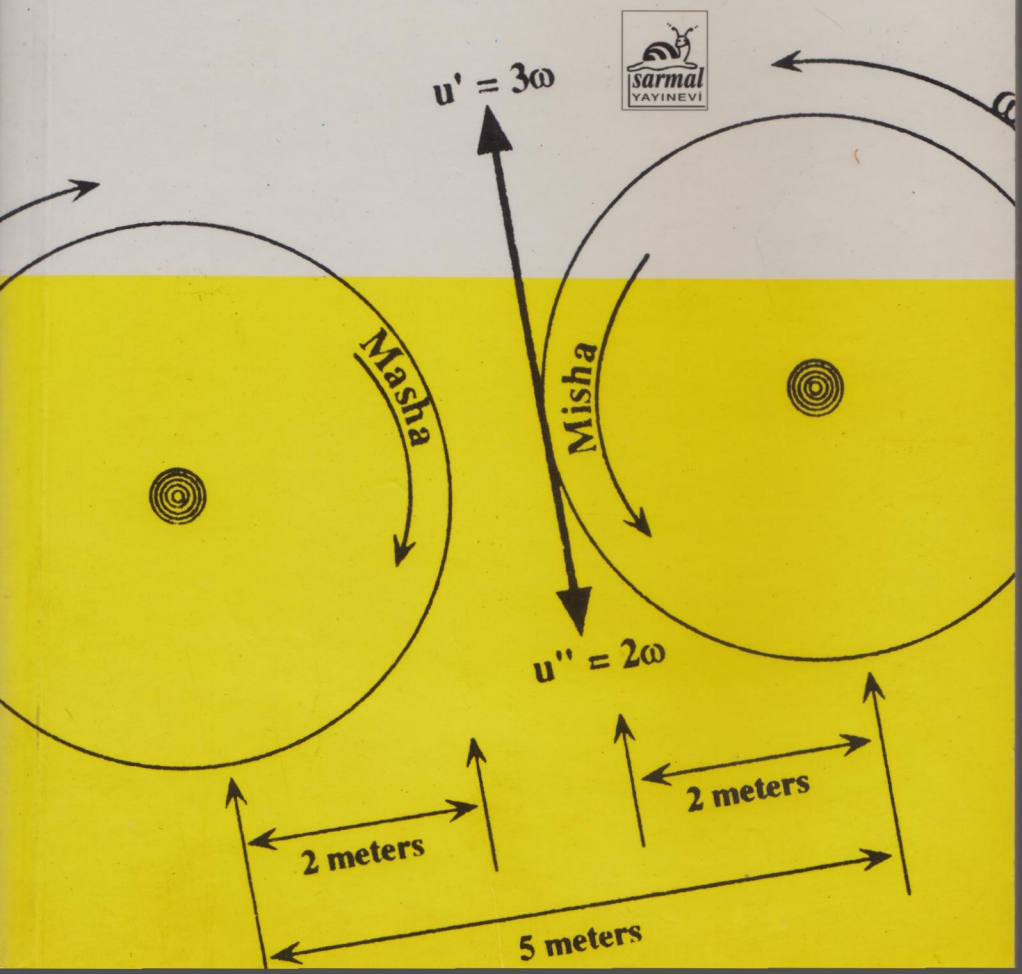
YURİ B. CHERNYAK ROBERT M. ROSE
TÜRKÇESİ : HATUN ÖZGÜR

Bil Bakalım

Bilim ve Matematik Bulmacaları

sarmal YAYINEVİ





İÇİNDEKİLER

Önsöz 7
Teşekkür 11
Bu Kitap Nasıl Kullanılmalı 12
Bölüm 1- Isınma 13
Bölüm 2- Daha Çok Isınma 21
Bölüm 3- Nikolai'nin Sefil İş Gezisi 29
Bölüm 4- Referans Sistemleri 35
Bölüm 5- Yolda 47
Bölüm 6- Kaynaklar ve Havuzlar 59
Bölüm 7- Genişleyen ve Daralan Evrenler 69
Bölüm 8- İpleri Öğrenirken 77
Bölüm 9- Yerçekimi ve Harmonik Osilatör 81
Bölüm 10- Mekanik ve Rölativite 91
Bölüm 11- Geometri ve Sayılar 103
Çözümler 110

Önsöz

Bu problemin çözümünü buldum. İki gündür üzerinde düşünüyordum. Ve sonunda çözdüm. Çok mutluyum ve heyecanlıyım. Dinleyin, 28 yaşındayım, bir ailem ve bir çocuğum var, ama hayatımda hiç bu kadar mutlu olmamıştım. Yaşamımın yarısını boşa geçirmişim. Ondört yaşında da bu kadar mutlu olabilirdim.

Bu kitapta bulunan problem çeşitlerini 1992'de kullanmaya başlayan Concourse Programı'ndan bir MIT(*) öğrencisinin bu yorumu, duyduğumuz diğer yorumlara tipik bir örnektir. "Eğer bu derse kayıt olursanız, başka bir plan yapmayın." demiş diğer bir öğrenci. "Sosyalleşmek, flört etmek, duş yapmak ya da uyumak için zamanınızın kalacağını sanmayın. Uyuduğunuzda, problemler bir karabasana dönüşecek sevişirken bile sizi yakalayacak.

Sabahın erken saatlerinde ofislerimize giderken öğrencilerin çalıştığı salona uğrardık. Çoğu kez, genç problem çözümcülerimiz hâlâ bir önceki günün problemleriyle uğraşır olurdu. Geç saatlere kadar uyanık kalma eğilimleri yüzünden Saat Beş Kulübü adı takılan, tükenmiş ama hâlâ tartışan ve o saate kadar çözümleyen, takıntılı öğrenciler bize, bu kafa patlatıcı problemleri daha geniş bir kitleyle paylaşma fikrini verdiler. Asıl mesele, öğrencilere ne düşüneceklerinden çok, nasıl düşüneceklerini öğretmektir. Birçok öğrencimiz analitik düşünce gerektiren problemleri çözmekte zorluk çekiyor. Bilimsel yeteneğin birçok rekabetçi ölçütü, bilimsel yetenekle ya da bilimsel ya da teknik gelişmeyi sağlayan tutkuyla pek ilgisi olmayan TRIVIAL PURSUIT(**) gibi oyunları andırır. Oysa MIT, problem çözümünden özellikle

de teknik problem çözümünden ibarettir. Beş on yıl önce MIT'de Concourse Programı içinde kurulan bir çalışma grubu kimya ve fizik problemlerinin çözümlerine ayrılmıştı. İkimiz bu grubun ikinci yılında tanışıp, kayda değer, eski Rus problemleri ve problem kümelerinin evrenini keşfetmeye başladık (Rus dememizin nedeni, problemleri Sovyetler Birliği'nden çok daha önce, uzun kış geceleri eğlencesi olarak, kültürün bir parçası biçiminde varolmalarıdır).

Sovyetler Birliği'nde devletin desteklediği matematik ve bilim problemlerini çözme yarışmaları, ABD'deki bazı spor dallarının olduğu kadar popüler oldu. Ülkedeki en başarılı lise öğrencileri (ilk yüzde 10) olimpiyat denilen bu yarışmalara katılırdı. Yerel galipler daha üst düzeyde yarışlara hak kazanırlar ve içlerinden en iyileri ulusal şampiyonluk için yarışırdı.

Ortalama öğrenciler için bile ders kitabını ve konuları tamamen öğrenmek yeterli değildi. Yalnızca bunu yapmak en iyi olasılıkla "C" notu almayı sağlardı. Öğrencilerden, geniş bir yelpaze içindeki problemler ve uygulamaları için gerekli materyali hızlı ve doğru bir biçimde araç olarak kullanabilmeleri beklenirdi. Ustalaşmaları gerekiyordu öyle ki: Bildiklerini kullanabilsinler. Matematik öğretimininin hedefi özellikle, atletik bir duyumla beyinleri, eğitmekti. Bazı ülkelerde bedeni eğitmek için sportif faaliyetlerin gerekliliği sorgusuz sualsiz kabul görürken, beyni eğitmek aşağılanır. Rusya'da sıkı öğretim sayesinde bilim ve matematik zevkli ve hattâ eğlendirici konulardı.Öğle yemeğinde şöyle tümceler duymak şaşırtıcı değildi: "Onsekiz yıl önce giriş sınavındaki problemi anımsıyor musun? Ona yeni bir çözüm buldum!" İyi bilginler için, bilimle uğraşmak tutku ve zevk doludur.

Rusya'da bilginlerin ve matematikçilerin, caddelere, parklara hattâ kentlere isimlerinin verildiği ulusal kahramanlar oldukları unutulmamalıdır. Bu yaklaşım yalnızca Sovyet bilginleriyle sınırlı değildir. Kayda değer Amerikalı fizikçi Robert Wood'un, Rusya'da herhangi bir kitapçıda bulunabilen bir biyografisi en çok satanlar listesindeydi ve en azından 20 kez basıldı. Rusya'daki eğitim sisteminin en iyi yanı Avrupa geleneğinden olmasıdır. Amaçlanan, profesyonel eğitim değil, en-

telektüel, moral ve etik gelişmedir. Öklit geometrisi 6. sınıftan 9. sınıfa kadar öğretilip, bir yıllık trigonometriyle devam ediyordu. Ama asla pratik uygulamalar vurgulanmıyordu. Amaç sistematik düşünceyi, matematiğin içindeki güzellik anlayışını ve diğer entelektüel yapıları öğretmekti. Ayrıca, herkese dünyanın işleyişi hakkında temel bir anlayış kazandıran beş yıllık bir fizik eğitimi zorunluydu.

Bu kitaptaki 100 problem öncelikle eğlendirme amacıyla seçildi, ancak hepsi size bir şeyler öğretecektir. Bilim sorularının çoğu Newton fiziği ile ilgilidir. Odak fikirleri karmaşıklaştırmamak niyetiyle yüksek matematik ve hattâ mümkün olduğu kadar, cebir gerektirenleri ayıkladık.

Bu sorular sizi eğlendirebilir, şaşırtabilir, süründürebilir ve hattâ yoğun takıntılı davranışlara neden olabilir. Bu soruları Y. C., öğrencilik günlerinde, Moskova Devlet Üniversitesi'ndeki fizik doçentliği sırasında ve 1976-1989 yılları arasında üniversiteden uzaklaştırıldığı zaman toplamıştır. Birçoğu, üniversite giriş sınavlarından, olimpiyatlardan ve eski Rus geleneğinin karmaşık ve yanıltıcı bulmacalarından gelmektedir. Bu kocaman havuzdan (en az 50 000 soru), en ilginçlerini, en uygunlarını MIT Concourse Programının birinci yıl öğrencileriyle sınayarak seçtik.

Isınma bölümleri, daha sonra gelen ve daha zor olan bölümleri özendirmek amacıyla göreli olarak kolay problemler içerir. Concourse Programında problemleri sınarken, benzer durumlardaki temel ve önemli kavramları tanıtmak için, biçimsel analojilere, simetriye ve fizikteki temel fikirlerin çeşitliliğine önem verdik. Concourse öğrencilerimizle yaptığımız gibi, kitap içinde de bilimsel tarihin ve bilginlerin öykülerini ördük.

Burada kısaca, Concourse Programının ne olduğunu açıklayalım. MIT'nin başarılı öğretim öykülerinden biridir ve 25 yıl önce kurulmuştur. Concourse, eğitimdeki en eski fikir üzerine temellendirilmiştir: Küçük bilimsel çalışma toplulukları öğrenmenin kendileri için en iyi yolunu bulacaklardır. Her yıl 64 başarılı öğrenci bu

programı seçer. İlk yıl gereksinimleri, sıkıca örülmüş, çok yetkin öğretim kadrosu, bir sınıf ve sosyalleşme, dinlenme ve çalışma için mutfaklı geniş bir çalışma salonuyla sağlanmıştır. Bu çok hoş düzenleme. 20. Bina'ya yerleştirilmiştir. Bu harap, rahat ve sevilen bina, İkinci Dünya Savaşı sırasında aceleyle radar geliştiricilerine ev olarak askeri tarzda inşa edilmiştir.

Concourse'un destekleyici ortamında, soğuk Ocak sabahlarında, ılık salonumuzda öğrencilerimizle kahvaltı yaparken, bu problemlerin yararlarını keşfettik.

Dünyanın nasıl işlediğini anlamadan hiç kimse tam eğitimli sayılmamalıdır. Matematiğin ve bilimin güzelliği kanıtlanmalı ve anlaşılmalıdır. Bu kitap bir başlangıçtır. Hoşlanacağınızı umuyoruz.

Cambridge, Massachusetts
8 şubat 1995

---

* Massachusetts Teknoloji Enstitüsü
** A.B.D.'de tahta üzerinde oynanan bir tür genel kültür ve bulmaca oyunudur.

Teşekkür

Bu kitap üç seslidir. Birinci ses Yuri Chemyak'a ve genişletirsek, bu problemlerin ilk yaratıcıları isimsiz Rus düşünür ve öğrencilerine aittir. İkincisi, problemlerin bugünkü haline gelebilmesi için gerekli motivasyon ve ortamı sağlayan, Concourse Programının yöneticisi Robert Rose'dur. Diğeri de, enerjileri ve hevesleriyle bizi bu süreçte cesaretlendiren MIT öğrencileridir. Concourse programı ve öğrencileri olmasaydı bu kitabın ortaya çıkması mümkün olmazdı. Ayrıca, verdikleri destek ve cesaret için 1951 MIT mezunlarına minnettarız.

Soğuk Ocak ayı sabahlarında (öğleden sonraları ve akşamlarından da) Concourse salonunu dolduran lisans öğrencilerine ve "özel öğretmenler": Charu Chaudry, Antony Donovan, Sushil Panta, Mike Quirk ve "öğrenciler": Mikel Allen, Becky Covert, Joshua Goldberg, Kwan Yang Ha, Charley Hamilton, Brad Mckesson, Will Nielsen, Srivatsan Raghavan, Marion Shows, Van Van, Victor Washington, Daniel Weber ve David (Chia-Ying) Yang'a tek tek teşekkür ederiz. Her birinin değişik derece ve türlerde, ama hepsinin de cömertce ve şevkle katkıda bulunmalarından dolayı müteşekkiriz.

Organizasyon ve editörlük işlerinin çoğu Van Van tarafından yapılmıştır. Kitaptaki çizimler Joseph Latinsky'ye aittir. Kitabın kapağı, Loius Malona tarafından tasarlanmıştır. Dr. Maxim Umansky ve Profesör Jerome Y. Lettvin'e yapıcı önerilerinden dolayı teşekkür ederiz.

Son olarak, ama en önemlisi, gösterdikleri sonsuz sabırlarından dolayı eşlerimiz Natasha Chernyak ve Martha Rose'a teşekkürlerimizi sunuyoruz.

Bu Kitap Nasıl Kullanılmalı?

1. Problemleri ilk önce ipuçlarına bakmadan çözmeye çalışın.
2. Bir problemi, ısınma problemi olsa bile, çok zor bulduysanız, başka birine geçin. Farklı insanlar, aynı soruya farklı tepkiler gösterebiliyorlar ve bu tepkiler zeka veya eğitimle bağlantılı görünmüyor. Zor soruya daha sonra dönersiniz.
3. Problemi kendi kendinize yanıtladıktan sonra çözümü okuyun, O zaman bile üzerinde iyice düşünmüş olduğunuzdan emin olun.
4. En kolay sorular ilk iki bölümde ve diğer bölümlerin başında yer alır. En zorları sondadır. Tekrar, bireysel tepkilerin geniş bir yelpazede değişiklik gösterdiğini unutmamalısınız. Kolay bir soru size zorluk çıkarırsa, sakın düş kırıklığına uğramayın.

Bölüm 1

Isınma

Doğal Doğum

1) İki kardeş, aynı yıl, aynı tarihte, aynı anne babadan dünyaya gelmiş oldukları halde ikiz değiller. Bu olabilir mi?

İPUCU:
Ne söylenip, ne söylenmediğine dikkat edin.

Dilsiz Papağan
(Ya da Matematikçilerle Sorun)

2) Süs hayvanı satıcısı, emekli bir matematikçidir. Asla yalan söylemez ve daima kesin ifadelerle konuşur. Günlerden bir gün, bir müşterisine kafesteki papağanın son derece zeki olduğunu söyleyip "gerçekten de bu kuş duyduğu her sözcüğü tekrarlar" diye ekler. Etkilenen müşteri papağanı satın alır. Birkaç gün içinde kızgın müşteri "Onunla hergün saatlerce konuştum ama bu aptal kuş söylediğim tek bir sözcüğü bile tekrarlamadı" diyerek, papağanla çıkagelir yine de satıcı yalan söylememiştir. Bu mümkün mü?

İPUCU:
İfadede, papağanda ya da müşteride bir yanlışlık olmalı.

Bir Sanat Sorusu

3) Beyaz adında bir heykeltraş, Siyah adında bir müzisyen ve Kırmızı adında bir ressam kahvede buluşurlar. İçlerinden birisi "Benim saçım siyah, birinizinki kırmızı, diğerinizinki de beyaz, ama hiçbirimizin adıyla saç rengi birbirini tutmuyor" der. Beyaz, "Çok haklısın" diye yanıtlar. Ressamın saç rengi nedir?

İPUCU:
İsimleri ve saç renklerini gösteren bir tablo ya da matriks çizerek deneyin.

Yemek mi Uyku mu (İşte Bütün Mesele Bu!)

4) Varsayalım ki; bir insan yemeden veya uyumadan tamtamına iki hafta yaşayabilir. Uykusuz ve yiyeceksiz geçen ondört günün sonunda önce yemek mi yersiniz yoksa uyur musunuz?

İPUCU:
Aynı anda hem yemek yemek, hem uyumak mümkün değildir.

Şövalyeler ve Yaverleri

5) Bir gün, üç şövalye Neva nehrini geçmek isterler. Her şövalyenin yanında bir de yaveri olduğundan, toplam altı kişidirler. Kayıkları, yalnızca iki kişi taşıyabilmektedir. Ama kesinlikle yaverlerden herhangi biri, kendi şövalyesi yanında olmaksızın, başka bir şövalyenin yanında bulunamaz. Çünkü şövalyeler çok zalim olduklarından yaverler onlardan korkar. Herkesin karşıya geçmesi mümkün müdür?

İPUCU:
Olayı, her hareketi kağıt üzerinde çizerek çözümleyin.

Daha Çok Şövalye ve Yaver

6) Bir önceki problemi dört şövalye ve dört yaverle düşünün. Çözümü var mıdır?

İPUCU:
Bir önceki problemin çözümündeki dördüncü basamağa benzer durumun (bir yakada bütün yaverler, diğerinde bütün şövalyelerin olduğu) kaçınılmaz olduğunu ispatlayın. Sonra da bu noktadan devam edin.

Yine Daha Çok Şövalye ve Yaver
(Kimse Ada Değildir.)

7) Dört şövalye ve dört yaverle bir önceki problemi tekrar düşünün. Ama bu kez ırmağın ortasında bir ada olsun. Adayla bir çözüm var mıdır?

İPUCU:
Şövalye, yaver problemleri için artık ipuçlarına ihtiyacınız yok. Aslına bakarsanız, ortaçağ politikası hakkında ustalaşmış oldunuz.

BÜYÜKBABANIN KAHVALTISI

8) Büyükbaba çok pişmiş sever. Yumurtası tam 15 dakika kaynamalıdır. Ne eksik, ne fazla. Birgün, sizin ona kahvaltı hazırlamanızı ister. Evde yalnızca, iki kum saati varsa ve bunlardan büyüğü 11 dikakada, küçüğü 7 dakikada boşalıyorsa ne yaparsınız? (Acele etmelisiniz. Büyükbaba sabırsızlanıyor.)

RESİM SAYFA 6



İPUCU:
İlk adını dikkatlice düşünün. Mantık tektir.

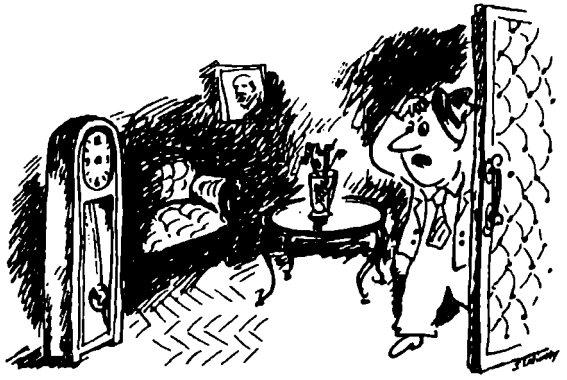
Mahkum ve Gardiyanlar

9) İki kapısında birer gardiyanın bulunduğu bir hücrede mahkumsunuz. Gardiyanlardan biri daima yalan, diğeri ve daima doğruyu söyler. Ama siz hangisinin hangisi olduğunu bilmiyorsunuz. Hücrenizden ancak iki kapıdan bir tanesini seçerek çıkabilirsiniz. Kapılardan biri idam sehpasına, yani ölüme; diğeri ise özgürlüğe gidiyor. Gardiyanlardan yalnızca birine bir tek soru sorma hakkınız var. Ne yaparsınız?

İPUCU:
Sorunuzda, gardiyanlar ve kapılar arasında bağlantı kurmalısınız. (İkileminizin birden fazla çözümü var).

İvanov ve Saat

10) İvanov amirini arıyordu. İvano'un amiri Yeltsin'in yakınıydı ve ofisi yumuşak mobilyalarla, kalın halılarla, duvarları ağır perdelerle lüks bir şekilde döşenmişti. Kapısı da kalın ve ses geçirmez türdendi. Çoğunlukla odasında bulunmazdı. İvanov, ofisin kapısını açınca duvar saatinin bir kez çaldığını duydu. Amiri yoktu. İvanov kapıyı açık bıraktı. Yarım saat sonra, İvanov, saatin yine bir kez vurduğunu duyarak şaşırdı. Yarım saat sonra bu olay tekrarlandı ve amir hâlâ yoktu. İvanov sabırsızlanarak beklerken, yarım saat sonra saatin dördüncü kez tek bir defa çaldığını duydu. Amirin o sırada gelen sekreteri, İvanov'a amirinin o gelmeden az önce öğle yemeğine çıkmış olduğunu söyledi. İvanov, duvar saatinin saat başlarında saatin sayısı kadar ve yalnızca buçuklarda tek bir kez vurduğunu biliyordu. Amir en geç kaçta ofisinden ayrılmış olabilir?



İPUCU:
Halıları, perdeleri, yumuşak mobilyaları ve ses geçirmez kapıyı anımsayın.

Bölüm 2

Daha Çok Isınma

Boris ve Marina'yla Alışveriş

1) Boris ve Marina çubuk dondurma satın almak isterler. Ama Boris'in bir çubuk için 24 kopek eksiği, Marina'nın da 2 kopek eksiği vardır. Paralarını birleştirip bir çubuk almaya karar verirler. Bunu yaptıklarında, hâlâ yeterli paraları olmadığını farkederler. Bir çubuk dondurmanın ederi nedir?

İPUCU:
Yalnızca bir yorum: Kopek Rusya'daki en küçük para birimidir ve bu problemle gerçek hayatta sık sık karşılaşılır.

Boris ve Marina'yla Alışveriş II

2) Boris ve Marina yine alışveriş yapıyorlar, bu kez çikolata almak için. "Eğer paramın yarısını seninkine eklersem, iki çikolata almak için yeterli paramız olur." der Boris. Marina, "Ben paramın yarısını seninkine eklersem kaç tane alabiliriz?" diye safça sorar. Boris "Bir çikolata" diye yanıtlar. Boris'in ne kadar parası vardır?

İPUCU:
Eğer dondurma problemini çözdüyseniz, Boris'le ilgili bazı kuşkularınız olabilir.

Sinemada

3) Olya, Petia, Kolia ve Klava düzenli olarak okulu kırıp sinemaya giderlerdi. Okulu kırmaya yağmurlu bir günde, hep birlikte başladılar. Daha sonra, herbiri farklı periyodlarla sinemaya gitmeyi sürdürdüler. Olya okulu dört günde bir, Petia beş günde bir, Kolia yedi günde bir ve Klava dokuz günde bir kırıyordu. Bir daha ne zaman hep birlikte sinemaya gidecekler?

İPUCU:
4, 5, 7, 9 sayılarının ortak böleni yoktur.

İçki Problemi

4) İçki içmek, satranç oynamanın ve problem çözmenin yanı sıra, Rusya'da her zaman ne yaygın eğlence biçimlerinden biri olmuştur. Vassily 12 litrelik bir kova votkaya sahip olduğunda, Pyotr'la paylaşma istemiş. Ama Pyotr'un bir tane 8 litrelik, bir tane de 5 litrelik boş şişesi varmış. Votkayı eşit olarak nasıl paylaşabilirler?



İPUCU:
Özellikle Yeltsin dönemlinde şişe kıtlığı olduğundan, bir reçete yaptırmak için eczaneye çoğunlukla boş bir şişeyle gitmek gerekirdi.

Tırtıl

5) İlkbaharda günde 12 saat gün ışığı olur. Bir tırtıl, gündüzleri düz bir duvara saatte 1 ayak(*) hızla tırmanıp, 12 saatlik karanlık boyunca saatte 1/2 ayak hızla aşağı kayarak uyurmuş. Divarın yüksekliği 48 ayak ise, tırtılın, duvarın tepesine varması ne kadar zaman alır?

İPUCU:
Tırtıl duvarın tepesine ulaştıktan sonra uyurken tekrar aşağıya kaymaz.

Yüz Yıkama

6) Ellerinizi sıvı azotla (77 Kelvin veya - 196°C) hiç zarar görmeden yıkamanız mümkündür. Bunun nasıl olacağını açıklayın.

İPUCU:
Kızgın bir tavaya bir damla su damlatırsanız, su damlasının tavada çok uzun süre kaldığını keşfedersiniz.

* Ayak (Foot) İngiliz ölçüm sisteminde yaklaşık 32.8 cm'ye karşılık gelen uzunluk ölçüsü birimidir.

Kızılcık Alırken

7) Kızılcık Rusya'da çok yaygındır. Kızılcıklar tazeyken % 99 su içerirler. Bir ambarda 1000 kg. taze kızılcık depolanmış. Birkaç gün sonra kuruyan kızılcıkların % 98 su içerdiği görülmüş. Kızılcıkların şimdiki ağırlığı nedir?

İPUCU:
Hesaplamadan önce, kabaca bir tahminde bulunun. Problem fizikte çok temel olan bir fikirle ilişkilidir. Koruman niceliği tanımlamak hayatınızı (bir fizikçi olarak) çok kolaylaştıracaktır.

Video Kaseti

8) Kasetin mili sabit açısal hızla (birim zamanda sabit tur sayısı) dönerken, bütün video kasetini başa sormak 4 dakika sürüyor. Kasetin ilk % 25'ini başa sarmak ne kadar sürer? Kolaylık için, tamamen sarılmış makaranın çapının, kasetin milinin çapından çok büyük olduğunu varsayın.

İPUCU:
Bandın uzunluğunu, sarılmış kasetin yüzey alanını bandın kalınlığına bölerek bulabiliriz. Dönme sayısını da, sarılmış makaranın çapını (eksi mil çapı) bandın kalınlığına bölerek bulabiliriz.

Moskova Metrosunda Maceralar

9) Boris, okula çember şeklinde olan Moskova metrosuyla gidip gelir. Okul, çember üzerinde, Boris'in trene bindiği noktanın tam karşısındaki noktaya düşer. Böylece her iki yönden de okula gitmek aynı süreyi alır. Hem saat yönünde, hem saatin ters yönünde dönen trenler vardır. Tren tarifesi çok düzenlidir. Saat yönündeki arka arkaya iki trenin arasındaki zaman aralığı, ters yöndeki arka arkaya iki trenin arasındaki zaman aralığıyla aynıdır. Örneğin, eğer saat yönünde iki trenin varışları arasında bir saat fark varsa, saatin ters yönünde iki trenin varışları arasında da bir saat fark vardır. Bununla beraber, Boris'in tren istasyonuna varış zamanları düzenli olmayıp, rastlantısal olduğu halde, saat yönünde giden trenleri, ters yöndeki trenlerden daha sık yakaladığını gözlemlemiştir. Bunu açıklayabilir misiniz?

İPUCU:
Trenlerin varışı rastlantısal değildir. Yalnızca Boris'inkiler öyledir.

Çılgın Köpek
(Veya John Von Neumann'ı Şaşırtmayan Problem)

10) Misha ve Tisha birbirlerinden L uzaklıkta bisikletlerinin üzerinde, birbirlerine doğru, çarpışmak amacıyla, hızla pedal çevirmeye başlarlar. Onlarla aynı anda, her ikisini de çokseven köpekleri, Misha'nın yanından ayrılıp, koşabildiği kadar hızlı Tisha'ya doğru koşar. Tisha'ya dokunduğu zaman tekrar Misha'ya doğru döner. Misha'ya değdiğinde tekrar Tisha'ya yönelir. Bu iki bisikletin çarpışmasına kadar sürer. Bu çılgın vefalı köpek ne kadar yol gitmiştir? Misha ve Tisha'nın sabit hızlarla v_1 ve v_2 ile hareket ettiğini, köpeğin hızının da u olduğunu ve anında döndüğünü varsayalım (En azından deniyor!).



İpucu:
Bu gerçekten bir ısınma problemidir.

Bölüm 3

Nikolai'ın Sefil İş Gezisi

Çay Soğutma

1) Nikolai iş için Vishny-Volochok'a seyahat eder. Oradaki otelin mutfağı yoktur, dolayısıyla, çayını ısıtmak için Nikolai yanında küçük bir su ısıtıcısı taşır. Her sabah, çayını kaynatır, şekerini koyar ve çayın içilebilecek dereceye kadar soğumasını bekler. Bazı sabahlar ise, şekerini koymadan soğumasını bekler. Hangi yol daha hızlıdır?

İPUCU:
Şeker'in, suda çözünmesi endotermik bir tepkimedir -yani şeker çözünürken ısı emer.

Lüks Konaklama Tesisleri

2) Nikolai bir hafta San Petersburg'da kalmalıydı. Tesisler, Vishny-Volockok'da olduğundan çok daha iyiydi, ama aynı zamanda pahalıydı da. Gerçekten de, otelci ruble kabul etmiyordu. Nikolai'ın yedi halkalı bir gümüş zinciri vardı ve otelciyle günlüğü bir gümüş halkaya anlaştı. Otelci, ödemelerin hergün için, o günün sabahı yapılmasında ısrarlıydı, ancak gümüşün en az yıpranmasını sağlamak amacıyla bir haftalık kalış için, bir halkadan fazlası yerinden çıkarılmamalıydı. Nikolai nasıl ödeme yapabilir?

İPUCU:
Nikolai Zincirin bir parçasını otelciye verip, bir parçasını para üstü olarak alabilir.

Vishny-Volochok'ta En Kötü Durum

3) Vishny-Volochok'ta tekrar Nikolai'la birlikteyiz. Nikolai, kendisinden başka dokuz müşteriyle aynı anda otele varır. Otel katibi oldukça sarhoştur ve odaların anahtarlarını karıştırır. On anahtarın üzerinde hiçbir ayırdedici işaret yoktur ve on oda da kilitlidir. Yolcular çok yorgundur. Anahtarların hangi kapıya ait olduklarını bulabilmek için en çok kaç deneme yapmanız gerekir (en olumsuz koşullarda).

İPUCU:
Anahtarların ait oldukları kapıyı bulmak için gereken deneme sayısı, kapıları açmak için gereken deneme sayısıyla aynı değildir. İlk seçtiğimiz anahtar için kaç denemeye ihtiyacınız olacağını düşünün.

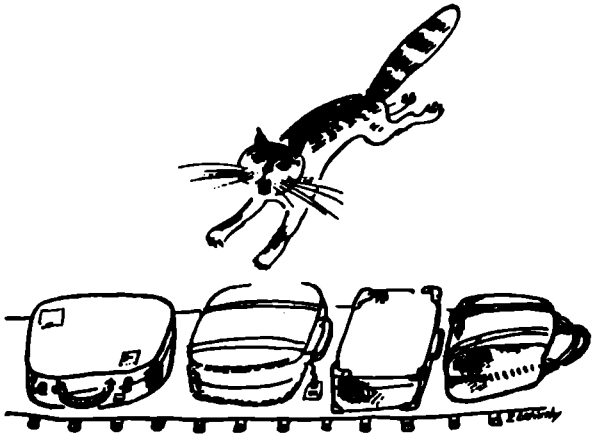
Vishny-Volochok'ta Bir Başka Sefil Gece

4) Nikolai'ın işe yetişebilmek için, sabah otelden çok erken çıkması gerekir. Oda servisi yok, lokanta yok. O ve arkadaşı odalarında çay yaparlar. Her ikisi de yanında suyun içine konulunca bir fincan suyu kaynatabilen ısıtıcılardan taşır. Zaman dardır ve iki fincan suyu en kısa sürede kaynatmaları gerekir. Isıtıcılarını aynı anda iki ayrı fincana koyup ısıtabilirler ya da iki ısıtıcıyı bir fincana koyarak, iki fincan suyu sırayla ısıtabilirler. Hangi yöntem daha hızlıdır?

İPUCU:
Eğer ısı kaybı yoksa, her iki yöntemle suyu ısıtma süresi aynıdır.

Nikolai Evine Hoşgeldin

5) Nikolai sonunda evine döner. Karısı Nina,doğum gününde Nikolai'a armağan ettiği yepyeni valizin üzerinde düz çizgiler görür. Kızgınca açıklama bekler. Nikolai şöyle bir öykü anlatır: Moskova hava alanında bagajını bekliyormuş. Yan yüzleri dümdüz olan bagajı, düz taşıyıcı bant üzerinde sabit v hız vektörüyle ilerlerken, kedi Vaska sahibinin elinden kurtulup taşıyıcı banda doğru, bandın hareketine dik olarak atlamaya kalkışmış. Ama tam olarak başaramamış. Düşerken, Nikolai'ın bagajına pençelerini geçirmiş ve yepyeni deriyi çizmiş. Nina bunun doğru olamayacağını, çünkü çiziklerin düz olduğunu söyler. Bagajın düzgün doğrusal hareketi ile kedinin bagaja dik olan ve ivmeyle hızı azalan hareketinin birleşminin, bir eğri meydana getireceğinden emindir. Nikolai'ın yalan söylemiş olduğunu düşünüyor musunuz? İki durumu da düşünün: Birincisi sürtünmenin göz ardı edilebileceği ve Vaska'nın bagaj üzerinde sabit bir hızla kaydığı durum; diğeri sürtünmenin olduğu (Nikolai'ın bagajında derin çizikler) ve Vaska'nın hızının ivmeyle yavaşlayarak valizin üzerinde son bulduğu durumdur.



İPUCU:
Referans sisteminiz burada çok önemlidir! Bagajın üzerinde ayakta, Vaska'nın atlayışını beklediğinizi hayal edin. Havanın sürtünme kuvvetini ihmal etmelisiniz (bu da başka bir ipucu!).

Bölüm 4

Referans Sistemleri

Hava Muharebelerinde Bir Ders

1) Hava savaşlarında, savaşçılar genellikle arkadan vurulurlar (diğer savaşcılar da öyledir). Askeri uçakları arka saldırıdan korumak amacıyla, arkadan takip eden herhangi bir uçağı hedef alabilecek biçimde, kuyruğa güdümlü kurşunlar yerleştirilmişti. Bu düzenleme her test edildiğinde, kurşun ani bir u-dönüşü yaparak kendisini fırlatan uçağı vurmuştu (Neyse ki, bu test kurşunları gerçek patlayıcı değildi, ama durum pilot için utanç vericiydi). Bu olayı açıklayabilir misiniz? (Bu bir gerçek öyküdür. Olay II. Dünya Savaşı'ndan hemen sonra, jet uçaklarının geliştirildiği ilk yıllarda Sovyetler Birliği'nde yaşanmıştır.)

İPUCU:
Bu araç geliştirildiği zaman, o tür güdümlü kurşunların elektronik uçuş kontrolü yoktu. Hedef alınıp, ateşlenen basit roketlerdi. Şimdi şunu düşünün: Yerde ateşlenen bir top mermisiyle, uçaktan ateşlenen bir kurşun arasındaki kinematik fark nedir? Fırlatan uçak, kurşuna göre bir referans noktası mıdır?

İhtiyar Delikanlı Mazay Votkası İçin Kürek Çekiyor

2) Rus folklorunun ünlü tipi İhtiyar Delikanlı Mazay'ı bir ırmakta akıntı yönünde kürek çekerken görüyoruz. Akıntı saatte 2 mildir. Sandalın kıç tarafında, tahta bir sandığın içinde her zaman bir şişe votka bulunur. Bir köprünün altından geçerken şişeden bir fırt çeker ama şişeyi dalgınlıkla sandık yerine suya bırakır. Otuz dakika sonra bir yudum içkiye daha hazırdır, ama şişenin kayıp olduğunu farkeder. İhtiyar Delikanlı Mazay sabit bir tempoda kürek çeker (ve votka tüketir). Durgun suda yani gölde hızı saatte 3 mildir. Hâlâ yüzmekte olan şişesine geri dönmek ne kadar zamanını alır ve o anda köprüden ne kadar uzakta olacaktır?



İPUCU:
Bir referans sistemi problemi daha!

Emniyet Kemerini Bağlayınız!

3) Geçenlerde, küçük bir yolcu uçağıyla Boston'dan, New York'a uçuyordum. 3500 metre yükseklikte uçtuğumuzdan, altımda akıp giden harika manzarayı seyrediyordum. O sırada altımızdan geçen daha küçük ve hafif bir uçak dikkatimi çekti. Uçağın dikkatimi çekmesinin nedeni, tuhaf ve şaşırtıcı bir biçimde ilerlemesiydi. Pervanenin uçağı, dümdüz, gövdesine parallel bir yönde çekmesini umardım. Onun yerine, gövdesiyle bir açı yaparak, ileriye olduğu kadar, yanlara doğru da hareket eder gibi görünüyordu. Uçağın hareketi, her şeyden çok, yavru bir köpeğin (ilerlediği yönle açı yaparak) koşarken yalpalamasını andırıyordu. Yan koltuktaki yol arkadaşım rüzgarın küçük uçağı yanlara doğru savuruyor olabileceğini iddia etti. Ancak, pilot o anda hiç rüzgar olmadığını söyledi. Gördüğümü açıklayabilir misiniz?

İPUCU:
Doğruyu söylemek gerekirse çözüm, durumunuzun diğer bazı öğelerine olduğu kadar, bakış açınıza bağlı değildir.

Patlamalar

4) Çok fazla sayıda topun tıkıştırıldığı torba havada asılıyken patlar ve toplar torbadan çok farklı yönlere doğru fırlar. Topların hepsinin uzayda aynı noktadan, aynı hızla harekete başladıklarını varsayalım ve havanın direncini yok sayalım. Herhangi bir anda topların konumlarını gösteren geometrik şekil nedir?

İPUCU:
Gece, havai fişek atıldığında, havaya bakın.

Atlıkarıncada Yağmurlu Birgün

5) Üstü açık bir atlıkarıncaya binmişsiniz ve yağmur yağmaya başlıyor. Şemsiyenizi açıyorsunuz. Sizi mümkün olduğu kadar ıslanmaktan korumak için, şemsiyenizi tutmanın en iyi yolu nedir? Dairesel hareket merkezinden R uzaklıktasınız. Atlıkarınca sabit w açısal hızıyla dönerken, yağmur damlaları da tam düşey olarak ve v hızıyla düşüyor (rüzgar yok).



İPUCU:
"Şemsiyenizi tutmanın en iyi yolu" ifadesiyle ne demek istenmiş? Sizi mümkün olduğu kadar yağmurdan koruyabilmesi için, şemsiyenin yağmurdan en büyük ara kesiti kesmesi gerekir. Bu problemi 1 Mayıs Tören Alayı problemiyle karşılaştır (9).

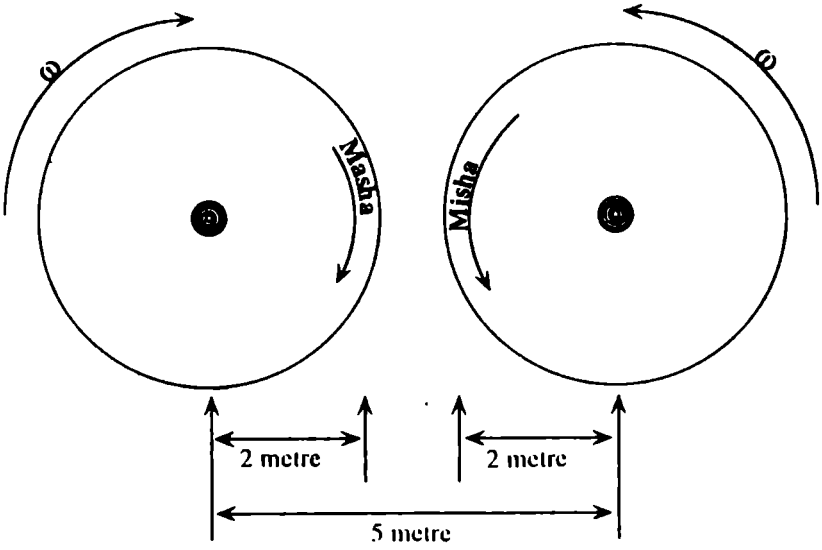
Misha ve Tisha Karnavalda

6) Misha ve Tisha da karnavaldalar. Misha'nın hız vektörü sabit olarak değişir ama daima Tiska'nın hız vektöründen daha azdır. Tisha'nın hız vektörü sabit olarak değişir ama Misha'nın hızının açısıyla aynı yöndedir. Misha ve Tisha birbirlerine göre tamamen hareketsizdirler. Neredeler?

İPUCU:
Misha'nın ve Tisha'nın hızlarının büyüklükleri sabittir.

Tekrar Karnavalda - Misha ve Masha

7) Misha ve Tisha hâlâ karnavaldalar. Tisha yiyecek bir şeyler bulmaya gittiğinde, Misha atlıkarıncada, merkezden 2 metre uzaklıkta bir ata binmektedir. Misha'nınkinin yanında, merkezi, Misha'nın bindiği atlıkarıncanın merkezinden 5 metre uzaklıkta bulunan, ama ters yönde aynı w açısal hızıyla dönen başka bir atlıkarıncada, merkezden 2 metre uzaklıkta bir ata binen Masha vardır. Misha ile aynı Politeknik Enstitüsü'nde okuyan çok çekici ve oldukça parlak bir öğrenci olan Masha, birkaç kez (ters yönde) onunla karşılaşınca, o da Misha'yı çekici bulmaya başlar. Daha sonra buluşurlar. Kız, Misha'nın atının



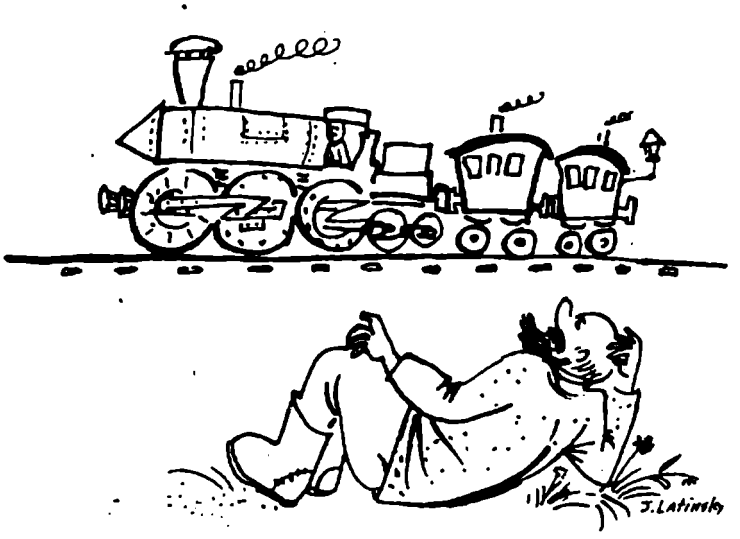
yavaş olduğunu ve her seferinde onu geçtiğini söyler. Bunun üzerine Misha onun yanıldığını çünkü atının hızının daha yüksek olduğunu ve her karşılaşmalarında *onu* geçtiğini belirtir.

