12.(0{,}4472) = -45{,}16975\,kN.$$
$$N_{3-5} = P_1.(0{,}26667) + P_2.(0{,}5333) + P_3.(0{,}8) + P_4.(0{,}4) - P_5.(0{,}4) = 20.(0{,}26667) +$$
$$+15.(0{,}5333) + 10.(0{,}8) + 18.(0{,}4) - 12.(0{,}4) = 23{,}733\,kN.$$
$$N_{3-6} = P_1.(0{,}60092) + P_2.(1{,}20184) = 20.(0{,}60092) + 15.(1{,}20184) = 30{,}046\,kN.$$
$$N_{4-3} = 0, \quad N_{2-3} = -P_1.(1{,}118) = -20.(1{,}118) = -22{,}36\,kN, \quad N_{7-B} = -P_5.2 = -12.2 = -24\,kN.$$

c) Kafes sistemin işaretlenmiş (Şekil 6.2.1a) çubuklarında verilmiş olan sabit yükleme durumundan analitik yöntem ve tesir çizgileri yardımıyla belirlenmiş değerlerin karşılaştırma tablosu aşağıda verilmiştir.

İç kuvvetler	Analitik yöntemle (kN)	T. Ç. yardımıyla (kN)	Fark
N_{4-6}	- 45,1699	- 45,16975	0,00015
N_{3-5}	23,733	23,733	0
N_{3-6}	30,046	30,046	0
N_{4-3}	0	0	0
N_{2-3}	- 22,36	- 22,36	0
N_{7-B}	- 24	-24	0

Örnek 6.3 Boyutları ve yükleme durumu Örnek 5.3'de verilmiş, başlıklarının bir kısmı paralel olan kafes sistemin işaretlenmiş çubukları (Şekil 6.3.1a) için
a) Çubuk kuvvetlerinin tesir çizgilerini çiziniz,
b) Tesir çizgileri yardımıyla sabit yükleme durumu için kuvvetleri hesaplayınız,
c) Kuvvetlerin analitik yöntem ve tesir çizgileri yardımıyla belirlenmiş değerlerini karşılaştırınız.





Şekil 6.3.1

<u>Çözüm</u>: a) Çubuk kuvvetlerinin tesir çizgilerinin çizimi:

● "7-9" çubuğundaki kuvvetin ($N_{7\text{-}9}$) T. Ç.'si I-I kesiminin solunda ve sağında (Şekil 6.3.1b) kalan parçaların denge şartlarından elde edilen ifadelerle çizilir.

Tesir çizgisinin sağ doğrusunun ifadesi

$$\sum M_8^{Sol} = V_A.12 + N_{7-9}.3 = 0 \Rightarrow \quad N_{7-9} = -\frac{12}{3}.V_A = -4.V_A$$

Sol doğrusu için ifade

$$\sum M_8^{Sağ} = -V_B.6 - N_{7-9}.3 = 0 \Rightarrow \quad N_{7-9} = -\frac{6}{3}.V_B = -2.V_B \text{ 'dir.}$$

Bu ifadelere göre $N_{7\text{-}9}$'un tesir çizgisi Şekil 6.3.2e'de çizilmiştir.

Üst ve alt başlık üzerinde I-I kesiminin solunda ve sağında kalan ilk düğümler aynı bir düşey doğru üzerinde olduğu için hareketli birim yükün hangi başlık üzerinde hareket ederse etsin tesir çizgisi aynı olur. Düğümler farklı düşey doğrular üzerinde iseler hareketli yükün üst veya alt başlık üzerinde hareketine uygun olan tesir çizgileri birbirinden, düğümlerin sol ve sağ doğru üzerindeki izdüşümlerini birleştiren geçit doğrusu ile farklanırlar. Bunun tüm çubuklar için geçerli olduğu yukarıda belirtilmişti.

● $N_{6\text{-}8}$'in tesir çizgisinin sağ ve sol doğruları için ifadeler benzer şekilde elde edilir.

Sağ doğrusu için

$$\sum M_7^{Sol} = V_A.9 - N_{6-8}.3 = 0 \Rightarrow \quad N_{6-8} = 3.V_A \text{ 'nın } T.Ç.$$

Sol doğrusu için

$$\sum M_7^{Sağ} = -V_B.9 + N_{6-8}.3 = 0 \Rightarrow \quad N_{6-8} = 3.V_B \text{ 'nin } T.Ç.$$

Bunlara uygun olarak $N_{6\text{-}8}$'in tesir çizgisi Şekil 6.3.2f 'de çizilmiştir.

● İşaretlenmiş çubuklardan "7-8" çubuğundaki kuvvetin ($N_{7\text{-}8}$) tesir çizgisinin çizimi izdüşüm denklemleri ile yapılır.

Sağ doğrusunun ifadesi

$$\sum Y^{Sol} = V_A - N_{7-8}.\cos\alpha = 0 \Rightarrow \quad N_{7-8} = \frac{1}{0{,}7071}.V_A = 1{,}41423.V_A$$

Sol doğrusunun ifadesi

$$\sum Y^{Sağ} = V_B + N_{7-8}.\cos\alpha = 0 \Rightarrow \quad N_{7-8} = -\frac{1}{0{,}7071}.V_B = -1{,}41423.V_B \text{ 'dir.}$$

Bu ifadelere göre $N_{7\text{-}8}$'in tesir çizgisi Şekil 6.3.2g'de çizilmiştir.

● "6-7"çubuğundaki kuvvetin tesir çizgisi düğüm kesme yönteminin özel durumlarına dayanarak çizilebilir. Hareketli P = 1 yükü üst başlık üzerinde hareket ettiğinde, yükün durumuna bağlı olmadan $N_{6\text{-}7}$ = 0'dır, yani tesir çizgisi sıfır doğrusudur (Şekil 6.3.2h).

P = 1 yükü alt başlık üzerinde hareket ettiğinde "6" düğümünde olması dışındaki tüm durumlar için $N_{6\text{-}7}$ = 0'dır. Birim yük "6" düğümünde olduğunda $N_{6\text{-}7}$ = 1 olur. Buna uygun tesir çizgisi Şekil 6.3.2ı'da çizilmiştir.

● “1-3” ve “1-A” çubuklarındaki kuvvetlerin ($N_{1\text{-}3}$ ve $N_{1\text{-}A}$) tesir çizgileri de düğüm kesme yönteminin özel durumundan çizilir. P = 1 yükünün üst veya alt başlık üzerindeki hareketinin her bir durumu için $N_{1\text{-}3} = 0$’dır (Şekil 6.3.2i). P = 1 yükü üst başlık üzerinde iken “1” düğümü üzerinde olması durumu için $N_{1\text{-}A} = -1$, kalan durumlar için ise $N_{1\text{-}A} = 0$’ dır. Buna uygun tesir çizgisi Şekil 6.3.2j’de çizilmiştir.
P = 1 yükünün alt başlık üzerindeki her durumu için $N_{1\text{-}A} = 0$’ dır. Buna uygun tesir çizgisi sıfır doğrusu olacaktır (Şekil 6.3.2k).
b) Tesir çizgileri yardımıyla verilmiş olan sabit yükleme durumu için işaretlenmiş çubuklardaki iç kuvvetlerin hesaplanması:

$$N_{7-9} = -(P_2.0{,}6667 + P_3.1 + (P_4 + P_5).0{,}6667) = -(15.(0{,}6667) + 20.1 + (25+10).(0{,}6667)) = -53{,}333\,kN.$$

$$N_{6-8} = P_2.1 + P_3.(1{,}5) + (P_4 + P_5).(0{,}5) = 15{,}1 + 20.(1{,}5) + (25+10).(0{,}5) = 62{,}5\,kN.$$

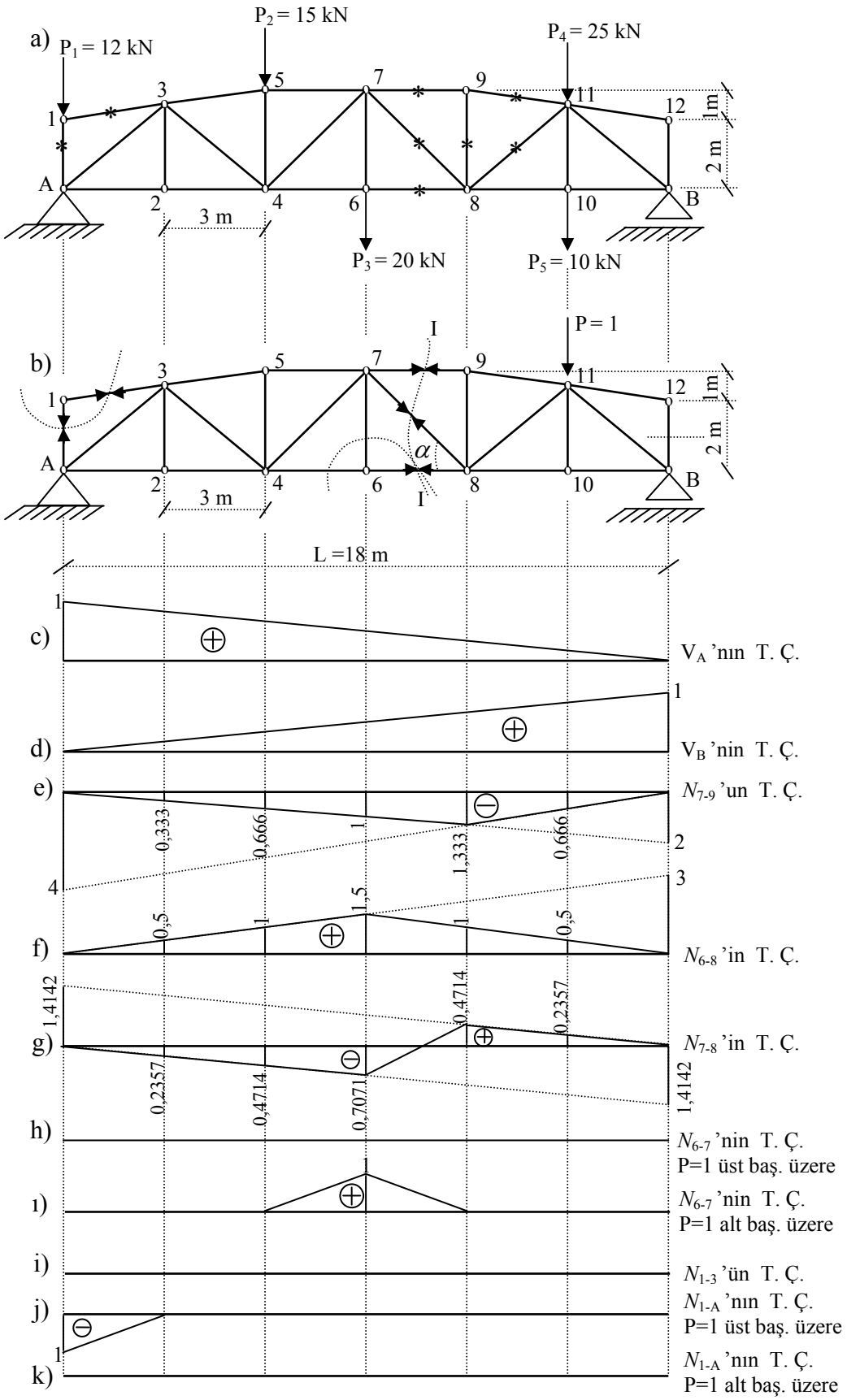
$$N_{7-8} = -P_2.(0{,}4714) - P_3.(0{,}7071) + (P_4 + P_5).(0{,}2357) = -15.(0{,}4714) - 20.(0{,}7071) + (25+10).(0{,}235) = -12{,}9635\,kN.$$

$$N_{1-3} = 0. \quad N_{1-A} = -P_1.1 = -12.1 = -12\,kN.$$

$N_{6-7} = P_3.1 = 20.1 = 20\,kN$ (P_3 kafes sistemin alt başlık düğümünde uygulandığı için tesir çizgisi yardımıyla hesaplama P = 1 birim hareketli yükünün alt başlık üzerinde hareketine uygun olarak çizilmiş tesir çizgisi kullanılarak yapılmıştır.)

c) Çubuklarda sabit yüklerden oluşan iç kuvvetlerin analitik yöntem ve tesir çizgileri yardımıyla hesaplanmış değerlerinin karşılaştırılması.

İç kuvvetler	Analitik yöntemle (kN)	T. Ç. yardımıyla (kN)	Fark
$N_{7\text{-}9}$	- 53,3333	- 53,3333	0
$N_{6\text{-}8}$	62,5	62,5	0
$N_{7\text{-}8}$	- 12,9636	- 12,9636	0
$N_{6\text{-}7}$	20	20	0
$N_{1\text{-}3}$	0	0	0
$N_{1\text{-}A}$	- 12	- 12	0

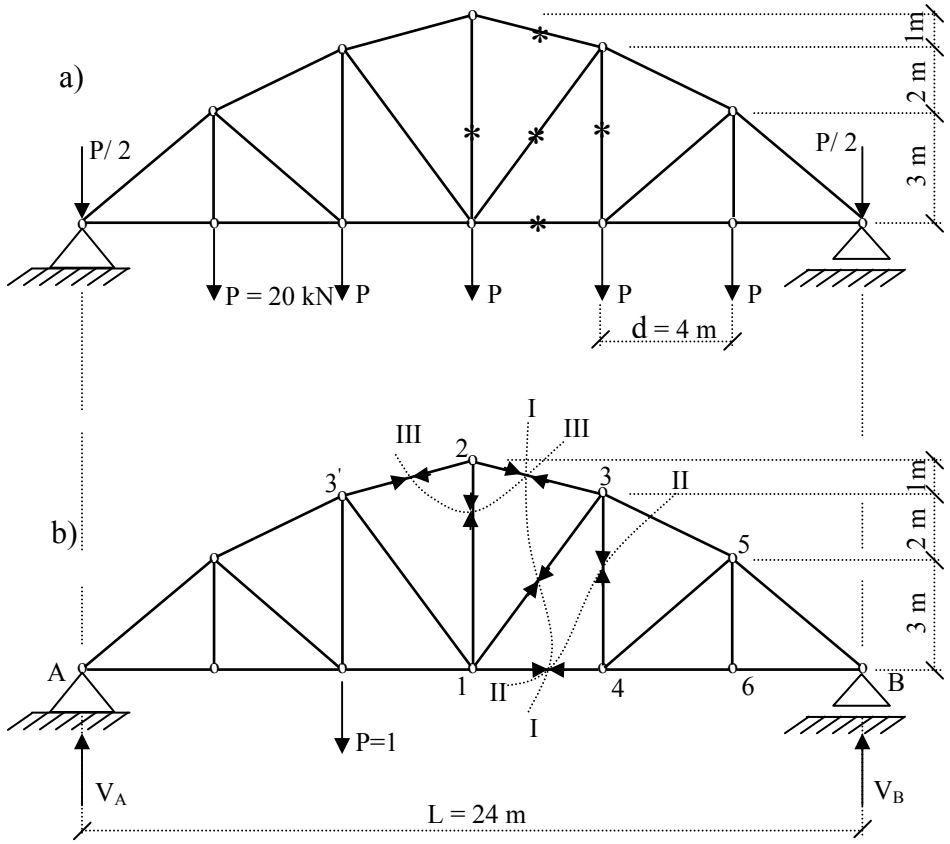


Şekil 6.3.2

Örnek 6.4. Boyutları ve sabit yükleri Örnek 5.5'de verilmiş olan kafes sistemin soldan 4. panel çubuklarındaki (Şekil 6.4.1a) kuvvetlerin

a) Tesir çizgilerini çiziniz,

b) Tesir çizgileri yardımı ile sabit yüklerden oluşan değerlerini hesaplayınız,
c) Analitik yöntem ve tesir çizgileri yardımıyla belirlenmiş değerleri karşılaştırınız.



Şekil 6.4.1

<u>*Çözüm*</u>: a) Çubuk kuvvetlerinin tesir çizgilerinin çizimi:
$N_{2\text{-}3}$, $N_{1\text{-}4}$ ve $N_{1\text{-}3}$'ün tesir çizgilerinin çizilmesi I-I kesiminden (Şekil 6.4.1b) moment noktası yöntemi ile yapılır. Bunun için tesir çizgisini oluşturan doğrulardan biri çizilir ve moment noktasının izdüşümü bu doğru üzerine alınır. Alınmış izdüşümü diğer mesnetin altında sıfırlayarak ikinci doğru elde edilir. Sonra, kesimin solunda ve sağında kalan ilk düğümlerin izdüşümleri uygun şekilde bu doğrular üzerine alınıp bir doğruyla birleştirilerek tesir çizgisinin geçit çizgisi elde edilir. Böylelikle kuvvetin tesir çizgisi tamamlanmış olur.
● $N_{2\text{-}3}$'ün T. Ç.'sinin sol doğrusunun ifadesi (P = 1 I-I kesiminin sol tarafında)

$$\sum M_1^{Sağ} = -V_B.12 - N_{2-3}.r_{2-3} = 0,\ r_{2-3} = 5{,}8208\,(\textit{Örnek 5.5'in çözümünden})$$

$$N_{2-3} = \frac{12}{5{,}8208}.V_B = -2{,}06157.V_B$$

Sol doğrunun ifadesine ve yukarıdaki açıklamalara dayanarak $N_{2\text{-}3}$'ün tesir çizgisi Şekil 6.4.2d'de çizilmiştir.
● $N_{1\text{-}4}$'ün tesir çizgisinin sol doğrusunun ifadesi (P = 1 I-I kesiminin sol tarafında)

$$\sum M_3^{Sağ} = -V_B.8 + N_{1-4}.r_{1-4} = 0,\ r_{1-4} = l_{4-3} = 5m,\ N_{1-4} = (1{,}6).V_B$$

Benzer şekilde $N_{1\text{-}4}$'ün tesir çizgisi çizilmiştir (Şekil 6.4.2e).

● $N_{1\text{-}3}$'ün tesir çizgisinin sol doğrusunun ifadesi (P = 1 I-I kesiminin solunda. Moment noktası ve yapılacak işlemler Örnek 5.5'in çözümünde verilmiştir (Şekil 5.5.3)).

$$\sum M_O^{Sağ} = V_B.L_{OB} - N_{1-3}.r_{1-3} = 0, \quad L_{OB} = 12\,m, \quad r_{1-3} = 18{,}74\,m,$$

$$N_{1-3} = \frac{12}{18{,}74}.V_B = (0{,}64034).V_B$$

Sol doğrunun ifadesine ve yukarıdaki işlemlere benzer şekilde $N_{1\text{-}3}$'ün tesir çizgisi Şekil 6.4.2f 'de çizilmiştir.

● $N_{4\text{-}3}$'ün tesir çizgisi kafes sistemde yapılmış II-II kesiminden moment noktası yöntemiyle çizilir. Moment noktasının yeri, uzaklığı ve $N_{4\text{-}3}$'ün moment noktasından olan dik uzaklığının belirlenmesi Örnek 5.5'in çözümünde verilmiştir (Şekil 5.5.5). Şekil 6.4.1a'da görüldüğü gibi üst ve alt başlık üzerinde II-II kesiminin solunda ve sağında kalan ilk düğümler (sırasıyla "1", "3" ve "5", "4" düğümleri) bir düşey doğru üzerinde olmadığından tesir çizgisi $3'$-$5'$ veya $1'$-$4'$ geçit doğrularıyla birbirinden farklı olacaktır. Buna dayanarak, aynı bir tesir çizgisi üzerinde, P = 1 hareketli yükünün üst veya alt başlık üzerinde hareketine uygun her iki geçit doğruları gösterilerek kuvvetin istenen tesir çizgisi elde edilmiş olur (Şekil 6.4.2g).

$N_{4\text{-}3}$'ün tesir çizgisinin sol doğrusunun ifadesi (P = 1 II-II kesiminin solunda) aşağıdaki denge şartından elde edilir.

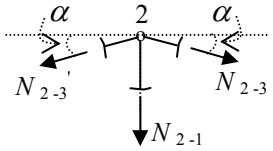
$$\sum M_C^{Sağ} = V_B.L_{BC} + N_{4-3}.(L_{BC} + 8) = 0, \quad L_{BC} = 2{,}7084\,m,$$

$$N_{4-3} = -\frac{2{,}7084}{10{,}7084}.V_B = -(0{,}25292).\ V_B$$

Sol doğrusunun ifadesine ve önceki iç kuvvetlerin tesir çizgilerinin çizimine dayanarak Şekil 5.4.2g'de $N_{4\text{-}3}$'ün tesir çizgisi çizilmiştir.

● $N_{2\text{-}1}$'nin tesir çizgisi Örnek 5.5'in çözümünde elde edilmiş ifadelerle çizilir. Bu ifadelerden görüldüğü gibi $N_{2\text{-}1}$, $N_{2\text{-}3}$'e bağlı olarak belirlenmiştir. Tesir çizgisinin çiziminde de bu bağıntı kullanılır. Her zaman göz önünde bulundurulmalıdır ki, sabit yükler hangi başlıkta uygulanmışlarsa P = 1 yükünün hareketi de o başlık üzerinde kabul edilir. Ele alınan örneklerde, açıklama amacıyla, hareketli yükün her iki başlık üzerindeki durumu da göz önüne alınmıştır.

III-III kesiminden (Şekil 6.4.1b), düğüm kesme yöntemi kullanılarak, P = 1 hareketli yükünün alt başlık üzerindeki hareketinde



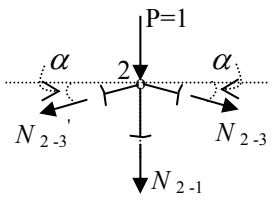
$$\sum X = 0 \Rightarrow \quad N_{2-3} = N_{2-3'}$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow \quad N_{2-1} = -2N_{2-3}.\sin\alpha \text{ 'dır.}$$

Yani $N_{2\text{-}1}$'in T. Ç.'si, $N_{2\text{-}3}$'ün T. Ç.'sinin ordinatlarının (-2sin α) ile çarpılması ile elde edilir .

P = 1 hareketli yükünün üst başlık üzerindeki hareketinde, "2" düğümünde uygulanması halinde

$N_{2-1} = -N_{2-3}.2\sin\alpha - 1$, yani yukarıdaki ifadeye uygun olarak çizilmiş T. Ç.'sinin "2" düğümü altındaki ordinatından 1 çıkarılır. Bunlara uygun olarak $N_{2\text{-}1}$'in T. Ç.'si Şekil 6.4.2h 'da çizilmiştir.



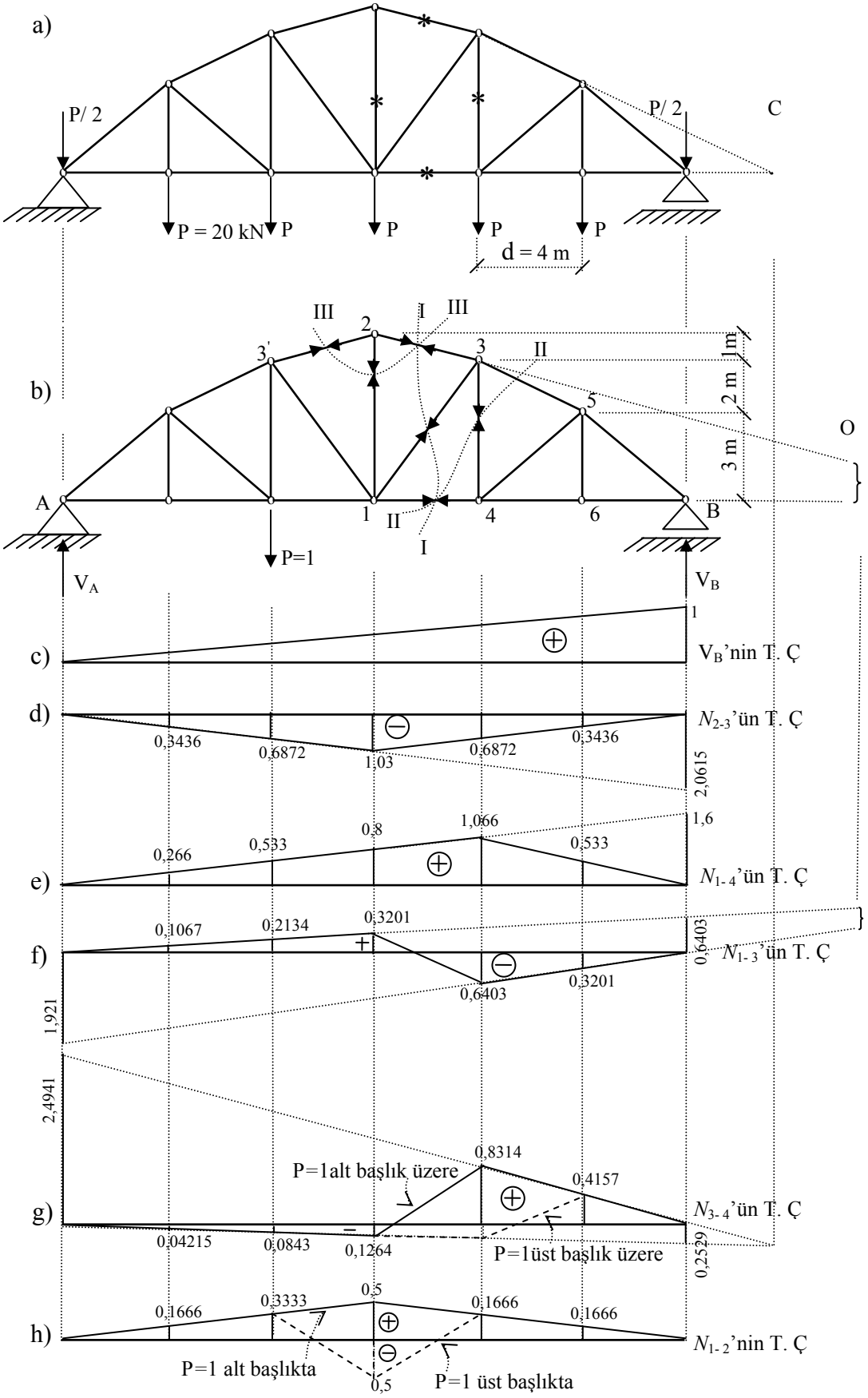
b) Tesir çizgileri yardımıyla verilen sabit yükleme durumu için işaretlenmiş çubuklardaki iç kuvvetlerin hesaplanması:

Sabit yükler alt başlık düğümlerinde uygulandıkları için $N_{4\text{-}3}$ ve $N_{2\text{-}1}$'in hesaplanmasında birim yükün alt başlık üzerindeki hareketi için çizilmiş tesir çizgileri kullanılır. Diğer çubuklardaki iç kuvvetlerin tesir çizgileri, P = 1 yükü hangi başlık üzerinde olursa olsun aynıdır.

$$N_{2-3} = -P(0{,}346 + 0{,}6872 + 1{,}03 + {,}6872 + 0{,}346) = -20.(3{,}0916) = -61{,}832\,kN$$
$$N_{1-4} = P.(0{,}2666 + 0{,}5333 + 0{,}8 + 1{,}0666 + 0{,}5333) = 20.(3{,}2) = 64\,kN$$
$$N_{1-3} = P(0{,}10672 + 0{,}21344 + {,}32017 - 0{,}64034 - 0{,}32017) = -20.(0{,}32) = 6{,}4\,kN$$
$$N_{4-3} = P.(-0{,}04215 - 0{,}0843 - 0{,}12646 + 0{,}83138 + 0{,}41569) = 20.(0{,}99416) = 19{,}8832\,kN$$
$$N_{1-2} = P.(0{,}1666 + 0{,}3333 + 0{,}5 + 0{,}3333 + 0{,}1666) = 20.(1{,}5) = 30\,kN.$$

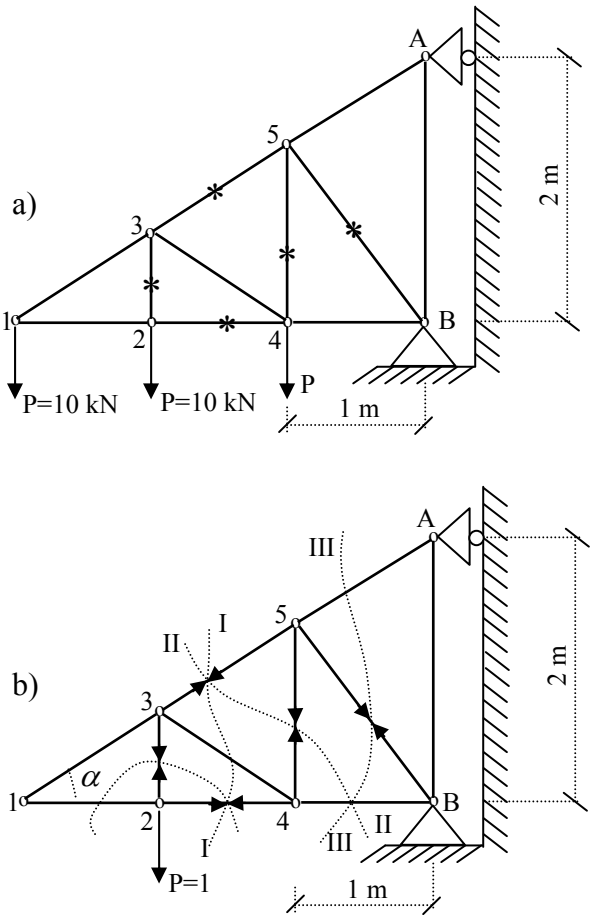
c) Sistemin incelenen çubuklarında oluşan kuvvetlerin analitik yöntem ve tesir çizgileri yardımı ile belirlenmiş değerleri aşağıdaki tabloda karşılaştırılmıştır.

İç kuvvetler	Analitik yöntemle (kN)	T. Ç. yardımıyla (kN)	Fark
$N_{2\text{-}3}$	- 61,847	- 61,832	0,015
$N_{1\text{-}4}$	64	64	0,0
$N_{1\text{-}3}$	- 6,4	- 6,4	0,0
$N_{4\text{-}3}$	30	30	0,0
$N_{1\text{-}2}$	19,883	19,883	0,0


a)
P/ 2
P/ 2
C
P = 20 kN
P
P
P
P
d = 4 m
b)
III
I
III
2
3'
3
II
5
O
A
1
II
4
6
B
I
P=1
V_A
V_B
2 m
1m
3 m
c)
1
V_B'nin T. Ç
d)
N_2-3'ün T. Ç
0,3436
0,6872
1,03
0,6872
0,3436
2,0615
e)
1,6
0,266
0,533
0,8
1,066
0,533
N_1-4'ün T. Ç
f)
0,1067
0,2134
0,3201
0,6403
0,3201
0,6403
N_1-3'ün T. Ç
1,921
2,4941
g)
0,8314
P=1alt başlık üzere
0,4157
N_3-4'ün T. Ç
0,04215
0,0843
0,1264
P=1üst başlık üzere
0,2529
h)
0,1666
0,3333
0,5
0,1666
0,1666
N_1-2'nin T. Ç
P=1 alt başlıkta
0,5
P=1 üst başlıkta

Şekil 6.4.2

Örnek 6.5 Boyutları ve sabit yükleri Örnek 5.6'da verilmiş olan konsol kafes sistem için
a) İşaretlenmiş çubuklardaki (Şekil 6.5.1a) kuvvetlerin tesir çizgilerini çiziniz,
b) Tesir çizgileri yardımı ile sabit yükleme durumundan işaretlenen çubuklarda oluşan kuvvetleri hesaplayınız,
c) Kuvvetlerin analitik yöntemle ve tesir çizgileri yardımıyla belirlenmiş değerlerini karşılaştırınız.



