

YAPI STATİĞİ-II

Structural Mechanics

Yararlanılabilecek Bazı Kaynaklar

1. **Yapı Statiği II**
   Adnan ÇAKIROĞLU ve Enver ÇETMELİ
2. **Yapı Statiği II**
   İbrahim EKİZ
3. **Yapı Statiği-Hiperstatik Sistemler**
   Konuralp GİRGİN, M. Günhan AKSOYLU, Kutlu DARILMAZ
4. **Yapı Statiği, Sonlu Elemanlar Metodu, Bilgisayar Destekli Sistem Analizi**
   Azer Arastunoğlu KASUMOV
5. **Yapı Statiğinde Özel Konular**
   M. Günhan AKSOYLU, Konuralp GİRGİN, Yılmaz YUVA, Arda KARABULUT
6. **Yapı Statiği I-II**
   Mustafa KARADUMAN ve Şanser DURAN
7. **Matrix Structural Mechanics**
   Lewis P. FELTON and Richard B. NELSON

...

Konu Başlıkları

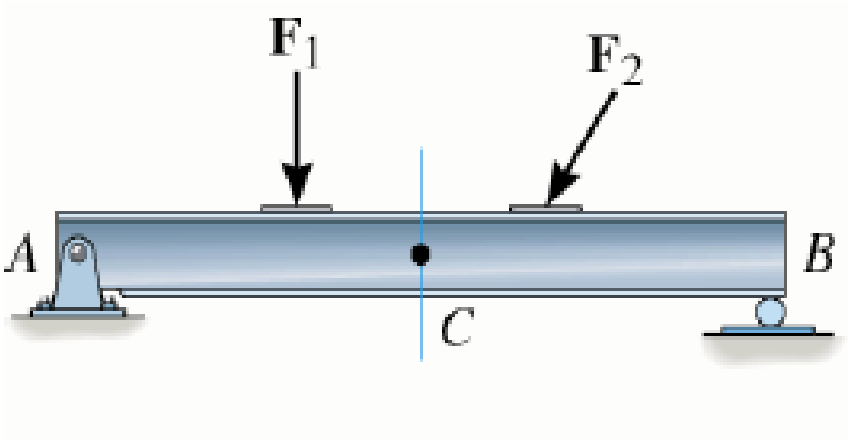
- **Hiperstatik Sistemler Tanım ve Genel Bilgiler**
- **Hiperstatik Sistemlerin Kuvvet Yöntemi İle Çözümü**
- Sabit Yük Hali
- Isı Değişimi Hali
- Mesnet Çökmeleri Hali
- Kuvvet Yönteminin Dolu Dövdeli Sürekli Kirişlere Uygulanması
- Kuvvet Yönteminin Kapalı Çerçevelere Uygulanması
- **Düğüm Noktası Sabit Sistemlerin Cross Yöntemi ile çözümü**
- **Düğüm Noktası Sabit Sistemlerin Açı Yöntemi ile çözümü**
- **Düğüm Noktası Hareketli Sistemlerin Açı Yöntemi İle Hesabı**
- **Hiperstatik Sistemlerin Hareketli Yüklere Göre Çözümü**
- **Muto Yöntemi İle ÇerçevelerinYatay Yüklere Göre Yaklaşık Hesabı**

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Yapı Sistemleri:

- İzostatik (Statikçe Belirli) Sistemler :

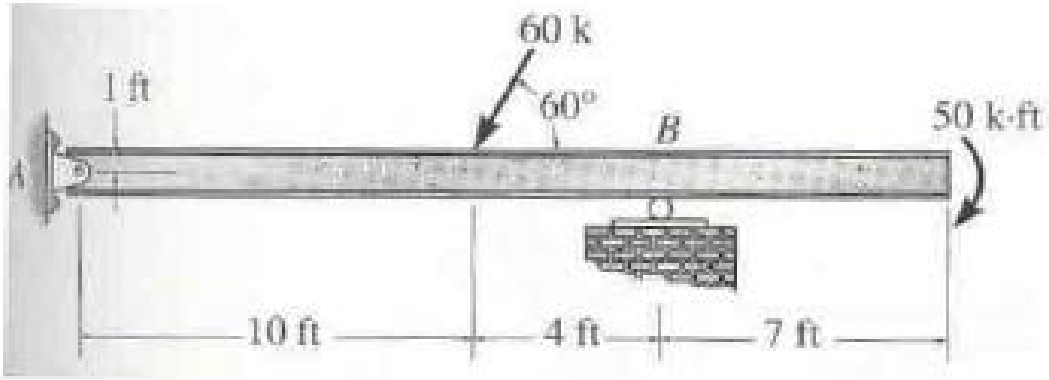
Bir sistemin tüm kesit tesirlerini (iç kuvvetlerini) ve mesnet reaksiyonlarını denge denklemleri yardımıyla hesaplayabiliyorsak sistem izostatiktir.

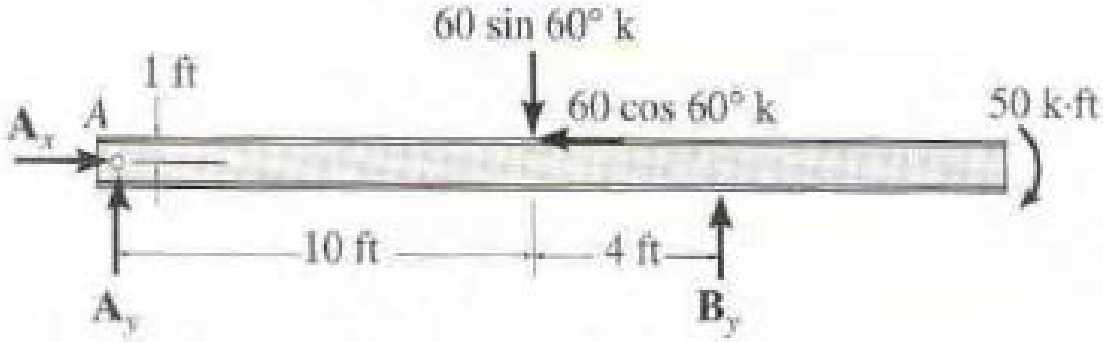


Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Yapı Sistemleri:

İzostatik (Statikçe Belirli) Sistemler :





Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Yapı Sistemleri:

- Hiperstatik (Statikçe Belirsiz) Sistemler :

Bir sistemin tüm kesit tesirlerini (iç kuvvetlerini) ve mesnet reaksiyonları denge denklemleri yardımıyla hesaplanamıyorsa sistem hiperstatiktir.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Yapı Sistemleri:

- Hiperstatik Sistemlerin Çözümü için :

  * Denge Denklemleri
  * Geometrik uygunluk şartları
  * Bünye Denklemleri (Gerilmeler ve Deformasyonlar arasındaki ilişkiler)

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Hiperstatik Sistemlerde Kesit tesiri oluşturan etkiler

* Dış yükler

* Mesnet çökmesi

* Sıcaklık değişimi

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Hiperstatik Sistemlerde Çözüm Yöntemleri

- Kuvvet Metodu
- Deplasman Metodu

Deplasman Metodları

- Açı Metodu
- Cross (Moment Dağıtma) Metodu
- Rijitlik Matrisi Metodu

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Hiperstatik Sistemler :

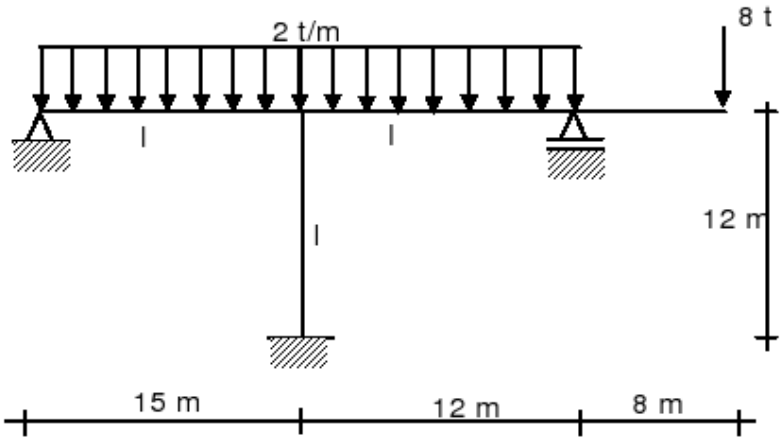
Dolu gövdeli sistemlerin hiperstatiklik derecesi iki gruba ayrılır.

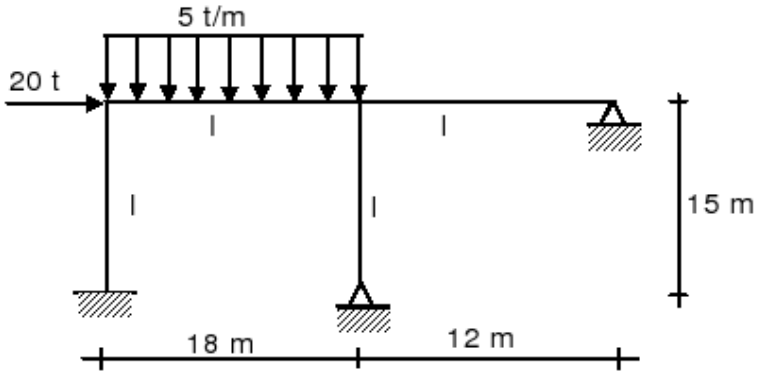
1) Dıştan hiperstatiklik : Yapıda hesaplanamayan mesnet reaksiyonu sayısına eşittir.

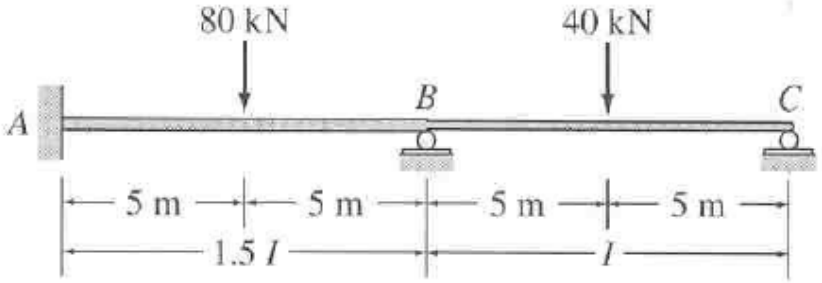
Mesnet reaksiyon sayısı (r) ise

r-3 (dıştan hiperstatiklik derecesi)

Abdulkadir Cüneyt AYDIN







Abdulkadir Cüneyt AYDIN

2) İçten Hiperstatiklik : Yapıda hesaplanamayan iç kuvvet sayısı ile ilglidir.

Dolu gövdeli sistemlerde

$n = 3*m + r - 3j$ denklemiyle bulunur.

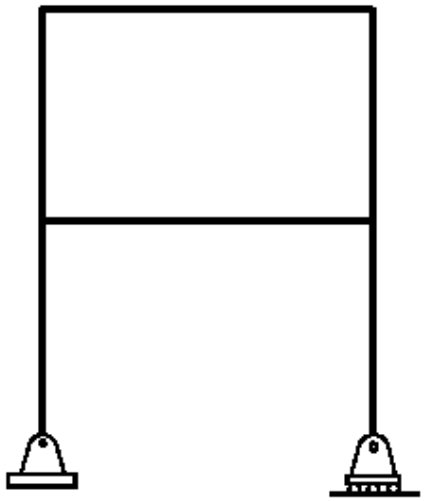
n: Hiperstatiklik derecesi

m: Eleman Sayısı

r : Mesnet reaksiyonları sayısı

j : Düğüm noktası sayısı

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



Düğüm noktası sayısı (j): 6

Mesnet reaksiyonu sayısı (r) : 3

Eleman sayısı (m): 6

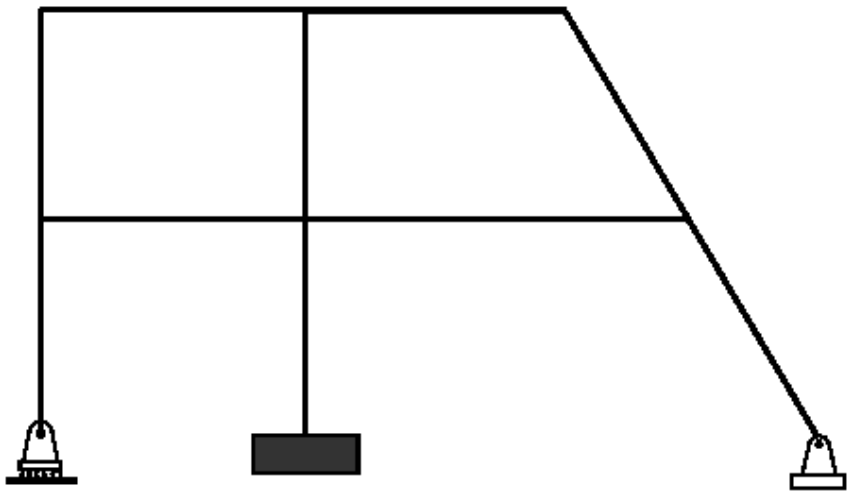
Hiperstatiklik derecesi

n : 3*m+r-3j

n : 3*6 + 3 – 3*6 = 3^0 hiperstatik

Sistem dıştan izostatik ancak içten hiperstatiktir. Yani sistemin tüm mesnet reaksiyonları hesaplanabilir ancak tüm çubuk kuvvetleri bulunamaz.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



Düğüm noktası sayısı (j) : 9

Mesnet reaksiyonu sayısı (r) : 6

Eleman sayısı (m) : 10

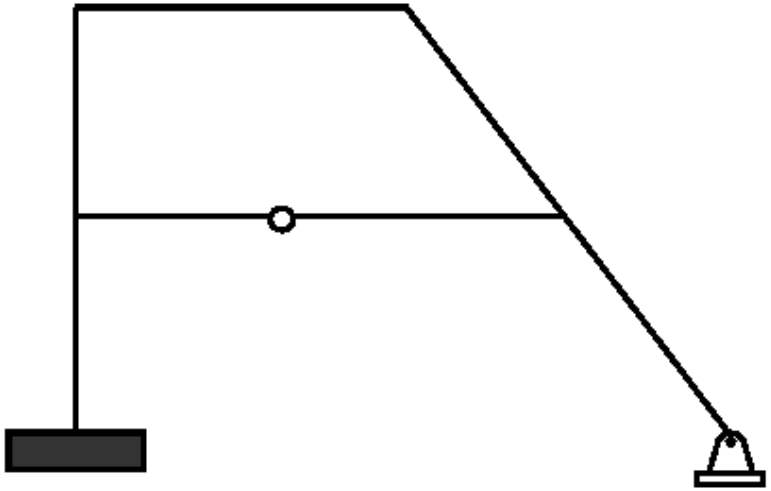
Hiperstatiklik derecesi

n : 3*m+r-3j

n : 3*10 + 6 – 3*9 = 9^0 hiperstatik

Sistem 9^0 hiperstatiktir. Mesnet reaksiyonları incelendiğinde sistemin Dıştan 3^0 hiperstatik olduğu görülür. Yani sistem İçten 6^0 hiperstatiktir

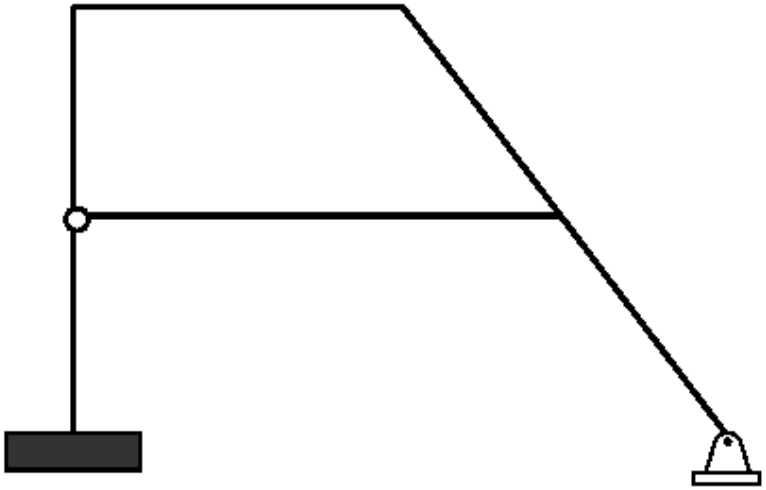
Abdulkadir Cüneyt AYDIN



Mafsal olması durumunda

Eğer mafsal eleman üzerinde ise

hiperstatiklik derecesi 1 azaltılır.



Eğer mafsal düğümde ise
düğümde birleşen eleman
sayısının 1 eksiği kadar
hiperstatiklik derecesi azaltılır.

Düğümde 3 eleman birleşiyor

3-1=2 derece azaltılır.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

KUVVET METODU

Düzlem Hiperstatik sistemlerin sabit yükler,sıcaklık değişimi ve mesnet çökmesi gibi dış etkilerlerden dolayı oluşan kesit tesirleri ve yer değiştirmelerini bulmaya yarayan virtuel iş ilkesine dayalı çözüm yöntemidir.

Kuvvet metodu ile çözüm yapılırken yapılacak ilk iş izostatik esas sistemin seçilmesidir.

İzostatik esas sistem, hiperstatik sistemde hiperstatiklik derecesi kadar bilinmeyenin belirlenmesi ile elde edilir. Hiperstatik sistemde hangi bilinmeyenlerin hesaplanacağı belirlenerek sistem izostatik hale getirilir.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

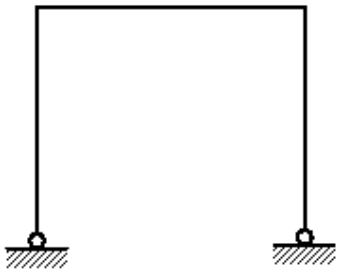
İzostatik Esas Sistem: Hiperstatik sistem izostatik hale getirilir. Bunu yaparken ya sisteme mafsal yerleştirilir yada mesnetlerdeki serbestlikler arttırılır. İzostatik esas sitem seçilirken hangi sistemi daha kolay çözebileceğimizi düşünüyorsak o sistemi seçebiliriz. Bir hiperstatik sistemin pek çok izostatik esas sistemi vardır.

Mafsal eklenmesi durumunda mafsalın her iki yanına bilinmeyen olarak moment yazılır.

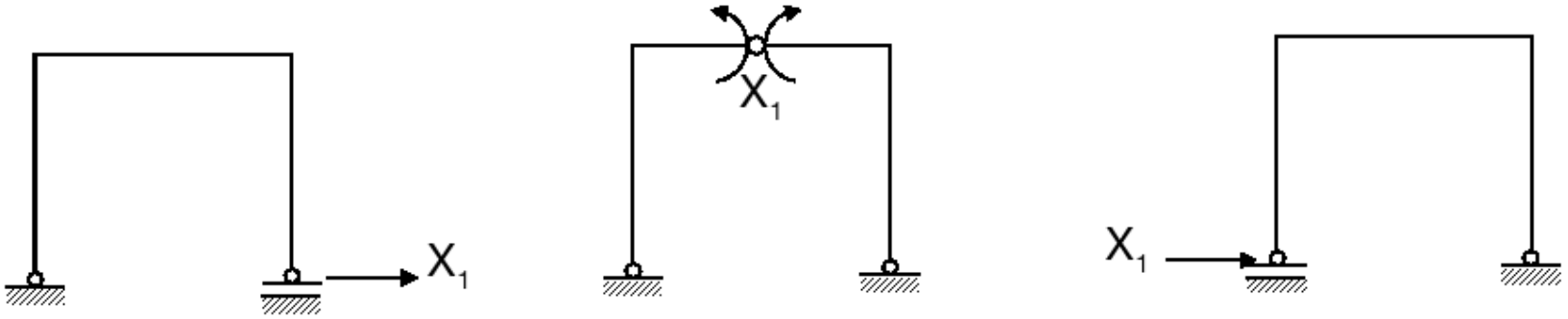
Mesnetlenme durumunun değiştirilmesi durumunda ise hangi yönde serbestlik arttırılırsa o yönde yönde bilinmeyen kuvvet veya moment yazılır.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

1. Dereceden hiperstatik sistem



İzostatik Esas Sistem



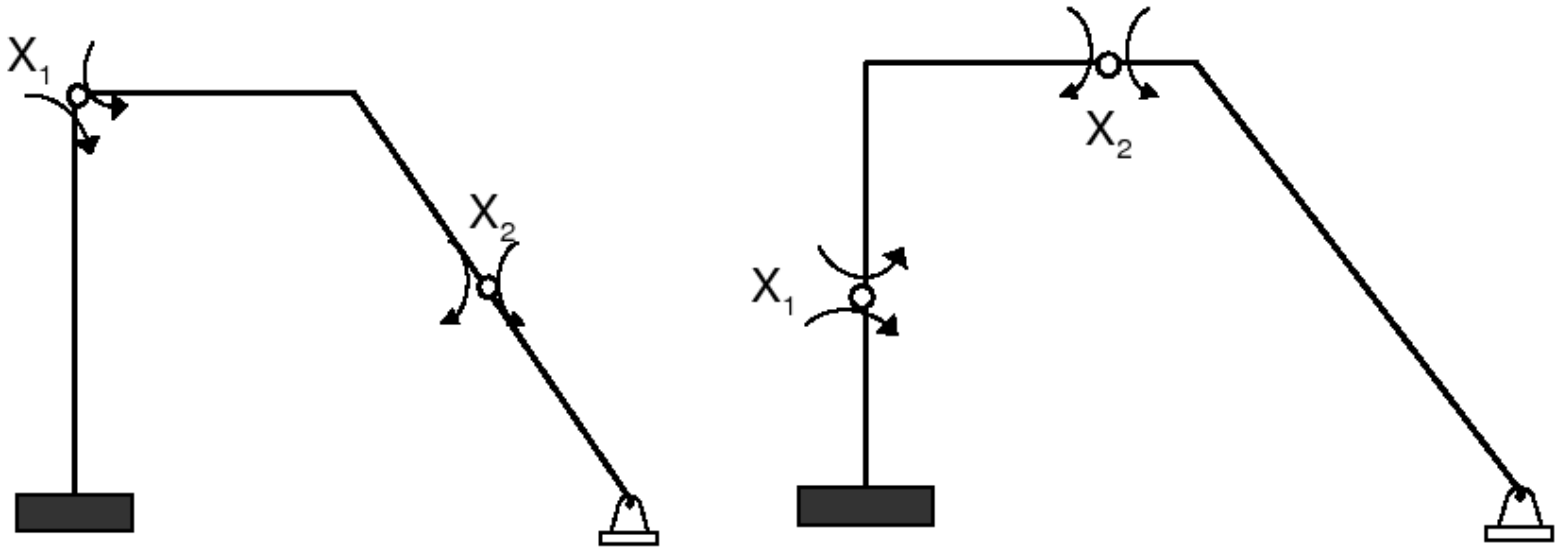
İzostatik esas sistem belirlenirken mesnetlenme durumu izostatik hale getirilir bu arada serbest bırakılan her mesnet reaksiyonu için bir bilinmeyen yazılır veya sisteme mafsal yerleştirilerek mafsalın olduğu yerde bilinmeyen olarak moment yazılır.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

İzostatik esas sistem belirlenirken aynı zamanda hesap edilecek bilinmeyenlerde seçilmiş olmaktadır. Bu yüzden izostatik esas sistem belirlenirken hesaplarda kolaylık sağlayacak sistemlerin seçilmesine çalışılır. Yani izostatik esas sistem ve bilinmeyenlerin birim yüklemeleri için yapılacak hesapların daha kolay yapılabileceği sistemler izostatik sistem olarak seçilmeye çalışılır.

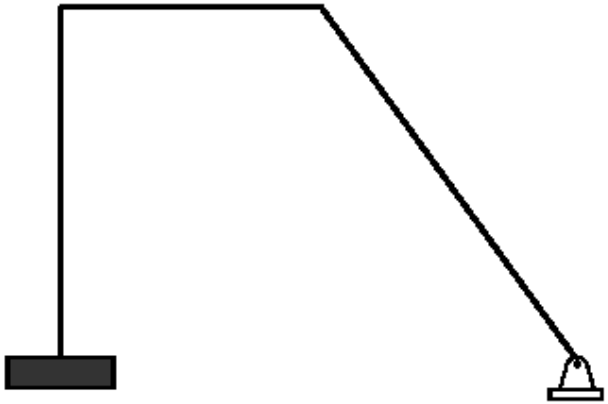
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Mafsal eklenmesi durumunda mafsalın her iki yanına bilinmeyen olarak moment yazılır.

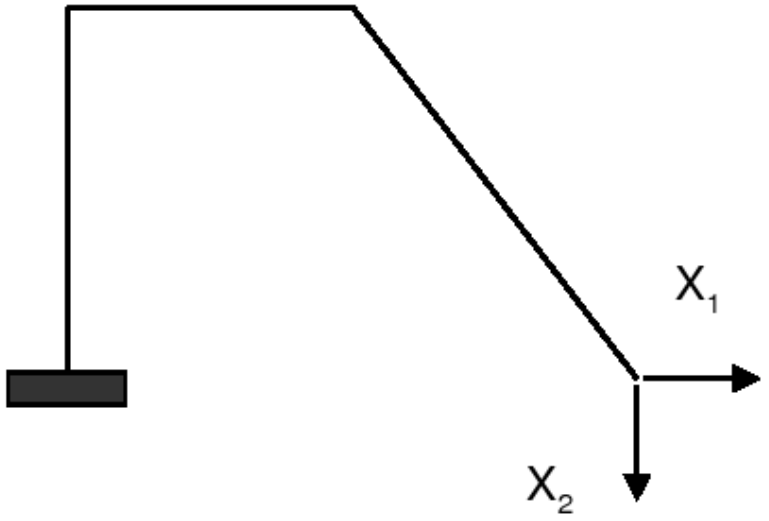


Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Mesnetlenme durumunun değiştirilmesi durumunda ise hangi yönde serbestlik arttırılırsa o yönde yönde bilinmeyen kuvvet veya moment yazılır.



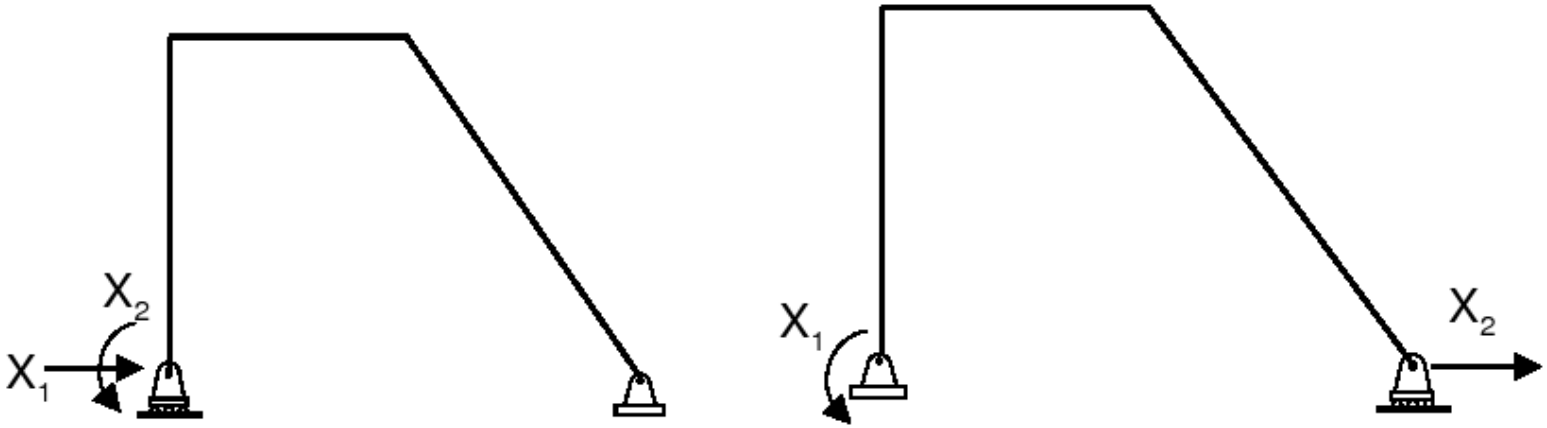
2. Dereceden hiperstatik sistem



İzostatik esas sistem

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

2. Dereceden hiperstatik sistem için izostatik esas sistemler



Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Kuvvet Yöntemine göre Hiperstatik sistemdeki etkiler,

İzostatik esas sistemdeki etkiler ile X_1, X_2,……,X_n bilinmeyen kuvvetlerin oluşturduğu etkilerin uygun şekilde birleştirilmesiyle bulunur. X_1, X_2,……,X_n bilinmeyenlerinin bulunması hiperstatik sistemdeki etkilerin bulunması için şarttır. Bilinmeyen sayısı sistemin hiperstatiklik derecesi kadardır.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Kuvvet Yöntemine göre Hiperstatik sistemdeki etkiler hesaplanırken, hiperstatiklik derecesi belirlenip izostatik esas sistem seçildikten sonra sistem uygunluk denklemi yazılır.

$$\delta_1 = \delta_{1w} + \delta_{1t} + \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \delta_{1n}X_n$$

$$\delta_2 = \delta_{2w} + \delta_{2t} + \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \delta_{2n}X_n$$

$$\delta_3 = \delta_{3w} + \delta_{3t} + \delta_{30} + \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \delta_{3n}X_n$$

$$\vdots$$

$$\delta_n = \delta_{nw} + \delta_{nt} + \delta_{n0} + \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \delta_{nn}X_n$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Uygunluk denklemi hiperstatiklik derecesi kadar yazılır.

Sistem 1 dereceden hiperstatik ise denklem 1 tanedir

$$\delta_1 = \delta_{1w} + \delta_{1t} + \delta_{10} + \delta_{11} X_1$$

Sistem 2. dereceden hiperstatik ise denklem 2 tane olacaktır

$$\delta_1 = \delta_{1w} + \delta_{1t} + \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2$$

$$\delta_2 = \delta_{2w} + \delta_{2t} + \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2$$

Sistem 3. dereceden hiperstatik ise denklem 3 tane olacaktır

$$\delta_1 = \delta_{1w} + \delta_{1t} + \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3$$

$$\delta_2 = \delta_{2w} + \delta_{2t} + \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3$$

$$\delta_3 = \delta_{3w} + \delta_{3t} + \delta_{30} + \delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Sistemde sıcaklı değişimi ve mesnet çökmesi yok ise sadece dış yük etkisi var ise denklem şu hale gelir:

$$\delta_1 = \delta_{1w} + \delta_{1t} + \delta_{10} + \delta_{11} X_1$$

Sistem 2. dereceden hiperstatik ise denklem 2 tane olacaktır

$$\delta_1 = \delta_{1w} + \delta_{1t} + \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2$$
$$\delta_2 = \delta_{2w} + \delta_{2t} + \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2$$

Sistem 3. dereceden hiperstatik ise denklem 3 tane olacaktır

$$\delta_1 = \delta_{1w} + \delta_{1t} + \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3$$
$$\delta_2 = \delta_{2w} + \delta_{2t} + \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3$$
$$\delta_3 = \delta_{3w} + \delta_{3t} + \delta_{30} + \delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Uygunluk denkleminde görülen deplasman ifadelerinin altındaki ilk indis yeri, ikinci indis ise sebebi göstermektedir.

δ_i i yönündeki deplasman

δ_{iw} i yönünde mesnet çökmesinden dolayı oluşan deplasman değeri

δ_{it} i yönünde sıcaklık değişiminden dolayı oluşan deplasman değeri

δ_{i0} i yönünde dış yükten oluşan deplasman değeri

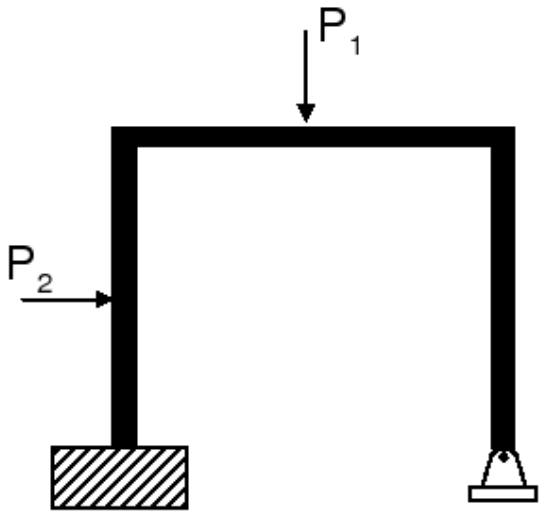
δ_{i1} i yönünde 1 nolu birim yüklemeden dolayı oluşan deplasman değeri

δ_{i2} i yönünde 2 nolu birim yüklemeden dolayı oluşan deplasman değeri

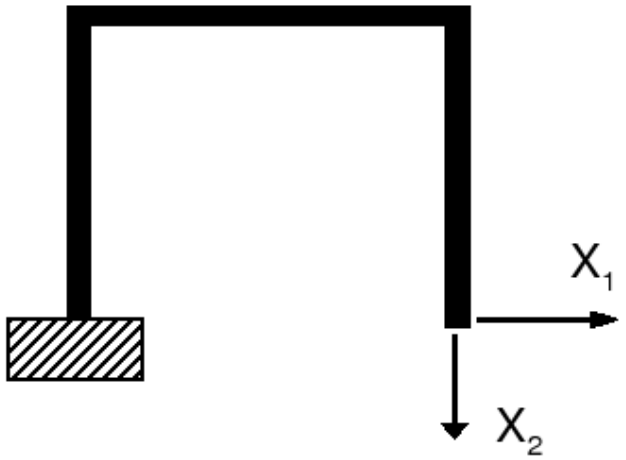
$\vdots$

δ_{in} i yönünde n nolu birim yüklemeden dolayı oluşan deplasman değeri.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



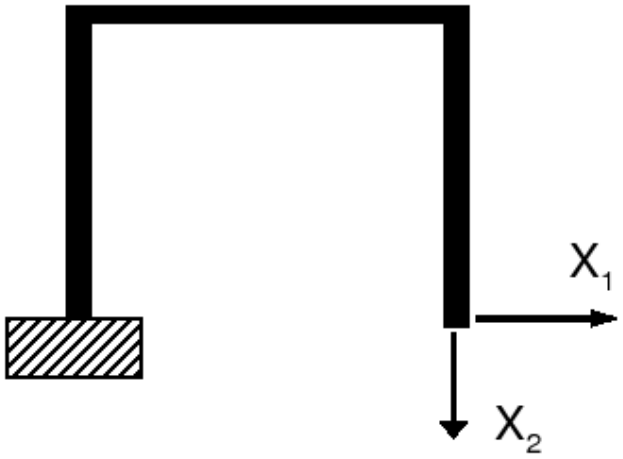
2. dereceden hiperstatik sistem



İzostatik esas sistem

Kuvvet metodu ile çözüm yapılırken hiperstatiklik derecesi belirlenip izostatik esas sistem belirlendikten sonra uygunluk denklemleri yazılır. Bundan sonra uygunluk denklemindeki değerleri bulmak sırasıyla yüklemeler yapılır.

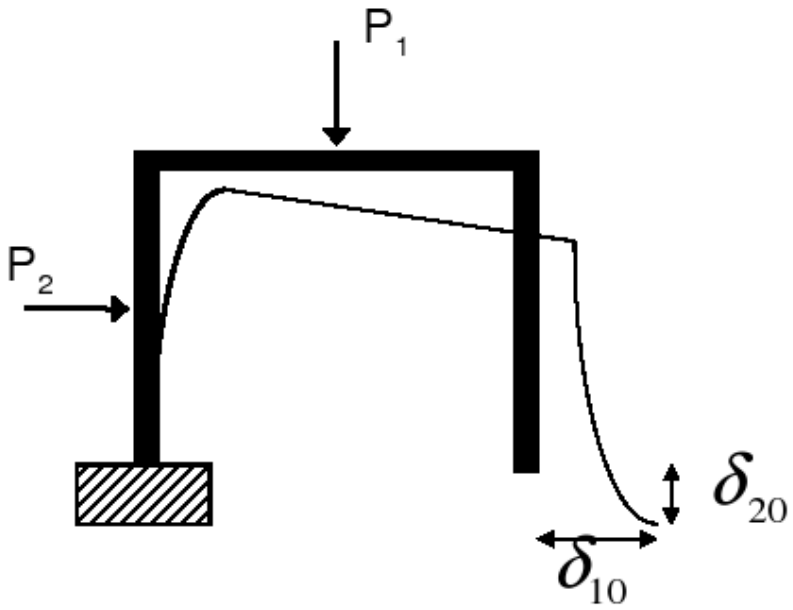
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

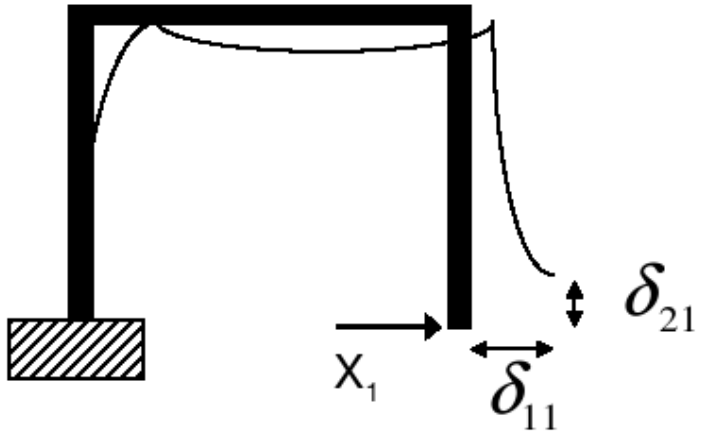


Sistem 2. dereceden hiperstatik ise denklem 2 tane olacaktır

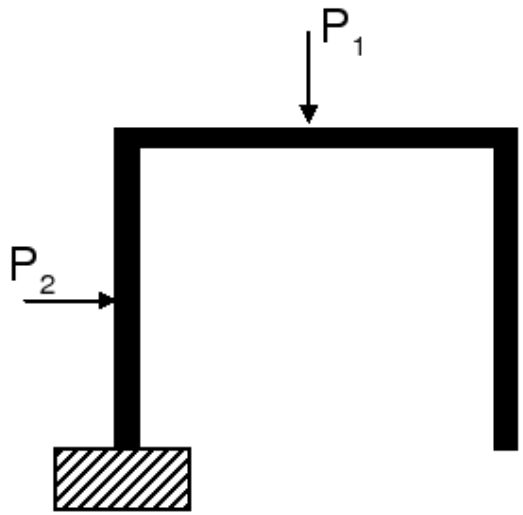
$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2$$

$$\delta_2 = \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2$$





Abdulkadir Cüneyt AYDIN



X_0 Yüklemesi

İzostatik esas sisteme dış yük yüklenerek sistemde oluşan M_0 N_0 T_0 değişim diyagramları çizilir.

- **X_0 Yüklemesi**

İzostatik esas sistemde sadece dış yük etkisinde M, N, T kesit tesirleri diyagramları çizilir.

M_0 : İzostatik esas sistemde dış etkilerden dolayı oluşan moment

N_0 : İzostatik esas sistemde dış etkilerden dolayı oluşan normal kuvvet

T_o : İzostatik esas sistemde dış etkilerden dolayı oluşan kesme kuvveti.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

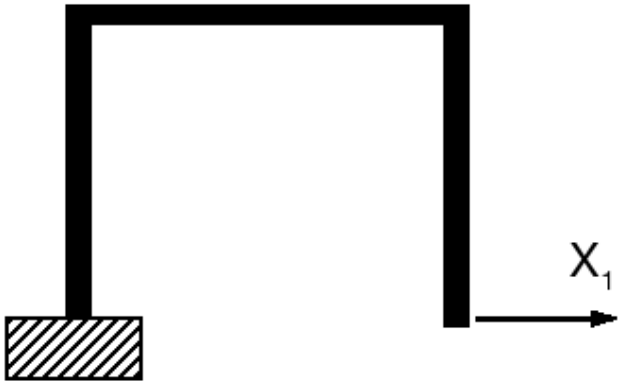
•Birim Yüklemeler

İzostatik esas sistemde, sırasıyla seçilen her bir bilinmeyen için birim yüklemeler yapılır.

$X_1=1$, $X_2=1$, $X_3=1$,....., $X_n=1$

Bu durumda her bir birim yükleme için sistem kesit tesirleri (M, N, T) çizilir. Bu kesit tesirleri hesaplanırken sistemde dış yük yoktur.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



X_1 Yüklemesi

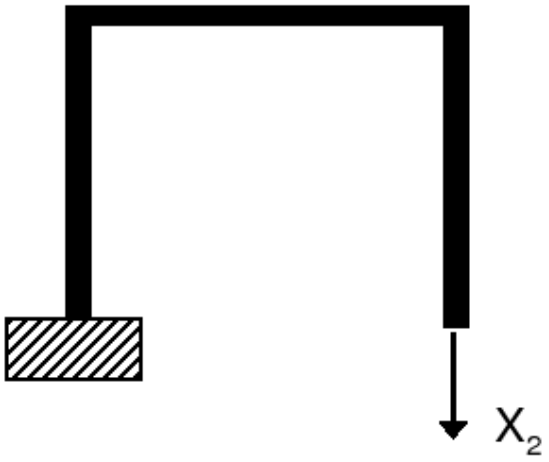
İzostatik esas sistemde sadece 1 nolu bilinmeyen yönünde birim yükleme yapılması durumu. Bu durumda izostatik esas sistemde oluşacak

M_1 : İzostatik esas sistemde 1 nolu birim yüklemeden etkilerden dolayı oluşan moment

N_1 : İzostatik esas sistemde 1 nolu birim yüklemeden dolayı oluşan normal kuvvet

T_1 : İzostatik esas sistemde 1 nolu birim yüklemeden dolayı oluşan kesme kuvveti.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



İzostatik esas sistem

X_2 Yüklemesi

İzostatik esas sistemde sadece 2 nolu bilinmeyen yönünde birim yükleme yapılması durumu. Bu durumda izostatik esas sistemde oluşacak

M_2 : İzostatik esas sistemde 2 nolu birim yüklemeden etkilerden dolayı oluşan moment

N_2 : İzostatik esas sistemde 2 nolu birim yüklemeden dolayı oluşan normal kuvvet

T_2 : İzostatik esas sistemde 2 nolu birim yüklemeden dolayı oluşan kesme kuvveti.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Uygunluk denklemindeki deplasman ifadelerinin bulunması için mukavemette görülen virtuel iş teoremi kullanılır. Dolu gövdeli sistemler için bu ifade şu şekildedir:

$$\delta_{ij} = \int M_i M_j \frac{ds}{EI} + \int N_i N_j \frac{ds}{EF} + \int T_i T_j \frac{ds}{GF'}$$

Bu denklemde görülen

EI= Eğilme Rijitliği

EF= Uzama Rijitliği

GF'= Kayma Rijitliği , ifadeleridir.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Deplasman ifadelerinin simetri özelliği vardır. $\delta_{ij} = \delta_{ji}$

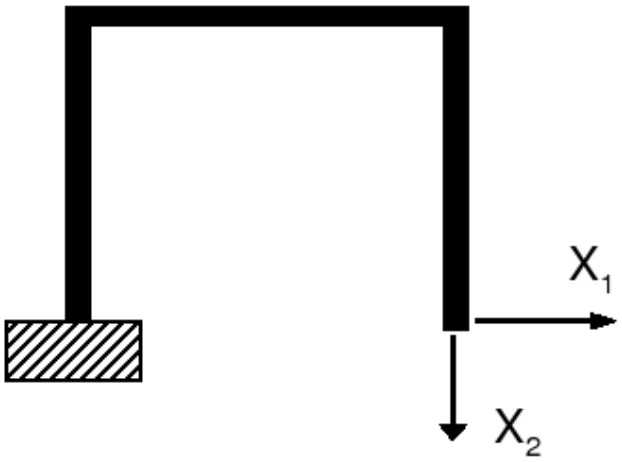
Mesela 12 deplasmanı ile 21 deplasmanı birbirine eşittir ve şu denklemle bulunur:

$$\delta_{12} = \delta_{21}$$

$$\delta_{12} = \int M_1 M_2 \frac{ds}{EI} + \int N_1 N_2 \frac{ds}{EF} + \int T_1 T_2 \frac{ds}{GF'}$$

Bu deplasmanların bulunması sırasında genellikle N ve T kesme ifadeleri ihmal edilir. Moment ifadeleri de matematiksel olarak yazılır ve uzunluk boyunca integral alınır.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



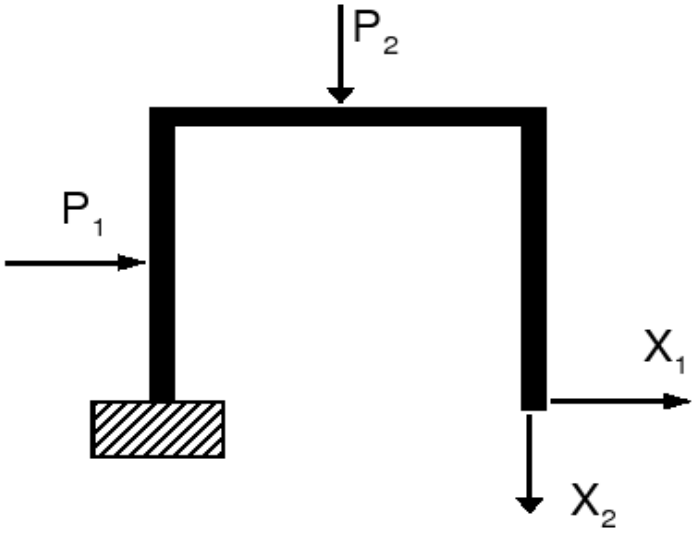
Deplasman ifadeleri hesaplandıktan sonra aşağıdaki uygunluk denkleminde yerine konarak denklem takımı çözülür ve bilinmeyenler olarak seçilen X_1 ve X_2 reaksiyon kuvvetleri bulunur.

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2$$
$$\delta_2 = \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2$$



X_1
X_2

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



Bundan sonra hesaplanan X değerleri kullanılarak hiperstatik sistemde oluşacak kesit tesirleri bulunabilir. Bunun için hesaplanan X değerleri dış yükler ile sisteme etki ettirilir.

Yada süperpozisyon denklemleri yazılarak daha önce çizilen M,N,T diyagramları kullanılarak hiperstatik sistemin kesit tesirleri hesaplanır.

Sistemde herhangi bir noktadaki kesit tesirlerini hesaplamak için

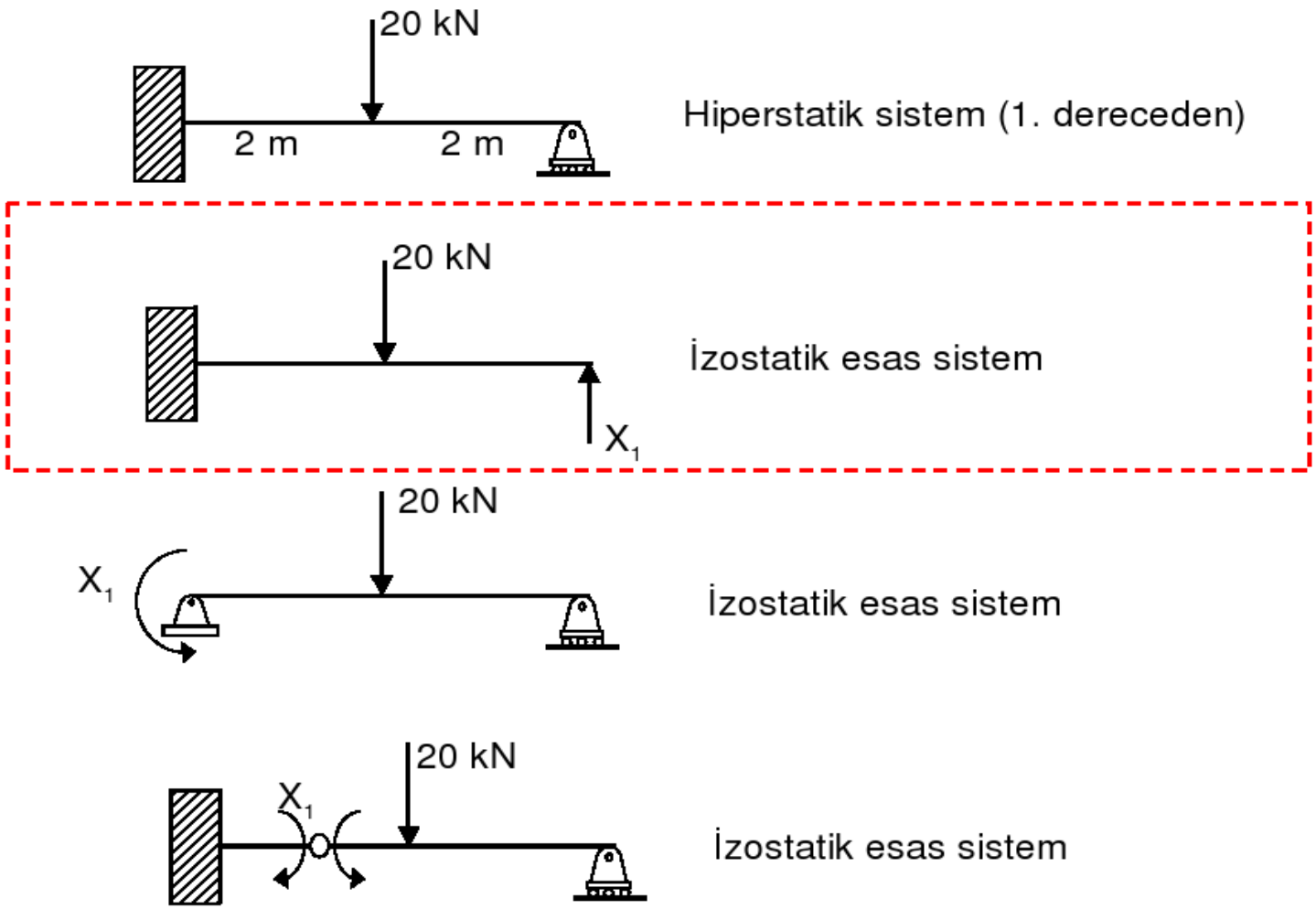
$$M=M_0+ M_1 X_1 + M_2 X_2 + M_3 X_3 +.....+M_n X_n$$

$$T = T_0 + T_1 X_1 + T_2 X_2 + ...+T_n X_n$$

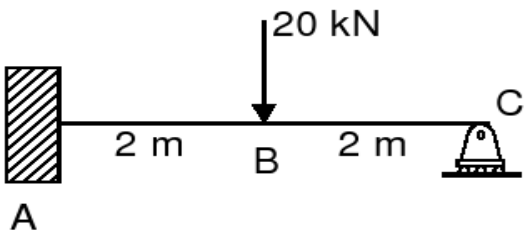
$$N = N_0 + N_1 X_1 + N_2 X_2 +.....+N_n X_n$$

Süperpozisyon denklemleri kullanılabilir. Bu denklemler yardımıyla sistemde istenilen noktadaki kesit tesirleri hesaplanabilir.

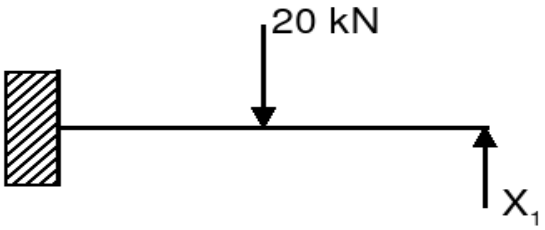
Abdulkadir Cüneyt AYDIN



Abdulkadir Cüneyt AYDIN



Hiperstatik sistem (1. dereceden)

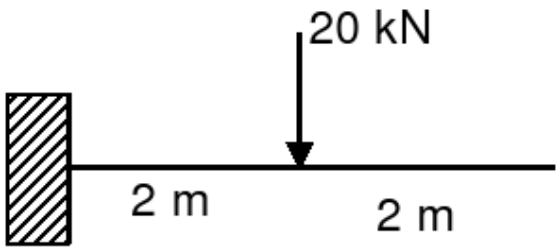


İzostatik esas sistem

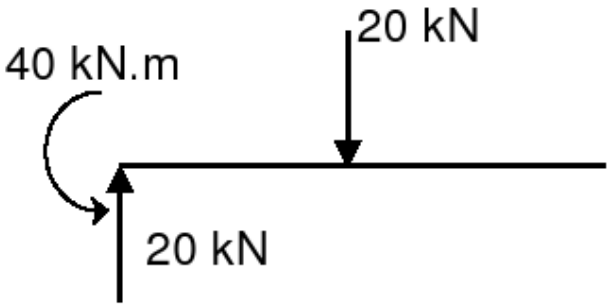
1. Dereceden hiperstatik olduğu için uygunluk denklemi

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

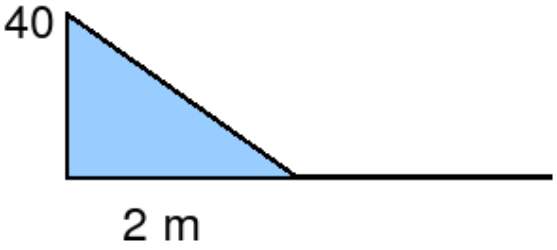


X_0 Yüklemesi



$\Sigma F_y = 0 \quad A_y = 20$

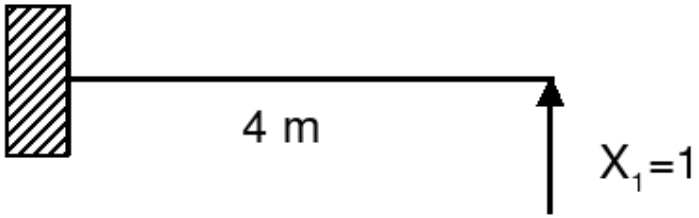
$\Sigma M_A = 0 \quad M_A = 20*2 = 40$ kN.m

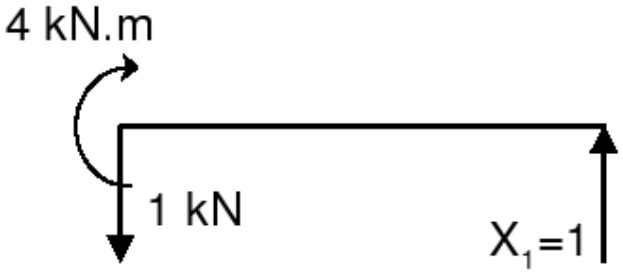


M_0 Diyagramı

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

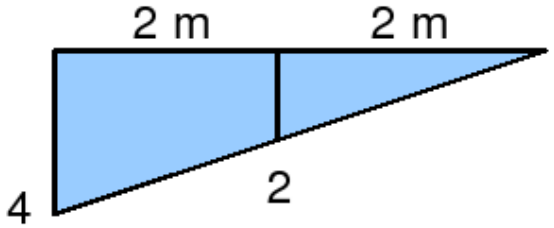
X_1 Yüklemesi





$\Sigma F_y = 0 \quad A_y = 1$

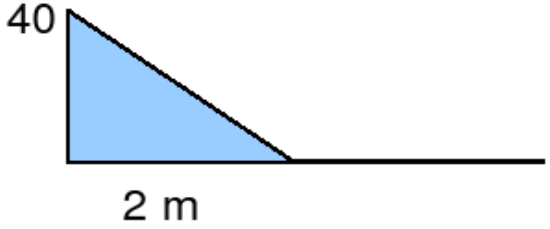
$\Sigma M_A = 0 \quad M_A = 1*4 = 4$ kN.m



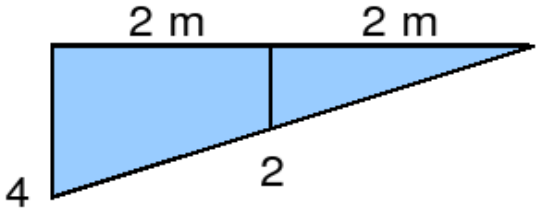
M_1 Diyagramı

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1$$



M_0 Diyagramı



M_1 Diyagramı

$$\delta_{10} = \int M_1 M_0 \frac{ds}{EI} + ihmal$$

$$EI\,\delta_{10} = \int_0^2 (2+x).(-20x)dx$$

$$EI\,\delta_{10} = -133.333$$

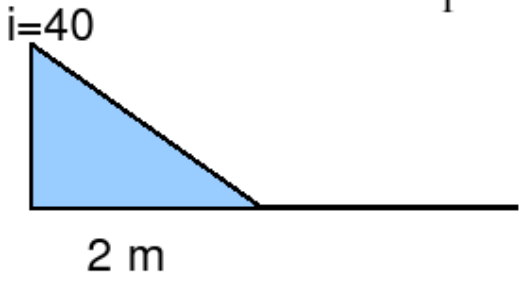
$$\delta_{11} = \int M_1 M_1 \frac{ds}{EI} + ihmal$$

$$EI\,\delta_{11} = \int_0^4 (x).(x)dx$$

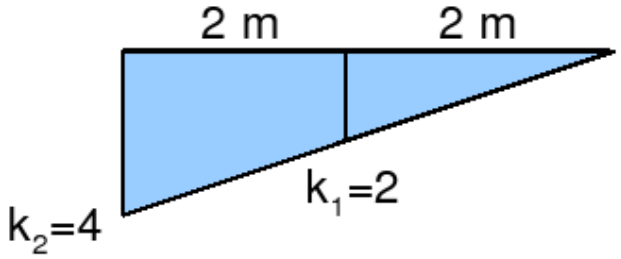
$$EI\,\delta_{11} = 64 \setminus 3 = 21.333$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1$$



M_0 Diyagramı



M_1 Diyagramı

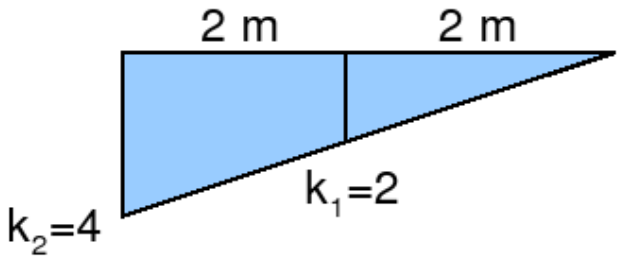
$$\delta_{10} = \int M_1 M_0 \frac{ds}{EI} + ihmal$$

$$EI\,\delta_{10} = \frac{1}{6} L\, i\, (k_1 + 2k_2)$$

$$EI\,\delta_{10} = \frac{1}{6} * 2 * (-40) * (2 + 2 * 4) = -133.333$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1$$



M_1 Diyagramı

$$\delta_{11} = \int M_1 M_1 \frac{ds}{EI} + ihmal$$

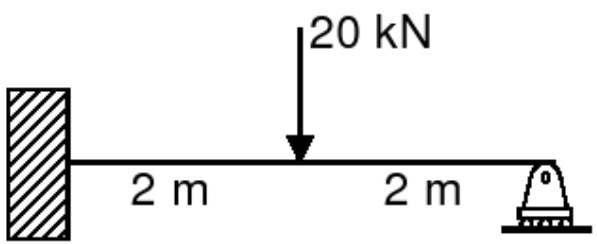
$$EI\,\delta_{11} = \frac{1}{3} L\,i\,k = \frac{1}{3} * 4 * 4 * 4 = 64/3 = 21.333$$

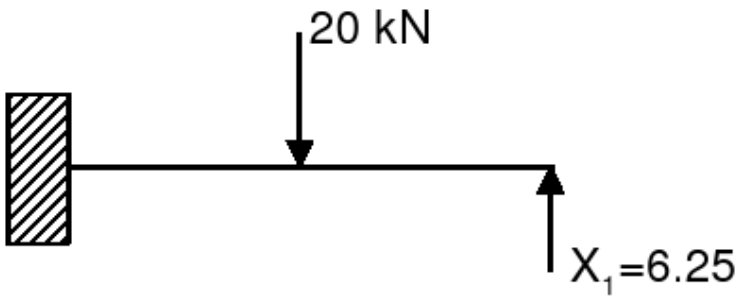
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1$$

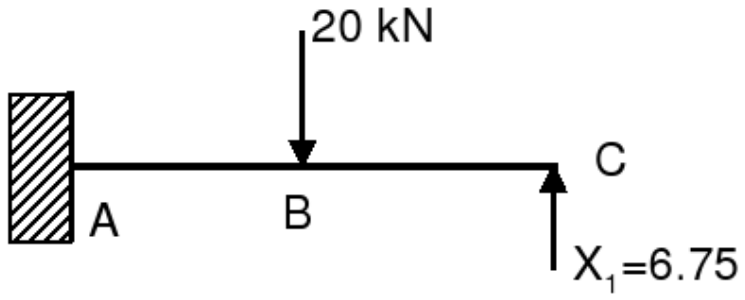
$$\delta_1 = 0 = -133.333 + 21.333\, X_1$$

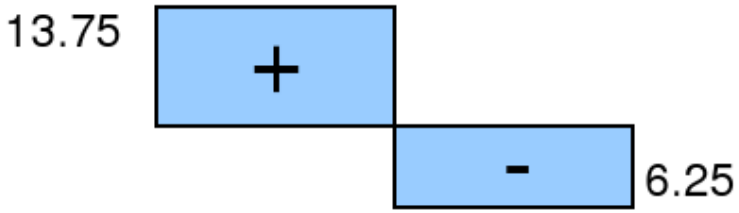
$$X_1 = 6.25$$



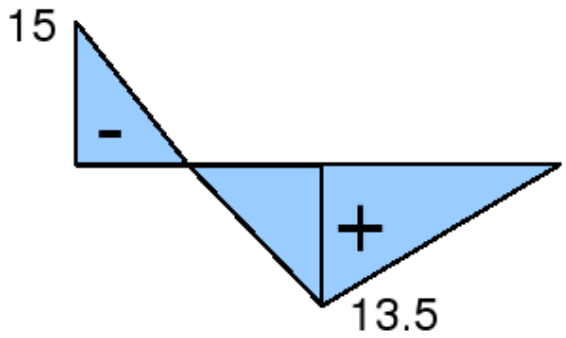


Abdulkadir Cüneyt AYDIN



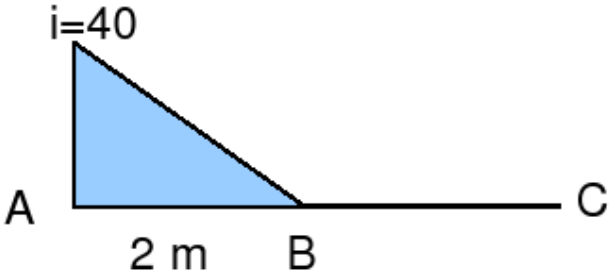


T

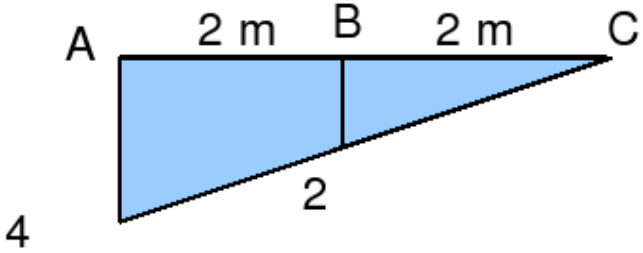


M

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



M_0 Diyagramı

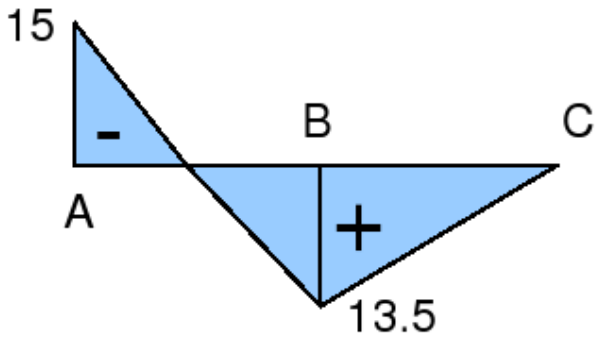


M_1 Diyagramı

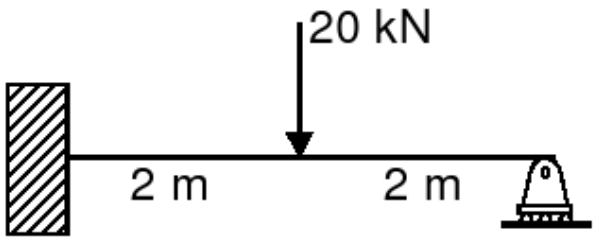
$$M_A = M_{0A} + M_{1A} * X_1 = (-40) + 4*(6.25) = -15$$

$$M_B = M_{0B} + M_{1B} * X_1 = (0) + 2*(6.25) = 13.5$$

$$M_C = M_{0C} + M_{1C} * X_1 = (0) + 2*(0) = 0$$

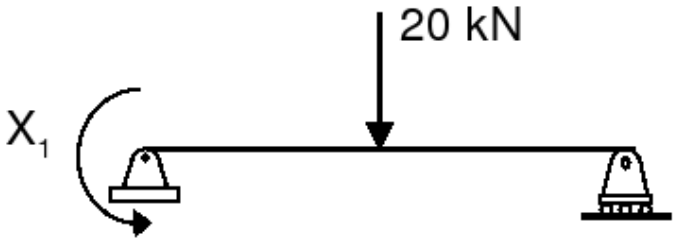


Abdulkadir Cüneyt AYDIN



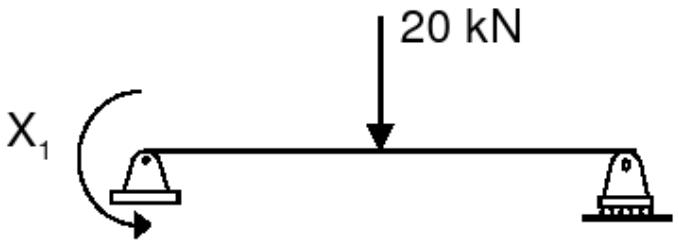
Hiperstatik sistem (1. dereceden)

Aynı sistemi çözmek için izostatik esas sistemi farklı seçelim.

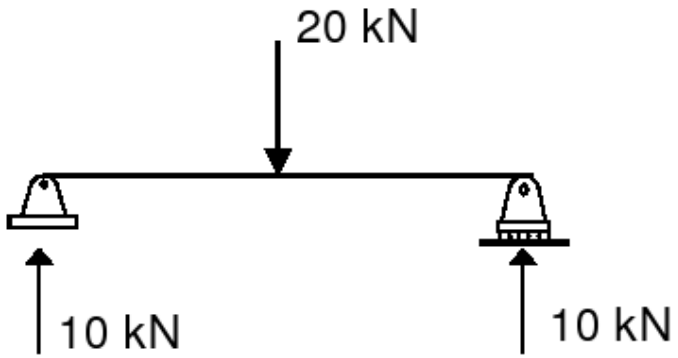


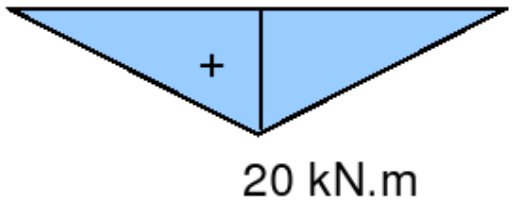
İzostatik esas sistem

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



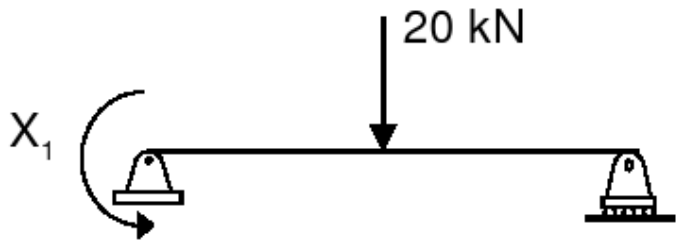
İzostatik esas sistem



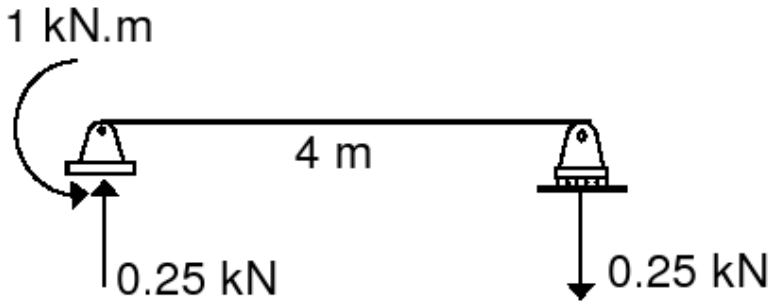


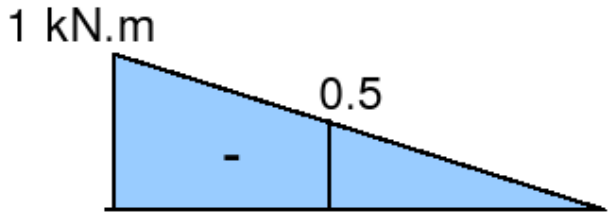
M_0

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



İzostatik esas sistem

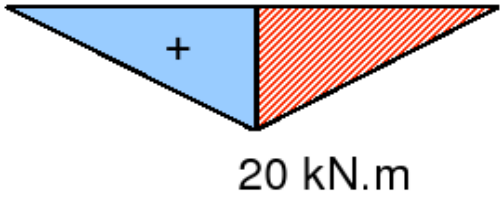




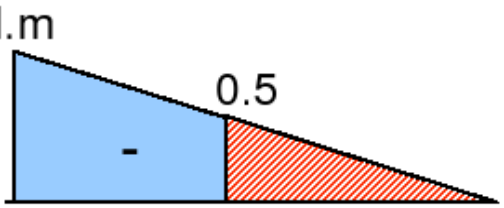
M_1

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1$$



M_0 Diyagramı



M_1 Diyagramı

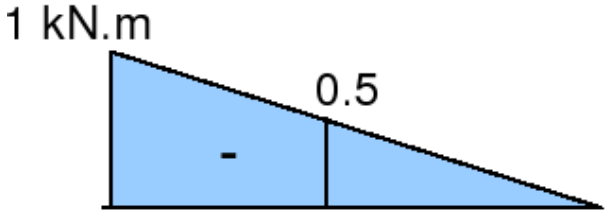
$$\delta_{10} = \int M_1 M_0 \frac{ds}{EI} + ihmal$$

$$EI\,\delta_{10} = \frac{1}{3} L\,i\,k + \frac{1}{6} L\,i\,(2k_1 + k_2)$$

$$EI\,\delta_{10} = \frac{1}{3} * 2 * (20) * (-0.5) + \frac{1}{6} * 2 * (20) * (2 * (-0.5) + (-1)) = -20$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1$$



M_1 Diyagramı

$$\delta_{11} = \int M_1 M_1 \frac{ds}{EI} = \frac{1}{3} L\, i\, k = \frac{1}{3} 4.(-1).(-1) = 1.333$$

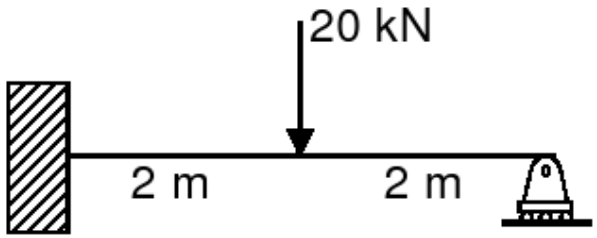
$$EI\ \delta_{11} = 1.333$$

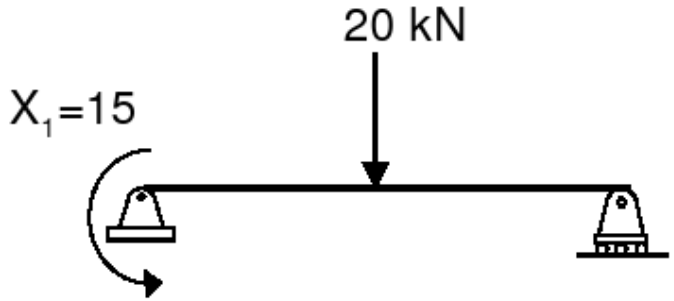
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1$$

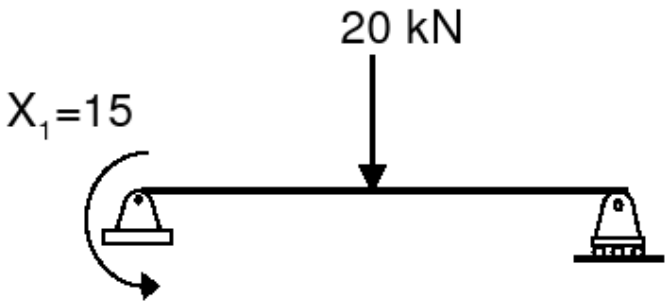
$$\delta_1 = 0 = -20 + 1.333\, X_1$$

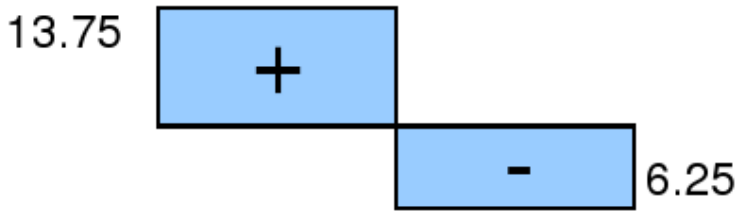
$$X_1 = 15$$



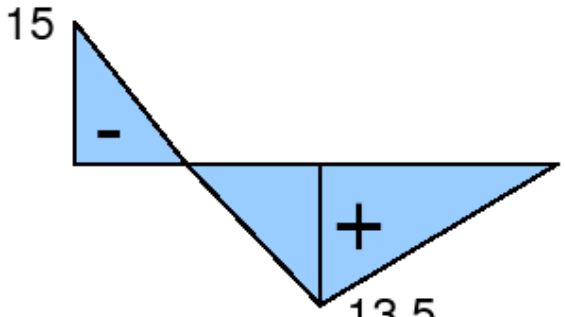


Abdulkadir Cüneyt AYDIN



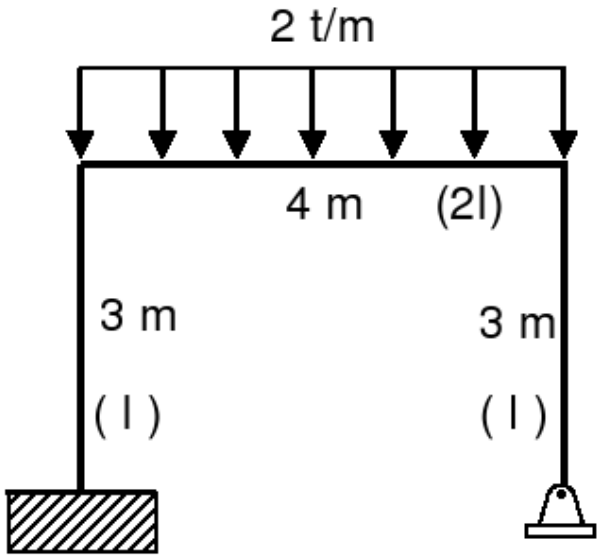


T



M

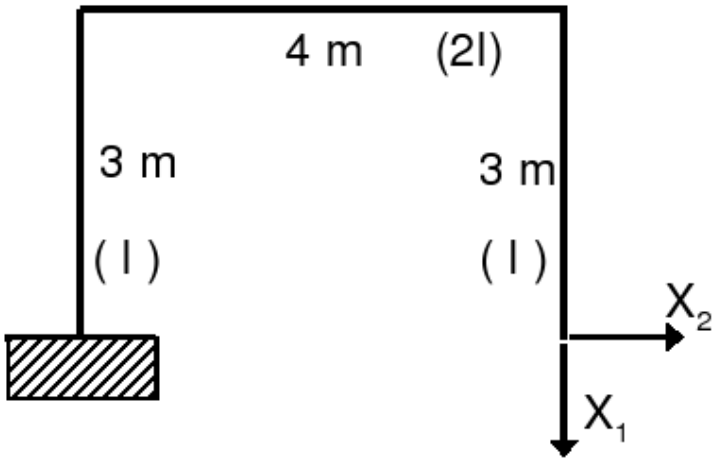
Abdulkadir Cüneyt AYDIN



Hiperstatik sistem (2. dereceden)

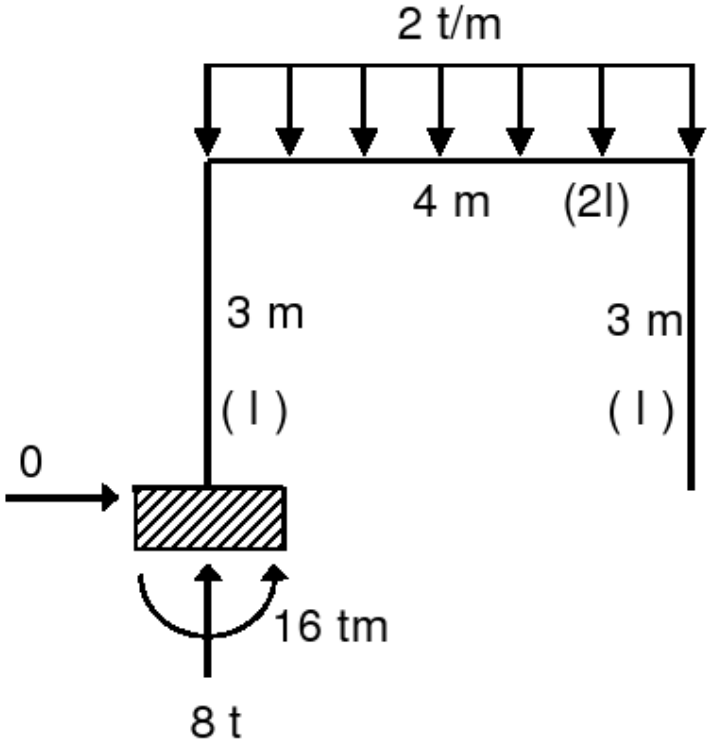
$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2$$

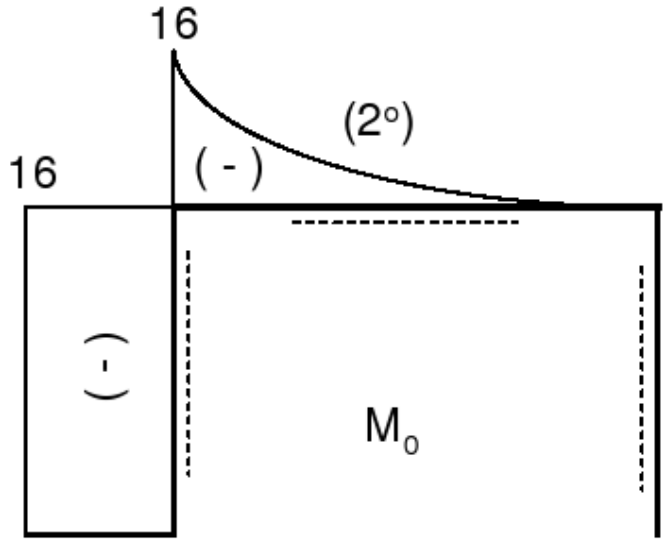
$$\delta_2 = \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2$$



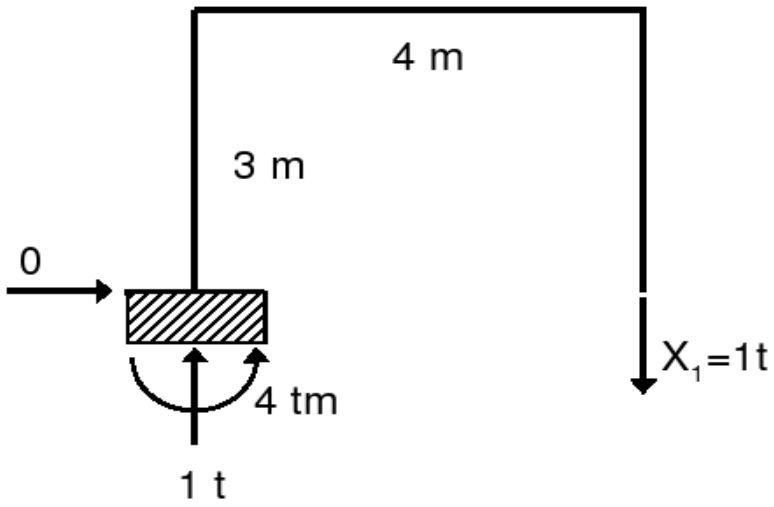
İzostatik esas sistem

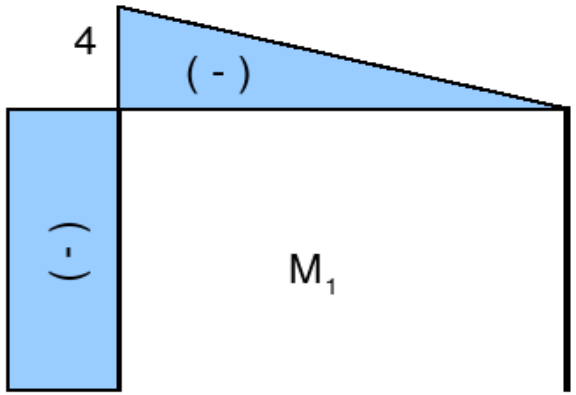
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

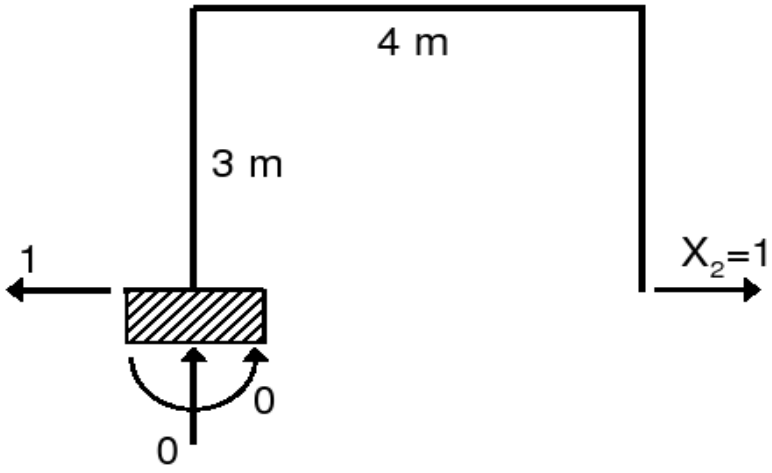


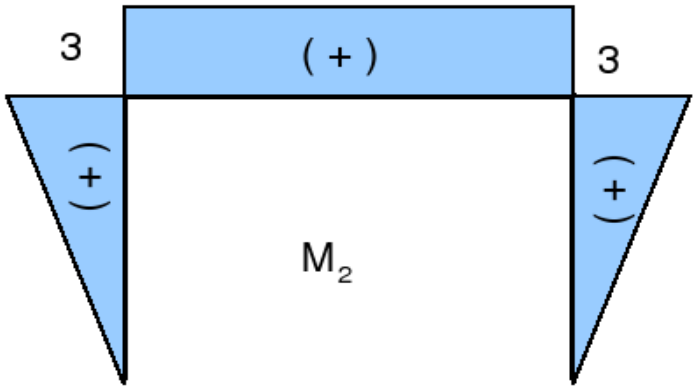


Abdulkadir Cüneyt AYDIN



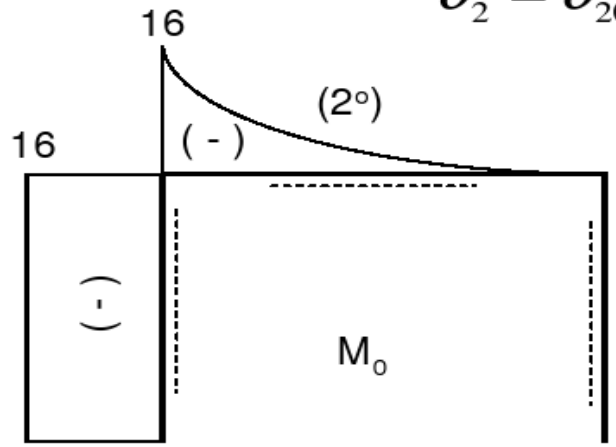


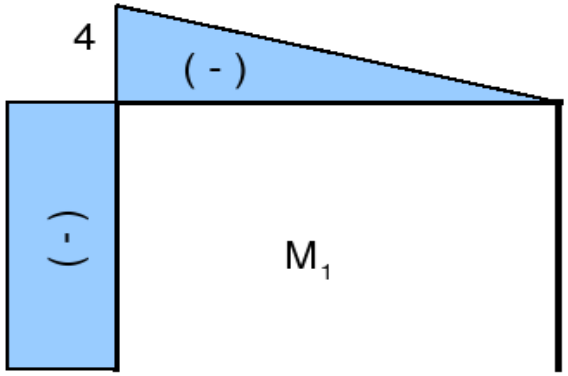


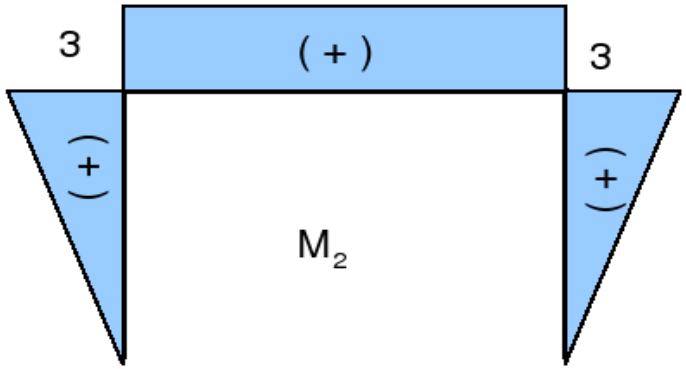


Abdulkadir Cüneyt AYDIN

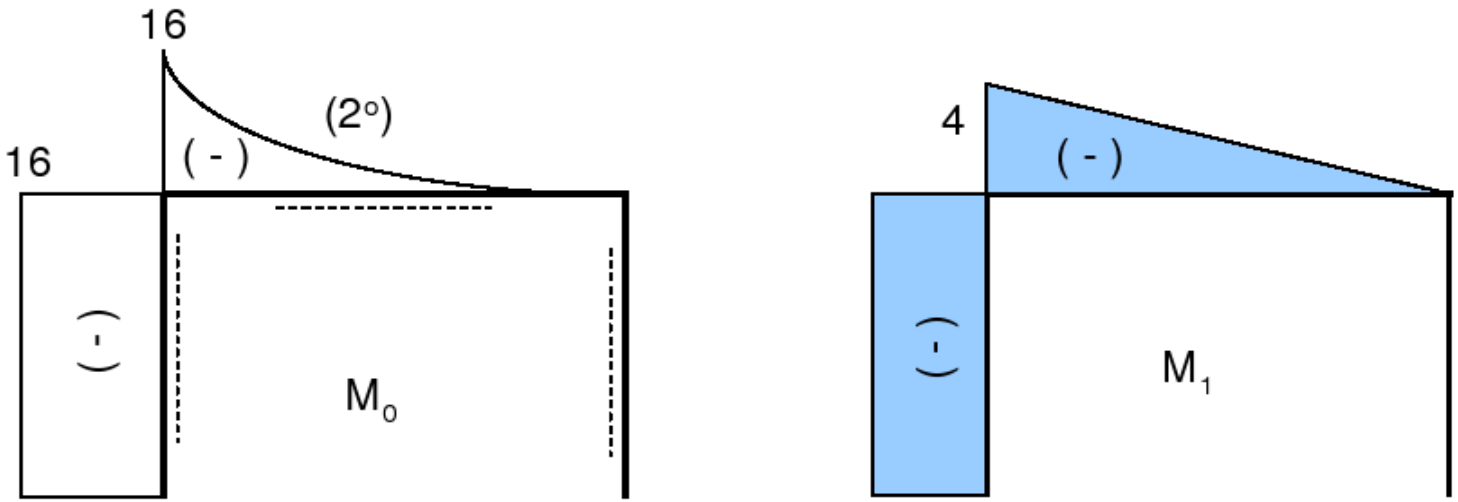
$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2$$
$$\delta_2 = \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2$$