Bu sorunu asla çözemezler. Anlaşmazlıkları yüzünden harika bir aşk zarar görebilir. Onların gözlemlerini açıklayabilir misiniz?

İPUCU:
Burada eylemsiz olmayan, dönen bir referans sistemiyle uğraşıyoruz.

İhtiyar Delikanlı Mazay ve Tramvay

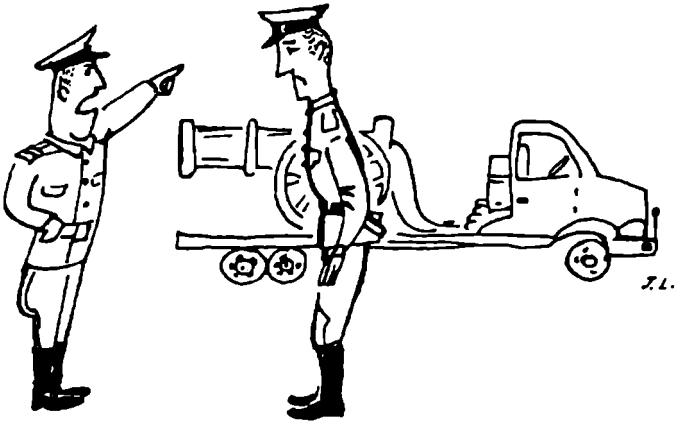
8) Votka şişesini bulan İhtiyar Delikanlı Mazay, ırmak seröveninden döner. Hem yorgunluğunu atmak, hem de alkolün etkisinden kurtulabilmek için yolun kenarına uzanır. Yere paralel olarak bakarken, önünden geçen tramvayın bazı bölümlerinin raylara göre ters yönde hareket ettiğini görür. Bu doğru mudur? Yoksa İhtiyar Delikanlı Mazay'ın beyni sonunda votkaya yenik mi düşmüştür?



İPUCU:
Bu kesinlikle birden fazla açıdan bir referans sistemi problemidir. Mazay'ın özelliikle tramvayın hangi bölümlerine baktığını düşünün.Bu demiryolu tekerleklerinin rayların dış taraflarını örten jantları vardır.

1 Mayıs Tören Alayı

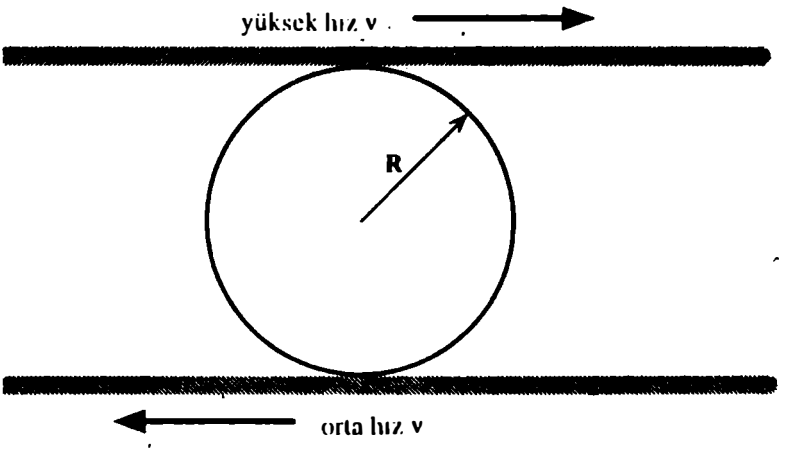
9) A topunu Kızıl Meydan'da, 1 Mayıs geçidine hazırlayan bir Kızıl Ordu Onbaşısısınız. Rüzgar yok ama yağmur yağıyor ve sürecek. Top, geçitte sabit *v* hız vektörüyle hareket etmek zorunda. Çavuşunuz, sizi topun namlusunun iç yüzeyinin hiçbir biçimde ıslanmaması konusunda uyarıyor. Komutanlar, topun güzel görünmesini istediği için, namluda başlık ya da tıkaç kullanılmasını hoşgörmeyecektir. Halka, silahınızın namlusundan içeriye bakması için izin verilecek. Aynı nedenle, topunuzu bir örtüyle de örtemezsiniz. Çavuşunuza, topun namlusunu örtmeden, kapamadan, kuru olarak koruyacağınıza söz verirsiniz. Nasıl yapacaksınız?



İPUCU:
Problemi topun bakış açısından görmeye çalışın.

Davulların Yuvarlanışı, Galile Referans Sistemi

10) Silindirik R yarıçaplı bir varil, iki paralel levha arasında kaymadan yuvarlanır. Üst levha *Vu* hız vektörüyle sola doğru hareket eder. Her iki hız da levhaların yüzeyine paraleldir. *Vu* hız vektörüyle sola doğru hareket eder. Her iki hız da levhaların yüzeyine paraleldir. $V_u = -V_L$ ve $|V_u| = |V_L| = V$ ise varil saniyede kaç tur döner? Genel durumda, yani: $|V_u| \neq |V_L|$ iken kaç tur yapar?



İPUCU:
Levhaların hareketlerinin simetrik gÖrÜnmeceĞi bir referans noktası seçebilirsiniz. Yine de alt levhayı seçmek daha iyi bir yoldur.

Boris ve Islak Basket Topları
Referans Sistemleri ve Akılar (Flux)

11) Boris basketbol oynarken, yağmur başlayınca, isteksizce eve döner. Yolda topu başının üzerinde kaydırmaktadır. Arkadaşı Tisha ona hızlı hareket etmesi için seslenir. Eğer eve daha çabuk varırsa topun (ve Boris'in) ıslanmayacağını söyler. Boris, topun ne kadar hızlı hareket ederse, o kadar çok ıslanacağını söyleyerek karşı çıkar. Rüzgar yokken ve yağmur düşey olarak *u* hızıyla yağarken, top da yatay olarak *v* hızıyla kaydırmaktadır. Kim haklıdır?

İPUCU:
Boris ve Tisha aynı önermeden söz etmiyorlar. Eve vardığında, Boris'in ve topun ne kadar ıslanmış olacağını düşünmek yerine, işe yalnızca, topa çarpacak yağmur damlalarının toplam oranını düşünerek başlayın. Sonra soruyu tekrar inceleyin. Hareket eden top, birim zamanda, duran topta daha mı çok yağmur damlasına maruz kalır?

Tavuk Yemi

12) Boris, içinde tavuk yemi olan bir kovayı el arabasıyla taşıyordu. Yağmur başlayınca, Boris de yemin ıslanmaması için koşmaya başladı. Bu farkeder mi? Kova, Boris yürüdüğü zaman mı, koştuğu zaman mı daha çabuk yağmurla dolar? Kovanın dikey olarak durduğunu, ağzının da yatay ve açık olduğunu var sayalım. Yağmur düzgün ve sabit hızla yağmaktadır. Rüzgar da yoktur.

İPUCU:
Kovanın içinden yukarıya bakın.

Akılar ve Korumun Yasaları
(Veya Yağmurda Koşma Daima Faydalıdır)

13) Önceki iki problemde, daha hızlı hareket ettiğinde Boris'in topunun daha büyük bir oranda ıslandığını, ama tavuk yeminin ıslanma oranının değişmediğini gördünüz. Bir tutarsızlık var mı? Yoksa açıklayabilir misiniz?

İPUCU:
Basket topuyla, tavuk yemi arasındaki temel farktan çok akışın önemli bir özelliğiyle ilgilidir.

Bölüm 5

Yolda

Kazak ve Keçi



1) Kazakların eğitiminin önemli bir öğesi hayvan (ya da insan!) avında kement kullanımıdır. Eğitim'in şekildeki gibi bazı kısıtlamaları vardır. Kazak, kusursuz düz bir yolda bekler. Kazağın atı sabit hızla yol alır. Şimdi Kazak, kendi yoluyla kesişen dümdüz bir yolda koşan keçiyi görür. Keçi de sabit hız vektörüyle hareket eder. Kazağın kementinin uzunluğu ne olmalıdır? Yani, kazağın A noktasından V_1 hız vektörüyle, keçinin de B noktasından V_2 hız vektörüyle başladığını varsayarak, kazakla, keçi arasındaki minumum uzaklığı bulun.

İPUCU:
Bu problemdeki en aldatıcı şey, gerçekten neyin verili olduğunu, ve nasıl bir çözüm yolu gerektiği konusundaki yanlış kavramadır. Eğer hareketin tamamen verilmiş olduğuna ve şekilin yeterli olduğuna inanıyorsanız, şekildeki verileri doğrudan grafikle izleyebilirsiniz. Ayrıca, size en uygun görünen parametreleri göz önünde bulundurarak analitik bir çözüm de bulabilirsiniz. Gerçekten, uçak ve gemi radarlarıyla denemiş olmanız varsa, bu problem size çok tanıdık (ve açık) gelecektir.

Rus İşi Planlama

2) Her on dakikada bir, kömürle dolu bir kamyon Kemerova'dan ayrılır ve sabit hızla (saatte 50 mil), mükemmel düz bir yolda 50 mil uzaklıktaki Magnitogorsk'a(*) doğru hareket eder. Son 5 yıllık plana göre Kemerova'nın kömür ihtiyacı 1 kamyondur. Bu nedenle Magnitogorsk'da depolanan kömürden 1 kamyonu plan uyarınca Kemerova'ya geri gönderilir. Bu kamyon, Kemerova'dan yola çıkan kömür kamyonlarından birisiyle aynı anda, aynı hızla ters yönde yola çıkar. Kemerova'dan Magnitogorsk'a giden kaç kamyon, yolculuğu sırasında bu kamyonla karşılaşır?

İPUCU:
İfadelerinizi dikkatlice inceleyin.

Yanıta Geri Gidiş

3) Araba kullanıyorsanız, deneyimlerinizden bilirsiniz ki, arabayı geri geri park etmek, ileriye doğru hareketle park etmekten kolaydır. Neden olduğunu açıklayın.

İPUCU:
Paralel park yerinden çıkmakta olduğunuzu düşünün. Geriye doğru hareket mi ileriye doğru hareket mi daha kolaydır? Şimdi hayali bir videoda bu manevrayı geriye doğru oynatın.

---

* Aslında uzaklık daha fazladır. Problemi kolaylaştırmak için uzaklığı azalttık (öyle değil mi?).

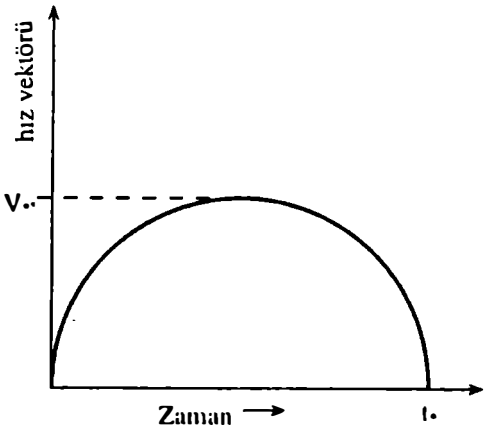
Başka Bir Sürücü Problemi

4) Bir önceki probleme gönderme olarak, sürücülük deneyiminizle farketmişsinizdir ki; arabayı ne kadar dikkatli kullanırsanız kullanın, ön lastikler, arka lastiklerden daha çabuk eskir. Neden böyledir?

İPUCU:
Bir önceki problemе yanıtınızı göz önünde bulundurunuz. Özellikle, direksiyon çevrildiğinde ön lastiklerin devrini düşünün.

Otomobil Ne Kadar Uzağa Gitti (Yanlış Boyutta Yolculuk)

5) Düz bir yolda bir yarış arabası sınanıyor. Otomobil başlangıç noktasından itibaren, maksimum hız vektörüne doğru ivmeleniyor. Daha sonra frene basılınca, durmak için ivmeyle yavaşlıyor. Otomobil matematikçiler tarafından tasarlanmış olduğundan, hareketi oldukça simetriktir. Gerçekten de hız-zaman grafiği çizildiğinde şekildeki gibi bir yarı-çember ortaya çıkar.

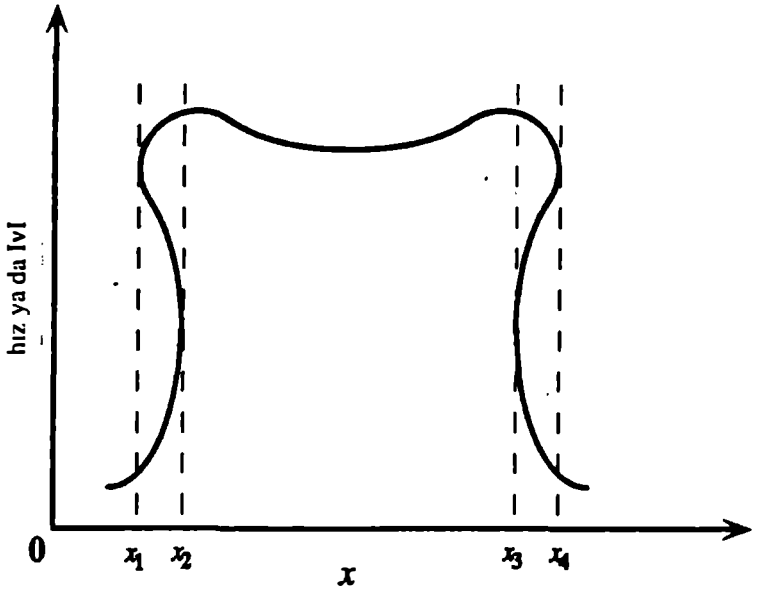


Maksimum hızı V_o başlamadan duruşa kadar olan zaman t_o'dır. Şimdi otomobilin ne kadar uzağa gitmiş olduğunu hesaplamak gerekiyor. Bütün matematikçiler, gidilen toplam yolun, yarı dairenin alanına ait olduğu konusunda hemfikirler. Ama matematikçilerin yarısı dairenin alan formülünü kullanarak, dairenin yarı çapı V_o olduğuna göre yolun $(\pi/2)\ (v_o)^2$'ye eşit olduğunu söyler. Diğer yarısı ise, $t_o/2$'nin de yarıçapa eşit olduğunu, öyleyse alanın $(\pi/2)\ (t_o/2)^2$'ye eşit olduğunu iddia eder. Ortam tartışmasıyla gerginleşmeye başlar. Sesleri duyan bekçi her iki grubun da açıkça hatalı olduğunu gözlemler. Kim haklıdır?

İPUCU:
Bu grafiğin ordinat ve apsisleri farklı boyutlara sahiptir!

Otomobil Şimdi Nereye Gitti?

6) Matematikçilerimiz yarış otomobili üstüne çalışmayı sürdürürler. Bu kez, otomobil açık bir arazide sınanır. Veriler bir bilgisayar aracılığıyla otomatik olarak alınır. Grafik A otomobilin hız vektörü x-koordinatı, grafik B, otomobilin hız vektörünün x- bileşeni (yani V_x) x-koordinatı grafiğidir. Bir önceki tartışmadan beri (bir önceki soru) bu sınamalar konusunda endişeli olan bekçi, software'de bir yanlışlık olması gerektiğini gösterir. Grafiklerden biri kesinlikle yanlıştır. Hangisi ve niye?



A. hız-x

İPUCU:
Değişkenleri ve nasıl davrandıklarını düşünün.

B. x hız vektörünün bileşeni

Kış Sürücüsü

7) Matematikçilerden biri oğluna araba sürmeyi öğretiyor. "Petya, kışın çok dikkatli sürmelisin" der oğluna. "Önündeki arabayla seninki arasında daha uzun mesafa bırakmalısın." Petya karşılık verir: "Niye? Bunu yapmak için bir neden göremiyorum. Kaygan yolda durmak benim için daha uzun sürecekse, önümdeki arabanın durması da daha uzun sürecektir. Kar yüzünden, durma mesafesi 10 metreden 60 metreye çıksa bile duruşlarımız ahenkli olacaktır, çünkü frene bastığımızda 10 metre arkasındaysam öndeki aracın, durduğumuzda da 10 metre arkasında olurum. Tabii ki daha yavaş kullanmalıyım, ama kesinlikle daha fazla araya ihtiyacım yok." Petya haklı mı?

İPUCU:
Kışın öndeki aracı daha uzun bir mesafeyle izlemenin, daha güvenli olduğunu söyleyen geleneksel akıl düşünün. Petya yalnızca, kışın varolmayan belli varsayımlar altında haklıdır.

Kış Sürücüsü II

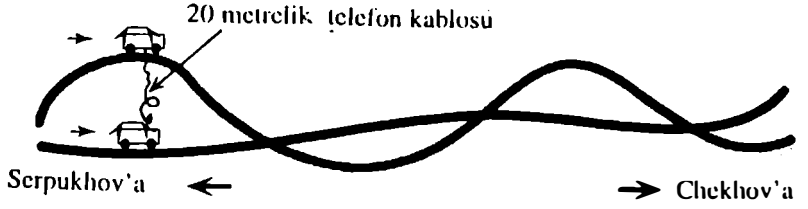
8) Kışın arabanın kaymasını engellemek için daha yavaş sürmek gerçekten gerekli midir yoksa bu, harekete geçebilecek zamanı kazandırmak için mi önerilir?

İPUCU:
Kaymanın mekanığini, özellikle de bir maksimum değerin üstüne çıkmayan sürtünme kuvvetini düşünün.

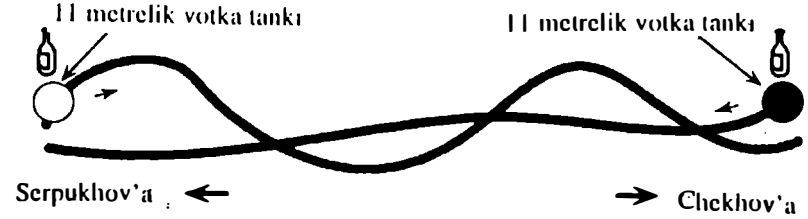
Bir Rus Planlama Zaferi Daha

9) Votka Chekhov'da büyük miktarda üretilir ve Serpukhov'da tüketilir. Tırların arkasına dik olarak yüklenen 11 metre yarıçaplı büyük dik silindir biçimindeki tankerlerle taşınır. Bu tırlar çok büyük olduğundan kasabalar arasındaki dar ve virajlı yolda birbirlerini sollayamamaktadır. Bu yüzden, yeni bir yol planlandı. Fikir, bir yol Chekhov'dan Serpukhov'a votka taşımak için, diğeri de boş tırların dönüşü için kullanılmak üzere oluşmuştu. (İkinci şekilde gösterildiği gibi).





Bürokratlar 20-metrelik telefon kablosuyla bağlı Serpukhov'dan Chekhov'a gidiyor.



Votka kamyonlarla Chekhov'dan Serpukhov'a gider. Boş tanklar diğer yoldan döner.

Yeni yol da dar ve virajlıydı. Ama kuşkucu planlamacıların incelemelerini sağlayabilmek için ikinci yol şu şekilde planlamıştı: Planlamacıların iki otomobili Serpukhov'dan aynı anda ayrılacaktı (üstteki şekil). Otomobillerden biri eski yolda, diğeri yeni yolda hareket ederken 20 metre uzunluğunda bir telefon hattıyla birbirlerine bağlıydılar. Yani, yolların hem virajlı olmalarına, hem de kesişmelerine rağmen, arabaların merkezleri birbirlerinden 20 metreden fazla uzaklaşamazdı. İki yolun yükseklikleri aynı olduğundan, üst geçit de kurulamazdı. Projenin mühendisi, plandan şikayetçiydi, çünkü, tırların birbirini geçmesi mümkün değildi, ve sadece tek bir yol tırlar tarafından kullanılabileceği için yeni yol tamamen yararsızdı. Bütün Serpukhov şehri, votka stokunun tükenmesi yüzünden, susuzluktan ölme tehlikesiyle karşı karşıyaydı. Planlama Teşkilatı'ndaki müdür, tırların resmi otomobiller gibi seyahat etmesi gerekmediğinden (Çünkü aralarında telefon hattı ol-

mayacaktı), birbirlerini bekleyebileceklerini, virajlı yolda gerekli manevraları yapabileceklerini öne sürdü. Planlamacıların arabaları 20 metrelik telefon teliyle birbirine bağlı olduğu için, bir yoldaki her noktaya karşılık gelen diğer yoldaki noktayla aralarındaki uzaklık 20 metreden fazla olamazdı. Eğer mühendis, aynı anda, Serpukhov'dan ve Chekhov'dan yola çıkan iki tırın varacakları yere çarpışmadan ulaşmalarının kesinlikle olanaksız olduğunu kanıtlayamazsa, mühendisin iddiası kabul görmeyecekti. Bunu kanıtlayabilir misiniz?

İPUCU:
Müdür sezgisel yanıtınızı kabul etmeye yanaşmadığı için, kesin bir kanıt bulmanız gerekir, çünkü durum oldukça tehlikelidir. Otomobillerin ve kamyonların hızları sizi ilgilendirmediğine göre, iki yol boyunca iki ayrı uzaklık tanımlayarak anlık durumları bütünüyle ifade edebilirsiniz.

Bölüm 6

Kaynaklar ve Havuzlar

Bir Musluk Problemi

1) Bir musluk bir süre için hafifçe açık bırakılıyor ve su yavaşça akıyor. Akıntı musluktan uzaklaştıkça niye incelir?

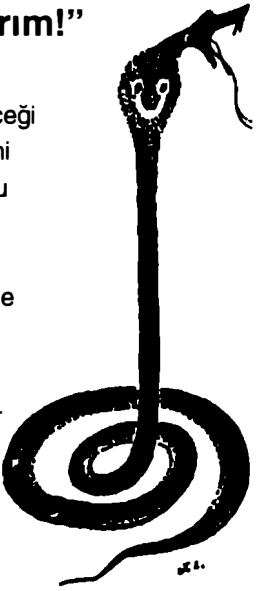
İPUCU:
Akıntı bir süre düzgündür ve biçimi değişmez.

Tesisatçınızdan Daha Pratik Bir Öğüt (Yerçekimini Bir Cetvel ve Bir Kovayla Ölçmek)

2) Bir önceki problemdeki, musluktan uzaklaştıkça incelen su akış oranını (ör; dakikada galon veya saniyede litre), ve akışın hızını bulabilir misiniz? (Daha kesin sonuç için ısrarlıysanız bir pergel kullanın). Bu tekniği, yerçekimi ivmesini (g) hesaplamak için kullanabilir misiniz?

İPUCU:
Burada kütlenin korunumunu olduğu kadar, enerjinin korunumunu da kullanmalısınız.

"Hesap Yapmak İçin 20 Saniyeniz Var. Yoksa Sokarım!"



3) Bir kobra saldırıya geçeceği zaman, önce başını arkasından gövdesini yere dik olarak kaldırır, bu sırada kuyruğu yatay olarak durur. Kobranın yere uyguladığı kuvveti bulun. Kobranın kütlesinin M olduğunu ve uzunluğu (bahçe hortumu gibi) L olan vücudunun düzgün olarak doğrulduğunu, başını da v sabit hızıyla dikey olarak yükselttiğini varsayın.

İPUCU:
En basit şekliyle, ivmenin için içine girmesinin şart olmadığı, Newton'un İkinci Yasını düşünün. İkinci Yasa, momentumun değişim oranıyla göyde üzerindeki kuvvetlerin vektörel toplamını dengeler.

St. Peterburg'da Momentumun (ve Enerjinin!) Korunumu

4) Bir zamanlar, St. Peterburg'da iki sokak çöpçüsü yaşardı. Biri, Oblamovetz, çok tembel, diğeri Stakhonovetz, ise işkolikti. Ama bunun dışındaki bütün yönlerden birbirleriyle özdeştiler.*

* Stakhanov, büyük üretim, enerji ve iş kapasitesi dolayısıyla Stalin döneminin bir kahramanıydı. Oblomov ise İvan Gonçarov'un romanında tarif edildiği gibi, yataktan çıkabilmek için bütün gün uğraşırdı.



Çok kötü bir kış günü, şehrin elektriği kesilmiş ve kar yağmaya başlamıştı. İşe gidebilmek için çöpçüler özdeş, sürtünmesiz, aynı V_o hızıyla hareket eden iki yük arabasına bindiler. Oblomovetz hemen uykuya daldı. Stakhanovetz derhal yük arabasını yağan kardan temizlemek için süpürmeye başladı. Karı, arabanın hareketine dik yönde süpürüyordu. İki çöpçüden hangisi aynı sürede daha uzağa gider? St. Petersburg'da hiç tepe yoktur, şehrin bütün yeryüzü şekilleri kusursuz düzdür. Kar iki arabaya da saniyede sabit *u* kilogram oranında yağıyordu.

İPUCU:
Her yük arabasının momentumunu düşünün.

Mikhail'in Atlıkarıncası

5) Mikhail bir atlıkarınca işletmektedir. Yağmurlu havalarda elektrik faturasının daha kabarık olduğunu farkeder. Rüzgarsız bir havada, yağmurun dümdüz aşağı doğru v hızıyla yağdığını ve yağmurun yoğunluğunun, yani birim hacmindeki suyun kütlesinin ρ olduğunu varsayın. Atlıkarıncanın sabit ve açısal hızıyla dönüşünü sürdürebilmesi için fazladan ne kadar güç gerekir? Yağmurun düzenli yağdığını ve atlıkarıncanın yarıçapının R olduğunu varsayın.

İPUCU:
Yağmur suyu atlıkarıncadan nasıl dökülür?

Yakutsk Otobüsünü Yakalama

6) Yakutsk'a giden otobüs yeryüzü şekillerinin tamamen düz olduğu bir alan içinde kusursuz düz bir yolda sabit hız vektörü v ile hareket eder. Hava çok soğuktur (Yakutsk Sibirya'dadır) ve otobüsü görür görmez (zaman t=0 diyelim) koşmaya başlarsınız. Maksimum koşma hızınız *u*'dur.

a) Otobüsü yakalayabilmek için bulunmanız gereken bölgeyi tanımlayın. Yolu yatay bir çizgiyle gösterebilirsiniz isterseniz $v/u = 2$ olduğunu varsayın.

b) "Yakalama bölgesi" dediğimiz bölgenin sınırına düzenli olarak dağılmış özdeş insanlar olduğunu hayal edin. Bu insanların otobüse binmek için koşturmalarını hareket eden resimler ya da video bandı olarak görmeye çalışın (Otobüs sonsuz sayıda insana hizmet verebilir). Sonunda bu filmi geriye doğru gösterin. Ne görürsünüz? Bu resmi andıran doğal bir olgu biliyor musunuz?

İPUCU:
Soru yeterî kadar açık. Acele edin, yoksa otobüsü kaçıracaksınız!

Patlayıcı Bir Dondurma Külahı

7) Yarı-sonsuz (bir ucu sonlu, diğer ucu sonsuz) uzunlukta ince çubuk, güçlü bir patlayıcıdan oluşmuştur. İnfilak hızı-yani çubukta patlamanın dağılma hız vektörü- *v*'dir. Patlamanın uzaydaki hızı *u*'dur ve *v*'den küçüktür. Patlamanın uzay ve zaman içindeki biçimini tarif edin. Yani patlama ürünleriyle işgal edilen bölgenin zaman içindeki evrimi nedir?

İPUCU:
Küresel çözüm size büyük resmi verecektir.

Şiddetli Patlayıcılar (ve Dondurma)

8) Bir önceki soruyu ve yanıtını düşünün. Çubuk sonsuz L uzunluğunda olsaydı, patlamanın biçimi ne olurdu? Patlamanın sonlu çubukta yayılma hızı *v*, uzaydaki hızı *u*'dan küçük olursa ne olur?

İPUCU:
Bir önceki problemin çözümüyle aynı yaklaşımdan yola çıkın.

Her Şey Akıda
(Hızlı ve Kıyak Helikopter)

9) Bir helikopter modelinin 50 wat-lık motor gücü vardır. Asıl helikopter, modelin 10 katı kadar büyük olacaktır. Bir mühendis, asıl helikopterin yaklaşık 160 kwatlık güce ihtiyacı olacağını tahmin eder. Bu hızlı ve kıyak tahmine nasıl vardı?

İPUCU:
Büyürken, helikopterin herhangi bir parçasının yüzey alanı, uzunluğunun karesiyle; kütlesi de, uzunluğun küpüyle doğru orantılı olmalıdır. Ayrıca, Newton'un İkinci Yasını en genel hâliyle, momentum terimiyle düşünün.

Vücut Isısı

10) Boris termodinamiği yeni öğrenmişti ve ısınma problemlerinden de bildiğimiz gibi para hesabıyla meşguldü. Marina geldiğinde, apartman dairesinin elektrik faturasını ödüyordu. "Kışın bu dairenin enerjisini artırmak çok pahalı. Daireye giren bu kadar enerjinin ne olduğunu ve niye bu kadar çok para ödediğimi bilmiyorum. Benim dışımda bu dairede fazla bir şey de yok!" dedi. Dansçı olan ve teknik eğitimi olmayan Marina "Basit, daireni ılık tutmak için ödüyorsun. Enerjiyle bir ilgisi yok." diye karşılık verdi. Marina'yla hem fikir misiniz? Enerji nereye gidiyor?

IPUCU:
Enerjinin, sıcaklığa nasıl bağlı olduğuna ve Boris'in dairesinin içerisine dikkat edin.

Bölüm 7

Genişleyen ve Daralan Evrenler

Ruble Üzerindeki Çizgi

1) Boris bir madeni para üzerine düz bir çizgi çizmiş. Yetkililer, ona paranın homojen maddeden yapılmış olduğunu garanti ediyor. Boris, parayı ısıttığında, çizginin şekildeki gibi kıvrılacağını düşünmüş. Çünkü çizginin bazı bölümleri, paranın merkezinden daha uzakta olduğu için daha uzağa itilecektir. Marina bunu kabul etmemiş. Hangisi haklı? İspatlayabilir misiniz?

İPUCU:
Doğrusal termik genleşme katsayısı α, şu bağıntıyla tanımlanır: l=lo(1+αΔT), burada ΔT sıcaklıktaki değişmeyi, l de nesnenin uzunluğunu ya da nesne üzerindeki iki nokta arasındaki uzaklığı gösterir.

Enflasyon ve Para

2) Boris'in ortası delik bir bakır parası vardır. Termik genleşme hakkında bir şeyler bildiğinden, Marina'ya eğer parayı ısıtırlarsa, metalin her yönde, yani, dışarıya olduğu kadar içeriye doğru da genleşeceğini, böylece ısı artıkça deliğin küçüleceğini söyler. Marina kuşkusunu belirtir. Hangisi haklıdır?

İPUCU:
Marina bir zamanlar bir fırında çalışmış.

Bürokrasinin Genleşmesi

3) İki arkadaş Yelsinov ve Jirnovov Enerji Korunumu üzerine yoğun bir tartışmaya girerler. Lambalar ve diğer elektrikli aletler masa üzerinde mi kullanılmalı, yoksa tavandan mı asılmalıdır. Hangi uygulama daha az enerji tüketir? Temel soru bu: Herhangi bir maddeden yapılmış iki özdeş küreyi düşünün, bir tanesi tavandan yalıtkan masa üzerinde dursun. Hangisi ısınmak için daha çok enerjiye ihtiyaç gösterir? Tavana ya da masaya olan ısı iletimini yok sayabilirsiniz. Her ikisi de tamamen eylemsiz ve hareketsizdir.

İPUCU:
Zaten yeterli ipucu verdik!

İhtiyar Delikanlı Mazay sizi Friedman-Desitter Evrenine Davet Ediyor! (Hubble Sabiti Gerçekten Sabit mi?)



4) Edebiyatta tanımlanan muhtemelen ilk ekolojist İhtiyar Delikanlı Mazay, 1800'lerin tanınmış kısa Rus öykülerinde temel karakterdir. Her bahar, karlar eriyip, tarlaları su bastığında, Mazay su altında kalmamış küçük adacıklar arasında yabani tavşanları kurtarmak için dolaşırdı. Ne zaman Mazay bir grup tavşanı kurtarıp, onları serbest bıraksa, her biri başka bir yöne kaçışırdı. Rus tavşanı olduklarından, şekildeki gibi matematiksel bir kesinlikle hareket ederlerdi.

Her altı tavşan da aynı v hızıyla ve herbir yanındaki diğeriyle 60° lik açı yaparak koşar. Koşarlarken, içlerinden en zekisi geriye bakar ve gördüğü şey karşısında şaşırır. Sizden onun ne gördüğünü bulmanızı istiyoruz -diğer bir deyişle: öbür tavşanlar ona göre ne kadar hızlı ha-

reket ederler ve konumlarıyla hız vektörleri arasında herhangi bir ilişki var mıdır (Yine en zeki tavşana göre)?

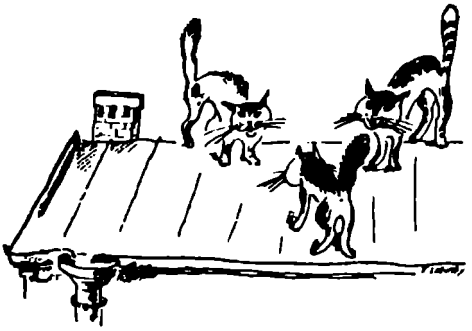
İPUCU:
Göreli hız vektörünü bulabilmek için Galile dönüşümüyle başlayın.

Referans Sistemleri ve Yıldızlararası Hareket (Kaçışan Tavşanlar)

5) Concourse-MIT- 97 yıldız kümesinde bir yıldızın yörüngesindeki bir uzay gemisinden, diğer bütün yıldızların söz konusu yıldızdan uzaklıklarıyla doğru orantılı bir vektörel hızla uzaklaştıkları gözleniyor. Bu dikkate değer olguyu araştırmak için uzay gemisi, yıldız kümesindeki -gözlendiğinde büyük bir hızla uzaklaşan- başka bir yıldıza gider. Astronotlar bu yıldızdan ne gözlemler?

İPUCU:
Bütün güneş sistemlerindeki uzaklıklar ve yörüngedeki hareketler, yıldızlararası uzaklıklar göz önünde bulundurulduğunda ihmal edilebilir. Yanıtın devamı İhtiyar Delikanlı'nın tavşanlarında gizlidir.

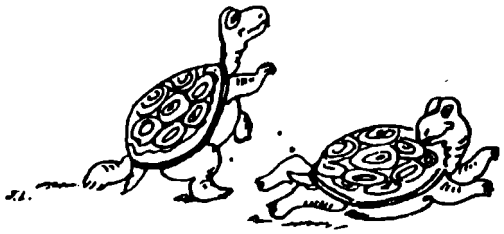
Termik Genleşme ve Kozmik Kediler



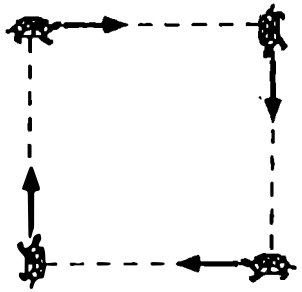
6) Üç kedi, sabah güneşiyle ısınan geniş sac damın üzerinde otururlar. Birbirlerini dikkatlice süzerler. Çok küçük hareketleri bile yakalayabilen kediler, sac ısındıkça birbirlerinden uzaklaştıklarını farkederler. Gerçekten de her kedi diğerlerinden, aralarındaki uzaklıkla doğru orantılı olarak uzaklaşmaktadır. Birbirine en uzak mesafede olan iki kedi en hızlı oranla, en yakın mesafede olan iki kedi, en yavaş oranla birbirinden uzaklaşır. Bunun metalin termik genleşme doğrusal katsayısının bir sonucu olduğunu gösterin. Herhangi iki nokta arasında doğrusal termik genleşme katsayısı $l = l_0(1+\alpha\Delta T)$ bağıntısıyla tanımlanır. ΔT değişen sıcaklığı, l de nesnenin üzerindeki iki nokta arasındaki uzaklığı gösterir.

İPUCU:
Doğrusal termik genleşme katsayısının tanımını inceleyin.

Masha'nın Matematiksel Kaplumbağaları



7) Masha dört kaplumbağasını, her zaman birbirlerini takip etmeleri için eğitir. Şekilde gösterildiği onları bir karenin köşelerine yerleştirir. Her bir kaplumbağa saat yönündeki komşusuna dönüktür. Kaplumbağalar yalnızca sabit bir v hızıyla hareket ederler. Kareye ne olur? Kaplumbağalar ne zaman karşılaşırlar?



İPUCU:
Burada simetri çok önemlidir. Yerleştirmenin simetrisinden dolayı, kaplumbağalar her zaman karenin köşelerine mi yerleşir?

Bölüm 8

İpleri Öğrenirken

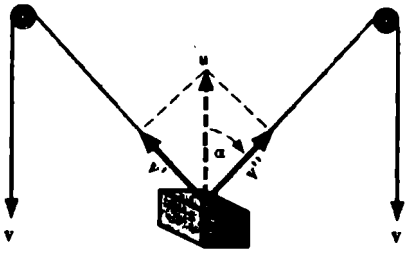
Aleksandr ve Komutan

1) Aleksandr, balıkçı teknesi Olga'nın kaptanıdır. Tikhvin'in iskelesine balıkla dolu olarak yanaşır. Limanın kumandanı Kretinov, teknede kaç kilogram balık olduğunu bilmek ister. Ancak, limanda tekneleri tartan ve balıkları boşaltan alet doğru olarak çalışmamaktadır. Aleksandr teknenin ağırlığını balık tartısıyla bulmaya çalışır! Tartının yalnızca 100 kg. kapasitesi vardır ve tekne çok büyüktür -Belki tartı kapasitesinin 1000 katı kadardır. Aleksandr bu ölçümü nasıl başaracak? Aleksandr'ın mühendisi birinci süvariye kurnazca Aleksandr'ın Kretinov'un yine dolandırdığını açıklar. Ağırlık olduğundan fazla beyan edilmiştir. Aynı fikirde misiniz?

İPUCU:
Isaac Newton İkinci Yasası faydalı bir iş için kullanıldığından çok memnun olurdu. Yine de sonuçlar bir biçimde sulandırılmıştır.

Aleksandr'ın Balığını Boşaltırken

2) Aleksandr, Kretinov'u balık yüklü tekneyi doğru ölçtüğüne ikna ettikten sonra, balıkları boşaltma işini yönetmeye başlar. Aynı yükseklikteki iki makara, şekilde gösterildiği gibi, iplerde gerilimi azaltmak için ayarlanmıştır. Balık sandığı her iki makaradan eşit uzaklığa yerleştirilir ve her iki eşit uzunluktaki ip, eşit v hızıyla çekilir. Bu, yükü iki ipe ve iki makaraya eşit olarak böler. Kretinov, bu gibi durumları, geçenlerde öğrenmiş olduğundan vektörel toplamdan anlar. Balık sandığının hız vektörü, iplerin hız vektörlerinin, vektörel toplamı kadardır. Dolayısıyla balık sandığı, α herhangi bir iple, balığın asıldığı düşey doğru arasındaki açı iken, $u=2\ v\cos\alpha$ hızıyla yükselir. Kretinov haklı mı? Yoksa bu hesapta bir aldatmaca var mı?



$$|v'| = |v''| = v$$

İPUCU:
Bu problem vektörel çözüm ve toplama çözülebilir mi? Şekli dikkatlice inceleyin!

Aleksandr'ın Balıkları Sesten Hızlı

3) Bir önceki problemin çözümünü inceleyin. Özellikle, α'nın 90 'ye ulaşması halinde balık sandığının hız vektörüne bakın. Gerçekten α 90°'ya ulaştığında hız çok büyük olur; hattâ Aleksandr'ın balığı, Sasha'nın yapamadığını (Bölüm 10, problem 2) yapabilir gibi görünüyor - yani ışık hızını aşmak. Mümkün mü?

İPUCU:
Bir önceki problemin çözümünü incelediğimizde buna "Kretinov'un intikamı" diyebilirsiniz.

Çamura Saplanmış
(Politik Olarak Hatasız İp)

4) Asfaltsız bir yolda giderken, kamyonetimiz çamura saplanır. Rus toprağı, ya kil ya da çok zengin bir organik karışım olan *chernozem*dir. Islakken bütün topraklar mekanik olarak hareketlidir ve çok kaygandır. Rusya'da yolları asfaltlamak yerine, her taşıtta uzun bir ip taşınır. Yetkililere göre, her yolun kenarında bir ağaç vardır, böylece insan ipin ucunda sonsuz kuvvet kazanabilir. Öyleyse her taşıt ne kadar ağır olursa olsun çamurdan çıkarılabilir. Bu doğru mudur? Nasıl yapılır? Ne yapmalısınız?

İPUCU:
İpler çekilebildiği gibi, belki itilebilir de. Hatasız ip her bakımdan ideal olmalı.

Bölüm 9

Yerçekimi ve Harmonik Osilatör

Güç Dengesi

1) Bir kefesinde, yarısına kadar suyla dolu bir bardak bulunan terazi dengededir. Bardağa dokunmadan, dikkatlice bir parmağınızı suya sokarsanız, terazinin dengesi bozulur mu?

İPUCU:
Bu ve bununla ilgili problemler antik* Syracuse'da çözülmüştür.

* Sicilya'da Arşimet'in yaşamış olduğu antik kent

Vanya ve Su Kovası
(Yerleşim Meselesi)

2) Soğuk bir kış sabahı, Vanya ırmağa gidip bir kova su getirir ve kulübesinin girişine bırakır. Asırlardır, Rusya'da su gereksinimi, donmuş bir dereceye açılan bir delikle sağlamıştır. Vanya, kovayı ağzına kadar doldurduğu halde, bir damla bile su dökmemiş olmakla övünür. Gerçekten de kovanın içinde yüzen buz parçalarının, suyun üzerinde kalan bölümleri, kovanın ağzından dışarı taşmaktadır. Vanya'nın annesi buzları ayıklayıp dışarı atmasını söyler. Çünkü buzlar eriyince kova taşacaktır. Bu önlem gerekli mi?

İPUCU:
Burada tek düşünmemiz gereken Arşimet Yasası değildir. Yanıt Rusya için ve ABD için aynı değil.

Yedekteki Mavna

3) Bu problem ilk olarak Paris Mühendislik Akademisi'nin 19. yy.da bir giriş sınavında sorulmuştur. Bir mavna Rhone nehrinde Marsilya'dan, Lyon'a taşınmıştır. Lyon Marşilya'dan(170 m) daha yüksektir. Bu mavrayı Marsilya'dan Lyon'a taşımak için harcanan toplam işi bulmanız isteniyor. Size, bu yolculukta suyun direncine karşı yapılan toplam işin verileri sağlanmıştır. Eğik düzlemde, bir şeyi sürüklemek için gereken işi hesaplarken, potansiyel enerjideki değişim mgh'i, sürtünmeye karşı yapılan işe eklemek gerektiğini herkes bilir. Siz de benzer biçimde iş mgh'i (m-kütle, g-yerçekimi ivmesi, h- rakamdaki artış) mavnanın potansiyel enerjisini artırmak için eklemeli misiniz? Sonunda mavna 170 metre daha yüksekte olacak!

İPUCU:
Arşimet'i anımsayın!

Işınla Beni, Scotty!

4) "g-kuvvetlerini" en aza indirmek için- uzay gemileri fırlatılırken, yüksek ivmeden dolayı maruz kaldıkları kuvvetler- astronotları su tanklarına yatırmaları önerilir. Bilim kurgularda bu tema sıkça kullanılır. Suda yüzerken, astronotlar ağırlıksız olacaklar ve yüksek ivmenin etkilerinden zarar görmeyecekler. Bu işe yarar mı?

İPUCU:
Uygulanan kuvvetlerin aynı türden olup olmadıklarını düşünün.

Saat Ayarlama (Ciddi Bir Mesele)

5) Christian Huygens, 17. yy. Hollanda'lı matematikçi, astronom, fizikçi ve ışığın dalga kuramının yaratıcısı, aynı zamanda ilk doğru çalışan sarkaçlı saatlerinde mucidiydi. Fransa'da üretilen bu saatlerden birini Kuzey Afrika'da bir arkadaşına gönderir. Arkadaşı teşekkür mektubunda, saatin umduğu kadar doğru çalışmadığını, hattâ biraz yavaş çalıştığını söyler. Huygens sorunun ne olduğunu hemen anlar ve arkadaşına saati nasıl ayarlaması gerektiğini açıklayan bir mektupla karşılık verir. Huygens'in öğüdü ne olabilir? Problem nedir?