Şekil 6.5.1

<u>*Çözüm*</u>:
a)İşaretlenmiş çubuklardaki kuvvetlerin tesir çizgilerinin çizimi:
Konsol kafes sistemlerde iç kuvvetlerin tesir çizgilerinin sağ veya sol doğrularından biri sıfır doğrusu olur. Sistem, ele alınan sistem gibi sola doğru ise tesir çizgilerinin sağ doğrusu, sistem sağ tarafa doğru ise sol doğrusu sıfır doğrusudur. Tesir çizgileri doğrularının ifadeleri elde edilirken hesap kolaylığı için mesnetlenmemiş tarafın denge şartlarının kullanılması daha uygundur.
● $N_{3\text{-}5}$ ve $N_{2\text{-}4}$'ün tesir çizgileri I-I kesiminin (Şekil 6.5.1b) sol tarafında kalan parçanın denge şartlarından yararlanılarak moment noktası yöntemi ile çizilir. Sistem sola doğru olan bir konsol sistem olduğundan, tüm çubuklardaki kuvvetlerin tesir çizgilerinin sağ doğruları sıfır doğrusu olur.

$N_{3\text{-}5}$'in T. Ç.'nin sol doğrusunun ifadesi (Şekil 6.5.2b):
$1 \le x_1 \le 2$ I-I kesiminin sol tarafında kalan parçanın denge şartı kullanılacağı için P = 1 yükünün hareketi "2" düğümünden itibaren göz önüne alınır.

$\sum M_4^{Sol} = -P.x_1 + N_{3-5}.r_{3-5} = 0, \quad r_{3-5} = 1{,}109\,m$ (*Örnek* 5.6'*ın çözümünden*).

$N_{3-5} = \dfrac{1.x_1}{1{,}109}; \quad x_1 = 1m \Rightarrow \quad N_{3-5} = 0{,}9017, \quad x_1 = 2\,m \Rightarrow \quad N_{3-5} = 1{,}8034.$

Bu değerlere göre $N_{3\text{-}5}$'in tesir çizgisi Şekil 6.5.2c 'de çizilmiştir.

$N_{2\text{-}4}$'ün tesir çizgisinin sol doğrusunun ifadesi (Şekil 6.5.2b):

$0 \le x_2 \le 1$ Moment noktası I-I kesiminin solunda kalan ilk düğümdür.

$\sum M_3^{Sol} = -P.x_2 - N_{2-4}.r_{2-4} = 0\,; \quad r_{2-4} = l_{2-3} = \dfrac{2}{3} = 0{,}6666\,m,$

$N_{2-4} = -\dfrac{1.x_2}{r_{2-4}}; \quad x_2 = 0 \Rightarrow \quad N_{2-4} = 0\,; \; x_2 = 1m \Rightarrow \quad N_{2-4} = -1.5.$

Bu değerlere göre $N_{2\text{-}4}$'ün tesir çizgisi Şekil 6.5.2d 'de çizilmiştir.

● $N_{4\text{-}5}$'in tesir çizgisi II-II kesimi (Şekil 6.5.1b) yardımıyla çizilir. Tesir çizgisinin sağ doğrusunun sıfır doğrusu olduğu yukarıda açıklanmıştır. P = 1 yükü üst başlık üzerinde hareket ettiğinde $0 \le x_3 \le 1$, alt başlık üzerinde hareket ettiğinde ise $0 \le x_3 \le 2$ aralığında değişir (Şekil 6.5.2b). Sol doğrusu için ifade aşağıdaki denge şartından elde edilir.

$\sum M_1^{Sol} = P.x_3 - N_{4-5}.2 = 0 \Rightarrow \quad N_{4-5} = \dfrac{1.x_3}{2}; \; x_3 = 0 \Rightarrow \quad N_{4-5} = 0,$

$x_3 = 2\,m \Rightarrow \quad N_{4-5} = 1\,. \quad x_3 = 1m \Rightarrow \quad N_{4-5} = \dfrac{1}{2}$

Bu değerlere göre $N_{4\text{-}5}$'ün tesir çizgisi Şekil 6.5.2e'de çizilmiştir.

● $N_{5\text{-}B}$'nin tesir çizgisinin sol doğrusunun ifadesi kafes sistemin III-III kesiminin (Şekil 6.5.1b) sol tarafında kalan parçasının denge şartından elde edilir, sağ doğrusu ise sıfır doğrusudur.

$0 \le x_4 \le 2$

$\sum M_1^{Sol} = P.x_4 + N_{5-B}.r_{5-B} = 0; \quad r_{5-B} = 2{,}4\,m$ (Pr*oblem* 4.6'*ın çözümünden*),

$N_{5-B} = -\dfrac{1.x_4}{2{,}4}, \quad x_4 = 0 \Rightarrow \quad N_{5-B} = 0, \quad x_4 = 2\,m \Rightarrow \quad N_{5-B} = -0{,}8333.$

Elde edilmiş değerlere göre $N_{5\text{-}B}$'nin tesir çizgisi Şekil 6.5.2f'de çizilmiştir.

● $N_{2\text{-}3}$'ün tesir çizgisi düğüm kesme yönteminin özel durumuna uygun olarak P=1 yükünün her iki başlık üzerinde hareketi göz önüne alınarak çizilmiştir (Şekil 6.5.2g ve Şekil 6.5.2h).

b) Tesir çizgileri yardımıyla sabit yükleme durumu için işaretlenmiş çubuklardaki kuvvetlerin hesaplanması (Sabit yükler alt başlık düğümlerine uygulanmıştır).

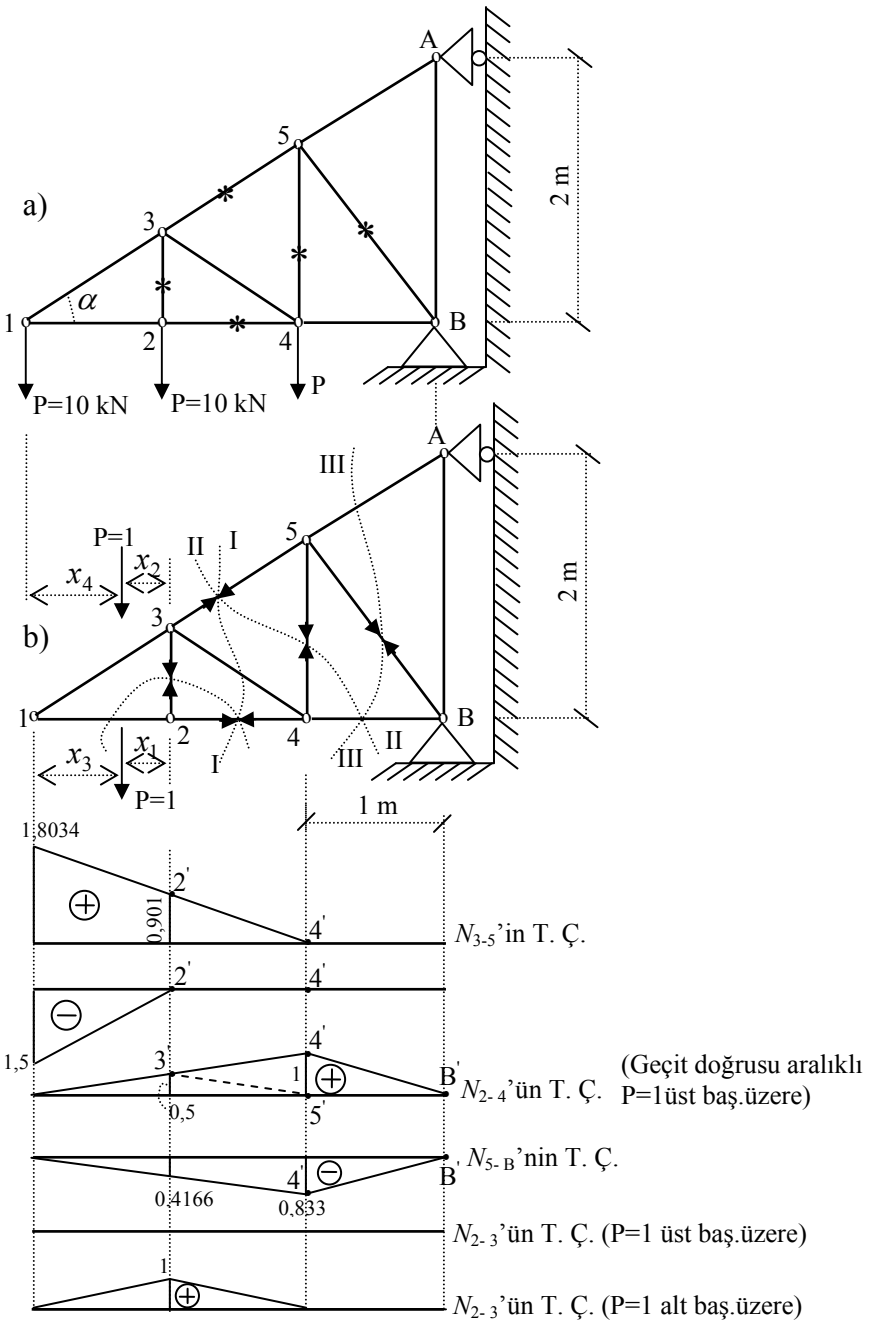
$N_{3-5} = P.(1{,}8034 + 0{,}9017) = 10.(2{,}7051) = 27{,}051\,kN.$

$N_{2-4} = -P.(1{,}5) = -10.(1{,}5) = -15\,kN.$

$N_{4-5} = P.(0{,}5 + 1) = 10.(1{,}5) = 15\,kN.$

$N_{5-B} = -P.(0{,}41666 + 0{,}83333) = -10.(1{,}25) = -12{,}5\,kN.$

$N_{2-3} = P.1 = 10.1 = 10\,kN.$

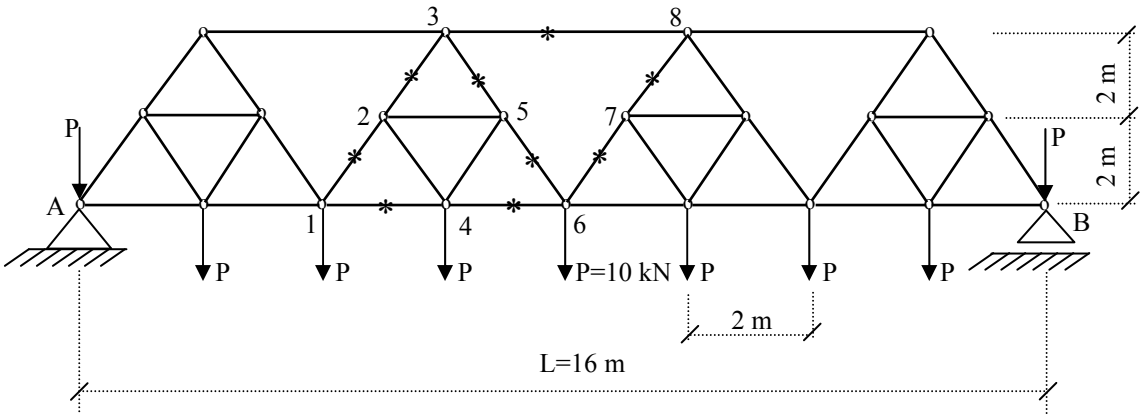


Şekil 6.5.2

c) Analitik yöntem ve tesir çizgileri yardımıyla belirlenmiş değerlerin karşılaştırılması:

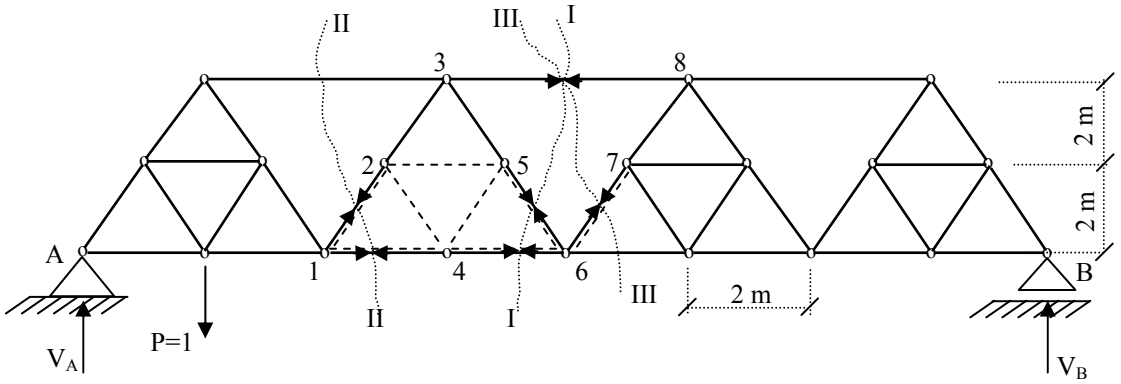
İç kuvvetler	Analitik yöntemle (kN)	T. Ç. yardımıyla (kN)	Fark
N_{3-5}	27,05	27,051	0,001
N_{2-4}	-15	-15	0,0
N_{4-5}	15	15	0,0
N_{5-B}	12,5	-12,5	0,0
N_{1-2}	10	10	0,0

Örnek 6. 6. Boyutları ve sabit yükle yükleme durumu Örnek 5.7'de verilmiş olan karmaşık kafes sistemin işaretlenmiş çubuklarındaki (Şekil 6.6.1) kuvvetlerin
a) Tesir çizgilerini çiziniz,
b) Tesir çizgileri yardımı ile verilen sabit yükleme durumu için kuvvetlerin değerlerini belirleyiniz,
c) Her iki yöntemle belirlenmiş değerleri karşılaştırınız.



Şekil 6.6.1

Çözüm:
Karmaşık kafes sistemin çubuklarındaki iç kuvvetlerin tesir çizgilerinin çizimi esas kafes sistemde (Şekil 6.6.2) olduğu gibi yapılır. Fakat tesir çizgilerine ait geçit çizgilerinin elde edilmesi için kesimlerin sol ve sağ tarafında kalan ilk düğümlerin iz düşümleri alınırken ilave olunmuş kafes sistemin düğümleri de göz önünde bulundurulur.



Şekil 6.6.2

Bu karmaşık kafes sistemde ilave olunmuş kafes sistem alt başlığa ilave edildiği (sabit yükler alt başlık düğümlerinde uygulanmıştır, Şekil 6.6.1) için P = 1 yükünün alt başlık üzerinde hareket etmesi durumu göz önüne alınmıştır (Şekil 6.6.2).
a)İç kuvvetlerin tesir çizgilerinin çizimi:
● $N_{3\text{-}8}$'in tesir çizgisi I-I kesiminden (Şekil 6.6.2.) çizilir.
Sağ doğrusu (P = 1 I-I kesiminin sağ tarafında) için ifade kafes sistemin I-I kesiminin solunda kalan parçasının denge şartından elde edilir.

$$\sum M_6^{Sol} = V_V.8 + N_{3-8}.4 = 0 \Rightarrow \quad N_{3-8} = -2.V_A \; T.Ç.$$

Sol doğrusu (P = 1 I-I kesiminin solunda) için ifade kafes sistemin I-I kesiminin sağ tarafında kalan parçasının denge şartından elde edilir.

$$\sum M_6^{Sağ} = -V_B.8 - N_{3-8}.4 = 0 \Rightarrow \quad N_{3-8} = -2.V_B$$

Elde edilmiş ifadeler uygun olarak $N_{3\text{-}8}$'in tesir çizgisi Şekil 6.6.3e'de çizilmiştir.

● $N_{4\text{-}6}$'nın tesir çizgisi de I-I kesiminden çizilir ($N_{1\text{-}4}$'ün tesir çizgisi $N_{4\text{-}6}$'nın tesir çizgisinin aynısıdır). Tesir çizgisinin sağ doğrusunun ifadesi

$$\sum M_3^{Sol} = V_A.6 - N_{4-6}.4 = 0 \Rightarrow \quad N_{4-6} = 1{,}5.V_A \text{ 'dır.}$$

Tesir çizgisinin sol doğrusunun ifadesi ise

$$\sum M_3^{Sağ} = -V_B.10 + N_{4-6}.4 = 0 \Rightarrow \quad N_{4-6} = 2{,}5.V_B \text{ 'dir.}$$

Bu ifadelere uygun olarak $N_{4\text{-}6}$ ve $N_{1\text{-}4}$'ün tesir çizgileri Şekil 6.6.3f 'de çizilmiştir.

● N_{3-5}^{e} *ve* N_{5-6}'nın tesir çizgileri kafes sistemin I-I kesiminin sol tarafında kalan parçasının denge şartından yararlanılarak çizilir.

Sağ dorusu için ifade

$$\sum Y^{Sol} = V_A - N_{5-6}.\cos\alpha = 0\,, \quad \cos\alpha = 0{,}8944 \; (\textit{Örnek } 5.7\text{'}\textit{nin çözümünden})$$

$$N_{5-6} = \frac{1}{0{,}8944}.V_A = (1{,}118068).V_A \quad \textit{ve}$$

Sol doğrusu için ise

$$\sum Y^{Sağ} = V_B + N_{5-6} = 0 \Rightarrow \quad N_{5-6} = -(1{,}118068).V_B \quad \textit{olarak elde edilir}.$$

Bu ifadelere göre N_{3-5}^{e} *ve* N_{5-6}'nın tesir çizgileri Şekil 6.6.3g'de çizilmiştir. Bu iç kuvvetlerin (N_{3-5}^{e} *ve* N_{5-6}) tesir çizgileri birbirinden geçit çizgileri ile farklanır. N_{3-5}^{e}'in tesir çizgisinin geçit çizgisi kesikli çizgi ile, N_{5-6}'nın tesir çizgisinin geçit çizgisi ise sürekli çizgi ile gösterilmiştir.

● N_{1-2} *ve* N_{2-3}^{e}'ün tesir çizgileri N_{3-5}^{e} *ve* N_{5-6}'nın tesir çizgilerinin çizimine benzer şekilde II-II kesiminden yapılır.

Sağ dorusu için ifade

$$\sum Y^{Sol} = V_A + N_{1-2}.\cos\alpha = 0 \Rightarrow \quad N_{1-2} = -(1{,}118068).V_A\,,$$

Sol dorusu için ise

$$\sum Y^{Sağ} = V_B - N_{1-2}.\cos\alpha = 0 \Rightarrow \quad N_{1-2} = (1{,}118068).V_B \quad \textit{olarak elde edilir}.$$

Bu ifadelere göre N_{1-2} *ve* N^{e}_{2-3}'ın tesir çizgileri Şekil 6.6.3h'da çizilmiştir. N^{e}_{3-5} *ve* N_{5-6}'nın tesir çizgilerinde olduğu gibi bu çubuk kuvvetlerinin tesir çizgileri de birbirinden geçit çizgisiyle farklanır. Şekil 6.6.3h'da N^{e}_{2-3}'ın geçit çizgisi sürekli çizgiyle, $N_{1\text{-}2}$'ninki ise aralıklı çizgiyle gösterilmiştir.

- N_{6-7} *ve* N^{e}_{7-8}'in tesir çizgileri de, bunlardan önceki kuvvetlerin tesir çizgilerinin çizimine benzer şekilde III-III kesiminden yararlanılarak yapılır ve birbirinden geçit çizgileriyle farklanır.

Sağ dorusu için ifade

$$\sum Y^{Sol} = V_A + N_{6-7}.\cos\alpha = 0 \Rightarrow \quad N_{6-7} = -(1{,}118068).V_A \ ,$$

Sol doğrusu için ise

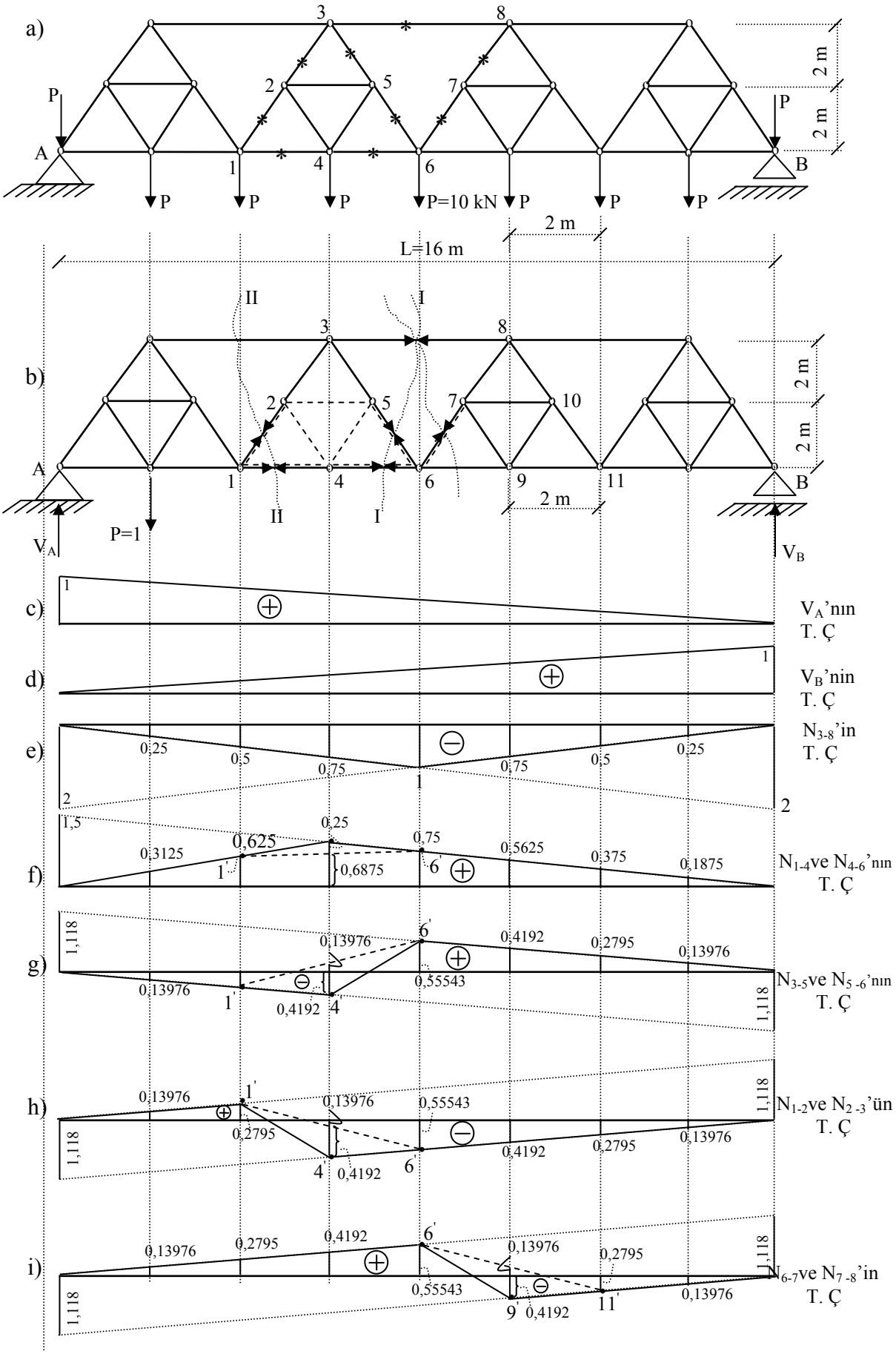
$$\sum Y^{Sağ} = V_B - N_{6-7}.\cos\alpha = 0 \Rightarrow \quad N_{6-7} = (1{,}118068).V_B \quad \textit{olarak elde edilir}.$$

Bu ifadelere ve yapılmış açıklamalara uygun olarak N_{6-7} *ve* N^{e}_{7-8}'in tesir çizgileri Şekil 6.6.3ı'da çizilmiştir.

Çizilmiş tesir çizgilerinden (Şekil 6.6.3f, g, h ve i) görüldüğü gibi geçit çizgilerinin oluşturduğu üçgenler ilave kafes sistemin çubuklarındaki kuvvetlerin tesir çizgileridir.

b) Çizilmiş tesir çizgileri yardımıyla sabit yükleme durumu için çubuk kuvvetlerinin hesaplanması:

$$N_{3-8} = N^{e}_{3-8} = -P.(0{,}25 + 0{,}5 + 0{,}75 + 1 + 0{,}75 + 0{,}5 + 0{,}25) = -10.4 = -40\,kN.$$
$$N_{1-4} = N_{4-6} = 10.(0{,}3125 + 0{,}625 + 0{,}9375 + 0{,}75 + 0{,}5625 + 0{,}375 + 0{,}1875) = 37{,}5\,kN.$$
$$N^{e}_{1-6} = 10.(0{,}3125 + 0{,}625 + 0{,}6875 + 0{,}75 + 0{,}5625 + 0{,}375 + 0{,}1875) = 35\,kN.$$
$$N^{i}_{1-4} = N^{i}_{4-6} = P.(0{,}25) = 10.(0{,}25) = 2{,}5\,kN.$$
$$N_{3-5} = N^{e}_{3-6} = 10.(-0{,}13976 - 0{,}2795 + 13976 + 0{,}55543 + 0{,}4192 + 0{,}2735 + 0{,}13976) = 11{,}24\,kN.$$
$$N_{5-6} = 10.(-0{,}13976 - 0{,}2795 - 0{,}4192 + 0{,}55543 + 0{,}4192 + 0{,}2795 + 0{,}13976) = 5{,}5543\ kN.$$
$$N^{i}_{5-6} = -P.(0{,}55896) = -10.(0{,}55896) = -5{,}5896\,kN.$$
$$N_{1-2} = 10.(0{,}13976 + 0{,}2795 - 0{,}69878 - 0{,}55543 - 0{,}4192 - 0{,}2795 - 0{,}19976) = -16{,}7341\,kN.$$
$$N_{2-3} = N^{e}_{1-3} = 10.(0{,}13976 + 0{,}2795 - 0{,}13976 - 0{,}55543 - 0{,}4192 - 0{,}2795 - 0{,}13976) = -11{,}1259\,kN.$$
$$N^{i}_{1-2} = P.(-0{,}69878 + 0{,}13976) = 10.(-0{,}5608) = -5{,}608\,kN.$$
$$N_{7-8} = N^{e}_{8-6} = 10.(0{,}13976 + 0{,}2795 + 0{,}4192 + 0{,}55543 + 0{,}13796 - 0{,}2795 - 0{,}13976) = 10.(1{,}11259) = 11{,}1259\,kN.$$
$$N_{6-7} = 10.(0{,}13976 + 0{,}2795 + 0{,}4192 + 0{,}55543 - 0{,}4192 - 0{,}2795 - 0{,}13976) = 5{,}5543\,kN.$$
$$N^{i}_{6-7} = -P.(0{,}4192 + 0{,}13976) = -10.(0{,}55716) = -5{,}5716\,kN.$$


a)
b)
c)
d)
e)
f)
g)
h)
i)
P
P=10 kN
2 m
L=16 m
P=1
V_A
V_B
V_A'nın T. Ç
V_B'nin T. Ç
N_{3-8}'in T. Ç
N_{1-4}ve N_{4-6}'nın T. Ç
N_{3-5}ve N_{5-6}'nın T. Ç
N_{1-2}ve N_{2-3}'ün T. Ç
N_{6-7}ve N_{7-8}'in T. Ç

Şekil 6.6.3

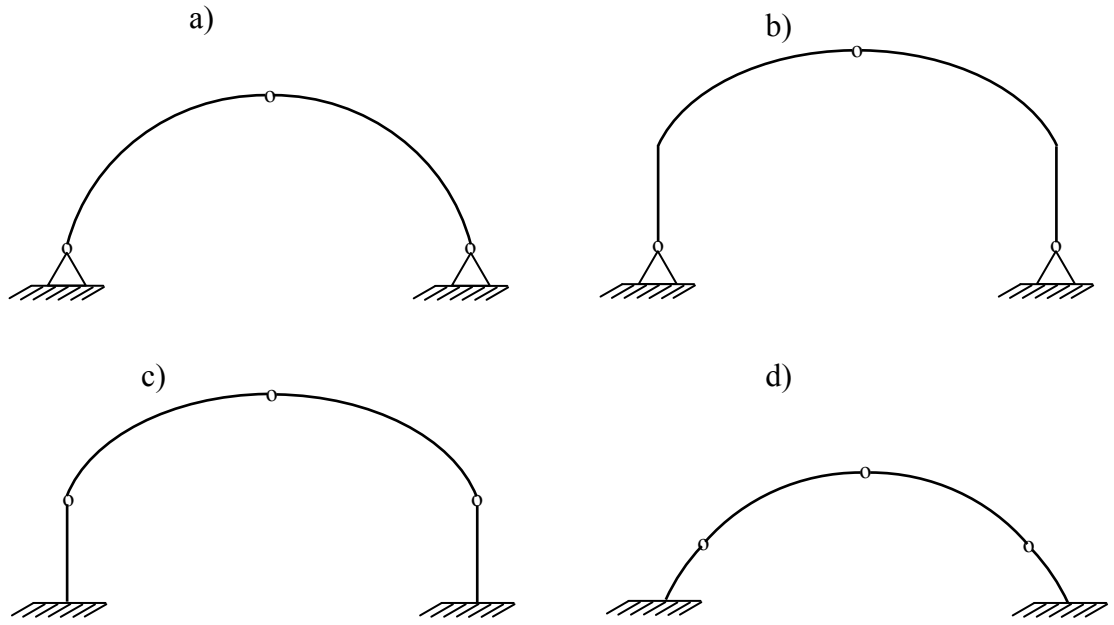
c) Kafes sistemin işaretlenmiş (Şekil 6.6.1) çubuklarında verilmiş olan sabit yükleme durumu için analitik yöntem ve tesir çizgileri yardımıyla belirlenmiş değerlerinin karşılaştırılma tablosu aşağıdadır.

İç kuvvetler	Analitik yöntemle (kN)	T. Ç. yardımıyla (kN)	Fark
$N_{3\text{-}8}$	- 40	- 40	0
$N_{1\text{-}4} = N_{4\text{-}6}$	37,5	37,5	0
N^{e}_{1-6}	35	35	0
$N^{i}_{1-4} = N^{i}_{4-6}$	2,5	2,5	0
$N_{3-5} = N^{e}_{3-6}$	11,18	11,24	0, 06
N^{i}_{5-6}	5,59	5,5543	0,035
$N_{1\text{-}2}$	-16,7341	-16,7341	0
$N_{2-3} = N^{e}_{1-3}$	-11,1259	-11,1259	
N^{i}_{1-2}	-5,608	-5,59	0,018
$N_{7-8} = N^{e}_{8-6}$	11,12	11,1259	0,005
$N_{6\text{-}7}$	5,59	5,5543	0,035
N^{i}_{6-7}	-5,59	-5,5716	0,018

7. ÜÇ MAFSALLI SİSTEMLER

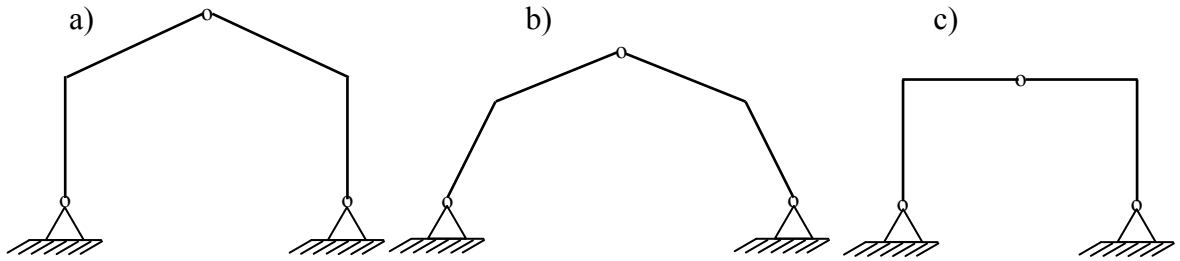
Genel Bilgiler

Üç mafsallı sistemler kendi aralarında ve temel ile bir doğru üzerinde olmayan üç mafsalla birleşmiş iki parçadan oluşan sistemlerdir. Bu sistemlerin özelliği düşey yükler etkisinde mesnetlerinde düşey tepkilerle beraber yatay tepkilerin de oluşmasıdır. Yatay tepkiler itki kuvvetleri, böyle sistemler ise itkili sistemler olarak adlandırılır. Bu sistemleri oluşturan parçalar kırık eksenli olduğunda üç mafsallı çerçeve, eğri eksenli (daire, 2^0 den parabol ve elips gibi) olduğunda ise üç mafsallı kemer diye adlandırılır. Üç mafsallı kemerlere örnekler aşağıda gösterilmiştir (Şekil 7.1).



