Prof. Dr. Mustafa BALCI
Yrd. Doç. Dr. Ali ARAL

ÇÖZÜMLÜ

MATEMATİK ANALİZ Problemleri 1



balcı Yayınları

İÇİNDEKİLER

1 **KÜMELER VE SAYILAR**

Kümeler ... 1
Tümevarım Yöntemi ... 3
Problemler ... 3
Çözümler ... 9
Problemler ... 33
Çözümler ... 35
Bölüm Problemleri ... 44
Çözümler ... 46

2 **FONKSİYONLAR**

Gerekli Bilgiler ... 51
Problemler ... 54
Çözümler ... 57
Trigonometrik, Üstel, Logaritmik ve Hiperbolik Fonksiyonlar ... 70
Problemler ... 71
Çözümler ... 73
Bölüm Problemleri ... 82
Çözümler ... 88

3 **LİMİT**

Diziler ... 92
Problemler ... 96
Çözümler ... 98
Bir Fonksiyonun Limiti ... 107
Problemler ... 108
Çözümler ... 110
Bölüm Problemleri ... 118
Bölüm Probleminin Çözümleri ... 120

4 **SÜREKLİLİK**

Sürekli Fonksiyonlar ... 124
Sürekli Fonksiyonların Özellikleri ... 125
Problemler ... 127
Çözümler ... 129
Bölüm Problemleri ... 136
Çözümler ... 137

5 **TÜREV**

Türev Alma Kuralları ... 141
Problemler ... 143
Çözümler ... 148
Türevin Uygulamaları ... 164
Türevle İlgili Teoremler ... 164

Problemler 167
Çözümler 172
Belirsiz Şekiller 195
Problemler 196
Çözümler 198
Problemler 214
Çözümler 215
Bölüm Problemleri 229
Çözümler 231

6 BELİRSİZ İNTEGRALLER
Problemler 235
Çözümler 235
Problemler 237
Çözümler 237
Problemler 241
Çözümler 242
Problemler 247
Çözümler 248
Problemler 257
Çözümler 258
Problemler 264
Çözümler 265
Bölüm Problemleri 273
Çözümler 275

7 BELİRLİ İNTGRALLER
Problemler 304
Çözümler 308
Bölüm Problemleri 329
Çözümler 331

8 BELİRLİ İNTEGRALLERİN UYGULAMALARI
Alan Hesabı 338
Problemler 338
Çözümler 341
Yay Uzunluğu Hesabı 353
Problemler 353
Çözümler 355
Hacim Hesabı 358
Problemler 359
Çözümler 361
Dönel Yüzeylerin Alanı 375
Problemler 375
Çözümler 377
Bölüm Problemleri 383
Çözümleri 386

1 KÜMELER VE SAYILAR

KÜMELER

Bu bölümle ilgili temel bilgiler aşağıda özetlenmiştir. Problemlerin çözümüne geçmeden önce bu kısmı okumanız tavsiye olunur.

TANIM

Eğer bir A kümesinin her elemanı B kümesinin de bir elemanı ise A kümesi B nin bir **alt kümesidir** denir ve $A \subset B$ şeklinde gösterilir, yani

$$A \subset B \Leftrightarrow [\, a \in A \Rightarrow a \in B \,].$$

Eğer A kümesi B kümesinin alt kümesi değilse bu $A \not\subset B$ şeklinde gösterilir.

TANIM

A ve B kümelerinin **eşitliği**

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ ve } B \subset A$$

şeklinde tanımlanır. Eğer A kümesinin en az bir elemanı B de değilse veya B in en az bir elemanı A da değilse A ile B **farklıdır** denir, $A \neq B$ şeklinde gösterilir.

TANIM

A ve B kümelerinin elemanlarından meydana gelen kümeye A ile B nin **birleşimi** denir. $A \cup B$ ile gösterilir. Buna göre,

$$A \cup B = \{ x : x \in A \text{ veya } x \in B\}$$

dir.

TANIM

A ve B kümelerinin ortak elemanlarından meydana gelen kümeye A ile B kümelerinin **arakesiti** veya **kesişimi** denir, $A \cap B$ ile gösterilir.

$A \cap B = \{ x : x \in A \text{ ve } x \in B \}$.

TANIM

$A \cap B = \emptyset$ ise A ile B kümeleri **ayrıktır** denir.

TANIM

A kümesinde olup da B de bulunmayan elemanların kümesine B nin A kümesine göre tümleyeni denir, $A \setminus B$ ile gösterilir.

TANIM

A ve B kümelerinin **simetrik farkı,** kümelerden birine ait olup da diğerine ait olmayan elemanların kümesidir.

Buna göre,

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

dır.

TANIM

Hiçbir elemanı olmayan kümeye **boş küme** denir. $\emptyset$ sembolü ile gösterilir.

TANIM

Bir A kümesinin E evrensel kümesine göre tümleyenine A kümesinin **tümleyeni** denir. A^t ile gösterilir. Buna göre

$$A^t = \{ x : | \ x \notin A \}$$

dir.

TEOREM (De Morgan Kuralları)

A ve B herhangi iki küme olsun.

(a) $(A \cup B)^t = A^t \cap B^t$

(b) $(A \cap B)^t = A^t \cap B^t$

dır.

TANIM

A ve B kümelerinin **kartezyen çarpımı,** $a \in A$ ve $b \in B$ olmak üzere tüm sıralı (a, b) ikililerinin kümesidir. Buna göre,

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ ve } b \in B \}$$

dir.

TÜMEVARIM YÖNTEMİ

Doğal sayılarla ilgili önermelerin doğruluğunu göstermeye yarayan ispat metodlarından biri de tümevarım metodudur. Bu metot aşağıdaki basit teoreme dayanır.

TEOREM

$D \subset N$ olsun. D kümesi

(a) $1 \in D$

(b) $k \in D \Rightarrow (k + 1) \in D$

şartlarını gerçeklerse $D = N$ dir.

SONUÇ

P(n) doğal sayılarla ilgili bir önerme ve D de bu önermenin doğruluk değerleri kümesi, yani

$$D = \{ n : n \in \mathbf{N} \text{ ve } P(n) \text{ doğru} \}$$

olsun. Eğer

(a) $1 \in D$

ve

(b) $k \in D$ olduğunda $(k + 1) \in D$

ise $D = \mathbf{N}$ dir, yani P(n) önermesi her $n \in \mathbf{N}$ için doğrudur.

PROBLEMLER

1. A, B ve C herhangi üç küme olsun. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $A \setminus A = \emptyset$

(b) $A \setminus \emptyset = A$

(c) $A \Delta \emptyset = A$

(d) $A \cup B = B \cup A$

(e) $A \cap B = B \cap A$

(f) $A \Delta B = B \Delta A$

(g) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

(h) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(ı) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$

(j) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(k) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(l) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

(m) $A^t \setminus B^t = B \setminus A$

(n) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

(o) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

(p) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

2. Aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$

(b) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$

(c) $A \Delta B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$

(d) $A \Delta B = E \Leftrightarrow A = B^t$

(e) $A \subset B \Leftrightarrow A^t \supset B^t$

(f) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow B \subset A^t$

(g) $A \subset C$ ve $B \subset C \Leftrightarrow A \cup B \subset C$

(h) $C \subset A$ ve $C \subset B \Leftrightarrow C \subset A \cap B$

(i) $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$ veya $B = \emptyset$

(j) $(A \backslash B)^t = (B \backslash A)^t \Leftrightarrow A = B$

3. a ve b pozitif iki sayı olsun.

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

olduğunu gösteriniz.

4. n bir tamsayı olmak üzere, P = 2n şeklinde yazılabilen p sayısına **çift sayı** denir. q + 1 çift olduğunda q sayısına **tek sayı** adı verilir. Buna göre tek sayılar 2n–1 şeklinde yazılabilen sayılardır. İspat ediniz ki eğer a bir tek sayı ise n^2-1 sayısı 8 ile bölünür.

5. Eğer her pozitif h için $0 \leq x < h$ ise $x = 0$ dır, ispatlayınız.

6. İspat ediniz ki

(a) Her bir x reel sayısı için $n > x$ olacak şekilde en az bir n doğal sayısı vardır.

(b) $x > 0$ ise $\frac{1}{n} < x$ olacak şekilde en az bir n doğal sayısı vardır.

7. a, b ve x reel sayılar olsun. Her bir n doğal sayısı için

$$a \leq x < a + \frac{b}{n}$$

ise $x = a$ dır, gösteriniz.

8. a ve b, $a < b$ olacak şekilde, herhangi iki reel sayı olsun.

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

olduğunu gösteriniz.

9. x ve y, $x < y$ olacak şekilde, herhangi iki reel sayı olsun. $x < z < y$ olacak şekilde en az bir z reel sayısının varlığını gösteriniz. Bu özellikten yararlanarak, "Herhangi iki reel sayı arasında sonsuz çoklukta reel sayı vardır" diyebilir miyiz?

10. x rasyonel, $x \neq 0$ ve y irrasyonel olsun. $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$, x / y ve y / x sayılarının irrasyonel olduğunu gösteriniz.

11. İki irrasyonel sayının toplamı ve çarpımı daima irrasyonel midir?

12. "Her $n \in N$ için $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{8}(2n + 1)^2$ dir" önermesini p(n) ile gösterelim.

(a) Herhangi bir k doğal sayısı için p(k) doğru olduğunda p(k + 1) de doğrudur, gösteriniz.

(b) "Tümevarım metodu gereğince p(n) önermesi her n doğal sayısı için doğrudur" diyebilir miyiz?

13. Her $n \in N$ için aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2} n (n + 1)$

(b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n + 1)(2n + 1)$

(c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n + 1)^2$

(d) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

(e) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n - 1)^2 = \frac{1}{3} n (2n - 1)(2n + 1)$

(f) $2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2 = \frac{2}{3} n (n + 1)(2n + 1)$

(g) $2.1 + 3.2 + 4.2^2 + \ldots + (n + 1) 2^{n-1} = n.2^n$

(h) $1.4 + 2.9 + \ldots + n(n+1)^2 = \frac{1}{12} n(n+1)(n+2)(3n+5)$

(ı) $1.2.3 + 2.3.4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$

(j) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + - \ldots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$

(k) $1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \ldots + n(n!) = (n+1)! - 1$

(l) $a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + (a + (n-1)d) = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

(m) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

(n) $\frac{1^2}{1.2} + \frac{2^2}{3.5} + \frac{3^2}{5.7} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

(o) $\frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{(p+1)(p+2)} + \ldots + \frac{1}{(p+n-1)(p+n)} = \frac{n}{p(p+n)}$, $(p \in R^+)$

(p) $1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$, $(a \neq 1)$

14. $x \neq 1$ için $\prod_{k=0}^{n} (1 + x^{2^k}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$ olduğunu gösteriniz.

15. $x \neq 1$ için $\sum_{k=1}^{n} \frac{x^{2^{k-1}}}{1-x^{2^k}} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2^n}}$ olduğunu gösteriniz.

16. Her $n \in N$ için $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$ olduğunu gösteriniz.

17. Her n doğal sayısı için $\sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p} = \sum_{m=1}^{2n} \frac{(-1)^{m+1}}{m}$ olduğunu gösteriniz.

18. $0 < p < 1$ için $(1-p)^n \geq 1 - np$ olduğunu gösteriniz.

19. Her $n \in N$ ve $\alpha_n \geq 0$ için

$(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \ldots (1 + \alpha_n) \geq 1 + (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)$

eşitsizliğini ispatlayınız.

20. Her $n \in N$ ve $0 < \alpha_n < 1$ için

$$(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) \ldots (1 - \alpha_n) \geq 1 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)$$

eşitsizliğini ispatlayınız.

21. Her $n \in N$ için aşağıdaki eşitsizliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $(2n)! \leq 2^{2n} (n!)^2$

(b) $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

(c) $3^n \geq n \cdot 2^n$

(d) $2! \cdot 4! \ldots (2n)! \geq [\,(n+1)!\,]^n$

22. Her $n \in N_2$ için

$$3^n + 4^n \leq 5^n$$

olduğunu gösteriniz.

23. Her $n \in N$ için,

(a) $n(2n + 1)(7n + 1)$ sayısının 6 ile

(b) $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ sayısının 11 ile

(c) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ sayısının 7 ile

(d) $3.5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ sayısının 17 ile

(e) $17^{4n+1} + 3.9^{2n}$ sayısının 5 ile

(f) $12^n + 10$ sayısının 11 ile

bölünebileceğini gösteriniz.

24. $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ ifadesini sadeleştirerek sonucu bulunuz. Bulduğunuz sonucu tümevarımla ispatlayınız.

25. n elemanlı bir kümenin alt kümeleri sayısının 2^n olduğunu gösteriniz.

26. $p \geq 0$ ve $n \in N_0$ için

$$(1 + p)^n \geq 1 + np + \frac{n(n-1)}{2} p^2$$

olduğunu gösteriniz.

27. $0 < p < 1$ ve her $n \in N_0$ için

$$(1 - p)^n \leq 1 - np + \frac{n(n-1)}{2} p^2$$

olduğunu gösteriniz.

28. $p > 0$ ve $n \in N_2$ için

$$(1 + p)^n \geq 1 + np + \frac{n^2}{4} p^2$$

olduğunu gösteriniz.

29. Her $n \in N$ için

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

olduğunu gösteriniz (Yol gösterme : $(1 + x)^n (1 + x)^n = (1 + x)^{2n}$ özdeşliğinden x^n nin katsayılarını karşılaştırınız).

30. Her $n \in N$ için

$$\binom{2n}{0}^2 - \binom{2n}{1}^2 + \binom{2n}{2}^2 - + \ldots - \binom{2n}{2n-1}^2 + \binom{2n}{2n}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}$$

olduğunu ispatlayınız (Yol gösterme: $(1 + x)^{2n} (1 - x)^{2n} = (1 - x^2)^{2n}$ özdeşliğinden yararlanınız).

ÇÖZÜMLER

(a) $x \in A \setminus A \Rightarrow x \in A$ ve $x \notin A \Rightarrow x \in A$ ve $x \in A^t \Rightarrow x \in A \cap A^t = \emptyset$

$\Rightarrow A \setminus A \subset \emptyset$ (1)

$x \in \emptyset \Rightarrow x \in A \cap A^t \Rightarrow x \in A$ ve $x \in A^t \Rightarrow x \in A$ ve $x \notin A$

$\Rightarrow x \in A \setminus A \Rightarrow \emptyset \subset A \setminus A$ (2)

(1) ve (2) den $A \setminus A = \emptyset$ bulunur.

(b) $x \in A \setminus \emptyset \Rightarrow x \in A$ ve $x \notin \emptyset \Rightarrow x \in A$ ve $x \in \emptyset^t = E$

$\Rightarrow x \in A \cap E \Rightarrow x \in A$

$\Rightarrow A \setminus \emptyset \subset A$ (3)

$x \in A \Rightarrow x \in A \cap E \Rightarrow x \in A$ ve $x \in E \Rightarrow x \in A$ ve $x \notin E^t$

$\Rightarrow x \in A$ ve $x \notin \emptyset \Rightarrow x \in A \setminus \emptyset \Rightarrow A \subset A \setminus \emptyset$ (4)

(3) ve (4)'den $A \setminus \emptyset = A$ bulunur.

(c) $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, $B = \emptyset$ alınırsa

$A \Delta \emptyset = (A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A) = A \cup \emptyset = A$

(d) $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ veya $x \in B \Leftrightarrow x \in B$ veya $x \in A \Leftrightarrow x \in B \cup A$

(e) $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ ve $x \in B \Leftrightarrow x \in B$ ve $x \in A \Leftrightarrow x \in B \cap A$

(f) $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (B \cup A) \setminus (B \cap A)$

$= (B \setminus A) \cup (A \setminus B) = B \Delta A$

(g) $x \in A \cup (B \cup C) \Rightarrow x \in A$ veya $x \in (B \cup C)$

$\Rightarrow x \in A$ veya $(x \in B$ veya $x \in C)$

$\Rightarrow (x \in A$ veya $x \in B)$ veya $x \in C$

$\Rightarrow x \in (A \cup B)$ veya $x \in C \Rightarrow x \in (A \cup B) \cup C$

$\Rightarrow A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$ (5)

$x \in (A \cup B) \cup C \Rightarrow x \in (A \cup B)$ veya $x \in C$

$\Rightarrow (x \in A$ veya $x \in B)$ veya $x \in C$

$\Rightarrow x \in A$ veya $(x \in B$ veya $x \in C)$

$\Rightarrow x \in A$ veya $x \in (B \cup C) \Rightarrow x \in A \cup (B \cup C)$

$\Rightarrow (A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$ (6)

(5) ve (6) dan $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

(j) $x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in A$ veya $x \in (B \cap C)$

$\Rightarrow x \in A$ veya $(x \in B$ ve $x \in C)$

$\Rightarrow (x \in A$ veya $x \in B)$ ve $(x \in A$ veya $x \in C)$

$\Rightarrow x \in (A \cup B)$ ve $x \in (A \cup C)$

$\Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\Rightarrow A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup (A \cup C)$ (7)

$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow x \in (A \cup B)$ ve $x \in (A \cup C)$

$\Rightarrow x \in A$ veya $x \in B$ ve $x \in A$ veya $x \in C$

$\Rightarrow x \in A$ veya $(x \in B$ ve $x \in C)$

$\Rightarrow x \in A$ veya $x \in (B \cap C) \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$

$\Rightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$ (8)

(7) ve (8) den $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(k) $x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A$ ve $x \in (B \cup C)$

$\Rightarrow x \in A$ ve $(x \in B$ veya $x \in C)$

$\Rightarrow (x \in A$ ve $x \in B)$ veya $(x \in A$ ve $x \in C)$

$\Rightarrow x \in (A \cap B)$ veya $x \in (A \cap C) \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$\Rightarrow A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (9)

$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow x \in (A \cap B)$ veya $x \in (A \cap C)$

$\Rightarrow (x \in A$ ve $x \in B)$ veya $(x \in A$ ve $x \in C)$

$\Rightarrow x \in A$ ve $x \in B$ veya $x \in C$

$\Rightarrow x \in A$ ve $x \in B \cup C$

$\Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$

$\Rightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$ (10)

(9) ve (10) dan $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ bulunur.

(l) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

$x \in A \setminus (B \cap C) \Rightarrow x \in A$ ve $x \notin (B \cap C)$

$\Rightarrow x \in A$ ve $x \in (B \cap C)^t$

$\Rightarrow x \in A$ ve $x \in (B^t \cup C^t)$

$\Rightarrow x \in A$ ve $x \notin B$ veya $x \notin C$

$\Rightarrow (x \in A$ ve $x \notin B)$ veya $(x \in A$ ve $x \notin C)$

$\Rightarrow x \in (A \setminus B)$ veya $x \in (A \setminus C)$

$\Rightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

$\Rightarrow A \setminus (B \cap C) \subset (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ (11)

$x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \Rightarrow x \in (A \setminus B)$ veya $x \in (A \setminus C)$

$\Rightarrow (x \in A$ ve $x \notin B)$ veya $(x \in A$ ve $x \notin C)$

$\Rightarrow x \in A$ ve $x \notin B$ ve $x \notin C$

$\Rightarrow x \in A$ ve $x \notin (B \cap C)$

$\Rightarrow x \in A \setminus (B \cap C)$

$\Rightarrow (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \subset A \setminus (B \cap C)$ (12)

(11) ve (12) den $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ olur.

(m) $A^t \setminus B^t = B \setminus A$

$x \in A^t \setminus B^t \Rightarrow x \in A^t$ ve $x \notin B^t \Rightarrow x \notin A$ ve $x \in B$

$\Rightarrow x \in B$ ve $x \notin A \Rightarrow x \in B \setminus A$

$\Rightarrow A^t \setminus B^t \subset B \setminus A$ (13)

$x \in B \setminus A \Rightarrow x \in B$ ve $x \notin A \Rightarrow x \notin A$ ve $x \in B$

$\Rightarrow x \in A^t$ ve $x \notin B^t \Rightarrow x \in A^t \setminus B^t$

$\Rightarrow B \setminus A \subset A^t \setminus B^t$ (14)

(13) ve (14) den eşitlik bulunur.

(n) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

$(x, y) \in (A \cup B) \times C \Rightarrow x \in (A \cup B)$ ve $y \in C$

$\Rightarrow (x \in A$ veya $x \in B)$ ve $y \in C$

$\Rightarrow (x \in A$ ve $y \in C)$ veya $(x \in B$ ve $y \in C)$

$\Rightarrow (x, y) \in A \times C$ veya $(x, y) \in B \times C$

$\Rightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$

$\Rightarrow (A \cup B) \times C \subset (A \times C) \cup (B \times C)$ (15)

$(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$

$\Rightarrow (x, y) \in (A \times C)$ veya $(x, y) \in (B \times C)$

$\Rightarrow (x \in A$ ve $y \in C)$ veya $(x \in B$ ve $y \in C)$

$\Rightarrow (x \in A$ veya $x \in B)$ ve $y \in C$

$\Rightarrow x \in A \cup B$ ve $y \in C \Rightarrow (x,y) \in (A \cup B) \times C$

$\Rightarrow (A \times C) \cup (B \times C) \subset (A \cup B) \times C \qquad (16)$

(15) ve (16) den $(A \cup B) \times C = (A \times B) \cup (B \times C)$

(o) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

$(x, y) \in (A \cap B) \times C \Rightarrow x \in (A \cap B)$ ve $y \in C$

$\Rightarrow x \in A$ ve $x \in B$ ve $y \in C$

$\Rightarrow (x \in A$ ve $y \in C)$ ve $(x \in B$ ve $y \in C)$

$\Rightarrow (x, y) \in A \times C$ ve $(x, y) \in B \times C$

$\Rightarrow (x, y) \in (A \times C) \cap (B \times C)$

$\Rightarrow (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C) \qquad (17)$

$(x,y) \in (A \times C) \cap (B \times C) \Rightarrow (x,y)\,(A \times C)$ ve $(x,y) \in (B \times C)$

$\Rightarrow (x \in A$ ve $y \in C)$ ve $(x \in B$ ve $y \in C)$

$\Rightarrow (x \in A$ ve $x \in B)$ ve $y \in C$

$\Rightarrow x \in A \cap B$ ve $y \in C \Rightarrow (x, y)\,(A \cap B) \times C$

$\Rightarrow (A \times C) \cap (B \times C) \subset (A \cap B) \times C \qquad (18)$

(17) ve (18) den istenilen eşitlik bulunur.

2. (a) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$

$\Rightarrow$: $A \cap B = A$ olsun. $A \subset B$ olduğunu gösterelim. $x \in A$ ise $x \in A \cap B$ dir. Dolayısı ile $x \in B$ elde edilir. Bu durumda $A \subset B$ dir.

$\Leftarrow$: $A \subset B$ olsun. $A \cap B = A$ olduğunu gösterelim. $x \in A \cap B$ alalım. Dolayısı ile $x \in A$ dır. Yani $A \cap B \subset A$ olur.

$x \in A$ alalım. $A \subset B$ olduğundan $x \in B$ dir. Dolayısı ile $x \in A \cap B$ elde edilir. Yani $A \subset A \cap B$ olur.

$A \cap B \subset A$ ve $A \subset A \cap B$ olduğundan $A \cap B = A$ dır.

(b) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$

$\Rightarrow$: $A \cup B = B$ olsun. $A \subset B$ olduğunu gösterelim. $x \in A$ ise $x \in A \cup B$ dolayısı ile hipotezden $x \in B$ olur. Yani $A \subset B$ dir.

$\Leftarrow$: $A \subset B$ olsun. $A \cup B = B$ olduğunu gösterelim. $x \in A \cup B$ olsun. $\Rightarrow$

$x \in B$ dir. $A \cup B \subset B$ sağlanır.

$x \in B$ olsun. Bu durumda $x \in A \cup B$ olup, $B \subset A \cup B$ gerçeklenir. O halde $A \cup B = B$ olur.

(c) $\Rightarrow$: $A \Delta B = \emptyset$ olsun. $A = B$ olduğunu gösterelim. Bir an için $A \neq B$ olduğunu düşünelim. $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \neq \emptyset$ olur. Bu da hipotez ile çelişir. Yani $A = B$ dir.

$\Leftarrow$: $A = B$ olsun. $A \Delta B = \emptyset$ olduğunu gösterelim.

$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$

(d) $A \Delta B = E \Leftrightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = E \Leftrightarrow (A \cup B) \setminus (A \cap B) = E$

$\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ ve $A \cup B = E$

$\Leftrightarrow A^t = B$

olur.

(e) $\Rightarrow$: $A \subset B$ olsun. $A^t \supset B^t$ olduğunu gösterelim. $x \in B^t$ olsun. $\Rightarrow x \notin B$

$\Rightarrow$ hipotezden $x \notin A \Rightarrow x \in A^t \Rightarrow A^t \supset B^t$.

$\Leftarrow$: $A^t \supset B^t$ olsun. $A \subset B$ olduğunu gösterelim.

$x \in A$ olsun. $\Rightarrow x \notin A^t$ hipotezden $x \notin B^t$ gerçeklenir.

$\Rightarrow x \in B$ elde edilir. Yani $A \subset B$ gerçeklenir.

(f) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow B \subset A^t$

$\Rightarrow$: $A \cap B = \emptyset$ olsun. $B \subset A^t$ olduğunu gösterelim.

$x \in B$ olduğunu kabul edelim. $A \cap B = \emptyset$ olduğundan $x \notin A$ olur.

$\Rightarrow x \in A^t$ yani $B \subset A^t$ gerçeklenir.

$\Leftarrow$: $B \subset A^t$ olsun. $A \cap B = \emptyset$ olduğunu gösterelim.

$x \in B$ olsun. Hipotezden $x \in A^t$ yani $x \notin A$ olur.

Bu durumda $A \cap B = \emptyset$ gerçeklenir.

(g) $\Rightarrow$: $A \subset C$ ve $B \subset C$ olsun. $A \cup B \subset C$ olduğunu gösterelim.

$x \in A \cup B$ olsun. Bu durumda $x \in A$ veya $x \in B$; $x \in A$ ise

$A \subset C$ olduğundan $x \in C$ gerçeklenir, yani $A \cup B \subset C$ olur.

$x \in B$ ise $B \subset C$ olduğundan $x \in C$ olur.

Yani $A \cup B \subset C$ gerçeklenir.

$\Leftarrow$: $A \cup B \subset C$ olsun. $A \subset C$ ve $B \subset C$ olduğunu gösterelim.

$x \in A$ olsun. Bu durumda $x \in A \cup B$ dir. Hipotezden $x \in C$ olur. Yani $A \subset C$ dir.

$x \in B$ olsun. Bu durumda $x \in A \cup B$ dir. Hipotezden $x \in C$ olur. Yani $B \subset C$ dir.

(h) $C \subset A$ ve $C \subset B \Leftrightarrow C \subset A \cap B$

$\Rightarrow$: $C \subset A$ ve $C \subset B$ olsun. $C \subset A \cap B$ olduğunu gösterelim. $x \in C$ olsun. $C \subset A$ olduğundan $x \in A$ gerçeklenir. $C \subset B$ olduğundan $x \in B$ dir. Bu durumda $x \in A \cap B$. Yani $C \subset A \cap B$ olur.

$\Leftarrow$: $C \subset A \cap B$ olsun. $C \subset A$ ve $C \subset B$ olduğunu gösterelim. $x \in C$ ise hipotezden $x \in A \cap B$ dir. Yani $x \in A$ ve $x \in B$. Bu durumda $C \subset A$ ve $C \subset B$ gerçeklenir.

(i) $A \times B = \emptyset$ ise $A \neq \emptyset$ veya $B \neq \emptyset$ dır. Çünkü $A \neq \emptyset$ ve $B \neq \emptyset$ ise $A \times B \neq \emptyset$ olur.

(j) $(A \setminus B)^t = (B \setminus A)^t \Leftrightarrow A = B$

$\Rightarrow$: $(A \setminus B)^t = (B \setminus A)^t$ olsun. $A = B$ olduğunu gösterelim. Bunun için de $A \subset B$ ve $B \subset A$ olduğunu göstermeliyiz.

$x \in A$ olsun. $x \in (B \setminus A)^t$

$\Rightarrow x \in (A \setminus B)^t$ (hipotezden)

$\Rightarrow x \in (A \cap B^t)^t \Rightarrow x \in A^t \cup (B^t)^t \Rightarrow x \in A^t$ veya $x \in B$

$x \in A^t$ olamaz. Çünkü $x \in A$ kabul etmiştik. Bu durumda $x \in B$ dir. Yani $A \subset B$ gerçeklenir.

$x \in B$ olsun. $\Rightarrow x \in (A \setminus B)^t \Rightarrow x \in (B \setminus A)^t$ (hipotezden)

$\Rightarrow x \in (B \cap A^t)^t \Rightarrow x \in B^t \cup (A^t)^t \Rightarrow x \in B^t \cup A$

$\Rightarrow x \in B^t$ veya $x \in A$

$x \in B^t$ olamaz. Çünkü $x \in B$ kabul etmiştik.

Bu durumda $x \in A$ dır. Yani $B \subset A$ gerçeklenir.

$\Leftarrow$: $A = B$ olsun. $(A \setminus B)^t = (B \setminus A)^t$ olduğunu gösterelim.

$(A \setminus B)^t = (A \setminus A)^t = \emptyset^t = E$ $(B \setminus A)^t = (B \setminus B)^t = \emptyset^t = E$

$\Rightarrow (A \setminus B) = (B \setminus A)^t$

3. $(a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{ab} \geq 2 \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

4. a tek sayı ise $n \in Z$ olmak üzere $a = 2n - 1$ şeklinde yazılabilir.

$a^2 - 1 = (2n - 1)^2 - 1 = 4n^2 - 4n + 1 - 1 = 4(n^2 - n) = 4n(n - 1)$

n tek ise $n - 1$ çift sayıdır ve $n - 1 = 2p$ yazılabilir.

$a^2 - 1 = 4(2p + 1) \cdot 2p = 8p(2p + 1) \Rightarrow a^2 - 1$, 8 ile bölünür.

n çift ise $n = 2q$ yazılabilir.

$a^2 - 1 = 4.2q(2q - 1) = 8q(2q - 1) \Rightarrow a^2 - 1$, 8 ile bölünür.

5. $0 \le x < h$ olsun. $x \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $h < x$ olacak şekilde bir h sayısı bulmak mümkündür. Bu ise $0 \le x < h$ kabulümüz ile çelişir. Kabulümüz yanlıştır. Yani $x = 0$ dır.

6. Bir an için iddiamızın gerçeklenmediğini kabul edelim. Yani her $n \in N$ için $n \le x_0$ olacak şekilde bir x_0 bulunsun. Bu ise doğal sayılar kümesinin üsten sınırlı olduğunu gösterir. Halbuki doğal sayılar kümesi üsten sınırlı değildir.

(b) $x > 0$ olsun. 5. sorudan $x > h$ olacak şekilde bir h sayısı vardır.

$h = \frac{1}{n}$, n sayısı $\frac{1}{n} \le h$ olacak şekilde seçilirse, aynı n sayısı için

$\frac{1}{n} \le x$ olur.

7. Kabul edelim ki her n doğal sayısı için $a \le x < a + \frac{b}{n}$ olduğunda $x \neq a$ olsun. Bu durumda $a + \frac{b}{n} < x$ olacak şekilde bir n doğal sayısı vardır. Bu ise $x < a + \frac{b}{n}$ olması ile çelişir. Böylece kabulümüz yanlıştır. Yani $x = a$ olmalıdır.

8. $a < b$ eşitsizliğin her iki yanına a sayısını eklersek

$a + a < a + b \Rightarrow 2a < a + b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2}$ bulunur.

$a < b$ eşitsizliğin her iki yanına b sayısını eklersek

$a + b < b + b \Rightarrow a + b < 2b \Rightarrow \frac{a+b}{2} < b$ olur.

Yukarıdaki eşitsizliklerden $a < \frac{a+b}{2} < b$ elde edilir.

9. $x < y$ olduğundan $y - x > 0$

6. sorunun b) şıkkından $\frac{1}{m} < y - x$ olacak şekilde bir $m \in N$ vardır. $mx < n$ olacak şekilde her zaman bir n doğal sayısının varlığından sözedebiliriz.

Dolayısı ile $n - 1 \le mx < n \Rightarrow \frac{n}{m} - \frac{1}{m} \le x < \frac{n}{m}$ gerçeklenir.

$\Rightarrow \frac{n}{m} < x + \frac{1}{m} < x + y - x = y \Rightarrow x < \frac{n}{m} < y$

olur. Böylece iki reel sayı arasında sonsuz çoklukta reel sayı vardır diyebiliriz.

10. x rasyonel, y irrasyonel ise $x + y$ nin irrasyonel olduğunu gösterelim.

Bir an için $x + y$ nin rasyonel olduğunu düşünelim. $x + y = \frac{p}{q}$ $(p, q \in Z, q \neq 0)$ şeklinde yazabiliriz. x rasyonel olduğundan $x = \frac{r}{s}$ $(s \neq 0)$ olacak şekilde $r, s \in Z$ vardır.

$$\Rightarrow \frac{r}{s} + y = \frac{p}{q} \Rightarrow y = \frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{sp - qr}{qs} . \qquad (qs \neq 0)$$

olur ki bu y nin rasyonel sayı olduğunu gösterir. Bu ise hipotez ile çelişir. Öyleyse $x + y$ irrasyoneldir.

x rasyonel, y irrasyonel ise $-y$ sayısı da irrasyonel olacağından

$x + (-y) = x - y$ sayısı da irrasyoneldir.

x rasyonel, y irrasyonel ise $x.y$ sayısının da irrasyonel olduğunu gösterelim.

Bir an için $x.y$ nin rasyonel olduğunu düşünelim. Bu durumda

$x \cdot y = \frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ olacak şekilde $p, q \in Z$ vardır. x rasyonel olduğundan $x = \frac{r}{s}$ $(s \neq 0)$ olacak şekilde $r, s \in Z$ sayıları vardır. Böylece

$$\frac{r}{s} \cdot y = \frac{p}{q} \Rightarrow y = \frac{sp}{rq} \qquad (rq \neq 0)$$

bulunur. O hâlde bu ise y nin rasyonel olduğunu gösterir. Bu kabulümüz ile çelişir. $x.y$ sayısı irrasyonel bir sayıdır.

11. $\sqrt{2}$ sayısı irrasyoneldir. $\sqrt{2} . \sqrt{2} = 2$ irrasyonel değildir.

$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ da irrasyonel değildir.

12. (a) p(k) doğru olsun. Yani

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{1}{8}(2k + 1)^2 \qquad (1)$$

olsun.

p(k+1) için

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + 1 = \frac{1}{8}(2k + 3)^2$$

eşitliğinin doğruluğunu gösterelim.

(1) eşitsizliğinin her iki yanına $k + 1$ sayısını ekleyelim.

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + .. + k + k + 1 &= \frac{1}{8}(2k + 1)^2 + k + 1 \\ &= \frac{1}{8}(4k^2 + 4k + 1 + 8k + 8) \\ &= \frac{1}{8}(4k^2 + 12k + 9) \\ &= \frac{1}{8}(2k + 3)^2 \end{aligned}$$

(b) "Tümevarım metodu gereğince p(n) önermesi her n doğal sayısı için doğrudur" diyebilir miyiz?

Hayır. Örneğin $n = 2$ için

$$3 = \frac{1}{8} \cdot 5^2 = \frac{25}{8}$$

olur ki, bu doğru değildir.

13. (a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2} n (n + 1)$

1) $n = 1$ için $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \Rightarrow 1 = 1$ doğru.

2) $n = k$ için doğru olsun. Yani

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{1}{2} k(k + 1) \qquad (I)$$

olduğunu kabul edelim.

3) $n = k + 1$ için de doğru olacağını, yani

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (k + 1) = \frac{1}{2}(k + 1)(k + 2) \qquad (II)$$

olacağını gösterelim :

(I) eşitsizliğinin her iki tarafına (k + 1) eklenirse eşitlik bozulmaz.

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + k + 1 = \frac{1}{2} k (k + 1) + (k + 1)$$

$$= \frac{1}{2} (k + 1) (k + 2)$$

O halde önerme $n = k + 1$ için de doğrudur. Tümevarım yöntemi gereğince önerme her $n \in N$ için doğrudur.

(b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n (n + 1) (2n + 1)$

1) $n = 1$ için

$$1^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \Rightarrow 1 = 1$$

önerme doğrudur.

2) $n = k$ için önermenin doğru olduğunu, yani

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{1}{6} k (k + 1) (2k + 1) \qquad (I)$$

olduğunu kabul edelim.

3) $n = k + 1$ için de önermenin doğru olacağını, yani

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (k + 1)^2 = \frac{1}{6} (k + 1) (k + 2) (2k + 3)$$

olduğunu gösterelim: (I) eşitliğinde her iki yana $(k + 1)^2$ eklenirse eşitlik bozulmaz.

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k + 1)^2 = \frac{1}{6} k (k + 1) (2k + 1) + (k + 1)^2$$

$$= (k + 1) \left(\frac{k(2k + 1) + 6(k + 1)}{6} \right)$$

$$= \frac{1}{6} (k + 1) (2k^2 + 7k + 6)$$

$$= \frac{1}{6} (k + 1) (k + 2) (2k + 3).$$

(c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4} n^2 (n + 1)^2$

1) $n = 1$ için

$$1^3 = \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot 2^2 \Rightarrow 1 = 1$$

önerme doğrudur.

2) $n = k$ için önermenin doğruluğunu kabul edelim. Yani

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4} k^2 (k+1)^2 \qquad (I)$$

olsun.

3) $n = k + 1$ için önermenin doğru olacağını, yani;

$$1^3 + 2^3 + \ldots + (k+1)^3 = \frac{1}{4} (k+1)^2 (k+2)^2$$

olacağını gösterelim:

(I) eşitliğinin her iki yanına $(k+1)^3$ eklenirse eşitlik bozulmaz.

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{1}{4} k^2 (k+1)^2 + (k+1)^3$$

$$= (k+1)^2 \left(\frac{k^2 + 4k + 4}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{4} (k+1)^2 (k+2)^2$$

(d) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$

1) $n = 1$ için

$$1 = 1^2 \Rightarrow 1 = 1$$

önerme doğrudur.

2) $n = k$ için önermenin doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) = k^2 \qquad (I)$$

olsun.

3) $n = k + 1$ için önermenin doğru olacağını, yani

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k+1) = (k+1)^2$$

eşitliğinin varlığını gösterelim :

(I) eşitliğinin her iki yanına $2k + 1$ eklenirse eşitlik bozulmaz.

$1 + 3 + 5 + \ldots + 2k - 1 + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$.

(k) $1\,(1!) + 2\,(2!) + 3\,(3!) + \ldots + n\,(n!) = (n+1)! - 1$

1) $n = 1$ için

$$1\,(1!) = 2! - 1 \Rightarrow 1 = 1$$

önerme doğrudur.

2) $n = k$ için önermenin doğru olduğunu kabul edelim. Yani,

$$1\,(1!) + 2\,(2!) + \ldots + k\,(k!) = (k+1)! - 1 \qquad (I)$$

olsun.

3) $n = k + 1$ için önermenin doğru olacağını, yani,

$1\,(1!) + 2\,(2!) + \ldots + (k+1)\,(k+1)! = (k+2)! - 1$

olduğunu gösterelim. (I) eşitliğinde eşitliğin her iki yanına $(k+1)\,(k+1)!$ eklersek eşitlik bozulmaz.

$$1\,(1!) + 2\,(2!) + \ldots + k\,(k!) + (k+1)\,(k+1)! = (k+1)! - 1 + (k+1)\,(k+1)!$$
$$= (k+1)!\,[1 + k + 1] - 1$$
$$= (k+1)!\,.\,(k+2) - 1$$
$$= (k+2)! - 1.$$

(l) $a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (a + (n-1)\,d) = \frac{n}{2}\,[\,2a + (n-1)\,d\,]$

1) $n = 1$ için

$$a + (1-1)\,d = \frac{1}{2}\,[\,2a + (1-1)\,d\,] \Rightarrow a = a$$

önerme doğrudur.

2) $n = k$ için önermenin doğru olduğunu kabul edelim:

$$a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (a + (k-1)\,d) = \frac{k}{2}\,[2a + (k-1)\,d\,] \quad (I)$$

3) $n = k + 1$ için önermenin doğru olacağını yani

$$a + (a+d) + \ldots + (a+kd) = \frac{k+1}{2}\,[2a + kd]$$

olduğunu gösterelim.

(I) eşitliğinin her iki yanına $a + kd$ eklenirse eşitlik bozulmaz.

$$a + (a+d) + \ldots + (a + (k-1)\,d) + (a+kd) = \frac{k}{2}\,[2a + (k-1)\,d] + a + kd$$

$$= \frac{2ak + k^2d - dk + 2a + 2kd}{2} = \frac{2a(k+1) + kd(k+1)}{2}$$

$$= \frac{k+1}{2}\,[2a + kd]$$

(n) $$\frac{1^2}{1.3} + \frac{2^2}{3.5} + \frac{3^2}{5.7} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$$

1) $n = 1$ için

$$\frac{1}{(2-1)(2+1)} = \frac{1.2}{2.(2+1)} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

önerme doğrudur.

2) n = k için önermenin doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$\frac{1^2}{1.3}+\frac{2^2}{3.5}+\ldots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k(k+1)}{2(2k+1)}$$

olsun.

3) n = k + 1 için de önermenin doğru olacağını, yani,

$$\frac{1^2}{1.3}+\frac{2^2}{3.5}+\ldots+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$$

eşitliğinin doğruluğunu gösterelim.

(I) eşitliğinin her iki yanına $\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}$ sayısı eklenirse eşitlik bozulmaz.

$$\frac{1^2}{1.3}+\frac{2^2}{3.5}+\ldots+\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{k(k+1)}{2(k+1)}+\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(2k+3)k(k+1)+2(k+1)^2}{2(2k+1)(2k+3)}$$

$$(2k+3)\qquad(2)$$

$$=\frac{(k+1)\left[2k^2+3k+2k+2\right]}{2(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(2k+1)(k+2)}{2(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(k+2)}{2(2k+3)}$$

(p) $1+a+a^2+\ldots+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ $\qquad (a\neq 1)$

1) n = 1 için

$$1+a=\frac{1-a^2}{1-a}\Rightarrow 1+a=1+a$$

önerme doğru

2) n = k için önerme doğru olsun. Yani

$$1+a+\ldots+a^k=\frac{1-a^{k+1}}{1-a}\qquad (I)$$

olsun.

3) n = k + 1 için de önermenin doğru olacağını, yani,

$$1+a+a^2+\ldots+a^{k+1}=\frac{1-a^{k+2}}{1-a}$$

olacağını gösterelim.

(I) eşitliğinin her iki yanına a^{k+1} eklenirse eşitlik bozulmaz.

$$1+a+a^2+\ldots+a^k+a^{k+1}=\frac{1-a^{k+1}}{1-a}+a^{k+1}$$

$$= \frac{1-a^{k+1}+a^{k+1}-a^{k+2}}{1-a}$$

$$= \frac{1-a^{k+1}}{1-a}.$$

14. 1) n = 1 için

$$1 + x = \frac{1-x^2}{1-x} \Rightarrow 1 + x = \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} \Rightarrow 1 + x = 1 + x$$

önerme doğrudur.

2) n = p için önerme doğru olsun, yani

$$\prod_{k=0}^{p} (1+x^{2^k}) = \frac{1-x^{2^{p+1}}}{1-x} \qquad \text{(I)}$$

olsun.

3) n = p + 1 için önermenin doğru olacağını, yani

$$\prod_{k=0}^{p+1} (1+x^{2^k}) = \frac{1-x^{2^{p+2}}}{1-x}$$

olacağını gösterelim.

(I) eşitliğinin her iki yanını $(1+x^{2^{p+1}})$ ile çarpalım.

$$\prod_{k=0}^{p} (1+x^{2^k})(1+x^{2^{p+1}}) = \frac{(1-x^{2^{p+1}})}{1-x}(1+x^{2^{p+1}})$$

$$\prod_{k=0}^{p+1} (1+x^{2^k}) = \frac{1-(x^{2^{p+1}})^2}{1-x} = \frac{1-x^{2^{p+2}}}{1-x}$$

15. 1) n = 1 için

$$\frac{x^{2^0}}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^2}$$

$$\frac{x}{1-x^2} = \frac{1+x-1}{1-x^2} \Rightarrow \frac{x}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2}$$

önerme doğrudur.

2) n = p için önerme doğru, yani

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2^k-1}}{1-x^{2^k}} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2^p}} \qquad \text{(I)}$$

olsun.

3) n = p + 1 için önermenin doğru olacağını, yani,

$$\sum_{k=0}^{p+1} \frac{x^{2^k-1}}{1-x^{2^k}} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2^{p+1}}}$$

olduğunu gösterelim. (I) eşitliğinin her iki yanına $\frac{x^{2^r}}{1-x^{2^{p+1}}}$ eklenirse

$$\sum_{k=0}^{p+1} \frac{x^{2^k-1}}{1-x^{2^k}} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2^p}} + \frac{x^{2^p}}{1-x^{2^{p+1}}}$$

$$= \frac{1}{1-x} + \frac{-1+x^{2^{p+1}}+x^{2^p}-x^{2^{p+1}}}{(1-x^{2^p})(1-x^{2^{p+1}})}$$

$$= \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{2^p}}{(1-x^{2^p})(1-x^{2^{p+1}})}$$

$$= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2^{p+1}}}.$$

16. 1) $n = 1$ için

$$\frac{1}{(1+1)!} = 1 - \frac{1}{(1+1)!} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

önerme doğrudur.

2) $n = p$ için önermenin doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(p+1)!} \qquad \text{(I)}$$

olsun.

3) $n = p + 1$ için önermenin doğru olacağını, yani

$\sum_{k=1}^{p+1} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(p+2)!}$ eşitliğinin varlığını gösterelim.

(I) eşitliğinin her iki yanına $\frac{p+1}{(p+2)!}$ sayısını ekleyelim.

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{k}{(k+1)!} + \frac{p+1}{(p+2)!} = 1 - \frac{1}{(p+1)!} + \frac{p+1}{(p+2)!}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{p+1} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{p+2}{(p+2)(p+1)!} + \frac{p+1}{(p+2)!} = 1 + \frac{-p-2+p+1}{(p+2)!}$$

$$= 1 - \frac{1}{(p+2)!}$$

17. Her n doğal sayısı için

$$\sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{p} = \sum_{m=1}^{2n} \frac{(-1)^{m+1}}{m}$$

olduğunu gösteriniz.

1) n = 1 için

$$\frac{1}{2} = \sum_{m=1}^{2} \frac{(-1)^{m+1}}{m} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

önerme doğrudur.

2) n = k için önerme doğru olsun. Yani,

$$\sum_{p=k+1}^{2k} \frac{1}{p} = \sum_{m=1}^{2k} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \qquad (I)$$

olsun.

3) n = k + 1 için önermenin doğru olacağını, yani

$$\sum_{p=k+2}^{2k+2} \frac{1}{p} = \sum_{m=1}^{2k+2} \frac{(-1)^{m+1}}{m}$$

olacağını gösterelim. (I) eşitliğinin her iki yanına $\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1}$ sayısını ekleyelim.

$$\sum_{p=k+1}^{2k} \frac{1}{p} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} = \sum_{m=1}^{2k} \frac{(-1)^{m+1}}{m} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1}$$

$$\sum_{p=k+2}^{2k+2} \frac{1}{p} = \sum_{m=1}^{2k} \frac{(-1)^{m+1}}{m} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}$$

$$= \sum_{m=1}^{2k} \frac{(-1)^{m+1}}{m} + \frac{(-1)^{2k+1+1}}{2k+1} + \frac{(-1)^{2k+2+1}}{2k+2} = \sum_{m=1}^{2k+2} \frac{(-1)^{m+1}}{m}$$

18. 1) n = 1 için

$$1 - p \geq 1 - p$$

olur. Önerme doğrudur.

2) n = k için önerme doğru olsun. Yani,

$$(1 - p)^k \geq 1 - kp \qquad (I)$$

olsun.

3) n = k + 1 için önermenin doğru olacağını, yani

$$(1 - p)^{k+1} \geq 1 - (k + 1)\, p$$

olacağını gösterelim.

(I) eşitsizliğinin her iki yanını (1 – p) ile çarparsak

$(1 - p)^k (1 - p) \geq (1 - kp)(1 - p) \Rightarrow (1 - p)^{k+1} \geq 1 - p - kp + kp^2$

$= 1 - p(1 + k) + kp^2 \geq 1 - (k + 1)\, p.$

19. Her $n \in N$ ve $\alpha_n \geq 0$ için

$$(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \ldots (1 + \alpha_n) \geq 1 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)$$

olduğunu gösteriniz.

1) $n = 1$ için

$1 + \alpha_1 \geq 1 + \alpha_1$ önerme doğrudur.

2) $n = k$ için önermenin doğru olduğunu kabul edelim.

$$(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \ldots (1 + \alpha_k) \geq 1 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k) \qquad (I)$$

olsun.

3) $n = k + 1$ için de önermenin doğru olacağını gösterelim.

(I) eşitliğinin her iki yanını $(1 + \alpha_{k+1})$ ile çarpalım.

$$(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \ldots (1 + \alpha_k)(1 + \alpha_{k+1}) \geq [1 + (\alpha_1 + \ldots + \alpha_k)](1 + \alpha_{k+1})$$

$$= 1 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k) + \alpha_{k+1} + \alpha_{k+1}(\alpha_1 + \ldots + \alpha_k)$$

$$= 1 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k + \alpha_{k+1}) + \alpha_{k+1}(\alpha_1 + \ldots + \alpha_k)$$

$$\geq 1 + (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{k+1})$$

20. 19. soruya benzer şekilde çözülür.

21. (a) $(2n)! \leq 2^{2n}(n!)^2$

1) $n = 1$ için

$$2! \leq 2^2 (1!)^2 \Rightarrow 2 \leq 4$$

önerme doğrudur.

2) $n = k$ için önerme doğru olsun.

$$(2k)! \leq 2^{2k}(k!)^2 \qquad (I)$$

3) $n = k + 1$ için de önermenin doğru olacağını, yani

$$(2k + 2)! \leq 2^{2k+2}[(k+1)!]^2$$

olacağını gösterelim.

(I) eşitsizliğinin her iki yanını $(2k + 1)(2k + 2)$ ile çarpalım.

$$(2k)! \cdot (2k + 1)(2k + 2) \leq 2^{2k}(k!)^2 (2k + 1)(2k + 2)$$

$$\leq 2^{2k}(k!)^2 (2k + 2)(2k + 2)$$

$$= 2^{2k} \cdot 2 \cdot 2 \, (k!)^2 (k + 1)^2$$

$$= 2^{2k+2}(k!\,(k+1))^2$$

$$= 2^{2k+2}[(k+1)!]^2$$

(b) $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

$$\sqrt[n]{a_1.a_2.a_3...a_n} \le \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$$

eşitsizliğinde $a_k = k$ $(k = 1, 2, ..., n)$ alınırsa

$$\sqrt[n]{1.2.3...n} \le \frac{1+2+...+n}{n} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n} = \frac{n+1}{2}$$

$\Rightarrow \sqrt[n]{n!} \le \frac{n+1}{2} \Rightarrow n! \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ elde edilir.

(c) $3^n \ge n\,2^n$

1) $n = 1$ için

$3 \ge 2$ önerme doğrudur.

2) $n = k$ için önermenin doğru olduğunu kabul edelim. Yani,

$$3^k \ge k2^k \qquad \text{(I)}$$

olsun.

3) $n = k + 1$ için önermenin doğru olacağını, yani

$$3^{k+1} \ge (k+1)2^{k+1}$$

eşitsizliğinin gerçeklendiğini gösterelim.

(I) eşitsizliğini her iki yanını 3 ile çarpalım.

$$3^{k+1} \ge 3k^{2k} \qquad \text{(II)}$$

bulunur.

Şimdi, $3k.2^k - (k+1)\,2^{k+1}$ farkını inceleyelim. $k \ge 2$ için

$$3k.2^k - (k+1)\,2^{k+1} = 2^k(3k - 2k - 2) = 2^k(k-2) \ge 0$$

olduğundan $3k\,2^k \ge (k+1)\,2^{k+1}$ dır.

Dolayısıyla (II) dan $3^{k+1} \ge (k+1)\,2^{k+1}$ olur.

(d) $2!\,.\,4!\,...\,(2n)! \ge [\,(n+1)!\,]^n$

1) $n = 1$ için

$2! \ge 2!$ önerme doğrudur.

2) $n = k$ için önermenin doğru olduğunu kabul edelim. Yani,

$$2!\,.\,4!\,...\,(2k)! \ge [\,(k+1)!\,]^k \qquad \text{(I)}$$

olsun.

3) $n = k + 1$ için önermenin doğru, yani

$$2! \cdot 4! \ldots (2k + 2)! \geq [\,(k+2)!\,]^{k+1}$$

olacağını gösterelim. (I) eşitsizliğinin her iki yanını $(2k + 2)!$ ile çarpalım.

$$2! \cdot 4! \ldots (2k)!\,(2k + 2)! \geq [\,(k + 1)!\,]^k \cdot (2k + 2)!$$

$$= [\,(k+1)!\,]^k\,(2k + 2)\,(2k + 1) \ldots (k + 2)\,(k + 1)!$$

$$> [\,(k+1)!\,]^k \underbrace{(k+2)(k+2)\ldots(k+2)}_{k+1 \text{ tane}}.(k + 1)!$$

$$= [\,(k+1)!\,]^k\,(k + 1)!\,(k + 2)^{k+1} = [\,(k + 1)!\,]^{k+1}\,(k + 2)^{k+1}$$

$$= [\,(k + 1)!\,(k + 2)\,]^{k+1} = [\,(k + 2)!\,]^{k+1}.$$

22. 1) $n = 2$ için

$$3^2 + 4^2 \leq 5^2 \Rightarrow 25 \leq 25$$

önerme doğrudur.

2) $n = k$ için önerme doğru olsun. Yani,

$$3^k + 4^k \leq 5^k \qquad \text{(I)}$$

olsun.

3) $n = k + 1$ önermenin doğru olacağını gösterelim. Yani

$3^{k+1} + 4^{k+1} \leq 5^{k+1}$ olacağını gösterelim.

(I) eşitsizliğinin her iki yanını 5 ile çarpalım :

$3^k\,5 + 4^k\,5 \leq 5^k\,5$

$3^k\,3 + 4^k\,4 < 3^k\,5 + 4^k\,5 < 5^k\,5 \Rightarrow 3^{k+1} + 4^{k+1} \leq 5^{k+1}$

gerçeklenir.

23. (a) 1) $n = 1$ için $n\,(2n + 1)\,(7n + 1) = 1.3.8 = 24$ olup 6 ile bölünür.

O halde önerme $n = 1$ için doğrudur.

2) $n = k$ için önerme doğru olsun. Yani $k\,(2k + 1)\,(7k + 1)$ sayısı 6 ile bölünsün. Buna göre

$$k\,(2k + 1)\,(7k + 1) = 6p$$

olacak şekilde p tamsayısı vardır.

3) $n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. Bunun için

$$(k + 1)(2k + 3)(7k + 8)$$

sayısının 6 ile bölünebildiğini gösterelim.

$$(k + 1)(2k + 3)(7k + 8) = 14k^3 + 51k^2 + 61k + 24$$
$$= (14k^3 + 9k^2 + k) + (42k^2 + 60k + 24)$$
$$= 6p + 6(7k^2 + 10k + 4) = 6q \quad (q \in Z)$$

olduğundan 6 ile bölünür.

(b) $3^{n+1} - 4^{4n+2}$ sayısının 11 ile bölünebileceğini gösteriniz.

1) $n = 1$ için

$$3^{1+3} - 4^{4+2} = 81 - 4096 = -4015 = 11.(-365)$$

olduğundan önerme doğrudur.

2) $n = k$ için önerme doğru olsun. Yani

$3^{k+3} - 4^{4k+2} = 11.p$ olacak şekilde bir p tam sayısı var olsun.

3) $n = k + 1$ önermesinin doğru olacağını yani $3^{k+4} - 4^{4k+6}$ sayısının 11 ile bölünebildiğini gösterelim.

$$3^{k+4} - 4^{4k+6} = 3^{k+3}.3 - 4^4(4^{4k+2}) = 3(3^{k+3} - 4^{4k+2}) - 253.4^{4k+2}$$
$$= 3(3^{k+3} - 4^{4k+2}) - 11.234^{4k+2} = 3.11p - 11.23.4^{4k+2}$$
$$= 11(3p - 23.4^{4k+2}) = 11.q \quad (q \in Z)$$

Önerme her $n \in N$ için doğrudur.

(d) 1) $n = 1$ için

$$3.5^{2-1} + 2^{3-2} = 15 + 2 = 17$$

olduğundan önerme doğrudur.

2) $n = k$ için önerme doğru olsun. Yani, p bir tamsayı olmak üzere

$3.5^{2k-1} + 2^{3k-2} = 17p$ olsun.

3) $n = k + 1$ için önermenin doğru olacağını, yani

$3.5^{2k+1} + 2^{3k+1}$ sayısının 17 ile bölünebileceğini gösterelim.

$$3.5^{2k+1} + 2^{3k+1} = 3.5^{2k-1}.5^2 + 2^{3k-2}.2^3$$
$$= 3.5^{2k-1}(17 + 8) + 8.2^{3k-2}$$

$$= 17.3.5^{2k-1} + 8\,(\underbrace{3.5^{2k-1} + 2^{3k-2}}_{17p})$$

$$= 17\,(8p + 3.5^{2k-1})$$

$$= 17q\,,\quad q \in Z$$

olur. Önerme her $n \in N$ için doğrudur.

24. $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$$= \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\right)\ldots\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

olur.

1) $n = 2$ için $\frac{3}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2+1)}{2} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

olur. Önerme doğrudur.

2) $n = k$ için önerme doğru olsun.

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{(k+1)}{2k} \qquad \text{(I)}$$

3) $n = k + 1$ için önermenin doğruluğunu gösterelim.

Yani $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{k+2}{2(k+1)}$ sağlanır mı?

(I) eşitliğini $\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$ ile çarparsak

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{k+1}{2k}\cdot\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)$$

$$= \frac{k+1}{2k}\left(\frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2}\right) = \frac{(k+1).k\,(k+2)}{2k\,(k+1)^2} = \frac{k+2}{2(k+1)}$$

25. Bir elemanlı alt kümelerin sayısı $\binom{n}{1}$,

İki elemanlı alt kümelerin sayısı $\binom{n}{2}$,

$\vdots$

n elemanlı alt kümelerin sayısı $\binom{n}{n}$ dir.

Buna göre n elemanlı bir kümenin alt kümelerinin sayısı

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

olur. Ayrıca

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

binom formülünde $a = b = 1$ alınırsa

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n}$$

bulunur.

26. 1) $n = 0$ için

$(1 + p)^0 \geq 1 + 0.p + 0p^2 \Rightarrow 1 = 1$ önerme doğrudur.

2) $n = k$ için önerme doğru olsun. Yani,

$$(1 + p)^k \geq 1 + kp + \frac{k(k-1)}{2} p^2. \qquad \text{(I)}$$

3) $n = k + 1$ için önermenin doğruluğunu gösterelim. (I) eşitsizliğinin her iki yanı $1 + p$ ile çarpılırsa

$$(1 + p)^{k+1} \geq 1 + kp + \frac{k(k-1)}{2} p^2 + p + kp^2 + \frac{k(k-1)}{2} p^3$$

$$= 1 + (k + 1) p + p^2 \left(\frac{k^2 - k + 2k}{2} \right) + \frac{k(k-1)}{2} p^3$$

$$\geq 1 + (k + 1) p + \frac{k(k+1)}{2} p^2$$

bulunur.

27. 1) $n = 0$ için

$1 \leq 1$ önerme doğrudur.

2) $n = k$ için önerme doğru, yani

$$(1 - p)^k \leq 1 - kp + \frac{k(k-1)}{2} p^2 \qquad \text{(I)}$$

olsun.

3) $n = k + 1$ için önermenin doğru, yani

$(1 - p)^{k+1} \leq 1 - (k + 1) p + \frac{k(k+1)}{2} p^2$ olduğunu gösterelim.

(I) eşitliğinin her iki yanını $(1-p)$ ile çarpalım.

$$(1-p)^{k+1} \le (1-p)\left(1-kp+\frac{k(k-1)}{2}p^2\right)$$

$$= 1-kp+\frac{k(k-1)}{2}p^2-p+kp^2-\frac{k(k-1)}{2}p^3$$

$$= 1-(k+1)p+p^2\left(\frac{k^2-k+2k}{2}\right)-\frac{k(k-1)}{2}p^3$$

$$\le 1-(k+1)p+\frac{k(k+1)}{2}p^2$$

28. 1) $n = 2$ için

$$(1+p)^2 \ge 1+2p+\frac{4}{4}p^2 \Rightarrow (1+p)^2 \ge (1+p)^2$$

önerme doğrudur.

2) $n = k$ için önerme doğru, yani

$$(1+p)^k \ge 1+kp+\frac{k^2}{4}p^2 \qquad \text{(I)}$$

olsun.

3) $n = k+1$ için önermenin doğru, yani

$$(1+p)^{k+1} \ge 1+(k+1)p+\frac{(k+1)^2}{4}p^2$$

olacağını gösterelim.

(I) eşitliğinin her iki yanını $(1+p)$ ile çarpalım.

$$(1+p)(1+p)^k \ge (1+p)\left(1+kp+\frac{k^2}{4}p^2\right)$$

$$(1+p)^{k+1} \ge 1+kp+\frac{k^2}{4}p^2+p+kp^2+\frac{k^2}{4}p^3$$

$$= 1+(k+1)p+\left(\frac{k^2+4k}{4}\right)p^2+\frac{k^2}{4}p^3$$

olur. $2k > 1$ olduğundan

$k^2+4k = k^2+2k+2k > k^2+2k+1 = (k+1)^2$ dır. Dolayısıyla

$$(1+p)^{k+1} \ge 1+(k+1)p+\frac{(k+1)^2}{4}p^2+\frac{k^2}{4}p^3$$

$$\ge 1+(k+1)p+\frac{(k+1)^2}{4}p^2.$$

29. Binom açılımından

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n$$

yazılabilir. $(1+x)^n\,(1+x)^n$ çarpımında x^n in katsayısı

$$\left[\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{2}\binom{n}{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}\binom{n}{0}\right] \text{ olur.}$$

$$(1+x)^{2n} = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1}x + \binom{2n}{2}x^2 + \ldots + \binom{2n}{n}x^n + \binom{2n}{n+1}x^{n+1} + \ldots + \binom{2n}{2n}x^{2n}$$

açılımında x^n in katsayısı $\binom{2n}{n}$ dir. O halde

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \ldots + \binom{n}{n}\binom{n}{0} = \binom{2n}{n}$$

olur. Diğer taraftan

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n}, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}, \ \ldots, \ \binom{n}{n} = \binom{n}{0}$$

olduğundan

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

elde edilir.

30. $(1+x)^{2n} = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1}x + \binom{2n}{2}x^2 + \ldots + \binom{2n}{n}x^n + \binom{2n}{n+1}x^{n+1} + \ldots + \binom{2n}{2n}x^{2n}$

$$(1-x)^{2n} = \binom{2n}{0} - \binom{2n}{1}x + \binom{2n}{2}x^2 - + \ldots + (-1)^n\binom{2n}{n}x^n$$

$$+ (-1)^{n+1}\binom{2n}{n+1}x^{n+1} + - \ldots + \binom{2n}{2n}x^{2n}$$

$(1+x)^{2n}\,(1-x)^{2n}$ çarpımında x^{2n} in katsayısı

$$\left[\binom{2n}{0}\binom{2n}{2n} - \binom{2n}{1}\binom{2n}{2n-1} + - \ldots + \binom{2n}{2n}\binom{2n}{0}\right]$$

olur. Diğer taraftan

$$(1-x^2)^{2n} = \binom{2n}{0} - \binom{2n}{1}x^2 + \ldots + (-1)^n\binom{2n}{n}x^{2n}$$

$$+ (-1)^{n+1}\binom{2n}{n+1}x^{2n+2} + \ldots + \binom{2n}{2n}x^{4n}$$

olur. x^{2n} in katsayılarını karşılaştırırsak

$$\binom{2n}{0}\binom{2n}{2n}-\binom{2n}{1}\binom{2n}{2n-1}+-\ldots+\binom{2n}{2n}\binom{2n}{0}=(-1)^n\binom{2n}{n}$$

bulunur.

$$\binom{2n}{0}=\binom{2n}{2n},\quad \binom{2n}{1}=\binom{2n}{2n-1},\ldots,\binom{2n}{2n}=\binom{2n}{0}$$

olduğundan

$$\binom{2n}{0}^2-\binom{2n}{1}^2+-\ldots+\binom{2n}{2n}^2=(-1)^n\binom{2n}{n}$$

elde edilir.

PROBLEMLER

1. $A \subset R$ ve $B \subset R$ olsun. A ile B nin noktasal toplamı

$A + B = \{ x + y ;\ x \in A$ ve $y \in B \}$ şeklinde tanımlanır.

(a) $[1, 3] + [5, 6]$, $(a - p, a + p) + (b - q, b + q)$ ve $(-\infty, 5) + (7, +\infty)$ kümelerini bulunuz.

(b) $[-1, 0] + [0, 1] = [-1, 0] \cup [0, 2]$ olduğunu gösteriniz.

(c) Daima $A + B = A \cup B$ yazılabilir mi?

Daima $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ yazılabilir mi?

2. a, b herhangi iki reel sayı olsun.

$$\text{maks}\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$$

$$\text{min}\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$$

eşitliklerinin doğruluğunu gösteriniz.

3. a, b, c, d reel sayılar ve $[a, b] \cap [c, d] \neq \emptyset$ olsun.

$$[a, b] \cap [c, d] = \left[\frac{a+c+|a-c|}{2},\ \frac{b+d-|b-d|}{2}\right]$$

$$[a, b] \cup [c, d] = \left[\frac{a+c-|a-c|}{2},\ \frac{b+d+|b-d|}{2}\right]$$

olduğunu gösteriniz.

4. Herhangi bir C kümesi için

$$\inf C \le \underline{\lim}\, C \le \overline{\lim}\, C \le \sup C$$

olduğunu gösteriniz.

5. A, B $\subset$ R ve C = { a + b : a $\in$ A ve b $\in$ B } olsun.

Aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) A ve B supremuma sahip ise C de sahiptir

ve sup C = sup A + sup B dir. Gösteriniz.

(b) A ve B bir infimuma sahipse C de sahiptir ve

$$\inf C = \inf A + \inf B$$

olacağını gösteriniz.

6. A, B $\subset$ R olsun. A nın her bir a elemanı ve B nin her bir b elemanı için $a \le b$ oluyorsa bu takdirde A bir supremuma, B minimuma sahiptir ve

$$\sup A \le \inf B$$

dir. Gösteriniz.

7. Aşağıdaki (a_k) eşitsizliklerin herbirinin çözümü bir (b_j) eşitsizliğidir. Hangi (a_k) eşitsizliğine hangi (b_j) eşitsizliğinin karşılık geldiğini bulunuz.

(a_1)	$\lvert x \rvert < 3$	(b_1)	$4 < x < 6$
(a_2)	$\lvert x - 1 \rvert < 3$	(b_2)	$-3 < x < 3$
(a_3)	$\lvert 3 - 2x \rvert < 1$	(b_3)	$x > 3$ veya $x < -1$
(a_4)	$\lvert 1 + 2x \rvert \ge 1$	(b_4)	$x > 2$
(a_5)	$\lvert x - 1 \rvert > 2$	(b_5)	$-2 < x < 4$
(a_6)	$\lvert x + 2 \rvert \ge 5$	(b_6)	$-\sqrt{3} \le x \le -1$ veya $1 \le x \le \sqrt{3}$
(a_7)	$\lvert 5 + x^{-1} \rvert < 1$	(b_7)	$x \le -7$ veya $x \ge 3$
(a_8)	$\lvert x - 5 \rvert < \lvert x + 1 \rvert$	(b_8)	$1 < x < 2$
(a_9)	$\lvert x^2 - 2 \rvert \le 1$	(b_9)	$-\frac{1}{4} < x < -\frac{1}{6}$
(a_{10})	$x < x^2 - 12 < 4x$	(b_{10})	$x \ge 0$ veya $x \le -1$

8. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.

(a) $\lfloor 3x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$

(b) $\lfloor 5x \rfloor = \lfloor x \rfloor$

(c) $\lfloor 3x \rfloor = 3\lfloor x \rfloor$

(d) $\left\lfloor \frac{x-1}{3} \right\rfloor = 2$

(e) $\lfloor x^2 - 3x \rfloor = -2$

(f) $\left\lfloor x + \lfloor x + 1 + \lfloor x + 2 \rfloor \right\rfloor = -3$

9. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz. (a) ve (b) deki eşitsizliklerden yararlanarak benzer bir eşitsizliği $\lfloor nx \rfloor$ için yazınız ve ispatlayınız.

(a) $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$

(b) $\lfloor 3x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{3} \right\rfloor$

ÇÖZÜMLER

1. (a) $[1, 3] + [5, 6] = [6, 9]$,

$(a - p, a + p) + (b - q, b + q) = (a + b - p + q), a + b + (p + q))$

(b) $[-1, 0] + [0, 1] = [-1 + 0, 0 + 1] = [-1, 1]$

(c) Daima $A + B = A \cup B$ yazılamaz. (Örnek a seçeneği)

2. $a < b$ olsun $\Rightarrow$ maks $\{a, b\} = b$ (1)

olur.

$$\frac{1}{2}(a + b + |a - b|) = \frac{1}{2}(a + b + (b - a)) = \frac{1}{2} \cdot 2b = b \qquad (2)$$

(1) ve (2) den maks $\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$ dır.

$a < b$ için min $\{a, b\} = a$ (3)

olur.

$$\frac{1}{2}(a + b - |a - b|) = \frac{1}{2}(a + b - (b - a)) = \frac{1}{2}(2a) = 0 \qquad (4)$$

(3) ve (4) ten min $\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$ bulunur.

$a > b$ için de aynı eşitlik gerçeklenir.

3. $[a, b] \cap [c, d] \neq \emptyset$ olduğundan

1) $a \leq c$, $c \leq b$ ve $b \leq d$ olabilir.

2) $a < c$, $c < b$ ve $d < b$ olabilir.

3) $c \leq a$, $a \leq d$ ve $b \leq d$ olabilir.

4) $c < a$, $a < d$ ve $d < b$ olabilir.

1) $a \leq c$, $c \leq b$ ve $b \leq d$ ise

$[a, b] \cap [c, d] = [c, b]$

$$\left[\frac{a+c+|a-c|}{2} , \frac{b+d-|b-d|}{2}\right] = \left[\frac{a+c-a+c}{2} , \frac{b+d+b-d}{2}\right] = [c, b]$$

2) $a < c$, $c < b$ ve $d < b$ ise

$[a, b] \cap [c, d] = [c, d]$

$$\left[\frac{a+c+|a-c|}{2} , \frac{b+d-|b-d|}{2}\right] = \left[\frac{a+c+a-c}{2} , \frac{b+d-b+d}{2}\right] = [c, d]$$

3) $c \leq a$, $a \leq d$ ve $b \leq d$

$[a, b] \cap [c, d] = [a, b]$

$$\left[\frac{a+c+|a-c|}{2} , \frac{b+d-|b-d|}{2}\right] = \left[\frac{a+c+a-c}{2} , \frac{b+d+b-d}{2}\right] = [a, b]$$

4) $c < a$, $a < d$ ve $d < b$

$[a, b] \cap [c, d] = [a, d]$

$$\left[\frac{a+c+|a-c|}{2} , \frac{b+d-|b-d|}{2}\right] = \left[\frac{a+c+a-c}{2} , \frac{b+d-b+d}{2}\right] = [a, d]$$

4. $\inf C \leq \underline{\lim} C$ olduğunu gösterelim.

Kabul edelim ki $\inf C \leq \underline{\lim} C$ olmasın. Bu durumda $\underline{\lim} C \leq \inf C$ dir. $\underline{\lim}$ C nin bir yığılma noktası olduğunu biliyoruz. Öyleyse $\underline{\lim}$ C sayısının her $\delta > 0$ komşuluğunda C cümlesinin $\underline{\lim} C$ den farklı en az bir x elemanı vardır.

$$\inf C > \underline{\lim} C \Rightarrow \inf C - \underline{\lim} C > 0$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{\inf C - \underline{\lim} C}{2} > 0 \quad \text{seçelim.}$$

$$|x - \underline{\lim} C| < \frac{\inf C - \underline{\lim} C}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{\inf C - \underline{\lim} C}{2} < x - \underline{\lim} C < \frac{\inf C - \underline{\lim} C}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{\lim} C - \frac{\inf C - \underline{\lim} C}{2} < x < \frac{\inf C - \underline{\lim} C}{2} + \underline{\lim} C$$

Bu durumda $x < \inf C$ dir. Yani C nin elemanı inf C'den küçük elde edilir. Bu ise çelişkidir. Böylece $\inf C \le \underline{\lim} C$ (1) elde edilir.

$\overline{\lim} C \le \sup C$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $\overline{\lim} C \le \sup C$ olmasın. Bu durumda $\sup < \overline{\lim} C$ dir. $\overline{\lim} C$ bir yığılma noktası olduğundan $\overline{\lim} C$ nin her $\delta > 0$ komşuluğunda C cümlesinin en az bir x elemanı vardır, öyle ki x $\overline{\lim} C$ den farklıdır.

$$\overline{\lim} C > \sup C \Rightarrow \overline{\lim} C - \sup C > 0$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{\overline{\lim} C - \sup C}{2} > 0 \quad \text{seçersek}$$

$$|x - \overline{\lim} C| < \frac{\overline{\lim} C - \sup C}{2}$$

$$\overline{\lim} C - \frac{\overline{\lim} C - \sup C}{2} < x < \overline{\lim} C + \frac{\overline{\lim} C - \sup C}{2}$$

Buradan $x > \sup C$ elde edilir. Bu ise çelişkidir. Yani $\overline{\lim} C \le \sup C$ (2) olmalıdır.

Son olarak $\underline{\lim} C < \overline{\lim} C$ (3) olduğu açıktır.

(1), (2) ve (3) den $\inf C \le \underline{\lim} C \le \overline{\lim} C \le \sup C$

elde edilir.

5. (a) A supremuma sahip olduğundan $\forall a \in A$ için $a \le \sup A$

B supremuma sahip olduğundan $\forall b \in B$ için $b \le \sup B$ dir.

$\Rightarrow a + b \le \sup A + \sup B$ (1)

eşitliği gerçeklenir.

$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists a \in A, \sup A < a + \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists b \in B, \sup B < b + \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \sup A + \sup B < a + b + \varepsilon$

ε keyfi olduğundan

$$\sup A + \sup B < a + b \quad (2)$$

(1) ve (2) den

$$\sup A + \sup B = \sup C$$

6. A bir supremuma sahip ise $\forall a \in A$ için $a \leq \sup A$

B bir infimuma sahip ise $\forall b \in B$ için $b \geq \inf B$

$\forall a \in A$ için $a \leq b$ olduğundan $b \geq \sup A$ olacaktır. inf B cümleye dahil olduğundan (B bir minumuma sahipti) B nin elemanlarının en küçük olanı inf B'ye eşit olup dolayısıyla,

$$\inf B \geq \sup A \text{ olur.}$$

7. $(a_1)\ |x| < 3$

$$|x| < 3 \Rightarrow -3 < x < 3 \quad (b_2)$$

$(a_2)\ |x - 1| < 3$

$$|x - 1| < 3 \Rightarrow -3 < x - 1 < 3 \Rightarrow -2 < x < 4 \quad (b_5)$$

$(a_3)\ |3 - 2x| < 1$

$$|3 - 2x| < 1 \Rightarrow -1 < 3 - 2x < 1$$

$$\Rightarrow -4 < -2x < -2$$

$$\Rightarrow 1 < x < 2 \quad (b_8)$$

$(a_4)\ |1 + 2x| \geq 1$

$$|1 + 2x| \geq 1 \Rightarrow 1 + 2x \geq 1 \text{ veya } 1 + 2x \leq -1$$

$$1 + 2x \geq 1 \Rightarrow 2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

veya

$$1 + 2x \leq -1 \Rightarrow 2x \leq -2 \Rightarrow x \leq -1 \Rightarrow x \geq 0 \text{ veya } x \leq -1 \quad (b_{10})$$

$(a_5)\ |x - 1| > 2$

$$|x - 1| > 2 \Rightarrow x - 1 > 2 \text{ veya } x - 1 < -2$$

$$\Rightarrow x > 3 \text{ veya } x < -1 \qquad (b_3)$$

(a_6) $|x + 2| \geq 5$

$|x + 2| \geq 5 \Rightarrow x + 2 \geq 5$ veya $x + 2 \leq -5$

$x + 2 \geq 5 \Rightarrow x \geq 3$

veya

$x + 2 \leq -5 \Rightarrow x \leq -7$ (b_7)

(a_7) $|x - 5| < |x + 1|$

$|x - 5| - |x + 1| < 0$

1. $x < -1$ ise

   $-x + 5 + (x + 1) < 0$

   $6 < 0$

   $Ç_1 = \emptyset$

2. $-1 \leq x < 5$ ise

   $-x + 5 - (x + 1) < 0$

   $-2x + 4 < 0$

   $x > 2$

   $Ç_2 = (2, 5)$

3. $x \geq 5$ ise

   $x - 5 - (x + 1) < 0 \Rightarrow -6 < 0$

   $\Rightarrow Ç_3 = [5, \infty)$

   $\Rightarrow Ç = Ç_1 \cup Ç_2 \cup Ç_3 = (2, \infty)$ (b_4)

(a_8) $\left|5 + \frac{1}{x}\right| < 1$

$\left|5 + \frac{1}{x}\right| < 1 \Rightarrow -1 < 5 + \frac{1}{x} < 1$

$x > 0$ ise

$-x < 5x + 1 < x$

$-x < 5x + 1$ ve $5x + 1 < x$

$-1 < 6x$ $\qquad$ $4x < -1$

$-\frac{1}{6} < x$ $\qquad$ $x < -\frac{1}{4}$

$Ç_1 = \emptyset$

$x < 0$ ise $\quad -x > 5x + 1 > x$

$-x > 5x + 1$ ve $5x + 1 > x$

$-1 > 6x$ ve $4x > -1$

$-\frac{1}{6} > x$ ve $x > -\frac{1}{4}$

$Ç_2 = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}\right)$

$Ç = Ç_1 \cup Ç_2 = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}\right)$ (b_9)

(a_9) $|x^2 - 2| \le 1$

$|x^2 - 2| \le 1 \Rightarrow -1 \le x^2 - 2 \le 1$

$\Rightarrow -1 \le x^2 - 2$ ve $x^2 - 2 \le 1$

$\Rightarrow 1 \le x^2$ ve $x^2 \le 3$

$Ç_1 = [1, \infty) \cup (-\infty, -1]$ ve $Ç_2 = \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$

$Ç = Ç_1 \cap Ç_2 = \left[-\sqrt{3}, -1\right] \cup \left[1, \sqrt{3}\right]$ (b_6)

(a_{10}) $x < x^2 - 12 < 4x$

$x < x^2 - 12 < 4x \Rightarrow x < x^2 - 12$ ve $x^2 - 12 < 4x$

$\Rightarrow x^2 - x - 12 > 0$ ve $x^2 - 4x - 12 < 0$

		−3		4	
x^2-x-12	+	0	−	0	+

		−2		6	
$x^2-4x-12$	+	0	−	0	+

$\Rightarrow Ç_1 = (-\infty, -3) \cup (4, \infty)$, $Ç_2 = (-2, 6)$

$\Rightarrow Ç = Ç_1 \cap Ç_2 = (4, 6)$ (b_1)

8. (a), (b) ve (c) benzer çözümlere sahip olduğundan (c) yi çözüp (a) ve (b) yi bir alıştırma olarak okuyucuya bırakıyoruz.

(c) $\lfloor 3x \rfloor = 3\lfloor x \rfloor$

$x = \lfloor x \rfloor + t \qquad 0 \le x < 1$

$3x = 3\lfloor x \rfloor + 3t \qquad 0 \le 3t < 3$

$$\lfloor 3x \rfloor = \begin{cases} 3\lfloor x \rfloor & , 0 \le 3t < 1 \\ 3\lfloor x \rfloor + 1 & , 1 \le 3t < 2 \\ 3\lfloor x \rfloor + 2 & , 2 \le 3t < 3 \end{cases}$$

$$\lfloor 3x \rfloor = \begin{cases} 3\lfloor x \rfloor & , 0 \le t < \frac{1}{3} \\ 3\lfloor x \rfloor + 1 & , \frac{1}{3} \le t < \frac{2}{3} \\ 3\lfloor x \rfloor + 2 & , \frac{2}{3} \le t < 1 \end{cases}$$

$0 \le t < \frac{1}{3}$ olsun.

$\lfloor 3x \rfloor = \lfloor x \rfloor \Rightarrow 3\lfloor x \rfloor = 3\lfloor x \rfloor$

elde edilir. Buna göre kesir kısmı $\left[0, \frac{1}{3}\right)$ aralığında olan her sayı eşitliği sağlar. Yani m bir tam sayı olmak üzere

$$\left[m, m + \frac{1}{3}\right)$$

tipindeki aralıklar denklemi sağlar.

$$Ç_1 = \bigcup_{m \in Z} \left[m, m + \frac{1}{3}\right)$$

$\frac{1}{3} \le t < \frac{2}{3}$ ise

$\lfloor 3x \rfloor = 3\lfloor x \rfloor + 1 \Rightarrow 0 = 1$

Bu ise mümkün değildir. $C_2 = \emptyset$ dir.

$\frac{2}{3} \le t < 1$ ise

$\lfloor 3x \rfloor = 3\lfloor x \rfloor + 2 \Rightarrow 0 = 2$

Bu ise mümkün değildir. $Ç_3 = \emptyset$ olur.

$$Ç = Ç_1 \cup Ç_2 \cup Ç_3 = \bigcup_{m \in Z} \left[m_1, m + \frac{1}{3}\right)$$

d) $\left\lfloor \frac{x-1}{3} \right\rfloor = 2$

$\left\lfloor \frac{x-1}{3} \right\rfloor = 2 \Rightarrow 2 \le \frac{x-1}{3} < 3$

$\Rightarrow 6 \le x - 1 < 9$

$\Rightarrow 7 \le x < 10 \Rightarrow Ç = [7, 10)$

e) $\lfloor x^2 - 3x \rfloor = -2$

$\lfloor x^2 - 3x \rfloor = -2 \Rightarrow -2 \le x^2 - 3x < -1$

$\Rightarrow -2 \le x^2 - 3x$ ve $x^2 - 3x < -1$

$\Rightarrow x^2 - 3x + 2 \ge 0$ ve $x^2 - 3x + 1 < 0$

$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \quad x_4 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

	0		1		2	
x^2-3x+2	+	0	−	0	+	

		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$		
x						
	+	0	−	0	+	

$$Ç_1 = (-\infty, 1] \cup [2, \infty), \quad Ç_2 = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$Ç = Ç_1 \cap Ç_2 = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right] \cup \left[2, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

f) $\left\lfloor x + \left\lfloor x+1+\lfloor x+2 \rfloor \right\rfloor \right\rfloor = -3$

$$\begin{aligned} \left\lfloor x + \left\lfloor x+1+\lfloor x+2 \rfloor \right\rfloor \right\rfloor &= \left\lfloor x + \lfloor x+1 \rfloor + \lfloor x+2 \rfloor \right\rfloor \\ &= \lfloor x+2 \rfloor + \lfloor x+1 \rfloor + \lfloor x \rfloor \\ &= \lfloor x \rfloor + 2 + \lfloor x \rfloor + 1 + \lfloor x \rfloor \\ &= 3\lfloor x \rfloor + 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 3\lfloor x \rfloor + 3 = -3 \Rightarrow 3\lfloor x \rfloor = -6 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = -2 \Rightarrow -2 \le x < -1$$

9. (a) $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$

$0 \le t < 1$ olmak üzere

$$x = \lfloor x \rfloor + t \Rightarrow 2x = 2\lfloor x \rfloor + 2t \Rightarrow \lfloor 2x \rfloor = \begin{cases} 2\lfloor x \rfloor, & 0 \le t < \frac{1}{2} \\ 2\lfloor x \rfloor + 1, & \frac{1}{2} \le t < 1 \end{cases}$$

$0 \le t < \frac{1}{2}$ ise $\frac{1}{2} \le t + \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \left\lfloor t + \frac{1}{2} \right\rfloor = 0$ dır. Problem 8. (c) den

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \lfloor x \rfloor + t + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor + \left\lfloor t + \frac{1}{2} \right\rfloor = 2\lfloor x \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$$

$\frac{1}{2} \le t < 1$ ise $1 \le t + \frac{1}{2} < \frac{3}{2}$ olur. Problem 8. (c) den

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \lfloor x \rfloor + t + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor + \left\lfloor t + \frac{1}{2} \right\rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1 = \lfloor 2x \rfloor$$

bulunur.

(b) $\lfloor 3x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{3} \right\rfloor$

$x = \lfloor x \rfloor + t \qquad 0 \le t < 1$

$$\lfloor 3x \rfloor = \begin{cases} 3\lfloor x \rfloor & , \ 0 \le t < \frac{1}{3} \\ 3\lfloor x \rfloor + 1 & , \ \frac{1}{3} \le t < \frac{2}{3} \\ 3\lfloor x \rfloor + 2 & , \ \frac{2}{3} \le t < 1 \end{cases}$$

$0 \le t < \frac{1}{3}$ ise $\frac{1}{3} \le t + \frac{1}{3} < \frac{2}{3}$ ve $\frac{2}{3} \le t + \frac{2}{3} < 1$ dir.

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{3} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \lfloor x \rfloor + t + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \lfloor x \rfloor + t + \frac{2}{3} \right\rfloor$$

$$= \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor + \left\lfloor t + \frac{1}{3} \right\rfloor + \lfloor x \rfloor + \left\lfloor t + \frac{2}{3} \right\rfloor$$

$$= 3\lfloor x \rfloor = \lfloor 3x \rfloor$$

$\frac{1}{3} \le t < \frac{2}{3}$ ise $\frac{2}{3} \le t + \frac{1}{3} < 1$, $1 \le t + \frac{2}{3} < \frac{4}{3}$

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{3} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \lfloor x \rfloor + t + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \lfloor x \rfloor + t + \frac{2}{3} \right\rfloor$$

$$= \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor + \left\lfloor t + \frac{1}{3} \right\rfloor + \lfloor x \rfloor + \left\lfloor t + \frac{2}{3} \right\rfloor$$

$$= 3\lfloor x \rfloor + 1 = \lfloor 3x \rfloor$$

$\frac{2}{3} \le t < 1$ ise $1 \le t + \frac{1}{3} < \frac{4}{3}$, $\frac{4}{3} \le t + \frac{2}{3} < \frac{5}{3}$

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{3} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \lfloor x \rfloor + t + \frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \lfloor x \rfloor + t + \frac{2}{3} \right\rfloor$$

$$= \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor + \left\lfloor t + \frac{1}{3} \right\rfloor + \lfloor x \rfloor + \left\lfloor t + \frac{2}{3} \right\rfloor$$

$$= 3\lfloor x \rfloor + 1 + 1 = 3\lfloor x \rfloor + 2 = \lfloor 3x \rfloor$$

$$\lfloor nx \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{n} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{3}{n} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor$$

$$\lfloor nx \rfloor = \begin{cases} n\lfloor x \rfloor & , \ 0 \le t < \frac{1}{n} \\ n\lfloor x \rfloor + 1 & , \ \frac{1}{n} \le t < \frac{2}{n} \\ \vdots & \\ n\lfloor x \rfloor + n - 1 & , \ \frac{n-1}{n} \le t < 1 \end{cases}$$

$0 \le t < \frac{1}{n}$ ise

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{n} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor$$

$$= \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \lfloor x \rfloor + t + \frac{1}{n} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \lfloor x \rfloor + t + \frac{n-1}{n} \right\rfloor$$

$$= \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor + \left\lfloor t + \frac{1}{n} \right\rfloor + \ldots + \lfloor x \rfloor + \left\lfloor t + \frac{n-1}{n} \right\rfloor$$

$$= n \lfloor x \rfloor = \lfloor nx \rfloor$$

$\frac{1}{n} \le t < \frac{2}{n}$ ise

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{2}{n} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor$$

$$= \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \lfloor x \rfloor + t + \frac{1}{n} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \lfloor x \rfloor + t + \frac{n-1}{n} \right\rfloor$$

$$= \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor + \left\lfloor t + \frac{1}{n} \right\rfloor + \lfloor x \rfloor + \left\lfloor t + \frac{2}{n} \right\rfloor + \ldots + \lfloor x \rfloor + \left\lfloor t + \frac{n-1}{n} \right\rfloor$$

$$= n \lfloor x \rfloor + 1$$

$\vdots$

$\frac{n-1}{n} \le t < 1$ ise

$$\lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{n} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor x + \frac{n-1}{n} \right\rfloor$$

$$= \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor + \left\lfloor t + \frac{1}{n} \right\rfloor + \lfloor x \rfloor + \left\lfloor t + \frac{1}{n} \right\rfloor + \ldots + \lfloor x \rfloor + \left\lfloor t + \frac{n-1}{n} \right\rfloor$$

$$= n \lfloor x \rfloor + 1 + 1 \ldots + 1$$

$$= n \lfloor x \rfloor + n - 1$$

$$= \lfloor nx \rfloor$$

BÖLÜM PROBLEMLERİ

1. Aşağıdaki bağıntıların doğruluğunu gösteriniz.

(a) $1.2.3 + 2.3.4 + \ldots + n\,(n+1)\,(n+2) = \frac{1}{4}\, n(n+1)\,(n+2)\,(n+3)$

(b) $1.2.3.4 + 2.3.4.5 + \ldots + n(n+1)\,(n+2)\,(n+3) = \frac{1}{5}\, n(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)$

2. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $n! \ge n^{n/2}$ $\quad (n \ge 2)$ $\quad$ (b) $n! \ge 2^{n-1}$, $\quad (n \ge 1)$

(c) $n^{n+1} > (n+1)^n$ $\quad (n \ge 3)$

3. $p \geq 1$ ve $a, b \in R$ için

$$|a+b|^p \leq 2^p (|a|^p + |b|^p)$$

olduğunu gösterniz.

4. $a > 0$, $b > 0$ ve $n \geq 2$ için

$$\sqrt[n]{a+b} < \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

olduğunu gösteriniz.

5. Her $n \in N$ için $6 \mid n(n^2 - 1)$ olduğunu gösteriniz.

6. Her $n \in N$ için $35 \mid 3^{6n} - 2^{6n}$ olduğunu gösteriniz.

7. $n \in N$ için $n^2 + n + 41$ sayısı asal mıdır?

8. $2^p - 1$ sayısının $p = 2, 3, 5, 7$ asal sayıları için asal olacağını gösteriniz. "p asal ise $2^p - 1$ asaldır" önermesi doğru mudur?

9. $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ sayısının irrasyonel olduğunu gösteriniz.

10. x rasyonel olduğunda $x + \sqrt{2}$ sayısının irrasyonel olacağını gösteriniz.

11. Herhangi iki rasyonel sayı arasında en az bir rasyonel sayısının varolacağını gösteriniz.

12. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.

(a) $|x^2 - 7x + 6| > x^2 - 7x + 6$

(b) $|3x-5| - |2x + 3| > 0$

(c) $|x^2 - 5x| > |x^2| - |5x|$

13. $\left\lfloor x + \left\lfloor x+1 + \left\lfloor x+2 + \left\lfloor \ldots + \left\lfloor x+n \right\rfloor \right\rfloor \ldots \right\rfloor \right\rfloor = 0$

denkleminin bir köke sahip olması için n ne olmalıdır?

$n = 6$ için denklemi çözünüz.

ÇÖZÜMLER

1. (a) $1.2.3 + 2.3.4 + ... + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4} n(n+1)(n+2)(n+3)$

$n = 1$ için $1.2.3 = \frac{1}{4} \cdot 1.2.3.4 \Rightarrow 6 = 6$

olur. O halde eşitlik $n = 1$ için doğrudur.

Eşitlik $n = k$ için doğru olsun. Bu takdirde

$$1.2.3 + 2.3.4 + ... + k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4} k(k+1)(k+2)(k+3) \qquad (I)$$

eşitliği doğrudur.

Eşitliğin $n = k + 1$ için doğru olacağını gösterelim. Bunun için

$$1.2.3 + 2.3.4 + ... + (k+1)(k+2)(k+3) = \frac{1}{4} (k+1)(k+2)(k+3)(k+4) \quad (II)$$

eşitliğin varlığını göstermek yeterdir.

(I) eşitliğinin her iki yanına $(k+1)(k+2)(k+3)$ ifadesi eklenirse

$$1.2.3 + 2.3.4 + ... + k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)(k+3)$$

$$= \frac{1}{4} k(k+1)(k+2)(k+3) + (k+1)(k+2)(k+3)$$

$$1.2.3 + 2.3.4 + ... + (k+1)(k+2)(k+3) = (k+1)(k+2)(k+3)\left(\frac{1}{4} k+1\right)$$

$$= \frac{1}{4} (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$$

bulunur ki bu da (II) ifadesidir.

1. (b) İspat (a) şıkkındaki gibi yapılır.

2. (a) $n! > n^{n/2} \quad (n > 1)$

Bu eşitsizliğin doğruluğu tümevarımla gösterilebilir. Fakat biz başka bir yoldan ispatlamaya çalışacağız.

$(n!)^2 = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot ... \cdot n^2 = [1.n].[2(n-1)] ... [r(n-r+1)] ... [n.1]$ yazılabilir. Burada r, $1 \le r \le n$ bağıntısını sağlayan bir doğal sayıdır. $(r-1)(r-n) \le 0$ olduğundan $r(n-r+1) \ge n$ dir. Bu eşitsizlikte $r = 1, 2, ..., n$ yazılırsa

$1.n = n, \; 2.(n-1) > n, \; ... \; r(n-r+1) > n, \; ... \; n.1 = n$

bulunur. Buna göre

$$(n!)^2 \ge n.n ... n = n^n$$

dir. Buradan

$n! \geq n^{n/2}$

eşitsizliği elde edilir.

b) $n! \geq 2^{n-1}$

1) $1! \geq 2^{1-1} \Rightarrow 1 = 1$

olacağından önerme $n = 1$ için doğrudur.

2) $n = k$ için önermenin doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$k! > 2^{k-1}$ (I)

3) $n = k + 1$ için önermenin doğru olacağını, yani

$(k + 1)! > 2^k$

olduğunu gösterelim. (I) eşitsizliğini $(k + 1)$ ile çarpalım.

$(k + 1)! = kl.(k+1) \geq 2^{k-1}\,(k+1) \geq 2^{k-1}.\,2 = 2^k$

c) $(n+1)^n = n^n + nn^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2!}\,n^{n-2} + \ldots + \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{n!}$

$< n^n + n^n\left(1 + \dfrac{1}{2!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}\right)$

$n! \geq 2^{n-1}$ olduğundan

$$1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2n}}{1 - \frac{1}{2}} < 2$$

Buna göre

$(n + 1)^n \leq n^n + 2.n^n = 3n^n < n.n^n = n^{n+1}$

elde edilir.

3. $|a + b| \leq |a| + |b| \leq 2$ maks $\{|a|, |b|\}$ yazılabilir. $p \geq 1$ için

$|a + b|^p \leq [\,2$ maks $\{|a|, |b|\}\,]^p \leq 2^p\,(|a|^p + |b|^p)$

bulunur. Çünkü maks $\{|a|, |b|\}$, $|a|$ veya $|b|$ dir.

4. Kabul edelim ki $\sqrt[n]{a+b} < \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ eşitsizliği doğru olmasın. Bu takdirde $\sqrt[n]{a+b} \geq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ olur. Her iki tarafın n– ninci kuvveti alınırsa

$$a + b \geq a + b + \binom{n}{1} a^{n-1/n}\, b^{1/n} + \ldots + \binom{n}{n-1} a^{1/n}\, b^{n-1/n} \Rightarrow$$

$$\binom{n}{1} a^{n-1/n}\, b^{1/n} + \ldots + \binom{n}{n-1} a^{1/n}\, b^{n-1/n} \leq 0$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. Zira pozitif sayıların toplamı negatif olamaz. O halde,

$$\sqrt[n]{a+b} < \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

eşitsizliği doğrudur.