İPUCU:
Sarkaçlı saatler nasıl çalışır?

Asansördeki Saat

6) Bir asansör operatörü iş saatlerini asansördeki saate kartını sokarak belirlemektedir. Asansör çok eskidir, asansörün içinde bulunan saatin bir sarkacı vardır. Asansörün hızlanması (pozitif ivme) ve yavaşlaması (negatif ivme) kusursuzca düzenli ve sabittir. Asansör hızlanırken de yavaşlarken de ivmesinin mutlak değeri aynıdır ve yerçekimi ivmesi g'den küçüktür. Operatör saat başına ücret alıyorsa, hakettiğinden az mı, yoksa çok mu ücret alır?

İPUCU:
Sarkacın periyodu etkin yerçekimi ivmesindeki değişimlerden etkilenir, yani asansör içindeki saatte gözlenen bir saat, ofisteki bir saatten ileri ya da geri olabilir.

Atlıkarıncadaki Mum

7) Bir mum yakıp, alevin rüzgardan etkilenmemesi için bir cam lamba şişesinin içine koyun. Bu mumu alarak atlıkarıncaya binin. Alev hangi yöne eğilecektir?

İPUCU:
Kafanız sağlamsa ve eylemsizlik sizi yenmediyse bu problemin üstesinden gelebilirsiniz.

Ay Gel-Gitlere Nasıl Neden Olur?

8) Uzayda hareket halinde bir uzay gemisinde yerçekimi olmadığını herkes bilir. Örneğin, hepiniz, yörüngedeki uzay gemisinden çekilmiş fotoğraflarda etraftaki nesnelerin nasıl serbestçe dolaştığını görmüşsünüzdür. Bu durumda, dünyanın yerçekimi ivmesi, dünyanın etrafındaki yörüngesel hareketin ivmesi tarafından yok edilir. Şimdi yerküre de, bu bakış açısıyla güçsüz bir uzay gemisi olarak kabul edilebilir. Bu yüzden, dünyanın üzerindeki bütün nesneler, güneşin, ayın ve diğer gökyüzü cisimlerinin yerçekimi kuvvetlerine göre ağırlıksız olmalılar. O zaman, ay nasıl denizlerimizde ve göllerimizde gel-gitlere neden olur?

İPUCU:
Burada simetri çok önemlidir. Yerleştirmenin simetrisinden dolayı, kaplumbağalar her zaman karenin köşelerine mi yerleşir?**İPUCU:**
Uzay gemilerinden bakıldığında dünya çok büyük görünür.

Kahvaltı Sofrasında Yerçekimi

9) Boris, Newton'un Çekim Yasalarına göre, bütün cisimlerin birbirine bir çekim kuvveti uyguladığını ve birbirine yaklaştıkça, bu çekim kuvvetinin, aralarındaki uzaklığın karesinin tersi oranında arttığını öğrenmişti. Dedesi kahvaltı masasında otururken, Boris'den iki cisim birarararaya getirildiğinde çekim kuvvetinin azaldığı bir örnek bulmasını ister. Böyle bir örnek bulabilir misiniz?

İPUCU:
Newton'un Çekim Yasası denklemi, kesin söylemek gerekirse yalnızca iki yoğun kütle için formülle ədilmişdir. Borís'in dedesinin kahvaltı sofrasında ne görebileceğini göz önünde bulundurmalısınız.

Malakhovka'nın Işıkları (Harmonik Osilatör)

10) Malakhovka'da köy festivalini kutluyorsunuz. Bütün fenerler yakılmış. Toplantı salonunun yüksek tavanına uzun ve yaylı tellerle birçok lamba asılmış. Gürültülü müziğin etkisiyle, lambalar bir aşağı bir yukarı yaylanmakta. Her ampulün en yüksek ve en alt noktadayken daha çok parladığını farkediyorsunuz. Bu doğru olabilir mi, yoksa votkayı çok mu kaçırdınız? Işıkların devam eden hareketi sizi öyle rahatsız ediyor ki, sonunda kulübenize gidip, ışıklara ateş etmek için AK-47 nizi alıyorsunuz (Bu herhalde votkadan). Bir ampulü vurabilmek için silahınızı ne zaman ateşlemelisiniz? Neyi hedef almalısınız?

İPUCU:
Problemin başlığını ve parlaklıktan ne kastedildiğini düşünün.

Platin Gezegen

11) Uzay gemisi yıldız sisteminde yeni keşfedilmiş bir gezegenin yörüngesindedir. Akşam yemeği fırına konur ve alarmı 45 dakikaya ayarlanır. Uzun bir yolculuktan sonra herkes dinlenmeye başlamıştır. 45 dakika sonra alarm çalar ve aşçı geminin, tam yemek fırına konulurken olduğu konumda olduğunu farkeder. Bundan mürettebata söz edince teknik subay oldukça heyecanlı bir şekilde "Bu, yer kürenin alçak yörünge uzay istasyonunun yörünge periyodunun yarısından yalnızca biraz fazla." der. Bunu duyan kaptan "Bu gezegen safplatinden oluşmuş gibi görünüyor. Haydi gidelim!" diyerek derhal iniş planlarını hazırlar. Kaptan bu sonucu nasıl vardı?

İPUCU:
Dünyanın ortalama yoğunluğu 5,5 g/cm3 tür.Platinin yoğunluğu bunun yaklaşık 4 katıdır.

Bütün Tüneller Moskova'ya Çıkar

12) Yeni Yeltsin sisteminde en yaşamsal kırtasiye işleri Moskova'ya mümkün olan en kısa sürede ulaşmalıydı. Elektronik haberleşme gizlilik isteği yüzünden güvenilir bulunmuyordu. Bu iletişim sorununa, yeraltından önemli kentlerle Moskova arasında tüneller yapmak, çözüm olarak önerildi. Kağıtlar metal kutularla tünel içindeki süper iletken bobinlerin manyetik alanıyla gönderilecekti. Böylece sürtünme de olmayacaktı. Vlodivostok'taki bürokratlar (10.000 km. uzakta Pasifik Okyanusu kıyısında) mesajlarını Moskova'ya en çabuk ulaştıranların kendileri olacağını düşündüler, çünkü hem yerkürenin aşağı yukarı tam karşı tarafındaydılar, hem en az eğimli tünel onlarınkiydi. Bu yüzden en büyük ivmeli tüp onlarınki olmalıydı. St.Petersburg'dakiler (eskiden Leningrad, 700 km. uzakta) çok daha yakın olduklarından, en hızlı iletişimin kendilerininki olacağını düşündüler. Kimin mesajları daha hızlı ulaşır? Yerküreyi sabit yoğunluklu bir küre olarak düşünün.

İPUCU:
Kutular karşı taraftan yalnızca bırakıldıarsa, Moskova'ya vardıklarında hızları ne olacak? Elektrostatik alanlar ile tam analojî kurarak büyük kütleli küresel bir kabuğun, içindeki hiçbir noktada yerçekimi kuvveti oluşturmadığını anımsayın.

Bölüm 10

Mekanik ve Rölativite



Çapraz Kılıçlar

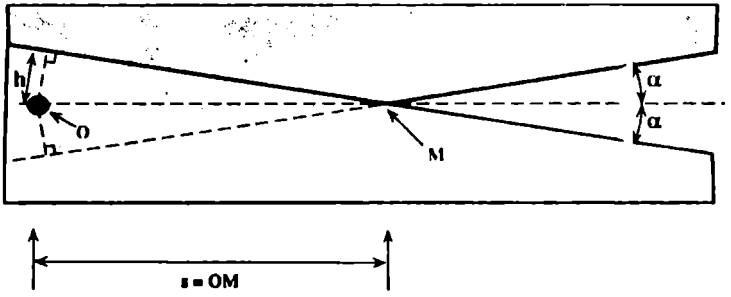
1) *Makbet*'in kılıç sahnesinde, kılıçların kesişim noktalarının hareketini ayrıntılarıyla gözlemlemek hemen hemen olanaksızdır. Bir düelloda, dikkatli bir gözlem, bu noktaların insan gözü için çok büyük bir hızla hareket ettiğini gösterir. Bunu açıklayabilir misiniz?

İPUCU:
Problemi kolaylaştırmak için, iki çubuğun arasındaki açının 2a olduğu ve her çubuğun kendisine dik V hız vektörüyle hareket ettiğini durumu düşünün. Kesişim noktasının hız vektörü nedir? Simetrik bir bakış noktası seçin.

Terzi Dükkanında Özel Rölativite (Sasha Işık Hızını Aşıyor)

2) Sasha bir önceki problemi okulda çözmüştü. Şimdi, babasının terzi dükkanında büyük makasları incelerken, Özel Rölativite İlkelerini yıkabileceğine karar verir. Bir önceki problemin, makasın bıçaklarının kinematiğini tanımladığını düşünür. Bıçaklar bir mil etrafında dönerler, bu yüzden bıçak üzerindeki herhangi bir noktanın hız vektörü, bıçağın eksenine diktir. Birinci problemin yanıtında kesişim noktasının hız vektörü $u=v/\sin\alpha$ olarak çıkmıştı. Makas kapandıkça, α açısının küçüleceği ve dolayısıyla yukardaki ifadenin paydasının sıfıra yakınsayacağı açıktır. Öyleyse kesen kenarın (makas bıçaklarının kesişimi) hız vektörü sonsuza yakınsar (En azından Sasha'ya göre). Masha dükkana uğradığında, Sasha ona heyecanla ışık hızını aşabileceğini ve Özel Rölativite ilkesinin yıkabileceğini anlatır.

Aslında bir önceki problem, tamamen doğrusal hareketleri içerir, oysa bu problemde bir eksen etrafında dönme hareketi vardır. Sasha'dan daha dikkatli olmak için şekli inceleyin.



Bıçakların mili 0 noktasındadır ve kesme işlemi M kesişim noktası tarafından gerçekleştirilir. Mil ile bıçakların kesişim noktası arasındaki uzaklık (Şekilde 0 ve M noktaları arasındaki uzaklık) h=s Sinα bağıntısıyla verilir. h burada milden bıçağın kenarına olan uzaklığı, α da bıçaklar arasındaki açının yarısını gösterir. S'e göre çözersek,

$$s = \frac{h}{\sin\alpha}$$

elde ederiz. Bu ifadenin zamana göre türevini alırsak:

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{d\left(\frac{h}{\sin\alpha}\right)}{dt}=-h\left[\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right]\frac{d\alpha}{dt}=h\omega\left[\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right]$$

olur. Küçük açılar sadeleştirilir: $\alpha \Rightarrow$ o Cos $\alpha \equiv 1$ ve Sin $\alpha \equiv \alpha$ olduğundan

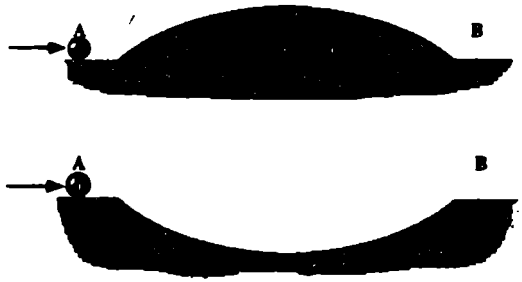
$$v = h\,\omega\left[\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right]=\frac{h\omega}{\alpha^2}$$

Küçük açılar için, makas kenarlarının kinematiği, kesen kenarı, bir önceki problemin "kesişim" noktasından bile hızlı hareket ettirir. Sizce Sasha başardı mı? Masha Nobel Ödülü Komitesi'ne haber vermesi gerektiğini düşünmüyor.

İPUCU:
Burada aslında iki problem var. İlk önce Özel Rölativite ilkesi çiğnendi mi? Öyle düşünmüyorsanız bile problemi incelemeyi sürdürmelisiniz.

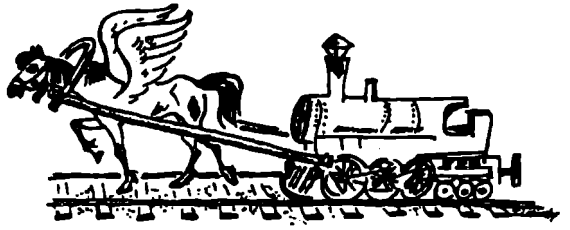
Bowling Yolları

3) Şekilde görülen iki özdeş top, eşit hız vektörleriyle A noktasından B noktasına doğru harekete başlar. Hangisi B noktasına daha önce varır?



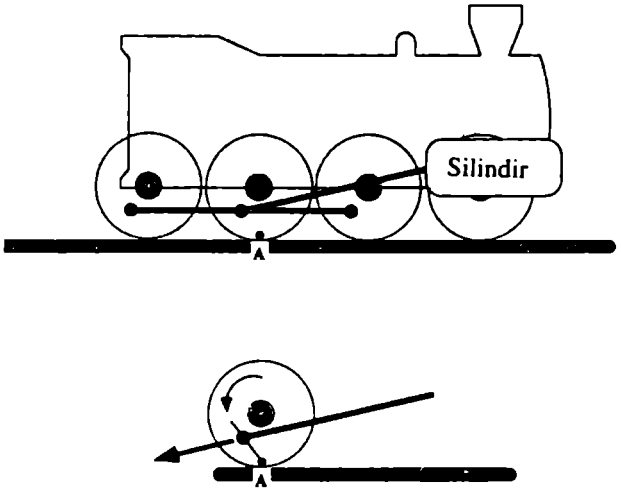
İPUCU:
Topların B noktasına varış hızları hakkında ne söyleyebilirsiniz? Bu fikri geliştirebilir misiniz?

Boris ve Lokomotif



4) Boris geçici (instantenous) dönme merkezlerini daha yeni öğrenmişti: Geçici bile olsa, sabit her nokta moment ve dairesel hız vektörü bulmak için kullanılabilir. Bir tepede uzanmış dinlenirken, geçmekte olan bir lokomotifi izleyen dedesi, bu kavramın yapay hattâ

hatalı olduğunu belirtir. Dede, lokomotifin pistonu dışarı itildiğinde, piston kolunun tekerleklere bağlı kolu geriye doğru ittiğine dikkat çeker.



Tekerleklere bağlı kol, tekerleği, dingil ile tekerleğin demiryoluna değdiği A noktası arasında bir noktada geriye doğru iter. A noktası geçici bir dönme noktası olabileceğinden, pistonkolu bu noktayı geriye ittiğinde, tekerlek saat yönünün tersine dönmelidir. "Böylece", der dede, "tekerlek tersine dönmeli ve lokomotif de geri geri gitmelidir." Öyleyse piston kolu geriye hareket ettiğinde, tren neden ileriye doğru gider?

İPUCU:
Çözümlememizin her sözcüğü doğrudur. Ama lokomotif yine de ileriye doğru hareket eder.

Top Oyunu

5) İki tane içi boş küremiz var. İkisinin de kütleleri ve dış çapları tamamen aynı. Birisi alüminyumdan, diğeri bakırdan yapılmış. Her ikisi de özdeş olarak boyanmış olduklarından, dışarıdan ayırdedilemezler. Boyayı kazımadan ve laboratuvar gereçleri kullanmadan hangi kürenin, hangi maddeden yapılmış olduğunu bulunuz.

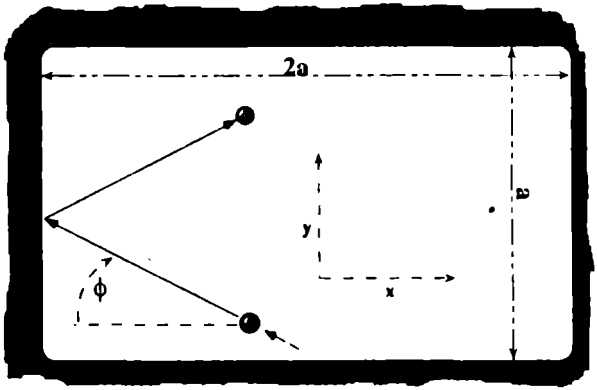
İPUCU:
Top oynayanlar, topu atıp tutarlar, oysa gösteri kızları pongponlarını fır fır döndürler. Hangisi mekaniği daha iyi öğrenir dersiniz?

Bilardo Oyunu

(Ergodik Teoremine bir Tekrar)

6) Bir top, kenar uzunlukları a ve b=2a olan bir bilardo masasının uzun kenarının orta noktasından fırlatılır. Topun atıldığı noktaya geri gelmesini sağlayacak fırlatılma açısını (ϕ açısı, uzun kenarla yaptığı açı) bulun.

Kenarlara çarpmanın esnek (elastik) olduğunu (enerji kaybı olmadığını) ve masanın cebi olmadığını varsayın.



İPUCU:
Esnek çarpışmalarda, hız vektörünün kenara paralel bileşeni değişmez.

Kış Eğlencesi

7) Vanya karlı bir havada kızağını alıp dışarı çıkar. Tepeye tırmanır, kızağına oturarak aşağı kayar. Daha uzun süre kayabilmek için daha yüksek tepeleri denemeye karar verir. Ancak, 4 kat daha uzun süre kayabilme umuduyla, ilkinin 4 katı yüksekliğinde yeni bir tepeye tırmanır. Yeni tepe ilkiyle geometrik olarak benzerdir. Aşağı kayması ne kadar uzun sürer? Havanın direncini yok sayabilirsiniz. Kızakla, kar arasındaki sürtünme kuvveti hıza bağlı değildir.

İPUCU:
Bir fiziksel bağıntı ya da denklem, kullanılan birim sistemlerinden bağımsız olmalıdır. Bu ifade Doğanın Sıfırıncı Yasası diye de bilinir. Vanya'nın problemlerini fiziksel değişkenlerini bu yasanın ışığı altında inceleyin.

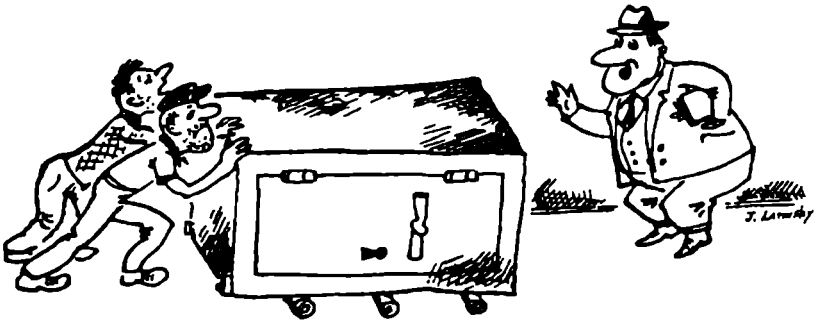
Ok ve Yay

8) Herhangi bir yay için her zaman uygun bir ok uzunluğu vardır, öyle ki, ok fırlatılabilsin ve maksimum uzaklığa gidebilsin. Bunun nasıl olabileceğini açıklayın.

İPUCU:
Sürekli fonksiyonlara uygulanabilen ünlü bir teorem vardır: Eğer negatif olmayan bir fonksiyon, verilii aralıkta sürekliyse ve aralığın uç noktalarındaki değeri sıfıra eşitse, aralığın içinde en az bir maksimum noktası olmalıdır.

Rusya'da İleri Teknoloji

9) İvanov, amirinin çok büyük ve çok ağır olan kasasını bir ofisten diğerine taşıyor. Kasanın içinde kırılacak eşyalar bulunduğundan, çok dikkatli davranmak zorunda: Kasa taşınırken aşağı ve yukarı hareket ettirilmemeli. Bu problemin geleneksel çözümü, kasayı ağırmetal bir levhanın üzerine koyup, levhayı bulunabilen en yuvarlak tomruklar üzerinde yuvarlamaktır.



Ne yazık ki, şu sıralar yuvarlak tomruk sıkıntısı vardır ve İvanov bir belaya çatmıştır.

Amirin matematikçi olan sekreteri, tomrukların mutlaka yuvarlak olması gerekmediğini, dairesel olmayan arakesitlerle, tamamen yere paralel bir levhayla, kusursuzca taşınabileceğini söyler. Sekreter İvanov'la dalga mı geçiyor, yoksa gerçekten mümkün mü?

İPUCU:
Levhayla, 5 cm zemin arasındaki uzaklık sabit kalmalı. Ama, yatay konum ve hız için özel bir şey belirtilmemiş; yani bunlar eğer istersenız her an değişebilir.

Kutudaki Kukla
(Bir Normalleştirme Alıştırması)

10) Kuklanın kafasına bastırıp bıraktığınızda, altındaki yay nedeniyle fırlayacaktır. Kutuyu da kukla ile birlikte fırlatabilmek için kuklaya hangi kuvvetle bastırmak gerekir? Kuklanın ve kutunun kütleleri bilinmektedir. Yayın (bildiğiniz doğrusal yay) kütlesi ihmal edilebilir.

İPUCU:
Kuklayı ve kutuyu iki ayrı kütle olarak ele alalım, m kuklanın, M de kutunun kütlesi olsun. Kukla ve kutu, kutu altta, kukla üstte olmak üzere, düşey bir yayla birbirine bağlılar. Gerekli en az kuvvet kutuyu masanın üzerinde ihmal edilebilir bir yüksekliğe çıkaracaktır. Kuvvet minimum olduğundan, o anda kutunun ve kuklanın hızları sıfır olur. O an özel bir andır, çünkü o anda kutuya etkiyen kuvvetler toplamı ve sistemin toplam enerjisi çok basit formlarda olacaktır.

Bölüm 11

Geometri ve Sayılar

Minsk'in Tavukları Süper Bilgi Otoyolu'na Karşı (Ya da Tavuk Neden...Ye Geçti?) Yeni Rusya'dan Bir Fabl

1) Bir fiberoptik kablo şans eseri, Minsk yakınlarında yeni özel mülkiyet olmuş bir tavuk çiftliğinden geçerek bütün dünyanın çevresini dolanacaktır. Tavuklar kablonun üzerinden atlamayı ya da uçmayı reddederler, yalnızca altından geçebilirler. Tavukların yaşaması isteniyorsa, kablonun yerden 1 ayak yukarıya kaldırılması gerekir. Teknik ve bürokratik nedenlerle kablonun bu durumda her yerde 1 ayak yukarı kaldırılması gerekir. (Kablo kalın ve kırılgandır, bu yüzden çok az da olsa bükülüp kıvrılamaz). Yeni kazanılan kişilik haklarını kullanmak isteyen çiftçi kablo yükseltilmediği sürece topraklarından geçmesine izin vermez. Son zamanlarda Rusya'ya egemen olmaya başlayan Mafya'ya bağlı olan bürokrat çiftçinin fazladan eklenecek her ayak kablo başına 1 dolar ödemesi halinde kabloyu yükselteceğini söyler. Çiftçi ek destek malzemelerini hükümetin ödemesi koşuluyla bu öneriyi kabul eder. Tavuk çiftliğinin sahibi ne kadar ödeyecektir?

İPUCU:
Tavuklarla hesap yapın.

Matematikçilerin Aile Eğlencesi

2) Günlerden bir gün iki matematikçi İgor ve Pavel yolda karşılaşırlar. "Nasılsın? Çocukların nasıl?" diye sorar İgor. "Anımsadığım kadarıyla üç oğlun vardı değil mi? Ama yaşlarını unutmuşum." "Evet, üç oğlum var." diye yanıtlar Pavel. "Yaşlarının çarpımları 36 dır." Etrafına bakınıp, bir evi gösteren Pavel, "Yaşlarının toplamı da şu binanın pencerelerinin sayısına eşittir." der. İgor bir dakika düşünüp, "Pavel, çocuklarının yaşlarını bulamayacağım." diye karşılık verir. Ah! Özür dilerim" diyen Pavel ekler: "En büyük oğlumun saç renginin kırmızı olduğunu söylemeyi unuttum." İgor şimdi kardeşlerin yaşlarını bulabilir. Siz de bulabilir misiniz?

İPUCU:
Ne söylenildiğine ve kimin söylediğine çok dikkat edin.

Bazı Sayılar!

3) n, 2 ve 3'ten farklı bir asal sayı ise, (n^2-1) sayısının 24 ile bölünebilir olduğun ispatlayın.

İPUCU:
$n^2-1=(n-1)(n+1)$. Problemin diğer koşullarını unutmayın.

Bütün Problemlerimizin Kökü

4) n sonsuza yaklaşırken, aşağıdaki ifadenin limiti nedir?

$$x_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}$$

İPUCU:
Problemlerinizin derin köklerine inin.

Pisagor Teorimini Bölerek Ölçe

5) Pisagor teorimini bölmeli ölçmeyle kanıtlayın.

İPUCU:
Benzer üçgenlerin alanları, benzer kenarlarının karelerıyle orantılıdır.

Olya'nın Zihnini Genişletmek

6) Olya sinemadan dönmüş (Bölüm 2, problem 3), ödev yapıyor. Bir elipsin alanını bulması gerekmiş. Ders kitabı kayıp (sinemada unutmuş olabilir), formülü de anımsayamıyor. Dairenin alanının $S=\pi r^2$ olduğunu biliyor. Defterine bir daire çizerek, onu birçok küçük kareye bölmek için uğraşıyor. Onun kitabını saklamış olan Petia "zihnini genişletmelisin" diyerek kızdırır. O anda Olya problemi nasıl çözeceğini keşfeder. Bunu nasıl yapar?



İPUCU:
Bir daireyi bir yönde düzgün olarak uzatırsak bir elips elde edebiliriz.

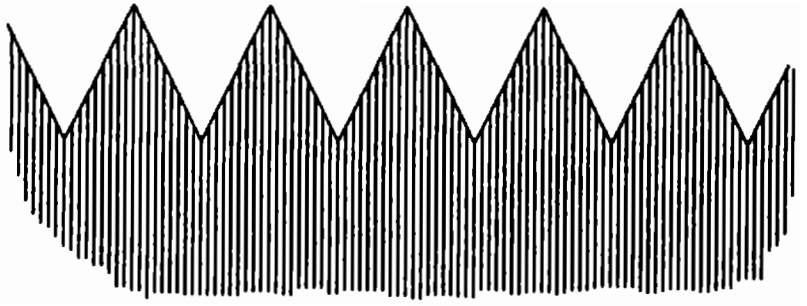
Von Neumann'ı Şaşırtamayan Problem

7) Bölüm 2'nin 10. problemi "çılgın köpek"i anımsayın. Genellikle "Von Neumann'ı Şaşırtmayan Problem" diye bilinen problemin bir versiyonudur. Köpeğin koştuğu süreyi bularak problemi çabucak çözmüştük. Arkadaşı Stanislaw Ulam bu soruyu sorduğunda, Von Neumann anında yanıtı bulmuştu. Ulam, "Ooo, demek şaşırtmacayı gördün?" deyince, Von Neumann karşılık verir, "Şaşırtmaca mı? Hangi şaşırtmaca? Yalnızca serileri topladım". Seri çözümü çoğunlukla karmaşık bulunur oysa hiç de değildir. Siz yapabilir misiniz?

İPUCU:
Köpek ilk turu tamamladığında ,yani Misha'dan Tisha'ya koşup, geri geldiğinde-durum başlangıçtakinin aynı olur. Ama bisikletler birbirine dahа yaklaşmış olduklarından, belli bir kalsayıyla yenіden değerendirilir. Problemі çözebilmek için yalnıza o katsayıyı bulmanız gerekіyor.

Yeni Valinin Çiti

8) Yeni Vali yazlık evi (dacha)nin etrafı şekildeki gibi çitlerle çevrilecek. İgor çizimleri marangoz Pavel'e vermek isterken, Vali'nin keçisi çizimleri yer. İgor çitin tepe noktalarını tarif eden bir denklem yazarak Pavel'e verir. Bunu yapabilir misiniz? (Yeni Valinin evi çok büyük olduğundan, çitin uzunluğunu sonsuz kabul edebilirsiniz).



İPUCU:
Birden çok yanıt var.

O Ayı Ne Renkti?
(Öklitçi Olmayan Geometri Üzerine Bir Ders)

9) Bir kampçı çadırından ayrılır ve 2 km. güneye yürür. Daha sonra Batıya doğru 5 km. yol alır. Sonunda kuzeye doğru 2 km gider. Çadırından ne kadar uzaklaşmıştır?

İPUCU:
Eşitliğin doğru yanıt olmadığı durumlar vardır. O ya da bu biçimde, bu problem için kalın giysilere ihtiyacınız olacak!

Kimlik Bunalımı

10) Yerkürenin Kuzey ve Güney olmak üzere iki manyetik kutbu olduğu herkes tarafından bilinir. Bu kutupların coğrafi kutuplardan fazla uzak olmadıkları da bilinir. Manyetik kutuplardan hangisi Coğrafi Kuzey kutbuna yakındır?

İPUCU:
Manyetik pusulanın Çin'den, Avrupa'ya gelişinden daha önce, kuzey kavramı ve kuzey yönü Avrupa'da kabul görürdü.

Bölüm 1'in Çözümleri



Isınma

1. Doğal Doğum: Üçüz! Üçüzlerin (veya dördüz, beşiz,...) iki elemanı. Size dikkat etmenizi söylemiştik. Eğer sizden ikizin ne olduğunu tanımlamanızı isteseydik daha kolay olurdu.

2. Dilsiz Papağan: Bu problemin birkaç çözümü var. İşte birkaçı:

a) Kuş sağırdır. En açık çözüm budur. Kuş duyduğu her sözcüğü tekrarlayacak ancak, hiçbir şey duymuyor.

b) Matematikçi, kuşun duyduklarını ne zaman tekrarlayacağını söylemiyor. Diğer yanıt: Kuş duyduklarını birkaç yıl içinde tekrarlayacaktır. (Matematikçinin sözü t ekseni boyunca geçerlidir).

c) Çok zeki olan kuş yeni sahibini, çok sıkıcı bir konuşmacı olduğundan benimseyememiştir. Zeki bir kişi konuştuğunda papağan sözcükleri tekrarlar mı?

d) Alıcı yalan söylüyor olabilir (Karısı kuşun ne kadara mal olduğunu öğrendiğinde, geri götürmesi için onu zorlamıştır).

Bunlardan bile daha saçma birçok çözüm vardır. Bu durum, kesin olmayan günlük kullanıma, keskin matematiksel dili uy-



guladığımızda ortaya çıkar. Günlük iletişimde matematiksel sertliğin kullanımı, çıldırtıcı biçimde uygunsuz olabilir. Günlük dilde, birçok şey sözsüz ima edilir. Bilginler bu aşırılıklar arasında yaşar ve bütün tanımların ve tariflerin kesinliğin kontrol etme gereği duyarlar.

3) Bir Sanat Sorusu: İsimlerin sütunları, saç renklerinin de satırları oluşturduğu bir matris ya da tablo çizip saç rengiyle ismin birbirini tutmaması için köşegenleri boş bırakmalısınız.
Beyaz'ın siyah saçlı kişiye yanıt verdiğini bildiğimizden, siyah saçlı olamayacağını biliyoruz. Öyleyse kırmızı saçlı olmalı. Böylece Siyah ve Kırmızı için siyah ve beyaz saç renkleri kalır. Siyah, beyaz saçlı; Kırmızıyı yani ressam siyah saçlı olmak zorundadır.

4) Yemek mi Uyku mu?: Aynı anda hem uyuyup, hem yiyemeyeceğinizden dolayı, son yemeğinizle son uykunuzdan beri geçen süre farklıdır. İki hafta önce yaptığınız son şeyi yapmalısınız; işkenceden önce uyuyup, sonra yemek yediyseniz, ilk önce yemelisiniz.

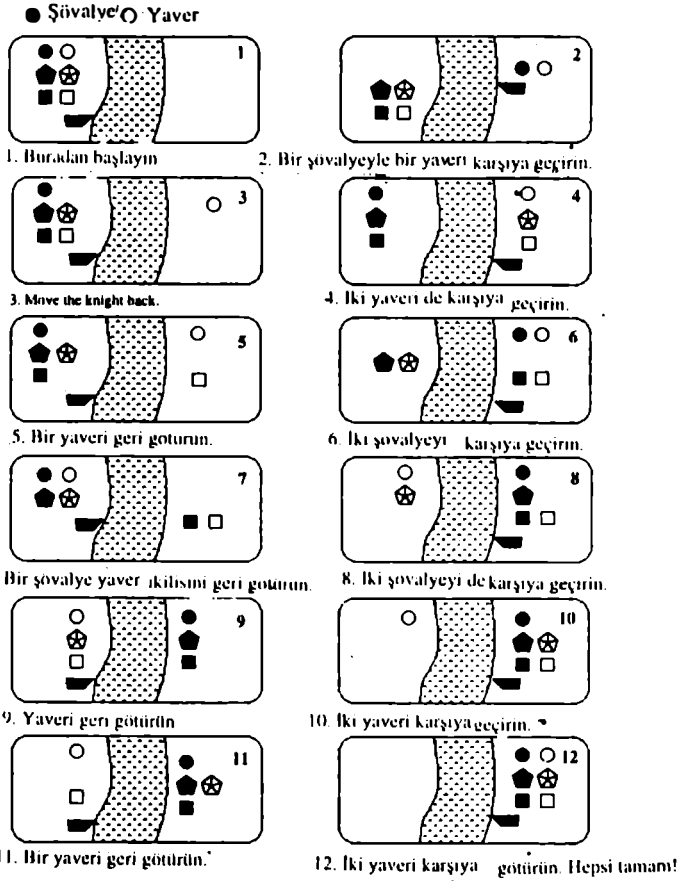
5) Şövalyeler ve Yaverleri: Aşağıdaki örnek çözüm tek değildir. Başka çözümler de vardır.

6) Daha Çok Şövalye ve Yaver: Yaverlerden biri feda edilmedikçe bu problem çözülemez (Ortaçağda bu bir problem sayılmazdı).

Yalnızca üç olası başlangıç hareketi vardır: Kayık iki şövalyeyi, bir şöyvalye bir yaveri ya da iki yaveri götürebilir. İlk olasılık şövalyeleri yanlarında bulunmayan, geride kalan iki yaver için tehlikelidir. İkincisi, geri dönenin şövalye olmasını zorunlu kılar. Böylece, arkasından iki yaver karşıya geçebilir ve biri geri döner. Geriye kalan iki yaver de karşıya geçer. Bu noktada bütün yaverler karşıya geçmiş, bütün şövalyeler diğer kıyıda kalmıştır. Bir önceki problemin dördüncü basamağına benzer bir durum oluşur. Eğer ilk hareket, iki yaverin karşıya geçmesi olursa, tek bir olasılık kalır: Bir yaver geriye döner, iki yaver karşıya geçer ve döngü bir kez daha tekrarlanır. Gerçekten de, ikinci

geçişten sonra, ikinci ve üçüncü olasılıklar özdeş konumlara yol açar. Daha sonra, dört yaverin bir kıyıda, dört şövalyenin diğer kıyıda olduğu durum kaçınılmaz olur.

Bu durum bize çözümün olanaksız olduğunu gösterir. Yaverlerden biri kayığı geri götürmek zorundadır. Şövalyeler karşıya geçemezler. Eğer iki şövalye karşıya geçerse diğer kıyıdaki üçüncü yaver tehlike içindedir; eğer şövalye-yaver ikilisi geçerse, karşı kıyıda bekleyen üç yaver de dehşete kapılır.



7) Yine Daha Çok Şövalye ve Yaver: Ada, kaç şövalye ve yaver olursa olsun, problemi çözer. İlk önce bütün yaverleri adaya götürürüz. Her yaver kendi şövalyesine eşlik ederek karşıya götürür ve adaya geri döner. Bütün şövalyeler karşıya geçene kadar bu yöntem devam eder. Son şövalye de karşıya geçtikten sonra, yaver kayıkta kalır ve adaya döner ve yaverler adadan karşı kıyıya geçer. Gördüğünüz gibi, bu problemin sosyal ve politik olarak kabul görmeyecek birçok çeşitlemesi vardır.

8) Büyükbabanın kahvaltısı: Her iki kum saatini de baş aşağı çevirerek başlamalısınız. Yalnızca birini çevirmek sizi başlangıçtaki durumunuza götürür! Şimdi iki basit çözüm var:

a) Her iki kum saatini de kurun ve küçüğü (7 dakika) boşalır boşalmaz yumurtayı kaynayan suya atın. Büyüğü boşalana kadar bekleyin (4 dakika daha), hemen sonra tekrar çevirin (11 dakika daha). Büyük saat tekrar boşalır boşalmaz yumurtayı sudan çıkarın. Yumurta tam 15 dakika (4+11) kaynamış olur. Ama bütün süreç 22 dakika sürer. Büyükbabanız hem sabırsız, hem de emekli bir matematikçi olduğundan optimal çözüme ihtiyacınız var, yani:

b) Her iki kum saatini kurar kurmaz yumurtayı suya bırakın. 7 dakika sonra küçük saat boşalır ve hemen tekrar ters çevirin. Büyük saatin 4 dakikası daha vardır. 4 dakika sonra büyüğü boşaldığında, küçüğünün üstteki haznesinde 3 dakikalık kum kalacaktır. Ama asıl önemlisi alttaki haznede 4 dakikalık kum olması! Kum saatini baş aşağı çevirirseniz, yukarıdaki hazne boşaldığında büyükbabanızın kahvaltısı hazırdır. Bu çözüm tam 15 dakika sürer ve bundan daha iyisi olamaz.

9) Mahkum ve Gardiyanlar: Sorunuz yalnızca gardiyanlarla ya da yalnızca kapılarla ilgili olursa başarısız olursunuz. Örneğin, "*Soldaki kapı ölüm kapısı mı?*" sorusu yarasızdır. "*Evet*" ya da "*Hayır*" yanıtı

alırsınız ama bu yanıtın doğru olup olmadığını bilemezsiniz. Eğer *Öteki gardiyan doğru mu söyler?*' diye sorarsanız, yanıt her zaman "*Hayır*" olacaktır! Bunun yerine "*Öteki gardiyan soldaki kapının ölüm kapısı olduğunu mu söylerdi?*' diye sorarsanız her zaman yanlış yanıtı alırsınız. Çünkü sorunuz her zaman yalancıyı içerecektir. Yani, size önerilenin tam tersi kapıyı kullanabilirsiniz.

Başka bir yol da, her gardiyanın bir kapının önünde durduğu olgusunu kullanmaktır. Örneğin "Doğrucu gardiyan, idam sehpasının kapısında mı duruyor?" diye sorarsanız, "evet" yanıtı aldığınızda diğer kapıya gidersiniz. Aslında, yalnızca iki koşul vardır: Doğrucu gardiyan ya yaşam ya da ölüm kapısında durmaktadır.

10) İvanov ve Saat: Tam öğle öncesi. Saatin üç kez üstüste tek vuruş yapacağı tek bir zaman aralığı vardır: 12:30, 1:00 ve 1:30. İvanov'un sorunu bu periyodu içermektedir. Dördüncü kez tek vuruşu nasıl değerlendirirsiniz? İvanov saat 12'deki son vuruşunu yaparken kapıyı açmış olmalı. Mobilyalar ve ses geçirmez kapı dolayısıyla ilk 11 vuruşu duymamıştır. Dördüncü olay, öğledensonra saat 2:00'de olabilir mi? Hayır, çünkü İvanov kapıyı açık bıraktığından iki vuruşu da duyardı.

Bölüm 2'nin Çözümleri



Daha Çok Isınma

1) Boris ve Marina'yla Alışveriş: 25 kopek. Boris'in 2 ya da daha çok kopekli olsaydı, Marina'yla birlikte yeterli paraları olurdu. Çünkü, anımsayın Marina'nın yalnızca 2 kopek eksiği vardı. Yani Borisin'in 1 ya da 0 kopeki var. Eğer 1 kopekse, dondurmanın ederi 25'tir, çünkü Boris'in 24 kopek eksiği vardı. Bu yanıta itiraz edebilirsiniz. Çünkü Boris'in hiç parası yoksa dondurma 24 kopek olabilir ve Marina'nın da 22 kopeki vardır. Ama biz Boris'in Marina'yı kandırmadığını ve cebinde bir şeyler olduğunu varsayıyoruz.

2) Boris ve Marina'yla Alışveriş II Evet, kuşkularınızda çokhaklısınız. Boris'in hiç mi hiç parası yok. Kardeşinin iki çikolata alabilecek parası var. Boris'in kişiliği hakkındaki bilginin ışığı altında bir önceki problemi yeniden değerlendirmek isteyebilirsiniz.

3) Sinemada: 1260 gün sonra. Hepsinin karşılaşacağı günün 4, 5, 7 ve 9'la bölünebilir olması zorunludur. Ama bu sayıların hiçbir ortak böleni olmadığından, bu koşulu sağlayan en küçük sayı hepsinin çarpımı: 4x5x7x9= 1260 sayısıdır. Rusya'da lise 3 yıl olduğundan, hiçbir zaman dördü birden karşılaşamazlar.

4) İçki Problemi: Şekle bakın



Herbir kaptaki votka miktarı:

a) (12, 0, 0) başlangıç: 12 litre kovada, diğerleri boş.
b) (4, 8, 0) 12 litrelik kovadan 8 litrelik şişeyi doldurun.
c) (4, 3, 5) 5 litrelik şişeyi, 8 litrelik şişeden doldurun.
d) (9, 3, 0) 5 litrelik şişeyi, 12 litrelik kovaya boşaltın.
e) (9, 0, 3) 8 litrelik şişedeki 3 litre votkayı 5 litrelik şişeye boşaltın.
f) (1, 8, 3) 8 litrelik şişeyi 12 litrelik kovadan doldurun.
g) (1, 6, 5) 5 litrelik şişeyi 8 litrelik şişeden alarak tamamen doldurun.

Şimdi, 8 litrelik şişede 6 litre votka bulunuyor. 5 litrelik şişeyi 12 litrelik kovaya boşaltırsanız (6, 6, 0) şeklinde yani 6 litre Vassily için, 6 litre Pyotr için votkanız olacak.

5) Tırtıl: 6,5 gün sürer. İlk gün güneşin doğmasıyla tırtıl yerden başlayarak ilk gün güneş battığında 12 ayak yüksekliğe ulaşmış olacak.

Takip eden her gün batışında, 18, 24, 30, 36, 42 ve 48 ayak yükseklikte olacak.

6) Yüz Yıkama: Sıvı azotun kaynama noktası (1 atmosfer hava basındınca) teninizin ısısından 230°C daha azdır. Derinin "aşırı" sıcaklığı sıvıyı hızla kaynatır ve deriyle soğuk sıvı arasında bir gaz tabakası oluşur. Gaz tabakası deriyi soğuk sıvıdan yalıtır. Kızgın tavaya su damlatırsanız bu ifadeyle çelişen bir tavır görürsünüz: Tava ne kadar sıcaksa, su damlası o kadar uzun süre kalır. Tabii ki ortada bir çelişki yok! Yüksek ısı daha iyi bir gaz tabakası oluşturur ve ısının damlaya iletilmesini yavaşlatır. Bu gaz tabakası, kaynatıcıların ve suyla soğutmalı içten yanmalı motorların tasarımında ciddi problemler oluşturur. Gaz tabakası, soğutma için su kullanılan yerlerde oluşursa, soğutulması istenen metal çok fazla ısınabilir yanabilir hattâ eriyebilir. O zaman elindeki tek serinleme biçimi olduğundan yazarlarımızdan biri (Y. C.) sıcak yaz günlerinde yüzünü sıvı azotla yıkama alışkanlığındaydı. Bununla beraber, bazı riskleri vardır. Örneğin, kılların gaz tabakasını delme olasılığı olduğundan kaşları sakınmak gerekir. Yoksa, yüzde soğuktan ciddi hasarlar olabilir.

7) Kızılcık Alırken: Korunan nicelik kuru kütledir. Taze kızılcık için kuru kütle tüm ağırlığın % 1'i, yani 10 kg.'dır. Birkaç gün sonra kızılcıklar % 98 su içerdiği saptandığında 10 kg. toplam kütlenin % 2'sini oluşturur. Öyleyse toplam kütle şimdi 500 kg.'dır. Birkaç gün içinde suyun % 50'sinden fazlası buharlaşmış demektir. Siz patron olsaydınız bu hikayeye inanır mıydınız?