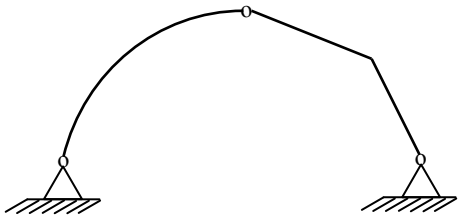
Şekil 7.1. a) Basit üç mafsallı kemer, b) Kolonlu üç mafsallı kemer, c) Ankastre kolonlara oturan üç mafsallı kemer, d) Ankastre eğri eksenli çubuklara bağlanmış üç mafsallı kemer.

Üç mafsallı sistemleri oluşturan parçalar, yukarıda belirtildiği gibi doğru veya kırık eksenli de olabilir. Böyle sistemlere bir kaç örnek aşağıda verilmiştir (Şekil 7.2).



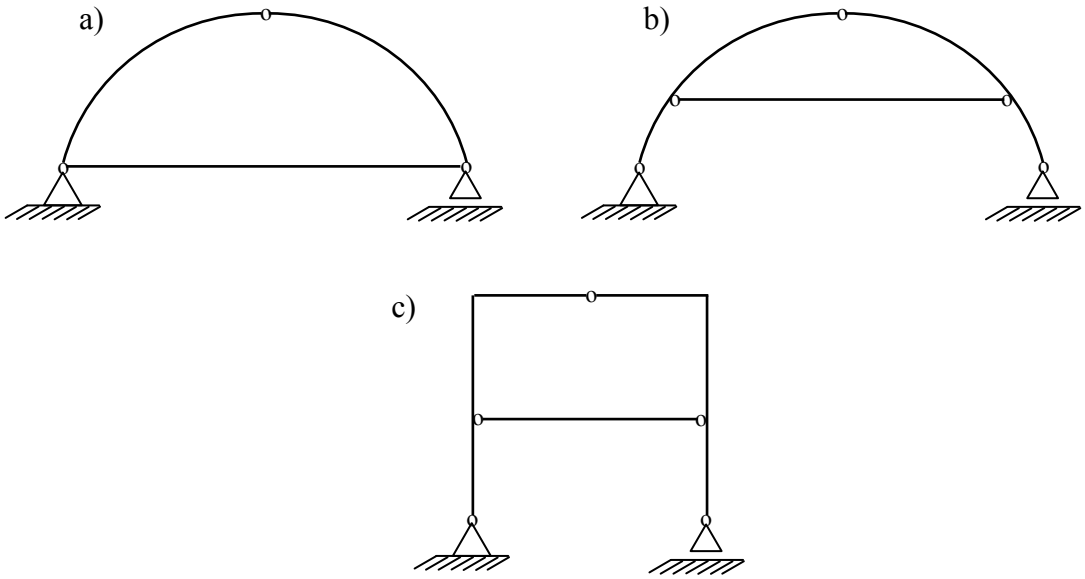
Şekil 7.2 .a) ,b) Kırık eksenli üç mafsallı çerçeve, c) doğru eksenli üç mafsallı çerçeve.

Bunların yanında üç mafsallı sistemlerin bir parçası doğru, diğer parçası eğri eksenli de olabilir (Şekil 7.3).



Şekil 7.3. Bir parçası doğru, diğer parçası eğri eksenli olan üç mafsallı sistem.

İtkili sistemlerde mesnetlerde oluşan itki kuvvetlerini karşılayabilecek özel temellerin oluşturulmuş olması gerekir. Gerektiğinde itki kuvvetlerini güvenle taşıyabilecek gergiler de kullanılır. Böyle sistemler gergili sistemler diye adlandırılır. Gergili sistemlerde itki kuvvetleri gergi tarafından karşılandığından, sistemin mesnetlerinden biri kayıcı mafsallı mesnet olur. Gergi mesnetler seviyesinde veya yukarıda yerleştirilebilir. Gergili üç mafsallı sistemlere çeşitli örnekler aşağıda verilmiştir (Şekil 7.4).



Şekil 7.4. Gergili üç mafsallı sistemler; a), b) Gergisi sırasıyla mesnetler seviyesinde ve mesnetlerin yukarısında olan üç mafsallı kemerler, c) Gergili üç mafsallı çerçeve.

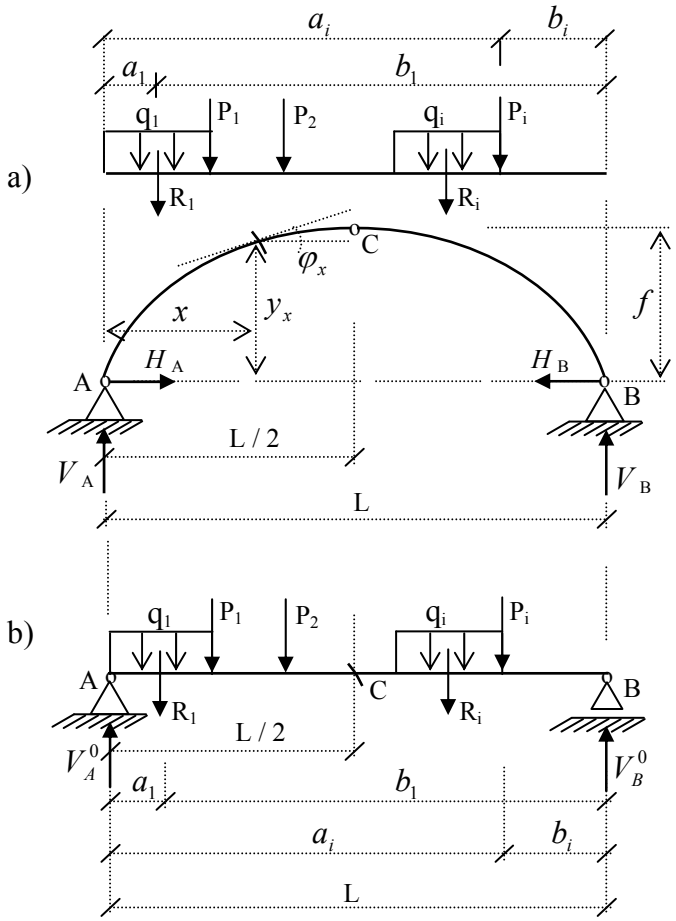
Üç mafsallı kemerlerin sabit yüklere göre hesabı

Üç mafsallı bir kemerin (Şekil 7.5a) hesaplanmasına mesnet tepkilerinin belirlenmesi ile başlanır. Düşey tepkiler kemere uygun, yani kemerle aynı açıklığa ve yükleme durumuna sahip basit kirişte (Şekil 7.5b) olduğu gibi belirlenir.

$$V_A = V_A^0 = \frac{\sum (P + R_i.)b_i}{L}; \quad V_B = V_B^0 = \frac{\sum (P_i + R_1).a_i}{L}.$$

Burada V_A *ve* V_B *kemerin*, V_A^0 , V_B^0 ise basit kirişin mesnet tepkileri,
P_i , R_i sırasıyla kemere etkiyen tekil yükler ve yayılı yüklerin bileşkeleri,

a_i *ve* b_i bu yüklerin sırasıyla sol ve sağ mesnetten olan uzaklıklarıdır.



Şekil 7.5. a) Üç mafsallı kemer, b) Bu kemere uygun basit kiriş.

İtki kuvvetleri sistemin C mafsalının sol ve sağ tarafında kalan kuvvetlerin bu mafsala göre momentleri toplamının sıfıra eşit olma şartına dayanarak belirlenir.

$$H_A = \frac{\sum M_C^{Sol}}{f}; \qquad H_B = \frac{\sum M_C^{Sağ}}{f}. \tag{7.1}$$

Ele alınan üç mafsallı sistem yalnız düşey yükler etkisi altında olduğunda (Şekil 7.5)

$$H_A = H_B = \frac{M_C^0}{f} = H \tag{7.2}$$

olur.

Burada M_C^0 uygun basit kirişin C kesitindeki eğilme momenti,

f kemerin yüksekliğidir (sehimi, oku) (C mafsalının A ve B mesnetlerini birleştiren özengi hattına olan dik uzaklığı) (Şekil 7.5a).

Kemerlerde *M*, *T* ve *N* diyagramlarının kemerin gerçek şekil değiştirme durumunu gösterebilmeleri için bu büyüklüklerin değerlerinin belirlendiği kesit sayısının yeterince çok olması önemlidir. Düşey yükler etkisi altında olan kemerler için adı geçen kesit tesirleri aşağıdaki formüllerle hesaplanır.

$$\left.\begin{aligned} M_x &= M_x^0 - H.y_x \\ T_x &= T_x^0.\cos\varphi_x - H.\sin\varphi_x \\ N_x &= -(T_x^0.\sin\varphi_x - H.\cos\varphi_x) \end{aligned}\right\} \qquad (7.3)$$

Burada

M_x : kemerin sol mesnetten *x* mesafesinde olan kesitindeki eğilme momenti (Şekil 7.5a),

M_x^0 : uygun basit kirişin (Şekil 7.5b) sol mesnetten *x* mesafesinde olan kesitindeki eğilme momenti,

H : itki kuvveti (kemerin tüm kesitleri için sabittir),

y_x : kemer kesitlerinin ordinatıdır (Şekil 7.5a).

Kemerin kesitlerinin ordinatları eksen eğrisi türüne bağlı olarak aşağıdaki gibi belirlenir:

<u>2^0 den parabol için</u>

$$y_x = \frac{4.f.x}{L}(L-x), \qquad (7.4)$$

<u>Daire eksenli kemerler için</u>

$$y_x = \sqrt{R^2 - (\frac{L}{2} - x)^2} - R + f \qquad (7.5)$$

$R = \frac{f}{2} + \frac{L^2}{8f}$ olup, dairenin yarıçapıdır.

T_x : kemerin sol mesnetinden *x* mesafede olan kesitindeki kesme kuvveti,

T_x^0 : uygun basit kirişin sol mesnetinden *x* mesafede olan kesitindeki kesme kuvveti,

φ_x : kemerin kesitlerinde eksene çizilmiş teğetle yatay doğru arasında kalan açıdır.

$\cos\varphi_x$ *ve* $\sin\varphi_x$ kemer ekseni türüne uygun olarak aşağıdaki formüllerle belirlenebilir.

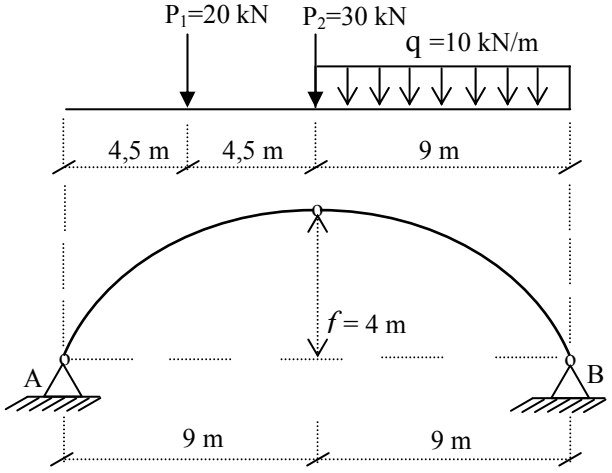
<u>2.dereceden parabol için</u>

$$\left.\begin{aligned} tg\varphi_x &= (y_x)' = \frac{4.f}{L^2}.(L-2x), \\ \cos\varphi_x &= \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi_x}}, \\ \sin\varphi_x &= \cos\varphi_x.tg\varphi_x. \end{aligned}\right\} \qquad (7.6)$$

<u>Daire eksenli kemerler için</u>

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi_x &= \frac{y+R-f}{R}, \\ \sin\varphi_x &= \frac{L-2x}{2R} \end{aligned}\right\} \qquad (7.7)$$

Örnek 7.1. Boyutları ve yükleme durumu Şekil 7.1.1'de verilen ve ekseni 2. dereceden parabol şeklinde olan üç mafsallı kemer için
a) Kemerin kinematik analizi yapınız,
b) Kemerin yeterli sayıda kesitinde eğilme momenti (*M*), kesme kuvveti (*T*) ve normal kuvvet (*N*) değerlerini hesaplayınız,
c) İç kuvvetlerin hesaplanmış değerlerine göre *M*, *T* ve *N* diyagramlarını çiziniz.



Şekil 7.1.1

Çözüm:
a) Üç mafsallı kemerlerin kinematik analizi Gerber kirişlerde olduğu gibi yapılır. W = 3.2 – 2.1 – 4 = 0 ve kemerin parçaları kendi aralarında ve temelle bir doğru üzerinde olmayan üç mafsalla bağlandığı için (ki bu geometrik değişmez sistemlerin oluşturulma şartlarından biridir) taşıyıcı bünyeye sahiptir, yani sistem geometrik değişmezdir.
b) Üç mafsallı kemerin kesit tesirlerinin hesaplanmasına mesnet tepkilerinin belirlenmesi ile başlanır. Bu işlemler üç mafsallı kemerlerin hesaplanmasında verilmiş açıklamalara dayanılarak yapılır. Kemerin hesaplama şeması ve uygun basit kiriş Şekil 7.1.2 a ve b'de verilmiştir.
Mesnet tepkilerinin düşey bileşenleri (Şekil 7.1.2a,b):

$$\sum M_B = V_A.18 - P_1.(13,5) - P_2.9 - q.9.(4,5) = 0\,,$$

$$V_A = V_A^0 = \frac{20.(13,5) + 30.9 + 10.9.(4,5)}{18} = 52,5\ kN.$$

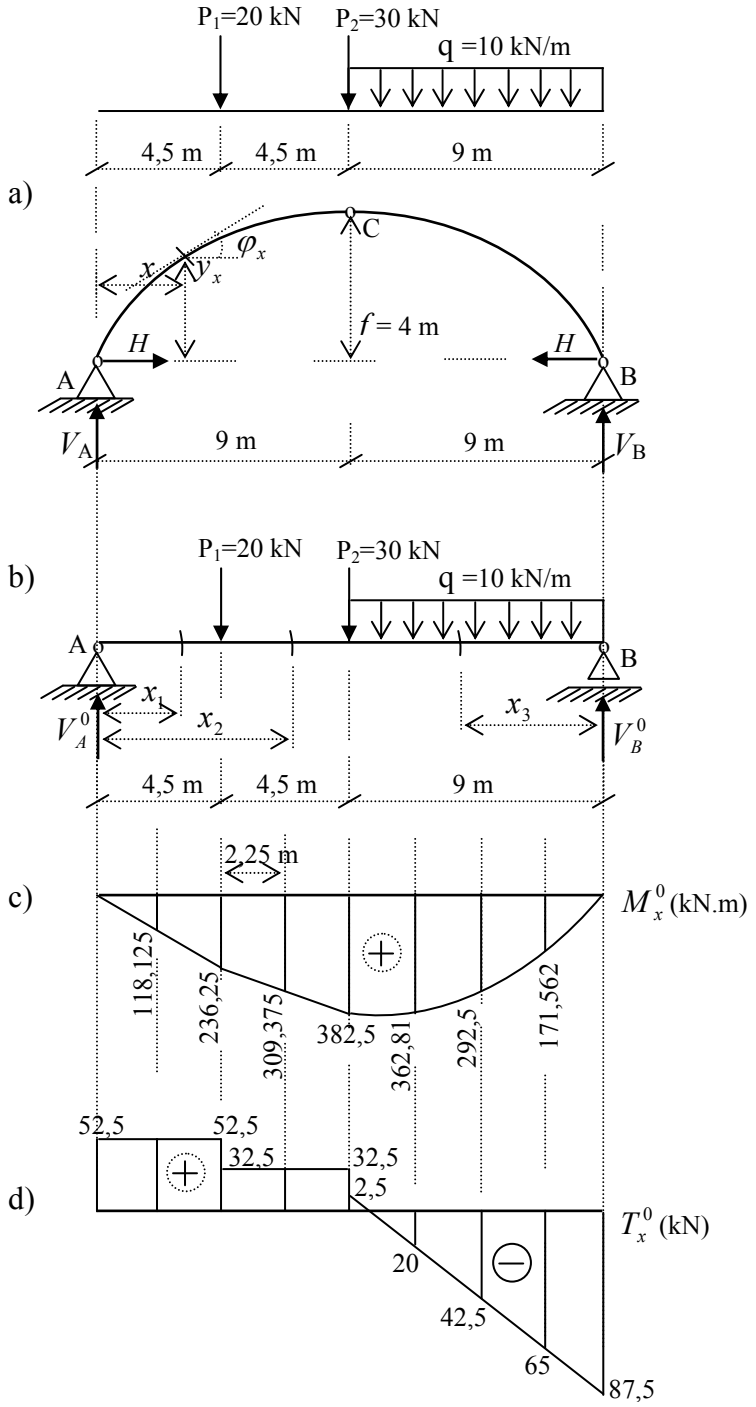
$$\sum M_A = -V_B.18 + q.9.(13,5) + P_2.9 + P_1.(4,5) = 0$$

$$V_B = V_B^0 = \frac{10.9.(13,5) + 30.9 + 20.(4,5)}{18} = 87,5\ kN\,.$$

Sağlama :

$$\sum Y = V_A - P_1 - P_2 - q.9 + V_B = 0 \Rightarrow \quad 52,5 - 20 - 30 - 10.9 + 87,5 = 0$$

Mesnet tepkilerinin yatay bileşenleri, yani itki kuvvetleri üç mafsallı kemerlerin hesaplanmasında verilmiş olan açıklamaya dayanarak kendi aralarında birbirine eşit olup aşağıdaki gibi belirlenir.



Şekil 7.1.2. a) Üç mafsallı kemer, b) Uygun kiriş, c) M_0 diyagramı, d) T_0 diyagramı.

$$H_A = H_B = H = \frac{M_C^0}{f} \; ; \; M_C^0 = V_A.9 - P_1.(4{,}5) = (52{,}5).9 - 20.(4{,}5) = 382{,}5\, kN.m$$

$$H = \frac{382{,}5}{4} = 95{,}625\, kN$$

M, T ve N diyagramlarının kemerin gerçek şekil değiştirme durumunu tasvir etmeleri için bu örnekte kemer 8 parçaya ayrılıp, buna uygun kesitlerde kesit tesirlerinin değerleri hesaplanmıştır. (7.3) bağıntılarından görüldüğü gibi kesitler için önce M_0 ve T_0'ın değerlerinin hesaplanması gerekir. Bu amaçla, uygun kirişin her bir bölgesi (Şekil 7.1.2b) için M_0 ve T_0'ın ifadeleri yazılıp, ele alınan kesitlerdeki değerleri aşağıda hesaplanmıştır.

I-bölge $0 \le x_1 \le 4{,}5$

$M_{x1}^0 = V_A^0 . x_1 = (52{,}5).x_1$, $T_0 = V_A^0 = 52{,}5\ kN.$

$x_1 = 0 \Rightarrow M_{x1}^0 = 0$, $x_1 = 2{,}25\ m \Rightarrow M_{x1}^0 = 118{,}125\ kN.m$, $x_1 = 4{,}5\,m \Rightarrow M_{x1}^0 = 236{,}25\ kN.m$

II-bölge $4{,}5 \le x_2 \le 9$

$M_{x2}^0 = V_A^0 . x_2 - P_1.(x_2 - 4{,}5) = (52{,}5).x_2 - 20.(x_2 - 4{,}5)$, $T_0 = V_A^0 - P_1 = 52{,}5 - 20 = 32{,}5\ kN.$

$x_2 = 4{,}5\ m \Rightarrow M_{x2}^0 = 236{,}25\ kN.m$, $x_2 = 6{,}75\ m \Rightarrow M_{x2}^0 = 309{,}375\ kN.m$, $x_2 = 9\ m \Rightarrow$

$M_{x2}^0 = 382{,}5\ kN.m.$

III-bölge (sağdan alınmıştır) $0 \le x_3 \le 9$

$M_{x3}^0 = V_B^0 . x_3 - q.\frac{x_3^2}{2} = (87{,}5).x_3 - 10.\frac{x_3^2}{2}$, $T_{x3}^0 = -V_B^0 + q.x_3 = -87{,}5 + 10.x_3$.

$x_3 = 0 \Rightarrow M_{x3}^0 = 0$, $T_{x3}^0 = -87{,}5\ kN$. $x_3 = 2{,}25\,m \Rightarrow M_{x3}^0 = 171{,}5625\ kN.m$, $T_{x3}^0 = -65\ kN.$

$x_3 = 4{,}5\ m \Rightarrow M_{x3}^0 = 292{,}5\ kN.m$, $x_3 = 6{,}75\ m \Rightarrow M_{x3}^0 = 362{,}8125\ kN.m$, $T_{x3}^0 = -20\ kN$.

$x_3 = 9\ m \Rightarrow M_{x3}^0 = 382{,}5\ kN.m$, $T_{x3}^0 = 2{,}5\ kN$.

Elde edilmiş değerlere göre uygun kirişin M_x^0 *ve* T_x^0 diyagramları Şekil 7.1.2 c ve d'de çizilmiştir. Kemerin M, T ve N diyagramlarının çizilmesi için gereken işlemlerin kalan kısmı aşağıdaki formüller yardımıyla Tablo 7.1.1'de yapılmıştır.

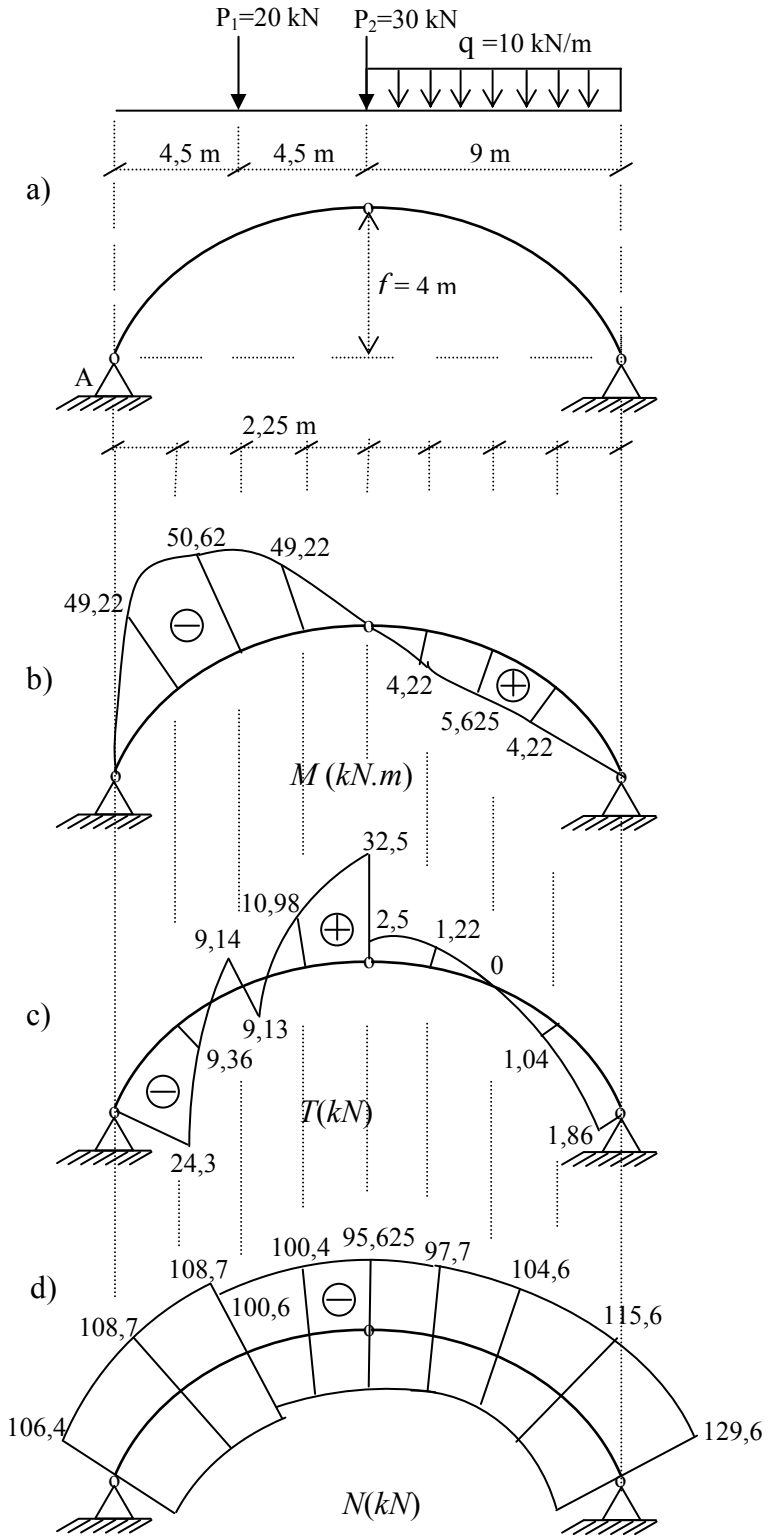
$$\left.\begin{aligned} M_x &= M_x^0 - H.y_x \\ T_x &= T_x^0.\cos\varphi_x - H.\sin\varphi_x \\ N_x &= -(T_x^0.\sin\varphi_x - H.\cos\varphi_x) \end{aligned}\right\} \qquad (7.1.1)$$

$$\left.\begin{aligned} y_x &= \frac{4.f.x}{L}(L-x) \\ tg\varphi_x &= \frac{4.f}{L^2}.(L-2x) \\ \cos\varphi_x &= \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi_x}} \\ \sin\varphi_x &= \cos\varphi_x.tg\varphi_x . \end{aligned}\right\} \qquad (7.1.2)$$

Tablo 7.1.1

x (m)	y_x (m)	tgφ_x	cosφ_x	$.sin\varphi_x$	M_x^0 ($kN.m$)	H (kN)	$H.y_x$ ($kN.m$)	M_x ($kN.m$)	T_x^0 (kN)	T_x^0.cosφ_x (kN)	H .sinφ_x (kN)	T_x (kN)	T_x^0..sinφ_x (kN)	H cosφ_x (kN)	N_x (kN)
0	0	0,888	0,747	0,644	0	95,62	0	0	52,5	39,24	63,53	-24,3	34,878	71,47	-106,4
2,25	1,75	0,666	0,832	0,554	118,1	95,62	167,34	-49,22	52,5	43,68	53,04	-9,36	29,12	79,56	-108,7
4,5	3	0,444	0,914	0,406	236,2	95,62	286,87	-50,625	52,5	47,97	38,84	-9,14	21,37	87,38	-108,7
									32,5	29,698		-9,13	13,2		-100,6
6,75	3,75	0,222	0,976	0,216	309,4	95,62	358,59	-49,22	32,5	31,73	20,74	10,98	7,05	93,35	-100,4
9	4	0	1	0	382,5	95,62	382,5	0	32,5	32,5	0	32,5	0	95,62	-95,62
									2,5	2,5		2,5	0		
11,25	3,75	-0,222	0,976	-0,216	362,8	95,62	358,59	4,22	-20	-19,52	-20,74	1,22	4,34	93,35	-97,7
13,5	3	-0,444	0,914	-0,406	292,5	95,62	286,87	5,625	-42,5	-38,8	-38,84	0	17,26	87,38	-104,6
15,75	1,75	-0,666	0,832	-0,554	171,6	95,62	167,34	4,22	-65	-54,08	-53,04	-1,04	36,055	79,56	-115,6
18	0	-0,888	0,747	-0,664	0	95,62	0	0	-87,5	-65,4	-63,5	-1,86	58,13	71,47	-129,6

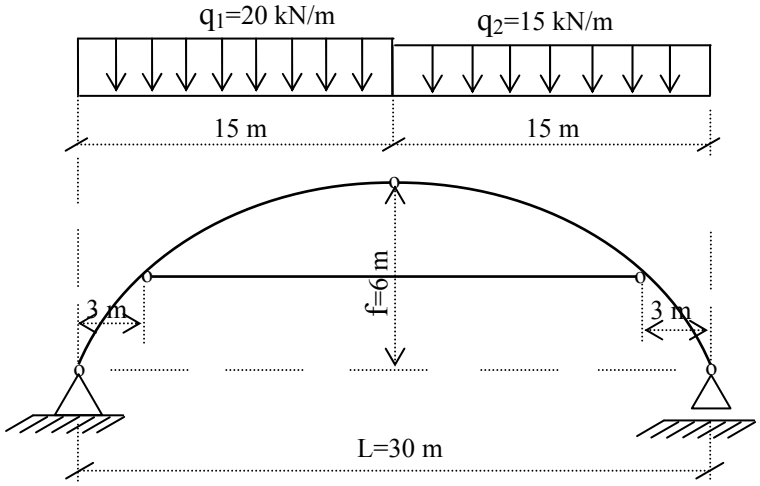
Kesit tesirlerinin (*M*, *T* ve *N*) yukarıdaki tabloda hesaplanmış değerlerine göre diyagramları Şekil 7.1.3b,c ve d'de çizilmiştir.



Şekil 7.1.3. a) Üç mafsallı kemer, b) *M* diyagramı, c) *T* diyagramı, d) *N* diyagramı (Eksenel kuvvet diyagramı olduğu için *N* diyagramda ordinatlar eksenin her iki tarafında alınmıştır).

Hem M_x ve T_x'in (7.1.1)'deki ifadelerinden, hem de uygun kirişin M_x^0, T_x^0 diyagramlarının kemerin M ve T diyagramlarıyla karşılaştırılmasından aşağıdaki sonuca varılmaktadır:
Üç mafsallı kemerin kesitlerinde oluşan eğilme momenti ve kesme kuvveti değerleri, uygun kirişin kesitlerinde meydana gelen bu büyüklüklerin değerlerinden oldukça küçüktür.

Örnek7.2. Boyutları ve yükleme durumu Şekil 7.2.1'de verilmiş olan daire eksenli gergili kemer için aşağıdakiler istenmektedir:
a) Kinematik analiz,
b) Mesnet tepkilerinin ve gergide oluşan kuvvetin belirlenmesi,
c) Kemerin yeterli sayıda kesitinde M, T ve N değerlerinin hesaplanması,
d) Hesaplanmış değerlere göre M, T ve N diyagramlarının çizimi.