5. Tümevarım yöntemini kullanalım.

$n = 1$ için $n(n^2 - 1) = 0$ olduğundan $6 \mid 0$ dır. Önerme $n = 1$ için doğru olur.

$n = k$ için önermenin doğru olduğunu kabul edelim. Bu takdirde

$n\,(n^2-1) = 6p$ olacak şekilde bir p tamsayısı vardır.

$n = k + 1$ için doğru olduğunu gösterelim :

$$(k+1)\,.\,[\,(k+1)^2-1\,] = (k+1)^3 - (k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1$$
$$= (k^3 - k) + 3k^2 + 3k$$
$$= k\,(k^2 - 1) + 3k\,(k + 1) = 6p + 3k\,(k+1)$$

olur. $k(k+1)$ sayısı çift olduğundan $3k\,(k+1)$, 6 ile bölünür. Bu durumda $3k.(k+1) = 6q$ olacak biçimde bir q tamsayısı vardır. O halde,

$$(k+1)\,[\,(k+1)^2 - 1\,] = 6p + 6q = 6\,(p + q)$$

olur ki bu önermenin $k + 1$ için de doğru olduğunu gösterir.

6. $n = 1$ için $3^{6n} - 2^{6n} = 3^6 - 2^6 \equiv [\,(3^3) - 8\,]\,[\,(3^3) + 8\,] = 19.35$

olacağından, önerme $n = 1$ için doğrudur.

Önerme $n = k$ için doğru olsun. Bu durumda

$$3^{6k} - 2^{6k} = 35.p$$

olacak şekilde bir p tamsayısı vardır.

$n = k + 1$ için doğru olacağını gösterelim :

$$3^{6(k+1)} - 2^{6(k+1)} = 3^{6k+6} - 2^{6k+6} = 3^6\,3^{6k} - 2^6\,2^{6k}$$
$$= 729.3^{6k} - 64.2^{6k} = (665 + 64)\,3^{6k} - 64.2^{6k}$$
$$= 665.3^{6k} + 64\,(3^{6k} - 2^{6k})$$
$$= 35.19.3^{6k} + 64.35p$$
$$= 35.(19.3^{6k} + 64p) = 35.q$$

O halde $3^{6n} - 2^{6n}$ sayısı her $n \in N$ için 35 ile bölünür.

7. $n^2 + n + 41$ ifadesinde n yerine 1, 2, 3, ..., 40 sayıları yazıldığında hep asal sayılar elde edilir. Bu $n^2 + n + 41$ sayısının herbir n için asal olacağını göstermez. Çünkü $n = 41$ için

$$n^2 + n + 41 = 41^2 + 41 + 41 = 41.43$$

bulunur ki bu $n^2 + n + 41$ sayısının asal olmadığını gösterir.

8. $p = 2$ için $2^2 - 1 = 3$, $p = 3$ için $2^3 - 1 = 7$, $p = 5$ için $2^5 - 1 = 31$, $p = 7$ için $2^7 - 1 = 127$ bulunur. Bu sayılar asaldır. $p = 11$ için $2^{11} - 1 = 2047 = 23.89$ olur, bu da $2^{11} - 1$ sayısının asal olmadığını gösterir. O halde "p asal ise $2^p - 1$ asaldır." önermesi yanlıştır.

9. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ rasyonel olsun. Bu takdirde $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{p}{q}$ olacak şekilde p ve q tamsayıları vardır. Her iki tarafın karesi alınırsa

$$5 + 2\sqrt{6} = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow \sqrt{6} = \frac{p^2 - 5q^2}{2q^2}$$

bulunur. Sol taraf irrasyonel, sağ taraf rasyonel olduğundan bu mümkün değildir. O halde $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ irrasyoneldir.

10. $x + \sqrt{2}$ rasyonel olsun. $x + \sqrt{2} = \frac{p}{q}$ olacak şekilde p ve q tamsayıları vardır. Buradan

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} - x$$

bulunur. Sol taraf irrasyonel, sağ taraf rasyoneldir. Bu olamaz. O halde $x + \sqrt{2}$ irrasyoneldir.

11. r_1 ve r_2 iki rasyonel sayı olsun.

$$r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$$

denirse r rasyonel ve $r_1 < r < r_2$ dir. O halde iki rasyonel sayı arasında daima bir rasyonel sayı bulunur. Bu düşünce arka arkaya uygulandığında şu sonuç elde edilir. İki rasyonel sayı arasında sonsuz çoklukta rasyonel sayı bulunur.

12. a) $|x^2 - 7x + 6| > x^2 - 7x + 6 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 6$

x		1		6	
$x^2 - 7x + 6$	+	0	−	0	+

b) $|3x - 5| - |2x + 3| > 0 \Leftrightarrow |3x - 5| > |2x + 3|$

x		2/5		8	
$5x^2 - 42x + 16$	+	0	−	0	+

$\Leftrightarrow 9x^2 - 30x + 25 > 4x^2 + 12x + 9$

$\Leftrightarrow 5x^2 - 42x + 16 > 0$

$\Leftrightarrow x < \frac{2}{5}$ veya $x > 8$

c) Her $a, b \in R$ için

$$\big||a| - |b|\big| \le |a + b| \le |a| + |b| \quad \text{(üçgen eşitsizliği)}$$

olduğu bilinmektedir. Eşitsizliğin sol parçasından

$$\big||a| - |b|\big| \le |a + b| \Rightarrow |a| - |b| \le |a + b|$$

yazılabilir. $a = x^2$, $b = 5x$ yazılırsa

$$|x^2| - |5x| \le |x^2 - 5x|$$

bulunur. O halde verilen eşitsizliğin çözüm kümesi R'den eşitliği sağlayan noktalar çıkarılarak bulunabilir.

$x^2 - |5x| = |x^2 - 5x|$ denkleminin çözüm kümesi $C_1 = \{0\} \cup [5, +\infty)$ olacağından verilen eşitsizliğin çözüm kümesi

$C = (-\infty, 0) \cup (0, 5) = (-\infty, 5) \setminus \{0\}$ dır.

13. $\Big|x + \Big|x + 1 + \Big|x + 2 + \Big|... + \Big|x + n\Big|\Big|\Big|...\Big| = 0 \Rightarrow$

$$(1 + 2 + ... + n) + (n + 1)\lfloor x \rfloor = 0 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1)\lfloor x \rfloor = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{n}{2} + \lfloor x \rfloor = 0 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = -\frac{n}{2} \text{ olmalı.}$$

Sol taraf bir tamsayı olduğundan sağ taraf da bir tamsayı olmalıdır. Bunun için de n çift sayı olmalıdır.

$n = 6$ için $\lfloor x \rfloor = -\frac{6}{2} = -3 \Rightarrow -3 \le x < -2$ olmalıdır.

2 FONKSİYONLAR

GEREKLİ BİLGİLER

Bu bölümdeki problemleri çözmek için aşağıdaki bilgilere ihtiyaç vardır.

TANIM

A ve B iki küme olsun. A dan B ye olan bir f bağıntısı aşağıdaki özelliklere sahipse f ye A dan B ye bir **fonksiyon**dur denir.

(a) Her $x \in A$ için $(x, y) \in f$ olacak şekilde B de en az bir y elemanı vardır.

(b) $(x, y) \in f$ ve $(x, z) \in f \Rightarrow y = z$ dir.

TANIM

f ve g aynı küme üzerinde tanımlı fonksiyonlar ve bu kümenin her x elemanı için $f(x) = g(x)$ ise f ile g fonksiyonları **eşittir** denir ve $f = g$ şeklinde yazılır.

TANIM

f, A dan B ye bir fonksiyon olsun. Her $x \in A$ için

$$f(x) = x$$

ise f fonksiyonuna **özdeşlik** veya **birim fonksiyon** denir, I_A ile gösterilir.

TANIM

$f : A \to B$ ve $g : B \to C$ fonksiyonları verilmiş olsun. Bu takdirde g fonksiyonu f(A) daki her f(x) elemanını C kümesinin bir g(f(x)) elemanına dönüştürür. Böylece A nın her bir x elemanını C nin bir $z = g(f(x))$ elemanına dönüştüren yeni bir fonksiyon elde edilir. Bu fonksiyona f ile g fonksiyonlarının **bileşkesi** denir ve gof ile gösterilir.

TANIM

$f : A \to B$ fonksiyonu için

$$f(A) = B$$

oluyorsa f fonksiyonuna **örten fonksiyon,** aksi takdirde fonksiyona **içine fonksiyon** adı verilir. Buna göre eğer f örtense her $y \in B$ için $f(x) = y$ olacak şekilde en az bir $x \in A$ vardır.

TANIM

$A \subset R$ ve $f : A \to R$ bir fonksiyon olsun. A nın bir E alt kümesinin $x_1 < x_2$ şartını sağlayan her x_1, x_2 elemanları için $f(x_1) < f(x_2)$ ise f fonksiyonu E üzerinde **artan,** $f(x_1) \leq f(x_2)$ olursa **azalmayandır** denir. Benzer olarak, E kümesinin $x_1 < x_2$ şartını sağlayan x_1, x_2 elemanları için $f(x_1) > f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonu **azalan**, $f(x_1) \geq f(x_2)$ ise **artmayandır** denir. Bir aralık üzerinde tanımlı bir fonksiyon tanım aralığının tamamı üzerinde artan veya azalan ise fonksiyona **kesin olarak monotondur,** artmayan veya azalmayansa **monotondur** denir. Eğer bir fonksiyonun tanımlı olduğu her sonlu aralık, fonksiyonun monoton olduğu, sonlu sayıda alt aralığa bölünebiliyorsa bu fonksiyona **parçalı monoton fonksiyon** adı verilir.

TANIM

f, A dan B ye bir fonksiyon olsun. Eğer farklı elemanların görüntüleri de farklı ise f fonksiyonuna **birebirdir** denir.

TANIM

Hem birebir hem de örten olan fonksiyona **birebir örten fonksiyon** denir.

TANIM

$f : X \to Y$ fonksiyonu birebir örten olsun.

$$f(g(y)) = y \text{ ve } g(f(x)) = x$$

veya başka bir yazılışla

$$fog = I_Y \text{ ve } gof = I_X$$

ise g fonksiyonuna f nin **tersi**dir denir, f^{-1} ile gösterilir.

TANIM

Eğer $x \in A$ olduğunda $-x \in A$ oluyorsa A kümesine bir **simetrik küme** denir. Simetrik bir A kümesi üzerinde tanımlanan bir f fonksiyonu için $f(-x) = f(x)$ oluyorsa f fonksiyonu bir **çift fonksiyondur** denir. Eğer her $x \in A$ için $f(-x) = -f(x)$ oluyorsa f fonksiyonu bir **tek fonksiyondur** denir.

TANIM

$A \subset R$ ve f, A dan R ye bir fonksiyon olsun.

$$|f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \text{ ise} \\ -f(x), & f(x) < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $|f|$ fonksiyonuna f fonksiyonunun **mutlak değer fonksiyonu** denir.

TANIM

$A \subset R$ olsun.

$$f(x) = \lfloor x \rfloor$$

şeklinde tanımlanan $f : A \to R$ fonksiyonuna **tam kısım fonksiyonu** adı verilir.

Burada $\lfloor x \rfloor$, x sayısından büyük olmayan tamsayıların en büyüğünü göstermektedir.

TANIM

n bir doğal sayı ve $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ ler de, $a_n \neq 0$ olmak üzere, sabit sayılar olsun.

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

şeklinde tanımlanan $p : R \to R$ fonksiyonuna bir **polinom (çok terimli)** denir. Buradaki n doğal sayısına **polinomun derecesi**, $a_0, a_1, ..., a_n$ sayılarına da **polinomun katsayıları** adı verilir.

TANIM

$f : A \subset R$ den R ye bir fonksiyon olsun.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{|f(x)|}{f(x)}, & f(x) \neq 0 \text{ ise} \\ 0, & f(x) = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan g fonksiyonuna f nin **işaret fonksiyonu** denir, sgnf ile gösterilir. Başka bir yazışla

$$\operatorname{sgn} f(x) = \begin{cases} 1, & f(x) > 0 \text{ ise} \\ 0, & f(x) = 0 \text{ ise} \\ -1, & f(x) < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

PROBLEMLER

1. Her $x \in R$ için $f(x) = x + 1$ olsun. $f(2)$, $f(-2)$, $-f(2)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $\frac{1}{f(2)}$, $f(a+b)$, $f(a) - f(b)$, $f(a)$, $f(b)$, $f(ab)$ ifadelerini bulunuz.

2. Her $x \in R$ için $g(x) = |x-3| + |x-1|$ olsun. $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$, $g(-1)$, $g(-2)$ ifadelerini hesaplayınız. $g(t+2) = g(t)$ eşitliğini sağlayan t değerlerini bulunuz.

3. $f(n) = n!$ şeklinde tanımlanan ve **faktöriyel fonksiyonu** adı verilen $f : N \to N$ fonksiyonunun artan olduğunu gösteriniz. Bu fonksiyon örten midir?

4. $\lambda(x)$, x den büyük olmayan asal sayıların sayısını göstermek üzere $\lambda : R^+ \to R$ fonksiyonuna **asal sayı fonksiyonu** adı verilir. Bu fonksiyonun $(0, 15)$ aralığındaki grafiğini çiziniz.

5. $|x| \le 2$ için $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ olsun. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $f(-x) = f(x)$

(b) $f(a-2) = \sqrt{4a-a^2}$

(c) $f(2y) = 2\sqrt{1-y^2}$

(d) $f\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{16-s^2}$

(e) $f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\sqrt{4t^2-1}}{1+1}$

(f) $\frac{1}{2+f(x)} = \frac{2-f(x)}{x^2}$

6. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \text{ ise} \\ 2, & 1 < x \le 2 \text{ ise} \end{cases}$ şeklinde tanımlanan $f : [0, 2] \to R$ fonksiyonu veriliyor.

(a) f fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

(b) $g(x) = f(2x)$ olarak tanımlanan g fonksiyonunun tanım kümesini bulup grafiğini çiziniz.

(c) $h(x) = f(x-2)$ şeklinde tanımlanan h fonksiyonunun tanım kümesini bulup grafiğini çiziniz.

(d) $k(x) = f(2x) + f(x-2)$ şeklinde tanımlanan k fonksiyonunun tanım kümesini bulup grafiğini çiziniz.

7. R x R nin bir alt kümesi olan $D = \{(x,y) : |x| + |y| = 1\}$ kümesi R den R ye olan bir fonksiyonun grafiği olabilir mi? Neden?

8. R den R ye olan öyle iki f ve g fonksiyonu bulunuz ki $f \neq g$ fakat fog=gof olsun.

9. İspat ediniz ki, eğer f ve g çift ise f + g de çifttir. Bu iddia tek fonksiyonlar için de geçerli midir?

10. f ve g tek fonksiyon olduğunda f.g nin çift olacağını gösteriniz.

11. Öyle f fonksiyonları bulunuz ki aşağıdaki bağıntılar yanlış olsun.

(a) $f(x^2) = [f(x)]^2$ (b) $f(|x|) = |f(x)|$

(c) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ (d) $f(\lfloor x \rfloor) = \lfloor f(x) \rfloor$

(e) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$

12. Öyle f fonksiyonları bulunuz ki problem 11 deki eşitlikler doğru olsun.

13. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan $[-2, 2] \to R$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

(a) $y = -\lfloor x \rfloor$ (d) $y = \lfloor 2x \rfloor$ (g) $y = \lfloor |x| \rfloor$

(b) $y = \lfloor -x \rfloor$ (e) $y = 2\lfloor x \rfloor$ (h) $y = 1 / (\lfloor x \rfloor + 3)$

(c) $y = -\lfloor -x \rfloor$ (f) $y = |\lfloor x \rfloor|$

14. Karşılarında yazılı aralıklar üzerinde tanımlı f fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

(a) $f(x) = \lfloor |x| \rfloor$, $[-4, 4]$ (c) $f(x) = \lfloor x \rfloor^2$, $[0, 3]$

(b) $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor$, $[-3, 3]$ (d) $f(x) = \lfloor x \rfloor$, $[0, 5]$

15. $[-1, 2]$ aralığında $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ve $g(x) = \lfloor 2x \rfloor$ şeklinde tanımlanan f ve g fonksiyonları veriliyor. Aşağıdaki eşitliklerle verilen fonksiyonların $[-1, 2]$ aralığındaki grafikleri çiziniz.

(a) $h(x) = f(x) + g(x)$ (c) $p(x) = f(x) \cdot g(x)$

(b) $k(x) = f(x) + g\left(\frac{x}{2}\right)$ (d) $q(x) = \frac{1}{4} f(2x) \cdot g\left(\frac{x}{2}\right)$

16. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan $f : R \to R$ fonksiyonlarının eğer varsa terslerini bulunuz.

(a) $f(x) = x + 1$ (b) $f(x) = 2x + 5$ (c) $f(x) = 1 - x^2$

(d) $f(x) = x^3$ (e) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \quad \text{ise} \\ x^2, & 1 \le x \le 4 \quad \text{ise} \\ 8x, & 4 < x \quad \text{ise} \end{cases}$

17. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ şeklinde tanımlanan $f : R \setminus \{0\} \to R$ fonksiyonu veriliyor. sgnf fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

18. $f(x) = \operatorname{sgn}\left(\dfrac{x-2}{\sqrt{|x|^2 - 9}}\right)$ şeklinde tanımlanan $f : A \subset R \to R$ fonksiyonunun tanımlı olduğu en geniş A kümesini bulup, grafiğini çiziniz.

19. $f(x) = x + \sqrt{x - |x|}$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun grafiğini çiziniz. Bu fonksiyon monoton mudur?

20. Aşağıda verilen fonksiyon çiftlerinin eşit olduğunu gösteriniz.

(a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$, $g(x) = \dfrac{x}{1 + \sqrt{1+x^2}}$

(b) $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$, $g(x) = \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$

21. $y = f(x)$ eğrisi verildiğinde, $y = f(|x|)$, $y = |f(|x|)|$, $|y| = f(x)$, $|y| = f(|x|)$ bağlantılarının grafiklerinin nasıl çizilebileceğini açıklayınız.

$y = f(x) = x^2 - 2x$ in grafiğinden yararlanarak yukarıdaki bağıntıların grafiklerini çiziniz.

ÇÖZÜMLER

1. $f(2) = 2 + 1 = 3$

$f(-2) = -2 + 1 = -1$

$f(2) = -3$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

$\frac{1}{f(2)} = \frac{1}{3}$

$f(a + b) = a + b + 1$

$f(a) - f(b) = a + 1 - b + 1 = a - b$

$f(a) = a + 1$

$f(b) = b + 1$

$f(ab) = ab + 1$

2. $g(0) = |-3| + |-1| = 3 + 1 = 4$ $\quad g(1) = |1 - x| + |1 - 1| = |-2| + 0 = 2$

$g(2) = |2 - 3| + |2 - 1| = 1 + 1 = 2$ $\quad g(3) = |3 - 3| + |3 - 1| = 0 + 2 = 2$

$g(-1) = |-1 - 3| + |-2 - 1| = 5 + 3 = 8$ $\quad g(-2) = |-2 - 3| + |-2 - 1| = 5 + 3 = 8$

$g(t+2) = g(t) \Rightarrow |t + 2 - 3| + |t + 2 - 1| = |t - 3| + |t - 1|$

$\Rightarrow |t + 1| = |t - 3|$

$\Rightarrow t + 1 = t - 3$ veya $t + 1 = -(t - 3)$

$\Rightarrow 2t = 2 \Rightarrow t = 1$

3. $f(n + 1) - f(n) = (n + 1)! - n! = n!\,(n + 1 - 1) = n!\ n > 0$

$\Rightarrow f(n) < f(n + 1)$ yani fonksiyon artandır.

Fonksiyon örten değildir. Örneğin 5 sayısı hiçbir doğal sayının faktöriyeli değildir.

4. $0 < x < 2$ için

$\lambda(x) = 0$

$2 \le x < 3 \Rightarrow \lambda(x) = 1$

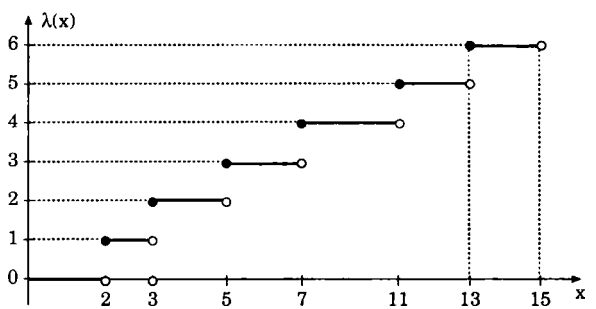
$3 \le x < 5 \Rightarrow \lambda(x) = 2$

$5 \le x < 7 \Rightarrow \lambda(x) = 3$

$7 \le x < 11 \Rightarrow \lambda(x) = 4$

$11 \le x < 13 \Rightarrow \lambda(x) = 5$

$13 \le x < 15 \Rightarrow \lambda(x) = 6$



5. (a) $f(-x) = \sqrt{4 - (-x)^2} = \sqrt{4 - x^2} = f(x)$

(b) $f(a - 2) = \sqrt{4 - (a - 2)^2} = \sqrt{4 - a^2 + 4a - 4} = \sqrt{4a - a^2}$

(c) $f\left(\frac{s}{2}\right) = \sqrt{4-\left(\frac{s}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{16-s^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{16-s^2}$

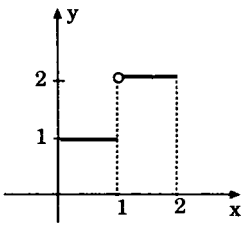
(d) $f\left(\frac{5}{2}\right) = \sqrt{4-\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{16-s^2}{4}}$

(e) $f\left(\frac{1}{t}\right) = \sqrt{4-\left(\frac{1}{t}\right)^2} = \sqrt{\frac{4t^2-1}{t^2}} = \frac{\sqrt{4t^2-1}}{|t|}$

(f) $\frac{1}{2+f(x)} = \frac{1}{2+\sqrt{4-x^2}} = \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{\left(2-\sqrt{4-x^2}\right)\left(2+\sqrt{4-x^2}\right)}$

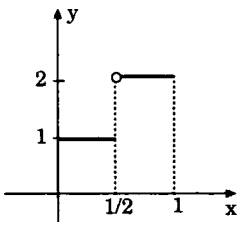
$= \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{4-(4-x^2)} = \frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x^2} = \frac{2-f(x)}{x^2}$

6. (a)



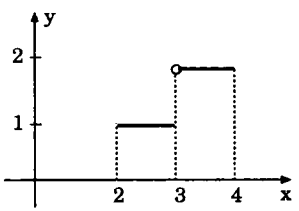
(b) $g(x) = f(2x) = \begin{cases} 1, & 0 \le 2x \le 1 \text{ ise} \\ 2, & 1 < 2x \le 2 \text{ ise} \end{cases} = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \frac{1}{2} \text{ ise} \\ 2, & \frac{1}{2} < x \le 1 \text{ ise} \end{cases}$

g fonksiyonunun tanım kümesi [0, 1] aralığıdır.



(c) $h(x) = f(x-2) = \begin{cases} 1, & 0 \le x-2 \le 1 \\ 2, & 1 < x-2 \le 2 \end{cases} = \begin{cases} 1, & 2 \le x \le 3 \\ 2, & 3 < x \le 4 \end{cases}$

h fonksiyonunun tanım kümesi [2, 4] aralığıdır.



(d) $k(x) = f(2x) + f(x - 2)$

$f(2x)$ fonksiyonunun tanım kümesi $[0, 1]$ aralığı $f(x - 2)$ fonksiyonunun tanım kümesi $[2, 4]$ aralığıdır. Dolayısı ile

$D_k = [0, 1] \cap [2, 4] = \emptyset$ dir.

7. $|x| + |y| = 1$

1) $x \geq 0$ ve $y \geq 0$ ise $x + y = 1$,

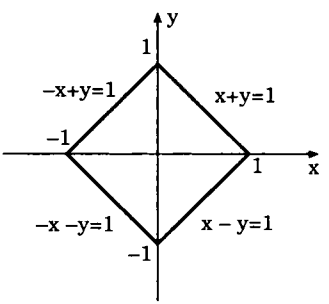
2) $x \leq 0$ ve $y \geq 0$ ise $-x + y = 1$,

3) $x \leq 0$ ve $y \leq 0$ ise $-x - y = 1$,

4) $x \geq 0$ ve $y \leq 0$ ise $x - y = 1$

olur.

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ve $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ noktaları grafiğe aittir. Şu halde $\frac{1}{2}$ sayısına hem $\frac{1}{2}$, hem $-\frac{1}{2}$ karşılık gelmektedir. O halde D kümesi bir fonksiyonun grafiği olamaz.



$|x| + |y| = 1$ in grafiği

8. $f(x) = x$ ve $g(x) = x^2$ olsun.

$$\left.\begin{array}{l}(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 \\ (fog)(x) = g(f(x)) = g(x) = x^2\end{array}\right\} \Rightarrow fog = gof$$

9. f ve g çift olduğundan $f(-x) = f(x)$ ve $g(-x) = g(x)$ dir.

$h = f + g$ dersek $h(-x) = h(x)$ olduğunu göstermeliyiz.

$h(-x) = (f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = h(x) \Rightarrow f + g$ çift fonksiyondur.

İddia tek fonksiyon içinde geçerlidir. İspat benzer şekilde yapılabilir.

10. f tek ise $f(-x) = -f(x)$, g tek ise $g(-x) = -g(x)$ olur.

$(f.g)(-x) = f(-x) \,.\, g(-x) = (-f(x)).(-g(x)) = f(x) \,.\, g(x) = (f.g)(x) \Rightarrow f.g$ çifttir.

11. (a) $f(x) = x + 1$ olsun. $f(x^2) = x^2 + 1$, $[f(x)]^2 = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ olduğundan, $f(x^2) \neq [f(x)]^2$ dir.

(b) $f(|x|) = |f(x)|$

$f(x) = x + 1$ olsun. $f(|x|) = |x| + 1$, $|f(x)| = |x+1|$ olacağından $f(|x|) \neq |f(x)|$ dir. Örneğin $f(|-2|) = |-2| + 1 = 3$, $|f(-2)| = 1$ olur.

(c) $f(x) = x + 1$ olsun.

$f(x + y) = x + y + 1$

$f(x) + f(y) = x + 1 + y + 1 = x + y + 2 \Rightarrow f(x + y) \neq f(x) + f(y)$.

(d) $f(x) = 2x + 1$ olsun. $f(\lfloor x \rfloor) = 2\lfloor x \rfloor + 1$ ve $\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor 2x + 1 \rfloor$ olur.

Dolayısıyla $f(\lfloor x \rfloor) \neq \lfloor f(x) \rfloor$ dır.

(e) $f(x) = x + 1$ olsun. $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + 1$ ve $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x+1}$ olacağından

$f\left(\frac{1}{x}\right) \neq \frac{1}{f(x)}$ dir.

12. (a) $f(x) = x$ olsun.

$f(x^2) = x^2$, $[f(x)]^2 = x^2 \Rightarrow f(x^2) = [f(x)]^2$

(b) $f(x) = x$ olsun.

$f(|x|) = |x|$, $|f(x)| = |x|$ olduğundan $f(|x|) = |f(x)|$ dir.

(c) $f(x) = 3x$ olsun. $f(x + y) = 3(x + y) = 3x + 3y$ ve $f(x) + f(y) = 3x + 3y$ olduğundan $f(x + y) = f(x) + f(y)$ dir.

(d) $f(x) = x + 1$ olsun. $f(\lfloor x \rfloor) = \lfloor x \rfloor + 1$ ve $\lfloor f(x) \rfloor = \lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$ olacağından $f(\lfloor x \rfloor) = \lfloor f(x) \rfloor$ dır.

(e) $f(x) = x$ olsun. $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}$ ve $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x}$ olacağından $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$ dir.

13. (a) $y = -\lfloor x \rfloor$

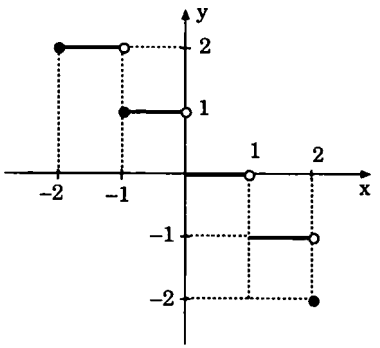
$-2 \leq x < -1$ ise $\lfloor x \rfloor = -2 \Rightarrow y = 2$

$-1 \leq x < 0$ ise $\lfloor x \rfloor = -1 \Rightarrow y = 1$

$0 \leq x < 1$ ise $\lfloor x \rfloor = 0 \Rightarrow y = 0$

$1 \leq x < 2$ ise $\lfloor x \rfloor = 1 \Rightarrow y = -1$

$x = 2$ ise $\lfloor x \rfloor = 2 \Rightarrow y = -2$



$y = -\lfloor x \rfloor$ in grafiği

(c) $y = -\lfloor -x \rfloor$

$x = -2$ ise $y = -2$

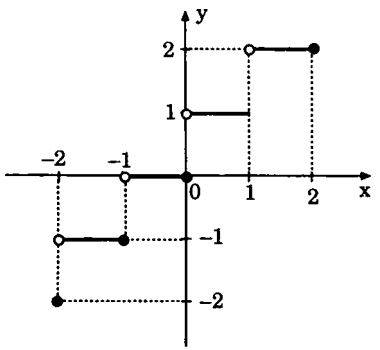
$-2 < x \le 1 \Rightarrow 1 \le -x < 2 \qquad \lfloor -x \rfloor = 1 \Rightarrow y = -\lfloor -x \rfloor = -1$

$-1 < x \le 0 \Rightarrow 0 \le -x < 1 \qquad \lfloor -x \rfloor = 0 \Rightarrow y = -\lfloor -x \rfloor = 0$

$0 < x \le 1 \Rightarrow -1 \le x < 0 \qquad \lfloor -x \rfloor = -1 \Rightarrow y = -\lfloor -x \rfloor = 1$

$1 < x \le 2 \Rightarrow -2 \le x < 1 \qquad \lfloor -x \rfloor = -2 \Rightarrow y = -\lfloor -x \rfloor = 2$

$x = 2 \Rightarrow \lfloor -x \rfloor = 2 \Rightarrow y = -\lfloor -x \rfloor = -2$



$y = -\lfloor -x \rfloor$ in grafiği

(d) $y = \lfloor 2x \rfloor$

$-2 \le x < -\frac{3}{2} \Rightarrow -4 \le 2x < -3 \Rightarrow y = \lfloor 2x \rfloor = -4$

$-\frac{3}{2} \le x < -1 \Rightarrow -3 \le 2x < -2 \Rightarrow y = \lfloor 2x \rfloor = -3$

$-1 \le x < -\frac{1}{2} \Rightarrow -2 \le 2x < -1 \Rightarrow y = \lfloor 2x \rfloor = -2$

$-\frac{1}{2} \le x < 0 \Rightarrow -1 \le 2x < 0 \Rightarrow y = \lfloor 2x \rfloor = -1$

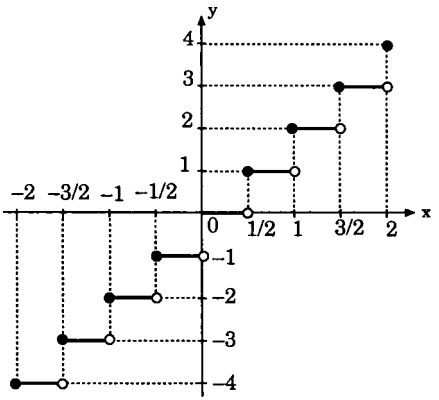
$0 \le x < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \le 2x < 1 \Rightarrow y = \lfloor 2x \rfloor = 0$

$\frac{1}{2} \le x < 1 \Rightarrow 1 \le 2x < 2 \Rightarrow y = \lfloor 2x \rfloor = 1$

$1 \le x < \frac{3}{2} \Rightarrow 2 \le 2x < 3 \Rightarrow y = \lfloor 2x \rfloor = 2$

$\frac{3}{2} \le x < 2 \quad \Rightarrow 3 \le 2x < 4 \quad \Rightarrow y = \lfloor 2x \rfloor = 3$

$x = 2 \qquad\qquad\qquad\qquad y = \lfloor 4 \rfloor = 4$



(g) $y = \lfloor |x| \rfloor$

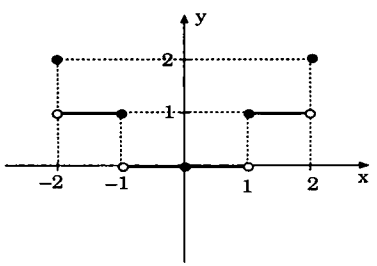
$-2 < x \le -1 \quad \Rightarrow 1 \le |x| < 2 \quad \Rightarrow y = 1$

$-1 < x \le 0 \quad \Rightarrow 0 \le |x| < 1 \quad \Rightarrow y = 0$

$0 \le x < 1 \quad \Rightarrow 0 \le |x| < 1 \quad \Rightarrow y = 0$

$1 \le x < 2 \quad \Rightarrow 1 < |x| \le 2 \quad \Rightarrow y = 1$

$x = -2$ ve $x = 2$ için $\Rightarrow y = 2$



fonksiyon çift olduğundan [0, 2] de grafik çizilip Oy– eksenine göre simetri alınabilirdi.

(h) $y = \perp / (\lfloor x \rfloor + 3)$

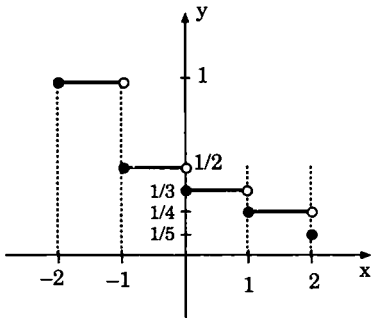
$-2 \le x < -1 \quad \Rightarrow \lfloor x \rfloor = -2 \qquad y = 1$

$-1 \le x < 0 \quad \Rightarrow \lfloor x \rfloor = -1 \qquad y = \frac{1}{2}$

$0 \le x < 1 \quad \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 0 \qquad y = \frac{1}{3}$

$1 \le x < 2 \quad \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 1 \qquad y = \frac{1}{4}$

$x = 2 \quad \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 2 \qquad y = \frac{1}{5}$



14. (b) $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor$ fonksiyonu çift olduğundan [0, 3] aralığında grafiği çizip Oy– eksenine göre simetri alalım.

$\lfloor x^2 \rfloor = m \Rightarrow m \le x^2 < m+1, \quad m \ge 0$

$\Rightarrow \sqrt{m} \le x < \sqrt{m+1}$

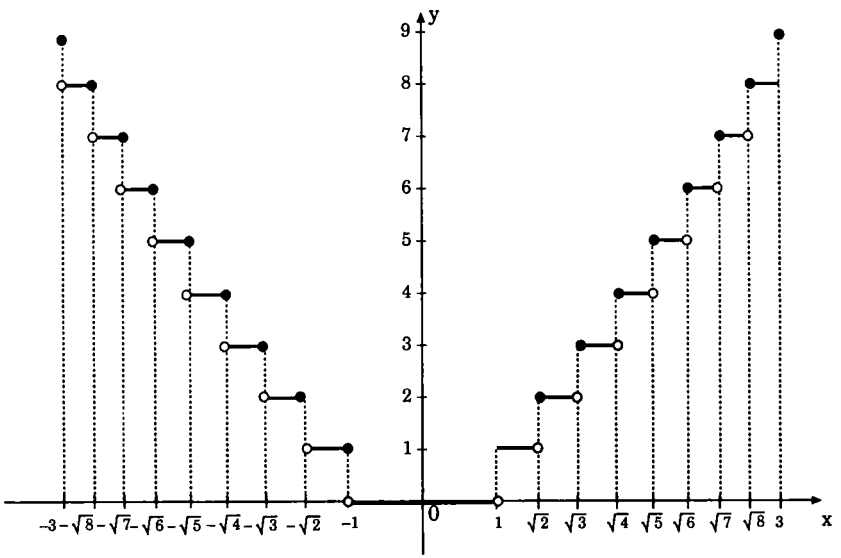
$m = 0 \Rightarrow 0 \le x < 1 \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 0$ $\quad m = 5 \Rightarrow \sqrt{5} \le x < \sqrt{6} \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 5$

$m = 1 \Rightarrow 1 \le x < \sqrt{2} \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 1$ $\quad m = 6 \Rightarrow \sqrt{6} \le x < \sqrt{7} \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 6$

$m = 2 \Rightarrow \sqrt{2} \le x < \sqrt{3} \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 2$ $\quad m = 7 \Rightarrow \sqrt{7} \le x < \sqrt{8} \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 7$

$m = 3 \Rightarrow \sqrt{3} \le x < 2 \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 3$ $\quad m = 8 \Rightarrow \sqrt{8} \le x < 3 \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 8$

$m = 4 \Rightarrow 2 \le x < \sqrt{5} \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 4$ $\quad x = 3$ ise $\lfloor x^2 \rfloor = 9$



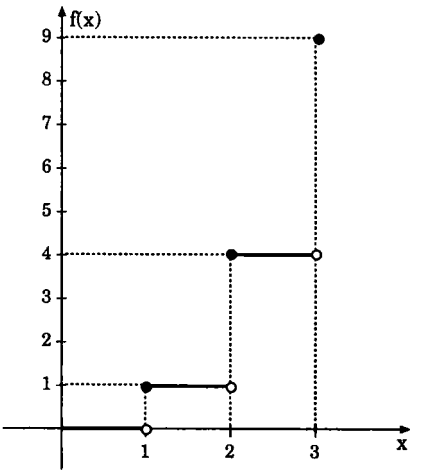
(c) $f(x) = \lfloor x \rfloor^2$, $[0, 3]$

$0 \le x < 1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 0 \Rightarrow \lfloor x \rfloor^2 = 0$

$1 \le x < 2 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor^2 = 1$

$2 \le x < 3 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 2 \Rightarrow \lfloor x \rfloor^2 = 4$

$x = 3 \quad\quad \lfloor x \rfloor = 3 \Rightarrow \lfloor x \rfloor^2 = 9$



15. (a) $h(x) = f(x) + g(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor$

$-1 \le x < -\frac{1}{2} \Rightarrow \lfloor x \rfloor = -1\,,\ \lfloor 2x \rfloor = -2 \Rightarrow h(x) = -3$

$-\frac{1}{2} \le x < 0 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = -1\,,\ \lfloor 2x \rfloor = -1 \Rightarrow h(x) = -2$

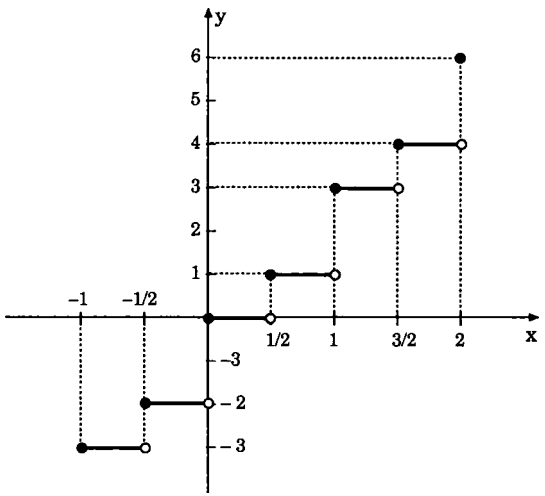
$0 \le x < \frac{1}{2} \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 0\,,\ \lfloor 2x \rfloor = 0 \Rightarrow h(x) = 0$

$\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2} \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 0\,,\ \lfloor 2x \rfloor = 0 \Rightarrow h(x) = 1$

$1 \le x < \frac{3}{2} \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 1,\ \lfloor 2x \rfloor = 2 \Rightarrow h(x) = 3$

$\frac{3}{2} \le x < 2 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 1,\ \lfloor 2x \rfloor = 3 \Rightarrow h(x) = 4$

$x = 2 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 2,\ \lfloor 2x \rfloor = 4 \Rightarrow h(x) = 6$



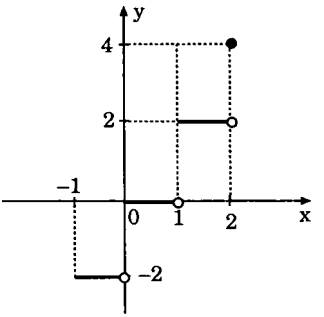
(b) $k(x) = f(x) + g\left(\frac{x}{2}\right) = \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor + 2\lfloor x \rfloor$

$-1 \le x < 0 \Rightarrow 2\lfloor x \rfloor = -2$

$0 \le x < 1 \Rightarrow 2\lfloor x \rfloor = 0$

$1 \le x < 2 \Rightarrow 2\lfloor x \rfloor = 2$

$x = 2 \Rightarrow 2\lfloor x \rfloor = 4$



(c) $p(x) = f(x) \cdot g(x)$, (a) şıkkındaki $\lfloor x \rfloor$ ve $\lfloor 2x \rfloor$ diğerleri gözönüne alınırsa

$-1 \le x < -\frac{1}{2} \Rightarrow p(x) = 2$

$-\frac{1}{2} \le x < 0 \Rightarrow p(x) = 1$

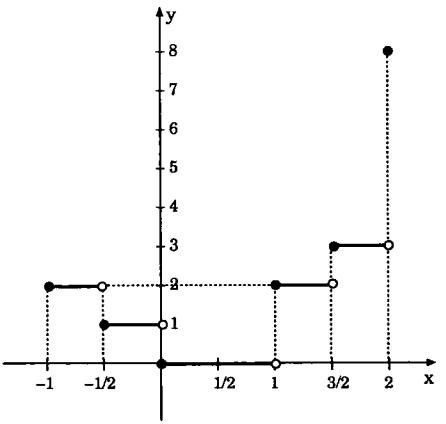
$0 \le x < \frac{1}{2} \Rightarrow p(x) = 0$

$\frac{1}{2} \le x < 1 \Rightarrow p(x) = 0$

$1 \le x < \frac{3}{2} \Rightarrow p(x) = 2$

$\frac{3}{2} \le x < 2 \Rightarrow p(x) = 3$

$x = 2 \Rightarrow p(x) = 8$



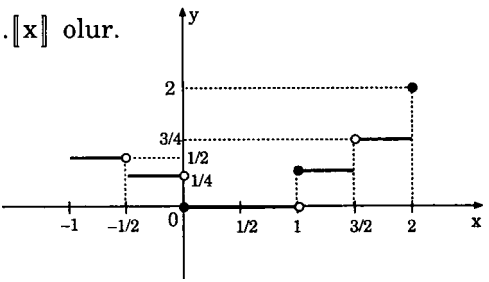
(d) $q(x) = \frac{1}{4} f(2x) \cdot g\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4}\lfloor 2x \rfloor . \lfloor x \rfloor$ olur.

(c) şıkkında bulunan değerler kullanılarak

$-1 \le x < -\frac{1}{2}$ için $q(x) = \frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2} \le x < 0$ için $q(x) = \frac{1}{4}$

$0 \le x < \frac{1}{2}$ için $q(x) = 0$



$\frac{1}{2} \le x < 1$ için $q(x) = 0$

$1 \le x < \frac{3}{2}$ için $q(x) = \frac{1}{2}$

$\frac{3}{2} \le x < 2$ için $q(x) = \frac{3}{4}$

$x = 2$ için $q(x) = 2$

16. (a) $f(x) = x + 1$

Bir fonksiyonun tersinin olması için birebir ve örten olması gerekir.

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$,

dolayısı ile f birebir fonksiyondur.

$\forall y \in R$ için $f(x) = x + 1 = y \Rightarrow x = y - 1$ olacak şekilde

$\exists x \in R$ vardır $\Rightarrow$ f örtendir.

Şimdi f fonksiyonunun tersini bulalım.

$x + 1 = y \Rightarrow x = y - 1 \Rightarrow f^{-1}(y) = y - 1$ dir.

(c) $f(x) = 1 - x^2$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ önermesi doğru mudur?

$1 - x_1^2 = 1 - x_2^2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_2 \Rightarrow$ f, 1 : 1 değildir

Dolayısıyla tersi yoktur.

(f) $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \text{ ise} \\ x^2, & 1 \le x < 4 \text{ ise} \\ 8x, & 4 < x \text{ ise} \end{cases}$

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2)$ olsun. $x_1, x_2 < 1$ ise $x_1 = x_2$

$1 \le x_1, x_2 < 4$ ise $x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1 = x_2$ sağlanır.

$x_1, x_2 > 4$ ise $8x_1 = 8x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$ dır.

Yani f 1 : 1 fonksiyondur.

$y \in R$ olsun. $x < 1$ için $x = y$, $1 \le x \le 4$ için $x = \sqrt{y}$, $4 < x$ için $x = \frac{8}{y}$,

olacak şekilde $x \in R$ bulunacağından f örtendir.

Şimdi fonksiyonun tersini bulalım.

$x < 1$ ise $y = x \Rightarrow f^{-1}(y) = y \Rightarrow f^{-1}(x) = x$

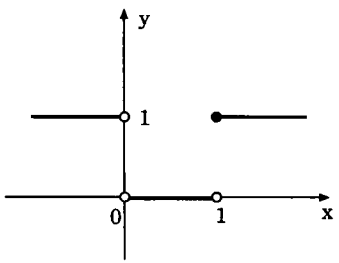
$1 \le x \le 4$ ise $y = x^2 \Rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

$x > 4$ ise $y = 8x \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y}{8} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{8}$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x\ , & x < 1 \text{ ise} \\ \sqrt{x}\ , & 1 \le x \le 4 \text{ ise} \\ \frac{x}{8}\ , & 4 < x \text{ ise} \end{cases}$$

17. $0 < x < 1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \text{sgn } f(x) = 0$

$x \ge 1$ ve $x < 0 \Rightarrow \frac{\lfloor x \rfloor}{x} > 0 \Rightarrow \text{sgn } f(x) = 1$



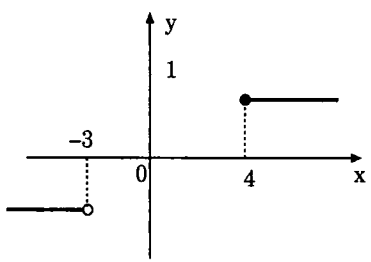
18. $f(x) \in R \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow |\lfloor x \rfloor| > 3 \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor > 3$ veya $\lfloor x \rfloor < -3$

$\Leftrightarrow x \ge 4$ veya $x < -3 \Rightarrow A = R \setminus [-3, 4)$

$x > 4$ için $\text{sgn } f(x) = 1$,

$x < -3$ için $\text{sgn } f(x) = -1$

olur.

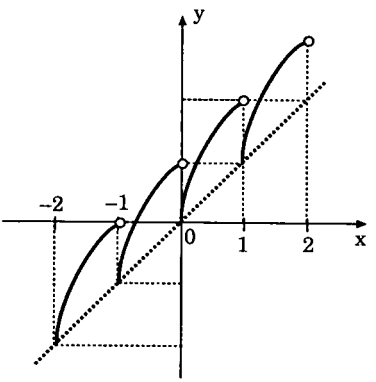


19. $x = \|x\| + t$, $0 \le t \le 1$ olduğu düşünülürse

$y = \|x\| + t + \sqrt{t} = x + \sqrt{t}$

olur. $y = x$ ve $y = \sqrt{t}$ grafikleri gözönüne alındığında yandaki şekil elde edilir.

Bu fonksiyon monoton olmayıp parçalı monotondur.



20. (a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$, $g(x)=\dfrac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{x\left(1-\sqrt{1+x^2}\right)}{1-(1+x^2)}=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}-1=f(x)$

(b) $f(x)=x-\sqrt{x^2-1}$ $\quad g(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$

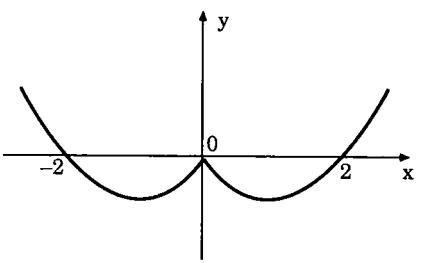
$$g(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}=\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x^2-x^2+1}=x-\sqrt{x^2-1}=f(x)$$

21. $y = x^2 - 2x$ için

(a) $y = f(|x|) = x^2 - 2|x| = \begin{cases} x^2+2x\ , & x<0 \text{ ise} \\ x^2+2x\ , & x\ge 0 \text{ ise} \end{cases}$

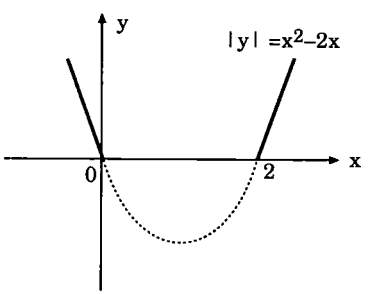
$y = f(|x|)$ çizilirken $x \ge 0$ için

$y = f(x)$ çizilir ve y eksenine göre simetri alınır.

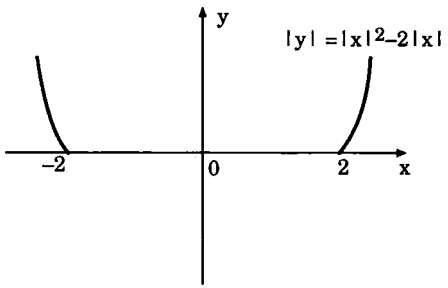


(b) $|y| = f(x)$

$|y| = f(x)$ in grafiği çizilirken önce $y = f(x)$ in grafiği çizilir. Sonra grafikten $y < 0$ olduğu yerler atılır.

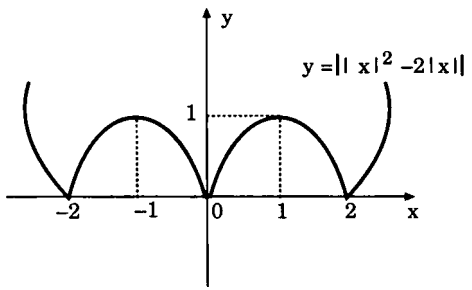


(ç) $|y| = f(|x|)$



$|y| = |f(x)|$ çizilirken $x \geq 0$ için $y = f(x)$ çizilir, y eksenine göre simetri alınır ve y nin negatif olduğu yerler atılır.

(d) $y = |\, f(|x|)\,|$



$y = f(x)$ çizilir. Oy ekseninin solundaki parça atılıp, sağdaki parçanın Oy eksenine göre simetriği alınır. Böylece $y = f(|x|)$ çizilmiş olur. Ox ekseninin üzerinde kalan parça aynen kalır, eksenin altındaki parçanın Ox eksenine göre simetriği alınır.

TRİGONOMETRİK, ÜSTEL, LOGARİTMİK, HİPERBOLİK FONKSİYONLAR

TANIM

$a \neq 1$ herhangi bir pozitif reel sayı olsun.

$$f(x) = a^x$$

şeklinde tanımlanan $f : R \to R$ fonksiyonuna bir **üstel fonksiyon** denir.

TANIM

$y = a^x$ in grafiğinden de kolayca görülebileceği gibi $f(x) = a^x$ şeklinde tanımlanan $f : R \to R^+$ fonksiyonu birebir örtendir. Dolayısıyla bu fonksiyonun $f^{-1} : R^+ \to R$ şeklinde bir ters fonksiyonu vardır. Bu ters fonksiyona **logaritma fonksiyonu** adı verilir ve fonksiyonun kuralı $y = \log_a x$ (a tabanına göre logaritma x okunur) biçiminde yazılır. Demek ki $x > 0$ için

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

dir.

Hiperbolik fonksiyonlar aşağıdaki biçimde tanımlanır :

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{1}{e^x - e^{-x}}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

TANIM

Bir $f : A \to B$ fonksiyonunun $y = f(x)$ eşitliği ile verilen kuralı başka şekillerde de verilebilir. Örneğin $x = g(t)$ alınırsa x değişkeni A kümesini taradığında t de belli bir C kümesini tarar. Buna bağlı olarak $y = f(g(t))$ olur. Demek ki bir f fonksiyonunun grafiği

$$\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases}, \quad t \in C$$

şeklinde de verilebilir. Burada C, t parametresinin taradığı küme olup çoğunlukla bir I aralığıdır. u ile v de aynı C kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonlardır. t parametresinin değişim kümesi $I = [a, b]$ şeklinde bir kapalı aralık olduğunda $A(u(a), v(a))$, noktasına eğrinin **başlangıç noktası** $B(u(b), v(b))$ noktasına da **bitiş noktası** adı verilir. Böyle eğrilere de **yönlendirilmiş eğriler** denir.

PROBLEMLER

1. $\theta \neq 2k\pi$ için aşağıdaki bağıntıların doğruluğunu tümevarım metodu ile gösteriniz.

(a) $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \ldots \sin n\theta = \dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\theta \sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$

(b) $\dfrac{1}{2} + \cos\theta + \sin 2\theta + \ldots + \cos n\theta = \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$

2. $\theta \neq k\pi$ için aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta + \ldots + \sin(2n-1)\theta = \dfrac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta}$

(b) $\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \ldots + \cos(2n-1)\theta = \dfrac{\sin 2n\theta}{2\sin\theta}$

(c) $\cos\theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 4\theta \cdot \ldots \cdot \cos 2^n\theta = \dfrac{\sin 2^{n+1}\theta}{2^{n+1}\sin\theta}$

3. $y = \sin x$ eğrisinin grafiğinden yararlanarak

$y = \sin 2x$ ve $y = \sin\frac{x}{2}$ eğrilerini çiziniz.

4. $y = \cos x$ in grafiğinden yararlanarak

$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ve $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ in grafiğini çiziniz.

5. Aşağıdaki ifadelerin değerini bulunuz.

(a) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $\arcsin\frac{1}{2}$ (c) $\arctan 0$ (d) $\operatorname{arccot} 1$

6. $\arcsin\frac{2}{\sqrt{29}} + \arcsin\frac{5}{\sqrt{29}}$ ifadesinin değerini bulunuz.

7. $\arcsin\frac{x-1}{x+1} = \arccos\frac{2\sqrt{x}}{x+1}$ eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

8. Aşağıdaki bağıntıların doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(b) $\cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(c) $\operatorname{arc}(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

(ç) $\tan(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(d) $\arcsin(\cos x) = \dfrac{\pi}{2} - x$

(e) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$

(f) $\arcsin x + \arcsin t = \arcsin\left(x\sqrt{1-t^2} + t\sqrt{1-x^2}\right)$

(g) $\arccos x + \arccos t = \arccos\left(xt - \sqrt{(1-x^2)(1-t^2)}\right)$

(h) $\arctan x + \arctan t = \arctan\left(\frac{x+t}{1-xt}\right)$

(ı) $\sin(2 \arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$

9. Aşağıda parametrik denklemleri verilen eğrilerin kartezyen koordinat sistemindeki denklemini yazınız. Eğrilerin cinsini belirtiniz.

(a) $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \end{cases}$, $t \in R$

(b) $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = t \end{cases}$, $t \in R$

(c) $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 + \pi t \end{cases}$, $t \in R$

(d) $\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = t^2 - t \end{cases}$, $t \in R$

(e) $\begin{cases} x = \frac{1}{1+t} \\ y = \frac{1}{1+t} \end{cases}$, $t \neq -1$

(f) $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$, $t \in R$

(g) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, $t \in R$

(h) $\begin{cases} x = a\cos t + b\sin t \\ y = a\sin t - b\cos t \end{cases}$, $t \in R$

(ı) $\begin{cases} x = \sqrt{-t} \\ y = -\frac{1}{4}t + 1 \end{cases}$, $t \leq 0$

(i) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

10. Parametrik denklemleri aşağıda verilen eğrileri çiziniz.

(a) $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 3t+4 \end{cases}$, $t \in R$

(b) $\begin{cases} x = 1+t^2 \\ y = 3-t \end{cases}$, $t \in R$

(c) $\begin{cases} x = 1-t^2 \\ y = 1 \end{cases}$, $-8 \leq t \leq 1$

(d) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

11. $f(x) = \sin^2 x$, $g(x) = \cos^2 x$ fonksiyonlarının periyotlarını bulunuz.

$f + g$ periyodik midir? $f + g$ fonksiyonunun esas periyodu var mıdır?

12. $f(x) = \sin^4 x$ ve $g(x) = \cos^4 x$ fonksiyonlarının periyotlarını bulunuz.

$f + g$ periyodik midir? $f + g$ nin esas periyodu f ve g nin esas periyoduna eşit midir?

ÇÖZÜMLER

1. (a) $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \ldots \sin n\theta = \dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\theta \sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$

1) $n = 1$ için

$$\sin\theta = \frac{\sin\theta \cdot \sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \Rightarrow \sin\theta = \sin\theta$$

önerme doğrudur.

2) $n = k$ için önerme doğru olsun. Yani

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \ldots + \sin k\theta = \frac{\sin\frac{k+1}{2}\theta \sin\frac{k}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \qquad (1)$$

olsun.

3) $n = k + 1$ için de önermenin doğru olacağını gösterelim. Yani

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \ldots + \sin(k+1)\theta = \frac{\sin\frac{k+2}{2}\theta \cdot \sin\frac{k+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

eşitliğinin doğruluğunu gösterelim.

(1) eşitliğinin her iki yanına $\sin(k+1)\theta$ eklenirse eşitlik bozulmaz.

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \ldots + \sin k\theta + \sin(k+1)\theta = \frac{\sin\frac{k+1}{2}\theta \cdot \sin\frac{k}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} + \sin(k+1)\theta$$

$$= \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-1}\left[\sin\frac{k+1}{2}\theta \cdot \sin\frac{k}{2}\theta + \sin(k+1)\theta \cdot \sin\frac{\theta}{2}\right]$$

$$= \left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-1}\left[\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{2k+1}{2}\theta + \cos\frac{2k+1}{2}\theta - \cos\frac{k+3}{2}\theta\right]$$

$$= \left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-1}\left[\cos\frac{\theta}{2} - \cos\left(k+\frac{3}{2}\right)\theta\right]$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}\left(\sin\frac{k+2}{2}\theta \cdot \sin\frac{k+1}{2}\theta\right).$$

b) $\frac{1}{2} + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos(n\theta) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$

1) n = 1 için

$$\frac{1}{2} + \cos\theta = \frac{\sin\frac{3}{2}\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\theta\cdot\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{2} + \frac{\cos\theta}{2} = \frac{\cos\theta}{2} + \frac{1+\cos\theta}{2} = \frac{1}{2} + \cos\theta$$

olur. O halde önerme n = 1 için doğrudur.

2) n = k için önerme doğru olsun. Yani,

$$\frac{1}{2} + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos(k\theta) = \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} \quad (1)$$

eşitliği doğru olsun.

3) n = k + 1 için önermenin doğru olduğun, yani,

$$\frac{1}{2} + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos(k+1)\theta = \frac{\sin\left(k+\frac{3}{2}\right)\theta}{2\sin\theta}$$

eşitliğinin varlığını gösterelim.

(1) eşitliğinin her iki yanına cos (k + 1) θ ekleyelim.

$$\frac{1}{2} + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos k\theta + \cos(k+1)\theta = \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} + \cos(k+1)\theta$$

$$= \frac{\sin(k+1)\theta\cos\frac{\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2}\cos(k+1)\theta + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos(k+1)\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$= \frac{\sin(k+1)\theta\cdot\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos(k+1)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\left(k+\frac{3}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}.$$

2. (a) $\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta + \ldots + \sin(2n-1)\theta = \frac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta}$

1) n = 1 için $\sin\theta = \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta} = \sin\theta$ olur. Önerme doğrudur.

2) n = k için önerme doğru, yani,

$$\sin\theta + \sin 3\theta + \ldots + \sin(2k-1)\theta = \frac{\sin^2 k\theta}{\sin\theta} \quad (1)$$

olsun.

3) $n = k + 1$ için önermenin doğru olacağını gösterelim. Yani,

$$\sin\theta + \sin 3\theta + \ldots + \sin(2k+1)\theta = \frac{\sin^2(k+1)\theta}{\sin\theta}$$

eşitliğinin varlığını göstereceğiz.

(1) eşitliğinin her iki yanına $\sin(2k+1)\theta$ eklenirse

$$\sin\theta + \sin 3\theta + \ldots + \sin(2k+1)\theta = \frac{\sin^2(k)}{\sin\theta} + \sin(2k+1)\theta$$

$$= \frac{\sin^2(k\theta) + \sin(2k+1)\theta\sin\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin^2 k\theta + \sin\theta(2\sin k\theta.\cos k\theta.\cos\theta + \left(\cos^2 k\theta.\sin^2 k\theta\right).\sin^2\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\left(\sin k\theta.\cos\theta + \sin\theta.\cos k\theta\right)^2}{\sin\theta} = \frac{\sin^2(k+1)\theta}{\sin\theta}$$

(**b**) $\cos\theta + \cos 3\theta + \ldots + \cos(2n-1)\theta = \dfrac{\sin 2n\theta}{2\sin\theta}$.

(1) $n = 1$ için

$$\cos\theta = \frac{\sin 2\theta}{2\sin\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{2\sin\theta} = \cos\theta$$

bulunur. O halde eşitlik $n = 1$ için doğrudur.

(2) $n = k$ için doğru olsun :

$$\cos\theta + \cos 3\theta + \ldots + \cos(2k-1)\theta = \frac{\sin 2k\theta}{2\sin\theta}. \qquad (1)$$

(3) $n = k + 1$ için doğru olacağını gösterelim. (I) eşitliğinin her iki yanına $\cos(2k+1)\theta$ eklenirse

$$\cos\theta + \cos 3\theta + \ldots + \cos(2k-1)\theta + \cos(2k+1)\theta$$

$$= \frac{\sin 2k\theta}{2\sin\theta} + \cos(2k+1)\theta = \frac{\sin 2k\theta + 2\cos(2k+1)\theta\sin\theta}{2\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin 2k\theta + 2\cdot\frac{1}{2}\left[\sin(2k+2)\theta - \sin 2k\theta\right]}{2\sin\theta} = \frac{\sin(2k+2)\theta}{2\sin\theta}$$

bulunur ki bu da önermenin $k + 1$ içinde doğru olduğunu gösterir.

(**c**) $\cos\theta \,.\, \cos 2\theta \,.\, \cos 4\theta \,.\, \ldots \,.\, \cos 2^n\theta = \dfrac{\sin 2^{n+1}\theta}{2^{n+1}\sin\theta}$

1) $n = 1$ için

$$\cos\theta \cdot \cos 2\theta = \frac{\sin 4\theta}{4\sin\theta} = \frac{2\sin 2\theta \cdot \cos 2\theta}{4\sin\theta} = \frac{2.2\sin\theta \cdot \cos\theta \cdot \cos 2\theta}{4\sin\theta}$$

$$= \cos\theta \cos 2\theta$$

2) n = k için önerme doğru olsun.

$$\cos\theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 4\theta \cdot \ldots \cdot \cos 2^k\theta = \frac{\sin 2^{k+2}\theta}{2^{k+2}\sin\theta} \qquad (1)$$

3) n = k + 1 için

$$\cos\theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 40 \cdot \ldots \cdot \cos 2^{k+1}\theta = \frac{\sin 2^{k+2}\theta}{2^{k+2}\sin\theta}$$

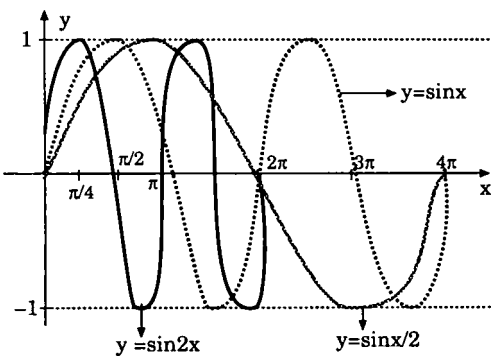
eşitliğinin doğru olduğunu gösterelim.

(1) eşitliğini $\cos 2^{k+1}\theta$ ile çarpalım.

$$\cos\theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 4\theta \ldots \cos 2^k\theta \cdot \cos 2^{k+1}\theta = \frac{\sin 2^{k+1}\theta}{2^{k+1}\sin\theta} \cdot \cos 2^{k+1}\theta$$

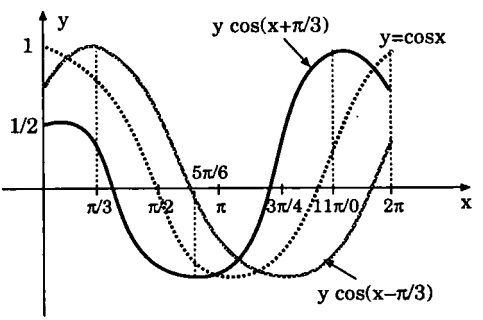
$$= \frac{2\sin 2^{k+1}\theta \cdot \cos 2^{k+1}\theta}{2^{k+2}\sin\theta} = \frac{\sin\left(2^{k+1}+2^{k+1}\right)\theta}{2^{k+2}\sin\theta} = \frac{\sin 2^{k+2}\theta}{2^{k+2}\sin\theta} .$$

3.



4. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ eğrisini çizmek için $y = \cos x$ eğrisini $\frac{\pi}{3}$ birim sola kaydırmak yeterdir.

$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ eğrisini çizmek için $y = \cos x$ eğrisini $\frac{\pi}{3}$ birim sağa kaydırmak gerekir.



5. (a) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$.

(b) $\arcsin \frac{1}{2}$

$x = \arcsin \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$.

(c) $\arctan 0$

$x = \arctan 0 \Rightarrow \tan x = 0 \Rightarrow x = 0$.

(d) $\operatorname{arc\,cot} 1$

$x = \operatorname{arc\,cot} 1 \Rightarrow \cot x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$.

6. $\arcsin a + \arcsin b = \arcsin\left(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}\right)$

$$\arcsin \frac{2}{\sqrt{29}} + \arcsin \frac{5}{\sqrt{29}} = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\sqrt{1-\frac{25}{29}} + \frac{5}{\sqrt{29}}\sqrt{1-\frac{4}{29}}\right)$$

$$= \arcsin\left(\frac{4}{29} + \frac{25}{29}\right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

7. $y = \arcsin \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow \sin y = \frac{x-1}{x+1} \Rightarrow \sqrt{1-\cos^2 y} = \frac{x-1}{x+1}$

$$\Rightarrow \cos^2 y = \frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x+1)^2} \Rightarrow \frac{4x}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow \cos y = \frac{2\sqrt{x}}{x+1} \Rightarrow y = \arccos \frac{2\sqrt{x}}{x+1}.$$

8. (a) $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

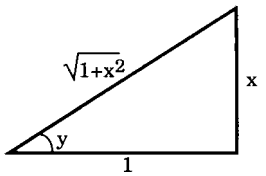
$$\arctan x = y \Rightarrow \tan y = x \Rightarrow \frac{\sin y}{\cos y} = x \Rightarrow \frac{\sin y}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = x$$

$$\Rightarrow \sin^2 y = x^2 - x^2 \sin y \Rightarrow \sin^2 y = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \sin y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(b) $\cos(\text{arc tan}x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$y = \text{arc tan}\, x \Rightarrow x = \tan y \Rightarrow \cos y = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow$



$\cos(\text{arc tan}\, x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ olur.

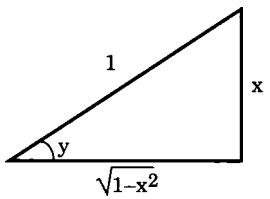
(c) $\tan(\text{arc cos}\, x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$y = \text{arc cos}\, x \Rightarrow x = \cos y \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \sin y \Rightarrow \tan y = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$\Rightarrow \tan(\text{arc cos}\, x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

(ç) $\tan(\text{arc sin}\, x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$y = \text{arc sin}\, x \Leftrightarrow \sin y = x \Rightarrow \tan y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$



olur. Buradan

$\tan y = \tan(\text{arc sin}\, x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ bulunur.

(d) $\text{arc sin}(\cos x) = \dfrac{\pi}{2} - x$

$\cos x = y \Rightarrow \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = y \Rightarrow \dfrac{\pi}{2} - x = \text{arc sin}\, y$

$\Rightarrow \dfrac{\pi}{2} - x = \text{arc sin}(\cos x)$.

(f) $\text{arc sin}\, x + \text{arc sin}\, t = \text{arc sin}\left(x\sqrt{1-t^2} + t\sqrt{1-x^2}\right)$

$\text{arc sin}\, x = u$, $\text{arc sin}\, t = v$, $x = \sin u$, $t = \sin v$

$\sin(u + v) = \sin u \,.\, \cos v + \sin v \,.\, \cos u$

$= \sin u\sqrt{1-\sin^2 v} + \sin v\sqrt{1-\sin^2 u}$

$= x\sqrt{1-t^2} + t\sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow \sin(u + v) = x\sqrt{1-t^2} + t\sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow u + v = \text{arc sin}\left(x\sqrt{1-t^2} + t\sqrt{1-x^2}\right)$

$\text{arc sin}\, x + \text{arc sin}\, t = \text{arc sin}\left(x\sqrt{1-t^2} + t\sqrt{1-x^2}\right)$

(**g**) $\arccos x + \arccos t = \arccos\left(xt - \sqrt{(1-x^2)(1-t^2)}\right)$

$u = \arccos x$, $v = \arccos t$, $x = \cos u$, $t = \cos v$

$\cos(u+v) = \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v$

$= \cos u \cdot \cos v - \sqrt{1-\cos^2 u} \cdot \sqrt{1-\cos^2 v}$

$= x \cdot t - \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-t^2}$

$\Rightarrow u + v = \arccos\left(xt - \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-t^2}\right)$

$\arccos x + \arccos t = \arccos\left(xt - \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-t^2}\right)$

(**h**) $\arctan x + \arctan t = \arctan\left(\frac{x+t}{1-xt}\right)$

$u = \arctan x$, $v = \arctan t \Rightarrow x = \tan u$, $t = \tan v$

$\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u . \tan v} = \frac{x+t}{1-xt}$

$\Rightarrow u + v = \arctan\left(\frac{x+t}{1-xt}\right) \Rightarrow \arctan x + \arctan v = \arctan\left(\frac{x+t}{1-xt}\right)$

(**ı**) $\sin(2 \arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$

$\arcsin x = u$, $x = \sin u \Rightarrow \sin(2u) = 2 \sin u \cdot \cos u$

$= 2 \sin u \sqrt{1-\sin^2 u} = 2x\sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow \sin(2\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$

9. (**a**) $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \end{cases}$, $t \in R$

İkinci denklemden $t = 2 - y$ bulunur. Bu değer birinci denklemde yerine konursa $x = 1 + 2(2 - y) \Rightarrow x + 2y = 5$ bulunur.

Bu bir doğru denklemidir.

(**b**) $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = t \end{cases}$, $t \in R$

$y = t \Rightarrow x = 3y^2$ (parabol)

(**c**) $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 + \pi t \end{cases}$, $t \in R$

$x = t \Rightarrow y = x^2 + \pi x$ (parabol)

(d) $\begin{cases} x = t^2 + t \\ y = t^2 - t \end{cases}$

$x - y = 2t \Rightarrow t = \dfrac{x-y}{2} \Rightarrow x = \left(\dfrac{x-y}{2}\right)^2 + \dfrac{x-y}{2}$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y = 0$

(e) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{1+t} \\ y = \dfrac{t}{1+t} \end{cases}, \quad t \neq -1$

$x + y = \dfrac{1}{1+t} + \dfrac{t}{1+t} = \dfrac{1+t}{1+t} = 1 \Rightarrow x + y = 1$ (doğru)

(f) $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$

$x^2 + y = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$ (parabol)

(g) $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, \ t \in R$ (sikloid)

(h) $\begin{cases} x = a\cos t + b\sin t \\ y = a\sin t - b\cos t \end{cases}, \quad t \in R$

$x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 + 2\,ab \cos t \,.\, \sin t + b^2 \sin^2 t$

$+ a^2 \sin^2 t - 2\,ab \cos t \sin t + b^2 \cos^2 t$

$= a^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) + b^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) = a^2 + b^2$ (çember)

(i) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

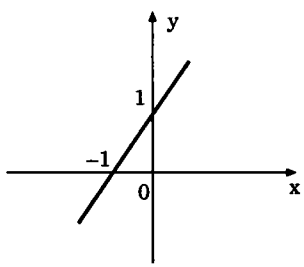
$\left(\dfrac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\dfrac{4}{a}\right)^{2/3} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \Rightarrow x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (astroid eğrisi)

10. (a) $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 3t + 4 \end{cases}, \quad t \in R$

$x = t + 1 \Rightarrow t = x - 1$

$y = 3(x - 1) + 4 = 3x + 1$

doğru denklemidir.

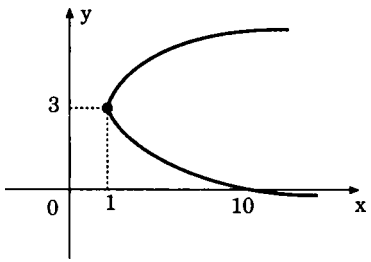


(b) $\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = 3 - t \end{cases}$, $t \in R$

$y = 3 - t \Rightarrow t = 3 - y$

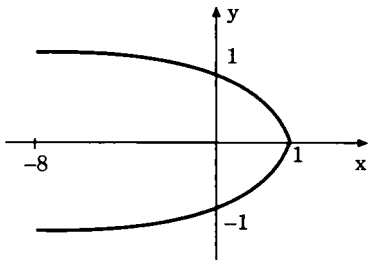
$x = 1 + t^2 = 1 + (3 - y)^2$

$x = 1 + (3 - y)^2$



(c) $\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t \end{cases}$, $-8 \le t \le 1$

$x = 1 - y^2$



11. $f(x + p) = f(x) \Rightarrow \sin^2(x + p) = \sin^2 x$

$\Rightarrow \sin^2(x + p) - \sin^2 x = 0 \left[\sin(x + p) - \sin x\right]\left[\sin(x + p) + \sin x\right] = 0$

$\Rightarrow \sin(x + p) - \sin x = 0 \Rightarrow x + p = x + 2k\pi \Rightarrow p = 2k\pi \; k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$

$\Rightarrow \sin(x + p) + \sin x = 0 \Rightarrow 2 \sin\left(x + \frac{p}{2}\right)\cos\left(\frac{p}{2}\right) = 0 \Rightarrow p = (2k-1)\,\pi$

Buna göre esas periyot $T = \pi$ dir.

$g(x) = \cos^2 x$ fonksiyonunun periyodunda π olacağı benzer şekilde gösterilebilir.

$f(x) + g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ sabit fonksiyonu için her p sayısı bir periyottur. Esas periyot yoktur.

12. $f(x) = \sin^4 x$

$f(x + p) = f(x) \Rightarrow \sin^4(x + p) = \sin^4 x \Rightarrow \sin^4(x + p) - \sin^4 x = 0$

$\left(\sin(x + p) - \sin x\right)\left(\sin(x + p) + \sin x\right)\left(\sin^2(x + p) + \sin^2 x\right) = 0$

$\sin(x + p) - \sin x = 0 \Rightarrow x + p = x + 2k\pi \Rightarrow p = 2k\pi \qquad k = \pm 1, \pm 2 \ldots$

$\sin(x + p) + \sin x = 2 \sin\left(x + \frac{p}{2}\right)\cos\frac{p}{2} = 0 \Rightarrow p = (2k - 1)\pi \quad k = 1,2 \ldots$

olur. Esas periyot $T = \pi$

Benzer şekilde $g(x) = \cos^4 x$ fonksiyonunun esas periyodunun π olduğu gösterilebilir.

$$f(x) + g(x) = h(x) = \sin^4 x + \cos^4 x = \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$$

$$\Rightarrow h(x + p) = h(x) \Rightarrow \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos(4x + 4p) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$$

$4x + 4p = 4x + 2k\pi \Rightarrow p = k\frac{\pi}{2}$ $(k = 1, 2, ...)$

bulunur. Esas peryot $T = \frac{\pi}{2}$ dir.

BÖLÜM PROBLEMLERİ

1. Aşağıdaki kurallara tanımlanan reel değerli fonksiyonların (en geniş) tanım kümelerini bulunuz.

(a) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$

(b) $g(x) = \sqrt{\log\left(5x - x^2\right)}$

(c) $h(x) = \log_x 5$

(d) $u(x) = \arcsin\frac{x-3}{2} + \log(4 - x)$

(e) $v(x) = \arccos\left(\frac{3}{4 + 2\sin x}\right)$

(f) $s(x) = \log(\cos x)$

(g) $t(x) = \frac{1}{\sqrt{|x| - x}}$

(h) $w(k) = \sqrt{\arcsin\left(\log_2 x\right)}$

(ı) $k(x) = \log_2\left(\log_3\left(\log_4 x\right)\right)$

(i) $m(x) = \sqrt{1 - \sqrt{9 - x^4}}$

(j) $n(x) = \sqrt{4 - \sqrt{1 + 9x^2}}$

2. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ dir. $0 \le x \le 1$ için $f(f(x)) = x$ olduğunu gösteriniz.

3. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ dir. $x \ne 1$ için $f\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right) = x$ olduğunu gösteriniz.

4. $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$, $g(x) = x + \sqrt{x^2-1}$ olsun.

(a) $x \ge 0$ için $g\left(\sqrt{x^2+1}\right) = f(x)$ olacağını gösteriniz.

(b) $x \ge 1$ için $g\left(\sqrt{x^2-1}\right) = g(x)$ olacağını gösteriniz.

5. $f(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$ olsun. $a, b \in (-1, 1)$ için

$$f(a) + f(b) = f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$$

olacağını gösteriniz.

6. $f(x) = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$ için $f(a + b) + f(a - b) = 2\, f(a) \,.\, f(b)$ olacağını gösteriniz.

7. f, [0, 1] üzerinde tanımlı bir fonksiyon olduğuna göre, aşağıdaki biçimde tanımlanan g, h, k fonksiyonlarının tanım kümelerini bulunuz.

(a) $g(x) = f\left(3x^2\right)$ (b) $h(x) = f\left(x - 5\right)$ (c) $k(x) = f(\tan x)$

8. $a \cos x + b \sin x + c = 0$ denkleminin, $x_1 \quad x_2 \neq 2k\pi$ bağıntısını sağlayan x_1 , x_2 kökleri için

$$\sin (x_1 + x_2) = \frac{2ab}{a^2+b^2}$$

$$\cos (x_1 + x_2) = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

$$\tan\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{b}{a}$$

olacağını gösteriniz.

9. $\arctan \sqrt{x(x+1)} + \arcsin\sqrt{x^2+x+1} = \frac{\pi}{2}$ denklemini çözünüz.

10. $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ biçiminde tanımlanan $f : R \to R$ fonksiyonunun tersinin $f^{-1}(x) = \sin hx$ olacağını gösteriniz.

11. $s(A) = n$ olsun. A nın r elemanlı alt kümelerinin sayısının $\binom{n}{r}$ olacağını gösteriniz.

12. $s(A) = n$ ve $s(B) = m$ olsun.

(a) A dan B ye m^n tane fonksiyon tanımlanabileceğini gösteriniz.

(b) A dan B ye tanımlanan fonksiyonlardan $\binom{m}{n} n!$ tanesinin birebir olacağını gösteriniz.

13. İspat einiz ki, her $f : R \to R$ fonksiyonu için öyle bir çift p fonksiyonu ile tek q fonksiyonu vardır ki $f = p + q$ dir.

14. $n \in N$ olmak üzere, $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ olsun. Aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $f(0) = 0$ ise $n - 1$ inci dereceden bir p polinomu bulunabilir ki bunun için $f(x) = x.p(x)$ dir.

(b) Her bir reel a sayısı için $p(x) = f(x + a)$ şeklinde tanımlanan p fonksiyonu n inci dereceden bir polinomdur.

(c) Bir a sayısı için $f(a) = 0$ ise $n - 1$ inci dereceden öyle bir h polinomu vardır ki $f(x) = (x - a) . h(x)$ yazılabilir.

15. Derecesi 2 den büyük olmayan ve aşağıdaki özellikleri sağlayan p polinomlarını bulunuz.

(a) $p(x) = p(1 - x)$ (c) $p(2x) = 2p(x)$

(b) $p(x) = p(1 + x)$ (d) $p(3x) = p(x + 3)$

16. Katsayıları tam sayı olan

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$$

şeklindeki bir cebirsel denklemin tam sayı olmayan bir rasyonel kökünün olamayacağını gösteriniz.

17. $a_0 , a_1 , ... , a_n$ tam sayılar, a_0 ve a_n sıfırdan farklı olmak üzere,

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$$

denklemi veriliyor. Gösteriniz ki, eğer bu denklemin bir p / q rasyonel kökü varsa p sayısı a_n yi, q da a_0 sayısını böler.

18. $f : R \to R$ fonksiyonu her $x, y \in R$ için

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

bağıntısını sağlıyor. $f(0)$ nedir?

19. $f : R \to R$ fonksiyonu her $x, y \in R$ için

$$f(x + y) = f(x) . f(y)$$

bağıntısını sağlıyor. $f(0)$ nedir?

20. N üzerinde tanımlı f fonksiyonu için $f(1) = 3$ ve $n > 1$ için

$$f(n + 1) = \frac{3\, f(n) + 1}{3}$$

dir. $f(100)$ nedir?

21. $$\sum_{k=1}^{n} \arctan\frac{1}{2k^2} = \arctan\frac{n}{n+1}$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜMLER

1. (a) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$

$f(x) \in R \Leftrightarrow x - 1 \geq 0$ ve $5 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ ve $x \leq 5 \Leftrightarrow x \in [1, 5]$

(b) $g(x) = \sqrt{\log(5x - x^2)}$

$g(x) \in R \Leftrightarrow \log(5x - x^2) \geq 0 \Leftrightarrow 5x - x^2 \geq 1 \Leftrightarrow -(x^2 - 5x - 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 1 \leq 0$

$\Delta = 25 - 4.1.(-1) = 29$

$x_{1,2} = \dfrac{5 \mp \sqrt{29}}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\dfrac{5-\sqrt{29}}{2}, \dfrac{5+\sqrt{29}}{2}\right]$

(c) $h(x) = \log_x 5$

$h(x) \in R \Leftrightarrow \log_x 5 \in R \Leftrightarrow x \neq 1$ ve $x > 0$

(d) $u(x) = \arcsin \dfrac{x-3}{2} + \log(4 - x)$

$u(x) \in R \Leftrightarrow \left|\dfrac{x-3}{2}\right| \leq 1$ ve $4 - x > 0 \Leftrightarrow -2 \leq x - 3 \leq 2$ ve $x < 4$

$\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 5$ ve $x < 4 \Leftrightarrow x \in [1, 4)$

(e) $v(x) = \arccos\left(\dfrac{3}{4 + 2\sin x}\right)$

$v(x) \in R \Leftrightarrow \left|\dfrac{3}{4+2\sin x}\right| = \dfrac{3}{4+2\sin x} \leq 1 \Leftrightarrow 4 + 2\sin x \geq 3$

$\Leftrightarrow \sin x \geq -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in Z)$

(f) $s(x) = \log(\cos x)$

$s(x) \in R \Leftrightarrow \cos x > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi . \quad (k \in Z)$

(g) $t(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x| - x}}$

$t(x) \in R \Leftrightarrow |x| - x > 0 \Rightarrow x < 0 .$

(h) $w(x) = \sqrt{\arcsin(\log_2 x)}$

$w(x) \in R \Leftrightarrow \arcsin(\log_2 x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \log_2 x \leq 1$

$\Leftrightarrow 2^0 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2 .$

(ı) $k(x) = \log_2\left(\log_3\left(\log_4 x\right)\right)$

$k(x) \in R \Leftrightarrow \log_3\left(\log_4 x\right) > 0 \Leftrightarrow \log_4 x > 1 \Leftrightarrow x > 4$.

(i) $m(x) = \sqrt{1-\sqrt{9-x^2}}$

$m(x) \in R \Leftrightarrow 1-\sqrt{9-x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{9-x^2} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 9-x^2 \leq 1$

$\Leftrightarrow x^2 \leq 9$ ve $x^2 \geq 8 \Leftrightarrow |x| \leq 3$ ve $|x| > 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow x \in \left(-3,-2\sqrt{2}\right) \cup \left(2\sqrt{2},3\right)$

2. $f\left(f(x)\right) = \sqrt{1-f(x)^2} = \sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2} = \sqrt{1-\left(1-x^2\right)} = \sqrt{x^2} = x \quad (0 \leq x \leq 1)$

3. $f\left(f\left(x\right)\right) = \dfrac{f(x)}{f(x)-1} = \dfrac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1} = \dfrac{x}{x-x+1} = x$,

$f\left(f\left(f(x)\right)\right) = f(x), \quad f\left(f\left(f\left(f(x)\right)\right)\right) = f\left(f\left(x\right)\right) = x$.

4. (a) $g\left(\sqrt{x^2+1}\right) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-1} = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2}$

$= x + \sqrt{x^2+1} = f(x)$.

(b) $g\left(\sqrt{x^2-1}\right) = \sqrt{x^2-1} + \sqrt{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2-1} = \sqrt{x^2-1} + x = g(x)$

5. $f\left(\dfrac{a+b}{1+ab}\right) = \log\left(\dfrac{1-\dfrac{a+b}{1+ab}}{1+\dfrac{a+b}{1+ab}}\right) = \log\left(\dfrac{1+ab-a-b}{1+ab+a+b}\right)$

$= \log\left(1+ab-a-b\right) - \log\left(1+ab+a+b\right)$

$= \log\left((1-a)(1-b)\right) - \log\left((1+a)(1+b)\right)$

$= \log\left(1-a\right) + \log\left(1-b\right) - \log\left(1+a\right) - \log\left(1+b\right)$

$= \log\dfrac{1-a}{1+a} + \log\dfrac{1-b}{1+b} = f(a) + f(b)$

6. $f(a+b)+f(a-b)=\dfrac{a^{a+b}+a^{-a-b}}{2}+\dfrac{a^{a-b}+a^{-a+b}}{2}$

$$=\frac{a^a.a^b+a^{-a}.a^{-b}+a^a.a^{-b}+a^{-a}.a^b}{2}$$

$$=\frac{a^a\left(a^b+a^{-b}\right)+a^{-a}\left(a^b+a^{-b}\right)}{2}=2\cdot\frac{\left(a^b+a^{-b}\right)}{2}\cdot\frac{\left(a^a+a^{-a}\right)}{2}$$

$$=2\,f(a)\,.\,f(b)$$

7. (a) $g(x)=f(3x^2)$

$$0\le 3x^2\le 1\Rightarrow 0\le x^2\le\frac{1}{3}\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}}\le x\le\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$Tg=\left\{x\ :\ \frac{-1}{\sqrt{3}}\le x\le\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

(b) $h(x)=f(x-5)$

$$0\le x-5\le 1\Rightarrow 5\le x\le 6\Rightarrow T_h=\{x:\ 5\le x\le 6\}$$

(c) $k(x)=f(\tan x)$

$$0\le\tan x\le 1\Rightarrow n\pi\le x\le\frac{\pi}{4}+n\pi\ (n\text{ tamsayı})$$

$$\Rightarrow T_k=\left\{x\ :\ n\pi\le x\le\frac{\pi}{4}+n\pi\right\}$$

8. $a\cos x+b\sin x+c=0\Rightarrow\dfrac{a}{b}\cos x+\sin x=-\dfrac{c}{b}$, $\tan\alpha=\dfrac{a}{b}$

$$\tan\alpha\cos x+\sin x=-\frac{c}{b}\Rightarrow\sin\alpha\cos x+\cos\alpha\sin x=-\frac{b}{c}\cos\alpha\Rightarrow$$

$$\sin(\alpha+x)=-\frac{b}{c}\cos\alpha=\sin u$$

x_1 ve x_2 denklemin kökleri olduğundan

$\alpha+x_1=u$ ise $\alpha+x_2=\pi-u$ olur. Dolayısıyla $x_1+x_2=\pi-2\alpha$ dır.

$$\sin(x_1+x_2)=\sin(\pi-2\alpha)=\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$=2\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

$$\cos(x_1+x_2)=\cos(\pi-2\alpha)=-\cos 2\alpha=-\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)$$

$$=\frac{a^2}{a^2+b^2}-\frac{b^2}{a^2+b^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

$x_1 + x_2 = \pi - 2\alpha$

$\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{\pi}{2} - \alpha \Rightarrow \tan\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha = \frac{b}{a}$

9. $\arctan\sqrt{x(x+1)} = u$, $\quad \arcsin\sqrt{x^2+x+1} = v$,

$\sqrt{x(x+1)} = \tan u$, $\quad \sqrt{x^2+x+1} = \sin v$

$\sin u = \sqrt{x^2+x+1}$, $u + v = \frac{\pi}{2}$, $\tan u = \frac{1}{\sin v}$, $\tan u \,.\, \sin v = 1$

$\Rightarrow \tan u \,.\, \sin\left(\frac{\pi}{2} - v\right) = 1 \Rightarrow \tan u \,.\, \cos u = 1 \Rightarrow \sin u = 1$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+x+1} = 1 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 1 \Rightarrow x(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = 0$ ve $x_2 = -1$

10. $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = y \Rightarrow x + \sqrt{x^2+1} = e^y \Rightarrow x^2 + 1 = e^{2y} + 2xe^y + x^2$

$\Rightarrow 1 = e^{2y} - 2xe^y \Rightarrow x = \frac{e^{2y}-1}{2e^y} \Rightarrow x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$

$\Rightarrow x = \sin hy \Rightarrow f^{-1}(x) = \sin hx$

13. f nin tanım kümesindeki her x için $f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ yazılabilir.

$p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$, $\quad q(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ denirse

$p(-x) = \frac{f(-x)+f\left(-(-x)\right)}{2} = \frac{f(x)+f(-x)}{2} = p(x)$

olduğundan p(x) daima çifttir.

$q(-x) = \frac{f(-x)-f\left(-(-x)\right)}{2} = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -\frac{f(x)-f(-x)}{2} = -q(x)$

olup q(x) fonksiyonu tek fonksiyondur.

14. (a) $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$

Eğer $f(0) = 0$ ise $f(0) = a_0 + a_1 \,.\, 0 + \ldots + a_n \,.\, 0 \Rightarrow a_0 = 0$ dır.

Bu durumda $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$

$= x\,(a_1 + a_2x + ... + a_nx^{n-1}) = x\,p(x)$

Burada $p(x) = a_1 + a_2x + ... + a_nx^{n-1}$, n–1. dereceden bir polinomdur.

(b) $f(x + a) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x + a)^k = a_0 + a_1 (x + a) + a_2 (x + a)^2 + ... + a_n (x + a)^n$

$\Rightarrow$ $p(x) = f(x+a)$, n. dereceden bir polinomdur.

(c) $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$

$-\quad 0 = a_0 + a_1a + ... + a_nx^n$

$f(x) = a_1 (x–a) + ... + a_n (x^n - a^n) = g (x–a) + ... + a_n(x–a) (x^{n-1}+...+a^{n-1})$

$= (x–a) [a_0+a_1 (x+0) + ... + a_n (x^{n-1}+ ... + a^{n-1}] = (x–1)\, h(x)$

denirse h(x), n–1 inci dereceden bir polinomdur.

16. a ile b aralarında asal, $b \neq 0$ ve verilen denklemin $x = \frac{a}{b}$ şeklinde bir kökü olsun. Kök denklemi sağlayacağından

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n + a_1\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + ... + a_{n-1}\frac{a}{b} + a_n = 0$$

olur. Eşitliğin her iki yanı b^{n-1} ile çarpılırsa.

$$\frac{a^n}{b} + a_1a^{n-1} + a_2a^{n-2}b + ... + a_{n-1}ab^{n-1} + a_nb^{n-1} = 0$$

$$\Rightarrow\ a_1a^{n-1} = a_2a^{n-2}b + ... + a_{n-1}ab^{n-1} + a_nb^{n-1} = -\frac{a^n}{b}$$

bulunur. $a_1, a_2, ..., a_n$ ler tam sayılar, a, b tam sayı ve $b \neq 0$ olduğundan eşitliğin sol tarafı bir tamsayıdır. Sağ taraf da bir tamsayı olmalıdır. (a, b) = 1 olduğundan $\frac{a^n}{b}$ nin tamsayı olması için b = 1 olmalıdır. Bu durumda x = a, yani bir tamsayı olur.

17. $x = \frac{p}{q}$ verilen denklemin bir kökü olsun. Denklemde x yerine $\frac{p}{q}$ yazılırsa

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + ... + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

bulunur. Her iki taraf q^n ile çarpılıp düzenlenirse

$a_np^n + a_{n-1}p^{n-1}q + ... + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = 0 \Rightarrow$ (1)

$a_{n-1}p^{n-1}q + ... + a_1pq^{n-1} + a_0q^n = -a_np^n$

yazılabilir. Her iki taraf q ile bölünürse

$$a_{n-1}p^{n-1} + ... + a_1pq^{n-2} + a_0q^{n-1} = -\frac{a_np^n}{q}$$

eşitliğin sol tarafı bir tamsayı olduğundan sol tarafta bir tamsayı olmalıdır. O halde $q \mid a_np^n$ dir. $(p, q) = 1$ olduğundan $q \mid a_n$ dir.

(1) in her iki tarafı p ile bölünürse

$a_np^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + ... + a_1q^{n-1} = -a_0\frac{a^n}{p}$ elde edilir Sol taraf bir tamsayı olduğundan sağ tarafta bir tamsayıdır. $(p,q) = 1$ olduğundan $p \mid a_0$ dır.

18. $x = y = 0$ alınırsa $f(0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$ olur.

19. $x = y = 0$ alınırsa $f(0) = f(0) \cdot f(0) \Rightarrow f(0) - f^2(0) = 0$

$\Rightarrow f(0)(1 - f(0)) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ veya $f(0) = 1$ dir.

20. Her $n \geq 1$ için $f(n + 1) = f(n) + \frac{1}{3}$ yazılabilir.

$n = 1 \Rightarrow f(2) = f(1) + \frac{1}{3}$

$n = 2 \Rightarrow f(3) = f(2) + \frac{1}{3}$

$n = 3 \Rightarrow f(4) = f(3) + \frac{1}{3}$

$\vdots$

$n = 9 \Rightarrow f(99) = f(99) + \frac{1}{3}$

olur. Taraf tarafa toplanır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$f(100) = f(1) + 99 \cdot \frac{1}{3} = 3 + 33 = 36$$

bulunur.

21. Eşitliği tümevarımla gösterelim.

$n = 1$ için

$$\arctan\frac{1}{2} = \arctan\frac{1}{2}$$

olur. O halde önerme $n = 1$ için doğrudur.

$n = k$ için doğru olsun. O halde

$$\sum_{m=1}^{k} \arctan\frac{1}{2m^2} = \arctan\frac{k}{k+1} \qquad (I)$$

eşitliği doğrudur. $n = k + 1$ için doğruluğunu gösterelim.

(I) eşitliğinin her iki yanına $\arctan\frac{1}{2(k+1)^2}$ terimini ekleyelim.

$$\sum_{m=1}^{k+1} \arctan\frac{1}{2m^2} = \arctan\frac{k}{k+1} + \arctan\frac{1}{2(k+1)^2}$$

$$= \arctan\left(\frac{\frac{k}{k+1} + \frac{1}{2(k+1)^2}}{1 - \frac{k}{k+1}\cdot\frac{1}{2(k+1)^2}}\right) = \arctan\left(\frac{2k(k+1)^2 + k + 1}{2(k+1)^3 - k}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{k+1}{k+2}\right)$$

bulunur. Bu da önermenin $k + 1$ için doğru olduğunu gösterir.

3 LİMİT

DİZİLER

TANIM

Tanım kümesi N doğal sayılar kümesi olan fonksiyona dizi denir.

Diziler değer kümesine göre çeşitli adlar alırlar. Eğer dizinin değer kümesi R reel sayılar kümesi ise diziye reel terimli dizi, Q rasyonel sayılar kümesi ise diziye rasyonel terimli dizi adı verilir.

TANIM

Her n doğal sayısı için $s_n \leq M$ olacak şekilde bir M reel sayısı varsa (s_n) dizisine **üstten sınırlıdır** denir. M sayısına da bu dizinin bir **üst sınırı** adı verilir. Her n doğal sayısı için $s_n \geq m$ olacak şekilde bir m reel sayısı varsa bu diziye **alttan sınırlıdır** denir, m sayısına da bu dizinin bir **alt sınırı** adı verilir.

TANIM

$\forall n \in N$ için $|s_n| \leq K$ olacak şekilde bir K pozitif reel sayısı varsa (s_n) dizisine **sınırlı dizi** denir.

TANIM

Bir dizi üstten sınırlı ise üst sınırlarının en küçüğüne dizinin **en küçük üst sınırı** (eküs) veya **supremumu** denir.