8) Video Kaseti: Bandın uzunluğu, kasetin çapı R iken, sarılmış kasetin bir yüzünün yüzey alanının, bandın kalınlığına bölünmesiyle bulunabilir:

$$L = \pi (R^2 - r^2)/\delta$$

Burada r milin çapı ve δ da bandın kalınlığıdır. R, r'dan çok büyük olduğundan bağıntı

$$L \approx \pi R^2/\delta \text{ haline gelir.}$$

Bant sabit açısal hızla dönüyorsa (ör. 120 tur/dak.) dış yarıçap sabit bir oranla büyüyecektir ve bu yüzden de sarılan bandın uzunluğu zamanın karesi kadar artacaktır. Bütün uzunluğun ilk çeyreği, bütün sürenin yarısını alacaktır. Son çeyrek için yanıtın oldukça farklı olduğunu unutmayın! Ayrıca kaset oynatılırken durumun farklı olduğunu da bir kenara yazın. Şimdi bandın hız vektörü sabittir ve hem kasetin (ivmeyle artan), hem de milin (ivmeyle azalan) açısal hızları zaman içinde değişecektir.

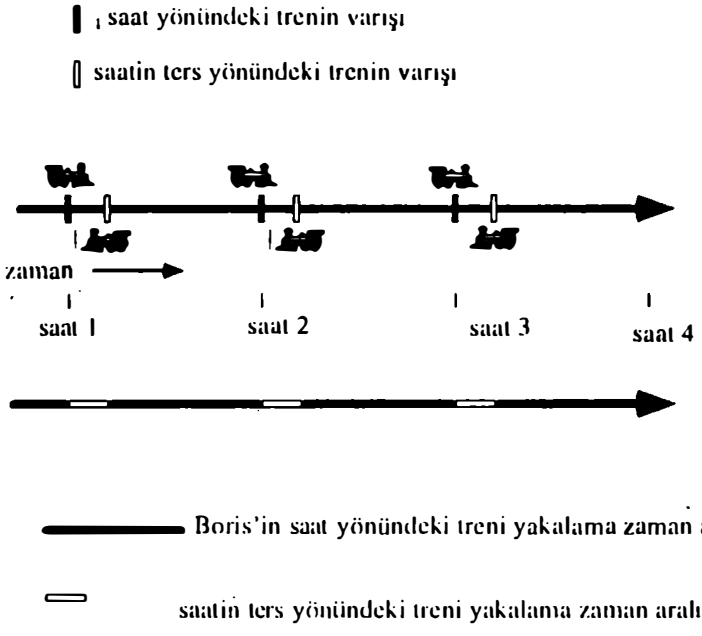
9) Moskova Metrosunda Maceralar: Saat yönündeki trenlerin tam saat başlarında ve ters yöndeki trenlerin 12 dakika sonra istasyona vardığını varsayalım. Eğer Boris istasyona saat başıyla 12 dakika geçe arasında gelirse, gelen ilk tren saatin ters yönünde olur. Ama eğer saati 12 geçeden daha sonra gelirse, ilk gelen tren saat yönünde olacaktır. Zamanın % 20'sinde (her saatte 12 dakika) saatin ters yönündeki trenleri, % 80'inde saat yönündeki trenleri yakalar. Boris istasyona rastgele zamanlarda geliyorsa % 80'inde saat yönündeki trene biner. Kısaca söylemek gerekirse, Boris 4:1 oranında da saat yönündeki trenleri yakalar. Trenlerin düzenli bir tarifesi olduğu sürece bu etki görülecektir. Zaman ekseni "saat yönü" ve "saatin ters yönü" olmak üzere aralıklarla bölünür. Bu aralıkların uzunluğu faz kaymasına bağlıdır. Faz kayması sıfır olmadığı ya da trenlerin tarife aralığının yarısı olmadığı sürece, zaman aralıkları eşit olmayacaktır. Öyleyse, iki yöndeki trenleri yakalama olasılığı arasında genellikle bir fark olacaktır.

Bu sonuç sizin sezgilerinize ters mi düştü? Öyleyse sezgileriniz yanlış. Rastlantısal ve düzenli olaylar birbirine karıştırılmamalı.

Boris için, trenlerin varışı rastlantısaldır, çünkü kendisi rastgele za-

manlarda gelir. Boris'in bakış açısından hem saat yönündeki, hem de ters yöndeki trenlerin varışları rastlantısal olaylardır. O noktada, Boris, bu olayların birbiriyleriyle ilişkisi olmayan rastlantısal olaylar olduğu sonucuna varıyor. En büyük yanlış da budur. Kendi varışı, çok fazla düzenli olan tren varışları karşısında rastlantısaldır. Bu olguları algılamak durumu açıklığa kavuşturur.

Boston tren tarifesine alıştığımızdan 1 saatlik zaman dilimlerini kullandık. Moskova'da iş saatlerinde bu aralık 1 dakikadan azdır.



10) Çılgın Köpek: Bisikletlerin gittikçe yaklaşmaları köpeğin tekrarlayan rotası için tabii ki problem oluşturur. Köpeğin rotasını ayrıntılarıyla veren sonuç bir sonsuz seridir.

Ama,bir başlangıç durumuna, bir de son duruma bakın. Bisikletlerin çarpışması ne kadar sürer?

Gerekli zaman $t = L/v_1+v_2$

Köpek sabit u hızıyla koştuğuna göre, köpeğin gittiği yol

$$d = ut = uL/v_1+v_2 \text{ olur.}$$

Hızı ve hız vektörünü göz önünde bulundurursak, iki önemli şeyi farkederiz. Köpeğin hızı yere göredir. Örneğin, bu problemi, böcek ya da atılan bir topla, bisikletlere göre bir hızla hareket eden bir şeyle, denemiş olsaydık, üçüncü nesnenin aldığı yolu hesaplamak için bisikletin hızını göz önünde bulundurmanız gerekirdi. Yere göre hız vektörünü elde edebilmek için, bisikletin hız vektörünü, nesnenin hız vektörüne eklemek zorunda kalırdık. Ayrıca farketmişsinizdir ki, hız vektörü yerine hız ifadesini kullandık. Köpeğin *hızı* sabittir ama hız vektörü her bisiklete ulaşıp, yönünü değiştirdiğinde değişir. Hız vektörü, hem hızı, hem yönü belirten bir vektörel niceliktir. Her zaman hız ve hız vektörü arasındaki ayrımdan haberdar olun!

Bu problemin çok ilginç bir tarihsel ve bilimsel kökeni vardır. Bir ileri, bir geri çılgınca yarışan köpek, bir foton (birbirine yaklaşan iki parçacık tarafından değiş tokuş edilen) ya da etkileşim alanıyla bağlantılı başka bir parçacık olabilir. Tarihsel kökeni, 50 yıl kadar önce iki ünlü matematikçi Stanislaw Ulam ve John Von Neumann arasındaki tartışmaya kadar uzanır. Bir köpek yerine, bir sinekle düşünüldüğünde "John Von Neumann'ı Şaşırtan Problem" diye adlandırılmıştır (*Mathematics Teacher*, Kasım 1991'e bakınız). Gelecek bölümlerden birinde ("Geometri ve Sayılar") size kanıtlayacağımız gibi, bizce Von Neumann'ı şaşırtamamıştır.

Bölüm 3'ün Çözümleri



Nikolai'ın Sefil İş Gezisi

1) Çay Soğutma: Herhangi bir ısı aktarım mekanizmasında, iki cisim arasındaki ısı farkı ne kadar fazlaysa, ısı alışverişi de o kadar fazla olur. Bu olayda, "ikinci cisim" çayın etrafındaki havadır ve çay ne kadar sıcaksa, çaydaki ısı kaybı o kadar çok olacaktır. Çaya şeker atmak endotermik tepkimeye göre (ipucuna bakın) hemen sıcaklığı düşürecektir. Bu yüzden ısı kaybını kesecektir. Dolayısıyla şeker koymadan soğutma yöntemi daha hızlıdır.

2) Lüks Konaklama Tesisleri: Üçüncü halkayı çıkarın. Böylece (1, 2 ve 4 halka olmak üzere) üç parça zinciriniz olacak. İlk gece için 1 halka ödeyin. İkinci gün 2 halkayı verip, 1 halkayı para üstü olarak geri alırsınız. Üçüncü gece tek halkayı verirsiniz. Dördüncü gün 4 halkalı zinciri verip, 1 halkayla 2 halkalıyı geri alırsınız. Geri kalan üç günü ilk üç gün gibi halledersiniz.

3) Vishny-Volochok'ta En Kötü Durum: 45 deneme. Burada yalnızca bir şaşırtmaca vardır: Eğer n anahtarınız varsa ve bunlardan birinin kapıyı açacağından eminseniz, en kötü durumda n-1 anahtarı denemeniz gerekir. n-1 tane anahtar kapıyı açmadıysa, sona kalan anahtar doğru anahtardır. İlk anahtar için 9'dan fazla deneme gerekli değildir. İlk 9 anahtarla başarısız olursanız, bilirsiniz ki, elinizde kalan son anahtar kapıyı açacak olan anahtardır. Yani en kötü durum 9+8+7+ 6+5+4+3+2+1+0= 45'tir.

4) Vishny-Volochok'ta Bir Başka Sefil Gece: Her iki ısıtıcıyı aynı fincanda kullanmak daha çabuk ısıtmanızı sağlar. Yalnızca suyu ısıtmak için harcanan enerjiyi değil, ısı kaybına harcanan enerjiyi de anımsayın. Suyu oda sıcaklığından kaynama noktasına getirmek için gerekli ısı miktarı aynıdır. Yalnızca suyu ısıtırken gerçekleşen ısı kaybı farklı olacaktır. Isı kaybı için genel matematiksel biçimi ne olursa olsun, ısı kaybı oranı (birim zamandaki ısı kaybı) hemen hemen tamamiyle oda sıcaklığı ile fincanın sıcaklığı arasındaki farka bağlıdır. Bu yüzden, eğer fincan herhangi bir sıcaklık aralığında daha fazla zaman harcarsa, ısı kaybı da daha fazla olur. Fincanı ne kadar çabuk ısıtırsak, o kadar az ısı kaybı olacaktır. Fincan iki ısıtıcıyla birlikte ısıtıldığındaki enerji kaybı, bir ısıtıcı ile ısıtıldığından daha az olur. İki ısıtıcıyla ardışık ısıtma için gerekli toplam enerji daha az olacağından, daha az zaman harcanacaktır.

5) Nikolai Evine Hoşgeldin: Nikolai masumdur, en azından bu konuda. Her iki durumda da Vaska'nın pençeleri Nikolai'ın valizinde düz çizikler oluşturur. Her iki durumda da yalnızca Vaska'nın hız vektörünün yatay bileşeni bizi ilgilendirir. Valizin üstüne düşmeden önce havanın sürtünmesi yok sayılırsa (kedinin hız vektörü için doğrudur) yatay bileşeni sabittir ve sabit bagaj hız vektörüne diktir. Kedi fırladıktan sonraki tek ivme yerçekimi ivmesidir ve bu da yatay düzlem üzerinde değildir. Şimdi valizi referans noktası olarak seçin. Bu bir Galile sistemidir ve kedinin hız vektörü düzgün olup bagaja göre sabittir. Sonra kedi Nikolai'ın valizinin düz ve yatay yüzeyine ayak basar. Sürtünme yok sayılabilecek kadar azsa, kedi valizin üzerinde sabit bir açıyla düz tırmıklar oluşturmaya devam eder. Eğer sürtünme göz ardı edilemeyecek kadarsa, ilk tepkimiz "kedi sürtünme nedeniyle bir ivmeyle yavaşlıyorsa, açı değişmelidir" olacaktır. Çünkü düştükten sonra onun hız vektörü değişecek ve çizikler Nina'nın düşündüğü gibi eğri olacaktır. Ama böyle düşünürseniz, referans noktanızı terketmiş olursunuz. Sürtünme kuvveti, kedinin bagaja göre hız vektörünün tam tersi yönündedir. Dolayısıyla hız vektörünün yönü değil, yalnızca bü-

yüklüğü değişecektir. Bu yüzden, her iki durumda da çizikler taşıyıcı bandın hareketiyle sabit bir açı yapan düz çizgilerdir. Havanın sürtünme kuvveti yok sayılabilir (ipucunu anımsadınız mı?), çünkü bu sürtünme Vaska'nın havaya göre hızına bağlıdır, valize değil ve bu sürtünme kuvveti izlerin biçimini değiştirebilir (Kediler, özellikle Rus kedileri, aerodinamik yasalarına pek önem vermezler). Nikolai bunu Nina'ya açıklayınca hemen bağışlandı.

Daha sayısal bir yanıtı tercih ederseniz, kedinin hız vektörü u'nun, taşıyıcı bandın hareketine yaptığı açı α

$$\tan \alpha = u/v$$ şeklinde verilebilir.

Çizikler düzdür ve taşıyıcıdaki bagajın hareketinin yönüyle a açısı yaparlar.

Bu problem referans noktası ve göreli hız üzerine düşündürmeyi amaçlamıştır. Daha çok öğrenmek için bir sonraki bölüme geçin.

Bölüm 4'ün Çözümleri



Referans Sistemleri

1) Hava Muharebelerinde Bir Ders: Bir top mermisi "fırlatıcı"sına göre çok büyük bir başlangıç hız vektörüne sahiptir. Oysa bir kurşunun uçağa göre hiç başlangıç hız. yoktur. Roket motorunu ateşlemeden hemen önce (ya da aynı anda) uçaktan ayrılır. Bu anda kurşunun yere (ve onu saran atmosfere) göre başlangıç hız vektörü uçağınkiyle aynıdır. Ancak, uçak ileriye doğru hareket eder-yani doğru yöne hedeflenmiştir, geriye doğru hedeflenmiş kurşunsa gerçekte havada geriye doğru gider ve hareketin alışılmış yönünün ters yönünde hava akımını hisseder. Roketin kuyruğundaki kanatçıklar yalnızca ileriye doğru hareket etmesini sağlamak için tasarlanmıştır. Kanatçıklar kurşunu ileriye doğru çevirir. Badminton(*) oynamış herkes bunun olduğunu görmüştür: topun eteği, topu roketle vurulduktan sonra onu döndürür. Kısaca, kanatçıklar nedeniyle, kurşunun geriye doğru her hareketi geçicidir ve hava akımında daima ileriye doğru döner Muharebe hızında bu çabucak olur ve roket motoru ateşlenince kurşun ivmelenir ve kendisini fırlatan uçağı vurur.

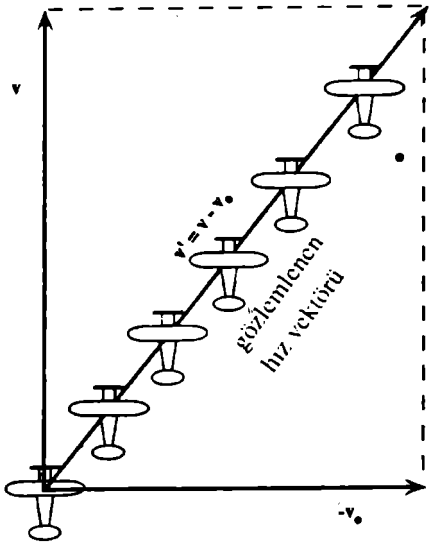
2) İhtiyar Delikanlı Mazay Votkası İçin Kürek Çekiyor: İhtiyar Delikanlı Mazay'ın votka şişesine ulaşmak için 30 dakikaya ihtiyacı vardır -tabii ki hiç kimse kıyıdan görüp, yüzerek votkayı almadıysa- Rusya'da

(*) Koni biçiminde, sivri ucunda küçük bir küre olan top ve raketle oynanan bir oyun.

olabilecek bir olay. Bu yanıt kürek çekme hızına ve akıntıya bağlı değildir, yalnızca onların değişmiyor olmasına bağlıdır. Eğer akan suyu referans sistemi olarak alırsak, dönüş süresi, şişeyi düşürdüğünden beri geçen zamana özdeş olmalıdır. Şişenin durgun suda düştüğünü varsayalım. Bu referans sisteminde, şişesine ulaşmak tam yarım saat sürerdi. Hareket eden suda da aynı şey olur. Şişe, hâlâ ırmak referans sisteminin içindeyken, toprağa göre saatte 2 mil hızla hareket eder. Böylece, şişe yarım saat sonra bulunduğunda, suya düşürülmesinin üstünden 1 saat geçmiş olacak köprüden ise 2 mil uzağa gitmiş olacaktır.

Bu problemi, toprağı referans sistemi içinde sabit nokta seçerek çözmenin yararlarını görebiliyorsunuz. Kafa karıştırıcı veriler problemin karmaşık hale gelmesini sağlıyor.

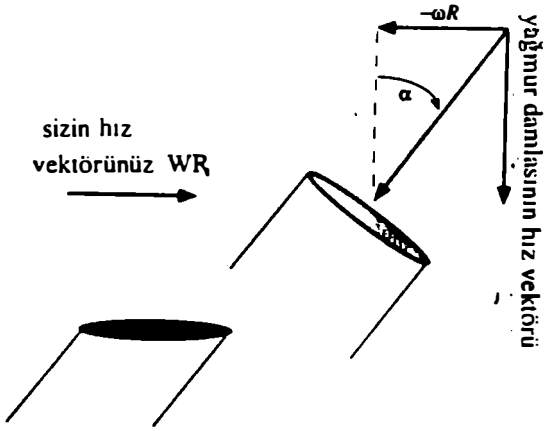
3) Emniyet Kemerinizi Bağlayın: Galile dönüşümünü kullanarak bu durumu açıklayalım. Benim içinde olduğum uçak havaya ve yere göre (hiç rüzgar olmadığını anımsayın! v_o hız vektörüyle diğer uçak ise v hız vektörüyle hareket etmekteydi. Gözlemci ben olduğumdan, referans noktası benim uçağım olarak sabitlenmeli. Bu referans noktasına göre, küçük uçağa yeni bir referans hız vektörü V' gerekir. Üç hız vektörü Galile dönüşümüyle bağıntılanabilir: $v=v_o+v'$. Küçük uçağın gözlemlenen hız vektörü v', $v'=v-v_o$ bağıntısıyla verilebilir. v küçük uçağın gövdesine paralel olduğundan gözlemlenen hız vektörünün farklı bir yönü vardır. Küçük uçak, havada olması gerektiği gibi gövdesine paralel hareket etmektedir, yanlara yalpalayarak değil. Ancak, benim referans noktamın hız vektörü, her iki uçak yere göre tamamen aynı yönde hareket etmedikleri sürece küçük uçağın gövdesine paralel olmayacaktır. Küçük bir açı bile olsa, v'nün yan bileşenleri olacak ve uçak yanlara doğru yalpalıyor gibi görünecektir.



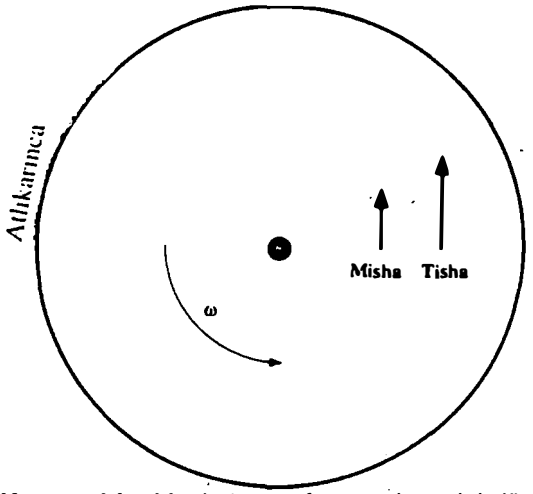
4) Patlamalar: Şekil, topların referans noktasına bağlı olmayan göreli hareketleriyle belirlenir. Torba patlar patlamaz topların konumlarının tanımlandığı geometrik biçim, düzgün büyüyen $v_o t$ yarıçaplı kürenin yüzeyidir, burada v_o topların başlangıç hızını gösterir. Yerçekimi olan olduğunda, büyüyen küre kalacak, ama kürenin merkezi g ivmesiyle düşecektir. Bu sonuca en dolaysız olarak eylemsiz olmayan referans sistemiyle -özellikle topların sabit *g* ivmesiyle düşmesi gereken ağırlık merkezi- varabilirsiniz. Ya da bu ivmeyi her bir topun hareketine ekleyerek bu sonuca ulaşabilirsiniz. Ne zaman ki yalnızca topların göreli hareketiyle uğraşırız, o zaman yer çekimi ivmesi terimi yok olur. Büyüyen küre herhangi bir *düzgün* kuvvet alanı etkisinde bozulmadan kalmalıdır. Havai fişekler bu etkiyi gözler önüne serer. Alevler başlangıçta büyük bir hızla uçarlar, hava direncinin etkisi belirgin olmadan önce de yok olurlar.

5) Atlıkarıncada Yağmurlu Bir gün: Kuru-silindirimizi mümkün olduğu kadar geniş tutmak istiyoruz. Bu da demektir ki: şemsiyenin sapı, yağmur damlalarının yere göre hızına değil, size göre hız vektörüne paralel olmalıdır. Siz yere (ve atlıkarıncanın merkezine) göre *wR* hız vektörüyle hareket ediyorsunuz. Yağmur damlalarının size göre hız vektörünü bulmak için, damlaların yere göre hız vektöründen sizin hız vektörünüzü (şekildeki gibi) her zamanki vektör yöntemiyle. çıkarırız. Yeni şemsiye, α eğilme açısıyla ileriye doğru eğik tutulmalıdır. α,

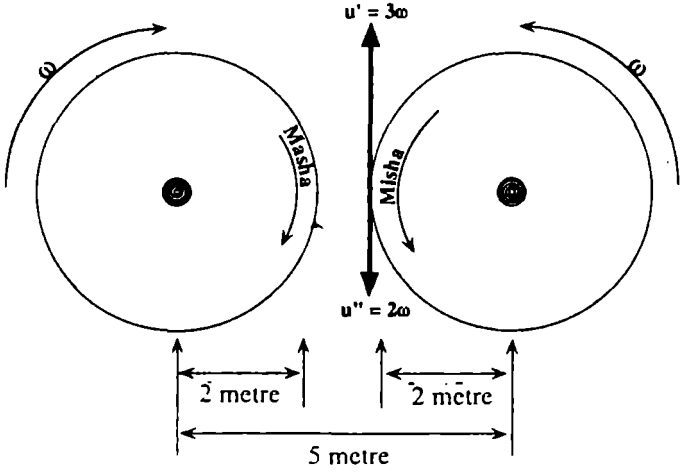
$\tan \alpha = wR/v$ bağıntısıyla verilir.



6) Misha ve Tisha Karnavalda: Atlıkarıncadalar (yanyana atlar üzerinde örneğin). Şekle bakın! Aynı aısal hıza sahipler. Tisha dışarıda olduğundan, diresel hareketin merkezine uzaklığı daha büyüktür. Bu yüzden doğrusal hız vektörü de daha büyüktür. Bu problemde verilen tuhaf koşullar bütün sabit dönme hareketi nesnelerde sağlanır. Birbirlerine göre hareketsiz oldukları halde, dışarıdan bir gözlemci için tamamen farklı hız vektörlerine sahiptirler. Yanyana olmasalardı, hız vektörleri paralel bile olmayacaktı.



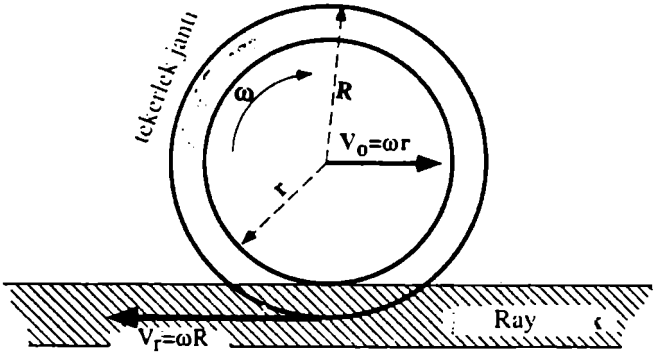
7) Tekrar Karnavalda: Masha'nın referans sistemini düşünün. Bütün dünya atlıkarıncanın merkezi etrafında **w** hız vektörüyle döner. Misha'nın hareketi (bu koordinat sisteminde) iki bileşen içermelidir: Masha'nın atlıkarıncasının merkezi O_1 etrafındaki hareketi ve Misha'nın kendi merkezi 0_2'ye göre hareketi. Şekilde gösterildiği gibi, birbirlerini geçtikleri zaman iki hız vektörü tam ters yönleri gösterecektir. Misha, Masha'nın atlı karıncasının merkezinde 3 metre uzaktadır, bu yüzden ilk bileşenin büyüklüğü 3ω olup u' diye adlandırılan vektör yönünde ola-



caktır. Bunun Masha'nın bakış açısından negatif hız vektörü olduğunu anımsayın. Şekilde, Masha ok yönüyle karşı karşıyadır. İkinci bileşen u'' Misha'nın kendi altı karıncasına göre hareketi yalnızca 2ω dır. Bu hız vektörü u''ne eklenir. Bu yüzden iki bileşen birbirini yoketmez, hatta negatif doğrusu hız vektörü −ω oluşur. Böylece göreli hız vektörünün öyle bir yönü vardır ki, Masha'nın bakış açısından Misha geri geri gider. Açıkça Masha onu yakalayıp geçiyor gibi görünüyor. Bununla beraber, durum simetriktir. Misha'nın referans sistemiyle başlasaydık, Misha'ya Masha'yı geçiyormuş gibi görünecektir.

Bir arkadaşınızla bu deneyi kanıtlamak isteyebilirsiniz: eylemsiz olmayan koordinatlar dünyası, özellikle dönen referans sistemleri gerçekten tuhaftır, ama kültürel rölativizm ve politik doğrulukla tutarlıdır. Bize birçok modern politikası dönen koordinat sistemlerinde yaşıyormuş gibi geliyor.

8) İhtiyar Delikanlı Mazay ve Tramvay: İhtiyar Delikanlı Mazay, tramvayın en alt bölümüne, tekerleğin alt kenarlarına bakıyor. Ray üzerinde tramvayın bir tekerleğinin çizimi olan şekle bakın. Tekerlek **w** açısal hızıyla döner ve **r** tekerleğin yarıçapı iken, tramvay doğrusal hız vektörü $V_o = \omega r$ ile raylara göre ileriye doğru hareket eder. Jantın en



aşağıdaki kenarının tramvaya göre hız vektörü $V_r=\omega R$'dır. *R* burada jantın yarıçapıdır ve hız vektörü negatiftir -yani ters yöndedir. Bu noktanın raylara göre hız vektörünü elde etmek isteseydik bu iki vektörü toplamak zorunda kalırdırk. Sonuçta hız vektörü $\omega(r-R)$ negatif bir nicelik olacaktır. Açıkçası, jantın en alt noktası gerçekten de geriye doğru hareket etmektedir.

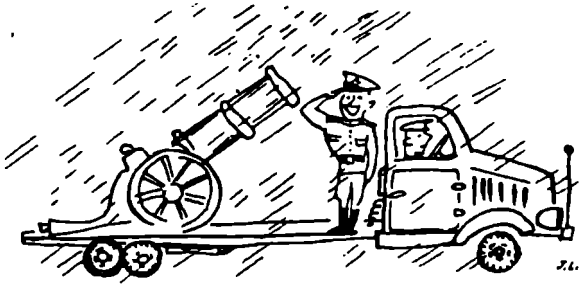
9) 1 Mayıs Tören Alayı: Bu atlıkarıncada kuru kalma problemine benzer bir problemdir. Şimdi topunuzu (şemsiye yerine) şekildeki gibi düşey eksenle α açısı yapacak gibi ileriye doğru eğin. Öyle ki;

$$\alpha = \arctan(v/u) \text{ olsun.}$$

Topun bakış açısından, dünya -v hız vektörüyle hareket eder. Bu problemi çözme yetimiz Galileo dönüşümlerinin önemli bir özelliğine bağlı görünüyor. Yağmur damlaları yere göre sabit bir hız vektörüyle düşmeliler. Hız vektörü gerçekten sabitse yağmur damlalarının hareketinin düzgün, doğrusal özelliği yere göre sabit hız vektörüyle hareket eden herhangi bir referans sisteminde de bulunacaktır. Yani, *yağmur damlalarının yörüngesi kamyonette oturan gözlemcinin (sizin!) bakış açısından düz çizgiler oluşturmalıdır.* Topun namlusunu, yağmur damlaları tamamen iç çepere değmeden geçecek şekilde bir açıyla ayarlamak mümkün olmalı. Namluyu, yürüyen topun referans sisteminde ekseni, yağmur damlalarının hız vektörü $\mathbf{u}'$ paralel olacak şekilde ayarlanmalıdır. **u** ve **v** yağmurun ve topun yere göre hız vektörleriyse, damlanın topa göre hız vektörü $\mathbf{u}'$, Galileo dönüşümüyle verilir:

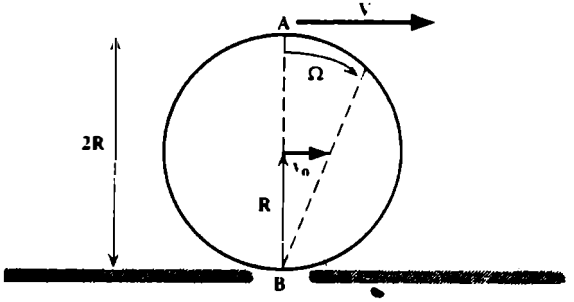
$$\mathbf{u}=\mathbf{v}+\mathbf{u}'$$

$$\mathbf{u}'=\mathbf{u}-\mathbf{v}.$$



Şekilden, topun ileriye doğru eğilmesi gerektiğini kolayca görebiliriz. α açısı da resimden bulunabilir α açısı **u** ve **v**'nin toplamıyla değil, farklarıyla belirlenir. Top hareket etmiyorsa, α **= 0,** yani namlu düşeydir, sezgisel bir çözüm. Topun mermi yuvasının her koşulda şimdiye kadar çoktan ıslanmış olacağı sonucuna varmışsınızdır muhtemelen. Bu da top için hiç iyi sayılmaz. Ama çavuşunuz mermi yuvasından söz etmemişti yalnızca namludan söz etmişti!

10) Davulların Yuvarlanışı: Soruda verilen şekil, davulun levhalar arasında ω açısal hızıyla döndüğünü gösteriyor. Biz bu hız vektörünü bulmak istiyoruz. Davulun eksenini referans noktası olarak seçebiliriz ama, alt levhayı seçmek daha öğretici ve şık olur. Şimdi bu şekle bakın.

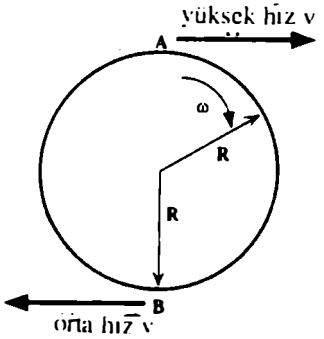


Görüldüğü gibi, silindirin bu referans sisteminde dönme hareketinin anlık merkezi alt levhayla temas ettiği noktadır (Bu şekilde B noktası). Davul bu merkez etrafında Ω açısal hızı ile dönerse davulun ekseninin hızı $\mathbf{v_o}$, $R\Omega$ olmalıdır. Üst levhaya temas noktası A'nın hız vektörü $2R\Omega$'dır. $\mathbf{v_o}$ hızı ile davulun kendi ekseni etrafındaki dairesel hızı **w** arasındaki ilişkiye de biliyoruz: $v_o=wR$. Bu yüzden, $\mathbf{w=\Omega}$. Özel durum $\mathbf{v_u=-v_l}$ **için,** A **noktasının** hız **vektörü** $2v_L$ ve $v_o=v_L$dir. Devir frekansı (saniyedeki tur sayısı) yalnızca $\mathbf{w/2\pi}$ dır ve $v_L/2\pi R$'ye eşittir. Genel durumda, bu referans sisteminde A noktasının hız vektörü v_u-v_L dir ve devir frekansı

$$f=\omega\ |2\pi=|v_u-v_L|/4\pi \text{ olacaktır.}$$

Davulun eksenini referans olarak kullanmak için ikinci şekle bakın. İlk durumda: $v_u=-v_L$ ve $|v_u|=|v_L|=v$ iken, levhaların hareketi simetriktir ve davulun ekseni hareketsiz kalır, kendi ekseni etrafında döner. A ve B temas noktalarının doğrusal hız vektörü $v=v_u=v_L$ davulun açısal hızı w ile bağıntılıdır: $v=\omega R$. Davulun bir turu 2π radyan dönüşe karşılık gelir. Bu yüzden devir frekansı (saniyedeki tur sayısı)f,

$$f = \omega/2\pi = v_U/2\pi R = v_L/2\pi R.$$



Genel durumda $|v_u|\neq|v_L|$, ilk duruma indirgenebilen bir referans sistemi seçeceğiz -alt ve üst levhaların ters yönlerdeki hız vektörlerinin büyüklüklerinin eşit olduğu bir referans sistemi. Galileo dönüşümüyle yeni hız vektörleri elde ederiz:

$$V_L = V_o + V'_L$$
$$V_u = V_o + V'_u$$

Ayrıca yeni sistemdelevhaların hız vektörlerinin , büyüklüklerinin eşit ve yönlerinin ters olması gerekir. Yani $V'_L=-V'_u$

$$V_0=\frac{V_u+V_L}{2} \text{ ve } V'_u=\frac{(V_u-V_L)}{2}$$

Devir sayısı sistemin yanal hareketinden bağımsızdır. Tekrar devir frekansını elde etmek için bu denklemleri kullanabiliriz

$$\omega=\frac{V_u'}{R}=\frac{|V_u+V_L|}{2R}$$

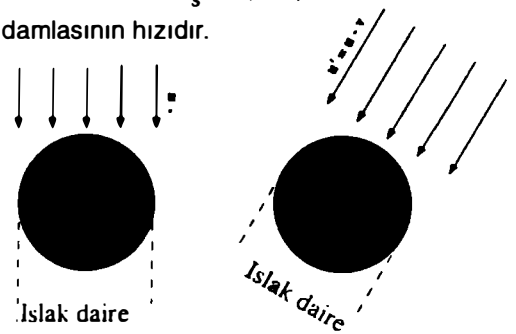
Böylece

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{|V_u-V_L|}{4\pi R}$$

11) Boris ve Islak Basket Topları: Boris haklı, Tisha da öyle. Önce hareketsiz topu düşünün. Eğer topu yukarıdan gözlemlersek düşen yağmurla çarpışacak hedef alan, ilk şekildeki "ıslak daire", topun yarıçapı R'a eşit yarıçaplı ve πR^2 alanlı çemberdir. Eğer N'i birim hacime düşen damla sayısı diye tanımlarsak, hareketsiz topa birim zamanda çarpan yağmur sayısı:

$$I_s=Nu(\ R^2)$$

u ise yağmur damlasının hızıdır.



Üstteki şekil

Şimdi v hızıyla kayan topu düşünün. Yağmur damlası yoğunluğu N değişmez, ama düşen yağmurun topa göre hız vektörü artık aynı değildir. Galile dönüşümü yaparak topa göre bir referans sistemi seçeriz. İkinci şekilde gösterildiği gibi, yağmur'un yeni hız vektörü $\vec{u}=\vec{u}-\vec{v}$ dir.Tekrar ilk şekle bakın: yağmur damlaları topa farklı bir açıyla çar-

pacaktır ancak topun simetrisinden dolayı hedef alan hâlâ aynıdır. Hareketsiz topla, kaydırılan top arasındaki tek fark, topa çarpan yağmur damlalarının göreli hızıdır. Pisagor teorimini kullanarak, ikinci şekilden hareket eden topa vuran yağmur damlalarının hızını

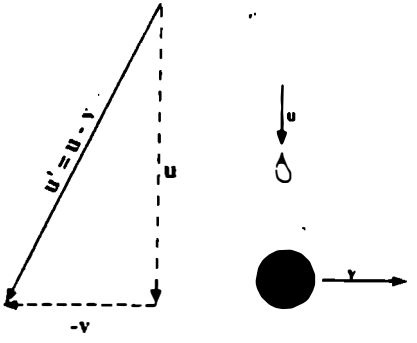
$$u = \sqrt{u^2+v^2}$$

bulabiliriz

I_s denkleminde u yerine u' kullandığımızda, I_s daha büyük olacak: birim zamanda daha çok yağmur damlası topa çarpar. Bu yüzden Boris, top ne kadar hızlı hareket ederse, o kadar hızlı ıslanır ifadesiyle haklıdır. Bir taraftan da, Tisha'nın ıslanma oranının göz önünde bulundurmayan ama sonuçta toplam olarak nasıl ıslanacaklarını söyleyen ifadesi de doğrudur. Örneğin, eğer Boris, kendi (ve topun) hızı v'yi iki katına çıkarırsa, eve varış süresini yarıya indirebilir ve bu

$$u = \sqrt{u^2+v^2}$$

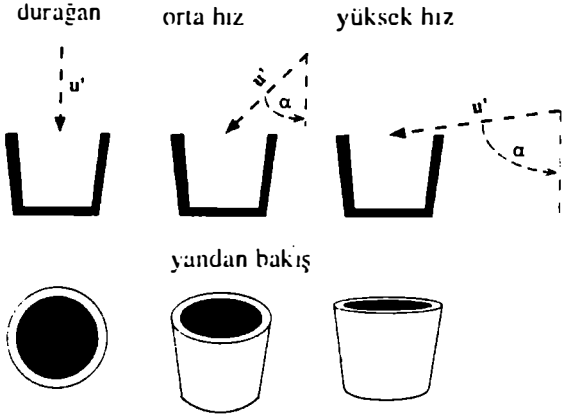
yağmur damlasının göreli hız vektörünü ya da hızı u' 'nü iki katına çıkarmayacağından I_s iki katına çıkmaz Bu yüzden Tisha da haklıdır: Boris hızını artırarak, eve vardığında o kadar ıslanmış olmayacaktır.



I_s denklemi çok önemli bir denklemdir. Örneğin, Boris bir beton külçe (ya da başka bir şey) taşıyor olsaydı, külçenin yatay ara kesitinin alanını hesaplayarak ve Nu' ile çarparak, külçeye çarpan yağmur damlalarının oranını hesaplayabilirdik. Bu tür bir niceliğe, ortalama yoğunluk (N) ve uygun göreli hızın (U') çarpımına *akı* denir. Akının boyutları birim alanda, birim zamandaki niceliktir (bu olayda yağmur damlası sayısıdır). Bu nicelik parçacık sayısı ya da parçacıkların taşıdığı herhangi bir şey –örneğin enerji, kütle ya da elektrik yükü– olabilir. Herhangi bir parçacık (foton da dahil) kullnılabilir. Örneğin, Eğer nicelik elektrik yüküyse, akı elektrik akımı yoğunluğu olacaktır. Akı fikri bilim ve mühendislik için çok önemlidir.

12) Tavuk Yemi: Boris koşsa da, yürüse de kova aynı oranda dolacaktır. Rüzgar olmadığından yağmur, dümdüz aşağıya doğru düşer. Eğer bir yatay alanı düşünürsek, yağmur düzgün ve sabit bir hız vektörüyle düşüyorsa, eşit alandan eşit zaman içinde, eşit hacimde yağmur geçer. Boris ne kadar hızlı hareket ederse etsin, kovanın ağzının alanı değişmeyecektir. Böylece, Boris çok hızlı hareket etmediği takdirde öyle ki: a) Lorentz büzülmesi meydana gelsin, ya da b) kova el arabasının arkasından uçsun, kova aynı oranda dolacaktır. Bununla beraber, Boris eğer daha hızlı giderse, yağmur kovanın doğrudan içine düşmektense, kovanın iç çeperini yıkayacaktır. Ama bu kova içinde toplanan yağmur suyunun miktarını değiştirmez. Diğer taraftan, bu koşma faydalıdır demektir. Boris aynı mesafeyi daha az zamanda katederse kovanın içinde kesinlikle daha az su olacaktır.

13) Akılar ve Korunum Yasaları: Hiçbir tutarsızlık yok. Son iki problemin çözümünü tekrar gözden geçirin. Top küresel olduğundan, "ıslak daire" topun hız vektörü v'ye bağımlı olmayan sabit bir alana sahiptir. Hız v arttıkça, göreli hız vektörü u değişir ve göreli hız u' artar. Böylece akı $I_s = Nu' (\pi R^2)$ artar. Şimdi, hareket eden kovayı referans noktası alarak, ama *kovanın dışındaki yağmur damlalarının bakış açısından* Boris'in kovasının "ıslak daire"sinin neye benzediğine bakalım.



yağmur damlasının gördüğü
arkadan. Boris ayakta dururken ve v hızıyla koşarken

11. problemin çözümündeki ikinci şekle bakın. Hız v arttıkça, göreli hız vektörü U''nun düşeyine olan α açısı artacak-yani yağmur daha yatay olarak düşecek. Kovanın ağzı daireye değil, şekilde görüldüğü gibi, daha çok elipse benzeyecek. Eğer yağmur tamamen yatay yönde düşerse, elips kapanarak doğru haline gelecek ve yağmur kovanın yanlarına çarpacak. Bu elips bizim "ıslak daire"mizdir. Elipsin alanı yalnızca π ab olduğundan, α açısı bilinirse, alan hesaplanabilir. Kova için, R kovanın ağzının yarıçapı iken, α=R ve b=Rcosα dır. 11. problemin çözümünden,

$\cos\alpha=\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}$ olduğunu görebiliriz.

Böylece "ıslak daire"nin alanı

$$\frac{\pi R^2 u}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

Kovaya toplam girenin oranını, bu alanı, akı Nu'nün büyüklüğüyle çarparak elde edebiliriz.

$$u = \sqrt{u^2 + v^2}$$

olduğundan yanıtımız

$$I_s = Nu\pi R^2$$

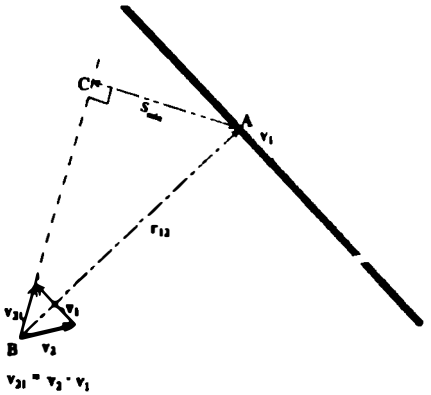
Yalnızca düşen yağmurun hızı u'ya bağlı olup, kovanın hızına veya hız vektörüne bağlı değildir. Kovanın hızı arttıkça, yağmurun göreli hız vektörü ve hızının artacağı açıktır, ancak akıdaki artış "ıslak daire"nin alanının azalmasıyla tamamen telafi olacaktır. Bu tür problemleri tasarlamanın doğru yolu, akının vektörel bir nicelik olarak tanımladığını yoğunluk ve hız vektörünün çarpımı anımsamaktır. Daha sonra yalnızca akının, kovanın ağzını ya da bizi ilgilendiren yüzeyi kesen normal bileşenini dikkate alın. Burada bunu yapsaydık problemin çözümü çok daha basit olurdu: Kovanın ağzı dairesel kalır ve akının normal bileşeni Nu' cosα olur. Madde, enerji ya da herhangi korunmuş niceliğin aktarımını hesaplamak için akının normal bileşeni temeldir.

Bölüm 5'in Çözümleri



Yolda

1) Kazak ve Keçi: ilk önce bir grafik çözümü. Hız vektörleri v_1 ve v_2 verili iken, problem hem Kazağın, hem de keçinin hareket halinde olmasıdır. Referans noktamız, Kazağa sabitleriz (tipik bir Rus yanılgısı). Böyle bir sistemde, Kazak hareketsizdir ve keçinin hız vektörü şekilde görüldüğü gibi göreli hız vektörüne $v_{21}=v_2-v_1$ dönüşür.



Şimdi keçi bu referans sisteminde BC doğrusu üzerinde, v_{21} vektörü yönünde hareket eder. Minimum uzaklık S_{min}, A noktasından BC doğru parçasına bir dik AC indirilerek elde edilir. O zaman

$$S_{min} = |AC| = |AB| \sin\angle CBA$$

Şekilden görebildiğiniz gibi Kazak keçiye pek yaklaşamaz, bu da muhtemelen Kazak için hayırlıdır. Bu durumun tersine, radar operatörleri tarafından sıkça rastlanır. Radar ekranı çevredeki bütün nesnelerin göreli hareketlerini gösterir, örneğin bir gemi için, diğer gemileri, şamandıraları ve yakındaki karaları gösterir. Operatör, en yakın tahminle mesafeleri olduğu kadar, göreli hareketlerden mutlak hareketi (şamandıra için örneğin kesinlikle mutlak hız vektörü yoktur!) belirlemek zorundadır.