Şekil 7.2.1

<u>Çözüm</u>: a) Sistemin kinematik analizi:
Serbestlik derecesi W = 3.3 – 2.3 – 3 = 0'dır ve ayrıca Şekil 7.2.1'den görüldüğü gibi sistem taşıyıcı yapıya sahiptir.
b) Mesnet tepkileri statiğin denge denklemlerinden yararlanarak kirişlerde olduğu gibi belirlenir (Şekil 7.2.2 a ve b).

$$\sum M_B = V_A.30 - q_1.15.(22{,}5) - q_2.15.(7{,}5) = 0 \Rightarrow$$

$$V_A = V_A^0 = \frac{20.15.(22{,}5) + 15.15.(7{,}5)}{30} = 281{,}25\ kN.$$

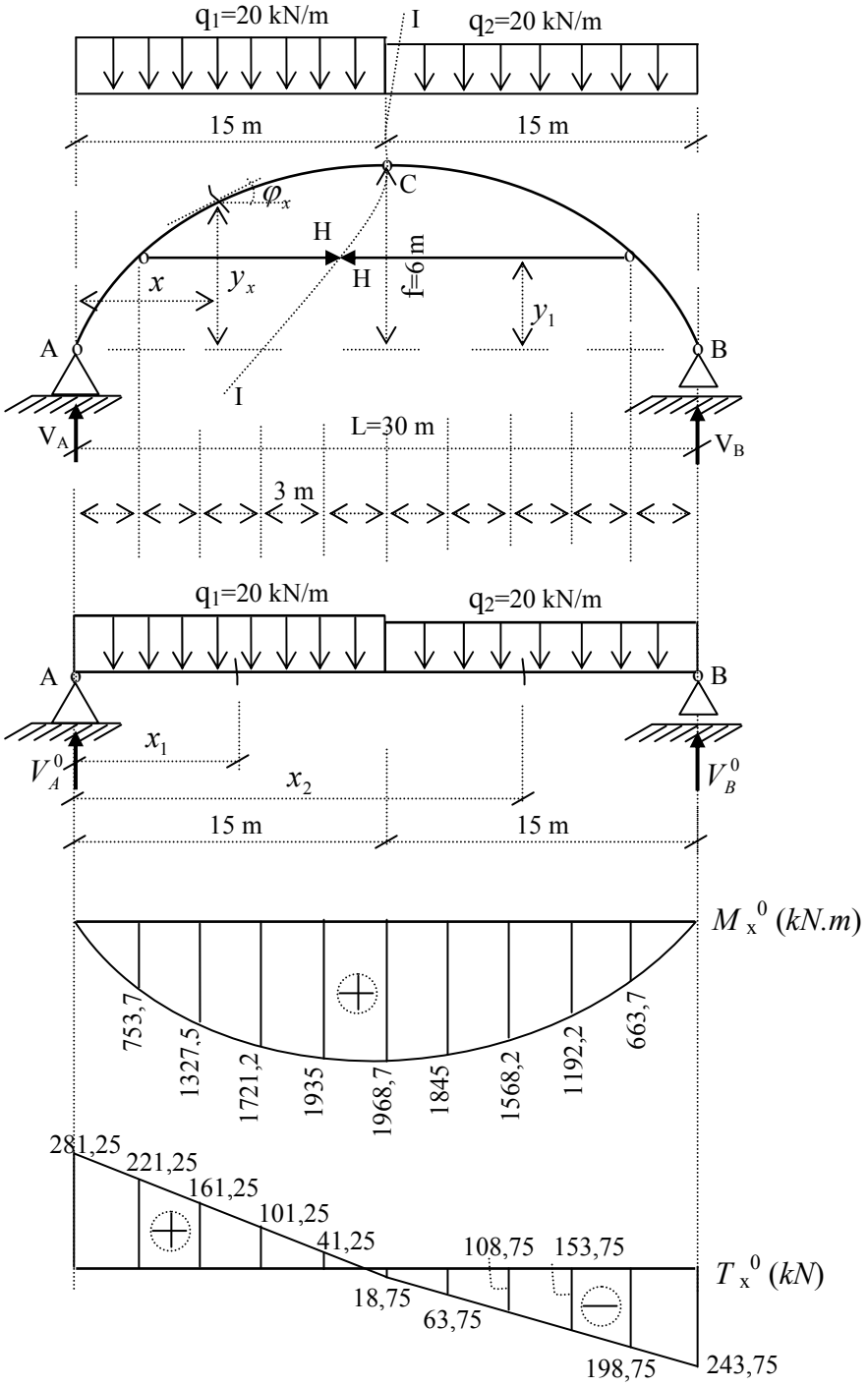
$$\sum M_A = -V_B.30 + q_2.15.(22{,}5) + q_1.15.(7{,}5) = 0 \Rightarrow$$

$$V_B = V_B^0 = \frac{15.15.(22{,}5) + 20.15.(7.5)}{30} = 243{,}75$$

Sağlama:

$$\sum Y = V_A - q_1.15 - q_2.15 + V_B = 0 \Rightarrow\ 281{,}25 - 20.15 - 15.15 + 243{,}75 = 0$$

C mafsalından geçerek gergiyi kesen I-I kesiminin (Şekil 7.2.2 a) sol veya sağ tarafında kalan kemer parçasının denge şartından gergide oluşan iç kuvvet belirlenebilir.



Şekil 7.2.2. a) Üç mafsallı gergili kemer, b) Uygun kiriş, c) M_0 diyagramı, d) T_0 diyagramı.

$$H = \frac{M_C^0}{f'},\ \sum M_C^{Sol} = V_A^0.15 - q_1.15.(7{,}5) = (281{,}25).15 - 20.15.(7{,}5) = 1968{,}75\ kN.m.$$

veya

$$\sum M_C^{Sağ} = V_B^0.15 - q_2.15.(7{,}5) = (243{,}75).15 - 15.15.(7{,}5) = 1968{,}75\ kN.m.$$

$f' = f - y_1$, Kemerin ekseni daire şeklinde olduğu için

$$y_1 = \sqrt{R^2 - (\frac{L}{2} - x_1)^2} - R + f \; ; \quad R = \frac{f}{2} + \frac{L^2}{8f} = \frac{6}{2} + \frac{30^2}{8.6} = 21{,}75\ m.$$

$$y_1 = \sqrt{(21{,}75)^2 - (\frac{30}{2} - 3)^2} - 21{,}75 + 6 = 2{,}39\ m. \quad f' = 6 - 2{,}39 = 3{,}61\ m,$$

$$H = \frac{1968{,}75}{3{,}61} = 545{,}36\ kN \ \ olarak\ elde\ edilmektedir.$$

c) Kemerin kesitlerinde iç kuvvetlerin değerleri Örnek 7.1'de olduğu gibi belirlenir. Bu örnekte ise uygun kirişin 10 kesitinde M_x^0 ve T_x^0'ın değerleri hesaplanmıştır (Şekil 7.2.2b).

I-bölge $0 \le x_1 \le 15$

$$M_{x1}^0 = V_A^0.x_1 - q_1.\frac{x_1^2}{2} = (281{,}25).x_1 - 20.\frac{x_1^2}{2}, \quad T_{x1}^0 = V_A^0 - q_1.x_1 = 281{,}25 - 20.x_1.$$

$x_1 = 0 \Rightarrow \quad M_{x1}^0 = 0,\ T_{x1}^0 = 281{,}25\ kN. \quad x_1 = 3\ m \Rightarrow M_{x1}^0 = 753{,}75\ kN.m,\ T_{x1}^0 = 221{,}25\ kN.$

$x_1 = 6\ m \Rightarrow \quad M_{x1}^0 = 1327{,}5\ kN.m, \quad T_{x1}^0 = 161{,}25\ kN.$

$x_1 = 9\ m \Rightarrow \quad M_{x1}^0 = 1721{,}25\ kN.m, \ T_{x1}^0 = 101{,}25\ kN.$

$x_1 = 12\ m \Rightarrow \ M_{x1}^0 = 1935\ kN.m, \quad T_{x1}^0 = 41{,}25\ kN.$

$x_1 = 15\ m \Rightarrow \ M_{x1}^0 = 1968{,}75\ kN.m, \quad T_{x1}^0 = -18{,}75\ kN.$

II-bölge $15 \le x_2 \le 30$

$$M_{x2}^0 = V_A^0.x_2 - q_1.15.(x_2 - 7{,}5) - q_2.\frac{(x_2 - 15)^2}{2} = (281{,}25).x_2 - 300.(x_2 - 7{,}5) - 15.\frac{(x_2 - 15)^2}{2},$$

$$T_{x2}^0 = V_A^0 - q_1.15 - q_2.(x_2 - 15) = 281{,}25 - 20.15 - 15.(x_2 - 15) = -18{,}75 - 15.(x_2 - 15).$$

$x_2 = 15\ m \Rightarrow \quad M_{x2}^0 = 1968{,}75\ kN.m, \quad T_{x2}^0 = -18{,}75\ kN.$

$x_2 = 18\ m \Rightarrow \quad M_{x2}^0 = 1845\ kN.m, \qquad T_{x2}^0 = -63{,}75\ kN.$

$x_2 = 21\ m \Rightarrow \quad M_{x2}^0 = 1586{,}25\ kN.m, \quad T_{x2}^0 = -108{,}75\ kN.$

$x_2 = 24\ m \Rightarrow \quad M_{x2}^0 = 1192{,}5\ kN.m, \quad T_{x2}^0 = -153{,}75\ kN.$

$x_2 = 27\ m \Rightarrow \quad M_{x2}^0 = 633{,}75\ kN.m, \quad T_{x2}^0 = -198{,}75\ kN.$

$x_2 = 30\ m \Rightarrow \quad M_{x2}^0 = 0, \qquad\qquad T_{x2}^0 = -243{,}75\ kN.$

Elde edilmiş değerlere göre uygun kirişin M_0 ve T_0 diyagramları Şekil 7.2.2 c ve d'de çizilmiştir. Bundan sonra kemerin kesitlerindeki kesit tesirleri olan M, T ve N değerlerinin hesaplanması aşağıda verilmiş formüllerle Tablo 7.2.1'de yapılmıştır.
Gergi bağlanmış kesitlerden aşağıda kalan kesitler için:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= M_x^0 \\ T_x &= T_x^0.\cos\varphi_x \\ N_x &= -T_x^0.\sin\varphi_x \end{aligned}\right\} \qquad (7.2.1)$$

Gergi bağlanan ve gergiden yukarıda kalan kesitler için:

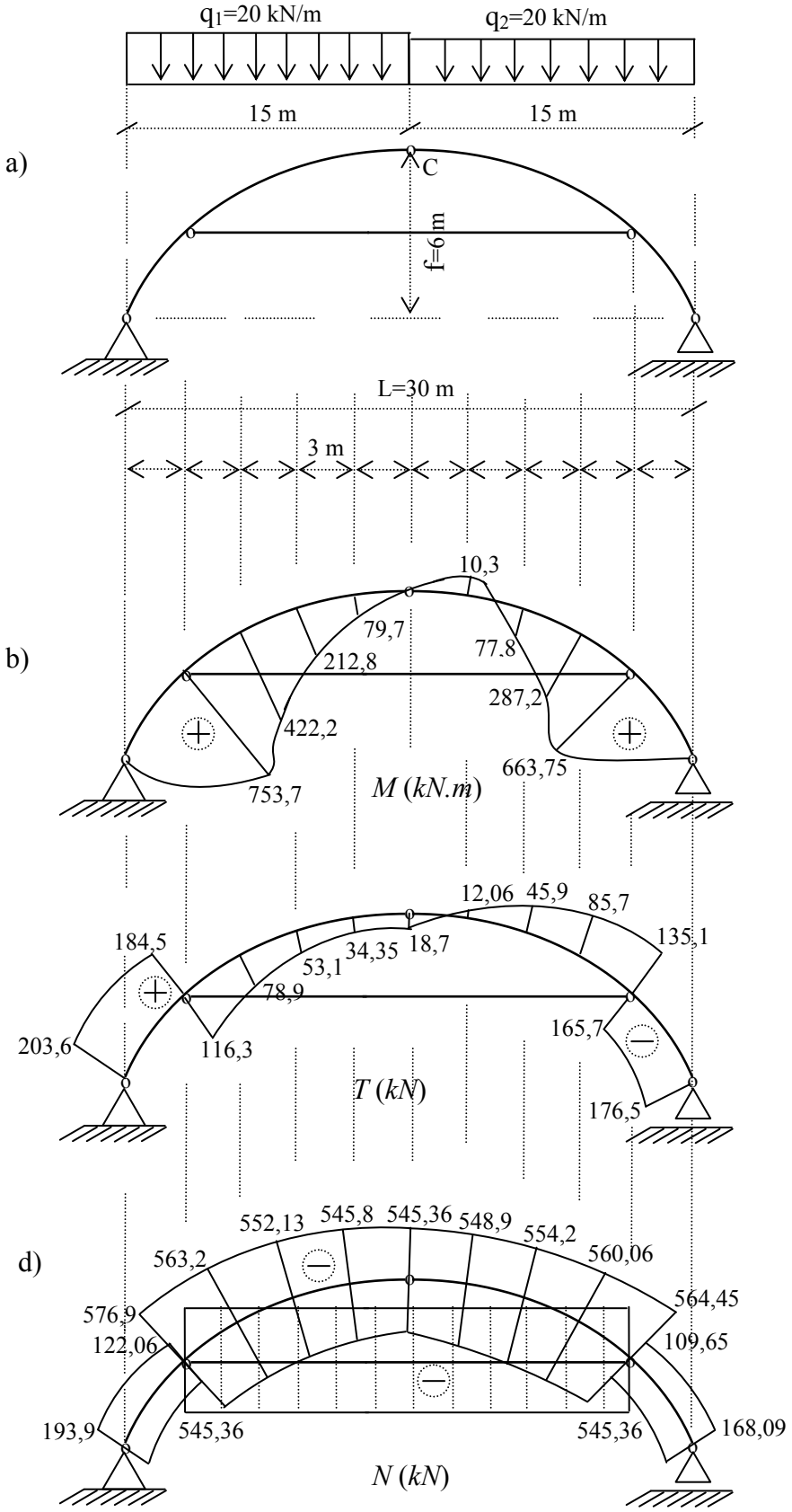
$$\left.\begin{aligned} M_x &= M_x^0 - H.(y_x - y_1) \\ T_x &= T_x^0.\cos\varphi_x - H.\sin\varphi_x \\ N_x &= -(T_x^0.\sin\varphi_x + H.\cos\varphi_x). \end{aligned}\right\} \qquad (7.2.2)$$

Bu ifadelerdeki y_x, $\cos\varphi_x$ *ve* $\sin\varphi_x$ kemerin eksen eğrisine uygun olarak aşağıdaki formüllerle belirlenmiştir.

$$\left.\begin{aligned} y_x &= \sqrt{R^2 - (\frac{L}{2} - x)^2} - R + f \\ R &= \frac{f}{2} + \frac{L^2}{8f}, \\ \cos\varphi_x &= \frac{y + R - F}{R} \\ \sin\varphi_x &= \frac{L - 2x}{2R} \end{aligned}\right\} \qquad (7.2.3)$$

Tablo 7.2.1

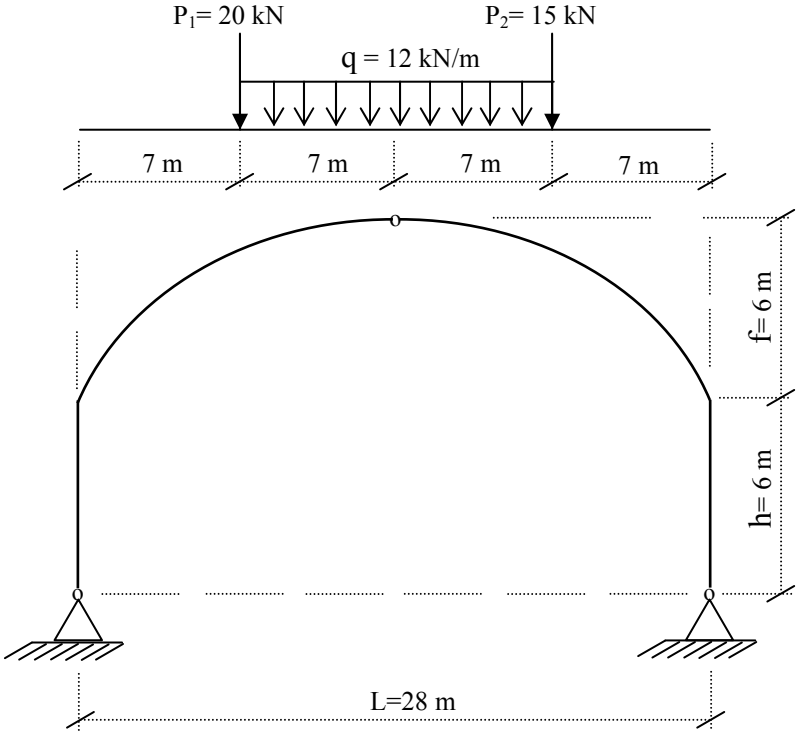
x (m)	y_x (m)	cosφ$_x$	sinφ$_x$	M_x^0 ($kN.m$)	H (kN)	H.(yx-2,39) ($kN.m$)	M_x ($kN.m$)	T_x^0 (kN)	T_x^0cosφ$_x$ (kN)	H.sinφ$_x$ (kN)	T_x (kN)	T_x^0sinφ$_x$ (kN)	H.cosφ$_x$ (kN)	N_x (kN)
0	0	0,724	0,689	0	–	–	0	281,25	203,653	–	203,65	193,95	–	-193,95
3	2,39	0,834	0,552	753,75	–	–	753,75	221,25	184,527	–	184,53	122,06	–	-122,06
					545,36	0				300,87	-116,35		454,84	-576,9
6	4,05	0,910	0,414	1327,5	545,36	905,297	422,2	161,25	146,786	225,67	-78,88	66,725	496,44	-563,16
9	5,156	0,961	0,275	1721,2	545,36	1508,467	212,78	101,25	97,321	150,44	-53,121	27,93	524,2	-552,13
12	5,792	0,99	0,138	1935	545,36	1855,314	79,685	41,25	40,854	75,205	-34,35	5,688	540,12	-545,81
15	6	1	0	1968,75	545,36	1968,75	0	-18,75	-18,75	0	-18,75	0	545,36	-545,36
18	5,792	0,99	-0,138	1845	545,36	1855,314	-10,32	-63,75	-63,138	-75,205	12,067	8,791	540,12	-548,91
21	5,156	0,961	-0,275	1586,2	545,36	1508,467	77,784	-108,75	-104,53	150,44	45,912	30	524,2	-554,2
24	4,05	0,910	-0,414	1192,5	545,36	905,297	287,20	-153,75	-139,95	-225,67	85,711	63,621	496,44	-560,06
27	2,39	0,834	-0,552	663,75	545,36	0	663,75	-198,75	-165,76	-300,87	135,113	109,65	454,84	-564,49
					–	–				–	-165,76		–	-109,65
30	0	0,724	-0,689	0	–	–	0	-243,75	-176,499	–	-176,49	168,09	–	-168,09



Şekil 7.2.3. a) Verilmiş sistem, b) *M* diyagramı, c) *T* diyagramı, d) *N* diyagramı.

Çizilmiş diyagramlardan görüldüğü gibi *H*'ın uygulandığı kesitlerde *T* diyagramında $H.sin\varphi_x$, *N* diyagramında ise $H.cos\varphi_x$ kadar atlama vardır. Bunlar, diyagramların sağlama şartlarındandır.

Örnek 7.3. Boyutları ve yükleme durumu Şekil 7.3.1'de verilen, ekseni 2. dereceden parabol şeklinde olan kolonlu üç mafsallı kemerin
a) Kinematik analizini yapınız,
b) Kesitlerinde eğilme momenti, kesme kuvveti ve normal kuvvet değerlerini hesaplayınız,
c) Hesaplanmış değerlere göre *M*, *T* ve *N* diyagramlarını çiziniz.



Şekil 7.3.1

<u>*Çözüm*</u>: a) Sistemin kinematik tahlili: W = 3.2 - 2.1 - 4 = 0'dır ve Örnek 7.1'de yapılmış açıklamaya dayanarak sistemin yararlı bünyeye sahip olduğu açıktır.

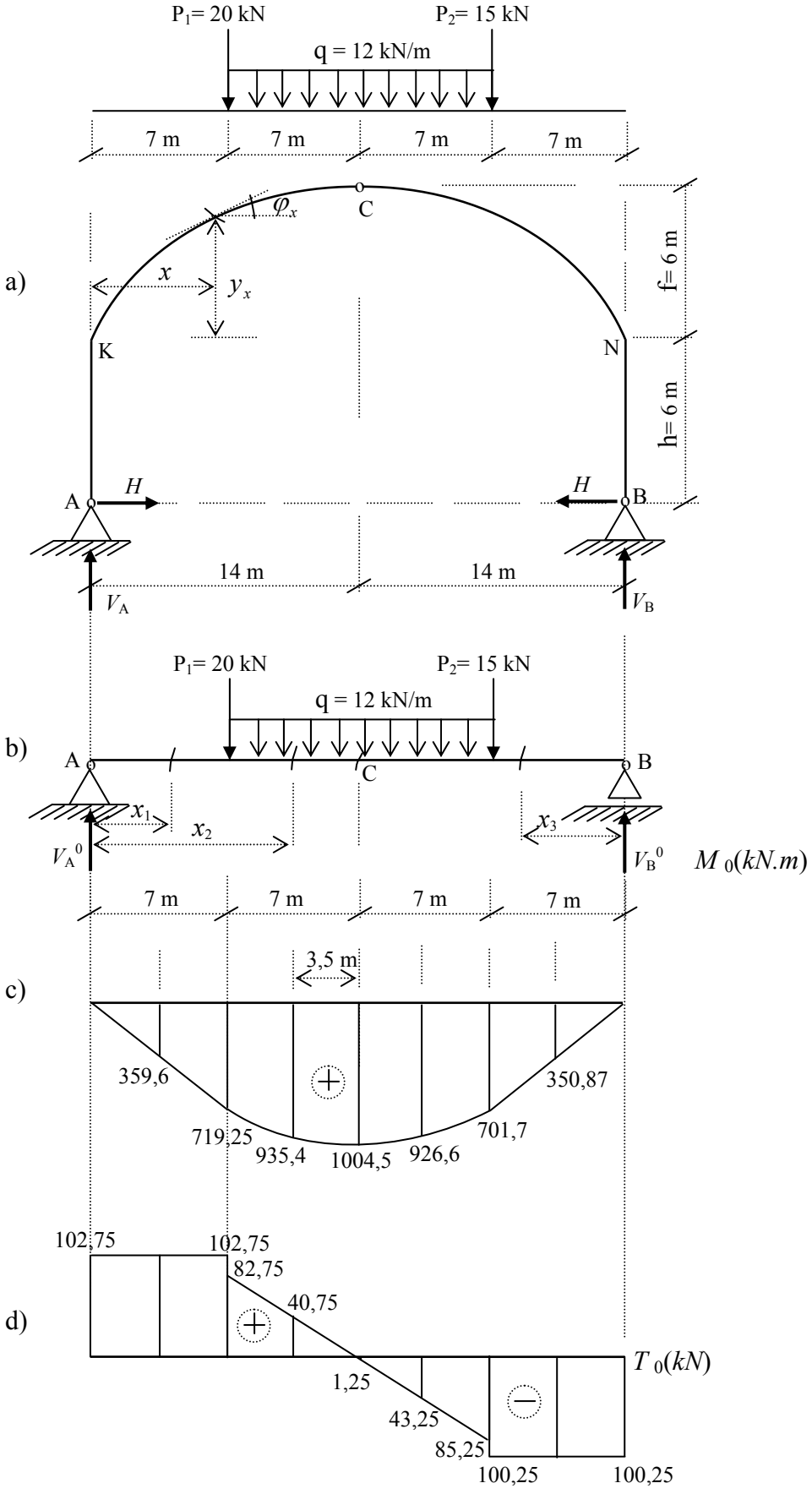
b) Sistemin kesitlerinde iç kuvvetlerin değerlerinin hesaplanmasına yine mesnet tepkilerinin belirlenmesiyle başlanır (Şekil 7.3.2 a,b).

$$\sum M_B = V_A.28 - P_1.21 - q.14.14 - P_2.7 = 0 \Rightarrow$$

$$V_A = V_A^0 = \frac{20.21 + 12.14.14 + 15.7}{28} = 102{,}75\ kN.$$

$$\sum M_A = -V_B.28 + P_2.21 + q.14.14 + P_1.7 = 0 \Rightarrow$$

$$V_B = V_B^0 = \frac{15.21 + 12.14.14 + 20.7}{28} = 100{,}25\ kN.$$


a)
P1= 20 kN
P2= 15 kN
q = 12 kN/m
7 m
7 m
7 m
7 m
φx
C
x
yx
f= 6 m
h= 6 m
K
N
A
H
H
B
14 m
14 m
VA
VB
b)
P1= 20 kN
P2= 15 kN
q = 12 kN/m
A
C
B
x1
x2
x3
VA0
VB0
M 0(kN.m)
7 m
7 m
7 m
7 m
c)
3,5 m
359,6
719,25
935,4
1004,5
926,6
701,7
350,87
d)
102,75
102,75
82,75
40,75
1,25
43,25
85,25
100,25
100,25
T 0(kN)

Şekil 7.3.2. a) Verilen sistem, b) Uygun kiriş, c) M_0 diyagramı, d) T_0 diyagramı.

Sağlama:

$\sum Y = V_A + V_B - P_1 - P_2 - q.14 = 0 \Rightarrow \quad 102{,}75 + 100{,}25 - 20 - 15 - 12.14 = 0.$

İtki kuvvetleri

$$H = \frac{M_C^0}{f+h}, \quad M_C^0 = V_A^0.14 - P_1.7 - q.7.(3{,}5) = (102{,}75).14 - 20.7 - 12.7.(3{,}5) = 1004{,}5\ kN.m$$

Veri

$$H = \frac{1004{,}5}{6+6} = 83{,}70833\ kN.$$

lmiş üç mafsallı sistemin kemer kısmının kesitlerinde kesit tesirlerinin değerleri aşağıdaki ifadelerle hesaplanacaktır.

$$\left.\begin{aligned} M_x &= M_x^0 - H.(y_x + h) \\ T_x &= T_x^0.\cos\varphi_x - H.\sin\varphi_x \\ N_x &= -(T_x^0 \sin\varphi_x + H.\cos\varphi_x) \end{aligned}\right\} \qquad (7.3.1)$$

(7.3.1) ifadelerinde yer alan y_x, $cos\varphi_x$ ve $sin\varphi_x$ büyüklükleri kemerin eksen eğrisi 2^{0}'den parabol olduğu için aşağıdaki formüllerle hesaplanır

$$\left.\begin{aligned} y_x &= \frac{4.f.x}{L^2}(L-x) = \frac{4.6.x}{28^2}(28-x) \\ tg\varphi_x &= y' = \frac{4f}{L^2}(L-2x) = \frac{4.6}{28^2}(28-2x) \\ \cos\varphi_x &= \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi_x}} \\ \sin\varphi_x &= \cos\varphi_x.tg\varphi_x \end{aligned}\right\} \qquad (7.3.2)$$

(7.3.1) ifadelerinden görüldüğü gibi uygun kirişin kesitlerinde kesit tesirleri olan M_x^0 ve T_x^0'ın belirlenmesi ön şarttır. Uygun kirişin kesitlerindeki tesirlerin hesabı aşağıda verilmektedir.

I-bölgede $\quad 0 \le x_1 \le 7$

$M_{x1}^0 = V_A^0.x_1 = (102{,}75).x_1, \quad T_0 = V_A^0 = 102{,}75\ kN.$

$x_1 = 0 \Rightarrow M_{x1}^0 = 0. \quad x_1 = 3{,}5\ m \Rightarrow \quad M_{x1}^0 = 359{,}625\ kN.m.$

$x_1 = 7\ m \Rightarrow M_{x1}^0 = 719{,}25\ kN.m.$

II-bölgede $\quad 7 \le x_2 \le 21$

$$M_{x2}^0 = V_A^0.x_2 - P_1.(x_2 - 7) - q.\frac{(x_2 - 7)^2}{2} = (102{,}75).x_2 - 20.(x_2 - 7) - 12.\frac{(x_2 - 7)^2}{2},$$

$$T_{x2}^0 = V_A^0 - P_1 - q.(x_2 - 7) = 102{,}75 - 20 - 12(x_2 - 7) = 82{,}75 - 12.(x_2 - 7).$$

$x_2 = 7\ m \Rightarrow \quad M_{x2}^0 = 719{,}25\ kN.m, \quad T_{x2}^0 = 82{,}75\ kN.$

$x_2 = 10{,}5\ m \Rightarrow \quad M_{x2}^0 = 935{,}375\ kN.m, \quad T_{x2}^0 = 40{,}75\ kN.$

$x_2 = 14\ m \Rightarrow \quad M_{x2}^0 = 1004{,}5\ kN.m, \quad T_{x2}^0 = -1{,}25\ kN.$

$x_2 = 17{,}5\ m \Rightarrow \quad M_{x2}^0 = 926{,}625\ kN.m, \quad T_{x2}^0 = -43{,}25\ kN.$

$x_2 = 21\ m \Rightarrow \quad M_{x2}^0 = 701{,}75\ kN.m, \quad T_{x2}^0 = 85{,}25\ kN.$

III-bölgede $\quad 0 \le x_3 \le 7$

$$M_{x3}^0 = V_B^0.x_3 = (100{,}25).x_3, \quad T_0 = -V_B^0 = -100{,}25\ kN.$$

$x_3 = 0 \Rightarrow M_{x3}^0 = 0. \quad x_3 = 3{,}5\ m \Rightarrow M_{x3}^0 = 350{,}875\ kN.m. \quad x_3 = 7\ m \Rightarrow M_{x3}^0 = 701{,}75\ kN.m$

Elde edilmiş değerlere göre uygun kirişin M_0 ve T_0 diyagramları sırasıyla Şekil 7.3.2 c ve d'de çizilmiştir.

Üç mafsallı sistemin kemer kısmı için M, T ve N diyagramlarının çizilmesi için gereken hesaplama işlemleri (7.3.2) ve (7.3.1) ifadelerinden yararlanarak Tablo 7.3.1'de yapılmıştır. Kolon kısımları için ise hesaplamalar çerçevelerdeki gibi yapılır.

AK kolonu için: $M_A = 0$, $T = -H = -\ 83{,}70833\ kN$ (kolon boyu sabit),

$N = -V_A = -102{,}75\ kN$ (kolon boyu sabit),

$M_K = -H\ .\ h = -\ (83{,}70833)\ .\ 6 = -\ 502{,}25\ kN.m$.

BN kolonu için $M_B = 0$, $T = H = 83{,}70833\ kN$ (kolon boyu sabit),

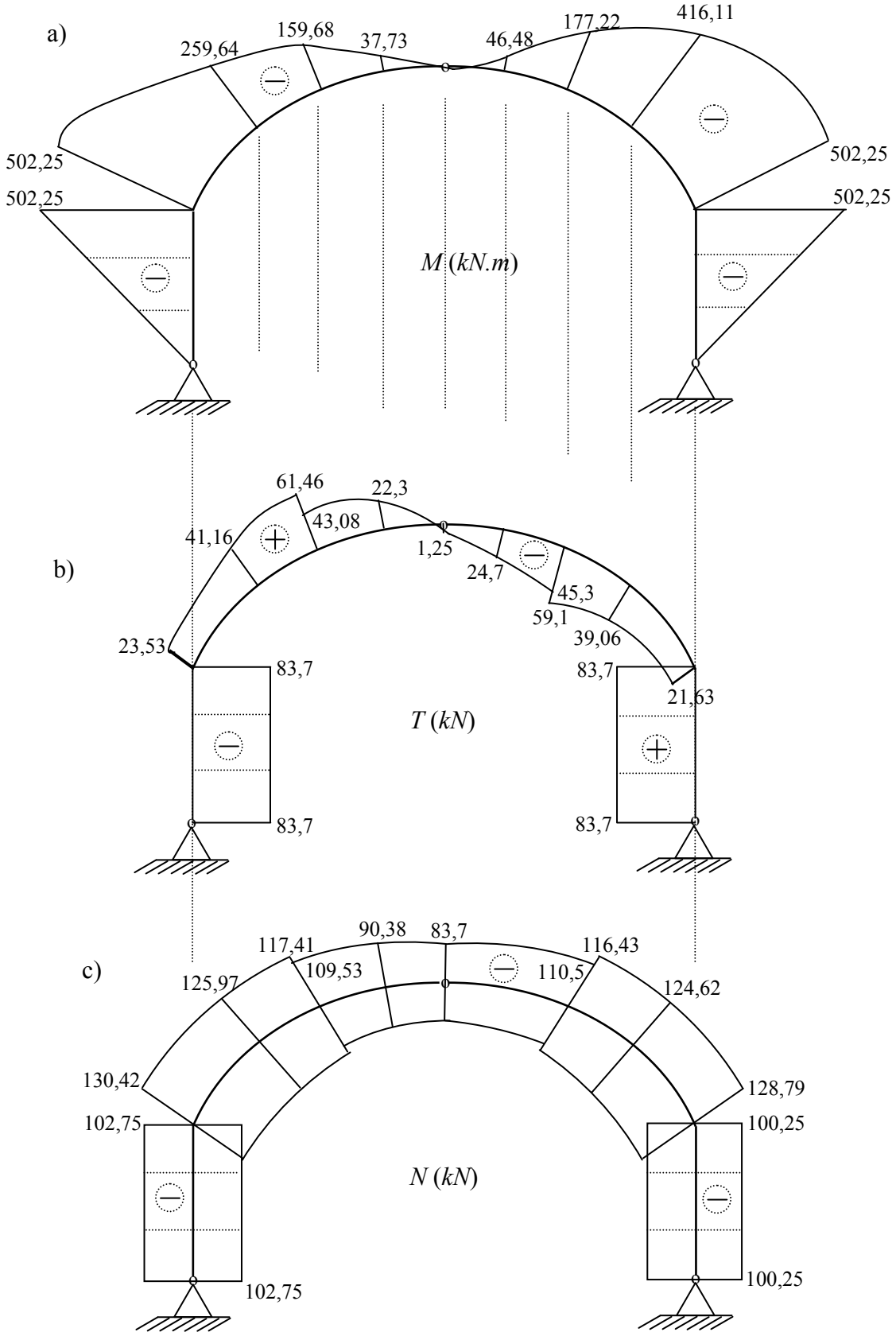
$N = -V_B = -100{,}25\ kN$ (sabittir),

$M_N = -H\ .\ h = -\ (83{,}70833)\ .6 = -502{,}25\ kN.m$.