Bir dizi alttan sınırlı ise alt sınırların en büyüğüne dizinin **en büyük alt sınırı** (ebas) veya **infimumu** denir.

TANIM

$\varepsilon > 0$ ve $a \in R$ olsun.

$K = \{ x : |x - a| < \varepsilon, \ x \in R \}$

kümesine a nın ε– **komşuluğu** denir.

TANIM

(s_n) bir reel sayı dizisi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için (s_n) dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç diğer bütün terimleri bir s reel sayısının ε– komşuluğunda bulunuyorsa (s_n) dizisinin **limiti** s dir (veya s ye **yakınsaktır**) denir ve

$$\lim s_n = s \text{ veya } (s_n) \to s$$

şeklinde gösterilir.

TANIM

(s_n) bir reel sayı dizisi ve $s \in R$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için, $n > n_0$ olduğunda $|s_n - s| < \varepsilon$ kalacak şekilde ε na bağlı bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa (s_n) dizisi s ye **yakınsaktır** denir ve

$$\lim s_n = s \text{ veya } (s_n) \to s$$

şeklinde gösterilir.

TEOREM

Yakınsak her dizi sınırlıdır.

TEOREM

$(s_n) \to s$ ise $\forall \lambda \in R$ için $\lambda (s_n) \to \lambda . s$

TEOREM

$(s_n) \to s$ ve $(t_n) \to t \Rightarrow (s_n + t_n) \to s + t$ dir.

TEOREM

$(s_n) \to s$ ve $(t_n) \to t \Rightarrow (s_n . t_n) \to s . t$ dir.

TEOREM

$(s_n) \to s$, $s \neq 0$ ve $\forall n \in N$ için $s_n \neq 0$ ise

$$\left(\frac{1}{s_n}\right) \to \frac{1}{s}$$

dir.

Sonuç : $(s_n) \to s$ ve $(t_n) \to t$, $(t \neq 0)$ ve $\forall n \in N$ için $t_n \neq 0$ ise

$$\left(\frac{s_n}{t_n}\right) \to \frac{s}{t}$$

dir.

TANIM

(s_n) dizisi verilmiş olsun. Eğer

1) $\forall n \in N$ için $s_n < s_{n+1}$ ise diziye **monoton artan dizi**

2) $\forall n \in N$ için $s_n \leq s_{n+1}$ ise diziye **geniş anlamda monoton artan** veya **azalmayan dizi**

3) $\forall n \in N$ için $s_n > s_{n+1}$ ise diziye **monoton azalan dizi**

4) $\forall n \in N$ için $s_n \geq s_{n+1}$ ise diziye **geniş anlamda monoton azalan** veya **artmayan dizi**

denir.

TEOREM

Monoton bir dizinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart sınırlı olmasıdır.

TEOREM

$$\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{dir.}$$

TEOREM

(a) $a_n \to 0$, $b_n \to 0$, (b_n) azalan ve $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}}$ varsa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}}$$

dır.

(b) $b_n \to \infty$, (b_n) artan ve $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ varsa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$$

dır.

TEOREM

$u_n > 0$ ve $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = c$ ise $\lim \sqrt[n]{u_n} = c$ dir.

TEOREM

$\lim a_n = 0 \Rightarrow \lim \frac{\sin a_n}{a_n} = 1$

TANIM

$a : N \to R$, $a(n) = a_n$ dizisi verilmiş olsun.

$k : N \to N$, $k(n) = k_n$

fonksiyonu (dizisi) bir artan dizi olmak üzere

$(aok) : N \to R$, $a(k(n)) = a(k_n) = a_{k_n}$

bileşke fonksiyonuna a dizisinin bir **alt dizisi** adı verilir.

TEOREM

$(s_n) \to s$ ise $(s_{k_n}) \to s$ dir.

TANIM

(s_n) bir reel terimli dizi olsun. (s_n) bir **Cauchy dizisidir** $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in N$ vardır öyle ki $m, n \geq n_0$ için $|s_m - s_n| < \varepsilon$.

TEOREM

Reel terimli bir dizinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart Cauchy dizisi olmasıdır.

TANIM

$\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty \Leftrightarrow \forall B_1 \in R$ için $\exists n_1 \in N$ öyle ki $\forall n \geq n_1$ için $s_n > B_1$

$\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty \Leftrightarrow \forall B_2 \in R$ için $\exists n_2 \in N$ öyle ki $\forall n \geq n_2$ için $s_n < B_2$.

$\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$ olması halinde "**(s_n) artı sonsuza gidiyor**", $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$ olması halinde de "**(s_n) eksi sonsuza gidiyor**" denir.

PROBLEMLER

1. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$

(b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+1}-\frac{2n+1}{n^2}\right)$

(c) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)$

(ç) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ldots+\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$

(d) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{3^{n-1}}\right)$

(e) $\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$

(f) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

(g) $\lim_{n\to\infty}\frac{n\sin n!}{n^2+1}$

(h) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

2. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^n})=\frac{1}{1-x}\qquad(|x|<1)$

(b) $\lim_{n\to\infty}\frac{[\![x]\!]+[\![2x]\!]+\ldots+[\![nx]\!]}{n^2}=\frac{x}{2}$

3. $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ olduğunda $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=a$ dır, gösteriniz.

4. $\lim a_n = \lim b_n = p$ olsun. Bir (c_n) dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç

$$a_n \le c_n \le b_n$$

ise $\lim c_n = p$ dir, gösteriniz (Sıkıştırma Teoremi).

5. $\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)$ dizisinin monoton artan ve sınırlı olduğunu gösteriniz. Bu dizi yakınsak mıdır?

6. $\left((-1)^n\right)$ dizisinin farklı 5 tane alt dizisini bulunuz. Bu dizinin başka alt dizileri var mıdır?

7. $s_n = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ olsun. (s_n) dizisine eşit olan bir dizi bulunuz. Bu dizi yakınsak mıdır?

8. $\left(\frac{3n}{2n-7}\right)$ dizisinin en küçük üst sınırını (sup) ve en büyük alt sınırını (inf) bulunuz.

9. $\left((-1)^n/n\right)$ dizisinin kaç terimi $\left(-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right)$ aralığının dışındadır?

10. $|a| < 1$ için $(1 + a + a^2 + ... + a^n)$ dizisinin yakınsak olduğunu gösterip limitini bulunuz.

11. Genel terimi $\frac{1}{n}\left(\frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + ... + \frac{n+1}{n}\right)$ olan dizinin yakınsadığı sayıyı bulunuz.

12. $a_1 = 0$ ve $n > 1$ için $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ şeklinde tanımlanan (a_n) dizisinin yakınsak olduğunu gösterip limitini bulunuz.

13. $\inf a_n + \inf b_n \le \inf (a_n + b_n) \le \sup (a_n + b_n) \le \sup a_n + \sup b_n$ olduğunu gösteriniz.

14. $a \neq 0$ için $\left(|a|^{1/n}\right) \to 1$ olduğunu gösteriniz.

15. $a_n = (-1)^n \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ olsun. İspat ediniz ki $a_n > 0$ ve $a_{n+1} < a_n$ dir.

16. $\left(\frac{2.4...2n}{3.5...(2n+1)}\right)$ dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

17. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5n}$

(b) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$

(c) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{5n}$

(d) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{2n-5}$

18. $(a_n) > 0$ ve $a > 0$ olsun. $(a_n) \to a$ olduğundan $\log(a_n) \to \log a$ dır, gösteriniz.

19. $(a_n) \to a$, $\forall n \in N$ için $a_n \geq 0$ ve $k \in N$ ise $\left(\sqrt[k]{a_n}\right) \to \sqrt[k]{a}$ dır, gösteriniz.

20. $(a_n) \to a$, $\forall n \in N$ için $a_n > 0$ ve $p \in Q$ ise $\left(a_n^p\right) \to a^p$ dir, gösteriniz.

21. (a_n) dizisinin tekrarlama bağıntısı

$$a_{n+2} - a_{n+1} + 6a_n = 0$$

dır. $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{1}{3}$ olduğuna göre (a_n) dizisinin genel terimini bulunuz.

ÇÖZÜMLER

1. **(a)** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1).n}{2.n^2}=\frac{1}{2}$

(b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+1}-\frac{2n+1}{n^2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+1}-\frac{2n+1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4-2n^2-3n-1}{n^3+n^2}=\infty$

(c) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\right)=\lim_{n\to\infty}1-\frac{1}{2^n}=1$

(ç) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ldots+\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[n+\frac{n(n+1)}{2n}\right]=\lim_{n\to\infty}1+\frac{n+1}{2n}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

(d) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{3^{n-1}}\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\ldots+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{3}{4}\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) = \frac{3}{4}$

(e) $\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \frac{1}{3}$

(f) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+1}+n}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0$

(g) $\lim_{n\to\infty}\frac{n.\sin.(n!)}{n^2+1}$ $\quad -1 < \sin n! < 1 \Rightarrow -\frac{n}{n^2+1} < \frac{n.\sin(n!)}{n^2+1} < \frac{n}{n^2+1} \Rightarrow$

$\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{n\sin(n!)}{n^2+1} = 0$ (sıkıştırma teoreminden)

(h) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right)}{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)} = \lim_{n\to\infty}3\frac{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right)}{\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)} = 3$.

2. **a)** $\lim_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^n})$

$= \lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}(1+x^{2^k}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$ (sayfa 6, problem 14)

$= \frac{1}{1-x}$ $\quad (|x|<1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x^{2n+1} = 0)$

b) $\lim_{n\to\infty}\frac{\lfloor x\rfloor+\lfloor 2x\rfloor+\ldots+\lfloor nx\rfloor}{n^2}$

$kx-1 < \lfloor kx\rfloor \le kx \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$

$\Rightarrow x+2x+\ldots+nx-n < \lfloor x\rfloor+\ldots+\lfloor nx\rfloor \le x+2x+\ldots+nx$

$\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}x-n < \lfloor x\rfloor+\ldots+\lfloor nx\rfloor \le \frac{n(n+1)}{2}x$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)}{2n}x - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor x \rfloor + \ldots + \lfloor nx \rfloor}{n^2} \leq \frac{n+1}{2n}x$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n}x - \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n}x = \frac{x}{2}$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \ldots + \lfloor nx \rfloor}{n^2} = \frac{x}{2}$$

3. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ olduğunda $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = a$ olduğunu göstereceğiz.

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ olsun. Bu durumda $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon)$ vardır,

öyle ki $|a_n - a| < \varepsilon$ dur.

$s_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için

$|s_n - a| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $m_0(\varepsilon)$ sayısının mevcut olduğunu gösterelim.

$$|s_n - a| = \left|\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} - a\right| = \left|\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ldots + a_n - n.a}{n}\right|$$

$$= \frac{1}{n}\left|(a_1 - a) + \ldots + (a_{n_0} - a) + (a_{n_0+1} - a) + \ldots + (a_n - a)\right|$$

$$= \frac{1}{n}\left[\underbrace{|a_1 - a| + \ldots + |a_{n_0} - a|}_{B} + \underbrace{|a_{n_0+1} - a|}_{<\varepsilon} + \ldots + \underbrace{|a_n - a|}_{<\varepsilon}\right] = \frac{B}{n} + \frac{n - n_o}{n}\varepsilon$$

$\frac{B}{n} \to 0 \quad (n \to \infty)$ olduğundan $\left|\frac{B}{n} - 0\right| < \varepsilon$ olacak şekilde ε'a bağlı $n_0'(\varepsilon)$ sayısı vardır.

$m_0(\varepsilon) = \max\{ n_0(\varepsilon), n_0'(\varepsilon) \}$ olsun. $\forall n > m_0(\varepsilon)$ için

$$n - n_0 < n \Rightarrow \frac{n - n_0}{n} < \frac{n}{n} = 1 \Rightarrow \frac{n - n_0}{n}\varepsilon < \varepsilon \Rightarrow \frac{B}{n} + \frac{(n - n_0)}{n}\varepsilon < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = a$$

4. $\lim a_n = \lim b_n = p$ olsun.

$\lim a_n = p$ ise $\forall \varepsilon > 0$ için bir n_1 sayısı vardır,

öyleki $n > n_1$ için $|a_n - p| < \varepsilon$ dur.

$\lim b_n = p$ ise $\forall \varepsilon > 0$ için bir n_2 sayısı vardır,

öyleki $n > n_2$ için $|b_n - p| < \varepsilon$

$\max \{ n_1 , n_2 \} = m_0$ diyelim.

O halde $n > m_0$ için $-\varepsilon < a_n - p \le c_n - p \le b_n - p < \varepsilon$

$\Rightarrow |c_n - p| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \to \infty} c_n = p$

5. $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{n!}$

$$a_{n+1} - a_n = \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{(n+1)!}\right) - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

$\Rightarrow a_n < a_{n+1}$ olup verilen dizi monoton artandır.

$n! \ge 2^{n-1}$ olduğundan

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

olduğundan verilen dizi sınırlıdır.

Monoton ve sınırlı her dizi yakınsak olduğundan verilen dizi yakınsaktır.

6. $\left((-1)^n\right)$ dizisinin farklı 5 tane alt dizisini bulalım.

$\left((-1)^{2n}\right) = (1, 1, ...)$, $\left((-1)^{2n+1}\right) = (-1, -1, -1, ...)$

$(-1, -1, 1, 1, ...)$, $(-1, -1, -1, 1, 1, 1, ...)$, $((-1)^{n+1}) = (1, -1, 1, -1, ...)$

⋮

Bu dizinin başka alt dizileri de vardır.

7. $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n(n+1)} + \frac{B}{(n+1)(n+2)}$

$1 = A(n + 2) + Bn \Rightarrow 1 = (A + B)\, n + 2A \Rightarrow$

$A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$ olur. Buna göre

$$s_n = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

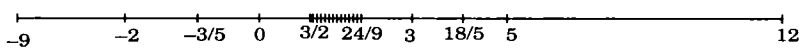
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4}\right) + ... + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$

olur. $\lim s_n = \lim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{1}{4}$

bulunur. $t_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$ alınırsa $(s_n) = (t_n)$ olur.

8. $s_n = \left(\frac{3n}{2n-7}\right)$



$\sup\left(\frac{3n}{2n-7}\right) = 12$, $\inf\left(\frac{3n}{2n-7}\right) = -9$

9. $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ dizisinin $\left(-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right)$ aralığı dışındaki terimlerini bulalım.

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| \geq \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{1}{100} \Rightarrow n \leq 100$$

bulunur. O halde ilk 100 terim $\left(-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right)$ komşuluğunun dışındadır.

10. $|a| < 1$ için

$s_n = 1 + a + a^2 + ... + a^n$ olsun.

$s_{n+1} - s_n = 1 + a + a^2 + ... + a^{n+1} - (1 + a + ... + a^n) = a^{n+1} > 0$

$\Rightarrow s_n < s_{n+1}$ yani verilen dizi monoton artandır.

$$|s_n| = |1 + a + a^2 + ... + a^n| = \frac{|1 - a^{n+1}|}{1-a} < \frac{1 + |a|^{n+1}}{1-a} < \frac{2}{1-a}$$

$\Rightarrow (s_n)$ sınırlı dolayısı ile verilen dizi yakınsaktır.

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a}$$

11. $a_n = \frac{n+1}{n}$ diyelim.

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} = \frac{1}{n}\left(\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+...+\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \lim \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} = \lim a_n = \lim \frac{n+1}{n} = 1$$

12. $a_1 = 0$, $n > 1$ için $a_n = \sqrt{2+a_{n-1}}$

$a_2 = \sqrt{2+0} = \sqrt{2}$, $a_3 = \sqrt{2+a_2} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ $\Rightarrow$ $a_2 < a_3$ ve $a_{n-1} < a_n$ olsun.

$a_n < a_{n+1}$ olduğunu gösterelim.

$a_{n-1} < a_n \Rightarrow 2 + a_{n-1} < 2 + a_n \Rightarrow \sqrt{2+a_{n-1}} < \sqrt{2+a_n} \Rightarrow a_n < a_{n+1}$ dir.

Yani dizi monoton artandır. Şimdi dizinin sınırlı olduğunu gösterelim.

$a_2 = \sqrt{2} < 2$

$a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2}} < \sqrt{2+2} = 2$

$a_2 < 2$ ve $a_n < 2$ olsun. $a_{n+1} < 2$ olduğunu gösterelim.

$a_n < 2 \Rightarrow 2 + a_n < 4 \Rightarrow \sqrt{2+a_n} < 2 \Rightarrow a_{n+1} < 2$ dir.

Monoton ve sınırlı her dizi yakınsak olduğundan verilen dizi yakınsaktır. $\lim a_n = L$ olsun $\Rightarrow$ $\lim a_{n-1} = L$ dir.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+a_{n-1}} \Rightarrow L = \sqrt{2+L} \Rightarrow L^2 - L - 2 = 0$$

$\Rightarrow L = 2$ veya $L = -1$, $a_n > 0$ olduğundan $L = 2$ dir.

13. İlk olarak $\inf a_n + \inf b_n \le \inf (a_n + b_n)$ olduğunu gösterelim.

inf tanımından her $n \in N$ için $a_n \ge \inf a_n$, $b_n \ge \inf b_n$

$\Rightarrow \forall n \in N$ için $a_n + b_n \ge \inf a_n + \inf b_n$ dır.

$\Rightarrow \inf (a_n + b_n) \ge \inf (a_n) + \inf b_n$ (1)

Şimdi $\sup (a_n + b_n) \le \sup a_n + \sup b_n$ olduğunu gösterelim.

her $n \in N$ için $a_n \le \sup (a_n)$, $b_n \le \sup (b_n)$ dir.

$\Rightarrow \forall n \in N$, $a_n + b_n \le \sup a_n + \sup b_n$

$\Rightarrow \sup (a_n + b_n) \le \sup a_n + \sup b_n$ (2)

Ayrıca

$\inf(a_n + b_n) \le \sup(a_n + b_n)$ (3)

olduğu açıktır. (1), (2) ve (3)'den istenilen eşitsizlik gerçeklenir.

14. $|a| > 1$ olsun.

$x_n = |a|^{1/n} - 1$ diyelim. $|a| > 1$ olduğundan $x_n > 0$ dır.

$\Rightarrow |a|^{1/n} = x_n + 1 \Rightarrow |a| = (1 + x_n)^n$

olur. Bernoulli eşitsizliğinden

$$|a| = (1 + x_n)^n \ge 1 + n.x_n \Rightarrow 0 < x_n \le \frac{|a| - 1}{n}$$

$\lim_{n \to \infty} \frac{|a| - 1}{n} = 0$ olduğundan sıkıştırma teoreminden, $\lim x_n = 0$ dır.

$|a| = 1$ ise $\left(|a|^{1/n}\right) = (1, 1, 1, \ldots) \to \quad (n \to \infty) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} |a|^{1/n} = 1$

$0 < |a| < 1$ olsun. $\Rightarrow \frac{1}{|a|} > 1 \Rightarrow b = \frac{1}{|a|}$ dersek

$$\lim_{n \to \infty} b^{1/n} = 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} b^{1/n} = \frac{1}{\lim_{n \to \infty} |a|^{1/n}} = 1 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} |a|^{1/n} = 1 \text{ dir.}$$

15. $a_n = (-1)^n \binom{-1/2}{n}$

$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha.(\alpha - 1)...(\alpha - n + 1)}{n!}$ olduğundan

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - 1\right)...\left(-\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!} = (-1)^n \frac{1.3...(2n-1)}{2^n n!}$$

dır. Dolayısıyla

$$a_n = (-1)^n (-1)^n \frac{1.3...(2n-1)}{2^n n!} = \frac{1.3...(2n-1)}{2^n n!}$$

bulunur. Her $n \ge 1$ için $a_n > 0$ olduğu açıktır.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1.3.5...(2n-1)(2n+1)}{2^{n+1}.(n+1)!} \cdot \frac{2^n.n!}{1.3.5...(2n-1)}$$

$$= \frac{2n+1}{2n+2} < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$$

olacağından (a_n) azalandır.

16. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2.4.(2n)(2n+2)}{3.5.7...(2n+1).(2n+3)} \cdot \frac{3.5.7...(2n+1)}{2.4.6...(2n)} = \frac{2n+2}{2n+3} < 1$

$\Rightarrow a_{n+1} < a_n$ olup dizi monoton azalandır.

$\frac{2.4.6...(2n)}{3.5.7...(2n+1)} < \frac{2.4.6...(2n)}{2.4.6...(2n)} = 1 \Rightarrow$ dizi sınırlıdır.

Monoton ve sınırlı her dizi yakınsak olduğundan verilen dizi yakınsaktır.

17. (a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5n} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{5} = e^5$

(b) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}} = \frac{1}{\lim\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}}$

$$= \frac{\lim\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{-1}}{\lim\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{1}{e} = e^{-1}$$

(c) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{5n}$, $\frac{4}{n} = \frac{1}{k}$ diyelim.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{5n} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{20k} = e^{20}$$

(d) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{2n-5}$, $\frac{3}{n} = \frac{1}{k}$ diyelim.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{2n-5} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{6k-5} = \lim_{k\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right]^{6}\left[1+\frac{1}{k}\right]^{-5} = e^6.1 = e^6$$

18. $(a_n) \to a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0$ vardır. Öyle ki $\forall n > n_0$ için $|a_n - a| < \varepsilon$ dur.

$|a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$

$|\log a_n - \log a| < |\log(a+\varepsilon) - \log a| = \log\left(1+\frac{\varepsilon}{a}\right) = \varepsilon_1$

$\Rightarrow \forall \varepsilon_1 > 0$ için $\exists n_0 \ni \forall n > n_0$ için $|\log a_n - \log a| < \varepsilon_1$ dır.

$\Rightarrow (\log a_n) \to (\log a)$ dır.

19. $a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \ldots + b^{k-1})$ eşitliğinde

$a = \sqrt[k]{a_n}$, $b = \sqrt[k]{a}$ alınırsa

$$a_n - a = \left(\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{a}\right)\left[\left(\sqrt[k]{a_n}\right)^{k-1} + \left(\sqrt[k]{a_n}\right)^{k-2}\sqrt[k]{a} + \ldots + \left(\sqrt[k]{a}\right)^{k-1}\right]$$

$$\Rightarrow \sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{a} = \frac{a_n - a}{\left[\left(\sqrt[k]{a_n}\right)^{k-1} + \left(\sqrt[k]{a_n}\right)^{k-2}\sqrt[k]{a} + \ldots + \left(\sqrt[k]{a}\right)^{k-1}\right]}$$

$(a_n) \to a$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \ni n > n_0$ için $|a_n - a| < \left(\sqrt[k]{a}\right)^{k-1}\varepsilon$

yazabiliriz. $\left|\sqrt[k]{a_n} - \sqrt[k]{a}\right| < \dfrac{|a_n - a|}{\left(\sqrt[k]{a}\right)^{k-1}} < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$.

20. $(a_n) \to a$, $\forall n \in N$ için $a_n > 0$ olsun.

$p \in Q$ sayısını $p = \dfrac{m}{k}$ ($m, k \in Z$, $(m,k) = 1$ ve $k \neq 0$) şeklinde seçelim. 19. sorudan biliyoruz ki $(a_n) \to a$ ise $\left(\sqrt[k]{a_n}\right) \to \sqrt[k]{a}$ dır. Yine biz biliyoruz ki $m \in Z$ için $a_n \to a$ ise $a_n^m \to a^m$ dir. Buna göre

$$(a_n)^p = \left(a_n\right)^{\frac{m}{k}} = \left(\sqrt[k]{a_a}\right)^m \to \left(\sqrt[k]{a}\right)^m = \left(a\right)^{\frac{m}{k}} = a^p$$

dir.

21. Karakteristik denklem $x^2 - x + 6 = 0$

$x_1 = 3$, $x_2 = -2$ dir. $a_1 = \dfrac{1}{3}$, $a_2 = \dfrac{1}{3}$ olduğundan

$\Rightarrow a_n = A_1 \cdot 3^n + A_2 (-2)^n \Rightarrow 0 = 3A_1 + A_2(-2)$ ve

$1 = A_1 \cdot 9 + A_2 4 \Rightarrow A_1 = \dfrac{1}{15}$ ve $A_2 = -\dfrac{1}{15}$ dir.

$$\Rightarrow a_n = \frac{3^n}{15} - \frac{(-2^n)}{10} = (-1)^{n+1}\frac{2^n}{10} + \frac{3^n}{15}$$

BİR FONKSİYONUN LİMİTİ

TANIM

$A \subset R$, $f : A \to R$ bir fonksiyon ve a da A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Terimleri $A \setminus \{a\}$ kümesine ait olan ve a noktasına yakınsayan her (x_n) dizisi için elde edilen $\left(f\left(x_n\right)\right)$ görüntü dizisi aynı bir L sayısına yakınsıyorsa bu L sayısına f fonksiyonunun a noktasındaki limiti denir ve

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

şeklinde gösterilir.

TANIM

$A \subset R$, $f : A \to R$ ve $g : A \to R$ birer fonksiyon ve $a \in R$ olsun.

Eğer $\lim_{x \to a} f(x)$ ve $\lim_{x \to a} g(x)$ limitleri varsa

(1) $\lim_{x \to a} (f + g) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

(2) $\lim_{x \to a} (f \,.\, g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) \,.\, \lim_{x \to a} g(x)$

(3) Her $x \in A$ için $g(x) \neq 0$ ve $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$ ise

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

(4) Her $\alpha \in R$ için $\lim_{x \to a} (\alpha \,.\, f)(x) = \alpha \,.\, \lim_{x \to a} f(x)$

dır.

TANIM

$A \subset R$, $f : A \to R$ bir fonksiyon ve a da A kümesinin bir yığılma noktası olsun.

(1) Terimleri A kümesinden alınan, her $n \in N$ için $x_n < a$ bağıntısını sağlayan ve a noktasına yakınsayan her (x_n) dizisi için $\left(f\left(x_n\right)\right)$ dizisi bir L_1 reel sayısına yakınsıyorsa, bu L_1 sayısına f fonksiyonunun a noktasında **sol tarafı limiti** denir ve

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1 \quad \text{veya} \quad \lim_{x \to a-0} f(x) = L_1$$

şeklinde gösterilir.

(2) Terimleri A kümesinden alınan, her $n \in N$ için $x_n > a$ bağıntısını sağlayan ve a noktasına yakınsayan her (x_n) dizisi için $\left(f\left(x_n\right)\right)$ dizisi L_2 sayısına yakınsıyorsa bu L_2 sayısına fonksiyonun **sağ taraflı limiti** denir ve

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2 \quad \text{veya} \quad \lim_{x \to a+0} f(x) = L_2$$

biçiminde yazılır.

(3) Bir f fonksiyonunun bir noktada limitin var olması için gerek ve yeter şart o noktada sağ ve sol limitlerinin mevcut ve eşit olmasıdır.

TANIM

$A \subset R$, $f : A \to R$ bir fonksiyon ve a da A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, eğer $0 < |x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ kalacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x, a ya yaklaştığında f nin limiti L dir denir ve

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

biçiminde gösterilir.

PROBLEMLER

1. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı noktalardaki sağ ve sol taraflı limitlerini bulunuz.

(a) $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x < 1 \text{ ise} \\ 3 & , x = 1 \text{ ise} \\ 4x-1 & , x < 1 \text{ ise} \end{cases}$, $a = 1$

(b) $f : R \to R$, $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$, $a = 1$

(c) $f : R \setminus \{2\} \to R$, $f(x) = \dfrac{|x^2 - 4|}{x - 2}$, $a = 2$

2. Aşağıdaki fonksiyonların yanlarında yazılı noktalardaki limitlerini bulunuz.

(a) $f : R \setminus \{0\} \to R$, $f(x) = \dfrac{|2x|}{x}$, $a = 0$

(b) $f: R \to R,\ f(x) = \begin{cases} x/2 & , x<1 \text{ ise} \\ 0 & , x=1 \text{ ise} \\ 1/2 & , x>1 \text{ ise} \end{cases}$, $a = 1$

(c) $f: (0, 2\pi) \to R,\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{|\sin x|}{\sin x} & , x \neq \pi \text{ ise} \\ 0 & , x=\pi \text{ ise} \end{cases}$, $a = \pi$

3. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2}{x^2-1} - \dfrac{1}{x-1}$

(b) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{|2x|}{x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 2} [\![x]\!]$

(ç) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$

(d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-8}{x-2}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x^2}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+h)^m - x^m}{h}$, $(m \in N)$

(g) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{3\sqrt{x} - 3\sqrt{a}}{x-a}$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$

(ı) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

(i) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-5x+6} - x\right)$

(j) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+5x+1} + x\right)$

4. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\sin x}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{bx}$

(ç) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos ax}{x^2}$

(e) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x-a}$

(f) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos ax - \cos bx}{x^2}$

5. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin\left(x^2-1\right)}{x-1}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} x.\sin\dfrac{1}{x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\tan x)}{\sin x}$

(ç) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin(\cos x)}{\cos x}$

6. " $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ise $\lim_{x \to a} |f(x)| = |L|$ dir." önermesinin doğruluğunu gösteriniz. Bu önermenin karşıtı da doğru mudur?

7. $f(x) = 9x - 5$ olsun. Bir $\delta > 0$ sayısı bulunuz ki $|x-1| < \delta$ olduğunda $|f(x)-4| < \frac{1}{10}$ kalsın.

8. $g(x) = 2x^2 + 3$ olsun. Bir $\delta > 0$ sayısı bulnuuz ki $|x| < \delta$ olduğunda $|g(x)-g(0)| < \frac{1}{2}$ olsun.

9. $f(x) = 3x + 5$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Öyle bir $\delta > 0$ bulunuz ki $|x-2| < \delta$ olduğunda $|f(x)-11| < \varepsilon$ kalsın.

10. Aşağıdaki eşitliklerde tanımlanan $f : R \to R$ fonksiyonlarının hangi noktalarda limiti yoktur?

(a) $f(x) = \llbracket x \rrbracket + \llbracket -x \rrbracket$

(b) $f(x) = \llbracket x^2 \rrbracket$

(c) $f(x) = 1 - x + \llbracket x \rrbracket + \llbracket 1-x \rrbracket$

11. $f : [-\pi, \pi] \setminus [0, 1) \to R$, $f(x) = \dfrac{\llbracket \sin x \rrbracket}{\sin \llbracket x \rrbracket}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz. Bu fonksiyonun hangi noktalarda limiti yoktur.

ÇÖZÜMLER

1. (**a**) $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , x < 1 \text{ ise} \\ 3 & , x = 1 \text{ ise} \\ 4x-1 & , x < 1 \text{ ise} \end{cases}$, $a = 1$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1}(2x+1) = 3 , \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1}(4x-1) = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

(**b**) $f : R \to R$, $f(x) = \dfrac{x^4-1}{x^2+1}$, $a = 1$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^4-1}{x^2+1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2+1} = \lim_{x \to 1}(x^2-1) = 0$$

(c) $f : R \setminus \{2\} \to R$, $f(x) = \dfrac{|x^2-4|}{x-2}$, $a = 2$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{|x^2-4|}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{|x^2-4|}{x-2} = \lim_{x\to 2} -\frac{(x^2-4)}{x-2} = -\lim_{x\to 2}(x+2) = -4$$

O halde 2 noktasında limit yoktur.

2. (a) $f : R \setminus \{0\} \to R$, $f(x) = \dfrac{|2x|}{x}$, $a = 0$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{|2x|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x} = 2 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{|2x|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x}{x} = -2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{limit yoktur.}$$

(b) $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} x/2 & , x < 1 \text{ ise} \\ 0 & , x = 1 \text{ ise} \\ 1/2 & , x > 1 \text{ ise} \end{cases}$, $a = 1$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2}$$

(c) $f : (0, 2\pi) \to R$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|\sin x|}{\sin x} & , x \neq \pi \text{ ise} \\ 0 & , x = \pi \text{ ise} \end{cases}$, $a = \pi$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to \pi^+} f(x) &= \lim_{x\to \pi^+} \frac{|\sin x|}{\sin x} = \lim_{x\to \pi} -\frac{\sin x}{\sin x} = -1 \\ \lim_{x\to \pi^-} f(x) &= \lim_{x\to \pi^-} \frac{|\sin x|}{\sin x} = \lim_{x\to \pi} +\frac{\sin x}{\sin x} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to \pi} f(x) \text{ yoktur.}$$

3. (a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2}{x^2-1} - \dfrac{1}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2-(x+1)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} -\frac{-(x-1)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} -\frac{1}{x+1} = -\frac{1}{2}$$

(b) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{|2x|}{x}$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{|2x|}{x}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x}{x}=2\,,\quad \lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{|2x|}{x}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2x}{x}=2\ \Rightarrow\ \lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{|2x|}{x}=2$$

(c) $\lim\limits_{x\to 2}\|x\|$

$\lim\limits_{x\to 2^+}\|x\|=2,\quad \lim\limits_{x\to 2^-}\|x\|=1\ \Rightarrow$ limit yoktur.

(ç) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)}{x^2\left(p+\frac{q}{x}+\frac{r}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}{p+\frac{q}{x}+\frac{r}{x^2}}=\frac{a}{p}$$

(d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-8}{x-2}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4-4}{x-2}\ \lim_{x\to 2}(x+2)-\frac{4}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2^+}\left(x+2-\frac{4}{x-2}\right)=-\infty\,,\quad \lim_{x\to 2^-}\left(x+2-\frac{4}{x-2}\right)=+\infty$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-8}{x-2}$ mevcut değil.

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\sqrt{1-4x^2}\right)\left(1+\sqrt{1-4x^2}\right)}{x^2\left(1+\sqrt{1-4x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-4x^2\right)}{x^2\left(1+\sqrt{1-4x^2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{x^2\left(1+\sqrt{1-4x^2}\right)}=\frac{4}{2}=2$$

(f) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^m-x^m}{h}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^m-x^m}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^m+\binom{m}{1}x^{m-1}h+\ldots+\binom{m}{m}h^m-x^m}{h}$$

$$=\binom{m}{1}x^{m-1}=mx^{m-1}$$

(g) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{3\sqrt{x}-3\sqrt{a}}{x-a}$

$$\lim_{x\to a}\frac{3\sqrt{x}-3\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\left(3\sqrt{x}-3\sqrt{a}\right)\left(3\sqrt{x}+3\sqrt{a}\right)}{(x-a)\left(3\sqrt{x}+3\sqrt{a}\right)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{9x-9a}{(x-a)\left(3\sqrt{x}+3\sqrt{a}\right)}=\lim_{x\to a}\frac{9}{3\sqrt{x}+3\sqrt{a}}=\frac{3}{2\sqrt{a}}$$

(h) $\lim_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(ı) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}{x}\cdot\frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1+x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=0$$

(i) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)\left(\sqrt{x^2-5x+6}+x\right)}{\sqrt{x^2-5x+6}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x+6}{\sqrt{x^2-5x+6}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\not{x}\left(-5+\frac{6}{x}\right)}{\not{x}\left(\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}+1\right)}=-\frac{5}{2}$$

(j) $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+1}+x\right)$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+5x+1}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+5x+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+5x+1}-x\right)}{\left(\sqrt{x^2+5x+1}-x\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{5x+1}{\underbrace{|x|}_{-x}\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(5+\frac{1}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=-\frac{5}{2}$$

4. (**a**) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

(**b**) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

$-1\le\sin x\le 1,\ \dfrac{-1}{x}\le\dfrac{\sin x}{x}\le\dfrac{1}{x}\quad (x>0)$

$\lim\limits_{x\to\infty}-\dfrac{1}{x}=0,\quad \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0\Rightarrow$ sıkıştırma kriterinden $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$

(**c**) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{bx}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$$

(**ç**) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\cdot\frac{bx}{\sin bx}\cdot\frac{ax}{bx}=\frac{a}{b}$$

(**d**) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\sin^2\frac{a}{2}x\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}}\right)^2\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{4}$$

(**e**) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}\cdot\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)=1.\cos a=\cos a$$

(**f**) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cosh+\cos x\sinh-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cosh-1}{h}\sin x+\lim_{h\to 0}\frac{\sinh}{h}\cos x$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left(1-2\sin^2\frac{h}{2}\right)-1}{h}\sin x + \lim_{h\to 0}\frac{\sinh}{h}\cos x$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\frac{h}{2}}{h}\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{2}\cdot\sin x + \lim_{h\to 0}\frac{\sinh}{h}\cos x$$

$$= 0\cdot\sin x + 1\cdot\cos x = \cos x$$

(g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-2\sin^2\frac{ax}{2}-\left(1-2\sin^2\frac{bx}{2}\right)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{b^2}{2}\left(\frac{\sin\frac{bx}{2}}{\frac{bx}{2}}\right)^2 - \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sin\frac{ax}{2}}{\frac{ax}{2}}\right)^2\right] = \frac{b^2-a^2}{2}$$

5. **(a)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\left(x^2-1\right)}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin\left(x^2-1\right)}{x-1}\cdot\frac{(x+1)}{(x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{\sin\left(x^2-1\right)}{x^2-1}\cdot(x+1) = 1.2 = 2$$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} x.\sin\dfrac{1}{x}$ $\left(\dfrac{1}{x}=t \text{ denirse } x\to\infty \Leftrightarrow t\to 0\right)$

$$\lim_{x\to\infty} x.\sin\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\sin t = 1$$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\tan x)}{\sin x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)}{\frac{\sin x}{\cos x}}\cdot\frac{1}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan x)}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos x} = 1.1 = 1$$

(ç) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin(\cos x)}{\cos x}$ $\left(\cos x = u \text{ denirse } x\to\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow u\to 0\right)$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(\cos x)}{\cos x} = \lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1$$

6. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$ için $\exists\delta > 0 \ni |f(x)-L| < \varepsilon$

$\big||f(x)|-|L|\big| \le |f(x)-L| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to a}|f(x)| = |L|$

Önermenin karşıtı doğru değildir. $f(x) = \begin{cases} -1, & x \text{ rasyonel} \\ 1, & x \text{ irrasyonel} \end{cases}$

fonksiyonu için $\lim_{x\to a}|f(x)| = 1$ olduğu halde $\lim_{x\to a} f(x)$ mevcut değildir.

7. $|x-1| < \delta$ olduğunda $|f(x)-4| = |9x-5-4| = |9x-9| = 9|x-1| < 9\delta$

$9\delta \le \frac{1}{10} \Rightarrow \delta \le \frac{1}{90}$ seçmeliyiz.

8. $|x| < \delta$ olduğunda $|g(x)-g(0)| = |2x^2+3-3| = |2x^2| = 2|x|^2 < 2\delta^2$

$2\delta^2 \le \frac{1}{2} \Rightarrow \delta \le \frac{1}{2}$ seçilmeli.

9. $|x-2| < \delta$ olduğundan $|f(x)-11| = |3x+5-11| = |3x-6| = 3|x-2| = 3\delta$

$3\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{3}$ seçilmeli.

10. (a) $f(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$

$$\lfloor -x \rfloor = \begin{cases} -\lfloor x \rfloor & x \text{ tamsayı} \\ -\lfloor x \rfloor - 1 & x \text{ tamsayı değilse} \end{cases}$$

$$f(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0 & x \text{ tamsayı} \\ -1 & x \text{ tamsayı değilse} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ tüm noktalarda fonksiyonun limiti vardır ve -1 dir.

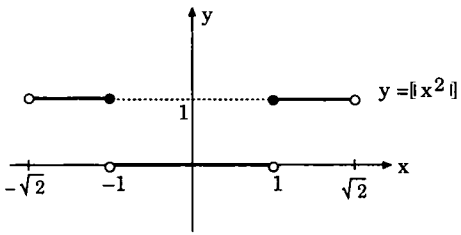
(b) $f(x) = \lfloor x^2 \rfloor$

$\lfloor x^2 \rfloor = m \Rightarrow m \le x^2 < m+1 \Rightarrow \sqrt{m} \le x < \sqrt{m+1}$

$m = 0 \Rightarrow 0 \le x < 1 \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 0$

$m = 1 \Rightarrow 1 \le x < \sqrt{2} \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 1$

$m = 2 \Rightarrow \sqrt{2} \le x < \sqrt{3} \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 2$



Dolayısı ile $\llbracket x^2 \rrbracket$ fonksiyonunun n doğal sayı olmak üzere $\pm\sqrt{n}$ noktalarında limiti yoktur.

$$\lim_{x \to \sqrt{n}^-} \llbracket x^2 \rrbracket = n - 1$$

$$\lim_{x \to \sqrt{n}^+} \llbracket x^2 \rrbracket = n$$

c) $f(x) = 1 - x + \llbracket x \rrbracket + \llbracket 1 - x \rrbracket = 1 - x + \llbracket x \rrbracket + 1 + \llbracket -x \rrbracket = 2 - x + \llbracket x \rrbracket + \llbracket -x \rrbracket$

$f_1(x) = 2 - x$, $f_2(x) = \llbracket x \rrbracket + \llbracket -x \rrbracket$

f_1 fonksiyonunun limiti heryerde var ve

f_2 fonksiyonunun limitinin heryerde olduğunu a) şıkkında göstermiştik. Dolayısı ile f fonksiyonunun limiti her yerde vardır.

11. $x \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \llbracket x \rrbracket = 1,\ \llbracket \sin x \rrbracket = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \llbracket x \rrbracket = 1,\ \llbracket \sin x \rrbracket = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sin 1}$

$x \in \left(\frac{\pi}{2}, 2\right) \Rightarrow \llbracket x \rrbracket = 1,\ \llbracket \sin x \rrbracket = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

$x = 2 \Rightarrow \llbracket x \rrbracket = 2,\ \llbracket \sin 2 \rrbracket = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

$x \in (2, 3) \Rightarrow \llbracket x \rrbracket = 2,\ \llbracket \sin x \rrbracket = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

$x \in [3, \pi) \Rightarrow \llbracket x \rrbracket = 3,\ \llbracket \sin x \rrbracket = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

$x = \pi \Rightarrow \llbracket x \rrbracket = 3,\ \llbracket \sin x \rrbracket = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

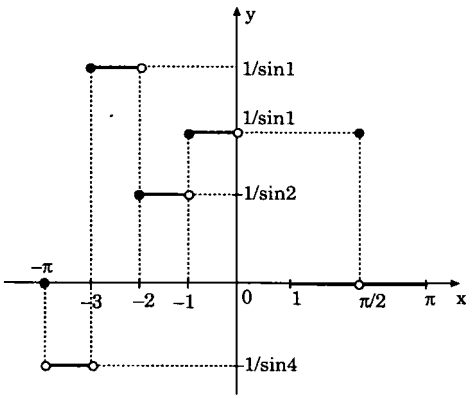
$x = -\pi \Rightarrow \llbracket x \rrbracket = -4,\ \llbracket \sin x \rrbracket = -1 \Rightarrow f(x) = 0$

$x \in (-\pi, -3),\ \llbracket x \rrbracket = -4,\ \llbracket \sin x \rrbracket = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sin 4}$

$x \in [-3, -2),\ \llbracket x \rrbracket = -3,\ \llbracket \sin x \rrbracket = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sin 3}$

$x \in [-2, -1),\ \llbracket x \rrbracket = -2,\ \llbracket \sin x \rrbracket = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sin 2}$

$x \in [-1, 0)$, $\llbracket x \rrbracket = -1$, $\llbracket \sin x \rrbracket = -1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{\sin 1}$



Dolayısı ile fonksiyonun $-1, -2, -3$ noktalarında limiti yoktur.

BÖLÜM PROBLEMLERİ

1. $\lim a_n \neq 0$ olduğunda $\left((-1)^n a_n\right)$ dizisinin ıraksak olduğunu gösteriniz.

2. $a_1 = 2$ ve $n \geq 1$ için

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 4)$$

bağıntısını sağlayan (a_n) dizisinin monoton artan ve sınırlı olduğunu gösteriniz. Dizi yakınsak mıdır? Yakınsaksa limitini bulunuz.

3. $F_1 = F_2 = 1$ ve $n \geq 2$ için $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$ bağıntısını sağlayan (F_n) dizisine **Fibonacci dizisi** denir.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)$$

olacağını gösteriniz.

4. $a_1 = \sqrt{2}$ ve $n > 1$ için $a_n = \sqrt{2 + \sqrt{a_{n-1}}}$ biçiminde tanımlanan dizinin limitini bulunuz.

5. (a) $(a_n) \to a$ ve $\forall n \in N$ için $a_n \leq c$ ise $a \leq c$ dir.

(b) (b_n) yakınsak ve tüm terimleri negatif olan bir dizi ise limit negatif veya sıfırdır.

(c) (c_n) yakınsak ve tüm terimleri pozitif olan bir dizi ise limit pozitif veya sıfırdır.

önermelerinin doğruluğunu gösteriniz.

6. $\alpha \in (0, 1)$ olsun. $a_1 = \alpha$ ve $n > 1$ için

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\alpha + a_{n-1}^2\right)$$

biçiminde tanımlanan (a_n) dizisinin yakınsak olduğunu gösterip limitini bulunuz.

7. $(s_n) \to s$ ve $(t_n) \to t$ olsun. $\forall n \in N$ için $s_n < t_n$ ise $s \leq t$ dir. İspatlayınız.

8. Tüm terimleri rasyonel olan bir dizinin limiti irrasyonel olabilir mi?

9. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \ldots = 2$

(b) $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}} \ldots = 3$

(c) $\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20}}} \ldots = 5$

10. Fibonnocci dizisinin genel terimini bulunuz.

11. $f : R \to R$, $f(x) = x + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ biçiminde tanımlanan fonksiyonun limitli olmadığı noktaların kümesini bulunuz.

12. $f(x) = \begin{cases} 0 & , x \text{ rasyonel ise} \\ x^2 & , x \text{ irrasyonel ise} \end{cases}$, $f : R \to R$

fonksiyonunun hangi noktalarda limiti vardır?

BÖLÜM PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

1. Yakınsak dizinin her alt dizisin de yakınsak olduğunu biliyoruz.

Verilen dizinin $\left((-1)^{2n} a_{2n}\right)$ ve $\left((-1)^{2n+1} a_{2n+1}\right)$ gibi iki alt dizisini gözönüne alalım.

$\lim a_n = A$ ise $\lim a_{2n} = a$ ve $\lim a_{2n+1} = a$ dır.

Bu durumda $\lim (-1)^{2n} a_{2n} = a$ ve $\lim (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = -a$ dır.

Dolayısı ile $\left((-1)^n a_n\right)$ dizisi yakınsak olamaz.

2. $a_1 = 2$ ve $n \geq 1$ için $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 4)$ olduğundan

$a_1 = 2$, $a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + 4) = 3 \Rightarrow a_2 > a_1$ dir.

$a_n > a_{n-1}$ olduğunu kabul edelim ve $a_{n+1} > a_n$ olduğunu gösterelim.

$a_{n-1} < a_n \Rightarrow a_{n-1} + 4 < a_n + 4 \Rightarrow \frac{1}{2}(a_{n-1} + 4) < \frac{1}{2}(a_n + 4) \Rightarrow$

$a_n < a_{n+1}$ O halde verilen dizi tümevarım prensibi gereğince monoton artandır.

Şimdi sınırlı olduğunu gösterelim. Her $n \in N$ için $a_n < 4$ olacağını gösterelim.

$n = 1$ için $a_1 = 2 < 4$ doğrudur. $a_{n-1} < 4$ olduğunu kabul edelim ve $a_n < 4$ olduğunu gösterelim.

$a_{n-1} < 4 \Rightarrow a_{n-1} + 4 < 8 \Rightarrow \frac{1}{2}(a_{n-1} + 4) < \frac{1}{2} \cdot 8 = 4 \Rightarrow a_n < 4$

Tümevarım prensibi gereğince dizi sınırlıdır. Monoton ve sınırlı her dizi yakınsak olduğundan verilen dizi yakınsaktır. $\lim a_n = L$ olsun.

Bu durumda $\lim a_{n+1} = L$ dir. $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_{n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2}(a_n + 4) \Rightarrow$

$L = \frac{1}{2}(L + 4) \Rightarrow 2L = L + 4 \Rightarrow L = 4 \Rightarrow \lim a_n = 4$

3. $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$ indirgeme bağıntısının $F_n = k^n$ şeklinde çözümleri varsa

$k^{n+1} = k^{n-1} + k^n \Rightarrow k^2 = k + 1 \Rightarrow k^2 - k - 1 = 0$. Buradan,

$k_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $k_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ bulunur.

$\Rightarrow F_n = Ak_1^n + Bk_2^n$ (A ve B keyfi sabitler)

$\Rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} A + \frac{1-\sqrt{5}}{2} B = 1 \qquad (F_1 = 1)$

$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 A + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 B = 1 \qquad (F_2 = 1)$

Bu sistemin çözümünde $A = -B = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \left(\frac{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n}\right)$$

$\left|\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right| < 1$ olduğundan $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dir.

4. $a_1 = \sqrt{2}$ ve $n > 1$ için $a_n = \sqrt{2+\sqrt{a_{n-1}}}$

$a_1 = \sqrt{2}$

$a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} \Rightarrow a_1 < a_2$ dir.

(1) $a_{n-1} < a_n$ olduğunu kabul edelim ve $a_n < a_{n+1}$ olduğunu gösterelim.

(1) den $a_{n-1} < a_n \Rightarrow \sqrt{a_{n-1}} < \sqrt{a_n} \Rightarrow 2 + \sqrt{a_{n-1}} < 2 + \sqrt{a_n}$

$\Rightarrow \sqrt{2+\sqrt{a_{n-1}}} < \sqrt{2+\sqrt{a_n}} \Rightarrow a_n < a_{n+1}$

Dolayısı ile tümevarım prensibi gereğince dizi monoton artandır.

$a_1 = \sqrt{2} < 2$

$a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} < \sqrt{2+2} = 2$ ve $a_n < 2$ (2) olsun.

$a_{n+1} < 2$ olduğunu gösterelim.

(2) den $a_n < 2 \Rightarrow \sqrt{a_n} < \sqrt{2} \Rightarrow 2 + \sqrt{a_n} < 2 + \sqrt{2}$

$\Rightarrow \sqrt{2+\sqrt{a_n}} < \sqrt{2+\sqrt{2}} + \sqrt{2+2} = 2 \Rightarrow a_{n+1} < 2$

Dolayısı ile tümevarım prensibi gereğince $\forall n \in N$ için $a_{n+1} < 2$. Yani a_n dizisi sınırlıdır. Monoton ve sınırlı her dizi yakınsak olduğundan

$\lim a_n = L$ olacak şekilde bir L sayısı vardır.

$\lim a_n = \lim \sqrt{2+\sqrt{a_{n-1}}}$

$L = \sqrt{2+\sqrt{L}} \Rightarrow L^2 - \sqrt{L} - 2 = 0 \Rightarrow (L^2-2)^2 = L \Rightarrow L = 1$

5. (a) $(a_n) \to a$ ise $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in N \ni \forall n \geq n_0$ için $|a_n - a| < \varepsilon$ dir.

$\Rightarrow -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$

$\forall n$ için $a_n \leq c$ olduğundan $a - \varepsilon < a_n \leq c \Rightarrow a - \varepsilon < c \Rightarrow a < c + \varepsilon$

ε yeterince küçük seçilebilen pozitif bir sayı olduğundan $a \leq c$ dir.

(b) $(b_n) \to b$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in N \ni \forall n \geq n_0$ için $|b_n - b| < \varepsilon$

$b - \varepsilon < b_n < 0 \Rightarrow b - \varepsilon < 0 \Rightarrow b < \varepsilon \Rightarrow b \leq 0$ olmalıdır.

(c) (b) şıkkına benzer olarak yapılır.

6. $n = 2$ için $a_2 = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^2) < \alpha = a_1 \Rightarrow a_2 < a_1$

$a_n < a_{n-1}$ olduğunu kabul edelim ve $a_{n+1} < a_n$ olduğunu gösterelim.

$a_n < a_{n-1} \Rightarrow a_n^2 < a_{n-1}^2 \Rightarrow \alpha + a_n^2 < \alpha + a_{n-1}^2$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(\alpha + a_n^2) < \frac{1}{2}(\alpha + a_{n-1}^2) \Rightarrow a_{n+1} < a_n$

$\Rightarrow$ dizi monoton azalandır.

Ayrıca $0 < a_n \leq a_1 = \alpha$ olduğundan (a_n) dizisi sınırlı dolayısı ile yakınsaktır.

$\lim a_n = L$ olsun. $\Rightarrow \lim a_{n-1} = L \Rightarrow L = \frac{1}{2}(\alpha + L^2) \Rightarrow L^2 - 2L + \alpha = 0$

$\Delta = 4 - 4\alpha$, $L_{1,2} = \frac{2 \mp 2\sqrt{1-\alpha}}{2} = 1 \mp \sqrt{1-\alpha}$

$0 < a_n < \alpha$ olduğundan $L = 1 - \sqrt{1-\alpha}$ dır.

7. $(s_n) \to s$ ve $(t_n) \to t$ ise $(s_n - t_n) \to (s - t)$ dir.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ni \forall n > n_0$ için $|s_n - t_n - (s - t)| < \varepsilon$

$\Rightarrow -\varepsilon + s - t < s_n - t_n < \varepsilon + s - t$

$s_n \leq t_n$ olduğundan $s_n - t_n < 0$ dır. Bu durumda,

$-\varepsilon + s - t < s_n - t_n < 0 \Rightarrow -\varepsilon + s - t < 0 \Rightarrow s - t < \varepsilon$

ε yeterince küçük seçilebilen bir pozitif sayı olduğundan

$s - t \leq 0 \Rightarrow s \leq t$

8. $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ şeklinde tanımlanan dizinin tüm terimleri rasyoneldir.

Fakat $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ rasyonel bir sayı değildir.

9. (a) $a = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+}}}$ ... olsun. $\Rightarrow a^2 = 2 + \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2}}}_{a}$ ... $\Rightarrow a^2 - a - 2 = 0$

$a = 2,\ a = -1 \Rightarrow a = 2$ olmalıdır. $(a > 0)$

(b) $a = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}$ ... olsun. $\Rightarrow a^2 = 6 + \underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6}}}_{a}$ ... $\Rightarrow a^2 - a - 6 = 0$

$a = 3$ ve $a = -2 \Rightarrow a = 3$ olmalıdır. $(a > 0)$

(c) $a = \sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20}}}$ ... olsun. $\Rightarrow a^2 = 20 + a \Rightarrow a^2 - a - 20 = 0$

$a = 5, a = -4,\ a = 5$ olmalı. $(a > 0)$

10. 3. soruda $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ olduğu gösterildi.

11. z tamsayı olsun.

$\lim\limits_{x\to z^+} f(x) = \lim\limits_{x\to z^+} x + \sqrt{x - [\![x]\!]} = z + \sqrt{z - z} = z$,

$\lim\limits_{x\to z^-} f(x) = \lim\limits_{x\to z^-} x + \sqrt{x - [\![x]\!]} = z + \sqrt{z - (z-1)} = z + 1$

Dolayısı ile tamsayı değerlerinde fonksiyonun limiti yoktur.

12. (x_n) dizisi L $(L \neq 0)$ noktasına yakınsayan herhangi bir dizi olsun. x_n in rasyonel elemanlarını a_n, irrasyonel elemanlarını b_n ile gösterelim.

$f(a_n) = 0,\ f(b_n) = b_n^2 \to L^2$ dolayısı ile alt dizilerin görüntülerinin limiti farklı $(L \neq 0)$ olduğundan 0 hariç hiçbir noktada limit yoktur.

4 SÜREKLİLİK

4.1. SÜREKLİ FONKSİYONLAR

TANIM

$A \subset R$, $f : A \to R$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun.

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

ise f fonksiyonu a noktasında **süreklidir** denir. Eğer f fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekli ise fonksiyon A üzerinde süreklidir denir.

TANIM

$A \subset R$, $f : A \to R$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun.

f fonksiyonu a noktasında **süreklidir.** $\Leftrightarrow$ Her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyle ki $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

TANIM

$A \subset R$, $f : A \to R$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun.

(1) $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \Leftrightarrow$ f fonksiyonu a noktasında **sağdan süreklidir,**

(2) $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) \Leftrightarrow$ f fonksiyonu a noktasında **soldan süreklidir.**

TANIM

Bir $f : A \to R$ fonksiyonu $a \in A$ noktasında sürekli değilse, fonksiyon bu noktada **süreksizdir** denir.

TANIM

$A \subset R$, $f : A \to R$ ile $g : A \to R$ fonksiyonları $a \in A$ da sürekli ve α, $\beta \in R$ ise

$$\alpha f + \beta g \quad \text{ve} \quad f \cdot g$$

fonksiyonları da a noktasında süreklidir. Ayrıca, eğer $g(a) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$ fonksiyonu da a noktasında süreklidir.

SÜREKLİ FONKSİYONLARIN ÖZELLİKLERİ

TEOREM (İşaret Koruma Özeliği)

f fonksiyonu a noktasında sürekli ve $f(a) \neq 0$ olsun. a nın öyle bir δ– komşuluğu vardır ki bu aralıktaki her x için f(x) ile f(a) aynı işaret-tedir.

TEOREM (Bolzano Teoremi)

f fonksiyonu [a, b] kapalı aralığında sürekli ve f(a) ile f(b) ters işaretli ise (a, b) aralığında $f(c) = 0$ olacak şekilde en az bir c noktası vardır.

TEOREM (Ara Değer Teoremi)

$f : [a, b] \to R$ fonksiyonu sürekli olsun. [a, b] de $x_1 < x_2$ ve $f(x_1) \neq f(x_2)$ olacak şekilde herhangi iki x_1, x_2 noktası verildiğinde f fonksiyonu (x_1, x_2) aralığında $f(x_1)$ ile $f(x_2)$ arasındaki her değeri en az bir defa alır.

TEOREM

$f : [a, b] \to R$ fonksiyonu sürekli ise sınırlıdır.

TANIM

$A \subset R$, $f : A \to R$ bir fonksiyon ve $c \in A$ olsun.

$$|x - c| < \delta$$

şartını sağlayan her $x \in A$ için

$$f(x) \leq f(c)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonu c noktasında **bir yerel** (lokal, rölatif) **maksimuma** sahiptir denir.

$d \in A$ olsun.

$$|x - d| < \delta$$

şartını sağlayan her $x \in A$ için

$$f(x) \geq f(d)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilirse, f fonksiyonu d noktasında bir **yerel** (lokal, rölatif) **minimuma** sahiptir denir.

Yerel maksimum ve yerel minimum değerlerine fonksiyonun **ekstremumları** veya **ekstrem değerleri** adı verilir.

Eğer her $x \in A$ için

$$f(x) \leq f(p)$$

olacak şekilde bir $p \in A$ varsa f fonksiyonu p noktasında bir **mutlak maksimuma**, her $x \in A$ için

$$f(x) \geq f(r)$$

olacak şekilde bir $r \in A$ varsa, f fonksiyonu r noktasında bir **mutlak minimuma** sahiptir denir.

Sürekli bir $f : [a, b] \to R$ fonksiyonu mutlak maksimum ve mutlak minimuma sahiptir, yani [a, b] aralığında

$$\sup \{ f(x) \mid x \in [a, b] \} = f(x_1)$$

$$\inf \{ f(x) \mid x \in [a, b] \} = f(x_2)$$

olacak şekilde x_1 ve x_2 noktaları vardır.

TEOREM

$f : [a, b] \to R$ sürekli ve kesin olarak artan bir fonksiyon olsun.

$f(a) = c$ ve $f(b) = d$ ise

(1) $f : [a, b] \to [c, d]$ fonksiyonunun f^{-1} tersi vardır.

(2) f^{-1} fonksiyonu [c, d] aralığı üzerinde kesin olarak artandır.

(3) f^{-1} fonksiyonu [c, d] aralığı üzerinde süreklidir.

TEOREM

$A \subset R$ ve $f : A \to R$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu A üzerinde **düzgün süreklidir** $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyle ki $|x - t| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan $\forall x, t \in A$ için $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$ dır.

TEOREM

Kapalı ve sınırlı bir aralık üzerinde sürekli bir fonksiyon bu aralık üzerinde düzgün süreklidir.

TANIM

$A \subset R$ ve f de A da tanımlı bir fonksiyon olsun. f nin A daki süreksizlik noktalarının sayısı sonlu ise f fonksiyonu A üzerinde **parçalı süreklidir** denir.

PROBLEMLER

1. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan $f : R \to R$ fonksiyonlarının karşılarında yazılı noktalarda sürekli olup olmadığını inceleyiniz. Süreksiz olanların çeşidini belirtiniz.

a) $f(x) = x - [\![x]\!]$ $\qquad x = 2$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} , & x \neq 0 \text{ ise} \\ 0 , & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$ $\qquad x = 0$

c) $f(x) = |x+2|$ $\qquad x = -2$

2. a, b ve c sabit sayılar olmak üzere, bir f fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \sin x , & x \geq c \text{ ise} \\ ax+b , & x > c \text{ ise} \end{cases}$$

şekilde tanımlanıyor. b ve c verildiğinde f fonksiyonunu $x = c$ noktasında sürekli yapan a değerlerini bulunuz.

3. Problem 2 deki soruyu,

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos x , & x \geq c \text{ ise} \\ ax^2+b , & x < c \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için cevaplandırınız.

4. $f(x) = \begin{cases} 2x , & 0 \leq x \leq 1 \text{ ise} \\ c-2x , & 1 < x \leq 2 \text{ ise} \end{cases}$ eşitliği ile tanımlanan $f : [0, 2] \to R$ fonksiyonunun sürekli olması için c ne olmalıdır?

5. Tanjant ve kotanjant fonksiyonları nerede süreklidir?

6. $f : R \setminus \{0\} \to R$ fonksiyonu $f(x) = \frac{1}{x}$ şeklinde tanımlanıyor.

Bu fonksiyonun $\left[-2, -\frac{1}{5}\right]$ ve $\left[\frac{1}{5}, 2\right]$ aralıklarındaki grafiğini çiziniz. Sıfır noktasındaki sağ ve sol limitlerini hesaplayınız. Bu fonksiyon x=0 da sürekli olacak şekilde f(0) tanımlanabilir mi?

7. $f(x) = (-1)^{\left[\frac{1}{x}\right]}$ alarak Problem 6 daki soruları cevaplayınız.

8. $f(x) = x\,(-1)^{(-1)\left[1/x\right]}$ alarak Problem 6 daki soruları cevaplayınız.

9. $x \neq 0$ için $f(x) = x \,.\, \sin\frac{1}{x}$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonu veriliyor. Bu fonksiyonun $x = 0$ da sürekli olması için $f(0)$ nasıl tanımlanmalıdır?

10. R den R ye öyle bir fonksiyon tanımlayınız ki bu fonksiyon hiçbir noktada sürekli olmasın?

11. Kendileri sürekli olmadıkları halde çarpımları sürekli olan iki fonksiyon bulunuz.

12. $f : R \to R$, $f(x) = x + \sqrt{x - \left[x\right]}$ fonksiyonunun süreksizlik noktalarının kümesini bulunuz.

13. f ve g, R den R ye

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2}, \quad g(x) = \begin{cases} x^2 , & x \geq 0 \text{ ise} \\ x , & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonlar olsunlar. fog bileşke fonksiyonunu bulunuz. Bileşke fonksiyonu hangi noktalarda süreklidir.

14. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(1+x)^n - 1}{x} , & x \neq 0 \text{ ise} \\ k , & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun R de sürekli olması için k ne olmalıdır?

15. $f(x) = \tan x$ olsun. $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ ve $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$ olduğu halde, $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ aralığında $f(c) = 0$ olacak şekilde bir c sayısı var mıdır? Bu sonuç Bolzano Teoremi ile çelişir mi?

16. $f : [0, 1] \to [0, 1]$ bir sürekli fonksiyon olsun. İspat ediniz ki $[0, 1]$ aralığındaki en az bir c için $f(c) = c$ dir. (Böyle noktalara f nin **sabit noktaları** denir). Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan $f : [0, 1] \to [0, 1]$ fonksiyonlarının sabit noktalarını bulunuz.

a) $f(x) = 1 - x^2$

b) $f(x) = x^2$

c) $f(x) = \sin x$

d) $f(x) = 1 - x$

e) $f(x) = x$

f) $f(x) = \frac{1}{2}$

17. $f : R \to R$, $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun düzgün sürekli olduğunu gösteriniz.

18. $f(x) = \frac{x}{[\![x]\!]}$, $f : R \setminus [0, 1) \to R$ fonksiyonunun süreksizlik noktalarını bulunuz. Bu fonksiyon parçalı sürekli midir?

ÇÖZÜMLER

1. a) $f(x) = x - [\![x]\!]$ $\quad x = 2$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$ eşitliğinin sağlanıp sağlanmadığını inceleyelim.

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} x - [\![x]\!] = 2 - 2 = 0$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} x - [\![x]\!] = 2 - 1 = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} f(x)$ mevcut değildir.

Dolayısı ile $f(x)$ fonksiyonu $x = 2$ noktasında sürekli değildir. Burada sıçrama süreksizliği vardır.

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} , & x \neq 0 \text{ ise} \\ 0 , & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$ $\quad x = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ eşitliğinin sağlanıp sağlanmadığını inceleyelim.

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $f(0) = 0$

olduğundan fonksiyon $x = 0$'da sürekli değildir. $x = 0$ da sonsuz süreksizliği vardır.

c) $f(x) = |x + 2|$

$x > -2 \Rightarrow f(x) = x + 2$, $\quad x \leq -2 \Rightarrow f(x) = -(x + 2)$

$\Rightarrow \lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2} x + 2 = 0$

$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2} -(x+2) = 0 \Rightarrow \lim_{x \to -2} f(x) = 0$ dır.

$f(-2) = |2+2| = 0$ olduğundan f fonksiyonu $x = -2$ noktasında süreklidir.

2. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ olmalıdır.

$\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^+} \sin x = \sin c$, $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^-} ax + b = ac + b$

limitin mevcut olması için $\sin c = ac + b$ olmalı. Bu durumda

$a = \dfrac{\sin c - b}{c}$ seçilmelidir.

3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ olmalıdır.

$\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^+} 2\cos x = 2\cos c$, $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^-} ax^2 + b = ac^2 + b$

limitin mevcut olması için $2 \cos c = ac^2 + b$ seçilmelidir. Bu durumda

$a = \dfrac{2\cos c - b}{c^2}$ olmalıdır.

4. $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$ olmalıdır.

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} (c - 2x) = c - 2$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} 2x = 2$. Limitin var olması için $c - 2 = 2 \Rightarrow c = 4$

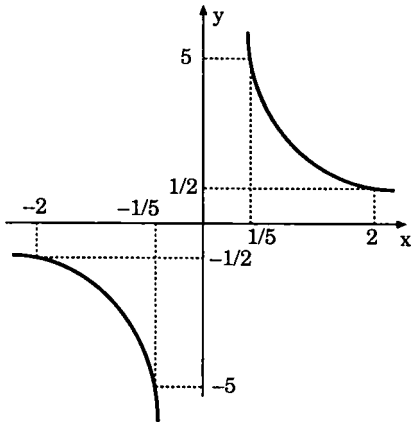
olmalıdır.

5. Tanjant fonksiyonu $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi \; ; \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$ aralıklarında, Kotanjant fonksiyonu $(\pi k, \pi + k\pi)$ $(k \in Z)$ aralıklarında süreklidir.

6. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

fonksiyon sürekli olacak şekilde f(0) tanımlanamaz.



7. $x \in \left[\frac{1}{5}, 2\right] \Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{x} \le 5$, $f(x) = (-1)^{\left[\frac{1}{x}\right]}$

$1 < x \le 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \le \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = 0 \Rightarrow f(x) = 1$

$\frac{1}{2} < x \le 1 \Rightarrow 1 \le \frac{1}{x} < 2 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = 1 \Rightarrow f(x) = -1$

$\frac{1}{3} < x \le \frac{1}{2} \Rightarrow 2 \le \frac{1}{x} < 3 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = 2 \Rightarrow f(x) = 1$

$\frac{1}{4} < x \le \frac{1}{3} \Rightarrow 3 \le \frac{1}{x} < 4 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = 3 \Rightarrow f(x) = -1$

$\frac{1}{5} < x \le \frac{1}{4} \Rightarrow 4 \le \frac{1}{x} < 5 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = 4 \Rightarrow f(x) = 1$

$x = 5 \Rightarrow \frac{1}{x} = 5 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = 5 \Rightarrow f(x) = -1$

$x \in \left[-2, -\frac{1}{5}\right] \Rightarrow -5 \le \frac{1}{x} < -\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{4} < x \le -\frac{1}{5} \Rightarrow -5 \le \frac{1}{x} < -4 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = -5 \Rightarrow f(x) = -1$

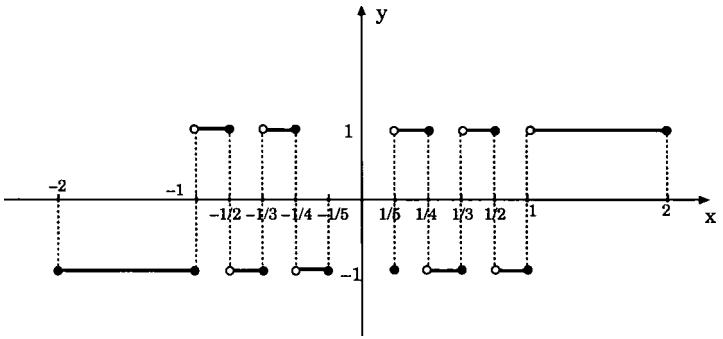
$-\frac{1}{3} < x \le -\frac{1}{4} \Rightarrow -4 \le \frac{1}{x} < -3 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = -4 \Rightarrow f(x) = 1$

$-\frac{1}{2} < x \le -\frac{1}{3} \Rightarrow -3 \le \frac{1}{x} < -2 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = -3 \Rightarrow f(x) = -1$

$-1 < x \le -\frac{1}{2} \Rightarrow -2 \le \frac{1}{x} < -1 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = -2 \Rightarrow f(x) = 1$

$-2 < x \le -1 \Rightarrow -1 \le \frac{1}{x} < -\frac{1}{2} \Rightarrow \left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right] = -1 \Rightarrow f(x) = -1$

$x = -2 \Rightarrow \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right] = -1 \Rightarrow f(x) = -1$



$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (-1)^{\left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right]}$ ve $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-1)^{\left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right]}$ limitleri yoktur.

Fonksiyon $x = 0$ noktasında sürekli olacak şekilde $f(0)$ tanımlanamaz.

8. $f(x) = x(-1)^{[\![1/x]\!]}$

$1 < x \le 2 \Rightarrow f(x) = x$, $x = -2 \Rightarrow f(x) = 2$

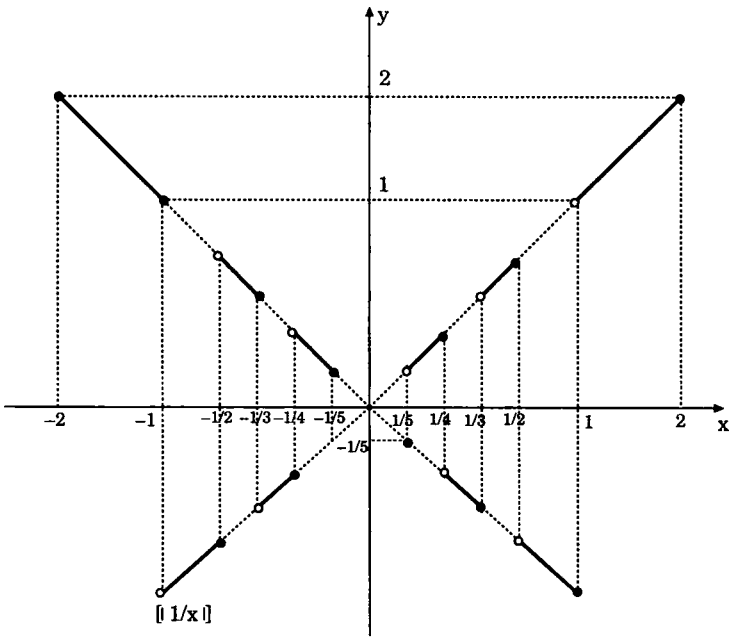
$\frac{1}{2} < x \le 1 \Rightarrow f(x) = -x$, $-2 < x \le -1 \Rightarrow f(x) = -x$

$\frac{1}{3} < x \le \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = x$, $-1 < x \le -\frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = x$

$\frac{1}{4} < x \le \frac{1}{3} \Rightarrow f(x) = -x$, $-\frac{1}{2} < x \le -\frac{1}{3} \Rightarrow f(x) = -x$

$\frac{1}{5} < x \le \frac{1}{4} \Rightarrow f(x) = x$, $-\frac{1}{3} < x \le -\frac{1}{4} \Rightarrow f(x) = x$

$x = \frac{1}{5} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{4} < x \le -\frac{1}{5} \Rightarrow f(x) = -x$



$\lim_{x \to 0^+} x(-1)^{\llbracket 1/x \rrbracket} = 0$ ve $\lim_{x \to 0^-} x(-1)^{\left\llbracket \frac{1}{x} \right\rrbracket} = 0$ olur.

$f(0) = 0$ tanımlanırsa fonksiyon 0'da sürekli olur.

9. $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ sağlanırsa f fonksiyonu $x = 0$ noktasında sürekli olur.

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow f(0) = 0$ olarak tanımlanmalıdır.

10. $f(x) = \begin{cases} 1 \ , \ x \in (-1, 1) \text{ ve } x \text{ irrasyonel} \\ 0 \ , \ x \in (-1, 1) \text{ ve } x \text{ rasyonel} \end{cases}$

şeklinde tanımlanan $f : (-1, 1) \to R$ fonksiyonu hiçbir noktada sürekli değildir. Çünkü hiçbir noktada limit yoktur.

11. $[1, +\infty)$ aralığında $f(x) = \frac{x}{\llbracket x \rrbracket}$ ve $g(x) = \llbracket x \rrbracket$ biçiminde tanımlanan f ve g fonksiyonları $x = 2$ noktasında sürekli olmadıkları halde $(f.g)(x) = x$ fonksiyonu $x = 2$ de süreklidir.

12. $x - \lfloor x \rfloor \geq 0$, $k \in Z$ olmak üzere

$\lim\limits_{x \to k^+} x - \lfloor x \rfloor = k - k = 0$

$\lim\limits_{x \to k^-} x - \lfloor x \rfloor = k - (k-1) = 1 \Rightarrow x \in Z$ değerlerinde limit yoktur.

Fonksiyon bu noktalarda süreksizdir.

13. $f(x) = \dfrac{x + |x|}{2} = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x^2 & , x \geq 0 \\ x & , x < 0 \end{cases}$

$(fog)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} x^2 & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$ fonksiyonunun $x = 0$ da sürekliliğini araştıralım.

$\lim\limits_{x \to 0^+} (fog)(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0 = (fog)(0)$,

$\lim\limits_{x \to 0^-} (fog)(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 0 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} (fog)(x) = 0 = (fog)(0)$

$\Rightarrow$ fonksiyon her yerde süreklidir.

14. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ eşitliği sağlanırsa, fonksiyon 0 noktasında sürekli olur.
(Fonksiyonun diğer noktalarda sürekli olduğu açıktır.)

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + x^n}{x} = \binom{n}{1} = n$$

$f(0) = k = n$ olmalıdır.

15. $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$ aralığında $\tan c = 0$ olacak şekilde bir c değeri yoktur. Tan x fonksiyonu verilen aralıkta sürekli olmadığından Bolzano Teoremi ile çelişmez.

16. İspat : $f : [0, 1] \to [0, 1]$ sürekli olsun.

$g(x) = f(x) - x$ fonksiyonunu tanımlayalım. f sürekli olduğundan g fonksiyonu da sürekli olur.

$g(0) = f(0)$ ve $0 \leq f(0) \leq 1$ olduğundan $g(0) \geq 0$ dır.

$g(1) = f(1) - 1$ ve $0 \leq f(1) \leq 1$ olduğundan $g(1) \leq 0$ dır.

g sürekli ve g(0) ile g(1) ters işaretli olduğundan Bolzano teoremi gereğince $g(c) = 0$ olacak şekilde $c \in (0, 1)$ vardır.

$g(c) = f(c) - c = 0 \Rightarrow f(c) = c$ olacağından c, f nin sabit noktasıdır.

a) $f(x) = 1 - x^2$, $I = [0, 1]$

$f(c) = 1 - c^2 = c \Rightarrow c^2 + c - 1 = 0$

$c_{1,2} = \frac{-1 \mp \sqrt{5}}{2}$, $c_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \in [0, 1]$

b) $f(x) = x^2$, $I = [0, 1]$

$f(c) = c^2 = c \Rightarrow c^2 - c = 0 \Rightarrow c_1 = 0$ ve $c_2 = 1$, $c_1, c_2 \in [0, 1]$

c) $f(x) = \sin x$, $I = [0, 1]$

$f(c) = \sin c \Rightarrow \sin c = c \Rightarrow c = 0$, $c \in [0, 1]$

d) $f(x) = 1 - x$, $I = [0, 1]$

$f(c) = 1 - c = c \Rightarrow 2c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2} \in [0, 1]$

e) $f(x) = x$, $I = [0, 1]$

$f(c) = c = c \Rightarrow$ [0, 1] deki tüm x değerleri birer sabit noktadır.

f) $f(x) = \frac{1}{2}$, $I = [0, 1]$

$f(c) = c \Rightarrow \frac{1}{2} = c$ olmalı. $c = \frac{1}{2}$ sabit noktadır.

17. $\forall \varepsilon > 0$ için $|x - t| < \delta$ şartını sağlayan tüm x, t noktaları için

$|f(x) - f(t)| = |\sin x - \sin t| \le |x - t| < \delta = \varepsilon$ seçersek

$|f(x) - f(t)| = |\sin x - \sin t| < \varepsilon$ olur.

Dolayısı ile sinx fonksiyonu düzgün süreklidir.

18. $k \neq 0$ ve $k \in Z$ olsun. $f(x) = \frac{x}{[\![x]\!]}$

$\lim_{x \to k^+} \frac{x}{[\![x]\!]} = \frac{k}{k} = 1$, $\lim_{x \to k^-} \frac{x}{[\![x]\!]} = \frac{k}{k-1} \Rightarrow \lim_{x \to k} \frac{x}{[\![x]\!]}$ mevcut değil

$\Rightarrow$ tam sayılarda fonksiyon sürekli değildir.

f fonksiyonu parçalı sürekli değildir. Çünkü süreksizlik noktaları sonsuz adettedir.

BÖLÜM PROBLEMLERİ

1. $A, B \subset R$, $f : A \to R$, $g : B \to R$ fonksiyonları verilmiş ve $f(A) \subset B$ olsun. f fonksiyonu a noktasında, g fonksiyonu f(a) noktasında sürekli olduğunda gof fonksiyonu da a noktasında süreklidir, ispatlayınız.

2. f fonksiyonu a noktasında sürekli olduğunda $|f|$ fonksiyonunun da a noktasında sürekli olduğunu gösteriniz. $|f|$ sürekli olduğunda f sürekli olmak zorunda mıdır?

3. $A \subset R$, $f : A \to R$ ve $g : A \to R$ fonksiyonları $a \in A$ noktasında sürekli iseler,

$$p = \text{maks } \{f, g\} , \quad q = \min \{f, g\}$$

fonksiyonları da a noktasında süreklidir, gösteriniz.

4. Polinomların her yerde sürekli olduğunu gösteriniz.

5. Bir aralığın sadece bir noktasında sürekli, fakat diğer tüm noktalarında süreksiz olan bir fonksiyon var mıdır?

6. [a, b] aralığındaki her u, v için

$$|f(u) - f(v)| \leq k|u - v|$$

olacak şekilde bir k reel sayısı varsa, f fonksiyonu [a, b] aralığının her noktasında süreklidir, gösteriniz.

7. $f : R \to R$ bir sürekli ve kesin olarak monoton fonksiyon olsun. $f^{-1}[(a, b)]$ kümesinin bir açık aralık olduğunu gösteriniz.

8. $p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ polinomunun c_0 ve c_n katsayıları zıt işaretli olduğunda en az bir pozitif a için $p(a) = 0$ dır, gösteriniz.

9. [a, b] aralığı üzerinde sürekli ve reel değerli bir f fonksiyonu veriliyor. $f(a) \geq a$ ve $f(b) \leq b$ olduğunda f foksiyonunun bir sabit noktaya sahip olacağını gösteriniz.

10. $f(x) = \frac{1}{x}$ şeklinde tanımlanan $f : (0, 1) \to R$ fonksiyonunun sürekli fakat düzgün sürekli olmadığını gösteriniz.

11. Logaritma fonksiyonunun R^+ üzerinde sürekli olduğunu gösteriniz.

12. Tek dereceli tüm polinomların en az bir sıfır yerinin (kökünün) var olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜMLER

1. g, f(a) noktasında sürekli olduğundan, $\forall \varepsilon > 0$ için $|f(x) - f(a)| < \rho$ iken $|g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$ olacak biçimde $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır. Diğer yandan f, a da sürekli olduğundan $|x - a| < \delta$ iken $|f(x) - f(a)| < \rho$ olacak biçimde bir $\delta = \delta(\rho)$ sayısı vardır. O halde

$|x - x_0| < \delta$ iken $|(gof)(x) - (gof)(a)| = |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon$

gerçeklenir. Bu ise gof fonksiyonunun a noktasında sürekli olması demektir.

2. f, a noktasında sürekli olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0 \ni |x - a| < \delta$ için $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ kalır.

$\big||f(x)| - |f(a)|\big| \le |f(x) - f(a)|$ olduğundan $\big||f(x)| - |f(a)|\big| < \varepsilon$ olur.

Bu ise bize $|f|$ fonksiyonunun a noktasında sürekliliğini verir.

$|f|$ sürekli olduğunda f fonksiyonu sürekli olmak zorunda değildir. Bunu aksine bir örnekle açıklayalım.

$$f(x) = \begin{cases} 1 \ , \ x \text{ rasyonel ise} \\ -1 \ , \ x \text{ irrasyonel ise} \end{cases}$$

şeklinde bir f fonksiyonu tanımlayalım.

x = a rasyonel olsun. $(x_n) = \left(a - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ve bu dizinin terimleri rasyonel olan alt dizisini (t_n), irrasyonel olan alt dizisini (u_n) ile gösterelim.

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \lim_{n \to \infty}\left(a - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = a \quad \text{ve} \quad \lim t_n = \lim u_n = a \quad \text{olur.}$$

$$\lim_{n \to \infty} f(u_n) = \lim_{n \to \infty} (-1) = -1 ,$$

$\lim_{n \to \infty} f(t_n) = \lim_{n \to \infty} 1 = 1$

olduğundan f fonksiyonunun a noktasında limiti yoktur. a'nın irrasyonel olması durumunda benzer işlemler yapılır. f nin a noktasında limiti olmadığından sürekli de değildir.

Fakat $|f(x)| = 1$ sabit fonksiyonu her yerde süreklidir.

3. f, a noktasında sürekli $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0 \ni |x - a| < \delta_1$ için

$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

g, a noktasında sürekli $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_2 > 0 \ni |x - a| < \delta_2$ için

$|g(x) - g(a)| < \varepsilon$

$p(a) = \text{maks}\{ f(a), g(a) \}$, $\text{maks}\{ \delta_1, \delta_2 \} = \delta$ olmak üzere

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 \ni |x - a| < \delta$ için $|p(x) - p(a)| < \varepsilon$ olur. Dolayısı ile p fonksiyonu da süreklidir. Aynı şekilde q fonksiyonunun sürekliliği de gösterilebilir.

4. $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ polinomunu göz önüne alalım.

$f(x) = x^n$ fonksiyonu için $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x^n = a^n$ olduğundan f fonksiyonu keyfi a noktasında her n için süreklidir. Sürekli bir fonksiyonun sabitle çarpımı ve sürekli fonksiyonların sonlu toplamları da sürekli olduğundan p(x) fonksiyonu süreklidir.

5. $f : [-1, 1] \to R$, $f(x) = \begin{cases} x \text{ , } x \text{ rasyonel} \\ -x \text{ , } x \text{ irrasyonel} \end{cases}$

fonksiyonu $x = 0$ noktasında sürekli, diğer noktalarda süreksizdir.

(x_n) sıfıra yakınsayan rasyonel terimli bir dizi olsun. $\left(f\left(x_n\right)\right) = (x_n) \to 0$ olur. (t_n) , sıfıra yakınsayan irrasyonel terimli bir dizi ise $\left(f\left(t_n\right)\right) = \left(-t_n\right) \to 0$

dır.

$f(0) = 0$ olduğundan f, $x = 0$ da süreklidir. $a \neq 0$ olsun. (x_n) , a'ya yakınsayan rasyonel terimli bir dizi olsun. $\left(f\left(x_n\right)\right) = (x_n) \to a$ olur. (t_n), a'ya yakınsayan irrasyonel terimli bir dizi olsun. $\left(f\left(t_n\right)\right) = (-t_n) \to -a$ olur. $a \neq -a$ olduğundan f , $x = a$ da sürekli değildir.

6. $|f(u)-f(v)| < k|u-v|$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 \ni |u-t| < \delta$ için $|f(u)-f(t)| < \varepsilon$ oluyorsa

f , $t \in [a, b]$ noktsında süreklidir.

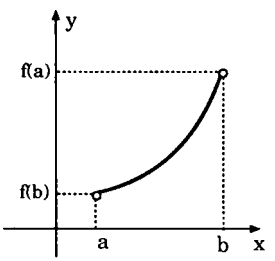
Yukarıdaki eşitsizlik [a, b] aralığındaki her u, v için sağlandığından

$t \in [a, b]$ ve $v = t$ için de sağlanır.

$\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ için $\Rightarrow |f(u)-f(t)| < k|u-t| < k \,.\, \delta = k \cdot \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$

Dolayısı ile f fonksiyonu t noktasında süreklidir. t keyfi olduğundan f, [a, b] de süreklidir.

7. f fonksiyonu R de tanımlı ve artan olduğundan [a, b] aralığında da tanımlı ve artandır. Fonksiyonun [a, b] aralığında aldığı en küçük değer f(a) , en büyük değer f(b) dir. f sürekli olduğundan, f(a) ile f(b) arasındaki her değeri bir defa alır. Dolayısıyla, [a, b] aralığının görüntü kümesi [f(a), f(b)] aralığıdır. Eğer f azalan ise görüntü kümesi [f(b), f(a)] aralığı olur. (a, b) açık aralığında a ve b bulunmadığından görüntü kümesinde f(a) ve f(b) bulunmaz. Bu durumda f((a,b)) = (f(a), f(b)) olur.



8. $c_0 < 0$ ve $c_n > 0$ olsun. $x = 0$ için $p(0) = c_0$, $\lim_{x \to \infty} p(x) = +\infty$ olur. Şu halde yeter derece büyük bir x_1 noktası için $p(x_1) > 0$ dır. Bolzano teoreminden, $(0, x_1)$ aralığında $p(c) = 0$ olacak şekilde en az bir c noktası vardır.

$c_0 > 0$ ve $c_n < 0$ olduğunda benzer ispat yapılır.

9. f sürekli ise $g(x) = f(x) - x$ şeklinde tanımlanan g fonksiyonu da süreklidir.

$g(a) = f(a) - a \geq 0$ (f(a) ≥ a olduğundan)

$g(b) = f(b) - b \leq 0$ (f(b) ≤ b olduğundan)

g(a) ile g(b) ters işaretli olduğundan, Bolzano Teoremi gereğince,

$g(c) = 0$ olacak şekilde $c \in (a, b)$ vardır.

$g(c) = f(c) - c = 0 \Rightarrow f(c) = c$ olup, f sabit noktaya sahiptir.

10. $a \in (0, 1) \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$ olduğundan f fonksiyonu keyfi $a \in (0, 1)$ de süreklidir.

Şimdi düzgün sürekil olmadığını gösterelim.

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ni |x - t| < \delta$ için $|f(x) - f(t)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{t}\right| < \varepsilon$ olmalıdır.

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{t}\right| = \frac{|x - t|}{x.t}$$

$0 < x < 1$ aralığına ait iki noktayı x_1, $x_1 + \delta$ $(\delta > 0)$ olarak seçersek

$$|f(x_1) - f(x_1 + \delta)| = \left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_1 + \delta}\right| = \frac{\delta}{x_1.(x_1 + \delta)}$$

x_1 0'a yeteri kadar yakın olduğunda sağ taraf istenildiği kadar büyük yapılabilir. Dolayısı ile fonksiyon düzgün sürekli değildir.

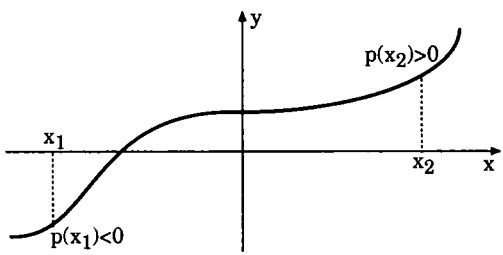
11. (a_n) pozitif bir dizi ve a pozitif bir sayı olsun.

$(a_n) \to a$ olduğunda $\log a_n \to \log a$ olduğu bilinmektedir. Buna göre $\varepsilon > 0$ verildiğinde öyle bir $\delta > 0$ bulunabilir ki $|a_n - a| < \delta$ olduğunda $|\log a_n - \log a| < \varepsilon$ kalır. Bu da $f(x) = \log x$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterir.

12. $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_{2m+1}\, x^{2m+1}$ ve $a_{2m+1} > 0$ olsun.

$\lim_{x \to -\infty} p(x) = -\infty$ ve $\lim_{x \to \infty} p(x) = +\infty$ olacağından yeter derece büyük bir x_2 için $p(x_2) > 0$ ve yeter derece küçük bir x_1 için $p(x_1) < 0$ olur.

Bolzano teoreminden (x_1, x_2) aralığında öyle bir c vardır ki $p(c) = 0$ olur.



5 TÜREV

TANIM

$A \subset R$, $x_0 \in A$, x_0 , A nın bir yığılma noktası ve f de A dan R ye bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limiti, veya $x = x_0 + h$ koymakla elde edilen

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

limiti mevcutsa f fonksiyonu x_0 noktasında **türevlenebilir** denir ve bu limit f nin x_0 noktasındaki **türevi** adını alır. Bu türev

$$f'(x_0), \quad \frac{df(x_0)}{dx}, \quad Df(x_0)$$

sembollerinden biri ile gösterilir.

TEOREM

$A \subset R$, $x_0 \in A$ ve f de A dan R ye bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu x_0 da türevlenebiliyorsa, bu noktada süreklidir.

TÜREV ALMA KURALLARI

1. Sabitin türevi sıfırdır.

2. $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n\,x^{n-1}$

3. f ve g, $A \subset R$ üzerinde tanımlanmış ve $x \in A$ noktasında türevlenebilen fonksiyonlar ise f + g de x noktasında türevlenebilir ve

$$(f + g)'(x) = (f' + g')(x)$$

dir.

4. f ve g, $A \subset R$ üzerinde tanımlı ve $x \in A$ noktasında türevlenebilen fonksiyonlar ise f.g de x noktasında türevlenebilirdir ve

$$(f.g)'(x) = (f'.g + f.g')(x)$$

dir.

5. f ve g, $A \subset R$ üzerinden tanımlanmış ve $x \in A$ noktasında türevlenebilen fonksiyonlar ve $g(x) \neq 0$ ise f/g fonksiyonu da x noktasında türevlenebilir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(\frac{f'.g - f.g'}{g^2}\right)(x)$$

dir.

TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN TÜREVİ

1. $(\sin x)' = \cos x$
2. $(\cos x)' = -\sin x$
3. $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
4. $(\cot x)' = -(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

ÜSTEL VE LOGARİTMA FONKSİYONUNUN TÜREVİ

1. $(e^x)' = e^x$
2. $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x}\log_a e$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

BİLEŞKE FONKSİYONUN TÜREVİ

TEOREM

$A \subset R$, $x_0 \in A$ ve $f : A \to R$ fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilir olsun. g fonksiyonu f(A) kümesini içine alan bir B kümesinde tanımlı ve bu kümenin $y_0 = f(x_0)$ noktasında türevlenebilir ise $gof : A \to R$ fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilirdir ve

$$(gof)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

dır.

TERS FONKSİYONUN TÜREVİ

TEOREM

A, $B \subset R$ ve $f : A \to B$ fonksiyonu birebir örten olsun. f fonksiyonu $x_0 \in A$ da türevlenebilir ve $f'(x_0) \neq 0$ ise $f^{-1} : B \to A$ fonksiyonu da $y_0 = f(x_0)$ da türevlenebilir ve

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

dır.

HİPERBOLİK FONKSİYONLARIN TÜREVİ

$(\sin hx)' = \cos hx$

$(\cos hx)' = \sin hx$

$(\tan hx)' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$

$(\cot hx)' = -\dfrac{1}{\sinh^2 x}$

PARAMETRİK OLARAK VERİLEN FONKSİYONLARIN TÜREVİ

$$\begin{cases} x = h(t) \\ y = k(t) \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \frac{\ddot{y}\,\dot{x} - \ddot{x}\,\dot{y}}{(\dot{x})^3}$$

PROBLEMLER

1. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların, eğer varsa, karşılarında yazılı x_0 noktalarındaki türevlerini bulunuz. Fonksiyonlar bu noktada sürekli midir?

a) $f(x) = \begin{cases} x & , x < 2 \text{ ise} \\ 2 & , x = 2 \text{ ise} \\ 4 - x & , x > 2 \text{ ise} \end{cases}$ $\qquad x_0 = 2$

b) $f(x) = \begin{cases} x^3 & , x \geq 0 \text{ ise} \\ -x^2 & , x < 0 \text{ ise} \end{cases}$ $\qquad x_0 = 0$

c) $f(x) = \begin{cases} (1-x)\ln(1-x) & , x < 1 \text{ ise} \\ e^x - e & , x \geq 1 \text{ ise} \end{cases}$ $\qquad x_0 = 1$

d) $f(x) = \begin{cases} 1 & , x \text{ rasyonel ise} \\ 0 & , x \text{ irrasyonel ise} \end{cases}$ $\qquad x_0 = 0$ ve $x_0 = 1$

f) $f(x) = |1 - x^2|$ $\qquad x_0 = 0$

g) $f(x) = [\![x]\!]$ $\qquad x_0 = 2$ ve $x_0 = \dfrac{3}{2}$

h) $f(x) = x\,|x|$ $\qquad x_0 = 0$

ı) $f(x) = x\,[\![x]\!]$ $\qquad x_0 = 0$ ve $x_0 = \dfrac{3}{2}$

2. $f(0) = 5$, $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 5}{x} = 4$ ve $g(x) = (x^2 + 2x + 3)\, f(x)$ olduğuna göre $g'(0)$ türevini bulunuz.

3. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a) $y = \text{arc tan}\, \frac{1}{x}$

b) $y = \text{arc cos}\, \sqrt{x}$

c) $y = \text{arc cot}\, \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

ç) $y = \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x$

d) $y = \text{arc sin}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

e) $y = \frac{1}{15}\cos^3 x(3\cos^2 x - 5)$

f) $y = \frac{\left(\tan^2 x - 1\right)\left(\tan^4 x + 10\tan^2 x + 1\right)}{3\tan^3 x}$

g) $y = \frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x + \cos x}$

h) $y = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$

ı) $y = \frac{1}{\sqrt{b}}\, \text{arc sin}\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\, x\right)$

i) $y = \frac{-1}{2\sin^2 x} + \ln(\tan x)$

j) $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$

k) $y = x\, \text{arc cos}\, x - \sqrt{1 - x^2}$

l) $y = x\, \text{arc tan}\, \frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln(x^2 + a^2)$

m) $y = \text{arc sin}\, \sqrt{1 - x^2} + \text{arc tan}\left(\frac{\cos x}{1 + \sin x}\right)$

n) $y = \text{arc tan}\, x + \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

o) $y = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2\, \text{arcsin}\frac{x}{a}$

ö) $y = \text{arc tan}\, e^{2x} + \ln\sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}}$

p) $y = \left(x - \frac{1}{2}\right)\text{arc sin}\, \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x - x^2}$

r) $y = x - 2\sqrt{x} + 2\ln\left(1 + \sqrt{x}\right)$

s) $y = \frac{1}{2}\left[(x - a)\sqrt{2ax - x^2} + a^2\, \text{arcsin}\frac{x - a}{a}\right]$

ş) $y = \ln\left(a + x + \sqrt{2ax + x^2}\right)$

t) $y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$

u) $y = \frac{m}{2}\ln\left(x^2-a^2\right) + \frac{n}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}$

ü) $y = \frac{1}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$

v) $y = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(\frac{\tan\frac{x}{2}+2-\sqrt{3}}{\tan\frac{x}{2}-2+\sqrt{3}}\right)$

y) $y = a\ln\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x}\right) - \sqrt{x^2+ax}$

z) $y = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\left(\frac{a\sin x+b}{a+b\sin x}\right)$, $(a^2-b^2>0)$

4. Aşağıdaki eşitliklerden y' türevini bulunuz.

a) $x^2+y^2=a^2$

b) $y^2=px$

c) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

d) $x^2+xy+y^2=6$

e) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$

f) $x = y + \operatorname{arc\,cot} y$

5. $e^{xy}-x^2+y^3=0$ eşitliğinden y' türevinin $x=0$ için değerini bulunuz.