Abdulkadir Cüneyt AYDIN



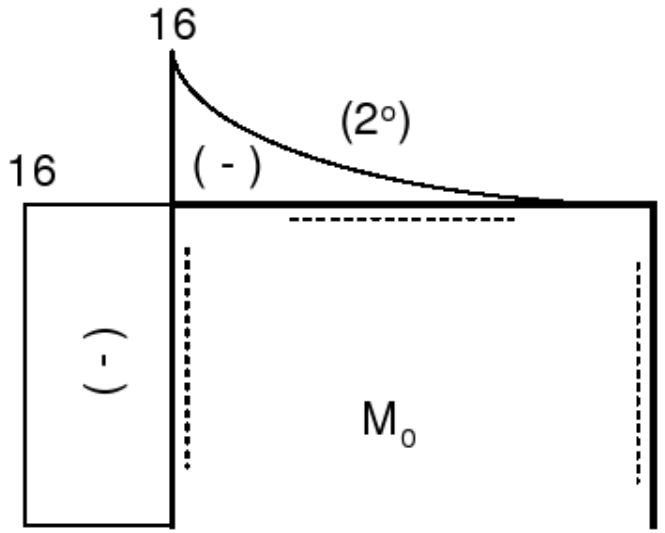
$$\delta_{10} = \int M_1 M_0 \frac{ds}{EI}$$

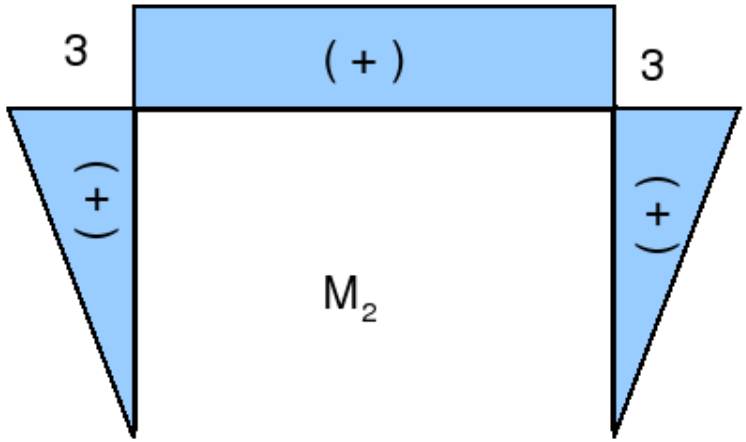
$$EI\,\delta_{10} = \frac{1}{2} * (\frac{1}{4} L i k) + L i k$$

$$EI\,\delta_{10} = \frac{1}{2} * (\frac{1}{4} * 4 * (-4) * (-16)) + 3 * -4 * -16$$

$$EI\delta_{10} = 224$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN





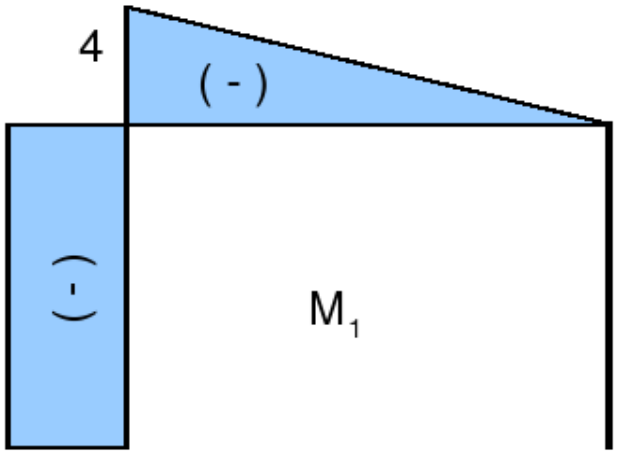


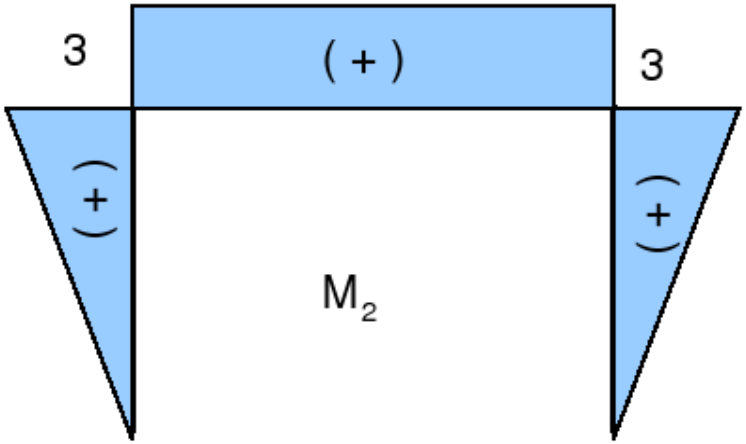
$$\delta_{20} = \int M_2 M_0 \frac{ds}{EI} \qquad EI\,\delta_{20} = \frac{1}{2} * (\frac{1}{3} L i k) + (\frac{1}{2} L i k)$$

$$EI\,\delta_{20} = \frac{1}{2} * (\frac{1}{3} * 4 * -16 * 3) + (\frac{1}{2} * 3 * -16 * 3)$$

$$EI\delta_{20} = -104$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN





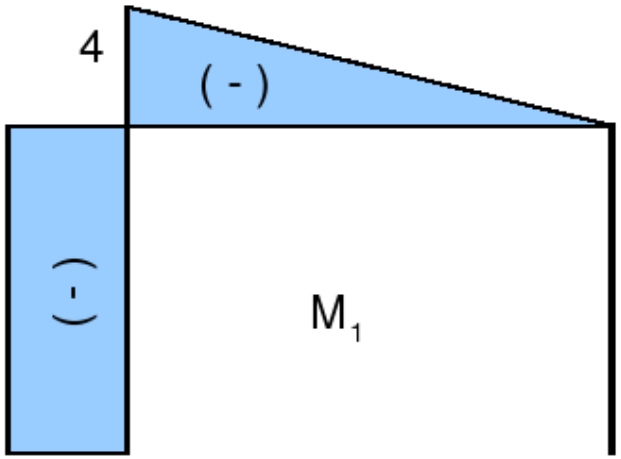
$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int M_1 M_2 \frac{ds}{EI}$$

$$EI\,\delta_{12} = \frac{1}{2} * (\frac{1}{2} L\,i\,k) + (\frac{1}{2} L\,i\,k)$$

$$EI\,\delta_{12} = \frac{1}{2} * (\frac{1}{2} * 4 * 3 * -4) + (\frac{1}{2} * 3 * 3 * -4)$$

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = -30$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



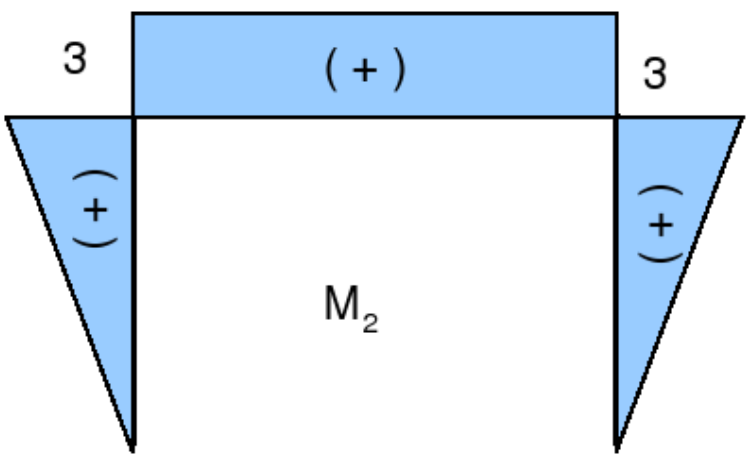
$$\delta_{11} = \int M_1 M_1 \frac{ds}{EI}$$

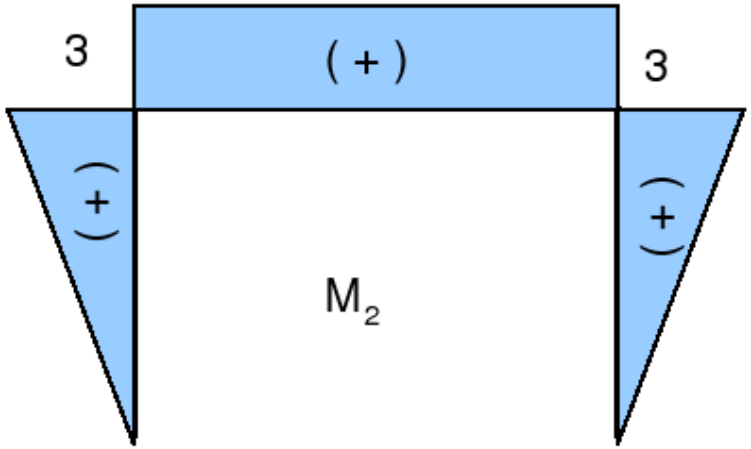
$$EI\,\delta_{11} = \frac{1}{2} * (\frac{1}{3} L\,i\,k) + (L\,i\,k)$$

$$EI\,\delta_{11} = \frac{1}{2} * (\frac{1}{3} * 4 * -4 * -4) + (3 * -4 * -4)$$

$$EI\delta_{11} = 58.667$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN





$$\delta_{22} = \int M_2 M_2 \frac{ds}{EI}$$

$$EI\,\delta_{22} = (\frac{1}{3} L\,i\,k) + \frac{1}{2} * (L\,i\,k) + (\frac{1}{3} L\,i\,k)$$

$$EI\,\delta_{22} = (\frac{1}{3} * 3 * 3 * 3) + \frac{1}{2} * (4 * 3 * 3) + (\frac{1}{3} * 3 * 3 * 3)$$

$$EI\delta_{22} = 36$$

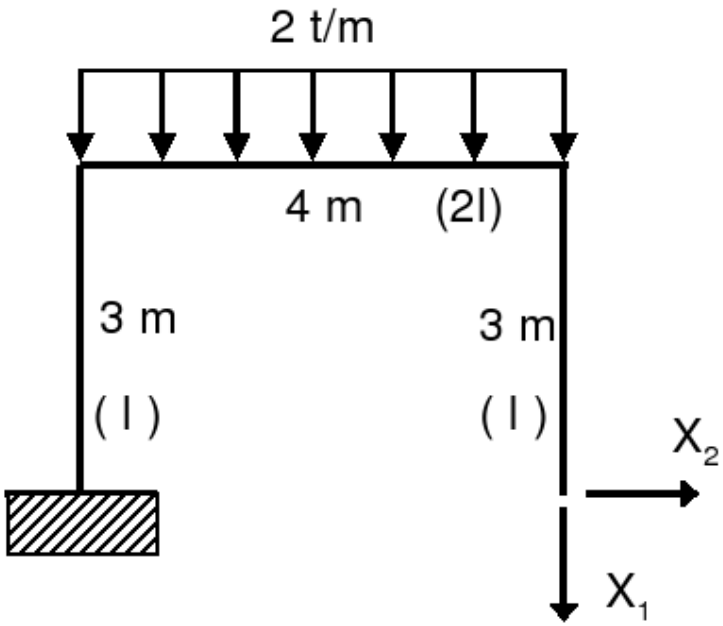
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

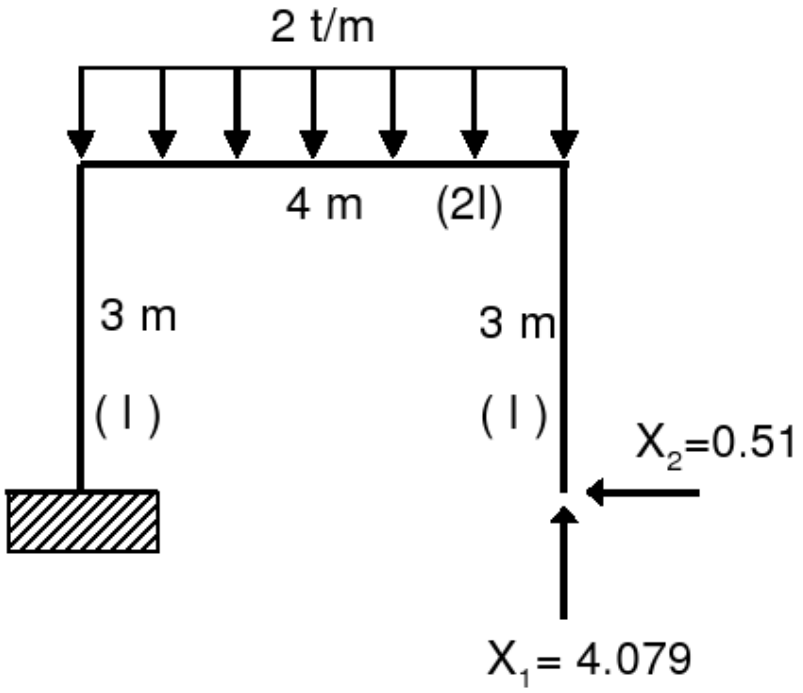
$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2$$
$$\delta_2 = \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2$$

$$\left.\begin{aligned} EI\delta_{10} &= 224 \\ EI\delta_{11} &= 58.667 \\ EI\delta_{20} &= -104 \\ EI\delta_{12} &= EI\delta_{21} = -30 \\ EI\delta_{22} &= 36 \end{aligned}\right.$$

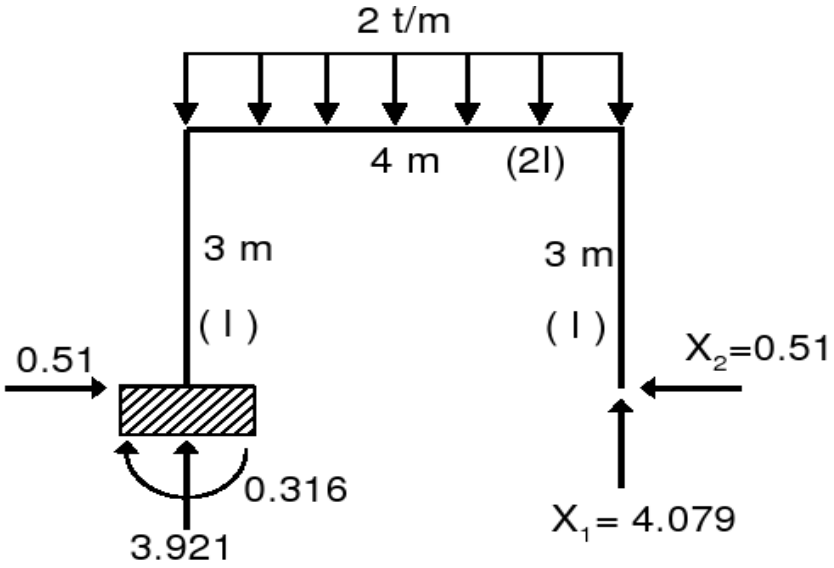
$$\left.\begin{aligned} \delta_1 &= 224 + 58.667 X_1 - 30 X_2 = 0 \\ \delta_2 &= -104 - 30 X_1 + 36 X_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} X_1 &= -4.079 \\ X_2 &= -0.51 \end{aligned}$$

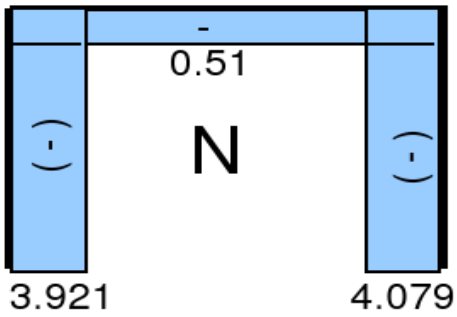
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

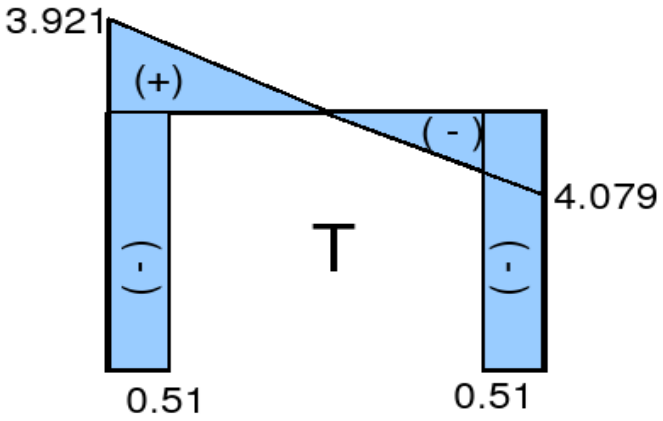


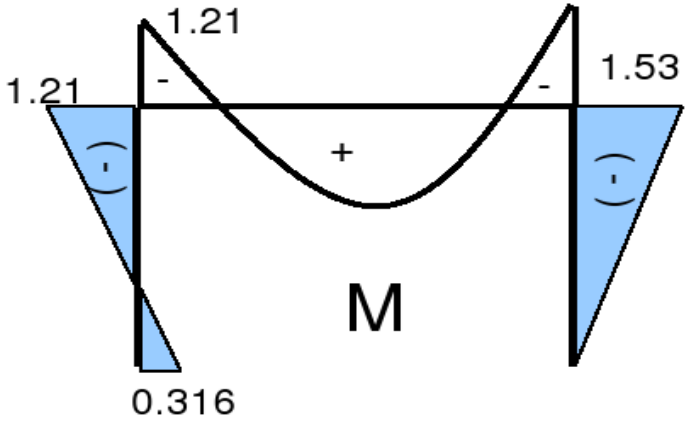


Abdulkadir Cüneyt AYDIN

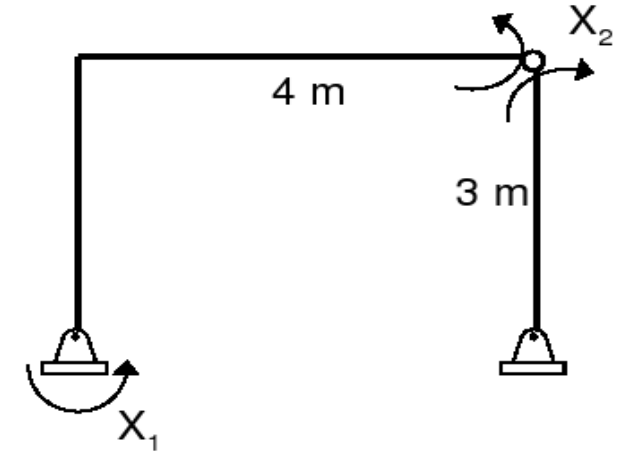






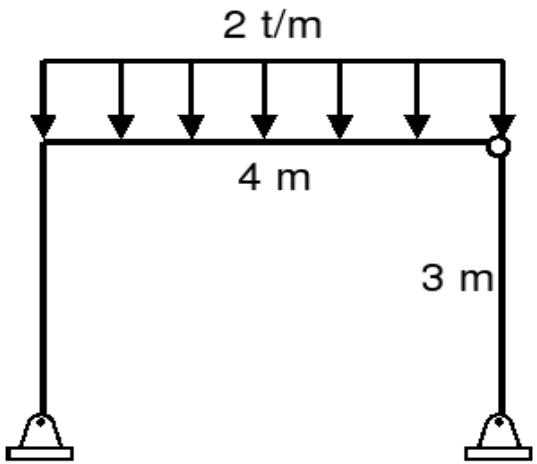


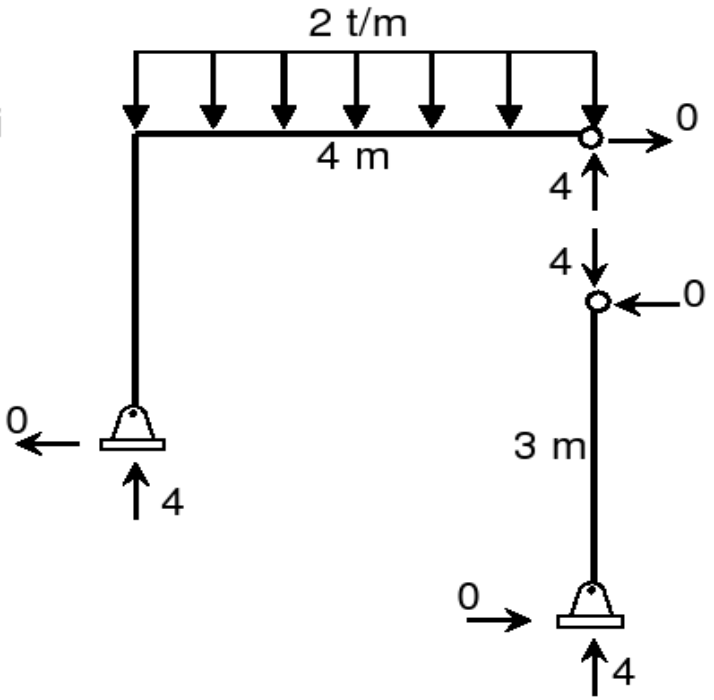
Abdulkadir Cüneyt AYDIN



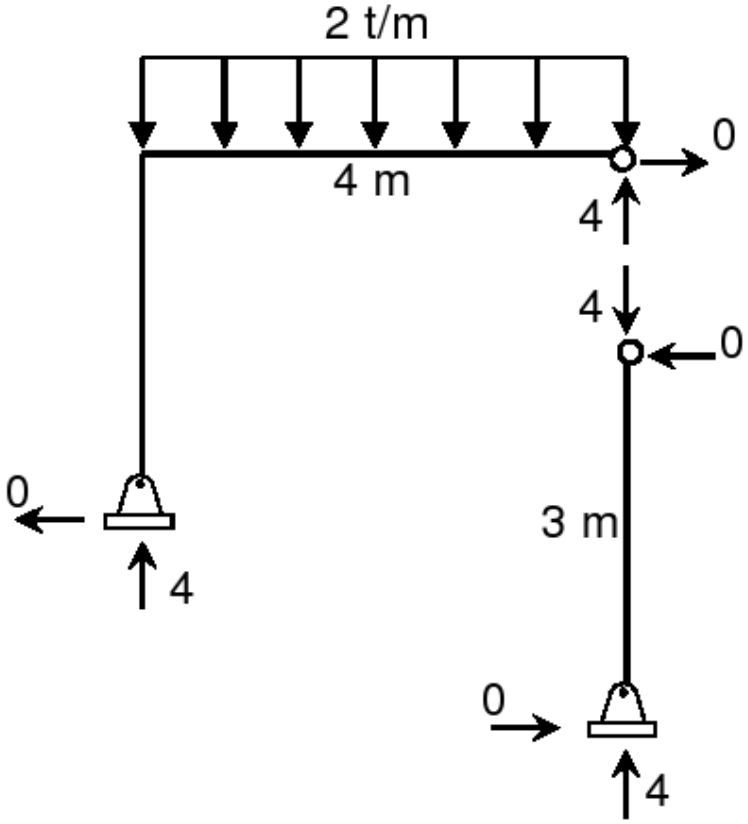
İzostatik esas sistem

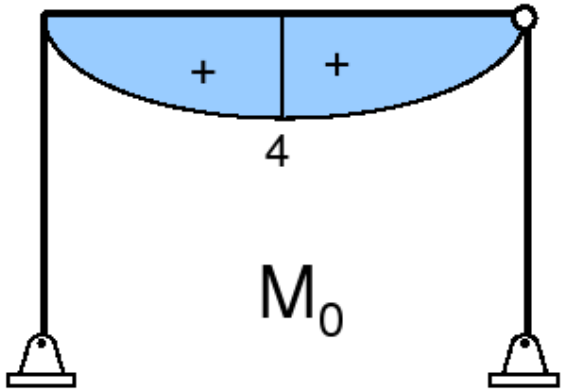
X_0 Yüklemesi



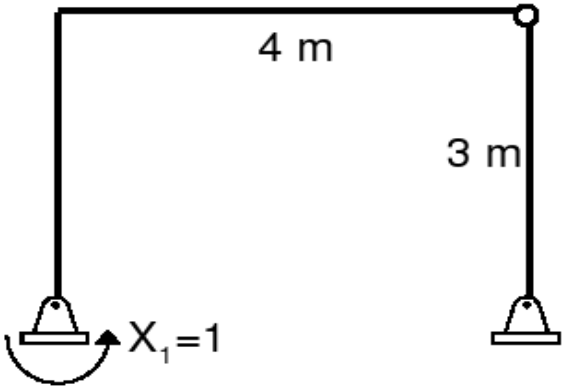


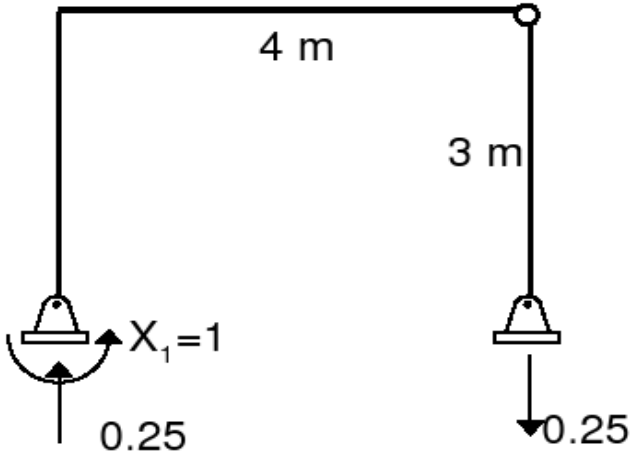
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

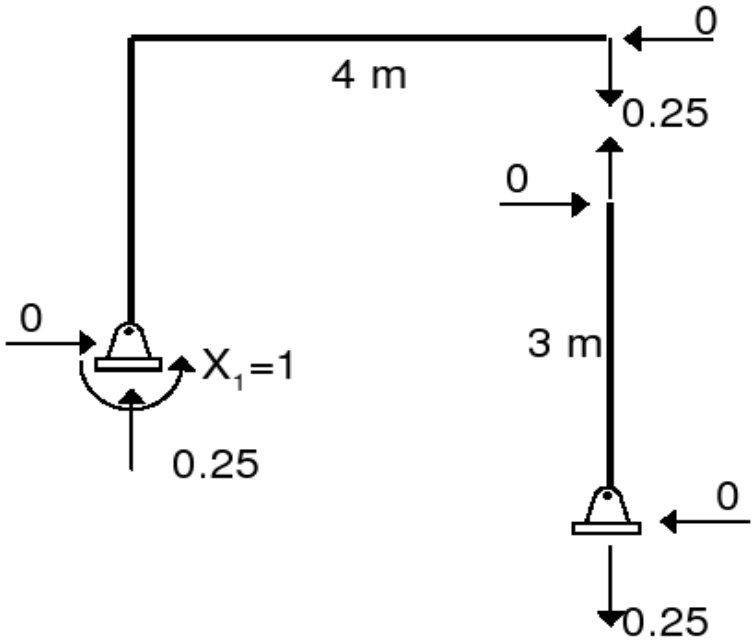


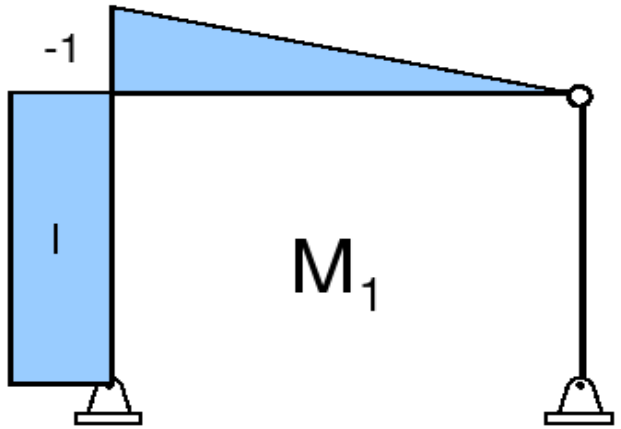


Abdulkadir Cüneyt AYDIN

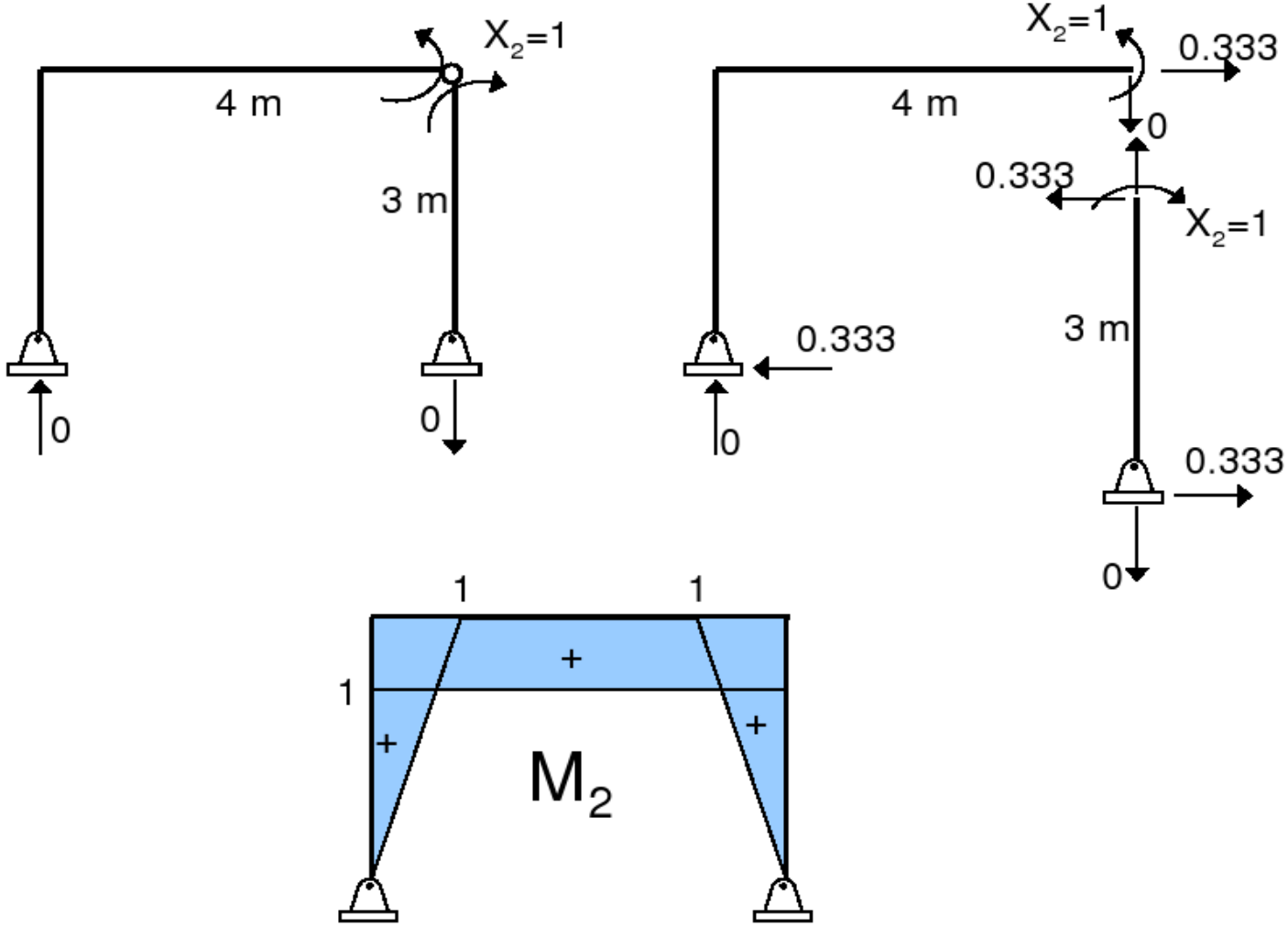






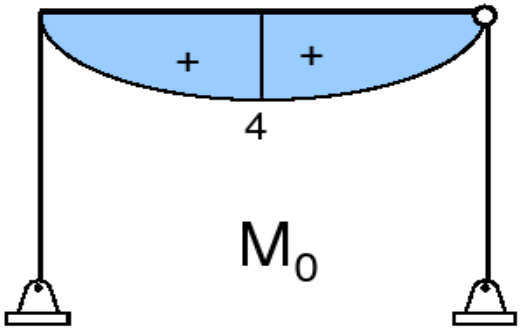


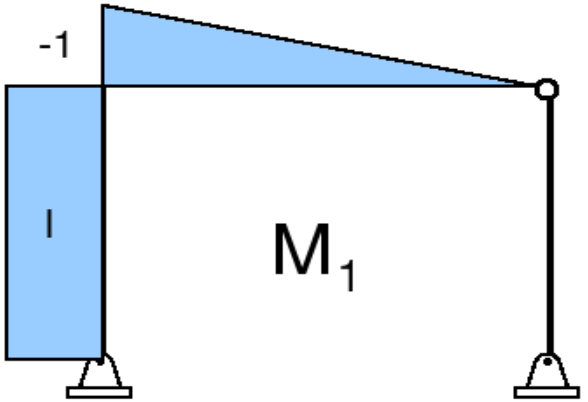
Abdulkadir Cüneyt AYDIN



Abdulkadir Cüneyt AYDIN

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2$$
$$\delta_2 = \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2$$





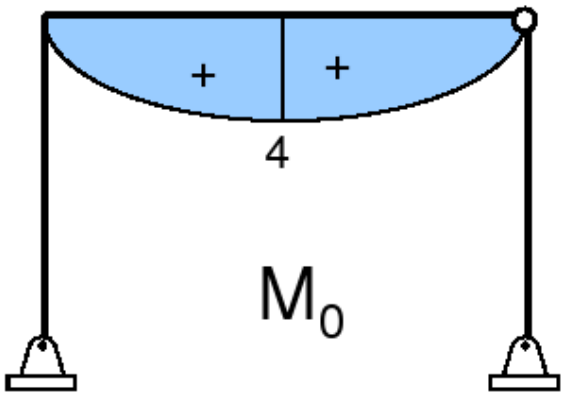
$$\delta_{10} = \int M_1 M_0 \frac{ds}{EI}$$

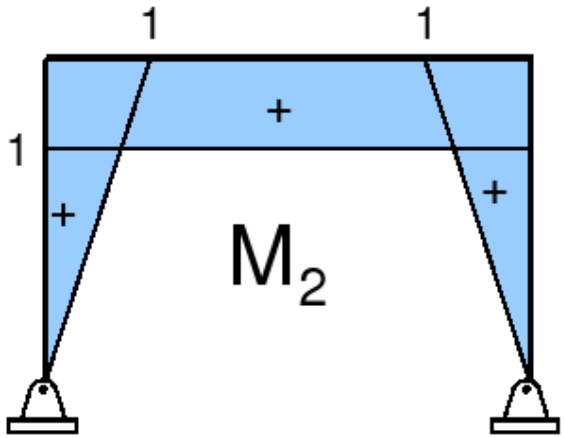
$$EI\,\delta_{10} = \frac{1}{2} * (\frac{1}{3} L i k)$$

$$EI\,\delta_{10} = \frac{1}{2} * (\frac{1}{3} * 4 * 4 * (-1))$$

$$EI\delta_{10} = -2.667$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN





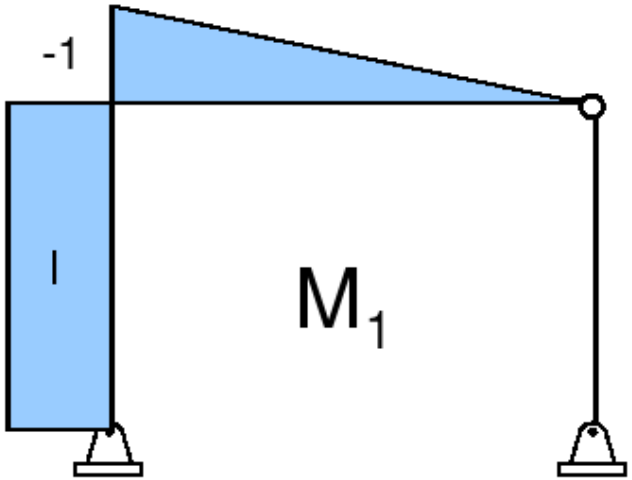
$$\delta_{20} = \int M_2 M_0 \frac{ds}{EI}$$

$$EI\,\delta_{20} = \frac{1}{2} * (\frac{2}{3} L i k)$$

$$EI\,\delta_{20} = \frac{1}{2} * (\frac{2}{3} * 4 * 4 * 1)$$

$$EI\delta_{20} = 5.333$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



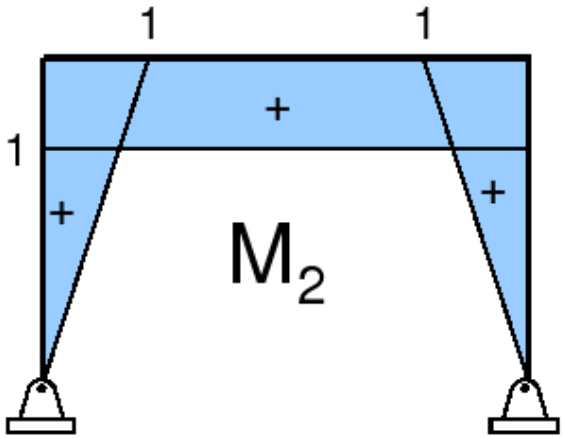
$$\delta_{11} = \int M_1 M_1 \frac{ds}{EI}$$

$$EI\,\delta_{11} = \frac{1}{2} * (\frac{1}{3} L\,i\,k) + (L\,i\,k)$$

$$EI\,\delta_{11} = \frac{1}{2} * (\frac{1}{3} * 1 * 1 * 4) + (1 * 1 * 3)$$

$$EI\delta_{11} = 3.667$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



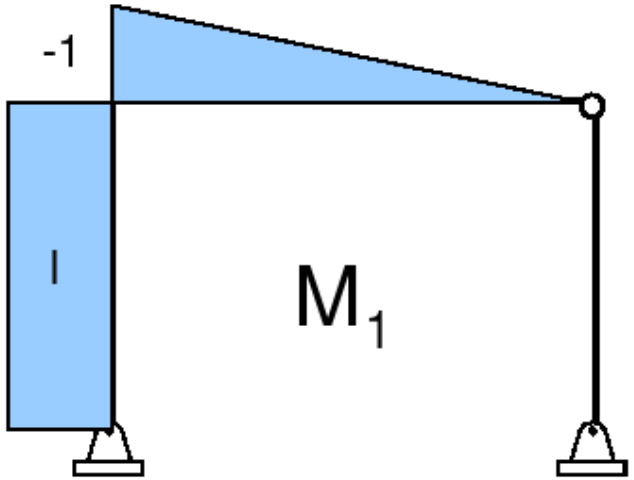
$$\delta_{22} = \int M_2 M_2 \frac{ds}{EI}$$

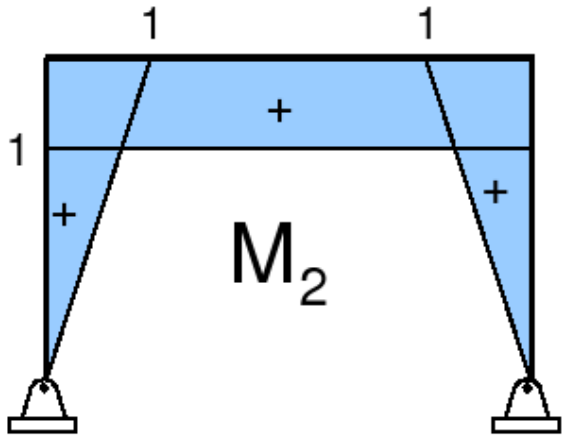
$$EI\,\delta_{22} = (\frac{1}{3} L i k) + \frac{1}{2} * (L i k) + (\frac{1}{3} L i k)$$

$$EI\,\delta_{22} = (\frac{1}{3} * 3 * 1 * 1) + \frac{1}{2} * (4 * 1 * 1) + (\frac{1}{3} * 3 * 1 * 1)$$

$$EI\delta_{22} = 4$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN





$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int M_1 M_2 \frac{ds}{EI}$$

$$EI\,\delta_{12} = \frac{1}{2} * (\frac{1}{2} L\,i\,k) + (\frac{1}{2} L\,i\,k)$$

$$EI\,\delta_{12} = \frac{1}{2} * (\frac{1}{2} * 4 * -1 * 1) + (\frac{1}{2} * 3 * -1 * +1)$$

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = -2.5$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

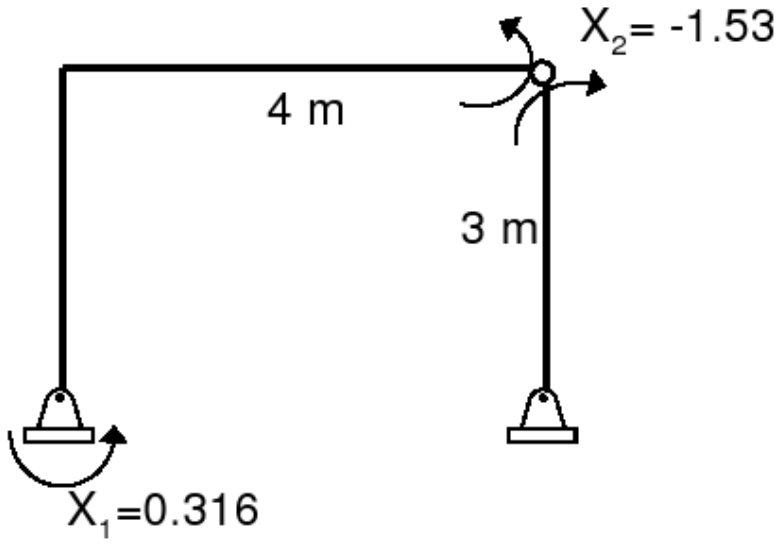
$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2$$
$$\delta_2 = \delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2$$

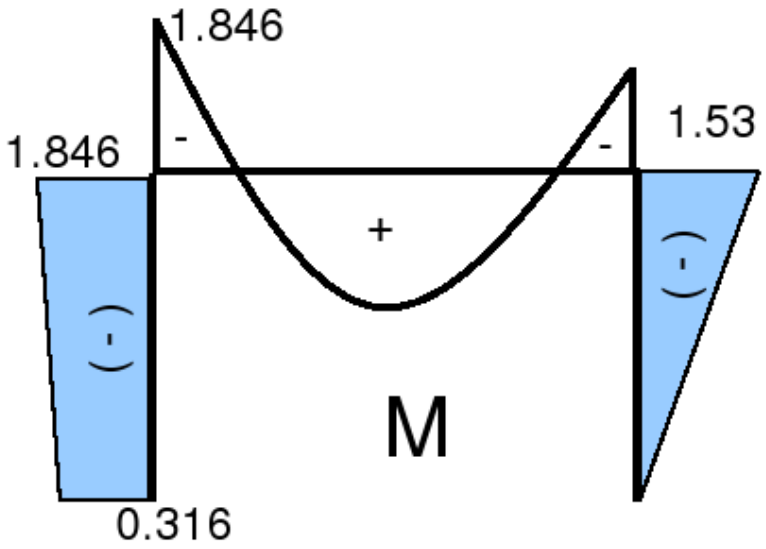
$$EI\delta_{10} = -2.667$$
$$EI\delta_{11} = 3.667$$
$$EI\delta_{20} = 5.333$$
$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = -2.5$$
$$EI\delta_{22} = 4$$

$$\delta_1 = -2.667 + 3.667 X_1 - 2.5 X_2 = 0$$
$$\delta_2 = 5.333 - 2.5 X_1 + 4 X_2 = 0$$

$$X_1 = 0.316$$
$$X_2 = -1.53$$

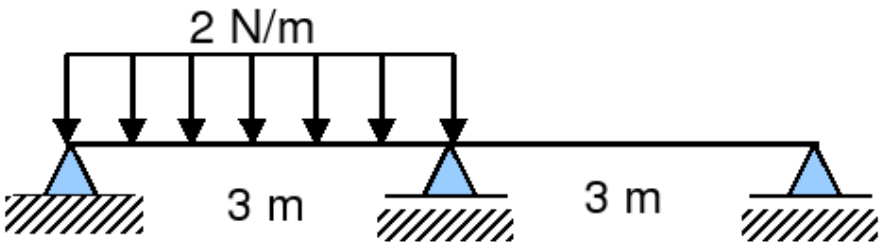
Abdulkadir Cüneyt AYDIN





Abdulkadir Cüneyt AYDIN

ÖRNEK

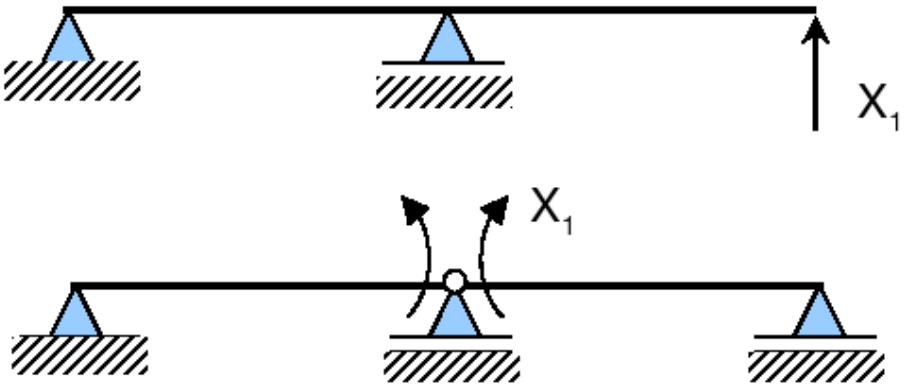


Yandaki hiperstatik sistemin moment ve kesme kuvveti değişim grafiklerini çiziniz.

1. Dereceden hiperstatik

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1$$

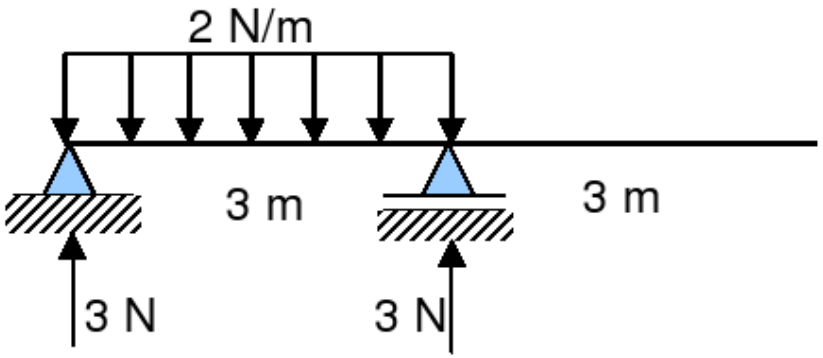
İzostatik esas sistem

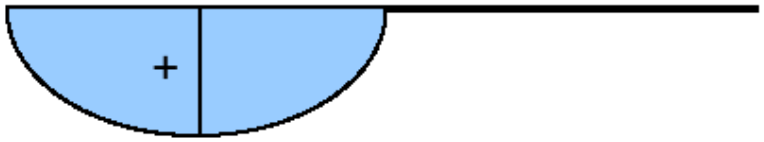


Abdulkadir Cüneyt AYDIN

ÖRNEK

X_0 Yüklemesi





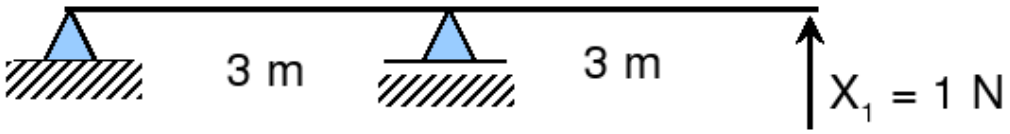
M_0 =2.25

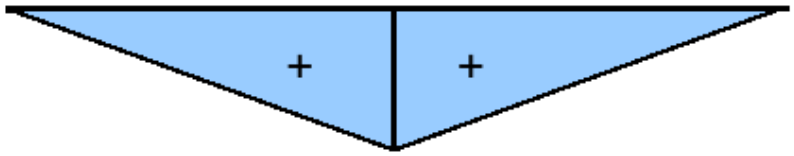
M_0 Moment diyagramı

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

ÖRNEK

X_1 Yüklemesi

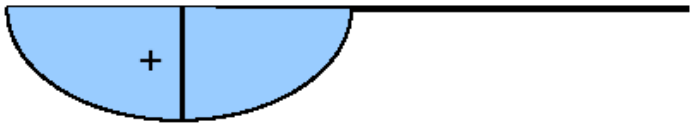




M_1 Moment diyagramı

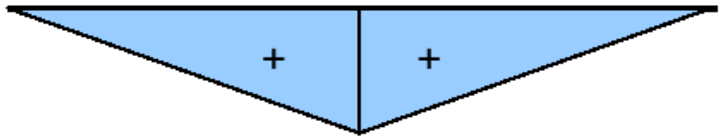
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

ÖRNEK



M_0 =2.25

M_0 Moment diyagramı



3 N.m

M_1 Moment diyagramı

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1$$

$$\delta_{10} = \int M_1 M_0 \frac{ds}{EI} \qquad EI\,\delta_{10} = (\frac{1}{3} L\,i\,k) = \frac{1}{3} * 3 * 3 * 2.25 = 6.75$$

$$\delta_{11} = \int M_1 M_1 \frac{ds}{EI}$$

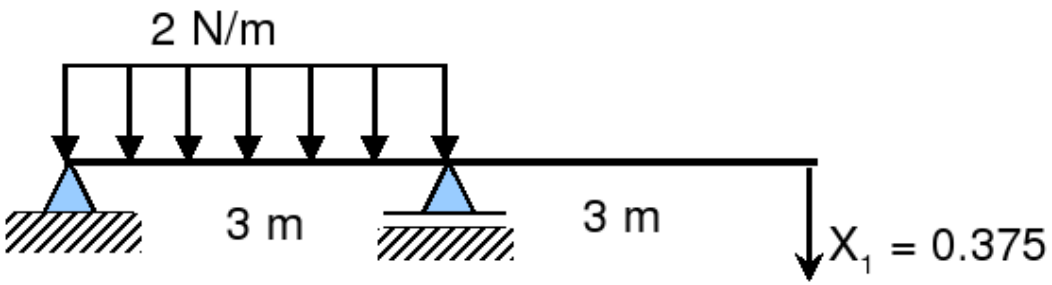
$$EI\,\delta_{11} = (\frac{1}{3} L\,i\,k) + (\frac{1}{3} L\,i\,k) = \frac{1}{3} * 3 * 3 * 3 + \frac{1}{3} * 3 * 3 * 3 = 18$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

ÖRNEK

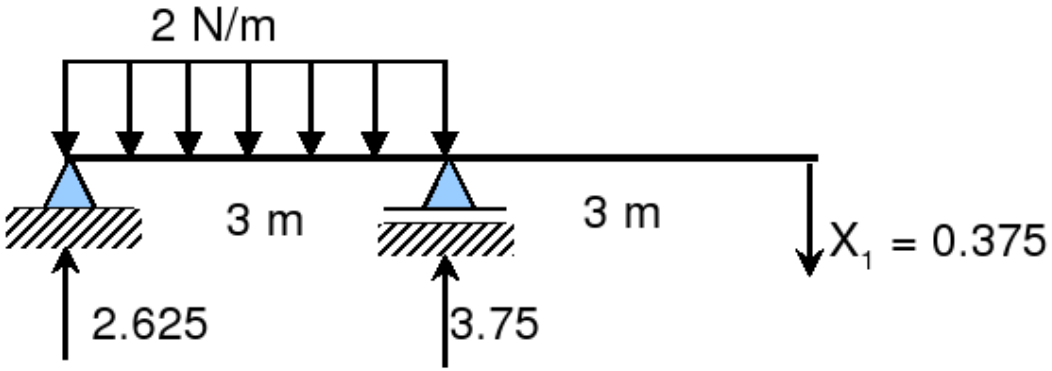
$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1 = 0$$

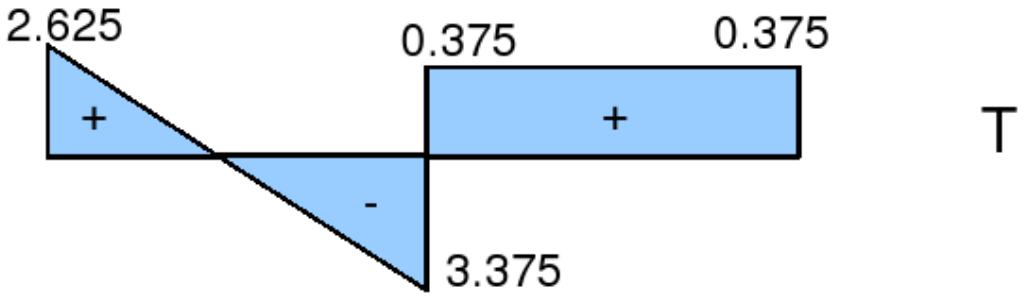
$6.75+18\ X_1=0$ $\qquad$ $X_1= -0.375$



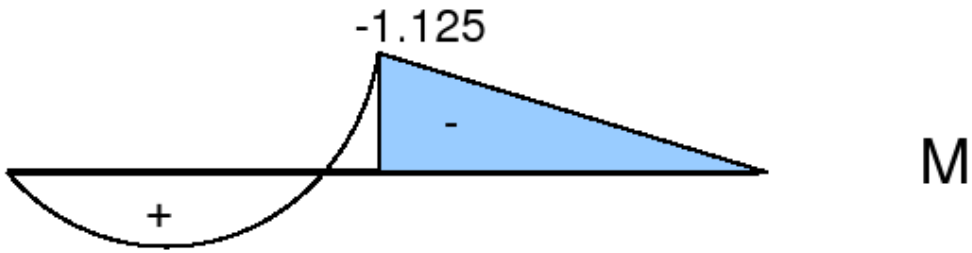
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

ÖRNEK





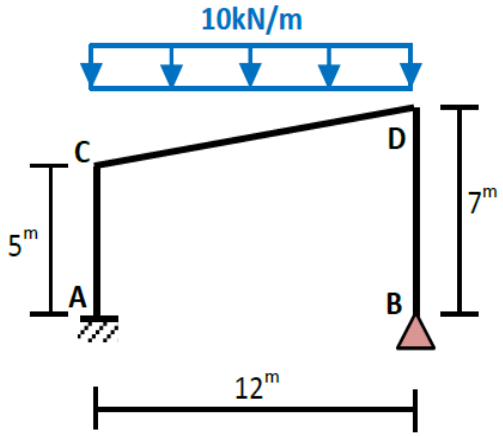
T



M

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

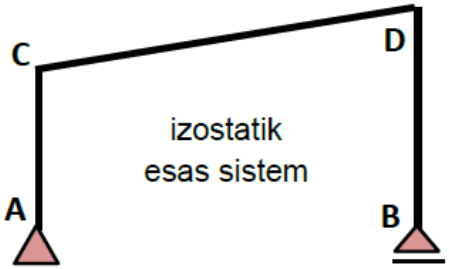
Soru: Şekilde verilen sistemin "Eğilme Momenti" (M) grafiğini kuvvet metodunu kullanarak çiziniz.

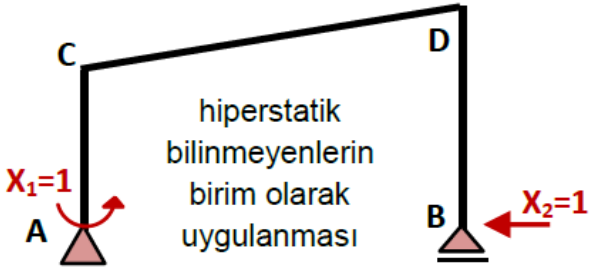


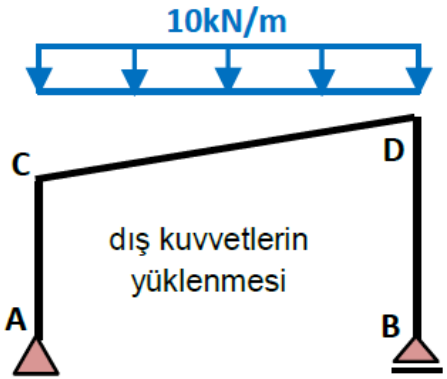
Çözüm: Sistem 2^{o} hiperstatiktir. İzostatik esas sistem birden fazla şekilde seçilebilir. Her durumda aynı sonuca ulaşılacaktır.

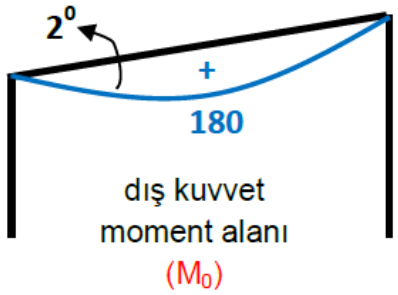
A mesnedinin moment bileşeni ve B mesnedinin yatay bileşeni hiperstatik bilinmeyen seçilerek sistemden kaldırılır, izostatik esas sistem elde edilir. Daha sonra A ve B mesnetlerine birim yükleme yapılarak sistem çözülür. Dış yüklerden oluşan moment alanıda bulunarak süreklilik denklemleri elde edilir. Buradan süperpozisyon denklemleri yardımıyla uç momentleri hesap edilebilir.

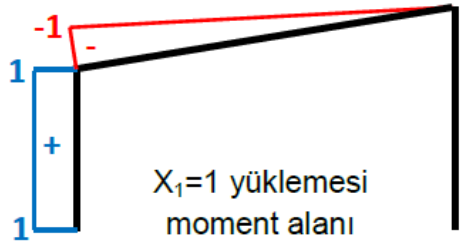
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

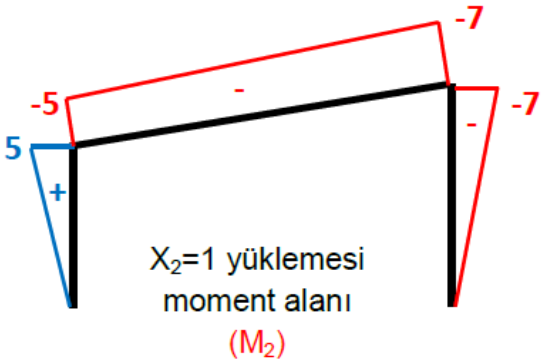

C
D
izostatik
esas sistem
A
B


C
D
X1=1
hiperstatik
bilinmeyenlerin
birim olarak
uygulanması
A
B
X2=1


10kN/m
C
D
dış kuvvetlerin
yüklenmesi
A
B


2°
+
180
dış kuvvet
moment alanı
(M0)


-1
-
1
+
1
X1=1 yüklemesi
moment alanı
(M1)


-7
-5
-
-7
5
-
+
X2=1 yüklemesi
moment alanı
(M2)

Süreklilik denklemleri:

$$\delta_{11}.x_1 + \delta_{12}.x_2 + \delta_{10} = 0$$
$$\delta_{21}.x_1 + \delta_{22}.x_2 + \delta_{20} = 0$$

$$\delta_{11} = \int \frac{\overline{M}_1.\overline{M}_1}{EI}.dl = 5.1.1 + \frac{1}{3}.12,166.1.1 = 9,055$$

$$\delta_{22} = \int \frac{\overline{M}_2.\overline{M}_2}{EI}.dl = \frac{1}{3}.5.5.5 + \frac{1}{6}.12,166.(2.5.5 + 5.7.2 + 2.7.7) + \frac{1}{3}.7.7.7 = 598,03$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \int \frac{\overline{M}_1.\overline{M}_2}{EI}.dl = \frac{1}{2}.5.1.5 + \frac{1}{6}.12,166.1.(7 + 2.5) = 46,97$$

$$\delta_{11} = \int \frac{\overline{M}_1.\overline{M}_1}{EI}.dl = 5.1.1 + \frac{1}{3}.12,166.1.1 = 9,055$$

$$\delta_{10} = \int \frac{\overline{M}_1.\overline{M}_0}{EI}.dl = \frac{1}{3}.12,166.(-1).180 = -729,96$$

$$\delta_{20} = \int \frac{\overline{M}_2.\overline{M}_0}{EI}.dl = \frac{1}{3}.12,166.180.(-5-7) = -8759,52$$

$$\left.\begin{aligned} 9,06.x_1 + 46,97.x_2 &= 729,96 \\ 46,97.x_1 + 598,03.x_2 &= 8759,52 \end{aligned}\right\} \quad x_1 = 7,82 \qquad x_2 = 14,03$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Süperpozisyon denklemleri:

$M = x_1.M_1 + x_2.M_2 + M_0$

$M_{AC} = 7,82.1 = 7,82\,kNm$

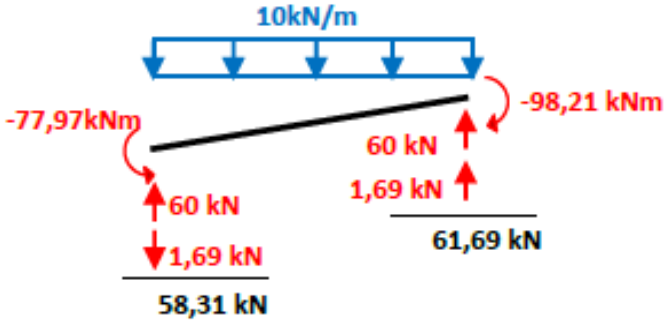
$M_{CA} = 7,82.1 + 14,03.5 = 77,97\,kNm$

$M_{CD} = 7,82.(-1) + 14,03.(-5) = -77,97\,kNm$

$M_{DC} = 14,03.(-7) = -98,21\,kNm$

$M_{DB} = 14,03.(-7) = -98,21\,kNm$

$M_{BD} = 0$

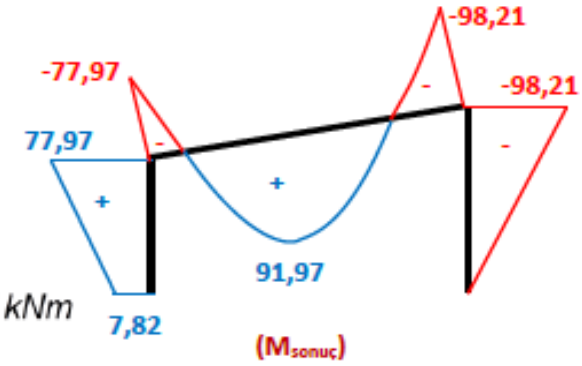


$$\frac{58,31}{61,69} = \frac{x}{12 - x}$$

$58,31.12 - 58,31x = 61,69x$

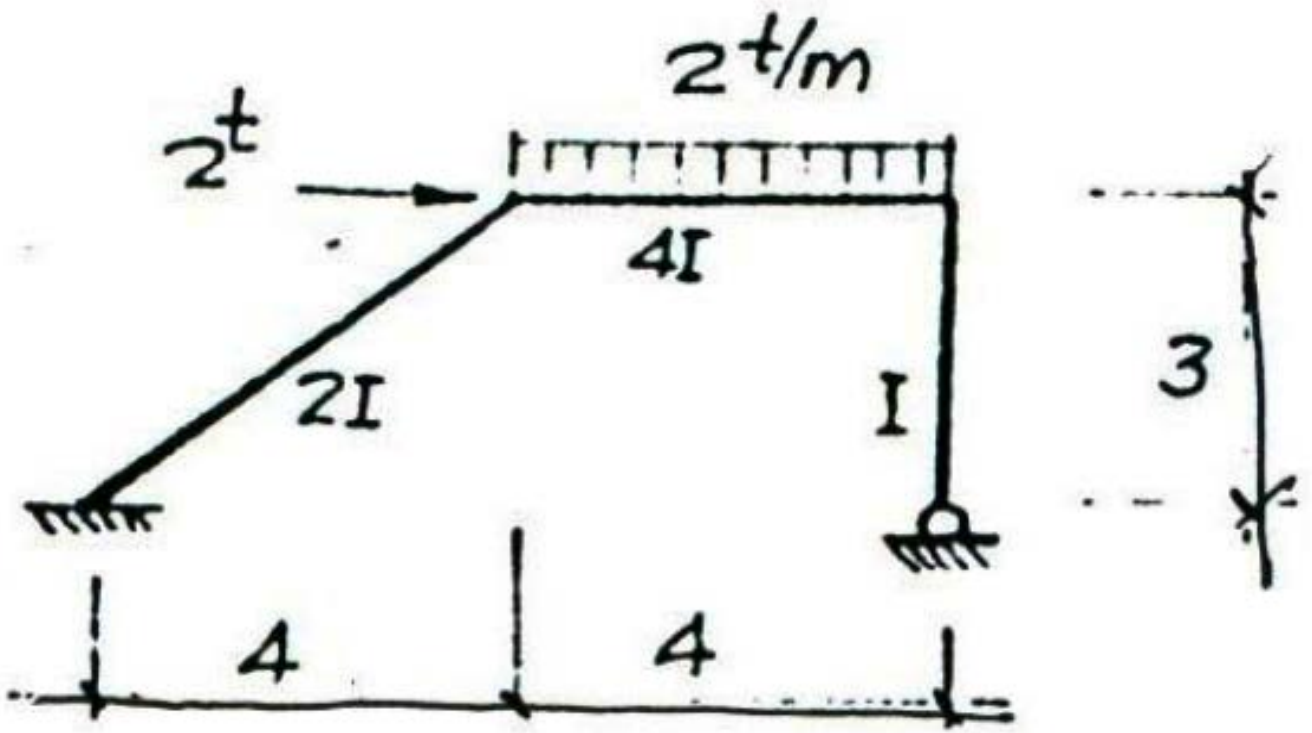
$x = 5,83\,m$

$$M_{maks} = -77,97 + \frac{10.5,83^2}{2} = 91,97\,kNm$$



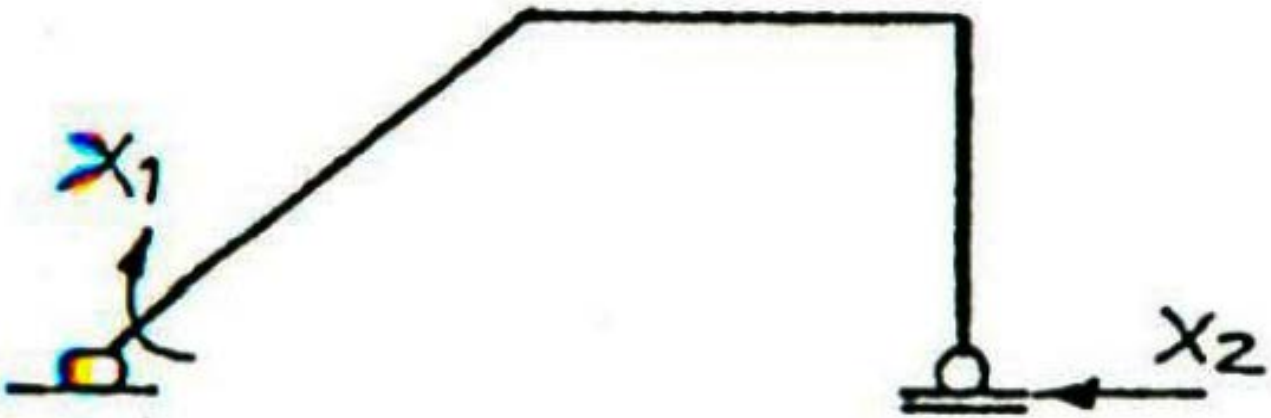
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

ÖRNEK: Şekildeki hiperstatik sisteminin M, N, T diyagramlarını uzama ve kayma şekil değiştirmelerini ihmal ederek kuvvet metoduyla çiziniz.



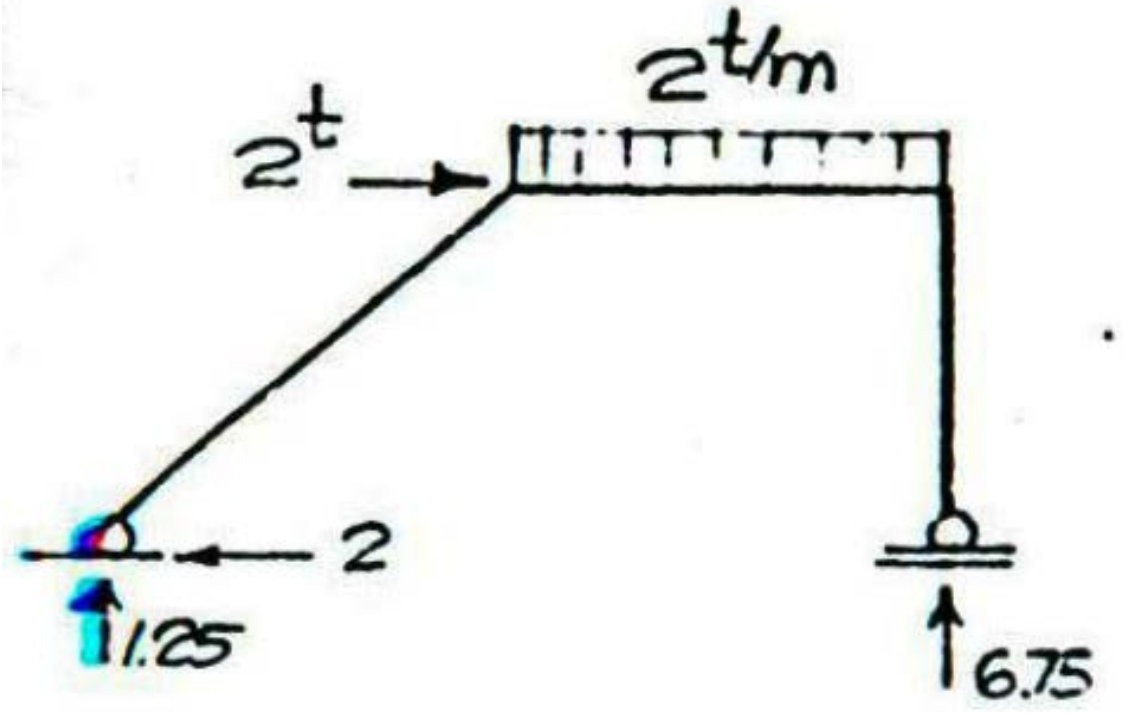
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

İzostatik eşlenik sistem seçimi

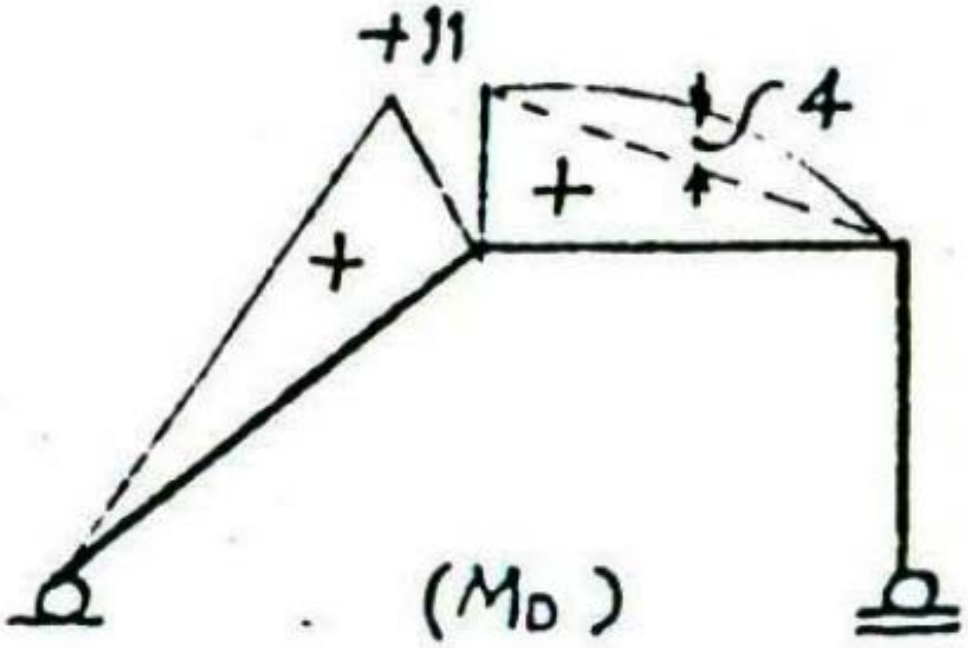


Abdulkadir Cüneyt AYDIN

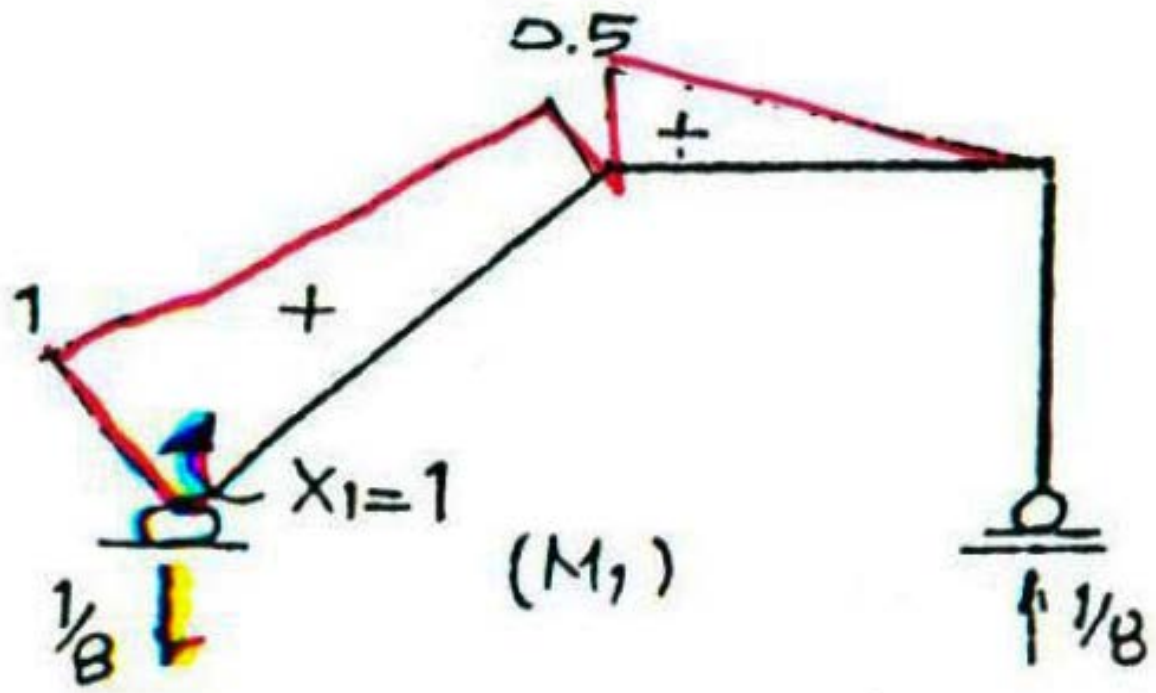
X=0 yüklemesi



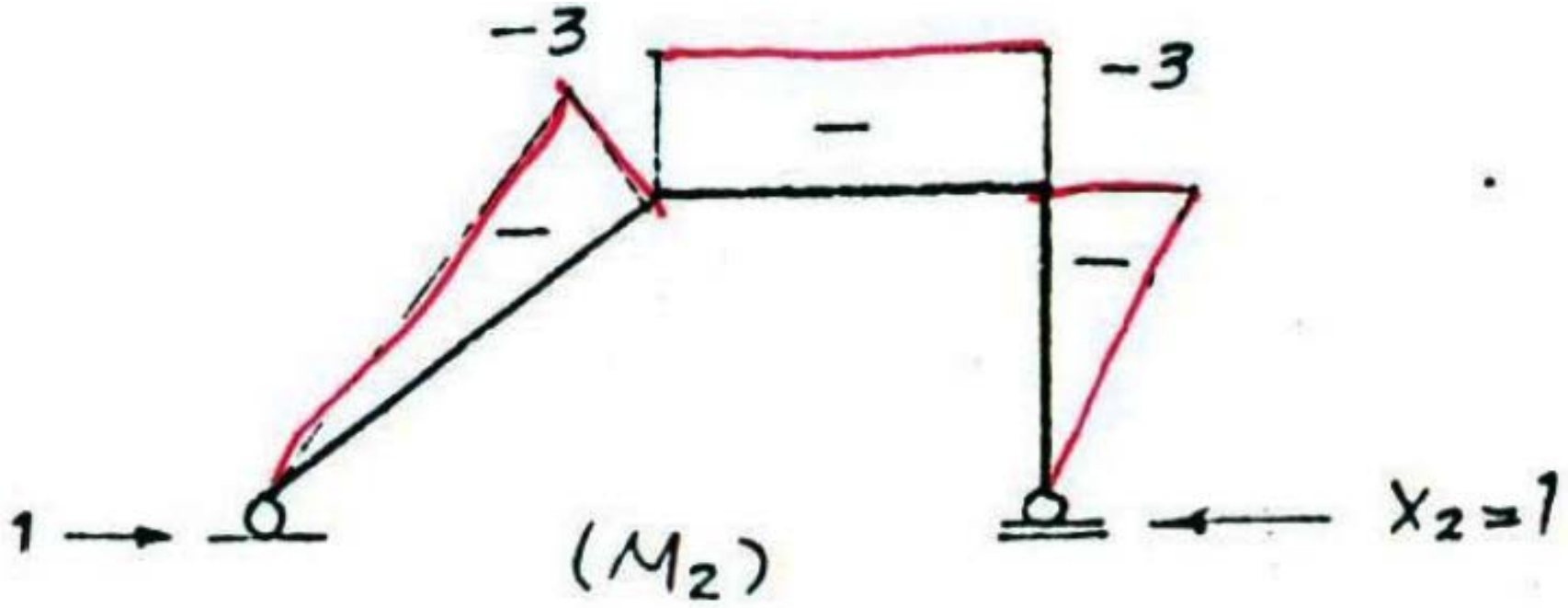
Abdulkadir Cüneyt AYDIN



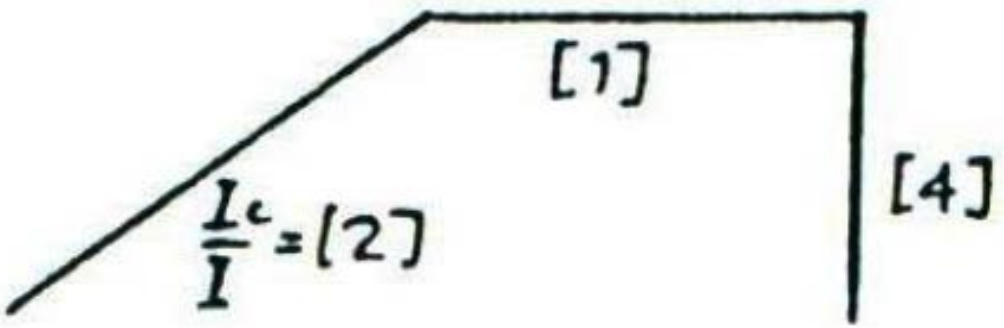
Abdulkadir Cüneyt AYDIN



Abdulkadir Cüneyt AYDIN



Abdulkadir Cüneyt AYDIN



$I_c = 4I$ seçilmiştir.

$$EI_c\,\delta_{11} = \frac{1}{3}5\,(1^2+0.5+0.5^2)\,[2] + \frac{1}{3}4\times0.5^2\,[1] = 6.17$$

$$EI_c\,\delta_{12} = -\frac{1}{6}5\times3\,(1+2\times0.5)\,[2] - \frac{1}{2}4\times3\times0.5\,[1] = -13.00$$

$$EI_c\,\delta_{22} = \frac{1}{3}5\times3^2\,[2] + 4\times3^2\,[1] + \frac{1}{3}8\times3^2\,[4] = 102.0$$

$$EI_c\,\delta_{10} = \frac{1}{6}5\times11\,(1+2\times0.5)\,[2] + \frac{1}{3}4\times0.5\times11\,[1] + \frac{1}{3}4\times0.5\times4\,[1] = 46.67$$

$$EI_c\,\delta_{20} = -\frac{1}{3}5\times3\times11\,[2] - \frac{1}{2}4\times3\times11\,[1] - \frac{2}{3}4\times3\times4\,[1] = -208$$

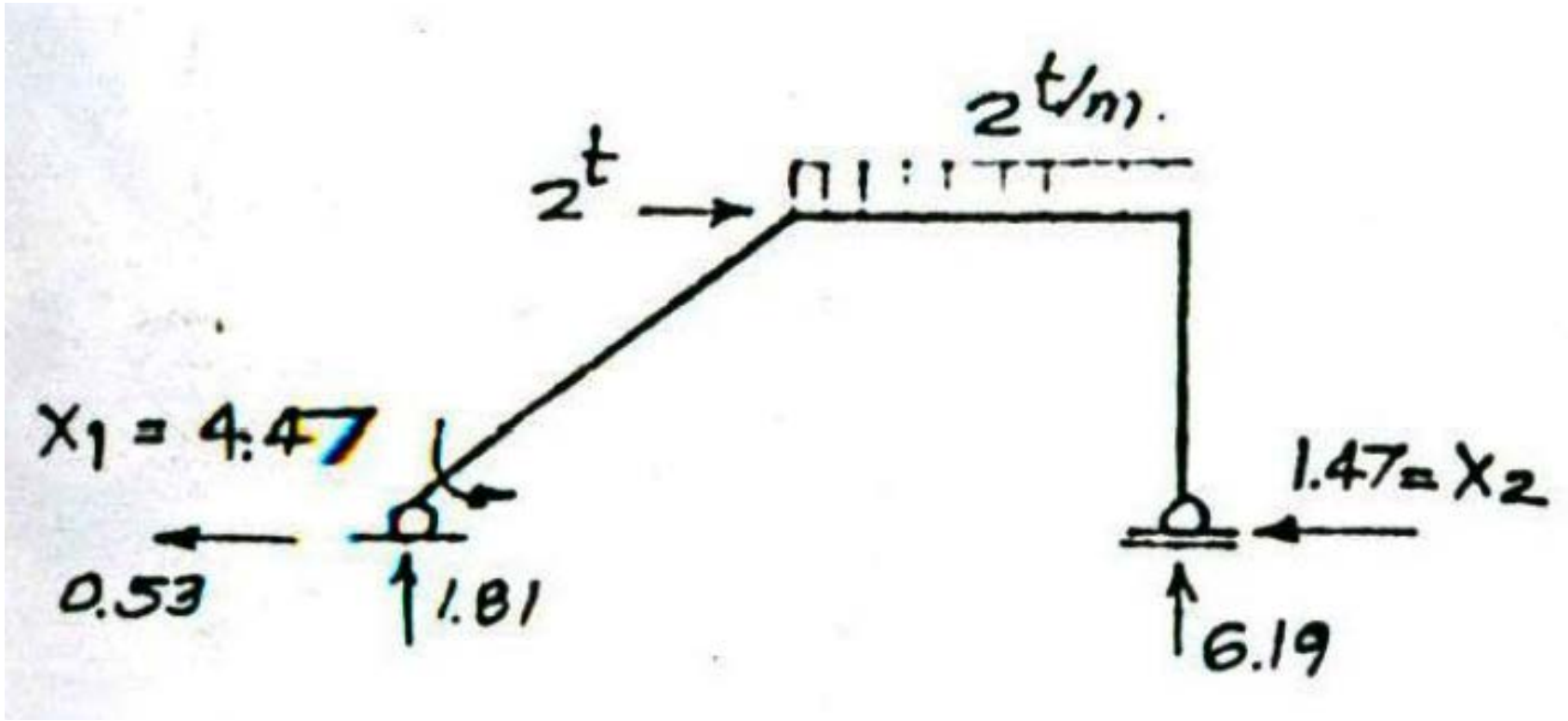
Denklem takımının kurulması ve çözümü

$$6.17\,X_1 - 13.0\,X_2 + 46.67 = 0$$

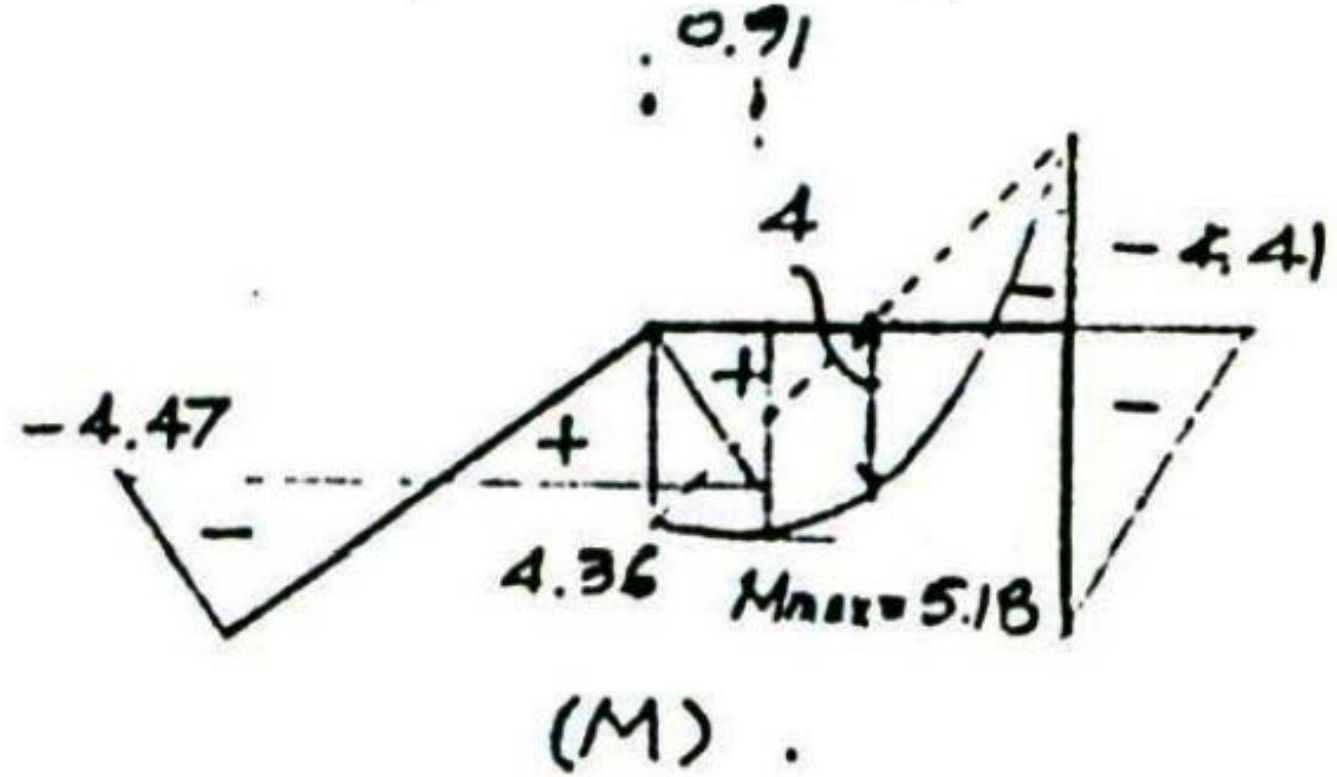
$$-13.0\,X_1 + 102\,X_2 - 208 = 0$$

4.467 1.470

$$X_1 = -4.47 \qquad X_2 = 1.47$$

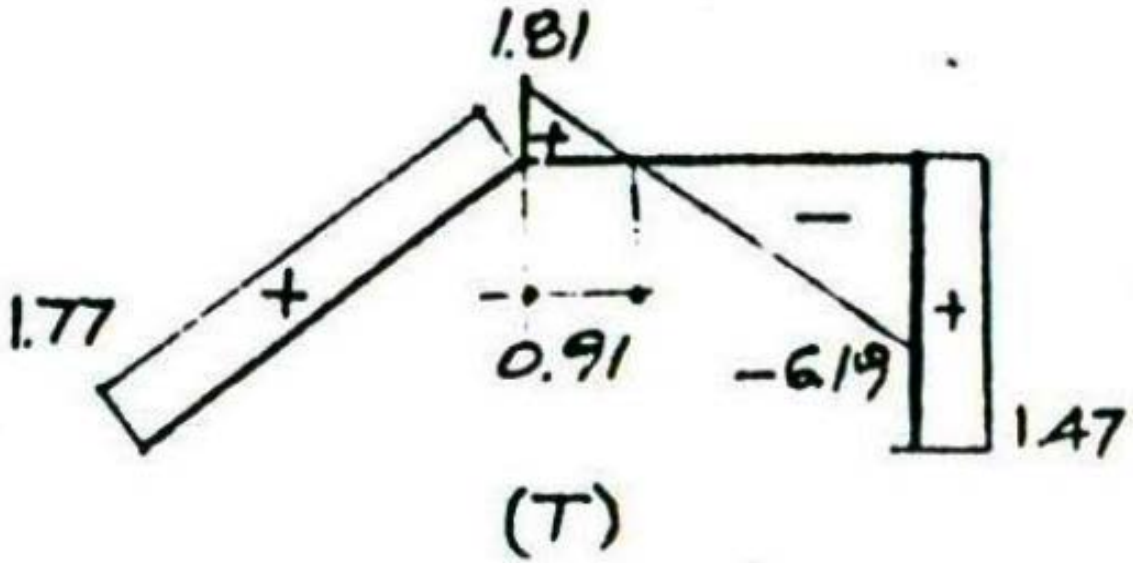


Abdulkadir Cüneyt AYDIN

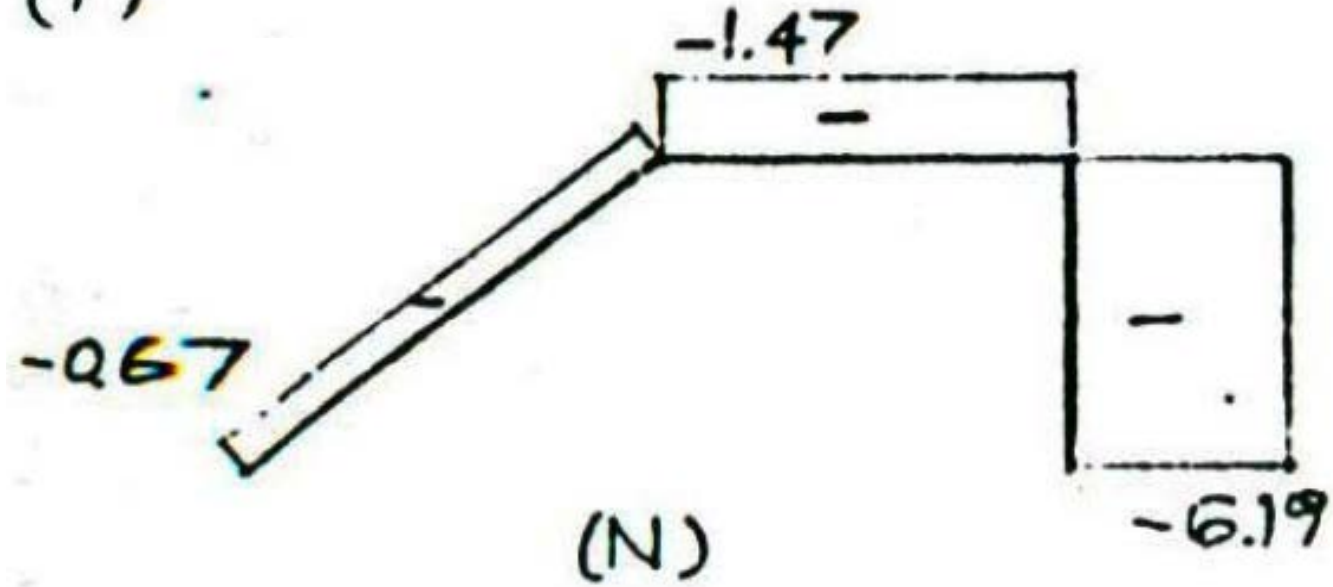


(M) .