Tablo 7.3.1

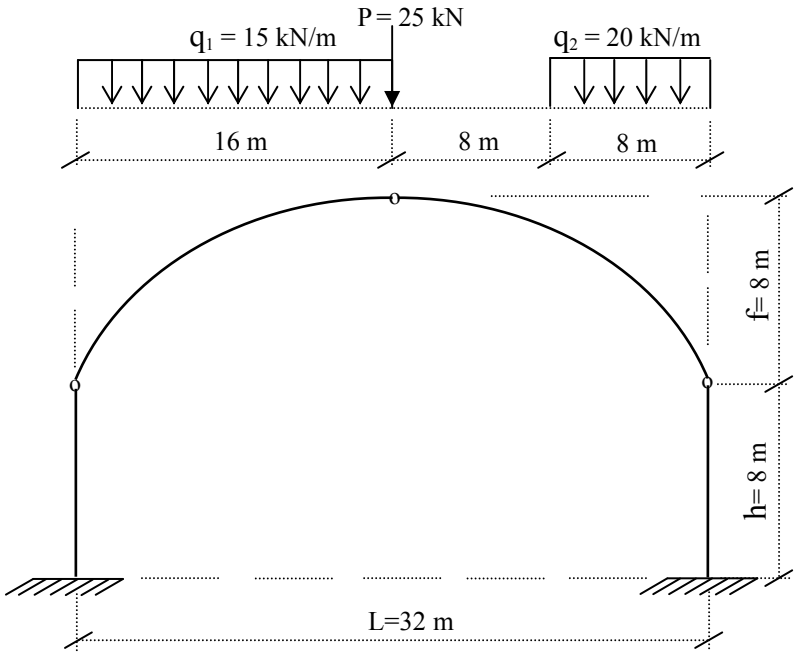
x (m)	y_x+6 (m)	tgφ_x	cosφ_x	sinφ_x	M_x^0 ($kN.$	H (kN)	$H.(\ y_x$+6) ($kN.m$)	M_x ($kN.m$)	T_x^0 (kN)	$T_x^0 cos\varphi_x$ (kN)	$H.sin\varphi_x$ (kN)	T_x (kN)	$T_x^0.sin\varphi_x$ (kN)	$H.cos\varphi_x$ (kN)	N_x (kN)
0	6	0,857	0,759	0,651	0	83,708	502,25	-502,25	102,75	78,013	54,476	23,536	66,868	63,555	-130,42
3,5	8,625	0,643	0,841	0,541	359,6	83,708	721,98	-259,68	102,75	86,431	45,265	41,165	55,562	70,413	-125,97
7	10,5	0,428	0,919	0,394	719,2	83,708	878,94	-159,68	102,75	94,44	32,974	61,476	40,475	76,939	-117,41
									82,75	76,058		43,08	32,596		-109,54
10,5	11,62	0,214	0,978	0,209	935,4	83,708	973,11	-37,73	40,75	39,845	17,534	22,3	8,538	81,85	-90,39
14	12	0	1	0	1004,5	83,708	1004,4	0	-1,25	-1,25	0	-1,25	0	83,708	-83,708
17,5	11,62	-0,214	0,978	0,20	926,6	83,708	973,11	-46,484	-43,25	-42,289	-17,539	-24,75	9,062	81,85	-90,912
21	10,5	-0,428	0,9919	-0,394	701,7	83,708	878,94	-177,22	-85,25	-78,356	-32,974	-45,38	33,582	76,939	-110,52
									-100,25	-92,143		-59,169	39,49		-116,43
24,5	8,625	-0,643	0,841	0,54	305,87	83,708	721,98	-416,11	-100,25	-84,328	-45,265	-39,063	54,21	70,413	-124,62
28	6	-0,857	0,759	0,65	0	83,708	502,25	-502,25	-100,25	-76,115	-54,476	-21,64	65,242	63,555	-128,79

M, *T* ve *N*'nin tabloda hesaplanmış değerlerine göre diyagramları Şekil 7.3.3'de çizilmiştir.



Şekil 7.3.3. a) *M* diyagramı, b) *T* diyagramı, c) *N* diyagramı.

Örnek 7.4. Boyutları ve yükleme durumu Şekil 7.4.1'de görülen, temele ankastre bağlı kolonlar üzerine oturan daire eksenli üç mafsallı kemer için
a) Sistemin kinematik analizini yapınız,
b) Kemerin ve kolonların kesitlerinde kesit tesirlerinin değerlerini hesaplayınız,
c) Hesaplanmış değerlere göre sistemin *M*, *T* ve *N* diyagramlarını çiziniz.



Şekil 7.4.1

<u>Çözüm</u>: a) Sistemin kinematik analizi: W = 3.P – 2.m – C_m = 3.4 – 2.3 – 6 = 0 şartı sağlanmakta ve Şekil 7.4.1'den sistem taşıyıcı özelliğe sahip olduğu görülmektedir.

b) Sistemin kesitlerinde eğilme momenti, kesme kuvveti ve normal kuvvetin değerlerini belirlemek için, Gerber kirişlerdeki açıklamalara dayanarak önce Şekil 7.4.2b'de sistemin hesaplama şeması çizilmiştir Daha sonra önceki örneklerde olduğu gibi hesaplamaya mesnet tepkilerinin belirlenmesiyle başlanmıştır.

Mesnet tepkileri (Şekil 7.4.2b,c):

$$\sum m_2 = V_{m1}.32 - q_1.16.24 - P.16 - q_2.8.4 = 0 \Rightarrow$$

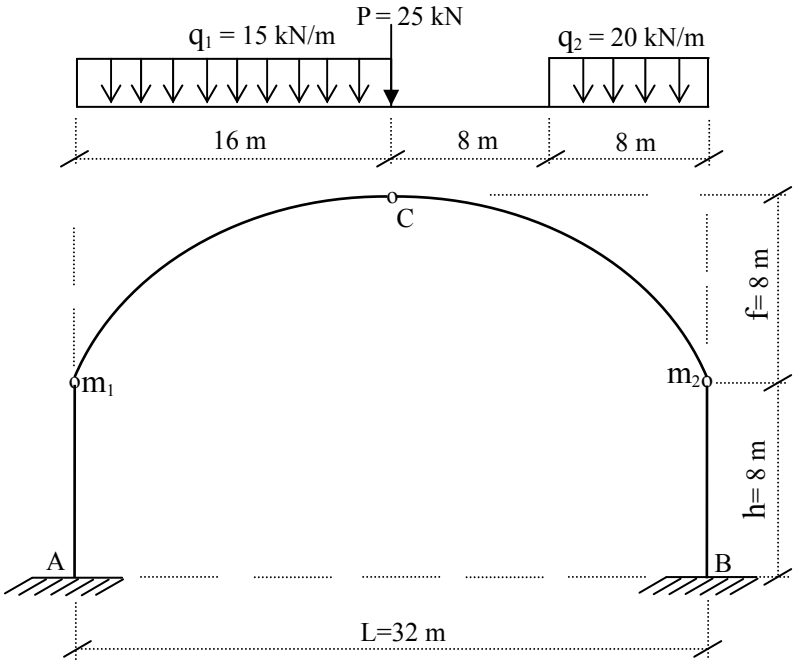
$$V_{m1} = V_{m1}^0 = \frac{15.16.24 + 25.16 + 20.8.4}{32} = 212{,}5\ kN$$

$$\sum m_1 = -V_{m2}.32 + q_2.8.28 + P.16 + q_1.16.8 = 0 \Rightarrow$$

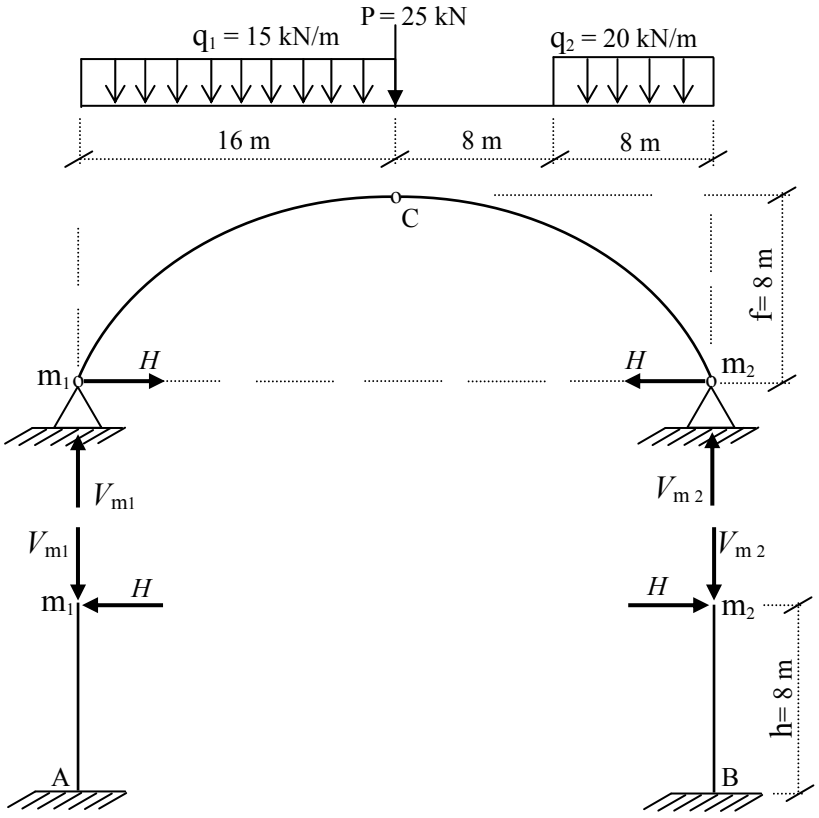
$$V_{m2} = V_{m2}^0 = \frac{20.8.28 + 25.16 + 15.16.8}{32} = 212{,}5\ kN.$$

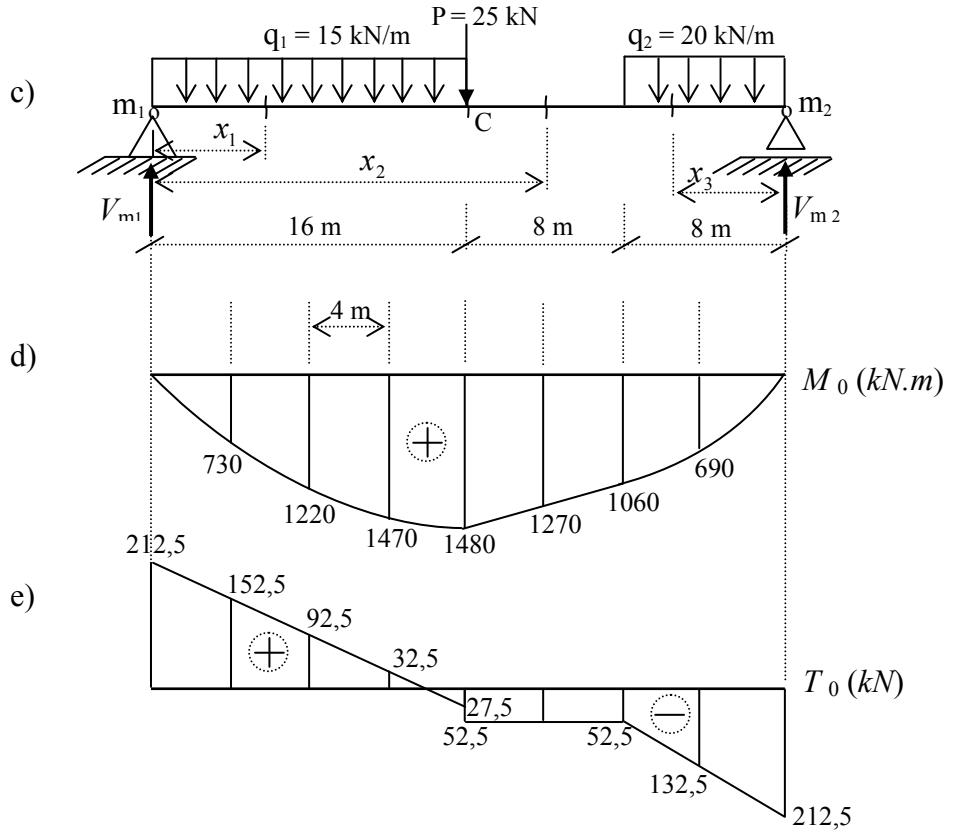
İtki kuvvetleri $H = \frac{M_C^0}{f}$,

a)


P = 25 kN
q1 = 15 kN/m
q2 = 20 kN/m
16 m
8 m
8 m
C
f= 8 m
m1
m2
h= 8 m
A
B
L=32 m

b)


P = 25 kN
q1 = 15 kN/m
q2 = 20 kN/m
16 m
8 m
8 m
C
f= 8 m
m1
H
H
m2
Vm1
Vm 2
Vm1
Vm 2
m1
H
H
m2
h= 8 m
A
B



Şekil 7.4.2. a) Üç mafsallı sistem, b) Hesaplama şeması, c) Uygun kiriş, d) M_0 diyagramı, e) T_0 diyagramı.

Sol taraftan bakıldığında (Şekil 7.4.2c)

$$M_C^0 = V_{m1}^0.16 - q_1.16.8 = (212{,}5) - 15.16.8 = 1480\ kN.m, \quad H = \frac{1480}{8} = 185\ kN.m.$$

Kemerin kesitlerinde kesit tesirlerinin

$$\left.\begin{aligned} M_x &= M_x^0 - H.y_x \\ T_x &= T_x^0.\cos\varphi_x - H.\sin\varphi_x \\ N_x &= -(T_x^0.\sin\varphi_x + H.\cos\varphi_x) \end{aligned}\right\} \qquad (7.4.1)$$

ifadeleriyle hesaplandığı önceki örneklerin çözümlerinden bellidir.

(7.4.1) ifadelerindeki y_x, $\cos\varphi_x$ ve $\sin\varphi_x$ kemerin eksen eğrisinin türüne (daire) bağlı olarak

$$\left.\begin{aligned} y_x &= \sqrt{R^2 - (\frac{L}{2} - x)^2} - R + f, \quad R = \frac{f}{2} + \frac{L^2}{8f} = \frac{8}{2} + \frac{32^2}{8.8} = 20\ m, \\ \cos\varphi_x &= \frac{y + R - f}{R}, \quad \sin\varphi_x = \frac{L - 2x}{2R}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.4.2)$$

ifadeleriyle hesaplanır.

Şimdi uygun kirişin kesitlerinde M_x^0 *ve* T_x^0 değerleri belirlenmelidir. Bunun için kirişin her bir bölgesinde (Şekil 7.4.2c) kesit tesirlerinin ifadeleri yazılıp, değerleri hesaplanır.

I-bölge $0 \le x_1 \le 16$

$$M_{x1}^0 = V_{m1}^0.x_1 - q_1.\frac{x_1^2}{2} = (212{,}5).x_1 - 15.\frac{x_1^2}{2}, \quad T_{x1}^0 = V_{m1}^0 - q_1.x_1 = 212{,}5 - 15.x_1 .$$

$x_1 = 0 \Rightarrow \quad M_{x1}^0 = 0, \quad T_{x1}^0 = 212{,}5\ kN.$

$x_1 = 4\ m \Rightarrow \quad M_{x1}^0 = 730\ kN.m, \quad T_{x1}^0 = 152{,}5\ kN.$

$x_1 = 8\ m \Rightarrow \quad M_{x1}^0 = 1220\ kN.m, \quad T_{x1}^0 = 92{,}5\ kN.$

$x_1 = 12\ m \Rightarrow \quad M_{x1}^0 = 1470\ kN.m, \quad T_{x1}^0 = 32{,}5\ kN.$

$x_1 = 16\ m \Rightarrow \quad M_{x1}^0 = 1480\ kN.m, \quad T_{x1}^0 = -27{,}5\ kN.$

II-bölge $16 \le x_2 \le 24$

$$M_{x2}^0 = V_{m1}^0.x_2 - q_1.16.(x_2 - 8) - P.(x_2 - 16) = (212{,}5).x_2 - 15.16.(x_2 - 8) - 25.(x_2 - 16),$$

$$T_{x2}^0 = V_{m1}^0 - q_1.16 - P = 212{,}5 - 15.16 - 25 = -52{,}5\ kN.$$

$x_2 = 16\ m \Rightarrow \quad M_{x2}^0 = 1480\ kN.m, \quad x_2 = 20\ m \Rightarrow \quad M_{x2}^0 = 1270\ kN.m.$

$x_2 = 24\ m \Rightarrow \quad M_{x2}^0 = 1060\ kN.m.$

III-bölge $0 \le x_3 \le 8$

$$M_{x3}^0 = V_{m2}^0.x_3 - q_2.\frac{x_3^2}{2} = (212{,}5).x_3 - 20.\frac{x_3^2}{2}, \quad T_{x3}^0 = -V_{m2}^0 + q_2.x_3 = -212{,}5 + 20.x_3$$

$x_3 = 0 \Rightarrow \quad M_{x3}^0 = 0, \quad T_{x3}^0 = -212{,}5\ kN.$

$x_3 = 4\ m \Rightarrow \quad M_{x3}^0 = 690\ kN.m, \quad T_{x3}^0 = -132{,}5\ kN.$

$x_3 = 8\ m \Rightarrow \quad M_{x3}^0 = 1060\ kN.m, \quad T_{x3}^0 = -52{,}5\ kN.$

Sistemin kolonları (Şekil 7.4.2b) için kesit tesirlerinin belirlenmesi:

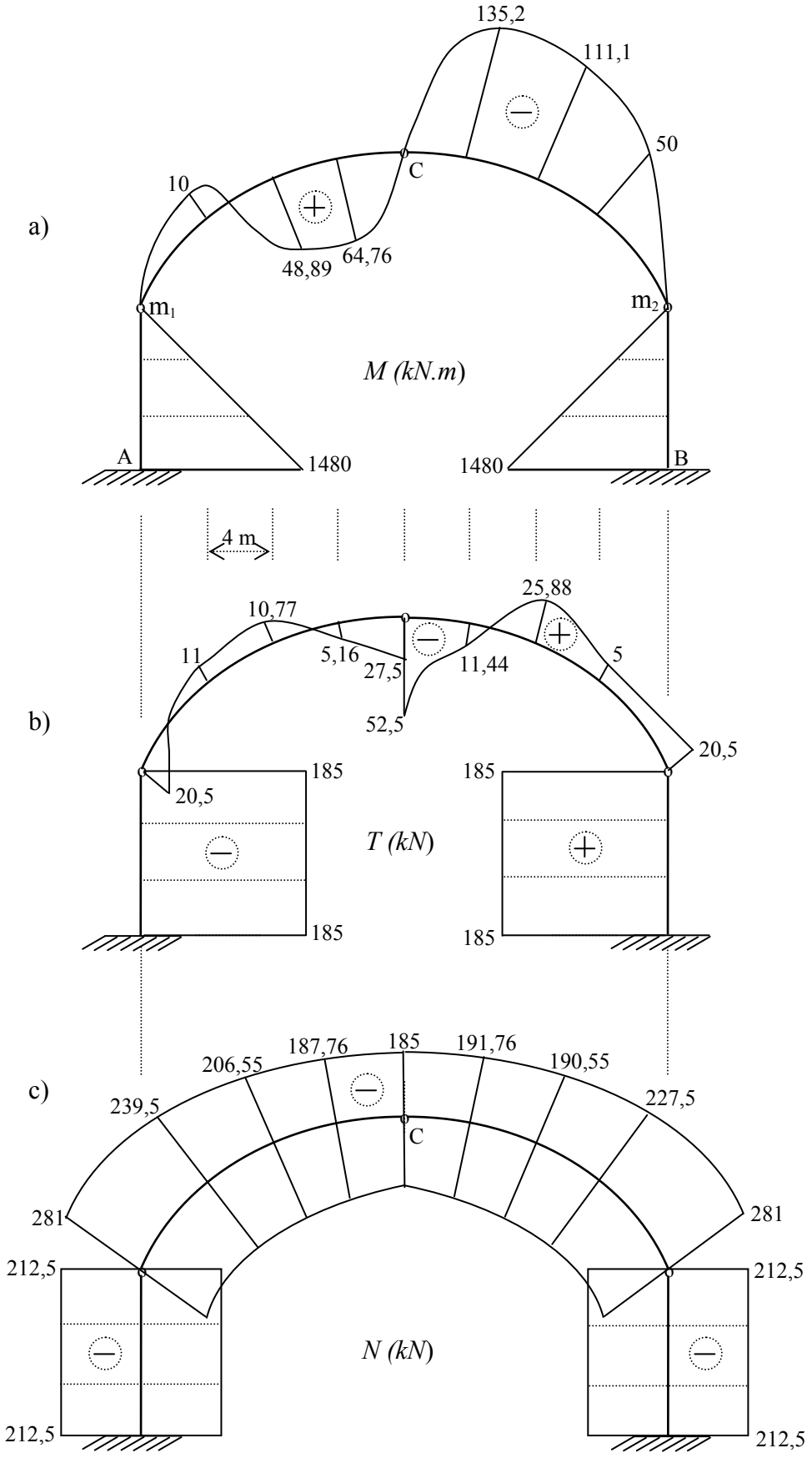
Am$_1$ kolonu: $M_{m1} = 0$, $T = -H = -185\ kN$ (kolon boyunca sabit), $N = -V_{m1}{}^0 = -212{,}5\ kN$,
$M_A = H.8 = 185 . 8 = 1480\ kN.m$.

Bm$_2$ kolonu: $M_{m2} = 0$, $T = H = 185\ kN$ (kolon boyunca sabit), $N = -V_{m2}{}^0 = -212{,}5\ kN$,
$M_B = H.8 = 185 . 8 = 1480\ kN.m$.

Sistemin kemer kısmının kesitlerinde *M*, *T* ve *N* değerlerinin hesaplanması (7.4.2) ve (7.4.1) formüllerinden yararlanarak Tablo 7.4.1'de yapılmıştır.

Tablo 7.4.1

x (m)	y (m)	$\cos\varphi_x$	$\sin\varphi_x$	M_x^0 (kN.m)	H (kN)	$H.y_x$ ($kN.m$)	M_x (kN.m)	T_x^0 (kN)	$T_x^0\cos\varphi_x$ (kN)	$H\sin\varphi_x$ (kN)	T_x (kN)	$T_x^0\sin\varphi_x$ (kN)	$H\cos\varphi_x$ (kN)	N_x (kN)
0	0	0,6	0,8	0	185	0	0	212,5	127,5	148	-20,5	170	111	-281
4	4	0,8	0,6	730	185	740	-10	152,5	122	111	11	91,5	148	-239,5
8	6,33	0,916	0,4	1220	185	1171,1	48,89	92,5	84,77	74	10,77	37	169,55	-206,55
12	7,596	0,979	0,2	1470	185	1405,2	64,76	32,5	31,84	37	-5,16	6,5	181,26	-187,76
16	8	1	0	1480	185	1480	0	-27,5 -52,5	-27,5 -52,5	0	-27,5 -52,5	0	185	-185
20	7,596	0,979	-0,2	1270	185	1405,2	-135,2	-52,5	-51,44	-37	-14,44	10,5	181,2	-191,76
24	6,33	0,916	-0,4	1060	185	1171,1	-111,1	-52,5	-48,116	-74	25,88	21	169,55	-190,55
28	4	0,8	-0,6	690	185	740	-50	-132,5	-106	-111	5	79,5	148	-227,5
32	0	0,6	-0,8	0	185	0	0	-212,5	-127,5	-148	20,5	170	111	-281



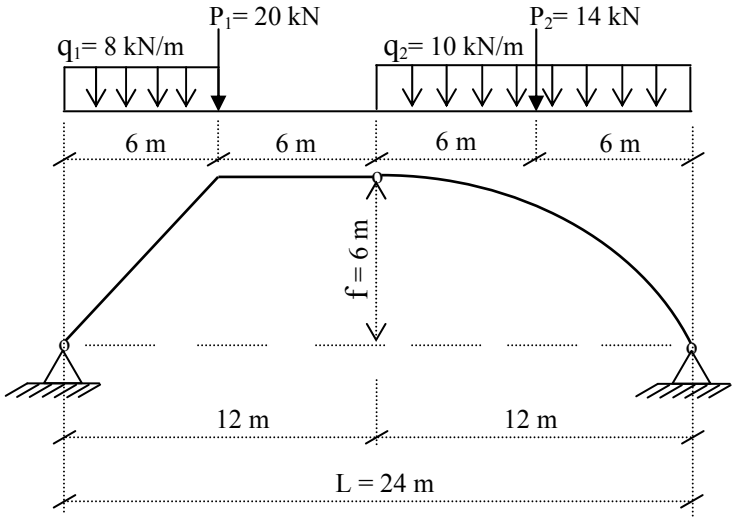
Şekil 7.4.3. a) *M* diyagramı, b) *T* diyagramı, c) *N* diyagramı.

Örnek 7.5. Boyutları ve yükleme durumu Şekil 7.5.1'de verilmiş, mafsaldan sol tarafta kalan parçası kırık eksenli, sağ tarafta kalan parçası ise 2^0 'den parabol eğrisi olan üç mafsallı sistemin

a) Kinematik tahlilini yapınız,

b) Kesitlerinde kesit tesirlerinin değerlerini hesaplayınız,

c) Hesaplanmış değerlere göre *M*, *T* ve *N* diyagramlarını çiziniz.



Şekil 7.5.1

<u>*Çözüm*</u>: a) Sistemin kinematik tahlili: W = 3.2 – 2.1 – 4 = 0 ve sistemin parçaları kendi aralarında ve temelle bir doğru üzerinde olmayan 3 adet mafsalla bağlandığı için (Şekil 7.5.1) taşıyıcı bünyeye sahip olup geometrik değişmezdir.

b) Verilmiş olan üç mafsallı sistemin kesitlerinde iç kuvvetlerin değerlerini hesaplamak için (7.3) ifadelerine dayanarak, önce sisteme uygun kirişin kesitlerinde M_0 ve T_0 'ın değerleri hesaplanır (Şekil 7.5.2b).

Mesnet tepkilerinin hesabı (Şekil 7.5.2a,b):

$$\sum M_B = V_A.24 - q_1.6.21 - P_1.18 - q_2.12.6 - P_2.6 = 0 \Rightarrow$$

$$V_A = V_A^0 = \frac{8.6.21 + 20.18 + 10.12.6 + 14.6}{24} = 90{,}5\ kN.$$

$$\sum M_A = -V_B.24 + q_2.12.18 + P_2.18 + P_1.6 + q_1.6.3 = 0 \Rightarrow$$

$$V_B = V_B^0 = \frac{10.12.18 + 14.18 + 20.6 + 8.6.3}{24} = 111{,}5\ kN.$$

Sağlama:

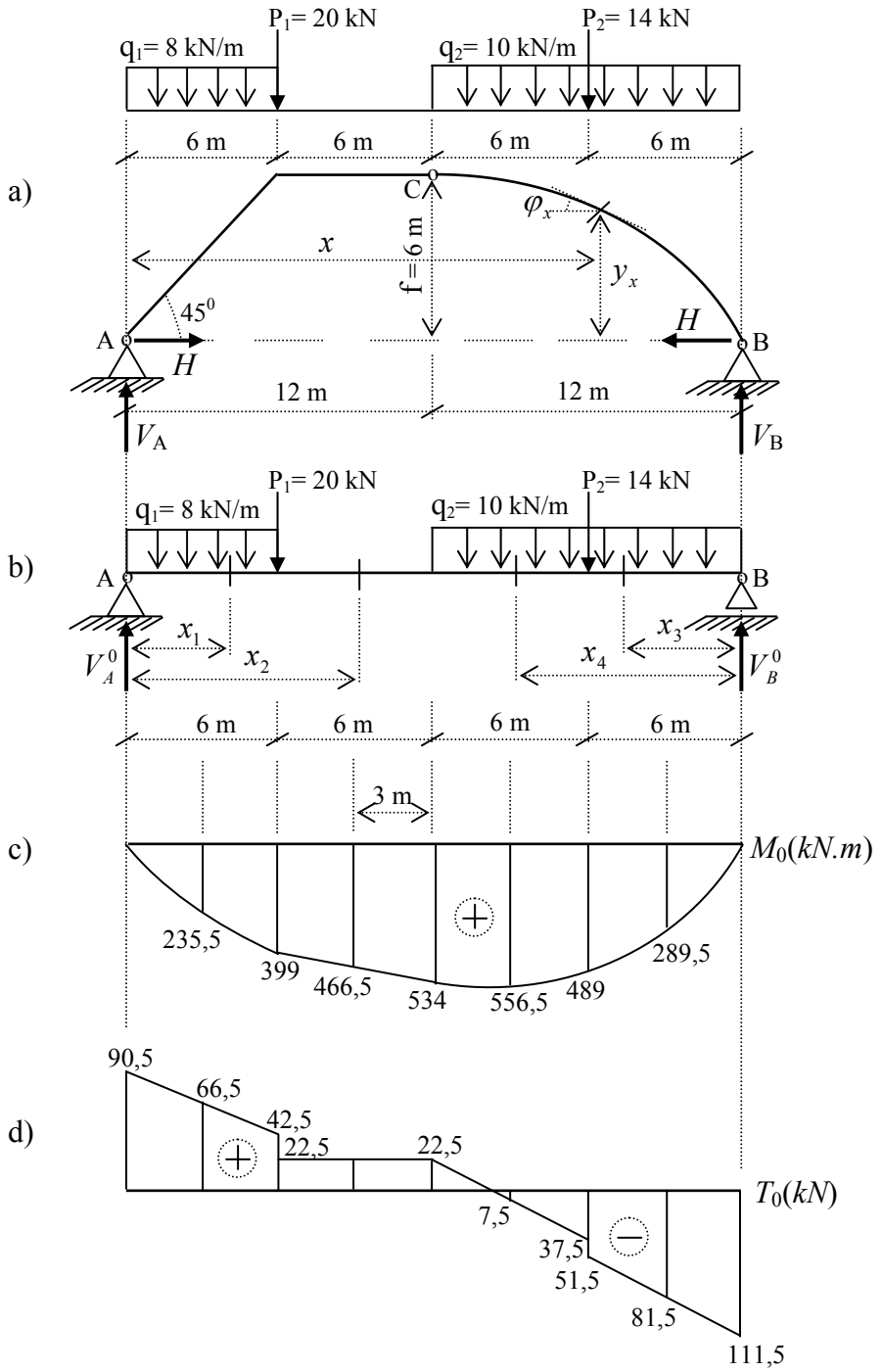
$$\sum Y = V_A^0 - q_1.6 - P_1 - q_2.12 - P_2 + V_B^0 = 0 \quad 90{,}5 - 8.6 - 20 - 10.12 - 14 + 111{,}5 = 0.$$

İtki kuvveti (yatay tepki):

$$H = \frac{M_C^0}{f};$$

$$M_C^0 = V_a^0.12 - q_1.6.9 - P_1.6 = (90{,}5).12 - 8.6.9 - 20.6 = 534\ kN.m,$$

$$H = \frac{M_C^0}{f} = \frac{534}{6} = 89\ kN.$$



Şekil 7.5.2. a) Verilmiş sistem, b) Uygun kiriş, c) M_0 diyagramı, d) T_0 diyagramı.