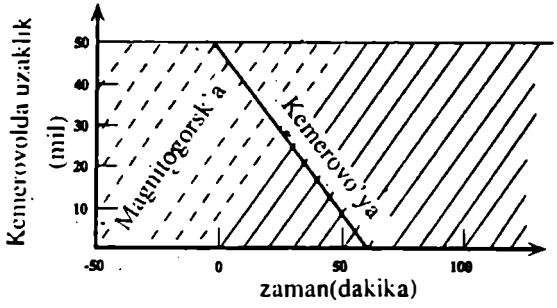
Ayrıa koordinatlardan bağımsız bir analitik çözüm de vardır. Bu yöntemi ayrıntılara girmeden özetleyeceğiz. Konum vektörleriyle başlayın:

$$\vec{r}_1(t) = \vec{r}_{10} + \vec{v}_1 t$$
$$\vec{r}_2(t) = \vec{r}_{20} + \vec{v}_2 t$$

Burada r_{10} ve r_{20}, Kazağın ve keçinin başlangıç konum vektörleridir. İki vektör arasındaki vektör farkının büyüklüğünü en aza indirgeyin (farkların karesini minimize etmek daha uygundur). Asıl mesele her iki yanıtın özdeş, olduğunu göstermektir!

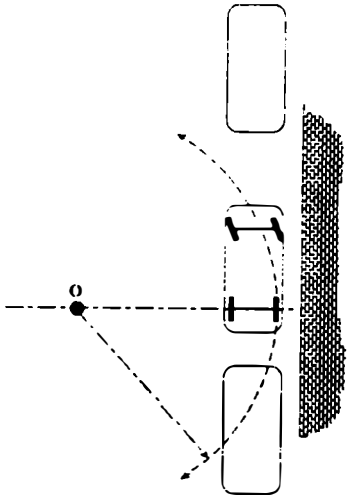
2) Rus işi Planlama: Bu kozmolojik bağlantıları olan şaşırtmacalı bir sorudur. Simetri temel meseledir. En iyi çözüm grafiktir.

Doğru çözüm için grafiğe bakın: Karşılaşılan kamyon sayısı ya 11 ya da 13'tür. Bu en başta ya da yolculuğun sonunda karşılaşılan kamyonları dahil etmek isteyip istemediğinize bağlıdır. Seçim size ait, ancak yanıtınızda bunu belirtmeyi unutmamalısınız.



İşte Şaşırtmaca: Her 10 dakikada bir Kemerova'dan bir kamyon çıkar demiştik, *tamtamına* demek istediğimiz buydu! Problem için hiçbir başlangıç zamanı belirtmedik, 10 dakikanın katları şeklinde zaman ekseninde başlangıç noktasını kaydırabilirsiniz. Başka birdeyişle, zaman ekseni boyunca kaydırılabilir simetriye sahibiz -Kamyonlar Büyük Patlamadan (Big Bang) hemen sonra başlayabilir ve mahşere kadar devam edebilir.

3) Yanıta Geri Gidiş: İlk önce şekilde görüldüğü gibi, park yerinden çıkmayı düşünün. Başarıyla çıkar çıkmaz, bütün sahneyi geri oynatabiliriz. Ön tekerlekler döndürülür ve arka tekerlekler aynı ekseni koruyarak (arka eksen) uyum gösterirler. Arka eksen boyunca birdoğru çizeriz. Dairesel hareketin merkezi O bu doğru üzerinde bir yerlerdedir: Eğer ön tekerlek çok az dönmüşse, daha uzakta olur. Bu uyarlama hem giriş, hem de çıkışda çalışır. Dairesel hareketin merkezi arabanın arkasında daha yakın olduğundan, çıkarken arabanın ön tarafı daha çok döner, arabayı ön taraftan kontrol etmek daha kolay olur. Geri alınmış yorumu bizi park yerine sokacaktır.



4) Başka Bir Sürücü Problemi: Bir önceki problemin çözümüne bakın, ama şimdi ön tekerleklere dikkat edin. Arabanın dönme hareketinin merkezi, eğer araba çok hafif dönüyorsa, arabadan uzakta, dönüş keskinse daha yakında olmak üzere, arka eksen boyunca bir doğru üzerindedir. Eğer ön lastikler birbirlerine tamamen paralel ise aynı dönme hareketi merkezine sahip olamazlar! Aynı dönme merkezi için (ön taraf ve lastikler üzerindeki aşırı kuvvetlerden kaçının), farklı açılarla dönmek zorundalar. Bununla beraber, eğer sürekli farklı açılarda ayarlanırlarsa, araba düz bir çizgi üzerinde ilerlediğinde ya da farklı bir oranla döndüğünde, bir yıpranma ve aşınma olur. Bu sorunu gidermek için süspansiyon tasarım geliştirilmiştir, ama yalnızca yaklaşık olarak giderilmiştir.

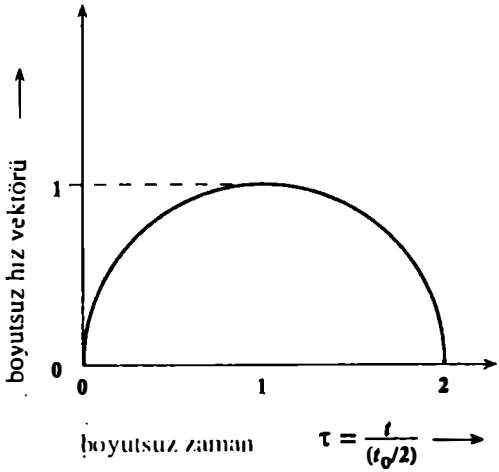
Arabanın ön bölümünün dinamik hareketlerini düşünmek zorunda olan tasarımcı için, bu karşılaştığı sorunlardan yalnızca biridir.

Birçok nedenden ötürü, ön tekerlekler hiçbir şey değilse bile paraleldir.

Tekerlekleri tamamen doğru açılarda döndürebilecek kusursuz tasarım henüz gerçekleşmemiştir.

5) Otomobil Kadar Uzağa Gitti: Bekçi haklı. Her iki grup matematikçinin söyledikleri de anlamsızdır, çünkü uzunluk boyutu verilmemiştir. Açıkça, yanıt eğrinin altında kalan alandır, ancak uzunluk boyutları (mil, kilometre, vb.) verili olması gerekir. Sorunun üstesinden gelebilmek için, değişkenlerimize yeni birimler seçebiliriz: $T=t_0/2$ yeni zaman birimimiz, v_0 yeni hız vektörü birimimiz olsun. Öyleyse uzunluk birimi $L=Tv_0$ olacaktır. Boyutsuz hız vektörü v/v_0- boyutsuz zaman t/T grafiğini çizersek aşağıdaki gibi olur. Yine bir yarıçemberdir ama bu kez birim yarıçaplıdır. Böylecek, yeni birimlerimizle boyutsuz olan alan $\pi/2$'dir. Her zamanki birimlere dönebilmek için, yanıtı L'in büyüklüğüyle çarpmalıyız.

$$S= \pi L/2=\pi v_o t_o/4.$$



Bu aptalca örnek, boyutsuz değişkenlerin kullanımının sizi nasıl sorunlardan uzak tuttuğunu ve niye fiziğin bütün alanlarında bu kadar yaygın olduğunu gösteriyor. Örneğin, Hidrodinamik, aerodinomik ve ısı aktarımı boyutsuz değişken kullanmadan şimdi olduklarından çokdaha zor konular olurlardı.

6) Otomobil Şimdi Nereye Gitti: B grafiği hatalı olmalı. Bir fonsiyonun grafiğinin neden aynı düşey çizgiyle iki ayrı noktada kesişemeyeceğini anımsayabilirsiniz. Her durumda, A grafiğinin kesişemeyeceğini anımsayabilirsiniz. Her durumda, A grafiğinin düşey ekseni hızı, daima pozitif olanhız vektörünün mutlak değerini temsil eder. B grafiğinin düşey ekseni yalnızca V_x'i, hareketin yönüne bağlı olarak pozitif ya da negatif olabilecek hız vektörünün x-bileşenini temsil eder. Bununla beraber B grafiği V_x'i daima pozitif gösteriyor, Yani x-eksenindeki konumu daima artıyor. O zaman araba x_2 noktasından

x noktasına geri dönmeyi nasıl başarır? O yönde yalnızca pozitif hız vektörü varken x-koordinatı nasıl azalabilir? Azalamaz. B grafiği çelişik bilgi veriyor öyleyse doğru olamaz.

A grafik hız vektörünün büyüklüğü -x grafiğiyse, B grafiğinin hatalı olduğunu kanıtlayan argüman tekrar kullanılamaz. Hız vektörünün **büyüklüğü** pozitif olduğu halde, hız vektörünün x-bileşeni negatif olabilir (büyüklük, vektörün uzunluğu olarak tanımlanır, negatif olamaz). Araba aynı noktada, aynı anda, iki farklı hız vektörüne sahip olamaz, ancak A grafiği de böyle bir iddiada bulunmuyor. A grafiği, arabanın aynı x-koordinatına sahip noktalarda farklı hız vektörünün olabileceğini söylüyor. Bu tür bir önerme konumsal (spatial) eksenler için (x, y...) kurulabilir ama zaman ekseni için geçerli değildir. aynı zaman koordinatına sahip noktalar için farklı hız vektörleri söylemek olanaksızdır. Bu zaman-uzay süreyinin (continuum) önemli bir özelliğidir.

Arabanın A grafiğinde tarif edilen hareketinin grafiğini çizmeyi size bırakıyoruz. Bizim yarış arabası tasarımcılarımızın henüz boyutsuz değişken kullanmayı öğrenmediklerini de unutmayın.

Her iki grafiğin de ilginç bir karakteri var: Bir y değerine karşılık gelen iki ya da daha fazla x değeri olan noktalara sahipler. Benzer olarak, bir x değerine karşılık gelen iki ya da daha fazla y değeri alan noktalar da görebiliyoruz. Bu eğrinin tamamının y=f(x) ya da x=f(y) şeklinde ifade edilemeyeceği anlamına gelir. Eğri ya parametrik olarak tanımlanacak ya da F(x,y)=0 denklemiyle yazılacaktır.

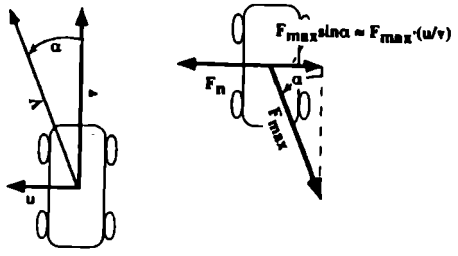
"Fizikçiler her değişkenin, diğer bütün değişkenlerin bir fonksiyonu olduğuna inanır." diyen bazı matematikçiler, fizikçilerin matematiksel yeterlilikleri konusunda umutsuzdurlar. Fizikçiler çoğunlukla, her değişkenin diğer bütün değişkenlerin bir *doğrusal* fonksiyonu olduğundan ekonomistlerin, biyologların ve diğer uygulamalı bilimcilerin emin olduğunu söyleyerek kendilerini savunur. Ötekiler de (matematikçiler) geri kalan herkesin suçlamaları bile anlayacak durumda olmadıklarını söyleyerek karşılık verir.

7) Kış Sürücüsü: Biz yalnızca Petya'nın önermesinin doğruluğunu inceleyeceğiz. Kışın daha dikkatli araba kullanmak için bir sürü iyi nedenimiz vardır ki, bunlardan birisini bir sonraki problemde göreceğiz.Yolun sürtünme katsayısı kusursuz düzgün (uniform) ve sabitse (Fiziğe Girişin çok yaygın bir koşulu!), Petya iddia ettiği gibi anında veya en azından çok hızlı tepki verebilirse, oldukça haklı sayılır. Ama bununla beraber, kuru yolla, "jilet gibi kaygan" buzlu yol arasında, sürtünme katsayısında dramatik bir dalgalanma olur. Bir önceki problemin diliyle söylemek gerekirse, hız vektörleri özdeş olabilir ama konumlar değildir, bu yüzden fren yapma mesafesi özdeş olamaz.

Çözümlemede dalgalanmaları hesaba katmak çok önemlidir. Buzlu yola kum (tuz) dökmek yalnızca sürtünme katsayısını artırmakla kalmaz, dalgalanmaları da azaltır. Efsanevi uzman okçuyu düşünün: Bütün oklarının ortalama konumları daima tamtamına hedefin merkezindedir, ama aslında hiçbir ok hedefi tek başına vurmamıştır! Bazı koşullarda, değişkenlik ve dalgalanma en önemli şeylerdir!

8) Kış Sürücüsü II: Bu kesinlikle gereklidir. Sürtünme katsayısı, iki cisim arasındaki maksimum sürtünme kuvvetini tanımlar, kayarken ya da kaymak üzereyken, lastiklerinizle yol arasındaki sürtünme kuvvetinin mutlak değeri ya maksimum değere eşittir ya da ona yakındır. Bir cismin (örneğin arabanızın), yatay bir düzlemde (örneğin yolda) itildiğini ya da çekildiğini varsayın. Eğer uygulanan kuvvet, maksimum sürtünme kuvveti F_{max}'dan küçükse, sürtünme kuvveti yalnızca uygulanan kuvvete karşıt bir kuvvettir. Sürtünme kuvvetinin büyüklüğü, uygulanan kuvvetinkine eşittir ve yönü uygulanan kuvvetinkinin ters yönüdür. Diğer taraftan, araba kayıyorsa, artık sürtünme kuvvetinin yönü, uygulama kuvvetinin ters yönünde değildir, onun yerine hız vektörünün yönüne ters yöndedir. Ayrıca kayarken, sürtünme kuvvetinin büyüklüğü maksimum değer F_{max}'ı geçemez.

ŞEKİL 128



Not: u son değerinde olmadığı için
F_n, sürtünmenin yanal bileşeninden
büyüktür. Kayma ivmelenecek!

Şimdi şekilde gösterildiği gibi, kayan arabaya uygulanan yanal kuv. F_n'in etkisini inceleyelim. Uygulanan kuvvet, sürtünme kuvveti rafından dengelenene kadar yanal bir ivme olacaktır. Kayma hız vektörü u için, sürtünme kuvveti tarafından dengelenene kadar yanal bir ivme olacaktır. Kayma hız vektörü u için, sürtünme kuvvetinin yönü, arabanın eksenine bir α açısı yapar. Sürtünme kuvvetinin yanal bileşeni F_{max} Sinα ya da α küçükse, F_{max} (U/V) olur. Asıl kayma hız vektörü

$$F_n = (u/v)\, F_{max}$$

denklemiyle verilecektir. Bu denklem akışkan sürtünme (burrication) yasasına benzer. Denklem, hız vektörü yeterince büyükse, çok küçük de olsa çapraz (transverse) bir kuvvetin yanlara doğru hatırı sayılır hızda kaymaya neden olacağını gösterir.

Bu denge sağlanmadan önce, Newton'un İkinci Yasası doğrultusunda yanal bir ivme oluşur, öyle ki:

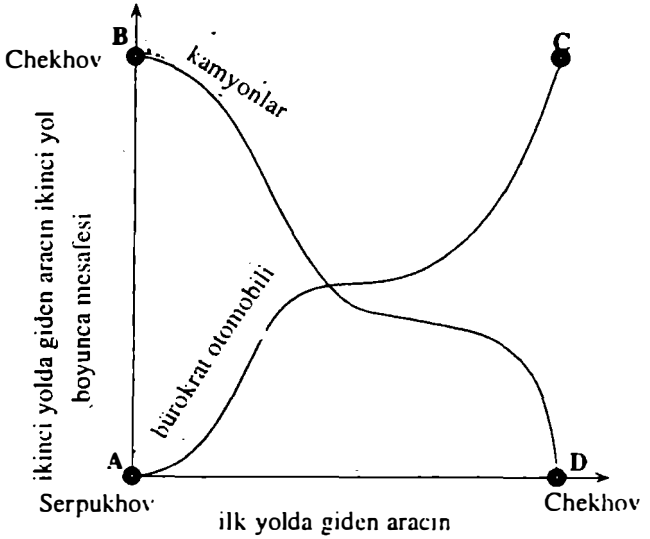
$$ma = mu = F_n - (u/v)F_{max}$$

Bu denklem, akışkan sürtünmeli hareketin denklemine benzediğinden

öğreticidir. İleriye doğru olan kayma ters yöndeki kayma için "sanal" bir yağlanma oluşturur, yani denklemin sağındaki ikinci terimi azaltır.Yavaş araba sürme bu "sürtünme" terimini artıracak ve yanal hareketi azaltacaktır. Çok daha güvenli!

9) Bir Rus Planlama Zaferi Daha: Kesin ve mutlak bir kanıtın anahtarı uzaklık ölçerin (odometer) her bir yolda ölçtüğü uzaklığı tek bir koordinat olarak göstermektir.

Bu grafik üzerindeki bir nokta her iki *aracın* konumunu da belirtecektir. Grafikteki eğrilerden biri, eski yoldan, diğeri yeni yoldan olmak üzere Serpukhov'dan Chekov'a giden iki otomobile karşılık gelir.



A noktası: İki araç da Serpukhov'da

B ve D noktaları: Bir araç Serpukhov'da, diğeri Chekhov'da

C noktası: İki araç da Chekhov'da

Diğer eğri ise eski ve yeni yoldan biri Serpukhov'dan Chekov'a, diğeri de ters yönde giden iki kamyona karşılık gelir. İki eğrinin kesişim noktasında kamyonların konumu, otomobillerin daha önce gelmiş oldukları konumla eş olacaktır. Ama biz bunun gelmiş oldukları konumla eş olacaktır. Ama biz bunun gelmiş oldukları konumla eş olacaktır. Ama biz bunun bu şekilde gerçekleşemeyeceğini biliyoruz, çünkü otomobiller 20 metre uzunluğundan bir kablo ile bağlı olduklarından, bu noktada kamyonların arasındaki uzaklık 20 metreden fazla olamaz. Grafik böyle bir durumun kaçınılmaz olduğunu açıkça gösteriyor. Her iki kamyonun şöförü de emniyet kemerlerini bağlamalılar! Bu tür bir grafik gösterim alıştığınız bir yöntem olmayabilir: eğriler üzerindeki bir nokta *iki aracın* konumunu belirtiyor. "Hal mahalli" diye adlandırılan bu gösterim dinamik sistemler kuramında ve istitastiksel mekanikte çok çeşitli karmaşık sistemlerin durumlarını gösteren güçlü bir araç olarak kullanılır.

Bölüm 6'nın Çözümleri



Kaynaklar ve Havuzlar

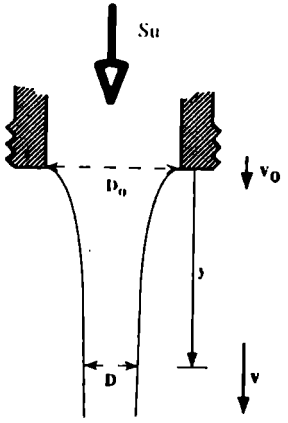
1) Bir Musluk Problemi: Herhangi iki ayrı yükseklikteki su akıntısını düşünün. Daha doğrusu, akıntıyı iki yatay düzlemle kesip, akıntının bu noktalardaki ara kesitlerinin alanlarını ölçün. Akıntının biçimi zamandan bağımsızdır, birim zamanda her iki düzlemden de eşit miktarda su geçmelidir. Eğer geçmiyorsa iki düzlem arasında suda bir artış ya da azalış olmalı, akımın biçimi de zamanla değişiyor olmalıdır (Kütlenin korunumu için, artma ya da azalma düzlemler arasındaki akıntı farkına eşit olmalıdır. Aynı zamanda kütlenin korunumu ve hacmin korunumu aynı anlama gelmektedir çünkü bu problemde suyun yoğunluğu düzlemler arasında değişmez). Biçimi değişmediğine göre musluktan uzaklığı ne olursa olsun, suyun akış oranı sabit olmalıdır. Fakat aşağı indikçe, yerçekimi ivmesiyle suyun hızı artar. Öyleyse, toplam akış oranının sabit kalması için akıntının ara kesiti küçülmelidir. Musluğun akmak yerine damladığını düşünün. Düştükçe hızı artan tek bir damlayı gözünüzün önüne getirin. Ardarda düşen damlalar alçaldıkça aralarındaki uzaklığın artışına dikkat edin. Akımı bir damlalar topluluğu olarak düşünürsek, akımın musluktan çıktıktan sonra neden giderek inceldiğini anlayabiliriz.

Bu problem korunum ve sürekliliğin bir biçimini gözler önüne serer: durağan halde, herhangi korunan niceliğin akıntısı için, kütle akıntısının oranı- yani, hız vektörü çarpı ara kesit alanı- her zaman bir-sabite eşittir. Böylece hız vektörü arttığında alan buna bağlı olarak da-

ralır. Peki "durağan hal" ile ne kastediyoruz? Demek istediğimiz sistemin özelliklerinin- örneğin su akımının biçiminin- zaman içinde değişmemesidir. Eğer kütle akıntısının oranı sabit değilse değişiklikler ortaya çıkabilir: madde çevrede toplanacak (ya da çevreden sızacak) ve su sütununun biçimi (ya da başka bir şey) zaman içinde değişecektir.

Bu kuralın göz ardı edilmesinin sonuçları halihazırda yol daraldığında azami hız sınırının düşürüldüğü Boston yöresindeki trafik akışı düzenlemesinde gözlenebilir. Bu tür düzenlemeler durağan halde akışı olanaksız kılar. Doğu Massachusetts yolları bu durumun yol açtığı trafik sıkışıklığıyla ünlüdür (belki de Massachusetts yolları su şileri müdürlüğüne devredilmelidir). Tam tersine Almanya'daki genel uygulamada, yolların daraldığı noktalara "Hızlanın!" işareti konur.

2) Tesisatçınızdan Daha Pratik Bir Öğüt: Evet, bu mümkün! Bir önceki probleme bakın. Akıntı alçaldıkça incelir çünkü su düşen her cisim gibi düştükçe hızlanır. Bu durumda kütlenin korunumu net kütle akış oranının sabit kalması gerektiğini söyler, öyleyse akıntı yavaşladığında kalınlaşacak, hızlandığında da incelecektir. Yapmanız gereken şey şudur: Cetveli kullanarak suyun aktığı boru ya da musluk ağzının iç çeperinin çapını (D_o) ölçün; yine aynı cetvelle musluk ağzından y uzaklığında suyun çapını (D) ve y uzaklığını ölçün.



Eğer su, musluğu v_o hızıyla terkediyorsa, enerjinin korunum yasasına göre akışın m kütlesine sahip, herhangi bir elemanı ya da parçası için, v aşağı doğru hızı gösterirken,

$$\frac{1}{2}=mv^2=\frac{1}{2}mv_o^2+mgy \qquad (1)$$

yazabiliriz. Denklemi v için çözdüğümüzde:

$$v = \sqrt{v_o^2+2gy} \qquad (2)$$

başlangıç hızı v_o olan herhangi bir cisim için geçerli olan bu ifadeyi buluruz.

Hacimsel akış oranı, Q şu akımının arakesit alanıyla ve Δt'ye (Δ= 1 saniye) eşit yükseklikte, bir silindirin hacmi olarak düşünülebilir. Böylece Q, arakesit alanı ile hızın çarpımına eşittir ve kütlenin korunabilmesi için de her noktada aynıdır. Öyleyse,

$$Q = \frac{\pi}{4} D^2v = \frac{\pi}{4} D_o^2v_o \text{ veya } D^2v = D_o^2v_o \qquad (3)$$

Üçüncü denklemdeki hız yerine ikinci denklemi yerleştirirsek

$$D^2v_o^2 = D^4 (v_o^2+2gy) \qquad (4)$$

ve bu denklemi de suyun musluğu terketme hızı v_o için çözersek,

$$v_o = D^2\sqrt{\frac{2gy}{D_o^4-D^4}} \qquad (5)$$

elde ederiz. Bu denklemin sağ tarafı cetvel ile ölçülebilecek büyüklükleri ve g'yi içeriyor. Son olarak, bu denklem üçüncü denkleme yerleştirilerek

$$Q = \left(\frac{\pi}{4}\right)D_0^2 = D^2\sqrt{\frac{2gy}{D_0^4 - D^4}} \qquad (6)$$

hacimsel akış oranını buluruz.

Akış oranları ölçülebildiğinde, cetvelimiz hâlâ yanımızdaysa, altıncı denklemi g için çözebiliriz. İki ya da üç anlamlı basamağa kadar akış oranını hesaplamak için 5-galonluk bir kova ve bir kol saati yeterlidir. Deneyin!

3) Hesap Yapmak İçin 20 Saniyeniz Var. Yoksa Sokarım!: Yalnızca düşey kuvvetleri göz önünde bulundurmamız yeterli. En basit çözüm, en temel haliyle Newton'un İkinci Yasası'ndan yararlanır, yani herhangi bir cisim üzerindeki kuvvetlerin toplamı momentumun zaman için değişim oranına eşit olmalıdır. Ama momentum iki faktörden oluşmaktadır: kütle ve hız. En çok rastlanan durumlarda momentum değişen hızla yani ivme ile değişir. Momentumun mv tanımından da anlaşılacağı gibi kütle değiştikçe momentum da değişecektir. Bahçe hortumu, ivme olmaksızın dengelenmemiş kuvvetlerin yer aldığı iyi bir örnektir. Bu durumda kuvvet, kütlelerin değişimi yoluyla oluşur; durağan kütle küçülürken v hızına sahip kütle büyür. Şimdi Newton'un İkinci Yasası'nı yazalım:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \Sigma(\text{kuvvetler})$$

Kobranın başının ivmeli olmadığına dikkat edelim. Kobranın başının sabit hızla yükselmesine rağmen, momentum düşey yönde değişir. Çünkü kobranın düşey uzunluğu (düşey hareket eden kütle) zaman içinde artmaktadır! Kobranın düşey uzunluğuna h dersek, düşey vücut bölümünün ağırlığı h(M/L), momentumun düşey bileşeni de

$$p_y = h\left(\frac{M}{L}\right)v$$

şeklinde yazılabilir. Daha sonra bu momentumun kuvvet oranının azalışı yukardaki ifadenin basit bir zaman türevidir. Bu da

$$\frac{dp_y}{dt} = \left(\frac{M}{L}\right)v\,\frac{dh}{dt} = \frac{M}{L}\,v^2$$

Yani momentumun bu bileşeninin artış oranı yerçekimi kuvvet Mg ile yerin kobranın kuyruğuna uyguladığı tepki olan N'in toplamına eşit olmalıdır. Mg ile N ters yönlerde olduklarından,

$$\frac{Mv^2}{L} = N - Mg$$

elde ederiz.

Yani tepki kuvveti N'in mutlak değerini

$$f = M\left(\frac{v^2}{L} + g\right)$$

Newton'un Üçüncü Yasası'na göre bu yerin *yılana* uyguladığı kuvvete eşit olmalıdır. Bir rastlantı sonucu v^2/L terimi merkezkaç ivmesi ya da merkezkaç kuvveti ifadelerine benzemektedir.

Problem bu yöntemle çözülebilir, çünkü İkinci Yasa Kuvvetlerin borçlar ve alacaklar şeklinde tanımlandığı bir denge bağıntısı olarak tanımlanabilir. Bu denge bağıntısı dış kuvvetler toplamı O olduğu zaman momentumun konumu yasasına dönüşür. Kütle değişiminin içeribileceği gerçeği de doğal olarak ortaya çıkar. Roket ve uzay araçlarını konu alan mühendislik problemlerinde bu hesaba katılmalıdır.

4) St. Petersburg'da Momentumun (ve Enerjinin!) Korunumu: Uykucu Oblomovetz çok öndedir. Önce şu durumu inceleyin. Tekdeğişim kütlenin (düşen kar şeklinde) değişimidir ve tembel uykucunun arabasına eklenir. Yatay dış kuvvetlerle bir etkileşim olmadığından Newton'un İkinci Yasası'na göre yatay yöndeki toplam momentum ko-

runuyor olmalıdır. Oblomovetz'in arabasının başlangıç kütlesi m_o ise, t anındaki kütlesi şöyle gösterilir:

$$m(t) = m_o + \mu t$$

Başlangıç momentumu $m_o v_o$'dır. Sistemin toplam momentumu değişmeyeceği için, $m_o v_o = m(t)v(t)$ olmalıdır. Şimdi Oblomovetz'in ve arabasının hızını zamanın bir fonksiyonu olarak yazarız. Elde edilen

$$v(t) = \frac{v_o}{L + \frac{\mu t}{m_o}} \text{ olur.}$$

Şimdi işkolik Stakhanovetz'in durumunu inceleyelim. Kar tanesi arabaya düştüğünde, arabaya hız ve dolayısıyla da momentum kazandırır. Stakhanovetz karı düşer düşmez süpürüp arabasının kenarından dışarı attığı için aslında sistemindeki momentumun da bir kısmını "dışarı atıyor" demektir. İşkoliğin araba sistemi çevresinden yalıtılmış değildir, öyleyse momentumun korunumu yasası bu sisteme uygulanamaz. Şimdi yapılan bu işin, hız üzerinde zamanın bir fonksiyonu olarak etkilerin saptayalım.

Araba üzerinde kar birikmesine engel olduğu için kütle sabittir. Stakhanovetz ve arabasının momentum değişimi, tek başına hız değişimine dayanacaktır:

$$\frac{dp}{dt} = m_o \frac{dv}{dt}$$

Zaman aralığı *dt* içerisinde düşen kar kütlesi μdt olarak ifade edilebilir. Her kar tanesi v hızını aldığı için, kar tanesi arabaya değdiği anda momentumu $(\mu dt)v$'dir. Bu momentum Stakhanovetz karları arabadan süpürdüğünde kaybedilir. Yani

$$dp = -v\mu dt$$

Bu iki denklemi birleştirdiğimizde, şu denklemi elde ederiz:

$$\frac{dv}{dt} = -\left(\frac{\mu}{m_o}\right)v$$

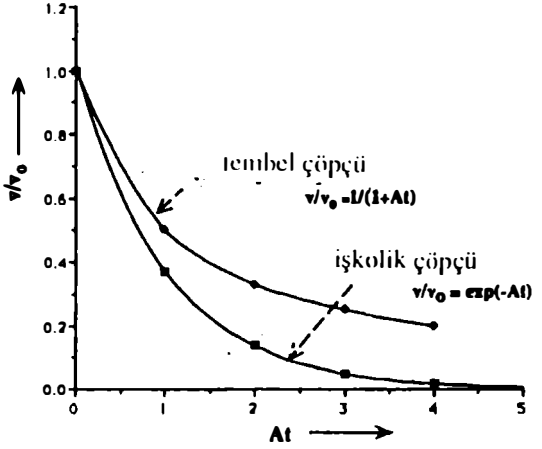
Bu denklemi sağlayan fonksiyon nedir? Bir fonksiyon türevi ile orantılı olduğunda çözüm e^{Ax} fonksiyonudur:

$$d(e^{Ax})/dx = Ae^{Ax}$$

Bu özelliği sağlayan tek fonksiyon budur. Üstel fonkisiyonu yerine koyup, çözümler ararken başlangıç koşulunu anımsayalım (t=0 iken $v=v_o$). İşkolik süpürücünün hızı, zamanın bir fonksiyonu olarak şu şekilde ifade edilecektir.

$$v = v_o e^{-\left(\frac{\mu}{m_o}\right)t}$$

İki denklemi karşılaştırdığımızda herhangi bir zamanda tembel çöpçünün hız vektörünün, işkoliğin hız vektöründen daha büyük olduğunu görürüz. Üstel fonksiyon e^{Ax}'in, x'in diğer fonksiyonlarından daha hızlı arttığını anımsarsanız, e^{-Ax} fonksiyonunun 1/(1+Ax)'den daha hızlı azaldığını bulursunuz. Yani işkolik süpürücünün hız vektörü, tembel süpürücününkinden daha hızlı azalacaktır. Bu sağlam kanıtları araştırılması gereken önemli bir ilkedir. Üstel fonksiyon bütün orantılı fonksiyonlardan daha içbükeydir. Üstel fonksiyonun asla sıfırdan farklı türevleri tükenmezken, orantılı fonksiyonun da her zaman sıfırdan farklı, en yüksek dereceden bir türevi olacaktır. Bu ifadeyi açıklamak için iki fonksiyonun grafiğini aşağıda veriyoruz.



İşkolik süpürücünün bu denli naif olmadığı durumlar için çıkarımlarımız farklı olacak. Örneğin karın harekete dik yönde değil de başka bir yönde süpürüldüğü durumu düşünün. Bu noktada hız vektörünün davranışını hesaplayabiliyor olmanız gerekir.

5) Mikhail'in Atlıkarıncası: Size iki çözüm sunacağız; biri açısal momentumu, diğeri de yağmur damlaları üzerinde yapılan işi temel alıyor. Her iki çözümlemede de ortak ve önemli kavram atlıkarınca üzerindeki kütle akışı. Eğer birim kütle başına n yağmur damlası düşüyorsa ve her damlanın kütleside m ise, yağmurun kütle yoğunluğu $\rho=nm$ olacaktır. Yağmur damlası akısı, yani birim zamanda birim yüzeye düşen yağmur damlası sayısı böylece J= nv olur. Kütle akısı, yani birim zamanda, birim alana düşen yağmur kütlesi $J=\rho v$ olur. Atlıkarıncayı R yarıçapında, πR^2 genişliğinde kabul edersek, birim zamanda üzerine πR^2 nv tane damla düşer. Atlıkarınca üzerine birim zamanda düşen yağmur kütlesi de $\pi R^2 \rho v$ olur. Her iki durumda da yağmur suyunun atlıkarınca dışına, üzerine toplandığı hızla aktığını varsayalım- yani atlıkarınca durağan haldedir, ne taşar ne de tamamen kurur.

Şimdi, ilk yaklaşım için düşen her yağmur damlasının düşey hareketinin sona erdiğini ve dolayısıyla düşerkenki kinetik enerjisini yitirdiğini düşünelim. Dönmekte olan disk (ya da atlıkarınca) damlayı kenara taşırken ona ivme kazandırır. Atlıkarınca, açısal hızı ω olmak üzere hareket halindeyken, damlanın hızı $v=\omega R$ olur. Atlıkarınca'dan atılmadan hemen önce damlanın kinetik enerjisi

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 R^2 \text{ dir.}$$

Bu kinetik enerji, damla dışarı atıldığında kaybedilir. Dışarı atılan damla sayısının, düşen damla sayısına eşit olduğunu varsaydığımıza göre, enerji kaybetme oranı da, kinetik enerji ile yağmur damlası düşüş oranının çarpımına eşit olacaktır. Sonuç,

Kaybedilen Enerji Oranı= $(1/2\ m\omega^2R^2)\ \pi R^2nv$

$= 1/2\ \pi\rho v\omega^2R^4$ olur.

Mikhail'in elektrik faturası bu artan enerji kaybının yansıtıyor olmalı.

İkinci yaklaşım açısal momentumu dikkate alır ve bu bölümdeki dördüncü problemin çözümüne benzer. Düşen damlalar atlıkarıncadan açısal momentum alırlar ve dışarı atıldıklarında bu momentum kaybedilir. Bu kayıp atlıkarıncanın motoru tarafından telafi edilir. Atlıkarıncanın üzerinde sürekli azalan ve hemen yenilenen ince bir su birikintisi olduğunu düşünelim. Kütlesi dm olan bu diskin eylemsizlik momenti dI,

$R^2/2\ dm$ olacaktır.

Diskin açısal momentumu dμ=wdI'dır ve değişimi telafi edilmelidir. Atlıkarınca motordan aldığı T burulma momenti (torque) ile sabit hızla dönüyor ise

$d\mu/dt = T$'dir.

Çözümün ilk paragrafında da belirlediğimiz gibi, damlaların geliş (ve gidiş) oranları $\pi R^2\rho v$ olduğundan, dt zaman aralığında,$dm=\pi R^2\rho vdt$ olur ve

$$Tdt = d\mu = \omega\frac{R^2}{2}\,dm = \frac{1}{2}\,\pi\omega\rho v R^4\,dt.$$

Atlıkarıncayı yağmurda döndürmek için gereken burulma momenti şöyle ifade edilebilir:

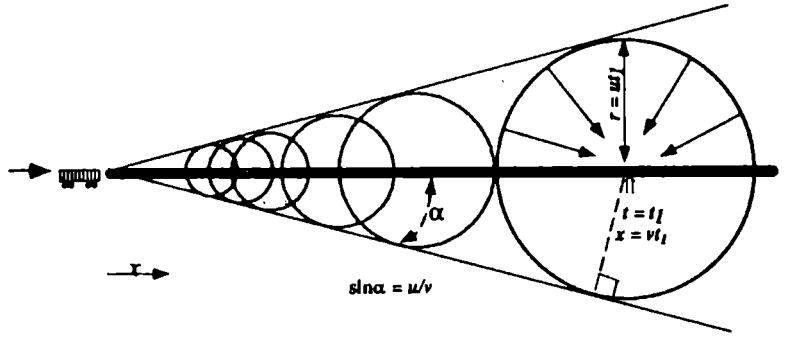
$$T = \frac{1}{2}\,\pi\omega\rho v R^2$$

Gereken güç Tw olduğuna göre, sonuç

Kaybedilen Enerji Oranı = $\omega T = 1/2\ \pi\rho\omega^2 vR^4$ olur.

Bu ikinci çözümde su diskinin düz, durağan, düzgün bir disk olarak döndüğünü varsaydık. İlk çözümde bu tür varsayımlar gereksizdi. Bu noktada Mikhail'in telefon faturasındaki artışı tahmin etmek çok zor değil, bu işi size bırakıyoruz ama çözümün açısal hıza ve atlıkarıncanın boyutlarına bağlı olduğunu da unutmayalım.

6) Yakutsk Otobüsünü Yakalama (Mach Konisi): Otobüsü $t=t_1$ anında ele alalım. O anda yolda $x_1=vt_1$ konumunda olacaktır. Şekilde de görüldüğü gibi, otobüsü bu konumda yakalayabilmek için x_1 merkezli ut_1 yarıçaplı bir çemberin içinde bulunmanız gerekiyor. Eğer çemberin dışındaysanız, x_1 noktasına t_1 kadar zamanda erişmeniz olanaksızdır. Çember zamana (ya da otobüsün konumuna) bağlı olarak genişler. Bütün bu çemberleri içine alan şekil de bir kama biçimindedir (üç boyutta, bu genişleyen bir küre dizisini saran bir koni olacaktır). Bu kesitin köşe açısının yarısı $\alpha = \arcsin(u/v)$ olur. Eğer üçgen ya da koninin dışındaysanız otobüsü yakalamanız olanaksızdır ki, bu da Sibirya'da ciddi bir durumdur.

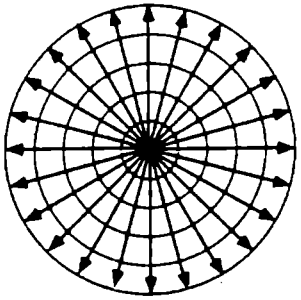


"Filmimize" gelince, koninin kenarlarından en büyük hız olan u ile koşup otobüsün kapısında kaybolan insanlar gösterecek. Koni otobüsü izleyerek daralacaktır. (En uygun koşu yönü koni yüzeyine dik olandır. Bunu açıklayabilir misiniz?). Film tersinden gösterildiğinde koni otobüsü izlerken genişler. Bu genişleyen bir dizi küre ile ya da (iki boyutta) çemberler şeklinde tanımlanabilir. Örneğin, küresel şok dalgaları oluşturan sürekli patlamalar ya da sıvı yüzeyinde gittikçe genişleyen dairesel dalgalar gibi.

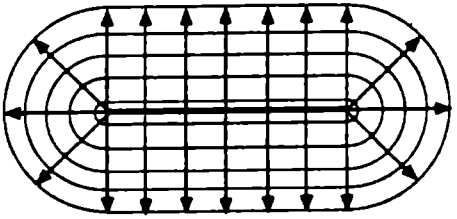
Daha doğrusu, bu, iki boyutta, bir kayığın kürek dalgasına benzer. Kürek dalgası kayık ilerledikçe küreklerinin yarattığı bir dairesel dalgalar topluluğu olarak tanımlanabilir. Bunun olabilmesi için kayığın hızının dalga hızından fazla olması yani v≥u'nun sağlanması gerekir. Bu olgunun üç boyutlu bir örneği sesten hızlı uçuşun yarattığı şok dalgalarıdır; bu olguya Mach Konisi adı verilir. Mach Konisi yakındaki (birkaç yüz ayak uzaklıktaki) korunmasız gözlemciler için ölümcüldür. Katılarda hızlı hareket eden elektronların yaydığı elektromanyetik radyasyon (katıda ışıktan hızlı hareket ederler) bir Mach Konisi biçiminde yayılır. Buna Cherenkov radyasyonu adı verilir.

En uygun koşu yönü konusunda hiçbir şey belirtilmediği dikkatinizi çekmiştir. Bunu bulabilir misiniz? Mach Konisinin kenarında dururken yola dik olarak koşmak mı, yoksa Mach konisinin kenarına dik olarak koşmak mı daha iyidir? Sizi bu problemle başbaşa bırakıyoruz.

7) Patlayıcı Bir Konu: Dondurma Külahı: Önce tek bir küçük parçacık patladığında ne olacağını düşünelim. Her yönde küresel bir yayılma olacak şekilde patlayacaktır. Kürenin yarıçapı u hızıyla aratacaktır. Küre zamana bağlı olarak sonsuza dek genişleyecektir. Daha sonra tamamı aynı anda patlayan kısa bir çubuk düşünün. Parçalar her yöne dağılacaktır. Sonuç, evreni kaplayan dev bir Tylenol kapsülü, uzunluğu ve çapı 2u hızıyla genişleyen, ama uçları yarımküre olan bir silindir olacaktır. Bu sonucu, çubuğu herbiri kendi patlayıcı silindirini oluşturan küçük parçalara ayırarak da görselleştirebiliriz.



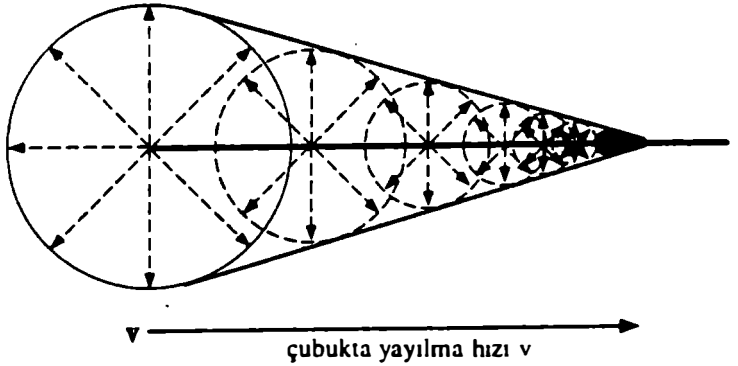
tek parçacık, anlık



ince çubuk, anlık

Şimdi yarı-sonsuz çubuğa gelelim. Yöntemimiz yine çubuğu küçük parçacıklar zinciri olarak ele almaktır. Her parçacık havada u hızı ile yayılan küresel patlamalar yaratır. Ama parçacıklar aynı anda patlamazlar. Patlama çubuk boyunca v hızı ile yayılır, bu demektir ki, çubuğun ucu t=0 anında patladıysa, uçtan x metre uzaktaki bir parçacık t=x/v anında patlar. Sonuç en büyüğü en uçta yarıçapı ut hızıyla büyüyen bir küreler dizisidir. Çubuk boyunca patlamaları izleyerek ilerlersek, patlamanın henüz gerçekleşmekte olduğu noktaya dek gittikçe küçülen kürelerle karşılaşırız. İlerledikçe küçülen küreler ikinci şekilde görüldüğü gibi vt yüksekliğinde, ucuna *ut* yarıçapında bir küre eklenmiş bir koni oluşturur: Sonsuza dek ucundaki dondurma ile büyüyen bir dondurma külahı.