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



(T)



(N)

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Kontrol

$$\int MM_1 \frac{I_c}{I} ds = \frac{1}{6} 5 \left(-2x1x4.47 + 4.36 - \right.$$

$$\left. 0.5x4.47 + 2x0.5x4.36 \right) [2]$$

$$+ \frac{1}{6} 4x0.5 (2x4.36 - 4.40)[1]$$

$$+ \frac{1}{3} 4x0.5x4\,[1] = 20.11 - 20.10 = 0.01$$

$$\text{bağıl hata} = \frac{0.01}{20.10} = \%\,0.05$$

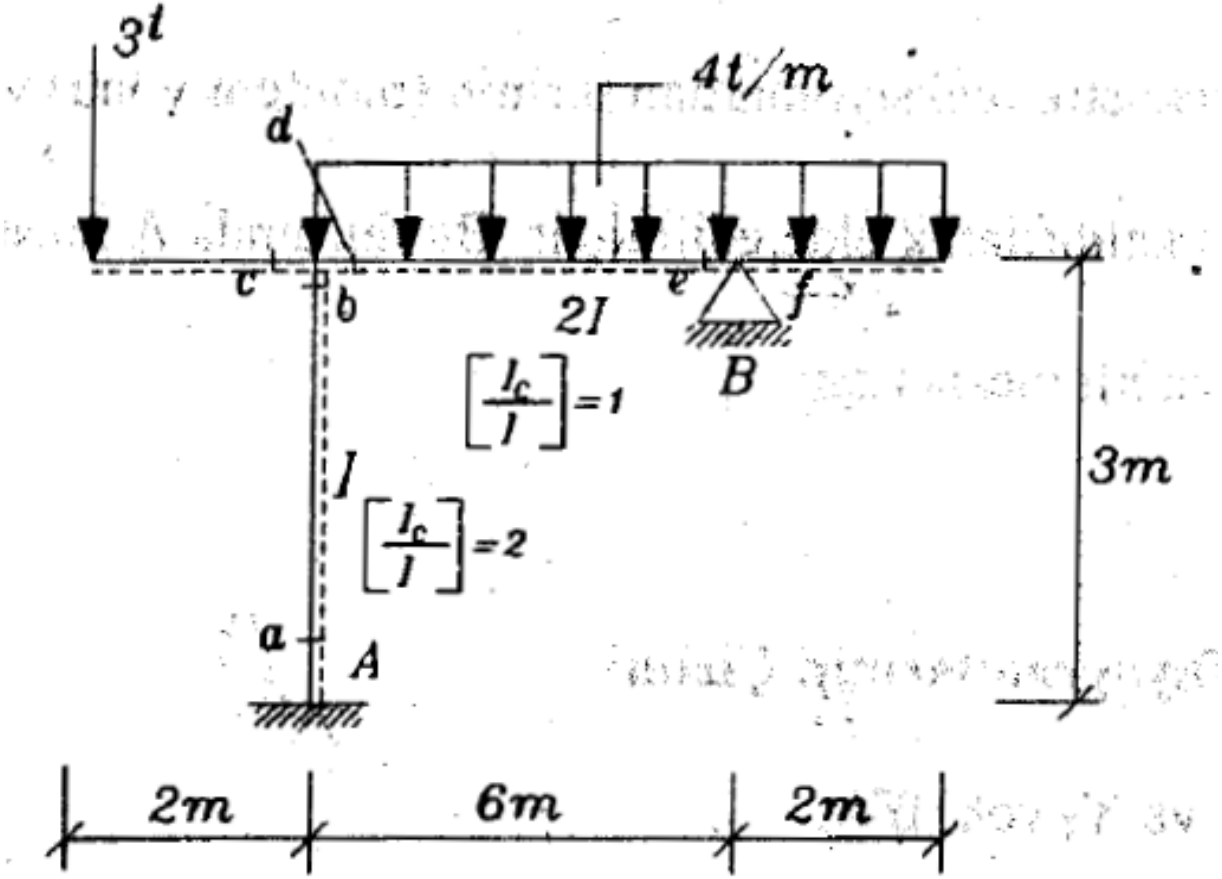
$$\int M M_2 \frac{I}{EC}\, ds = -\frac{1}{2} 5 \times 3 \left(-4.47 + 2 \times 4.36\right)[2]$$

$$-\frac{1}{2} 4 \times 3 \left(4.36 - 4.41\right)[1] - \frac{2}{3} 4 \times 3 \times 4\,[1]$$

$$+\frac{1}{3} 3 \times 3 \ldots 4.41\,[4] = -101.76 + 101.73 = -0.03$$

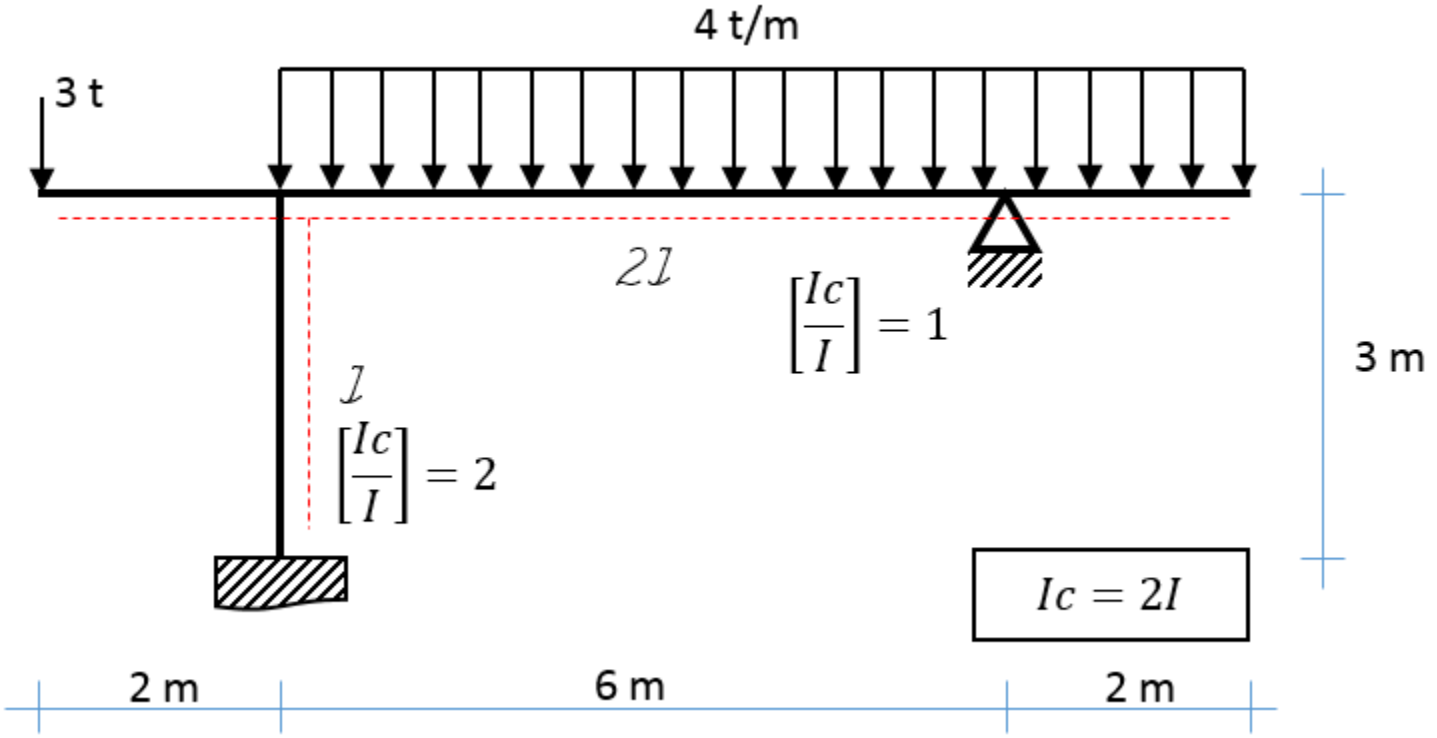
$$\text{Bağıl hata} = \frac{0.03}{101.73} = \%\ 0.03$$

ÖRNEK

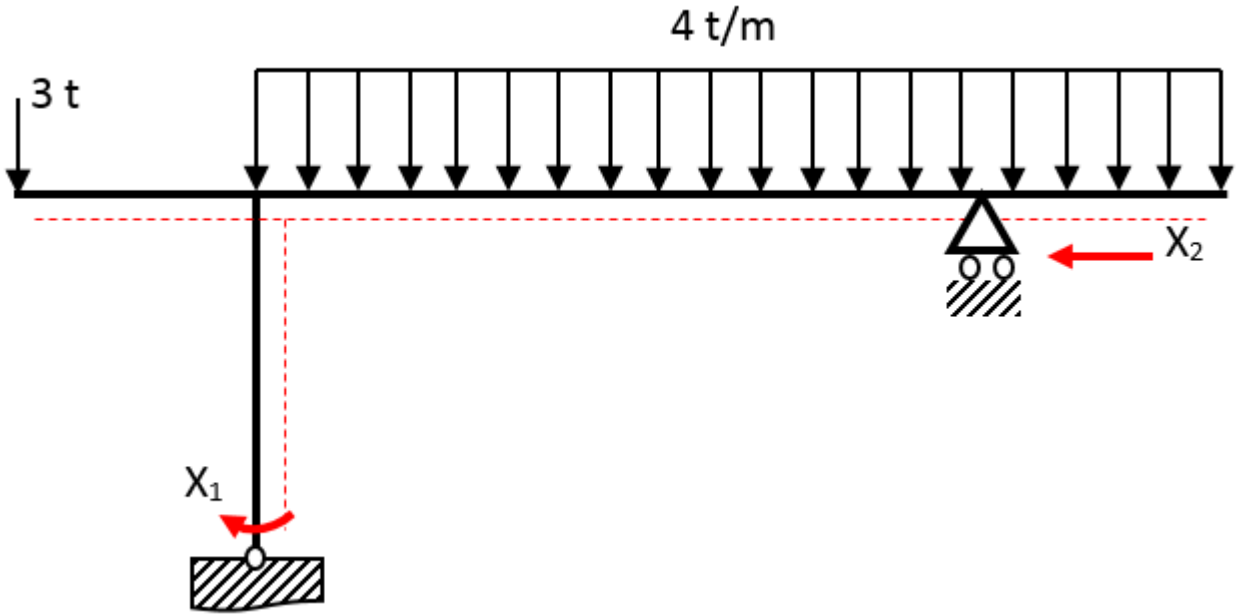


Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Şekilde verilen hiperstatik sistemin M, N, T diyagramlarını kuvvet yöntemi ile çiziniz.

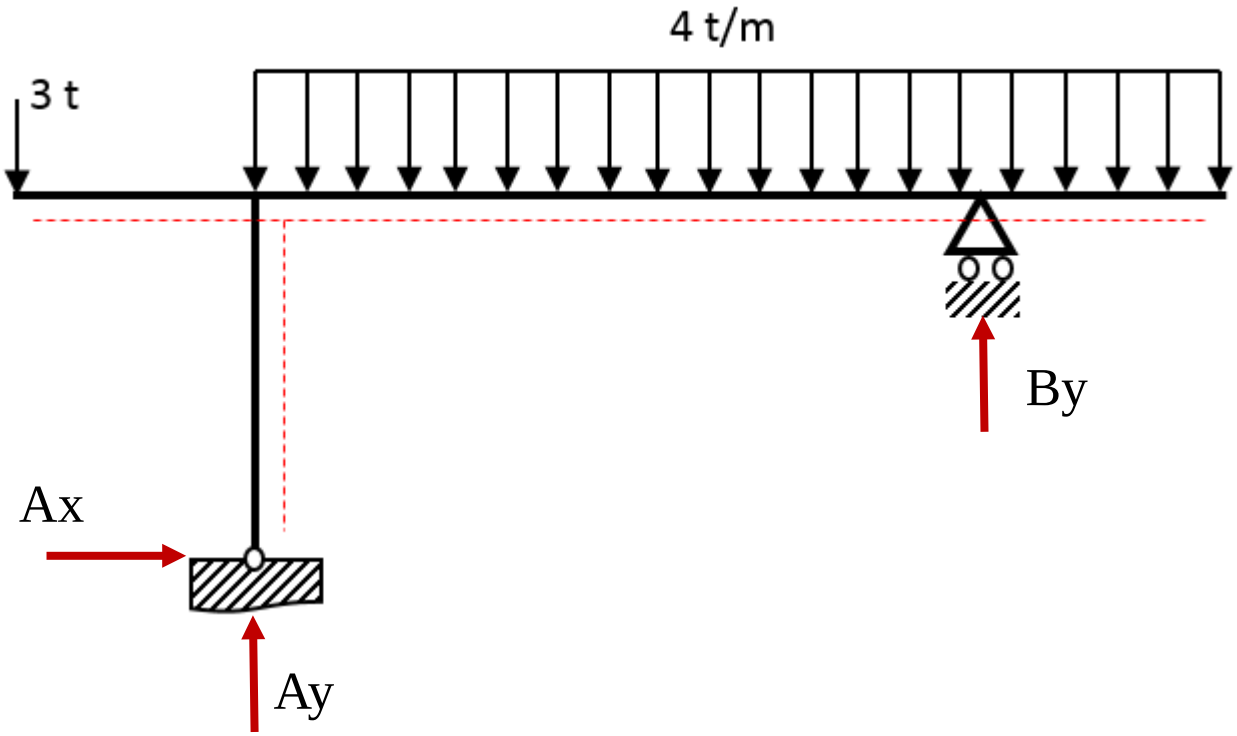


İzostatik eşlenik sistem seçimi

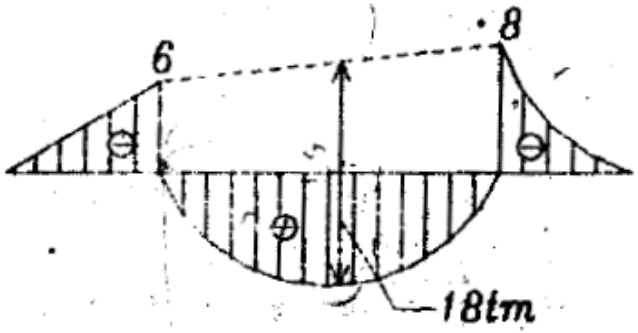


Abdulkadir Cüneyt AYDIN

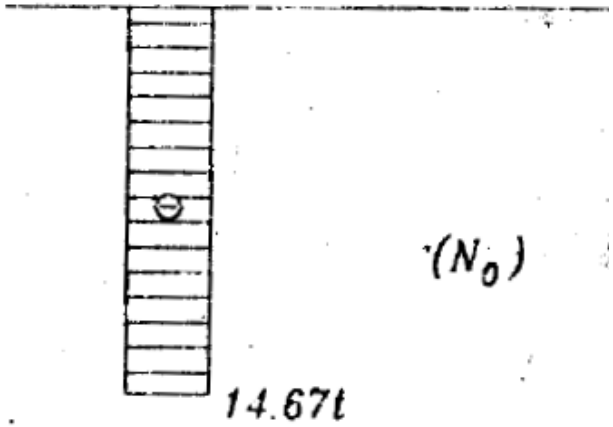
Mo, No, To Diyagramlarının Çizimi



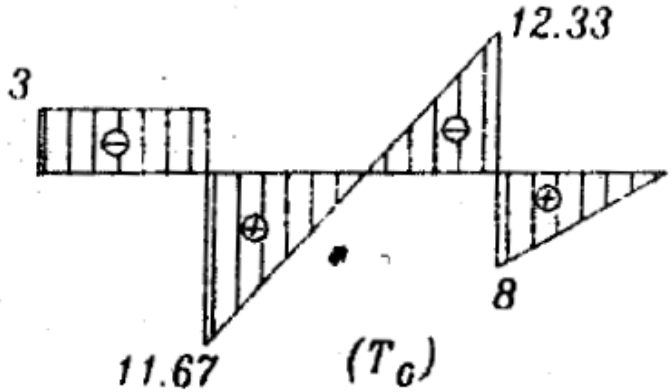
Abdulkadir Cüneyt AYDIN



(M_0)



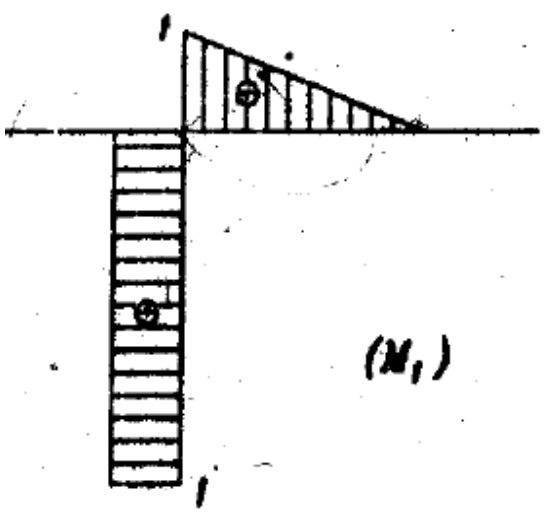
(N_0)

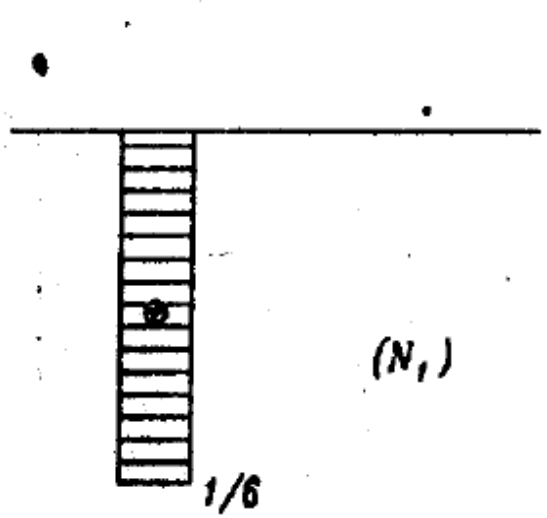


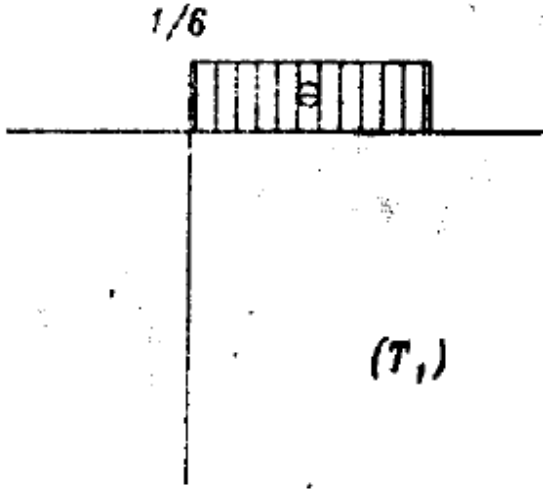
(T_0)



Abdulkadir Cüneyt AYDIN



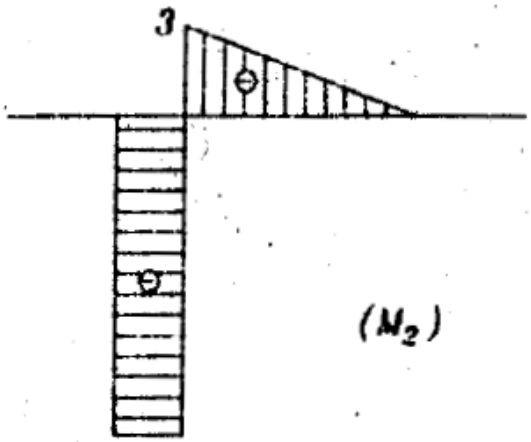


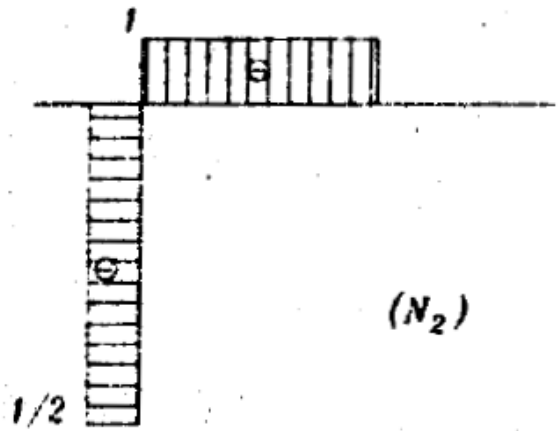


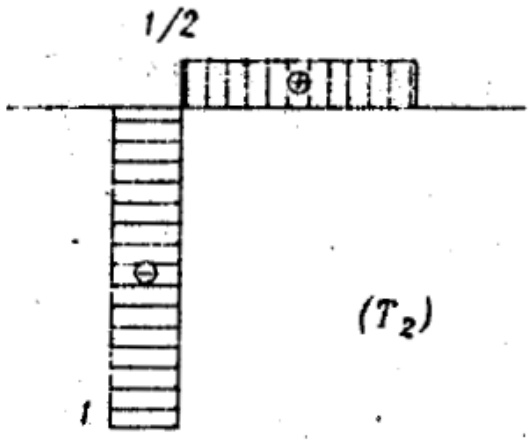
Abdulkadir Cüneyt AYDIN



Abdulkadir Cüneyt AYDIN







Abdulkadir Cüneyt AYDIN

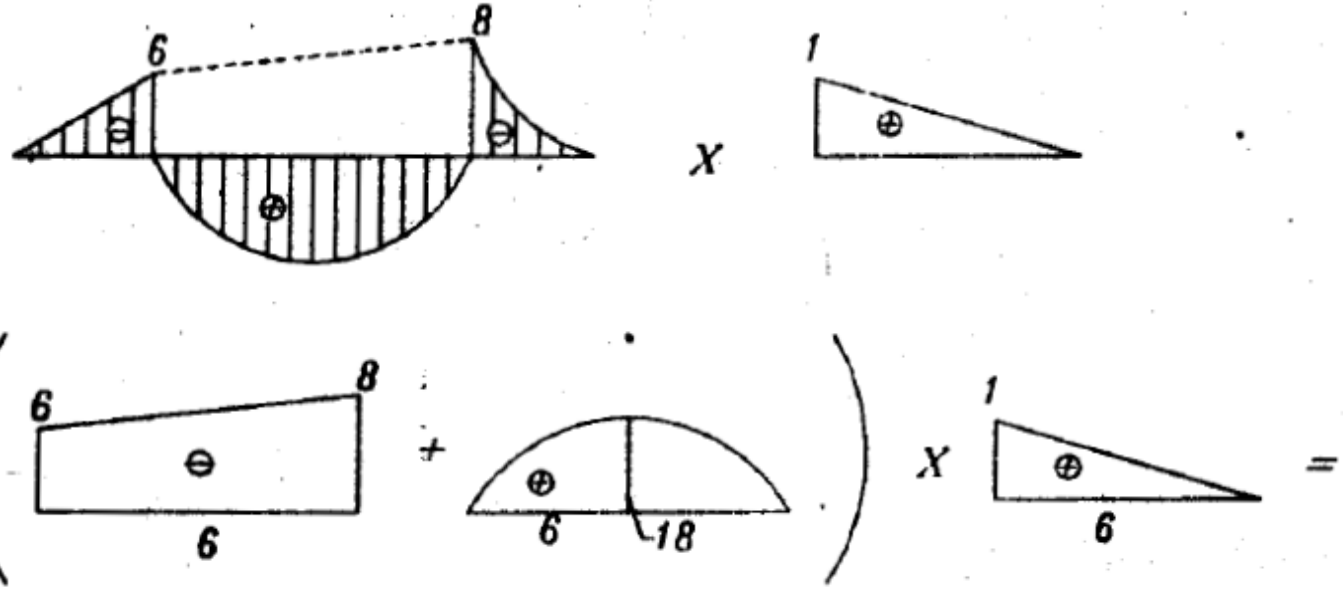
4- Süreklilik Denklemleri Yardımı İle X_1 ve X_2'nin Bulunması

Önce açık süreklilik denkleminin katsayıları olan δ_{10} δ_{ij} ler hesaplanır.

$$\delta_{10}=\int M_1 M_0 \frac{ds}{EI}$$

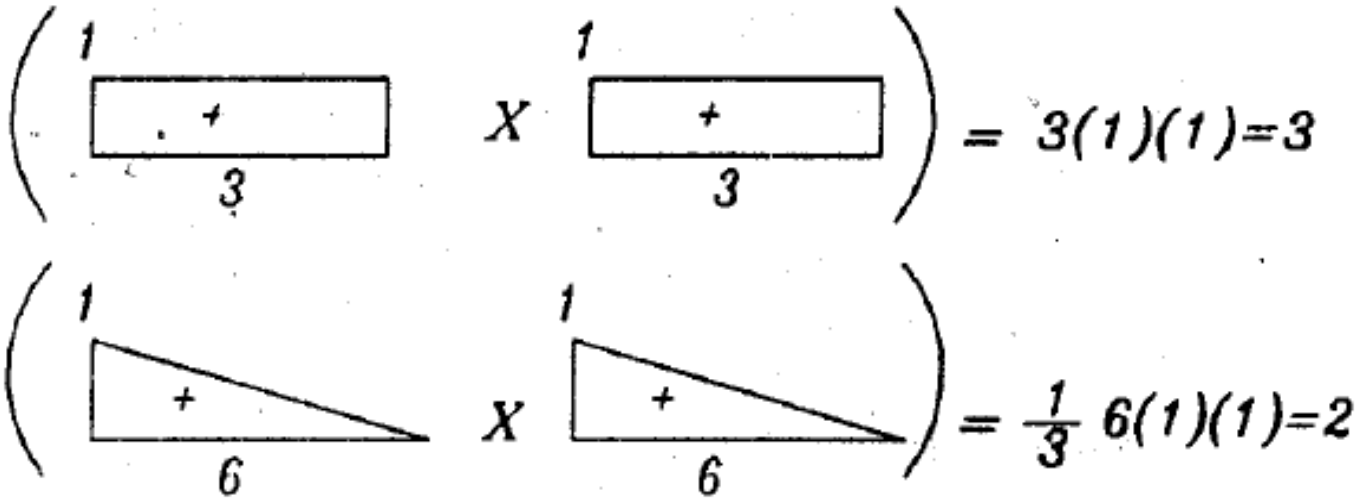
$$EI_c\ \delta_{10}=\int M_1 M_0 \left[\frac{I_c}{I}\right] ds$$

M_1 ve M_0 diyagramları çarpılır. Diyagramlarda sadece b-e parçası integral olarak alınır.

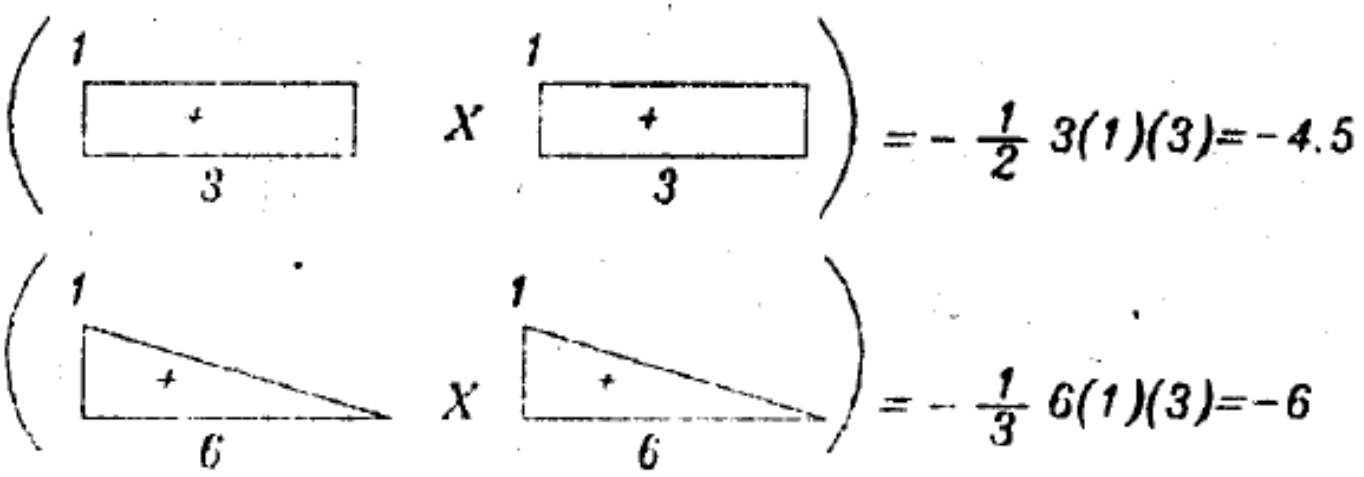


$$-\frac{1}{6}6(1)(2(6)+8)+\frac{1}{3}6(18)1=16, \quad EI_C\,\delta_{10}=16$$

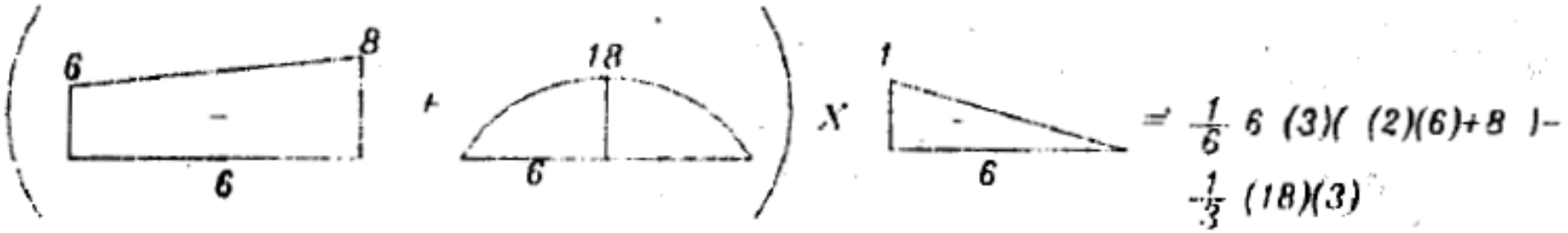
$$EI_C\,\delta_{11}=\int M_1 M_1\left[\frac{I_C}{I}\right]ds$$



$$EI_C\,\delta_{11}=3(2)+2(1)=8$$



$$EI_C\,\delta_{12} = -4.5(2) - 6(1) = -15$$

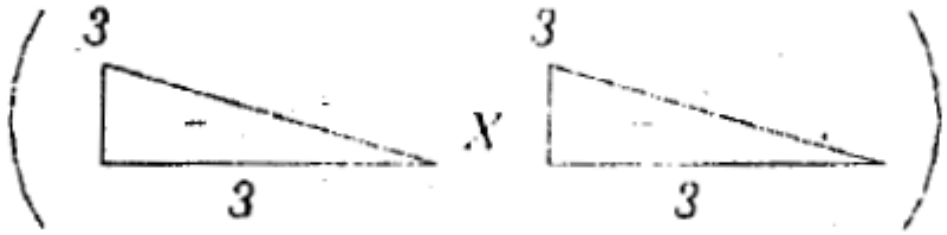


$$= \frac{1}{6}\,6\,(3)\left[(2)(6)+8\right] - \frac{1}{3}\,(18)(3)$$

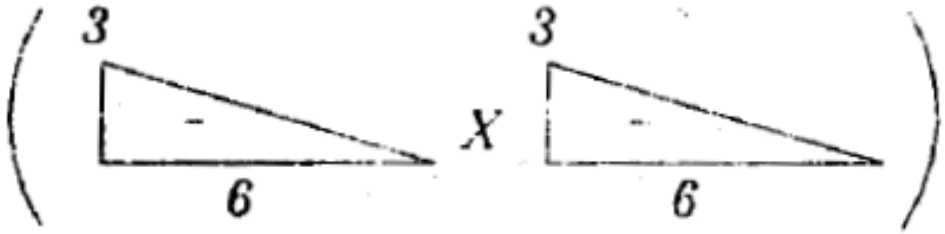
$$EI_C\,\delta_{20} = -48$$

$$EI_C\,\delta_{21} = EI_C\,\delta_{12} = -15$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



$$= \frac{1}{3} 3(3)(3) = 9$$



$$= \frac{1}{3} 6(3)(3) = 18$$

$$EI_C \delta_{22} = \int M_2 M_2 \left[\frac{I_C}{I}\right] ds$$

$$EI_C \delta_{22} = 9(2) + 18(1) = 36$$

Süreklilik denklemi ;

$EI_C\ \delta_{10} = EI_C\ \delta_{11}\ X_1 + EI_C\ \delta_{12}\ X_2 = 0$

$EI_C\ \delta_{20} = EI_C\ \delta_{21}\ X_1 + EI_C\ \delta_{22}\ X_2 = 0$

$16 + 8\ (X_1) - 15\ (X_2) = 0$

$-48 - 15\ (X_1) + 36\ (X_2) = 0$

Bu denklemler çözülürse, $X_1 = 2.3tm$, $X_2 = 2.3t$, bulunur.

$M = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2$

$N = N_0 + N_1 X_1 + N_2 X_2$

$T = T_0 + T_1 T_1 + T_2 X_2$

$M_a = 0+1(2.3)+0 = 2.3tm$

$M_b = 0+1(2.3)-3(2.3) = -4.6tm$

$M_c = -6+0+0 = -6tm$

$M_d = -6+1(2.3)-3(2.3) = -10.6tm$

$M_e = -8+0+0 = -8tm$

$M_f = -8+0+0 = -8tm$

$T_a = 0+0-1(2.3)+0 = -2.3t$

$T_b = 0+0-1(2.3) = -2.3t$

$T_c = -3+0+0 = -3t$

$T_d = 11.67-1/6(2.3)+1/2(2.3) = 12.44t$

$T_e = -12.33-1/6(2.3)+1/2(2.3) = -11.56t$

$T_f = 8+0+0 = 8tm$

$N_a = -14.67+1/6(2.3)-1/2(2.3) = -15.44t$

$N_b = -15.44t$

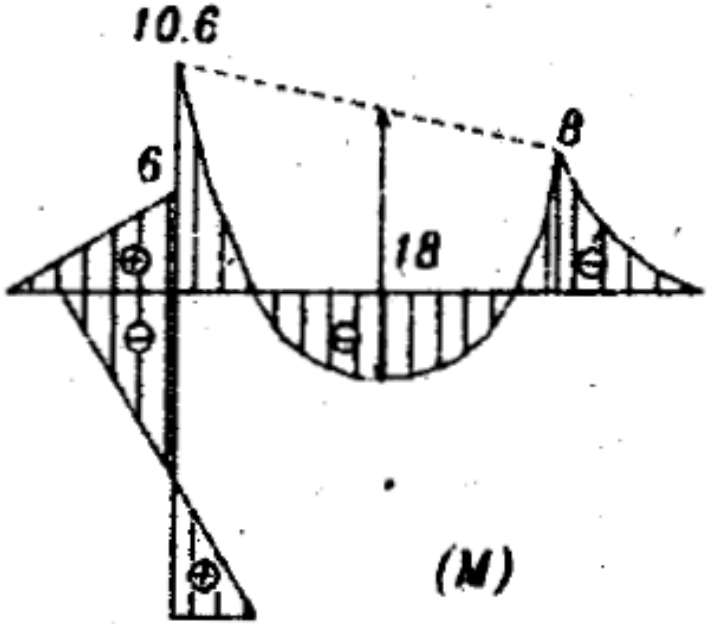
$N_c = 0$

$N_e = -2.3t$

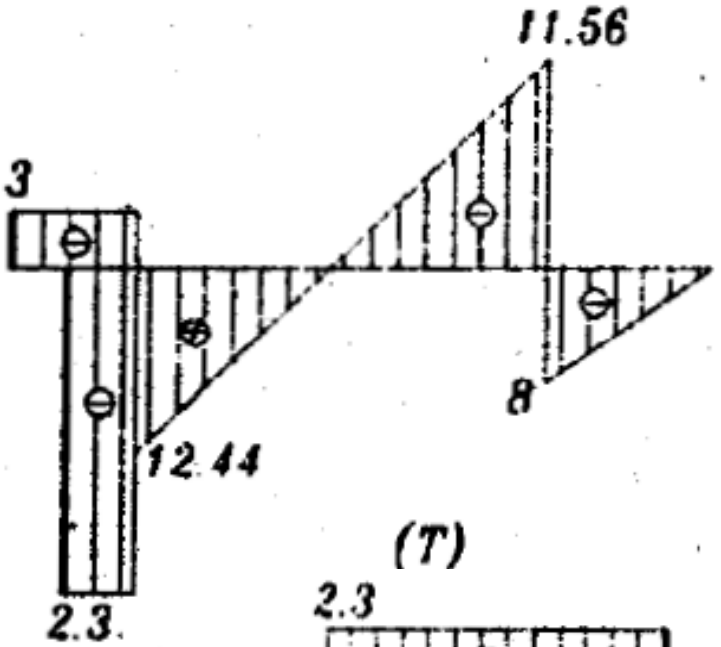
$N_d = -2.3t$

$N_f = 0$

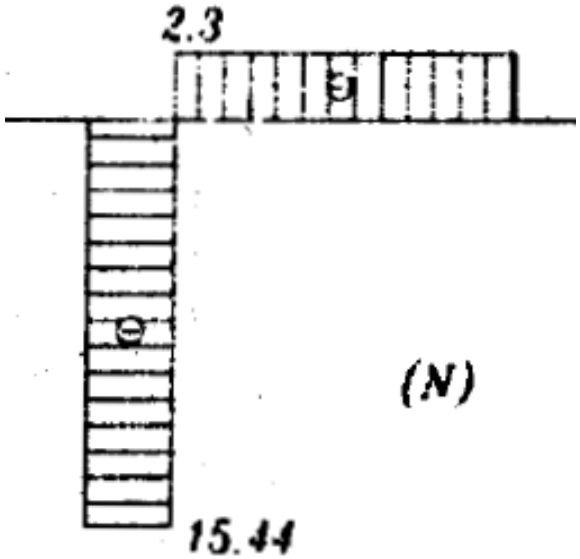
Abdulkadir Cüneyt AYDIN



(M)



(T)



(N)

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

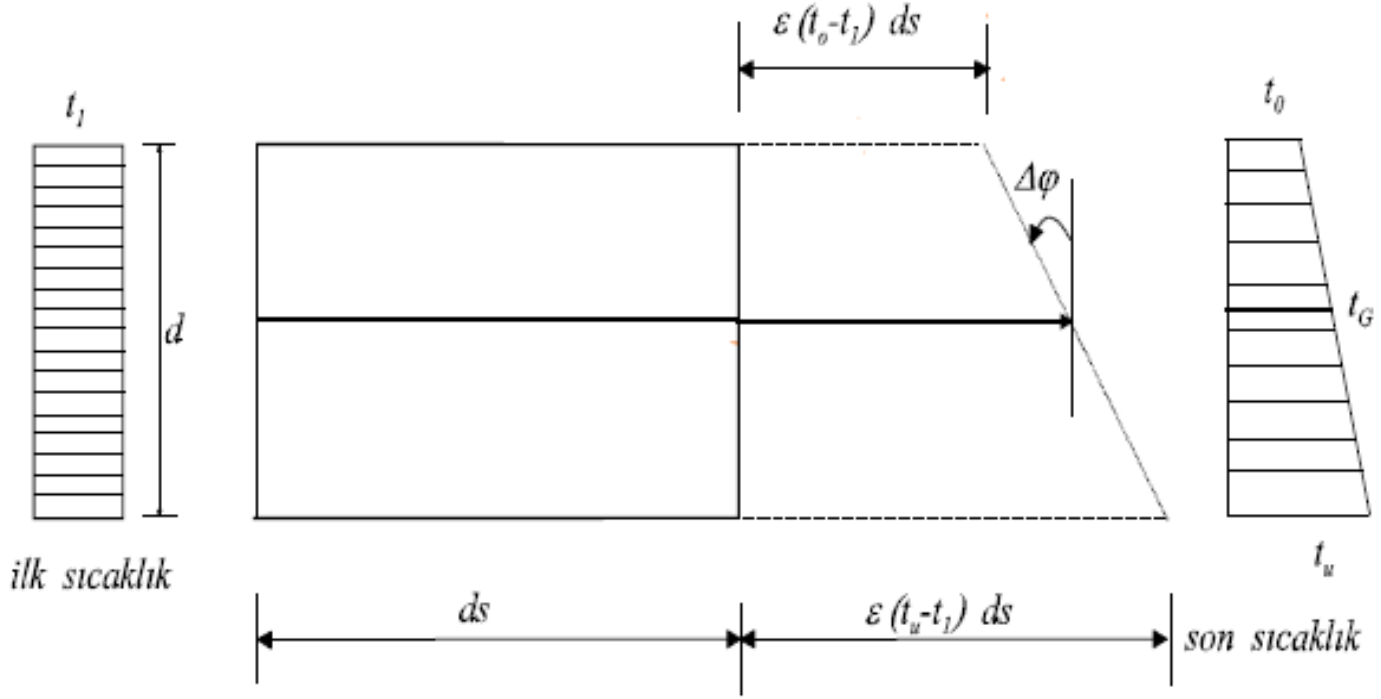
Dış Etki Olarak Sıcaklık Değişmesi ve/veya Mesnet Çökmelerinin Göz Önüne Alınması Durumu

Dış etki olarak göz önüne alınan sıcaklık değişimi ve mesnet çökmeleri hiperstatik sistemlerde şekil değiştirme ile birlikte kesit zoru da meydana getirir.

Sıcaklık değişimi:

Tanımlar:

ε	Uzama (genleşme) katsayısı (beton ve çelikte : $\varepsilon = 10^{-5}$ m/m^{0}C)
d	Kesit yüksekliği
t_1	İlk sıcaklık
t_o	Üst liflerdeki son sıcaklık
t_u	Alt liflerdeki son sıcaklık
t_G	Çubuk eksenindeki son sıcaklık



Yapı sistemlerinin hesabında iki tür sıcaklık değişimi söz konusudur.

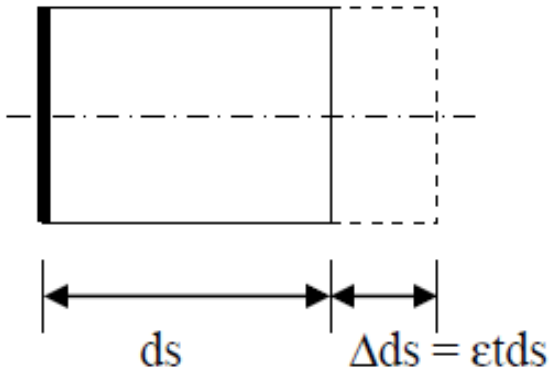
- (t) Düzgün sıcaklık değişmesi
- (Δt) Farklı sıcaklık değişmesi

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Düzgün sıcaklık değişmesi, (t):

Düzgün sıcaklık değişimi çubuk eksenindeki sıcaklık değişmesidir. ($t = t_G - t_1$)
Düzgün sıcaklık değişmesinden dolayı çubuk elemanda yalnız boy değişmesi meydana gelir.

$$\Delta ds = \varepsilon\, t\, ds \qquad \boxed{\frac{\Delta ds}{ds} = \varepsilon\, t}$$



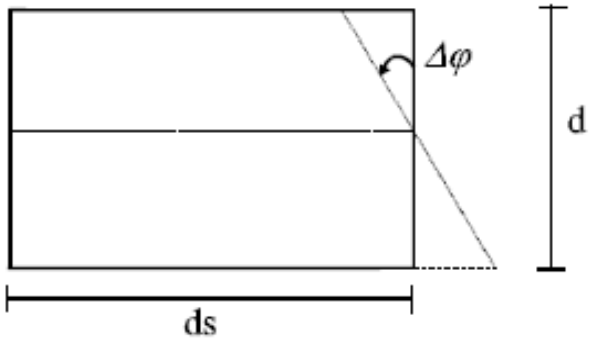
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Farklı sıcaklık değişmesi, (Δt):

Farklı sıcaklık değişmesi çubuğun alt ve üst lifler arasındaki sıcaklık farkıdır. ($\Delta t = t_o - t_u$)

Farklı sıcaklık değişmesinden dolayı çubuk elemanda yalnız dönme oluşur.

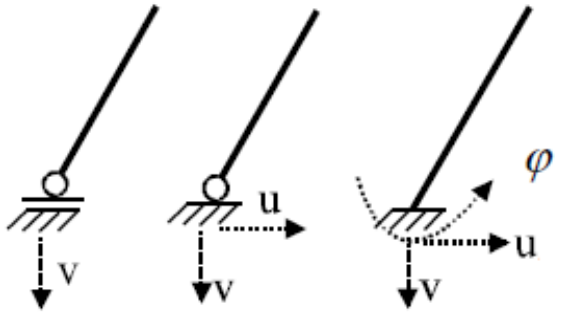
$$\frac{\Delta\varphi}{ds} = \frac{\varepsilon\,\Delta t}{d}$$



Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Mesnet Çökmeleri:

Mesnet çökmeleri mesnetlerde meydana gelen ve mesnet tanımına uymayan yerdeğiştirmelerdir.



u,v : Doğrulsal (lineer) mesnet çökmeleri (m),
φ : Açısal mesnet çökmesi (radyan)

Hiperstatik sistemlerin Kuvvet Yöntemi ile hesabında dış etki olarak sıcaklık değişmesi ve mesnet çökmelerinin göz önüne alınması durumunda aşağıda verilen yol izlenir.

Süperpozisyon Denklemleri:

Hiperstatik sisteme dış etki olarak sıcaklık değişmesi ve/veya mesnet çökmelerinin etkimesi halinde süperpozisyon denklemlerinde kavramsal olarak herhangi bir değişiklik yoktur. Ancak İzostatik sistemlerde sıcaklık değişmesi ve mesnet çökmelerinden dolayı kesit zoru meydana gelmediği için, İES de dış etkilerden (sıcaklık değişmesi ve /veya mesnet çökmesi) meydana gelen $M_0 \equiv N_0 \equiv T_0$ dır. Bu durumda süperpozisyon denklemleri:

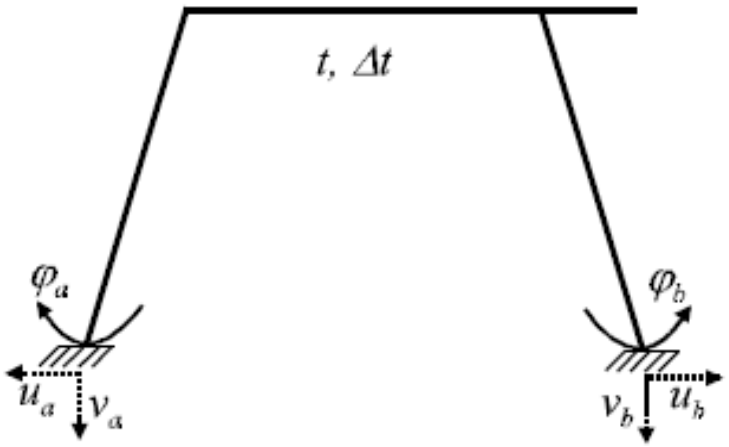
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

$$M = M_1X_1 + M_2X_2 + \cdots\cdots\cdots + M_nX_n$$
$$N = N_1X_1 + N_2X_2 + \cdots\cdots\cdots + N_nX_n$$
$$T = T_1X_1 + T_2X_2 + \cdots\cdots\cdots + T_nX_n$$
$$R = R_1X_1 + R_2X_2 + \cdots\cdots\cdots + R_nX_n$$

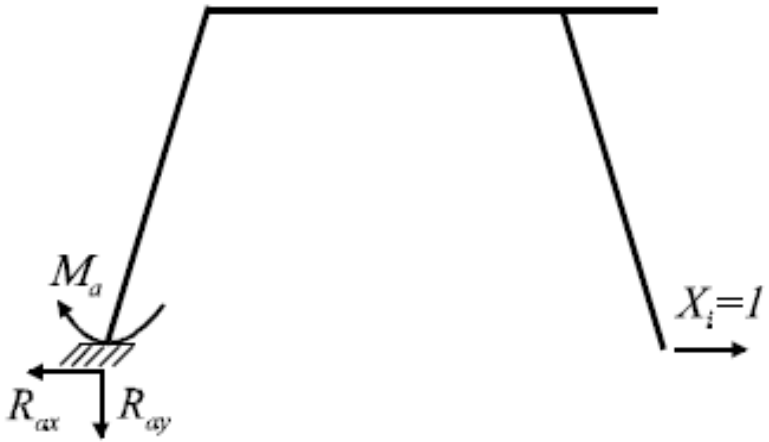
şeklini alır.

(i) Sayılı süreklilik denkleminin yazılması

Sistemde dış etki olarak sıcaklık değişmesi ve mesnet çökmeleri bulunması hali.



Hiperstatik sistem
(Virtüel şekildeğiştirme durumu)



İzostatik esas sistemde $X_i=1$ durumu
(Yükleme durumu)

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

	Hiperstatik Sistem (Dış Etki-Sıcaklık Değişimi, Mesnet Çökmesi)	İzostatik Esas Sistem (X_i=1 Durumu)
Kesit Zorları :	M, N, T	M_i, N_i, T_i
Şekildeğiştirmeler :	$\frac{\Delta\varphi}{ds} = \frac{M}{EI} + \frac{\varepsilon\ \Delta}{d}$ $\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{N}{EF} + \varepsilon\ t$ $\frac{\Delta v}{ds} = \frac{T}{GF'}$	

Virtüel İş Teoremi: İç Kuvvetlerin İşi = Dış Kuvvetlerin İşi

İç Kuvvetlerin İşi = Dış Kuvvetlerin İşi

$$\int M_i M \frac{ds}{EI} + \int N_i N \frac{ds}{EF} + \int T_i T \frac{ds}{GF'} + \underbrace{\int M_i \frac{\varepsilon\ \Delta t}{d} ds + \int N_i \varepsilon\ \ tds}_{\delta_{it}}$$

Sıcaklık değişimi

$$= \underbrace{R_{xa} u_a + R_{ya}\ v_a\ \ + M_a\ \varphi_a + 1.u_b}_{J_i}$$

Mesnet çökmeleri

Kapalı Süreklilik Denklemleri

M, N, T nin süperpozisyon denklemlerindeki ifadeleri kapalı süreklilik denklemlerinde yerine konarak denklem yeniden düzenlenirse,

$$\int M_i (M_1 X_1 + M_2 X_2 + \cdots\cdots + M_n X_n)\frac{ds}{EI} +$$

$$\int N_i (N_1 X_1 + N_2 X_2 + \cdots\cdots + N_n X_n)\frac{ds}{EF} +$$

$$\int T_i (T_1 X_1 + T_2 X_2 + \cdots\cdots + T_n X_n)\frac{ds}{GF'} +$$

$$\int M_i \frac{\varepsilon\ \Delta t}{d} ds + \int N_i \varepsilon\ tds = \mathrm{R}_{xa} u_a + \mathrm{R}_{ya}\ \mathrm{v}_a + \mathrm{M}_a\ \varphi_a + 1.\mathrm{u}_b \qquad (\mathrm{i} = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots \mathrm{n})$$

$$\int M_i \frac{\varepsilon\ \Delta t}{d} ds + X_1 \int M_i M_1 \frac{ds}{EI} + \cdots\cdots\cdots + X_n \int M_i M_n \frac{ds}{EI} +$$

$$\int N_i \varepsilon\ tds + X_1 \int N_i N_1 \frac{ds}{EF} + \cdots\cdots\cdots + X_n \int N_i N_n \frac{ds}{EF} +$$

$$\underbrace{\qquad}_{\downarrow} + X_1 \underbrace{\int T_i T_1 \frac{ds}{GF'}}_{\downarrow} + \cdots\cdots\cdots + X_n \underbrace{\int T_i T_n \frac{ds}{GF'}}_{\downarrow} = \underbrace{\mathrm{R}_{xa} u_a + \mathrm{R}_{ya}\ \mathrm{v}_a + \mathrm{M}_a\ \varphi_a + 1.\mathrm{u}_b}_{\downarrow}$$

δ_{it} $\qquad$ δ_{i1} $\qquad$ δ_{in} $\qquad$ $\mathrm{J_i}$

$$\delta_{it} + \delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \cdots\cdots\cdots + \delta_{in}X_n = J_i \qquad (i = 1,2,\ldots\ldots n)$$

Bu denklem sistemi i=1,2 .....n için açık olarak yazılırsa **Açık Süreklilik Denklemi** elde edilir.

$$\begin{aligned}
&\delta_{1t} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \cdots\cdots\cdots + \delta_{1n}X_n = J_1\\
&\delta_{2t} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \cdots\cdots\cdots + \delta_{2n}X_n = J_2\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
&\delta_{nt} + \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \cdots\cdots\cdots + \delta_{nn}X_n = J_n
\end{aligned}$$

Açık Süreklilik Denklemleri

Açık süreklilik denkleminde katsayılar ve sabitler:

δ_{ij} : Denklem takımının daha önce açıklanan katsayılarıdır.

$$\delta_{ij} = \int M_i M_j \frac{ds}{EI} + \int N_i N_j \frac{ds}{EF} + \int T_i T_j \frac{ds}{GF'}$$

δ_{i0} : Dış yük söz konusu olmadığı için sıfırdır.

Uygulamada genellikle uzama ve kayma deformasyonları eğilme deformasyonu yanında ihmal edilir. Bu durumda δ_{ij} katsayıları daha basit bir şekilde sadece M fonksiyonlarına bağlı olarak yazılabilir. ifade edilebilir.

δ_{it} : Sıcaklık değişmesinden dolayı X_i bilinmeyeninin uygulama noktasının yerdeğiştirmesidir. ***Sıcaklık değişmesi terimi*** adını alır.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

$$\delta_{it} = \int M_i \frac{\varepsilon\ \Delta t}{d} ds + \int N_i \varepsilon\ t ds = \sum_{\text{çubuk}} \frac{\varepsilon\ \Delta t}{d} \int M_i ds + \sum_{\text{çubuk}} \varepsilon\ t \int N_i ds$$

şeklinde hesaplanır.

Sistemde dış etki olarak yalnız t düzgün sıcaklık yüklemesi varsa, $\Delta t=0$ olacağı için birinci terim sıfır olur sadece ikinci terim kalır.

Sistemde dış etki olarak yalnız Δt farklı sıcaklık yüklemesi varsa, $t=0$ olacağı için ikinci terim sıfır olur sadece birinci terim kalır.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

J_i : X_i=1 yüklemesindeki dış kuvvetlerin (birim yükleme ve mesnet tepkileri) sistemin verilen mesnet çökmelerinde yaptıkları işlerdir.

X_i=1 yüklemesindeki dış kuvvetlerin (birim yükleme ve mesnet tepkilerinin) verilen mesnet çökmeleri ile karşılıklı olarak çarpımlarının toplamı olarak hesaplanır.

$J_i = \sum$ (X_i =1 Yüklemesindeki dış kuvvetler, mesnet tepkileri * bu kuvvetler doğrultusundaki mesnet çökmeleri)

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Hesapta izlenen yol

1. İzostatik esas sistem seçilir, hiperstatik bilinmeyenler belirlenir.
2. Xi=1 yüklemeleri yapılarak M_i diyagramları çizilir. Bu işlem i=1,2,.....n kez tekrarlanır. t düzgün sıcaklık değişmesi için hesap yapılıyorsa N_i diyagramları da çizilmelidir.(N_i diyagramları uzama şekildeğiştirmelerinin terk edilmesi durumunda da çizilmelidir)
3. Denklem takımının δ_{ij} katsayıları ve δ_{it} sıcaklık değişmesi terimleri ve J_i mesnet çökmesi terimleri hesaplanır.

   Uygulamada, EI_c çarpanı ile çalışılıyorsa:

$$EI_c\delta_{it} = EI_c\int M_i\frac{\varepsilon\ \Delta t}{d}ds + EI_c\int N_i\varepsilon\ tds = EI_c\left[\sum_{\text{çubuk}}\frac{\varepsilon\ \Delta t}{d}\int M_i ds + \sum_{\text{çubuk}}\varepsilon\ t\int N_i ds\right]$$

$EI_cJ_i = EI_c\sum$ ($X_i = 1$ Yüklemesindeki dış kuvvetler, mesnet tepkileri * bu kuvvetler doğrultusundaki mesnet çökmeleri)

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

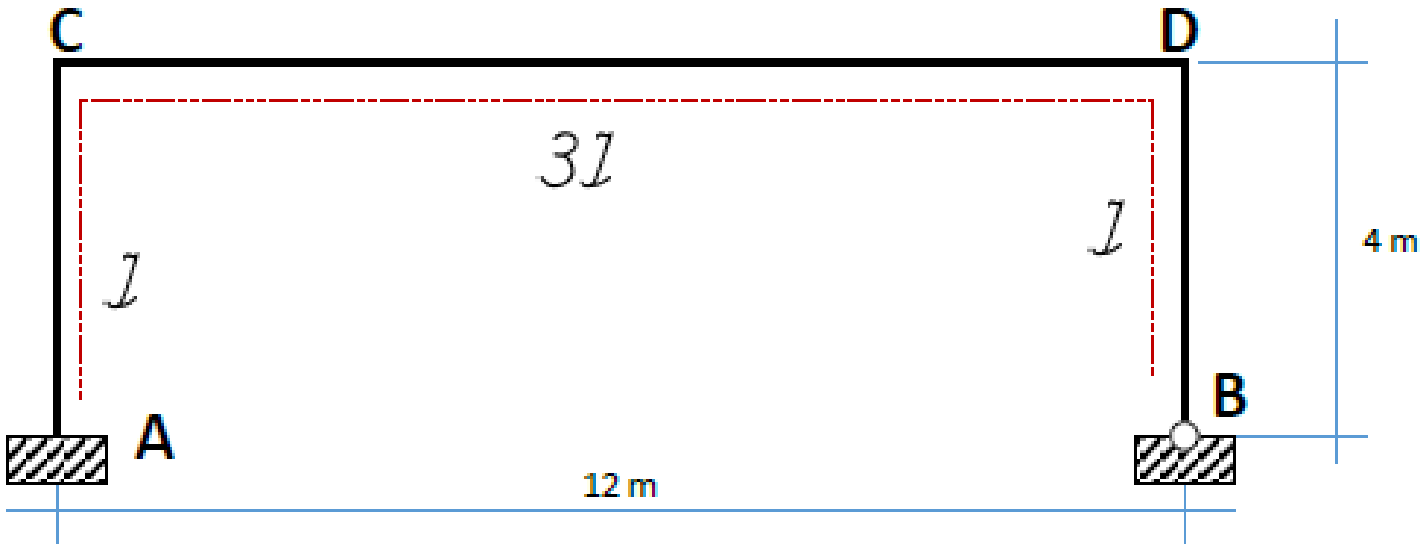
Görüldüğü gibi EI_c çarpan olarak kalmaktadır. Bu durumda bu çarpanın sayısal değeri bilinmelidir.

4. Denklem takımı kurulur ve çözülerek X_1, X_2, ...X_n hiperstatik bilinmeyenleri belirlenir.
5. Kesit zorları diyagramları çizilir. Bu işlem için iki yoldan yararlanılabilir.
   (i) Süperpozisyon denklemleri kullanılarak ($M=M_1X_1+M_2X_2+.....M_nX_n$)
   (ii) Dış yükler ve hiperstatik bilinmeyenler izostatik esas siteme yüklenerek
6. Sonuçlar kontrol edilir. Bunun için Kapalı Süreklilik Denklemleri (KSD) kullanılır. Hiperstatik sistemin M diyagramının kapalı süreklilik denklemlerini %0.5-%1.0 rölatif hata ile sağlaması gerekmektedir.

$$\int M_i M \frac{I_c}{I} ds + \underbrace{EI_c \int M_i \frac{\varepsilon\ \Delta t}{d} ds + EI_c \int N_i \varepsilon\ t ds}_{EI_c\,\delta_{it}} = EI_c J_i \qquad (i = 1,2,3,.....n)$$

$$\int M_i M \frac{I_c}{I} ds + EI_c \delta_{it} = EI_c J_i \qquad (i = 1,2,3,.....n)$$

Görüldüğü gibi $EI_c\delta_{it}$ ve EI_cJ_i terimleri kapalı süreklilik denkleminin içinde de yer almaktadır. Bu durumda bu terimlerin kontrolü yapılmamış olmaktadır.



Yukarıda verilen sistemde t=20^0 C düzgün (üniform) sıcaklık değişmesinden meydana gelen M_t diyagramını çiziniz. E=2.10^6 t/m^2 I=0,008 m^4 ε=10^{-5}

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

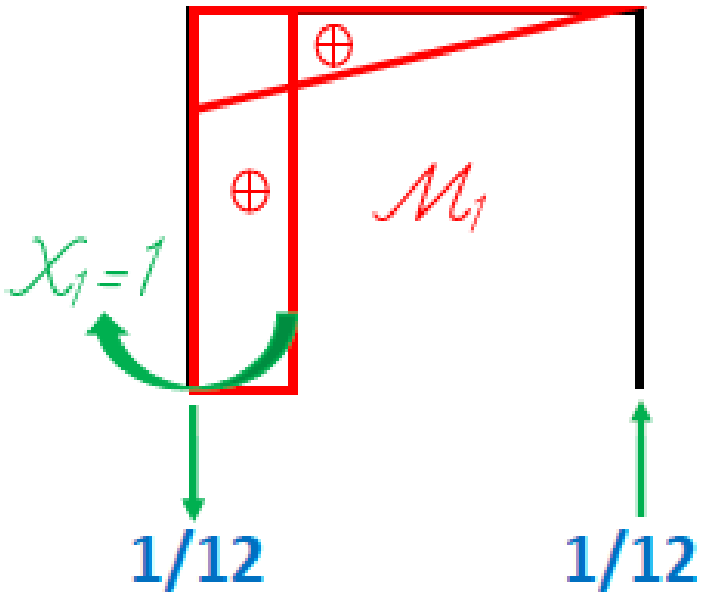
A mesnedinde 3 bilinmeyen, B mesnedinde 2 bilinmeyen, bilinen olarak da 3 denge denklemi olduğundan: 3+2-3=2

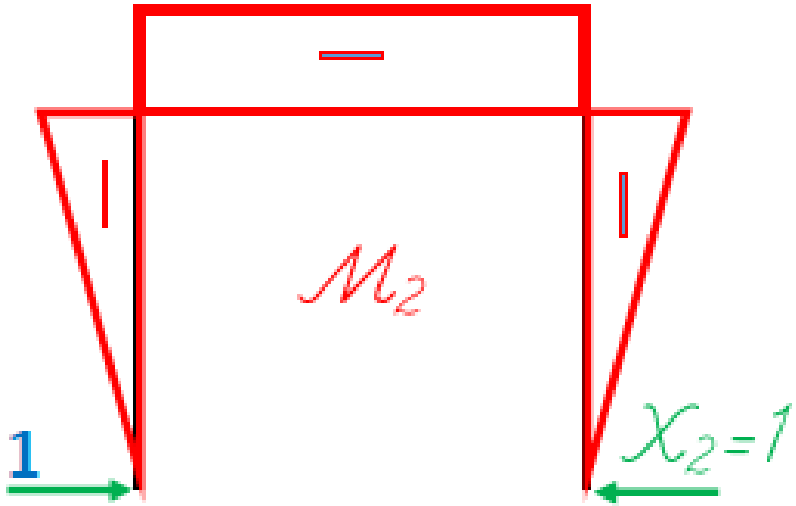
Sistem 2° hiperstatiktir.



$M_0 = 0$ dır. Çünkü sistemde dış yük yoktur.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN





Abdulkadir Cüneyt AYDIN

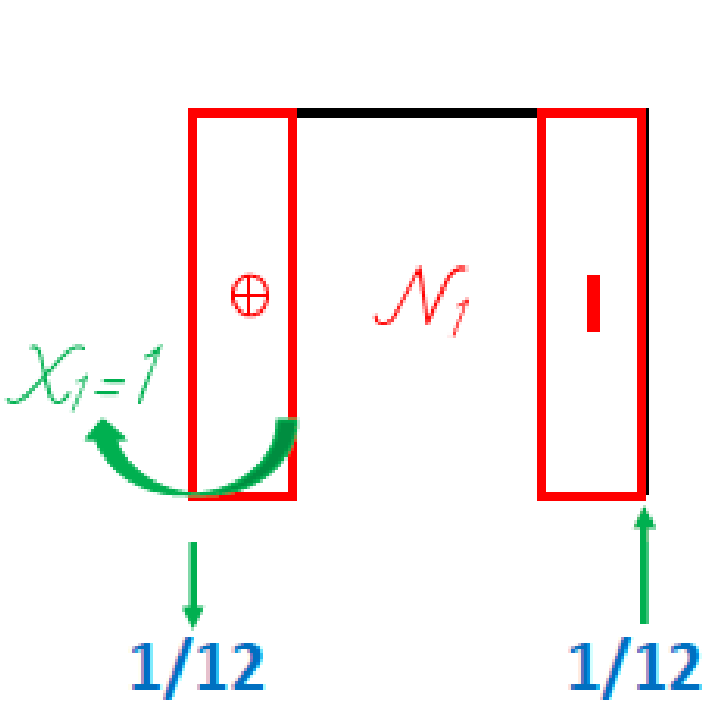
$$EI_c.\delta_{ij}=\int M_i.M_j.\left[\frac{I_c}{I}\right].ds$$

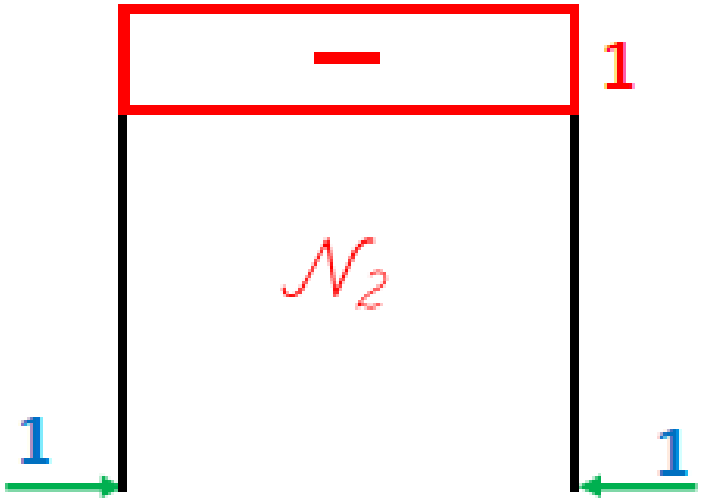
$$EI_c.\delta_{11}=[3].4.1.1+[1].\frac{1}{3}.12.1.1=16$$

$$EI_c.\delta_{12}=[3].\frac{1}{2}.4.1.(-4)+[1].\frac{1}{2}.12.1.(-4)=-48$$

$$EI_c.\delta_{22}=[3].\frac{1}{3}.2.4.4.4+[1].12.4.4=320$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN





Abdulkadir Cüneyt AYDIN

$EI_c.\delta_{1t}=EI_c.\mathcal{E}.\left[\int M_1.\frac{\Delta_t}{d}.ds+\int N_1.t_s.ds\right]$

Uniform sıcaklık değişimi = $\Delta_t=0$

$EI_c.\mathcal{E}=0,48$

$EI_c.\delta_{1t}=0,48.[4.(1/12).20+4.(-1/12).20=0$

$EI_c.\delta_{2t}=0,48.[12.(-1).20]=-115,2$

$EI_c.\delta_{11}.X_1+ EI_c.\delta_{12}.X_2+ EI_c.\delta_{1t}=0$

$EI_c.\delta_{21}.X_1+ EI_c.\delta_{22}.X_2+ EI_c.\delta_{2t}=0$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

$16.X_1+(-48).X_2+0=0$

$(-48).X_1+320.X_2+(-115,2)=0$

olduğundan X_1= 1,965 ve X_2= 0,655 olarak elde edilir.

$M=M_1.X_1+M_2.X_2$ olduğundan;

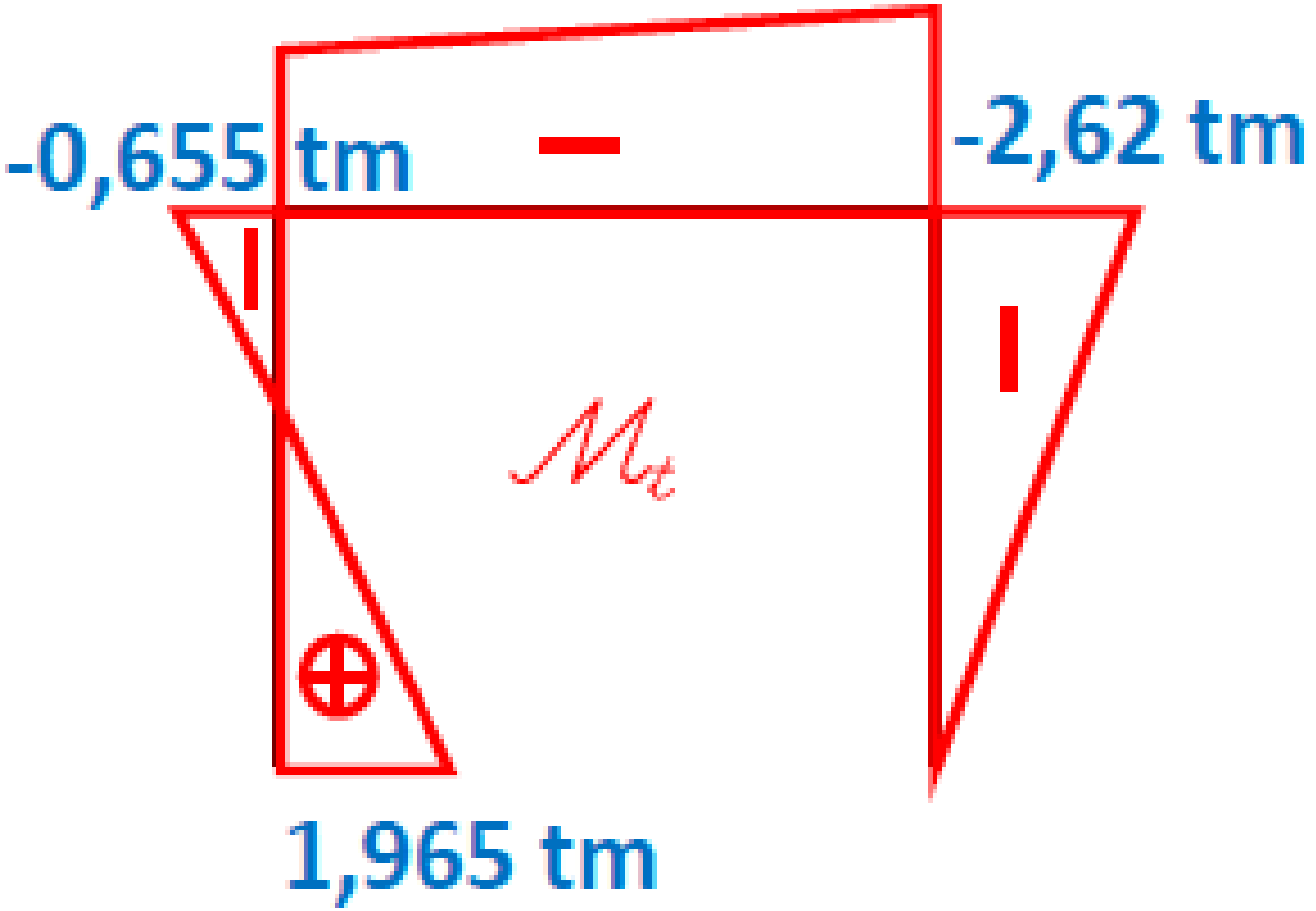
$M_A=1.1,965+0=1,965$ tm

$M_B=0$

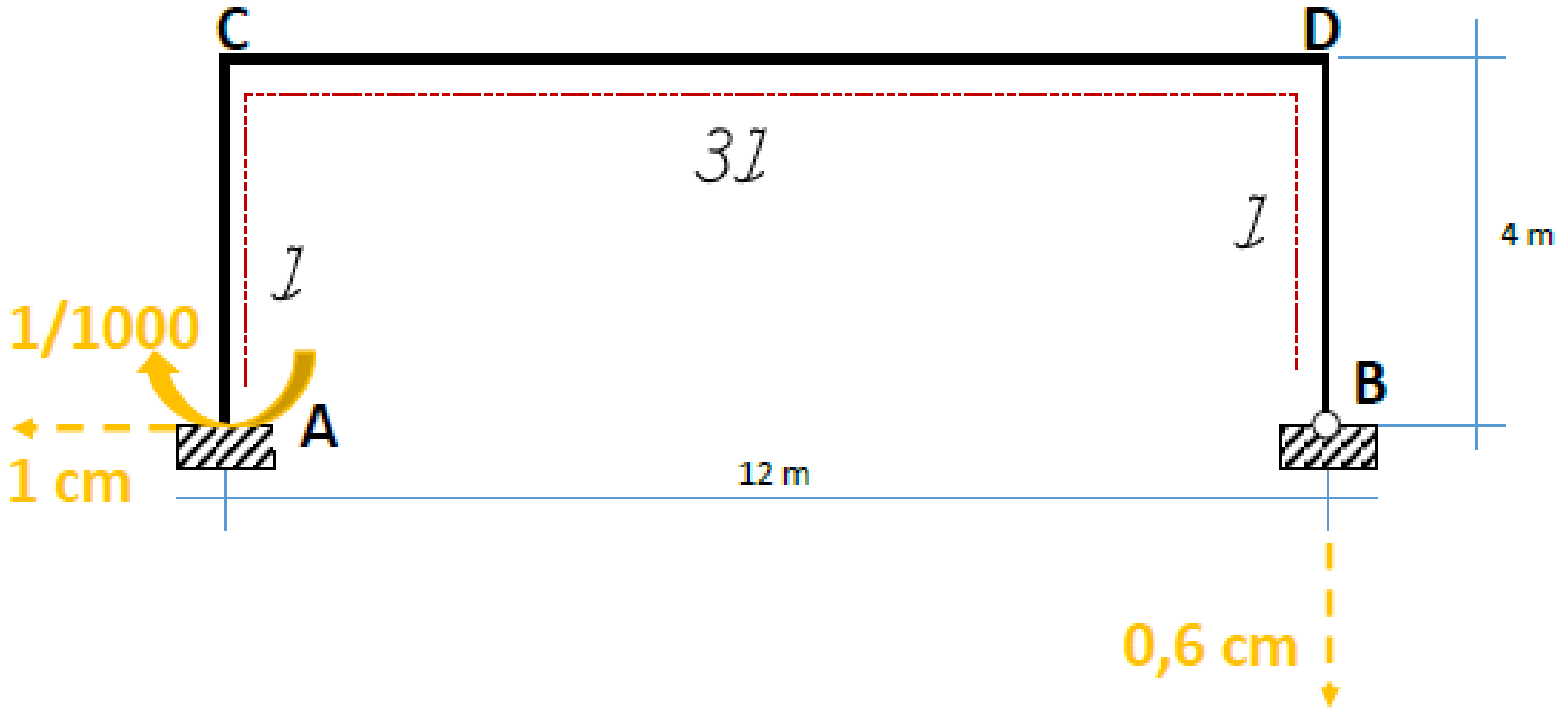
$M_C=1.1,965-4.0,655=-0,655$ tm

$M_D=-4.0,655=2,62$ tm

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



Abdulkadir Cüneyt AYDIN



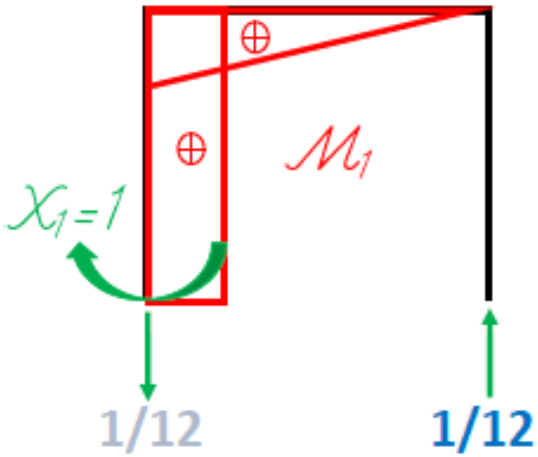
Yukarıdaki sistemde verilen mesnet çökmelerinden meydana gelen M_w diyagramını çiziniz.

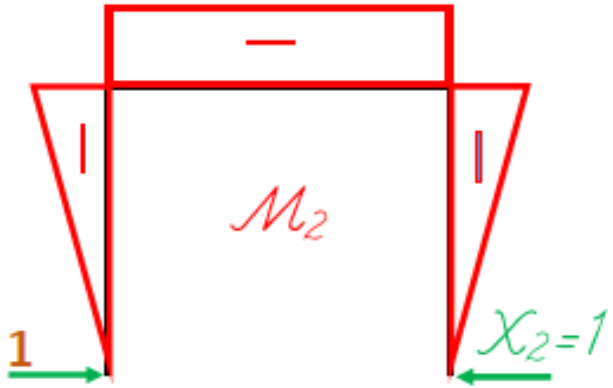
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

$$EI_c.\delta_{11}.X_1 + EI_c.\delta_{12}.X_2 = EI_c.J_1$$

$$EI_c.\delta_{21}.X_1 + EI_c.\delta_{22}.X_2 = EI_c.J_2$$

J_i değerleri i. birim yükleme durumunda meydana gelen tepki kuvvetlerinin o noktadaki çökme, ötelenme ve dönmelerle çarpımının cebrik toplamıdır.





J_1=**1**.(1/1000)+(**-1/12**).0,006=0,5.10^{-3}

J_2=(**-1**).0,01=-1.10^{-2}

$EI_c.J_1$=48000.0,5.10^{-3}=24

$EI_c.J_2$=-48000.10^{-2}=-480

$$EI_c.\delta_{ij}=\int M_i.M_j.\left[\frac{I_c}{I}\right].ds$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

$EI_c.\delta_{11}=[3].4.1.1+[1].\frac{1}{3}.12.1.1=16$

$EI_c.\delta_{12}=[3].\frac{1}{2}.4.1.(-4)+[1].\frac{1}{2}.12.1.(-4)=-48$

$EI_c.\delta_{22}=[3].\frac{1}{3}.2.4.4.4+[1].12.4.4=320$

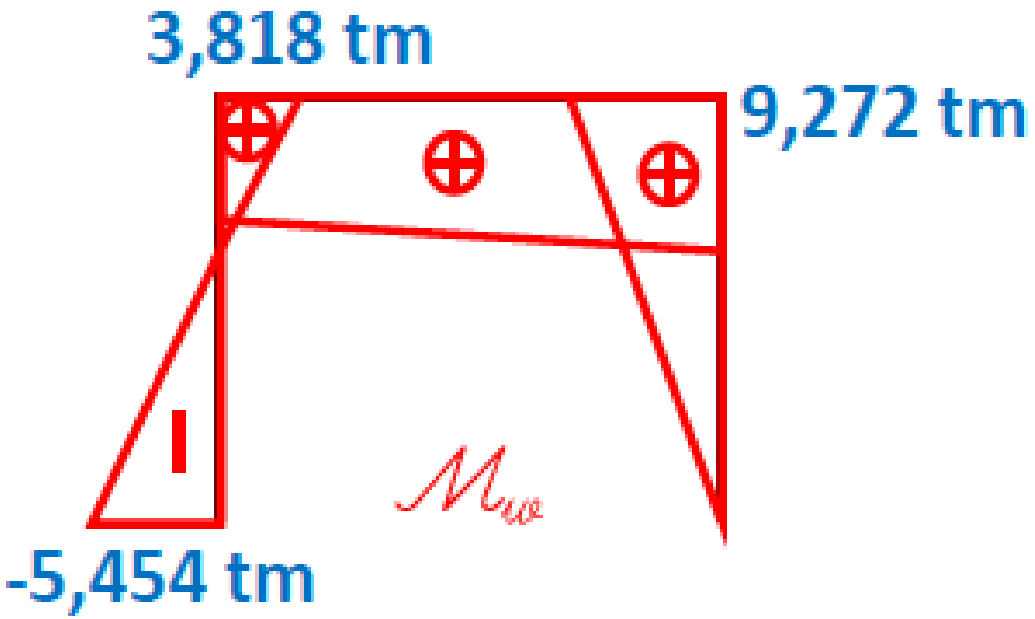
$16.X_1+(-48).X_2=24$

$(-48).X_1+320.X_2=-480$

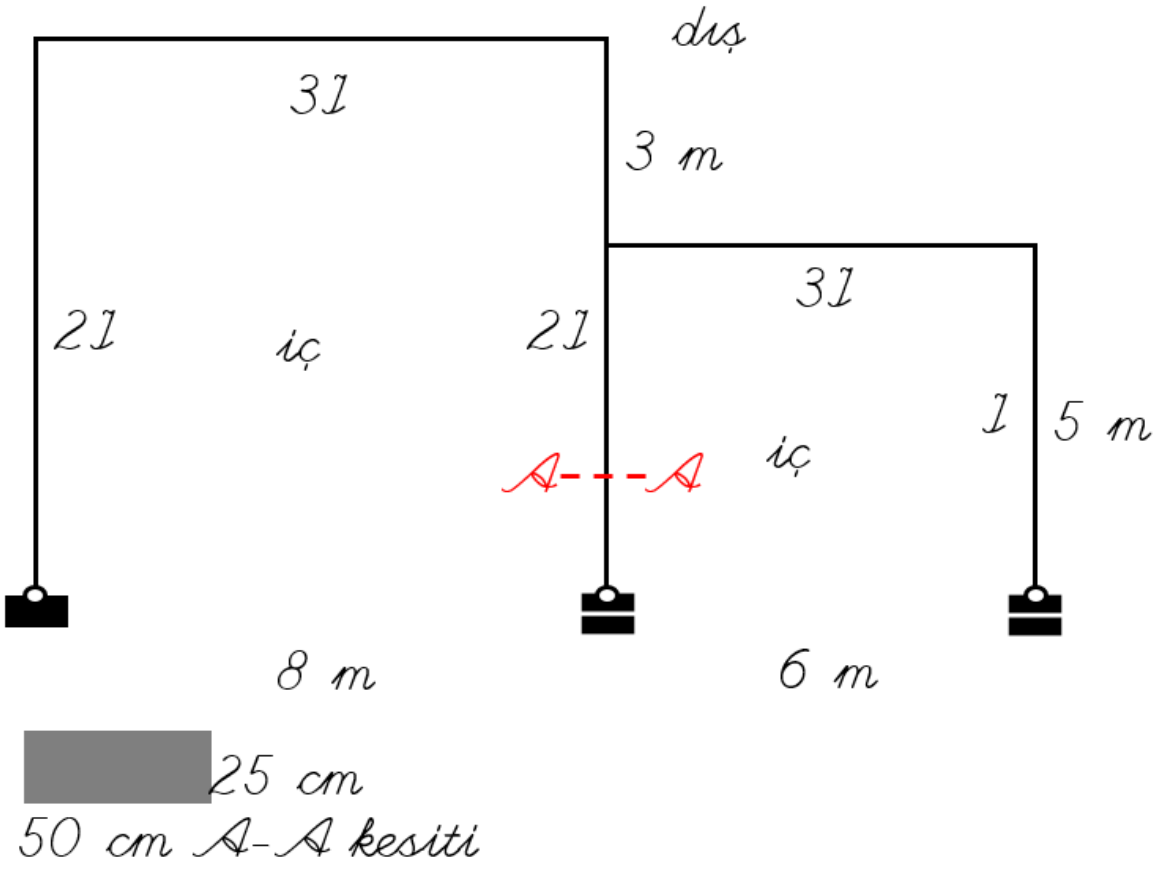
olduğundan X_1= **-5,454** ve X_2= **-2,318 olarak elde edilir.**

$EI_c.\delta_{11}.X_1+EI_c.\delta_{12}.X_2=EI_c.J_1$

$EI_c.\delta_{21}.X_1+EI_c.\delta_{22}.X_2=EI_c.J_2$



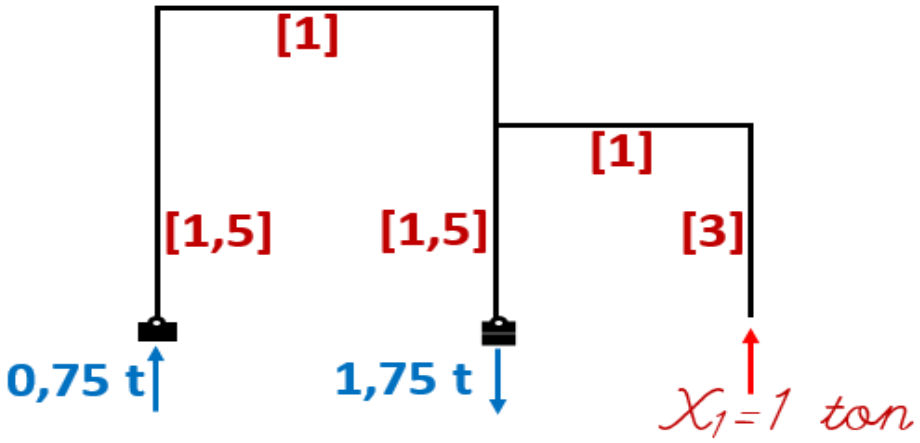
Abdulkadir Cüneyt AYDIN



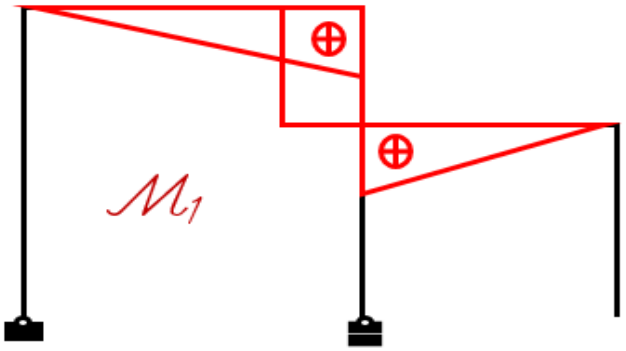
Yukarıda verilen sistemde $E=2.10^6$ t/m², $t_{iç}=25^0$ C, $t_{dış}=-5^0$ C, $\varepsilon=10^{-5}$ ve bütün çubuk kesitlerinde küçük kenar 25 cm dir. Buna göre sıcaklık değişmesinden dolayı M_t eğilme momenti diyagramını çiziniz.