6. Aşağıdaki eşitliklerden y'' türevini bulunuz.

a) $x^2+y^2=a^2$

b) $\arctan y = x+y$

c) $x^2+xy+y^2=a^2$

7. Aşağıdaki parametrik denklemlerle verilen fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a) $\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = t^3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{2t} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = \cos^3 t(\cos t)^{-1/2} \\ y = \sin^3 t(\cos t)^{-1/2} \end{cases}$

8. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan $f : R^+ \to R$ fonksiyonlarının türevlerini bulunuz.

a) $f(x) = x^x$

b) $f(x) = x^{(x^x)}$

c) $f(x) = x^{1/x}$

d) $f(x) = x^{\tan x}$

9. Aşağıdaki eşitliklerle verilen fonksiyonların n. mertebeden türevlerini bulunuz.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$

b) $y = \sqrt{x}$

c) $f(x) = \sin x$

d) $f(x) = \cos 2x$

e) $f(x) = \cos^2 x$

10. $f(x) = x^2 e^{-x/a}$ olsun. $f^{(n)}(0) = (-1)^n \frac{n(n-1)}{a^{n-2}}$ olduğunu gösteriniz.

11. $f(x) = x^n$ olsun.

$$f(1) + \frac{f'(1)}{1!} + \frac{f''(1)}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = 2^n$$

olduğunu gösteriniz.

12. $f(x) = e^{-x^2}$ olsun.

a) $f^{(n)}(0) = -2\,(n-1)\,f^{(n-2)}(0)$

b) $f^{(2m-1)}(0) = 0$

c) $f^{(2m)}(0) = (-2)^m\,(2m-1)\,(2m-3)\ldots 5.3.1$

olduğunu gösteriniz.

13. $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ için

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} n! & , n \text{ çift ise} \\ 0 & , n \text{ tek ise} \end{cases}$$

olduğunu gösteriniz.

14. $f(x) = x(1 + x)^{-1/2}$ olsun. $n \geq 2$ için

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \frac{1.3.5...(2n-3)}{2^{n-1}} \cdot n$$

olduğunu gösteriniz.

15. $f(x) = x\, e^{x/a}$ olduğunda $f^{(n)}(x) = \frac{x + na}{a^n} e^{x/a}$ dır, gösteriniz.

16. $f(x) = x^{n-1} \ln x$ için $f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}$ olduğunu tümevarmı metodu ile gösteriniz.

17. $f(x) = x^{n-1} e^{1/x}$ için $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{e^{1/x}}{x^{n+1}}$ olacağını gösteriniz.

18. f ve g fonksiyonları için $A \subset R$ cümlesi üzerinde n. mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar ise f.g de n. mertebeden türevlenebilir ve

$$(f.g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

dır, gösteriniz **(Leibniz Formülü).**

19. $f(x) = x^3 \sin x$ olduğuna göre $f^{(30)}(x)$ türevini bulunuz.

20. $f : R \to R$ fonksiyonu

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$$

biçiminde parametrik olarak veriliyor.

$\frac{d^2y}{dx^2}$ türevinin $t = \frac{\pi}{4}$ noktasındaki değerini bulunuz.

ÇÖZÜMLER

1. a) $f(x)=\begin{cases} x & , x<2 \text{ ise} \\ 2 & , x=2 \text{ ise} \\ 4-x & , x>2 \text{ ise} \end{cases}$ $\qquad x_0=2$

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{4-x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2-x}{x-2}=-1$$

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x-2}{x-2}=1$$

Bu durumda $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ limiti mevcut değildir. Yani fonksiyonun 2 noktasında türevi yoktur.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ ise fonksiyon x_0 noktasında süreklidir.

$$\lim_{x\to x_{0^+}} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2}(4-x)=2\,,\quad \lim_{x\to x_{0^-}} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2} x=2$$

$f(x_0)=f(2)=2 \Rightarrow f$, $x_0=2$ de süreklidir.

b) $f(x)=\begin{cases} x^3 & , x\geq 0 \text{ ise} \\ -x^2 & , x<0 \text{ ise} \end{cases}$ $\qquad x_0=0$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}x^2=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x^2-0}{x}=\lim_{x\to 0^-}(-x)=0$$

Sağ ve sol türevler mevcut olduğundan fonksiyonun 0 noktasındaki türevi vardır ve 0 a eşittir. 0 noktasında fonksiyon türevlenebilir olduğundan süreklidir.

c) $f(x)=\begin{cases} (1-x)\ln(1-x) & , x<1 \text{ ise} \\ e^x-e & , x\geq 1 \text{ ise} \end{cases}$ $\qquad x_0=1$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{e^x-e-0}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{e^x-e}{x-1}=e$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(1-x)\ln(1-x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}-\ln(1-x)=\infty$$

$\Rightarrow$ f fonksiyonu türevlenemez, zira sol türev yoktur.

d) $f(x)=\begin{cases} 1 & , x \text{ rasyonel ise} \\ 0 & , x \text{ irrasyonel ise} \end{cases}$ $\qquad x_0=0$ ve $x_0=1$

f fonksiyonunun sürekliliğini araştıralım.

$x_0 = 0$ alalım. $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ olsun. $x_n \to 0$ dır.

(x_n) dizisinin rasyonel terimlerini a_n ile irrasyonel terimlerini b_n ile gösterelim. $x_n \to 0$ olduğundan $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ dır.

$f(a_n) = 1$, $f(b_n) = 0$ dolayısı ile f fonksiyonunun 0 noktasında limiti yoktur ve sürekli değildir. Dolayısı ile fonksiyon 0 noktasında türevlenemez. $x_0 = 1$ noktası için de aynı şekilde hesaplanabilir.

f) $f(x) = |1 - x^2|$, $x_0 = 0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|1 - x^2| - 1}{x} = \lim_{x \to 0} -\frac{x^2}{x} = 0 \Rightarrow$$ f türevlenebilir, dolayısı ile süreklidir.

g) $f(x) = [\![x]\!]$, $x_0 = 2$ ve $x_0 = \frac{3}{2}$

$(x_n) = \left(2 + \frac{1}{n}\right)$ ve $(y_n) = \left(2 - \frac{1}{n}\right)$ dizileri 2 noktasına yakınsayan iki dizidir.

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \left[\!\left[2 + \frac{1}{n}\right]\!\right] = 2 \text{ ve } \lim_{n \to \infty} f(y_n) = \lim_{n \to \infty} \left[\!\left[2 - \frac{1}{n}\right]\!\right] = 1$$

olduğundan f fonksiyonu 2 noktasında sürekli değildir. Dolayısı ile 2 noktasında türevlenemez.

$$\lim_{x \to \frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x \to \frac{3}{2}} [\![x]\!] = 1, \quad \left[\!\left[\frac{3}{2}\right]\!\right] = 1$$

$[\![x]\!]$ fonksiyonu $x_0 = \frac{3}{2}$ noktasında süreklidir.

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{\left[\!\left[\frac{3}{2} + h\right]\!\right] - 1}{h} = 0 \Rightarrow$$ f fonksiyonunun $\frac{3}{2}$ noktasındaki türevi 0 dır.

h) $f(x) = x\,|x|$ $\qquad x_0 = 0$

$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x|x|}{x} = \lim_{x \to 0} |x| = 0$. Dolayısı ile fonksiyon 0 noktasında türevlenebilirdir ve süreklidir.

ı) $f(x) = x\,[\![x]\!]$ $\qquad x_0 = 0$ ve $x_0 = \frac{3}{2}$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x[\![x]\!]}{x} = \lim_{x \to 0} [\![x]\!]$$ mevcut değil.

Dolayısı ile fonksiyon 0 noktasında türevlenemez.

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x\|x\| = 0 = f(0)$ olduğundan fonksiyon 0'da süreklidir.

2. $g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{(x^2+2x+3)f(x)-3f(0)}{x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{(x^2+2x+3)f(x)-15+(x^2+2x+3)5-(x^2+2x+3)5}{x}$

$= \lim_{x \to 0}(x^2+2x+3)\left(\frac{f(x)-5}{x}\right)+\left(\frac{x^2+2x}{x}\right)5 = 3.4 + 10 = 22$

3. **a)** $y = \text{arc tan}\,\frac{1}{x}$

$$y' = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{x^2}{x^2+1}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1+x^2}$$

b) $y = \text{arc cos}\,\sqrt{x}$

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}\cdot\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$$

c) $y = \text{arc cot}\,\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

$$y' = -\frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)'$$

$$= -\frac{1-x}{1+x+1-x}\cdot\left(\frac{1}{2}\left[\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}\right]\left[\frac{1+x}{1-x}\right]^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{-1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+x}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ç) $y = \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x$

$y' = \frac{1}{3}\,.\,3\tan^2 x\,(1+\tan^2 x) - (1+\tan^2 x) + 1 = \tan^4 x$

d) $y = \text{arc sin}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \sqrt{1+x^2}\left(\frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

e) $y = \frac{1}{15}\cos^3 x(3\cos^2 x - 5)$

$$y' = \frac{1}{5}\cos^2 x \,.\, (-\sin x)\,(3\cos^2 x - 5) - 6\cos x \sin x \,.\, \frac{1}{15}\cos^3 x$$

$$= -\frac{3}{5}\cos^4 x \sin x + \cos^2 x \sin x - \frac{2}{5}\cos^4 x \sin x$$

$$= -\cos^2 x \sin x\,(\cos^2 x - 1) = \cos^2 x \sin^3 x$$

f) $y = \frac{\left(\tan^2 x - 1\right)\left(\tan^4 x + 10\tan^2 x + 1\right)}{3\tan^3 x}$

$$= \frac{\tan^6 x + 9\tan^4 x - 9\tan^2 x - 1}{3\tan^3 x}$$

$$= \frac{1}{3}\tan^3 x + 3\tan x - \frac{3}{\tan x} - \frac{1}{3}\frac{1}{\tan^3 x}$$

$$y' = \tan^2 x\,(1 + \tan^2 x) + 3\,(1 + \tan^2 x) + 3\,\frac{(1+\tan^2 x)}{\tan^2 x} + \frac{(1+\tan^2 x)}{\tan^4 x}$$

$$= \tan^4 x + 4\tan^2 x + 4\tan^{-2} x + \tan^{-4} x + 6$$

$$= \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} + \frac{4\sin^2 x}{\cos^2 x} + 4\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x} + 6$$

$$= \frac{\sin^8 x + 4\sin^6 x\cos^2 x + 4\sin^2 x\cos^6 x + 6\sin^4 x\cos^4 x + \cos^8 x}{\sin^4 x\cos^4 x}$$

$$= \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^4}{\sin^4 x\cos^4 x} = \frac{1}{\sin^4 x\cos^4 x}$$

g) $y = \frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x + \cos x}$

$$y' = \frac{(\cos x - x\sin x - \cos x)(x\sin x + \cos x) - (\sin x + x\cos x - \sin x)(x\cos x - \sin x)}{(x\sin x + \cos x)^2}$$

$$= -\frac{x^2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{(x\sin x + \cos x)^2} = -\frac{x^2}{(x\sin x + \cos x)^2}$$

h) $y = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$

$$y' = \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}}{x+\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{\dfrac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}}}{x+\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

ı) $y = \dfrac{1}{\sqrt{b}} \arcsin\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}\,x\right)$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}\,x\right)^2}} \left(\sqrt{\frac{b}{a}}\,x\right)' = \frac{1}{\sqrt{b}} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a-bx^2}} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a-bx^2}}$$

i) $y = \dfrac{-1}{2\sin^2 x} + \ln(\tan x)$

$$y' = \frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{1+\tan^2 x}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x.\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^3 x.\cos x}$$

$$= \frac{1}{\sin^3 x.\cos x}$$

j) $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$

$$y' = \frac{-e^{-x} + e^{-x} - xe^{-x}}{e^{-x} + xe^{-x}} = \frac{-x}{1+x}$$

k) $y = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$

$$y' = \arccos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x$$

l) $y = x \arctan \dfrac{x}{a} - \dfrac{a}{2} \ln(x^2 + a^2)$

$$y' = \arctan \frac{x}{a} + \frac{\dfrac{x}{a}}{1+\dfrac{x^2}{a^2}} - \frac{a}{2} \frac{(2x)}{x^2+a^2} = \arctan\frac{x}{a} + \frac{ax}{a^2+x^2} - \frac{ax}{a^2+x^2}$$

$$= \arctan \frac{x}{a}$$

m) $y = \arcsin \sqrt{1-x^2} + \arctan\left(\dfrac{\cos x}{1+\sin x}\right)$

$$y' = \frac{-x/\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-(1-x^2)}} + \frac{\dfrac{-\sin x(1+\sin x) - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2}}{1+\left(\dfrac{\cos x}{1+\sin x}\right)^2}$$

$$= -\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2}, \quad 0 < x < 1$$

n) $y = \arctan x + \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

$$y' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1/2}\cdot\left(\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}\right)\cdot\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{(1-x)^2}\cdot\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1-x^2} = \frac{2}{1-x^4}$$

o) $y = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}$

$$y' = \frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + \sqrt{a^2-x^2} + a^2\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\cdot\left(\frac{1}{a}\right) = 2\sqrt{a^2-x^2}$$

ö) $y = \arctan e^{2x} + \ln\sqrt{\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}}$

$$y' = \frac{2e^{2x}}{1+e^{4x}} + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{2e^{2x}(e^{2x}-1)-2e^{2x}(e^{2x}+1)}{(e^{2x}-1)^2}\right)\cdot\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\right)^{-1/2}$$

$$= \frac{2e^{2x}}{1+e^{4x}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\cdot\frac{-4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} = \frac{2e^{2x}}{1+e^{4x}} - \frac{2e^{2x}}{e^{4x}-1} = \frac{4e^{2x}}{1-e^{8x}}$$

p) $y = \left(x-\frac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}$

$$y' = \arcsin\sqrt{x} + \left(x-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1-2x}{4\sqrt{x-x^2}} = \arcsin\sqrt{x}$$

r) $y = x - 2\sqrt{x} + 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$

$$y' = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)} = \frac{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)-\left(1+\sqrt{x}\right)+1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)} = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$$

s) $y = \frac{1}{2}\left[(x-a)\sqrt{2ax-x^2} + a^2\arcsin\frac{x-a}{a}\right]$

$$y' = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2ax-x^2} + \frac{(x-a)}{2}\cdot\frac{(2a-2x)}{\sqrt{2ax-x^2}} + a^2\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-a}{a}\right)^2}}\cdot\left(\frac{1}{a}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2ax-x^2-x^2+2ax-0^2+a^2}{\sqrt{2ax-x^2}}\right] = \frac{2ax-x^2}{\sqrt{2ax-x^2}} = \sqrt{2ax-x^2}$$

ş) $y = \ln\left(a+x+\sqrt{2ax+x^2}\right)$

$$y' = \frac{1+\frac{2a+2x}{2\sqrt{2ax+x^2}}}{a+x+\sqrt{2ax+x^2}} = \frac{a+x+\sqrt{2ax+x^2}}{a+x+\sqrt{2ax+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2ax+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2ax+x^2}}$$

t) $y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$

$$y' = \frac{1}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{x^2}{2\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{a^2}{2}\left(\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}}{x+\sqrt{a^2-a^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2-a^2+x^2-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\right] = \sqrt{x^2-a^2}$$

u) $y = \frac{m}{2}\ln\left(x^2-a^2\right) + \frac{n}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}$

$$y' = \frac{m}{2}\cdot\frac{2x}{x^2-a^2} + \frac{n}{2a}\cdot\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right) = \frac{mx}{(x^2-a^2)} + \frac{n}{(x^2-a^2)}$$

$$= \frac{mx+n}{(x^2-a^2)}$$

ü) $y = \frac{1}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{6}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$

$$y' = \frac{1}{3(1+x)} - \frac{1}{6}\frac{(2x-1)}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{3(1+x)} - \frac{x-2}{3(x^2-x+1} = \frac{1}{(x^2-x+1)(1+x)} = \frac{1}{1+x^3}$$

v) $y = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(\frac{\tan\frac{x}{2}+2-\sqrt{3}}{\tan\frac{x}{2}-2+\sqrt{3}}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\ln\left(\tan\frac{x}{2}+2-\sqrt{3}\right) - \ln\left(\tan\frac{x}{2}-2+\sqrt{3}\right)\right]$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)\frac{1}{2}}{\tan\frac{x}{2}+2-\sqrt{3}} - \frac{\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)\frac{1}{2}}{\tan\frac{x}{2}-2+\sqrt{3}}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)\left[\frac{\tan\frac{x}{2}-2+\sqrt{3}-\tan\frac{x}{2}-2+\sqrt{3}}{\tan^2\frac{x}{2}-\left(2-\sqrt{3}\right)^2}\right]$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3}-2\right)}{\sqrt{3}} \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}-\left(2-\sqrt{3}\right)^2}$$

y) $y = a \ln\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x}\right) - \sqrt{x^2+ax}$

$$y' = a\left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+a}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}\right) - \frac{2x+a}{\sqrt{x^2+ax}} = \frac{a}{2}\frac{1}{\sqrt{x+a}\sqrt{x}} - \frac{2x+a}{2\sqrt{x^2+ax}}$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{ax+x^2}}$$

z) $y = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \arcsin\left(\frac{a\sin x+b}{a+b\sin x}\right),\ (a^2 - b^2 > 0)$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot \frac{a^2\cos x + ab\cos x\sin x - ab\sin x\cos x - b^2\cos x}{(a+b\sin x)^2 \cdot \sqrt{1-\left(\frac{a\sin x+b}{a+b\sin x}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot \frac{(a^2-b^2)\cos x}{\sqrt{(a^2-b^2)(1-\sin^2 x)}} \cdot \frac{1}{(a+b\sin x)}$$

$$= \frac{1}{(a+b\sin x)}$$

4. a) $x^2 + y^2 = a^2$

$2x + 2y'y = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$

b) $y^2 = 2px$

$2yy' = 2p \Rightarrow y' = \frac{p}{y}$

c) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{2x}{a^2} - \frac{2yy'}{b^2} = 0 \Rightarrow y' = \frac{b^2x}{a^2y}$

d) $x^2 + xy + y^2 = 6$

$2x + y + xy' + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2x+y}{x+2y}$

e) $e^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y' = 0 \Rightarrow y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

f) $x = y + \operatorname{arc\,cot} y$

$$1 - y' = \frac{-1}{1+y^2}y' \Rightarrow 1 = y'\left(\frac{y^2}{1+y^2}\right)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1+y^2}{y^2} \Rightarrow y' = y^{-2} + 1$$

5. $e^{xy} - x^2 + y^3 = 0$

$$e^{xy}(y + xy') - 2x + 3y^2y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{2x - e^{xy}y}{xe^{xy} + 3y^2}$$

$$x = 0 \Rightarrow 1 + y^3 = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow y' = \frac{1}{3}$$

6. a) $x^2 + y^2 = a^2$

$$2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{-x}{y}, \quad y'' = \frac{-y - xy'}{y^2} = \frac{-y - x\left(\frac{-x}{y}\right)}{y^2} = -a^2y^{-3}$$

b) $\arctan y = x + y$

$$\frac{1}{1+y^2}\cdot y' = 1 + y' \Rightarrow y'\left(\frac{-y^2}{1+y^2}\right) = 1 \Rightarrow y' = -\frac{1+y^2}{y^2} = -1 - \frac{1}{y^2}$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{2}{y^3}y' = \frac{2}{y^3}\left(-\frac{1+y^2}{y^2}\right) = -2\frac{1+y^2}{y^5}$$

c) $x^2 + xy + y^2 = a^2$

$$2x + y + xy' + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2x+y}{x+2y}$$

$$y'' = -\frac{(2+y')(x+2y) - (1+2y')(2x+y)}{(x+2y)^2}$$

$$= -\frac{2x + 4y + xy' + 2yy' - 2x - y - 4xy' - 2yy'}{(x+2y)^2}$$

$$y'' = \frac{-3y + 3xy'}{(x+2y)^2} = \frac{-3y + 3x\cdot\left(-\dfrac{2x+y}{x+2y}\right)}{(x+2y)^2} = \frac{-3xy - 6y^2 - 6x^2 - 3xy}{(x+2y)^3}$$

$$= \frac{-6xy - 6y^2 - 6x^2}{(x+2y)^3} = \frac{-6(x^2+xy+y^2)}{(x+2y)^3} = -6a^2\,(x+2y)^{-3}$$

7. **a)** $\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = t^3 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \dfrac{3}{2}t^2$

b) $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{2t} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \dfrac{2e^{2t}}{-e^{-t}} = -2e^{3t}$

c) $\begin{cases} x = \cos^3 t(\cos t)^{-1/2} \\ y = \sin^3 t(\cos t)^{-1/2} \end{cases}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{3\sin^2 t(\cos t)^{1/2} + \dfrac{1}{2}(\cos t)^{-3/2}\sin^4 t}{-\dfrac{5}{2}\cos t^{3/2}\sin t}$$

$$= \frac{\cos t^{-3/2}.\sin^2 t\left(3\cos^2 t + \dfrac{\sin^2 t}{2}\right)}{-\dfrac{5}{2}\cos t^{3/2}\sin t}$$

$$= -\frac{2\sin t}{5\cos^3 t}\cdot\left(3\cos^2 t + \frac{\sin^2 t}{2}\right)$$

8. **a)** $f(x) = x^x \Rightarrow \ln f(x) = \ln x^x \Rightarrow \ln f(x) = x\ln x$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + x\frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = x^x(\ln x + 1)$$

b) $f(x) = x^{(x^x)} \Rightarrow \ln f(x) = x^x \ln x$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = x^x(\ln x + 1)\ln x + x^x\frac{1}{x} = x^x(\ln x + 1)\ln x + x^{x-1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = x^{(x^x)}\,x^x\left(\ln x(\ln x + 1) + \frac{1}{x}\right)$$

c) $f(x) = x^{1/x} \Rightarrow \ln f(x) = \dfrac{1}{x}\ln x$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x},\quad f'(x) = x^{1/x}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}\ln x\right) = x^{1/x}\,.\,(1 - \ln x)\,x^{-2}$$

d) $f(x) = x^{\tan x}$

$\ln f(x) = \tan x \ln x$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (1+\tan^2 x)\ln x + \frac{\tan x}{x}$$

$$f'(x) = x^{\tan x}\left(\frac{\ln x}{\cos^2 x} + \frac{\tan x}{x}\right)$$

9. **a)** $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -x^{-2} \Rightarrow f''(x) = 2x^{-2} \Rightarrow f'''(x) = 2.3x^{-3}$ ...

$f^{(n)}(x) = (-1)^n . n!\, x^{-(n+1)}$

b) $y = \sqrt{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2.2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'''(x) = \frac{1.3}{2.2.2}x^{-5/2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{1.3.5...(2n-3)}{2^n}x^{-\frac{2n-1}{2}}$$

c) $f(x) = \sin x$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

d) $f(x) = \cos 2x$

$$f'(x) = -2\sin 2x = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = -2^2\cos 2x = 2^2\cos\left(2x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'''(x) = 2^3\sin 2x = 2^3\cos\left(2x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = 2^n\cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

e) $f(x) = \cos^2 x$

$$f'(x) = -\frac{2\sin 2x}{2} = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = -2\cos 2x = 2\cos\left(2x + \frac{2\pi}{2}\right)$$

$$f'''(x) = 2^2 \sin 2x = 2\cos\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

.....

$$f^{(n)}(x) = 2^{n-1}\cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

10. $f'(x) = 2xe^{-x/a} - \frac{x^2}{a}e^{-x/a} \Rightarrow f'(0) = 0$

$$f''(x) = 2e^{-x/a} - \frac{4x}{a}e^{-x} + \frac{x^2}{a^2}e^{-x/a} \Rightarrow f''(0) = 2$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{a}e^{-x/a} + \frac{bx}{a^2}e^{-x/a} - \frac{x^2}{a^3}e^{-x/a} \Rightarrow f'''(0) = -\frac{6}{a}$$

$$f^4(x) = -\frac{12}{a^2}e^{-x/a} - \frac{4x}{a^3}e^{-x/a} + \frac{x^2}{a^4}e^{-x/a} \Rightarrow f^4(0) = \frac{12}{a^2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)} = (-1)^n \cdot \frac{n(n-1)}{a^{n-2}}$$

11. $f(1) = 1 = \binom{n}{0}$

$$f'(x) = nx^{n-1} \Rightarrow f'(1) = n = \binom{n}{0}$$

$$f''(x) = n(n-1)x^{n-2} \Rightarrow f''(1) = n(n-1) = \binom{n}{0}2!$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \binom{n}{n}n! \Rightarrow f(1) + \frac{f'(1)}{1!} + \ldots + \frac{f^{(n)}}{n!} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

12. **a)** $f'(x) = -2xe^{-x^2} \Rightarrow f'(0) = 0$

$$f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} \Rightarrow f''(0) = -2$$

$$f'''(x) = 12xe^{-x^2} - 8x^3e^{-x^2} \Rightarrow f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = 12e^{-x^2} - 48x^2e^{-x^2} + 16x^4e^{-x^2} \Rightarrow f^{(4)}(0) = 12$$

$\vdots$

$f^{(n)}(0) = -2\,(n-1)\,f^{(n-2)}(0)$ sağlanır.

b) $f^{(2m-1)}(0) = 0$

$f'(0) = 0\,,\quad f'''(0) = 0, \ldots, f^{(2m-1)}(0)$

c) $f''(0) = -1,\ f^{(4)}(0) = 12, \ldots, f^{(2m)}(0) = (-2)^m\,(2m-1)\,(2m-3)\ldots 5.3.1$

13. $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}\right)$ olduğundan

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{n!}{(1-x)^{n+1}} + (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}\right]$$

olur. $x = 0$ yazılırsa

$$f^{(n)}(0) = \frac{1}{2}\left[n! + (-1)^n n!\right] = n!\left[\frac{1+(-1)^n}{2}\right] = \begin{cases} n!\,, & n \text{ çift ise} \\ 0\,, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

bulunur.

14. $f(x) = x\,(1+x)^{-1/2}$

$$f'(x) = (1+x)^{-1/2} - \frac{1}{2}\,x\,(1+x)^{-3/2}$$

$$f''(x) = -\,(1+x)^{-3/2} + \frac{1.3}{2^2}\cdot x(1+x)^{-5/2}$$

$$f'''(x) = \frac{1.3}{2^2}\cdot 3(1+x)^{-5/2} - \frac{1.3.5}{2^3}\,x\,(1+x)^{-3/2}$$

.....

$$f^{(n)}(x) = \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2^{n-1}}\,n(1+x)^{1/2-n} - \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^n}\,x\,(1+x)^{1/2-n-1}$$

olacağından

$$f^{(n)}(0) = \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2^{n-1}}\cdot n$$

bulunur.

15. $f(x) = x\,e^{x/a}$

$$f'(x) = e^{x/a} + \frac{x}{a}\,e^{x/a} = e^{x/a}\left(1 + \frac{x}{a}\right) = \frac{x+a}{a}\,e^{x/a}$$

$$f''(x) = \frac{1}{a}\,e^{x/a} + \frac{1}{a}\,\frac{x+a}{a}\,e^{x/a} = \frac{x+2a}{a^2}\,e^{x/a}$$

.....

$f^{(n)}(x) = \frac{x+na}{a^n} e^{x/a} \Rightarrow f^{(n)}(0) = \frac{x+na}{a^n}$

16. "$f(x) = x^{n-1} \ln x \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}$ dir." önermesinin doğruluğunu tümevarımla gösterelim.

$n = 1$ için

" $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$ dir." önermesi elde edilir. Bu önerme doğru olduğundan verilen önerme $n = 1$ için doğrudur.

$n = k$ için doğru olsun. Bu takdirde

" $f(x) = x^{k-1} \ln x \Rightarrow f^{(k)}(x) = \frac{(k-1)!}{x}$ dir." önermesi doğrudur.

Buradan yararlanarak, önermenin $n = k + 1$ için doğru olacağını, yani " $f(x) = x^k \ln x \Rightarrow f^{(k+1)}(x) = \frac{k!}{x}$ dir." önermesinin doğruluğunu gösterelim.

$$(x^k \ln x)^{(k+1)} = (x.x^{k-1} \ln x)^{(k+1)} = [\ (x \,.\, x^{k-1} \ln x)^{(k)}\ ]'$$

olur. Diğer taraftan

$$[\ x.g(x)\ ]^{(k)} = k\, g^{(k-1)}(x) + x\, g^{(k)}(x)$$

olacağından

$$[\ (x.x^{k-1} \ln x)^{(k)}\ ]' = [\ k\,(x^{k-1} \ln x)^{(k-1)} + x \,.\, (x^{k-1}\, g(x)^{(k)}\ ]'$$

$$= [\ k\,(x^{k-1} \ln x)^{(k-1)} + x \,.\, \frac{(k-1)!}{x}\ ]'$$

$$= k \,.\, (x^{k-1} \ln x)^{(k)} + 0 = k \,.\, \frac{(k-1)!}{x} = \frac{k!}{x}$$

bulunur. O halde

$$(x^k \ln x)^{(k+1)} = \frac{k!}{x}$$

olur ki bu da ispatı tamamlar.

17. $P(n) : f(x) = x^{n-1} e^{1/x} \Rightarrow f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{e^{1/x}}{x^{n+1}}$ dir.

$P(1) : f(x) = e^{1/x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2}$ dir.

Bu önerme doğrudur.

Önerme n = k için doğru olsun. Bu takdirde

"$f(x) = x^{k-1} e^{1/x} \Rightarrow f^{(k)}(x) = (-1)^k \frac{e^{1/x}}{x^{k+1}}$ dir."

önermesi doğrudur. Başka bir yazışla

$$(x^{k-1} e^{1/x})^{(k)} = (-1)^k \frac{e^{1/x}}{x^{k+1}}$$

dir.

Önermenin n = k + 1 için doğru olacağını, yani

$$(x^k e^{1/x})^{(k+1)} = (-1)^{k+1} \frac{e^{1/x}}{x^{n+2}}$$

eşitliğinin doğruluğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
(x^k e^{1/x})^{(k+1)} &= [\,(x^k e^{1/x})^{(k)}\,]' = [\,(x \,.\, x^{k-1} e^{1/x})^{(k)}\,]' \\
&= [\,k\,(x^{k-1} e^{1/x})^{(k-1)} + x \,.\, (x^{k-1} e^{1/x})^{(k)}\,]' \\
&= [\,k\,(x^{k-1} e^{1/x})^{(k-1)} + x \,.\, (-1)^k \frac{e^{1/x}}{x^{k+1}}\,]' \\
&= [\,k\,(x^{k-1} e^{1/x})^{k} + (-1)^k\,(e^{1/x} x^{-k})'\,] \\
&= (-1)^k\, k \frac{e^{1/x}}{x^{k+1}} + (-1)^k \left[-\frac{e^{1/x}}{x^{k+1}} - \frac{k\, e^{1/x}}{x^k} \right] \\
&= (-1)^k\, k \,.\, \frac{e^{1/x}}{x^{k+1}} + (-1)^{k+1} \frac{e^{1/x}}{x^{k+2}} - (-1)^k k \cdot \frac{e^{1/x}}{x^{k+1}} \\
&= (-1)^{k+1} \frac{e^{1/x}}{x^{k+2}}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

18. Tümevarım prensibini kullanarak ispatı yapalım.

$$n = 1 \text{ için } (f.g)'(x) = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} f^{(k)}(x) q^{(1-k)}(x) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x) &= \binom{1}{0} f(x)\, g'(x) + \binom{1}{1} f'(x)\, g(x). \\
&= f(x)\, g'(x) + f'(x)\, g(x)
\end{aligned}$$

n–1. türev için eşitlik doğru olsun. Yani

$$(f.g)^{(n-1)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k-1)}(x) \text{ olsun.} \quad (1)$$

(1) ifadesinin her iki yanının türevini alalım.

$$\begin{aligned}
(f.g)^{(n)} &= \left(\binom{n-1}{0} f(x) g^{(n-1)}(x) + \binom{n-1}{1} f'(x) q^{(n-2)}(x) \ldots + \binom{n-1}{n-1} f^{(n-1)}(x) g(x) \right)' \\
&= \binom{n-1}{0} f'(x) g^{(n-1)}(x) + \binom{n-1}{0} f.g^{(n)} + \binom{n-1}{1} f'(x) q^{(n-2)}(x) \\
&\quad + \binom{n-1}{1} f'(x) g^{(n)-1}(x) + \ldots + \binom{n-1}{n-1} f^{(n)}(x) g(x) + \binom{n-1}{n-1} g^{(n-1)}(x) g'(x)
\end{aligned}$$

olur.

$$\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}=\binom{n}{0}\ ,\ \binom{n-1}{0}=\binom{n}{0}\ ,$$
$$\vdots$$
$$\binom{n-1}{n-1}+\binom{n-1}{n-2}=\binom{n}{n-1}\ ,\ \binom{n-1}{n-1}=\binom{n}{n}\ \text{ve}\ \binom{n-1}{n-1}=1$$

olduğundan

$$(f.g)^{(n)}=\binom{n}{0}f.g^{(n)}+\binom{n}{1}f'g^{(n-1)}+\ldots+\binom{n}{n}fg^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}$$

olur.

19. $f(x)=x^3$, $g(x)=\sin x$ seçelim ve $f'(x)=3x^2$, $f''(x)=6x$, $f'''(x)=6$
$f^{(4)}(x)=f^{(5)}=\ldots=f^{n}(x)=0$

$g^{n}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$ olduğunu biliyoruz.

Lebiniz Formülüne göre

$$h^{(n)}(x)=(g.f)^{(n)}(x)=g^{(n)}(x)\,f(x)+n\,f'(x)g^{(n-1)}(x)+\frac{n(n-1)}{2}f''(x)\,g^{(n-2)}(x)$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}f'''(x)\,g^{(n-3)}(x)$$
$$=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)x^3+n.3x^2.\sin\left(x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)$$
$$+\frac{n(n-1)}{2}6x\,.\,\sin\left(x+(n-2)\frac{\pi}{2}\right)+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\,.\,6\,.\,\sin\left(x+(n-3)\frac{\pi}{2}\right)$$
$$h^{(30)}(x)=\sin(x+15\pi)\,.\,x^3+90x^2\sin\left(x+29\cdot\frac{\pi}{2}\right)+90.29.x\sin(x+14\pi)$$
$$+145.28.6.\sin\left(x+27\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=-x^3\sin x+90x^2\cos x+2610x\,.\,\sin x+25.872\,.\,\cos x$$

20. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{4\cos t}{-3\sin t}=-\dfrac{4}{3}\cot(t)$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(-\frac{4}{3}\cot(t)\right)\cdot\frac{dt}{dx}=-\frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3\sin t}\right)=-\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{\sin^3 t}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\frac{4}{9}\cdot\frac{2^3}{\left(\sqrt{2}\right)^3}=\frac{-16}{9\sqrt{2}}$$

TÜREVİN UYGULAMALARI

TÜREVİN GEOMETRİK ANLAMI

Bir fonksiyonun bir a noktasındaki türevi, fonksiyonun grafiğine o noktadan çizilen teğetin eğimidir. Yani

$$m = f'(a)$$

TÜREVİN FİZİKSEL ANLAMI

Yolun zamana göre türevi hızı, hızın zamana göre türevi ivmedir.

$$v = s',\quad a = v' = s''$$

TÜREVLE İLGİLİ TEOREMLER

TEOREM

$f : (a, b) \to R$ fonksiyonu bir $c \in (a, b)$ noktasında türevli ve $f'(c) \neq 0$ olsun. (a, b) aralığının öyle bir $(c - \delta, c + \delta)$ alt aralığı vardır ki bu aralıktaki her x için $\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ ile $f'(c)$ aynı işarettedir.

SONUÇ

$f : (a, b) \to R$ fonksiyonu $c \in (a, b)$ noktasında türevlenebilir olsun. Eğer $f'(c) > 0$ ise c nin öyle bir δ– komşuluğu vardır ki bu komşulukta f artandır. Eğer $f'(c) < 0$ ise bu komşulukta f azalandır.

TEOREM **(Fermat Teoremi)**

$f : [a, b] \to R$ fonksiyonunun bir $c \in (a, b)$ noktasında bir yerel minimumu veya maksimumu varsa ve f fonksiyonu c noktasında türevlenebiliyorsa

$$f'(c) = 0$$

dır.

TANIM

Bir $A \subset R$ cümlesi üzerinde tanımlı reel değerli bir f fonksiyonu verildiğinde

$$f'(c) = 0$$

şartını sağlayan c noktalarına f fonksiyonunun **Duraklama noktaları** veya **Kritik noktaları** denir.

TEOREM

f fonksiyonu (a, b) aralığında türevli, c noktası f fonksiyonunun bir duraklama noktası, $f''(c)$ mevcut ve sıfırdan farklı olsun.

1) Eğer $f''(c) > 0$ ise c de bir yerel minimum

2) Eğer $f''(c) < 0$ ise c de bir yerel maksimum

vardır.

TEOREM

f fonksiyonunun (a, b) aralığında $f^{(n)}$ türevi mevcut ve (a, b) aralığının bir c noktasında

$f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(n-1)}(c) = 0$ ve $f^{(n)}(c) \neq 0$

olsun. Ayrıca $f^{(n)}$ fonksiyonu c de sürekli olsun.

(1) Eğer n çift ve $f^{(n)}(c) > 0$ ise c de bir yerel minimum vardır.

(2) Eğer n çift ve $f^{(n)}(c) < 0$ ise c de bir yerel maksimum vardır.

(3) Eğer n tek ise c de ne yerel minimum ne de yerel maksimum vardır.

TEOREM (Rolle Teoremi)

$f : [a, b] \to R$ fonksiyonu sürekli ve $\forall x \in (a, b)$ noktasında türevlenebilir olsun. Eğer $f(a) = f(b)$ ise (a, b) aralığında, $f'(c) = 0$ olacak şekilde en az bir c noktası vardır.

TEOREM

Kapalı bir aralıkta sürekli ve iç kısmında türevlenebilen bir fonksiyonun iki sıfır yeri arasında türevinin sıfır olduğu en az bir yer vardır.

TEOREM (Diferensiyel Hesabının Ortalama Değer Teoremi)

$f : [a, b] \to R$ fonksiyonu [a, b] aralığında sürekli ve $\forall x \in (a, b)$ noktasında türevlenebilir olsun. Bu taktirde, (a, b) aralığında

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

olacak şekilde en az bir x_0 noktası vardır.

TEOREM **(Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoremi)**

f ve g fonksiyonları [a, b] aralığında sürekli ve aralığın iç kısmında türevlenebilir olsunlar. Ayrıca $\forall x \in (a, b)$ için $g'(x) \neq 0$ olsun. Bu taktirde, (a, b) aralığında

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

olacak şekilde en az bir x_0 noktası vardır.

TANIM

$K \subset R \times R$ olsun. Eğer K kümesinin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası K kümesinin içinde kalıyorsa, K ya bir **konveks küme** adı verilir.

TANIM

$K \subset R \times R$ olsun.

K konvekstir $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in K$ ve $\forall \lambda \in [0, 1]$ için $\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in K$

TANIM

Her $x_1, x_2 \in [a, b]$ ve her $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f\left[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right] \leq \lambda\ f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

oluyorsa f fonksiyonu [a, b] üzerinde **konvekstir** denir.

Her $x_1, x_2 \in [a, b]$ ve her $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f\left[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right] \geq \lambda\ f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonu [a, b] de **konkav**dır.

TEOREM

$f : [a, b] \to R$ fonksiyonunun (a, b) üzerinde ikinci türevi var olsun.

Eğer her $x \in (a, b)$ için $f''(x) \geq 0$ ise f fonksiyonu [a, b] de konvekstir.

TANIM

Bir f fonksiyonunun konvekslikten konkavlığa veya konkavlıktan konveksliğe geçtiği ve fonksiyonun sürekli olduğu noktaya **büküm noktası** veya **dönüm noktası** adı verilir.

PROBLEMLER

1. $y = x^3 - 6x + 2$ eğrisine teğet olan ve $y = 6x - 2$ doğrusuna paralel olan doğrunun denklemini bulunuz.

2. $y = \frac{x}{1+x^2}$ eğrisine orijinde teğet olan doğrunun denklemini yazınız.

3. (0, 3) ve (5, –2) noktalarından geçen doğrunun $y = c(x + 1)^{-1}$ eğrisine teğet olması için c ne olmalıdır?

4. $y = \frac{ax}{a^2+x^2}$ eğrisinin hangi noktalarındaki teğetleri $y = \sqrt{2ax-x^2}$ eğrisinin $x = a$ noktasındaki teğetine paralel olur.

5. $x^2 + 4y^2 = 4$ elipsine teğet olan ve (4, 0) noktasından geçen doğruların denklemini yazınız.

6. $A\left(\frac{3}{2},0\right)$ noktasından geçen ve $x^2 - 4y + 4 = 0$ parabolüne teğet olan doğruların birbirlerine dik olduklarını gösteriniz.

7. c herhangi bir sabit olmak üzere, $x = -c$ doğrusu üzerinde alınan herhangi bir noktadan $y^2 = 4cx$ parabolüne çizilen iki teğetin dik kesiştiklerini gösteriniz.

8. $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + y = 6$ eğrisine A(2, 2) noktasında teğet olan doğrunun denklemini yazınız.

9. $y = 2x$ doğrusunun $y = x^2 + ax + b$ parabolüne A(2, 4) noktasında teğet olması için a ve b ne olmalıdır?

10. $y = -x$ doğrusunun $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ eğrisine teğet olduğunu gösteriniz. Bu teğetin değme noktasını bulunuz. Bu doğru eğriyi keser mi?

11. $y = x^3$ eğrisinin (0, 0) noktasındaki teğetini bulunuz. Teğet değme noktasında eğriyi keser mi?

12. m nin hangi değerleri $y = mx$ doğrusu $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ çemberine teğettir?

13. $xy = 2$ ile $x^2 - y^2 = 3$ eğrilerinin kesim noktalarında bu eğrilere çizilen teğetlerin dik kesiştiklerini gösteriniz.

14. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ astroid eğrisine, bu eğrinin $y = -x$ doğrusu ile kesim noktasından çizilen teğetlerin denklemini yazınız.

15. $y^2 = 4px$ parabolüne üzerindeki bir (x_1, y_1) noktasından çizilen teğetin denklemini yazınız.

16. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsine üzerindeki bir (x_1, y_1) noktasından çizilen teğetin denklemini yazınız.

17. $y = x - x^2$ eğrisine $x = 0$ apsisli noktasından çizilen teğetin Ox– ekseni ile yaptığı açısın ölçüsünü bulunuz.

18. $y = \arcsin \frac{x-1}{2}$ eğrisine, bu eğrinin x– eksenini kesim noktasından çizilen teğet ve normalin denklemini yazınız.

19. $x = t \cos t$, $y = t \sin t$ parametrik denklemi ile verilen eğriye $t = \frac{\pi}{4}$ noktasından çizilen teğetin denklemini yazınız.

20. Aşağıdaki eğri çiftlerinin dik kesiştiklerini gösteriniz.

a) $y^2 = 6x + 9$ ile $y^2 = 9 - 6x$

b) $x^2 - y^2 = 5$ ile $4x^2 + 9y^2 = 72$

21. $y^2 = x^3$ eğrisine $x_1 = 0$ ve $x_2 = 1$ apsisli noktalarından çizilen teğetlerin denklemini yazınız.

22. $x^m y^n = a^{m+n}$ eğrisinin (x_0, y_0) noktasından eğriye çizilen teğetin denklemini yazınız.

23. $4x^2 + y^2 = 72$ eğrisinin, (4, 4) noktasında kesişen teğetlerinin denklemini yazınız.

24. c bir sabit olmak üzere $f(x) = x^4 + cx^2 + 1$ olsun. f nin artan ve azalan olduğu yerleri (aralıkları) bulunuz. f nin ekstremumlarını hesaplayınız. Bundan faydalanarak $c = 18$ ve $c = -18$ için fonksiyonun grafiğini çiziniz.

25. Aşağıdaki eşitliklerle verilen fonksiyonların karşılarında yazılı aralıklardaki mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $[-3, 10]$

b) $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $[-2, 10]$

c) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $\left[\frac{1}{10}, 10\right]$

d) $f(x) = 2^x$, $[-1, 5]$

e) $f(x) = \frac{x^2 + 100}{x^2 - 25}$, $[-1, 3]$

f) $f(x) = e^x \sin x$, $[0, 2\pi]$

g) $f(x) = \sqrt{5-4x}$, $[-1, 1]$

h) $f(x) = x^4 + 1$, $[-1, 3]$

26. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların

a) Kritik noktalarını bulunuz.

b) f' türev fonksiyonunun işaretini inceleyerek artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

c) Yerel minimum ve yerel maksimum noktalarını bulunuz.

1) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ 2) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$

3) $f(x) = (x-1)^2(x+2)$ 4) $f(x) = xe^{-x}$

27. $f : R \setminus \{0\} \to R$, $f(x) = x^2 + \dfrac{k}{x}$ fonksiyonu veriliyor. k ne olmalıdır ki f fonksiyonu

a) $x = 2$ de yerel minimuma

b) $x = -3$ de yerel minimuma,

c) $x = 1$ de büküm noktasına

sahip olsun. Bu fonksiyon bir yerel maksimuma sahip olabilir mi?

28. $x^2 - y^2 = 1$ hiperbolünün (0,1) noktasına en yakın olan noktasını bulunuz.

29. A(0, 5) noktasının $4y = x^2$ parabolüne olan uzaklığını bulunuz.

30. $x^2 + y^2 = 1$ çemberinin hangi noktası (3,4) noktasına en yakındır.

31. $f(x) = \arctan x - \arctan \dfrac{x}{4}$ eşitliği ile verilen f fonksiyonunun ekstrem değerini bulunuz.

32. a yarıçaplı bir çember içine çizilebilen dikdörtgenin alanı en fazla ne olabilir?

33. Köşeleri orijin, x– ekseni, y– ekseni ve $y = 4 - x^2$ parabolü üzerinde bulunan bir dikdörtgenin alanı en fazla ne olabilir?

34. İki köşesi x– ekseni, iki köşesi de $y = 16 - 3x^2$ parabolü üzerinde bulunan dikdörtgenler içinde alanı en büyük olanın alanını bulunuz.

35. Toplamları 1000 ve kareleri toplamı mümkün olduğu kadar küçük olan iki sayı bulunuz.

36. Yarıçapı a olan bir küre içine yerleştirilebilecek dairesel silindirin hacmi en fazla ne olabilir?

37. a yarıçaplı bir küre içine yerleştirilebilecek dairesel dik koniler içinde hacmi en fazla olanın hacmini hesaplayınız.

38. L uzunluğunda bir tel iki parçaya bölünerek bir çember ile bir kare yapılmak istenmektedir. Kare ile dairenin alanları toplamının en büyük olabilmesi için çemberin yarıçapı ne olmalıdır? Karenin kenar uzunluğu ile toplam alanı hesaplayınız.

39. Bir hareketlinin hızı, zamana bağlı olarak, $v = t\,(t + 2) + 2$ şeklinde değişmektedir. Bu hareketlinin minimum hızını bulunuz.

40. Bir doğru üzerinde hareket eden bir cismin ivmesi zamana bağlı olarak

$$a = \sin(t^2)\,.\,(t > 0)$$

biçiminde verilmektedir. Bu hareketlinin ivmesi ne zaman maksimum olur?

41. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $x + \frac{1}{x} \geq 2\,,$ $\quad (x > 0)$

b) $\tan x > x$ $\quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

c) $\frac{1}{1+x^2} < \arctan x < x$ $\quad (x > 0)$

d) $(1 + x)^{\alpha} \leq 1 + \alpha x\,,$ $\quad (x > -1 \text{ ve } 0 < \alpha < 1)$

e) $|\sin x - \sin t| \leq |x - t|$

f) $|\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|$

g) $\frac{x-a}{x} < \ln\frac{x}{a} < \frac{x-a}{a}\,,$ $\quad (0 < a < x)$

h) $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x\,,$ $\quad (x > 0)$

42. $f(x) = x - x^3$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna [0, 1] aralığında Rolle teoremi uygulanabilir mi? Uygulanabilirse teoreme uyan c sayısını bulunuz.

43. $e^x = 1 + x$ denkleminin $x = 0$ dan başka kökünün olmadığını gösteriniz.

44. Rolle teoreminden yararlanarak $5x^4 - 4x + 1 = 0$ denkleminin $(0, 1)$ aralığında bir köke sahip olduğunu gösteriniz.

45. $f(x) = x - x^3$ şeklinde tanımlanan $f : R \to R$ fonksiyonu $[-2, 1]$ aralığında ortalama değer teoreminin şartlarını sağlar mı? Sağlarsa teoremde adı geçen x_0 noktasını bulunuz.

46. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan eğrilerin konveks ve konkav olduğu aralıkları belirtiniz. Bu eğrilerin büküm noktalarını bulunuz.

a) $y = 2x^2 + 1$

b) $y = -2x^3 + 3x^2 - 12x$

c) $y = \frac{1}{x}$

d) $y = x^2 + \frac{1}{x}$

e) $y = e^{-x^2}$

47. Ortalama değer teoreminden yararlanarak

$$\sin(x + h) - \sin x = h \cdot \cos x_0$$

olacak şekilde bir $x_0 \in (x, x + h)$ sayısının varlığını gösteriniz.

48. $f(x) = \sin x$ ve $g(x) = \cos x$ şeklinde tanımlanan f ve g fonksiyonları $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında genelleştirilmiş ortalama değer teoreminin şartlarını sağlar mı? Sağlarsa bu teoremde adı geçen x_0 sayısını bulunuz.

49. Ortalama değer teoreminden faydalanarak Rolle Teoremini ispat ediniz.

50. Tek fonksiyonun türevinin çift, çift fonksiyonun türevinin tek fonksiyon olduğunu gösteriniz.

51. İspat ediniz ki, eğer $[a, b]$ aralığının her x noktasında $f'(x) = 0$ ise f sabit foksiyondur.

52. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığının her noktasında türevlenebilir olsun. f' fonksiyonunun $f'(a)$ ile $f'(b)$ arasındaki her değeri en az bir defa alabileceğini gösteriniz. **(Darboux Teoremi).**

53. Sıfır yerleri reel olan bir polinomun türevinin kompleks sıfır yerlerinin olmayacağını gösteriniz.

ÇÖZÜMLER

1. $y = x^3 - 6x + 2 \quad m = y'(x_0) = 3x_0^2 - 6 = 6 \Rightarrow 3x_0^2 = 12\,,\ x_0 = \pm 2$

$x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = -2$ olur.

Doğrunun denklemi $\Rightarrow y - y_0 = m\,(x - x_0) \Rightarrow y + 2 = 6\,(x - 2)$

$\Rightarrow y = 6x - 14$

$x_0 = -2$ ise $y_0 = 6$ bulunur.

Bu durumda doğru denklemi

$y - y_0 = m\,(x - x_0) \Rightarrow y - 6 = 6\,(x + 2) \Rightarrow y = 6x + 18$ olur.

2. $y' = \dfrac{1 + x^2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2} = \dfrac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} \Rightarrow m = y'(0) = 1$ olur.

Doğru denklemi $y - y_0 = m\,(x - x_0) \Rightarrow y = x$ olur.

3. (0, 3) ve (5, –2) noktalarından geçen doğrunun denklemi

$\dfrac{y - 3}{-2 - 3} = \dfrac{x - 0}{5 - 0} \Rightarrow y = 3 - x$

olur. Bu doğrunun eğimi $m = -1$ dir.

(x_0, y_0) noktasında $y = c\,(x + 1)^{-1}$ eğrisinin teğetinin denklemini bulalım.

$y_0 = \dfrac{c}{x_0 + 1}\,, \quad y' = \dfrac{-c}{(x + 1)^2} \Rightarrow y'(x_0) = \dfrac{-c}{(x_0 + 1)^2}$

$\Rightarrow y - \dfrac{c}{x_0 + 1} = \dfrac{-c}{(x_0 + 1)^2}(x - x_0) \Rightarrow y = \dfrac{-cx}{(x_0 + 1)^2} + \dfrac{cx_0}{(x_0 + 1)^2} + \dfrac{c}{x_0 + 1}\,.$

Bu doğru $y = 3 - x$ doğrusuna eşlenirse

$\dfrac{c}{(x_0 + 1)^2} = 1$ ve $\dfrac{cx_0}{(x_0 + 1)^2} + \dfrac{c}{x_0 + 1} = 3 \Rightarrow x_0 + \dfrac{c}{x_0 + 1} = 3$

$\Rightarrow x_0^2 - 2x_0 + (c - 3) = 0 \Rightarrow x_0^2 - 2x_0 + [\,(x_0 + 1)^2 - 3\,] = 0$

$\Rightarrow x_0^2 = 1$ bulunur. $x_0 = -1$ olamayacağından $x_0 = 1$ dir.

$c = (x_0 + 1)^2 = 4$ olur.

4. $y = \sqrt{2ax - x^2}$ eğrisinin $x = a$ noktasındaki teğetinin eğimi

$\Rightarrow y' = \dfrac{2a - 2x}{2\sqrt{2ax - x^2}} \Rightarrow y'(a) = 0$ dır. Dolayısıyla

$y' = \frac{a(a^2+x^2)-ax(2x)}{(a^2+x^2)^2} = 0$ olmalı.

$\Rightarrow a^3 - ax^2 = 0 \Rightarrow a^2 = x^2 \Rightarrow x = \pm a$

$x = a \Rightarrow y = \frac{a^2}{a^2+a^2} = \frac{1}{2}$, $x = -a \Rightarrow y = -\frac{a^2}{a^2+a^2} = -\frac{1}{2}$

bulunur. İstenen noktalar $\left(a, \frac{1}{2}\right)$ ve $\left(-a, -\frac{1}{2}\right)$ noktalarıdır.

5. Elipse (x_0 , y_0) noktasında çizilen teğetin eğimi

$2x + 8yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{4y} \Rightarrow m = y'(x_0 , y_0) = -\frac{x_0}{4y_0}$

$\Rightarrow$ Teğetin denklemi $y - y_0 = -\frac{x_0}{4y_0}(x - x_0) \Rightarrow 4y_0y - 4y_0^2 = x_0^2 - xx_0$

$\Rightarrow 4y_0y + xx_0 = x_0^2 + 4y_0^2$ (*)

olur. Bu doğru (4, 0) noktasından geçtiğinden $4x_0 = x_0^2 + 4y_0^2$ olmalıdır. Diğer taraftan (x_0 , y_0) elipsin bir noktası olduğundan $x_0^2 + 4y_0^2 = 4$ olur. Bu iki denklemden $x_0 = 1$ olduğu görülür.

$x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = \mp\frac{\sqrt{3}}{2}$ dir. (*) denkleminde,

$x_0 = 1$, $y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ alınırsa $6y + \sqrt{3}x - 4\sqrt{3} = 0$, $x_0 = 1$, $y_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ alınırsa $6y - \sqrt{3}x + 4\sqrt{3} = 0$ denklemi elde edilir.

6. $x^2 - 4y + 4 = 0$ parabolüne (x_0 , y_0) noktasında teğet olan doğruların denklemi :

$2x - 4y' = 0 \Rightarrow y' = \frac{x}{2} \Rightarrow y'\Big|_{(x_0,y_0)} = \frac{x_0}{2}$,

$\Rightarrow y - y_0 = \frac{x_0}{2}(x - x_0)$, $y - x\frac{x_0}{2} = y_0 - \frac{x_0^2}{2}$

olur. $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ bu denklemi sağlayacağından

$-\frac{3}{4}x_0 = y_0 - \frac{x_0^2}{2} \Rightarrow 2x_0^2 - 3x_0 - 4y_0 = 0$ ve

(x_0 , y_0) parabol üzerinde bulunduğundan $x_0^2 - 4y_0 + 4 = 0$ olur.

$\begin{cases} 2x_0^2 - 3x_0 - 4y_0 = 0 \\ x_0^2 - 4y_0 + 4 = 0 \end{cases}$ sistemi çözülerek $x_0 = 4$ veya $x_0 = -1$ bulunur.

Bu durumda $m_1 = 2$ ve $m_2 = -\frac{1}{2}$ olur. $m_1 \cdot m_2 = -1$ olduğundan teğetler diktir.

7. $x = -c$ doğrusu üzerindeki herhangi bir $(-c, k)$ noktasından çizilen teğet parabole (a, b) noktasında teğet olsun. (a, b) parabol üzerinde bulunduğundan

$$b^2 = 4ac \qquad (1)$$

dir. Parabole (a, b) noktasından çizilen teğetin eğimini bulalım.

$$y^2 = 4cx \Rightarrow 2yy' = 4c \Rightarrow bm = 2c \Rightarrow m = \frac{2c}{b}$$

olur. Dolayısıyla teğetin denklemi

$$y - b = \frac{2c}{b}(x - a)$$

olur. Teğet $(-c, k)$ noktasından geçtiğinden

$$k - b = \frac{2c}{b}(-c-a) \Rightarrow kb - b^2 = -2c^2 - 2ac$$

bulunur. (1) den $ac = \frac{b^2}{4}$ dir. Bu değer son eşitlikte yerine konur ve gerekli düzenleme yapılırsa

$$-b^2 + 2kb + 4c^2 = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri çarpımı

$$b_1 \cdot b_2 = -4c^2$$

dir. Teğetlerin eğimleri çarpımı

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{2c}{b_1} \cdot \frac{2c}{b_2} = \frac{4c^2}{b_1 b_2} = \frac{4c^2}{-4c^2} = -1$$

olacağından çizilen teğetler birbirine diktir.

8. $x^2 - 2xy + y^2 + 2x + y = 6 \Rightarrow 2x - 2y - 2xy' + 2yy' + 2 + y' = 0 \Rightarrow (2,2)$ noktası için $4 - 4 - 4m + 4m + 2 + m = 0 \Rightarrow m = -2$ bulunur. Teğetin denklemi

$$y - 2 = -2(x - 2) \Rightarrow y = -2x + 6$$

olur.

9. $y' = 2x + a$

$y'\Big|_{(2,4)} = 4 + a \Rightarrow 4 + a = 2 \Rightarrow a = -2$ olmalı.

(2, 4) parabol denklemini sağlayacağından $4 = 4 + (-2) \cdot 2 + b \Rightarrow b = 4$

10. $-x = x^3 - 6x^2 + 8x \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0$

$x(x^2 - 6x + 9) = 0 \Rightarrow x(x-3)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ ve $x_2 = x_3 = 3$

$\Rightarrow y_1 = 0,\ y_2 = y_3 = -3$ bulunur.

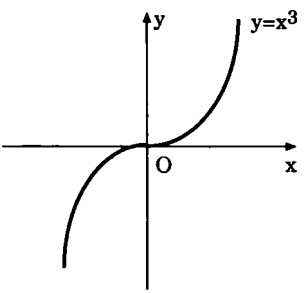
Doğru eğriyi (0, 0) da keser, (3, –3) de teğettir, çünkü

$y'(x) = 3x^2 - 12x + 8 \Rightarrow y'(3) = -1$ dir.

11. $y = x^3 \Rightarrow y'(0) = 0 = m$

Teğetin denklemi $y = mx \Rightarrow y = 0$ olur.

$y = 0$ doğrusu $y = x^3$ eğrisini orijinde keser.



12. $2x + 2yy' - 4 = 0,\ y' = \dfrac{4-2x}{2y} = \dfrac{2}{y} - \dfrac{x}{y}$

Çemberin (a, b) noktasından geçen teğetin denklemi

$y - b = \left(\dfrac{2}{b} - \dfrac{a}{b}\right)(x - a)$

olur. Bunun $y = mx$ olması dolayısıyla (0, 0) dan geçmesi gerekir.

(0,0) noktası için $-b = \left(\dfrac{2}{b} - \dfrac{a}{b}\right)(-a) \Rightarrow a^2 + b^2 - 2a = 0$

(a, b) çemberi sağladığından

$a^2 + b^2 - 4a + 3 = 0 \Rightarrow 4a - 3 - 2a = 0 \Rightarrow a = \dfrac{3}{2} \Rightarrow b = \mp\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow m_1 = \dfrac{2 - \frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}},\quad m_2 = \dfrac{2 - \frac{3}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

13. $xy = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{x} \Rightarrow x^2 - \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 3 \Rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = -2 \vee x_2 = 2$ olur.

$x_1 = 2 \Rightarrow y = 1$ ve $x_2 = -2 \Rightarrow y_2 = -1 \Rightarrow$ A(2, 1) ve B(–2, –1) kesim noktalarıdır.

A(2, 1) noktasındaki teğetlerin eğimleri, $y = \frac{2}{x} \Rightarrow y' = -\frac{2}{x^2}$

$\Rightarrow m_1 = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$, $x^2 - y^2 = 3 \Rightarrow 2x - 2yy' = 0 \Rightarrow 4 - 2m_2 = 0$

$\Rightarrow m_2 = 2$ olur. $m_1 . m_2 = \left(-\frac{1}{2}\right) 2 = -1$ olduğundan (2, 1) noktasındaki teğetler birbirine diktir.

B(–2, –1) noktasında $y' = -\frac{2}{x^2} \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{2}$, $2x - 2yy' = 0 - 4 + 2m_2 = 0$

$\Rightarrow m_2 = 2$ olur. $m_1 . m_2 = -1$ olduğundan bu noktadan eğrilere çizilen teğetler de birbirine diktir.

14. $x^{2/3} + (-x)^{2/3} = a^{2/3} \Rightarrow 2x^{2/3} = a^{2/3} \Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{a}{2\sqrt{2}}$, $y_{1,2} = \mp \frac{a}{2\sqrt{2}}$

$\frac{2}{3} x^{-1/3} + \frac{2}{3} y^{-1/3} . y' = 0$, $y' = -\frac{x^{-1/3}}{y^{-1/3}} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3} \Rightarrow m = y'\Big|_{\left(\pm\frac{a}{2\sqrt{2}}, \mp\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)} = 1$

olacağından teğetlerin denklemleri

$y \mp \frac{a}{2\sqrt{2}} = \left(x \pm \frac{a}{2\sqrt{2}}\right) \Rightarrow x - y = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}$

olur.

15. $y^2 = 4px \Rightarrow 2yy' = 4p \Rightarrow y' = \frac{2p}{y} \Rightarrow m = y'\Big|_{(x_1, y_1)} = \frac{2p}{y_1}$

olur. (x_1, y_1) noktasından çizilen teğetin denklemi

$y - y_1 = \frac{2p}{y_1}(x - x_1) \Rightarrow yy_1 - y_1^2 = 2p(x - x_1) \Rightarrow$

$yy_1 = 2px + y_1^2 - 2px_1$, $yy_1 = 2px + 4px_1 - 2px_1 \Rightarrow yy_1 = 2p(x + x_1)$

16. $\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0$, $y' = -\frac{xb^2}{ya^2} \Rightarrow m = y'\Big|_{(x_1,y_1)} = -\frac{x_1b^2}{y_1a^2}$, (x_1, y_1) elips üzerinde olduğundan $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \Rightarrow y - y_1 = -\frac{x_1b^2}{y_1a^2}(x - x_1)$

$\Rightarrow yy_1a^2 - (y_1)^2a^2 = -x_1xb^2 + x_1^2b^2$

$yy_1a^2 + xx_1b^2 = (y_1)^2a^2 + (x_1)^2b^2 \Rightarrow \frac{x.x_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{(x_1)^2}{a^2} + \frac{(y_1)^2}{b^2} \Rightarrow \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$

olur.

17. $y' = 1 - 2x \Rightarrow y'(0) = 1$

$x = 0$ ise $y = 0$ olur. $y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x$

$\tan\theta = m = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

18. x eksenini kestiği noktada $y = 0$ dır.

$0 = \arcsin\frac{x-1}{2} \Rightarrow \sin 0 = \frac{x-1}{2} \Rightarrow 0 = \frac{x-1}{2} \Rightarrow x = 1$

$y' = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}} \Rightarrow y'(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{1}{2}$ olur.

Teğet denklemi $y = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow x - 2y = 1$ olur.

$m_T \cdot m_N = -1 \Rightarrow m_N = -2$ bulunur. Buna göre Normalin denklemi

$y = -2(x - 1) \Rightarrow y + 2x = 2$

olur.

19. $y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t + t\cos t}{\cos t - t\sin t} \Rightarrow m = y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{4+\pi}{4-\pi}$ olur.

Teğet denklemi $y - \frac{\pi}{4}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4+\pi}{4-\pi}\left(x - \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$(4 + \pi)x + (\pi - 4)y = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi^2$ olur.

20. **(a)** Eğrilerin kesim noktaları :

$\left.\begin{matrix} y^2 = 6x + 9 \\ y^2 = 9 - 6x \end{matrix}\right\} \Rightarrow 6x + 9 = 9 - 6x \Rightarrow 12x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3$

olacağından eğriler A(0, 3) ve B(0, –3) noktalarında kesişirler. A(0, 3) noktasında eğrilere çizilen teğetlerin eğimleri :

$2yy' = 6 \Rightarrow 2.3\ m = 6 \Rightarrow m_1 = 1$

$2yy' = -6 \Rightarrow 2.3\ m = -6 \Rightarrow m_2 = -1$ olur. $m_1 . m_2 = 1.(-1) = -1$

olduğundan teğetler, dolayısıyla eğriler, A(0, 3) noktasında dik kesişirler. B(0, –3) de dik kesiştikleri benzer şekilde gösterilebilir.

(b) Eğrilerin kesim noktaları :

$\left.\begin{matrix} x^2 - y^2 = 5 \\ 4x^2 + 9y^2 = 72 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 9x^2 - 9y^2 = 45 \\ 4x^2 + 9y^2 = 72 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 13x^2 = 117 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

$\Rightarrow 9 - y^2 = 5 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$ olur.

Eğriler A(3, 2), B(–3, 2), C(3, –2), D(–3, –2) noktalarında kesişirler.

A(3, 2) noktasında eğrilere çizilen teğetlerin eğimleri :

$2x - 2yy' = 0 \Rightarrow 2.3 - 2.2\ m_1 = 0 \Rightarrow m_1 = \frac{3}{2}$

$8x + 18yy' = 0 \Rightarrow 8.3 + 18.2\ m_2 = 0 \Rightarrow m_2 = -\frac{2}{3}$

olur. $m_1 . m_2 = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1$ olduğundan teğetler, dolayısıyla eğriler dik kesişirler.

B, C, D noktalarındaki durum benzer şekilde gösterilebilir.

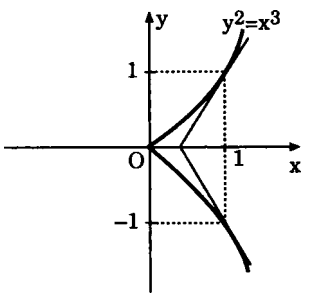
21. $x_1 = 0 \Rightarrow y_2 = 0$

$x_2 = 1 \Rightarrow y_2 = -1$, $y_3 = 1$

$y = \pm x^{3/2}$ için $y' = \pm \frac{3}{2} x^{1/2}$ olacağından

(0, 0) da $m = y'(0) = 0$ dır.

Teğetin denklemi $y = 0$ dır.



$2yy' = 3x^2$, $y' = \frac{3}{2}\frac{x^2}{y}$, $y'\Big|_{x=0} = 0$, $y'\Big|_{(1,1)} = \frac{3}{2}$, $y'\Big|_{(1,-1)} = -\frac{3}{2}$

$y - 0 = 0\ (x - 0)$,	$y - 1 = \frac{3}{2}(x - 1)$,	$y + 1 = -\frac{3}{2}(x - 1)$
$\Rightarrow y = 0$	$y = \frac{1}{2}(3x - 1)$,	$y = -\frac{1}{2}(3x - 1)$

22. $mx^{m-1}y^n + nx^m y^{n-1}.y' = 0$, $y' = -\dfrac{mx^{m-1}y^n}{nx^m y^{n-1}} = -\dfrac{m}{n}\dfrac{y}{x}$,

$y'\Big|_{(x_0,y_0)} = \dfrac{m}{n}\dfrac{y_0}{x_0} \Rightarrow$ Teğet denklem

$y - y_0 = \dfrac{my_0}{nx_0}(x - x_0)$, $nx_0(y - y_0) + my_0(x - x_0) = 0$ dır.

23. Teğetin değme noktası (a, b) olsun. Eğimini bulalım.

$4x^2 + y^2 = 72 \Rightarrow 8x + 2yy' = 0 \Rightarrow 4a + bm = 0 \Rightarrow m = -\dfrac{4a}{b}$

olur. Teğetin denklemi

$y - b = -\dfrac{4a}{b}(x - a) \Rightarrow by - b^2 + 4ax - 4a^2 = 0$

olur. Bu doğru (4, 4) noktasından geçtiğinden

$-4a^2 - b^2 + 16a + 4b = 0$

olur. (a, b) , $4x^2 + y^2 = 72$ eğrisi üzerinde bulunduğundan

$4a^2 + b^2 = 72$ olur.

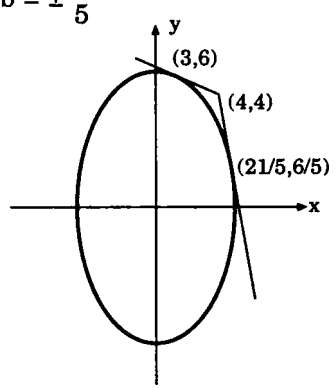
$\left.\begin{matrix} -4a^2 - b^2 + 16a + 4b = 0 \\ 4a^2 + b^2 - 72 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 16a + 4b - 72 = 0 \Rightarrow b = 18 - 4a$

$\Rightarrow 4a^2 + (18 - 4a)^2 = 72 \Rightarrow 5a^2 - 36a + 63 = 0$ bulunur. Bu denklemin kökleri $a_1 = 3$, $a_2 = \dfrac{21}{5}$ dir.

$a = 3$ için $4.9 + b^2 = 72 \Rightarrow b^2 = 36 \Rightarrow b = \pm 6$,

$a = \dfrac{21}{5}$ için $4 \cdot \dfrac{441}{25} + b^2 = 72 \Rightarrow b^2 = \dfrac{36}{25} \Rightarrow b = \pm\dfrac{6}{5}$

olur. Yandaki şekilden de görüldüğü gibi değme noktaları A(3, 6) ve $B\left(\dfrac{21}{5}, \dfrac{6}{5}\right)$ dir.



Teğetlerin denklemleri :

$8x + 2yy' = 0 \Rightarrow 8.3 + 2.6\,m_1 = 0 \Rightarrow m_1 = -2$

$y - 6 = -2(x - 3) \Rightarrow y = -2x + 12$ ve

$8 \cdot \dfrac{21}{5} + 2 \cdot \dfrac{6}{5} m_2 = 0 \Rightarrow m_2 = -14$,

$y - \dfrac{6}{5} = -14\left(x - \dfrac{21}{5}\right) \Rightarrow y = -14x + 60$ olur.

24. $f'(x) = 4x^3 + 2cx = 0 \Rightarrow 2x(2x^2 + c) = 0$, $x = 0$ ve $x = \mp\sqrt{\frac{-c}{2}}$

$c > 0$ olsun. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		−	0	+	
f		↘		↗	

$(-\infty, 0)$ da azalan

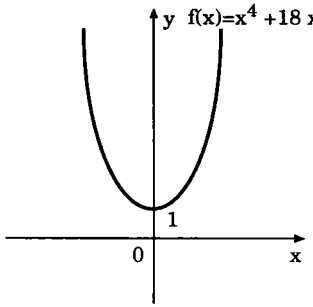
$(0, +\infty)$ da artandır.

$c < 0$ olsun.

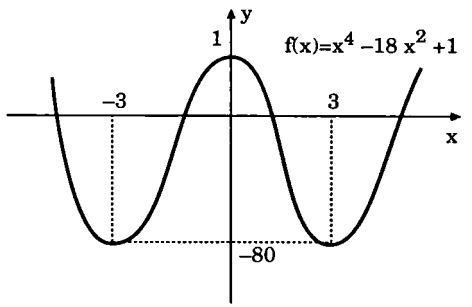
x		$-\sqrt{-c/2}$		0		$\sqrt{-c/2}$	
f'	−	0	+	0	−	0	+

$\left(-\infty, -\sqrt{\frac{-c}{2}}\right)$ ve $\left(0, \sqrt{\frac{-c}{2}}\right)$ de azalan, $\left(-\sqrt{\frac{-c}{2}}, 0\right)$ ve $\left(\sqrt{\frac{-c}{2}}, +\infty\right)$ da artan

C=18 ise



C=−18 ise



25. a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $[-3, 10]$, $f'(x) = 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

x		−3		3/2		10
f '(x)			−	0	+	
f(x)		20	↘	−1/4	↗	72

$x = \frac{3}{2}$ mutlak minumum nokta, $f(\frac{3}{2}) = -\frac{1}{4}$ mutlak minimum değer

$x = 10$ mutlak maksimum nokta, $f(10) = 72$ mutlak maksimum değer

b) $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $I = [-2, 10]$

x		−2		3/2		10
f′(x)			−	0	+	
f(x)		12		−1/4		72

$x = \frac{3}{2}$ mutlak minimum nokta, $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ mutlak minimum değer

$x = 10$ mutlak maksimum nokta, $f(10) = 72$ mutlak maksimum değer

c) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $\left[\frac{1}{10}, 10\right]$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \mp 1$

x		1/10		1		10
f′(x)			−	0	+	
f(x)		$\frac{101}{10}$	↘	2	↗	$\frac{101}{10}$

$x = \frac{1}{10}$ ve $x = 10$ mutlak maksimum nokta, $f(10) = \frac{101}{10}$ mutlak maksimum değer

$x = 1$ mutlak minimum nokta, $f(1) = 2$ mutlak minimum değer

d) $f(x) = 2^x$, $[-1, 5]$

$f'(x) = 2^x \ln 2 > 0$ monoton artan fonksiyon

$x = -1$ mutlak minumum nokta,

$f(-1) = \frac{1}{2}$ mutlak minimum değerdir.

$x = 5$ mutlak maksimum nokta,

$f(5) = 32$ mutlak maksimum değerdir.

e) $f(x) = \frac{x^2 + 100}{x^2 - 25}$, $[-1, 3]$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-25) - 2x(x^2+100)}{(x^2-25)^2} = \frac{-250x}{(x^2-25)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x		−1		0		3
f′(x)			−	0	+	
f(x)		$-\frac{101}{24}$	↗	−4	↘	$-\frac{109}{16}$

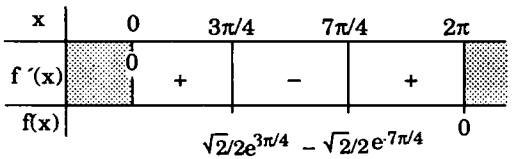
x = 0 mutlak maksimum nokta, f(0) = –4 mutlak maksimum değerdir.

x = 3 mutlak minimum nokta, $f(3) = -\frac{109}{10}$ mutlak minimum değerdir.

f) $f(x) = e^x \sin x$, $I = [0, 2\pi]$

$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x)$,

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3\pi}{4}$, $x_2 = \frac{7\pi}{4}$



Mutlak maksimum değer $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}$

Mutlak minumum değer $f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{7\pi}{4}}$

g) $f(x) = \sqrt{5-4x}$, $[-1, 1]$

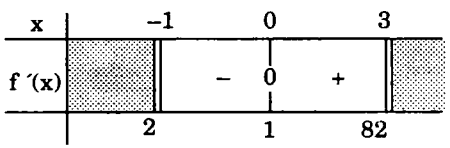
$f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{5-2x}} < 0$ azalan bir fonksiyon

x = –1 mutlak maksimum nokta, f(–1) = 3 mutlak maksimum değerdir.

x = 1 mutlak minumum nokta, f(1) = 1 mutlak minumum değerdir.

h) $f(x) = x^4 + 1$, $[-1, 3]$

$f'(x) = 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$



x = 0 mutlak minumum noktâ, f(0) = 1 mutlak minumum değerdir.

x = 3 mutlak maksimum nokta, f(3) = 82 mutlak maksimum değerdir.

26. 1) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

a) $f'(x) = \dfrac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \mp 1$

b)

x		−1		1	
f′	−		+	0	−
f	↘	−1/2	↗	1/2	↘

$(-\infty, -1)$ ve $(1, \infty)$ da azalan $(-1, 1)$ de artan

c) $x = -1 \Rightarrow f(-1) = -\dfrac{1}{2}$, $x = 1 \Rightarrow f(1) = \dfrac{1}{2}$

$\left(-1, -\dfrac{1}{2}\right)$ yerel minumum, $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ yerel maksimum noktalardır.

2) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$

a) $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \mp 1$

b)

x		−1		0		1	
f′	+	0	−	‖	−	0	+
f	↗	−2	↘	‖	↘	2	↗

$(+\infty, -1)$ ve $(1, \infty)$ da artan, $(-1, 0)$ ve $(0, 1)$ de azalan

c) $x = 1 \Rightarrow f(1) = 2$, $x = -1 \Rightarrow f(-1) = -2$

$(1, 2)$ yerel minumum, $(-1, -2)$ yerel maximum noktadır.

3) $f(x) = (x-1)^2 (x + 2)$

a) $f'(x) = 2(x-1)(x+2) + (x-1)^2 = (x-1)(2(x+2) + x - 1) = (x-1)(3x+3)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ve $x = -1$

b)

x		−1		1	
f′	+	0	−	0	+
f	↗		↘		↗

$(-\infty, -1)$ ve $(1, +\infty)$ da artan $(-1, 1)$ de azalan

c) $f(-1) = 4,\ f(1) = 0$

$(-1, 4)$ noktası yerel maksimum, $(1, 0)$ noktası yerel maksimum noktadır.

4) $f(x) = xe^{-x}$

a) $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

b)

x		1	
f′	+	0	−
f	↗	1/e	↘

$(-\infty, 1)$ de artan, $(1, \infty)$ da azalan

c) $f(1) = e^{-1}$ olduğundan $(1, e^{-1})$ yerel maksimum noktasıdır.

27. a) $f'(x) = 2x - \frac{k}{x^2} = 0\ ,\ 2x^3 = k \Rightarrow x = 2$ olduğundan $k = 16$

$f''(x) = 2 + \frac{2k}{x^3} \Rightarrow f''(2) = 2 + \frac{2.16}{2} = 18 > 0 \Rightarrow x = 2$ yerel minumum noktasıdır.

b) $f'(x) = 2x - \frac{k}{x^2} = 0,\ f'(-3) = 0 \Rightarrow -6 - \frac{k}{9} = 0 \Rightarrow k = -54$

$f''(-3) = 2 + \frac{2.(-54)}{(-3)^3} = 2 + 4 = 6 > 0 \Rightarrow x = -3$ yerel minumum noktasıdır.

c) $f''(x) = 2 + \frac{2k}{x^3} = 0 \Rightarrow x^3 = -k\ ,\ x = 1 \Rightarrow k = -1$

$f''(1) = 2 + \frac{2.(-1)}{1} = 0\ ,\ f'''(x) = -\frac{6k}{x^4}\ ,$

$f'''(1) = -\frac{6.(-1)}{1} = 6 \neq 0 \Rightarrow$ yerel maksimum olmaz.

28. Eğri üzerinde aranan nokta $A\left(x, \sqrt{x^2 - 1}\right)$,

bu noktanın $(0, 1)$ noktasına uzaklığı

$$d = \sqrt{x^2 + \left(\sqrt{x^2 - 1} - 1\right)^2}$$

dir. d yi minumum yapan değer $f(x) = x^2 + \left(\sqrt{x^2-1} - 1\right)^2$ fonksiyonunu minumum yapan değerdir. Bu fonksiyon $x \geq 1$ ve $x \leq -1$ için tanımlıdır.

$$f'(x) = 2x + 2\left(\sqrt{x^2-1} - 1\right)\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = 4x - \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{4x\sqrt{x^2-1} - 2x}{\sqrt{x^2-1}} = 0 \Leftrightarrow 2x\left(2\sqrt{x^2-1} - 1\right) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ve } x = \mp\frac{\sqrt{5}}{2}$$

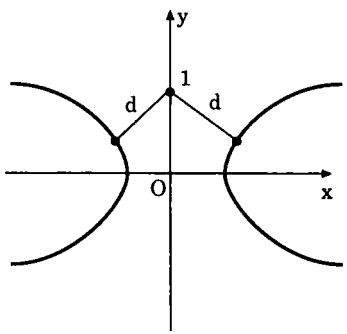
bulunur.

$$f''(x) = 4 - \frac{2}{(x^2-1)^{3/2}}$$

$f''\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) < 0$ olduğundan $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ bir yerel minumum noktasıdır.

$f''\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) < 0$ olduğundan $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ bir yerel minumum noktasıdır.

Hiperbolün (0,1) noktasına en yakın noktalar, $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ve $\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ noktalarıdır.



29. Parabolün üzerindeki nokta $\left(x, \frac{x^2}{4}\right)$ biçimindedir. Bu noktanın (0,5) noktasına uzaklığı d olsun.

$d = \sqrt{x^2 + \left(5 - \frac{x^2}{4}\right)^2}$ ifadesini, dolayısı ile $f(x) = x^2 + \left(5 - \frac{x^2}{4}\right)^2$ fonksiyonunu minumum yapan x noktasını bulmalıyız.

$$f'(x) = 2x + 2\left(5 - \frac{x^2}{4}\right)\left(-\frac{x}{2}\right) = x\left(\frac{x^2}{4} - 3\right)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x\left(\frac{x^2}{4} - 3\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ve } x = \mp 2\sqrt{3}$$

$f''(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3$, $f''(0) = -3 < 0$, 0'da yerel maksimum,

$f''\left(\mp 2\sqrt{3}\right) = 6 > 0$, $\mp 2\sqrt{3}$ noktaları yerel minumum noktalarıdır.

$d\left(\mp 2\sqrt{3}\right) = \sqrt{12 + (5-3)^2} = \sqrt{12+4} = 4$ olur.

30. Çember üzerindeki nokta $\left(x,\sqrt{1-x^2}\right)$. Bu noktanın (3,4) noktasına uzaklığı d olsun. $d=\left((x-3)^2+\left(\sqrt{1-x^2}-4\right)^2\right)^{1/2}$ olur. Bu ifadeyi minumum yapan, dolayısı ile $f(x)=(x-3)^2+\left(\sqrt{1-x^2}-4\right)^2$ fonksiyonunu minumum yapan x noktasını bulmalıyız.

$f'(x)=-6+\frac{8x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{5}$, $x=\frac{3}{5} \Rightarrow y=\frac{4}{5} \Rightarrow$ aranan nokta $\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$ noktasıdır.

31. $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{\frac{1}{4}}{1+\left(\frac{x}{4}\right)^2}=\frac{1}{1+x^2}-\frac{4}{16+x^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{1+x^2}-\frac{4}{16+x^2}=\frac{-3x^2+2}{(1+x^2)(16+x^2)} \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-12=0$

$\Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\mp 2$

$x=-2$ yerel minimum, $x=2$ yerel maksimum noktasıdır.

$f(x)=\arctan x-\arctan\frac{x}{4}=-\arctan\frac{x-\frac{x}{4}}{1+\frac{x^2}{4}}=-\arctan\frac{3x}{4+x^2}$

Yerel maksimum değer

$f(2)=-\arctan\frac{3}{4}$,

Yerel minimum değer

$f(-2)=\arctan\frac{3}{4}$

olur.

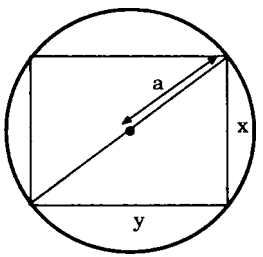
x		-2		2	
f′	−		+	0	−
f	↘		↗		↘

32. $x^2+y^2=a^2$, $A=x.y=x.\sqrt{a^2-x^2}$

$A'(x)=\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$A'(x)=0 \Leftrightarrow x^2=a^2-x^2$

$\Rightarrow 2x^2=a^2$, $x=\frac{a}{\sqrt{2}}$



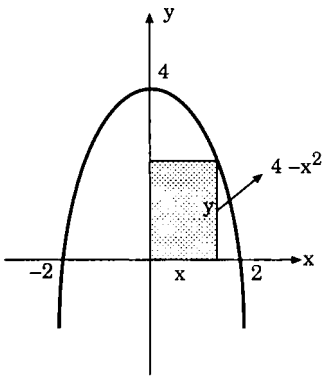
Dikdörtgenin alanı en fazla

$A(2)=\frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{a^2-\frac{a^2}{2}}=\frac{a^2}{2}$ olur.

33. $A = x.y = x(4 - x^2)$

$A'(x) = 4 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$A_{max} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(4 - \frac{4}{3}\right) = \frac{16\sqrt{3}}{9}$



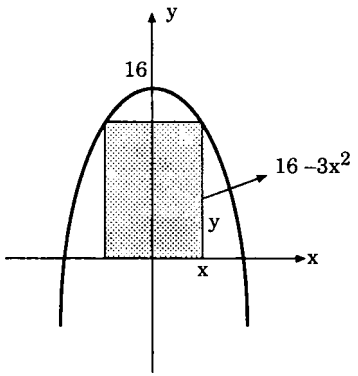
34. $\frac{A}{2} = x(16 - 3x^2)$

$A = 2x(16 - 3x^2)$

$A'(x) = 32 - 18x^2$

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$

$A_{max} = 2 \cdot \frac{4}{3}\left(16 - \frac{16}{3}\right) = \frac{8}{3} \cdot \frac{32}{3} = \frac{256}{9}$



35. $x + y = 1000$, $x^2 + y^2 = f(x, y)$ ifadesini minimum yapan x ve y bulunacaktır. $y = 1000 - x$ olduğundan

$F(x) = x^2 + (1000 - x)^2$ fonksiyonunu minumum yapan noktayı bulalım.

$F'(x) = 4x - 2000 = 0 \Leftrightarrow x = 500 \Rightarrow y = 500$. O halde bu iki sayı 500 ve 500 dür.

36. $V = \pi r^2 . h$

$(2r)^2 + h^2 = (2a)^2$

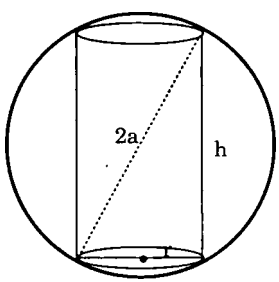
$h^2 = 4(a^2 - r^2)$

$h = 2\sqrt{a^2 - r^2}$

$V(r) = 2\pi r^2 \sqrt{a^2 - r^2}$

$V'(r) = 4\pi r \sqrt{a^2 - r^2} - \frac{2\pi r^3}{\sqrt{a^2 - r^2}}$

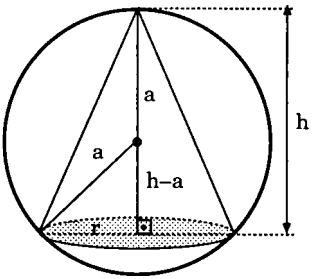
$V'(r) = 0 \Leftrightarrow 4\pi r \sqrt{a^2 - r^2} - \frac{2\pi r^3}{\sqrt{a^2 - r^2}} = 0$



$$\Leftrightarrow 4\pi r(a^2 - r^2) = 2\pi r^3 \Leftrightarrow a^2 - r = \frac{r^2}{2} \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$$

$$V = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a\right)^2 .2\sqrt{a^2 - \frac{2}{3}a^2} = \frac{4}{3}a^2 \cdot \pi \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi a^3$$

37. $r^2 = a^2 - (h-a)^2 = 2ah - h^2$ olduğundan



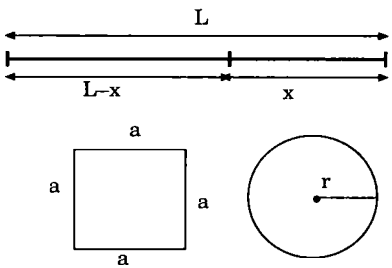
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}(2ah - h^2)h = \frac{\pi}{3}(2ah^2 - h^3)$$

$$V'(h) = \frac{\pi}{3}(4ah - 3h^2) = 0 \Rightarrow h = \frac{4a}{3}$$

Maksimum hacim

$$V\left(\frac{4a}{3}\right) = \frac{\pi}{3}\left(2a \cdot \frac{16a^2}{9} - \frac{64}{27}a^3\right) = \frac{32}{81}\pi a^3$$

38.



a=L –x/4 r=x/2π

P(x) ile karenin ve çemberin alanları toplamını gösterelim.

$$P(x) = \left(\frac{L-x}{4}\right)^2 + \pi \cdot \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2$$

$$P'(x) = -\frac{(L-x)}{8} + \frac{x}{2\pi} = \frac{\pi x - L\pi + 4x}{8\pi}$$

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow x(\pi + 4) - L\pi = 0 \Leftrightarrow x = \frac{L\pi}{\pi + 4}$$

$$r = \frac{x}{2\pi} = \frac{L}{2(\pi + 4)}$$

$$P\left(\frac{L\pi}{\pi + 4}\right) = \left(\frac{L}{4} - \frac{L\pi}{4(n+4)}\right)^2 + \pi\left(\frac{L}{2(\pi + 4)}\right)^2 = \frac{L^2}{4\pi + 16}$$

39. $V' = t - 2 + t = 2t - 2$

$V' = 0 \Leftrightarrow t = 1$, $V(1) = (1)(-1) + 2 = 1$

40. $a'(t) = 2t \cos(t^2)$

$a'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ veya $\cos(t^2) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ veya

$t^2 = (2k - 1)\frac{\pi}{2}$ $(k = \mp 1, \mp 2, \ldots) \Leftrightarrow t = \sqrt{(2k-1)\frac{\pi}{2}}$

41. **a)** $x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad (x > 0)$

$f(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \mp 1$

x	0		1	
f '(x)	▒▒	−	0	+
f(x)	▒▒	↘		↗

f(x) fonksiyonu minimum değerini 1 de alır.

$f(1) \leq f(x) \Rightarrow 2 \leq x + \frac{1}{x}$ gerçeklenir.

b) $\tan x > x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

[0, x] aralığında tan x fonksiyonuna ortalama değer teoremini uygulayalım.

$$\frac{\tan x - \tan 0}{x - 0} = 1 + \tan^2 c, \quad 0 < c < x \Rightarrow \frac{\tan x}{x} = 1 + \tan^2 c > 1$$

$$\Rightarrow \frac{\tan x}{x} > 1 \Rightarrow \tan x > x$$

c) $\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x \quad (x > 0)$

arc tan x fonksiyonuna [0, x] aralığında ortalama değer teoremini uygulayalım.

$$\frac{\arctan x - \arctan 0}{x - 0} = \frac{1}{1+c^2}, \quad 0 < c < x \Rightarrow \frac{\arctan x}{x} = \frac{1}{1+c^2}$$

$0 < c < x$ için $\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c^2} < 1$ olduğundan $\frac{1}{1+x^2} < \frac{\arctan x}{x} < 1$

bulunur. $x > 0$ olduğundan $\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$ elde edilir.

d) $(1+x)^{\alpha} \le 1 + \alpha x \qquad (x > -1 \text{ ve } 0 < \alpha < 1)$,

$f(x) = (1+x)^{\alpha}$ fonksiyonuna $[0, x]$ aralığında ortalama değer teoremi uygulanırsa

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(c) \Rightarrow \frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x-0} = \alpha\,(1+c)^{\alpha-1}$$

bulunur. Buradan $0 < c < x$ ve $x > -1$ olduğundan

$$\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} < \alpha\,(1+0)^{\alpha-1} = \alpha \Rightarrow (1+x)^{\alpha} < \alpha x + 1$$

bulunur. $x = 0$ için eşitlik durumu elde edilir.

e) $|\sin x - \sin t| < |x - t|$

$f(x) = \sin x$ fonksiyonuna $[t, x]$ aralığında ortalama değer teoremi uygulanırsa

$$\frac{\sin x - \sin t}{x-t} = \cos(c) \qquad t < c < x$$

$$\left|\frac{\sin x - \sin t}{x-t}\right| = |\cos(c)| \le 1 \Rightarrow |\sin x - \sin t| \le |x-t| \text{ bulunur.}$$

f) e) şıkkındaki yolla yapılır.

g) $\frac{x-a}{x} < \ln\frac{x}{a} < \frac{x-a}{a}$, $0 < a < x$

$[a, x]$ aralığında $f(x) = \ln x$ fonksiyonuna ortalama değer teoremi uygulanırsa

$$\frac{\ln x - \ln a}{x-a} = \frac{1}{c}, \quad a < c < x \text{ yazılabilir.}$$

$$a < c \Rightarrow \frac{1}{c} < \frac{1}{a}, \quad c < x \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{\ln x - \ln a}{x-a} < \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{x-a}{x} < \ln x - \ln a < \frac{x-a}{a} \Rightarrow \frac{x-a}{x} < \ln\frac{x}{a} < \frac{x-a}{a} \text{ elde edilir.}$$

h) $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$, $(x > 0)$

$f(x) = \ln(1+x)$ fonksiyonuna $[0, x]$ aralığında, ortalama değer teoremi uygulanırsa,

$$\frac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x-0} = \frac{1}{1+c} \Rightarrow \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+c}, \quad 0 < c < x .$$

$$\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} < 1 \Rightarrow \frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1 \Rightarrow \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

42. $f(x) = x - x^3$ fonksiyonu $[0, 1]$ de sürekli $\forall x \in (0, 1)$ için türevlenebilir ve $f(1) = f(0) = 0$ şartları sağlandığından Rolle teoremi uygulanabilir.

$\Rightarrow f'(c) = 0$ olacak şekilde $c \in (0, 1)$ vardır.

$f'(x) = 1 - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}$

$x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \notin (0, 1) \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{3}}$

43. $x = 0 \Rightarrow e^0 = 1 + 0 \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow x = 0$ bir köktür. Kabul edelim ki verilen denklemin $x = 0$ dan başka x_0 gibi bir kökü daha vardır. Bu durumda $e^x - x - 1 = 0$ ve $f(x) = e^x - x - 1$ denilirse $f(0) = f(x_0) = 0$ dır. f fonksiyonu Rolle Teoreminin hipotezlerini sağladığından

$\exists c \in (0, x_0)$ vardır $\ni f'(c) = 0$ dır $\Rightarrow f'(x) = e^x - 1 \Rightarrow f'(c) = e^c - 1 = 0$ $\Rightarrow e^c = 1 \Rightarrow c = 0$. Bu ise bir çelişkidir. Yani $c \in (0, x_0)$ olmalıdır. O halde verilen denklemin $x_0 = 0$ dan başka kökü yoktur.

44. $f(x) = x^5 - 2x^2 + x$ denirse $f(0) = f(1) = 0$ dır. Rolle teoreminden, (0,1) aralığındaki en az bir c için $f'(c) = 0$ dır.

$f'(x) = 5x^4 - 4x + 1$ olduğundan $(0, 1)$ aralığında $5c^4 - 4c + 1 = 0$ olacak şekilde en az bir c vardır.

45. $f(x) = x - x^3$ fonksiyonu $[-2, 1]$ aralığında sürekli ve $(-2, 1)$ aralığında da türevlenebilir olduğundan ortalama değer teoreminin şartlarını sağlar.

$f'(x) = 1 - 3x^2$ olduğundan

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(1)-f(-2)}{1+2} = \frac{0-6}{3} = 1 - 3x_0^2, \quad -2 < x_0 < 1$$

$\Rightarrow 3x_0^2 = 3 \Rightarrow x_0^2 = 1 \Rightarrow x_0 = \mp 1$

$x_0 \in (-2, 1)$ olduğundan $x_0 = -1$ olmalıdır.

46. a) $y = 2x^2 + 1$

$y' = 4x$, $y'' = 4 > 0 \Rightarrow$ y fonksiyonu $(-\infty, \infty)$ da konvekstir.

b) $y = -2x^3 + 3x^2 - 12x$

$y' = -6x^2 + 6x - 12$

$y'' = -12x + 6$

x		1/2	
y''	+	0	−
y	Konveks		Konkav

fonksiyon $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ aralığında konveks, $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ aralığında konkavdır.