Uygun kirişin (Şekil 7.5.2 b) her bir bölgesi için M_0 ve T_0 'ın ifadeleri yazılıp, gereken kesitlerde değerleri hesaplanmıştır.

$0 \le x_1 \le 6$

$$M_{x1}^0 = V_B^0 . x_1 - q_1 . \frac{x_1^2}{2} = (90{,}5) . x_1 - 8 . \frac{x_1^2}{2}; \quad T_{x1}^0 = V_A^0 - q_1 . x_1 = 90{,}5 - 8 . x_1 .$$

$x_1 = 0 \Rightarrow \quad M_{x1}^0 = 0, \quad T_{x1}^0 = 90{,}5\ kN. \quad x_1 = 3\ m \Rightarrow \quad M_{x1}^0 = 235{,}5\ kN.m, \quad T_{x1}^0 = 66{,}5\ kN.$

$x_1 = 6\ m \Rightarrow \quad M_{x1}^0 = 399\ kN.m, \quad T_{x1}^0 = 42{,}5\ kN.$

$6 \le x_2 \le 12$

$$M_{x2}^0 = V_A^0 . x_2 - q_1 . 6 . (x_2 - 3) - P_1 . (x_2 - 6) = (90{,}5) . x_2 - 48 . (x_2 - 3) - 20 . (x_2 - 6),$$

$$T_0 = V_A^0 - q_1 . 6 - P_1 = 90{,}5 - 8 . 6 - 20 = 22{,}5\ kN.$$

$x_2 = 6\ m \Rightarrow \quad M_{x2}^0 = 399\ kN.m. \quad x_2 = 9\ m \Rightarrow \quad M_{x2}^0 = 466{,}5\ kN.m.$

$x_2 = 12\ m \Rightarrow \quad M_{x2}^0 = 534\ kN.m.$

$0 \le x_3 \le 6$

$$M_{x3}^0 = V_B^0 . x_3 - q_2 . \frac{x_3^2}{2} = (111{,}5) . x_3 - 10 . \frac{x_3^2}{2}, \quad T_{x3}^0 = -V_B^0 + q_2 . x_3 = 111{,}5 - 10 . x_3 .$$

$x_3 = 0 \Rightarrow \quad M_{x3}^0 = 0, \quad T_{x3}^0 = -111{,}5\ kN.$

$x_3 = 3\ m \Rightarrow \quad M_{x3}^0 = 289{,}5\ kN.m, \quad T_{x3}^0 = -81{,}5\ kN.$

$x_3 = 6\ m \Rightarrow \quad M_{x3}^0 = 489\ kN.m, \quad T_{x3}^0 = -51{,}5\ kN.$

$6 \le x_4 \le 12$

$$M_{x4}^0 = V_B^0 . x_4 - q_2 . \frac{x_4^2}{2} - P_2 . (x_4 - 6) = (111{,}5) . x_4 - 10 . \frac{x_4^2}{2} - 14 . (x_2 - 6),$$

$$T_{x4}^0 = -V_B^0 + q_2 . x_4 + P_2 = -111{,}5 + 10 . x_4 + 14 = -97{,}5 + 10 . x_4 .$$

$x_4 = 6\ m \Rightarrow \quad M_{x4}^0 = 489\ kN.m, \quad T_{x4}^0 = -37{,}5\ kN.$

$x_4 = 9\ m \Rightarrow \quad M_{x4}^0 = 556{,}5\ kN.m, \quad T_{x4}^0 = -7{,}5\ kN.$

$x_4 = 12\ m \Rightarrow \quad M_{x4}^0 = 534\ kN.m, \quad T_{x4}^0 = 22{,}5\ kN.$

Elde edilmiş değerlere göre uygun kirişin M_0 ve T_0 diyagramları Şekil 7.5.2c ve d'de çizilmiştir.

Üç mafsallı sistemin kesitlerinde kesit tesirlerinin (M, T ve N) değerlerinin hesaplanması:

$$
\begin{aligned}
M_x &= M_x^0 - H.y_x \\
T_x &= T_x^0.\cos\varphi_x - H.\sin\varphi_x \\
N_x &= -(T_x^0.\sin\varphi_x + H.\cos\varphi_x)
\end{aligned}
\qquad (7.5.1)
$$

ifadeleri yardımıyla Tablo 7.5.1'de yapılmıştır. (7.5.1) formüllerindeki, sistemin eğri eksenli parçasının kesitlerinde y_x, $\cos\varphi_x$ ve $\sin\varphi_x$ aşağıda verilmiş olan ifadelerle belirlenir.

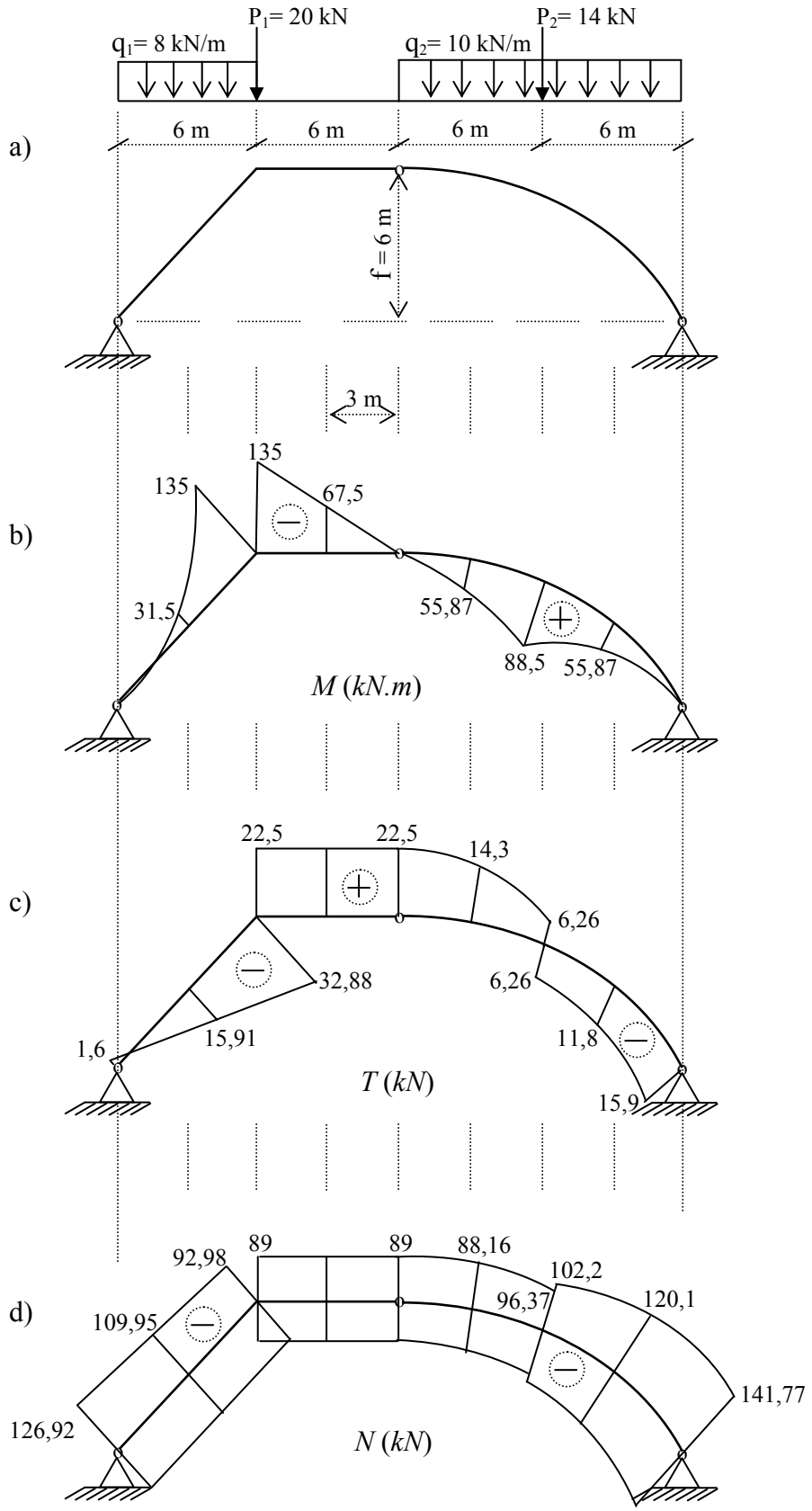
$$
\left.
\begin{aligned}
y_x &= \frac{4.f.x}{L^2}.(L-x) \\
tg\varphi_x &= (y_x)' = \frac{4.f}{L^2}.(L-2x) \\
\cos\varphi_x &= \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi_x}} \\
\sin\varphi_x &= \cos\varphi_x.tg\varphi_x
\end{aligned}
\right\}
\qquad (7.5.2)
$$

Sistemin sol parçası kırık eksenlidir ve kesit koordinatları bundan dolayı bellidir.

Tablo 7.5.1

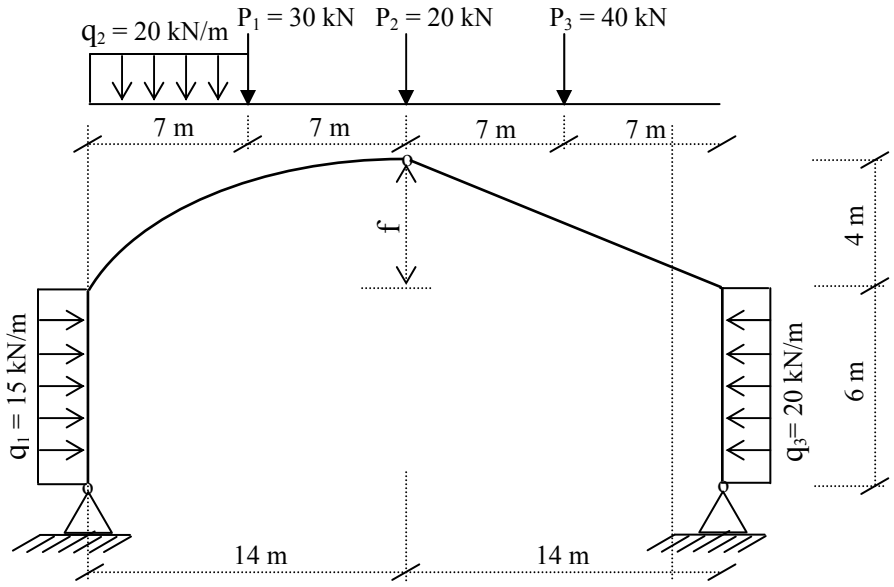
x (m)	y_x (m)	tgφ_x	cosφ_x	$.sin\varphi_x$	M_x^0 ($kN.m$)	H (kN)	$H.y_x$ ($kN.m$)	M_x ($kN.m$)	T_x^0 (kN)	T_x^0csφ_x (kN)	H .sinφ_x (kN)	T_x (kN)	T_x^0sinφ_x (kN)	H cosφ_x (kN)	N_x (kN)
0	0	1	0,7071	0,7071	0	89	0	0	90,5	63,99	62,93	1,606	63,99	62,93	-126,92
3	3	1	0,7071	0,707	235,5	89	267	-31,5	66,5	47,02	62,93	-15,9	47,02	62,93	-109,95
6	6	1	0,7071	0,7071	399	89	534	-135	42,5	30,05	62,93	-32,9	30,05	62,93	-92,98
		0	1	0					22,5	22,5	0	22,5	0	89	-89
9	6	0	1	0	466,5	89	534	-67,5	22,5	22,5	0	22,5	0	89	-89
12	6	0	1	0	534	89	534	0	22,5	22,5	0	22,5	0	89	-89
15	5,625	-0,25	0,9701	-0,242	556,5	89	500,625	55,87	-7,5	-7,276	-21,58	14,3	1,81	86,34	-88,166
18	4,5	-0,5	0,8944	-0,447	489	89	400,5	88,5	-37,5	-33,54	-39,8	6,26	16,77	79,60	-96,37
									-51,5	-46,06		-6,26	23,03		-102,2
21	2,625	-0,75	0,8	-0,6	289,5	89	233,625	55,87	-81,5	65,2	-53,4	-11,8	48,9	71,2	-120,1
24	0	-1	0,7071	-0,707		89	0	0	-111,5	-78,84	-62,93	-15,9	78,84	62,93	-141,77

M, *T* ve *N* ‘nin hesaplanmış değerlerine göre diyagramları Şekil 7.5.3b,c,d’de çizilmiştir.



Şekil 7.5.3. a) Verilmiş sistem, b) *M* diyagramı, c) *T* diyagramı, d) *N* diyagramı.

Örnek 7.6. Boyutları ve yükleme durumu Şekil 7.6.1'de verilmiş olan, mafsaldan sol tarafta kalan parçası ikinci dereceden parabol eksenli, sağ tarafta kalan parçası ise eğik bir doğru olan üç mafsallı sistem için aşağıdakiler istenmektedir:
a) Sistemin kinematik tahlilinin yapılması,
b) Sistemin kesitlerinde kesit tesirlerinin belirlenmesi,
c) İç kuvvetlerin belirlenmiş değerlerine göre sistemin *M*, *T* ve *N* diyagramlarının çizilmesi.



Şekil 7.6.1

<u>*Çözüm*:</u> a) Sistemin kinematik analizi önceki problemlerde olduğu gibi yapılır. W = 3.2 – 2.1 – 4 = 0 şartı sağlanmış ve Şekil 7.6.1'den görüldüğü gibi sistem taşıyıcı özelliğe sahip olup geometrik değişmezdir.

b) Sistemin kesitlerinde iç kuvvetlerin değerlerinin belirlenmesine yine mesnet tepkilerinin hesabı ile başlanır (Şekil 7.6.2).

$$\sum M_B = V_A.28 + q_1.6.3 - q_2.7.(24,5) - P_1.21 - P_2.14 - P_3.7 - q_3.6.3 = 0 \Rightarrow$$
$$V_A = \frac{-15.6.3 + 20.7.(24,5) + 30.21 + 20.14 + 40.7 + 20.6.3}{28} = 168,2143\ kN.$$

$$\sum M_A = -V_B.28 - q_3.6.3 + P_3.21 + P_2.14 + P_1.7 + q_2.7.(3,5) + q_1.6.3 = 0 \Rightarrow$$
$$V_B = \frac{-20.6.3 + 40.21 + 20.14 + 30.7 + 20.7.(3,5) + 15.6.3}{28} = 61,7857\ kN.$$

Sağlama:
$$\sum Y = V_A - q_2.7 - P_1 - P_2 - P_3 + V_B = 0 \Rightarrow$$
$$168,2143 - 20.7 - 30 - 20 - 40 + 61,7857 = 0$$

İtki kuvvetleri

$$\sum M_C^{Sol} = V_A.14 - q_1.6.7 - q_2.7.(10,5) - P_1.7 - H_A.10 = 0 \Rightarrow$$

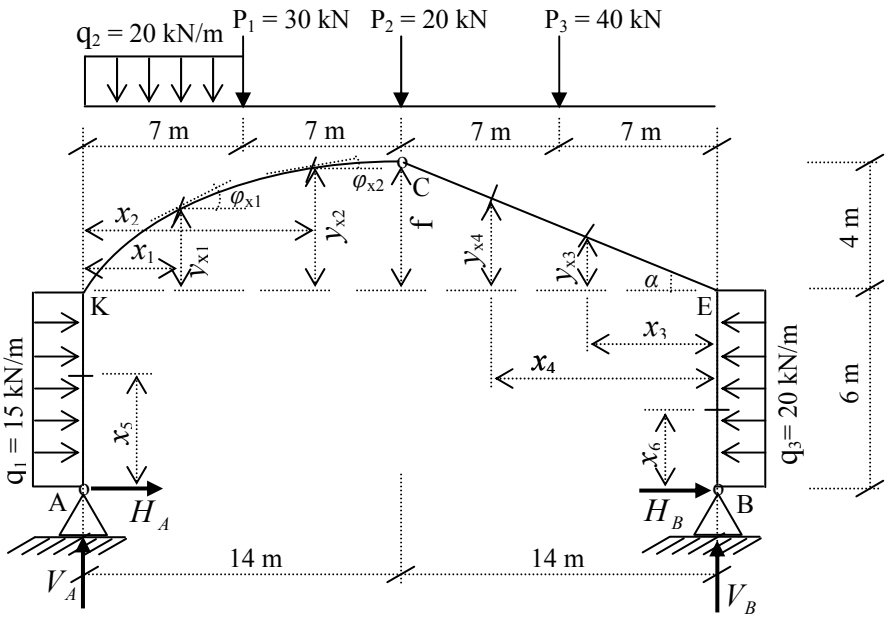
$$H_A = \frac{(168,2143). - 15.6.7 - 20.7.(10,5) - 30.7}{10} = 4,5\ kN.$$

$$\sum M_C^{Sağ} = -V_B.14 + q_3.6.7 + P_3.7 - H_B.10 = 0 \Rightarrow$$

$$H_B = \frac{(61,7857).14 + 20.6.7 + 40.7}{10} = 25,5\ kN.$$

Sağlama:

$$\sum X = q_1.6 + H_A + H_B - q_3.6 = 0 \Rightarrow \quad 15.6 + 4,5 + 25,5 - 20.6 = 0.$$



Şekil 7.6.2

Üç mafsallı sistemin her bir bölgesi (Şekil 7.6.2) için *M*, *T* ve *N*'nin ifadeleri yazılıp, istenen sayıda kesitteki değerleri hesaplanır.

$0 \le x_1 \le 7$

$$M_{x1} = V_A.x_1 - q_1.6.(3 + y_{x1}) - H_A.(6 + y_{x1}) - q_2.\frac{x_1^2}{2} =$$

$$(168,2143).x_1 - 15.6.(3 + y_{x1}) - 4,5.(6 + y_{x1}) - 20.\frac{x_1^2}{2},$$

$$T_{x1} = ((V_A - q_2.x_1).\cos\varphi_{x1} - (H_A + q_1.6).\sin\varphi_{x1}) =$$

$$((168,2143 - 20.x_1).\cos\varphi_{x1} - (4,5 + 15.6).\sin\varphi_{x1}).$$

$$N_{x1} = -((V_A - q_2.x_1).\sin\varphi_{x1} + (H_A + q_1.6).\cos\varphi_{x1} =$$
$$-((168{,}2143 - 20.x_1).\sin\varphi_{x1} + (4{,}5 + 15.6).\cos\varphi_{x1}).$$

M_{x1}, T_{x1} ve N_{x1}'in ifadelerinde yer alan $y_{x1}, \cos\varphi_{x1}$ *ve* $\sin\varphi_{x1}$, eksen eğrisi 2^0 den parabol olduğu için aşağıdaki bağıntılarla belirlenir.

$$y_{x1} = \frac{4.f.x_1}{L^2}.(L - x_1) = \frac{4.4}{28^2}.(28 - x_1), \quad tg\varphi_{x1} = (y_{x1})' = \frac{4.4}{28^2}.(28 - 2.x_1),$$
$$\cos\varphi_{x1} = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\varphi_{x1}}}, \quad \sin\varphi_{x1} = \cos\varphi_{x1}.tg\varphi_{x1}.$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow \quad y_{x1} = 0, \quad tg\varphi_{x1} = 0{,}57143, \quad \cos$$

$$M_{x1} = -297\ kN.m, \quad T_{x1} = 99{,}165\ kN, \quad N_{x1} = -165{,}5065\ kN.$$

$$x_1 = 3{,}5\ m \Rightarrow \quad y_{x1} = 1{,}75\ m, \quad tg\varphi_{x1} = 0{,}4286, \quad \cos\varphi_{x1} = 0{,}9191, \quad \sin\varphi_{x1} = 0{,}3939.$$
$$M_{x1} = 3{,}875\ kN.m, \quad T_{x1} = 53{,}047\ kN, \quad N_{x1} = -125{,}547\ kN.$$
$$x_1 = 7\ m \Rightarrow \quad y_{x1} = 3\ m, \quad tg\varphi_{x1} = 0{,}2857, \quad \cos\varphi_{x1} = 0{,}9615, \quad \sin\varphi_{x1} = 0{,}2747.$$
$$M_{x1} = 107\ kN.m, \quad T_{x1} = 1{,}1675\ kN, \quad N_{x1} = -98{,}6146\ kN.$$

$$7 \le x_2 \le 14$$
$$M_{x2} = V_A.x_2 - q_2.7.(x_2 - 3{,}5) - P_1.(x_2 - 7) - H_A.(6 + y_{x2}) - q_1.6.(3 + y_{x2}) =$$
$$(168{,}2143).x_2 - 20.7.(x_2 - 3{,}5) - 30.(x_2 - 7) - 4{,}5.(6 + y_{x2}) - 15.6.(3 + y_{x2}),$$

$$T_{x2} = (V_A - q_2.7 - P_1).\cos\varphi_{x2} - (q_1.6 + H_A).\sin\varphi_{x2} =$$
$$(168{,}2143 - 20.7 - 30).\cos\varphi_{x2} - (4{,}5 + 15.6).\sin_{x2} = (-1{,}7857).\cos\varphi_{x2} - (94{,}5).\sin\varphi_{x2},$$

$$N_{x2} = -((V_A - q_2.7 - P_1).\sin\varphi_{x2} + (H_A + q_1.6).\cos\varphi_{x2} = -((-1{,}7857).\sin\varphi_{x2} + 94{,}5.\cos\varphi_{x2}).$$
$$x_2 = 7\ m \Rightarrow \quad M_{x2} = 107\ kN.m, \quad T_{x2} = -27{,}676\ kN, \quad N_{x2} = -90{,}373\ kN.$$
$$x_2 = 10{,}5\ m \Rightarrow \quad y_{x2} = 3{,}75\ m, \quad tg\varphi_{x2} = 0{,}1428, \quad \cos\varphi_{x2} = 0{,}9899, \quad \sin\varphi_{x2} = 0{,}14142.$$

$$M_{x2} = 29{,}875\ kN.m, \quad T_{x2} = -15{,}131\ kN, \quad N_{x2} = -93{,}29\ kN.$$
$$x_2 = 14\ m \Rightarrow \quad y_{x2} = 4\ m, \quad tg\varphi_{x2} = 0, \quad \cos\varphi_{x2} = 1, \quad \sin\varphi_{x2} = 0.$$

$$M_{x2} = 0, \quad T_{x2} = -1{,}7857\ kN, \quad N_{x2} = -94{,}5\ kN.$$
$$0 \le x_3 \le 7$$
$$M_{x3} = V_B.x_3 + H_B.(6 + y_{x3}) - q_3.6.(3 + y_{x3}) = (61{,}7857).x_3 + 25{,}5.(6 + y_{x3}) - 20.6.(3 + y_{x3}),$$
$$T_{x3} = -V_B.\cos\alpha + (q_3.6 - H_B).\sin\alpha = -(61{,}7857).\cos\alpha + (20.6 - 25{,}5).\sin\alpha,$$
$$N_{x3} = -V_B.\sin\alpha + H_B.\cos\alpha - q_3.6.\cos\alpha = -61{,}7857.(0{,}2747) + 25{,}5.(0{,}9615) - 20.6.(0{,}9615).$$

Sistemin sağ parçasının tüm kesitleri için α açısı sabittir. Sağ tarafın ölçülerini (Şekil 7.6.2) kullanarak

$\sin\alpha = \dfrac{4}{\sqrt{14^2+4^2}} = 0{,}2747, \quad \cos\alpha = \dfrac{14}{14{,}56022} = 0{,}9615$ olduğu belirlenir.

Bu bölgede

$$T_{x3} = -61{,}7857.(0{,}9615) + 94{,}5.(0{,}2747) = -33{,}4478\ kN,$$
$$N_{x3} = (-61{,}7857).(0{,}2747) - 94{,}5.(0{,}9615)) = -107{,}834\ kN$$

olup sabittirler.

$x_3 = 0 \Rightarrow \quad y_{x3} = 0, \quad M_{x3} = (25{,}5).6 - 20.6.3 = -207\ kN.m.$

$$x_3 = 7\ m \Rightarrow \quad y_{x3} = 7.tg\alpha = 7.\frac{0{,}2747}{0{,}9615} = 2\ m,$$
$$M_{x3} = (61{,}7857).7 + 25{,}5.(6+2) - 20.6.(3+2) = 36{,}5\ kN.m.$$

$7 \le x_4 \le 14$

$$M_{x4} = V_B.x_4 + H_B.(6 + y_{x4}) - q_3.6.(3 + y_{x4}) - P_3.(x_4 - 7) =$$
$$(61{,}7857).x_4 + (25{,}5).(6 + y_{x4}) - 20.6.(3 + y_{x4}) - 40.(x_4 - 7),$$

$$T_{x4} = (-V_B + P_3).\cos\alpha + (q_3.6 - H_B).\sin\alpha =$$
$$(-61{,}7857 + 40).0{,}9615 + (20.6 - 25{,}5).0{,}2747 = 5{,}012\ kN,$$

$$N_{x4} = -V_B.\sin\alpha + P_3.\sin\alpha + H_B.\cos\alpha - q_3.6.\cos\alpha =$$
$$(-61{,}7857 + 40).(0{,}2747) + 25{,}5.(0{,}9615) - 20.6.(0{,}9615) = -96{,}846\ kN.$$

$x_4 = 14\ m \Rightarrow \quad y_{x4} = 4\ m, \quad M_{x4} = 0.$

Sistemin kolon kısımlarında iç kuvvetlerin belirlenmesi:

AK kolonu için $0 \le x_5 \le 6$

$$M_{x5} = -H_A.x_5 - q_1.\frac{x_5^2}{2} = -4{,}5.x_5 - 15.\frac{x_5^2}{2}, \quad T_{x5} = -H_A - q_1.x_5 = -4{,}5 - 15.x_5,$$
$$N = -V_A = -168{,}2143\ kN.$$

$x_5 = 0 \Rightarrow \quad M_{x5} = 0, \quad T_{x5} = -4{,}5\ kN. \quad x_5 = 3\ m \Rightarrow \quad M_{x5} = -81\ kN.m, \quad T_{x5} = -49{,}5\ kN.$

$x_5 = 6\ m \Rightarrow \quad M_{x5} = -297\ kN.m, \quad T_{x5} = -94{,}5\ kN.$

BE kolonu için $0 \le x_6 \le 6$

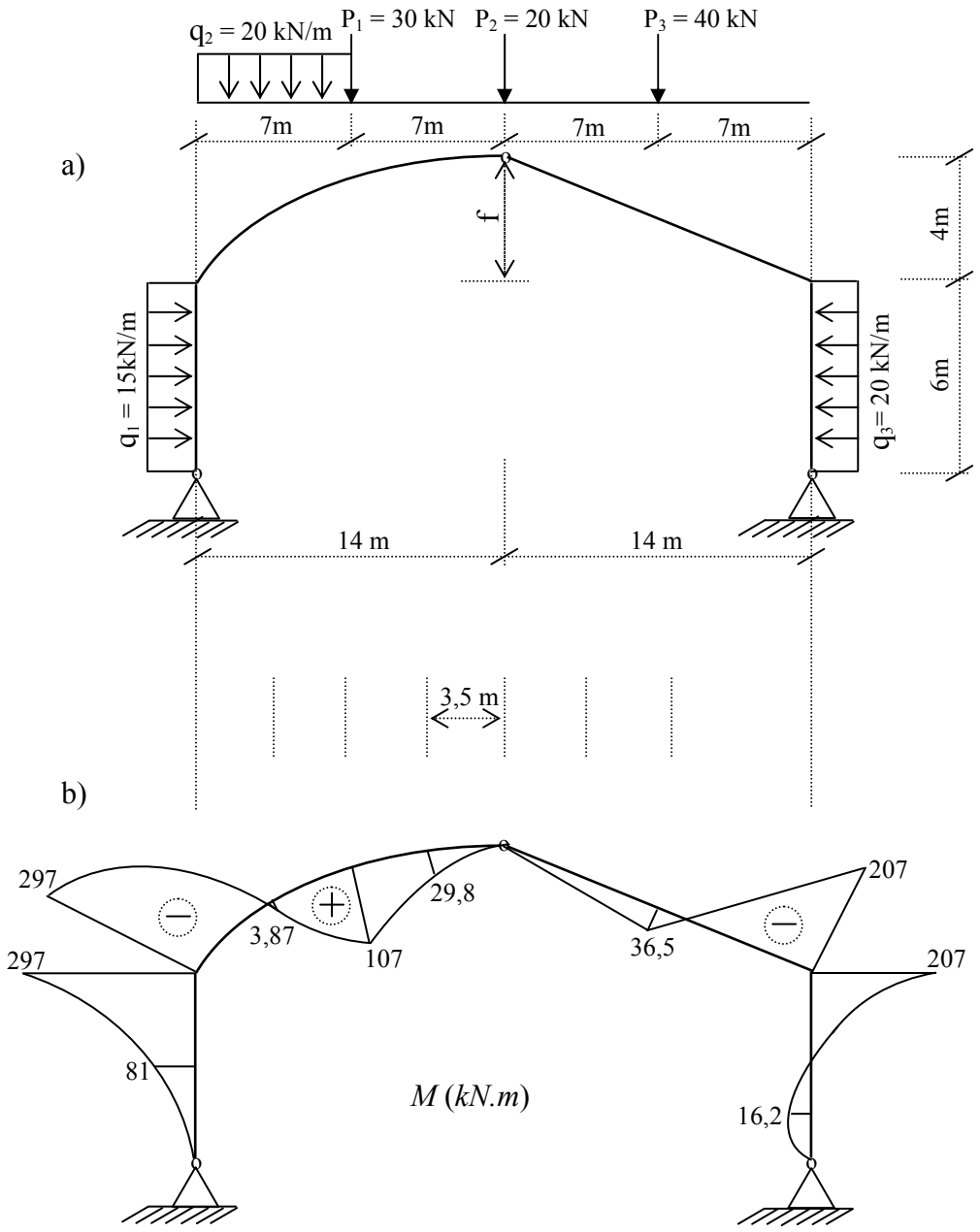
$$M_{x6} = H_B.x_6 - q_3.\frac{x_6^2}{2} = 25{,}5.x_6 - 20.\frac{x_6^2}{2}, \quad T_{x6} = -H_B + q_3.x_6 = -25{,}5\ kN,$$
$$N = -V_B = -61{,}7857\ kN.$$

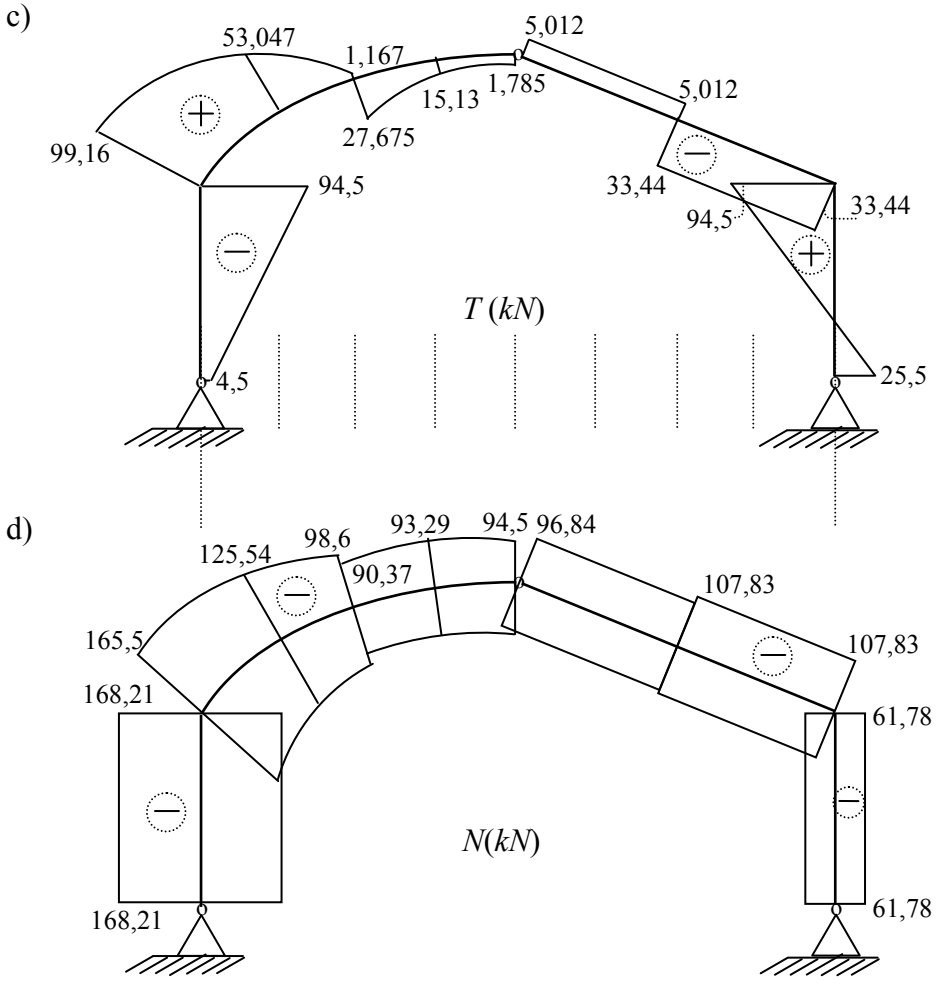
$x_6 = 0 \Rightarrow \quad M_{x6} = 0,\ T_{x6} = -25{,}5\ kN,\quad x_6 = 3\ m \Rightarrow \quad M_{x6} = -13{,}5\ kN.m,$
$T_{x6} = -34{,}5\ kN.\quad x_6 = 6\ m \Rightarrow M_{x6} = -207\ kN.m,\quad T_{x6} = 25{,}5 - 120 = -94{,}5\ kN.$

Kesme kuvvetinin sıfır olduğu kesitin yeri ve maksimum moment değeri:

$T_{x6} = 25{,}5 - 20.x_6 = 0 \Rightarrow \quad x_6 = 1{,}275\ m,\quad M_{x6} = 16{,}25625\ kN.m.$

Hesaplanmış değerlere göre üç mafsallı sistemin *M*, *T* ve *N* diyagramları Şekil 7.6.3b,c ve d' de çizilmiştir.