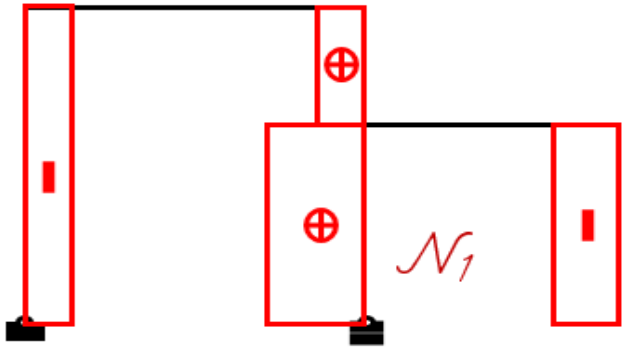
ÇÖZÜM

- 2+1+1-3=1 olduğundan sistem 1.dereceden hiperstatiktir.
- $I_c = 3I$ seçilir.
- Orta çubuğun 5 m lik kısmında uniform sıcaklık değişimi olmaktadır.
- Ortalama sıcaklık $t_s=(t_{iç}+t_{dış})/2=(25-5)/2=10$ derecedir.
- Sıcaklık farkı $\Delta_t=25-(-5)=30$ derecedir.
- 25x50 cm lik kesit düşünülürse; $I_c=3I$ için d değerleri 2I ve 3I kesitler için hesaplanması gerekir.
- $2.(0{,}25.0{,}50^3)/12=0{,}25.d_1^3/12$ için $d_1=0{,}63$ m
- $3.(0{,}25.0{,}50^3)/12=0{,}25.d_2^3/12$ için $d_2=0{,}72$ m



İzostatik eşlenik sistem





Abdulkadir Cüneyt AYDIN

$$EI_c.\delta_{11}=\frac{1}{3}.8.6.6+[1,5].3.6.6+\frac{1}{3}.6.6.6=330$$

$$EI_c.\mathcal{E}=2.10^6.3.\{(0,25.0,5^3)/12\}.10^{-5}=0,15625$$

$$EI_c.\delta_{1t}=EI_c.\mathcal{E}.\left[\int M_1.\frac{\Delta_t}{d}.ds+\int N_1.t_s.ds\right]$$

$$EI_c.\delta_{1t}=0,15625.\left[\frac{30}{0,72}.\frac{1}{2}.6.8+\frac{30}{0,63}.6.3+\frac{30}{0,72}.\frac{1}{2}.6.6-0,75.8.10+0,75.3.10-1.5.10+1,75.5.25\right]=427,87$$

N_1 diyagramının alanı

2 için d_1

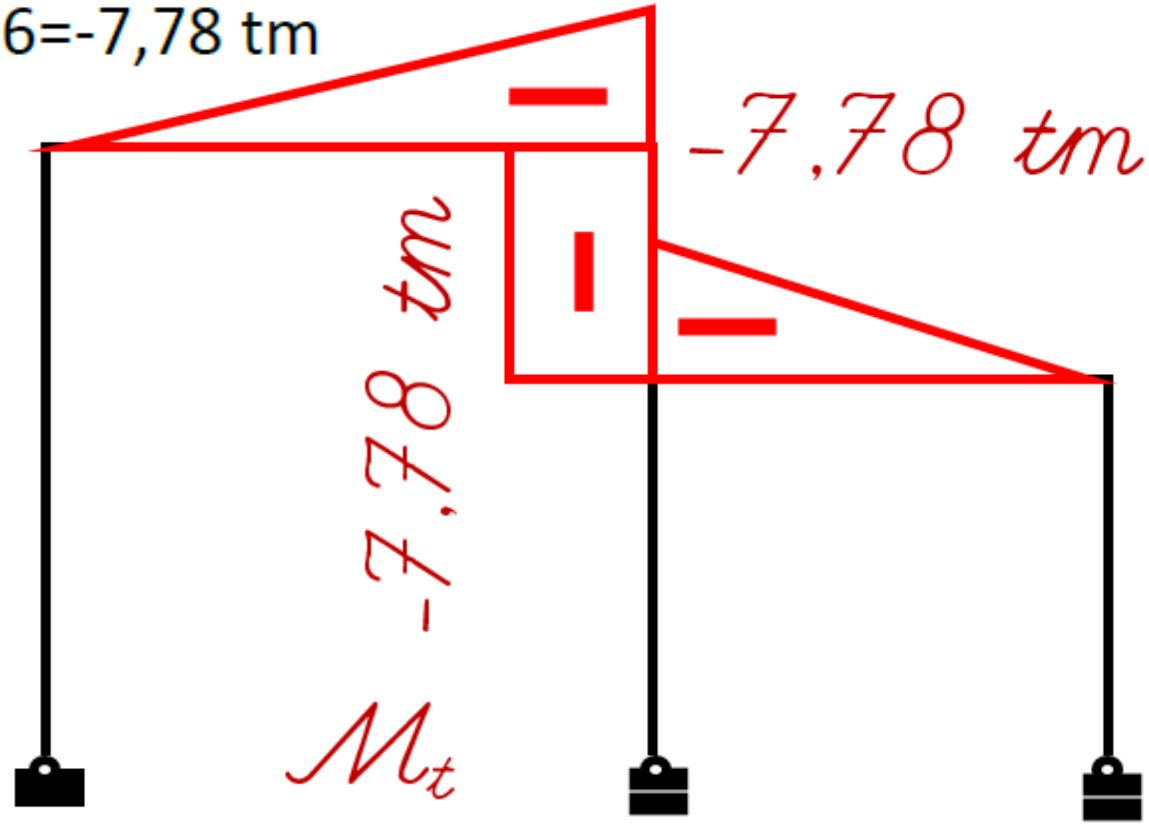
$t_s=(t_{iç}+t_{dış})/2$

Orta kolonun alt kısmı

$EI_c.\delta_{11}.X_1 + EI_c.\delta_{1t}=0$

$330.X_1+427=0$ ise $X_1=-1,2966$

$M=M_1.X_1$ için $-1,2966.6=-7,78$ tm

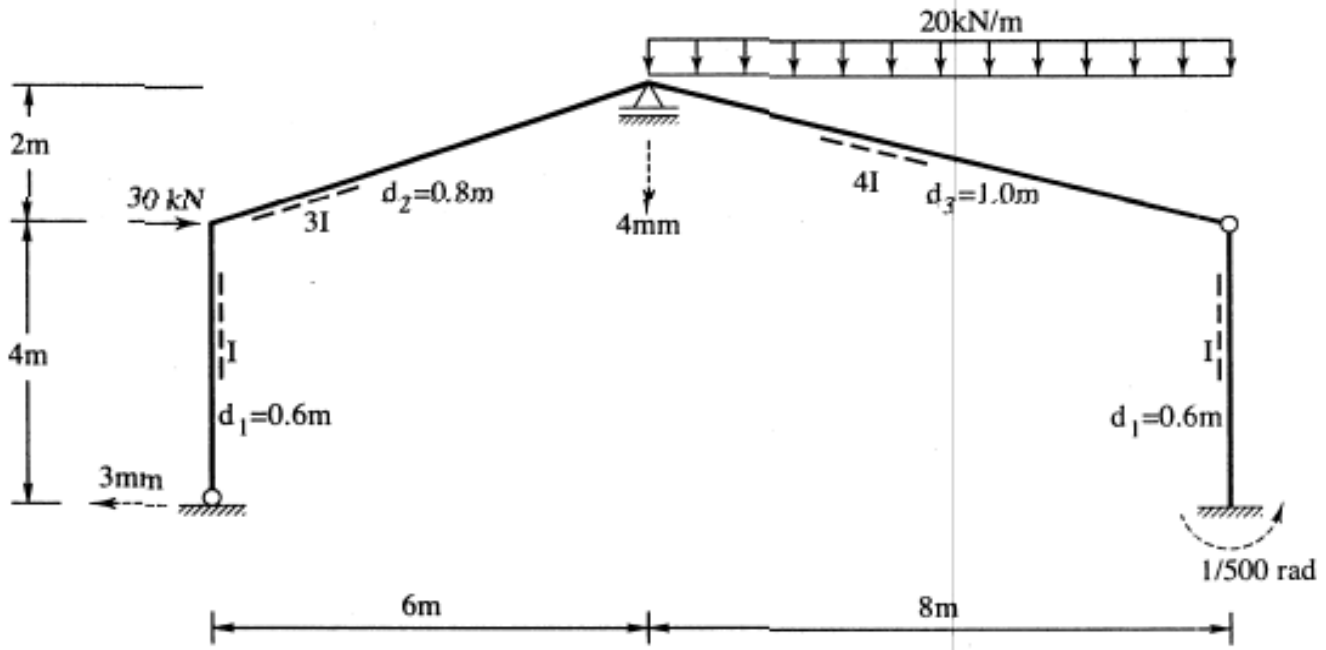


Abdulkadir Cüneyt AYDIN

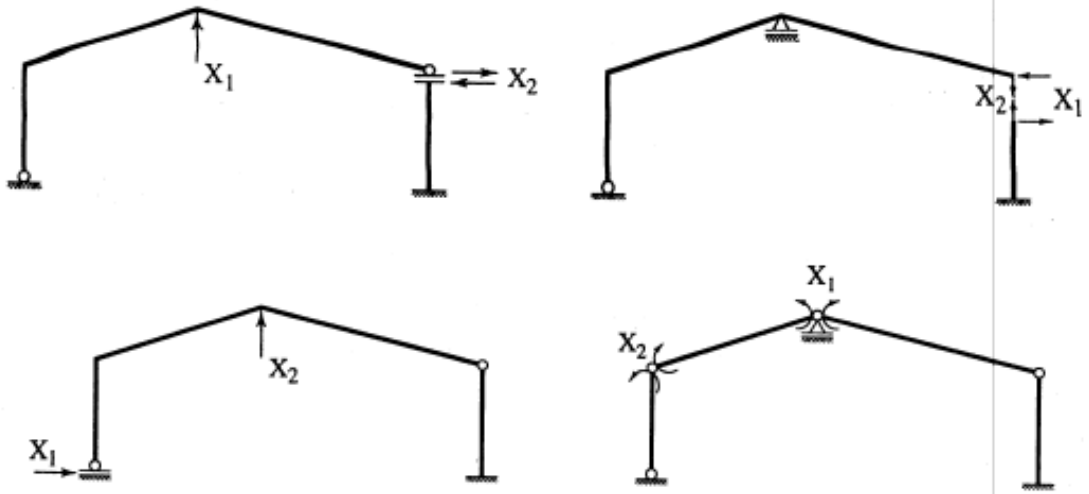
PROBLEM 2.2. Şekil 2.2 deki hiperstatik sistemde,

a) En az iki tane izostatik esas sistem seçiniz.
b) t=+20°C düzgün sıcaklık değişmesi ile $\Delta t = +15°C$ farklı sıcaklık değişmesinin aynı anda etkimesi durumunda oluşan M diyagramını çiziniz.
c) Verilen mesnet çökmelerinden oluşan M diyagramını çiziniz.
d) Verilen dış yüklerden oluşan M, N, T diyagramlarını çiziniz.

Not : 1) Her eğilme momenti diyagramını en az bir KSD ile kontrol ediniz.
2) $\varepsilon = 10^{-5}$ m/m°C , EI=90000 kNm^2

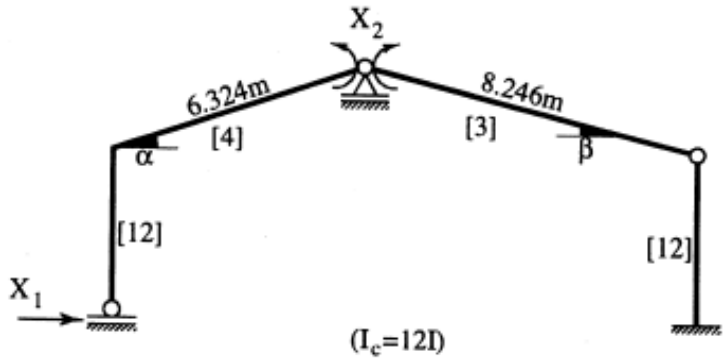


Abdulkadir Cüneyt AYDIN



Şekil 2.2a: İzostatik esas sistemler

b) Şekil 2.2 deki hiperstatik sistemin çözümünde kullanılacak olan izostatik esas sistem Şekil 2.2b de verilmiştir.



Şekil 2.2b: İzostatik esas sistem ve hiperstatik bilinmeyenler

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Yapı sisteminde bulunan eğik çubukların yatayla yaptıkları α , β açıları ve bu açılara bağlı olarak hesaplanan trigonometrik değerler

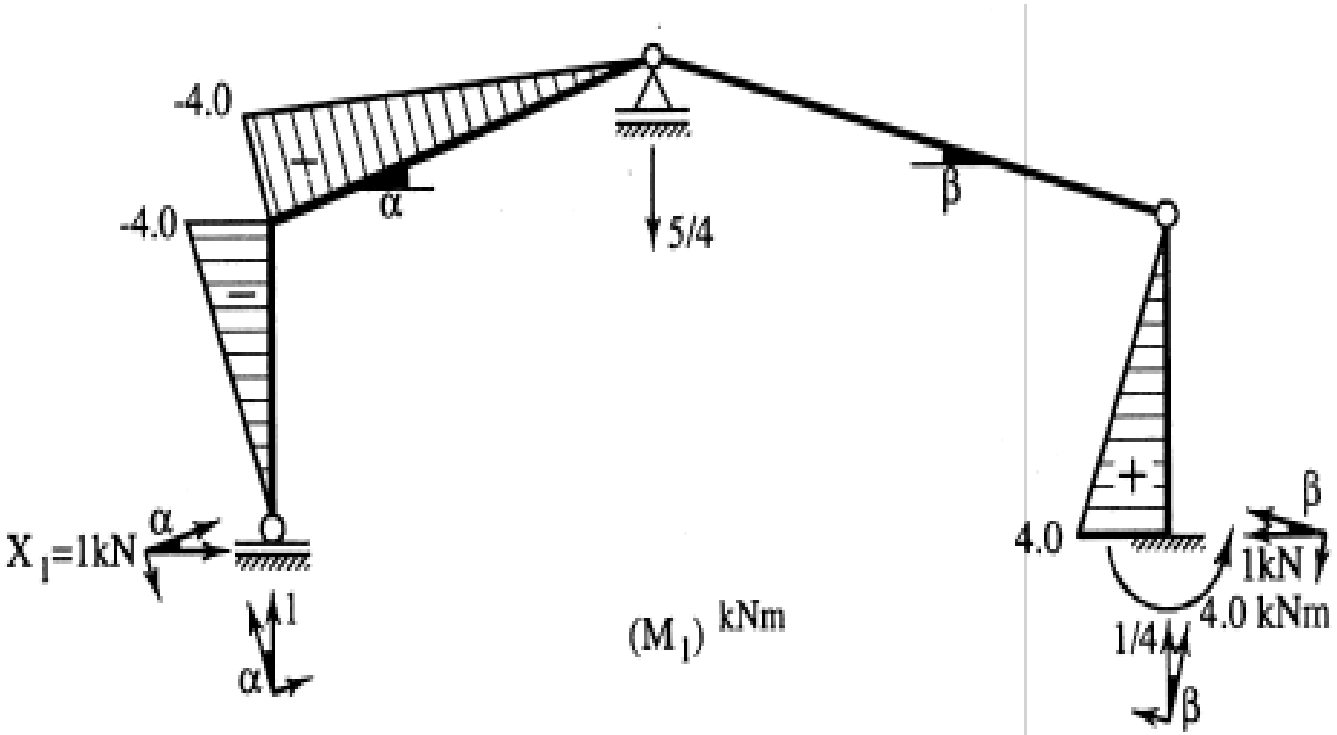
$$\tan\alpha = \frac{2}{6} \Rightarrow \alpha = 18.435 \Rightarrow \sin\alpha = 0.3162 \quad , \quad \cos\alpha = 0.9487$$

$$\tan\beta = \frac{2}{8} \Rightarrow \beta = 14.036 \Rightarrow \sin\beta = 0.2425 \quad , \quad \cos\beta = 0.9701$$

şeklindedir.

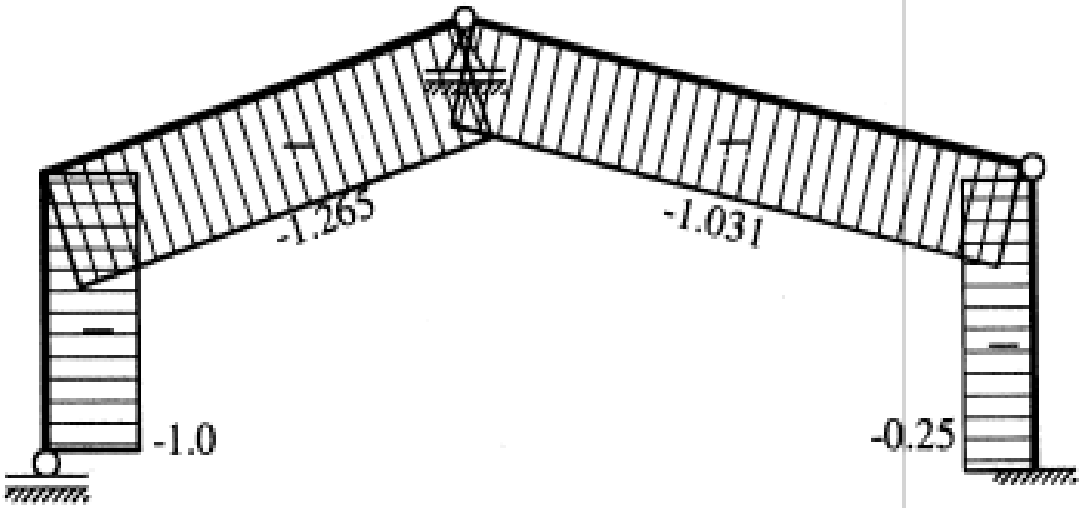
$X_1 = 1$ kN birim yüklemesinden oluşan; mesnet tepkileri ve eğilme momenti diyagramı Şekil 2.2c de, normal kuvvet diyagramı ise Şekil 2.2d de verilmiştir.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



Şekil 2.2c: İzostatik esas sistemde $X_1 = 1$ kN yüklemesinden oluşan eğilme momenti diyagramı

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

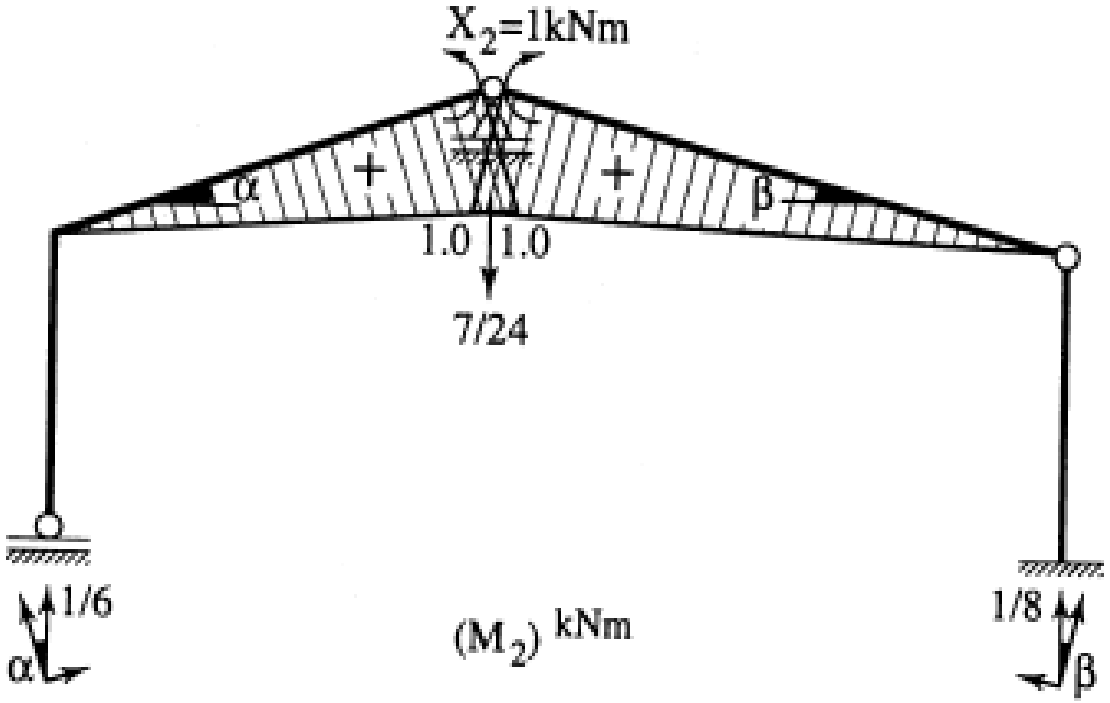


(N_1) kN

Şekil 2.2d: İzostatik esas sistemde $X_1 = 1$ kN yüklemesinden oluşan normal kuvvet diyagramı

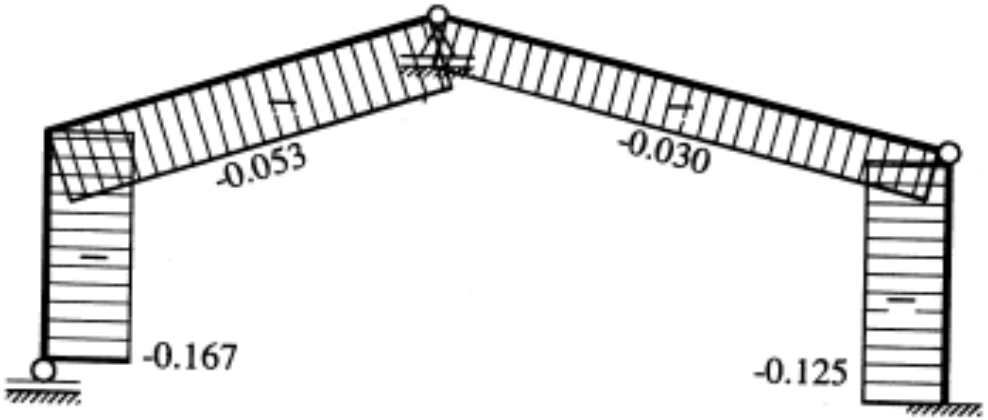
$X_2 = 1$ kNm birim yüklemesinden oluşan; mesnet tepkileri ve eğilme momenti diyagramı Şekil 2.2e de, normal kuvvet diyagramı ise Şekil 2.2f de verilmiştir.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



Şekil 2.2e: İzostatik esas sistemde $X_2 = 1$ kNm yüklemesinden oluşan eğilme momenti diyagramı

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



(N_2) kN

Şekil 2.2f: İzostatik esas sistemde $X_2 = 1$ kNm yüklemesinden oluşan normal kuvvet diyagramı

Aşağıdaki δ terimlerinin hesabında, Ek A.1 de verilen Çarpım Tablosundan yararlanılmıştır.

$$EI_c\delta_{11} = \frac{1}{3}\times 4\times(-4)^2\times[12] + \frac{1}{3}\times 6.324\times(-4)^2\times[4] + \frac{1}{3}\times 4\times(4)^2\times[12] = 646.912$$

$$EI_c\delta_{22} = \frac{1}{3}\times 6.324\times(1)^2\times[4] + \frac{1}{3}\times 8.246\times(1)^2\times[3] = 16.678$$

$$EI_c\delta_{12} = \frac{1}{6}\times 6.324\times(-4)\times 1\times[4] = -16.864$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

$$EI_c\delta_{1t} = EI_c\int N_1\varepsilon t ds + EI_c\int M_1\frac{\varepsilon\Delta t}{d}ds$$

$$\Rightarrow EI_c\delta_{1t} = 12\times 90000\times\left[10^{-5}\times 20\times(-1\times 4 - 1.265\times 6.324 - \ldots\right.$$

$$\left.\ldots - 1.031\times 8.246 - 0.25\times 4) + 10^{-5}\times 15\times\left(\frac{-4\times 4}{2\times 0.60} - \frac{4\times 6.324}{2\times 0.80} + \frac{4\times 4}{2\times 0.60}\right)\right]$$

$$\Rightarrow EI_c\delta_{1t} = -7205.54$$

$$EI_c\delta_{2t} = 12\times 90000\times\left[10^{-5}\times 20\times(-0.167\times 4 - 0.053\times 6.324 - \ldots\right.$$

$$\left.\ldots - 0.030\times 8.246 - 0.125\times 4) + 10^{-5}\times 15\times\left(\frac{1\times 6.324}{2\times 0.80} + \frac{1\times 8.246}{2\times 1}\right)\right] = 930.112$$

Hiperstatik bilinmeyenlerin bulunması:

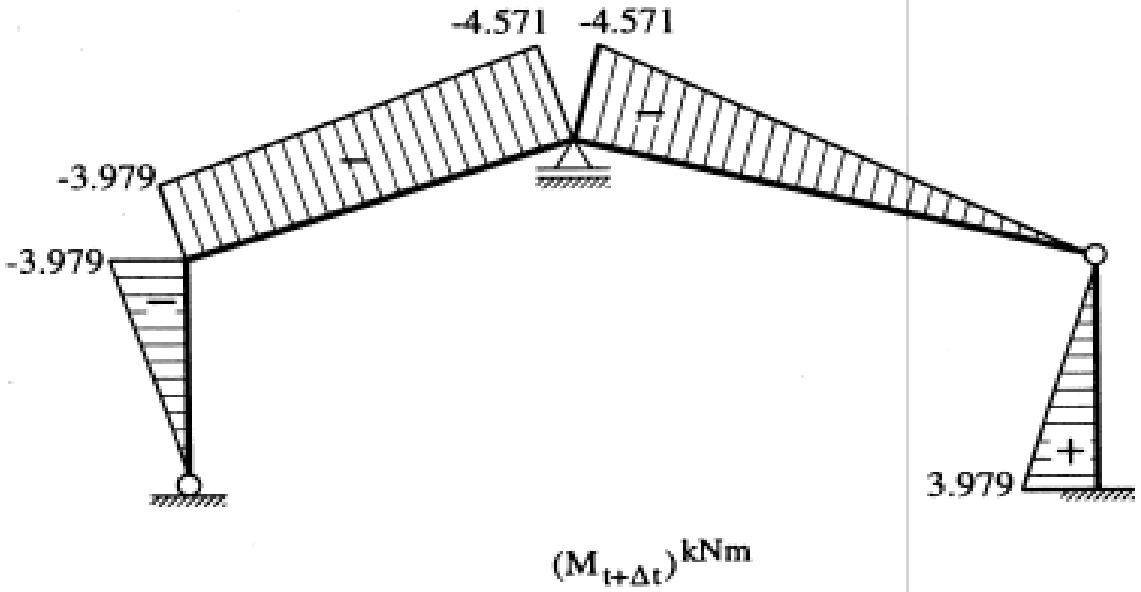
$$\begin{bmatrix} 646.912 & -16.864 \\ -16.864 & 16.678 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7205.54 \\ -930.112 \end{bmatrix} \Rightarrow X_1 = 9.947\ ,\ X_2 = -45.711$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Soruda verilen hiperstatik sisteme ait eğilme momenti diyagramının elde edilmesi:

$$M = M_1 X_1 + M_2 X_2 \quad \Rightarrow \quad M = 9.947 \times M_1 - 45.711 \times M_2$$

Elde edilen M diyagramı Şekil 2.2g de verilmiştir.



Şekil 2.2g: Düzgün sıcaklık değişmesi ile farklı sıcaklık değişmesinin aynı anda etkimesi durumunda hiperstatik sistemde oluşan eğilme momenti diyagramı

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Kapalı Süreklilik Denklemleri (KSD) ile Kontrol: (Diyagramların Çarpımında Ek A.1 de verilen Çarpım Tablosundan yararlanılmıştır.)

KSD-1) $\int MM_1 \frac{I_c}{I} ds + EI_c \delta_{1t} = 0$ olmalıdır.

$$\frac{1}{3}\times 4\times(-4)\times(-39.79)\times 12+\frac{1}{6}\times 6.324\times(-4)\times(2\times(-39.79)-45.71)\times 4+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{3}\times 4\times 4\times 39.79\times 12-7205.54=2546.56+2112.89+2546.56-7205.54$$

$$=7206-7205.54=0.46 \Rightarrow \text{rölatif hata}: \frac{0.46}{7205.54}\cong 0.00007<0.005$$ ✔

KSD-2) $\int MM_2 \frac{I_c}{I} ds + EI_c \delta_{2t} = 0$ olmalıdır.

$$\frac{1}{6}\times 6.324\times 1\times(-39.79-2\times 45.71)\times 4+\frac{1}{3}\times 8.246\times(-45.71)\times 1\times 3+930.112$$

$$=-553.18-376.92+930.112=-930.1+930.112\cong 0$$ ✔

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

c) Mesnet çökmeleri için,

$$EI_c J_1 = 1080000 \times \left((-1) \times 3 \times 10^{-3} + \frac{5}{4} \times 4 \times 10^{-3} + 4 \times \frac{1}{500} \right) = 10800$$

$$EI_c J_2 = 1080000 \times \left(\frac{7}{24} \times 4 \times 10^{-3} \right) = 1260$$

Hiperstatik bilinmeyenlerin bulunması:

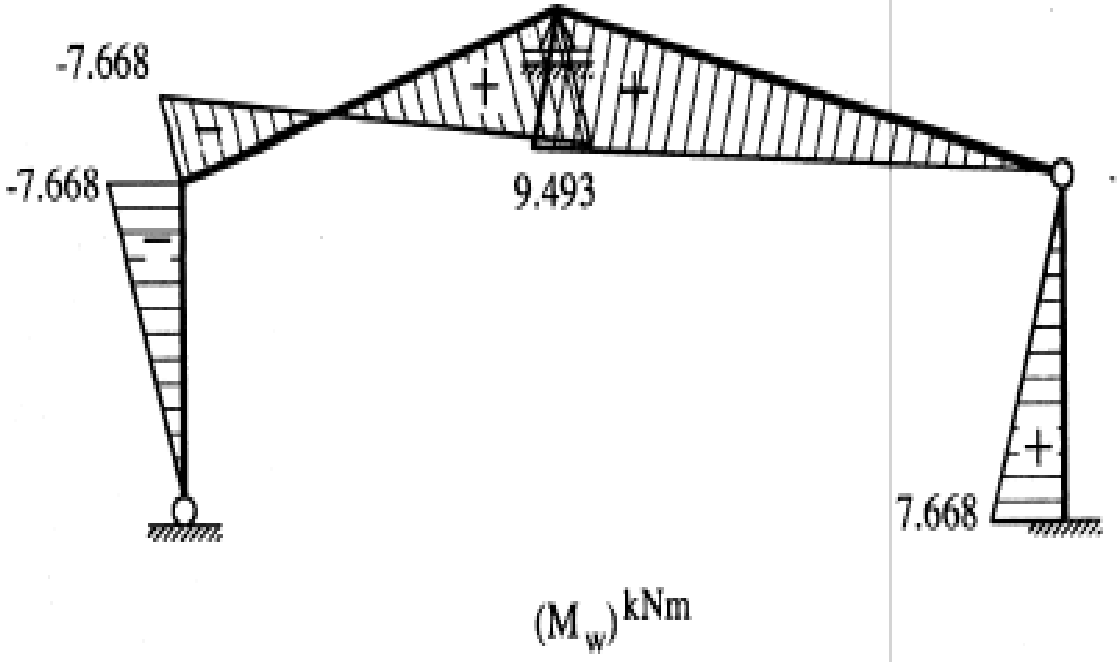
$$\begin{bmatrix} 646.912 & -16.864 \\ -16.864 & 16.678 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10800 \\ 1260 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad X_1 = 19.169 \, , \, X_2 = 94.932$$

Soruda verilen hiperstatik sisteme ait eğilme momenti diyagramının elde edilmesi:

$$M = M_1 X_1 + M_2 X_2 \quad \Rightarrow \quad M = 19.169 \times M_1 + 94.932 \times M_2$$

Elde edilen M diyagramı Şekil 2.2h da verilmiştir.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



Şekil 2.2h: Mesnet çökmelerinden dolayı hiperstatik sistemde oluşan eğilme momenti diyagramı

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Kapalı Süreklilik Denklemleri (KSD) ile Kontrol: (Diyagramların Çarpımında Ek A.1 de verilen Çarpım Tablosundan yararlanılmıştır.)

KSD-1) $\int MM_1 \frac{I_c}{I} ds = EI_c J_1$ olmalıdır.

$$\frac{1}{3}\times 4\times(-76.68)\times(-4)\times[12]+\frac{1}{6}\times 6.324\times(-4)\times(2\times(-76.68)+94.93)\times[4]+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{3}\times 4\times 76.68\times 4\times[12]=10800 \Rightarrow 4907.52+985.36+4907.52=10800$$

$$\Rightarrow 10800.4-10800\cong 0 \checkmark$$

KSD-2) $\int MM_2 \frac{I_c}{I} ds = EI_c J_2$ olmalıdır.

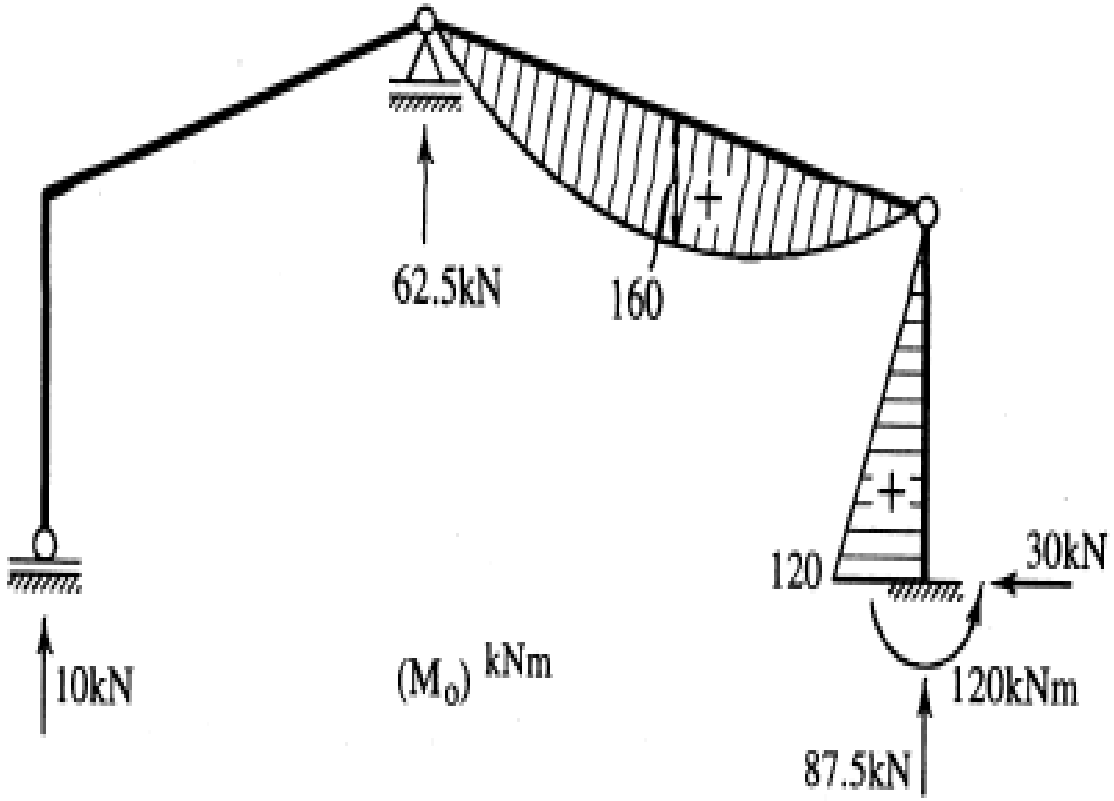
$$\frac{1}{6}\times 1\times 6.324\times(-76.68+2\times 94.93)\times[4]+\frac{1}{3}\times 8.246\times 94.93\times 1\times[3]=1260$$

$$\Rightarrow 477.17+782.79=1260 \Rightarrow 1259.96-1260\cong 0 \checkmark$$

d) Dış yükler için,

İzostatik esas sistemde dış yüklerden oluşan mesnet tepkileri ve eğilme momenti diyagramı Şekil 2.2i de verilmiştir.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



Şekil 2.2i: İzostatik esas sistemde dış yüklerden oluşan meşnet tepkileri ve eğilme momenti diyagramı

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Aşağıdaki δ terimlerinin hesabında, Ek A.1 de verilen Çarpım Tablosundan yararlanılmıştır.

$$EI_c\delta_{10} = \frac{1}{3}\times 4\times 120\times 4\times[12] = 7680$$

$$EI_c\delta_{20} = \frac{1}{3}\times 8.246\times 160\times 1\times[3] = 1319.36$$

Hiperstatik bilinmeyenlerin bulunması:

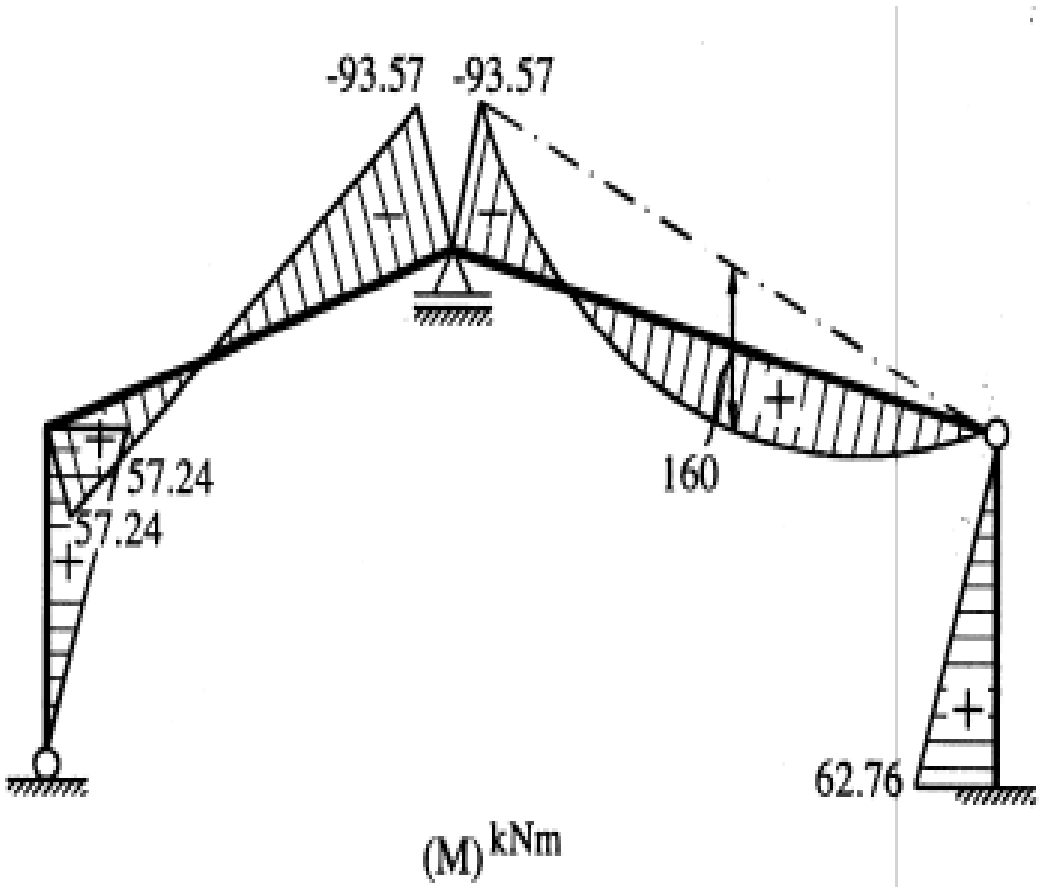
$$\begin{bmatrix} 646.912 & -16.864 \\ -16.864 & 16.678 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7680 \\ -1319.36 \end{bmatrix} \Rightarrow X_1 = -14.31\,\text{kN}, X_2 = -93.57\,\text{kNm}$$

Soruda verilen hiperstatik sisteme ait eğilme momenti diyagramının elde edilmesi:

$$M = M_0 + M_1X_1 + M_2X_2 \Rightarrow M = M_0 - 14.31\times M_1 - 93.57\times M_2$$

Elde edilen M diyagramı Şekil 2.2j de verilmiştir.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



Şekil 2.2j: Hiperstatik sisteme ait eğilme momenti diyagramı

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Kapalı Süreklilik Denklemleri (KSD) ile Kontrol: (Diyagramların Çarpımında Ek A.1 de verilen Çarpım Tablosundan yararlanılmıştır.)

KSD-1) $\int MM_1 \frac{I_c}{I} ds = 0$ olmalıdır.

$$\frac{1}{3}\times 4\times 57.24\times(-4)\times[12]+\frac{1}{6}\times 6.324\times(2\times 57.24-93.57)\times(-4)\times[4]+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{3}\times 4\times 62.76\times 4\times[12]=-3664.36-352.63+4016.64=-4016.99+4016.64$$

$$=-0.35 \Rightarrow \text{rölatif hata}: \frac{0.35}{4016.64}=0.000087<0.005 \checkmark$$

KSD-2) $\int MM_2 \frac{I_c}{I} ds = 0$ olmalıdır.

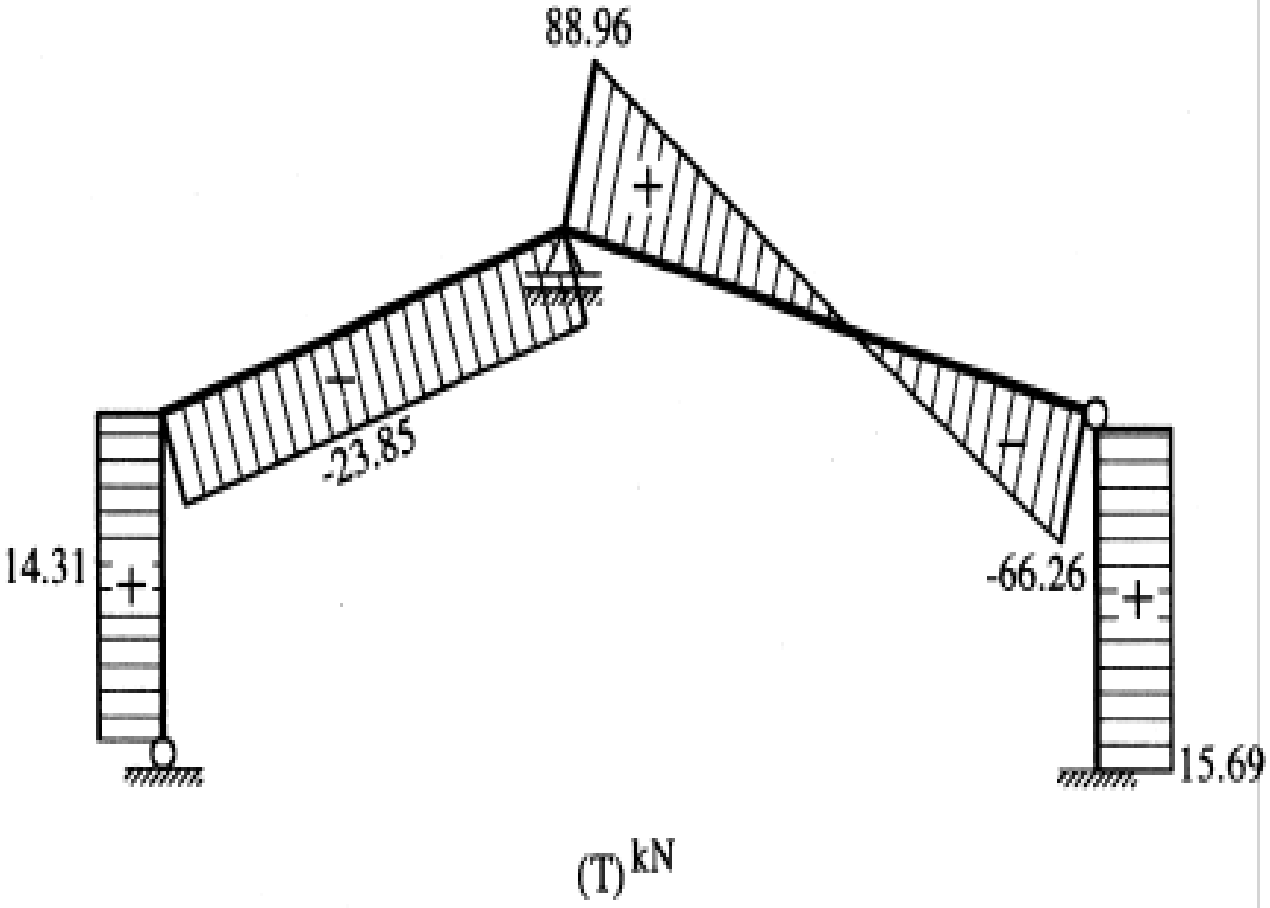
$$\frac{1}{6}\times 6.324\times(57.24-2\times 93.57)\times 1\times[4]+\frac{1}{3}\times 8.246\times(-93.57)\times 1\times[3]+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{3}\times 8.246\times 1\times 160\times[3]=-547.66-771.58+1319.36=-1319.24+1319.36$$

$$=0.12 \Rightarrow \text{rölatif hata}: \frac{0.12}{1319.24}=0.000091<0.005 \checkmark$$

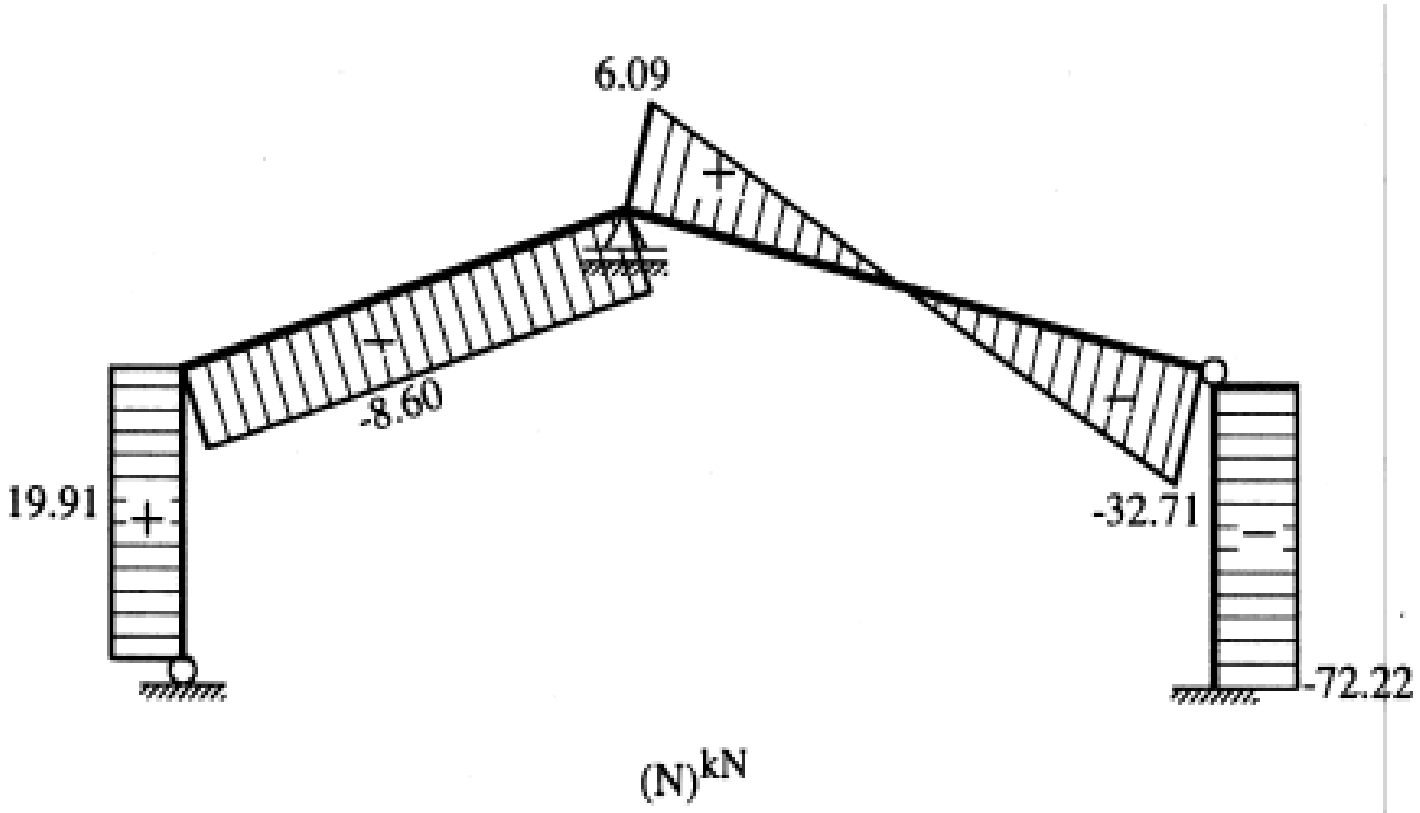
Elde edilen kesme kuvveti diyagramı Şekil 2.2k da, normal kuvvet diyagramı ise Şekil 2.2l de verilmiştir.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



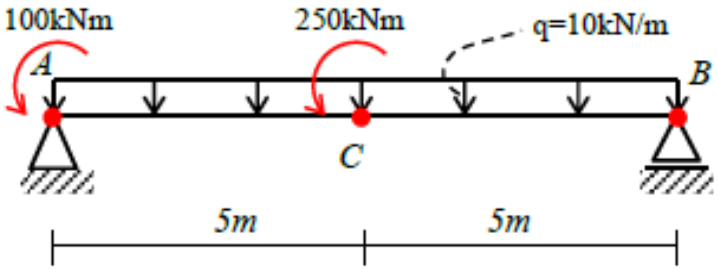
Şekil 2.2k: Hiperstatik sisteme ait kesme kuvveti diyagramı

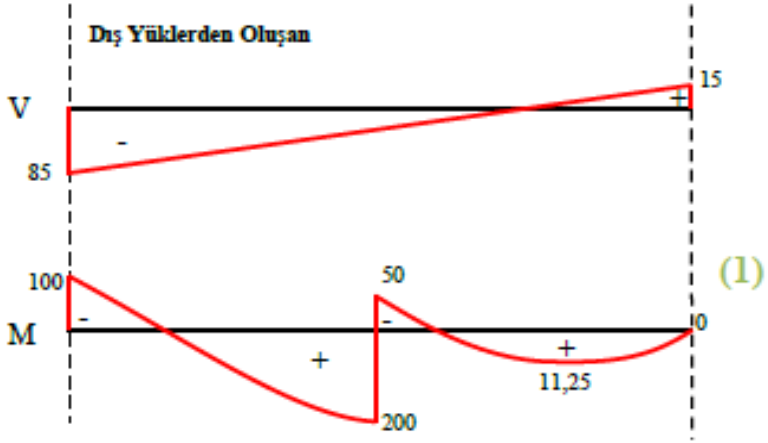
Abdulkadir Cüneyt AYDIN



Şekil 2.2l: Hiperstatik sisteme ait normal kuvvet diyagramı

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



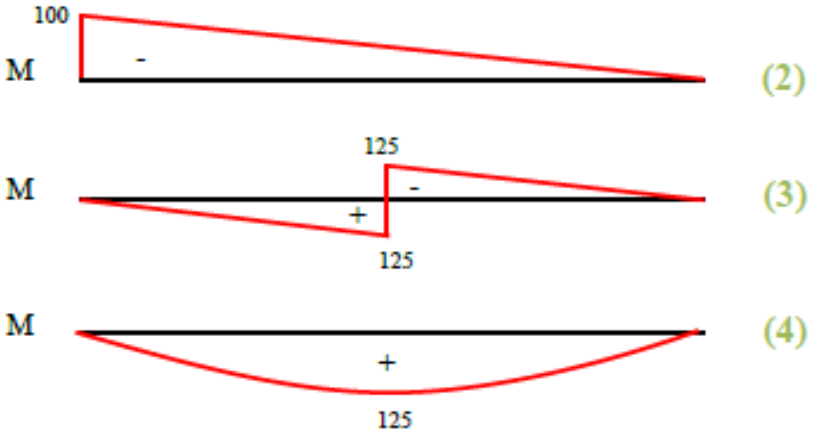


Soru: Şekilde verilen kirişin Virtüel iş metoduyla

a) C noktasındaki çökme y_c 'yi;

b) C noktasındaki dönme φ_c 'yi hesap ediniz.

Cevap: Çarpım, moment alanları, geometrisi bilinen şekillere ayrılarak daha kolay yapılabilir.

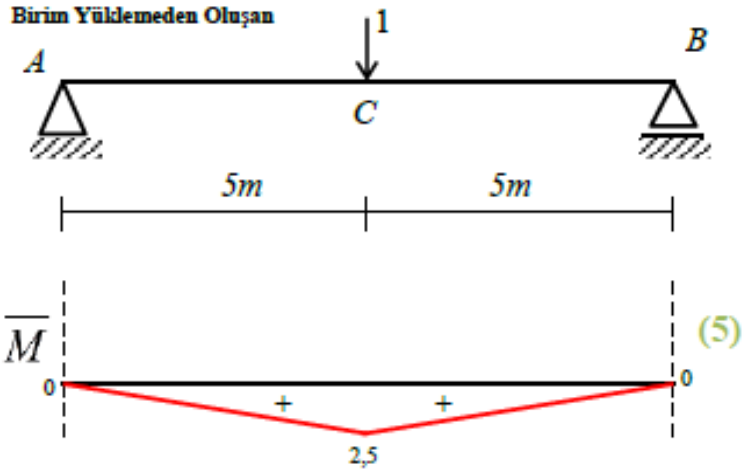


Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Sisteme etkiyen dış yüklerden oluşan moment alanı

(1) yukarıda görüldüğü gibi her dış kuvvet için ayrı ayrı çizilerek daha basit bilinen geometrili alanlara bölünebilir. 100kNm'lik momentin moment alanı (2), 250kNm'lik momentin moment alanı (3) ve q=10kN/m'lik düzgün yayılı yükün moment alanı (4) yukarıda görüldüğü gibidir.

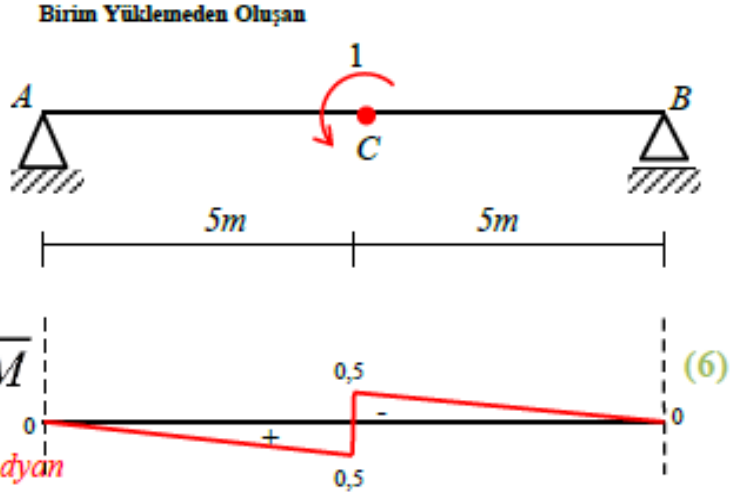
a) y_c 'nin hesabı için C noktasına birim kuvvet uygulanarak moment alanı (5) çizilir. Ve bu moment alanı dış kuvvetlerden dolayı oluşan moment alanı (2-3-4) ile çarpılarak y_c hesap edilir. Çarpım sırasında moment alanlarının işaretine dikkat edilmelidir.



$$y_c = \int_0^l \frac{\overline{M}\,M}{EI} = \frac{1}{EI}\left[\begin{array}{l}\left(-\frac{1}{6}.5.2,5.(100+2.50)-\frac{1}{3}.5.50.2,5\right)\\ +\left(\frac{1}{3}.5.125.2,5-\frac{1}{3}.5.125.2,5\right)\\ +\left(\frac{5}{12}.5.125.2,5+\frac{5}{12}.5.125.2,5\right)\end{array}\right]$$

$$y_c = \frac{677,08}{EI}\,m$$

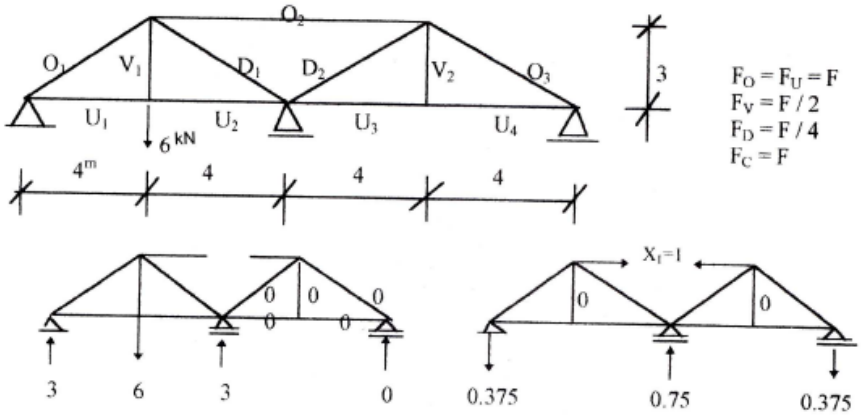
b) φ_c 'nin hesabı için C noktasına birim moment uygulanarak moment alanı (6) çizilir. Ve bu moment alanı dış kuvvetlerden dolayı oluşan moment alanı (2-3-4) ile çarpılarak φ_c hesap edilir. Çarpım sırasında moment alanlarının işaretine dikkat edilmelidir.



$$y_c = \int_0^l \frac{\overline{M}.M}{EI} = \frac{1}{EI}\left[\begin{array}{l}\left(-\frac{1}{6}.5.50.0,5-\frac{1}{2}.5.50.0,5+\frac{1}{3}.5.50.0,5\right)\\+\left(\frac{1}{3}.5.125.0,5+\frac{1}{3}.5.125.0,5\right)\\+\left(\frac{5}{12}.5.125.0,5-\frac{5}{12}.5.125.0,5\right)\end{array}\right]$$

$$\varphi_c = \frac{166,67}{EI}\ radyan$$

ÖRNEK-HİPERSTATİK KAFES SİSTEMİN KUVVET YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ



$F_O = F_U = F$
$F_V = F / 2$
$F_D = F / 4$
$F_C = F$

$EF_C\delta_{11} = \sum S_1 S_1 L F_C / F$

$EF_C\delta_{10} = = \sum S_0 S_1 L F_C / F$

$EF_C\delta_{11} X_1 + EF_C\delta_{10} = 0 \rightarrow X_1 = - EF_C\delta_{10} / EF_C\delta_{11}$

$S = S_0 + S_1 X_1$

Kontrol : $\sum S S_1 L F_C / F = 0$

Çubuk No.	L (m)	LF_C/F	X=0. S_0	X=1 S_1	$EF_C\delta_{11}$ $S_1S_1L F_C / F$	$EF_C\delta_{10}$ $S_0S_1L F_C / F$	S_1X_1	S $S_0+S_1X_1$	Kontrol $SS_1L F_C / F$
O_1	5	5	-5.0	.625	1.953	-15.625	-0.61	-5.61	-17.53
O_2	8	8	0	1	8.00	0	-0.98	-0.98	-7.84
O_3	5	5	0	.625	1.953	0	-0.61	-0.61	-1.906
U_1	4	4	4.0	-0.50	1.00	-8.00	0.49	4.49	-8.98
U_2	4	4	4.0	-0.50	1.00	-8.00	0.49	4.49	-8.98
U_3	4	4	0	-0.50	1.00	0	0.49	0.49	-0.98
U_4	4	4	0	-0.50	1.00	0	0.49	0.49	-0.98
D_1	5	20	-5.0	-.625	7.812	62.500	0.61	-4.39	54.875
D_2	5	20	0	-.625	7.812	0	0.61	0.61	-7.625
V_1	3	6	6.0	0	0	0	0	6.00	0
V_2	3	6	0	0	0	0	0	0	0
				Σ	31.530	30.875	Σ(+ terimler)		54.875
					X_1	-0.979	Σ(- terimler)		-54.821
							Fark		0.054
							Röl.Hata		0.00098

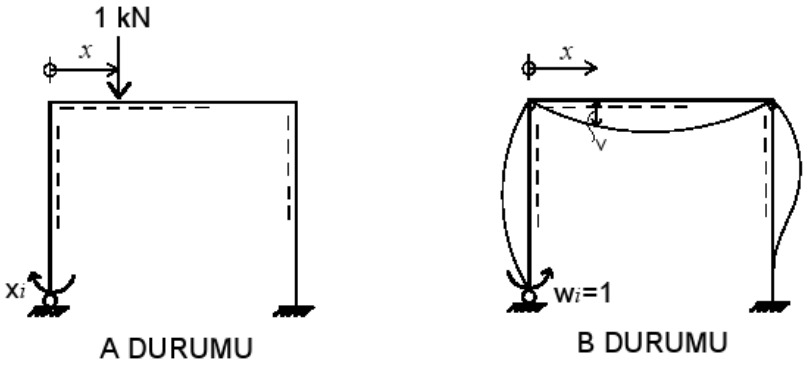
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

TESİR ÇİZGİLERİNİN KUVVET YÖNTEMİ İLE ÇİZİLMESİ

Sistem üzerindeki herhangi bir kesite ait herhangi bir büyüklüğün tesir çizgisinin kuvvet yöntemi ile çizilebilmesi için, önce seçilen hiperstatik bilinmeyenlere ait tesir çizgileri çizilir. Daha sonra tesir çizgisi çizilecek büyüklüğe ait tesir çizgisi diyagramı hiperstatik bilinmeyenlerin tesir çizgileri cinsinden süperpozisyon ile elde edilir.

HİPERSTATİK BİLİNMEYENLERE AİT TESİR ÇİZGİLERİ

Hiperstatik bilinmeyenlere ait tesir çizgilerinin çizilmesinde Betti Teoreminden yararlanılabilir. Bu teoreme göre, hiperstatik bilinmeyenle aynı doğrultuda ve ters yönde yapılan birim deplasman yüklemesinden oluşan sistem elastik eğrisi hiperstatik bilinmeyenin tesir çizgisine eşdeğerdir.



Betti karşıtlık teoremi uyarınca,

A'daki dış kuvvetlerin B'deki deplasmanlarda yaptığı iş, B'deki dış kuvvetlerin A'daki deplasmanlarda yaptığı işe eşit olmalıdır. Yani,

$$1 \times v - X_i \times w_i = 0$$

olmalıdır. B durumunda dış kuvvet bulunmadığından ifadenin sağ tarafı sıfıra eşit olmaktadır. w_i deplasmanı da birim değer aldığından sözkonusu iş ifadesi,

$$X_i = v$$

halini alır. Yukarıdaki ifade, 1 kN'luk tekil kuvvetin bütün konumları için geçerli olduğundan, X_i tesir çizgisi, $w_i = 1$ durumundaki elastik eğriye eşdeğerdir.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Hiperstatik bilinmeyenlere ait tesir çizgileri kuvvet yöntemi ile direkt olarak elde edilemez. Önce birim deplasman yüklemesinden meydana gelen eğilme momenti diyagramı çizilir, daha sonra bu iç kuvvet durumuna karşı gelen elastik eğri yani hiperstatik bilinmeyene ait tesir çizgisi, çubuk uçlarındaki eğilme momentlerinden basit kirişte oluşan elastik eğri ile çubuk uç deplasmanlarından oluşan elastik eğrinin süperpozisyonu ile elde edilir. Çubuk uç deplasmanlarından oluşan elastik eğrinin elde edilmesi için Virtüel İş Teoreminden yaralanılır.

Tesir çizgisi çizilecek hiperstatik bilinmeyenle aynı doğrultuda ve ters yönde yapılan birim deplasman yüklemesine karşı gelen hiperstatik bilinmeyenler, tanım gereğince $[\beta]$ matrisinin hiperstatik bilinmeyenle aynı indisli kolonuna eşittir. Çünkü, hiperstatik bilinmeyenle aynı doğrultuda ve ters yönde yapılan birim deplasman yüklemesine karşı gelen yük vektörü, tesir çizgisi çizilecek hiperstatik bilinmeyene karşı gelen satırı 1 diğer satırları 0 olan bir vektördür. Buna göre Xj tesir çizgisinin çizilmesinde kullanılacak olan ve birim deplasman yüklemesi durumuna karşı gelen hiperstatik bilinmeyenler direkt olarak $[\beta]$ matrisinin aynı indisli (j indisli) kolonundan direkt olarak alınabilir.

$$\begin{array}{c} \\ X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} w_1=1 & w_2=1 & \cdot\ \cdot & w_n=1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdot\ \cdot & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdot\ \cdot & \beta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdot\ \cdot & \beta_{nn} \end{bmatrix} \end{array}$$

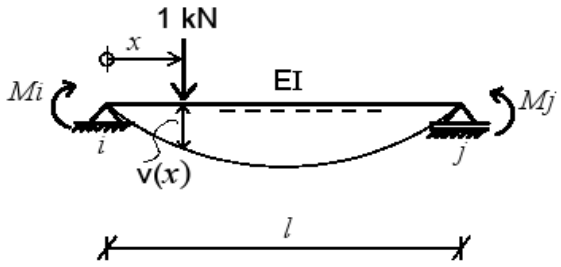
Daha sonra M eğilme momenti diyagramı bu hiperstatik bilinmeyenler kullanılarak

$$M = \sum_{i=1}^{n} M_i \beta_{ij}$$

şeklinde süperpozisyonla elde edilir.

HİPERSTATİK BİLİNMEYENLERE AİT TESİR ÇİZGİSİ ORDİNATLARININ ELDE EDİLMESİ

Tesir çizgisi ordinatları elde edilecek çubuğun her iki ucundaki uç deplasmanlarının sıfır olması durumunda tesir çizgisi ordinatları (çökmeler) çubuğun uçlarındaki eğilme momentlerine bağlı olarak aşağıdaki şekilde elde edilebilir.



Abdulkadir Cüneyt AYDIN

$\varepsilon = \frac{x}{l}$ olmak üzere, doğru eksenli prizmatik çubuğun herhangi bir noktasındaki tesir çizgisi ordinatı

$$v(x) = M_i \frac{l^2}{6EI}(2\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3) + M_j \frac{l^2}{6EI}(\varepsilon - \varepsilon^3)$$

formülü ile elde edilebilir.

Hesaplarda EI eğilme rijitlikleri yerine $\left[\frac{I_c}{I}\right]$ atalet momenti oranları kullanılmışsa, tesir çizgisi ordinatları

$$v(x) = M_i \frac{l^2}{6}\left[\frac{I_c}{I}\right](2\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3) + M_j \frac{l^2}{6}\left[\frac{I_c}{I}\right](\varepsilon - \varepsilon^3)$$

formülü ile elde edilmelidir.

Çubuğun uç deplasmanlarının sıfır olmaması durumunda, önce Virtüel İş Teoremi ile

$$\delta = \int M(\overline{M})_0 \left[\frac{I_c}{I}\right] ds$$

şeklinde çubuk uç deplasmanları elde edilir. Burada M, $M = \sum_{i=1}^{n} M_i \beta_{ij}$ olarak süperpozisyonla hesaplanan ve birim deplasman yüklemesi durumuna karşı gelen eğilme momenti diyagramını, $(\overline{M})_0$ ise seçilen izostatik esas sistemde, tesir çizgisi çizilecek çubuk ucuna yapılan birim yüklemeden meydana gelen eğilme momenti diyagramını göstermektedir. Deplasmanların hesabında kısaltma teoreminin kullanılması halinde, hiperstatik bilinmeyenlerin birim durumlarına karşı gelen yüklemelerdeki dış kuvvetlerin, birim deplasmanlarda yaptığı işler de dikkate alınmalıdır.

Çubuk uçlarındaki doğrusal uç deplasmanları bu şekilde bulunduktan sonra çubuk uçlarındaki eğilme momentinden meydana gelen tesir çizgisi ordinatlarıyla süperpoze edilerek (toplanarak) toplam tesir çizgisi ordinatları elde edilir. Düğüm noktalarına birleşen konsolların bulunması ve 1 kN'luk düşey tekil kuvvetin konsol üzerinde de dolaşması durumunda aynı yoldan yararlanılır. Konsol ucundaki tesir çizgisi ordinatı konsol ucuna birim yükleme yapılarak Virtüel İş Teoremi ile hesaplanır ve tesir çizgisi ordinatları tamamlanır.
Yukarıdaki bağıntıların çıkarılmasında ve tesir çizgilerinin çizilmesinde uzama ve kayma şekildeğiştirmelerinin işleri terkedilmiştir.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

ÇUBUK ÜZERİNDEKİ BİR KESİTE AİT TESİR ÇİZGİSİ ORDİNATLARININ ELDE EDİLMESİ

Hiperstatik bilinmeyenlere ait tesir çizgilerinin yukarıda açıklanan yol ile elde edilmesinden sonra, sistem üzerindeki herhangi bir kesite ait herhangi bir büyüklüğün tesir çizgisi, hiperstatik bilinmeyenlerin tesir çizgilerine bağlı olarak süperpozisyon ile elde edilebilir. Örneğin, çubuk üzerindeki bir (m) kesitine ait eğilme momenti tesir çizgisi süperpozisyon ile,

$$M_m = (M_0)_m + \sum_{i=1}^{n} (M_i)_m X_i$$

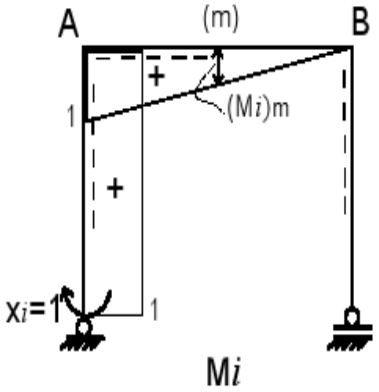
şeklinde elde edilir. Burada,

$(M_0)_m$: İzostatik esas sistemde (m) kesitine ait eğilme momenti tesir çizgisini,

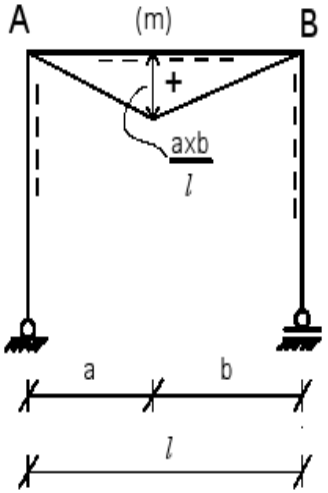
$(M_i)_m$: i sayılı birim yüklemeye ait moment diyagramının (m) kesiti hizasındaki ordinatını,

X_i : i sayılı hiperstatik bilinmeyenin tesir çizgisini

göstermektedir.



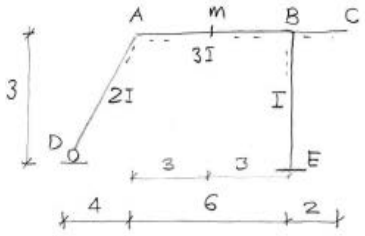
Mi

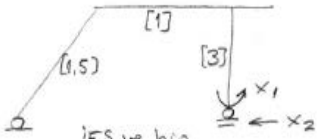


$(M_0)_m$ tesir çizgisi

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

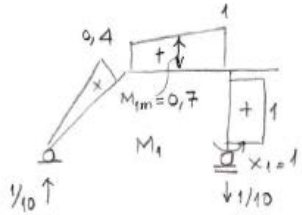
ÖRNEK : Hiperstatik bilinmeyenlerin ve M_m tesir çizgilerinin Kuvvet Yöntemi ile çizilmesi

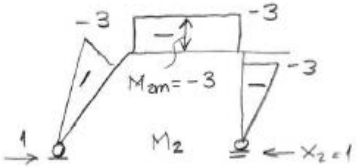




IES ve hip. bilinmeyenler

$I_c = 3I$

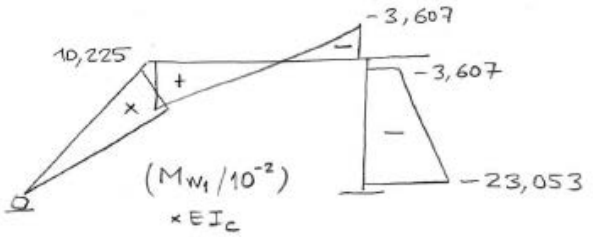




$$EI_c[\delta] = \begin{bmatrix} 12,52 & -29,10 \\ -29,10 & 103,50 \end{bmatrix} \qquad \frac{[\beta]}{EI_c} = \begin{bmatrix} -23,053 & -6,482 \\ -6,482 & -2,789 \end{bmatrix} \times 10^{-2}$$

X_1 Tesir Çizgisi ($W_1=1$ mesnet çöknesi yüklemesi)

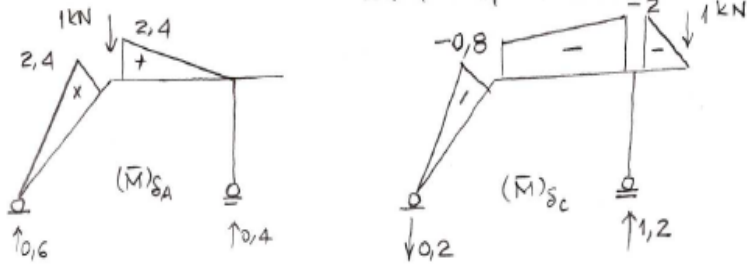
$$M_{W_1} = \beta_{11} M_1 + \beta_{21} M_2 \qquad (X_1 = \beta_{11},\ X_2 = \beta_{21})$$



Abdulkadir Cüneyt AYDIN

(2a)

A ve C noktalarındaki düşey deplasmanların hesabı



$$EI_c\delta_A = \int M_{W_1}(\bar{M})_{\delta_A}\left[\frac{I_c}{I}\right]ds = \frac{1}{3}\times 5\times 10{,}225\times 2{,}4\times[1{,}5]\times 10^{-2}$$
$$+\frac{1}{6}\times 6\times 2{,}4\times(2\times 10{,}225-3{,}607)\times 10^{-2}$$
$$= 1{,}018$$

$$EI_c\delta_C = \int M_{W_1}(\bar{M})_{\delta_C}\left[\frac{I_c}{I}\right]ds = \frac{1}{3}\times 5\times 10{,}225\times(-0{,}8)\times[1{,}5]\times 10^{-2}$$
$$+\frac{1}{6}\times 6\times\big(2\times 10{,}225\times(-0{,}8)+10{,}225\times(-2)$$
$$+(-3{,}607)\times(-0{,}8)+2\times(-3{,}607)\times(-2)\big)\times 10^{-2}$$
$$= -0{,}205-0{,}195 = -0{,}400$$

AB çubuğundaki uç momentlerinden oluşan elastik eğri ordinatları



$$\varepsilon = \frac{x}{L}$$

$$V(x) = 10{,}225\times\frac{6^2}{6}[1](2\varepsilon-3\varepsilon^2+\varepsilon^3) - 3{,}607\frac{6^2}{6}[1](\varepsilon-\varepsilon^3)$$

$$V(x) = 61{,}35(2\varepsilon-3\varepsilon^2+\varepsilon^3) - 21{,}642(\varepsilon-\varepsilon^3)$$

$$V(x) = 101{,}058\,\varepsilon - 184{,}05\,\varepsilon^2 + 82{,}992\,\varepsilon^3$$

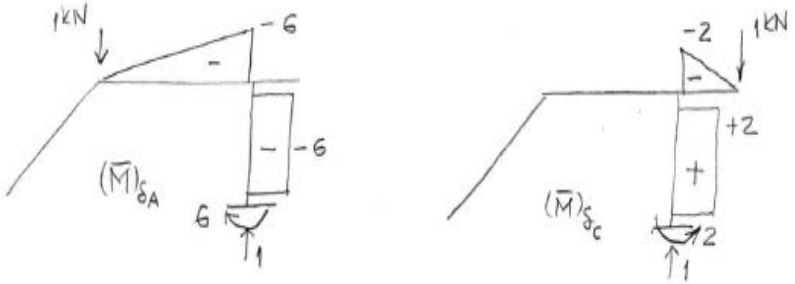
çökmeler 10^{-2} ile çarpılacak

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

(2b)

Deplasman hesaplarında Kısaltma Teoreminin Kullanılması

A ve C noktalarındaki düşey deplasmanların hesabı



$$EI_c\delta_A + 6\times1 = \int M_{W_1}(\bar{M})_{\delta_A}\left[\frac{I_c}{I}\right]ds = \frac{1}{6}\times6\times(-6)\times(10{,}225-2\times3{,}607)\times[1]\times10^{-2}$$

mesnet çökmesinin işi

$$+\ \frac{1}{2}\times3\times(-6)\times(-3{,}607-23{,}053)\times[3]\times10^{-2}$$

$$= -0{,}1807 + 7{,}1982$$

$$\Rightarrow EI_c\delta_A = 1{,}018$$

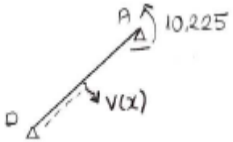
$$EI_c\delta_c - 2\times1 = \int M_{W_1}(\bar{M})_{\delta_C}\left[\frac{I_c}{I}\right]ds = \frac{1}{2}\times3\times2\times(-3{,}607-23{,}053)\times[3]\times10^{-2}$$

mesnet çökmesinin işi

$$= -2{,}399$$

$$\Rightarrow EI_c\delta_c = -0{,}399$$

DA çubuğundaki uç momentlerinden oluşan elastik eğri ordinatları:



$$V(x) = 10{,}225\times\frac{25}{6}[1{,}5]\,(\varepsilon-\varepsilon^3)\times10^{-2}$$

$0{,}50 \rightarrow 63{,}91\,(0{,}50-0{,}50^3)\times10^{-2} = 0{,}2397$

1kN doğrultusundaki çökme $V = 0{,}2397\cdot\cos\alpha = 0{,}2397\times0{,}8 = 0{,}1918$

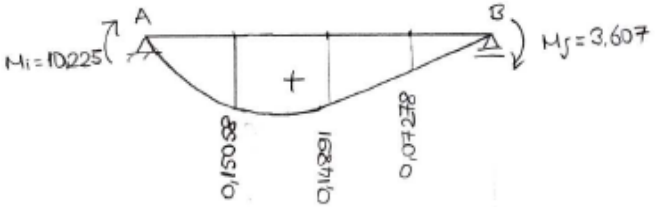
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

AB çubuğundaki uç momentlerinden oluşan elastik eğri ordinatları:

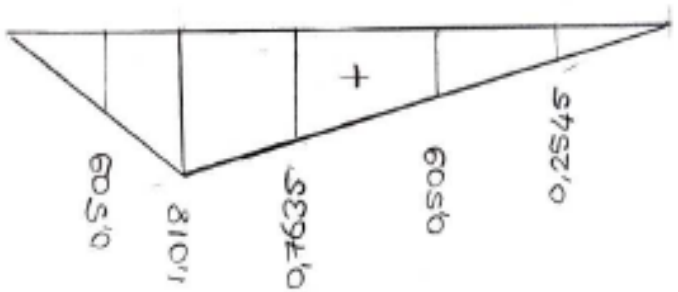
$0,25 \rightarrow V(x=1,5) = (101,058 \times 0,25 - 184,05 \times 0,25^2 + 82,992 \times 0,25^3) \times 10^{-2} = 0,15058$

$0,50 \rightarrow V(x=3,0) = (101,058 \times 0,50 - 184,05 \times 0,50^2 + 82,992 \times 0,50^3) \times 10^{-2} = 0,14891$

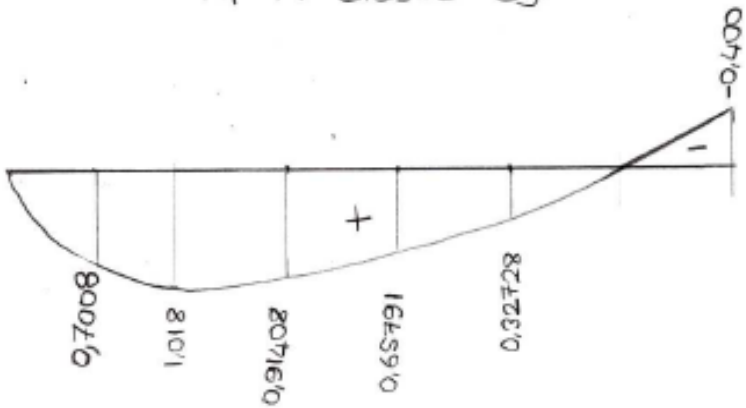
$0,75 \rightarrow V(x=4,5) = (101,058 \times 0,75 - 184,05 \times 0,75^2 + 82,992 \times 0,75^3) \times 10^{-2} = 0,07278$



δ_A uç deplasmanında elastik eğri



Toplam Elastik Eğri

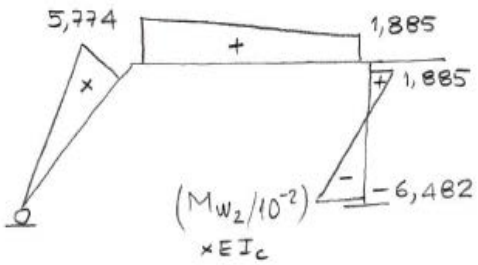


x_1 t.ç.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

X_2 tesir çizgisi ($w_2 = 1$ mesnet çökmesi yüklemesi)

$M_{w_2} = \beta_{12} M_1 + \beta_{22} M_2 \quad (X_1 = \beta_{12},\ X_2 = \beta_{22})$



A ve C noktalarındaki düşey deplasmanların hesabı

Yapılacak birim yükleneler ve bunlara karşı gelen $(\bar{M})_{\delta A}$ ve $(\bar{M})_{\delta C}$ moment diyagramları X_1 tesir çizgisi bölümündekilerle aynıdır.

$$EI_c\,\delta_A = \int M_{w_2}(\bar{M})_{\delta A}\left[\frac{I_c}{I}\right]ds = \frac{1}{3}\times 5\times 5{,}774\times 2{,}4\times[1{,}5)\times 10^{-2}$$

$$+\frac{1}{6}\times 6\times 2{,}4\times(2\times 5{,}774+1{,}885)\times 10^{-2}$$

$$= 0{,}346 + 0{,}322 = 0{,}668$$

$$EI_c\,\delta_C = \int M_{w_2}(\bar{M})_{\delta C}\left[\frac{I_c}{I}\right]ds = \frac{1}{3}\times 5\times 5{,}774\times(-0{,}8)\times[1{,}5]\times 10^{-2}$$

$$+\frac{1}{6}\times 6\times(2\times 5{,}774\times(-0{,}8)+5{,}774\times(-2)$$

$$+1{,}885\times(-0{,}8)+2\times 1{,}885\times(-2))\times 10^{-2}$$

$$= -0{,}115 - 0{,}298 = -0{,}413$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

AB çubuğundaki uç momentlerinden oluşan elastik eğri ordinatları



$\varepsilon = \frac{x}{L}$

$$V(x) = 5{,}774 \times \frac{6^2}{6}[1](2\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3) + 1{,}885\,\frac{6^2}{6}[1](\varepsilon - \varepsilon^3)$$

$$V(x) = 34{,}644\,(2\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3) + 11{,}31\,(\varepsilon - \varepsilon^3)$$

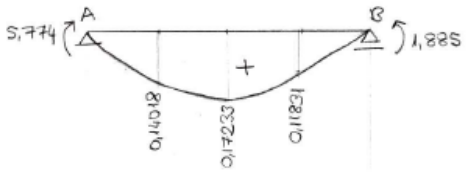
$$V(x) = 80{,}598\,\varepsilon - 103{,}932\,\varepsilon^2 + 23{,}334\,\varepsilon^3$$

Çökmeler 10^{-2} ile çarpılacak

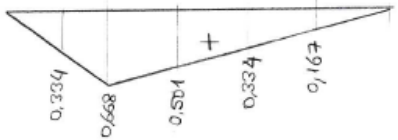
0,25 → $V(x=1{,}5) = (80{,}598\times0{,}25 - 103{,}932\times0{,}25^2 + 23{,}334\times0{,}25^3)\times10^{-2} = 0{,}14018$

0,50 → $V(x=3{,}0) = (80{,}598\times0{,}50 - 103{,}932\times0{,}50^2 + 23{,}334\times0{,}50^3)\times10^{-2} = 0{,}17233$

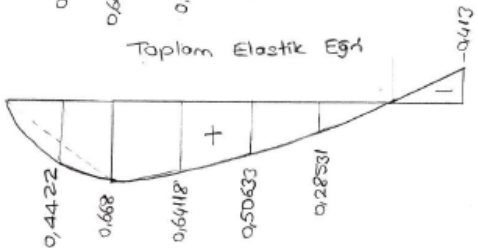
0,75 → $V(x=4{,}5) = (80{,}598\times0{,}75 - 103{,}932\times0{,}75^2 + 23{,}334\times0{,}75^3)\times10^{-2} = 0{,}11831$



δ_A uç deplasmanında elastik eğri



Toplam Elastik Eğri



x_2 t.ç.

DA çubuğundaki elastik eğri ordinatları:



$V(x) = 5{,}774 \times \frac{25}{6}[1{,}5](\varepsilon - \varepsilon^3)$

0,50 → $36{,}09\times10^{-2}(0{,}50 - 0{,}50^3)$

$= 0{,}1353$

1^{kN} doğrultusundaki çökme

$V = 0{,}1353 \times \cos\alpha$

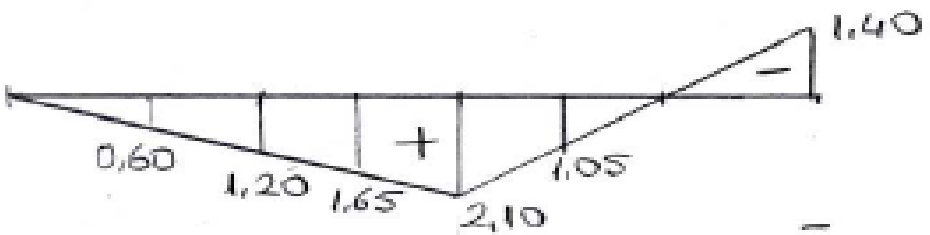
$= 0{,}1353 \times 0{,}8$

$= 0{,}1082$

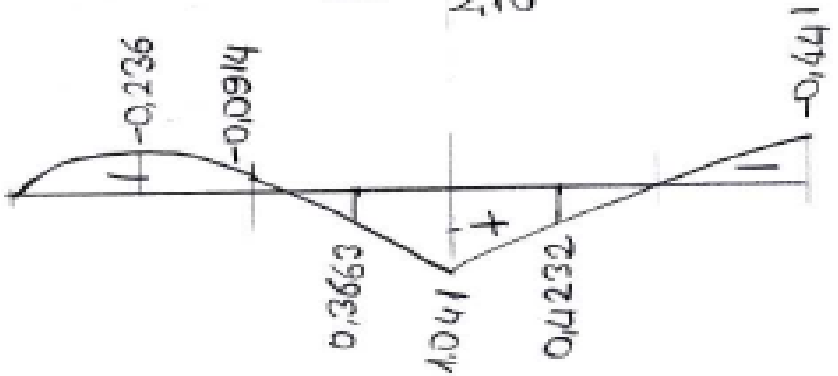
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

M_m tesir çizgisinin çizimi :

$$M_m = M_{om} + M_{1m} X_1 + M_{2m} X_2 = M_{om} + 0{,}7 X_1 - 3{,}0 X_2$$



M_{om} t.ç.

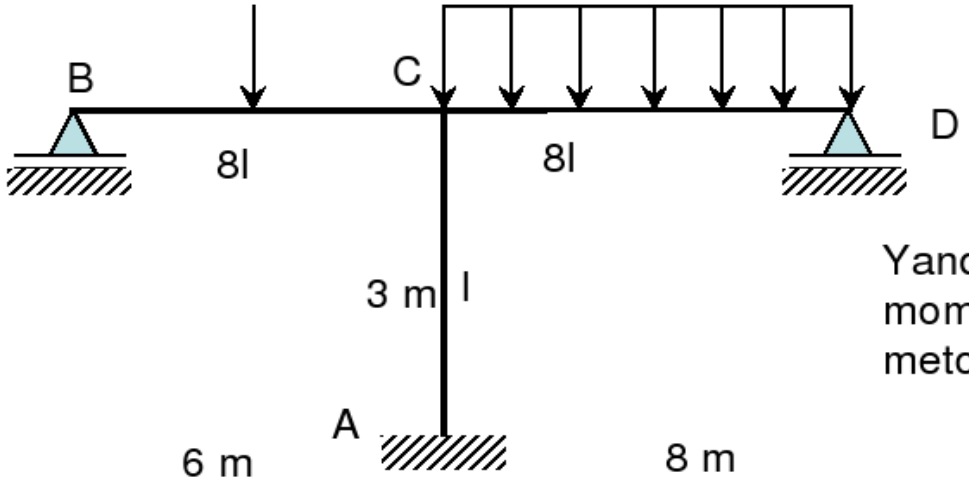


M_m t.ç.