$y\left(\frac{1}{2}\right) = -2\cdot\frac{1}{8} + 3\cdot\frac{1}{4} - 12\cdot\frac{1}{2} = -\frac{11}{2}$

Konvekslikten konkavlığa geçtiği nokta olan $\left(\frac{1}{2}, -\frac{11}{2}\right)$ noktası büküm noktasıdır.

c) $y = \frac{1}{x}$, $y' = -\frac{1}{x^2}$, $y'' = \frac{2}{x^3}$

x		0	
y''	−	‖	+

$(-\infty, 0)$ aralığında konkav, $(0, +\infty)$ da konvekstir. Büküm noktası yoktur. Zira fonksiyon $x = 0$ da tanımsızdır.

d) $y = x^2 + \frac{1}{x}$

$y' = 2x - \frac{1}{x^2}$, $y'' = 2 + \frac{2}{x^3} = \frac{2x^3+2}{x^3}$

		−1		0	
x^3	−		−	0	+
$2x^3+2$	−	0	+		+
$\frac{2x^3+2}{x^3}$	+	0	−	‖	+

$\Rightarrow (-\infty, -1)$ ve $(0, \infty)$ da konveks, $(-1, 0)$ da konkav, $(-1, 0)$ noktası büküm noktası

e) $y = e^{-x^2}$

$y' = -2xe^{-x^2}$, $y'' = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$

x		$-1/\sqrt{-2}$		$1/\sqrt{2}$	
y''	+	0	−	0	+

$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ve $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ da konveks, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ de konkavdır.

$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, e^{-1/2}\right)$ noktaları büküm noktalarıdır.

47. $h > 0$ dır. $[x, x+h]$ aralığında $f(x) = \sin x$ fonksiyonuna O.D.T. uygulanırsa

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{x+h-x} = \cos x_0, \quad x < x_0 < x+h$$

$$\Rightarrow \sin(x+h) - \sin x = h \cos x_0$$

bulunur.

48. f ve g fonksiyonları $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında sürekli ve $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında türevlenebilirdir. Ayrıca $g'(x) = -\sin x$ fonksiyonunun $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında bir kökü olmadığından genelleştirilmiş ortalama değer teoreminin şartları sağlanır. Buna göre

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

olacak şekilde en az bir x_0 noktası vardır

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0}{\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0} = \frac{\cos x_0}{-\sin x_0} \Rightarrow x_0 \in (a, b) \Rightarrow \cot x_0 = 1 \Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{4}$$

49. $f : [a, b] \to R$ fonksiyonu sürekli ve $\forall x \in (a, b)$ noktasında türevlenebilir olsun. $f(a) = f(b)$ ise (a, b) aralığında $f'(c) = 0$ olacak şekilde bir c sayısının varlığını göstereceğiz. Bu hipotezler altında ortalama değer teoremi gerçekleneceğinden $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ olacak şekilde $c \in (a, b)$ vardır.

$f(b) = f(a)$ olduğundan $f'(c) = 0$ olur.

50. $f(-x) = -f(x)$ ise f fonksiyonu tek fonksiyondur.

Bu eşitlikte iki tarafın türevi alınırsa

$$\big(f(-x)\big)' = -f'(x) \Rightarrow -f'(-x) = -f'(x) \Rightarrow f'(-x) = f'(x)$$

bulunur. Bu da f' türev fonksiyonunun çift fonksiyon olduğunu gösterir. Aynı şekilde çift fonksiyonun türevinin tek fonksiyon olduğu gösterilebilir.

51. [a, b] aralığının her noktasında türev 0 ve x_1 ve x_2 , [a, b] aralığında herhangi iki nokta olsun. Ortalama değer teoreminden

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = f'(c)$$

olacak şekilde bir $c \in (x_1, x_2)$ vardır. $f'(c) = 0$ olduğundan $f(x_1) = f(x_2)$ dir. Bu da f nin sabit fonksiyon olduğunu gösterir.

52. $f'(a) = A$, $f'(b) = B$ ve $A < C < B$ olsun. (a, b) aralığında $f'(c) = C$ olacak şekilde en az bir $c \in (a, b)$ noktasının varlığını gösterelim.

$$g(x) = f(x) - C(x - a)$$

biçiminde tanımlanan g fonksiyonu için

$$g'(x) = f'(x) - C$$

olacağından, g fonksiyonu [a, b] aralığında türevli, dolayısıyla süreklidir. Bu nedenle [a, b] aralığında en küçük değerini alır.

$$g'(a) = f'(a) - C < 0 \text{ ve } g'(b) = f'(b) - C > 0$$

olduğundan g fonksiyonu en küçük değerini [a, b] aralığının bir c iç noktasında alır. Fermat teoreminden $g'(c) = 0$ olur. Bu da

$$f'(c) - C = 0 \Rightarrow f'(c) = C$$

olmasını gerektirir. Yani f ′ fonksiyonu f ′(a) ile f ′(b) arasındaki her değeri en az bir defa alır.

53. P(x), n– ninci dereceden bir polinom olsun. $P(x) = 0$ denkleminin reel kökleri $x_1 , x_2 , \dots , x_n$ olsun. Rolle teoreminden P′(x) in sıfır yerleri $t_1 \in]x_1 , x_2[$, $t_2 \in]x_2 , x_3[, \dots , t_{n-1} \in]x_{n-1} , x_n[$ olur. P′(x), n–1 inci dereceden olduğundan başka kökü yoktur.

BELİRSİZ ŞEKİLLER

Bir f fonksiyonunun bir noktadaki limiti hesaplanırken, belirsiz ifadeler denilen

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0.\infty, 1^{\infty}, 0^{\infty}, \infty^{0}$$

ifadeleriyle karşılaşıldığında aşağıdaki teorem yardımıyla bu limitler kolayca hesaplanabilir.

TEOREM **(L'Hospital kuralı) :**

f ve g, $A \subset R$ de tanımlı ve sürekli fonksiyonlar; a, A nın bir yığılma noktası ve D de a'nın, bir delinmiş komşuluğu olsun. f ve g fonksiyonları A ile D nin her ortak x noktasında türevli,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{x \to a} g'(x) \neq 0$$

ise

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

dır.

SONUÇ

f ve g fonksiyonları sabit bir M reel sayısından büyük ve her x noktasında türevlenebilir olsunlar. Ayrıca

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$$

ve her $x > M$ için $g'(x) \neq 0$ olsun. Bu taktirde

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

dır.

PROBLEMLER

1. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x-\tan x}{x-\sin x}$

b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}$

c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{\sin x}$

ç) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x^2+x-2}$

d) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x^2)}{x^2\sin(x^2)}$

e) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{1-\cos x}$

f) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$

g) $\lim_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{b^x-1}$

h) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$

ı) $\lim_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$

i) $\lim_{x\to 0}\dfrac{3\tan 4x-12\tan x}{3\sin 4x-12\sin x}$

j) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$

k) $\lim_{x\to 0}\dfrac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}$

l) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\arctan\frac{1}{x}}$

m) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$

n) $\lim_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}$

o) $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin nx)}$

ö) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{\ln(\tan x)}$

p) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x-\sin x}$

r) $\lim_{x\to 0}\dfrac{(\arctan x)^2}{\ln\left(1+x^2\right)}$

s) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^c-cx+c-1}{(x-1)^2}$

ş) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^x-x}{x^2}$

t) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x+\ln x}{x\ln x}$

u) $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)}$

ü) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1)}{\ln\left(x^2-1\right)}$

v) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(x+e^x\right)}{x}$

y) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{e^x+\ln x}{e^x+x}$

z) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$

2. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim_{x\to 0}\left(\cot x-\frac{1}{x}\right)$

b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$

c) $\lim_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt{x^4-x^2+1}\right)$

ç) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

d) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}-\frac{2}{\sin^2 x}\right)$

e) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$

f) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

g) $\lim_{x\to 0}\left(\cot^2 x-x^{-2}\right)$

h) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}-\frac{1}{x}\right)$

3. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cot x$

b) $\lim_{x\to\infty} x.\sin\frac{a}{x}$

c) $\lim_{x\to 1}\ln x.\ln(x-1)$

d) $\lim_{x\to\infty} x^{1/4}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

(e) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x\sqrt{x}}\cdot\left(a.\text{Arctan}\frac{\sqrt{x}}{a}-b.\text{Arctan}\frac{\sqrt{x}}{b}\right)$

4. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim_{x\to 0}(1+ax)^{1/x}$

b) $\lim_{x\to 0^-}\left(1-2^x\right)^{\sin x}$

c) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$

d) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$

e) $\lim_{x\to\infty}\left(e^{1/x}+\frac{1}{x}\right)^x$

f) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$

g) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2}$

h) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

ı) $\lim_{x\to 0^+}\left[\ln(1+x)\right]^x$

i) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{1/\ln x}$

5. $a_i > 0$ olmak üzere

$$\lim_{\alpha \to 0} \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + ... a_n^\alpha}{n} \right)^{1/\alpha} = \sqrt[n]{a_1 . a_2 ... a_n}$$

olduğunu gösteriniz.

6. $a, b > 0$ için $\lim_{x \to 0} \left(a^x + b^x - 1 \right)^{\frac{1}{x}} = ab$ olduğunu gösteriniz.

7. Aşağıdaki sayıların yaklaşık değerini bulunuz.

a) $\sqrt{6}$ b) $\sqrt[3]{26}$

c) $\sqrt[4]{82}$ d) $\sqrt[7]{130}$

8. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x} & , x \neq 0 \text{ ise} \\ m & , x = 0 \text{ ise} \end{cases}$

biçiminde tanımlanan $f : (-1, 1) \to R$ fonksiyonunun sürekli olması için m ne olmalıdır?

9. Aşağıdaki limitlerin hesaplanmasında L'Hospital kuralının yararlı olmadığını gösteriniz. Bu limitleri başka yollardan hesaplayınız.

a) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{4x+1}}{\sqrt{x+1}}$ b) $\lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \dfrac{\sec x}{\tan x}$

10. $\lim_{x \to \infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right)$ limitini hesaplayınız.

ÇÖZÜMLER

1. a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x - \tan x}{x - \sin x} \quad \left(\dfrac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \tan x}{x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - (1 + \tan^2 x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} - \frac{\tan^2 x}{1 - \cos x} \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} - \frac{2 \tan x}{\sin x} \cdot \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)$$

$$= -2 \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos^3 x} = -2$$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{\sin x}{6x} = -\frac{1}{6} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{6}$$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{\sin x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\cos x} = 1$$

ç) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2+x-2} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2+x-2} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{2x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{2x^2+x} = \frac{1}{3}$$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{x^2\sin(x^2)} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x\sin x^2}{2x\sin x^2 + 2x^3\cos x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{\sin x^2 + x^2\cos x^2} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos x^2}{2x\cos x^2 + 2x\cos x^2 - 2x^3\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x^2}{2\cos x^2 - x^2\sin x^2} = \frac{1}{2}$$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{1-\cos x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}-1}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2}}{\cos x} = -1$$

f) $\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3} \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x+1+xe^x-2e^x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x(x-1)+1}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x(x-1)+e^x}{6x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x(x-1)+e^x+e^x}{6} = \frac{1}{6}$$

g) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{b^x-1} \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{b^x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{a^x \ln a}{b^x \ln b} = \frac{\ln a}{\ln b}$$

h) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4} \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(\sin x).\cos x+\sin x}{4x^3} \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos(\sin x).\cos^2 x+\sin x.\sin(\sin x)+\cos x}{12x^2} \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)\cos^3 x+2\cos x\sin x\cos(\sin x)+\cos x\sin(\sin x)+\cos(\sin x)\cos x\sin x-\sin x}{24x} \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x)(\cos^3 x+\cos x)+3\cos x\sin x\cos(\sin x)-\sin x}{24x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x)(\cos^4 x+\cos^2 x)+(-3\cos^2 x\sin x-\sin x).\sin(\sin x)}{24}$$

$$+ \frac{\cos x(3\cos x\cos(\sin x)-1)+(-3\sin x\cos(\sin x)+\sin(\sin x)\cos^2 x).\sin x}{24} = \frac{1}{6}$$

ı) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{x} \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{a^x \ln a-b^x \ln b}{1} = \ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

i) $\lim_{x\to 0} \frac{3\tan 4x-12\tan x}{3\sin 4x-12\sin x} \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\tan 4x-12\tan x}{3\sin 4x-12\sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3(1+\tan^2 4x)4 - 12(1+\tan^2 x)}{3.4\cos 4x - 12\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 4x - \tan^2 x}{\cos 4x - \cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\tan 4x - \tan x)(\tan 4x + \tan x)}{\cos 4x - \cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\sin 4x}{\cos 4x} - \frac{\sin x}{\cos x}\right)\left(\frac{\sin 4x}{\cos 4x} + \frac{\sin x}{\cos x}\right)}{\cos 4x - \cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sin 4x\cos x - \cos 4x\sin x)(\sin 4x\cos x + \cos 4x\sin x)}{\cos 4x.\cos x(\cos 4x - \cos x)\cos 4x\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos^2 4x\cos^2 x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x.\sin 5x}{-2\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{3x}{2}}$$

$$= 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{3}{\frac{5}{2}}\cdot\frac{5}{\frac{3}{2}} = -2\,.$$

j) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{\sin(ax).a}{\cos(ax)}}{-\frac{\sin(bx).b}{\cos(bx)}} = \lim_{x\to 0} \frac{a}{b}\frac{\sin ax}{\sin bx}\cdot\frac{\cos bx}{\cos ax}$$

$$= \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{1} = \frac{a^2}{b^2}$$

k) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{a^x\ln a - a^{\sin x}\ln a.\cos x}{3x^2} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \ln a \lim_{x\to 0} \frac{a^x\ln a - a^{\sin x}.\ln a.\cos^2 x + \sin x.a^{\sin x}}{6x}$$

$$= (\ln a)^2 \lim_{x\to 0} \frac{a^x - a^{\sin x}\cos^2 x}{6x} + \ln a \lim_{x\to 0} \frac{a^{\sin x}\sin x}{6x}$$

$$= (\ln a)^2 \lim_{x\to 0} \frac{a^x\ln a - a^{\sin x}\ln a\cos^3 x + a^{\sin x}2\sin x\cos x}{6} + \frac{\ln a}{6}$$

$$= 0 + \frac{\ln a}{6} = \frac{1}{6}\ln a$$

l) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\arctan\frac{1}{x}}\ \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\arctan\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=1$$

m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}\ \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}-\frac{\sin x}{3x}=-\frac{1}{3}$$

n) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}\ \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x}=\infty$$

o) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin nx)}\ \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin nx)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{m\frac{\cos mx}{\sin mx}}{n\frac{\cos nx}{\sin nx}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{m}{n}\ \frac{\sin x}{\sin mx}\cdot\frac{\cos mx}{\cos nx}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin nx}{nx}\cdot\frac{mx}{\sin mx}\cdot\frac{\cos mx}{\cos nx}=1\,.$$

ö) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{\ln(\tan x)}\ \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\ln(\tan x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\sin x-\cos x}{\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

p) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x} \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\tan^2 x - \cos x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\tan x(1+\tan^2 x)+\sin x}{\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2(1+\tan^2 x)^2 + 4\tan^2 x(1+\tan^2 x}{\cos x} + 1 = 3$$

r) $\lim_{x\to 0} \frac{(\arctan x)^2}{\ln(1+x^2)} \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\arctan x)^2}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\arctan x \cdot \left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{\frac{2x}{1+x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} = 1$$

s) $\lim_{x\to 1} \frac{x^c - cx + c - 1}{(x-1)^2} \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^c - cx + c - 1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{cx^{c-1} - c}{2(x-1)} \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{c(c-1)x^{c-2}}{2} = \frac{c(c-1)}{2}$$

ş) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - e^x - x}{x^2} \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - e^x - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{ae^{ax} - e^x - 1}{2x} = \infty$$

t) $\lim_{x\to \infty} \frac{x + \ln x}{x \ln x} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x + \ln x}{x \ln x} = \lim_{x\to \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\ln x + 1} = 0$$

u) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+\tan^2 x} = 1$$

ü) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x-1)}{\ln(x^2-1)} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x-1)}{\ln(x^2-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{2x}{x^2-1}} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{2x} = 1$$

v) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+e^x)}{x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+e^x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+e^x}{x+e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

y) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x+\ln x}{e^x+x} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x+\ln x}{e^x+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x+\frac{1}{x}}{e^x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{xe^x+1}{xe^x+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x+xe^x}{e^x+xe^x+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^x+e^x+x.e^x}{e^x+e^x+xe^x} = 1$$

z) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \sqrt{2}\,\frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \sqrt{2}\,\frac{\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\cos x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim_{x\to 0} \left(\cot x - \frac{1}{x}\right) \quad (\infty - \infty)$

$$\lim_{x\to 0} \left(\cot x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x} \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0} -\frac{x\sin x}{\sin x + x\cos x} \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{-\sin x - x\cos x}{2\cos x - x\sin x} = 0$$

b) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) \quad (\infty - \infty)$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{xe^x-x} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{e^x+xe^x-1} \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}$$

c) $\lim_{x\to\infty} \left(x^2 - \sqrt{x^4 - x^2 + 1}\right)$ $(\infty - \infty)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^2 - \sqrt{x^4 - x^2 + 1}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^4 - x^4 + x^2 - 1}{x^2 + \sqrt{x^4 - x^2 + 1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + \sqrt{x^4 - x^2 + 1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}} = \frac{1}{2}$$

ç) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ $(\infty - \infty)$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x} - x}{x^{3/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1}{\frac{3}{2}x^{1/2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - 2\sqrt{x}}{3x} = \infty$$

d) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{1-\cos x} - \frac{2}{\sin^2 x}\right)$ $(\infty - \infty)$ belirsizliği

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x} - \frac{2}{\sin^2 x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - 2 + 2\cos x}{(1-\cos x)\sin^2 x} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x\cos x - 2\sin x}{2\sin x\cos x(1-\cos x) + \sin^3 x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2}{2\cos x(1-\cos x) + \sin^2 x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2\sin x}{-2\sin x(1-\cos x) + 2\cos x\sin x + 2\sin x\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2}{-2(1-\cos x) + 2\cos x + 2\cos x}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

e) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$ $(\infty - \infty)$ belirsizliği

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x+\sin x}{x} \cdot \frac{x-\sin x}{x\sin^2 x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x\sin^2 x}$$

$$= 2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x + 2x\sin x\cos x}$$

$$= 2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x + x\sin 2x}$$

$$= 2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2\sin x\cos x + \sin 2x + 2x\cos 2x}$$

$$= 2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{2\cos x + \frac{\sin 2x}{\sin x} + 2\frac{x}{\sin x}\cdot\cos 2x}$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2+2+2} = \frac{1}{3}$$

f) $\lim_{x \to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$ $(\infty - \infty)$

$$\lim_{x \to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{x\ln x - x + 1}{\ln x(x-1)} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x + 1 - 1}{\frac{1}{x}(x-1) + \ln x}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{1 - \frac{1}{x} + \ln x} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$$

g) $\lim_{x \to 0}\left(\cot^2 x - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$ $(\infty - \infty)$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2\cos^2 x - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x} \left(\frac{0}{0}\text{ hali}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x\cos x + \sin x)(x\cos x - \sin x)}{x^2\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x\cos x + \sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \to 0}\left(\cos x + \frac{\sin x}{x}\right) \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x\sin^2 x}$$

$$= 2 \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x\sin^2 x} = 2\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{\sin^2 x + 2x\sin x\cos x}$$

$$= 2\lim_{x \to 0} \frac{-x\sin x}{\sin x(\sin x + 2x\cos x)}$$

olur. Pay ve payda sin x ile sadeleştirilirse,

$$\lim_{x \to 0}\left(\cot^2 x - \frac{1}{x^2}\right) = -2\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x + 2x\cos x} = -2 \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x + 2\cos x - 2x\sin x}$$

$$= -2 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

bulunur.

h) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} - \frac{1}{x} \right)$ $(\infty - \infty)$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{x\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = -\lim_{x \to 0} \frac{x + \sin x}{x \sin x}$$

$$= -\lim_{x \to 0} \frac{1 + \cos x}{\sin x + x\cos x} = \infty$$

ı) $\lim_{x \to 0} (\csc x - \cot x + \cos x)$ $(\infty - \infty)$

$$\lim_{x \to 0} (\csc x - \cot x + \cos x) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} + \cos x \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x) + \sin x \cos x}{\sin x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x + \cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x} = 1$$

3. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim_{x \to 0} (1 - \cos x) \cot x$ $(0.\infty)$

$$\lim_{x \to 0} (1 - \cos x) \cot x = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x).\cos x}{\sin x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x \cos x - \sin x + \sin x \cos x}{\cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} 2\sin x - \tan x = 0$$

b) $\lim_{x \to \infty} x \sin \frac{a}{x}$ $(0.\infty)$

$$\lim_{x \to \infty} x \sin \frac{a}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sin \frac{a}{x}}{\frac{a}{x}} . a = a$$

c) $\lim_{x \to 1} \ln x \ln (x - 1)$ $(0 . \infty)$

$$\lim_{x\to 1} \ln x \ln(x-1) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}}$$

$$= -\lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)^2 . x}{x-1} = -\lim_{x\to 1} 2\ln x + (\ln x)^2 = 0$$

d) $\lim_{x\to\infty} x^{1/4}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ $(\infty \cdot 0)$

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/4}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\frac{1}{x^{1/4}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2}}{-\frac{1}{4}x^{-5/4}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} 2\ \frac{\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x^{1/4}} = 0$$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x\sqrt{x}}\left(a\arctan\frac{\sqrt{x}}{a} - b\arctan\frac{\sqrt{x}}{b}\right)$ $(\infty \cdot 0)$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x\sqrt{x}}\left(a\arctan\frac{\sqrt{x}}{a} - b\arctan\frac{\sqrt{x}}{b}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(a\arctan\frac{\sqrt{x}}{a} - b\arctan\frac{\sqrt{x}}{b}\right)}{x^{3/2}} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{a\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{a^2}}\left(\frac{1}{2a\sqrt{x}}\right) - b\frac{1}{1+\frac{x}{b^2}}\cdot\left(\frac{1}{2b\sqrt{x}}\right)}{\frac{3}{2}x^{1/2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{a^2}{a^2+x} - \frac{b^2}{b^2+x}}{3x} \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{a^2}{(a^2+x)^2} + \frac{b^2}{(b^2+x)^2}}{3} = -\frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}{3} = \frac{a^2-b^2}{3a^2b^2}$$

4. a) $\lim_{x\to 0} (1+ax)^{1/x}$ (1^∞)

$$y = (1+ax)^{1/x} \Rightarrow \ln y = \frac{\ln(1+ax)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+ax)}{x} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{a}{1+ax} = a$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} (1+ax)^{1/x} = e^a$$

b) $\lim_{x\to 0^-} (1-2^x)^{\sin x}$ (0^0)

$y = (1-2^x)^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \sin x \ln(1-2^x)$

$$\lim_{x\to 0^-} \ln y = \lim_{x\to 0^-} \sin x \ln(1-2^x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1-2^x)}{\frac{1}{\sin x}} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{2^x \ln 2}{1-2^x}}{\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2^x \ln 2 \sin^2 x}{(1-2^x)\cos x} \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{2^x \ln 2}{\cos x} \cdot \frac{\sin^2 x}{1-2^x} = \ln 2 \lim_{x\to 0^-} \frac{2\sin x \cos x}{-2^x \ln 2} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} (1-2^x)^{\sin x} = e^0 = 1 .$$

c) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$, $y = (\tan x)^{\tan 2x}$, $\ln y = \tan 2x \,.\, \ln(\tan x)$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \ln y = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \tan 2x \ln(\tan x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{\tan 2x}} \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}}{-\frac{1}{(\tan 2x)^2} 2.(1+\tan^2 2x)} = \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} -\frac{1}{2} \frac{\frac{1}{\tan x} + \tan x}{\frac{1}{(\tan 2x)^2} + 1} = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x} = e^{-1}$$

d) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$ (1^∞)

$y = (\sin x)^{\tan x}$, $\ln y = \tan x \ln \sin x$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \ln y = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{\tan x}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{\tan^2 x} \cdot (1+\tan^2 x)}$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} -\frac{\tan x}{1+\tan^2 x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} -\frac{1+\tan^2 x}{2\tan x (1+\tan^2 x)}$$

e) $\lim_{x\to\infty}\left(e^{1/x}+\frac{1}{x}\right)^x \quad (1^\infty)$

$y=\left(e^{1/x}+\frac{1}{x}\right)^x \Rightarrow \ln y = x\ln\left(e^{1/x}+\frac{1}{x}\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty} x\ln\left(e^{1/x}+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(e^{1/x}+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-\frac{1}{x^2}e^{1/x}-\frac{1}{x^2}}{e^{1/x}+\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{1/x}+1}{e^{1/x}+\frac{1}{x}} = 2 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} y = e^2$$

f) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\left[\frac{1}{x(x+1)}-\frac{\ln(1+x)}{x^2}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}.\lim_{x\to 0}\left[\frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}\right]$$

$$= e\,.\lim_{x\to 0}\frac{-\ln(x+1)}{3x^2+2x} = e\lim_{x\to 0}-\frac{1}{(x+1)(6x+2)} = -\frac{e}{2}$$

g) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2}$, $y=\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2} \Rightarrow \ln y = \frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\arcsin x}{2x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{6x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{3(1-x^2)^{-5/2}-(1-x^2)^{-3/2}}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2} = e^{1/6}$$

h) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/(1-\cos x)} \quad (1^\infty)$

$$y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/(1-\cos x)} \Rightarrow \ln y = \frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{1-\cos x}$$

$$y=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/(1-\cos x)} \Rightarrow \ln y=\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{1-\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{2x\sin x+x^2\cos x}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\sin x+x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{3\cos x-x\sin x}=-\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/(1-\cos x)}=e^{-1/3}$$

ı) $\lim\limits_{x\to 0^+}[\ln(1+x)]^x \quad (0^0)$

$y=[\ln(1+x)]^x \Rightarrow \ln y=x\ln(1+x)$

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{x^2}{1+x}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}[\ln(1+x)]^x=e^0=1$$

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{1/\ln x} \quad (0^0)$

$$y=\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{1/\ln x} \Rightarrow \ln y=\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{\ln x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{\ln x}=\lim_{x\to\infty}-\frac{\frac{-\frac{x}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}}{}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2}=-1 \text{ olur.}$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{1/\ln x}=e^{-1}$ bulunur.

5. $y=\left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\ldots+a_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha} \Rightarrow \ln y=\frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\ldots+a_n^\alpha}{n}\right)$

$$\Rightarrow \lim_{\alpha\to 0}\ln y=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln\left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\ldots+a_n^\alpha}{n}\right)}{\alpha}\left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \frac{\frac{a_1^\alpha \ln a_1 + \ldots + a_n^\alpha \ln a_n}{n}}{\frac{1}{}} = \frac{\ln(a_1.a_2 \ldots a_n)}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{\alpha \to 0} y = e^{\frac{\ln(a_1.a_2 \ldots a_n)}{n}} = \sqrt[n]{a_1.a_2 \ldots a_n}$$

6. $y = (a^x + b^x - 1)^{1/x} \Rightarrow \ln y = \dfrac{\ln(a^x + b^x - 1)}{x}$

$$\lim_{x \to 0} \ln y = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(a^x + b^x - 1)}{x} = \lim_{x \to 0} a^x \ln a + b^x \ln b = \ln a + \ln b$$

$$= \ln (a.b) \Rightarrow \lim_{x \to 0} (a^x + b^x - 1)^{1/x} = e^{\ln(a.b)} = a.b$$

7. $f(x + \Delta x) \cong f(x) + \Delta x\, f'(x)$

a) $\sqrt{6}$, $f(x) = \sqrt{x}$, $\sqrt{x + \Delta x} \cong \sqrt{x} + \Delta x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$x = 625$, $\Delta x = -0{,}25$ seçelim.

$$\sqrt{6} \cong \sqrt{6.25} + (-0{,}25) \cdot \frac{1}{2.\sqrt{6.25}} \cong 25 - \frac{0{,}25}{2.2{,}5} \cong 2{,}5 - 0.05 \cong 2.45$$

b) $\sqrt[3]{26}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $f(x + \Delta x) \cong f(x) + \Delta x \,.\, f'(x) \cong \sqrt[3]{x} + \Delta x \,.\, \dfrac{1}{3} x^{-2/3}$

$x = 27$, $\Delta x = -1$,

$$\sqrt[3]{26} \cong \sqrt[3]{27} - 1 \cdot \frac{1}{3}(27)^{-2/3} = 3 - \frac{1}{3} \cdot 3^{-2} = 3 - \frac{1}{27} = \frac{80}{27} \cong 2.962$$

c) $f(x + \Delta x) \cong f(x) + \Delta x \,.\, f'(x)$

$f(x) = \sqrt[4]{x}$, $\Delta x = 1$, $x = 81$

$$\sqrt{82} \cong \sqrt[4]{81} + 1 \cdot \frac{1}{4}(81)^{-\frac{3}{4}} = 3 + \frac{1}{4.27} = 3 + 0.00925 = 3{,}00925$$

d) $\sqrt[7]{130}$, $f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x \,.\, f'(x) = \sqrt[7]{x} + \Delta x \dfrac{x^{-6/7}}{7}$

$f(x) = \sqrt[7]{x}$, $f'(x) = \dfrac{1}{7} x^{-6/7}$ olacağından, $x = 128$, $\Delta x = 2$

$$\sqrt[7]{130} \cong 2 + 2 \cdot \frac{1}{7}(128)^{-6/7} = 2 + 2 \cdot \frac{1}{7.64} = 2 + \frac{1}{224} \cong 2{,}004$$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1-x+1+x}{(1-x)^2}}{\dfrac{1+x}{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{1-x^2}=2\Rightarrow f(0)=m=2 \text{ olmalıdır.}$$

9. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x+1}}{\sqrt{x+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{4x+1}{x+1}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x+1}{x+1}}=\sqrt{4}=2$

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{\sec x}{\tan x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{\dfrac{1}{\cos x}}{\dfrac{\sin x}{\cos x}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\dfrac{1}{\sin x}=1$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(e^{1/x}-e^{1/x+1}\right)$ $(0\,.\,\infty)$ belirsizliği

$f(x)=e^x$ fonksiyonuna $\left[\dfrac{1}{x+1},\dfrac{1}{x}\right]$ aralığında ortalama değer teoremi uygulanırsa

$$e^{1/x}-e^{1/x+1}=e^c\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{e^c}{x(x+1)}$$

olacak şekilde bir $c\in\left(\dfrac{1}{x+1},\dfrac{1}{x}\right)$ vardır.

$x\to\infty$ için $c\to 0$ dır. Yukarıdaki eşitlikte her iki taraf x^2 ile çarpılırsa

$$x^2\left(e^{1/x}-e^{1/x+1}\right)=\frac{x}{x+1}e^c$$

bağıntısı bulunur. Limit alınırsa

$$\lim_{x\to\infty}x^2\left(e^{1/x}-e^{1/x+1}\right)=1.1=1$$

bulunur.

PROBLEMLER

1. Aşağıda denklemleri verilen eğrilerin grafiklerini çiziniz.

a) $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

b) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

c) $y^2 = x^2 - 4x + 5$

ç) $y = \sqrt{6x - x^2}$

d) $y = \dfrac{x}{x-1}$

e) $y = \dfrac{8}{x^2 - 4}$

f) $y = \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 + 3x}$

g) $y = \dfrac{x^2 - 3}{2x - 4}$

h) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

ı) $y = \ln(2x - x^2)$

i) $y = x + \sin x$

j) $y = x - \sin x$

h) $y = 1 - x^{2/3}$

2. Aşağıdaki eğrilere kutupta (orijinde) teğet olan doğruların denklemini yazınız.

a) $r = 4\cos 2\varphi$

b) $r = \sin 3\varphi$

c) $r^2 = \cos 2\varphi$

d) $r = 1 - \cos\varphi$

3. Aşağıdaki eğri çiftlerinin kesim noktalarındaki teğetlerini bulunuz. Bu teğetlerin oluşturdukları açıların ölçülerini hesaplayınız.

a) $r = 2(1 - \cos\varphi)$
$r = -6\cos\varphi$

b) $r = \sin\varphi$
$r = \cos 2\varphi$

4. Aşağıda denklemleri verilen eğrileri çiziniz.

a) $r = \cos 3\varphi$ b) $r = 1 - 2\cos\varphi$ c) $r^2 = \sin 2\varphi$

5. $r = 2(1 - \cos\varphi)$ kardiyoidine $\left(2, \dfrac{\pi}{2}\right)$ noktasından çizilen teğetin kutup doğrusu (Ox– ekseni) ile yaptığı açının ölçüsünü bulunuz.

ÇÖZÜMLER

1. a) $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

1. Fonksiyon polinom tipli olduğundan tanım kümesi T = R dir.
2. Asimtot yoktur.

$\lim_{x \to \infty} x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = \infty$, $\lim_{x \to -\infty} x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = -\infty$

3. $x = 0 \Rightarrow y = -2$

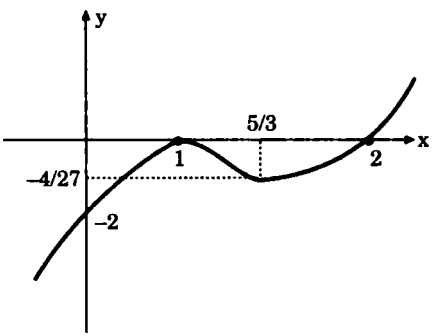
$y = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 1,\ x_3 = 2$

4. $y' = 3x^2 - 8x + 5$

$y' = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{5}{3},\ x_2 = 1$

5.

x	$-\infty$		0		1		5/3		2		$+\infty$
y′	+		+	0	−	0	+		+		
y	$-\infty$	↗	−2	↗	0	↘	−4/27	↗	0	↗	$+\infty$



b) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

x		1		2	
x^2-3x+2	+		−		+

1. $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ olmalıdır.

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1,\ x = 2$

T.K = $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

2. Eğik asimtot

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x}\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}}{\cancel{x}} = 1$$

$$n = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 - 3x + 2} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-3x+2}-x\right)\left(\sqrt{x^2-3x+2}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2-3x+2}+x\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3x+2}{\sqrt{x^2-3x+2}+x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-3x+2}{x\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)} = -\frac{3}{2}$$

$\Rightarrow y = x - \frac{3}{2}$ eğik asimptottur.

$x \to -\infty$ için limit alınırsa diğer asimptotun $y = -x + \frac{3}{2}$ olduğu görülür.

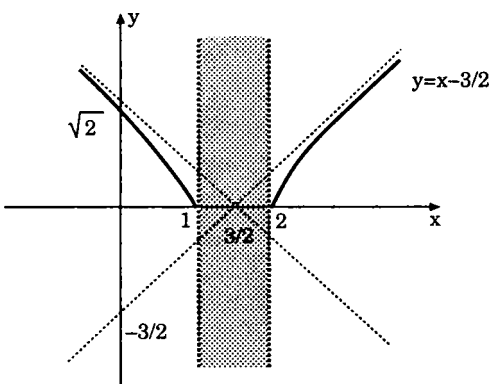
3. $x = 0 \Rightarrow y = \sqrt{2}$

   $y = 0 \Rightarrow x = 1,\ x = 2$

4. $y' = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \notin$ T.K.

5.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y′		−		−		0		+	
y	$+\infty$	↘	$\sqrt{2}$	↘		0		↗	$+\infty$



c) $y^2 = x^2 - 4x + 5$ ($y = \sqrt{x^2-4x+5}$ eğrisi çizilip x eksenine göre simetri alınacaktır.)

1. T = R

2. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-4x+5} = \infty$ olduğundan eğrinin eğik yada eğri asimptotu vardır.

$\sqrt{x^2-4x+5} = \sqrt{(x-2)^2+1} = |x-2|\sqrt{1+\frac{1}{(x-2)^2}}$

$\Rightarrow g(x) = |x-2|$ alındığında

$\lim_{x\to\infty}(f(x)-g(x)) = 0 \Rightarrow y = |x-2|$ eğri asimtottur.

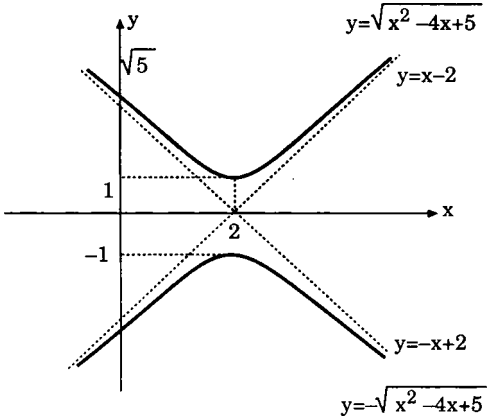
3. $x = 0 \Rightarrow y = \sqrt{5}$

4. $y' = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+5}} = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Buna karşılık y değeri $y = 1$ dir.

5.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		−		−	0	+	
y	$+\infty$	↘	$\sqrt{5}$	↘	1	↗	$+\infty$



ç) $y = \sqrt{6x-x^2}$

x		0		6	
$6x-x^2$	−	0	+	0	−

1. $6x - x^2 \geq 0$

T.A = [0, 6]

2. Asimtot yoktur.

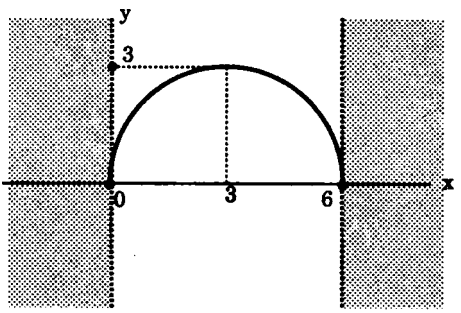
3. $x = 0 \Rightarrow y = 0$

$y = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 6$

4. $y' = \frac{3-x}{\sqrt{6x-x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 3 \in [0, 6]$, $x = 3 \Rightarrow y = 3$

5.

x		0		3		6
y′		+		0		−
y		0	↗	3	↘	0



d) $y = \dfrac{x}{x-1}$

1. T.A = R \ {1}

2. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x-1} = 1 \Rightarrow y = 1$ yatay asimtot

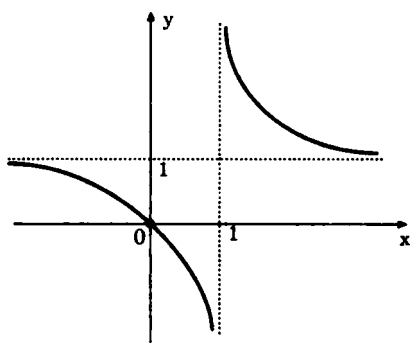
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x}{x-1} = \infty \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{x-1} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow x = 1 \text{ düşey asimtot}$$

3. $x = 0 \Rightarrow y = 0$

4. $y' = \dfrac{x-1-x}{(x-1)^2} = -\dfrac{1}{(x-1)^2} < 0$

5.

x		$-\infty$		0		1		$+\infty$
y′		−		−		‖		−
y		1	↘	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1



e) $y = \dfrac{8}{x^2-4}$

1. T.A $= R \setminus \{-2, 2\}$

2. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{8}{x^2-4} = \infty \\ \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{8}{x^2-4} = -\infty \end{array}\right\}$ $x = 2$ düşey asimtot

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{8}{x^2-4} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{8}{x^2-4} = +\infty \end{array}\right\}$ $x = -2$ düşey asimtot

$\lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{8}{x^2-4} = 0 \Rightarrow y = 0$ yatay asimtot

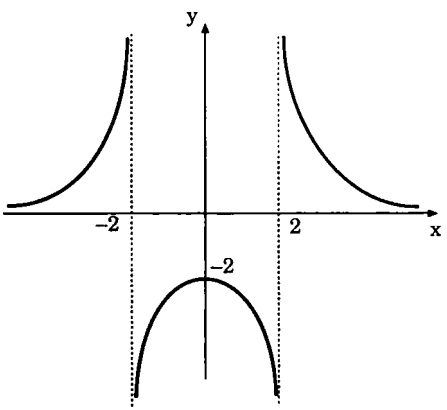
3. $x = 0 \Rightarrow y = -2$

4) $y' = -\dfrac{16x}{(x^2-4)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

5)

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$		$+$		$-$		$-$	
y	0	$\nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow$		$-2 \searrow$		$-\infty \quad +\infty \searrow$	0



f) $y = \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 + 3x}$

1. T.K = R \ {0, –3}

   $x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ve $x = -3$

2. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 + 3x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 + 3x} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0$ düşey asimtot

   $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 + 3x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 + 3x} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow x = -3$ düşey asimtot

   $\lim\limits_{x \to \mp\infty} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 + 3x} = 1 \Rightarrow y = 1$ yatay asimtot

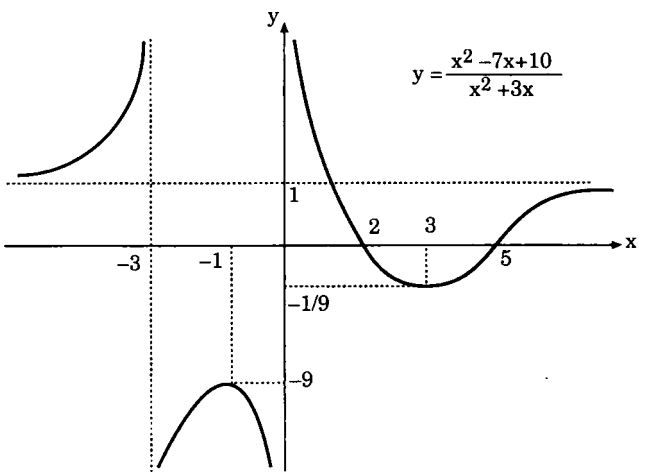
3. $y = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x_1 = 5,\ x_2 = 2$

4. $y' = \dfrac{10(x^2 - 2x - 3)}{(x^2 + 3x)^2}$

   $y' = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ve $x = -1$

5.

x	$-\infty$		-3		-1		0		2		3		5		$+\infty$
y′		+	‖	+	0	−	‖	−		−	0	+		+	
y	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-9	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-1/9$	↗	0	↗	1



g) $y = \dfrac{x^2-3}{2x-4}$

1. T.A = R \ {2}

2. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-3}{2x-4} = \infty \\ \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-3}{2x-4} = -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow x = 2$ düşey asimtot

$y = \dfrac{1}{2}x + 1$ eğik asimtot

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 3 & 2x - 4 \\ \hline -\,x^2 - 2x & \dfrac{1}{2}x + 1 \\ \hline 2x - 3 & \\ -\,2x - 4 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

3. $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{3}{4}$

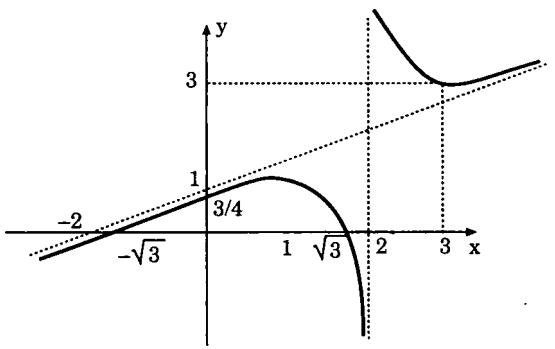
$y = 0 \Rightarrow x = \mp\sqrt{3}$

4. $y' = \dfrac{2x(2x-4) - 2(x^2-3)}{(2x-4)^2} = \dfrac{2x^2 - 8x + 6}{(2x-4)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1\,,\ x_2 = 3 \Rightarrow y_1 = 1\,,\ y_2 = 3$

5.

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	1	$\sqrt{3}$	2	3	$+\infty$
y′	+	+	0	+	−	−	−	+
y	$-\infty$ ↗	0 ↗	+3/4 ↗	1 ↘	0 ↘	$-\infty$ | $+\infty$ ↘	3 ↗	$+\infty$



h) $y = \dfrac{x^2+1}{x}$

1. T.A = R \ {0}

2. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2+1}{x} = \infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2+1}{x} = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0$ düşey asimtot

$y = x$ eğik asimtot.

$$\begin{array}{rl|l} & x^2+1 & x \\ \cline{3-3} - & x^2 & x \\ \hline & 1 & \end{array}$$

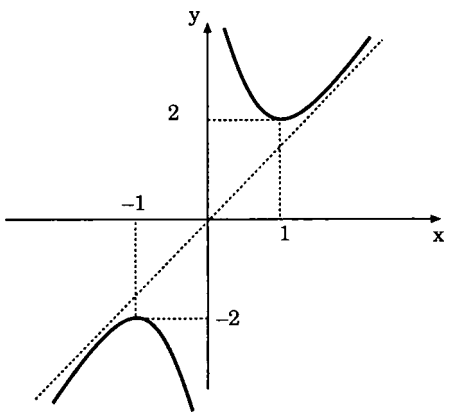
3. Eğri eksenleri kesmez.

4. $y' = \dfrac{2x^2-x^2-1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1\,,\ x_2 = 1 \Rightarrow y_1 = -2\,,\ y_2 = 2$

5.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$		$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty \quad \infty$	↘	2	↗	$+\infty$



ı) $y = \ln(2x - x^2)$

x		0		2	
$2x - x^2$	−		+		−

1. $2x - x^2 > 0$

   T.A = (0, 2)

2. $\lim_{x \to 0^+} \ln(2x - x^2) = -\infty$,

   $\lim_{x \to 2^-} \ln(2x - x^2) = -\infty$

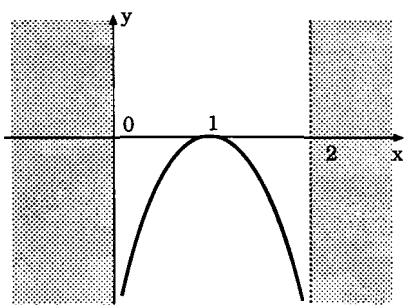
   $x = 0$ ve $x = 2$ düşey asimtot

3. $y = 0 \Rightarrow 2x - x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$

4. $y' = \dfrac{2 - 2x}{2x - x^2}$, $y' = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 0$

5.

x		0		1		2	
y′		+		0	−		
y		$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$	

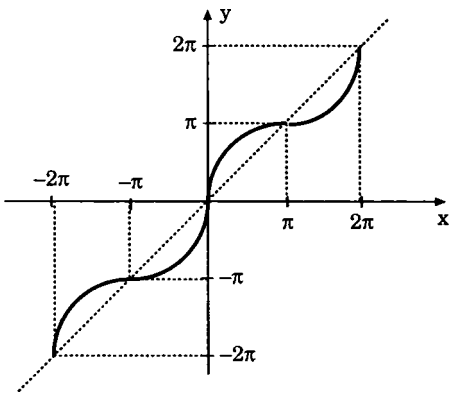


$y = \ln(2x - x^2)$

i) $y = x + \sin x$

1. T.A = R
2. Asimtot yok
3. $x = 0 \Rightarrow y = 0$
4. $y' = 1 + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = (2k + 1)\pi$
5.

x		$-\pi$		0		π	
y′	+		+		+		+
y		$-\pi$		0		π	



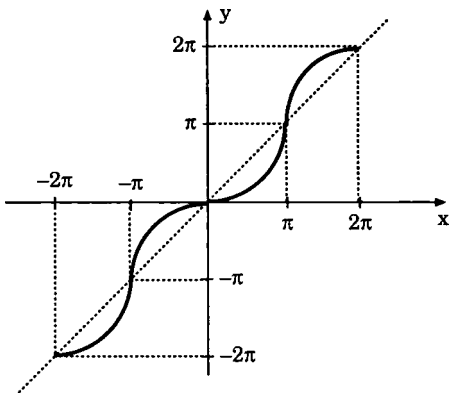
j) $y = x - \sin x$

1. T.A = R
2. Asimtot yok
3. $x = 0 \Rightarrow y = 0$
4. $y' = 1 - \cos x$

   $y' = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$

5.

x	-2π	$-\pi$	0	$+\pi$	2π
y′	+	+	+	+	+
y	-2π	$-\pi$	0	$+\pi$	2π



h) $y = 1 - x^{2/3}$

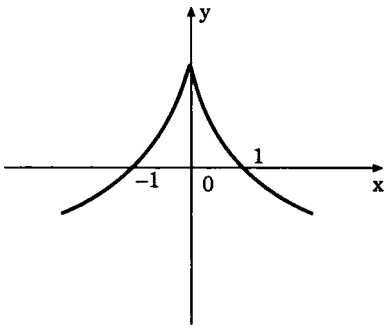
1. T.A = R
2. Asimtot yok
3. $x = 0 \Rightarrow y = 1$

   $y = 0 \Rightarrow x = \mp 1$

5.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y′	+	+	− 0	−	
y	$-\infty$ ↗	0 ↗	1 ↘	0 ↘	$-\infty$

4. $y' = -\frac{2}{3}x^{-1/3}$



2. Aşağıdaki eğrilere kutupta (orijinde) teğet olan doğruların denklemini yazınız.

a) $r = 4\cos 2\varphi$

$r = 0 \Rightarrow 4\cos 2\varphi = 0 \Rightarrow \cos 2\varphi = 0 \Rightarrow 2\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\varphi = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$

$\varphi = \frac{\pi}{4}$ için

$\tan \psi = 0 \Rightarrow \psi = 0$. Bu durumda teğetin eğim açısı

$\theta = \psi + \varphi = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ olacaktır. Teğetin eğimi

$m = \tan\theta = \tan\frac{\pi}{4} = 1$. Orijindeki teğet istenildiğinden

$x_0 = 0$, $y_0 = 0 \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y = x$ kutupta teğet olan doğrudur.

b) $r = 3\sin\varphi$

$r = 0 \Rightarrow 3\sin\varphi = 0 \Rightarrow \sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = k\pi$

$\varphi = 0$ için $\tan\psi = \frac{r}{r'}\Big|_{\varphi=0} = \frac{3\sin\varphi}{3\cos\varphi}\Big|_{\varphi=0} = 0 \Rightarrow \psi = 0$. Teğetin eğim açısı $\theta = \psi + \varphi = 0$ olur.

$m = \tan\theta = 0$ olcağından orijindeki teğet $y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow$

$y = 0$ doğrusu olur.

c) $r^2 = \cos 2\varphi$

$r = \sqrt{\cos 2\varphi}$ için teğeti bulalım.

$r = 0 \Rightarrow \sqrt{\cos 2\varphi} = 0 \Rightarrow \cos 2\varphi = 0$

$2\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

$\varphi = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan\psi = \frac{r}{r'}\Big|_{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\cos 2\varphi}}{\frac{-2\sin 2\varphi}{2\sqrt{\cos 2\varphi}}}\Big|_{\frac{\pi}{4}} = \frac{\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi}\Big|_{\frac{\pi}{4}} = 0$

$\Rightarrow \psi = 0$. Bu durumda teğetin eğim açısı $\theta = \psi + \varphi = \frac{\pi}{4}$ olacaktır.

Teğetin eğimi $m = \tan\theta = \tan\frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow y = mx \Rightarrow y = x$ kutupta teğet olan doğrudur. $r = -\sqrt{\cos 2\varphi}$ için teğet doğru $y = -x$ dir.

d) $r = 1 - \cos\varphi$

$r = 0 \Rightarrow 1 - \cos\varphi = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 2k\pi$

$\tan\psi = \frac{r}{r'}\Big|_{\varphi=0} = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}$ ifadesi $\varphi = 0$ ve $\varphi = 2\pi$ için tanımsız

ve $\lim\limits_{\varphi\to 0}\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} = \lim\limits_{\varphi\to 0}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = 0$ olduğundan $\theta = 0$ dolayısı ile

$m = 0$ dır. Teğetin denklemi $y - 0 = m(x - 0) \Rightarrow y = 0$ olur.

3. a) $r = 2(1 - \cos\varphi)$

$r = -6\cos\varphi$

$2(1 - \cos\varphi) = -6\cos\varphi \Rightarrow 1 = -2\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow r = 3$

$\tan\psi = \frac{r}{r'}\Big|_{\varphi=\frac{2\pi}{3}} = \frac{-6\cos\varphi}{6\sin\varphi}\Big|_{\frac{2\pi}{3}} = -\cot\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \psi = \frac{\pi}{6}$

Şimdi değme noktasının koordinatlarını bulalım.

$x_0 = 3 \cdot \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{3}{2}$

$y_0 = 3 \cdot \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ Bu urumda eğim açısı $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$ ve

eğim $m = \tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ olur. Buna göre (x_0, y_0) noktasındaki

teğet denklem $y - \frac{3\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = -\frac{x}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}$ elde edilir.

b) $r = \sin\varphi$, $r = \cos 2\varphi$

$\sin\varphi = \cos 2\varphi \Rightarrow \sin\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi \Rightarrow 2\sin^2\varphi + \sin\varphi - 1 = 0 \Rightarrow$

$\sin\varphi = 1$ veya $\sin\varphi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$ veya $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ olur.

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ ise $\tan\psi = \frac{r}{r'}\Big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}} = \tan\frac{\pi}{2} \Rightarrow \psi = \frac{\pi}{2}$

$\theta = \varphi + \psi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow m = \tan\theta = \tan\pi = 0$ olur.

$x_0 = r\cos\varphi = r\cos\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow y = 0$ teğet denklemidir.

$\varphi = -\frac{\pi}{6}$ ise $\tan\psi = \frac{r}{r'}\Big|_{\varphi=\frac{\pi}{6}} = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \psi = -\frac{\pi}{6}$

$\theta = \alpha + \varphi = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} \Rightarrow m = \tan\theta = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$

$x_0 = r\cos\varphi = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$

$y_0 = r\sin\varphi\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}$

olduğundan teğetin denklemi

$y - \frac{1}{4} = \sqrt{3}\left(x + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow y = \sqrt{3}\,x + 1$ olur.

4. a) $r = \cos 3\varphi$

1. T.A = R
2. Peryot : $\frac{2\pi}{3}$
3. $f(-\varphi) = \cos(-3\varphi) = \cos(3\varphi) = f(\varphi)$

$\Rightarrow$ eğri kutup eksenine göre simetri

$f\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 3\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 3\varphi \,.\, \cos\pi - \sin 3\varphi \,.\, \sin\pi$

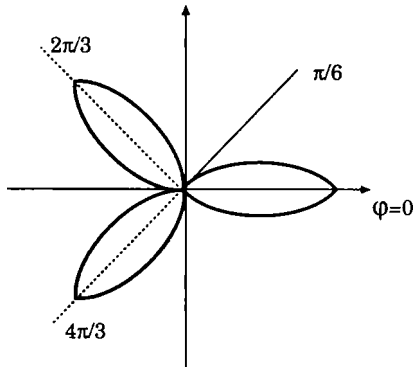
$= -\cos 3\varphi = -\ f(\varphi)$

Eğri $\frac{\pi}{3}$ uzunluktaki aralıkta çizim yapılır.

$\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ kadar saat yönünde çevrilir. Aralık $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ alınabilir. Kutup eksenine göre simetri olduğundan $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ aralığında çizim yapılır ve kutup eksenine göre simetri alınır.

4. $r' = -3 \sin 3\varphi$ $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ aralığında $\sin 3\varphi \geq 0 \Rightarrow r' \leq 0$

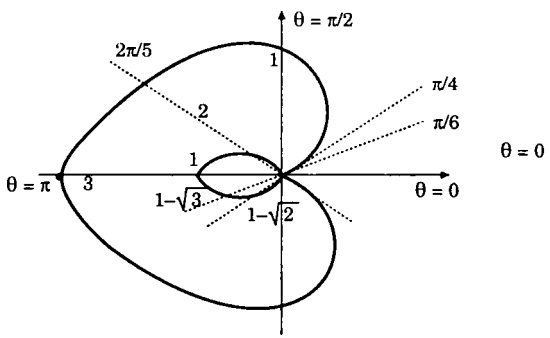
φ	0		$\pi/6$
r'		$-$	
r	1	↘	0



b) $r = 1 - 2\cos\varphi$

1. T.A = R
2. Peryot : 2π
3. $f(-\varphi) = f(\varphi)$ kutup eksenine göre simetri alınacak, yani $[0, \pi]$ aralığında çizim yapılır.
4. $r' = 2 \sin\theta \geq 0$ $(\theta \in [0, \pi])$

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π
y'	+	+ 0 +	+	+	+ 0 +	+	
y	−1	$1-\sqrt{3}$	$1-\sqrt{2}$	0	1	1	3



c) $r^2 = \sin 2\theta$, $r = \mp\sqrt{\sin 2\theta}$ eğrisi çizilmeli, sonra da kutba göre simetri alınmalıdır.

$\sin 2\theta \geq 0 \Rightarrow 0 \leq 2\theta < \pi$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ tanım aralığıdır.

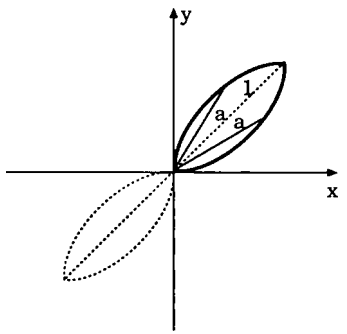
$$r' = \frac{2\cos 2\theta}{2\sqrt{\sin 2\theta}}$$

ϑ	0		$\pi/6$		$\pi/4$		$\pi/3$		$\pi/2$
r'		+		+	0	−		−	
r	0	↗		↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ = a	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$ = a	↘	0

5. $\tan\psi = \dfrac{r}{r'}\Big|_{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{2(1-\cos\vartheta)}{2\sin\vartheta}\Big|_{\frac{\pi}{2}}$

$= 1 \Rightarrow \psi = \dfrac{\pi}{4}$

$\theta = \psi + \varphi = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{4}$



BÖLÜM PROBLEMLERİ

1. Aşağıda tanımlanan fonksiyonların $x = 0$ noktasında türevli olup olmadığını araştırınız.

a) $f(x) = x|x|$

b) $f(x) = |x| \sin x$

c) $f(x) = x^{2/3} \sin x$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x} \,.\, (1 - \cos x)$

2. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & , x \neq 0 \text{ ise} \\ 0 & , x = 0 \text{ ise} \end{cases}$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında türevli midir? f' türev fonksiyonu $x = 0$ da sürekli midir? $x = 0$ da f'' türevi var mıdır? Bulduğunuz sonuçları yorumlayınız.

3. $0 < \alpha < 1$ olmak üzere $x^\alpha + y^\alpha = a^\alpha$ eğrisi veriliyor. Bu eğriye üzerindeki herhangi bir noktadan çizilen teğetin eksenlerden ayırdığı parçaların uzunlukları u ile v ise

$$u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + v^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = a^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

dır, gösteriniz. $\alpha = \dfrac{1}{2}$ ve $\alpha = \dfrac{2}{3}$ özel halleri için bulduğunuz sonuçları yorumlayınız.

4. Her $x, y \in R$ için

a) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$

b) $f(x) = 1 + xg(x)$,

bağıntılarını sağlayan bir f fonksiyonunun her $x \in R$ noktasında türevli olacağını ve $f'(x) = f(x)$ bağıntısının sağlanacağını gösteriniz. (Burada g, $\lim_{x \to 0} g(x) = 1$ özelliğine sabit bir fonksiyondur.)

5. f'', [a, b] üzerinde sürekli ve bu aralıkta $f(x) = 0$ denkleminin üç kökü olsun. $f''(x) = 0$ denkleminin [a, b] aralığında en az bir köke sahip olacağını gösteriniz.

6. f ve g konveks ve g artan ise gof de konvekstir, gösteriniz.

7. f, [a, b] üzerinde türevli ve $f(b) < f(a)$ olsun. f' fonksiyonunun (a, b) aralığındaki en az bir noktada negatif olacağını gösteriniz.

8. f ile g, [a, b] üzerinde türevli iki fonksiyon, $f(a) = g(a)$ ve $f(b) = g(b)$ olsun. (a, b) aralığının en az bir c noktasında f ve g nin grafiklerinin teğetlerinin paralel olacağını gösteriniz.

9. f, R üzerinde türevli bir fonksiyon olsun.

$f(1) = 1$, $x \in (-\infty, 1)$ için $f'(x) < 0$ ve $x \in (1, +\infty)$ için $f'(x) > 0$ ise

a) $\forall x \in R$ için $f(x) > 1$ dir, gösteriniz.

b) $f'(1)$ türevini hesaplayınız.

10. a ve b iki pozitif sayı ve $\forall x \in R^+$ için $f(x) = \frac{1}{x}$ olsun. f fonksiyonunun [a, b] aralığında ortalama değer teoreminin hipotezlerini sağladığını gösteriniz. Teoremde sözü edilen c sayısının, a ile b nin geometrik ortalaması olan $\sqrt{ab}$ sayısına eşit olacağını gösteriniz.

11. a ile b iki reel sayı ve $f(x) = x^2$ olsun. f fonksiyonunun [a, b] aralığında ortalama değer teoreminin hipotezlerini sağladığını gösteriniz. Teoremde adı geçen c sayısının, a ile b nin aritmetik ortalaması olan $\frac{a+b}{2}$ sayısına eşit olacağını gösteriniz.

12. Kabul edelim ki, $y = f(x)$ in türevi $y' = (x - 1)^2 (x - 2)$ olsun. f nin yerel ekstermum ve dönüm noktalarını bulunuz.

13. a bir reel sayı olsun. $\forall x \in (-\infty, a)$ için $f'(x) > 0$ ve $\forall x \in (a, +\infty)$ için $f'(x) < 0$ ise a noktası bir yerel maksimum noktası mıdır?

ÇÖZÜMLER

1. a) $f(x) = x|x|$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x|x|}{x} = \lim_{x\to 0}|x| = 0$$

b) $f(x) = |x| \sin x$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|\sin x}{x} = 0$$

c) $f(x) = x^{2/3} \sin x$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{2/3}\sin x}{x} = 0$$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x}\,.\,(1-\cos x)$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}\,(1-\cos x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{x^{2/3}} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3}{2}x^{-3/2}\sin x = \lim_{x\to 0}\frac{3}{2}x^{2/3}\frac{\sin x}{x} = 0.1 = 0$$

2. $f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow$ f fonksiyonu x = 0'da türevlenebilirdir ve değeri 0 dır.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f 0'da türevlenebilir olduğundan 0'da süreklidir.

$f''(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\left(2\sin\frac{1}{x} - \frac{\cos\frac{1}{x}}{x}\right)$ mevcut değil $\Rightarrow$ x = 0'da f'' mevcut değil.

3. $x^\alpha + y^\alpha = a^\alpha$ eğrisine üzerindeki $(x_0\,,\,y_0)$ noktasından çizilen teğetin denklemini bulalım. $\alpha\, x^{\alpha-1} + \alpha\, y^{\alpha-1}\, y' = 0$,

$y' = -\left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha-1}$, $y'|_{(x_0,y_0)} = -\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{\alpha-1}$, $y - y_0 = -\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^{\alpha-1}(x - x_0)$ teğet denklemidir.

$y_0^{\alpha-1}y - y_0^\alpha - x_0^\alpha + x_0^{\alpha-1}x = 0$, $y_0^{\alpha-1}y - y_0^{\alpha-1}x = x_0^\alpha + y_0^\alpha$

$\Rightarrow y_0^{\alpha-1}y + x_0^{\alpha-1}x = a^\alpha$ elde edilir. Bu denklemin eksenleri kestiği noktanın uzunlukları

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{a^\alpha}{y_0^{\alpha-1}} \Rightarrow u = \frac{a^\alpha}{y_0^{\alpha-1}}$$

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{a^\alpha}{x_0^{\alpha-1}} \Rightarrow v = \frac{a^\alpha}{x_0^{\alpha-1}}$$

$$u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + v^{\frac{\alpha^2}{1-\alpha}} = \frac{a^{\frac{\alpha^2}{1-\alpha}}}{y_0^{-\alpha}} + \frac{a^{\frac{\alpha^2}{1-\alpha}}}{x_0^{-\alpha}} = a^{\frac{\alpha^2}{1-\alpha}}\left(x_0^\alpha + y_0^\alpha\right) = a^{\frac{\alpha^2}{1-\alpha}}.a^\alpha = a^{\frac{\alpha^2+\alpha-\alpha^2}{1-\alpha}} = a^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$\alpha = \frac{1}{2}$ ise $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ eğrisinin eksenleri ayırdığı parçaların uzunlukları toplamı $u + v = a$ dır.

$\alpha = \frac{2}{3}$ ise $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ eğrisi üzerindeki bir noktadan çizilen teğetin eksenleri ayırdığı parçaların uzunlukları toplamı $u^2 + v^2 = a^2$ dir.

4. $$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x).f(h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x)\cdot\frac{(f(h)-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x)\cdot\frac{h.g(h)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x).g(h) = f(x) \qquad \left(\lim_{h\to 0} g(h) = 1\right)$$

5. $f(x) = 0$ denkleminin üç kökü $x_0, x_1, x_2 \in [a, b]$ olsun.

Yani $f(x_0) = f(x_1) = f(x_2)$ dir.

$f(x_0) = f(x_1)$ ve f türevlenebilir olduğundan Rolle teoremi gereğince

$f'(c) = 0$ olacak şekilde $c \in (x_0, x_1)$ vardır.

$f(x_1) = f(x_2)$ ve f türevlenebilir olduğundan Rolle teoremi gereğince

$\alpha \in (x_1, x_2)$ vardır ki $f'(\alpha) = 0$ dır.

Buna göre $f'(c) = f'(\alpha) = 0$ ve f'' mevcut olduğundan Rolle teoremi gereğince $f''(e) = 0$ olacak şekilde $e \in (c, \alpha)$ vardır. Dolayısı ile $f''(x) = 0$ denkleminin (a, b) aralığında en az bir kökü vardır.

6. f konveks ise $0 < t < 1$ için $f(tx + (1-t)y) < t f(x) + (1-t) f(y)$ sağlanır.

$0 < t < 1$ için $(gof)(tx + (1-t)y) = g(f(tx+(1-t)y))$

$< g(tf(x) + (1-t) f(y))$ (g artan olduğundan)

$< t\, g(f(x)) + (1-t)\, g(f(y))$ (g konveks olduğundan)

$= t\,(gof)(x) + (1-t)\,(gof)(y)$

7. f, [a, b] üzerinde türevli ise aynı zamanda sürekli olacağından ortalama değer teoreminin şartlarını sağlar. Bu durumda $\exists\, c \in (a, b)$ vardır. Öyle ki,

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = -\left(\frac{f(a)-f(b)}{b-a}\right) < 0 \quad (f(b) < f(a))$$

8. f ve g, [a, b] üzerinde türevli ise aynı zamanda bu aralıkta süreklidir. Dolayısı ile genelleştirilmiş ortalama değer teoremine göre $\exists\, c \in (a, b)$ vardır ki $g'(c) \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{g(b)-g(a)}{g(b)-g(a)} = 1 \Rightarrow f'(c) = g'(c)$$

Yani f ve g eğrilerinin c noktasındaki teğetlerinin eğimleri eşittir. Yani bu teğetler birbirine paraleldir.

9. a) f fonksiyonu 1 noktasında tanımlı ($f(1) = 1$) $x \in (-\infty, 1)$ için $f'(x) < 0$ ve $x \in (1, \infty)$ için $f'(x) > 0$ olduğundan f fonksiyonu $x = 1$ noktasında minumuma sahiptir. Yani $\forall x \in R$ için $f(1) \leq f(x) \Rightarrow 1 \leq f(x)$ dir.

b) Fermat teoreminden $f'(1) = 0$ dır.

10. $\forall x \in R^+$ için $f(x) = \frac{1}{x}$ sürekli ve $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ (a, b) $(a > 0)$ de mevcuttur.

Bu durumda ortalama değer teoreminden

$$\exists\, c \in (a, b) \ni f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = -\frac{1}{c^2} \Rightarrow \frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{b-a} = -\frac{1}{ab} = -\frac{1}{c^2} \Rightarrow c^2 = ab$$

$c = \sqrt{a.b}$ $(a > 0$ ve $b > 0)$

11. $f(x) = x^2$ fonksiyonu [a, b] de sürekli ve $f'(x) = 2x$ türevi (a, b) de mevcut. Dolayısı ile ortalama değer teoreminden $\exists c \in (a, b)$ vardır ki

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$2c = \frac{b^2-a^2}{b-a} \Rightarrow 2c = a + b \Rightarrow c = \frac{a+b}{2}$$

12. $y' = (x-1)^2(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ve $x = 2$

$y''(x) = 2(x-1)(x-2) + (x-1)^2 = (x-1)(3x-5)$

$y'''(x) = 6x - 8 \Rightarrow y'''(1) = 0$

$y^{(4)}(x) = 6 > 0$

$n = 4$ (çift) ve $y^{(4)}(1) > 0$ olduğundan 1 noktası f nin yerel minimum noktasıdır.

$y''(2) = 1 > 0 \Rightarrow$ 2 noktası f fonksiyonunun bir yerel minumum noktasıdır.

$y''(x) = (x-1)(3x-5) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ve $x = \frac{5}{3}$

y'' türevi 1 ve $\frac{5}{3}$ noktalarında işaret değiştirir. Dolayısı ile bu noktalar dönüm noktalarıdır.

13. a noktasının yerel maksimum noktası olması için yukardaki şartlar yetmez. Ayrıca fonksiyon a noktasında tanımlı olduğunun bilinmesi gerekir.

6 BELİRSİZ İNTEGRALLER

PROBLEMLER

Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

1. $\int\left(\sqrt[5]{x}+x^2\right)dx$
2. $\int\left(2x^2-5x+3\right)dx$
3. $\int(1-x)^3\sqrt{x}\,dx$
4. $\int\frac{x^4+3x^2+5}{x^2}dx$
5. $\int\frac{3x^3-4x^2+3x}{x^2+1}dx$
6. $\int(a+x)^3\,dx$
7. $\int\left(\sin x+\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$
8. $\int\left(2^x+x^2\right)dx$
9. $\int(1+x)^4dx$
10. $\int\left(x^3+1\right)^2x^2dx$

ÇÖZÜMLER

1. $\int\left(\sqrt[5]{x}+x^2\right)dx=\frac{5}{6}x^{6/5}+\frac{x^3}{3}+C$

2. $\int\left(2x^2-5x+3\right)dx = 2\int x^2dx-5\int xdx+3\int dx$

$= 2\cdot\frac{x^3}{3}-5\cdot\frac{x^2}{2}+3x+C$

3. $\int(1-x)^3\sqrt{x}\,dx = \int\left(1-3x+3x^2-x^3\right)x^{1/2}dx$

$= \int\left(x^{1/2}-3x^{3/2}+3x^{5/2}-x^{7/2}\right)dx$

$= \int x^{1/2}dx-3\int x^{3/2}dx+3\int x^{5/2}dx-\int x^{7/2}dx$

$= -\frac{2}{9}x^{9/2}+\frac{6}{7}x^{7/2}-\frac{6}{5}x^{5/2}+\frac{2}{3}x^{3/2}+C$

4. $\int\frac{x^4+3x^2+5}{x^2}dx=\int\left(x^2+3+\frac{5}{x^2}\right)dx$

$=\int x^2dx+\int 3dx+\int\frac{5}{x^2}\,dx = +3x-\frac{5}{x}+C$

5. $\int \frac{3x^3-4x^2+3x}{x^2+1}\,dx = \int 3x-4+\frac{4}{x^2+1}\,dx$

$= \frac{3}{2}x^2-4x+4\arctan x+C$

$$\begin{array}{r|l} 3x^3-4x^2+3x & x^2+1 \\ \cline{2-2} 3x^3+3x & 3x-4 \\ \cline{1-1} -4x^2 & \\ -4x^2-4 & \\ \cline{1-1} 4 & \end{array}$$

6. $\int (a+x)^3\,dx = \int \left(a^3+3a^2x+3ax^2+x^3\right)dx$

$= a^3x+\frac{3}{2}a^2x^2+ax^3+\frac{x^4}{4}+C$

7. $\int \left(\sin x+\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = -\cos x+4\arcsin x+C$

8. $\int \left(2^x+x^2\right)dx = \frac{2^x}{\ln 2}+\frac{x^3}{3}+C$

9. $\int (1+x)^4\,dx = \int \left(1+4x+6x^2+4x^3+x^4\right)dx = x+2x^2+2x^3+x^4+\frac{x^5}{5}+C$

10. $\int \left(x^3+1\right)^2x^2\,dx = \int \left(x^8+4x^5+4x^2\right)dx = \frac{x^9}{9}+\frac{4}{6}x^6+\frac{4}{3}x^3+C$

PROBLEMLER

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\int xe^{x^2}dx$

b) $\int x^2\left(1+x^3\right)^4 dx$

c) $\int \frac{dx}{x\ln x}$

ç) $\int \frac{x^7}{1-x^4}\,dx$

d) $\int \sin^2 x\cos x dx$

e) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$

f) $\int \frac{\sin x dx}{1+\cos^2 x}$

g) $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$

h) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$

ı) $\int e^{-3x}dx$

i) $\int\left(e^{x/2}+e^{-x/2}\right)dx$

j) $\int (3-2x)^4 dx$

k) $\int \frac{dx}{\cos^2 5x}$

l) $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$

m) $\int \tan x dx$

n) $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}dx$

o) $\int e^{\cos x}\sin x dx$

ö) $\int e^{x^3}x^2 dx$

p) $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$

r) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

s) $\int xe^{-x^2}dx$

ş) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

t) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\sin^4 x}}dx$

u) $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}dx$

ü) $\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+3}{\sqrt[4]{x-1}}dx$

v) $\int \frac{dx}{\sin x}$

y) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

z) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$

ÇÖZÜMLER

1. a) $x^2 = t$ denirse $2x\,dx = dt$ olur.

$$\int xe^{x^2}dx = \int e^t\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

b) $1 + x^3 = t$ denirse $3x^2\,dx = dt$ olur. Bu durumda

$$\int x^2(1+x^3)^4 dx = \int \frac{t^4}{3}dt = \frac{t^5}{15} + C = \frac{(1+x^3)^5}{15} + C$$

c) $\ln x = u \Rightarrow \frac{dx}{x} = du$

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{du}{u} = \ln u + C = \ln(\ln x) + C$$

ç) $1 - x^4 = t \Rightarrow -4x^3\,dx = dt$

$$\int \frac{x^7}{1-x^4}\,dx = -\frac{1}{4}\int \frac{x^4(-4x^3)}{1-x^4}\,dx = -\frac{1}{4}\int \frac{(1-t)}{t}\cdot dt$$

$$= -\frac{1}{4}(\ln t - t) + C = -\frac{1}{4}\left(\ln\left(1-x^4\right) - 1 + x^4\right) + C$$

d) $\sin x = t \Rightarrow \cos x\,dx = dt$

$$\int \sin^2 x \cos x\,dx = \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(\sin x)^3}{3} + C$$

e) $\arctan x = t \Rightarrow \frac{1}{1+x^2}\,dx = dt$

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\arctan x)^2}{2} + C$$

f) $\cos x = t \Rightarrow -\sin x\,dx = dt$

$$\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int -\frac{dt}{1+t^2} = -\arctan t + C = -\arctan(\cos x) + C$$

g) $1 - x^2 = t \Rightarrow -2x\,dx = dt$

$$\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx = \int (1-t)t^{1/2}\cdot\left(-\frac{dt}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int t^{1/2} - t^{3/2}\,dt$$

$$= \frac{1}{5}t^{5/2} - \frac{1}{3}t^{3/2} + C = \frac{1}{5}(1-x^2)^{5/2} - \frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} + C$$

h) $x^2 + x + 1 = t \Rightarrow (2x + 1)\,dx = dt$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln(x^2 + x + 1) + C$$

ı) $-3x = t \Rightarrow -3\,dx = dt$

$$\int e^{-3x}\,dx = \int e^t\left(-\frac{dt}{3}\right) = -\frac{1}{3}e^t + C = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C$$

i) $\frac{x}{2} = t \Rightarrow dx = 2\,dt$

$$\int \left(e^{x/2} + e^{-x/2}\right)dx = \int \left(e^t + e^{-t}\right)2dt = 2e^t - 2e^{-t} + C = 2e^{x/2} - 2e^{-x/2} + C$$

j) $3 - 2x = t \Rightarrow -2\,dx = dt$

$$\int (3-2x)^4\,dx = \int t^4\left(-\frac{dt}{2}\right) = -\frac{1}{10}t^5 + C = -\frac{1}{10}(3-2x)^5 + C$$

k) $\tan 5x = 5t \Rightarrow \dfrac{dx}{\cos^2 5x} = dt$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 5x} = \int dt = t + C = \frac{1}{5}\tan 5x + C$$

l) $x^2 + 1 = t \Rightarrow 2x\,dx = dt$

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln t + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

m) $\cos x = t \Rightarrow -\sin x\,dx = dt$

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int -\frac{dt}{t} = -\ln t + C = -\ln(\cos x) + C$$

n) $\sin x = t \Rightarrow \cos x\,dx = dt$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}\,dx = \int \frac{dt}{t^4} = -\frac{t^{-3}}{3} + C = -\frac{1}{3(\sin x)^3} + C$$

o) $\cos x = t \Rightarrow -\sin x\,dx = dt$

$$\int e^{\cos x}\sin x\,dx = \int e^t(-dt) = -e^t + C = -e^{\cos x} + C$$

ö) $x^3 = t \Rightarrow 3x^2\,dx = dt$

$$\int e^{x^3}x^2\,dx = \int e^t\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\cdot e^t + C = \frac{e^{x^3}}{3} + C$$

p) $1 + \ln x = t \Rightarrow \dfrac{dx}{x} = dt$

$$\int \frac{dx}{x(1+\ln x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln(1+\ln x) + C$$

r) $\sqrt{x} = t \Rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = dt$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int 2e^t\,dt = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

s) $x^2 = t \Rightarrow 2x\,dx = dt$

$$\int xe^{-x^2}dx = \int e^{-t}\frac{dt}{2} = -\frac{1}{2}e^{-t} + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

ş) $\sqrt{4x - x^2} = \sqrt{4 - (x-2)^2}$

$x - 2 = t \Rightarrow dx = dt$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{4 - t^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1 - \left(\frac{t}{2}\right)^2}} = \arcsin\frac{t}{2} + C$$

$$= \text{arc sin}\,\frac{x-2}{2} + C$$

t) $[\sin^2 x = u \Rightarrow du = 2\sin x \cos x\,dx = \sin 2x\,dx]$

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \sin^4 x}}\,dx = \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - (\sin^2 x)^2}}\,dx = \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \text{arc sin}\,u + C$$

$$= \text{arc sin}\,(\sin^2 x) + C$$

u) $2^x = t \Rightarrow 2^x \ln 2\,dx = dt$

$$\int \frac{2^x}{\sqrt{1 - 4^x}}\,dx = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{2^x \ln 2}{\sqrt{1 - (2^x)^2}}\,dx = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\arcsin t + C = \frac{1}{\ln 2}\arcsin 2^x + C$$

ü) ebob {3, 4} = 12 , $x - 1 = t^{12}$, $dx = 12\,t^{11}\,dt$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1} + 3}{\sqrt[4]{x-1}}\,dx = \int \frac{t^4 + 3}{t^3} \cdot 12\,t^{11}dt = 12\int t^{12} + 3t^8\,dt$$

$$= 12\left(\frac{t^{13}}{13} + \frac{t^9}{3}\right) + C = 12\left(\frac{(x-1)^{13/12}}{13} + \frac{(x-1)^{9/12}}{3}\right) + C$$

v) $\tan\frac{x}{2}=t \Rightarrow \sin\frac{x}{2}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

$\sin x = 2 . \sin\frac{x}{2} . \cos\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$

$dt = \left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}dx \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt$

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{1}{t}dt=\ln|t|+C=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

y) $\tan\frac{x}{2}=t \Rightarrow \cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$

$$\int\frac{dx}{1+\cos x}=\int\frac{1}{\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int dt=t+C=\tan\frac{x}{2}+C$$

z) $\tan\frac{x}{2}=t \Rightarrow \sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$

$$\int\frac{dx}{1+\sin x}=\int\frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{2}{t^2+2t+1}dt=\int\frac{2}{(t+1)^2}dt$$

$$=\int\frac{2}{u^2}du=-\frac{2}{u}+C=-\frac{2}{t+1}+C=-\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}+C \quad [t+1=u,\ dt=du]$$

PROBLEMLER

1. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\int \arcsin x dx = x.\arcsin x + \sqrt{1-x^2}+C$

b) $\int x^2e^x dx = e^x\left(x^2-2x+2\right)+C$

c) $\int \sin(\ln x)dx = \frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]+C$

d) $\int x^3e^{x^2}dx = \frac{1}{2}x^2e^{x^2}-\frac{1}{2}e^{x^2}+C$

e) $\int x^2\ln x dx = \frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C$

f) $\int x^2\sin x dx = -x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\int \arctan x dx$ g) $\int x^2 e^{-x} dx$ m) $\int (ax^2 - 2x + 5) e^{-x} dx$

b) $\int e^{2x} \sin 3x dx$ h) $\int x(x-1)^8 dx$ n) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

c) $\int x^3 \ln x dx$ i) $\int x^3 e^{2x} dx$ o) $\int \arctan x \, dx$

d) $\int e^x \sin x dx$ j) $\int x^2 e^{-3x} dx$ ö) $\int x \ln(x^2) dx$

e) $\int e^{ax} \sin bx dx$ k) $\int \cos(\ln x) dx$ p) $\int x \sec^2 x dx$

f) $\int (\ln x)^2 dx$ l) $\int (x^2 - 2x + 5) e^x dx$ r) $\int \frac{(\ln x)^2}{x^2} dx$

ÇÖZÜMLER

1. a) $u = \arcsin x$, $dv = dx \Rightarrow du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$, $v = x$

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad [1-x^2 = t \Rightarrow -2x\,dx = dt]$$

$$= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = x \arcsin x + t^{1/2} + C$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

b) $x^2 = u$, $e^x dx = dv \Rightarrow du = 2x\,dx$, $v = e^x$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\left(xe^x - \int e^x dx\right) = x^2 e^x - 2\left(xe^x - e^x\right) + C$$

$$= e^x \left(x^2 - 2x + 2\right) + C$$

c) $\sin(\ln x) = u$, $dx = dv \Rightarrow du = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx$, $v = x$

$$\int \sin(\ln x)\, dx = x \sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\, dx$$

$[\cos(\ln x) = u$, $dx = dv \Rightarrow du = -\frac{1}{x} \sin(\ln x)\, dx$, $v = x]$

$$\int \sin(\ln x)\, dx = x \sin(\ln x) - \left(x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx\right)$$

$$\Rightarrow 2\int \sin(\ln x)\, dx = x \sin(\ln x) - x\cos(\ln x) + 2C$$

$$\Rightarrow \int \sin(\ln x)\, dx = \frac{x}{2}\left(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right) + C$$

d) $x^2 = u$, $xe^{x^2}dx = dv \Rightarrow du = 2x\,dx$, $v = \frac{1}{2}e^{x^2}$

$$\int x^3 e^{x^2}dx = \frac{x^2}{2}e^{x^2} - \int xe^{x^2}dx = \frac{x^2}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

e) $u = \ln x$, $dv = x^2\,dx \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$, $v = \frac{x^3}{3}$

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{x^2}{3}dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

f) $u = x^2$, $\sin x\,dx = dv \Rightarrow du = 2x\,dx$, $-\cos x = v$

$$\int x^2 \sin x\,dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x\,dx$$

$u = x$, $dv = \cos x\,dx \Rightarrow du = dx$, $v = \sin x$

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2\int \sin x dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C$$

2. a) $u = \arctan x$, $dv = dx \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2}dx$, $v = x$

$$\int \arctan x\,dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx$$

$$\int \arctan x\,dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln|t| + C$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C$$

$[1 + x^2 = t$, $dt = 2x\,dx)$

b) $e^{2x} = u$, $\sin 3x\,dx = dv \Rightarrow du = 2e^{2x}dx$, $v = -\frac{1}{3}\cos 3x$

$$I = \int e^{2x} \sin 3x\,dx = -\frac{e^{2x}}{3}\cos 3x + \frac{2}{3}\int \cos 3x\, e^{2x}dx$$

$u = e^{2x}$, $\cos 3x\,dx = dv \Rightarrow du = 2e^{2x}dx$, $v = \frac{1}{3}\sin 3x$

$$I = -\frac{e^{2x}}{3}\cos 3x + \frac{2}{3}\left[\frac{e^{2x}}{3}\sin 3x - \frac{2}{3}\int \sin 3x e^{2x}dx\right]$$

$$= -\frac{e^{2x}}{3}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x - \frac{4}{9}\int \sin 3x e^{2x}dx$$

$$\Rightarrow I = \int e^{2x} \sin 3x\,dx = -\frac{3}{13}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{13}e^{2x}\sin 3x + C$$

c) $u = \ln x \quad x^3\,dx = dv \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{x^4}{4}$

$$\int x^3 \ln x\,dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4}\int x^4 \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{4}\int x^3\,dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{x^4}{16} + C$$

d) (b) şıkkına benzer olarak yapılır.

e) (b) şıkkına benzer olarak yapılır.

f) $u = (\ln x)^2, \; dv = dx \Rightarrow du = 2(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx, \; v = x$

$$I = \int (\ln x)^2\,dx = x(\ln x)^2 - 2\int \ln x\,dx$$

$u = \ln x, \; dv = dx \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx, \; v = x$

$$I = x(\ln x)^2 - 2\left(x\ln x - \int dx\right) = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$$

g) $u = x^2, \; e^{-x}\,dx = dv \Rightarrow 2x\,dx = du, \; v = -e^{-x}$

$$\int e^2 e^{-x}\,dx = -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x}\,dx$$

$$= -x^2 e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx\right)$$

$$= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C$$

$$= -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C$$

h) $u = x, \; (x-1)^8\,dx = dv \Rightarrow du = dx, \quad \frac{(x-1)^9}{9} = v$

$$\int x(x-1)^8\,dx = \frac{1}{9}x(x-1)^9 - \frac{1}{9}\int (x-1)^9\,dx$$

$$= \frac{1}{9}x(x-1)^9 - \frac{1}{90}(x-1)^{10} + C$$

i) $u = x^3, \quad e^{2x}\,dx = dv \Rightarrow du = 3x^2\,dx, \quad \frac{1}{2}e^{2x} = v$

$$\int x^3 e^{2x}dx = \frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{2}\int e^{2x}x^2dx \qquad \begin{bmatrix} u = x^2 & e^{2x}dx = dv \\ du = 2xdx, & \frac{1}{2}e^{2x} = v \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int xe^{2x}dx\right] \qquad \begin{bmatrix} u = x, & e^{2x}dx = dv \\ du = dx, & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{4}x^2e^{2x} + \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}xe^{2x} - \int\frac{1}{2}e^{2x}dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}x^3e^{2x} - \frac{3}{4}x^2e^{2x} + \frac{3}{4}xe^{2x} - \frac{3}{8}e^{2x} + C$$

j) $u = x^2$, $e^{-3x}dx = dv \Rightarrow du = 2x\,dx$, $v = -\frac{1}{3}e^{-3x}$

$$\int e^x e^{-3x}dx = -\frac{x^2}{3}e^{-3x} + \frac{2}{3}\int xe^{-3x}dx \qquad \begin{bmatrix} u = x, & e^{-3x}dx = dv \\ du = dx, & -\frac{1}{3}e^{-3x} = v \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{x^2}{3}e^{-3x} + \frac{2}{3}\left[-\frac{x}{3}e^{-3x} + \frac{1}{3}\int e^{-3x}dx\right]$$

$$= -\frac{x^2}{3}e^{-3x} - \frac{2x}{9}e^{-3x} - \frac{2}{27}e^{-3x} + C$$

k) $u = \cos(\ln x)$, $dv = dx \Rightarrow du = -\sin(\ln x).\frac{1}{x}dx$, $v = x$

$$\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\,dx \qquad \begin{bmatrix} u = \sin(\ln x) & dv = dx \\ du = \cos(\ln x)\frac{1}{x}dx & v = x \end{bmatrix}$$

$$= x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int \cos(\ln x)\,dx = \frac{1}{2}x\cos(\ln x) + \frac{1}{2}x\sin(\ln x) + C$$

l) $u = x^2 - 2x + 5$, $e^x dx = dv \Rightarrow du = 2x - 2$, $v = e^x$

$$\int (x^2 - 2x + 5)e^x\,dx = e^x(x^2 - 2x + 5) - \int e^x(2x - 2)dx, \qquad \begin{bmatrix} 2x - 2 = u & e^x dx = dv \\ 2\,dx = du & v = e^x \end{bmatrix}$$

$$= e^x(x^2 - 2x + 5) - \left[(2x - 2)e^x - \int 2e^x dx\right] = e^x(x^2 - 4x + 9) + C$$

m) $u = ax^2 + bx + c$, $e^{-x}dx = dv \Rightarrow du = 2ax + b$, $v = -e^{-x}$

$$\int (ax^2+bx+c)\, e^{-x}\, dx = -e^{-x}(ax^2+bx+c) + \int (2ax+b)\, e^{-x}\, dx$$

$$\begin{bmatrix} u = 2ax+b & e^{-x}dx = dv \\ du = 2adx & v = -e^{-x} \end{bmatrix}$$

$$= -e^{-x}(ax^2+bx+c) - (2ax+b)\, e^{-x} + \int e^{-x}\, 2a\, dx$$

$$= -e^{-x}(ax^2+bx+c) - (2ax+b)\, e^{-x} - 2ae^{-x} + C$$

$$= -e^{-x}(ax^2 + (2a+b)x + (2a+b+c)) + C$$

n) $u = \ln x$, $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\, dx = dv \Rightarrow du = \dfrac{dx}{x}$, $v = 2\sqrt{x}$

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{x}\ln x - \int 2.\sqrt{x}\cdot\frac{dx}{x}$$

$$= 2\sqrt{x}\ln x - 2\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C$$

o) $u = \ln(x^2)$ $\quad x\, dx = dv \Rightarrow du = \dfrac{2}{x}\, dx$, $\quad v = \dfrac{x^2}{2}$

$$\int x \ln(x^2)\, dx = \frac{x^2}{2}\ln(x^2) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{2}{x}\, dx = \frac{x^2}{2}\ln(x^2) - \frac{x^2}{2} + C.$$

p) $u = x$, $\sec^2 x\, dx = dv \Rightarrow du = dx$, $v = \tan x$

$$\int x \sec^2 x\, dx = x\tan x - \int \tan x\, dx = x\tan x + \ln|\cos x| + C$$

r) $u = (\ln x)^2$, $\dfrac{dx}{x^2} = dv \Rightarrow du = \dfrac{2}{x}\ln x\, .\, dx$, $v = -\dfrac{1}{x}$

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x^2}\, dx = -\frac{(\ln x)^2}{x} + 2\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx \qquad \begin{bmatrix} u = \ln x & \frac{dx}{x^2} = dv \\ du = \frac{dx}{x} & v = -\frac{1}{x} \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{(\ln x)^2}{x} + 2\left[-\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\, dx\right]$$

$$= -\frac{(\ln x)^2}{x} - 2\frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x} + C$$

PROBLEMLER

1. Aşağıdaki indirgeme formüllerinin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x dx \qquad (\forall n \in N)$

b) $\int \frac{dx}{\sin^n x} = \frac{-1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x} \qquad (n > 1)$

c) $\int \cot^n x dx = -\frac{1}{n-1}\cot^{n-1} x - \int \cot^{n-2} x dx \qquad (n > 1)$

d) $\int \frac{\cos^n x}{\sin x} dx = \frac{1}{n-1}\cos^{n-1} x + \int \frac{\cos^{n-2} x}{\sin x} dx \qquad (n > 1)$

e) $\int \frac{\sin^n x}{\cos x} dx = \frac{-1}{n-1}\sin^{n-1} x + \int \frac{\sin^{n-2} x}{\cos x} dx \qquad (n > 1)$

f) $\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x} dx = \frac{-\cos^{m+1} x}{(n-1)\sin^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\cos^m x}{\sin^{n-2} x} dx \qquad (n > 1)$

g) $\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x} dx = \frac{\cos^{m-1} x}{(m-n)\sin^{n-1} x} - \frac{m-1}{m-n}\int \frac{\cos^{m-2} x}{\sin^n x} dx \qquad (m \neq n)$

h) $\int (a^2 - x^2)^n dx = \frac{x(a^2-x^2)^n}{2n+1} + \frac{2a^2 n}{2n+1}\int (a^2 - x^2)^{n-1} dx$

ı) $\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1} dx \qquad (n \in N)$

i) $\int x^n (\ln x)^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x)^n - \frac{n}{n+1}\int x^n (\ln x)^{n-1} dx \qquad (n \neq -1)$

j) $\int x^n \cos ax dx = \frac{1}{a}\left[x^n \sin ax - n\int x^{n-1}\sin ax dx\right]$

k) $\int x^n \sin x dx = -x^n \cos x + n\int x^{n-1}\cos x dx$

2. $I_n = \int \frac{\sin nx}{\sin x} dx$ olduğuna göre $n \geq 2$ için

$$I_n = \frac{2\sin(n-1)x}{n-1} + I_{n-2}$$

eşitliğinin gerçeklendiğini gösteriniz.

3. $I_n = \int \frac{x^n dx}{1+x^2}$ olduğuna göre $n > 1$ için

$$I_n = \frac{x^{n-1}}{n-1} - I_{n-2}$$

eşitliğinin gerçeklendiğini gösteriniz.

4. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\int \sin^4 x dx$

b) $\int \cos^7 x dx$

c) $\int \sin^3 x \cos^6 x \, dx$

d) $\int \tan^5 x \, dx$

e) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos x} dx$

f) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin x} dx$

g) $\int \frac{dx}{\cos^5 x} dx$

h) $\int \cot^4 x \, dx$

ı) $\int x^{10} \ln x dx$

i) $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$

j) $\int \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^5 dx$

k) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx$

l) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx$

m) $\int \left(4 - x^2\right)^3 dx$

n) $\int \frac{\sin 5x}{\sin x} dx$

ÇÖZÜMLER

1. a) $\cos^{n-1} x = u$, $\cos x \, dx = dv \Rightarrow du = -(n-1)\cos^{n-2} x \, . \sin x$, $v = \sin x$

$$\int \cos^n x dx = \int \cos^{n-1} x . \cos x dx$$

$$= \cos^{n-1} x \, . \sin x + (n-1) \int \cos^{(n-2)} x \, . \sin^2 x \, dx$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, (1 - \cos^2 x) \, dx$$

$$= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x - (n-1) \int \cos^n x \, dx$$

$$\Rightarrow n \int \cos^n dx = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x dx$$

$$\Rightarrow \int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$$

b) $\frac{1}{\sin^{n-2} x} = u$, $\frac{dx}{\sin^2 x} = dv \Rightarrow -(n-2) \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} dx = du$, $v = -\cot x$

$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x . \sin^2 x}$$

$$= -\frac{\cot x}{\sin^{n-2} x} - (n-2) \int \cot x \cdot \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} dx$$

$$= -\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} - (n-2) \int \frac{\cos^2 x}{\sin^n x} dx$$

$$= -\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} - (n-2)\int \frac{1}{\sin^n x}\,dx + (n-2)\int \frac{1}{\sin^{n-2}x}\,dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1}\,\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{1}{\sin^{n-1}x}\,dx$$

c) $\int \cot^n x\,dx = \int \cot^{n-2}x.\cot^2 x.dx$

$$= \int \cot^{n-2}x\left(1+\cot^2 x-1\right)dx$$

$$= \int \cot^{(n-2)}x.(1+\cot^2 x)dx - \int \cot^{n-2}x\,dx$$

$$= -\frac{1}{n-1}\cot^{n-1}x - \int \cot^{n-2}x\,dx$$

d) $\int \frac{\cos^n x}{\sin x}\,dx = \int \frac{\cos^{n-2}x.(1-\sin^2 x)}{\sin x}\,dx$

$$= \int \frac{\cos^{n-2}x}{\sin x}\,dx - \int \cos^{n-2}x \sin x\,dx \quad \begin{bmatrix}\cos x = u \\ du = -\sin x dx\end{bmatrix}$$

$$= \int \frac{\cos^{n-2}x}{\sin x}\,dx + \int u^{n-2}du = \int \frac{\cos^{n-2}x}{\sin x}\,dx + \frac{u^{n-1}}{n-1}$$

$$= \int \frac{\cos^{n-2}x}{\sin x}\,dx + \frac{\cos^{n-1}x}{n-1}$$

e) $\int \frac{\sin^n x}{\cos x}\,dx = \int \frac{\sin^{n-2}x.(1-\cos^2 x)}{\cos x}$

$$= \int \frac{\sin^{n-2}x}{\cos x}\,dx - \int \sin^{n-2}x \,.\, \cos x\,dx \quad \begin{bmatrix}\sin x = u \\ du = \cos x dx\end{bmatrix}$$

$$= \int \frac{\sin^{n-2}x}{\cos x}\,dx - \int u^{n-2}du$$

$$= \int \frac{\sin^{n-2}x}{\cos x}\,dx - \frac{1}{n-1}u^{n-1}$$

$$= \int \frac{\sin^{n-2}x}{\cos x}\,dx - \frac{1}{n-1}\sin^{n-1}x$$

f) $\int \sin^k x \cos^m x\,dx = -\frac{1}{m+k}\sin^{k-1}x \cos^{m+1}x + \frac{k-1}{m+k}\int \sin^{k-2}x \cos^m x\,dx$

olduğunu biliyoruz.