Şekil 7.6.3. a) Verilmiş olan sistem, b) *M* diyagramı, c) *T* diyagramı, d) *N* diyagramı.

8. ÜÇ MAFSALLI SİSTEMLERDE TESİR ÇİZGİLERİ

Genel Bilgiler

Tesir çizgileri hakkında önceki bölümlerde verilen bilgiler üç mafsallı sistemler için de geçerlidir. 7. Bölüm'deki örneklerde incelenmiş olan sistemlerin mesnet tepkilerinin ve seçilmiş olan bir kesitlerindeki kesit tesirlerinin tesir çizgilerinin (T.Ç.) çizimi, analitik yöntemle bu büyüklüklerin hesaplanmasında kullanılan ifadeler yardımıyla yapılmıştır. Tesir çizgileri yardımıyla, verilmiş olan yükleme durumu için tesir çizgileri çizilmiş olan büyüklüklerin hesaplanması 2. Bölüm'de de verilmiş olan

$$S = \sum P_i.y_i + \sum q_i.A_i + \sum M_i.tg\alpha_i \qquad (8.1)$$

ifadesi ile yapılır.

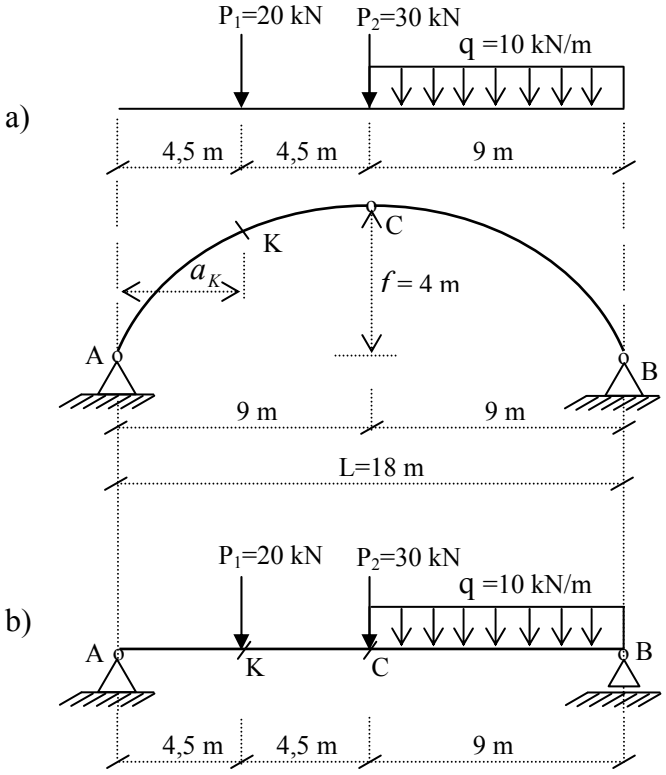
Sistemin mesnet tepkilerinin düşey bileşenlerinin tesir çizgileri, uygun kirişin mesnet tepkilerinin tesir çizgileriyle aynıdır. Bundan dolayı, çözülecek örneklerde onların tesir çizgilerinin çizimi verilmemiştir.

Örnek 8.1. Boyutları ve yükleme durumu Örnek 7.1'de (Şekil 8.1.1a) verilmiş olan üç mafsallı kemer için

a) İtki kuvvetinin tesir çizgisini çiziniz,

b) K kesitinin (Şekil 8.1.1a) kesit tesirlerinin (M_K, T_K ve N_K) ve itki kuvveti H'ın tesir çizgilerini çiziniz,

c) Çizilmiş tesir çizgileri yardımıyla H, M_K, T_K ve N_K'nın değerlerini hesaplayınız ve sonuçları analitik yöntemle belirlenmiş değerlerle karşılaştırınız.



Şekil 8.1.1. a) Verilmiş olan sistem, b) Uygun kiriş.

Çözüm:

a) İtki kuvvetinin tesir çizgisi $H = \frac{M_C^0}{f}$ ifadesine dayanarak çizilir. Yani H 'ın T. Ç.'si M_C^0 'ın T.Ç.'nin (Şekil 8.1.2c) (uygun kirişin C kesitinde eğilme momentinin T. Ç.'si olup, çizimi 3. Bölümde açıklanmıştır) tüm ordinatlarının f 'ye bölünmesiyle elde edilir (Şekil 8.1.2d).

b) Kesit tesirlerinin tesir çizgilerinin çizimi:

● M_K'nın tesir çizgisi $M_K = M_K^0 - H.y_K$ bağıntısından yararlanarak çizilir. Bunun için önce M_K^0 'ın T.Ç.'si (M_C^0 'ın T. Ç.'nin çizimine benzer şekilde) çizilir (Şekil 8.1.2e). Sonra H 'ın tesir çizgisinin ordinatları y_K ile çarpılmış şekilde çizilir (Şekil 8.1.2f). Çizilmiş tesir çizgileri birbirinden grafik olarak çıkarılarak M_K 'nın tesir çizgisi elde edilir (Şekil 8.1.2g).

● T_K'nın tesir çizgisi $T_K = T_k^0.\cos\varphi_K - H.\sin\varphi_K$ formülüne dayanarak çizilir. Bunun için önce T_K^0 'ın tesir çizgisi (çizimi 3. Bölümde açıklanmıştır) ordinatları $cos\varphi_K$ ile çarpılmış şekilde çizilir (Şekil 8.1.2h). Sonra H 'ın tesir çizgisi ordinatları $sin\varphi_K$ ile çarpılmış şekilde çizilir (Şekil 8.1.2ı). Çizilmiş bu grafikler birbirinden çıkarılarak T_K 'nın tesir çizgisi elde edilmiş olur (Şekil 8.1.2i).

● N_K'nın tesir çizgisi $N_K = -(T_K^0.\sin\varphi_K + H.\cos\varphi_K)$ ifadesi yardımıyla çizilir. Bunun için ordinatları $sin\varphi_K$ ile çarpılmış T_K^0 'ın tesir çizgisi (Şekil 8.1.2j), ordinatları $cos\varphi_K$ ile çarpılmış H 'ın tesir çizgisi (Şekil 8.1.2k) ile grafik olarak toplanır (Şekil 8.1.2l).

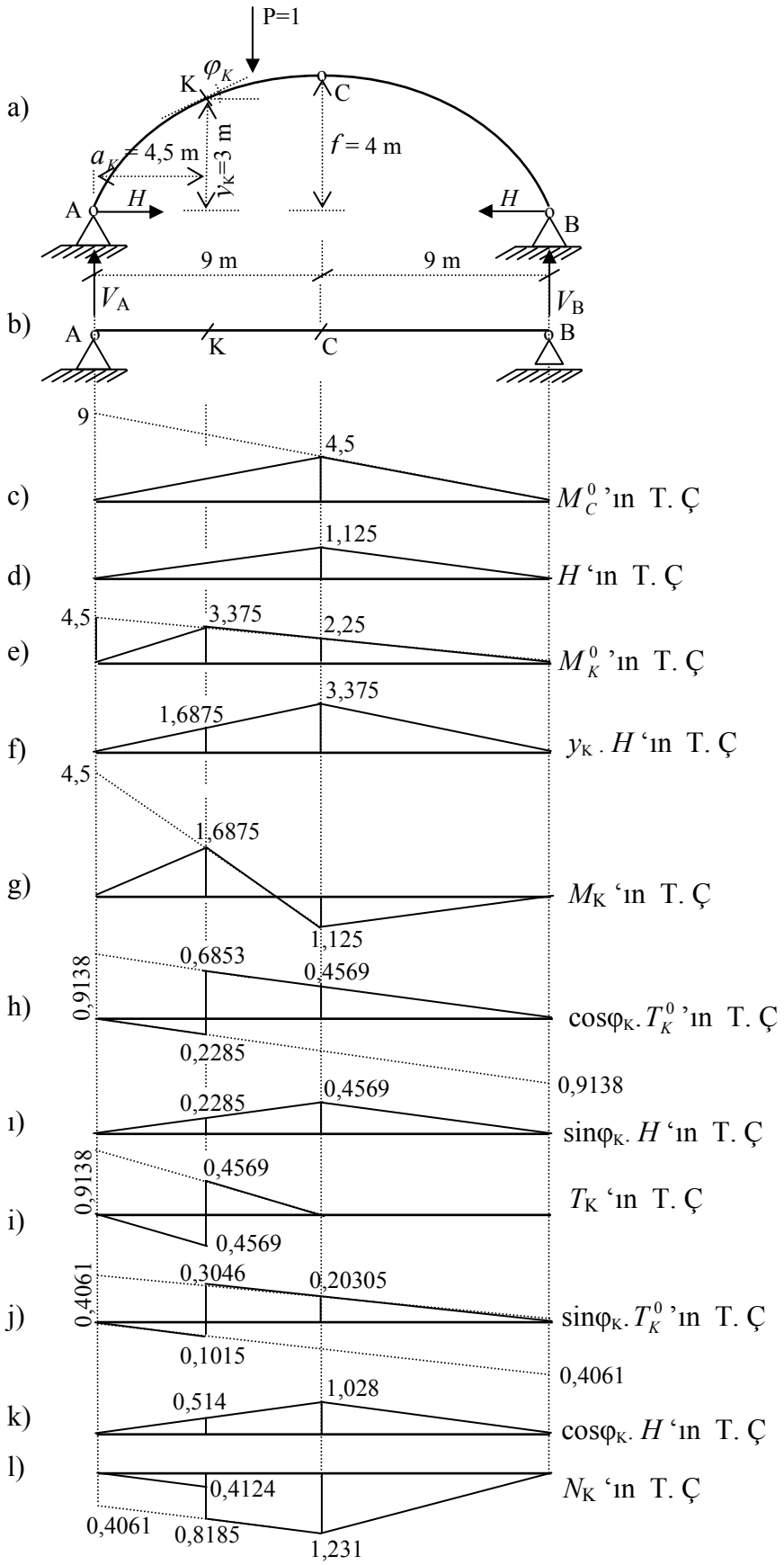
Kesit tesirlerinin tesir çizgilerinden görüldüğü gibi bu tesir çizgileri üç doğrudan oluşmaktadır. Tesir çizgilerinin kenar parçaları sıfır (yatay) doğrusuyla mesnetler hizasında kesişerek sıfır noktaları oluşturur. Tesir çizgilerinin orta parçasının kendisi veya doğrultusu yatay doğruyla kesişerek üçüncü sıfır noktasını oluşturur. Böylece kesit tesirlerinin tesir çizgilerinde üç noktada ordinatların sıfır olduğu görülmektedir. Yani hareketli P = 1 birim yükü bu noktalarla aynı bir düşey doğru üzerinde olduğunda tesir çizgisi çizilmiş büyüklüğün değeri sıfır olur. Bu açıklamaya dayanarak, üçüncü sıfır noktasının (ikisi mesnetlerin altında) yeri belirlendiğinde, tesir çizgileri kolay bir şekilde çizilebilir. Üç mafsallı sistemlerde tesir çizgilerinin bu yolla çizimi "sıfır noktaları yöntemiyle çizim" olarak adlandırılır.

Örnek olarak bu örnekte ele alınan üç mafsallı kemerin K kesitinde iç kuvvetlerin (M_K, T_K ve N_K) analitik yöntemle çizilmiş tesir çizgilerini sıfır noktaları yöntemiyle yeniden çizelim.

● M_K'nın tesir çizgisinin çizimi:

Hareketli P = 1 birim yükünün C mafsalı ile K kesiti arasında olduğu kabul edilsin (Şekil 8.1.3a). Bu durumda B mesnet tepkisinin (R_B: yatay ve düşey bileşenlerinin bileşkesi) doğrultusu C'den geçer (mafsalda momentin sıfır olma şartının sağlanması için). K kesitinde eğilme momentinin sıfır olması istendiğinden A mesnet tepkisinin (R_A) doğrultusunu K kesitinden geçirilir (Şekil 8.1.3a). Bu doğrultular bir O_M noktasında kesişirler. Hareketli birim yük bu kesişme noktasıyla aynı bir düşey doğru üzerinde olduğunda $M_K = 0$ olacağı açıktır (bir doğru üzerinde olmayan üç kuvvet etkisi altında olan cismin dengede olma şartından).

O_M noktasının sol mesnetten (kesit sol parça üzerinde verildiği için) olan mesafesi aşağıdaki ifadeyle belirlenir (Şekil 8.1.3a'da $M_K = 0$ şartından).



Şekil 8.1.2

$$u_M = \frac{a_K f L}{y_K l_2 + f a_K}$$

Burada:
u_M : O_M sıfır noktasının, kesitin sistemin hangi parçası üzerinde olduğuna bağlı olarak sol veya sağ mesnetten olan mesafesi (Şekil 8.1.3a),
a_K : K kesitinin mesnetten (sol veya sağ) olan uzaklığı,
f : üç mafsallı sistemin yüksekliği,
y_K : K kesitinin ordinatı, ve
l_2 : sistem açıklığının K kesitinin olmadığı parçasının uzunluğudur (çoğunlukla $l_2 = L/2$ 'dir).
Şimdi M_K'nın tesir çizgisi için üçüncü sıfır noktasının yerini belirleyelim (kesit koordinatları Tablo 7.1'den).

$$u_M = \frac{(4,5).4.18}{3.9 + 4.(4,5)} = 7,2\ m.$$

Sıfır noktasının yeri belirlendikten sonra eğilme momentinin tesir çizgisi pratik olarak aşağıdaki gibi çizilir:
Mesnetten kesite kadar olan mesafe (a_K) artı işaretle mesnetin altında işaretlenip, M_K'nın sıfıra eşit olduğu noktadan (O_M'nin izdüşümünden) geçilerek C mafsalından indirilmiş düşey doğruyla kesişene dek bir doğru çizilir (kesit sol parçada verilmiş ise tesir çizgisinin sağ doğrusu). Kesişme noktası bir doğruyla diğer mesnetin altında sıfırlanır (T. Ç.'sinin sol doğrusu). Bundan sonra kesitin (K'nın) $M_K = 0$ noktasından geçen doğru üzerine izdüşümü alınır ve mesnetin altında (a_K'nın işaretlendiği mesnet) sıfırla birleştirilerek eğilme momentinin tesir çizgisi elde edilmiş olur (Şekil 8.1.3c).

● T_K'nın tesir çizgisinin çizimi:

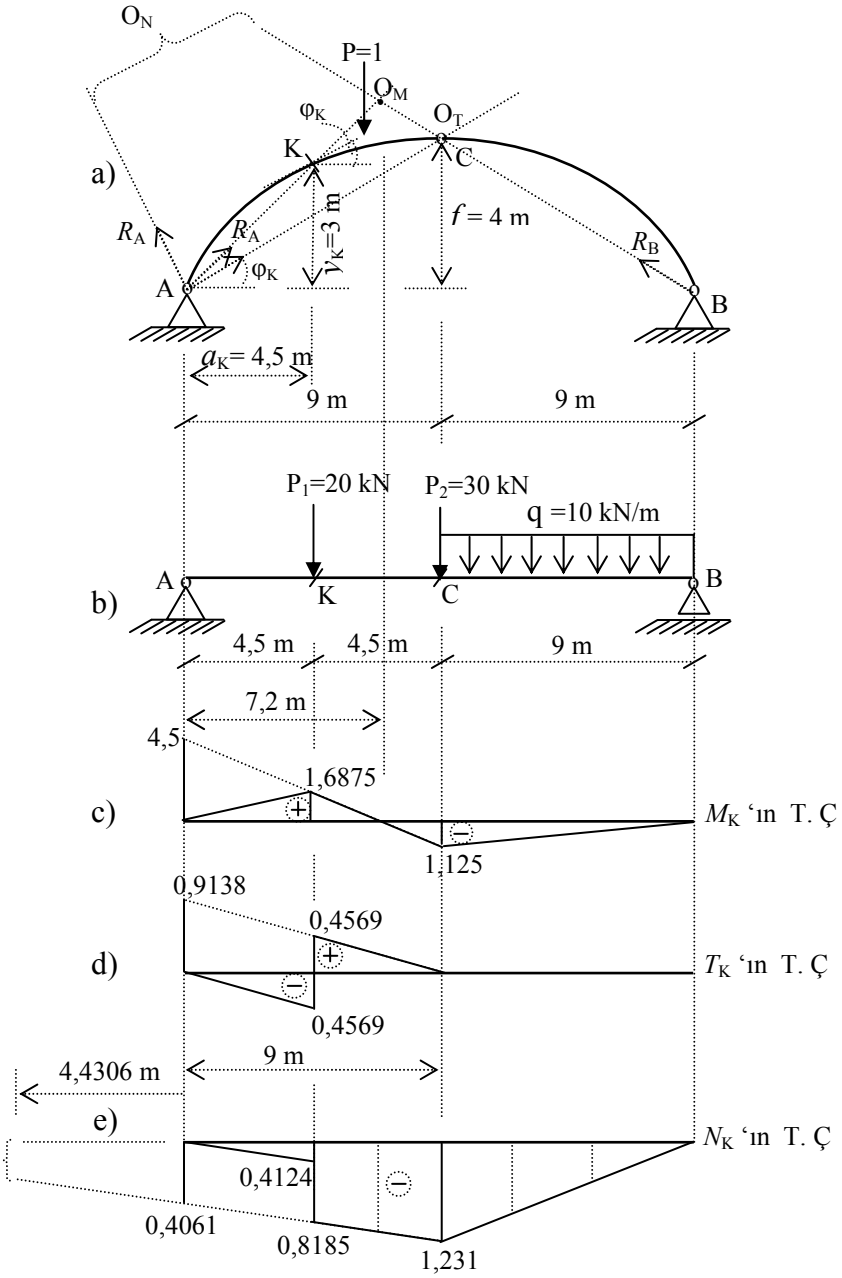
P = 1 hareketli birim yükü C mafsalı ile K kesiti arasında olduğu için R_B'nin doğrultusu C'den geçer (açıklaması M_K'nın T. Ç.'nin çiziminde verilmiştir). K kesitinde kesme kuvvetinin sıfır olması istendiği için A mesnet tepkisinin (R_A) doğrultusu K kesitinde kemer eksenine çizilmiş teğete paralel olarak çizilir. Bu doğrultuların kesişme noktası O_T üçüncü sıfır noktasının yeridir. Sıfır noktasının mesnetten olan mesafesi Şekil 8.1.3a'dan $T_K = 0$ olma şartından elde edilmiş aşağıdaki ifadeyle belirlenir.

$$u_T = \frac{Lf}{f + l_2 tg\varphi_K}$$

İncelenen sistem için

$$u_T = \frac{18.4}{4 + 9.(0,4444)} = 9\ m.$$

değeri elde edilmektedir.
Üçüncü sıfır noktasının yeri belli olduktan sonra kesme kuvvetin tesir çizgisi şöyle çizilir: Sol mesnetin altında artı işaretle $\cos\varphi_K$ (kesit sağ parçada verilmişse aksi işaretle sağ mesnetin altında) işaretlenip, kesme kuvvetinin sıfır olduğu noktadan (O_T'nin izdüşümünden) geçirilerek C'den indirilmiş düşey doğruyla kesişene dek bir doğru çizilir. Kesişme noktası bir doğruyla sağ mesnetin (kesit sağ parçada alındığında sol mesnetin) altında sıfırlanır. Sonra K kesitinin birinci çizilmiş doğrunun üzerine iz düşümü alınır. Bu iz düşümden $\cos\varphi_K$ 'ya eşit bir ordinat indirilip sol mesnetin (kesit sağda verildiğinde bu ordinat yukarıya doğru çizilip sağ mesnetin) altında sıfırlanarak T_K 'nın tesir çizgisi elde edilmiş olur (Şekil 8.1.3d).
● N_K'nın tesir çizgisinin çizimi:
R_B'nin doğrultusu yukarıda verilen açıklamalara dayanarak C mafsalından geçer, R_A' nınki ise çizilmiş teğete dik şekilde olur (kesitte $N_K = 0$ olması için). Bu doğrultuların kesişme noktası aranan sıfır noktasıdır. Bu noktanın yeri (Şekil 8.1.3a'dan $N_K = 0$ olma şartından) aşağıdaki formülle belirlenir.



Şekil 8.1.3. a) Verilmiş sistem, b)Uygun kiriş, c) M_K'nın T. Ç., d) T_K'nın T. Ç., e) N_K'nın T. Ç.

$$u_N = \frac{f L tg\varphi_K}{l_2 - f tg\varphi_K} = \frac{4.18.(0,4444)}{9 - 4.(0,4444)} = 4,4306\, m.$$

Üçüncü sıfır noktasının yeri belirlendikten sonra sol mesnetin (kesit sağ parçaya ait olduğunda sağ mesnetin) altında aksi işaretle $\sin\varphi_K$ ordinatı işaretlenip sıfır noktasının (O_N'nin) izdüşümü ile birleştirilir ve C'den indirilmiş düşey doğruyla kesişene dek bu doğru devam ettirilir. Kesişme noktası sağ mesnetin (kesit sağ parçaya ait olduğunda sol mesnetin) altında sıfırlanır. Sonra K'nın izdüşümü birinci çizilmiş doğrunun üzerine alınır ve izdüşümünden $\sin\varphi_K$'ya eşit bir ordinat yukarıya doğru çizilerek sol mesnetin (kesit sağ parçaya ait olduğunda sağ mesnetin) altında sıfırlanarak N_K'nın tesir çizgisi elde edilmiş olur (Şekil 8.1.3e).

c) Kesit tesirlerinin, çizilmiş tesir çizgileri yardımıyla hesabında gereken ordinatlar üçgenlerin benzerliğinden belirlenmiştir.

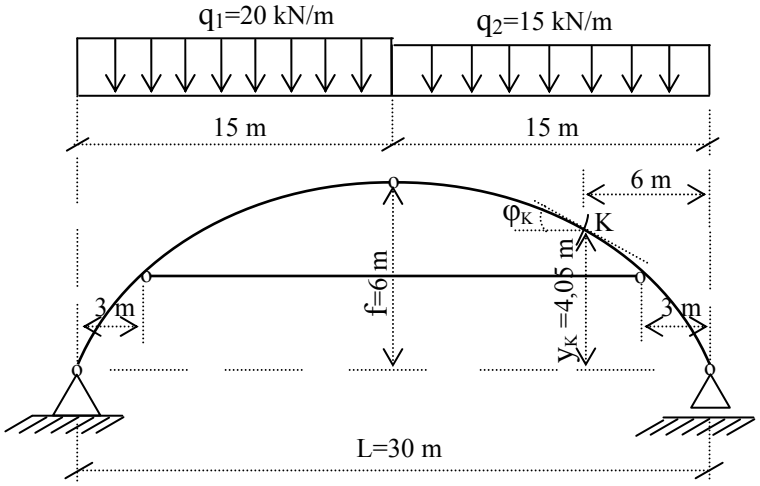
$$M_K = P_1.(1{,}6857) - P_2.(1{,}125) - q.\frac{9.(1{,}125)}{2} = 20.(1{,}6857) - 30.(1{,}125) - 10.\frac{9.(1{,}125)}{2} =$$
$$= -50{,}66\,kN.m.$$

$$T_K^{Sol} = P_1.(0{,}4569) = 20.(0{,}4569) = 9{,}138\,kN.$$
$$T_K^{Sağ} = P_1.(-0{,}4569) = -9{,}138\,kN.$$
$$N_K^{Sol} = -(P_1.(0{,}81856) + P_2.(1{,}231) + q.\frac{9.(1{,}231)}{2} = -(20.(0{,}81856) + 30.(1{,}231) +$$
$$+ 10.\frac{9.(1{,}231)}{2} = -108{,}696\,kN,$$
$$N_K^{Sağ} = -(20.(0{,}4125) + 30.(1{,}231) + 10.\frac{9.(1{,}231)}{2}) = -100{,}575\ kN.$$

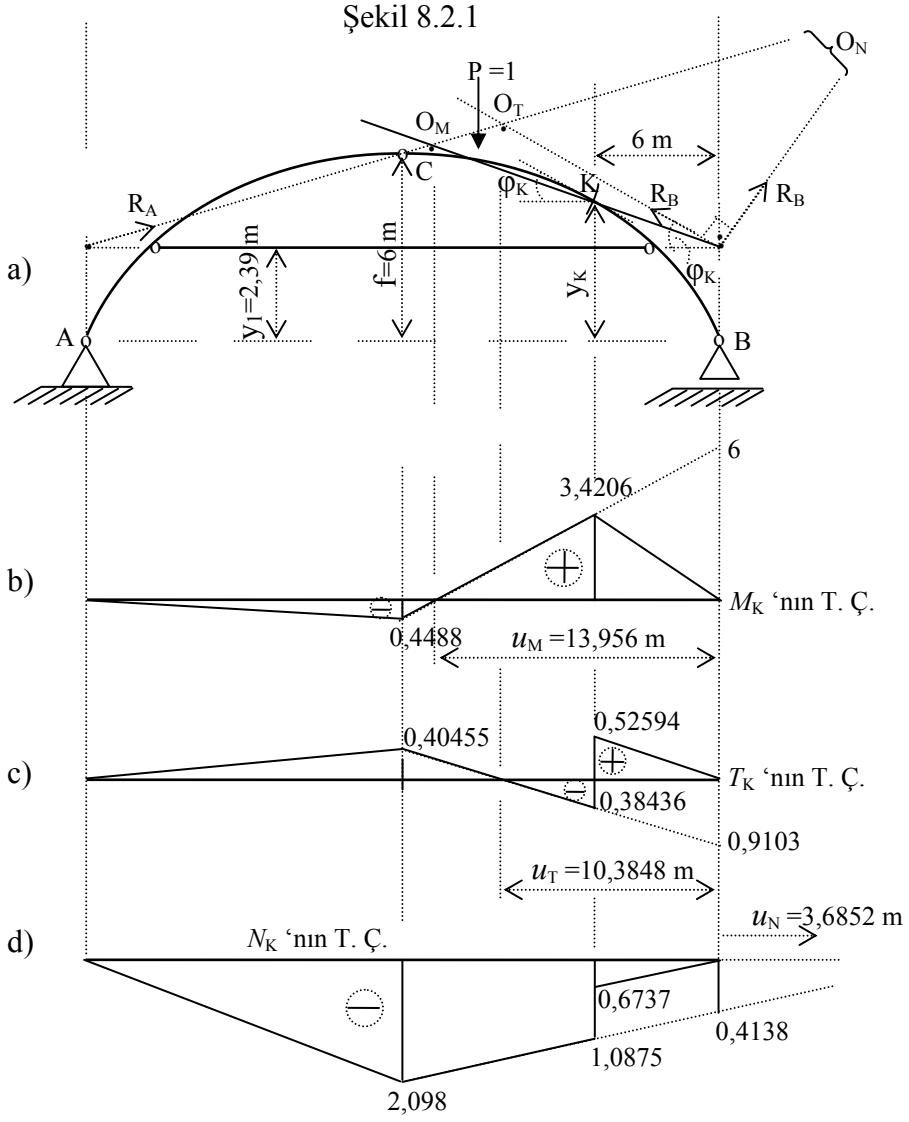
Kesit tesirlerinin analitik yöntemle ve tesir çizgileri yardımıyla hesaplanmış değerlerinin karşılaştırma tablosu.

Kesit tesirleri	Analitik yöntemle	T. Ç.'leri yardımıyla	Fark
M_K $(kN.m)$	-50,625	-50,66	0,035
T_K^{Sol} (kN)	9,138	9,138	0
$T_K^{Sağ}$ (kN)	-9,138	-9,138	0
N_K^{Sol} (kN)	-108,704	-108,696	0,008
$N_K^{Sağ}$ (kN)	-100,581	-100,575	0,006

Örnek 8.2. Boyutları ve yükleme durumu Örnek 7.2'de verilmiş olan daire eksenli gergili kemer (Şekil 8.2.1) için
a) Verilmiş K kesitinde iç kuvvetlerin (M_K, T_K ve N_K) tesir çizgilerini sıfır noktaları yöntemiyle çiziniz,
b) Bu büyüklüklerin değerlerini T. Ç.'leri yardımıyla hesaplayınız,
c) Bu büyüklüklerin analitik yöntemle ve tesir çizgileri yardımıyla belirlenmiş değerlerini karşılaştırınız.
Çözüm:
Örnek 8.1'de verilmiş olan açıklamalara dayanarak, iç kuvvetlerin T. Ç.'lerinin çizimi için önemli olan üçüncü sıfır noktasının yerinin belirlenmesi Şekil 8.2.2a'da gösterilmiştir. R_A ve R_B bileşkelerinin uygulama yeri, yukarıdaki örnekden farklı olarak, düşey ve yatay bileşenlerinin doğrultularının kesişme noktasıdır (Şekil 8.2.2a). Sıfır noktalarının mesnetten olan mesafesi, hareketli P =1 birim yükünün bu noktalarla aynı bir düşey doğru üzerinde olma halinde uygun iç kuvvetin sıfıra eşit olma şartından ve Şekil 8.2.2a'dan, Örnek 8.1'e benzer şekilde belirlenmiştir.



Şekil 8.2.1



Şekil 8.2.2. a) Üç mafsallı gergili kemer, b) M_K'nın T. Ç.'si, c) T_K'nın T. Ç.'si, d) N_K'nın T. Ç.'si.