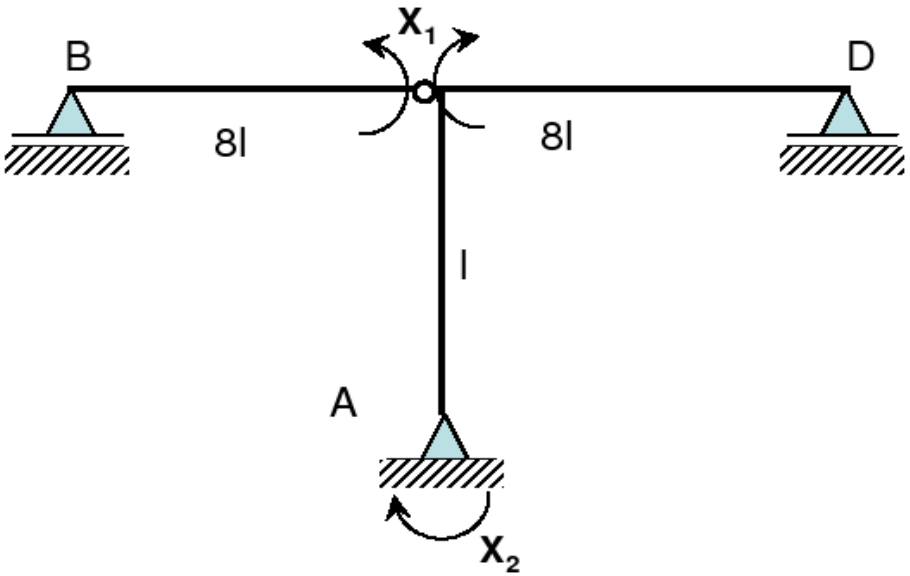
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

HİPERSTATİK SİSTEMLERDE HERHANGİ BİR NOKTANIN DEPLASMANIN HESABI

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



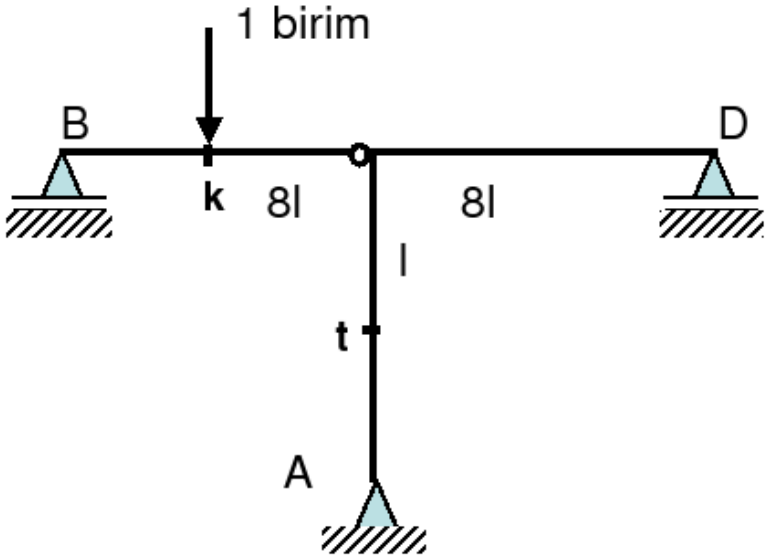
Yandaki hiperstatik sistemin moment diyagramı kuvvet metodu yardımıyla çizilir.



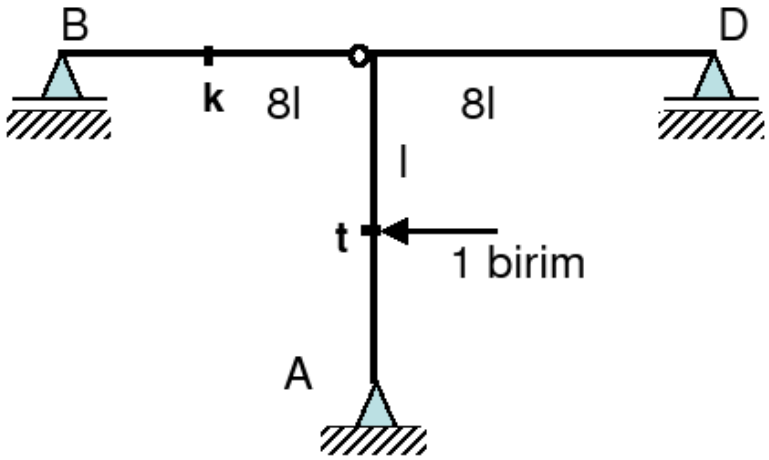
İzostatik Esas Sistem

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

İzostatik Esas Sistemde deplasmanı istenilen noktaya deplasman hesaplanacak yönde birim yükleme yapılır.



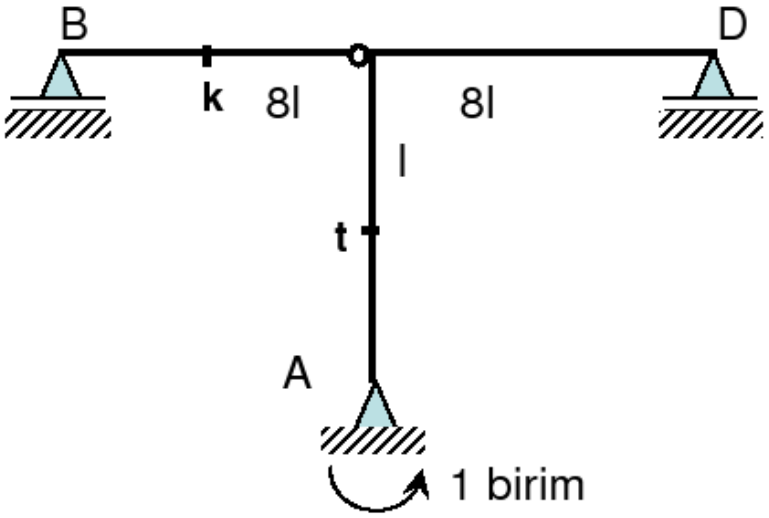
K noktasının düşey deplasmanını hesaplamak için, k noktasına düşey yönde birim yüklem yapılarak moment diyagramı çizilir.



t noktasının yatay deplasmanını hesaplamak için, t noktasına yatay yönde birim yüklem yapılarak moment diyagramı çizilir.

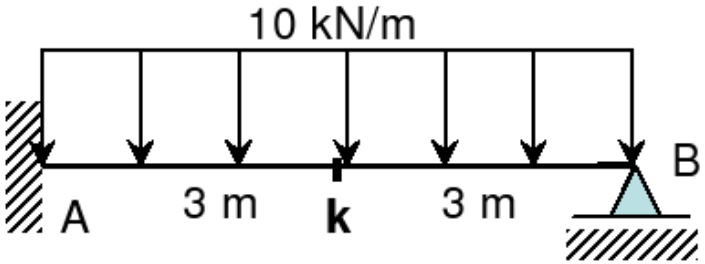
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

İzostatik Esas Sistemde deplasmanı istenilen noktaya deplasman hesaplanacak yönde birim yükleme yapılır.



A noktasındaki dönmeyi hesaplamak için ?

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

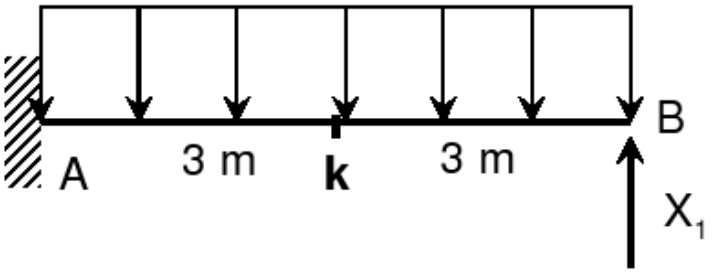


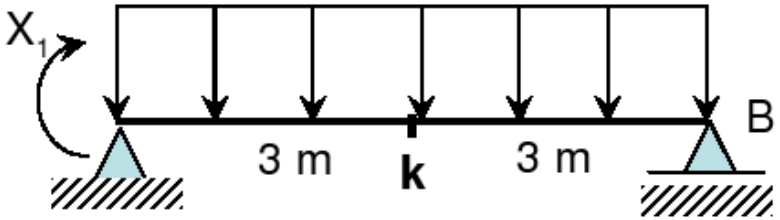
Yanda verilen sistemde B noktasının dönmesini bulunuz.

E= $2*10^6$ Mpa I = 8.10^{-4}

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1$$

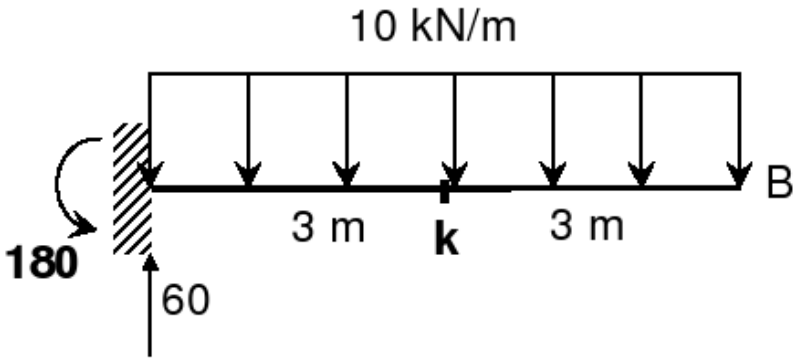
İzostatik esas sistem

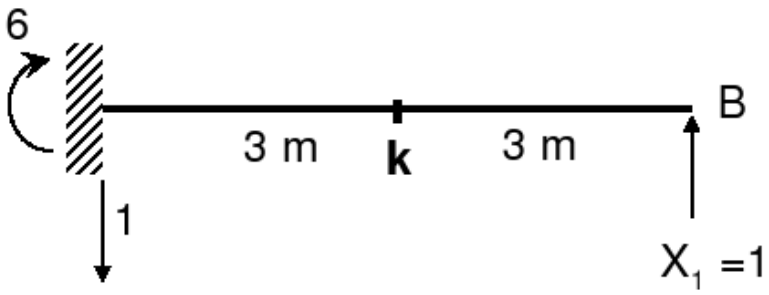


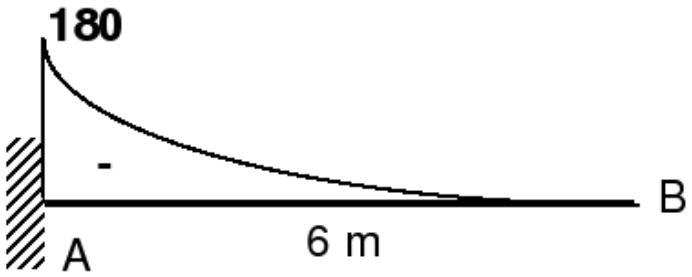


Abdulkadir Cüneyt AYDIN

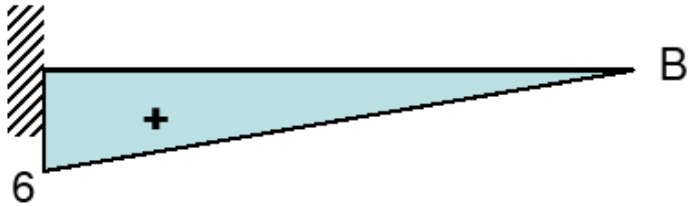
$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1$$







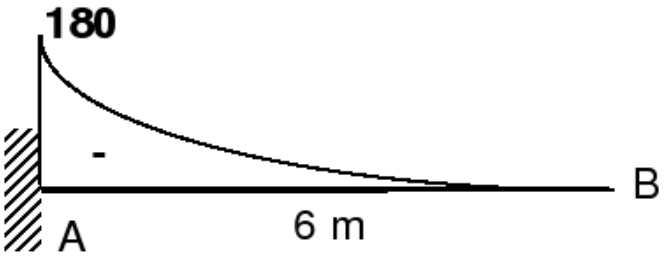
M_0



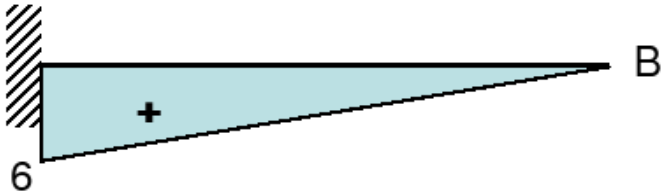
M_1

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} X_1$$



M_0



M_1

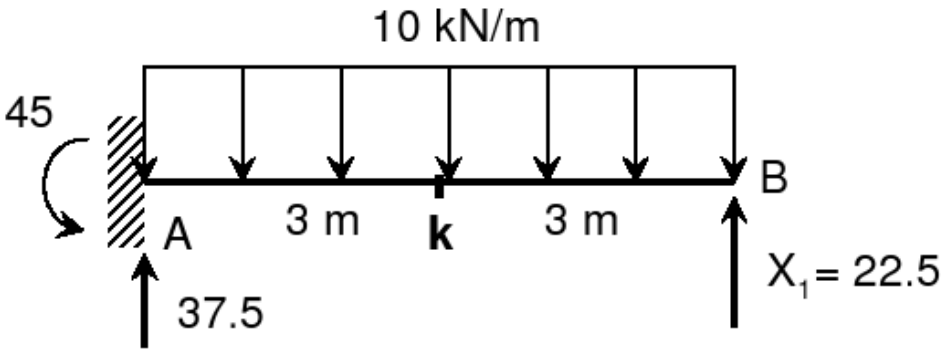
$$EI\delta_{10} = \frac{1}{4} * L * i * k = \frac{1}{4} * 6 * (-180) * 6 = -1620$$

$$EI\delta_{11} = \frac{1}{3} * L * i * k = \frac{1}{3} * 6 * 6 * 6 = 72$$

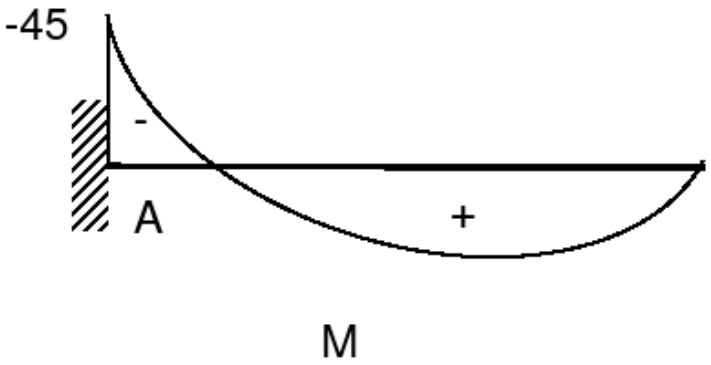
$$-1620 + 72\, X_1 = 0$$

$$X_1 = 22.5$$

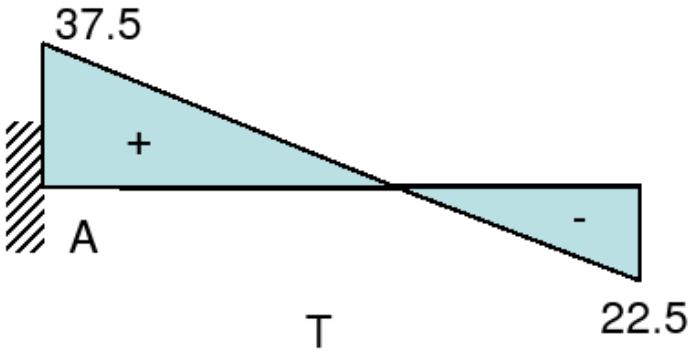
Abdulkadir Cüneyt AYDIN



İzostatik esas sistem

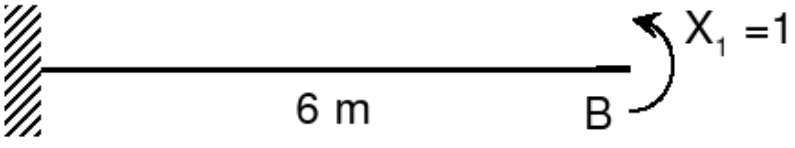


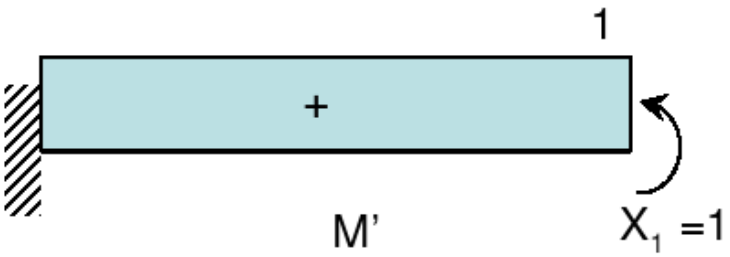
M

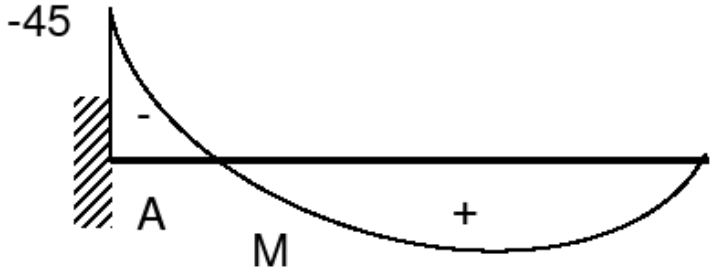


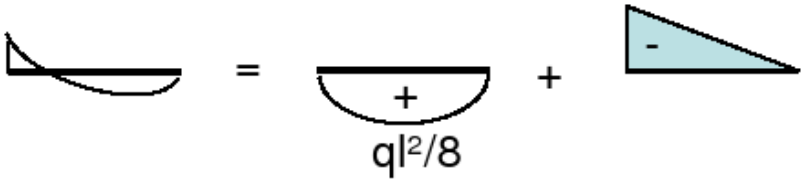
T

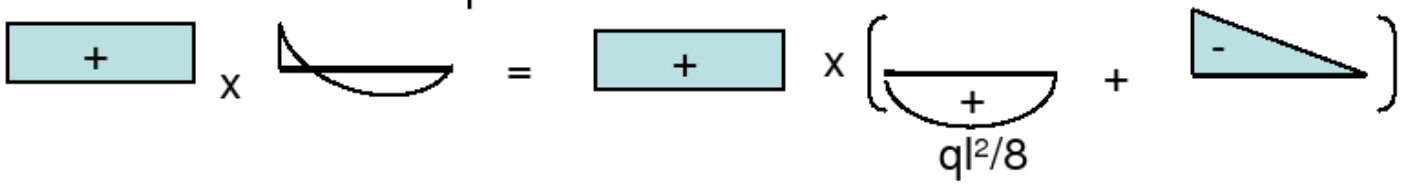
Abdulkadir Cüneyt AYDIN







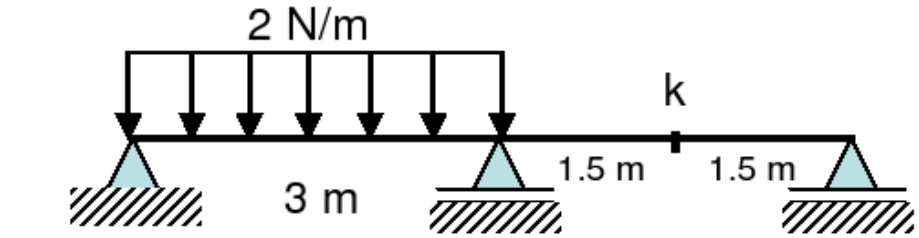


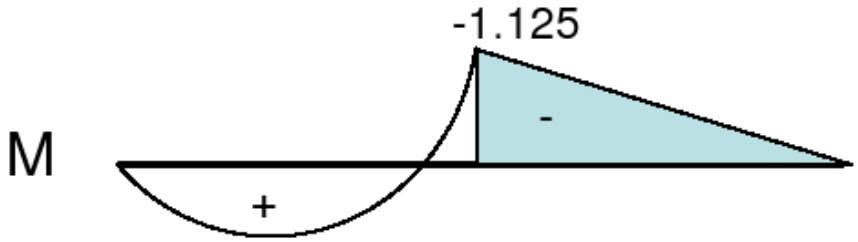


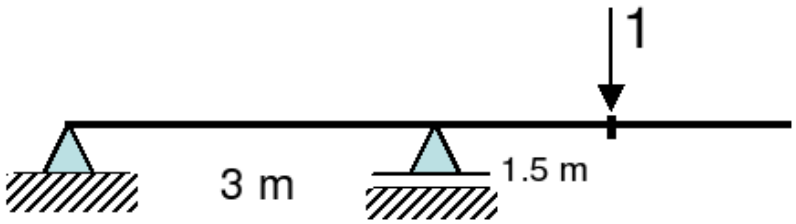
$$EI\delta_B = \frac{2}{3} * L * i * k - \frac{1}{2} * L * i * k = \frac{2}{3} * 6 * 45 * 1 - \frac{1}{2} * 6 * 45 * 1 = 45$$

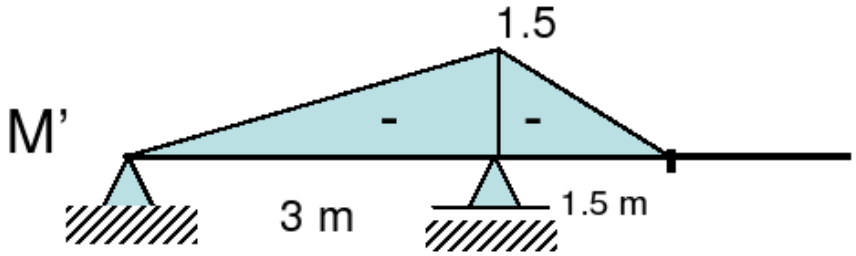
$$\delta_B = \frac{45}{EI} = \frac{45}{2.10^6 * 8.10^{-4}} = 0.028125\,\text{rad}$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN





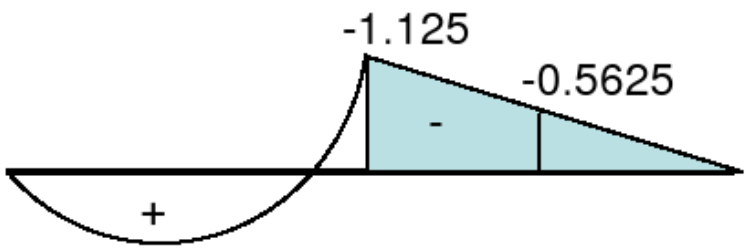


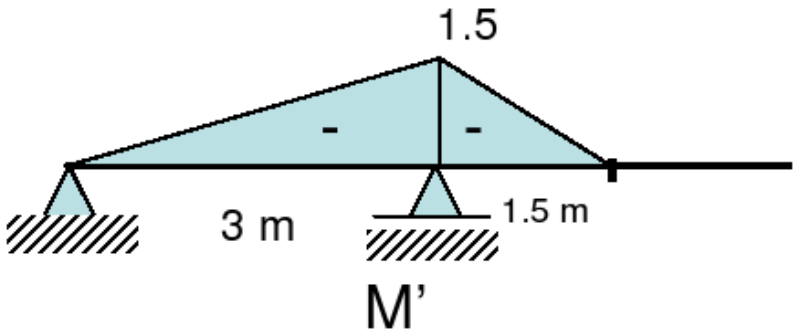


Yandaki hiperstatik sistemin moment diyagramı daha önceki derste çizilmişti. Bu sistemde k noktasının düşey deplasmanını bulunuz.

$E = 2.10^{6}\ N/m^{2}$ $I = 2.10^{-3}\ m^{4}$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN





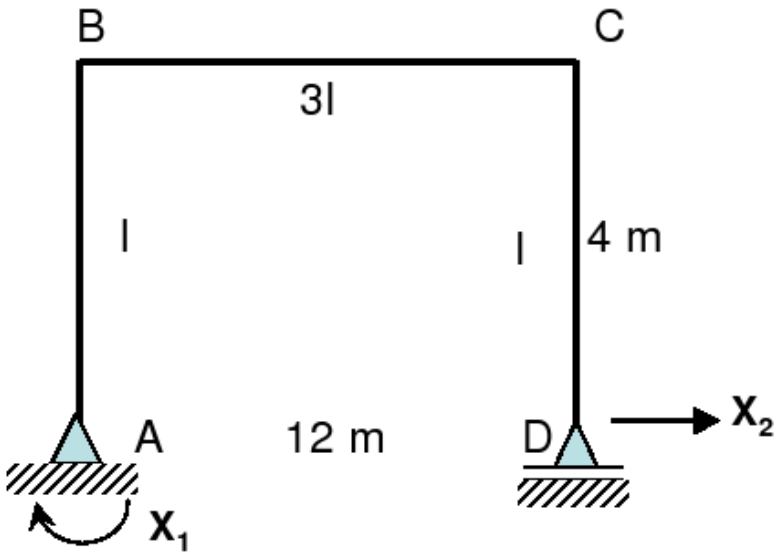
$$EI\delta_k = -\frac{1}{3} * L * i * k + \frac{1}{3} * L * i * k + \frac{1}{6} * L * i * (k_1 + 2k_2)$$

$$EI\delta_k = \frac{1}{3} * 3 * (-1.5) * 2.25 + \frac{1}{3} * 3 * (-1.5) * (-1.125) + \frac{1}{6} * 1.5 * 1.5 * (0.5625 + 2 * 1.125)$$

$$EI\delta_k = 0.6328$$

$$\delta_k = \frac{0.6328}{2.10^6 * 2.10^{-3}} = 0.01582\,m = 1.582\,cm$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



$$\delta_1 = \delta_{1t} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2$$

$$\delta_2 = \delta_{2t} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2$$

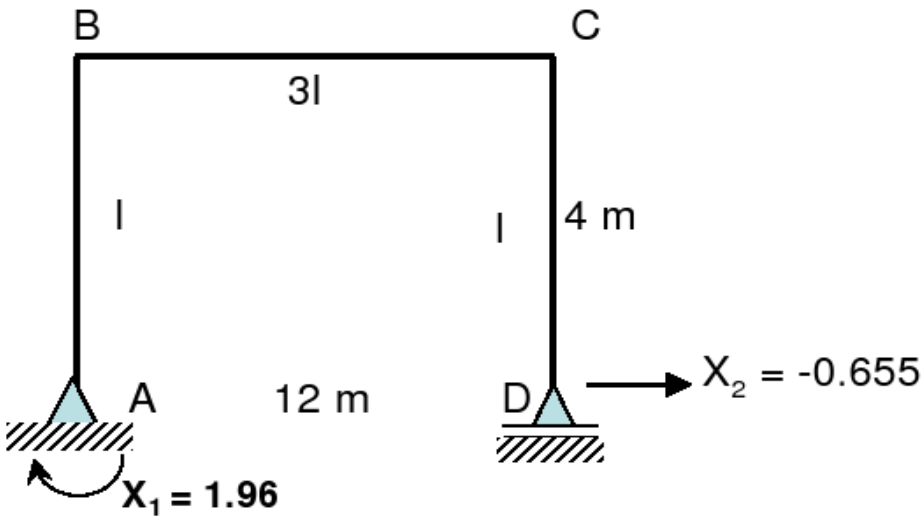
$5.333\ X_1 + 16\ X_2 + 0 = 0$

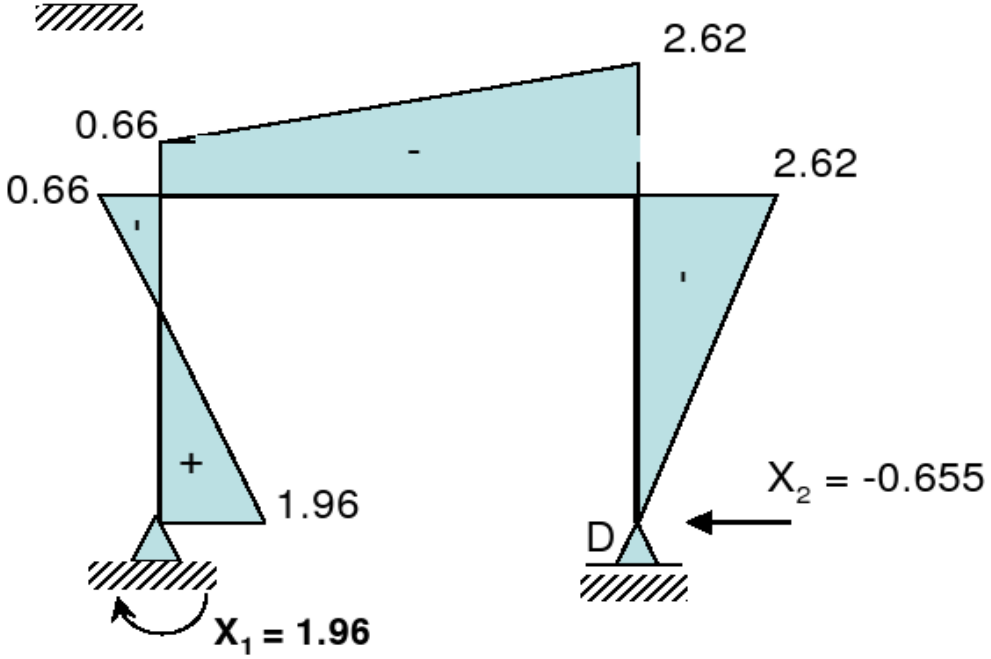
$16\ X_1 + 106.667\ X_2 + 38.4 = 0$

$X_1 = 1.96$

$X_2 = -0.655$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN





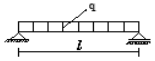
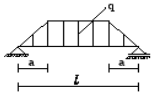
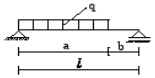
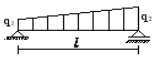
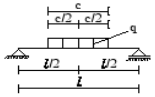
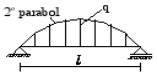
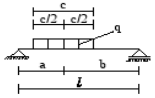
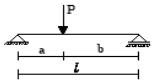
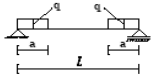
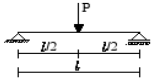
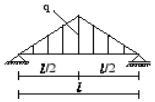
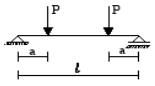
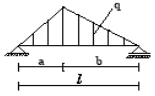
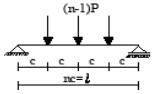
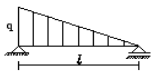
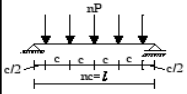
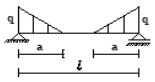
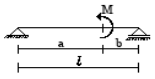
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

ÇARPIM TABLOSU ($\int_0^L M_i.M_k\,ds$)

	k — L	k — L	k_1 — k_2 — L	2^o — k_m — L	2^o — k — L	2^o — k — L	k — αL βL
i — L	Lik	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{2}Li(k_1+k_2)$	$\frac{2}{3}Lik_m$	$\frac{2}{3}Lik$	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{2}Lik$
i — L	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{6}Li(k_1+2k_2)$	$\frac{1}{3}Lik_m$	$\frac{5}{12}Lik$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{6}L(1+\alpha)ik$
L	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{6}Lik$	$\frac{1}{6}Li(2k_1+k_2)$	$\frac{1}{3}Lik_m$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{12}Lik$	$\frac{1}{6}L(1+\beta)ik$
i_2 — L	$\frac{1}{2}L(i_1+i_2)k$	$\frac{1}{6}L(i_1+2i_2)k$	$\frac{1}{6}L(2i_1k_1+i_1k_2+i_2k_1+2i_2k_2)$	$\frac{1}{3}L(i_1+i_2)k_m$	$\frac{1}{12}L(3i_1+5i_2)k$	$\frac{1}{12}L(i_1+3i_2)k$	$\frac{1}{6}Lk[(1+\beta)i_1+(1+$
i_m — L	$\frac{2}{3}Li_mk$	$\frac{1}{3}Li_mk$	$\frac{1}{3}Li_m(k_1+k_2)$	$\frac{8}{15}Li_mk_m$	$\frac{7}{15}Li_mk$	$\frac{1}{5}Li_mk$	$\frac{1}{3}L(1+\alpha\beta)i_mk$
i — L	$\frac{2}{3}Lik$	$\frac{5}{12}Lik$	$\frac{1}{12}Li(3k_1+5k_2)$	$\frac{7}{15}Lik_m$	$\frac{8}{15}Lik$	$\frac{3}{10}Lik$	$\frac{1}{12}L(5-\beta-\beta^2)i$
2^o — L	$\frac{2}{3}Lik$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{12}Li(5k_1+3k_2)$	$\frac{7}{15}Lik_m$	$\frac{11}{30}Lik$	$\frac{2}{15}Lik$	$\frac{1}{12}L(5-\alpha-\alpha^2)i$
2^o — i — L	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{4}Lik$	$\frac{1}{12}Li(k_1+3k_2)$	$\frac{1}{5}Lik_m$	$\frac{3}{10}Lik$	$\frac{1}{5}Lik$	$\frac{1}{12}L(1+\alpha+\alpha^2)i$
2^o — L	$\frac{1}{3}Lik$	$\frac{1}{12}Lik$	$\frac{1}{12}Li(3k_1+k_2)$	$\frac{1}{5}Lik$	$\frac{2}{15}Lik$	$\frac{1}{30}Lik$	$\frac{1}{12}L(1+\beta+\beta^2)i$
i — αL βL	$\frac{1}{2}Lik$	$\frac{1}{6}L(1+\alpha)ik$	$\frac{1}{6}Li[(1+\beta)k_1+(1+\alpha)k_2]$	$\frac{1}{3}L(1+\alpha\beta)ik_m$	$\frac{1}{12}L(5-\beta-\beta^2)ik$	$\frac{1}{12}L(1+\alpha+\alpha^2)ik$	$\frac{1}{3}Lik$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

YÜK TERİMLERİ TABLOSU

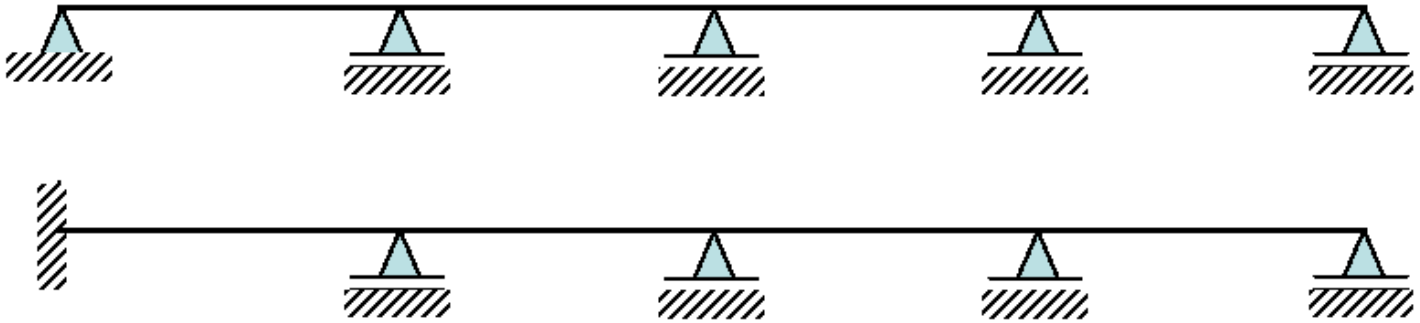
Yük	$\mathcal{L},\mathcal{K}$	Yük	$\mathcal{L},\mathcal{K}$
	$\mathcal{L}=\mathcal{K}=\frac{ql^2}{4}$		$\mathcal{L}=\mathcal{K}=\frac{q}{4}\left[l^2-a^2\left(2-\frac{a}{l}\right)\right.$
	$\mathcal{L}=\frac{qa^2}{4}\left(2-\frac{a}{l}\right)^2$ $\mathcal{K}=\frac{qa^2}{4}\left(2-\frac{a^2}{l^2}\right)$		$\mathcal{L}=\frac{l^2}{60}(8q_1+7q_2)$ $\mathcal{K}=\frac{l^2}{60}(7q_1+8q_2)$
	$\mathcal{L}=\mathcal{K}=\frac{qc}{8l}(3l^2-c^2)$		$\mathcal{L}=\mathcal{K}=\frac{ql^2}{5}$
	$\mathcal{L}=\frac{qbc}{l^2}\left(l^2-b^2-\frac{c^2}{4}\right)$ $\mathcal{K}=\frac{qac}{l^2}\left(l^2-a^2-\frac{c^2}{4}\right)$		$\mathcal{L}=\frac{Pab(b+l)}{l^2}$ $\mathcal{K}=\frac{Pab(a+l)}{l^2}$
	$\mathcal{L}=\mathcal{K}=\frac{qa^2}{2l}(3l-2a)$		$\mathcal{L}=\mathcal{K}=\frac{3}{8}Pl$
	$\mathcal{L}=\mathcal{K}=\frac{5}{32}ql^2$		$\mathcal{L}=\mathcal{K}=3Pa\left(1-\frac{a}{l}\right)$
	$\mathcal{L}=\frac{ql^2}{60}\left(1+\frac{b}{l}\right)\left(7-3\frac{b^2}{l^2}\right)$ $\mathcal{K}=\frac{ql^2}{60}\left(1+\frac{a}{l}\right)\left(7-3\frac{a^2}{l^2}\right)$		$\mathcal{L}=\mathcal{K}=Pl\frac{n}{4}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ n: tek sayı
	$\mathcal{L}=\frac{8}{60}ql^2$ $\mathcal{K}=\frac{7}{60}ql^2$		$\mathcal{L}=\mathcal{K}=Pl\frac{n}{4}\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)$ n: tek sayı
	$\mathcal{L}=\mathcal{K}=\frac{qa^2}{4l}(2l-a)$		$\mathcal{L}=M\left(1-\frac{3b^2}{l^2}\right)$ $\mathcal{K}=M\left(\frac{3a^2}{l^2}-1\right)$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

SÜREKLİ KİRİŞLERİN ÜÇ MOMENT (CLAPEYRON) DENKLEMLERİ İLE ÇÖZÜMÜ

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Sürekli Kiriş: Mesnetlerinden birisi sabit veya ankastre diğerleri hareketli olan ve bir doğrultuda uzanan sistemlere sürekli kiriş denir. Bina çerçevelerinin kirişleride çok önemli olmayan hallerde yaklaşık olarak sürekli kiriş gibi hesap edilebilir.

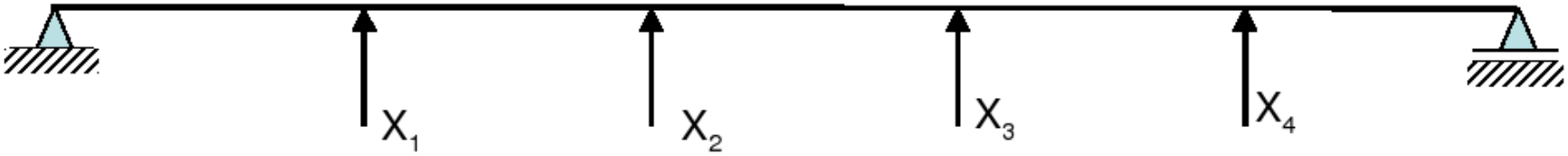


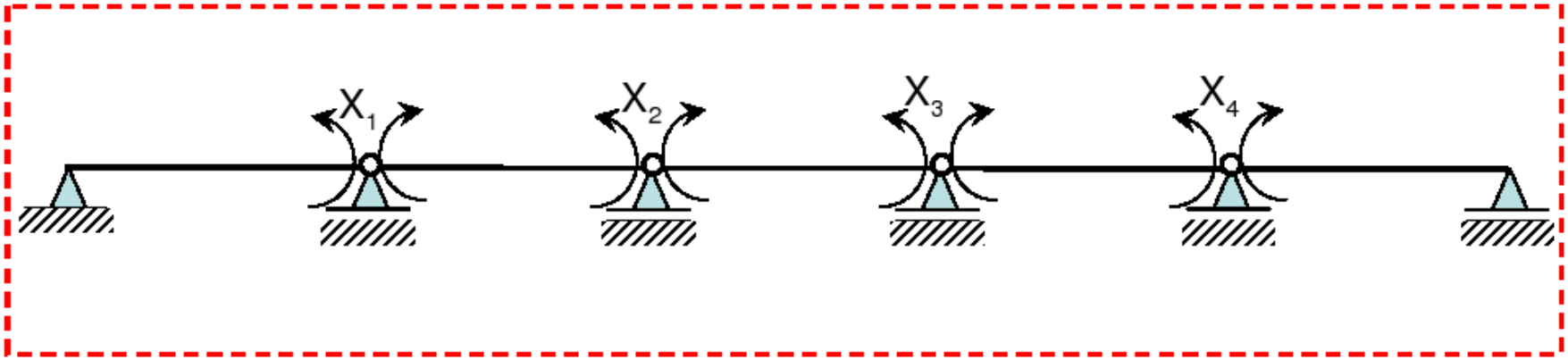
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Aşağıdaki sürekli kirişi kuvvet metodu ile çözelim.



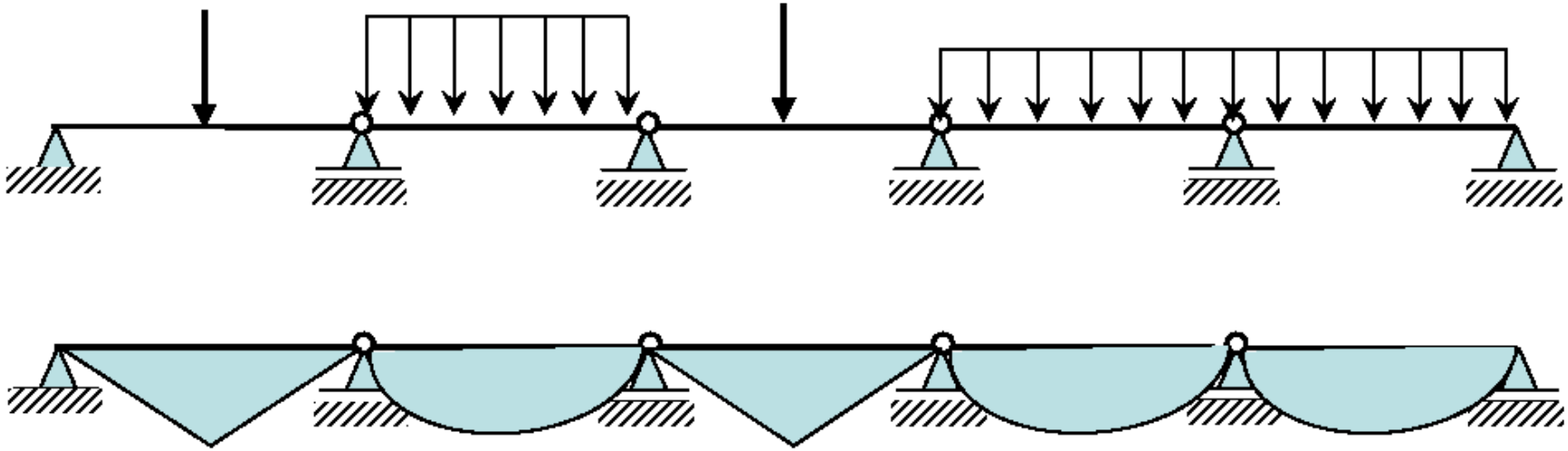
Sistemin hiperstatiklik derecesi belirlenerek izostatik esas sistem seçilir





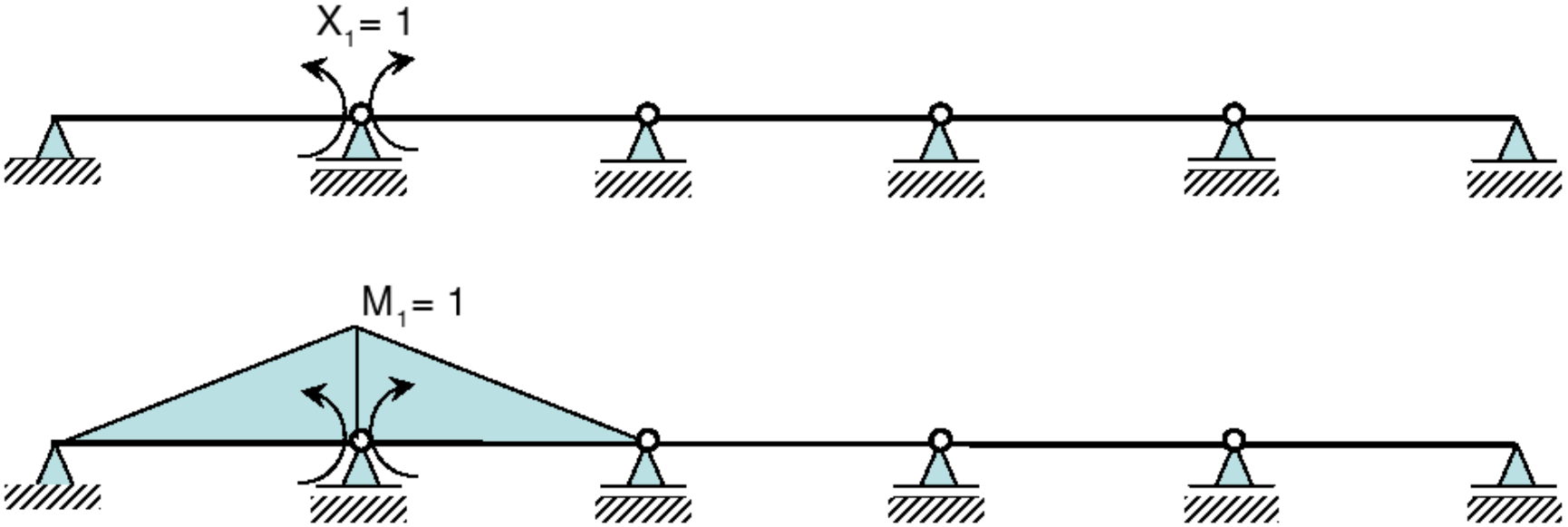
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

İlk olarak dış yük etkisi altında izostatik esas sistemin moment diyagramı çizilirse



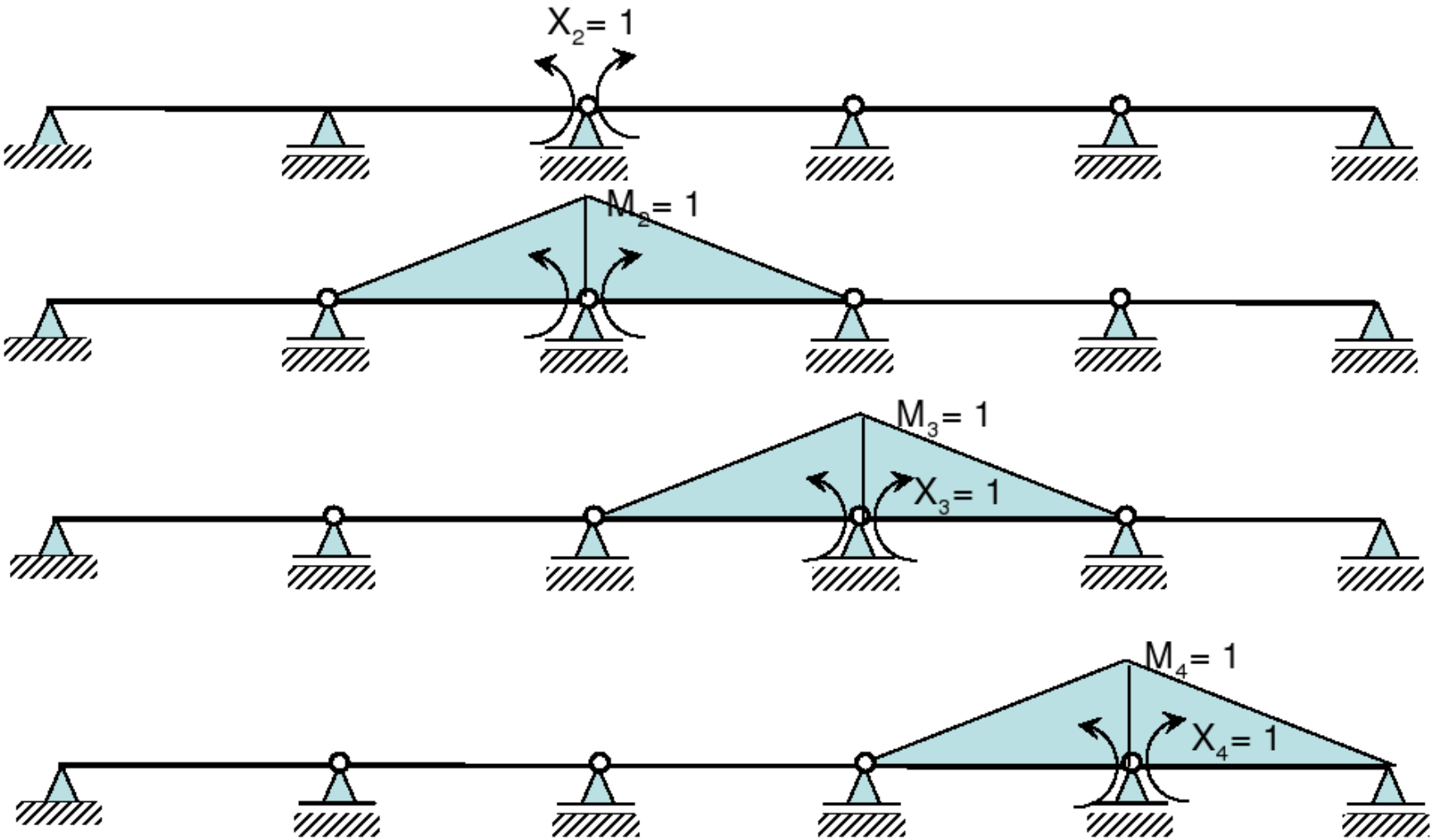
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Daha sonra birim momentler yüklenerek moment diyagramları çizilirse



Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Daha sonra birim momentler yüklenerek moment diyagramları çizilirse



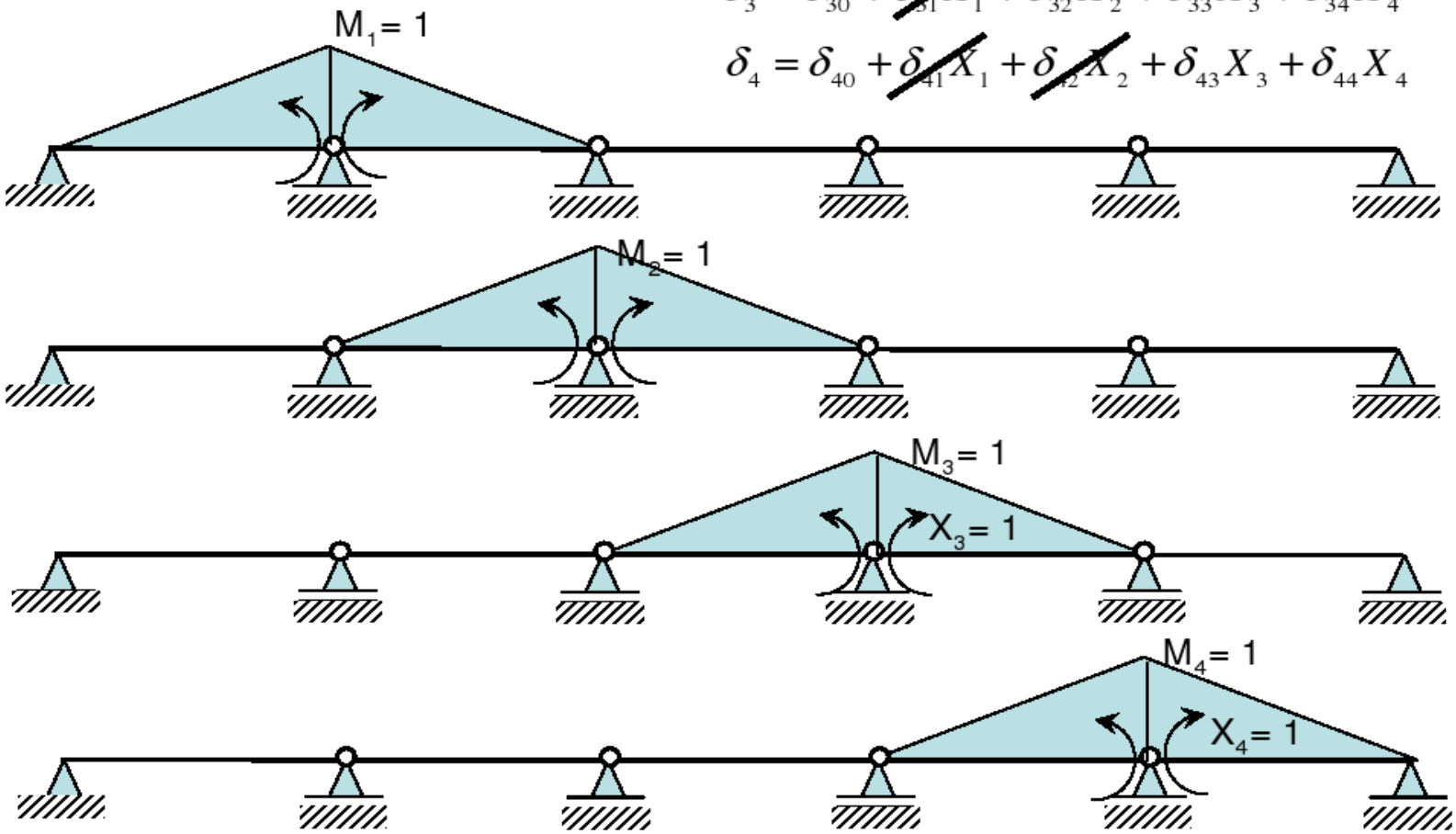
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}X_4$$

$$\delta_2 = \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}X_4$$

$$\delta_3 = \delta_{30} + \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4$$

$$\delta_4 = \delta_{40} + \delta_{41}X_1 + \delta_{42}X_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4$$



Abdulkadir Cüneyt AYDIN

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \delta_{14}X_4$$

$$\delta_2 = \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \delta_{24}X_4$$

$$\delta_3 = \delta_{30} + \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4$$

$$\delta_4 = \delta_{40} + \delta_{41}X_1 + \delta_{42}X_2 + \delta_{43}X_3 + \delta_{44}X_4$$

Her mesnet için sadece kendisinden önceki açıklıktan ve kendisinden sonraki açıklıktan katkılar gelecektir. Bu durumda denklemi genel halde şu şekilde yazabiliriz

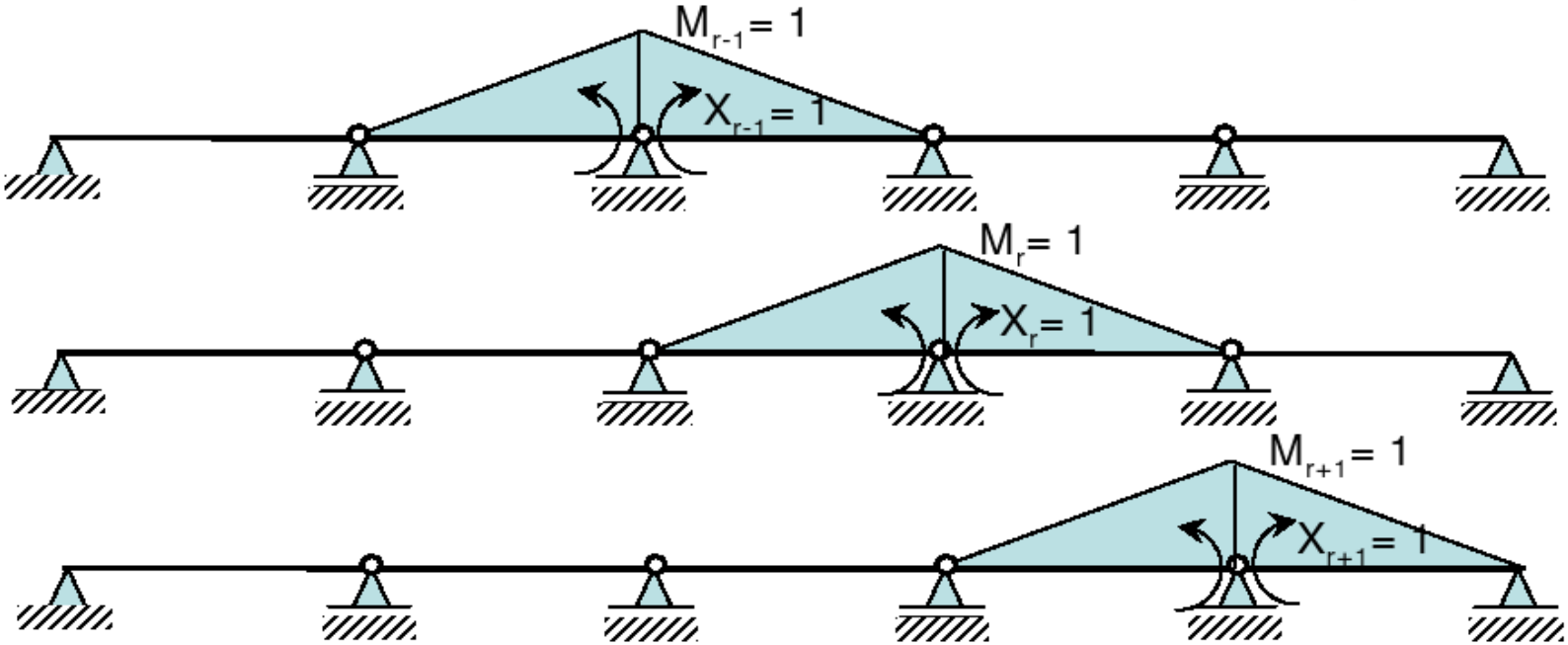
$$\delta_r = \delta_{r0} + \delta_{r-1,r}X_{r-1} + \delta_{rr}X_r + \delta_{r,r+1}X_{r+1} = 0$$

Örneğin r=3 için

$$\delta_3 = 0 = \delta_{30} + \delta_{23}X_2 + \delta_{33}X_3 + \delta_{34}X_4$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Daha sonra birim momentler yüklenerek moment diyagramları çizilirse



$$\delta_{rr-1} = \int M_r M_{r-1} \frac{dx}{EI} = \frac{1}{6} * l_{r-1} * 1 * 1 * \frac{1}{EI_{r-1}} = \frac{1}{6E} \frac{l_{r-1}}{I_{r-1}}$$

$$\delta_{rr} = \int M_r M_r \frac{dx}{EI} = \frac{1}{3} * l_{r-1} * 1 * 1 * \frac{1}{EI_{r-1}} + \frac{1}{3} * l_r * 1 * 1 * \frac{1}{EI_r} = \frac{1}{6E} 2\left(\frac{l_{r-1}}{I_{r-1}} + \frac{l_r}{I_r}\right)$$

$$\delta_{rr+1} = \int M_r M_{r+1} \frac{dx}{EI} = \frac{1}{6} * l_r * 1 * 1 * \frac{1}{EI_r} = \frac{1}{6E} \frac{l_r}{I_r}$$

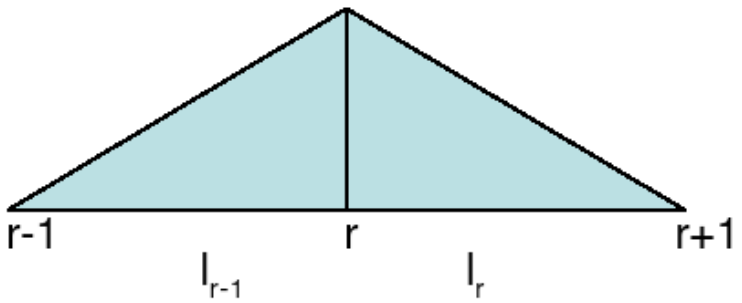
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Her mesnet için sadece kendisinden önceki açıklıktan ve kendisinden sonraki açıklıktan katkılar gelecektir. Bu durumda denklemi genel halde şu şekilde yazabiliriz

$$\delta_r = \delta_{r0} + \delta_{r-1,r} X_{r-1} + \delta_{rr} X_r + \delta_{r,r+1} X_{r+1} = 0$$

$$\frac{l_{r-1}}{I_{r-1}} X_{r-1} + 2\left(\frac{l_{r-1}}{I_{r-1}} + \frac{l_r}{I_r}\right) X_r + \frac{l_r}{I_r} X_{r+1} + \underbrace{\frac{l_{r-1}}{I_{r-1}} R_{r-1} + \frac{l_r}{I_r} L_r}_{\delta_{r0}} = 0$$

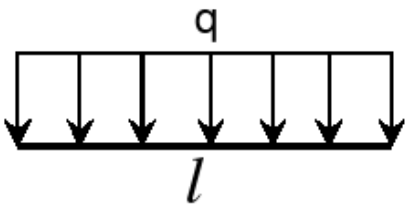
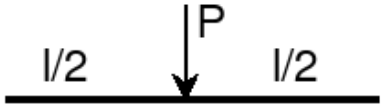
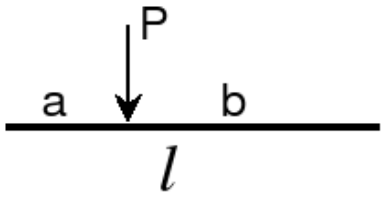
Üç moment (Clapeyron) Denklemi



Abdulkadir Cüneyt AYDIN

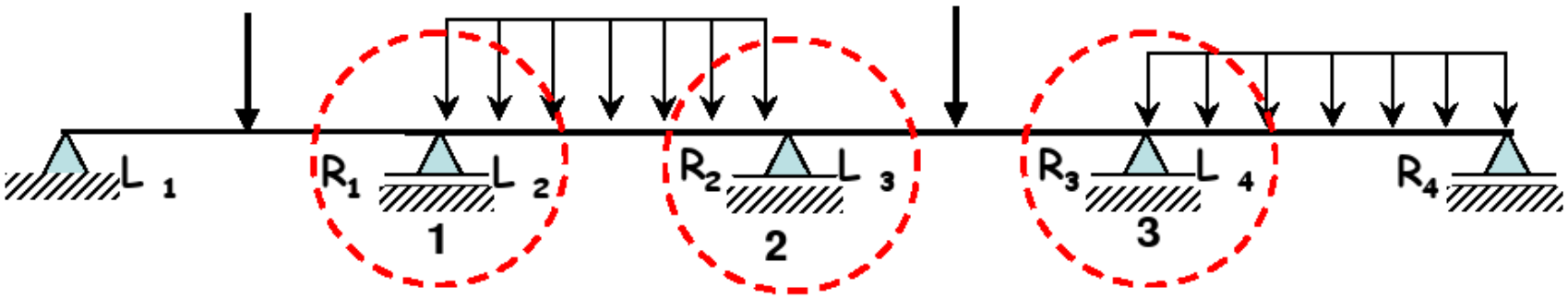
$$\delta_{r0} = \int M_r M_0 \frac{dx}{EI} = \frac{1}{6E}\left(\frac{l_{r-1}}{I_{r-1}} R_{r-1} + \frac{l_r}{I_r} L_r\right)$$

Bu ifadede görülen R ve L ifadeleri her bir açıklığın sol ve sağ ucundaki yük bileşenleridir. Bu bileşenler yukarıdaki denklem yardımıyla bulunabileceği gibi yükleme durumuna göre tablolardan alınacaktır.

	L	R
	$\frac{q*l^2}{4}$	$\frac{q*l^2}{4}$
	$\frac{3}{8}*P*l$	$\frac{3}{8}*P*l$
	$\frac{Pab(b+l)}{l^2}$	$\frac{Pab(a+l)}{l^2}$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

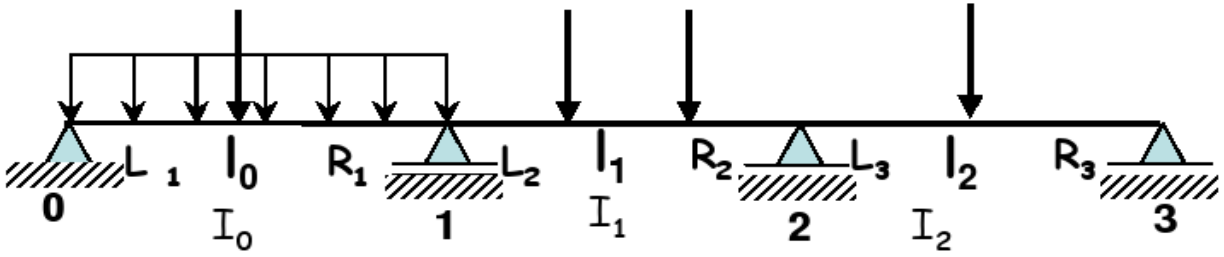
$$\frac{l_{r-1}}{I_{r-1}}X_{r-1}+2\left(\frac{l_{r-1}}{I_{r-1}}+\frac{l_r}{I_r}\right)X_r+\frac{l_r}{I_r}X_{r+1}+\frac{l_{r-1}}{I_{r-1}}R_{r-1}+\frac{l_r}{I_r}L_r=0$$



Clapeyron (üç moment) denklemi her bir ara mesnet için yazılır. Ara mesnetlere mafsal yerleştirilerek buralardaki moment değerleri bilinmeyen olarak seçilmişti. Her bir mesnet için yük terimleri şekildeki gibi alınmaktadır.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Clapeyron (üç moment) denklemlerinin uygulanması



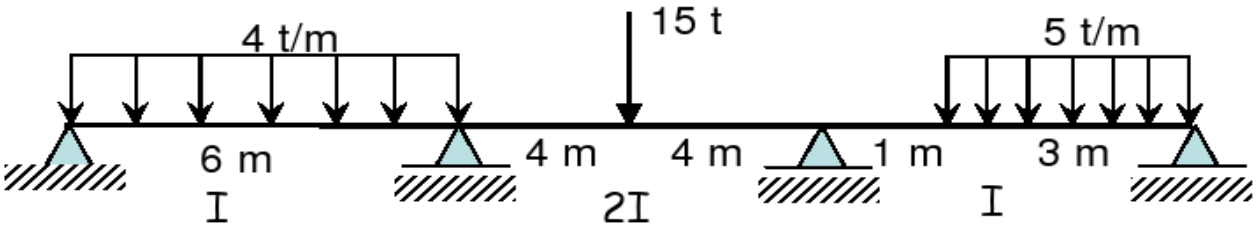
X_0	X_1	X_2	X_3
$\frac{l_0}{I_0}$	$\frac{l_1}{I_1}$	$\frac{l_2}{I_2}$	
L_0 R_0	L_1 R_1	L_2 R_2	
$L_0\ \frac{l_0}{I_0}$	$R_0\ \frac{l_0}{I_0}$ $L_1\ \frac{l_1}{I_1}$	$R_1\ \frac{l_1}{I_1}$ $L_2\ \frac{l_2}{I_2}$	$R_2\ \frac{l_2}{I_2}$

1. Mesnet $$\frac{l_0}{I_0}X_0 + 2\left(\frac{l_0}{I_0}+\frac{l_1}{I_1}\right)X_1 + \frac{l_1}{I_1}X_2 + \frac{l_0}{I_0}R_0 + \frac{l_1}{I_1}L_1 = 0$$

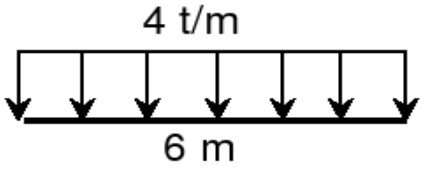
2. Mesnet $$\frac{l_1}{I_1}X_1 + 2\left(\frac{l_1}{I_1}+\frac{l_2}{I_2}\right)X_2 + \frac{l_2}{I_2}X_3 + \frac{l_1}{I_1}R_1 + \frac{l_2}{I_2}L_2 = 0$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

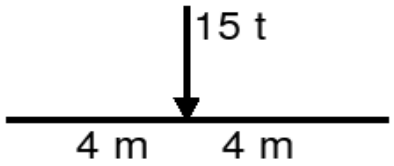
ÖRNEK: Aşağıda özellikleri verilen sistemin moment ve kesme kuvveti diyagramlarını çiziniz.



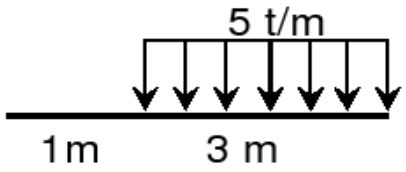
Yük terimlerinin hesabı



$$L=R=\frac{q*l^2}{4}=\frac{4*6^2}{4}=36$$



$$L=R=\frac{3}{8}*P*L=\frac{3}{8}*15*8=45$$

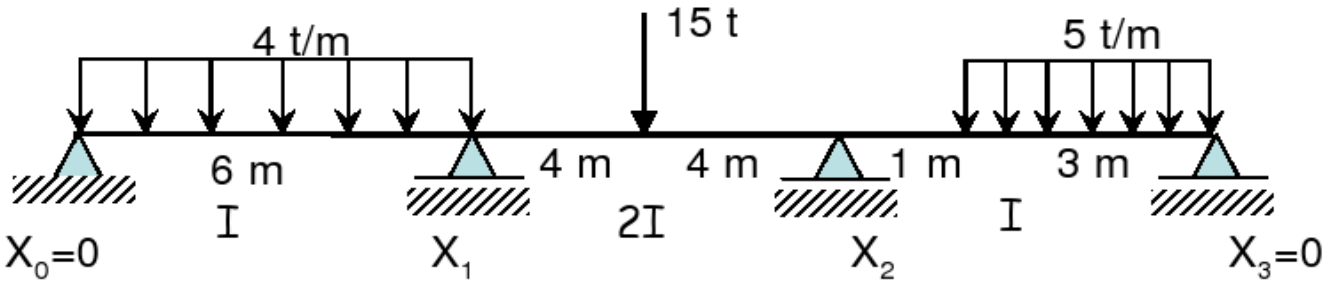


$$L=\frac{qb^2}{4}(2-\frac{b^2}{l^2})=16{,}2$$

$$R=\frac{qb^2}{4}(2-\frac{b}{l})^2=17{,}8$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

ÖRNEK: Aşağıda özellikleri verilen sistemin moment ve kesme kuvveti diyagramlarını çiziniz.

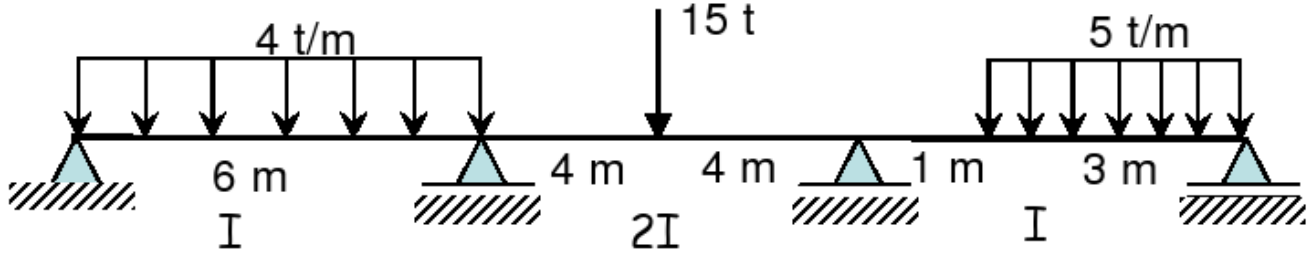


$\frac{6}{I}$		$\frac{8}{2I}$		$\frac{4}{I}$	
36	**36**	**45**	**45**	**16,2**	**17,8**
$\frac{216}{I}$	$\frac{216}{I}$	$\frac{180}{I}$	$\frac{180}{I}$	$\frac{64,8}{I}$	$\frac{71,2}{I}$

1. Mesnet $\frac{6}{I}X_0 + 2(\frac{6}{I}+\frac{8}{2I})X_1 + \frac{8}{2I}X_2 + \frac{216}{I} + \frac{180}{I} = 0$

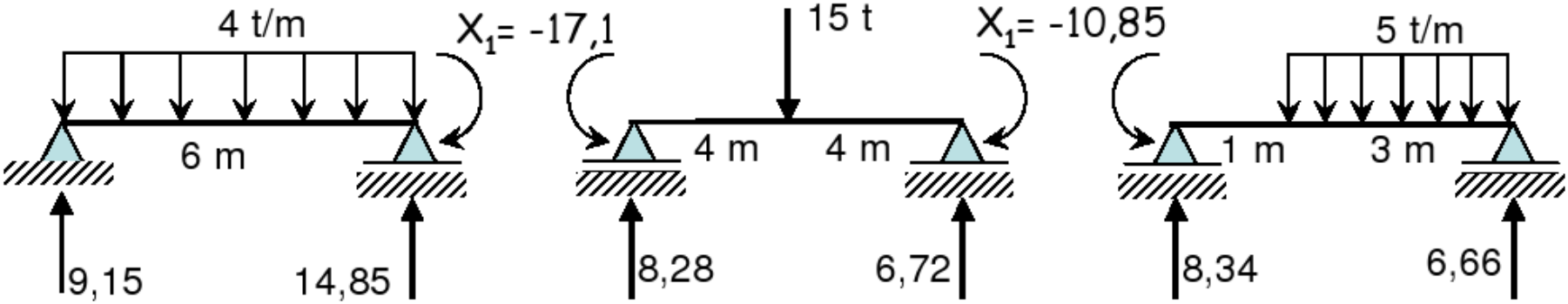
2. Mesnet $\frac{8}{2I}X_1 + 2(\frac{8}{2I}+\frac{4}{I})X_2 + \frac{4}{I}X_3 + \frac{180}{I} + \frac{64,8}{I} = 0$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

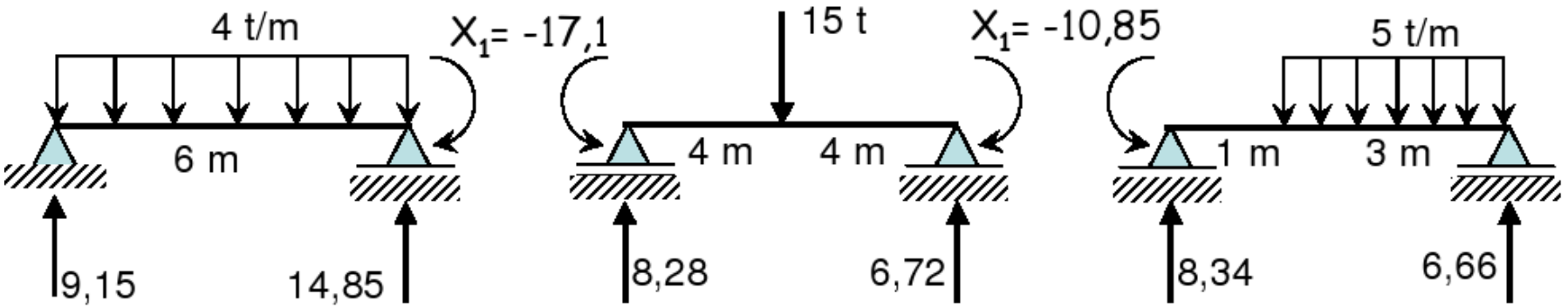


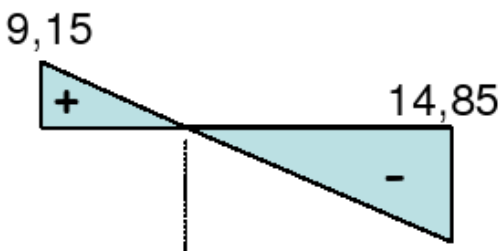
$$\frac{20}{I}X_1 + \frac{4}{I}X_2 + \frac{396}{I} = 0 \qquad X_1 = -17{,}1$$

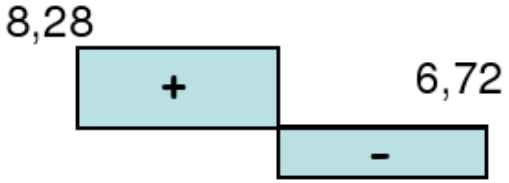
$$\frac{4}{I}X_1 + \frac{16}{I}X_2 + \frac{244{,}8}{I} = 0 \qquad X_1 = -10{,}85$$

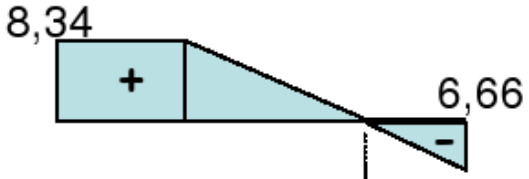


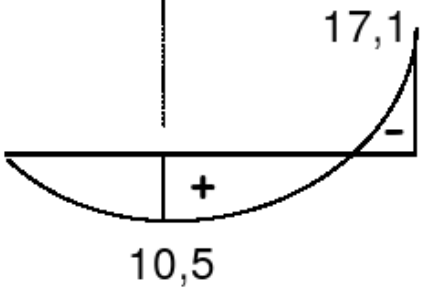
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

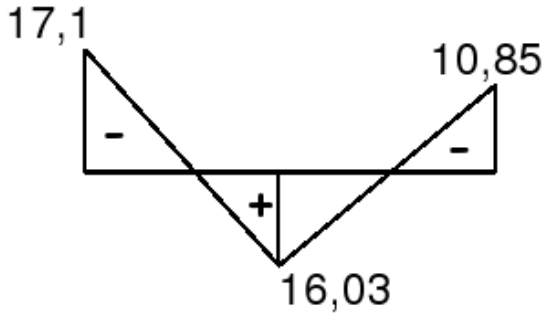


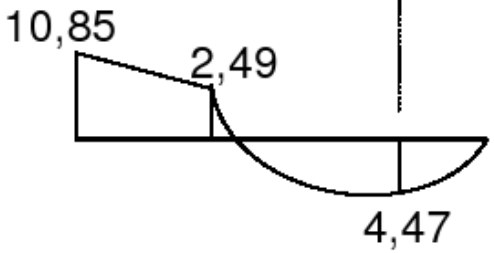




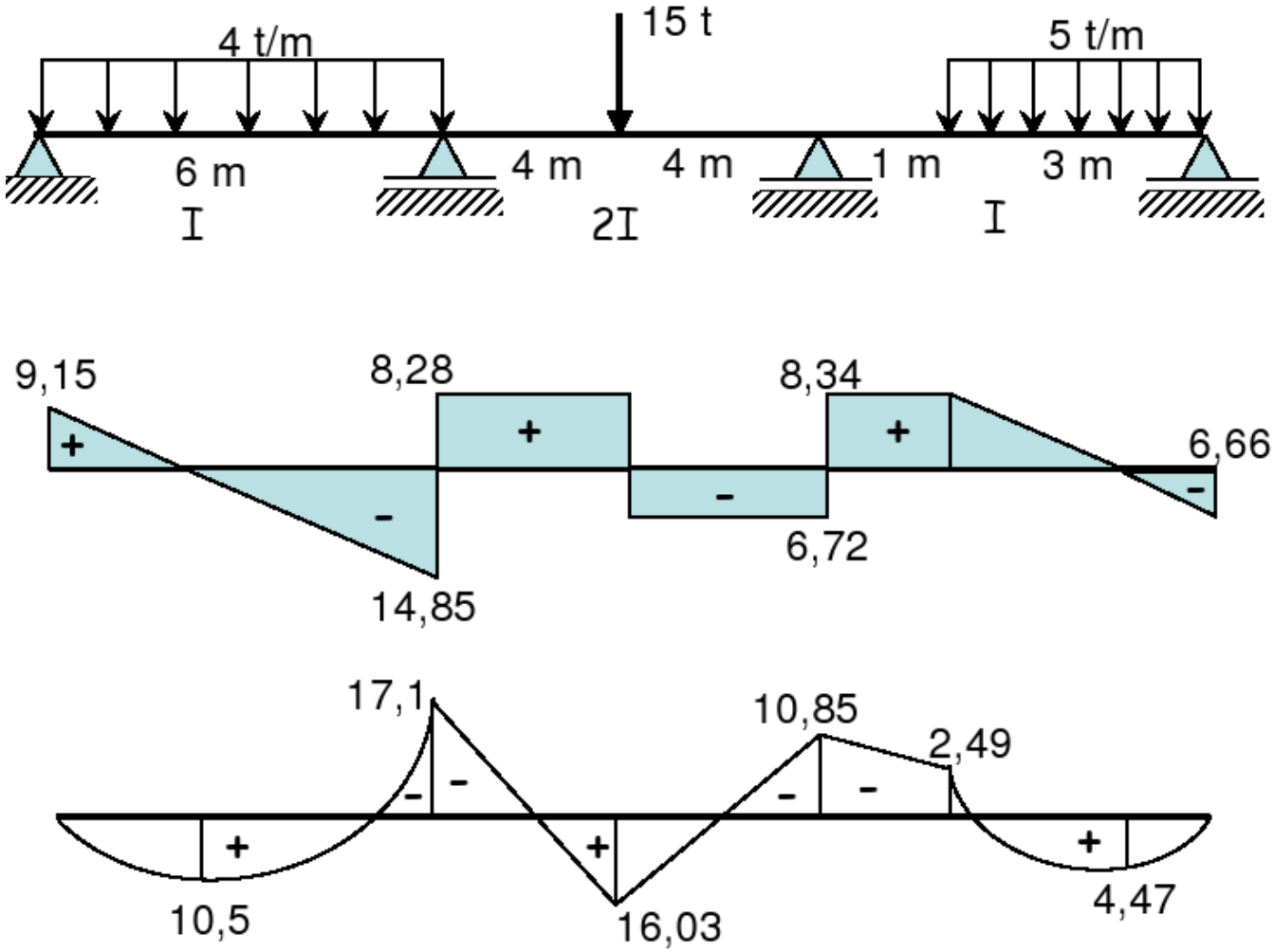








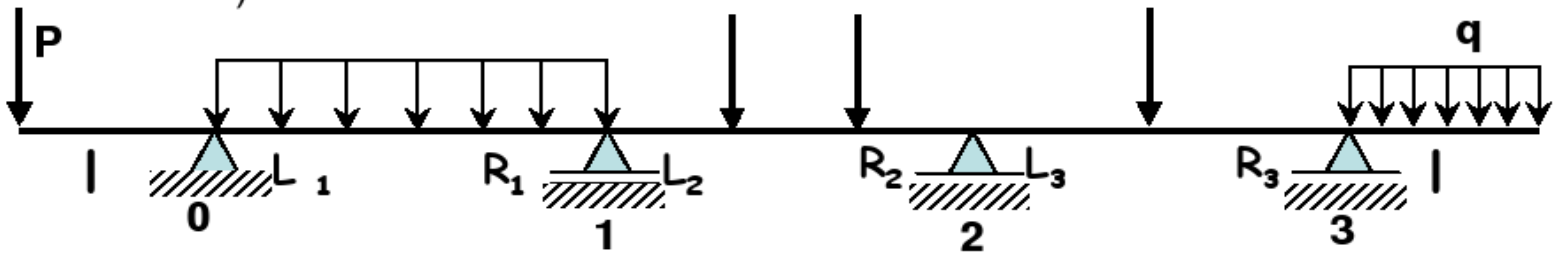
Abdulkadir Cüneyt AYDIN



Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Özel Durumlar

1) Kenar mesnette konsol olması durumu



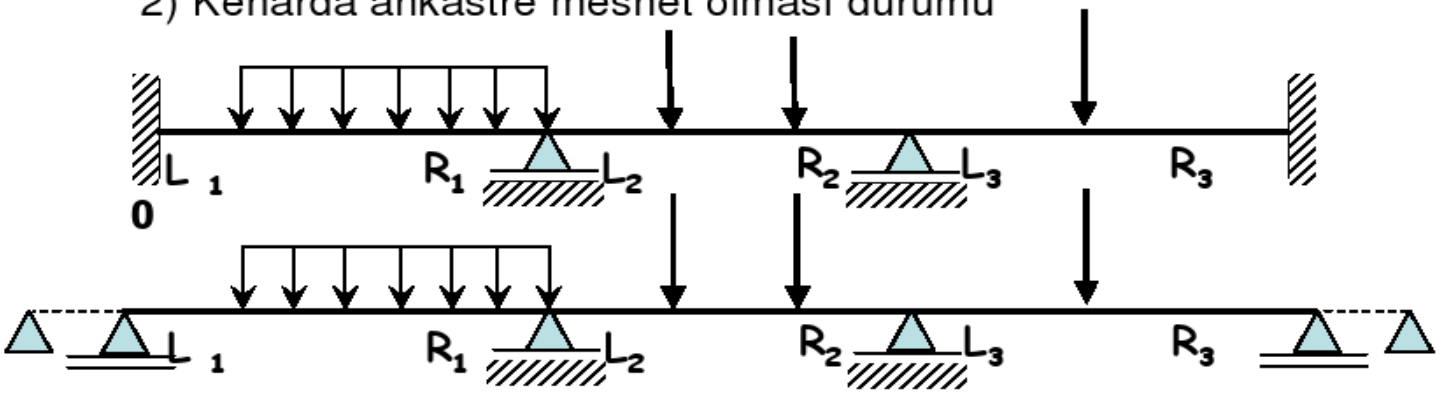
$X_0 = -P*L$ X_1 X_2 $X_3 = -q*L^2/2$

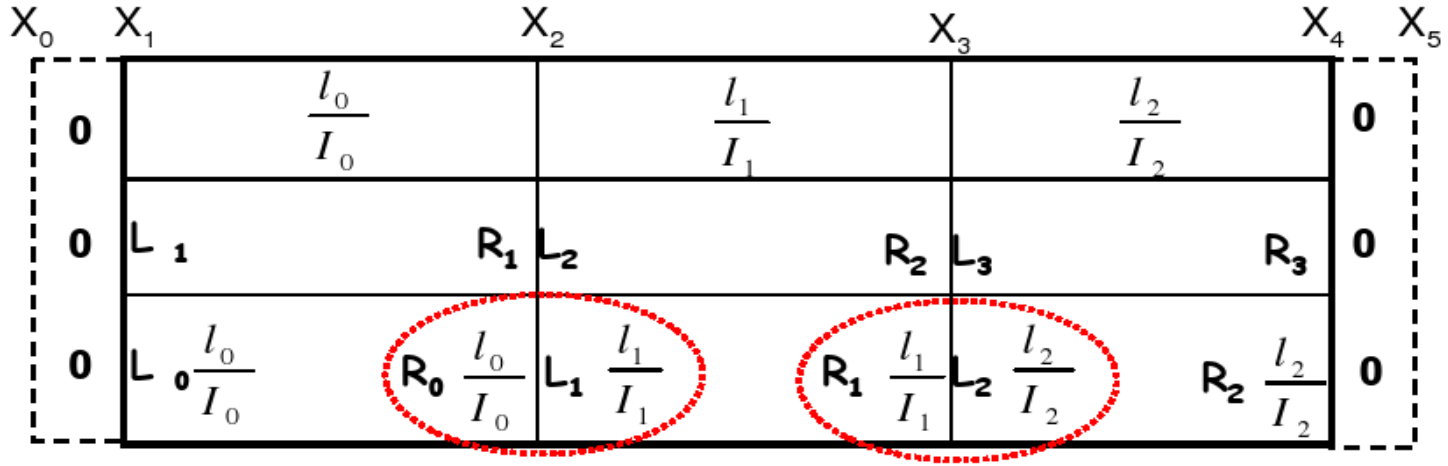
$\frac{l_0}{I_0}$		$\frac{l_1}{I_1}$		$\frac{l_2}{I_2}$			
L_0	R_0	L_1	R_1	L_2	R_2		
L_0 $\frac{l_0}{I_0}$	R_0 $\frac{l_0}{I_0}$	L_1 $\frac{l_1}{I_1}$	R_1 $\frac{l_1}{I_1}$	L_2 $\frac{l_2}{I_2}$	R_2 $\frac{l_2}{I_2}$		

Kenar mesnette konsol olması durumunda konsol momenti hesaplanır ve kenar mesnette moment değeri olarak yazılır. Kenar mesnetteki moment olarak sıfır yerine hesaplanan moment değeri yazılır.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

2) Kenarda ankastre mesnet olması durumu

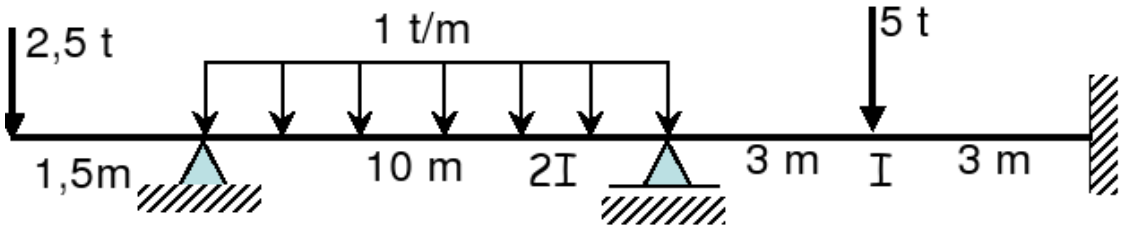




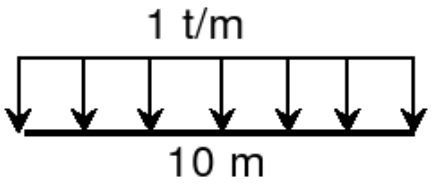
Kenarda ankastre mesnet olması durumunda ankastre mesnette de moment hesaplanması gerektiğinden ankastre mesnet içinde clapeyron deklemi yazılır. Ankastre mesnetten önce ve sonra bir düğüm olmadığı için sonsuz küçük yanda farazi bir nokta kabul edilir. Bu nokta ile ilgili tüm değerler sıfırdır.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

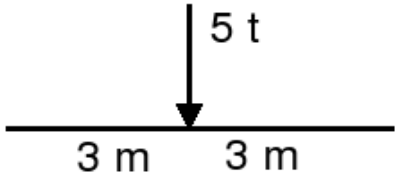
ÖRNEK: Aşağıda özellikleri verilen sistemin moment ve kesme kuvveti diyagramlarını çiziniz.