$k-2 = -n$ dönüşümü yapılırsa

$k = -(n-2)$ olur.

$$\int \frac{\cos^m x}{\sin^{n-2} x}\,dx = -\frac{1}{m-n+2}\,\frac{\cos^{m+1} x}{\sin^{n-1} x} - \frac{n-1}{m-n+2}\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{\cos^m x}{\sin^n x}\,dx = -\frac{1}{n-1}\,\frac{\cos^{m+1} x}{\sin^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\cos^m x}{\sin^{n-2} x}\,dx$$

bulunur.

g) $$\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x}\,dx = \frac{\cos^{m-1} x}{(m-n)\sin^{n-1} x} - \frac{m-1}{m-n}\int \frac{\cos^{m-2} x}{\sin^n x}\,dx$$

$u = \cos^{m-1} x \Rightarrow du = -(m-1)\cos^{m-2} x \sin x\,dx$

$$dv = \frac{\cos x}{\sin^n x}\,dx \Rightarrow v = \frac{1}{1-n}\,\frac{1}{\sin^{n-1} x}$$

$$\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x}\,dx = \int \cos^{m-1} x \cdot \frac{\cos x}{\sin^n x}\,dx$$

$$= \frac{1}{1-n}\,\frac{\cos^{m-1} x}{\sin^{n-1} x} - \frac{m-1}{n-1}\int \frac{\cos^{m-2} x . \sin^2 x}{\sin^n x}\,dx$$

$$= \frac{1}{1-n}\,\frac{\cos^{m-1} x}{\sin^{n-1} x} - \frac{m-1}{n-1}\int \frac{\cos^{m-2} x}{\sin^n x}\,dx + \frac{m-1}{n-1}\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x}\,dx$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{m-1}{n-1}\right)\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x}\,dx = \frac{1}{1-n}\,\frac{\cos^{m-1} x}{\sin^{n-1} x} - \frac{m-1}{n-1}\int \frac{\cos^{m-2} x}{\sin^n x}\,dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{\cos^m x}{\sin^n x} = \frac{1}{(m-n)}\,\frac{\cos^{m-1} x}{\sin^{n-1} x} - \frac{m-1}{m-n}\int \frac{\cos^{m-2} x}{\sin^n x}\,dx$$

h) $u = \left(a^2 - x^2\right)^n \Rightarrow du = -2n\left(a^2 - x^2\right)^{n-1} x\,dx$, $dx = dv \Rightarrow v = x$

$$\int \left(a^2 - x^2\right)^n dx = x\left(a^2 - x^2\right)^n + 2n\int \left(a^2 - x^2\right)^{n-1} x^2 dx \quad (1)$$

ve

$$\int \left(a^2 - x^2\right)^n dx = \int \left(a^2 - x^2\right)^{n-1}\left(a^2 - x^2\right) dx$$

$$= a^2 \int \left(a^2 - x^2\right)^{n-1} dx - \int x^2 \left(a^2 - x^2\right)^{n-1} dx$$

$$\Rightarrow \int x^2 \left(a^2 - x^2\right)^{n-1} dx = a^2 \int \left(a^2 - x^2\right)^{n-1} dx - \int \left(a^2 - x^2\right)^n dx$$

eşitliğini (1)'de yerine yazarsak

$$\int (a^2 - x^2)^n\,dx = x\left(a^2 - x^2\right)^n + 2na^2 \int \left(a^2 - x^2\right)^{n-1} dx - 2n\int \left(a^2 - x^2\right)^n dx$$

$$\Rightarrow (2n+1)\int \left(a^2 - x^2\right)^n dx = x\left(a^2 - x^2\right)^n + 2na^2 \int \left((a^2 - x^2\right)^{n-1} dx$$

$$\Rightarrow \int \left(a^2 - x^2\right)^n dx = \frac{x\left(a^2 - x^2\right)^n}{2n+1} + \frac{2na^2}{2n+1}\int \left(a^2 - x^2\right)^{n-1} dx$$

ı) $(\ln x)^n = u \Rightarrow du = n(\ln x)^{n-1}\frac{1}{x}dx$, $dv = dx \Rightarrow v = x$

$$\int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}\frac{1}{x}\cdot x dx$$

$$= x(\ln x)^n - n\int (\ln x)^{n-1}dx$$

i) $x^n dx = dv \Rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1} = v$

$(\ln x)^n = u \Rightarrow du = n(\ln x)^{n-1}\cdot\frac{1}{x}dx$

$$\int x^n (\ln x)^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot(\ln x)^n - \frac{n}{n+1}\int x^{n+1}\cdot(\ln x)^{n-1}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln x)^n - \frac{n}{n+1}\int x^n (\ln x)^{n-1}dx$$

j) $u = x^n \Rightarrow du = nx^{n-1}dx$, $\cos ax\,dx = dv \Rightarrow \frac{1}{a}\sin(ax) = v$

$$\int x^n \cos ax\,dx = \frac{1}{a}x^n \cdot \sin(ax) - \frac{1}{a}\int \sin(ax).(nx^{n-1})dx$$

$$= \frac{1}{a}\left[x^n \sin(ax) - n\int x^{n-1}\sin(ax)dx\right]$$

k) $u = x^n \Rightarrow du = nx^{n-1}dx$

$\sin x\,dx = dv \Rightarrow v = -\cos x$

$$\int x^n \sin x dx = -x^n \cos x - \int(-\cos x)\left(nx^{n-1}\right)dx$$

$$= -x^n \cos x + n\int x^{n-1}\cos x dx$$

2. $$I_n = \int \frac{\sin nx}{\sin x}dx = \int \frac{\sin(n-1)x\cos x + \cos(n-1)x\sin x}{\sin x}dx$$

$$= \int \frac{\sin(n-1)x\cos x}{\sin x} + \int \cos(n-1)x dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sin nx + \sin(n-2)x}{\sin x} + \frac{1}{n-1}\sin(n-1)x$$

$$= \frac{I_n}{2} + \frac{I_{n-2}}{2} + \frac{1}{n-1}\sin(n-1)x$$

$$\Rightarrow I_n = I_{n-2} + \frac{2\sin(n-1)x}{n-1}$$

3. $I_n = \frac{x^{n-1}}{n-1} - I_{n-2} \Rightarrow I_n + I_{n-2} = \frac{x^{n-1}}{n-1}$ olduğunu gösterelim.

$$I_n + I_{n-2} = \int \frac{x^n}{1+x^2}\,dx + \int \frac{x^{n-2}}{1+x^2}\,dx$$

$$= \int \frac{x^n + x^{n-2}}{1+x^2}\,dx = \int x^{n-2}\,dx = \frac{x^{n-1}}{n-1}$$

4. a) $\int \sin^4 x\,dx = \int (\sin^2 x)^2\,dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$$

b) $\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$ (1)

eşitliğinde $n = 7$ alınırsa

$$\int \cos^7 dx = \frac{1}{7}\sin x \cos^6 x + \frac{6}{7}\int \cos^5 x\,dx$$

son integral için (1) eşitliğinde $n = 5$ alınırsa

$$\int \cos^5 x\,dx = \frac{1}{5}\sin x \cos^4 x + \frac{4}{5}\int \cos^3 x\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\sin x \cos^4 x + \frac{4}{5}\int (1 - \sin^2 x)\,.\,\cos x\,dx \quad \begin{bmatrix} \sin x = u \\ du = \cos x\,dx \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\sin x \cos^4 x + \frac{4}{5}\int (1 - u^2)\,du$$

$$= \frac{1}{5}\sin x \cos^4 x + \frac{4}{5}u - \frac{4}{15}u^3$$

$$= \frac{1}{5}\sin x \cos^4 x + \frac{4}{5}\sin x - \frac{4}{15}(\sin x)^3 \Rightarrow$$

$$\int \cos^7 x\,dx = \frac{1}{7}\sin x.\cos^6 x + \frac{6}{7}\left(\frac{1}{5}\sin x \cos^4 x + \frac{4}{5}\sin x - \frac{4}{15}\sin^3 x\right) + C$$

$$= \frac{1}{7}\sin x\,.\,\cos^6 x + \frac{6}{35}\sin x \cos^4 x + \frac{24}{35}\sin x - \frac{8}{35}\sin^3 x + C$$

c) $\int \sin^n x \cos^m x dx = -\frac{1}{m+n} \sin^{n-1}x \cos^{m+1}x + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^{n-2} x \cos^m dx$

indirgeme formülünde n = 3, m = 6 yazılırsa

$$\int \sin^3 x \cos^6 x \, dx = -\frac{1}{9} \sin^2 x \cos^7 x + \frac{2}{9} \int \sin x \cos^6 x dx$$

$$= -\frac{1}{9} \sin^2 x \cos^7 x + \frac{2}{9} \int (-u^6) \, du \qquad \begin{bmatrix} \cos x = u \\ du = -\sin x \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{9} \sin^2 x \cos^7 x - \frac{2}{63} \cos^7 x + C$$

d) $\int \tan^n x dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x dx$

indirgeme formülünde n = 5 alınırsa

$$\int \tan^5 x dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \int \tan^3 x dx$$

$$= \frac{1}{4} \tan^4 x - \int \tan x \left(1 + \tan^2 x - 1\right) dx$$

$$= \frac{1}{4} \tan^4 x - \int \tan x \left(1 + \tan^2 x\right) dx + \int \tan x dx$$

$$= \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{\tan^2 x}{2} - \ln |\cos x| + C$$

e) $\int \frac{\sin^n x}{\cos x} dx = \frac{-1}{n-1} \sin^{n-1} x + \int \frac{\sin^{n-2} x}{\cos x} dx \qquad n > 1$

indirgenme formülünde n = 4 alınırsa

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos x} dx = \frac{-1}{3} \sin^3 x + \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx$$

$$= -\frac{1}{3} \sin^3 x + \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} dx$$

$$= -\frac{1}{3} \sin^3 x + \int \frac{1}{\cos x} dx - \int \cos x dx$$

$$= -\frac{1}{3} \sin^3 x - \sin x + \ln \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| + C$$

f) $\int \frac{\cos^n x}{\sin x} dx = \frac{1}{n-1} \cos^{n-1} x + \int \frac{\cos^{n-2} x}{\sin x} dx$

olduğunu biliyoruz. n = 5 alınırsa

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin x}\,dx = \frac{1}{4}\cos^4 x + \int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\cos^4 x + \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{\sin x}\,dx \qquad [\sin x = u \Rightarrow du = \cos x\,dx]$$

$$= \frac{1}{4}\cos^4 x + \int \frac{(1-u^2)}{u}\,du = \frac{1}{4}\cos^4 x + \ln u - \frac{u^2}{2} + C$$

$$= \frac{1}{4}\cos^4 x + \ln(\sin x) - \frac{(\sin x)^2}{2} + C$$

g) $\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1}\,\frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$ indirgeme formülünde

$n = 5$ alınırsa

$$\int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{1}{4}\,\frac{\sin x}{\cos^4 x} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\cos^3 x},$$

$n = 3$ alınırsa

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos x} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + C_1$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{1}{4}\,\frac{\sin x}{\cos^4 x} + \frac{3}{8}\cdot\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + C$$

bulunur.

h) $\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x}\,dx = \frac{-\cos^{m+1} x}{(n-1)\sin^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\cos^m x}{\sin^{n-2} x}\,dx \quad (n > 1)$
indirgeme formülünde

$m = n = 4$ alınırsa

$$\int\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^4 = \int \cot^4 x\,dx = -\frac{\cos^5 x}{4\sin^4 x} - \frac{2}{3}\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}\,dx \qquad (1)$$

$m = 4,\ n = 2$ alınırsa

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{\cos^5 x}{\sin x} - 4\int \cos^4 x\,dx \qquad (2)$$

$$\int \cos^4 x\,dx = \int(\cos^2 x)^2\,dx = \int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x \qquad (3)$$

(1), (2) ve (3) den

$$\int \cot^4 x\,dx = -\frac{\cos^5 x}{4\sin^4 x} + \frac{2}{3}\frac{\cos^5 x}{\sin x} + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\sin 2x + \frac{1}{3}x - \frac{1}{12}\sin 4x + C$$

bulunur.

ı) $u = x^{10} \Rightarrow du = 10\,x^9\,dx$, $\ln x\,dx = dv \Rightarrow v = x(\ln x - 1)$

$$\int x^{10}\ln x\,dx = x^{10}.x(\ln x - 1) - 10\int\left(x^{10}\ln x - x^{10}\right)dx$$

$$= x^{11}(\ln x - 1) - 10\int x^{10}\ln x + 10\int x^{10}\,dx$$

$$\Rightarrow 11\int x^{10}\ln x\,dx = x^{11}(\ln x - 1) + \frac{10}{11}x^{11} + C_1$$

$$\Rightarrow \int x^{10}\ln x\,dx = \frac{x^{11}}{11}(\ln x - 1) + \frac{10}{121}x^{11} + C$$

i) $\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2}x}$ indirgeme formülünde

$n = 6$ yazılırsa

$$\int \frac{dx}{\sin^6 x} = -\frac{1}{5}\frac{\cos x}{\sin^5 x} + \frac{4}{5}\int \frac{dx}{\sin^4 x},$$

$n = 4$ yazılırsa

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sin^6 x} = -\frac{1}{5}\frac{\cos x}{\sin^5 x} - \frac{4}{15}\frac{\cos x}{\sin^3 x} - \frac{8}{15}\cot x + C$$

j) $\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x}\,dx = \frac{-\cos^{m+1}x}{(n-1)\sin^{n-1}x} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\cos^m x}{\sin^{n-2}x}\,dx \quad (n > 1)$

indirgeme formülünde

$n = m = 5$ alınırsa

$$\int\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^5 dx = -\frac{\cos^6 x}{4\sin^4 x} - \frac{1}{2}\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}\,dx$$

$m = 5$, $n = 3$ alınırsa

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}\,dx = -\frac{\cos^6 x}{2\sin^2 x} - 2\int \frac{\cos^5 x}{\sin x}\,dx$$

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin x} = \int \frac{(1-\sin^2 x)^2 . \cos x}{\sin x}\,dx \quad [\sin x = u \Rightarrow du = \cos x\,dx]$$

$$= \int \left(\frac{1-u^2}{u}\right)^2 du = \int \frac{1}{u} - 2u + u^3\,du$$

$$= \ln|u| - u^2 + \frac{u^4}{4} + C = \ln|\sin x| - \sin^2 x + \frac{\sin^4 x}{4} + C$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^5 dx = -\frac{\cos^6 x}{4\sin^4 x} + \frac{1}{4}\,\frac{\cos^6 x}{\sin^2 x} + \ln|\sin x| - \sin^2 x + \frac{\sin^4 x}{4} + C$$

k) $$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}\,dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)\cdot \sin x}{\cos x}\,dx \qquad [\cos x = u \Rightarrow du = -\sin x\,dx]$$

$$= -\int \left(\frac{1-u^2}{u}\right) du = \frac{u^2}{2} - \ln u + C = \frac{\cos^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C$$

l) $$\int \frac{\cos^m x}{\sin^n x}\,dx = \frac{\cos^{m-1} x}{(m-n)\sin^{n-1} x} - \frac{m-1}{m-n}\int \frac{\cos^{m-2} x}{\sin^n x}\,dx \quad (m \neq n)$$

indirgeme formülünde $m = 5$, $n = 2$ alınırsa

$$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x}\,dx = \frac{\cos^4 x}{3\sin x} - \frac{4}{3}\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,dx = \frac{\cos^4 x}{3\sin x} + \frac{4}{3}\,\frac{1}{\sin x} + \frac{4}{3}\sin x + C\,.$$

m) $$\int (4-x^2)^3\,dx$$

$$\int (a^2-x^2)^n\,dx = \frac{x(a^2-x^2)^n}{2n+1} + \frac{2a^2 n}{2n+1}\int (a^2-x^2)^{n-1}\,dx$$ indirgeme formülünde $a = 2$, $n = 3$ alınırsa

$$\int (4-x^2)^3\,dx = \frac{x(4-x^2)^3}{7} + \frac{24}{7}\int (4-x^2)^2\,dx\,,$$

$a = 2$, $n = 2$ alınırsa

$$\int (4-x^2)^2\,dx = \frac{x(4-x^2)^2}{5} + \frac{16}{5}\int (4-x^2)\,dx$$

$$= \frac{x(4-x^2)^2}{5} + \frac{64}{5}x - \frac{16}{15}x^3 + C_1$$

$$\Rightarrow \int (4-x^2)^3\,dx = \frac{x(4-x^2)^3}{7} + \frac{24}{35}x(4-x^2)^2 + \frac{1536}{35}x - \frac{364}{105}x^3 + C$$

n) $I_n = \int \frac{\sin nx}{\sin x} \Rightarrow I_n = \frac{2\sin(n-1)x}{n-1} + I_{n-2}$

$n = 5$ alınırsa $\int \frac{\sin 5x}{\sin x}\,dx = \frac{\sin 4x}{2} + \int \frac{\sin 3x}{\sin x}\,dx$

$n = 3$ için $\int \frac{\sin 3x}{\sin x}\,dx = \sin 2x + \int \frac{\sin x}{\sin x}\,dx = \sin 2x + x + C$

$$\Rightarrow \int \frac{\sin 5x}{\sin x}\,dx = \frac{\sin 4x}{2} + \sin 2x + x + C$$

PROBLEMLER

1. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$

b) $\int \frac{(x+1)dx}{x^3+x^2-6x} = \ln\left|\frac{(x-2)^{3/10}(x+3)^{-2/15}}{x^{1/6}}\right| + C$

c) $\int \frac{(3x+5)dx}{x^3-x^2-x+1} = -\frac{4}{x-1} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C$

d) $\int \frac{dx}{x^2+7x+6} = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x+1}{x+6}\right| + C$

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\int \frac{dx}{(x-3)(x+2)}$

b) $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

c) $\int \frac{dx}{(x+2)(x+1)^2}$

d) $\int \frac{x+2}{x^2+x}\,dx$

e) $\int \frac{x\,dx}{(x+1)^2(x+2)^2}$

f) $\int \frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)}\,dx$

g) $\int \frac{x^4}{x^4-1}\,dx$

ı) $\int \frac{dx}{x^4+1}$

i) $\int \frac{x^2+2x+7}{x^3+x^2-2x}\,dx$

j) $\int \frac{x^3}{(x+1)^3}\,dx$

k) $\int \frac{\sqrt{x}+1}{x+1}\,dx$

ÇÖZÜMLER

1. $\dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x+2}$

$\dfrac{1}{x^2-4} = \dfrac{x(A+B)+2A-2B}{x^2-4} \Rightarrow A+B=0 \text{ ve } 2A-2B=1$

$\Rightarrow B = -\dfrac{1}{4} \Rightarrow A = \dfrac{1}{4}$

$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4} = \int \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-2}\,dx - \int \frac{1}{4}\,\frac{1}{x+2}\,dx$

$= \dfrac{1}{4}\ln|x-2| - \dfrac{1}{4}\ln|x+2| + C = \dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right| + C$

b) $\dfrac{x+1}{x^3+x^2-6x} = \dfrac{x+1}{x(x^2+x-6)} = \dfrac{x+1}{x(x+3)(x-2)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+3} + \dfrac{C}{x-2}$

$x + 1 = A(x + 3)(x - 2) + Bx(x - 2) + C x(x + 3)$

$x = -3 \Rightarrow -2 = B(-3)(-5) \Rightarrow B = -\dfrac{2}{15}$

$x = 2 \Rightarrow 3 = C \cdot (2) \cdot (5) \Rightarrow C = \dfrac{3}{10}$

$x = 0 \Rightarrow 1 = A \cdot 3 \cdot (-2) \Rightarrow A = -\dfrac{1}{6}$

$\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}\,dx = \int -\frac{1}{6}\frac{1}{x} - \frac{2}{15}\frac{1}{x+3} + \frac{3}{10}\frac{1}{x-2}\,dx$

$= -\dfrac{1}{6}\ln|x| - \dfrac{2}{15}\ln|x+3| + \dfrac{3}{10}\ln|x-2| + C$

$= \ln\left|x^{-1/6}\right| + \ln\left|(x+3)^{-2/15}\right| + \ln|x-2|^{3/10} + C$

$= \ln\left|\dfrac{(x+3)^{-2/15}(x-2)^{3/10}}{x^{1/6}}\right| + C$

c) $\dfrac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} = \dfrac{3x+5}{(x-1)^2(x+1)}$

$= \dfrac{A}{(x-1)} + \dfrac{B}{(x-1)^2} + \dfrac{C}{x+1}$

$\Rightarrow 3x + 5 = A(x - 1)(x + 1) + B(x + 1) + C(x - 1)^2$

$x = 1 \Rightarrow 8 = 2B \Rightarrow B = 4$

$x = -1 \Rightarrow 2 = 4C \Rightarrow C = \dfrac{1}{2}$

$$x = 0 \Rightarrow 5 = -A + B + C \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{(3x+5)}{x^3 - x^2 - x + 1}\,dx = \int -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)}\,dx + \int \frac{4}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| - 4\frac{1}{x-1}$$

$$= -\frac{4}{x-1} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C$$

d) $$\frac{1}{x^2+7x+6} = \frac{1}{(x+1)(x+6)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+6} = \frac{A(x+6)+B(x+1)}{(x+1)(x+6)}$$

$$= \frac{x(A+B)+6A+B}{(x+1)(x+6)}$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ 6A+B=1 \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{5},\quad B = -\frac{1}{5}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+7x+6} = \frac{1}{5}\int \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{5}\int \frac{1}{x+6}\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\ln|x+1| - \frac{1}{5}\ln|x+6| + C = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x+1}{x+6}\right| + C$$

2. a) $$\frac{1}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)}$$

$$= \frac{x(A+B)+2A-3B}{(x-3)(x+2)}$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ 2A-3B=1 \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{5},\quad B = -\frac{1}{5}$$

$$\int \frac{dx}{(x-3)(x+2)} = \frac{1}{5}\int \frac{1}{x-3}\,dx - \frac{1}{5}\int \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\ln|x-3| - \frac{1}{5}\ln|x+2| + C$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right| + C$$

b) $$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

$$= \frac{A(x+2)(x+3)+B(x+1)(x+3)+C(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$x = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)$

$x = -1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$

$x = -2 \Rightarrow B = 2$

$x = -3 \Rightarrow C = -\frac{3}{2}$

$$\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{2}{x+2}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{1}{x+3}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x+1| + 2\ln|x+2| - \frac{3}{2}\ln|x+3| + C$$

$$= \ln\left|\frac{(x+2)^2}{(x+1)^{1/2}.(x+3)^{3/2}}\right| + C$$

c) $$\frac{1}{(x+2)(x+1)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{A(x+1)^2 + B(x+1)(x+2) + C(x+2)}{(x+2)(x+1)^2}$$

$1 = A(x+1)^2 + B(x+1)(x+2) + C(x+2)$

$x = -1 \Rightarrow 1 = C$

$x = -2 \Rightarrow A = 1$

$x = 0 \Rightarrow A + 2B + 2C = 1 \Rightarrow 2B = -2 \Rightarrow B = -1$

$$\int \frac{dx}{(x+2)(x+1)^2} = \int \frac{1}{x+2}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= \ln|x+2| - \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + C$$

$$= \ln\left|\frac{x+2}{x+1}\right| - \frac{1}{x+1} + C$$

d) $\int \frac{x+2}{x^2+x}\,dx$

$$\frac{x+2}{x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{x(A+B)+A}{x(x+1)} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} A+B=1 \\ A=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow B = -1$$

$$\int \frac{x+2}{x^2+x}\,dx = \int \frac{2}{x}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= 2\ln|x| - \ln|x+1| + C = \ln\left|\frac{x^2}{x+1}\right| + C$$

e) $\dfrac{x}{(x+1)^2(x+2)^2} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{(x+1)^2} + \dfrac{C}{x+2} + \dfrac{D}{(x+2)^2}$

$x = A(x+1)(x+2)^2 + B(x+2)^2 + C(x+1)^2(x+2) + D(x+1)^2$

$x = -1 \Rightarrow -1 = B$

$x = -2 \Rightarrow -2 = D$

$x = 0 \Rightarrow 4A + 4B + 2C + D = 0 \Rightarrow 4A + 2C = 6$

$x = -3 \Rightarrow -3 = -2A + B + 4C + 4D \quad 4C - 2A = 9$

$\Rightarrow A = \dfrac{3}{10}, \; C = \dfrac{12}{5}$

$$\int \frac{x\,dx}{(x+1)^2(x+2)^2} = \int \frac{\frac{3}{10}}{x+1}\,dx + \int \frac{-1}{(x+1)^2}\,dx + \int \frac{\frac{12}{5}}{x+2}\,dx + \int \frac{-2}{(x+2)^2}\,dx$$

$$= \frac{3}{10}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + \frac{12}{5}\ln|x+2| + \frac{2}{x+2} + C$$

f) $\dfrac{x^2+x+1}{x(x^2+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1} = \dfrac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)} = \dfrac{x^2(A+B)+Cx+A}{x(x^2+1)}$

$A + B = 1, \; C = 1, \; A = 1 \Rightarrow B = 0$

$$\int \frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \ln|x| + \arctan x + C$$

g) $\dfrac{x^4}{x^4-1} = 1 + \dfrac{1}{x^4-1} = 1 + \dfrac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$

$$= 1 + \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$1 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)(x+1)$

$x = -1 \Rightarrow 1 = -4B \Rightarrow B = -\dfrac{1}{4}$

$x = 1 \Rightarrow 1 = 4A \Rightarrow A = \dfrac{1}{4}$

$x = 0 \Rightarrow 1 = A - B - D \Rightarrow D = -\dfrac{1}{2}$

$x = 2 \Rightarrow 1 = 15A + 5B + (2C + D) \cdot 3 \Rightarrow C = 0$

$$\int \frac{x^4}{x^4-1}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{4}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{4}\frac{1}{x+1} + -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$= x + \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| + -\frac{1}{2}\arctan x + C$$

ı) $x^4 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - \left(\sqrt{2}\,x\right)^2$

$= \left(x^2+\sqrt{2}\,x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}\,x+1\right)$

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}\,x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}\,x+1} \Rightarrow$$

$$1 = (Ax + B)\left(x^2-\sqrt{2}\,x+1\right) + (Cx+D)\left(x^2+\sqrt{2}\,x+1\right) \Rightarrow$$

$$1 = (A + C)\,x^3 + \left(B-\sqrt{2}\,A+\sqrt{2}\,C+D\right)x^2 + \left(A-\sqrt{2}\,B+C+\sqrt{2}\,D\right)x$$

$$+ (B + D) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B-\sqrt{2}\,A+\sqrt{2}\,C+D=0 \\ A-\sqrt{2}\,B+C+\sqrt{2}\,D=0 \\ B+D=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}\,A+\sqrt{2}\,C+1=0 \Rightarrow -\sqrt{2}.2A=1 \\ -\sqrt{2}\,B+\sqrt{2}\,D=0 \Rightarrow B=D \end{cases}$$

$$\Rightarrow B=D=\frac{1}{2},\ A=-\frac{1}{2\sqrt{2}},\ C=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}\,dx - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}\,dx + \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}\,dx - \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}\,dx$$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{2}}\int \frac{\sqrt{2}\,dx}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}\,x+1}{x^2-\sqrt{2}\,x+1} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}\,x+1}{x^2-\sqrt{2}\,x+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + C$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}\,x+1}{x^2-\sqrt{2}\,x+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\frac{2\sqrt{2}\,x}{1-x^2} + C$$

i) $\int \frac{x^2+2x+7}{x^3+x^2-2x}\,dx$

$$\int \frac{x^2+2x+7}{x^3+x^2-2x}\,dx = \int \frac{x^2+2x+7}{x(x-1)(x+2)}\,dx$$

$$= -\frac{7}{2}\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{10}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{7}{6}\int \frac{1}{x+2}\,dx$$

$$= -\frac{7}{2}\ln|x| + \frac{10}{3}\ln|x-1| + \frac{7}{6}\ln|x+2| + C$$

j) $\int \frac{x^3}{(x+1)^3}\,dx$ integralinde $x+1=u \Rightarrow du=dx$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\int \frac{x^3}{(x+1)^3} = \int \frac{(u-1)^3}{u^3}\,du = \int \frac{u^3-3u^2+3u-1}{u^3}\,du$$

$$= \int \left(1-\frac{3}{u}+\frac{3}{u^2}-\frac{1}{u^3}\right)du = u-3\ln|u|-\frac{3}{u}+\frac{1}{2u^2}+C$$

$$= (x+1)-3\ln|x+1|-\frac{3}{x+1}+\frac{1}{2(x+1)^2}+C$$

bulunur.

k) $x=u^2$, $dx=2u\,du$ değişken değiştirmesi yapılarak

$$\int \frac{\sqrt{x}+1}{x+1}\,dx = \int \frac{(u+1)2u}{u^2+1}\,du = 2\int \frac{u^2}{u^2+1}\,du + \int \frac{2u}{u^2+1}\,du$$

$$= 2\int du - 2\int \frac{1}{u^2+1}\,du + \int \frac{2u}{u^2+1}\,du$$

$$= 2u - 2 \arctan u + \ln|u^2+1| + C$$

$$= 2\sqrt{x} - 2 \arctan \sqrt{x} + \ln|x+1| + C$$

bulunur.

PROBLEMLER

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-8}}$ b) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x+5}}$ c) $\int \frac{dx}{\sqrt{15-4x-4x^2}}$

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ b) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$ c) $\int \frac{(1-x)dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$

3. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x+2}}$ b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

4. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$ b) $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$ c) $\int \frac{x^3+1}{\sqrt{x^2-4x+1}}dx$

5. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$ b) $\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2-2x+2}}$

c) $\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2-x+1}}dx$ d) $\int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}dx$

6. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\int x^3\left(1+2x^2\right)^{-3/2}dx$ b) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{+x^4}}$

c) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$ d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$

e) $\int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}$ f) $\int \frac{x^5dx}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}}$

ÇÖZÜMLER

1. a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-8}}$

$x^2-2x-8=(x-1)^2-3^2$ $\quad [x-1=u \Rightarrow du=dx]$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2-9}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2-3^2}}$$

$$= \ln\left(\left|u+\sqrt{u^2-9}\right|\right)+C$$

$$= \ln\left(\left|x-1+\sqrt{(x-1)^2-9}\right|\right)+C$$

$$= \ln\left(\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-8}\right|\right)+C$$

b) $4x^2-4x+5=(2x-1)^2+4$ $\quad [2x-1=u,\ 2\,dx=du]$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(2x-1)^2+4}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+4}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+4}\right|+C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|2x-1+\sqrt{4x^2-4x+5}\right|+C$$

c) $15-4x-4x^2=-(4x^2+4x-15)=-\left[(2x+1)^2-16\right]=16-(2x+1)^2$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{15-4x-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{16-(2x+1)^2}} \qquad [2x+1=u,\ 2\,dx=du]$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{16-u^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{u}{4}+C = \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x+1}{4}+C$$

2. a) $\int \frac{(x+1)}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x-2}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{-2x+2}{\sqrt{2x-x^2}} + \frac{1}{2}\int \frac{4}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$$

$$= -\sqrt{2x-x^2} + 2\arcsin(x-1)+C$$

b) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-2x+5}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2+2}{\sqrt{x^2-2x+5}}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+5}} + \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+4}}$

$= \sqrt{x^2-2x+5} + \ln\left(\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\right|\right) + C$

c) $\int \frac{1-x}{\sqrt{8+2x-x^2}}\,dx$

$\int \frac{1-x}{\sqrt{8+2x-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{2-2x}{\sqrt{8+2x-x^2}} = \sqrt{8+2x-x^2} + C$

3. a) $\frac{1}{x-1} = t \Rightarrow x = \frac{1+t}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2}\,dt$

$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x+2}} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}\cdot dt}{\frac{1}{t^2}\sqrt{t^2+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$

$= -\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right| + C = -\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2-2x+2}}{x-1}\right| + C$

b) $\frac{1}{x} = t \Rightarrow x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2}\,dt$

$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}\,dt}{\frac{1}{t}\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = -\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right| + C$

$= -\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C$

4. a) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}}\,dx = (ax+b)\sqrt{x^2-x+1} + \lambda\int \frac{1}{\sqrt{x^2-x+1}}\,dx$

$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}} = a\sqrt{x^2-x+1} + \frac{(2x-1)(ax+b)}{2\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2-x+1}}$

$2x^2 = 2a\,(x^2 - x + 1) + (2x-1)\,(ax+b) + 2\lambda$

$2x^2 = x^2\,(2a+2a) + x\,(-2a-a+2b) + (2a-b+2\lambda)$

$4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow -3a + 2b = 0 \Rightarrow b = \frac{3}{4}$

$2a - b + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{8}$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}}\,dx = \left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)\sqrt{x^2-x+1} - \frac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

$$= \left(\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)\sqrt{x^2-x+1} - \frac{1}{8}\ln\left|x-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right|$$

$$= \frac{2x+3}{8}\sqrt{x^2-x+1} - \frac{1}{8}\ln\left|\frac{2x-1+2\sqrt{x^2-x+1}}{2}\right| + C$$

b) $$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left(ax^4+bx^3+cx^2+dx+e\right)\sqrt{1-x^2} + \lambda\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} = (4ax^3+3bx^2+2cx+d)\sqrt{1-x^2}$$

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}(ax^4+bx^3+cx^2+dx+c) + \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\Rightarrow x^5 = (4ax^3+3bx^2+2cx+d)(1-x^2) - x(ax^4+bx^3+cx^2+dx+c) + \lambda$

$a = -\frac{3}{5}$, $b = 0$, $c = -\frac{4}{15}$, $d = 0$, $e = -\frac{8}{15}$, $\lambda = 0$

$$\Rightarrow \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{8+4x^2+3x^4}{15}\sqrt{1-x^2}$$

c) $$\int \frac{x^3+1}{\sqrt{x^2-4x+1}}\,dx = (ax^2+bx+c)\sqrt{x^2-4x+1} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3+1}{\sqrt{x^2-4x+1}} = (2ax+b)\sqrt{x^2-4x+1} + \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+1}}(ax^2+bx+c) + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2-4x+1}}$$

$\Rightarrow x^3 + 1 = (2a\,x + b)(x^2 - 4x + 1) + (x-2)(ax^2+bx+c) + \lambda$

$\Rightarrow a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{5}{3}$, $c = \frac{28}{3}$, $\lambda = 18$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4x+1}}\,dx = \frac{1}{3}\left(x^2+5x+28\right)\sqrt{x^2-4x+1} + \int \frac{18\,dx}{\sqrt{(x-2)^2-3}}$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+5x+28)\sqrt{x^2-4x+1} + 18\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+1}\right| + C$$

5. a) $\frac{1}{x} = t \Rightarrow x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2}dt$

$$\int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^5}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} = -\int \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}dt \quad (t = \sin u,\ dt = \cos u\, du)$$

$$= -\int \frac{\sin^4 u}{\cos u}\cdot \cos u du = \int \sin^4 u du$$

$$= \frac{1}{4}\sin^3 u \cos u + \frac{3}{8}\sin u \cos u - \frac{3}{8}u + C$$

$$= \frac{1}{4}t^3 \cos(\arcsin t) + \frac{3}{8}t\cos(\arcsin t) - \frac{3}{8}\arcsin t + C$$

$$= \frac{1}{4}t^3 . \sqrt{1-t^2} + \frac{3}{8}t\sqrt{1-t^2} - \frac{3}{8}\arcsin t + C$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{x^3}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} + \frac{3}{8}\frac{1}{x}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} - \frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{x} + C$$

$$= \left(\frac{1}{4x^4} + \frac{3}{8x^2}\right)\sqrt{x^2-1} - \frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{x} + C$$

b) $\frac{1}{x+1} = t \Rightarrow x = \frac{1-t}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2}dt$

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2-2x+2}} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^2}\sqrt{\frac{(1-t)^2-2t(1-t)+2t^2}{t^2}}}$$

$$= -\int \frac{t\,dt}{\sqrt{5t^2-4t+1}} = -\frac{1}{10}\int \frac{10t-4+4}{\sqrt{5t^2-4t+1}}dt$$

$$= -\frac{1}{10}\int \frac{10t-4}{\sqrt{5t^2-4t+1}} - \frac{4}{10}\int \frac{1}{\sqrt{5t^2-4t+1}}dt$$

$$= -\frac{1}{5}\sqrt{5t^2-4t+1} - \frac{2}{5}\int \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{\left(t-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{25}}}dx$$

$$= -\frac{1}{5}\sqrt{5t^2-4t+1} - \frac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left|t-\frac{2}{5}+\sqrt{\left(t-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{25}}\right| + C$$

$$= -\frac{1}{5}\frac{\sqrt{x^2-2x+2}}{x+1} - \frac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left|\frac{1}{x+1}-\frac{2}{5}+\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{x^2-2x+2}}{x+1}\right| + C$$

c) $\frac{1}{x+1} = t \Rightarrow x = \frac{1-t}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2}dt$

$$\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2-x+1}} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^3}\frac{\sqrt{(1-t)^2-t(1-t)+t^2}}{t}}$$

$$= -\int \frac{t^2}{\sqrt{3t^2-3t+1}}dt$$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{3t^2-3t+1}} = (At+B).\sqrt{3t^2-3t+1} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{3t^2-3t+1}}$$

$$\frac{t^2}{\sqrt{3t^2-3t+1}} = A\sqrt{3t^2-3t+1} + (At+B)\left(\frac{6t-3}{2\sqrt{3t^2-3t+1}}\right) + \frac{\lambda}{\sqrt{3t^2-3t+1}}$$

$2t^2 = 2A\,(3t^2 - 3t + 1) + (At + B)\,(6t - 3) + 2\lambda$

$2t^2 = t^2.\ 12A + t\,(-9A + 6B) + 2A - 3B + 2\lambda$

$12A = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{6},\quad 6B - 9A = 9 \Rightarrow b = \frac{1}{4}$

$2A - 3B + 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{24}$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{3t^2-3t+1}}dt = \left(\frac{t}{6}+\frac{1}{4}\right)\sqrt{3t^2-3t+1} + \frac{5}{24}\int \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}}}$$

$$= \left(\frac{t}{6}+\frac{1}{4}\right)\sqrt{3t^2-3t+1} + \frac{5}{24\sqrt{3}}\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}}\right|$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2-x+1}} = -\left(\frac{1}{6(x+1)}+\frac{1}{4}\right)\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x+1} -$$

$$\frac{5}{24\sqrt{3}}\ln\left|\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}+\sqrt{\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}}\right| + C$$

d) $$\int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}dx = \int \frac{x(x+1)}{x\sqrt{x^2-x+1}}dx + \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$= \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}dx + \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}} = I_1 + I_2\,.$$

$$I_1 = \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}dx = A\sqrt{x^2-x+1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}} \Rightarrow$$

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{A(2x-1)}{2\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2-x+1}} \Rightarrow$$

$$2x + 2 = 2Ax - A + 2\lambda \Rightarrow A = 1\,,\ \lambda = \frac{3}{2}$$

$$I_1 = \sqrt{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} = \sqrt{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\ln\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right).$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}} = \int \frac{\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-t+1}} = -\ln\left(t-\frac{1}{2}-\sqrt{t^2-t+1}\right)$$

$$= -\ln\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1}\right) = -\ln\left(\frac{2-x}{2x}-\frac{1}{x}\sqrt{x^2-x+1}\right).$$

$$I = I_1 + I_2 = \sqrt{x^2-x+1} + \frac{3}{2}\ln\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right) - \ln\left(\frac{2-x}{2x}-\frac{1}{x}\sqrt{x^2-x+1}\right).$$

6. a) $r = 1\,,\ p = 2\,,\ q = -\frac{3}{2}\cdot\frac{r+1}{p} = 1 \in Z \Rightarrow$

$$x^2 = y \Rightarrow 2x\,dx = dy\ \ \frac{1}{2}\int y(1+2y)^{-3/2}dy = \int x^3(1+2x^2)^{-3/2}\,dx$$

$$1 + 2y = t^2 \Rightarrow dy = t\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(t^2-1)}{2}\cdot t^{-3}.t\,dt = \frac{1}{4}\int 1 - t^{-2}\,dt = \frac{1}{4}(t + t^{-1}) + C$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sqrt{1+2y} + \frac{1}{\sqrt{1+2y}}\right) + C = \frac{1}{4}\left(\sqrt{1+2x^2} + \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1+x^2}{\sqrt{1+2x^2}}\right) + C$$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}\,,\ r = 0,\ p = 4,\ q = -\frac{1}{4} \notin Z,\ \frac{r+1}{p} + q = 0 \in Z$

$$x^{-4} + 1 = t^4\,,\ x^4 = \frac{1}{t^4-1} \Rightarrow x = (t^4 - 1)^{-1/4}$$

$$dx = -\,t^3(t^4-1)^{-5/4}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = -\int\left(\frac{t^4-1}{t^4}\right)^{1/4}.t^3\left(t^4-1\right)^{-5/4}dt$$

$$= -\int (t^4-1)^{-1}.t^2 dt = -\int \frac{t^2}{t^4-1}\,dt$$

$$\frac{t^2}{t^4-1} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{C}{t-1} + \frac{D}{t+1},\ B = \frac{1}{2},\ C = \frac{1}{4},\ D = \frac{1}{4},\ A = 0$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt - \frac{1}{4}\int \frac{1}{t-1}\,dt + \frac{1}{4}\int \frac{1}{t+1}\,dt$$

$$= -\frac{1}{2}\arctan t - \frac{1}{4}\ln|t-1| + \frac{1}{4}\ln|t+1| + C$$

$$= -\frac{1}{2}\arctan\sqrt[4]{x^{-4}+1} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{x^{-4}+1}+1}{\sqrt[4]{x^{-4}+1}-1}\right| + C$$

c) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}} = \int x^{-1}(1+x^5)^{-1/3}\,dx$

$r = -1,\ p = 5,\ q = -\frac{1}{3},\ \frac{r+1}{p} = 0 \in Z \Rightarrow 1 + x^5 = t^3 \Rightarrow$

$x = (t^3-1)^{1/5} \Rightarrow dx = \frac{3}{5}t^2(t^3-1)^{-4/5}dt$

$$\int x^{-1}(1+x^5)^{-1/3}dx = \int (t^3-1)^{-1/5}t^{-1}.\frac{3}{5}t^2(t^3-1)^{-4/5}dt = \frac{3}{5}\int \frac{t}{t^3-1}\,dt$$

$$\frac{t}{t^3-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+t+1}$$

$t = A(t^2 + t + 1) + (t - 1)(Bt + C) \Rightarrow A = C = \frac{1}{3},\ B = -\frac{1}{3}$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}} = \frac{3}{5}\int \frac{\frac{1}{3}}{t-1}\,dt + \frac{3}{5}\int \frac{-\frac{t}{3}+\frac{1}{3}}{t^2+t+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{5}\ln|t-1| - \frac{1}{10}\int \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,dx + \frac{3}{10}\int \frac{1}{t^2+t+1}$$

$$= \frac{1}{5}\ln|t-1| - \frac{1}{10}\ln|t^2+t+1| + \frac{3}{10}\int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{10}\ln|t-1|^2 - \frac{1}{10}\ln|t^2+t+1| + \frac{\sqrt{3}}{5}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{1}{10}\ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1} + \frac{\sqrt{3}}{5}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{1}{10}\ln\frac{\left(\sqrt[3]{1+x^5}-1\right)^2}{\left(\sqrt[3]{1+x^5}\right)^2+\sqrt[3]{1+x^5}+1} + \frac{\sqrt{3}}{5}\arctan\frac{2\sqrt[3]{1+x^5}+1}{\sqrt{3}} + C$$

d) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}} = \int x^{-3/2}\left(1+x^{3/4}\right)^{-1/3} dx \quad \left(r=-\frac{3}{2},\ p=\frac{3}{4},\ q=-\frac{1}{3}\right)$

$\frac{r+1}{p} = -\frac{2}{3}$, $\frac{r+1}{p} + q = -1 \in Z \Rightarrow x^{-3/4} + 1 = t^3$

$\Rightarrow x = (t^3 - 1)^{-4/3}$, $dx = -\frac{4}{3}(t^3 - 1)^{-7/3} \cdot 3t^2\, dt = -4t^2 (t^3 - 1)^{-7/3}\, dt$

$I = \int (t^3-1)^2 \left(1+\frac{1}{t^3-1}\right)^{-1/3} .(-4).t^2(t^3-1)^{-7/3} dt = -4\int t\, dt$

$= -2t^2 + C = -2\sqrt[3]{\left((x^{-3/4}+1)\right)^2} + C$

e) $I = \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}} dx = \int x^{1/3}(1+x^{1/3})^{-1/2} dx$, $r = \frac{1}{3}$, $p = \frac{1}{3}$, $q = -\frac{1}{2}$

$\frac{r+1}{p} = 4 \in Z$, $1 + x^{1/3} = t^2$, $x = (t^2-1)^3$, $dx = 6t\,(t^2 - 1)^2\, dt$

$I = \int \left(t^2-1\right) t^{-1}.6t.(t^2-1)^2 dt = 6\int (t^2-1)^3 dt = 6\int t^6 - 3t^4 + 3t^2 - 1\, dt$

$= 6\left[\frac{t^7}{7} - \frac{3}{5}t^5 + t^3 - t\right] + C$

$= \left[\frac{(1+x^{1/3})^{7/2}}{7} - \frac{3}{5}(1+x^{1/3})^{5/2} + (1+x^{1/3})^{3/2} - 1 - x^{1/3}\right] + C$

f) $I = \int \frac{x^5}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} dx = \int x^5\left(x^2-1\right)^{-2/3} dx$, $r = 5$, $p = 2$, $q = -\frac{2}{3}$

$\frac{r+1}{p} = 3 \in Z \Rightarrow x^2 - 1 = t^3$, $x = (t^3 + 1)^{1/2}$, $dx = \frac{1}{2}(t^3 + 1)^{-1/2}\, 3t^2\, dt$

$I = \frac{3}{2}\int (t^3+1)^{5/2}.t^{-2}.t^2(t^3+1)^{-1/2} dt = \frac{3}{2}\int (t^3+1)^2 dt$

$= \frac{3}{2}\int t^6 + 2t^3 + 1\, dt = \frac{3}{14}t^7 + \frac{3}{4}t^4 + \frac{3}{2}t + C$

$= \frac{3}{14}(x^2-1)^{7/3} + \frac{3}{4}(x^2-1)^{4/3} + \frac{3}{2}(x^2-1)^{1/3} + C$

BÖLÜM PROBLEMLERİ

Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

1. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}$
2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$
3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
4. $\int \frac{dx}{x\cos^2(\ln x)}$
5. $\int \frac{dx}{x^3+ax^2}$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$
7. $\int \cos(\ln x)dx$
8. $\int x\cos^2 x dx$
9. $\int \frac{\sin x dx}{a^2+\cos^2 x}$
10. $\int \frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$
11. $\int \frac{e^x-2}{e^{2x}+4}dx$
12. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$
13. $\int \frac{\cos x}{\sin x}dx$
14. $\int \frac{x^4+1}{x^3+x^2}dx$
15. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$
16. $\int \frac{a^x dx}{a^{2x}+1}$
17. $\int \frac{dx}{1+\tan x}$
18. $\int \frac{dx}{2x^2-4x+9}$
19. $\int \frac{x-5}{x^2-2x+2}dx$
20. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(1+x^2)}$
21. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-2x^2-x^4}}$
22. $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x-5}$
23. $\int \frac{\cos^3 x dx}{1-\sin x}$
24. $\int \frac{dx}{1+3\sin 2x}$
25. $\int \frac{(1+\sin x)dx}{\sin x(1+2\cos x)}$
26. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-4}}$
27. $\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}dx$
28. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{x}\right)}$
29. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x+1}}$
30. $\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$
31. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+2}}$
32. $\int \left(e^x+1\right)^3 e^x dx$
33. $\int \frac{dx}{1+e^x}$
34. $\int e^x \sin e^x dx$

35. $\int \frac{x^5}{x^{12}-1}\,dx$

36. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

37. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

38. $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx$

39. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$

40. $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

41. $\int \sqrt{1+\sin x}\,dx$

42. $\int |x|\,dx$

43. $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

44. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x-1}}$

45. $\int \sin\sqrt{x}\,dx$

46. $\int \sin x.e^{-\cos x}\,dx$

47. $\int x^2 e^{2x}.\sin x dx$

48. $\int \frac{x^2 dx}{\left(x^2+1\right)^{3/2}}$

49. $\int \frac{dx}{x^4+16}$

50. $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx$

51. $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\,(ab\neq 0)$

52. $\int \frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^2}\,(a \neq 0)$

53. $\int \frac{dx}{1+a\cos x}\,(a>0)$

54. $\int \sqrt{3-x^2}\,dx$

55. $\int \frac{x dx}{\sqrt{3-x^2}}$

56. $\int \frac{\sqrt{3-x^2}}{x}\,dx$

57. $\int \frac{\sqrt{x^2+x}}{x}\,dx$

58. $\int \sqrt{x^2+5}\,dx$

59. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

60. $\int \frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x^2}\,dx$

61. $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$

62. $\int \frac{\sin x dx}{5+4\sin x}$

63. $\int \frac{dx}{a\cos x+b\sin x}\,(a^2+b^2\neq 0)$

64. $\int \frac{a+\tan x}{1-a\tan x}\,dx$

65. $\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x-b^2\sin^2 x}$

66. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

67. $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$

68. $\int \frac{dx}{2+\sin x}$

69. $\int \frac{\sin x dx}{1+\sin x}$

70. $\int \frac{dx}{\sin x(1+\sin x)}$

71. $\int \frac{\sin x\cos x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}\,dx$

72. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^{2n}-a^{2n}}}$

73. $\int \frac{(x+1)e^{-x}}{x^2}\,dx$

74. $\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)...(x+p)}$ $(p \in N)$

75. $\int \frac{x^2 dx}{(x\sin x+\cos x)^2}$

76. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

77. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$

78. $\int \frac{x\,dx}{1+x\tan x}$

79. $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx$

80. $\int \frac{(\ln x)^2}{x^2}\,dx$

81. $\int \cos\sqrt{x}\,dx$

82. $\int \frac{dx}{(1+\sin x)^2}$

83. $\int \frac{\sin x-5\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$

[Yol gösterme : sin x – 5 cos x = a (sin x + cos x) + b (cos x – sin x) eşitliğini sağlayan a ve b sayılarını bulunuz.

ÇÖZÜMLER

1. $3x + 1 = t^3 \Rightarrow x = \frac{t^3-1}{3} \Rightarrow dx = t^2\,dt$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\,dx = \int \frac{(t^3+2)}{3}\,t\,dt = \frac{t^5}{15}+\frac{t^2}{3}+C = \frac{(3x+1)^{5/3}}{15}+\frac{(3x+1)^{2/3}}{3}+C$$

2. ekok (2, 3) = 6 $\Rightarrow$ $x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5\,dt$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} = \int \frac{6t^5 dt}{t^2+t^3} = 6\int \frac{t^3}{1+t}\,dt = 6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|1+t|\right)+C = 2\sqrt{x}-3x^{1/3}+6x^{1/6}-\ln\left|1+x^{1/6}\right|+C$$

3. $x = \frac{1}{\cos t} \Rightarrow dx = \frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos t}\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}}\,dt = \int \frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{\sin t}{\cos^2 t}}\,dt = \int dt = t + C$$

$$= \text{arc}\cos\left(\frac{1}{x}\right)+C$$

4. $\ln x = u \Rightarrow du = \frac{1}{x}\,dx$

$$\int \frac{dx}{x\cos^2(\ln x)} = \int \frac{du}{\cos^2 u} = \tan u + C = \tan(\ln x) + C$$

5. $x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2}\,dt$

$$\int \frac{dx}{x^3 + ax^2} = \int \frac{dx}{x^2(x+a)} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{t} + a\right)}\,dt = -\int \frac{t}{1+at}\,dt$$

$$= -\int \left(\frac{1}{a} - \frac{\frac{1}{a}}{at+1}\right) dt = \frac{1}{a^2}\int \frac{a}{at+1}\,dt - \frac{1}{a}\int dt$$

$$= \frac{1}{a^2}\ln|at+1| - \frac{t}{a} + C = \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a}{x} + 1\right| - \frac{1}{ax} + C$$

6. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + x - x^2}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2}} = -\arcsin\frac{\frac{1}{2} - x}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= -\arcsin(1 - 2x) + C$$

7. $u = \cos(\ln x)$, $dv = dx \Rightarrow du = -\frac{1}{x}\sin(\ln x)\,dx$, $v = x$

$$\int \cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\,dx, \begin{bmatrix} u = \sin(\ln x) \Rightarrow du = \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{dx} \\ dv = dx \qquad\qquad v = x \end{bmatrix}$$

$$= x\cos\ln x + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int \cos(\ln x)\,dx = \frac{x}{2}\cos\ln x - \frac{x}{2}\sin(\ln x) + C$$

8. $u = x$, $dv = \cos^2 x\,dx \Rightarrow du = dx$,

$v = \int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x$ olur.

$$\int x\cos^2(x)dx = \frac{x}{4}\cdot\sin(2x) + \frac{x^2}{2} - \int\left(\frac{\sin(2x)}{4} + \frac{x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{x}{4}\sin(2x) + \frac{x^2}{2} + \frac{\cos 2x}{8} - \frac{x^2}{4} + C$$

9. $\cos x = t \Rightarrow dt = -\sin x\, dx$

$$\int \frac{\sin x}{a^2+\cos^2 x}dx = -\int \frac{du}{a^2+t^2} = -\frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a} + C = -\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{\cos x}{a}\right) + C$$

10. $\tan x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2}dt$, $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

$$\int \frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\left(\frac{1+t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2} = \int \frac{dt}{(1+t)^2} = -\frac{1}{1+t} + C = -\frac{1}{1+\tan x} + C$$

11. $\int \frac{e^x-2}{e^{2x}+4}dx = \int \frac{e^x}{e^{2x}+4}dx - 2\int \frac{1}{e^{2x}+4}dx$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+4}dx = \int \frac{du}{u^2+4} = \frac{1}{2}\arctan\frac{u}{2} = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{e^x}{2}\right), \qquad [e^x = u]$$

$$\int \frac{1}{e^{2x}+4}dx = \int \frac{e^{-2x}}{1+4e^{-2x}}dx = -\frac{1}{8}\int \frac{-8e^{-2x}}{1+4e^{-2x}}dx$$

$$= -\frac{1}{8}\ln(1+4e^{-2x}) = -\frac{1}{8}\ln\left(\frac{e^{2x}+4}{e^{2x}}\right)$$

olduğundan

$$\int \frac{e^x-2}{e^{2x}+4}dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{e^x}{2}\right) + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{e^{2x}+4}{e^{2x}}\right) + C$$

bulunur.

12. $\tan\frac{x}{2} = t \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}dt = \int \frac{2}{(1+t)^2}dt = -\frac{2}{1+t} + C = -\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + C$$

13. $\sin x = u \Rightarrow du = \cos x\,dx$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C$$

14. $\dfrac{x^4+1}{x^3+x^2} = x - 1 + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x^3+x^2}$

$$\int \frac{x^4+1}{x^3+x^2}dx = \int (x-1)dx + \int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{1}{x^3+x^2}dx$$

$$\int \frac{1}{x^3+x^2}dx = \int \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^3}(1+t)}dt = -\int \frac{t}{1+t}dt \qquad \left[x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2}dt\right]$$

$$= -\int \frac{1+t-1}{1+t}dt = -t + \ln|1+t| = -\frac{1}{x} + \ln\left|1+\frac{1}{x}\right|$$

$$\int \frac{x^4+1}{x^3+x^2}dx = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln|1+x| - \frac{1}{x} + \ln\left|1+\frac{1}{x}\right| + C$$

15. $\sqrt{x} = u \Rightarrow du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$

$$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \int 2.\arcsin u\,du = 2.(u \arcsin u + \sqrt{1-u^2}) + C$$

$$= 2\left(\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x} + \sqrt{1-x}\right) + C$$

16. $a^x = u \Rightarrow a^x \ln a\,dx = du$

$$\int \frac{a^x}{a^{2x}+1}dx = \frac{1}{\ln a}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{\ln a}\arctan u + C = \frac{1}{\ln a}\arctan a^x + C$$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\tan x}$

$\tan x = u \Rightarrow (1 + \tan^2 x)\,dx = du \Rightarrow (1 + u^2)\,dx = du$

$$\int \frac{dx}{1+\tan x} = \int \frac{du}{(1+u^2)(1+u)} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u} - \frac{1}{2}\int \frac{u-1}{1+u^2}du$$

$$= \frac{1}{2}\ln|1+u| - \frac{1}{4}\ln(1+u^2) + \frac{1}{2}\arctan u + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln|1+\tan x| - \frac{1}{4}\ln(1+\tan^2 x) + \frac{1}{2}x + C$$

18. $2x^2 - 4x + 9 = 2\left[x^2 - 2x + 1 - 1 + \frac{9}{2}\right] = 2\left[(x-1)^2 + \frac{7}{2}\right] = 14\left[\left(\frac{x-1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1\right]$

$$\int \frac{dx}{2x^2-4x+9} = \frac{1}{14}\int \frac{1}{\left(1+\left(\frac{x-1}{\sqrt{7}}\right)^2\right)}dx = \frac{\sqrt{7}}{14}\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{7}}\right) + C$$

19. $$\int \frac{x-5}{x^2-2x+2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-10}{x^2-2x+2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx - 4\int \frac{1}{x^2-2x+2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx - 4\int \frac{1}{(x-1)^2+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-2x+2\right| - 4\arctan(x-1) + C$$

20. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(1+x^2)}$

$$\frac{1}{(x+1)^2(1+x^2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2}$$

$$1 = A(1+x)(1+x^2) + B(1+x^2) + (Cx+D)(x+1)^2$$

$$x = -1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$x = 0 \Rightarrow 1 = A + B + D \Rightarrow A + D = \frac{1}{2}$$

$x = 1 \Rightarrow 1 = 4A + 2B + (C + D) \cdot 4 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$

$x = 2 \Rightarrow 1 = 15A + 5B + (2C + D)\,9 \Rightarrow 5A + 3D = \frac{5}{2}$

Bu denklem sistemleri çözülerek $A = \frac{1}{2}$, $D = 0$ bulunur.

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2(1+x^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2}dx - \frac{1}{2}\int \frac{x}{1+x^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + C$$

21. $$\int \frac{x}{\sqrt{1-2x^2-x^4}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^2}}dx = \int \frac{x}{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{1-x^2}dx$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|1-x^2| + C$$

22. $\tan\frac{x}{2} = t \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$

$$\int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x - 5} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{4t}{1+t^2} + \frac{3(1-t^2)}{1+t^2} - 5}dt$$

$$= -\int \frac{1}{4t^2 - 2t + 1}dt = -\int \frac{dt}{4\left[\left(t-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{16}\right]}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{4t-1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

23. $$\int \frac{\cos^3 x}{1-\sin x}dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)}{1-\sin x}\cdot\cos x\,dx \qquad [u = \sin x,\ du = \cos x\,dx]$$

$$= \int (1+\sin x)\cdot\cos x\,dx = \int (1+u)du = u + \frac{u^2}{2} + C$$

$$= \sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + C$$

24. $\tan x = t \Rightarrow \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $dx = \frac{1}{1+t^2}dt$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = \frac{2t}{1+t^2}$

$$\int \frac{dx}{1+3\sin 2x} = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{1+\frac{6t}{1+t^2}} = \int \frac{1}{t^2+6t+1}dt = \int \frac{1}{(t+3)^2-8}dt \qquad \begin{bmatrix} t+3=u \\ du=dt \end{bmatrix}$$

$$= \int \frac{1}{u^2-8}du = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\int \frac{1}{u-\sqrt{8}}du - \int \frac{1}{u+\sqrt{8}}du\right) = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln\frac{u-\sqrt{8}}{u+\sqrt{8}}\right)+C$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t+3-\sqrt{8}}{t+3+\sqrt{8}}+C = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{\tan x+3-\sqrt{8}}{\tan x+3+\sqrt{8}}+C$$

25. $\tan\frac{x}{2} = t$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+2\cos x)}dx = \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{2-2t^2}{1+t^2}\right)}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt = -\int \frac{t^2+2t+1}{t(t^2-3)}dt$$

$$= \frac{1}{3}\int\frac{dt}{t} - \frac{2+\sqrt{3}}{3}\int\frac{dt}{t-\sqrt{3}} - \frac{2-\sqrt{3}}{3}\int\frac{dt}{t+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|t| - \frac{2+\sqrt{3}}{3}\ln|t-\sqrt{3}| - \frac{2-\sqrt{3}}{3}\ln|t+\sqrt{3}|+C$$

$$= \frac{1}{3}\left[\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \left(2+\sqrt{3}\right)\ln\left|\tan\frac{x}{2}-\sqrt{3}\right| - \left(2-\sqrt{3}\right)\ln\left|\tan\frac{x}{2}+\sqrt{3}\right|\right]+C$$

26. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}dx = (Ax+B)\sqrt{x^2-4} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} \Rightarrow$

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} = A\sqrt{x^2-4} + \frac{Ax^2+Bx}{\sqrt{x^2-4}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2-4}} \Rightarrow$$

$x^2 = 2Ax^2 + Bx - 4A + \lambda \Rightarrow A = \frac{1}{2}$, $B = 0$, $\lambda = 2$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} + 2\ln\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)+C$$

27. $2x = 3\sin t \Rightarrow x = \frac{3}{2}\sin t\,,\ dx = \frac{3}{2}\cos t\,dt$

$$\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{9-9\sin^2 t}}{\frac{3}{2}\sin t}\cdot\frac{3}{2}\cos t\,dt = 3\int \frac{\cos^2 t}{\sin t}\,dt$$

$$= 3\int \frac{(1-\sin^2 t)}{\sin t}\,dt = 3\int \frac{1}{\sin t}\,dt - 3\int \sin t\,dt$$

$$= 3\cos t + 3\int \frac{1}{\sin t}\,dt$$

$I_1 = \int \frac{1}{\sin t}\,dt$ integralini hesaplayalım.

$$\tan\frac{t}{2} = u \Rightarrow \sin t = \frac{2u}{1+u^2}\,,\quad dx = \frac{2}{1+u^2}\,du$$

$$I_1 = \int \frac{1}{\sin t}\,dt = \int \frac{1+u^2}{2u}\cdot\frac{2}{1+u^2}\,du = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C = \ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + C$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}\,dx = 3\cos t + 3\int \frac{1}{\sin t}\,dt = 3\cos t + 3\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + C$$

$$= 3\cos\left(\arcsin\frac{2x}{3}\right) + 3\ln\left|\tan\frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{2x}{3}\right)\right| + C$$

28. $1 + \sqrt{x} = u \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})} = \int \frac{2du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + C$$

29. ekok (2, 4) = 4 , $x + 1 = t^4 \Rightarrow dx = 4t^3\,dt$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x+1}} = \int \frac{4t^3\,dt}{t^2+t} = 4\int \frac{t^2}{1+t}\,dt = 4\int\left(t - 1 + \frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$= 4\left(\frac{(x+1)^{1/2}}{2} - (x+1)^{1/4}\right) + 4\ln\left|1 + (x+1)^{1/4}\right| + C$$

30. $r = 0,\ p = \frac{1}{2}\,,\ q = \frac{1}{2}\,,\ q = \frac{1}{2} \notin Z\,,\ \frac{r+1}{p} = 2 \in Z$

$\Rightarrow 1 + \sqrt{x} = t^2 \Rightarrow x = (t^2 - 1)^2\,,\ dx = 2(t^2 - 1)\,.\,2t\,dt$

$$\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx = \int t.4t(t^2-1)\,dt = 4\int\left(t^4 - t^2\right)dt = 4\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right) + C$$

$$= 4\left(\frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^{5/2}}{5} - \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^{3/2}}{3}\right) + C$$

31. $x^3 + 2 = u \Rightarrow du = 3x^2\,dx$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+2}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{2}{3}\sqrt{u} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+2} + C$$

32. $e^x + 1 = u \Rightarrow du = e^x\,dx$

$$\int \left(e^x+1\right)^3 e^x\,dx = \int u^3\,du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{(e^x+1)^4}{4} + C$$

33. $e^x = u \Rightarrow x = \ln u \Rightarrow dx = \frac{1}{u}\,du$

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{1}{u(1+u)}\,du = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right) du = \ln|u| - \ln|1+u| + C$$

$$= \ln\left|\frac{u}{1+u}\right| + C = \ln\left|\frac{e^x}{1+e^x}\right| + C$$

34. $e^x = u \Rightarrow e^x\,dx = du$

$$\int e^x \sin e^x\,dx = \int \sin u\,du = -\cos u + C = -\cos(e^x) + C$$

35. $$\int \frac{x^5}{x^{12}-1}\,dx = \int \frac{x^5}{(x^6)^2-1}\,dx \qquad [x^6 = u \Rightarrow du = 6x^5\,dx]$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{12}\int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right) du$$

$$= \frac{1}{12}\left(\ln|u-1| - \ln|u+1|\right) + C = \frac{1}{12}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C$$

$$= \frac{1}{12}\ln\left|\frac{x^6-1}{x^6+1}\right| + C$$

36. $u = \ln x\,,\quad \frac{dx}{\sqrt{x}} = dv\,,\quad du = \frac{dx}{x}\,,\quad 2\sqrt{x} = v$

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x}\ln x - \int 2\sqrt{x}\cdot\frac{dx}{x} = 2\sqrt{x}\ln x - 2\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$= 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C$$

37. $u = \dfrac{1}{1+x^2}\ dv = dx\ ,\quad du = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2}\ ,\quad v = x$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{x}{1+x^2} + 2\int\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx = \frac{x}{1+x^2} + 2\int\frac{(x^2+1)-1}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$= \frac{x}{1+x^2} + 2\int\frac{1}{1+x^2}\,dx - 2\int\frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$\Rightarrow \int\frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}\,dx + \frac{x}{2(1+x^2)} = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} + C$$

38. $\tan\dfrac{x}{2} = t \Rightarrow \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\ ,\quad dx = \dfrac{2}{1+t^2}\,dt$

$$\int\frac{\cos x}{1+\cos x}\,dx = \int\frac{(\cos x+1)-1}{1+\cos x}\,dx = \int dx - \int\frac{1}{1+\cos x}\,dx$$

$$= x - \int\frac{\dfrac{2}{1+t^2}}{1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}\,dt = x - \int dt = x - t + C = x - \tan\frac{x}{2} + C$$

39. $\dfrac{1}{x} = t \ \Rightarrow\ dx = -\dfrac{1}{t^2}\,dt$

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}} = \int\frac{\dfrac{-1}{t^2}}{\dfrac{1}{t}\sqrt{\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{1}{t}-1}}\,dt = -\int\frac{dt}{\sqrt{1+t-t^2}}$$

$$= -\int\frac{dt}{\sqrt{\dfrac{5}{4}-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2}} = -\arcsin\left(\frac{t-\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{5}}{2}}\right) + C$$

$$= -\arcsin\left(\frac{2t-1}{\sqrt{5}}\right) + C = -\arcsin\left(\frac{\left(\dfrac{2}{x}-1\right)}{\sqrt{5}}\right) + C$$

$$= -\arcsin\left(\frac{2-x}{\sqrt{5}\,x}\right) + C$$

40. $\tan\frac{x}{2}=t$, $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt=\int\frac{1}{1+t}dt$$

$$=\ln|1+t|+C=\ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right|+C$$

41. $\int\sqrt{1+\sin x}\,dx=\int\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\,dx$

$$=\int\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}\,dx=\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=-2\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}+C$$

42. $|x|=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$

$$\int|x|\,dx=\begin{cases}\int x\,dx, & x\geq 0\\ \int -x\,dx, & x<0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}x.x+C & x\geq 0\\ \frac{1}{2}x(-x)+C & x<0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2}x|x|+C, & x\geq 0\\ \frac{1}{2}x|x|+C, & x<0\end{cases}=\frac{1}{2}x|x|+C$$

43. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=dv$, $\arcsin x=u\Rightarrow v=-\sqrt{1-x^2}$, $du=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$\int\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\int\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=-\sqrt{1-x^2}\arcsin x+x+C$$

44. $\frac{1}{x}=t\Rightarrow dx=-\frac{1}{t^2}dt$

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+x-1}}=\int\frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^2}\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}-1}}=-\int\frac{t}{\sqrt{1+t-t^2}}dt$$

$$=-\int\frac{t}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2}}dt=-\frac{1}{2}\int\frac{2\left(t-\frac{1}{2}\right)+1}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2}}dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{2\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2}}\,dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2}}\,dt$$

$$= \sqrt{\frac{5}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2t-1}{\sqrt{5}}\right) + C$$

$$= \sqrt{\frac{5}{4}-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\frac{2}{x}-1}{\sqrt{5}}\right) + C$$

45. $\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2t\,dt$

$$\int \sin\sqrt{x}\,dx = 2\int t\sin t dt \qquad [u = t,\ \sin t\,dt = dv \Rightarrow du = dt,\ v = -\cos t]$$

$$= 2\left(-t\cos t + \int \cos t dt\right) = -\,2\,t\cos t + 2\sin t + C$$

$$= -\,2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + C$$

46. $-\cos x = u \Rightarrow du = \sin x\,dx$

$$\int \sin x e^{-\cos x} dx = \int e^u du = e^u + C = e^{-\cos x} + C$$

47. $u = x^2$, $dv = e^{2x}\sin x\,dx$, $du = 2x\,dx$, $v = \int e^{2x}\sin x\,dx$ olur.

$U = e^{2x}$, $dV = \sin x\,dx \Rightarrow dU = 2e^{2x}dx$, $V = -\cos x$ olacağından

$v = -e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos x\,dx$

$= -e^{2x}\cos x + 2\left[e^{2x}\sin x - 2\int e^{2x}\sin x\,dx\right]$

$= -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x - 4\int e^{2x}\sin x\,dx$

$= \frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x - \cos x)$

olur. Buna göre

$$\int x^2 e^{2x}\sin x\,dx = \frac{x^2}{5}e^{2x}(2\sin x - \cos x) - \frac{2}{5}\int xe^{2x}(2\sin x - \cos x)\,dx$$

$$= \frac{x^2}{5}e^{2x} - \frac{4}{5}\int xe^{2x}\sin x dx + \frac{2}{5}\int xe^{2x}\cos x dx$$

$$= \frac{x^2}{5} e^{2x} - \frac{4}{5} I_1 + \frac{2}{5} I_2$$

bulunur.

$$I = \int x e^{2x} \sin x \, dx = x \cdot \frac{1}{5} e^{2x} (2 \sin x - \cos x) - \frac{1}{5} \int e^{2x} (2 \sin x - \cos x) \, dx$$

$$= \frac{x}{5} e^{2x} (2 \sin x - \cos x) - \frac{2}{5} \int e^{2x} \sin x + \frac{1}{5} \int e^{2x} \cos x \, dx$$

$$= \frac{x}{5} e^{2x} (2 \sin x - \cos x) - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} e^{2x} \cdot (2 \sin x - \cos x)$$

$$+ \frac{1}{5} \left(e^{2x} \sin x - \int 2 e^{2x} \sin x dx \right)$$

$$= \frac{e^{2x}}{5} [2x \sin x - x \cos x - \frac{4}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos x + \sin x) - \frac{2}{5} \frac{1}{5} e^{2x} (2 \sin x - \cos x)$$

$$= \frac{e^{2x}}{5} [2x \sin x - x \cos x - \frac{}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos x + \sin x - \frac{4}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos x$$

$$= \frac{e^{2x}}{5} (2x \sin x - x \cos x - \frac{3}{5} \sin x + \frac{4}{5} \cos x)$$

$$I_2 = \int x e^{2x} \cos x \, dx = e^{2x} \sin x - 2 \int e^{2x} \sin x \, dx = e^{2x} . \sin x - \frac{2}{5} e^{2x} (2 \sin x - \cos x)$$

$$= \frac{e^{2x}}{5} (\sin x + 2 \cos x)$$

olduğundan

$$\int x e^{2x} \cos x \, dx = x \frac{e^{2x}}{5} (\sin x + 2 \cos x) - \int \frac{e^{2x}}{5} (\sin x + 2 \cos x) \, dx$$

$$= \frac{x e^{2x}}{5} (\sin x + 2 \cos x) - \frac{1}{5} \frac{1}{5} e^{2x} (2 \sin x - \cos x) - \frac{2}{5} \frac{e^{2x}}{5}$$

$$(\sin x + 2 \cos x)$$

olur. O halde $I = \frac{x^2}{5} e^{2x} - \frac{4}{5} I_1 + \frac{2}{5} I_2$

$$I = \int x^2 e^{2x} \sin x \, dx = \frac{x^2}{5} e^{2x} (2 \sin x - \cos x) - \frac{4}{5}$$

$$\left(\frac{e^{2x}}{5} \right) (2 x \sin x - x \cos x - \frac{3}{5} \sin x + \frac{4}{5} \cos x)$$

$$+ \frac{2}{5} \frac{e^{2x}}{5} (x \sin x + 2x \cos x - \frac{2}{5} \sin x + \frac{1}{5} \cos x - \frac{2}{5} \sin x - \frac{4}{5} \cos x)$$

$$= \frac{e^{2x}}{25} [10x^2 \sin x - 5x^2 \cos x - 8x \sin x + 4x \cos x + \frac{12}{5} \sin x - \frac{16}{5} \cos x$$

$$+ 2x \sin x + 4x \cos x - \frac{4}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos - \frac{4}{5} \sin x - \frac{8}{5} \cos x)$$

$$= \frac{e^{2x}}{25}\,[10x^2 \sin x - 5x^2 \cos x - 6x \sin x + 8x \cos x + \frac{4}{5}\sin x - \frac{22}{5}\cos x]$$

olur.

48. $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^{3/2}}\,dx = \int \frac{(x^2+1)-1}{(x^2+1)^{3/2}}\cdot dx = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{1/2}} - \int \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}\,dx$

$[\, x = \tan t \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2 t}\,dt\,]$

$$= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos t}}\,dt - \int \frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^3 t}}\,dt = \int \frac{1}{\cos t}\,dt - \int \cos t\,dt$$

$$= \ln\left|\frac{1+\sin t}{\cos t}\right| - \sin t + C = \ln\left|\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}\right| - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

$$= \ln\left|\sqrt{1+x^2}+x\right| - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

49. $x = 2t$ denirse $dx = 2\,dt$

$$\int \frac{dx}{x^4+16} = \int \frac{2\,dt}{16t^4+16} = \frac{1}{8}\int \frac{dt}{t^4+1}$$

integrali elde edilir. Bu integral sayfa 262 de i) şıkkında hesaplandı.

50. $\tan x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt$, $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ olur.

$$\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx = \int \frac{(\sin^2 x+1)-1}{(\sin^2 x+1)}\,dx = \int dx - \int \frac{1}{\sin^2 x+1}\,dx$$

$$= x - \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}\,dt = x - \int \frac{1}{2t^2+1}\,dt$$

$$= x - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \sqrt{2}\,t + C = x - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}\tan x) + C$$

51. $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{a^2\tan^2 x + b^2}\,dx \qquad \left[\begin{array}{l}\tan x = u \\ du = \frac{1}{\cos^2 x}\,dx\end{array}\right]$

$$= \int \frac{du}{a^2u^2 + b^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{du}{u^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{a^2}\cdot\frac{a}{b}\arctan\left(\frac{au}{b}\right) + C = \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right) + C$$

53. $\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^2} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{(a\tan x + b)^2}\,dx \qquad \left[\begin{array}{l}\tan x = u \\ du = \frac{1}{\cos^2 x}\,dx\end{array}\right]$

$$= \int \frac{du}{(au+b)^2} = \frac{-1}{a}\cdot\frac{1}{au+b} + C = -\frac{1}{a(a\tan x + b)} + C$$

53. $\int \frac{dx}{1 + a\cos x}$ $(-1 < a < 1)$

$\tan\frac{x}{2} = t \Rightarrow \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$

$$\int \frac{dx}{1+a\cos x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{1 + \frac{a(1-t^2)}{1+t^2}}\,dt = \int \frac{2}{t^2(1-a) + a + 1}\,dt$$

$$= \frac{2}{1-a}\int \frac{dt}{t^2 + \frac{a+1}{1-a}} = \frac{2}{1-a}\cdot\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{a+1}}\arctan\frac{t}{\sqrt{\frac{a+1}{1-a}}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\cdot\arctan\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\cdot\tan\frac{x}{2}\right) + C$$

54. $\int \sqrt{3-x^2}\,dx$

$x = \sqrt{3}\sin t \Rightarrow dx = \sqrt{3}\cos t\,dt$

$$\int \sqrt{3-x^2}\,dx = \int \sqrt{3}\sqrt{1-\sin^2 t}\,.\sqrt{3}\cos t\,dt = 3\int \cos^2 t\,dt = 3\int \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt$$

$$= \frac{3}{2}t - \frac{3}{4}\sin 2t + C = \frac{3}{2}\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) - \frac{3}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

55. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{3-x^2}}\,dx = -\sqrt{3-x^2} + C$

56. $\int \frac{\sqrt{3-x^2}}{x}\,dx$

$x = \sqrt{3}\sin t \Rightarrow dx = \sqrt{3}\cos t\,dt$

$$\int \frac{\sqrt{3-x^2}}{x}\,dx = \int \frac{\left(\sqrt{3}\sqrt{1-\sin^2 t}\right)\sqrt{3}\cos t}{\sqrt{3}\sin t}\,dt = \frac{3}{\sqrt{3}}\int \frac{\cos^2 t}{\sin t}\,dt$$

$$= \sqrt{3}\int \frac{1}{\sin t}\,dt - \int \sqrt{3}\sin t\,dt$$

$I_1 = \int \frac{1}{\sin t}\,dt$ integralini hesaplayalım.

$$\tan\frac{t}{2} = u \Rightarrow dt = \frac{2}{1+u^2}\,du\,,\quad \sin t = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$I_1 = \int \frac{\frac{2}{1+u^2}}{1+\frac{2u}{1+u^2}}\,du = \int \frac{2}{(u+1)^2}\,du = -\frac{2}{u+1} + C_1$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sqrt{3-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{3}\,I_1 + \sqrt{3}\cos t + C = -\frac{2\sqrt{3}}{u+1} + \sqrt{3}\cos t + C$$

$$= -2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{1+\tan\frac{t}{2}} + \sqrt{3}\cos\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

$$= -2\sqrt{3}\,\frac{1}{1+\tan\frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}\right)} + \sqrt{3}\cos\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

57. $\int \frac{\sqrt{x^2+x}}{x}\,dx = \int \frac{x^2+x}{x\sqrt{x^2+x}}\,dx = \int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}}\,dx$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}} = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} + \frac{1/2}{\sqrt{x^2+x}}$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+x}}{x}\,dx = \sqrt{x^2+x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}}$$

$$= \sqrt{x^2+x} - \frac{1}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right) + C$$

58. $x = \sqrt{5}\tan t \Rightarrow dx = \sqrt{5}\,(1+\tan^2 t)\,dt$

$$\int \sqrt{x^2+5}\,dx = \int \sqrt{5(\tan^2+1)}\cdot\sqrt{5}\left(1+\tan^2 t\right)dt = 5\int \frac{1}{\cos t}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\,dt$$

$$= 5\int \frac{1}{\cos^3 t}\,dt = \frac{5}{2}\cdot\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{5}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + C$$

59. $$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)-1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$$

$$= \sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}\,dx$$

$$= \sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right| + C$$

60. $u = \sqrt{2-x-x^2},\ dv = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow du = \frac{-1-2x}{2\sqrt{2-x-x^2}}\,dx,\ v = -\frac{1}{x}$

$$\int \frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x} - \int \frac{1+2x}{2x\sqrt{2-x-x^2}}\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x} - \int \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{2-x-x^2}} \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{t} \\ dx = -\frac{1}{t^2}\,dt \end{array}\right]$$

$$= -\frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x} - \arcsin\frac{2x+1}{3} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{16}}}$$

$$= -\frac{\sqrt{2-x-x^2}}{x} - \arcsin\frac{2x+1}{3} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{4}+\sqrt{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{16}}\right| + C$$

61. $$\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$$

$$\tan\frac{x}{2} = t \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$\int \frac{dx}{\sin x+\cos x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2}{1+2t-t^2}\,dt = \int \frac{2}{2-(t-1)^2}\,dt$$

$$\frac{2}{2-(t-1)^2} = \frac{A}{\sqrt{2}-t+1} + \frac{B}{\sqrt{2}+t-1}$$

$$2 = \sqrt{2}(A+B) + (B-A) + t(A-B) \Rightarrow \begin{cases} A-B=0 \\ A+B=\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \ , \ B = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\int \frac{2\,dt}{1+2t-t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{2}+1-t}\,dt + \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{2}-1+t}\,dt$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2}} \ln\left|\sqrt{2}+1-t\right| + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\sqrt{2}-1+t\right| + C$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2}} \ln\left|\sqrt{2}+1-\tan\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\sqrt{2}-1+\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

62. $\int \frac{\sin x\,dx}{5+4\sin x}$

$$\tan\frac{x}{2} = t \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \ , \ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$\int \frac{\sin x}{5+4\sin x}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{(4\sin x+5)-5}{5+4\sin x}\,dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{5}{4}\int \frac{1}{5+4\sin x}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}\int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{5+\frac{8t}{1+t^2}}\,dt = \frac{1}{4}x - \frac{5}{2}\int \frac{1}{5t^2+8t+5}\,dt$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{5}{2}\int \frac{1}{5\left[\left(t+\frac{4}{5}\right)^2+\frac{9}{25}\right]} = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}\frac{5}{3}\arctan\frac{t+\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} + C$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{5}{6}\arctan\frac{5t+4}{3} + C$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{5}{6}\arctan\left(\frac{5\tan\frac{x}{2}+4}{3}\right) + C$$

63. $\tan\frac{x}{2} = t$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{a(1-t^2)}{1+t^2} + \frac{b\ 2t}{1+t^2}}\,dt = \int \frac{2}{a+2bt-at^2}\,dt$$

$$= \frac{2}{a}\int \frac{dt}{\frac{a^2+b^2}{a^2} - \left(t-\frac{b}{a}\right)^2}$$

$$= -\frac{2}{a}\cdot\frac{a}{2.\sqrt{a^2+b^2}} \ln\left|\frac{t-\frac{b}{a}-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}}{t-\frac{b}{a}+\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2} - \left(\frac{\left(b+\sqrt{a^2+b^2}\right)}{a}\right)}{\tan\frac{x}{2} - \left(\frac{b-\sqrt{a^2+b^2}}{a}\right)}\right| + C$$

64. $\tan x = t \Rightarrow (1+\tan^2 x)\,dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$

$$I = \int \frac{a+\tan x}{1-a\tan x}\,dx = \int \frac{a+t}{(1-at)(1+t^2)}\,dt$$

$$\left[\frac{a+t}{(1-at)(1+t^2)} = \frac{A}{1-at} + \frac{Bt+C}{1+t^2} \Rightarrow A=a,\ B=1,\ C=0\right]$$

$$I = \int \frac{a}{1-at}\,dt + \int \frac{t}{1+t^2}\,dt = -\ln|1-at| + \frac{1}{2}\ln|1+t^2| + C$$

$$= -\ln|1-a\tan x| + \frac{1}{2}\ln|1+\tan^2 x| + C$$

65. $I = \int \frac{dx}{a^2\cos^2 x - b^2\sin^2 x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{a^2 - b^2\tan^2 x}\,dx = \int \frac{dt}{a^2-b^2t^2}$ $\quad \left[\begin{array}{l}\tan x = t \\ dt = \frac{1}{\cos^2 x}\,dx\end{array}\right.$

$$\frac{1}{a^2-b^2t^2} = \frac{A}{(a-bt)} + \frac{B}{a+bt} \Rightarrow a(A+B)+t(Ab-Bb) = (b \neq 0)$$

$$\Rightarrow a.2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2a},\ B = \frac{1}{2a}$$

$$I = \frac{1}{2a}\int \frac{1}{a-bt}\,dt + \frac{1}{2a}\int \frac{1}{a+bt}\,dt = -\frac{1}{2a}\ln|a-bt| + \frac{1}{2a}\ln|a+bt| + C$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+bt}{a-bt}\right| + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+b\tan x}{a-b\tan x}\right| + C$$

66. $\tan\frac{x}{2}=t$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$

$$\int\frac{dx}{1+\cos x}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt=\int dt=t+C=\tan\frac{x}{2}+C$$

67. $\tan\frac{x}{2}=t$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$

$$\int\frac{dx}{5+3\cos x}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{5+3\frac{(1-t^2)}{1+t^2}}dt=\int\frac{2}{8+2t^2}dt=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2}+C=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{2}\right)+C$$

68. $\tan\frac{x}{2}=t$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $dt=\frac{2}{1+t^2}dt$

$$\int\frac{dx}{2+\sin x}=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{2+\frac{2t}{1+t^2}}dt=\int\frac{2}{2t^2+2t+2}dt=\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)+C=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

69. $\tan\frac{x}{2}=t\Rightarrow\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$

$$\int\frac{\sin x}{1+\sin x}dx=\int\frac{(\sin x+1)-1}{1+\sin x}dx=\int dx-\int\frac{1}{1+\sin x}dx$$

$$= x - \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\,dt = x - 2\int \frac{1}{(t+1)^2}\,dt$$

$$= x + \frac{2}{t+1} + C = x + \frac{2}{\tan\frac{x}{2}+1} + C$$

70. $\tan\frac{x}{2} = t$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$

$$\int \frac{dx}{\sin x(1+\sin x)} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)}\,dt = \int \frac{1+t^2}{t\cdot(t^2+2t+1)}\,dt$$

$$= \int \frac{1+t^2}{t(t+1)^2}\,dt = \int \frac{1}{t} - \frac{2}{(t+1)^2}\,dt$$

$$= \ln|t| + 2\frac{1}{t+1} + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \frac{2}{\tan\frac{x}{2}+1} + C$$

71. $\tan x = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$

$$\int \frac{\sin x\cos x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\tan x}{a^2+b^2\tan^2 x}\,dx = \int \frac{\frac{t}{1+t^2}}{a^2+b^2t^2}\,dt$$

$$= \int \frac{t}{(1+t^2)(a^2+b^2t^2)}\,dt$$

$$\frac{t}{(1+t^2)(a^2+b^2t^2)} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{Ct+D}{a^2+b^2t^2}$$

$t = t^3(Ab^2 + C) + t^2(D + Bb^2) + t(Aa^2 + C) + D + Ba^2$

$Ab^2 + C = 0$

$D + Bb^2 = 0$

$Aa^2 + C = 1$ $\qquad Ba^2 = Bb^2 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow D = 0$

$D + Ba^2 = 0$

$A(a^2 - b^2) = 1$, $A = \frac{1}{a^2-b^2}$, $C = \frac{b^2}{b^2-a^2}$

$$\Rightarrow \int \frac{\sin x\cos x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x}\,dx = \frac{1}{a^2-b^2}\int \frac{t}{1+t^2}\,dt + \frac{b^2}{b^2-a^2}\int \frac{t}{a^2+b^2t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2(a^2-b^2)} \ln\left(1+t^2\right) + \frac{1}{2(b^2-a^2)} \ln\left(a^2+b^2t^2\right) + C$$

$$= \frac{1}{2(a^2-b^2)} \ln\left(\frac{1+t^2}{a^2+b^2t^2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2(a^2-b^2)} \ln\left(\frac{1+\tan^2 x}{a^2+b^2\tan^2 x}\right) + C$$

72. $x^n = \dfrac{a^n}{\cos t} \Rightarrow nx^{n-1}\,dx = a^n \dfrac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^{2n}-a^{2n}}} = \int \frac{x^{n-1}dx}{x^n\sqrt{x^{2n}-a^{2n}}} = \frac{a^n}{n}\int \frac{\dfrac{\sin t}{\cos^2 t}}{\dfrac{a^n}{\cos t}\cdot\dfrac{\sqrt{a^{2n}(1-\cos^2 t)}}{\cos t}}\cdot dt$$

$$= \frac{1}{a^n}\int dt = \frac{1}{a^n} + C = \frac{1}{a^n}\arccos\frac{a^n}{x^n} + C$$

73. $(x+1)\,e^{-x} = u \Rightarrow du = -x\,e^{-x}\,dx\,,\quad dv = \dfrac{dx}{x^2} \Rightarrow v = -\dfrac{1}{x}$

$$\int \frac{(x+1)e^{-x}}{x^2}\,dx = -\frac{(x+1)e^{-x}}{x} - \int e^{-x}dx = -\frac{(x+1)e^{-x}}{x} + e^{-x} + C$$

$$= -\frac{1}{x}e^{-x} + C$$

74. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+p)} \qquad (p \in N)$

$$\frac{1}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+p)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x+1} + \ldots + \frac{A_{p+1}}{x+p}$$

$1 = A_1(x+1)(x+2)\ldots(x+p) + A_2\,x(x+2)(x+3)\ldots(x+p)$

$\ldots + A_{p-1}\,x(x+1)(x+2) - (x+p-2)(x+p) + A_p\,x(x+1)\ldots(x+p-1)$

$x = 0 \Rightarrow A_1 = 1.2.3\ldots p \Rightarrow A_1 = p!$

$x = -1 \Rightarrow A_2 = (-1)(1).(2)\ldots(p-1) \Rightarrow A_2 = -\dfrac{1}{(p-1)!}$

$x = -2 \Rightarrow A_3 = (-2).(-1)\,1\ldots(p-2) \Rightarrow A_3 = 2(p-2)! = (-1)^2\,2!\,(p-2)!$

Bu şekilde devam edilerek

$A_n = (-1)^{n-1} / (n-1)!\,(p-n+1)!$ olacağı görülür.

$$\int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)...(x+p)} = A_1 \ln|x| + A_2 \ln|x+1| + ... + A_p \ln|x+p| + C$$

$$= \ln \left| x^{A_1}.(x+1)^{A_2}. \ ... \ .(x+p)^{A_p} \right| + C$$

$$= \ln \left| x^{p!}(x+1)^{-(p-1)!}. \ ... \ .(x+p)^{(-1)^{p-1}(p-1)!} \right| + C$$

75. $I = \int \frac{x^2 dx}{(x\sin x + \cos x)^2} = \int \frac{x}{\cos x} \cdot \frac{x\cos x}{(x\sin x + \cos x)^2} dx$

$\frac{x}{\cos x} = u$, $\frac{x\cos x}{(x\sin x + \cos x)^2} dx = dv$ denirse

$du = \frac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x}$ $\quad v = -\frac{1}{(x\sin x + \cos x)}$ olur.

$$I = -\frac{x}{\cos x(x\sin + \cos x)} + \int \frac{\cos x + x\sin x}{\cos^2 x(x\sin x + \cos x)} dx$$

$$= -\frac{x}{\cos x(x\sin x + \cos x)} + \int \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

$$= -\frac{x}{\cos x(x\sin x + \cos x)} + \tan x + C$$

76. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-1/2}(1+x^{1/2})^{1/2} dx$

$r = -\frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, $n = 2$

$q \notin Z$, $\frac{r+1}{p} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow 1 + x^{1/2} = t^2$

$x = (t^2 - 1)^2$, $dx = 4t\,(t^2 - 1)$

$$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int (t^2-1)^{-1}(t^2)^{1/2} . 4t\,(t^2 - 1)\, dt = \int 4t^2\, dt = \frac{4}{3} t^3 + C$$

$$= \frac{4}{3}(1+x^{1/2})^{3/2} + C$$

77. $x = t^3 \Rightarrow dx = 3t^2\, dt$

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{3t^2}{1+t} dt = 3\int (t-1)dt + 3\int \frac{1}{1+t} dt = 3\frac{(t-1)^2}{2} + 3\ln|1+t| + C$$

$$= 3\frac{(x^{1/3}-1)^2}{2} + 3\ln\left|1+x^{1/3}\right| + C$$

78. $\int \frac{x}{1+x\tan x}\,dx = \int \frac{x\cos x}{\cos x + x\sin x}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C \quad \begin{bmatrix} u = \cos x + x\sin x \\ du = x\cos x\,dx \end{bmatrix}$

$= \ln|\cos x + x\sin x| + C$

79. $I = \int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx = \int x^{-5/2}(1+x)^{1/2}\,dx$

$r = -\frac{5}{2}$, $p = 1$, $q = \frac{1}{2} \Rightarrow q \notin Z$, $\frac{r+1}{p} = -\frac{3}{2} \notin Z$,

$\frac{r+1}{p} + q = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -1 \in Z \Rightarrow x^{-1} + 1 = t^2$

$x = \frac{1}{t^2-1}$, $dx = -\frac{2t}{(t^2-1)^2}\,dt$

$I = \int (t^2-1)^2 t \frac{-2t}{(t^2-1)^2}\,dt = -2\int t^2\,dt = -\frac{2}{3}t^3 + C = -\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3/2} + C$

80. $u = (\ln x)^2 \Rightarrow du = 2(\ln x)\frac{1}{x}\,dx$, $\frac{dx}{x^2} = dv \Rightarrow v = -\frac{1}{x}$

$\int \frac{(\ln x)^2}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}(\ln x)^2 + 2\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx \quad \begin{bmatrix} \ln x = u \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ \frac{1}{x^2}dx = dv \Rightarrow v = -\frac{1}{x} \end{bmatrix}$

$= -\frac{1}{x}(\ln x)^2 + 2\left[-\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}dx\right] = -\frac{1}{x}(\ln x)^2 - \frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x} + C$

81. $\sqrt{x} = t \Rightarrow dx = 2t\,dt$

$\int \cos\sqrt{x}\,dx = 2\int t\cos t\,dt$, $[t = u,\ \cos t\,dt = dv,\ dt = du,\ \sin t = v]$

$= 2t\sin t - 2\int \sin t\,dt = 2t\sin t + 2\cos t + C$

$= 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 2\cos\sqrt{x} + C$

82. $\tan\frac{x}{2} = t \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$

$I = \int \frac{dx}{(1+\sin x)^2} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}\,dt = 2\int \frac{1+t^2}{(1+t)^4}\,dt$

$$\frac{1+t^2}{(1+t)^4} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{(1+t)^2} + \frac{C}{(1+t)^3} + \frac{D}{(1+t)^4} \Rightarrow$$

$1 + t^2 = A(1 + t)^3 + B(1 + t)^2 + C(1 + t) + D$

$t = -1$ için $D = 2$ bulunur.

$1 + t^2 = At^3 + (3A + B)\, t^2 + (3A + 2B + C)\, t + (A + B + C + 2)$

$A = 0\,,\ B = 1\,,\ C = -2$

$$I = 2\int \frac{1}{(1+t)^2}\,dt + 2\int \frac{-2}{(1+t)^3}\,dt + 2\int \frac{2}{(1+t)^4}\,dt$$

$$= -\frac{2}{1+t} + \frac{2}{(1+t)^2} - \frac{2}{3(1+t)^3} + C$$

$$= \frac{-2}{1+\tan\frac{x}{2}} + \frac{2}{(1+\tan\frac{x}{2})^2} - \frac{4}{3(1+\tan\frac{x}{2})^3} + C$$

83. $\sin x - 5\cos x = a(\sin x + \cos x) + b(\cos x - \sin x)$

$$= \sin x\,(a - b) + \cos x\,(a + b)$$

$a - b = 1\,,\ \ a + b = -5 \Rightarrow 2a = -4\,,\ a = -2\,,\ b = -3$

$$\int \frac{\sin x - 5\cos x}{\sin x + \cos x}\,dx = -2\int dx - 3\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}\,dx$$

$$= -2x - 3\ln\left|\sin x + \cos x\right| + C$$

7 BELİRLİ İNTEGRALLER

TANIM

[a, b] aralığını

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < b$$

özelliğini sağlayan x_1 , x_2 , ... , x_{n-1} noktaları yardımıyla n tane alt aralığa bölelim. Uygunluğu sağlamak için a sayısını x_0 , b sayısını da x_n ile gösterelim.

$$P = \{ x_0 , x_1 , x_2 , \ldots , x_{n-1} , x_n \}$$

kümesine [a, b] aralığının bir **parçalanması** veya **bölüntüsü** denir.

$$[x_0 , x_1] , [x_1 , x_2] , \ldots , [x_{n-1} , x_n]$$

aralıklarına [a, b] nin P parçalanmasına karşılık gelen **kapalı alt aralıkları,**

$$(x_0 , x_1) , (x_1 , x_2) , \ldots , (x_{n-1} , x_n)$$

aralıklarına da **açık alt aralıkları** adı verilir.