İç kuvvetlerin sıfır olduğu noktaların mesnetten olan mesafesi belirlenirken, K kesiti gergiden yukarıda olduğu için y_K , f büyüklüklerinin yerine $(y_K - y_1)$ ve $(f - y_1)$ alınır.

$$u_M = \frac{6.(6-2{,}39).30}{(4{,}05-2{,}39).15+(6-2{,}39)} = 13{,}956\ m,$$

$$u_T = \frac{30.(6-2{,}39)}{(6-2{,}39)+15.(0{,}454575)} = 10{,}38487\ m,$$

$$u_N = \frac{30.(6-2{,}39).(0{,}454575)}{15-(6-2{,}39).(0{,}454575)} = 3{,}6852\ m.$$

b) Tesir çizgileri yardımıyla iç kuvvetlerin belirlenmesi Örnek 8.1'de olduğu gibi yapılır. Gereken ordinatlar tesir çizgilerinde üçgenlerin benzerliğinden hesaplanmıştır.

$$M_K = -q_1.\frac{15.(0{,}44884)}{2} - q_2.\frac{(0{,}44884).()1{,}044}{2} + q_2.\frac{(3{,}42046).(13{,}956)}{2} =$$
$$-20.\frac{15.(0{,}44884)}{2} - 15.\frac{(0{,}44884).(1{,}044)}{2} + 15.\frac{(3{,}42046).(13{,}956)}{2} = 287{,}18\ kN.m.$$

$$T_K = q_1.\frac{(0{,}40455).15}{2} + q_2.\frac{(0{,}40455).(4{,}6152)}{2} - q_2.\frac{(0{,}38436).(4{,}3848)}{2} + q_2.\frac{6.(0{,}52594)}{2} =$$
$$20.\frac{(0{,}40455).15}{2} + 15.\frac{(0{,}40455).(4{,}6152)}{2} - 15.\frac{(0{,}38436).(4{,}3848)}{2} + 15.\frac{6.(0{,}52594)}{2} =$$
$$= 85{,}709\ kN.$$

$$N_K = -(q_1.\frac{15.(2{,}098)}{2} + q_2.\frac{2{,}098+1{,}086}{2}.9 + q_2.\frac{(0{,}674).6}{2}) =$$
$$-(20.\frac{15.(2{,}098)}{2} + 15.\frac{2{,}098+1{,}086}{2}.9 + 15.\frac{(0{,}674).6}{2}) = -559{,}95\ kN.$$

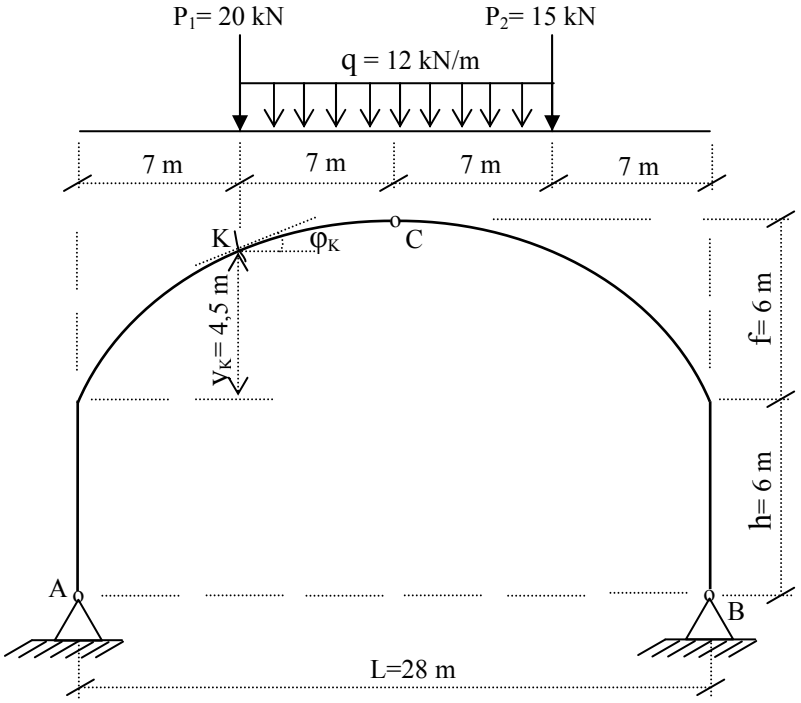
c) İç kuvvetlerin analitik yöntemle ve tesir çizgileri yardımıyla belirlenmiş değerlerinin karşılaştırma tablosu aşağıdadır.

İç kuvvetler	Analitik yöntemle	T. Ç.'leri yardımıyla	Fark
M_K ($kN.m$)	287,2	287,18	0,02
T_K (kN)	85,71	85,709	0,001
N_K (kN)	-560,06	-559,95	0,11

Örnek 8.3. Boyutları ve yükleme durumu Örnek 7.3'de verilmiş olan, ekseni 2^0 den parabol şeklinde olan üç mafsallı sistem (Şekil 8.3.1) için

a) Sol mesnetten 7 m mesafede verilmiş (Şekil 8.3.1) K kesitinde iç kuvvetlerin (M_K , T_K ve N_K) T. Ç.'lerinin çizilmesi,
b) T. Ç.'leri yardımıyla, sabit yüklerden oluşan iç kuvvetlerin belirlenmesi,

c) İç kuvvetlerin analitik yöntemle ve T. Ç.'leri yardımıyla hesaplanmış değerlerinin karşılaştırılması istenmektedir.



Şekil 8.3.1

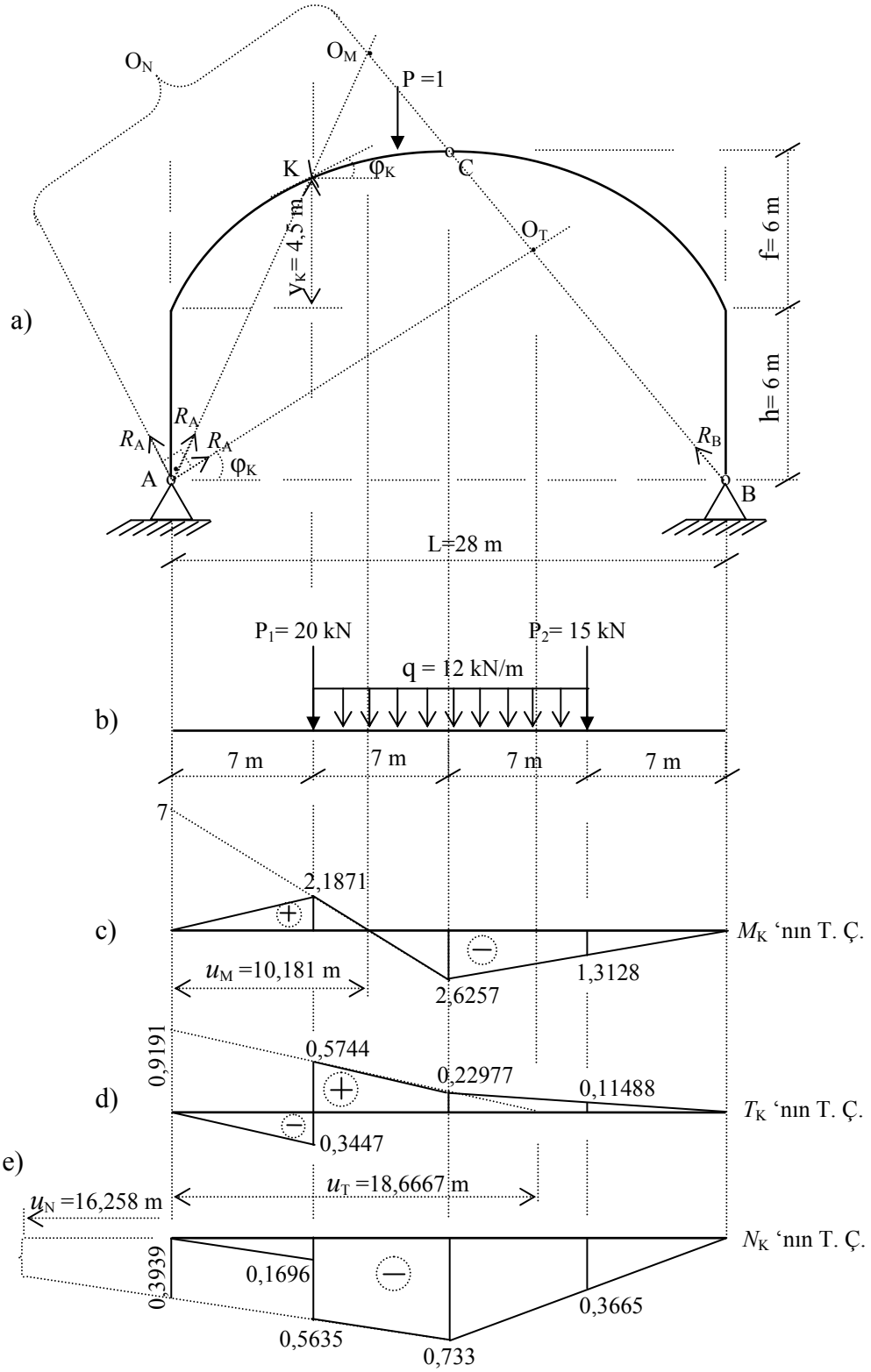
Çözüm:
a) İç kuvvetlerin T. Ç.'lerinin çizimi sıfır noktaları yardımıyla bundan önceki örneklere benzer şekilde yapılmıştır (Şekil 8.3.2c,d ve e). M_K , T_K ve N_K değerlerinin sıfır olduğu noktaların mesnetten olan mesafeleri u_M , u_T ve u_N için yukarıdaki örneklerde verilen formüller ile belirlenir. Önceki örneklerden farklı olarak formüllerde y_K ve f yerine, Şekil 8.3.1'den görüldüğü gibi sırasıyla $(y_K + 6)$ ve $(f + 6)$ kullanılması gerektiğine dikkat edilmelidir.

$$u_M = \frac{a_K f L}{y_k . l_2 + f . a_K} = \frac{7.(6+6).28}{(4{,}5+6).14+(6+6).7} = 10{,}181\, m,$$

$$u_T = \frac{f L}{f + l_2 tg\varphi_K} = \frac{(6+6).28}{(6+6)+14.(0{,}42857)} = 18{,}6666\, m,$$

$$u_K = \frac{f L tg\varphi_K}{l_2 - f tg\varphi_K} = \frac{(6+6).28.(0{,}42857)}{14-(6+6).(0{,}42857)} = 16{,}25803\, m.$$

c) İç kuvvetlerin tesir çizgileri yardımıyla belirlenebilmesi için gereken ordinatlar hesaplanıp Şekil 8.3.2'de gösterilmiştir.



Şekil 8.3.2. a) Verilmiş üç mafsallı sistem, b) Sabit yükleme durumu, c) M_K'nın T. Ç.'si, d) T_K'nın T. Ç.'si, e) N_K'nın T. Ç.'si.

$$M_K = P_1.(2{,}1871) + q.\frac{2{,}1871.(3{,}181)}{2} - q.\frac{2{,}6257.(3{,}819)}{2} - q.\frac{2{,}6257+1{,}3128}{2}.7 - P_2.(1{,}3128)$$

$$= 20.(2{,}1871) + 12.\frac{2{,}1871.(3{,}181)}{2} - 12.\frac{2{,}6257.(3{,}819)}{2} - 12.\frac{2{,}6257+1{,}3128}{2}.7 -$$

$$-15.(1{,}3128) = -159{,}789\ kN.m.$$

$$T_K^{Sol} = P_1.(0{,}5744) + q.\frac{0{,}5744+0{,}22977}{2}.7 + q.\frac{0{,}22977+0{,}11488}{2}.7 + P_2.(0{,}11488) =$$

$$20.(0{,}5744) + 12.\frac{0{,}5744+0{,}22977}{2}.7 + 12.\frac{0{,}22977+0{,}11488}{2}.7 + 15.(0{,}11488) =$$

$$61{,}462\ kN.$$

$$T_K^{Sağ} = 20.(-0{,}3447) + 33{,}7751 + 14{,}4753 + 1{,}7232 = 43{,}08\ kN.$$

$$N_k^{Sol} = -(P_1.(0{,}5635) + q.\frac{0{,}5635+0{,}733}{2}.7 + q.\frac{0{,}733+0{,}3665}{2}.7 + P_2.(0{,}3665) =$$

$$-(20.(0{,}5635) + 12.\frac{0{,}5635+0{,}733}{2}.7 + 12.\frac{0{,}733+0{,}3665}{2}.7 + 15.(0{,}3665) = -117{,}4\ kN.$$

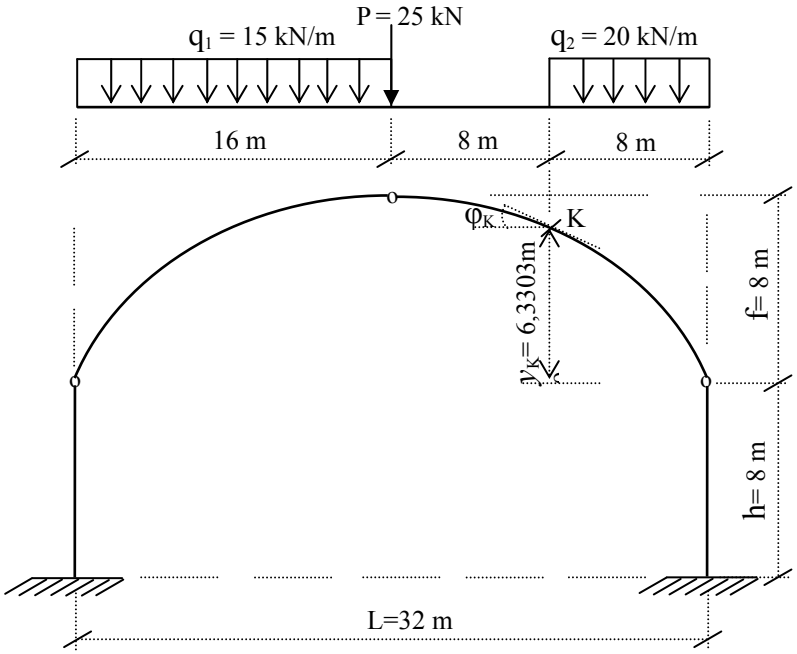
$$N_K^{Sağ} = -(20.(0{,}1696) + 54{,}453 + 46{,}179 + 5{,}4975) = -109{,}5215\ kN.$$

İç kuvvetlerin analitik yöntemle ve T. Ç.'leri yardımıyla belirlenmiş değerlerinin karşılaştırma tablosu

İç kuvvetler	Analitik yöntemle	T. Ç. 'leri yardımıyla	Fark
M_K $(kN.m)$	-159,688	-159,789	0,1
T_K^{Sol} (kN)	61,467	61,462	0,005
$T_K^{Sağ}$ (kN)	43,08	43,08	0
N_K^{Sol} (kN)	-117,415	-117,4	0,015
$N_K^{Sağ}$ (kN)	-109,53	-109,5215	0,008

Örnek 8.4. Boyutları ve yüklemesi Örnek 7.4'de (Şekil 8.4.1) verilen, eksen eğrisi dairesel olup, kolonlar üzerine oturan üç mafsallı kemer için
a) Kemerin sağ parçasında verilmiş K kesitinde (Şekil 8.4.1) iç kuvvetlerin tesir çizgilerini çiziniz,
b) T. Ç.'leri yardımı ile iç kuvvetlerin değerlerini hesaplayınız,
c) Verilmiş yükleme durumu için iç kuvvetlerin analitik yöntemle ve tesir çizgileri yardımı ile belirlenmiş değerlerini karşılaştırınız.

Çözüm:
a) K kesiti kemere ait olduğu için, kesit tesirlerinin tesir çizgilerinin çizimi için gereken işlemler sistemin kemer kısmında (Şekil 8.4.2b) yapılır (Şekil 8.4.2a). Böylece, kesit tesirlerinin çizilmiş tesir çizgileri Şekil 8.4.2c,d ve e'de gösterilmiştir.



Şekil 8.4.1

b) Tesir çizgileri yardımıyla verilmiş olan yükleme durumundan (Şekil 8.4.2b) kesit tesirlerinin değerlerini hesaplamak için üçüncü sıfır noktalarının yeri Şekil 8.4.2a'dan ve bu noktalarda iç kuvvetlerin sıfır olma şartından elde edilmiş olan formüllerle belirlenir.

$$u_M = \frac{a_K f L}{y_K l_2 + f a_K} = \frac{8.8.32}{(6,3303).16 + 8.8} = 12,3907\ m,$$

$$u_T = \frac{f L}{f + l_2 tg\varphi_K} = \frac{8.32}{8 + 16.(0,436443)} = 17,0859\ m,$$

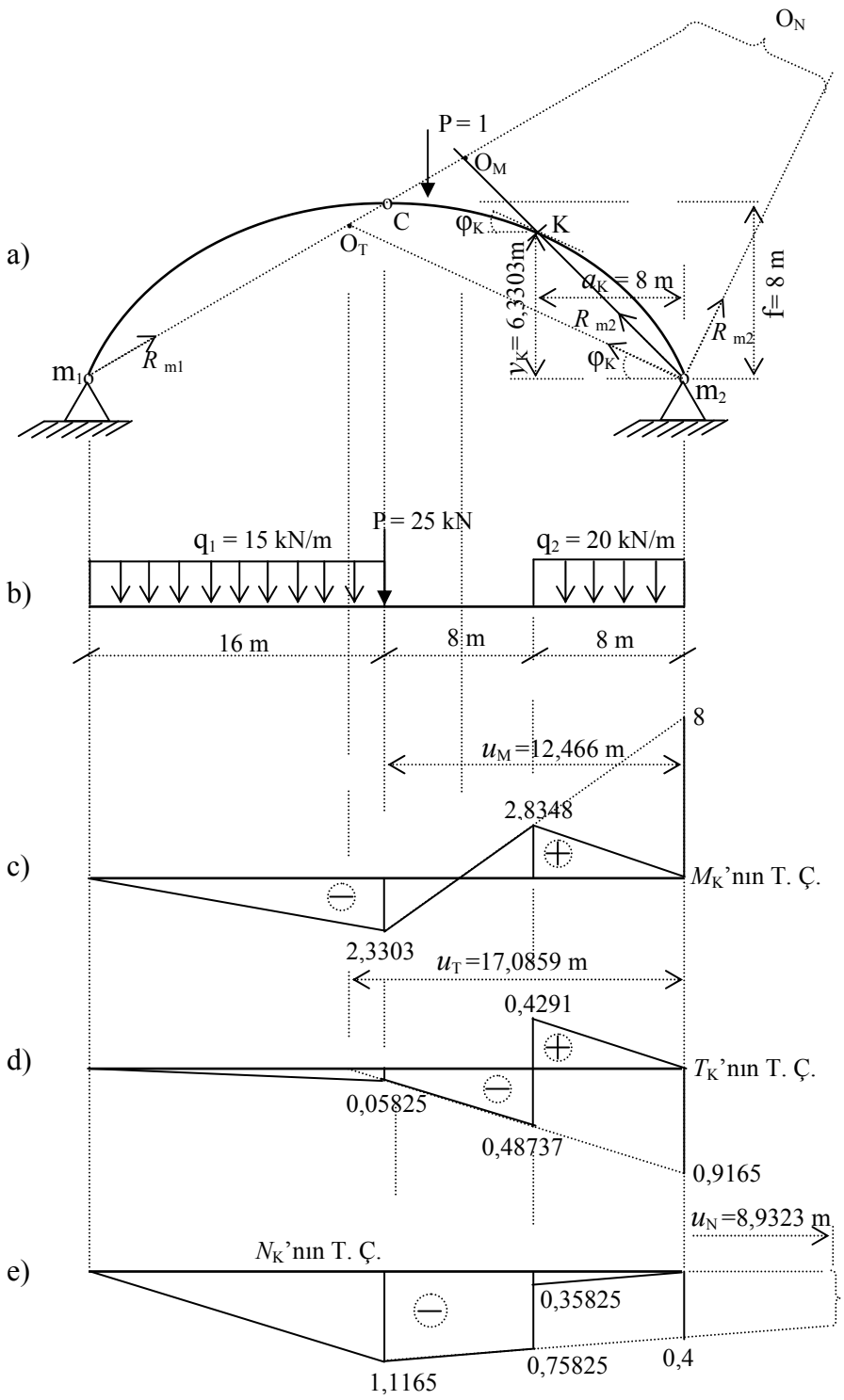
$$u_N = \frac{f L tg\varphi_K}{l_2 - f tg\varphi_k} = \frac{8.32.(0,436443)}{16 - 8.(0,436443)} = 8,93231\ m.$$

Bundan sonra tesir çizgileri yardımı ile verilmiş yükleme durumu için iç kuvvetlerin (M_K, T_K ve N_K) değerleri hesaplanır.

$$M_K = -q_1.\frac{16.(2,3303)}{2} - P.(2,3303) + q_2.\frac{8.(2,8348)}{2} = -15.8.(2,3303) - 25.(2,3303) + 20.4.(2,8348) = -111,1095\ kN.m,$$

$$T_K = -q_1.\frac{16.(0,05825)}{2} - P.(0,05825) + q_2.\frac{8.(0,4291)}{2} = -15.8.(0,05825) - 25.(0,05825) + 20.4.(0,4291) = 25,872\ kN,$$

$$N_K = -(15.\frac{16.(1,1165)}{2} + 25.(1,1165) + 20.\frac{8.(0,35825)}{2}) = -190,5525\ kN.$$

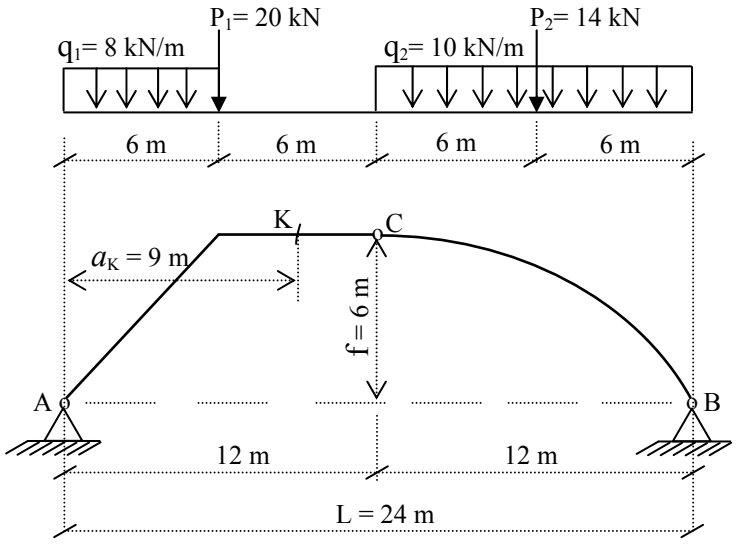


Şekil 8.4.2. a) Üç mafsallı kemer, b) Sabit yükleme durumu, c) M_K'nın T. Ç.'si, d) T_K'nın T. Ç.'si, e) N_K'nın T. Ç.'si.

c) İç kuvvetlerin analitik yöntemle ve tesir çizgileri yardımıyla belirlenmiş değerlerinin karşılaştırma tablosu aşağıdadır.

İç kuvvetler	Analitik yöntemle	T. Ç. yardımıyla	Fark
M_K ($kN.m$)	-111,105	-111,109	0,004
T_K (kN)	25,883	25,872	0,011
N_K (kN)	-190,5525	-190,5525	0

Örnek 8.5. Boyutları ve yükleme durumu Örnek 7.5'de (Şekil 8.5.1) verilmiş olan üç mafsallı sistemin K kesiti (Şekil 8.5.1) için
a) İç kuvvetlerin tesir çizgilerini çiziniz,
b) Tesir çizgileri yardımı ile verilmiş yükleme durumundan bu iç kuvvetlerin değerlerini hesaplayınız,
c) İç kuvvetlerin verilmiş yükleme durumundan analitik yöntemle ve tesir çizgileri yardımıyla hesaplanmış değerlerini karşılaştırınız.



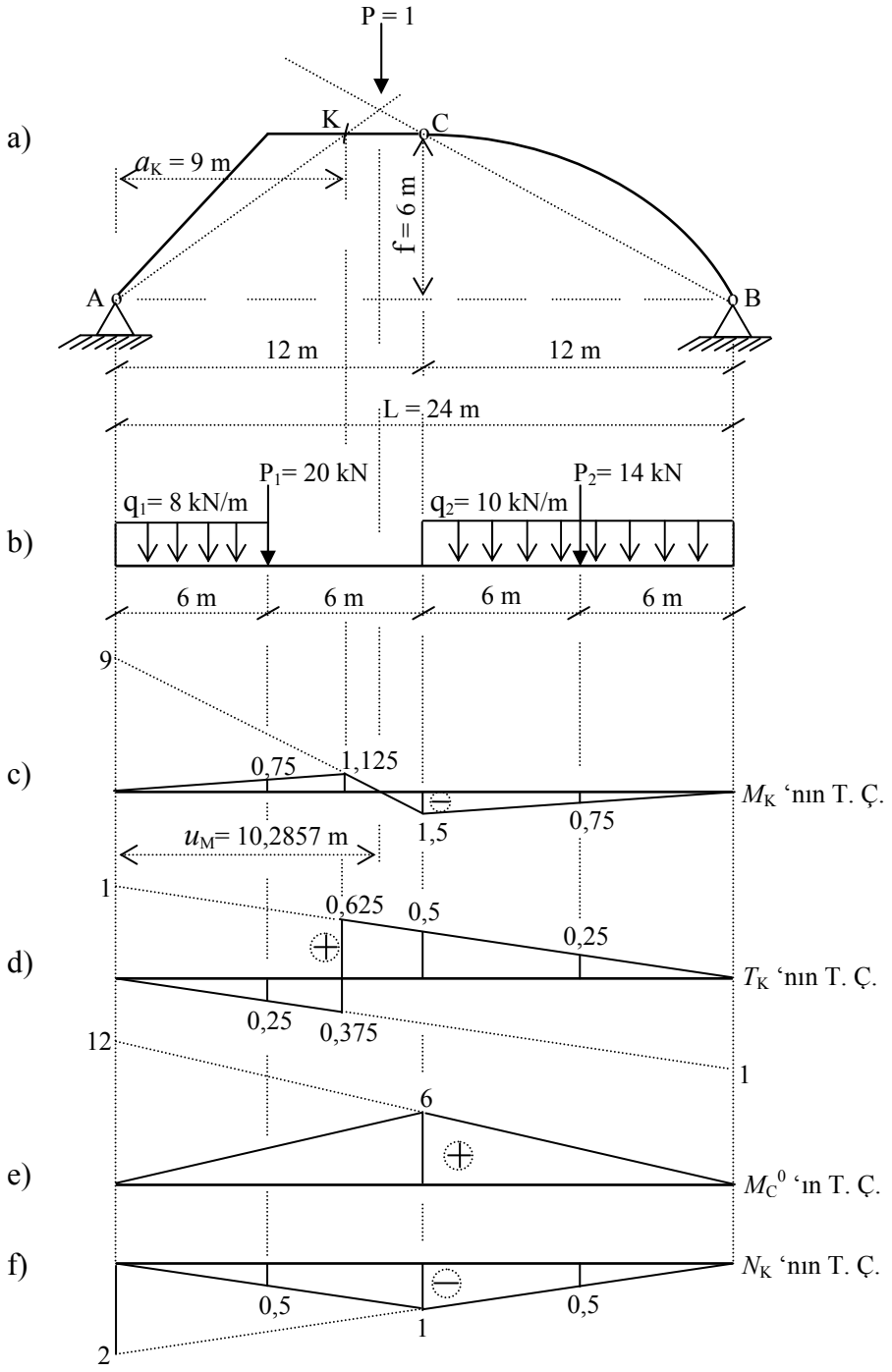
Şekil 8.5.1

Çözüm:
a) K kesiti sistemin yatay doğru eksenli parçasında verildiğinden, kesitte T_K ve N_K'nın tesir çizgilerinin ifadeleri analitik yöntemden bilinen bağıntılarla elde edilir.

$$T_K = T_K^0.\cos\varphi_K - H.\sin\varphi_K = T_K^0.\cos 0^0 - H.\sin 0^0 = T_K^0,$$
$$N_K = -(T_K^0.\sin\varphi_K + H.\cos\varphi_K) = -(T_K^0.\sin 0^0 + H.\cos 0^0) = -H.$$

K kesitinde eğilme momentinin tesir çizgisi bundan önceki örneklerde olduğu gibi sıfır noktaları yöntemiyle çizilir. Bağıntılardan alınan sonuçlara ve M_K'nın T.Ç.'sinin çizimi için olan açıklamaya dayanarak iç kuvvetlerin T. Ç.'leri Şekil 8.5.2c,d ve f'de çizilmiştir. Sıfır noktasının mesnetten olan mesafesi (u_M) bilinen formülle belirlenir.

$$u_M = \frac{a_K f L}{y_K l_2 + a_K f} = \frac{9.6.24}{6.12 + 9.6} = 10{,}2857\ m.$$



Şekil 8.5.2. a) Üç mafsallı sistem, b) Yükleme durumu, c) M_K'nın T. Ç.'si, d) T_K'nın T. Ç.'si, e) M_C^0 'ın T. Ç.'si, f) N_K'nın T. Ç.'si.

b) İç kuvvetlerin, verilmiş yükleme durumu için tesir çizgileri yardımı ile hesaplanması:

$$M_K = q_1.\frac{(0,75).6}{2} + P_1.(0,75) - q_2.\frac{(1,5).12}{2} - P_2.(0,75) =$$
$$8.\frac{(0,75).6}{2} + 20.(0,75) - 10.\frac{(1,5).12}{2} - 14.(0,75) = -67,5\ kN.m,$$

$$T_K = -q_1.\frac{6.(0,25)}{2} - P_1.(0,25) + q_2.\frac{12.(0,5)}{2} + P_2.(0,25) =$$
$$-8.\frac{6.(0,25)}{2} - 20.(0,25) + 10.\frac{12.(0,5)}{2} + 14.(0,25) = 22,5\ kN,$$

$$N_K = -q_1.\frac{6.(0,5)}{2} - P_1.(0,5) - q_2.\frac{12.1}{2} - P_2.(0,5) =$$
$$-8.(1,5) - 20.(0,5) - 10.6 - 14.(0,5) = -89\ kN.$$

c) Analitik yöntemle ve tesir çizgileri yardımıyla belirlenmiş değerler aşağıdaki tabloda karşılaştırılmıştır.

İç kuvvetler	Analitik yöntemle	T. Ç. yardımıyla	Fark
M_K ($kN.m$)	-67,5	-67,5	0
T_K (kN)	22,5	22,5	0
N_K (kN)	-89	-89	0

KAYNAKLAR

1. Çakıroğlu , A. , Çetmeli, E . Yapı Statiği – Cilt I , Beta , İstanbul , 1988 – 301 syf.
2. Darkov ,A. V. , Şapoşnikov , N. N. Stroitelnaya Mexanika , Moskova , Vısşaya şkola , 1986 , - 607 syf.
3. Ekiz , İ. Yapı Statiği I – İzostatik sistemler , İstanbul , 1995 – 525 syf.
4. Fuat Erbatur Structural Analysis , Part I and Part II , Ankara , 1994 – 116 syf.
5. Hanali , S. A. Yapı Statiği , Teknik Yayınevi , Ankara , 2003 – 344 syf.
6. Hanali , S. A. , Memmedov , Z. A. İnşaat Mexanikası , Bakü , 1988 – 77 syf.
7. Harry H. West , Louis F. Geschwindner Wiley Fundamentals of Structural Analysis , 2002 – 600 syf.
8. İsayev , E. M. , Memmedsadıgov , H. H. İnşaat Mexanikası , Çaşıoğlu , Bakü , 2003 – 362 syf.
9. Kleyn , G. K. , Rekaç , B. G. , Rozenblat , G. İ. Rukovodstvo k praktiçeskim zanyatiyam po kursu Stroitelnoy Mexanike , M. Vısşaya şkola ,1972 – 320 syf.
10. Kasımzade , A. A. Yapı Statiği , Birsen Yayınevi , İstanbul , 2004 – 351 syf.
11. Müfit Yorulmaz , Kaya Özgen. Yapı Statiği , İstanbul , 1992 – 156 syf.
12. Mustafa İnan. Cisimlerin Mukavemeti , İ. T. Ü. Yayınları , Yayın No: 25 , İstanbul 1988 – 560 syf.
13. Memmedov , Z. A. , Hanali , S. A. , Eliyeva , G. M. Uygulamalı Mukavemet , Bakü , 1994 – 48 syf.
14. Sinitko , N. K. Stroitelnaya Mexanika , M. Vısşaya şkola , 1980 – 431 syf.
15. Wang , C. K. Intermediate Structural Analysis , McGraw – Hill Book Company , 1983 – 790 syf.