ük terimlerinin hesabı



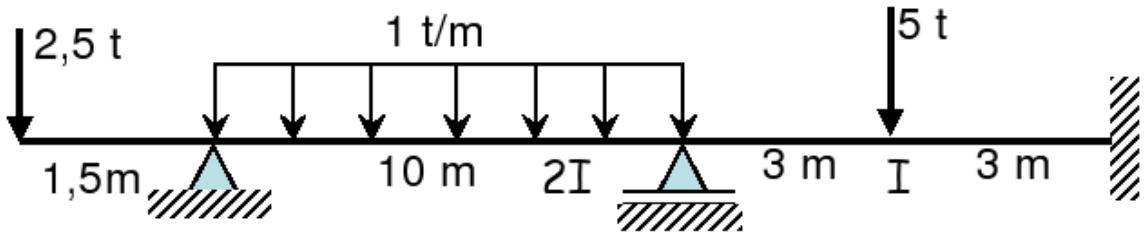
$$L=R=\frac{q*l^2}{4}=\frac{1*10^2}{4}=25$$



$$L=R=\frac{3}{8}*P*L=\frac{3}{8}*5*6=11{,}25$$

Konsolda moment değeri hesaplanarak ilk mesnette kullanılacaktır. Ayrıca ankastre mesnette de denklem yazılacaktır.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



X_0=-3,75 X_1 X_2 X_2'

$\frac{10}{2I}$		$\frac{6}{I}$		**0**
25	**25**	**11,25**	**11,25**	**0**
$\frac{125}{I}$	$\frac{125}{I}$	$\frac{67,5}{I}$	$\frac{67,5}{I}$	**0**

X_0=-3,75

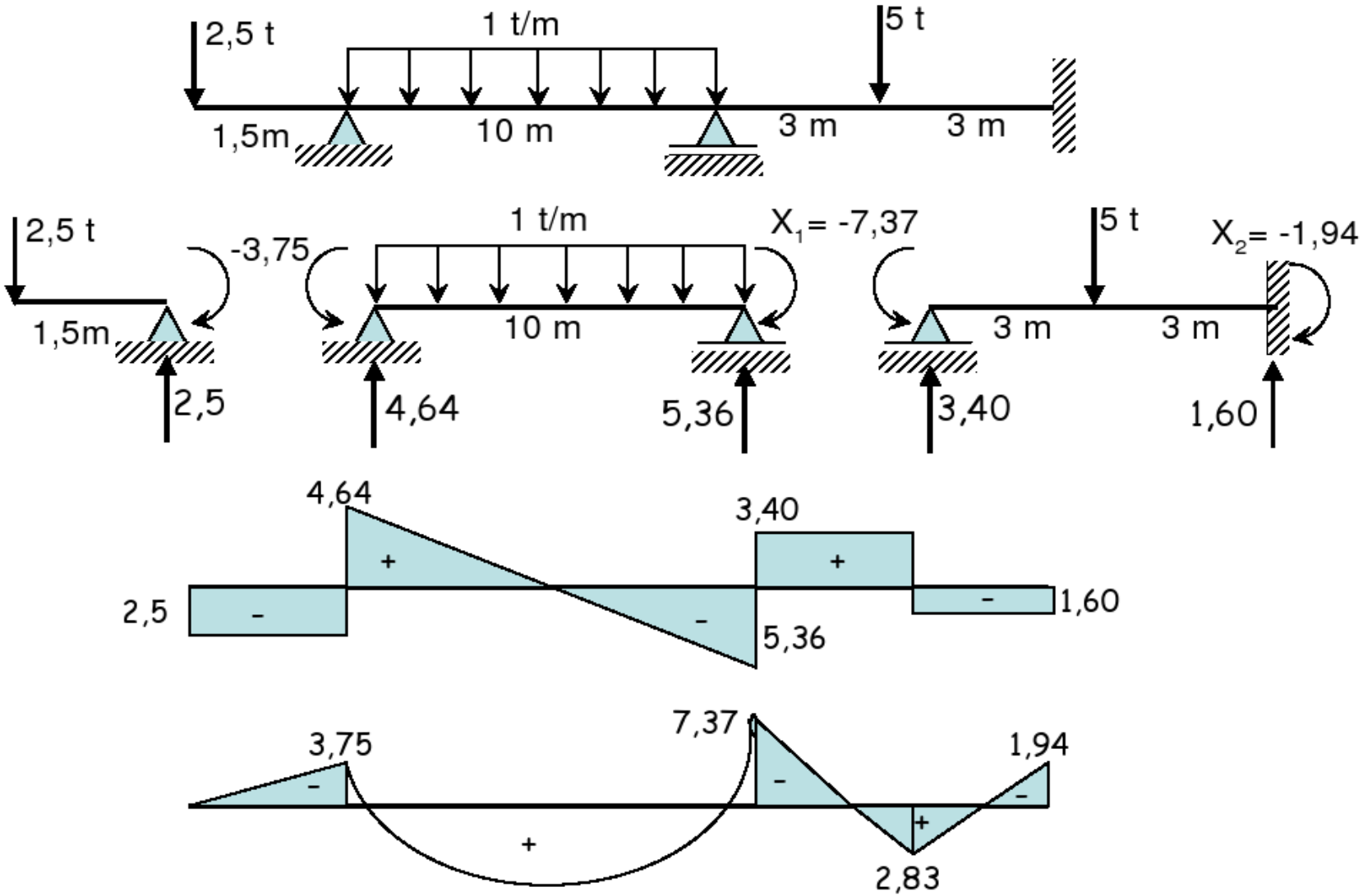
1. Mesnet $\frac{5}{I}X_0 + 2(\frac{5}{I}+\frac{6}{I})X_1 + \frac{6}{I}X_2 + \frac{125}{I} + \frac{67,5}{I} = 0$

2. Mesnet $\frac{6}{I}X_1 + 2(\frac{6}{I}+0)X_2 + 0\,X_2' + \frac{67,5}{I} + 0 = 0$

X_1= -7,37

X_2= -1,94

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Isı etkisi $$\delta_{nt} = \int \frac{\alpha \Delta t \, \overline{M}_d}{d} = \alpha \Delta t \left(\frac{L_{n-1}}{2d_{n-1}} + \frac{L_n}{2d_n} \right)$$

Mesnet çökmesinin etkisi $$\sum \overline{C} c = \left(-\frac{C_n}{L_n} \right) + \left(\frac{1}{L_n} + \frac{1}{L_{n+1}} \right) C_{n+1} - \frac{C_{n+2}}{L_{n+1}}$$

Şeklinde yazılır. Bu bağıntılar yukarıdaki denklem 1 de yerine yazılır ise.

$$\left[\frac{1}{EI_{n-1}} \frac{L_{n-1}}{3} + \frac{1}{EI_n} \frac{L_n}{3} \right] X_n + \left[\frac{1}{EI_n} \frac{L_n}{6} \right] X_{n+1} + \left[\frac{1}{EI_{n+1}} \frac{L_{n+1}}{6} \right] X_{n+2} + \left[\alpha \Delta t \left(\frac{L_{n-1}}{2d_{n-1}} + \frac{L_n}{2d_n} \right) \right] + \delta_{n0} = \sum \left[\left(-\frac{C_n}{L_n} \right) + \left(\frac{1}{L_n} + \frac{1}{L_{n+1}} \right) C_{n+1} - \frac{C_{n+2}}{L_{n+1}} \right]$$

olur. Bu denklemin her iki tarafı $6EI_{n-1}$ ile çarpılır ise,

$$(6EI_{n-1}) \left[\frac{1}{EI_{n-1}} \frac{L_{n-1}}{3} + \frac{1}{EI_n} \frac{L_n}{3} \right] X_n + \left[\frac{1}{EI_n} \frac{L_n}{6} \right] X_{n+1} + \left[\frac{1}{EI_{n+1}} \frac{L_{n+1}}{6} \right] X_{n+2} + \left[\alpha \Delta t \left(\frac{L_{n-1}}{2d_{n-1}} + \frac{L_n}{2d_n} \right) \right] + \delta_{n0} = (6EI_{n-1}) \sum \left[\left(\frac{C_n}{L_n} \right) + \left(\frac{1}{L_n} + \frac{1}{L_{n+1}} \right) C_{n+1} - \frac{C_{n+2}}{L_{n+1}} \right]$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

$$2\left[L_{n-1}+L_n\frac{I_{n-1}}{I_n}\right]X_n+\left[L_n\frac{I_{n-1}}{I_n}\right]X_{n+1}+\left[L_{n+1}\frac{I_{n-1}}{I_{n+1}}\right]X_{n+2}+\left[3EI_{n-1}\alpha\Delta t\left(\frac{L_{n-1}}{d_{n-1}}+\frac{L_n}{d_n}\right)\right]+6EI_{n-1}\delta_{no}=(6EI_{n-1})\sum\left[\left(-\frac{C_n}{L_n}\right)+\left(\frac{1}{L_n}+\frac{1}{L_{n+1}}\right)C_{n+1}-\frac{C_{n+2}}{L_{n+1}}\right]$$

bağıntısı elde edilir. Bu uzun bağıntı düzenlenecek olur ise,

$$6EI_{n-1}\delta_{no}=(6EI_{n-1})\int_0^{L_n}\frac{\overline{M}_n\,X}{EI_n\,L_n}dx+\int_0^{L_{n+1}}\frac{\overline{M}_{n+1}\,X'}{EI_{n+1}\,L_{n+1}}dx'=(6)\int_0^{L_n}\frac{\overline{M}_n\,X\,I_{n-1}}{I_n\,L_n}dx+\int_0^{L_{n+1}}\frac{\overline{M}_{n+1}\,X'}{L_{n+1}}dx'=$$

$$6L_{n-1}\frac{1}{L_{n-1}}\int_0^{L_{n-1}}6M_{0\,n-1}\,x\,dx+L_n\frac{1}{L_n}\int_0^{L_1}6M_{0\,n}\,x'\frac{I_{n-1}}{I_n}dx'$$

R_n

Sonuç denklem;

ClapeyronDenklemi

$$L_{n-1}X_{n-1}+2\left[L_{n-1}+L_n\frac{I_{n-1}}{I_n}\right]X_n+\left[L_n\frac{I_{n-1}}{I_n}\right]X_{n+1}=-S_{n-1}L_{n-1}-R_nL_n\frac{I_{n-1}}{I_n}$$

$$-3EI_{n-1}\alpha\Delta t\left[\frac{L_{n-1}}{d_{n-1}}+\frac{L_n}{d_n}\right]+6EI_{n-1}\left[\frac{C_{n-1}}{L_{n-1}}\left(\frac{1}{L_{n-1}}+\frac{1}{L_n}\right)C_n-\frac{C_{n+1}}{L_n}\right]$$

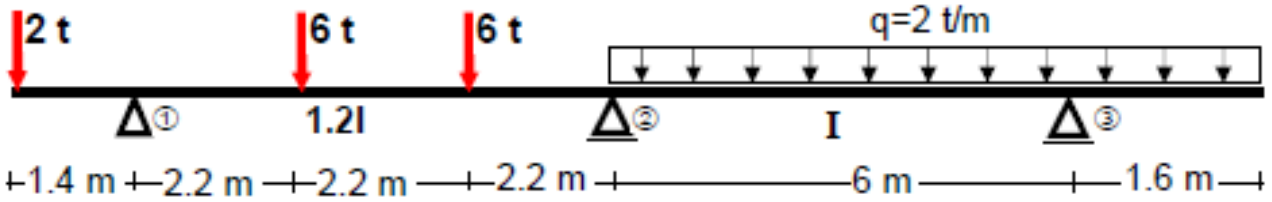
Yük terimleri,

$$S_{n-1}=\frac{6EI_{n-1}}{L_{n-1}}Q_{nsol}$$

$$R_n=\frac{6EI_n}{L_n}Q_{nsağ}$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

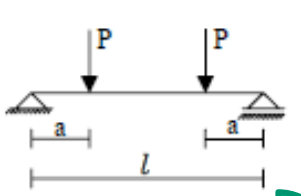
ÖRNEK : Verilen mütemadi kirişin M alanın **üç moment denklemleri** kullanılarak elde edilmesi



Yük Terimleri Yayılı yük için $L=R=q.l^2/4=18$

6 t luk iki tekil yük için $L=R=3(2.2)6(1-2.2/6.6)$

$L=R=26.4$



$$\mathcal{L} = \mathcal{R} = 3Pa\left(1-\frac{a}{l}\right)$$

$x_1 = -2.8$

x_2

6.6/1.2I		6/I	
26.4	26.4	18	18
145.2/I	145.2/I	108/I	108/I

$x_3 = -2,56$

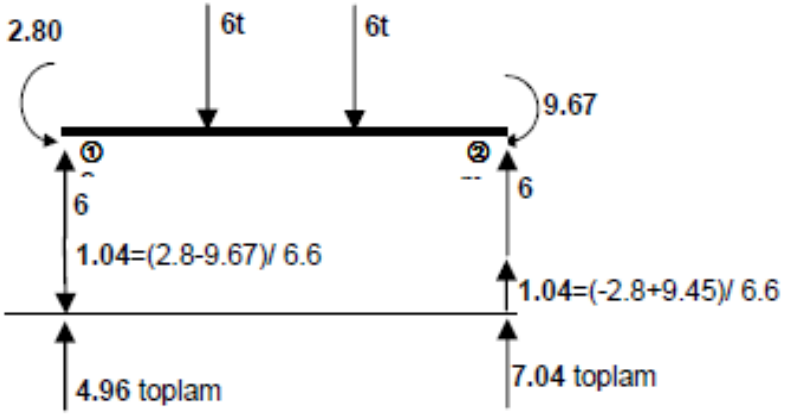
$[6.6/1.2I]x_1+2[(6.6/1.2I)+(6/I)]x_2+[6/I]x_3+[145.2/I]+[108/I]=0$

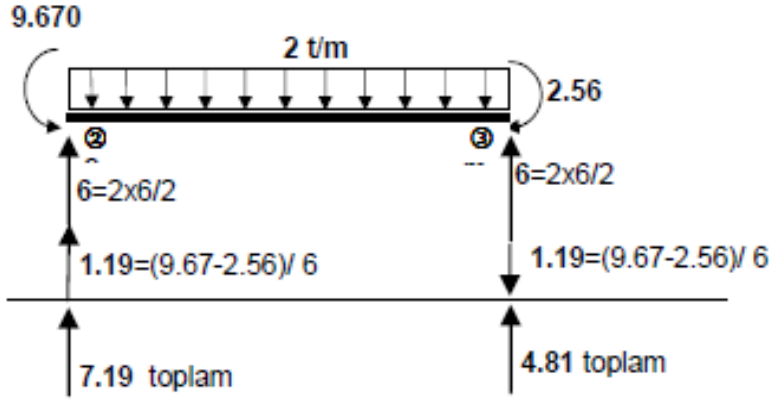
$5.5(-2.8)+2[5.5+6]\,x_2+6(-2.56)+253.2=0$

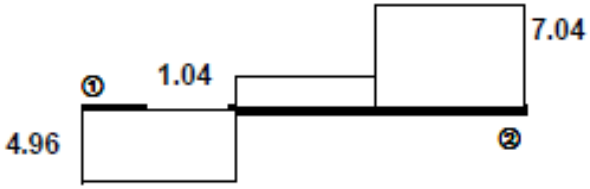
$-30.76+23x_2+253,2=0$

$x_2=-9,67$

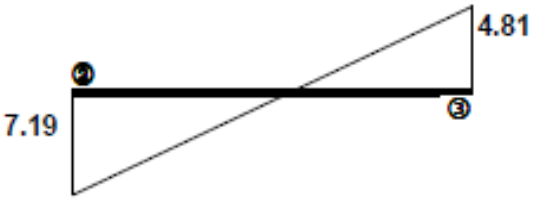
Kirişler çıkarılarak moment ve kesme kuvvet diyagramları aşağıdaki şekilde elde edilir.



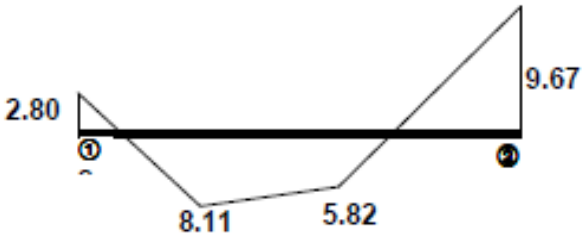


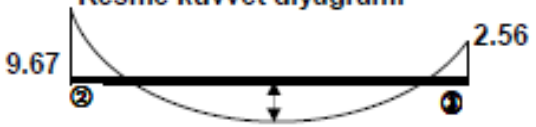


Kesme kuvvet diyagramı



Kesme kuvvet diyagramı

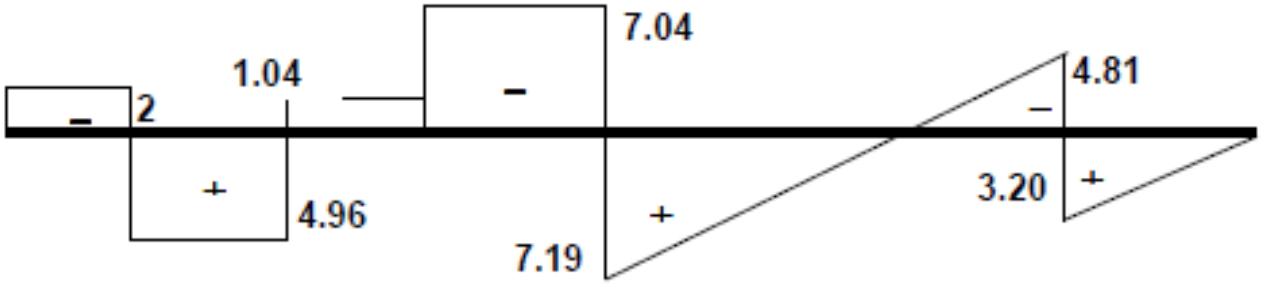




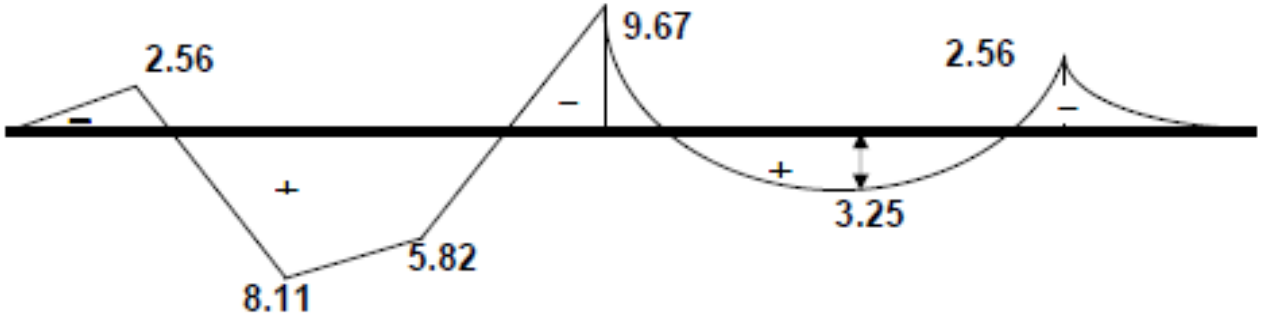
$$\max M_{aç} = \frac{7.19^2}{2 \times 2} - 9.67 = 3.25\ \text{tm}$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Kesme kuvvet diyagramı

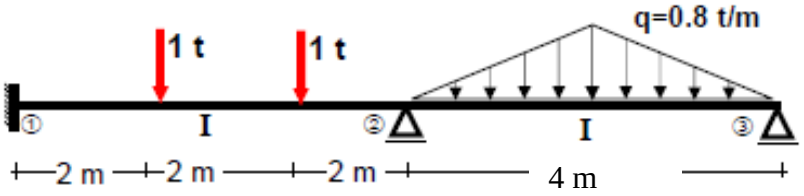


Moment diyagramı



Abdulkadir Cüneyt AYDIN

ÖRNEK : Şekilde verilen mütemadi kirişin moment alanın **üç moment denklemleri** kullanılarak elde edilmesi



Yük Terimleri Yayılı yük için $L=R=[5/32]q.l^2=2$

1 t luk iki tekil yük için $L=R=3(2)1(1-2/6)=4$

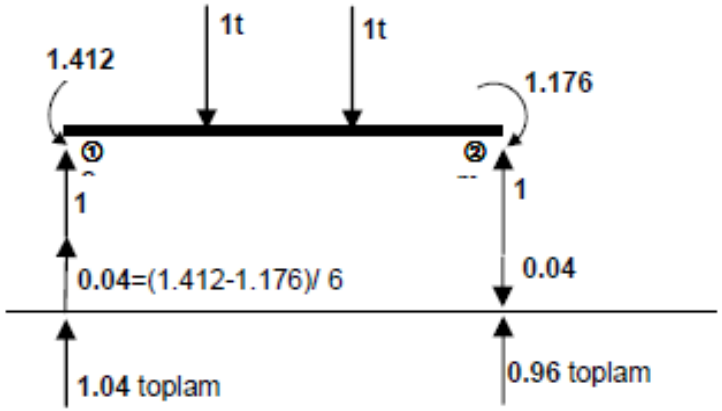
0	6/I	4/I
0	4 4	2 2
0	24/I 24/I	8/I 8/I

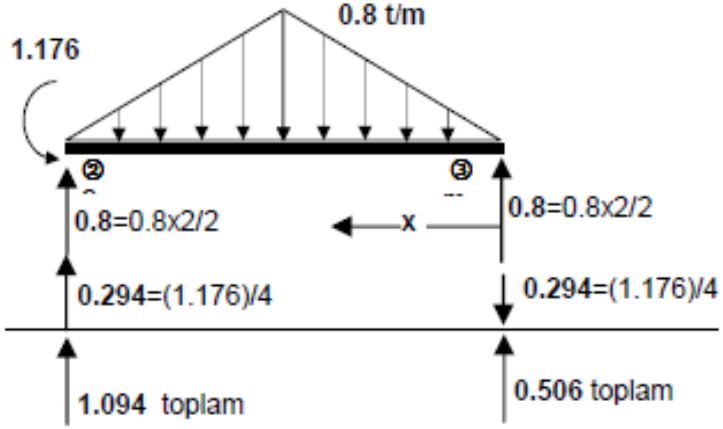
$0.x_1'+2[(6/I)+0]x_1+(6/I)x_2+(24/I)+(0)=0$

$(6/I)x_1+2[(6/I)+(4/I)]\,x_2+(4/I)x_3+(24/I)+(8/I)=0$

$12x_1+6x_2+24=0$

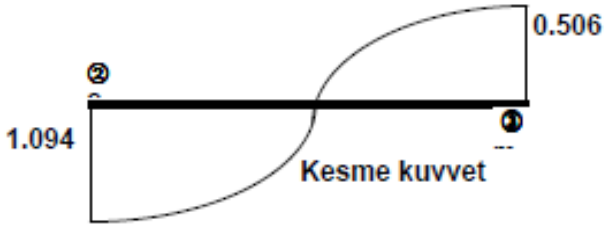
$6x_1+20x_2+0+32=0$ => **$x_2=-1.176$** ve **$x_1=-1.412$**

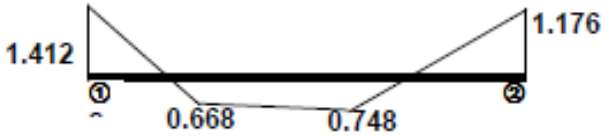


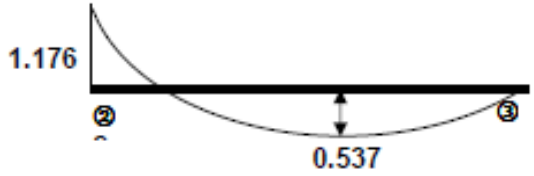




Kesme kuvvet diyagramı







Maksimum açıklık momenti $0.506-\frac{0.8x^2}{2\ 2}=0 \quad x=1.59 \quad q_x=\frac{0.8}{2}1.59=0.636t/m$

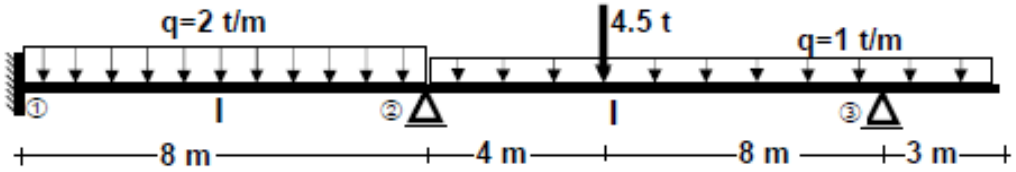
$\mathbf{maxM_{aç}}=0.506x1.59-\frac{0.636\,x\,1.59}{2}(\frac{1.59}{3})=0.537tm$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

ÖRNEK : Şekilde verilen mütemadi kirişin, ($E=2.10^6$ t/m^2 $I=0.01$ m^4 $\alpha=10^{-5}$)

a. Dış yükler altında moment alanın
b. **$\Delta t=20^oC$** sıcaklı değişiminden dolayı oluşan moment alanının ($d_1=0.7$ m $d_2=0.9$ m)
c. Mesnet çökmelerinden dolayı oluşan moment alanının (①=0.2 cm↓ ②=0.5 cm↓ ③=0.4 cm↓)

üç moment denklemleri kullanılarak elde edilmesi **(1 mesnedindeki dönme 1/800 rad –saat yönünde)**



Dış yükleme durumu için üç moment denklemleri,

① düğümünde $0+2\left[0+\frac{8}{I_1}\right]X_1+\left[\frac{8}{I_1}\right]X_2=0-\left[\frac{8}{I_1}\cdot\frac{2x8^2}{4}\right]$ $\quad R=\frac{qL^2}{4}$

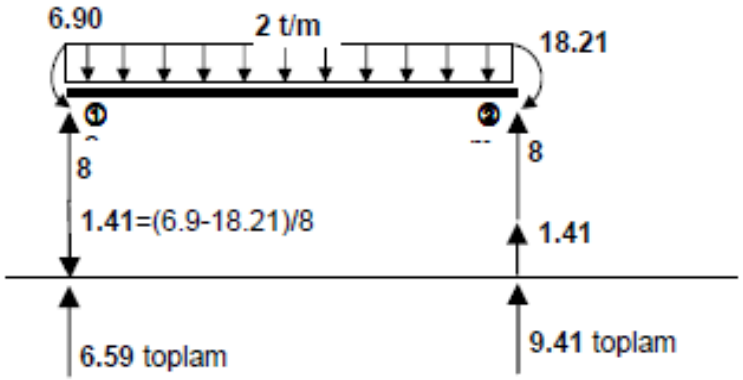
② düğümünde $\left[\frac{8}{I}\right]X_1+2\left[\frac{8}{I}+\frac{12}{2I}\right]X_2+\left[\frac{12}{2I}\right]X_3=-\left[\frac{8}{I}\cdot\frac{2x8^2}{4}\right]-\left[\frac{12}{2I}\right]\left[\frac{1x12^2}{4}+\frac{4.5x4x8(12+8)}{12^2}\right]$

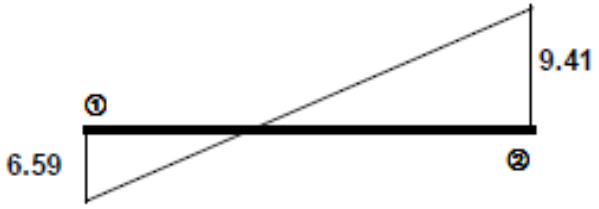
$X_3=-\frac{1x3^2}{2}=-4.5\,tm$ olarak alınır ① ve ② düğüm denge denklemleri düzenlenerek aşağıdaki şekilde çözülerek bilinmeyenler bulunur.

$16X_1+8X_2=-256$ $\qquad X_1=-6.90$

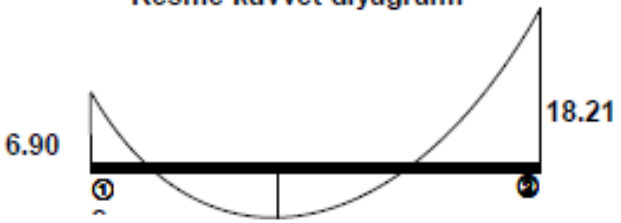
$8X_1+28X_2=-565$ $\qquad X_2=-18.21$

Açıklık momentlerinin bulunması,

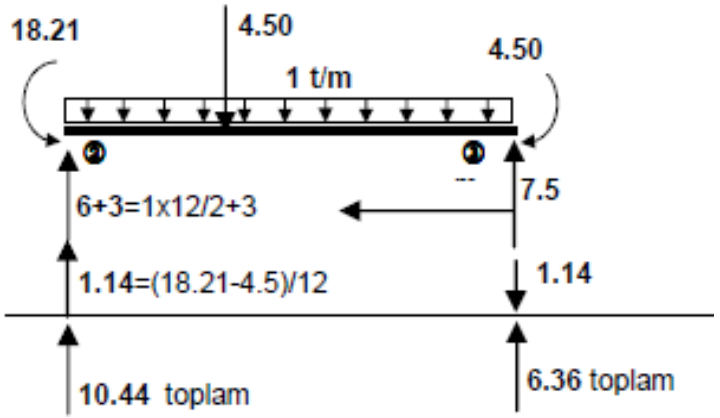


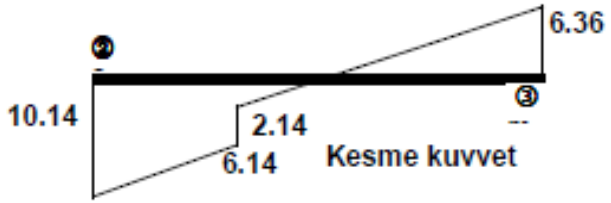


Kesme kuvvet diyagramı



$$\max M_{aç} = \frac{6.59^2}{2 \times 2} - 6.90 = 3.96$$







$$\max M_{aç} = \frac{6.36^2}{2 \times 1} - 4.5 = 15.72 \text{ tm}$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

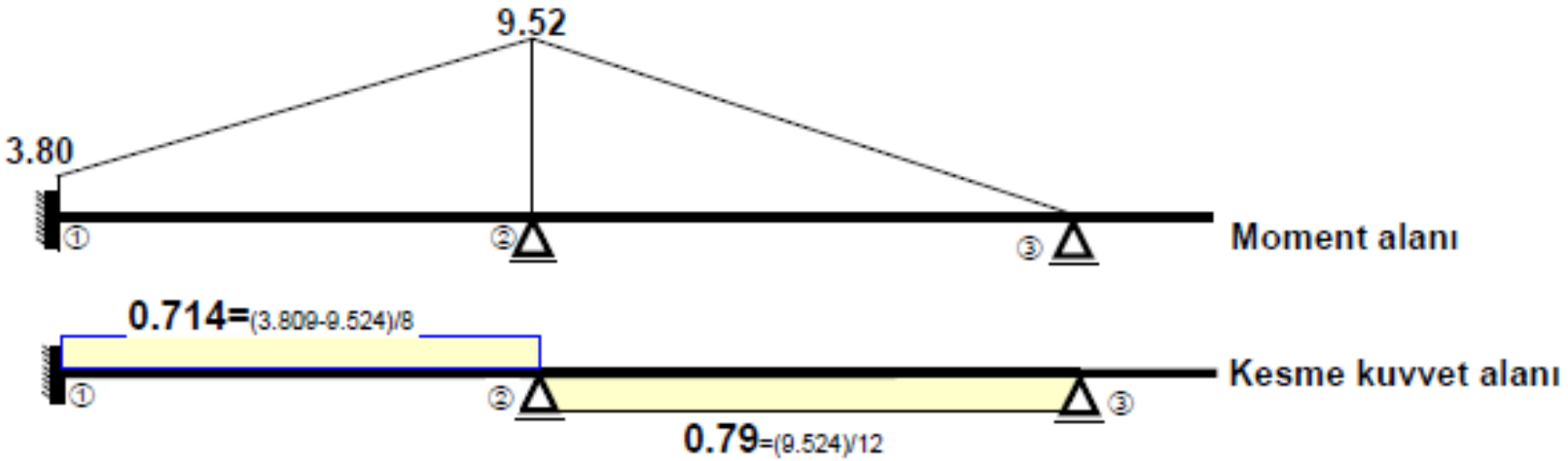
b. Sıcaklı değişimi

$$①\quad 0+2\left[0+\frac{8}{I_1}\right]X_1+\left[\frac{8}{I_1}\right]X_2=-3xExax\Delta t\frac{L}{d}$$

$$②\quad \left[\frac{8}{I}\right]X_1+2\left[\frac{8}{I}+\frac{12}{2I}\right]X_2+\left[\frac{12}{2I}\right]X_3=-3xExax20x\left[\frac{8}{0.7}+\frac{12}{0.9}\right]$$

$16X_1+8X_2=-137.24$ $\quad X_1=-3.809tm$

$8X_1+28X_2=-297.10$ $\quad X_2=-9.524\,tm$



$$(6EI_{n-1})\sum\left[\left(\frac{C_n}{L_n}\right)+\left(\frac{1}{L_n}+\frac{1}{L_{n+1}}\right)C_{n+1}-\frac{C_{n+2}}{L_{n+1}}\right]$$

c. Mesnet çökmesi hali için çözüm ①

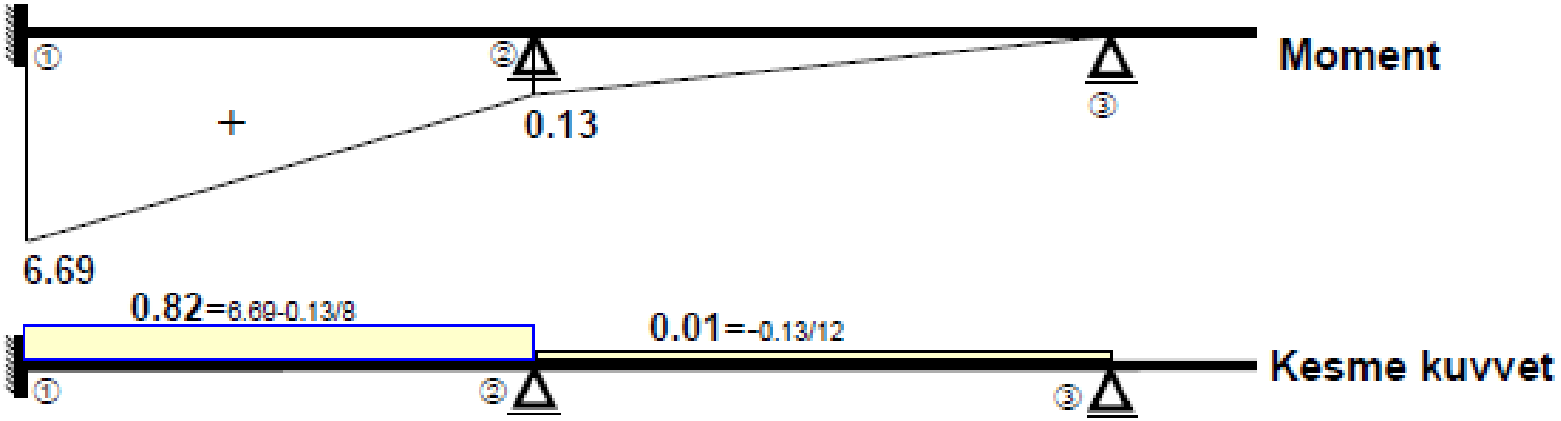
$$0+2\left[0+\frac{8}{I_1}\right]X_1+\left[\frac{8}{I_1}\right]X_2=-6E\left[\frac{1}{800}+\frac{0.005-0.002}{8}\right]$$

②

$$\left[\frac{8}{I}\right]X_1+2\left[\frac{8}{I}+\frac{12}{2I}\right]X_2+\left[\frac{12}{2I}\right]X_3=-6E\left[\frac{0.002}{8}-\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{12}\right)0.005+\frac{0.004}{12}\right]$$

$$16X_1+8X_2=104.40 \qquad X_1=6.69tm$$

$$8X_1+28X_2=55.20 \qquad X_2=0.13tm$$



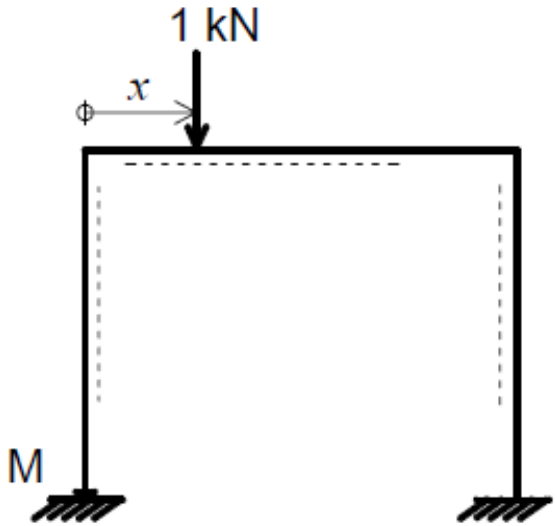
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

HAREKETLİ YÜKLERE GÖRE HİPERSTATİK SİSTEMLERİN HESABI

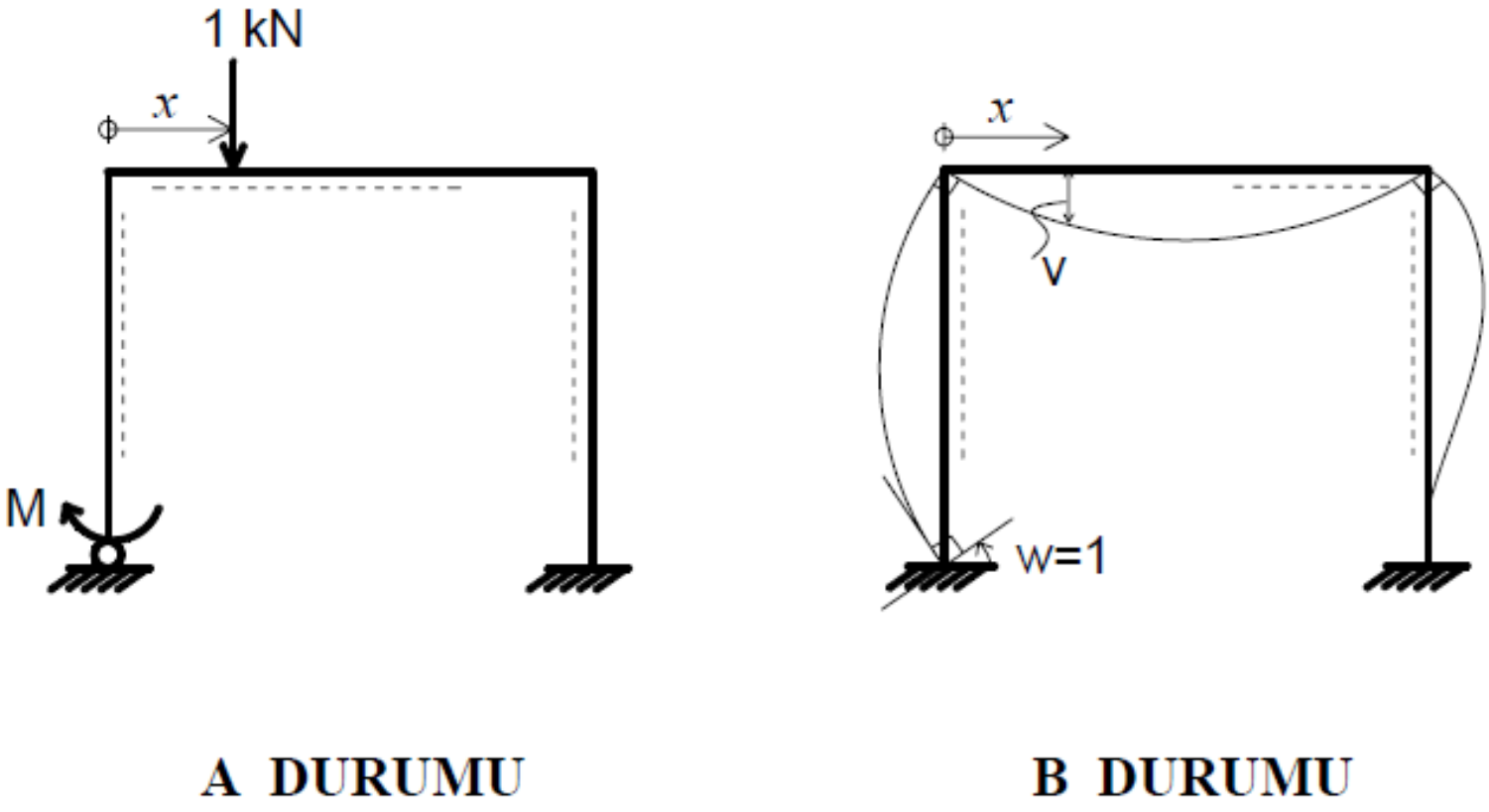
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

MESNET TEPKİSİ VEYA KESİT ZORU TESİR ÇİZGİLERİNİN KUVVET YÖNTEMİ İLE ÇİZİLMESİ

Yapı sistemlerindeki herhangi bir mesnet tepkisinin veya kesit zorunun tesir çizgisinin kuvvet yöntemi ile çizilebilmesi için, Betti Teoreminden yararlanılabilir. Bu teoreme göre, tesir çizgisi çizilecek büyüklükle (mesnet tepkisi veya kesit zoru ile) aynı doğrultuda ve ters yöndeki birim yerdeğiştirme yüklemesinden oluşan elastik eğri, sözkonusu büyüklüğün tesir çizgisine eşdeğerdir.



Şekil 1. Ankastre çerçeve



Şekil 2. Betti Teoreminin uygulanması

Örnek olarak, her iki mesneti de ankastre olan hiperstatik sistemde, (Şekil 1), sol mesnetteki eğilme momenti (M) tesir çizgisini çizmek üzere Betti Karşıtlık Teoremini uygulayalım. Bilindiği gibi, her iki mesnedi de ankastre olan sistem, soldaki mesnedin mafsallı mesnet olarak alındığı ve o kesitteki eğilme momentinin (M) dışarıdan yük olarak yüklendiği, Şekil 2 de A durumu olarak verilen sisteme eşdeğerdir. Şekil 2 de, B durumu olarak verilen sisteme ise, M eğilme momenti ile ters yönde birim yerdeğiştirme uygulayalım.

Betti karşıtlık teoremi uyarınca,

A durumundaki dış kuvvetlerin B durumundaki yerdeğiştirmelerde yaptığı iş, B durumundaki dış kuvvetlerin A durumundaki yerdeğiştirmelerde yaptığı işe eşit olmalıdır. Yani,

$$1 \times v - M \times w = 0$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

ifadesi geçerli olmalıdır. B durumundaki sistemde, mesnet tepkileri dışında dış kuvvet bulunmadığından ifadenin sağ tarafı sıfıra eşit olmaktadır. w yerdeğiştirmesi de birim değer aldığından sözkonusu iş ifadesi,

$$M = v$$

halini alır. Yukarıdaki ifade, 1 kN'luk tekil kuvvetin bütün konumları için geçerli olduğundan, M tesir çizgisi, $w = 1$ durumundaki elastik eğriye (yerdeğiştirme diyagramına) eşdeğerdir.

Tesir çizgileri, Kuvvet Yöntemi ile doğrudan çizilemez. Önce, hiperstatik sistemde birim yerdeğiştirme yüklemesinden meydana gelen M eğilme momenti diyagramı çizilir, (uzama ve kayma şekildeğiştirmelerinin de gözönüne alınması durumunda, δ katsayılarının hesabında bunlara ait işler de hesaba katılmalıdır). Bu diyagramın çizilmesi için hesap, Kuvvet Yöntemi ile mesnet çökmelerine göre hesaba benzer şekilde yapılır. Tesir çizgisi çizilecek büyüklüğün kesit zoru olması durumunda, kesit zorunun bulunduğu noktaya ters yönde rölatif birim yerdeğiştirme verimelidir.

TESİR ÇİZGİSİ ORDİNATLARININ ELDE EDİLMESİ

Tesir çizgisi ordinatlarının elde edilmesi için, daha önceden anlatılan yöntemle, birim yerdeğiştirme durumunda, sistemin istenen noktalarındaki yerdeğiştirmelerin bulunması gerekmektedir. Bu amaçla, öncelikle birim yerdeğiştirme yüklemesinden meydana gelen eğilme momenti diyagramı $M_{(v=1)}$ Kuvvet Yöntemi ile çizilir. Daha sonra, seçilmiş olan İzosatatik Esas Sisteme veya Kısaltma Teoremine göre daha basit bir eğilme momenti diyagramı verecek farklı bir izostatik sisteme, tesir çizgisi ordinatı hesaplanacak doğrultuda ve yönde birim yükleme yapılarak $\overline{M_0}$ veya $\left(\overline{M_0}\right)$ diyagramı çizilir. Son olarak, sözkonusu tesir çizgisi ordinatı Virtüel İş Teoremi ile

$$v + birim\ yerdeğiştirmenin\ işi = \int M_{(v=1)} \overline{M_0} \left[\frac{I_c}{I}\right] ds$$

veya

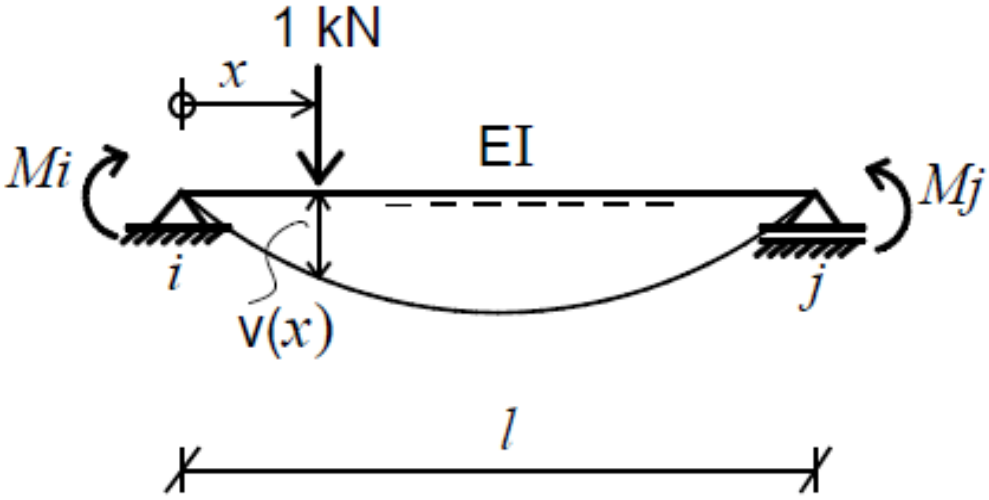
$$v + birim\ yerdeğiştirmenin\ işi = \int M_{(v=1)} \left(\overline{M_0}\right) \left[\frac{I_c}{I}\right] ds$$

şeklinde hesaplanır. Yukarıdaki ifadelerden de görüldüğü gibi, yerdeğiştirme ifadesinde, uygulanan birim yerdeğiştirmenin işi de gözönüne alınmalıdır. Ordinat sayısının fazla olması durumunda hesaplar uzayacağından, integral ifadelerindeki $\overline{M_0}$ ve $\left(\overline{M_0}\right)$ diyagramlarının, 1 kN luk tekil kuvvetin konumuna bağlı olarak, fonksiyon olarak yazılması kolaylık sağlamaktadır. Bu şekilde tesir çizgisi fonksiyonu direkt olarak da elde edilebilir. Herhangi bir kesite ait kesme kuvveti tesir çizgisi için de benzer yol uygulanır. Tesir çizgisi çizilecek kesite, ters yönlü birim rölatif doğrusal yerdeğiştirme uygulanır ve bu duruma ait eğilme momenti diyagramı Kuvvet Yöntemi ile çizilir. Daha sonra tesir çizgisi aranan noktalara sırasıyla birim yüklemeler yapılarak Virtüel İş Teoremi ile ordinatlar hesaplanır. Birim yüklemelerde kesme kuvvetlerinin kesitin sağında ve solunda farklı değerler alabileceği ve ordinatların hesabındaki birim yerdeğiştirmenin işlerinde, bu durumun gözönüne alınması gerektiği unutulmamalıdır. Kesme kuvveti tesir çizgileri, bu şekilde elde edilebileceği gibi, çubuğun sol ve sağ uçlarındaki eğilme momenti tesir çizgileri çizildikten sonra, çubuk denge

denklemleri ile de elde edilebilir. Bu durumda, aynı açıklıklı basit kirişin aynı kesitindeki kesme kuvveti tesir çizgisi de denge denklemlerinde gözönünde bulundurulmalıdır.

$$T_m(t.ç.) = T_{0m}(t.ç.) + \frac{M_i(t.ç.) + M_j(t.ç.)}{L}$$

Tesir çizgisi ordinatları elde edilecek çubuğun her iki ucundaki doğrusal uç yerdeğiştirmelerinin sıfır olması özel durumunda (**Düğüm Noktaları Sabit Sistemlerde**) tesir çizgisi ordinatları (çökmeler) çubuğun uçlarındaki birim yerdeğiştirme yüklemesinden meydana gelen eğilme momentlerine bağlı olarak aşağıdaki şekilde elde edilebilir.



$\varepsilon = \frac{x}{l}$ olmak üzere, doğru eksenli prizmatik çubuğun herhangi bir noktasındaki tesir çizgisi ordinatı

$$v(x) = M_i \frac{l^2}{6EI}(2\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3) + M_j \frac{l^2}{6EI}(\varepsilon - \varepsilon^3)$$

formülü ile hesaplanır.

Hesaplarda EI eğilme rijitlikleri yerine $\left[\frac{I_c}{I}\right]$ atalet momenti oranları kullanılmışsa, tesir çizgisi ordinatları

$$v(x) = M_i \frac{l^2}{6}\left[\frac{I_c}{I}\right](2\varepsilon - 3\varepsilon^2 + \varepsilon^3) + M_j \frac{l^2}{6}\left[\frac{I_c}{I}\right](\varepsilon - \varepsilon^3)$$

formülü ile hesaplanmalıdır.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

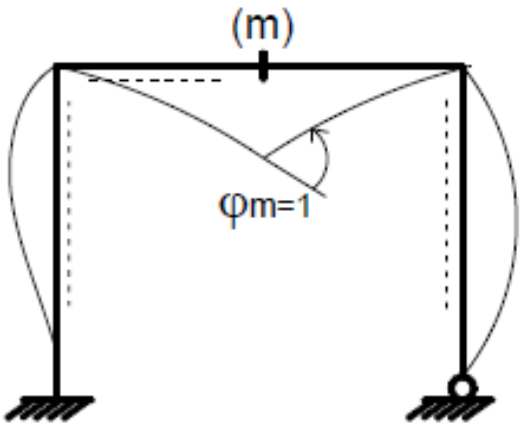
Yukarıda verilen formüller, Düğüm Noktaları Hareketli Sistemlerde de, ara noktalardaki ordinatların hesaplanmasında kullanılabilir. Düğüm noktaları hareketli sistemlerde çubuk uçlarındaki doğrusal yerdeğiştirmelerden bazıları sıfırdan farklı olacağından, önce yukarıda açıklanan birim yüklemeler yapılarak sözkonusu uç yerdeğiştirmeleri, yani çubuk uçlarındaki tesir çizgisi ordinatları elde edilir. Daha sonra, birim yerdeğiştirme yüklemesinden meydana gelen eğilme momentlerine bağlı olarak yukarıdaki formüller yardımıyla ara noktalardaki değerler hesaplanır. Son olarak, ara noktalarda hesaplanan bu değerler, çubuk doğrusal uç yerdeğiştirmelerinden aynı ara noktalarda meydana gelen değerlerle toplanarak tesir çizgisinin çubuk üzerindeki ordinatları elde edilir.

NOT: Hesaplarda uzama ve kayma şekildeğiştirmelerinin etkilerinin de dikkate alınması durumunda, Virtüel İş İfadelerinde, N normal kuvvetlerinin ve T kesme kuvvetlerinin işleri de gözönüne alınmalıdır.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

HERHANGİ BİR BÜYÜKLÜĞE (KESİT ZORUNA VEYA MESNET TEPKİSİNE) AİT TESİR ÇİZGİSİNİN ŞEKLİNİN BELİRLENMESİ

Sistem üzerinde verilmiş belirli bir (m) kesitine ait herhangi bir büyüklüğe (kesit zoru veya mesnet tepkisine) ait tesir çizgisinin şeklinin belirlenmesi için, Bölüm 1. de verilen yöntemden yararlanılır. Buna göre, tesir çizgisi aranan büyüklükle aynı doğrultuda ve ters yönde birim yerdeğiştirme yüklemesi yapılarak sistemin elastik eğrisinin (yerdeğiştirme diyagramının) şekli tahmin edilir.



Şekil 3. Bir mesnedi ankastre, diğer mesnedi mafsallı çerçeve

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Örnek olarak, Şekil 3. de gösterilen, bir mesnedi ankastre diğer mesnedi mafsallı olan çerçevede, (m) ile gösterilen kesitteki eğilme momenti tesir çizgisinin şekli belirlenmek istensin. Bunun için (m) noktasına şekilde gösterildiği gibi rölatif birim yerdeğiştirme uygulanarak, elastik eğri tahmin edilir. Birim yerdeğiştirme yüklemesinden meydana gelen elastik eğrinin (tesir çizgisinin) şekli tahmin edilirken, birbirine rijit olarak birleşen düğüm noktalarının, şekildeğiştirme sonrasında da rijit kaldıkları yani düğüm noktasında birleşen bütün çubukların uçlarının aynı miktarda döndükleri unutulmamalıdır.

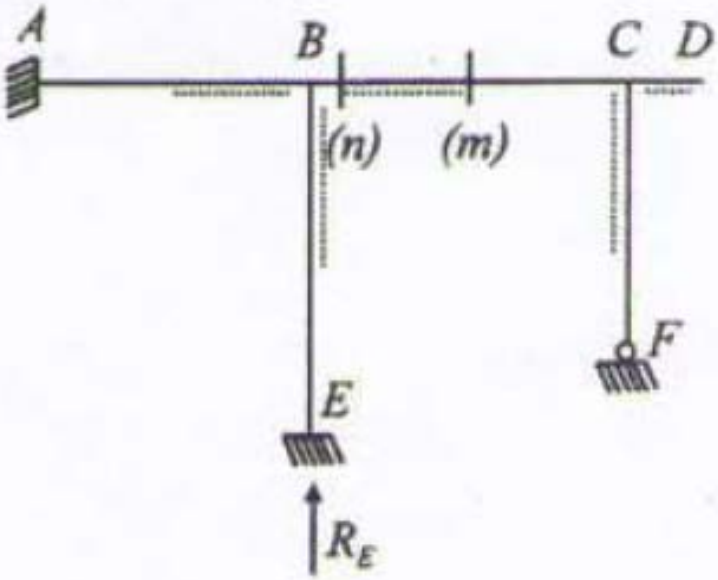
Tesir çizgisi şeklinin belirlenmesi ile birlikte, ordinatlarının da sayısal olarak hesabı istenirse, Bölüm 1.1. de açıklanan yol kullanılarak ordinatlar ayrı ayrı hesaplanır.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

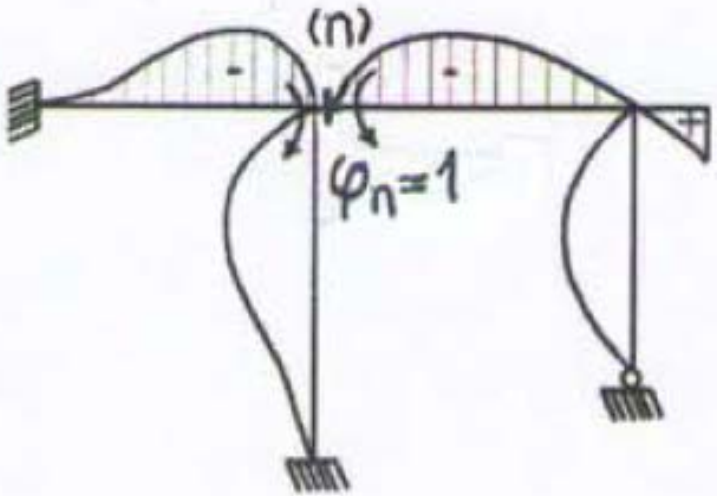
UYGULAMA:

a) M_n, M_m, T_m, M_E, R_E tesir çizgilerinin şekillerinin çizilmesi. (1^{kN}luk düşey kuvvet ABCD arasında dolaşmaktadır.)

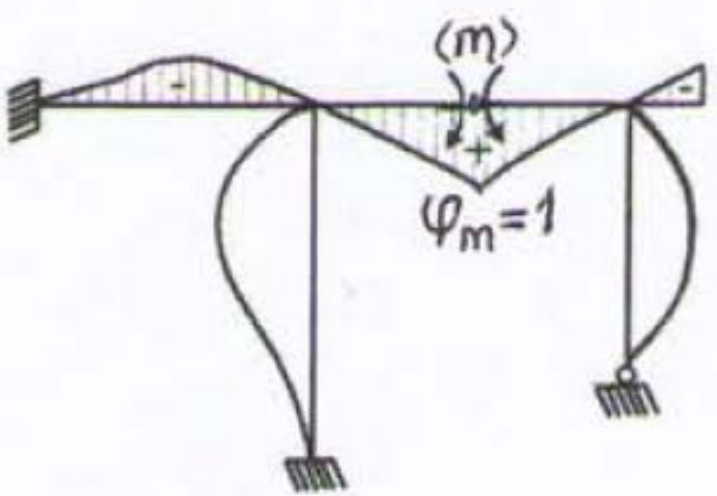
b) Birinci tip hareketli yük için maksimum ve minimum M_m eğilme momentini veren yüklemelerin belirlenmesi



Abdulkadir Cüneyt AYDIN

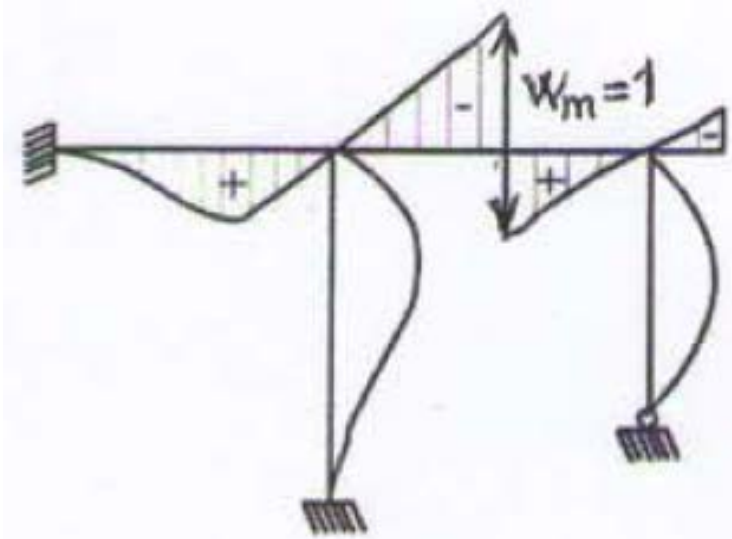


M_n tesir çizgisi

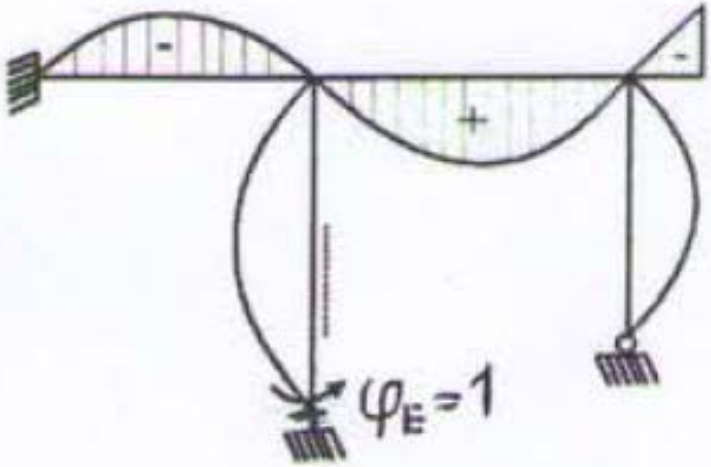


M_m tesir çizgisi

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

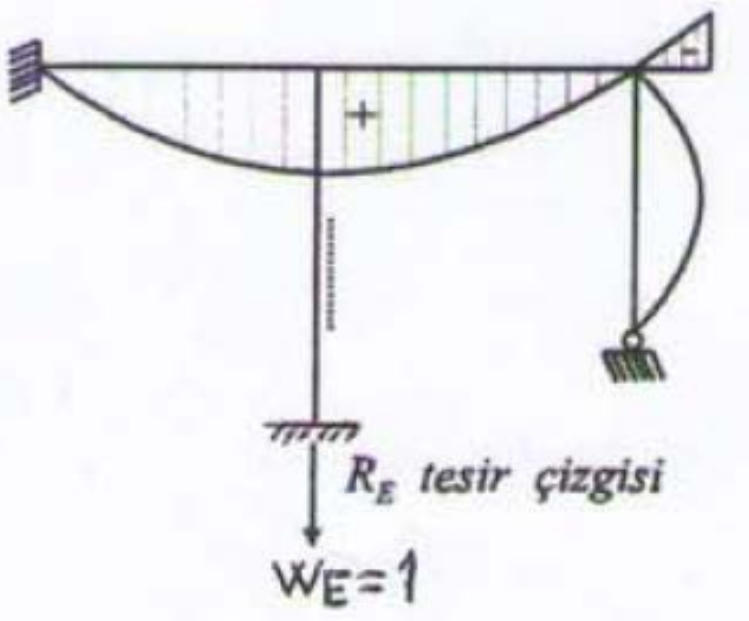


T_m tesir çizgisi



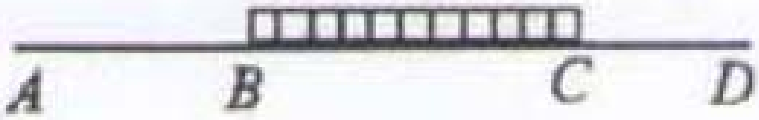
M_E tesir çizgisi

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



b)

Max M_m yüklemesi

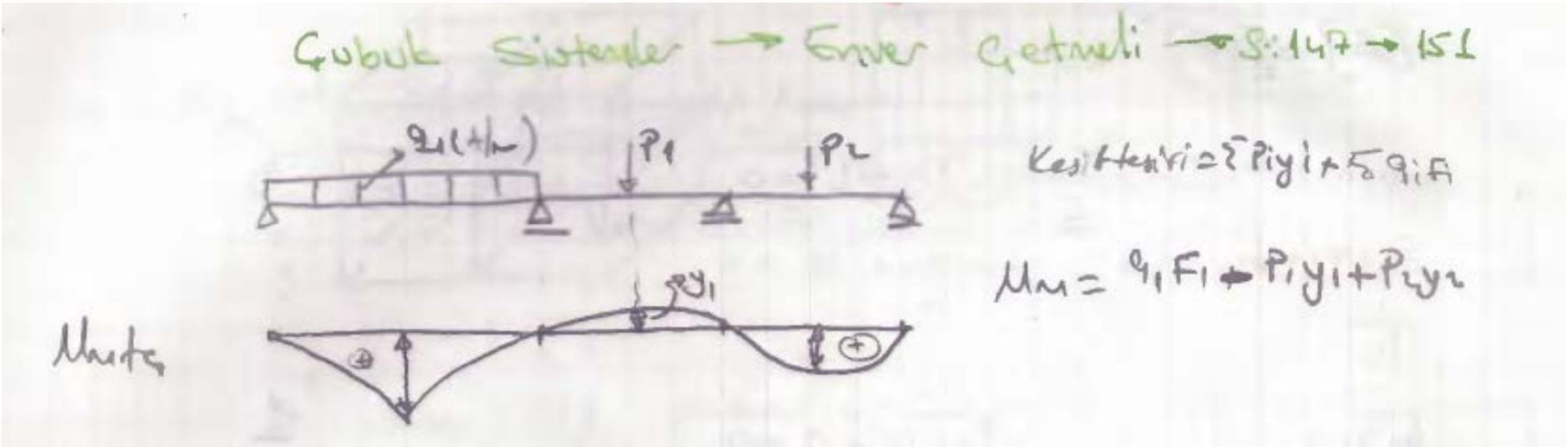


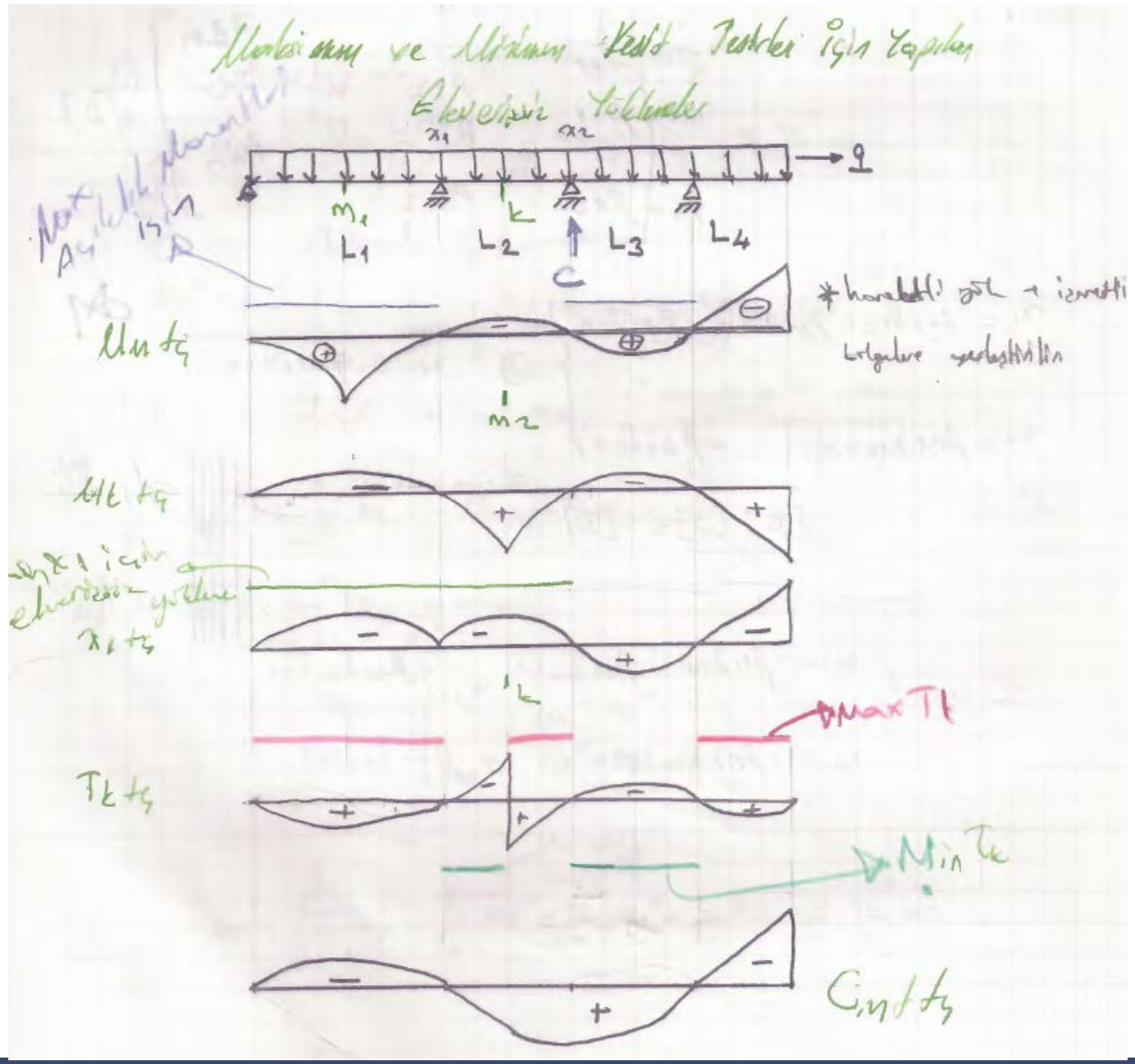
Min M_m yüklemesi



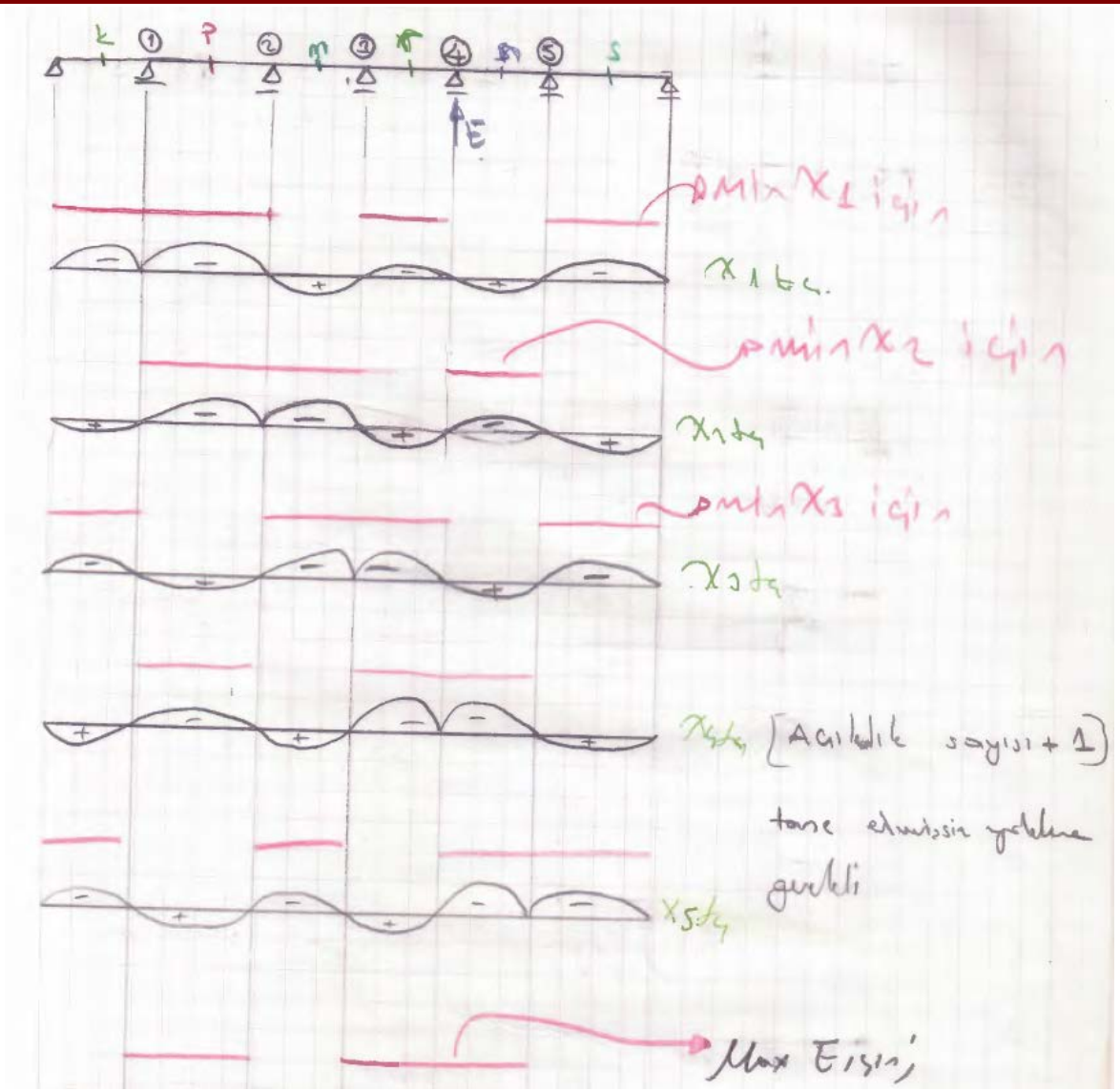
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

SÜREKLİ KİRİŞLERİN TESİR ÇİZGİLERİNİN ORDİNATLARI VE ALANLARI



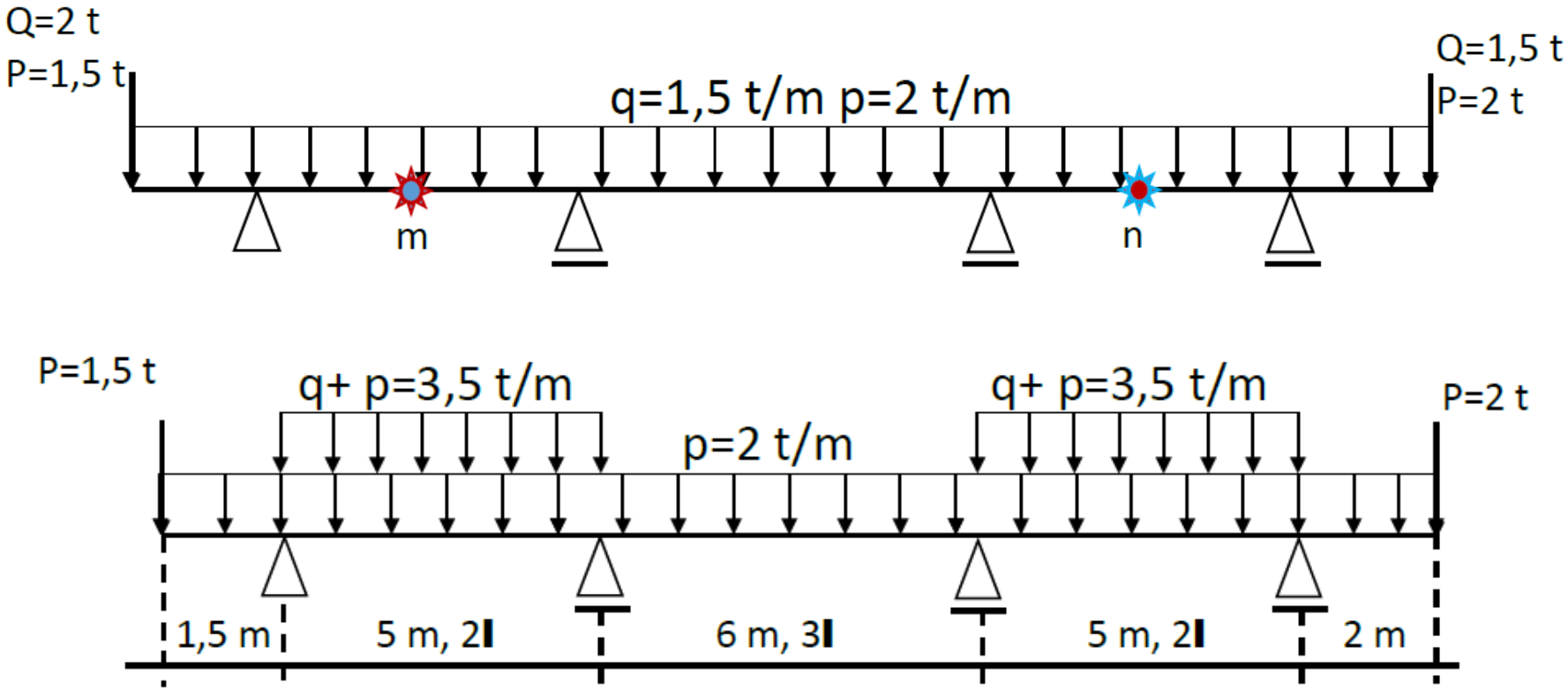


Abdulkadir Cüneyt AYDIN

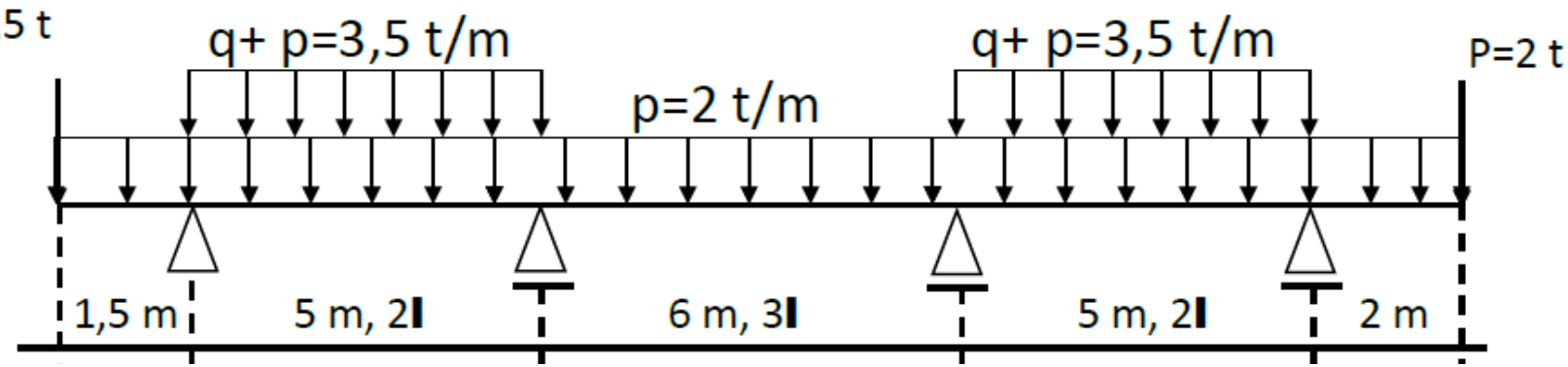


Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Örnek: m ve n kesitlerindeki maksimum moment değerlerini (maks.M_m ve maks.M_n) bulunuz.



Abdulkadir Cüneyt AYDIN



X_0=1,5.1,5+2.1,5.0,75 =-4,5 tm

X_1

X_2

X_3= 2.2+2.2.1=-8 tm

5/2I		6/3I		5/2I	
21,875	21,875	18	18	21,875	21,875
54,69/I	54,69/I	36/I	36/I	54,69/I	54,69/I

$$\frac{5}{2I}.(-4{,}5)+2.\left(\frac{5}{2I}+\frac{6}{3I}\right).X_1+\frac{6}{3I}.X_2+\frac{54{,}69}{I}+\frac{36}{I}=0$$

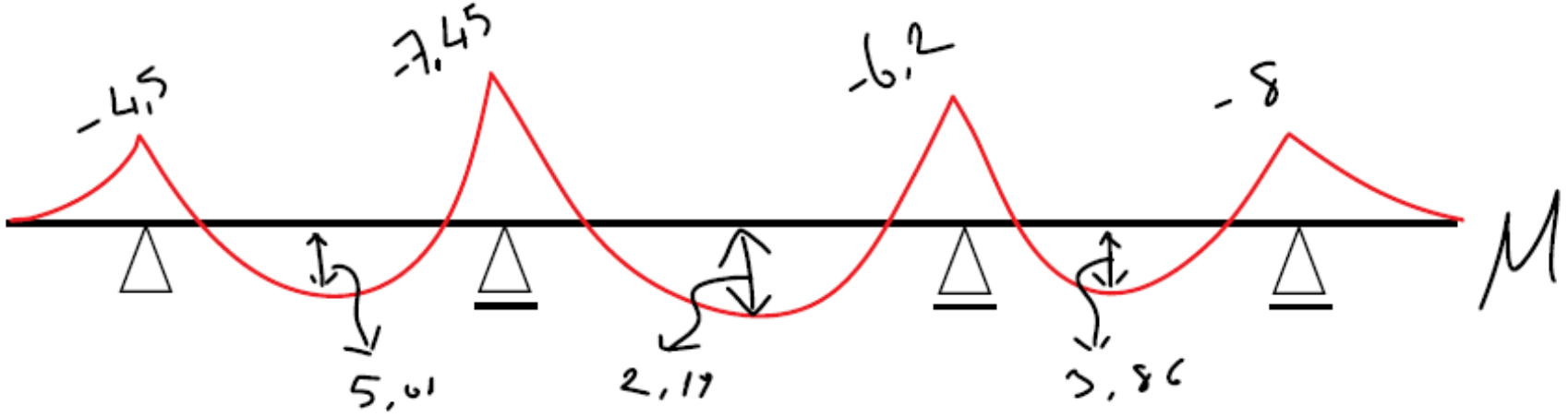
$$\frac{2}{I}.X_1+2.\left(\frac{2}{I}+\frac{2{,}5}{I}\right).X_2+\frac{2{,}5}{I}.(-8)+\frac{54{,}69}{I}+\frac{36}{I}=0$$

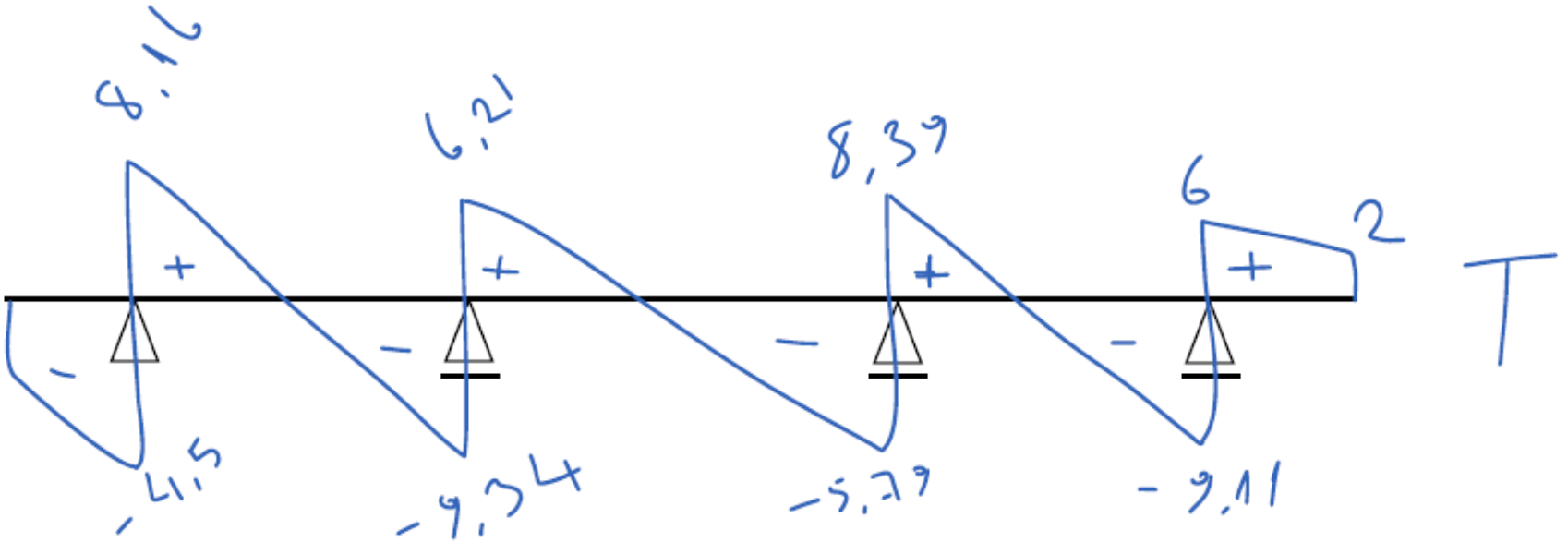
X_1=-7,45 tm

X_2=-6,2 tm

$\mathcal{L}=\mathcal{R}=q.l^2/4$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN





Abdulkadir Cüneyt AYDIN

MOMENT DAĞITMA

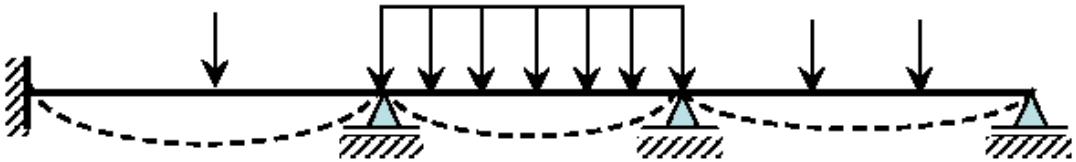
(CROSS YÖNTEMİ)

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

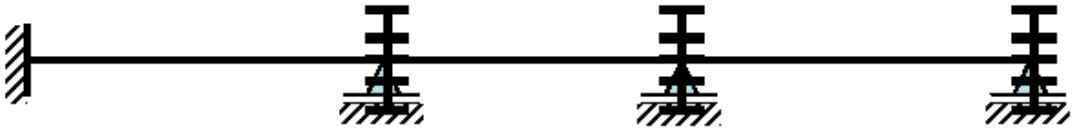
Moment Dağıtma Yöntemi (Cross Metodu)

Moment dağıtma yöntemi iteratif bir yöntemdir. Elle hesaba uygundur.

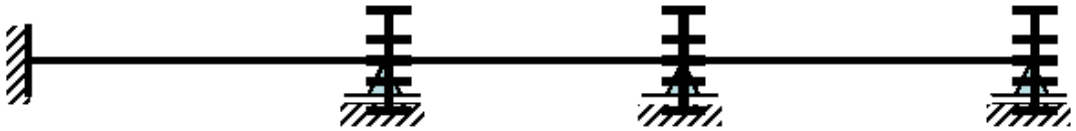
1'de görülen sürekli kirişin deforme olmuş halini düşünelim, her mesnette dönme meydana gelecektir.



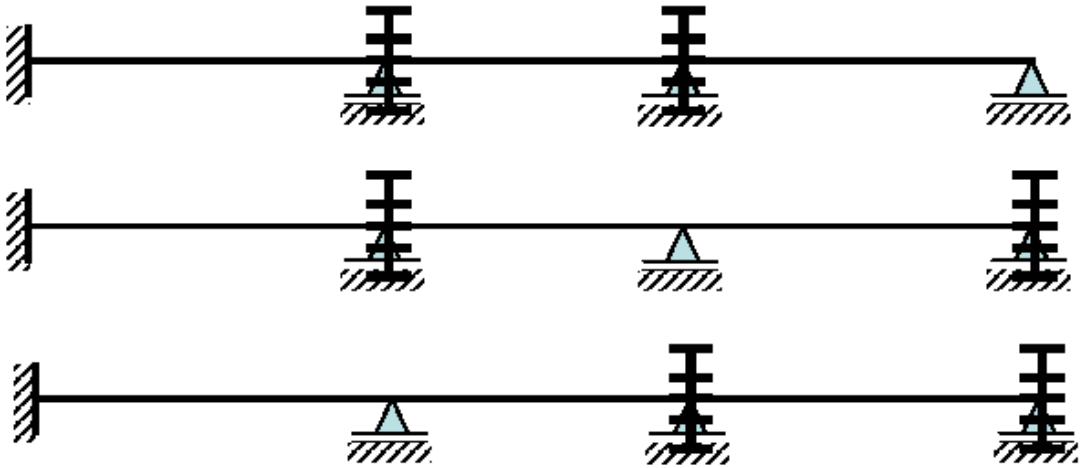
2 durumunda tüm mesnetlerdeki dönmeleri engelleyelim. Yani tüm mesnetleri ankastre (kilitli) kabul edelim. (Her çubukta ankastrelik uç momenti)



Abdulkadir Cüneyt AYDIN



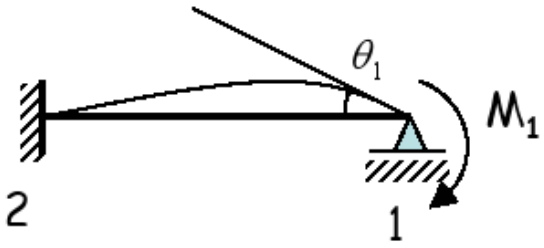
3, 4 ve 5;'de görüldüğü gibi sırası ile mesnetlerdeki kilitlerin teker teker kaldıralım ve her düğümde dengeyi bozan momentleri çubuklara rijitlikleri oranında dağıtalım.