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

sayısına $[x_{k-1} , x_k]$ aralığının **boyu** veya **ölçüsü** denir. Alt aralıkların boylarının en büyüğüne P parçalanmasının **normu** veya **maksimal çapı** denir, $\|P\|$ ile gösterilir. Şu halde,

$$\|P\| = \text{maks} \{ \Delta x_k : k = 1 , 2 , \ldots , n \}$$

dır. Eğer tüm alt aralıkların boyları birbirine eşit ise bu parçalanmaya **düzgün parçalanma** adı verilir.

TANIM

s : [a, b] → R bir merdiven fonksiyonu, $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, [a, b] aralığının bir parçalanması ve $x \in (x_{k-1}, x_k)$ için $s(x) = s_k$ olsun.

$$\int_a^b s(x)dx = \sum_{k=1}^{n} s_k \Delta x_k = s_1 (x_1 - x_0) + \ldots + s_n (x_n - x_{n-1})$$

sayısına s merdiven fonksiyonunun a dan b ye kadar **integrali** denir, a ve b sayılarına da **integrasyon sınırları** adı verilir.

TANIM

$f : [a, b] \to R$ fonksiyonu sınırlı olsun. $[a, b]$ aralığının

$$P = \{ x_0, x_1, \ldots x_n \}$$

parçalanması için

$$M_k = \sup \{ f(x) : x_{k-1} \le x \le x_k \},$$

$$m_k = \inf \{ f(x) : x_{k-1} \le x \le x_k \}$$

olsun.

$$Ü(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

ve

$$A(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$$

toplamlarına, sırası ile, f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen **Üst Darboux Toplamı ve Alt Darboux Toplamı** adı verilir.

TANIM

$R(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k$ toplamına f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen **Riemann Toplamı** denir.

TEOREM

$f : [a, b] \to R$ sınırlı fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $\forall \varepsilon > 0$ için

$$Ü(f, P) - A(f, P) < \varepsilon \quad \text{(Riemann Şartı)}$$

kalacak şekilde $[a, b]$ nin bir P parçalanmasının var olmasıdır.

TEOREM

f ve g , [a, b] de integrallenebilen fonksiyonlar olsunlar.

(a) $\alpha, \beta \in R$ ise αf ve βg fonksiyonları da [a, b] de integrallenebilir ve

$$\int_a^b [\, \alpha f(x) + \beta g(x) \,]\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$$

olur.

(b) $f \geq 0$ ise $\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$ dır.

(c) f^2 integrallenebilir.

(d) $f \geq 0$ ise $\sqrt{f}$ integrallenebilir.

(e) $|f|$ integrallenebilir ve $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$ dir.

(f) f . g integrallenebilir.

TEOREM

[a, b] üzerinde parçalı sürekli ve sınırlı her fonksiyon [a, b] üzerinde integrallenebilirdir.

TEOREM

$f : [a, b] \to R$ fonksiyonu monoton artan [veya azalan] ise f fonksiyonu [a, b] de Riemann anlamında integrallenebilirdir.

TEOREM (İntegral hesabın temel teoremi)

f, [a, b] aralığında tanımlı ve Riemann anlamında integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in (a, b)$ için

$$F'(x) = f(x)$$

olacak biçimde sürekli bir $F : [a, b] \to R$ fonksiyonu varsa

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

dır.

TEOREM

f , [a, b] de integrallenebilen bir fonksiyon olsun.

(1) İntegralin değeri integrasyon değişkeninden bağımsızdır, yani

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \ldots = \int_a^b f(z)dz$$

ve

(2) $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

dir.

Şimdi f nin F ilkel fonksiyonunun özelliklerini veren iki teoremi ispat edelim.

TEOREM

f, [a, b] → R fonksiyonu integrallenebilir olsun. [a, b] üzerinde

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

eşitliği ile tanımlanan F fonksiyonu f nin sürekli olduğu her noktada türevlidir ve

$$F'(x) = f(x)$$

dir.

TEOREM

φ : [a, b] → R sürekli türeve sahip bir fonksiyon ve f de φ nin görüntü kümesi üzerinde sürekli ise

$$\int_a^b (\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

dir.

TEOREM

f ve g , [a, b] aralığı üzerinde sürekli ve (a, b) de türevli olsunlar.

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = f(b)\, g(b) - f(a)\, g(a) - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx$$

dir.

TEOREM (Birinci Ortalama Değer Teoremi)

f ve g, [a, b] aralığında tanımlı ve g ile fg bu aralıkta integrallenebilir olsun. g, [a, b] üzerinde her yerde aynı işaretli ve f sınırlı ise [inff, supf] aralığında öyle bir k sabiti vardır ki

$$\int_a^b f(x).g(x)dx = k\int_a^b g(x)dx$$

dır. Eğer f fonksiyonu [a, b] de sürekli ise [a, b] aralığındaki en az bir x_0 noktası için

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(x_0)\int_a^b g(x)dx$$

olur.

PROBLEMLER

1. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların [–1, 3] aralığındaki integralini hesaplayınız.

(a) $f(x) = \lfloor x \rfloor$

(b) $f(x) = \lfloor -x \rfloor$

(c) $f(x) = 2\lfloor x \rfloor$

(d) $f(x) = \lfloor 2x \rfloor$

(e) $f(x) = \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$

(f) $f(x) = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$

2. $\int_a^b \lfloor x \rfloor dx + \int_a^b \lfloor -x \rfloor dx = a - b$ olduğunu gösteriniz.

3. $\forall n \in N$ için $\int_0^n \lfloor x \rfloor dx = \frac{n(n-1)}{2}$ olduğunu gösteriniz.

4. $x \geq 0$ için $f(x) = \int_0^x \lfloor x \rfloor \, dt$ olsun. f fonksiyonunun [0, 4] aralığındaki grafiğini çiziniz.

5. $\int_0^2 \lfloor x^2 \rfloor dx = 5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ olduğunu gösteriniz.

6. (a) $\int_0^9 \lfloor \sqrt{t} \rfloor dt$ integralini hesaplayınız.

(b) $\forall n \in N$ için $\int_0^{n^2} \lfloor \sqrt{t} \rfloor dt = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}$ olduğunu gösteriniz.

7. İntegral tanımından yararlanarak aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int_0^1 x\,dx$ (b) $\int_0^1 x^2 dx$ (c) $\int_0^1 x^3 dx$

(d) $\int_a^b e^x dx$ (e) $\int_0^{10} 2^x dx$

8. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\int_0^8 \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right) dx = \frac{100}{3}$ (b) $\int_2^6 \sqrt{x-2}\,dx = \frac{16}{3}$

(c) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+3x+2} = \ln\frac{9}{8}$ (d) $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2} = \ln\frac{4}{3}$

(e) $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^8+1} = \frac{\pi}{16}$ (f) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4}$

(g) $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \frac{\pi}{2}$ (h) $\int_0^1 \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^6+4}} = \frac{1}{3}\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(ı) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \frac{2}{3}$ (i) $\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin 2x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} = \frac{\pi}{4}$

(j) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \ln 2$ (k) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = 0$

(l) $\int_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{12a}$ (m) $\int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{x}{a-x}}\,dx = \frac{a}{4}(\pi-2)$

(n) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}} = 2-\ln 2$ (o) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{\pi a^4}{16}$

(p) $\int_1^3 \frac{dx}{x+x^2} = \ln\frac{3}{2}$ (r) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

(s) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$ (t) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2\sin^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}}$

(u) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx = 4-\pi$ (v) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2+\pi}{4}$

(y) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ (z) $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = 1 - \cos 1$

9. Aşağıdaki eşitlikleri sağlayan $c \geq 0$ sayısını bulunuz.

(a) $\int_0^c x(1-x)dx = 0$ (b) $\int_0^c |x(1-x)|dx = 0$

10. $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ olduğuna göre $\int_0^2 f(x)\,dx$ integralini hesaplayınız.

11. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx$ (b) $\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2}$ $(t > 0)$

12. f ve g, [a, b] üzerinde integrallenebilir olsun. $\forall x \in [a, b]$ için

$f(x) \leq g(x)$ ise $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$ dir, gösteriniz.

13. $f : [0, 1] \to R$ fonksiyonu sürekli olsun. Aşağıdaki bağıntıların doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx$ (c) $\int_0^{\pi} x.f(\sin x) = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

(b) $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$ (d) $\int_0^{\pi} f(\sin x).\cos x dx = 0$

14. $f : [-a, a] \to R$ fonksiyonu sürekli olsun. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(1) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)]dx$, (2) $\int_{-a}^{a} f\left(x^2\right)dx = 2\int_0^a f\left(x^2\right)dx$

(3) $\int_{-a}^{a} x\, f\left(x^2\right)dx = 0$

15. Sürekli f fonksiyonu çift fonksiyon olduğunda

$$\int_0^{\pi} f(\cos x)dx = 2\int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$$

dır, gösteriniz.

16. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan f fonksiyonlarının karşılarında yazılı aralıklardaki ortalama değerlerini hesaplayınız. Ortalama değer teoreminde sözü geçen x_0 noktasını bulunuz.

(a) $f(x) = x^2$ $[0, 1]$ (b) $f(x) = a + b\cos x$ $[-\pi, \pi]$

(c) $f(x) = \sin^2 x$ $[0, \pi]$ (d) $f(x) = \sqrt{x}$ $[0, 4]$

17. $f : [a, b] \to R$ sürekli ve $\forall x \in [a, b]$ için $f(x) \geq 0$ olsun.

" $\int_a^b f(x)dx = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [a, b]$ için $f(x) = 0$ "

önermesinin doğruluğunu gösteriniz.

18. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan f fonksiyonlarının $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığındaki integralini hesaplayınız.

(a) $f(x) = \sin^n x$ (b) $f(x) = \cos^n x$

19. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \frac{n}{n^2+9} + \ldots + \frac{n}{n^2+n^2}\right) = \frac{\pi}{4}$

(b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n(n-1)}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n^2}}\right) = 2\sqrt{2} - 2$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt[n]{e} + \sqrt[n]{e^2} + \ldots + \sqrt[n]{e^{n-1}} + \sqrt[n]{e^n}}{n} = e - 1$

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n} + \sin\frac{n\pi}{n}}{n} = \frac{2}{\pi}$

(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^\lambda + 2^\lambda + 3^\lambda + \ldots + n^\lambda}{n^{\lambda+1}} = \frac{1}{\lambda+1} \quad (\lambda \geq -1)$

(f) $\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n}\left(1 + \sqrt{\frac{n}{n+3}} + \sqrt{\frac{n}{n+6}} + \ldots + \sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}}\right) = 2$

(g) $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n}\left(1 + \cos\frac{\pi}{2n} + \cos\frac{2\pi}{2n} + \ldots + \cos\frac{(n-1)\pi}{2n}\right) = 1$

(h) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(\sqrt[n]{1+\frac{k}{n}}\right)=2\ln 2-1$

(ı) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}=\frac{\pi}{2}$

20. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int_0^2 \left|x^3-3x^2+2x\right|dx$ (b) $\int_{-\pi}^{\pi}\left|\cos^3 x\right|dx$

ÇÖZÜMLER

1. (a) $-1\le x<0 \Rightarrow \lfloor x\rfloor=-1$, $1\le x<2\Rightarrow\lfloor x\rfloor=1$

$0\le x<1 \Rightarrow \lfloor x\rfloor=0$, $2\le x<3 \Rightarrow \lfloor x\rfloor=2$

$$\int_{-1}^{3}\lfloor x\rfloor dx=\int_{-1}^{0}\lfloor x\rfloor dx+\int_{0}^{1}\lfloor x\rfloor dx+\int_{1}^{2}\lfloor x\rfloor dx+\int_{2}^{3}\lfloor x\rfloor dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(-1)dx+\int_{0}^{1}0\,dx+\int_{1}^{2}1.dx+\int_{2}^{3}2dx$$

$$=-1+0+1+2=2$$

(b) $f(x)=\lfloor -x\rfloor$

$-1<x\le 0 \Rightarrow 0\le -x<1 \Rightarrow \lfloor -x\rfloor=0$

$0<x\le 1 \Rightarrow -1\le -x<0 \Rightarrow \lfloor -x\rfloor=-1$

$1<x\le 2 \Rightarrow -2\le -x<-1 \Rightarrow \lfloor -x\rfloor=-2$

$2<x\le 3 \Rightarrow -3\le -x<-2 \Rightarrow \lfloor -x\rfloor=-3$

$$\int_{-1}^{3}\lfloor -x\rfloor dx=\int_{-1}^{0}\lfloor -x\rfloor dx+\int_{0}^{1}\lfloor -x\rfloor dx+\int_{1}^{2}\lfloor -x\rfloor dx+\int_{2}^{3}\lfloor -x\rfloor dx$$

$$=0.1+(-1).1+(-2).1+(-3).1=-6$$

(c) (a) şıkkından

$$\int_{-1}^{3}2\lfloor x\rfloor dx=2\int_{-1}^{3}\lfloor x\rfloor dx=2.2=4$$

bulunur.

(d) $f(x) = [\![2x]\!]$

$$-1 \le x < -\frac{1}{2} \Rightarrow -2 \le 2x < -1 \Rightarrow [\![2x]\!] = -2$$

$$-\frac{1}{2} \le x < 0 \Rightarrow -1 \le 2x < 0 \Rightarrow [\![2x]\!] = -1$$

$$0 \le x < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \le 2x < 1 \Rightarrow [\![2x]\!] = 0$$

$$\frac{1}{2} \le x < 1 \Rightarrow 1 \le 2x < 2 \Rightarrow [\![2x]\!] = 1$$

$$1 \le x < \frac{3}{2} \Rightarrow 2 \le 2x < 3 \Rightarrow [\![2x]\!] = 2$$

$$\frac{3}{2} \le x < 2 \Rightarrow 3 \le 2x < 4 \Rightarrow [\![2x]\!] = 3$$

$$2 \le x < \frac{5}{2} \Rightarrow 4 \le 2x < 5 \Rightarrow [\![2x]\!] = 4$$

$$\frac{5}{2} \le x < 3 \Rightarrow 5 \le 2x < 6 \Rightarrow [\![2x]\!] = 5$$

$$\int_{-1}^{3} [\![2x]\!]\,dx = \int_{-1}^{-1/2} [\![2x]\!]\,dx + \int_{-1/2}^{0} [\![2x]\!]\,dx + \int_{0}^{1/2} [\![2x]\!]\,dx + \int_{1/2}^{1} [\![2x]\!]\,dx$$

$$+ \int_{1}^{3/2} [\![2x]\!]\,dx + \int_{3/2}^{2} [\![2x]\!]\,dx + \int_{2}^{5/2} [\![2x]\!]\,dx + \int_{5/2}^{3} [\![2x]\!]\,dx$$

$$= -2\cdot\frac{1}{2} + (-1)\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{1}{2} + 5\cdot\frac{1}{2} = 6$$

(e) $f(x) = \left[\!\left[x + \frac{1}{2}\right]\!\right]$

$$-1 \le x < \frac{-1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \le x + \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \left[\!\left[x + \frac{1}{2}\right]\!\right] = -1$$

$$-\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \le x + \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \left[\!\left[x + \frac{1}{2}\right]\!\right] = 0$$

$$\frac{1}{2} \le x < \frac{3}{2} \Rightarrow 1 \le x + \frac{1}{2} < 2 \Rightarrow \left[\!\left[x + \frac{1}{2}\right]\!\right] = 1$$

$$\frac{3}{2} \le x < \frac{5}{2} \Rightarrow 2 \le x + \frac{1}{2} < 3 \Rightarrow \left[\!\left[x + \frac{1}{2}\right]\!\right] = 2$$

$$\frac{5}{2} \le x < 3 \Rightarrow 3 \le x + \frac{1}{2} < \frac{7}{2} \Rightarrow \left[\!\left[x + \frac{1}{2}\right]\!\right] = 3$$

$$\int_{-1}^{3} \left\| x+\frac{1}{2} \right\| dx = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \left\| x+\frac{1}{2} \right\| dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\| x+\frac{1}{2} \right\| dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left\| x+\frac{1}{2} \right\| dx$$

$$+ \int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} \left\| x+\frac{1}{2} \right\| dx + \int_{\frac{5}{2}}^{3} \left\| x+\frac{1}{2} \right\| dx$$

$$= \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (-1)dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 0\, dx + \int_{\frac{9}{2}}^{\frac{5}{2}} 2.dx + \int_{\frac{5}{2}}^{3} 3.dx$$

$$= (-1)\frac{1}{2} + 0 + 1.1 + 2.1 + 3.\frac{1}{2} = 4$$

(f) $f(x) = \|x\| + \left\|x+\frac{1}{2}\right\| = \|2x\|$ olduğundan, (d) gereğince

$$\int_{-1}^{3} \left(\|x\| + \left\|x+\frac{1}{2}\right\| \right) dx = \int_{-1}^{3} \|2x\| dx = 6 \text{ olur.}$$

2. $\|x\| + \|-x\| = \begin{cases} 0, & x \text{ tamsayı ise} \\ -1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$ olduğundan

$$\int_{a}^{b} \left(\|x\| + \|-x\| \right) dx = \int_{a}^{b} (-1)dx = -x \,|_{a}^{b} = a - b \text{ bulunur.}$$

3. $$\int_{0}^{n} \|x\| dx = \int_{0}^{1} \|x\| dx + \int_{1}^{2} \|x\| dx + \ldots + \int_{n-1}^{n} \|x\| dx$$

$$= \int_{0}^{n} 0\, dx + \int_{1}^{2} 1 dx + \int_{2}^{3} 2\, dx + \ldots + \int_{n-1}^{n} (n-1)\, dx$$

$$= 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)$$

$$= \frac{(n-1)(n-1+1)}{2} = \frac{(n-1)n}{2}$$

4. $0 \le x < 1 \Rightarrow 0 \le t \le x < 1 \Rightarrow f(x) = \int_{0}^{x} \|t\| dt = \int_{0}^{x} 0\, dt = 0$

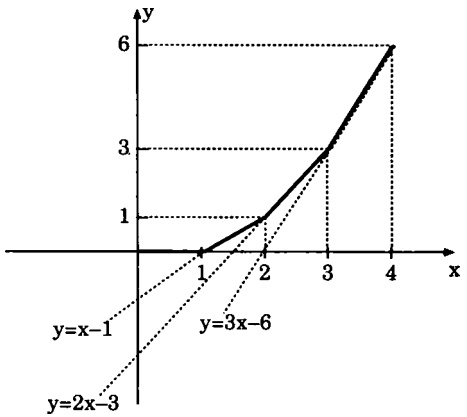
$1 \le x < 2 \Rightarrow 0 \le t \le x < 2 \Rightarrow f(x) = \int_{0}^{x} \|t\| dt = \int_{0}^{1} 0\, dt + \int_{1}^{x} dt = x - 1$

$2 \le x < 3 \Rightarrow 0 \le t < x < 3 \Rightarrow f(x) = \int_0^x \lfloor t \rfloor dt = \int_0^1 0\,dt + \int_1^2 dt + \int_2^x 2dt$

$= 1 + 2x - 4 = 2x - 3$

$3 \le x < 4 \Rightarrow 0 \le t < x < 4 \Rightarrow f(x) = \int_0^x \lfloor t \rfloor dt = \int_0^1 0\,dt + \int_1^2 dt + \int_2^3 2\,dt + \int_3^x 3\,dt$

$x = 4 \Rightarrow f(x) = 6$ $= 3x - 6$



5. $m \in Z \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = m \Rightarrow m \le x^2 < m + 1 \Rightarrow \sqrt{m} \le x < \sqrt{m+1}$

$m = 0 \Rightarrow 0 \le x < 1 \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 0$, $m = 2 \Rightarrow \sqrt{2} \le x \le \sqrt{3} \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 2$

$m = 1 \Rightarrow 1 \le x < \sqrt{2} \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 1$, $m = 3 \Rightarrow \sqrt{3} \le x < 2 \Rightarrow \lfloor x^2 \rfloor = 3$

$\int_0^2 \lfloor x^2 \rfloor dx = \int_0^1 \lfloor x^2 \rfloor dx + \int_1^{\sqrt{2}} \lfloor x^2 \rfloor dx + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \lfloor x^2 \rfloor + \int_{\sqrt{3}}^2 \lfloor x^2 \rfloor dx$

$= 0 \,.\, (1 - 0) + 1 \,.\, (\sqrt{2} - 1) + 2\,(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + 3\,(2 - \sqrt{3})$

$= 5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$.

6. (a) $\lfloor \sqrt{t} \rfloor = m \quad (m \in Z) \Rightarrow m \le \sqrt{t} < (m + 1)$

$\Rightarrow m^2 \le t < (m + 1)^2$

$m = 0 \Rightarrow 0 \le t < 1 \Rightarrow \lfloor \sqrt{t} \rfloor = 0$

$m = 1 \Rightarrow 1 \le t < 4 \Rightarrow \lfloor \sqrt{t} \rfloor = 1$

$m = 2 \Rightarrow 4 \le t < 9 \Rightarrow \lfloor \sqrt{t} \rfloor = 2$

$$\int_0^9 \left\lfloor \sqrt{t} \right\rfloor dt = \int_0^1 \left\lfloor \sqrt{t} \right\rfloor dt + \int_1^4 \left\lfloor \sqrt{t} \right\rfloor dt + \int_4^9 \left\lfloor \sqrt{t} \right\rfloor dt = \int_0^1 0\, dt + \int_1^4 dt + \int_4^9 2\, dt$$

$$= 0.(1-0) + (4-1) + 2(9-4) = 3 + 10 = 13$$

(b) $$\int_0^{n^2} \left\lfloor \sqrt{t} \right\rfloor dt = \int_0^1 \left\lfloor \sqrt{t} \right\rfloor dt + \int_2^4 \left\lfloor \sqrt{t} \right\rfloor dt + \ldots + \int_{(n-1)^2}^{n^2} \left\lfloor \sqrt{t} \right\rfloor dt$$

$$= \int_0^1 0\, dt + \int_1^4 1\, dt + \ldots + \int_{(n-1)^2}^{n^2} (n-1)\, dt$$

$$= 0 + 1.(4-1) + 2.(9-4) + \ldots + (n-1)(n^2 - (n-1)^2)$$

$$= 3 . + 2.5 + 3.7 + \ldots + (n-1) . (2n-1)$$

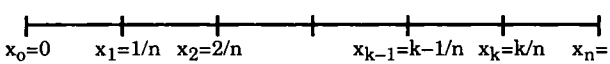
$$= \sum_{k=1}^{n} (k-1)(2k-1) = \sum_{k=1}^{n} 2k^2 - 3k + 1$$

$$= 2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3\frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}$$

7. (a) $\int_0^1 x\, dx$

[0, 1] aralığını n eşit parçaya bölelim, yani $\Delta x_k = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$ olsun.

$f(x) = x$



$$P = \{ x_0 , x_1 , x_2 , \ldots , x_{k-1} , x_k , \ldots , x_n \} = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$$

$$M_k = \sup \{ f(x) : x_{k-1} \le x \le x_k \} = \sup \left\{ f(x): \frac{k-1}{n} \le x \le \frac{k}{n} \right\} = f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k}{n}$$

$$m_k = \inf \{ f(x): x_{k-1} \le x \le x_k \} = \inf \left\{ f(x): \frac{k-1}{n} \le x \le \frac{k}{n} \right\} = f\left(\frac{k-1}{n}\right) = \frac{k-1}{n}$$

$$Ü(f, p) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \ldots + n) = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}$$

$$A(f, p) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (k-1)$$

$$= \frac{1}{n^2}(0+1+2+...+n-1) = \frac{1}{n^2}\,\frac{(n-1).n}{2} = \frac{(n-1)}{2n}$$

$\inf\left(\frac{n+1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$, $\sup\left(\frac{n-1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$ olduğundan

$$\text{İnf } Ü(f, p) = \sup A(f, p) = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

bulunur.

(b) $\int_0^1 x^2 dx$

[0, 1] aralığını herbirinin uzunluğu $\Delta x_k = \frac{1-0}{n}$ olan n tane alt aralığa bölelim.

$$P = \{ x_0 , x_1 , ... , x_{k-1} , x_k , ... , x_n \} = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1\right\}$$

$$M_k = \sup \{ f(x) : \frac{k-1}{n} \le x \le \frac{k}{n} \} = f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{k^2}{n^2}$$

$$m_k = \inf \{ f(x) : \frac{k-1}{n} \le x \le \frac{k}{n} \} = f\left(\frac{k-1}{n}\right) = \frac{(k-1)^2}{n^2}$$

$$Ü(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$= \frac{1}{n^3}(1^2+2^2+...+n^2) = \frac{1}{n^3}\,\frac{n.(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$A(f, p) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2$$

$$= \frac{1}{n^3}(0+1^2+2^2+...+(n-1)^2) = \frac{1}{n^3}\,\frac{(n-1).n(2n-1)}{6} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

$\sup A(f, P) = \inf Ü(f, P) = \frac{1}{3}$ olacağından $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$

bulunur.

(e) $\int_0^{10} 2^x dx$

[0, 10] aralığını herbirinin uzunluğu $\Delta x_k = \frac{10-0}{n} = \frac{10}{n}$ olan n eşit par-

çaya bölelim.

$x_0 = 0$, $x_1 = \frac{10}{n}$, $x_2 = 2 \cdot \frac{10}{n}$, ... , $x_{n-1} = \frac{(n-1).10}{n}$, $x_n = 10$ olur.

$$M_k = \sup \{ f(x) : x_{k-1} \le x \le x_k \} = f\left(k \cdot \frac{10}{n}\right) = 2^{10\frac{k}{n}}$$

$$m_k = \inf \{ f(x) : x_{k-1} \le x \le x_k \} = f\left((k-1)\frac{10}{n}\right) = 2^{10\frac{k-1}{n}}$$

$$\ddot{U}(f, p) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 2^{10\frac{k}{n}} \cdot \frac{10}{n}$$

$$= \frac{10}{n}\left(2^{10/n} + 2^{20/n} + ... + 2^{(n-1)10/n} + 2^{10}\right)$$

$$= \frac{10}{n}\left[\left(2^{10/n}\right) + \left(2^{10/n}\right)^2 + ... + \left(2^{10/n}\right)^{n-1} + \left(2^{10/n}\right)^n\right]$$

$$= \frac{10}{n} \cdot 2^{10/n}\left(1 + 2^{10/n} + ... + \left(2^{10/n}\right)^{n-1}\right)$$

$$= \frac{10}{n} 2^{10/n} \cdot \left(\frac{1 - (2^{10/n})^n}{1 - 2^{10/n}}\right) = \frac{10}{n} \cdot \frac{2^{10/n}}{1 - 2^{10/n}} \cdot (1 - 2^{10})$$

$\frac{10}{n} = x$ denirse $(n \to \infty \Leftrightarrow x \to 0)$

$$\inf \ddot{U}(f, p) = \lim_{x \to 0} \frac{x.2^x}{1 - 2^x}(1 - 2^{10}) = \lim_{x \to 0} \frac{2^x + x2^x \ln 2}{-2^x \ln 2}(1 - 2^{10})$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 + x\ln 2}{-\ln 2}(1 - 2^{10}) = \frac{(2^{10} - 1)}{\ln 2}$$

$$A(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 2^{10(k-1)/n} \frac{10}{n}$$

$$= \frac{10}{n}(1 + 2^{10/n} + 2^{20/n} + ... + 2^{10(n-1)/n})$$

$$= \frac{10}{n}(1 + 2^{10/n} + (2^{10/n})^2 + ... + (2^{10/n})^{n-1})$$

$$= \frac{10}{n} \frac{\left(1 - (2^{10/n})^n\right)}{1 - 2^{10/n}}$$

$$\frac{10}{n} = x \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{x(1 - 2^{10})}{1 - 2^x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - 2^{10}}{-2^x \ln 2} = \frac{2^{10} - 1}{\ln 2}$$

$$\inf \ddot{U}(f, p) = \sup A(f, p) = \frac{2^{10} - 1}{\ln 2} \Rightarrow \int_0^{10} 2^x dx = \frac{2^{10} - 1}{\ln 2}$$

8. (a) $\int_0^8 \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right) dx = \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} + \frac{3}{4} x^{4/3} \Big|_0^8 = \frac{64}{3} + 12 = \frac{100}{3}$

(b) $\int_2^6 \sqrt{x-2}\, dx = \frac{2}{3}(x-2)^{3/2} \Big|_2^6 = \frac{2}{3}(2^2)^{3/2} - 0 = \frac{16}{3}$

(c) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+3x+2} dx = \ln\frac{9}{8}$

$\frac{x}{x^2+3x+2} = \frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$

$A + B = 1\ ,\quad 2A + B = 0 \Rightarrow\quad A = -1\ ,\quad B = 2$

$\int_0^1 \frac{x}{x^2+3x+2} dx = -\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx + 2\int_0^1 \frac{1}{x+2} dx$

$= -\ \ln|1+x| \Big|_0^1 + 2\ln|x+2| \Big|_0^1$

$= -\ln 2 + 2\ln 3 - 2\ln 2 = \ln 9 - \ln 8 = \ln\frac{9}{8}$

(d) $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2} = \ln\frac{4}{3}$

$\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2} = \int_3^4 \frac{1}{x-2} dx - \int_3^4 \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-2| \Big|_3^4 - \ln|x-1| \Big|_3^4$

$= \ln 2 - \ln 1 - (\ln 3 - \ln 2) = \ln\frac{4}{3}$

(e) $\int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1} dx = \frac{\pi}{16}$

$\int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1} dx = \int_0^1 \frac{x^3}{(x^4)^2+1} dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{4x^3}{(x^4)^2+1} dx$ $[x^2 = u]$

$= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{4}\arctan u \Big|_0^1 = \frac{1}{4}(\arctan 1 - \arctan 0) = \frac{\pi}{16}$

(f) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{4}$

(g) $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \frac{\pi}{2}$

$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}} = \int_0^1 \frac{3\,du}{3\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u \Big|_0^1 \quad [x-2=3u]$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$$

(h) $\int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{y^6+4}}\,dy = \frac{1}{3}\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\int_0^1 \frac{y^2}{\sqrt{y^6+4}}\,dy = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{3y^2}{\sqrt{(y^3)^2+4}}\,dy = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u^2+4}} = \frac{1}{3}\ln\left|u+\sqrt{u^2+4}\right| \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|1+\sqrt{5}\right| - \frac{1}{3}\ln|2| = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right|$$

(ı) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx = \frac{2}{3}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\sin x\,dx = \int_0^1 (1-u^2)\,du = u - \frac{u^3}{3} \Big|_0^1 \quad [\cos x = u]$$

$$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

(i) $\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x}\,dx = \frac{\pi}{4}$

$$\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x}\,dx = \int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{(1-\sin^2 x)^2 + (\sin^2 x)^2}\,dx \quad [\sin^2 x = u]$$

$$= \int_0^{1/2} \frac{du}{(1-u)^2+u^2} = \int_0^{1/2} \frac{du}{1-2u+u^2+u^2} = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} \frac{du}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{1}{2}} \arctan\left(\frac{u-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) \Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \arctan(2u-1) \Bigg|_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \arctan 0 - \arctan(-1) = 0 - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

(j) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \int_1^2 \frac{du}{u} = \ln u \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$ [lnx=u]

(k) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = 0$

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{-du}{u} = -\ln|u| \Big|_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

(l) $\int_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{12a}$

$$\int_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} \Big|_a^{a\sqrt{3}} = \frac{1}{a}\arctan\sqrt{3} - \frac{1}{a}\arctan 1$$

$$= \frac{1}{a}\cdot\frac{\pi}{3} - \frac{1}{a}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{a}\cdot\frac{\pi}{12}$$

(m) $\int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{x}{a-x}}\, dx = \frac{a}{4}(\pi-2)$

$$\int_0^{a/2} \sqrt{\frac{x}{a-x}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{a\sin^2 t}}{\sqrt{a-a\sin^2 t}} \cdot 2a\sin t.\cos t dt \qquad [x = a\sin^2 t]$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2a.\sin^2 t dt = 2a\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2t}{2} dt = a\left(t - \frac{\sin 2t}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right)$$

$$= a\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4}(\pi-2)$$

(n) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}} = 2 - \ln 2$

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}} = \int_1^3 \frac{udu}{1+u} = \int_1^3 \frac{u+1-1}{u+1}du = \int_1^3 \left(1-\frac{1}{1+u}\right)du \qquad [2x+1=u^2]$$

$$= u - \ln|1+u| \Big|_1^3 = 3 - \ln 4 - 1 + \ln 2 = 2 + \ln\frac{1}{2} = 2 - \ln 2$$

(o) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{\pi}{16}a^4$

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} a^2\sin^2 t\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos t\,dt \qquad [x=a\sin t]$$

$$= \frac{a^4}{4}\int_0^{\pi/2} (2\sin t\cos t)^2 dt = \frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2t)^2 dt = \frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4t}{2}dt$$

$$= \frac{a^4}{4}\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 4t}{8}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{a^4}{4}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{16}a^4$$

(p) $\int_1^3 \frac{dx}{x+x^2} = \ln\frac{3}{2}$

$$\int_1^3 \frac{dx}{x+x^2} = \int_1^3 \frac{1}{x}dx - \int_1^3 \frac{1}{x+1}dx = \ln|x|\Big|_1^3 - \ln|x+1|\Big|_1^3$$

$$= \ln 3 - \ln 1 - \ln 4 + \ln 2 = \ln 3 + \ln\frac{1}{2} = \ln 3 - \ln 2 = \ln\frac{3}{2}$$

(r) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx = \int_0^{\pi/6} \frac{4\sin^2 t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}}\cdot 2\cos t\,dt = 4\int_0^{\pi/6} \sin^2 t\,dt \quad [x = 2\sin t]$$

$$= 4\int_0^{\pi/6} \frac{1-\cos 2t}{2}dt = 2\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{\pi/6}\right) = 2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(s) $\int \frac{dx}{3+2\cos x} = 2\int \frac{1/(1+t^2)}{3+\frac{2-2t^2}{1+t^2}}\,dt$ $\left[\tan\frac{x}{2}=t\right]$

$= 2\int \frac{1}{5+t^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{5}}\arctan\frac{t}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{5}}\right)$ olur.

Buradan $\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$ elde edilir.

(t) $\tan x = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{dt}{1+t^2}$ olacağından

$\int \frac{dx}{1+a^2\sin^2 x} = \int \frac{1/(1+t^2)}{1+\frac{a^2t^2}{1+t^2}}\,dt = \int \frac{1}{1+(a^2+1)t^2}\,dt$

$= \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\arctan\left(\sqrt{1+a^2}\,t\right) = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\arctan\left(\sqrt{1+a^2}\tan x\right)$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\cdot\frac{\pi}{2}$ bulunur.

(u) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx = 4-\pi$ $[e^x-1=u^2]$

$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx = \int_0^2 \frac{2u.u}{u^2+4}\,du = 2\int_0^2 \frac{(u^2+4-4)}{u^2+4}\,du$

$= 2\int_0^2 du - 8\int_0^2 \frac{1}{u^2+4}\,du = 4 - 8\cdot\frac{1}{2}\arctan\frac{u}{2}\Big|_0^2$

$= 4 - 4\arctan 1 = 4 - 4\cdot\frac{\pi}{4} = 4-\pi$

(v) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{2+\pi}{4}$

$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$ integralinde $u = \frac{1}{1+x^2}$, $dv = dx$ alınıp kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(1+x^2)}=\frac{x}{1+x^2}\Big|_{-1}^{1}+2\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx=1+2\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$$

$$=1+2\int_{-1}^{1}\frac{1}{(1+x^2)}dx-2\int_{-1}^{1}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1}\frac{1}{(1+x^2)^2}dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{(1+x^2)}dx$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\arctan x\Big|_{-1}^{1}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\arctan 1-\arctan(-1))$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{2+\pi}{4}.$$

(y) $\int_{1}^{2}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

$x=\frac{1}{\cos t}$, $dx=\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt$, $x=1\Rightarrow t=0$, $x=2\Rightarrow t=\frac{\pi}{3}$

$$\int_{1}^{2}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx=\int_{0}^{\pi/3}\frac{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}-1}}{\frac{1}{\cos t}}\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt=\int_{0}^{\pi/3}\sqrt{1-\cos^2 t}\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt$$

$$=\int_{0}^{\pi/3}\frac{(1-\cos^2 t)}{\cos^2 t}dt=\tan t-t\Big|_{0}^{\pi/3}=\tan\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

(z) $\int_{1}^{e}\frac{\sin(\ln x)}{x}dx=1-\cos 1$

$\ln x=t\Rightarrow x=e^t\Rightarrow dx=e^t dt$, $x=e\Rightarrow t=1$, $x=1\Rightarrow t=0$

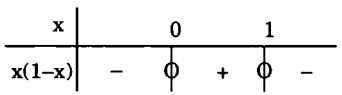
$$\int_{1}^{e}\frac{\sin(\ln x)}{x}dx=\int_{0}^{1}\sin t dt=-\cos t\Big|_{0}^{1}=-\cos 1+1=1-\cos 1$$

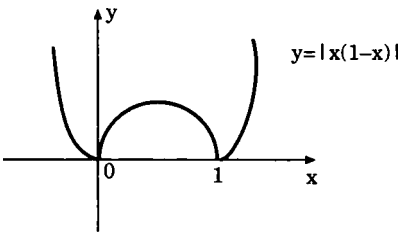
9. a) $\int_{0}^{c}x(1-x)dx=0$

$$\int_{0}^{c}x(1-x)dx=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{c}=\frac{c^2}{2}-\frac{c^3}{3}=0\Rightarrow 3c^2-2c^3=0$$

$c^2(3-2c)=0\Leftrightarrow c=0$ ve $c=\frac{3}{2}$

b) $\int_0^c |x(1-x)|dx = 0$





i) $c = 0$ ise $\int_0^0 |x(1-x)|\,dx = 0$ dır.

ii) $c > 0$ ise $|x(1-x)| \geq 0$ olduğundan

$\int_0^c |x(1-x)|\,dx > 0$ dır.

O halde $\int_0^c |x(1-x)|\,dx = 0 \Leftrightarrow c = 0$

10. $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2dx + \int_1^2 2-xdx$

$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2}\Big|_1^2\right) = \frac{5}{6}$

11. a) $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx$

$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_1^0 (1-t)^m t^n(-dt) = \int_0^1 t^n(1-t)^m dt,$ [x–1=t]

$= \int_0^1 x^n(1-x)^m dx$

b) $\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2}$

$\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_{1/x}^1 \frac{-1/u^2}{1+\frac{1}{u^2}}du = \int_1^{1/x} \frac{du}{1+u^2} = \int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2}$

$[t = \frac{1}{u} \Rightarrow t = x \Rightarrow u = \frac{1}{x},\ t = 1 \Rightarrow u = 1,\ dt = -\frac{1}{u^2}du\,]$

12. $f(x) - g(x) \le 0$ dir. $f - g$ integrallenebilir olduğundan

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - g(x_k))\,\Delta x_k = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx \text{ dır.}$$

$f - g \le 0$ olduğundan toplamdaki her bir $\left(f(x_k) - g(x_k)\right)$ terimi negatif veya sıfırdır. Dolayısı ile

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx \le 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_0^b g(x)dx$$

gerçeklenir.

13. a) $\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx$

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin x)dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx + \int_{\pi/2}^{0} f(\sin(\pi - t))(-dt)$$

$$= \int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx + \int_0^{\pi/2} f(\sin t)dt = 2\int_0^{\pi/2} f(\sin t)dt$$

b) $x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$ olur.

$x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_{\pi/2}^{0} f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right)(-dt) = \int_0^{\pi/2} f(\cos t)dt$$

c) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx$ integralinde $x = \pi - t$ değiştirmesi yapılırsa

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \int_{\pi}^{0} (\pi - t)f(\sin(\pi - t))(-dt)$$

$$= \pi\int_0^{\pi} f(\sin t)dt - \int_0^{\pi} tf(\sin t)dt \Rightarrow 2\int_0^{\pi} xf\sin x)dx = \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} x\,f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx\,.$$

d) $\int_0^{\pi} f(\sin x).\cos x\,dx = 0$

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\cos x\,dx = \int_{\pi}^{0} f(\sin(\pi - t))\cos(\pi - t)(-dt) \qquad [\pi - t = x]$$

$$= -\int_0^{\pi} f(\sin t)\cos t\,dt \Rightarrow 2\int_0^{\pi} f(\sin x)\cos x\,dx = 0 \Rightarrow \int_0^{\pi} f(\sin x)\cos x\,dx = 0$$

14. 1) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$

$$= \int_a^0 f(-t)(-dt) + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(-t)dt + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a [f(-x) + f(x)]dx$$

$[x = -t]$

2) $\int_{-a}^{a} f(x^2)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x^2)dx + \int_0^a f(x^2)dx = \int_a^0 f(t^2)(-dt) + \int_0^a f(x^2)dx$

$$= \int_0^a f(t^2)dt + \int_0^a f(x^2)dx = 2\int_0^a f(t^2)dt$$

3) $\int_{-a}^{a} x f(x^2)\,dx = 0$

$$\int_{-a}^{a} x\,f(x^2)\,dx = \int_{-a}^{0} x\,f(x^2)dx + \int_0^a x\,f(x^2)dx$$

$$= \int_a^0 -t\,f(t^2)(-dt) + \int_0^a x\,f(x^2)dx \qquad [x = -t]$$

$$= -\int_0^a t\,f(t^2)dt + \int_0^a x\,f(x^2)dx = 0$$

15. f çift fonksiyon olduğundan f(cosx) = f(–cosx)

$$\int_0^{\pi} f(\cos x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(\cos x)dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx + \int_{\pi/2}^{0} f\,(\cos(\pi - t)(-dt)) \qquad [x = \pi - t]$$

$$= \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx + \int_0^{\pi/2} f(-\cos t)dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx + \int_0^{\pi/2} f(\cos t)dt = 2\int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$$

16. a) $f(x) = x^2 \quad [0, 1]$

$$k = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{1-0}\int_0^1 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x_0 = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \in [0, 1]$$

b) $f(x) = a + b\cos x \quad [-\pi, \pi]$

$$k = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{\pi-(-\pi)}\int_{-\pi}^{\pi}(x + b\cos x)dx = \frac{1}{2\pi}\left(ax + b\sin x \Big|_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}(a\pi + a\pi) = a$$

$$a + b\cos x = a \Rightarrow b\cos x = 0 \quad (b \neq 0)$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{2}, \quad x_0 = -\frac{\pi}{2} \in [-\pi, \pi]$$

c) $f(x) = \sin^2 x \quad [0, \pi]$

$$k = \frac{1}{\pi-0}\int_0^{\pi}\sin^2 x dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2\pi}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^{\pi}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{4}, \quad x_0 = \frac{3\pi}{4} \in [0, \pi]$$

d) $f(x) = \sqrt{x} \quad [0, 4]$

$$k = \frac{1}{4-0}\int_0^4 \sqrt{x}\,dx = \frac{1}{4}\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^4 = \frac{1}{6}\cdot 2^3 = \frac{4}{3}$$

$$\sqrt{x} = \frac{4}{3} \Rightarrow x_0 = \frac{16}{9}$$

17. $f(x) \geq 0$ olduğundan $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ olacağı bilinmektedir. $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ fakat en az bir $p \in (a, b)$ için $f(p) > 0$ olsun. f sürekli olduğundan,

işaret koruma özelliğinden, öyle bir $\delta > 0$ bulunabilir ki

$\forall x \in (p-\delta, p+\delta)$ için $f(x) > 0$ olur. Bu durumda $\int_{p-\delta}^{p+\delta} f(x)\,dx > 0$ olur ki

bu da $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ olmasıyla çelişir. O halde her $x \in [a, b]$ için

$f(x) = 0$ dır.

18. $I_n = \int \sin^n x\,dx = \int \sin^{n-1} x \sin x\,dx$

$= -\sin^{n-1}x \cos x + \int (n-1)\sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx$

$= -\sin^{n-1} x \cos x - (n-1)\int \sin^{n-2}x\,dx - (n-1)\int \sin^n x\,dx$

$\Rightarrow n I_n = -\sin^{n-1}x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2}x\,dx$

formülünde n'e göre her uygulanışında sin x'in üssü 2 kadar eksilir. Bu durumda n nin tek olması halinde I_n integrali

$I_1 = \int \sin x\,dx = -\cos x$,

n nin çift olması halinde

$I_0 = \int dx = x$ elde edilir.

$\sin^n x$ fonksiyonunun $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında integrali alınırsa, $-\sin^{n-1}x \cos x$ ifadesi alt ve üst sınırda sıfır olacağından

n tek ise; $n I_n = (n-1) I_{n-2}$

$(n-2) I_{n-2} = (n-3) I_{n-4}$

$\vdots$

$5 I_5 = 4 I_3$

$3 I_3 = 2 I_1 = 2\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = 2$

n çift ise; $n I_n = (n-1) I_{n-2}$

$(n-2) I_{n-2} = (n-3) I_{n-4}$

$\vdots$

$4 I_4 = 3 I_2$

$2 I_2 = I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$

Bu ifadeler taraf tarafa çarpılırsa

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(n-2)(n-3)\ldots 4.2}{n(n-2)\ldots 5.3} & , \text{ n tek ise} \\ \dfrac{(n-1)(n-3)\ldots 5.3.1}{n(n-2)\ldots 6.4.2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & , \text{ n çift ise} \end{cases}$$

19. a) $\lim\limits_{n\to 0}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+4}+\ldots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)=\dfrac{\pi}{4}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+4}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\arctan x\,\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}$$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+(n-1)n}}+\dfrac{1}{\sqrt{2n^2}}\right)=2\sqrt{2}-2$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+(n-1)n}}+\frac{1}{\sqrt{2n^2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx$$

$$=+2(1+x)^{1/2}\,\Big|_0^1=2\sqrt{2}-2$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+\ldots+\sqrt[n]{e^{n-1}}}{n}\right)=e-1$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt[n]{e}+\sqrt[n]{e^2}+\ldots+\sqrt[n]{e^{n-1}}}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{k/n}$$

$$=\int_0^1 e^x dx=e^x\,\Big|_0^1=e-1$$

d) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+..+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}+\sin\frac{n\pi}{n}}{n}=\dfrac{2}{\pi}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{2}+...+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}+\sin\frac{n\pi}{n}}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx=-\frac{\cos x}{\pi}\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

e) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1^{\lambda}+2^{\lambda}+3^{\lambda}+...+n^{\lambda}}{n^{\lambda+1}}=\dfrac{1}{\lambda+1}\quad(\lambda\geq 0)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^{\lambda}+2^{\lambda}+3^{\lambda}+...+n^{\lambda}}{n^{\lambda+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{\lambda}}{n^{\lambda}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\lambda}$$

$$=\int_0^1 x^{\lambda}dx=\frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}\Big|_0^1=\frac{1}{\lambda+1}$$

f) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3}{n}\left(1+\sqrt{\dfrac{n}{n+3}}+\sqrt{\dfrac{n}{n+6}}+...+\sqrt{\dfrac{n}{n+3(n-1)}}\right)=2$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left(1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+...+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{n+3(k-1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1+3\frac{k}{n}}}$$

$$=\int_0^3\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx=2\sqrt{1+x}\Big|_0^3=4-2=2$$

g) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\pi}{2n}\left(1+\cos\dfrac{\pi}{2n}+\cos\dfrac{2\pi}{2n}+...+\cos\dfrac{(n-1)\pi}{2n}\right)=1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\left(1+\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+...+\cos\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{2n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=+\sin x\Big|_0^{\pi/2}=1$$

h) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(\sqrt[n]{1+\frac{k}{n}}\right)=2\ln 2-1$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\sqrt[n]{1+\frac{k}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\ln(1+x)dx$$

$$=x\ln(1+x)\ \Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=\ln 2-\left(x-\ln(1+x)\ \Big|_0^1\right)$$

$$=\ln 2-(1-\ln 2)=2\ln 2-1$$

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}=\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x\ \Big|_0^1$$

$$=\arcsin 1-\arcsin 0=\frac{\pi}{2}$$

20. a) $\int_0^2\left|x^3-3x^2+2x\right|dx$

$x^3-3x^2+2x=x(x^2-3x+2)=x(x-1)(x-2)$

x		0		1		2	
x^3-3x^2+2x	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\int_0^2\left|x^3-3x^2+2x\right|dx=\int_0^1(x^3-3x^2+2x)dx-\int_1^2(x^3-3x^2+2x)dx$$

$$=\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\ \Big|_0^1-\left(\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\ \Big|_1^2\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

b)

x		$-\pi$		$-\pi/2$		$\pi/2$		π
$\cos^3 x$	|	–	0	+	0	–	|	

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\cos^3 x\right| dx = -\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^3 x dx$$

$$= -\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x)\cos x\, dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} (1 - \sin^2 x)\cos x\, dx - \int_{\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 x)\cos x\, dx$$

$$= -\int_{0}^{-1} (1 - u^2)\, du + \int_{-1}^{1} (1 - u^2)\, du - \int_{1}^{0} (1 - u^2)\, du$$

$$= \int_{-1}^{0} (1 - u^2)\, du + \int_{-1}^{1} (1 - u^2)\, du + \int_{0}^{1} (1 - u^2) = 2\int_{-1}^{1} (1 - u^2)\, du$$

$$= 2\left(u - \frac{u^3}{3}\ \Big|_{-1}^{1}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right) = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

BÖLÜM PROBLEMLERİ

1. (a) $\forall n \in N$ için $\int_0^n \|t\|^2 dt = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ olduğunu gösteriniz.

(b) $x \geq 0$ için $f(x) = \int_0^x \|t\|^2$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun [0, 3] aralığındaki grafiğini çiziniz.

(c) $\int_0^x \|t\|^2 dt = 2(x - 1)$ eşitliğini sağlayan pozitif x sayılarını bulunuz.

2. İkinci dereceden öyle bir p polinomu bulunuz ki $p(0) = p(1) = 0$ ve $\int_0^1 p(x)dx = 1$ olsun.

3. $\int_a^b f(x)dx = (b - a)\int_0^1 f[a + (b - a)x]\, dx$ olduğunu gösteriniz.

4. f, [a, b] üzerinde integrallenebilir olsun. $k \neq 0$ için

$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)dx$ olduğunu gösteriniz.

5. f sürekli bir tek fonksiyon olduğunda $\int_0^{\pi} f(\cos x)\,dx = 0$ dır, gösteriniz.

6. $\int_{-1/2}^{1/2} \cos x \ln\frac{1+x}{1-x}\,dx$ integralini hesaplayınız.

7. Sürekli $f:[a, b] \to R$ fonksiyonu için $\int_a^b f(x)\,dx = 0$ ise fonksiyonu (a,b) aralığının en az bir c noktasında sıfır değerini alır; gösteriniz.

8. $I = \int_0^{\pi/2} \frac{a\cos^3 x + b\sin^3 x}{\cos x + \sin x}dx$, $J = \int_0^{\pi/2} \frac{b\cos^3 x + a\sin^3 x}{\cos x + \sin x}dx$

integrallerini hesaplayınız.

9. $f:[a, b] \to R$ fonksiyonu [a, b] de integrallenebilir olsun.

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

eşitliği ile tanımlanan F fonksiyonunun sürekli olduğunu gösteriniz.

10. f fonksiyonu sürekli ve tersi bulunan bir fonksiyon olsun.

$\frac{d}{dx}\int_0^{\ln x} f(t)\,dt = 1$ ise $f(x)$ nedir?

11. $I = \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}}dx$ integralini hesaplayınız.

12. $x = \sin u$ değişken değiştirmesi yardımıyla

$$\int_0^1 x^m(1-x^2)^n dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^{2n+1} x du$$

olduğunu gösteriniz. Bundan yararlanarak,

$$\int_0^1 x^3(1-x^2)^{10} dx$$

integralini hesaplayınız.

13. $u = 1 - x$ değiştirmesini yaparak, $m, n \in N$ için

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m dx = \int_0^1 x^m(1-x)^n dx$$

olduğunu gösteriniz. Bundan yararlanarak,

$$\int_0^1 x^2(1-x)^{10} dx$$

integralini hesaplayınız.

ÇÖZÜMLER

1. a) $0 \le t < 1 \Rightarrow \llbracket t \rrbracket = 0 \Rightarrow \llbracket t \rrbracket^2 = 0$

$1 \le t < 2 \Rightarrow \llbracket t \rrbracket = 1 \Rightarrow \llbracket t \rrbracket^2 = 1$

$2 \le t < 3 \Rightarrow \llbracket t \rrbracket = 2 \Rightarrow \llbracket t \rrbracket^2 = 4$

$\vdots$

$n-1 \le t < n \Rightarrow \llbracket t \rrbracket = n-1 \Rightarrow \llbracket t \rrbracket^2 = (n-1)^2$

$$\int_0^n \llbracket t \rrbracket^2 dt = \int_0^1 \llbracket t \rrbracket^2 dt + \int_1^2 \llbracket t \rrbracket^2 dt + \ldots + \int_{n-1}^n \llbracket t \rrbracket^2 dt$$

$$= 0.1 + 1.1 + 4.1 + \ldots + (n-1)^2 . 1$$

$$= 1 + (2)^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{n.(n-1)(2n-1)}{6}$$

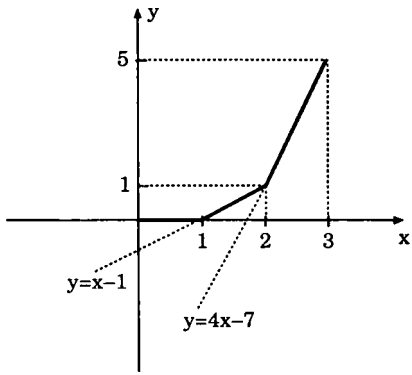
b) $0 \le x < 1 \Rightarrow 0 \le t < x < 1$ $\quad f(x) = \int_0^x \lfloor t \rfloor^2 dt = \int_0^x 0\, dt = 0$

$1 \le x < 2 \Rightarrow 0 \le t < x < 2$ $\quad f(x) = \int_0^x \lfloor t \rfloor^2 dt = \int_0^1 0\, dt + \int_1^x dt = x - 1$

$2 \le x < 3 \Rightarrow 0 \le t < x < 3$ $\quad f(x) = \int_0^x \lfloor t \rfloor^2 dt = \int_0^1 0\, dt + \int_1^2 dt + \int_2^x 2^2 dt$

$= 1 + 4x - 8 = 4x - 7$

$x = 3 \Rightarrow f(x) = \int_0^3 \lfloor t \rfloor^2 dt = 5$



c) $\int_0^x \lfloor t \rfloor^2 dt = 2(x-1)$

$0 \le x < 1 \Rightarrow 0 \le t < x < 1 \Rightarrow \lfloor t \rfloor = 0 \Rightarrow \lfloor t \rfloor^2 = 0$

$\Rightarrow \int_0^x \lfloor t \rfloor^2 dx = 2(x-1) \Rightarrow 0 = 2(x-1) \Rightarrow x = 1 \quad x \in [0,1]$

$1 \le x < 2 \Rightarrow 0 \le t < x < 2 \Rightarrow 0 \le t < 1 \Rightarrow \lfloor t \rfloor^2 = 0$

$1 \le t < 2 \Rightarrow \lfloor t \rfloor^2 = 1$

$\int_0^x \lfloor t \rfloor^2 dt = \int_0^1 \lfloor t \rfloor^2 dt + \int_1^x \lfloor t \rfloor^2 dt = 0 + 1(x-1)$

$\Rightarrow (x-1) = 2(x-1) \Rightarrow x = 1$

$2 \le x < 3 \Rightarrow 0 \le t < x < 3$

$\int_0^x \lfloor t \rfloor^2 dt = \int_0^1 \lfloor t \rfloor^2 dt + \int_1^2 \lfloor t \rfloor^2 dt + \int_2^x \lfloor t \rfloor^2 dt$

$= 0 + 1 + 4(x-2) = 2(x-1) \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

2. $P(x) = ax^2 + bx + c \qquad P(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

$$P(1) = 0 \Rightarrow a + b = 0$$

$$\int_0^1 P(x)dx = \int_0^1 ax^2 + bx + c\,dx = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2}\Big|_0^1 = 1$$

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 1 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2a + 3b = 6 \\ a + b = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} a = -6 \\ b = 6 \end{matrix} \Rightarrow P(x) = -6x^2 + 6x$$

3. $t = \dfrac{x-a}{b-a}$ değişken değiştirmesi yapıldığında

$dt = \dfrac{dx}{b-a}$, $x = a \Rightarrow t = 0$, $x = b \Rightarrow t = 1$ olacağından

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^1 f\big(a + (b-a)t\big).(b-a)dt = (b-a)\int_0^1 f\big(a + (b-a)t\big)\,dt.$$

4. $x = \dfrac{t}{k}$ denirse $dx = \dfrac{dt}{k}$, $x = a \Rightarrow t = ka$, $x = b \Rightarrow t = kb$ olacağından

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{t}{k}\right)dt = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)dx.$$

5. $x = \pi - t$ denirse $dx = -dt$, $x = 0 \Rightarrow t = \pi$, $x = \pi \Rightarrow t = 0$ olacağından

$$\int_0^\pi f(\cos x)\,dx = \int_\pi^0 f(\cos(\pi - t))(-dt) = \int_0^\pi f(-\cos t)dt = \int_0^\pi -f(\cos t)\,dt$$

$$= -\int_0^\pi f(\cos x)\,dx \Rightarrow 2\int_0^\pi f(\cos x)\,dx = 0 \Rightarrow \int_0^\pi f(\cos x)\,dx = 0$$

6. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x . \ln\frac{1+x}{1-x}\,dx$

$$f(-x) = \cos(-x) . \ln\frac{1-x}{1+x} = \cos(x)\,[\ln(1-x) - \ln(1+x)]$$

$$= -\cos x\,[\ln(1+x) - \ln(1-x)] = -\cos x . \ln\frac{1+x}{1-x} = -f(x)$$

olur ki bu f fonksiyonunun tek olduğunu gösterir.

f tek ise $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ olduğundan $\int_{-1/2}^{1/2} \cos x . \ln\frac{1+x}{1-x}\, dx = 0$ olur.

7. İntegral hesabın birinci ortalama değer teoremi gereğince, f, [a, b] de sürekli ise [inf f, sup f] aralığında öyle bir k sabiti vardır ki

$$\int_a^b f(x)dx = k\,(b-a)$$

olur. f sürekli olduğunda, inf f ile sup f arasındaki her değeri en az bir defa alacağından $k = f(c)$ olacak şekilde en az bir $c \in [a, b]$ vardır. Bu durumda

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \Rightarrow (b-a)\,f(c) = 0 \Rightarrow f(c) = 0$$

olacak şekilde en az bir $c \in (a, b)$ vardır.

8. $I = \int_0^{\pi/2} \frac{a\cos^3 x + b\sin^3 x}{\cos x + \sin x}\, dt$, $J = \int_0^{\pi/2} \frac{b\cos^3 x + a\sin^3 x}{\sin x + \cos x}\, dx$

$x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$ $\quad x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$ ve $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$

$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$, $\quad \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$

$I = \int_0^{\pi/2} \frac{a\sin^3 t + b\cos^3 t}{\sin t + \cos t}\, dt = J \Rightarrow I = J$ bulunur.

$$2I = I + J = \int_0^{\pi/2} \frac{a(\cos^3 x + \sin^3 x) + b(\cos^3 x + \sin^3 x)}{\sin x + \cos x}\, dx$$

$$= (a+b) \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x + \sin^3 x}{\cos x + \sin x}\, dx$$

$$= (a+b) \int_0^{\pi/2} \frac{\left((\cos x + \sin x)\left(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x\right)\right)}{\cos x + \sin x}\, dx$$

$$= (a+b) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin x \cos x)dx = (a+b)\left(x + \frac{\cos^2 x}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}$$

$$= (a+b)\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{(a+b)}{2}(\pi - 1) \Rightarrow I = \frac{(a+b)}{4}(\pi - 1)$$

9. x_0 , [a, b] de herhangi bir nokta olsun. f integrallenebilir olduğundan $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ öyleki $|x - x_0| < \delta$ bağıntısını sağlayan her x için

$\int_{x_0}^{x} |f(t)|\, dt < \varepsilon$ olur.

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \right| = \left| \int_{x_0}^x f(t)dt \right| \le \int_{x_0}^x |f(t)|\, dt < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ F fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir. x_0 , [a, b] de seçilmiş keyfi bir nokta olduğundan F fonksiyonu [a, b] de süreklidir.

10. $\frac{d}{dx} \int_0^{\ln x} f(t)dt = 1 \Rightarrow f(\ln x) \cdot \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow f(\ln x) = x \Rightarrow f(x) = e^x$

olur.

11. $\frac{2+x}{1-x} = t^2$ denirse $x = \frac{t^2-2}{t^2+1}$ ve $dx = \frac{6tdt}{(1+t^2)^2}$ olur.

$$I = \int t \cdot \frac{6tdt}{(1+t^2)} = 6\int \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^2}\, dt = 6\left[\int \frac{dt}{1+t^2} - \int \frac{-1}{(1+t^2)^2}\, dt\right]$$

$$= 6\left[\arctan t - \frac{t}{2(1+t^2)} - \frac{1}{2}\arctan t\right] = 3 \arctan t - \frac{3t}{1+t^2}$$

$$= 3 \arctan \sqrt{\frac{2+x}{1-x}} - (1-x)\sqrt{\frac{2+x}{1-x}}$$

bulunur. Buna göre;

$$I = \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{2+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}} dx = 3\frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}$$ olur.

12. $x = \sin u \Rightarrow dx = \cos u\, du$, $x = 1 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2}$, $x = 0 \Rightarrow u = 0$ olacağından

$$\int_0^1 x^m(1-x^2)^n dx = \int_0^{\pi/2} \sin^m u(1-\sin^2 u)^n . \cos u du$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^m u \,.\, \cos^{2n+1} u\, du$$

bulunur.

$I = \int_0^1 x^3\,(1-x^2)^{10} dx$ integralinde $x=\sin u$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 u \cos^{20} u \,.\, \cos u\, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 u \cos^{21} u \sin u\, du$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 u) \cos^{21} u \sin u\, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{21} u \sin u\, du - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{23} u \sin u\, du$$

$$= -\frac{1}{22}\cos^{22} u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{24}\cos^{24} u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{22} - \frac{1}{24} = \frac{1}{264}$$

13. $x = 1 - u$ değişken değiştirmesi yapılırsa $dx = -du$ olur.

$x = 0$ için $u = 1$ ve $x = 1$ için $u = 0$ olacağından

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m dx = \int_0^1 u^m (1-u)^n du$$

olur. Belirli integrasyon değişkeninden bağımsız olduğundan

$$\int_0^1 x^n (1-x)^m dx = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$$

bulunur.

$$\int_0^1 x^2 (1-x)^{10} dx = \int_0^1 x^{10}(1-x)^2 dx = \int_0^1 x^{10} - 2x^{11} - x^{12} dx$$

$$= \frac{x^{11}}{11} - \frac{1}{6}x^{12} - \frac{x^{13}}{13} \Big|_0^1 = \frac{1}{11} - \frac{1}{6} - \frac{1}{13} = -\frac{20}{143}$$

8 BELİRLİ İNTEGRALLERİN UYGULAMALARI

ALAN HESABI

1. $y = f(x)$ eğrisi, x– ekseni, $x = a$ ve $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanı

$$A = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

dir.

2. $y = f(x)$, $y = g(x)$ eğrileri ile $x = a$, $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanı

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

olur.

3. $r = r(\varphi)$ eğrisi ile $\varphi = \alpha$ ve $\varphi = \beta$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanı

$$A = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\varphi)\, d\varphi$$

dir.

PROBLEMLER

1. Aşağıda denklemleri verilen eğriler ile Ox– ekseni tarafından sınırlanan düzlemsel bölgelerin alanını bulunuz.

(a) $y = 2 + x - x^2$ (b) $y = 4x - x^2$ (c) $y = x(x - 1)(x - 2)$

2. $y = \sin x$ eğrisi $x = 0$ ve $x = 2\pi$ doğruları ve x– ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

3. $y = [\![x]\!]$, $x = -1$, $x = 2$ ve x– ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

4. Aşağıdaki eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin alanlarını hesaplayınız.

(a) $y = \frac{x^2}{4}$ ile $y = \frac{x}{2} + 2$

(b) $y^2 = 2x$, $x - y = 4$

(c) $x = y^3 - 4y$ ile $x = 4 - y^2$

(d) $y = x^3 - 12x$ ve $y = x^2$

(e) $y = x^3$ ile $y = x^2$

(f) $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ ve $y = x$

(g) $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$ ve $x = 0$

(h) $y = x^2$, $y = x - 1$, $y = \frac{1}{9}$

(ı) $y = \cos x$, $y = x + 1$ ve $y = 0$

(i) $y^2 = 2x$ ve $x^2 = 2y$

(j) $y = x^4 - 2x^2$ ile $y = 2x^2$

(k) $y = |x|$ ve $y = x^2 - 2$

5. $y = \frac{x^2}{3}$ ve $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$ parabolleri tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

6. $y = \frac{1}{1+x^2}$ eğrisi ile $y = \frac{x^2}{2}$ parabolü tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

7. $y = \sin x$, $y = \cos x$ eğrileri ile $x = \frac{\pi}{4}$ ve $x = \frac{5\pi}{4}$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

8. $y = 4 - |x|$ eğrisi, x– ekseni ve $x = -2$, $x = 2$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

9. $k \in N$ olmak üzere $y = x^k$ ile $y = x^{k+1}$ eğrileri veriliyor. Bu iki eğri arasında kalan bölgenin alanı A(k) olsun. $\sum_{k=1}^{n} A(k)$ ifadesini bulunuz. n yeter derece büyük seçildiğinde bu alanların toplamı hangi sayıya yaklaşır?

10. Birinci bölgede, $x^2 + y^2 = a^2$ ve $x^2 + y^2 = b^2$ çemberleri ile $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi çiziliyor. Bu elipsin çemberler arasındaki bölgeyi, alanları oranı $\frac{a}{b}$ olacak şekilde böldüğünü gösteriniz.

11. $y = \frac{1}{4}(x^3 + x - 2)$ eğrisi, $x = 0$, $x = 2$ doğruları ve x– ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

12. $y = x^3 - x$ eğrisi ile bu eğriye $x = -1$ absisli noktada teğet olan doğru arasında kalan bölgenini alanını bulunuz.

13. $y = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$ eğrisi, $y = x$ doğrusu ile $x = 0$, $x = 6$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

14. Aşağıdaki eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin alanlarını bulunuz.

(a) $r = a \sin 3\varphi$ (üç yapraklı gül)

(b) $r = a \cos 2\varphi$ (dört yapraklı gül)

(c) $r = 4 + 2 \cos \varphi$ (limaçon)

(d) $r = a(1 - \sin \varphi)$ (kardiyoid)

(e) $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (lemniskat)

15. $r = \sqrt{|\cos\varphi|}$ eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

16. $r = 1 + 2 \sin \varphi$ limaçonunun iç ilmeği tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplayınız.

17. $r = \varphi$ Archimedes spiralinin $[0, 2\pi]$ aralığındaki parçası ile kutup ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

18. $r = a\varphi$ Arşimet spiralinin birinci ve ikinci sarmalı arasındaki bölgenin alanını bulunuz.

19. $r = 2 \sin \varphi$ ve $r = 2 \cos \varphi$ çemberleri arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

20. $r = 2a \cos 3\varphi$ eğrisinin içinde $r = a$ çemberinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.

21. $r = 2a \cos 2\varphi$ gülünün içinde, $r = \sqrt{2}\, a$ çemberinin dışında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

22. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$, $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$ lemniskatlarının her ikisinin de içinde bulunan ortak bölgenin alanını bulunuz.

23. $r = 2\,(1 - \cos \varphi)$ kordiyoidinin dışında $r = 2$ çemberin içinde kalan bölgenin alanını bulunuz.

24. $r^2 = 4 \cos 2\varphi$ lemniskatının içinde $r = \sqrt{2}$ çemberinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.

25. $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$ sikloidinin bir yayı ile Ox– ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

26. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ astroidi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

27. $\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^{2/3} = 1$ eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

ÇÖZÜMLER

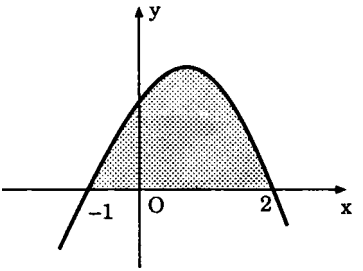
1. a) $y = 2 + x - x^2$

$y = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ve $x = 2$

$$A = \int_{-1}^{2} |f(x)|\,dx = \int_{-1}^{2} |2 + x - x^2|\,dx$$

$$= \int_{-1}^{2} 2 + x - x^2\,dx$$

$$= 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}\,br^2$$



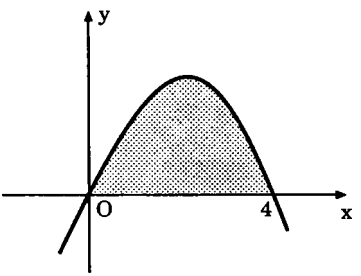
b) $y = 4x - x^2$

$$A = \int_{0}^{4} |f(x)|\,dx$$

$$= \int_{0}^{4} (4x - x^2)\,dx$$

$$= 2x^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{4}$$

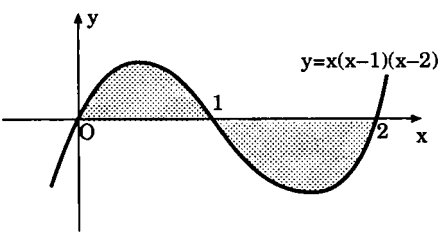
$$= \frac{32}{3}\,br^2$$



c) $y = x\,(x - 1)\,(x - 2)$

$y = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0\,,\ x_2 = 1, x_2 = 2$

$$A = \int_{0}^{2} |x(x-1)(x-2)|\,dx$$

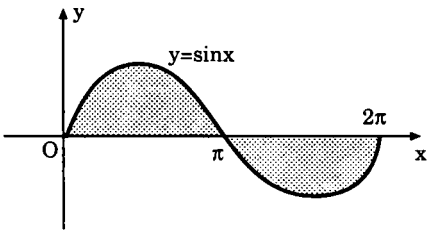


$$= \int_{0}^{1} x\,(x-1)\,(x-2)\,dx - \int_{1}^{2} x\,(x-1)\,(x-2)\,dx$$

$$= \int_{0}^{1} x^3 - 3x^2 + 2x\,dx - \int_{1}^{2} x^3 - 3x^2 + 2x\,dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right)\Big|_{0}^{1} - \left(\frac{x^4 - x^3 + x^2}{4}\Big|_{1}^{2}\right) = \frac{1}{2}\,br^2$$

2.



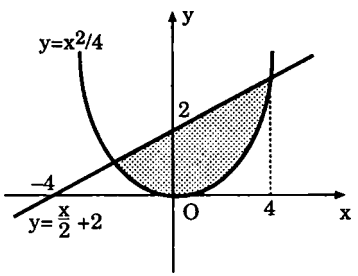
$$A = \int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} + \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} = 4 \text{ br}^2$$

3. $A = \int_{-1}^{2} |f(x)|\,dx$

$$= \int_{-1}^{2} \big|[\![x]\!]\big|\,dx = -\int_{-1}^{0} [\![x]\!]\,dx + \int_{0}^{1} [\![x]\!]\,dx + \int_{1}^{2} [\![x]\!]\,dx$$

$$= -\int_{-1}^{0} (-1)\,dx + \int_{0}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{2} dx = 2 \text{ br}^2$$

4. a) $y = \frac{x^2}{4}$ ile $y = \frac{x}{2} + 2$



$\frac{x^2}{4} = \frac{x}{2} + 2$

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$(x - 2)^2 = 9$

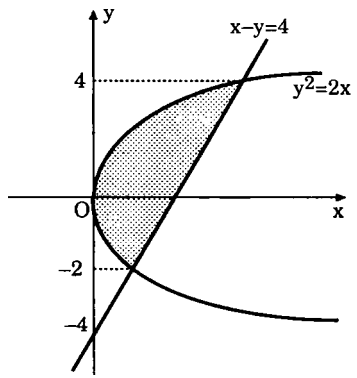
$x - 1 = \mp 3$

$\Rightarrow x_1 = 4$ ve $x_2 = -2$

$$A = \int_{-2}^{4} \left(\frac{x}{2} + 2 - \frac{x^2}{4} \right) dx = \frac{x^2}{4} + 2x - \frac{x^3}{12} \Big|_{-2}^{4}$$

$= 9 \text{ br}^2$

b) $y^2 = 2x$, $x - y = 4$



$$\frac{y^2}{2} = 4 + y \Rightarrow$$

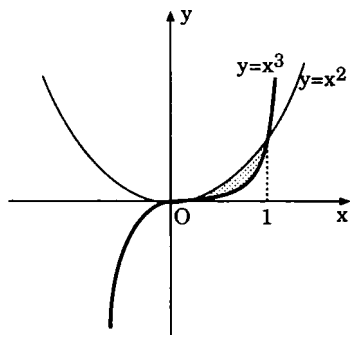
$$y^2 - 2y - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$y = 4 \text{ ve } y = -2$$

$$A = \int_{-2}^{4} \left| u(y) - v(y) \right| dy = \int_{-2}^{4} y + 4 - \frac{y^2}{2}\, dy$$

$$= \frac{y^2}{2} + 4y - \frac{y^3}{6} \Bigg|_{-2}^{4} = 18 \text{ br}^2$$

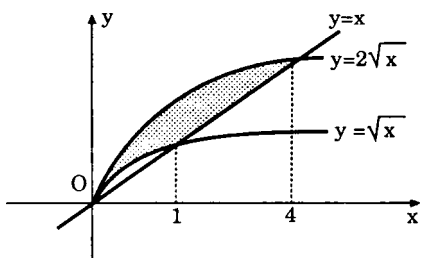
e) $y = x^3$ ile $y = x^2$



$$A = \int_{0}^{1} \left| f(x) - g(x) \right| dx = \int_{0}^{1} x^2 - x^3\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \Bigg|_{0}^{1} = \frac{1}{12} \text{ br}^2$$

f) $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ ve $y = x$



$$\Rightarrow x = \sqrt{x} \Rightarrow x^2 = x$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ve } x = 1$$

$$x = 2\sqrt{x} \Rightarrow x^2 = 4x$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ve } x = 4$$

$$A = \int_{0}^{1} \left(2\sqrt{x} - \sqrt{x}\right) dx + \int_{1}^{4} \left(2\sqrt{x} - x\right) dx$$

$$= \frac{2}{3} x^{3/2} \Bigg|_{0}^{1} + \left(\frac{4}{3} x^{3/2} - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{1}^{4} = \frac{5}{2} \text{ br}^2$$

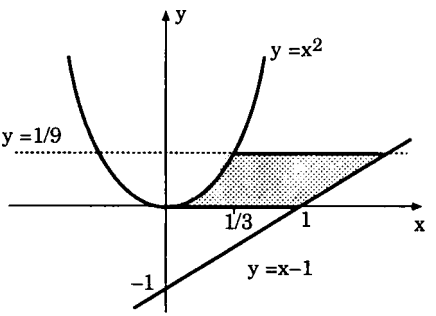
h) $y = x^2$, $y = x - 1$,

$y = \frac{1}{9}$ ve $y = 0$

$$A = \int_0^{\frac{1}{9}} \left(y + 1 - \sqrt{y}\right) dy$$

$$= \frac{1}{2}y^2 + y - \frac{2}{3}y^{3/2} \Big|_0^{1/9}$$

$$= \frac{5}{34}\,br^2$$



k) $y = |x|$ ve $y = x^2 - 2$

$x = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

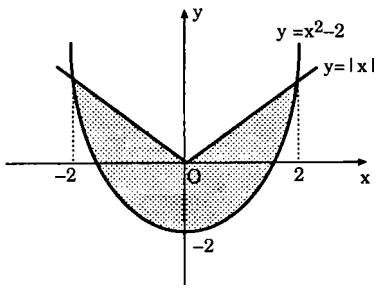
$-x = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

Bölge simetrik olduğundan

$$A = 2\int_0^2 \left[|x| - (x^2 - 2)\right] dx$$

$$= 2\int_0^2 (x - x^2 + 2)\, dx$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 2x\right) \Big|_0^2 = \frac{20}{3}\,br^2$$



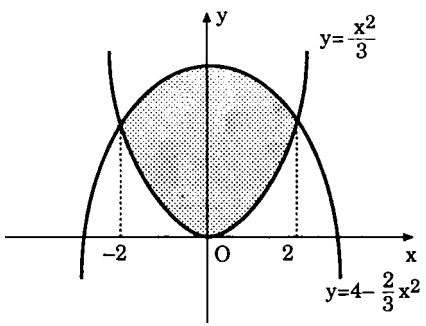
5. $\frac{x^2}{3} = 4 - \frac{2}{3}x^2$

$x^2 = 4 \Rightarrow x = \mp 2$

$$A = \int_{-2}^{2} 4 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{x^2}{3}\, dx$$

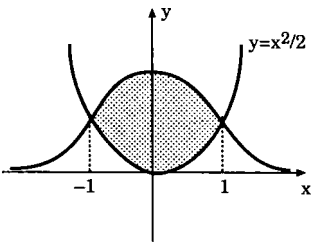
$$= 2\int_0^2 4 - x^2 dx = 2\left(4x - \frac{x^3}{3} \Big|_0^2\right)$$

$$= 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}\,br^2$$



6. $\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \Rightarrow x^2 + x^4 = 2 \Rightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0$

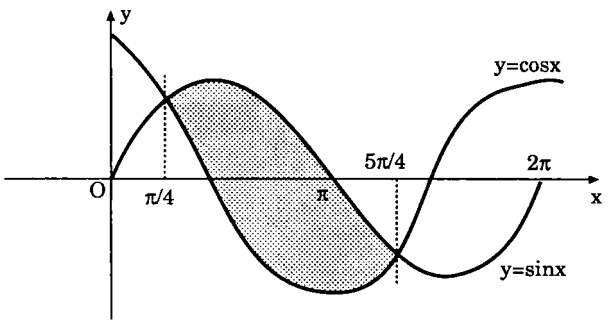
$\Rightarrow x = \pm 1$



$$A = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = \arctan x - \frac{x^3}{6} \Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \text{ br}^2$$

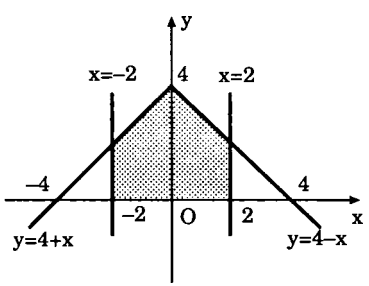
7.



$$A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\, dx = -\cos x - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$

$$= +\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ br}^2$$

8. $A = 2 \int_0^2 (4 - x)\, dx = 2 \left(4x - \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 \right) = 12 \text{ br}^2$



9. $A(k) = \int_0^1 (x^k - x^{k+1})\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} - \frac{x^{k+2}}{k+2}\Big|_0^1$

$= \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$\sum_{k=1}^{n} A(k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$

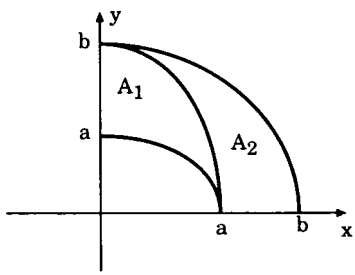
$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} A(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2}$

10. $A_1 = \frac{\pi ab}{4} - \frac{\pi a^2}{4} = \frac{\pi a}{4}(b-a)$

$A_2 = \frac{\pi b^2}{4} - \frac{\pi ab}{4} = \frac{\pi b}{4}(b-a)$

$A_1 : A_2 = \left[\frac{\pi a}{4}(b-a)\right] : \left[\frac{\pi b}{4}(b-a)\right] = \frac{a}{b}$

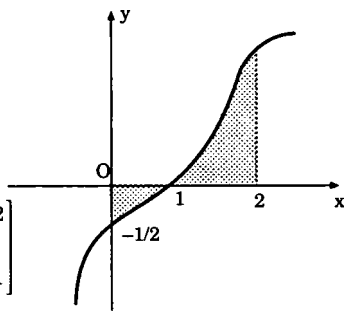


11. $A = \int_0^2 |f(x)|\,dx$

$= \int_0^1 -\frac{1}{4}(x^3 + x - 2)\,dx + \int_1^2 \frac{1}{4}(x^3 + x - 2)\,dx$

$= \frac{1}{4}\left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 2x\Big|_0^1 + \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 2x\Big|_1^2\right]$

$= \frac{9}{2}\,br^2$



12. $y' = 3x^2 - 1 \quad m = y'(1) = 3.1 - 1 = 2$

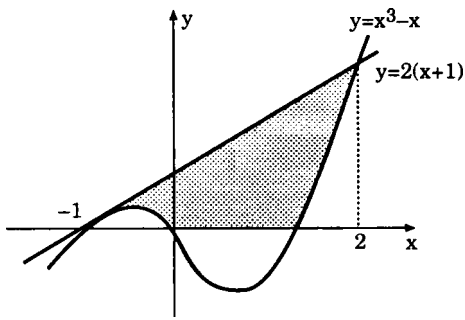
$x = -1 \Rightarrow y = (-1)^3 - (-1) = 0$

Teğet denklemi :

$y = m(x+1) \Rightarrow y = 2(x+1)$

$x^3 - x = 2x + 2 \Rightarrow$

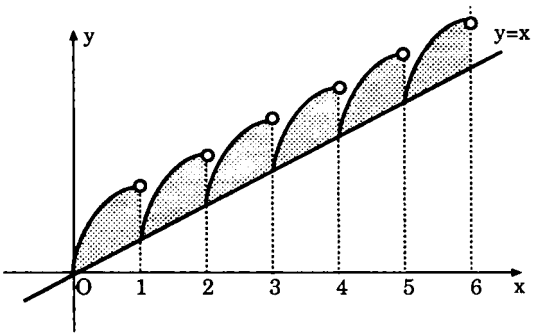
$x^3 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow$



$$(x+1)(x^2-x-2) = (x+1)(x-2)(x+1)$$
$$= (x+1)^2(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = -1\ ,\ x = 2$$

$$A = \int_{-1}^{2} (2x + 2 - x^3 + x)\,dx = \frac{27}{4}\ br^2$$

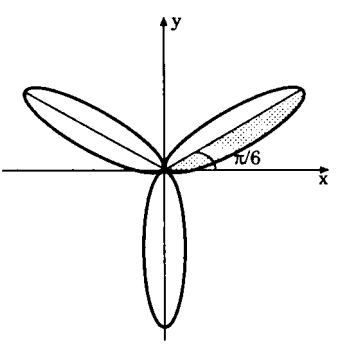
13.



$$A = \int_0^6 \left[\left(\lfloor x\rfloor + \sqrt{x-\lfloor x\rfloor}\right) - x\right]dx = 6\int_0^1 \left(\lfloor x\rfloor + \sqrt{x-\lfloor x\rfloor} - x\right)dx$$

$$= 6\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x\right)dx = 6\left(\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^2}{2}\right) = 6\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) = 1\ br^2$$

14. a) $r = a \sin 3\varphi$ (üç yapraklı gül)



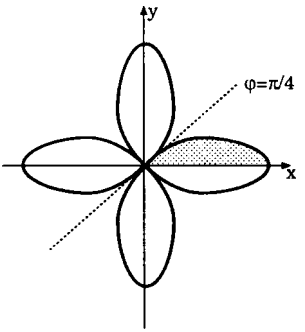
$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 6\int_0^{\pi/6} a^2\sin^2 3\varphi\,d\varphi$$

$$= 3a^2\int_0^{\pi/6} \frac{1-\cos 6\varphi}{2}\,d\varphi$$

$$= \frac{3}{2}a^2\left(\varphi - \frac{\sin 6\varphi}{6}\ \Big|_0^{\frac{\pi}{6}}\right) = \frac{3}{2}a^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = a^2\,\frac{\pi}{4}\ br^2$$

b) $r = a\cos 2\varphi$



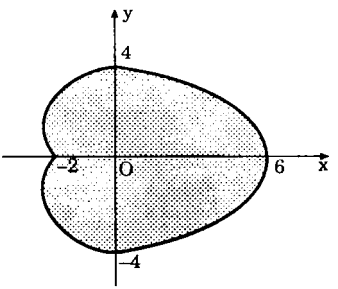
$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi = 8\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos^2 2\varphi d\varphi$$

$$= 2a^2.2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 4\varphi + 1}{2}$$

$$= 2a^2\left(\frac{\sin 4\varphi}{4} + \varphi \;\Big|_0^{\pi/4}\right)$$

$$= 2a^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi a^2}{2}\ br^2$$

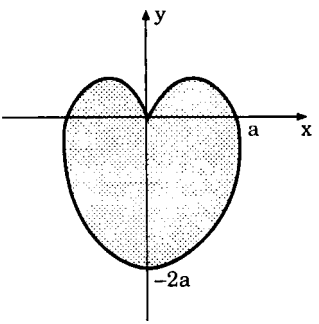
c) $A = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2\, d\varphi = \int_0^{\pi} (4+2\cos\varphi)^2\, d\varphi$



$$= \int_0^{\pi}\left(16 + 16\cos\varphi + 4\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi$$

$$= (18\varphi + 16\sin\varphi + \sin 2\varphi)\;\Big|_0^{\pi} = 18\pi\ br^2$$

d) $r = a(1 - \sin\varphi)$



$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\varphi = 2\cdot\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2(1-\sin\varphi)^2\, d\varphi$$

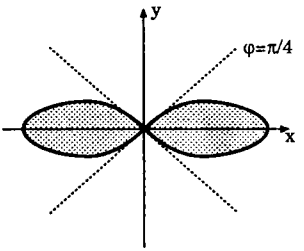
$$= a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1 - 2\sin\varphi + \frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right) du$$

$$= a^2\left(\varphi + 2\cos\varphi + \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4}\;\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$= a^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = a^2\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi a^2}{2}\ br^2$$

e) $A = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi \, d\varphi$

$= 2a^2 \frac{1}{2} \sin 2\varphi \Big|_4^{\frac{\pi}{4}} = a^2 br^2$



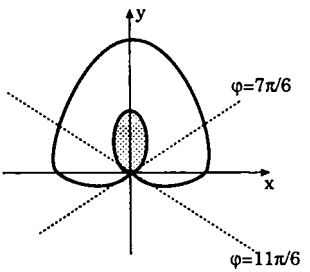
15. $A = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2 \, d\varphi = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi = 2 \, . \, \sin \varphi \Big|_0^{\pi/2} = 2 \, br^2$

16. $r = 1 + 2 \sin \theta$

$r = 0 \Leftrightarrow \sin \theta = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{7\pi}{6}$ veya $\theta = \frac{11\pi}{6}$

$r = -1 \Leftrightarrow \sin \vartheta = -1$

$A = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2 \, d\,\theta = \frac{1}{2} \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} (1 + 2\sin\theta)^2 \, d\,\theta$



$= \frac{1}{2} \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} (1 + 4\sin\theta + 4\sin^2\theta) \, d\,\theta$

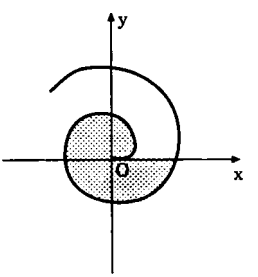
$= \frac{1}{2} \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} (3 + 4\sin\theta - 2\cos 2\,\theta) \, d\,\theta$

$= \frac{1}{2} \left(3\theta - 4\cos\theta - \sin 2\theta \Big|_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \right)$

$= \frac{1}{2} \left(\frac{11\pi}{2} - 4\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{7\pi}{2} - 4\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

$= \frac{1}{2} \left(2\pi - 4\sqrt{3} + \sqrt{3} \right) = \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}$

17. $A = \frac{1}{2} \cdot \int_\alpha^\beta r^2 \, d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \varphi^2 d\varphi = \frac{1}{2} \frac{\varphi^3}{3} \Big|_0^{2\pi} = \frac{4\pi^3}{3} \, br^2$

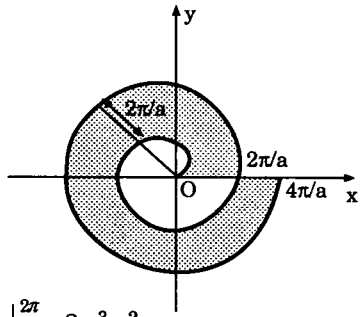


18. $A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[(r+2\pi a)^2 - r^2\right]d\varphi$

$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(4\pi ar + 4\pi^2a^2)\,d\varphi$

$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 4\pi a^2\varphi + 4\pi^2 a^2)\,d\varphi$

$= 2\pi a^2\int_0^{2\pi}(\varphi+\pi)\,d\varphi = 2\pi\alpha^2\left(\frac{1}{2}\varphi^2+\pi\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = 8\pi^3a^2$



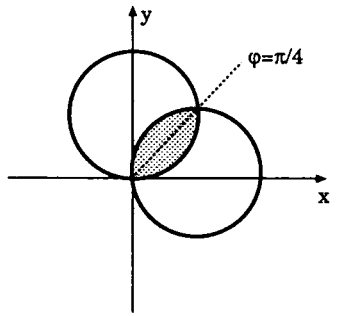
19. $\sin\varphi = \cos\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$

$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\,d\varphi$

$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\sin^2\varphi d\varphi + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2\varphi\,d\varphi$

$= 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\sin^2\varphi d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi$

$= 4\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Big|_0^{\pi/4} = 4\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1\ br^2$



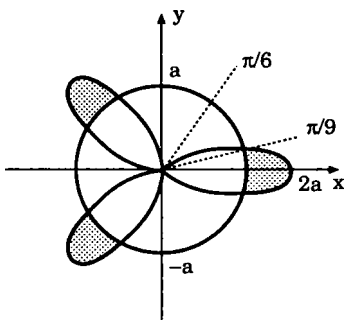
20. $A = 6\,\frac{1}{2}\int_0^{\pi/9}\left[(2a\cos 3\varphi)^2 - a^2\right]d\varphi$

$= 3a^2\int_0^{\pi/9}\left[4\cos^2 3\varphi - 1\right]d\varphi$

$= 3a^2\int_0^{\pi/9}\,[\,2\,(1+\cos 6\varphi) - 1]\,d\varphi$

$= 3a^2\left(\varphi + \frac{1}{3}\sin 6\varphi\right)\Big|_0^{\pi/9}$

$= 3a^2\left(\frac{\pi}{9} + \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi a^2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$



21. $A = \frac{1}{2}\cdot 8\int_0^{\frac{\pi}{8}} [(2a\cos 2\varphi)^2 - (\sqrt{2}a)^2]\, d\varphi = 2a^2 4\int_0^{\frac{\pi}{8}} \left[2\cdot\frac{(1+\cos 4\varphi)}{2} - 1\right] d\varphi$

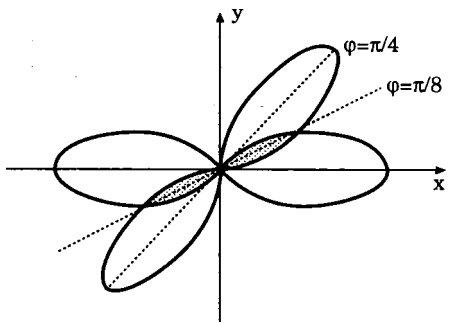
$= 8a^2\left(\frac{\sin 4\varphi}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{8}}\right) = 8a^2\cdot\frac{1}{4} = 2a^2\,br^2$

22. $A = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{8}} a^2 \sin 2\varphi\, d\varphi$

$= 2a^2\left(-\frac{\cos 2\varphi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{8}}\right)$

$= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)a^2$

$= \frac{1}{2}(2-\sqrt{2})\,a^2$

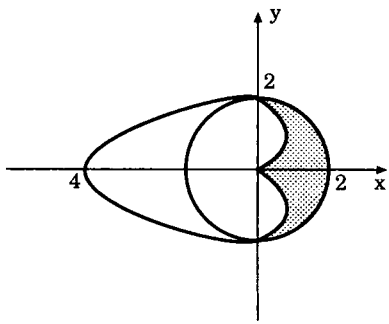


23. $A = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2^2 - (2\,(1-\cos\varphi)^2)\, d\varphi$

$= \int_0^{\pi/2} 4 - 4 + 8\cos\varphi - 4\cos^2\varphi\, d\varphi$

$= \int_0^{\pi/2} 8\cos\varphi - 2(1+\cos 2\varphi)d\varphi$

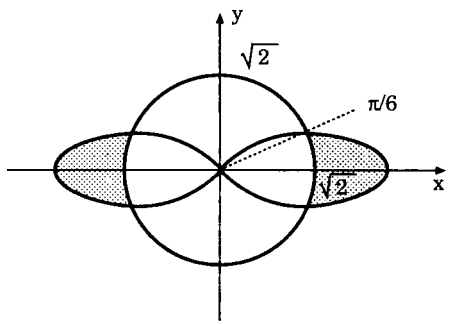
$= (\,8\sin\varphi - 2\varphi + \sin 2\varphi\,)\Big|_0^{\pi/2} = 8 - \pi\ br^2$



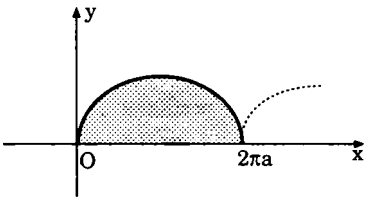
24. $A = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/6}(4\cos 2\varphi - 2)d\varphi$

$= 2\,(2\sin 2\varphi - 2\varphi)\Big|_0^{\pi/6}$

$= \frac{2}{3}(3\sqrt{3}-\pi)\ br^2$



25. $A = \int_{t_1}^{t_2} |y(t)|\, x'(t)\, dt$



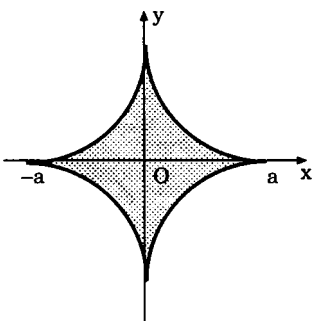
$= \int_0^{2\pi} |a(1-\cos t)| \cdot a(1-\cos t)dt$

$= a^2 \int_0^{2\pi} 1 - 2\cos t + \cos^2 t\, dt$

$= a^2 \int_0^{2\pi} 1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\, dt$

$= a^2 \left(t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \Big|_0^{2\pi} \right) = a^2 \left(\frac{3}{2} \cdot 2\pi \right) = 3\pi a^2$

26. $x = a\cos^3 t$, $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$



$A = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin^3 t \,.\, 3a\cos^2 t\,(-\sin t)\, dt$

$= 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^4 t\, dt$

$= 12a^2 \int_0^{\pi/2} (\cos t \sin t)^2 \sin^2 t\, dt$

$= 12a^2 \left[\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 2t}{8}\, dt - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 2t \cos 2t}{8}\, dt \right] = \frac{3}{8}\pi a^2 \text{ br}^2$

27. $x = 5\cos t$ $\quad x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

$y = 4\sin^3 t$ $\quad x = 5 \Rightarrow t = 0$

$A = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} 4\left|\sin^3 t\right| .\, (-5\sin t)\, dt = 20 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t)^2\, dt$

$= 20 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos 2t + \cos^2 2t)\, dt = 20 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - 2\cos 2t + \frac{1+\cos 4t}{2}\, dt$

$= 20 \left(t - \sin 2t + \frac{t}{2} + \frac{\sin 4t}{8} \Big|_0^{\pi/2} \right) = 20 \left(\frac{3\pi}{4} \right) = 15\pi \text{ br}^2$

YAY UZUNLUĞU HESABI

1. $y = f(x)$ eğrisinin $x = a$ ve $x = b$ apsisli noktaları arasında kalan parçasının uzunluğu

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

dir.

2. $r = r(\varphi)$ eğrisinin $\varphi = \alpha$ ve $\varphi = \beta$ doğruları arasında kalan parçasının uzunluğu

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi$$

olur.

3. Denklemi $x = x(t)$, $y = y(t)$ biçiminde parametrik olarak verilen eğrinin $t = t_1$ ve $t = t_2$ parametrelerine karşılık gelen noktaları arasında kalan parçasının uzunluğu

$$\ell = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\dot{x})^2+(\dot{y})^2}\,dt$$

birimdir.