Bu Mach Konisine bir başka örnektir.



yarı sonsuz çubuk, patlama uçta başlar.

8) Şiddetli Patlayıcılar (Ve Dondurma): Üzerine birkaç söz daha. V>u durumunda, koni bir önceki problemde olduğu gibi çubuğun ucuna erişene dek büyüyecektir. Çubuğun ucuna t=L/v (L çubuğun uzunluğu) sürede ulaşacaktır. vt>L sağlandığı sürece durum yarı-sonsuz çubukla özdeştir. Çubuğun sonuna varıldığında, koni dışa doğru genişlemeye devam edecek, ama koninin tepe noktası, diğer uçtakinden daha küçük, ancak yanı oranda u hızı ile genişleyen bir yarımküre olacaktır. Daha teknik bir açıklama gerekirse, u hızı ile genişleyen bir kesik konimiz ve yarım kürelerimiz vardır. Taban ve kesilmiş tepeye eklenmiş ut ve u(t-L/v) yarıçaplarında iki yarım küre bir önceki problemin çözümündeki şekilde görülebilir. Dondurma külahı artık delinmiştir - çok fazla dondurmanın doğal bir sonucudur.

Şimdi V'nin, u'dan küçük olduğu durumu, yani patlamanın çubuk üzerinde ilerleme hızının, patlamaların yayılma hızına göre daha yavaş olduğu durumu ele alalım. Bu durumda, patlamanın şekli merkezi çubuğun ucunda olan basit bir küre olacaktır. Yine bir önceki problemde anlatılan yöntemi kullanın. Çubuktaki bütün noktaların pat-

lamaları asla ilk patlamayı yakalamayacaktır. Gerçekte bu olay (v<u verili olduğunda) patlayıcının biçiminden bağımsızdır! Bu yarı-sonsuz çubuk için de geçerlidir. Kürenin dış yüzeyi yalnızca ilk "parçacık" tarafından oluşturulduğu için patlamanın yoğunluğu kürenin içinde daha fazla olacaktır. Bunun tersine, güçlü patlayıcılar yüksek patlama hızı v ile tanımlanırlar. Böyle durumlarda patlayıcının biçimi az önce görmüş olduğumuz ve patlayıcı mühendislerinin bildiği gibi çok önemlidir.

9) Her şey Akıda (Hızlı ve Kıyak Helikopter): Boris'in yağmurda basketbol topu ve tavuk yemi ile serüvenlerini anımsamamız gerek (Bölüm 4, 11-13 problemler), özellikle de **akı** kavramını. Bu nicelik, bir yoğunluk ile, bir hızın çarpımıdır. Bu durumda, havanın pervane içindeki akısı ρv (ρ'nun birimi kütle/m^3'tür) ile ilgileneceğiz. Akı ρv, kütle/(metre^2-sn) boyutlarında, pervanenin birim alanından birim zamanda ne kadar hava geçtiğinin bir ölçüsüdür.

Kütle akısında durmamız gerek: momentum, kütlenin, hız vektörüyle çarpımından elde edildiğinde göre, momentum akısını, momentum yoğunluğu ρv'yi havanın hızı v ile çarparak elde edebiliriz. Böylece, momentum akısı ρv^2 olur. Helikopterden akan toplam momenum, momentum akısı çarpı helikopterin yüzey olanı S olacaktır. Newton'un İkinci Yasası bize bu niceliğin, momentumun değişim oranının, aracın ağırlığı Mi dengeleyerek onu havada tutan şey olduğunu söyler. Öyleyse,

$$Mg = S\rho v^2 \qquad (1)$$

Kütle M'in L ile orantılı olduğu gerçeğini kullanarak denklem (1)'i aracın hem modeli, hem de aslı için yazabiliriz. Denklemleri birbirine böldüğümüzde elde edilen

$$\frac{v'^2}{v^2} = \frac{L'}{L} \qquad \text{olur} \qquad (2)$$

N kuvveti, kinetik enerji yoğunluğu olan enerji akısı

$$\frac{1}{2}\rho v^2$$

tarafından veriliyor olmalıdır. Helikopter üzerindeki bir S alanında geçen hız ile çarpıldığında modeli havada tutacak gücü buluruz.

$$N = \frac{1}{2} S\rho v^3 \qquad (3)$$

İpucunda da sözünü ettiğimiz gibi S alanı L^2 ile orantılı olmalıdır. L helikopterin uzunluğu, genişliği ya da herhangi bir karakteristik boyutu olabilir. Yani

$$N = kL^2\rho v^3 \qquad (4)$$

Burada k oran sabitidir. Bu denklemi hem model, hem de asıl araç için yazabiliriz. Böylece şu denkleme varırız:

$$\frac{N'}{N} = \left(\frac{L'}{L}\right)^2 \left(\frac{V'}{V}\right)^3 \qquad (5)$$

Burada N' asıl helikopter için gerekli güç, N ise model için kullanılan güç; L' asıl helikopterin uzunluğu, vb.dir. Beşinci denklem ikinciyle birleştirilerek

$$\frac{N'}{N} = \left(\frac{L'}{L}\right)^{\frac{7}{2}}$$

denklemi kurulabilir. N=50 watt, L'/L=10 verili olduğuna göre gerekli güç 160 kwatt'dan biraz daha azdır. Bu tür boyut ve büyüklüğe dayalı "çabuk ve pis" tahminler genellikle çok işe yarar. Bu durumda üç akıya bakmamız gerekir: kütle, momentum ve enerji.

Helikopterin kökleri temel olarak Rusya'dadır. 1909 yılında İgor Sikorsky 20 yaşında Kiev'de ilk hava aracını yapmıştı. Bu bir helikopterdi ve iyi uçmamıştı. Yolcu uçağı, deniz uçağı ve stratejik bombardıman uçağını kapsayan diğer bütün hava araçlarında otuz yıllık bir başarıdan sonra Sikorsky ABD vatandaşı olarak yeniden denedi. İlk başarılı helikopteri 1939 yılında ABD'de tasarladı.

10) Vücut Isısı: Marina çok haklı. Bu probleme Robert Emden'in bir makalesinde değinilmiştir. "Niye Kış İçin Isıtma Sistemlerimiz Var?" (Nature 141, Mayıs 1938). Ardından Arnold Sommerfield bir tartışma yayınlamıştır (Lectures on Theoretical Physics, Cilt 5, New York: Academic Press, 1956). Boris'in dairesinde ne var? Boris'e kalırsa kendinden başka çok az şey yani, çok fazla hava var orada. Hava (ya da oda sıcaklığında herhangi bir gaz) için birim kütle başına enerjiyi şöyle yazabiliriz:

$$C_v T + E_o.$$

ve eğer dairedeki ortalama yoğunluk ρ ise, birim hacim başına enerji

$$U_v = \rho C_v T + \rho E_o.$$

Buna ek olarak, ideal gazlar yasasını da biliyoruz; $\rho = p/RT$, burada P basınçtır. Böylece birim hacim başına enerji şöyledir:

$$U = P\left(\frac{C_v}{R}\right) + \left(\frac{P}{RT}\right)E_o$$

Eğer ikinci terim ihmal edilecek olursa (enerji tanımlandığındaki sabitimizden geliyor), dairedeki enerji yalnızca barometrik basınçla açıklanabilir. Eğer ikinci terim pozitif değilse (gerçekte pozitiftir), dairenin

enerjisi ısıtıldıkça *düşer*! Her iki durumda da Marina haklıdır. Enerji nereye gidiyor? Tamtamına pencereden dışarı. Dairedeki basınç bir atmosferde kalıyor. Daire gaz çıkışına karşı yalıtılmamış olduğundan, ısıtma madde kaybına (ısınan gazlar) ve enerjide net *azalmaya* neden oluyor. Diğer yandan, Marina soğuk bir şişe votka getirip masanın üzerine ısınması için bıraktığında votkanın yükselen enerjisi odanın içindekilerden değil de dışarıdan geliyor!

Bu soruyu yanıtlarken, Boris'in kendisindeki enerji alış verişini ve dairede havanın dışındaki nesnelerin varlığını ihmal ettik. Bu çok da kötü bir yaklaşım sayılmaz. Boris, temel olarak bağımsız enerji kaynağı bulunan eşısıl (izo termal) bir sistemdir ve dairede de *çok fazla* hava vardır. Sommerfield'in de dediği gibi, Boris dairesinde enerjiyi değil de entropiyi korumak için para ödüyor. (Bu kavram içimizden birisi [R.R] tarafından üçüncü termodinamik dersini almadan öğrenilememişti). Termodinamiğin Üçüncü Yasası'nın mucidi Walter Hermann Nernst, evcil hayvan olarak yalnızca balık besler ve şöyle dermiş (çevirebildiğimiz kadar yakın anlamıyla çeviriyoruz): "sıcak kanlı bir hayvan beslemek bütün evreni kendi paranızla ısıtmak gibidir."

Bölüm 7'nin Çözümleri



Genişleyen ve Daralan Evrenler

1) Ruble Üzerindeki Çizgi: Çizgi doğru olarak kalmalıdır (eğer yetkililer doğru söylüyorsa!). Çizginin (doğrunun) denklemi, Kartezyen düzlemde şöyle yazılabilir:

$$Ay + Bx + C = 0.$$

Termik genleşme katsayısı tanımına göre, her ΔT sıcaklık farkı için koordinatların da değişmesi gerekir.

$$x \rightarrow (1+\alpha\Delta T)x$$
$$y \rightarrow (1+\alpha\Delta T)y,$$

Böylece doğru denklem şu hale gelir:

$$Ay + Bx + C/1 + \alpha\Delta T = 0$$

Bu yine aynı eğime sahip bir doğru denklemidir. Yalnızca sabit terim farklıdır. Yani ısıtma düzgün ve malzeme homojen ise çizgi düz kalacaktır. Göz önünde bulundurulması gereken başka bir koşul daha

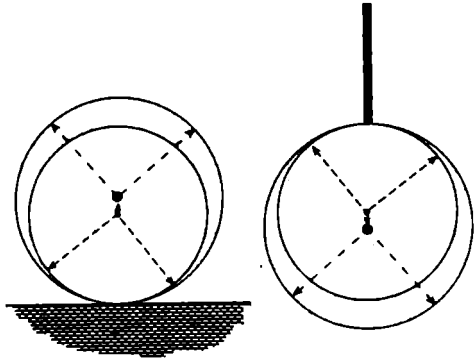
var. Bu da malzemenin eşyönlü (isotropic) olup olmadığı, yani genleşmenin değişik yönler için farklı olup olmadığı koşuldur. Doğa da, hepsi olmasa da birçok madde eşyönlüdür. Yine de bazı maddeler her yönde aynı miktarda genleşmez. Örneğin x değerinin x ve y yönleri için farklı olduğunu düşünelim. Bu durumda çizgi yine doğru parçası olarak kalacaktır ama eğimi değişecektir (bunu kendi kendinize kanıtlayın). Daha karmaşık durumlar için bir sonraki problemi çözene dek bekleyin. Yetkililerin Boris'e doğruyu söylemiş olmalarının ne kadar olası olduğunu da tartışabilirsiniz. Eğri bir çizgi olasılığı da hepten gözden ırak tutulmalıdır!

2) Enflasyon ve Para: Delik genişler. Deliğin delinmediğini, yalnızca sınırlarının para üzerine çizildiği farzedin. Bir önceki sorudaki termik genleşmenin tanımı gereği, çemberin genişleyeceği ve para ısıtıldıkça yarıçapının artacağı açıktır. Yani

$$r \rightarrow (1+\alpha\Delta T)r \quad \text{olacaktır.}$$

Yani delik çemberin içindeki maddenin genleştiği gibi genişleyecektir. Marina niçin Boris'e inanmaz? Simit (ya da doughnut, özellikle ortası delik olanları) pişiren herkes genişlemenin termik genleşmeden çok hamurun kabarmasıyla ilgili olduğu bu etkiyi gözlemlemiştir.

3) Genleşmenin Yeri: Masa üzerindeki küre için daha fazla enerji gerekir. Küreler ısıtıldığında iki şey olur: Sıcaklık artar ve küreler genleşir. Bu genleşmenin iki durum için etkileri farklıdır. Asılı kürenin ağırlık merkezi, kürenin yarıçapı arttığı için alçalacaktır; masadaki kürenin ağırlık merkezi ise aynı miktarda yükselecektir.Yani asılı küre alçalacak, masadaki küre yükselecektir. Asılı kürenin yerçekim potansiyel enerjisi azalacak, masadaki küreninki ise artacaktır. Yerçekimsiz ortamda bu enerji değişimleri, küreleri ısıtmak için gerekli enerji miktarına eklenmelidir. Böylece, masada duran küre için daha fazla enerji gerekir.



Enerji farkını şu şekilde hesaplayabiliriz: Bu bölümün birinci ve altıncı sorularının çözümlerinde de verildiği gibi doğrusal termik genleşme katsayısı

$$l = l_o\,(1 + \alpha\Delta T),$$

bağıntısıyla tanımlanabilir. Burada T sıcaklık l ise cismin uzunluğu ya da cisim üzerindeki herhangi iki noktanın uzaklığıdır. Bu durumda sıcaklık ΔT kadar arttığında kürelerin yarıçapları R'ın $\alpha R\Delta T$ kadar artmasını bekleyebiliriz. Yerçekim potansiyel enerjisi bu durumda

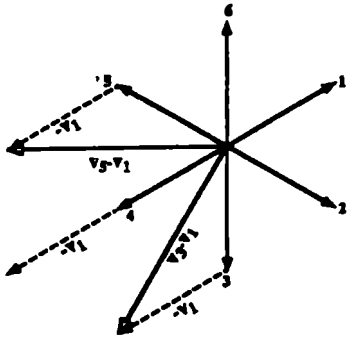
$$mg\Delta h = 3g\alpha R\Delta T \quad \text{olacaktır.}$$

İki küre arasındaki enerji farkı, bu miktarın iki katı olacaktır. Kütle ve kürenin yarıçapı artıkça, farkın da artacağı unutulmamalı. Açıkçası, bu etki aynı kütleye sahip daha büyük yarıçaplı içi boş küreler içindaha abartılı olacaktır. Bu verilerin ışığı altında, büyük bir küre masa lambası yüksek enerji kaybına neden olacaktır.

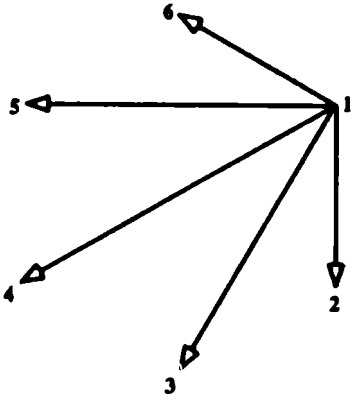
Bu kayda değer etkilerin, sizin masa lambanız ya da herhangi bir yekpare veya içi boş küre biçimindeki aletiniz için ne kadar olduğunu

hesaplamayı size bırakıyoruz. Bakırın genleşme katsayısı $17.6 \times 10^{6}/K^{\circ}$ 'dir.

4) İhtiyar Delikanlı Mazay Sizi Friedman-Desitter Evrenine Davet Ediyor!: Tavşanlardan birini "en zeki" diye belirleyelim. Bu bir numaralı tavşan bizim referans noktamız olacak. Evren ve her şey bu tavşana göre $-v_1$ hız vektörüyle hareket edecektir. Galile dönüşümünü gerçekleştirmek için $-v_1$ hız vektörünü, referans sistemindeki bütün vektörlere ekliyoruz.



Yeni sistemde, birinci tavşanın hız vektörü (olması gerektiği gibi) sıfırdır. Diğer tavşanlar içinse, bir numarının merkezde durup 2-6 numaralı tavşanların kendisinden uzaklaşmasını izlediği yeni vektörler elde ettik! Diğer tavşanlar için konum vektörleri,



her zamanki yöntemle, hız vektörlerinden yol= hızxaman formülü ile türetilmiştir. Bir numaralı tavşan, daha doğrusu bütün diğer tavşanlar için $(r_i-r_j)=T(v_i-v_j)$ sağlanır. Burada r_i ve r_j konum vektörleri, T ise zamandır. Bir numaralı tavşanı şaşırtan hepsinin aynı hızla koştuğunu bilmesine rağmen, onun bakış açısından diğer tavşanların hız vektörlerinin ve konumlarının farklı görünmesi ve hız vektörlerinin, konumlarıyla tamamen orantılı olmasıdır. Bu durum, gök cisimleri için, örneğin galaksiler, vb. için, gözlenen durumun aynıdır ve Friedman -DeSitter Genleşen Evreni diye adlandırılır. Friedman-DeSitter evreninde herhangi iki noktanın (galaksinin) göreli hız vektörleri, noktalar arası uzaklıkla orantılıdır. Yani Delikanlı'nın tavşan problemi evrenin genişlemesine, aslında bütün simetrik genleşme problemlerine biçimsel bir analojidir. Bu problemin kozmolojik yorumu şöyledir:

$$v_{ij} = Hr_{ij}$$

Burada i ve J iki galaksiyi, V_{ij} galaksilerin göreli hız vektörlerini ve V_{ij} de aralarındaki uzaklık vektörünü göstermektedir. H sabiti, bulan kişinin şerefine Hubble Sabiti diye adlandırılmıştır. Bu denklem birinci tavşanın gözlemiyle karşılaştırıldığında, Hubble Sabiti'nin, Büyük Patlama'dan bu yana geçen zamanın çarpmaya göre tersi olduğu görülür. Bu da Hubble Sabiti'nin aslında sabit olmadığını, zamana bağlı olarak azaldığını gösterir. Bu doğru olabilir, ya da olmayabilir, ama insan varlığı evrene kıyasla öyle kısa bir zaman dilimini kapsar ki, bu sabitte büyük bir değişiklik gözlemlemeyi bekleyemeyiz.

5) Referans Sistemleri ve Yıldızlararası Hareket (Kaçışan Tavşanlar): Yıldız kümesindeki bütün yıldızlar bu ikinci yıldızdan da uzaklaşıyor görünecektir. Yine(ikinci yıldızdan gözlendiği durumuyla, yani göreli) hız vektörleri, yıldızdan olan uzaklıkla doğru orantılıdır! Bir önceki soruya ve çözümüne bir kez daha bakın. Bu soruyu, altı tavşandan herhangi birini, referans noktası seçerek çözebilirdik, yanıt da

değişmezdi! Yıldızların hızları aynı olmadığı halde, astronotların yıldızını (ya da yıldız kümesindeki herhangi bir yıldız,) referans alırsak ve göreli hız vektörlerini, İhtiyar Delikanlı'nın tavşanları için yaptığımız gibi vektör toplama işlemiyle bulursak, astronotlar, çevredeki bütün yıldızların, onlarla ve yıldızlarla olan uzaklıklarıyla orantılı hız vektörleriyle uzaklaştıklarını gözlemleyeceklerdir. Bunu, grafiksel olarak değişik hızlarla denemenizi öneririz. Diğer bir deyişle, yıldız kümesini gözlemlemek için seçeceğimiz her nokta "evrenin merkezi" imiş gibi görünecektir. Uzay gemisinin "merkezi" yıldız yörüngesindeki dönme hareketini ihmal ediyoruz, çünkü yörünge hareketinin hız vektörleri ve yörüngede oluşan uzaklık farkları yıldızlararası hız vektörleri ve uzaklıkları ile karşılaştırıldığında sonsuz küçüktür.

6) Termik Genleşme ve Kozmik Kediler: Bu soruda ve bir önceki soruda belirtildiği gibi, herhangi iki nokta arasındaki doğrusal termik genleşme katsayısı α, $l=l_o(1+\alpha\Delta T)$ denklemi ile belirlenir. Çatı üzerinde i ve j gibi herhangi iki nokta alıp bunların arasındaki r_{ij} vektörünün uzunluğunu düşünelim. Sıcaklığın ΔT gibi küçük bir miktar arttığını varsayalım α'nın tanımı gereği, noktalar arasındaki $|r_{ij}|$ uzaklığı, $dr=\alpha\,|rij|\,dt$ kadar artmalıdır. Sıcaklık artış hızı dt/dt ise (bir saniyedeki derece artışı), göreli hız vektörü ya da $|r_{ij}|$'nin artış oranı şu denklem ile elde edilebilir:

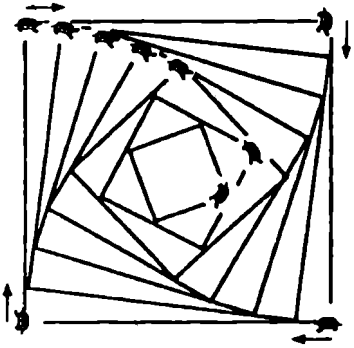
$$v = \frac{d|r_{ij}|}{dt} = \frac{d|r_{ij}|}{dT}\left(\frac{dT}{dt}\right) = \alpha\, r_{ij}\left(\frac{dT}{dt}\right).$$

Böylece sac üzerindeki herhangi iki noktanın arasındaki hız vektörü, noktalar arası uzaklık ile orantılı olacaktır. Eğer ısınma hızı dt/DT sabit ise, bütün oran katsayısı zaman içinde sabit olacaktır. Bu durumda Friedman-DeSitter evrenine benzer bir durumdur.

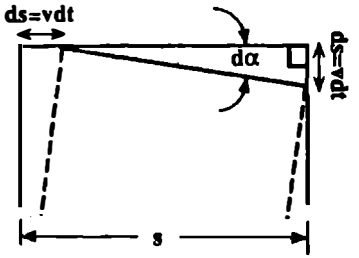
Gerçekte, sac dan Friedman-DeSitter evrenine başka bir örnektir. Çatının düzgün genleşmesinin sonucu, üzerindeki cisimlerin birbirilerinden aralarındaki uzaklıkla orantılı göreli hız vektörleri ile uzak-

laşmasıdır. Genleşme katsayısı ve ısınma oranının kozmolojik önemi de vardır; bu keşfi size bırakıyoruz. Hem bundan kedilere ne?

7) Masha'nın Matematiksel Kaplumbağaları: İpucunu izlerseniz, aşağıdaki birinci şekilde gösterilen durumu elde edersiniz.



Kare dönerek küçülecektir, kaplumbağalar sarmal bir yol izleyerek başlangıçtaki karenin merkezine doğru ilerleyeceklerdir. Şekilde doğrudan görülebileceği gibi, karenin kenarının küçülme hızı, kaplumbağaların sabit hızları v olacaktır. Yani kenar uzunluğu s'i zamanın bir fonksiyonu olarak yazabiliriz: $s=s_o-vt$. Burada s_o başlangıç uzunluğunu göstermektedir. Karelerin şekli değişmez, ama kenarları zamana bağlı ve doğrusal olarak küçülür. Kaplumbağalar $t= s_o/v$ zaman birimi sonra merkezde buluşurlar. Daha sayısal ve daha resmi bir çözüm isterseniz ikinci şekle bakın.



Eğer s karenin kenar uzunluğu ise $ds \cong -vdt$ olur, çünkü $d\alpha$ açısı çok küçüktür. (Çok küçük açıların sinüslerinin yaklaşık olarak açıların kendisine eşit olduğunu anımsayın). Başka bir yöntem olarak, bu ilişkiye ulaşmak için Pisagor Teorimini kullanabiliriz. Her iki durumda da sonuç denkleminin, s'i zamanın bir fonksiyonu olarak verecek şekilde integrali alınabilir. Sonuç tanıdıktır: $S=S_o-vt$. Karenin dönüşü de şekilde görülen α açısı ile temsil edilebilir.

$$d\alpha = \frac{-v dt}{s}$$

olduğuna göre ve s'in zaman ile olan bağıntısı bilindiğinden,

$$\alpha = -\int_0^t \left(\frac{v}{s_o - vt'}\right) dt' \text{ ya da } \alpha = +\ln\left(1-\frac{v}{s_o}t\right)$$

α açısı, t, s_o/v değerine yaklaştıkça artar ve bu değerde sonsuz değeri olur. Kaplumbağalar ne kadar ağır yürürse yürüsün, karenin kenar uzunluğu sıfıra yaklaşırken açı çok hızlı artar! Kaplumbağaların izlediği yolu belirlemeyi size bırakıyoruz. Sonuç olarak bulacağınız sarmalın (spiral) tanımıdır.

Bölüm 8'in Çözümleri



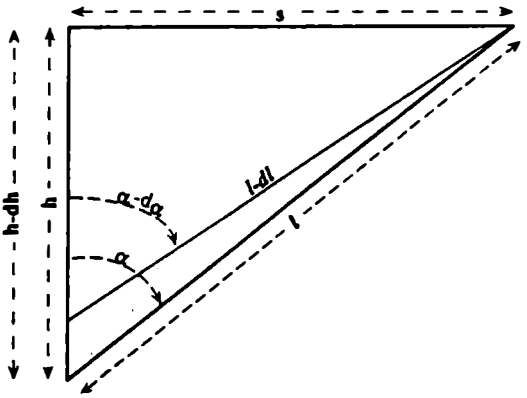
İpleri Öğrenirken

1) Aleksandr ve Komutan: Suyun direnci ihmal edilebilir ve eğer yalnızca eylemsizliğe bağlı kalırsak, Newton'un İkinci Yasası uygulanabilir. Balık tartısı sabit bir kuvvet kullanarak gemiyi suda çeker. F=Ma ile başlarsak, İkinci Yasa'nın iki kez integralinin alınması, gidilen yolun tanımı olarak $x=(F/2m)t^2$ eşitliğini verecektir. Aleksandr yolu bir şerit metre ile, zamanı kronometresi ile ve uygulanan kuvveti de balık tartısıyla ölçer. Kayığın kütlesi (kilogram olarak) $m= (F/2x) t^2$ ile verilebilir. Bu ölçüm, dalgası ve rüzgarsız sakin bir günde yapılmalıdır. Aleksandr'ın balık tartısına göre, 200.000 kilogramlık (200 tonluk) bir tekne 20 saniyede 1 metre ilerleyecektir (1 kilogramlık kuvvetin yaklaşık 20 Newton olduğunu, anımsayın! 100 kilogramlık kuvvet birkaç denizcinin birden balık tartısını çekmesiyle sağlanır).

Fakat Aleksandr'ın mühendisinin de bildiği gibi geminin kütlesi işe karışan tek eylemsizlik kuvveti değildir. Tekne ilerlerken bir miktar su ta tekne ile birlikte sürüklenir. Bu su da bir ivme kazanmıştır. Su altında, bir cismi fırlatmayı ya da su altında yürümeyi deneyin. Karşılaştığınız direnç gerçek olup hidrodinamikçilerce gayet iyi bilinir. Bu "edimsiz kütle" (virtual mass) (teknenin gövde biçimine bağlı olarak) teknenin kütlesinin 1/3'ü kadar bile olabilir, bu yüzden hesaba katılmalıdır. Rahatlıkla söyleyebiliriz ki, Aleksandr tuttuğu balıktan daha büyük bir balık yakalamıştır. Son yıllarda yetersiz donanım ve kararlı mafya karşısında bu tür bir deha Rusya'da yaygınlaşmaya başladı.

Böyle yöntemlerin Birleşik Devletler'de de kullanıldığı kulağımıza çalındı.

2) Aleksandr'ın Balığını Boşaltırken: Kretinov yine hatalı. α açısının sıfıra yakın olup ipin dik olarak indiği durum incelendiğinde hata açıkça görülür. Bu durumda ipler balık sepetini dikine çekmektedir. ve u ile v vektörleri hemen hemen tamamiyle özdeş olmalıdır. Ama Kretinov'un çözümü u=2v eşitliğini verir ki, bunun yanlışlığı apaçık ortadadır. Kretinov bu problemi, vektör bileşenlerinin toplanmasıyla yapılan sandığa ve iplere etkiyen *kuvvetlerin* hesabı ile karıştırmıştır. Sorudaki şeklin dikkatle incelenmesi ve "v vektörünün" aşırı serbest kullanımı, problemin yaklaşımından şüphe duymamıza yol açar. Gerçekte, problemi çözebilmek için kuvvetleri değil de, hızları ya da en azından konumları hesaplamalıyız. Vektör ayrıştırması ve toplamı bir çözüm değildir. Her ip ve makara tamamen benzer davrandığından (öyle söyleniyor), problem şekilde görüldüğü gibi sistemin bir yanı için çözülebilir.



Makara ve balık sandığı arasındaki s yatay uzaklığı sabit kalırken, makara ile sandık arasındaki ipin uzunluğu l, v sabit hızıyla kısalır. Bu düşey uzaklık h ile α açısının değiştiği anlamına gelir. Elimizde iki kenarı (h ve l) ve bir açısı (α) değişen bir dik üçgen var. Bu dik üçgen için Pisagor bağıntısı şu şekilde yazılabilir:

$$s^2 + h^2 = l^2$$

Türevi alınınca, bu eşitlik

$$2hdh = 2ldl \quad \text{ya da} \quad \frac{dh}{dl} = \frac{l}{h} = \frac{1}{\cos\alpha}$$

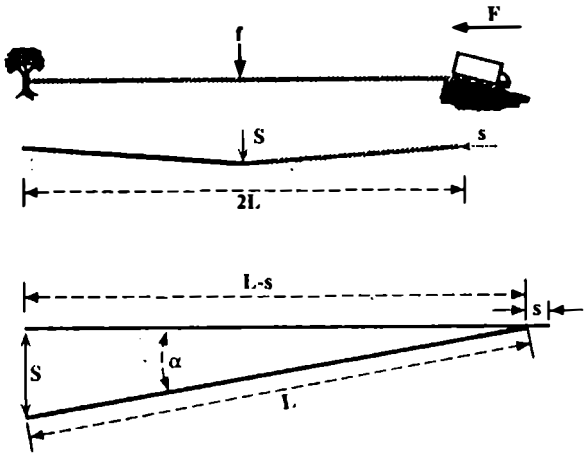
haline gelir. Sepetin yükselme hız vektörünü bulmak için yazabiliriz.

$$u = \frac{dh}{dl} = \left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)\frac{dl}{dt} = \frac{v}{\cos\alpha}$$

3) Aleksandr'ın Balıkları Sesten Hızlı: Hayır, bu mümkün değil. Eğer α açısı gerçekten 90° olabilse ve ipler de çok özel bir maddeden yapılmış olsaydı, daha iyimser olabilirdik. Başlangıçta belirtelim ki, α açısı 90°'ye yaklaşırken, iplere uygulanan kuvvet sonsuza yaklaşır. Kretinov'un yaklaşımı, $Mg=2T\cos\alpha$ ile verilen iplere uygulanan kuvvetlerin bulunması için kullanılabilir. Burada, M sandığın kütlesi, g yerçekimi ivmesi, T ise iplerdeki gerilimdir. Bu denklem T için çözüldüğünde, α 90°'ye yaklaşırsa, T'nin de sonsuza gideceği açıktır. α açısının 90°'ye yaklaşabilmesi için çok güçlü iplere ve çok güçlü denizcilere gerek vardır!

Aleksandr'ın tayfası için durumu daha da güçleştiren bir gerçek de, özel rölativite teorisinin, ışık hızına yaklaşıldıkça formüldeki eylemsizlik kütlesi M'in de sonsuza yaklaşacağını söylemesidir. Son olarak, iplerin hızlı çekilmesinin bir işe yaramayacağını, çünkü iplere uygulanan herhangi bir kuvvetin ipte yayılma hızının üst sınırının ses hızı olduğunu belirtelim. Denizcilerin ve ipin yeteri kadar kuvvetlioldukları durumda, $\cos\alpha$'nın küçük bir değeri ve iplerindaha hızlı çekilmesi ile Aleksandr'ın balıkları sesten hızlı yükselebilir.

4) Çamura Saplanmış: İpi kullanmak için bir ucunu bir ağaca, diğer ucunu da aracınıza bağlamanız gerekiyor. İp çok sert olmalı. Aslında, sonsuz kuvvetler uygulanacaksa, sonsuz sert ve sonsuz sağlam olmalıdır. İp resmi talimatnamede bu şekilde tanımlandığına göre, dikkate değer bu özellikleri taşıdığını varsayacağız.



Şekilde de görüldüğü gibi, ipe ortasından bastırmanız gerekiyor. İp, görüldüğü gibi, kamyonu bize doğru çekecek. Bu basit bir "makine"dir. Oluşan kuvvetleri bulmak için edimsiz iş (virtual work) ilkesinden yararlanabiliriz. "Giren iş", ip f kuvveti ile S yüksekliği kadar itildiğinde elde edilen fS'dir. "Çıkan iş" ise kamyonu uygulanan F kuvveti ve kamyonun hareket yolu uzunluğu s'in çarpımı olan Fs'dir. Edimsiz iş ilkesi statik denge konumunda net edimsiz iş toplamının sıfır olmasını gerektirir. Bu durumda fS=Fs olacaktır. Makinenin mekanik avantajı F/f artık bulunabilir.: F/f=S/s. Şimdi S/s oranını bulmamız gerekiyor. İp gerçekten sonsuz sert ise ve esnemiyorsa, alt şekilde görüldüğü gibi Pisagor teoremi böyle kullanılabilir:

$$L^2 = S^2 + (L-s)^2 = S^2 + L^2 - 2Ls + s^2.$$

Genel olarak, kamyonun hareket yolu uzunluğu s küçük olmalıdır. ipin iki konumu arasındaki açının küçük olduğunu görebiliyoruz, dahası eğer s küçük değilse, mekanik avantaj F/f=S/s büyük olmayacaktır.Bu nedenle eşitliğin sağındaki son terim s^2'yi ihmal edeceğiz. Şimdi denklem mekanik avantajı bulmak için kolayca çözülebilir:

$$\frac{S}{s} = \frac{2L}{S}$$

Eğer ip çok uzunsa (çok büyük L) ve ipin ortasını küçükmiktarda bastırırsak (S uzunluğu L ile karşılaştırıldığında çok küçüktür), mekanik avantaj çok büyük olabilir; S' sıfıra yaklaştıkça, yetkililerin iddia ettiği gibi, mekanik avantaj sonsuza yaklaşır. (Yani Politik olarakhatasız iple sonsuz kuvvete ulaşılabilir). Tabbi ki, kamyonun hareket yolu uzunluğu s, S'den bile küçük olacaktır. Kamyonu bu küçük miktarda çekmek gerekir, geriye kaymaması için tekerleklere takoz koyup, ipi tekrar bağlayın ve tekrar bastırın -orada çok uzun süre kalmanız gerekecek. Çamurun donmasını da bekleyebilirsiniz, ama bu arada kar yağarak problemi başka bir biçime dönüştürebilir. En iyisi yardım getirmektir.

Bütün bunların, ipin sonsuz sağlam ve sonsuz sert olduğu durumda gerçekleşebileceğini anımsatalım. İp esneyecek olursa kamyonun hareket yolu **s** pratik olarak yitecektir. Teorinin zaferi sonsuz kuvvetle çekildiğinde bile esnemeyen ve kopmayan bir ip gibi olağandışı bir malzemenin varlığına bağlıdır.

Bölüm 9'un Çözümleri

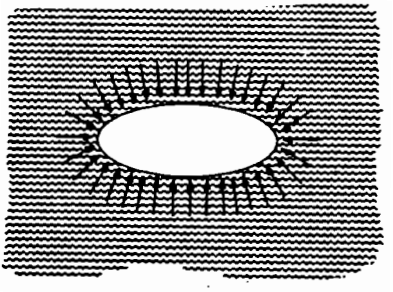


Yerçekimi ve Harmonik Osilatör

I) **Güç Dengesi:** Evet, denge bozulur. Parmağınızı suya sokuğunuzda, parmağınıza yukarı doğru bir kuvvet etkir. Arşimet'in Yüzen Cisimler Yasası'na göre, sıvıya batırılan ya da yüzen her cisme, cismin taşırdığı sıvının ağırlığı kadar bir kuvvet etkir. Newton'un Üçüncü Yasası'na göre ise, parmak da suya, suyun parmağa uyguladığının ters yönünde bir kuvvet uygular. Bu kuvvet de bardağa, ardından teraziye etkir.

Arişimet'in Yüzen Cisimler Yasası, mekaniğin temel kavramlarından kolaylıkla türetilebilen yüksek kesinlikte geçerli fizik yasalarına iyi bir örnektir. Bu yasanın onyedinci yüzyılda Blaise Pascal tarafından yapılan kanıtlaması bilimler tarihinin en şık akıl yürütmelerinden birisidir. Bu kanıtlama şöyledir:

Dengede olan ivmesi bir cisme etkileyen kuvvetler toplamının sıfır olduğunu anımsayalım. Başka hiçbir temele ihtiyacımız yok. Sıvıya bütünüyle batırılmış bir cismi ele alalım.



Çevresindeki suyun cismin yalnızca dış yüzeyine etkileyeceği açıktır. Arşimet kuvveti cismin bütün yüzey noktalarına etkiyen kuvvetlerin bir toplamı olarak cismin iç tarafında ne bulunduğundan habersizdir. Gerçekte, bütün cismi çıkarıp suda kapladığı hacimde suyla (ya da herhangi bir şeyle!) yer değiştirdiğimizde, Arşimet kuvveti değişmemelidir. Cisim, tamamen benzer biçimde ve büyüklükte bir su kütlesi ile yer değiştirebiliyorsa, çevresindeki suyla mekanik denge içinde demektir. Yani, cismin yerini alan su kütlesinin ağırlığı, bu kütleye etkiyen kuvvetlerle -Arşimet kuvveti ile- bütünüyle karşılanır. Buna bağlı olarak Arşimet kuvveti- batırılan cisimler üzerindeki toplam kuvvet- eş hacimli suyun ağırlığına eşittir. Kuvvet cismin şekli ya da yapısı ile değil, yalnızca cismin yerine konan su ile bağlantılıdır. Bu kanıt, aynı akıl yürütmeyle, kolayca yüzen cisimlere de uygulanabilir.

Arşimet kuvveti hazır yiyeceklerin ve barkodların bulunmadığı Rusya'da günlük yaşamın bir parçasıdır. Gıdalar genellikle, alıcının gözü önünde terazilerde tartılır. Bu durum satıcı için birçok hile fırsatı yaratır. Ekşi krema pazarlaması sanatının bir parçası da krema içindeki parmaktır. Topla kazanç, bazen yarın onuce (yaklaşık onbeş gram) kadar,satıcının üstünlüğünün bir kanıtıdır. Halka açık yemek yerlerinde ekşi kremaya parmakla, sütle ya da yoğurtla değil de, profesyonelce kağıt peçete ile hile katılır. Akşamları ekşi kremaya yatırılan peçeteler sabaha kadar çözünüp kremayı koyulaştırır ve ağırlaştırır.

2) Vanya ve Su Kovası: Hayır. Arşimet'in Yasasını anımsayın: kovada yüzen buzun toplam ağırlığı, yerini aldığı suyun ağırlığına eşit olmalıdır. Erime kesinlikle donmuş suyun kütlesini (ya da ağırlığını) değiştirmez ve erimiş suyun hacmi de buzda yer değiştiren suyun hacmini aynen karşılar! Yani erime tek başına kovanın taşmasına neden olamaz. Ama Vanya'nın annesini sevindirelim. Erime hacim değişikliğinin tek nedeni değildir. Suyun önemli bir özelliği en yoğun haline 4 °C'de ulaşmasıdır. 0°C ile 4 °C arasında suyun hacmi sıcaklık arttıkça azalır. 4°C üzerindeki sıcaklıklarda diğer her şey gibi genleşir.

Yani erime sırasında kova taşmayacak ve ısındıkça su düzeyi önce düşecek sonra yükselecektir. Eğer evin girişi yeterince sıcaksa termik genleşme taşmaya neden olur. Girişin ısıtılmadığı ve kış boşunca sıcaklığın 0°C'nin üzerine çıkmadığı Rusya'da herhangi bir şeyin termik genleşmesi söz konusu değildir.

3) Yedekteki Mavna: Hayır, eklememelisiniz. Yerçekimi işi ve yerçekimi kuvveti burada ihmal edilebilir. Yüzen her cisme etkiyen yerçekimi kuvveti sıvının kaldırma kuvveti (Arşimet) ile karşılanır. Bunun şaşırtıcı (sezgilerin aksine) bir sonucu, sudaki hızı sabit kabul edildiğinde mavnayı nehrin yukarısına taşımak ya da nehrin aşağısına taşımak için aynı miktarda güç gerektiğidir! (Uygulamada bu hiçbir zaman gerçekleşmez!)

4) Işınla Beni, Scotty!: Hayır, işe yaramaz Hattâ astronotlar daha bile zor durumda kalır. Yerçekimi ve uzay gemisinin hareketinin, astronotun gövdesindeki her kütle merkezine olan kuvvet etkisi suya daldırmadan bağımsız olarak m(a+g)'dir. Suyun kaldırma kuvveti yalnızca gövdenin yüzeyini etkiler, ivmenin etkilerini ortadan kaldırmaz. astronotlar uygun katı desteklerden yoksun kaldıklarından daha rahatsız bir konumda olacaklardır. Buna ek olarak etkileyen yerçekimi kuvvetindeki artışla birlikte gövdeye etkiyen hidrostatik kuvvetler de artacaktır. Astronot 2 ayak suyun altındaysa ve etkiyen toplam ivme 20 g ise, bu 1 g'daki 40 ayak suyun altında olmakla aynı etkiyi yaratacaktır.

5) Saati Ayarlama: Sarkacın periyodu T şu denklem ile bulunabilir.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Burada 1 boyu g de yerçekimi ivmesidir. Yerçekimi ivmesi g sabiti, aslında iki etkinin toplamıdır: Yerçekimi ve merkezkaç etkileri. Merkezkaç bileşeni sarkacın toplam ivmeye //1000'lerdeki, bir oranda katkıda bu-

lunur. Merkezkaç ivmesi uygun oranda toplam ivmeden düşülmelidir. Ekvator yakınlarındaki yerler dünyanın dönüş ekseninden daha uzakta oldukları için merkezkaç ivmesi daha büyüktür, böylece gözlemlenen yerçekimi ivmesi g Fransa'da olduğundan daha azdır. Yani Fransa için ayarlanan sarkaç boyu Kuzey Afrika için çok uzun olacaktır. T periyodunda ki farklılıkların sonuçları önemlidir. Eğer T 1 saniye ise saat günde 1. dakika geri kalır. (tam yüksekliğe bağlı olarak). Sarkacın uzunluğunun g'deki düşüşü telafi etmek için azaltılması gerekir; Huygens'in arkadaşına tavsiyeside budur. Huygens kesinliği artırmak için escapement* ve sikloidal sarkacı da içeren birçok buluş gerçekleştirmiş, ama en azından o zamanlar, g'deki değişimi hesaba katmamıştır. Aynı etki yerel kütle yoğunlaşması olduğunda da gözlenecektir. Örneğin küçük bir demir madeni (veya 10 km^3 büyüklüğünde hematit, magnetit, veya takonit) yatağı aynı etkiyi gösterir.

6) Asansördeki Saat: Sarkacın periyodu P yerçekimi ivmesi ile ters orantılıdır, yani, $T\alpha g^{-1/2}$. Etkiyen yerçekimi ivmesi asansör yukarıya doğru ivmeli hareket ederken artar, aşağıya doğru ivmeli hareket ederken azalır. Bu durumda saatin, asansör yukarı çıktığı zaman ileri gideceği (sarkacın periyodu azalacak), aşağı indiği zaman ise geri kalacağı açıktır. Net değişimi bulmak için kazanımları ve kayıpları analiz etmemiz gerekiyor. Yukarı doğru ivmeli hareket için $Tu\alpha (g-a)^{-1/2}$, aşağı doğru ivmeli hareket için $T_d\alpha (g-a)^{-1/2}$ yazılabilir. Asansörün her yolculuğunda, yönden bağımsız olarak, toplam süresi 2 t_o olan eşit süreli bir yukarı, bir de aşağı hareket olacaktır, çünkü yolculuk asansör dururken başlayacak ve bitecektir. Asansör yukarı çıkarken saatin kaydetiği zaman $t^1=t_o$ (To/Tu) olacaktır. Burada To asansör sabitken veya sabit hızla ilerlerken saatin periyodu, Tu ise asansör yukarı çıkarken saatin periyodudur. Benzer şekilde aşağı inerken saatin kaydettiği zamanı $t^{11}=t_o$ (To/Td) şeklinde yazabiliriz. Şimdi saatin kaydettiği toplam zaman olan

---

* Zembereğin sağladığı kuvveti mekanizmaya belli periyodlarla ileten saat düzeni

$$t4+t''=t_o\ [(1+a/g)^{1/2}+ (1-a/g)^{1/2}]$$

ifadesini ofisteki saatin ölçtüğü $2t_o$ zamanı ile karşılaştırabiliriz. Burada asansör ivmesinin yerçekimi ivmesinden küçük olduğu durumlarda köşeli parantez içindeki ifadenin 2'den küçük olacağını kestirebiliriz. (Bu ifadenin çeşitli kanıtlarını çözümün sonunda bulabilirsiniz.) Eğer köşeli parantez içindeki ifade 2'den küçük ise $t'+t''\leq 2t_o$ eşitsizliği sağlanıyor demektir. Yani asansör saati ofis saatinden geri kalmaktadır. Asansörcü hakettiğinden az ücret alıyor.