Bu işlemi düğümlerde dağıtılacak moment kalmayıncaya kadar uygulayalım. Sonra her bir çubuk ucunda yazılan tüm moment değerlerini toplayarak uç momentleri hesap edelim.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Rijitlik Faktörü (Sayısı)



$$M_{12} = 2E\frac{I}{L}(2\theta_1 + \theta_2 - 3\varphi) + M_{12}^F$$

$$M_{21} = 2E\frac{I}{L}(\theta_1 + 2\theta_2 - 3\varphi) + M_{21}^F$$

Rijitlik= Birim deformasyon yaptıran kuvvettir.

$M_{12} = k_1\,\theta_1$ şeklinde yazılabilir

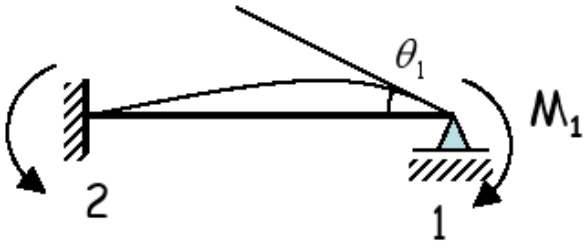
Yukarıdaki denklemden moment ifadesi hesaplanırsa

$$M_{12} = \frac{4EI}{L}\theta_1$$

$$k_{12} = \frac{4EI}{L}$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Geçiş Faktörü (Sayısı)



$$M_1 = 2E\frac{I}{L}(2\theta_1 + \theta_2 - 3\varphi) + M_{12}^F$$

$$M_2 = 2E\frac{I}{L}(\theta_1 + 2\theta_2 - 3\varphi) + M_{21}^F$$

$$M_2 = cM_1$$

Herhangi bir çubuğun her iki ucundaki momentler arasındaki ilişki c ile gösterilirse

Yukarıdaki denklemden momentler hesaplanırsa

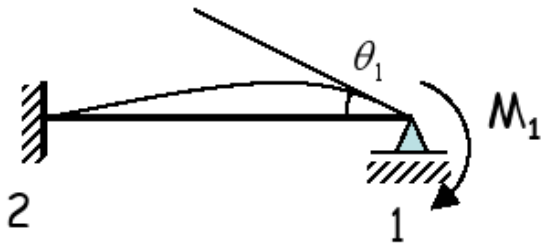
$$M_1 = \frac{4EI}{L}\theta_1 \qquad M_2 = \frac{2EI}{L}\theta_1$$

$$M_2 = cM_1 \qquad M_2 = \frac{1}{2}M_1 \qquad c = \frac{1}{2}$$

Çubuğun bir ucunda hesaplanan momentin yarısı çubuğun diğer ucunda etki eder.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Rijitlik Faktörü (Sayısı)



$$M_{12} = 2E\frac{I}{L}(2\theta_1 + \theta_2 - 3\varphi) + M_{12}^F$$

$$M_{21} = 2E\frac{I}{L}(\theta_1 + 2\theta_2 - 3\varphi) + M_{21}^F$$

Rijitlik= Birim deformasyon yaptıran kuvvettir.

$M_{12} = k_1\,\theta_1$ şeklinde yazılabilir

Yukarıdaki denklemden moment ifadesi hesaplanırsa

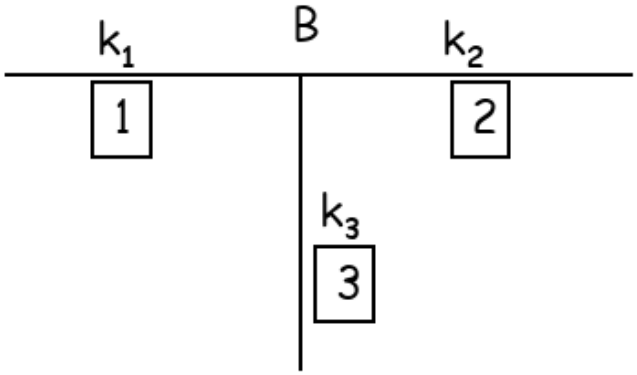
$$M_{12} = \frac{4EI}{L}\theta_1$$

$$k_{12} = \frac{4EI}{L}$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Dağıtma Katsayısı

Herhangi bir düğümde dengeyi bozan momentler o düğümde bulunan çubuklara rijitlikleri oranında dağıtılırlar. Bunun için her bir düğümde her bir çubuğun ne kadar moment alacağını ifade eden dağıtma katsayıları hesaplanır.



Dağıtma katsayısı hesabı için her bir çubuğun rijitliği, düğümdeki toplam çubuk rijitliklerine oranı yazılır.

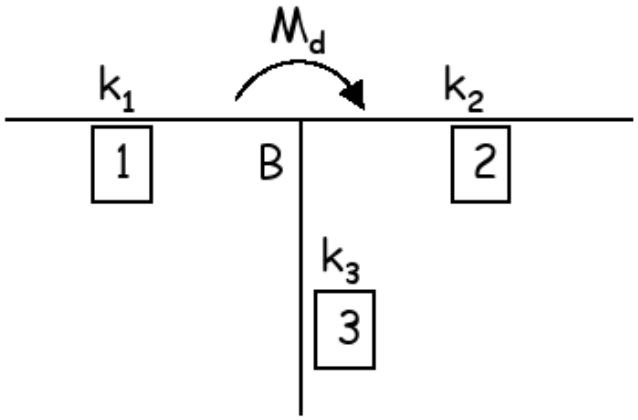
Her düğümde hesaplanan dağıtma katsayılarının toplamı 1'dir.

$$D_{b1} = \frac{k_1}{k_1 + k_2 + k_3} \qquad D_{b2} = \frac{k_2}{k_1 + k_2 + k_3} \qquad D_{b3} = \frac{k_3}{k_1 + k_2 + k_3}$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Momentlerin Dağıtılması

Herhangi bir düğümde dengeyi bozan momentler o düğümde bulunan çubuklara dağıtma katsayıları ile çarpılarak dağıtılır.



B düğümünde dengeyi bozan M_d momentini B düğümündeki 3 çubuğa dağıtmak istersek.

$$M_{B1} = -D_{B1} * M_d$$

$$M_{B2} = -D_{B2} * M_d$$

$$M_{B3} = -D_{B3} * M_d$$

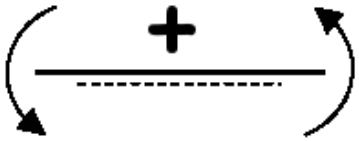
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Moment Dağıtma Yönteminin Adımları

1) Sistemdeki tüm elemanlar için k_{ij} rijitlik sayıları hesaplanır.
2) Düğümlerde her bir eleman için dağıtma katsayıları hesaplanır
3) Her bir eleman için ankastrelik uç momentleri hesaplanır
4) Tüm düğüm noktaları kilitli kabul edilir, her seferinde bir düğüm serbest bırakılarak o düğümde momentler dengelenir.
5) Bir düğüm serbest bırakılarak dengeleme yapıldığında her bir çubuğa yazılan uç momentlerin yarısı diğer uçları gönderilmelidir (geçiş faktörü=1/2).
6) Düğümlerde dağıtılacak momentler küçük veya belirsiz oluncaya dek işleme devam edilir.
7) Her bir çubukta uçlarda yazılan tüm momentler toplanarak çubuk uç momentleri hesap edilir.

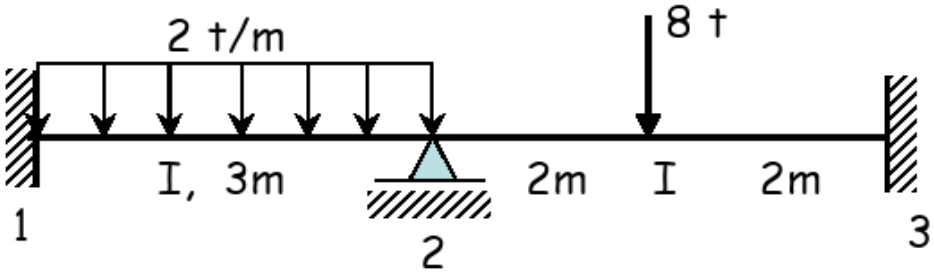
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Moment Dağıtım yönteminde pozitif yön kabulu



Moment Dağıtım yönteminde çubuğu saat yönünün tersine çeviren moment pozitif moment olarak kabul edilir. Özellikle düşey çubuklarda bakış yönüne dikkat etmek gerekir.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



Yanda verilen sistemin moment ve kesme kuvveti değişim grafiklerini çiziniz.

Rijitlik sayılarının hesabı

$$k_{12} = \frac{4EI}{L} = \frac{4EI}{3} = 1.333EI \qquad k_{23} = \frac{4EI}{L} = \frac{4EI}{4} = EI$$

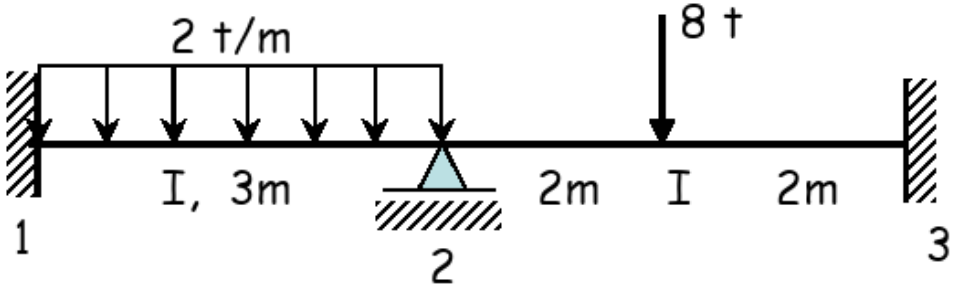
Dağıtma katsayılarının hesabı

$$D_{21} = \frac{k_{12}}{k_{12} + k_{23}} = \frac{1.333EI}{1.333EI + EI} = 0.571$$

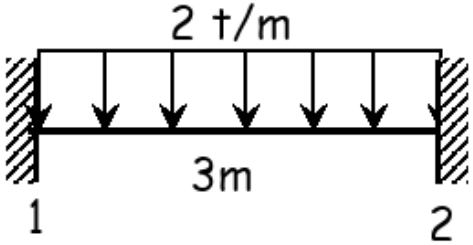
$$D_{23} = \frac{k_{23}}{k_{12} + k_{23}} = \frac{EI}{1.333EI + EI} = 0.429$$

$D_{21}+D_{23} = 1$

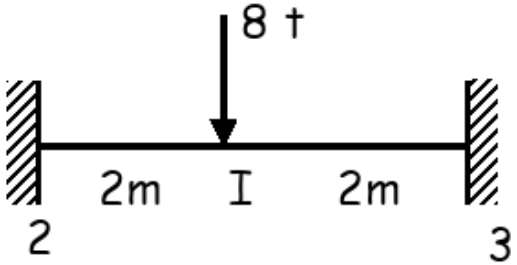
Abdulkadir Cüneyt AYDIN



Ankastrelik uç momentleri hesabı

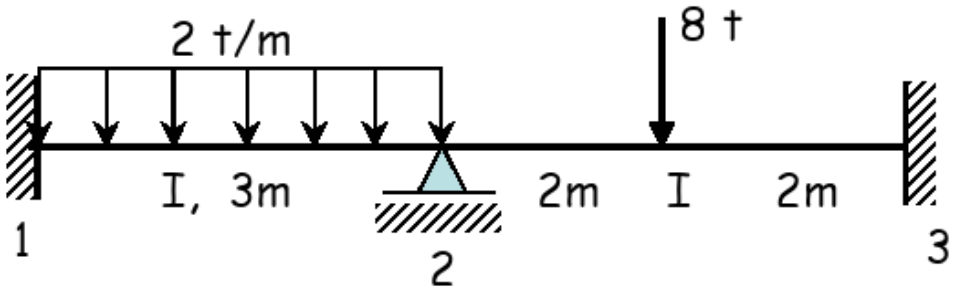


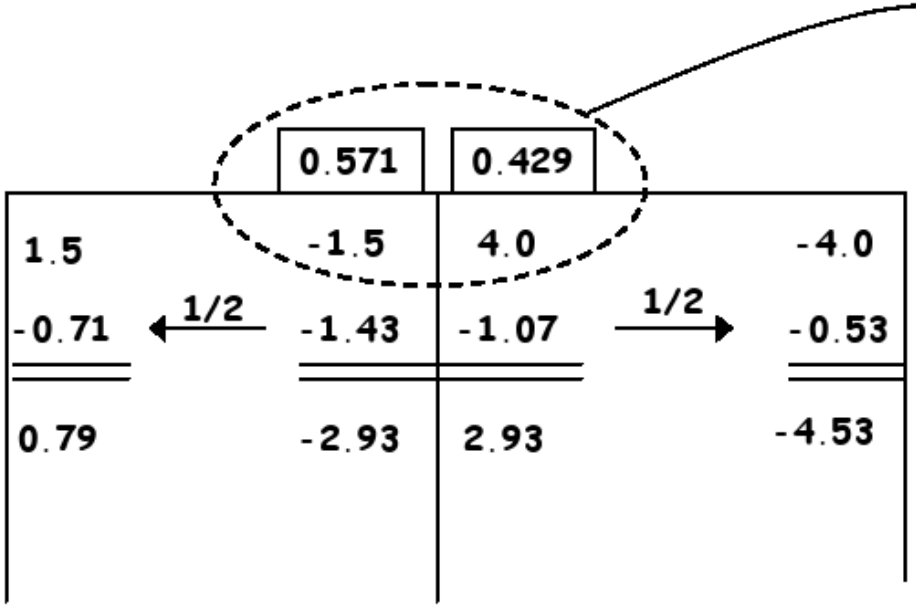
$$M_{12}^{F} = -M_{21}^{F} = \frac{qL^2}{12} = \frac{2*3^2}{12} = 1.5$$



$$M_{23}^{F} = -M_{32}^{F} = \frac{P*L}{8} = \frac{8*4}{8} = 4$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN





Dengeyi bozan moment

4-1.5=2.5

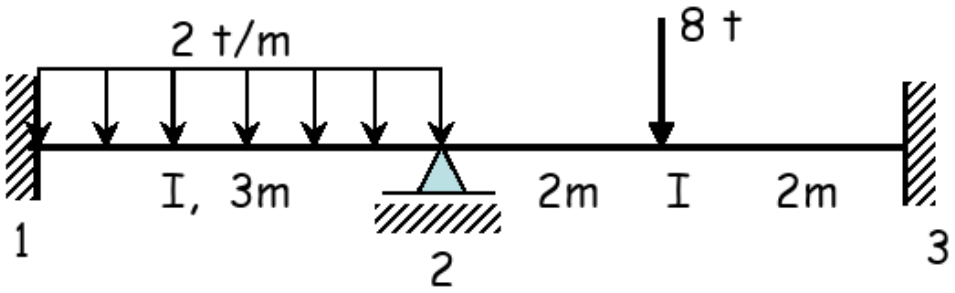
Düğümün dengesi için -2.5 momentin düğümde dağıtılması gerekir

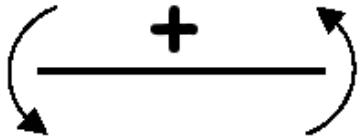
1-2 çubuğundaki moment
D_{12}*(-2.5)

2-3 çubuğundaki moment

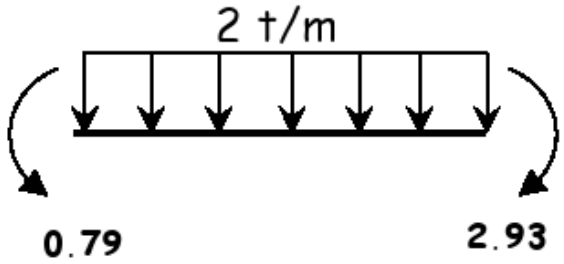
D_{23}*(-2.5)

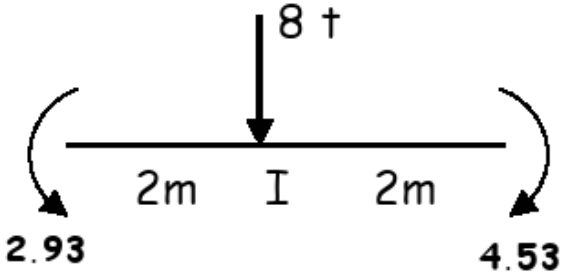
Abdulkadir Cüneyt AYDIN



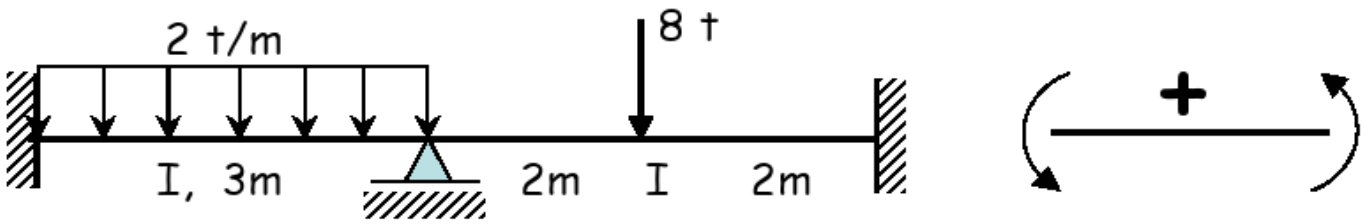


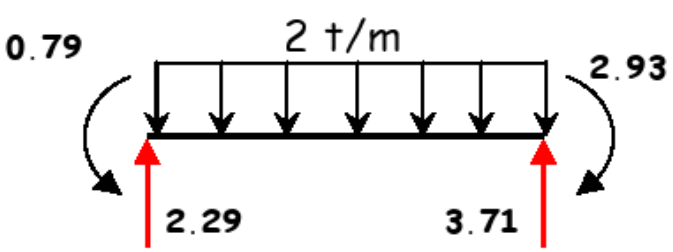
	0.571	0.429	
1.5	-1.5	4.0	-4.0
-0.71 ← 1/2	-1.43	-1.07	1/2 → -0.53
0.79	-2.93	2.93	-4.53

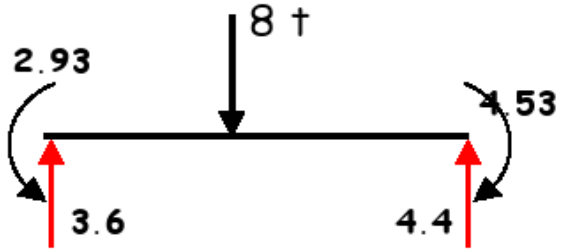


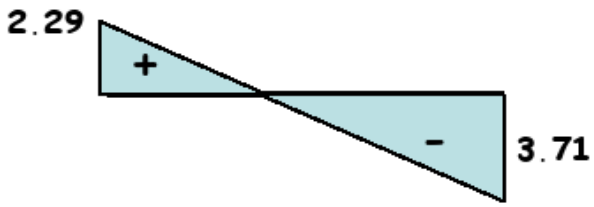


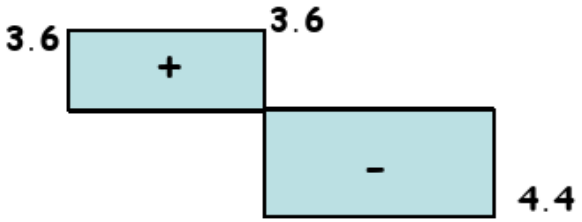
Abdulkadir Cüneyt AYDIN



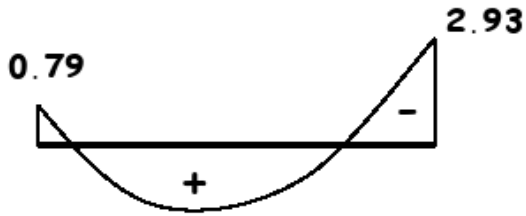


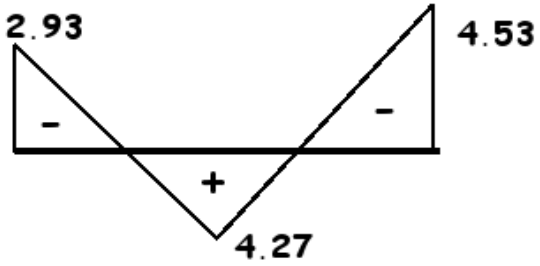






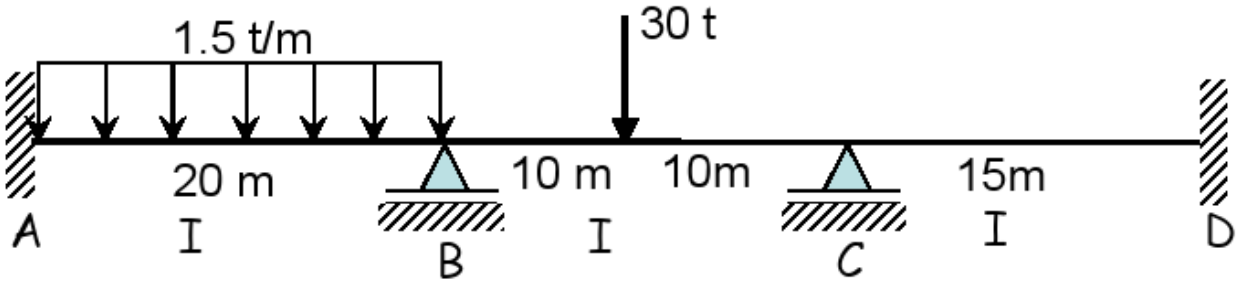
T





M

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



Yukarıda verilen sistemin moment ve kesme kuvveti değişim grafiklerini çiziniz.

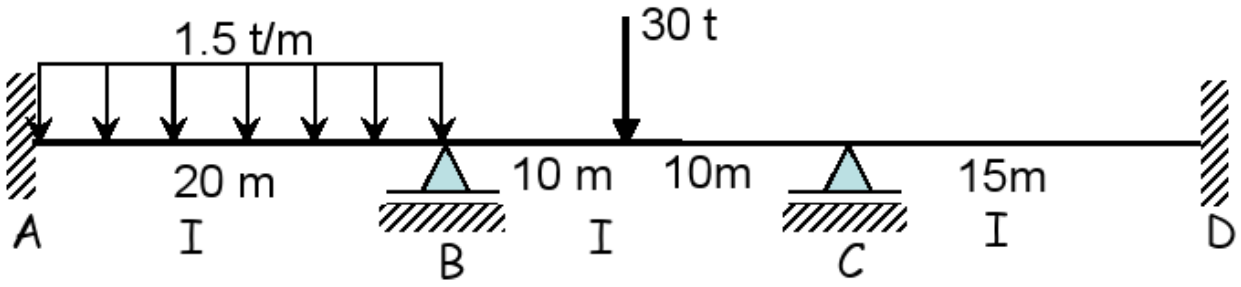
Rijitlik sayılarının hesabı

$$k_{AB} = \frac{4\,EI}{L} = \frac{4\,EI}{20} = 0.2\,EI$$

$$k_{BC} = \frac{4\,EI}{L} = \frac{4\,EI}{20} = 0.2\,EI$$

$$k_{CD} = \frac{4\,EI}{L} = \frac{4\,EI}{15} = 0.266\;\;EI$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



Dağıtma katsayılarının hesabı

B düğümünde

$$D_{AB} = \frac{k_{AB}}{k_{AB} + k_{BC}} = \frac{0.2EI}{0.2EI + 0.2EI} = 0.5$$

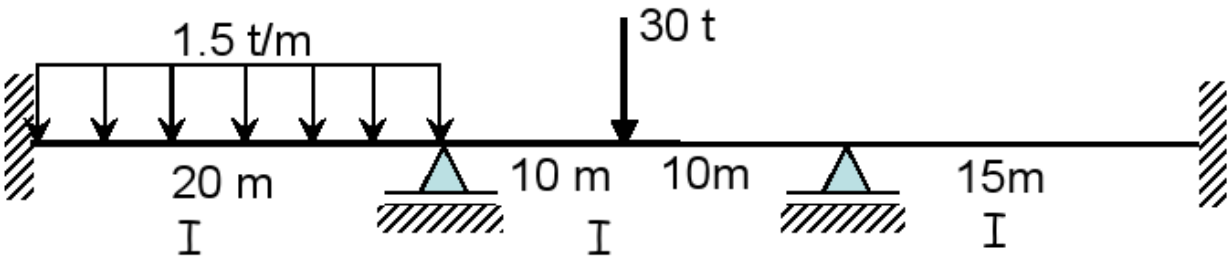
$$D_{BC} = \frac{k_{BC}}{k_{AB} + k_{BC}} = \frac{0.2EI}{0.2EI + 0.2EI} = 0.5$$

C düğümünde

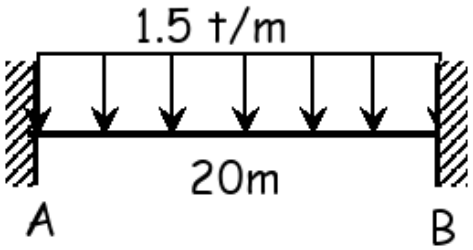
$$D_{CB} = \frac{k_{CB}}{k_{CB} + k_{CD}} = \frac{0.2EI}{0.2EI + 0.266EI} = 0.429$$

$$D_{CD} = \frac{k_{CD}}{k_{CB} + k_{CD}} = \frac{0.266EI}{0.2EI + 0.266EI} = 0.571$$

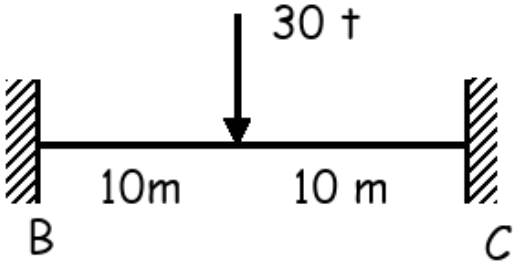
Abdulkadir Cüneyt AYDIN



Ankastrelik uç momentleri hesabı

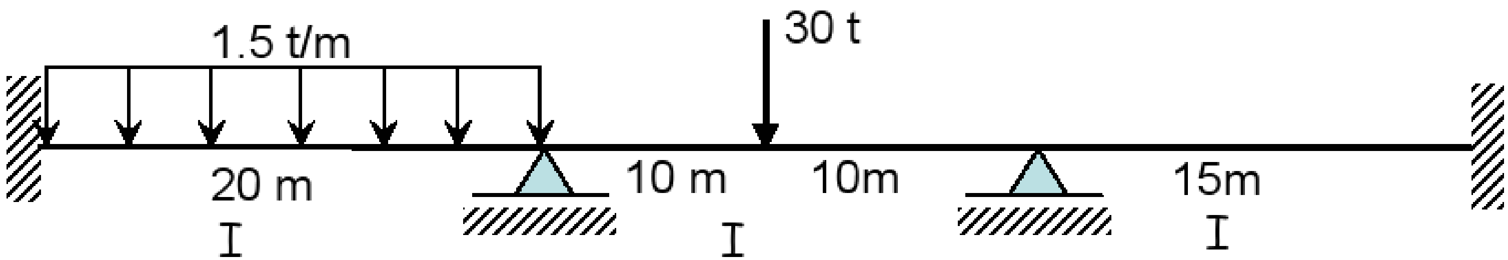


$$M^{F}_{AB} = -M^{F}_{BA} = \frac{qL^2}{12} = \frac{1.5 * 20^2}{12} = 50$$



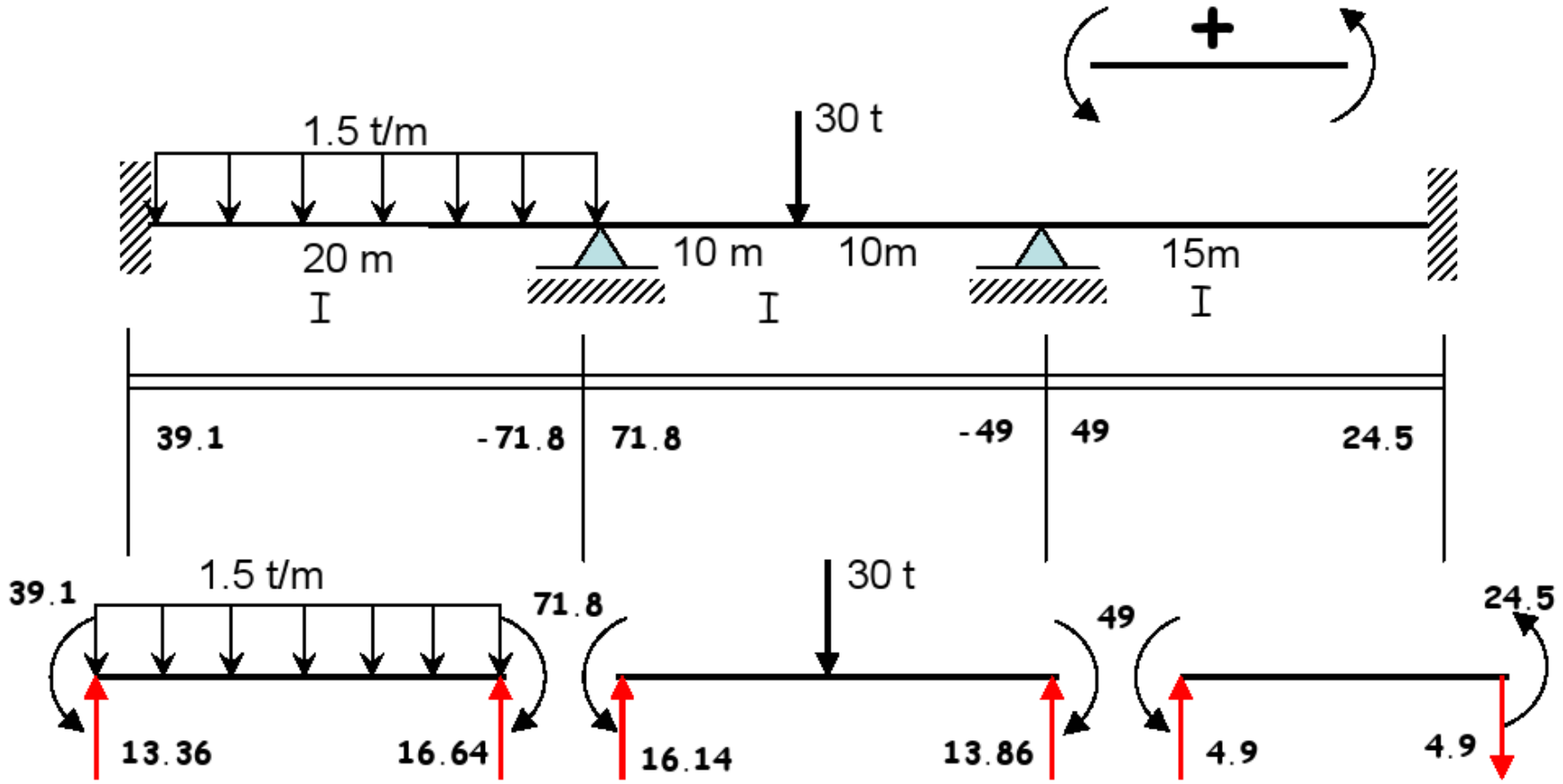
$$M^{F}_{BC} = -M^{F}_{CB} = \frac{P * L}{8} = \frac{30 * 20}{8} = 75$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

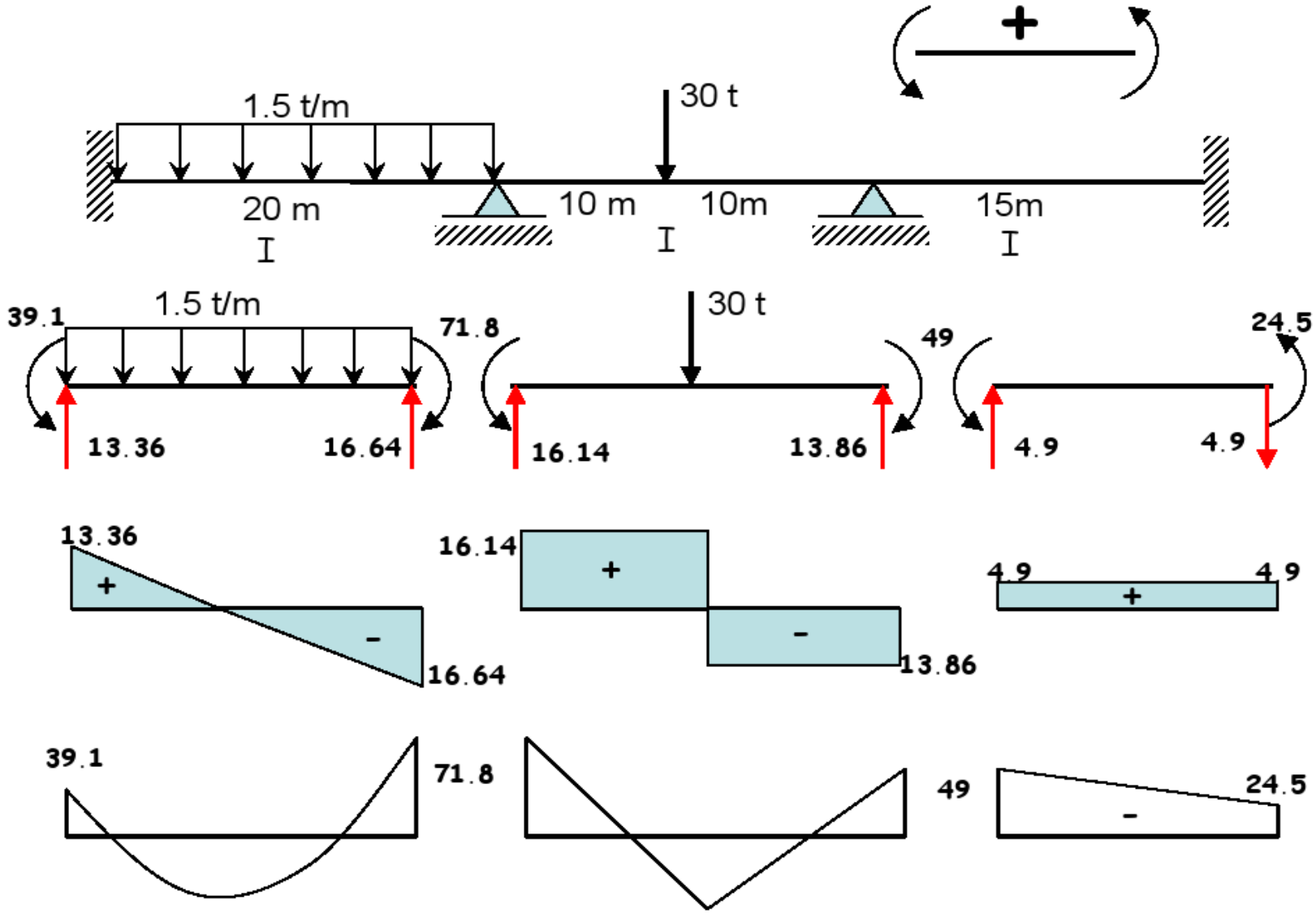


	0.5	0.5	0.429	0.571	
50	-50	75	-75	0	0
		16.1	32.2	42.8	21.4
-10.3	-20.6	-20.6	-10.3		
		2.2	4.4	5.9	2.9
-0.6	-1.1	-1.1	-0.6		
		0.2	0.3	0.3	0.2
	-0.1	-0.1			
39.1	-71.8	71.8	-49	49	24.5

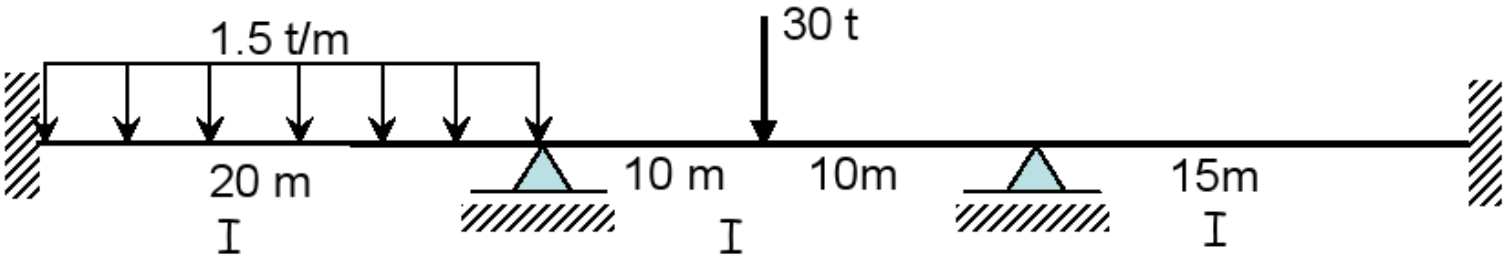
Abdulkadir Cüneyt AYDIN



Abdulkadir Cüneyt AYDIN



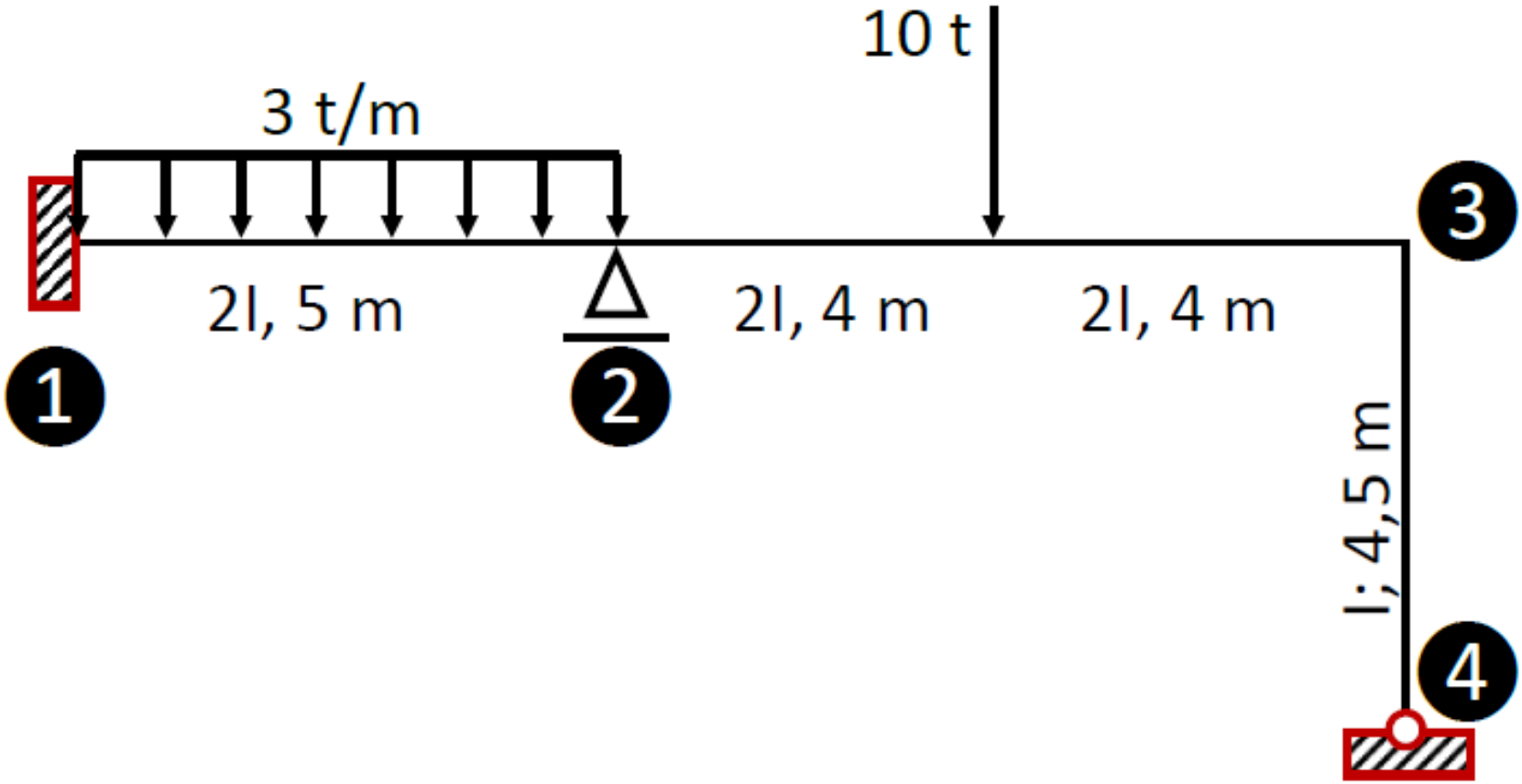
Abdulkadir Cüneyt AYDIN



			0.5	0.5			0.429	0.571			
50		-50		75		-75		0		0	
	-12.5				-12.5		32.2		42.8		
-6.3				16.1		-6.3				21.4	
	-8.1				-8.1		2.7		3.6		
-4.1				1.4		-4.1				1.8	
	-0.7				-0.7		1.8		2.3		
-0.4				0.9		-0.4				1.2	
	-0.4				-0.4		0.2		0.2		
-0.2				0.1		-0.2				0.1	
						0.1		0.1			
39		-71.7		71.8		-49		49		24.5	

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Örnek: Şekildeki sistemin M, T, N diyagramlarını çiziniz.



Abdulkadir Cüneyt AYDIN

BİRİM DEPLASMAN SABİTLERİ (k) VE DAĞITMA SAYILARI (d)			
2 düğüm noktasında		**3** düğüm noktasında	
$k_{2-1} = \frac{4EI}{L} = \frac{4.2}{5} = 1{,}6$	$r_{2-1} = \frac{1{,}6}{2{,}6} = 0{,}615$	$k_{3-2} = k_{2-3} = 1$	$r_{3-2} = \frac{1}{1{,}67} = 0{,}6$
$k_{2-3} = \frac{4EI}{L} = 1$	$r_{2-3} = \frac{1{,}0}{2{,}6} = 0{,}385$	$k_{3-4} = \frac{3EI}{L} = 0{,}67$	$r_{3-4} = \frac{0{,}67}{1{,}67} = 0{,}4$
$\sum k_2 = 2{,}6$	$\sum r_2 = 1$	$\sum k_3 = 1{,}67$	$\sum r_3 = 1$

4 nolu uc, sabit mesnet ve çıkma vb gibi gelen moment yok !

Ankastrelik Momentleri Hesabı

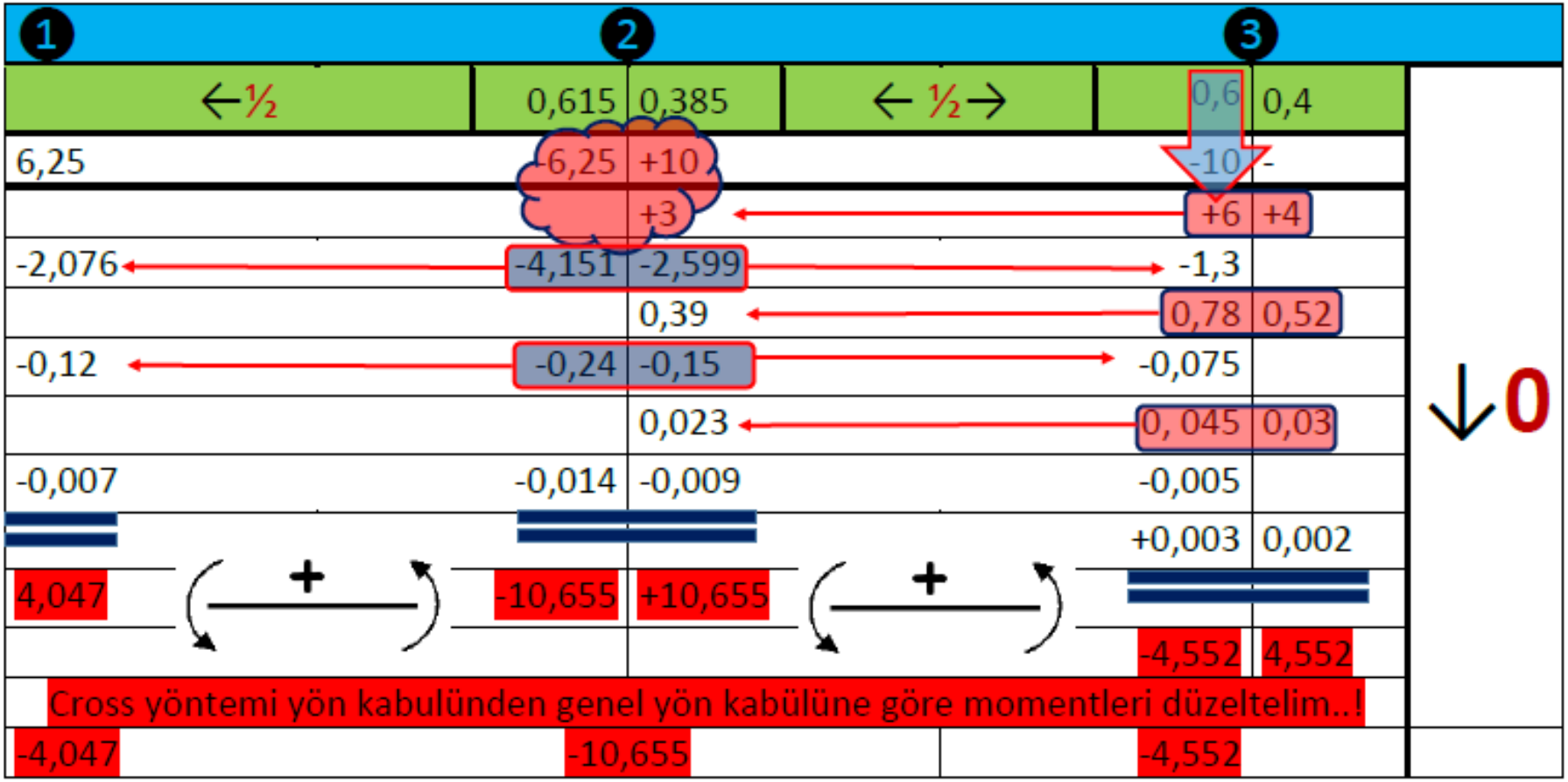
! Ara mesnetler ankastre kabul edilere ankastrelik momentleri hesaplanır..!

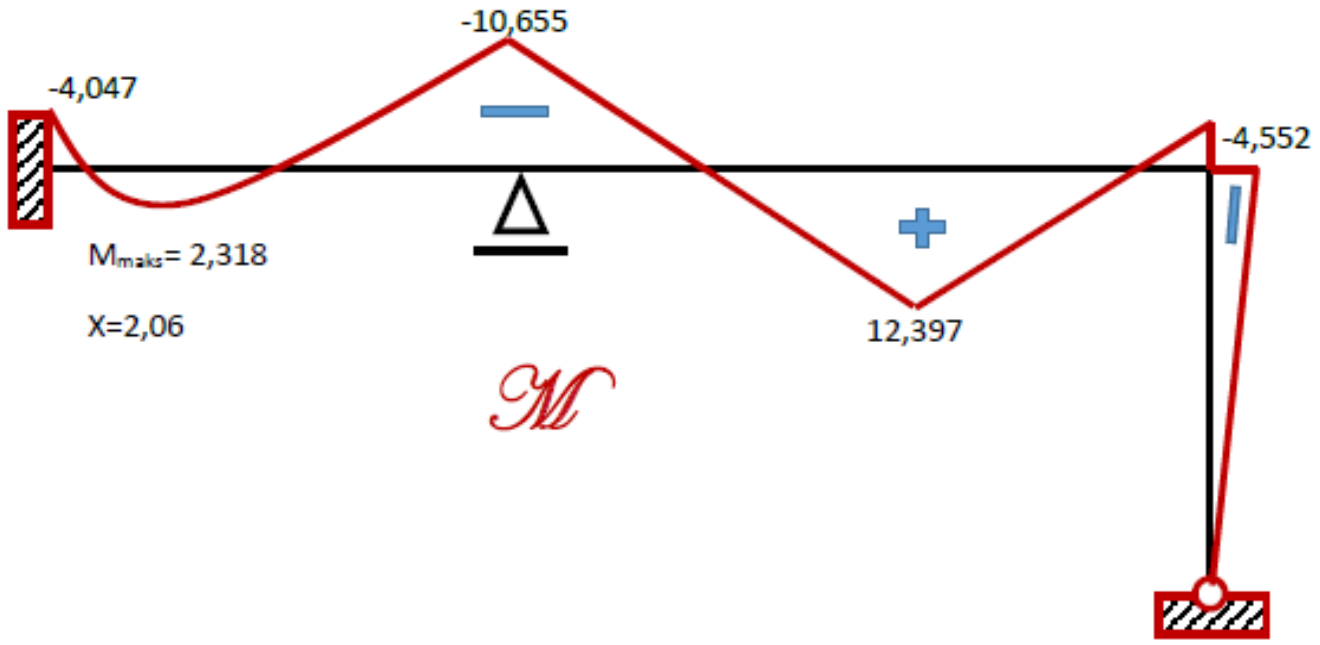
$$M_{1-2} = \frac{q.l^2}{12} = \frac{3.5^2}{12} = 6{,}25\ tm\ ise\ M_{2-1} = -6{,}25\ tm$$

$$M_{2-3} = \frac{p.l}{8} = \frac{10.8}{8} = 10\ tm\ ise\ M_{3-2} = -10\ tm$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

! Dengelenmemiş momentin en fazla olduğu kısımdan başlanır..!

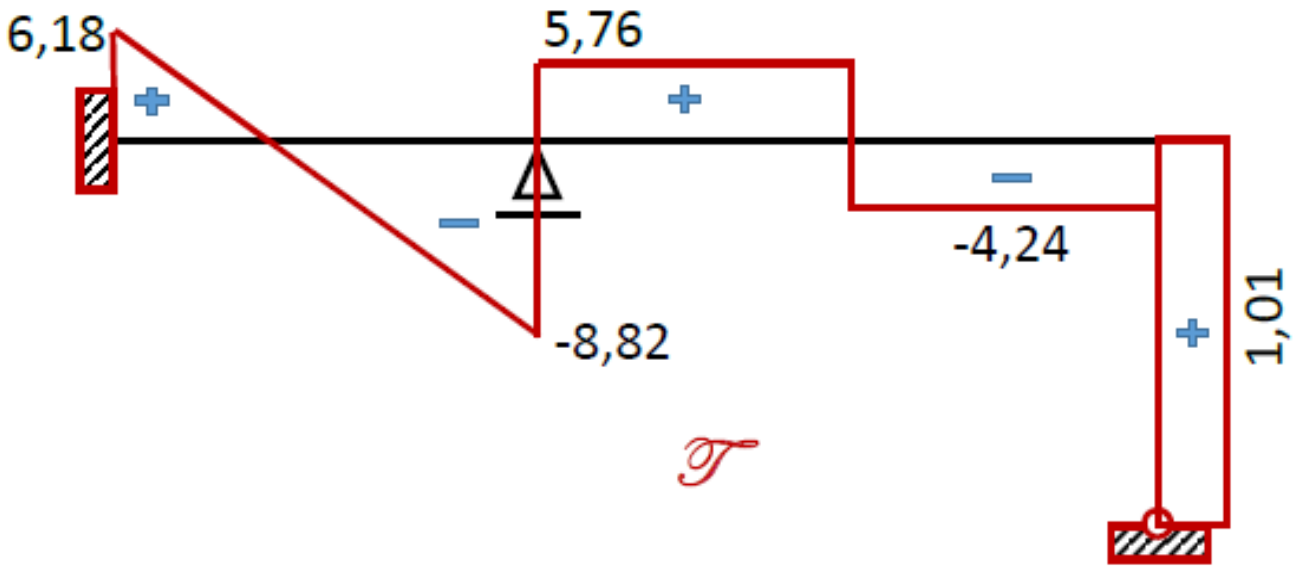




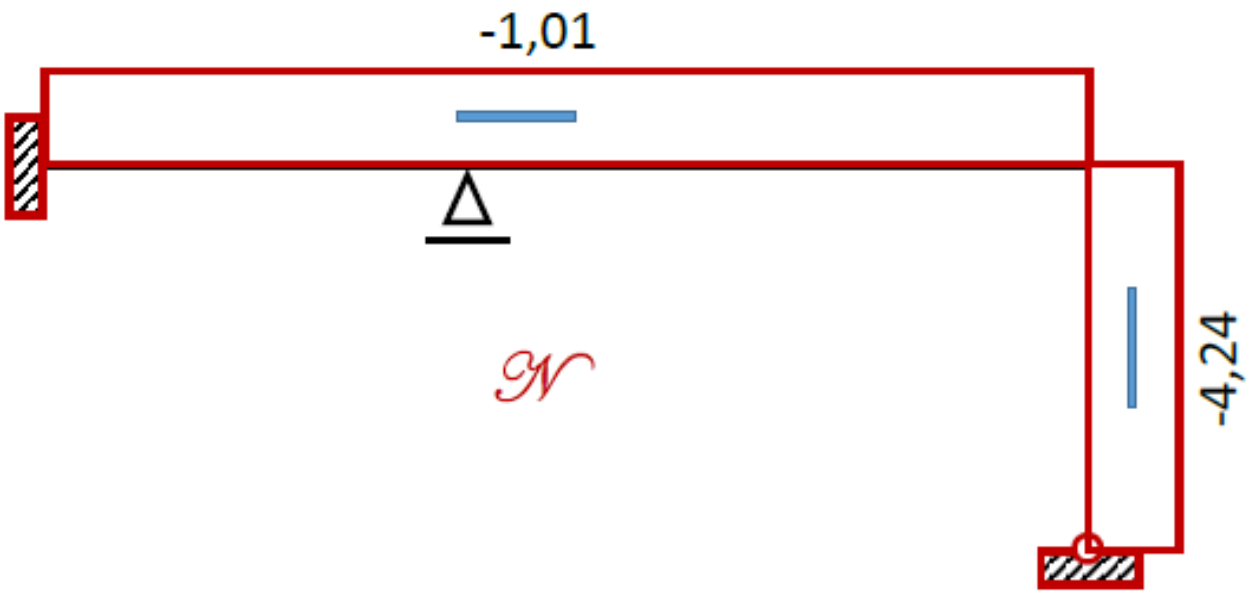
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Kesme Kuvveti Diyagramı için

M	4,047	-10,655	10,655	-4,552
T_0	7,5	-7,5	5	-5
ΔT	$\frac{M_1 + M_2}{l} = \frac{4{,}047 - 10{,}655}{5} = -1{,}32$		0,76	
$T = T_0 + \Delta T$	6,18	-8,82	5,76	-4,24

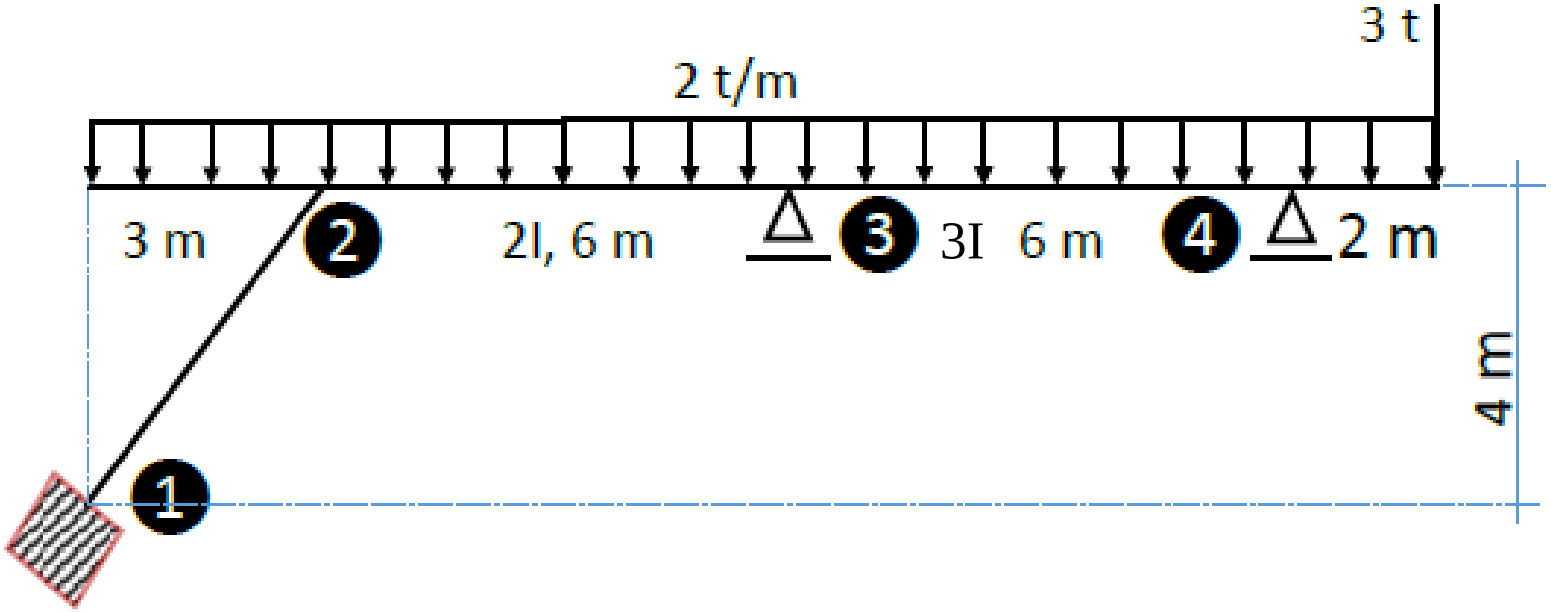


Abdulkadir Cüneyt AYDIN



Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Örnek: Cross yöntemi ile şekilde verilen sistemin M ve T diyagramlarını çiziniz



Abdulkadir Cüneyt AYDIN

BİRİM DEPLASMAN SABİTLERİ (k) VE DAĞITMA SAYILARI (d)			
❷ düğüm noktasında		❸ düğüm noktasında	
$k_{2-1} = \frac{4EI}{L} = \frac{4.1}{5} = 0{,}8$	$r_{2-1} = \frac{0{,}8}{2{,}133} = 0{,}375$	$k_{3-2} = k_{2-3} = 1{,}333$	$r_{3-2} = \frac{1{,}333}{2{,}833} = 0{,}471$
$k_{2-3} = \frac{4.2}{6} = 1{,}333$	$r_{2-3} = \frac{1{,}333}{2{,}133} = 0{,}625$	$k_{3-4} = \frac{3EI}{L} = 1{,}5$	$r_{3-4} = \frac{1{,}5}{2{,}833} = 0{,}529$
$\sum k_2 = 2{,}133$	$\sum r_2 = 1$	$\sum k_3 = 2{,}833$	$\sum r_3 = 1$

4 nolu uc, sabit mesnet

Ankastrelik Momentleri Hesabı

! Ara mesnetler ankastre kabul edilere ankastrelik momentleri hesaplanır..!

$$M_{2-3} = \frac{q.l^2}{12} = \frac{2.6^2}{12} = 6\ tm\ ise\ M_{3-2} = -6\ tm$$

$$M_{2\ çıkma} = -9\ tm \quad ve \quad M_{4\ çıkma} = -10\ tm$$

$$M_{3-4} = \frac{q.l^2}{8} + \frac{M_{4\ çıkma}}{2} = 4\ tm$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

! Dengelenmemiş momentin en fazla olduğu kısımdan başlanır..!

1		2			3	
←½		0,375	0,625	← ½→	0,471	0,529
-9			+6		-6	4
-0,563	←	1,125	1,875	→	0,938	
			0,25	←	0,5	0,562
0,047	←	-0,094	-0,156	→	-0,078	
			0,019	←	0,037	0,041
-0,004	←	-0,007	-0,012	→	-0, 006	
					+0,003	0,003
0,512	+	1,024	+7,976	+	-4,606	4,606

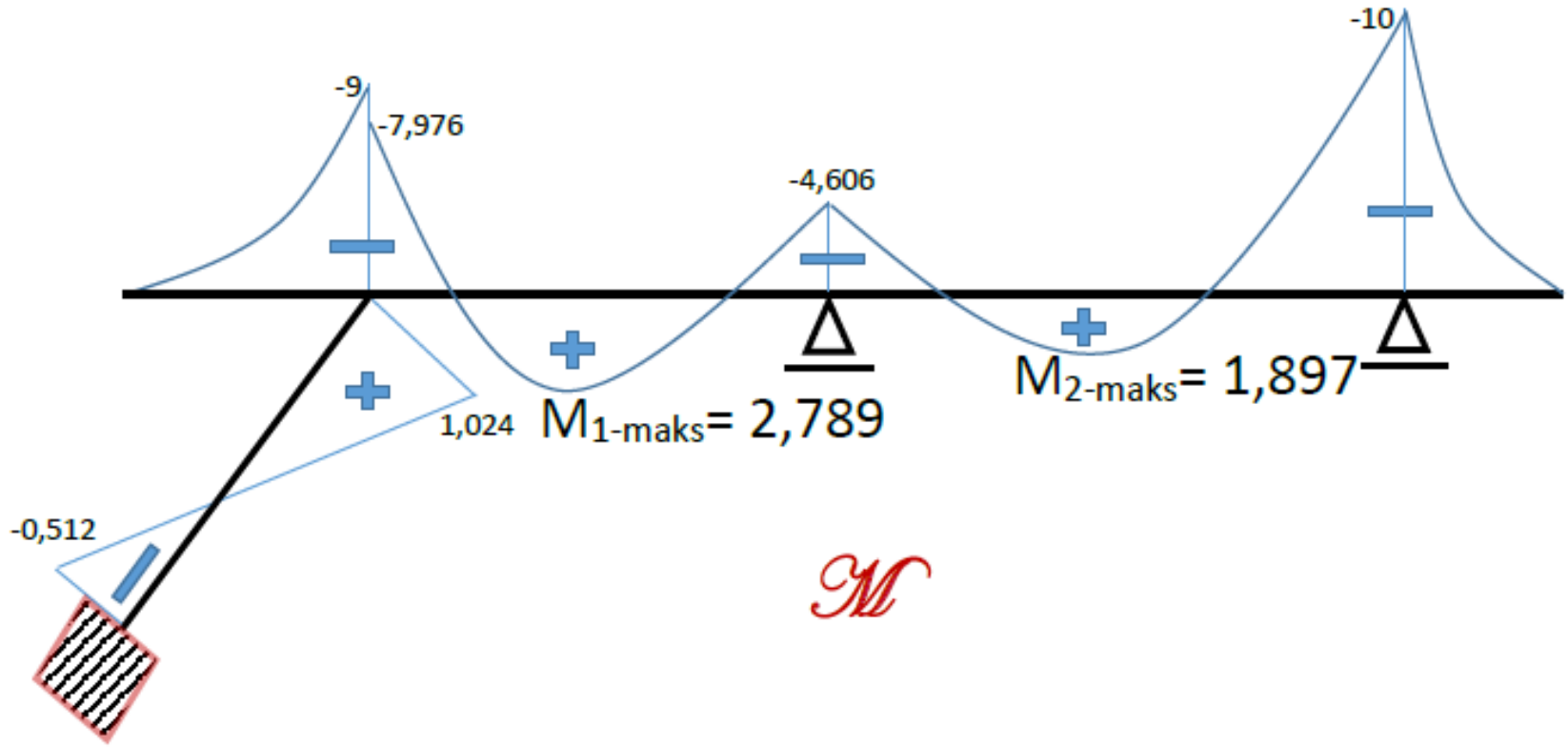
Cross yöntemi yön kabulünden genel yön kabülüne göre momentleri düzeltelim..!

-0,512	-7,976	-4,606

9(7)7,976

1,024

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

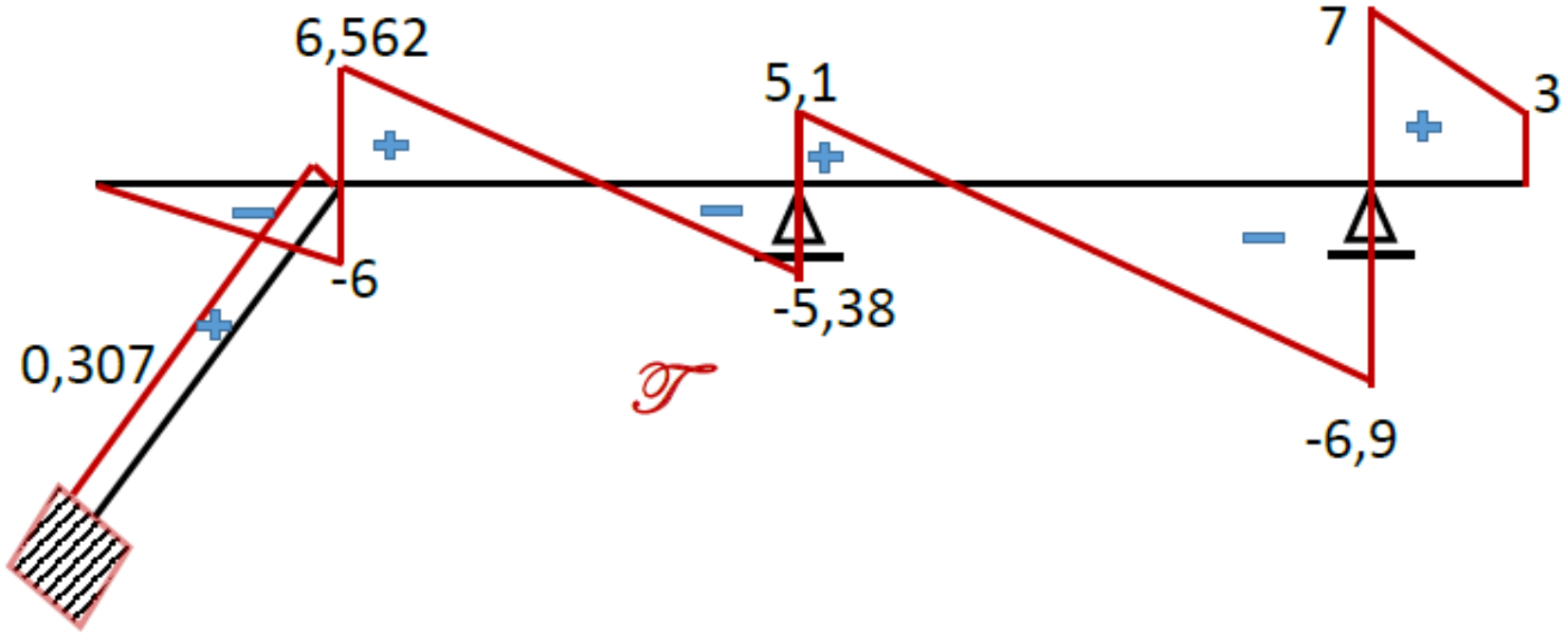


Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Kesme Kuvveti Diyagramı için

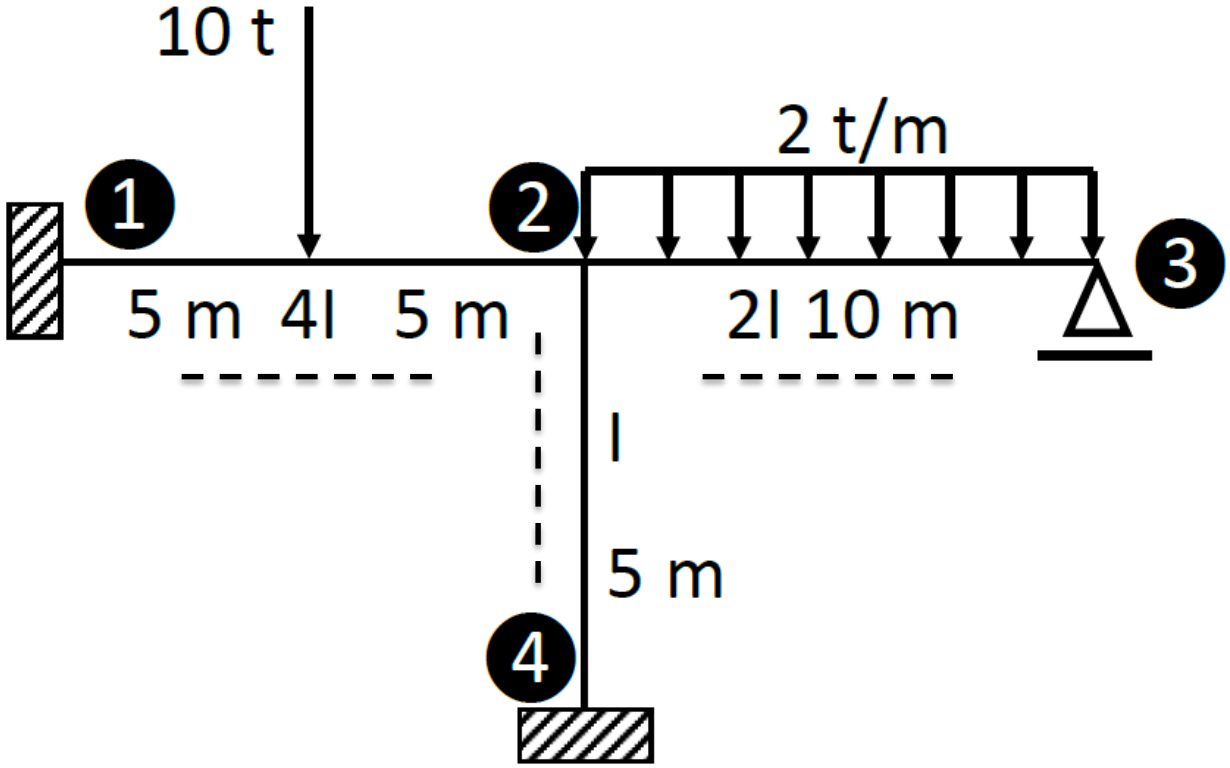
M	7,976	-4,606	4,606	-10	0,512	1,024
T_0	6	-6	6	-6	-	-
ΔT	$\frac{M_1 + M_2}{l} = 0{,}562$		-0,9		0,307	
$T = T_0 + \Delta T$	6,562	-5,438	5,1	-6,9	0,307	0,307

T_0 = Basit kiriş için kesme kuvvetleri



Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Örnek: Şekildeki sistemin eğilme momenti diyagramını Cros yöntemi ile çiziniz.



Abdulkadir Cüneyt AYDIN

BİRİM DEPLASMAN SABİTLERİ (k) VE DAĞITMA SAYILARI (d)	
❷ düğüm noktasında	
$k_{2-1} = \frac{4EI}{L} = \frac{4.4}{10} = 1{,}6$	$r_{2-1} = \frac{1{,}6}{3} = 0{,}533$
$k_{2-4} = \frac{4.1}{5} = 0{,}8$	$r_{2-4} = \frac{0{,}8}{3} = 0{,}267$
$k_{2-3} = \frac{3.2}{10} = 0{,}6$	$r_{2-3} = \frac{0{,}6}{3} = 0{,}2$
$\sum k_2 = 3$	$\sum r_2 = 1$

3 nolu uc, kayıcı mesnet !

Ankastrelik Momentleri Hesabı

! Ara mesnetler ankastre kabul edilere ankastrelik momentleri hesaplanır..!

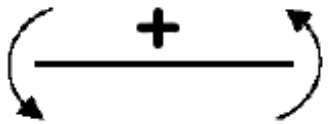
$$M_{1-2} = \frac{p.l}{8} = \frac{10.10}{8} = 12{,}5\ tm\ ise\ M_{2-1} = -12{,}5\ tm$$

$$M_{2-3} = \frac{q.l^2}{8} = \frac{2.10^2}{8} = 25\ tm$$

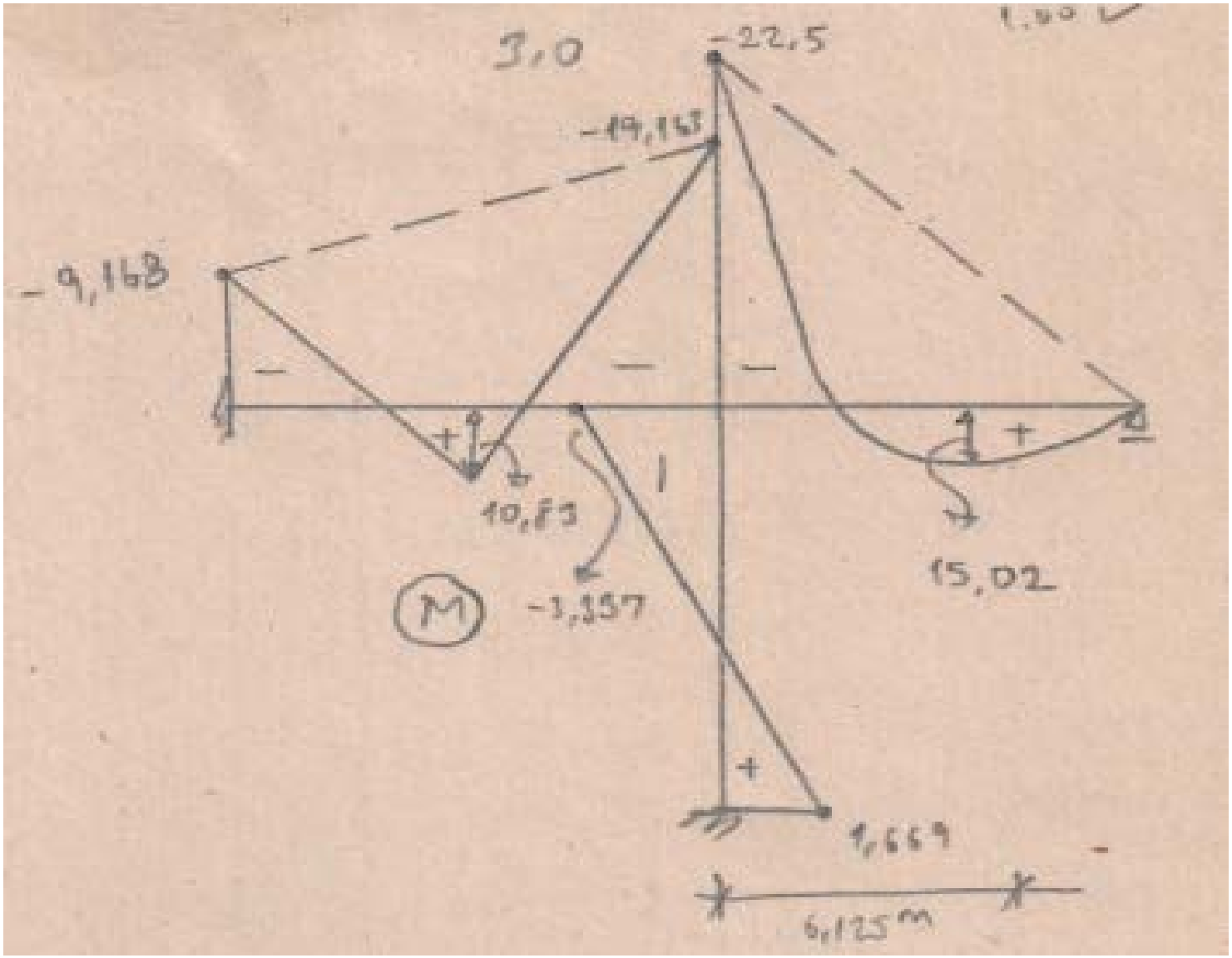
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

! Dengelenmemiş momentin en fazla olduğu kısımdan başlanır..!

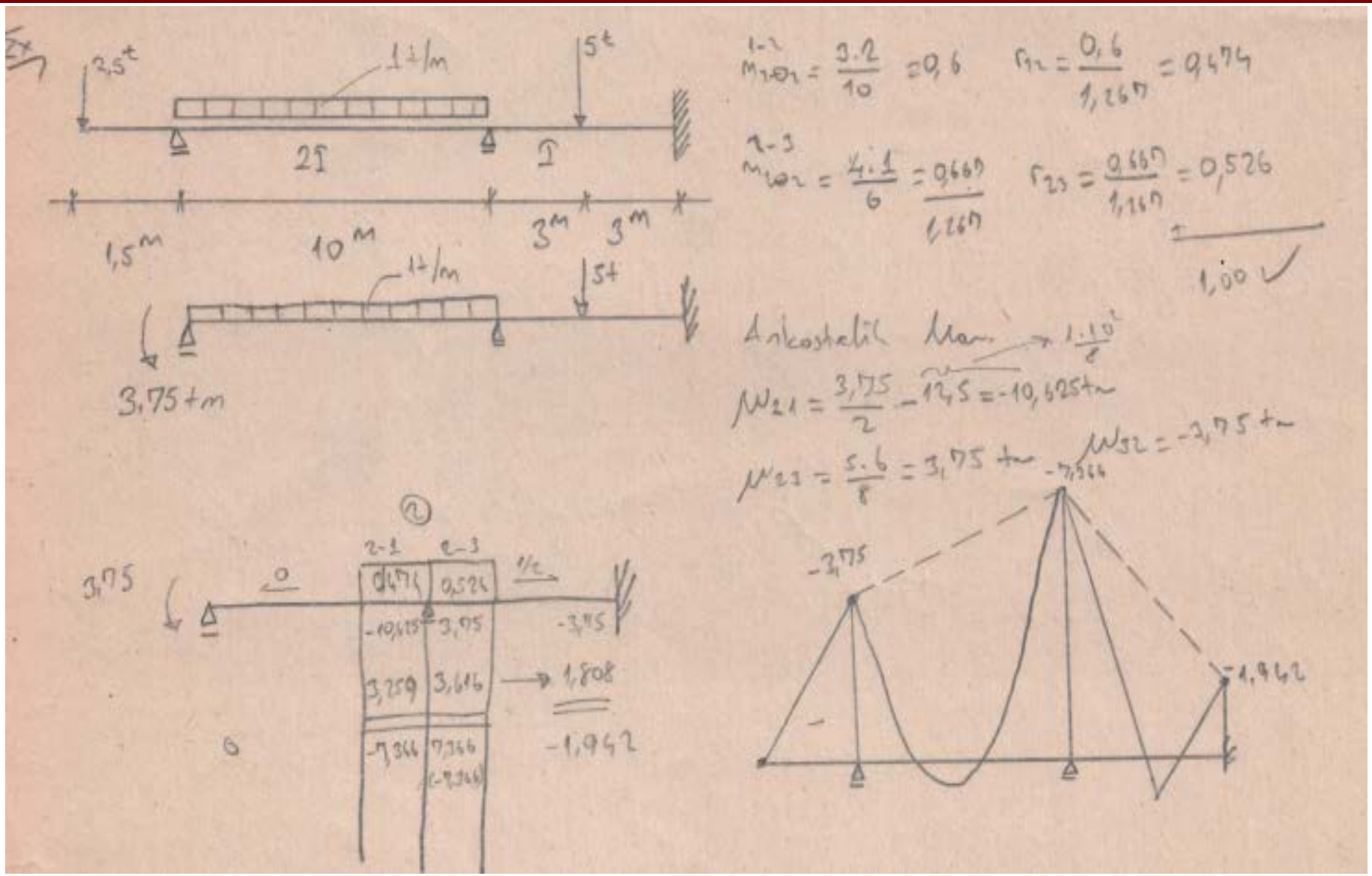
1	2			3	
	2-1	2-4	2-3		
←½	0,533	0,267	0,2	0→	
12,5	-12,5	-	25		
-3,332	-6,663	-3,307	-2,5		
9,168	-19,163	-3,337	22,5		
		½			
		-1,669			
Cross yöntemi yön kabulünden genel yön kabülüne göre momentleri düzeltelim..!					
-9,168	-19,163	1,669	-22,5		



Abdulkadir Cüneyt AYDIN



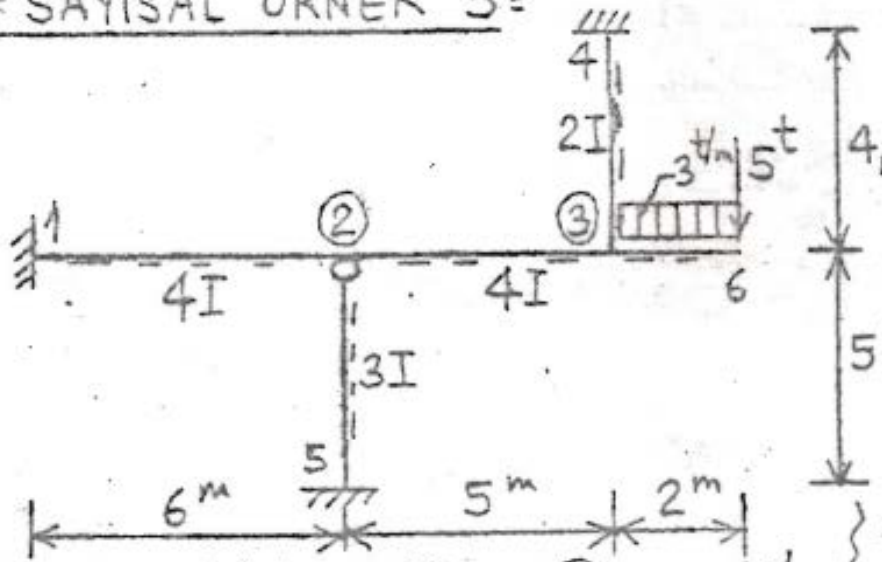
Abdulkadir Cüneyt AYDIN



Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

* SAYISAL ÖRNEK 5:



Yandaki şekilde verilen sistemin M diyagramını CROSS yöntemi ile çiziniz.

Çözüm: 2 ucu mafsallı olan 2-5 çubuğunun üzerinde de yük olmadığı için bu çubukta moment diyagramı sıfırdır. (2) noktası sabit mesnet gibi düşünülebilir.

1) Düğüm noktaları = (2) ve (3) ve sabit.

2) Birim deplasman sabitleri: Kenar mesnetlerin hepsi ankastre ise pratiklik açısından $\frac{4EI}{L}$ yerine $\frac{I}{L}$ rediörleri kullanılabilir

(2) d.n.da:

$m_{2\theta_2}^{2-1} = \frac{4}{6} = 0,667$, $r_{21} = \frac{0,667}{1,467} = 0,455$

$m_{2\theta_2}^{2-3} = \frac{4}{5} = 0,800$, $r_{23} = \frac{0,8}{1,467} = 0,545$

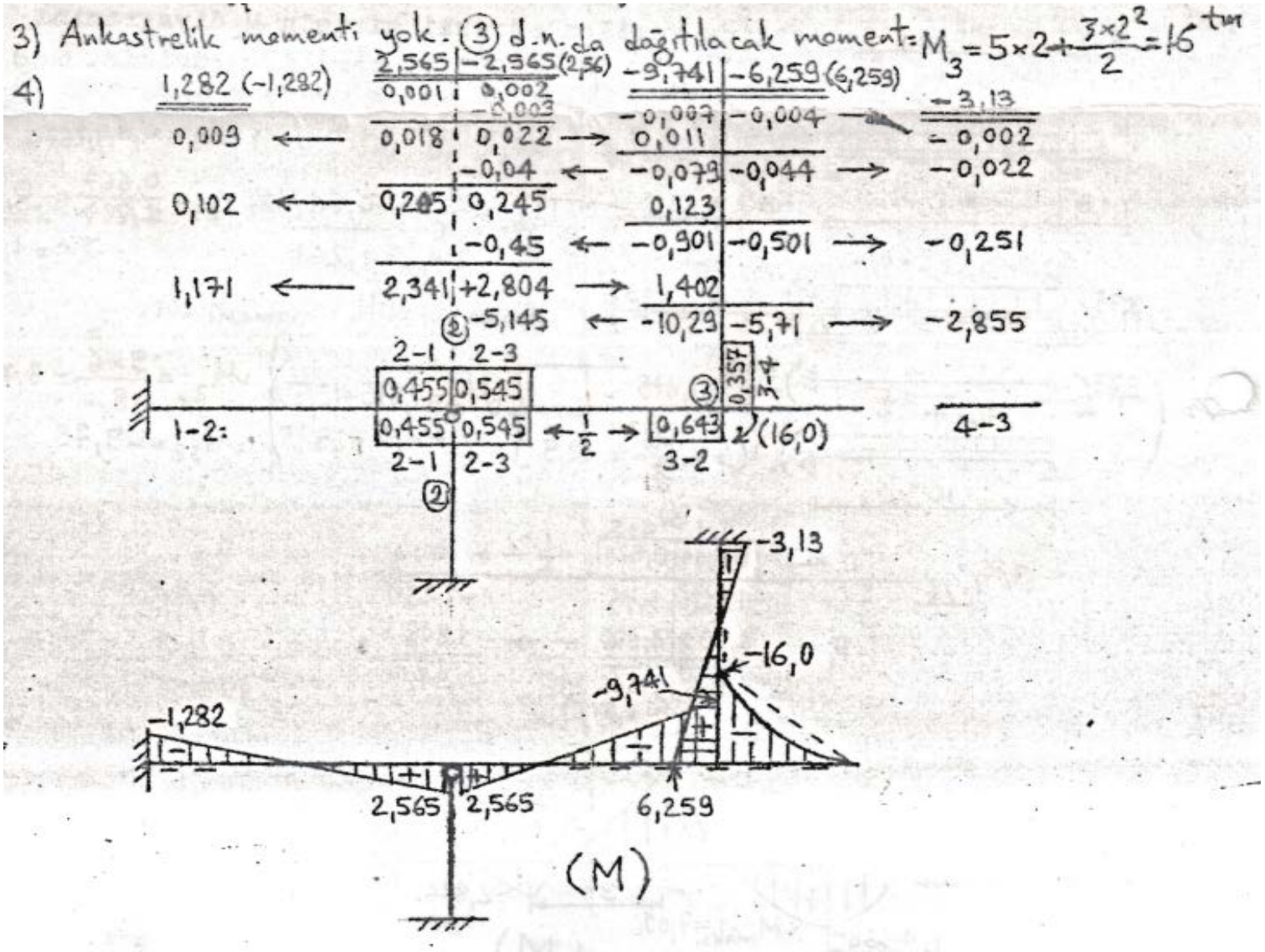
$\Sigma m_{i\theta_i} = 1,467$ $\Sigma r = 1,000$ ✓

(3)

$m_{3\theta_3}^{3-2} = \frac{4}{5} = 0.8$, $r_{32} = \frac{0,8}{1,244} = 0,643$

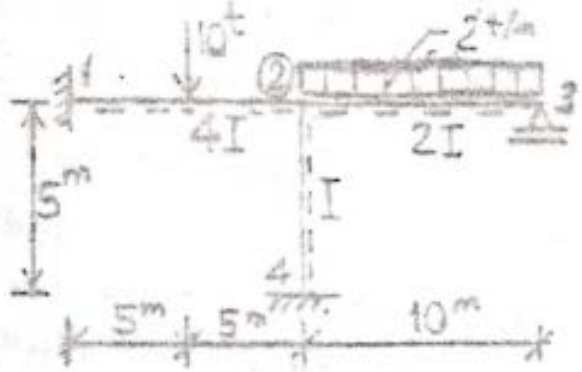
$m_{3\theta_3}^{3-4} = \frac{2}{4,5} = 0,444$, $r_{34} = \frac{0,444}{1,244} = 0,357$

$\Sigma m_{i\theta_i} = 1,244$ $\Sigma r = 1,000$ ✓



Abdulkadir Cüneyt AYDIN

SAYISAL ÖRNEK 2: Aşağıda verilen sistemin M diyagramını CROSS yöntemi ile çiziniz. **Çözüm:** Bir düğüm noktası var: ② d.n.



$$m_{2\theta_2}^{1-2}=\frac{4\times4}{10}=1,6 \quad , \quad r_{12}=\frac{1,6}{3}=0,533$$

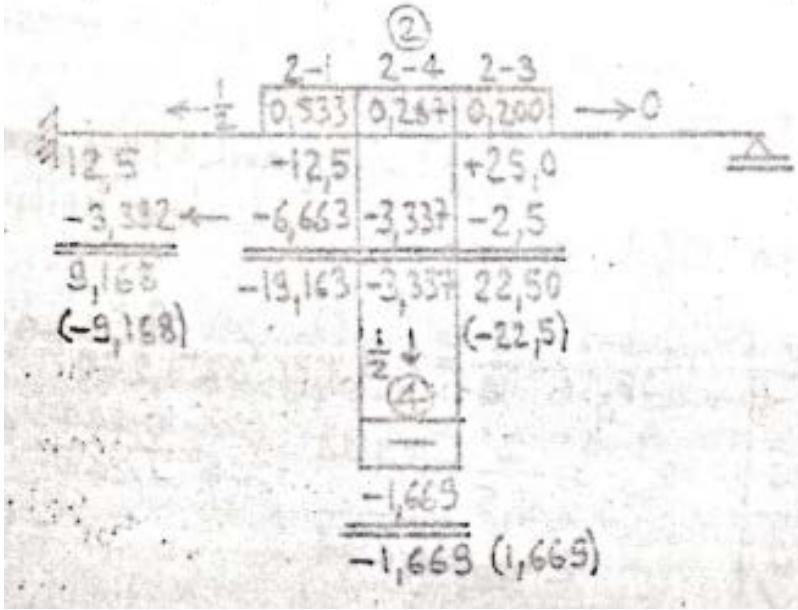
$$m_{2\theta_2}^{2-4}=\frac{4\times1}{5}=0,8 \quad , \quad r_{24}=\frac{0,8}{3}=0,267$$

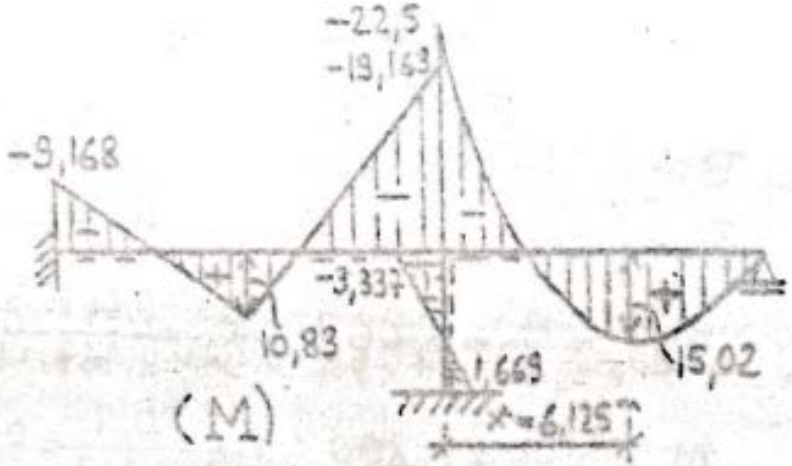
$$m_{2\theta_2}^{2-3}=\frac{3\times2}{10}=0,6 \quad , \quad r_{23}=\frac{0,6}{3}=0,200$$

$$\Sigma m_{1\theta_1}=3,0 \qquad \Sigma r=1,000$$

$$M_{12}=-M_{21}=\frac{10\times10}{8}=12,5$$

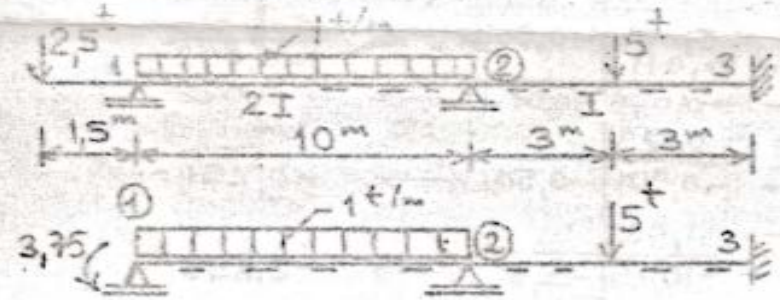
$$M_{23}=\frac{2\times10^2}{8}=25^{tm}$$





Abdulkadir Cüneyt AYDIN

SAYISAL ÖRNEK 3: Aşağıda verilen sürekli kirişin M diyagramını CROSS yöntemi ile çiziniz. Bir d.n. var.