PROBELMLER

1. Aşağıdaki denklemleri verilen eğrilerin, karşılarında apsisleri yazılı noktalar arasında kalan parçalarının uzunluklarını hesaplayınız.

(a) $y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$

(b) $y = x^{3/2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 5$

(c) $y = (4 - x^{2/3})^{3/2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 8$

(d) $y = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^{1/2}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$

2. $y = \int_1^x \sqrt{t^2-1}$ eşitliği ile tanımlanan eğrinin, apsisleri $x_1 = 1$ ve $x_2 = 3$ olan noktaları arasında kalan parçasının uzunluğunu bulunuz.

3. Parametre aralıkları karşılarında verilen aşağıdaki eğrilerin uzunluklarını hesaplayınız.

(a) $\begin{cases} x = 2t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$, $-1 \le t \le 1$

(b) $\begin{cases} x = \frac{1}{2} t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2} \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right) \\ y = \frac{2\sqrt{2}}{3} t^{3/2} \end{cases}$, $0 \le t \le 2$

(c) $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$, $0 \le t \le \alpha$

(d) $\begin{cases} x = 2(1-\cos t) \\ y = 2\sin t \end{cases}$, $[0, 2\pi]$

(e) $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t^3 \end{cases}$, $[0, \sqrt{5}\,]$

(f) $\begin{cases} x = \frac{1}{2} t^2 - 1 \\ y = \frac{4}{3} t^{3/2} \end{cases}$, $[0, 2]$

4. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ sikloid eğrisinin bir yayının uzunluğunu bulunuz.

5. Kutup açılarının değişim aralığı karşılarında yazılı olan, aşağıdaki eğrilerin uzunluklarını hesaplayınız.

(a) $r = 4\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$

(b) $r = \sin^3 \frac{\varphi}{3}$, $0 \le \varphi \le 3\pi$

(c) $r = \frac{3}{\cos\varphi}$, $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$

6. $r = ae^{\varphi}$ logaritmik spiralinin $r = 2a$ çemberi içinde kalan parçasının uzunluğunu hesaplayınız.

ÇÖZÜMLER

1. a) $y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $y' = \frac{1}{2}(x^2+2)^{1/2}\,2x = x\,(x^2+2)^{1/2}$

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_0^3 \sqrt{1+x^2(x^2+2)}\,dx$$

$$= \int_0^3 \sqrt{(x^2+1)^2}\,dx = \int_0^3 \left(x^2+1\right)dx = \frac{x^3}{3}+x \;\Big|_0^3 = 12$$

b) $y = x^{3/2}$ $\quad x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $y' = \frac{3}{2}x^{1/2}$

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_0^5 \left(1+\frac{9}{4}x\right)^{1/2} dx = \frac{4}{9}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\;\Big|_0^5$$

$$= \frac{8}{27}\left(\left(\frac{49}{4}\right)^{3/2}-1\right) = \frac{8}{27}\left(\frac{343}{8}-1\right) = \frac{335}{27}$$

c) $y = (4-x^{2/3})^{3/2}$, $\quad x_1 = 0$, $x_2 = 8$

$$y' = \frac{3}{2}(4-x^{2/3})^{1/2}\left(-\frac{2}{3}x^{-1/3}\right) = -\frac{(4-x^{2/3})^{1/2}}{x^{1/3}}$$

$$\ell = \int_0^8 \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_0^8 \sqrt{\frac{x^{2/3}+(4-x^{2/3})}{x^{2/3}}}\,dx = \int_0^8 \sqrt{4x^{-2/3}}\,dx$$

$$= \int_0^8 2x^{-1/3}\,dx = 2\cdot\frac{3}{2}x^{2/3}\;\Big|_0^8 = 3\,.\,4 = 12$$

d) $y = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^{1/2}$, $\quad x_1 = 1$, $\quad x_2 = 4$, $\quad y' = x^{1/2} - \frac{1}{4}x^{-1/2}$

$$\ell = \int_1^4 \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_1^4 \sqrt{1+\left(x^{1/2}-\frac{1}{4}x^{-1/2}\right)^2}\,dx$$

$$= \int_1^4 \sqrt{1+x-\frac{1}{2}+\frac{1}{16x}}\,dx = \int_1^4 \left(\frac{8x+16x^2+1}{16x}\right)^{1/2} dx$$

$$= \int_1^4 \frac{4x+1}{4\sqrt{x}}\,dx \quad [x = u^2,\ dx = 2u\,du]$$

$$= \int_1^2 \frac{4u^2+1}{4u}\,2u = \frac{1}{2}\int_1^2 \left(4u^2+1\right)du = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}u^3+u\;\Big|_1^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{32}{3}+2-\frac{4}{3}-1\right) = \frac{31}{6}$$

2. $y = \int_1^x \sqrt{t^2-1}\,dt$, $x_1 = 1$ ve $x_2 = 3$, $y' = \sqrt{x^2-1}$

$$\ell = \int_1^3 \sqrt{1+(y')^2}\,dt = \int_1^3 \sqrt{1+t^2-1}\,dt = \int_1^3 t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_1^3 = 4$$

3. a) $x = 2t^2$, $y = t^3$, $-1 \le t \le 1$

$$\ell = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{16t^2+9t^4}\,dt = \int_{-1}^{1} |t|\sqrt{16+9t^2}\,dt$$

$$= \frac{2}{18}\,\frac{2}{3}(16+9t^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{122}{27}$$

b) $x = \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)$, $0 \le t \le 2$

$$y = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,t^{3/2}$$

$$x' = \frac{1}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\,\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{1}{2}\,\frac{1+\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1+\sqrt{1+t^2}} = \sqrt{1+t^2}$$

$$y' = \sqrt{2}\,t^{1/2}$$

$$(x')^2 + (y')^2 = (1 + t^2 + 2t) = (1 + t)^2 \Rightarrow \ell = \int_0^2 (1 + t)\,dt = 4$$

c) $x = R\cos t$

$y = R\sin t \qquad 0 \le t \le \alpha$

$$\ell = \int_0^\alpha \sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt = \int_0^\alpha \sqrt{R^2(\sin^2 t+\cos^2 t)}\,dt = R\alpha$$

d) $x = 2(1 - \cos t)$

$y = 2\sin t \qquad 0 \le t \le 2\pi$

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t+4\cos^2 t}\,dt = 4\pi$$

e) $x = 3t^2 \qquad 0 \le t \le \sqrt{5}$

$y = 3t^3$

$$\ell = \int_0^{\sqrt{5}} \left((x')^2 + (y')^2\right)^{1/2} dt = \int_0^{\sqrt{5}} \sqrt{36t^2 + 81t^4}\, dt = \int_0^{\sqrt{5}} t\sqrt{36 + 81t^2}\, dt$$

$$= \frac{1}{2.81}\,\frac{2}{3}(36 + 81t^2)^{3/2}\,\Big|_0^{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{3}}{81}$$

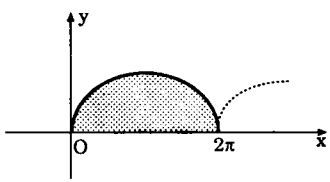
f) $x = \frac{1}{2}t^2 - t\ ,\quad y = \frac{4}{3}t^{3/2} \qquad 0 \le t \le 2$

$$\ell = \int_0^2 \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2}\, dt = \int_0^2 \sqrt{(t-1)^2 + 4t}\, dt = \int_0^2 \sqrt{t^2 + 2t + 1}\, dt$$

$$= \int_0^2 (t+1)\, dt = \frac{1}{2}t^2 + t\,\Big|_0^2 = 4$$

4. $$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \left((a(1-\cos t))^2 + (a\sin t)^2\right)^{1/2} dt$$

$$= a\int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)^{1/2}\, dt$$



$$= \sqrt{2}\,a\int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^{1/2}\, dt$$

$$= \sqrt{2}a\int_0^{2\pi} \left(2.\sin^2\frac{t}{2}\right)^{1/2} dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = 2a\left(\frac{-\cos\frac{t}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = 8a$$

5. a) $r = 4\cos\varphi \qquad 0 \le \varphi \le \pi$

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi = \int_0^\pi (16\cos^2\varphi + 16\sin^2\varphi)^{1/2}\, d\varphi = 4\pi$$

b) $r = \sin^3\frac{\varphi}{3} \qquad 0 \le \varphi \le 3\pi$

$$r' = 3\sin^2\frac{\varphi}{3}\cdot\cos\frac{\varphi}{3}\cdot\frac{1}{3} = \sin^2\frac{\varphi}{3}\cdot\cos\frac{\varphi}{3}$$

$$\ell = \int_0^{3\pi} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi = \int_0^{3\pi} \sqrt{\sin^6\frac{\varphi}{3} + \sin^4\frac{\varphi}{3}\cdot\cos^2\frac{\varphi}{3}}\, d\varphi$$

$$= \int_0^{3\pi} \sin^2\frac{\varphi}{3}\left(\sin^2\frac{\varphi}{3} + \cos^2\frac{\varphi}{3}\right)^{1/2} du = \int_0^{3\pi} \frac{1-\cos\frac{2\varphi}{3}}{2}\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\left(\varphi - \sin\frac{2\varphi}{3}\cdot\frac{3}{2}\right)\Bigg|_0^{3\pi} = \frac{3\pi}{2}$$

c) $r = \dfrac{3}{\cos\varphi} \qquad -\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$

$$\ell = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{9}{\cos^2\varphi} + \frac{9\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi}}\, d\varphi$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{3}{\cos^2\varphi}\, d\varphi = 3\,.\,\tan\varphi \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 3\,.\,(1 - (-1) = 6$$

6. $a\,e^{\varphi} = 2a \Rightarrow e^{\varphi} = 2 \Rightarrow \vartheta = \ln 2$

$$l = \int_0^{\ln 2} \left(r^2 + (r')^2\right)^{1/2} d\varphi = \int_0^{\ln 2} (a^2\, e^{2\varphi} + a^2\, e^{2\varphi})^{1/2}\, d\varphi$$

$$= \sqrt{a}\; a\; e^{\varphi} = \Big|_0^{\ln 2} \Rightarrow \sqrt{2}\; a\; (2 - 1) = \sqrt{2}\; a$$

HACİM HESABI

1. Kesit Yöntemi : Bir doğruya t noktasında dik olan düzlemin cisimle arakesitinin alanı A(t) ise tüm cismin hacmi

$$V = \int_a^b A(t)\, dt$$

olur.

2. **Disk Yöntemi :** $y = f(x)$ eğrisi, x– ekseni ve $x = a$, $x = b$ doğruları arasında kalan bölgenin, x– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi

$$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx$$

olur.

3. **Kabuk (Silindirik Tabakalar) Yöntemi :** $y = f(x)$, $y = g(x)$ eğrileri ile $x = a$, $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin y– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi

$$V = 2\pi \int_a^b \left| x\left[f(x) - g(x)\right]\right| dx$$

dir.

PROBLEMLER

1. Bir düzgün piramidin yüksekliği 100 cm dir. Bu piramidin tabanı, bir kenarının uzunluğu 100 cm olan bir karedir. Bu piramidin her cm^3 ünün ağırlığı 3 gr olduğuna göre bu piramidin ağırlığı kaç kg dır?

2. Bir cisim xOy– düzlemi tarafından $x^2 + y^2 = a^2$ dairesi boyunca kesilmektedir. Bu cismin Ox– eksenine dik düzlemlerle elde edilen kesitleri, bir kenarı bu düzlemlerin daire üzerinde ayırdığı kirişlere eşit olan eşkenar üçgenlerdir. Cismin hacmini bulunuz.

3. Bir cismin tabanı $x^2 + y^2 \le 1$ dairesidir. Bu cismin Ox– eksenine dik düzlemlerle arakesiti karelerdir. Cismin hacmini bulunuz.

4. R yarıçaplı kürenin hacmini kesitlerden yararlanarak hesaplayınız.

5. Bir cismin tabanı eksen uzunlukları 10 cm ve 8 cm olan bir elipstir. Cismin büyük eksene dik düzlemlerle arakesiti yüksekliği 6 cm olan birer ikizkenar üçgendir. Bu cismin hacmini bulunuz.

6. Aşağıdaki eğri ve doğrular tarafından sınırlanan bölgelerin Ox– ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

(a) $y = x^2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$

(b) $y = 1 - x^2$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$

(c) $y = x^3$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$

(ç) $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $y = 1$

(d) $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = x$, $y = 0$

(e) $y = 3x - x^2$, $y = x$

(f) $y^2 = 2px$, $x = h$

(g) $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$

(h) $(y - a)^2 = ax$, $x = 0$, $y = 0$

(ı) $y = x^2 + 2$, $y = -x^2 + 10$

7. Aşağıdaki eğri ve doğrular tarafından sınırlanan bölgelerin Oy– ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

(a) $y = 1 - x^2$, $x = 0$, $x = 1$

(b) $y = x^2$, $x = 0$, $y = 4$

(c) $y = a - \dfrac{x^2}{a}$, $x + y = a$

(d) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

8. Aşağıdaki eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin karşılarında yazılı doğrular etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

(a) $y = x + x^2$, $y = x^2 - 1$, $x = 0$ — eksen $y = 1$

(b) $y = x^3$, $y = -1$, $x = 1$ — eksen $y = 2$

(c) $y = 4x - x^2$, $y = 0$ — eksen $y = 4$

(d) $y = 1 - x^2$, $y = -3$ — eksen $y = -3$

(e) $2x = 4 - y^2$, $2x = y^2 - 4$ — eksen $y = -3$

(f) $x = y^2$, $x = 2 - y^2$ — eksen $x = -1$

9. $y = x^2 + 1$ eğrisi ile bu eğriye $x = 1$ apsisli noktasından çizilen teğet ve $x = 0$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin (a) Ox– ekseni (b) Oy– ekseni, etrafında döndürülmesiyle meydana gelen cismin hacmini bulunuz.

10. $y = \sin x$, $y = \cos x$ eğrileri, $x = 0$ ve $x = \dfrac{\pi}{4}$ doğruları tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin Ox– ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacmini bulunuz.

11. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ astroid eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin Ox– ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen cismin hacmini bulunuz.

12. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ sikloidinin bir yayı ile Ox– ekseni tarafından sınırlanan bölgenin Ox– ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen cismin hacmini bulunuz.

13. Aşağıda eğri ve doğrular tarafından sınırlanan bölgenin Oy– ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel cisimlerin hacimlerini kabuk metodu ile hesaplayınız.

(a) $y = x^2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$

(b) $y = 4x - x^2$, $y = 0$

(c) $y = -x + 6$, $xy = 5$

(d) $xy = 2$, $xy = 4$, $x = 1$, $x = 2$

(e) $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$

14. $y = \sin x$, $y = \cos x$ eğrileri ile $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$ doğruları tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin ve Oy ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen cisimlerin hacimlerini bulunuz.

15. $r = a(1 + \cos \varphi)$ kardiyoidinin kutupsal eksen etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacmini bulunuz.

ÇÖZÜMLER

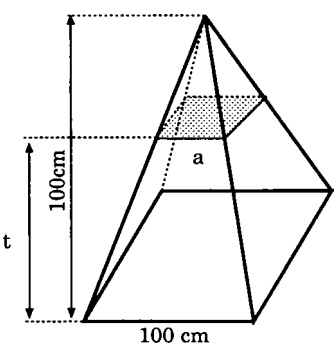
1. a : Kesit aralığında oluşan karenin bir kenarı

$$\frac{100-t}{100} = \frac{a}{100} \Rightarrow a = (100 - t)$$

olur.

Kesit alanı $A(t) = (100-t)^2$,

$$V = \int_0^{100} A(t)\,dt = \int_0^{100} (100 - t)^2\,dt$$

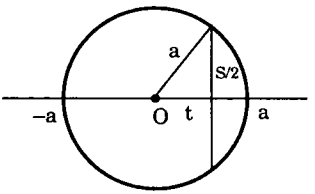


$$= -\frac{(100-t)^3}{3}\Bigg|_0^{100} = \frac{100^3}{3}\ cm^3$$

3 gr = 3 x 10^{-3} kg ve 1 cm^3 ünün ağırlığı 3 x 10^{-3} kg ise piramidin ağırlığı

$$\frac{(100)^3}{3}\cdot 3x10^{-3} = 1000\ kg$$

2. Çemberin merkezine t kadar uzaklıktaki eşkenar üçgenin kenar uzunluğuna s dersek



$$t^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow s^2 = 4a^2 - 4t^2$$

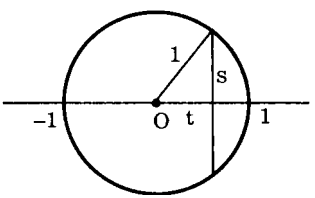
Kesitin alanı $A(t) = \frac{s^2\sqrt{3}}{4}$ olacağından

$$V = \int_{-a}^{a} A(t)\,dt = \int_{-a}^{a} \frac{s^2\sqrt{3}}{4}\,dt$$

$$= \sqrt{3}\int_{-a}^{a} (a^2 - t^2)\,dt$$

$$= \sqrt{3}\left(a^2t - \frac{t^3}{3}\Bigg|_{-a}^{a}\right) = \sqrt{3}\left(a^3 - \frac{a^3}{3} + a^3 - \frac{a^3}{3}\right) = 4\frac{\sqrt{3}}{3}a^3\ br^3$$

3. Çemberin merkezine t kadar uzaklıktaki karenin kenar uzunluğuna s dersek



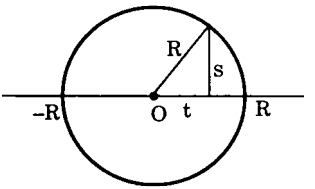
$$t^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow s^2 = 4 - 4t^2$$

$$A(t) = s^2 = 4 - 4t^2$$

$$V = \int_{-1}^{1} A(t)\,dt = \int_{-1}^{1} 4 - 4t^2\,dt$$

$$= 4\left(t - \frac{t^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1}\right) = \frac{16}{3}\ br^3$$

4. Yarım kürenin tabanı bir çember ve dik kesitlerle yarım çember oluşur. Bu çemberin yarıçapına s dersek,

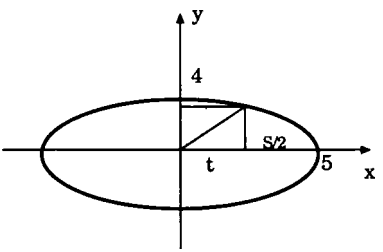


$t^2 + (s)^2 = R^2 \Rightarrow s^2 = R^2 - t^2$

Yarım çemberin alanı $\frac{\pi s^2}{2} = \frac{\pi}{2}(R^2 - t^2)$

$$V = 2.\int_{-R}^{R} \frac{\pi}{2}(R^2 - t^2)\,dt = \pi\left(R^2 t - \frac{t^3}{3}\,\Big|_{-R}^{R}\right) = \pi\left(\frac{4}{3}R^3\right) = \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ br}^3$$

5. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow x = t$ ve $h = 6$ ise



$$y = 4\sqrt{1 - \frac{t^2}{25}} = \frac{s}{2}$$

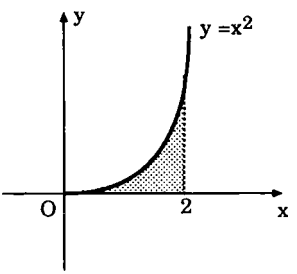
$$A(t) = \frac{h.s}{2} = 24\sqrt{1 - \frac{t^2}{25}}$$

$$V = \int_{-5}^{5} 24\sqrt{1 - \frac{t^2}{25}}\,dt = 24\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \,.\, 5\cos\varphi\, d\varphi$$

$$= 120\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\varphi + 1}{2}\,d\varphi = 60\left(\frac{\sin 2\varphi}{2} + \varphi\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 60\pi \text{ cm}^3$$

6. a) $V = \pi\int_0^2 f^2(x)\,dx = \pi\int_0^2 x^4\,dx$

$$= \frac{\pi}{5}x^5\,\Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5}\text{ br}^3$$



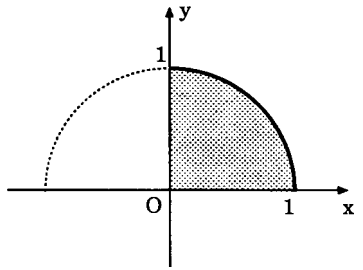
b) $y = 1 - x^2$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$

$$V = \pi \int_0^1 f^2(x)\,dx = \pi \int_0^1 (1 - x^2)^2\,dx$$

$$= \pi \int_0^1 (1 - 2x^2 + x^4)\,dx$$

$$= \pi \left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 \right)$$

$$= \pi \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \frac{8\pi}{15}\ br^3$$

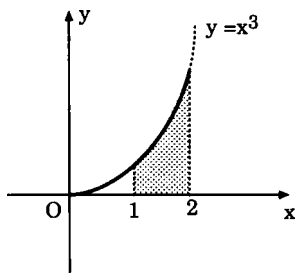


c) $y = x^3$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$

$$V = \pi \int_1^2 f^2(x)\,dx = \pi \int_1^2 x^6\,dx$$

$$= \pi \frac{x^7}{7} \Big|_1^2 = \frac{\pi}{7}(2^7 - 1)$$

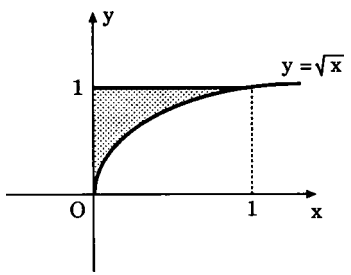
$$= \frac{127}{7}\pi\ br^3$$



ç) $y = \sqrt{x}$, $x = 0$, $y = 1$

$$V = \pi \int_0^1 \left[1 - \left(\sqrt{x} \right)^2 \right] dx = \pi \int_0^1 (1 - x)\,dx$$

$$= \pi \left(x - \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 \right) = \frac{\pi}{2}\ br^3$$

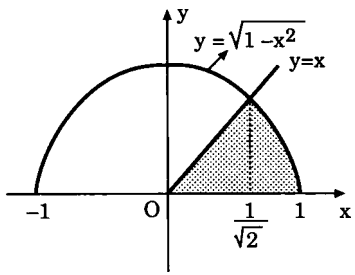


d) $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = x$, $y = 0$

$y = y \Rightarrow x = \sqrt{1 - x^2}$

$x^2 = 1 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 1,\ x^2 = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$V = \pi \int_0^{1/\sqrt{2}} (x)^2\,dx + \pi \int_{1/\sqrt{2}}^1 \left(\sqrt{1 - x^2} \right)^2 dx$$



$$= \frac{\pi}{3}x^3 \Big|_0^{1/\sqrt{2}} + \pi\left(x - \frac{x^3}{3}\Big|_{1/\sqrt{2}}^{1}\right)$$

$$= \frac{\pi}{6\sqrt{2}} + \pi\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} - \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{2\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3\sqrt{2}} + \frac{2\pi}{3}$$

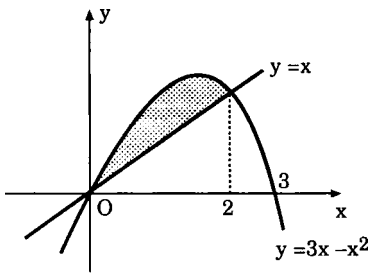
$$= \frac{2\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{3}(2-\sqrt{2}) \text{ br}^3$$

e) $y = 3x - x^2$, $y = x$

$y = y \Rightarrow x = 3x - x^2$

$x^2 = 2x$

$\Rightarrow x = 0$ ve $x = 2$



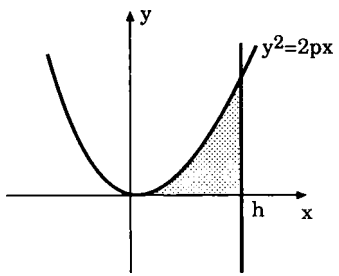
$$V = \pi \int_0^2 \left[(3x - x^2)^2 - x^2\right] dx$$

$$= \pi \int_0^2 [9x^2 - 6x^3 + x^4]\, dx = \pi\left(\frac{64}{3} - 24 + \frac{32}{5}\right) = \frac{56\pi}{15} \text{ br}^3$$

f) $y^2 = 2px$, $x = h$, $y = 0$

$$V = \pi \int_0^h f^2(x)\, dx = \pi \int_0^h 2px\, dx$$

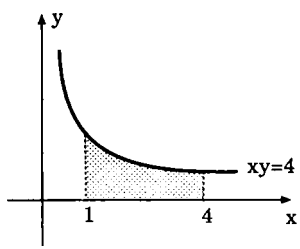
$$= \pi\, px^2 \Big|_0^h = \pi p\, h^2 \text{ br}^3$$



g) $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$

$$v = \pi \int_1^4 \frac{16}{x^2}\, dx = \pi\, 16 \cdot \left(-\frac{1}{x}\Big|_1^4\right)$$

$$= 16\pi\left(-\frac{1}{4} + 1\right) = 12\pi \text{ br}^3$$



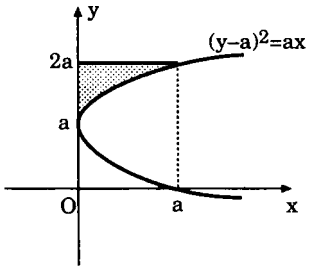
h) $(y-a)^2 = ax$, $x = 0$, $y = 2a$

$$V = \pi \int_0^a \left(f^2(x) - g^2(x) \right) dx$$

$$= \pi \int_0^a \left(4a^2 - \left(a + \sqrt{ax} \right)^2 \right) dx$$

$$= \pi \int_0^a \left(3a^2 - 2a^{3/2}x^{1/2} - ax \right) dx$$

$$= \pi \left(3a^2x - \frac{4}{3}a^{3/2}x^{3/2} - a\frac{x^2}{2} \Big|_0^a \right) = \pi \left(3a^3 - \frac{4}{3}a^3 - \frac{a^3}{2} \right) = \frac{7\pi}{6}a^3 \text{ br}^3$$



ı) $y = x^2 + 2$, $y = -x^2 + 10$

$x^2 + 2 = -x^2 + 10$

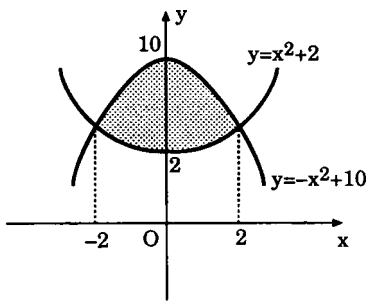
$2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \mp 2$

$$V = \pi \int_a^b \left[f^2(x) - g^2(x) \right] dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{2} \left[\left(-x^2 + 10 \right)^2 - \left(x^2 + 2 \right)^2 \right] dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{2} \left(\cancel{x^4} - 20x^2 + 100 - \cancel{x^4} - 4x^2 - 4 \right) dx$$

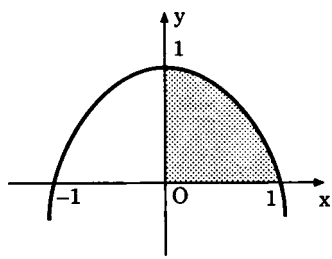
$$= \pi \int_{-2}^{2} (-24x^2 + 96)\, dx = \pi \left(-8x^3 + 96x \Big|_{-2}^{2} \right) = 256\pi \text{ br}^3$$



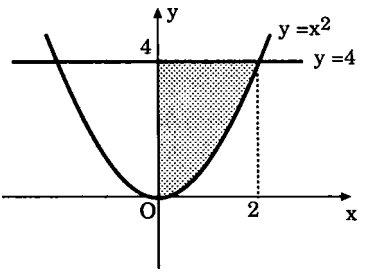
7. a) $y = 1 - x^2$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$

$$V = \pi \int_c^d g^2(y)\, dy = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{1-y} \right)^2 dy$$

$$= \pi \left(y - \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 \right) = \pi \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \text{ br}^3$$



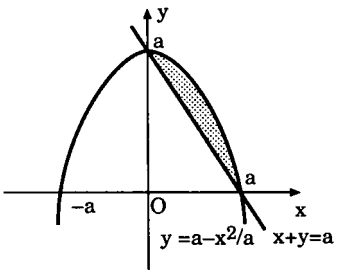
b) $y = x^2$, $x = 0$, $y = 4$



$$V = \pi \int_0^4 g^2(y)\,dy = \pi \int_0^4 (\sqrt{y})^2\,dy$$

$$= \pi \left(\frac{y^2}{2} \Big|_0^4 \right) = 8\pi \ \text{br}^3$$

c) $y = a - \dfrac{x^2}{a}$, $x + y = a$



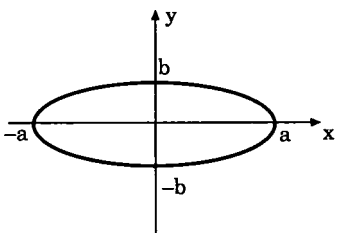
$$V = \pi \int_0^a \left[\left(\sqrt{a^2 - ay} \right)^2 - (y-a)^2 \right] dy$$

$$= \pi \int_0^a [a^2 - ay - y^2 + 2ay - a^2]\,dy$$

$$= \pi \int_0^a ay - y^2\,dy = \pi \left(a\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \Big|_0^a \right)$$

$$= \pi \left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} \right) = \pi \frac{a^3}{6} \ \text{br}^3$$

d) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

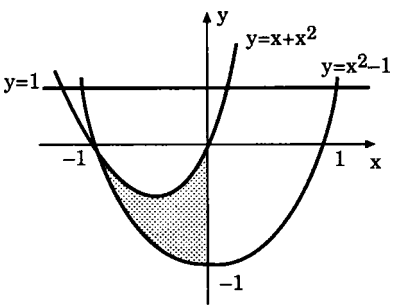


$$V = \pi \int_{-b}^{b} g^2(y)\,dy = \pi \int_{-b}^{b} \left(a^2 - \frac{a^2}{b^2} y^2 \right) dy$$

$$= \pi \left(a^2 y - \frac{a^2}{b^2} \frac{y^3}{3} \Big|_{-b}^{b} \right)$$

$$= \pi \left(a^2 b - \frac{a^2 b}{3} + a^2 b - \frac{a^2 b}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi a^2 b$$

8. a) $y = x + x^2$, $y = x^2 - 1$, $x = 0$ eksen $y = 1$



$x + x^2 = x^2 - 1 \Rightarrow x = -1$

$$V = \pi \int_{-1}^{0} \left| x^2 - 1 - 1 \right|^2 dx$$

$$- \pi \int_{-1}^{0} \left| x + x^2 - 1 \right|^2 dx$$

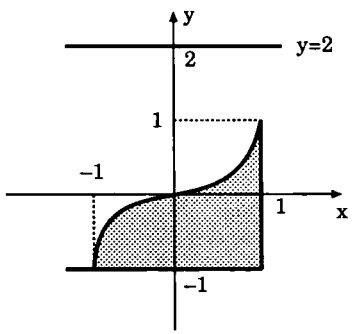
$$= \pi \int_{-1}^{0} (4 - 4x^2 + x^4)\,dx$$

$$-\pi \int_{-1}^{0} (1 - 2(x + x^2) + (x + x^2)^2)\, dx$$

$$= \pi \left(4x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{x^5}{5} \Big|_{-1}^{0} \right) - \pi \left(x - x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5} \Big|_{-1}^{0} \right)$$

$$= \pi \left(4 - \frac{4}{3} + \frac{1}{5} \right) - \pi \left(1 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{2}\pi \ \text{br}^3$$

b) $y = x^3$, $y = -1$, $x = 1$ $y = 2$ ekseni



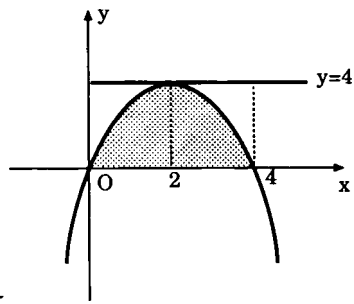
$$V = \pi \int_{-1}^{1} |-1-2|^2 dx - \pi \int_{-1}^{1} (x^3 - 2)^2\, dx$$

$$= 18\pi - \pi \int_{-1}^{1} (x^6 - 4x^3 + 4)\, dx$$

$$= 18\pi - \pi \left(\frac{x^7}{7} - x^4 + 4x \Big|_{-1}^{1} \right)$$

$$= 18\pi - \pi \left(\frac{58}{7} \right) = \frac{68}{7}\pi \ \text{br}^3$$

c) $y = 4x - x^2$, $y = 0$ eksen $y = 4$



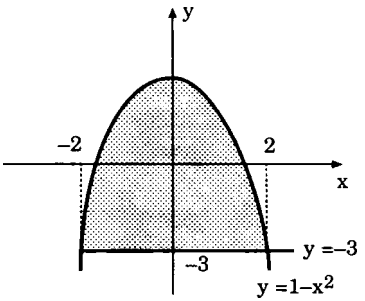
$$V = \pi \int_{0}^{4} \left[4^2 - (4 - 4x + x^2)^2 \right] dx$$

$$= 64\pi - 2\pi \int_{0}^{2} (x - 2)^4\, dx$$

$$= 64\pi - 2\pi \left(\frac{(x-2)^5}{5} \Big|_{0}^{2} \right)$$

$$= 64\pi - 2\pi \left(\frac{32}{5} \right) = 64\pi - \frac{64\pi}{5} = \frac{256\pi}{5}$$

d) $y = 1 - x^2$, $y = -3$ eksen $y = -3$



$$V = \pi \int_{-2}^{2} \left|1 - x^2 - (-3)\right|^2 dx$$

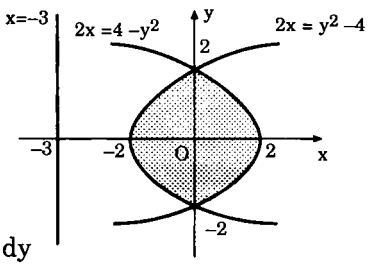
$$= \pi \int_{-2}^{2} (4 - x^2)^2 \, dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{2} \left(16 - 8x^2 + x^4\right) dx$$

$$= \pi \left(16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{x^5}{5} \Big|_{-2}^{2}\right)$$

$$= 2\pi \left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}\right) = \frac{512}{15}\pi \text{ br}^3$$

e) $2x = 4 - y^2$, $2x = y^2 - 4$ eksen $x = -3$



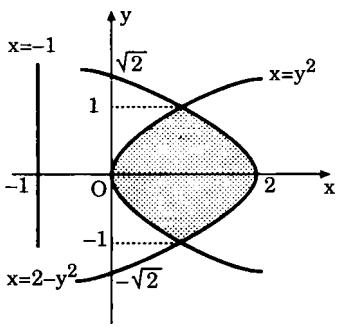
$$V = \pi \int_{-2}^{2} \left|\frac{4 - y^2}{2} - (-3)\right|^2 dy$$

$$- \pi \int_{-2}^{2} \left|\frac{y^2 - 4}{2} - (-3)\right|^2 dy$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_{-2}^{2} \left(100 - 20y^2 + y^4\right) dy - \frac{\pi}{4} \int_{-2}^{2} \left(y^4 + 4y^2 + 4\right) dy$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_{-2}^{2} \left(96 - 24y^2\right) dy = \frac{\pi}{4} \left(96y - 8y^3 \Big|_{-2}^{2}\right) = \frac{\pi}{2}(192 - 64) = 64\pi \text{ br}^3$$

f) $x = y^2$, $x = 2 - y^2$, $x = -1$ ekseni



$x = x \Rightarrow y^2 = 2 - y^2$

$\Rightarrow y^2 = 1$

$\Rightarrow y = \mp 1$

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (2 - y^2 - (-1)^2 \, dy$$

$$- \pi \int_{-1}^{1} (y^2 - (-1))^2 \, dy$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} (9 - 6y^2 + y^4)\,dy - \pi \int_{-1}^{1} (y^4 + 2y^2 + 1)\,dy$$

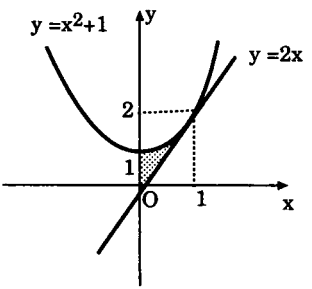
$$= \pi \int_{-1}^{1} (8 - 8y^2)\,dy = 8\pi\, y - \frac{y^3}{3} \Big|_{-1}^{1} = \frac{32\pi}{3}\ br^3$$

9. $y = x^2 + 1\ ,\ x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 2$

$y' = 2x \Big|_{x=1} = 2 \Rightarrow y - y_0 = m\,(x - x_0)$

$y - 2 = 2\,(x - 1)$

$y = 2x$ (teğet denklemi)



a) $V = \pi \int_{0}^{1} (\,f^2(x) - g^2(x)\,)\,dx$

$$= \pi \int_{0}^{1} \left((x^2 + 1)^2 - (2x)^2\right) dx$$

$$= \pi \int_{0}^{1} (x^4 + 2x^2 + 1 - 4x^2)\,dx$$

$$= \pi \int_{0}^{1} (x^4 - 2x^2 + 1)\,dx$$

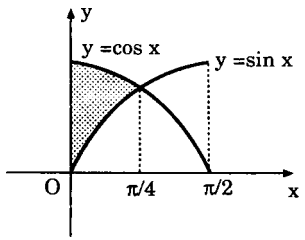
$$= \pi \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x \Big|_{0}^{1} \right) = \frac{8\pi}{15}\ br^3$$

b) $V = \pi \int_{0}^{1} \left(\frac{y}{2}\right)^2 dy + \pi \int_{1}^{2} \left[\left(\frac{y}{2}\right)^2 - (y - 1) \right] dy$

$$= \pi \frac{y^3}{12} \Big|_{0}^{1} + \pi \left[\frac{y^3}{12} - \frac{(y-1)^2}{2} \right] \Big|_{1}^{2} = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}\ br^3$$

10. $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx$

$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx = \frac{\pi}{2}$ br^3



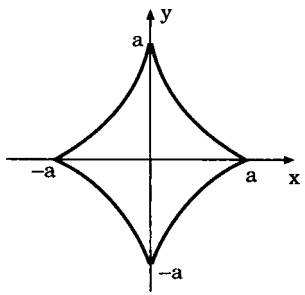
11. $V = \pi \int_{-a}^{a} \left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^3 dx$ $[x = a\cos^3\theta]$

$= \pi \int_0^{\pi} a^2 (1 - \cos^2\theta)^3\, a\, 3\cos^2\theta \sin\theta\, d\theta$

$= 3\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin\theta\, (1 - \cos^2\theta)^3 \cos^2\theta\, d\theta$

$= 3\pi a^3 \int_{-1}^{1} (1 - u^2)^3 u^2\, du$

$= 3\pi a^3 \left(\frac{u^3}{3} - \frac{3}{5}u^5 + \frac{3}{7}u^7 - \frac{u^9}{9} \Big|_{-1}^{1} \right) = \frac{32\pi a^3}{105}$ br^3



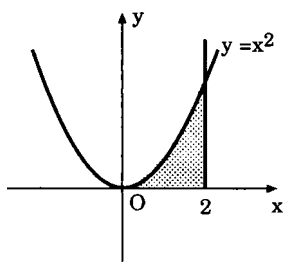
12. $V = \pi \int_a^b y^2\, dx = \pi \int_0^{2\pi} \left[a(1-\cos t)\right]^2\, a\,(1-\cos t)\, dt$

$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 (1 - \cos t)\, dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(2\sin\frac{t}{2}\right)^6 dt = 5\pi^2 a^3$ br^3

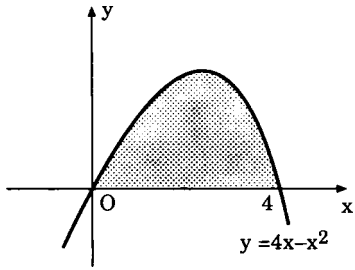
13. a) $y = x^2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$

$V = 2\pi \int_a^b x \mid f(x) \mid dx$

$= 2\pi \int_0^2 x.x^2\, dx = \frac{\pi}{2}x^4 \Big|_0^2 = 8\pi$ br^3



b) $y = 4x - x^2 \qquad y = 0$



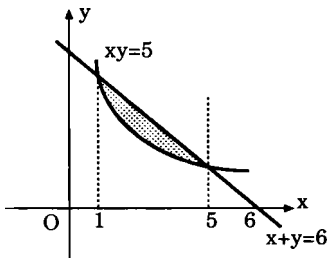
$$V = 2\pi \int_a^b x \mid f(x) \mid dx$$

$$= 2\pi \int_0^4 x\,(4x - x^2)\,dx$$

$$= 2\pi \left(4\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \Big|_0^4 \right)$$

$$= \frac{128}{3}\pi \text{ br}^3$$

c) $y = -x + 6\,,\ xy = 5$



$$V = 2\pi \int_1^5 x \mid f(x) - g(x) \mid dx$$

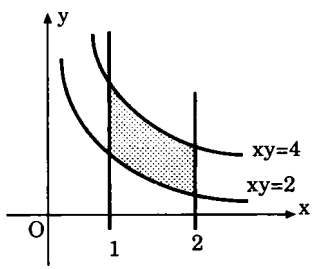
$$= 2\pi \int_1^5 x\left(-x + 6 - \frac{5}{x} \right) dx$$

$$= 2\pi \int_1^5 \left(-x^2 + 6x - 5 \right) dx$$

$$= 2\pi \left(-\frac{x^3}{3} + 3x^2 - 5x \Big|_1^5 \right) = \frac{64\pi}{3} \text{ br}^3$$

$(y = y \Rightarrow \frac{5}{x} = -x + 6,\ 5 = -x^2 + 6x \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0,\ x = 1 \text{ ve } x = 5)$

d) $xy = 2\,,\ xy = 4 \qquad x = 1 \qquad x = 2$

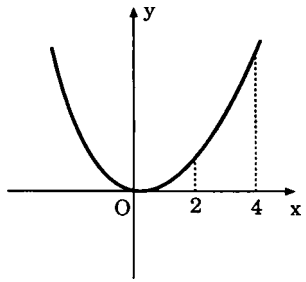


$$V = 2\pi \int_1^2 x \left| f(x) - g(x) \right| dx$$

$$= 2\pi \int_1^2 x\left(\frac{4}{x} - \frac{2}{x} \right) dx$$

$$= 4\pi\,(2 - 1) = 4\pi \text{ br}^3$$

e) $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$

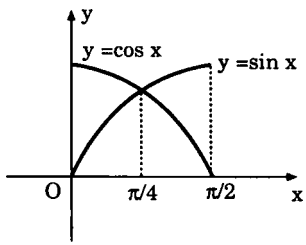


$$V = 2\pi \int_a^b x \mid f(x) \mid dx$$

$$= 2\pi \int_2^4 x \cdot \frac{1}{4}x^2 \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{x^4}{4} \Big|_2^4 \right) = 30\pi \text{ br}^3$$

14. $V = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\left|\cos x - \sin x\right| dx$



$$+ 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x\left|\sin x - \cos x\right| dx$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos x \, dx - 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin x \, dx$$

$$+ 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx - 2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx$$

$$= 2\pi \left(x\sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\pi/4} \sin x dx \right) - 2\pi \left(x(-\cos x) \Big|_0^{\pi/4} + \int_0^{\pi/4} \cos x dx \right)$$

$$+ 2\pi \left(x\sin x \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin x dx \right) - 2\pi \left(x(-\cos x) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x dx \right)$$

$$= \pi^2 (\sqrt{2} - 1)$$

15. $V = \pi \int_a^b y^2 \, dx$

$x = r \cos\theta = a(1 + \cos\theta)\cos\theta$

$y = r \sin\theta = a(1 + \cos\theta)\sin\theta$

$dx = [\, a\,(-\sin\theta)\,(\cos\theta) - a\,\sin\theta\,(1+\cos\theta)\,]\,d\theta$

$= -\,a\,(\sin\theta + 2\,\sin\theta\,\cos\theta)\,d\theta = -\,a\,\sin\theta\,(1 + 2\cos\theta)\,d\theta$

$$V = \pi \int_0^{\pi} y^2 dx = \pi \int_0^{\pi} a^2 (1+\cos\theta)^2 \sin^2\theta\,[-a\,\sin\theta\,(1+2\cos\theta)\,]\,d\theta$$

$$= -\,a^3\,\pi \int_0^{\pi} (1+\cos\theta)^2\,(1+2\cos\theta)\,\sin^3\theta\,d\theta$$

$$= -\,a^3\,\pi \int_0^{\pi} (1+\cos\theta)^2\,(1+2\cos\theta)\,(1-\cos^2\theta)\,\sin\theta\,d\theta$$

$\cos\theta = u$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$V = a^3\,\pi \int_1^{-1} (1+u)^2\,(1+2u)\,(1-u^2)\,du$$

$$= a^3\,\pi \int_1^{-1} (-2u^5 - 5u^4 - 2u^3 + 4u^2 + 4u + 1)\,du$$

eşitliği elde edilir. Tek fonksiyonların simetrik aralıklardaki integralleri sıfır olduğundan

$$V = a^3\,\pi \int_1^{-1} (-5u^4 + 4u^2 + 1)\,du = a^3\,\pi \int_{-1}^{1} (5u^4 - 4u^2 - 1)\,du$$

$$= 2a^3\,\pi \int_0^{1} (5u^4 - 4u^2 - 1)\,du = 2a^3\,\pi \left(u^5 - \frac{4}{3}u^3 - u\right)\Big|_0^1 = \frac{8}{3}\,\pi\,a^3$$

DÖNEL YÜZEYLERİN ALANI

1. $y = f(x)$ eğrisinin $x = a$ ve $x = b$ apsisli noktaları arasında kalan parçasının x– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanı

$$S = 2\pi \int_a^b |y| \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

dir.

2. Eğri denkleminin $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$ biçiminde verilmesi durumunda

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta |r\cos\varphi| \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi$$

olur.

PROBLEMLER

1. Aşağıda denklemleri verilen eğri parçalarının Ox– ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel yüzeylerin alanlarını bulunuz.

(a) $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$, $0 \le x \le 3$

(b) $y = x^3$, $0 \le x \le 1$

(c) $y = 2\sqrt{x}$, $0 \le x \le 8$

(d) $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$

2. Aşağıda denklemleri verilen eğri parçalarının Oy– ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

(a) $y = \frac{x^2}{2}$, $0 \le x \le \sqrt{3}$

(b) $y = \ln x$, $1 \le x \le 2$

3. Orijin ile (h, r) noktasını birleştiren doğru parçasının Ox– ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen koninin yanal alanını bulunuz.

4. Yarıçapı R olan bir kürenin yüzey alanını hesaplayınız.

5. $y = x^2$ parabolünün O(0, 0) ve $A(\sqrt{2}, 2)$ noktaları arasındaki parçasının Oy– ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

6. $x^2 + y^2 = a^2$ çemberinin $[x_1, x_1 + h]$ aralığına karşılık gelen parçasının Ox– ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen küre parçasının alanını bulunuz.

7. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ Astroid eğrisinin Ox– ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunzu.

8. $4x^2 + y^2 = 4$ elipsinin birinci bölgedeki parçasının Oy– ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

9. Parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = 2t^2 + 1 \\ y = 3t \end{cases}, \qquad 0 \le t \le 1$$

olan eğri parçasının Ox– ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

10. Parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$$

olan astroid eğrisinin Oy– ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen yüzeyin alanını bulunuz.

11. Parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{3} \\ y = 4 - \dfrac{t^2}{2} \end{cases}$$

olan eğrinin koordinat eksenleriyle kesim noktaları arasında kalan parçasının, Ox– ekseni etrafında dönmesiyle meydana gelen yüzeyin alanını bulunuz.

12. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ sikloid eğrisinin bir yayının

(a) Oy– ekseni

(b) en yüksek noktasına teğet olan doğru

etrafında döndürülmesi ile elde edilen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

13. $r = 2a\cos\varphi$ eğrisi $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ doğrusu etrafında döndürüldüğünde meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

14. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ lemniskatının Ox– ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

ÇÖZÜMLER

1. a) $y = \dfrac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2} \qquad 0 \le x \le 3$

$$y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}(x^2 + 2)^{1/2} \cdot 2x = (x^2 + 2)^{1/2}\, x$$

$$1 + (y')^2 = 1 + (x^2 + 2)\, x^2 = x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$$

$$S = 2\pi \int_0^3 \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2} \cdot (x^2 + 1)\, dx = \frac{99}{2}\pi \text{ br}^2$$

b) $y = x^3 \qquad 0 \le x \le 1$

$$S = 2\pi \int_0^1 |y| \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 9x^4}\, dx = \frac{2\pi}{36} \int_1^{10} \sqrt{u}\, du$$

$$= \frac{2\pi}{36} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_1^{10} = \frac{\pi}{9.3}(10^{3/2} - 1) = \frac{\pi}{27}(10\sqrt{10} - 1) \text{ br}^2$$

c) $y = 2\sqrt{x} \qquad 0 \le x \le 8$

$$S = \int_0^8 |y|\sqrt{1+(y')^2}\,dx = 2\pi \int_0^8 2\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx = 4\pi \int_0^8 \sqrt{x+1}\,dx$$

$$= 4\pi \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\Big|_0^8 = \frac{208}{3}\pi \text{ br}^2$$

d) $y = \sin x \qquad 0 \le x \le \pi$

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} |y|\sqrt{1+(y')^2}\,dx = 2\pi \int_0^{\pi} \sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1+u^2}\,du = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1+u^2}\,du$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{2}u\sqrt{1+u^2} + \frac{1}{2}\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\Big|_0^1\right)$$

$$= 2\pi\left(\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right) \text{br}^2$$

2. a) $y = \frac{x^2}{2} \qquad 0 \le x \le \sqrt{3}$

$$S = 2\pi \int_c^d |x|\sqrt{1+(x')^2}\,dy = 2\pi \int_0^{3/2} \sqrt{2y}\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{y}}\right)^2}\,dy$$

$$= 2\pi \int_0^{3/2} \sqrt{2y+1}\,dy = \pi \cdot \frac{2}{3}(1+2y)^{3/2}\Big|_0^{3/2} = \frac{2\pi}{3}(8-1) = \frac{14\pi}{3} \text{ br}^2$$

b) $y = \ln x \qquad 1 \le x \le 2$

$$S = 2\pi \int_c^d |x|\sqrt{1+(x')^2}\,dy = 2\pi \int_0^{\ln 2} e^y\sqrt{1+e^{2y}}\,dy = 2\pi \int_1^2 \sqrt{1+u^2}\,du$$

$$= 2\pi\left(u\sqrt{u^2+1} + \ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)\right)\Big|_1^2$$

$$= 2\pi\left(2\sqrt{5} + \ln\left(2+\sqrt{5}\right) - \sqrt{2} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$$

$$= 2\pi\left(2\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}\right) \text{br}^2$$

3. (0, 0) ile (h, r) noktasından geçen doğru denklemi

$$\frac{y-r}{r} = \frac{x-h}{h} \Rightarrow hy - hr = xr - hr \Rightarrow x = \frac{h}{r}y$$

$$S = 2\pi \int_0^h \frac{r}{h} x \sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}}\, dx = 2\pi \frac{r}{h^2}\sqrt{r^2+h^2}\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^h = \pi r\sqrt{r^2+h^2}\ br^2$$

4. $x^2 + y^2 = R^2$, $y \geq 0$ yarı çemberinin Ox etrafında döndürürsek küre elde ederiz.

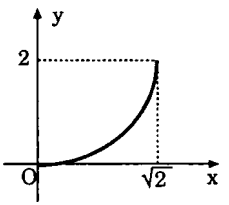
$$S = 2\pi \int_{-R}^{R} |y|\sqrt{1+(y')^2}\, dy = 2\pi \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\, dx$$

$$= 2\pi R \int_{-R}^{R} dx = 4\pi R^2\ br^2$$

5. $y = x^2$, $0 \leq y \leq 2$

$$S = 2\pi \int_c^d x\sqrt{1+(x')^2}\, dy = 2\pi \int_0^2 \sqrt{y}\sqrt{1+\frac{1}{4y}}\, dy$$

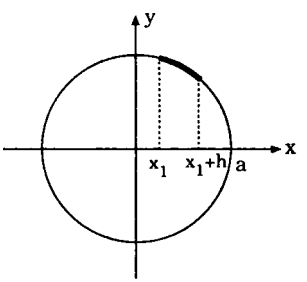
$$= \pi \int_0^2 \sqrt{1+4y}\, dy = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}(1+4y)^{3/2}\Big|_0^2 = \frac{9}{2}\pi\ br^2$$



6. $S = 2\pi \int_{x_1}^{x_1+h} |y|\sqrt{1+(y')^2}\, dx \qquad x_1 > 0$

$$= 2\pi \int_{x_1}^{x_1+h} \sqrt{a^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}\, dx$$

$$= 2\pi\, a\,.\,(x_1 + h - x_1) = 2\pi\, a.h$$



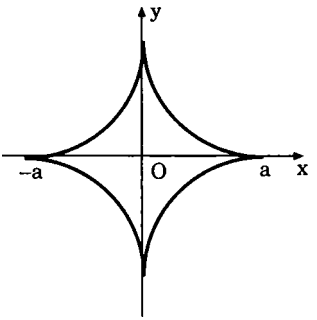
7. $S = 2\pi \int_{-a}^{a} |y| \sqrt{1+(y')^2}\, dx$

$= 2\pi \cdot 2 \int_{0}^{a} (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} \sqrt{1 + \frac{(a^{2/3} - x^{2/3})}{x^{2/3}}}\, dx$

$= 2\pi \cdot 2 \int_{0}^{a} \left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^{3/2} \left(\frac{a}{x}\right)^{1/3} dx$

$= 2\pi\,(-2)\,\pi \frac{3}{2} a^{1/3} \frac{2}{5} \left(a^{2/3} - x^{2/3}\right)^{5/2} \Big|_0^a$

$= 2 \cdot \frac{6\pi}{5} a^{1/3}(a^{5/3}) = \frac{12\pi}{5} a^2$



8. $S = 2\pi \int_{a}^{b} |x| \sqrt{1+(x')^2}\, dy \qquad x = 0 \Rightarrow y = \pm 2$

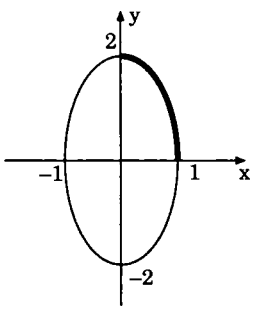
$= 2\pi \cdot \int_{0}^{2} \frac{\sqrt{4-y^2}}{2} \sqrt{1 + \frac{y^2}{4(4-y^2)}}\, dy$

$= \frac{\pi}{2} \cdot \int_{0}^{2} \sqrt{16 - 3y^2}\, dy$

$= \frac{\pi}{2} \cdot \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} 4\sqrt{1-\sin^2 t}\, \frac{4}{\sqrt{3}} \cos t\, dt$

$= \frac{8\pi}{\sqrt{3}} \cdot \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 2t + 1}{2}\, dy$

$= \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sin 2t + 2t}{2} \Big|_0^{\pi/3} \right) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3} \right) = \pi \left(1 + \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \right)$ br^2



9. $S = 2\pi \int_{0}^{1} |y| \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt = 6\pi \int_{0}^{1} t\sqrt{16t^2+9}\, dt$

$= \frac{6\pi}{32} \frac{2}{3} (16t^2+9)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} \left((25)^{3/2} - 9^{3/2} \right) = \frac{\pi}{8} \cdot 98 = \frac{49}{4}\pi$ br^2

10. $S = 2\pi \int_{+\pi}^{0} a\sin^3 t \sqrt{9a^2\cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t}\, dt$

$$= 6\pi\, a^2 \int_a^{\pi} |\sin^4 t \cos t|\, dt$$

$$= 6\pi\, a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t\, dt - 6\pi a^2 \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^4 t \cos t\, dt$$

$$= 6\pi\, a^2 \left(\frac{\sin^5 t}{5} \Big|_0^{\pi/2} - \frac{\sin^5 t}{5} \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right) = 6\pi^2 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \right) = \frac{12}{5} \pi a^2 \text{ br}^2$$

11. $S = 2\pi \int_0^{2\sqrt{2}} \left(4 - \frac{t^2}{2}\right) \sqrt{t^4 + t^2}\, dt = 2\pi \int_0^{2\sqrt{2}} 4t\sqrt{1+t^2}\, dt - \pi \int_0^{2\sqrt{2}} t^3 \sqrt{1+t^2}\, dt$

$[1 + t^2 = u^2 \Rightarrow t\, dt = u\, du]$

$$= 8\pi \int_1^3 u^2\, du - \pi \int_1^3 (u^4 - u^2)\, du = \frac{8\pi}{3} \left(u^3 \Big|_1^3 \right) - \pi \left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} \Big|_1^3 \right)$$

$$= 29.6\pi \text{ br}^2$$

12. a) $S = 2\pi \int_0^{\pi} a\,(t - \sin t) \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\, dt$

$$= 2\pi\, a^2 \sqrt{2} \int_0^{\pi} (t - \sin t) \sqrt{2} \cdot \sin \frac{t}{2}\, dt = 16\pi^2\, a^2$$

b) $(t = 0 \Rightarrow y = 0,\ t = \pi \Rightarrow y = 2a)$

Sikloid eğirisinin en yüksek noktası $(x, y) = (\pi a, 2a)$ noktasıdır.

Bu noktadaki teğetin denklemi $y = 2a$ dır.

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} \left| a(1 - \cos t) - 2a \right| \sqrt{a^2(2 - 2\cos t)}\, dt$$

$$= 2\sqrt{2}\pi\, a^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos t) \sqrt{1 - \cos t}\, dt$$

$$= 2\sqrt{2}\pi\, a^2 \int_0^{\pi} \sqrt{2} \left(\sin \frac{t}{2} + \cos t \cdot \sin \frac{t}{2} \right) dt$$

$$= 4\pi\, a^2 \int_0^{\pi} \sin \frac{t}{2} + \cos^2 \frac{t}{2} \cdot \sin \frac{t}{2} - \sin^3 \frac{t}{2}\, dt$$

$$= 4\pi a^2\left(-2\cos\frac{t}{2}\ \Big|_0^{\pi} - 2\cos^3\frac{t}{2}\ \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\left(-\sin\frac{t}{2}\right)\right)dt$$

$$= 4\pi a^2\left[2-2(-1)+2\int_{-1}^{0}(1-u^2)du\right]$$

$$= 4\pi a^2\left(4-2\left(u-\frac{u^3}{3}\ \Big|_{-1}^{0}\right)\right) = 4\pi a^2\left(4-\frac{4}{3}\right) = \frac{32}{3}\pi a^2$$

13. $S = 2\pi \,.\, 2 \,.\, \int_0^{\pi/2} |r\cos u|\sqrt{4a^2\cos^2 u + 4a^2\sin^2 u}\ du$

$$= 16a^2\pi\int_0^{\pi/2}\cos^2 u\ du = 16a^2\pi\left(\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2u}{2}\right)du$$

$$= 8a^2\pi\left|u+\frac{\sin 2u}{2}\right|_0^{\pi/2} = 4a^2\pi^2$$

14. $S = 2\pi\int_{\alpha}^{\beta}|r\sin u|\sqrt{r^2+(r')^2}\ du$

$$= 2\pi \,.\, 2\int_0^{\pi/4} a\sqrt{\cos 2u}\,.\sin u\sqrt{a^2\cos 2u + \frac{a^2.\sin^2 2u}{\cos 2u}}\ du$$

$$= 4\pi a^2.\ 2\int_0^{\pi/4}\sqrt{\cos 2u}\sin u\frac{1}{\sqrt{\cos 2u}}du = 4\pi a^2\int_0^{\pi/4}\sin u du$$

$$= 4\pi a^2\left(-\cos u\ \Big|_0^{\pi/4}\right) = 4\pi a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\pi a^2\left(2-\sqrt{2}\right)$$

BÖLÜM PROBLEMLERİ

1. $y = \sqrt{|x|}$ eğrisiyle $x - 5y + 6 = 0$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

2. Aşağıdaki eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin alanlarını bulunuz.

(a) $y = 4(1 - x^2)$, $y = x^4 - 1$

(b) $y = x^4 - 4x^2 + 4$, $y = x^2$

(c) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$, $y = \dfrac{1}{x^2+1}$

(d) $y = \dfrac{8}{x^2+4}$, $4y = x^2$

(e) $y = x + 1$, $y = \cos x$, $y = 0$

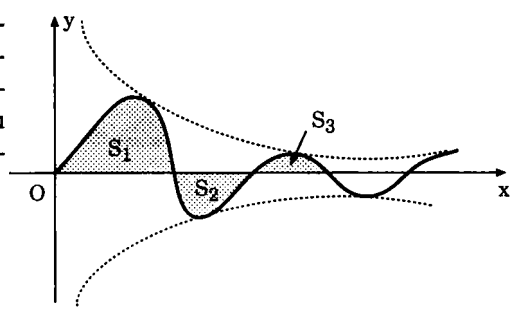
(f) $x = y^2 - 1$, $x = |y|\sqrt{1-y^2}$

(g) $x = y^2(1 - y)$, $x = 0$, $y = 0$

3. $y^2 = (1 - x^2)^3$ eğrisi tarafından sınırlanan kapalı bölgenin alanını hesaplayınız.

4. $(y - 2)^2 = x^3$ eğrisinin iki kolu ile $x = 1$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

5. $y = e^{-x} \sin x$ eğrisiyle Ox– ekseni arasında kalan kapalı bölgelerin alanları $S_1, S_2, S_3, \ldots$ olsun. (S_n) dizisinin, ortak oranı $e^{-\pi}$ olan bir geometrik dizi olduğunu gösteriniz.



6. $r = 12 \cos 3\varphi$ gülünün içinde, $r = 6$ çemberinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.

7. Kutupsal koordinatlara geçerek $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2 y^2$ eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

8. Aşağıdaki eğri parçalarının uzunluklarını hesaplayınız.

(a) $y = \frac{2}{5}x^{5/4} - \frac{2}{3}x^{3/4}$, $1 \le x \le 16$

(b) $y = \int_0^x \sqrt{\sec^4 t - 1}\, dt$, $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$

9. $y = \sqrt{1-x^2}$, $0 \le x \le \frac{1}{2}$ eğri parçasının Ox– ekseni etrafında dönmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

10. $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 \\ y = t \end{cases}$, $\sqrt{3} \le t \le 2\sqrt{2}$ eğri parçasının Ox– ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını bulunuz.

11. Aşağıdaki eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin Ox– ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cisimlerin hacimlerini bulunuz.

(a) $y = \sqrt{\cos x}$, $y = 1$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$

(b) $y = \sqrt{x}$, $x = 2$, $x = 0$, $y = 0$

(c) $y = x^2 + 1$, $y = -x + 3$

(d) $y = x^{3/2}$, $x = 1$, $y = 0$

(e) $y = \sqrt{x+1}$, $y = \sqrt{x-1}$, $x = 1$, $x = 3$

(f) $y = \cos x + \sin x$, $g(x) = \cos x - \sin x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$

12. Aşağıdaki eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin Oy– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cisimlerin hacimlerini hesaplayınız.

(a) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $y = x - 2$

(b) $y = \sin x$, $y = 1$, $x = 0$

(c) $y = \frac{4}{x^3}$, $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$

(d) $y = x^2\sqrt{x^2+1}$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$

(e) $y = |x - 2|$, $y = \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{2}$

(f) $x = \sqrt{1+y^3}$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$

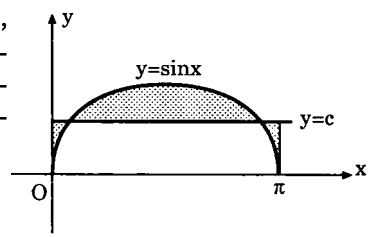
13. Birinci bölgede $x = y - y^3$ eğrisi ile $x = 1$, $y = 1$ ve $y = 0$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin aşağıdaki eksenler etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacmini bulunuz.

(a) x– ekseni (b) y– ekseni (c) $x = 1$ (d) $y = 1$

14. $y^2 = \frac{2x^3 - x^4}{4}$ eğrisinin sınırladığı bölge x– ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen cismin hacmini bulunuz.

15. $(y - x)^2 = x^3$ eğrisi ile $x = 1$ doğrusu tarafından sınırlanan bölge Ox– ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

16. Yandaki şekilde, $y = \sin x$ eğrisi, $x=0$, $x = \pi$, $y = c$ doğruları tarafından sınırlanan taralı bölge $y = c$ doğrusu etrafında döndürülüyor. Meydana gelen cismin hacminin minimum olması için c ne olmalıdır?



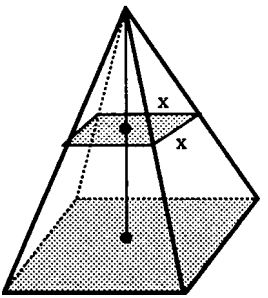
17. f, [a, b] üzerinde pozitif tanımlı bir fonksiyon olsun. $y = f(x)$ eğrisi, $x = a$, $x = b$ doğruları ve Ox– ekseni tarafından sınırlanan bölge, $c \le a$ olmak üzere, $x = c$ doğrusu etrafında döndürülüyor. Oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

18. $y = x^4$ ekseni, x– ekseni ve $x = 1$ doğrusu tarafından sınırlanan bölge $x = -1$ doğrusu etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

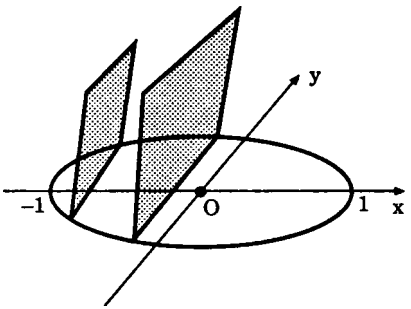
19. f ve g, [a, b] üzerinde $g(x) \le f(x)$ bağıntısını sağlayan iki sürekli fonksiyon olsun. $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ ve $x = b$ tarafından sınırlanan bölge, $c \le a$ olmak üzere, $x = c$ doğrusu etrafında döndürülüyor. Oluşan cismin hacmini bulunuz.

20. $y = 2x$, $y = -2x^2 + 4x$ eğrileri tarafından sınırlanan bölge $x = -1$ doğrusu etrafında döndürülüyor. Oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

21. 3 cm yüksekliğindeki bir kare piramidin, yüksekliğine dik düzlemlerle arakesiti birer karedir. Piramidin tepe noktasından x birim uzaktaki kesit, bir kenarı x olan bir karedir. Piramidin hacmini kesit yöntemiyle bulunuz.



23. $x = -1$ ve $x = 1$ düzlemleri arasında kalan bir cismin x– eksenine dik düzlemlerle arakesiti birer karedir. Bu karelerin iki köşesi $x^2 + y^2 = 1$ çemberi üzerinde bulunduğuna göre cismin hacmini bulunuz.



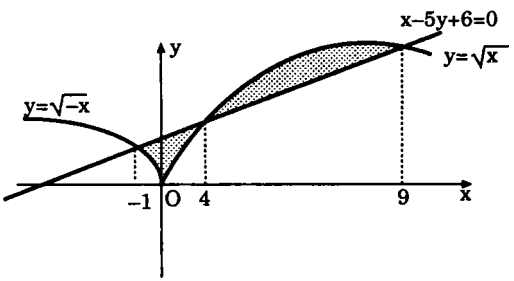
ÇÖZÜMLER

1. $A = \int_{-1}^{0} \left[\frac{1}{5}(x+6) - \sqrt{-x}\right] dx$

$= \int_{0}^{4} \left[\frac{1}{5}(x+6) - \sqrt{x}\right] dx$

$+ \int_{4}^{9} \left[\sqrt{x} - \frac{1}{5}(x+6)\right] dx$

$= \frac{13}{30} + \frac{16}{15} + \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$ br^2



2. a) $y = 4(1 - x^2)$, $y = x^4 - 1$

$y = y \Rightarrow 4(1 - x^2) = x^4 - 1 \Rightarrow x^4 + 4x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$A = \int_{-1}^{1} \left(4(1-x^2) - x^4 + 1\right) dx = \int_{-1}^{1} -4x^2 - x^4 + 5\, dx$

$= -\frac{4}{3}x^3 - \frac{x^5}{5} + 5x \Big|_{-1}^{1} = -\frac{4}{3} - \frac{1}{5} + 5 - \frac{4}{3} - \frac{1}{5}\, 15 = \frac{104}{15}$ br^2

b) $y = x^4 - 4x^2 + 4$, $y = x^2$

$y = y \Rightarrow x^4 - 4x^2 + 4 = x^2 \Rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 \Rightarrow x = \mp 2$, $x = \mp 1$

$$A = \int_{-2}^{2} |y_1 - y_2| dx$$

$$A = 2\int_{0}^{1} (x^4 - 4x^2 + 4 - x^2) dx + 2\int_{1}^{2} (x^2 - x^4 + 4x^2 - 4)\, dx +$$

$$= 2\left(\frac{x^5}{5} - \frac{5}{3}x^3 + 4x \Big|_0^1\right) + 2\left(\frac{5x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - 4x \Big|_1^2\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{5} - \frac{5}{3} + 4\right) + 2\left(\frac{40}{3} - \frac{32}{5} - 8 - \frac{5}{3} + \frac{1}{5} + 4\right) = 8 \text{ br}^2$$

c) $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$, $y = \dfrac{1}{x^2+1}$

$y = y \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \mp 1$

$$A = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{1+x^2}{1+x^2} dx + \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - 2 + \arctan x \Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - 2 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi - 2 \text{ br}^2$$

d) $y = \dfrac{8}{x^2+4}$, $4y = x^2$

$y = \dfrac{8}{4y+4} \Rightarrow 4y^2 + 4y - 8 = 0$

$y^2 + y - 2 - 0$

$y = 1 \Rightarrow x = \mp 2$

$$A = \int_{-2}^{2} \frac{8}{x^2+4} - \frac{x^2}{4} dx = 4 \arctan \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} \Big|_{-2}^{2}$$

$$= 4 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{8}{12} + 4 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{8}{12} = 2\pi - \frac{4}{3} \text{ br}^2$$

e) $y = x + 1$, $y = \cos x$, $y = 0$

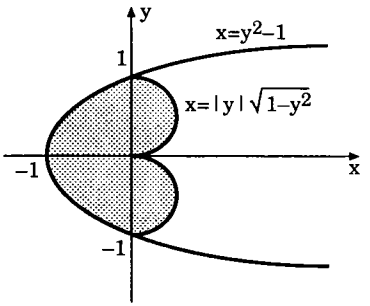
$y = y \Rightarrow x + 1 = \cos x \Rightarrow x = 0$

$$A = \int_{0}^{\pi/2} \cos x dx + \int_{-1}^{0} x + 1\, dx = +\sin x \Big|_0^{\pi/2} + \frac{x^2}{2} + x \Big|_{-1}^{0} = \frac{3}{2} \text{ br}^2$$

f) $A = \int_{-1}^{1} \left(|y|\sqrt{1-y^2} - y^2 + 1 \right) dy$

$= 2\int_{0}^{1} \left(y\sqrt{1-y^2} - y^2 + 1 \right) dy$

$= 2\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1-y^2)^{3/2} - \frac{y^3+y}{3} \right] \Big|_0^1 = 2 \text{ br}^2$



g) $x = y^2(1-y)$, $x = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ve $y = 1$

$A = \int_c^d x\,dy = \int_0^1 y^2(1-y)\,dy = \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \text{ br}^2$

3. $A = 2\int_0^1 \left((1-x^2)^{3/2} - \left[-(1-x^2)^{3/2} \right] \right) dx = 4\int_{\pi/2}^{0} (1-\cos^2 x)^{3/2} \cdot (-\sin x)\,dx$

$= 4\int_0^{\pi/2} \sin^4 x\,dx = 4\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1-\cos 2x}{2} \right)^2 dx = \int_0^{\pi/2} 1 - 2\cos 2x + \frac{\cos 4x + 1}{2}\,dx$

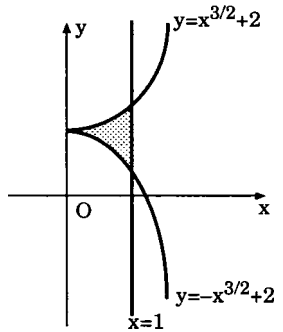
$= \left(x - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8} + \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi/2} \right) = \frac{3\pi}{4} \text{ br}^2$

4. $(y-2)^2 = x^3 \Rightarrow y = x^{3/2} + 2$ veya

$y = -x^{3/2} + 2$

$A = \int_0^1 \left(x^{3/2} + 2 + x^{3/2} - 2 \right) dx$

$= \int_0^1 2x^{3/2}\,dx = \frac{4}{5}x^{5/2} \Big|_0^1 = \frac{4}{5} \text{ br}^2$



5. $S_1 = \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x\,dx = e^{-x}(-\cos x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x)(-e^{-x})\,dx$

$$= e^{-\pi} + 1 - \left(e^{-x}\sin x \,\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x(-e^{-x})dx \right) = e^{-\pi} + 1 - \int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\, dx$$

$$\Rightarrow 2S_1 = e^{-\pi} + 1 \Rightarrow S_1 = \frac{e^{-\pi}+1}{2}$$

$$S_2 = \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x}\sin x\, dx = e^{-x}(-\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,(-e^{-x})\, dx$$

$$= -e^{-2\pi} - e^{-\pi} - \left(e^{-x}\sin x \,\Big|_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x(-e^{-x}) \right) dx$$

$$\Rightarrow -2S_2 = e^{-2\pi} + e^{-\pi} \Rightarrow -S_2 = \frac{e^{-2\pi}+e^{-\pi}}{2} \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \frac{e^{-2\pi}+e^{-\pi}}{e^{-\pi}+1}$$

$$= \frac{e^{-\pi}+1}{e^{-\pi}+1} \cdot e^{-\pi} = e^{-\pi}$$

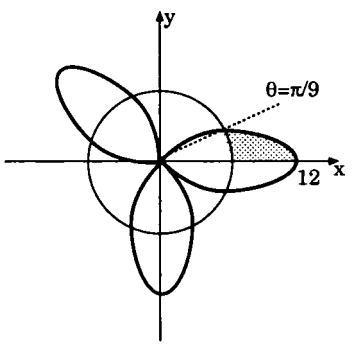
$$\Rightarrow S_n = S_1,\ e^{-\pi(n-1)} = (-1)^{n+1}\ \frac{e^{-n\pi}+e^{-(n-1)\pi}}{2}$$

6. $A = 6 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/9} (144\cos^2 3\theta - 36)\, d\theta$

$$= 3\left(\int_0^{\pi/9} \left(144 \cdot \frac{\cos 6\theta + 1}{2} \right) - 36 \right) d\theta$$

$$= 3\left(72\left(\frac{\sin 6\theta}{6} + \theta \right) - 36\theta \,\Big|_0^{\pi/9} \right)$$

$$= 3\left(12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 36\frac{\pi}{9} \right) = 3\left(6\sqrt{3} + 4\pi \right)\ \text{br}^2$$



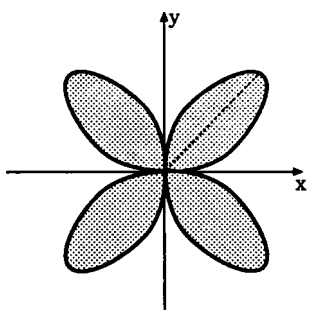
7. $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2 \Rightarrow r^6 = 4r^4\cos^2\theta\sin^2\theta \Rightarrow$

$r^2 = 4\cos^2\theta\sin^2\theta \Rightarrow r^2 = \sin^2 2\theta$

$$\frac{A}{8} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} r^2\, d\theta \Rightarrow A = 4\int_0^{\pi/4} \sin^2 2\theta\, d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos 4\theta}{2}\, d\theta$$

$$= 2\left(\theta - \frac{\sin 4\theta}{4} \right)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{2}$$



8. a) $y = \frac{2}{5}x^{5/4} - \frac{3}{5}x^{3/4} \quad 1 \le x \le 16$

$$y^1 = \frac{1}{2}x^{1/4} - \frac{1}{2}x^{-1/4} \Rightarrow 1 + (y^1)^2 = 1 + \frac{1}{4}(x^{1/2} - 2 + x^{-1/2})$$

$$= 1 + \frac{1}{4}\frac{(x^{1/2}-1)^2}{x^{1/2}}$$

$$\ell = \int_1^{16}\sqrt{1+(y^1)^2}dx = \frac{1}{2}\int_1^{16}\frac{x^{1/2}+1}{x^{1/4}}dx = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}x^{5/4} + \frac{4}{3}x^{3/4}\right)\Big|_1^{16} = \frac{256}{15}\ \text{br}^2$$

b) $y = \int_0^x \sqrt{\sec^4 t - 1}\ ,\ -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$

$$y' = \sqrt{\sec^4 x - 1} \Rightarrow 1 + (y')^2 = 1 + \sec^4 x - 1 = \sec^4 x \Rightarrow$$

$$\ell = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 x\,dx = \tan x\ \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = 2$$

9. $y = \sqrt{1-x^2}\ ,\ 0 \le x \le \frac{1}{2}$

$$S = 2\pi\int_0^{1/2}|y|\sqrt{1+(y^1)^2}\,dx\ ,\quad y' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= 2\pi\int_0^{1/2}\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx = 2\pi\int_0^{1/2}dx = 2\pi\cdot\frac{1}{2} = \pi\ \text{br}^2$$

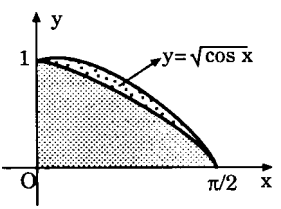
10. $x = \frac{1}{2}t^2\ ,\ y = t\ ,\quad \sqrt{3} \le t \le 2\sqrt{2}$

$$S = 2\pi\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}|y|\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt = 2\pi\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}t\sqrt{t^2+1}\,dt = \pi\frac{2}{3}(t^2+1)^{3/2}\ \Big|_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}}$$

$$= \pi\frac{2}{3}(27-8) = \frac{38}{3}\pi\ \text{br}^2$$

11. a) $y = \sqrt{\cos x}\ ,\ y = 1\ ,\ x = 0\ ,\ x = \frac{\pi}{2}$

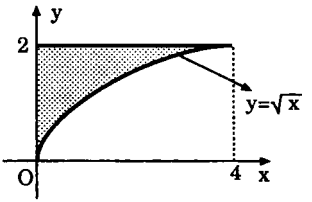
$$V = \pi\int_0^{\pi/2}(\sqrt{\cos x})^2\,dx = \pi\sin x\ \Big|_0^{\pi/2} = \pi\ \text{br}^3$$



b) $y = \sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 0$, $y = 0$

$$V = \pi \int_0^4 \left[2^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2\right] dx$$

$$= \pi \left(4x - \frac{x^2}{2} \Big|_0^4\right) = \pi\,(16 - 8) = 8\pi \text{ br}^3$$



c) $y = x^2 + 1$

$y = -x + 3$

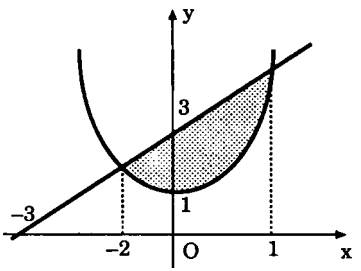
$y = y \Rightarrow x^2 + 1 = -x + 3$

$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2$, $x = 1$

$$V = \pi \int_{-2}^{1} \left[(-x+3)^2 - (x^2+1)^2\right] dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{1} \left(x^2 - 6x + 9 - x^4 - 2x^2 - 1\right) dx$$

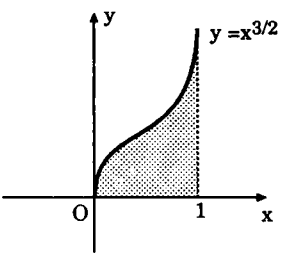
$$= \pi \left(-\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x \Big|_{-2}^{1}\right) = \frac{117\pi}{5} \text{ br}^3$$



d) $y = x^{3/2}$, $x = 1$, $y = 0$

$$V = \pi \int_0^1 (x^{3/2})^2 \, dx$$

$$= \pi \int_0^1 x^3 \, dx = \frac{\pi}{4} \text{ br}^3$$

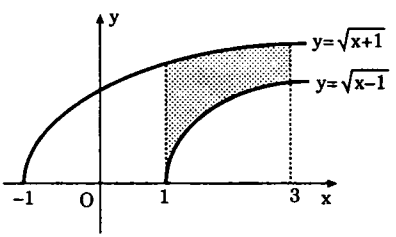


e) $y = \sqrt{x+1}$, $y = \sqrt{x-1}$, $x = 1$, $x = 3$

$$V = \pi \int_1^3 (y_1^2 - y_2^2) \, dx$$

$$= \pi \int_1^3 \left(\sqrt{x+1}\right)^2 - \left(\sqrt{x-1}\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_{+1}^{3} (x + 1 - x + 1) dx = 4\pi \text{ br}^3$$



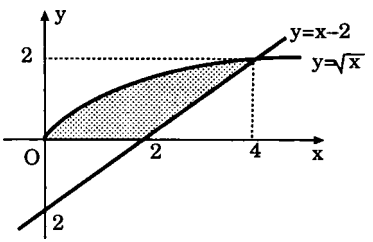
f) $y = \cos x + \sin x$, $y = \cos x - \sin x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$

$$V = \pi \int_0^{\pi/4} \left[(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2 \right] dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi/4} (1 + 2 \cos x \sin x - 1 + 2 \cos x \sin x)\, dx$$

$$= 4\pi \frac{\sin^2 x}{2} \Big|_0^{\pi/4} = 2\pi \left(\frac{1}{2} \right) = \pi \text{ br}^3$$

12. a) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $y = x - 2$

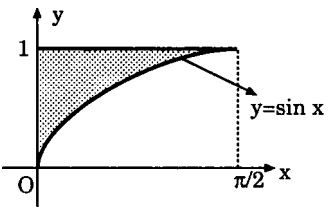


$$V = \pi \int_0^2 \left[(y+2)^2 - (y^2)^2 \right] dy$$

$$= \pi \left[\frac{1}{3}(y+2)^3 - \frac{1}{5} y^5 \right] \Big|_0^2$$

$$= \pi \left[\frac{64}{3} - \frac{32}{5} - \frac{8}{3} \right] = \frac{184}{15} \text{ br}^3$$

b) $y = \sin x$, $y = 1$, $x = 0$



$$V = \pi \int_0^1 (\arcsin y)^2 dy$$

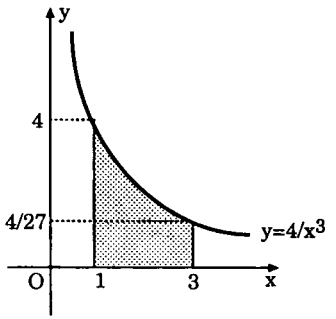
$$= \pi \left[\text{ arc } \sin^2 y \, . \, y \right.$$

$$\left. \Big|_0^1 - \int_0^1 2 \text{ arc } \sin y \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\, dy \right.$$

$$= \pi \left[\frac{\pi^2}{4} - 2\left(-\arcsin y (1-y^2)^{1/2} \right) \Big|_0^1 - \int_0^1 \left(-\sqrt{1-y^2} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, dy \right]$$

$$= \frac{\pi}{4} (\pi^2 - 8) \text{ br}^3$$

c) $y = \frac{4}{x^3}$, $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$



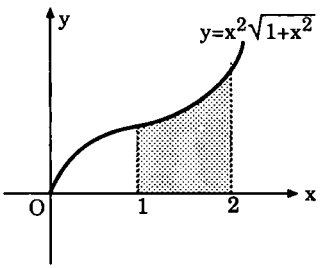
$$V = \pi \int_{\frac{4}{27}}^{4} \left(\frac{4^{2/3}}{y^{2/3}} - 1 \right) dy + \pi \int_{0}^{4/27} (3^2 - 1^2) dy$$

$$= \pi \left(4^{2/3}.3y^{1/3} - y \Big|_{4/27}^{4} \right) + 8\pi \cdot \frac{4}{27}$$

$$= \pi \left[4^{2/3}3.4^{1/3} - 4 - 4^{2/3}.3 \cdot \frac{4^{1/3}}{3} + \frac{4}{27} \right] + \frac{32\pi}{27}$$

$$= \frac{16}{3}\pi \ \text{br}^3$$

d) $y = x^2\sqrt{x^2+1}$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$

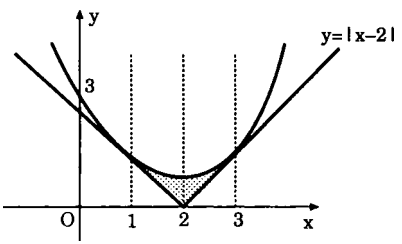


$$V = 2\pi \int_{1}^{2} x \, x^2\sqrt{1+x^2} \, dx$$

$$= 2\pi \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} t\,(t^2-1)\,t\,dt = 2\pi \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} (t^4-t^2)\,dt$$

$$= \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3 \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = \frac{100\sqrt{5} - 4\sqrt{2}}{15}\pi$$

e)



Silindirik tabakalar yöntemiyle yapalım.

$$V = 2\pi \int_{1}^{3} x\left|f(x) - g(x)dx\right| = 2\pi \int_{1}^{3} x\left|\frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{2} - |x-2|\right| dx$$

$$= 2\pi \int_{1}^{3} \frac{1}{2}x\left[(x-2)^2+1\right]dx - 2\pi \int_{1}^{3} x|x-2|\,dx$$

$$= \pi \int_{1}^{3} (x^3 - 4x^2 + 5x)dx + 2\pi \int_{1}^{2} -x(x-2)dx - 2\pi \int_{2}^{3} x(x-2)\,dx$$

$$= \frac{16\pi}{3} + \frac{14\pi}{3} - \frac{8\pi}{3} = \frac{22\pi}{3}\ \text{br}^3$$

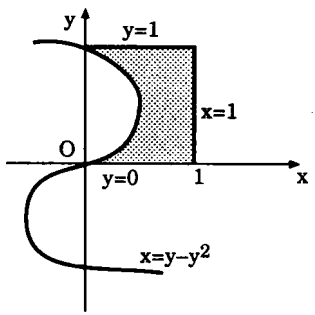
f) $x = \sqrt{1+y^3}$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$

$$V = \pi \int_1^2 x^2 dy = \int_1^2 1+y^3 dy = y + \frac{y^4}{4} \Big|_1^2 = \frac{19}{4}\pi \text{ br}^3$$

13. a) $$V = 2\pi \int_0^1 y \, |u(y)-v(y)| \, dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 y \, |1-(y-y^3)| \, dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 (y-y^2+y^4)\, dy = \frac{11}{15}\pi \text{ br}^3$$



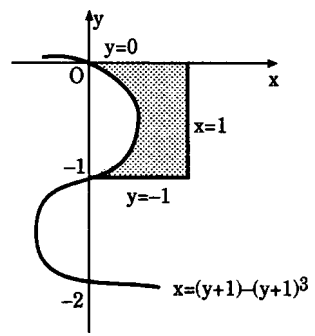
b) $$V = \pi \int_0^1 \left(x_1^2 - x_2^2\right) dy = \pi \int_0^1 \left[1-(y-y^3)^2\right] dy$$

$$= \pi \int_0^1 (1-y^2+2y^4-y^6)dy = \frac{97}{105}\pi \text{ br}^3$$

c) $$V = \pi \int_0^1 \left(f(x)-g(x)\right)^2 dx = \pi \int_0^1 (1-y+y^3)^2\, dy$$

$$= \pi \int_0^1 \left(1+y^2+y^6-2y+2y^3-2y^4\right)dy = \frac{97}{105}\pi$$

d) Sözkonusu bölgenin $y = 1$ doğrusu etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmi, o bölgenin bir birim aşağı kaydırılmasıyla elde edilen bölgenin x– ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmine eşittir. Buna göre



$$V = 2\pi \int_{-1}^{0} \left|y\left[1-(y+1)+(y+1)^3\right]dy\right|$$

$$= -2\pi \int_{-1}^{0} \left(y^4+3y^3+2y^2+y\right)dy = \frac{23}{30}\pi \text{ br}^3$$

olur.

14. $y^2 = \dfrac{2x^3 - x^4}{4}$

$y = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - x^4 = 0 \Leftrightarrow x^3(2 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ve $x = 2$

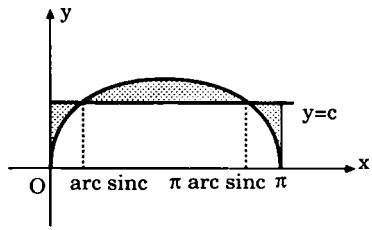
$$V = \pi \int_0^2 y^2\,dx = \pi \int_0^2 \frac{2x^3 - x^4}{4}\,dx = \pi\left(\frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{20}\,\Big|_0^2\right) = \pi\left(2 - \frac{8}{5}\right) = \frac{2\pi}{5}\ br^3$$

15. $(y - x)^2 = x^3 \Rightarrow y - x = \mp x^{3/2} \Rightarrow y = x \mp x^{3/2}$, $x = 1$

$$V = \pi \int_0^1 \left[(x + x^{3/2})^2 - (x - x^{3/2})^2\right] dx = \pi \int_0^1 4x^{5/2}dx = \pi.4.\frac{2}{7}x^{7/2}\,\Big|_0^1 = \frac{8}{7}\pi\ br^3$$

16.

$$V = \pi \int_0^{\arcsin c} (c - \sin x)^2\,dx + \pi \int_{\arcsin c}^{\pi - \arcsin c} (\sin x - c)^2\,dx + \pi \int_{\pi - \arcsin c}^{\pi} (c - \sin x)^2\,dx$$



$$= 2\pi \int_0^{\arcsin c} (c - \sin x)^2\,dx + \pi \int_{\arcsin c}^{\pi - \arcsin c} (\sin x - c)^2\,dx \qquad \begin{bmatrix} x = \pi - u \\ dx = -du \end{bmatrix}$$

$$= 2\pi\left(c^2 x - 2c\cos x + \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\,\Big|_0^{\arcsin c}\right) + \pi\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + 2c\cos x + c^2 x\,\Big|_{\pi - \arcsin c}^{\pi}\right)$$

$\cos(\arcsin c) = \sqrt{1 - c^2}$ ve $\sin(2 \arcsin c)$

$= 2 \cdot \sin(\arcsin c)\cos(\arcsin c) = 2 \cdot c\sqrt{1 - c^2}$ olduğundan

$$V = 2\pi\left[c^2 \arcsin c + 2c\sqrt{1 - c^2} + \frac{\arcsin c}{2} - \frac{1}{2}c\sqrt{1 - c^2} - 2c\right]$$

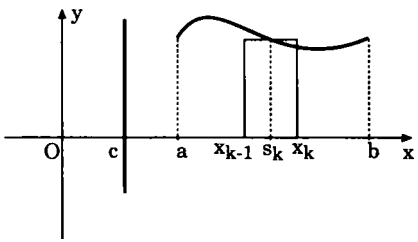
$$+ \pi\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\arcsin c}{2} + \frac{1}{2}c\sqrt{1 - c^2} - 2c\sqrt{1 - c^2} + c^2\pi - c^2 \arcsin c - \frac{\arcsin c}{2} + \frac{1}{2}c\sqrt{1 - c^2} - 2c\sqrt{1 - c^2} - c^2 \arcsin c\right]$$

$$= 2\pi\left[\frac{\pi}{4} - 2c + c^2\frac{\pi}{2}\right]$$

$\Rightarrow V'_c = 0 \Leftrightarrow 2\pi(c\pi - 2) = 0 \Leftrightarrow c = \dfrac{2}{\pi}$ dir ve $V''_c = 2\pi^2 > 0$

$\Rightarrow c = \dfrac{2}{\pi}$ minimum nokta

17. [a, b] aralığının bir parçalanması $P = \{ x_0 , x_1 , \dots , x_{n-1} , x_n \}$ olsun. $\Sigma_k \in [x_{k-1} , x_k]$ alalım.



Boyu $f(\Sigma_k)$, eni Δx_k olan dikdörtgenin $x = c$ ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen silindirik tabakanın hacmi

$$\Delta V_k = | \pi (x_k - c)^2 - \pi (x_{k-1} - c)^2 | \; f(\Sigma_k)$$

$$= 2\pi \left| \frac{(x_k - c) + (x_{k-1} - c)}{2} \right| \; | f(\Sigma_k) | \; . \; \Delta x_k$$

$\|P\| \to 0$ için $\dfrac{(x_k - c) + (x_{k-1} - c)}{2} \cong \Sigma_k - c$

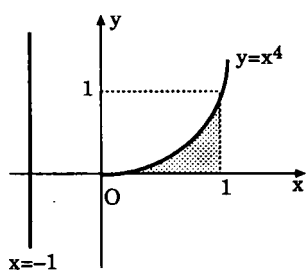
olacağından

$$V = \lim_{\|P\| \to 0} 2\pi \sum_{k=1}^{n} (\Sigma_k - c) \; f(\Sigma_k) \quad \Delta x_k$$

$$= 2\pi \int_a^b (x - c) \, f(x) \, dx$$

bulunur.

18. Problem 17 den



$$V = 2\pi \int_0^1 (x - (-1)) \; . \; f(x) \, dx$$

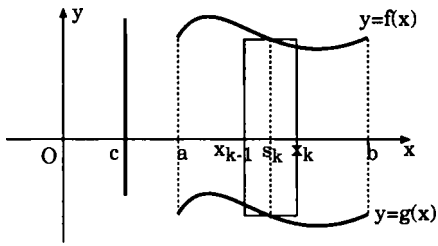
$$= 2\pi \int_0^1 (x + 1) \, x^4 \, dx$$

$$= 2\pi \left(\frac{x^6}{6} + \frac{x^5}{5} \; \Big|_0^1 \right) = \frac{11}{15} \pi \, br^3$$

olur.

19. [a, b] aralığının bir parçalanması $P = \{ x_0 , x_1 , \dots , x_{n-1} , x_n \}$ olsun.

$\Sigma_k \in [x_{k-1} , x_k]$ alalım.



Boyu $(f(\Sigma_k) - g(\Sigma_k))$, eni Δx_k olan dikdörtgenin $x = c$ ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen silindirik tabakanın hacmi

$$\Delta x_k = (\pi (x_k - c)^2 - \pi (x_{k-1} - c)^2) \; (f(\Sigma_k) - g(\Sigma_k))$$

$$= 2\pi \frac{(x_k - c + x_{k-1} - c)}{2} \; (f(\Sigma_k) - g(\Sigma_k) \, \Delta x_k$$

$$V \cong 2\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(x_k - c + x_{k-1} - c\right)}{2} \quad (f(\Sigma_k) - g(\Sigma_k)) \quad \Delta x_k$$

$\frac{\left(x_k - c + x_{k-1} - c\right)}{2} \cong \Sigma_k - c$ olduğundan

$\|P\| \to 0$ için

$$V = \lim_{\|P\| \to 0} 2\pi \sum_{k=1}^{n} (\Sigma_k - c) (f(\Sigma_k) - g(\Sigma_k)) \quad \Delta x_k$$

$$= 2\pi \int_0^b (x - c) \; (f(x) - g(x)) \, dx$$

20.

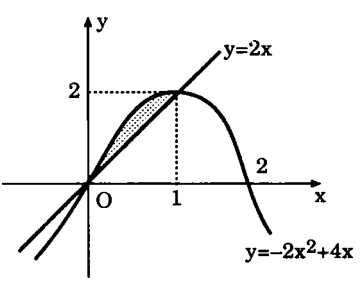
$$V = 2\pi \int_a^b (x - c) \; | \, f(x) - g(x) \, | \, dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (x - (-1)) \, (-2x^2 + 4x - 2x) \, dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (x + 1) \, (2x - 2x^2) \, dx$$

$$= 4\pi \int_0^1 x^2 + x - x^3 - x^2 \, dx$$

$$= 4\pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \; \Big|_0^1 \right) = 4\pi \cdot \frac{1}{4} = \pi$$

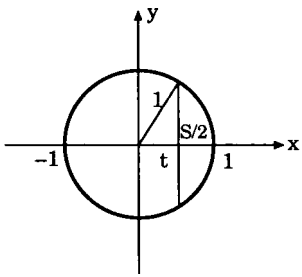


21. Kesit bir kare ve kenarı x birim olduğundan, kesitin alanı $A(x) = x^2$

$$V = \int_0^3 A(x)\,dx = \int_0^3 x^2\,dx = 9 \text{ br}^3$$

22. $t^2 + \left(\frac{S}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow S^2 = 4 - 4t^2$

$\Rightarrow$ kesitin alanı $A(t) = 4 - 4t^2$



$$V = \int_{-1}^{1} A(t)\,dt = \int_{-1}^{1} (4-4t^2)\,dt = 4\left(t - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= 4\left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right) = 4 \cdot \left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{16}{3}$$