Kanıtlarımız aşağıdadır.

Her durum için x=alg geçerlidir.

Gerçek her x için,

$$x^2>0 \text{ ise } 1-x^2<1,\ 2(1-x^2)^{1/2}<2,\ (1-x)+(1+x)+2(1-x^2)^{1/2}<4 \text{ olur.}$$

Eşitsizliğin sol tarafı

$$[(1+x)^{1/2} + (1-x)^{1/2}]^2,$$

şeklinde yazılabilir. Bunu ifadedeki kare alma işlemini yaparak kontrol edebilirsiniz. Her iki tarafında karekökü alındığında köşeli parantez içindeki ifadenin her zaman 2'den küçük olduğu görülür. x'in 1'den küçük olması gerektiğinden (yolcuların tavanı delip geçmelerini engellemek için ivmenin g'den küçük olması kararını aldık), eşitsizliği kanıtlamak için Taylor serilerini kullanabilirsiniz.

7) Atlıkarıncadaki Mum: Mumun ışığı içeriye doğru, atlıkarıncanın merkezine doğru eğilir. Bu soruyu çözmek için, bir önceki soruda olduğu gibi, eylemsiz kuvvetlerle ilgilenmeniz gerekir. Newton dinamiğinin en temel uygulamalarında bir cisme etkiyen kuvvetlerin toplandığını herhalde biliyorsunuzdur. Eğer toplam sıfır ise, momentum değişmez. Bu türden eylemsiz referans sistemleri karmaşık değildir. Asansörde bir sarkacın yer aldığı önceki problemin eylemsiz bir sistem

içerisinde incelenmesi asansörün ivmesi dolayısıyla zordur. Dünyaya göre ivmeli hareket eden sistemler *çoğunlukla* eylemsiz olmayan referans sistemleridir. Birinin diğerine göre $a_o(t)$ ivmesiyle hareket ettiği iki referans sistemini ele alalım. Laboratuvardaki (eylemsiz) sistem ölçüldüünde, herhangi bir a' ivmesi ivmeli sistemin içinde ölçülen a' ivmesi ile $a_o(t)$ ivmesinin toplamına eşit olmalıdır. Yani

$$a = a' + a_o(t).$$

olmalıdır. Bu bağıntı iki sistem için geçerli $r=r'+r_o$ özelliğinden türetilmiştir. Zamana göre türev almak yeterlidir. Şimdi Newton'un

$$\Sigma F_i = ma$$

yasası laboratuvar sisteminde kullanıldığında elde ettiğimiz

$$ma' = ma_o + \Sigma F_i.$$

eşitliğidir. Burada a' yeni eylemsiz olmayan sistemdeki ivmedir ve Newton'un yasasının a' için geçerli olmayacağı açıktır. Kuvvetler toplamına yani "yapay" bir kuvveti, $-ma_o$ kuvvetini eklememiz gerekir. "Eylemsizlik kuvveti" de denilen bu kuvvetin yalnızca ivmeli devinen sistemde bir anlamı vardır. Bu kuvvet eylemsiz olmayan sistemlerde gerçek, elle tutulabilir kuvvetlere eklenmelidir.

Mum ışığımız atlıkarınca ile birlikte ω açısal hızı, yani R atlıkarıncanın merkezinden uzaklığı olmak üzere $\omega^2 R$ ivmesi ile dönmektedir. Mum atlıkarıncaya göre sabit durmaktadır ama atlıkarıncanın dönüşü ve bunun sonucu olan ivme, bir merkezkaç eylemsizlik kuvveti yaratmaktadır. Bu kuvvetin mutlak değeri $ma_c=m\omega^2R$'dır. Herhangi bir kütle için bu ivme dışa doğrudur. Ama mum alevi çevresindeki soğuk havadan hafif olduğu için yüzme kuvvetlerinin etkisi altındadır. Böylece alev içeriye, dönme merkezine doğru eğilir. Eylemsiz kuvvetlerin en önemli özelliği bir cismin bütün bileşenlerine etkimeleri ve cismin kütlesi ile her zaman orantılı ol-

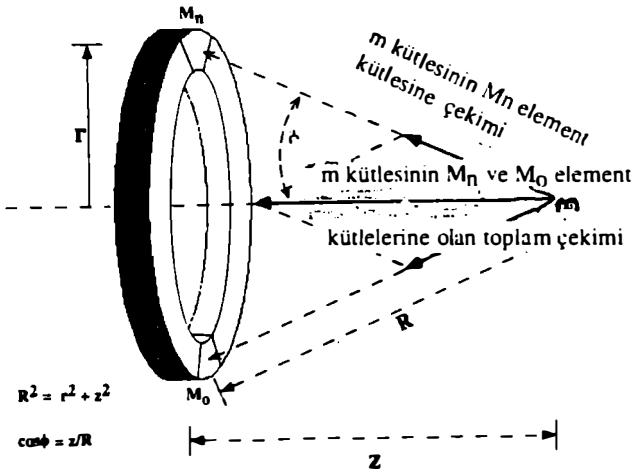
malarıdır. Bu nedenle Einstein eylemsiz kuvvetlerin yerçekimi kuvvetlerine denk olduğunu ilan etmiştir. "Denklik ilkesi" adı verilen bu önerme genel rölativite (Einstein'ın Yerçekimi Teorisi)'nin temel taşı olmuştur.

8) Ay Gel-Gitlere Nasıl Neden Olur: Dünya Ay ile karşılaştırıldığında daha büyüktür ve aralarındaki uzaklığa rağmen önemli bir kütledir. Çekim kuvveti Ay'ın merkezine doğrultulmuştur ve (Isaac Newton'a göre) Ay'ın merkezi ile dünyanın herhangi bir noktası arasındaki uzaklığın karesi ile ters orantılıdır. Fakat dünyanın aya bakan yüzü aya, merkezinden 4000 mil, aksi taraftaki yüzünden ise 8000 mil daha yakındır. Yerçekimi kuvvetleri arasındaki bu farkın kendisi gel-gitlere neden olur. Daha ayrıntılı olarak, gel-git kuvveti yerçekiminin gradyantı tarafından oluşturulur ve böyle olduğu için de yaklaşık olarak ayın merkezine olan uzaklığın kübü ile ters orantılıdır (Eğer isterseniz bunu Matematik ve Newton'un Evrensel Çekim Yasası'nı kullanarak gösterebilirsiniz. Daha neşeli bir gösterim için Larry Niven'in bilim kurgu öyküsü "Nötron Yıldızı"na bakın).

9) Kahvaltı Sofrasında Yerçekimi: Newton'un Yerçekimi Yasası herhangi iki **yoğun** kütle arasındaki çekim kuvvetinin aralarındaki uzaklığın karesi ile ters orantılı olduğunu söyler:

$$F(R) = G\,\frac{Mm}{R^2}$$

Burada G çekim sabiti, R, M ve m kütleleri arasındaki uzaklık, F(R)de çekim kuvvetidir. Yani nokta şeklinde iki cismin en azından basit geometrik cisimlerin, arasındaki çekim kuvveti cisimler yakınlaştıkça arasındaki çekim kuvvetini ele alalım.



Küre halkanın merkezine yerleştirildiğinde, çekim kuvveti, simetre nedeniyle sıfır olacaktır: Halkanın herhangi bir parçası ile m arasındaki çekim kuvveti, halkanın karşı tarafındaki özdeş parçanın uyguladığı, özdeş kuvvetle dengelenecektir. Diğer yandan,halka ile küre arasındaki uzaklık sonsuza yakın ise çekim kuvveti uzaklık nedeniyle sıfıra yakındır.

Şimdi şöyle yapın: Halkaya (bunu yaparken şekle bakmanın yararı olabilir) halkanın merkezinden başlayıp, sonsuza giden bir normal çizin. Küçük kütle m'i bu çizgi boyunca hareket ettirin. Durumu ayrıntılı olarak çözümleyebiliriz. Şekle bir bakın: simetri nedeniyle m kütlesinin halkaya uyguladığı çekim kuvvetinin halkanın merkezine doğru olduğunu görürüz. Halkanın üzerinde karşılıklı iki küçük özdeş kütlenin, M_n=M_o uyguladığı kuvvetleri düşünelim. Newton Yasası'nı kullanarak ve bu iki vektörü toplayarak net kuvveti

$$F(R) = 2G\frac{M_n m}{R^2}\cos\phi = \frac{2GM_n mz}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

buluruz. Bütün halkanın uyguladığı toplam kuvveti bulmak için, M_n

M_o'yu diferansiyel kütleler olarak kabul edip bütün halka üzerinde integrallerini alabilirdik. Ama, dedenin sorusunu yanıtlamak için bunu yapmamız gerekmiyor.

Küre halkadan uzaklaştıkça çekim kuvveti F(R)'ın değişimini gözleyelim. j açısı sıfıra, Cos j bire yaklaşır. F(R) da Newton'un Yoğun Kütleler Yasası'na benzer. R ile z sonsuza yaklaştığında kuvvet de sıfıra yaklaşır. Diğer yandan, m kütlesi halkanın merkezine yaklaşırken z sıfıra yaklaşır ve F(R) yine sıfıra gider. Bu durum z=0 noktasında geçersizdir. Birbirine yaklaştıkça çekim kuvvetleri azalan iki kütle bulduk. Bu iki cisim arasında çekim kuvveti sonsuz uzaklıkta ve sıfır uzaklıkta yok oluyor ve bu iki nokta arasında bir yerlerde de maksimuma ulaşıyor. Yüksek Matematik bize herhangi bir pozitif fonksiyonun iki sıfır değeri arasında mutlaka bir maksimumu olması gerektiğini söylüyor.

Yüzyılımızın en büyük bilginlerinden ikinci Profesör Lev Landau, karşı cins hakkındaki çok bilinen yorumu da dahil, her şeyi sayısallaştırmasıyla kötü bir ün sahibidir: "Her kadın için çekiciliğinin maksimum olduğu bir uzaklık vardır. Raum teoremini kullanırsak, sonsuz uzaklıkta çekicilik sıfırdır. D=O'da da çekicilik sıfırdır. İkisi arasında bir maksimum olmalı." Erkekler içinde benzer bir kuram olduğunu sanıyoruz.

Boris'in dedesi kahvaltı sofrasında nereye bakıyordu? Tabii ki bagele*. Bagel yemiş herkes, bagellerin çekim kuvvetini bilir. Görünüşte garip olan bu davranışın diğer biçimler içinde geçerli olmadığı söylenemez, örneğin halterler için (yine de bagelin tadı daha iyidir).

10) Malakhovka'nın Işıkları: Etki gerçektir ve votkayla bir ilgisi yoktur. Dünya'nın çekim alanı içinde, bir yay ile asılı lamba (ya da herhangi bir cisim) basit harmonik salınıma başlar. Bu problemde sürtünme çok az olduğu için harmonik salınımın başlaması ve sürmesi çok kolaydır. Her harmonik salınım hareketinde potansiyel ve kinetik enerji periyod için-

* *Bagel* - simit biçiminde bir Rus çöreği

de değişime uğrar. Orta noktada kinetik enerji (yani hız vektörü) en yüksek değerine ulaşır. Periyodun uç noktalarında potansiyel enerji en yüksek değerindedir, ancak kinetik enerji sıfırdır. Yani lambanın hız vektörü orta noktada en yüksek değerindedir ve uç noktalara yaklaştıkça lamba yavaşlar. Uç noktalarda lamba durup ivmelenerek yön değiştirir. Lambanın hız vektörü uçlarda en küçük olduğundan, lamba bu noktaların etrafında daha fazla zaman geçirir.

Şimdi *parlaklık* ile neyi kastettiğimizi tartışalım. Enerjinin belirli bir yüzey alanından yayılma oranını kastediyoruz. Salınan bir lamba karpuzunun çizdiği yolu özdeş parçalara ayıralım: Lambanın genişliği yol parçalarını özdeş yüzeyler olarak tarar. Lamba, hız vektörü o noktalarda en küçük olduğundan, en uzun süreyi uç parçalarda geçirir. Lamba enerjiyi zamanın bir fonkiyonu olarak yaydığından (örneğin 100 watt), en çok enerji uç noktalarda yayılır. Böylece, bu noktaları en parlak noktalar olarak algılarız.

Işığın değişen yoğunluğunu ayırt edebilmek için salınan lambaya makul bir yakınlıkta durmamız gerekiyor. Bu yüzden, lambayı vurmak için en uygun anı hesaplarken olayın gerçekleştiği an ile gözlerimizin olayı algılaması arasında geçen süreyi ihmal edebiliriz. Uç noktalarda, lambanın hızı sıfır olduğunda, lambayı vurmak için uç noktalar en uygun konumdur. Yani lambayı en yüksek olasılıkla vurmak için tüfeği ışığın en parlak olduğu anda ateşlemeliyiz. Böylece, lambayı salınımın uç noktalarından birinde vurabiliriz.

Ondokuzuncu yüzyıl Alman fizikçisi Hermann Ludwig Ferdinand Von Helmoltz elektromanyetik, termodinamik ve optik kuramlarına katkıda bulunmuştur ve aynı zamanda oftalmoloji'nin de babasıdır. Salınan bir lamba kullananak aynı etkiyi gözlemlemiş ve lambanın uç noktalardan daha parlak görünmesinin yanı sıra bir renk değişiminin varlığını da saptamıştır: ışık yalnızca uçlarda beyaz görünür, ortalarda ise renkli çizgiler halindedir. Renkler, lambanın hız vektörü ortalarda daha yüksek olduğu için algılanır, çünkü gözümüzün renk tanıyan öğelerinin, renge bağlı olarak tepki süreleri değişiktir. Yani lamba yeterince hızlı ise "yavaş" renkler algılanamaz.

11) Platin Gezegen: Gezegen yarıçapı R, alçak yörüngenin gezegen merkezinden uzaklığı için uygun bir yaklaşık değerdir. Merkezkaç ivmesi $\omega^2 R$ (burada ω, her zamanki gibi açısal hızdır). Newton'un Yerçekimi Yasası'nda verildiği gibi (GM/R^2) yerçekimi ile dengelenir (burada G çekim sabiti, M ise gezegenin kütlesidir). Bu iki kuvveti eşitlediğimizde

$$\omega^2 R = \frac{GM}{R^2}, \; ya\ da\ \omega^2 = \frac{GM}{R^3}$$

eşitliğini elde ederiz. Gezegenin hacmi R^3 ile orantılı olduğuna göre, yoğunluğu da M/R^3 ile orantılıdır. Yani açısal hızın karesi ve gezegenin yoğunluğu evrensel bir orantı sabiti ile birbirine orantılıdır (yaklaşık olarak benzer biçimdeki gezegenler için!). Yerkürenin aşağı yörünge uydusunun hız vektörü Ω ve yerkürenin yoğunluğu da ρ e ise

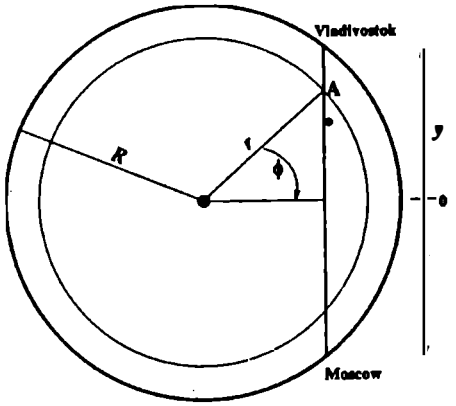
$$\frac{\omega}{\Omega} = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_e}}$$

orantısı kurulabilir. Yörünge periyodu T'nin açısal hızla olan bağıntısı $\omega = 2\pi/T$ olduğuna göre, denklem şu şekilde yazılabilir:

$$\rho = \rho_e \left(\frac{T_e}{T}\right)^2$$

Eğer yörünge periyodu aşağı yörüngede dünyanınkini yarısı ise, yoğunluk 4 katı, ya da 22 g/cm^3 olmalıdır. Görüldüğü gibi gezegenin yoğunluğu yalnızca basıt bir sabitle ölçülebilmektedir! (Bu yoğunluk aslında platinin yoğunluğundan biraz fazladır, ama mürettebat aşçının her şeyi çok pişirdiğini iyi bilir).

12) Bütün Tüneller Moskova'ya Çıkar: Kimse haklı değil! Tüneller tamamen aynı geçiş süreleri ile eşzamanlıdır (isochronal).



Şekilde A noktasındaki duruma bakın. İpucunda da söz ettiğimiz gibi yarıçapı r'dan büyük olan üstteki kabuk tüneldeki paket üzerine çekim kuvveti uygulamaz. Bu durumda çekim kuvveti r yarıçapındaki küre biçimli kütleden gelir. Bu kuvvet, bütün kütlenin merkezde yoğunlaştığı durumdaki kuvvet ile aynıdır. Yerküre'nin yoğunluğuna ρ dersek, r yarıçaplı kürenin hacmi $M(r)=.4\rho^{-3}/3$ olur. Newton'un Yerçekimi Yasası'na göre bu kütle, yüzeyinde konumlanmış her birim kütleyi, $g(r)=GM(r)/r^2=4\rho G.r/3$ kuvveti ile çekir. Birim kütle üzerindeki kuvveti g(r) ile belirttik, çünkü bu aslında böyle bir küre üzerindeki yerçekimi ivmesidir (özel olarak r=R olduğunda g(R)=g olur). Bu basit bir biçimde g(r)'ı ifade edebilmemizi sağlar:

$$g(r) = \frac{gr}{R}$$

Şimdi tünelde bir kutunun böyle bir kuvvetin etkisi altındaki hareketini ele alalım. Şekilde görüldüğü gibi y eksenini ve ϕ açısını tanımlıyoruz. Tünel boyunca ivme g=g(r)Sin ϕ olsun. Diğer taraftan y=rSinϕ olacaktır. Bundan ve yukarıdaki g(r) tanımından

$$g_y = \frac{-gy}{R}$$

bulunur. Bu "elastik sabiti" g/R olan bir doğrusal salınım denklemidir.

Düzeltici kuvvet, denge noktası y= 0'a (tünelin ortası) olan sapmayla orantılıdır. Paket tünelden alınmazsa, tünelin iki ucu arasında gidip gelecektir. Başlangıç noktasında, paketin yüzeyinde yalnıza potansiyel enerji vardır. Tünelde ivme kazandıkça potansiyel enerji kinetik enerjiye dönüşür. Tünelin ortasında kinetik enerji en yüksek düzeyindedir. (isim tünelin sonuna ulaştığında potansiyel enerjisi başlangıçtakiyle aynı, kinetik enerjisi de sıfır olmalıdır. Tünelin her iki ucunda da hız sıfır olur. Paket hemen yakalanıp, tünelden alınmazsa, geri dönerek hareketin ilk periyodunu tamamlar. Paketin tek yönü yolculuk süresi salınım periyodunun yarısıdır. Böyle bi salınım periyodu T yükseklikten bağımsızdır, yani paketlerin ulaşma süresi bütün Rus kentleri için aynı olacaktır. Salınım hareketinin devir sıklığı w=2π/T "elastik sabit" g/R tarafında şöyle belirlenir:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}. \text{ Böylece periyodu } T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

şeklinde yazabiliriz. Önceki problemi çözdüyseniz bu periyodun aynı zamanda Dünya çevresinde aşağı yörüngedeki bir uydunun periyoduna eşit olması ile ilgilenebilirsiniz. Bundan sonra, T= 84 dakika (R=6.400 km, g=10 m/s^2) olduğunu ve ulaşımın 42 dakika süreceğini kolayca hesaplayabilirsiniz.

Bölüm 10'un Çözümleri



Mekanik ve Rölativite

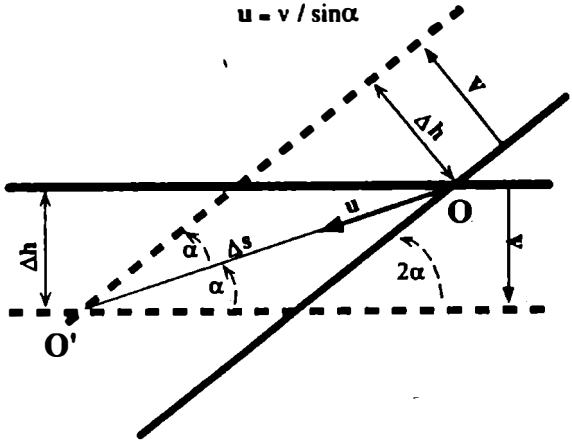
1) Çapraz Kılıçlar: Dışardan bir gözlemciye göre, bir referans sistemi seçin. Bu referans sisteminde şekilde görüldüğü gibi, iki çubuk simetrik olarak hareket eder.

Şekilde, u kesişim noktasının hız vektörünü, 0 başlangıç kesişim noktasını ve 0'de Δt kadar süre geçtikten sonraki kesişim noktasını gösterir. Her çubuk kendisine dik ve eşit hızla hareket ettiğinden, hareketin simetrisi bir eşkenar dörtgen oluşturur, köşegeni 00'de açı ortay olur. Simetriye bağlı olarak, 00' kesişim noktasının yörüngesini gösterir. Eşkenar dörtgenin yüksekliği $\Delta h=>v\Delta t$'dir ve 0 ve 0' köşelerindeki açı $2l$'dır. $\Delta s=\alpha 00'/$, hız vektörü u ile $\Delta s=u\Delta t$ denklemiyle bağıntılandığında, eşkenar dörtgenin yüksekliği

$$\Delta h=\Delta s \mathrm{Sin}\alpha \text{ ile verilir.}$$

$$u=v/\mathrm{Sin}\alpha$$

elde ederiz. Kılıç sahnesinde, α açısı çoğunlukla çok küçük olduğundan, hız vektörü çok büyüktür. Kılıçların, yalnızca dik hareket ettiklerini varsayarak problemi basitleştirdik. Bu problemi yeniden düşündüğünüzde uzunlamasına hareketin (longitudinal motion), (yani, savurma yerine saplama) yanıtı değiştirmeyeceğini göreceksiniz.



2) Terazi Dükkanında Özel Rölativite: Masha yine haklı. Özel Röletivite çiğnenmedi. Kütlesi olan nesneler, ışık hızından daha hızlı hareket edemez. Makas bıçaklarının kesişimi kütlesi olan nesne değildir. Ancak, burada ikinci bir soru akla geliyor. Sasha maddeleri ışık hızında kesebilir mi? Bu soruyu yanıtlamak için S'in ilk denklemine bakın. S, ancak, makas bıçaklarının uzunluğundan daha küçükse, s'in anlamlı bir fiziksel nicelik olduğunu göreceksiniz. Sasha yalnızca *çok* uzun makaslara sahip olabilirse, konfeksiyon endüstrisinde büyük başarılar elde edebilir! Diğer taraftan, uygulamada çok yüksek kesme hızına ulaşabileceği açıktır.

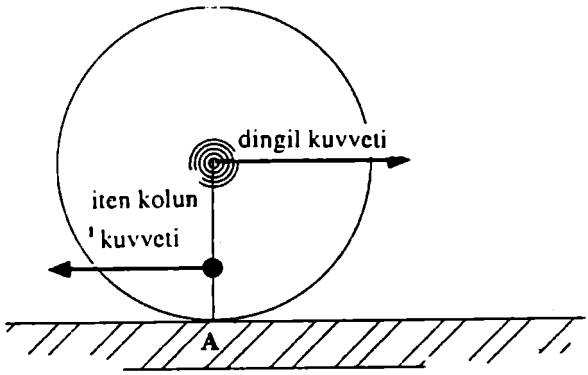
3) Bowling Yolları: Alttaki top bitişe daha daha önce varır. İlk önce, topların yuvarlanmak yerine kaydıklarını varsayın. Enerjinin korunumu için, her bir topun

$$1/2\ mv^2+mgh=1/2\ mv.^2$$

eşitliğini sağlaması gerekir. Burada, m topun kütlesi, v hız vektörü, h yükseklik ve v. da başlangıç hız vektörüdür. Açıkça, alttaki topu üsttekiyle karşılaştırdığımızda alttaki topun bütün noktalarda daha büyük ya da eşit kinetik enerjiye sahip olduğunu görürüz. Çünkü potansiyel

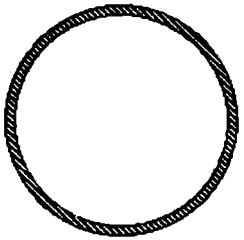
enerjisi mgh üstekinin potansiyle enerjisinden daha azdır ya da ona eşittir. Toplar kaymak yerine yuvarlanıyorsa, ek kinetik enerji terimi olarak dönme hareketinin kinetik enerjisi de varolacaktır. Ancak dönme hareketinin hız vektörü w, hız vektörü ile bağıntılıdır: v=wr. Burada r topun yarıçapını gösterir. Sonuç olarak bütün noktalarda daha büyük toplam kinetik enerji, hâlâ daha büyük hız demektir, yani alttaki top hâlâ ilk varacak olandır. Sürtünme işin içine girse ve yuvarlanmayla kaymanın bir karışımı gerçekleşse bile alttaki top yine de daha önce varır.

4) Boris ve Lokomotif: Çözümleme doğrudur. İtme kolunun kuvveti, gerçekten de lokomotifi ileri doğru hareket ettirir, ancak bu tekerlek üzerindeki tek kuvvet değildir. A noktası etrafında tekerleğe etkiyen başka bir moment vardır. Bu moment, tekerleğe ileri doğru iten dingilin tekerleğe uyguladığı kuvvetten gelir. Bu kuvvet, A noktası etrafında saat yönünde daha büyük bir momente neden olur ve lokomotif ileriye doğru hareket eder. Bu kuvvet nereden geliyor? Pistondaki buhar basıncı ve silindirin ön yüzeyi eşittir ve kuvvetlerin büyüklükleri de eşittir, ama ters yöndedir. Silindir lokomotifin gövdesine sabit olarak bitiştirildiğinden, kuvvet, dingile (dingillere) ve tekerleklerin merkezlerine aktarılır. Bu sonraki kuvvet A noktası etrafındaki itme kolunun kuvvetinden daha büyük olduğundan toplam moment saat yönündedir. Boris bu kez haklı ama çözümlemesini yeteri kadar sürdürememiş.

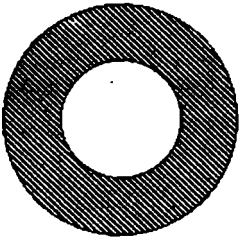


5) Top Oyunu: Her iki küreyi de bir rampaya ya da eğik düzleme koyun. Bırakıldığında bakır küre daha yavaş yuvarlanacaktır ve fark gözle görülebilecek kadar büyük olacaktır. Şaşırdınız mı? Evet onları bir kuleden bıraktığınızda tamamen aynı hızla düşerler, ancak eğik düzlemde farklı hızla yuvarlanırlar. Okumaya devam edin!

Hareketteki farklılık iki kürenin farklı *eylemsizlik momentlerine* bağlıdır. Newton'un İkinci Yasası (F=ma) dönme hareketine uygulandığında, kütle eylemsizlik momenti, tümüyle kütlenin yer değiştirme durumundaki rolüne benzer biçimde dönmeye direnen eylemsizlik momentinin ölçüsü olur. Burada, toplam burulma momenti (torque) T, kütle eylemsizlik momenti I ile açısal ivme ..'nın çarpımıyla elde edilir, yani $T=I\alpha$ Yer değişiren ve dönen bir cismin toplam kinetik enerjisi 1/2 mv^2+1/2 $I\omega^2$ ile belirtilir. Burada w açısal hız vektörüdür. Eylemsizlik momenti için kütle momenti çok önemlidir, buradaki iki kürenin kütle dağılımı çok farklıdır.



Bakır



Alüminyum





Bakır alüminyumdan üç kez daha yoğundur. Eğer kürelerin kütleleri eşitse bakır kürenin kabuğu çok daha önce olmalıdır. Şekil bakır ve alüminyum kürelerin kesitlerini göstermektedir.

Bakır kabuk ortalama olarak dönme ekseninden daha uzak olduğundan bakır kürenin *eylemsizlik momenti* daha fazladır. Şekildeki kürelerin çapları örneğin 2 cm ise bu fark % 40 civarındadır. Şimdi küreler düzlemde yuvarlanırken davranışlarındaki farkı ele alalım. Düzlemdeki herhangi bir noktada, belli bir miktar potansiyel (yerçekimi) enerjisi kinetik enerjiye dönüşecek ve her iki küre de bu noktadan geçerken aynı kinetik enerjiye sahip olacaklardır. Oysa bu durumda kinetik enerji yer değiştirme ve dönme ile ilgili terimlerin toplamından oluşmaktadır. Bakır kürenin eylemsizlik momenti I daha büyük olduğundan, dönme hız vektörü (aynı zamanda yer değiştirme vektörü de, çünkü küre eğik düzlem üzerinde aşağı yuvarlanıyor) daha az olmalıdır. Böylece, alüminyum küre düzlemin alt ucuna daha önce varır. Burada sözü edilen 2 cm çapındaki kürelerin hız vektöründeki % 6'lık fark kolayca gözlenebilir.

Eylemsizlik momentini belirleyen kütlenin dağılımıdır. Sisteme eklenen her birim kütlenin etkisi, kütlenin dönme merkezinde olan uzaklığının karesine eşittir. Bunu sezgisel olarak anlayabilmek için yukarıdaki iki "halter" şeklini inceleyin. Bu şekiller küreler ile analoji içindedir. Bakır halterin kütlesinin büyük bir bölümü çubuğun uçlarında toplanmıştır, alüminyum kütle ise çubuğun daha büyük bir bölümüne yayılmıştır. Hangisini döndürmek daha kolaydır? Eğer kendinizi bir bastonu havada çevirebilecek gibi hissetmiyorsanız (ya da yetenekleriniz elvermiyorsa) kürek çekmeyi ele alın, daha doğrusu kısa ve uzun kürekleri düşünün. Hangisini kullanmak daha fazla gayret gerektirir? Neden? Kürek çekmekten yorulduysanız uzun ve kısa saplı iki balyozu deneyini. Hangisini savurmak daha fazla burulma momenti gerektirir?

6) Bilardo Oyunu: Topun hareketini iki *bağımsız* problem olarak ele alın: x ekseni doğrultusunda (uzun kenar) ve y ekseni doğrultusunda (kısa kenar). Kenarlara paralel hız vektörü bileşeni çarpışma sonrasında değişmediği için bu yapılabilir. y-ekseni doğrultusundaki harekete bakın. Anlaştığımız gibi hız vektörünün y-bileşeni y eksenine paralel kenarla çarpışmada değişmez ve x-eksenine paralel kenarla çarpışmadan sonra büyüklüğü korunarak ters yöne çevrilir. Bir devirde katedilen toplam uzaklık 2a olduğuna göre, masanın alt kenarına dönüş zamanı

$$T_a = \frac{2a}{v_y} \text{ olarak bulunur}$$

Burada V_y başlangıç (ve kalıcı) y-hız vektörünün büyüklüğüdür. Bu noktada y yönünde hareketin gerçekte periyodik olduğunu görebiliriz.

x bileşenini ele alırken topun kenarın orta noktasından atıldığını anımsayalım. Hız vektörünün x bileşeni v_x, top x eksenine paralel kenarlara çarparken ters yöne dönecektir. Başlangıçtaki x koordinatına dönüş zamanı böylece

$$T_b = \frac{2a}{v_x} \text{ olarak verilir.}$$

Topun başlangıç noktasına geri dönebilmesi için x ve y konumlarının her ikisinin de başlangıçtaki yerlerinde olmaları gerekir. Bu olay m ve n tamsayı olmak üzere

$$m\,T_a = n\,T_b$$

kadar kısa süre sonra gerçekleşir. Bu üç denlemi birleştirirsek:

$$\frac{v_y}{v_x} = \tan\phi = \frac{m}{n}$$

elde ederiz. Burada ϕ sorudaki çizimde görülen açıdır. Bu denklemi sağlayan her atış açısı topun sonunda atıldığı noktaya geri dönmesini

garantiler. Bu şaşkınlık verici bir sonuç: *herhangi bir rasyonel sayı* topu geldiği yere geri yolluyor; sonsuz sayıda çözüm!

m ve n büyüdükçe çarpışma sayısı da büyür. Topun bilardo masası üzerinde ilerlerken iz bıraktığını varsayalım. Bu izler masanın yüzeyini kaplayacaktır. Peki eğer m/n eğimi irrasyonel bir sayı ise ne olur? Her irrasyonel sayıya yakınsayan bir ondalık sayı vardır. Çok ondalık basamaklı sayılar daha kesin yaklaşık değerlerdir. Öyleyse irrasyonel bir başlangıç eğimi ile gerçekleşecek yörünge daha büyük m/n değerine sahip olacağı için daha yoğun bir iz bırakacaktır. Böyle yaklaşık bir yörünge asıl yörüngenin ve dolayısıyla başlangıç konumunun çok yakınından geçecektir. Öyleyse başlangıç noktasına geri dönüş (ya da "hemen hemen geri dönüş") istisna değil kuraldır.

Masanın üzerindeki her noktanın yakınından geçen çok yoğun yörüngeler, yani "her yerden geçen" yörüngeler matematik ve istatistiksel mekanik açısından çok önemlidir. Bu yörüngelere *ergodik* yörüngeler denir. Bu bilardo masası problemi Jules-Henri Poincari'nin her dinamik sistemin eninde sonunda başlangıç durumuna geri döneceğini söyleyen ünlü kuramı için basit bir örnektir. Problemin çözümü sezgilerinize ne kadar ters düşüyorsa, söz konusu kuram da o kadar sezgilere aykırıdır.

7) Kış Eğlencesi: Ayrıntılı bir çözümleme hayli karmaşık olabilir. Yalnızca "global" bir yaklaşım gerekiyor. Vanya'nın yolculuğunun süresi T neye bağlıdır? Yerçekimi ivmesi g'ye, sürtünme katsayısı k'ye ve tepenin geometrisine bağlıdır. Geometriler benzer olduğundan, aradaki tek fark H yüksekliği bu problemde geometri parametremiz olacak. Yolculuk süresi bu parametrelerin bir fonksiyonu olacak, yani

$$T = f(g, k, H).$$

Burada bulmamız gereken f fonksiyonunun açılımı.

Şimdi birimlerdeki dönüşümün uzunluk ve zaman değişkenlerine etkisini ele alalım. T parametresi T´ olacak, H´ parametresi de h' olacaktır. Uzunluk dönüşümü katsayısı a, zaman dönüşümü katsayısı da b olsun. Böylece H´=aH ve T´=bT yazılır. İvme birimi metre /sn^2 olduğuna göre, yeni birimlerle yerçekimi ivmesi g´=(a/b^2)g olacaktır. Sürtünme katsayısı k boyutsuz olduğuna göre kullanılan birimlerle bir ilgisi yoktur, bu yüzden k için bir dönüşüm katsayısı yoktur. Yeni birimlerle denklem

$$bT = f\left(\frac{a}{b^2}\, g,\ k,\ aH\right) \text{ olacakt r.}$$

Denklemin sol tarafı kesin olarak uzunluk dönüşüm katsayısı a'dan bağımsızdır. Öyleyse, f fonksiyonun terimleri öyle düzenlenmiş olmalıdır ki, a katsayısı yok olsun. Bunun anlamı f fonksiyonunun H ve g parametrelerine ayrı ayrı değil de H/g oranına bağlı olmasıdır. "eski" değişkenler ile şunu yazabiliriz:

$$T = f\left(\frac{H}{g},\ k\right)$$

Yeni değişkenler

$$T = \frac{1}{b} f\left(\frac{b^2 H}{g},\ k\right)$$

yazılabilir. Bu denklemin de sol tarafı b'den bağımsız olduğuna göre,sağ tarafı da öyle olmalıdır. Öyleyse 1/b katsayısı fonksiyon tarafından telafi edilmelidir. Eğer böyle olmazsa tepeden aşağı kaymak için gereken zaman T bizim seçtiğimiz birimlere bağlı kalacaktır ki,bu doğru olmaz. Böyle f fonksiyonu ilk değişkenin karakköküne bağlı olmalıdır, yani

$$T = \sqrt{\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{g}}\,\mathrm{K(k)}}$$

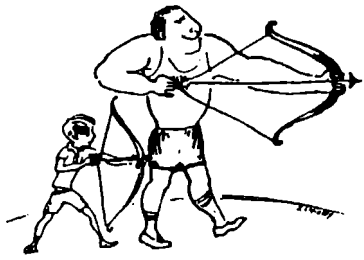
Burada K(k) sürtünme katsayısı k'nin bir fonksiyonudur. Karın her iki tepede de aynı miktarda olduğu bu durumda k gerçekten bir sabittir.

Şimdi Vanya'ya haklı olduğunu söyleyebiliriz. Tepe 4 kez yüksekse, aşağıya kaymak yalnızca 2 kez fazla süre alacaktır!

Vanya'nın sorusunu yanıtlamak için kullanılan çözümleme yöntemi *boyutsal çözümleme* olarak adlandırılır. Görebileceğiniz gibi, bu karmaşık soruları yanıtlamak için güçlü bir yöntemdir. Sürücünün ve kızağın ağırlığının etkisini incelemek isterseniz, kütleyi bir değişken olarak hesaba katıp bu yöntemi kullanabilirsiniz. Çözümün kütleye bağlı olmadığını göreceksiniz.

8) Ok ve Yay: Gerili yayda depolanmış elastik enerjinin oka iletilmesini ele alalım. Depolanmış elastik enerji yayın kinetik enerjisine dönüşür. Yaydaki toplam enerji miktarı sınırlı olduğundan, yayın kinetik enerjisi bu sınırı aşamaz. Yani okun başlangıç hızı da sınırlıdır. Şimdi bununla ilgili iki sınırı, okun uzunluğunun alt ve üst sınırlarını ele alalım. Sonsuz uzunluğa sahip bir okun sonsuz bir kütlesi olacaktır, bu yüzden yaydan ne kadar enerji aktarılırsa aktarılsın, başlangıç hızı da sıfır olacaktır. Diğer yandan, ok çok kısa olabilir.

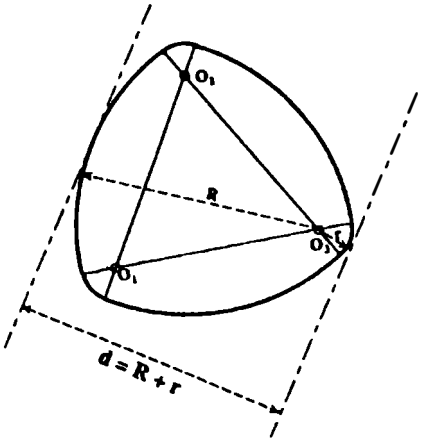
Alt limit, yayın egerilmemiş ipi ile gerilmemiş yay arasındaki uzunluktur. Bundan daha kısa bir ok atılamaz, bu uzunlukta bir ok ile yay gerilemeyeceği için yaydan oka aktarılan enerji sıfırdır, böylece okun başlangıç hızı da sıfır olur.



Yani okun katettiği yol iki aşırı uçta sıfır, diğer durumlarda isepozitif bir sayı olacaktır. Bu durumda teorem gereği (ipuçlarına bakınız) en azından bir maksimum olmalıdır. Maksimumun nasıl gerçekleşebileceğini gözümüzün önüne getirebiliriz. Eğer yay ideal bir malzemeden yapılmışsa gererek ikiye katlayabiliriz. Yay bu durumda, depolanmış ve oka aktarılacak en yüksek enerjiyi içerir. En uygun ok uzunluğu yay uzunluğunun yarısı artı ipin uzunluğunun yarısı olacaktır.

Çözümü basit bir yay için inceledik. Ama yüzlerce yıllık okçuluk sanatı, birkaç kez bükülmüş yayların ya da birleşik yayların gelişimi ile artan elastik enerjiyi ve boyu kısalan okları görmüştür. Bu tür silahlar için malzeme seçimi oldukça karmaşık bir iştir. Bu problemin temel ilkesi bütün bu tür silahlar için geçerlidir.

9) Rusya'da İleri Teknoloji: Evet bu tamamen mümkün. Daire her açıdan aynı genişliğe sahip tek şekil değil. Aslında, bu özelliği taşıyan sonsuz sayıda şekil vardır. Aşağıdaki şekil bunlara bir örnektir.



Şekil R yarıçaplı bir dairenin üç yayı ile r yarıçaplı bir dairenin üç ya-

yının bir birleşimidir. Büyük ve küçük dairelerin merkezleri 0_1, 0_2, 0_3'tür. Bu üç merkezi birleştiren doğru parçaları bir eşkenar üçgen oluştururlar. Bu şeklin çapı *bütün* açılardan (R+r)'dır. Bir levhayı, bu arakesite sahip dik bir silindir üzerinde yuvarlayın. Levhanın yerden uzaklığı her zaman R+r olacaktır. Bu sezgilerimize aykırı olduğu halde doğrudur. Diğer yandan, İvanov, amiri sabit hız istememiş olduğu için şükretmelidir, çünkü bu tür "tekerleklerin" yuvarlanması oldukça düzensiz olabilir!

10) Kutudaki Kukla: İlk olarak, kukla ne kadar büyük bir kuvvetle bastırılırsa, kuklanın ve kutunun o kadar yükseğe fırlayacağını belirtelim. İpucunda da belirtildiği gibi fırlama yüksekliğinin sıfır olduğu marjinal durumu inceleyip *minimum kuvveti* bulacağız. Çözümlemede kullanmak üzere yay sabiti olarak k, yayın uzunluğu olarak x, yayın üzerine bir kuvvet uygulanmadığı zamanki uzunluğu olarak x_0 parametrelerini seçiyoruz. Problem, aynı anda elastik ve yerçekimi kuvvetlerinin her iki cismi de etkiyor olması nedeniyle güçleşiyor. Bazı hesaplamalar içeren bir çözüm vereceğiz. Ama daha önce hemen hemen hiç hesaplama içermeyen başka bir çözüme değineceğiz. En basit çözüm doğrusal yayın şu özelliğine bağlıdır: yaya bağlı bir cisme etkiyen bir kuvvet alanının (örneğin yerçekimi) cisme etkisi serbest yaydaki gerilme kuvvetine denktir (Bunu aşağıda kanıtlayacağız). Uzunluk değişimi hem sistemin potansiyel enerjisini,hem de kukla ve kutu arasındaki kuvveti yansıtır. Probleme bu yöntemle yaklaştığımızda daha önce hesaba kattığımız yerçekimi kuvvetlerini yok sayabiliriz (ihmal etmiyoruz, yok sayıyoruz!). Artık deforme olan yayın özellikleri *simetriktir*. Bu çerçevede yayın çekilmesi ve bastırılması aynı büyüklükte kuvvet gerektirir: $k|\Delta x|$. Bu simetri nedeniyle yayda depolanan enerji şimdi deformasyonun yönüne değil de, yalnızca büyüklüğüne bağlıdır. Kuklayı bastırıp elastik enerjiyi yayda depoluyoruz; bıraktığımızda kukla hızı sıfır olana kadar yükseliyor, bu noktada da bütün enerji elastiktir. Bu son anda enerji korunduğundan elastik enerji başlangıçtaki değerine eşittir,bu yüzden uzama başlangıçtaki kı-

salmayla büyüklük olarak tamamen özdeştir. *Yaya etkiyen kuvvet de büyüklük olarak başlangıçtaki kuvvete özdeştir.* Kuklayı ve kutuyu kaldırmak için gereken minumum kuvvet nedir? Bütün sistemi yukarı kaldırmak için gereken kuvvet bütün sistemin ağırlığına eşittir, ya da

$$F=(m+M)g \qquad (1)$$

dir. Burada g, her zamanki gibi yerçekimi ivmesidir. Yayın çekilmesiyle bastırılması özdeş olduğundan, bastırılırken de aynı kuvvet gereklidir.