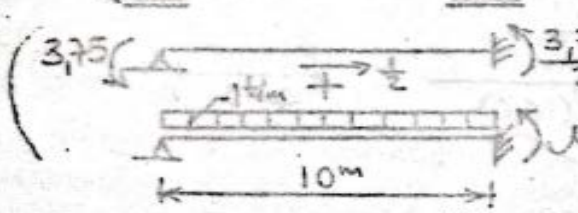
B.d. st.leri ve dağıtma sayıları: ② düğüm noktası

$m_{20_2}^{1-2} = \frac{3\times 2}{10} = 0,60$, $r_{12} = 0,6/1,267 = 0,474$

$m_{20_2}^{2-3} = \frac{4\times 1}{6} = 0,667$, $r_{23} = \frac{0,667}{1,267} = 0,526$

$\Sigma m_{20_2} = 1,267$ $\quad \Sigma r = 1,000$

Ankastrelik momentleri:



$\frac{3,75}{2} = 1,875$

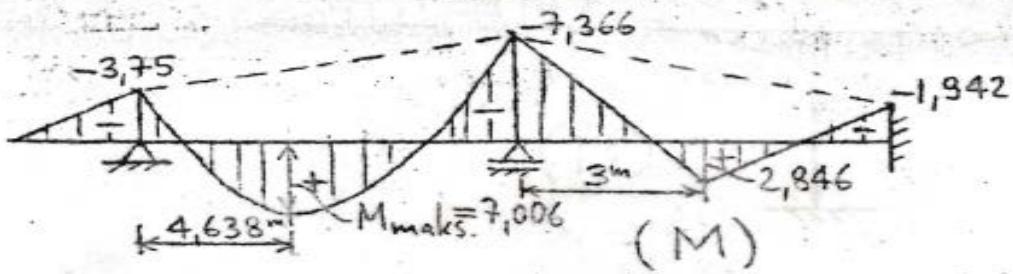
$M_{21} = -\frac{1\times 10^2}{8} = -12,5$

$M_{21} = 1,875 - 12,5 = -10,625$ t.m

$M_{23} = \frac{5\times 6}{8} = 3,75$

$M_{32} = -3,75$

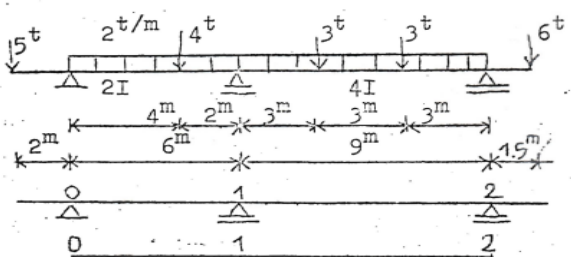
	2-1	② 2-3	
	0,474	0,526	
	-10,625	3,75	-3,75
0 ←	3,259	3,616	→ 1,808
	-7,366	7,366	-1,942
		(-7,366)	



Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

2)



Yandaki şekilde verilen sürekli kirişin M ve T diyagramlarını Üç Moment Denklemleri yardımıyla çiziniz.

ÇÖZÜM: a) Yük terimleri:

$$\mathcal{L}_{01}=\frac{2\times6^2}{4}+\frac{4\times4\times2(2+6)}{36}=25{,}111$$

$$\mathcal{R}_{01}=18+\frac{4\times4\times2\times(4+6)}{36}=26{,}889$$

$$\mathcal{L}_{12}=\mathcal{R}_{12}=\frac{q\ell^2}{4}+\frac{2PL}{3}=\frac{2\times9^2}{4}+\frac{2\times3\times9}{3}=58{,}5$$

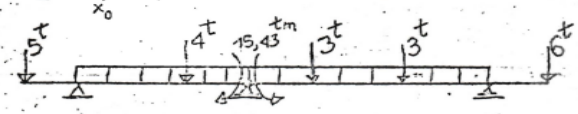
b) Tablo

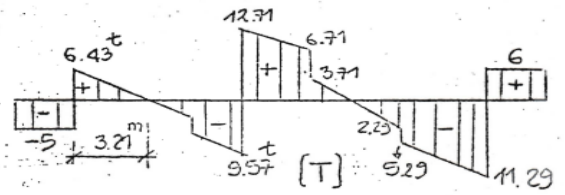
$\frac{6}{2I}=\frac{3}{I}$		$\frac{9}{4I}$	$\frac{1}{I}$
25,111	26,889	58.5	58.5	$\mathcal{L},\mathcal{R}$
$\frac{75,333}{I}$	$\frac{80,667}{I}$	$\frac{131,625}{I}$	$\frac{81}{I}$	$\frac{1}{I}\mathcal{L},\frac{1}{I}\mathcal{R}$

c) Süreklilik denklemleri:

$$\frac{3}{I}\times(-10)+2\left(\frac{3}{I}+\frac{9}{4I}\right)X_1+\frac{80,667}{I}+\frac{131,625}{I}+\frac{9}{4I}(-9)=0 \Longrightarrow X_1=-15.43^{tm}$$

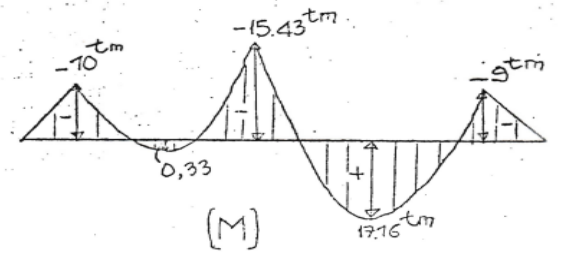
(x_0, x_2)





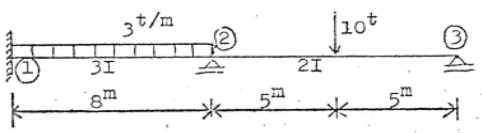
$$T_{k,k+1}=\mathcal{T}_{k,k+1}+\frac{X_{k+1}-X_k}{l_k}$$

$$T_{k+1,k}=\mathcal{T}_{k+1,k}+\frac{X_{k+1}-X_k}{l_k}$$



$M_{dış}$ M	-10		-15.43	-9
$\mathcal{T}_0$	7.333	-8.67	12	-12
ΔT	-0.905		0.714	
T	6.43	-9.57	12.71	-11.29

1)



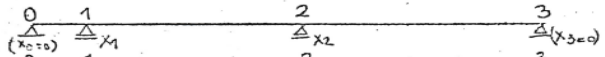
Yandaki şekilde verilen sürekli kirişin T ve M diyagramlarını Üç Moment denklemleri yardımıyla çiziniz.

ÇÖZÜM: a) Yük terimleri:

$$\mathcal{L}_{12} = \mathcal{R}_{12} = \frac{qL^2}{4} = \frac{3\times 8^2}{4} = 48$$

$$\mathcal{L}_{23} = \mathcal{R}_{23} = \frac{3}{8}Pl = \frac{3}{8}\times 10\times 10 = 37.5$$

b) Tablo



0	1		2		3	
0	$\frac{L_{12}}{I_{12}} = \frac{8}{3I}$		$\frac{L_{23}}{I_{23}} = \frac{5}{I}$			$\frac{1}{I}$
0	48	48	37.5	37.5		$\mathcal{L}, \mathcal{R}$
0	$\frac{128}{I}$	$\frac{128}{I}$	$\frac{187.5}{I}$	$\frac{187.5}{I}$		$\frac{1}{I}\mathcal{L}, \frac{1}{I}\mathcal{R}$

c) Süreklilik Denklemleri; $\frac{L_1}{I_1}x_0 + 2\left(\frac{L_1}{I_1}+\frac{L_2}{I_2}\right)x_1 + \frac{L_1}{I_1}x_2 + \frac{L_1}{I_1}\mathcal{R}_0 + \frac{L_2}{I_2}\mathcal{L} = 0$

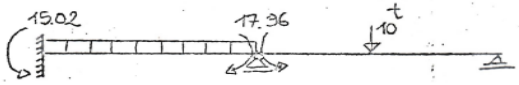
$$0 + 2\left(\frac{8}{3I}\right)x_1 + \frac{8}{3I}x_2 + \frac{128}{I} = 0$$

$$\frac{8}{3I}x_1 + 2\left(\frac{8}{3I}+\frac{5}{I}\right)x_2 + \frac{128}{I} + \frac{187.5}{I} = 0$$

$$16x_1 + 8x_2 = -384$$

$$8x_1 + 46x_2 = -946.5$$

$$\{x_1 = -15.02^{tm},\ x_2 = -17.96\}$$



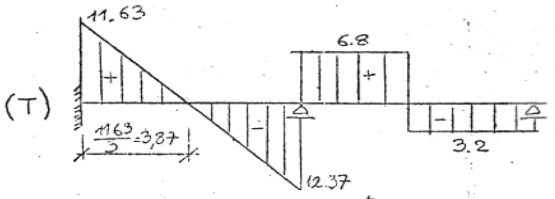
$$T_{k,k+1} = \mathcal{T}_{k,k+1} + \frac{x_{k+1} - x_k}{l_k}$$

$$T_{k+1,k} = \mathcal{T}_{k+1,k} + \frac{x_{k+1} - x_k}{l_k}$$

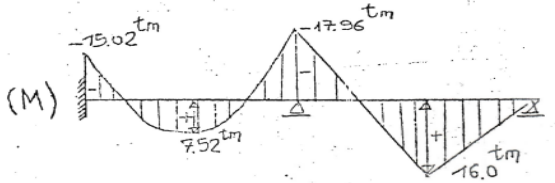
$$T_{1,2} = 12 + \frac{(-17.96)-(-15.02)}{8} = 11.63^{t}$$

$$T_{2,1} = -12 - 0.37 = -12.37^{t}$$

(T)



(M)



$M_{ds.m}$	-15.02		-17.96	0
T_B	12	-12	5	-5
ΔT	-0.37		1.8	
T	11.63	-12.37	6.8	-3.2

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

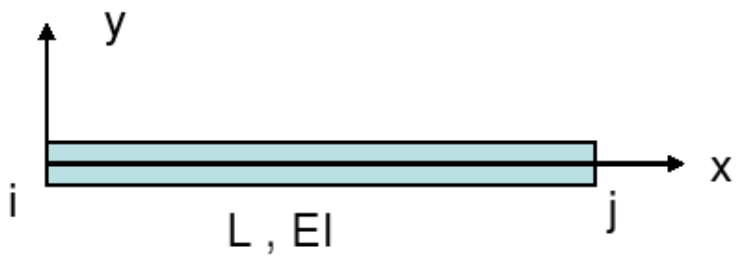
Açı Metodu

(Slope-Deflection)

Deplasman Yöntemi

(Sürekli Kiriş ve Çerçevelerin Çözümlerinde Kullanılır)

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

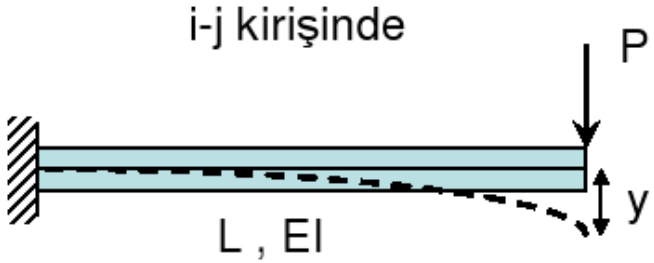


i-j kirişinde y : yerdeğiştirme, deplasman

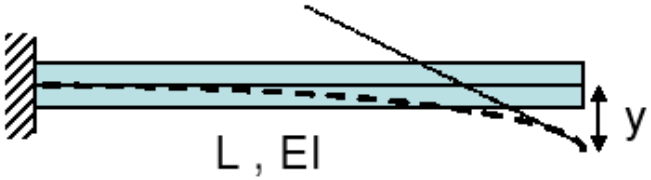
$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$ eğrilik

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



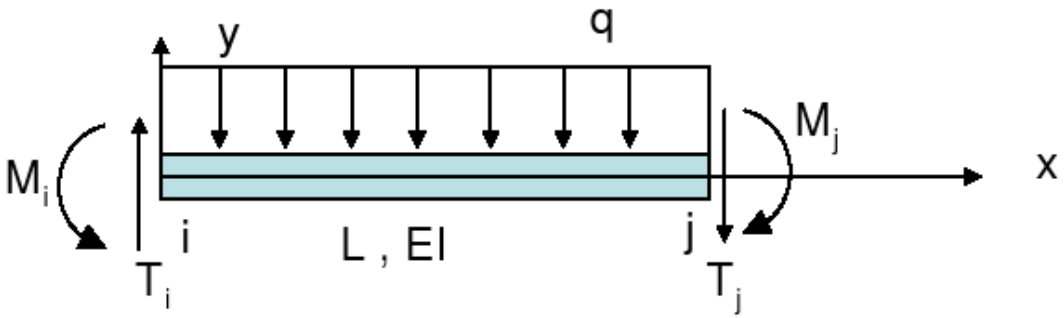
$$y = \frac{P}{6EI}(x^3 - 3Lx^2)$$

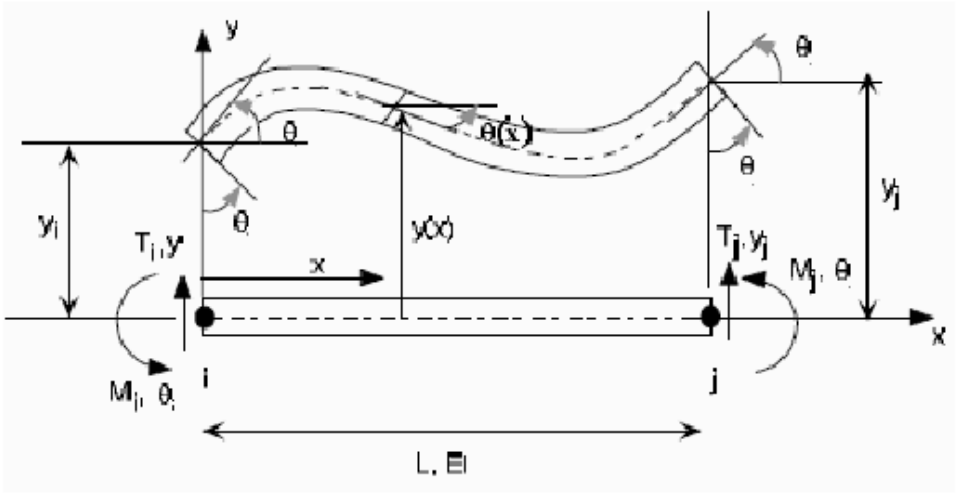


$$y' = \theta = \frac{P}{6EI}(3x^2 - 6Lx)$$

$$y'' = \frac{P}{EI}(x - L) = \frac{M}{EI}$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN





Deplasmanlar

i ucunda y1, θ1;

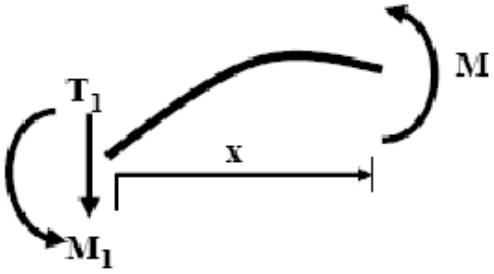
j ucunda y2, θ2;

İç kuvvetler

i ucunda T1, M1;

j ucunda T2, M2;

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



İ ucundan x kadar ileride bir noktada moment yazılırsa

$$M + M_1 - T_1 * x = 0$$

$$M = -M_1 + T_1 * x = 0$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$ eğrilik

$$EI\, y'' = -M + T_1 * x$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

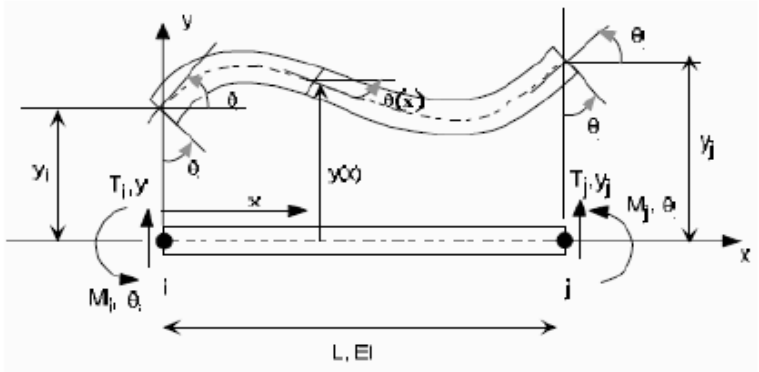
Eğrilik denkleminin integrali alınarak y' bulunur ve y bulunur

$$EI\,y'' = -M + T_1 * x$$

$$EI\,y' = -M_1 * x + T_1 * \frac{x^2}{2} + c_1$$

$$EI\,y = -M_1 * \frac{x^2}{2} + T_1 * \frac{x^3}{6} + c_1 * x + c_2$$

Bu denklemlerde sınır şartları yerine yazılırsa



Deplasmanlar
i ucunda y1, θ1;
j ucunda y2, θ2;

İç kuvvetler
i ucunda T1, M1;
j ucunda T2, M2;

x = 0 için $y = y_1$ $\quad c_1 = EI\,\theta_1$

x = 0 için $y' = \theta_1$ $\quad c_2 = EI\,y_1$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

$c_1 = EI\,\theta_1$

$c_2 = EI\,y_1$

c_1 ve c_2 değerleri denklemelerde yerine yazılırsa

$$y' = -\frac{M_1}{EI} * x + \frac{T_1}{EI} * \frac{x^2}{2} + \theta_1$$

$$y = -\frac{M_1}{EI} * \frac{x^2}{2} + \frac{T_1}{EI} * \frac{x^3}{6} + \theta_1 * x + y_1$$

Bu denklemlerde x=L için verilen sınır şartları yerine yazılır ve düzenlenirse

x = L için $y=y_2$ x = L için $y'=\theta_2$

$$M_1 = \frac{2EI}{L}(2\theta_1 + \theta_2 - 3\phi)$$

$$T_1 = 3 * \frac{2EI}{L}(\theta_1 + 2\theta_2 - 2\phi)$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

$$M_1 = \frac{2EI}{L}(2\theta_1 + \theta_2 - 3\phi)$$

$$\phi = \frac{y_2 - y_1}{L}$$

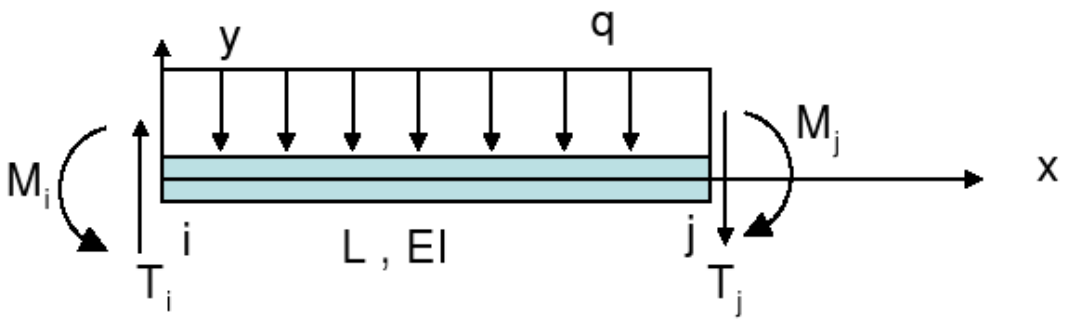
$$T_1 = 3 * \frac{2EI}{L}(\theta_1 + 2\theta_2 - 2\phi)$$

$$k = \frac{2EI}{L}$$ Rijitlik için verilen tanım yerine yazılırsa

$$M_1 = k(2\theta_1 + \theta_2 - 3\phi)$$

$$M_2 = k(\theta_1 + 2\theta_2 - 3\phi)$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

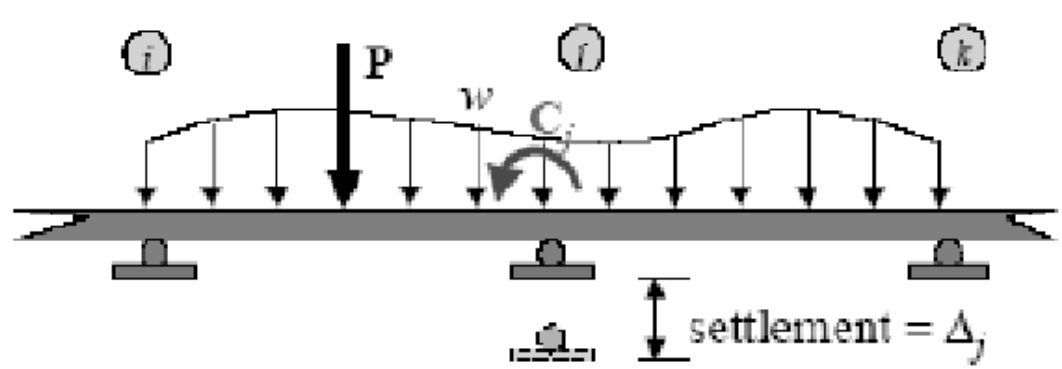


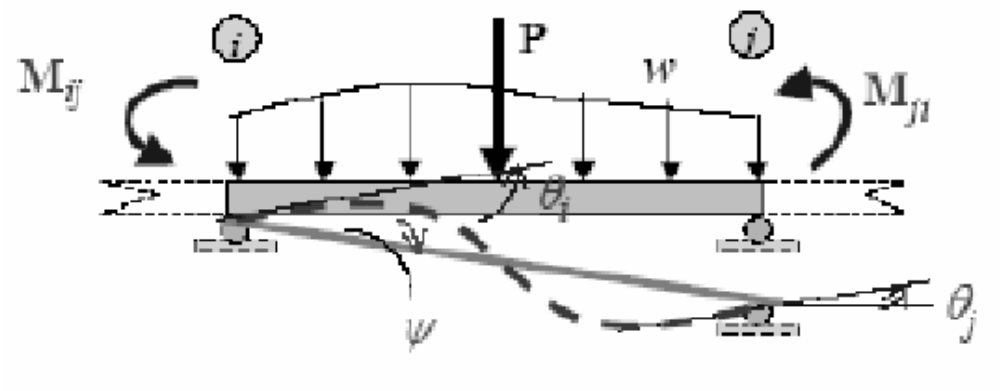
Bir yapı elemanında eleman uçlarında oluşan toplam momentler

1. Eleman üzerindeki dış yüklerden dolayı elaman uçlarında oluşan Ankastrelik uç momentleri (M_{ij}^F)
2. Eleman uçlarının dönmesi ile oluşan momentler (θ_i θ_j)
3. Eleman uçlarının birbirine göre relatif hareketi ile oluşan momentler'den (Φ_i)

oluşmaktadır.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



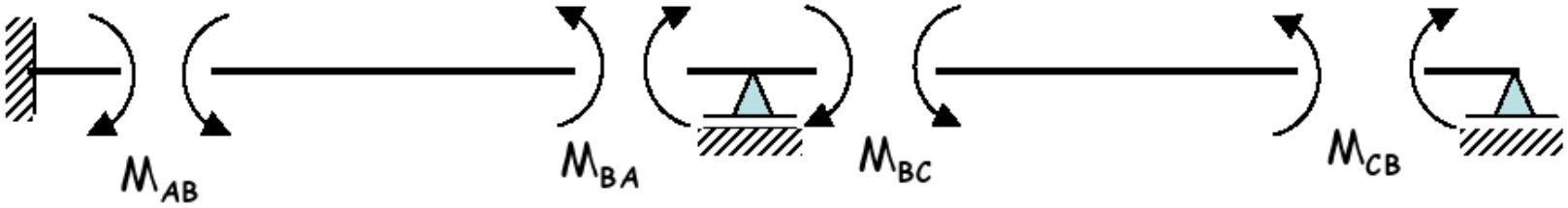


$$M_{ij} = k_{ij}\,(2\theta_i + \theta_j - 3\phi_{ij}) + M_{ij}^{F}$$

$$M_{ji} = k_{ij}\,(\theta_i + 2\theta_j - 3\phi_{ij}) + M_{ji}^{F}$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Açı metodunda pozitif yön kabulü

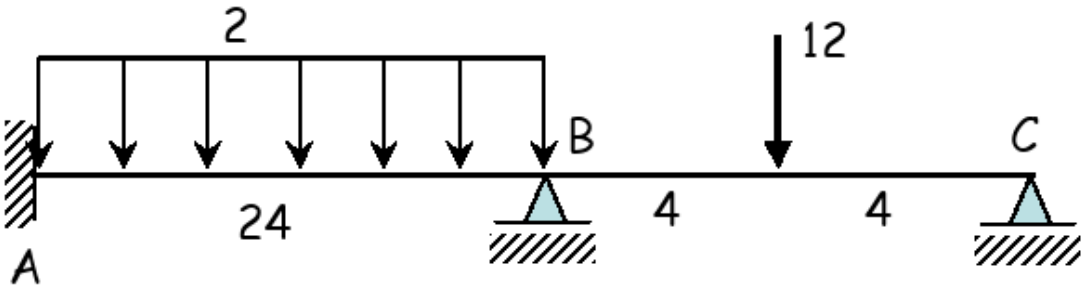




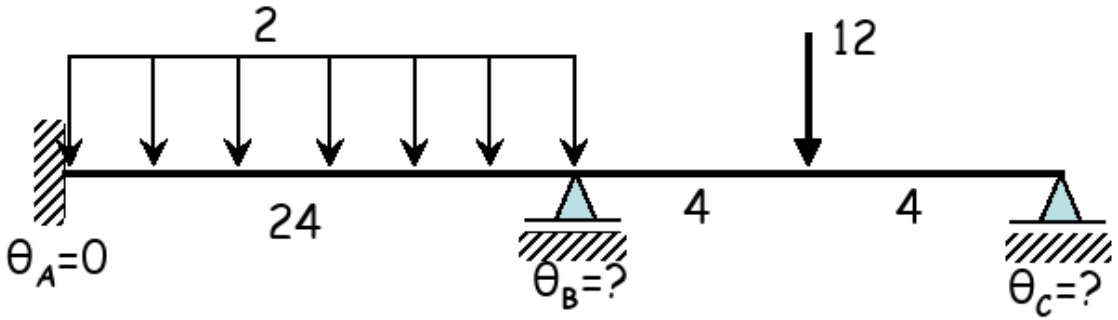
Moment değişim grafiği çizilirken kullanılan pozitif yön kabulü

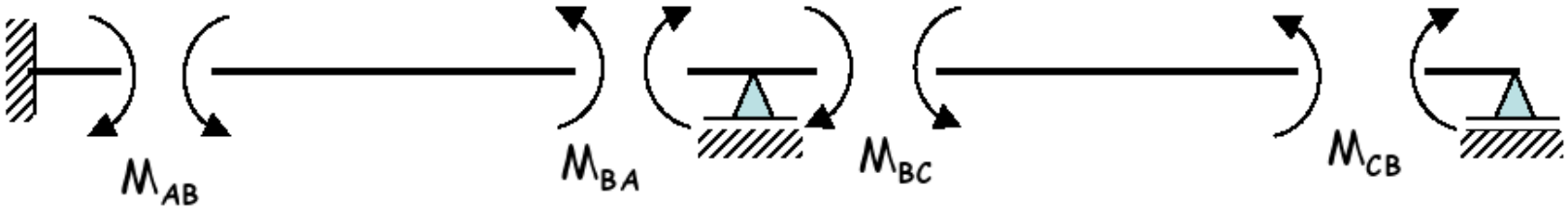
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Açı Metodu ile Çözüm



Yanda özellikleri verilen sistemi açı metodu ile çözünüz.

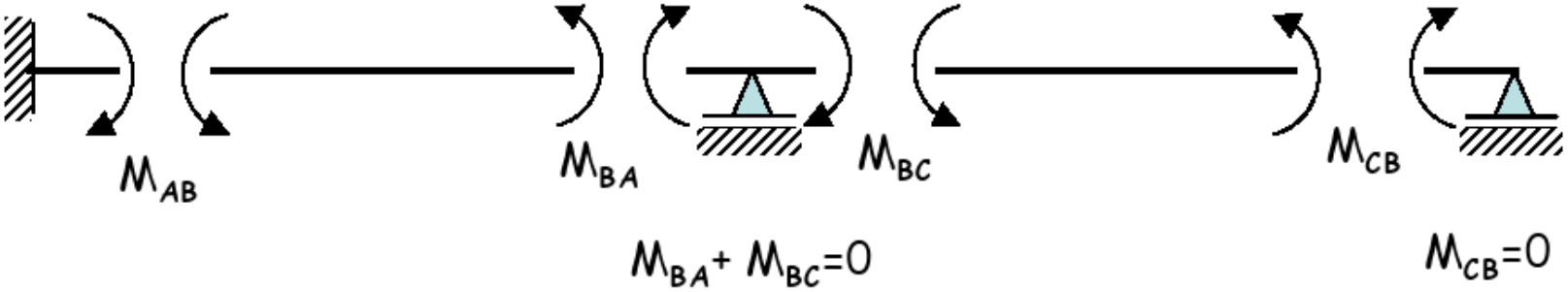




$M_{BA} + M_{BC} = 0$

$M_{CB} = 0$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



$$M_{AB} = 2E\frac{I}{L}(2\theta_A + \theta_B - 3\phi) + M^F_{AB}$$

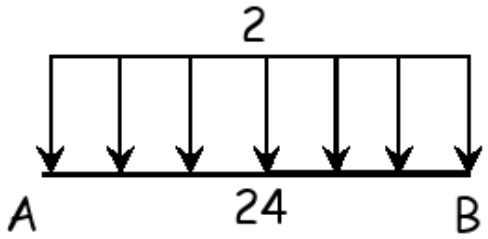
$$M_{BA} = 2E\frac{I}{L}(\theta_A + 2\theta_B - 3\phi) + M^F_{BA}$$

$$M_{BC} = 2E\frac{I}{L}(2\theta_B + \theta_C - 3\phi) + M^F_{BC}$$

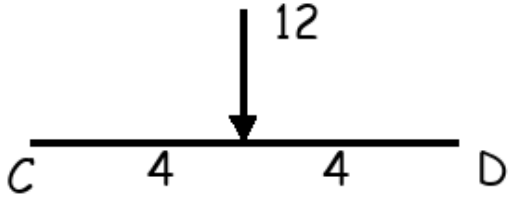
$$M_{CB} = 2E\frac{I}{L}(\theta_B + 2\theta_C - 3\phi) + M^F_{CB}$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Ankastrelik uç momentleri

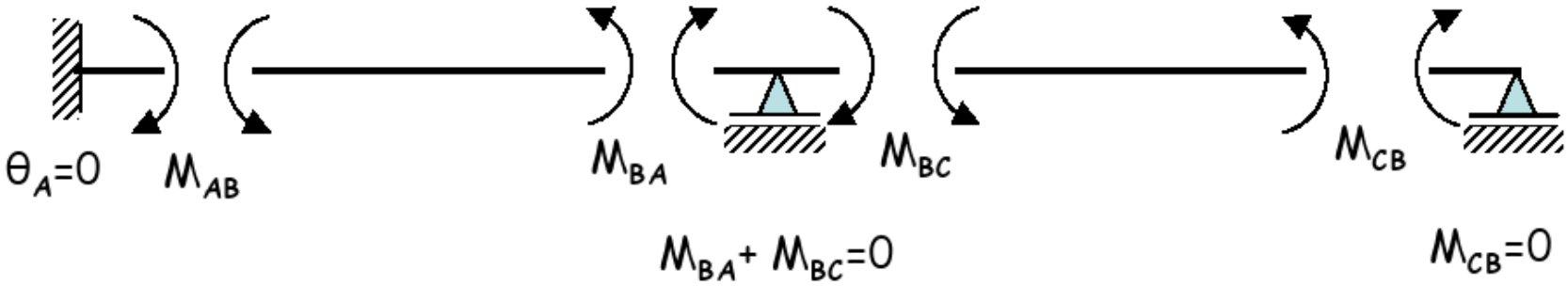


$$M_{AB}^{F} = -M_{BA}^{F} = \frac{q * l^2}{12} = \frac{2 * 24^2}{12} = 96$$



$$M_{CD}^{F} = -M_{DC}^{F} = \frac{P * l}{8} = \frac{12 * 8}{8} = 12$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



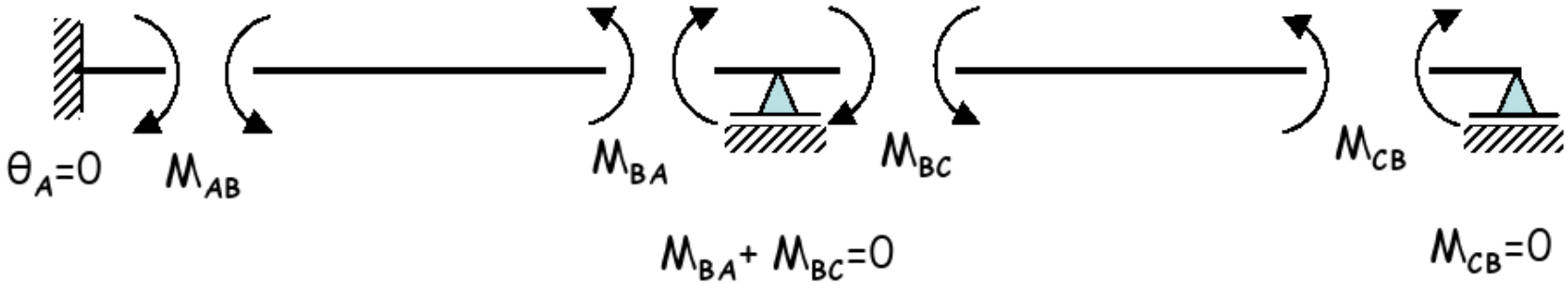
$$M_{AB} = 2E\frac{I}{L}(2\theta_A + \theta_B - 3\phi) + M^F_{AB} = 2E\frac{I}{24}(\theta_B) + 96$$

$$M_{BA} = 2E\frac{I}{L}(\theta_A + 2\theta_B - 3\phi) + M^F_{BA} = 2E\frac{I}{24}(2\theta_B) - 96$$

$$M_{BC} = 2E\frac{I}{L}(2\theta_B + \theta_C - 3\phi) + M^F_{BC} = 2E\frac{I}{8}(2\theta_B + \theta_C) + 12$$

$$M_{CB} = 2E\frac{I}{L}(\theta_B + 2\theta_C - 3\phi) + M^F_{CB} = 2E\frac{I}{8}(\theta_B + 2\theta_C) - 12$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



$$M_{BA} + M_{BC} = 2E\frac{I}{24}(2\theta_B) + 96 + 2E\frac{I}{8}(2\theta_B + \theta_C) + 12$$

$$M_{CB} = 2E\frac{I}{8}(\theta_B + 2\theta_C) - 12 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{EI}{6}(\theta_B) - 96 + \frac{EI}{2}(\theta_B) + \frac{EI}{4}(\theta_C) + 12 = 0 \\ &\frac{EI}{4}(\theta_B) + \frac{EI}{2}(\theta_C) - 12 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \theta_B &= \frac{144}{EI} \\ \theta_C &= \frac{-48}{EI} \end{aligned}$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

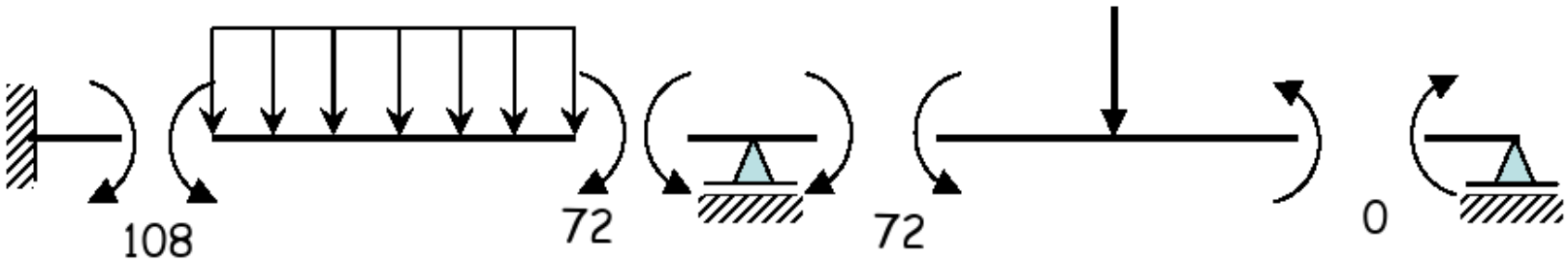
$$M_{AB} = 2E\frac{I}{24}(\theta_B) + 96 = 2*\frac{EI}{24}*\frac{144}{EI} + 96 = 108$$

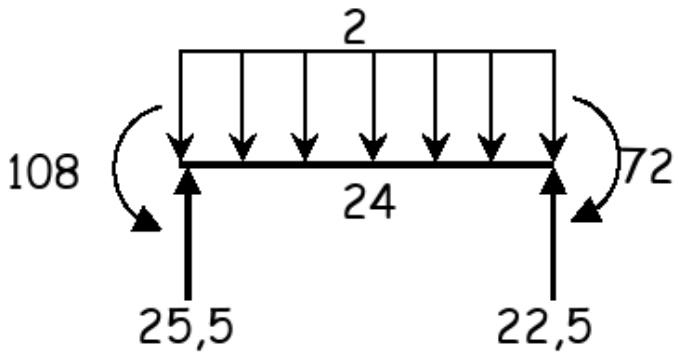
$$M_{BA} = 2*\frac{EI}{24}(2*\theta_B) - 96 = 2*\frac{EI}{24}*(2*\frac{144}{EI}) - 96 = -72$$

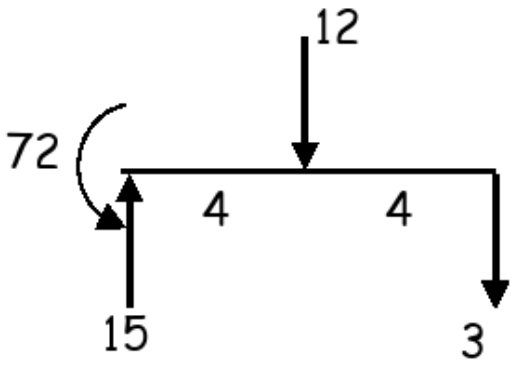
$$M_{BC} = 2*\frac{EI}{8}(2\theta_B + \theta_C) + 12 = 2*\frac{EI}{8}(2*\frac{144}{EI} - \frac{48}{EI}) + 12 = 72$$

$$M_{CB} = 2*\frac{EI}{8}(\theta_B + 2\theta_C) - 12 = 2*\frac{EI}{8}(\frac{144}{EI} - 2*\frac{48}{EI}) - 12 = 0$$

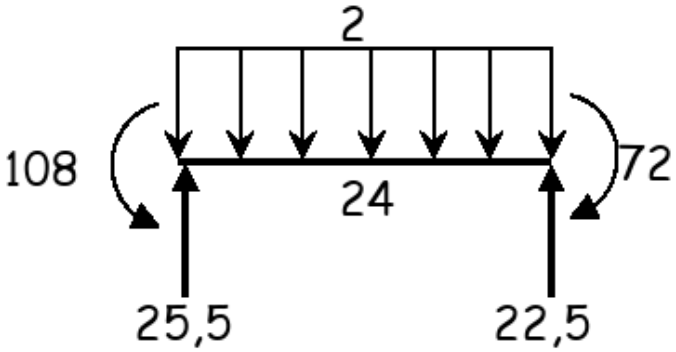
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

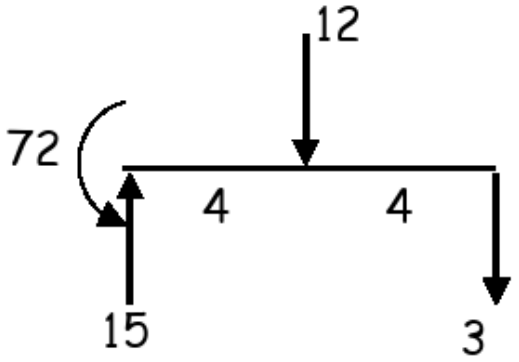


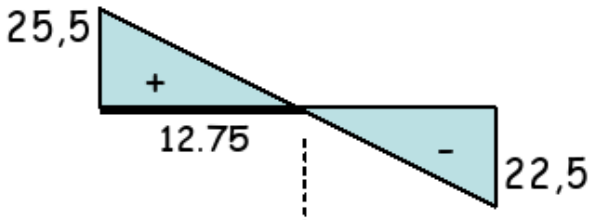




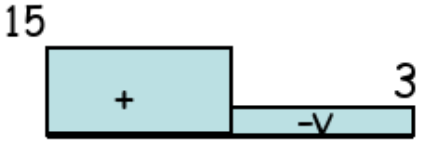
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

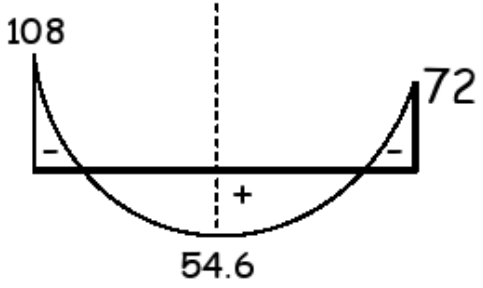




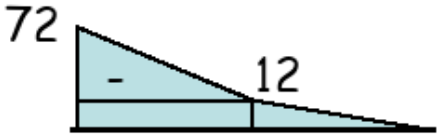


T



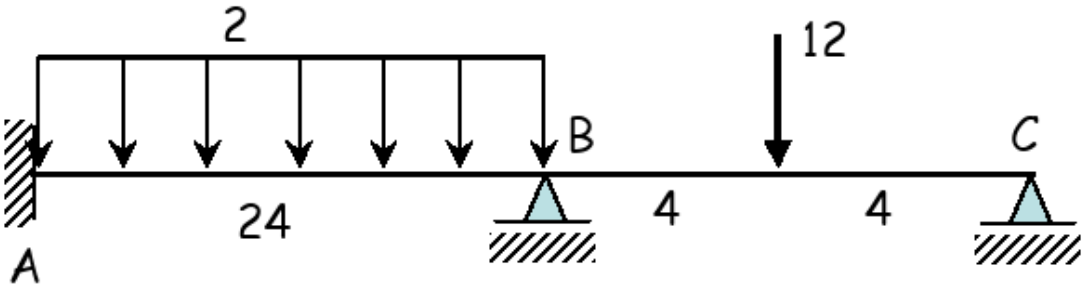


M

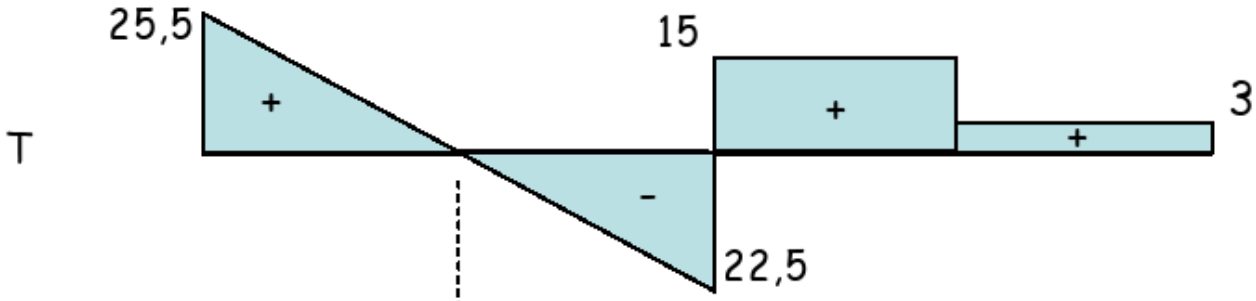


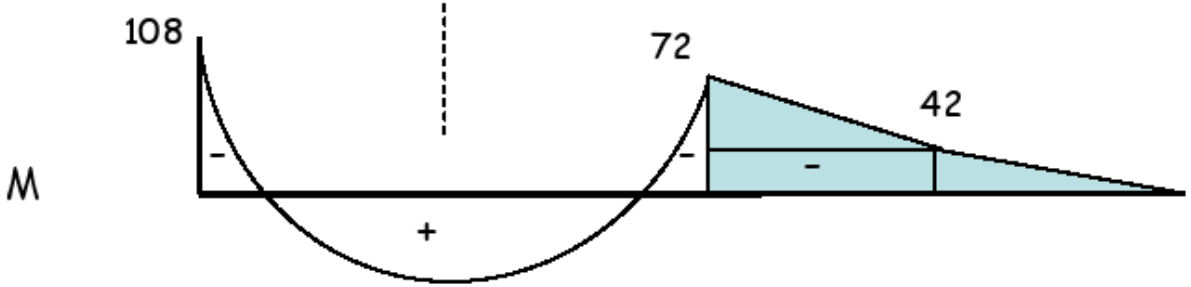
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Açı Metodu ile Çözüm



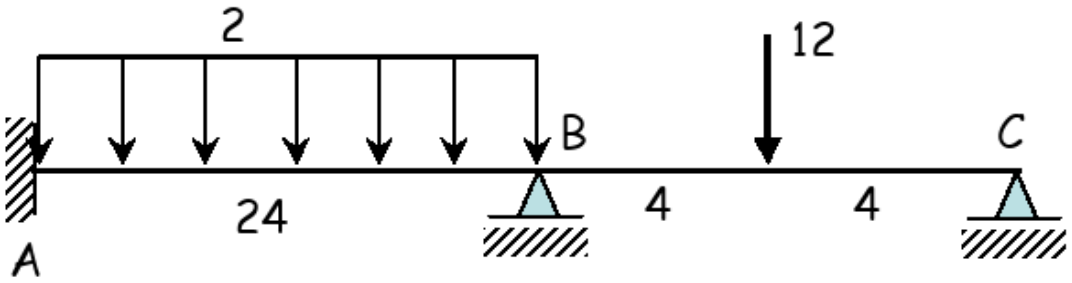
Yanda özellikleri verilen sistemi açı metodu ile çözünüz.





Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Açı Metodu ile Çözüm Yapılırken Uç Mesnette Momentin Sıfır Olması Durumu

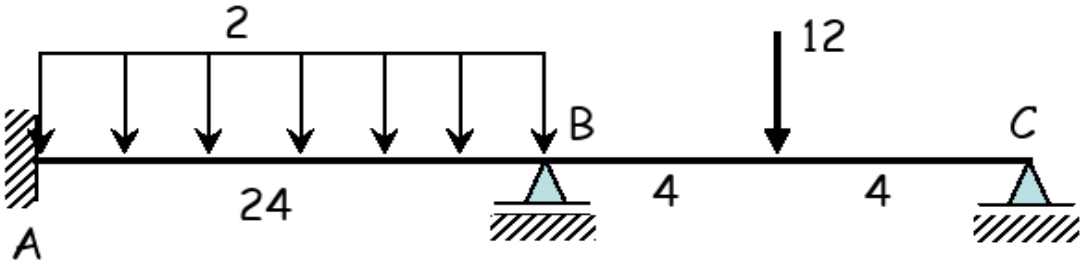


Bu problem B ve C noktalarındaki dönmeler bilinmeyen olarak seçilip çözüldü. Diğer bir çözüm yöntemi için C noktasındaki momentin sıfır olması durumu kullanılmaktadır. Böylece seçilen bilinmeyen sayısı azaltılabilmektedir. Her iki çözümde de sonuç aynı çıkmaktadır. Ancak uç noktada sabit yada hareketli mesnet olması halinde momentin sıfır olması özelliği kullanılması durumunda çözüm daha kolay elde edilmektedir.

Yukarıdaki örnekte B ve C noktalarındaki dönmeler bilinmeyen olarak seçilip daha önce anlatılan şekilde çözüm yapılabilmektedir.

Eğer C noktasındaki momentin sıfır olması durumu kullanılırsa bu durumda sadece C noktasındaki dönme değeri bilinmeyen olarak seçilmektedir. Böylece iki bilinmeyen yerine bir bilinmeyen ile çözüm yapılabilmektedir. Ancak bu durumda yazılan denklem değişmektedir.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



C noktasındaki dönme değeri bilinmeyen olarak seçilmeden çözüm yapılmak istenmektedir. Sistemde bilinmeyen olarak sadece B düğümünün dönmesidir. Bu durumda AB çubuğundaki uç momentler M_{AB} ve M_{BA} için daha önce yazılan moment denklemleri kullanılır.

$$M_{AB} = 2E\frac{I}{L}(2\theta_A + \theta_B - 3\phi) + M^F_{AB}$$

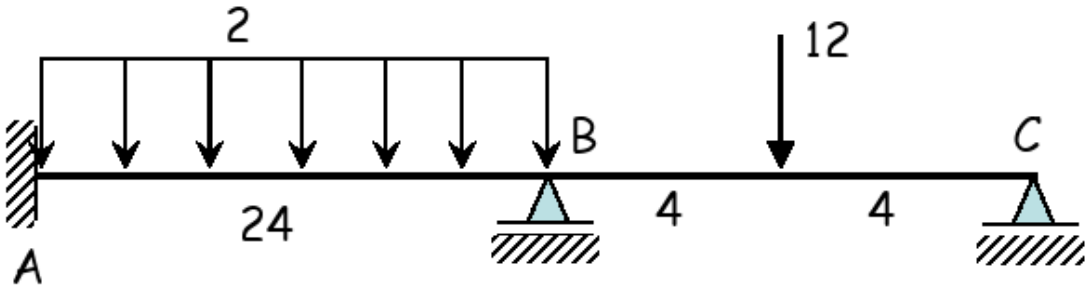
$$M_{BA} = 2E\frac{I}{L}(\theta_A + 2\theta_B - 3\phi) + M^F_{BA}$$

Ancak C noktasındaki momente değeri sıfır olduğu bilinmektedir. Bu durumda BC çubuğundaki momente değerleri şu denklemlerle yazılır.

$$M_{BC} = 3E\frac{I}{L}(\theta_B - \phi) + (M^F_{BA})^*$$

$$M_{BC} = 0$$

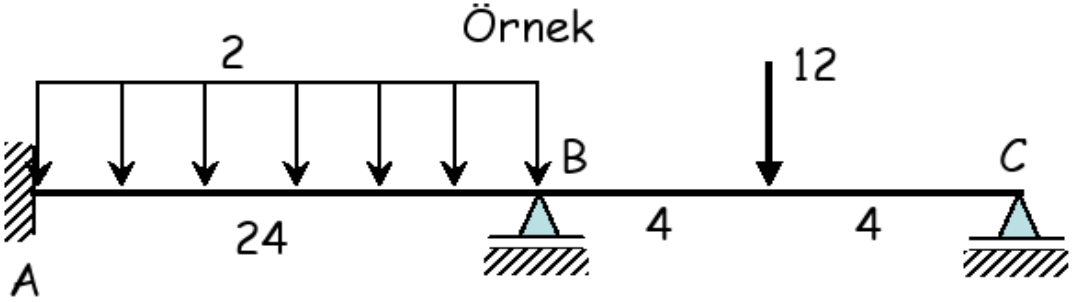
Abdulkadir Cüneyt AYDIN



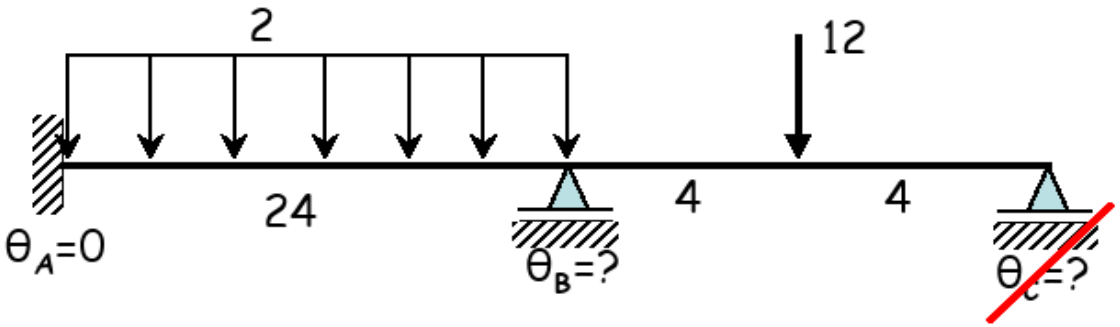
$$M_{BC} = 3E\frac{I}{L}(\theta_B - \phi) + (M^F_{BC})^* \qquad M_{BC} = 0$$

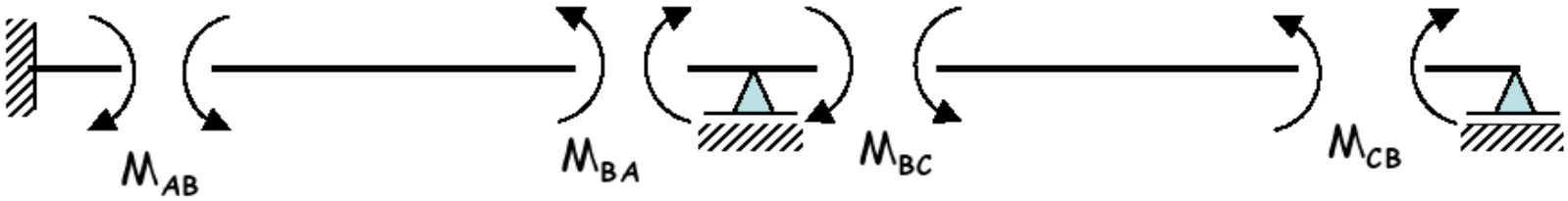
Bu denklemde BC çubuğundaki ankastrelik uç momentleri yazılırken bir ucu ankastre diğer ucu hareketli mesnet olan çubuklar için hazırlanan tablolar kullanılarak ankastrelik uç momentleri yazılır.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



Yanda özellikleri verilen sistemi açı metodu ile çözünüz.



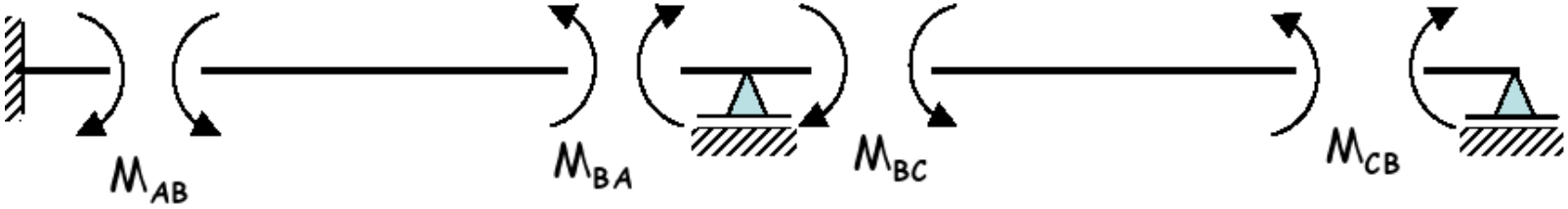


$M_{BA} + M_{BC} = 0$

$M_{CB} = 0$

Problem çözülürken C noktasındaki momentin sıfır olması kullanılacaktır. Yani BC çubuğu için bir ucu hareketli mesnet olan sistemler için yazılan denklem kullanılacaktır. Böylece bilinmeyen sayısı 2 den 1 e düşecektir.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



$$M_{AB} = 2E\frac{I}{L}(2\theta_A + \theta_B - 3\phi) + M^F_{AB}$$

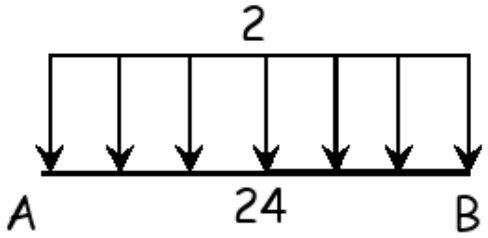
$$M_{BA} = 2E\frac{I}{L}(\theta_A + 2\theta_B - 3\phi) + M^F_{BA}$$

$$M_{BC} = 3E\frac{I}{L}(\theta_B - \phi) + (M^F_{BC})^*$$

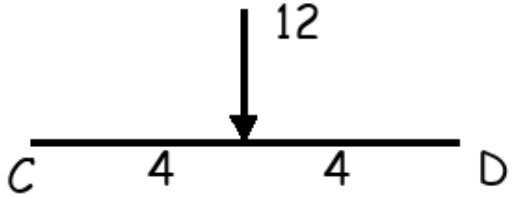
$$M_{CB} = 0$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Ankastrelik uç momentleri

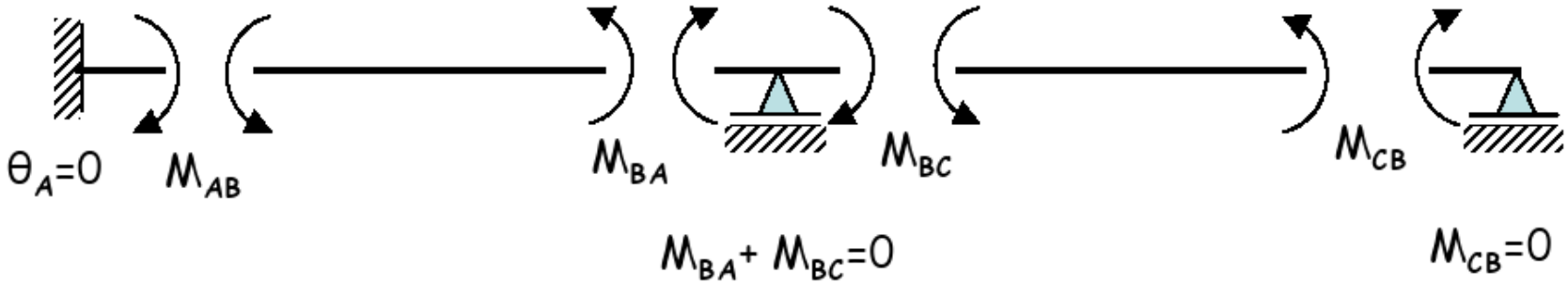


$$M_{AB}^{F} = -M_{BA}^{F} = \frac{q*l^2}{12} = \frac{2*24^2}{12} = 96$$



$$(M_{CD}^{F})^{*} = \frac{3*P*l}{16} = \frac{3*12*8}{16} = 18$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

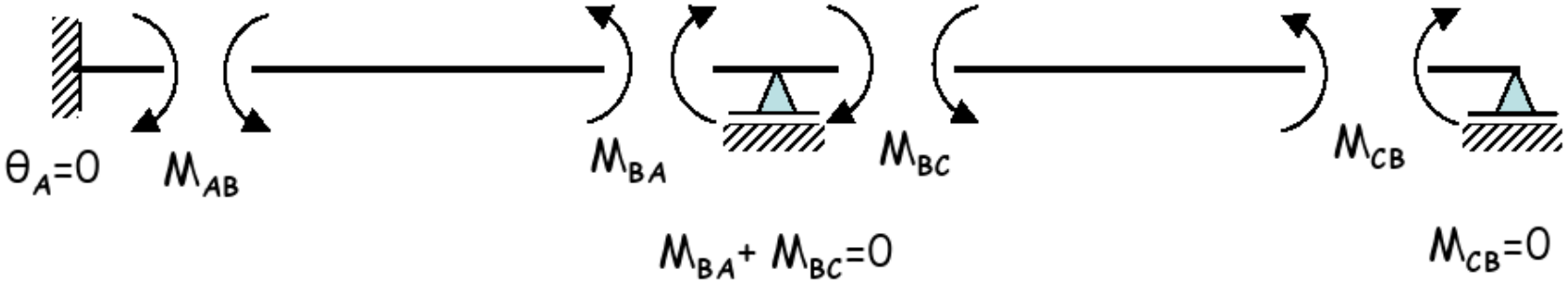


$$M_{AB} = 2E\frac{I}{L}(2\theta_A + \theta_B - 3\phi) + M^F_{AB} = 2E\frac{I}{24}(\theta_B) + 96$$

$$M_{BA} = 2E\frac{I}{L}(\theta_A + 2\theta_B - 3\phi) + M^F_{BA} = 2E\frac{I}{24}(2\theta_B) - 96$$

$$M_{BC} = 3E\frac{I}{L}(\theta_B - \phi) + (M^F_{BC})^* = 3E\frac{I}{8}(\theta_B) + 18$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN



$$M_{BA} + M_{BC} = 2E\frac{I}{24}(2\theta_B) + 96 + 3E\frac{I}{8}(\theta_B) + 18 = 0$$

$$\theta_B = \frac{144}{EI}$$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

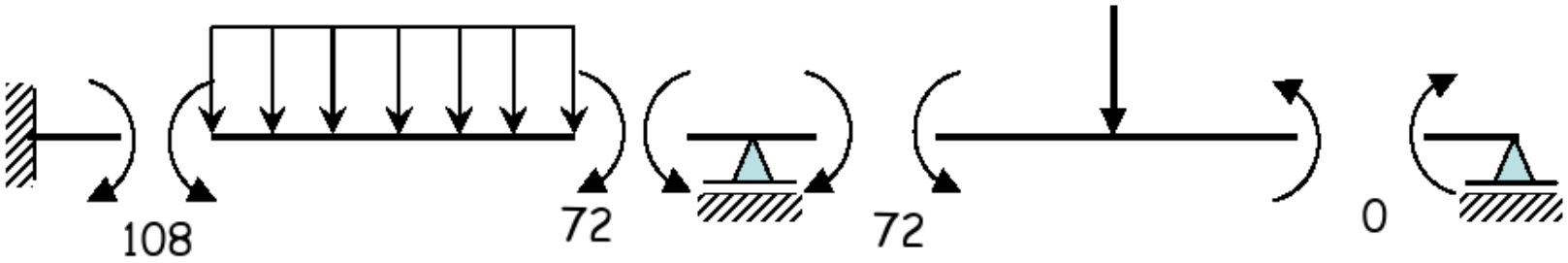
$$M_{AB} = 2E\frac{I}{24}(\theta_B) + 96 = 2*\frac{EI}{24}*\frac{144}{EI} + 96 = 108$$

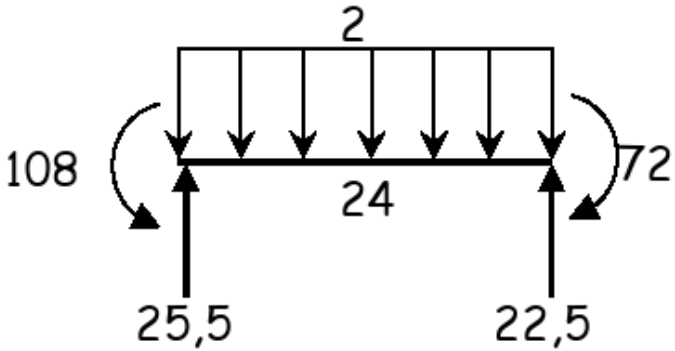
$$M_{BA} = 2*\frac{EI}{24}(2*\theta_B) - 96 = 2*\frac{EI}{24}*(2*\frac{144}{EI}) - 96 = -72$$

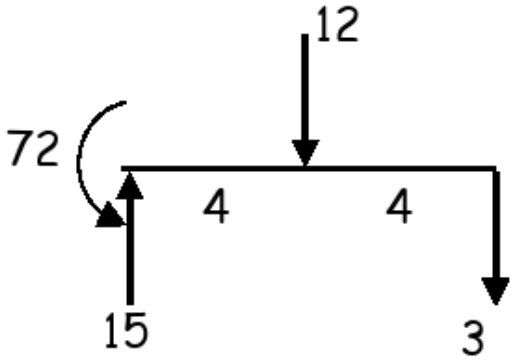
$$M_{BC} = 3*\frac{EI}{8}(\theta_B) + 18 = 3*\frac{EI}{8}(\frac{144}{EI}) + 18 = 72$$

$$M_{CB} = 0$$

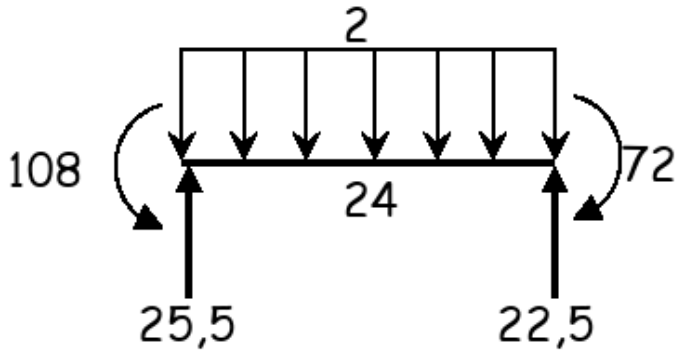
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

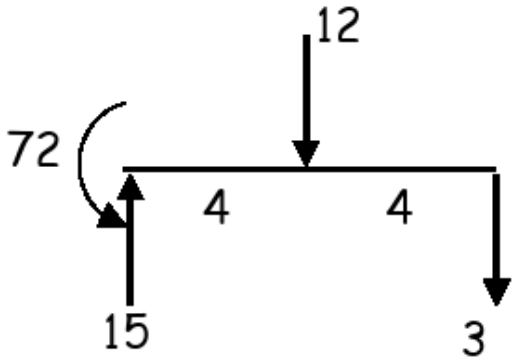


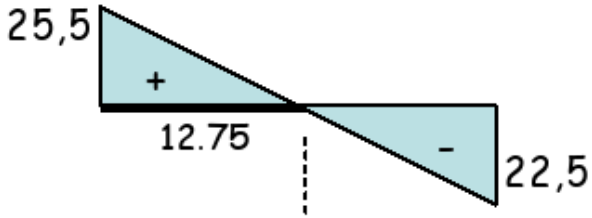




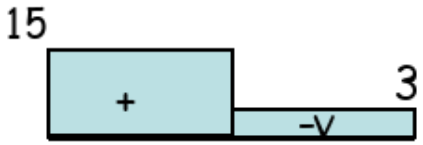
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

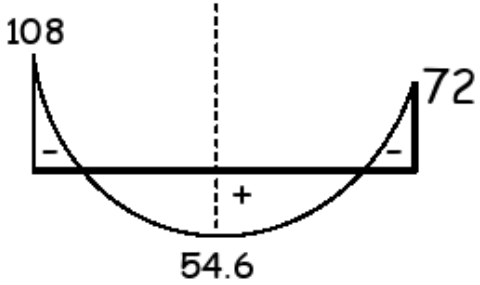




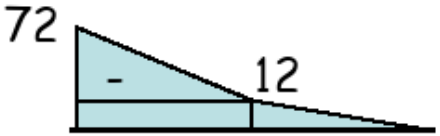


T



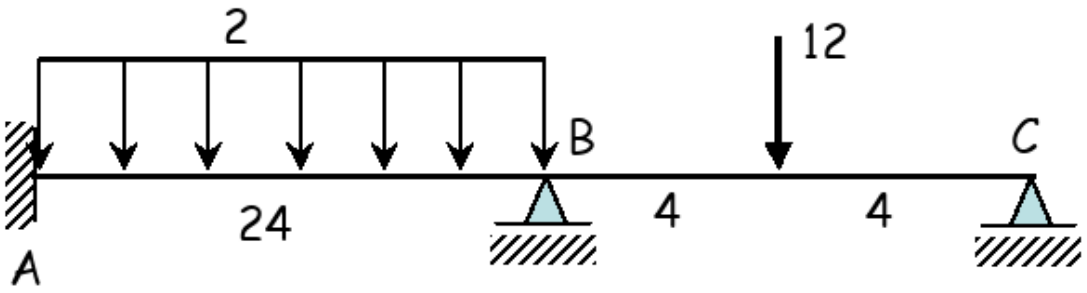


M

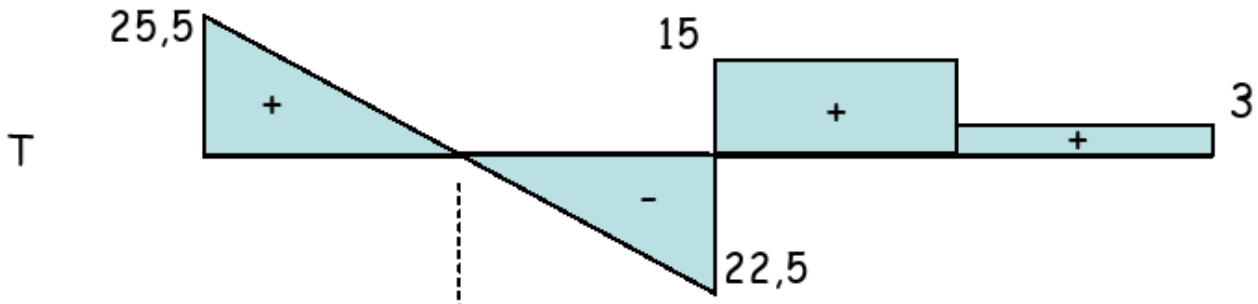


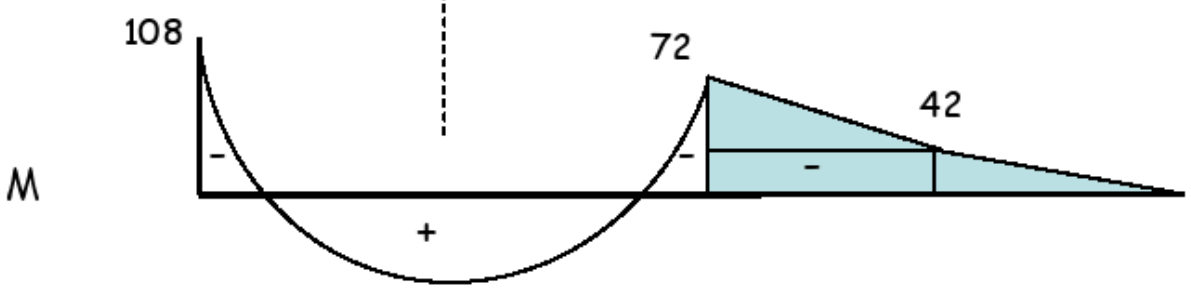
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Açı Metodu ile Çözüm



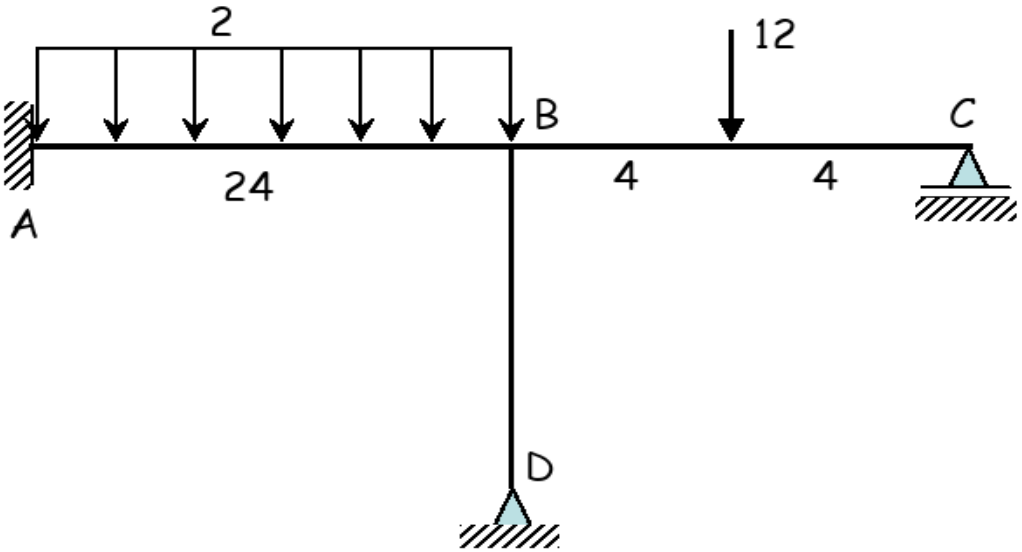
Yanda özellikleri verilen sistemi açı metodu ile çözünüz.





Abdulkadir Cüneyt AYDIN

Açı Metodu ile Çözüm Yapılırken Uç Noktada Momentin Sıfır Olması Durumu

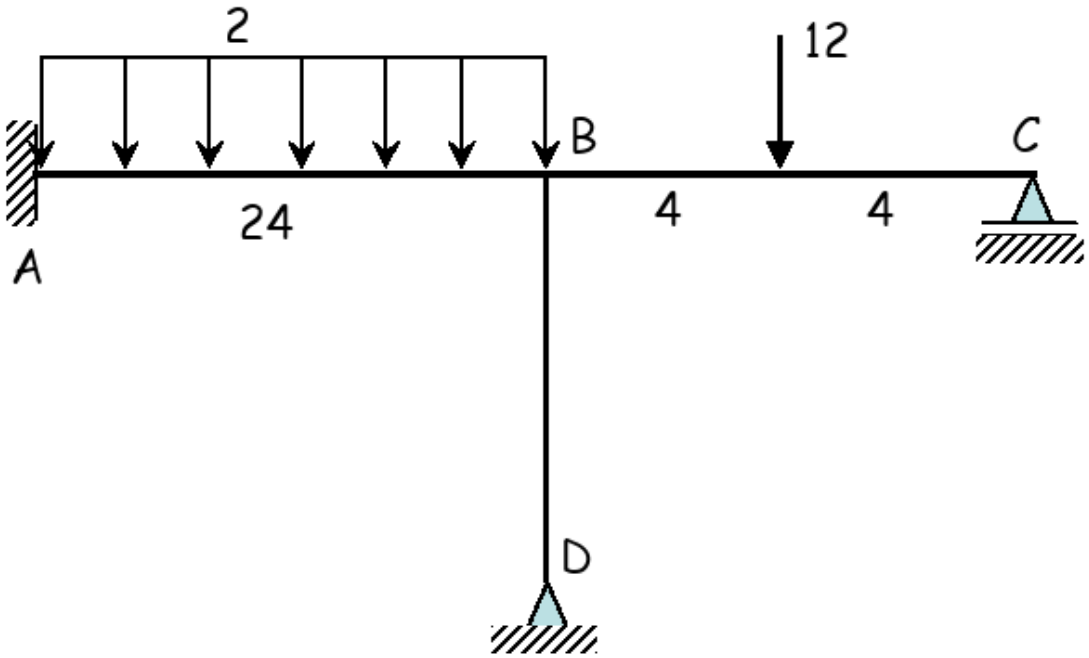


Yukarıda özellikleri verilen sistemi açı metodu ile çözmek istersek A noktasındaki dönme sıfırdır ancak B,C ve D noktalarındaki dönmeler bilinmeyen olarak seçilip 3 denklem yazılarak çözüm yapılabilir.

Ancak eğer C ve D noktalarındaki momentlerin sıfır olması durumunu kullanmak istersek ve bu çubuklar için düzenlenmiş denklemleri ve ankastrelik uç momentlerini kullanırsak bilinmeyen olarak sadece B noktasındaki dönme değeri kalır. Böylece sadece tek bir bilinmeyen ile sistemin çözümü mümkün olabilmektedir.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

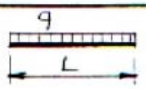
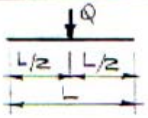
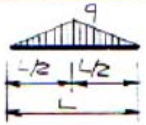
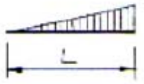
Açı Metodu ile Çözüm Yapılırken Uç Noktada Momentin Sıfır Olması Durumu



Bu yüzden bazen normal açı denklemi yazılarak el ile çözülmesi oldukça zahmetli olacak sistemler için özel olarak düzenlenmiş denklemler ve ankastrelik uç momentlerini kullanarak çözüm oldukça kolay yapılabilmektedir.

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

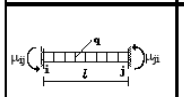
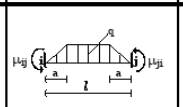
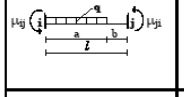
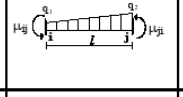
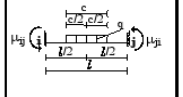
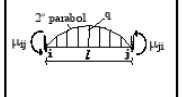
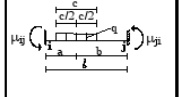
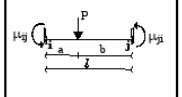
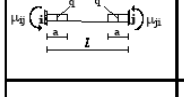
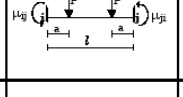
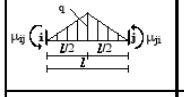
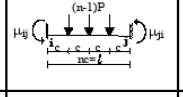
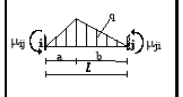
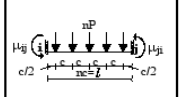
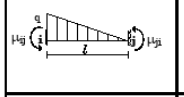
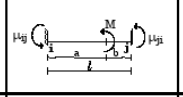
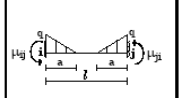
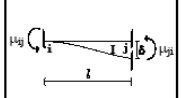
DOĞRU EKSENLİ PRİZMATİK (EI : SABİT) ÇUBUKLARDA ANKASTRELİK MOMENTLERİ

Yükleme	M_{ij}	M_{ji}	$\bar{M}_{ij}$
	$+\frac{qL^2}{12}$	$-\frac{qL^2}{12}$	$+\frac{qL^2}{8}$
	$+\frac{Qab^2}{L^2}$	$-\frac{Qa^2b}{L^2}$	$+\frac{Qab}{2L^2}(L+b)$
	$+\frac{QL}{8}$	$-\frac{QL}{8}$	$+\frac{3QL}{16}$
	$+\frac{qL^2}{12}\left[1-\frac{a^2}{L^2}\left(2-\frac{a}{L}\right)\right]$	$-\frac{qL^2}{12}\left[1-\frac{a^2}{L^2}\left(2-\frac{a}{L}\right)\right]$	$+\frac{qL^2}{8}\left[1-\frac{a^2}{L^2}\left(2-\frac{a}{L}\right)\right]$
	$+\frac{5qL^2}{96}$	$-\frac{5qL^2}{96}$	$+\frac{5qL^2}{64}$
	$+\frac{qL^2}{20}$	$-\frac{qL^2}{30}$	$+\frac{qL^2}{15}$
	$+\frac{qL^2}{30}$	$-\frac{qL^2}{20}$	$+\frac{7qL^2}{120}$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

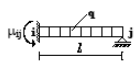
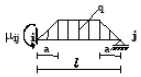
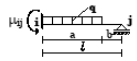
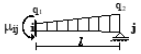
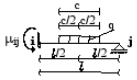
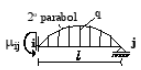
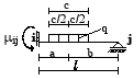
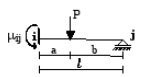
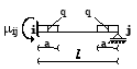
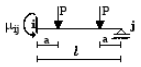
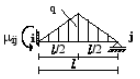
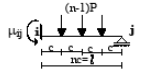
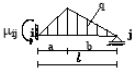
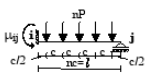
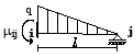
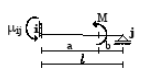
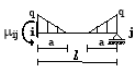
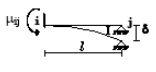
Abdulkadir Cüneyt AYDIN

ANKASTRELİK MOMENTLERİ TABLOSU

Yük	Ankastrelik Momentleri	Yük	Ankastrelik Momentleri
	$\mu_{ij}=\frac{ql^2}{12}$ $\mu_{ji}=-\frac{ql^2}{12}$		$\mu_{ij}=\frac{q}{12}\left[l^2-a^2\left(2-\frac{a}{l}\right)\right]$ $\mu_{ji}=-\frac{q}{12}\left[l^2-a^2\left(2-\frac{a}{l}\right)\right]$
	$\mu_{ij}=\frac{qa^2}{4}\left[2-\frac{a}{l}\left(\frac{8}{3}-\frac{a}{l}\right)\right]$ $\mu_{ji}=-\frac{qa^3}{12l^2}(4l-3a)$		$\mu_{ij}=\frac{l^2}{60}(3q_1+2q_2)$ $\mu_{ji}=-\frac{l^2}{60}(2q_1+3q_2)$
	$\mu_{ij}=\frac{qc}{24l}(3l^2-c^2)$ $\mu_{ji}=-\frac{qc}{24l}(3l^2-c^2)$		$\mu_{ij}=\frac{ql^2}{15}$ $\mu_{ji}=-\frac{ql^2}{15}$
	$\mu_{ij}=\frac{qc}{12l^2}\left[(4l^2-c^2)(2b-a)-4(2b^3-a^3)\right]$ $\mu_{ji}=-\frac{qc}{12l^2}\left[(4l^2-c^2)(2a-b)-4(2a^3-b^3)\right]$		$\mu_{ij}=Pa\frac{b^2}{l^2}$ $\mu_{ji}=-Pb\frac{a^2}{l^2}$ Özel hal: $a=b=\frac{l}{2}$, $\mu_{ij}=\frac{Pl}{8}$, $\mu_{ji}=-\frac{Pl}{8}$
	$\mu_{ij}=\frac{qa^2}{6l}(3l-2a)$ $\mu_{ji}=-\frac{qa^2}{6l}(3l-2a)$		$\mu_{ij}=\frac{Pa}{l}(l-a)$ $\mu_{ji}=-\frac{Pa}{l}(l-a)$
	$\mu_{ij}=\frac{5}{96}ql^2$ $\mu_{ji}=-\frac{5}{96}ql^2$		$\mu_{ij}=\frac{Pl}{12}\left(n-\frac{1}{n}\right)$ $\mu_{ji}=-\frac{Pl}{12}\left(n-\frac{1}{n}\right)$
	$\mu_{ij}=\frac{q}{180l}\left[7l^3-7l^2(a-2b)+3l(a^2-2b^2)+3(a^3-2b^3)\right]$ $\mu_{ji}=-\frac{q}{180l}\left[7l^3+7l^2(2b-a)-3l(2a^2-b^2)-3(2a^3-b^3)\right]$		$\mu_{ij}=\frac{Pl}{12}\left(n+\frac{1}{2n}\right)$ $\mu_{ji}=-\frac{Pl}{12}\left(n+\frac{1}{2n}\right)$
	$\mu_{ij}=\frac{ql^2}{20}$ $\mu_{ji}=-\frac{ql^2}{30}$		$\mu_{ij}=M\frac{a}{l}\left(4-3\frac{a}{l}-\frac{l}{a}\right)$ $\mu_{ji}=-M\frac{a}{l}\left(3\frac{a}{l}-2\right)$
	$\mu_{ij}=\frac{qa^2}{12l}(2l-a)$ $\mu_{ji}=-\frac{qa^2}{12l}(2l-a)$		$\mu_{ij}=\frac{6EI}{l^2}\delta$ $\mu_{ji}=\frac{6EI}{l^2}\delta$

Abdulkadir Cüneyt AYDIN

ANKASTRELİK MOMENTLERİ TABLOSU

Yük	Ankastrelik Momentleri	Yük	Ankastrelik Momentleri
	$\mu_{ij}=\frac{ql^2}{8}$		$\mu_{ij}=\frac{q}{8}\left[l^2-a^2\left(2-\frac{a}{l}\right)\right]$
	$\mu_{ij}=\frac{qa^2}{8}\left(2-\frac{a}{l}\right)^2$		$\mu_{ij}=\frac{l^2}{120}(8q_1+7q_2)$
	$\mu_{ij}=\frac{qc}{16l}\left(3l^2-c^2\right)$		$\mu_{ij}=\frac{ql^2}{10}$
	$\mu_{ij}=\frac{qbc}{8l^2}\left[4\left(l^2-b^2\right)-c^2\right]$		$\mu_{ij}=\frac{Pab(b+l)}{2l^2}$ Özel hal: a=b=$\frac{l}{2}$, $\mu_{ij}=\frac{3}{16}Pl$
	$\mu_{ij}=\frac{qa^2}{4l}(3l-2a)$		$\mu_{ij}=\frac{3}{2}Pa\left(1-\frac{a}{l}\right)$
	$\mu_{ij}=\frac{5}{64}ql^2$		$\mu_{ij}=\frac{Pl}{8}\left(n-\frac{1}{n}\right)$
	$\mu_{ij}=\frac{ql}{120}(l+b)\left(7-3\frac{b^2}{l^2}\right)$		$\mu_{ij}=\frac{Pl}{8}\left(n+\frac{1}{2n}\right)$
	$\mu_{ij}=\frac{ql^2}{15}$		$\mu_{ij}=M\frac{a}{l}\left(3-\frac{3}{2}\frac{a}{l}-\frac{l}{a}\right)$
	$\mu_{ij}=\frac{qa^2}{8l}(2l-a)$		$\mu_{ij}=\frac{3EI}{l^2}\delta$

"i" ucu mafsallı, "j" ucu ankastre mesnet olması durumunda $\mu_{ij}=0$ olur. μ_{ji} ler ise "a" ankastre mesnetten olan uzaklığı göstermek üzere, yukarıdaki formüllerle bulunan değerlerin negatif işaretlisine eşittir.