Başlangıçtaki iddiamızı, yani, yerçekimi kuvvetinin (mg), her durumda yayın uzunluğunu değiştirme işini yaparak tüketildiğini kanıtlamak için, kuklaya F gibi bir dış kuvvetin uygulandığını, bunun sonucu olarak denge uzunluğunun

$$mg+K(x-x_0)=F \qquad (2)$$

denklemindeki x ile verildiğini düşünelim. Eğer

$$x_1=x_0-mg/k \qquad (3)$$

değişimini uygularsak, denklem

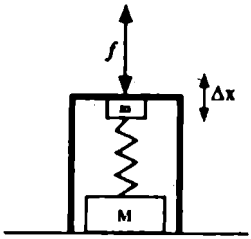
$$F=k(x-x_1) \qquad (3)$$

haline dönüşür. Görüldüğü gibi denklemde yer çekiminin yeri yoktur. Potansiyel enerji

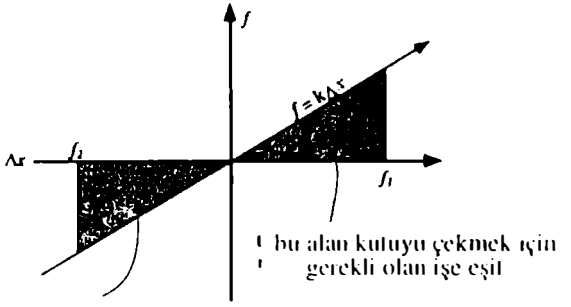
$$\frac{k(x-x_0)^2}{2}+mgx \text{ şuna dönüşür } \frac{k(x-x_1)^2}{2}+a \text{ sabiti}$$

haline dönüşür. Potansiyel enerji her zaman bir sabitle birlikte tanımlandığından bu son terim çözümlememizde bir şey değiştirmez. Uzunluğun bu "yeniden normalleştirilmesi" bize, yerçekimi kuvvetini

açık olarak kullanmadan bulunan kuvvetin ve potansiyel enerjinin hatasız değerlerini garanti eder. Aslında yerçekimi denklemlerden kaybolmuştur! Yeniden normalleştirme süperiletkenlik ve kuantum alanı kuramı için de kaçınılmazdır.



Bu işlemin fiziksel anlamda sezgisel olabilmesi için şekli inceleyin. Daha değişik bir çözüm deneyebiliriz. Bütün kutu ve kukla sisteminin duvarlarla çevrili olduğunu düşünelim; bu termodinamikçilerin çok hoşlandığı bir şey olan "kara kutu"dur. Yalnızca kara kutunun özelliklerini inceleyip içerisinde olan biteni gözardı edeceğiz. Bu kutunun özellikleri nelerdir? Kütlesi M+m ve masadan kaldırmak için gereksindiği kuvvet de (M+m)g'dir. Kutuyu düşey olarak sıkıştırmak istediğimizde f+kΔx kuvveti gerekir. Burada Δx kutunun yüksekliğindeki değişimdir, f sıkıştırma için negatif değer alır (aşağıya doğru kuvvet). Bir örnek ile açıklarsak; kutuyu yerden kaldırdığımızda boyu Δx=(M+m)g/k kadar uzar ve gereken kuvvet f=(M+m)g'dir. Kara kutunun yalnızca iki özelliğini, kütle ve esneklik katsayısını bilerek havaya sıçramaması için ne kadar elastik enerji depolamamız gerektiğini bulabiliriz. Yanıt ikinci şekilde verilmiştir.



Kutuyu bu alana kadar itin. Yaptığınız iş kutuyu çekmek için gerekli olan işe eşittir. Böylece $f_2 = f_1$ olacaktır. Çünkü yay tüm noktalarda doğrusaldır.

bu alan, yani yapılan iş, kutuyu kaldırmak için gereken işe eşit olana dek kara kutuyu sıkıştırın; sonra $f_1=f_2$ olacaktır, çünkü yay her noktada doğrusaldır.

bu alan kara kutuyu kaldırmak için gereken işe eşittir.

Şekil aslında, kara kutu için bir "durum denklemi"dir. $f=k\Delta x$ doğrusunun altındaki alan kutuya uygulanan iştir. Kutuyu $\Delta x=(M+m)g/k$ kadar uzatmak için gereken enerjiyi istiyorsak, scldaki alan yani sıkıştırma için yaptığımız iş, sağdaki alana yani, $\Delta x= -(M+m)g/k$ yüksekliğe ulaştırmamız için gerekli işe eşit olmalıdır. Bu da $f= -(M+m)g$ kuvvetine karşılık gelir. Lütfen içteki bütün ayrıntıları göz ardı edebildiğimize dikkat edin! Yay bütünüyle doğrusal olduğu için,bunu yapabildik. Eğer böyle olmasaydı, şeklin nasıl görüneceğini düşünün! Örneğin kuvvetin uzama yerine, uzamanın karesi ile orantılı olduğu bir yayı inceleyin.

Sıra şimdi de bu tür numaralara inanmayanlar için, yine öğretici olan resmi çözümde. Üç önemli doğal yasa kullanacağız. Birincisi, Newton'un Birinci Yasası, mekanik denge: bir cisim durağan ise ya da sabit hızla hareket ediyorsa, üzerindeki kuvvetlerin toplamı sıfır olmalıdır. Buna ek olarak elimizde Hooke yasası var: bir yayın boyunu değiştirmek için kullanılan kuvvet, değişim miktarı ile orantılıdır. Kutu masadan kalktığında yayın kuvvetini kutuya uygulanan yerçekimi kuv-

vetiyle eşitleyebiliriz. Newton'un Birinci Yasası ve Hooke yasası gereğince;

$$k[X-h_o]=Mg \qquad (4)$$

olur. Bu basit denklemi yazmak elimizde, çünkü o anda *her şey* hareketsizdir; elimizde hiç hız vektörü yoktur. Yayın bu anda oluşan maksimum uzunluğu X diye adlandırıldı. Kukla yörüngesinin en üst noktasındadır, yay tamamen gerilmiştir ve tekrar sıkışmak üzeredir. Kutunun hız vektörü de sıfırdır, çünkü kutu masadan ayrılmış olduğu için, masa tarafından üzerine uygulanan bir tepki kuvveti yoktur. Eğer durum böyle olmasaydı, kuklayı biraz fazla bastırsaydık, kutu masadan havalanacaktı. Deneyin başında her şey hareketsizdir. Yay uygulanan f kuvveti ve kuklanın ağırlığıyla x uzunluğuna kadar sıkıştırılır:

$$mg+f= k[x_o-x] \qquad (5)$$

Burada tam beş tane bilinmeyen var. Eğer tek çözüm istiyorsak, daha çok denkleme ihtiyacımız olacak. Bu denklemler üçüncü bir doğal yasadan, enerjinin korunumundan elde edilecektir. Deneyin başında ve sonunda bütün hızlar sıfır olduğuna göre, enerji denklemleri basit olacaktır. Başlangıçta, yay sıkıştırıldığında, toplam enerji

$$E= mgx+(k/2)\ [x_o-x]^2 \qquad (6)$$

ve sonunda yay tamamen uzadığında ve kutu masadan kalktığında

$$E= mgX+ (k/2)\ [X-x_o]^2 \qquad (7)$$

olur. Kutunun yerçekimine bağlı potansiyel enerjisini yazma zahmetine

katlanmıyoruz. Çünkü kutu masada ya da masadan ihmal edilebilir bir yükseklikte durduğu için yerçekimine bağlı potansiyel enerjisi değişmez. Şimdi, bu sistemdeki enerji korunduğundan, (6) ve (7) denklemlerindeki enerjileri eşitliyoruz ve biraz cebir işleminden sonra

$$2\,mg = k[2x_{\circ} - X - x] \qquad (8)$$

denklemini buluyoruz. Bu denklem (4) ve (5) denklemleriyle birleştirilip biraz uğraşıldığında

$$f = (M+m)\,g$$

bulunur ki, bu da dikkate değer basitlikte olup, yay sabiti k'ye bağlı değildir.

Bölüm 11'in Çözümleri



Geometri ve Sayılar

1) Minsk'in Tavukları Süper Bilgi Otoyoluna Karşı: Çiftçi 6.28 dolar öder. Evet, doğru okudunuz, 6.28 dolar! Yerkürenin (ya da herhangi bir çemberin) yarıçapı R iken, çevresi $2\pi R$ ile verilir. Yarıçap her ne olursa olsun, 1 ayak arttırdığınızda, çevredeki artış 2π ayak olur. Doğrusal bağıntı dedikleri işte budur! Küçük bir yarıçapla (örneğin, sıfır) ya da galaktik bir yarıçapla ya da *herhangi* bir yarıçapla başlayın: yarıçapı bir ayak uzatın, çevrenin uzunluğu da 2π ayak artar. (Rastlantı eseri, ek destek malzemeleri 320.000.000 dolar tutuyor. Bürokratın biraz geometri dersine ihtiyacı var).

2) Matematikçilerin Aile Eğlencesi: Problem yalnızca bütün yaşlar *tamsayı* ise anlamlıdır. Bunu tahmin etmelisiniz! Bir sonraki basamak, çocukların yaşlarının çarpımının 36 olduğu ilk koşulu kullanmaktır. Bu bize 8 seçenek verir:

1. yaş	2 yaş	3. yaş	toplam
1	1	36	38
1	2	18	21
1	3	12	16
1	4	9	14
1	6	6	13
2	2	9	13
2	3	6	11
3	3	4	10

Doğru çözüm bu seçeneklerden birisidir. Seçmeliyiz. Yaşların toplamı binanın pencerelerinin olası sayısını verir. Eğer toplam 38, 21, 16, 14, 11 ya da 10 olsaydı, İgor problemi hemen çözerdi. **Yalnızca** pencere sayısı (ve yaşların toplamı) 13 olduğunda çözemezdi! Bu nedenle, Pavul ona "en büyük" çocuğun saç rengini söylemeden önce tek bir çözüm bulamadı. "Eğer çocukların yaşları, 16 ve 6 olsaydı, en büyük *çocuk* olamazdı, en büyük *çocuklar* olurdu. Belirsizlik çözüldü: Püavel'in çocuklarının yaşları 2, 2'ye 9'dur.

Bu problem, problemlerin çoğunun çözümündeki temel adımları gösterdiği için önemlidir:

a) Dikkat edin! Her önermenin, her durumun önemi vardır. Örneğin "niye matematikçiler" diye sorabiliriz. Bu önemli bir noktadır, çünkü gerçekten çözülebileceğinden kuşku duyarız. Oysa, matematikçi İgor bunun olanaksız olduğunu söylüyorsa, ya yanıt yoktur, ya da çözüm tek değildir. Bu çözümün bir anahtarıdır.

b) Bir yanıt bulabilmek için bazı varsayımlarda bulunmamız gerekir. Bu olayda varsayım, yaşların tamsayı (ya da insanların genellikle yaptığı gibi yuvarlanabilir) olmasıydı. Matematikçilerin işin içine girmiş olması bu yönde bir ipucudur!

c) Problemin nasıl çözüleceğini bilmemek cesaretinizi kırmamalı. Bu normal bir durumdur, aksi takdirde çözüm apaçık olurdu.

d) Çok küçük bir adım olsa bile, problemin anladığınız kadarını hemen çözmelisiniz. Bu, problemin koşullarından birinin formüle edilmesi, yeniden formülleştirilmesi ya da başka bir şekilde ifade edilmesi olabilir. Bütünü çözemiyorsanız bile çözmeye başlayın!

e) Çözüm ilerlediğinde, verilerin saklı anlamlarına bakmalısınız, örneğin,kırmızı saçlı oğlan. Sıradan sözcük ve ifadeler çözülmeli ve gizli anlamları deşifre edilmelidir. Bu gerçek problemlerde de bir istisna değil, kuraldır.

f) Problemi "başlangıç"tansa her iki ucundan başlayarak çözdük. Bu, problem çözümünde çok yararlı bir tekniktir. Birçok bilgin için tanıdık olan yeni ve beklenmedik bir şey öğrenme deneyimini yaşadık: Binanın tam 13 penceresi olduğunu öğrendik.

3) Bazı Sayılar!: 24'ün asal çarpanları 3 ve 2'dir, yani $24=3x2^3$. Öyleyse, (n^2-1)'in 3 ve 8 ile ya da 6 ve 4 ile bölünebilir olduğunu kanıtlamamız gerekiyor.

İlk ikiliyi deneyelim. Eğer $(n^2-1)=(n-1)(n+1)$ olduğunu biliyorsak, en önemli adımı atmışız demektir. (n-1), n ve (n+1) sayıları ardışık doğal sayılardır*, ör, 5, 6 ve 7 vb. Her üç ardışık doğal sayıdan birisi 3 ile bölünmek zorundadır. n asal sayı olduğuna göre, diğer ikisinden biri 3 ile bölünecektir.

Şimdi (n^2-1)in 8 ile bölünebilirliğini kanıtlayalım. İlk önce (n+1) ve (n-1)'in ikisinin de çift sayı olduğunu görün, çünkü n 3'ten büyük bir asal sayı olduğuna göre, tek sayıdır. Şimdi artık, bu iki sayıdan birinin 4 ile bölünebilir olduğunu göstermek yeterlidir. (n+1) ve (n-1) iki ardışık çift doğalsayıdır ve iki ardışık çift sayıdan birisi 4 ile bölünmek zorundadır. Öyleyse (n-1) (n+1) çarpımı 8 ile bölünebilir. (n+1) (n-1) 3 ile bölünebilinir olduğundan, 24 ile bölünebilirdir.

4) Bütün problemlerimizin Kökü: İki. En içteki karakökün içindeki rakamın x_n'in değerine çok az bir etkisi olmalı. Kök sayısı n ne kadar büyük olursa, değişime etkisi o kadar az olur. Şimdi sezgisel bir çözüm düşünelim: en içteki sayıyı 4 ile değiştirelim. Bütün ifade çözülecek ve yanıt $x_n=2$ olacaktır. n çok büyükse yaptığımız yer değiştirmenin etkisi çok küçüktür.

Eğer bu sizi tatmin etmediyse ve daha resmi bir kanıt istiyorsanız, işte size kanıtın iki basamağı: İlk önce, n sonsuza yaklaşırken, x_n'in li-

(*) Bir doğalsayı pozitif bir tamsayıdır, sıfır dahil değildir.

mitinin varolduğunu kanıtlamalısınız. Limitin varlığını, "Eğer monoton bir dizi sınırlıysa, daima bir limiti vardır." diyen teoremi kullanarak kanıtlayabiliriz (Sezgisel çözüm $x_n < 2$ olduğunu kanıtlar). X_n'in monoton artan bir dizi olduğunu da, ya n arttıkça $x_n$in arttığını kolayca gösterebiliriz. Bunu görebilmek için en içteki köke ..2 ekleyin. Artık limitin varlığı kanıtlanmıştır. İkinci adım, limiti bulmaktır. x_n için denklemi tekrar yazalım:

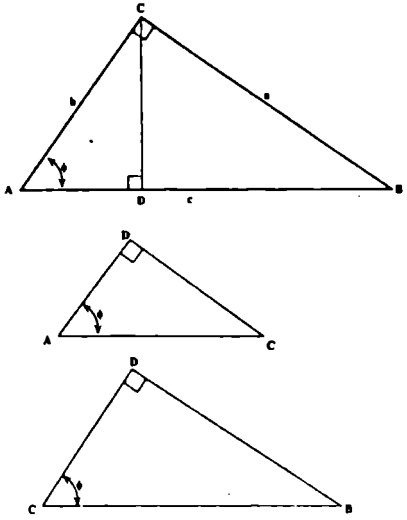
$$x_n = \sqrt{2+x_{n-1}}$$

ve n sonsuza yaklaşırken hem x_n'in hem de x_{n-1}'in aynı limite, diyelim x'e, yakınsadığını görün. Böylece denklem

$$x = \sqrt{2+x}$$

biçimine indirgenir. Denklemin yalnızca bir pozitif kökü vardır: x=2 (Her iki tarafın karesini alın, ikinci dereceden denklemi çözün. Kökler -1 ve 2'dir).

5) Pisagor Teorimini Bölerek Ölçme: Şekle bakın. ABC dik üçgeni CD yüksekliği ile ACD ve CBD olmak üzere iki dik üçgene bölünür.



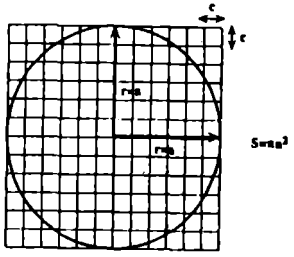
Üç üçgen benzerdir. Üçü de dik üçgendir ve bir köşelerinin açısı aynı ϕ açısıdır. Şimdi yalnızca benzer üçgenlerin alanlarının, benzer kenarların kareleriyle orantılı olduğu gerçeğini kullancağız. İlk ABC üçgeninin her kenarı bir benzer üçgenin hipotenüsüdür. Öyleyse ABC, ACD ve BCD üçgenlerinin alanları sırasıyla Kc^2, Kb^2 ve a^2 diye gösterilebilir. Burada K bir sabittir. ABC'nin alanı, CBD ve ACD'nin alanlarının toplamına eşit, yani alan (ABC)= alan (CBD) + alan (ACD) olduğundan,

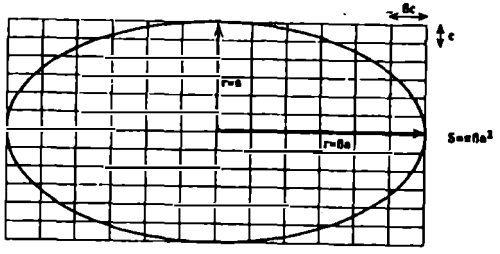
$$Kc=Ka^2+ Kb^2$$

yazabiliriz. K sabitini sadeleştirince, Pisagor teorimini elde ederiz.

$$c^2=a^2+b^2$$

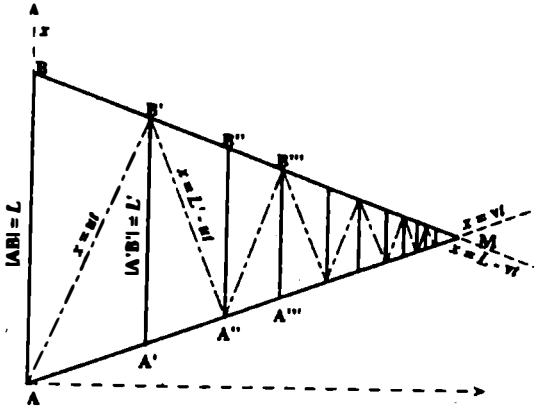
6) Olya'nın Zihnini Genişletmek: İyi bir tahminle başlayalım. Daire yarı-eksenleri ve a b'nin eşit olduğu (a=b=r) özel bir elipstir. Dairenin alanı $S=\pi r^2$ ya da $S=\pi r.r$'dır, öyleyse yalnızca özel durum için formül $S=\pi ab$ olur. a, b bu denklemde simetrik olduklarından, bu ifade akla yakın görünüyor.





Ancak, Olya tahminden fazlasını yaptı. Dairenin tek bir yönde düzgün uzatılmasıyla, bir elips elde edilebileceğini gördü. Şimdi kenar uzunluğu c olan bir kareyi kenarlarından biri boyunca düzgün uzattığımızı düşünelim. Uzatmadan önce karenin alanı yalnızca c^2 idi. Bir kenar boyunca (diyelim ki, taban) düzgün uzattıktan sonra, kenarın uzunluğu d ve alanı da cd olacak. Bu işlem B=d/c çarpanıyla uzatma olarak tanımlanabilir. Yüzey alanı c^2'den Bc^2'ye çıkar. Olya kareli defterine çizdiği daireye baktığında, her geometrik şeklin böyle küçük karelere bölünmüş bir kağıda çizilebileceğini farkeder. Eğer defter bir yönde düzgün olarak uzatılırsa, her kare bir dikdörtgen haline gelecek ve alanı B çarpanı ile büyüyecektir. Sonuç olarak bütün şeklin alanı B çarpanıyla artar. Eğer şekil bir daire ise, alan πa^2'den πBa^2'ye ya da b= Ba olduğundan πab'ye çıkar. Şekil Olya'nın görmüş olduğu şeyi gösterir.

7) Von Neumann'ı Şaşırtmayan Problem: Bisikletliler ve köpek için koordinatları ve zamanı gösteren grafiğe bakın. AB burada bisikletler arasındaki mesafeyi gösterir.



ABM, A´B´M, A˝B˝M, vb..., üçgenlerinin hepsi benzerdir. Benzerlik katsayısı, ya da derecelendirme çarpanı q olsun. Bisikletliler L

uzaklıkta iken, köpeğin koşma süresi L/(u+v)'dir. Bu süre içinde bisikletliler 2vL/(u+v), kadar birbirine yaklaşır. Böylece yeni uzaklık L´= L-2vL(u+v)= L(u-v)/u+v olur. Öyleyse, ihtiyacımız olan benzerlik katsayısı (u-v)/(u+v)=q dur. Bu olayı tekrar tekrar görürüz -aslında köpeğin toplam koştuğu yol bir sonsuz seridir:

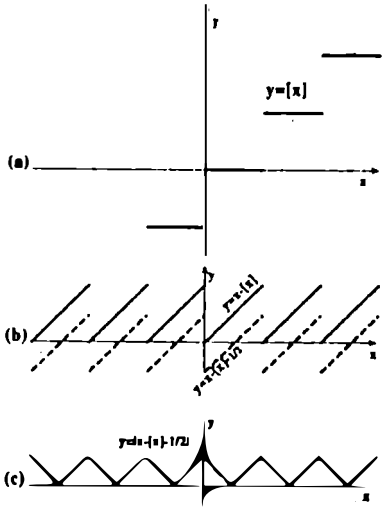
$$\text{Yol} = \left(\frac{Lu}{u+v}\right)(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots)$$

Seri toplandığında,

$$\text{Toplam} = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = \frac{1}{1-q} = \frac{u+v}{2v} \text{ olur.}$$

Bu iki denklemi birleştirdiğimizde yanıtı elde ederiz: katedilen yol Lu/2v'dir, Bölüm 2, problem 10'un yanıtının aynısı. Bisikletlerin hızları farklı olsaydı da durum pek değişmezdi. Bu çözümün simetrisinin ve basitliğinin ışığında, bizce Von Neumann bunu görmüştür (ya da daha iyisini!). Bu yüzden bu problemi "John Von Neumann'ı Şaşırtamayan Problem" olarak adlandırdık (Özgün anektoda dikkatimizi çekmiş olan David Hicks'e ve Saint Paul Okulu'nun öğretim kadrosuna teşekkür ederiz).

8) Yeni Valinin Çiti: İşte en temel ve en ilginç çözüm: x'e eşit ya da onan küçük olan en büyük tamsayıyı veren "en büyük tamsayı" fonksiyonunu kullanalım. Örneğin, 5≤x<6 iken bu fonksiyonun değeri 5'e, 6≤x<7 iken 6'ya eşittir. Fonksiyonumuz [x] işareti ile gösterilir. Yani y= [x] yazabiliriz ve şeklin (a) şıkkındaki grafik bu fonksiyonu gösterir.



Az bir şeye daha ihtiyacımız var. Aşağıdaki basamaklar bize çitin şeklini verecektir:

a) x+'den [x]'i çıkararak şeklin (b) şıkkındaki grafiğin düz çizgilerle gösterilmiş y=x-[x] fonksiyonunu elde ederiz.

b) y= x-[x]'den 1/2 çıkararak (b) şıkkında noktalı çizgilerle gösterilen y=x-[x]-1/2 fonksiyonu buluruz.

c) y= x-[x] - 1/2'nin mutlak değerini alırsak şeklin (c) şıkkında gösterilen testere dişlerini elde ederiz.

Yeni Valinin beklentisini karşılayabilmek için testere dişlerinin yüksekliğini artırabilecek ya da azaltabilecek katsayılar verilebilir.

Daha analitik bir kafaya sahipseniz, daha tanıdık periyodik fonksiyonlar üzerine kurulmuş olduğundan aşağıdaki çözüm sizin için daha uygundur.

arcSin fonksiyonu $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ koşulunda tanımlanır ve şu denklik sağlanır:

$$\arcsin(\sin x) \equiv x$$

Aslında y= arcsin(sinx) denklemi çiti -π/2≤x≤π/2 için çok iyi tarif eder. Sinüs eğrisinin x=π/2 etrafındaki simetrisi (ya da trigonometrik özdeşlikler, ör. Sin (π/2+2)= Cos Z= Sin (π/2-Z), z herhangi bir değişken iken) eğriyi x=Fπ/2 noktalarında ters çevirir ve x= 3π/2'ye kadar testere dişi biçimini verir. Sonunda, Sinüs fonksiyonunun periyodikliği şeklin bütün x-ekseni boyunca tekrarlanmasını sağlar.

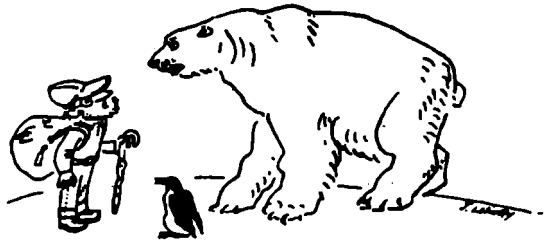
Diğer yandan, eğer modern bir mühendisseniz (a ve b niceliklerini toplamak yerine hızlı Fourier çözümlemesi üreten bilgisayarlarla çalışan türden), aklınıza ilk gelen Fourier Serisi çözümü olmuştur. Evet, öyle de yapabilirsiniz. Bu yöntemle düşündüyseniz ayrıntıları size bırakıyoruz. Kesinlikle soruyu çözme hakkını kazandınız. Örneğin, orijine göre simetrik ve π'nin katlarında tepe noktası olan bir çözüm:

$$y = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0} (-1)^k \frac{\sin(2k+1)\,x}{(2k+1)^2}$$

Bu şekilde bir çözüm arama mazoşizmi, her tür çiti gösterebilecek yöntemin esnekliğinden dolayı hoşgörülebilir (Yeni Valinin Keçisi bilgisayarınızı yiyemez). Ama ilk iki çözümü kullanarak da bunu yapabilirsiniz. Örneğin, ilk çözümü alalım; g(x) her dişin şeklini tanımlarken, y=g(6x-[x]-1/2) olsun ya da ikinci çözüm için g(x) istediğiniz biçimi tekrarlarken, y=g(arcSin(sinx) olsun Eğer Yeni Valinin çiti yerine sonlu uzunlukta bir çitle uğraşıyorsanız, sınır koşullarını Fourier serilerine uygulamayı çok sıkıcı bulabilirsiniz. İlk iki çözüm çok daha kolaydır. Sonlu periyodik yapıların (kristal) kural olduğu katı-hal (Solid-State) Fiziğinde, Fourier serisi ve dönüşümleri ile uğraşabilmek için çoğunlukla özel sınır koşulları ("periyodik" sınır koşulları) vermek gerekir.

Bu problemi bir arkadaşa, yazları yüksek ücret karşılığında (matematikçilere göre) marangozluk yapmış, çok dikkate değer bir uygulamalı matematikçi olan Talinn'li Rein Tomsaluu'ya adıyoruz. Sonbaharda bilime geri dönerdi. Her iki işinden de hoşlanırdı.

9) O Ayı Ne Renkti? Bu problem bilinen bir problemin genelleştirilmiş halidir. Problem şöyle: Kampçı çadırından çıkar ve bizim kampçının yaptığı gibi 2 km Güneye, 5 km Batıya ve 2 km de Kuzeye yürür ve çadırına ulaşır. Burada bir ayıyı yemeğini yerken bulur. Ayı ne renktir? Yanıt "beyaz"dır, çünkü yalnızca Kuzey Kutbu'nda bu yol kapalı bir yörünge oluşturur, ayı da öyleyse kutup ayısı olmalıdır.



Şimdi, kampçının son konumunun, başladığı noktayla ilgisi olup olmadığını sormalısınız. Yanıt kesinlikle "evet"tir. Sorunumuza yanıt bulmak için en kötü ve en iyi senaryoları ele alacağız (kampçıya göre en iyi ve en kötü senaryoları: çadıra yakın olmak, akşam yemeğine yakın olmak demektir!). Burada karşımıza derin ve ilginç bir soru çıkıyor: bir küre üzerindeki uzaklıkla ne kastediliyor? Bir kürenin yüzeyi ile uğraştığımıza göre, kullandığımız geometri Öklit geometrisi değildir. Yanıt bir eşitsizlik olur: $X_{min} \leq X \leq X_{max}$. Problem şimdi, minimum yürüyüş mesafesi X_{min} ve maksimum yürüyüş mesafesi X_{max}', bulmaya indirgenmiş oldu.

En İyi Durum (minimum uzaklık)

Bu durum ayı bilmecesi ile ilgili: Kampçının çadırı tam Kuzey kutbunda ise, yürüyüşünün üçüncü etabının sonunda çadırına ulaşır. Yerkürenin küresel şekli üzerinde, enlem ve boylamları ölçme yöntemlerimizle bunu gözlemlemek kolaydır. Bu durumda şekilde

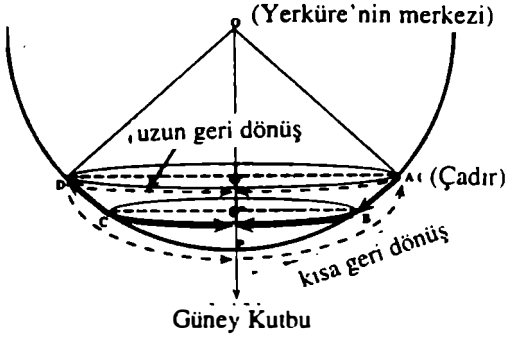
görüldüğü gibi, sorulan uzaklık sıfırdır. Bunu matematiksel olarak X_{min}= 0 biçiminde ifade ederiz (Şekil 1).



Bu sonuç deneyimlerimizden ve Oklit geometrisi ile elde edebileceğimizden fena halde farklıdır. Öklid geometrisine en yakın durum, kampçının çadırı ekvatorun 1 km kuzeyindeyken gerçekleşir. Kampçı ektvatoru geçerek Güney'e iner. Bu koşulda kampçının yolu pratikte dikdörtgen olan şeklin üç kenarını kapsar. Böylece çadırdan uzaklığı 5 km olmuş olur. (Kampçının erken akşam yemeği umutları bu durumda da suya düşer). Daha da Güneye inmek durumu daha zorlaştırır. Bu noktada en kötü senaryomuza geliyoruz.

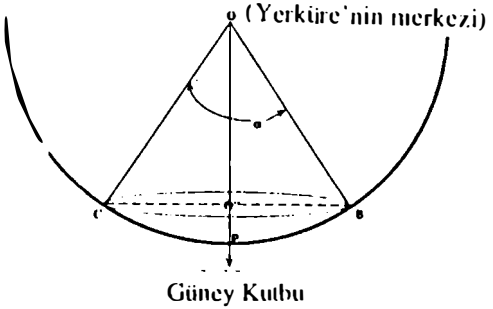
En Kötü Durum (X_{max}'ı bulmak)

Şimdi kampçımızın çadırını Güney Kutbu'nda bir yerlere kuralım. Kampçı 2 km Güneye sonra 5 km. Batıya yürüyecek. Bu durumda enlem korkunç değişir. Aşağıdaki şekilde görülebileceği gibi 180° olabilir.



Kampçı A noktasından yola çıkar, güneye B noktasına, sonra da batıya C noktasına ve kuzeye D noktasına doğru aynı mesafeleri kateder. Çadırı, batıya yolculuğu enlemi 180° değiştirecek şekilde yerleştirirsek, kampçı A yerine D noktasına, yani A noktasından en uzak noktaya varacaktır! D noktasından çadıra geri dönmek için en kısa yol Güney kutbundan geçen DCPBA yayıdır. Aslında, *bir kürenin yüzeyi üzerinde iki nokta arasındaki en kısa uzaklığın, bu noktaları birbirine bağlayan büyük çemberin bir yayı* olduğunu anımsarsınız. Öklitçi olmayan geometrinin genel halinde uzaklık böyle tanımlanır. DCPBA yolu hemen hemen düz bir çizgidir, çünkü kürenin yarıçapı, Yerküre'nin yarıçapıdır (6378 km). Kampçı, paralel üzerinde Doğu'ya doğru D'den A'ya gitmeye kalkışırsa, yol çok daha uzun sürebilir. Bu yolda bir yarıçember olabilir ve en kısa yol DCPBA yarıçemberin çapına çok yakındır. Bu yüzden, en kısa yol $\pi/2$ kere daha kısadır. Şimdi biraz ayrıntıya gireceğiz: "daha çok en iyi durum" ve arkasından tartışma.

Şimdi DCPBA yayının uzunluğunu bulmamız gerekiyor. AB ve CD yaylarının uzunluklarını biliyoruz: IABI=5 ve ICDI=N (herbiri 2 km), öyleyse yalnızca ICPBI=ω yayının uzunluğunu bulmamız gerekiyor. *Kampçının yürüyüşünün batı etabı daha küçük bir çemberin* (küre üzerinde bir paralelin parısı) *bir yayı* BMC'dir. Burada çember, Yerküre'nin eksenine dik bir düzlem üzerindedir. BC yayının w km (kampçının Batı etabı) uzunluğunda yarıçember olduğunu anladığımızdan, bu çemberin O"B yarıçapı kolayca bulunabilir. Öyleyse, yarıçemberin yarıçapı ω/π'dir.



Şimdi BPC yayını bulabiliriz: Şekil 3'te gösterildiği gibi, küreyi, Yerküre'nin merkezi 0'dan ve B, C noktalarından geçen düşey bir düzlemle kesebiliriz. Şekil 2'de görüldüğü gibi, Yerküre'nin ekseni ile A ve D noktaları da bu düzlem üzerindedir. Şimdi ihtiyacımız olan yay uzunluğunu bulabiliriz. 3. şekle tekrar bakın: OB ve OC (aynı nedenle OA ve OD) kürenin yarıçaplarıdır ve BÖC uzaklığı bilindiğinden, aralarındaki açı düzlem trigonometrisiyle hesaplanabilir. BÖC uzaklığı yarıçemberin yarıçıpının iki katı, yani $2\omega/\pi$ kilometredir. Böylece, şekil 3'te gösterildiği gibi, OC ve OB arasındaki α açısı

$$\alpha = 2\text{arcSin}[\omega/\pi R] \text{ ile verilebilir.}$$

Burada R Yerküre'nin yarıçapıdır. R yarıçaplı büyük çemberin .. açısı ile verilen bir yayı olduğundan BPC basitçe αR'dır. A ve D bu büyük çemberde yer aldıklarından (Şekil 2'ye bakın), çadıra giden en kısa yol DCPA yayı, yalnızca αR+IABI+ICD ya da αR+25 kilometredir. α'nın yukardaki ifadesini kullanarak en kötü durum Xmax'ı elde edebiliriz:

$$X_{max} = 2\ [S+R\text{arcsin}\ (w)\ \pi R)].$$

Yerkürenin yarıçapı yaklaşık 6400 km. olduğunda, bu en kötü durumu büyük bir kesinlikle bulabiliriz. Yerküre'nin yarıçapı R, kampçının yürüyebileceği bütün mesafelerden çok büyük olduğundan, arcsin'in W/ πR büyüklüğü oldukça küçüktür. Küçük bir z için, Sin $Z \approx Z$ ve arcsin$Z \approx Z$ verdiğinden yüksek derecede kesin bir sonuç. O zaman formülümüz

$$X_{max} = 2\ (+W/\pi)$$

ye indirgenir. Artık sayıları tahmin etmek kolaydır.

S= 2 km ve w+ 5 km iken X_{max} 7,183 km olarak buluruz. Kampçı zaten 9 km yürümüştü, akşam yemeğine yetişemeyecek.

Şimdi Biraz Daha En İyi Durumlar

Kampçıyı en uzağa götüreceğini bildiğimizden özellikle en kötü durumu seçtik ki, batı etabında 180°'lik boylam değiştirsin. (Bu yalnızca Yeltsin idaresinde görülen bir şey değildir, aslına bakarsanız bütün kapitalistlerin evrensel bir özelliğidir). Şekil 2'yi tekrar gözden geçirin: S, N ve W'yu sabit tutun ama A noktasını Güney Kutbuna yaklaştırın.BC yayı şimdi 180°'den daha fazla boylam değiştirecek, kampçı A noktasındaki çadırına daha yakın bir noktaya düşecektir. Gerçekten de kampçı çadırı Güney Kutbuna öyle yakın bir noktaya kurabilir ki, BC yayı 360° olur ve B ile C noktaları çakışır. Kuzey etabı, güney etabının tersidir, böylece D ve A noktaları da çakışır. Kampçı kendini çadırda bulur, bir başka en iyi durum (ama çadırında bir penguen bulabilir)! Çadırı BC yayı 720° olana dek güneye taşıyabiliriz. BC 360°'nin katları olduğunda daima en iyi durumu elde ederiz.

Bu çözümlerin gerçekleşebilmesi için Güney Kutbuna ne kadar yakın olmalıyız? Şekil 3'ü tekrar inceleyerek

$$W = 2\pi n \text{ I } O''Cl = 2\pi n \, R\sin(\alpha/2)$$

sonucuna varırız (Burda n herhangi bir doğal sayıdır). Güney Kutbuyla B ya da C noktaları arasındaki enlem farkını veren $\alpha/2$ açısı,

$$\frac{\alpha}{2} = \arcsin\left(\frac{W}{2\pi n R}\right)$$

diye bulunur. R, W'dan çok büyük olduğundan, sadeleştirerek

$\frac{\alpha}{2} = \frac{W}{2\pi n R}$ buluruz. Böylece Güney Kutbundaki yolumuzun en güneydeki noktasından uzaklık $|PB| = R\frac{\alpha}{2} = \frac{W}{2\pi n}$

olur. Bu durumda, W= 5 km.'dir ve kampçımız ilk olarak n=1 iken, yani B noktası Güney Kutbundan 0.7958 km. uzaktayken şanslı olur. O zaman çadırı Güney kutbundan 2.796 km uzağa kurmak gerekir; n=2

için çadır 2.398 km uzağa; n= 3 için 2.265 km uzağa vb. kurulmalıdır. Kutuptan kritik uzaklık olan 2 km'ye yaklaştıkça bu tür iyimser en iyi çözümler için bir sonsuz seri oluşur.

Bu sayı dizisinin en ilginç yanı, çadır bu şans noktalarının arasında bir yerlere kurulduğunda, yürünecek mesafenin en kötü durum senaryolarına benzemesi. Örneğin, kampçı çadırını tamamen iki "şans" noktasının arasına kurduğunda Yerküre'nin öbür yanında 180° uzağa düşer. n arttıkça, bu şans noktaları ile şanssız noktalar arasındaki uzaklık azalır. Yani çadırı kurarken küçük bir yanlış adım, zamanında akşam yemeği olaslığını tümüyle değiştirir. Güney Kutbundan S km.'den biraz fazla uzaktaki bir başlangıç konumu, kampçının daha bile küçük bir hatası, yürüyüşün sonundaki konumda kayda değer bir değişiklik yaratır. Konum aslında tümüyle belirsiz olur. Bu tür bir durum "başlangıç koşullarında duyarlılık" diye adlandırılır, bu sıralar çok konuşulan bir konu olan kaosun iki gerekliliğinden biridir (Fraktal (?) boyutlara yol açan diğer gereklilik, çok kaotik tartışmalara neden olur!).

En Kötü Durumu İyileştirmek

Şimdi en kötü duruma dönelim. Kampçı, Güneye, Batıya ve Kuzeye gitti, ancak konumunu kesin olarak bilmiyor. Başlangıç koşullarının duyarlılığından bu olasılığı biliyoruz. Hava kararıyor ve soğuyor. Malzemeler tükenmek üzere. Kampçı çadırını nasıl kaybetmez? Çadırı kaybetmemek için en iyi taktik nedir? En iyi taktik Doğu'ya gitmektir. Şekil 2'de bu yol "uzun geri dönüş diye gösterilir. Yukarıdaki yaklaşımla yayın uzunluğunu hesaplayabiliriz: yayın uzunluğu ../2 çarpı çap DO''dır. Ama bu ölçekte Yerküre pratik olarak düzdür ve bu yüzden DO'A ≈ X_{max} olur. En garantili dönüş yolu en kısa yoldan yalnızca $\pi/2 \approx 1{,}57$ çarpanı kadar farklıdır.

Bu Uzun Öyküyü Bitirirken Birkaç Yorum

En ünlü Rus askeri lideri, onsekizinci yüzyılda general olan Aleksandr Suvorov'a göre en kısa yol bildiği yolmuş.

Kilometre, Yerküre üzerindeki uzaklıklar için kusursuz bir ölçüdür: 1 km, yarım meridyenin 10^{-7}'sine eşittir. Bu uzaklık, ondokuzuncu yüzyılın başlarında (yaklaşık 1810) Fransız Bilimler Akademisi'nde bir grup tarafından ölçülmüştür. Sahra Çölü'nde birkaç açısal dereceyi geçerek, aştıkları yolu odometreye benzer bir aletle ölçmüşlerdi (Çok yetenekli bir fizikçi E. Malus bu grubun bir parçasıydı ve bu gezide yüksek ateşli bir hastalığa yakalanarak, Paris'e döndüğünde ölmüştü).

Bu problemde Yerküre'nin tam bir küre olmadığı bilgisini gözardı ettik.

Yerkürenin tam bir küreden ne kadar saptığını haritacılar hassasiyetle ölçmekteler. Bu sapmalar denizciler ve astronotlar için de çok ilgi çekicidir.

10) Kimlik Bunalımı: Manyetik Güney kutbu. Mıknatısın kutuplarından birine uzlaşımla Kuzey Kutbu adı verilmiştir. Mıknatıs, pusula ibresi gibi kullanıldığında Kuzey Kutbu, kuzeyi gösterir, mıknatısın kutuplarını adlandıracak başka bir seçenek yoktur. Oysa mıknatısın kutupları ters kutupları çeker. Aynı kutuplar (Örneğin Kuzey-Kuzey) birbirini iter. Bu yüzden pusula ibresinin gösterdiği Kuzey Kutbu, Yerküre'nin manyetik Güney Kutbudur. Manyetik Güney Kutbu'nun coğrafi Kuzey Kutbu'na; manyetik Kuzey Kutbu'nun da coğrafi Güney Kutbu'na yakın olması gerektiğini anlıyoruz! Bu isimler yüzlerce yıldır kullanıldığı için meselenin çözümü umutsuzdur!

Yayınevimiz beyin takımına ikinci bilmece kitabını sunuyor.

Bu kitapta yer alan problemler ta Çarlık zamanından bu yana en başarılı fizik ve matematik öğrencilerine saç baş yoldurmuştur. Kitaptaki problemlerin temel amacı bilimsel ve matematiksel düşünme alışkanlığını yaratmaktır. Ne düşünüleceğinden çok nasıl düşünüleceğini öğretmektir.

Bu kitaptaki 100 problem öncelikle eğlendirme amacıyla seçildi. Ama hepsi sizlere bir şeyler de öğretecektir. Bu sorular sizi eğlendirebilir, şaşırtabilir, süründürebilir hatta yoğun takıntılı davranışlara neden olabilir.

Kitabın hazırlanışında kolaydan zora bir sıralama yapılmıştır. Isındırma bölümlerinde özendirmek amacıyla göreli olarak kolay problemler seçilmiştir.

Dünyanın nasıl işlediğini anlamadan hiç kimse tam eğitimli sayılmamalıdır. Matematiğin ve bilimin güzelliği kanıtlanmalı ve anlaşılmalıdır.

Bu kitabın temel çabalarından biri budur.

Hoşlanacağınızı umuyoruz.

ISBN 975-7380-70-9

9 960007 073807